

65.186.981
Б 05

300/1
58

ВЕСЦІ

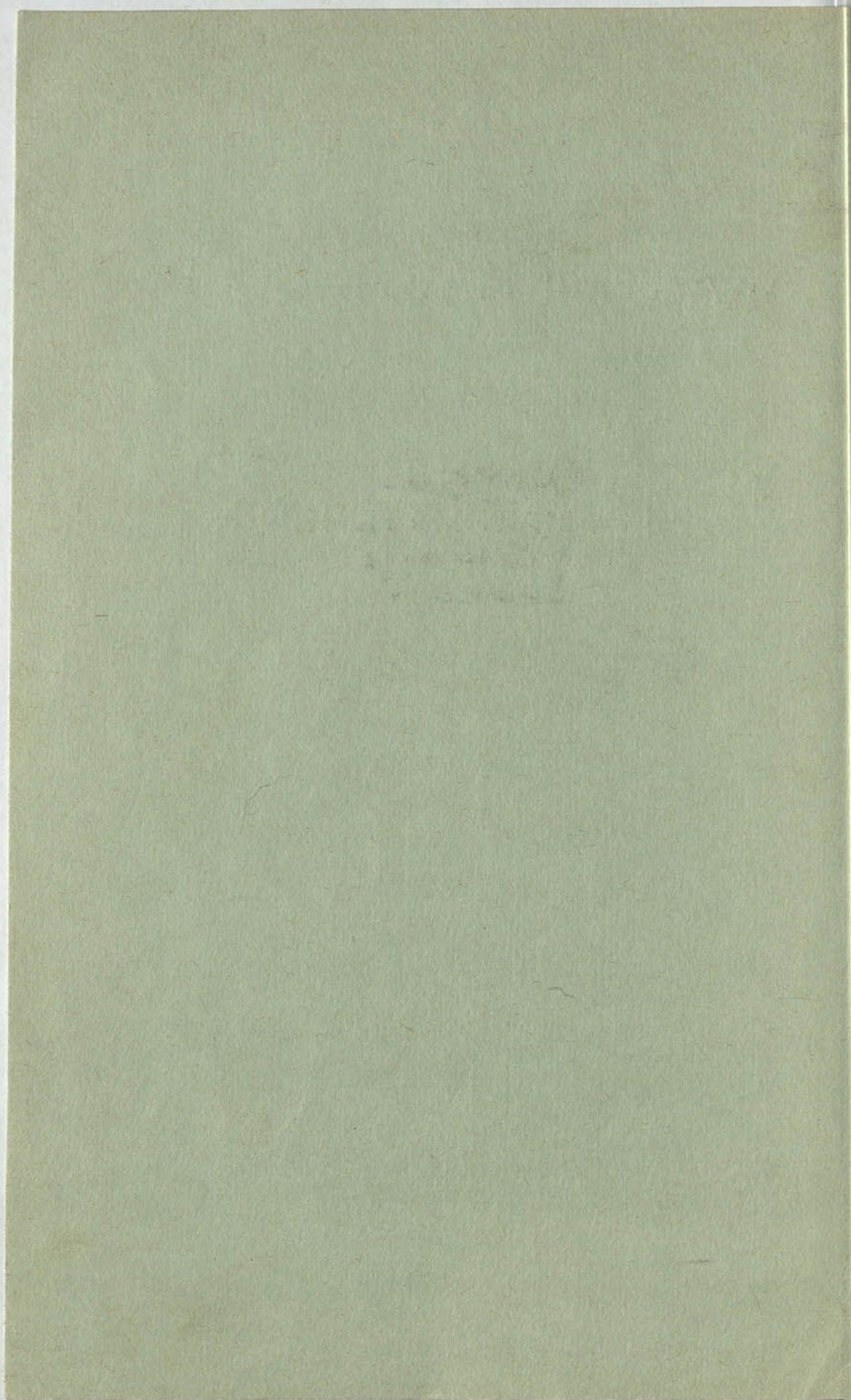
АКАДЭМІІ НАВУК БССР

СЕРЫЯ
ФІЗІКА-МАТЭМАТЫЧНЫХ
НАВУК

3

ВЫДАВЕЦТВА „НАВУКА І ТЭХНІКА“

МІНСК 1985



505



ИЗВЕСТИЯ

АКАДЕМИИ НАУК БССР

СЕРИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ
НАУК

№ 3

ИЗДАТЕЛЬСТВО „НАУКА И ТЕХНИКА“

М И Н С К 1 9 6 5

65.186.981

30K-1
58

ВЕСЦІ

АКАДЭМІІ НАВУК БССР

СЕРЫЯ
ФІЗІКА-МАТЭМАТЫЧНЫХ
НАВУК

№ 3

ВЫДАВЕЦТВА „НАВУКА І ТЭХНІКА“

МІНСК 1965

Цэнтральная
бібліятэка
БССР
ім. У. І. Леніна

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ:

Ф. И. ФЕДАРАУ (галоўны рэдактар),
Л. Ф. ІЛЮШЭНКА (нам. галоўнага рэдактара),
М. М. АЛЯХНОВІЧ, А. П. ВЕРАБ'ЕУ, У. І. КРЫЛОУ,
М. М. СІРАТА, У. Г. СПРЫНДЖУК, Д. А. СУПРУНЕНКА,
Я. І. ФІРСАУ, С. А. ЧУНІХІН

Д. А. СУПРУНЕНКО, В. И. МАТЮХИН

О РАЗРЕШИМЫХ ГРУППАХ МАТРИЦ НАД ЕВКЛИДОВЫМ КОЛЬЦОМ

В настоящей статье некоторые результаты теории разрешимых групп матриц над полем переносятся на случай разрешимых матричных групп над коммутативным евклидовым кольцом.

§ 1. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Пусть R — коммутативное евклидово кольцо, а M — свободный n -членный R -модуль. Группу всех автоморфизмов модуля M будем называть полной линейной группой над R и обозначать $G(M)$ или $GL(n, R)$. Поле отношений кольца R будем обозначать буквой P . Очевидно, $G(M)$ можно рассматривать как подгруппу группы $GL(n, P)$. Всякую подгруппу группы $G(M)$ будем называть линейной группой над R . Подгруппа Γ группы $G(M)$ называется приводимой, если модуль M обладает прямым слагаемым N , инвариантным относительно Γ , размерность которого меньше n и больше нуля. В противном случае подгруппа Γ группы $G(M)$ называется неприводимой.

Лемма 1. Пусть Γ — подгруппа $G(M)$, а в M есть подмодуль N , инвариантный относительно Γ . Тогда в M есть и прямое слагаемое N_1 , инвариантное относительно Γ , размерность которого над R совпадает с размерностью N .

Действительно, согласно теореме о базисе подмодуля, в N есть такой базис b_1, b_2, \dots, b_m , что $b_i = \delta_i a_i$, $i = 1, 2, \dots, m$, где $\delta_i \in R$, а a_1, a_2, \dots, a_n — некоторый базис M . По условию для $g \in \Gamma$, $i \leq m$, можно написать

$$g(b_i) = \lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_m b_m, \quad \lambda_j \in R. \quad (1)$$

С другой стороны, для $i \leq m$

$$g(a_i) = \gamma_1 a_1 + \dots + \gamma_n a_n, \quad \gamma_v \in R. \quad (2)$$

Отсюда

$$g(b_i) = \delta_i g(a_i) = \delta_i (\gamma_1 a_1 + \dots + \gamma_n a_n). \quad (3)$$

Сравнив формулы (1) и (3), получим $\gamma_v = 0$ для $v > m$. Следовательно, подмодуль N_1 с базисом a_1, \dots, a_m есть прямое слагаемое модуля M , инвариантное относительно Γ .

Лемма 2. Если Γ — неприводимая подгруппа $G(M)$, то Γ неприводима как подгруппа $GL(n, P)$.

В самом деле, каждый базис u_1, \dots, u_n модуля M является базисом n -мерного пространства P^n над полем P . Пусть Γ приводима как подгруппа $GL(n, P)$, а Q — инвариантное относительно Γ подпространство P^n . Тогда $N = Q \cap M$ инвариантный относительно Γ подмодуль M , размерность которого совпадает с размерностью Q . Согласно лемме 1, Γ — приводимая подгруппа $G(M)$. Отсюда и вытекает лемма.

Подгруппа Γ группы $G(M)$ называется вполне приводимой, если M можно представить в виде прямой суммы таких инвариантных относительно Γ подмодулей, что ограничение Γ на каждом слагаемом есть неприводимая группа.

Подгруппу Γ группы $G(M)$ будем называть импримитивной, если M можно представить в виде прямой суммы k ($k > 1$) подмодулей N_i , перемещаемых элементами Γ между собой. Разложение $M = N_1 + N_2 + \dots + N_k$ называется разложением на системы импримитивности Γ . Если такое разложение невозможно, то группу Γ будем называть примитивной. Если группа Γ импримитивна, то в базисе M , приуроченном к разложению на системы импримитивности, каждая матрица группы Γ будет мономиальной матрицей степени k , элементы которой суть обратимые матрицы степени nk^{-1} над R .

Пусть теперь Γ — неприводимая импримитивная подгруппа $G(M)$, а

$$N_1 + N_2 + \dots + N_k = M$$

разложение модуля M на системы импримитивности Γ . Подгруппу всех операторов из Γ , перемещающих элементы подмодуля N_i внутри N_i , обозначим через H_i . Если $g \in \Gamma$ и $g(N_i) = N_j$, то, очевидно, $gH_i g^{-1} = H_j$.

Пусть $g_1 = e, g_2, \dots, g_k$ принадлежат Γ и $g_i(N_1) = N_i$. Тогда g_1, g_2, \dots, g_k — полная система представителей левых смежных классов Γ по H_1 .

Лемма 3. Ограничение Γ^i группы H_i на N_i есть неприводимая подгруппа $GL(nk^{-1}, R)$ ($i = 1, \dots, k$) (см. [1], стр. 11).

Если группа Γ^1 из леммы 3 тоже импримитивна и имеет l систем импримитивности, то модуль M можно представить в виде прямой суммы kl систем импримитивности группы Γ . Следовательно, верна

Лемма 4. Пусть Γ — неприводимая подгруппа $G(M)$. Тогда либо Γ примитивна, либо M есть прямая сумма таких систем импримитивности группы Γ , что определяемые леммой 3 группы Γ^i будут примитивными.

