

Б 05x1

3.0K-1
58

ВЕСЦІ

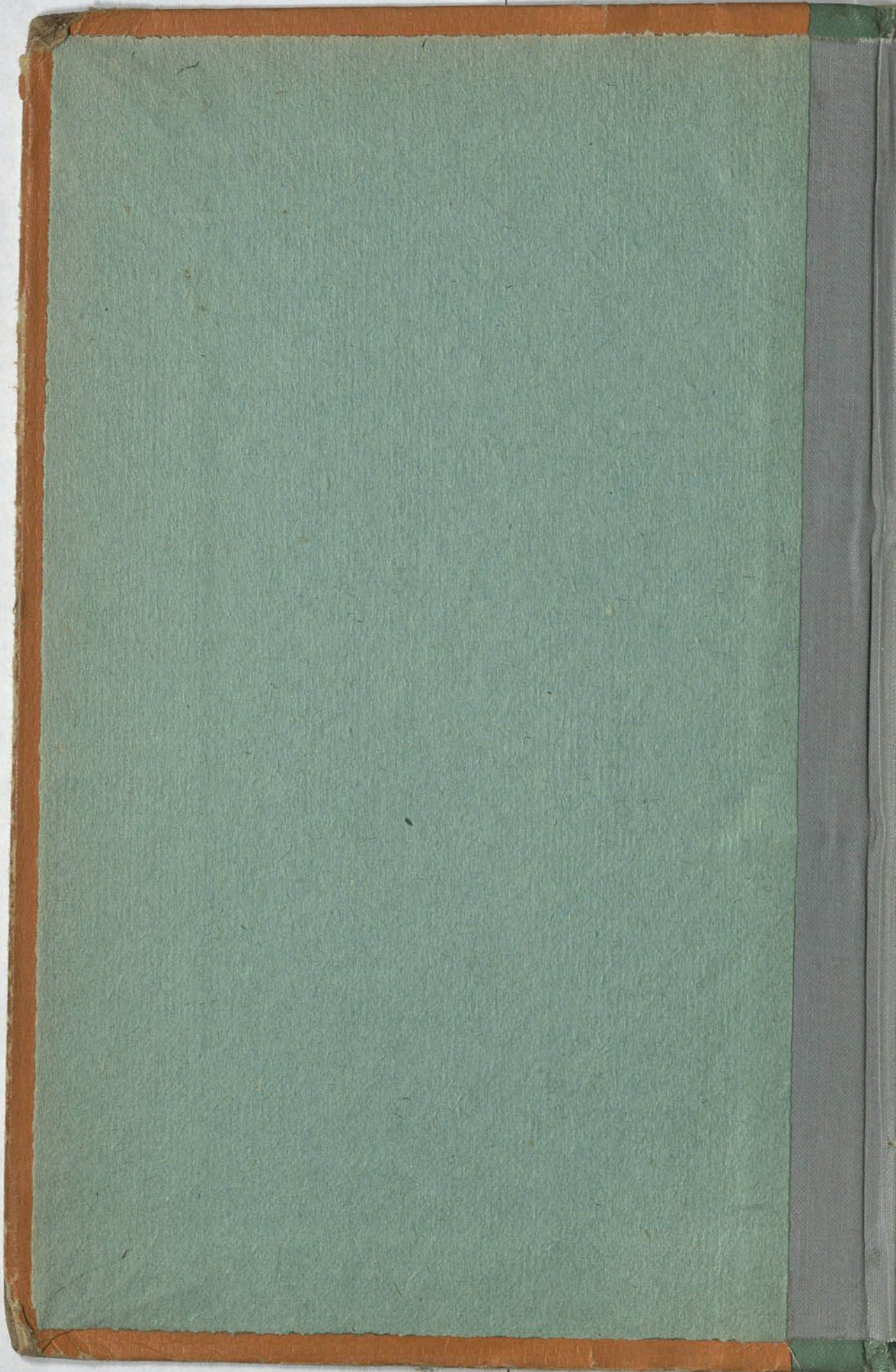
АКАДЭМІІ НАВУК БССР

СЕРЫЯ
ФІЗІКА-МАТЭМАТЫЧНЫХ
НАВУК

№ 1-3

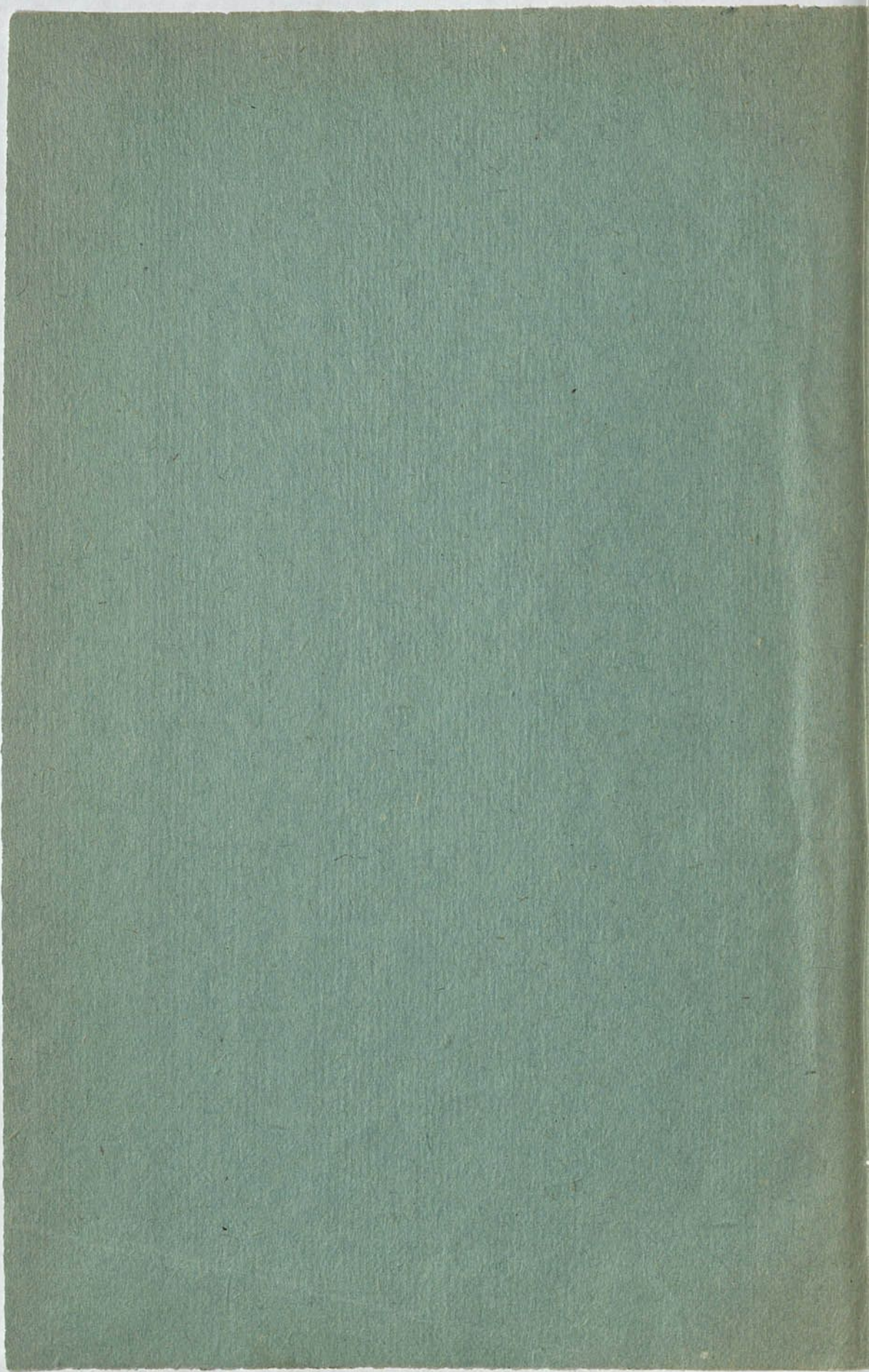
ВЫДАВЕЦТ. „НАВУКА І ТЭХНІКА“

М. И С К 1965



302-1

58



025
Бел 28

24



ВЕСЦІ

АКАДЭМІІ НАВУК БССР

СЕРЫЯ
ФІЗІКА-МАТЭМАТЫЧНЫХ
НАВУК

№ 1

ВЫДАВЕЦТВА „НАВУКА І ТЭХНІКА“

МІНСК 1965

Ба 05

30К-1
58

ИЗВЕСТИЯ

АКАДЕМИИ НАУК БССР

СЕРИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ
НАУК

№ 1

ИЗДАТЕЛЬСТВО „НАУКА И ТЕХНИКА“

МИНСК 1965



РЭДАКЦЫЙНАЯ КАЛЕГІЯ:

Ф. І. ФЕДАРАЎ (галоўны рэдактар),

Л. Ф. ІЛЮШЭНКА (нам. галоўнага рэдактара),

М. М. АЛЯХНОВІЧ, А. П. ВЕРАБ'ЕЎ, У. І. КРЫЛОЎ, М. М. СІРАТА,
У. Г. СПРЫНДЖУК, Д. А. СУПРУНЕНКА, Я. І. ФІРСАЎ, С. А. ЧУНІХІН

В. И. КРЫЛОВ, А. А. ПАЛЬЦЕВ

ЧИСЛЕННОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ ФУНКЦИЙ, ИМЕЮЩИХ ЛОГАРИФМИЧЕСКУЮ ОСОБЕННОСТЬ В НАЧАЛЕ КООРДИНАТ

В прикладной математике, физике, механике и особенно аэродинамике часто приходится интегрировать функции, определенные на $(0, \infty)$ и имеющие логарифмическую особенность в начале координат.

Для численного интегрирования таких функций известные формулы механических квадратур обычно дают значительную погрешность или совсем неприменимы.

В настоящей статье авторы, используя идею интегрирования с весом, строят квадратурные формулы типа Гаусса, позволяющие учитывать логарифмическую особенность подынтегральной функции в начале координат.

За весовую функцию, учитывающую указанную особенность, была взята функция $p(x) = x^\alpha e^{-x} \lg\left(1 + \frac{1}{x}\right)$. Так как она знакопостоянна на $(0, \infty)$, то с этим весом квадратурную формулу типа Гаусса можно построить.

Рассмотрим квадратурное правило

$$\int_0^\infty x^\alpha e^{-x} \lg\left(1 + \frac{1}{x}\right) f(x) dx \approx \sum_{k=1}^n A_k f(x_k). \quad (1)$$

Чтобы правило (1) имело наивысшую алгебраическую степень точности, должны выполняться следующие условия, которые определяют узлы x_k и коэффициенты A_k в формуле (1) [1].

1. Многочлен $\omega_n(x) = (x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n) = \sum_{i=0}^n (-1)^i a_i x^{n-i}$,

$a_0 = 1$, должен быть ортогонален на $(0, \infty)$ по весу $x^\alpha e^{-x} \lg\left(1 + \frac{1}{x}\right)$

ко всякому многочлену степени, меньшей n , или, что равносильно, ко всем степеням x^i , где $i < n$, т. е.

$$\int_0^\infty x^\alpha e^{-x} \lg\left(1 + \frac{1}{x}\right) x^i \omega_n(x) dx = 0, \quad i = 0, 1, \dots, n-1.$$

2. Коэффициенты A_k должны быть интерполяционными:

$$A_k = [\omega'_n(x_k)]^{-1} \int_0^{\infty} [x^\alpha e^{-x} \lg \left(1 + \frac{1}{x} \right) \omega_n(x)/(x - x_k)] dx.$$

Всюду в дальнейшем эти условия считаются выполненными.

В табл. 1 даются коэффициенты многочленов $\omega_n(x)$, в табл. 2— значения узлов x_k и коэффициентов A_k квадратурной формулы (1). Вычисления выполнены на электронно-счетной машине „Минск-1“ с удвоенным числом разрядов для значений параметра $\alpha = 0, 1, 2, 3$. Все приведенные величины представлены в виде $0, b_1 b_2 \dots b_n(p)$, где $b_1 \neq 0$, а p —десятичный порядок числа.

Таблица 1

Коэффициенты многочлена $\omega_n(x) = x^n + \sum_{i=1}^n (-1)^i a_i x^{n-i}$

n	a_n	$\alpha = 0$	$\alpha = 1$	$\alpha = 2$	$\alpha = 3$
1	a_1	0,4918488837(0)	0,1300690085(1)	0,2205694876(1)	0,3152377896(1)
2	a_1	0,2756019953(1)	0,4512968724(1)	0,6372898408(1)	0,8286115545(1)
	a_2	7158023709(0)	3001048218(1)	7103485591(1)	1313466900(2)
3	a_1	0,6955479962(1)	0,9685687642(1)	0,1251756322(2)	0,1540693720(2)
	a_2	9732657924(1)	2205399979(2)	4010125513(2)	6404294182(2)
	a_3	1748355335(1)	9941840226(1)	3005802756(2)	6800899848(2)
4	a_1	0,1312183903(2)	0,1683492621(2)	0,2064698261(2)	0,2451809956(2)
	a_2	4595408194(2)	8191788457(2)	1296355415(3)	1892775973(3)
	a_3	4338472629(2)	1252731502(3)	2781413965(3)	5260591140(3)
	a_4	6007613616(1)	4292253313(2)	1575054295(3)	4207762161(3)
5	a_1	0,2126736489(2)	0,2596821254(2)	0,3076520138(2)	0,3562167111(2)
	a_2	1400796314(3)	2192180548(3)	3182613998(3)	4373328081(3)
	a_3	3289618005(3)	7140452957(3)	1335905541(4)	2255126462(4)
	a_4	2352226720(3)	8241126660(3)	2158353839(4)	4713144002(4)
	a_5	2662837896(2)	2284006680(3)	9839524540(3)	3027439410(4)
6	a_1	0,3139827164(2)	0,3708976495(2)	0,4287473745(2)	0,4871906552(2)
	a_2	3347011030(3)	4824990110(3)	6604748547(3)	8686595870(3)
	a_3	1474685973(4)	2722364066(4)	4563497508(4)	7119413915(4)
	a_4	2610394683(4)	6674378709(4)	1440255551(5)	2758225440(5)
	a_5	1505673678(4)	6196105406(4)	1868212299(5)	4622728277(5)
	a_6	1445936714(3)	1444534546(4)	7136672425(4)	2483002155(5)
7	a_1	0,435182055 (2)	0,502022225 (2)	0,569772842 (2)	0,638113011 (2)
	a_2	684340933 (3)	932249551 (3)	122272855 (4)	155567546 (4)
	a_3	487397020 (4)	809900178 (4)	125737597 (5)	185101940 (5)
	a_4	161543098 (5)	343506374 (5)	652686149 (5)	113922810 (6)
	a_5	229768724 (5)	675885329 (5)	165166736 (6)	353664327 (6)
	a_6	111236682 (5)	525385419 (5)	179111079 (6)	495029108 (6)
	a_7	929511819 (3)	105848052 (5)	589362017 (5)	228624987 (6)
8	a_1	0,57629517 (2)	0,65307364 (2)	0,73074045 (2)	0,80899141 (2)
	a_2	12554721 (4)	16409171 (4)	20834415 (4)	25827710 (4)
	a_3	13181804 (5)	20339473 (5)	29836016 (5)	42009325 (5)
	a_4	70551050 (5)	13273395 (6)	23039033 (6)	37523437 (6)
	a_5	18757135 (6)	45131029 (6)	95823082 (6)	18496877 (7)
	a_6	22319454 (6)	74212896 (6)	20249264 (7)	47923835 (7)
	a_7	93203567 (5)	49658645 (6)	18876851 (7)	57613351 (7)
	a_8	69037582 (4)	88172273 (5)	54591097 (6)	23349233 (7)

Таблица 2

Значения узлов x_k и коэффициентов A_k квадратурной формулы (1)

n	$\alpha = 0$		$\alpha = 1$	
	x_k	A_k	x_k	A_k
1	0,4918488837(0)	0,1173563027(1)	0,1300690085(1)	0,5772156649(0)
2	0,2903017784(0) 2465718174(1)	0,1064835231(1) 1087277964(0)	0,8105682308(0) 3702400494(1)	0,4793863352(0) 9782932968(-1)
3	0,2102841944(0) 1623264691(1) 5121931077(1)	0,9531100714(0) 2150399841(0) 5412971725(-2)	0,5982895730(0) 2536687168(1) 6550710901(1)	0,3835115033(0) 1862401057(0) 7464055884(-2)
4	0,1664385598(0) 1227764453(1) 3631032186(1) 8096603833(1)	0,8624818447(0) 2899563491(0) 2090932241(-1) 2155110668(-3)	0,4775260109(0) 1957443934(1) 4766874830(1) 9633081439(1)	0,3116520680(0) 2370306892(0) 2812814921(-1) 4047585480(-3)
5	0,1384729214(0) 9932576325(0) 2854470412(1) 6026342450(1) 1125482148(2)	0,7894623685(0) 3402470848(0) 4236386487(-1) 1482136295(-2) 7572834251(-5)	0,3989418434(0) 1602595989(1) 3804332545(1) 7301646147(1) 1286069602(2)	0,2584772846(0) 2609944747(0) 5499462048(-1) 2731214122(-2) 1807101229(-4)
6	0,1189635888(0) 8367867135(0) 2364767838(1) 4875112888(1) 8669190243(1) 1453345037(2)	0,7296299366(0) 3736633679(0) 657933426 (-1) 438954699 (-2) 865882354 (-4) 244958451 (-6)	0,343460251 (0) 136074678 (1) 318330148 (1) 597383712 (1) 100402938 (2) 161881255 (2)	0,218366362 (0) 268844054 (0) 819056713 (-1) 789559676 (-2) 203270224 (-3) 71027888 (-6)
7	0,104520456 (0) 724464304 (0) 202432086 (1) 411724918 (1) 716539712 (1) 114844443 (2) 178978093 (2)	0,679681423 (0) 395667248 (0) 888650790 (-1) 89804140 (-2) 36443696 (-3) 44190905 (-5) 74622973 (-8)	0,30207082 (0) 11845389 (1) 27444571 (1) 50852314 (1) 83712799 (1) 12925757 (2) 19588888 (2)	0,187398553 (0) 267481060 (0) 105793520 (0) 156894738 (-1) 84041050 (-3) 12621902 (-4) 25493343 (-7)
8	0,93365172 (-1) 63968318 (0) 17726657 (1) 35737828 (1) 61441251 (1) 96518554 (1) 14427337 (2) 21326703 (2)	0,63728202 (0) 40986577 (0) 11043437 (0) 14983330 (-1) 97157503 (-3) 25764927 (-4) 20380000 (-6) 21711593 (-9)	0,26993955 (0) 10500802 (1) 24160698 (1) 44401178 (1) 72236836 (1) 10938807 (2) 15922556 (2) 23046111 (2)	0,16296504 (0) 26101495 (0) 12562324 (0) 25345994 (-1) 21932031 (-2) 7255777 (-4) 6862850 (-6) 8544481 (-9)

Продолжение таблицы 2

n	$\alpha = 2$		$\alpha = 3$	
	x_k	A_k	x_k	A_k
1	0,2205694876(1)	0,7507786921(0)	0,3152377896(1)	0,1655988714(1)
2	0,1440032032(1) 4932866376(1)	0,5862007901(0) 1645779020(0)	0,2135507349(1) 6150608196(1)	0,1236590494(1) 4193982204(0)
3	0,1085416919(1) 3484284153(1) 7947862144(1)	0,4300678974(0) 3046388896(0) 1607190511(-1)	0,1640284054(1) 4450537119(1) 9316116028(1)	0,8483236165(0) 7595172768(0) 4814782075(-1)

Продолжение таблицы 2

n	$\alpha = 2$		$\alpha = 3$	
	x_k	A_k	x_k	A_k
4	0,8764413368(0)	0,3199116762(0)	0,1339681045(1)	0,5871193454(0)
	2734172131(1)	3703234407(0)	3542144138(1)	8895763757(0)
	5904372750(1)	5947138064(-1)	7038852616(1)	1755645400(0)
	1113199640(2)	1072194623(-2)	1259742176(2)	3728452945(-2)
5	0,7374888030(0)	0,2438371126(0)	0,1135852007(1)	0,4166658218(0)
	2262630709(1)	3867535301(0)	2959102292(1)	8888479681(0)
	4771531441(1)	1130002437(0)	5749065487(1)	3257472639(0)
	8564861514(1)	7130781098(-2)	9815067198(1)	2450099152(-1)
1442868891(2)	5702468172(-4)	1596258412(2)	2266687437(-3)	
6	0,6379625834(0)	0,190323610 (0)	0,987821536 (0)	0,303647199 (0)
	1935452736(1)	377087890 (0)	254843128 (1)	826774016 (0)
	4027112059(1)	162520146 (0)	488867153 (1)	454779767 (0)
	7074588951(1)	202112574 (-1)	817428598 (1)	682866551 (-1)
	1139325079(2)	633182643 (-3)	127284664 (2)	248940026 (-2)
	1780637033(2)	260548622 (-5)	193913888 (2)	116761497 (-4)
7	0,562955037 (0)	0,151716156 (0)	0,87510858 (0)	0,22676287 (0)
	169393136 (1)	355207714 (0)	22417963 (1)	74245526 (0)
	349392032 (1)	202042812 (0)	42653502 (1)	54694722 (0)
	606365222 (1)	391869023 (-1)	70485024 (1)	12960952 (0)
	957102965 (1)	257926804 (-2)	10763342 (2)	10010537 (-1)
	143462906 (2)	457334317 (-4)	15746895 (2)	20278040 (-3)
	212455050 (2)	106684708 (-6)	22870307 (2)	53272638 (-6)
8	0,50428597 (0)	0,123164550 (0)	0,78625117 (0)	0,17306252 (0)
	15077831 (1)	328605441 (0)	20033373 (1)	65507045 (0)
	30907457 (1)	230568048 (0)	37897628 (1)	60273422 (0)
	53220770 (1)	61568827 (-1)	62153145 (1)	19872554 (0)
	83049239 (1)	66092165 (-2)	93856505 (1)	25242269 (-1)
	12215122 (2)	25976820 (-3)	13480335 (2)	11396719 (-2)
	17396012 (2)	28374520 (-5)	18848657 (2)	14019303 (-4)
	24733096 (2)	4019391 (-8)	26389833 (2)	22144574 (-7)

Коэффициенты многочленов $\omega_n(x) = x^n + \sum_{i=1}^n (-1)^i a_i x^{n-i}$ определялись из системы уравнений

$$\sum_{i=0}^n (-1)^i a_i c_{n+k-i} = 0, \quad k = 0, 1, \dots, n-1; \quad a_0 = 1, \quad (2)$$

где

$$c_k = \int_0^{\infty} x^{\alpha+k} e^{-x} \lg \left(1 + \frac{1}{x} \right) dx, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Система решалась методом перекрестного умножения [2]. Контроль проводился непосредственной подстановкой полученных решений a_i в систему (2). Узлы x_k квадратурного правила (1), являющиеся корнями многочлена $\omega_n(x)$, находились по методу Ньютона. Коэффициенты A_k вычислялись при помощи равенства

$$A_k = [\omega'_n(x_k)]^{-2} \int_0^{\infty} x^{\alpha} e^{-x} \lg \left(1 + \frac{1}{x} \right) [\omega_n(x)/(x - x_k)]^2 dx$$

и результаты сравнивались со значениями A_k , вычисленными по формуле

$$A_k = \int_0^{\infty} [x^{\alpha} e^{-x} \lg \left(1 + \frac{1}{x} \right) \omega_n(x) / \omega'_n(x_k)(x - x_k)] dx$$

и найденными из системы

$$\sum_{k=1}^n A_k x_k^i = c_k, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

В табл. 2 помещались лишь те значащие цифры в найденных значениях A_k , которые совпадали по меньшей мере в двух методах счета.

Для контроля также находились суммы

$$s_1 = A_1 + A_2 + \dots + A_n, \quad s_2 = A_1 x_1 + A_2 x_2 + \dots + A_n x_n$$

и сравнивались с точными значениями этих сумм.

Контроль полученных результатов вычислений позволяет предполагать, что ошибка каждого числа, приведенного выше, не больше одной единицы младшего разряда этого числа.

С помощью построенных квадратурных формул в качестве примеров найдем значения нескольких интегралов.

Пример 1.

$$I = \int_0^{\infty} (x - 1) e^{-x} \lg x dx = 1.$$

Взяв за весовую функцию $\rho(x) = e^{-x} \lg \left(1 + \frac{1}{x} \right)$, получим

$$I = \int_0^{\infty} e^{-x} \lg \left(1 + \frac{1}{x} \right) \frac{(x - 1) \lg x}{\lg \left(1 + \frac{1}{x} \right)} dx.$$

При $\alpha = 0$ и $n = 5$, $n = 8$ квадратурное правило (1) дает значения $I = 1,002$ и $I = 1,0006$ соответственно.

Пример 2.

$$I = \int_0^{\infty} (x - 2) x e^{-x} \lg x dx = 1.$$

Если за весовую функцию взять $\rho(x) = e^{-x} \lg \left(1 + \frac{1}{x} \right)$ и применить квадратурное правило (1) при $\alpha = 0$ и $n = 8$, получим значение интеграла, равное 0,9983. Вес $\rho(x) = e^{-x} \lg \left(1 + \frac{1}{x} \right)$ не учитывает обращение в нуль интегрируемой функции в начале координат. Выбрав же за весовую функцию $\rho(x) = x e^{-x} \lg \left(1 + \frac{1}{x} \right)$, учитывающую обращение интегрируемой функции в нуль в начале координат, и применив правило (1) при $\alpha = 1$ и $n = 8$, получим значение интеграла, равное 1,0002.

ЛИТЕРАТУРА

1. Крылов В. И. Приближенное вычисление интегралов. ГИФМЛ, 1959.
2. Гроссман Д. Успехи математических наук, т. V, в. 3 (37), 1950.

Поступило в редакцию 26.IX 1964

В. И. КРЫЛОВ, А. А. ПАЛЬЦЕВ

**ЧИСЛЕННОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ ФУНКЦИЙ, ИМЕЮЩИХ
 ЛОГАРИФМИЧЕСКИЕ ОСОБЕННОСТИ НА КОНЦАХ ОТРЕЗКА
 ИНТЕГРИРОВАНИЯ**

В некоторых задачах, например при вычислении значений энтропии частицы, находящейся в потенциальной яме [1], приходится интегрировать функции, имеющие логарифмические особенности на обоих концах отрезка интегрирования. Применение известных квадратурных правил с классическими весами для интегрирования таких функций дает значительную погрешность, так как они не рассчитаны на такого рода особенности интегрируемой функции.

Авторами в работе [2] была сделана попытка построить квадратурное правило

$$\int_0^1 x^\alpha \lg \frac{e}{x} \lg \frac{e}{1-x} f(x) dx \approx \sum_{k=1}^n A_k f(x_k) \quad (1)$$

с весом $p(x) = x^\alpha \lg \frac{e}{x} \lg \frac{e}{1-x}$, который учитывал указанные особенности и позволял получить в некоторых случаях значения интегралов вида (1) с достаточной для практики точностью. Однако в связи с большой потерей значащих цифр при вычислении параметров x_k и A_k квадратурного правила (1) авторы вынуждены были ограничиться значениями $n = 1(1)5$ и $\alpha = 0$. Квадратурное правило (1) при $n = 1(1)5$, естественно, не может дать значения интегралов вида (1) с высокой точностью.

В настоящей работе авторы, изменив метод вычислений, выполнили счет параметров x_k и A_k для $n = 1(1)10$ и $\alpha = 0(1)3$.

В приведенной ниже таблице даны значения параметров x_k и A_k правила (1) с точностью 6—10 значащих цифр.

Таблица

Значения x_k и A_k квадратурного правила (1)

n	$\alpha=0$		$\alpha=1$	
	x_k	A_k	x_k	A_k
1	0,500000000(0)	0,3355065933(1)	0,6942645126(0)	0,1677532967(1)
2	0,1883395176(0) 8116604824(0)	0,1677532967(1) 1677532967(1)	0,3497498450(0) 8666622681(0)	0,5594814622(0) 1118051504(1)
3	0,9589961745(-1) 500000000(0) 9041003826(0)	0,9978287605(0) 1359408412(1) 9978287605(0)	0,2018026136(0) 5978165200(0) 9258549064(0)	0,2168015775(0) 7057858190(0) 7549455701(0)

Продолжение таблицы

n	$\alpha=0$		$\alpha=1$	
	x_k	A_k	x_k	A_k
4	0,5788666907(-1)	0,6698018457(0)	0,1300541282(0)	0,1004153901(0)
	3217456077(0)	1007731121(1)	4143844496(0)	3886479146(0)
	6782543923(0)	1007731121(1)	7333510749(0)	6462924876(0)
	9421133309(0)	6698018457(0)	9527941293(0)	5421771743(0)
5	0,3873463718(-1)	0,4851863802(0)	0,9051974702(-1)	0,5293126349(-1)
	2211195150(0)	7677536944(0)	2989964196(0)	2232613829(0)
	5000000000(0)	8491857840(0)	5652652772(0)	4387291159(0)
	778804850(0)	7677536944(0)	8118253829(0)	5532621287(0)
	9612653628(0)	4851863802(0)	9672804398(0)	4093490755(0)
6	0,2775430794(-1)	0,3700695463(0)	0,6656537417(-1)	0,3064536307(-1)
	1604123585(0)	6045311134(0)	2243015761(0)	1359573076(0)
	3766414871(0)	7029323069(0)	4402614551(0)	2917250879(0)
	6233585129(0)	7029323069(0)	6685317567(0)	4300368155(0)
	8395876415(0)	6045311134(0)	8605812561(0)	4681165058(0)
	9722456921(0)	3700695463(0)	9759649200(0)	3210518867(0)
7	0,2087633793(-1)	0,2929623887(0)	0,5099184743(-1)	0,1903460356(-1)
	1213842713(0)	4895453445(0)	1738823568(0)	8728868863(-1)
	2914304831(0)	5865121065(0)	3493335089(0)	1975534792(0)
	5000000000(0)	6170262539(0)	5489668611(0)	3170741102(0)
	7085695169(0)	5865121065(0)	7404371086(0)	3995909401(0)
	8786157287(0)	4895453445(0)	8927322700(0)	3976971926(0)
	9791236621(0)	2929623887(0)	9815837418(0)	2592939522(0)
	0,1628209873(-1)	0,2385259721(0)	0,403089404(-1)	0,1248372551(-1)
94939164(-1)	405567879(0)	1384878387(0)	586053568(-1)	
2311822551(0)	4957993511(0)	2825283961(0)	1374091367(0)	
4059035291(0)	5376397644(0)	4541530231(0)	2325810306(0)	
594096471(0)	5376397644(0)	631476173(0)	3178290230(0)	
7688177449(0)	4957993511(0)	7918949974(0)	3634864256(0)	
9050608361(0)	4055678790(0)	9149786074(0)	3408242240(0)	
9837179013(0)	2385259721(0)	9854300530(0)	2143140445(0)	
9	0,130600663(-1)	0,198516640(0)	0,3266644(-1)	0,8549308(-2)
	76239581(-1)	342285285(0)	11278247(0)	4084605(-1)
	187403418(0)	4246687889(0)	23253823(0)	9819549(-1)
	334237207(0)	4698358995(0)	37972093(0)	17228971(0)
	50000000(0)	4844527032(0)	5391832(0)	24791999(0)
	665762792(0)	469835900(0)	6945194(0)	306226884(0)
	812596581(0)	424668790(0)	82974518(0)	32811367(0)
	9237604191(0)	342285286(0)	930982461(0)	29492248(0)
	9869399337(0)	198516641(0)	988179842(0)	18046938(0)
	0,1071238(-1)	0,16816095(0)	0,2701166(-1)	0,606462(-2)
6254875(-1)	2933239(0)	935670(-1)	2937537(-1)	
15475498(0)	36813136(0)	1943875(0)	719461(-1)	
27908678(0)	41314889(0)	32104644(0)	129519852(0)	
4240024(0)	43476779(0)	4628116(0)	19312717(0)	
5759975(0)	43476780(0)	60766300(0)	2507011(0)	
7209132(0)	4131489(0)	743323412(0)	28912676(0)	
84524499(0)	3681314(0)	85829077(0)	29574958(0)	
93745124(0)	2933239(0)	94286819(0)	25760649(0)	
989287622(0)	1681610(0)	99021463(0)	1543159(0)	
n	$\alpha=2$		$\alpha=3$	
	x_k	A_k	x_k	A_k
1	0,7798133983(0)	0,1164651607(1)	0,8277101562(0)	0,9082109277(0)
2	0,4602770421(0)	0,3119333530(0)	0,5392548261(0)	0,2120865593(0)
	8967031757(0)	8527182544(0)	9155931570(0)	6961243685(0)

Продолжение таблицы

n	$\alpha=2$		$\alpha=3$	
	x_k	A_k	x_k	A_k
3	0,2903739170(0)	0,9029034580(-1)	0,3629573203(0)	0,4978241289(-1)
	6635452318(0)	4616298704(0)	7107004227(0)	3396351957(0)
	9395318656(0)	6127313911(0)	9489089823(0)	5187933191(0)
4	0,1974839818(0)	0,3151944342(-1)	0,2576325779(0)	0,1394762195(-1)
	4849627412(0)	2058254598(0)	5403934165(0)	1293464195(0)
	7722710853(0)	4693333528(0)	8012050964(0)	3668764446(0)
	9601346548(0)	4579733514(0)	9654818357(0)	3980404417(0)
5	0,1423843539(0)	0,1282999051(-1)	0,1913536577(0)	0,4594707786(-2)
	3633593691(0)	9514687209(-1)	4171869224(0)	5033467996(-1)
	6153604113(0)	2713287436(0)	6550159118(0)	1873523266(0)
	8362000612(0)	4299953479(0)	8549474440(0)	3510770974(0)
	9716726950(0)	3553506533(0)	9750164817(0)	3148521160(0)
6	0,1073166730(0)	0,5880430016(-2)	0,1473799961(0)	0,1727560757(-2)
	2801646510(0)	4704489624(-1)	3290617688(0)	2095684666(-1)
	4920701791(0)	1517925105(0)	5350572618(0)	9114113123(-1)
	7039583702(0)	2946185879(0)	7324791884(0)	2176252167(0)
	8767059753(0)	3810543975(0)	8894682381(0)	3211757000(0)
	9788022166(0)	2842607851(0)	9810355510(0)	2555844724(0)
7	0,8370959867(-1)	0,2956242496(-2)	0,1168573232(0)	0,72265921 (-3)
	2217060254(0)	2485041195(-1)	265026610 (0)	93785625 (-2)
	3985954331(0)	8659950411(-1)	440967802 (0)	450557220 (-1)
	5891106009(0)	1887156887(0)	6226187772(0)	1241356176(0)
	7659842627(0)	2938847441(0)	786913866 (0)	2281098910(0)
	9039039702(0)	3346152893(0)	912957573 (0)	2888620513(0)
	9835235269(0)	2330297266(0)	9850907868(0)	2119464241(0)
8	0,670914846 (-1)	0,159942966 (-2)	0,9486288 (-1)	0,3297175 (-3)
	179407889 (0)	139167494 (-1)	2174743 (0)	448634 (-2)
	327697120 (0)	51074600 (-1)	36766150 (0)	2307140 (-1)
	4950934266(0)	119919372 (0)	53026583 (0)	69855876 (-1)
	662486674 (0)	2079907079(0)	68862626 (0)	14640261 (0)
	8107638566(0)	281393742 (0)	82647206 (0)	226742748 (0)
	9230192194(0)	293894392 (0)	929664295 (0)	2584412 (0)
	9868154216(0)	1948626137(0)	9879584515(0)	17888105 (0)
9	0,54963803 (-1)	0,9184139 (-3)	0,7851394 (-1)	0,16160843 (-3)
	14795978 (0)	8195819 (-2)	181383998 (0)	2276531 (-2)
	27329908 (0)	31205273 (-1)	31018909 (0)	1229384 (-1)
	41938183 (0)	77137889 (-1)	4542595 (0)	3977355 (-1)
	57259876 (0)	143620618 (0)	6014340 (0)	9106889 (-1)
	718678543 (0)	214852634 (0)	7392576 (0)	1592533 (0)
	844008832 (0)	26394044 (0)	8560531 (0)	21893146 (0)
	936954555 (0)	259150041 (0)	9419718 (0)	23124444 (0)
	989204131 (0)	165630486 (0)	99006391 (0)	1532073 (0)
10	0,4584749 (-1)	0,553907 (-3)	0,660425 (-1)	0,841084 (-4)
	1240084 (0)	503927 (-2)	153437 (0)	121641 (-2)
	2309412 (0)	197169 (-1)	264645 (0)	681276 (-2)
	3584494 (0)	505902 (-1)	391984 (0)	231382 (-1)
	4966601 (0)	990167 (-1)	526448 (0)	564453 (-1)
	6348702 (0)	1583936 (0)	658503 (0)	107225 (0)
	7623765 (0)	21384619 (0)	778773 (0)	165036 (0)
	8693029 (0)	2450328 (0)	878720 (0)	207961 (0)
	9474218 (0)	2297448 (0)	951301 (0)	207439 (0)
	990993545 (0)	14271725 (0)	991657 (0)	132853 (0)

Вычисление x_k и A_k проведено на электронно-счетной машине „Минск-2“ с удвоенной значностью двумя методами.

Метод 1. Из системы уравнений

$$\sum_{i=0}^n a_i c_{n+k-i} = 0, \quad k = 0, \dots, n-1; \quad a_0 = 1, \quad (2)$$

определялись коэффициенты многочленов $\omega_n(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^{n-i}$, ортогональных на отрезке $[0, 1]$ с весом $\rho(x) = x^x \lg \frac{e}{x} \lg \frac{e}{1-x}$, где

$$c_k = \int_0^1 x^{x+k} \lg \frac{e}{x} \lg \frac{e}{1-x} dx.$$

Параметры x_k квадратурного правила (1) (корни многочленов $\omega_n(x)$) находились по методу Ньютона. Затем по значениям x_k из системы

$$\sum_{k=1}^n A_k x_k^i = c_i, \quad i = 0, 1, \dots, n-1,$$

находились A_k .

Метод 2. Параметры x_k и A_k находились непосредственно из системы

$$\sum_{k=1}^n A_k x_k^i = c_i, \quad i = 0, 1, \dots, 2n-1,$$

по Ньютону.

За начальное приближение $x_{k,0}$ системы порядка $2n$ бралось среднее арифметическое двух соседних значений x_k системы порядка $2n-2$. Для крайних узлов x_1 и x_n за начальные приближения были взяты числа $\frac{\bar{x}_1}{2}$ и $\frac{\bar{x}_{n-1}+1}{2}$, где \bar{x}_1 и \bar{x}_{n-1} являются наименьшей и наибольшей абсциссами правила (1) с $n-1$ узлами. За начальное же приближение $A_{k,0}$ для A_k было взято решение линейной относительно A_k системы

$$\sum_{k=1}^n A_k x_{k,0}^i = c_i, \quad i = 0, 1, \dots, n-1.$$

Вычисления x_k и A_k проводились до тех пор, пока два соседних приближения совпадали с заданной точностью. В таблицу помещались только те значащие цифры в x_k и A_k , которые совпадали в обоих методах счета.

Следует отметить, что с ростом n система (2) становится все более плохо обусловленной. Это обстоятельство побудило авторов остановить счет x_k и A_k на значении $n = 10$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Рубанов А. С., Седой Г. И. ДАН БССР, № 7, 1963.
2. Крылов В. И., Пальцев А. А. Весті АН БССР, сер. фіз.-тэхн. навук, № 1, 1962.

Поступило в редакцию 14.X 1964

А. Я. ХОХРЯКОВ

О ПЕРИОДИЧЕСКОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ
 ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ
 ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

Рассмотрим нелинейную краевую задачу

$$y''' + f(x, y) = 0, \quad (1)$$

$$y(\alpha) - y(\beta) = 0, \quad y'(\alpha) - y'(\beta) = 0, \quad y''(\alpha) - y''(\beta) = 0, \quad (2)$$

где функция $f(x, y)$ определена и непрерывна в некоторой выпуклой области G .

Введем ряд определений. Следуя Н. В. Азбелеву [1], будем говорить, что функция $f(x, y)$ в G удовлетворяет условию L_1 (L_2), если для любых функций $u(x) \geq v(x)$, графики которых лежат в G , существует такая непрерывная функция $p(x)$ ($q(x)$), что

$$f(x, u) - f(x, v) \geq p(x)(u - v), \quad f(x, u) - f(x, v) \leq q(x)(u - v). \quad (3)$$

Обозначим через $Z_1[y]$ ($Z_2[y]$) дифференциальную операцию $y''' + p(x)y = 0$, $y''' + q(x)y = 0$, отвечающую условию L_1 (L_2). Также, согласно Азбелеву, промежуток $[\alpha, d_i]$ будем называть промежутком неосцилляции уравнения $Z_i[y] = 0$, если всякое решение уравнения $Z_i[y] = 0$, имеющее три нуля (считая кратный нуль столько раз, какова его кратность) на $[\alpha, d_i]$, тождественно равно нулю. Такой промежуток максимальной длины будем называть максимальным промежутком неосцилляции уравнения $Z_i(y) = 0$. Пусть $[\alpha, \rho(\alpha)]$ — общая часть максимальных промежутков неосцилляции уравнений $Z_1[y] = 0$, $Z_2[y] = 0$ с общими левыми концами.

Совокупность трижды непрерывно дифференцируемых функций на промежутке $[\alpha, \beta]$ обозначим через $C^{(3)}[\alpha, \beta]$.

Теорема 1. Пусть непрерывная функция $f(x, y)$ в области G удовлетворяет условиям L_1 и L_2 со знакопостоянными коэффициентами $p(x)$, $q(x)$ ¹⁾. Пусть на промежутке $[\alpha, \beta]$ неосцилляция уравнений $Z_1[y] = 0$, $Z_2[y] = 0$, $N[z] \geq 0$ (≤ 0). Если при этом $y(x)$ есть решение краевой задачи (1), (2), то тогда $y(x) \leq z(x)$ ($y(x) \geq z(x)$) при $x \in [\alpha, \beta]$, $p(x) \geq 0$ и $z(x) \leq y(x)$ ($y(x) \leq z(x)$) при $q(x) \leq 0$.

Доказательство. Пусть $N[z] \geq 0$, $p(x) \geq 0$.

1. Предположим, что при $x \in [\alpha, \beta]$ $z(x) \leq y(x)$. Тогда, согласно условию L_1 для дифференциальной операции $N[y]$, получим $0 \geq N[y] - N[z] \geq (y - z)''' + p(x)(y - z)$, откуда в силу теоремы сравнения следует $y(x) < z(x)$. Следовательно, в условиях $N[z] \geq 0$, $p(x) \geq 0$ не может иметь места неравенство $z(x) \leq y(x)$ при $x \in [\alpha, \beta]$.

¹⁾ Условия знакопостоянства коэффициентов $p(x)$, $q(x)$, например, будут выполнены, если $\partial f / \partial y$ — знакопостоянная функция в G .

Покажем, что для разности $\eta(x) = z(x) - y(x)$ α не может быть нулем. Если $\eta(\alpha) = 0$, то $\eta(\beta) = 0$, так как $y(x)$ и $z(x)$ удовлетворяют краевым условиям (2). При этом возможны два случая: $\eta'(\alpha) = 0$ и $\eta'(\alpha) \neq 0$. Тогда в первом случае $\eta'(\alpha) = 0$, $\eta'(\beta) = 0$. Но при таких условиях, когда $\eta(\alpha) = \eta'(\alpha) = \eta(\beta) = \eta'(\beta) = 0$, одновременно выполняются условия а) и б) теоремы 4 работы [2], которые приводят к двум взаимно исключающим друг друга неравенствам $z(x) < y(x)$, $z(x) > y(x)$ при $x \in [\alpha, \beta]$. Поэтому $\eta'(\alpha) \neq 0$. Пусть $\eta'(\alpha) > 0$, тогда $\eta'(\beta) > 0$. Отсюда, согласно пункту б) теоремы 4 работы [2] и условию L , получим $z(x) > y(x)$. Если $\eta'(\alpha) < 0$, то снова проверяем, что $z(x) < y(x)$ при $x \in (\alpha, \beta)$. Таким образом, $\eta(\alpha) \neq 0$.

2. Предположим теперь, что $\eta(x) = z(x) - y(x)$ имеет нуль на (α, β) . Пусть ξ_1 — первый слева нуль разности $z(x) - y(x)$ в (α, β) . При этом возможны два случая: а) ξ_1 — кратный нуль, б) ξ_1 — простой нуль.

Пусть ξ_1 — кратный нуль, тогда кратность его не может быть больше двух. В противном случае для функции $\eta(x)$ и решения будут иметь место все условия теоремы сравнения (см. работу [1]): $z(\xi_1) = y(\xi_1)$, $z'(\xi_1) = y'(\xi_1)$, $z''(\xi_1) = y''(\xi_1)$ и $N[z] \geq 0$, поэтому при $x \in (\xi_1, \beta)$ $z > y$. При $x < \xi_1$ нет нулей разности $z(x) - y(x)$, следовательно, $z(x) > y(x)$ при $x < \xi_1$. Но тогда из условия L_2 для дифференциальной операции $N[y]$ получим неравенство $0 \leq N[z] - N[y] \leq (z - y)''' + q(x)(z - y)$. Отсюда следует, что $z(x) > y(x)$. Таким образом, кратность нуля ξ_1 не выше двух. Если кратность ξ_1 равна двум, то тогда либо на (ξ_1, β) нет нулей функции $\eta(x)$, либо имеется нуль. В первом случае, воспользовавшись условием L_2 , получим неравенство $z > y$ при $x \in [\alpha, \beta]$, которое показывает, что на (ξ, β) есть еще нуль. Пусть ξ_2 — ближайший справа к ξ_1 нуль функции $\eta(x)$. Нетрудно проверить, что ξ_2 не может быть кратным, так как в противном случае для $\eta(x)$ будут выполнены условия а) и б) теоремы 4 работы [2] ($\eta(\xi_1) = \eta'(\xi_1) = \eta(\xi_2) = \eta'(\xi_2) = 0$), которые приводят к противоречивым неравенствам $\eta(x) < 0$, $\eta(x) > 0$ при $x \in (\xi_1, \xi_2)$. Когда ξ_2 — простой нуль, как и выше на основании той же теоремы, убеждаемся, что на (ξ_2, β) нет нулей функции $\eta(x)$. Однако наличие двойного нуля ξ_1 и простого ξ_2 приводит к противоречию с $\eta(\alpha) = \eta(\beta)$. Поэтому первый нуль разности $\eta(x) = z(x) - y(x)$ не может быть кратным.

Пусть ξ_1 — простой корень уравнения $\eta(x) = 0$. Так как $\eta(\alpha) = \eta(\beta)$, то на (ξ_1, β) найдется по крайней мере еще один нуль, скажем ξ' , который не может быть кратным. В пункте 1 отмечено, что $\eta(\alpha) \neq 0$, поэтому в случае простых корней мы имеем два подслучая: либо $\eta(\alpha) > 0$, либо $\eta(\alpha) < 0$. Пусть $\eta(\alpha) > 0$. Тогда $z(\alpha) > y(\alpha)$, $z(\xi') = y(\xi')$, $z'(\xi') > y'(\xi')$, откуда вместе с условием $N[z] \geq 0$ получим неравенство $z(x) > y(x)$ при $x \in (\alpha, \xi')$. Следовательно, на (α, ξ') нет нулей и потому $\eta(x)$ может иметь на $[\alpha, \beta]$ лишь один простой нуль. Последнее противоречит с условием $\eta(\alpha) = \eta(\beta)$. Таким образом, $\eta(x)$ не может иметь нулей на $[\alpha, \beta]$, когда $\eta(\alpha) > 0$. В случае $\eta(\alpha) < 0$ проверяем точно так же, что на $[\alpha, \beta]$ $z(x) > y(x)$.

Остальные случаи утверждения теоремы доказываются аналогично. Теорема доказана.

Следствие 1. Если при выполнении условий теоремы 1 для некоторых функций $z_1(x), z_2(x) \in C^{(3)}[\alpha, \beta]$, $N[z_1] \leq 0$, $N[z_2] \geq 0$, то $z_1(x) \leq z_2(x)$ при $p(x) \geq 0$, $z_1(x) \geq z_2(x)$ при $q(x) \leq 0$.

Следствие 2. При выполнении условий теоремы 1 неравенство $p(x) \geq 0$ ($q(x) \leq 0$) влечет за собой неравенство $q(x) \geq 0$ ($p(x) \leq 0$).

Теорема 1 позволяет доказать существование и единственность решения нелинейной краевой задачи (1), (2).

Теорема 2. Пусть непрерывная функция $f(x, y)$ в области G удовлетворяет условиям L_1 и L_2 со знакопостоянными коэффициентами $p(x)$ и $q(x)$ одного знака. Пусть $[\alpha, \beta]$ — промежуток неосцилляции уравнений $Z_1[y] = -0$, $Z_2[y] = 0$ и пусть для некоторых двух функций $z_1, z_2 \in C^{(3)}[\alpha, \beta]$, графики которых лежат в G , удовлетворяющих краевым условиям (2), выполнены неравенства $N[z_1] \leq 0$, $N[z_2] \geq 0$. Тогда нелинейная краевая задача (1), (2) имеет единственное решение $y(x)$, удовлетворяющее неравенствам $z_1(x) \leq y(x) \leq z_2(x)$, если $p(x) \geq 0$, и $z_1(x) \geq y(x) \geq z_2(x)$, если $q(x) \leq 0$.

Доказательство. Пусть для определенности $p(x) \geq 0$ и пусть $\Gamma(x, s)$ — функция Грина задачи $K(q, 0, u)^{1)}$. Очевидно $\Gamma(x, s) \geq 0$, так как $q(x) \geq 0$. Кроме того, с учетом следствия 1 имеем $z_1 \leq z_2$.

Рассмотрим последовательность функций $y_0, y_1, \dots, y_k, \dots$, определенных следующим образом:

$$y_0 = z_1(x),$$

$$y_1 = \int_{\alpha}^{\beta} \Gamma(x, s) \{-f(s, y_0(s)) + q(s)y_0(s)\} ds, \quad (4)$$

$$y_k = \int_{\alpha}^{\beta} \Gamma(x, s) \{-f(s, y_{k-1}(s)) + q(s)y_{k-1}(s)\} ds. \quad (5)$$

Легко видеть, что все члены последовательности $\{y_k\}$ удовлетворяют условиям (2). Покажем ограниченность функций y_k сверху функцией z_2 . С учетом равенства (4) составим операцию $Z_2[y_1 - z_2]$: $Z_2[y_1 - z_2] = -f(x, y_0) - q(x)y_0 + z_2''' + q(x)z_2 \geq f(x, y_0) - f(x, z_2) + q(x)(z_2 - z_1) \geq 0$. Отсюда в силу следствия теоремы 2 [3] получим $y_1 < z_2$. Пусть $y_k < z_k$. Тогда в соответствии с равенством (5) и условием L_2 получим $Z_2[y_{k+1} - z_2] = -f(x, y_k) + q(x)y_k - z_2''' - q(x)z_2 \leq f(x, z_2) - f(x, y_k) - q(x)(z_2 - y_k) \leq 0$. Снова, как и выше, убеждаемся, что $y_{k+1} < z_2$. Таким образом, $y_k(x) < z_2(x)$, $k = 0, 1, 2, \dots$

Покажем теперь монотонность последовательности $\{y_k\}$. Из неравенства $Z_2[y_0 - y_1] \equiv y_0''' + qy_0 + f(x, y) - qy_0 = N[y_0] = N[z_1] \leq 0$ следует $y_0 < y_1$. Предположим, что $y_{k-1} < y_k$. Тогда

$$y_k - y_{k+1} = \int_{\alpha}^{\beta} \Gamma(x, s) \{f(s, y_k) - f(s, y_{k-1}) - q(s)(y_k - y_{k-1})\} ds \leq 0,$$

и потому $y_k < y_{k+1}$, ибо $\Gamma(x, s) \geq 0$ и для функции $f(x, y)$ имеет место условие L_2 . Таким образом, последовательность $\{y_k\}$, монотонно возрастающая и ограниченная сверху, имеет предел. Обозначим этот предел через $y(x)$. Так как все члены y_k последовательности $\{y_k\}$ удовлетворяют краевым условиям (2), то предельная функция $y(x)$ также будет удовлетворять условиям (2) и неравенствам $z_1(x) \leq y(x) \leq z_2(x)$.

Так как $\Gamma(x, s) \{-f(s, y) + q(s)y\}$ является непрерывной и не убывающей функцией аргумента y , то в силу теоремы Лебега и отмеченных выше свойств последовательности $\{y_k\}$ в (5) под знаком интеграла можно перейти к пределу. Следовательно,

$$y(x) = \int_{\alpha}^{\beta} \Gamma(x, s) \{-f(s, y(s)) + q(s)y(s)\} ds. \quad (6)$$

¹⁾ Через $K(\alpha, f, y)$ даем условную запись краевой задачи (с краевыми условиями (2)) для уравнения $y'''' + a(x)y = f(x)$.

Отсюда нетрудно видеть, что $y(x)$ есть решение краевой задачи (1), (2). Действительно, в соответствии с (6) можем записать $Z_2[y] = -\dot{f}(x, y) + q(x)y$, т. е. $y''' + q(x)y = -\dot{f}(x, y) + q(x)y$ или $y''' + \dot{f}(x, y) = 0$.

Предположим теперь, что $q(x) \leq 0$. Тогда, согласно следствию теоремы 1, $z_1 \geq z_2$. В этом случае последовательность $\{y_k\}$ определим следующим образом:

$$y_0 = z_2,$$

$$y_1 = \int_{\alpha}^{\beta} \Gamma_1(x, s) \{-f(s, y_0) + p(s)y_0\} ds,$$

$$y_k = \int_{\alpha}^{\beta} \Gamma_1(x, s) \{-f(s, y_{k-1}) + p(s)y_{k-1}\} ds,$$

где $\Gamma_1(x, s)$ — функция Грина задачи $K(p, 0, y)$.

Допустим, что краевая задача (1), (2) имеет два решения $u_1(x)$ и $y(x)$. Тогда из теоремы 1 следует, с одной стороны, $u_1(x) \leq y(x)$, а с другой — $u_1(x) \geq y(x)$. Поэтому $u_1(x) \equiv y(x)$. Теорема доказана.

Следствие. Если при выполнении условий теоремы 2 имеет место равенство $f(x + \omega, y) = f(x, y)$, то существует единственное периодическое решение $y(x)$ уравнения (1), удовлетворяющее краевым условиям (2), причем $z_1(x) \leq y(x) \leq z_2(x)$ при $x \in [\alpha, \beta]$, $p(x) \geq 0$.

Перейдем к выяснению вопроса существования функции $z(x)$, удовлетворяющей краевым условиям, неравенству $N[z(x)] \geq 0$ либо $N[z(x)] \leq 0$. Такой вопрос мы будем решать здесь для уравнения

$$N_1[y] \equiv y''' + f(x, y)y - \varphi(x) = 0, \quad (7)$$

где $f(x, y)$ — определена и непрерывна в выпуклой области G ; $\varphi(x)$ — также непрерывная функция. Далее, относительно $f(x, y)$ будем предполагать, во-первых, что $f(x, y)y$ удовлетворяет условиям L_1, L_2 со знакопостоянными коэффициентами $p(x), q(x)$ одного знака, и, во-вторых, для $f(x, y)$ существуют такие знакопостоянные функции $a(x) \leq b(x)$ одного знака, что

$$a(x) \leq f(x, y) \leq b(x)$$

при $x \in [\alpha, \beta]$, где $[\alpha, \beta]$ — промежуток неосцилляций уравнений $Z_i[y] = 0$, $i = 1, 2$, $u''' + a(x)u = 0$, $v''' + b(x)v = 0$.

Выясним сначала связь между коэффициентами операций $Z_1[y], Z_2[y]$, с одной стороны, и функциями $a(x) \leq b(x)$ — с другой.

Лемма. Если коэффициенты $p(x), q(x)$ операций $Z_1[y], Z_2[y]$ — знакопостоянные положительные (знакоотрицательные) функции, то функции $a(x), b(x)$ знакоположительные (знакоотрицательные).

Доказательство. Пусть $p(x) \geq 0, q(x) \leq 0$. Допустим тогда, что $a(x) \leq 0, b(x) \leq 0$. Рассмотрим задачи $K(a, \varphi, u), K(b, \varphi, v)$, где $\varphi(x) \geq 0$. Пусть $u(x)$ — решение задачи $K(a, \varphi, u)$, а $v(x)$ — решение задачи $K(b, \varphi, v)$. При предположении, что $a(x) \leq b(x) \leq 0, u(x) < v(x) < 0$ и, кроме того,

$$N_1[u] \equiv u''' + f(x, u)u - \varphi(x) = [f(x, u) - a(x)]u(x) \leq 0, \quad (8)$$

$$N_1[v] \equiv v''' + f(x, v)v - \varphi(x) = [f(x, v) - b(x)]v(x) \geq 0. \quad (9)$$

Далее, $0 \geq N_1[u] - N_1[v] \geq (u - v)''' + p(x)(u - v)$, откуда $u(x) < v(x)$. Последнее неравенство противоречит неравенству $u(x) > v(x)$, которое

является следствием предположения $a(x) \leq b(x) \leq 0$. Полученное противоречие показывает, что $a(x) \geq 0$, $b(x) \geq 0$.

Имеет место и обратное утверждение.

Теорема 3. Пусть в области G функция $f(x, y)$ удовлетворяет следующим условиям:

а) условиям L_1, L_2 со знакопостоянными коэффициентами $p(x), q(x)$ одного знака;

б) существуют такие непрерывные функции $a(x) \leq b(x)$ одного знака, что графики решений $u(x), v(x)$ краевых задач $K(a, \varphi, u)$, $K(b, \varphi, v)$, где φ — знакопостоянная функция, лежат в G и что

$$a(x) \leq f(x, y) \leq b(x);$$

в) $[\alpha, \beta]$ — промежуток неосциллирующий уравнений $y''' + p(x)y = 0$, $y''' + q(x)y = 0$, $u''' + a(x)u = 0$, $v''' + b(x)v = 0$.

Тогда краевая задача (7), (2) имеет единственное решение $y(x)$, при этом $u(x) \geq y(x) \geq v(x)$, если $a(x) \geq 0$, $\varphi(x) \geq 0$, $u(x) \leq y(x) \leq v(x)$, если $b(x) \leq 0$, $\varphi(x) \geq 0$.

Очевидно, доказательство теоремы 3 сведется к доказательству теоремы 2, если покажем, что $u(x), v(x)$ удовлетворяют требованиям, какие наложены на $z_1(x), z_2(x)$ в теореме 2.

Пусть $p(x) \geq 0$, $\varphi(x) \geq 0$. Тогда $a(x) \geq 0$, $b(x) \geq 0$, и потому $u > 0$, $v > 0$. Из формул (8), (9) получим неравенства $N_1[u] \geq 0$, $N_1[v] \leq 0$ при $x \in [\alpha, \beta]$. Если $q(x) \leq 0$, $\varphi(x) \geq 0$, то $a(x) \leq b(x) \leq 0$, $0 > u(x) > v(x)$ и $N_1[u] \leq 0$, $N_1[v] \geq 0$.

Следствие. Если для $f(x, y)$, кроме условий а), б) и в) теоремы 3, имеет место равенство $f(x + \omega, y) = f(x, y)$ при любом x , то тогда существует единственное периодическое решение, удовлетворяющее условиям (2).

ЛИТЕРАТУРА

1. Азбелев Н. В. и Цалюк З. Б. Матем. сб., 51, № 4, 1960.
2. Азбелев Н. В., Хохряков А. Я., Цалюк З. Б. Матем. сб., 59, 1962, стр. 125—144.

Поступило в редакцию 1.IV 1964

В. И. ЛАДЕС

МНОГОФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ ЛОГИЧЕСКИЙ УЗЕЛ ИМПУЛЬСНО-ПОТЕНЦИАЛЬНОГО ТИПА

В автоматических устройствах дискретного действия широко используются наборы логических элементов, реализующих конъюнкцию, дизъюнкцию и отрицание, однако необходимость применять три различных типа логических элементов часто затрудняет отыскание практически приемлемых схем реализации заданных функций алгебры логики.

Применение многофункциональных логических узлов, т. е. однотипных схем, способных в зависимости от способа подключения реализовать более чем одну функцию алгебры логики, упрощает задачу синтеза логических устройств и снижает количество необходимого оборудования.

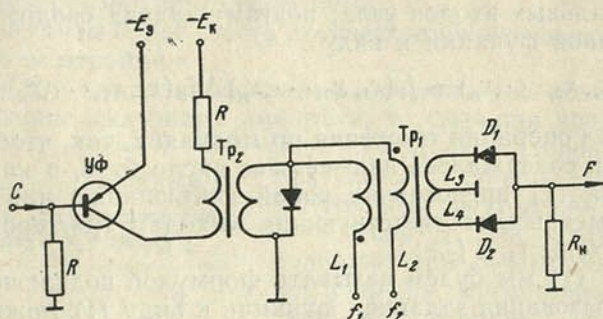


Рис. 1. Принципиальная схема многофункционального логического узла импульсно-потенциального типа

В данной работе рассматриваются логические свойства многофункционального узла импульсно-потенциального типа (рис. 1), который состоит из трансформаторного элемента $Тр_1$, реализующего операцию сложения по модулю 2, и входного усилителя-формирователя УФ. Импульсный трансформатор $Тр_1$ имеет две входные противофазные обмотки L_1 и L_2 , присоединяемые к потенциальным выходам триггеров через схемы И или ИЛИ, и две противофазные выходные обмотки L_3 и L_4 , присоединяемые к общей нагрузке через диоды D_1 и D_2 . Входной усилитель-формирователь УФ обеспечивает развязку входных цепей и дает возможность соединять необходимое число узлов как последовательно, так и параллельно.

Узел работает следующим образом.

