

63.126.816

302.1
58

ВЕСЦІ

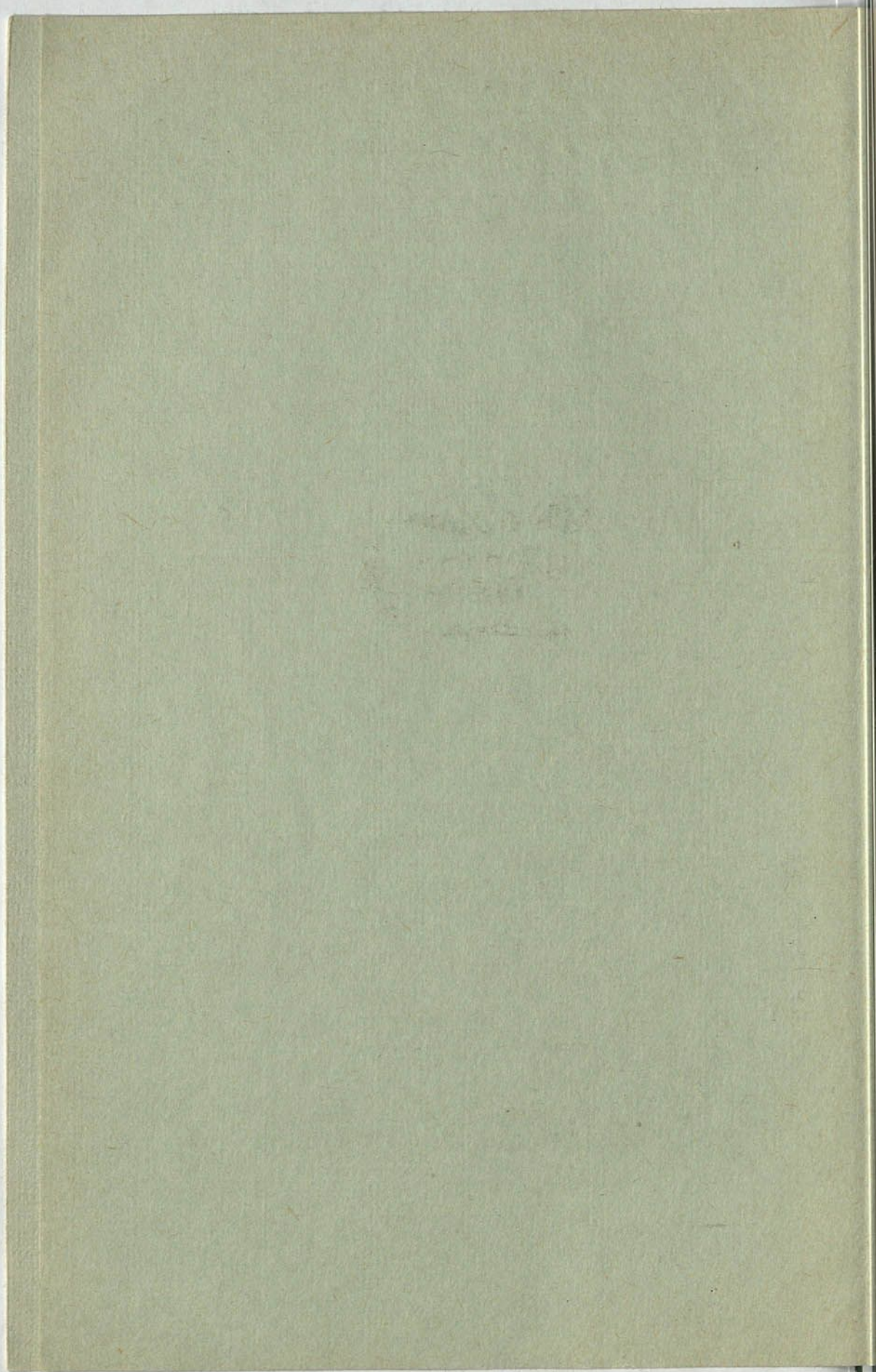
АКАДЭМІІ НАВУК БССР

СЕРЫЯ
ФІЗІКА-МАТЭМАТЫЧНЫХ
НАВУК

2

ВЫДАВЕЦТВА „НАВУКА І ТЭХНІКА“

МІНСК 1965





ИЗВЕСТИЯ

АКАДЕМИИ НАУК БССР

СЕРИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ
НАУК

№ 2

ИЗДАТЕЛЬСТВО „НАУКА И ТЕХНИКА“

МИНСК 1965

65.186.816

ВЕСЦІ

АКАДЭМІІ НАВУК БССР

СЕРЫЯ
ФІЗІКА-МАТЭМАТЫЧНЫХ
НАВУК

№ 2

ВЫДАВЕЦТВА „НАВУКА І ТЭХНІКА“

МІНСК 1965

Дзяржаўная
бібліятэка
БССР
Імя У. І. Леніна

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ:

Ф. И. ФЕДАРАУ (галоўны рэдактар),
Л. Ф. ІЛЬЮШЭНКА (нам. галоўнага рэдактара),
М. М. АЛЯХНОВІЧ, А. П. ВЕРАБ'ЕУ, У. І. КРЫЛОУ, М. М. СІРАТА,
У. Г. СПРЫНДЖУК, Д. А. СУПРУНЕНКА, Я. І. ФІРСАУ, С. А. ЧУНІХІН

А. Х. ТУРЕЦКИЙ

**ЗАМЕЧАНИЕ ОБ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧЕ
 ТЕОРИИ АППРОКСИМАЦИИ В МЕТРИКЕ L**

Пусть $E_n = E_n(f)$ означает наилучшее приближение интегрируемой функции $f(x)$ алгебраическими полиномами степени не выше $n - 1$ на отрезке $[-1, 1]$ в метрике L , т. е.

$$E_n = \inf_{c_i} \int_{-1}^1 |f(x) - P_{n-1}(x)| dx,$$

где

$$P_{n-1}(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \dots + c_{n-1}x^{n-1}.$$

Обратная задача теории аппроксимации в метрике L ставится следующим образом: дана монотонно убывающая последовательность положительных чисел, сходящаяся к нулю:

$$\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \dots \geq \alpha_n \geq \dots, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0.$$

Требуется найти те функции $f(x)$, для которых

$$E_n(f) = \alpha_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots).$$

Существование решения обратной задачи в пространстве C доказано С. Н. Бернштейном [1]; для любого банаховского пространства доказательство приведено в [2].

Будем говорить, что функция $f(x)$ принадлежит классу A_n , если существует многочлен

$$P_{n-1}^*(x) = c_0^* + c_1^*x + c_2^*x^2 + \dots + c_{n-1}^*x^{n-1}$$

такой, что разность $f(x) - P_{n-1}^*(x)$ меняет свой знак в точках $-\cos \frac{k\pi}{n+1}$ ($k = 1, 2, \dots, n$) и нигде больше в интервале $(-1, 1)$.

Известно [3], если $f(x) \in A_n$, то

$$\begin{aligned} E_n = E_n(f) &= \inf_{c_i} \int_{-1}^1 |f(x) - P_{n-1}(x)| dx = \int_{-1}^1 |f(x) - P_{n-1}^*(x)| dx = \\ &= \left| \int_{-1}^1 f(x) \operatorname{sign} U_n(x) dx \right| = \left| \int_0^\pi \sin \varphi f(\cos \varphi) \operatorname{sign} \sin(n+1)\varphi d\varphi \right|, \end{aligned}$$

где $U_n(x) = \frac{\sin(n+1)\varphi}{\sin \varphi}$ ($x = \cos \varphi$) — полином Чебышева второго рода.

Учитывая, что $\text{sign} \sin(n+1)\varphi = (-1)^k$ для значений φ из промежутка $\varphi_k < \varphi < \varphi_{k+1}$, где $\varphi_k = \frac{k\pi}{n+1}$ ($k = 0, 1, \dots, n$), получаем

$$E_n = \left| \sum_{k=0}^n (-1)^k \int_{\varphi_k}^{\varphi_{k+1}} \sin \varphi f(\cos \varphi) d\varphi \right|.$$

Допустим также, что подынтегральная функция разлагается в ряд

$$\sin \varphi f(\cos \varphi) = \sum_{\nu=1}^{\infty} b_{\nu} \sin \nu \varphi,$$

равномерно сходящийся на отрезке $0 \leq \varphi \leq \pi$. Тогда имеем

$$\int_{\varphi_k}^{\varphi_{k+1}} \sin \varphi f(\cos \varphi) d\varphi = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{b_{\nu}}{\nu} (\cos \nu \varphi_k - \cos \nu \varphi_{k+1})$$

и, следовательно,

$$E_n = \left| \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{b_{\nu}}{\nu} \sum_{k=0}^n (-1)^k (\cos \nu \varphi_k - \cos \nu \varphi_{k+1}) \right|.$$

Нетрудно убедиться в справедливости равенства

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k (\cos \nu \varphi_k - \cos \nu \varphi_{k+1}) = \begin{cases} 0 & \text{при } \nu \neq (2l+1)(n+1), \\ 2n+2 & \text{при } \nu = (2l+1)(n+1) \end{cases}$$

($l = 0, 1, 2, \dots$).

Таким образом, получаем

$$E_n = 2 \left| \sum_{k=0}^{\infty} \frac{b_{(2k+1)(n+1)}}{2k+1} \right|.$$

Обозначим

$$\text{sign} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{b_{(2k+1)(n+1)}}{2k+1} = \varepsilon_{n+1}.$$

Тогда имеем

$$\frac{E_n \varepsilon_{n+1}}{2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{b_{(2k+1)(n+1)}}{2k+1}.$$

Пусть теперь заданная последовательность $\alpha_n \downarrow 0$ такова, что имеется функция $f(x)$, удовлетворяющая условиям: 1) $E_n(f) = \alpha_n$ ($n = 1, 2, 3, \dots$),

2) $f(x) \in A_n$ ($n = 1, 2, 3, \dots$), 3) $f(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} b_{\nu+1} U_{\nu}(x)$, причем ряд сходится равномерно на отрезке $-1 \leq x \leq 1$. Тогда имеем

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{b_{(2k+1)(n+1)}}{2k+1} = \frac{\alpha_n \varepsilon_{n+1}}{2} \quad (n = 1, 2, 3, \dots).$$

Обозначим:

$$\tau_{n+1} = \frac{\alpha_n \varepsilon_{n+1}}{2} \quad (n = 1, 2, 3, \dots), \quad (1)$$

$$b_v = \eta_v x_v \quad (v = 2, 3, \dots), \quad (2)$$

где η_v ($v = 2, 3, \dots$) будем выбирать так, как это потребуется, а x_v ($v = 2, 3, \dots$) неизвестны. Тогда получим следующую бесконечную систему линейных уравнений с бесконечным числом неизвестных:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\eta_{(2k+1)n}}{2k+1} x_{(2k+1)n} = \tau_n \quad (n = 2, 3, \dots).$$

Выбрав η_n ($n = 2, 3, \dots$) отличными от нуля, перепишем полученную систему в виде

$$x_n = - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\eta_{(2k+1)n}}{(2k+1)n} x_{(2k+1)n} + \frac{\tau_n}{\eta_n} \quad (n = 2, 3, \dots). \quad (3)$$

Выберем теперь числа η_n ($n = 2, 3, \dots$) так, чтобы выполнялись условия:

$$1) \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k+1} \left| \frac{\eta_{(2k+1)n}}{\eta_n} \right| < 1 - \theta < 1 \quad (n = 2, 3, \dots),$$

$$2) \quad \left| \frac{\tau_n}{\eta_n} \right| \leq K \quad (n = 2, 3, \dots),$$

где $K > 0$ постоянная (мы предполагаем, что такой выбор возможен)¹. Тогда система (3) будет вполне регулярной и, значит, будет иметь единственное ограниченное решение, к которому приводит метод последовательных приближений, от каких бы начальных значений $x_n^{(0)}$, ограниченных в совокупности, мы ни отправлялись (см. [4]).

Отправляясь от начальных значений $x_n^{(0)} = 0$ ($n = 2, 3, \dots$), на p -ом шагу найдем приближенное значение x_n в виде

$$x_n^{(p)} = \sum_{v=0}^{p-1} (-1)^v \sum_{k_1=1}^{\infty} \sum_{k_2=1}^{\infty} \dots \sum_{k_v=1}^{\infty} \frac{\tau_{(2k_1+1)(2k_2+1)\dots(2k_v+1)n}}{(2k_1+1)(2k_2+1)\dots(2k_v+1)\eta_n}$$

$$(p = 1, 2, \dots; n = 2, 3, \dots)$$

(при этом предполагаем, что все встречающиеся здесь ряды сходятся).

Перейдя к пределу при $p \rightarrow \infty$, найдем искомые значения неизвестных x_n .

¹ Можно, например, взять $\eta_n = \frac{1}{n^s}$, $s > \frac{1}{2} + \varepsilon$ ($n = 2, 3, \dots$). Тогда

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k+1} \left| \frac{\eta_{(2k+1)n}}{\eta_n} \right| = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^{s+1}} < \int_0^{\infty} \frac{dx}{(2x+1)^{s+1}} = \frac{1}{2s} < 1 - \theta, \text{ т. е. условие 1) выполнено.}$$

Условие 2) будет выполнено, если $|\tau_n n^s| \leq K$, т. е. когда числа α_n удовлетворяют условию $\alpha_n = O\left(\frac{1}{n^s}\right)$.

Пусть, например, функция τ_n мультипликативна; тогда

$$\tau_{(2k_1+1)(2k_2+1)\dots(2k_v+1)n} = \tau_{2k_1+1} \tau_{2k_2+1} \dots \tau_{2k_v+1} \tau_n,$$

и мы получаем

$$x_n^{(p)} = \sum_{\nu=0}^{p-1} (-1)^\nu \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\tau_{2k+1}}{2k+1} \right)^\nu \frac{\tau_n}{\eta_n}.$$

Обозначим $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\tau_{2k+1}}{2k+1} = a$ и предположим, что $|a| < 1$ *. Тогда найдем

$$x_n = \lim_{p \rightarrow \infty} x_n^{(p)} = \frac{\tau_n}{\eta_n} \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu a^\nu = \frac{1}{1+a} \frac{\tau_n}{\eta_n}$$

и, следовательно,

$$b_n = \frac{1}{1+a} \tau_n \quad (n=2, 3, \dots),$$

$$f(x) = b_1 + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{1+a} \tau_{\nu+1} U_\nu(x),$$

где постоянное b_1 произвольно. Если найденная функция удовлетворяет сформулированным выше условиям, то она является решением задачи. Мы, очевидно, имеем бесчисленное множество решений за счет выбора b_1 и знаков ε_n ($n=2, 3, \dots$).

ЛИТЕРАТУРА

1. Бернштейн С. Н. Об обратной задаче теории наилучшего приближения непрерывных функций. Соч., т. II, 1954, стр. 292—294.
2. Тиман А. Ф. Теория приближения функций действительного переменного. Физматгиз, 1960, стр. 50—53.
3. Ахизер Н. И. Лекции по теории аппроксимации. Огиз—Гостехиздат, 1947, стр. 99—100.
4. Канторович Л. В., Крылов В. И. Приближенные методы высшего анализа. Гостехиздат, Л.—М., 1949, стр. 30—44.

Поступило в редакцию 23.III 1965

* Эти условия будут выполняться, когда, например, $\tau_n = \frac{1}{n^s} \left(s \geq \frac{1}{2} \right)$.

О. А. ЧУПРИГИН

**ОБ ИНТЕРПОЛЯЦИОННОЙ ФУНКЦИИ ЛЕБЕГА, СООТВЕТСТВУЮЩЕЙ
 ИНТЕРПОЛИРОВАНИЮ ЭРМИТА ПО РАВНООТСТОЯЩИМ УЗЛАМ**

Пусть $H_n[f; x]$ есть интерполяционный полином Эрмита по равноотстоящим узлам $x_{k,n}$ отрезка $[-1, 1]$. По известным формулам:

$$H_n[f; x] = \sum_{k=0}^n a_{k,n}(x) f(x_{k,n}) + \sum_{k=0}^n b_{k,n}(x) f'(x_{k,n}),$$

$$a_{k,n}(x) = \left(1 - \frac{\omega''(x_{k,n})}{\omega'(x_{k,n})} (x - x_{k,n}) \right) l_{k,n}^2(x),$$

$$b_{k,n}(x) = (x - x_{k,n}) l_{k,n}^2(x),$$

$$l_{k,n}(x) = \frac{\omega_n(x)}{\omega'_n(x_{k,n})(x - x_{k,n})}, \quad \omega_n(x) = \prod_{i=0}^n (x - x_{i,n}),$$

$$x_{k,n} = -1 + \frac{2}{n}k \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n; \quad n = 1, 2, \dots),$$

а функция $f(x)$ определена на отрезке $[-1, +1]$ и имеет там конечную производную.

Рассмотрим интерполяционные функции Лебега

$$\lambda_n^{(1)}(x) = \sum_{k=0}^n |a_{k,n}(x)|, \quad \lambda_n^{(2)}(x) = \sum_{k=0}^n |b_{k,n}(x)|.$$

Ставится следующая задача. Пусть задана произвольная неубывающая функция $\varphi(n)$, причем $\varphi(1) \geq e$, $\log \varphi(n) = o(n)$. Требуется найти такой симметричный относительно нуля интервал $I = I(n) \subset [-1, +1]$, для всех точек которого выполняется условие $\lambda_n^{(1)}(x) = O(\varphi(n))$, и оценить $\lambda_n^{(2)}(x)$ для $x \in I$. Имеет место следующая

Теорема 1. Пусть

$$\mu_n^{(1)}(x) = \sum_{k=0}^n l_{k,n}^2(x),$$

$$\mu_n^{(2)}(x) = \sum_{k=0}^n \left| \frac{\omega''(x_{k,n})}{\omega'(x_{k,n})} (x - x_{k,n}) \right| l_{k,n}^2(x).$$

Тогда условия

$$\mu_n^{(i)}(x) = O(\varphi(n)) \quad (i = 1, 2)$$

будут выполняться для всех

$$|x| \leq \sqrt{\frac{a_i(\varphi) \max\{\log n, \log \varphi(n)\}}{n}} \quad (i = 1, 2),$$

где $a_i(\varphi)$ — некоторые положительные константы, зависящие лишь от $\varphi(n)$ и не зависящие от n .

О точности величины частичных интервалов, где выполняются условия $\mu_n^{(i)}(x) = O(\varphi(n))$, дает представление следующая

Теорема 2. Для всех $|x| \geq \sqrt{\frac{\max\{\log n, \log \varphi(n)\}}{n}} \psi(n)$, где функция $\psi(n) \rightarrow \infty$ сколь угодно медленно при $n \rightarrow \infty$, будут выполняться неравенства

$$\begin{aligned} \mu_n^{(i)}(x) &> C_i \sin^2 \pi \left(\frac{n}{2} - \frac{n}{2} x \right) \times \\ &\times \max \left\{ \frac{n^{\varepsilon \psi(n)+1-i}}{\sqrt{n \psi(n) \log n}}, \frac{[\varphi(n)]^{\varepsilon \psi(n)+1-i}}{\sqrt{n \psi(n) \log \varphi(n)}} \right\}, \end{aligned}$$

где $i = 1, 2$; $0 < \varepsilon < 1$; C_i, ε — не зависящие от n константы.

Замечание. Можно показать, что вместо фигурирующей в теореме 2 функции $\psi(n)$ можно взять константу A (достаточно $A = 3$),

чтобы для $|x| \geq \sqrt{\frac{A \max\{\log n, \log \varphi(n)\}}{n}}$ выполнялись условия

$$\mu_n^{(i)}(x) \geq C_i \sin^2 \pi \left(\frac{n}{2} - \frac{n}{2} x \right) \max \left\{ n^{\gamma_i}, [\varphi(n)]^{\gamma_i} \right\},$$

где $\gamma_i > 1$ ($i = 1, 2$).

Ответ на поставленную задачу дают следующие две теоремы, вытекающие из предыдущих.

Теорема 3. Условие $\lambda_n^{(1)}(x) = O(\varphi(n))$ будет выполняться для всех x из частичного интервала $T_n = [-t_n, t_n]$, где $t_n = \sqrt{\frac{a(\varphi) \max\{\log n, \log \varphi(n)\}}{n}}$ ($a(\varphi)$ — положительная константа, зависящая лишь от $\varphi(n)$ и не зависящая от n).

Теорема 4. Для всех x из частичного интервала T_n будет выполняться условие

$$\lambda_n^{(2)}(x) = \sqrt{\frac{\max\{\log n, \log \varphi(n)\}}{n}} O(\varphi(n)).$$

Теорема, аналогичная теореме 2, имеет место и в этом случае.

Результаты работы [1], касающиеся оценки $\lambda_n^{(1)}(x)$ и $\lambda_n^{(2)}(x)$, получаются отсюда как следствие, если положить $\varphi(n) \equiv \text{const}$, причем коэффициент $a(\varphi)$ в этом случае можно брать асимптотически равным

$1/2$. Заметим еще, что для частичного интервала $|x| \leq n^{-\frac{1}{2}}$, где r — не зависящая от n константа, справедлива оценка $\lambda_n^{(2)}(x) \leq C(r) n^{-1} \log n$, что точнее, чем в работе [1].

ЛИТЕРАТУРА

1. Runch P. O. C. R. Acad. Sci., 245, 1211—1213, 1957.

Поступило в редакцию 8.XII 1964

Р. Т. ВОЛЬВАЧЕВ

О ПОРЯДКЕ ЭЛЕМЕНТА МАТРИЧНОЙ ГРУППЫ

Пусть P — произвольное поле, а $GL(n, P)$ — полная линейная группа степени n над полем P . Каким должно быть целое число k , чтобы в $GL(n, P)$ был элемент порядка k ? Для некоторых полей этот вопрос решается тривиально, например для алгебраически замкнутых полей. В общем же случае он требует специального рассмотрения. Так, для поля рациональных чисел очень изящное решение этого вопроса дано Д. А. Супруненко [1], который и предложил автору решить аналогичную задачу в общем случае. Автор глубоко благодарен Д. А. Супруненко за постановку задачи и постоянное внимание к работе.

В настоящей заметке дается необходимое и достаточное условие существования в $GL(n, P)$ элемента порядка k для произвольного поля P . Получено также необходимое и достаточное условие того, чтобы в $GL(n, P)$ порядки элементов были ограничены. В качестве примера рассмотрен случай, когда $P = R(\varepsilon)$, где R — поле рациональных чисел, а ε — корень из единицы степени m .

§ 1. Будем отдельно рассматривать два случая:

1. k не делится на характеристику поля P .
2. k делится на эту характеристику.

1. Рассмотрим сначала случай 1. Введем следующие обозначения. Если k — целое положительное число, не делящееся на характеристику поля P , то положим $\psi(k, P) = P(\varepsilon):P$, где ε — первообразный корень из единицы степени k . Введем далее в рассмотрение функцию $\rho(k, P)$. Если $k = q^a$, q — простое число, то положим $\rho(k, P) = \psi(k, P)$. В остальных случаях $\rho(k, P)$ зададим следующим образом:

$$\rho(k, P) = \min_{m/k} \{ \psi(k, P), \min[\rho(e) + \rho(m)] \}, \quad (1)$$

где $k = lm$, $(l, m) = 1$, $l > 1$, $m > 1$, причем внутренний \min рассматривается по всем таким делителям m числа k , что $(k, km^{-1}) = 1$. Очевидно, что введенные функции $\psi(k, P)$ и $\rho(k, P)$ зависят от поля P . Однако ради простоты мы иногда будем писать $\psi(k)$, $\rho(k)$ вместо $\psi(k, P)$, $\rho(k, P)$ соответственно, если ясно, о каком поле P идет речь.

Из определения $\psi(k)$ и $\rho(k)$ следует, что $\rho(k)$ можно представить в виде

$$\rho(k) = \psi(k_1) + \dots + \psi(k_s), \quad (2)$$

где $k = k_1 k_2 \dots k_s$, $(k_i, k k_i^{-1}) = 1$, $k_i > 1$, причем $\psi(k_i) = \rho(k_i)$.

Отметим еще два очевидных неравенства, вытекающих из (1), пользоваться которыми нам придется в дальнейшем очень часто:

$$\rho(k) \leq \psi(k), \quad (3)$$

$$\rho(k) \leq \rho(l_1) + \dots + \rho(l_r), \quad (4)$$

где $k = l_1 l_2 \dots l_r$, $(l_i, k l_i^{-1}) = 1$, $l_i > 1$.

Установим теперь два простейших свойства введенной функции $\rho(k)$.

Лемма 1. Пусть k — целое положительное число, не делящееся на характеристику поля P , и $k = lm$, где $(l, m) = 1$, $l > 1$, $m > 1$. Тогда $\rho(k, P) \geq \rho(m, P)$.

Пусть $\rho(k) = \psi(k_1) + \dots + \psi(k_s)$ (см. (2)), где $k = k_1 k_2 \dots k_s$, $(k_i, k k_i^{-1}) = 1$, $k_i > 1$. Представим число m в виде: $m = m_1 m_2 \dots m_r$, $r \leq s$, m_i / k_i , $(m_i, m m_i^{-1}) = 1$, $m_i > 1$. Из определения функции $\psi(k_i)$ следует, что $\psi(k_i) \geq \psi(m_i)$, $i = 1, \dots, r$. Отсюда и из неравенств (3) и (4) вытекает, что $\rho(k) \geq \psi(k_1) + \dots + \psi(k_r) \geq \psi(m_1) + \dots + \psi(m_r) \geq \rho(m_1) + \dots + \rho(m_r) \geq \rho(m)$. Лемма доказана.

Лемма 2. Пусть k — целое положительное число, не делящееся на характеристику поля P , и $k = lm$, где $(l, m) = 1$, $l > 1$, $m > 1$. Если $\psi(l, P) = 1$, то $\rho(k, P) = \rho(m, P)$.

В силу предыдущей леммы достаточно показать, что $\rho(k) \leq \rho(m)$. Пусть $\rho(m) = \psi(m_1) + \dots + \psi(m_s)$ (см. (2)), где

$$m = m_1 m_2 \dots m_s, (m_i, m m_i^{-1}) = 1, m_i > 1 \text{ и } \psi(m_i) = \rho(m_i).$$

Из условия $\psi(l, P) = 1$ и определения функции $\psi(k)$ следует, что $\psi(m_1, P) = \psi(l m_1, P)$. Но тогда из неравенств (3) и (4) следует, что $\rho(m) = \psi(m_1) + \psi(m_2) + \dots + \psi(m_s) = \psi(l m_1) + \psi(m_2) + \dots + \psi(m_s) \geq \rho(l m_1) + \rho(m_2) + \dots + \rho(m_s) \geq \rho(k)$. Лемма доказана.

Переходим к основным утверждениям.

Теорема 1. Пусть $GL(n, P)$ — полная линейная группа степени n над полем P , а k — целое положительное число, не делящееся на характеристику поля P . В $GL(n, P)$ тогда и только тогда существует элемент порядка k , когда $\rho(k, P) \leq n$.

Пусть элемент a из $GL(n, P)$ имеет порядок k . Докажем, что $\rho(k) \leq n$. Над некоторым полем $\Sigma \supseteq P$ матрица a приводится к диагональному виду $\eta_1 e_{11} + \dots + \eta_n e_{nn}$, где η_i — первообразный корень степени t_i из единицы, причем наименьшее общее кратное чисел t_1, \dots, t_n равно k .

Выберем среди чисел t_1, \dots, t_n все различные числа t_1, \dots, t_r , $r \leq n$. Если μ — степень минимального полинома $m(x)$ матрицы a , то

$$\mu = \sum_{i=1}^r \rho(t_i), \quad (5)$$

ибо каждое η_i — корень неприводимого в $P[x]$ полинома степени $\rho(t_i)$, на который делится $m(x)$.

Так как наименьшее общее кратное чисел t_1, \dots, t_r равно k , то существуют такие числа k_1, \dots, k_r , что

$$k_\lambda / t_\lambda, k_1 k_2 \dots k_r = k, (k_\lambda, k k_\lambda^{-1}) = 1. \quad (6)$$

Из (2), (3) и леммы 1 следует, что $\mu \geq \sum_{i=1}^r \rho(k_i)$. Отсюда и из (4) и (6)

вытекает, что $\sum_{i=1}^r \rho(k_i) \geq \rho(k)$. Следовательно, $n \geq \rho(k)$. Очевидно, что

$n \geq \mu$, откуда $n \geq \rho(k)$. Необходимость условия $\rho(k) \leq n$ доказана.

Пусть теперь $\rho(k) \leq n$. Легко найти в $GL(n, P)$ элемент a порядка k . Действительно, пусть $\rho(k) = \psi(k_1) + \dots + \psi(k_s)$, где $k = k_1 \dots k_s$,

$(k_i, k_i^{-1}) = 1$, $k_i > 1$ и $\psi(k_i) = \rho(k_i)$ (см. (2)). Тогда в качестве a возьмем прямую сумму матриц $a = a_1 \dot{+} \dots \dot{+} a_s \dot{+} E_{n-\rho}$, где a_i — матрица степени $\psi(k_i)$, характеристический полином которой совпадает с полиномом, определяющим поле $P(\varepsilon_i)$, ε_i — первообразный корень из единицы степени k_i , а $E_{n-\rho}$ — единичная матрица степени $n - \rho(k)$. Теорема доказана.

II. Рассмотрим теперь случай 2, когда поле P имеет характеристику $p > 0$, а $k = p^\alpha m$, $(p, m) = 1$.

Теорема 2. Если $p > 0$ — характеристика поля P , а $k = p^\alpha \cdot m$, где $\alpha \geq 1$, $(p, m) = 1$, то в $GL(n, p)$ тогда и только тогда существует элемент порядка k , когда выполняется строгое неравенство $\rho\left(\frac{k}{p^\alpha}, P\right) + p^{\alpha-1} < n$.

Пусть элемент a из $GL(n, P)$ имеет порядок k . Покажем, что $\rho(m) + p^{\alpha-1} < n$. Над некоторым полем $\Sigma \supseteq P$ матрица a приводится к жордановой форме

$$b_1 \dot{+} \dots \dot{+} b_v,$$

где b_i — клетка Жордана размерности n_i с собственным значением η_i , $n = n_1 + \dots + n_v$. Так как порядок матрицы a равен $k = m \cdot p$ и характеристика поля P равна p , то для любого i $n_i \leq p^\alpha$ и некоторое n_j , например n_1 , удовлетворяет условию

$$p^{\alpha-1} < n_1 \leq p^\alpha. \quad (7)$$

Кроме того, по той же причине для любого η_i

$$\eta_i^m = 1.$$

Следовательно, η_i — первообразный корень из единицы степени t_i , t_i/m , причем наименьшее общее кратное чисел t_1, \dots, t_v равно m .

Выберем среди чисел t_1, \dots, t_v все различные числа t_1, \dots, t_r , $r \leq v$, причем из двух равных чисел t_i и t_j выберем то, которому отвечает жорданова клетка большей размерности. Если μ — степень минимального полинома $m(x)$ матрицы a , то

$$\mu = \sum_{i=1}^r n_i \rho(t_i), \quad (8)$$

ибо каждое η_i — корень неприводимого в $P[x]$ полинома степени $\rho(t_i)$, на который делится $m(x)$.

Так как наименьшее общее кратное чисел t_1, \dots, t_r также равно m , то существуют такие числа m_1, \dots, m_r , что

$$m_\lambda / t_\lambda, \quad m_1 m_2 \dots m_r = m, \quad (m_\lambda, m m_\lambda^{-1}) = 1. \quad (9)$$

Из леммы I и (8) следует, что

$$\mu \geq \sum_{i=1}^r n_i \rho(m_i). \quad (10)$$

Покажем теперь, что

$$\mu > p^{\alpha-1} + \rho(m), \quad (11)$$

для чего рассмотрим отдельно два случая: 1) $\rho(m_1) > 1$. 2) $\rho(m_1) = 1$.

Если $\rho(m_1) > 1$, то из (10) вытекает, что $\mu \geq n_1 + \sum_{i=1}^r \rho(m_i)$. Так как $n_1 > p^{\alpha-1}$ (см. (7)), а $\sum_{i=1}^r \rho(m_i) \geq \rho(m)$ (см. (4)), то отсюда и вытекает равенство (11).

Пусть теперь $\rho(m_1) = 1$. Тогда $\psi(m_1) = 1$. Действительно, так как $(m_1, p) = 1$, то из теоремы 1 следует, что в $GL(1, P) = P$ имеется элемент порядка m_1 , откуда в силу определения $\psi(m_1)$ следует, что $\psi(m_1) = 1$. Из (10) и (7) вытекает, что $\mu \geq n_1 + \sum_{i=2}^r \rho(m_i) > p^{\alpha-1} + \sum_{i=2}^r \rho(m_i)$. Так как $\sum_{i=2}^r \rho(m_i) \geq \rho(m_2 m_3 \dots m_r)$ (см. (4)), то для доказательства неравенства (11) достаточно показать, что $\rho(m_2 \dots m_r) = \rho(m)$. Последнее же вытекает из леммы 2, ибо $\psi(m_1) = 1$.

Итак, в обоих случаях имеем $\mu > p^{\alpha-1} + \rho(m)$. Очевидно, что $n \geq \mu$. Следовательно, $n > \rho(m) + p^{\alpha-1}$. Необходимость условия $n > \rho(m) + p^{\alpha-1}$ доказана.

Пусть теперь $\rho\left(\frac{k}{p^\alpha}\right) + p^{\alpha-1} < n$. Легко найти в $GL(n, P)$ элемент a порядка $k = mp^\alpha$, $(m, p) = 1$, $\alpha \geq 1$. В качестве элемента a возьмем прямую сумму матриц $a = a_1 + a_2 + E_\mu$, где a_1 — матрица степени $\rho(m)$ и порядка m , существование которой гарантируется теоремой 1; a_2 — клетка Жордана степени $p^{\alpha-1} + 1$ с собственным значением, равным 1; E_μ — единичная матрица степени $\mu = n - \rho(m) - p^{\alpha-1} - 1$. Теорема полностью доказана.

III. Теорема 3. Пусть M — множество всех элементов конечного порядка группы $GL(n, P)$. Для того чтобы порядки элементов из M были ограничены, необходимо и достаточно, чтобы были ограничены порядки периодических частей всех расширений поля P степеней, не превосходящих n .

Необходимость очевидна. Покажем достаточность. Пусть, вопреки доказываемому, в M есть элементы порядков m_i , $i = 1, 2, \dots$, причем последовательность m_1, m_2, \dots не ограничена. Если $p > 0$ — характеристика поля P и $(m_i, p) = 1$, то из теоремы 1 вытекает, что $\rho(m_i) \leq n$. Если же $m_i = p^\alpha t$, где $\alpha \geq 1$, $(t, p) = 1$, то из теоремы 2 следует, что $\rho(t) + p^{\alpha-1} < n$. Следовательно, всегда независимо от характеристики поля P существует неограниченная последовательность чисел t_1, t_2, \dots такая, что $\rho(t_i) \leq n$ и $(t_i, p) = 1$. Из (2) вытекает тогда, что существует неограниченная последовательность чисел k_1, k_2, \dots (каждое k_i — делитель некоторого t) такая, что $\psi(k_i) \leq n$. Из определения $\psi(k)$ следует, что порядки периодических частей расширений поля P степеней, не превосходящих n , не ограничены. Это противоречит условию. Теорема доказана.

Интересно выяснить, справедлива ли теорема 3 в следующей формулировке, высказанной Д. А. Супруненко:

Порядки элементов из M ограничены тогда и только тогда, когда конечна периодическая часть любого расширения поля P степени, не превосходящей n .

§ 2. В качестве примера рассмотрим $GL(n, R(\varepsilon))$, где R — поле рациональных чисел, а ε — первообразный корень из единицы степени m_1 .

Пусть m такое наибольшее число, что в $R(\varepsilon)$ есть первообразный корень из единицы степени m , и пусть

$$m = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_s^{\alpha_s} \quad (12)$$

— каноническое разложение числа m , а k — целое положительное число. Найдем выражение для $\rho(k, R(\varepsilon))$. Запишем каноническое разложение k в виде

$$k = p_1^{\beta_1} \dots p_\mu^{\beta_\mu} q_1^{\gamma_1} \dots q_\nu^{\gamma_\nu}, \quad (13)$$

где $\mu \leq s$, $\beta_i > 0$, $\gamma_i > 0$. Пусть далее

$$\beta_i > \alpha_i \text{ для } i = 1, \dots, r, \quad 0 \leq r \leq \mu;$$

$$\beta_j \leq \alpha_j \text{ для } j = r+1, \dots, \mu.$$

Обозначим $t = p_{r+1}^{\beta_{r+1}} \dots p_\mu^{\beta_\mu}$, $l = p_1^{\beta_1} \dots p_r^{\beta_r} q_1^{\gamma_1} \dots q_\nu^{\gamma_\nu}$. Очевидно, что $\psi(t, R(\varepsilon)) = 1$. Так как $k = lt$, то отсюда и из леммы 2 следует, что $\rho(k) = \rho(l)$. Таким образом, достаточно найти выражение для $\rho(l)$, где

$$l = p_1^{\beta_1} \dots p_r^{\beta_r} q_1^{\gamma_1} \dots q_\nu^{\gamma_\nu}, \quad (14)$$

причем $\beta_i > \alpha_i$, $i = 1, \dots, r$ (см. (12)).

Покажем, что

$$\rho(l) = \sum_{i=1}^r p_i^{\beta_i - \alpha_i} + \sum_{j=1}^{\nu} \varphi(q_j^{\gamma_j}), \quad (15)$$

где φ — функция Эйлера.

Число l можно представить в виде

$$l = l_1 l_2 \dots l_t \quad (16)$$

так, чтобы

$$(l_i, l_i^{-1}) = 1, \quad l_i > 1 \text{ и } \rho(l) = \psi(l_1) + \dots + \psi(l_t), \quad (17)$$

причем $\rho(l_i) = \psi(l_i)$ (см. (2)).

Так как $\psi(p_i^{\beta_i} p_j^{\beta_j}) = p_i^{\beta_i - \alpha_i} p_j^{\beta_j - \alpha_j} > p_i^{\beta_i - \alpha_i} + p_j^{\beta_j - \alpha_j} = \rho(p_i^{\beta_i}) + \rho(p_j^{\beta_j})$, то из (4) следует, что $\psi(p_i^{\beta_i} p_j^{\beta_j}) > \rho(p_i^{\beta_i} p_j^{\beta_j})$. Аналогично можно получить соотношения $\psi(q_i^{\gamma_i} q_j^{\gamma_j}) > \rho(q_i^{\gamma_i} q_j^{\gamma_j})$ и $\psi(p_i^{\beta_i} q_j^{\gamma_j}) > \rho(p_i^{\beta_i} q_j^{\gamma_j})$.

Следовательно, либо $l_i = p_i^{\beta_i}$, либо $l_i = q_j^{\gamma_j}$ (см. (16)). Принимая во внимание, что $\rho(p_i^{\beta_i}) = p_i^{\beta_i - \alpha_i}$, а $\rho(q_j^{\gamma_j}) = \varphi(q_j^{\gamma_j})$, отсюда и из (17) получаем требуемую формулу (15).

Из неравенства $\rho(k, R(\varepsilon)) \leq n$ легко получить следующую хоть и грубую, но красивую оценку порядка k элемента группы $GL(n, R(\varepsilon))$: если k — порядок элемента группы $GL(n, R(\varepsilon))$, то

$$k < me^n. \quad (18)$$

Действительно, принимая во внимание, что для любого положительного t имеем $p^t > t \ln p$ и $\varphi(q^t) > \ln q^t = t \ln q$, можно записать, используя (15):

$$n \geq \rho(k) > \sum_{i=1}^r (\beta_i - \alpha_i) \ln p_i + \sum_{j=1}^{\nu} \gamma_j \ln q_j = \ln \left(\frac{k}{d} \right),$$

где $d = (k, m)$. Отсюда $\frac{k}{d} < e^n$, $k < de^n \leq me^n$. Неравенство (18) доказано. Вопрос о порядке элемента группы целочисленных матриц рассматривался, как уже отмечалось, в [1]. Вид функций $\rho(k)$, полученный там, следует из нашей формулы (15) при $m = 2$.

В заключение отметим, что, как легко видеть, условие $\rho(k, R(\varepsilon)) \leq n$ дает критерий существования элемента порядка k не только в $GL(n, R(\varepsilon))$, но и в группе обратимых матриц над кольцом $Z[\varepsilon]$, где Z — кольцо целых чисел.

ЛИТЕРАТУРА

1. Супруненко Д. А. ДАН БССР, т. VII, № 4, 1963.

Поступило в редакцию 13.III 1965

НГУЕН-ТХЫА-ХОП

О ЗАДАЧЕ НЕЙМАНА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ТИПА

В. С. Виноградов [1] изучил задачу Неймана

$$Lu = au_{xx} + 2bu_{xy} + cu_{yy} + du_x + eu_y + fu = h, \quad (1)$$

$$\left. \frac{du}{dn} \right|_r = 0 \quad (n \text{ — внутренняя нормаль}) \quad (2)$$

при некоторых предположениях, налагаемых на коэффициенты уравнения и области. И. Н. Векуа в [2] дополнил результаты В. С. Виноградова, вводя в рассмотрение сопряженную задачу, и показал, что условия разрешимости задачи (1), (2) выражаются через решения этой сопряженной задачи.

Эти условия разрешимости кажутся сложными. В настоящей заметке, предлагая другое определение сопряженной задачи, мы покажем, что дальнейшим исследованием результаты, полученные В. С. Виноградовым и И. Н. Векуа, можно сформулировать в более простой и компактной форме.

Мы сохраним те же предположения на параметры задачи, что и в [1, 2], а именно: $ac - b^2 \geq \Delta_0 > 0$, $a, b, c \in D_{2,p}(G + \Gamma)$, $d, e \in D_{1,p}(G + \Gamma)$, $f, h \in L_p(G + \Gamma)$, $p > 2$, G — единичный круг; решения задачи (1), (2) ищутся в классе $D_{2,p}(G + \Gamma)$.

Прежде всего напомним некоторые результаты [1, 2].

Назовем через v_1, v_2, \dots, v_{n+1} линейно независимые решения интегрального уравнения

$$v - P^*v = 0, \quad (3)$$

где

$$P^*v \equiv -\operatorname{Re} \int_G \int \left[A(\zeta) \frac{\partial^2 \hat{g}(\zeta, z)}{\partial \zeta^2} + A_0(\zeta) \frac{\partial \hat{g}(\zeta, z)}{\partial \zeta} + \right. \\ \left. + \frac{1}{4} f(\zeta) \hat{g}(\zeta, z) + \frac{1}{\pi} \right] v(\zeta) d\bar{\zeta} d\zeta,$$

причем $A = \frac{a-c+2ib}{2}$, $A_0 = \frac{d+ie}{2}$, $\hat{g}(\zeta, z)$ — функция Грина задачи

Неймана для единичного круга.

Тогда v_1, v_2, \dots, v_{n+1} являются также решениями следующей задачи:

$$L_*v = \int_G \int f v dx dy \quad (в G), \quad (4)$$

$$\frac{dv}{dn} + 4\Omega = 0 \quad (на \Gamma), \quad (5)$$

где L_* — дифференциальный сопряженный с L оператор, а Ω — выражение

$$\Omega = -\operatorname{Re} \left[\frac{A(\zeta)\bar{\zeta}'^2}{4} \right] \frac{dv}{dn} + \operatorname{Re} \left[\frac{A(\zeta)\bar{\zeta}'^2}{2i} \right] \frac{dv}{ds} + \\ + \operatorname{Re} \left[-\frac{1}{4} \frac{dA}{dn} \bar{\zeta}'^2 + \frac{1}{2i} \frac{dA}{ds} \bar{\zeta}'^2 + \frac{1}{2i} A \bar{\zeta}' \bar{\zeta}'' - \frac{1}{2i} A_0 \bar{\zeta}' \right] v.$$

Условия разрешимости задачи (1), (2) следующие.

а) Если все

$$f_j = \iint_G v_j f dx dy = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, n+1), \quad (6)$$

то, для того чтобы задача (1), (2) имела решение, необходимо и достаточно выполнение следующих равенств:

$$h_j = \iint_G v_j h dx dy = 0. \quad (7)$$

б) Если хотя бы для одного значения j , скажем, $j = n+1$ такого, что

$$f_{n+1} = \iint_G v_{n+1} f dx dy \neq 0, \quad (8)$$

то вместо (7) условия разрешимости записываются

$$h_j - \frac{h_{n+1}}{f_{n+1}} f_j = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, n). \quad (9)$$

Задачу (4), (5) И. Н. Векуа назовем задачей, сопряженной с (1), (2).

Это определение сопряженной задачи нам кажется неудобным ввиду того, что решения сопряженной задачи не удовлетворяют однородному сопряженному уравнению, и, кроме того, ввиду сложности условий разрешимости (6) — (9).

Мы предлагаем следующее определение.

Определение. Назовем задачей, сопряженной с (1), (2), задачу

$$L_* \omega = 0 \quad (\text{в } G), \quad (10)$$

$$\frac{d\omega}{dn} + 4\Omega = 0 \quad (\text{на } \Gamma) \quad (11)$$

и докажем следующую теорему.

Теорема. Для того чтобы задача Неймана (1), (2) имела решение, необходимо и достаточно, чтобы правая часть уравнения (1) была ортогональной ко всем решениям сопряженной задачи (10), (11), т. е.:

$$\iint_G \omega_j f dx dy = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, p), \quad (12)$$

где $\{\omega_j\}$ — полная система линейно независимых решений задачи (10), (11).

Действительно, в случае а) нам нечего доказывать потому, что тогда (4), (5); (6), (7) совпадают с (10), (11); (12).

Нам достаточно разобрать случай б). Покажем, что (4), (5); (8), (9) тоже эквивалентны (10), (11); (12).

В самом деле, обозначая $\frac{f_j}{f_{n+1}}$ через α_j , уравнение (9) можно записать

$$h_j - \alpha_j h_{n+1} = \iint_G [v_j(x, y) - \alpha_j v_{n+1}(x, y)] h(x, y) dx dy = 0. \quad (13)$$

Вводя в рассмотрение функции

$$\omega_j(x, y) = v_j(x, y) - \alpha_j v_{n+1}(x, y) \quad (j = 1, 2, \dots, n), \quad (14)$$

имеем в G

$$\begin{aligned} L_*(\omega_j) &= L_*(v_j) - \alpha_j L_*(v_{n+1}) = \iint_G f v_j dx dy - \alpha_j \iint_G f v_{n+1} dx dy = \\ &= f_j - \frac{f_j}{f_{n+1}} f_{n+1} = 0. \end{aligned} \quad (15)$$

Кроме того, на Γ

$$\left(\frac{d}{dn} + 4\Omega\right) \omega_j = \left(\frac{d}{dn} + 4\Omega\right) v_j - \alpha_j \left(\frac{d}{dn} + 4\Omega\right) v_{n+1} = 0. \quad (16)$$

Далее (9) или то же самое (13) записываются

$$\iint_G \omega_j(x, y) h(x, y) dx dy = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, n).$$

Таким образом, (4), (5), (9) примут вид (10), (11), (12). Чтобы завершить доказательство, нам остается установить, что система функций $\{\omega_j(x, y)\}$, определенных формулами (14), образует полную систему решений задачи (10), (11). Иначе говоря, покажем, что число решений задачи (10), (11) равняется точно $n: p = n$.

Для этого заметим, что в силу

$$\iint_G \omega f dx dy = \iint_G v_j f dx dy - \alpha_j \iint_G v_{n+1} f dx dy = f_j - \frac{f_j}{f_{n+1}} f_{n+1} = 0$$

функции $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ тоже являются решениями задачи (4), (5). Итак, задача (4), (5) имеет $n + 1$ решений

$$\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n, v_{n+1},$$

и задача (10), (11) имеет по крайней мере n решений

$$\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n.$$

Чтобы доказать, что задача (10), (11) имеет ровно n решений, достаточно установить, что число ее решений строго меньше $n + 1$, а именно $p < n + 1$.

Предварительно покажем, что все решения задачи (10), (11) ортогональны к $f(x, y)$, т. е.

$$\iint_G f \omega dx dy = 0.$$

В самом деле в силу (10), записанного в комплексной форме, имеем

$$\frac{1}{4} \iint_G f \omega dx dy = - \iint_G \left[\frac{\partial^2 \omega}{\partial z \partial \bar{z}} + \operatorname{Re} \left(\frac{\partial^2 A \omega}{\partial z^2} \right) - \operatorname{Re} \left(\frac{\partial A_0 \omega}{\partial z} \right) \right] dx dy$$

$$(a + c = 2).$$

С помощью формулы Грина получим:

$$\iint_G \frac{\partial^2 \omega}{\partial z \partial \bar{z}} dx dy = \frac{1}{4i} \int_{\Gamma} \frac{\partial \omega}{\partial z} dz - \frac{\partial \omega}{\partial \bar{z}} d\bar{z} = -\frac{1}{4} \int_{\Gamma} \frac{d\omega}{dn} ds,$$

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \iint_G \frac{\partial^2 (A\omega)}{\partial z^2} dx dy &= \operatorname{Re} \left[-\frac{1}{2i} \int_{\Gamma} \frac{\partial (A\omega)}{\partial z} dz \right] = \\ &= \frac{1}{4} \operatorname{Re} \int_{\Gamma} \bar{t}'^2 \left(\frac{d}{dn} - \frac{1}{i} \frac{d}{ds} \right) (A\omega) ds, \end{aligned}$$

$$- \operatorname{Re} \iint_G \frac{\partial (A_0 \omega)}{\partial z} dx dy = \operatorname{Re} \frac{1}{2i} \int_{\Gamma} (A_0 \omega) d\bar{z} = \operatorname{Re} \frac{1}{2i} \int_{\Gamma} A_0 \omega \bar{t}' ds.$$

Замечая, что

$$\frac{1}{4i} \int_{\Gamma} \bar{t}'^2 \frac{d}{ds} (A\omega) ds = \frac{1}{2i} \int_{\Gamma} \bar{t}'^2 \frac{d}{ds} (A\omega) ds - \frac{1}{4i} \int_{\Gamma} \bar{t}'^2 \frac{d}{ds} (A\omega) ds,$$

после интегрирования по частям находим

$$\frac{1}{4i} \int_{\Gamma} \bar{t}'^2 \frac{d}{ds} (A\omega) ds = \frac{1}{2i} \int_{\Gamma} \bar{t}'^2 \frac{d}{ds} (A\omega) ds + \frac{1}{2i} \int_{\Gamma} A \bar{t}' \bar{t}'' \omega ds.$$

Итак,

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} \iint_G f \omega dx dy &= \frac{1}{4} \int_{\Gamma} \left[\frac{d\omega}{dn} + \operatorname{Re} \left\{ -\bar{t}'^2 \frac{d}{dn} (A\omega) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{2\bar{t}'^2}{i} \frac{d}{ds} (A\omega) - \frac{2A\bar{t}'\bar{t}''}{2i} \omega - \frac{2A_0\bar{t}'}{i} \omega \right\} \right] ds. \end{aligned}$$

Но величина в скобке не что иное, как $\frac{d\omega}{dn} + 4\Omega$, поэтому она исчезает в силу (4) и

$$\iint_G f \omega dx dy = 0. \quad (17)$$

Итак, в силу последнего равенства все решения задачи (10), (11) удовлетворяют (4), (5). Другими словами, все решения задачи (10), (11) включены в множество решения задачи (4), (5). Таким образом, если p — число решения задачи (10), (11), то $p \leq n + 1$. Но равенство не может осуществиться потому, что среди решений задачи (4), (5) есть по крайней мере одно решение, неортогональное к $f(x, y)$, а все решения задачи (10), (11), как мы видели в (17), ортогональны к ней. Поэтому $p < n + 1$. Наше утверждение $p = n$ доказано.