Указанное в лемме 4 разложение модуля M назовем полным разложением M на системы импримитивности группы Γ .

§ 2. РЕДУКЦИЯ К ПРИМИТИВНЫМ ГРУППАМ

Обратимся теперь к разрешимым подгруппам группы $G(M)$. Легко видеть (см., например, [1], стр. 10), что достаточно рассматривать лишь неприводимые разрешимые подгруппы $G(M)$. Заметим еще, что всякая разрешимая подгруппа Γ группы $G(M)$ содержится в максимальной разрешимой подгруппе $G(M)$. Действительно, объединение G любой возрастающей цепочки разрешимых подгрупп группы $G(M)$ есть локально разрешимая группа. С другой стороны, $G \subseteq GL(n, P)$. Следовательно, по теореме Цассенхауса G — разрешимая группа. Отсюда и вытекает высказанное утверждение.

Будем теперь рассматривать максимальные разрешимые неприводимые подгруппы $G(M)$.

Пусть максимальная разрешимая неприводимая подгруппа Γ группы $G(M)$ импримитивна и

$$M = N_1 + N_2 + \dots + N_k \quad (k > 1) \quad (4)$$

есть полное разложение свободного n -членного R -модуля на системы импримитивности Γ . Можно показать, что Γ однозначно определяется некоторой максимальной примитивной разрешимой подгруппой $GL(nk^{-1}, R)$ и некоторой максимальной транзитивной разрешимой подгруппой симметрической группы S_k степени k . Другими словами, верна

Лемма 5.

$$\Gamma = N \cdot H, \quad N \cap H = (e), \quad (5)$$

где подгруппа N изоморфна максимальной транзитивной разрешимой подгруппе S_k , а нормальный делитель H есть прямое произведение k экземпляров некоторой максимальной разрешимой примитивной подгруппы G группы $GL(nk^{-1}, R)$.

Для доказательства леммы следует повторить рассуждения, приведенные в [1] на стр. 13.

Теорема 1. Пусть Γ — неприводимая подгруппа группы $G(M)$, а H — ее нормальный делитель. Тогда в M есть такой подмодуль N , что $N \simeq M$,

$$N = N_1 \dot{+} \dots \dot{+} N_k, \quad (6)$$

где N_j — инвариантные и неприводимые относительно H подмодули одной и той же размерности nk^{-1} .

Доказательство. Будем рассматривать Γ и H как подгруппы группы $GL(n, P)$. Как уже отмечалось, Γ — неприводимая подгруппа $GL(n, P)$. По теореме Клиффорда ([1], стр. 15), пространство P^n можно представить в виде прямой суммы инвариантных относительно H подпространств L_1, L_2, \dots, L_k одной и той же размерности $nk^{-1} = m$:

$$P^n = L_1 \dot{+} L_2 \dot{+} \dots \dot{+} L_k. \quad (7)$$

Разумеется, мы можем считать, что $M \subset P^n$. Как легко проверить, $L_j \cap M = N_j$ — инвариантные относительно H подмодули модуля M размерности m . Очевидно, сумма $N = N_1 \dot{+} \dots \dot{+} N_k$ является прямой, а $M \simeq N$. Отсюда и вытекает теорема.

Лемма 6. Пусть Γ — неприводимая подгруппа $G(M)$. Тогда в M есть такой инвариантный относительно H подмодуль $N \simeq M$, что

$$N = N_1 \dot{+} \dots \dot{+} N_k, \quad k \geq 1, \quad (8)$$

подмодули N_i перемещаются группой $\bar{\Gamma}$ между собой, где $\bar{\Gamma}$ — ограничение Γ на N , а группа $\bar{\Gamma}^i$ (см. лемму 3) является примитивной подгруппой $GL(nk^{-1}, P)$.

Доказательство. Согласно лемме 2, Γ — неприводимая подгруппа $GL(n, P)$. Если Γ — примитивная подгруппа $GL(n, P)$, то лемма доказана: достаточно положить $k = 1$, $N = M$. Пусть теперь Γ — импримитивная подгруппа $GL(n, P)$ и

$$P^n = Q_1 \dot{+} Q_2 \dot{+} \dots \dot{+} Q_k$$

полное разложение пространства P^n на системы импримитивности Γ . Как уже отмечалось выше, размерность подмодуля $N_j = Q_j \cap M$ совпадает с размерностью подпространства Q_j . Если теперь $g \in \Gamma$ и $g(Q_i) = Q_j$, то $g(N_i) = N_j$. Очевидно, сумма

$$N_1 \dot{+} N_2 \dot{+} \dots \dot{+} N_k = N \quad (9)$$

будет прямой, а размерность N равна n (см. [2]). Следовательно, (9) есть разложение N на системы импримитивности $\bar{\Gamma}$. Так как линейная P -оболочка подмодуля N_i совпадает с Q_i , то $\bar{\Gamma}^i$ — примитивная подгруппа $GL(nk^{-1}, P)$. Заметим, что $\bar{\Gamma}$ изоморфна Γ . Лемма доказана.

Таким образом, в силу двух последних лемм изучение строения максимальных разрешимых линейных групп над R сводится к изучению максимальных разрешимых примитивных линейных групп над R .

§ 3. ПРИМИТИВНЫЕ РАЗРЕШИМЫЕ ГРУППЫ

Теорема 2. Пусть Γ — максимальная разрешимая неприводимая подгруппа $G(M)$, а F — ее максимальный абелев нормальный делитель. Если Γ примитивна как подгруппа $GL(n, P)$, то F является группой C^* всех обратимых элементов некоторой области целостности $C \supseteq R$ такой, что размерность модуля C над R есть делитель числа n .

Доказательство. Так как Γ — примитивная подгруппа $GL(n, P)$, то линейная P -оболочка $[F]$ группы F является полем Σ таким, что $\Sigma : P = m$, m/n . Пусть $D = \Sigma \cap G(M)$. Очевидно, для любого $g \in \Gamma$ $gDg^{-1} = D$. Следовательно, ΓD — разрешимая группа, а D — ее абелев нормальный делитель. В силу максимальности Γ , $\Gamma D = \Gamma$, $D \subset \Gamma$. Отсюда $D = F$. Очевидно, линейная R -оболочка группы D содержится в Σ и, следовательно, является областью целостности. Пусть R_n — кольцо всех $n \times n$ матриц над R . Легко показать, что $R_n \cap \Sigma$ есть одновременно кольцо и модуль, размерность которого над R совпадает со степенью $m = \Sigma : R$. Действительно, пусть a_1, a_2, \dots, a_m — P -базис Σ . Очевидно, для некоторых l_1, l_2, \dots, l_m из R $l_1 a_1 = c_1, \dots, l_m a_m = c_m$ будут линейно независимыми над R элементами из $R_n \cap \Sigma$. Следовательно, ранг модуля $C = R_n \cap \Sigma$ равен m . H есть группа всех обратимых в R_n матриц из $R_n \cap \Sigma$. Теорема доказана.

Теорема 3. Пусть Γ — максимальная разрешимая неприводимая подгруппа $G(M)$, F — ее максимальный абелев нормальный делитель. Пусть, кроме того, Γ примитивна как подгруппа $GL(n, P)$. Обозначим буквой V централизатор F в Γ . Тогда фактор-группа Γ/V изоморфна некоторой разрешимой подгруппе группы автоморфизмов кольца $C = [F]_R$ относительно R .

Действительно, пусть g — произвольный элемент группы Γ . Рассмотрим отображение

$$g \rightarrow \sigma_g, \quad \sigma_g(x) = gxg^{-1}, \quad x \in [F]_R. \quad (10)$$

Очевидно, σ_g — автоморфизм кольца C , оставляющий неподвижным каждый элемент RE_n . Отображение (10) есть гомоморфизм, ядро которого совпадает с V . Отсюда и вытекает теорема.

Следствие. $G : V \leq m$, где $m = [F]_R : P$, m/n .

При предыдущих обозначениях справедлива

Лемма 7. R -модуль M содержит подмодуль N , изоморфный M как R -модулю и представимый в виде свободного C -модуля C -размерности nm^{-1} .

Доказательство. Очевидно, $P^n = \Sigma g_1 + \dots + \Sigma g_r$ $r = nm^{-1}$, $g_j \in M$. Так как $C \subset \Sigma$, то сумма $Cg_1 + \dots + Cg_r = N$ является прямой. Далее, $[C]_P = \Sigma$. Следовательно, $N : R = n$, $N : C = r = nm^{-1}$. Это и утверждает лемма.

Так как для любых $c \in C$ и $v \in V$ $cv = vc$, то V можно рассматривать как подгруппу $GL(nm^{-1}, C)$.

Пусть A/F — абелев нормальный делитель групп Γ/F и V/F . Так как F — максимальный абелев нормальный делитель Γ , то центр группы A совпадает с F .

Лемма 8. В фактор-группе A/F порядки всех элементов делят число $\frac{n}{m}$. Если $aF \in A/F$ имеет порядок v , то в A найдется такой элемент c , что коммутатор $(a, c) = aca^{-1}c^{-1}$ имеет порядок v .

Доказательство подобно доказательству леммы 9 в [1] (стр. 18).

Лемма 9.

$$A : F = [A]_R : [F]_R.$$

Действительно, если элементы h_1, h_2, \dots, h_k из A линейно независимы над $[F]$, то $h = r_1 h_1 + \dots + r_k h_k \neq 0$, $r_i \in [F]$. Такие элементы будут принадлежать различным смежным классам A по F . Представители же различных смежных классов A по F линейно независимы над $[F]$. Если h_1, h_2, \dots, h_k максимальная линейно независимая над $[F]$ система элементов из A , то она, с одной стороны, будет $[F]$ -базисом $[A]$, с другой — полной системой представителей смежных классов A по F (см. [1], стр. 19).

Лемма 10. В группе A есть такая система образующих $a_1, b_1, \dots, a_t, b_t$, что 1) $(a_i, b_i) = a_i b_i a_i^{-1} b_i^{-1} = \varepsilon_i$, где $\varepsilon_i \in F$ и имеет порядок ν_i , причём ν_{i+1} / ν_i ; 2) элементы различных пар перестановочны; 3) если $a \in A$, то а единственным образом представим в виде $a = f a_1^{\alpha_1} b_1^{\beta_1} \dots a_t^{\alpha_t} b_t^{\beta_t}$, где $f \in F$, $0 \leq \alpha_i, \beta_i < \nu_i$.