Если на его потенциальных входах f_1 и f_2 напряжения равны между собой и сопротивления в цепях обмоток L_1 и L_2 одинаковы, то при поступлении импульса опроса на вход C в этих обмотках протекут равные по величине токи и на выходе F сигнал не возникнет. Если сопротивление



ния в цепях обмоток L_1 и L_2 различны, то на выходе узла образуется импульс отрицательной полярности.

Для устойчивой работы узла необходимо, чтобы потенциальные входы f_1 и f_2 были всегда подключены к выходам буферных каскадов триггеров. В противном случае при больших амплитудах входных импульсов на выходе узла могут возникнуть ложные сигналы.

Буферными каскадами могут служить либо инверторы, либо эмиттерные повторители.

Многофункциональный узел можно присоединять к выходам триггеров по конъюнктивной, дизъюнктивной или смешанной схеме подключения. Конъюнктивной схемой подключения мы будем называть схему, в которой оба потенциальных входа узла присоединены к выходам триггеров через цепи, реализующие конъюнкцию; дизъюнктивной схемой подключения будем называть схему, в которой оба потенциальных входа подключены через цепи, реализующие дизъюнкцию, и смешанной, когда один потенциальный вход подключен через цепь, реализующую конъюнкцию, а другой — через цепь, реализующую дизъюнкцию.

Если известна схема подключения узла к потенциальным выходам триггеров, то функция, реализуемая узлом, находится как сумма по модулю 2 функций, реализуемых его входными потенциальными цепями.

Значительно больший интерес представляет задача отыскания схемы подключения узла по заданной функции.

Как указывалось выше, необходимым условием для устойчивой работы узла данного типа является подключение к выходам триггеров обоих потенциальных входов узла; поэтому задача сводится к преобразованию заданной функции к виду

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \Delta f_2(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad (1)$$

где Δ — символ операции сложения по модулю 2, так, чтобы в полученном выражении содержалось наименьшее число букв, а каждый из членов выражения (1) представлял собой конъюнкцию или дизъюнкцию значений переменных, соответствующих выходам триггеров, к которым подключены входы f_1 и f_2 .

Выражение (1) мы будем называть формулой подключения.

Для преобразования заданной функции к виду (1) можно воспользоваться как аналитическим, так и геометрическим способами.

В первом случае в дизъюнктивной совершенной нормальной форме (ДСНФ) заданной функции символы дизъюнкции заменяются символами сложения по модулю 2 и формула подключения находится путем последовательного применения теорем алгебры логики.

Во втором случае конститuentам заданной ДСНФ ставятся в соответствие вершины единичного n -мерного куба [1] и формула подключения находится по расположению заданных вершин.

Заданными вершинами мы будем называть вершины единичного n -мерного куба, соответствующие ДСНФ заданной функции.

Рассмотрим геометрический способ преобразования к виду (1) функций от двух переменных.

Все функции от двух переменных, не считая функций, тождественно равных 0 или 1, можно разбить на 4 типа, где каждая из функций данного типа получается из любой другой функции этого же типа путем преобразования аргументов [2]. В геометрической интерпретации преобразованию аргументов соответствует изменение размещения заданных вершин при сохранении их взаимного расположения, причем функциям одного типа соответствует одно определенное взаимное расположение заданных вершин и один тип формул подключения.

Построим единичный квадрат (рис. 2) и поставим в соответствие каждой из его вершин ту конституенту, которая на этой вершине обращается в единицу. Если прямую, проведенную через любые две вершины такого квадрата, рассматривать как связь, соответствующую сумме по модулю 2 конституент, принадлежащих данной прямой, то сторонам квадрата будут соответствовать значения переменных x_1, x_2, \bar{x}_1 и \bar{x}_2 , а диагоналям — сумма по модулю 2 сторон, образующих с данной диагональю прямоугольный треугольник. Теперь любую из функций от двух переменных можно выразить через вершины и стороны единичного квадрата.

Сформулируем правила, позволяющие представить заданную функцию в виде суммы по модулю 2 двух конъюнктивных членов так, чтобы в полученном выражении содержалось наименьшее число букв.

1. Если ДСНФ заданной функции содержит одну конституенту A , то функция представима суммой по модулю 2 стороны AB и вершины B , принадлежащей стороне AB .

2. Если ДСНФ заданной функции содержит две конституенты A и B , то функция представима суммой по модулю 2 стороны AB и константы 0, где 0 есть логическое произведение любой из переменных x на ее отрицание.

3. Если ДСНФ заданной функции содержит две конституенты A и C , принадлежащие диагонали квадрата, то функция представима суммой по модулю 2 сторон AB и BC , образующих с данной диагональю прямоугольный треугольник.

4. Если ДСНФ заданной функции содержит три конституенты A, B и C , то функция представима суммой по модулю 2 стороны AB , содержащей две из заданных вершин, и третьей заданной вершины C .

Правила 1—4 сведены в табл. 1, где в столбце N указаны порядковые номера типов функций, в столбце m — число конституент, входящих в ДСНФ функций данного типа, в столбце S — количество функций данного типа и в столбце Q — выражение, определяющее вид формулы подключения.

Эти правила позволяют находить формулы подключения узлов по конъюнктивной схеме.

Если требуется подключить узел по дизъюнктивной схеме, то в формуле подключения, найденной по правилам 1—4, символы конъюнкции заменяются символами дизъюнкции и значения переменных — их отрицаниями.

Пример. Требуется построить схему сравнения двух n -разрядных двоичных чисел X_1 и X_2 так, чтобы на выход 1 сигнал опроса проходил тогда, когда $X_1 > X_2$, на выход 2, когда $X_1 < X_2$, и на выход 3, когда $X_1 = X_2$.

Допустим, что в этой схеме в качестве буферных каскадов нужно

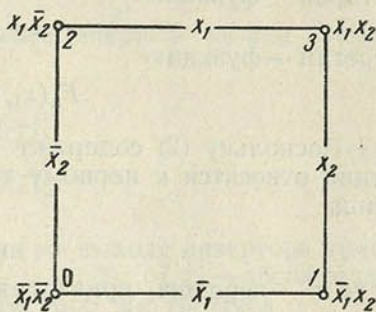


Рис. 2. Соответствие конъюнкций двух переменных вершинам единичного квадрата

Таблица 1

Таблица формул подключения для функций от двух переменных

N	m	S	Q
1	1	4	$AB \Delta B$
2	2	4	$AB \Delta x\bar{x}$
3	2	2	$AB \Delta BC$
4	3	4	$AB \Delta C$

использовать инверторы, а логические узлы должны быть подключены по дизъюнктивной схеме. Числа X_1 и X_2 записываются на триггерных регистрах P_1 и P_2 .

Вначале построим схему сравнения двух одноразрядных чисел x_1 и x_2 . Эта схема должна иметь 3 выхода, и для ее построения требуется 3 логических узла: Φ_1 , Φ_2 и Φ_3 . Первый из этих узлов должен реализовать функцию

$$F_1(x_1, x_2) = x_1 \bar{x}_2, \quad (2)$$

второй — функцию

$$F_2(x_1, x_2) = \bar{x}_1 x_2, \quad (3)$$

третий — функцию

$$F_3(x_1, x_2) = \bar{x}_1 \bar{x}_2 + x_1 x_2. \quad (4)$$

Поскольку (2) содержит одну конституенту $A = x_1 \bar{x}_2$, данная функция относится к первому типу. Согласно табл. 1, для функций этого типа

$$Q = AB \Delta B, \quad (5)$$

где B — вершина, принадлежащая стороне AB .

Согласно рис. 2, вершине B соответствует либо конъюнкция $\bar{x}_1 \bar{x}_2$, либо конъюнкция $x_1 x_2$. Если приравнять $B = \bar{x}_1 \bar{x}_2$, то сторона $AB = \bar{x}_2$. Если приравнять $B = x_1 x_2$, то сторона $AB = x_1$. Подставив в (5) значения AB и B , получим две равноценные формулы подключения узла Φ_1 по конъюнктивной схеме:

$$F_1(x_1, x_2) = \bar{x}_2 \Delta \bar{x}_1 \bar{x}_2, \quad (6)$$

$$F_1(x_1, x_2) = x_1 \Delta x_1 x_2. \quad (7)$$

Выбрав одну из них, например (7), и заменив в ней символы конъюнкции символами дизъюнкции и значения переменных их отрицаниями, получим формулу подключения узла Φ_1 по дизъюнктивной схеме:

$$F_1(x_1, x_2) = \bar{x}_1 \Delta (\bar{x}_1 + \bar{x}_2). \quad (8)$$

Функция (3) содержит одну конституенту $A = \bar{x}_1 x_2$ и также относится к первому типу. Если принять $B = x_1 x_2$, то $AB = x_2$. Если $B = \bar{x}_1 \bar{x}_2$, то $AB = \bar{x}_1$. Подставив значения B и AB в (5), получим:

$$F_2(x_1, x_2) = x_2 \Delta x_1 x_2, \quad (9)$$

$$F_2(x_1, x_2) = \bar{x}_1 \Delta \bar{x}_1 \bar{x}_2. \quad (10)$$

Выбрав одно из этих выражений, например (10), и заменив в нем символы конъюнкции символами дизъюнкции и значения переменных их отрицаниями, получим формулу подключения узла Φ_2 по дизъюнктивной схеме:

$$F_2(x_1, x_2) = x_1 \Delta (x_1 + x_2). \quad (11)$$

Функция (4) содержит две конституенты: $x_1 x_2$ и $\bar{x}_1 \bar{x}_2$. Отметив на рис. 2 вершины, соответствующие этим конституентам, получим, что заданные вершины принадлежат диагонали квадрата и, следовательно, функция (4) относится к функциям третьего типа, для которых

$$Q = AB \Delta BC, \quad (12)$$

где AB и BC — стороны, образующие с данной диагональю прямоугольный треугольник. Так как $x_1x_2 = A$ и $\bar{x}_1\bar{x}_2 = C$, то, подставив в (12) $AB = x_1$ и $BC = \bar{x}_2$, получим

$$F_3(x_1, x_2) = x_1 \Delta \bar{x}_2. \tag{13}$$

Если $AB = x_2$ и $BC = \bar{x}_1$, то

$$F_3(x_1, x_2) = \bar{x}_1 \Delta x_2. \tag{14}$$

Построим схему требуемого устройства (первый разряд схемы рис. 3). Условимся, что переменная

$$x_i = \begin{cases} 1, & \text{если } |U_x| < |U_{\bar{x}}| \\ 0, & \text{если } |U_x| > |U_{\bar{x}}| \end{cases}, \tag{15}$$

где $|U_x|$ — абсолютная величина напряжения на выходе инвертора триггера, представляющего переменную x_i ($i = 1; 2$); $|U_{\bar{x}}|$ — абсолютная величина напряжения на выходе инвертора того же триггера.

Узел Φ_1 подключен в соответствии с формулой (8). Так как в (8) $f_1(x_1, x_2) = \bar{x}_1$, то потенциальный вход f_1 узла Φ_1 подключен через диод D_1 к выходу инвертора \bar{x}_1 . Так как $f_2(x_1, x_2) = x_1 + x_2$, то вход f_2 узла Φ_1 подключен через диоды D_2 и D_3 к выходам инверторов x_1 и x_2 .

Узел Φ_2 подключен к выходам инверторов через диоды D_4 , D_5 и D_6 в соответствии с формулой (11).

Узел Φ_3 подключен через диоды D_7 и D_8 в соответствии с формулой (13).

Таким образом, схема сравнения двух одноразрядных двоичных чисел получена.

Соединив одноразрядные схемы, как показано на рис. 3, получим схему сравнения для n -разрядных двоичных чисел X_1 и X_2 .

В этой схеме выходы всех узлов Φ_1 присоединены к общей шине, образующей выход 1, выходы всех узлов Φ_2 присоединены к общей шине, образующей выход 2, а узлы Φ_3 соединены последовательно так, что выход каждого предыдущего узла Φ_3 является входом последующего узла Φ_3 и выход последнего, n -ого, узла Φ_3 образует выход 3.

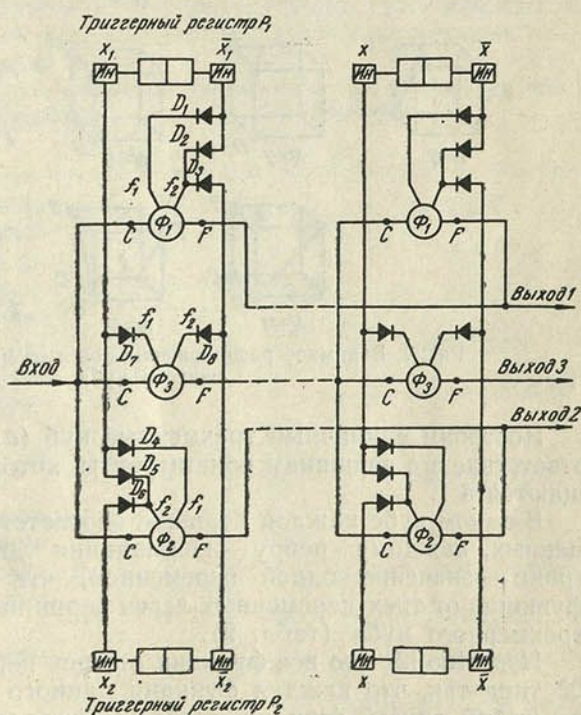


Рис. 3. Схема сравнения двух многоразрядных двоичных чисел

Сигнал опроса подается на входы узлов Φ_1 , Φ_2 и Φ_3 старшего разряда схемы.

Заменив на рис. 3 условные изображения узлов их принципиальными схемами (рис. 1), получим принципиальную схему сравнения двух n -разрядных двоичных чисел.

Рассмотрим методику отыскания формул подключения для функций от трех переменных.

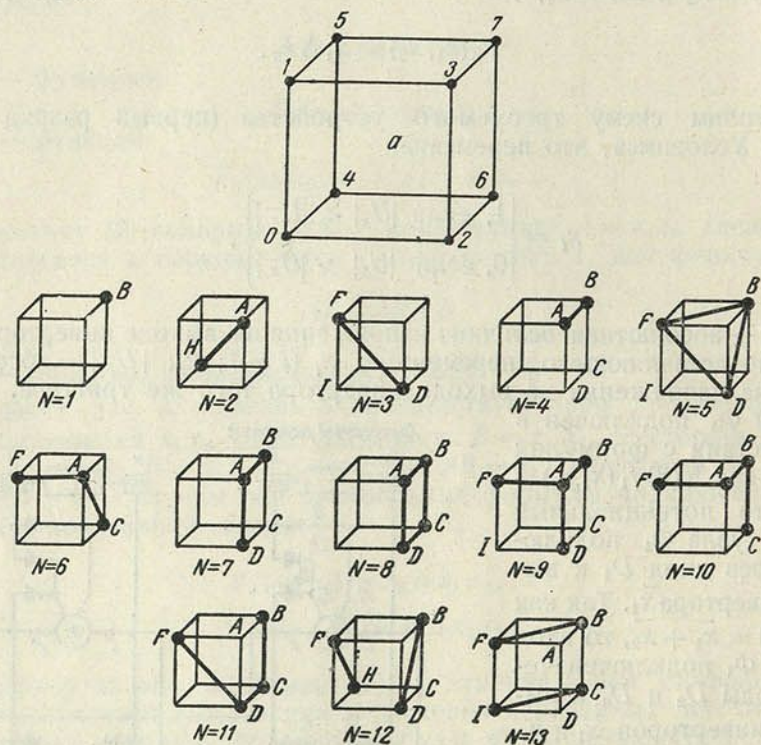


Рис. 4. Взаимное расположение конstituент на вершинах единичного куба

Построим единичный трехмерный куб (a на рис. 4) и поставим в соответствие его вершинам конstituенты, которые на этих вершинах обращаются в 1.

В таком кубе каждой вершине соответствует конъюнкция трех переменных, каждому ребру — конъюнкция двух переменных и каждой грани — значение одной переменной, что позволяет выразить любую функцию от трех переменных через вершины, грани и ребра единичного трехмерного куба (табл. 2).

Известно [2], что все функции от трех переменных можно разбить на 22 типа так, что каждая функция данного типа может быть получена из любой другой функции этого же типа путем преобразования аргументов.

Так как каждому типу функций соответствует свое взаимное расположение заданных вершин, то в общем случае таблица формул подключения для функций от трех переменных должна была бы содержать 22 строки. Однако, поскольку функции с числом конstituент $m=1, 2, 3$ являются инверсиями функций с числом конstituент $m=5, 6, 7$, для отыскания формул подключения достаточно иметь таблицу из 13 строк (табл. 3).

Таблица 2

Таблица соответствия конъюнкций элементам трехмерного куба

Вершины		Ребра			Грани		
0	$\bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3$	02	$\bar{x}_1 \bar{x}_3$	67	$x_1 x_2$	0132	\bar{x}_1
1	$\bar{x}_1 \bar{x}_2 x_3$	26	$x_2 \bar{x}_3$	45	$x_1 \bar{x}_2$	2376	x_2
2	$\bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3$	64	$x_1 \bar{x}_3$	13	$\bar{x}_1 x_3$	6754	x_1
3	$\bar{x}_1 x_2 x_3$	40	$\bar{x}_2 \bar{x}_3$	37	$x_2 x_3$	4510	\bar{x}_2
4	$x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3$	01	$\bar{x}_1 \bar{x}_2$	75	$x_1 x_3$	1573	x_3
5	$x_1 \bar{x}_2 x_3$	23	$\bar{x}_1 x_2$	51	$\bar{x}_2 x_3$	0462	\bar{x}_3
6	$x_1 x_2 \bar{x}_3$						
7	$x_1 x_2 x_3$						

Если ДСНФ заданной функции содержит меньше пяти конституент, то формула подключения для нее находится следующим образом:

1. По табл. 2 определяются номера вершин, соответствующих конституентам заданной функции.

2. Заданные вершины отмечаются на рис. 4 (а), и среди фигур рис. 4 отыскивается изображение, в котором расположение вершин, отмеченных жирными точками, подобно взаимному расположению заданных вершин на рис. 1. Тем самым определяется тип заданной функции *N*.

3. Для данного *N* в табл. 3 отыскивается выражение *Q*.

4. Подставив в выражение *Q* значение его членов, получим искомую формулу подключения узла к потенциальным выходам триггеров.

Пример. Конституентам функции

$$F(x_1, x_2, x_3) = \bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 + \bar{x}_1 \bar{x}_2 x_3 + \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3, \quad (16)$$

согласно табл. 2, соответствуют вершины 0, 1 и 2, принадлежащие грани 0132. По рис. 4 находим, что функция с подобным расположением заданных вершин относится к 7-му типу функций, для которых

$$Q = ABCD \Delta C. \quad (17)$$

Таблица 3
Формулы подключения для функций от трех переменных

<i>N</i>	<i>m</i>	<i>S</i>	<i>Q</i>
1	1	8	$B \Delta x\bar{x}$
2	2	4	$A \Delta H$
3	2	12	$FI \Delta ID$
4	2	12	$ABCD \Delta DC$
5	3	8	$(FI \Delta ID) + (B \Delta x\bar{x})$
6	3	24	$FA \Delta C$
7	3	24	$ABCD \Delta C$
8	4	6	$ABCD \Delta x\bar{x}$
9	4	8	$(ABCD \Delta DC) + (FI \Delta ID)$
10	4	24	$FA \Delta BC$
11	4	24	$ABCD \Delta AF$
12	4	2	$(FI \Delta IH) + (DC \Delta BC)$
13	4	6	$FADI \Delta ABCD$

Так как грань $ABCD = \bar{x}_1$, а вершина $C = \bar{x}_1 x_2 x_3$, то, подставив в (17) значение грани и вершины, получим формулу подключения для (16)

$$F(x_1, x_2, x_3) = \bar{x}_1 \Delta \bar{x}_1 x_2 x_3. \quad (18)$$

Если ДСНФ заданной функции содержит более четырех конституент, то на рис. 4 отмечаются вершины, соответствующие конституентам, отсутствующим в ДСНФ заданной функции. Считая отмеченные вершины заданными, в табл. 3 находят выражение для Q и, подставляя в это выражение значения его членов, получают формулу подключения для инверсии заданной функции.

Формула подключения для заданной функции находится по формуле подключения для ее инверсии путем сложения одного из членов последней с константой 1, т. е. путем замены в одном из членов формулы подключения для инверсии символов конъюнкции символами дизъюнкции и значений переменных их отрицаниями.

Таким образом, функции с $m > 4$ могут быть представлены суммой по модулю 2 конъюнктивного и дизъюнктивного членов и реализованы одним логическим узлом, подключенным по смешанной схеме. Исключением являются функции, инверсии которых относятся к четвертому и седьмому типам. Эти функции реализуются одним узлом, подключенным по конъюнктивной схеме.

Пример. В ДСНФ функции

$$F(x_1, x_2, x_3) = \bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 + x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 + x_1 \bar{x}_2 x_3 + \bar{x}_1 x_2 x_3 + x_1 x_2 x_3 \quad (19)$$

отсутствуют конституенты $\bar{x}_1 \bar{x}_2 x_3$, $\bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3$ и $x_1 x_2 \bar{x}_3$, следовательно, инверсией функции (19) будет функция

$$F_1(x_1, x_2, x_3) = \bar{x}_1 \bar{x}_2 x_3 + \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 + x_1 x_2 \bar{x}_3. \quad (20)$$

Конституентам функции (20) соответствуют вершины 1, 2 и 6 куба рис. 4 (а). Поскольку вершины 2 и 6 принадлежат ребру $FA = x_2 \bar{x}_3$, а вершина 1 не принадлежит грани, содержащей данное ребро, функция (20) относится к функциям 6-го типа, для которых

$$Q = FA \Delta C. \quad (21)$$

Подставив в (21) $FA = x_2 \bar{x}_3$ и $C = \bar{x}_1 \bar{x}_2 x_3$, получим формулу подключения для инверсии заданной функции

$$F_1(x_1, x_2, x_3) = x_2 \bar{x}_3 \Delta \bar{x}_1 \bar{x}_2 x_3. \quad (22)$$

Заменяв в одном из членов выражения (22) символы конъюнкции символами дизъюнкции и значения переменных их отрицаниями, получим формулу подключения для функции (19)

$$F(x_1, x_2, x_3) = (\bar{x}_2 + x_3) \Delta \bar{x}_1 \bar{x}_2 x_3. \quad (23)$$

Таким образом, функция (19) реализуется одним узлом, подключенным по смешанной схеме.

Практически смешанные схемы подключения не всегда удобны, и функции с $m > 4$ можно реализовать двумя логическими узлами, подключенными по конъюнктивной или по дизъюнктивной схеме, где каждый узел реализует только часть конституент заданной функции. Выходы обоих узлов присоединяются к общей нагрузке.

Функции 5, 9 и 12-го типов преобразовать к виду (1) нельзя. Для реализации этих функций необходимо использовать два логических узла, каждый из которых реализует часть ДСНФ заданной функции.

Пример. Конституентам функции

$$F(x_1, x_2, x_3) = \bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 + \bar{x}_1 \bar{x}_2 x_3 + \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 + x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 \quad (24)$$

соответствуют вершины куба 0, 1, 2 и 4, следовательно, функция (24) относится к 9-му типу и не может быть реализована одним узлом. Разобьем (24) на две части

$$F(x_1, x_2, x_3) = F_1(x_1, x_2, x_3) + F_2(x_1, x_2, x_3), \quad (25)$$

где $F_1(x_1, x_2, x_3) = \bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 + \bar{x}_1 \bar{x}_2 x_3, \quad (26)$

$$F_2(x_1, x_2, x_3) = \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 + x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3. \quad (27)$$

Функция (26) относится к 4-му типу, а функция (27) — к 3-му типу. Каждая из этих функций реализуется одним узлом. Подключив через диодную сборку выходы обоих узлов к общей нагрузке, получим схему, реализующую функцию (24).

Выше рассматривались способы нахождения формул подключения для функций, заданных в ДСНФ. Если функция задана в стандартной табличной форме, где x_1 — аргумент старшего разряда, то необходимость в преобразовании функции в ДСНФ отпадает.

Для отыскания формул подключения по функции, заданной в табличной форме, строкам стандартной таблицы значений переменных присваиваются порядковые номера, считая строку 000 нулевой. В этом случае номера строк будут соответствовать номерам вершин куба рис. 4. Отметим на рис. 4 вершины, номера которых соответствуют тем строкам таблицы, где функция обращается в 1, получим взаимное расположение вершин для заданной функции с $m < 5$.

Для функций с $m > 4$ взаимное расположение вершин, соответствующих конституентам инверсии заданной функции, находится по номерам строк, где функция обращается в 0. Зная расположение вершин для заданной функции или для ее инверсии, можно найти формулу подключения.

Пример. Требуется построить одноразрядную схему, на выход которой сигнал проходит только тогда, когда имеет место неравенство

$$x_1 \leq x_2 \leq x_3. \quad (28)$$

Данному условию удовлетворяет функция

x_1	x_2	x_3	$F(x_1, x_2, x_3)$	k
0	0	0	1	0
0	0	1	1	1
0	1	0	0	—
0	1	1	1	3
1	0	0	0	—
1	0	1	0	—
1	1	0	0	—
1	1	1	1	7

(29)

Запишем в столбце k таблицы (29) порядковые номера тех строк, где функция обращается в 1, и отметим на рис. 4 вершины куба, соответствующие номерам в столбце k . Так как вершины 1, 3 и 7 принадлежат одной грани, а вершина 0 имеет связь по ребру с вершиной 1, то функция (29) относится к функциям 10-го типа, для которых

$$Q = FA \Delta BC. \quad (30)$$

Подставив в (30) значения $FA = \bar{x}_1 \bar{x}_2$ и $BC = x_2 x_3$, получим формулу подключения узла по конъюнктивной схеме

$$F(x_1, x_2, x_3) = \bar{x}_1 \bar{x}_2 \Delta x_2 x_3. \quad (31)$$

Описываемый многофункциональный логический узел предназначен для синтеза переключательных схем импульсно-потенциального типа с помощью канонического метода [3].

Один такой узел способен реализовать все булевы функции от двух переменных, 230 из 256 функций от трех переменных и ряд функций от числа переменных, большего чем 3, что дает возможность заменять одним узлом целую группу кустов канонической таблицы.

В схемах логических устройств многофункциональные логические узлы могут соединяться как параллельно, так и последовательно.

Поскольку узел обладает формирующими свойствами, схемы логических устройств, выполненных на таких узлах, не критичны к разбросу параметров входных сигналов и не требуют отбора деталей.

ЛИТЕРАТУРА

1. Яблонский С. В. Труды математического института им. Стеклова, 51, 1958.
2. Синтез электронных вычислительных и управляющих схем. ИЛ, 1954.
3. Блох А. Ш., Ладес В. И. Алгоритмы синтеза электрических схем логических устройств. Изд. ГОСИНТИ, М., 1964.

Поступило в редакцию 3.IX 1964

В. И. МОНАСТЫРНЫЙ

ПЕРИОДИЧЕСКИЕ ПОДГРУППЫ МУЛЬТИПЛИКАТИВНОЙ ГРУППЫ ТЕЛА

Пусть K — ассоциативное тело, Z — центр K и ранг K над Z конечен. В заметке дается полное описание периодических подгрупп мультипликативной группы K^* тела K . При изучении указанных групп мы используем некоторые результаты статьи [1]. Теорема положительно решает вопрос о сопряженности периодических подгрупп в случае их изоморфизма.

Укажем некоторые обозначения, принятые в дальнейшем: O^* — подгруппа K^* , изоморфная группе $\left\{ \frac{1+i}{\sqrt{2}}, \frac{1+j}{\sqrt{2}} \right\}$ из тела вещественных кватернионов $U = D(i, j)$; T^* — подгруппа K^* , изоморфная коммутанту группы O^* ; $J^* \subset K^*$ изоморфна специальной линейной группе $SL(2, 5)$; Q_α — группа обобщенных кватернионов, определяемая соотношениями $Q_\alpha = \{b, a\}: b^2 = -1, a^{2^\alpha} = 1, bab^{-1} = a^{-1}$, порядок группы равен $2^{2^\alpha+1}$, где $\alpha \geq 3$; $[D]$ — линейная Z -оболочка подмножества $D \subset K$. Группа $G \subset K^*$ называется неприводимой, если $[G] = K$. Группу M назовем группой типа (α) , если она — конечное циклическое расширение периодической локально циклической подгруппы. Докажем несколько лемм, имеющих и самостоятельное значение.

Лемма 1. Пусть H — периодическая подгруппа K^* , содержащая группу O^* или J^* , тогда $H = O^*$ или соответственно $H = J^*$.

Доказательство. Как известно, тело конечного ранга обладает точным неприводимым представлением [2]. Поэтому тело K мы в дальнейшем отождествляем с некоторым телом матриц.

Пусть H — периодическая подгруппа K^* и $H \supset O^*$. Так как H — группа матриц, то по теореме Шура [3] H локально конечна. Возьмем подгруппу $H_1 = \{O^*, h\}$, где $h \in H \setminus O^*$. H_1 — конечная подгруппа K^* . Очевидно, H_1 не является метациклической или группой вида $T^* \times C$, где C — некоторая метациклическая. Тогда по теореме 7 [1] группа H_1 изоморфна O^* . Поскольку $O^* \subset H_1$, то $H_1 = O^*$. Отсюда и следует утверждение.

Случай, когда $J^* \subseteq H$, доказывается аналогично.

Лемма 2. Пусть H — периодическая подгруппа K^* , не содержащая группу кватернионов, тогда H — группа типа (α) .

Доказательство. Если характеристика K положительна, то группа H также локально конечна (см. [4]). А так как конечные подгруппы данного тела циклические [5], то утверждение леммы здесь выполняется.

Пусть характеристика K равна нулю и H некоммутативна. В силу теоремы Шура можно записать $H = BF$, где F — абелев нормальный

делитель H ; B — подгруппа, порожденная представителями классов смежности H по F . Так как H/F конечна [3], то B также конечна. Поскольку $B \subset K^*$ и H не содержит подгруппу кватернионов, то 2-подгруппа Силова группы B циклическая. Тогда по теореме 2 [1] все p -подгруппы Силова из B циклические. Хорошо известно, что такие группы метациклические. Пусть $B = \langle d, c \rangle$, где $\langle c \rangle$ — максимальный абелев нормальный делитель B . Обозначим $\Delta = [H]$, σ — центр подтела $\Delta \subset K$. Подполе $\Sigma = [F]$ имеет конечную степень над σ . Возьмем σ -базис Σ , состоящий из элементов $f_i \in F$, $i = 1, 2, \dots, s$, $s = (\Sigma : \sigma)$. Если f — элемент наивысшего порядка среди f_i , то $\Sigma = \sigma \langle f \rangle$. Рассмотрим подгруппу $B_0 = \langle B, f \rangle$. Очевидно, B_0 метациклическая. Тогда $B_0 = \langle g, h \rangle$, где $\langle h \rangle$ — абелев нормальный делитель, содержащий подгруппу $\langle f \rangle$. Если F_1 — периодическая часть мультипликативной группы L_1^* поля $L_1 = \sigma \langle h \rangle$, то группа $H_1 = \langle g \rangle F_1$ типа (α) . Поскольку $H \subseteq H_1$, то отсюда и вытекает лемма.

Лемма 3. Если периодическая (бесконечная) подгруппа $H \subset K^*$ содержит группу обобщенных кватернионов Q_α , то $H = \langle b \rangle F$, где $b^2 = -1$; $bhb^{-1} = h^{-1}$ при $h \neq -1$, $h \in F$.

Доказательство. Возьмем бесконечную периодическую подгруппу $H \subset K^*$, $H \supset Q_\alpha$ (см. выше). На основании леммы 1 H не содержит группы O^* или J^* . Запишем $H = BF$ (по теореме Шура). Можно считать, что $Q_\alpha \subset B$. Из теоремы 1 [6] легко получить, что центр H равен $\langle -1 \rangle$. Пусть $B = \langle d, c \rangle$, причем $\langle c \rangle$ — максимальный абелев нормальный делитель B , кроме того: $d^n = c^t$, $c^m = 1$, $dcd^{-1} = c^r$, где $(m, r) = 1$, $s = (r - 1, m)$, $m = st$, $r^n \equiv 1 \pmod{m}$, n — минимальное число. Следовательно, получаем $s = 2$. Так как n/s , то $n = s = 2$ (см. [1]). Отсюда $r \equiv -1 \pmod{m}$ и $dcd^{-1} = c^{-1}$. Возьмем теперь подгруппу B_0 , построенную аналогично, как в лемме 2. Как и выше, показывается, что B_0 — группа вида B . Запишем $B_0 = \langle b, h_0 \rangle$, где $b^2 = -1$, $bh_0b^{-1} = h_0^{-1}$. Тогда группа H будет группой типа (α) , причем $H = \langle b \rangle F$, $b^2 = -1$, $bFb^{-1} = F$. Более того, если $h \in F$ и $h \neq -1$, то $bhb^{-1} = h^{-1}$. Лемма доказана.

Лемма 4. Пусть H — периодическая подгруппа K^* , порядок центра $H \geq 3$ и в H нет подгруппы T^* , тогда H — группа типа (α) .

Доказательство. Из условия леммы следует, что группа H не содержит подгрупп O^* или J^* . Следовательно, конечные подгруппы H метациклические (см. теорему 7 [1]). Повторяя доказательство леммы 2, установим, что H — типа (α) .

Лемма 5. Пусть H — бесконечная периодическая подгруппа K^* и $H \supset T^*$, тогда $H = T^* \times M$, где M — некоторая подгруппа типа (α) .

Доказательство. Если группа $H \subset T^*$ удовлетворяет всем условиям леммы, то она не содержит подгрупп J^* и O^* . Пусть $H = BF$ (см. запись выше). Так как $H \supset T^*$, то, очевидно, $T^* \subset B$. В силу теоремы 7 Амицура $B = T^* \times M_1$. Подгруппа $M_2 = \langle M_1, F \rangle$ — типа (α) . Обозначим $\Delta_2 = [M_2]$ и $M_0 \subset M_2$ — такая конечная подгруппа, что $[M_0] = \Delta_2$. Группа $\{T^*, M_0\}$ имеет вид $T^* \times M_0$. Следовательно, M_2 находится в централизаторе подгруппы T^* . Тогда $H = T^* \times M_2$, что и доказывает утверждение.

Таким образом, имеет место

Предложение. В мультипликативной группе K^* могут быть только следующие периодические подгруппы:

- I) группы типа (α) ,
- II) группы вида $T^* \times M$, где M — некоторая подгруппа типа (α) ,
- III) группа O^* ,
- IV) группа J^* .

Следствие 1. Пусть $(K:Z) = n$ и H — бесконечная периодическая подгруппа K^* , тогда H содержит локально циклический нормальный делитель F , индекс которого $H:F \leq 12n$.

Следствие 2. Если ранг $(K:Z)$ — число нечетное, то всякая периодическая подгруппа в K^* является группой типа (а).

Следствие 3. Пусть $G \subset K^*$ — фактор-группа, G по ее центру локально конечна и J^* не принадлежит G , тогда ряд коммутантов группы G имеет длину $l \leq 5$.

Доказанная теорема показывает, что максимальные периодические подгруппы K^* могут быть неизоморфными. Однако справедлива следующая

Теорема. Если H_1 и H_2 — две изоморфные периодические подгруппы K^ , то они сопряжены между собой в группе K^* .*

Доказательство. Пусть сначала H_1 и H_2 — подгруппы K^* типа (а) и $H_1 \cong H_2$. Запишем: $H_1 = (g)F_1$, $H_2 = (h)F_2$, причем будем считать, что $F_1 \cong F_2$. Тогда также изоморфны подгруппы (g) и (h) . Линейная Z -оболочка $\Sigma_1 = [F_1]$ является подполем в теле K . Пусть $f_1, f_2, \dots, f_s \in F_1$ и образуют Z -базис Σ_1 . Если f — элемент наивысшего порядка среди f_i , то $\Sigma_1 = Z(f)$. Таким образом, Σ_1 — поле разложения полинома $(x^m - 1) \in Z[x]$, где m — порядок f . Однако и в поле $\Sigma_2 = [F_2]$ полином $(x^m - 1)$ разлагается на линейные множители. Поэтому Σ_1 и Σ_2 Z -изоморфны. Пусть $v \in F_2$ такой, что $\Sigma_2 = Z(v)$ и $v^m = 1$. Легко видеть, что подгруппы $H_{10} = \{g, f\}$ и $H_{20} = \{h, v\}$ изоморфны. Если теперь $\Delta_1 = [H_1]$ и $\Delta_2 = [H_2]$, то соответствие $\sum \lambda_i g^{ki} f^{li} \rightarrow \sum \lambda_i h^{ki} v^{li}$, где $\lambda_i \in Z$, будет Z -изоморфизмом Δ_1 на Δ_2 . Тогда по теореме о продолжении изоморфизмов [7] существует такое $d \in T^*$, что $d\Delta_1 d^{-1} = \Delta_2$. Отсюда следует $dH_{10}d^{-1} = H_{20}$ и, значит, $dH_1d^{-1} = H_2$. Первый случай доказан.

Рассмотрим теперь случай подгрупп типа II) (см. предложение). Пусть $H_1 = T_1^* \times M_1$, $H_2 = T_2^* \times M_2$, где в силу изоморфизма H_1 и H_2 $M_1 \cong M_2$ и $T_1^* \cong T_2^*$. Как в первом случае, можно доказать, что имеется $c \in T^*$ такое, что $cM_1c^{-1} = M_2$. Тогда $H_2 = T_2^* \times M_2$, а $cH_1c^{-1} = T_0^* \times M_2$, где $T_0^* = cT_1^*c^{-1}$. Очевидно, T_2^* и T_0^* содержатся в подтеле L — централизаторе группы M_2 в K . Так как $Z \subset L$, то $\Gamma_0 = [T_0^*]$ и $\Gamma_2 = [T_2^*]$ — подтела L , причем их ранги над Z одинаковы и равны 4. Пусть $Q_0 \subset T_0^*$ и $Q_2 \subset T_2^*$ — группы кватернионов. Тогда изоморфизм групп Q_0 и Q_2 индуцирует Z -изоморфизм тела Γ_2 на Γ_0 . Следовательно, существует $t \in L^*$ такое, что $t\Gamma_2t^{-1} = \Gamma_0$, при этом ясно, $tT_2^*t^{-1} = T_0^*$. Окончательно получаем $\mu H_1\mu^{-1} = H_2$, где $\mu = t^{-1}c$, $\mu \in K^*$, $\mu \neq 0$.

Случай подгрупп типа III) и IV) рассматривается аналогично предыдущему. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Amitsur S. A. Trans. Amer. Mat. Soc., 80, № 2, 1955.
2. Ван-дер-Варден. Современная алгебра, 2, 1947.
3. Schur J. S. B. Prens. Acad., 619—627, 1911.
4. Супруненко Д. А., Платонов В. П. ДАН БССР, № 8, 1963.
5. Herstein I. N. Pacific J. Mat., 3, 121—126, 1953.
6. Монастырский В. И. ДАН БССР, № 8, 1964.
7. Джекобсон Н. Строение колец. ИЛ, 1961.

Поступило в редакцию 20.IV 1964

П. Т. КОЗЕЛ

О ЯДРЕ ОДНОГО ГОМОМОРФИЗМА

Пусть $GL(n, R, p^m)$ — группа всех обратимых $n \times n$ матриц над факторкольцом $R/(p^m)$, где R — кольцо главных идеалов; p — неразложимый элемент кольца R .

В работе [1] изучается ядро гомоморфизма g

$$GL(n, R, p^m) \rightarrow GL(n, R, p),$$

определяемого условиями: $g(x) = \bar{x}$, $x = \|x_{ij}\| \in GL(n, R, p^m)$, $\bar{x} = \|\bar{x}_{ij}\|$, $\bar{x}_{ij} = f(x_{ij})$, где f — естественный гомоморфизм кольца $R/(p^m)$ на кольцо $R/(p)$, относящий каждому элементу $R/(p^m)$ тот класс из $R/(p)$, которому он принадлежит. В [1], в частности, доказывается, что ядро гомоморфизма g является нильпотентной группой класса $m-1$.

В этой заметке рассматривается ядро гомоморфизма

$$\varphi: GL(n, R, p^m) \rightarrow GL(n, R, p^l), \quad m > l,$$

определяемого так же, как и g , притом f — естественный гомоморфизм кольца $R/(p^m)$ на кольцо $R/(p^l)$. Легко видеть, что ядром гомоморфизма φ является группа K матриц $E + v$, где v — матрица с элементами из ядра естественного гомоморфизма $f: R/(p^m) \rightarrow R/(p^l)$, т. е. матрица с элементами из факторкольца $(p^l)/(p^m)$. Матрицу v можно представить в виде $v = p^l a$, где a — матрица из $GL(n, R, p^m)$.

Таким образом, K состоит из всех матриц вида $E + p^l a$, где a — произвольная матрица из $GL(n, R, p^m)$.

Лемма 1. Если $m \leq 2l$, то K — абелева группа.

Действительно, пусть $A, B \in K$. Тогда $AB = (E + p^l a)(E + p^l b) = E + p^l(a + b) + p^{2l}ab = E + p^l(a + b)$, так как $2l \geq m$ и $p^{2l}ab = 0$ в кольце $R/(p^m)$. Аналогично $BA = E + p^l(b + a)$, т. е. $AB = BA$ для любых A и B .

1. Центр группы K . Пусть $m > 2l$ и K_l — подгруппа группы K , состоящая из всех матриц вида $E + p^{m-l}a$ и всех скалярных матриц.

Лемма 2. Центр группы K совпадает с группой K_l .

Пусть $A \in K$, $B \in K_l$. Тогда $A = E + p^l a$, $B = E + p^{m-l} b$, как в лемме 1, найдем, что $AB = BA$. Остается показать, что если B не принадлежит K_l , то в K найдется матрица A такая, что $AB \neq BA$. Если $B \notin K_l$, то $B = E + p^{m-q} b$, где $q > l$; b — нескалярная матрица группы $GL(n, R, p^m)$, по меньшей мере один элемент которой не делится на p . Пусть $b = \sum \beta_{ij} e_{ij}$. Может представиться два случая:

1) на p не делится некоторый недиагональный элемент, $\beta_{kt} \not\equiv 0 \pmod{p}$, $k \neq t$;

2) на p не делится диагональный элемент, $\beta_{kk} \not\equiv 0 \pmod{p}$.

В первом случае условию $AB \neq BA$ удовлетворяет матрица $A = E + p^l a = E + p^l e_{ts}$, $s \neq k$. Действительно, $\|c_{ij}\| = ab = \sum \beta_{sj} e_{ij}$, $\|d_{ij}\| = ba = \sum \beta_{it} e_{is}$. Элемент d_{ks} матрицы ba равен β_{kt} , тогда как соответствующий элемент c_{ks} матрицы ab равен нулю. Отсюда и из $\beta_{kt} \neq 0 (p)$ получаем

$$ab \neq ba, \quad ba \neq 0 (p). \quad (1)$$

Так как $AB = E + p^l a + p^{m-qb} + p^{m-q+l} ab$, $BA = E + p^l a + p^{m-qb} + p^{m-q+l} ba$, то из (1) и $m - q + l < m$ следует $AB \neq BA$.

Второй случай подразделяется на два:

2а) не все диагональные элементы матрицы b совпадают с β_{kk} ;

2б) $\beta_{ii} = \beta_{kk}$, $i = 1, \dots, n$.

Случай 2а). Если, например, $\beta_{ss} \neq \beta_{kk}$, то условию $AB \neq BA$ удовлетворяет матрица $A = E + p^l a = E + p^l e_{ks}$. Действительно, элемент c_{ks} матрицы ab в этом случае будет равен β_{ss} , соответствующий же элемент матрицы ba будет равен β_{kk} . Поэтому $ab \neq ba$, причем $ba \neq 0 (p)$ ввиду $\beta_{kk} \neq 0 (p)$, и мы имеем ситуацию, аналогичную случаю 1).

Случай 2б). Так как b — не скалярная матрица, то некоторый элемент $\beta_{sq} \neq 0$. Теперь условию $AB \neq BA$ будет удовлетворять матрица $A = E + p^l a = E + p^l e_{qs}$. Действительно, $ab = \sum \beta_{sj} e_{qj}$, $ba = \sum \beta_{iq} e_{is}$. Элемент c_{qq} матрицы ab равен β_{sq} , тогда как соответствующий элемент ba равен нулю. Поэтому $ab \neq ba$, причем, так как $c_{qs} = \beta_{ss} = \beta_{kk} \neq 0 (p)$, $ab \neq 0 (p)$.

И опять мы имеем ситуацию, аналогичную случаю 1). Лемма доказана.

2. Центральный ряд группы K .

Обозначим через K_s , $s = 1, 2, \dots$, подгруппу группы K , состоящую из всех матриц вида $E + p^{m-s} a$ и всех скалярных матриц.

Очевидно, что если $i < j$, то $K_i \subset K_j$. Рассмотрим ряд, составленный из подгрупп

$$E \subset K_1 \subset K_2 \subset \dots \subset K_t = K, \quad (2)$$

где $t = \frac{m}{l} - 1$, если l делит m , и $t = [m/l]$ в противном случае.

Покажем, что ряд (2) является центральным рядом группы K .

Согласно лемме 2, K_1 содержится в центре K . Пусть теперь $A_i \in K_{i+1}$, $1 < i < t$. Для любой матрицы $A \in K$ найдется матрица $A_{i-1} \in K_{(i-1)l}$, удовлетворяющая условию

$$A A_i A_{i-1} = A_i A. \quad (3)$$

Действительно,

$$\begin{aligned} A_i A &= (E + p^{m-il} a_i) (E + p^l a) = E + p^{m-il} a_i + p^l a + p^{m-(i-1)l} a_i a = \\ &= A A_i + p^{m-(i-1)l} (a_i a - a a_i). \end{aligned}$$

Подставляя выражение $A_i A$ в (3) и учитывая, что $A_{i-1} \in K_{(i-1)l}$ имеет вид $E + p^{m-(i-1)l} a_{i-1}$, получим $A A_i + p^{m-(i-1)l} A A_i a_{i-1} = A A_i + p^{m-(i-1)l} \times (a_i a - a a_i)$ или $A A_i a_{i-1} = a_i a - a a_i$. Таким образом, искомым матрицей будет матрица

$$A_{i-1} = E + p^{m-(i-1)l} (A A_i)^{-1} (a_i a - a a_i).$$

Из условия (3), которое можно переписать $A^{-1} A_i A = A_i A_{i-1}$, вытекает, что K_{i+1} является нормальным делителем группы K , а также, что факторгруппа $K_{i+1}/K_{(i-1)l}$ содержится в центре факторгруппы $K/K_{(i-1)l}$, $1 < i < t$. Аналогично доказывается, что факторгруппа $K/K_{(i-1)l}$ — абелева.

Построенный ряд (2) группы K является центральным рядом минимальной длины, так как для любого $1 < i < t$ в группе K_{i+1} найдется матрица B и $A \in K$ такие, что условие (3) $ABA_{i-1} = BA$ не будет выполнено ни при каком $A_{i-1} \in K_{(i-1)l}$. Действительно, пусть $A = E + p^i e_{11}$ и $B \in K_{i+1}$ имеет вид $B = E + p^{m-(i+1)l} e_{12}$. Тогда условие (3) переписется $AB + p^{m-(i-1)l} ABA_{i-1} = AB + p^{m-(i-1)l-1} (e_{11} e_{12} - e_{12} e_{11})$ или $pABA_{i-1} = e_{12}$. Последнее же условие не может быть выполнено, так как элементы матрицы в правой части равенства не делятся на p .

Теперь можно убедиться, что длина ряда (2) не превосходит длины верхнего центрального ряда

$$E \subset Z_1 \subset Z_2 \subset \dots \subset K$$

группы K . Действительно, $Z_1 = K_l$ по лемме 2. Далее из доказательств леммы 2 и условия (3) можно получить, что Z_i , $i > 1$, помимо группы K_{il} , может содержать матрицы из K_s , $s > il$, вида $E + p^{m-s} a_s$, где a_s — матрица с равными не делящимися на p диагональными элементами (случай 2б). Но такая матрица условию $ABA_s = e_{12}$ также удовлетворять не может.

Таким образом, имеет место

Теорема. *Группа K является нильпотентной группой класса $\frac{m}{l} - 1$, если l делит m , и $[m/l]$ в противном случае.*

Автор имел возможность ознакомиться с работой [1] еще в рукописи, за что выражает Д. Супруненко искреннюю благодарность.

З а м е ч а н и е. Когда работа была уже сдана в печать, мне стало известно, что аналогичный результат получен Ю. И. Мерзляковым (Алгебра и логика, т. III, в. 4, 1964).

ЛИТЕРАТУРА

1. Супруненко Д. А. Сиб. матем. журнал, т. V, № 6, 1379 — 1386, 1964.
2. Курош А. Г. Теория групп, 1953.
3. Newman M., Smart J. R. Duke Math. J., 30, № 2, June, 1963.

Поступило в редакцию 9.XII 1964

Т. Г. БЫСТРОВА, Ф. І. ФЕДАРАЎ

АБ ПРУГКІХ УЛАСЦІВАСЦЯХ КУБІЧНЫХ КРЫШТАЛЯЎ

У [1] для агульнай характарыстыкі пругкіх уласцівасцей крышталяў было ўведзена паняцце пругкай анізатропіі, якая характарызуе адхіленне іх пругкіх уласцівасцей ад уласцівасцей ізатропнага асяроддзя. Пры гэтым крышталі параўноўваюцца з такім ізатропным асяроддзем, якое менш за ўсё адрозніваецца ад яго па сваіх пругкіх уласцівасцях. Асноўны тэнзар другога рангу, які характарызуе распаўсюджванне пругкіх хваль $\Lambda = (\Lambda_{kl}) = (\lambda_{ijkl} n_i n_j)$, дзе $\rho \lambda_{ijkl} = c_{ijkl}$ — тэнзар модуляў пругкасці; ρ — шчыльнасць; $\mathbf{n} = (n_i)$ — адзінкавы вектар хвалевай нармалі, для ізатропнага асяроддзя можа быць прадстаўлен у форме

$$\Lambda^m = a_m + b_m \mathbf{n} \cdot \mathbf{n}. \quad (1)$$

З умовы мінімальнасці велічыні

$$\langle F_m \rangle = \langle (\Lambda - \Lambda^m)^2 \rangle_{\mathbf{c}^*} \quad (2)$$

атрымліваюцца наступныя значэнні параметраў a_m і b_m :

$$a_m = \frac{1}{2} (\langle \Lambda \rangle_{\mathbf{c}} - \langle \mathbf{n} \Lambda \mathbf{n} \rangle), \quad b_m = \frac{1}{2} (3 \langle \mathbf{n} \Lambda \mathbf{n} \rangle - \langle \Lambda \rangle_{\mathbf{c}}). \quad (3)$$

Тут вуглавая дужка азначаюць усярэдняванне па ўсіх напрамках хвалевай нармалі \mathbf{n} . Для кубічных крышталяў, для якіх

$$\Lambda = c_1 + c_2 \mathbf{n} \cdot \mathbf{n} + c_3 \nu, \quad \nu = \begin{pmatrix} n_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & n_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & n_3^2 \end{pmatrix}, \quad (4)$$

$$c_1 = \frac{c_{44}}{\rho}, \quad c_2 = \frac{c_{12} + c_{44}}{\rho}, \quad c_3 = \frac{c_{11} - c_{12} - 2c_{44}}{\rho}, \quad (5)$$

параметры a_m і b_m маюць выгляд

$$a_m = c_1 + 0,2c_3, \quad b_m = c_2 + 0,4c_3. \quad (6)$$

Ва ўсіх існуючых табліцах пругкіх канстант кубічных крышталяў (гл., напрыклад, [4, 5]) прыводзяцца значэнні канстант c_{11} , c_{12} , c_{44} . Аднак у адпаведнасці з [1—3] больш зручна будаваць тэорыю, выкарыстоўваючы прыведзеныя параметры c_1 , c_2 , c_3 , вызначаемыя формуламі (5). У табліцы (у слупках 8—12) прыводзяцца значэнні гэтых велічынь, а таксама параметраў a_m , b_m (гл. (6)) для ўсіх кубічных крышталяў, для якіх вядомы значэнні канстант c_{kl} (**).

*) Індэкс s азначае след тэнзара.

**) Значэнні пругкіх канстант узяты ў 10^{11} дн/см².

Велічыня $\langle F_m \rangle_{\min} = \langle \Lambda^2 \rangle - \langle \Lambda_m^2 \rangle$, відавочна, характарызуе адхіленне дадзенага крышталю ад бліжэйшага да яго па пругкіх уласцівасцях ізатропнага асяроддзя і можа служыць колькаснай мерай пругкай анізатропіі крышталю. Таму $\sqrt{\langle F_m \rangle_{\min}}$ можна назваць сярэдняй пругкай анізатропіяй крышталю, а велічыню

$$\Delta_m = \sqrt{\frac{\langle F_m \rangle_{\min}}{\langle \Lambda^2 \rangle_c}} \quad (7)$$

— адноснай сярэдняй квадратычнай пругкай анізатропіяй. Для крышталю кубічнай сінгоніі

$$\Delta_m = \frac{0,4 |c_3|}{\sqrt{\langle \Lambda^2 \rangle_c}}, \quad (8)$$

прычым

$$\langle \Lambda^2 \rangle_c = (c_1 + c_2)^2 + 2c_1(c_1 + c_3) + 0,6c_3(2c_2 + c_3). \quad (9)$$

Велічыня Δ_m з'яўляецца важнай характарыстыкай крышталю; значэнні яе вылічаны для ўсіх крышталю кубічнай сінгоніі і прыведзены ў 21-м слупку табліцы.

Ізатропнае асяроддзе, якое характарызуецца тэнзарам (1), (6), з'яўляецца бліжэйшым у сярэднім па сваіх пругкіх уласцівасцях да дадзенага кубічнага крышталю. Калі не праводзіць усярэдняння па напрамках вектара \mathbf{n} , то велічыні Λ_c і $\mathbf{n} \Lambda \mathbf{n}$ з'яўляюцца функцыямі ад \mathbf{n} . Тады замест Λ^m атрымаем тэнзар Λ^0 :

$$\Lambda^0 = a + b \mathbf{n} \cdot \mathbf{n}, \quad a = \frac{1}{2} (\Lambda_c - \mathbf{n} \Lambda \mathbf{n}), \quad b = \frac{1}{2} (3 \mathbf{n} \Lambda \mathbf{n} - \Lambda_c), \quad (10)$$

дзе a і b з'яўляюцца функцыямі \mathbf{n} . Зразумела, што кожнаму напрамку \mathbf{n} адпавядае свой тэнзар Λ^0 , для якога рознасць

$$\Lambda' = \Lambda - \Lambda^0 \quad (11)$$

будзе найменшай у сэнсе $((\Lambda - \Lambda^0)^2)_c = \min$.

У [1] на падставе гэтага метаду разгледжаны асобныя напрамкі для гэтага найважнейшага прыватнага выпадку, атрыманы ў каварыянтнай форме дакладныя агульныя выразы для скорасцей і зрушэнняў пругкіх хваль у адвольных крышталю. Гэты ж падыход дазваляе развіць прыбліжаную тэорыю пругкіх хваль у любых крышталю для любога напрамку хвалевай нармалі [3].

Згодна з гэтай тэорыяй, квадрат скорасці пругкай хвалі ў самым агульным выпадку можа быць запісан у выглядзе

$$v^2 = a + bx, \quad (12)$$

дзе a і b маюць значэнні (10).

Для квазіпадоўжнай хвалі (з індэксам 0) $x = 1 + \xi_0$, ξ_0 выражаецца ітэрацыйнай формулай

$$\xi_0^{(k+1)} = \frac{h^2 + |\alpha|}{(1 + \xi_0^{(k)})^2 - g^2}, \quad \xi_0^{(0)} = 0, \quad (13)$$

дзе

$$\alpha = \frac{1}{b} \Lambda' \quad (14)$$

— тэнзар, які характарызуе адноснае адрозненне Λ ад Λ^0 ;

$$\mathbf{h} = \alpha \mathbf{n} = \frac{1}{b} [\mathbf{n}(\Lambda \mathbf{n}, \mathbf{n})]; \quad (15)$$

$$g^2 = \frac{1}{2} (\alpha^2)_c. \quad (16)$$

Індэкс k у (13) азначае нумар прыбліжэння. У першым прыбліжэнні, якое аказваецца дастатковым для большасці кубічных крышталяў,

$$\xi_0^{(1)} = h^2 + |\alpha|, \quad (17)$$

у другім прыбліжэнні

$$\xi_0^{(2)} = h^2(1 + x^2 - h^2) + |\alpha|(1 + x^2 - 3h^2). \quad (18)$$

Пры гэтым $\{\xi_0^{(1)}\}$ змяшчае правільныя члены да трэцяй ступені ўключна адносна кампанент α , $\xi_0^{(2)}$ — да пятай ступені ўключна.

Для дзвюх квазіпапярочных хваль $x = \xi_{\pm}$, прычым ξ_{\pm} у любым прыбліжэнні выражаецца ітэрацыйнай формулай

$$\xi_{\pm}^{(k+1)} = \pm x - \frac{h^2 \xi_{\pm}^{(k)} + |\alpha|}{(1 - \xi_{\pm}^{(k)}) (\xi_{\pm}^{(k)} \pm x)}, \quad \xi_{\pm}^{(0)} = \pm x. \quad (19)$$

У прыватнасці, у першым прыбліжэнні

$$\xi_{\pm}^{(1)} = \pm x - \frac{1}{2x} (1 \pm x)(h^2 x \pm |\alpha|). \quad (20)$$

Велічыня x вызначаецца суадносінамі

$$x^2 = \frac{1}{2} (\alpha^2)_c - h^2. \quad (21)$$

У выпадку кубічных крышталяў маем

$$\langle x \rangle = 0,084 \frac{|c_3|}{b_1}, \quad b_1 = c_2 + 0,52c_3. \quad (22)$$

Вектар зрушэння ў агульным выпадку можна напісаць у выглядзе

$$\mathbf{u} = \mathbf{n} + \mathbf{u}', \quad \mathbf{u}' \mathbf{n} = 0, \quad (23)$$

дзе

$$\mathbf{u}' = \frac{x\mathbf{h} + [\mathbf{n}(\alpha \mathbf{h}, \mathbf{n})]}{x^2 - x^2}. \quad (24)$$

У першым прыбліжэнні для квазіпадоўжнай хвалі

$$\mathbf{u} = \mathbf{n} + (1 + x^2 - h^2 - |\alpha|)\mathbf{h} + (1 + x^2 - 2h^2)[\mathbf{n}(\alpha \mathbf{h}, \mathbf{n})] \quad (25)$$

і для квазіпапярочнай

$$\mathbf{u} = (x^2 - g^2)\mathbf{n} + (x + \alpha)\mathbf{h}, \quad x = \xi_{\pm}. \quad (26)$$

Ураўненні (12) — (26) даюць поўнае рашэнне задачы знаходжання скорасцей і зрушэнняў пругкіх хваль для ўсіх напрамкаў у любых крышталях.