ЛИТЕРАТУРА

1. Виноградов В. С. ДАН СССР, 109, № 1, 1956.
2. Векуа И. Н. Обобщенные аналитические функции, 1959.

Поступило в редакцию 17.XII 1964

Л. Е. ЗАГОРИН

О НОРМАЛЬНОЙ ФОРМЕ ЖОРДАНА МАТРИЦ НАД ТЕЛОМ

Цель этой заметки — выяснить необходимые и достаточные условия приводимости матриц над ассоциативным телом T к нормальной форме Жордана при различных предположениях относительно T .

Обозначения: T_n — полное кольцо матриц степени n над T ; $T[x]$ — кольцо полиномов над T от неизвестного x , перестановочного с элементами из T ; $(\varepsilon_1(x), \varepsilon_2(x))$ и $[\varepsilon_1(x), \varepsilon_2(x)]$ — соответственно наибольший левый общий делитель и наименьшее правое общее кратное полиномов $\varepsilon_1(x)$ и $\varepsilon_2(x)$ из $T[x]$; J_α^r — клетка Жордана степени r с элементом α по главной диагонали. В дальнейшем предполагаются известными определения и результаты главы 3 из [1], причем, например, 21.3 обозначает теорему 21 из этой главы.

1. Пусть T — произвольное тело, а матрица $A \in T_n$ сопряжена в T_n с $J = \text{diag}(J_{\alpha_1}^{r_1}, \dots, J_{\alpha_k}^{r_k})$. J_α^r имеет единственный, с точностью до подобия в смысле Оре, инвариантный множитель $(x - \alpha)^r$. Но

$$(x - \alpha)^r = [\varepsilon_1(x), \dots, \varepsilon_t(x)], \quad (1)$$

где $\varepsilon_i(x)$ — неразложимые части полинома $(x - \alpha)^r$, причем

$$(\varepsilon_i(x), [\varepsilon_1(x), \dots, \varepsilon_{i-1}(x), \varepsilon_{i+1}(x), \dots, \varepsilon_t(x)]) = 1$$

(см. 8.3); $\varepsilon_i(x)$, $i = 1, \dots, t$ — элементарные делители матрицы J_α^r , и все они — произведения линейных полиномов.

Теорема 1. Для приводимости матриц над произвольным телом к нормальной жордановой форме необходимо, чтобы ее элементарные делители были произведениями линейных полиномов. Матрица над произвольным телом тогда и только тогда приводится к диагональному виду, когда все ее элементарные делители — линейные полиномы.

2. Пусть T — некоммутативное тело, алгебраическое и сепарабельное над своим центром Z . $\alpha \in T$ — корень неприводимого над Z полинома $p(x) \in Z[x]$, $p(x) = (x - \alpha)p_1(x)$. Правый идеал $(x - \alpha)T[x]$ кольца $T[x]$ ограничен, и его граница — идеал $p(x)T[x]$. Покажем, что полином $(x - \alpha)^r$, $r \geq 1$ неразложим. Если $p^s(x)T[x]$ — граница правого идеала $(x - \alpha)^s T[x]$, $s < r$, то $p^s(x) = (x - \alpha)^s q(x)$, или $(x - \alpha)^s p_1^s(x) = (x - \alpha)^s q(x)$, и $p_1^s(x)$ должно делиться на $x - \alpha$. $p_1(x) \in Z(\alpha)[x]$, и поскольку неприводимый элемент $x - \alpha$ является простым в коммутативном кольце $Z(\alpha)[x]$, то $p_1(x)$ делится на $x - \alpha$, что противоречит сепарабельности над Z элемента α . Поэтому $s = r$ и, следовательно, $(x - \alpha)^r$ неразложим (см. 21.3).

Если $\varepsilon_1(x), \dots, \varepsilon_t(x)$ — элементарные делители матрицы $A \in T_n$, $\varepsilon_i(x) = (x - \alpha_{i1}) \dots (x - \alpha_{ik_i})$, $i = 1, \dots, t$, то α_{ij} при фиксированном i попарно сопряжены в T . В этом случае, обозначая через α_i любой элемент

из T , сопряженный с α_{ij} , будем называть полином $\varepsilon_i(x)$ принадлежащим элементу α_i . $(x - \alpha_i)^{k_i}$, будучи неразложимым, подобен $\varepsilon_i(x)$ (см. 20.3 и 21.3), и $J_{\alpha_i}^{k_i}$ имеет единственный, с точностью до подобия, элементарный делитель $\varepsilon_i(x)$. Поэтому A трансформируется в $J = \text{diag}(J_{\alpha_1}^{k_1}, \dots, J_{\alpha_t}^{k_t})$.

Теорема 2. Пусть T — некоммутативное тело, алгебраическое и сепарабельное над своим центром. Матрица $A \in T_n$ тогда и только тогда сопряжена с жордановой матрицей J , когда все ее элементарные делители — произведения линейных полиномов.

Блоки $J_{\alpha_i}^{k_i}$ определены с точностью до порядка следования в J и сопряженности α_i в T .

3. Пусть T — некоммутативное тело, алгебраическое и, возможно, несепарабельное над центром Z . Тогда T — тело характеристики $p \neq 0$. Если $\alpha \in T$ — несепарабельный элемент с минимальным полиномом $p(x)$ над Z , то

$$p(x) = (x - \alpha)^{p^e} q(x), \quad (2)$$

$e \geq 1$, $q(x)$ не делится (ни слева, ни справа) на $x - \alpha$.

Как и в теории полей, будем говорить, что p^e — степень несепарабельности элемента α , а при $q(x) = 1$ в (2) элемент α — чисто несепарабельный над Z . Граница правого идеала $(x - \alpha)^2 T[x]$ есть $p(x)T[x]$, поэтому $(x - \alpha)^2$ разложим и, следовательно, разложимы все $(x - \alpha)^r$, $r \geq 2$. Тот факт, что для $(x - \alpha)^r$ справедливо (1), будем выражать символическим равенством $[r] = [k_1, \dots, k_t]$, k_i — степень неразложимого полинома $\varepsilon_i(x)$. $p(x)$ при $r \leq p^e$ делится на каждый $\varepsilon_i(x)$, поэтому границей правого идеала $\varepsilon_i(x)T[x]$ будет $p(x)T[x]$. Отсюда, по 21.3, $k_i = 1$, $i = 1, \dots, t$, т. е. $t = r$ и $[r] = [1, \dots, 1]$ для $r \leq p^e$. Если α чисто несепарабелен над Z , то, по 25.3, $t \leq p^e$ для любого r . При $r > p^e$ из $[p^e] = [1, \dots, 1]$ и из 30.3 следует, что $t \geq p^e$. Следовательно, $t = p^e$ для $r \geq p^e$. Теперь для чисто несепарабельного α легко получаем

$$[p^e + 1] = [2, 1, \dots, 1], \dots, [2p^e] = [2, \dots, 2], \text{ и вообще}$$

$$\begin{cases} [sp^e + q] = \underbrace{[s + 1, \dots, s + 1]}_{q \text{ раз}}, \underbrace{[s, \dots, s]}_{(p^e - q) \text{ раз}} \\ [q] = \underbrace{[1, \dots, 1]}_{q \text{ раз}}, s = 1, 2, \dots, 0 < q \leq p^e. \end{cases} \quad (3)$$

Например, при $p(x) = (x - \alpha)^5$ равенства (3) принимают вид:

$$\begin{array}{lll} [1] = [1] & [6] = [2, 1, 1, 1, 1] & [11] = [3, 2, 2, 2, 2] \\ [2] = [1, 1] & [7] = [2, 2, 1, 1, 1] & [12] = [3, 3, 2, 2, 2] \\ [3] = [1, 1, 1] & [8] = [2, 2, 2, 1, 1] & [13] = [3, 3, 3, 2, 2] \\ [4] = [1, 1, 1, 1] & [9] = [2, 2, 2, 2, 1] & [14] = [3, 3, 3, 3, 2] \\ [5] = [1, 1, 1, 1, 1] & [10] = [2, 2, 2, 2, 2] & [15] = [3, 3, 3, 3, 3] \\ & & \dots \end{array}$$

и т. д.

Соотношения (3) верны также, если в (2) $q(x)$ — полином ненулевой степени. Чтобы установить это, понадобятся две леммы.

Лемма 1. Если $\alpha \in T$ — несепарабельный над Z элемент со степенью несепарабельности p^e , то в T существует такое некоммутативное подтело T_1 с центром K , что $\alpha \in T_1$ и α — чисто несепарабельный над K элемент со степенью несепарабельности p^e .

Лемма 2. Если T_1 — произвольное подтело тела T и полиномы $f(x)$, $g(x) \in T_1[x]$ подобны в $T_1[x]$, то они подобны и в $T[x]$.

Доказательства нетрудны и поэтому опускаются.

Если $(x - \alpha)^r$ и k_i взяты из (1), а $p(x)$ из (2), то границей правого идеала $(x - \alpha)^r T[x]$ будет $p^k(x) T[x]$, где $k = \max(k_1, \dots, k_t)$. Непосредственно проверяется, что если $r = sp^e + q$, $0 < q \leq p^e$, $s = 0, 1, 2, \dots$, то $k = s + 1$. Значит, одна из неразложимых в $T[x]$ частей полинома $(x - \alpha)^r$ имеет степень $s + 1$. По лемме 1 элемент α чисто несепарабелен над центром K надлежаще выбранного подтела T_1 тела T . В силу (3) $(x - \alpha)^r$ содержит q неразложимых в $T_1[x]$ частей степени $s + 1$, парно подобных в $T_1[x]$. Хотя бы одна из этих частей неразложима в $T[x]$, иначе было бы $k < s + 1$. Отсюда следует ввиду леммы 2, что все q неразложимых в $T_1[x]$ частей степени $s + 1$ неразложимы в $T[x]$. Это же верно и для неразложимых в $T_1[x]$ частей степени s полинома $(x - \alpha)^r$. Итак, справедливость (3) для любого несепарабельного над Z элемента α установлена.

Пусть теперь $f_1(x), \dots, f_t(x)$ — полный набор элементарных делителей матрицы $A \in T_n$, и все $f_i(x)$ принадлежат одному и тому же несепарабельному над Z элементу α . Пусть набор степеней k_1, \dots, k_t этих полиномов $f_i(x)$ совпадает с точностью до порядка следования с системой чисел в правой части одного из равенств (3). Тогда для определенного r между неразложимыми частями полинома $(x - \alpha)^r$ и полиномами $f_i(x)$ можно установить такое взаимно однозначное соответствие, при котором соответствующие полиномы подобны. Следовательно, A и J_α^r сопряжены.

Теорема 3. Пусть T — некоммутативное тело, алгебраическое над своим центром Z , все элементарные делители матрицы $A \in T_n$ — произведения линейных полиномов, числа

$$k_{i1}, \dots, k_{it} \quad (4)$$

— степени всех элементарных делителей, принадлежащих несепарабельному над Z элементу α . Матрица A тогда и только тогда сопряжена с жордановой матрицей J , когда для каждого i систему (4) после соответствующего упорядочения можно разбить на подсистемы, каждая из которых совпадает с набором чисел в правой части какого-нибудь из равенств (3).

Заметим, что степени блоков J_α^r , входящих в J , при несепарабельном α определены, вообще говоря, неоднозначно, так как система (4) может обладать несколькими различными разбиениями указанного в теореме 3 вида.

4. Пусть T — некоммутативное тело, конечномерное над своим центром Z и содержащее алгебраически замкнутое подполе Δ . Если Σ — некоторое максимальное подполе тела T , то $\Sigma \supset Z$. Существует алгебраически замкнутое алгебраическое расширение K поля Σ , эквивалентное над Z полю Δ . Так как для рангов $(K : Z) = (\Delta : Z) = (\Sigma : Z)$, то $K = \Sigma$, т. е. все максимальные подполя тела T алгебраически замкнуты и, следовательно, эквивалентны над Z . Среди максимальных подполей есть хотя бы одно сепарабельное над Z , значит, все они сепарабельны над Z и тем самым T сепарабельно над Z . Наконец, любой полином из $Z[x]$ разлагается в $T[x]$ на линейные множители, откуда следует, что

любой полином из $T[x]$ разлагается на линейные множители. Следовательно, ввиду теоремы 2 любая матрица из T_n сопряжена с жордановой матрицей.

5. В заключение отметим, что если T — произвольное тело и

$$\varepsilon(x) = (x - \alpha_1) \dots (x - \alpha_k) \quad (5)$$

— неразложимый в $T[x]$ полином, то матрица

$$B = \begin{pmatrix} \alpha_k & 1 & & & \\ & \alpha_{k-1} & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ & & & & \alpha_1 \end{pmatrix} \quad (6)$$

имеет единственный, с точностью до подобия, элементарный делитель $\varepsilon(x)$. Поэтому для приводимости матрицы $A \in T_n$ к виду

$$\text{diag}(B_1, \dots, B_l), \quad (7)$$

где B_i — матрицы вида (6), необходимо и достаточно, чтобы все элементарные делители A были произведениями линейных полиномов. Если T алгебраично над Z , то в (5) все α_j между собой сопряжены и каждый блок в (7) сопряжен с матрицей

$$C = \begin{pmatrix} \alpha_1 s_k \cdot s_{k-1}^{-1} & & & & \\ & \alpha_1 s_{k-1} \cdot s_{k-2}^{-1} & & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & \alpha_1 s_2 \cdot s_1^{-1} \\ & & & & \alpha_1 \end{pmatrix},$$

где $s_1 = 1$; $\alpha_i = s_i^{-1} \alpha_1 s_i$, $i = 1, \dots, k$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Джекобсон Н. Теория колец. М., 1947.

Поступило в редакцию 12.11 1965

А. Ш. БЛОХ, Л. П. МАТЮШКОВ

О НАДЕЖНОСТИ КОНЕЧНОГО АВТОМАТА

В настоящей статье вводится ряд вероятностных характеристик конечного автомата, учитывающих динамику [1] его работы.

Конечный автомат A с N состояниями определяется матрицей переходов состояний $A(\rho) = \|a_{ik}(\rho)\|$ ($i, k = 1, 2, \dots, N$), где ρ — входной символ, принимающий на такте $t = 1, 2, \dots, T$ одно из значений $1, 2, \dots, s$; $a_{ik}(\rho)$ равно 0 или 1, причем $\sum_k a_{ik}(\rho) = 1$. Равенство

$a_{ij}(\rho) = 1$ указывает на то, что автомат при данном ρ перейдет из состояния i в j .

Простейшим случаем конечного автомата является двоичный автомат α с двумя состояниями, которые обозначим через 0 и 1 соответственно. Матрица переходов такого автомата $\alpha(\rho) = \|x_{i_\alpha k_\alpha}(\rho)\|$ ($i_\alpha k_\alpha = 0, 1$) будет матрицей второго порядка. В классе матриц $\alpha(\rho)$ могут существовать только четыре отличные друг от друга матрицы переходов состояний:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Пусть автомат A состоит из n функционально связанных двоичных автоматов (элементов); точнее говоря, пусть состояние i автомата A описывается двоичным вектором $(i_1, i_2, \dots, i_\alpha, \dots, i_n)$, где i_α — состояние элемента α при i -ом состоянии автомата A . Всех возможных состояний будет $N = 2^n$. Переход автомата A из i -го состояния в k -ое обусловлен изменением состояний тех элементов α , для которых значение $\alpha(i, k) = i_\alpha + k_\alpha \pmod{2}$ равно единице. При данном ρ переход автомата A из состояния i в k наблюдается только в том случае, когда каждый двоичный автомат α переходит из состояния i_α в состояние k_α . Иначе говоря, для элементов матрицы $A(\rho)$ выполняется равенство

$$a_{ik}(\rho) = \prod_{\alpha=1}^n x_{i_\alpha k_\alpha}(\rho). \quad (1)$$

Вероятностный автомат B с M состояниями определяется матрицей переходов состояний $B(\rho) = \|b_{ik}(\rho)\|$ ($i, k = 1, 2, \dots, M$), где ρ — входной символ, принимающий на такте $t = 1, 2, \dots, T$ одно из значений $1, 2, \dots, s$. Элементы $b_{ik}(\rho)$ определяют вероятности перехода автомата B из состояния i в k при данном ρ и удовлетворяют следующим соотношениям: $0 \leq b_{ik}(\rho) \leq 1$, $\sum_k b_{ik}(\rho) = 1$.

Простейшим случаем вероятностного автомата является двоичный вероятностный автомат (элемент) β с двумя состояниями, обозначае-

мыми через 0 и 1. Матрица переходов состояний этого автомата $\beta(\rho) = \|y_{i_\beta k_\beta}(\rho)\|$ ($i_\beta, k_\beta = 0, 1$) будет матрицей второго порядка.

Пусть вероятностный автомат B состоит также из n вероятностных элементов. Состояние i автомата B также опишется двоичным вектором $(i_1, i_2, \dots, i_\beta, \dots, i_n)$, где i_β — состояние элемента β при i -ом состоянии автомата B . Всех возможных состояний i будет $M = 2^n$. Переход автомата B из состояния i в k будет при данном ρ наблюдаться в том случае, если каждый элемент β перейдет из состояния i_β в k_β . Вероятность этого события в силу независимости переходов состояний для отдельных элементов β выражается формулой

$$b_{ik}(\rho) = \prod_{\beta} y_{i_\beta k_\beta}(\rho). \quad (2)$$

Формулу (1) можно рассматривать как частный случай (2).

Перейдем сейчас к совместному рассмотрению автоматов A и B и их элементов α и β . В паре элементов (α, β) элемент α назовем идеальным, а элемент β реальным. Отличие вероятностей $x_{i_\alpha k_\alpha}(\rho)$ от $y_{i_\beta k_\beta}(\rho)$ интерпретируем как ненадежность реального элемента β . Состояние пары элементов (α, β) определяется парой (i_α, i_β) , компоненты которой являются состояниями соответствующих элементов; при этом полагаем, что в начальный момент (на нулевом такте) состояния элементов α и β совпадают. Последовательность входов ρ реализует последовательность пар состояний (i_α, i_β) . Появление в этой последовательности первой пары (i_α, i_β) с несовпадающими компонентами интерпретируем как отказ элемента β .

Отказ или безотказная работа элемента β определяются упорядоченной тройкой чисел $(i_\alpha, j_\alpha, j_\beta)$, где i_α представляет собой состояние идеального и реального элементов на предыдущем такте; j_α и j_β — состояния идеального и реального элементов на текущем такте соответственно. Если $j_\alpha = j_\beta$, то элемент работает безотказно на данном такте t ; в противном случае, т. е. при $j_\beta = 1 - j_\alpha$, наблюдается отказ. Условная вероятность события $(i_\alpha, j_\alpha, j_\beta)$ при входе ρ , очевидно, равна

$$x_{i_\alpha j_\alpha}(\rho) y_{i_\alpha j_\beta}(\rho). \quad (3)$$

Для элемента β могут наблюдаться только четыре вида отказов: $(0, 0, 1)$, $(1, 1, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(1, 0, 1)$. Первые два вида отказов наблюдаются при сохранении идеальным элементом α на текущем такте своего предыдущего состояния, а третий и четвертый виды при изменении идеальным элементом на текущем такте своего предыдущего состояния.

Согласно (3), условные вероятности для этих видов отказов при данном ρ на текущем такте соответственно будут:

$$x_{00}(\rho) y_{01}(\rho), \quad x_{11}(\rho) y_{10}(\rho), \quad x_{01}(\rho) y_{00}(\rho), \quad x_{10}(\rho) y_{11}(\rho),$$

а условные вероятности безотказной работы элемента β при данном ρ на текущем такте для троек $(0, 0, 0)$, $(1, 1, 1)$, $(0, 1, 1)$ и $(1, 0, 0)$ соответственно будут:

$$x_{00}(\rho) y_{00}(\rho), \quad x_{11}(\rho) y_{11}(\rho), \quad x_{01}(\rho) y_{01}(\rho), \quad x_{10}(\rho) y_{10}(\rho).$$

Потребуем, чтобы условные вероятности отказов элемента β при изменении элементом α своего состояния были равны ε_α , а вероятности отказов при сохранении элементом α своего состояния были равны δ_α .

Лемма 1. Для элементов (α, β) возможны только следующие пары матриц переходов состояний:

$$1) \left[\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right], \left[\begin{array}{c|c} 1 - \delta_\alpha & \delta_\alpha \\ \hline \delta_\alpha & 1 - \delta_\alpha \end{array} \right] \quad 2) \left[\begin{array}{c|c} 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 \end{array} \right], \left[\begin{array}{c|c} \varepsilon_\alpha & 1 - \varepsilon_\alpha \\ \hline 1 - \varepsilon_\alpha & \varepsilon_\alpha \end{array} \right]$$

$$3) \left[\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 1 & 0 \end{array} \right], \left[\begin{array}{c|c} 1 - \delta_\alpha & \delta_\alpha \\ \hline 1 - \varepsilon_\alpha & \varepsilon_\alpha \end{array} \right] \quad 4) \left[\begin{array}{c|c} 0 & 1 \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right], \left[\begin{array}{c|c} \varepsilon_\alpha & 1 - \varepsilon_\alpha \\ \hline \delta_\alpha & 1 - \delta_\alpha \end{array} \right].$$

Доказательство. Рассмотрим, например, только случай 3), т. е.

$$\alpha = \left[\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 1 & 0 \end{array} \right].$$

Тогда вероятности отказов для элемента β будут: $x_{00} y_{01} = 1 \cdot y_{01} = \delta_\alpha$, $x_{11} y_{11} = 0$, $x_{01} y_{00} = 0$, $x_{10} y_{11} = \varepsilon_\alpha$. Итак, $y_{01} = \delta_\alpha$, $y_{11} = \varepsilon_\alpha$, следовательно, $y_{00} = 1 - \delta_\alpha$ и $y_{10} = 1 - \varepsilon_\alpha$.

Условная вероятность $y_{i_\alpha j_\alpha}$ безотказной работы элемента β равна или $(1 - \varepsilon_\alpha)$, или $(1 - \delta_\alpha)$. Первый случай осуществляется при изменении состояния идеального элемента α , т. е. при $\alpha(i, j) = 1$. Второй случай осуществляется при сохранении предыдущего состояния элемента α , т. е. при $\alpha(i, j) = 0$. Поэтому для случая безотказной работы элемента β можно написать, что

$$y_{i_\alpha j_\alpha}(\rho) = (1 - \varepsilon_\alpha)^{\alpha(i, j)} (1 - \delta_\alpha)^{1 - \alpha(i, j)}. \quad (4)$$

Автоматы из пары (A, B) также назовем идеальным и реальным соответственно. Состояние пары автоматов (A, B) определяется парой состояний (i, i') . Полагаем, что в начальный момент состояния автоматов A и B совпадают: $m = m'$. Пару (m, m') назовем начальным состоянием пары (A, B) . Последовательность входов ρ реализует последовательность пар состояний (i, i') . Появление в этой последовательности первой пары (i, i') с несовпадающими компонентами интерпретируем как отказ автомата B .

Отказ или безотказная работа автомата B определяется тройкой (i, j, k) , где i представляет собой состояние идеального и реального автоматов на предыдущем такте, а j и k — состояния идеального и реального автоматов на текущем такте соответственно. Если $j = k$, то автомат B работает безотказно на данном такте t ; в противном случае, т. е. при $k \neq j$, наблюдается отказ. Условная вероятность события (i, j, k) при входе ρ , очевидно, равна

$$a_{ij}(\rho) b_{ik}(\rho). \quad (5)$$

На основании формул (1) и (2) получим

$$a_{ij}(\rho) b_{ik}(\rho) = \prod_{\alpha} x_{i_\alpha j_\alpha}(\rho) \prod_{\beta} y_{i_\alpha k_\beta}(\rho).$$

Воспользовавшись формулой (4), получим условную вероятность для безотказной работы B на текущем такте при условии безотказной работы B на предыдущем такте

$$a_{ij}(\rho) b_{ij}(\rho) = a_{ij}(\rho) \prod_{\alpha} (1 - \varepsilon_\alpha)^{\alpha(i, j)} (1 - \delta_\alpha)^{1 - \alpha(i, j)}. \quad (6)$$

За T тактов работы автомата A на его вход поступит T символов из множества $1, 2, \dots, s$. Вообще говоря, на вход автомата A может поступить s^T различных последовательностей $r = \{\rho_1, \dots, \rho_k, \dots, \rho_T\}$ длины T , которые реализуют соответствующие последовательности состояний. Для указания состояния автомата A с номером i будем пользоваться теперь N -мерным вектором $\vec{\gamma}(i) = (0 \dots 010 \dots 0)$, i -я координата которого равна единице. Очевидно, номера состояний i и j будут совпадать тогда и только тогда, если скалярное произведение $\vec{\gamma}(i) \cdot \vec{\gamma}(j) = 1$.

Рассмотрим последовательность состояний $\{i^t\} = \{i^1, i^2, \dots, i^t, \dots, i^T\}$, порождаемую последовательностью входов $r = \{\rho_1, \dots, \rho_T\}$.

Вектор $\vec{\gamma}(i^t)$ для автомата A на t -ом такте при входной последовательности r и начальном состоянии m определяется формулой

$$\vec{\gamma}(i^t) = \vec{\gamma}(m) \cdot \prod_{k=0}^{t-1} A(\rho_k),$$

где полагаем $A(\rho_0) = E$ (единичная матрица), $i^0 = m$.

Выделим в последовательности $\{i^0, \dots, i^T\}$ расположенные рядом номера состояний i и j . Общее число таких пар равно

$$k_{ij}(m, r) = \sum_{t=0}^{T-1} [\vec{\gamma}(i^t) \cdot \vec{\gamma}(i)] [\vec{\gamma}(i^{t+1}) \cdot \vec{\gamma}(j)].$$

Определение 1. Матрицу $D(m, r) = \|k_{ij}(m, r)\|$ ($i, j = 1, 2, \dots, N$) назовем динамикой работы автомата при начальном состоянии m и входной последовательности r .

Пусть вероятность поступления на вход A данной последовательности r равна q_r ($\sum_r q_r = 1$) и вероятность начального состояния m равна p_m ($\sum_m p_m = 1$).

Определение 2. Динамикой работы автомата A за T тактов назовем матрицу $D(T) = \sum_r q_r \sum_m p_m D(m, r)$.

Сумма всех элементов $k_{ij}(T)$ матрицы $D(T)$ равна T . В самом деле,

$$\sum_i \sum_j (\sum_r q_r \sum_m p_m k_{ij}(m, r)) = \sum_r q_r \sum_m p_m (\sum_i \sum_j k_{ij}(m, r)).$$

Так как общее число переходов автомата A из состояния m до состояния i^T равно T (вместе с тождественными переходами), то $\sum_i \sum_j k_{ij}(m, r) = T$. Поэтому $\sum_i \sum_j k_{ij}(T) = \sum_r q_r \sum_m p_m T = T$.

Обозначим через $c_\alpha(m, r)$ число изменений состояния элементом α при входной последовательности r и начальном состоянии m .

Лемма 2. Вероятность $H(m, r)$ безотказной работы B при начальном состоянии m и входной последовательности r выражается формулой

$$H(m, r) = \prod_\alpha (1 - \varepsilon_\alpha)^{c_\alpha(m, r)} (1 - \delta_\alpha)^{T - c_\alpha(m, r)}. \quad (7)$$

Доказательство. Используя (5), получим, что

$$H(m, r) = [a_{i_0 i_1}(\rho_1) b_{i_0 i_1}(\rho_1)] [a_{i_1 i_2}(\rho_2) b_{i_1 i_2}(\rho_2)] \dots \\ \dots [a_{i_{T-1} i_T}(\rho_T) b_{i_{T-1} i_T}(\rho_T)].$$

При определении надежности мы из всех возможных последовательностей состояний идеального автомата A рассматриваем только такую, которая осуществляется при данной последовательности r . Поэтому произведение первых сомножителей пар, взятых в квадратные скобки,

$\prod_{k=1}^T a_{i^{k-1}, i^k}(\rho_k) = 1$. Отсюда $H(m, r) = \prod_{k=1}^T b_{i^{k-1}, i^k}(\rho_k)$ и, согласно формуле (6), получим

$$H(m, r) = \prod_k \prod_\alpha (1 - \varepsilon_\alpha)^{\alpha(i^{k-1}, i^k)} (1 - \delta_\alpha)^{1 - \alpha(i^{k-1}, i^k)}$$

или

$$H(m, r) \prod_\alpha (1 - \varepsilon_\alpha)^{\sum_k \alpha(i^{k-1}, i^k)} (1 - \delta_\alpha)^{T - \sum_k \alpha(i^{k-1}, i^k)}. \quad (8)$$

Показатель степени $\sum_k \alpha(i^{k-1}, i^k)$ в последней формуле определяет общее число изменений состояния элементом α за T тактов при входной последовательности r и начальном состоянии m . Таким образом, лемма 2 доказана.

Определение 3. Динамической надежностью $H_D(T)$ автомата B назовем математическое ожидание вероятности безотказной работы B в течение T тактов, т. е.

$$H_D(T) = \sum_r q_r \sum_m p_m H(m, r). \quad (9)$$

Динамическая надежность обладает следующими свойствами: 1) $0 \leq H_D(T) \leq 1$, 2) $\lim_{T \rightarrow \infty} H_D(T) = 0$ (свойства 1) и 2) вытекают из того, что $0 \leq H(m, r) \leq 1$ и $\lim_{r \rightarrow \infty} H(m, r) = 0$. Отсюда следует, что $H_D(T)$ удовлетворяет интуитивным требованиям, предъявляемым к понятию надежности.

Лемма 3. Математическое ожидание с числа изменений состояния элементом α за T тактов выражается формулой

$$c_\alpha = \sum_i \sum_j \alpha(i, j) k_{ij}(T). \quad (10)$$

Доказательство. Так как $k_{ij}(T) = \sum_r q_r \sum_m p_m k_{ij}(m, r)$, то формулу (10) можно переписать так:

$$c_\alpha = \sum_r q_r \sum_m p_m (\sum_i \sum_j \alpha(i, j) k_{ij}(m, r)) = \sum_r q_r \sum_m p_m c_\alpha(m, r).$$

Таким образом, лемма 3 доказана. (При вычислениях c_α по формуле (10) можно пользоваться средним значением $k_{ij}(T)$, полученным из эксперимента).

Вектор $\vec{c} = (c_1, c_2, \dots, c_\alpha, \dots, c_n)$ назовем динамикой работы элементов за T тактов.

Определение 4. Величину

$$H_c(T) = \prod_\alpha (1 - \varepsilon_\alpha)^{c_\alpha} (1 - \delta_\alpha)^{T - c_\alpha} \quad (11)$$

назовем надежностью работы элементов автомата B за T тактов.

Теорема. Для динамики работы $D(T)$ всегда выполняется соотношение

$$H_D(T) \geq H_c(T). \quad (12)$$

Доказательство. Применив к правой части $H_D(T) = \sum_r q_r \sum_m p_m H(m, r)$ дважды теорему о взвешенных средних [2], получим

$$H_D(T) \geq \sum_r q_r \prod_m H^{p_m} (m, r) \geq \prod_r \prod_m H^{p_m q_r} (m, r).$$

После замены $H(m, r)$ его значением из соотношения (7) приходим к неравенству, доказывающему теорему,

$$\begin{aligned} H_D(T) &\geq \prod_{r, m, \alpha} (1 - \varepsilon_\alpha)^{p_m q_r c_\alpha (m, r)} (1 - \delta_\alpha)^{p_m q_r (T - c_\alpha (m, r))} = \\ &= \prod_\alpha (1 - \varepsilon_\alpha)^{c_\alpha} (1 - \delta_\alpha)^{T - c_\alpha}. \end{aligned}$$

Следствие. $H_D(T) = H_c(T)$ только при равенстве всех $H(m, r)$ между собой.

Так как расчет динамической надежности автомата значительно сложнее расчета надежности работы элементов, то, учитывая соотношение (12), естественно основным параметром надежности считать надежность работы элементов автомата $H_c(T)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Блох А. Ш. Автоматика и телемеханика, **23**, № 12, 1962.
2. Харди Г. Г., Литтлвуд Д. Е., Поля Г. Неравенства. М., 1948, стр. 29.

Поступило в редакцию 19.1.1965

П. И. ЩЕРБИНА

АРИФМЕТИЧЕСКИЕ КОДЫ, ИСПРАВЛЯЮЩИЕ ИСКАЖЕНИЯ ЗАДАННОГО ВИДА

1. Под $N(B, n)$ будем понимать n -значное множество, полученное из всех первых B чисел натурального ряда N , представленных в двоичной системе исчисления, путем приписывания спереди нулей к тем числам $b \in N$ ($b < B$), значность которых меньше значности числа B .

Возьмем некоторое подмножество M_n множества $N(B, n)$. Пусть числа множества M_n поступают на вход канала, где они обрабатываются. Причем под каналом будем понимать любое устройство, обрабатывающее числа, а под обработкой чисел понимаем либо выполнение над ними каких-нибудь операций, либо передачу чисел по каналу связи, либо то и другое и т. д. Считаем, что на выходе должны получать числа $a \in M_n$. На самом деле получаем числа $a' \in M'_n$ (M'_n — множество чисел, получаемое из M_n путем искажения $a \in M_n$), которые могут и отличаться от соответствующих $a \in M_n$. Задача состоит в том, чтобы по полученному на выходе канала числу $a' \in M'_n$ восстановить $a \in M_n$.

2. Пусть вместо $a = \alpha_{n-1}2^{n-1} + \alpha_{n-2}2^{n-2} + \dots + \alpha_0$ ($a \in M_n$) на выходе канала получили число

$$a' = \alpha'_{n-1}2^{n-1} + \alpha'_{n-2}2^{n-2} + \dots + \alpha'_0 \quad (a' \in M'_n).$$

Определение 1. Число

$$e = a - a', \quad (1)$$

записанное в виде

$$e = \varepsilon_{n-1}2^{n-1} + \varepsilon_{n-2}2^{n-2} + \dots + \varepsilon_0, \quad (2)$$

где $\varepsilon_i = \alpha_i - \alpha'_i$ ($\varepsilon_i = 0, \pm 1$, назовем искажением a).

Число отличных от нуля коэффициентов в (2) характеризует кратность ошибки.

Пусть \tilde{S} — множество всевозможных искажений $a \in M_n$. Из них в процессе обработки чисел обычно некоторая часть $S \subset \tilde{S}$ встречается чаще, чем остальная $S_0 = \tilde{S} - S$.

Определение 2. Множество M_n назовем кодом, исправляющим искажения $S\{e\}$, если для любых $a_1, a_2 \in M_n$ ($a_1 \neq a_2$) и соответствующих $e_1, e_2 \in S$ имеет место

$$a_1 - e_1 \neq a_2 - e_2.$$

3. В настоящей статье нас будут интересовать только такие коды (множества M_n), которые получаются при умножении всех первых чисел N на некоторые определенные нечетные положительные числа A [1]. В этом случае будем говорить, что число A порождает код, который назовем арифметическим. Арифметический код, исправляющий мно-

жество S искажений заданного вида, сокращенно будем называть S -кодом (или K_S). Количество чисел a в S -коде (включая и нуль) характеризует его мощность.

При помощи определения 2 легко доказывается

Лемма 1. Для того чтобы число A порождало S -код мощности B , необходимо и достаточно, чтобы для любых $b_1, b_2 < B - 1$ ($b_1 \neq b_2$) выполнялось

$$b_1 A - e_1 \neq b_2 A - e_2, \quad (3)$$

где e_1, e_2 — искажения соответственно $a_1 = b_1 A$, $a_2 = b_2 A$.

Используя лемму 1, укажем способ построения S -кода. Если требуется построить S -код мощности B с наименьшей значностью кодовых чисел, то для этого в упорядоченном естественным образом множестве нечетных положительных чисел находим наименьшее число A , которое удовлетворяет соотношению (3) для всех $b_i, b_j \leq B - 1$ ($b_i \neq b_j$).

Имеет место

Теорема 1. Для того чтобы множество M_n , порожденное некоторым нечетным числом A , представляло собой S -код, достаточно, чтобы для каждого $a \in M_n$ ($a \neq 0$) и любых $e_1, e_2 \in S$ выполнялось

$$a \neq e_1 - e_2. \quad (4)$$

Пусть числа a ($a \neq 0$) множества M_n , порожденного числом A , не представимы в виде (4).

Для двух различных $a_1, a_2 \in M_n$ ($a_1 > a_2$) найдем разность $a'_1 - a'_2$, или $(a'_1 - a'_2) = (a_1 - e_1) - (a_2 - e_2) = (a_1 - a_2) - (e_1 - e_2) = a_3 - (e_1 - e_2)$, где $a_1 - a_2 = a_3 \in M_n$, $e_1, e_2 \in S$. Так как выполняется (4), то $a_3 - (e_1 - e_2) \neq 0$, а поэтому $a'_1 - a'_2 \neq 0$, т. е. $a'_1 \neq a'_2$. Согласно определению 2, заключаем, что множество M_n является S -кодом.

4. Пусть множество M_n , порожденное числом A , представляет собой S -код. Укажем, как по a' будем восстанавливать $a \in K_S$.

Определение 3. Множество наименьших положительных чисел c , удовлетворяющих сравнению

$$c \equiv e \pmod{A}, \quad (5)$$

где e пробегает все множество чисел $e \in S$ для данного K_S , назовем множеством корректирующих чисел и обозначим через R .

Пусть по множеству S для данного K_S , согласно (5), определили R . Может при этом оказаться, что некоторые $c_i \in R$, соответствующие различным $e \in S$, равны между собой. Обозначая через s множество всех тех $e \in S$, для которых получаем одно и то же $c \in R$, строим таблицу соответствия между c_i и s_i ($c_i \rightarrow s_i$).

Предположим, что вследствие искажения e вместо $a \in K_S$ на выходе канала получили a' ($a' = a - e$). Тогда имеет место следующая

Лемма 2. $c \equiv -a' \pmod{A}$.

Доказательство получаем непосредственно из (1), замечая, что $a \equiv \equiv 0 \pmod{A}$, и учитывая (5).

Декодирование (восстановление a по a') будем проводить по следующей схеме: по a' ($a' = a'_{n-1} 2^{n-1} + a'_{n-2} 2^{n-2} + \dots + a'_0$, согласно лемме 2, находим $c \equiv -a' \pmod{A}$), затем по таблице соответствия ($c_i \rightarrow s_i$) в множестве $s \subset S$ разыскиваем такое e ($e = \varepsilon_{n-1} 2^{n-1} + \varepsilon_{n-2} 2^{n-2} + \dots + \varepsilon_0$), что, во-первых, выполняются соотношения

$$a'_v + \varepsilon_v \equiv 0, 1, \text{ но не } -1, 2 \quad (v = 0, 1, \dots, n-1), \quad (6)$$

во-вторых,

$$a' + e \leq a_{\max} \in K_S(M_n). \quad (7)$$

Легко показать, что если e удовлетворяет (6) и (7), то

$$a' + e \equiv 0 \pmod{A},$$

и в этом случае $a' + e = a \in K_S(M_n)$.

В самом деле, с одной стороны, согласно лемме 2, $c \equiv -a' \pmod{A}$, и с другой — таблица соответствия построена так, что $c \equiv e_i \pmod{A}$ для всех $e_i \in s$ ($s \subset S$). Таким образом, $-a' \equiv e \pmod{A}$, или $a' + e \equiv 0 \pmod{A}$. Кроме того, так как имеет место (7), то $a' + e = a$, где $a \in K_S(M_n)$.

Очевидно, что восстановление a по a' единственным образом возможно в том и только в том случае, если по таблице соответствия числу $c \equiv -a' \pmod{A}$ в множестве s ($s \subset S$) можно указать лишь одно e , при котором выполняются условия (6) и (7). Такое соответствие между $c \in R$ и $e \in S$ для данного $K_S(M_n)$ будем называть однозначным.

Если же каждое из множеств s_i ($s_i \subset S$) содержит только по одному числу e , то соответствие между $c \in R$ и $e \in S$ назовем взаимно однозначным.

Множество M_n , порожденное числом A , представляет собой S -код тогда и только тогда, когда между $c \in R$ и $e \in S$ для M_n существует либо однозначное, либо взаимно однозначное соответствие.

Однозначное соответствие между $c \in R$ и $e \in S$ обеспечивается выбором надлежащего A .

Следует заметить, что некоторые искажения, имеющие различные записи в виде (2), могут оказаться равными по величине, т. е. некоторые числа вида (2), представленные в какой-нибудь системе исчисления, например в двоичной, равны между собой.

Равные искажения, имеющие одну и ту же запись в виде (2), называем совпадающими, а разные записи несовпадающе-равными.

Ясно, что для несовпадающе-равных искажений получаем одно и то же корректирующее число.

Имеет место

Лемма 3. Среди несовпадающе-равных искажений $e \in s$ ($s \subset S$), соответствующих в таблице числу $c \equiv -a' \pmod{A}$, всегда можно указать лишь одно искажение e_1 , которое удовлетворяет (6).

Легко показать, что в двух несовпадающе-равных искажениях вида (2) имеется хотя бы по одному равному слагаемому, но с противоположными знаками, и поэтому удовлетворять (6) для данного a' может лишь одно из двух несовпадающе-равных искажений.

Особый интерес представляют множества M_n , для которых выполняется следующая

Лемма 4. Если для всех попарно неравных искажений $e_i, e_j \in S$ ($e_i \neq e_j$) чисел множества M_n , порожденного числом A , выполняется

$$e_i \not\equiv e_j \pmod{A}, \quad (8)$$

то M_n представляет собой S -код.

В самом деле, из (8) получаем $c_i \equiv c_j \pmod{A}$, где $c_i \equiv e_i \pmod{A}$, $c_j \equiv e_j \pmod{A}$, а поэтому между числами $e \in S$, попарно неравными и несравнимыми по \pmod{A} , и соответствующими $c \in R$ можно установить взаимно однозначное соответствие и, следовательно, в этом случае можно исправлять подобного рода искажения. Исправления же несовпадающе-равных искажений, если они имеются в S , обеспечиваются леммой 3.

Таким образом, множество M_n , порожденное A , является S -кодом

Соответствие между $c \in R$ и $e \in S$ для данного M_n , которое удовлетворяет лемме 4, будем называть частично взаимно однозначным.

Остановимся на множествах M_n , порожденных A , для которых между R и S существует частично взаимно однозначное соответствие.

5. Пусть S^∞ — множество, составленное из искажений некоторого интересующего нас вида, упорядоченных естественным образом по абсолютной величине; причем из двух равных, но противоположных по знаку чисел первым записываем отрицательное число, а в случае несовпадающе-равных одно из них.

Определим для всех $e \in S^\infty$ и данного нечетного положительного числа A , согласно определению 3, множество чисел $c \in R^\infty$. Пусть e_{m+1} — первое число в S^∞ , для которого $c_{m+1} (c_{m+1} \equiv e_{m+1} \pmod{A})$ равно некоторому $c_i (i < m+1)$.

Обозначим через S_m^- множество, состоящее из всех первых чисел S^∞ , не превышающих по абсолютной величине $|e_m|$, а через R_m^+ соответствующее ему множество, определяемое сравнением (5) при данном A . Под S_+^m и S_-^m будем понимать соответственно подмножества положительных и отрицательных чисел S_m^- , а под S^* множество всех чисел $e < 0$, которые удовлетворяют неравенству $|e| \geq |e_{m+1}|$ и старшая степень которых равна старшей степени числа e_{m+1} . Справедлива

Теорема 2. Если выполняется

$$e_{m+1} = \pm (BA + c_{m+1}) (c_{m+1} \neq 0), \quad (9)$$

или

$$e_{m+1} = \pm (B+1)A, \quad (10)$$

где в обоих случаях знак $+$ берется, когда $e_{m+1} > 0$, и $-$, когда $e_{m+1} < 0$, и, кроме того, если для любых $e_i \in S_m^-$ и $e_j \in S^*$ имеет место

$$e_i \not\equiv e_j \pmod{A}, \quad (11)$$

то множество M_n чисел $a = bA (b = 0, 1, \dots, B)$ представляет собой S -код, где $S = S_m^- \cup S^*$.

Доказательство. Могут быть два случая: $e_{m+1} > 0$ и $e_{m+1} < 0$. Пусть $e_{m+1} > 0$. Из неравенств (9) и (10) получаем

$$e_{m+1} > BA, \quad (12)$$

и, следовательно, все искажения $e > 0$ чисел $a = bA (b = 0, 1, \dots, B)$ удовлетворяют неравенству

$$e < e_{m+1},$$

т. е. числа $e > 0$ не выходят за пределы множества S_m^- . Точно так же по определению S_m^- за пределы множества S_m^- не выходят и числа $e < 0$, удовлетворяющие неравенству $|e| < e_{m+1}$.

Таким образом, если $|e| < e_{m+1}$, то между $e \in S$ и соответствующими $c \in R$ для чисел $a = bA (b = 0, 1, \dots, B)$ можно установить взаимно однозначное соответствие, а поэтому возможно однозначное восстановление a по a' .

Покажем, что декодирование однозначным образом возможно и тогда, когда $e \in S^*$, т. е.

$$|e| \geq e_{m+1} \text{ при } e < 0.$$

В самом деле, если на выходе канала получили число $bA - e_1$, где $e_1 < 0$ и $|e_1| \geq e_{m+1}$, и предположить, что в таблице числу $c (c \equiv -(bA - e_1) \equiv e_1 \pmod{A})$ соответствуют по крайней мере два e_1 и e_2 , то имеются две возможности декодирования: либо $a = bA$, либо $a = bA - e_1 + e_2$.

Если $e_2 > 0$, то, замечая, что $-e_1 = |e_1| \geq e_{m+1} > BA$, имеем

$$a = bA - e_1 + e_2 > bA + e_{m+1} + e_2 > e_{m+1} > BA,$$

т. е. $a > BA$, что невозможно. Если же $e_2 < 0$, то, так как выполняется дополнительное условие (11) теоремы 2, следует рассмотреть только случай, когда

$$|e_2| \geq e_{m+1} \quad (e_2 \in S^*).$$

Но в этом случае e_2 должно содержать в качестве слагаемого степень с показателем $n-1$, равным старшему показателю степени, входящей в e_1 или e_{m+1} , и, таким образом, если верно $e_1 \equiv e_2 \equiv c \pmod{A}$, то будет верно и $e_1 - (-2^{n-1}) \equiv e_2 - (-2^{n-1}) \equiv c' \pmod{A}$ ($n-1$ — старший показатель e_i и e_j), т. е. числа $e' = e_1 + 2^{n-1}$ и $e'' = e_2 + 2^{n-1}$, которые по абсолютной величине меньше e_{m+1} , имеют одно и то же корректирующее число, что противоречит определению S^m .

Для несовпадающе-равных искажений декодирование однозначным образом обеспечивается леммой 3.

Аналогично доказательство проводится и для случая, когда $e_{m+1} < 0$.

Теорема 2 является конструктивной в том смысле, что она фактически указывает способ построения S -кода необходимой мощности. Если требуется построить S -код мощности B_1 , то во множестве положительных нечетных чисел отыскивается наименьшее такое число A , которое удовлетворяет одному из неравенств (9), (10), где $B \geq B_1 - 1$.

6. Приведем несколько формул для вычисления вероятности появления некоторых искажений.

Вероятность l -кратной ошибки в двоичном симметрическом канале, когда искажения типов „1 \rightarrow 0“ и „0 \rightarrow 1“ равновероятны, определяется, как известно, по формуле

$$p_l = C_n^l p_0^l (1 - p_0)^{n-l}, \quad (13)$$

где p_0 — вероятность перехода единицы в нуль или наоборот; n — значимость чисел $a \in M_n$.

При данном n и заданной вероятности p появления искажений наибольшее l находим из неравенства

$$p \leq C_n^l p_0^l (1 - p_0)^{n-l}. \quad (14)$$

Если же вероятность появления в числах $a \in M_n$ одной ошибки типа „1 \rightarrow 0“ равна p_{10} , а типа „0 \rightarrow 1“ — p_{01} , то вероятность того, что в числе $a \in M_n$, содержащем t единиц и $n-t$ нулей, произойдет u ($u \leq t$) ошибок типа „1 \rightarrow 0“ и v ($v \leq n-t$) ошибок типа „0 \rightarrow 1“, определяется по формуле

$$p_{u,v} = C_t^u p_{10}^u (1 - p_{10})^{t-u} C_{n-t}^v p_{01}^v (1 - p_{01})^{n-t-v}. \quad (15)$$

Если нас интересует множество искажений для M_n , которые имеют вероятность появления не ниже p , то в этом случае необходимо для данного n вычислить все вероятности

$$p_{0,0}; p_{0,1}; p_{0,2}; \dots; p_{u,0}; p_{u,1}; \dots; p_{t,n-t}$$

при всевозможном соотношении нулей и единиц и выбрать в качестве S множество тех искажений, для которых $p_{i,j} \geq p$.