Действительно, порядки элементов фактор-группы A/F делят $\frac{n}{m}$.

Обозначим через ν_1 наибольший из этих порядков. Тогда $A = (a_1) \times \times (b_1) A_1$, где $(a_1, b_1)^{\nu_1} = 1$; $a_1, b_1 \in A$; A_1 — централизатор элементов a_1, b_1 в A (см. [1], стр. 19). Отсюда $A : A_1 \leq \nu_1^2$, так как в A имеется ν_1 элементов, сопряженных с a_1 , и ν_1 элементов, сопряженных с b_1 . Кроме того, элементы $a_1^{\alpha_1} b_1^{\beta_1}$, $0 \leq \alpha_1, \beta_1 < \nu_1$ лежат в различных смежных классах A по A_1 . Поэтому $A : A_1 = \nu_1^2$. Обозначая через ν_2 наибольший из порядков элементов группы A_1/F и т. д., мы ввиду конечности группы A/F после конечного числа шагов получим

$$A = (a_1)(b_1) \dots (a_t)(b_t) F.$$

Отсюда и следует лемма.

Для максимального абелева нормального делителя A/F группы Γ/F , содержащегося в V/F , остается справедливой следующая теорема из [1]:

Теорема 4. Группа A/F совпадает со своим централизатором в V/F .

Следствия. 1. Централизатор A в Γ совпадает с V . 2. Группа V/A изоморфна разрешимой подгруппе группы автоморфизмов группы A/F .

ЛИТЕРАТУРА

1. Супруненко Д. А. Разрешимые и нильпотентные линейные группы. Минск, 1958.
2. Curtis W., Reiner I. Representation theory of finite groups and associative algebras. New-York, London, 1962.

Поступило в редакцию 7.IV 1965

В. И. КРЫЛОВ, Л. А. ЯНОВИЧ

**О ПРИБЛИЖЕНИИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ
 АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ
 ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИМИ СУММАМИ**

В настоящей заметке рассматривается сходимость и асимптотика приближения 2π -периодических непрерывных в полосе $|\operatorname{Im} z| \leq d$ ($d > 0$) и регулярных во внутренних точках этой полосы функций $f(x)$ суммами вида

$$U_N^{(p,q)}(x) = \frac{1}{Nq} \sum_{k=1}^N \frac{\sin \frac{1}{2} p(x-x_k) \sin \frac{1}{2} q(x-x_k)}{\sin^2 \frac{1}{2} (x-x_k)} f(x_k), \quad (1)$$

где N , p и q — целые положительные числа, при этом p и q одинаковой четности, а $x_k = \frac{2k\pi}{N}$ ($k = 1, 2, \dots, N$).

I. Теорема 1. Для того чтобы последовательность $U_N^{(p,q)}(x)$ при $q \rightarrow \infty$ ($N \geq p \geq q$) сходилась к $f(x)$ во всякой точке x ($|\operatorname{Im} x| < d$), какая бы ни была 2π -периодическая регулярная во внутренних точках и непрерывная вплоть до границы полосы $|\operatorname{Im} x| \leq d$ функция $f(x)$, необходимо и достаточно, чтобы $\lim_{q \rightarrow \infty} \frac{N}{p+q} \geq 1$. Когда же индекс q фиксирован или, изменяясь, остается ограниченным некоторым числом $q_0 < \infty$, процесс (1) всегда сходится внутри полосы регулярности к приближаемой функции указанного вида при $N, p \rightarrow \infty$ ($N \geq p$).

Доказательство. Остаток $r_N^{(p,q)}(x) = f(x) - U_N^{(p,q)}(x)$ в любой точке x ($|\operatorname{Im} x| < d$) представим контурным интегралом

$$r_N^{(p,q)}(x) = \frac{1}{4q\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\sin \frac{1}{2} [N\xi - p(\xi - x)] \sin \frac{1}{2} q(\xi - x)}{\sin \frac{1}{2} N\xi \sin^2 \frac{1}{2} (\xi - x)} f(\xi) d\xi, \quad (2)$$

в котором интегрирование ведется по отрезкам ($\operatorname{Im} \xi = \pm d, 0 \leq \operatorname{Re} \xi \leq 2\pi$) в направлении, оставляющем полосу регулярности слева. Оценивая (2), получим для $r_N^{(p,q)}(x)$ неравенство

$$|r_N^{(p,q)}(x)| < \left\{ \operatorname{ch} \frac{1}{2} [Nd - p(d - \operatorname{Im} x)] \operatorname{ch} \frac{1}{2} q(d - \operatorname{Im} x) + \operatorname{ch} \frac{1}{2} [Nd - p(d +$$

$$\left. + \operatorname{Im} x \right] \operatorname{ch} \frac{1}{2} q (d + \operatorname{Im} x) \} \times \\ \times \left\{ 2q \operatorname{sh} \frac{1}{2} N d \operatorname{sh}^2 \frac{1}{2} (d - |\operatorname{Im} x|) \right\}^{-1} M,$$

где $M = \max_{0 < \xi_1 < 2\pi} |f(\xi_1 \pm id)|$, из которого, как не трудно установить, сходимость процесса (1) будет следовать при неограниченном возрастании всех параметров N , p , q или только N и p в случае $q \leq q_0 < \infty$, когда выражение $\frac{1}{q} \exp \left\{ -Nd + \frac{1}{2} (p+q) (d + |\operatorname{Im} x|) \right\} \rightarrow 0$.

Последнее в случае $q \leq q_0 < \infty$, а также при выполнении условия теоремы и для $q \rightarrow \infty$ всегда имеет место.

Пусть условие теоремы не выполняется, т. е. найдется такая подпоследовательность троек (N, p, q) из рассматриваемой совокупности чисел $N \geq p \geq q$, что $\lim_{q \rightarrow \infty} \frac{N}{p+q} \leq 1 - \varepsilon$, где ε — некоторое положительное число. Тогда для остатка приближения

$$r_N^{(p,q)}(x) = \frac{\sin \frac{1}{2} [Nz_0 - p(z_0 - x)] \sin \frac{1}{2} q(x - z_0)}{2q \sin^2 \frac{1}{2} (z_0 - x) \sin \frac{1}{2} Nz_0}$$

функции $f(x) = [\sin(x - z_0)]^{-1}$, $|\operatorname{Im} z_0| > d$ в произвольной внутренней точке x полосы $|\operatorname{Im} x| \leq d$ будет иметь место неравенство

$$|r_N^{(p,q)}(x)| > \\ > \frac{e^{-\frac{1}{2} N |\operatorname{Im} z_0|} \left| \operatorname{sh} \frac{1}{2} \operatorname{Im} [Nz_0 - p(z_0 - x)] \operatorname{sh} \frac{1}{2} q \operatorname{Im} (z_0 - x) \right|}{q (1 + e^{-N |\operatorname{Im} z_0|}) \operatorname{ch}^2 \frac{1}{2} \operatorname{Im} (z_0 - x)}$$

Перейдя к экспонентам в выражении, стоящем в числителе, получим модуль суммы нескольких членов, один из которых есть $(1 - \exp[-q |\operatorname{Im} (z_0 - x)|]) \exp \left\{ -N |\operatorname{Im} z_0| + \frac{1}{2} (p+q) |\operatorname{Im} (z_0 - x)| \right\}$, а остальные, деленные на q , будут стремиться к нулю при $q \rightarrow \infty$. Если только $|\operatorname{Im} (z_0 - x)| \geq 2(1 - \varepsilon_0) |\operatorname{Im} z_0|$, где $0 < \varepsilon_0 < \varepsilon$, что всегда можно сделать, взяв точки z_0 и x достаточно близкими к границе полосы $|\operatorname{Im} \xi| \leq d$ и такими, что $\operatorname{Im} z_0$ и $\operatorname{Im} x$ имели противоположные знаки, тогда указанный член правой части неравенства, а значит, и $|r_N^{(p,q)}(x)|$ будут расти неограниченно при этих N , p , $q \rightarrow \infty$ в выбранной точке x ($|\operatorname{Im} x| < d$).

Как нетрудно заметить при доказательстве теоремы, сходимость формулы (1) к $f(x)$ будет не только при ограничениях $N \geq p \geq q$, указанных в теореме, но и при некоторых более общих соотношениях между этими параметрами.

Теорема 2. Для остатка $r_N^{(p,q)}(x)$ формулы (1) в любой внутренней точке x полосы $|\operatorname{Im} x| \leq d$ имеет место равенство

$$r_N^{(p,q)}(x) = \frac{1}{8q\pi} \left\{ e^{-[N + \frac{1}{2}(p+q)]d} S_N^{(p,q)}(x) - e^{-[N + \frac{1}{2}(p-q)]d} S_N^{(p,-q)}(x) + \right.$$

где

$$\begin{aligned}
 & + e^{-\frac{1}{2}(p+q)d} \bar{S}_N^{(p,q)}(x) - e^{-\frac{1}{2}(p-q)d} \bar{S}_N^{(p,-q)}(x) \Big\}, \\
 S_N^{(p,q)}(x) &= \cos \frac{1}{2}(p+q)x \sum_{\nu=0}^{\infty} A_{\nu+1, N}^{(p,q)}(x) e^{-\nu Nd} + \\
 & + \sin \frac{1}{2}(p+q)x \sum_{\nu=0}^{\infty} B_{\nu+1, N}^{(p,q)}(x) e^{-\nu Nd}, \\
 \bar{S}_N^{(p,q)}(x) &= \cos \frac{1}{2}(p+q)x \sum_{\nu=0}^{\infty} A_{\nu, N}^{(-p, -q)}(x) e^{-\nu Nd} - \\
 & - \sin \frac{1}{2}(p+q)x \sum_{\nu=0}^{\infty} B_{\nu, N}^{(-p, -q)}(x) e^{-\nu Nd},
 \end{aligned}$$

а коэффициенты A и B в этих рядах стремятся к нулю при неограниченном возрастании хотя бы одного из индексов N , p , q или ν .