Хуткасць схадзімасці працэсу ітэрацыі вызначаецца абсалютнай велічынёй вектара \mathbf{h} : $|\mathbf{h}| = \sqrt{h^2}$. Гэта велічыня залежыць ад \mathbf{n} , таму

Велічыні, якія характарызуюць

№ п. п.	Крышталі	Хімічная формула	$c_{11} 10^{11}, \text{дн/см}^2$	$c_{12} 10^{11}, \text{дн/см}^2$	$c_{44} 10^{11}, \text{дн/см}^2$	$\rho, \text{г/см}^3$
1	2	3	4	5	6	7
1	Алмаз	C	94,9	15,1	51,2	3,51
2	Алюміній	Al	12,30	7,08	3,09	2,734
3	Амоній хларыд	NH ₄ Cl	3,79	0,97	0,83	1,526
4	Амоній брамід	NH ₄ Br	3,38	0,91	0,685	2,436
5	Барый нітрат	Ba(NO ₃) ₂	6,04	1,86	1,22	3,24
6	Барый фтарыд	BaF ₂	9,01	4,03	2,49	4,83
7	Ванадый	V	22,79	11,87	4,25	6,022
8	Вальфрам	W	51,5	20,7	15,1	19,3
9	Галій арсенід	GaAs	11,88	5,38	5,94	5,307
10	Галій сурмяністы	GaSb	8,85	4,04	4,32	5,619
11	Галеніт	PbS	10,2	3,8	2,5	7,5
12	Гексаметылен-тэтраамін	C ₆ H ₁₂ N ₆	1,643	0,433	0,515	1,339
13	Германій	Ge	12,89	4,83	6,71	5,35
14	Жалеза	Fe	23,7	14,1	11,60	7,874
15	Золата	Au	20,163	16,967	4,544	19,488
16	Індый сурмяністы	InSb	6,72	3,67	3,02	5,789
17	Калій	K	0,414	0,330	0,264	0,862
18	Калій брамід	KBr	4,18	0,56	0,52	2,819
19	Калій ёдзід	KJ	2,71	0,45	0,364	3,13
20	Калій фтарыд	KF	6,58	1,49	1,28	2,5257
21	Калій хларыд	KCl	4,032	0,66	0,628	1,984
22	Калій цыянід	KCN	1,94	1,18	0,15	1,553
23	Кальцый фтарыд	CaF ₂	16,44	5,02	3,47	3,18
24	Квасцы:	K—Al—S	2,465	1,025	0,865	1,753
25		Rb—Al—S	2,535	1,033	0,844	1,884
26		Cs—Al—S	3,115	1,539	0,839	1,999
27		Tl—Al—S	2,540	1,130	0,814	2,322
28		NH ₄ —Al—S	2,520	1,090	0,811	1,642
29		CH ₃ NH ₃ —Al—S	2,971	1,732	0,584	1,589
30		K—Ga—S	2,356	0,994	0,849	1,898
31		Rb—Ga—S	2,450	0,996	0,853	2,025
32		Cs—Ga—S	3,069	1,533	0,816	2,127
33		NH ₄ —Ga—S	2,395	1,029	0,805	1,784
34		CH ₃ NH ₃ —Ga—S	2,898	1,686	0,562	1,717
35		Rb—In—S	2,366	0,954	0,826	2,107
36		Cs—In—S	2,957	1,407	0,816	2,212
37		Cs—Fe—S	3,038	1,484	0,841	2,065
38		K—Al—Se	2,330	0,970	0,775	1,986
39		Rb—Al—Se	2,426	0,996	0,778	2,113
40		Cs—Al—Se	2,608	1,178	0,742	2,224
41		NH ₄ —Al—Se	2,384	1,040	0,752	1,888

пругкія ўласцівасці крышталя

Табліца

$c_1 \cdot 10^{11}, \text{см}^2/\text{сек}^2$	$c_2 \cdot 10^{11}, \text{см}^2/\text{сек}^2$	$c_3 \cdot 10^{11}, \text{см}^2/\text{сек}^2$	$a_m \cdot 10^{11}, \text{см}^2/\text{сек}^2$	$b_m \cdot 10^{11}, \text{см}^2/\text{сек}^2$	$c_m \cdot 10^{11}, \text{см}^2/\text{сек}^2$
8	9	10	11	12	13
14,6	18,9	-6,44	13,3	16,3	29,6
1,13	3,72	-0,351	1,06	3,58	4,64
0,54	1,18	0,760	0,70	1,48	2,18
0,281	0,65	0,45	0,372	0,84	1,21
0,377	0,951	0,537	0,484	1,165	1,649
0,516	1,35	0	0,516	1,35	1,87
0,706	2,68	0,402	0,786	2,84	3,62
0,782	1,85	0,03	0,789	1,87	2,66
1,12	2,13	-1,01	0,917	1,73	2,64
0,769	1,49	-0,682	0,633	1,22	1,85
0,33	0,84	0,19	0,37	0,91	1,29
0,385	0,708	0,13	0,412	0,762	1,173
1,3	2,16	-1,00	1,05	1,76	2,81
1,473	3,26	-1,73	1,128	2,57	3,70
0,2332	1,104	-0,3023	0,1727	0,9829	1,116
0,522	1,16	-0,517	0,418	0,949	1,37
0,306	0,689	-0,515	0,203	0,483	0,686
0,18	0,383	0,915	0,37	0,749	1,12
0,116	0,26	0,489	0,214	0,46	0,67
0,507	1,10	1,00	0,707	1,50	2,20
0,317	0,649	1,07	0,530	1,076	1,606
0,97	0,856	0,30	1,0	0,975	2,0
1,09	2,67	1,41	1,37	3,23	4,61
0,493	1,078	-0,165	0,460	1,012	1,472
0,488	0,9963	-0,0987	0,428	0,9568	1,385
0,420	1,190	-0,0510	0,410	1,169	1,579
0,351	0,8372	-0,0939	0,332	0,7997	1,13
0,494	1,158	-0,117	0,471	1,111	1,582
0,368	1,458	0,0447	0,377	1,475	1,852
0,447	0,9710	-0,177	0,412	0,9002	1,312
0,421	0,9131	-0,124	0,396	0,8633	1,260
0,384	1,104	-0,0451	0,375	1,096	1,461
0,451	1,028	-0,137	0,424	0,9733	1,397
0,327	1,309	0,0513	0,338	1,330	1,667
0,392	0,8448	-0,114	0,369	0,7992	1,169
0,369	1,005	-0,0371	0,362	0,9901	1,352
0,407	1,126	-0,0620	0,395	1,101	1,496
0,390	0,8787	-0,0957	0,371	0,8404	1,212
0,368	0,8396	-0,0596	0,356	0,8157	1,172
0,334	0,8633	-0,0243	0,329	0,8536	1,182
0,398	0,9492	-0,0847	0,381	0,9153	1,297

№ п. п.	Кристалл	Хімічная формула	$b_1 \cdot 10^{11}, \text{см}^2/\text{сек}^2$	$\frac{ c_s }{b_m}$	$\frac{ c_s }{a_m}$	$\frac{ c_s }{c_m}$
14	15	16	17	18	19	20
1	Алмаз	C	15,5	0,395	0,484	0,217
2	Алюміній	Al	3,54	0,0981	0,331	0,0757
3	Амоній хларыд	NH ₄ Cl	1,58	0,512	1,1	0,349
4	Амоній брамід	NH ₄ Br	0,89	0,54	1,2	0,37
5	Барый нітрат	Ba(NO ₃) ₂	1,230	0,461	1,11	0,326
6	Барый фтарыд	BaF ₂	1,35	0	0	0
7	Ванадый	V	2,88	0,142	0,511	0,111
8	Вальфрам	W	1,87	0,017	0,039	0,012
9	Галій арсенід	GaAs	1,61	0,587	1,11	0,383
10	Галій сурмяністы	GaSb	1,133	0,561	1,08	0,369
11	Галеніт	PbS	0,94	0,20	0,50	0,15
12	Гексаметылен-тетраамін	C ₆ H ₁₂ N ₆	0,778	0,18	0,33	0,12
13	Германій	Ge	1,64	0,571	0,951	0,357
14	Жалеза	Fe	2,37	0,67	1,53	0,467
15	Золата	Au	0,9466	0,308	1,75	0,262
16	Індый сурмяністы	InSb	0,887	0,544	1,24	0,378
17	Калій	K	0,419	1,07	2,53	0,751
18	Калій брамід	KBr	0,859	1,22	2,49	0,820
19	Калій ёдзід	KJ	0,51	1,07	2,29	0,731
20	Калій фтарыд	KF	1,62	0,669	1,42	0,454
21	Калій хларыд	KCl	1,204	0,991	2,01	0,664
22	Калій цыанід	KCN	1,01	0,30	0,29	0,15
23	Кальцый фтарыд	CaF ₂	3,40	0,436	1,03	0,306
24	Квасцы:	K—Al—S	0,9921	0,164	0,359	0,112
25		Rb—Al—S	0,9450	0,103	0,231	0,0713
26		Cs—Al—S	1,163	0,0436	0,125	0,0323
27		Tl—Al—S	0,7884	0,117	0,283	0,0830
28		NH ₄ —Al—S	1,097	0,105	0,249	0,0739
29		CH ₃ NH ₃ —Al—S	1,481	0,0303	0,119	0,0241
30		K—Ga—S	0,879	0,197	0,430	0,135
31		Rb—Ga—S	0,8484	0,144	0,314	0,0988
32		Cs—Ga—S	1,081	0,0416	0,121	0,0309
33		NH ₄ —Ga—S	0,9569	0,141	0,323	0,0979
34		CH ₃ NH ₃ —Ga—S	1,336	0,0385	0,152	0,0307
35		Rb—In—S	0,7856	0,143	0,309	0,0975
36		Cs—In—S	0,9858	0,0374	0,103	0,0274
37		Cs—Fe—S	1,094	0,0564	0,157	0,0414
38		K—Al—Se	0,8289	0,114	0,258	0,0790
39		Rb—Al—Se	0,8086	0,0731	0,167	0,0509
40		Cs—Al—Se	0,8507	0,0285	0,0739	0,0205
41		NH ₄ —Al—Se	0,9051	0,0926	0,222	0,0654

Працяг табліцы

Δ_m	$\sqrt{h^2}$	$ h _{\text{макс}}$	$\sqrt{a^2} c$	α	χ
21	22	23	24	25	26
0,073	0,0770	0,116	0,134	0,0348	6°19'
0,029	0,0191	0,0278	0,0334	0,0083	1°34'
0,13	0,0999	0,135	0,174	0,0406	7°51'
0,14	0,11	0,14	0,18	0,043	8°15'
0,12	0,0899	0,122	0,157	0,0367	7°17'
0	0	0	0	0	0
0,042	0,0276	0,0390	0,0482	0,0117	2°15'
0,0043	0,0033	0,0047	0,0057	0,0014	0°16'
0,14	0,114	0,177	0,200	0,0530	9°16'
0,13	0,109	0,168	0,191	0,0505	8°52'
0,054	0,040	0,056	0,069	0,017	3°12'
0,041	0,034	0,048	0,060	0,015	2°48'
0,13	0,111	0,172	0,194	0,0514	9°10'
0,16	0,131	0,204	0,228	0,0613	10°30'
0,10	0,0600	0,0894	0,105	0,0268	4°56'
0,14	0,106	0,163	0,185	0,0489	8°37'
0,27	0,208	0,344	0,363	0,103	15°43'
0,28	0,238	0,298	0,42	0,0895	16°18'
0,26	0,21	0,27	0,365	0,079	14°50'
0,16	0,131	0,173	0,228	0,0520	10°1'
0,23	0,193	0,248	0,337	0,0744	13°58'
0,048	0,059	0,082	0,10	0,025	4°46'
0,11	0,0850	0,116	0,148	0,0348	6°45'
0,0041	0,0319	0,0467	0,0556	0,0140	2°37'
0,026	0,0201	0,0293	0,0351	0,00878	1°39'
0,012	0,00851	0,0123	0,0148	0,00369	0°42'
0,031	0,0229	0,0333	0,0399	0,0100	1°53'
0,027	0,0205	0,0299	0,0358	0,00895	1°42'
0,0093	0,0059	0,0084	0,0103	0,00252	0°27'
0,049	0,0384	0,0564	0,0669	0,0169	3°91'
0,036	0,0281	0,0411	0,0490	0,0123	2°19'
0,012	0,00810	0,0117	0,0141	0,00351	0°40'
0,036	0,0274	0,0400	0,0478	0,0120	2°15'
0,012	0,00752	0,0107	0,0131	0,00323	0°37'
0,036	0,0278	0,0406	0,0485	0,0122	2°17'
0,010	0,0073	0,0105	0,0127	0,00316	0°36'
0,016	0,0110	0,0159	0,0191	0,00476	0°54'
0,028	0,0222	0,0323	0,0387	0,00970	1°50'
0,018	0,0143	0,0207	0,0249	0,00620	1°10'
0,0075	0,00555	0,00799	0,00967	0,00240	0°27'
0,023	0,0181	0,0262	0,0315	0,00787	1°29'

№ п. п.	Кристалл	Хімічная формула	$c_{11} 10^{11}, \text{дн/см}^2$	$c_{12} 10^{11}, \text{дн/см}^2$	$c_{44} 10^{11}, \text{дн/см}^2$	$\rho, \text{г/см}^3$
1	2	3	4	5	6	7
	Квасцы:					
42		$\text{CH}_3\text{NH}_3\text{—Al—Se}$	2,736	1,008	0,543	1,827
43		Cs—Ga—Se	2,530	1,130	0,756	2,342
44	Кобальт	Co	30,37	15,43	7,47	8,739
45	Крэмній	Si	16,57	6,39	7,96	2,328
46	Літый	Li	1,574	1,333	1,158	0,5471
47	Літый брамід	LiBr	3,94	1,88	1,91	3,47
48	Літый ёдзід	LiJ	2,85	1,40	1,35	4,061
49	Літый фтарыд	LiF	12,46	4,24	6,49	2,646
50	Літый хларыд	LiCl	4,94	2,26	2,49	2,068
51	Магнію вокіс	MgO	28,9	8,8	15,5	3,58
52	Магнетыт	Fe_3O_4	27,3	10,6	9,71	5,15
53	Медзь	Cu	17,620	12,494	8,177	9,018
54	Малібдэн	Mo	45,5	17,6	11,0	10,2
55	Натрый	Na	0,615	0,496	0,592	0,97
56	Натрый фтарыд	NaF	9,70	2,56	2,80	2,79
57	Натрый хларыд	NaCl	5,750	0,986	1,327	2,241
58	Натрый брамід	NaBr	3,87	0,97	0,97	3,203
59	Натрый ёдзід	NaJ	2,93	0,73	0,737	3,667
60	Натрый хларат	NaClO_3	4,99	1,41	1,17	2,49
61	Натрый брамат	NaBrO_3	5,45	1,91	1,50	3,339
62	Нікель	Ni	24,36	14,94	11,96	8,9
63	Паладый	Pd	22,213	17,71	7,137	11,9
64	Пірыт	FeS_2	36,2	—4,64	10,52	5,00
65	Рубідый фтарыд	RbF	5,7	1,25	0,91	2,88
66	Рубідый хларыд	RbCl	3,645	0,61	0,475	2,799
67	Рубідый брамід	RbBr	3,185	0,48	0,385	3,351
68	Рубідый ёдзід	RbJ	2,585	0,375	0,281	3,554
69	Свінец	Pb	4,75	4,03	1,44	11,3437
70	Серабро	Ag	13,149	9,733	5,109	10,635
71	Серабро хларыд	AgCl	6,01	3,62	0,625	5,56
72	Серабро брамід	AgBr	5,62	3,28	0,728	6,473
73	Стронцый азотнакіслы	$\text{Sr}(\text{NO}_3)_2$	4,73	2,18	1,46	2,986
74	Талій брамід	TlBr	3,78	1,48	0,756	7,557
75	Талій хларыд	TlCl	4,01	1,53	0,760	7,00
76	Торый	Th	5,72	4,89	4,78	11,2
77	Храміт	FeCr_2O_4	32,25	14,37	11,67	4,6
78	Шпінэль	MgAl_2O_4	30,05	15,37	15,86	3,6
79	Цынкавая абманка	ZnS	10,79	7,22	4,12	4,087
80	Цэзій хларыд	CsCl	3,64	0,92	0,80	3,99
81	Цэзій брамід	CsBr	3,10	0,84	0,75	4,45
82	Цэзій ёдзід	CsJ	2,45	0,71	0,62	4,52

Прцяг табліцы

$c_1 10^{11}, \text{см}^2/\text{сек}^2$	$c_2 10^{11}, \text{см}^2/\text{сек}^2$	$c_3 10^{11}, \text{см}^2/\text{сек}^2$	$a_m 10^{11}, \text{см}^2/\text{сек}^2$	$b_m 10^{11}, \text{см}^2/\text{сек}^2$	$c_m 10^{11}, \text{см}^2/\text{сек}^2$
8	9	10	11	12	13
0,297	0,8489	0,351	0,368	0,9895	1,357
0,323	0,8053	-0,0478	0,313	0,7862	1,099
0,855	2,620	0	0,855	2,620	3,475
3,42	6,16	-2,47	2,93	5,18	8,10
2,117	4,553	-3,793	1,358	3,036	4,394
0,550	1,09	-0,507	0,449	0,89	1,34
0,332	0,677	-0,308	0,271	0,554	0,825
2,45	4,06	-1,80	2,09	3,34	5,43
1,20	2,30	-1,11	0,982	1,85	2,83
4,33	6,79	-3,04	3,72	5,57	9,29
1,89	3,94	-0,528	1,78	3,73	5,51
0,9067	2,292	-1,245	0,6577	1,794	2,452
1,08	2,80	0,58	1,19	3,04	4,23
0,610	1,12	-1,10	0,391	0,682	1,073
1,00	1,92	0,552	1,11	2,14	3,25
0,5922	1,032	0,9415	0,7805	1,409	2,189
0,30	0,606	0,300	0,36	0,73	1,09
0,201	0,401	0,20	0,24	0,48	0,72
0,470	1,04	0,498	0,570	1,24	1,80
0,449	1,02	0,162	0,482	1,09	1,57
1,3	3,0	-1,6	1,0	2,4	3,4
0,600	2,09	-0,821	0,436	1,76	2,20
2,10	1,18	3,96	2,90	2,76	5,65
0,32	0,75	0,91	0,50	1,12	1,61
0,170	0,388	0,745	0,319	0,686	1,004
0,115	0,26	0,577	0,230	0,49	0,72
0,0791	0,185	0,4637	0,1718	0,37	0,542
0,127	0,482	-0,190	0,089	0,406	0,495
0,4804	1,396	0,6396	0,3525	1,140	1,492
0,112	0,764	0,205	0,153	0,846	0,999
0,113	0,619	0,137	0,140	0,674	0,814
0,489	1,22	-0,124	0,464	1,17	1,63
0,100	0,296	0,104	0,121	0,338	0,458
0,109	0,327	0,14	0,136	0,382	0,518
0,427	0,863	-0,779	0,271	0,552	0,823
2,5	5,7	-1,2	2,3	5,2	7,5
4,4	8,7	-4,7	3,5	6,8	10,2
1,01	2,775	-1,14	0,78	2,318	3,10
0,20	0,431	0,281	0,26	0,543	0,80
0,17	0,357	0,17	0,20	0,426	0,63
0,14	0,294	0,11	0,16	0,338	0,50

№ п. п.	Кристалль	Хімічная формула	$b_1 \cdot 10^{11}, \text{см}^2/\text{сек}^2$	$\frac{ c_a }{b_m}$	$\frac{ c_a }{a_m}$	$\frac{ c_a }{c_m}$
14	15	16	17	18	19	20
	Квасцы:					
42		$\text{CH}_3\text{NH}_3\text{—Al—Se}$	1,032	0,355	0,956	0,259
43		Cs—Ga—Se	0,7804	0,0608	0,153	0,0435
44	Кобальт	Co	2,620	0	0	0
45	Крэ́мній	Si	4,88	0,476	0,843	0,304
46	Літый	Li	2,581	1,25	3,04	0,863
47	Літый бра́мід	LiBr	0,8285	0,570	1,13	0,379
48	Літый ё́дзід	LiJ	0,517	0,556	1,14	0,373
49	Літый фта́рыд	LiF	3,12	0,539	0,860	0,331
50	Літый хла́рыд	LiCl	1,71	0,601	1,13	0,393
51	Магнію вокіс	MgO	5,21	0,544	0,818	0,328
52	Магнетыт	Fe_3O_4	3,67	0,142	0,297	0,0958
53	Медзь	Cu	1,645	0,694	1,89	0,508
54	Малібдэн	Mo	3,11	0,19	0,48	0,14
55	Натрый	Na	0,542	1,61	2,81	1,02
56	Натрый фта́рыд	NaF	2,21	0,258	0,496	0,170
57	Натрый хла́рыд	NaCl	1,522	0,668	1,41	0,430
58	Натрый бра́мід	NaBr	0,762	0,413	0,826	0,275
59	Натрый ё́дзід	NaJ	0,504	0,41	0,82	0,28
60	Натрый хла́рат	NaClO_3	1,30	0,403	0,875	0,276
61	Натрый бра́мат	NaBrO_3	1,11	0,149	0,336	0,103
62	Нікель	Ni	2,2	0,69	1,6	0,48
63	Паладый	Pd	1,66	0,467	1,89	0,374
64	Пірыт	FeS_2	3,24	1,44	1,37	0,700
65	Рубідый фта́рыд	RbF	1,23	0,82	1,8	0,57
66	Рубідый хла́рыд	RbCl	0,775	1,09	2,34	0,742
67	Рубідый бра́мід	RbBr	0,56	1,18	2,51	0,803
68	Рубідый ё́дзід	RbJ	0,426	1,25	2,70	0,856
69	Свінец	Pb	0,383	4,09	2,14	0,385
70	Серабро	Ag	1,063	0,561	1,14	0,429
71	Серабро хла́рыд	AgCl	0,870	0,243	1,34	0,205
72	Серабро бра́мід	AgBr	0,690	0,203	0,977	0,168
73	Стронцый азотнакіслы	$\text{Sr}(\text{NO}_3)_2$	1,13	0,106	0,267	0,0759
74	Талій бра́мід	TlBr	0,350	0,309	0,863	0,227
75	Талій хла́рыд	TlCl	0,399	0,36	1,0	0,27
76	Торый	Th	0,458	1,41	2,88	0,948
77	Хра́міт	FeCr_2O_4	5,2	0,23	0,52	0,16
78	Шпі́нэль	MgAl_2O_4	6,2	0,70	0,14	0,46
79	Цынкавая абманка	ZnS	2,181	0,493	1,47	0,369
80	Цэ́зій хла́рыд	CsCl	0,577	0,517	1,09	0,351
81	Цэ́зій бра́мід	CsBr	0,466	0,40	0,84	0,27
82	Цэ́зій ё́дзід	CsJ	0,352	0,33	0,69	0,22

Працяг табліцы

Δ_m	$V(\hbar^2)$	$ h _{\text{макс}}$	$V(\alpha^2)_c$	z	λ
21	22	23	24	25	26
0,096	0,0925	0,0954	0,121	0,0286	5°32'
0,016	0,0119	0,0172	0,0207	0,00515	0°58'
0	0	0	0	0	0
0,11	0,0929	0,142	0,162	0,0424	7°35'
0,30	0,244	0,412	0,425	0,123	17°35'
0,11	0,111	0,171	0,19	0,0514	9°1'
0,13	0,108	0,167	0,189	0,0500	8°47'
0,12	0,105	0,161	0,183	0,0484	8°32'
0,14	0,117	0,181	0,204	0,0544	9°28'
0,11	0,106	0,164	0,185	0,0491	8°39'
0,035	0,0276	0,0403	0,0481	0,0121	2°16'
0,19	0,135	0,212	0,236	0,0636	10°50'
0,051	0,037	0,052	0,065	0,016	3°1'
0,34	0,314	0,568	0,547	0,170	20°20'
0,061	0,0503	0,0700	0,0876	0,0210	4°4'
0,15	0,130	0,173	0,227	0,0520	10°0'
0,099	0,0806	0,110	0,141	0,0331	6°25'
0,099	0,081	0,11	0,14	0,033	6°25'
0,10	0,0786	0,108	0,137	0,0323	6°16'
0,038	0,0290	0,0410	0,0506	0,0123	2°22'
0,17	0,13	0,21	0,23	0,063	10°60'
0,14	0,091	0,138	0,159	0,0415	7°26'
0,22	0,280	0,343	0,488	0,103	18°4'
0,20	0,16	0,21	0,28	0,063	11°57'
0,26	0,212	0,269	0,369	0,0807	14°59'
0,29	0,23	0,29	0,401	0,087	15°55'
0,30	0,244	0,305	0,426	0,0915	16°35'
0,15	0,0798	0,139	0,139	0,0417	7°28'
0,16	0,109	0,169	0,191	0,0505	9°45'
0,080	0,0473	0,0660	0,0825	0,0198	3°50'
0,065	0,0395	0,0554	0,0689	0,0166	5°12'
0,028	0,0207	0,0301	0,0360	0,00902	1°42'
0,084	0,0602	0,0834	0,105	0,0250	4°51'
0,10	0,070	0,096	0,12	0,029	5°36'
0,33	0,276	0,477	0,481	0,0143	20°6'
0,058	0,045	0,066	0,078	0,020	3°41'
0,16	0,14	0,21	0,24	0,064	10°53'
0,14	0,0961	0,147	0,168	0,0440	7°50'
0,13	0,101	0,136	0,176	0,0409	7°55'
0,10	0,078	0,11	0,14	0,032	6°14'
0,081	0,064	0,088	0,11	0,026	5°7'

для характарыстыкі пругкіх уласцівасцей крышталя ў цэлым можна выкарыстаць сярэдняе квадратычнае $\sqrt{\langle h^2 \rangle}$ або максімальнае значэнне $\sqrt{(h^2)_{\text{макс}}} = |h|_{\text{макс}}$ як функцыі n . Ацэнку велічыні $|h|$ можна зрабіць толькі на падставе даных аб пругкіх канстантах для канкрэтных крышталёў. У выпадку кубічных крышталёў (гл. [2])

$$\sqrt{\langle h^2 \rangle} = 0,195 \frac{|c_3|}{b_1}, \quad (27)$$

$$|h|_{\text{макс}} = 0,28 \frac{|c_3|}{b_1}. \quad (28)$$

Усе характэрныя велічыні (5) — (8), (22), (23), (27), (28), якія ўваходзяць у асноўныя суадносіны, што апісваюць пругкія ўласцівасці крышталёў і распаўсюджванне пругкіх хваль, разлічаны для ўсіх кубічных крышталёў з вядомымі канстантамі і прыведзены ў табліцы, дзе крышталі размешчаны ў алфавітным парадку. Па сутнасці ўсе яны, пачынаючы з 18-й графы, могуць служыць у той ці іншай меры для колькаснай характарыстыкі ступені анізаトロпіі пругкіх уласцівасцей крышталёў, але найбольш характэрнай з іх з'яўляецца адносная сярэдняя квадратычная пругкая анізаトロпія Δ_m , значэнні якой прыведзены ў 21-й графе табліцы. Даныя табліцы сведчаць аб тым, што амаль для ўсіх разгледжаных крышталёў выконваюцца суадносіны

$$\sqrt{\langle h^2 \rangle} < \Delta_m < \sqrt{(h^2)_{\text{макс}}}. \quad (29)$$

Выключэнне складаюць 13 крышталёў; Al, RbBr, V, AgBr, Pd, Au, AgCl, Rb, TlBr, TlCl, $\text{CH}_3\text{NH}_3\text{—Al—S}$, $\text{CH}_3\text{NH}_3\text{—Al—Se}$, $\text{CH}_3\text{NH}_3\text{—Ga—S}$.

Па ступені пругкай анізаトロпіі ўсе крышталі можна ўмоўна падзяліць на крышталі з малой, сярэдняй і вялікай анізаトロпіяй. Умовімся лічыць малаанізатропнымі такія крышталі, для якіх пры знаходжанні скорасці распаўсюджвання пругкіх хваль дастаткова ў сярэднім нулявога прыбліжэння; крышталі, якія патрабуюць першага прыбліжэння, будзем лічыць сярэднеанізатропнымі, а крышталі, якія патрабуюць другога або больш высокага прыбліжэння, аднясем да групы крышталёў з вялікай анізаトロпіяй.

Абмяжоўваючыся нулявым (13), першым (17) або другім (18) прыбліжэннем для вызначэння скорасцей распаўсюджвання пругкіх хваль у крышталях, мы адкідваем адпаведна члены парадку $(\sqrt{\langle h^2 \rangle})^2$, $(\sqrt{\langle h^2 \rangle})^4$, $(\sqrt{\langle h^2 \rangle})^6$ і вышэй. Калі ўлічыць, што дакладнасць вымярэння пругкіх канстант у лепшым выпадку, як правіла, не пераўзыходзіць 10^{-3} , то ўмова, якая вызначае тое (k -е) прыбліжэнне, якім належыць абмежавацца пры разліках для кожнага канкрэтнага крышталя, запішацца ў выглядзе

$$(\sqrt{\langle h^2 \rangle})^{2k+2} \leq 10^{-3}. \quad (30)$$

Значыць, малаанізатропнымі мы можам лічыць тыя кубічныя крышталі, для якіх выконваюцца суадносіны $(\sqrt{\langle h^2 \rangle})^2 \leq 10^{-3}$, г. зн. $\sqrt{\langle h^2 \rangle} \leq 0,0316$. З графы 22 табліцы відаць, што гэтай умове задавальняюць 25 крышталёў з 82, г. зн. 30%. Гэта Al, BaF₂, W, V, Co, Fe₃O₄, NaBrO₃, Sr(NO₃)₂ і вялікая група квасцоў. Найменш анізаトロпным з іх з'яўляецца вальфрам ($\Delta_m = 0,0043$), а найбольш анізаトロпным — ванадый ($\Delta_m = 0,04$).

Сярэднеанізатропнымі будзем лічыць тыя крысталі, для якіх $(\sqrt{\langle h^2 \rangle})^4 \leq 10^{-3}$, г. зн. $0,0316 < \sqrt{\langle h^2 \rangle} \leq 0,178$. Гэта самая шматлікая група, якая складае 55% ад усіх разгледжаных крышталёў. Да яе адносяцца ZnS, NaJ, Cu, Ag, Mo і інш. Значэнні іх адноснай сярэдняй квадратычнай пругкай анізатропіі Δ_m ляжаць у інтэрвале ад 0,041 (K—Al—S) да 0,20 (RbF).

Да групы крышталёў з вялікай анізатропіяй адносяць тыя, для якіх $(\sqrt{\langle h^2 \rangle})^6 \leq 10^{-3}$, г. зн. $0,178 < \sqrt{\langle h^2 \rangle} \leq 0,42$. Такіх крышталёў усяго 11, г. зн. 13% ад усіх разгледжаных. Гэта RbCl, RbBr, RbJ, Na, Li, FeS₂, K, KBr, KCl, KJ, Th. Значэнні Δ_m для іх ляжаць у інтэрвале ад 0,22 (FeS₂) да 0,34 (Na).

У выпадку BaF₂ і Co значэнні c_3 , а значыць, і ўсіх велічынь, якія ўключаюць c_3 , і ў тым ліку і Δ_m , атрымаліся роўнымі нулю. Відавочна, гэта можна растлумачыць недакладнасцю значэнняў пругкіх канстант.

Разгледжанне даных табліцы дазваляе зрабіць некаторыя вывады, якія з'яўляюцца цікавымі для характарыстыкі розных элементаў і іх груп, што ўваходзяць у крышталічныя злучэнні. Напрыклад, усе шчолачныя металы і іх галоідныя злучэнні характарызуюцца вялікім значэннем пругкай анізатропіі. Большасць з іх (злучэнні рубідыю, натрыю, калію і самі шчолачныя металы) адносяцца да групы моцнаанізатропных крышталёў, астатнія — да найбольш анізатропных з групы сярэднеанізатропных крышталёў. Пры гэтым усе злучэнні пэўнага элемента валодаюць прыкладна аднолькавай анізатропіяй, але прысутнасць фтору ва ўсіх выпадках вядзе да яе зніжэння. Цікава адзначыць, што чым большая анізатропія ў самога шчолачнага металу, тым меншая яна ў яго галоідных злучэнняў. Напрыклад, значэнні Δ_m для злучэнняў натрыю ($\Delta_m = 0,34$) з F, Cl, Br і J адпаведна роўныя 0,061; 0,15; 0,099; 0,099, а для злучэнняў калію ($\Delta_m = 0,27$) з гэтымі ж элементамі — 0,16; 0,23; 0,28; 0,26.

Прыкладна аднолькавай анізатропіяй валодае ўся група квасцоў. Амаль усе яны адносяцца да групы малаанізатропных крышталёў. Выключэнне складаюць усяго два з іх (K—Al—S, K—Ga—S), анізатропія якіх крыху вышэй, відаць, за кошт прысутнасці K.

Назіраецца сувязь значэнняў пругкай анізатропіі з месцам элементаў у перыядычнай сістэме Мендзялеева. Напрыклад, усе элементы, якія адносяцца да першай групы табліцы Мендзялеева, валодаюць значнай анізатропіяй (шчолачныя металы, Cu, Ag, Au). Пры гэтым змяншэнне іх анізатропіі адпавядае парадку размяшчэння элементаў у групе і адбываецца даволі плаўна. Да ліку сярэднеанізатропных адносяцца ўсе элементы кубічнай сінгоніі, якія належаць да чацвёртай групы табліцы Мендзялеева, але тут у адпаведнасці з парадкам іх размяшчэння ў групе іх анізатропія ўзрастае. Аб астатніх групах нельга выказаць аналагічных сцвярджэнняў, бо з кубічных крышталёў да іх адносяцца па аднаму-два элементы.

У апошняй графе табліцы прыводзяцца значэнні

$$\chi_{\text{макс}} = \arctg |u'_2|_{\text{макс}}. \quad (31)$$

Тут u'_2 — вектар u' у другім прыбліжэнні і $|u'_2|_{\text{макс}}$ для кубічных крышталёў вызначаецца суадносінамі

$$|u'_2|_{\text{макс}} = \frac{\sqrt{h^2_{\text{макс}}}}{1 \mp \kappa} - \left(\frac{\sqrt{h^2_{\text{макс}}}}{1 \mp \kappa} \right)^3, \quad (32)$$

дзе $\sqrt{h^2_{\text{макс}}}/(1 \mp \kappa)$ — максімальнае значэнне вектара u' у першым прыбліжэнні. У выпадках кубічных крышталёў верхні (ніжні) знак у

гэтай формуле адпавядае $c_3 > 0$ ($c_3 < 0$). Значэнне χ_{\max} дае максімальную велічыню вугла, які ствараецца вектарам зрушэння \mathbf{u} з хвалевай нармаллю \mathbf{n} . Гэты вугал тым большы, чым большая анізатропія крышталю. Напрыклад, для крышталю з найменшай анізатропіяй W ($\Delta_m = 0,0043$), Sr—Al—Se ($\Delta_m = 0,0075$) ён роўны адпаведна $0^\circ 16'$, $0^\circ 27'$, у той час як для моцнаанізатропных Li ($\Delta_m = 0,30$), Th ($\Delta_m = 0,33$), Na ($\Delta_m = 0,34$) — адпаведна $17^\circ 35'$, $20^\circ 06'$, $20^\circ 20'$. Згодна з нашай класіфікацыяй па ступенях анізатропіі, для малаанізатропных крышталю гэты вугал мае велічыню парадку ад некалькіх мінут да $1,5^\circ$, у сярэднеанізатропных — ад $1,5^\circ$ да 10° і для моцнаанізатропных — парадку $10-20^\circ$.

Велічыня $\sqrt{\langle \alpha^2 \rangle}_c$, значэнні якой прыведзены ў 20-й графе, для кубічных крышталю вызначаецца суадносінамі

$$\sqrt{\langle \alpha^2 \rangle}_c = 0,34 \frac{|c_3|}{b_m}. \quad (33)$$

Усе велічыні, прыведзеныя ў тэблiцы, разлічаны з дапамогай пругкіх пастаянных, узятых з [4—6]. Яны могуць знайсці прымяненне пры любых разліках, звязаных з уласцівасцямі пругкіх хваль у крышталю кубічнай сінгоніі.

ЛІТАРАТУРА

1. Федоров Ф. И. Кристаллография, 8, 213, 1963.
2. Федоров Ф. И. Кристаллография, 8, 398, 1963.
3. Федоров Ф. И. ДАН СССР, 155, 792, 1964.
4. Александров К. С., Рыжов Г. В. Кристаллография, 6, 287, 1961.
5. Хантингтон Г. Успехи физических наук, 74, 301, 461, 1961.
6. Alers G. A. and Neighbours J. R. Rev. Mod. Phys., 31, 675, 1959.

Резюме

Рассмотрены результаты приближенной теории упругих волн в кристаллах в применении к кубическим кристаллам. Вычислены значения относительной средней квадратичной упругой анизотропии, максимальный угол отклонения вектора смещения упругой волны от волновой нормали и другие величины, характеризующие упругие свойства кристаллов, произведена классификация кристаллов по степени упругой анизотропии.

Поступило в редакцию 25.XII 1964

В. К. ГРОНСКІ, І. С. САЦУНКЕВІЧ

**НАРАДЖЭННЕ РЭЗАНАНСУ СА СПІНАМ 3/2
 У НЕЙТРЫННЫМ ПУЧКУ ВЫСОКАЙ ЭНЕРГІІ¹**

Пры ўзаемадзеянні нейтрына высокай энергіі з рэчывам выяўлена [1] значная прымесь няпругкай рэакцыі



Эксперыментальныя даныя сведчаць аб наяўнасці пэўнага механізма гэтай рэакцыі, звязанага з нараджэннем прамежкавага стану N^* . Гэты стан уяўляе сабой $\pi - N$ рэзананс са спінам 3/2, ізатапічным спінам 3/2 і масай 1237 Мэв. І. М. Жалезных [2] указаў на магчымасць вытлумачыць назіраемы рост сячэння няпругкага працэсу (1) з энергіяй нейтрына, мяркуючы нараджэнне N^* і спецыфічныя паводзіны фармфактараў, з якіх ён улічыў па сутнасці справы толькі адзін.

Цікава было ў рамках тэорыі 4-ферміённага ўзаемадзеяння атрымаць сячэнне працэсу



пры найбольш агульным выразе для току цяжкіх часцінак. Патрабаванне лоранц-інварыянтнасці і СР інварыянтнасці разам з улікам ураўнення Дзірака і ўраўнення для часцінкі са спінам 3/2 прыводзіць да наступнага матрычнага элемента, які апісвае ў першым прыбліжэнні па канстанце сувязі працэс (2) [3]:

$$H = [\bar{\psi}_\mu \gamma^\alpha (1 - i\gamma_5) \psi_\nu] \left[\frac{g_A}{\sqrt{2}} \bar{\psi}_\beta Q_\alpha^3 \psi_N + \frac{g_V}{\sqrt{2}} \bar{\psi}_\beta i\gamma_5 O_\alpha^3 \psi_N \right], \quad (3)$$

дзе

$$Q_\alpha^3 = f_1 g_\alpha^3 + \left(f_2 \frac{p_\alpha}{x} + f_3 \frac{p_{N\alpha}}{M} + f_4 \gamma_\alpha \right) \frac{p_N^3}{M}$$

(O_α^3 адрозніваецца ад Q_α^3 заменай f_i на f'_i); f_i і f'_i — фармфактары, якія з'яўляюцца сапраўднымі функцыямі квадрата імпульсу перадачы $q^2 = (p - p_N)^2 = (p_\nu - p_\mu)^2$; p , p_N , p_ν і p_μ — імпульсы рэзанансу, нуклона, нейтрына і μ -мезона адпаведна, а ψ , ψ_N , ψ_ν і ψ_μ — іх хвалевыя функцыі; g_V і g_A — канстанты сувязі; x і M — масы рэзанансу і нуклона.

Сячэнне працэсу можна вылічыць з дапамогай метаду праектыўных апэратараў [4]. Праектыўныя матрыцы-дывыды, якія вызначаюць стан часцінкі са спінам 3/2, з зададзеным імпульсам і праекцыяй спіна маюць выгляд:

¹ Пасля завяршэння дадзенай работы ў Phys. Rev. Lett., 13, 673, 1964 з'явіўся артыкул С. Н. Albright, а. Lu Sun Liu, у якім разглядаецца аналагічны працэс. Аднак яго аўтары прыводзяць толькі колькасныя ацэнкі сячэння працэсу пры даволі шматлікіх дапушчэннях і не разглядаюць выпадак нараджэння палярызаванай N^* часцінкі.

$$\tau_{\pm \frac{3}{2}} = \pm \frac{1}{12x^3} \hat{p}^2 (\hat{p} + x) \left(\sigma^2 - \frac{1}{4} \right) \left(\sigma \pm \frac{3}{2} \right) = \psi_{\pm \frac{3}{2}}(p) \tilde{\psi}_{\pm \frac{3}{2}}(p), \quad (4)$$

$$\tau_{\pm \frac{1}{2}} = \mp \frac{1}{4x^3} \hat{p}^2 (\hat{p} + x) \left(\sigma^2 - \frac{9}{4} \right) \left(\sigma \pm \frac{1}{2} \right) = \psi_{\pm \frac{1}{2}}(p) \tilde{\psi}_{\pm \frac{1}{2}}(p). \quad (5)$$

Тут $\hat{p} = p_3 \alpha^3$; $\tilde{\psi} = \psi + \gamma$; α^3 — шаснаццацірадныя квадратныя матрыцы; $\sigma = ie_\alpha e'_\beta I^{\alpha\beta}$, а $I^{\alpha\beta}$ — інфінітэзімальныя апэратары прадстаўлення групы Лоранца. Выкарыстоўваючы прадстаўленне Петраша [5], з (4) і (5) атрымаем:

$$\psi_{\pm \frac{3}{2}} \bar{\psi}_{\pm \frac{3}{2}} = -\frac{\hat{p} + x}{4x} \hat{e}^\pm \hat{e}^\mp e^\pm e^\mp, \quad (4')$$

$$\begin{aligned} \psi_{\pm \frac{1}{2}} \bar{\psi}_{\pm \frac{1}{2}} = & \frac{\hat{p} + x}{4x} \left\{ \hat{e}^\pm \hat{e}^\mp \left[e^\alpha e^\beta + e'^\alpha e'^\beta + g^{\alpha\beta} + \frac{1}{3x} (p^\alpha \gamma^\beta - p^\beta \gamma^\alpha) - \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{1}{3} \gamma^\alpha \gamma^\beta - \frac{2}{3x^2} p^\alpha p^\beta \right] - \hat{e}^\mp \hat{e}^\pm e^\pm e^\mp + \right. \\ & \left. + \frac{2}{3x} (\hat{e}^\pm e^\mp - \hat{e}^\mp e^\pm) (p^\beta + x \gamma^\beta) \right\}, \quad (5') \end{aligned}$$

дзе $\bar{\psi}^\beta = \psi^{+\beta} \gamma^0$; $\hat{p} = p_\alpha \gamma^\alpha$; γ^α — матрыцы Дзірака; $e^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}} (e \pm ie')$; $e = Le_1$; $e' = Le_2$; $e_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ e_1 \end{pmatrix}$; $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ e_2 \end{pmatrix}$; $[e_1, e_2] = s$; s — напрамак, на які праектуецца спін часцінкі ў сістэме спакою; L — матрыца Лоранца, якая адпавядае чыстаму руху.

Сумаванне па спінавых станах дае:

$$\sum_s \psi_s^\alpha \bar{\psi}_s^\beta = \frac{\hat{p} + x}{2x} \left\{ -g^{\alpha\beta} + \frac{1}{3x} (p^\beta \gamma^\alpha - p^\alpha \gamma^\beta) + \frac{1}{3} \gamma^\alpha \gamma^\beta + \frac{2}{3x^2} p^\alpha p^\beta \right\}. \quad (6)$$

Для сячэння працэсу (2) без уліку палярызацыі часцінак атрымаем:

$$d\sigma = \frac{1}{96\pi^2} \frac{E_\mu^2 d\Omega_\mu}{|d(E_\mu + E)|} \frac{E_\nu E_N}{(p_\nu p_N)} \frac{D}{E_\nu E_\nu E_N E}, \quad (7)$$

$$\begin{aligned} D = & \frac{g_A^2}{2} \left\{ 2(p_N p + Mx) \left[\frac{2}{x^2} \left(f_1(p, p) + (p, B) \frac{(pp_N)}{M} \right) \left(f_1(p, p) + (p, B) \frac{(pp_N)}{M} \right) + \right. \right. \\ & \left. \left. + (p, p_\mu) \left(f_1^2 + B^2 - B^2 \frac{(p_N p)^2}{x^2 M^2} \right) + f_1 (N_1 f_2 + N_2 f_3) - 2(p, B) (p, B) \right] + \right. \\ & \left. + f_4 (f_2 N_3^{(+)} + f_3 N_4^{(+)} + f_1 N_5^{(+)} + f_4 N_6^{(+)}) \right\} - \\ & - \frac{g_V^2}{2} \left\{ 2(Mx - p_N p) \left[\frac{2}{x^2} \left(f'_1(p, p) + (p, B') \frac{(pp_N)}{M} \right) \left(f'_1(p, p) + (p, B') \frac{(pp_N)}{M} \right) + \right. \right. \\ & \left. \left. + (p, p_\mu) \left(f_1'^2 + B'^2 - B'^2 \frac{(p_N p)^2}{x^2 M^2} \right) + f'_1 (N_1 f'_2 + N_2 f'_3) - 2(p, B') (p, B') \right] + \right. \\ & \left. + f'_4 (f'_2 N_3^{(-)} + f'_3 N_4^{(-)} + f'_1 N_5^{(-)} + f'_4 N_6^{(-)}) \right\} + \end{aligned}$$

$$+ 2g_A g_V \left\{ f_1 f'_1 - 2f_4 f'_4 \left(1 - \frac{(p_N p)^2}{x^2 M^2} \right) - f_1 f'_4 \left(1 + \frac{p_N p}{xM} \right) - \right. \\ \left. - f'_1 f_4 \left(1 - \frac{p_N p}{xM} \right) \right\} N_7,$$

дзе

$$N_1 = -\frac{2}{Mx} [(p_\mu p) (p_\nu p_N) + (p_\nu p) (p_\mu p_N)];$$

$$N_2 = -\frac{2}{M^2} \left[2(p_\mu p_N) (p_\nu p_N) + (p_\nu p_\mu) \left(\frac{(pp_N)^2}{x^2} - M^2 \right) \right];$$

$$N_3^{(\pm)} = \frac{4((p_N p)^2 - x^2 M^2)}{xM} \left[\frac{(p_\nu p) (p_\mu p_N) + (p_\mu p) (p_\nu p_N) - (p_\nu p_\mu) (p_N p \mp xM)}{xM} \pm \right. \\ \left. \pm \frac{2(p_\mu p) (p_\nu p)}{x^2} \right];$$

$$N_4^{(\pm)} = \frac{4((p_N p)^2 - x^2 M^2)}{xM} \left[\pm \frac{(p_\nu p_N) (p_\mu p) + (p_\mu p_N) (p_\nu p) - (p_\nu p_\mu) (p_N p \pm xM)}{xM} + \right. \\ \left. + \frac{2(p_\nu p_N) (p_\mu p_N)}{M^2} \right];$$

$$N_5^{(\pm)} = 4 \left[\frac{M}{x} (pp_\nu) (pp_\mu) \left(1 \pm \frac{2p_N p}{xM} \right) + (p_\nu p_\mu) \left(xM - \frac{(p_N p)^2}{xM} \right) \mp \right. \\ \left. \mp ((pp_\mu) (p_N p_\nu) + (pp_\nu) (p_N p_\mu)) - \frac{x}{M} (p_N p_\nu) (p_N p_\mu) \right];$$

$$N_6^{(\pm)} = \frac{4((p_N p)^2 - x^2 M^2)}{x^2 M^2} \left[\pm ((p_\nu p_N) (pp_\mu) + (pp_\nu) (p_\mu p_N)) - Mx (p_\nu p_\mu) \right];$$

$$N_7 = (p_\nu p_N) (pp_\mu) - (p_N p_\mu) (pp_\nu);$$

$$B = f_2 \frac{p}{x} + f_3 \frac{p_N}{M}; \quad B' = f'_2 \frac{p}{x} + f'_3 \frac{p_N}{M}.$$

Лёгка праверыць, што пры $f_1 = f'_1$, $f_2 = f_3 = f_4 = f'_2 = f'_3 = f'_4 = 0$ квадрат матрычнага элемента (3), які ўваходзіць у (7), супадае з формулай (3) работы [2].

Залежнасць сячэння ад энергіі нейтрына ў граніцах вялікіх энергій прасцей за ўсё атрымаць у сістэме цэнтра інерцыі. У гэтай сістэме маем:

$$(p_\nu p_N) = E_\nu E_N \left(1 + \frac{E_\nu}{E_N} \right), \quad (p_\mu p) = E_\mu E (1 + a),$$

$$(p_\nu p) = E_\nu E (1 + a \cos \theta), \quad (p_\mu p_N) = E_\mu E_N \left(1 + \frac{E_\nu}{E_N} \cos \theta \right), \quad (8)$$

$$(p_N p) = E_N E \left(1 - \frac{E_\nu}{E_N} a \cos \theta \right), \quad (p_\nu p_\mu) = E_\nu E_\mu (1 - \cos \theta), \quad a = \frac{E_\mu}{E},$$

дзе θ — вугал рассеяння. Энергіі ўсіх часцінак выражаюцца праз энергію нейтрына:

$$\begin{aligned} E_N &= \sqrt{E_\nu^2 + M^2}, \quad a = 1 - \frac{2x^2}{(E_\nu + E_N)^2 + x^2}, \\ E_\mu &= \frac{1}{2} (E_\nu + E_N) - \frac{x^2}{2(E_\nu + E_N)}, \\ E &= \frac{1}{2} (E_\nu + E_N) + \frac{x^2}{2(E_\nu + E_N)}. \end{aligned} \quad (9)$$

З (7) — (9) відаць, што пры аднолькавых паводзінах фармфактараў найбольшы ўклад у сячэнне пры высокіх энергіях узнікае ад членаў

$$\begin{aligned} \frac{2g_A^2}{M^2 x^2} [p_N p + Mx] (p_\nu B) (p_\mu B) (pp_N)^2, \\ \frac{2g_V^2}{M^2 x^2} [Mx - p_N p] (p_\nu B') (p_\mu B') (pp_N)^2. \end{aligned}$$

З-за гэтых членаў поўнае сячэнне пры вялікіх энергіях расце як E_ν^8 (калі лічыць фармфактары пастаяннымі).

У агульным выпадку пераменных фармфактараў сячэнне будзе мець больш марудны энергетычны рост, у прыватнасці можа быць і пастаянным. Рашаючая роля ў выбары фармфактараў, вядома, належыць эксперыменту, які пакуль яшчэ не дае дастаткова пэўных паводзін сячэння [1].

У заключэнне адзначым адну даволі цікавую асаблівасць сячэння працэсу з нараджэннем палярызаванай N^* часцінкі. Для прастаты разгледзім выпадак з $f_1 = f'_1, f_2 = f_3 = f_4 = f'_2 = f'_3 = f'_4 = 0$. Пры гэтым сячэнне ў с. ц. і., калі выбраць s уздоўж p , мае выгляд:

$$\begin{aligned} d\sigma_{\pm}^i &= \frac{E_\mu^2 d\Omega_\mu}{\left| \frac{d(E_\mu + E)}{dE_\mu} \right|} \frac{1}{96\pi^2} \frac{E_\nu E_N}{(p_\nu p_N)} \frac{1}{E_\mu E_\nu E_N E} |R_{\pm}^i|^2, \quad (10) \\ R_{\pm}^{\frac{3}{2}} &= 3g_V^2 \left\{ (p_N p) \pm \frac{p}{|p|} (p_N E - p E_N) \right\} \left\{ (p_\nu p_\mu) \pm \frac{1}{|p|} (p_\nu E_\mu - p_\mu E_\nu) p \right\}, \\ R_{\pm}^{\frac{1}{2}} &= g_V^2 \left\{ (p_N p) \left[\frac{4}{x^2} (p_\nu p) (p_\mu p) - (p_\nu p_\mu) \pm \frac{1}{|p|} (p_\nu E_\mu - p_\mu E_\nu) p \right] \pm \right. \\ &\pm \frac{1}{|p|} (p_N E - p E_N) p \left[7(p_\nu p_\mu) - \frac{4}{x^2} (pp_\nu) (pp_\mu) \pm \frac{3}{|p|} (p_\nu E_\mu - p_\mu E_\nu) p \right] + \\ &+ 2 [(p_N p_\nu) (pp_\mu) - (p_N p_\mu) (pp_\nu)] \mp \frac{2}{|p|} [(p_\nu p) (p_N E_\mu - p_\mu E_N) p + \\ &+ (p_\mu p) (p_N E_\nu - p_\nu E_N) p + (p_N p_\nu) (p_\mu E - p E_\mu) p + (p_\mu p_N) (p_\nu E - p E_\nu) p] \left. \right\}. \end{aligned}$$

Адразу відаць, што нейтрына высокіх энергіяў нараджаюць N^* часцінкі пераважна з праекцыяй спіна $\pm 1/2$. Магчыма, гэта акалічнасць зможа дапамагчы ў выдзяленні працэсаў з нараджэннем N^* .

Аўтары дзякуюць Ф. І. Фёдараву і ўдзельнікам семінара лабараторыі тэарэтычнай фізікі Інстытута фізікі АН БССР за ўвагу і жывую цікавасць да работы.

ЛІТАРАТУРА

1. Block M. M. et. al. Phys. Lett., 12, 281, 1964; Bienlein J. K. et. al. Phys. Lett., 13, 86, 1964.
2. Железных И. М. Phys. Lett., 11, 251, 1964.
3. De Santis V. Phys. Rev. Lett., 13, 217, 1964.
4. Федоров Ф. И. ЖЭТФ, 35, 493, 1958.
5. Petráš M. Č. S. fysik. Časopis, 5, 160, 1955.

Резюме

Рассчитано дифференциальное сечение процесса слабого взаимодействия $\gamma_\mu + N \rightarrow N^* + \mu$, когда один из фермионов имеет спин $3/2$. Учтены все возможные индуцированные члены слабого тока тяжелых частиц. Кратко рассмотрено сечение процесса с рождением поляризованной частицы со спином $3/2$.

Поступило в редакцию 25.XII 1964

П. А. АПАНАСЕВІЧ

НЕКАТОРЫЯ АСАБЛІВАСЦІ УЗАЕМАДЗЕЯННЯ МАГУТНЫХ ПАТОКАЎ ВЫПРАМЕНЬВАННЯ З РЭЧЫВАМ¹

Стварэнне крыніц магутных патокаў выпраменьвання паслужыла пачаткам істотна новага этапа ў развіцці спектраскапіі і яе практычных прымяненняў, стымулявала далейшае развіццё тэорыі ўзаемадзеяння выпраменьвання з рэчывам.

Старая, назавём яе класічная, спектраскапія базіравалася цалкам на тэорыі ўзаемадзеяння слабых патокаў радыяцыі з атамамі і малекуламі. Хоць у аснове гэтай тэорыі ляжаць заканамернасці, якія маюць вельмі агульны характар, вырашэнне канкрэтных задач, як правіла, праводзілася пры выкарыстанні тых або іншых спрашчаючых меркаванняў, што часта вельмі абмяжоўваюць вобласць прымянення атрыманых вывадаў. Асноўным меркаваннем, якое заўсёды выкарыстоўвалася пры вырашэнні задач класічнай спектраскапіі, з'яўляецца дапушчэнне аб маласці ўзаемадзеяння рэчыва з полем выпраменьвання. Атрымліваемыя пры гэтым рэзультаты поўнаасцю адпавядалі патрабаванням эксперымента і практыкі.

Неадпаведнасць вывадаў класічнай спектраскапіі з эксперыментам упершыню выявілася ў саракавыя гады, калі ў галіне радыёспектраскапіі назіралася памяншэнне каэфіцыента паглынання з ростам магутнасці паглынаемай радыяцыі, якое атрымала назву эфекту насычэння [1]. Тлумачэнне гэтага эфекту магла даць толькі тэорыя, якая ўлічвае ўплыў паглынаемага выпраменьвання на размеркаванне паглынаючых сістэм па ўзроўнях [2]. Прыблізна ў гэты час з'яўляецца некалькі эксперыментальных работ па вывучэнню нелінейных эфектаў у аптычнай вобласці [3—5]. Аднак толькі адкрыццё практычнай магчымасці квантавага ўзмацнення патокаў радыяцыі паставіла спектраскапістаў перад неабходнасцю даследаваць узаемадзеянне магутных патокаў выпраменьвання з рэчывам. Да гэтага часу такія даследаванні мелі толькі чыста тэарэтычную цікавасць і зусім не стымуляваліся практыкай эксперымента. Толькі па гэтай прычыне не былі канкрэтна і дэтальна даследаваны тыя з'явы, прынцыповая магчымасць існавання якіх у вобласці магутных патокаў радыяцыі была даказана ўжо на зары стварэння квантавай тэорыі (вялікая роля вымушанага вылучэння, многафатонныя працэсы).

У цяперашні час спектраскапія магутных патокаў выпраменьвання толькі ствараецца. Відаць, яна яшчэ далёкая ад завяршэння. Аднак ужо цяпер ясна вырысоўваюцца многія асаблівасці, якія адрозніваюць узаемадзеянне магутных патокаў выпраменьвання² з рэчывам ад слабых патокаў. Спынімся на гэтых асаблівасцях больш падрабязна.

¹ Даклад, прачытаны на сёмым гадавым сходзе Інстытута фізікі АН БССР.

² Маюцца на ўвазе патокі выпраменьвання, магутнасць якіх усё ж недастатковая для разбурэння (іанізацыі) атамаў і малекул.

1. Вялікая роля вымушанага вылучэння ў працэсах паглынання і пераўтварэння выпраменьвання. Як вядома, існаванне вымушанага вылучэння адкрыта Эйнштэйнам у 1917 г. [6], які даказаў, што колькасць фатонаў, вылучаемых рэчывам, вызначаецца формулай

$$N_{\text{выл}} = (B_{21}u + A_{21})n_2, \quad (1)$$

дзе B_{21} і A_{21} — так званыя каэфіцыенты Эйнштэйна для вымушанага і спантаннага вылучэння; n_2 — колькасць часцінак на зыходным узроўні; u — шчыльнасць падаючай радыяцыі. Неўзабаве было ўстаноўлена, што фатоны, вылучаемыя пры вымушаных пераходах, цалкам супадаюць па частаце, напрамку распаўсюджвання і палярызацыі з падаючымі фато-намі. У далейшым гэта было строга даказана ў рамках квантавай электрадынамікі. Адсюль вынікала [7], што пад рэальным паглынанням трэба разумець не велічыню $B_{12}un_1$, якая апісвае колькасць паглыну-тых фатонаў у рэзультата пераходу часцінак з ніжняга ўзроўню 1 на ўзровень 2, а велічыню

$$N_{\text{пагл}} = B_{12}un_1 - B_{21}un_2 = B_{12}u(n_1 - n_2), \quad (2)$$

паколькі для нявыраджаных узроўняў $B_{12} = B_{21}$. У аптычнай вобласці спектра пры звычайных умовах эксперыменту класічнай спектраскапіі $B_{21}u \ll A_{21} \text{ і } n_1 \gg n_2$, а значыць, на вымушанае вылучэнне заўсёды мож-на не звяртаць увагі. У вобласці радыёчастот, наадварот, вымушанае вылучэнне з'яўляецца галоўным у вылучэнні і параўнальным па велі-чыні з вымушаным паглынанням. Таму развіццё радыёспектраскапіі моцна павысіла цікавасць да гэтай з'явы і прывяло да новага асэнса-вання яе ролі ў працэсах ўзаемадзеяння выпраменьвання з рэчывам. У рэзультата больш чым праз трыццаць год з часу напісання суадносін (2) было ўстаноўлена, што пры некаторых практычна ажыццявімых умо-вах (калі $n_2 > n_1$) гэтыя суадносіны апісваюць не паглынанае, а ўзмац-ненне радыяцыі. Гэты прасты, але вельмі важны вывад і лёг у аснову стварэння магутных крыніц выпраменьвання [8, 9], з'явіўся пачаткам ін-тэнсіўнага развіцця спектраскапіі магутных патокаў.

Як відаць з (1), узрастанне магутнасці выпраменьвання, з якім узаемадзеінічаюць атамы і малекулы, прыводзіць да павышэння ролі вымушанага вылучэння ва ўсіх працэсах вылучэння. У вобласці магут-ных патокаў яго імавернасць $B_{21}u$ становіцца параўнальнай, а іншы раз і большай за імавернасці спантаннага вылучэння і неаптычных пера-ходаў, якія прыводзяць да рэлаксацыі рэчыва да раўнаважнага стану і вызначаюць такія характарыстыкі рэчыва, як шырыня спектральных ліній і час рэлаксацыі. Пры гэтых умовах, якія ўжо ажыццёўлены на практыцы, становіцца істотным уплыў вымушанага вылучэння і наогул вымушаных аптычных пераходаў на спектральныя характарыстыкі ата-маў і малекул. Аднак гутарка аб гэтым пойдзе ніжэй; тут жа трэба яшчэ спыніцца на асобай ролі вымушанага вылучэння ў працэсах рас-сеяння і наогул многафатоннага пераўтварэння выпраменьвання.

Пры абпраменьванні рэчыва, актыўнага, напрыклад, да камбіна-цыйнага рассеяння, могуць ажыццявіцца такія ўмовы, што слабае звы-чайнае камбінацыйнае рассеяне пачне ўзмацняцца ў гэтым жа рэчыве дзякуючы наяўнасці вымушанага рассеяння, састаўной часткай якога з'яўляецца акт вымушанага вылучэння рэчывам рассеянага фатона. Гэта прыводзіць да таго, што спачатку слабае (значна меншае за звы-чайнае) выпраменьванне камбінацыйнага рассеяння можа ўзмацніцца да магутнасцей, якія на многа парадкаў перавышаюць магутнасць вы-праменьвання звычайнага камбінацыйнага рассеяння. Падобнае ўзмац-

ненне можа ажыццяўляцца і пры іншых працэсах пераўтварэння выпраменьвання рэчывам. Пры гэтым у рэзультате ўзмацнення зменіцца не толькі магутнасць, але і іншыя параметры пераўтворанага выпраменьвання; некагерэнтнае пераўтварэнне становіцца кагерэнтным, змяняецца вуглавое і спектральнае размеркаванне пераўтворанага выпраменьвання.

Узмацненне камбінацыйнага рассеяння ўжо назіралася эксперыментальна [10], пры гэтым даказана, што працэс узмацнення можа павялічыць магутнасць камбінацыйнага рассеяння да 30% магутнасці рассеяваемай радыяцыі.

2. Магчымасць практычнага ажыццяўлення многафатонных працэсаў. З квантавай электрадынамікі вядома, што ўсякі працэс узаемадзеяння выпраменьвання з рэчывам складаецца з актаў знікнення на яўных у полі выпраменьвання фатонаў і ўзнікнення новых фатонаў, што адрозніваюцца або супадаюць па сваіх уласцівасцях з падаючымі фатонамі. Імавернасць такіх працэсаў залежыць ад магутнасці выпраменьвання і пры магутнасцях, якія адпавядаюць электрычным напружанасцям, меншым за напружанасць унутрымалекулярных палёў, змяншаецца з ростам колькасці актаў знікнення і ўзнікнення, што складаюць гэты працэс, г. зн. колькасці фатонаў, прымаючых удзел у ім.

Пры магутнасцях патокаў выпраменьвання, выкарыстоўваемых у класічнай спектраскапіі, імавернасці многафатонных працэсаў ляжаць за межамі адчувальнасці эксперымента. Іменна таму многафатонныя працэсы практычна зусім не даследаваліся да гэтага часу, хоць магчымасць іх існавання была ўстаноўлена ў канцы дваццатых гадоў [11]. Існуючыя ўжо ў цяперашні час крыніцы магутных патокаў выпраменьвання перавялі гэту з'яву з вобласці тэарэтычна магчымых у вобласць эксперыментальна назіраемых і практычна важных з'яў.

Прасцейшым многафатонным працэсам з'яўляецца рэлееўскае і камбінацыйнае рассеянне (двухфатонны працэс). Гэтыя з'явы шырока даследаваны ў рамках класічнай спектраскапіі. Хоць пры пераходзе да магутных патокаў іх уласцівасці могуць значна змяніцца, аднак іх сутнасць як двухфатонных працэсаў застаецца нязменнай. Прынцыпова новымі многафатоннымі працэсамі, якія ўзнікаюць пры гэтым пераходзе, з'яўляюцца двух- і многафатоннае паглыннанне, што адбываецца без разрыву актаў знікнення асобных фатонаў якімі-небудзь хаатычнымі працэсамі, г. зн. працэсамі, маючымі выпадковае размеркаванне па частаце, як напрыклад, спантанныя і неаптычныя пераходы, і пераўтварэнне выпраменьвання, якое прыводзіць да памнажэння або складання частот.