На практике обычно наиболее вероятными искажениями в числах $a \in M_n$ являются серии, или пакеты, из r ошибок длиной l ($r \leq l$).

Под серией (пакетом) из r ошибок длиной l ($r \leq l$) принято понимать такое искажение числа $a \in M_n$, когда все ошибки, возникающие в числе a , находятся в каких-нибудь r среди l последовательно расположенных разрядов при условии, что символы крайних из l разрядов a искажены.

Так, например, для числа 1 0 1 0 1 0 серии из 2, 3 и 4 ошибок длиной 4 могут выглядеть соответственно следующим образом:

$$0 - 1 0 0 1 0, 1 - 1 0 - 1 0 0, 0 0 1 - 1 1 - 1 \text{ и т. п.}$$

Серию из μ ($\mu \leq r$) ошибок длиной не более l ($r \leq l$), состоящую из i ($i \leq u$) ошибок типа „1 \rightarrow 0“ и j ($j \leq v$) ошибок типа „0 \rightarrow 1“ ($i + j = \mu$, $u + v = r$), в дальнейшем будем называть (u, v, l) -искажением, а серию из ν ($\nu \leq r$) произвольных ошибок длиной не более l ($r \leq l$) — (r, l) -искажением.

В частности, согласно данному определению, искажение, состоящее из i ($i \leq u$) ошибок типа „1 \rightarrow 0“ и j ($j \leq v$) ошибок типа „0 \rightarrow 1“, как угодно расположенных в n -значном числе a , называем (u, v, n) -искажением, а любые ν ($\nu \leq r$) ошибок в n -значном числе a — (r, n) -искажением.

В предположении, что в n -значных числах a происходят только (r, l) -искажения, вероятность появления серии точно из r ошибок длиной l можно найти по формуле

$$p_l^{(r)} = C_{l-2}^{r-2} (n-l+1) p_0^r (1-p_0)^{n-r} \quad (r \geq 2, l \geq 2)^*, \quad (16)$$

где $C_{l-2}^{r-2} (n-l+1)$ — число всевозможных серий из r ошибок длиной l в n -значном числе; p_0 — вероятность искажения одного символа.

Легко убедиться, что при $p_0 < \frac{1}{2}$ вероятность серии из r ошибок длиной l в целом убывает с возрастанием l и r , поэтому в первую очередь нужно исправлять серийные ошибки меньшей длины и низшей кратности.

Если же в n -значных числах нас интересует серия из ν ошибок длиной ν ($\nu \leq l$, l не определено) с вероятностью появления не ниже p , то l можно определить из неравенства

$$p \leq C_{l-2}^{r-2} (n-l+1) p_0^l (1-p_0)^{n-l} = (n-l+1) p_0^l (1-p_0)^{n-l}. \quad (17)$$

7. Укажем нижние оценки числа A для некоторых S -кодов.

Пусть L — наибольшее число различных искажений для некоторого S -кода. Множеству различных искажений $e \in S$ соответствует некоторое число Q корректирующих чисел $c \in R$. Причем $L \geq Q$. Число Q в свою очередь удовлетворяет неравенству

$$Q \leq A. \quad (18)$$

Неравенство (18) при данном Q можно рассматривать как нижнюю оценку A . Однако мы будем пользоваться следующей несколько грубой оценкой:

$$A \geq L. \quad (19)$$

Рассмотрим оценку (19) применительно к некоторым конкретным S -кодам.

а) Код, исправляющий (r, n) -искажения. Число искажений, охватывающих в точности i разрядов n -значных чисел кода, не превышает $2^i C_n^i$. Тогда число всех искажений при данном r не более

$$1 + 2C_n^1 + 2^2 C_n^2 + \dots + 2^r C_n^r = \sum_{i=0}^r 2^i C_n^i.$$

* При $l=0$, $r=0$ $p_0^{(0)} = (1-p_0)^n$, а при $l=1$, $r=1$ $p_1^{(1)} = np_0(1-p_0)^{n-1}$.

Подставляя полученное выражение в (19) вместо L , получаем

$$A \geq \sum_{i=0}^r 2^i C_n^i. \quad (20)$$

б) Код, исправляющий (u, v, n) -искажения. Наибольшее число искажений, состоящих точно из i ошибок типа „1→0“ и j ошибок типа „0→1“, равно $C_{i+j}^i C_n^{i+j}$. Тогда общее число (u, v, n) -искажений не превышает $\sum_{j=0}^v \sum_{i=0}^u C_{i+j}^i C_n^{i+j}$.

Заменив в (19) L полученным выражением, имеем

$$A \geq \sum_{j=0}^v \sum_{i=0}^u C_{i+j}^i C_n^{i+j}. \quad (21)$$

в) Код, исправляющий $(u, 0, n)$ -искажения. Полагая в (21) $v=0$, получаем

$$A \geq \sum_{i=0}^u C_n^i. \quad (22)$$

г) Код, исправляющий (r, l) -искажения ($r \leq l$). Число всевозможных серий из i ($i \leq r$) ошибок длиной v ($r \leq v$) в n -значном числе не превышает

$$\begin{aligned} & 2^2 (C_{v-2}^0 2^0 + C_{v-2}^1 2 + C_{v-2}^2 2^2 + \dots + C_{v-2}^{r-2} 2^{r-2}) (n - v + 1) = \\ & = 2^2 (n - v + 1) \sum_{i=0}^{r-2} C_{v-2}^i 2^i \quad (r, v \geq 2, r \leq v), \end{aligned}$$

где 2^2 — число всех искажений только для концов серии; $\sum_{i=0}^{r-2} C_{v-2}^i 2^i$ — число всевозможных искажений для $v-2$ разрядов, расположенных внутри серии длиной v ; $n - v + 1$ — число серий длиной v в n -значном числе.

Общее число (r, l) -искажений, включая отсутствие ошибок и число одиночных ошибок, равное $2n$, не больше

$$L = 1 + 2n + 2^2 \sum_{v=2}^l (n - v + 1) \sum_{i=0}^{r-2} C_{v-2}^i 2^i.$$

Неравенство (19) в этом случае запишется

$$A \geq 1 + 2n + 4 \sum_{v=2}^l (n - v + 1) \sum_{i=0}^{r-2} C_{v-2}^i 2^i. \quad (23)$$

В частности, когда $r = v$ для всех $v \leq l$, сумма $\sum_{i=0}^{r-2} C_{v-2}^i 2^i = 3^{v-2}$, и в этом случае неравенство (23) принимает вид

$$A \geq 1 + 2n + 4 \sum_{v=2}^l (n - v + 1) 3^{v-2} \quad (24)$$

или, так как, что нетрудно показать, $4 \sum_{v=2}^l (n - v + 1) 3^{v-2} = (2n - 2l +$

$$+ 3) 3^{l-1} - 2n - 1, \text{ имеем} \quad A \geq (2n - 2l + 3) 3^{l-1}. \quad (25)$$

Отсюда, так как $A \leq 2^k$, где k — значность A в двоичном представлении, получаем оценку для n при данных k и l

$$n \leq \frac{2^{k-1}}{3^{l-1}} + \frac{2l-3}{2} = \frac{2^k - 3^l}{2 \cdot 3^{l-1}} + l. \quad (26)$$

д) Код, исправляющий $(r, 0, l)$ -искажения ($r \leq l$). Число всех серий из i ($i \leq r$) ошибок типа „1 → 0“ длиной ν ($r \leq \nu$) не больше $(n - \nu - 1) \times \sum_{i=0}^{r-2} C_{\nu-2}^i$, где $\sum_{i=0}^{r-2} C_{\nu-2}^i$ — число всевозможных искажений для $\nu - 2$ рядов, находящихся внутри серии длиной ν ; $n - \nu + 1$ — число серий длиной ν в n -значном числе.

Тогда число всех $(r, 0, l)$ -искажений не превышает

$$L = 1 + n + \sum_{\nu=2}^l (n - \nu + 1) \sum_{i=0}^{r-2} C_{\nu-2}^i.$$

Подставляя полученное выражение для L в неравенство (19), имеем

$$A \geq 1 + n + \sum_{\nu=2}^l (n - \nu + 1) \sum_{i=0}^{r-2} C_{\nu-2}^i. \quad (27)$$

В частности, когда $r = \nu$ для всех $\nu \leq l$, $\sum_{i=0}^{r-2} C_{\nu-2}^i = \sum_{i=0}^{\nu-2} C_{\nu-2}^i = 2^{\nu-2}$, и неравенство (27) в данном случае приобретает вид

$$A \geq 1 + n + \sum_{\nu=2}^l (n - \nu + 1) 2^{\nu-2}$$

или, так как $\sum_{\nu=2}^l (n - \nu + 1) 2^{\nu-2} = (n - l + 1) 2^{l-1} - n - 1$, получаем

$$A \geq (n - l + 2) 2^{l-1}. \quad (28)$$

Замечая, что $A \leq 2^k$ (k — значность A в двоичной системе исчисления), получаем оценку для n

$$n \leq 2^{k-l+1} + l - 2. \quad (29)$$

8. Ниже приводим таблицы параметров некоторых кодов, полученных, согласно теореме 2, с частично взаимно однозначным соответствием между S и R .

Коды, исправляющие (2, 1, 2)-искажения

A	B	BA	n
37	6	$2^8 - 2^5 - 2$	8
39	105	$2^{12} - 1$	12
71	923	$2^{16} - 2 - 1$	16
75	13981	$2^{20} - 1$	20
77	108942	$2^{23} - 2^6 - 2^3 - 2$	23
87	3085465	$2^{28} - 1$	28
111	619094385	$2^{36} - 1$	36

Коды, исправляющие (2, 0, 2)-искажения

A	B	BA	n
5*)	3	$2^4 - 1$	4
9*)	7	$2^6 - 1$	6
17	15	$2^8 - 1$	8
33	31	$2^{10} - 1$	10
35	117	$2^{12} - 1$	12
41	25575	$2^{20} - 1$	20
49	42799	$2^{21} - 1$	21
67	6009749	$2^{28} + 2^{27} - 1$	29
77	13944699	$2^{30} - 1$	30
79	6958934353	$2^{39} - 1$	39
131	6600695637062101	$2^{59} + 2^{58} - 1$	60

Коды, исправляющие (2, 2)-искажения

A	B	BA	n
37	6	$2^8 - 2^5 - 2$	8
41	24	$2^{10} - 2^5 - 2^3$	10
53	28	$2^{10} + 2^9 - 2^5 - 2^4 - 2^3$	11
69	89	$2^{12} + 2^{11} - 2 - 1$	13
71	923	$2^{16} - 2 - 1$	16
101	5190	$2^{19} - 2^6 - 2^5 - 2$	19
111	7084	$2^{19} - 2^7 + 2^4 + 2^2$	19
119	140985	$2^{25} - 1$	25
137	125400504	$2^{34} - 2^7 - 2^3$	34

Коды, исправляющие (3, 0, 3)-искажения

A	B	BA	n
9*)	7	$2^6 - 1$	6
17*)	15	$2^8 - 1$	8
33*)	31	$2^{10} - 1$	10
65	63	$2^{12} - 1$	12
97	1689	$2^{17} + 2^{15} - 2^3 + 1$	18
131	384211	$2^{25} + 2^{24} - 2^3 + 1$	26
145	1851279	$2^{28} - 1$	28
183	3667151	$2^{29} + 2^{28} - 2^3 + 1$	30
209	7706281	$2^{30} + 2^{29} - 2^3 + 1$	31
229	187553157	$2^{35} + 2^{33} - 2^3 + 1$	36
259	265326165	$2^{36} - 1$	36

Коды, исправляющие (3, 3)-искажения

A	B	BA	n
137	14	$2^{11} - 2^7 - 2$	11
145	112	$2^{14} - 2^7 - 2$	14
201	163	$2^{15} - 2^2 - 1$	15
203	564	$2^{16} + 2^{15} + 2^{14} - 2^7 - 2^6 - 2$	17
229	187553157	$2^{35} + 2^{33} - 2^3 + 1$	36

*) Числа, порождающие коды без взаимно однозначного соответствия между S и R.

9. Код называется циклическим, если для всякого кодового числа

$$\alpha_1 = \alpha_{n-1} 2^{n-1} + \alpha_{n-2} 2^{n-2} + \dots + \alpha_0$$

число

$$a_2 = \alpha_{n-2} 2^{n-1} + \alpha_{n-3} 2^{n-2} + \dots + \alpha_0 2 + \alpha_{n-1},$$

получаемое из числа a_1 циклическим сдвигом цифр на один разряд влево, также принадлежит данному коду.

Пусть $M(n)$ — множество, порожденное числом A , которое состоит из всех чисел $a \in bA$ ($b \in N$) значности не выше n . Тогда простейшее необходимое и достаточное условие, которому должно удовлетворять множество $M(n)$ для того, чтобы оно было циклическим, утверждает следующая

Теорема 3. Для того чтобы множество $M(n)$, порожденное числом A , было циклическим, необходимо и достаточно, чтобы A делило $2^n - 1$.

Необходимость. Пусть $M(n)$ — циклическое множество, т. е. для любого

$$a_1 = \alpha_{n-1} 2^{n-1} + \alpha_{n-2} 2^{n-2} + \dots + \alpha_0 \quad (\alpha_{n-1} \neq 0)$$

в $M(n)$ содержится и число

$$a_2 = \alpha_{n-2} 2^{n-1} + \alpha_{n-3} 2^{n-2} + \dots + \alpha_0 2 + \alpha_{n-1}.$$

Между a_1 и a_2 существует следующая зависимость:

$$2a_1 - a_2 = \alpha_{n-1} (2^n - 1).$$

Поскольку A делит a_1 и a_2 , то число A делит и $2^n - 1$.

Достаточность. Пусть A делит $2^n - 1$. Покажем, что A порождает циклическое множество $M(n)$.

Возьмем в множестве $M(n)$, порожденном A , какое-нибудь число

$$a_1 = \alpha_{n-1} 2^{n-1} + \alpha_{n-2} 2^{n-2} + \dots + \alpha_0.$$

Тогда находим

$$2a_1 - \alpha_{n-1} (2^n - 1) = \alpha_{n-2} 2^{n-1} + \alpha_{n-3} 2^{n-2} + \dots + \alpha_0 2 + \alpha_{n-1} = a_2,$$

т. е., во-первых, a_2 получается из a_1 циклическим сдвигом цифр на один разряд, во-вторых, так как A делит a_1 и $2^n - 1$, то A делит и a_2 , а значит, $M(n)$ — циклическое множество.

Следствие. Множество $M(n)$, порожденное числом A , является циклическим тогда и только тогда, когда наибольшее его число имеет вид $2^n - 1$.

В самом деле, если $M(n)$ — циклическое множество, то, согласно теореме 3, число A делит $2^n - 1$, а так как значность числа $2^n - 1$ равна n , то, согласно определению $M(n)$, оно принадлежит $M(n)$, причем число $2^n - 1$ в $M(n)$ наибольшее, и, наоборот, если наибольшее n -значное число $2^n - 1$ делится на A , то оно принадлежит множеству $M(n)$, которое по теореме 3 является циклическим.

Так, например, коды, порожденные числами 5, 9, 17 и т. д., исправляющие (2, 0, 2)-искажения, являются циклическими, так как наибольшее их число имеет вид $2^n - 1$.

В заключение автор выражает глубокую благодарность А. Ш. Блоху за помощь в работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Brown O. T. IRE Trans., EC-9, 1960.

Поступило в редакцию 28.XII 1964

Г. М. ГУСАК

О ВЛИЯНИИ АДРЕСНОСТИ НА СКОРОСТЬ РАБОТЫ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАШИНЫ

Будем рассматривать одноадресные, двухадресные и трехадресные машины без индексных регистров с одинаковыми арифметическими устройствами, накопителями и внешними устройствами. Полагаем, что в машинах имеются команды передачи вида

$$\alpha \rightarrow \Sigma \rightarrow \beta, \quad (1)$$

что на двухадресной машине имеются арифметические операции вида:

$$\alpha 0\beta \rightarrow \beta, \quad (2)$$

$$\alpha 0\beta \rightarrow \Sigma, \quad (3)$$

$$\Sigma 0\alpha \rightarrow \beta, \quad (4)$$

$$\Sigma 0\alpha \rightarrow \Sigma, \quad (5)$$

а на трехадресной машине арифметические операции

$$\alpha 0\beta \rightarrow c. \quad (6)$$

Считаем, что интервалы времени выборки команд, чисел и выполнения операций в АУ не перекрываются. Команды, относящиеся к работе устройств ввода, вывода и к работе магнитной ленты, не рассматриваются. Можно считать, что число обращений к накопителю для команд передачи управления одно-, двух- и трехадресных машин одинаково. Тогда если в алгоритме имеется n_1 независимых операций вида (6), n_2 граничных операций вида (3) либо (4), n_3 зависимых операций вида (5), n_4 независимых операций вида (2) и n_5 операций вида (1), то число обращений к накопителю для одно-, двух- и трехадресной машин выразится соответственно:

$$u_1 = 6n_1 + 4n_2 + 2n_3 + 6n_4 + 4n_5, \quad (7)$$

$$u_2 = 5n_1 + 3n_2 + 2n_3 + 4n_4 + 3n_5, \quad (8)$$

$$u_3 = 4(n_1 + n_2 + n_3 + n_4) + 3n_5. \quad (9)$$

Учитывая число обращений к накопителю, можно выбрать машину, наиболее экономичную с точки зрения затраты времени на обращения к ЗУ, а следовательно, и с точки зрения быстродействия. Критерий такой оценки устанавливается следующими теоремами.

Теорема 1. Трехадресная машина является наилучшей в смысле быстродействия тогда и только тогда, когда выполняются условия:

$$n_1 > n_3 - n_4 - 0,5n_5, \quad (10)$$

$$n_1 > n_2 + 2n_3. \quad (10')$$

Необходимость. Пусть трехадресная машина является наилучшей в указанном смысле, т. е. $u_3 < u_2$ и $u_3 < u_1$ или $u_3 - u_2 < 0$ и $u_3 - u_1 < 0$. Подставляя в эти неравенства выражения (7), (8), (9), получаем

$$u_3 - u_2 = -n_1 + n_2 + 2n_3 < 0, \quad (11)$$

$$u_3 - u_1 = -2n_1 + 2n_3 - 2n_4 - n_5 < 0. \quad (12)$$

Из неравенства (12) получаем

$$n_1 > n_3 - n_4 - 0,5n_5,$$

а из неравенства (11) находим

$$n_1 > n_2 + 2n_3.$$

Достаточность. Пусть выполняется условие (10). Тогда

$$-n_1 + n_3 - n_4 - 0,5n_5 < 0$$

или

$$-2n_1 + 2n_3 - 2n_4 - n_5 < 0,$$

но

$$-2n_1 + 2n_3 - 2n_4 - n_5 = u_3 - u_1,$$

поэтому

$$u_3 - u_1 < 0,$$

т. е. $u_3 < u_1$, и, следовательно, число обращений к накопителю для трехадресной машины меньше, чем для одноадресной. Пусть теперь выполняется условие (10'). Тогда

$$-n_1 + n_2 + 2n_3 < 0,$$

но

$$-n_1 + n_2 + 2n_3 = u_3 - u_2,$$

поэтому

$$u_3 - u_2 < 0,$$

т. е. $u_3 < u_2$, и, следовательно, трехадресная машина лучше двухадресной в указанном смысле. Отсюда вытекает, что при выполнении условий (10) и (10') трехадресная машина является наилучшей в смысле быстродействия.

Замечание 1. Одноадресная и трехадресная машины эквивалентны в смысле быстродействия, если

$$n_1 + n_4 + 0,5n_5 = n_3.$$

Замечание 2. Трехадресная и двухадресная машины эквивалентны в смысле быстродействия, если

$$n_1 = n_2 + 2n_3.$$

Теорема 2. Двухадресная машина является наилучшей в смысле быстродействия тогда и только тогда, когда выполняется условие

$$n_2 > n_1 - 2n_3.$$

Теорема доказывается аналогично предыдущей.

Замечание. Двухадресная и одноадресная машины эквивалентны в смысле быстродействия, если $n_i = 0$ ($i = 1, 2, 4, 5$), т. е. в алгоритме имеются лишь зависимые операции.

М. М. КОРАНЬ, М. М. СІРАТА

АБ КІНЕТЫЦЫ РОСТУ ДЫФУЗІЙНЫХ СЛАЁУ У СІСТЭМЕ НІОБІЙ — ВОЛАВА

У апошнія гады сістэма ніобій — волава прыцягвае ўвагу многіх даследчыкаў у сувязі са звышправодзячымі ўласцівасцямі яе сплаваў. Аднак дыяграма плаўкасці сістэмы Nb—Sn устаноўлена недастаткова дакладна. Па даных першых работ [1, 2] дапускалася, што ў гэтай сістэме існуе адно інтэрметалічнае злучэнне Nb₃Sn.

У рабоце [3] прыведзены даныя, якія ўдакладняюць дыяграму стану сістэмы Nb—Sn. У прыватнасці, было паказана, што ў гэтай сістэме існуе, акрамя Nb₃Sn, па крайняй меры яшчэ злучэнне NbSn, якое ўтвараецца звычайна пры тэмпературах ніжэй 850° С. Па даных памянёных аўтараў, пры тэмпературах вышэй 850° С утвараецца адно інтэрметалічнае злучэнне Nb₃Sn, якое валодае высокімі звышправодзячымі параметрамі. У іншых работах [4, 6] указваецца на тое, што ў гэтай сістэме існуе яшчэ рад інтэрметалічных злучэнняў Nb₃Sn₂, Nb₂Sn₃, NbSn₂.

У дадзенай рабоце вывучалася кінетыка росту і структура дыфузійнага слоя, які ўтвараўся на ніобіі ў працэсе рэакцыйнай дыфузіі ў яго волава з вадкай фазы. Даследаванне кінетыкі росту слаёў праводзілася на ніобіевых стужках, атрыманых халоднай пракаткай з дроту чыстай 99,6% Nb з наступным адпалам. З ніобіевай стужкі выразаліся асобныя ўзоры, размеры якіх складалі прыкладна 15×8×0,5 мм³.

Дыфузійнае насычэнне ніобію волавам ажыццяўлялася ў высокім вакууме пры бесперапынным пампаванні на працягу рознага часу ў інтэрвале тэмператур 850—1200° С. Пагружэнне ніобію ў волава адбывалася наступным чынам. Добра прамыты ўзор змяшчаўся ў лодачку разам з кавалачкамі волава. Затым лодачка ўстаўлялася ў кварцавую трубку, злучаную з вакуумнай сістэмай. Пры дасягненні вакууму парадку 10⁻⁵ мм рт. сл. на кварцавую трубку насоўвалася папярэдне разагрэтая да пэўнай тэмпературы электрычная печ. Пры высокіх тэмпературах волава хутка расплаўлялася і ніобій пагружаўся ў расплаў. Тэмпература вымяралася плаціна-плацінародыевай тэрмапарай і падтрымлівалася пастаяннай з дапамогай рэгулятара з дакладнасцю ±10° С. Максімальны час вытрымкі ніобію ў вадкім волаве складаў 16 гадз, мінімальны — 1 гадз.

Час нагрэву і ахаладжэння ампулы складаў 2—3 мін і ў разліках не ўлічваўся.

Пасля пэўнага часу дыфузійнага адпалу ампула ахалоджвалася і з яе вымаўся ўзор, пакрыты роўным слоем волава. Мікраскапічныя даследаванні папярочных шліфаў, праведзеныя з дапамогай мікраскопа МИМ-8М, паказалі, што на мяжу падзелу ўзаемадзеючых элементаў утвараецца кампактны слой інтэрметалічнага злучэння. Гэты слой шчыльна прылягае да ніобію і мае з ім роўную мяжу. Наадварот, мяжа яго з волавам праходзіць некалькі зігзагападобна. Сярэдняе значэнне мікрацвёрдасці гэтага слоя, вымеранае на прыборы ПМТ-3 пры нагруз-

цы 20 г, складае 950 кг/мм². Гэта значэнне адпавядае літаратурным даным для злучэння Nb₃Sn [1, 4, 5]. Вымяралася таксама мікрацвёрдасць слоя ніобію пасля дыфузійнага адпалу ў вадкім волаве. Як правіла, мікрацвёрдасць непарэагаваўшага ніобію значна павялічваецца (180—450 кг/мм²) у залежнасці ад працягласці і тэмпературы дыфузійнага адпалу. Такое павелічэнне мікрацвёрдасці можна растлумачыць значнай растварымасцю волава ў цвёрдым ніобіі.

Міжплоскасныя адлегласці, індэксы і адносныя інтэнсіўнасці дыфракцыйных ліній Ni₃Sn

$d, \text{Å}$	hkl	I	$d, \text{Å}$	hkl	I
2,6425	200	моцная	0,9810	432(520)	сярэдняя
2,3620	210	вельмі моцная	0,9637	521	тое ж
2,1641	211	моцная	0,9337	440	»
1,4633	320	сярэдняя	0,8802	600(442)	слабая
1,4112	321	моцная	0,8688	610	тое ж
1,3184	400	сярэдняя	0,8569	611(532)	сярэдняя
1,1803	420	слабая	0,8350	620	вельмі слабая
1,1505	421	тое ж	0,8150	541	тое ж
1,1257	332	»	0,7980	622	»

Для рэнтгенаструктурнага даследавання дыфузійнага слоя верхні слой волава страўлівалі ў салянай кіслаце. Затым на ўстаноўцы УРС-50И па метаду «адбіцця» здымалі рэнтгенаграмы. Выкарыстоўвалася Cu-K_α выпраменьванне з нікелевым фільтрам.

У табл. 1 прыведзены міжплоскасныя адлегласці (d), індэксы Мілера (hkl) і адносныя інтэнсіўнасці дыфракцыйных ліній інтэрметалічнага злучэння, які ўтвараўся пры ўзаемадзеянні ніобію з вадкім волавам. Лініі даволі дакладныя. Гэта ўказвае на тое, што ўтвараецца стабільная крышталічная рашотка тыпу $\beta\text{-W}$ ($a=5,28 \text{ Å}$). Іншых злучэнняў ва ўказаным інтэрвале тэмператур не было выяўлена. Гэта знаходзіцца ў адпаведнасці з работай [3], а таксама [5], у якой паведамляецца, што ў сістэме ніобій—волава ўтварэнне $\beta\text{-W}$ -фазы з'яўляецца энергетычна больш выгадным. Па даных [5], гэта фаза пры высокіх тэмпературах мае шырокую вобласць існавання (каля 5 ат. %). У сувязі з гэтым пастаянная рашоткі Nb₃Sn памяншаецца прыкладна на 0,006 Å пры змяненні канцэнтрацыі ніобію ад 72,8 да 78,5 ат. %.

У дадзенай рабоце кінетыка росту дыфузійнага слоя вывучалася шляхам вымярэння яго таўшчыні на кожным узоры пры розным часе ўзаемадзеяння.

Як паказалі доследы, таўшчыня дыфузійнага слоя павялічваецца з ростам тэмпературы і часу вытрымкі. На рыс. 1 прадстаўлены кінетычныя крывыя (1, 2, 3, 4 і 5) для тэмператур 850, 940, 1040, 1120 і 1200° С адпаведна, якія паказваюць лінейную залежнасць паміж квадратам таўшчыні слоя інтэрметалічнага злучэння і часам дыфузійнага адпалу, г. зн. захоўваецца парабалічны закон выгляду

$$x^2 = 2Kt, \quad (1)$$

дзе x — таўшчыня дыфузійнага слоя; K — пастаянная парабалічнага закону; t — час.

Лагарыфмы тангенсаў нахілу гэтых прамых (1) у залежнасці ад адваротнай абсалютнай тэмпературы паказаны прамой (рис. 2). Разлічаная па гэтай прамой залежнасць K ад тэмпературы можа быць выражана суадносінамі

$$K = 5 \cdot 10^{-8} \exp\left(-\frac{18600 \pm 1000}{RT}\right) \text{ см}^2/\text{сек.} \quad (2)$$

Энергія актывацыі выражана ў кал/моль.

Такім чынам, эксперыментальна атрыманыя формулы (1) і (2)

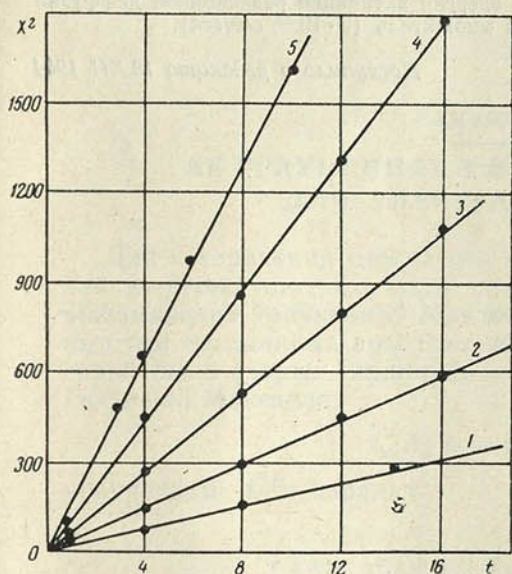


Рис. 1. Залежнасць паміж квадратам таўшчыні (мк^2) дыфузійнага слоя і часам узамадзеяння (гадз)

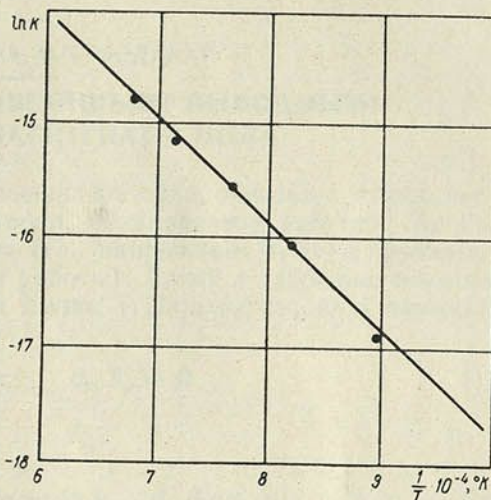


Рис. 2. Тэмпературная залежнасць пастаяннай парабалічнага закону ($\ln K = f\left(\frac{1}{T}\right)$)

могуць быць выкарыстаны для разліку таўшчыні дыфузійнага слоя, які ўтвараецца на ніобіі пры дадзенай тэмпературы за пэўны час пры пагружэнні яго ў вадкае волава.

ВЫВАДЫ

1. Праведзена вывучэнне рэакцыйнай дыфузіі волава з вадкай фазы ў ніобій у інтэрвале $850-1200^\circ\text{C}$.

2. Паказана, што ў гэтым інтэрвале тэмператур утвараецца слой інтэрметалічнага злучэння Nb_3Sn .

3. Павелічэнне таўшчыні слоя злучэння Nb_3Sn з часам працякае па парабалічнаму закону (1). Велічыня K змяняецца з тэмпературай па экспаненцыяльнаму закону (2). Энергія актывацыі рэакцыйнай дыфузіі роўная 18600 ± 1000 кал/моль.

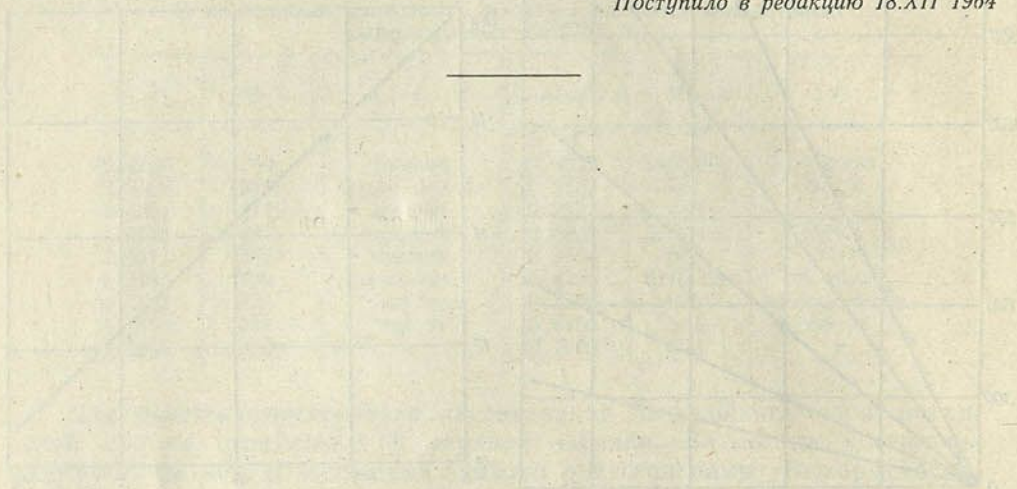
ЛІТАРАТУРА

1. Агафонова М. И., Барон В. В., Савицкий Е. М. Изв. АН СССР, ОТН, Металлургия и топливо, № 5, 1959.
2. Хансен М., Андерко К. Структура двойных сплавов, 1961.
3. Коган В. С., Кривко А. И., Лазарев Б. Г., Лазарева Л. С., Мацакова А. А., Овчаренко О. Н. ФММ, 15, в. I, 1963.
4. Rinderer L., Saur E. und Wurm J. Zeitschrift f. Physik, 174, Hf. 3, 405, 1963.
5. Maier R. G. und Wilhelm G. Zeitschrift f. Naturforschung, 19a, Hf. 3, 399, 1964.
6. Picklesimer M. L. Appl. Phys. Lett., 1, 64, 1962.

Резюме

В работе излагаются результаты экспериментального исследования кинетики роста и структуры слоя интерметаллического соединения Nb_3Sn , образующегося на ниобии в процессе реакционной диффузии олова из жидкой фазы в ниобий. Толщина слоя со временем увеличивается по параболическому закону. Из температурной зависимости постоянной параболического закона определена энергия активации реакционной диффузии ($Q=18,6$ ккал/моль) и предэкспоненциальный множитель ($5 \cdot 10^{-8}$ см²/сек).

Поступило в редакцию 18.XII 1964



Т. С. РАМАНАВА, Ф. І. ФЕДАРАУ

АБ УРАЎНЕННЯХ З ВЫШЭЙШЫМІ ВЫВОДНЫМІ ДЛЯ ЭЛЕКТРАМАГНІТНАГА ПОЛЯ

Для ўстаранення цяжкасцей класічнай тэорыі, звязаных з бесканечнай энергіяй уласнага поля электрона, неаднаразова рабіліся спробы відазмянення ўраўненняў Максвела (гл., напрыклад, [1, 10] і прыведзеныя там спасылкі на арыгінальныя работы). Адною з найбольш цікавых спроб была тэорыя, прапанаваная Бопам і Падольскім, якія замянілі ўраўненні Максвела

$$\square A_\mu = -4\pi j_\mu, \quad \partial_\mu A_\mu = 0 \quad (1)$$

ураўненнямі 4-га парадку

$$\left(1 - \frac{1}{x^2} \square\right) \square A_\mu = -4\pi j_\mu, \quad \partial_\mu A_\mu = 0. \quad (2)$$

Вывучэнне ўраўненняў (2) паказвае [1], што вышэйпамянёныя цяжкасці класічнай тэорыі электрона ўстараняюцца; пры гэтым важна адзначыць, што пры выбары η дастаткова вялікім адхіленні ад звычайнай электрадынамікі праяўляюцца толькі на самых малых адлегласцях ад крыніц поля. Акрамя таго, выкарыстанне ўраўненняў (2) замест (1) у квантавай электрадынаміцы таксама дазваляе пазбавіцца ад некаторых расхадзімасцей з прычыны эквівалентнасці [2] увядзення вышэйшых выводных рэлятывісцка інварыянтнаму метаду рэгулярызацыі перастановачных функцый і функцый Грына, прапанаванаму Паулі і Віларсам [3]. Аднак пры квантаванні ўраўненняў (2) паяўляюцца новыя цяжкасці, звязаныя з тым, што для атрымання дадатна вызначанай энергіі свабоднага поля неабходна выкарыстаць індэфінітную метрыку ў гільбертавай прасторы, што ўрэшце прыводзіць да паяўлення адмоўных імавернасцей у тэорыі рассяення і тым самым да цяжкасцей у фізічнай інтэрпрэтацыі тэорыі [1, 10].

Паколькі выкарыстанне рэгулярызацыі Паулі — Віларса (і тым самым індэфінітнай метрыкі) з'яўляецца, відаць, найбольш натуральным метадам устаранення расхадзімасцей у квантавай тэорыі поля, то ўзнікае пытанне: ці заўсёды выкарыстанне індэфінітнай метрыкі будзе прыводзіць да адмоўных імавернасцей і немагчымасці фізічнай інтэрпрэтацыі тэорыі?

Адказ на гэта пытанне быў дадзены Гейзенбергам у работах, прысвечаных мадэлі Лі [5] і мадэлі нелінейнай тэорыі элементарных часціцак [6]. Гейзенберг паказаў, што, напрыклад, пры пэўным выбары зыходных пастаянных у мадэлі Лі поўная гільбертава прастора станаў сістэмы можа быць падзелена на дзве часткі: частка *HI*, якая змяшчае станы з дадатнай нормай, дапускаючыя фізічную інтэрпрэтацыю, і частка *III*,

якая змяшчае нефізічныя «ўяўныя» дыпольныя станы. Пры гэтым матрычныя элементы пераходаў з HI у III роўны нулю, што дазваляе атрымаць унітарную S -матрыцу са звычайнай імавернаснай інтэрпрэтацыяй суадносін унітарнасці. У далейшым Асколі і Мінардзі [7, 8] высветлілі агульныя ўмовы, пры выкананні якіх тэорыя з індэфінітнай метрыкай у гільбертавай прасторы дапускае фізічную інтэрпрэтацыю. Можна паспрабаваць выкарыстаць гэтыя рэзультаты Гейзенберга, Асколі і Мінардзі для такога відазмянення ўраўненняў Максвела шляхам увядзення вышэйшых выводных, пры якім матэматычная структура атрымліваемых функцый Грына была б эквівалентна структуры функцый Грына ў мадэлі нелінейнай тэорыі элементарных часцінак Гейзенберга. Магчымасць такой рэгулярызацыі функцый Грына была ўказана Віларсам [11].

Вывучэнне падобнага відазмянення ўраўненняў Максвела з'яўляецца цікавым і адносна таго, што яно дазваляе на прыкладзе лакальнай рэлятывісцка інварыянтнай тэорыі дэталёва разгледзець матэматычную структуру і фізічную інтэрпрэтацыю спосабу выкарыстання індэфінітнай метрыкі ў гільбертавай прасторы станаў, прапанаванага Гейзенбергам у нелінейнай тэорыі элементарных часцінак.

Прасцейшымі ўраўненнямі, якія задавальняюць гэтым патрабаванням, з'яўляюцца ўраўненні 6-га парадку

$$\left(1 - \frac{1}{x^2} \square\right)^2 \square A_\mu = -4\pi j_\mu, \quad \partial_\mu A_\mu = 0. \quad (3)$$

Заўважым, што ўраўненні (3) з'яўляюцца цікавымі таксама ў тых адносінах, што для свабоднага поля іх рашэнні ў выглядзе плоскіх хваль $A = A^0 e^{ikx}$, якія адпавядаюць «цяжкім фатонам» ($k^2 = -x^2$), згодна з [9], не будуць даваць укладу ў энергію і імпульс поля.

Прычинная функцыя Грына ўраўненняў (3) мае выгляд (гл., напрыклад, [4])

$$G(x) = \frac{4\pi}{(2\pi)^4 i} \int d^4 k e^{ikx} \frac{x^4}{(k^2 - i0)(k^2 + x^2 - i0)^2}. \quad (4)$$

Згодна з Гейзенбергам [6], разгледзім выраз

$$\frac{1}{i} \frac{x^4}{(k^2 - i0)(k^2 + x^2 - i0)^2} = \frac{1}{i} \left\{ \frac{1}{k^2 - i0} - \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{k^2 + 2x^2}{\alpha} \times \right. \\ \left. \times \left(\frac{1}{k^2 + x^2 - i0} - \frac{1}{k^2 + x^2 + \alpha - i0} \right) \right\}. \quad (5)$$

Першы член, сінгулярны ў пункце $k^2 = 0$, адпавядае звычайнай фатоннай функцыі распаўсюджвання, а член, сінгулярны ў пункце $k^2 = -x^2$, можа быць інтэрпрэтаваны як уклад у функцыю распаўсюджвання дыпольнага «ўяўнага» стану, утворанага з двух станаў аднолькавай масы, прычым адзін з іх мае дадатную пэўную метрыку, другі — індэфінітную метрыку.

Выраз для прычиннай функцыі Грына паказвае, што пры $k^2 \rightarrow \infty$ $G(k)$ убывае як $\frac{1}{k^6}$, што прывядзе, відавочна, да ўстаранення некаторых расхадзімасцей як у класічнай, так і ў квантавай электрадынаміцы.

Разгледзім некаторыя вывады з ураўненняў (3) у класічнай электрадынаміцы. Для гэтага зручна перайсці да сістэмы ўраўненняў 1-га парадку, эквівалентнай ураўненням (3)

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{x^2} \partial_\nu H_{\mu\nu} + \frac{1}{x^2} \partial_\nu D_{\mu\nu} - \partial_\nu F_{\mu\nu} &= -4\pi j_\mu, \\ \partial_\nu A_\mu - \partial_\mu A_\nu + F_{\mu\nu} &= 0, \\ \partial_\nu F_{\mu\nu} + B_\mu &= 0, \\ \partial_\nu B_\mu - \partial_\mu B_\nu + D_{\mu\nu} &= 0, \\ \frac{1}{x^2} \partial_\nu D_{\mu\nu} - \partial_\nu F_{\mu\nu} - C_\mu &= 0, \\ \partial_\nu C_\mu - \partial_\mu C_\nu + H_{\mu\nu} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Сістэма (6) можа быць атрымана з дапамогай варыяцыйнага прынцыпа з функцыі Лагранжа

$$\begin{aligned} L(x) &= \frac{1}{8\pi} \left(\frac{1}{x^2} H_{\mu\nu} + \frac{1}{x^2} D_{\mu\nu} - F_{\mu\nu} \right) (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) + \\ &+ \frac{1}{8\pi x^2} F_{\mu\nu} (\partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu) + \frac{1}{8\pi x^2} F_{\mu\nu} (\partial_\mu C_\nu - \partial_\nu C_\mu) - \\ &- \frac{1}{8\pi x^2} D_{\mu\nu} (\partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu) + \frac{1}{16\pi} F_{\mu\nu} F_{\mu\nu} - \frac{1}{8\pi x^2} F_{\mu\nu} D_{\mu\nu} - \\ &- \frac{1}{8\pi x^2} F_{\mu\nu} H_{\mu\nu} + \frac{1}{16\pi x^2} D_{\mu\nu} D_{\mu\nu} + \frac{1}{4\pi x^2} B_\mu C_\mu - j_\mu A_\mu. \end{aligned} \quad (7)$$

З (7) лёгка знаходзіцца звычайным шляхам тэнзар энергіі-імпульсу свабоднага поля ($j_\mu = 0$)

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu} &= L \delta_{\mu\nu} - \frac{1}{4\pi} \left\{ -F_{\mu\rho} F_{\nu\rho} - \frac{1}{x^4} D_{\mu\rho} D_{\nu\rho} + \frac{1}{x^2} (F_{\mu\rho} D_{\nu\rho} + F_{\nu\rho} D_{\mu\rho}) + \right. \\ &\left. + \frac{1}{x^2} (F_{\mu\rho} H_{\nu\rho} + F_{\nu\rho} H_{\mu\rho}) + \frac{1}{x^2} (B_\mu C_\nu + B_\nu C_\mu) \right\}. \end{aligned} \quad (8)$$

Патэнцыял поля, ствараемага пунктавай статычнай крыніцай, як лёгка бачыць з (3), мае выгляд

$$A_4(r) = \frac{ie}{r} \left[1 - e^{-xr} \left(1 + \frac{xr}{2} \right) \right], \quad (9)$$

дзе e — зарад крыніцы. Энергія гэтага поля канечная і роўная

$$E = - \int T_{44} dr = \frac{e^2 x}{4}. \quad (10)$$

Акрамя таго, энергія і імпульс поля, утвараемага пунктавай крыніцай, утварае правільны 4-вектар ($\int T_{11} dr = 0$), г. зн. пераход ад ураўненняў (2) да ўраўненняў (3) не выключае магчымасці чыста палявога паходжання масы электрона.

Выкананне ўмоў тэарэмы Лауэ паказвае, што ўклад энергіі электрамагнітнага поля ў масу спакою электрона павінен быць роўны выразу (10) (пры павольных рухах электрона). На самай справе, разгледзім ураўненні руху электрона з улікам сілы самадзеяння. Лёгка бачыць, што сіла, якая дзейнічае на электрон у пункце z у момант часу t з боку

яго ўласнага поля, вылічаная з дапамогай спазняючайся функцыі Грына, мае выгляд

$$F_c = \frac{e^2 z^3}{4} \int_{-\infty}^t dt' \frac{z(t) - z(t') - \dot{z}(t')(t-t')}{V(t-t')^2 - (z(t) - z(t'))^2} \theta(t-t' - |z(t) - z(t')|) \times \\ \times \{J_1(x\sqrt{(t-t')^2 - (z(t) - z(t'))^2}) - J_3(x\sqrt{(t-t')^2 - (z(t) - z(t'))^2})\}. \quad (11)$$

Тут дапускаецца, што электрон рухаецца ўздоўж восі z , і разглядаецца нерэлятывісцка гранічны выпадак. Ва ўраўненні (11)

$$\theta(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x < 0; \end{cases} \quad (12)$$

$J_1(\xi)$ і $J_3(\xi)$ — функцыі Беселя.
Ураўненне руху

$$m \ddot{z} = F_i + F_c, \quad (13)$$

дзе F_i — знешняя сіла, з'яўляецца інтэгра-дыферэнцыяльным. Калі дапусціць, што электрон рухаецца ў абмежаванай вобласці малых размераў, то можна лінеарызаваць гэта ўраўненне і рашыць яго з дапамогай пераўтварэння Фур'е. Пры малых частотах хістанняў электрона ўраўненне Фур'е-вобраза каардынаты $z(t)$ прымае выгляд

$$-\left(m + \frac{e^2 z}{4}\right) \omega^2 \xi(\omega) = F_i(\omega) - \frac{2}{3} i e^2 \omega^3 \xi(\omega). \quad (14)$$

Адсюль відаць, што ўклад энергіі поля ў масу спакою электрона на самай справе роўны выразу (10), а сіла праменнага трэння мае звычайны выгляд. Апошняе адпавядае вядомым сцвярджэнням [1], што выраз для сілы праменнага трэння для павольных рухаў не павінен залежаць ад дэталей структуры электрона.

Для ілюстрацыі цяжкасцей, узнікаючых у тэорыі, заснаванай на ўраўненнях (3), разгледзім поле, утвараемае гарманічна хістаючымся электронам. Калі выкарыстаць спазняючуюся функцыю Грына, то патэнцыялы поля, утвараемага электронам, які рухаецца ўздоўж восі z па закону $z = a \cos \omega t$, на вялікіх адлегласцях ад электрона можна будзе запісаць у выглядзе

$$A_1 = A_2 = 0,$$

$$A_3 = -ea\omega \left[\frac{\sin \omega(t-r)}{r} - \frac{\sin(\omega t - r\sqrt{\omega^2 - x^2})}{r} + \right. \\ \left. + \frac{x^2}{2\sqrt{\omega^2 - x^2}} \cos(\omega t - r\sqrt{\omega^2 - x^2}) \right], \\ A_1 = -iea \frac{z}{r} \left\{ \frac{1}{r^2} \cos \omega(t-r) - \frac{\omega}{r} \sin \omega(t-r) + \frac{x^2}{2} \cos(\omega t - r\sqrt{\omega^2 - x^2}) - \right. \\ \left. - \frac{\sqrt{\omega^2 - x^2}}{r} \sin(\omega t - r\sqrt{\omega^2 - x^2}) + \frac{1}{r^2} \cos(\omega t - r\sqrt{\omega^2 - x^2}) \right\}. \quad (15)$$

Пры гэтым дапускаецца, што $\omega > x$. З выказаў (15) вынікае, што поле мае кампаненты, не ўбываючыя з адлегласцю, якім цяжка прыдаць які-

небудзь фізічны сэнс. Трэба адзначыць, што ўзнікаючая цяжкасць мае той жа характар, што і ў тэорыі Гейзенберга [5, 6]. З прычыны гэтых абставін трэба налажыць умову, якая забараняе выпраменьванне такога поля. У класічным выпадку мы можам дасягнуць гэтага, узяўшы для часткі функцыі Грына, якая абумоўлівае паяўленне нефізічнага поля, паўсуму спазняючыхся і апярэджваючых патэнцыялаў (параўн. [1]). Пры гэтай умове функцыя Грына можа быць запісана ў выглядзе

$$G(x) = \frac{x^2}{2} \theta(t)\theta(t-r)J_2(x\sqrt{t^2-r^2}) + \frac{x^2}{4} \theta(t)\theta(t-r)J_0(x\sqrt{t^2-r^2}) - \frac{x^2}{4} \theta(-t)\theta(-t-r)J_0(x\sqrt{t^2-r^2}). \quad (16)$$

Вылічэнне поля гарманічна хістаючагася электрона з дапамогай функцыі Грына (16) і затым вылічэнне патоку выпраменьвальнай энергіі прыводзіць да наступнага рэзультату:

$$P = \frac{2}{3} e^2 a^2 \omega^4, \quad (17)$$

г. зн. выпраменьваюцца толькі звычайныя электрамагнітныя хвалі. Гэта заключэнне з'яўляецца агульным: забарона параджэння нефізічнага поля прыводзіць да таго, што ўклад у выпраменьвальную энергію дае толькі звычайнае электрамагнітнае поле. Адзначым, што выкарыстанне функцыі Грына (16) замест спазняючайся функцыі Грына пры разглядзе ўраўнення руху пры апісаных вышэй умовах уноў прыводзіць да ўраўнення (14).

Атрыманыя вывады з ураўненняў (3) для класічнай электрадынамікі адпавядаюць рэзультатам квантавага разгляду ўраўненняў (3), што складзе змест наступнага артыкула.