Доказательство. Интегральное представление (2) запишем в виде

$$\begin{aligned}
 r_N^{(p,q)}(x) &= \frac{1}{8q\pi i} \left\{ \cos \frac{1}{2}(p+q)x \int_{\Gamma} \frac{\cos \frac{1}{2}(N-p-q)\xi f(\xi) d\xi}{\sin \frac{1}{2}N\xi \sin^2 \frac{1}{2}(\xi-x)} - \right. \\
 & - \sin \frac{1}{2}(p+q)x \int_{\Gamma} \frac{\sin \frac{1}{2}(N-p-q)\xi f(\xi) d\xi}{\sin \frac{1}{2}N\xi \sin^2 \frac{1}{2}(\xi-x)} - \\
 & - \cos \frac{1}{2}(p-q)x \int_{\Gamma} \frac{\cos \frac{1}{2}(N-p+q)\xi f(\xi) d\xi}{\sin \frac{1}{2}N\xi \sin^2 \frac{1}{2}(\xi-x)} + \\
 & \left. + \sin \frac{1}{2}(p-q)x \int_{\Gamma} \frac{\sin \frac{1}{2}(N-p+q)\xi f(\xi) d\xi}{\sin \frac{1}{2}N\xi \sin^2 \frac{1}{2}(\xi-x)} \right\},
 \end{aligned}$$

в котором после подстановки

$$\left[\sin \frac{1}{2}N(\xi_1 \pm id) \right]^{-1} = \mp 2ie^{-\frac{1}{2}Nd} \sum_{\nu=0}^{\infty} e^{\pm i\left(\nu + \frac{1}{2}\right)N\xi_1} e^{-\nu Nd},$$

замены синусов и косинусов, зависящих от N , p и q , через показательные функции и некоторых преобразований получим приведенное в теореме разложение, где

$$\begin{aligned}
 A_{\nu, N}^{(p, q)}(x) &= \int_0^{2\pi} \left\{ \frac{e^{i\nu N \xi_1} e^{-\frac{i}{2}(p+q)\xi_1} f(\xi_1 + id)}{\sin^2 \frac{1}{2}(\xi_1 + id - x)} + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{e^{-i\nu N \xi_1} e^{\frac{i}{2}(p+q)\xi_1} f(\xi_1 - id)}{\sin^2 \frac{1}{2}(\xi_1 - id - x)} \right\} d\xi_1; \\
 B_{\nu, N}^{(p, q)}(x) &= i \int_0^{2\pi} \left\{ \frac{e^{-i\nu N \xi_1} e^{\frac{i}{2}(p+q)\xi_1} f(\xi_1 - id)}{\sin^2 \frac{1}{2}(\xi_1 - id - x)} - \right. \\
 &\quad \left. - \frac{e^{i\nu N \xi_1} e^{-\frac{i}{2}(p+q)\xi_1} f(\xi_1 + id)}{\sin^2 \frac{1}{2}(\xi_1 + id - x)} \right\} d\xi_1.
 \end{aligned}$$

Полученное разложение характеризует в случае сходимости процесса закон стремления $U_N^{(p, q)}(x)$ к функции $f(x)$, который зависит от соотношения между изменяющимися индексами N , p и q . Как правило, несколько первых членов этого разложения будут давать главный член ошибки приближенного процесса (1).

Очевидно, что условия сходимости метода (1) могут быть также получены из указанного разложения.

II. Рассмотрим несколько частных случаев формулы (1).

1. При $N = p = q = 2n + 1$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) сумма (1) превращается в интерполяционную формулу Джексона [1], которая, как было показано в [2], что также следует из теоремы 1, не является сходящейся внутри полосы регулярности в изучаемом классе функций. Для сравнения отметим, что процесс Фейера [3] для непериодического интерполирования по равноотстоящим узлам на единичной окружности, который аналогичен по построению процессу Джексона, сходится внутри единичного круга для всякой функции, регулярной в области $|z| < 1$ и непрерывной в $|z| \leq 1$, и может расходиться лишь [4] в точках $|z| = 1$.

2. Когда $N = 2n + 1$, $p = q \leq n + 1$ ($n = 1, 2, \dots$), получим приближенный процесс С. Н. Бернштейна [5] $U_n^q(x)$, который так же, как и приближение Джексона, является сходящимся в классе периодических непрерывных на действительной оси функций. Однако в отличие от метода Джексона этот процесс сходится также внутри полосы $|\operatorname{Im} x| \leq d$ к приближаемой функции $f(x)$, какая бы ни была 2π -периодическая функция $f(x)$, непрерывная в указанной полосе и регулярная в ее внутренних точках. Этот факт вытекает из теоремы 1.

Может быть сформулирована следующая

Теорема 3. Для остаточного члена процесса С. Н. Бернштейна $r_n^q(x) = f(x) - U_n^q(x)$ имеет место в точке x ($|\operatorname{Im} x| < d$) соотношение

$$r_n^q(x) = \frac{a(x)}{q} + o \left\{ \frac{1}{qe^{q(d - |\operatorname{Im} x|)}} \right\}, \quad (3)$$

$$\text{где } a(x) = -\frac{1}{8\pi} \int_0^{2\pi} \left\{ \frac{f(\xi_1 + id)}{\sin^2 \frac{1}{2} (\xi_1 + id - x)} + \frac{f(\xi_1 - id)}{\sin^2 \frac{1}{2} (\xi_1 - id - x)} \right\} d\xi_1.$$

Доказательство следует непосредственно из теоремы 2.

Как видно из предыдущего равенства, остаток стремится к нулю, вообще говоря, не быстрее, чем q^{-1} . Но очевидно, что линейная комбинация двух приближений Бернштейна вида

$$\tilde{U}_n^q = (q+1)U_n^{q+1}(x) - qU_n^q(x) = \frac{1}{2n+1} \sum_{k=0}^{2n} \frac{\sin \frac{2q+1}{2}(x-x_k)}{\sin \frac{1}{2}(x-x_k)} f(x_k)$$

или

$$W_n^q(x) = 2U_n^{2q} - U_n^q = \frac{1}{q(2n+1)} \sum_{k=0}^{2n} \frac{\sin \frac{3}{2}q(x-x_k) \sin \frac{1}{2}q(x-x_k)}{\sin^2 \frac{1}{2}(x-x_k)} f(x_k)$$

дает приближение показательного порядка.

3. Если $N = 2n + 1$, $p = 2(n + 1) - q$ и $q \leq n + 1$, то (1) будет формулой С. М. Никольского [6], которая также сходится в точках x ($|\operatorname{Im} x| < d$) к $f(x)$ в рассматриваемом классе функций при неограниченном возрастании n и q или только n . Как показано в работе [6], сходимость этого процесса в классе непрерывных на действительной оси периодических функций $f(x)$ имеет место тогда и только тогда, когда $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{q(n)}{n} > 0$.

В заключение следует отметить, что суммы вида (1) в классах периодических непрерывных и дифференцируемых на действительной оси функций изучались многими авторами. Получены интересные результаты по сходимости и асимптотике остаточных членов этих формул (см., например, [7—12]).

ЛИТЕРАТУРА

1. Jackson D. Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, 37, 371—375, 1914.
2. Крылов В. И., Янович Л. А. ДАН БССР, № 2, 1965.
3. Смирнов В. И., Лебедев Н. А. Конструктивная теория функций комплексного переменного. Изд. «Наука», 1964.
4. Лозинский С. М. ДАН СССР, 24, 318—321, 1939.
5. Бернштейн С. Н. Собр. соч., 2, 1954, стр. 161—165.
6. Никольский С. М. Изв. АН СССР, сер. матем., 4, № 6, 1940.
7. Никольский С. М. ДАН СССР, 31, № 3, 1941.
8. Никольский С. М. Труды Матем. ин-та им. Стеклова, 15, 1945.
9. Лозинский С. М. Матем. сб., 14(56), № 3, 1944.
10. Корнейчук Н. П. Укр. матем. ж., 13, № 1, 1961.
11. Власов В. Ф. ДАН СССР, 142, № 4, 1962.
12. Sunouchi Gen-ichirō. Tohoku Math. J., 15, № 2, 1963.

Поступило в редакцию 17.V 1965

А. А. ПАЛЬЦЕВ, Н. С. СКОБЛЯ

ОБ ИНТЕГРИРОВАНИИ ОГРАНИЧЕННЫХ ФУНКЦИЙ С ВЕСОМ ЛЯГЕРРА

В некоторых задачах физики, в частности в теории полупроводников [1], приходится вычислять интегралы вида

$$I(f) = \int_0^{\infty} x^{\alpha} e^{-x} f(x) dx, \quad (1)$$

где функция $f(x)$ непрерывна на полуоси $0 \leq x < \infty$ и имеет конечное предельное значение при $x \rightarrow \infty$.

При вычислении таких интегралов известное квадратурное правило наивысшей алгебраической степени точности

$$\int_0^{\infty} x^{\alpha} e^{-x} f(x) dx \approx \sum_{k=1}^n A_k f(x_k), \quad (2)$$

в основание которого положена система степеней x^i , будет давать медленную сходимость к точному значению интеграла при $n \rightarrow \infty$, и для получения погрешности, не превосходящей заданной границы, придется брать большое число слагаемых в сумме $\sum A_k f(x_k)$. Это объясняется тем, что поведение функций $f(x)$ указанного вида на полуоси $0 \leq x < \infty$ весьма существенно отличается от поведения многочленов. Поэтому для их приближения лучше принять не систему многочленов, а систему рациональных функций.

Авторы остановились на следующей системе степеней дробно-линейной функции:

$$1, \frac{1}{1+x}, \frac{1}{(1+x)^2}, \dots, \frac{1}{(1+x)^n}, \dots \quad (3)$$

Параметры x_k и A_k ($k = 1, 2, \dots, n$) формулы (2) выбирались так, чтобы равенство было точным для первых $2n$ функций (3), что равносильно нахождению x_k и A_k из следующей системы уравнений:

$$\sum_{k=1}^n A_k \frac{1}{(1+x_k)^i} = \int_0^{\infty} x^{\alpha} e^{-x} \frac{dx}{(1+x)^i} \quad (4)$$

$(i = 1, 2, \dots, 2n-1).$

Эта система разрешима, формула (2) может быть построена при всяком n и x_k , и A_k определяются единственным образом.