Калі паміж актамі знікнення, напрыклад, двух фатонаў укліньваюцца неманахраматычныя пераходы малекул, што ўзаемадзеіваюць з выпраменьваннем, то ўзнікаючыя пры гэтым узбуджаныя станы малекул і працякаючыя пры гэтым працэсы пераўтварэння выпраменьвання па сваёй прыродзе амаль не адрозніваюцца ад адпаведных станаў і працэсаў, узбуджаемых пры знікненні аднаго фатона. Асабліва тут заключаецца толькі ў тым, што акт знікнення другога фатона адбываецца ва ўзбуджаным стане, у які трапляе малекула ў рэзультате знікнення першага фатона і наступнага неманахраматычнага пераходу. Фаза такога стану, як і асноўнага стану, залежыць толькі ад яго энергіі. Ад уласцівасцей падаючага выпраменьвання залежыць толькі імавернасць знайсці ў ім малекулу. Таму няма прынцыповай розніцы паміж працэсамі, зыходным станам малекулы для якіх з'яўляецца такі ўзбуджаны стан, і працэсамі, што адбываюцца на малекуле ў асноўным стане.

Новы від узбуджаных станаў малекулы, а значыць і другаснага свячэння, можа ўзнікаць толькі тады, калі паміж актамі знікнення двух або большай колькасці фатонаў не ўкліняюцца ніякія неманахраматычныя праежжавыя пераходы. Узнікаючы пры гэтым узбуджаны стан малекулы характарызуецца фазай, якая залежыць ад фаз знікшых фатонаў, у рэзультате чаго малекула нібыта помніць уласцівасці гэтых фатонаў. Таму паўторны фатон, які вылучаецца малекулай пры пераходзе з такога стану, з дакладнасцю да шырыні канчатковага i і пачатковага j узроўняў для працэсу ў цэлым валодае частатой, роўнай суме знікшых фатонаў або адрозніваючайся ад гэтай сумы на ўласную частату малекулы ω_{ij} . У выпадку двухфатоннай узбуджалнасці пры $\omega_{ij} = 0$ гэта прыводзіць да ўзнікнення ў другасным свячэнні ліній са змешанымі або падвоенымі (калі частоты фатонаў аднолькавыя) частотамі ў параўнанні з падаючымі частотамі. Пры $\omega_{ij} \neq 0$ працэс складання частот мадуліруецца ўласнай частатой рэчыва, што прыводзіць да ўзнікнення трохфатоннага камбінацыйнага рассеяння.

Утварэнне гармонік і змешванне частот пры $\omega_{ij} = 0$ таксама, як і звычайнае рэлееўскае рассеяне, адбываецца на розных малекулах кагерэнтна. Таму наяўнасць інтэрферэнцыі прыводзіць да таго, што ў напрамках, у якіх хвалі ад розных малекул распаўсюджваюцца з адной і той жа фазай, гэтыя працэсы павінны назірацца з найбольшай інтэнсіўнасцю. У выпадку звычайнага рэлееўскага рассеяння такія напрамкі вызначаюцца ўмовай супадзення хвалевых вектараў падаючых \mathbf{k}' і другасных \mathbf{k} фатонаў у асяроддзі: $\mathbf{k} = \mathbf{k}'$, г. зн. з'яўляюцца напрамкам праломленай хвалі (у ізатропных асяроддзях адзін напрамак, у крышталях — два). Напрамкі найбольш інтэнсіўнага змешвання двух частот (або ўтварэння першай гармонікі) вызначаюцца ўмовай $\Delta\mathbf{k} = \mathbf{k}' + \mathbf{k}'' - \mathbf{k} = 0$ (або $2\mathbf{k}' - \mathbf{k} = 0$). Яна існуе толькі для частот і напрамкаў распаўсюджвання фатонаў, адначасова задавальняючых суадносінам

$$\omega = \omega' + \omega'',$$

$$m \omega n(\omega) = m' \omega' n(\omega') + m'' \omega'' n(\omega''), \quad (3)$$

дзе $n(\omega)$ — паказчык праламлення асяроддзя ў напрамку, вызначаемым адзінкавым хвалевым вектарам \mathbf{m} . Калі ж умова (3) не выканана і асяроддзе ідэальна аднароднае, то пры значна большых размерах асяроддзя (значна большых адваротнай велічыні $|\Delta\mathbf{k}|$) змешванне частот наогул не можа адбывацца. Аднак на аб'ёмах асяроддзя, меншых або параўнальных з $(|\Delta\mathbf{k}|)^{-1}$, яно можа назірацца нават і пры ўмове парушэння дакладнай фазавай падгонкі. У другіх напрамках, якія не задавальняюць умове (3), змешванне частот пры праходжанні магутных патокаў выпраменьвання праз асяроддзе можа назірацца толькі як рэзультат наяўнасці неаднароднасцей у асяроддзі (у прыватнасці, флуктуацый шчыльнасці). Такое паўторнае свячэнне павінна адбывацца ва ўсіх напрамках падобна да звычайнага рэлееўскага рассеяння.

Змешванне частот і ўтварэнне гармонік у напрамках, якія адпавядаюць дакладнай або прыбліжанай фазавай падгонцы, эксперыментальна назіраецца пры абпраменьванні крышталяў KDP, ADP, кварцу і іншых асяроддзяў магутным манахраматычным выпраменьваннем [12, 13]. У іншых напрамках гэта з'ява яшчэ не назіралася, відаць, з-за недахопу магутнасці падаючага выпраменьвання, хоць двухфатоннае ўзбуджэнне фоталумінісцэнцыі, якое з'яўляецца некагерэнтным працэсам, ужо выяўлена эксперыментальна [14, 15].

3. Уплыў выпраменьвання на стан і ўласцівасці ўзаемадзеючага з ім рэчыва (нелінейнасць працэсаў узаемадзеяння). Даследаванне ўплыву

выпраменьвання на ўласцівасці і стан рэчыва і праяўленне гэтага ўплыву ў працэсах паглынання, вылучэння і пераўтварэння выпраменьвання з'яўляецца найбольш цяжкай і менш за ўсё распрацаванай у цяперашні час праблемай спектраскапіі магутных патокаў. Цяжкасці тут абумоўлены галоўным чынам адсутнасцю здавальняючых метадаў вырашэння падобнага тыпу задач.

Метады, што прымяняюцца ў класічнай спектраскапіі, часта тут зусім непрыгодныя. Яны заснаваны на тэорыі ўздзеянняў і зводзяцца практычна да раздзельнага разгляду задачы аб імавернасцях і працэсах пераходаў і аб уласцівасцях рэчыва пры адсутнасці выпраменьвання. Пры гэтым лічыцца, што падаючае выпраменьванне прыкметна не парушае стану тэрмадынамічнай раўнавагі. Яго дзеянне зводзіцца толькі да паяўлення некаторай залішняй у параўнанні з раўнаважнай населенасці на ўзбуджаных узроўнях, прапарцыянальнай магутнасці падаючай радыяцыі і абумоўліваючай нераўнаважнае свячэнне рэчыва (фоталюмінесцэнцыю, рассеянне).

У вобласці ўзаемадзеяння магутных патокаў выпраменьвання з рэчывам энергія ўзаемадзеяння малекул (атамаў) з полем выпраменьвання параўнальная або больш энергіі ўздзеянняў (уплыў навакольнага асяроддзя), якія прыводзяць да раўнаважнага іх размеркавання і вызначаюць многія спектраскапічныя ўласцівасці малекул. Таму для вырашэння такога тыпу задач неабходны метады, якія дазваляюць правільна ўлічыць адначасовае дзеянне ўсіх уздзеянняў на цікавячую нас сістэму. Пры гэтым уздзеянне на малекулу навакольнага асяроддзя пажадана ўлічваць усярэдняна, таму што толькі ўсярэдненыя параметры гэтага ўзаемадзеяння могуць праявіцца ў эксперыменце.

Вельмі цікавым у спектраскапіі магутных патокаў з'яўляецца вывучэнне працэсаў ўзаемадзеяння выпраменьвання з рэчывам у іх часавым развіцці, г. зн. пры адсутнасці ўстанавіўшагася стацыянарнага рэжыму ўзаемадзеяння. Такое даследаванне працэсаў атабраўе адшукання рашэнняў задач аб ўзаемадзеянні, прыгодных для вялікіх (у параўнанні з атамнымі) прамежкаў часу, а значыць, не можа быць праведзена ў рамках звычайнай тэорыі ўздзеянняў.

Найбольш падыходзячым метадам даследаванняў працэсаў ўзаемадзеяння магутных патокаў выпраменьвання з рэчывам з'яўляецца апарат квантава-механічнай матрыцы шчыльнасці, які дазваляе адначасова ўлічваць уплыў на малекулу і статыстычных уздзеянняў з боку асяроддзя, і рэгулярных ўзаемадзеянняў яе з полем электрамагнітнага выпраменьвання.

Мяркуючы, што ўзаемадзеянне малекулы з асяроддзем зусім хаатычнае і характарызуецца шырокім спектрам частот, можна паказаць [16], што дыяганальныя элементы матрыцы шчыльнасці, якія апісваюць размеркаванне малекулы па станах, задавальняюць ураўненням

$$\frac{d\rho_{ii}}{dt} = -i \sum_j H_{ji} e^{i\omega_{ij}t} \rho_{ji} + i \sum_j H_{ji} e^{i\omega_{ij}t} \rho_{ij} - \sum_j d_{ij} \rho_{ii} + \sum_j d_{ji} \rho_{ij}, \quad (4)$$

а недыяганальныя, што характарызуюць карэляцыю фаз асобных станаў, — ураўненням

$$\frac{d\rho_{ij}}{dt} = -i \sum_k H_{ik} e^{i\omega_{ik}t} \rho_{kj} + i \sum_k H_{kj} e^{i\omega_{kj}t} \rho_{ik} - \bar{d}_{ij} \rho_{ij}, \quad (5)$$

прычым $\rho_{ij} = \rho_{ij}^*$. Тут H_{ij} — матрычныя элементы аператара ўзаемадзеяння малекулы з выпраменьваннем; d_{ij} — імавернасці неаптычных пера-

ходаў малекулы, усярэдненыя па стану асяроддзя, а \bar{d}_{ij} — скорасць рэлаксацыі недыяганальных элементаў ρ_{ij} да іх нулявога значэння, якое адпавядае тэрмадынамічнай раўнавазе. Як можна паказаць, велічыня \bar{d}_{ij} вызначае шырыню спектральных ліній γ , абумоўленую ўзаемадзеяннем разглядаемай сістэмы з навакольным асяроддзем.

Рашэнне ўраўненняў (4) і (5) у агульным выпадку сустракаецца з неадольнымі матэматычнымі цяжкасцямі (прынамсі, у цяперашні час). Аднак у асобных выпадках гэтыя ўраўненні дазваляюць даследаваць многія важныя ўласцівасці ўзаемадзеяння выпраменьвання з рэчывам, дапускаюць значныя спрашчэнні. Напрыклад, пры рэзанансным абпраменьванні рэчыва выпраменьваннем шырокага спектральнага саставу (частоты ліній падаючага выпраменьвання супадаюць з лініямі паглынання рэчыва, шырыні абпраменьваючых ліній большыя за шырыні ліній паглынання) з ураўненняў (4) і (5) лёгка атрымаць [17, 18] звычайныя ўраўненні балансу часцінак на энергетычных узроўнях

$$\begin{aligned} \frac{dn_i}{dt} = & - \sum_{j < i} [A_{ij} + B_{ij} u(\omega_{ij})] n_i - \sum_{j > i} B_{ij} u(\omega_{ji}) n_i - \sum_j d_{ij} n_i + \\ & + \sum_{j > i} [A_{ji} + B_{ji} u(\omega_{ji})] n_j + \sum_{j < i} B_{ji} u(\omega_{ij}) n_j + \sum_j d_{ji} n_j, \end{aligned} \quad (6)$$

дзе $n_i = \rho_{ii} n_0$; n_0 — шчыльнасць часцінак. У аптычнай вобласці ўмовы, пры якіх выводзяцца ўраўненні балансу (часта іх называюць ураўненнямі імавернаснага метаду), выконваюцца вельмі часта. Таму ўраўненні (6) знайшлі шырокае прымяненне пры рашэнні многіх задач як класічнай спектраскапіі, так і спектраскапіі магутных патокаў [18, 19].

Як паказана ў [20], пры ўстанавіўшымся стацыянарным рэжыме ўзаемадзеяння рэчыва і выпраменьвання ўмова шырыні спектральнага саставу абпраменьвання не з'яўляецца абавязковай для прымяняльнасці ўраўненняў балансу. Калі ў (6) правесці замену

$$B_{ij} u(\omega_{ji}) \rightarrow B_{ij} \int \frac{\gamma_{ji}}{\pi} \frac{u(\omega) d(\omega)}{(\omega_{ji} - \omega)^2 + \gamma_{ji}^2}, \quad (7)$$

дзе γ_{ji} — спектральная паўшырыня ўласнай лініі рэчыва ω_{ji} , то ў стацыянарным рэжыме іх можна прымяняць пры адвольным спектральным саставе рэзананснага выпраменьвання.

У цэлым уплыў выпраменьвання на рэчыва вивучан яшчэ не дастаткова. Аднак з агульных фізічных меркаванняў ясна, што ён можа стаць істотным толькі пры ўмове, калі энергія ўзаемадзеяння малекул з патокам выпраменьвання параўнальная або большая за энергію ўздзеянняў, што вызначаюць іх спектраскапічныя параметры пры слабых патоках. На падставе прыватных рашэнняў ураўненняў (4) і (5) можна таксама зрабіць і некаторыя больш канкрэтныя заключэнні аб тым, да якіх эфектаў гэтыя ўплывы могуць прыводзіць.

Пры вялікай магутнасці выпраменьвання размеркаванне часцінак па энергетычных узроўнях можа залежаць ад уласцівасцей выпраменьвання. Гэта залежнасць галоўным чынам праяўляецца ў насычэнні паглынання (узмацнення) выпраменьвання рэчывам. З улікам насычэння каэфіцыент паглынання выпраменьвання адвольнага спектральнага саставу ў вобласці лініі паглынання ω_{ji} пры стацыянарным рэжыме ўзаемадзеяння [20] вызначаецца суадносінамі

$$k_{ij}(\omega) = \frac{\bar{k}_{ij}(\omega)}{1 + \int \alpha_{ij}(\omega') u(\omega') d\omega'}, \quad (8)$$

дзе $k_{ij}(\omega)$ — каэфіцыент паглынання ў вобласці той жа лініі пры малых шчыльнасцях энергіі паглынання і $a_{ij}(\omega)$ — параметр нелінейнасці рэчыва. З (8) вынікае [20], што пры паглыннанні выпраменьвання шырокага спектральнага саставу форма контуру лініі паглынання не залежыць ад магутнасці выпраменьвання, тады як у выпадку паглынання манахраматычнага выпраменьвання эфект насычэння прыводзіць да ўшырэння лініі паглынання.

У рамках звычайных уяўленняў спантаннае вылучэнне разглядаецца як працэс, што зусім не залежыць ад магутнасці выпраменьвання. Аднак разлікі, праведзеныя для выпадку ўзаемадзеяння манахраматычнага выпраменьвання з сістэмай, якая валодае двума ўзроўнямі [16, 21, 22], паказваюць, што контур і становішча лініі спантаннага вылучэння моцна залежаць ад магутнасці і частаты выпраменьвання.

Пры малой магутнасці падаючай радыяцыі спантаннае вылучэнне такой сістэмы складаецца з дзвюх ліній: лініі вылучэння, якая валодае ўласнай частатой малекулы ω_{21} і паўшырынёй, роўнай палавіне сумы шырынёў абодвух узроўняў, і лініі рэлееўскага рассеяння, частата якой супадае з частатой падаючай манахраматычнай хвалі і паўшырыня роўная шырыні ніжняга (зыходнага) узроўню. Узрастанне магутнасці падаючага выпраменьвання разам са змяненнем інтэгральнай інтэнсіўнасці ліній рассеяння і ўласнага вылучэння прыводзіць таксама да змянення іх спектральнага саставу — становішча ў спектры, шырыні і контуру. Лінія вылучэння пры гэтым зрушваецца ў становішча лініі рассеяння, а лінія рассеяння не змяняе свайго становішча. Контур абедзвюх ліній змяняецца больш складана. Пры дастатковай магутнасці абпраменьвання ў гэтых лініях паяўляюцца два дадатковыя максімумы, на якія прыпадае значная частка магутнасці другаснага свечэння. Калі магутнасць падаючай манахраматычнай радыяцыі настолькі вялікая, што абумоўленыя ёю імавернасці пераходаў значна большыя за імавернасці спантаннага і ўсіх неаптычных пераходаў, то на цэнтральныя максімумы ліній рассеяння і вылучэння, якія пры гэтых умовах поўнасьцю супадаюць па свайму становішчу, прыпадае толькі палавіна ўсёй магутнасці другаснага выпраменьвання. У гэтым выпадку цэнтральныя максімумы размешчаны пры частаце абпраменьвання выпраменьвання і валодаюць дысперсійнымі контурамі з шырынёй, роўнай шырыні ўласнай лініі пры малых магутнасцях абпраменьвання. Інтэгральная імавернасць спантаннага пераходаў пры гэтым застаецца нязменнай.

Такія паводзіны ліній спантаннага вылучэння пры ўзрастанні магутнасці выпраменьвання можна вытлумачыць наступным чынам. Паддзеяннем магутнага выпраменьвання адбываецца квазіперыядычная перакачка сістэмы з аднаго стану ў другі. У рэзультате гэтага амплітуда імавернасці знайсці сістэму ва ўзбуджаным стане, з якога адбываецца спантаннае вылучэнне, мадуліруецца частатой перакачкі, г. зн. ажыццяўляецца амплітудная мадуляцыя спантаннага вылучэння, што і працяўляецца ў расчэпленні спантаннага вылучэння ліній.

Уплыў выпраменьвання на час жыцця энергетычных узроўняў і шырыню спектральных ліній пакуль вельмі мала вывучан. Асабліва вялікія цяжкасці сустракаюцца тут пры даследаванні нестацыянарнага ўзаемадзеяння малекул з выпраменьваннем адвольнага спектральнага саставу. Колькі-небудзь карэктна разгледзець гэтае пытанне ўдаецца толькі пры ўзаемадзеянні малекул з рэзанансным выпраменьваннем шырокага спектральнага саставу. Пры іх узаемадзеянні з магутным (квазі) манахраматычным выпраменьваннем паняцці часу жыцця ўзроўню і шырыні спектральных ліній, відаць, наогул трацяць сэнс.

Як вядома, час жыцця τ_i і звязаная з ім шырыня энергетычнага

ўзроўню ΔE_i квантавай сістэмы вызначаюцца поўнай імавернасцю ўходу сістэмы з гэтага ўзроўню. Пры ўзаемадзеянні малекулы з магутным выпраменьваннем шырокага спектральнага саставу гэтыя велічыні роўныя

$$\tau_i^{-1} = \frac{\Delta E_i}{\hbar} = \sum_j d_{ij} + \sum_{j < i} A_{ij} + \sum_j B_{ij} u(|\omega_{ij}|), \quad (9)$$

г. зн. лінейна залежаць ад шчыльнасці падаючага выпраменьвання. На аснове ўраўненняў (4) і (5) можна паказаць, што шырыня лініі паглынання ω_{ji} у гэтым выпадку вызначыцца суадносінамі

$$\Delta\omega_{ji} = 2\bar{d}_{ij} + \sum_{k < j} A_{jk} + \sum_{k < i} A_{ik} + \sum_{k \neq j} B_{ik} u(|\omega_{ik}|) + \sum_{k \neq i} B_{jk} u(|\omega_{kj}|). \quad (10)$$

З (10) вынікае, што шырыня лініі паглынання не залежыць ад імавернасці вымушаных аптычных пераходаў $2 B_{ij} u(|\omega_{ij}|)$ паміж камбінуючымі ўзроўнямі i і j , што не адпавядае звычайнаму вызначэнню шырыні спектральных ліній як сумы шырынй камбінуючых узроўняў. Спектральная структура лініі паглынання пры наяўнасці ўзаемадзеяння малекулы з магутным манахраматычным выпраменьваннем мае такі ж складаны характар, як і структура ліній спантаннага вылучэння.

Такім чынам, узаемадзеянне магутных патокаў выпраменьвання з рэчывам мае рад спецыфічных асаблівасцей. Іменна таму спектраскапія магутных патокаў істотна адрозніваецца ад класічнай спектраскапіі як па метадах тэарэтычнага і эксперыментальнага даследавання, так і па разнастайнасці з'яў і працэсаў, даступных вывучэнню. Яна з'яўляецца далейшым заканамерным развіццём навукі аб узаемадзеянні выпраменьвання з рэчывам.

ЛІТАРАТУРА

1. Townes C. H. Phys. Rev., **70**, 665, 1946.
2. Karplus R., Shwinger J. Phys. Rev., **73**, 1020, 1948.
3. Вавилов С. И. Микроструктура света. Изд-во АН СССР, 1950.
4. Свешников Б. Я. ДАН СССР, **51**, 675, 1946.
5. Феофилов П. П. Поляризованная люминесценция атомов, молекул и кристаллов. Физматгиз, 1959.
6. Einstein A. Phys. Zs., **18**, 121, 1917.
7. Ladenburg R. Zs. f. Phys., **4**, 451, 1921; Mon. Not. Roy. Ast. Sol., **85**, 117, 1924.
8. Басов Н. Г., Прохоров А. М. ЖЭТФ, **27**, 431, 1954; **28**, 249, 1955.
9. Gordon J. P., Zeiger H. J., Townes C. H. Phys. Rev., **95**, 282, 1954; **99**, 1264, 1955.
10. Eckardt G., Hellwarth R. W., Mc Clung F. J., Schwarz S. E., Weinger D. Phys. Rev. Letts, **9**, 455, 1962; Hellwarth R. W. Appl. Optics, **2**, 847, 1963.
11. Goepfert-Mayer M. Ann. Phys., **9**, 273, 1931.
12. Franken P. A., Hill A. E., Peters C. W., Weinreich G. Phys. Rev. Letts, **7**, 118, 1961; **8**, 18, 1962; Franken P. A. Ward J. F. Rev. Mod. Phys., **35**, 23, 1963.
13. Armstrong J. A., Blombergen N., Ducuing J., Persohn P. S. Phys. Rev., **127**, 1918, 1962.
14. Kaiser W., Garrett C. G. V. Phys. Rev. Letts, **7**, 229, 1961.
15. Peticolas W. L. Phys. Rev. Letts, **10**, 43, 1963.
16. Апанасевич П. А. Опт. и спектр., **14**, 612, 1963; Изв. АН СССР, сер. физ., **27**, 492, 1963.
17. Апанасевич П. А. Весті АН БССР, сер. фіз.-тэхн. навук, № 2, 1959.
18. Степанов Б. И. Люминесценция сложных молекул. Минск, 1956; Основы спектроскопии отрицательных потоков. Минск, 1962.
19. Степанов Б. И., Грибковский В. П. Введение в теорию люминесценции. Минск, 1963.
20. Апанасевич П. А. ДАН БССР, **7**, 22, 1963; Чех. физ. журн., **B13**, 201, 1963.
21. Апанасевич П. А. Опт. и спектр., **16**, 708, 1964.
22. Раутиан С. Г., Собельман И. И. ЖЭТФ, **41**, 456, 1961.

Резюме

Рассмотрены особенности взаимодействия излучения с веществом, возникающие при переходе от слабых потоков излучения к мощным потокам. Эти особенности логически делятся на три группы: а) большая роль вынужденного испускания в процессах поглощения и преобразования излучения веществом, выражающаяся в усилении радиации (люминесценции, комбинационного рассеяния и т. п.); б) возможность практического осуществления многофотонных процессов (двух- и многофотонное возбуждение, смешивание частот, образование гармоник); в) влияние излучения на состояние и свойства взаимодействующего с ним вещества, приводящего к нелинейности процессов взаимодействия (влияние на распределение частиц по уровням, влияние на спектральный состав линий спонтанного испускания, рассеяния и поглощения, влияние на время жизни энергетических уровней и ширину спектральных линий). Анализ этих особенностей показывает, что спектроскопия мощных потоков существенно отличается от классической спектроскопии как по методам теоретического и экспериментального исследования, так и по многообразию явлений и процессов, доступных изучению.

Поступило в редакцию 18.VI 1964.

А. П. ІВАНОУ

РАССЕЯННЕ СВЯТЛА БУЙНЫМІ ЧАСЦІНКАМІ СФЕРЫЧНАЙ ФОРМЫ

Разлікі па рассеянню святла асобнымі часцінкамі на падставе строгага рашэння ўраўненняў Максвэла вельмі складаныя [1, 2]. У той жа час для буйных часцінак, калі іх размеры значна большыя за даўжыню хвалі святла, добра падыходзяць метады, заснаваныя на геаметрычнай аптыцы. Праўда, карыстаючыся гэтымі метадамі, нельга ўлавіць тонкай вуглавой структуры рассеянага выпраменьвання, асабліва ў вобласці малых вуглоў рассеяння, некаторых фазавых суадносін. Аднак разлікі геаметрычнай аптыкі з-за іх прастаты вельмі зручныя ў тых выпадках, калі патрабуецца ведаць не дэталі індикатрысы рассеяння¹, а яе прыбліжаную форму, ступень асіметрыі і г. д.

Наяўныя літаратурныя даныя не даюць поўнай карціны рассеяння святла часцінкамі, у якіх аптычныя пастаянныя вар'іруюцца ў шырокім дыяпазоне. З гэтай прычыны цікава вывучыць уласцівасці светлага поля, рассеянага на часцінках сферычнай формы, у больш агульным выпадку ў рамках геаметрычнай аптыкі.

Існавала думка, што ў адрозненне ад [3] паглынне часцінак не вельмі вялікае і паказчык праламлення вызначаецца толькі сваёй рэчывнай часткай. Паглынне праяўляецца толькі ў аслабленні святла, калі яно праходзіць унутры часцінкі. Пры гэтых меркаваннях вынікі разліку часткова выкладзены ў рабоце [4]. Тут дадзены больш поўны аналіз.

У прыбліжэнні геаметрычнай аптыкі прамень, адлюстраваны ад паверхні часцінкі, разглядаецца як вытворны прамень першага парадку, двойчы праламлены — як прамень другога парадку і г. д. Метад разліку індикатрыс рассеяння святла буйнымі празрыстымі часцінкамі апісан у манаграфіі К. С. Шыфрына [2]. У выпадку празрыстых часцінак інтэнсіўнасць праменьняў розных парадкаў выражаецца формуламі:

$$I_1 = \frac{a^2}{4R^2} I_0 r, \quad (1)$$

$$I_m = \frac{a^2}{4R^2} I_0 (1-r)^2 r^{m-2} \theta(m), \quad (2)$$

дзе

$$\theta(m) = \frac{\sin 2\varphi}{\sin \beta_m \left[1 - \frac{m-1}{n} \frac{\cos \varphi}{\cos \psi} \right]}. \quad (3)$$

¹ У большасці выпадкаў на практыцы адсутнічаюць монадысперсныя сістэмы з часцінкамі ідэальнай сферычнай формы. Невыкананне гэтых умоў прыводзіць да знікнення дэталей вуглавога размеркавання выпраменьвання.

У формулах (1), (2) I_0 — інтэнсіўнасць падаючага святла; m — парадак променя ($m = 2, 3, 4, \dots$); a — радыус расейваючай часцінкі; R — радыус сферы назірання; r — каэфіцыент адлюстравання ад паверхні часцінкі; φ і ψ — адпаведна вуглы падзення і праламлення; n — паказчык праламлення рэчыва расейваючай часцінкі; β_m — вугал рассеяння (вугал паміж напрамкам распаўсюджвання падаючага і рассеянага святла), вызначаемы з суадносін

$$\beta_m = (m - 2)\pi + 2[\varphi - (m - 1)\psi]. \quad (4)$$

Пры наяўнасці паглынання формула (2) прымае выгляд

$$I_m = \frac{a^2}{4R^2} I_0 (1 - r)^2 r^{m-2} \theta(m) e^{-(m-1)kd \cos \psi}, \quad (5)$$

дзе $d = 2a$ — дыяметр часцінкі; k — каэфіцыент паглынання рэчыва расейваючай часцінкі; $d \cos \psi$ — шлях, які праходзіць прамень унутры часцінкі. Каэфіцыенты адлюстравання r вызначаліся па формулах Франэля. У выбраным намі прыбліжэнні лічылася, што r не залежыць ад k . Вядома [2], што ў выпадку вялікай празрыстай часцінкі ($n = 1,33$) на першы парадак прыпадае 6,6% усёй энергіі, на другі — 88,5, на трэці — 4, на чацвёрты — 0,6% і г. д. З павелічэннем паглынання доля другога і наступных парадкаў хутка памяншаецца. Таму пры разліку паглынаючых часцінак дастаткова было ўлічваць першыя тры парадкі.

З аналізу прыведзеных формул можна ўпэўніцца, што вуглавое размеркаванне выпраменьвання для буйных часцінак залежыць толькі ад двух параметраў: kd і n .

Разгледзім рэзультаты разліку.

На рыс. 1 (I) прыведзены індыкатрысы рассеяння святла пры розных значэннях kd і n . Ход крывых паказвае, што максімальная яркасць рассеянага святла назіраецца ў напрамку распаўсюджвання падаючага святла. З павелічэннем вугла рассеяння β яркасць памяншаецца (часта на некалькі парадкаў). Затым існуе вобласць радуг, дзе шчыльнасць рассеянай радыяцыі ўзрастае ў малым інтэрвале вуглоў. Пры далейшым павелічэнні β $\lg I$ або няспынна падае, або (у некаторых выпадках) у раёне 180° крыху павялічваецца.

Рост паглынальнай здольнасці kd прыводзіць да таго, што ў вобласці вялікіх і малых вуглоў рассеяння інтэнсіўнасць святла моцна памяншаецца, а паміж імі асаблівай залежнасці ад паглынання няма. Павелічэнне kd прыводзіць таксама да памяншэння ролі радуг у вуглавым размеркаванні выпраменьвання.

Разгледжаныя вывады адносяцца да часцінак з любым паказчыкам праламлення.

Форма індыкатрысы рассеяння моцна залежыць ад паказчыка праламлення часцінак. Індыкатрыса рэзка выцягваецца ўперад (пры малых β) з памяншэннем паказчыка праламлення. У гэтым выпадку яркасць у вобласці малых вуглоў назірання ўзрастае, а пры вялікіх β — памяншаецца. Найбольш моцныя радугі ўзнікаюць пры малых паказчыках праламлення. Вобласць асноўнай радугі зрушваецца да малых вуглоў назірання, калі n памяншаецца.

Важнай характарыстыкай рассеянага святла з'яўляецца ступень яго палярызацыі

$$P = \frac{I_s - I_p}{I_s + I_p}, \quad (6)$$

дзе I_s і I_p — інтэнсіўнасці святла, палярызаванага ў плоскасці падзення і перпендыкулярна да яе.

На рис. 1 (II) прыведзена залежнасць ступені палярызацыі ад вугла рассеяння для розных kd і n . Крывыя маюць вельмі складаны выгляд і моцна залежаць ад разглядаемых параметраў. Таму цяжка нават улавіць якую-небудзь заканамернасць. Гэта звязана з тым, што пры змяненні kd ці n рэзка змяняюцца суадносіны паміж інтэнсіўнасцямі прамянёў розных парадкаў. Адсюль выцякае, што на практыцы для комплексу часцінак цяжка назіраць такую палярызацыйную карціну, бо амаль немагчыма стварыць высокую ступень монадыспернасці і сферычнасці часцінак.

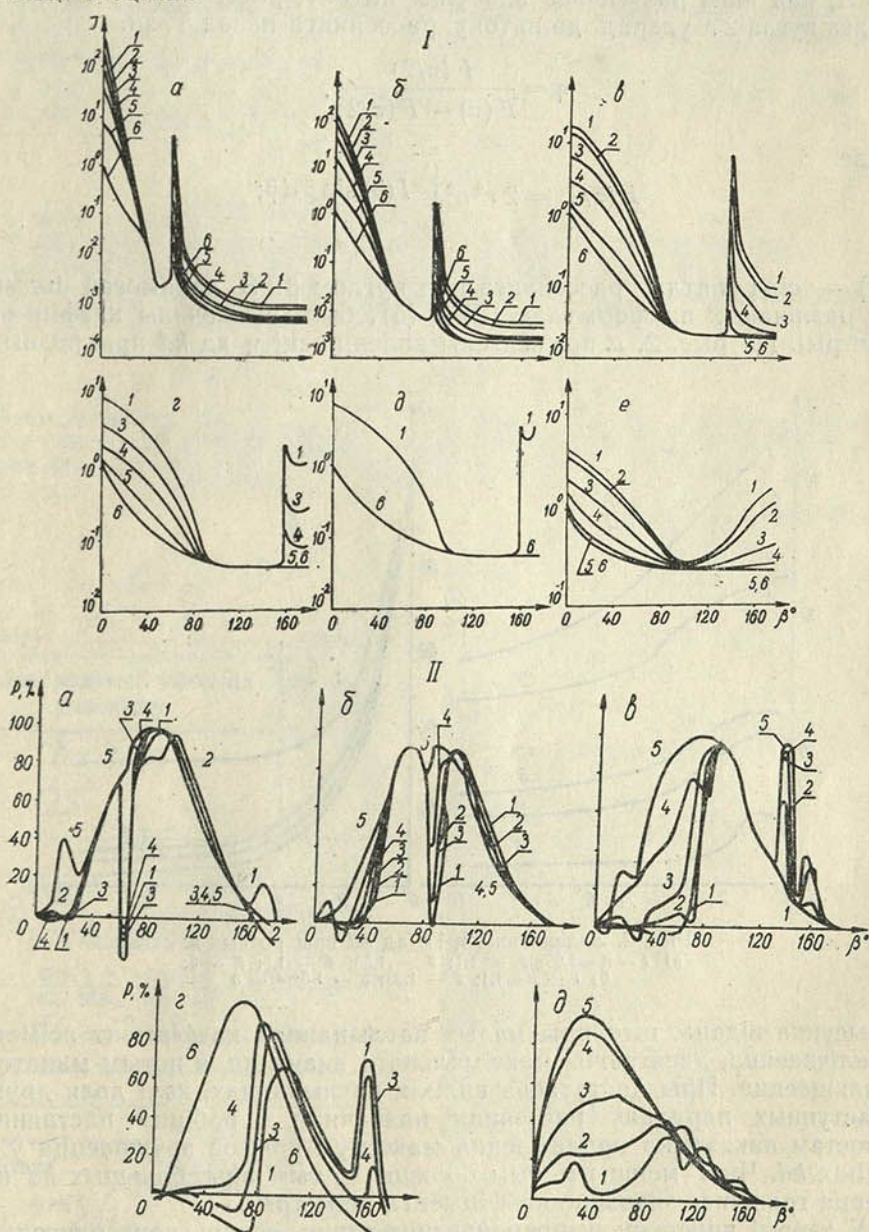


Рис. 1. Індыкатары рассеяння сферычных часцінак (I), а таксама залежнасць p ад β (II) пры розных kd і n :

1 — $kd=0$; 2 — 0,2; 3 — 1; 4 — 2; 5 — 4; 6 — 10; а — $n=1,05$; б — 1,1; в — 1,33; г — 1,5; д — 1,59; е — 3

Індикатрыса рассеяння часцінкі з'яўляецца адной з яе важных аптычных характарыстык. Але індикатрыса рассеяння мае вялікую нязручнасць — яе нельга характарызаваць адным лікам. Таму вельмі часта складанае вуглавае размеркаванне выпраменьвання прыблізна характарызуюць адным або двума параметрамі, і такое набліжэнне ў радзе выпадкаў аказваецца зусім дастатковым для апісання некаторых з'яў. Напрыклад, часам форму індикатрысы рассеяння характарызуюць ступенню яе выцягнутасці ўперад. Для гэтага ўводзіцца каэфіцыент асіметрыі, пад якім разумеюць адносіны патоку, рассеянага ў межах цялеснага вугла 2π уперад, да патоку, рассеянага назад, г. зн.

$$\eta = \frac{F(\pi/2)}{F(\pi) - F(\pi/2)}, \quad (7)$$

дзе

$$F(\pi/2) = 2\pi^2 a^2 \int_0^{\pi/2} I(\beta) \sin \beta d\beta; \quad (8)$$

$I(\beta)$ — сіла святла, рассеянага пад вуглом β . З дапамогай індикатрысы; разлічаных па формулах (2) і (5), былі вызначаны каэфіцыенты асіметрыі. На рыс. 2, а прыведзены залежнасці η ад kd пры розных n .

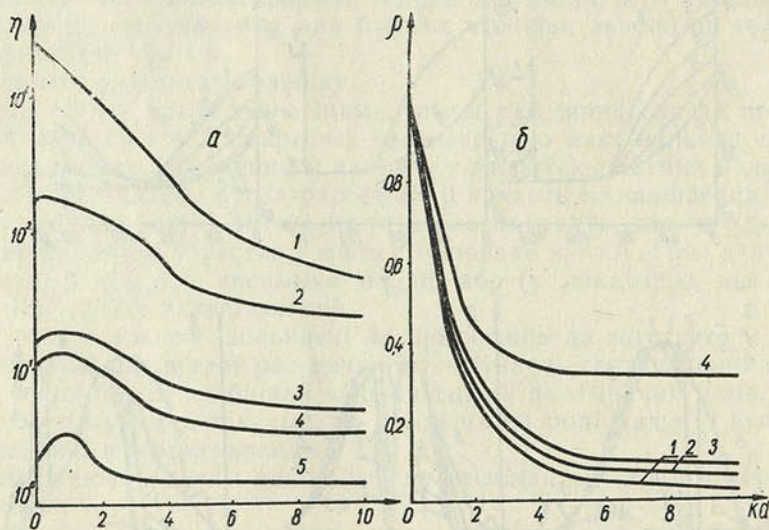


Рис. 2. Залежнасць η і ρ ад kd пры розных n :
а) 1 — $n=1,05$; 2 — 1,1; 3 — 1,33; 4 — 1,5; 5 — 3;
б) 1 — $n=1,1$; 2 — 1,33; 3 — 1,5; 4 — 3

З рысунка відаць, што пры малых паглынаннях каэфіцыент асіметрыі павялічваецца, дасягаючы максімальнага значэння, а потым манатонна памяншаецца. Пры дастаткова вялікіх паглынаннях, калі доля другога і наступных парадкаў рассеяння нязначная, η робіцца пастаянным. З ростам паказчыка праламлення максімум крывой зрушваецца ў бок вялікіх kd . Чым меншы n , тым большы η , тым пры большых kd назіраецца гранічнае значэнне каэфіцыента асіметрыі.

У тэорыі пераносу выпраменьвання важна ведаць верагоднасць выжывання кванта святла $\lambda = \frac{\rho}{\rho + k}$. У рамках геаметрычнай аптыкі $\rho + k =$

$= 2\pi a^2$ і не залежить ад паглынальнай здольнасці асяроддзя. Таму з дакладнасцю да пастаяннага множніка $2\pi a^2 \lambda$ супадае з каэфіцыентам рассеяння ρ .

На рыс. 2, б прыведзены крывыя залежнасці каэфіцыента рассеяння ад паглынання пры розных паказчыках праламлення. З ростам kd спачатку назіраецца хуткае памяншэнне ρ , потым змяншэнне каэфіцыента рассеяння запавольваецца і ў бесканечнасці ρ імкнецца да пастаяннага значэння, якое роўна каэфіцыенту адлюстравання граніцы раздзелу двух асяроддзяў пры яе асвятленні цалкам дыфузным святлом. Павелічэнне n прыводзіць да росту долі рассеянага святла ў аслабленым частцінкай светлавым патоку.

У заключэнне аўтар выказвае падзяку Л. М. Рабілка за ўдзел у вядомай вылічальнай рабоце.

ЛІТАРАТУРА

1. Mie G. Ann. d. Phys., 25, 377, 1908.
2. Шифрин К. С. Рассеяние света в мутной среде. ГИТТЛ, Л., 1951.
3. Пришивалко А. П. Оптика и спектроскопия, 14, в. 2, 1963.
4. Иванов А. П., Копаник Е. К., Пришивалко А. П., Предко К. Г. Сб. «Актинометрия и атмосферная оптика». Изд. АН СССР, 1964.

Резюме

Применен метод расчета в рамках геометрической оптики для исследования рассеяния света частицами сферической формы. Изучены индикатрисы рассеяния и асимметрии для частиц с разными показателями поглощения и преломления.

Поступило в редакцию 13.V 1964

А. Р. НЕПАКАЙЧЫЦКІ, У. У. ПАНЦЯЛЕЕУ, А. А. ЯНКОУСКИ
**АБ МАГЧЫМАСЦІ ВЫКАРЫСТАННЯ ЗАКАНАМЕРНАСЦЕЙ
ВЫГАРАННЯ РЭЧЫВА У КРЫНІЦАХ СВЯТЛА
ДЛЯ ПАВЫШЭННЯ КАНЦЭНТРАЦЫЙНАЙ АДЧУВАЛЬНАСЦІ
СПЕКТРАЛЬНАГА АНАЛІЗУ**

У работах [1, 2] устаноўлена, што ў працэсе выгарання дазіраванай колькасці рэчыва, а таксама ў пачатковых стадыях працэсу абыскрывання пры спектральным аналізе паступленне рэчыва ў плазму разраду, а значыць, і змяненне інтэнсіўнасці спектральных ліній здавальняюча апісваецца аналітычным выразам

$$i = i_0 e^{-\alpha t} (1 - e^{-\beta t}), \quad (1)$$

дзе i — інтэнсіўнасць спектральнай лініі; i_0 — інтэнсіўнасць спектральнай лініі ў пачатковы момант часу для выпадку імгненнага нарастання інтэнсіўнасці; α і β — пастаянныя, якія характарызуюць адпаведна скорасць выгарання рэчыва і скорасць нарастання інтэнсіўнасці спектральнай лініі; t — час.

Аналіз гэтага выразу паказвае, што інтэнсіўнасць спектральнай лініі спачатку хутка павялічваецца, дасягаючы максімальнага значэння, а потым павольна зніжаецца.

У дадзенай рабоце даследавалася адначасовае паступленне ў воблака разраду хімічных элементаў, якія ўваходзяць у састаў пробы, з мэтай выкарыстання заканамернасцей паступлення рэчыва ў газараднае воблака ў працэсе яго выгарання для павышэння канцэнтрацыйнай адчувальнасці спектральнага аналізу.

Для адначасовай рэгістрацыі змянення інтэнсіўнасці многіх спектральных ліній у часе намі фатаграфаваліся спектры на фотопласцінцы ў рухаючайся касеце спектрографа ИСП-30. Для гэтага ў электрычнай схеме спектрографа былі зроблены змяненні, якія дазвалялі ажыццявіць безупынны раўнамерны рух касеты са скорасцю прыкладна 2 мм/сек і аўтаматычна ўключаць генератар у адзін і той жа час. Такім чынам можна было фатаграфавальныя спектры шляхам шматразовых накладкаў (ад 50 да 150). У якасці аб'ектаў даследавання выкарыстоўваліся солі розных элементаў, а таксама эталоны сплаваў на алюмініевай, цынкавай, меднай і жалезнай асновах.

Растворы солей хімічных элементаў наносіліся па чарзе ў выглядзе кропель на вугальны электрод. Канцэнтрацыя элементаў у растворах складала 0,1%. Вугальныя электроды папярэдне прамочваліся растворам поліціролу ў ацэтане. Для трывалага замацавання сухога астатку выкарыстоўваўся водны раствор цукрозы. На тарцовых паверхнях электродаў былі лункі дыяметрам 2,5 мм, якія забяспечвалі канцэнтрацыю сухога астатку на невялікім участку паверхні.

Эталоны сплаваў зачышчаліся на наждачнай паперы і паліраваліся. Даследаванні праводзіліся ў рэжымах крыніцы святла, якія забяспечвалі мінімальную плошчу паражэння пробы. Выгаранне сумесі дазіраваных элементаў праводзілася ў катодных рэжымах палярнай дугі і нізкавольтнай іскры (проба служыла катодам) пры току ў 1 а. Разрадная ёмкасць нізкавольтнай іскры складала 10 мкф. Індуктыўнасць контуру была роўная нулю. Сплавы даследаваліся ў нізкавольтнай іскры ў тых жа ўмовах. Падстаўнымі электродамі служылі вугальныя шпянні дыяметрам 6 мм, заточаныя на конус з вуглом заточки 70°. Велічыня аналітычнага праежку 1,5 мм. Шчыліна спектрографа пры фатаграфаванні спектра сталей і дазіраванай колькасці элементаў была роўная 0,613 мм, для каляровых сплаваў — 0,028 мм. Вышыня шчыліны 0,5 мм. Адлегласць электродаў ад шчыліны складала 250 мм. Асвятляльныя лінзы не прымяняліся. Спектры фатаграфаваліся на фотапластінках тыпу П. Фотаметрыраванне спектраў праводзілася на мікрафотометры МФ-2. У іскры катоднай палярнасці даследаваліся наступныя спектральныя лініі (для сумесі хімічных элементаў): Si I 2881,6 Å; Mo II 2909,1 Å; Al I 3082,1 Å; Cr II 2971,9 Å; Zn I 2800,9 Å; Ni I 3003,6 Å; Fe II 2395,6 Å; Bi I 2627,9 Å; Cu I 3247,5 Å; Mn II 2576,1 Å; V II 3110,7 Å. У дуге катоднай палярнасці—Si I 2516,1 Å; Bi I 2898,0 Å; Mn II 2949,2 Å; Al I 3082,2 Å; Fe II 2599,4 Å; Pb I 2833,1 Å; Cr II 2836,8 Å; Mo I 3170,4 Å; Ni I 3003,6 Å; Cu II 2600,3 Å; V II 3001,2 Å.

Крывыя выгарання дазіраванай колькасці рэчыва, пабудаваныя ў каардынатах лагарыфм інтэнсіўнасці — час, маюць ярка выражаны максімум інтэнсіўнасці з наступным спадом. У рэжыме нізкавольтнай іскры часта назіраюцца паўторныя максімумы. Іх узнікненне можна растлумачыць няпоўным згараннем пробы з прычыны вялікай лакальнасці разраду. У дуге, дзе проба спальвалася поўнасцю, паўторных максімумаў не назіралася. Ход крывых у гэтым выпадку можа быць здавальняюча апісаны эмпірычнай залежнасцю (1). Пры гэтым выгаранне розных хімічных элементаў адбываецца з рознымі скорасцямі.

У табліцы прыведзены канцэнтрацыі элементаў у даследаваных сплавах і даўжыні хвалей аналітычных ліній.

Аналіз змянення ў часе інтэнсіўнасці спектральных ліній сплаваў паказаў, што ў катодным рэжыме нізкавольтнай іскры для алюмініевых сплаваў інтэнсіўнасці спектральных ліній усіх элементаў у пачатковай стадыі абыскрывання змяняюцца ў адпаведнасці з формулай (1). Для сталей назіраецца паўторны максімум інтэнсіўнасці, які часам перавышае першы. Час наступлення другога максімуму памяншаецца з павелічэннем колькасці крэмію ў сталі. Невялікія, менш выражаныя паўторныя максімумы назіраюцца ў медна-цынковых сплавах з павелічэннем у іх колькасці цынку, а таксама ў цынковых сплавах для алюмінію і медзі. Інтэнсіўнасці дугавых і іскравых ліній, належачых аснове сплаву, змяняюцца прыкладна аднолькава. Толькі ў першыя секунды гарэння крыніцы святла прыкметна некаторая невялікая розніца паміж дугавымі лініямі і лініямі іанізаваных атамаў. Такая розніца інтэнсіўнасцей з'яўляецца, відаць, вынікам рознай рэабсорбцыі спектральных ліній.

Пры адпаведным выбары рэжыму крыніцы святла, формы і матэрыялу падстаўнога электрода можна для маналітных проб розных сплаваў атрымаць змяненне інтэнсіўнасці спектральнай лініі ў часе, якое здавальняюча апісваецца формулай (1). У прыватнасці, у іскры аноднай палярнасці генератара ГЭУ-1 (ёмкасць 10 мкф, індуктыўнасць 0, ток 1 а) з меднымі электродамі, заточанымі на тупы конус, для сталей былі атрыманы крывыя абыскрывання з адным максімумам для спектральных ліній Mn I 4783,4 Å, Cr I 4254,3 Å і Fe I 4383,5 Å. Змяненне ін-

Табліца

Хімічны састаў даследаваных сплаваў і аналітычныя лініі

Даследаваныя сплавы	Элемент	Працэнтная колькасць элементаў у даследаваных сплавах				Даўжыня хвалі, Å
		№ 53	№ 55	№ 56	№ 57	
Сталі	Si	0,08	1,66	2,09	1,17	Si I 2881,6
	Cr	3,98	0,51	1,83	4,25	Cr II 2677,2
	Mn	1,59	0,53	0,95	1,84	Mn II 2576,1
	Fe	91,22	94,24	91,55	90,48	Fe I 3020,6 Fe II 2599,4
Цынкавыя сплавы		№ 11	№ 13	№ 22	№ 25	
		0,11	0,30	0,42	0,14	Fe II 2599,4
	Fe	93,5	88,5	84,3	83,4	Zn I 3302
	Zn	1,93	1,59	0,14	0,76	Mg I 2795,5
	Mg	2,7	8,81	12,03	7,58	Al I 3092,7
	Al					Al II 2816,2 Cu I 3274 Cu II 2369,9
Алюмініевыя сплавы		№ 1	№ 3	№ 5		
	Si	7,33	4,57	2,86		Si I 2881,6
	Cu	0,8	3,20	8,47		Cu I 3274
	Fe	1,6	0,41	0,10		Fe II 2599,4
	Mn	0,01	0,23	1,0		Mn II 2576,1
Mg	0,79	0,20	0,038		Mg II 2795,5 Al III 3601,6 Al II 3586,5 Al I 3092,7	
Медна-цынкавыя сплавы		№ 27	№ 30	№ 32	№ 35	
	Cu	88,32	81,10	75,65	58,3	Cu II 2506,3
	Zn	11,50	18,65	24,28	41,55	Zn II 2558

тэнсіўнасці спектральных ліній рэгістравалася на фотаэлектрычным сцілометры ФЭС-1 з электронным патэнцыяметрам ЭПП-09 [1, 2]. Падобныя крывыя з адным максімумам былі атрыманы і для іншых сплаваў.

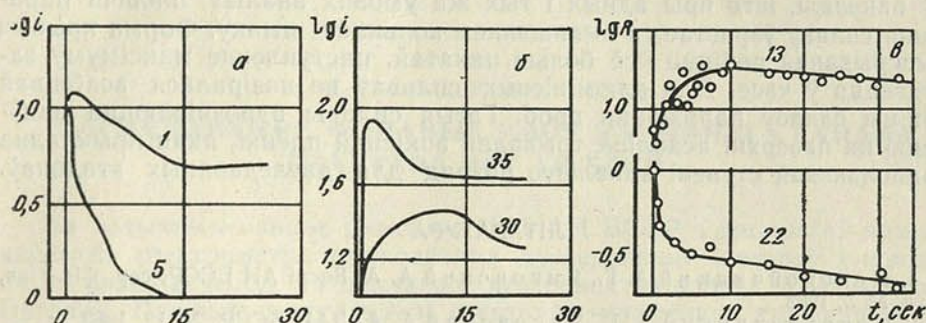
Атрыманыя намі даныя паказваюць, што ход крывых аб'явілі аб'явілі ад канцэнтрацыі элемента ў сплаве. Пры гэтым назіраюцца два выпадкі. У першым выпадку — чым меншая канцэнтрацыя элемента ў пробе, тым хутчэй адбываецца нарастанне і спад інтэнсіўнасці спектральных ліній гэтага элемента. Гэтыя залежнасці выразна праяўляюцца для магнію і жалеза ў цынкавых сплавах і ўсіх прымесеў у алюмініевых сплавах (рыс. 1, а).

Пры колькасці ў цынку 1,5% магнію інтэнсіўнасць лініі Mg II 2795,5 Å павольна нарастае, дасягае невялікага максімуму і потым павольна ўбывае. Пры 0,15% магнію максімум інтэнсіўнасці наступае значна раней і потым інтэнсіўнасць хутка памяншаецца. У другім выпадку нарастанне і спад інтэнсіўнасці спектральнай лініі адбываюцца больш павольна са змяншэннем канцэнтрацыі прымесі ў сплаве. Заканамернасці другога роду назіраюцца для цынку ў бінарных сплавах медзь — цынк (рыс. 1, б).

Змяненне адноснай інтэнсіўнасці спектральных ліній у працэсе аб'явілі аб'явілі таксама залежыць ад канцэнтрацыі легіруючага элемента. Адноснае інтэнсіўнасць ліній Mg II 2795,5 Å і Zn II 3302 Å павялічваецца ў пачатковыя моманты аб'явілі аб'явілі ў цынкавых сплавах з кан-

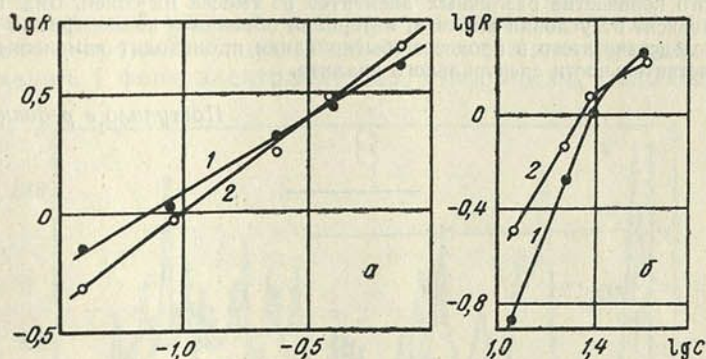
цэнтрацыяй магнію 1,5%, а ў сплавах з канцэнтрацыяй магнію 0,15% — змяншаецца (рыс. 1, в).

Канцэнтрацыйная залежнасць крывых выгарання дазваляе павысіць канцэнтрацыйную адчувальнасць спектральнага аналізу, паколькі нахіл градуіровачных графікаў залежыць ад выбару часу на крывой абыскрывання. Для магнію ў алюмініі нахіл павялічваецца з павелічэннем часу



Рыс. 1. Часавая залежнасць абсалютнай (а, б) і адноснай (в) інтэнсіўнасцей спектральных ліній (нумары крывых адпавядаюць нумарам эталонаў табліцы): а—алюмініевыя сплавы, лінія Mg II 2795,5 Å; б—сплавы медзь—цынк, лінія Zn I 4810,5 Å; в—цынкавыя сплавы;

$$\lg R = \lg \frac{I_{\text{Mg } 2795,5}}{I_{\text{Zn } 3302}}$$



Рыс. 2. Змяненне нахілу градуіровачнага графіка ў залежнасці ад часу абыскрывання:

а—алюмініевыя сплавы, 1—абыскрыванне 2 сек, 2—10 сек;

$$\lg R = \lg \frac{I_{\text{Mg } 2795,5}}{I_{\text{Al } 3092,7}}$$

б—сплавы медзь—цынк, 1—абыскрыванне 2 сек, 2—15 сек;

$$\lg R = \lg \frac{I_{\text{Zn } 4810,5}}{I_{\text{Cu } 5105,5}}$$

абыскрывання (рыс. 2, а). Падобныя залежнасці для магнію назіралі Цымер і Цёрак у алюмініевых сплавах [3]. Для цынку ў медна-цынкавых сплавах з павелічэннем часу абыскрывання нахіл градуіровачных графікаў памяншаецца (рыс. 2, б). Гэта пацвярджаецца таксама ў работах Пракоф'ева [4, 5].

Розніцу ў паводзінах крывых абыскрывання і градуіровачных графікаў розных сплаваў можна растлумачыць, відаць, рознымі фізічнымі

ўласцівасцямі сплаваў. Вядома, што са змяненнем колькасці легіруючага элемента ў сплаве змяняецца яго цеплаправоднасць, электрычнае супраціўленне, каразійная ўстойлівасць і іншыя ўласцівасці.

У выніку пад уздзеяннем электрычнага разраду змяняецца велічыня плошчы і глыбіня паражэння пробы, г. зн. змяняецца паступленне рэчыва пробы ў зону разраду. Нашы даследаванні медна-цынковых сплаваў паказалі, што пры адных і тых жа ўмовах аналізу плошча паражэння сплаву ўзрастае са змяншэннем колькасці цынку. Форма крывых абыскрывання робіцца ўсё больш пакатай, наступленне максімуму зацягваецца ў часе. Для алюмініевых сплаваў не назіралася асаблівай розніцы слядоў паражэння проб. Гэтыя сплавы адрозніваюцца наўнаско на паверхні асабліва трывалай вокіснай плёнкі, якая прыкладна ў аднолькавай ступені лакалізуе разрад для даследаваных эталонаў.

ЛІТАРАТУРА

1. Непокойчыцкий А. Г., Янковский А. А. Вестн АН БССР, сер. фіз.-тэхн. навук, № 3, 1963.
2. Непокойчыцкий А. Г., Янковский А. А. ДАН БССР, № 12, 1963.
3. Zimmer K., Tögök. Ann. Univ. scient. Budapest, sec. chim., 2, 395, 1960.
4. Прокофьев В. К. ЖТФ, т. XIV, в. 12, 1944.
5. Прокофьев В. К. Изв. АН СССР, сер. физ., т. IX, № 6, 1945.

Резюме

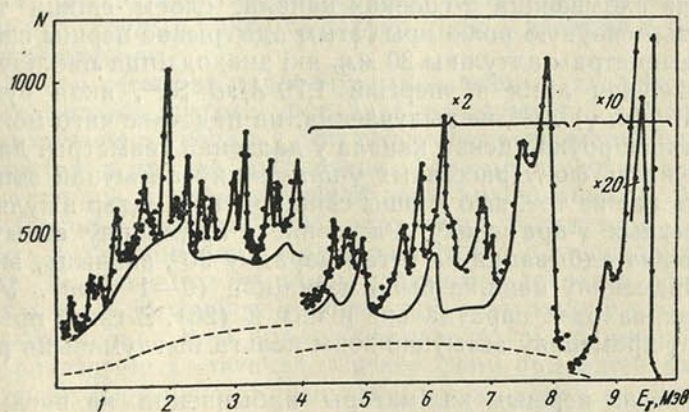
Исследованы кривые обыскрывания химических элементов, входящих в состав сталей и сплавов на алюминиевой, цинковой и медной основах, а также кривые выгорания дозированного количества различных элементов из смесей их солей. Вид кривых обыскрывания зависит от условий анализа, материала образца и концентрации химического элемента. Вследствие этого в процессе обыскрывания происходит изменение концентрационной чувствительности спектрального анализа.

Поступило в редакцию 4.V 1964

Я. І. ФІРСАЎ, Э. А. РУДАК

ДАСЛЕДАВАННЕ ФОНАВЫХ УМОУ ДАТЫЧНАГА КАНАЛА РЭАКТАРА ИРТ АН БССР

На датчыным канале рэактара ИРТ АН БССР з дапамогай камптонаўскага спектрометра праводзяцца даследаванні спектраў γ -праменняў з рэакцыі (n, γ) на цеплавых нейтронах на ўзорах з раздзеленых ізатопаў. Першыя даследаванні спектраў γ -праменняў з рэакцыяй $\text{Cl}^{35}(n, \gamma)\text{Cl}^{36}$ і $\text{Fe}^{54}(n, \gamma)\text{Fe}^{55}$ паказалі, што ўстаноўка прыдатная для вымярэння на ўзорах са здабыткам масы на сячэнне рэакцыі $\sigma(n, \gamma)$ парадку 20—30 г·барн. Аднак гэтыя ж даследаванні паказалі, што фон γ -праменняў, якія ідуць з канала рэактара, вялікі і неабходна далейшае ўдасканальванне эксперымента. На рыс. 1 прыведзен спектр γ -праменняў з рэакцыі $\text{Fe}^{54}(n, \gamma)\text{Fe}^{55}$ без выліку фону. Трэба адзначыць, што ў спектры прысутнічаюць таксама γ -лініі з рэакцыі $\text{Cl}^{35}(n, \gamma)\text{Cl}^{36}$ з-за наяўнасці прымесьці хлору ва ўзоры, аднак гэта не мае значэння для ацэнкі фонавых умоў канала. Фон у гэтым спектры складаецца з дзвюх частак: фону γ -праменняў актыўнай зоны, рассеяных узораў і каліма-тарамі ў канал, і фону электронаў пар, утвораных у радыятары спект-



Рыс. 1. Спектр γ -праменняў з рэакцыі $\text{Fe}^{54}(n, \gamma)\text{Fe}^{55}$ без выліку фону

рометра γ -праменьнямі самога ўзору. Фон электронаў пар праведзен пункцірнай лініяй. Сумарны фон электронаў пар і рассеяных γ -праменняў актыўнай зоны праведзен суцэльнай лініяй. Асноўныя асаблівасці фону наступныя:

1. Фон рассеяных γ -праменняў актыўнай зоны перавышае фон ад электронаў пар.

2. Фон рассеяных γ -праменняў актыўнай зоны асабліва вялікі ў вобласці энергій да 2 Мэв і немалы нават пры энергіях 6—7 Мэв.

Паколькі мінімальнае колькасць рэчыва ва ўзоры, необходимая для падзейнага даследавання, у канчатковым выніку залежыць ад велічыні фону, то з гэтых фактаў відаць, што належыць правесці дадатковыя фонавыя даследаванні для адшукання аптымальнага варыянта геаметрыі доследу, пры якім фон рассеяных γ -праменняў актыўнай зоны быў бы істотна меншы за фон электронаў пар, вызначаемы выключна самім спектрам γ -праменняў узору.