ЛІТАРАТУРА

1. Иваненко Д., Соколов А. Классическая теория поля. Гостехиздат, 1951.
2. Иваненко Д., Григорьев В. ЖЭТФ, 21, 563, 1951.
3. Pauli W. and Villars F. Rev. Mod. Phys., 21, 434, 1949.
4. Боголюбов Н., Ширков Д. Введение в теорию квантованных полей. Гостехиздат, 1957.
5. Heisenberg W. Nucl. Phys., 4, 532, 1957.
6. Heisenberg W. Zs. f. Phys., 144, 1, 1956.
7. Ascoli R., Minardi E., Nuovo Cim., 8, 951, 1958.
8. Ascoli R., Minardi E. Nucl. Phys., 9, 242, 1958.
9. Федоров Ф. И. ДАН СССР, 79, 787, 1951.
10. Pais A., Uhlenbeck G. Phys. Rev., 79, 145, 1950.
11. Вилларс Ф. Сб. «Теоретическая физика 20 века». ИЛ, 1962.

Резюме

Обсуждается возможность регуляризации в электродинамике путем замены уравнений Максвелла уравнениями 6-го порядка

$$\left(1 - \frac{1}{x^2} \square\right)^2 \square A_\mu = -4\pi j_\mu, \quad \partial_\mu A_\mu = 0. \quad (3)$$

Как известно, регуляризация Паули — Вилларса (эквивалентная введению высших производных в уравнения поля) требует использования индефинитной метрики в гильбертовом пространстве состояний поля при квантовании, что приводит, вообще говоря, к появлению отрицательных вероятностей в теории и тем самым к трудностям в физической интерпретации. Рассмотрение уравнений типа (3) представляет интерес, поскольку гильбертово пространство состояний такого поля обладает свойствами, аналогичными

свойствам гильбертова пространства, рассмотренного Гейзенбергом на примере модели Ли и нелинейной теории элементарных частиц. Это следует, например, из того, что 4-мерный Фурье-образ функции Грина имеет вид

$$G(k) = \frac{4\pi}{i} \frac{1}{(k^2 - i0) \left(1 + \frac{k^2}{\alpha^2} - i0\right)^2} = \frac{4\pi}{i} \left\{ \frac{1}{k^2 - i0} - \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{k^2 + 2\alpha^2}{\alpha} \times \right. \\ \left. \times \left(\frac{1}{k^2 + \alpha^2 - i0} - \frac{1}{k^2 + \alpha^2 + \alpha - i0} \right) \right\}. \quad (5)$$

Первый член, сингулярный в точке $k^2=0$, соответствует обычной фотонной функции распространения, а член, сингулярный в точке $k^2=-\alpha^2$, может быть интерпретирован как вклад в функцию распространения дипольного «призрачного» состояния, образованного из двух состояний одинаковой массы, причем одно из них имеет положительно определенную метрику, другое — индефинитную метрику. Таким образом, изучение подобного видоизменения уравнений Максвелла позволяет на примере локальной релятивистски инвариантной теории детально рассмотреть математическую структуру и физическую интерпретацию способа использования индефинитной метрики в гильбертовом пространстве состояний, предложенного Гейзенбергом в нелинейной теории элементарных частиц. Следует отметить также, что при выборе решения в виде плоских волн «тяжелые» кванты ($k^2 = -\alpha^2$) дают нулевой вклад в энергию и импульс поля [9].

Рассматриваются классические следствия уравнения (3). Потенциал поля, создаваемого точечным статистическим источником, оказывается конечным при $r \rightarrow 0$ и кулоновским при $r \rightarrow \infty$:

$$A_4(r) = \frac{ie}{r} \left[1 - e^{-\alpha r} \left(1 + \frac{\alpha r}{2} \right) \right]. \quad (9)$$

Энергия этого поля конечна и равна

$$E = - \int T_{44} d\mathbf{r} = \frac{e^2 \alpha}{4}. \quad (10)$$

Кроме того, выполнение условий теоремы Лауэ обеспечивает стабильность точечного заряда и показывает, что вклад энергии поля в массу покоя электрона должен быть равен выражению (10) (при медленных движениях электрона). Действительно, уравнение движения электрона с учетом силы самодействия, вычисленной с помощью запаздывающей функции Грина, имеет вид

$$m \ddot{z} = F_i + \frac{e^2 \alpha^3}{4} \int_{-\infty}^t dt' \frac{z(t) - z(t') - \dot{z}(t')(t-t')}{\sqrt{(t-t')^2 - (z(t) - z(t'))^2}} \Theta(t-t' - |z(t) - z(t')|) \times \\ \times \left\{ J_1(\alpha \sqrt{(t-t')^2 - (z(t) - z(t'))^2}) - J_3(\alpha \sqrt{(t-t')^2 - (z(t) - z(t'))^2}) \right\}, \quad (13)$$

(предполагается, что электрон движется вдоль оси z и рассматривается нерелятивистский предельный случай). Уравнение движения (13) представляет собой интегро-дифференциальное уравнение, которое можно линеаризовать, если предположить, что движение происходит в ограниченной области малых размеров. При малых частотах колебаний электрона уравнение для Фурье-образа координаты $z(t)$ принимает вид

$$-\left(m + \frac{e^2 \alpha}{4} \right) \omega^2 \xi(\omega) = F_i(\omega) - \frac{2}{3} i e^2 \omega^3 \xi(\omega). \quad (14)$$

Для иллюстрации трудностей, возникающих в теории, основанной на уравнениях (3), рассматривается поле, создаваемое гармоническим осциллятором. Если использовать запаздывающую функцию Грина, то потенциалы поля, создаваемого гармонически колеблющимся вдоль оси z электроном на больших расстояниях от электрона (см. (15)), имеют компоненты, не убывающие с расстоянием, которым трудно придать какой-либо физический смысл. В силу этого обстоятельства следует наложить условие, запрещающее излучение такого поля. В классическом случае мы можем добиться этого, взяв для части функции Грина, обуславливающей появление нефизического поля, полусумму запаздывающих и опережающих потенциалов (ср. [1]). При этом условии функция Грина может быть записана в виде

$$G(x) = \frac{\kappa^2}{2} \Theta(t) \Theta(t-r) J_2(\kappa \sqrt{t^2-r^2}) + \frac{\kappa^2}{4} \Theta(t) \Theta(t-r) J_0(\kappa \sqrt{t^2-r^2}) - \\ - \frac{\kappa^2}{4} \Theta(-t) \Theta(-t-r) J_0(\kappa \sqrt{t^2-r^2}). \quad (16)$$

Вычисление поля гармонически колеблющегося электрона с помощью (16) и потока излучаемой энергии приводит к следующему результату:

$$P = \frac{2}{3} e^2 a^2 \omega^4, \quad (17)$$

т. е. излучаются только обычные электромагнитные волны.

Это заключение является общим: запрещение порождения нефизического поля приводит к тому, что вклад в излучаемую энергию дает только обычное электромагнитное поле. Отметим, что использование функции Грина (16) вместо запаздывающей функции Грина при рассмотрении уравнения движения при описанных выше условиях опять приводит к уравнению (14).

Полученные следствия уравнений (3) для классической электродинамики соответствуют результатам квантового рассмотрения этих уравнений, что составит содержание следующей статьи.

Поступило в редакцию 24.III 1965

А. П. ІВАНОУ, К. Р. ПРЭДКА

ЭКСПЕРЫМЕНТАЛЬНАЕ ВЫВУЧЭННЕ РАЗМЫЦЦЯ ВУЗКАГА ПУЧКА СВЯТЛА У РАССЕЙВАЮЧЫМ ЭКРАНЕ

Скажэнне перадаваемага аптычнымі прыладамі вобраза адбываецца ў асноўным двума этапамі: пры перадачы яго аб'ектывам або іншым праецыруючым элементам і пры фарміраванні канчатковай карціны ўспрымаючым экранам. Сумарныя змяненні ў вобразе можна ацаніць, калі разглядаць эфекты, што адбываюцца на кожным этапе паасобку. Асабліва цікавым з'яўляецца вывучэнне ўласцівасцей рознага роду светарассейваючых плоскапаралельных слаёў, прымяняемых у якасці прымаючых элементаў аптычных прылад. Гэта могуць быць фатаграфічныя эмульсіі, структурныя люмінесцыруючыя слаі, светатэхнічныя малочныя і матавыя экраны. Пры праходжанні праз іх светавога пучка адбываюцца элементарныя працэсы адбіцця і праламлення радыяцыі на часцінках слоя. Яны прыводзяць да таго, што канчаткова сфарміраваная на экране прылады карціна будзе істотна адрознівацца ад перадаваемай. Таму разгляд пытання аб размыцці патокаў радыяцыі ў плоскапаралельным слоі рассейваючага асяроддзя мае вялікае значэнне пры вывучэнні праблем, звязаных з якасцю аптычнага вобраза, перадачай дробных дэталей назіраемай карціны, інфармацыйнай здольнасцю сістэмы і г. д.

Для характарыстыкі якасці аптычных прылад і ўспрымаючых экраннаў звычайна прымяняюць велічыню вырашаючай здольнасці R . Яна вызначаецца пры разглядзе вобраза стандартнага штрыховага тэст-аб'екта, перададзенага вывучаемай сістэмай [1]. Колькасна значэнне R роўнае найбольшай частаце ліній, якія яшчэ відаць раздзельна. Аднак прымяненне аднаго толькі значэння вырашаючай здольнасці ў многіх выпадках прыводзіць да няправільных вывадаў. Таму ў цяперашні час [2, 3] для дакладнай ацэнкі якасці аптычных прылад выкарыстоўваюць іншыя, больш падрабязныя характарыстыкі: функцыю рассеяння лініі або пункта, частотна-кантрастную характарыстыку, функцыю размеркавання светавой энергіі ў адлюстраванні краю паўплоскасці. Усе яны ўзаемнаабарачальныя і могуць прымяняцца як для апісання перадаючых і ўспрымаючых элементаў аптычнай прылады кожнага паасобку, так і для іх сумеснага апісання. Мэтазгоднасць выкарыстання гэтых характарыстык залежыць ад пастаўленай задачы. Для неперыядычных аб'ектаў і пры вывучэнні якасці перадачы дробных дэталей вобраза больш зручна прымяняць функцыю рассеяння вузкай лініі або пункта, для перыядычных — частотна-кантрастную характарыстыку.

У рамках тэорыі пераносу строга пастаноўка задачы ў распаўсюджванні вузкага пучка радыяцыі ў светарассейваючым асяроддзі прыводзіць да інтэгра-дыферэнцыяльнага ўраўнення. Яго рашэнне нават пры меркаванні поўнай ізатропнасці рассеяння атрымліваецца вялікім і складаным [4]. У дапасаванні да канкрэтнага асяроддзя—слоя фатагра-

фічнай эмульсіі — рашэнне ўраўнення пераносу ў дыфузійным наблі-
 жэнні дае дастаткова простыя рэзультаты [5—7]. Аналіз іх дазваляе вы-
 светліць уплыў розных канкрэтных уласцівасцей фотаслаёў на якасць
 атрымліваемага вобраза. У серыі работ Фрызера [7—9] па вывучэнню
 функцыі рассеяння вузкага пучка святла ў фотаэмульсіях гэтыя рэзуль-
 таты атрымалі эксперыментальнае пацвярджэнне. Для слаёў жа, утво-
 раных буйнымі часцінкамі, якія маюць ярка выражаныя анізатропныя
 індэкатырысы рассеяння, да гэтага часу не атрымана даволі простага

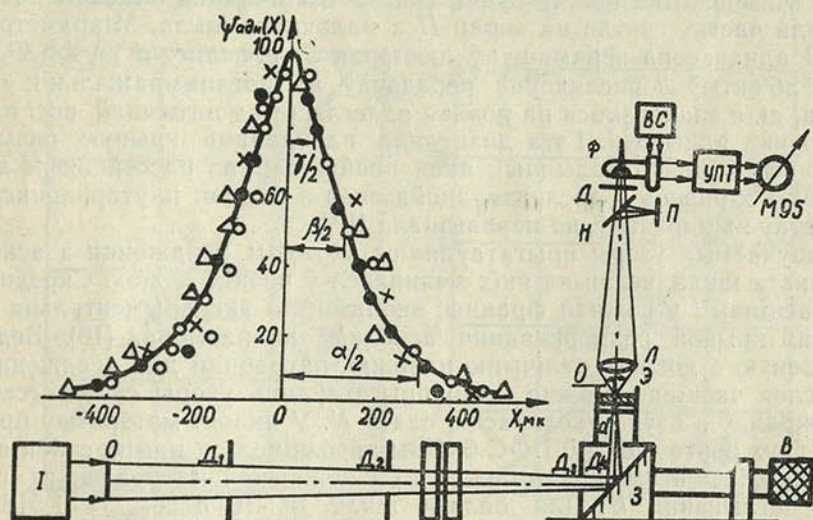


Рис. 1. Прынцыповая схема эксперыментальнай устаноўкі і залежнасць
 Ψ ад даўжыні хвалі λ падаючага святла:
 ●—405 мμ; ○—436; ×—546; △—578

рашэння ўраўнення пераносу. Эксперыментальнае вывучэнне распаў-
 сюджвання вузкага пучка радыяцыі ў буйнадысперсных асяроддзях
 таксама не праводзілася. У той жа час разгляд гэтай праблемы ады-
 грывае вялікую ролю пры даследаванні пытання аб перадачы вобраза
 буйназярністымі фотаслаямі і структурнымі тэлеэкранамі, якія шырока
 выкарыстоўваюцца ў розных галінах навукі і тэхнікі.

Эксперыментальная ўстаноўка і ўзоры для даследавання. У дадзенай
 працы прыведзена эксперыментальнае вывучэнне формы функцыі рас-
 сеяння вузкага паралельнага пучка радыяцыі пры праходжанні ім пло-
 скага буйназярністага слоя. Для гэтай мэты выкарыстоўвалася вымя-
 ральная ўстаноўка, прынцыповая оптыка-механічная схема якой пры-
 ведзена на рис. 1. Крыніцай святла O служыла газасветная лампа тыпу
 ПРК-4, сілканне якой ажыццяўлялася пастаянным токам ад выпрам-
 ніка I . Пры дапамозе нейтральнага светафільтра S_1 магутны паток
 святла можна было ў патрэбнай ступені аслабіць, а фільтрам S_2 выдз-
 ліць вузкую спектральную паласу ў выпраменьванні пары ртуці. Абме-
 жавальныя дыфрагмы D_1, D_2, D_3, D_4 дазвалялі стварыць амаль пара-
 лельны пучок радыяцыі са сходнасцю менш 3° . Яго шырыня вызнач-
 лася размерам шчыліны d , роўным 38 мμ. Далей святло падала на ўзор
 E — слой расейваючых часцінак на пакрыўным мікраскопным шкле.
 Пры вымярэннях прымяняўся мікраскопны аб'ектыў L з павелічэннем
 $\times 36$. Сфакусіраваны на паверхню экрана E , ён перадаваў светавы па-
 ток з фотаметрыруемага ўчастка шырынёй 30 мμ на фотакатод фота-
 электроннага памнажальніка Φ тыпу ФЭУ-17. Размер прыёмнай пля-

цоўкі, на якую падала святло, вызначаўся шырынёй шчыліны D , роўнай 1 мм . Цялесны вугал, у якім успрымалася выходзячая, рассеяная ўзорам радыяцыя, вызначаўся вуглом θ , які роўны прыкладна 45° . Фотапамнажальнік сілкаваўся ад высакавольтнага электроннага стабілізатара ВС. Сігнал ад ФЭУ паступаў на ўзмацняльнік пастаяннага току УПТ, першы каскад якога сабраны на электраметрычнай лампе. Мікраамперметр М95 рэгістраваў велічыню ўзмоцненага сігналу. Для візуальнага кантролю за факусіроўкай аб'ектыва L на паверхню ўзору \mathcal{E} і пры юстыроўцы ўстаноўкі на шляху пучка святла змяшчалася пласцінка H . Яна адбівала частку святла на экран Π з малочнага шкла. Мікраметрычны вінт B адначасова перамяшчаў люстэрка Z , шчыліну d і ўзор \mathcal{E} . Пры гэтым аб'ектыў L паслядоўна перадаваў на фотапамнажальнік патокі святла, якія знаходзіліся на рознай адлегласці ад аптычнай восі падаючага пучка радыяцыі. Гэта дазваляла пабудаваць крывую размеркавання асветленасці радыяцыі, якая прайшла праз рассеяваючы экран. Адносная хібнасць у доследзе, знойдзеная з ацэнак паўтаральнасці рэзультатаў вымярэнняў, не перавышала 10% .

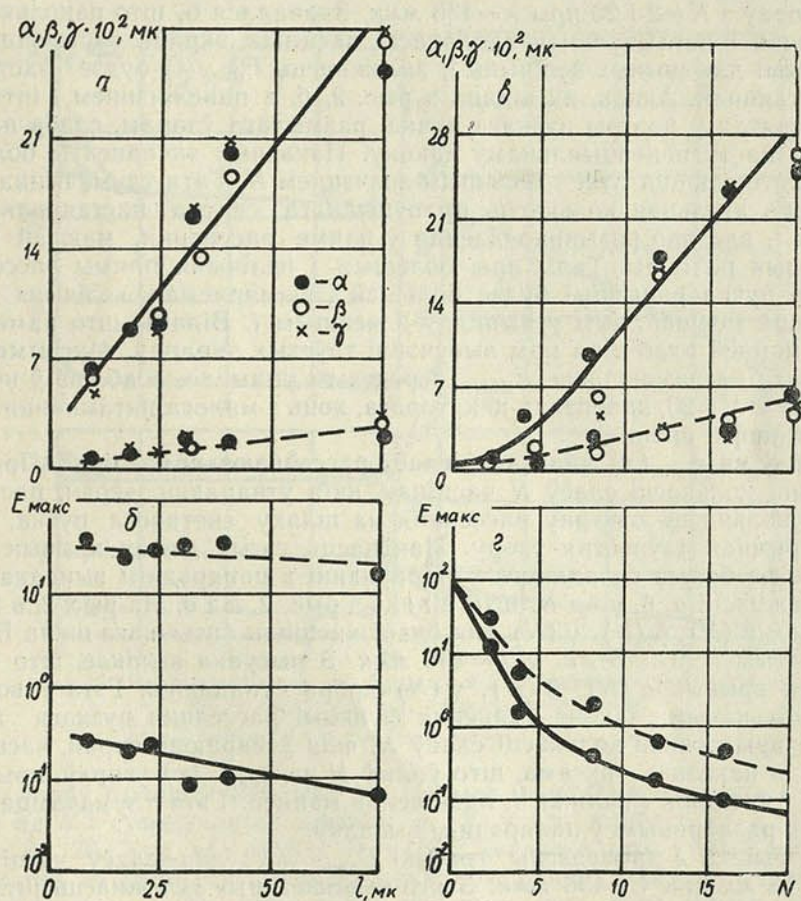
Вывучаемыя ўзоры прыгатаўляліся метадам асаджэння з асколкаў аптычнага шкла, велічыня якіх змянялася ў вузкіх межах. Сярэдні размер часцінак l у кожнай фракцыі знойдзен па эксперыментальна пабудаванай крывой размеркавання асколкаў па размерах [10]. Ведаючы знойдзеную з доследу велічыню наважкі, патрэбнай для асаджэння аднаго слоя часцінак, можна было прыгатаўляць узоры светарассейваючых экранаў з пэўнай колькасцю слаёў N . У якасці матэрыялу бралася шкло двух сартоў: БС-10 і ФС-6. Яны адрозніваліся паміж сабой адноснымі каэфіцыентамі праламлення n_λ і велічынёй натуральнага паказчыка паглынання k' . Для белага шкла БС-10 $n_{\lambda=578 \text{ мкм}} = 1,518$, а k' вельмі малы ў бачымай вобласці спектра. Фіялетавае шкло ФС-6 мае $n_{\lambda=578 \text{ мкм}} = 1,495$ і пераменлівае па спектру значэнне k' . З усяго сказанага вышэй вынікае, што можна было атрымаваць узоры з вядомымі значэннямі N , l і k' , якія ў асноўным поўнасцю вызначаюць рассеяваючы ўласцівасці экранаў.

Функцыя рассеяння вузкага пучка святла пры рознай λ . Рассеянне святла сферычнымі часцінкамі пры значэннях параметра $\rho = \pi l / \lambda \gg 1$ перастае залежаць ад іх сярэдняга размеру l і даўжыні хвалі λ падаючай радыяцыі. У набліжэнні геаметрычнай оптыкі гэта залежнасць наогул не ўлічваецца. Сапраўды, для вадзяной кроплі з $\rho = 60$ розніца паміж значэннямі колькасці рассеянага святла, знойдзенымі пры разліку па такому набліжанаму метаду, і строгай тэорыяй Мі не перавышае $10\text{--}15\%$ [11]. У выпадку часцінак няправільнай формы можна меркаваць толькі якаснае падабенства з гэтай з'явай. У звычайных фатаграфічных сляях, дзе за рассеянне святла ў эмульсіі адказныя ўзважаныя ў жэлаціне крышталі бромістага серабра, велічыня ρ змяняецца ў бачымай вобласці спектра прыкладна ад $0,2$ да 20 . Пры такіх значэннях ρ уплыў гэтага параметра вельмі істотны на рассеянне радыяцыі фотэмульсійнымі сляямі [12]. Для велічыні ρ часцінак няправільнай формы важна ведаць прыкладную мяжу, для якой ужо не будзе падобнага эфекта.

На рыс. 1 прадстаўлена тыповая адносная функцыя рассеяння вузкага пучка святла $\psi_{\text{адн}}(x)$. Велічыня максімума крывой нарміравана да 100 . Для характарыстыкі віда $\psi_{\text{адн}}(x)$ тут і далей узяты значэнні яе шырыні α , β , γ пры ардынатах, роўных адпаведна 10 , 50 , 80 . Рыс. 1 паказвае значэнні $\psi_{\text{адн}}(x)$ пры праходжанні вузкага пучка святла з рознымі значэннямі λ праз экран з часцінак шкла БС-10 з колькасцю слаёў $N=2$ і 20 і сярэднім размерам $l = 9 \text{ мкм}$. У дадзеным выпадку са змя-

неннем λ ад 578 да 405 мкм (ρ мяняецца ад 49 да 70) значэнні N , l і k' заставаліся нязменнымі. З рыс. 1 відаць, што для розных λ форма $\psi_{адн}(x)$ застаецца практычна пастаяннай. Гэта гаворыць аб тым, што расейваючыя ўласцівасці дысперсных слаёў, утвораных часцінкамі няправільнай формы пры $\rho = \pi l/\lambda$ парадку 50 і вышэй, не залежаць ад λ у бачымай і ультрафіялетавай абласцях спектра.

Залежнасць функцыі $\psi_{адн}(x)$ ад сярэдняга памеру часцінак слоя l . Як было толькі што высветлена, пры $l > 9$ мкм расейнае святла экранамі аднолькавае для розных λ . Але функцыя размыцця вузкага пучка



Рыс. 2. Залежнасць α , β , γ , E_{\max} ад l , N часцінак расейваючага слоя.

Штрыхавыя лініі адносяцца да слаёў з $N=2$ (а і б), $l=9$ мкм (в і г); суцэльныя— $N=20$ (а і б), $l=75$ мкм (в і г)

радыяцыі са змяненнем l будзе мець розную шырыню, калі значэнні N і k' аднолькавыя. Гэта звязана з павелічэннем геаметрычнай таўшчыні ўзора, што прыводзіць да значнага размыцця праходзячага праз слой святла. Такое разважанне ілюструецца рыс. 2, а. На ім паказана залежнасць значэнняў α , β , γ пры змяненні l ва ўзорах з БС-10 з $N=2$ і 20 і $\lambda = 436$ мкм. Для параўнання адноснага ходу крывых $\beta(l)$ і $\gamma(l)$ яны сумешчаны з $\alpha(l)$ памнажэннем іх ардынат на пастаянную колькасць. Як відаць з рыс. 2, а, $\alpha(l)$, $\beta(l)$, $\gamma(l)$ дастаткова добра супадаюць паміж сабой. Гэта гаворыць аб тым, што характар размыцця вуз-

кага пучка радыяцыі расейваючым слоём застаецца аднолькавым пры розным сярэднім размеры l утвараючых яго часцінак. Супадзенне сумешчаных крывых $\alpha(l)$, $\beta(l)$, $\gamma(l)$ паказвае таксама, што пры павелічэнні l суадносіны параметраў α , β , γ застаюцца пастаяннымі. Уплыў на пашырэнне функцыі расейвання $\psi_{адн}(x)$ больш прыкметна праяўляецца, як вынікае з рыс. 2, а, у тоўстых, мнагаслойных экранах.

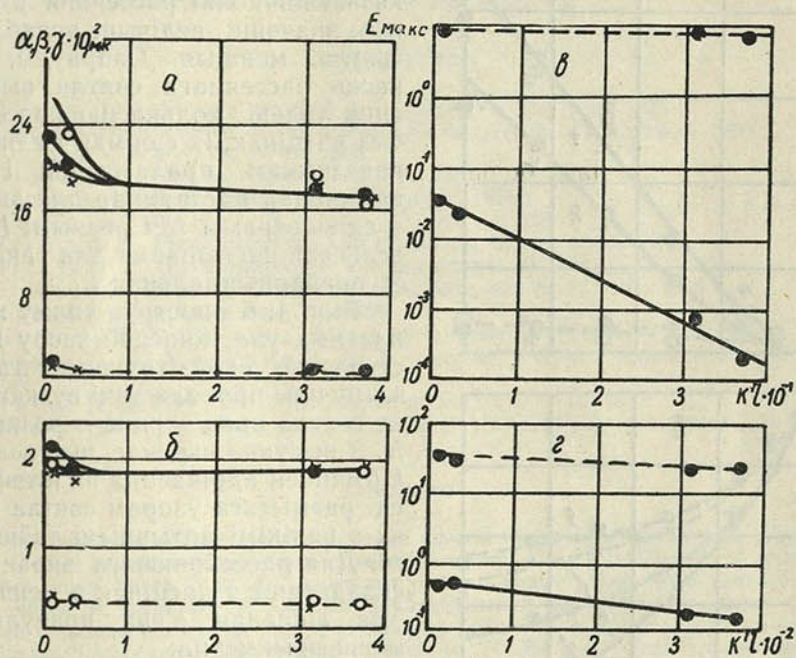
На рыс. 2, б прыведзены графікі залежнасці ад l значэнняў асветленасці $E_{макс}$ (у адносных адзінках у лагарыфмічным маштабе) у цэнтры плямы размыцця вузкага пучка радыяцыі. Гэтыя крывыя пабудаваны для ўзораў з $N=2$ і 20 пры $\lambda=436$ мкм. Здавалася б, што паколькі расейваючая і паглынальная здольнасці часцінак экрана застаюцца пастаяннымі для розных велічынь l , залежнасць $E_{макс}(l)$ будзе заставацца пастаяннай. Аднак, як відаць з рыс. 2, б, з павелічэннем l інтэнсіўнасць святла ў цэнтры вузкага пучка, размытага ўзорам, слаба памяншаецца па экспаненцыяльнаму закону. Паказчык экспаненты большы, калі разглядаюцца слаі з большым значэннем N . Гэта тлумачыцца тым, што хоць агульная колькасць прапушчанага святла пастаянная пры розных l , але яно размяркоўваецца ў пляме расейвання, маючай неаднолькавыя размеры. Тады пры большым l велічыня плямы расейвання вузкага пучка радыяцыі будзе большай і вымяраемая велічыня $E_{макс}$ акажацца меншай, чым у выпадку з меншым l . Відаць, што памянёны эфект мацней адаб'ецца пры вывучэнні тоўстых экранаў. Магчыма таксама, што на памяншэнне $E_{макс}$ з ростам l уплывае, асабліва ў выпадку ўзору з $N=20$, наяўнасць некаторага, хоць і малага паглынання святла часцінкамі шкла.

Уплыў на $\psi_{адн}(x)$ колькасці слаёў расейваючых часцінак. Пры павелічэнні колькасці слаёў N часцінак, якія ўтвараюць экран, расце не толькі колькасць цэнтраў расейвання на шляху светавага пучка, але і геаметрычная таўшчыня ўзору. Наяўнасць гэтых дзвюх прычын прыводзіць да больш складанага ў параўнанні з папярэднім выпадкам ходу залежнасці α , β , γ ад N , што відаць з рыс. 2, а і в. На рыс. 2, в прадстаўлены $\alpha(N)$, $\beta(N)$, $\gamma(N)$ для слаёў часцінак аптычнага шкла БС-10. Пры гэтым $l=9$ і 75 мкм, а $\lambda=436$ мкм. З рысунка вынікае, што сумешчаныя крывыя $\alpha(N)$, $\beta(N)$, $\gamma(N)$ добра супадаюць. Гэта гаворыць аб аднолькавым законе змянення функцыі расейвання вузкага пучка святла пры рознай колькасці слаёў N , якія ўтвараюць экран, часцінак. Рыс. 2, в паказвае таксама, што ўплыў N на $\psi_{адн}(x)$ узораў, прыгатованых з часцінак з вялікай l , адбіваецца мацней. Гэта тлумачыцца прычынамі, разабранымі ў папярэднім выпадку.

На рыс. 2, г прыведзены графікі $E_{макс}(N)$ для слаёў часцінак з $l=9$ і 75 мкм пры $\lambda=436$ мкм. З яго вынікае, што залежнасць інтэнсіўнасці прайшоўшага слой вузкага пучка святла ад N мае складаны характар. Калі колькасць слаёў N расейваючых часцінак малая, яна змяняецца па экспаненцыяльнаму закону з вялікім затуханнем. З ростам N інтэнсіўнасць прайшоўшага праз узор пучка святла зніжаецца таксама па экспаненце, але паказчык ступені для яе меншы. Падобныя з'явы назіраюцца пры размыцці вузкага пучка радыяцыі ў розных светарасейваючых асяроддзях [13, 14], дзе такія эфекты характэрны пры наступленні так званага «квазіглыбіннага» рэжыму. Па аналогіі рэжым расейнага светавага поля ў размытым, выйшаўшым з даволі мутнага, тоўстага ў аптычных адносінах слоя вузкім пучку радыяцыі можна назваць «квазітаўшчынным».

Уплыў паглынальных уласцівасцей на функцыю расейвання вузкага пучка святла. Усе апісаныя вышэй рэзультаты адносіліся да светарасейваючых слаёў, якія складаюцца з часцінак белага, амаль не паглы-

наючага ў бачымай вобласці спектра шкла БС-10. Відаць, што пры наяўнасці ва ўзоры істотнага значэння натуральнага паказчыка паглынання k' якасная залежнасць функцыі рассеяння вузкага пучка радыяцыі ад l і N не зменіцца. Таму ўсе раней прыведзеныя вывады справядлівыя і ў выпадку, калі экраны валодаюць пэўнай паглынальнай здольнасцю, г. зн. калі $k' > 0$. Разам з тым зразумела, што ва ўзорах з адрозніваючайся ад нуля велічыней k' колькасць ход залежнасці $\psi_{\text{адн}}$ ад l і N зменіцца. Экраны з $k' \neq 0$ прыгатаўляліся, як адзначалася раней, з часцінак фіялетавага шкла ФС-6. У якасці меры паглынальнай здоль-

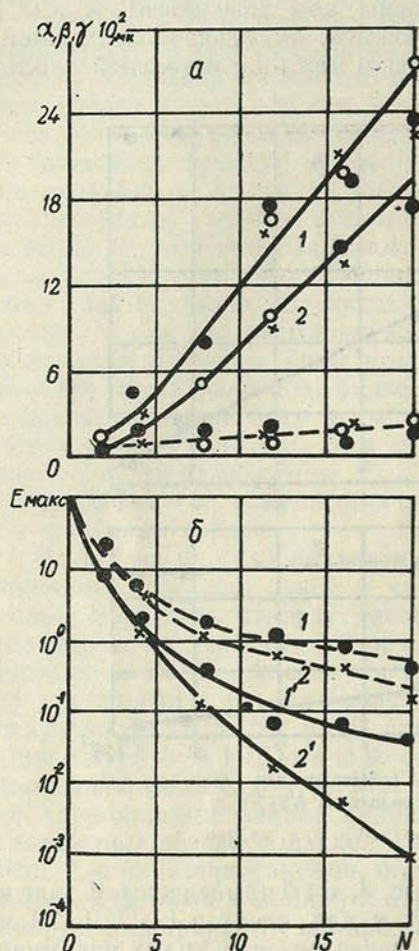


Рыс. 3. Залежнасць α , β , γ , $E_{\text{макс}}$ ад $k'l$. Штрыхавыя лініі адносяцца да слаёў з $N=2$, суцэльныя—з $N=20$;

a і в — $l=70$ мк; б і г — $l=7$ мк; абазначэнні α , β , γ , гл. рыс. 2

насці ўзору бралася велічыня $k'l$. На рыс. 3, a і б прыведзены ў залежнасці ад $k'l$ сумешчаныя крывыя α , β , γ для слаёў з $l=7$ і 70 мк і $N=2$ і 20 . Ход $\alpha(k'l)$, $\beta(k'l)$, $\gamma(k'l)$ паказвае, што ўплыў паглынання святла на размыццё вузкага пучка радыяцыі асабліва значны пры малых значэннях $k'l$. Характэрна таксама, што гэты эфект асабліва ясна назіраецца для крылляў функцыі $\psi_{\text{адн}}(x)$, якія характарызуюцца значэннямі β і асабліва α . Значыць, пры павелічэнні паглынальнай здольнасці мацней за ўсё памяншаецца інтэнсіўнасць святла, якое выходзіць з узору на вялікай адлегласці ад сярэдзіны пучка. Гэта прыводзіць да абвастрэння формы $\psi_{\text{адн}}(x)$. Апісаная з'ява, як відаць з рыс. 3, a і б, значна больш прыкметныя на аптычна тоўстых узорах, у якіх колькасць элементарных слаёў вялікая. З параўнання рыс. 3, a і б вынікае, што ўплыў $k'l$ мацней адбываецца на экранах з большым l . Пры росце $k'l$ — аптычнай шчыльнасці элементарнага слоя — інтэнсіўнасць святла ў цэнтры плямы размыцця, як відаць на рыс. 3, в і г, памяншаецца экспаненцыяльна. Паказчык ступені экспаненты тым большы, чым большыя N і l часцінак, якія ўваходзяць у састаў светарассейваючага слоя.

На рыс. 4, а паказан ход сумешчаных крывых $\alpha(N)$, $\beta(N)$, $\gamma(N)$ для экрану з $l=7$ і 70 мк, якія маюць розныя значэнні $k'l$. З яго відаць, што як і ў выпадку непаглынальных слаёў, характар размыцця вузкага пучка святла пры змяненні N застаецца аднолькавым. Графікі, паказаныя на рыс. 4, указваюць таксама на тое, што ўплыў велічыні $k'l$ на



функцыю рассеяння $\psi_{\text{адн}}(x)$ адбіваецца мацней пры большым размеры часцінак, якія ўтвараюць экран. У гэтым выпадку адносінны, якія паказваюць долю рассеяння ў агульным значэнні велічыні аслабленага святла, меншыя. Сапраўды, колькасць рассеянага святла вызначаецца толькі колькасцю рассеяючых часцінак, іх формай і адносным паказчыкам праламлення і таму прыкладна пастаянная для экрану з аднолькавым N і рознымі l . Але велічыня паглынальна для такіх слаёў прапарцыянальная l .

Рыс. 4, б ілюструе ўплыў паглынальных уласцівасцей узору на наступленне «квазітаўшчынага» рэжыму пры праходжанні вузкага пучка святла праз экраны з рознымі l і N . З рысунка вынікае, што велічыня $k'l$ мацней адбіваецца на інтэнсіўнасці размытага ўзорам святла ў слаях з вялікімі аптычнымі таўшчынямі. Для рассеяючага экрана, які складаецца з часцінак з меншым l , уся апісаная з'ява праяўляецца менш прыкметна.

Рыс. 4. Залежнасць α , β , γ , $E_{\text{макс}}$ паглынальных слаёў ад N . Штрыхавая лінія—экраны з $l=7$ мк, суцэльная—з $l=70$ мк:

а) 1—узоры з $k'l=7 \cdot 10^{-3}$, 2—з $k'l=371 \times 10^{-3}$; б) 1— $k'l=7 \cdot 10^{-4}$, 2— $k'l=371 \cdot 10^{-4}$, 1'— $k'l=7 \cdot 10^{-3}$, 2'— $k'l=371 \cdot 10^{-3}$; абазначэнні α , β , γ гл. рыс. 2

ВЫВАДЫ

1. Функцыя рассеяння вузкага пучка святла $\psi_{\text{адн}}(x)$ рассеяючага экрана залежыць ад значэння велічынь l , N , $k'l$. Пры дапамозе яе можна даследаваць рассеяючыя ўласцівасці экрану ў залежнасці ад іх характарыстык і прымяняць рэзультаты даследавання для суджэння аб якасці перадачы дробных дэталяў вобраза.

2. Пры вивучэнні слаёў з $l > 9$ мк у бачымай і ультрафіялетавай абласцях спектра можна выкарыстаць вывады тэорыі рассеяння ў набліжэнні геаметрычнай оптыкі.

3. Павелічэнне l і N часцінак ва ўзорах з $k'l=0$ прыводзіць да пашырэння $\psi_{\text{адн}}(x)$, але характар размыцця вузкага пучка радыяцыі за-

стаецца аднолькавым. З ростам l асветленасць $E_{\text{макс}}$ у цэнтры плямы рассеяння памяншаецца па экспаненцыяльнай залежнасці.

4. Пры павелічэнні N у пласце від функцыі $E_{\text{макс}}(N)$ характарызуе наступленне „квазітаўшчыннага“ рэжыму.

5. Усе гэтыя заканамернасці захоўваюцца і ў тым выпадку, калі экран валодае паглынальнай здольнасцю, характарызуемай велічынёй $k'l$. Уплыў $k'l > 0$ адбіваецца на выглядзе функцый α , β , γ ад N і l мацней пры большых N і l . Для малых $k'l$ ход крывых, якія паказваюць залежнасць α , β , γ ад $k'l$, мае розны характар: крылі функцыі $\psi_{\text{адн}}(x)$ звужаюцца, завастраючы яе выгляд.

ЛІТАРАТУРА

1. Мороз Л. П. Успехи научной фотографии, **1**, 1951, стар. 135.
2. Современное развитие фотографических процессов. «Искусство», 1960.
3. Перрен Ф. УФН, **78**, № 10, 1962.
4. Giovanelli R. G. Optica acta, **3**, № 1, 1956.
5. Giovanelli R. G. Optica acta, **5**, № 1—2, 1958.
6. Naase G., Müller H. Optik, **17**, № 1, 1960.
7. Frieser H. Photographische korrespondenz, **92**, № 4, 51, 1956.
8. Frieser H. Photographische korrespondenz, **91**, № 5, 69, 1955.
9. Frieser H. Photographische korrespondenz, **92**, № 11, 183, 1956.
10. Иванов А. П. Канд. дис. Л., 1958.
11. Шифрин К. С. Рассеяние света в мутной среде. ГИТТЛ, М.—Л., 1951.
12. Прусс П. Х., Максина В. И. Ж. научн. и прикл. fotogr. и кинематогр., № 4, 1959.
13. Прусс П. Х. Изв. АН СССР, серия физич., **21**, № 11, 1957.
14. Иванов А. П., Макаревич С. А. Изв. АН СССР, серия геофизич., № 11, 1963.

Резюме

Экспериментальна изучено распределение освещенности на поверхности крупнозернистого слоя с различным средним размером частиц l (от 9 до 75 мк) и числом элементарных слоев N (от 2 до 20), через который проходит узкий пучок света со сходимостью менее 3° , шириной 38 мк. Для характеристики вида относительной функции рассеяния узкого пучка света $\Psi_{\text{отн}}(x)$ брались значения α , β , γ ее ширины при значениях ординат, составляющих соответственно 10, 50, 80% от максимального значения. Для данного случая установлена применимость выводов теории рассеяния в приближении геометрической оптики. Увеличение l и N частиц приводит к уширению функции рассеяния, но характер размытия узкого пучка радиации остается одинаковым. С ростом l освещенность $E_{\text{макс}}$ в центре пятна рассеяния падает по экспоненте. При увеличении N в слое наблюдается изменение $E_{\text{макс}}$, характеризующее наступление «квазитолщинного» режима. Все эти закономерности сохраняются и в том случае, когда экран обладает поглощательной способностью. Однако при этом изменяется вид зависимости α , β , γ , $E_{\text{макс}}$ от N и l . Влияние $k'l > 0$ сказывается на них сильнее при больших N и l . Для малых $k'l$ ход кривых $\alpha(k'l)$, $\beta(k'l)$, $\gamma(k'l)$ имеет различный характер: крылья функции $\Psi_{\text{отн}}(x)$ сужаются, заостряя ее вид.

Поступило в редакцию 13.V 1964

В. К. ГРОНСКИЙ

НЕЛЕПТОННЫЙ РАСПАД ПОЛЯРИЗОВАННОГО Ω^- -ГИПЕРОНА

Существование Ω^- -гиперона было предсказано теоретически на основе октетной модели элементарных частиц, предложенной Гелл-Манном и Неemanом. Недавно это предсказание получило экспериментальное подтверждение [1]. Эта частица входит в декуплет резонансов со спином $3/2$, имеет массу около 1680 Мэв , гиперзаряд $Y = -2$ и изоспин $I = 0$. Масса ее недостаточна для быстрых распадов $\Omega^- \rightarrow \Xi^- + \bar{K}^0$ или $\Omega^- \rightarrow \Xi^0 + K^-$, и она может распадаться только по слабому взаимодействию на (а) $\Xi^0 \pi^-$, (б) $\Xi^- \pi^0$, (с) ΛK^- , (д) $\Sigma^- \bar{K}^0$, (е) $\Sigma^0 K^-$. До сих пор получены фотографии процессов (а), (б), (с). Возможны также лептонные распады $\Omega^- \rightarrow \Xi^0 + l + \bar{\nu}$. Эти процессы пока экспериментально не наблюдались.

В работах [2 — 4] теоретически рассчитаны распады неполяризованного Ω^- -гиперона. В настоящей заметке рассмотрен нелептонный распад поляризованного Ω^- и получены угловые распределения продуктов распада при различных поляризациях.

Амплитуда двухчастичного нелептонного распада имеет вид [3]

$$M = \left[\frac{F}{x} \left(\bar{u}(p_2) u^\beta(p_1) \right) + i \frac{G}{x} \left(\bar{u}(p_2) \gamma_5 u^\beta(p_1) \right) \right] q_\beta \varphi,$$

где u^β , u , φ — волновые функции Ω^- , рождающегося бариона и мезона; p_1 , p_2 , q — соответствующие 4-импульсы; F и G — безразмерные константы. Оценка величины этих констант для различных каналов распада произведена в работе [3].

Для квадрата матричного элемента имеем

$$|M|^2 = \left\{ \frac{F^2}{x^2} \left[(u^\alpha \cdot \bar{u}^\beta)(u \cdot \bar{u}) \right]_c + \frac{FG}{x^2} \left[i \gamma_5 (u^\alpha \cdot \bar{u}^\beta)(u \cdot \bar{u}) - (u^\alpha \cdot \bar{u}^\beta) i \gamma_5 (u \cdot \bar{u}) \right]_c + \frac{G^2}{x^2} \left[\gamma_5 (u^\alpha \cdot \bar{u}^\beta) \gamma_5 (u \cdot \bar{u}) \right]_c \right\} q_\alpha q_\beta |\varphi|^2.$$

Используя метод проективных операторов [5], получим:

$$\begin{aligned} (u^\alpha \cdot \bar{u}^\beta)_{\pm} q_\alpha q_\beta &= - \frac{\hat{p}_1 + x}{4x} \hat{e}^\pm \hat{e}^\mp (e^\pm q)(e^\mp q), \\ (u^\alpha \cdot \bar{u}^\beta)_{\pm} q_\alpha q_\beta &= \frac{\hat{p}_1 + x}{4x} \left\{ \hat{e}^\pm \hat{e}^\mp \left[\frac{2}{3} \left(q^2 - \frac{(p_1 q)^2}{x^2} \right) + 2(qe^\pm)(qe^\mp) \right] - \right. \\ &\quad \left. - \hat{e}^\mp \hat{e}^\pm (e^\pm q)(e^\mp q) + \frac{2}{3x} \left[\hat{e}^\pm (qe^\mp) - \hat{e}^\mp (qe^\pm) \right] (\hat{p}_1 q + x \hat{q}) \right\}. \end{aligned}$$

Здесь

$$e^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}(e \pm ie'); \quad e = L \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{e}_1 \end{pmatrix}; \quad e' = L \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{e}_2 \end{pmatrix}; \quad [\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2] = \mathbf{s}; \quad \mathbf{s} \text{ — направление,}$$

на которое проектируется спин Ω^- в системе покоя; L — матрица Лоренца, отвечающая чистому движению. Вероятность распада равна

$$dW_i = \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{|M_i|^2}{8 E_1 E_2 E} \frac{\mathbf{p}_2^2 d\Omega}{\left| \frac{\partial}{\partial |\mathbf{p}_2|} (E_2 + E) \right|},$$

$$|M_{\pm \frac{3}{2}}|^2 = \frac{1}{\kappa^2} \{ (p_1 p_2 + m\kappa) F^2 + (p_1 p_2 - m\kappa) G^2 \pm 2FG [(p_2 E_1 - p_1 E_2) [\mathbf{e}' \mathbf{e}] +$$

$$+ (\mathbf{e}' e_0 - \mathbf{e} e'_0) [\mathbf{p}_2 \mathbf{p}_1]] \} [(p_2 e)^2 + (p_2 e')^2],$$

$$|M_{\pm \frac{1}{2}}|^2 = \frac{2}{\kappa^2} \left\{ \left[\frac{2}{3\kappa^2} \left((p_1 p_2)^2 - \kappa^2 m^2 \right) - (p_2 e^\pm) (p_2 e^\mp) \right] \times \right.$$

$$\times \left[F^2 (p_1 p_2 + m\kappa) + G^2 (p_1 p_2 - m\kappa) \right] \pm 2FG \left[\frac{2}{3\kappa^2} \left((p_1 p_2)^2 - \kappa^2 m^2 \right) - \right.$$

$$\left. \left. - 3(p_2 e^\pm) (p_2 e^\mp) \right] \left[(p_2 E_1 - p_1 E_2) [\mathbf{e}' \mathbf{e}] + (\mathbf{e}' e_0 - \mathbf{e} e'_0) [\mathbf{p}_2 \mathbf{p}_1] \right] \right\}$$

(по спинам конечного состояния просуммировано).

Рассмотрим частные случаи.

1. Пусть $\mathbf{s} \parallel \mathbf{p}_1$. Тогда $e_0 = e'_0 = 0$; $\mathbf{e}' = \mathbf{e}_2$, $\mathbf{e} = \mathbf{e}_1$. Вектор \mathbf{e}_1 выберем так, чтобы он был перпендикулярен плоскости распада. Для углового распределения при этом получаем

$$|M_{\pm \frac{3}{2}}|^2 = \frac{1}{\kappa^2} \left\{ (p_1 p_2 + m\kappa) F^2 + (p_1 p_2 - m\kappa) G^2 \pm 2FG (E_2 |\mathbf{p}_1| - E_1 (p_2 s)) \right\} \times$$

$$\times (p_2 \mathbf{e}_2)^2,$$

$$|M_{\pm \frac{1}{2}}|^2 = \frac{2}{\kappa^2} \left\{ \left[\frac{2}{3\kappa^2} \left((p_1 p_2)^2 - \kappa^2 m^2 \right) - \frac{1}{2} (p_2 \mathbf{e}_2)^2 \right] \times \right.$$

$$\times \left[F^2 (p_1 p_2 + m\kappa) + G^2 (p_1 p_2 - m\kappa) \right] \pm 2FG \times$$

$$\times \left[\frac{2}{3\kappa^2} \left((p_1 p_2)^2 - \kappa^2 m^2 \right) - \frac{3}{2} (p_2 \mathbf{e}_2)^2 \right] \left(E_2 |\mathbf{p}_1| - E_1 (p_2 s) \right) \left. \right\}.$$

В системе покоя Ω^- эти выражения имеют более простой вид

$$|M_{\pm \frac{3}{2}}|^2 = \frac{1}{\kappa} \left\{ (E_2 + m) F^2 + (E_2 - m) G^2 \mp 2FG |\mathbf{p}_2| \cos \Theta \right\} p_2^2 \sin^2 \Theta,$$

$$|M_{\pm \frac{1}{2}}|^2 = \frac{2 p_2^2}{x} \left\{ \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{2} \sin^2 \Theta \right) \left[F^2 (E_2 + m) + G^2 (E_2 - m) \right] \mp \right. \\ \left. \mp 2FG \left(\frac{2}{3} - \frac{3}{2} \sin^2 \Theta \right) |p_2| \cos \Theta \right\}.$$

Здесь Θ — угол между векторами s и p_2 .