Параметры квадратурной формулы (2), удовлетворяющие условиям (4), были найдены раньше и приведены в статье [2] для $\alpha = 0$ и $\alpha = -\frac{1}{2}$.

Так как вычисления были связаны с большой потерей точности, узлы x_k и коэффициенты A_k были найдены на 8 значащих цифр и доведены до значения $n = 5$.

В настоящей заметке параметры формулы (2) приведены для значений $\alpha = -0,5(0,5)5$ и вычисления выполнены до $n = 10$.

Узлы x_k и коэффициенты A_k находились следующим образом. Если заменить переменную x , положив $t = \frac{1}{1+x}$, и назвать t_k значение t ,

отвечающее абсциссе x_k : $t_k = \frac{1}{1+x_k}$ ($k = 1, 2, \dots, n$), то (4) заменится системой

$$\sum_{k=1}^n A_k t_k^i = \int_0^1 e^{1-\frac{1}{t}} (1-t)^\alpha t^{-\alpha-2} t^i dt. \quad (5)$$

Отсюда видно, что t_k будут корнями многочленов $\omega_n(t) = \sum_{i=0}^n a_i t^{n-i}$,

ортогональных на отрезке $[0,1]$ с весом $p(t) = e^{1-\frac{1}{t}} (1-t)^\alpha t^{-2-\alpha}$. Коэффициенты этих многочленов определялись из системы уравнений

$$\sum_{i=0}^n a_i c_{n+k-i} = 0 \quad (k = 0, 1, \dots, n-1; a_0 = 1),$$

где $c_k = \int_0^1 e^{1-\frac{1}{t}} (1-t)^\alpha t^{-\alpha-2+k} dt$, а корни их t_k находились по методу

Ньютона. Затем по значениям t_k определялись $x_k = \frac{1}{t_k} - 1$ и из системы

темы $\sum_{k=1}^n A_k t_k^i = c_i$ ($i = 0, 1, \dots, n-1$) находились A_k .

Для контроля полученные значения A_k сравнивались со значениями A_k , вычисленными по формуле

$$A_k = \frac{B}{P_{n-1}(x_k) P'_n(x_k)}, \quad \text{где } B = \frac{c_0}{\sum_{k=1}^n \frac{1}{P_{n-1}(x_k) P'_n(x_k)}}.$$

В качестве дополнительного контроля вычислялись значения сумм $\sum_{k=1}^n A_k x_k^i$ ($i = 1, 2, \dots, 2n-1$), которые сравнивались со значениями c_i .

Проведенный контроль позволяет думать, что ошибка каждого числа, приведенного ниже, не превосходит одной единицы младшего разряда этого числа. Все приведенные величины даны в таблице в виде $0, b_1 b_2 \dots b_n(p)$, где $b_1 \neq 0$, а p — десятичный порядок числа.

В качестве численного примера найдем значение интеграла

$$I = \int_0^{\infty} e^{-x} x \frac{1}{(1+x^2)^2} dx = 0,18927519.$$

Квадратурное правило (2), описанное выше, дает значение $I = 0,18927584$, квадратурная формула, связанная с многочленами Лягерра, значение $I = 0,19234088$. В обоих случаях было взято $n = 8$ и $\alpha = 1$.

Численный пример показывает, что построенное квадратурное правило позволяет вычислить значение интеграла с более высокой точностью.

Значения узлов x_k и коэффициентов A_k квадратурного правила (2)

n	$\alpha = -0,5$		$\alpha = 0$	
	x_k	A_k	x_k	A_k
1	0,3194837571(0)	0,1772453851(1)	0,6768750282(0)	0,1000000000(1)
	0,1219879310(1)	0,5861913351(0)	0,1637987148(1)	0,5042844598(0)
2	9917599457(-1)	1186262516(1)	2234308295(0)	4957155402(0)
	0,2082646281(1)	0,2290090437(0)	0,2527144306(1)	0,2387736937(0)
3	5187666022(0)	6886571084(0)	7114176030(0)	4964938934(0)
	4808387791(-1)	8547876988(0)	1097819962(0)	2647324128(0)
4	0,2896936652(1)	0,9702718271(-1)	0,3358671942(1)	0,1144458009(0)
	1015325168(1)	4026735162(0)	1247933599(1)	3700304583(0)
5	2878330481(0)	6073570851(0)	3952285897(0)	3533294918(0)
	2846830651(-1)	6653960669(0)	6538610676(-1)	1621942490(0)
6	0,3671329328(1)	0,4337685229(-1)	0,4145824803(1)	0,5601706146(-1)
	1533982454(1)	2353421364(0)	1795608829(1)	2512850433(0)
7	6037391572(0)	4296863871(0)	7417426706(0)	3342396729(0)
	1840644320(0)	5195195522(0)	2524382460(0)	2492014864(0)
8	1886637871(-1)	5445289230(0)	4349024896(-1)	1092567360(0)
	0,4412974180(1)	0,2018662122(-1)	0,4897536965(1)	0,2800291458(-1)
9	2059185296(1)	1376901588(0)	2343602484(1)	1636423757(0)
	9546157383(0)	3001795458(0)	1116978848(1)	2796527476(0)
10	4027231856(0)	4050507257(0)	4934440343(0)	2679422831(0)
	1283655625(0)	4484104143(0)	1758580907(0)	1821862010(0)
11	1344302923(-1)	4609363851(0)	3106693749(-1)	7857347803(-1)
	0,5127181807(1)	0,9699914782(-2)	0,5620009793(1)	0,1427491985(-1)
12	2584681111(1)	8079717021(-1)	2887776980(1)	1043134668(0)
	1325308575(1)	2071919039(0)	1508219193(1)	2193514473(0)
13	6550651964(0)	3126614379(0)	7643608942(0)	2532750593(0)
	2892117090(0)	3696564075(0)	3534714806(0)	2113153927(0)
14	9488403542(-1)	3927290179(0)	1298957821(0)	1382315358(0)
	1007569956(-1)	3997179988(0)	2332886799(-1)	5923817822(-1)
15	0,581793817(1)	0,478622161(-2)	0,6317742083(1)	0,7407190596(-2)
	310754902(1)	476141378(-1)	3426388885(1)	6574815151(-1)
16	170828156(1)	141646000(0)	1909009633(1)	1653702141(0)
	929034417(0)	238468725(0)	1054664580(1)	2232367705(0)
17	479828866(0)	302852537(0)	5582919250(0)	2152840849(0)
	218541462(0)	335405915(0)	2665765624(0)	1684315118(0)
18	731246978(-1)	348728009(0)	1000642029(0)	1082478992(0)
	783916328(-2)	352952305(0)	1817701753(-1)	4627417743(-1)

Продолжение

Значения узлов x_k и коэффициентов A_k квадратурного правила (2)

n	$\alpha=-0,5$		$\alpha=0$	
	x_k	A_k	x_k	A_k
9	0,64883105(1)	0,24156190(-2)	0,69941240(1)	0,39058515(-2)
	36263337(1)	28199670(-1)	39587173(1)	41203844(-1)
	20991534(1)	96148275(-1)	23155937(1)	12143666(0)
	12182356(1)	17982682(0)	13585839(1)	18809097(0)
	69068850(0)	24585575(0)	78190672(0)	20445529(0)
	36806380(0)	28548426(0)	42722193(0)	18022385(0)
	17138356(0)	30512566(0)	20874841(0)	13652710(0)
	58154662(-1)	31334170(0)	79560127(-1)	86997678(-1)
	62767279(-2)	31605610(0)	14571143(-1)	37158773(-1)
10	0,714071(1)	0,124333(-2)	0,7651791(1)	0,2089863(-2)
	414030(1)	167915(-1)	4484525(1)	2575896(-1)
	249513(1)	649326(-1)	2725600(1)	8755817(-1)
	151872(1)	134264(0)	1672500(1)	1535320(0)
	916579(0)	197636(0)	1019553(1)	1854959(0)
	535776(0)	241434(0)	6050188(0)	1799064(0)
	292131(0)	266564(0)	3384360(0)	1511605(0)
	138250(0)	279023(0)	1682101(0)	1125665(0)
	473983(-1)	284367(0)	6483732(-1)	7142724(-1)
514146(-2)	286197(0)	1194711(-1)	3050448(-1)	
n	$\alpha=0,5$		$\alpha=1$	
	x_k	A_k	x_k	A_k
1	0,1065024790(1)	0,8862269255(0)	0,1477377593(1)	0,1000000000(1)
2	0,2080263060(1)	0,5366801257(0)	0,2544299952(1)	0,6683898490(0)
	3711561383(0)	3495467998(0)	5418635403(0)	3316101510(0)
3	0,2994089657(1)	0,2873386078(0)	0,3481584410(1)	0,3888619435(0)
	9241785697(0)	4573364762(0)	1157675762(1)	5070682347(0)
	1841312715(0)	1415518415(0)	2710492609(0)	1040698218(0)
4	0,3841273010(1)	0,1506985791(0)	0,4343187801(1)	0,2181595304(0)
	1499932129(1)	4003215466(0)	1771607923(1)	4959891742(0)
	5143156572(0)	2664311017(0)	6459587249(0)	2455065548(0)
	1100375525(0)	6877569806(-1)	1622571070(0)	4034474068(-1)
5	0,4639775779(1)	0,7917770330(-1)	0,5151887753(1)	0,1212456838(0)
	2075856954(1)	3037884094(0)	2374794776(1)	4091567125(0)
	8919960393(0)	3093788504(0)	1055253913(1)	3317195081(0)
	3279616391(0)	1556140541(0)	4111753618(0)	1192963984(0)
	7333259698(-1)	3826790823(-1)	1082102607(0)	1858169710(-1)
6	0,5400327200(1)	0,4196073750(-1)	0,5920244899(1)	0,6741816352(-1)
	2645827579(1)	2152027884(0)	2965806920(1)	3098038911(0)
	1291967764(1)	2975112414(0)	1480174937(1)	3558457518(0)
	5918807601(0)	2116556286(0)	6986173273(0)	1944746459(0)
	2280963316(0)	9646683124(-1)	2853906648(0)	6276262350(-1)
	5245916652(-1)	2342969831(-1)	7745116384(-1)	9694924211(-2)
7	0,6129999449(1)	0,2247884459(-1)	0,6656200612(1)	0,3766396050(-1)
	3207884287(1)	1467689984(0)	3544881881(1)	2233118492(0)
	1703897389(1)	2588007422(0)	1912800356(1)	3367958404(0)
	8819416933(0)	2350487282(0)	1008347695(1)	2461889052(0)
	4228543882(0)	1443339410(0)	4977468771(0)	1147550405(0)
	1682796287(0)	6341683530(-1)	2102151853(0)	3574078323(-1)
	3943712761(-1)	1537883581(-1)	5825429875(-1)	5543620899(-2)