Геаметрыя доследу пры даследаванні спектра γ -праменняў з рэакцыі $Fe^{54} (n, \gamma) Fe^{55}$ прыведзена на рыс. 2, а. Яна выбіралася з умовы

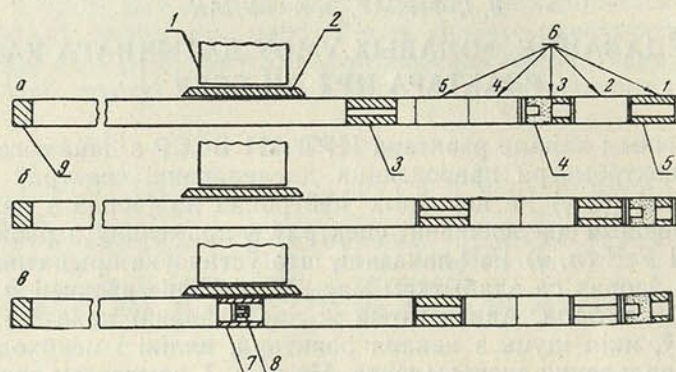


Рис. 2. Схема эксперыментаў па даследаванні фонавых умоў датчнага канала:

1 — актыўная зона; 2 — свінцовы шчыт; 3 — свінцовы каліматыр, які фарміруе пучок γ -праменняў узору; 4 — фільтр нейтронаў; 5 — свінцовы каліматыр; 6 — секцыя шыбера канала; 7 — кантэйнер узору; 8 — узор; 9 — свінцовая заглушка

экраніроўкі радыятара спектрометра ад γ -праменняў з рэакцыі $Al^{27} (n, \gamma) Al^{28}$, якая адбываецца ў сценах канала, слоём свінца таўшчынёй 200—300 мм. Асноўную ролю пры гэтым адыгрывае першы свінцовы каліматыр з дыяметрам адтуліны 30 мм, які знаходзіцца паблізу актыўнай зоны. Інтэнсіўная лінія з энергіяй 1,79 МэВ Si^{28} , якая суправаджае рэакцыю $Al^{27} (n, \gamma) Al^{28}$, не вылучаецца, на падставе чаго можна меркаваць, што экраніроўка сценак канала ў дадзенай геаметрыі дастатковая. Аднак наяўнасць фону рассеяных γ -праменняў актыўнай зоны вялікай энергіі паказвае на тое, што першы свінцовы каліматыр з'яўляецца крыніцай рассеяных γ -праменняў. Рассеянне γ -праменняў актыўнай зоны ўзорам павінна адбывацца на вугал парадку 90° , значыць, энергія рассеяных γ -праменняў павінна быць невялікай (0—1 МэВ). Узор, малы па размерах, валодае параўнальна нізкім Z (26). З гэтай прычыны фон рассеяных γ -праменняў актыўнай зоны нельга вытлумачыць рассеяннем на ўзоры.

Рассеянне на першым каліматыры адбываецца на вуглы парадку $20-30^\circ$, што і растлумачвае наяўнасць рассеяных γ -праменняў вялікай энергіі. Маса каліматыра вялікая, атамны нумар $Z=82$. Значыць, можна меркаваць, што першы каліматыр у дадзенай геаметрыі з'яўляецца асноўнай крыніцай фону рассеяных γ -праменняў актыўнай зоны. Для вывяснення гэтай акалічнасці былі праведзены два вымярэнні фону γ -праменняў актыўнай зоны, рассеяных першым каліматырам. У першым вымярэнні геаметрыя доследу тая ж, што і ў эксперыментах з Fe^{54} . Адсутнічае толькі графітавы кантэйнер узору. Спектр фону прыведзены на рыс. 3, а чорнымі кропкамі. Фон вялікі ва ўсім дыяпазоне энергій. Вылучаюцца дзве інтэнсіўныя лініі з энергіямі 2,22 МэВ і 7,38 МэВ з рэакцыі $H^1 (n, \gamma) H^2$ і $Pb^{207} (n, \gamma) Pb^{208}$. Першая рэакцыя ідзе ў парафіна-

вым фільтры цеплавых нейтронаў, другая — у першым каліматыры. У другім вымярэнні першы каліматыр размешчан у пятай секцыі шыбе-ра канала. Фільтр цеплавых нейтронаў змешчан у першую секцыю шыбе-ра з мэтай змяншэння інтэнсіўнасці дэйтэрыевай лініі 2,22 Мэв. Геа-метрыя вымярэння дадзена на рыс. 2, б. Спектр фону прыведзен на рыс. 3, а. Фон рассеяных γ -праменняў у гэтым вымярэнні значна меншы. Поўнасцю знікла дэйтэрыева лінія, моцна зменшылася інтэнсіўнасць лініі свінцу 7,38 Мэв. Лініі Al^{28} з энергіяй 7,73 Мэв з рэакцыі $Al^{27}(n, \gamma) Al^{28}$ не назіраецца, значыць, можна лічыць, што экраніроўка сце-

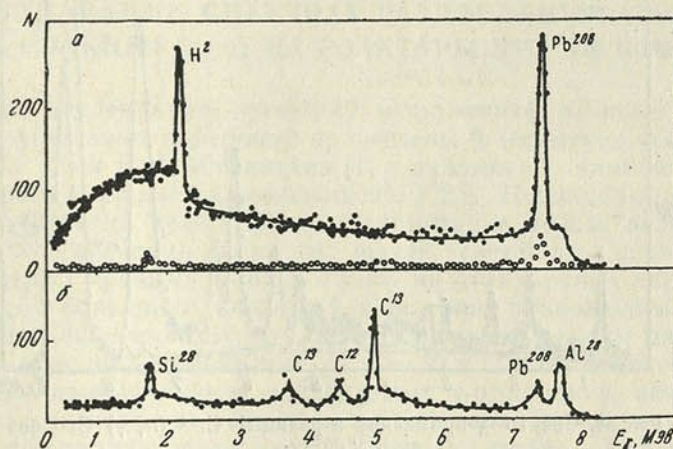


Рис. 3. Спектр γ -фону датычнага канала ў розных вымя-рэннях

нак канала свінцовымі каліматырамі ў дадзенай геаметрыі добрая. У спектры прысутнічае таксама слабая лінія з энергіяй 1,76 Мэв, паходжанне якой няяснае.

На падставе гэтых вымярэнняў для далейшых даследаванняў была выбрана геаметрыя другога фонавага вымярэння. Для высвятлення ўкладу кантэйнера з узорам у фон рассеяных γ -праменняў актыўнай зоны было зроблена трэцяе вымярэнне. Геаметрыя доследу дадзена на рыс. 2, в. Супраць цэнтра актыўнай зоны змяшчаецца ўзор у графітавым кантэйнеры. У якасці ўзору для гэтага вымярэння ўзят графіт. 20 г графіту ў алюмініевым цыліндры вагой 4 г змяшчаліся ў капсулу кантэйнера. Аналагічным чынам у далейшым даследаваліся раздзеленыя ізатопы. Вось чаму фон γ -праменняў, атрыманы ў гэтым вымярэнні, выкарыстоўваецца пры апрацоўцы спектраў γ -праменняў з рэакцыі (n, γ) на раздзеленых ізатопах. Спектр фону прыведзен на рыс. 3, б. Фон рассеяных γ -праменняў прыкметна ўзрос, аднак па сваёй велічыні ён значна меншы за фон рассеяных γ -праменняў першага вымярэння. Назіраецца некалькі ліній, абавязаных сваім узнікненнем рэакцыі (n, γ) у матэрыяле кантэйнера ўзору і першага каліматыра. Алюмініевы цыліндр ўзору дае лініі з энергіяй 1,78 і 7,73 Мэв. Графітавы кантэйнер і графітавы ўзор даюць лініі з энергіяй 3,68 і 4,95 Мэв. Лінія з энергіяй 4,44 Мэв абавязана, відаць, няпругкаму рассеянню хуткіх нейтронаў у графіце.

Канчатковая ацэнка фонавых умоў была зроблена пасля вывучэння спектра γ -праменняў з рэакцыі $Cr^{50}(n, \gamma) Cr^{51}$, прыведзенага на рыс. 4. У якасці ўзору выкарыстоўваўся вокіс хрому Cr_2O_3 . Вага ўзору 7,2 г, счэненне рэакцыі (n, γ) на цеплавых нейтронах ізатопа Cr^{50} — 16,3 барн.

Фон электронаў пар праведзен на рысунку пункцірнай лініяй, сумарны фон рассеяных γ -праменняў актыўнай зоны і электронаў пар — суцэльнай лініяй. У гэтым вымярэнні фон электронаў пар пераважае над фонам рассеяных γ -праменняў актыўнай зоны. Відавочна, фон рассеяных γ -праменняў можа быць зменшан за кошт замены масіўнай графітавай капсулы ўзору лёгкай капсулай з берылію, аднак адносіны ефекту да фону істотна не палепшацца з прычыны таго, што яны вызначаюцца ў асноўным фонам электронаў пар.

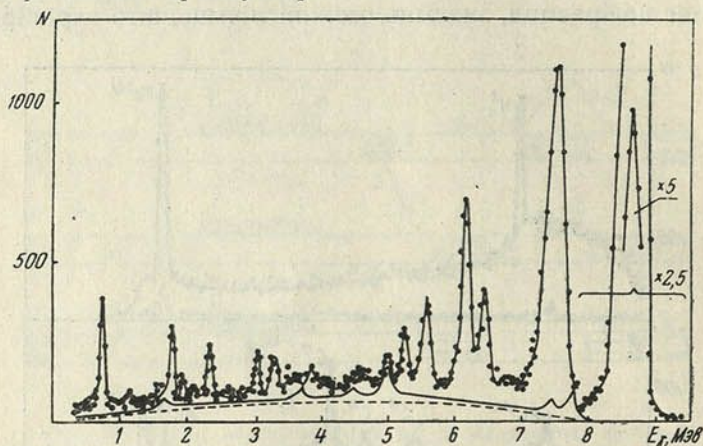


Рис. 4. Спектр γ -праменняў з рэакцыі $\text{Sr}^{90} (n, \gamma) \text{Sr}^{91}$ без выліку фону

Резюме

В статье приводятся результаты исследования фоновых условий касательного канала реактора ИРТ АН БССР. В результате исследований установлено, что основным источником γ -фона в касательном канале реактора является первый свинцовый коллиматор, на котором рассеиваются γ -лучи активной зоны реактора. После измерений установлено, что первый свинцовый коллиматор должен находиться в пятой секции шибера канала. В этом случае на касательном канале можно проводить надежные исследования спектров γ -лучей из реакции (n, γ) по образцам из разделенных изотопов весом порядка 10 г.

Поступило в редакцию 19.XI 1964

Я. І. ФІРСАУ, Э. А. РУДАК

ДАСЛЕДАВАННЕ СПЕКТРАЎ РАЗДЗЕЛЕННЫХ ІЗАТОПАЎ З РЭАКЦЫІ (n, γ) НА РЭАКТАРЫ ИРТ АН БССР

Асноўныя даследаванні спектраў γ -праменняў рэакцыі радыяцыйнага захопу цеплавых нейтронаў праведзены ў Інстытуце атамнай энергіі АН СССР імя В. І. Курчатава [1] з дапамогай камптонаўскага γ -спектрометра з вырашаючай здольнасцю ў 2%. Недахопам гэтых даследаванняў з'яўляецца неабходнасць скарыстання вельмі вялікіх узораў (~ 1 кг), што з'яўляецца вынікам нізкай светасілы камптонаўскага γ -спектрометра і дрэнных фонавых умоў на стандартных каналах рэактараў. Таму ў большасці выпадкаў вымярэнні праводзіліся на ўзорах з натуральнай сумесцю ізатопаў, бо раздзеленыя ізатопы даступны пакуль што ў невялікіх колькасцях — 20—30 г. Гэтыя абставіны значна ўскладняюць ідэнтыфікацыю даследуемых γ -праменняў, асабліва калі ўлічыць недастатковасць нашых ведаў аб характарыстыках узбуджаных узроўняў утвараючыхся ядраў. У сувязі з гэтым у Інстытуце фізікі АН БССР была зроблена спроба стварыць устаноўку для даследавання спектраў γ -праменняў радыяцыйнага захопу цеплавых нейтронаў на ўзорах з раздзеленых ізатопаў. Падрабязна методыка эксперымента разглядаецца ў рабоце [2].

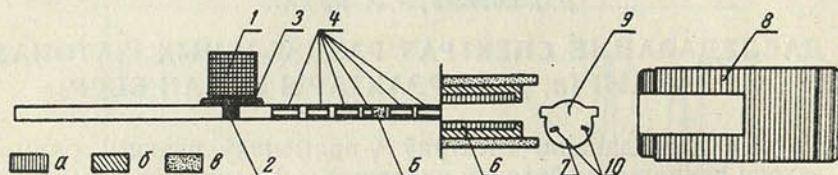
Асноўная ідэя, выкарыстаная пры стварэнні ўстаноўкі, заключаецца ў рэзкім памяншэнні γ -фону датычнага канала рэактара ИРТ АН БССР, на якім размешчана ўстаноўка, за кошт яго падаўжэння на 1500 мм у параўнанні з стандартным каналам. Фонавыя ўмовы на стандартным канале дрэнныя для вымярэнняў на раздзеленых ізатопах. Алюмініевае дно канала, размешчанае каля цэнтра актыўнай зоны, стварае значны фон γ -праменняў радыяцыйнага захопу цеплавых нейтронаў. Дослед паказаў, што свінцовы фільтр таўшчыняй 100—150 мм, змешчаны ў канцы канала, памяншае γ -фон рэакцыі (n, γ) у алюмініі, але прыводзіць да паяўлення моцных γ -праменняў высокай энергіі ізатопаў свінцу. Падаўжэнне датычнага канала на 1500 мм практычна поўнасьцю выключае гэту крыніцу γ -фону.

Для першых даследаванняў на такім канале быў выбраны камптонаўскі γ -спектрометр з сярэдняй вырашаючай здольнасцю. Пасля высвятлення магчымасцей такой устаноўкі будзе пабудаван больш дасканалы прыбор.

На рысунку прадстаўлены прыцыповая схема эксперымента і размяшчэнне ўстаноўкі.

Прынцып работы ўстаноўкі і ўзаемадзеяння яе частак зводзіцца да наступнага. Даследуемы ўзор у графітавым кантэйнеры змяшчаецца ўнутры канала насупраць цэнтра актыўнай зоны. Ядры ўзору з масавым лікам A паглынаюць цеплавя нейтроны (паток цеплавых нейтронаў у месцы размяшчэння ўзору $3 \div 4 \cdot 10^{12}$ н/см² · сек). Утвараючыся ядры-прадукты з масавым лікам $A+1$ знаходзяцца ва ўзбуджаным стане, прычым энергія ўзбуджэння роўна энергіі сувязі апошняга нейтрона ў ядры.

Энергія ўзбуджэння ядра знімаецца шляхам вылучэння γ -праменняў. Гэтыя γ -праменні каліміруюцца сістэмай свінцовых каліматараў і выводзяцца з канала рэактара на радыятар камеры спектрометра. Даследуемыя γ -праменні выбіваюць з радыятара электроны, якія аналізуюцца з дапамогай магнітнага поля, утвараемага паміж полюснымі наканечнікамі электрамагніта. Рэгістрацыя электронаў праводзіцца двума гейгераўскімі лічыльнікамі, уключанымі ў схему супадзенняў. У працэсе



Прынцыповая схема эксперымента:

1 — актыўная зона рэактара; 2 — узор у графітавым кантэйнеры; 3 — свінцовы шчыт паміж актыўнай зонай і датчыным каналам; 4 — сістэма свінцовых каліматараў; 5 — фільтр цеплавых нейтронаў; 6 — ахова па-за каналам; 7 — камера спектрометра; 8 — пастка; 9 — радыятар спектрометра; 10 — гейгераўскія лічыльнікі спектрометра; а — жалеза, б — свінец, в — парафін

вымярэння даследуецца залежнасць скорасці ліку супадзенняў ад велічыні магнітнага поля.

Разгледзім работу некаторых частак устаноўкі.

Вакуумная камера. Вакуумная камера ўяўляе латунны цыліндр дыяметрам 520 мм і вышынёй 100 мм з уваходнай адтулінай для пучка γ -праменняў, закрытымі латуннай фольгай. Унутры камеры знаходзяцца радыятар і два гейгераўскія лічыльнікі. Радыятарам спектрометра з'яўляюцца полісцірольныя плёнкі таўшчынёй 20 і 80 мк. Плёнка ў 20 мк выкарыстоўваецца пры рабоце спектрометра з максімальнай вырашаючай здольнасцю 1,3% [1].

Схема рэгістрацыі электронаў аддачы. Электроны аддачы, выбіваемыя з радыятара, адхіляюцца магнітным полем і рэгіструюцца гейгераўскімі лічыльнікамі, уключанымі ў схему супадзення. Імпульсы з лічыльнікаў паступаюць на катодны паўтаральнік і перадаюцца з яго па кабелю даўжынёй 70 м на схему супадзенняў.

Лічыльнікі напаўняюцца сумессю спірт — аргон у прапорцыі 1 : 10 да 90 мм рт. сл. Для прыгатавання сумесі скарыстоўваюцца абсалютыраваныя спірт і тэхнічны аргон. Плата абодвух лічыльнікаў парадку 40—60 в. Лічыльнікі працуюць без пракачкі газавай сумесі. Праз 3—5 гадз бесперапыннай работы сумесь замяняецца. Для вокнаў лічыльнікаў скарыстоўваецца лаўсанавая плёнка таўшчынёй 10 мк. Эфектыўнасць рэгістрацыі электронаў — звыш 90% у абодвух лічыльнікаў.

Электрамагніт і сістэма стабілізацыі току электрамагніта. Для факусіроўкі электронаў аддачы выкарыстоўваецца неаднароднае магнітнае поле, ствараемае паміж полюснымі наканечнікамі электрамагніта СП-11В. Полюсныя наканечнікі выраблены з сталі 3, адхіленне профілю ад тэарэтычнага не больш 0,05 мм. Радыус раўнаважнай арбіты 150 мм. Цэнтроўка полюсных наканечнікаў праводзілася з дакладнасцю да 0,05 мм. Адлегласць паміж імі пры $r_0 = 150$ мм роўна $102 \pm 0,01$ мм.

Электрамагніт СП-11В мае малое амічнае супраціўленне шпулек — 2,88 ом, што дазваляе выкарыстаць у якасці крыніцы току акумулятары. Асноўная крыніца сілкавання — электрамашыны ўзмацняльнік ЭМУ-12А з стабілізацыяй па полю парадку 0,1%. У якасці апорнага поля бярэцца поле пастаяннага магніта. Пры рабоце на малых токах (да 2—3 а) больш мэтазгодна сілкаваць электрамагніт акумулятарамі, паколькі стабільнасць току ў гэтым выпадку не горш 0,01%.

Радыяцыйная ахова. Радыяцыйная ахова складаецца з дзвюх частак: ахова па-за каналам і ахова ўнутры канала. Да аховы ўнутры канала адносяцца свінцовыя каліматы і фільтр цеплавых нейтронаў, які складаецца з парафіну і V_4C . На рысунку прыведзена схема аховы па-за каналам, якая складаецца са слаёў жалеза, свінцу і парафіну з V_4C , а таксама пасткі. Гэта ахова пры таўшчыні фільтра ў канале 70 мм з'яўляецца дастатковай. Аднак памяншэнне таўшчыні фільтра ў канале, неабходнае пры даследаванні ізатопаў з малым сячэннем рэакцыі (n, γ), патрабуе паліпшэння аховы па-за каналам па хуткіх нейтронах. Паток γ -праменняў узору паглынаецца ў пастцы.

Пры даследаванні ўзораў вагой 20—30 г і сячэннем рэакцыі (n, γ) да 30 барн няма неабходнасці рабіць ахову ад рассеяных γ -праменняў пучка на паветры. Аднак пры даследаванні больш буйнога ўзору такая ахова неабходна.

Узор і сістэма калімацыі. Даследуемая ўзоры вырабляюцца ў выглядзе невялікіх таблеток дыяметрам 25—30 мм, якія змяшчаюць у графітавы кантэйнер. Невялікія размеры ўзору дазваляюць добра калімаваць паток γ -праменняў і пазбавіцца ад фону γ -праменняў, вылучаемых сценамі канала. Для гэтага першыя два каліматы робяцца з малымі адтулінамі — 30 і 35 мм адпаведна. Просты геаметрычны разлік паказвае, што радыятар спектрометра ў гэтым выпадку «бачыць» сценкі канала, абпраменьваемыя нейтронамі праз слой свінцу не менш 150 мм. Астатнія каліматы адыгрываюць дапаможную ролю і служаць для аховы ад рассеяных γ -праменняў у датычны канал.

Першыя вымярэнні на дадзенай устаноўцы былі праведзены з узорамі з гексахлорбензолу C_6Cl_6 вагой 30 г. Даследаваны спектр γ -праменняў амаль поўнаасцю вызначаецца рэакцыяй $Cl^{35} (n, \gamma) Cl^{36}$ (сячэнне Cl^{35} для радыяцыйнага захопу 30 барн). Адносіны эфекту да фону аказаліся высокімі (парадку 10) у найбольш неспрыяльных участках спектра. Праведзены папярэднія вымярэнні на ўзоры, абагачаным ізатопам Fe^{54} да 85%, валодаючым значна меншым сячэннем па рэакцыі (n, γ), чым Cl^{35} (2,2 барн).

На падставе атрыманых даных на ізатопах Cl^{35} і Fe^{54} можна лічыць, што ўстаноўка прыгодна для надзейнага даследавання ўзораў вагой 20—30 г і сячэннем па рэакцыі (n, γ) на цеплавых нейтронах 0,5 — 1 барн.

У заключэнне аўтары выказваюць удзячнасць Л. В. Грошаву і А. М. Дзямідаву за парады і шчырую дапамогу ў стварэнні ўстаноўкі.

ЛІТАРАТУРА

1. Грошев Л. В., Демидов А. М., Луценко В. Н., Пелехов В. И. Атлас спектров γ -лучей радиационного захвата тепловых нейтронов. Атомиздат, 1958.
2. Демидов А. М. Методы исследования излучения ядер при радиационном захвате нейтронов. Госатомиздат, 1963.

Резюме

В статье описывается установка для исследования спектров γ -лучей радиационного захвата тепловых нейтронов на образцах из разделенных изотопов. Основная идея установки — продление касательного канала реактора ИРТ АН БССР. Анализ исследуемых γ -лучей производится с помощью комптоновского γ -спектрометра с разрешающей способностью в 2% и нижней границей области измерения в 0,3 Мэв. Дается принципиальная схема эксперимента. Рассмотрены вопросы геометрии опыта, радиационной защиты установки, работы счетчиков, стабилизации тока в электромагните. На основании первых результатов измерений на изотопах Cl^{35} и Fe^{54} делается оценка возможностей установки.

Поступило в редакцию 19.XI 1964

М. А. СУЛТАНАЎ, Л. І. КІСЯЛЕЎСКИ

ДА ПЫТАННЯ АБ ПАСТУПЛЕННІ РЭЧЫВА ЭЛЕКТРОДАЎ ПРЫ ІМПУЛЬСНЫМ РАЗРАДЗЕ

Паступленне пары электрода пры высакавольтных імпульсных разрадах паміж металічнымі электродамі адбываецца ў выглядзе факелаў, скорасць якіх можа перавышаць скорасць гуку [1]. Пры ўзаемадзеянні такіх звышгукавых факелаў, якія распаўсюджваюцца з процілеглых электродаў, у міжэлектродным прамежку ў адпаведнасці з законамі гідрадынамікі [2] утвараюцца скачкі ўшчыльнення.

Паколькі ў скачках ушчыльнення адбываецца павелічэнне шчыльнасці і тэмпературы, на часавых разгортках яны рэгіструюцца ў выглядзе зон павышанай яркасці. Па становішчу скачкоў ушчыльнення можна рабіць якасныя заключэнні аб суадносінах скорасцей пары ў анодных і катодных факелах. Пры роўных скорасцях скачок ушчыльнення павінен размяшчацца ў сярэдняй частцы міжэлектроднага прамежку; калі ж скорасці неаднолькавыя, скачок ушчыльнення зрушваецца да таго электрода, скорасць паступлення пары з якога меншая.

Калі скорасці паступлення пары з анода і катода вельмі адрозніваюцца, то скачок ушчыльнення можа прыкнунць да процілеглага электрода. Гэты выпадак аналагічны абцяканню электрода звышгукавым факелам з процілеглага электрода. Уздзеянне такога факела можа прывесці да істотнага павелічэння эрозіі электрода.

З прычыны гэтага цікава разгледзець пытанне аб суадносінах скорасцей паступлення рэчыва з анода і катода ў працэсе імпульснага разраду. У дадзенай рабоце гэта зроблена для розных рэжымаў разраду з дапамогай аналізу скачкоў ушчыльнення, якія ўзнікаюць у міжэлектродным прамежку. Рэгістрацыя скачкоў ушчыльнення ажыццяўлялася аптычным метадам з прымяненнем скораснай камеры СФР, якая працуе ў рэжыме фотарэгістра. Шчыліна камеры размяшчалася паралельна восі разраду.

Даследаванні праводзіліся з разрадамі ад батарэі імпульсных кандэнсатараў, ёмкасць якой змянялася ад 200 да 800 мкф. Дадатковая індуктыўнасць у ланцуг не ўключалася. Пачатковае напружанне на батарэі змянялася ад 0,5 да 6 кв. Электродамі служылі медныя шпані, заточаныя на конус. Устанаўліваліся электроды вертыкальна з міжэлектродным прамежкам ~ 6 мм. Рэжым разраду быў блізкі да аперыядычнага. Асноўнае выпраменьванне разраду адбывалася ў працэсе першага паўперыяду, які і вывучаўся ў рабоце.

На рысунку прыведзены тыповыя СФР-грамы, якія адпавядаюць тром рэжымам разраду. З рысунка відаць, што пры ўсіх рэжымах разраду структура разрадлага воблака з'яўляецца неаднастайнай уздоўж восі разраду. На разгортках відаць як цёмныя, так і светлыя зоны, становішча якіх залежыць ад фазы разраду і яго рэжыму. У [1, 3, 4] было паказана, што адносна рэзкая мяжа, на якой адбываецца пераход ад цёмнай да светлай зоны, з'яўляецца скачком ушчыльнення, які свед-

чыць аб тым, што пара адпаведнага электрода паступае ў міжэлектродны прамежак са звышгукавой скорасцю.

З улікам памянёнай акалічнасці на падставе разгледжання СФР-грам можна зрабіць наступныя якасныя вывады адносна скорасцей паступлення рэчыва з анода і катода пры розных рэжымах разраду.

На часовых разгортках разрадаў малой магутнасці (рыс., а) у пачатковай стадыі імпульсу назіраецца дыфузійная карціна, у якой няма скачкоў ушчыльнення. Та-

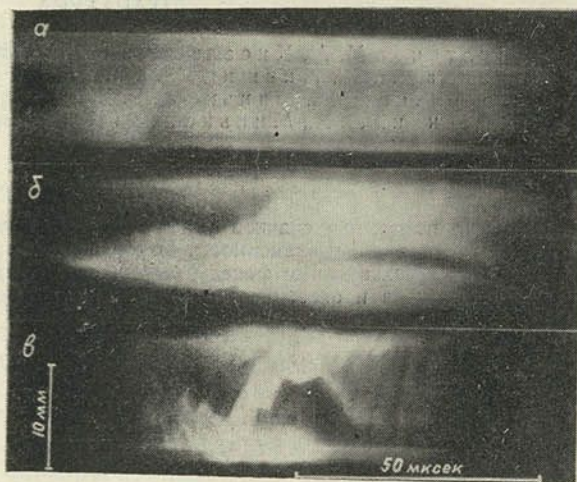
кім чынам, можна лічыць, што скорасці пары ў гэтай стадыі дагукавыя. Прыблізна праз 15 мксек пасля пачатку імпульсу паблізу катода з'яўляецца вузкая цёмная палоска, над якой размешчан слабы скачок ушчыльнення, што сведчыць аб звышгукавым паступленні пары з гэтага электрода. Паблізу анода падобных структурных асаблівасцей не назіраецца. Такая карціна захоўваецца практычна да канца імпульсу. Са сказанага вынікае, што пры дадзеным рэжыме скорасць пары з катода вышэй, чым з анода, аднак катодныя факелы не дасягаюць паверхні анода з прычыны таго, што скачок ушчыльнення, у якім губляецца скорасць пары, размешчан каля самога катода.

З павышэннем магутнасці разраду (рыс., б) у пачатковай стадыі імпульсу з'яўляецца ярка выражаны скачок ушчыльнення, утвораны парай, якая паступае з анода. Гэты скачок адсоўваецца анодным факелам да катода, што сведчыць аб высокай скорасці пары ў факеле. Вымярэнне скорасці па нахілу палос у цёмнай зоне паказвае, што яна складае $\sim 10^6$ см/сек. У астатняй частцы імпульсу скачок ушчыльнення пачынае ўтварацца ў катодных факелах, аднак па-ранейшаму ён не аддаляецца ад паверхні электрода.

Пры далейшым павышэнні магутнасці разраду (рыс., в) скачкі ўшчыльнення пачынаюць перыядычна зрушвацца ад аднаго электрода да другога. Гэта сведчыць аб тым, што працэс паступлення ў гэтым выпадку адбываецца ў выглядзе высакаскорасных выкідаў пары з розных электродаў.

Характэрна, што па-ранейшаму першы высакаскорасны імпульс паступлення адбываецца з анода. Магчыма, гэта звязана з той акалічнасцю, што анод пры разрадзе падвяргаецца бамбардзіроўцы электронамі, якія валодаюць значна большай рухомасцю ў параўнанні з іонамі, што бамбардзіруюць катод.

Пры магутных рэжымах разраду робіцца верагодным дасягненне факеламі процілеглых электродаў са звышгукавымі скорасцямі. З гэтай прычыны эрозія электродаў у дадзеных умовах павінна вызначацца не толькі энергіяй, якая вылучаецца токам на электродах, але і ўздзеяннем гіпергукавых факелаў, выкідваемых з процілеглых электродаў.



Тыпичныя СФР-грамы выпраменьвання імпульсных разрадаў рознага рэжыму:

а— $C=800$ мкф; $U=0,5$ кв; б — 100 і 6; в — 200 і 6

Скачкі ўшчыльнення, якія ўзнікаюць у выніку ўзаемадзеяння звышгукавых факелаў, пры магутных разрадах запаўняюць практычна ўвесь міжэлектродны прамежак. Спектраскапічны характарыстыкі такога разряду павінны вызначацца фізічнымі ўмовамі ў скачках ушчыльнення, паколькі гэтыя зоны разрадлага воблака даюць асноўны ўклад у выпраменьванне. Разгляджанне гэтага пытання з'яўляецца прадметам асобнай работы.

ЛІТАРАТУРА

1. Султанов М. А., Киселевский Л. И. ЖПС, № 3, 1964.
2. Ландау Л. Д., Лившиц Е. М. Механика сплошных сред. ГИТТЛ, М., 1954.
3. Гречихин Л. И., Минько Л. Я. ЖТФ, 32, № 9, 1072, 1962.
4. Гречихин Л. И., Минько Л. Я., Плюта В. Е. Опт. и спектр., 12, 120, 1962.

Резюме

Изучено положение скачков уплотнения, образующихся в сверхзвуковых факелах импульсного разряда, в зависимости от его режима. Показано, что при мощных режимах разряда сверхзвуковые факелы определяют основные структурные характеристики разрядного облака и оказывают существенное эрозионное действие на противоположные электроды.

Поступило в редакцию 8.XII 1964

Л. В. ВАЛАДЗЬКО, Д. С. УМРЭЙКА

ТЭМПЕРАТУРНАЯ ЗАЛЕЖНАСЦЬ І ПРЫРОДА ЭЛЕКТРОННЫХ СПЕКТРАЎ АРГАНІЧНЫХ РАСТВОРАЎ УРАЊЛАВЫХ СОЛЕЙ

Адной з характэрных асаблівасцей электронных спектраў паглынання і вылучэння уранілавых злучэнняў з'яўляецца іх моцная залежнасць ад тэмпературы, якая выражае сабой змяненне ступені ўзаемадзеяння іона уранілу з акаляючым яго асяроддзем. Паніжэнне тэмпературы, якое суправаджаецца памяншэннем памянёнага ўзаемадзеяння, прыводзіць да расшчаплення і спрашчэння спектраў і павелічэння выхаду люмінесценцыі. Таму вывучэнне тэмпературнай залежнасці спектраў паглынання і флуарэсценцыі, а таксама іншых спектральна-люмінесцэнтных характарыстык у шырокім тэмпературным інтэрвале можа даць каштоўныя звесткі, якія датычаць як прыроды спектраў, так і самога механізму працэсу флуарэсценцыі.

У якасці аб'ектаў даследавання былі ўзятыя растворы уранілавых солей у неарганічных кіслотах і арганічных растваральніках. (Метадыка вывучэння тэмпературнай залежнасці і вынікі спектральна-люмінесцэнтнага даследавання неарганічных раствораў уранілавых солей выкладзены ў рабоце [1]). У прыватнасці, былі даследаваны арганічныя растворы уранілнітрату і уранілацэтату. У якасці растваральнікаў прымяняліся этылавы спірт, гліцэрын і ацэтон, старанна ачышчаныя ад вады і некаторых арганічных прымесей добра вядомымі метадамі [2]. Як паказаў дослед, гэтыя растворы добра замярзаюць, не маючы трэшчын у даследуемым слоі. Выключэнне складае ацэтон, дастаткова аднародны слой якога пры замярзанні нам атрымаць не ўдалося. Канцэнтрацыя уранілнітрату і уранілацэтату ў этылавым спірце складала 0,05 М; растворы дзвюх апошніх солей у гліцэрыне браліся насычанымі. Неабходна заўважыць, што ўсе спектры паглынання і вылучэння аднаго і таго ж даследуемага раствору здымаліся пры аднолькавай канцэнтрацыі растваранага рэчыва. Апошняя заўвага асабліва важная ў адносінах да арганічных раствораў, паколькі характар іх спектраў вельмі моцна залежыць ад канцэнтрацыі растваранай уранілавай солі.

На рыс. 1 і 2 прыведзены спектры флуарэсценцыі (размеркаванне энергіі ў адносных адзінках) і паглынання раствораў уранілнітрату і уранілацэтату ў этылавым спірце і гліцэрыне адпаведна пры розных тэмпературах. Пры пабудове флуарэсцэнтных спектраў інтэнсіўнасць у максімуме другой паласы вылучэння прымалася роўнай адзінцы.

Аналіз спектраў люмінесценцыі арганічных раствораў уранілавых солей паказвае, што яны намнога больш складаныя, чым спектры неарганічных раствораў тых жа солей. Калі апошнія выяўлялі толькі адну сістэму палос, то спектры арганічных уранілавых раствораў складаюцца з дзвюх сістэм палос, а ў спектры вылучэння спіртавога раствору воцатнакісллага уранілу пры нізкіх тэмпературах праяўляюцца нават тры сістэмы палос. Форма і становішча ў спектры дастаткова шырокіх

і дыфузных палос вылучэння залежаць як ад прыроды растворанай солі, так і ад хімічнай прыроды растваральніку. Апошні ўплывае таксама на размеркаванне інтэнсіўнасці выпраменьвання ў кожнай з сістэм палос і на рознасці частот іх максімумаў, а таксама вызначае характар тэмпературнай залежнасці флуарэсцэнтных спектраў. Сапраўды, пры паніжэнні тэмпературы размеркаванне энергіі ў спектрах люмінесцэнцыі гліцэрынавых раствораў уранілнітрату і уранілацэтату практычна застаецца пастаянным, у той час як у спіртавых растворах назі-

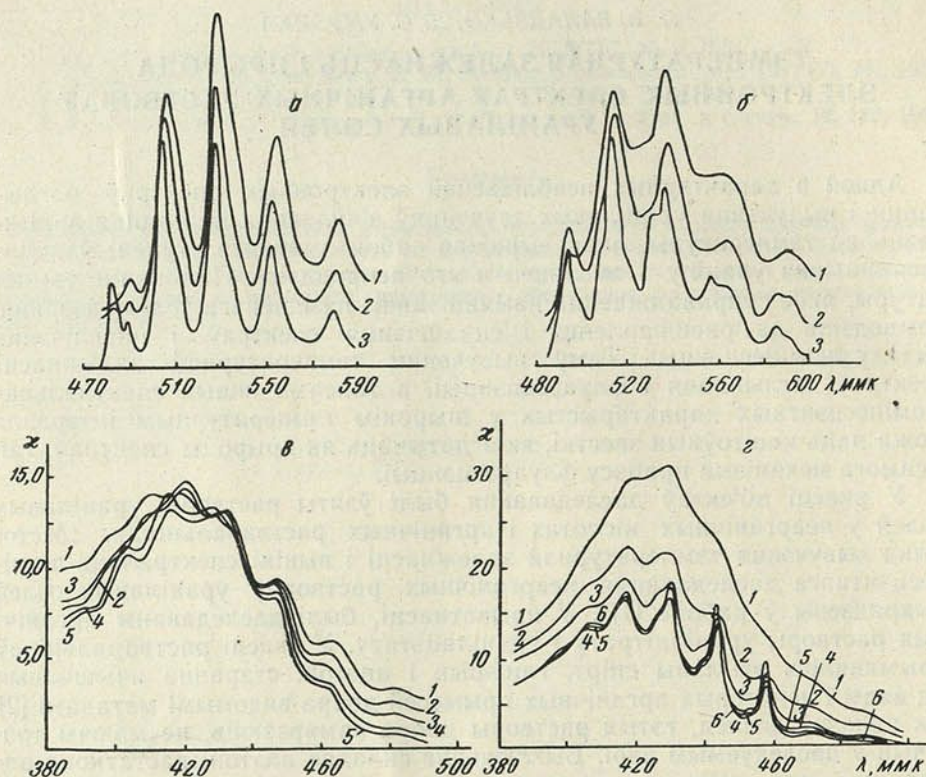


Рис. 1. Спектры флуарэсцэнцыі (а і б) і паглынання (в і з) раствораў уранілнітрату (а і в) і уранілацэтату (б і з) у этылавым спірце.

Флуарэсцэнцыя пры тэмпературах -110° (1), -145° (2) -183° С (3); паглыннанне пры тэмпературах $+20^{\circ}$ (1), -20° (2), -75° (3), -110° (4), -145° (5) і -183° С (6)

раецца значная дэфармацыя іх спектраў флуарэсцэнцыі, якая выражаецца ў адносным умацненні караткахвалевых і аслабленні даўгахвалевых палос вылучэння. Пры гэтым палосы звужаюцца і расшчапленне дзвюх сістэм палос становіцца больш прыкметным. Зрушэнне максімумаў флуарэсцэнтных палос арганічных раствораў праяўляецца значна слабей, чым у неарганічных растворах.

Спектры паглынання даследуемых злучэнняў выяўляюць большую залежнасць ад тэмпературы, чым спектры вылучэння. Паніжэнне тэмпературы суправаджаецца падзеннем паглынальнай здольнасці растваранага рэчыва і расшчапленнем структуры абсарбцыйнага спектра. Гэта падзенне адбываецца па-рознаму ў залежнасці ад прыроды растворанай солі і растваральніку і мае розны характар у залежнасці ад вобласці абсарбцыйнага спектра. Так, у выпадку гліцэрынавага раствору уранілнітрату паглынальная здольнасць пры паніжэнні тэмпера-

туры падае спачатку хутка, потым скорасць падзення замаруджваецца. Аналагічны раствор уранілацэтату ў караткахвалевай вобласці спектра, наадварот, спачатку зазнае слабае змяненне паглынальнай здольнасці, потым пры тэмпературах $\sim -70-100^\circ\text{C}$ паглынальная здольнасць яго рэзка памяншаецца, і, пачынаючы прыкладна з -100°C , гэта падзенне ізноў адбываецца павольна і манатонна.

У даўгахвалевай вобласці абсарбцыйныя спектры даследаваных злучэнняў паводзяць сябе прыкладна аднолькава — з паніжэннем тэмпературы каэфіцыент паглынання памяншаецца і некалькі паляпшаецца паласатая структура. Караткахвалевая вобласць спектраў розных злучэнняў паводзяць сябе па-рознаму. Паглынне, напрыклад, спіртавога раствора уранілацэтату ў адрозненне ад аналагічнага раствора уранілнітрату спачатку рэзка памяншаецца па ўсім спектры, потым за-

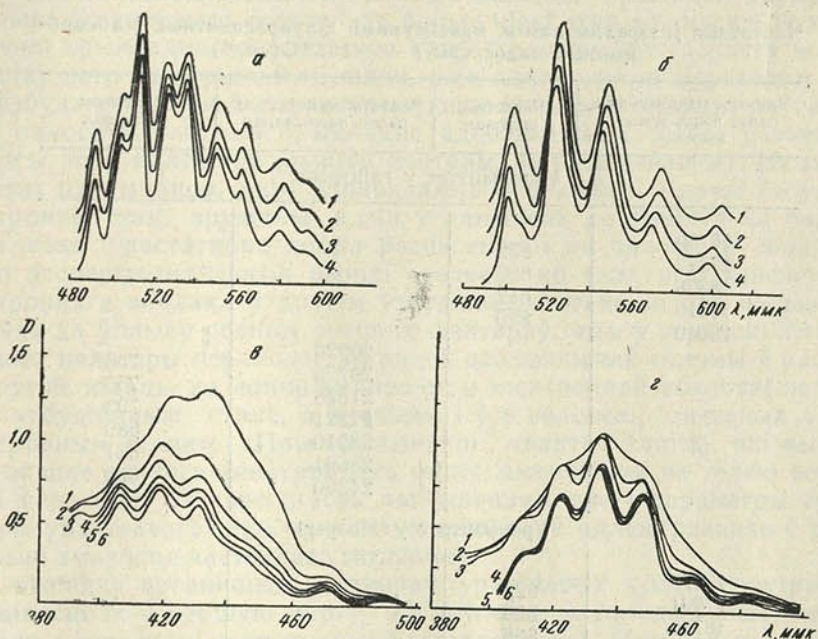


Рис. 2. Спектры флуарэсценцыі (а і б) і паглынання (в і з) раствораў уранілнітрату (а і в) і уранілацэтату (б і з) у гліцэрыне.

Флуарэсценцыя пры тэмпературах -70° (1), -110° (2), -145° (3) і -183°C (4); паглынне пры тэмпературах $+20^\circ$ (1), -20° (2), -75° (3), -110° (4), -145° (5), -183°C (6).

стаецца пастаянным у максімумах, але памяншаецца ў мінімумах абсарбцыйных палос (пачынае рэзка праяўляцца паласатая структура). Пачынаючы прыкладна з тэмпературы -100°C , паглынне ў максімумах палос павялічваецца, што прыдае ім яшчэ большую рэзкасць. Пры гэтым пачынае прыкметна праяўляцца другая сістэма палос, якая валодае значна меншай інтэнсіўнасцю, зрушана ў адносінах да першай у караткахвалевы бок і з'яўляецца, як відаць, працягам сістэмы, што ўключае першыя дзве найбольш даўгахвалевыя абсарбцыйныя паласы.

Аналіз тэмпературнай залежнасці абсарбцыйных спектраў арганічных раствораў уранілавых солей дазваляе зрабіць вывад, што іх спектры паглынання маюць дастаткова складаную прыроду. У гэтым нас пераконвае таксама характар размеркавання інтэнсіўнасці паглынання, які істотна адрозніваецца ў блакітнай і фіялетавай абласцях разглядаемых спектраў. Пры тэмпературы кіпення вадкага паветра першыя дзве

з даўгахвалевага боку абсарбцыйныя паласы ва ўсіх спектрах рэзка адрозніваюцца ад астатніх палос. Яны значна слабей выражаны (за выключэннем раствору уранілнітрату ў гліцэрыне), характарызуюцца вельмі малым каэфіцыентам паглынання і, як будзе паказана ніжэй, у радзе выпадкаў выяўляюць люстраную сіметрыю ў адносінах да першых дзвюх найбольш караткахвалевых палос флуарэсцэнтнага спектра.

З усіх вывучаных намі спектраў паглынання арганічных раствораў уранілавых солей найбольш простымі з'яўляюцца абсарбцыйныя спектры гліцэрынавых раствораў. У іх назіраецца толькі адна сістэма палос, і таму частотны інтэрвал у гэтых спектрах лягчэй за ўсё паддаецца аналізу. Прымаючы пад увагу магчымасць невялікай ангарманічнасці хістання іона UO_2^{++} , можна сказаць (гл. табліцу), што адлегласці паміж

Табліца

Частотныя інтэрвалы паміж максімамі флуарэсцэнтных і абсарбцыйных палос пры $t = -183^\circ C$ (cm^{-1})

Частоты максімаў палос выпраменьвання	Частотны інтэрвал	Частоты максімаў палос паглынання	Частотны інтэрвал
Уранілацэтат у гліцэрыне			
16750	822		
17572	826		
18398	812		
19210	830		
20040		20020	753
		20773	755
		21528	793
		22321	689
		23010	681
		23691	669
		24360	
Уранілнітрат у гліцэрыне			
17079	822		
17901	829		
18730	836		
19566	822		
20392		20400	733
		21133	730
		21863	560
		22423	709
		23132	706
		23838	714
		24552	

першай і другой і другой і трэцяй абсарбцыйнымі палосамі ў кожным з памянёных спектраў (лічачы з боку паласы, якая ўключае чыста электронны пераход) у межах хібнасці вызначэння становішча максімума роўныя. Прыкладна такая ж роўнасць частотнага інтэрвалу назіраецца і ў караткахвалевай вобласці спектраў. Абсалютныя значэнні гэтых інтэрвалаў у абедзвюх частках кожнага са спектраў не супадаюць: у даўгахвалевай вобласці ён большы, у караткахвалевай — меншы. Парушэнне пастаянства частотнага інтэрвалу адбываецца скачком у вобласці трэцяй абсарбцыйнай паласы. Такім чынам, з сукупнасці прыведзеных тут вынікаў, атрыманых пры вывучэнні тэмпературнай

залежності абсарбцыйных спектраў арганічных раствораў уранілавых солей, можна зрабіць вывад аб магчымасці існавання некалькіх узбуджаных електронных станаў іона UO_2^{++} , якія праяўляюцца ў бачнай вобласці спектра паглынання.

Аналіз частотнага інтэрвалу паміж абсарбцыйнымі палосамі ў спектрах спіртавых раствораў даследаваных злучэнняў спалучаны са значна большымі цяжкасцямі. Спектр паглынання раствору ўранілацэтату пры $t = -183^\circ \text{C}$ складаецца з дзвюх серый палос, якія ў даўгахвалевай частцы не расшчапляюцца, у выніку чаго першыя дзве абсарбцыйныя палосы вельмі шырокія і вызначыць становішча іх максімумаў вельмі цяжка. Магчыма, што памянёныя дзве серыя палос належаць двум розным цэнтрам, спектры якіх некалькі зрушаны адзін ў адносінах да другога. Калі зыходзіць з таго факта, што кожны з памянёных цэнтраў у разглядаемай вобласці спектра валодае, прынамсі, двума ўзбуджанымі элетроннымі станамі, то больш нізкі стан кожнага з іх мае, відавочна, прыкладна аднолькавую канфігурацыю электроннага воблака, у выніку чаго спектры паглынання, якія адпавядаюць пераходам у першы ўзбуджаны стан і характарызуюцца першымі дзвюма даўгахвалевымі палосамі, таксама прыкладна аднолькавыя і блізка размешчаны (палосы, якія належаць розным цэнтрам, не расшчэплены). Наадварот, спектры паглынання, якія адпавядаюць пераходам у другі ўзбуджаны электронны стан, зрушаны адзін у адносінах да другога на большую адлегласць і дастаткова добра расшчэплены на палосы. У сваю чаргу гэтыя эксперыментальныя вынікі сведчаць аб тым, што канфігурацыя электроннага воблака ў другім узбуджаным стане значна больш адчувальная да ўплыву розных знешніх фактараў, чым у першым. Змяненне сілавога поля пры пераходзе ад адной паглынаючай сістэмы ў раствору да другой, відаць, не моцна змяняе стан электроннай абалонкі яе ў першым узбуджаным стане, а значыць, і ўсе велічыні, звязаныя з гэтым электронным станам. Пры паглыннанні кванта святла, які выклікае ўзбуджэнне другога электроннага стану, змяняюцца не толькі верагоднасці пераходаў (інтэнсіўнасць паглынання), але і параметры сувязей унутры уранілавага іона, што знаходзіць сваё адлюстраванне ў рознай велічыні змянення частотнага інтэрвалу.

У выпадку арганічных раствораў уранілавых солей спектральныя ўласцівасці іх у першую чаргу абумоўлены ўзаемадзеяннем малекул уранілу з суседнімі малекуламі растваральніку. Натуральна, што ступень такога ўзаемадзеяння залежыць як ад хімічнай прыроды растваральніку, так і ад будовы малекул растваранай уранілавай солі. Аб гэтым, у прыватнасці, гавораць наступныя эксперыментальныя факты: наяўнасць у адным і тым жа раствору некалькіх паглынаючых і выпраменьваючых сістэм, вельмі своеасаблівы характар тэмпературных змяненняў спектраў адных і тых жа солей у розных растваральніках і розных солей у адным і тым жа растваральніку і г. д. Акаляючае малекулу уранілавай солі асяроддзе павінна моцна ўплываць таксама і на такую спектральную характарыстыку малекулы, як частата чыста электроннага пераходу. Вынікі нашых даследаванняў поўнасцю пацвярджаюць гэта. Адрозненні памянёных частот у розных растворах яшчэ мацней праявіліся ў выпадку другога электроннага пераходу, што ўказвае на значна большую адчувальнасць другога ўзбуджанага электроннага стану да ўплыву знешніх фактараў.

З дапамогай метадыкі, выкладзенай у рабоце [3], быў разлічан і пабудаван спектр паглынання 2, люстрана-сіметрычны спектру люмінесценцыі 1 гліцэрынавага раствору уранілацэтату пры $t = -183^\circ \text{C}$, а таксама рознасць 4 паміж эксперыментальна атрыманым абсарбцыйным

спектрам 3 і люстрана-сіметрычным спектру флуарэсцэнцыі 2 (рыс. 3). З прыведзенага рысунка відаць, што спектр паглынання, люстрана-сіметрычны спектру флуарэсцэнцыі, дастаткова добра супадае ў межах першых дзвюх палос са спектрам паглынання, атрыманым эксперыментальна. У астатняй частцы спектра, як і ў выпадку іншых уранілавых раствораў, доля паглынутай энергіі, якая прыходзіцца на сіметрычны спектру флуарэсцэнцыі абсарбцыйны спектр, хутка памяншаецца з павелічэннем частаты. Калі параўнаць спектры 1, 2 і 4, то лёгка заўважыць адну характэрную асаблівасць, якая назіраецца ва ўсіх разгледжаных аналагічных спектрах уранілавых раствораў: характар размеркавання інтэнсіўнасці паглынання ў абодвух спектрах падобны да размеркавання інтэнсіўнасці ў спектры флуарэсцэнцыі і паміж сабой. Атрыманыя намі з дапамогай правіла люстранай сіметрыі гэтыя два абсарбцыйныя спектры, відаць, з'яўляюцца нічым іншым, як спектрамі, адпаведнымі аптычным пераходам у два ўзбуджаныя электронныя станы іона уранілу.

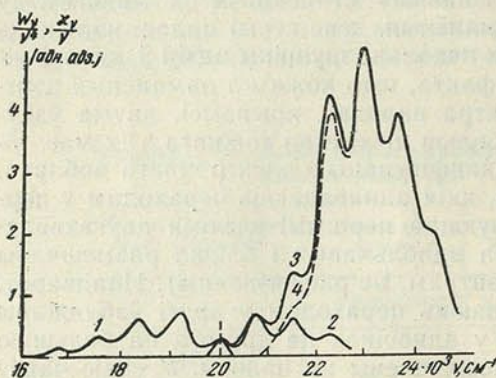


Рис. 3. Люстраная сіметрыя спектраў флуарэсцэнцыі і паглынання раствору уранілацэтата ў гліцэрыне пры $t = -183^\circ \text{C}$:

1 — спектр флуарэсцэнцыі; 2 — спектр паглынання (разлічаны); люстрана-сіметрычны спектру флуарэсцэнцыі; 3 — спектр паглынання, атрыманы эксперыментальна; 4 — рознасць спектраў 3 і 2

близна $5 \cdot 10^{-4}$ сек. Калі інтэграл абсорбцыі [4] браць па ўсяму спектру паглынання ў бачнай вобласці, то τ атрымоўваецца роўным $3 \cdot 10^{-5}$ сек. У той жа час вымераная эксперыментальна сярэдняя працягласць высвечвання гэтага раствору раўнялася $5,2 \cdot 10^{-4}$ сек. Аналагічныя вынікі былі атрыманы і для гліцэрынавага раствору уранілнітрату. Параўнанне эксперыментальнага значэння τ з разлічаным па спектру паглынання, сіметрычным спектру флуарэсцэнцыі, і па ўсяму абсарбцыйнаму спектру ў бачнай вобласці прыводзіць да значна лепшага ўзгаднення вынікаў у першым выпадку ў параўнанні з другім.

Пабудова люстрана-сіметрычных спектраў паглынання і флуарэсцэнцыі, атрыманых пры тэмпературы кіпення вадкага паветра, а таксама вылічэнне інтэграла абсорбцыі і параўнанне яго з верагоднасцю вылучэння святла, якая вызначаецца з доследу па велічыні сярэдняй працягласці ўзбуджанага стану іона уранілу, былі праведзены толькі для гліцэрынавага раствору воцатнакіслага уранілу, спектр паглынання якога складаецца з адной сістэмы палос, а ў спектры люмінесцэнцыі яго хоць і назіраецца другая сістэма палос, але яна вельмі слабая і на яе можна не звяртаць увагі (τ разлічвалася і вымяралася таксама для гліцэрынавага раствору уранілнітрату). Наяўнасць у другіх вывучаных намі арганічных растворах уранілавых солей некалькіх тыпаў выпраменьваючых і паглынаючых сістэм, кожная з якіх можа характарызавацца сваімі спектрамі τ і ρ , ускладняе правядзенне падобных даследаванняў. Але з агульнага выгляду абсарбцыйных спектраў гэтых раствораў пры $t = -183^\circ \text{C}$ можна зрабіць, напрыклад, наступнае заключэнне: калі б кожны з памянёных спектраў, падобна да спектра паглынання глі-

цєрынавага раствору уранілацетату, можна было падзяліць на два, то размеркаванне паглынальнай здольнасці ў кожным з іх было б прыкладна аднолькавым. У абодвух спектрах кожнага з даследаваных злучэнняў добра захоўваецца пастаянства частотнага інтэрвалу паміж палосамі. Усе гэтыя факты сведчаць аб тым, што абсарбцыйныя спектры арганічных раствораў уранілавых солей (падобна да гліцэрынавага раствору воцатнакіслага уранілу) уяўляюць сабой сукупнасць аптычных пераходаў у некалькі (прынамсі, два ў бачнай вобласці спектра паглынання) узбуджаных електронных станаў іона UO_2^{++} .

ЛІТАРАТУРА

1. Севченко А. Н., Умрейко Д. С. Оптика и спектроскопия, 17, 356, 1964.
2. Вайсбергер А., Проскауэр Э., Риддик Дж., Тупс Э. Органические растворители. ИЛ, 1958.
3. Володько Л. В., Севченко А. Н., Умрейко Д. С. Изв. АН СССР, сер. физич., 24, 749, 1960.
4. Сеўчанка А. Н., Умрэйка Д. С. Весці АН БССР, сер. фіз.-тэхн., № 4, 1963.

Резюме

На основе анализа температурных зависимостей различных областей абсорбционных спектров некоторых органических растворов ураниловых солей и сравнения их с флуоресцентными спектрами при тех же (низких) температурах делается вывод о возможном существовании нескольких возбужденных электронных состояний иона UO_2^{++} . Высказаны некоторые общие соображения о чувствительности этих состояний к различным внешним факторам, а также о свойствах различных электронных переходов в поглощении.

Поступило в редакцию 31.III 1964

М. А. ГУСАК, А. М. ГАНЧАРЭНКА

УПЛУЎ АНІЗАТРОПІІ НА ТЫПЫ ХВАЛЯЎ ДЫЭЛЕКТРЫЧНАГА ХВАЛЯВОДА

У тэорыі дыэлектрычных хваляводаў (светаводаў) звычайна мяркуецца, што стрыжні (ніці) з'яўляюцца ізатропнымі (гл., напрыклад, [1—3]). Аднак у выніку астаткавых механічных напружанняў яны могуць быць і анізатропнымі. З другога боку, тэорыя анізатропных хваляводаў з'яўляецца самастойна цікавай. У сувязі з гэтым у дадзенай рабоце разглядаецца ўплыў анізатропіі на тыпы ваганняў дыэлектрычнага хвалявода.

Няхай анізатропныя цыліндрычныя кругавыя стрыжні характарызуецца тэнзарамі дыэлектрычнай і магнітнай пранікальнасці ϵ і μ .

Для прастаты мяркуем, што гэтыя тэнзары з'яўляюцца аднавосевымі [4], прычым восі супадаюць з воссю z хвалявода. Рашэнне ўраўненняў Максвела будзем шукаць у выглядзе

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}(r, \theta) e^{i(hz - \omega t)}, \quad \mathbf{H} = \mathbf{H}(r, \theta) e^{i(hz - \omega t)}, \quad (1)$$

дзе r, θ — палярныя каардынаты. Пры гэтым з ураўненняў Максвела атрымліваем наступную сістэму дыферэнцыяльных ураўненняў для F_z і H_z :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 E_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial E_z}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 E_z}{\partial \theta^2} + \frac{\epsilon_e}{\epsilon_0} u^2 E_z &= 0 \\ \frac{\partial^2 H_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial H_z}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 H_z}{\partial \theta^2} + \frac{\mu_e}{\mu_0} u^2 H_z &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Тут ϵ_0, ϵ_e і μ_0, μ_e — уласныя значэнні тэнзараў ϵ і μ адпаведна, $u^2 = k_0^2 - h^2$, $k_0^2 = \omega^2 \epsilon_0 \mu_0$. Рашэнні ўраўненняў (2) вядомыя і іх можна запісаць наступным чынам:

$$\left. \begin{aligned} E_z &= \sum_{n=0}^{\infty} A_n J_n(\epsilon' u r) \cos(n\theta - \alpha_n) e^{i(hz - \omega t)} \\ H_z &= \sum_{n=0}^{\infty} B_n J_n(\mu' u r) \cos(n\theta - \beta_n) e^{i(hz - \omega t)} \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

дзе ўведзены абазначэнні $\epsilon' = \sqrt{\epsilon_e / \epsilon_0}$, $\mu' = \sqrt{\mu_e / \mu_0}$. У навакольным ізатропным асяроддзі электрамагнітнае поле прадстаўляецца аналагічна (3), толькі замест функцый Беселя J_n выкарыстоўваюцца мадыфікаваныя функцыі Ганкеля $K_n(vr)$, $v = \sqrt{h^2 - k_1^2}$, $k_1^2 = \omega^2 \epsilon_1 \mu_1$. Гэта вынікае з таго, што ўстойлівыя электрамагнітныя ваганні ў стрыжні магчымы толькі пры наяўнасці поўнага адлюстравання на яго бакавой паверхні.

Рашаючы звычайным чынам гранічную задачу (гл. [2, 3]), атрымліваем наступнае характарыстычнае ўраўненне:

$$\left[\frac{\mu_0 \mu'}{\rho} \frac{J'_n(\mu' \rho)}{J_n(\mu' \rho)} + \frac{\mu_1 K'_n(q)}{q K_n(q)} \right] \left[\frac{\epsilon_0 \epsilon'}{\rho} \frac{J'_n(\epsilon' \rho)}{J_n(\epsilon' \rho)} + \frac{\epsilon_1 K'_n(q)}{q K_n(q)} \right] = = \frac{n^2 h^2}{\omega^2} \left(\frac{1}{\rho^2} + \frac{1}{q^2} \right)^2, \quad (4)$$

дзе $\rho = ua$; $q = va$; a — радыус стржня; штрэх пры функцыях азначае вытворную па аргументу.

З ураўнення (4) бачым, што і ў дадзеным выпадку ў дыэлектрычным хваляводзе магчымы незалежныя сіметрычныя хвалі электрычнага і магнітнага тыпаў. Аднак частоты адсечкі гэтых хваляў памяншаюцца адпаведна ў ϵ' і μ' разоў у параўнанні з ізатропным хваляводам. Гэта вынікае з таго факта, што паблізу крытычнай умовы ($q \rightarrow 0$) сіметрычныя тыпы ваганняў вызначаюцца каранямі функцый $J_0(\epsilon' \rho)$ і $J_0(\mu' \rho)$. Паколькі для ТМ хваляў кампаненты палёў выражаюцца праз складваючую электрычнага поля E_z , то адпаведныя гэтым хвалям крытычныя частоты вызначаюцца анізаotropіяй дыэлектрычнай пранікальнасці ($\epsilon' = \sqrt{\epsilon/\epsilon_0}$) Анізаotropія магнітнай пранікальнасці ($\mu' = \sqrt{\mu/\mu_0}$) аказвае ўплыў на крытычныя частоты ТЕ хваляў.

Для несіметрычных хваляў ($n \neq 0$) знаходжанне караняў ураўнення (4) у агульным выпадку адвольнай анізаotropіі з'яўляецца вельмі складанай задачай. Толькі ў асобным выпадку прапарцыянальнасці тэнзараў ϵ і μ (што прыводзіць да роўнасці $\epsilon' = \mu'$) несіметрычныя тыпы ваганняў вызначаюцца суадносінамі, аналагічнымі такім жа ў ізатропным хваляводзе. Аднак крытычныя частоты таксама памяншаюцца ў ϵ' разоў у параўнанні з выпадкам ізатропнага хвалявода. Адсюль вынікае, што хвалі HE_{11} па-ранейшаму не будзе мець частаты адсечкі. Апошняе справядліва і пры адвольных тэнзарах ϵ і μ . У гэтым можна пераканацца, выкарыстаўшы тое, што для малых x

$$\frac{J'_n(x)}{x J_n(x)} = \frac{n}{x^2} - \frac{1}{2(n+1)}, \quad n \geq 1. \quad (5)$$

Улічваючы (5), з (4) атрымліваем

$$\rho^2 = \frac{2n(n+1) \left(\frac{\epsilon_0}{\epsilon_1} + 1 \right) \left(\frac{\mu_0}{\mu_1} + 1 \right)}{4(n+1)a_n + \epsilon'^2 \frac{\epsilon_0}{\epsilon_1} + \mu'^2 \frac{\mu_0}{\mu_1}}. \quad (6)$$

Паколькі (гл. [2]) $a_n = \frac{1}{2(n-1)}$ ($n \geq 2$) і $a_1 = \ln \frac{2}{\gamma q}$ ($\gamma = 1,781$), то $\rho \rightarrow 0$ пры $q \rightarrow 0$ толькі для $n = 1$.