2. Пусть $s \perp p_1$ (поперечная поляризация). Выберем $e_2 \parallel p_1$. Тогда

$$e'_0 = \frac{|p_1|}{x}, \quad e' = e_2 \frac{E_1}{x}, \quad e_0 = 0, \quad e = e_1.$$

Угловое распределение в этом случае имеет вид:

$$|M_{\pm \frac{3}{2}}|^2 = \frac{1}{x^2} \left\{ (p_1 p_2 + m x) F^2 + (p_1 p_2 - m x) G^2 \mp 2FG x (p_2 s) \right\} \times \\ \times \left[\frac{1}{x^2} \left(E_2 |p_1| - E_1 (p_2 e_2) \right)^2 + \left([p_2 e_2] s \right)^2 \right], \\ |M_{\pm \frac{1}{2}}|^2 = \frac{2}{x^2} \left\{ \left[\frac{2}{3 x^2} \left((p_1 p_2)^2 - x^2 m^2 \right) - \frac{1}{2 x^2} \left(E_2 |p_1| - E_1 (p_2 e_2) \right)^2 - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{1}{2} \left([p_2 e_2] s \right)^2 \right] \left[F^2 (p_1 p_2 + m x) + G^2 (p_1 p_2 - m x) \right] \mp \right. \\ \left. \mp 2FG \left[\frac{2}{3 x^2} \left((p_1 p_2)^2 - x^2 m^2 \right) - \frac{3}{2 x^2} \left(E_2 |p_1| - E_1 (p_2 e_2) \right)^2 - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{3}{2} ([p_2 e_2] s)^2 \right] x (p_2 s) \right\},$$

или в системе покоя

$$|M_{\pm \frac{3}{2}}|^2 = \frac{1}{x} \left\{ (E_2 + m) F^2 + (E_2 - m) G^2 \mp 2FG (p_2 s) \right\} \left[(p_2 e_2)^2 + ([p_2 e_2] s)^2 \right], \\ |M_{\pm \frac{1}{2}}|^2 = \frac{2}{x} \left\{ \left[\frac{2}{3} p_2^2 - \frac{1}{2} (p_2 e_2)^2 - \frac{1}{2} ([p_2 e_2] s)^2 \right] \left[F^2 (E_2 + m) + G^2 (E_2 - m) \right] \mp \right. \\ \left. \mp 2FG (p_2 s) \left[\frac{2}{3} p_2^2 - \frac{3}{2} (p_2 e_2)^2 - \frac{3}{2} ([p_2 e_2] s)^2 \right] \right\}.$$

Эти выражения существенно отличаются от соответствующих угловых распределений в случае спина 1/2 (см., например, [6]). Это обстоятельство может быть использовано для определения спина Ω^- -гиперона.

В заключение автор выражает глубокую благодарность Ф. И. Федорову за внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Barnes V. et. al. Phys. Rev. Lett., 12, 204, 1964.
2. De Santis V. Phys. Rev. Lett., 13, 217, 1964.
3. Glashow S. L. a. Socolow R. H. Phys. Lett., 10, № 1, 1964.
4. Yellin I. Phys. Rev., 135, B 1203, 1964.
5. Федоров Ф. И. ЖЭТФ, 35, 493, 1958; Гронский В. К, Сацункевич І. С. Весті АН БССР, сер. фіз.-тэхн. навук, № 1, 1965.
6. Окунь Л. Б. Слабое взаимодействие элементарных частиц. Физматгиз. М., 1963.

Поступило в редакцию 19.11 1965

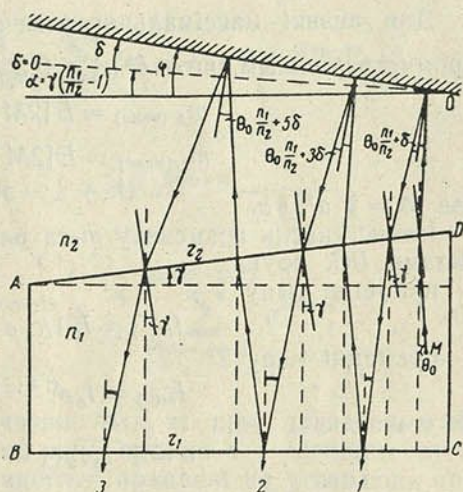
А. П. ПРЫШЫВАЛКА, А. К. КАПАЊІК

РАЗЛІК ЛЮМІНЕСЦЭНЦЫ У РЭЗНАТАРЫ СА ЗНЭШНІМІ ЛЮСТРАМІ ПРЫ НАЯЎНАСЦІ РАЗ'ЮСТЫРОЎКІ

У работах [1, 2] развіты прыблізны метадад разліку люмінесцэнцы ў найбольш простым адкрытым рэзанатары з плоскімі непаралельнымі асновамі. Меркавалася, што адлюстроўваючыя пакрыцці нанесены непасрэдна на тарцы шпяня, які мае адмоўны каэфіцыент паглынання. У дадзенай рабоце метадад абагульнен на выпадак адкрытага рэзанатара са знешнімі люстрамі пры наяўнасці раз'юстыроўкі. Гэты выпадак адпавядае найбольш часта ажыццяўляемым у цяперашні час эксперыментальным устаноўкам. Распрацоўка надзейнага спосабу разліку параметраў выпраменьвання, якое ўзнікае ў такім рэзанатары, прадстаўляе безумоўна практычную цікавасць.

Перш за ўсё заўважым, што пры любым метададзе юстыроўкі адно з люстраў сістэмы ўстанаўліваецца паралельна тарцу актыўнага шпяня. Паколькі значную ролю ў сістэме адыгрываюць толькі тыя праменні, якія паралельны або амаль паралельны восі рэзанатара, можна лічыць, што гэты плоскапаралельны паветраны прамежак (калі ён невялікі) мала ўплывае на ход праменьняў у сістэме. Для спрашчэння разлікаў можна яго не прымаць пад увагу, лічаць, што адпаведнае люстра сумешчана з тарцом (адлюстроўваючае пакрыцце, калі яно патрабуецца, нанесена на тарэц). Пры такой умове сістэма з двума знешнімі люстрамі можа быць заменена ў разглядзе сістэмай з адным люстрам, размешчаным з любога боку шпяня. У агульным выпадку тарцы шпяня не паралельны адзін аднаму. Вугал непаралельнасці асноў шпяня вызначаецца вуглом γ . Для выразнасці будзем лічыць, што люстра ўстаноўлена, як паказана на рыс. 1.

Няхай унутры шпяня паралельна яго восі распаўсюджваецца прамень святла. Пасля праламлення на тарцовай паверхні ён пападае на люстра. Можна падабраць такі вугал павароту люстра α адносна восі x , што прамень, які выйшаў са шпяня, упадзе на яго пад прамым вуглом. Пры такім становішчы люстра ўсе праменні, паралель-



Рыс. 1. Ход праменьняў у сістэме

няны восі шпяня, будуць праходзіць па аднаму і таму ж шляху бясконцаю колькасць разоў, выпрабавваючы пры гэтым максімальнае магчымае ў дадзенай сістэме ўзмацненне. Пры такім становішчы элементаў сістэмы непаралельнасць асноў шпяня поўнасьцю кампенсуецца паваротам люстра, у выніку чаго сістэма працуе як плоскапаралельная. Назаўважым вугал $\alpha = \gamma \left(\frac{n_1}{n_2} - 1 \right)$ вуглом поўнай кампенсацыі (n_1 і n_2 — паказчыкі праламлення актыўнага шпяня і асяроддзя). Ход прамяняў у сістэме пры некаторым адвольным становішчы люстра, якое адрозніваецца ад вугла поўнай кампенсацыі на вугал δ , паказан на рыс. 1.

Пры зададзеным пункце вылучэння $M(x, z)$ магчымы парадак промня ў пункце выхаду з каардынатамі $(x', 0)$ вызначаецца няроўнасцямі:

а) для прамяняў, вылучаемых у верхнюю паўсферу (праменні першага тыпу)

$$m_1 \leq E \left[\sqrt{\frac{d-x}{2\delta b} + A^2(z)} + \sqrt{\frac{d-x'}{2\delta b} + A(z)} \right], \quad (1)$$

б) для прамяняў, вылучаемых у ніжнюю паўсферу (праменні другога тыпу)

$$m_2 \leq E \left[\sqrt{\frac{d-x}{2\delta b} + A^2(z)} + \sqrt{\frac{d-x'}{2\delta b} - A(z) - 1} \right], \quad (1a)$$

дзе $\delta = \varphi - \alpha$; φ — вугал павароту люстра адносна восі x ; $b = l_1 \frac{n_2}{n_1} + l_2$; l_1 — даўжыня шпяня; l_2 — даўжыня паветранага прамежку паміж тарцамі і люстрам; $A(z) = \frac{z}{2bn_1/n_2}$; $E(f)$ — цэлая частка ад f . Для сістэмы з двума знешнімі люстрамі ўсё застаецца ў тым жа выглядзе, толькі $b = l_1 \frac{n_2}{n_1} + l_2 + l_3$.

Для ацэнкі максімальнага магчымага ў дадзенай сістэме парадку промня заўважым, што $A^2(z) \leq 0,25$, г. зн. $A^2(z) \ll \frac{d}{2\delta b}$. Тады

$$m_{1(\text{макс})} = E[2M + A(z)], \quad (2)$$

$$m_{2(\text{макс})} = E[2M - A(z) - 1], \quad (2a)$$

дзе $M = \sqrt{d/2\delta b}$.

Інтэнсіўнасць прамяняў m -га парадку, якія падыходзяць да асновы сістэмы BC , роўна:

праменні тыпу 1

$$I_{m(1)} = I_0 1/r_1 e^{-(|k|-\rho)z} a^{2m}, \quad (3)$$

праменні тыпу 2

$$I_{m(2)} = I_0 e^{(|k|-\rho)z} a^{2(m-1)}, \quad (3a)$$

дзе

$$a = \sqrt{r_1 r_3} (1 - r_2) e^{(|k|-\rho)l_1}, \quad (4)$$

r_1, r_2, r_3 — каэфіцыенты адлюстравання асновы сістэмы BC , другога тарца шпяня і люстра. У выпадку двух знешніх люстраў

$$a = \sqrt{r_1 r_3} (1 - r_2)^2 e^{(|k|-\rho)l_1}. \quad (4a)$$

Энергія, вылучаемая ў адзінку часу элементарным аб'ёмам dV у элементарны цялесны вугал $d\Omega$, роўна $I_0 dV d\Omega$, дзе I_0 — інтэнсіўнасць лю-

мінесцэнцы адзінкі аб'ёму ў разліку на адзінку цялеснага вугла ў адзінку часу. У плоскай задачы элемент аб'ёму замяняецца здабыткам $dx dz$, элемент цялеснага вугла — $d\Theta_0$. Агульная энергія праменняў m -га парадку (тыпу 1 і 2), якія падыходзяць да асновы сістэмы BC , роўна $dW = dW_1 + dW_2$, дзе

$$dW_1 = I_0 \frac{a^{2m}}{r_1} e^{-(|k|-\rho)z} dx dz d\Theta_0, \quad (5)$$

$$dW_2 = I_0 a^{2(m-1)} e^{(|k|-\rho)z} dx dz d\Theta_0. \quad (5a)$$

Праінтэграваўшы dW па трох пераменных, падсумаваўшы па m і памножыўшы на $(1-r_1)$, атрымаем энергію, якая выходзіць у адзінку часу праз аснову BC . Пераход да аб'ёмнай задачы здзяйсняецца інтэграваннем па каардынаце y .

Апускаючы прамежкавыя вылічэнні, якія выкананы ў значнай частцы аналагічна таму, як гэта было зроблена ў [1], атрымаем для выпадку, калі $r_3 = 1$:

$$W_{\text{асн}} = \frac{I_0 a^2 (1-r_1)}{2bn_1/n_2 (|k|-\rho)} [1/r_1 (1 - e^{-(|k|-\rho)l_1}) S_1 + (e^{(|k|-\rho)l_1} - 1) S_2], \quad (6)$$

дзе

$$S_1 = \sum_{m=1}^{E(M+A-1)} \frac{a^{2m}}{m-A} - \frac{1}{6M^4} \sum_{m=1}^{E(M+A-1)} (m-A)^3 a^{2m} +$$

$$+ \frac{1}{6M^4} \sum_{E(M+A)}^{E(2M+A)} (m-A)^3 a^{2m} - \frac{2}{M^2} \sum_{E(M+A)}^{E(2M+A)} (m-A) a^{2m} + \frac{8}{3M} \sum_{E(M+A)}^{E(2M+A)} a^{2m}; \quad (6a)$$

$$S_2 = \sum_{m=1}^{E(M-A)} \frac{a^{2(m-1)}}{m-1+A} - \frac{1}{6M^4} \sum_{m=1}^{E(M-A)} (m-1+A)^3 a^{2(m-1)} +$$

$$+ \frac{1}{6M^4} \sum_{E(M-A+1)}^{E(2M-A+1)} (m-1+A)^3 a^{2(m-1)} -$$

$$- \frac{2}{M^2} \sum_{E(M-A+1)}^{E(2M-A+1)} (m-1+A) a^{2(m-1)} + \frac{8}{3M} \sum_{E(M-A+1)}^{E(2M-A+1)} a^{2(m-1)}. \quad (6b)$$

Для задазенага пункта вылучэння $M(x, z)$ пры задазеным парадку m існуюць гранічны пункт выхаду промня x' і гранічны вугал вылучэння Θ_0 , пачынаючы з якіх адбітыя праменні не ўтвараюць праменняў больш высокай парадкаў у патоку праз аснову BC , а выходзяць праз бакавую паверхню (рыс. 2). Праменні, якія выходзяць у бакавы патак пасля адбіцця ў інтэрвале $K \leq x' \leq F$, маюць інтэнсіўнасць

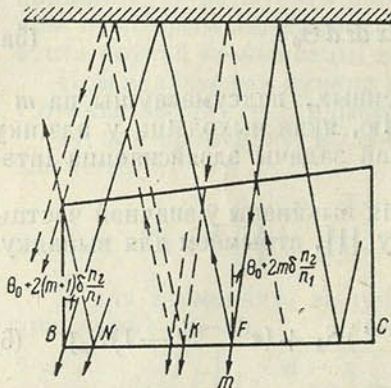
$$I_{KF} = I_m r_3 (1-r_2)^2 e^{(|k|-\rho) \left[2l_1 - \frac{x'_F - x'}{\Theta_0(\text{гран}) + 2(m+1)\delta n_2/n_1} \right]}. \quad (7)$$

Праменні, якія пападаюць у інтэрвал NK , утвараюць у бакавым патоку праменні аднолькавай інтэнсіўнасці

$$I_{NK} = I_m r_3 (1 - r_2) e^{(|k| - \rho) l_1}. \quad (8)$$

Пасля адбіцця праменняў m -га парадку ў інтэрвале BN у бакавы паток выходзяць праменні з інтэнсіўнасцю

$$I_{BN} = I_m e^{(|k| - \rho) l_1} \left[1 - \frac{x'_N - x'}{\theta_{o(\text{гран})} + 2m \delta n_2 / n_1} \right]. \quad (9)$$



Рыс. 2. Да разліку складаючых бакавога патоку

З прычыны таго, што дакладнае вылічэнне энергіі складаючых бакавога патоку звязана з вялікімі цяжкасцямі, мета-згодна правесці ўсярэдненне інтэнсіўнасці праменняў. Ніякжа паказаць, што сярэдняя інтэнсіўнасць пры вуглах адхілення люстра парадку некалькіх мінут роўна

$$I_{\text{бак. сяр}} = I_m P = I_m \frac{e^{(|k| - \rho) l_1}}{2b \frac{n_1}{n_2} (|k| - \rho)} \times$$

$$\times \left[(1 - r_2)^2 (e^{(|k| - \rho) l_1} - 1) + (1 - e^{-(|k| - \rho) l_1}) + 2l_2 \frac{n_1}{n_2} (1 - r_2) (|k| - \rho) \right]. \quad (10)$$

Правёўшы вылічэнні аналагічна [1], атрымаем

$$W_{\text{бак}} = \frac{I_0 d^2}{2b \frac{n_1}{n_2} (|k| - \rho)} \frac{P}{2} \times$$

$$\times \left[\frac{1}{r_1} (1 - e^{-(|k| - \rho) l_1}) (S_3 + S_5) + (e^{(|k| - \rho) l_1} - 1) (S_4 + S_6) \right], \quad (11)$$

дзе

$$S_3 = \sum_{m=1}^{E(M+A-1)} \frac{a^{2m}}{(m-A)(m-A+1)} + \frac{2}{M^2} \sum_{m=1}^{E(M+A-1)} a^{2m} + \frac{4M^2 - 1}{M^4} \sum_{E(M+A)}^{E(2M+A)} a^{2m} - \frac{1}{M^4} \sum_{E(M+A)}^{E(2M+A)} (m-A)^2 a^{2m} - \frac{1}{M^4} \sum_{E(M+A)}^{E(2M+A)} (m-A) a^{2m}, \quad (11a)$$

$$S_4 = \sum_{m=1}^{E(M-A)} \frac{a^{2(m-1)}}{(m+A-1)(m+A)} + \frac{2}{M^2} \sum_{m=1}^{E(M-A)} a^{2(m-1)} + \frac{4M^2 - 1}{M^4} \sum_{E(M-A+1)}^{E(2M-A+1)} a^{2(m-1)} - \frac{1}{M^4} \sum_{E(M-A)}^{E(2M-A+1)} (m+A-1)^2 a^{2(m-1)} -$$

$$-\frac{1}{M^4} \sum_{E(M-A)}^{E(2M-A+1)} (m+A-1) a^{2(m-1)}; \quad (116)$$

$$S_5 = \sum_{m=1}^{E(M+A-1)} \frac{a^{2m}}{(m-A)(m-A+1)} - \frac{2}{M^2} \sum_{m=1}^{E(M+A-1)} a^{2m} + \\ + \frac{1}{M^4} \sum_{m=1}^{E(M+A-1)} (m-A)^2 a^{2m} + \frac{1}{M^4} \sum_{m=1}^{E(M+A-1)} (m-A) a^{2m}; \quad (11b)$$

$$S_6 = \sum_{m=1}^{E(M-A)} \frac{a^{2(m-1)}}{(m+A-1)(m+A)} - \frac{2}{M^2} \sum_{m=1}^{E(M-A)} a^{2(m-1)} + \\ + \frac{1}{M^4} \sum_{m=1}^{E(M-A)} (m+A-1)^2 a^{2(m-1)} + \frac{1}{M^4} \sum_{m=1}^{E(M-A)} (m+A-1) a^{2(m-1)}. \quad (11r)$$

У трохмерным выпадку поўная энергія, якая выходзіць з сістэмы за адзінку часу, роўна

$$W = \frac{I_0 V \frac{d}{l_1}}{2b \frac{n_1}{n_2} (|k| - \rho)} \left\{ (1-r_1) \left[\frac{1}{r_1} (1 - e^{-(|k|-\rho)l_1}) S_1 + (e^{(|k|-\rho)l_1} - 1) S_2 \right] + \right. \\ \left. + \frac{P}{2} \left[\frac{1}{r_1} (1 - e^{-(|k|-\rho)l_1}) (S_3 + S_5) + (e^{(|k|-\rho)l_1} - 1) (S_4 + S_6) \right] \right\} + I_0 V. \quad (12)$$

Гэта ураўненне вызначае ўмовы ўзмацнення выпраменьвання ў рэзанатары, прычым першае складае мае адносіцца да патоку, які выходзіць праз аснову рэзанатара, другое — да патоку праз бакавую паверхню, трэцяе — спонтанная лумінесценцыя. З другога боку, улік нелінейнай залежнасці каэфіцыента паглынання ад шчыльнасці выпраменьвання ўнутры рэчыва [1] дае ўраўненне

$$W = \frac{cV}{n_1} \frac{|k_0| - |k|}{a} \frac{|k| - \rho}{|k|} + I_0 V, \quad (13)$$

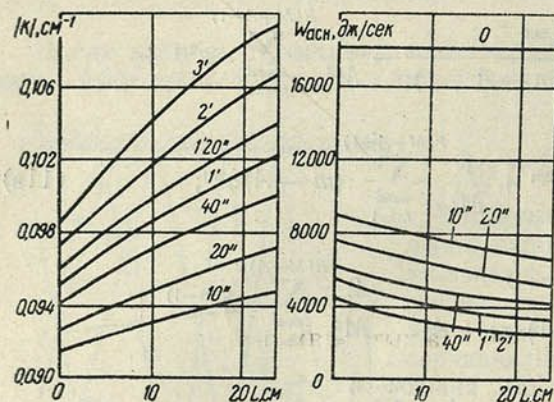
дзе a — параметр нелінейнасці, які залежыць ад магутнасці пампавання і ўласцівасцей актыўнага рэчыва; V — аб'ём актыўнага асяроддзя.

Разлікі па (12) праводзяцца з дапамогай электроннай вылічальнай машыны. Рашаючы сістэму ўраўненняў (12) і (13) графічным спосабам, знаходзім значэнні адмоўнага каэфіцыента паглынання і поўнай магутнасці выпраменьвання. З гэтых даных лёгка атрымаць значэнне магутнасці выпраменьвання, якое выходзіць праз аснову сістэмы.

Прымяненне выкладзенага метаду для канкрэтных разлікаў дае магчымасць высветліць залежнасці асноўных характарыстык выпраменьвання ад параметраў рэзанатара ў даволі шырокіх межах іх змянення. У якасці прыкладу на рыс. 3 прыведзены залежнасці каэфіцыента ўзмацнення $|k|$ і магутнасці выпраменьвання $W_{асн}$, якое выходзіць праз аснову

резанатара, ад даўжыні паветранага прамежку $L=l_2+l_3$ для сістэмы з пэўнымі значэннямі параметраў.

Перш за ўсё трэба адзначыць, што значэнні $|k|$ і $W_{асн}$, вылічаныя па атрыманых у дадзенай рабоце формулах, пры $L \rightarrow 0$ плаўна пераходзяць



Рыс. 3. Залежнасці каэфіцыента ўзмацнення і магутнасці патоку праз аснову резанатара ад даўжыні паветранага прамежку пры розных вуглах павароту люстра, калі $\gamma=0$. Каля крывых абазначаны велічыні вугла φ

у значэнні, якія атрымліваем для $L=0$ па формулах работ [1, 2]. Разгляд залежнасці $|k|$ і $W_{асн}$ ад вугла павароту люстра φ паказвае, што пры $\varphi \rightarrow 0$ існуе бесперапынны пераход да значэнняў гэтых велічынь, якія атрымліваем па формулах плоскапаралельнай сістэмы.

З крывых рыс. 3 вынікае, што пры адхіленні люстра ад становішча поўнай кампенсацыі ўплыў паветранага прамежку аказваецца вельмі значным. Ён тым мацнейшы, чым большы вугал адхілення люстра. Больш падрабязна гэтыя залежнасці бу-

дуць разгледжаны ў далейшай рабоце.

У заключэнне аўтары выказваюць удзячнасць акадэміку АН БССР Б. І. Сцяпанаву за цікавасць да работы і каштоўныя парады.

ЛІТАРАТУРА

1. Степанов Б. И., Пришивалко А. П. Весті АН БССР, сер. фіз.-тэхн. навук, № 3, 1964.
2. Степанов Б. И., Пришивалко А. П. ЖПС, 1, 333, 1964.

Резюме

Развитый ранее приближенный метод расчета люминесценции в активном стержне с зеркальными покрытиями на непараллельных между собой торцах и матированной боковой поверхностью распространен на более общий и практически важный случай, когда активный стержень находится в резонаторе с внешними плоскими зеркалами. Получены формулы для расчета мощности излучения и коэффициента усиления, учитывающие непараллельность торцов стержня, разъюстировку зеркал, параметры стержня и расстояние между зеркалами. Показано, что в отличие от плоскопараллельной системы излучение рассматриваемого резонатора существенно зависит от расстояния между зеркалами.

А. М. ГАНЧАРЭНКА

**ЭЛЕКТРАМАГНІТНЫЯ УЛАСЦІВАСЦІ
 ПРАМАВУГОЛЬНАГА ХВАЛЯВОДА,
 ЗАПОЎНЕНАГА ГІРАТРОПНЫМ АСЯРОДДЗЕМ**

У апошні час значная ўвага ўдзяляецца пытанням, звязаным з распаўсюджаннем электрамагнітных хваляў у хваляводах, запоўненых гіратропным асяроддзем (гл., напрыклад, [1, 2]). Аднак уласцівасці такіх хваляводаў выяўлены яшчэ не поўнасьцю. У гэтай рабоце разглядаюцца электрамагнітныя ўласцівасці прамавугольнага металічнага хвалявода, запоўненага гіратропным асяроддзем. Мы зыходзім з феноменалагічнай тэорыі і выкарыстоўваем ураўненні Максвела

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = i \omega \mu \mathbf{H}, \quad \operatorname{rot} \mathbf{H} = -i \omega \varepsilon \mathbf{E}. \quad (1)$$

Магнітная пранікальнасць μ мяркуецца скалярам, а дыэлектрычная пранікальнасць ε пры наяўнасці знешняга магнітнага поля \mathbf{H}_0 можа быць прадстаўлена ў выглядзе¹

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + ia \mathbf{H}_0^X + b \mathbf{H}_0^2 + c \mathbf{H}_0 \cdot \mathbf{H}_0, \quad (2)$$

дзе ε_0 — дыэлектрычная пранікальнасць асяроддзя ў адсутнасці магнітнага поля; a, b, c — канстанты асяроддзя; $\mathbf{H}_0 \cdot \mathbf{H}_0$ — дэяда; \mathbf{H}_0^X азначае антысіметрычны тэнзар [3]:

$$\mathbf{H}_0^X = \begin{pmatrix} 0 & -H_{03} & H_{02} \\ H_{03} & 0 & -H_{01} \\ H_{02} & H_{01} & 0 \end{pmatrix}.$$

Разгледзім спачатку выпадак, калі магнітнае поле \mathbf{H}_0 накіравана ўздоўж восі хвалявода z . Пры гэтым тэнзар ε можна запісаць наступным чынам:

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 - i\varepsilon' & 0 & 0 \\ i\varepsilon' & \varepsilon_1 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_2 \end{pmatrix}, \quad (3)$$

дзе $\varepsilon_1 = \varepsilon_0 + bH_0^2$; $\varepsilon_2 = \varepsilon_0 + (b + c)H_0^2$; $\varepsilon' = aH_0$.

Рашэнне ўраўненняў (1) будзем шукаць у выглядзе неаднародных плоскіх хваляў, якія бягуць уздоўж восі хвалявода z , г. зн. лічым

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}(x, y) e^{ihz}, \quad \mathbf{H} = \mathbf{H}(x, y) e^{ihz}. \quad (4)$$

¹ Гэты выраз для ε упершыню быў дадзены праф. Ф. І. Фёдаравым у лекцыях па крышталаоптыцы, прачытаных ім у Белдзяржуніверсітэце імя У. І. Леніна ў 1954—1956 гг.

Падстаўляючы (3), (4) ва ўраўненні Максвела (1), знаходзім выразы для кампанент E_x , E_y , H_x , H_y праз E_z і H_z :

$$\begin{aligned}(u_1^4 - k'^4) E_x &= \mu \omega k'^2 \frac{\partial H_z}{\partial x} + i h u_1^2 \frac{\partial E_z}{\partial x} + i \mu \omega u_1^2 \frac{\partial H_z}{\partial y} - h k'^2 \frac{\partial E_z}{\partial y}, \\(u_1^4 - k'^4) E_y &= \mu \omega k'^2 \frac{\partial H_z}{\partial y} + i h u_1^2 \frac{\partial E_z}{\partial y} - i \mu \omega u_1^2 \frac{\partial H_z}{\partial x} + h k'^2 \frac{\partial E_z}{\partial x}, \\i \omega \mu (u_1^4 - k'^4) H_x &= -\mu \omega h u_1^2 \frac{\partial H_z}{\partial x} - i h^2 k'^2 \frac{\partial E_z}{\partial x} - \\&\quad - i \mu \omega h k'^2 \frac{\partial H_z}{\partial y} + (u_1^2 k_1^2 - k'^4) \frac{\partial E_z}{\partial y}, \\i \omega \mu (u_1^4 - k'^4) H_y &= -\mu \omega u_1^2 \frac{\partial H_z}{\partial y} - i h^2 k'^2 \frac{\partial E_z}{\partial y} + \\&\quad + i \mu \omega h k'^2 \frac{\partial H_z}{\partial x} - (u_1^2 k_1^2 - k'^4) \frac{\partial E_z}{\partial x},\end{aligned}\tag{5}$$

дзе $u_1^2 = k_1^2 - h^2$; $k_1^2 = \epsilon_1 \mu \omega^2$; $k'^2 = \epsilon' \mu \omega^2$. Выкарыстоўваючы гэтыя выразы, атрымаем наступную сістэму дыферэнцыяльных ураўненняў адносна E_z і H_z :

$$\begin{aligned}\Delta_T E_z + \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} u_1^2 E_z + i \frac{\epsilon'}{\epsilon_1} h \mu \omega H_z &= 0, \\ \Delta_T H_z + \left(u_1^2 - \frac{k'^4}{k_1^2} \right) H_z - \frac{i \epsilon'}{\epsilon_1} \epsilon_2 h \omega E_z &= 0,\end{aligned}\tag{6}$$

дзе $\Delta_T = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right)$. Пры гэтым мы не прымалі пад увагу члены, прапарцыянальныя H_0^3 , і вышэйшыя ступені. З ураўненняў (6) вынікае, што кампаненты E_z і H_z залежаць паміж сабой. Гэта азначае, што ў гіратропным асяроддзі немагчыма існаванне асобна хваляў ТМ і ТЕ. Гэта сувязь знікае ў адсутнасці знешняга магнітнага поля ($\epsilon' = 0$).

Няцяжка пераканацца, што ўраўненням (6) і гранічным умовам ($E_z, E_y = 0$ пры $x = 0, x = a$; $E_z, E_x = 0$ пры $y = 0, y = b$, мяркуецца бясконца правадзімасць сценак хвалявода) будуць задавальняць рашэнні ў выглядзе:

$$\begin{aligned}E_z &= a \sin ux \sin vy, \\ H_z &= A \sin ux \sin vy.\end{aligned}\tag{7}$$

З гранічных умоў знаходзім пастаянныя распаўсюджвання u, v і каэфіцыент A :

$$\begin{aligned}u &= \frac{n \pi}{a}, \quad v = \frac{m \pi}{b}, \quad n, m - \text{цэлыя лікі}, \\ A &= -\frac{i h \epsilon' \omega}{u_1^2}.\end{aligned}\tag{8}$$

Падстаўляючы (7) у дыферэнцыяльныя ўраўненні (6) і выключаючы A , атрымаем наступнае ўраўненне для вызначэння пастаяннай распаўсюджвання h :

$$\left[k_1^2 - h^2 - \frac{k'^4}{k_1^2} - (u^2 + v^2) \right] \left[\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} (k_1^2 - h^2) - (u^2 + v^2) \right] = \frac{\varepsilon_2'^2}{\varepsilon_1^2} \varepsilon_2 h^2 \mu \omega^2. \quad (9)$$

Ураўненне (9) з'яўляецца біквадратным адносна h^2 і, значыць, у разглядаемым хваляводзе існуюць дзве незалежныя хвалі, якія бягуць уздоўж восі z . З суадносін (5), (7) бачым таксама, што ў гіратропным хваляводзе, як і ў звычайным, плоскія хвалі ТЕМ не могуць існаваць, паколькі пры $u = v = 0$ поле тоесна роўна нулю.

Разгледзім цяпер прамавугольны хвалявод, у якім знешняе магнітнае поле \mathbf{H}_0 накіравана перпендыкулярна да яго восі. Няхай \mathbf{H}_0 супадае з напрамкам восі x . Тэнзар ε у гэтым выпадку запішацца ў выглядзе

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_2 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_1 & -i\varepsilon' \\ 0 & i\varepsilon' & \varepsilon_1 \end{pmatrix}. \quad (10)$$

Для кампанент E_x, E_y, H_x, H_y з ураўненняў Максвела (1) пры гэтым атрымліваем выразы:

$$\left. \begin{aligned} u_2^2 E_x &= ih \frac{\partial E_z}{\partial x} + i \omega \mu \frac{\partial H_z}{\partial y} \\ u_1^2 E_y &= ih \frac{\partial E_z}{\partial y} - i \omega \mu \frac{\partial H_z}{\partial x} + ik'^2 E_z \\ i \omega \mu u_1^2 H_x &= k_1^2 \frac{\partial E_z}{\partial y} - \omega \mu h \frac{\partial H_z}{\partial x} + hk'^2 E_z \\ i \omega \mu u_2^2 H_y &= -k_2^2 \frac{\partial E_z}{\partial x} - \omega \mu h \frac{\partial H_z}{\partial y} \end{aligned} \right\}, \quad (11)$$

дзе, як і раней, $u_1^2 = k_1^2 - h^2$; $u_2^2 = k_2^2 - h^2$; $k_1^2 = \varepsilon_1 \mu \omega^2$; $k_2^2 = \varepsilon_2 \mu \omega^2$. Кампаненты E_z, H_z павінны задавальняць наступнай сістэме дыферэнцыяльных ураўненняў:

$$\begin{aligned} & u_1^2 k_2^2 \frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} + u_2^2 k_1^2 \frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2} - \omega \mu h \Delta k^2 \frac{\partial^2 H_z}{\partial x \partial y} + \\ & + k'^2 \omega \mu u_2^2 \frac{\partial H_z}{\partial x} + u_2^2 (k_1^2 u_1^2 - k'^4) E_z = 0, \quad (12) \\ & \omega \mu u_2^2 \frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2} + \omega \mu u_1^2 \frac{\partial^2 H_z}{\partial y^2} - h \Delta k^2 \frac{\partial^2 E_z}{\partial x \partial y} - \\ & - k'^2 u_2^2 \frac{\partial E_z}{\partial x} + \omega \mu u_1^2 u_2^2 H_z = 0, \end{aligned}$$

дзе $\Delta k^2 = k_2^2 - k_1^2$. З гэтых ураўненняў відаць, што і ў гэтым выпадку кампаненты E_z і H_z звязаны паміж сабой.

Можна пераканацца, што сістэме (12) і гранічным умовам задавальваюць рашэнні ў выглядзе:

$$E_z = a \sin ux (\sin v_1 y + a_1 \sin v_2 y),$$

$$H_z = a \cos ux (b_1 \cos v_1 y + c \sin v_1 y + b_2 \cos v_2 y - c \sin v_2 y). \quad (13)$$

З гранічных умоў знаходзім

$$u = \frac{n\pi}{a}, \quad v_1 = \frac{m_1\pi}{b}, \quad v_2 = \frac{m_2\pi}{b}, \quad (14)$$

n, m_1, m_2 — цэлыя лікі.

Падстаўляючы (13) у (12), атрымаем наступную сістэму ўраўненняў:

$$\begin{aligned} h \omega \Delta \varepsilon uv_1 &= (u_1^2 u_2^2 - u^2 u_2^2 - u_1^2 v_1^2) b_1, \\ h \omega \Delta \varepsilon uv_2 a_1 &= (u_1^2 u_2^2 - u^2 u_2^2 - u_1^2 v_2^2) b_2, \\ \varepsilon' \omega u_2^2 u &= (u_1^2 u_2^2 - u^2 u_2^2 - u_1^2 v_1^2) c, \\ -\varepsilon' \omega u_2^2 u a &= (u_1^2 u_2^2 - u^2 u_2^2 - u_1^2 v_2^2) c, \\ \omega \mu h \Delta k^2 uv_1 b_1 + u_1^2 k_2^2 u^2 + u_2^2 k_1^2 v_1^2 + \\ &+ k'^2 \omega \mu u_2^2 u c = u_2^2 (k_1^2 u_1^2 - k'^4), \\ \omega \mu h \Delta k^2 uv_2 b_2 + u_1^2 k_2^2 u^2 a_1 + u_2^2 k_1^2 v_2^2 a_1 - \\ &- k'^2 \omega \mu u_2^2 u c = u_2^2 (k_1^2 u_1^2 - k'^4), \end{aligned} \quad (15)$$

дзе $\Delta \varepsilon = \varepsilon_2 - \varepsilon_1$.

З гэтых ураўненняў знаходзім каэфіцыенты a_1, b_1, b_2, c :

$$\left. \begin{aligned} a_1 &= -\frac{u_1^2 u_2^2 - u^2 u_2^2 - u_1^2 v_2^2}{u_1^2 u_2^2 - u^2 u_2^2 - u_1^2 v_1^2} \\ b_1 &= \frac{h \omega \Delta \varepsilon uv_1}{u_1^2 u_2^2 - u^2 u_2^2 - u_1^2 v_1^2} \\ b_2 &= -\frac{h \omega \Delta \varepsilon uv_2}{u_1^2 u_2^2 - u^2 u_2^2 - u_1^2 v_1^2} \\ c &= \frac{\varepsilon' \omega u_2^2 u}{u_1^2 u_2^2 - u^2 u_2^2 - u_1^2 v_1^2} \end{aligned} \right\}, \quad (16)$$

а таксама ўраўненне для вызначэння пастаяннай распаўсюджвання

$$\begin{aligned} k_1^2 (k_2^2 - h^2)^2 + (k_2^2 - h^2) (k_1^2 - h^2) k_1^2 - (k_2^2 - h^2) k_1^2 (v_1^2 + v_2^2) - \\ - (k_2^2 - h^2) k'^4 - \Delta k^2 (k_1^2 + h^2) u^2 = 0. \end{aligned} \quad (17)$$

Пры вывадзе ўраўнення (17) мы не прымалі пад увагу члены, прапарцыянальныя H^3_0 , і вышэйшых ступені. Ураўненне (17) з'яўляецца бікватратным адносна h^2 , значыць, і ў гэтым выпадку ёсць дзве хвалі, якія бягуць уздоўж восі z .

Такім чынам, мы вызначылі электрамагнітныя хвалі, які распаўсюджваюцца ў металічным хваляводзе, запоўненым гіратропным асяроддзем. Як відаць з атрыманых рашэнняў, уласцівасці гіратропных хваляводаў істотна адрозніваюцца не толькі ад уласцівасцей ізатропных хваляводаў, але таксама і ад уласцівасцей хвалявода, запоўненага крышталічным асяроддзем.

ЛІТАРАТУРА

1. Van Trier. Appl. Sci. Res., Sec. B, 3, 305, 1954.
2. Camus M., Mezes J. Electrom. Theory and Antennas. Pergamon Press, 1963.
3. Федоров Ф. И. Оптика анизотропных сред. Минск, 1958.

Рэзюме

Рассмотрены электромагнитные свойства прямоугольного металлического волновода с гиротропным заполнением. Определены моды такого волновода в случае продольного и поперечного внешних магнитных полей.

Поступило в редакцию 15.III 1965

А. А. БОГУШ

АБ СУВЯЗІ МАТРЫЧНЫХ ЭЛЕМЕНТАЎ ДЛЯ ДЗІРАКАЎСКАГА І ПАУЛІЕЎСКАГА ТОКАЎ

Фенаменалагічнае апісанне электрамагнітнай структуры элементарных часцінак з дапамогай адпаведных формфактараў застаецца адным з найбольш распаўсюджаных, надзейных і простых метадаў пры тэарэтычнай інтэрпрэтацыі эксперыментальных даных і абгрунтаванні прапановы па пастаноўцы новых доследаў, звязаных з рашэннем такіх фундаментальных праблем, як вывучэнне ўнутранай структуры часцінак, праверка справядлівасці квантавай электрадынамікі на малых адлегласцях, праверка інварыянтнасці тэорыі адносна тых або іншых дыскрэтных пераўтварэнняў.

Аднак звязаныя з гэтым разлікі сячэнняў канкрэтных працэсаў узаемадзеяння часта прыводзяць да грубасткіх вылічэнняў. Ніжэй, зыходзячы з простых меркаванняў, заснаваных на тэнзарных уласцівасцях матрычных элементаў, прапановуецца метадыка разліку, якая дазваляе істотна скараціць вылічэнні і больш простым шляхам атрымаць рэзультаты, у тым ліку і прамежкавыя, у зручным для фізічнай інтэрпрэтацыі выглядзе. У аснове такога падыходу ляжыць устанаўленне сувязі паміж матрычнымі элементамі для дзіракаўскага і пауліеўскага токаў.

З ураўненняў Дзірака ў імпульсным прадстаўленні

$$(\hat{p}_1 - i\chi) u_1 = 0, \quad \bar{u}_2 (\hat{p}_2 - i\chi) = 0,$$

дзе $u_i = u^{si}(p_i)$ ($i = 1, 2$), $p = (p, ip_0)$ — 4-імпульс часцінкі; s — праекцыя спіна, як вядома (гл., напрыклад, [1]), вынікае

$$\bar{u}_2 u_1 = \frac{r_\mu}{2i\chi} \bar{u}_2 \gamma_\mu u_1. \quad (1)$$

Аналагічным шляхам можна знайсці, што

$$\bar{u}_2 (\hat{q} \gamma_\mu - \gamma_\mu \hat{q}) u_1 = 4i\chi (\bar{u}_2 \gamma_\mu u_1) - 2r_\mu (\bar{u}_2 u_1), \quad (2)$$

дзе

$$r = p_1 + p_2; \quad q = p_2 - p_1; \quad \hat{q} = q_\mu \gamma_\mu.$$

З (1) і (2) адразу выцякаюць наступныя асноўныя суадносіны, якія звязваюць матрычныя элементы для ўзаемадзеяння тыпу Паулі і звычайнага дзіракаўскага току

$$\bar{u}_2 (\hat{q} \gamma_\mu - \gamma_\mu \hat{q}) u_1 = \frac{i}{\chi} (4\chi^2 \delta_{\mu\nu} + r_\mu r_\nu) \bar{u}_2 \gamma_\nu u_1. \quad (3)$$

З дапамогай (3) матрычны элемент

$$M_\mu = \bar{u}_2 \Gamma_\mu u_1 \quad (4)$$

са складаным вяршынным аператарам Γ_μ , які ўлічвае няпунктаваць часцінкі і размеркаванне электрычнага зараду і аномальнага магнітнага моманту

$$\Gamma_\mu = \Gamma_\mu(q^2) = F_1(q^2) \gamma_\mu - \frac{i l F_2(q^2)}{4x} (\hat{q} \gamma_\mu - \gamma_\mu \hat{q}), \quad (5)$$

можна прадставіць наступным чынам:

$$M_\mu = A_{\mu\nu} (\bar{u}_2 \gamma_\nu u_1), \quad (6)$$

дзе

$$A_{\mu\nu} = (F_1 + l F_2) \delta_{\mu\nu} + \frac{l F_2}{4x^2} r_\mu r_\nu. \quad (7)$$

Тым самым знойдзена прадстаўленне матрычных элементаў, якое дазваляе замест грувасткіх вылічэнняў, абумоўленых ускладненнем вяршыннага аператара, звесці разлік матрычных элементаў і сячэнняў рассеяння для няпунктавых часцінак да выпадку пунктавых часцінак. Гэта дасягаецца за кошт выдзялення з матрычнага элемента тэнзарных множнікаў, якія не маюць дзіракаўскіх матрыц і характарызуюць унутраную структуру часцінкі. Указаныя множнікі з'яўляюцца такімі ж агульнымі, як і вяршычны аператар Γ_μ (5), і не залежаць ад спінавых станаў узаемадзеючых часцінак.

Пасля пераходу да так званых зарадавага і магнітнага формфактараў G_E і G_M , звязаных з F_1 і $l F_2$ суадносінамі

$$F_1 + l F_2 = G_M, \quad F_1 = \left(G_E + \frac{q^2}{4x^2} G_M \right) \left(1 + \frac{q^2}{4x^2} \right)^{-1}, \quad (8)$$

$$F_1 - \frac{q^2}{4x^2} l F_2 = G_E, \quad l F_2 = (G_M - G_E) \left(1 + \frac{q^2}{4x^2} \right)^{-1},$$

выраз (7) прымае больш прости выгляд

$$A_{\mu\nu} = G_M \delta_{\mu\nu} - (G_M - G_E) \frac{r_\mu r_\nu}{r^2}, \quad (9)$$

дзе ўлічана, што $r^2 + q^2 = -4x^2$.

Незалежнасць тэнзарных множнікаў $A_{\mu\nu}$ (7) і (9) ад спінавых станаў узаемадзеючых часцінак дазваляе выкарыстаць прапануемы падыход пры разглядзе працэсаў як з непалярызаванымі, так і палярызаванымі часцінкамі.

У выпадку палярызаваных часцінак зручна карыстацца каварыянтнай метадыкай непасрэднага разліку матрычных элементаў, развітай на падставе металу праектыўных аператараў [2] у [3] і [4, 5]. Матрычны элемент M для працэсу рассеяння дзвюх розных няпунктавых дзіракаўскіх часцінак пры ўліку іх спінавых станаў да і пасля ўзаемадзеяння, згодна з (6), можна запісаць наступным чынам¹:

$$\begin{aligned} M &= M_{s_1, s_1'; s_2, s_2'}(p_1, p_1'; p_2, p_2') = M_\mu M'_\mu = \\ &= (A_{\mu\nu} A'_{\nu\rho}) [\text{Sp}(\gamma_\nu u_1 \cdot \bar{u}_2) \text{Sp}(\gamma_\rho u'_1 \cdot \bar{u}'_2)]. \end{aligned} \quad (10)$$

У тым выпадку, калі праводзіцца ўсярэдненне і падсумаванне па палярызацыях узаемадзеючых часцінак, больш рацыянальным з'яўля-

¹ Тут і ў далейшым усе выразы са штрыхом адносяцца да другой часцінкі і, як правіла, у тэксте не прыводзяцца. Яны маюць такі ж выгляд, як і адпаведныя выразы без штрыхоў.

еще выкарыстоўванне стандартнай методыкі разліку [2]. У адпаведнасці з гэтай методыкай квадрат модуля матрычнага элемента $|M|^2$ для разглядаемага працэсу з улікам уведзенага прадстаўлення (6) зручна запісаць у выглядзе

$$|M|^2 = \{(A_{\mu\nu} A_{\rho\sigma}^*) \text{Sp}(\Lambda_1 \gamma_\nu \Lambda_2 \bar{\gamma}_\sigma)\} \{(A'_{\rho\lambda} A'_{\rho\lambda}{}^*) \text{Sp}(\Lambda'_1 \gamma_\lambda \Lambda'_2 \bar{\gamma}_\lambda)\}, \quad (11)$$

дзе

$$\Lambda_1 \gamma_\nu \Lambda_2 \bar{\gamma}_\sigma = \frac{1}{4z^2} \{(\hat{p}_1 - iz) \gamma_\nu (\hat{p}_2 - iz) \gamma_\sigma\}. \quad (12)$$

Уваходзячы ў (11) множнікі $A_{\mu\nu} A_{\rho\sigma}$ і $A'_{\rho\lambda} A'_{\rho\lambda}{}^*$ вызначаюцца па формулах (7) або (9) і поўнасьцю апісваюць уклад у сячэнне рассеяння, абумоўлены ўнутранай структурай адпаведнай часцінкі.

Для ілюстрацыі эфектыўнасці прапануемага падыходу правядзём тут непасрэдны разлік агульных выказаў (10) і (11).

У адпаведнасці з [3] выраз для следу $\text{Sp}(\gamma_\nu u_1 \cdot \bar{u}_2)$, які ўваходзіць у (10), у агульным выпадку адвольных палярызаций, г. зн. калі праектыўны аператар стану часцінкі мае выгляд $\Lambda(p, s) = \frac{1}{4z} (\hat{p} - iz) (1 - i \gamma_5 \hat{s})$,

мога быць запісан наступным чынам:

$$\text{Sp}(\gamma_\nu u_1 \cdot \bar{u}_2) = \frac{i}{2\sqrt{C}} (L_\nu - K_\nu), \quad (13)$$

дзе

$$L_\nu = rS \cdot S_\nu - rD \cdot D_\nu - S^2 r_\nu; \quad (14)$$

$$K_\nu = \frac{1}{z} \delta_{\nu\lambda\rho\sigma} S_\lambda r_\rho q_\sigma;$$

$$C = Lr = (rS)^2 - (rD)^2 - S^2 r^2.$$

Тут $S = s_1 + s_2$; $D = s_1 - s_2$, дзе s_1 і s_2 — 4-вектары спіна ў пачатковым і канчатковым станах часцінкі. Такім чынам, для матрычнага элемента ўзаемадзеяння M (формула (10)) палярызаваных часцінак, улічваючы (13), атрымаем

$$M = M_\mu M'_\mu = (A_{\mu\nu} A'_{\rho\lambda}) \left[\left(\frac{-1}{4\sqrt{CC'}} \right) (L_\nu - K_\nu) (L'_\rho - K'_\rho) \right]. \quad (15)$$

Адсюль, выкарыстоўваючы яўны выгляд множнікаў $A_{\mu\nu}$ (7) або (9), якія вызначаюць уклад унутранай структуры часцінкі ў амплітуду рассеяння, канчаткова знаходзім

$$M = \frac{-1}{4\sqrt{CC'}} \{F_1 F'_1 \alpha_1 + F_1 (l'F'_1) \alpha_2 + F_1 (lF_2) \alpha_3 + (lF_2) (l'F'_2) \alpha_4\} \quad (16)$$

або

$$M = \frac{-1}{4\sqrt{CC'}} \{G_E G'_E \beta_1 + G_E G'_M \beta_2 + G_M G'_E \beta_3 + G_M G'_M \beta_4\}. \quad (17)$$

У формулах (16) і (17) уведзены наступныя абазначэнні:

$$\alpha_1 = \delta_1; \quad \beta_1 = \frac{\delta_4}{r^2 r'^2};$$

$$\alpha_2 = \delta_1 + \frac{\delta_2}{4z'^2}; \quad \beta_2 = \frac{1}{r^2} \left(\delta_3 - \frac{\delta_4}{r'^2} \right);$$

$$\alpha_3 = \delta_1 + \frac{\delta_3}{4x^2}; \quad \beta_3 = \frac{1}{r'^2} \left(\delta_2 - \frac{\delta_4}{r^2} \right); \quad (18)$$

$$\alpha_4 = \delta_1 + \frac{\delta_2}{4x'^2} + \frac{\delta_3}{4x^2} + \frac{\delta_4}{16x^2 x'^2}; \quad \beta_4 = \delta_1 - \frac{\delta_2}{r'^2} - \frac{\delta_3}{r^2} + \frac{\delta_4}{r^2 r'^2},$$

дзе

$$\delta_1 = (L - K)(L' - K'); \quad \delta_3 = C(L'r - Kr'); \quad (19)$$

$$\delta_2 = C'(Lr' - Kr'); \quad \delta_4 = CC' \cdot rr',$$

прычым L, K, C вызначаюцца згодна¹ з (14).

Разлікі істотна спрашчаюцца, калі разглядаецца ўзаемадзеянне часцінак з палярызацыямі пэўнага тыпу. У прыватнасці, у выпадку падоўжна палярызаваных часцінак гэта дасягаецца за кошт выкарыстання адпаведных матрычных элементаў, прыведзеных у [5]. Напрыклад, калі працэс разглядаецца ў сістэме цэнтра інерцыі, пасля простых выкладак мы прыходзім да формулы, аналагічнай той, якая атрымана для дадзенага выпадку (пры $f_3 = 0$) у [5].