Продолжение

n	$\alpha=0,5$		$\alpha=1$	
	x_k	A_k	x_k	A_k
8	0,6833778629(1)	0,1217885386(-1)	0,7365215465(1)	0,2117955381(-1)
	3761490405(1)	9787240633(-1)	4112694906(1)	1561368576(0)
	2122484626(1)	2117007181(0)	2349058472(1)	2949704824(0)
	1189012532(1)	2336064680(0)	1332559365(1)	2706125843(0)
	6423511156(0)	1754204347(0)	7323993321(0)	1614601921(0)
	3182091664(0)	1010177180(0)	3736902363(0)	7048982109(-1)
	1295276495(0)	4379132669(-1)	1616215043(0)	2175262930(-1)
	3075639367(-1)	1063899977(-1)	4545280122(-1)	3397879437(-2)
9	0,751535490(1)	0,667207387(-2)	0,8051264973(1)	0,1199737074(-1)
	430666909(1)	643736517(-1)	4670009826(1)	1070358950(0)
	254465818(1)	166234379(0)	2786617456(1)	2452480718(0)
	150795026(1)	216352473(0)	1665757429(1)	2717820974(0)
	879148267(0)	190192071(0)	9827919122(0)	1960511536(0)
	490321917(0)	130349098(0)	5576357985(0)	1064467304(0)
	248764257(0)	729100675(-1)	2915966352(0)	4526380566(-1)
	102930843(0)	314753627(-1)	1283313108(0)	1397608427(-1)
246741775(-1)	766774825(-2)	3648008040(-1)	2198791241(-2)	
10	0,8177559(1)	0,3694388(-2)	0,87173668(1)	0,68476347(-2)
	4843674(1)	4198264(-1)	52175679(1)	72419889(-1)
	2968501(1)	1268483(0)	32240524(1)	19655558(0)
	1835491(1)	1908160(0)	20080647(1)	25640730(0)
	1128903(1)	1916173(0)	12449889(1)	21641999(0)
	6785490(0)	1498942(0)	75664457(0)	13835157(0)
	3876316(0)	9812337(-1)	43990801(0)	71854118(-1)
	2002013(0)	5416433(-1)	23433668(0)	30272330(-1)
8385375(-1)	2337598(-1)	10448750(0)	93855121(-2)	
2024405(-1)	5710496(-2)	29942167(-1)	14860690(-2)	
n	$\alpha=1,5$		$\alpha=2$	
	x_k	A_k	x_k	A_k
1	0,1908417920(1)	0,1329340388(1)	0,2353750056(1)	0,2000000000(1)
2	0,3027305057(1)	0,9421956200(0)	0,3526510663(1)	0,1470437429(1)
	7351834137(0)	3871447682(0)	9505263546(0)	5295625706(0)
3	0,3987580759(1)	0,5809881540(0)	0,4510034818(1)	0,9452086079(0)
	1412010489(1)	6520710573(0)	1686870954(1)	9479679852(0)
	3708207454(0)	9628117692(-1)	4838773067(0)	1068234069(0)
4	0,4862796346(1)	0,3431109637(0)	0,5398484961(1)	0,5807339225(0)
	2062904413(1)	6896811786(0)	2373481480(1)	1059697016(1)
	7908962122(0)	2665914515(0)	9497525352(0)	3327210827(0)
	2221506462(0)	2995679445(-1)	2899797736(0)	2684797885(-1)
5	0,5680829510(1)	0,1994691511(0)	0,6225275946(1)	0,3501115090(0)
	2692258533(1)	6060850710(0)	3027888550(1)	9770748161(0)
	1232145710(1)	4040055730(0)	1423176996(1)	5505119338(0)
	5026065233(0)	1083445000(0)	6027809057(0)	1137973441(0)
	1481226568(0)	1143609306(-1)	1931816103(0)	8504396953(-2)
6	0,6456167214(1)	0,1154208289(0)	0,7006976168(1)	0,2094265871(0)
	3303321274(1)	4838404310(0)	3653009777(1)	8135092825(0)
	1682085083(1)	4726084072(0)	1898073384(1)	6898796085(0)
	8142105843(0)	2039644853(0)	9391922797(0)	2407075493(0)
	3480577262(0)	4842040545(-1)	4164323563(0)	4325412384(-1)
	1060004155(0)	5085830336(-2)	1381432087(0)	3222848789(-2)

ЛЕНИНГРАДСКАЯ
ОБЛАСТНАЯ
БИБЛИОТЕКА
ИМ. У. И. ДЕНИСА

Продолжение

n	$\alpha=1,5$		$\alpha=2$	
	x_k	A_k	x_k	A_k
7	0,7197647283(1)	0,6681953331(-1)	0,7753377013(1)	0,1249804477(0)
	3898524706(1)	3649713834(0)	4268461076(1)	6369772154(0)
	2135293002(1)	4792661496(0)	2371646255(1)	7402073095(0)
	1144090176(1)	2876214588(0)	1289648928(1)	3712453890(0)
	5785339356(0)	1042537142(0)	6656037710(0)	1067343566(0)
	2558893290(0)	2387480323(-1)	3055060475(0)	1845748808(-1)
7972486918(-1)	2533345600(-2)	1038499707(0)	1397793773(-2)	
8	0,7911208442(1)	0,3880326015(-1)	0,8470915834(1)	0,7463284627(-1)
	4479747697(1)	2655515685(0)	4862311121(1)	4792501184(0)
	2589003640(1)	4444452183(0)	2842512210(1)	7200354780(0)
	1485756527(1)	3442162334(0)	1649021941(1)	4774511534(0)
	8288269294(0)	1659717217(0)	9320222143(0)	1888126930(0)
	4332739384(0)	5617912304(-1)	4972225301(0)	5043998598(-1)
1964575532(0)	1279755001(-1)	2341607373(0)	8705516977(-2)	
6220952347(-1)	1375713101(-2)	8101192602(-1)	6722079933(-3)	
9	0,860110709(1)	0,226344840(-1)	0,9164135838(1)	0,4467147976(-1)
	504848398(1)	188613733(0)	5441769908(1)	3508980523(0)
	304167347(1)	387983984(0)	3309959201(1)	6551851094(0)
	183539838(1)	370628242(0)	2014232433(1)	5457797416(0)
	109321238(1)	222216402(0)	1210779019(1)	2751661134(0)
	629439264(0)	970542663(-1)	7060134993(0)	9792454838(-1)
337414068(0)	320652830(-1)	3863923133(0)	2556572836(-1)	
155829492(0)	734469749(-2)	1855030962(0)	4458685072(-2)	
499354424(-1)	799296216(-3)	6501910090(-1)	3505416849(-3)	
10	0,92705376(1)	0,13271366(-1)	0,983640851(1)	0,268268701(-1)
	56059495(1)	13176023(0)	600851607(1)	252035180(0)
	34923969(1)	32443880(0)	377362521(1)	568332519(0)
	21905591(1)	37078504(0)	238328252(1)	574595876(0)
	13681607(1)	26575131(0)	149876258(1)	353054193(0)
	83958382(0)	14040296(0)	927650538(0)	155685962(0)
49545678(0)	58696003(-1)	554476592(0)	530156223(-1)	
27072968(0)	19287373(-1)	309499708(0)	138156975(-1)	
12678020(0)	44570502(-2)	150780883(0)	244300358(-2)	
40992777(-1)	49025390(-3)	533726377(-1)	195076468(-3)	
n	$\alpha=2,5$		$\alpha=3$	
	x_k	A_k	x_k	A_k
1	0,2809985603(1)	0,3323350970(1)	0,3274561839(1)	0,6000000000(1)
2	0,4039342351(1)	0,2501158975(1)	0,4563484895(1)	0,4583220545(1)
	1186986627(1)	8221919954(0)	1443360412(1)	1416779455(1)
3	0,5046988566(1)	0,1656765999(1)	0,5596611096(1)	0,3102500905(1)
	1981610646(1)	1528786015(1)	2295321096(1)	2695367703(1)
6106743139(0)	1377989571(0)	7516106440(0)	2021313915(0)	
4	0,5948691885(1)	0,1049678008(1)	0,6511933792(1)	0,2013284066(1)
	2702767928(1)	1777004808(1)	3050010743(1)	3219386406(1)
	1123026655(1)	4684800918(0)	1311077187(1)	7333722984(0)
	3661003178(0)	2818806293(-1)	4509224893(0)	3395722895(-1)
5	0,6783936912(1)	0,6517903113(0)	0,7355575643(1)	0,1280580701(1)
	3381163570(1)	1699217624(1)	3751433743(1)	3164128746(1)
	1628725250(1)	8290976849(0)	1849035843(1)	1366095142(1)
	7122180790(0)	1358278175(0)	8314206658(0)	1817603041(0)
2435760228(0)	7417532552(-2)	2995509405(0)	7435106974(-2)	