Хоць немагчыма даць дакладных характарыстык несіметрычных мод пры адвольнай анізаotropіі, тым не менш лёгка вызначыць тэндэнцыю змянення размеркавання поля як функцыі анізаotropіі. Гэта прасцей зрабіць на прыкладзе гібрыдных мод воддаль ад крытычнай умовы ($q \rightarrow \infty$). У апошнім выпадку можам запісаць

$$\frac{K'_n(q)}{q K_n(q)} \simeq -\frac{1}{q}. \quad (7)$$

Пры гэтым характарыстычнае ўраўненне (4) пераўтвараецца да выгляду

$$\mu' \frac{J'_n(\mu' p)}{J_n(\mu' p)} \varepsilon' \frac{J'_n(\varepsilon' p)}{J_n(\varepsilon' p)} \approx \frac{n^2 h^2}{k_0^2} \frac{1}{p^2}. \quad (8)$$

Разгледзім для прыкладу ўплыў анізаotropіі на моды HE_{nm} . У ізатропным выпадку ($\varepsilon' = \mu' = 1$) моды HE_{nm} вызначаюцца каранямі ўраўнення $J_{n-1}(p) = 0$. Уявім цяпер, што ε' павялічваецца, г. зн. мы пераходзім да дадатных крышталюў ($\varepsilon' > 1$). З (8) бачым, што калі аргумент $\varepsilon' p$ узрасце ад $p_{n-1, m}$ (m -ты корань функцыі J_{n-1}) да $(\varepsilon' p)_{nm}$ (m -ты корань J_n), то велічыня p памяншаецца да значэння, пры якім $J'_n(p) = 0$. Калі ж ε' памяншаецца ($\varepsilon' < 1$, адмоўныя крышталі) і аргумент $\varepsilon' p$ дасягае значэння $J'_n(\varepsilon' p) = 0$, то p узрасце да $J_n(p) = 0$, г. зн. да значэння m -га кораня функцыі J_n . Аналагічным чынам можна прасачыць уплыў анізаotropіі μ' пры $\varepsilon' = 1$ для гэтых жа мод HE_{nm} , а таксама ўсё гэта зрабіць для мод EH_{nm} .

Такім чынам, анізаotropія робіць уплыў на велічыні пастаянных распаўсюджвання, асабліва для вышэйшых тыпаў ваганняў. Пры гэтым уплыў анізаotropіі залежыць ад тыпу крышталю (дадатны або адмоўны) і ад тыпу мод (HE або EH). Для дадатных крышталюў з ростам ε' велічыня p памяншаецца хутчэй для EH , чым для HE мод, і, наадварот, для адмоўных крышталюў з памяншэннем $\varepsilon' p$ расце хутчэй для HE мод, чым для EH . Адсюль вынікае, што ў любым выпадку анізаotropія будзе здымаць выраджэнне мод EH_{nm} і $HE_{n+2, m}$, якое мае месца ў ізатропным хваляводзе.

ЛІТАРАТУРА

1. Стрэттон Дж. А. Теорія электромагнетизма, 1948.
2. Семенов Н. А. НДВШ, Радиотехника и электроника, № 4, 1958.
3. Snitzer E. J. Opt. Soc. Am., 51, 491, 1961.
4. Федоров Ф. И. Оптика анизотропных сред. Минск, 1958.

Резюме

Исследовано влияние анизотропии на типы колебаний диэлектрического волновода. Показано, что и в анизотропном волноводе существует волна HE_{11} , не имеющая частоты отсечки. Влияние анизотропии различно для мод HE и EH , поэтому анизотропия снимает вырождение мод, имеющее место в изотропном волноводе.

Поступило в редакцию 28.XI 1964

А. Р. ХАТКЕВІЧ

УПЛУЎ АНІЗАТРОПІІ КУБІЧНАГА КРЫШТАЛЯ
 НА РАСПАЎСЮДЖВАННЕ І ПАЛЯРЫЗАЦЫЮ ПРУГКІХ
 ХВАЛЯЎ

Для ўсіх кубічных крышталёў, у якіх вывучаліся распаўсюджванне і палярызацыя пругкіх хваляў [1—3], пастаянная анізаotropіі $c = c_{11} - c_{12} - 2c_{44}$ адмоўная. У дадзенай рабоце праводзіцца даследаванне хваляў у моцна анізаotropных крышталях і крышталях, для якіх гэтая пастаянная дадатная.

Судносіны, якія вызначаюць палярызацыю, фазавыя і прамянёвыя скорасці пругкіх хваляў у кубічным крышталі, даволі складаныя для агульнага аналізу. Але для хваляў, нармалі якіх ляжаць у плоскасцях $\{010\}$ і $\{110\}$, яны значна спрашчаюцца. Так, пры хвалевага нармалі n , якія ляжаць у плоскасцях $\{010\}$, адна хваля папярочная, прамянёвая скорасць гэтай хвалі роўна фазавай $v = c_{44}^{1/2}$, а прамень паралельны нармалі. Залежнасць фазавай скорасці і напрамку вектара зрушэння q ад напрамку нармалі для дзвюх другіх хваляў выражаецца наступным чынам:

$$v^2 = a + (c' + b) \{ 1 \pm [1 - (1 - b^2) \sin^2 2\theta / (c' + b)^2]^{1/2} \} / 2, \quad (1)$$

$$\operatorname{tg} 2\theta_q = [b / (c' + b)] \operatorname{tg} 2\theta, \quad (2)$$

дзе $a = c_{44} / \rho$; $b = (c_{12} + c_{44}) / \rho$; $c' = c / \rho$ (ρ — шчыльнасць рэчыва). З (2) для вугла палярызацыі, які ўтвараецца вектарам зрушэння квазіпадоўжнай хвалі з нармаллю, выцякае роўнасць

$$\operatorname{tg} 2\theta'_q = c' \operatorname{tg} 2\theta / [c' + b (1 + \operatorname{tg}^2 2\theta)] = \sin 4\theta / [\cos 4\theta + (c' + 2b) / c']. \quad (3)$$

У сваю чаргу напрамак вектара прамянёвай скорасці s гэтых хваляў вызначаецца выразам

$$\operatorname{tg} \theta_s = \{ [a + (c' + b) q_1^2] n_1 + b q_1 q_3 n_3 \} / \{ [a + (c' + b) q_3^2] n_3 + b q_1 q_3 n_1 \}.$$

Адсюль шляхам трыганаметрычных пераўтварэнняў, выкарыстоўваючы (1) і (2), для вугла адхілення промня ад нармалі і прамянёвай скорасці атрымоўваем

$$\operatorname{tg} \theta'_s = (c' + 2b) \sin 2\theta'_q / 2v^2, \quad |s| = v \cos \theta'_s = [v^2 + (c' + 2b)^2 \sin^2 2\theta'_q]^{1/2}. \quad (4)$$

З (3), (4) відаць, што ў выпадку $c > 0$ фазавая скорасць квазіпадоўжных хваляў, нармалі якіх перпендыкулярны $\langle 010 \rangle$, максімальная пры супадзенні нармалі з напрамкамі $\langle 001 \rangle$, квазіпапярочных — з $\langle 101 \rangle$. У выпадку $c < 0$, наадварот, скорасць квазіпадоўжных хваляў максімальная пры $\langle 101 \rangle$, а квазіпапярочных пры $\langle 001 \rangle$. Вугал

θ_{q+} у першым выпадку заўсёды больш вугла θ , а ў другім — менш. Вугал палярызацыі θ_{q+} , роўны нулю для напрамкаў $\langle 001 \rangle$ і $\langle 101 \rangle$, пры

$$\theta_m = \frac{1}{2} \arctg [(c' + b)/b]^{1/2} = \frac{1}{4} \arccos [-c'/(c' + 2b)]$$

дасягае максімальнай велічыні, якая вызначаецца суадносінамі

$$\operatorname{tg} 2\theta'_{mq+} = -c'/2 [b(c' + b)]^{1/2} = \pm \operatorname{tg} 4(\pi/8 \mp \theta_m).$$

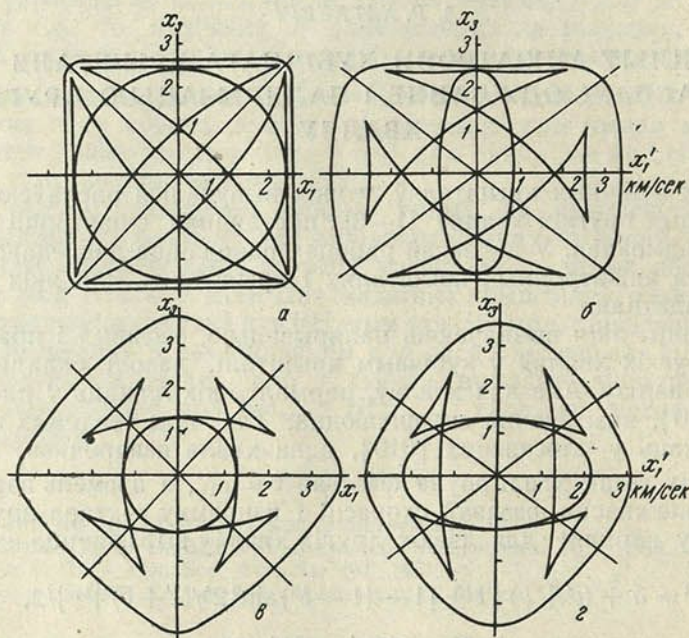
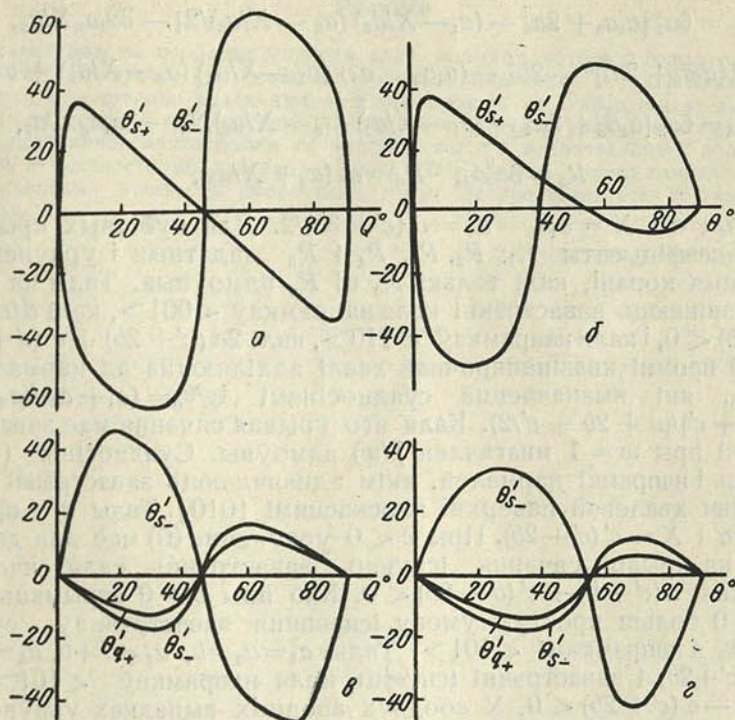


Рис. 1. Кривыя сячэнняў хвалевай паверхні плоскасцямі сіметрыі для хваляў, нармалі якіх ляжаць у гэтых жа плоскасцях (а, б — для натрыю, $c < 0$; в, г — бромістага калію, $c > 0$)

Значыць, вугал, які ўтвараецца нармаллю гэтай хвалі з бісектрысай вугла паміж напрамкамі $\langle 001 \rangle$ і $\langle 101 \rangle$, роўны палавіне максімальнага вугла палярызацыі з адваротным знакам. Чым большы максімальны вугал палярызацыі θ'_{mq+} , тым меншы вугал гэта нармаль утварае з $\langle 001 \rangle$ у першым выпадку і з $\langle 101 \rangle$ у другім. Адхіленне променя ад хвалевай нармалі (да напрамкаў, уздоўж якіх фазавая скорасць большая) для квазіпадоўжнай хвалі, згодна з (4), залежыць ад θ гэкім жа чынам, як і адхіленне яе вектара зрушэння. Паколькі вектары зрушэння хваляў узаемнаперпендыкулярныя, то прамень квазіпалярчайнай хвалі адхіляецца ад нармалі ў процілеглы бок, прычым больш значна, таму што $v_- < v_+$.

Дзякуючы сіметрыі ў кубічным крышталі дастаткова даследаваць уласцівасці хваляў, нармалі якіх адпавядаюць няроўнасцям $n_3 \geq n_1 \geq n_2 \geq 0$, г. зн. ляжаць унутры цялеснага вугла, абмежаванага плоскасцямі (010) , $(\bar{1}10)$ і $(10\bar{1})$. Ужо праводзілася вылічэнне вуглоў, якія вызначаюць палярызацыю хваляў [2], фазавых [1] і прамянёвых скорасцей і пабудова хвалевых паверхняў [3] для рада металічных крышталяў, для якіх $c < 0$, а велічыня вугла θ'_{mq+} не перавышае $\sim 15^\circ$ (для нікелю

$\theta'_{mq+} = 10^\circ 50'$). Крывыя сячэнняў хвалевай паверхні крышталю натрыю ($c_{11} = 0,615 \cdot 10^{11}$ дн/см, $c_{12} = 0,496$, $c_{44} = 0,592$, $\rho = 0,972$ г/см³) і бромістага калію ($c_{11} = 3,50 \cdot 10^{11}$ дн/см, $c_{12} = 0,62$, $c_{44} = 0,506$, $\rho = 2,75$ г/см³) плоскасцямі $\{010\}$ і $\{110\}$ для хваляў, нармалі якіх ляжаць у гэтых плоскасцях, адпаведна пададзены на рыс. 1. На рыс. 2 паказана залежнасць вуглоў адхілення ад нармалі промяняў θ'_{s+} і θ'_{s-} і вуглоў паля-



Рыс. 2. Залежнасць адхілення ад напрамку нармалі промяняў і вектараў зрушэння хваляў, нармалі якіх ляжаць у плоскасцях сіметрыі (а, б — для натрыю, $c < 0$; в, г — бромістага калію, $c > 0$)

рызацыі θ'_{q+} для хваляў, нармалі якіх ляжаць у гэтых жа плоскасцях. Для натрыю вуглы палярызацыі θ'_{q+} вельмі нязначна ($\sim 1^\circ$) адрозніваюцца ад θ'_{s+} і таму на рыс. 2 не нанесены. Для нармалей, якія ляжаць у плоскасцях $\{010\}$, максімальнае значэнне вугла палярызацыі ў выпадку натрыю роўна $36^\circ 40'$ і мае месца пры $\theta_m = 4^\circ 10'$, а ў выпадку бромістага калію адпаведна $13^\circ 13'$ і $\theta_m = 29^\circ 06'$. Цікава адзначыць, што для натрыю пры $\theta_m < \theta < \pi/2 - \theta_m$ вуглы θ'_{s+} і θ'_{q+} адрозніваюцца ад $\pi/4$ не больш чым на 5° .

Крывыя сячэнняў хвалевай паверхні для квазіпалярных хваляў як плоскасцямі $\{110\}$, так і плоскасцямі $\{010\}$ могуць мець завастрэнні. У вобласці, абмежаванай гэтымі завастрэннямі, уздоўж аднаго напрамку могуць распаўсюджвацца з рознымі прамянёвымі скорасцямі тры квазіпалярныя хвалі. Можна паказаць [4], што напрамкі нармалей, пры якіх канцы вектараў прамянёвых скорасцей супадаюць з завастрэннямі крывых сячэння хвалевай паверхні плоскасцямі $\{110\}$, вызначаюцца суадносінамі

$$\operatorname{tg}^2 \theta = \omega(a_3 + a_4 \omega) / (a_4 + a_1 \omega), \quad (5)$$

дзе $a_1 = (c' + 2b)/2$; $a_3 = c' + b$; $a_4 = b$, а неадмоўны параметр $\omega = -\operatorname{tg}\theta \operatorname{ctg}\theta_0$ — задавальняе ўраўненню

$$f(\omega) = R_0\omega^6 + R_1\omega^5 + R_2\omega^4 + R_3\omega^3 + R_4\omega^2 + R_5\omega + R_6 = 0, \quad (6)$$

каэфіцыенты якога выражаюцца наступным чынам:

$$R_0 = a_1^2(a_1 + X/a_2), \quad R_1 = 6a_1^2a_4,$$

$$R_2 = 6a_1[a_1a_3 + 2a_4^2 - (a_1 - X/a_2)(a_3 - X/a_2)/2] - 3a_1a_3X/a_2,$$

$$R_3 = (4/a_4)[(a_1a_3 + 2a_4^2)^2 - 2a_4^4 - (a_1a_3 - a_4^2)(a_1 - X/a_2)(a_3 - X/a_2) + a_4^2X^2/2a_2^2],$$

$$R_4 = 6a_3[a_1a_3 + 2a_4^2 - (a_1 - X/a_2)(a_3 - X/a_2)/2] - 3a_1a_3X/a_2,$$

$$R_5 = 6a_3^2a_4, \quad R_6 = a_3^2(a_3 + X/a_2),$$

прычым $a_2 = a$ і $X = a_1a_3 - a_4^2 = c'(c' + 3b)/2$. Для кубічных крышталяў пры $c < 0$ каэфіцыенты R_1, R_2, R_3, R_4 і R_5 дадатныя і ураўненне (6) мае дадатныя карані, калі толькі R_0 ці R_6 адмоўныя. Тады на крывых сячэння ўзнікаюць завастрэнні каля напрамкаў $\langle 001 \rangle$, калі $a(c' + 2b) + c'(c' + 3b) < 0$, і каля напрамкаў $\langle 110 \rangle$, калі $2a(c' + 2b) + c'(c' + 3b) < 0$. Пры $c > 0$ промні квазіпапярочнай хвалі адхіляюцца ад нармалі да напрамку \mathbf{n}_0 , які вызначаецца суадносінамі $\operatorname{tg}^2\theta_0 = (a_1 + a_4)/(a_3 + a_4) = (a + 2b + c')/(a + 2b + c'/2)$. Каля яго крывая сячэння мае завастрэнні, калі толькі пры $\omega = 1$ мнагачлен $f(\omega)$ адмоўны. Суадносіны (5) і (6) вызначаюць і напрамкі нармалей, якім адпавядаюць завастрэнні на крывых сячэння хвалевай паверхні плоскасцямі $\{010\}$. Тады $a_1 = a_3 = c' + b$, $a_4 = b$, $a_2 = a$ і $X = c'(c' + 2b)$. Пры $c < 0$ ураўненне (6) мае два дадатныя карані, а на крывой сячэння існуюць завастрэнні каля напрамкаў $\langle 001 \rangle$, калі $a(c' + b) + c'(c' + 2b) < 0$. Каб пры $c > 0$ атрымаць замест $f(\omega)|_{\omega=1} < 0$ больш простую ўмову існавання завастрэнняў, сумясцім восі x_1 і x_3 з напрамкамі $\langle 101 \rangle$. Тады $a_1 = a_3 = b$, $a_4 = c' + b$, $a_2 = a + c'/2$, $X = -c'(c' + 2b)$ і завастрэнні існуюць каля напрамкаў $\langle 101 \rangle$, калі $b(a + c'/2) - c'(c' + 2b) < 0$. У абодвух апошніх выпадках ураўненне (6) зваротнае і зводзіцца да кубічнага.

Праведзеныя даследаванні паказваюць, што пругкія хвалі ў кубічным крышталі паводзяць сябе зусім па-рознаму ў залежнасці ад таго, дадатная ці адмоўная пастаянная c . Многія абмяркоўваемыя ў работах [1—3] асаблівасці распаўсюджвання і палярызацыі хваляў, справядлівыя для крышталяў з адмоўным c , не маюць месца ў крышталях з дадатным c . Пры $c > 0$ вектары зрушэння і прамянёвай скорасці квазіпадоўжнай хвалі адхіляюцца не да напрамкаў $\langle 111 \rangle$, а да $\langle 001 \rangle$. Хвалевай нармалі ў плоскасцях $\{110\}$, для якіх гэта адхіленне максімальнае, з павелічэннем анізатропіі прыбліжаюцца не да $\langle 001 \rangle$, а да $\langle 111 \rangle$. Амаль папярочнай з'яўляецца хваля не з сярэдняй, а з меншай фазавай скорасцю. Прамень амаль папярочнай хвалі адхіляецца ад нармалі не да плоскасцей $\{010\}$, а да напрамкаў $\langle 111 \rangle$. Прамень трэцяй (квазіпапярочнай) хвалі, адхіляючыся ад нармалі, не аддаляецца, а прыбліжаецца да напрамкаў $\langle 101 \rangle$ ці \mathbf{n}_0 . Пры выкананні адпаведных умоў на хвалевай паверхні паяўляюцца вострыя грані каля напрамкаў \mathbf{n}_0 і $\langle 101 \rangle$. Паколькі абмежаваныя вострымі гранямі вобласці поласцей хвалевай паверхні могуць перакрывацца, то пры $c > 0$ уздоўж аднаго напрамку больш пяці хваляў з рознымі прамянёвымі скорасцямі могуць распаўсюджвацца каля напрамкаў $\langle 111 \rangle$, тады як пры $c < 0$ дзевяць хваляў могуць распаўсюджвацца паблізу $\langle 001 \rangle$ [3, 5].

Выказваю сардэчную падзяку Ф. І. Фёдараву за абмеркаванне вынікаў.

ЛІТАРАТУРА

1. Gold L., J. Appl. Phys., 21, 6, 1950.
2. Fein A. E., Smith Ch. S. J. Appl. Phys., 23, 10, 1952.
3. Miller G. F., Musgrave H. J. Proc. Royal Soc., A 236, 1206, 1956.
4. Хаткевич А. Г. Изв. АН СССР, сер. геофиз., № 9, 1964.
5. Duft G. E. Philos. Trans. Royal Soc. (London), A 852, 1010, 1960.

Резюме

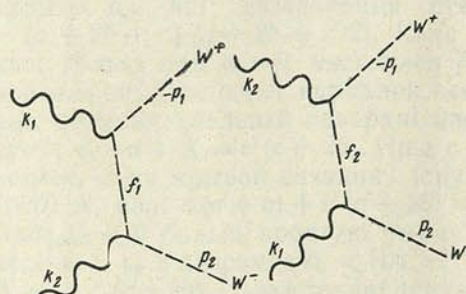
Проанализированы свойства упругих волн, нормали которых лежат в плоскостях $\{010\}$ и $\{110\}$. Показано, что свойства распространяющихся в кубическом кристалле упругих волн существенно различаются в зависимости от того, отрицательна или положительна постоянная анизотропии. Особенности упругих волн в кристаллах с отрицательной постоянной анизотропии не присущи волнам в кристаллах с положительной постоянной. В частности, вблизи направлений $\langle 001 \rangle$ вдоль одного направления девять волн с различными лучевыми скоростями могут распространяться только в первых кристаллах.

Поступило в редакцию 19.II 1964

А. І. БОЛСУН

ФОТАНАРАДЖЭННЕ ПАР ПАЛЯРЫЗАВАННЫХ ВЕКТАРНЫХ W-МЕЗОНАУ

У сувязі з гіпотэзай аб прамежкавых вектарных мезонах [1] у апошні час абмяркоўваюцца розныя працэсы, у якіх гэтыя часцінкі могуць быць выяўлены [2]. У рабоце [3] разгледжан працэс нейтрыйнай генерацыі W-мезонаў $\nu + Z \rightarrow W + e(\nu) + Z$, а ў [4] іх электрана-радженне $e + Z \rightarrow W + Z + \nu$. Ёсць работы [5], у якіх прапануецца шукаць W-мезоны ў чыста электрамагнітных працэсах. Радам аўтараў [6—9] было разгледжана фотанарадженне адзінкавых нейтральных і зараджаных W-мезонаў на нуклонах і фотанарадженне пар пры высокіх энергіях на ядрах і пратонах.



Графікі Фейнмана для працэсу $\gamma + \gamma' = W^+ + W^-$, $f_1 = -p_1 + k_1 = p_2 - k_2$, $f_2 = -p_1 + k_2 = p_2 - k_1$

і зараджаных W-мезонаў на нуклонах і фотанарадженне пар пры высокіх энергіях на ядрах і пратонах.

У дадзенай рабоце разглядаецца адзін з такіх працэсаў утварэння пары W-мезонаў двума фатонамі $\gamma + \gamma' = W^+ + W^-$. У адрозненне ад [8] поўны магнітны момант W-мезона лічыцца роўным 1 і ўлічваецца палярызацыі нараджаючыхся мезонаў. Разглядаемаму працэсу адпавядаюць графікі Фейнмана (гл. рысунак). Матрычны элемент гэтага працэсу можна запісаць у выглядзе

следу [10]

$$M_{a_1 a_2}^{e_1 e_2} = Sp \left\{ \left[\hat{e}_2 \frac{i \hat{f}_1 (i \hat{f}_1 - m) + \chi_1}{\chi_1} \hat{e}_1 + \hat{e}_1 \frac{i \hat{f}_2 (i \hat{f}_2 - m) + \chi_2}{\chi_2} \hat{e}_2 \right] \psi(-p_1) \bar{\psi}(p_2) \right\}. \quad (1)$$

Тут e_1 і e_2 , a_1 і a_2 — вектары палярызацыі фатонаў і базонаў з імпульсамі k_1 і k_2 , p_1 і p_2^* ; $\psi(-p_1) \bar{\psi}(p_2)$ — матрыца-дыяда (гл. [11]); $\hat{e} = e \mu \beta \mu$; $\beta \mu$ — 10×10 матрыцы Дафіна—Кемера; $\chi_i = \hat{f}_i^2 + m^2$ ($i=1,2$). Лёгка пераканацца, што матрычны элемент (1) з'яўляецца градыентам інварыянтным. Выкарыстоўваючы метадку непасрэднага вылічэння матрычных элементаў і рэзультаты работы [12], для матрычнага элемента (1) у сістэме цэнтры інерцыі (ц-сістэма) налятаючых фатонаў атрымаем выраз

$$M_{a_1 a_2}^{e_1 e_2} = \left(\frac{\chi_1}{8m^2} - \frac{p^2}{\chi_1} \right) (a_1 e_1) (a_2 e_2) + \left(\frac{\chi_2}{8m^2} - \frac{p^2}{\chi_2} \right) (a_1 e_2) (a_2 e_1) + \\ + \frac{1}{2} \left[(e_1 e_2) - \frac{(p_1 e_1) (p_2 e_2)}{m^2} \right] \left[\frac{(a_1 f_1) (a_2 f_1)}{\chi_1} + \frac{(a_1 f_2) (a_2 f_2)}{\chi_2} \right] +$$

*) Мы выкарыстоўваем метрыку $p^2 - p_0^2 = p^2$.

$$+ [(a_1 a_2)(p_1 e_1)(p_2 e_2) - (p_1 a_2)(p_2 e_2)(a_1 e_1) - (p_2 a_1)(p_1 e_1)(a_2 e_2)] \left(\frac{1}{\chi_1} + \frac{1}{\chi_2} \right) + \\ + \frac{1}{4m^2} (p_1 e_1) [(a_1 e_2)(a_2 f_2) + (a_1 e_1)(a_2 f_1) - (a_2 e_1)(a_1 f_2) - (a_2 e_2)(a_1 f_1)] - (a_1 a_2)(e_1 e_2). \quad (2)$$

Дыферэнцыяльнае сячэнне працэсу ў ц-сістэме прымае выгляд

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{4} r_0^2 \frac{|p|m^2}{k_0^3} |M_{a_1 a_2}^{e_1 e_2}|^2, \quad (3)$$

дзе $r_0 = \frac{e^2}{4\pi m}$; m — маса W -мезона; k_0 — энергія фатона ў ц-сістэме.

Выраз (2) дазваляе вылічыць сячэнне разглядаемага працэсу для ўсіх магчымых пачатковых і канечных палярызацый узаемадзеяючых часцінак і атрымаць матрычныя элементы, якія вызначаюць сячэнні для гранічных выпадкаў.

Разгледзім два практычна цікавыя гранічныя выпадкі, а іменна генерацыю пар W -мезонаў ля парога іх нараджэння і пры высокіх энергіях. У першым выпадку ($k_0^2 \gg p^2$) дыферэнцыяльныя і поўныя сячэнні для розных станаў палярызацыі W -мезонаў будуць роўныя:

$$\frac{d\sigma_{++}}{d\Omega} = \frac{1}{128} r_0^2 \frac{|p|}{k_0} (13 + 4 \cos^2 \theta + \cos^4 \theta), \quad \sigma_{++} = 0,45 r_0^2 \pi \frac{|p|}{k_0}; \quad (4)$$

$$\frac{d\sigma_{+-}}{d\Omega} = \frac{1}{128} r_0^2 \frac{|p|}{k_0} (1 + 2 \cos^2 \theta + \cos^4 \theta), \quad \sigma_{+-} = 0,06 r_0^2 \pi \frac{|p|}{k_0}; \quad (5)$$

$$\frac{d\sigma_{00}}{d\Omega} = \frac{1}{64} r_0^2 \frac{|p|}{k_0} (5 - 4 \cos^2 \theta + \cos^4 \theta), \quad \sigma_{00} = 0,24 r_0^2 \pi \frac{|p|}{k_0}. \quad (6)$$

Тут індэксы $+$, $-$ і 0 пры $d\sigma$ і σ вызначаюць праекцыі спіна W -мезонаў на напрамак руху ($+1$, -1 і 0 адпаведна), а θ — вугал вылету W -мезона ў ц-сістэме.

Дыферэнцыяльнае і поўнае сячэнні, усярэдненыя па палярызацыях фатонаў і прасумаваныя па палярызацыях W -мезонаў, роўныя

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{64} r_0^2 \frac{|p|}{k_0} (12 - \cos^2 \theta + 2 \cos^4 \theta), \quad \sigma = \frac{3}{4} r_0^2 \pi \frac{|p|}{k_0}. \quad (7)$$

У другім выпадку ($k_0^2 \gg m^2$) дыферэнцыяльныя і поўныя сячэнні для розных станаў палярызацыі W -мезонаў прымаюць выгляд

$$\frac{d\sigma'_{++}}{d\Omega'} = \frac{1}{32} r_0^2 \frac{k_0^2}{m^2}, \quad \sigma'_{++} = \frac{1}{8} r_0^2 \pi \frac{k_0^2}{m^2}; \quad (8)$$

$$\frac{d\sigma'_{+-}}{d\Omega'} = \frac{1}{64} r_0^2 \frac{k_0^2}{m^2} (1 + \cos^2 \theta), \quad \sigma'_{+-} = \frac{1}{12} r_0^2 \pi \frac{k_0^2}{m^2}; \quad (9)$$

$$\frac{d\sigma'_{00}}{d\Omega'} = \frac{5}{32} r_0^2 \frac{k_0^2}{m^2}, \quad \sigma'_{00} = \frac{5}{8} r_0^2 \pi \frac{k_0^2}{m^2}. \quad (10)$$

Дыферэнцыяльнае і поўнае сячэнні, усярэдненыя па палярызацыях фатонаў і прасумаваныя па палярызацыях W -мезонаў, занішучца ў выглядзе

$$\frac{d\sigma'}{d\Omega'} = \frac{1}{64} r_0^2 \frac{k_0^2}{m^2} (13 + \cos^2 \theta), \quad \sigma' = \frac{5}{6} \pi r_0^2 \frac{k_0^2}{m^2}. \quad (11)$$

Выраз для поўнага сячэння (11) супадае з рэзультатам работы [13] і адрозніваецца ад адпаведнай формулы работы [8], дзе для σ' атрыманы каэфіцыент $17/6$.

Адносіны поўных сячэнняў, якія адпавядаюць розным палярызацыйным станам W -мезонаў, у двух разгледжаных выпадках будуць роўныя $\sigma_{++} : \sigma_0 : \sigma_{+-} = 7,6 : 4 : 1$ (гл. (4)—(6)) і $\sigma'_{00} : \sigma'_{++} : \sigma'_{+-} = 7,5 : 1,5 : 1$ (гл. (8)—(10)). Таму ля парога нараджэння будуць пераважна генерыравацца падоўжна палярызаваныя W -мезоны, а пры высокіх энергіях — папярочна палярызаваныя, што адпаведным чынам павінна ўплываць на вуглавое размеркаванне прадуктаў распаду W -мезонаў.

Атрыманыя рэзультаты мяркуюцца выкарыстаць для ацэнкі сячэння фотанараджэння пар вектарных мезонаў на ядрах метадам Вейцзеке-ра—Вільямса.

Аўтар выказвае ўдзячнасць Ф. І. Фёдараву за ўвагу да работы і А. А. Богушу за абмеркаванне рэзультатаў.

ЛИТАРАТУРА

1. Feunpman R., Gell-Mann M. Phys. Rev., **106**, 193, 1958.
2. Понтекорво Б. IX международная конференция по физике высоких энергий. М., 1961.
3. Lee T. D., Markstein P., Yang C. N. Phys. Rev. Lett., **7**, 429, 1961.
4. Budini P., Furlan G. Nuovo Cimento, **18**, 1280, 1960.
5. Bludman S. A., Young T. A. Proc. of the 1960 Ann. Intern. Conf. on High Energy Phys. at Rochester, 1960, p. 566.
6. Bassetti M. Nuovo Cimento, **20**, 803, 1962.
7. Болсун А. И., Сацункевич И. С. ДАН БССР, **8**, 705, 1964.
8. Лягин И. В., Цукерман И. С. ЖЭТФ, **42**, 1618, 1962.
9. Копылов Г. И., Полубаринов И. В., Семашко Г. Л. ЖЭТФ, **46**, 1320, 1964.
10. Богуш А. А., Фёдараў Ф. І. Весці АН БССР, сер. фіз.-тэхн. навук, № 2, 1963; Богуш А. А. ДАН СССР, **149**, 1286, 1963.
11. Федоров Ф. И. ЖЭТФ, **35**, 493, 1958.
12. Богуш А. А., Болсун А. И. ДАН СССР, **155**, 1046, 1964.
13. Booth F., Wilson A. Proc. Roy. Soc., A **175**, 482, 1940.

Резюме

Получены и исследованы дифференциальные и полные сечения процесса фоторождения пар поляризованных векторных W -мезонов у порога рождения и в пределе высоких энергий. Обнаружено, что в первом случае преимущественно генерируются продольно поляризованные W -мезоны, а во втором случае — поперечно поляризованные.

Поступило в редакцию 2. IV 1964

В. М. ВАРЫКАШ

ВЫРОШЧВАННЕ КРЫШТАЛЯЎ ТРЫГЛІЦЫНСУЛЬФАТУ І ЗМЯНЕННЕ ФІЗІЧНЫХ УЛАСЦІВАСЦЕЙ У ЗОНЕ ТЭМПЕРАТУРЫ КЮРЫ

Сярод велізарнай колькасці адкрытых у апошні час сегнетаэлектрычных крышталяў перспектыўным сегнетаэлектрыкам побач з тытанатам барыю з'яўляецца трыгліцынсультат. Прамавугольнасць пятлі гістэрэзісу, нізкае значэнне каэрцытыўнага поля, высокія значэнні п'еза-модуляў зрабілі трыгліцынсультат аб'ектам многіх даследаванняў [1—4] і практычных прымяненняў [5, 6].

Аналіз работ як нашых [7, 8], так і зарубажных вучоных [9, 10] паказвае, што, нягледзячы на практычную важнасць даследавання трыгліцынсультату, многія яго фізічныя ўласцівасці або зусім не вывучаліся, або яшчэ не дастаткова высветлены. У сувязі з гэтым высвятленне заканамернасцей і асаблівасцей росту трыгліцынсультату і іншых сегнетаэлектрычных крышталяў, распрацоўка метадаў іх вырошчванняў, атрыманне аднародных крышталяў з зададзенымі фізічнымі ўласцівасцямі і пэўнай шчыльнасцю парушэнняў з'яўляюцца адной з актуальных задач фізікі сегнетаэлектрыкаў.

У дадзенай рабоце мы падводзім вынік першага цыкла даследаванняў асаблівасцей росту трыгліцынсультату ў залежнасці ад перанасычэння і тэмпературы, у тым ліку ў тэмпературным інтэрвале, што ахоплівае тэмпературу Кюры, у сувязі са змяненнямі рада фізічных уласцівасцей, якія пры гэтым адбываюцца. Асаблівая ўвага намі была звернута на выяўленне асаблівасцей працэсаў крышталізацыі ў вобласці сегнетаэлектрычнага фазавога ператварэння — ператварэння другога роду. Каб правільна зразумець і належным чынам ацаніць уплыў сегнетаэлектрычнага ператварэння на працэс росту крышталяў трыгліцынсультату, намі вывучаны змяненні фізічных уласцівасцей, якія характарызуюць дынаміку іонаў крышталяў (цеплаправоднасці, каэфіцыентаў лінейнага расшырэння, пругкіх уласцівасцей і інш.).

ВЫРОШЧВАННЕ КРЫШТАЛЯЎ ТРЫГЛІЦЫНСУЛЬФАТУ

Вырошчванне крышталяў трыгліцынсультату праводзілася з водных раствораў. Паколькі крывая растваральнасці трыгліцынсультату рэзка ўзрастае з тэмпературай, то найбольш простым метадам вырошчвання крышталяў гэтага рэчыва з'яўляецца метадаў зніжэння тэмпературы, дзякуючы чаму параўнаўча проста атрымліваюцца даволі буйныя, на першы погляд, аднародныя крышталі. Аднак гэты метадаў мае істотныя недахопы. Крышталі пры гэтым расце пры розных перанасычэннях і розных тэмпературах. Паколькі скорасці росту па-рознаму залежаць ад пераахладжвання ў адносінах да раўнаважкага стану, то крышталі

расце, пры гэтым увесь час рэгеніруючы. Ён імкнецца ўстанавіць раўнаважную форму, якая адпавядае пэўнаму перанасычэнню. У сувязі з няспынным змяненнем перанасычэння ў працэсе росту крышталю змяняецца таксама ўвесь час яго раўнаважная форма. Натуральна, што пры гэтым якасць крышталю павінна пагоршыцца.

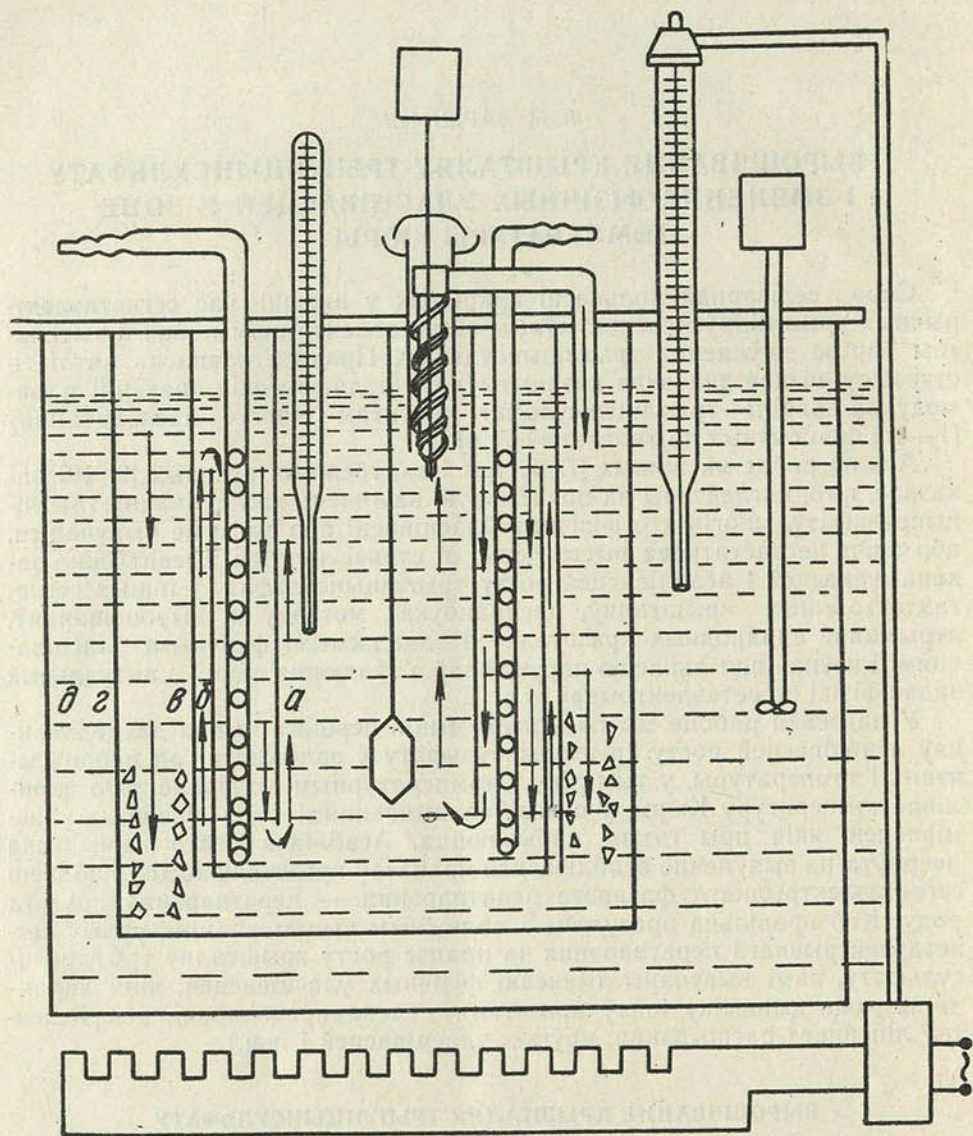


Рис. 1. Схема тэрмастата для росту крышталю пры пастаянным перанасычэнні

Для вырошчвання крышталю пры пастаянным перанасычэнні намі выкарыстан метад тэмпературнага перападу. Схема тэрмастата такога тыпу паказана на рис. 1. Ён складаецца з чатырох устаўленых адзін у адзін шкляных сасудаў *a*, *b*, *v* і *g* і знешняга тэрмастата. У сасудах *a* і *g* з дапамогай звычайных прыстасаванняў падтрымлівалася пастаянная рознасць тэмператур, дзякуючы якой крышталік у сасудзе *a* рос, а ліш-

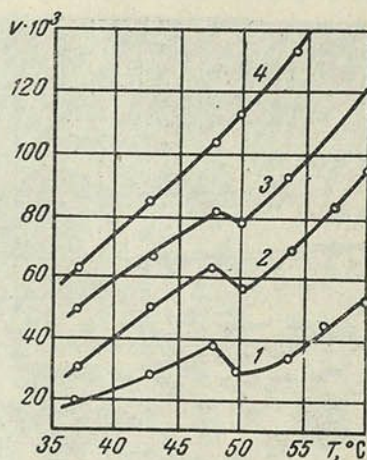
няе рэчыва, неабходнае для падкормкі раствору, растваралася ў сасудзе *г*. Прымусовая цыркуляцыя раствору з зоны росту ў зону растварэння ажыццяўлялася з дапамогай механічнай помпы, вырабленай з арганічнага шкла ў выглядзе вінта Архімеда. У адваротным напрамку з зоны растварэння ў зону росту раствор працякаў па своеасабліваму лабірынту, створанаму сасудамі *в* і *б*. Шлях руху раствору на схеме паказан стрэлкамі. Абмываючы на сваім шляху змеявік, размешчаны паміж сасудамі *а* і *б*, раствор ахалоджваўся і перанасычаны да пэўнага стану паступаў у цэнтральны сасуд *а*, дзе адбываўся рост крышталя.

Такім чынам ажыццяўляліся няспынны перанос рэчыва з зоны растварэння ў зону росту і рост крышталяў пры пастаянным перанасычэнні. Праведзенае гэтым метадам вывучэнне скорасцей росту граней крышталяў у залежнасці ад тэмпературы і перанасычэння дазволіла ўстанавіць [11], што з павелічэннем пераахалоджвання скорасці росту значна ўзрастаюць. Скорасць росту грані (110) ад тэмпературы пры пастаянным пераахалоджванні ўзрастае аж да тэмператур, блізкіх да тэмпературы Кюры (рыс. 2). Паблізу ад гэтай тэмпературы назіраецца зніжэнне скорасці росту, якая потым зноў узрастае пры больш высокіх тэмпературах. Анамалія скорасці росту поблізу да тэмпературы Кюры для гэтай грані змяняецца з павелічэннем пераахалоджвання і пры $\Delta T = 1,4^\circ \text{C}$ зусім знікае.

Змяншэнне скорасці росту пры падыходзе да зоны сегнетаэлектрычнага ператварэння можа быць звязана са змяненнем цеплавога руху атамаў у гэтым інтэрвале тэмператур і, відаць, з абумоўленым ім змяненнем межаў растваральнасці. Як будзе паказана ніжэй, у вобласці фазовага пераходу значна ўзрастаюць сярэднеквадратныя дынамічныя змяшчэнні атамаў, атамы з меншай верагоднасцю замацоўваюцца на грані, у выніку чаго і адбываецца змяншэнне скорасці росту крышталяў у гэтым інтэрвале тэмператур.

Пры крышталізацыі ў інтэрвале тэмпературы Кюры, відаць, адбываецца таксама змяненне мазаічнасці крышталя, парушэнне ўпарадкаванасці і дэзар'ентыроўка блокаў на растучай грані, што робіць істотны ўплыў на кінетыку яе росту. Умовы вырошчвання крышталяў робяць таксама значны ўплыў на некаторыя фізічныя ўласцівасці і даменную структуру крышталяў.

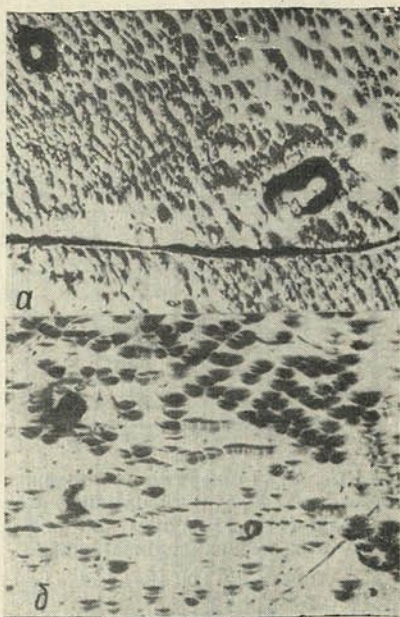
Крышталі трыгліцынсульфату, вырашчаныя пры малых пераахалоджваннях і, значыць, пры малых скорасцях росту, маюць невялікую колькасць дыслакацый (рыс. 3) і буйнадаменную структуру. Выяўленне дыслакацый і даменнай структуры трыгліцынсульфату ажыццяўлялася метадам траўлення. Пры траўленні выкарыстоўваўся травіцель, які апісан у рабоце [12] і складаецца з вады, этылавага спірту і воцатнай кіслаты. Пратраўленая паверхня вывучалася з дапамогай палярызаванага мікраскопа. Павелічэнне скорасці росту прыводзіць да ўзрастання дэфектнасці крышталяў, павелічэння колькасці ямак траўлення і змяншэння размераў дамена.



Рыс. 2. Тэмпературная залежнасць скорасці перамяшчэння грані (110) (мм/гадз) пры розных пераахалоджваннях:

1 — 0,8°C; 2 — 1,0; 3 — 1,2; 4 — 1,4

Існуе пэўная сувязь паміж даменнай структурай, шчыльнасцю дыслакацый і электрычнымі ўласцівасцямі крышталю. Узоры з малой шчыльнасцю дыслакацый і буйнадаменнай структурай маюць меншае каэрцытыўнае поле і большае значэнне спантаннай палярывацыі ў параўнанні з узорами, выразанымі з крышталю, вырашчаных пры большых пераахладжваннях. Такім чынам, пры іншых роўных умовах колькасць дыслакацый, даменная структура і ў некаторай ступені электрычныя ўласцівасці прадвызначаюцца працэсамі росту. Змяняючы ўмовы росту, можна атрымаць крысталі з рознымі фізічнымі ўласцівасцямі.



Рыс. 3. Фігуры траўлення грані (001) крышталю трыгліцынсультату, вырашчанага пры $T=34^{\circ}\text{C}$:

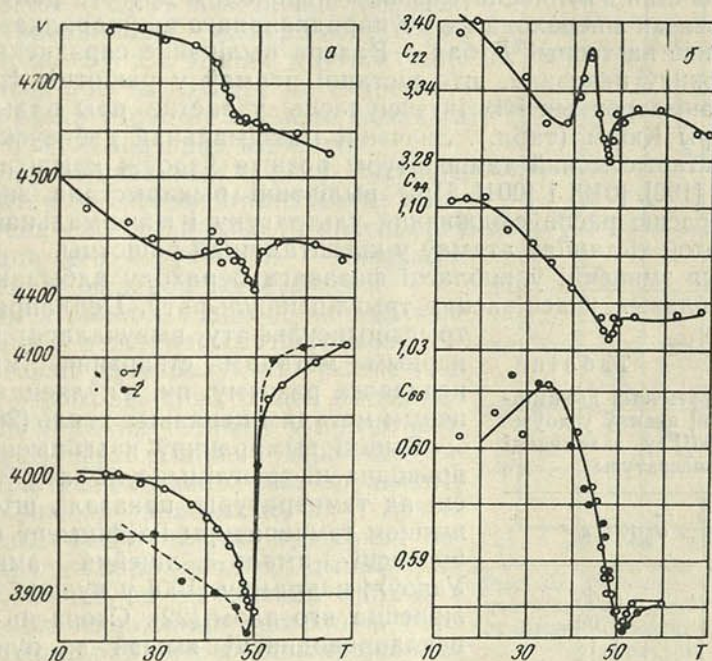
a — пераахладжванне $T\Delta=1,5^{\circ}\text{C}$;
b — $\Delta T=1,0^{\circ}\text{C}$

Атрыманя вынікі знаходзяць сваё тлумачэнне на аснове агульных уяўленняў аб росце крышталю. Згодна з флукуацыйнай тэорыяй [13, 14], рост крышталю адбываецца за кошт утварэння на яго гранях двухмерных зародкаў, якія, узнікшы ў пэўны момант, потым разрастаюцца па ўсёй грані крышталю. Пры малых пераахладжваннях найбольш верагодна, што ў якім-небудзь пункце на грані крышталю ўзнікае адзін двухмерны зародак, які бесперашкодна дараствае да рэбраў крышталю. З павелічэннем пераахладжвання робіцца ўсё большай верагоднасць, што на грані адначасова можа ўзнікнуць некалькі зародкаў. Пры сваім росце яны перакрываюцца адзін з другім. Па граніцы зрастання двухмерных зародкаў найбольш верагодна адступленне ў размяшчэнні атамаў ад правільнай перыядычнасці ў крышталічнай рашотцы і, магчыма, у выніку гэтага ўзнікненне дыслакацый. Акрамя таго, рэальны крыształ у працэсе росту няспынна захоплівае растваральнік і розныя прымесі, што знаходзяцца ў раствору. Рознага роду ўключэнні ў крысталі могуць з'явіцца межамі падзелу паміж даменамі. Таму ў крышталях, вырашчаных пры вялікіх перанасычэннях, адбываецца здрабненне даменнай структуры і павелічэнне шчыльнасці дыслакацый. Розная ступень дасканаласці і чысціні крышталю вызначае яго электрычныя ўласцівасці. Прымесі і ўключэнні раздзяляюць несегнетаэлектрычнымі праслойкамі асобныя часткі сегнетаэлектрычнага крышталю. Павелічэнне каэрцытыўнага поля ў такім крысталі знаходзіць сваё тлумачэнне ў рамках тэорыі ўключэнняў, развітай у дастасаванні да ферамагнетыкаў у работах Е. І. Кандорскага, Л. Нееля [15, 16], М. М. Сіраты [17] і іншых даследчыкаў.

ЗМЯНЕННЕ ФІЗІЧНЫХ УЛАСЦІВАСЦЕЙ У ВОБЛАСЦІ ФАЗАВАГА ПЕРАХОДУ ТРЫГЛІЦЫНСУЛЬФАТУ

Як паказаў аналіз літаратуры, да апошняга часу яшчэ не дастаткова поўна вывучаны пругкія ўласцівасці крышталю трыгліцынсультату і асабліва іх тэмпературная залежнасць у вобласці фазовага пераходу. Даследаванне пругкіх пастаянных гэтага рэчыва з'яўляецца да-

волі цікавим у сувязі з вялікімі п'езамодулямі тригліцинусульфату і магчымасцю яго шырокага тэхнічнага прымянення. Намі эксперыментальна вивучана тэмпературная залежнасць скорасці распаўсюджвання папярочных і падоўжных ультрагукавых хваль і вылічана тэмпературная залежнасць пругкіх модуляў C_{22} , C_{44} і C_{66} [18]. Для правядзення вымярэнняў пругкіх пастаянных быў прыменен імпульсны ультрагукавы метада, які дастаткова надзейны і параўнаўча прасты ў эксперыментальных адносінах. Вызначэнне скорасці ультрагуку дазваляе таксама з дастатковай дакладнасцю разлічыць такія важныя характарыстыкі рэчы-



Рыс. 4. Тэмпературная залежнасць скорасці распаўсюджвання (м/сек) падоўжных ультрагукавых хваль у тригліцынусульфате (а) і яго пругкіх модуляў (б) ($C_{ik} \cdot 10^{11}$, дн/см²):

1 — пры нагрыванні; 2 — пры ахалоджванні

ваў, як характарыстычная тэмпература, сярэднеквадратычныя дынамічныя змяшчэнні атамаў, сціскасць і інш.

Вымярэнні скорасцей распаўсюджвання ультрагуку рабіліся на ўстаноўцы УЗИС-7 на частаце 5 мегц у інтэрвале тэмператур ад 15 да 70° С. Для вымярэнняў выкарыстоўваліся ўзоры ў выглядзе паралелепіпедаў з размерамі рэбраў ад 12 да 20 мм. Узоры рабіліся разразаннем буйных крышталей вільготнай шаўковай ніткай. Арыенціроўка іх вызначалася па натуральных гранях крышталей і плоскасці спайнасці. Праверка на рэнтгенаніометры паказала, што арыенціроўка ўзораў захоўваецца з дакладнасцю 20—25'. Да вымярэнняў не дапускаліся ўзоры з уключэннямі і трэшчынамі. Датчыкам і прыёмнікам ультрагукавых хістанняў служылі кварцавыя пласцінкі x -зрэзу для падоўжных хваль і y -зрэзу для папярочных хваль. Тэрмастатаванне ўзораў і лініі затрымкі пры вымярэннях ажыццяўлялася з дапамогай ультратэрмастата Хеплера з дакладнасцю $\pm 0,05^\circ$ С.

У выніку вымярэнняў устаноўлена, што скорасці распаўсюджвання ультрагукавых хваль даследаваных крышталей і іх пругкія модулі

змяншаюцца з павелічэннем тэмпературы. Ва ўсіх выпадках пры пераходзе цераз тэмпературу Кюры скорасці распаўсюджвання ультрагуку і пругкія модулі або рэзка змяншаюцца, або праходзяць праз мінімум (рыс. 4). Тэмпературны ход пругкіх модуляў C_{22} , C_{44} , C_{66} трыгліцынсульфату адпавядае даным іншых аўтараў, якія вызначалі тэмпературны ход пругкіх пастаянных S_{ik} іншымі метадамі [19].

Выяўленыя анамаліі скорасцей распаўсюджвання ультрагуку і пругкіх модуляў у крышталях трыгліцынсульфату могуць быць якасна вытлумачаны, калі прыняць пад увагу, што пераход з пара- ў сегнетаэлектрычны стан з'яўляецца фазавым пераходам другога роду і, у прыватнасці, звязан з пераходам з неўпарадкаванага ва ўпарадкаваны стан.

Зробленае па тэорыі Дэбая — Валера вылічэнне сярэднеквадратычных зрушэнняў паказала, што хістанні атамаў у рашотцы трыгліцынсульфату анізатропныя і іх інтэнсіўнасць узрастае пры падыходзе да тэмпературы Кюры (табл.). Значэнні максімальнай дэбаеўскай частаты і характарыстычнай тэмпературы розныя ўздоўж крышталаграфічных восей [100], [010] і [001]. Пры вылічэнні выкарыстана залежнасць паміж скорасцю распаўсюджвання ультрагуку і максімальнай дэбаеўскай частатой хістанняў атамаў у крысталічнай рашотцы.

Істотныя змяненні ў вобласці фазавага пераходу адбываюцца таксама ў цеплавых уласцівасцях трыгліцынсульфату. Цеплаправоднасць трыгліцынсульфату вывучалася нестацыянарным метадам стварэння імпульснага цеплавога рэжыму, які з'яўляецца відазмененым метадам цеплавых хваль [20].

Табліца
Сярэднеквадратычныя дынамічныя зрушэнні атамаў уздоўж напрамку [001] у залежнасці ад тэмпературы

$T, ^\circ\text{C}$	$\overline{U}_s^2 \cdot 10^{16}, \text{см}^2$
15	0,95
45	1,09
50	1,13
55	1,12

Вынікі вымярэнняў каэфіцыента цеплаправоднасці трыгліцынсульфату ў залежнасці ад тэмпературы паказалі, што з павышэннем тэмпературы каэфіцыент цеплаправоднасці амаль лінейна змяншаецца. Уздоўж напрамку [100] у пункце Кюры назіраецца яго злом [22]. Скорасць зніжэння цеплаправоднасці вышэй за пункт Кюры меншая, чым пры тэмпературах ніжэй за яго. Пры павышэнні тэмпературы ад 20° да пункта Кюры прамалінейнае змяншэнне

каэфіцыента цеплаправоднасці ў напрамку [010] змяняецца ў апошнім павелічэннем пры павышэнні тэмпературы да $50-51^\circ\text{C}$. Затым пры наступным яе ўзрастанні цеплаправоднасць зноў зніжаецца. У гэтым выпадку можна гаварыць пра максімум цеплаправоднасці ў пункце Кюры.

Супастаўленне тэорыі цеплаправоднасці з эксперыентам паказвае, што тэмпературны ход каэфіцыента цеплаправоднасці вызначаецца ў першую чаргу ангарманічнасцю хістанняў атамаў у рашотцы. Аднак узрастанне каэфіцыента цеплаправоднасці ў пункце Кюры пры сегнетаэлектрычным фазавым пераходзе наўрад ці можа быць вытлумачана толькі змяненнем ангарманічнасці хістанняў. Паколькі працэсы цеплаправоднасці непасрэдна звязаны з пераразмеркаваннем энергіі ў спектры хістанняў крышталічнай рашоткі, то, відаць, істотны ўплыў на значэнні каэфіцыента цеплаправоднасці робіць змяненне спектра хістанняў пры фазавых пераходах другога роду. Змяненне цеплаправоднасці і пругкіх модуляў можа быць пастаўлена ў сувязь са змяненнямі каэфіцыентаў лінейнага расшырэння [21—23].

Для вывучэння асаблівасцей руху атамаў у зоне фазавага пераходу вялікае значэнне мае вывучэнне тэмпературнай залежнасці інтэнсіўнасцей рэнтгенаўскіх ліній. Такое вывучэнне было праведзена ў рабоце

Такім чынам, на аснове праведзеных эксперыментаў паказана, што рэжым вырошчвання крышталяў робіць істотны ўплыў не толькі на характар і шчыльнасць структурных парушэнняў, але і часткова на некаторыя сегнетаэлектрычныя ўласцівасці. Гэтыя даныя ствараюць прадпасылкі для атрымання крышталяў з жаданымі фізічнымі ўласцівасцямі. У рабоце паказана, што існуе аномалія скорасцей росту граней крышталя ў вобласці сегнетаэлектрычнага ператварэння. У зоне тэмпературы Кюры назіраецца прыкметнае змяншэнне скорасцей росту ў ізатэрмічных умовах. Гэты эфект зніжэння скорасцей росту ў інтэрвале тэмпературы Кюры адпавядае змяненню фізічных уласцівасцей і дынаміцы рашоткі ў гэтай зоне тэмператур. Прыведзеныя эксперыментальныя даныя паказваюць, што ў зоне Кюры значна ўзрастаюць сярэднеквадратычныя дынамічныя зрушэнні атамаў. Аб гэтым сведчыць узрастаючы каэфіцыент лінейнага расшырэння ў сегнетаэлектрычнай фазе пры падыходзе да зоны Кюры, змяншэнне скорасцей распаўсюджвання ультрагуку, а таксама вымяраемае іншымі аўтарамі ўзрастанне дэкрэмента затухання. Змяненні ў дынаміцы крышталічнай рашоткі робяць істотны ўплыў на скорасці росту крышталяў. Пры большых сярэднеквадратычных дынамічных зрушэннях атамаў змяншаецца скорасць росту. Акрамя таго, у зоне сегнетаэлектрычных фазавых пераходаў адбываецца змяненне мазаічнасці крышталя, што таксама адбываецца на кінетыцы яго росту. Аб змяненні мазаічнасці сведчаць змяненні мікрацвёрдасці і інтэнсіўнасці рассеявання рэнтгенавых прамяняў. Такім чынам, скорасць крышталізацыі вызначаецца не толькі скорасцю падводу рэчываў да крышталя, які расце, але і станам самой паверхні.

Хістальны рух атамаў, які ўзмацняецца ў вобласці фазавога пераходу і суправаджаецца ўзрастаннем сярэднеквадратычных дынамічных зрушэнняў, з'яўляецца вынікам і разам з тым садзейнічае ўзнікненню флуктуацыйных з'яў у гэтым інтэрвале тэмператур, што знаходзіцца ў прамой адпаведнасці з тэорыяй фазавых пераходаў другога роду.