Пры адсутнасці палярызацыі трэба карыстацца формулай (11). У гэтым выпадку, згодна з (12), атрымаем

$$\text{Sp} \{ \Lambda_1 \gamma_\nu \Lambda_2 \gamma_\sigma \} = \frac{1}{2x^2} [(q \cdot q - r \cdot r)_{\nu\sigma} - q^2 \delta_{\nu\sigma}]. \quad (20)$$

Пры згортванні (20) з $A_{\mu\nu} A_{\rho\sigma}$, дзе $A_{\mu\nu}$ вызначаецца па формуле (7), аўтаматычна выдзяляюцца наступныя камбінацыі формфактараў F_1 і IF_2

$$H_M = G_M^2 = (F_1 + IF_2)^2, \quad H_{EM} = F_1^2 + \frac{q^2}{4x^2} (IF_2)^2. \quad (21)$$

У выніку знаходзім, што квадрат модуля матрычнага элемента $|M|^2$ (11) мае выгляд

$$|M|^2 = \frac{1}{4x^2 x'^2} \{ H_M H'_M 3q^4 + H_M H'_{EM} q^2 r'^2 + H'_M H_{EM} q^2 r^2 + H_{EM} H'_{EM} (rr')^2 \}. \quad (22)$$

У той жа час пры выкарыстоўванні (9) для $|M|^2$ атрымліваем наступны выраз:

$$|M|^2 = \frac{1}{4x^2 x'^2} \{ G_E^2 G_E'^2 \varepsilon_1 + G_E^2 G_M'^2 \varepsilon_2 + G_E'^2 G_M^2 \varepsilon_3 + G_M^2 G_M'^2 \varepsilon_4 \}, \quad (23)$$

дзе

$$\varepsilon_1 = 16x^2 x'^2 \eta; \quad \varepsilon_2 = -4x'^2 q^2 (1 - \eta); \quad \varepsilon_3 = -4x^2 q^2 (1 - \eta); \quad (24)$$

$$\varepsilon_4 = q^4 (1 + \eta); \quad \eta = \frac{(rr')^2}{r^2 r'^2}.$$

Такім чынам, выкарыстанне прапануемага прадстаўлення матрычных элементаў для часцінак, якія валодаюць электрамагнітнай структурай, прыводзіць да істотнага скарачэння вылічэнняў, і, акрамя таго, рэзультаты атрымліваюцца ў кампактным і зручным для аналізу і параўнання з эксперыментам выглядзе.

¹ Пры вылічэнні здабыткаў згорткаў тэнзараў $\delta_{\mu\nu\rho\sigma}$ з 4-вектарамі, г. зн. выразаў тыпу KK' , мэтазгодна карыстацца прыёмам, прыведзеным ніжэй у дадатку.

Няцяжка бачыць, што разглядаемы падыход распаўсюджваецца і на выпадак, калі, акрамя памянёнай вышэй, улічваецца дыпольная структура часцінкі, г. зн. калі ў вяршыны апэратар Γ_μ (5) уводзіцца дадаткова член з формфактарам λF_3 . Пры гэтым

$$T_\mu = T_\mu(q^2) = \Gamma_\mu(q^2) - \frac{\lambda F_3(q^2)}{4x} \gamma_5 (\hat{q} \gamma_\mu - \gamma_\mu \hat{q}). \quad (25)$$

Тады, выкарыстоўваючы суадносіны

$$\bar{u}_2 \gamma_5 (\hat{q} \gamma_\mu - \gamma_\mu \hat{q}) u_1 = -2r_\mu (\bar{u}_2 \gamma_5 u_1), \quad (26)$$

замест (6) будзем мець

$$M_\mu = \bar{u}_2 T_\mu u_1 = A_{\mu\nu} (\bar{u}_2 \gamma_\nu u_1) + \frac{\lambda F_3}{2x} r_\mu (\bar{u}_2 \gamma_5 u_1). \quad (27)$$

Звяртаючы цяпер увагу на (13) і ўлічваючы, што, згодна з [3],

$$\text{Sp} \{ \gamma_5 u_1 \cdot \bar{u}_2 \} = \frac{-N}{4x \sqrt{C}}, \quad N = 4x Dr - \delta_{\mu\nu\rho\sigma} r_\mu q_\nu S_\rho D_\sigma, \quad (28)$$

знайдзем

$$M_\mu = \frac{i}{2 \sqrt{C}} \{ A_{\mu\nu} (L_\nu - K_\nu) + iBNr_\mu \}, \quad (29)$$

дзе

$$B = \frac{\lambda F_3}{4x^2}.$$

У заключэнне адзначым, што прапануемы падыход у прынцыпе можа быць абагульнен на выпадак часцінак з адвольным значэннем спіна. Суадносіны (6) з'яўляюцца ў такой жа ступені універсальнымі, наколькі універсальны трансфармацыйныя (тэнзарныя) уласцівасці матрычных элементаў разглядаемага тыпу. Пры гэтым, аднак, выгляд тэнзарнага множніка $A_{\mu\nu}$ для кожнага роду часцінак павінен вызначацца незалежна.

У выпадку вектарных часцінак, для якіх інфінітэзімальныя апэратары групы Лоранца выражаюцца праз матрыцы Дафіна — Кемера аналагічна таму, як у алгебры Дзірака, памянёнае абагульненне мае трывіяльны характар.

Сапраўды, выкарыстоўваючы зусім агульныя суадносіны (1) і $q_\mu (\bar{\varphi}_2 \beta_\mu \varphi_1) = 0$, дзе β_μ — 10×10 -матрыцы Дафіна — Кемера; $\varphi = \varphi^{(a)}(p)$ — хвалеваыя функцыі вектарнай часцінкі, пасля простых выкладак знаходзім

$$\bar{\varphi}_2 (\hat{q} \beta_\mu - \beta_\mu \hat{q}) \varphi_1 = \frac{1}{2ix} (4x^2 \delta_{\mu\nu} + r_\mu r_\nu) \bar{\varphi}_2 \beta_\nu \varphi_1,$$

што з дакладнасцю да $1/2$ супадае з (3). Калі затым па аналогіі з (5) возьмем

$$\Gamma_\mu = \Gamma_\mu(q^2) = f_1(q^2) \beta_\mu - \frac{if_2(q^2)}{2x} (\hat{q} \beta_\mu - \beta_\mu \hat{q}),$$

то адразу атрымаем суадносіны (6)

$$M_\mu = \bar{\varphi}_2 \Gamma_\mu \varphi_1 = A_{\mu\nu} (\bar{\varphi}_2 \beta_\nu \varphi_1),$$

дзе $A_{\mu\nu}$, як і ў выпадку дзіракаўскіх часцінак, вызначаецца па формулах (7) або (9).

Выкарыстоўваючы цяпер распрацаваную ў [6, 7] методыку непасрэднага разліку матрычных элементаў палярызаваных вектарных часцінак, атрымаем

$$M_{\mu} = A_{\mu\nu} \text{Sp} \{ \beta_{\nu} \Phi^{(a_1)}(p_1) \cdot \bar{\Phi}^{(a_2)}(p_2) \} = \\ = A_{\mu\nu} \left\{ \frac{1}{2i\kappa} [(a_1 a_2) r_{\nu} - (a_1 r \cdot a_{2\nu} + a_2 r \cdot a_{1\nu})] \right\}, \quad (30)$$

дзе вектары a ў залежнасці ад значэнняў праекцый спіна (+1, -1 або 0) роўны $e^{(+)}$, $e^{(-)}$ або s [7].

Аналагічна (11) і (12) у выпадку непаларызаваных часцінак у адпаведнасці з [2] і [6] маем

$$\text{Sp} \{ \Gamma_{\mu} \Lambda_1 \Gamma_{\rho} \Lambda_2 \} = A_{\mu\nu} A_{\rho\sigma} \text{Sp} \{ \beta_{\nu} \Lambda_1 \beta_{\sigma} \Lambda_2 \} = \\ = A_{\mu\nu} A_{\rho\sigma} \left\{ \frac{1}{8\kappa^4} [r^2 (q^2 \delta_{\nu\sigma} - q_{\nu} q_{\sigma}) + (r^2 - 2\kappa^2) r_{\nu} r_{\sigma}] \right\}. \quad (31)$$

ДАДАТАК

Пры вылічэнні матрычных элементаў або квадратаў іх модуляў для палярызаваных часцінак з дапамогай стандартнай тэхнікі слядоў карысна мець на ўвазе наступныя суадносіны:

$$\frac{1}{16} \text{Sp} \{ \gamma_5 \hat{q} \hat{r} \hat{s} \hat{d} \} \text{Sp} \{ \gamma_5 \hat{q}' \hat{r}' \hat{s}' \hat{d}' \} = \begin{vmatrix} qq' & qr' & qs' & qd' \\ rq' & rr' & rs' & rd' \\ sq' & sr' & ss' & sd' \\ dq' & dr' & ds' & dd' \end{vmatrix}; \quad (I)$$

$$= \delta_{\mu\nu\rho\sigma} q_{\mu} r_{\nu} s_{\rho} d_{\sigma} \delta_{\lambda\omega\eta} q'_{\lambda} r'_{\omega} s'_{\eta} d'_{\eta}$$

$$\frac{1}{16} \text{Sp} \{ \gamma_5 \gamma_{\mu} \hat{q} \hat{r} \hat{s} \} \text{Sp} \{ \gamma_5 \gamma_{\mu} \hat{q}' \hat{r}' \hat{s}' \} = \begin{vmatrix} qq' & qr' & qs' \\ rq' & rr' & rs' \\ sq' & sr' & ss' \end{vmatrix}; \quad (II)$$

$$= \delta_{\mu\nu\rho\sigma} q_{\nu} r_{\rho} s_{\sigma} \delta_{\lambda\omega\eta} q'_{\lambda} r'_{\omega} s'_{\eta}$$

$$\frac{1}{16} \text{Sp} \{ \gamma_5 \gamma_{\mu} \gamma_{\nu} \hat{q} \hat{r} \} \text{Sp} \{ \gamma_5 \gamma_{\mu} \gamma_{\nu} \hat{q}' \hat{r}' \} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} qq' & qr' \\ rq' & rr' \end{vmatrix}. \quad (III)$$

$$= \delta_{\mu\nu\rho\sigma} q_{\rho} r_{\sigma} \delta_{\lambda\omega\eta} q'_{\omega} r'_{\eta}$$

Такое прадстаўленне дазваляе ўлічыць суадносіны (артаганальнасці і інш.), якія звязваюць 4-вектары, да вылічэння адпаведных дэтэрмінантаў.

Прыкладзём таксама суадносіны, якія часта сустракаюцца:

$$\delta_{\mu\nu\rho\sigma} q_{\mu} r_{\nu} s_{\rho} d_{\sigma} = [\mathbf{qr}] (d_1 s - s_4 d) + [\mathbf{sd}] (r_4 q - q_4 r). \quad (IV)$$

ЛІТАРАТУРА

1. Швებер С. Введение в релятивистскую квантовую теорию поля. ИЛ, 1963.
2. Федоров Ф. И. ЖЭТФ, **35**, 493, 1958.
3. Беллито Е. Nuovo Cimento, **21**, 730, 1961.
4. Богущ А. А., Федоров Ф. И. Весті АН БССР, сер. фіз.-тэхн. навук, № 2, 1962.
5. Богущ А. А. Весті АН БССР, сер. фіз.-тэхн. навук, № 2, 1964.
6. Богущ А. А. ДАН СССР, **149**, 1286, 1963.
7. Богущ А. А., Болсун А. И. ДАН СССР, **155**, 1046, 1964.

РЕЗЮМЕ

Показано, что матричный элемент для неточечной дираковской частицы может быть представлен в виде: $M_{\mu} = A_{\mu\nu} \bar{u}_2 \gamma_{\nu} u_1$, где тензорный множитель $A_{\mu\nu}$ полностью определяет вклад в сечение рассеяния (амплитуду рассеяния), обусловленный распределением электрического заряда и аномального магнитного момента частицы. Выделение множителей $A_{\mu\nu}$, не содержащих матриц и не зависящих от спиновых состояний частицы, позволяет свести расчет конкретных процессов взаимодействия неточечных частиц к случаю точечных, что существенно сокращает вычисления.

Обсуждается возможность обобщения предлагаемого подхода в применении к другим спиновым частицам и, в частности, рассматривается случай векторных частиц.

Поступило в редакцию 20. I 1965

(18)

(I)

(II)

(III)

(IV)

Л. Г. МОРОЗ, В. Н. ТРЕТЬЯКОВ

О СВЯЗИ МНИМОЙ ЧАСТИ АМПЛИТУДЫ КОМПТОН-ЭФФЕКТА НА НЕЙТРОНЕ С ФОТОРОЖДЕНИЕМ π -МЕЗОНОВ

Как известно, комптон-эффект на нуклоне в области энергий, близких к порогу неупругих процессов, и особенно при энергиях выше порога существенно зависит от этих процессов. Эта зависимость может быть найдена с помощью дисперсионных соотношений из связи мнимой части амплитуды рассеяния γ -квантов на нуклонах с неупругими процессами (см., например, [1]). Для области энергий γ -квантов, начиная от нескольких десятков $Mэв$ и вплоть до $450 Mэв$, наиболее существенное влияние на комптон-эффект на нуклоне оказывает одно-мезонное фоторождение¹.

В области энергий до $450 Mэв$ одно-мезонное фоторождение в основном определяется амплитудами фоторождения π -мезонов в S - и P -состояниях.

Поэтому, определяя вклад одно-мезонного фоторождения в мнимую часть амплитуды комптон-эффекта на нуклоне в этой области энергий, естественно ограничимся S - и P -состояниями. При этих предположениях мнимая часть амплитуды комптон-эффекта на протоне была выражена в [1] через коэффициенты углового распределения фотомезонов на протоне, измеряемые непосредственно в экспериментах. В данной работе при тех же предположениях находится связь мнимой части амплитуды комптон-эффекта на нейтроне с одно-мезонным фоторождением на нуклоне.

Показано, что комптон-эффект на нейтроне в области энергий до $450 Mэв$ можно связать с фоторождением π -мезонов на протоне и с отношением сечений реакций $\gamma + n \rightarrow p + \pi^-$ и $\gamma + p \rightarrow n + \pi^+$, определяемым из экспериментов по фоторождению π -мезонов на дейтроне. Такая связь представляет интерес тем более, что экспериментальных данных по фоторождению π -мезонов непосредственно на нейтроне нет.

Условие унитарности в одно-мезонном приближении приводит в с. п. и. к следующей связи между мнимыми частями шести независимых амплитуд Φ_i комптон-эффекта на нейтроне и четырьмя независимыми амплитудами фоторождения F_k (см., например, [1]):

$$\sum_{i=1}^6 \text{Im } \Phi_i n_i = \frac{q}{4\pi} \sum_{\rho} \int d\Omega \sum_{k,l=1}^4 F_k^* F_l m_k m_l. \quad (1)$$

¹ Здесь мы не рассматриваем фоторождения электронно-позитронных пар, которые вносят сравнимый с одно-мезонным вклад в амплитуду комптон-эффекта на протоне лишь в области очень малых углов [2].

Здесь \sum_{ρ} означает сумму по реакциям $\gamma + n \rightarrow p + \pi^-$ и $\gamma + n \rightarrow n + \pi^0$; n_i — 6 спиновых структур комптон-эффекта, а m_k — 4 спиновые структуры фоторождения [1]; q — импульс π -мезона. Штрихами отмечены величины, связанные с рассеянным фотоном в комптон-эффекте. Интегрирование ведется по телесному углу рассеяния π -мезона.

Воспользуемся разложением амплитуд фоторождения F_k по мультипольным амплитудам, в котором угловая зависимость явно выделена и задается производными от полиномов Лежандра [3]. Ограничиваясь амплитудами фоторождения π -мезонов в S - и P -состояниях, будем иметь:

$$\begin{aligned} F_1 &= E_d \left(\frac{1}{2} \right) + \left[\frac{1}{2} E_q \left(\frac{3}{2} \right) - 3M_d \left(\frac{1}{2} \right) \right] x', \\ F_2 &= -2M_d \left(\frac{3}{2} \right) - M_d \left(\frac{1}{2} \right), \\ F_3 &= \frac{1}{2} E_q \left(\frac{3}{2} \right) + 3M_d \left(\frac{3}{2} \right), \\ F_4 &= 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Подставляя (2) в (1), интегрируя по $d\Omega$ и приравнявая в (1) члены при одинаковых структурах, получаем:

$$\begin{aligned} \text{Im } \Phi_1 &= q \sum_{\rho} \left\{ 3 \left| M_d \left(\frac{3}{2} \right) \right|^2 - \frac{1}{12} \left| E_q \left(\frac{3}{2} \right) \right|^2 \right\} x; \\ \text{Im } \Phi_2 &= -q \sum_{\rho} \left\{ 3 \left| M_d \left(\frac{3}{2} \right) \right|^2 - \frac{1}{12} \left| E_q \left(\frac{3}{2} \right) \right|^2 \right\}; \\ \text{Im } \Phi_3 &= q \sum_{\rho} \left\{ \frac{1}{6} \left| E_q \left(\frac{3}{2} \right) \right|^2 + M_d^* \left(\frac{3}{2} \right) E_q \left(\frac{3}{2} \right) \right\}; \\ \text{Im } \Phi_4 &= 0; \quad \text{Im } \Phi_5 = \text{Im } \Phi_5^0 + x \text{Im } \Phi_5^1 = \\ &= q \sum_{\rho} \left\{ \left| E_d \left(\frac{1}{2} \right) \right|^2 + x \left[\frac{1}{6} \left| E_q \left(\frac{3}{2} \right) \right|^2 - E_q^* \left(\frac{3}{2} \right) M_d \left(\frac{3}{2} \right) \right] \right\}; \\ \text{Im } \Phi_6 &= q \sum_{\rho} \left\{ \left| M_d \left(\frac{1}{2} \right) \right|^2 - \left| M_d \left(\frac{3}{2} \right) \right|^2 - \frac{1}{12} \left| E_q \left(\frac{3}{2} \right) \right|^2 \right\}. \end{aligned} \quad (3)$$

Входящие в (2) и (3) величины $E_d(j)$, $E_q(j)$ и $M_d(j)$ — электрические и магнитные мультипольные амплитуды фоторождения пионов в дипольном и квадрупольном состояниях системы фотон — нуклон с полным моментом j ; x и x' — косинусы углов рассеяния γ -кванта и π -мезона соответственно. В нашем приближении и в области энергий примерно до 450 Мэв (где одномезонное фоторождение оказывается основным) можно воспользоваться результатами разложения этих амплитуд по изотопическим состояниям системы нуклон—мезон [4]:

$$E_d^{[n0]} \left(\frac{1}{2} \right) = \left[\frac{V\sqrt{2}}{2} \right] e^{i\alpha_3} E_3 + \left[\frac{1/\sqrt{2}}{-1/2} \right] e^{i\alpha_1} (E_1 + \delta E_1);$$

$$\begin{aligned}
 M_d^{[\bar{n}0]} \left(\frac{1}{2} \right) &= \left[\frac{\sqrt{2}}{2} \right] e^{i\alpha_{31}} M_{31} + \left[\frac{1/\sqrt{2}}{-1/2} \right] e^{i\alpha_{11}} (M_{11} + \delta E_{11}); \\
 M_d^{[\bar{n}0]} \left(\frac{3}{2} \right) &= \left[\frac{\sqrt{2}}{2} \right] e^{i\alpha_{33}} M_{33} + \left[\frac{1/\sqrt{2}}{-1/2} \right] e^{i\alpha_{31}} (M_{13} + \delta M_{13}); \\
 E_q^{[\bar{n}0]} (3/2) &= \left[\frac{\sqrt{2}}{2} \right] e^{i\alpha_{33}} E_{33} + \left[\frac{1/\sqrt{2}}{-1/2} \right] e^{i\alpha_{13}} (E_{13} + \delta E_{13}).
 \end{aligned} \quad (4)$$

В этих формулах E и M — изовекторные, δE и δM — изоскалярные части амплитуд фоторождения; верхние строчки относятся к изотопическому разложению амплитуд E^- и M^- фоторождения π^- -мезонов на нейтроне, а нижние — к амплитудам E^{n0} и M^{n0} фоторождения π^0 -мезонов на нейтроне; α_{2T} и α_{2T2J} — фазы πN -рассеяния, где T и J — изотопический и полный угловой моменты πN -системы (по поводу обозначений см., например, [5]). Теми же индексами помечены соответствующие изотопические амплитуды E и M .

При подстановке (4) в (3) воспользуемся резонансной моделью „с усилением“ состояния с $2T = 2J = 3$ [6]. В соответствии с этой моделью все фазы πN -рассеяния, соответствующие амплитудам фоторождения в P -состояниях, за исключением α_{33} , положим равными нулю и пренебрежем всеми квадратами амплитуд фоторождения в P -состояниях, кроме M_{33}^2 и E_{33}^2 .

Это соответствует отбрасыванию незначительных добавок к основным вкладам в амплитуды фоторождения π -мезонов в P -состояниях, происходящим от резонансно больших амплитуд M_{33} и E_{33} и от их интерференции с нерезонансными P -состояниями.

С учетом этого после суммирования по ρ получим:

$$\begin{aligned}
 \text{Im } \Phi_1 &= 2q \left(A_{x0} + \frac{3}{2} \sqrt{A_{x0} A_{k0}} \right) x, \\
 \text{Im } \Phi_2 &= -2q \left(A_{x0} + \frac{3}{2} \sqrt{A_{x0} A_{k0}} \right), \\
 \text{Im } \Phi_3 &= 2q \left(A_{x0} - \frac{3}{2} \sqrt{A_{x0} A_{k0}} \right),
 \end{aligned} \quad (5)$$

$$\text{Im } \Phi_5^0 = q (|E_d^-|^2 + |E_d^{n0}|^2),$$

$$\text{Im } \Phi_5^1 = -q \left(A_{x0} - \frac{9}{4} A_{k0} \right),$$

$$\text{Im } \Phi_6 = -q \left(A_{x0} + \frac{3}{4} A_{k0} \right).$$

Здесь

$$A_{x0} = \frac{1}{2} \left(3M_{33} + \frac{1}{2} E_{33} \right)^2;$$

$$A_{k0} = 2 \left(M_{33} - \frac{1}{2} E_{33} \right)^2. \quad (6)$$

Формулы (5) и (6) выражают мнимые части амплитуд комптон-эффекта на нейтроне только через квадраты амплитуд фоторождения π -мезонов на протоне в S -состоянии (E_d^- и E_d^{n0}) и через квадратичные

комбинации амплитуд фоторождения π -мезонов в резонансном состоянии с $2T=2J=3$. Интерференционные члены в них не входят. Это является результатом суммирования по двум возможным реакциям фоторождения на нейтроне.

В рамках резонансной модели [6] A_{x^0} и A_{k^0} выражаются через коэффициенты углового распределения фотомезонов, рожденных на протоне (их смысл ясен из формул: $d\sigma(\gamma p \rightarrow n\pi^+) = (A^+ + B^+x' + C^+x'^2) d\Omega$, $d\sigma(\gamma p \rightarrow p\pi^0) = (A^0 + B^0x' + C^0x'^2) d\Omega$). Через те же коэффициенты можно выразить сумму $|E_d^+|^2 + |E_d^0|^2$ квадратов амплитуд фоторождения π^+ - и π^0 -мезонов на протоне в S -состоянии:

$$|E_d^+|^2 + |E_d^0|^2 = A^+ + C^+ - \frac{1}{2}(A^0 + C^0);$$

$$A_{k^0} = \frac{1}{2}(A^0 + C^0); \quad A_{x^0} = \frac{3}{8}A^0 - \frac{1}{3}C^+ + \frac{1}{24}C^0. \quad (7)$$

Подставляя (7) в (5), окончательно получим:

$$\text{Im } \Phi_1 = \frac{q}{12} [9A^0 + C^0 - 8C^+ + 3\sqrt{3(A^0 + C^0)(9A^0 + C^0 - 8C^+)}] x,$$

$$\text{Im } \Phi_2 = -\frac{q}{12} [9A^0 + C^0 - 8C^+ + 3\sqrt{3(A^0 + C^0)(9A^0 + C^0 - 8C^+)}],$$

$$\text{Im } \Phi_3 = \frac{q}{12} [9A^0 + C^0 - 8C^+ - 3\sqrt{3(A^0 + C^0)(9A^0 + C^0 - 8C^+)}],$$

$$\text{Im } \Phi_4 = 0, \quad (8)$$

$$\text{Im } \Phi_5^0 = q\tau(\delta) \left[A^+ + C^+ - \frac{1}{2}(A^0 + C^0) \right],$$

$$\text{Im } \Phi_5^1 = \frac{q}{12} (9A^0 + 13C^0 + 4C^+),$$

$$\text{Im } \Phi_6 = \frac{q}{12} (4C^+ - 9A^0 - 5C^0).$$

Как видно, полученные формулы не содержат коэффициентов B . Это связано с тем, что в указанном приближении [6] сечения фоторождений на протоне определяются четырьмя независимыми величинами. В качестве таковых естественно было выбрать A^+ , C^+ , A^0 , C^0 , так как B^+ и B^0 выделяются из экспериментов с большими погрешностями.

Формула (8) отличается от соответствующих формул [1] лишь отношением суммарных вкладов S -волн в фоторождение на свободных нуклонах

$$\tau(\delta) = \frac{|E_d^-|^2 + |E_d^{n0}|^2}{|E_d^+|^2 + |E_d^0|^2}. \quad (9)$$

При не слишком больших энергиях вклад S -волн в фоторождение нейтральных пионов пренебрежимо мал по сравнению с соответствующими вкладами заряженных π -мезонов [6]. При этих условиях выражение для τ упрощается

$$\tau = \frac{|E_d^-|^2}{|E_d^+|^2}. \quad (10)$$

В области энергий, в которых применима резонансная модель, отношение (10) слабо зависит от энергии, и в нашем приближении его можно считать постоянным и равным пороговому отношению сечений $\frac{\sigma^-}{\sigma^+}$ реакций $\gamma + n \rightarrow p + \pi^-$, $\gamma + p \rightarrow n + \pi^+$. Это величина в свою очередь определяется из экспериментов по фоторождению π^- -и π^+ -мезонов на дейтроне [7].

Формулы (8) и (9) позволяют на базе дисперсионных соотношений для нуклонного комптон-эффекта [8] дать определенные предсказания о поведении поляризуемостей [9], сечений и других характеристик комптоновского рассеяния на нейтроне (в области энергий примерно до 500 Мэв), которые могут быть сравнены с данными из экспериментов по рассеянию на системах, содержащих нейтрон (см., например, [10]).

ЛИТЕРАТУРА

1. Федянин В. К. ЖЭТФ, **42**, 1038, 1962; ЖЭТФ, **44**, 633, 1963.
2. Герасимов С. Б., Лебедев А. И., Петрунькин В. А. ЖЭТФ, **43**, 1872, 1962.
3. Chew G., Low F., Coldberger M., Nambu L. Phys. Rev., **108**, 1337, 1957.
4. Gell-Mann M., Watson K. Ann. Rev. Nucl. Sci., **4**, 219, 1954.
5. Локк У. Ядерная физика частиц высоких энергий. ИЛ, 1962.
6. Watson K., Keck F., Tollestrup A., Walker R. Phys. Rev., **101**, 1159, 1955.
7. Watson K. Phys. Rev., **95**, 228, 1954.
8. Боголюбов Н. Н. и Ширков Д. В. ДАН СССР, **113**, 529, 1957.
9. Мороз Л. Г. и Третьяков В. Н. ДАН БССР, **8**, 575, 1964.
10. Human L., Ely R., Frisch D., Wahlig R. Phys. Rev. Lett., **3**, 93, 1959; Capps R. H. Phys. Rev., **103**, 1032, 1957; Capps R. H. Phys. Rev., **106**, 1031, 1957.

Поступило в редакцию 31. XII 1964

Г. В. ШЫШКІН

ДА ТЭОРЫ АДВАРОТНАГА μ — e -РАСПАДУ

Адным з цікавых відаў нейтрынных працэсаў, якія прадказваюцца агульнай схемай тэоры слабых узаемадзеянняў, з'яўляюцца працэсы адваротнага μ — e -распаду [1—4], да якіх адносяцца наступныя рэакцыі, індукемыя нейтрына:

$$\left. \begin{aligned} \text{(а)} \quad \bar{\nu}_e + e^- &\rightarrow \bar{\nu}_\mu + \mu^-, & \text{(в)} \quad \nu_e + e^+ &\rightarrow \nu_\mu + \mu^+, \\ \text{(б)} \quad \nu_\mu + e^- &\rightarrow \nu_e + \mu^-, & \text{(г)} \quad \bar{\nu}_\mu + e^+ &\rightarrow \bar{\nu}_e + \mu^+. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Як і для распаду мюёна $\mu^\pm \rightarrow e^\pm + \nu + \bar{\nu}$, гамільтаніян узаемадзеяння працэсаў (1) магчыма запісаць дваякім спосабам, канстатуючы яго з нейтральных токаў ($\nu\nu$) і ($e\mu$) [1] або з зараджаных токаў (νe) і ($\nu\mu$) [2]. У цяперашні час наўрад ці магчыма аддаць канчатковую перавагу якому-небудзь аднаму з памянёных гамільтаніянаў (гл., напрыклад, [5, 6]), хаця ёсць рад важкіх меркаванняў, якія забараняюць нейтральны ток ($\nu_e \nu_\mu$) [7, 8].

Для разліку мы выкарыстаем метады тэоры дзіракаўскіх часцінак з арыентаваным спінам, развіты ў работах [9, 10]. У гэтым метады хвалевыя функцыі свабоднага ферміёна запісваюцца з сумеснага рашэння ўраўнення Дзірака і ўраўнення праецыруючага апэратара

$$\left(-\frac{1}{ic} \frac{\partial}{\partial t} - \frac{1}{i} (\alpha \nabla) - \rho_3 k_0 \right) \psi = 0, \quad \left(\frac{(\sigma \nabla)}{ik} - s \right) \psi = 0. \quad (2)$$

Тут α , σ і ρ — вядомыя матрыцы Дзірака; $k_0 = \frac{m_0 c}{\hbar}$, дзе m_0 — маса спакою часцінкі і s — уласнае значэнне праецыруючага апэратара, роўнае ± 1 , якое характарызуе праекцыю спіна часцінкі на напрамак яе імпульсу.

Згодна з [5, 6], гамільтаніян узаемадзеяння працэсаў (1) у метады тэоры дзіракаўскіх часцінак з арыентаваным спінам можна запісаць для варыянта Лі і Янга ў выглядзе

$$H_{уз}^{Л.Я} = \sum_j G_j (\psi_\mu^+ O_j \psi_e) (\psi_{\nu_e}^+ O_j \psi_{\nu_\mu}). \quad (3)$$

Для варыянта Фейнмана і Гел-Мана маем

$$H_{уз}^{Ф.Г} = \sum_j G_j (\psi_\mu^+ O_j \psi_{\nu_\mu}) (\psi_{\nu_e}^+ O_j \psi_e), \quad (4)$$

дзе ψ_μ , ψ_e , ψ_{ν_μ} і ψ_{ν_e} — хвалевыя функцыі часцінак, якія ўдзельнічаюць у працэсах (1) (мюёна, электрона, мюённага і электроннага нейт-

рына і антынейтрына); G_j — канстанта сувязі j -га віда слабага ўзаемадзеяння, прычым мы абмяжуемся агульнапрынятым вектарна-аксіяльна-вектарным варыянтам узаемадзеяння, запісваючы, як звычайна

$$O_V = (i\alpha, I), \quad O_A = (\sigma, i\rho_1). \quad (5)$$

У адрозненне ад іншых аўтараў у метадазе, якім мы карыстаемся, няма неабходнасці ўводзіць у гамільтаніян узаемадзеяння членаў з псеўдаскалярным множнікам γ^5 .

Матрычныя элементы працэсаў адваротнага $\mu - e$ -распаду з улікам часцінак, якія ўдзельнічаюць, згодна з [9, 10], будзем вылічваць па наступнай формуле:

$$\left. \begin{aligned} \langle \gamma_{\mu\nu} \gamma_{\mu\nu} \rangle &= b^+(k, s, \varepsilon) \gamma_{\mu\nu} b(k', s', \varepsilon') \times \\ &\times b^+(k', s', \varepsilon') \gamma_{\mu\nu} b(k, s, \varepsilon) = \frac{1}{4} \rho_{\mu\mu} \sigma_{\nu\nu}, \end{aligned} \right\}$$

дзе

$$\left. \begin{aligned} \rho_{\mu\mu} &= \frac{1}{4} \text{Sp} \rho_{\mu'} \left(1 + \rho_1 \varepsilon' s' \frac{k'}{K'} + \rho_3 \varepsilon' \frac{k'_0}{K'} \right) \times \\ &\times \rho_{\mu} \left(1 + \rho_1 \varepsilon s \frac{k}{K} + \rho_3 \varepsilon \frac{k_0}{K} \right), \\ \sigma_{\nu\nu} &= \frac{1}{4} \text{Sp} \sigma_{\nu'} \left(1 + s' \frac{(\sigma k')}{k'} \right) \sigma_{\nu} \left(1 + s \frac{(\sigma k)}{k} \right). \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Тут $b(k, s, \varepsilon)$ — дзіракаўскія спінарныя амплітуды часцінак; ε вызначае знак энергіі адпаведнага стану; $k = p/\hbar$, дзе p — імпульс часцінкі; k_0 вызначана вышэй. Усе велічыні са штырых адносяцца да ферміёўскай часцінкі з масай спакою $m'_0 = k'_0 \hbar/c$, а велічыні без штырых — да

часцінкі з масай спакою $m_0 = \frac{k_0 \hbar}{c}$. $K^2 = k_0^2 + k^2$ характарызуе поўную энергію часцінкі.

Каэфіцыент, які характарызуе імавернасць працэсаў (1), у першым прыбліжэнні па канстанце слабага ўзаемадзеяння мае выгляд

$$C(t) = -\frac{i}{\hbar} \int_0^t dt' \int H_{y_3} dr. \quad (7)$$

Дыферэнцыяльная імавернасць працэсаў (1) у адзінку часу вызначаецца выразам

$$\omega = \frac{\partial}{\partial t} \{ C^*(t) C(t) \}. \quad (8)$$

Выбіраючы хвалеваыя функцыі часцінак, якія ўдзельнічаюць у працэсах (1), у выглядзе плоскіх хваль (з рашэння сістэмы (2)), для дыферэнцыяльнай імавернасці працэсаў (1) у адзінку часу няцяжка атрымаць наступны выраз:

$$d\omega = \frac{dk_\nu dk_\mu}{(2\pi)^5 c \hbar^2} \|R\|^2 \delta_{k_\nu, k_\nu + k_\mu} \delta(\varepsilon_e k_{0e} + \varepsilon_\mu k_{\nu\mu} - \varepsilon_\mu K_\mu - \varepsilon_{\nu e} k_{\nu e}). \quad (9)$$

Тут $\delta_{k_\nu, k_{\nu'} + k_\mu}$ — сімвал Кронекера; $\delta(\varepsilon_e k_{0e} + \varepsilon_{\nu_\mu} k_{\nu_\mu} - \varepsilon_\mu K_\mu - \varepsilon_{\nu_e} k_{\nu_e})$ — звычайная дэльта-функцыя Дзірака; ν — налятаючае нейтрына; ν' — народжанае нейтрына. Для рэакцый (а) і (в) маем $\varepsilon_e = -\varepsilon_{\nu_e} = \varepsilon_\mu = -\varepsilon_{\nu_\mu} = \pm 1$, для рэакцый (б) і (г) $\varepsilon_e = \varepsilon_{\nu_e} = \varepsilon_\mu = \varepsilon_{\nu_\mu} = \pm 1$.

$\|R\|^2$ — квадрат матрычнага элемента, які характарызуе імавернасць працэсу (1), для гамільтаніяна Лі і Янга запісваецца наступным чынам:

$$\|R\|^2 = \sum_{jj'} G_j^\dagger G_j (e^+ O_{j'\mu}^\dagger \mu^+ O_j e) (\nu_\mu^+ O_{j'e}^\dagger \nu_e^+ O_j \nu_\mu). \quad (10)$$

Для гамільтаніяна Фейнмана і Гел-Мана маем:

$$\|R\|^2 = \sum_{jj'} G_j^\dagger G_j (e^+ O_{j'\nu_e}^\dagger \nu_e^+ O_j e) (\nu_\mu^+ O_{j'\mu}^\dagger \mu^+ O_j \nu_\mu). \quad (11)$$

Тут μ, e, ν_e, ν_μ — співорныя амплітуды мюёна, электрона (пазітрона), электроннага і мюённага нейтрына (антынейтрына) адпаведна: $\mu = \mu(\varepsilon_\mu k_\mu, s_\mu, \varepsilon_\mu)$, $e = e(\varepsilon_e k_e, s_e, \varepsilon_e)$, $\nu_e = \nu_e^f(\varepsilon_{\nu_e} k_{\nu_e}, s_{\nu_e}, \varepsilon_{\nu_e})$, $\nu_\mu = \nu_\mu(\varepsilon_{\nu_\mu} k_{\nu_\mu}, s_{\nu_\mu}, \varepsilon_{\nu_\mu})$. Для ўласных значэнняў s_ν , згодна з тэорыяй цалкам падоўжна палярызаванага нейтрына [11, 12], маем: у выпадку рэакцый (а) і (г) $s_{\nu_e}^- = s_{\nu_\mu}^- = 1$, у выпадку рэакцый (б) і (в) $s_{\nu_e} = s_{\nu_\mu} = -1$.

Выкарыстоўваючы (6), мы атрымалі наступныя агульныя выразы для квадрата матрычнага элемента $\|R\|^2$, не накладваючы ніякіх абмежаванняў на канстанты слабага ўзаемадзеяння G_V і G_A .

Для варыянта Лі і Янга маем:

$$\begin{aligned} \|R\|_{Л.Я}^2 = & \frac{1}{8} \left\{ [(G_V^\dagger G_V + G_A^\dagger G_A) (1 + \varepsilon_{\nu_e} \varepsilon_{\nu_\mu} s_{\nu_e} s_{\nu_\mu}) - \right. \\ & \left. - s_\mu \varepsilon_\mu \frac{k_\mu}{K_\mu} (\varepsilon_{\nu_e} s_{\nu_e} + \varepsilon_{\nu_\mu} s_{\nu_\mu}) (G_V^\dagger G_A + G_A^\dagger G_V)] \times \right. \\ & \times [2 + s_\mu s_{\nu_\mu} (k_{\nu_\mu}^0 k_{\nu_\mu}^0) + s_{\nu_e} (s_e^0 k_{\nu_e}^0) - s_\mu s_{\nu_e} (k_\mu^0 k_{\nu_e}^0) - s_{\nu_\mu} (s_\mu^0 k_{\nu_\mu}^0) + \\ & \left. + s_\mu s_{\nu_e} s_{\nu_\mu} \{ (s_e^0 k_{\nu_\mu}^0) (k_\mu^0 k_{\nu_e}^0) + (k_\mu^0 k_{\nu_\mu}^0) (s_e^0 k_{\nu_e}^0) \}] - \right. \\ & \left. - [(G_V^\dagger G_V + G_A^\dagger G_A) s_\mu \varepsilon_\mu \frac{k_\mu}{K_\mu} (\varepsilon_{\nu_e} s_{\nu_e} + \varepsilon_{\nu_\mu} s_{\nu_\mu}) - \right. \\ & \left. - (1 + \varepsilon_{\nu_e} \varepsilon_{\nu_\mu} s_{\nu_e} s_{\nu_\mu}) (G_V^\dagger G_A + G_A^\dagger G_V)] \times \right. \\ & \times [s_{\nu_\mu} (s_e^0 k_{\nu_\mu}^0) + s_\mu s_{\nu_\mu} (k_\mu^0 k_{\nu_\mu}^0) + s_{\nu_e} (s_e^0 k_{\nu_e}^0) + \\ & \left. + s_\mu s_{\nu_e} (k_\mu^0 k_{\nu_e}^0) + s_\mu s_{\nu_e} s_{\nu_\mu} [(k_{\nu_e}^0 k_{\nu_\mu}^0) [s_e^0 k_\mu^0]] \right] + \\ & + (G_V^\dagger G_V - G_A^\dagger G_A) (1 + \varepsilon_{\nu_e} \varepsilon_{\nu_\mu} s_{\nu_e} s_{\nu_\mu}) \varepsilon_\mu \varepsilon_e \frac{k_{0\mu}}{K_\mu} [s_{\nu_e} s_{\nu_\mu} (k_{\nu_e}^0 k_{\nu_\mu}^0) + \\ & + s_\mu (s_e^0 k_\mu^0) + s_{\nu_\mu} (s_e^0 k_{\nu_\mu}^0) + s_\mu s_{\nu_e} (k_\mu^0 k_{\nu_e}^0) - s_\mu s_{\nu_\mu} (k_\mu^0 k_{\nu_\mu}^0) - s_{\nu_e} (s_e^0 k_{\nu_e}^0) - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -1 + s_\mu s_{\nu_e} s_{\nu_\mu} \{ (s_e^0 k_\mu^0) (k_{\nu_e}^0 k_{\nu_\mu}^0) + (s_e^0 k_{\nu_\mu}^0) (k_\mu^0 k_{\nu_e}^0) + (s_e^0 k_e^0) (k_\mu^0 k_{\nu_\mu}^0) \} + \\
 & + i (G_V^+ G_A - G_A^+ G_V) (1 + \varepsilon_{\nu_e} \varepsilon_{\nu_\mu} s_{\nu_e} s_{\nu_\mu}) \varepsilon_\mu \varepsilon_e \frac{k_{0\mu}}{K_\mu} \times \\
 & \quad \times [s_\mu s_{\nu_\mu} (k_{\nu_\mu}^0 [s_e^0 k_\mu^0]) + s_\mu s_{\nu_e} (k_{\nu_e}^0 [s_e^0 k_\mu^0]) + \\
 & \quad + s_{\nu_e} s_{\nu_\mu} (s_e^0 [k_{\nu_e}^0 k_{\nu_\mu}^0]) + s_\mu s_{\nu_e} s_{\nu_\mu} (k_\mu^0 [k_{\nu_e}^0 k_{\nu_\mu}^0])] . \quad (12)
 \end{aligned}$$

Для варыянта Фейнмана і Гел-Мана матрычны элемент мае наступны выгляд:

$$\begin{aligned}
 \|R\|_{\Phi, \Gamma}^2 &= \frac{1}{8} \left\{ (G_V^+ G_V + G_A^+ G_A) \left(1 + \varepsilon_\mu \varepsilon_{\nu_\mu} s_\mu s_{\nu_\mu} \frac{k_\mu}{K_\mu} \right) - \right. \\
 & - \varepsilon_{\nu_e} s_{\nu_e} \left(\varepsilon_{\nu_\mu} s_{\nu_\mu} + \varepsilon_\mu s_\mu \frac{k_\mu}{K_\mu} \right) (G_V^+ G_A + G_A^+ G_V) \Big\} \times \\
 & \times [2 + s_\mu (s_e^0 k_\mu^0) + s_{\nu_e} s_{\nu_\mu} (k_{\nu_e}^0 k_{\nu_\mu}^0) - s_{\nu_\mu} (s_e^0 k_{\nu_\mu}^0) - s_\mu s_{\nu_e} (k_\mu^0 k_{\nu_e}^0) + \\
 & + s_\mu s_{\nu_e} s_{\nu_\mu} \{ (s_e^0 k_\mu^0) (k_{\nu_e}^0 k_{\nu_\mu}^0) + (s_e^0 k_{\nu_\mu}^0) (k_\mu^0 k_{\nu_e}^0) \}] - \quad (13) \\
 & - \left[\varepsilon_{\nu_e} s_{\nu_e} \left(\varepsilon_{\nu_\mu} s_{\nu_\mu} + \varepsilon_\mu s_\mu \frac{k_\mu}{K_\mu} \right) (G_V^+ G_V + G_A^+ G_A) - (G_V^+ G_A + G_A^+ G_V) \times \right. \\
 & \quad \times \left(1 + \varepsilon_\mu \varepsilon_{\nu_\mu} s_\mu s_{\nu_\mu} \frac{k_\mu}{K_\mu} \right) \Big] [s_\mu (s_e^0 k_\mu^0) + s_{\nu_e} s_{\nu_\mu} \times \\
 & \quad \times (k_{\nu_e}^0 k_{\nu_\mu}^0) + s_\mu s_{\nu_e} (k_\mu^0 k_{\nu_e}^0) + s_{\nu_\mu} (s_e^0 k_{\nu_\mu}^0) + \\
 & \quad + s_\mu s_{\nu_e} s_{\nu_\mu} \{ [s_e^0 k_{\nu_e}^0] [k_\mu^0 k_{\nu_\mu}^0] \}] .
 \end{aligned}$$

У гэтых выразях $k_i^0 = k_i / |k_i|$ — вектары напрамкаў імпульсаў часцінак, якія ўдзельнічаюць у працэсах (1); s_e^0 — адзінкавы вектар напрамку спіна электрона-мішэні, які знаходзіцца ў спакоі.

Прымаючы ў (12) і (13) $G_V = -G_A$, можна паказаць, што квадрат матрычнага элемента робіцца адным і тым жа для абодвух відаў гамільтаніяна ўзаемадзеяння, што і павінна быць, згодна з вядомымі тоеснасцямі Фірца [13, 14].

Выкарыстоўваючы атрыманыя матрычныя элементы і падсумоўваючы па спіну мяёна, які нараджаецца, знаходзім поўную імавернасць працэсаў (1)

$$dW = \frac{dk_{\nu_e} dk_{\nu_\mu}}{(2\pi)^5 c \hbar^2} \|M\|_{k_{\nu_e}, k_{\nu_\mu} + k_\mu}^2 \delta(\varepsilon_e k_{0e} + \varepsilon_{\nu_\mu} k_{\nu_\mu} - \varepsilon_\mu K_\mu - \varepsilon_{\nu_e} k_{\nu_e}). \quad (14)$$

Для поўнага матрычнага элемента $\|M\|$ у выпадку гамільтаніяна Лі і Янга маем:

$$\begin{aligned}
 \|M\|_{\text{Л.Я}}^2 &= \frac{1}{2} \{ (G_V^+ G_V + G_A^+ G_A) [2 \mp (s_e^0 k_{\nu_e}^0) \pm (s_e^0 k_{\nu_\mu}^0)] - \\
 & - \frac{k_\mu}{K_\mu} \{ (k_\mu^0 k_{\nu_\mu}^0) + (k_\mu^0 k_{\nu_e}^0) \mp ([s_e^0 k_\mu^0] [k_{\nu_e}^0 k_{\nu_\mu}^0]) \} \} +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + (G_V^\dagger G_A + G_A^\dagger G_V) [\mp (s_e^0 k_{\nu_\mu}^0) \mp (s_e^0 k_{\nu_e}^0) - \frac{k_\mu}{K_\mu} \{ (k_\mu^0 k_{\nu_\mu}^0) - (k_\mu^0 k_{\nu_e}^0) \mp \\
& \quad \mp (s_e^0 k_{\nu_\mu}^0) (k_\mu^0 k_{\nu_e}^0) \mp (s_e^0 k_{\nu_e}^0) (k_\mu^0 k_{\nu_\mu}^0) \}] + \\
& + (G_V^\dagger G_V - G_A^\dagger G_A) \frac{k_{0\mu}}{K_\mu} [(k_{\nu_e}^0 k_{\nu_\mu}^0) \mp (s_e^0 k_{\nu_\mu}^0) \pm (s_e^0 k_{\nu_e}^0) - 1] - \\
& - i (G_V^\dagger G_A - G_A^\dagger G_V) \frac{k_{0\mu}}{K_\mu} (s_e^0 [k_{\nu_e}^0 k_{\nu_\mu}^0]).
\end{aligned} \tag{15}$$

У выпадку гамільтаніяна Фейнмана і Гел-Мана для поўнага матрычнага элемента атрымліваем

$$\|M\|_{\Phi, \Gamma}^2 = \frac{1}{2} (G_V^\dagger G_V + G_A^\dagger G_A - G_V^\dagger G_A - G_A^\dagger G_V) \left\{ 1 - \frac{k_\mu}{K_\mu} (k_\mu^0 k_{\nu_e}^0) \right\} \{ 1 \pm (s_e^0 k_{\nu_\mu}^0) \}. \tag{16}$$

Верхні знак тут і далей адносіцца да рэакцый (а) і (б), ніжні—да рэакцый (в) і (г).

Калі выконваецца (V—A)-варыянт, то поўны матрычны элемент, незалежна ад гамільтаніяна ўзаемадзеяння мае выгляд

$$\|M\|^2 = 2 |G|^2 \left\{ 1 - \frac{k_\mu}{K_\mu} (k_\mu^0 k_{\nu_e}^0) \right\} \{ 1 \pm (s_e^0 k_{\nu_\mu}^0) \}. \tag{17}$$

Выкарыстоўваючы законы захавання, імпульс нейтрына $k_{\nu'}$, якое нараджаецца, можна выразіць праз імпульсы налятаючага нейтрына k_ν і мюёна, які нараджаецца. У прыватнасці, накіроўваючы вось Z па імпульсу налятаючага нейтрына k_ν і сумяшчаючы плоскасць XZ з плоскасцю імпульсаў k_ν і k_μ , для праекцый на каардынатыны восі імпульсу нейтрына, якое нараджаецца, маем

$$k_{\nu'}^z = k_\nu - k_\mu \cos \Theta, \quad k_{\nu'}^x = -k_\mu \sin \Theta, \quad k_{\nu'}^y = 0, \quad \cos \Theta = (k_\nu^0 k_\mu^0). \tag{18}$$

Тым не менш мы не ўводзім гэтыя выразы ў атрыманыя рэзультаты, каб не рабіць іх залішне грувасткімі.