Продолжение

n	$\alpha=2,5$		$\alpha=3$	
	x_k	A_k	x_k	A_k
6	0,7571578517(1)	0,4008679156(0)	0,8148919331(1)	0,8061827239(0)
	4029393764(1)	1462827211(1)	4416899935(1)	2796976691(1)
	2128403414(1)	1097247142(1)	2373226688(1)	1887241270(1)
	1074064591(1)	3160309610(0)	1219292723(1)	4572970544(0)
	4908681787(0)	4398366331(-1)	5717343237(0)	5025965799(-1)
	1739713997(0)	2394077426(-2)	2136193099(0)	2042601998(-2)
7	0,8322445399(1)	0,2455259427(0)	0,8903936510(1)	0,5049067949(0)
	4654250081(1)	1181009856(1)	5055378597(1)	2315500324(1)
	2622036473(1)	1232692217(1)	2886546555(1)	2200668704(1)
	1445467232(1)	5251664950(0)	1611945820(1)	8085714228(0)
	7593477850(0)	1218168506(0)	8601580943(0)	1536370457(0)
	3592882634(0)	1623627261(-1)	4174771686(0)	1604591894(-1)
1306707989(0)	9033364011(-3)	1602594356(0)	6697899770(-3)	
8	0,9043509379(1)	0,1502212538(0)	0,9628182530(1)	0,3155296581(0)
	5259977789(1)	9139507399(0)	5672283525(1)	1834787107(1)
	3109696252(1)	1247825519(1)	3390589675(1)	2302485251(1)
	1822735345(1)	7178241580(0)	2007233511(1)	1163500498(1)
	1042369842(1)	2359338662(0)	1160247899(1)	3217667708(0)
	5658079480(0)	5047978150(-1)	6393117434(0)	5583757606(-1)
2748709467(0)	6731233002(-2)	3187430486(0)	5841170802(-2)	
1018749901(0)	3844192497(-3)	1248364552(0)	2519682144(-3)	
9	0,9739615841(1)	0,9198169576(-1)	0,1032682865(2)	0,1971178654(0)
	5849489904(1)	6868179266(0)	6271220523(1)	1409858154(1)
	3591539481(1)	1176109880(1)	3886413240(1)	2235651542(1)
	2203581220(1)	8637701235(0)	2403725086(1)	1462880443(1)
	1335853402(1)	3701721948(0)	1468786272(1)	5383655698(0)
	7876454462(0)	1085462018(0)	8746271734(0)	1313879311(0)
4387161580(0)	2269989842(-1)	4945800884(0)	2225840210(-1)	
2174410908(0)	3073233035(-2)	2517438646(0)	2374462744(-2)	
8173241343(-1)	1798161781(-3)	1000939204(0)	1056297760(-3)	
10	0,104143199(2)	0,564287417(-1)	0,110036252(2)	0,123249905(0)
	642491639(1)	505372190(0)	685476114(1)	105939341(1)
	406776725(1)	105291414(1)	437479666(1)	205640851(1)
	258650631(1)	950561454(0)	280046279(1)	167275025(1)
	163712748(1)	505255607(0)	178357485(1)	775869404(0)
	102113119(1)	187631431(0)	112031415(1)	244658031(0)
617172855(0)	525693661(-1)	683758160(0)	568891691(-1)	
350773206(0)	110083951(-1)	394684429(0)	967564322(-2)	
176547019(0)	151889537(-2)	204144722(0)	105736802(-2)	
670760786(-1)	907482977(-4)	821107265(-1)	483108444(-4)	
n	$\alpha=3,5$		$\alpha=4$	
	x_k	A_k	x_k	A_k
1	0,3745557983(1)	0,1163172840(2)	0,4221537475(1)	0,2400000000(2)
	0,5096901202(1)	0,8966957233(1)	0,5637828497(1)	0,1859884715(2)
2	1718219641(1)	2664771163(1)	2010005212(1)	5401152855(1)
	0,6157216385(1)	0,6164857710(1)	0,6727267734(1)	0,1292592812(2)
3	2626902189(1)	5135443427(1)	2975127492(1)	1047500566(2)
	9069735541(0)	3314272595(0)	1076902988(1)	5990662210(0)
4	0,7086819507(1)	0,4075738838(1)	0,7672055399(1)	0,8669539931(1)
	3414321137(1)	6248612540(1)	3794716225(1)	1290176417(2)
	1514111125(1)	1261165636(1)	1732178990(1)	2358527501(1)
	5448806229(0)	4621138362(-1)	6484075898(0)	7016840113(-1)

Продолжение

n	$\alpha=3,5$		$\alpha=4$	
	x_k	A_k	x_k	A_k
5	0,7939019567(1)	0,2643837492(1)	0,8533165650(1)	0,5714416358(1)
	4137951573(1)	6268486590(1)	4539899974(1)	1313927988(2)
	2084220871(1)	2441248686(1)	2334261870(1)	4695816928(1)
	9608614321(0)	2697171367(0)	1100969880(1)	4397663619(0)
	3613932009(0)	8438491472(-2)	4294201469(0)	1072047451(-1)
6	0,8737990677(1)	0,1697405492(1)	0,9337836577(1)	0,3729899642(1)
	4819882202(1)	5657858991(1)	5237641606(1)	1205436181(2)
	2632584641(1)	3487130119(1)	2906413286(1)	6881299233(1)
	1375296373(1)	7234780789(0)	1542441211(1)	1242736231(1)
	6594104262(0)	6388349713(-1)	7542805941(0)	8957208440(-1)
2572554692(0)	1972218184(-2)	3050768268(0)	2131000784(-2)	
7	0,9496969984(1)	0,1083639522(1)	0,1010070547(2)	0,2420788791(1)
	5471277379(1)	4780898038(1)	5901335818(1)	1035726123(2)
	3165169002(1)	4189721474(1)	3457810830(1)	8466314927(1)
	1789436708(1)	1346701353(1)	1978237511(1)	2413097078(1)
	9684235798(0)	2125658933(0)	1084524984(1)	3206080224(0)
4803305964(0)	1764077077(-1)	5481208731(0)	2140413189(-1)	
1927132876(0)	5613453836(-3)	2281514506(0)	5258215347(-3)	
8	0,1022415633(2)	0,6898350772(0)	0,1083068335(2)	0,1566180103(1)
	6098719630(1)	3864220598(1)	6538744202(1)	8511389843(1)
	3685151557(1)	4504426012(1)	3993270792(1)	9306628413(1)
	2202805779(1)	2023336315(1)	2409690272(1)	3758342164(1)
	1286024131(1)	4762975531(0)	1420051618(1)	7614975309(0)
7180240317(0)	6779335951(-1)	8022417550(0)	8981794591(-1)	
3659463383(0)	5633032619(-2)	4166637626(0)	5990006776(-2)	
1499527177(0)	1864488442(-3)	1772962247(0)	1539926713(-3)	
9	0,1092507766(2)	0,4386724711(0)	0,1153369152(2)	0,1011730399(1)
	6706502167(1)	3026352097(1)	7154847974(1)	6775107421(1)
	4194516773(1)	4484347548(1)	4515727946(1)	9460488445(1)
	2614899903(1)	2640756275(1)	2837294571(1)	5062443756(1)
	1609914055(1)	8427830687(0)	1759556096(1)	1414475180(1)
9672545496(0)	1727712373(0)	1065825383(1)	2457025529(0)	
5541883201(0)	2393951964(-1)	6177544171(0)	2808264958(-1)	
2885229969(0)	2036201887(-2)	3279009148(0)	1922914392(-2)	
1201361617(0)	6997787912(-4)	1419036689(0)	5168141216(-4)	
10	0,1160369557(2)	0,2789865537(0)	0,122139232(2)	0,653299527(0)
	7297631159(1)	2315855270(1)	775308485(1)	526706293(1)
	4694634014(1)	4221357437(1)	502715095(1)	908254658(1)
	3025343273(1)	3120875145(1)	326129673(1)	615413290(1)
	1938407584(1)	1273868970(1)	210190902(1)	222888103(1)
1225488234(1)	3437677648(0)	133694089(1)	518634276(0)	
7544521498(0)	6685489144(-1)	829481095(0)	849552411(-1)	
4413758276(0)	9317408092(-2)	490998165(0)	977561062(-2)	
2336485861(0)	8159775026(-3)	265141519(0)	692547017(-3)	
9849495618(-1)	2897970400(-4)	116256292(0)	193598129(-4)	
n	$\alpha=4,5$		$\alpha=5$	
	x_k	A_k	x_k	A_k
1	0,4701423131(1)	0,5234277778(2)	0,5184402609(1)	0,1200000000(3)
2	0,6184762743(1)	0,4066317439(2)	0,6736436675(1)	0,9326834151(2)
	2317116614(1)	1167960340(2)	2637985347(1)	2673165849(2)
3	0,7305375014(1)	0,2846406356(2)	0,7890288379(1)	0,6557093142(2)
	3338701765(1)	2269883132(2)	3716309036(1)	5192201665(2)
	1261373243(1)	1179882903(1)	1460190380(1)	2507051932(1)

Продолжение

n	$\alpha=4,5$		$\alpha=5$	
	x_k	A_k	x_k	A_k
4	0,8266445531(1)	0,1930161851(2)	0,8868888732(1)	0,4482796726(2)
	4190155311(1)	2816846655(2)	4599570342(1)	6469906142(2)
	1965177209(1)	4755030632(1)	2212857300(1)	1025701259(2)
	7619120041(0)	1176620889(0)	8857578334(0)	2159587255(0)
5	0,9136981978(1)	0,1288858805(2)	0,9749506814(1)	0,3024786412(2)
	4956416840(1)	2899954728(2)	5386615867(1)	6711136399(2)
	2599016519(1)	9657947905(1)	2878228836(1)	2111382790(2)
	1252119431(1)	7815893176(0)	1414616080(1)	1503520443(1)
5039696642(0)	1510523153(-1)	5853906497(0)	2324355168(-1)	
6	0,9947555206(1)	0,8530263208(1)	0,1056629912(2)	0,2025387678(2)
	5669443921(1)	2694314220(2)	6114534752(1)	6295622505(2)
	3194550318(1)	1442592061(2)	3496744234(1)	3197602744(2)
	1721031152(1)	2303335191(1)	1911302033(1)	4580517722(1)
8567266442(0)	1375624832(0)	9671208123(0)	2299816944(0)	
3573042138(0)	2554096934(-2)	4141783723(0)	3371313181(-2)	
7	0,1071434505(2)	0,5615457336(1)	0,1133713405(2)	0,1349680569(2)
	6344915104(1)	2346450388(2)	6801359638(1)	5542584945(2)
	3764300097(1)	1808079743(2)	4084393665(1)	4064941738(2)
	2178586718(1)	4628745590(1)	2390660224(1)	9461216034(1)
1208829394(1)	5242536014(0)	1341684397(1)	9247876955(0)	
6211322642(0)	2847424355(-1)	6996580289(0)	4130070078(-1)	
2667121456(0)	5456995321(-3)	3085507495(0)	6230470035(-3)	
8	0,1144705008(2)	0,3684835751(1)	0,1207257809(2)	0,8966976713(1)
	6991792299(1)	1955120023(2)	7457284847(1)	4671571553(2)
	4314771835(1)	2023497615(2)	4649421242(1)	4614665379(2)
	2628071044(1)	7426307378(1)	2858076310(1)	1555051088(2)
1562664161(1)	1309136121(1)	1714171604(1)	2410235384(1)	
8922664013(0)	1292025553(0)	9884012635(0)	2009049194(0)	
4710910028(0)	6978892439(-2)	5294354169(0)	8861555737(-2)	
2069537336(0)	1407082294(-3)	2390250905(0)	1412371224(-3)	
9	0,1215202652(2)	0,2413761759(1)	0,1277946786(2)	0,5946912309(1)
	7615751947(1)	1577987141(2)	8088696051(1)	3815098886(2)
	4849871232(1)	2092810170(2)	5196723220(1)	4840886167(2)
	3071049410(1)	1027102577(2)	3316255399(1)	2198318649(2)
1918005871(1)	2535839462(1)	2085537276(1)	4839698984(1)	
1170637151(1)	3763892069(0)	1281984366(1)	6188549718(0)	
6855006050(0)	3575917627(-1)	7576568047(0)	4922364716(-1)	
3700105270(0)	1987130737(-2)	4149948333(0)	2235335702(-2)	
1654516493(0)	4216997990(-4)	1908450978(0)	3774472905(-4)	
10	0,1283372300(2)	0,1579998679(1)	0,134625346(2)	0,394052919(1)
	8220664531(1)	1243651754(2)	869990236(1)	304257925(2)
	5372174227(1)	2042874032(2)	572949059(1)	479173961(2)
	3508428686(1)	1278884953(2)	376680129(1)	279298776(2)
2274339708(1)	4143198792(1)	245593456(1)	815846737(1)	
1454955818(1)	8373929597(0)	157981064(1)	144265527(1)	
9090770046(0)	1163011167(0)	993476609(0)	170954700(0)	
5437103819(0)	1112224401(-1)	599679384(0)	136680959(-1)	
2987145207(0)	6423369423(-3)	334466520(0)	647640484(-3)	
1354303469(0)	1427263028(-4)	156060121(0)	115276658(-4)	