Цікавым пацвярджэннем гэтага з'яўляецца нядаўна апублікаваная работа Джэймса [29] па ўзрастанню флуктуацыйных шумаў у зоне пункта Кюры трыгліцынсультату.

У заключэнне выражаю глыбокую падзяку акадэміку АН БССР М. М. Сіраце за прапанаваную тэму, абмеркаванне атрыманых рэзультатаў.

ЛІТАРАТУРА

1. Matthias B. T., Miller C. E., Remeika I. P. *Phys. Rev.*, **104**, 849, 1956.
2. Wood E., Holden A. *Acta crystallogr.*, **10**, 145, 1957.
3. Константинова В. П., Сильвестрова И. М. *Кристаллография*, **4**, № 1, 1959.
4. Желудев И. С. *Изв. АН СССР, сер. физ.*, **24**, № 10, 1960.
5. Мамонов Е. И. *Изв. АН СССР, сер. физ.*, **24**, № 11, 1960.
6. Мамонов Е. И., Желудев И. С. Доклад на Всесоюзном совещании по вычислительной технике и математике. МГУ, ноябрь, 1959.
7. Константинова В. П., Сильвестрова И. М., Александров К. С. Сб. «Физика диэлектриков». М., 1960, стар. 351—365.
8. Шувалов Л. А., Плужников К. А. *Кристаллография*, **6**, № 5, 1961.
9. Hoshino S., Okaya Y., Pepinsky R. *Phys. Rev.*, **115**, 323, 1959.
10. Ivanov V., Brezina B., Arend H. *Českosl. časop. fys.*, **A 10**, № 1, 63—80, 1960.
11. Сирота Н. Н., Варыкаш В. М. Сб. «Кристаллизация и фазовые переходы». Изд. АН БССР, 1962, стар. 420—424.
12. Константинова В. П. *Кристаллография*, **7**, № 5, 1962.
13. Странский И., Каишев Р. *Успехи физических наук*, **21**, № 4, 408—465, 1939.
14. Сирота Н. Н. *ДАН СССР*, **50**, 337—347, 1945.
15. Кондорский Е. И. *ЖЭТФ*, **10**, 420, 1940.
16. Neel L. *Compt. rend.*, **224**, 1448—1550, 1947.

17. Сирота Н. Н. Труды научно-технического общества черной металлургии, 6, 1955, стар. 152.
18. Сирота Н. Н., Варикаш В. М., Теханович Н. П. Сб. «Кристаллизация и фазовые переходы». Изд. АН БССР, 1962, стар. 435—439.
19. Gilletta F. *Compt. Rend. Acad. sci.*, 253, № 15, 1556, 1961.
20. Вишневский Е. Е. Сб. «Тепломассообмен в процессах испарения». Изд. АН СССР, 1956.
21. Ежкова З. И., Жданов Г. С., Уманский М. М. *Кристаллография*, 4, № 4, 1959.
22. Сирота Н. Н., Варикаш В. М. Сб. «Кристаллизация и фазовые переходы». Минск, 1962, стар. 435—445.
23. Ganesen G. *Acta crystallogr.*, 15, 1, 1962.
24. Сирота Н. Н., Варикаш В. М. *Изв. АН СССР, сер. физ.*, 28, № 4, 1964.
25. Семенченко В. К. Термодинамика мезофаз, сб. «Механизм и кинетика кристаллизации». Изд. АН БССР, 1964.
26. Семенченко В. К. *ЖФХА*, 26, № 9, 1337—1348, 1952.
27. Ландау Л. Д. *ЖЭТФ*, 7, 627, 1937.
28. Гинзбург В. Л. *УФН*, 38, № 4, 1949.
29. Brophy J. I., Weeb S. L. *Phys. Rev.*, 128, № 2, 584—588, 1962.

Резюме

Материалы статьи отражают результаты первой серии опытов по выращиванию кристаллов триглицидсульфата и исследованию их свойства в области сегнетоэлектрического превращения. В работе изучены особенности роста кристаллов при постоянном пересыщении при различных температурах, дается описание термостата. Показано, что в области температуры Кюри происходит снижение скоростей роста отдельных граней. Обнаруженная аномалия скоростей роста триглицидсульфата при фазовом переходе второго рода объясняется изменением теплового движения атомов в кристаллической решетке в этом интервале температур. Установлено, что структурные и некоторые сегнетоэлектрические свойства кристаллов триглицидсульфата в значительной степени зависят от условий выращивания. Полученные результаты свидетельствуют о том, что, изменяя условия роста, можно получить кристаллы с различной плотностью дислокаций и различными физическими свойствами, и создают предпосылки для получения высококачественных кристаллов.

Исследованы температурная зависимость скоростей распространения ультразвуковых волн, теплопроводности и интенсивностей отдельных линий дебай-шерреровского спектра триглицидсульфата. В области фазового перехода второго рода проявляется ряд особенностей этих свойств, которые объясняются на основе существующих теорий.

Поступило в редакцию 26.VI 1964

Я. М. ГАЛАЛОБАЎ

ВЫЗНАЧЭННЕ ЦЯПЛЫНЬ АТАМІЗАЦЫІ І ЭФЕКТЫЎНЫХ ЗАРАДАЎ ІОНАЎ ЗЛУЧЭННЯУ $A^{III}B^V$ ПА ДАНЫХ РЭНТГЕНАГРАФІЧНАГА АНАЛІЗУ

Асноўнымі пытаннямі праблемы хімічнай сувязі ў крышталях, у прыватнасці ў паўправадніковых злучэннях, з'яўляюцца пытанні характару і энергіі міжатамнага ўзаемадзеяння. Як вядома [1], многія фізічныя і хімічныя ўласцівасці вызначаюцца гэтымі фактарамі. У гэтых адносінах асабліва цікавымі з'яўляюцца паўправадніковыя злучэнні $A^{III}B^V$, характар хімічнай сувязі ў якіх па існуючых уяўленнях апісваецца як іонна-кавалентны.

Але да цяперашняга часу пытанням характару і энергіі міжатамнага ўзаемадзеяння ў паўправадніках не ўдзяляецца дастаткова ўвагі. Гэта звязана галоўным чынам з тым, што эксперыментальныя і тэарэтычныя метады вызначэння зарадаў іонаў і энергіі міжатамнага ўзаемадзеяння са змешаным іонна-кавалентным тыпам хімічнай сувязі недастаткова распрацаваны.

У літаратуры існуюць супярэчлівыя сцверджанні [2] адносна размяшчэння электронаў у кавалентных «мосціках», знака і ефектыўных зарадаў іонаў у злучэннях $A^{III}B^V$. Рад аўтараў, напрыклад, сцвярджаюць [3], што электроны часткова зрушаны да атама B^V і, значыць, атамы B^V у рашотцы злучэння зараджаны адмоўна, іншыя аўтары лічаць, што электрон пераходзіць да атама A^{III} . Значыць, згодна з пунктам погляду апошніх, наадварот, адмоўнымі іонамі з'яўляюцца атамы A^{III} , а дадатнымі B^V . Да цяперашняга часу не вядомы эксперыментальныя метады вызначэння знакаў іонаў у злучэннях $A^{III}B^V$. Таму асаблівай увагі заслугоўвае развіты ў дадзеным даследаванні рэнтгенаўскі метада [4].

Існуючыя метады разліку энергіі міжатамнага ўзаемадзеяння не дазваляюць вызначыць энергію сувязі іонаў у злучэннях $A^{III}B^V$. Паўэмпірычны метада вызначэння энергіі крышталічнай рашоткі можа быць прыменены толькі для іонных крышталёў. Статыстычны метада [5] па тэарэтычнаму размеркаванню электроннай шчыльнасці дазваляе разлічваць энергію рашотак іонных крышталёў і металаў. А квантавы метада Гейтлера — Лондана практычна пакуль што нельга выкарыстаць у выпадку сістэмы з вялікім лікам электронаў [6].

У дадзенай рабоце была пастаўлена задача вызначэння тыпу хімічнай сувязі, знака і ефектыўных зарадаў іонаў, цяплынь атамізацыі і ўтварэння злучэнняў $A^{III}B^V$ па рэнтгенаўскіх даных і вылічаным па іх размеркаванні электроннай шчыльнасці. Эксперыментальнае вызначэнне размеркавання электроннай шчыльнасці ў крышталях дазваляе не толькі судзіць аб характары сувязі, але і атрымаць колькасныя даныя аб зарадзе і знаку іонаў і энергіі іх узаемадзеяння. З гэтага пункту погляду эксперыментальнае вызначэнне атамнарасейваючых фактараў і падлік размеркавання электроннай шчыльнасці ўяўляюць значную цікакасць для фізікі і хіміі цвёрдага цела.

А ФІЗІКА-ХІМІЧНЫЯ ХАРАКТАРЫСТЫКІ АБ'ЕКТАЎ ДАСЛЕДАВАННЯ

З мэтай устанаўлення карэляцыі паміж характарам і энергіяй хімічнай сувязі і фізіка-хімічнымі характарыстыкамі, а таксама вызначэння чысціні зыходных узораў, канцэнтрацыі і знака носьбітаў току праводзіліся вымярэнні ўдзельнага электрасупраціўлення, тэрмаэлектрарухаючай сілы (ТЭРС), пастаяннай Хола, характарыстычнай тэмпературы, каэфіцыента лінейнага расшырэння і мікрацвёрдасці асноўных аб'ектаў даследавання AlSb, GaSb і InSb. Полікрышталічны AlSb сінтэзаваўся намі, а монакрышталі GaSb і InSb атрыманы ў ЛФТИ імя А. Ф. Іофэ. Вымярэнне электрафізічных характарыстык узораў праводзілася агульнавядомымі метадамі.

Характарыстычная тэмпература і каэфіцыент лінейнага расшырэння вызначаліся рэнтгенаўскім метадам [7]. Атрыманыя значэнні фізіка-хімічных характарыстык добра ўзгадняюцца з літаратурнымі данымі. Значэнні характарыстычнай тэмпературы і каэфіцыента лінейнага расшырэння AlSb у літаратуры невядомыя.

Атрыманыя намі фізіка-хімічныя характарыстыкі даследаваных узораў прыводзяцца ў табл. 1.

Табліца 1

Фізіка-хімічныя характарыстыкі даследуемых узораў
AlSb, GaSb і InSb

A III V	N , кг/мм ²	θ_{233° , °К	$\alpha \cdot 10^6$, град ⁻¹	ρ , ом·см	ТЭРС, мкв/град	R , см ² ·кулон	n, p	Тып пра- воднасці
AlSb	440 ± 20	320 ± 10	4,1 ± 0,1	0,00035	120	—	—	p
GaSb	445 ± 20	240 ± 10	5,7 ± 0,1	0,002	450	15,29	4,8 · 10 ¹⁷	p
InSb	230 ± 20	210 ± 10	4,9 ± 0,1	0,0004	220	-11,07	6,6 · 10 ¹⁷	n

Як відаць, з павелічэннем атамнага нумара кампанентаў мікрацвёрдасць і характарыстычная тэмпература памяншаюцца, а каэфіцыент лінейнага расшырэння павялічваецца. Аналіз фізіка-хімічных велічынь пацвярджае аднафазнасць выпрабаваных узораў і параўнальна высокую ступень іх чысціні.

ВЫЗНАЧЭННЕ РАЗМЕРКАВАННЯ ЭЛЕКТРОННАЙ ШЧЫЛЬНАСЦІ ў AlSb, GaSb і InSb

Як вядома [8], структурныя амплітуды F_{hkl} з'яўляюцца каэфіцыентамі трохмернага рада Фур'е, які ўстанаўлівае значэнне электроннай шчыльнасці ў любым пункце крышталю. Так, значэнне электроннай шчыльнасці ў пункце (x, y, z) роўна

$$\rho(x, y, z) = \frac{1}{V} \sum_h \sum_k \sum_l F_{hkl} \exp[-2\pi i(hx + ky + lz)]. \quad (1)$$

Паколькі рад (1) павольна сыходны, для яго вылічэння неабходна вялікая колькасць значэнняў F_{hkl} . Але эксперымент нават у выпадку самага жорсткага рэнтгенаўскага выпраменьвання не дазваляе вызначыць дастатковую колькасць структурных амплітуд. Падсумаванне рада (1) пры наяўнасці недастатковай колькасці членаў прыводзіць да эфекту «абрыву рада». Эфект «абрыву рада» не дазваляе выявіць сапраўдны малюнак размеркавання электроннай шчыльнасці ў крышталі. Для ўстаранення яго эксперыментальныя функцыі атамнага рассеявання або экстрапаляруюцца да большых значэнняў $\sin \nu/\lambda$, або прымяняец-

ца метада «разлічанай тэмпературы», які шырока выкарыстоўваўся ў нашай краіне раней [10, 11].

У дадзенай рабоце эфект «абрыву рада» Фур'е ўстараняецца з дапамогай метада «раздзялення f -функцыі» [12], які дазваляе вызначыць размеркаванне электроннай шчыльнасці непасрэдна пры тэмпературы здымку дыфракцыйнага рэнтгенаўскага спектра пры параўнальна невялікім ліку матэматычных аперацый. Сутнасць гэтага метада заключаецца ў тым, што з сапраўднага размеркавання электроннай шчыльнасці іонаў выразаецца якое-небудзь зададзенае размеркаванне (напрыклад, гаусаўскае), а пры дапамозе падсумавання трохмернага рада Фур'е вызначаецца рознасная электронная шчыльнасць паміж сапраўдным і зададзеным гаусаўскім размеркаваннем электронаў.

З мэтай устаранення ўплыву экстынкцыі інтэнсіўнасці рэнтгенаўскіх дыфракцыйных спектраў вызначаліся метадам парашкоў (размер часцінак 3—5 мк). Праводзіўся старанны аналіз фактараў, якія аказвалі ўплыў на дакладнасць вымярэння інтэнсіўнасці рэнтгенаўскіх рэфлексаў [13]. Узоры прыгатаўляліся слабым спрасоўваннем парашку без звязваючага матэрыялу ў кюветах ($2 \times 9 \times 12$ мм³) з плексігласу. Здымак спектраў праводзіўся пры тэмпературы 20 і -100° С на рэнтгенаўскім дыфрактометры УРС-50И з іанізацыйным лічыльнікам Гейгера — Мюлера ў CuK_α выпраменьванні. Кожны рэфлекс запісваўся каля 50 разоў. Абсалютныя значэнні структурнага фактара $|F_{hkl}|^2$ устанаўліваліся метадам эталона (NaCl). Апрача таго, намі праводзілася дадатковае вызначэнне абсалютных значэнняў структурных амплітуд $|F_{200}|$ для антыманидаў, арсенідаў і фасфідаў алюмінію, галію і індыю з дапамогай дыфрактометра УРС-50-ИМ з іанізацыйным лічыльнікам. Інтэнсіўнасць вызначалася па электрамеханічнаму лічыльніку пры працяглых экспазіцыях. Гэта дазволіла выявіць вельмі слабы рэфлекс (200) у InSb. Па атрыманых структурных фактарах вызначаліся функцыі атамнага рассеявання f іонаў даследуемых злучэнняў, пры гэтым уносілася папраўка на дысперсію.

Падлік электроннай шчыльнасці [14—16]¹ праводзіўся пры 20 і -100° С у крышталаграфічнай плоскасці (110) і па напрамках [111] і [113] (рыс. 1, 2, 3).

Аналіз карт размеркавання электроннай шчыльнасці паказвае, што паміж бліжэйшымі рознаіменнымі іонамі A^{III} і B^V у тэтраэдрычных напрамках ёсць «электронныя мосцікі», значэнні электроннай шчыльнасці ў цэнтры якіх памяншаюцца ў радзе AlSb—GaSb—InSb. Пры гэтым самі «мосцікі» маюць тэндэнцыю расшырэння ў напрамку, перпендыкулярным лініі сувязі, з павелічэннем атамнага нумара кампанентаў злучэння. З паніжэннем тэмпературы даследавання іоны як бы сціскаюцца, прычым значэнні электронных шчыльнасцей паблізу цэнтраў атамаў павышаюцца, а ў «мосціках» маюць тэндэнцыю да нязначнага павышэння.

Наяўнасць «электронных мосцікаў» у злучэннях AlSb, GaSb і InSb сведчыць аб кавалентным характары хімічнай сувязі.

Максімальная хібнасць вызначэння электроннай шчыльнасці ў вобласці «мосціка» роўна $\pm 0,05$ э/Å³. Значэнні шчыльнасці ў цэнтры «мосцікаў» AlSb, GaSb і InSb складаюць адпаведна велічыні 0,40, 0,36 і 0,30 э/Å³, якія значна перавышаюць хібнасці.

¹ Пасля надрукавання нашых работ з'явіўся артыкул А. Е. Атарда і Л. В. Азарава [19] аб размеркаванні электроннай шчыльнасці ў InSb. Праверкай устаноўлена, што ў сілу прынятай аўтарамі метадыкі падліку размеркавання электроннай шчыльнасці не ўстараняецца эфект «абрыву рада» Фур'е, што і прыводзіць да памылковых вынікаў.

ВЫЗНАЧЭННЕ ЭФЕКТЫЎНЫХ ЗАРАДАЎ ІОНАЎ ЗЛУЧЭННЯ А^{III}В^V

З мэтай высвятлення наяўнасці іоннасці ў злучэннях А^{III}В^V у дадзенай рабоце вызначаны знакі і эфектыўныя зарады іонаў у злучэннях А^{III}В^V са структурай сфалерыту двума рознымі метадамі: па размеркаванню электроннай шчыльнасці ў злучэннях і з супастаўлення эксперыментальных і тэарэтычных значэнняў структурных амплітуд.

Па атрыманых картах электроннай шчыльнасці падлічваліся электронныя зарады адпаведных іонаў у даследуемых антыванідах алюмі-

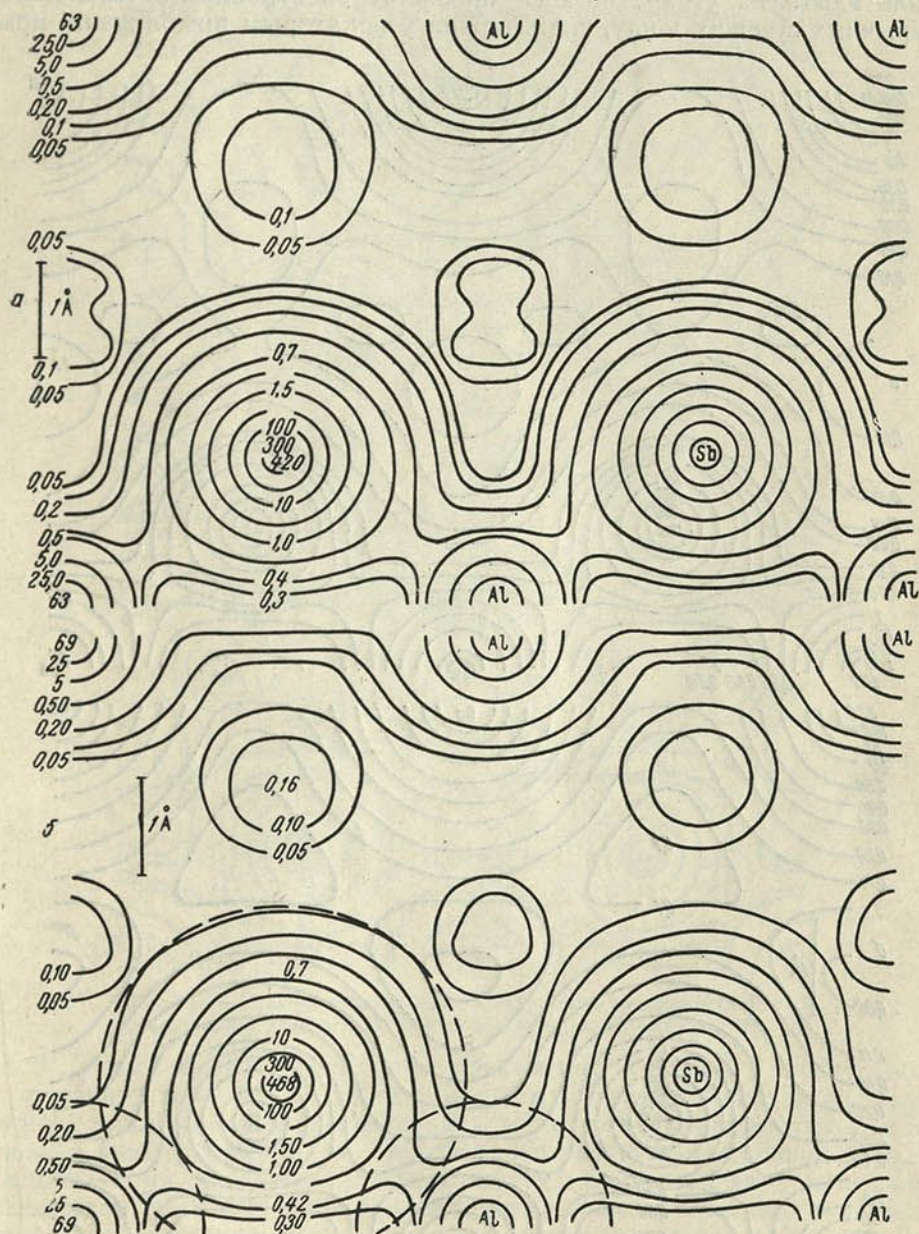


Рис. 1. Карты размеркавання электроннай шчыльнасці ў плоскасці (110) элементарнай ячэйкі AlSb пры 20 (а) і -100°C (б). Пункцірам адзначаны межы іонаў Al і Sb

нію, галію і індыю. Электронныя зарады іонаў арсенідаў алюмінію, галію і індыю падлічваліся па даных размеркавання электроннай шчыльнасці, якія вызначаны ў нашай лабараторыі [17]. Пры зазначаных падліках для іх спрашчэння рабілася дапушчэнне аб сферычнай сіметрыі іонаў. Граніцы вызначаліся па ізалініях $\rho(x, y, z)$, адпавядаючых $\rho(x, y, z) = 0,05 \pm 0,04 \text{ э/Å}^3$ (рыс. 1). Магчымасць апраксімацыі формы іонаў сферай аблягчаецца той акалічнасцю, што, як намі эксперыментальна ўстаноўлена, значэнні электронных шчыльнасцей у «мосціках» амаль адытыўна ўтвараюцца са значэнняў электронных шчыльнасцей сферычных суседніх іонаў, г. зн. можна ў некаторым прыбліжэнні пры-

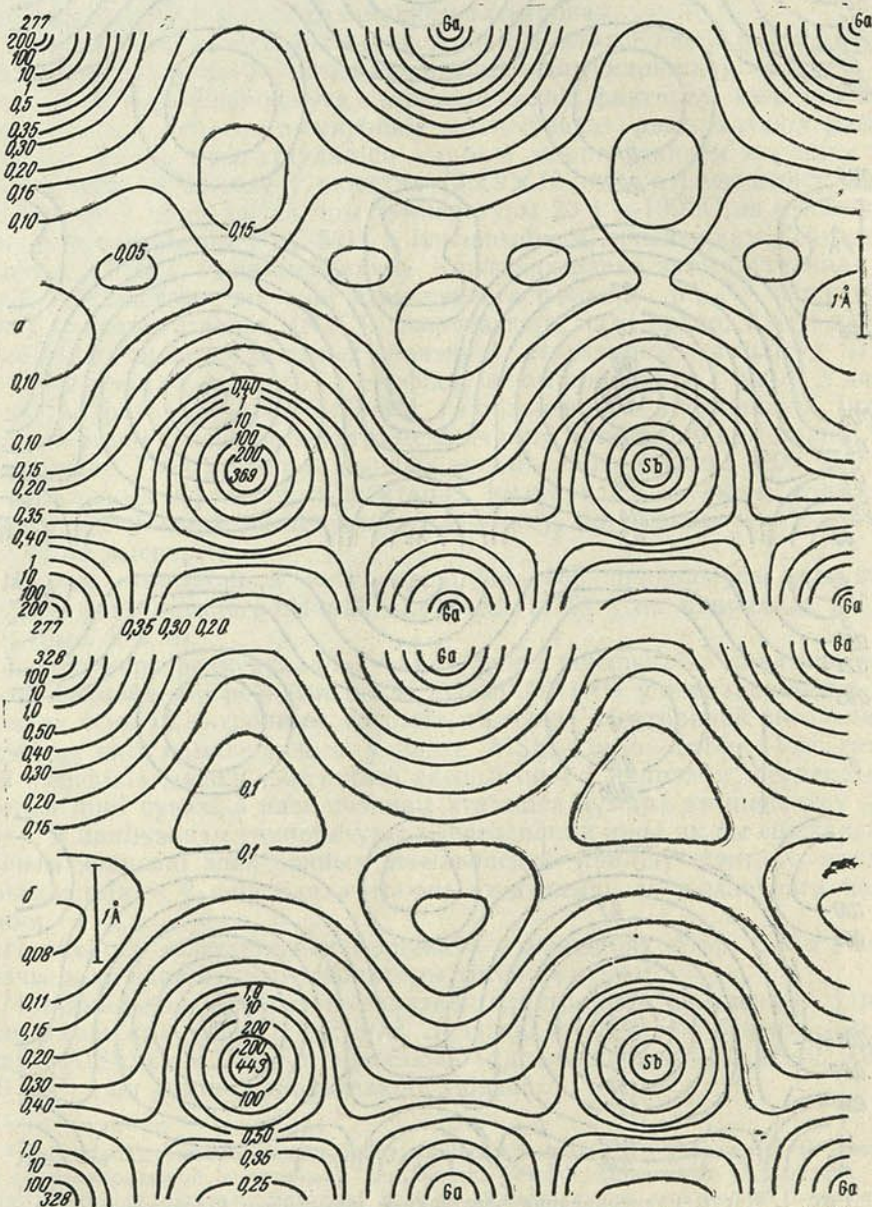
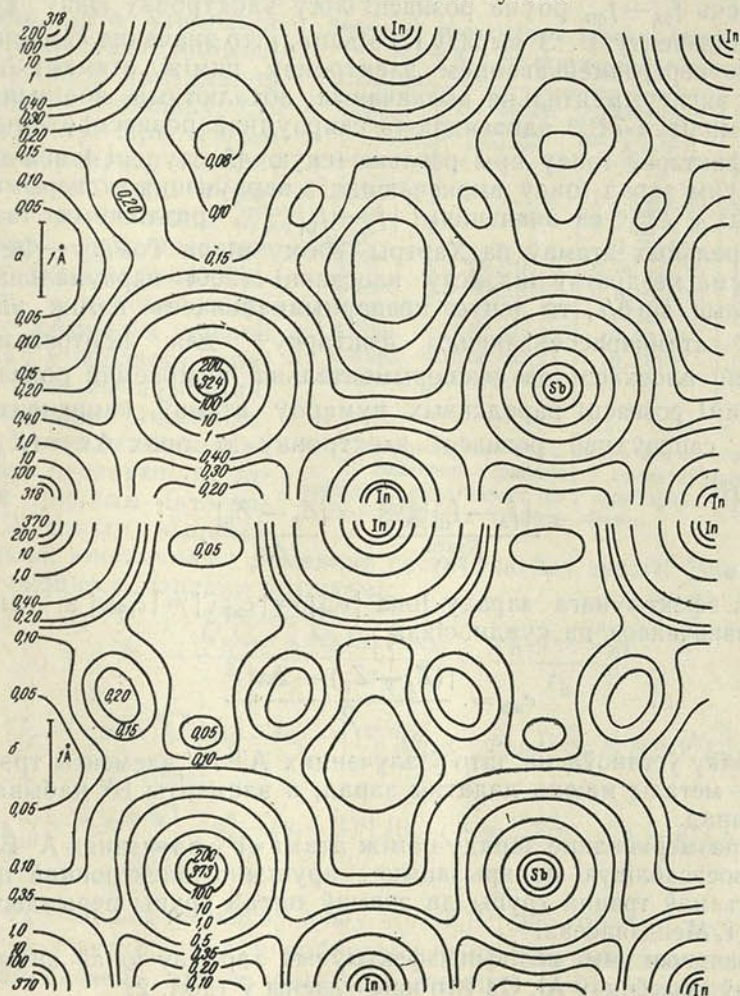


Рис. 2. Карты размеркавання электроннай шчыльнасці ў плоскасці (110) элементарнай ячэйкі GaSb пры 20 (а) і — 100° С (б)

няць, што бліжэйшыя сферычныя іоны часткова накладваюцца адзін на аднаго, утвараючы «мосцік». Заўважым, што вызначенне размераў іонаў па радыусах на ўзроўнях $0,03 \text{ э}/\text{Å}^3$ і меншых не ўносіла істотнай розніцы ў велічыню зараду іона. Выкарыстанне карт электроннай шчыльнасці ўяўляе асаблівую цікавасць, паколькі яны дазваляюць вызначаць больш надзейна сярэднія велічыні радыяльнай функцыі электроннай шчыльнасці і граніцы сферычна сіметрычных іонаў у злучэннях са змешаным іонна-кавалентным тыпам хімічнай сувязі.



Рыс. 3. Карты размеркавання электроннай шчыльнасці ў плоскасці (110) элементарнай ячэйкі InSb пры 20 (а) і -100°C (б)

З другога боку, вызначенне эфектыўных зарадаў і знакаў іонаў у злучэнні тыпу $A^{III}B^V$ можа быць ажыццёўлена па значэннях структурных амплітуд. Намі распрацаваны метады вызначэння эфектыўных зарадаў і знакаў іонаў [4], які не патрабуе разліку электроннай шчыльнасці. Вядома, што структурная амплітуда, аднесеная да пары атамаў, у выпадку сфалерыту для крышталаграфічных плоскасцей, сума індэксаў якіх з'яўляецца цотнай, але не дзеліцца на чатыры, роўна рознасці атамнарассейваючых фактараў. Напрыклад,

$$|F_{200}| = |f_A - f_B|. \quad (2)$$

Як вядома, значэнне атамнарассейваючага фактара f_0 пры $\sum_{i=1}^3 h_i^2 = 0$ колькасна роўна агульнаму ліку электронаў іона.

Значыць, сума $f_{0A} + f_{0B}$ роўна суме электронаў іонаў абодвух кампанентаў, г. зн. суме парадкавых нумароў элементаў, якія ўтвараюць злучэнне, і не залежыць ад пераразмеркавання электронаў паміж іонамі. Рознасць $f_{0A} - f_{0B}$ роўна рознасці ліку электронаў іонаў кампаненту А і кампаненту В. З выразу (2) відаць, што значэнне F_{200} непасрэдна звязана з пераразмеркаваннем электронаў паміж атамамі A^{III} і B^V . Значыць, эксперыментальна вызначаныя абсалютныя велічыні структурных амплітуд $F_{200}^{эксп}$ адпавядаюць сапраўднай рознасці атамнарассейваючых фактараў іонаў пры рэальна існуючай ступені іанізацыі. Знак і эфектыўны зарад іонаў вызначаюцца з параўнання эксперыментальна атрыманых $F_{200}^{эксп}$ са значэннямі $|f_A - f_B|_{200}^{нейтр}$, разлічанымі тэарэтычна для нейтральных атамаў па Хартры—Фоку ці па Томасу—Фермі. Паколькі сума квадратаў індэксаў плоскасці (200) параўнальна малая, г. зн. малыя $\sin \theta / \lambda$, то існуе прапарцыянальнасць паміж адносінамі рознасці атамнарассейваючых фактараў для нейтральных атамаў гэтай плоскасці да эксперыментальна назіраемай рознасці $F_{200}^{эксп}$ і адносінамі рознасці парадкавых нумароў атамаў кампанентаў ($Z_A - Z_B$) да сапраўднай рознасці электронаў у іонах $\Delta x = (Z_A + e_{эф}) - (Z_B - e_{эф})$:

$$\frac{|f_A - f_B|_{200}^{нейтр}}{F_{200}^{эксп}} = \frac{|Z_A - Z_B|}{\Delta x}. \quad (3)$$

Велічыня эфектыўнага зараду іона $|e_{эф}| = |e_{эфA}| = |e_{эфB}|$ з улікам яго знака вызначалася па суадносінах

$$e_{эф} = \frac{|(Z_A - Z_B) - \Delta x|}{2}. \quad (4)$$

У выніку ўстаноўлена, што ў злучэннях $A^{III}B^V$ элементы трэцяй групы A^{III} — металы маюць дадатны зарад, а элементы B^V набываюць адмоўны зарад.

Перааразмеркаванне зараду паміж атамамі ў злучэннях $A^{III}B^V$ уяўляе сабой своеасаблівую палярызацыю — зрушэнне электроннай шчыльнасці ад атамаў трэцяй групы да атамаў пятай групы перыядычнай сістэмы Д. І. Мендзялеева.

Вызначаныя намі велічыні эфектыўных зарадаў іонаў антыманідаў, арсенідаў і фасфідаў Al, Ga і In прыведзены ў табл. 2.

Такім чынам, згодна з сучаснымі ўяўленнямі, характар хімічнай сувязі ў злучэннях $A^{III}B^V$ са структурай сфалерыту можа быць акрэслены як іонна-кавалентны.

ВЫЗНАЧЭННЕ ЦЯПЛЫНЬ АТАМІЗАЦЫ І УТВАРЭННЯ ЗЛУЧЭННЯ $A^{III}B^V$

Згодна са статыстычнай тэорыяй атама Томаса — Фермі — Дзірака [5], энергія міжатамнага ўзаемадзеяння ў некаторым прыбліжэнні можа быць паказана ў выглядзе сумы кулонаўскай, кінетычнай і абменнай састаўляючых энергій, падлічаных па тэарэтычных функцыях размеркавання электроннай шчыльнасці:

$$U = U_c + U_k + U_a. \quad (5)$$

Маючы эксперыментальнае размеркаванне электроннай шчыльнасці ў антыманідах і арсенідах Al, Ga і In, можна скарыстаць памянёны ста-
тыстычны метадаў адносінах да злучэнняў тыпу A^{III}B^V [18].

Энергія міжатамнага ўзаемадзеяння ў даследуемых злучэннях A^{III}B^V вызначаецца як па эксперыментальна атрыманых велічынях размеркавання электроннай шчыльнасці, так і непасрэдна па эксперыментальных функцыях атамнага рассеяння.

У першым прыбліжэнні мяркуецца, што ўтварэнне кавалентнай сувязі адбываецца ў выніку накладання электронных воблакаў суседніх атамаў. Пры гэтым вызначаецца зарадаў, які знаходзіцца ў вобласці перакрыцця, і падлічваецца кулонаўскае ўзаемадзеянне паміж іонамі і зарадам перакрыцця, а таксама кінетычная і абменная энергіі электронаў у вобласці перакрыцця. Пры выкарыстанні карт электроннай шчыльнасці аналітычнае інтэграванне па аб'ёму перакрыцця змянялася лікавым інтэграваннем. У такім выпадку кулонаўская, кінетычная і абменная састаўляючыя энергіі ўзаемадзеяння вызначаюцца адпаведна выразамі:

$$U_c = \frac{Q'_A Q'_B}{\delta} - \frac{Q'_A (q - Q'_A)}{r_A} - \frac{Q'_B (q - Q'_B)}{r_B}, \quad (6)$$

$$U_k = z_a \pi r^3 \sum_{j,i=1} [n_i^2 - (n_i - 1)^2] [(\rho_{j,iA} + \rho_{j,iB})^{2/3} - \rho_{j,iA}^{2/3} - \rho_{j,iB}^{2/3}], \quad (7)$$

$$U_a = -z_a \pi r^3 \sum_{j,i=1} [n_i^2 - (n_i - 1)^2] [(\rho_{j,iA} + \rho_{j,iB})^{4/3} - \rho_{j,iA}^{4/3} - \rho_{j,iB}^{4/3}], \quad (8)$$

дзе Q'_A і Q'_B —зарады каркасаў іонаў A^{III} і B^V без вобласці перакрыцця; q —зарадаў, які знаходзіцца ў вобласці перакрыцця электронных воблакаў; δ —адлегласць паміж цэнтрамі атамаў; r_A і r_B —адлегласці ад цэнтраў атамаў да цэнтра вобласці перакрыцця; r —размер квадратнага сячэння n_i -га кальца ў вобласці перакрыцця; $n_i r$ —адлегласць кальца ад лініі, якая злучае цэнтры іонаў, $n_i = 1, 2, 3, \dots$

Другі варыянт вызначэння кулонаўскай, кінетычнай і абменной састаўляючыя энергіі сувязі грунтуецца на магчымасці ўяўлення размеркавання электроннай шчыльнасці дзвюма гаусаўскімі функцыямі (рыс. 4)

$$\rho_A(r) = A_{A1} e^{-\alpha_1 r^2} + A_{A2} e^{-\alpha_2 r^2}. \quad (9)$$

Як і ў папярэднім варыянце, у першым прыбліжэнні ўлічваецца зарадаў, які знаходзіцца ў вобласці перакрыцця. Тады, паколькі на практыцы перакрываюцца толькі функцыі $A_2 e^{-\alpha_2 r^2}$, якія вызначаюць размеркаванне

Табліца 2

Значэнні эфектыўных зарадаў іонаў злучэнняў A^{III}B^V са структурай сфалерыту

A ^{III} B ^V	Па картах электр. шчыльн.	З дапамогай F-фактараў X,—Ф.	З дапамогай F-фактараў T,—Ф.
AlP	—	0,8 ± 0,20	0,32 ± 0,06
GaP	—	0,75 ± 0,20	0,62 ± 0,20
InP	—	(0,70)**	0,58 ± 0,15
AlAs	1,00 ± 0,25	0,60 ± 0,15	0,40 ± 0,08
GaAs	0,80 ± 0,22	0,51 ± 0,10	0,36 ± 0,07
InAs	0,49 ± 0,15	(0,50)**	0,35 ± 0,07
AlSb	0,67 ± 0,20*	(0,63)**	0,45 ± 0,08
GaSb	0,58 ± 0,17	(0,59)**	0,43 ± 0,07
InSb	0,38 ± 0,10	(0,27)**	0,18 ± 0,05

* Эфектыўны зарадаў вызначан па іону сурмы.

** Значэнні атрыманы з супастаўлення велічынь зарадаў, разлічаных па F-фактарах Хартры—Фока і па F-фактарах Томаса—Фермі.

пераважна знешніх электронаў, функцы $A_1 e^{-\alpha_1 r^2}$ у разліках не выкарыстоўваліся.

Аналітычнае інтэграванне суадносін (6) — (8) прыводзіць да даволі складаных выказаў, якія змяшчаюць інтэгралы верагоднасці.

Паколькі хімічная сувязь у злучэннях $A^{III}B^V$ можа разглядацца як кавалентная з наяўнасцю некаторай палярызаванасці электронаў да атамаў B^V , энергія сувязі іонаў у злучэннях $A^{III}B^V$, уяўляемая сумай кулонаўскай, кінетычнай і абменнай энергій, колькасна роўна цеплыні атамізацыі злучэння. Цяплыні атамізацыі дазваляюць вызначыць цяплыні ўтварэння злучэнняў па вядомых цяплынях сублімацыі элементаў-кампанентаў:

$$\Delta H = U_{AB} - (U_A + U_B),$$

дзе ΔH — цеплыня ўтварэння; U_{AB} — цеплыня атамізацыі; U_A і U_B — цяплыні сублімацыі кампанентаў.

Атрыманая намі значэнні энергій міжатамнага ўзаемадзеяння пададзены ў табл. 3.

Пры існуючай дакладнасці вызначэння электроннай шчыльнасці хібнасць вызначэння цеплыні атамізацыі, роўная $\pm 7,0$ ккал/моль, разлічана шляхам усераднення хібнасці вызначэння электроннай шчыльнасці $\rho(x, y, z)$ у пункце (x, y, z) па ўсёй вобласці перакрыцця электронных воблакаў.

Табліца 3

Значэнні энергій міжатамнага ўзаемадзеяння, цяплынь сублімацыі ($U_A + U_B$), цяплынь утварэння (ΔH), ккал/моль

$A^{III} B^V$	U_c	U_k	U_a	$U_{AB} = U_c + U_k + U_a$	$U_A + U_B$ літ.	ΔH па эл. шч.	ΔH літ.
AlAs	-285	215	-125	-195	153,4	-41,6	—
GaAs	-277	216	-99	-160	143,5	-16,5	-20,40
InAs	-212	147	-80	-145	135,8	-9,2	-14,80
AlSb	-182	114	-88	-155	137,1	-17,2	-23,00
GaSb	-170	128	-93	-135	127,2	-7,8	-9,94
InSb	-137	61	-47	-123	119,5	-3,5	-6,94

Атрыманая намі цяплыні атамізацыі і ўтварэння даволі добра ўзгадняюцца з літаратурнымі данымі. Параўнанне цяплынь атамізацыі з фізіка-хімічнымі характарыстыкамі злучэнняў $A^{III}B^V$ паказвае, што паміж імі існуе пэўная карэляцыя, якая адпавядае становішчу кампанентаў у перыядычнай сістэме Д. І. Мендзялеева. З павелічэннем атамнага нумара кампанентаў паводле даных эксперымента, значэнні цяплынь атамізацыі і ўтварэння, вышыня «электроннага мосціка», мікрацвёрдасць, характарыстычная тэмпература памяншаюцца, а амплітуда хістанняў атамаў расце.

У заключэнне выказваю шчырую ўдзячнасць акадэміку АН БССР М. М. Сіраце за паўсядзённую ўвагу да работы і каштоўныя парады пры абмеркаванні вынікаў.

ЛІТАРАТУРА

1. Сирота Н. Н. Сб. «Физика и физико-химический анализ». М., 1957.
2. Горюнова Н. А. Химия алмазоподобных полупроводников. Л., 1963.
3. Хилсум К., Роуз-Инс А. Полупроводники типа $A^{III}B^V$. ИЛ., 1963.
4. Сирота Н. Н., Гололобов Е. М. ДАН СССР, **156**, № 5, 1964.
5. Гамбош П. Статистическая теория атома и ее применения. ИЛ., 1951.
6. Блохинцев Д. И. Основы квантовой механики. М., 1963.
7. Гололобов Е. М., Сирота Н. Н. ДАН БССР, **3**, 368, 1959.
8. Джеймс Р. Оптические принципы дифракции рентгеновских лучей. ИЛ., 1950.
9. Grimm H. G., Brill R., Hermann C., Peters Cl. Ann. Phys., **34**, 393, 1939.
10. Агеев Н. В., Агеева Д. Л. Изв. АН СССР, ОХН, **1**, 17, 1948.
11. Агеев Н. В., Гусева Л. Н. Изв. АН СССР, ОХН, **5**, 470, 1948.
12. Сирота Н. Н., Олехнович Н. М., Шелер А. У. ДАН СССР, **132**, 160, 1960.
13. Batterman V. W., Chipman D. R., De Marco J. Phys. Rev., **122**, № 1, 1961.
14. Сирота Н. Н., Гололобов Е. М. ДАН СССР, **138**, 162, 1961.
15. Сирота Н. Н., Гололобов Е. М. ДАН СССР, **143**, 156, 1962.
16. Сирота Н. Н., Гололобов Е. М. ДАН СССР, **144**, 398, 1962.
17. Сирота Н. Н., Олехнович Н. М. ДАН СССР, **136**, 660, 1961; **136**, 879, 1961; **139**, 844, 1961.
18. Сирота Н. Н., Гололобов Е. М. Сб. «Химическая связь в полупроводниках и твердых телах». Минск, 1965.
19. Attard A. E., Azaroff L. V. J. App. Phys., **34**, 774, 1963.

Резюме

В данной работе определены атомно-рассеивающие функции ионов антимонидов алюминия, галлия и индия при 20 и -100°C , по которым определено распределение электронной плотности в указанных соединениях. На основании полученных данных распределения электронных плотностей, а также по сопоставлению экспериментальных и теоретических структурных амплитуд определены знаки и величины эффективных зарядов ионов. Подсчитаны теплоты атомизации и образования соединений $A^{III}B^V$ по данным рентгенографического анализа. Определенные энергии межатомного взаимодействия коррелируют с физико-химическими характеристиками исследуемых соединений.

Поступило в редакцию 6.VII 1964

Ю. М. ХАЧАТРАН

АБ УПЛЫВЕ ГІДРАСТАТЫЧНАГА ЦІСКУ НА ТЭМПЕРАТУРУ КЮРЫ І МАГНІТНЫЯ УЛАСЦІВАСЦІ НІКЕЛЬ-МЕДЗЬ- ЦЫНКАВЫХ ФЕРЫТАЎ

Вывучэнне залежнасці магнітных уласцівасцей ферытаў ад прыкладзеных знешніх напружанняў або ціскаў дазваляе высветліць асаблівасці магнітнага ператварэння, прыроду тэхнічнага намагнічвання і іншых важных характарыстык ферамагнітных паўправаднікоў. Такія даследаванні неабходна зрабіць яшчэ і таму, што тэорыя ферымагнетызму знаходзіцца ў пачатковай стадыі свайго развіцця, а практычныя патрабаванні да атрымання матэрыялаў з пэўнымі, загадзя мяркуемымі ўласцівасцямі становяцца ўсё больш надзённай задачай. Таму ў цяперашні час набываюць асаблівую каштоўнасць даследаванні, прысвечаныя вывучэнню ўплыву гідрастатычнага ціску на тэмпературу магнітнага ператварэння і некаторыя іншыя магнітныя ўласцівасці ферытаў.

Па пытанню ўплыву гідрастатычнага ціску на тэмпературу Кюры заслугоўвае ўвагі работа Патрыка [1]. Ён правёў падрабязнае даследаванне зрушэння тэмпературы Кюры ферамагнетыкаў і некаторых тыпаў ферытаў, пастаўленых пад уплыў гідрастатычнага ціску.

Паводле даных Петрыка, тэмпература Кюры ферыту $Mn_{0,5}Zn_{0,5}Fe_2O_4$ у залежнасці ад ціску зазнае дадатнае зрушэнне. Велічыня зрушэння тэмпературы Кюры марганец-цынкавага ферыту складае $9 \cdot 10^{-4}$ град/атм. На жаль, гэтыя вымярэнні былі выкананы Л. Патрыкам менш старанна і поўна, чым на ферамагнетыках.

Залежнасць пранікальнасці высокапранікальнага ферыту ад ціску і тэмпературы была даследавана Адамсам і Дэвісам [2]. Даследуемы імі ферыт змяшчаў 15% NiO, 35% ZnO і 50% Fe_2O_3 . Вымярэнні праводзіліся пры цісках 1400 і 2800 $кГ/см^2$ і ў зоне тэмператур ад 23 да 110° С. Пры гэтым было знойдзена, што зрушэнне тэмпературы Кюры добра апісваецца эмпірычнымі суадносінамі

$$\Delta \theta = 0,078(\Delta p)^{0,316}.$$

Вернерам [3] быў вывучан уплыў ціску на магнітную пранікальнасць ферыту такога ж саставу паблізу тэмпературы Кюры. Максімальны ціск у яго доследах не перавышаў 6000 атм. Вернер знайшоў, што тэмпература Кюры даследуемага ферыту расце з узростаннем ціску і складае $8,5 \cdot 10^{-4}$ град/атм.

Уплыў гідрастатычнага ціску на тэмпературу Кюры гадалінію, сплаву Mn_5Ge_3 і тэмпературу кампенсацыі гадалініевага ферыту даследаваўся Блохам і Потэнэ [4]. Пры гэтым было выяўлена, што тэмпература кампенсацыі гадалініевага ферыту са структурай граната павялічваецца з узростаннем ціску, а яе зрушэнне складае $8,7 \cdot 10^{-4}$ град/атм. Максімальная велічыня ціску ў гэтых доследах не перавышала 7500 атм.

Памянёнымі вышэй чатырма работамі абмяжоўваецца колькасць даследаванняў зрушэння тэмпературы Кюры ў залежнасці ад ціску, прычым работы [2, 3] выкананы на адным і тым жа саставе ферыту, у рабоце [1] зрушэнне тэмпературы Кюры ацэньвалася толькі пры ціску 5000 атм, а ў [4] даследаваўся гадалініевы ферыт. Апрача таго, што ў гэтых работах даследаваўся ферыт толькі аднаго саставу і то паблізу тэмпературы Кюры, аўтарамі не было ўдзелена належнай увагі многім іншым характарыстыкам даследуемых аб'ектаў.

Ёсць таксама абмежаваная колькасць работ, прысвечаных вывучэнню ўплыву ціску на магнітную пранікальнасць, працэсы тэхнічнага намагнічвання і іншыя магнітныя характарыстыкі ферытаў. Першыя работы ў гэтым напрамку былі праведзены з мэтай паляпшэння тых магнітных характарыстык ферытаў, якія найбольш важныя пры іх прымяненні ў вылічальных машынах. Так, напрыклад, Ратэнау і Астэроут [5] прапанавалі метадам наплаўлення на ферытавы ўзор шкляных кольцаў павысіць прамавугольнасць пятлі гістэрэзісу ферытаў. У гэтым метадазе знешнія напружанні ўяўлялі сабой радыяльныя сціскаючыя напружанні, якія не перавышалі па абсалютнай велічыні 10—20 кГ/см². Колькінебудзь шырокага прымянення ў тэхніцы гэты метада не знайшоў з-за свайёй грувасткасці.

Пазней Вільямс з супрацоўнікамі [6] паказаў, што магнітныя ўласцівасці ферытаў залежаць ад велічыні ціску, формы і размераў узораў. Імі было знойдзена, што ферыты, у якіх знаходзіцца да 67,1 мол. % вокісу жалеза, пад уплывам ціску павялічваюць астаткавую індукцыю і каэфіцыент прамавугольнасці. Пры гэтым каэфіцыент прамавугольнасці ўзрастае ад 0,46 да 0,86. У іх доследах максімальная велічыня ціску складала 84 кГ/см². У гэтай жа зоне ціскаў ферыты, у якіх змяшчаецца 68,6 мол. % вокісу жалеза, выяўлялі змяншэнне астаткавай індукцыі і каэфіцыента прамавугольнасці. Аўтарамі было заўважана павелічэнне максімальнай пранікальнасці нікель-цынковых ферытаў у 12 разоў. Назіраемыя пры гэтым з'явы Вільямс і Війн з супрацоўнікамі [6, 7] тлумачылі знакам магнітастрыкцыі. Велічыня магнітастрыкцыі, як было імі паказана пры даследаванні нікель-цынковых ферытаў нескеліметражнага саставу, была дадатнай у ферытаў, якія змяшчалі 68,6 мол. % вокісу жалеза, і адмоўнай пры меншых колькасцях вокісу жалеза.

Грунтоўныя вымярэнні магнітадынамічных характарыстык нікелевых і нікель-цынковых ферытаў з мэтай выкарыстання іх у якасці магнітастрыкцыйных пераўтваральнікаў энергіі праводзіліся Л. Н. Сыркіным [8]. Ім быў даследаван уплыў гідрастатычнага ціску на пачатковую пранікальнасць ферытаў пры частотах 50 і 100 кгц і знойдзена, што пачатковая пранікальнасць ферытаў узрастае з павелічэннем ціску незалежна ад частаты. Максімальная велічыня гідрастатычнага ціску ў яго доследах складала 65 атм.

Уплыў аднабаковых расцягваючых і сціскаючых напружанняў на працэсы намагнічвання нікелевых, нікель-цынковых, а таксама нікель-цынковых ферытаў з дабаўленнем 0,2 мол. % кобальту даследаваўся таксама Л. Н. Сыркіным з супрацоўнікамі [9]. У гэтых эксперыментах велічыні расцягваючых або сціскаючых напружанняў не перавышалі 1100 кГ/см². Было ўстаноўлена, што максімальнае змяненне намагнічанасці, абумоўленае расцягваючым напружаннем, зрушваецца ў бок высокіх магнітных палёў пры павелічэнні абсалютнай велічыні намагнічанасці. Змяненне намагнічанасці пры перамене знака механічных напружанняў, якія дзейнічаюць на ўзор, адбывалася няспынна, без злому.

Цікавыя даныя атрыманы Я. М. Бекерам [10] на магній-нікелевых ферытах пры іх сцісканні. Было ўстаноўлена, што пункт Вілары расце

лінейна з павелічэннем сціскаючых напружанняў і залежыць ад саставу ферыту. У яго доследах максімальная велічыня сціскаючых напружанняў складала 480 кГ/см^2 .

Змяненне гістэрэзісных уласцівасцей марганцавых і магній-марганцавых ферытаў з лішкам і недахопам вокісу жалеза ў залежнасці ад ціску даследавалася Цымплам [11]. Выпрабоўваемыя ўзоры падвяргаліся радыяльным напружанням шляхам накладання гідрастатычнага ціску паслядоўна на вонкавую і ўнутраную паверхні ферытавага кольца. Пры гэтым максімальная велічыня радыяльных напружанняў складала 420 кГ/см^2 . Было знойдзена, што B_r/B_m расце пад уплывам радыяльных напружанняў у магній-марганцавых і змяншаецца у марганцавых ферытаў. Каэрцытыўная ж сіла ў магній-марганцавых ферытаў не змяняецца і расце ў марганцавых ферытаў пасля пэўнай велічыні радыяльных напружанняў.

Уласцівасці пятлі гістэрэзісу пры розных гідрастатычных цісках даследаваліся Рэйсам і Карнецім [12]. Аб'ектамі даследавання былі ўзяты марганец-цынкавыя ферыты з трыма тыпамі петляў гістэрэзісу: прамавугольнымі, тыпу ізапермаў і пермінвар. У іх доследах максімальная велічыня ціску не пераўзыходзіла 500 атм . Было выяўлена, што каэрцытыўная сіла ўсіх даследуемых ферытаў узрастае з павелічэннем ціску. Астатковая індукцыя і каэфіцыент прамавугольнасці ўзрасталі ў ферытах з пятлёй гістэрэзісу тыпу ізапермаў і пермінвар і змяншаліся ў ферытах з прамавугольнай пятлёй гістэрэзісу.

У зоне ціскаў ад 0 да 1200 атм Гро [13] былі даследаваны петлі гістэрэзісу і пачатковая пранікальнасць чатырох розных марак марганец-цынкавых і нікель-цынкавых ферытаў. Пры гэтым было знойдзена, што каэрцытыўная сіла і адносіны B_r/B_m магнітнамажкіх марганец-цынкавых ферытаў узрастаюць з павелічэннем ціску. Пачатковая пранікальнасць гэтых ферытаў, наадварот, змяншаецца з павелічэннем ціску і дасягае 78% ад зыходнага значэння пры 1000 атм . Вынікі работы Гро здавальняюча адпавядаюць даным [12].

Намагнічанасць насычэння ферыту, у якім змяшчаецца 66% Fe_2O_3 , 12% NiO , 22% ZnO , у моцных палях пры сцісканні даследавалася Д. Д. Мішыным з супрацоўнікамі [14]. Велічыня магнітнага поля ў гэтых доследах змянялася ад 0 да 12000 эрст . Ціск ствараўся пры дапамозе зацвярдзенага алюмініева-крэмніевага сплаву, які мае амаль на два парадкі большы, чым ферыт, каэфіцыент лінейнага расшырэння. Велічыня ціску ацэньвалася па росту каэрцытыўнай сілы і не перавышала 4000 кГ/см^2 .

У эксперыментах Д. Д. Мішына з супрацоўнікамі было ўстаноўлена, што магнітная пранікальнасць даследуемага ферыту, падвергнутага ціску, змяншаецца ў слабых палях, каэрцытыўная сіла ўзрастае. Пры гэтым намагнічанасць узрастае ў палях ад 10 да 400 эрст і слаба змяняецца ў палях ад 3000 да 12000 эрст . Аўтары адзначалі, што змяненні магнітнай пранікальнасці і каэрцытыўнай сілы ў залежнасці ад тэмпературы ўзмацняюцца пры наяўнасці ціску.

Прыведзены вышэй агляд літаратуры паказвае, што ўплыў гідрастатычнага ціску на тэмпературу Кюры і магнітныя ўласцівасці ферытаў вывучан у параўнальна малой зоне тэмператур, ціскаў і саставаў. Пры гэтым даследаванні носяць часта разрознены і адрывачны характар.

Таму аказалася мэтазгодным прасачыць залежнасць тэмпературы Кюры, магнітнай успрымлівасці і працэсаў тэхнічнага намагнічвання для ферытаў трайнай нікель-медзь-цынкавай сістэмы ў шырокай зоне саставаў, тэмператур і ціскаў. Выкладанню рэзультатаў даследаванняў гэтых пытанняў і прысвечан дадзены артыкул.

У эксперыментах з прымяненнем гідрастатычнага ціску, які ўздзейнічае на ферамагнітны ўзор, выкарыстоўваецца метадка, прапанаваная Адамсам і Грынам [15]. Згодна з гэтымі аўтарамі, для вызначэння тэмпературы Кюры неабходна мець узор замкнёнай формы з дзвюма абмоткамі. У адну з іх (першасную) падаецца пераменнае напружанне пэўнай велічыні, якая падтрымліваецца нязменнай на працягу ўсяго доследу, а

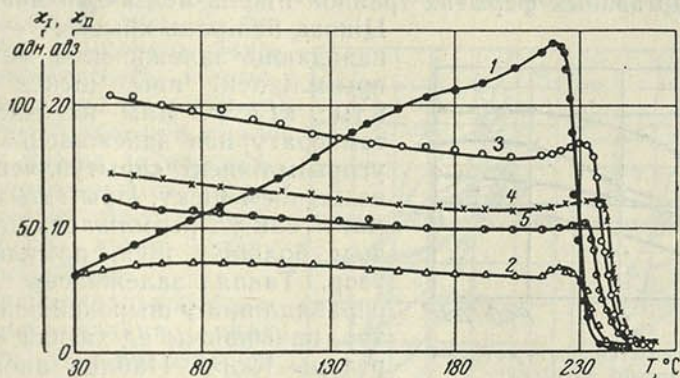


Рис. 1. Тэмпературная залежнасць успрымлівасці адпалагенага $\text{Ni}_{0,375}\text{Cu}_{0,125}\text{Zn}_{0,5}\text{Fe}_2\text{O}_4$ ферыту пры розных цісках:

1— x_1 —атмасферны ціск; 2— x_1 ; 3, 4, 5— x_{II} пры цісках 2, 4, 6, 8 тыс. $\text{кг}/\text{см}^2$ адпаведна

другая абмотка (другасная) падключаецца да ўваходу адчувальнага ўзмацняльніка. Па знікненню напружання ў другаснай абмотцы мяркуюць аб магнітным ператварэнні матэрыялу з ферамагнітнага ў парамагнітны стан.

Тэмпература Кюры вызначаецца як пункт перасячэння прамой, праведзенай датычна да крывой крутога спаду індцыраванага напружання, з восяю тэмператур. Такім жа чынам вызначаецца тэмпература Кюры пры розных гідрастатычных цісках. Пры выбары велічыні магнітнага поля ў першаснай абмотцы неабходна ўлічыць уплыў парапрацэсу на працэсы тэхнічнага намагнічвання, які асабліва вялікі ў зоне тэмпературы Кюры. У работах [1—4] гэты эфект не ўлічваўся, што, паводле заўвагі К. П. Бялова [16], магло прывесці да хібаў вымярэнняў. У нашых эксперыментах велічыня магнітнага поля 0,042 эрст была настолькі малая, што ўплыў парапрацэсу практычна выключан. Значыць, можна чакаць, што круты спад магнітнай успрымлівасці паблізу тэмпературы Кюры абумоўлен знікненнем спантаннай намагнічанасці або, інакш, разбурэннем даменнай структуры. Такім чынам, змяненне магнітнай успрымлівасці, абумоўленае пераарыентацыяй даменаў да тэмпературы Кюры, паблізу тэмпературы Кюры змяняецца знікненнем гэтых даменаў. Залежнасць магнітнай успрымлівасці ферамагнетыкаў ад тэмпературы, як адзначалася ў рабоце [17], можа мець самы розны характар, і таму цяжка пабудаваць для іх строгу тэорыю. Агульным жа для ферамагнетыкаў і ферытаў, як вынікае ў прыватнасці з нашых эксперыментальных даных [18] і даных іншых аўтараў [19—21], з'яўляецца круты спад магнітнай успрымлівасці паблізу тэмпературы Кюры і яе пастаянства вышэй гэтай зоны тэмператур.

Адна з характэрных залежнасцей магнітнай успрымлівасці даследуемых ферытаў прыведзена на рис. 1. З рысунка відаць, што найбольшыя значэнні магнітнай успрымлівасці дасягаюцца пры атмасферным

ціску. Кривая 1 показвае таксама, што магнітная ўспрымлівасць расце з узростаннем тэмпературы і дасягае максімуму пры 220°C , пасля чаго ідзе круты спад. Інтэрвал тэмператур, у якім магнітная ўспрымлівасць рэзка змяняецца, ахоплівае вобласць $8\text{--}10^{\circ}\text{C}$. Пасля рэзкага спаду магнітная ўспрымлівасць у далейшым з павелічэннем тэмпературы практычна не змяняецца. Такая карціна назіраецца як у адпаленых, так і ў загартаваных ферытах трайной нікель-медзь-цынкавай сістэмы.

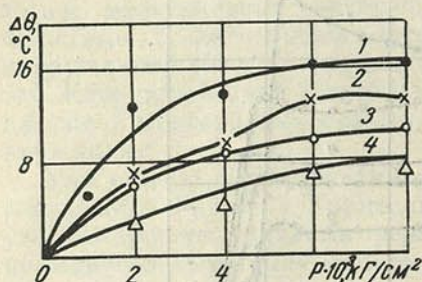


Рис. 2. Зрушэнне тэмпературы Кюры ў залежнасці ад ціску:

- 1— $\text{Cu}_{0,4}\text{Zn}_{0,6}\text{Fe}_2\text{O}_4$ (загартаваны); 2— $\text{Cu}_{0,5}\text{Zn}_{0,5}\text{Fe}_2\text{O}_4$ (адпалены);
3— $\text{Cu}_{0,4}\text{Zn}_{0,6}\text{Fe}_2\text{O}_4$ (адпалены);
4— $\text{Ni}_{0,5}\text{Zn}_{0,5}\text{Fe}_2\text{O}_4$ (адпалены)

зрушаны ў бок высокіх тэмператур у параўнанні з тым, што назіраецца пры атмасферным ціску. Акрамя таго, спад магнітнай успрымлівасці ферытаў, падвергнутых гідрастатычнаму ціску, адбываецца менш крута і ахоплівае большую зону тэмператур.