Для ступені падоўжнай палярывацыі мюёнаў, якая вызначаецца, як звычайна выразам

$$P = \frac{\omega(s_\mu = 1) - \omega(s_\mu = -1)}{\omega(s_\mu = 1) + \omega(s_\mu = -1)}, \tag{19}$$

у выпадку гамільтаніяна Лі і Янга атрымліваем

$$\begin{aligned}
P_{Л.Я} = & \frac{1}{2} \{ (G_V^\dagger G_V + G_A^\dagger G_A) [\mp (k_\mu^0 k_{\nu_\mu}^0) \pm (k_\mu^0 k_{\nu_e}^0) + (s_e^0 k_{\nu_e}^0) (k_\mu^0 k_{\nu_\mu}^0) + \\
& + (k_\mu^0 k_{\nu_e}^0) (s_e^0 k_{\nu_\mu}^0) - \frac{k_\mu}{K_\mu} \{ (s_e^0 k_{\nu_\mu}^0) + (s_e^0 k_{\nu_e}^0) \}] + \\
& + (G_V^\dagger G_A + G_A^\dagger G_V) [\mp (k_\mu^0 k_{\nu_\mu}^0) \mp (k_\mu^0 k_{\nu_e}^0) + (s_e^0 k_\mu^0) [k_{\nu_e}^0 k_{\nu_\mu}^0]] - \\
& - \frac{k_\mu}{K_\mu} \{ \mp 2 + (s_e^0 k_{\nu_e}^0) - (s_e^0 k_{\nu_\mu}^0) \} + (G_V^\dagger G_V - G_A^\dagger G_A) \frac{k_{0\mu}}{K_\mu} [(s_e^0 k_\mu^0) \mp \\
& \mp (k_\mu^0 k_{\nu_e}^0) \pm (k_\mu^0 k_{\nu_\mu}^0) + (s_e^0 k_\mu^0) (k_{\nu_e}^0 k_{\nu_\mu}^0) + (s_e^0 k_{\nu_e}^0) (k_\mu^0 k_{\nu_e}^0) +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + (s_e^0 k_{\nu_e}^0)(k_\mu^0 k_{\nu_\mu}^0) + i(G_V^\dagger G_A - G_A^\dagger G_V) \frac{k_{0\mu}}{K_\mu} [(k_\mu^0 [k_\mu^0 k_{\nu_e}^0]) \mp \\
 & \mp (k_{\nu_\mu}^0 [s_e^0 k_\mu^0]) \mp (k_{\nu_e}^0 [s_e^0 k_\mu^0])] \{ \|M\|_{Л.Я}^2 \}^{-1}.
 \end{aligned}
 \tag{20}$$

Для гамільтаніяна Фейнмана і Гел-Мана ступень падоўжнай палярызацыі мяюнаў выражаецца значна прасцей:

$$P_{\Phi.Г} = \mp \frac{\frac{k_\mu}{K_\mu} - (k_\mu^0 k_{\nu_e}^0)}{1 - \frac{k_\mu}{K_\mu} (k_\mu^0 k_{\nu_e}^0)}.
 \tag{21}$$

Гэты выраз для ступені падоўжнай палярызацыі мяюнаў атрымліваецца і ў выпадку гамільтаніяна Лі і Янга пры ўмове $G_V = -G_A$, г.зн. у выпадку $(V-A)$ -варыянта слабага ўзаемадзеяння.

З аналізу атрыманых рэзультатаў можна зрабіць рад цікавых вывадаў.

1) У выразх для поўнай імавернасці працэсаў адваротнага $\mu - e$ -распаду і ступені падоўжнай палярызацыі мяюнаў, якія нараджаюцца, пры адвольным выбары канстант сувязі слабага ўзаемадзеяння G_V і G_A існуюць істотныя адрозненні ў залежнасці ад выкарыстоўваемага гамільтаніяна. Гэтыя адрозненні больш за ўсё прыкметныя пры малых энергіях мяюна (гл. (15) і (16)). Натуральна, што пры $G_V = -G_A$ гэтыя адрозненні ў адпаведнасці з тоеснасцямі Фірца знікаюць.

2) У агульным выпадку адвольна палярызаванага поля электронаў-мішэняў імавернасці працэсаў (а), (б) і (в), (г) розныя. Калі ж поле электронаў-мішэняў не палярызаванае, то, як відаць з выразў (15)–(17) пры ўсярэдненні іх па s_e^0 , імавернасці ўсіх працэсаў адваротнага $\mu - e$ -распаду робяцца аднолькавымі як для гамільтаніяна Лі і Янга, так і для гамільтаніяна Фейнмана і Гел-Мана. Застаюцца, аднак, адрозненні ў залежнасці ад выкарыстоўваемага гамільтаніяна. Адсюль можна зрабіць вывад, што пры эксперыментальным вывучэнні працэсаў адваротнага $\mu - e$ -распаду выкарыстанне палярызаванай мішэні прыводзіць да павелічэння або памяншэння таго або іншага працэсу (1), што асабліва яўна відаць з выразў (16) і (17). У прыватнасці, напрыклад, імавернасць працэсаў (б) максімальная пры палярызацыі электронаў па напрамку імпульсу налятаючага нейтрына і мінімальная (а пры поўнай палярызацыі электронаў роўная нулю) пры палярызацыі электронаў-мішэняў супраць імпульсу налятаючага нейтрына. У працэсе (г) мае месца адваротная з'ява і г. д.

3) Цікава адзначыць, што ў выпадку Фейнмана і Гел-Мана ступень падоўжнай палярызацыі мяюнаў, якія ўтвараюцца пры ўзаемадзеяннях (1), аказваецца не залежачай ад канстант сувязі слабага ўзаемадзеяння $G_V = -G_A$ (гл. (21)). У выпадку гамільтаніяна Лі і Янга пры адвольных G_V і G_A гэта з'ява, гаворачы ўвогуле, не мае месца. Пры $G_V = -G_A$ рэзультаты ідэнтычныя для абодвух гамільтаніянаў.

4) Падоўжная палярызацыя мяюнаў для гамільтаніяна Фейнмана і Гел-Мана, а пры $G_V = -G_A$ для абодвух гамільтаніянаў наогул не залежыць ад зыходнай палярызацыі поля электронаў-мішэняў (гл. (21)), у той час як для гамільтаніяна Лі і Янга пры $G_V \neq -G_A$ палярызацыя мяюнаў звязана з зыходнай палярызацыяй мішэні (гл. (15) і (20)).

5) Разглядаючы (20) і (21) для ультрарэлятывісцкага мяюна, бачым, што ступень падоўжнай палярызацыі мяюнаў у выпадку гамільтаніяна

Фейнмана і Гелл-Манна незалежна ад G_V і G_A імкнецца да адзінкі ($P = \pm 1$), прычым у адпаведнасці з праводзімай схемай адмоўны мюён аказваецца палярызаваным супраць свайго імпульсу ($P = -1$), а дадатны мюён палярызаван па напрамку свайго імпульсу ($P = 1$) пры любых пачатковых умовах (гл. (21)). У выпадку гамільтаніяна Лі і Янга пры $G_V \neq -G_A$ ступень падоўжнай палярызаванасці мюёнаў не роўная адзінцы нават для ультрарэлятывісцкага мюёна.

Усе гэтыя вывады дазваляюць меркаваць, што эксперыментальнае вывучэнне працэсаў адваротнага $\mu - e$ -распаду можа даць карысную інфармацыю аб прыродзе слабага $\mu - e$ -узаемадзеяння. У прыватнасці, калі $(V - A)$ -варыянт узаемадзеяння не выконваецца, то параўнанне атрыманых рэзультатаў для розных гамільтаніянаў дазваляе зрабіць вывад аб магчымасці з эксперыментальнага вывучэння працэсаў адваротнага $\mu - e$ -распаду ўстанавіць, які з гамільтаніянаў бліжэй апісвае прыроду адваротнага $\mu - e$ -распаду.

У заключэнне карыстаюся выпадкам падзякаваць акадэміку АН БССР А. К. Красіну за ўвагу і цікавасць да работы.

ЛІТАРАТУРА

1. Lee T. D., Yang C. N. Phys. Rev., **105**, 1671, 1957.
2. Feynman R., Gell-Mann M. Phys. Rev., **109**, 193, 1958.
3. Понтекорво Б. ЖЭТФ, **39**, 1166, 1960.
4. Окунь Л. Б. Слабое взаимодействие элементарных частиц. М., 1963.
5. Керимов Б. К., Попов Ю. А., Лоскутов Ю. М., Галкина Л. П. Вестник МГУ, сер. Физика, астрономия, **1**, 62, 1963.
6. Керимов Б. К., Попов Ю. А., Лоскутов Ю. М. Вестник МГУ, сер. Физика, астрономия, **2**, 29, 1962.
7. Липманов Э. М. ЖЭТФ, **43**, 893, 1963.
8. Липманов Э. М. ЖЭТФ, **44**, 1396, 1963.
9. Соколов А. А., Иваненко Д. Д. Квантовая теория поля. М., 1952.
10. Соколов А. А. Введение в квантовую электродинамику. М., 1958.
11. Соколов А. А. Элементарные частицы. М., 1963.
12. Соколов А. А. Physics Letters, **3**, 211, 1963.
13. Fierz M. Zs. f. Phys., **102**, 572, 1936.
14. Умэдзава Х. Квантовая теория поля. ИЛ, 1958, стр. 131—132.

Резюме

В работе показана неидентичность ряда следствий, вытекающих из гамильтонианов слабого взаимодействия Ли—Янга и Фейнмана—Гелл-Манна в применении к процессам обратного $\mu - e$ -распада $\nu + e \rightarrow \mu + \nu'$ в предположении $G_V \neq -G_A$. Получены выражения для вероятности процессов и продольной поляризации мюонов. Показано, что в случае неполяризованной мишени вероятности всех процессов обратного $\mu - e$ -распада одинаковы. Продольная поляризация мюонов в случае гамильтониана Фейнмана—Гелл-Манна оказывается не зависимой от констант слабого взаимодействия G_V и G_A и от поляризации мишени. В ультрарелятивистском пределе продольная поляризация мюонов в случае гамильтониана Фейнмана—Гелл-Манна стремится к единице, что не имеет места в случае гамильтониана Ли—Янга. При $G_V = -G_A$ все результаты в соответствии с тождествами Фирца становятся идентичными для обоих гамильтонианов.

Поступило в редакцию 4.1 1965

Р. Г. ЖБАНКОУ, М. І. ГАРБУЗ, А. І. СКРЫГАН, А. М. ШЫШКО

ІНФРАЧЫРВОНЫЯ СПЕКТРЫ ЦЭЛЮЛОЗ РОЗНАГА ПАХОДЖАННЯ І УЗРОСТУ ІІІ. ЦЭЛЮЛОЗА З ДРАЎІНЫ РОЗНАГА УЗРОСТУ

Даследаванне цэлюлозы, выдзеленай з драўніны рознага ўзросту, мае пэўнае навуковае і практычнае значэнне, паколькі дазваляе прасачыць працэсы хімічных і структурных ператварэнняў, што адбываюцца ў цэлюлозе з цягам часу і не ўскладненыя якімі-небудзь пабочнымі фактарамі.

Адзіныя вядомыя ў літаратуры даследаванні па інфрачырвонай спектраскапіі цэлюлозы, выдзеленай з рознаўзроставай выкапнёвай драўніны, прадстаўлены ў работах [1—3]. Спектры даследуемых аўтарамі злучэнняў вывучаліся ў параўнальна вузкім спектральным інтэрвале частот $3500\text{—}1450\text{ см}^{-1}$, а ўмовы эксперымента не дазволілі атрымаць спектры з дастатковай ступенню вырашэння ў вобласці частот валентных хістанняў ОН- і СН-груп. У работах [1—3] не было заўважана істотнай розніцы ў спектрах разгледжаных прадуктаў.

У дадзенай рабоце праведзена дэталёвае даследаванне цэлюлоз, выдзеленых з драўніны рознага ўзросту, у больш шырокай спектральнай вобласці: $3800\text{—}2600\text{ см}^{-1}$ (прызма LiF), $1800\text{—}700\text{ см}^{-1}$ (прызма NaCl) і $700\text{—}400\text{ см}^{-1}$ (прызма KBr). Методыка атрымання спектраў апісана ў [4, 5].

На рыс. 1 прыведзены спектры атрыманых у лабараторных умовах цэлюлоз з сасновай драўніны майскіх і чэрвеньскіх парасткаў, спелай сасновай драўніны (каля 100 гадоў), 500-гадовай, 3000-гадовай і 140000-гадовай выкапнёвай драўніны. Для супастаўлення на рыс. 2 прыведзены спектры некаторых узораў тэхнічных цэлюлоз.

Характарыстыка разглядаемых цэлюлоз прадстаўлена ў рабоце [9]. Узрост драўніны вызначаўся метадам, апісаным у [6].

Як было паказана раней [5], ужо ў спектры прадукту, выдзеленага з драўніны майскіх парасткаў, назіраюцца ўсе спецыфічныя прыкметы спектра цэлюлозы. Гідраксільныя групы ў гэтай цэлюлозе, як і ў звычайных цэлюлозных матэрыялах, уключаны ў вадародную сувязь.

У спектры цэлюлозы, выдзеленай з драўніны 140000-гадовага ўзросту (рыс. 1, крывая б) таксама не назіраецца прыкметнага зруху частот або паяўлення новых палос паглынання, не ўласцівых спадарожнікам цэлюлозы. Гэта сведчыць аб высокай стабільнасці макрамалекул цэлюлозы да змянення структуры ў звычайных умовах.

У адрозненне ад спектра цэлюлозы са спелай драўніны (рыс. 1, крывая в) спектры чэрвеньскай і міжледніковай цэлюлоз (рыс. 1, крывыя 2 і б) маюць больш моцнае паглынання ў вобласці частот араматычных прымесей (1600 і 1500 см^{-1}) і крыху больш дыфузны выгляд (вобласці $1600\text{—}1200$ і $700\text{—}400\text{ см}^{-1}$). Спектры цэлюлозы з драўніны чэрвеньскіх парасткаў і драўніны міжледніковага ўзросту адрозніваюцца па агуль-

наму выгляду і суадносінах рада палос. Інтэнсіўнасць палос паглынання араматычных прымесей найбольшая ў цэлюлозы, выдзеленай з драўніны міжледніковага ўзросту. Гэта цэлюлоза мае найбольш размыты агульны выгляд спектра ў вобласці $1600\text{--}1200$ і $700\text{--}400\text{ см}^{-1}$, а так-

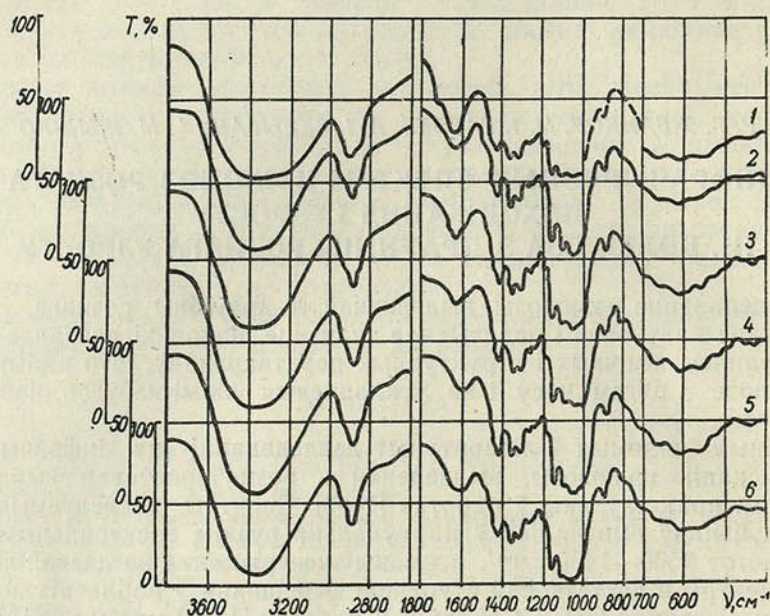


Рис. 1. Спектры цэлюлоз, выдзеленых з драўніны сасновых майскіх (1) і чэрвеньскіх парасткаў (2), спелай сасновай драўніны (3), 3000-гадовай (4), 500-гадовай (5) і 140000-гадовай выкапнёвай драўніны (6)

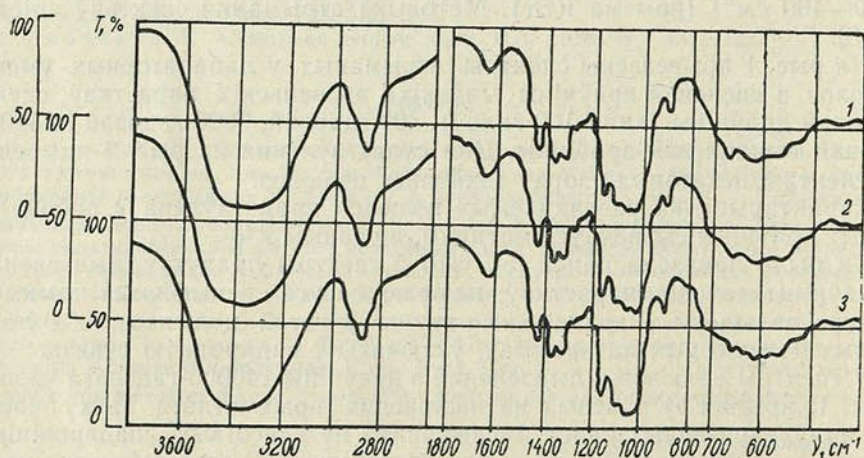


Рис. 2. Спектры тэхнічных цэлюлоз Архангельскага ЦБК (1), маркі «Ц» (2) і фірмы Rayon (Швецыя) (3)

сама крыху павялічаную інтэнсіўнасць паласы 1430 см^{-1} у адносінах да паласы 1370 см^{-1} . Апошняя можа быць абумоўлена або спецыфікай прымесей, або працяканнем з цягам часу пэўных хімічных працэсаў або структурных змяненняў.

Як вынікае з даных хімічнага аналізу, цэлюлоза з драўніны міжледніковага ўзросту мае больш высокую шчыльнасць, чым іншыя цэлюлозы. Прыведзены вышэй эксперыментальны матэрыял дае падставу дапусціць, што гэта з'яўляецца вынікам больш шчыльнай упакоўкі за кошт паніжэння ступені ўпарадкаванасці макрамалекул цэлюлозы або за кошт наяўнасці прымесей мінеральнага паходжання.

У спектры цэлюлозы, выдзеленай з 3000-гадовай выкапнёвай драўніны (рыс. 1, крывая 4), няма прыкметнай розніцы ў параўнанні са спектрам цэлюлозы са спелай драўніны (рыс. 1, крывая 3), што можа сведчыць аб адсутнасці розніцы ў структуры гэтых прадуктаў.

Цікава адзначыць, што ў спектры цэлюлозы, выдзеленай з 500-гадовай выкапнёвай драўніны, назіраецца павелічэнне інтэнсіўнасці паласы 1430 см^{-1} з адначасовым з'яўленнем новай паласы 870 см^{-1} . Падобныя асаблівасці спектра назіраліся таксама ў выпадку некаторых узораў цэлюлоз з кары майскіх парасткаў таполі [5]. Значыць, гэту розніцу спектра нельга аднесці за кошт якіх-небудзь спецыфічных прымесей у цэлюлозе з 500-гадовай выкапнёвай драўніны, тым больш што гэта цэлюлоза мае параўнальна невялікую колькасць прымесей.

Як упаміналася ўжо [5], можна дапусціць, што павелічэнне інтэнсіўнасці паласы 1430 см^{-1} і з'яўленне новай паласы 870 см^{-1} абумоўлена структурнымі змяненнямі ў цэлюлозе. Магчыма, што працэс фарміравання цэлюлозы ў кары, роўна як і змяненні цэлюлозы з цягам часу ва ўмовах тарфяных залежаў, звязан са з'яўленнем новых структурных мадыфікацый цэлюлозы.

Параўноўваючы спектры цэлюлоз, выдзеленых з выкапнёвай драўніны 500-гадовага (рыс. 1, крывая 5) і 3000-гадовага ўзростаў (рыс. 1, крывая 4), бачым, што ў выпадку першага з іх паласа 1600 см^{-1} (абумоўленая паглыннаннем лігніну) выражана больш ярка. Па даных жа хімічнага аналізу, колькасць лігніну ў гэтай цэлюлозе ўдвая меншая, чым у цэлюлозе з выкапнёвай драўніны 3000-гадовага ўзросту, што сведчыць аб недастатковай аб'ектыўнасці шырока выкарыстоўваемага метаду Кеніга, як упаміналася ўжо раней [5].

Нягледзячы на адзначаныя вышэй асаблівасці, разгледжаныя спектры цэлюлоз з выкапнёвай драўніны маюць дастаткова добрае падабенства са спектрамі цэлюлозы са спелай драўніны і тэхнічных цэлюлоз (гл. рыс. 2). Гэта яшчэ раз пацвярджае зробленыя раней [3, 7, 8] вывады аб тым, што выкапнёвая драўніна глыбінных балотных пнёў мае значны выхад беленай цэлюлозы (каля 40%) і з'яўляецца каштоўнай цэлюлозасмяшчаючай сыравінай для цэлюлознай і гідролізнай вытворчасці.

ЛІТАРАТУРА

1. Скриган А. И., Шишко А. М., Жбанков Р. Г. ДАН СССР, 115, № 1, 1957.
2. Скрыган А. И., Шышко А. М., Жбанкоў Р. Г. Весці АН БССР, сер. фіз.-тэхн. навук, № 1, 1957.
3. Скриган А. И., Шишко А. М., Жбанков Р. Г. Сборник научных работ Института физико-органической химии АН БССР, № 7, 1959.
4. Жбанкоў Р. Г., Марупаў Р., Гарбуз М. І., Скрыган А. И., Шышко А. М. Весці АН БССР, сер. фіз.-тэхн. навук, № 4, 1963.
5. Жбанкоў Р. Г., Гарбуз М. І., Шышко А. М., Скрыган А. И., Бугаёнак А. А. Весці АН БССР, сер. фіз.-тэхн. навук, № 4, 1964.
6. Скриган А. И., Шишко А. М. Сборник научных работ Института физико-органической химии АН БССР, № 7, 1959.
7. Скриган А. И. Природа, № 6, 1953.
8. Скриган А. И. Матер. Бел. республик. конфер. НИТаЛес, Изд-во АН БССР, 1951.
9. Жбанков Р. Г. Инфракрасные спектры целлюлозы и ее производных. Изд-во «Наука и техника», Минск, 1964.

Резюме

Сопоставлены инфракрасные спектры ряда целлюлоз, выделенных из древесины разного возраста. Показаны спектральные отличия целлюлоз из ископаемой и зрелой сосновой древесины. Высказано предположение о возможности появления новых структурных модификаций целлюлозы в условиях торфяных залежей. Отмечена недостаточная объективность используемого метода определения лигнина в образцах целлюлоз из ископаемой древесины.

Поступило в редакцию 11.IV 1964

М. С. БЕКБУЛАТАУ

**ФЕРАМАГНІТНЫ РЭЗНАНС У ЦВЁРДЫХ РАСТВОРАХ
ТРАЙНЫХ СІСТЭМ ФЕРЫТАУ $(\text{NiCuZn})\text{Fe}_2\text{O}_4$,
 $(\text{NiMgMn})\text{Fe}_2\text{O}_4$ і $(\text{NiMnZn})\text{Fe}_2\text{O}_4$**

Е. К. Завойскі [1] у 1946 г. упершыню назіраў інтэнсіўнае рэзананснае паглынне энергіі звышвысокачастотных хістанняў ($\lambda=8,2$ см) фераманітнымі металамі ва ўмовах, калі на ўзор дзейнічаюць адначасова моцнае пастаяннае і перпендыкулярнае да яго высокачастотнае манітныя палі. Пасля гэтага з'ява атрымала назву «фераманітны рэзананс». Фераманітны рэзананс знайшоў шырокае тэхнічнае прымяненне пасля таго, як Сноек [2] перанёс даследаванні рэзананснага паглынання на фераманітныя паўправаднікі — ферыты. Выкарыстанне фераманітнага рэзанансу ў металічных фераманітыках ускладняецца з-за скін-эфекту і высокіх электрычных страт. Абедрэ гэтыя асаблівасці, якія звязаны з высокай электраправоднасцю металаў, практычна могуць быць выключаны ў ферытах, удзельнае электрасупраціўленне якіх ляжыць у дыяпазоне ад некалькіх $\text{ом} \cdot \text{см}$ да 10^{12} — 10^{13} $\text{ом} \cdot \text{см}$ пры хатняй тэмпературы. Сучасная звышвысокачастотная тэхніка немагчыма без многіх спецыяльных элементаў, дзеянне якіх аснована на выкарыстанні фераманітнага рэзанансу ў ферытах. Выкарыстанне гэтых элементаў у асноўным мае на мэце наступныя дзве задачы: хуткае (безынерцыйнае) упраўленне і неўзаемнасць дзеяння (г. зн. неідэнтычнасць характарыстык у прамым і адваротным напрамках). У большасці выпадкаў выкарыстоўваюцца ферытныя матэрыялы, якія маюць полікрышталічную структуру.

Вывучэнне з'явы фераманітнага рэзанансу прадстаўляе вялікую навуковую цікавасць. У выніку даследавання могуць быць атрыманы звесткі аб шырыні лініі паглынання, вызначаемай часам рэлаксацыі манітнай сістэмы, аб велічыні рэзананснага поля, а значыць, аб велічыні g -фактару і аб інтэнсіўнасці паглынання мікрахвалевай магутнасці. Найбольш эфектыўна правядзенне даследаванняў на монакрышталях. Аднак у выпадку ферытаў выраб монакрышталяў зададзенага саставу мае цяжкасці. Разам з тым надзвычайна важны даследаванні і на полікрышталях па прычыне таго, што, як было ўжо сказана, вялікая колькасць вузлоў апаратуры і прылад, у якіх мае месца рэзананснае паглынне, вырабляецца з полікрышталічных ферытаў. Да таго ж полікрышталічныя ферыты з'яўляюцца цікавымі і як самастойны аб'ект даследавання. Шматлікія работы паказваюць, што працэс ферарэзананснага паглынання ў полікрышталічных ферытах з'яўляецца складанай карцінай. На параметры фераманітнага рэзанансу могуць уплываць многія фізічныя фактары, як напрыклад размер і форма зерня, колькасць, форма і размерны параў і інш. Таму, натуральна, устае задача высветліць ролю і ступень уплыву таго ці іншага фактару ў кожным канкрэтным выпадку. У фізіка-хімічных адносінах, як правіла, ферыты з'яўляюцца цвёрдымі растворамі, таму пры іх вывучэнні асабліва плённае

прымяненне метаду фізіка-хімічнага аналізу, які «вывучае рэчыва не ў адрыве ад іншых, а ў працэсе ўзаемадзеяння з іншымі рэчывамі ва ўмовах бесперапыннага змянення фактараў, якія ўплываюць на ход працэсу» [3].

У дадзеным артыкуле выкладаюцца рэзультаты даследавання змяненняў параметраў ферамагнітнага рэзанансу ў залежнасці ад саставу ў стэхіяметрычных ферытах трайных сістэм: $\text{NiFe}_2\text{O}_4\text{—CuFe}_2\text{O}_4\text{—ZnFe}_2\text{O}_4$; $\text{NiFe}_2\text{O}_4\text{—MgFe}_2\text{O}_4\text{—MnFe}_2\text{O}_4$; $\text{NiFe}_2\text{O}_4\text{—MnFe}_2\text{O}_4\text{—ZnFe}_2\text{O}_4$, якія валодаюць структурай шпінелі. Адзначым, што кампаненты вивучаемых сістэм знайшлі шырокае практычнае прымяненне. Нікелевы ферыт мае ярка выражаную тэндэнцыю да звернутаў структуры (ён уваходзіць у састаў усіх трох сістэм); ферыты медзі, марганцу і магнію маюць структуру змешанай шпінелі, у той час як немагнітны ферыт цынку з'яўляецца прадстаўніком ферытаў са структурай нармальнай шпінелі.

Трайная сістэма $(\text{NiCuZn})\text{Fe}_2\text{O}_4$ з'яўляецца вельмі цікавай у многіх адносінах. Гэта сістэма была падвергнута намі разам з Ю. М. Хачатранам падрабязнаму вивучэнню фізіка-хімічных уласцівасцей, рэзультаты якога выкладзены ў работах [4, 5]. Адным з цікавых момантаў пры вивучэнні дадзенай сістэмы з'яўлялася магчымасць прасачыць уплыў загартуўкі на фізіка-хімічныя ўласцівасці. Рэзультаты даследавання ферамагнітнага рэзанансу на адпаленых і загартаваных узорах нікель-медзь-цынковых ферытаў, на якіх былі праведзены памянёныя фізіка-хімічныя даследаванні, апублікаваны ў рабоце [6]. Ніжэй яны прыводзяцца ў сціслым выглядзе са значнымі дадатковымі звесткамі.

Поўныя фізіка-хімічныя даныя па вивучэнню партыі саставаў стэхіяметрычных ферытаў трайной сістэмы $(\text{NiMgMn})\text{Fe}_2\text{O}_4$ змяшчаюцца ў работах М. М. Сіраты і В. І. Паўлава [7—9], прысвечаных высвятленню прыроды і механізма з'явы спантаннай прамавугольнасці петляў гістэрэзісу, уласцівай ферытам дадзенай сістэмы. Даследаванне ферамагнітнага рэзанансу ў залежнасці ад саставу праведзена на тых жа ўзорах, на якіх праводзіліся вымярэнні ў адзначаных работах [7—9] В. І. Паўлавым.

Магнітныя, электрычныя і дыэлектрычныя ўласцівасці трайной сістэмы $(\text{NiMnZn})\text{Fe}_2\text{O}_4$ стэхіяметрычных ферытаў даследаваны і апісаны ў работах М. М. Сіраты і М. І. Данількевіча [10, 11]. Нашы вымярэнні ферамагнітнага рэзанансу былі праведзены на ўзорах з той жа даследаванай М. І. Данількевічам партыі. Трэба адзначыць, што праведзеныя фазавыя аналізы (мікраструктурны і рэнтгенаструктурны) і трайныя дыяграмы ўсіх фізіка-хімічных уласцівасцей на даследуемых узорах указваюць, што ўсе аб'екты з'яўляліся аднафазнымі цвёрдымі растворамі.

Для вымярэнняў параметраў ферамагнітнага рэзанансу выкарыстоўваліся два варыянты ўстановак; першы з іх апісан у рабоце [6]. Гэта схема з балансным мастом, у вымяральных плячы якога знаходзіцца дэтэктар з рэгіструючым прыборам. Балансны мост дазваляе дабіцца значнага ўзмацнення сігнала за кошт павышэння ўзроўню выпраменьваемай магутнасці, якая, аднак, дзякуючы кампенсацыі не пападае ўся на вымяральнае плячо, у якім знаходзіцца адчувальны прыбор. У другім варыянце (рыс. 1) рэгіструючы прыбор далучаецца да дэтэктара вымяральнай лініі, пагружанай на ўкарочаны канец з узорам. У гэтым выпадку адчувальнасць можа быць павышана за кошт кампенсацыі пастаяннага току, які ідзе праз дэтэктар, токам з акумулятарнай батарэі з магазінам супраціўленняў, як паказна на рыс. 1.

Старанная праверка паказвае поўную ідэнтычнасць абодвух метадаў вымярэння. Перавага другога метаду ў тым, што ён абыходзіцца адной

толькі вымяральной лініяй. Крыніцай ЗВЧ-хістанняў служыў генератар тыпу ГСС-626; у рабоце выкарыстоўвалася вымяральная лінія маркі ИВЛУ-140, крыніцай пастаяннага магнітнага поля служыў электрамагніт, які сілкаваўся выпрамнікам. Поле электрамагніта градуіравалася мілівеберметрам, абсалютная хібнасць якога не перавышала 3%. Магчымая памылка вымярэння шырыні лініі вызначалася эксперыментальна з апрацоўкі рэзультатаў шматразовых вымярэнняў на адных і тых жа ўзорах і для гранічных выпадкаў (найбольш вузкія і вельмі шырокія лініі) была не вышэй 5%.

Вымярэнні праводзіліся на сферычных узорах дыяметра ад 1 да 2 мм, кантрольныя вымярэнні на ўзорах меншага дыяметра праводзіліся выбіральна на асобных саставах з даволі вялікімі значэннямі намагнічанасці насычэння. Узоры сферычнай формы атрымліваліся ў канчатковай стадыі вядомым метадам абкаткі з дапамогай сціснутага паветра ў абразіўнай варонцы. Папярэдняя апрацоўка праводзілася ў другой прыладзе,

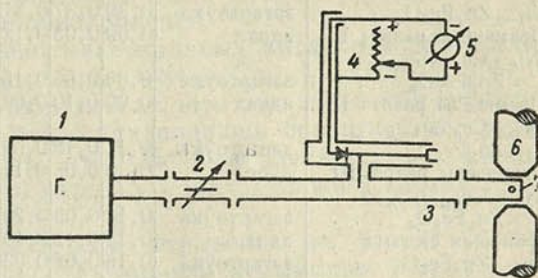


Рис. 1. Схема ўстаноўкі па вымярэнню ферамагнітнага рэзанансу:

1—генератар трохсантыметровых хваляў ГСС-626; 2—плаўны атэнюатар; 3—вымяральная лінія ИВЛУ-140; 4—кампенсацыйная прылада з магазіну супраціўленняў і крыніцы э.р.с.; 5—мікраамперметр; 6—электрамагніт; 7—каротказамкнёная хваляводная секцыя з узораў

якая складаецца з вертыкальных трубак і хуткавярчальнага дыска. Гэты метад дазваляў значна паскорыць працэс вырабу шарыкаў, паколькі можна было выкарыстаць зараз жа некалькі трубак. Акрамя таго, у дадзеным выпадку мелася магчымасць браць першасныя неапрацаваныя кавалкі значна большых размераў, каб атрымаць узоры правільнай сферычнай формы. Папярэдне апрацаваныя шарыкі мелі дыяметр ад 3,5 да 2,5 мм, апрацоўка адбывалася без грузікаў ва ўзважаным стане. На ніжнія канцы трубак надзяваліся гумавыя наканечнікі, каб змякчыць магчымыя невялікія біенні пры запуску і спыненні дыска; верхнія канцы трубак неабходна было затыкаць пробкай.

Як ужо было адзначана, большая частка даных па вымярэннях параметраў ферамагнітнага рэзанансу ў залежнасці ад саставу для трайнай сістэмы $(\text{NiCuZn})\text{Fe}_2\text{O}_4$ атрымана на ўзорах, фізіка-хімічныя даследаванні якіх апублікаваны ў работах [4, 5]. Тэхналогія вырабу гэтых узораў выгадна адрознівалася ад астатніх выпадкаў тым, што парашкі перад папярэднім адпалам праходзілі брыкетаванне пад значным ціскам. Вымярэнні паказалі, што больш вузкія лініі ферамагнітнага рэзанансу маюць ферыты з памянёных саставаў са значнай колькасцю ферыту цынку. Работа [6] змяшчае графікі вымярэння $2\Delta H$ у залежнасці ад колькасці ферыту цынку для чатырох разрезаў, задавальняючых формуле $(\text{Ni}_p\text{Cu}_q)_{1-x}\text{Zn}_x\text{Fe}_2\text{O}_4$, дзе p і q маюць адпаведна значэнні: 0,75 і 0,25; 0,50 і 0,50; 0,25 і 0,75; 0 і 1. Самае нізкае значэнне шырыні лініі, роўнае 70 эрст, меў састаў $\text{Ni}_{0,3}\text{Cu}_{0,1}\text{Zn}_{0,6}\text{Fe}_2\text{O}_4$, які належаў разрэзу $(\text{Ni}_{0,75}\text{Cu}_{0,25})_{1-x}\text{Zn}_x\text{Fe}_2\text{O}_4$. Там жа паказана трайная дыяграма залежнасці $2\Delta H$ ад саставу. Уплыў загартоўкі на шырыню лініі быў нязначны, як гэта бачна з размяшчэння светлых (загартаваныя ўзоры) і чорных (адпаленыя ўзоры) пунктаў на графіках змянення $2\Delta H$.

Вельмі цікава было вызначыць порыстасць ўзораў, у якіх выяўлены такія даволі вузкія лініі ферамагнітнага рэзанансу. Порыстасць вызначалася па даных вымярэнняў удзельнай вагі і рэнтгенаўскай шчыль-

Табліца 1

Порыстасць ферытаў трайной сістэмы $\text{NiFe}_2\text{O}_4\text{—CuFe}_2\text{O}_4\text{—ZnFe}_2\text{O}_4$

Сістэма або прамянёвы разрэз	Від тэрмапрацоўкі	x праз 0,1										
		0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
Гранічная сістэма	адпал	0,32	0,36	0,35	0,25	—	0,35	0,31	0,17	0,17	0,19	0,35
$\text{Ni}_{1-x}\text{Zn}_x\text{Fe}_2\text{O}_4$	загартоўка	0,39	0,37	0,31	0,31	—	0,31	0,34	0,28	0,24	0,24	0,34
Прамянёвы разрэз I ($\text{Ni}_{0,75}\text{Cu}_{0,25}$) $_{1-x}$ × × $\text{Zn}_x\text{Fe}_2\text{O}_4$	адпал	0,09	0,03	0,12	0,06	0,09	0,09	0,08	0,19	0,20	0,30	
Прамянёвы разрэз II ($\text{Ni}_{0,50}\text{Cu}_{0,50}$) $_{1-x}$ × × $\text{Zn}_x\text{Fe}_2\text{O}_4$	адпал	0,09	0,10	0,08	0,16	0,10	0,08	0,10	0,11	0,11	0,18	
Прамянёвы разрэз III ($\text{Ni}_{0,25}\text{Cu}_{0,75}$) $_{1-x}$ × × $\text{Zn}_x\text{Fe}_2\text{O}_4$	адпал	0,10	0,08	0,11	0,11	0,07	0,08	0,11	0,11	0,08	0,15	
Гранічная сістэма	адпал	0,14	0,09	0,20	0,08	0,09	0,10	0,14	0,20	0,13	0,34	
$\text{Cu}_{1-x}\text{Zn}_x\text{Fe}_2\text{O}_4$	загартоўка	0,16	0,08	0,03	0,09	0,07	0,10	0,12	0,05	0,14	0,26	

Табліца 2

Шырыня лініі фераманітнага рэзанансу $2\Delta H$ (эрст)
для ферытаў прамянёвага разрэзу ($\text{Ni}_{0,75}\text{Cu}_{0,25}$) $_{1-x}\text{Zn}_x\text{Fe}_2\text{O}_4$
(папярэдні адпал у парашках)

Тэмпература спякання, °С	x праз 0,1							
	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7
1200	370	290	180	140	130	140	165	200
1250	380	300	200	170	150	170	190	220
1300	400	320	250	170	160	170	200	250

Табліца 3

Максімальныя магнітныя пранікальнасці
для ферытаў разрэзу ($\text{Ni}_{0,75}\text{Cu}_{0,25}$) $_{1-x}\text{Zn}_x\text{Fe}_2\text{O}_4$

Тэмпература спякання і ўмовы папярэдняга адпалу	x праз 0,1							
	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7
1200 °С, у парашках	170	300	1020	1360	2100	1560	1100	600
1250 °С, у парашках	120	220	610	780	1560	1000	1000	560
1300 °С, у парашках	80	190	430	1050	1000	1160	700	—
1200 °С, у брыкетах	180	300	800	1300	2000	4000	6000	1800

насці, атрыманых з рэнтгенаструктурных вымярэнняў пастаянных рашоткі. Дакладнасць вызначэння ўдзельнай вагі была не горш 1%. Табл. 1 змяшчае значэнні знойдзеных такім спосабам порыстасцей загартаваных і адпаленых узораў для ўсяго 51 саставу. З табліцы відаць, што, за выключэннем нікель-цынковых ферытаў, большасць узораў мела порыстасць у межах 5—8%, пры гэтым найбольш шчыльныя саставы знаходзяцца ў цэнтры канцэнтрацыйнага трохвугольніка. Трэба адзначыць, што гэтыя даныя не пацвярджаюць формулы з прыбліжанай тэоры Шлемана аб уплыве порыстасці на шырыню лініі фераманітнага рэзанансу.

Табл. 2 змяшчае значэнні шырыні лініі ферамагнітнага рэзанансу $2\Delta H$ для ўзораў разрэзу $(\text{Ni}_{0,75} \text{Cu}_{0,25})_{1-x} \text{Zn}_x \text{Fe}_2\text{O}_4$, атрыманых з тых жа парашкоў па той жа тэхналогіі, што і ў папярэднім выпадку, але з той толькі розніцай, што папярэдні адпал праводзіўся ў парашках без брыкетавання. Звяртае на сябе ўвагу значная розніца ў шырыні лініі ўзораў аднаго і таго ж разрэзу ў першым і другім выпадках: узоры, якія прайшлі папярэдні адпал у брыкетах, валодаюць значна меншай шырыняй лініі. Вымярэнні паказалі, што порыстасць узораў у абодвух выпадках была прыблізна аднолькавай. У той жа час розніца ў атрыманых рэзанансных характарыстыках пацвярджаецца вялікай розніцай у значэннях статычных магнітных пранікальнасцей.

У табл. 3 прыведзены значэнні максімальных магнітных пранікальнасцей для ўзораў прамянёвага разрэзу $(\text{Ni}_{0,75} \text{Cu}_{0,25})_{1-x} \text{Zn}_x \text{Fe}_2\text{O}_4$ у першым і ў другім выпадках. Табліца паказвае, што больш высокія значэнні статычнай магнітнай пранікальнасці адпавядаюць больш вузкім рэзанансным лініям. Трэба адзначыць, што ўдзельнае электрасупраціўленне ў абодвух выпадках было аднаго парадку і знаходзілася ў межах 10^6 — 10^7 ом·см.

Больш высокія значэнні $2\Delta H$ былі атрыманы на ўзорах сістэм $(\text{NiMgMn})\text{Fe}_2\text{O}_4$ і $(\text{NiMnZn})\text{Fe}_2\text{O}_4$. Тэхналогія атрымання ўзораў змяшчаецца ў работах [8, 10] і ў абодвух выпадках не ўключае брыкетавання. Сістэма $(\text{NiMgMn})\text{Fe}_2\text{O}_4$ была атрымана ў вакуумнай печы, каб пазбегнуць змены валентнасці марганцу, што адбылася на некаторым зніжэнні ўдзельнага супраціўлення ўзораў. На рыс. 2 прыведзена складзеная намі трайная дыяграма змянення $2\Delta H$ з саставам для сістэмы $(\text{NiMgMn})\text{Fe}_2\text{O}_4$, якая мае вялікае падабенства з дыяграмай для $\mu_{\text{макс}}$ з [8].

Даныя аб порыстасці даследуемых узораў змяшчаюцца ў дысертацыі В. І. Паўлава [12], дзе ўказваюцца граніцы змянення порыстасці — 5—9%.

Узоры сістэмы $(\text{NiMnZn})\text{Fe}_2\text{O}_4$ былі атрыманы спяканнем на паветры. Таму ферыты з вялікай колькасцю ферыту марганцу, відаць, пры

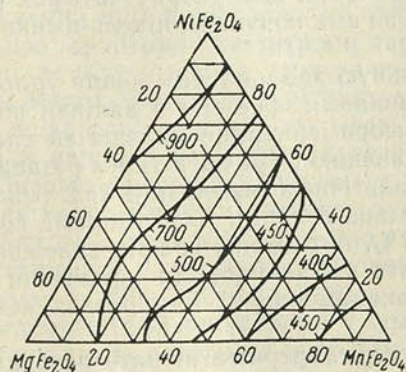


Рис. 2. Змяненне $2\Delta H$ для даследуемых ферытаў у залежнасці ад саставу ў трайной сістэме NiFe_2O_4 — MgFe_2O_4 — MnFe_2O_4

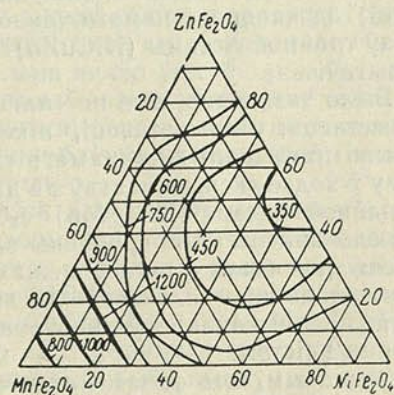


Рис. 3. Змяненне $2\Delta H$ для даследуемых ферытаў у залежнасці ад саставу ў трайной сістэме NiFe_2O_4 — MnFe_2O_4 — ZnFe_2O_4

ахаладжэнні часткова растрэскаліся (тэхналогія атрымання ўзораў прыведзена ў рабоце [10]). Узоры маюць значную порыстасць ад 5—6% для нікель-цынковых да 14—15% для марганцавых ферытаў. На рыс. 3

прыведзена трайная дыяграма залежнасці $2\Delta H$ ад саставу. Параўнанне з $\mu_{\text{макс}}$ з [10] сведчыць у карысць наяўнасці істотнай карэляцыі $2\Delta H$ і $\mu_{\text{макс}}$. Звяртаюць на сябе ўвагу тыя абставіны, што, нягледзячы на даволі высокія значэнні ўдзельнага супраціўлення марганцавых ферытаў у дадзеным выпадку, шырыня лініі ферамагнітнага рэзанансу іх больш чым у два разы пераўзыходзіць такую ж для ферытаў у сістэме $(\text{NiMgMn})\text{Fe}_2\text{O}_4$ з прыблізна такой жа працэнтнай колькасцю ферыту марганцу, што, відаць, звязана з наяўнасцю трэшчын у ферытах сістэмы $(\text{NiMnZn})\text{Fe}_2\text{O}_4$.

Даволі цікавым з'яўляецца даследаванне фактаў, якія ўплываюць на «паглынальную здольнасць» матэрыялу, маючы на ўвазе інтэнсіўнасць паглынання адзінкай аб'ёму рэчыва энергіі ЗВЧ-хістанняў пры зададзеным узроўні магутнасці. Вывучэнне колькаснага боку гэтага пытання можа даць дадатковыя звесткі аб фізіцы ферамагнітнага рэзанансу ў цвёрдым целе. Асноўныя даследаванні такога характару былі праведзены з ферытамі трайной сістэмы $(\text{NiCuZn})\text{Fe}_2\text{O}_4$. Вымярэнні праводзіліся наступным чынам. Доследным шляхам быў выбран узор, які паказваў найбольшае паглынне. Усе вымярэнні праводзілі пры некаторым пастаянным узроўні магутнасці, якая пасля двухчасовага прагрэву генератара ўстанаўлівалася так, каб адхіленне ад паглынання эталонным узорам складала прыблізна 0,75% ад поўнай шкалы індикатара (найбольш аптымальнае адхіленне). У далейшым вымярэнні праводзіліся ў строга ідэнтычных умовах. Кожны раз, калі, браліся за вымярэнні, прагравалі генератар на працягу 2 гадз і правяралі па паглыннанню кантрольнага ўзору і па прыбору самога генератара пастаянства ўзроўню магутнасці. Плошчы рэзанансных крывых вызначаліся з дапамогай планіметра. Адносная паглынальная здольнасць вызначалася як адносіны плошчаў крывых пры вызначаным маштабе да аб'ёму вымяраемага ўзору, пры гэтым для большасці саставаў адхіленне шчыльнасці ад сярэдняга значэння не пераўзыходзіла 3—4%. Вымярэнні паказалі, што паміж «паглынальнай здольнасцю» і намагнічанасцю насычэння існуе нелінейная функцыянальная залежнасць. У рабоце [6] прыведзен графік залежнасці ўдзельнай інтэнсіўнасці паглынання (паглынальнай здольнасці) ад квадрата намагнічанасці насычэння для ўзораў чатырох разрэзаў трайной сістэмы $(\text{NiCuZn})\text{Fe}_2\text{O}_4$, за выключэннем нікель-цынкавых ферытаў.

Было зазначана, што на «паглынальную здольнасць» моцна ўплывае порыстасць; у прыватнасці, нікель-цынкавыя ферыты з вялікай порыстасцю паглыналі электрамагнітнае выпраменьванне надзвычай слаба. Таму ў ходзе эксперыментаў па даследаванні ферамагнітнага рэзанансу ў трайной сістэме $(\text{NiMgMn})\text{Fe}_2\text{O}_4$ аналагічныя вымярэнні «паглынальнай здольнасці» былі зроблены выбіральна толькі з тымі ўзорамі, порыстасць якіх была строга ў межах 6—7%. Атрыманы графік залежнасці «паглынальнай здольнасці» ад квадрата намагнічанасці насычэння пацвярджае выкананне ўстаноўленай заканамернасці для разглядаемых трайных сістэм.

Зазначым, што феноменалагічная тэорыя ферамагнітнага рэзанансу, якая разглядае спінавую сістэму ў адрыве ад самога цвёрдага цела, устанаўлівае лінейную залежнасць паміж паглыннаннем і магнітным момантам.

Шматлікія эксперыменты па даследаванні ферамагнітнага рэзанансу на атрыманых к цяперашняму часу монакрышталях ферытаў указваюць, што ў большасці выпадкаў шырыня лініі ферамагнітнага рэзанансу аднаго і таго ж ферыту ў полікрысталічным стане ў некалькі разоў большая, чым у стане монакрышталя. Таму можна лічыць, што вы-

значаныя намі велічыні шырыні рэзанансных ліній у даследуемых ферытах абумоўліваюцца ў галоўнай сваёй частцы полікрышталічнасцю.

Прынята лічыць, што ў даследуемым дыяпазоне ўплыў полікрышталічнасці можа быць звязан з трыма момантамі: 1) існаваннем крышталічнай магнітнай анізатропіі; 2) наяўнасцю пругкіх напружанняў і 3) прысутнасцю пораў у керамічным матэрыяле.

Уплыў унутраных пругкіх напружанняў у ферытах, відаць, можна лічыць неістотным. Аб нязначным уплыве ўнутраных пругкіх напружанняў на зрух частаты ферамагнітнага рэзанансу ўказваюць аўтары работы [13], а адсутнасць зрухаў частаты рэзанансу фактычна выключае прыкметны ўплыў пругкіх напружанняў у полікрышталічных ферытах.

Уплыў крышталаграфічнай магнітнай анізатропіі на шырыню ліній полікрышталічных ферытаў звязан у агульным выпадку са зрухам рэзананснай частаты пры павароце пастаяннага поля адносна напрамку восяў крышталю. Паколькі ў полікрышталічным матэрыяле зерне размяшчаецца хаатычна па напрамках, рэзультатам зруху рэзанансных частот на асобных зярнятах павінна з'явіцца «пашырэнне» рэзананснай лініі.

Фенаменалагічная тэорыя звязвае з канстантай магнітнай анізатропіі $\pm K_1$ дадатковае ўшырэнне рэзананснай лініі $\frac{2|K_1|}{M_s}$ (дэтальнае даследаванне дадзенага пытання ёсць у работах Шлемана [14—17]).

Вялікая колькасць даследаванняў гаворыць у карысць правільнасці гэтых суадносін. Велічыня K_1 для нікелевага ферыту, знойдзеная з балістычных вымярэнняў метадам падыходу да насычэння, роўная прыкладна $4,3 \cdot 10^4$ эрг \cdot см⁻³. Улічваючы, што велічыня M_s для NiFe₂O₄ хістаецца ў межах 270—300 эрст, атрымліваем для дадатковай шырыні лініі ферамагнітнага рэзанансу значэнне парадку 300—350 эрст. Падрабязнае даследаванне змянення шырыні лініі ферамагнітнага рэзанансу для нікелевага ферыту ў залежнасці ад умоў вырабу правялі аўтары работы [18], якія знайшлі шырыню лініі для самых шчыльных узораў роўнай 400 эрст. Пры гэтым магчыма шырыня лініі для монакрышталю складае некалькі дзесяткаў эрстэд.

Магнітная анізатропія эфектыўна залежыць ад тэмпературы і хутка зніжаецца пры падыходзе да пункту магнітнага пераўтварэння. На велічыню магнітнай анізатропіі параўнальна вялікі ўплыў аказвае колькасць ферыту цынку, з узростаннем якой адбываецца зніжэнне тэмпературы Кюры. Вядомыя з літаратуры значэнні першай канстанты магнітнай анізатропіі для ферыту медзі і магнію блізкія паміж сабой і маюць такі ж парадок, як і для нікелевага ферыту.

Значэнне першай канстанты анізатропіі для ферыту марганцу на парадок менш, паколькі магнітная анізатропія залежыць галоўным чынам ад саставу і ў слабой ступені ад тэхналогіі, яе ўклад у шырыню лініі ферамагнітнага рэзанансу даследуемых ферытаў павінен ляжаць у межах ад нуля да 300—400 эрст. У сістэмах (Ni_xCu_yZn_z)Fe₂O₄ і (Ni_xMn_yZn_z)Fe₂O₄ уклад магнітнай анізатропіі ў шырыню лініі ферамагнітнага рэзанансу павінен хутка зніжацца з ростам колькасці ферыту цынку, а ў сістэме (Ni_xMn_yMn_z)Fe₂O₄ лінейна падаць з росту колькасці MnFe₂O₄ ад значэння прыблізна ў 15 эрст. Адсюль вынікае, што, за выключэннем гранічных сістэм нікель-медных і магній-нікелевых ферытаў, назіраемыя значэнні шырыні ліній заўсёды вызначаюцца дэфектамі структуры.

Прыступаючы да аналізу наступнай крыніцы пашырэння ліній ферамагнітнага рэзанансу, вельмі важнай дзякуючы сваёй непасрэднай сувязі з тэхналогіяй, ролі дэфектаў структуры, адзначым, што пад дэфектамі структуры мы разумеем як порыстасць, так і парушэнні іншых тыпаў. У навуковай літаратуры да цяперашняга часу няма аргументава-

нага, строга вызначанага апісання структурных дэфектаў у ферытавых матэрыялах і, відаць, няма таксама дакладных прадстаўленняў аб порах. Мы ўмовімся лічыць у першым прыбліжэнні, што ферытавыя матэрыялы, атрыманыя па керамічнай тэхналогіі, могуць змяшчаць два віды дэфектаў, а іменна поры і мікратрэшчыны. Паколькі колькасныя меркаванні аб укладзе мікратрэшчын у шырыню лініі фераманітнага рэзанансу адсутнічаюць, спачатку спынімся на гэтых дэфектах.

Прысутнасць мікратрэшчын у пэўнай ступені ўласціва ферытам усіх даследаваных намі сістэм, аднак колькасць іх неаднолькавая.

Відаць, галоўнай крыніцай напружанняў, якія выдуць да з'яўлення мікратрэшчын, з'яўляюцца хімічныя працэсы, звязаныя са змяненнем валентнасці. У адпаведнасці са сказаным роля мікратрэшчын была невялікая ў сістэме нікель-медзь-цынковых ферытаў. Доказам гэтаму служыць слабы ўплыў загартоўкі на шырыню лініі фераманітнага рэзанансу. У нікель-магній-марганцавай сістэме роля трэшчын таксама нязначная. Гэтаму садзейнічала спяканне ў вакууме, якое выключала магчымасць акіслення марганцу. Аб гэтым сведчаць даволі вялікія значэнні шчыльнасці і магнітнай пранікальнасці марганцавых ферытаў памянёнай сістэмы. Значна большая прысутнасць трэшчын у нікель-марганец-цынковых ферытах, атрыманых пры атмасферным ціску. Можна сцвярджаць, што значную долю з усіх дэфектаў шчыльнасці марганцавых ферытаў складаюць трэшчыны. Наяўнасць трэшчын прыводзіць да зніжэння статычнай магнітнай пранікальнасці і адначасова да росту шырыні лініі фераманітнага рэзанансу. Не канкрэтызуючы непасрэдна характар трэшчын, мы маем магчымасць ацаніць прыблізна велічыню іх укладу ў шырыню рэзананснай лініі саставаў з вялікай колькасцю ферыту марганцу. Улічваючы роўнасць тэмператур спякання сістэм $(\text{NiMgMn})\text{Fe}_2\text{O}_4$ і $(\text{NiMnZn})\text{Fe}_2\text{O}_4$ і невялікія адхіленні ў тэмпературных рэжымах, можна прыняць велічыню ўкладу трэшчын у шырыню лініі роўнай рознасці назіраемых значэнняў шырыні лініі марганцавых ферытаў у двох сістэмах, г. зн. парадку 350—450 эрст.

Разгледзім уклад у шырыню лініі структурных дэфектаў тыпу пораў. Велічыня порыстасці павінна найбольш дакладна праяўляцца на саставах з вялікай колькасцю цынкавага ферыту. Тэорыя Шлемана звязвае з порыстасцю P пашырэнне рэзананснай лініі парадку $(1,5 \cdot 4\pi M_s) \frac{P}{1+P}$

[20]. Аналіз атрыманых намі рэзультатаў паказвае, што дадзеная Шлеманам формула для порыстасці амаль заўсёды завышана і не ўлічвае рада фактараў. Напрыклад, пералічаныя ніжэй фактары не могуць быць улічаны формулай Шлемана: а) пры адным і тым жа значэнні порыстасці шырыня рэзананснай лініі можа змяняцца ў шырокіх граніцах і пры адсутнасці трэшчын (пры гэтым электрасупраціўленне і намагнічанасць застаюцца нязменнымі); б) шырыня рэзананснай лініі заўсёды моцна карэліруе са статычнай магнітнай пранікальнасцю; в) пры невялікіх значэннях порыстасці (да 5%) шырыня лініі амаль не залежыць ад порыстасці (рыс. 4 [18]).

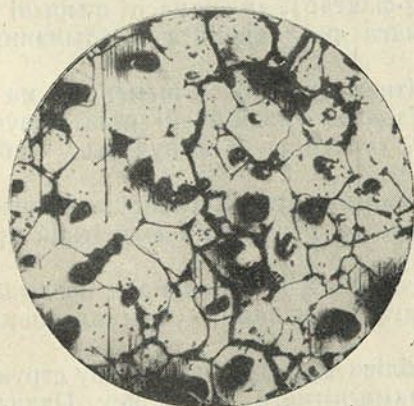
Пералічаныя абставіны ўказваюць, што слабым месцам у тэарэтычных разліках Шлемана з'яўляецца адсутнасць канкрэтнага і правільнага прадстаўлення аб характары пораў у ферытах, атрыманых спяканнем з вокіслаў. У яго разгледзе адсутнічае пытанне аб форме пораў, аб размяшчэнні пораў па размерах і аб ролі характару размяшчэння пораў у аб'ёме ўзору. Праведзеныя намі структурныя даследаванні і колькасныя ацэнкі паказваюць існаванне пэўных узаемасувязей паміж змяненнямі шчыльнасці ферытаў і сярэдняга размеру зерня ў працэсе спякання: а) павышэнне шчыльнасці ферытаў пры спяканні заўсёды суправа-

джаецца ростам зерня; б) большаму значэнню шчыльнасці даследуемых узораў ферытаў адпавядаюць, як правіла, больш буйныя зярняты і адварот (толькі пры вялікіх перагрэвах рост зерня можа суправаджацца паніжэннем шчыльнасці).

Зыходзячы з гэтага, можна лічыць, што: а) паніжанае значэнне шчыльнасці малазярністых ферытаў звязана з існаваннем надзвычайна дробных пораў, якія накопліваюцца на граніцах паміж зярнятамі, порыстасць жа ўнутры зерня, як правіла, значна меншая, чым на граніцах зярнят і чым сярэдняя порыстасць узору, іншымі словамі, існаванне порыстасці ў асноўным звязана з існаваннем граніц паміж зярнятамі; б) больш шчыльны ферыт валодае больш дасканалымі ў аб'ёме зярнятамі, блізкімі па форме і размерах.

Такім чынам, мы прыходзім да вываду, што выкарыстанне больш шчыльных ферытаў дазваляе паменшыць ролю граніц паміж зярнятамі і ролю порыстасці. Аднак пры гэтым набывае вялікае значэнне размяшчэнне зярнят па размерах і іх форме.

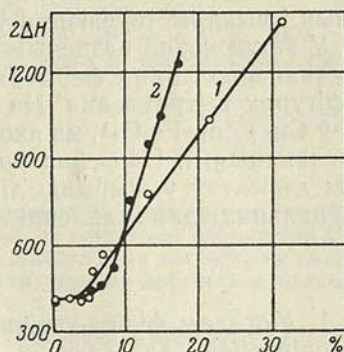
Задачай тэхналагічных прыёмаў становіцца забеспячэнне ідэнтычнасці форм і размераў зярнят, атрыманне буйных аднолькавых зярнят, па форме блізкіх да сфералітаў, у адваротным выпадку раздзеленыя адзін ад аднаго граніцай (з пораў) зярняты абумовяць узростанне ўнутранага размагнічваючага фактара і раскідванне ў велічыні размагнічваючых фактараў зерня.



Рыс. 5. Мікрафатаграфія адпаленага ферыту (саставу $\text{Cu}_{0,7}\text{Zn}_{0,3}\text{Fe}_2\text{O}_4$)

існавання зерня і меркаваць адвольнае размяшчэнне пораў у суцэльным узору.

У сістэме $(\text{Ni}_x\text{Mg}_y\text{Mn}_z)\text{Fe}_2\text{O}_4$ саставы, якія валодаюць найбольшай прамавугольнасцю петляў гістэрэзісу, паказваюць параўнальна меншую шырыню ліній ферамагнітнага рэзанансу. Вывучэнне мікрафатаграфіі



Рыс. 4. Залежнасць шырыні ліній ферамагнітнага рэзанансу ад порыстасці (%) для стэхіяметрычнага $(\text{NiOFe}_2\text{O}_3)$ (1) і нестэхіяметрычнага $(\text{NiO}(\text{Fe}_2\text{O}_3)_x)$ (2) ферытаў нікелю [18]

ўнутранага размагнічваючага фактара ў полікрышталічных цэлах дазваляе растлумачыць рад доследных фактараў, як напрыклад магчымасць розных значэнняў $2\Delta H$ пры аднолькавай порыстасці; нязначны ўклад порыстасці ў $2\Delta H$ у пачатковым участку крывой (да 5—6% пораў); карэляцыя шырыні ліній $2\Delta H$ з магнітнай пранікальнасцю. У сувязі з гэтым таксама адзначым, што выкананне лінейнага закону залежнасці шырыні ліній $2\Delta H$ ад порыстасці (па Шлеману) назіраецца пры порыстасці вышэй 7—8%, калі наяўнасць дробна зярністай структуры дазваляе не звяртаць увагу на фактар

гэтых ферытаў паказала наяўнасць у іх буйных і блізкіх паміж сабой па размерах і форме зярнят (у разрэзе правільных шасцівугольнікі). Можна зрабіць вывад, што ў полікрышталічным стане большасць характарыстык фізічных уласцівасцей у значнай меры вызначаецца ўласцівасцямі монакрышталяў і з'яўляецца, такім чынам, усярэдненымі характарыстыкамі вялікай колькасці крышталяў.

З нашага разгляду лагічна выцякае магчымасць аслаблення ў радзе выпадкаў сувязі паміж зярнятамі, абумоўленага вялікай колькасцю пораў. Гэтыя абставіны, у прыватнасці, аблягчаюць з'яўленне мікратрэшчын і выкарыстоўваюцца ў розных спосабах выяўлення граніц зярнят.

У заключэнне адзначым яшчэ адну магчымую крыніцу пашырэння рэзанансных ліній у ферытах, а іменна дыслакацыі, якія выяўляюць сябе ў фігурах вытраўлення. На рыс. 5 прыведзена фатаграфія ферыту (састаў $\text{Cu}_{0,7}\text{Zn}_{0,3}\text{Fe}_2\text{O}_4$), на якой выяўлены ямкі вытраўлення, абумоўленыя дыслакацыямі. Надзейна аданіць ступень укладу гэтага віду структурных дэфектаў у шырыню ліній цяжка. Відаць, у ферытах бываюць параўнальна рэдка скапленні зярнят з вялікай колькасцю дыслакацый.

ВЫВАДЫ

1. Метадам фізіка-хімічнага аналізу вывучаны залежнасці фізічных уласцівасцей ад саставу і тэрмаапрацоўкі ў трайных ферытах $(\text{Ni}_x\text{Cu}_y\text{Zn}_z)\text{Fe}_2\text{O}_4$ і ўстаноўлен факт існавання цвёрдых раствораў па ўсёй сістэме. Вызначаны магнітныя насычэнні для адпаленых і хутка ахалоджаных ферытаў: рэнтгенаўскія шчыльнасці, удзельная вага (шчыльнасць узору) і порыстасць; вывучаны сярэднія размеры зярнят у залежнасці ад саставу і тэрмаапрацоўкі; вызначаны статычныя магнітныя пранікальнасці, у тым ліку для аднаго разрэзу ($\text{NiO} : \text{CuO} = 3$) пры розных тэмпературах спякання.

2. На даследаваных узорах вымераны параметры фераманітнага рэзанансу на хвалі 3 см. Вызначаны змяненне велічыні рэзананснага поля ў залежнасці ад саставу (або *g*-фактар), залежнасці шырыні лініі фераманітнага рэзанансу і ўдзельнага рэзананснага паглынання ад саставу.

3. Гэтыя ж параметры фераманітнага рэзанансу вымераны на ўзорах ферытаў $(\text{Ni}_x\text{Mg}_y\text{Mn}_z)\text{Fe}_2\text{O}_4$, фізічныя ўласцівасці якіх вывучаны ў работах [7—9], і $(\text{Ni}_x\text{Mg}_y\text{Zn}_z)\text{Fe}_2\text{O}_4$ (уласцівасці вывучаны ў работах [10, 11]).

4. Устаноўлена, што шырыня фераманітнага рэзанансу полікрышталічных ферытаў, як правіла, карэлюе са статычнай магнітнай пранікальнасцю.

5. Устаноўлена, што велічыня ўдзельнага рэзананснага паглынання прапарцыянальна квадрату магнітнага паглынання (пры аднолькавай порыстасці).

6. Разгледжаны характэрныя асаблівасці і ступень уплыву структурных дэфектаў на шырыню лініі фераманітнага рэзанансу. Паказана, што існуючыя прадстаўленні аб уплыве пораў на шырыню лініі фераманітнага рэзанансу недастатковы для ўліку ўсіх фактараў.

ЛІТАРАТУРА

1. Завойский Е. К. ЖЭТФ, 17, 883, 1947.
2. Сноек Я. Исследования в области новых ферромагнитных материалов. М., 1949.
3. Сб. «Физика и физико-химический анализ», в. 1, 1957, стар. 20.
4. Сирота Н. Н., Хачатрян Ю. И. и Бекбулатов М. С. Сб. «Ферриты и бесконтактные элементы». Минск, 1963, стар. 186.

5. Сирота Н. Н., Хачатрян Ю. М. и Бекбулатов М. С. Там же, стар. 192.
6. Сирота Н. Н. и Бекбулатов М. С. Там же, стар. 197.
7. Сирота Н. Н. и Павлов В. И. Там же, стар. 106.
8. Павлов В. И., Сирота Н. Н. Там же, стар. 113.
9. Сирота Н. Н., Павлов В. И. Там же, стар. 127.
10. Сирота Н. Н., Данилькевич М. И. Там же, стар. 176.
11. Сирота Н. Н., Данилькевич М. И. Там же, стар. 182.
12. Павлов В. И. Кандидатская диссертация. Минск, 1964.
13. Скроцкий Г. В., Курбатов Л. В.. Сб. «Ферромагнитный резонанс», гл. II. М., 1961.
14. Schlömann E. Phys. Chem. Solids, **6**, 242, 1958.
15. Schlömann E. Phys. Chem. Solids, **6**, 257, 1958.
16. Schlömann E., Zeeder I. R. I. Appl. Phys., **29**, 341, 1958.
17. Schlömann E., Jones R. V. J. Appl. Phys. Suppl., **30**, № 4, 1775, 1959.
18. Blum S. L., Zneimer I. E. and Zlotnick H. Journ. of the American Ceramic Society, **40**, № 5, 143, 1957.
19. Туров Е. А. Сб. «Ферромагнитный резонанс», гл. VI. М., 1961.

Резюме

В работе проведено исследование зависимости параметров ферромагнитного резонанса от состава в тройных системах ферритов. Данные по изменению параметров ферромагнитного резонанса с составом сопоставляются со статическими магнитными свойствами. Кроме того, детализируются представления о структурных дефектах в поликристаллических ферритах.

Поступило в редакцию 13.II 1965

КАРОТКІЯ ПАВЕДАМЛЕННІ

Г. П. ЖАВРИД

НИЛЬПОТЕНТНЫЕ ПОДГРУППЫ ЗНАКОПЕРЕМЕННОЙ ГРУППЫ

В [1, 2] доказано, что все максимальные нильпотентные транзитивные подгруппы симметрической группы S_n сопряжены в S_n , и установлено, что максимальная нильпотентная транзитивная подгруппа S_n , где $n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_k^{a_k}$, изоморфна прямому произведению k p_j -подгрупп Силова симметрических групп $S_{p_j^{a_j}}$. В частности, из [1, 2] следует, что множество простых делителей порядка транзитивной нильпотентной подгруппы S_n совпадает с множеством простых делителей числа n . В настоящей заметке доказывается, что все максимальные нильпотентные транзитивные подгруппы знакопеременной группы сопряжены в ней, и описывается строение максимальных нильпотентных интранзитивных подгрупп знакопеременной группы.

1. Пусть L_n — максимальная нильпотентная транзитивная подгруппа знакопеременной группы A_n , $n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_k^{a_k}$, а p_i — различные простые числа. Если 2 не делит n , то L_n является максимальной нильпотентной транзитивной подгруппой N_n симметрической группы S_n , ибо при нечетном n все подстановки N_n четные. Если $2|n$, то L_n является подгруппой индекса 2 в N_n . Отсюда, используя результаты [1, 2], получаем:

а) В знакопеременной группе A_n , $n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_k^{a_k}$, лишь в случае, когда $n \equiv 2 \pmod{4}$, нет нильпотентных транзитивных подгрупп A_n .

б) Все максимальные нильпотентные транзитивные подгруппы знакопеременной группы сопряжены в S_n .

Непосредственно из [1, 2] следует:

в) Все максимальные нильпотентные транзитивные подгруппы A_{p^a} , где p — простое число, сопряжены в A_{p^a} , ибо все они являются p -подгруппами Силова знакопеременной группы A_{p^a} .

Пусть $B(L_n)$ — нормализатор в S_n максимальной нильпотентной транзитивной подгруппы L_n знакопеременной группы A_n . Справедливо следующее утверждение, вытекающее из б):

г) Если $B(L_n)$ не содержится в A_n , то все максимальные нильпотентные транзитивные подгруппы A_n сопряжены в A_n .

Верно и обратное:

д) Если все максимальные нильпотентные транзитивные подгруппы A_n сопряжены в A_n , то $B(L_n)$ содержит нечетную подстановку.

Действительно, пусть g — нечетная подстановка и $g^{-1}L_n g = L'_n$. Из посылки утверждения следует, что существует такой элемент $h \in A_n$, что $h^{-1}L_n h = L'_n$. Представим h в виде $h = gf$. Очевидно, что нечетная подстановка hfh^{-1} принадлежит $B(L_n)$.

Следовательно, для доказательства сопряженности максимальных

нильпотентных транзитивных подгрупп A_n в A_n достаточно показать, что в $B(L_n)$ имеется нечетная подстановка.

Произвольная максимальная нильпотентная транзитивная подгруппа L_n знакопеременной группы A_n изоморфна прямому произведению p_j -подгрупп Силова групп $A_{p_1^{a_1}}, A_{p_2^{a_2}}, \dots, A_{p_k^{a_k}}$. Перемещаемые группой L_n символы запишем в виде $\xi = [\xi_1, \dots, \xi_k]$, где ξ_j пробегает $p_j^{a_j}$ символов. Если φ_j пробегает все подстановки максимальной нильпотентной транзитивной подгруппы $L_{p_j^{a_j}}$ знакопеременной группы $A_{p_j^{a_j}}$, то все $f_j(\xi) = \varphi_j[\xi_1, \dots, \xi_k] = [\xi_1, \dots, \varphi_j(\xi_j), \dots, \xi_k]$ образуют группу $L^{(j)}$, изоморфную $L_{p_j^{a_j}}$ (см. [1, 2]).

Из утверждений в) и д) следует, что $B(L_{p_j^{a_j}})$ содержит нечетную подстановку. Искомую подстановку m определим следующим образом: пусть на ξ_1 m действует как нечетная подстановка $B(L_{p_j^{a_j}})$, а на $\xi_j \neq \xi_1$ — как тождественная подстановка. Подстановка m принадлежит $B(L_n)$, так как она принадлежит $B(L^{(j)})$, а с p_j -подгруппами $L^{(j)}$, $j \neq 1$, m перестановочна. Подстановка m будет нечетной, если $\frac{n}{p_1^{a_1}}$ — нечетное число. Если $2/n$, то, положив $p_1 = 2$, всегда достигаем требуемое.

Таким образом, доказана

Теорема 1. Все максимальные нильпотентные транзитивные подгруппы знакопеременной группы A_n , где $n \not\equiv 2 \pmod{4}$, сопряжены в A_n . При $n \equiv 2 \pmod{4}$ в A_n нет нильпотентных транзитивных подгрупп.

2. Пусть максимальная нильпотентная подгруппа Γ группы A_n интранзитивна, а $\Sigma_1, \dots, \Sigma_k$ — системы интранзитивности Γ . В силу максимальной Γ индуцирует в каждой системе Σ_j максимальную нильпотентную транзитивную подгруппу Γ_j симметрической группы S_{m_j} , где m_j — число символов системы Σ_j , $m_1 + \dots + m_k = n$. Пусть $\bar{\Gamma}$ — прямое произведение k групп Γ_j . Тогда $\bar{\Gamma} : \Gamma = 1$, если 2 не делит m_j , $j = 1, \dots, k$; $\bar{\Gamma} : \Gamma = 2$, если в разбиении n найдутся такие m_j , что $2/m_j$. Отсюда, используя утверждения, аналогичные утверждениям б) и г) в случае максимальных нильпотентных транзитивных групп, заключаем, что Γ с точностью до сопряженности в A_n определяется заданием чисел m_1, \dots, m_k таких, что $m_1 + \dots + m_k = n$. Заметим лишь, что из различных разбиений числа n следует исключить разбиения, удовлетворяющие одновременно следующим условиям:

$$m_j \equiv 2 \pmod{4}, \quad 2 \text{ не делит } m_i, \quad i = 1, \dots, j-1, j+1, \dots, k.$$

Аналогично [3] имеет место

Теорема 2. Интранзитивная нильпотентная подгруппа Γ_{m_1, \dots, m_k} знакопеременной группы A_n , индуцирующая в каждой системе Σ_j максимальную нильпотентную транзитивную подгруппу симметрической группы S_{m_j} , $m_j > 1$, лишь тогда не является максимальной нильпотентной подгруппой A_n , когда среди m_j есть такие m_{i_1}, \dots, m_{i_t} , что $m_{i_1} = m_{i_2} = \dots = m_{i_t} = p^t$, $t \geq p$, где p — простое число.

3. Легко проверить, что если Γ — группа, порожденная элементами $a = (1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6)$ и $b = (1\ 2\ 5\ 4\ 3\ 6)$, то две ее максимальные нильпотентные транзитивные подгруппы $\Gamma' = (a)$ и $\Gamma'' = (b)$ не сопряжены в Γ .

Обозначим через D_i группу всех диагональных матриц, элементами которых являются все корни i -ой степени из единицы. Группа $G =$

$= \Gamma D_6$ — конечная подгруппа $GL(6, K)$, K — поле комплексных чисел. Предположим, что две максимальные неприводимые локально нильпотентные подгруппы $G: G' = \Gamma'D'$ и $G'' = \Gamma''D'$, где $D' = D_2 \times D_3$, сопряжены в G (строение максимальных неприводимых локально нильпотентных периодических подгрупп $GL(n, K)$ описано в [4]). Тогда гомоморфизм $\varphi: G \rightarrow \Gamma$ переведет соотношение $(gd_6)^{-1}G'(gd_6) = G''$ в $g^{-1}\Gamma'g = \Gamma''$, где $g \in \Gamma$, что, как указано выше, невозможно. Таким образом, вопреки [5], построен пример периодической подгруппы $G \subset GL(n, K)$, максимальные неприводимые локально нильпотентные подгруппы которой не сопряжены в G .

За советы и обсуждения, в результате которых написана эта работа, автор весьма признателен Д. А. Супруненко и Р. Т. Вольвачеву.

ЛИТЕРАТУРА

1. Супруненко Д. А. Разрешимые и нильпотентные линейные группы. Минск, 1958, стр. 65—68.
2. Супруненко Д. А. ДАН СССР, **99**, № 1, 1954.
3. Супруненко Д. А., Жаврид Г. П. ДАН БССР, **2**, № 8, 1958.
4. Супруненко Д. А. Матем. сб., **55**, (97), № 1, 1961.
5. Гаращук М. С. ДАН БССР, **6**, № 9, 1962.

Поступило в редакцию 13. III 1965

Э. А. РУДАК

О НЕКОТОРЫХ ОСОБЕННОСТЯХ УРОВНЯ 1,90 Мэв ИЗОТОПА Cr^{51}

Уровень 1,90 Мэв изотопа Cr^{51} , возбуждаемый в различных ядерных реакциях, имеет орбитальный момент $l_n = 1$ и возможные значения спина $1/2$ и $3/2$. Относительно спина этого уровня в литературе имеются противоречивые сведения. В исследованиях угловой корреляции γ -лучей из реакции (n, γ) на Cr^{50} указывается как наиболее вероятное значение $3/2$ [1]. Кэйн исследовал γ - γ -совпадения γ -лучей из этой реакции с помощью люминесцентного парного спектрометра [2]. Был обнаружен γ -переход 7,36 Мэв из захватного состояния в реакции (n, γ) на уровень 1,90 Мэв и прямой γ -переход с уровня 1,90 Мэв в основное состояние ($\sim 80\%$). Наблюдается также слабый γ -переход 1,15 Мэв с уровня 1,90 Мэв на первый возбужденный уровень 0,76 Мэв ($\sim 20\%$). Орбитальный момент основного состояния $l_n = 3$, спин $j = 7/2$. Поэтому γ -переход 1,90 Мэв с уровня 1,90 Мэв в основное состояние должен принадлежать типу E2 в случае значения спина этого уровня $3/2$. Конкурирующий γ -переход 1,15 Мэв с уровня 1,90 Мэв на p -уровень 0,76 Мэв должен принадлежать типу M1 и M1 + E2 в случае значения спинов $1/2$ и $3/2$ соответственно. Вероятность γ -перехода 1,90 Мэв типа M3 очень мала по сравнению с вероятностью γ -перехода 1,15 Мэв типа M1. Поэтому наличие интенсивного γ -перехода с уровня 1,90 Мэв свидетельствует о значении спина этого уровня $3/2$ и мультипольности γ -перехода E2.

Спин уровня 1,90 Мэв определен также в исследованиях реакции (d, p) на изотопе Cr^{50} . В ряде работ [3—5] экспериментально была обнаружена зависимость формы углового распределения протонов из реакции (d, p) от значения спина возбуждаемого p -уровня. Если спин p -уровня равен $1/2$, то в угловом распределении протонов наблюдается глубокий минимум при 130° . Если же спин p -уровня $3/2$, то минимум отсутствует. Данный эффект объясняется, по-видимому, изменением волновых функций налетающего на ядро дейтрона, захватываемого на p -уровень нейтрона и вылетающего протона за счет спин-орбитального взаимодействия. Это, однако, не исключает возможности зависимости формы углового распределения протонов из реакции (d, p) от конкретных свойств возбуждаемого p -уровня, вследствие чего спин уровня может быть неправильно идентифицирован. В работе [5] указывается, что спин p -уровня 1,90 Мэв изотопа Cr^{51} равен $1/2$, что противоречит данным работ [1—2]. Поэтому можно предположить, что форма углового распределения протонов из реакции (d, p) на Cr^{50} , соответствующих возбуждению p -уровня 1,90 Мэв со спином $3/2$, отличается от углового распределения протонов для других известных p -уровней со спинами $3/2$ вследствие каких-то особых свойств данного уровня.

На особый характер уровня 1,90 Мэв указывает также то обстоятельство, что в реакции (n, γ) с этого уровня наблюдается γ -переход типа E2 в основное состояние и очень слабый γ -переход 1,15 Мэв типа M1+E2 на уровень 0,76 Мэв, хотя по односторонней оценке Вайскопфа вероятность γ -перехода 1,15 Мэв гораздо больше, чем вероятность γ -перехода 1,90 Мэв.

ЛИТЕРАТУРА

1. Bartholomew G. A., Gunye M. R., Bull. Am. Phys. Soc., 8, 367, 1963.
2. Kane W. R. et al. Phys. Rev., 125, 2037, 1962.
3. Andrews P. T. et al. Nucl. Phys., 56, 465, 1964.
4. Lee L. L., Jr. and Schiffer I. R. Phys. Rev. Letters, 12, 108, 1964.
5. Alty J. L. et al. Phys. Letters, 13, 55, 1964.

Поступило в редакцию 12.III 1965

І. Г. НЕКРАШЭВІЧ, І. А. БАКУТА

ДА ПЫТАННЯ АБ ІАЊІЗАЦЫІ ГАЗУ ЭЛЕКТРОНАМІ

Прасцейшая тэорыя ўдарнай іаЊізацыі газу электронамі, прапанаваная Таунсендам, прыводзіць да наступнага рэзультату [1]:

$$j = j_0 e^{\alpha l}, \quad (1)$$

дзе j — шчыльнасць току ў газе; j_0 — шчыльнасць току ў газе да ўзнікнення ўдарнай іаЊізацыі; l — даўжыня міжэлектроднага прамежку; α — каэфіцыент ударнай іаЊізацыі газу электронамі, роўны ліку іаЊізацый на адзэку ў 1 см даўжынёй.

Пры наяўнасці аб'ёмнай іаЊізацыі газу караткахвалевым выпраменьваннем гэта тэорыя дае

$$j = j_0 \frac{e^{\alpha l} - 1}{\alpha l}. \quad (2)$$

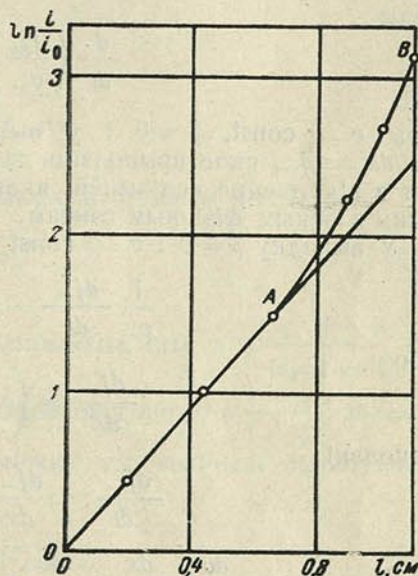
Гэтыя формулы далі магчымасць Таунсенду правесці эксперыментальную ацэнку каэфіцыента α . Так, карыстаючыся формулай (1)

у выглядзе $\ln \frac{j}{j_0} = \alpha l$, трэба чакаць прамой залежнасці паміж $\ln \frac{j}{j_0}$ і l . Дослед паказаў, што пры значэннях $l > 0,7$ см назіраюцца адхіленні ўверх ад прамалінейнай залежнасці (рысунак). Для тлумачэння гэтага факта Таунсенду давялося прыцягваць іншыя працэсы, якія прыводзяць да дадатковага ўзрастання току.

Разгледзім з'яву ўзрастання току, абумоўленую электронамі, зыходзячы з энергетычных меркаванняў, у адрозненне ад кінетычнага пункту гледжання Таунсенда. Для гэтага возьмем агульнае ўраўненне балансу энергіі для адзінкі аб'ёму дыэлектрыка [2]

$$\frac{dQ}{dt} = jE - (\omega_0 - \omega) \frac{dn}{dt}, \quad (3)$$

дзе Q — колькасць цяпла; t — час; j — поўная шчыльнасць току; E — напружанасць поля; $(\omega_0 - \omega)$ — сярэдняя энергія, якую неабходна за-



Залежнасць іаЊізацыйнага току ў газе ад велічыні міжэлектроднага прамежку

траціць для ўтварэння зараджанай часцінкі з нейтральнай пры дадзеных умовах; ω_0 — энергія ўтварэння зараджанай часцінкі з нейтральнай, што знаходзіцца на самым нізкім энергетычным узроўні; ω — сярэдняя энергія, якой валодаюць нейтральныя часцінкі пры дадзеных умовах; n_- — колькасць узнікаючых электронаў у адзінцы аб'ёму.

Мяркуючы $j = j_- + j_+$, $n_- = j_-/qv_-$ і лічачы цяпло аддытыўнай велічыні, пераўтвораем ураўненне (3) наступным чынам:

$$\frac{dQ_-/dt}{j_-E} j_-E + \frac{dQ_+/dt}{j_+E} j_+E = j_-E + j_+E - \frac{\omega_0}{q} \left(1 - \frac{\omega}{\omega_0}\right) \frac{d}{dt} \left(\frac{j_-}{v_-}\right).$$

Увядзём абазначэнні:

$$\frac{dQ_-/dt}{j_-E} = \nu; \quad \frac{dQ_+/dt}{j_+E} = \eta; \quad \frac{\omega}{\omega_0} = \zeta;$$

$$\frac{qE}{\omega_0} \frac{1-\nu}{1-\zeta} = \alpha; \quad \frac{qE}{\omega_0} \frac{1-\eta}{1-\zeta} = \beta.$$

Тады

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{j_-}{v_-}\right) = \alpha j_- + \beta j_+. \quad (4)$$

Пры $v_- = \text{const}$, $\beta = 0$ і ў выніку $x = v_-t$ атрымліваем ураўненне $dj_-/dx = \alpha j_-$, якое прыводзіць да рэзультату Таунсенда $j = j_0 e^{\alpha l}$. Аднак тут α з'яўляецца велічыняй, якая ўтвараецца з комплексу іншых велічынь з ясным фізічным сэнсам.

У выпадку $\beta = 0$ і $v_- \neq \text{const}$ ураўненне (4) прыме выгляд

$$\frac{1}{v_-} \frac{dj_-}{dt} - j_- \frac{dv_-/dt}{v_-^2} = \alpha j_-$$

або

$$\frac{dj_-}{dx} = \left(\alpha + \frac{d}{dx} \ln v_-\right) j_-, \quad (5)$$

паколькі

$$\frac{dj_-}{dt} = \frac{dj_-}{dx} \frac{dx}{dt} = \frac{dj_-}{dx} v_-;$$

$$\frac{dv_-}{dx} \frac{dx}{dt} = \frac{dv_-}{dx} v_-; \quad \frac{dv_-/dx}{v_-} = \frac{d}{dx} \ln v_-.$$

Рашэнне ураўнення (5) лёгка атрымліваецца метадам раздзялення пераменных пры $\alpha = \text{const}$:

$$j = j_0 \frac{v_a}{v_0} e^{\alpha l}, \quad (6)$$

дзе v_0 — скорасць электронаў пры $x = \Delta l$; v_a — скорасць электронаў пры $x = l$, г. зн. каля анода. Адзначым, што скорасць электронаў можа дасягаць свайго гранічнага значэння v_a у любым пункце міжэлектроднага прамежку на некаторай адлегласці ад катода і затым застаецца пастаяннай аж да анода. У гэтым выпадку адносіны v_a/v_0 не будуць залежаць ад даўжыні міжэлектроднага прамежку, а будуць толькі функцыяй электрычнага поля і стану дыэлектрыка. Калі ж скорасць

дасягае значэння v_a толькі ў непасрэднай блізкасці ад анода, то адносіны v_a/v_0 будуць некаторай функцыяй даўжыні міжэлектроднага прамежку, г. зн. будзем мець

$$j = j_0 f(l) e^{\alpha l}. \quad (7)$$

Такім чынам, выраз (6) улічвае таксама прыкатодную вобласць, дзе электроны паскараюцца полем. Гэта значна расшырае фізічны сэнс выразу (6) у параўнанні з выразам Таунсенда для шчыльнасці току (1). На неабходнасць уліку прыкатоднай вобласці паскарэння электронаў указвае Капцоў [3]. Трэба адзначыць, што тут улічваецца не ўся вобласць паскарэння электронаў, а толькі тая яе частка, у якой паскараемыя электроны могуць праводзіць іанізацыю атамаў. Значыць, велічыня $l = L - \Delta l$, дзе L — даўжыня міжэлектроднага прамежку, а Δl — прыкатодная частка прамежку, у якой мае месца «даіанізацыйнае» паскарэнне электронаў. Пры гэтым Δl будзе тым меншай велічынёй, чым большая скорасць электронаў непасрэдна каля катода.

Для тлумачэння адхілення ад прамой залежнасці, паказанага на рысунку, трэба прыцягнуць некаторыя дадатковыя меркаванні, як і ў тэорыі Таунсенда. Напрыклад, можна ўлічыць катодныя працэсы наступным чынам: $j_h = j_0 + \gamma j E$, тады атрымаем

$$j = \frac{j_0 \frac{v_a}{v_0} e^{\alpha l}}{1 - \frac{\gamma E v_a}{v_0} e^{\alpha l}}. \quad (8)$$

Пры гэтым атрымліваецца ўмова прабою ў наступным выглядзе:

$$\frac{v_0}{v_a \gamma E} = e^{\alpha l}. \quad (9)$$

Лічачы γ пастаяннай велічынёй і ўлічваючы, што $\alpha = \frac{q}{\omega_0} \frac{1 - \mu}{1 - \zeta} E$, можна адсюль вызначыць пры пастаянным значэнні $x = \frac{1 - \mu}{1 - \zeta}$ залежнасць даўжыні міжэлектроднага прамежку ад велічыні прабіўнога напружання ў выпадку, калі $\Delta l \approx 0$:

$$L = \gamma \frac{v_a}{v_0} U e^{x U}. \quad (10)$$

У тым выпадку, калі (10) дапускае раскладанне ў рад, будзем мець

$$L = \gamma \frac{v_a}{v_0} U (1 + xU + x^2 U^2 + \dots). \quad (11)$$

Першае набліжэнне дае лінейную сувязь паміж даўжынёй прабіўнога прамежку і велічынёй прабіўнога напружання, што часта рэалізуецца на практыцы.

У заключэнне адзначым, што энергетычны падыход да апісання з'явы іанізацыі і прабою дыэлектрыкаў, відаць, можа быць прыкладзеным да дыэлектрыкаў у любым агрэгатным стане. Такім чынам, значна расшыраюцца магчымасці для апісання электрычных з'яў у дыэлектрыках у параўнанні з тэорыяй Таунсенда.

ЛИТАРАТУРА

1. Сканави Г. И. Физика диэлектриков (область сильных полей). ГИФМЛ, М., 1958.
2. Некрашевич И. Г., Бакуто И. А. ДАН БССР, № 1, 1962.
3. Капцов Н. А. Электрические явления в газах и вакууме. ГИТТЛ, М.—Л., 1950.

Поступило в редакцию 9.IV 1964

З М Е С Т

МАТЭМАТЫКА

А. Х. Турецкий. Замечание об обратной задаче теории аппроксимации в метрике L	5
О. А. Чупригин. Об интерполяционной функции Лебега, соответствующей интерполированию Эрмита по равноотстоящим узлам	9
Р. Т. Вольвачев. О порядке элемента матричной группы	11
Нгуен-Тхыа-Хоп. О задаче Неймана для уравнения эллиптического типа	17
Л. Е. Загорин. О нормальной форме Жордана матриц над телом	21
А. Ш. Блох, Л. П. Матюшков. О надежности конечного автомата	25
П. И. Щербина. Арифметические коды, исправляющие искажения заданного вида	31
Г. М. Гусак. О влиянии адресности на скорость работы вычислительной машины	41

ФІЗІКА

М. М. Корань, М. М. Сірата. Аб кінетыцы росту дыфузійных слаёў у сістэме ціобій — волава	43
Т. С. Раманова, Ф. І. Фёдараў. Аб ураўненнях з вышэйшымі выводнымі для электрамагнітнага поля	47
А. П. Іваноў, К. Р. Прэдка. Эксперыментальнае вывучэнне размыцця вузкага пучка святла ў рассеиваючым экране	54
В. К. Гронский. Нелептонный распад поляризованного Ω -гиперона	62
А. П. Прышывалка, А. К. Капанік. Разлік люмінесценцыі ў рэзанатары са знешнімі люстрамі пры наяўнасці раз'юстыроўкі	65
А. М. Ганчарэнка. Электрамагнітныя ўласцівасці прамавугольнага хвалявода, запоўненага гіратронным асяроддзем	71
А. А. Богуш. Аб сувязі матрычных элементаў для дзіракаўскага і пауліёўскага токаў	76
Л. Г. Мороз, В. Н. Третьяков. О связи мнимой части амплитуды комптон-эффекта на нейтроне с фоторождением π -мезонов	83
Г. В. Шышкін. Да тэоры адваротнага μ — e -распаду	88
Р. Г. Жбанкоў, М. І. Гарбуз, А. І. Скрыган, А. М. Шышко. Інфрачырвоныя спектры цэлюлоз рознага паходжання і ўзросту. III. Цэлюлоза з драўніны рознага ўзросту	95
М. С. Бекбулатаў. Ферамагнітны рэзананс у цвёрдых растворах трайных сістэм ферытаў $(NiCuZn)Fe_2O_4$, $(NiMgMn)Fe_2O_4$ і $(NiMnZn)Fe_2O_4$	99

КАРОТКІЯ ПАВЕДАМЛЕННІ

Г. П. Жаврид. Нильпотентные подгруппы знакопеременной группы	110
Э. А. Рудак. О некоторых особенностях уровня 1.90 Мэв изотопа Cr^{51}	113
І. Г. Некрашэвіч, І. А. Бакута. Да пытання аб іанізацыі газу электронамі	115

СОДЕРЖАНИЕ

МАТЕМАТИКА

А. Х. Турецкий. Замечание об обратной задаче теории аппроксимации в метрике L	5
О. А. Чупригин. Об интерполяционной функции Лебега, соответствующей интерполированию Эрмита по равноотстоящим узлам	9
Р. Т. Вольвачев. О порядке элемента матричной группы	11
Нгуен-Тхыа-Хоп. О задаче Неймана для уравнения эллиптического типа	17
Л. Е. Загорин. О нормальной форме Жордана матриц над телом	21
А. Ш. Блох, Л. П. Матюшков. О надежности конечного автомата	25
П. И. Щербина. Арифметические коды, исправляющие искажения заданного вида	31
Г. М. Гусак. О влиянии адресности на скорость работы вычислительной машины	41

ФИЗИКА

Н. Н. Корень, Н. Н. Сирота. О кинетике роста диффузионных слоев в системе ниобий — олово	43
Т. С. Романова, Ф. И. Федоров. Об уравнениях с высшими производными для электромагнитного поля	47
А. П. Иванов, К. Г. Предко. Экспериментальное изучение размытия узкого пучка света в рассеивающем экране	54
В. К. Гронский. Нелептонный распад поляризованного Ω -гиперона	62
А. П. Пришивалко, Е. К. Копаник. Расчет люминесценции в резонаторе с внешними зеркалами при наличии разъюстировки	65
А. М. Гончаренко. Электромагнитные свойства прямоугольного волновода, заполненного гиротропной средой	71
А. А. Богуш. О связи матричных элементов для дираковского и паулиевского токов	76
Л. Г. Мороз, В. Н. Третьяков. О связи мнимой части амплитуды комптон-эффекта на нейтроне с фоторождением π -мезонов	83
Г. В. Шишкин. К теории обратного μ — e -распада	88
Р. Г. Жбанков, Н. И. Гарбуз, А. И. Скриган, А. М. Шишко. Инфракрасные спектры целлюлоз различного происхождения и возраста. III. Целлюлоза из древесины разного возраста	95
М. С. Бекбулатов. Ферромагнитный резонанс в твердых растворах тройных систем ферритов $(\text{NiCuZn})\text{Fe}_2\text{O}_4$, $(\text{NiMgMn})\text{Fe}_2\text{O}_4$ и $(\text{NiMnZn})\text{Fe}_2\text{O}_4$	99

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

Г. П. Жаврид. Нильпотентные подгруппы знакопеременной группы	110
Э. А. Рудак. О некоторых особенностях уровня $1,90 \text{ Мэв}$ изотопа Cr^{51}	113
И. Г. Некрашевич, И. А. Бакуто. К вопросу об ионизации газа электронами	115

АТ 14502. Здана ў набор 19/VI 1965 г. Падпісана да друку 24/VIII 1965 г. Фармац 70×108/16.
Друк. арк. 7,5. Ум. друк. арк. 10,3. Уч.-выд. арк. 10,2. Выд. заказ 184.
Друк. заказ 757. Цана 60 кап.

Друкарня навукова-тэхнічнай літаратуры выдавецтва «Навука і тэхніка» АН БССР
і Дзяржакамітэта Савета Міністраў БССР па друку
Мінск, Ленінскі праспект, 68

ВНИМАНИЮ АВТОРОВ

Статьи, присылаемые авторами в наш журнал, будут приниматься редакцией к печати только при наличии двух экземпляров автореферата, удовлетворяющего указанным ниже требованиям.

ИНСТРУКЦИЯ

по составлению рефератов для авторов отечественных периодических изданий

Постановлением Совета Министров СССР от 18/IV-1959 г. № 418 и последующим решением Государственного комитета по координации научно-исследовательских работ СССР и Президиума Академии наук СССР редакции научных и научно-технических журналов обязаны представлять в ВИНТИ рефераты публикуемых материалов.

В настоящей инструкции сформулированы требования к содержанию и оформлению рефератов, которыми и следует руководствоваться.

Требования, предъявляемые к реферату

1. В реферате кратко излагается основное содержание статьи. Реферат должен дать читателю представление о характере освещаемой работы, оригинальности постановки вопроса, методике проведения исследования и его основных результатах.

2. Реферату должно предшествовать библиографическое описание в следующем виде: название статьи, фамилия и инициалы автора, название журнала, где помещается статья. Текст реферата начинается непосредственно с изложения существа работы без повторения заголовка. Форма изложения материала не обязательно должна повторять форму изложения оригинальной статьи.

3. Если оригинал содержит большое количество цифровых данных, их следует обобщить и систематизировать.

4. Средний объем реферата 1,5—2 страницы машинописного текста, отпечатанного через два интервала на белой писчей бумаге обычного формата (30×21) в двух экземплярах с полем 4 см с левой стороны.

5. Таблицы, схемы, графики и пр. могут быть включены в том случае, если они отражают основное содержание работы или сокращают текст реферата. Сообщение о наличии в реферируемой работе таблиц, схем, графиков, фотографий, карт, рисунков необходимо давать в конце реферата. Например, табл. 2, илл. 10.

6. Формулы приводятся только в том случае, если они необходимы для понимания статьи. Громоздкие математические выражения помещать не следует. Формулы следует вписывать четко, не изменяя принятых в оригинале обозначений величин. Формулы и буквенные обозначения вписываются черными чернилами во второй экземпляр. Вписывание формул и буквенных обозначений, а также исправление замеченных опечаток в первом экземпляре не делается.

7. В конце реферата в квадратных скобках указывается название учреждения или предприятия, в которых автор реферируемой работы (если эти данные приводятся в статье) провел работу. Подпись автора и дату написания реферата следует ставить в левом нижнем углу на обоих экземплярах реферата.

К сведению читателей

В ИЗДАТЕЛЬСТВЕ „НАУКА И ТЕХНИКА“

ВЫЙДЕТ В СВЕТ В 1966 г.

ЕРУГИН Н. П. **Приводимые системы**, 2-е издание. Издательство «Наука и техника». 7 л. На русском языке. 10 000 экз. Цена 35 коп. (II кв.).

Монография является вторым, переработанным и дополненным изданием работы, опубликованной в 1946 г. в Трудах Математического института имени Б. А. Стеклова (Изд. АН СССР). В ней построена теория приводимых линейных систем дифференциальных уравнений (в смысле Ляпунова).

Полученные признаки приводимости системы и методы исследования играют важную роль как в общей теории дифференциальных уравнений, так и в теории устойчивости движения.

Книга предназначена для научных работников.

Книгу можно заказать предварительно во всех магазинах Книготорга и потребительской кооперации республики, а также в магазинах «Академкнига».

Для получения книги почтой заказы направлять по адресу: г. Минск, Железнодорожная улица, 27, Республиканский магазин «Книга — почтой» или г. Москва, К-12, Б. Черкасский переулок, 2/10, контора «Академкнига», отдел «Книга — почтой».

Книготоргующие и другие организации направляют заказы Управлению книжной торговли Госкомитета Совета Министров БССР по печати.