Ацэнка зрушэння тэмпературы Кюры ў залежнасці ад ціску паказана на рыс. 2. Кривыя 1—4 на рыс. 2 ілюструюць графікі залежнасці зрушэння тэмпературы Кюры ад ціску. З гэтага рысунка вынікае, што зрушэнне тэмпературы Кюры даследуемых ферытаў дадатнае і носіць нелінейны характар.

У агульным выпадку кривыя рыс. 2 можна характарызаваць дзвюма датычнымі, адна з якіх праведзена ў зоне да 2000 кг/см^2 , другая вышэй гэтай зоны, і маюць адпаведна два розныя нахілы. Пры гэтым першаму значэнню тангенса вугла нахілу, найбольшаму, адпавядае больш моцнае пругкае ўзаемадзеянне, чым другому. Такія паводзіны зрушэння тэмпературы Кюры нікель-медзь-цынкавых ферытаў можна вытлумачыць рознай сціскальнасцю гэтых ферытаў у памянёных вышэй зонах ціскаў.

Важнае значэнне для разумення працэсаў перамагнічвання ферытаў маюць даследаванні петляў гістэрэзісу ферытаў, падвергнутых ціску. Методыка правядзення такіх эксперыментаў заключаецца ў параўнанні петляў гістэрэзісу, вымераных пры нармальным атмасферным і розных гідрастатычных цісках. У нашых эксперыментах максімальная велічыня магнітнага поля дасягнула $2,5\text{ эрст}$. Такое значэнне магнітнага поля не дазволіла дасягнуць гранічных петляў ферытаў, у якіх змяшчаецца да 30 мол. % ферыту цынку. У ферытах з высокай колькасцю ферыту цынку петлі гістэрэзісу былі блізкія да гранічных значэнняў. Таму характар змянення петляў гістэрэзісу ў залежнасці ад ціску аказаўся розным, і тлумачэнне гэтаму трэба было шукаць у тым, што працэсы перамагнічвання адбываюцца неаднолькава ў слабых і сярэдніх палях.

Агульным для ўсіх петляў даследуемых ферытаў з'яўляецца ўзнаўляльнасць уласцівасцей. Петлі гістэрэзісу, вымераныя да і пасля на-

Цікава назіраць кривыя 2—5, якія адпавядаюць залежнасцям магнітнай успрымлівасці пры цісках 2; 4; 6; 8 тыс. кг/см^2 . Яны паказваюць, што тэмпературная залежнасць магнітнай успрымлівасці «прытупляецца» з павелічэннем ціску. Пры гэтым велічыня магнітнай успрымлівасці тым меншая, чым большы ціск, прыкладзены на ўзор. Такая залежнасць застаецца справядлівай у шырокай зоне тэмператур, пачынаючы ад хатняй і да тэмпературы Кюры. Паблізу апошняй кривыя магнітнай успрымлівасці ферытаў, якія знаходзяцца пад гідрастатычным ціскам, паказваюць невялікі рост, так званы максімум Гопкінсона. Гэты максімум больш прыплюсканы і

кладання ціску, супадалі па форме і велічыні. Агульнай рысай змянення петляў гістэрэзісу даследуемых нікель-медзь-цынковых ферытаў з'яўляецца таксама змяншэнне максімальнай індукцыі, якая адпавядае зададзенаму полю. Як правіла, максімальная індукцыя змяншаецца з павелічэннем ціску, а яе змяненне пры розных цісках носіць нелінейны характар. Змяненні ж каэрцытыўнай сілы, адносіны B_r/B_m носяць больш складаны характар. Так, у некаторых магнітнажорсткіх ферытах, якія змяшчаюць да 20 мол. % ферыту цынку, назіраецца павелічэнне адносін B_r/B_m і адначасова змяншэнне каэрцытыўнай сілы пры ўзрастанні ціску. Пры гэтым можна заўважыць, што з павышэннем ціску змяншаецца плошча пятлі гістэрэзісу, а таксама вугал нахілу пятлі да восі абсцыс.

Доля неабарачальных працэсаў намагнічвання, якая ацэньвалася ў адносінах да плошчаў пятлі гістэрэзісу і апісанага вакол гэтай пятлі прававугольніка, змяншалася ў памянёных вышэй ферытах у зоне ціскаў ад 0 да 2000 кг/см^2 . З павелічэннем ціску вышэй 2000 кг/см^2 гэтыя адносіны раслі. У большасці даследаваных нікель-медзь-цынковых ферытаў доля неабарачальных працэсаў намагнічвання ўзрастае з павелічэннем ціску. Некаторае змяншэнне гэтых працэсаў у ферытах з малой колькасцю ферыту цынку тлумачыцца, відаць, тым, што ў іх вялікія ўнутраныя напружанні. Таму знешні ціск, ураўнаважваючы ўнутраныя напружанні ў гэтых ферытах, стварае спрыяльныя ўмовы для перамагнічвання.

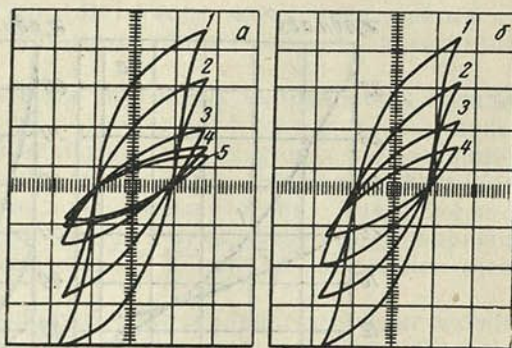
Агульны характар змянення пятлі гістэрэзісу пры розных цісках паказан на рыс. 3, з якога відаць, што петлі гістэрэзісу як бы спляскаюцца і робяцца пакатымі з узростаннем ціску. Змяненне каэрцытыўнай сілы можна вытлумачыць на аснове суадносін

$$H_c \approx a \frac{k_1 + \lambda_s \sigma_i}{I_s} + b \frac{\lambda_s \sigma_e}{I_s} + c I_s, \quad (1)$$

дзе a , b , c — колькасныя каэфіцыенты парадку 1 або 10; λ_s — магнітастрыкцыя насычэння; I_s — намагнічанасць насычэння; k — канстанта анізатропіі; σ_i , σ_e — унутраныя і знешнія напружанні.

У суадносінах (1) першы член характарызуе энергію анізатропіі, другі — энергію знешніх напружанняў, трэці — энергію размагнічвання. З гэтых суадносін відаць, што змяненне каэрцытыўнай сілы складана залежыць ад знешніх напружанняў. Эксперыментальныя даныя ўвогуле пацвярджаюць формулу (1).

Уплыў унутраных напружанняў на магнітную ўспрымлівасць ферытаў вывучаўся ў доследах з выкарыстаннем гідрастатычнага ціску. Пры гэтым магнітная ўспрымлівасць вымяралася ў полі $0,042 \text{ эрст}$ пры хатняй тэмпературы. Такіх даследаванняў пры высокіх цісках і на вялікай



Рыс. 3. Петлі гістэрэзісу нікель-медзь-цынковага ферыту пры ўзрастанні (а) і пры наступным зніжэнні ціску (б)

($H_{\text{макс}} = 2,2 \text{ эрст}$; $B_{\text{макс}} = 1300 \text{ гс}$):

- а) 1—атмасферны ціск; 2, 3, 4, 5—пры цісках 2,3; 4,7; 7; 9,3 тыс. кг/см^2 ;
б) 1—атмасферны ціск; 2, 3, 4—пры цісках 1; 2,7; 5 тыс. кг/см^2

колькасці саставаў, наколькі нам вядома, не рабілася не толькі на ферытах, але і на ферамангетыках.

Як і ў выпадку бінарных ферытаў, апісаных у рабоце [22], ферыты трайнай нікель-медзь-цынкавай сістэмы падвяргаліся гідрастатычнаму ціску, які змяняўся ад 0 да 12000 кг/см^2 . Па характару змянення магнітнай успрымлівасці даследуемыя ферыты незалежна ад тэрмаапрацоўкі можна падзяліць на два асноўныя тыпы. Да першага належаць ферыты

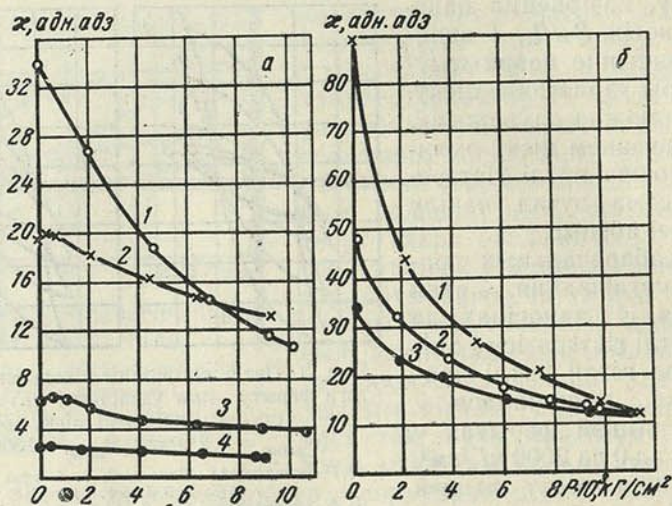


Рис. 4. Залежнасць магнітнай успрымлівасці нікель-медзь-цынкавых ферытаў (да 30 мол. % — а і ад 40 мол. % і больш ферыту цынку — б) ад ціску:

- a) 1— $\text{Ni}_{0.175}\text{Cu}_{0.525}\text{Zn}_{0.3}\text{Fe}_2\text{O}_4$; 2— $\text{Ni}_{0.2}\text{Cu}_{0.6}\text{Zn}_{0.2}\text{Fe}_2\text{O}_4$;
 3— $\text{Ni}_{0.225}\text{Cu}_{0.675}\text{Zn}_{0.1}\text{Fe}_2\text{O}_4$; 4— $\text{Ni}_{0.25}\text{Cu}_{0.75}\text{Fe}_2\text{O}_4$;
 б) 1— $\text{Ni}_{0.1}\text{Cu}_{0.3}\text{Zn}_{0.5}\text{Fe}_2\text{O}_4$; 2— $\text{Ni}_{0.25}\text{Cu}_{0.375}\text{Zn}_{0.5}\text{Fe}_2\text{O}_4$;
 3— $\text{Ni}_{0.15}\text{Cu}_{0.45}\text{Zn}_{0.4}\text{Fe}_2\text{O}_4$

з колькасцю ферыту цынку 20 мол. %, да другога — ад 30 мол. % і больш ферыту цынку.

У ферытах першага тыпу (рыс. 4, а) магнітная ўспрымлівасць, як правіла, расце з павелічэннем гідрастатычнага ціску да $1500\text{—}2000 \text{ кг/см}^2$, пасля чаго пачынае змяншацца. Цікава адзначыць, што ціск, пры якім настае максімум магнітнай успрымлівасці, змяншаецца з павелічэннем колькасці ферыту цынку. Пры гэтым назіраецца прытупленне максімуму і поўнае яго знікненне ў выпадку ферытаў, якія маюць ад 30 мол. % і больш ферыту цынку.

Такія паводзіны магнітнай успрымлівасці ферытаў першага тыпу здавальняюча тлумачацца формулай, выведзенай С. В. Вансоўскім [23] для абарачальнай успрымлівасці полікрышталічнага нікелю. Згодна з гэтай формулай, пачатковая абарачальная ўспрымлівасць выражаецца наступнай залежнасцю ад слабых знешніх напружанняў:

$$\chi_{0\perp} = \chi_{0\perp}^0 + 0,04\lambda_s \bar{c} \chi_{2r} \sigma_e - 0,01\lambda_s^2 \bar{c}^2 \chi_{2r} \sigma_e^2, \quad (2)$$

дзе $\chi_{0\perp}$ — абарачальная пачатковая ўспрымлівасць 90-градусных граніц; χ_{2r} — абарачальная ўспрымлівасць; \bar{c} — канстанта, якая характарызуе велічыню ўнутраных напружанняў; λ_s — магнітастрыкцыя насычэння; σ_e — знешнія напружання.

Формула (2) паказвае на нелінейны характар змянення магнітнай успрымлівасці ў слабых палях у залежнасці ад знешніх напружанняў. З гэтай формулы вынікае, што магнітная успрымлівасць павінна мець максімум, які дасягаецца пры ўмове

$$\sigma_i = \frac{1}{2} \sigma_e. \quad (3)$$

Значыць, скарыстаўшы формулу (3) і нашы эксперыментальныя даныя, можна колькасна ацаніць велічыню напружанняў у даследуемых ферытах.

У ферытах першага тыпу велічыня ўнутраных напружанняў складае 750—1000 кГ/см². У ферытах другога тыпу (рыс. 4, б) адсутнасць максімуму тлумачыцца, відаць, малой велічынёй іх унутраных напружанняў. Прынамсі, велічыня ўнутраных напружанняў у іх меншая за 200 кГ/см² і змяншаецца з павелічэннем колькасці ферыту цынку. Так, адносныя змяненні магнітнай успрымлівасці гэтай групы ферытаў складаюць 55% пры 1500—2000 кГ/см² і дасягаюць 85% пры максімальным ціску 12000 кГ/см².

У абодвух тыпах ферытаў назіраецца абарачальнае змяненне магнітнай успрымлівасці пры нелінейнай яе залежнасці ад ціску. Велічыні магнітнай успрымлівасці да і пасля зняцця ціску супадаюць.

Са сказанага вышэй вынікае, што існуе магчымасць колькаснага вызначэння велічыні ўнутраных напружанняў у ферытах. Веданне ўнутраных напружанняў важна не толькі для пабудовы правільнай тэорыі тэхнічнага намагнічвання, але мае і практычнае значэнне. Апошняе заключаецца ў тым, што веданне σ_i дазваляе вызначыць велічыню пачатковай успрымлівасці і рэкамендаваць метады яе павышэння.

Такім чынам, даследаванне уплыву гідрастатычнага ціску на тэмпературу Кюры, працэсы тэхнічнага намагнічвання і магнітную успрымлівасць дае каштоўныя звесткі аб залежнасці гэтых уласцівасцей ад знешніх і ўнутраных напружанняў. Акрамя таго, дзякуючы такім даследаванням адкрываюцца магчымасці паляпшэння магнітных уласцівасцей феромагнітных матэрыялаў.

У заключэнне выказваю глыбокую ўдзячнасць акадэміку АН БССР М. М. Сіраце за прапанаваную тэму і пастаянную цікавасць да работы.

ЛІТАРАТУРА

1. Patrick L. Phys. Rev., **93**, 3, 384, 1954.
2. Adams C. Q., Davis C. M. J. of Appl. Phys., **29**, 372, 1958.
3. Werner K. Ann. d. Phys., **2**, 7—8, 403, 1959.
4. Bloch D., Pauthenet R. Comptes Rendus, **254**, 7, 1222, 1962.
5. Rathenau G W., Oosterhout G. W. Nether. Pat., **175**, 120, 1953.
6. Williams H. J., Sherwood R. C., Goertz M., Schnettler F. J. Commun. a. Electronics, **9**, 531, 1953.
7. Wijn H. P. J., Gorter E. W., Esveltdt C. J. and Geldermans P. Phil. Techn. Rev., **82**, 49, 1954.
8. Сыркин Л. Н. Изв. АН СССР, сер. физ., **23**, 414, 1959.
9. Сыркин Л. Н., Ивукина А. К., Подкуйко Т. С. ФММ, **14**, 6, 1962.
10. Беккер Я. М. ФТТ, **2**, № 8, 1708, 1960.
11. Cimpl Z. Czech. J. Phys., **13**, 7, 518, 1963.
12. Röss E., Kornetzki M. Zeit. f. Angew. Phys., **15**, 1, 46, 1963.
13. Groh G. Zeit. f. Angew. Phys., **16**, 3, 172, 1963.
14. Мишин Д. Д., Никонова Л. В., Бычкова Т. И. Сб. «Ферриты». Изд-во АН БССР, 1960, стар. 253.
15. Adams L. H., Green J. W. Phil. Mag., **12**, 76, 361, 1931.
16. Белов К. П. Упругие, тепловые и электрические явления в ферромагнетиках. М., 1957.

17. Вонсовский С. В. и Шур Я. С. Ферромагнетизм. М., 1948.
18. Сирота Н. Н., Хачатрян Ю. М. ДАН БССР, 7, № 12, 805, 1963.
19. Рабкин Л. И. и Эпштейн Б. Ш. ЖТФ, 24, в. 9, 1568, 1954.
20. Сучков А. И. ЖТФ, 24, в. 9, 1579, 1954.
21. Дрожжина В. И., Шур Я. С. Изв. АН СССР, сер. физ., 11, 539, 1947.
22. Сирота Н. Н. и Хачатрян Ю. М. ФТТ, 5, № 11, 3110, 1963.
23. Вонсовский С. В. ЖЭТФ, 17, № 12, 1094, 1947.

Резюме

В статье приводятся результаты систематического исследования влияния гидростатического давления на температуру Кюри, процессы технического намагничивания и на магнитную восприимчивость никель-медь-цинковых ферритов. Обнаружено, что давление повышает температуру Кюри. При этом смещение температуры Кюри при различных давлениях носит нелинейный характер.

Показано, что давление благоприятствует процессам перемагничивания в ферритах, содержание феррита цинка в которых не превышает 20 мол.%. Наоборот, в ферритах с более высоким содержанием феррита цинка процессы перемагничивания под влиянием давления затрудняются. При этом с ростом давления увеличиваются коэрцитивная сила и доля необратимых процессов.

По характеру изменения магнитной восприимчивости от давления исследуемые ферриты делятся на два типа. В ферритах первого типа, содержащих до 20 мол.% феррита цинка, наблюдается максимум магнитной восприимчивости при определенной величине давления. Величина этого давления характеризует внутренние напряжения ферритов первого типа. В ферритах второго типа, содержащих от 30 и более мол.% феррита цинка, относительное изменение магнитной восприимчивости достигает 80% при 12000 кг/см². Отсутствие максимума в этих ферритах объясняется, по-видимому, малой величиной внутренних напряжений в них.

Поступило в редакцию 13.VIII 1964

КАРОТКІЯ ПАВЕДАМЛЕННІ

О. А. ЧУПРИГИН

О ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКОМ $(0, 1, 2, \dots, r-2, r)$ - ИНТЕРПОЛИРОВАНИИ

Пусть $r \geq 2$ — натуральное число. Следуя Турану, назовем тригонометрическим $(0, 1, 2, \dots, r-2, r)$ -интерполяционным полиномом такой тригонометрический полином $T(x)$ порядка не выше $nr/2$, который вместе со своими производными в заданных узлах x_k удовлетворяет условиям

$$T^{(i)}(x_k) = \alpha_{k,i} \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n-1; i = 0, 1, \dots, r-2, r), \quad (1)$$

где $\alpha_{k,i}$ — произвольно выбранные числа и $0 \leq x_k < 2\pi$.

В случае интерполирования алгебраическими многочленами в работах [1—8] исследованы вопросы существования, единственности и сходимости $(0,2)$, $(0, 1, 3)$, $(0, 1, 2, 4)$ -интерполяционных многочленов по некоторым конкретным матрицам узлов. Тригонометрическое $(0,2)$ -интерполирование рассмотрено в [9].

Мы исследуем вопросы существования, единственности и дадим явное представление тригонометрического $(0, 1, 2, \dots, r-2, r)$ -интерполяционного полинома (для любого натурального r) в случае интерполирования по равноотстоящим узлам

$$x_k = \frac{2k}{n} \pi \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n-1). \quad (2)$$

Заметим, что вид интерполяционного полинома, получающегося из общего случая при $r=2$, отличается от представления его, данного в [9]. Нам кажется, что наше представление полинома наиболее удобно при решении вопроса сходимости.

Теорема 1. Пусть $n = 2p$ и узлы x_k удовлетворяют условиям: $x_0 \leq 0 < x_1 < x_2 < \dots < x_p = \pi < x_{p+1} < \dots < x_{n-1} < 2\pi$ и $x_j = x_{n-j}$ ($j = 1, 2, \dots, n-1$). Тогда при любом натуральном $r \geq 2$ не существует, вообще говоря, $(0, 1, 2, \dots, r-2, r)$ -интерполяционного полинома.

При $n = 2p + 1$ вопрос существования и единственности интерполяционного полинома (1) по узлам (2) решается положительно. Причем для четного r мы ищем его в виде

$$a_0 + \sum_{k=1}^{\frac{nr}{2}-1} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) + a \cos \frac{nr}{2} x, \quad (3)$$

а для нечетного r

$$\sum_{k=0}^{\left[\frac{nr}{2}\right]-1} \left[a_k \cos\left(k + \frac{1}{2}\right)x + b_k \sin\left(k + \frac{1}{2}\right)x \right] + b \sin \frac{nr}{2} x, \quad (4)$$

т. е. в виде полужелого полинома. Если известны фундаментальные полиномы $(0, 1, 2, \dots, r-2, r)$ -интерполирования $U_{i,k}(r; x)$, т. е. полиномы вида (3) или (4), в зависимости от четности r такие, что

$$U_{i,k}^{(j)}(r; x_\nu) = \begin{cases} 1, & \text{если } i = j, \nu = k; \\ 0, & \text{если } i \neq j \text{ или } \nu \neq k, \end{cases}$$

где $i, j = 0, 1, 2, \dots, r-2, r$; $\nu, k = 0, 1, 2, \dots, n-1$, то интерполяционный полином $T(x)$, удовлетворяющий условиям (1) в узлах (2), очевидно, представляется в виде

$$T(x) = \sum_{i=0}^{r-2} \sum_{k=0}^{n-1} U_{i,k}(r; x) \alpha_{k,i} + \sum_{k=0}^{n-1} U_{r,k}(r; x) \alpha_{k,r}.$$

Аргумент q в $U_{i,k}(q, x)$ — в нашем случае $q = r$ — указывает, что фундаментальный полином соответствует $(0, 1, 2, \dots, q-2, q)$ -интерполированию.

Для узлов (2) имеет место

Теорема 2. Если число узлов нечетно, то при любых $\alpha_{k,i}$ существует единственный тригонометрический $(0, 1, 2, \dots, r-2, r)$ -интерполяционный полином $T(x)$ вида (3) при четном r и вида (4) при нечетном r . Фундаментальные полиномы интерполирования имеют следующий вид:

$$a) U_{r,k}(r; k) = \frac{2^r}{r! n^r} \sin^{r-1} \frac{n}{2} (x - x_k) \int_0^{\frac{x-x_k}{2}} \sin nt \operatorname{ctg} t dt;$$

б) для $i = 1, 2, \dots, r-2$

$$U_{i,k}(r; x) = \frac{2^i}{i! n^i} \sin^i \frac{n}{2} (x - x_k) U_{0,k}(r-i; x) - \sum_{m=1}^N \beta_{i+2m} U_{i+2m,k}(r; x),$$

где

$$N = \begin{cases} \frac{r-i}{2}, & \text{если } r \text{ и } i \text{ одинаковой четности;} \\ \frac{r-i-3}{2}, & \text{если } r \text{ и } i \text{ разной четности,} \end{cases}$$

$$\beta_{i+2m} = \frac{2^i}{i! n^i} \left\{ \frac{d^{i+2m}}{dx^{i+2m}} \left[\sin^i \frac{n}{2} (x - x_k) U_{0,k}(r-i; x) \right] \right\}_{x=0};$$

$$в) U_{0,k}(r; x) = \begin{cases} A(x) - \sum_{m=1}^{N_1} c_{2m} U_{2m,k}(r; x), & \text{если } r \text{ — четно,} \\ B(x) - \sum_{m=1}^{N_2} d_{2m} U_{2m,k}(r; x), & \text{если } r \text{ — нечетно,} \end{cases}$$

где

$$A(x) = n^{1-r} \cos \frac{n}{2} (x - x_k) e^{r-1} (x - x_k) -$$

$$- \frac{2(r-1)}{rn^r} \sin \frac{n}{2} (x - x_k) e^{r-2} (x - x_k) e' (x - x_k);$$

$$B(x) = A(x) \cos \frac{x - x_k}{2} + \frac{1}{rn^r} \sin \frac{n}{2} (x - x_k) e^{r-1} (x - x_k) \sin \frac{x - x_k}{2};$$

$$e(x - x_k) = \frac{\sin \frac{n}{2} (x - x_k)}{\sin \frac{x - x_k}{2}};$$

$$c_{2m} = A^{(2m)}(x)|_{x=0}, \quad d_{2m} = B^{(2m)}(x)|_{x=0};$$

$$N_1 = \frac{r-3}{2}; \quad N_2 = \frac{r}{2} \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n-1).$$

Исследован вопрос сходимости этих полиномов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Suranyi J., Turan P. Acta Math. Acad. sci. Hungar., 6, 67—79, 1955.
2. Balazs J., Turan P. Acta Math. Acad. sci. Hungar., 8, 201—215, 1957.
3. Balazs J., Turan P. Acta Math. Acad. sci. Hungar., 9, 195—217, 1958.
4. Freud G. Acta Math. Acad. sci. Hungar., 9, 337—341, 1958.
5. Saxena R., Sharma A. Acta Math. Acad. sci. Hungar., 9, 345—358, 1958.
6. Sharma R. Ph. D. Thesis. Chapter 2, p. p. 24—50, Lucknow University.
7. Mathur K., Sharma A. Acta Math. Acad. sci. Hungar., 12, 193—207, 1961.
8. Киш О. Acta Math. Acad. sci. Hungar., 11, 49—64, 1960.
9. Киш О. Acta Math. Acad. sci. Hungar., 11, 255—276, 1960.

Поступило в редакцию 8.XII 1964

І. А. БАКУТА

АБ УПЛЫВЕ НЕЭЛЕКТРЫЧНАЙ ЭНЕРГІІ НА З'ЯВУ ПРАБОЮ ДЫЭЛЕКТРЫКАЎ

Калі ў дыэлектрык, што знаходзіцца ў электрычным полі, паступае неэлектрычная энергія, то ў ім могуць адбывацца працэсы, якія прыводзяць да дадатковага награвання яго і ўтварэння новых носьбітаў зараду. Крыніцай такой энергіі можа служыць абпраменьванне дыэлектрыка пранікаючай радыяцыяй, праходжанне ўдарных хваль і г. д. Гэта можа прывесці да змяненняў, якія ўплываюць на характар нарастання прабіўнога току.

Для разгляду гэтага пытання возьмем агульнае ўраўненне балансу энергіі ў дыэлектрыку [1]:

$$\frac{dQ}{dt} = jE + G - (\omega_0 - \omega) \frac{dn_-}{dt}, \quad (1)$$

дзе Q — колькасць цяпла; t — час; j — шчыльнасць току ў дыэлектрыку; E — напружанасць электрычнага поля; G — паглынаемая магутнасць ад крыніцы неэлектрычнай энергіі; $\omega_0 - \omega$ — энергія, якую неабходна затраціць для ўтварэння зараджанай часцінкі пры дадзеных умовах; ω_0 — энергія ўтварэння зараджанай часцінкі з нейтральных часцінак, што знаходзяцца ў найніжэйшым энергетычным узроўні; ω — сярэдняя энергія, якой валодаюць нейтральныя часцінкі пры дадзеных умовах; n_- — колькасць адмоўных часцінак (электронаў), якія ўтвараюцца ў адзінцы аб'ёму дыэлектрыка.

Паколькі ў дыэлектрыку носьбітамі зараду могуць быць і электроны і дадатныя іоны, то $j = j_- + j_+$, прычым $j_- = qn_-v_-$ і $j_+ = qn_+v_+$, дзе v_- і v_+ — дрэйфавыя скорасці электронаў і іонаў; q — велічыня электрычнага зараду электрона. Апрача таго, будзем лічыць цеплавы эффект адытыўнай велічынёй, г. зн. $Q = Q_- + Q_+ + Q'$, дзе Q_- , Q_+ і Q' — колькасці цяпла, абумоўленыя электроннай, іоннай складаючай току і неэлектрычнай энергіяй.

Пасля гэтага ўраўненне (1) можна пераўтварыць наступным чынам:

$$\begin{aligned} \frac{dQ_-/dt}{j_-E} j_-E + \frac{dQ_+/dt}{j_+E} j_+E + \frac{dQ'/dt}{G} G = \\ = j_-E + j_+E + G + \omega_0 \left(1 - \frac{\omega}{\omega_0} \right) \frac{dn_-}{dt} \end{aligned} \quad (2)$$

або

$$\omega_0 \frac{dn_-}{dt} = \frac{1-\mu}{1-\delta} j_-E + \frac{1-\eta}{1-\delta} j_+E + \frac{1-\zeta}{1-\delta} G,$$

дзе

$$\mu = \frac{dQ_-/dt}{j_- E}; \quad \eta = \frac{dQ_+/dt}{j_+ E}; \quad \zeta = \frac{dQ'/dt}{G}; \quad \delta = \frac{\omega}{\omega_0}.$$

Абазначаючы

$$\frac{qE}{\omega_0} \frac{1-\mu}{1-\delta} = \alpha, \quad \frac{qE}{\omega_0} \frac{1-\eta}{1-\delta} = \beta, \quad \frac{q}{\omega_0} \frac{1-\zeta}{1-\delta} = \chi$$

і ўлічваючы, што $n_- = \frac{j_-}{qv_-}$, канчаткова атрымаем пры $v_- = \text{const}$

$$\frac{dj_-}{dx} = \alpha j_- + \beta j_+ + \chi G. \quad (3)$$

Заўважым, што ўраўненне (3) пры $\chi=0$ і $\alpha=\text{const}$, $\beta=\text{const}$ прыводзіць да вывадаў, што вынікаюць з кінетычнай тэорыі электрычнага прабою Таунсенда [2]. Аднак каэфіцыенты α і β тут маюць больш агульны сэнс, а значэнне іх можа змяняцца ў прынцыпе ад нуля да бесканечнасці, што можа прыводзіць да любой скорасці ўзрастання току.

Разгледзім ураўненне (3) у таунсендаўскім прыбліжэнні, г. зн. пакладзём $\alpha = \text{const}$, $\beta = \text{const}$ і, акрамя таго, прымем χ і G пастаяннымі. Пры ўліку суадносін $j_+ = j - j_-$, дзе j — поўная шчыльнасць току, ураўненне (3) прыме наступны від:

$$\frac{dj_-}{dx} = (\alpha - \beta) j_- + \beta j + \chi G. \quad (4)$$

Ураўненне (4) лёгка вырашаецца пры ўмове $\text{div } j = 0$ і мае рашэнне

$$\ln [(\alpha - \beta) j_- + \beta j + \chi G] = (\alpha - \beta) x + \ln C. \quad (5)$$

У выпадку гранічных умоў, якія ўлічваюць выбіванне электронаў з катода іонамі: пры $x = 0$ $j_- = j_0 + \gamma j_+$ і пры $x = l$ $j_- = j$, выраз (5) прыводзіць да наступнага рэзультату:

$$j = \frac{j_0(\alpha - \beta)e^{(\alpha - \beta)l} + (1 + \gamma)\chi G(e^{(\alpha - \beta)l} - 1)}{\alpha(1 + \gamma) - (\alpha\gamma + \beta)e^{(\alpha - \beta)l}}. \quad (6)$$

Крытэры прабою ($j = \infty$) будзе мець выгляд

$$\frac{\alpha(1 + \gamma)}{\alpha\gamma + \beta} = e^{(\alpha - \beta)l}. \quad (7)$$

З выразу (6) бачым, што наяўнасць неэлектрычнай энергіі ў дыэлектрыку прыводзіць да ўзмацнення току. Акрамя таго, таксама відаць, што роўнасць нулю j_0 не з'яўляецца перашкодай да ўзрастання току і прабою дыэлектрыкаў. Выпадак $j_0 = f(G)$ прыводзіць да такіх жа вывадаў.

Перш чым пераходзіць да разгляду крытэрыя прабою, успомнім, што каэфіцыенты α , β і χ не з'яўляюцца незалежнымі. Гэта дазваляе выразіць α і β праз χ шляхам выключэння велічыні $(1 - \delta)$ наступным чынам:

$$\alpha = \frac{1 - \mu}{1 - \zeta} \chi E \quad \text{і} \quad \beta = \frac{1 - \eta}{1 - \zeta} \chi E.$$

Пры гэтым

$$\alpha - \beta = \frac{\eta - \mu}{1 - \zeta} \chi E.$$

Тады крытэрыі прабою прыме наступны выгляд:

$$\frac{(1 - \mu)(1 + \gamma)}{(1 - \mu)\gamma + 1 - \eta} = e^{\frac{\eta - \mu}{1 - \zeta} \times EI} \quad (8)$$

Пры адсутнасці γ -працэсаў на катодзе, г. зн. пры $\gamma = 0$, крытэрыі прабою будзе выглядаць так:

$$\frac{1 - \mu}{1 - \eta} = e^{\frac{\eta - \mu}{1 - \zeta} \times EI} \quad (9)$$

Выразы (8) і (9) паказваюць залежнасць з'явы электрычнага прабою дыэлектрыкаў ад уздзеяння на іх неэлектрычнай энергіі. Колькасныя рэзультаты стануць магчымымі пасля развіцця дэтальнай тэорыі каэфіцыентаў, якія ўваходзяць у выраз крытэрыя прабою.

Адзначым, што атрыманыя рэзультаты валодаюць значнай агульнасцю і могуць быць выкарыстаны пры разглядзе з'явы прабою дыэлектрыкаў, што знаходзяцца ў любым агрэгатным стане. У выпадку газу задача значна спрашчаецца.

ЛІТАРАТУРА

1. Некрашевич И. Г., Бакуто И. А. ДАН БССР, № 1, 1962.
2. Сканави Г. И. Физика диэлектриков (обл. сильных полей). ГИФМЛ, 1958.

Поступило в редакцию 26.IV 1963

ХРОНИКА

ГОДИЧНОЕ ОБЩЕЕ СОБРАНИЕ АКАДЕМИИ НАУК БССР

25—27 февраля с. г. состоялось годовое Общее собрание Академии наук БССР. 25 февраля на заседаниях общих собраний отделений были заслушаны и обсуждены доклады академиков-секретарей отделений о важнейших результатах работы за 1964 г.

26 февраля годовое Общее собрание АН БССР открыл президент Академии наук БССР **В. Ф. Купревич**.

В своем вступительном слове акад. В. Ф. Купревич отметил, что институты академии внесли немалый вклад в дело развития науки и разработки технических проблем. Так, в прошлом году научные учреждения академии проводили исследования по 49 проблемам, включающим 213 тем. Из них: 21 тема по Государственному плану развития народного хозяйства СССР и 146 тем — по плану развития народного хозяйства БССР. Ряд институтов академии успешно закончил и внедрил свои научные работы в соответствующие отрасли промышленности.

Акад. В. Ф. Купревич коснулся работ теоретического характера, проводимых, например, по проблеме «Фотосинтез», а также исследований, выполненных в институтах физики, химического профиля, физики твердого тела и полупроводников. К ним относятся исследования по современной оптике, дифференциальным уравнениям, математической физике, природе химической связи в твердых телах, процессам кристаллизации, природным солям и др.

В прошлом году Президиум АН СССР на основании материалов комиссии ученых АН СССР, возглавлявшейся президентом АН СССР М. В. Келдышем, принял постановление «Об основных направлениях научных исследований и структуре Академии наук БССР». Этим постановлением определены ведущие научные направления исследований и намечены перспективы развития сети научных учреждений АН БССР. Конечно, в результате развития исследований в СССР неизбежно будут происходить дальнейшие изменения в тематике работ и структуре АН БССР. Это можно видеть на процессе составления планов на текущий год. Могут быть и более существенные изменения. Например, в передовой статье газеты «Правда» от 19 января 1965 г. говорится, что «для Академии наук Белоруссии очень важно сейчас развивать исследования

по комплексу биологических наук, имеющих большое значение для сельского хозяйства и медицины». В качестве примера удачного поиска в биологических исследованиях акад. В. Ф. Купревич привел работу доктора биологических наук С. А. Самцевича, который экспериментально установил наличие на окончаниях молодых корней своеобразного бактериоза. Этот эксперимент в большой мере дополняет значение и роль бактериальной флоры в жизни почвы и ставит по-новому вопрос о микоризах.

Акад. В. Ф. Купревич отметил, что в последние годы в АН БССР довольно успешно развиваются исследования по хозяйственной тематике, а также широко ведется строительство академического городка.

Присутствовавшие на Общем собрании почтили вставанием память скончавшихся в 1964 г. академика АН БССР В. С. Немчинова и члена-корреспондента АН БССР М. Г. Чижевского.

Затем слово для доклада «О научно-организационной деятельности Академии наук БССР за 1964 г.» предоставляется главному ученому секретарю Президиума АН БССР академику АН БССР **Ф. П. Винокурову**.

В своем докладе акад. Ф. П. Винокуров остановился на важнейших вопросах, которые поднимались на годовичном Общем собрании Академии наук СССР, а также рассказал о результатах исследований, выполненных в 1964 г. учеными АН БССР как самостоятельно, так и в содружестве с научными учреждениями АН СССР и некоторых академий наук союзных республик.

Так, были названы исследования по истории рабочего класса в Белоруссии, проводимые **Институтом истории АН БССР**.

В **Институте философии АН БССР** исследовалась комплексная проблема «Закономерности развития социализма и перехода к коммунизму». Разрабатывались также проблемы диалектического материализма и философских вопросов естествознания, истории философской и социологической мысли в Белоруссии на конкретных материалах изменений в области экономических, социальных и национальных отношений в БССР.

В **Институте экономики АН БССР** велось исследование по генеральной схеме разме-

щения производительных сил по Белорусскому экономическому району.

Институт физики АН БССР выполнил ряд работ по теории оптических квантовых генераторов, по использованию мощных световых импульсов в сочетании со сверхскоростной спектральной регистрацией, что позволило выявить образование триплетных состояний и этапы образования фотовосстановительных форм хлорофилла и его аналогов.

В **Институте тепло- и массообмена АН БССР** разработана теория высокоинтенсивных неравновесных процессов тепло- и массообмена с учетом конечной скорости переноса; разработана теория турбулентного переноса тепла и массы вещества при нестационарном тепло- и массообмене при взаимодействии капиллярно-пористого тела с потоком газа и, в частности, при испарении легкоиспаряющихся жидкостей из капиллярно-пористого тела в неадиабатических условиях. Разработан новый метод термической обработки капиллярно-пористых влажных материалов, основанный на использовании электротока промышленной частоты и ферромагнитных элементов. В этом же институте проведены исследования автоматических решений уравнений пограничного слоя с тепло- и массопереносом. Получены точные решения, которые применены к задаче вынужденной конвекции от цилиндра, обтекаемого раствором целлюлозы различной концентрации. Предложена также равновесная карбонатная спирто-кислородная система, обладающая стабильными характеристиками и малым расходом активных компонентов.

В **Институте математики и вычислительной техники АН БССР** разработаны методы создания алгоритмов и рабочих программ для конструирования машин и технологической оснастки, для моделирования процессов технической подготовки производства, имеющие важное значение для автоматизации ряда трудных процессов инженерного проектирования. Результаты работ внедряются на ряде заводов Советского Союза.

Сектор физики Земли АН БССР в сотрудничестве с Институтом физики Земли АН СССР на основании изучения вариаций электромагнитного поля Земли исследовали глубинные зоны коры на территории Белоруссии и с помощью данных, полученных другими методами, построили геолого-геофизические разрезы Белорусского массива и Припятского прогиба.

В результате теоретических прогнозов и долговременных геолого-поисковых и разведочных работ в Припятской впадине, проводимых учеными Белоруссии совместно с производственниками, вначале были прогнозированы, а затем открыты крупные месторождения нефти в Речицкой структуре. Полученные же палеогеологические, геохимические и гидрогеологические материалы указывают на наличие крупных залежей нефти и в других структурах Припятской впадины.

В 1964 г. Президиум Академии наук

СССР обратил внимание на отставание научных разработок по механике полимерных материалов. В результате в Академии наук СССР и академиях наук союзных республик, в частности в **Отделе механики полимеров АН БССР** (г. Гомель), получили дальнейшее развитие исследования этих проблем. Результаты исследований внедряются в народное хозяйство. Однако фронт работ в области механики полимеров в нашей стране все еще остается недостаточным.

Институтом биологии и Лабораторией биофизики и изотопов АН БССР предложена схема биосинтеза предшественников хлорофилла, показана метаболическая активность свежесинтезированных молекул хлорофилла.

В **Институте экспериментальной ботаники и микробиологии АН БССР** разработана технология производства витамина В₂ на основе микробиологического синтеза с использованием люпиновой муки, картофельного сока и других видов местного сырья, внесены предложения об организации его промышленного производства.

Отделом генетики и цитологии АН БССР выявлено мутагенное действие некоторых соединений, характеризующихся определенным взаимодействием с основаниями в молекулах ДНК. Получен новый высокопродуктивный мутант (*Aspergillus orizae*) — продуцент протеолитических ферментов, который передан для промышленного использования.

В **Институте общей и неорганической химии АН БССР** разработан состав безборного бесщелочного стронцийсодержащего материала, опытно-промышленная варка которого на Гродненском стекольном заводе показала, что по варочным свойствам стекло не уступает стандартному бесщелочному, а по прочности, химической устойчивости и величине удельного объемного сопротивления превосходит стандартное.

План проведения научно-исследовательских работ по АН БССР за 1964 г. в основном выполнен. Что же касается эффективности научных исследований, то единой методики исчислений здесь, видимо, применить нельзя. Следует только заметить, что Госкомитет Совета Министров БССР по координации научно-исследовательских работ годовой экономической эффект (потенциал), который может быть получен при внедрении в народное хозяйство результатов научно-исследовательских работ, только по 15 законченным в 1964 г. темам исчислил примерно в 40 млн. руб.

Все возрастающий объем и уровень научных исследований в академии, сложность и многогранность современной науки требуют не только мощной материально-технической базы и высококвалифицированных научных кадров, но и более гибких форм организации науки.

Как уже отмечал В. Ф. Купревич, комиссия ученых АН СССР, возглавлявшаяся академиком М. В. Келдышем, дала довольно высокую оценку результатам деятельно-

сти АН БССР, но вместе с тем сделала ряд замечаний и внесла предложения по улучшению этой деятельности. Так, было указано на многоотметность, распыленность научных и материальных сил и средств, отсутствие четкого профиля исследований по институтам химии, физики твердого тела и полупроводников. Особо было подчеркнута, что плохо используется атомный реактор с целью проведения на нем комплексных исследований в области биологии, физики, химии. Были высказаны предложения по перестройке Института математики и вычислительной техники.

8 октября 1964 г. Президиум АН СССР, основываясь на материалах комиссии, принял постановление «Об основных направлениях научных исследований и структуре Академии наук БССР», которым определил профиль научных исследований, а также одобрил предложения о дальнейшем развитии сети научных учреждений АН БССР на 1965—1967 гг. Признано целесообразным создать в АН БССР ряд новых институтов и самостоятельных отделов. На основе этих предложений из состава Института математики и вычислительной техники уже выделено новое научное учреждение — Институт технической кибернетики АН БССР. Таким образом, вся научно-организационная деятельность АН БССР направлена на реализацию рекомендаций комиссии ученых АН СССР и выполнение постановления Президиума АН СССР. Многие вопросы уже решены, некоторые находятся в стадии разрешения.

Подготовка научных кадров. На конец отчетного года в АН БССР работало 4025 человек, в том числе по бюджетным учреждениям 3043 чел. и по хозяйственным — 474 чел. Общая численность научных сотрудников 1621 чел., в том числе 52 доктора наук, 404 кандидата наук.

На 1 января с. г. в АН БССР состоит 50 академиков, 36 членов-корреспондентов, из них в АН БССР работает 23 академика и 11 членов-корреспондентов.

В 1964 г. в АН БССР защищено 97 кандидатских и 9 докторских диссертаций. Из них научными сотрудниками и аспирантами АН защищено 87 кандидатских и 2 докторские диссертации.

Закончили аспирантуру 120 аспирантов (97 чел. с отрывом и 23 чел. без отрыва от производства). Это на 22 человека больше, чем в 1963 г. Однако лишь 11 чел. окончили аспирантуру с защитой диссертаций в срок, 60 чел. подготовили диссертации к защите и 49 чел. отчислено по истечении срока обучения.

На 1 января 1965 г. в аспирантуре АН БССР обучаются 562 аспиранта, в том числе 364 с отрывом от производства и 198 без отрыва от производства. 7 аспирантов АН БССР обучаются в институтах АН СССР. В свою очередь 7 аспирантов, прикомандированных из других АН союзных республик, проходят подготовку в институтах АН БССР.

Задача состоит в том, чтобы усилить подготовку научных кадров с учеными степенями, особенно докторов наук. Следует также добиваться такого положения, чтобы подавляющее большинство аспирантов заканчивало аспирантуру с защитой диссертаций или представлением диссертаций к защите. А это во многом зависит от того, как институты относятся к вопросу подбора кандидатов в аспирантуру, а также какую помощь оказывают они аспирантам в процессе обучения.

Редакционно-издательская деятельность. В 1964 г. научными учреждениями АН БССР опубликовано 1103 научные работы, в том числе 30 монографий, 3 таблицы и 15 сборников материалов.

Печатная продукция распределяется следующим образом:

Отделение общественных наук — 188 работ объемом 622 п. л., в том числе 10 монографий;

Отделение биологических наук — 246 работ объемом 297,8 п. л., в том числе 6 монографий;

Отделение физико-технических наук — 296 работ объемом 246,5 п. л., в том числе 4 монографий;

Отделение физико-математических наук — 243 работы объемом 166,2 п. л., в том числе 3 монографий;

Отделение химических наук — 130 работ объемом 106,9 п. л., в том числе 1 монография.

Издательство «Наука и техника» выпустило 128 наименований книг и журналов объемом 1382 изд. листа, тиражом 269 тыс. экземпляров.

Ведущее место среди всех изданий 1964 г. занимают монографии. При перевыполнении плана по названиям (105%) Издательство недовыполнило план по объему издательских листов.

В АН БССР в 1964 г. издавалось 7 научных журналов, в которых опубликовано 887 статей.

В работу Издательства следовало бы шире внедрять общественные начала по изданию, рецензированию, научному редактированию литературы.

Типография научно-технической литературы в основном обслуживает Издательство «Наука и техника». План по выпуску валовой продукции в 1964 г. типографией выполнен на 96,4%, по выпуску товарной продукции — 96,7%. Недовыполнение плана объясняется тем, что в первом квартале 1964 г. типография была загружена на 50%.

В 1964 г. улучшена работа по организации научно-технической информации о деятельности научных учреждений АН БССР. Так, при Фундаментальной библиотеке создан Отдел патентования и научно-технической информации. Кроме того, все научные учреждения АН (за исключением учреждений Отделения общественных наук) должны были также организовать работу по научно-технической информации и патенто-

ванию, выделив для этого ответственных лиц.

Институтами и Отделами АН БССР совместно с другими организациями проведен ряд всесоюзных и республиканских совещаний и конференций, в работе которых принимали участие видные советские и зарубежные ученые. Например, были проведены: 6-й Всесоюзный colloquium по высшей алгебре, XI Всесоюзное совещание по физике низких температур, 2-е Всесоюзное совещание по тепло- и массообмену, V Всесоюзная научно-техническая конференция по применению ультразвука в машиностроении, Всесоюзное совещание по геохимии гипергенеза и т. д.

На 1 января 1965 г. фонд **Фундаментальной библиотеки АН БССР** насчитывает 1129414 библиотечных единиц. За год было выдано 264503 библиотечные единицы, в том числе иностранной литературы 82259 библиотечных единиц. В 1964 г. библиотекой пользовалось 5346 читателей. Книгообмен велся с 510 библиотеками и научными учреждениями СССР и зарубежных стран. Проводится большая работа по усовершенствованию каталогов, тематической библиографии, реставрации книг. Создан Методический совет.

Международные научные связи АН БССР были направлены на изучение результатов научных исследований зарубежных стран. За границу выезжало 32 научных сотрудника. Из них 16 с целью изучения положительного научного опыта и 16— для участия в работе международных и национальных научных конгрессов, конференций, совещаний.

Координация научной деятельности. В 1964 г. в АН БССР работало 17 научных советов, в т. ч. 4 по физико-математическим и физико-техническим наукам, 7 по биологическим и 6 по общественным наукам. Научными советами было дано свыше 100 отзывов по тематическим планам вузов. Однако в то время как координация тематики институтов АН БССР с Академией наук СССР значительно улучшилась, заметного улучшения координации внутри республики, особенно с вузами, пока нет. Работа Совета по координации АН БССР требует решительного и неотложного улучшения.

Академик Ф. П. Винокуров коснулся в своем докладе и вопросов **обеспечения научных исследований**, т. е. вопросов финансирования, капитального строительства, материально-технического снабжения, работы экспериментального завода и т. д.

В заключение Ф. П. Винокуров отметил, что в Академии наук БССР проделана большая научно-организационная работа, ряд институтов академии занимает ведущее место в науке, расширяется сеть научных учреждений, растут кадры молодых ученых. С каждым годом улучшается материально-техническая база. По общему

признанию, Академия наук БССР теперь совсем не та, что была несколько лет тому назад, перспективы ее развития благоприятны. Но ученым Белоруссии предстоит еще очень много сделать, чтобы устранить имеющиеся недоработки. Необходима максимальная концентрация научных сил и материальных средств на разработке первоочередных проблем. Существенного улучшения требует работа по внедрению результатов научных исследований в производство. В этом особо важную роль должен играть Государственный Комитет Совета Министров БССР по координации научно-исследовательских работ.

Акад. Ф. П. Винокуров говорил также о задачах, которые стоят перед учеными АН БССР в деле подготовки и воспитания молодых научных кадров, координации научно-исследовательской деятельности, о необходимости улучшения работы институтов химического профиля и т. д.

Акад. Ф. П. Винокуров выразил уверенность, что ученые Академии наук БССР приложат все свои силы и знания и внесут достойный вклад в дело строительства коммунизма.

С докладами о наиболее значительных научных достижениях в 1964 г. выступили академики-секретари отделений **Т. С. Горбунов, Н. Д. Нестерович, Н. Ф. Ермоленко, Ф. И. Федоров, А. К. Красин.**

В обсуждении Отчета о научной деятельности Академии наук БССР за 1964 г., а также докладов главного ученого секретаря Президиума и академиков-секретарей отделений приняли участие академики АН БССР **Г. В. Богомолов, В. П. Северденко, Н. Н. Сирота, Б. В. Ерофеев, И. А. Булыгин, Н. А. Дорожкин, А. Н. Севченко, Н. П. Еругин, П. П. Роговой**, член-корреспондент АН БССР **Н. В. Каменская**, д. т. н. **Е. Г. Коновалов, Г. К. Горанский**, к. х. н. **С. В. Маркевич.**

Годичное Общее собрание приняло постановление, в котором одобрило Отчет о научной деятельности Академии наук БССР за 1964 год и сделало ряд рекомендаций.

На Общем собрании утверждено решение бюро Отделения общественных наук БССР о назначении члена-корреспондента АН БССР **Н. В. Каменской** директором Института истории АН БССР.

27 февраля на Общем собрании были заслушаны научные доклады: 1. Проблема нефтегазоносности территории Белоруссии: состояние изучения и перспективы (докладчик академик АН БССР **К. И. Лукашев**).

2. Современное состояние в развитии атомной энергетики (докладчик академик АН БССР **А. К. Красин**).

3. Некоторые проблемы молекулярной генетики (докладчик академик АН БССР **Н. В. Турбин**).

З. П. ЯЦКЕВИЧ,
референт Президиума АН БССР

З М Е С Т

МАТЭМАТЫКА

В. И. Крылов, А. А. Пальцев. Численное интегрирование функций, имеющих логарифмическую особенность в начале координат	5
В. И. Крылов, А. А. Пальцев. Численное интегрирование функций, имеющих логарифмические особенности на концах отрезка интегрирования	10
А. Я. Хохряков. О периодической краевой задаче для нелинейного дифференциального уравнения третьего порядка	14
В. И. Ладес. Многофункциональный логический узел импульсно-потенциального типа	19
В. И. Монастырный. Периодические подгруппы мультипликативной группы тела	29
П. Т. Козел. О ядре одного гомоморфизма	32

ФІЗІКА

Т. Г. Быстрова, Ф. И. Фёдарай. Аб пругкіх уласцівасях кубічных крышталяў	35
В. К. Гронскі, І. С. Сацункевіч. Нараджэнне рэзанансу са спінам $3/2$ у нейтрынным пучку высокай энергіі	49
П. А. Апанасевіч. Некаторыя асаблівасці ўзаемадзеяння магутных патокаў выпраменьвання з рэчывам	54
А. П. Іваноў. Рассеяне святла буйнымі часцінкамі сферычнай формы	63
А. Р. Непакайчыцкі, У. У. Панцялееў, А. А. Янкоўскі. Аб магчымасці выкарыстання заканамернасцей выгарання рэчыва ў крыніцах святла для павышэння канцэнтрацыйнай адчувальнасці спектральнага аналізу	68
Я. І. Фірсаў, Э. А. Рудак. Даследаванне фонавых умоў датычнага канала рэактара ИРТ АН БССР	73
Я. І. Фірсаў, Э. А. Рудак. Даследаванне спектраў раздзеленых ізатопаў з рэакцыі (n, γ) на рэактары ИРТ АН БССР	77
М. А. Султанаў, Л. І. Кісялеўскі. Да пытання аб паступленні рэчыва электродаў пры імпульсным разрадзе	80
Л. В. Валадзько, Д. С. Умрэйка. Тэмпературная залежнасць і прырода электронных спектраў арганічных раствораў уранілавых солей	83
М. А. Гусак, А. М. Ганчарэнка. Уплыў анізатропіі на тыпы хваляў дыэлектрычнага хвалявода	90
А. Р. Хаткевіч. Уплыў анізатропіі кубічнага крышталя на распаўсюджванне і палярызацыю пругкіх хваляў	93
А. І. Болсун. Фотанараджэнне пар палярызаваных вектарных W-мезонаў	98
В. М. Варыкаш. Вырошчванне крышталяў трыгліцынсультату і змяненне фізічных уласцівасцей у зоне тэмпературы Кюры	101
Я. М. Галалобаў. Вызначэнне цяплынь атамізацыі і эфектыўных зарадаў іонаў злучэнняў $A^{III}BV$ па даных рэнтгенаграфічнага аналізу	110
Ю. М. Хачатран. Аб уплыве гідрастатычнага ціску на тэмпературу Кюры і магнітныя ўласцівасці нікель-медзь-цынкавых ферытаў	120

КАРОТКІЯ ПАВЕДАМЛЕННІ

О. А. Чупригин. О тригонометрическом $(0, 1, 2, \dots, r-2, r)$ -интерполировании	129
І. А. Бакута. Аб уплыве неэлектрычнай энергіі на з'яву прабою дыэлектрыкаў	132

ХРОНИКА

Годичное общее собрание Академии наук БССР	135
--	-----

СОДЕРЖАНИЕ

МАТЕМАТИКА

В. И. Крылов, А. А. Пальцев. Численное интегрирование функций, имеющих логарифмическую особенность в начале координат	5
В. И. Крылов, А. А. Пальцев. Численное интегрирование функций, имеющих логарифмические особенности на концах отрезка интегрирования	10
А. Я. Хохряков. О периодической краевой задаче для нелинейного дифференциального уравнения третьего порядка	14
В. И. Ладес. Многофункциональный логический узел импульсно-потенциального типа	19
В. И. Монастырный. Периодические подгруппы мультипликативной группы тела	29
П. Т. Козел. О ядре одного гомоморфизма	32

ФИЗИКА

Т. Г. Быстрова, Ф. И. Федоров. Об упругих свойствах кубических кристаллов	35
В. К. Гронский, И. С. Сацункевич. Рождение резонанса со спином $3/2$ в нейтринном пучке высокой энергии	49
П. А. Апанасевич. Некоторые особенности взаимодействия мощных потоков излучения с веществом	54
А. П. Иванов. Рассеяние света крупными частицами сферической формы	63
А. Г. Непокойчицкий, В. В. Пантелеев, А. А. Янковский. О возможности использования закономерностей выгорания вещества в источниках света для повышения концентрационной чувствительности спектрального анализа	68
Е. И. Фирсов, Э. А. Рудак. Исследование фоновых условий касательного канала реактора ИРТ АН БССР	73
Е. И. Фирсов, Э. А. Рудак. Исследование спектров разделенных изотопов из реакции (n, γ) на реакторе ИРТ АН БССР	77
М. А. Султанов, Л. И. Киселевский. К вопросу о поступлении вещества электродов при импульсном разряде	80
Л. В. Володько, Д. С. Умрейко. Температурная зависимость и природа электронных спектров органических растворов ураниловых солей	83
Н. А. Гусак, А. М. Гончаренко. Влияние анизотропии на типы волн диэлектрического волновода	90
А. Г. Хаткевич. Влияние анизотропии кубического кристалла на распространение и поляризацию упругих волн	93
А. И. Болсун. Фоторождение пар поляризованных векторных W -мезонов	98
В. М. Варикаш. Выращивание кристаллов триглицинсульфата и изменение физических свойств в области температуры Кюри	101
Е. М. Гололобов. Определение теплот атомизации и эффективных зарядов ионов соединений $AIII BV$ по данным рентгенографического анализа	110
Ю. М. Хачатрян. О влиянии гидростатического давления на температуру Кюри и магнитные свойства никель-медь-цинковых ферритов	120

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

О. А. Чупригин. О тригонометрическом $(0, 1, 2, \dots, r-2, r)$ -интерполировании	129
И. А. Бакуто. О влиянии неэлектрической энергии на явление пробоя диэлектриков	132

ХРОНИКА

Годичное общее собрание Академии наук БССР	135
--	-----



АТ 13139. Здана ў набор 5/III-1965 г. Падпісана да друку 26/V-1965 г. Фармат $70 \times 108^{1/16}$. Друк. арк. 8.75. Ум. друк. арк. 11.98. Уч.-выд. арк. 10,0. Выд. зак. 120. Друк. зак. 355. Цана 60 кап.

Друкарня навукова-тэхнічнай літаратуры выдавецтва «Навука і тэхніка» АН БССР і Дзяржакамітэта Савета Міністраў БССР па друку Мінск, Ленінскі праспект, 68.

ВНИМАНИЮ АВТОРОВ

Статьи, присылаемые авторами в наш журнал, будут приниматься редакцией к печати только при наличии двух экземпляров автореферата, удовлетворяющего указанным ниже требованиям.

ИНСТРУКЦИЯ

по составлению рефератов для авторов отечественных периодических изданий

Постановлением Совета Министров СССР от 18/IV-1959 г. № 418 и последующим решением Государственного комитета по координации научно-исследовательских работ СССР и Президиума Академии наук СССР редакции научных и научно-технических журналов обязаны представлять в ВИНТИ рефераты публикуемых материалов.

В настоящей инструкции сформулированы требования к содержанию и оформлению рефератов, которыми и следует руководствоваться.

Требования, предъявляемые к реферату

1. В реферате кратко излагается основное содержание статьи. Реферат должен дать читателю представление о характере освещаемой работы, оригинальности постановки вопроса, методике проведения исследования и его основных результатах.

2. Реферату должно предшествовать библиографическое описание в следующем виде: название статьи, фамилия и инициалы автора, название журнала, где помещается статья. Текст реферата начинается непосредственно с изложения существа работы без повторения заголовка. Форма изложения материала не обязательно должна повторять форму изложения оригинальной статьи.

3. Если оригинал содержит большое количество цифровых данных, их следует обобщить и систематизировать.

4. Средний объем реферата 1,5—2 страницы машинописного текста, отпечатанного через два интервала на белой писчей бумаге обычного формата (30×21) в двух экземплярах с полем 4 см с левой стороны.

5. Таблицы, схемы, графики и пр. могут быть включены в том случае, если они отражают основное содержание работы или сокращают текст реферата. Сообщение о наличии в реферируемой работе таблиц, схем, графиков, фотографий, карт, рисунков необходимо давать в конце реферата. Например, табл. 2, илл. 10.

6. Формулы приводятся только в том случае, если они необходимы для понимания статьи. Громоздкие математические выражения помещать не следует. Формулы следует вписывать четко, не изменяя принятых в оригинале обозначений величин. Формулы и буквенные обозначения вписываются черными чернилами во второй экземпляр. Вписывание формул и буквенных обозначений, а также исправление замеченных опечаток в первом экземпляре не делается.

7. В конце реферата в квадратных скобках указывается название учреждения или предприятия в которых автор реферируемой работы (если эти данные приводятся в статье) провел работу. Подпись автора и дату написания реферата следует ставить в левом нижнем углу на обоих экземплярах реферата.

ПРОДОЛЖАЕТСЯ ПОДПИСКА НА 1965 ГОД

НА ЖУРНАЛ
„ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК БССР“

Серия физико-математических наук

Журнал освещает общие принципиальные вопросы развития советской науки, публикует материалы научных исследований и итоги работ институтов Академии наук БССР и других научно-исследовательских учреждений БССР в области математики (методы вычислительной математики, уравнения математической физики, алгебра и теория групп и др.), общей и теоретической физики (оптика, физика твердого тела и полупроводников, теория полей и элементарных частиц и др.). Печатает обзоры по важнейшим разделам физико-математических наук, рецензии на выходящие в СССР научные издания, а также хронику научной жизни.

Журнал рассчитан на научных работников научно-исследовательских учреждений, преподавателей высших учебных заведений, аспирантов и студентов старших курсов вузов физико-математического профиля.

ЖУРНАЛ ВЫХОДИТ 4 РАЗА В ГОД

Печатается на белорусском языке, статьи сопровождаются резюме на русском языке. Отдельные статьи печатаются на русском языке.

ПОДПИСНАЯ ЦЕНА НА ГОД 2 РУБ. 40 КОП.

Подписка принимается всеми городскими, районными отделами «Союзпечати», конторами и отделениями связи и общественными уполномоченными по подписке на предприятиях, в учебных заведениях и учреждениях.