ЛИТЕРАТУРА

1. Dingle R. B. and Doreen Arndt and Roy S. K. Appl. sci., sec. B, 6, № 3, 1956.
2. Крылов В. И., Королев Н. И., Скобля Н. С. ДАН БССР, т. III, № 1, 1959.

Поступило в редакцию 24. III 1965

А. Е. ЗАЛЕССКИЙ

**СВЕДЕНИЕ НЕКОТОРЫХ КОМБИНАТОРНЫХ ЗАДАЧ
 К ЦЕЛОЧИСЛЕННОМУ ЛИНЕЙНОМУ ПРОГРАММИРОВАНИЮ**

В § 1 рассматривается задача о минимизации следа матрицы $ATBT^{-1}$, где A и B — фиксированные квадратные матрицы, а T пробегает совокупность S_n матриц перестановок, т. е. матриц, в каждой строке и каждом столбце которых единственный ненулевой элемент равен единице. Эта задача рассматривалась в работе [1], где она решается непосредственно для матрицы B специального вида. Если матрица B является матрицей перестановки, состоящей из одного цикла, то получается задача о коммивояжере [2]. Последняя сведена к целочисленному линейному программированию в [3]. Некоторое обобщение задачи о коммивояжере, возникающее в одной задаче о составлении производственного расписания [4], сводится в § 3 к целочисленному линейному программированию аналогично работе [3]. В § 2 рассмотрен случай, когда $B = (b_{ij})$ имеет вид $b_{ij} = 1$, если $i > j$, $b_{ij} = 0$, если $i \leq j$. Автор предполагает, что всякое решение этой задачи при выписанных в § 2 ограничениях всегда будет целочисленным.

§ 1. Рассмотрим линейное пространство L_n всех квадратных матриц L порядка n ; размерность L_n равна n^2 . Обозначим через U_T линейный оператор в пространстве L_n , определенный равенством $U_T L = TLT^{-1}$, где $L \in L_n$. Соответствие $T \rightarrow U_T$ является линейным представлением группы S_n в пространстве L_n . В базисе e_{ij} матричные элементы оператора U_T имеют вид $u_{\alpha\beta, ij}$, $u_{\alpha\beta, ij} e_{ij} = e_{\alpha\beta}$. Если t_{ij} — элементы матрицы T , t'_{ij} — элементы матрицы T^{-1} , то $t_{ij} = t'_{ji}$, и

$$e_{\alpha\beta} = U_T e_{ij} = \sum_{\mu, \nu} t_{\mu\alpha} e_{ij} t'_{\nu\beta} = t_{\alpha i} t'_{\beta j} e_{ij} = t_{\alpha i} t_{\beta j} e_{ij} = u_{\alpha\beta, ij} e_{ij},$$

$$u_{\alpha\beta, ij} = t_{\alpha i} t_{\beta j}, \quad \alpha, \beta, i, j = 1, 2, \dots, n. \quad (1)$$

Поскольку матрица $T = (t_{ij})$ состоит из нулей и единиц, то этим же свойством обладает и матрица $U_T = (u_{\alpha\beta, ij})$. Элементы матриц U_T удовлетворяют следующим соотношениям:

а) $u_{\alpha\beta, ij} = u_{\beta\alpha, ji}$;

б) $\sum_{\alpha=1}^n u_{\alpha\alpha, \beta\beta} = 1, \beta = 1, 2, \dots, n, \sum_{\beta=1}^n u_{\alpha\alpha, \beta\beta} = 1, \alpha = 1, 2, \dots, n$;

в) $\sum_{k=1}^n u_{k\alpha, l\beta} = u_{\alpha\alpha, \beta\beta}, \alpha, \beta, l = 1, 2, \dots, n, \sum_{l=1}^n u_{k\alpha, l\beta} = u_{\alpha\alpha, \beta\beta}$,

$\alpha, \beta, k = 1, 2, \dots, n;$ (2)

г) $u_{\alpha\beta, ij} \geq 0$.

В самом деле:

а) $u_{\alpha\beta, ij} = t_{\alpha i} t_{\beta j} = t_{\beta j} t_{\alpha i} = u_{\beta\alpha, ji}$,

б) $\sum_{\alpha} u_{\alpha\alpha, \beta\beta} = \sum_{\alpha} t_{\alpha\beta}^2 = \sum_{\alpha} t_{\alpha\beta} = 1$,

в) $\sum_k u_{k\alpha, l\beta} = \sum_k t_{kl} t_{\alpha\beta} = t_{\alpha\beta} \sum_k t_{kl} = t_{\alpha\beta} = t_{\alpha\beta}^2 = u_{\alpha\alpha, \beta\beta}$.

Из (2) следует, что $u_{\alpha\beta, ii} = 0$, если $\alpha \neq \beta$. Действительно, $\sum_{\alpha} \sum_{i} u_{\alpha\beta, ii} = \sum_i \left(\sum_{\alpha} u_{\alpha\beta, ii} \right) = \sum_i u_{\beta\beta, ii} = 1$ и $\sum_{\alpha, i} u_{\alpha\beta, ii} - \sum_i u_{\beta\beta, ii} = \sum_{\alpha \neq \beta} \sum_i u_{\alpha\beta, ii} = 0$ и ввиду г) $u_{\alpha\beta, ii} = 0$ при $\alpha \neq \beta$.

Заметим, что операторы U , удовлетворяющие условиям (2), переводят единичную матрицу

$$E = (e_{ij}), \begin{cases} e_{ij} = 1, & \text{если } i = j, \\ e_{ij} = 0, & \text{если } i \neq j, \end{cases}$$

снова в единичную, а кососимметрическую $A = (a_{ij})$, $a_{ij} = -a_{ji}$ в кососимметрическую:

$$\{UE\}_{\alpha\beta} = \sum_{i,j} u_{\alpha\beta,ij} e_{ij} = \sum_i u_{\alpha\beta,ii} e_{ii} = \begin{cases} 1, & \text{если } \alpha = \beta, \\ 0, & \text{если } \alpha \neq \beta, \end{cases}$$

$$\{UA\}_{\alpha\beta} = \sum_{i,j} u_{\alpha\beta,ij} a_{ij} = - \sum_{i,j} u_{\alpha\beta,ij} a_{ji} = - \sum_{i,j} u_{\beta\alpha,ji} a_{ji} = - \{UA\}_{\beta\alpha}.$$

Теорема 1. *Всякая целочисленная матрица $U = (u_{\alpha\beta, ij})$, удовлетворяющая условиям (2), представима в виде $u_{\alpha\beta, ij} = t_{\alpha i} t_{\beta j}$, где $(t_{ij}) = T$ — матрица перестановок, определяемая из равенств $t_{\alpha i} = u_{\alpha\alpha, ii}$. Оптимизация функции $\text{Tr}(ATBT^{-1})$, где T пробегает матрицы перестановок, сводится к решению задачи целочисленного линейного программирования с целевой функцией $\sum_{\alpha, \beta, i, j} u_{\alpha\beta, ij} a_{\beta\alpha} b_{ij}$ при ограничениях (2).*

Доказательство. Пусть $U = (u_{\alpha\beta, ij})$ — целочисленная матрица, удовлетворяющая условию (2). Тогда $u_{\alpha\beta, ij}$ равны либо нулю, либо единице. Положим $t_{\alpha\beta} = u_{\alpha\alpha, \beta\beta}$. Тогда элементы $u_{\alpha\alpha, \beta\beta}$ и $t_{\alpha\beta}$ полностью определяются условием (2б). Обозначим через M множество пар $\alpha\beta$, для которых $u_{\alpha\alpha, \beta\beta} = 1$. Если $u_{\alpha\beta, ij} = 1$, то $\alpha i \in M$, $\beta j \in M$. В самом деле, $\sum_i u_{\alpha\beta, ij} = u_{\beta\beta, jj} > 0$ и $u_{\beta\beta, jj} = 1$, $\beta j \in M$. Аналогично $\alpha i \in M$.

Если $u_{\alpha\beta, ij} = 0$ и $\alpha i \in M$, то $\beta j \notin M$. Предположим, что $\beta j \in M$. Тогда $\sum_i u_{\alpha\beta, ij} = u_{\beta\beta, jj} = 1$ и, следовательно, $u_{\alpha\beta, i\beta} = 1$ для некоторого

$1 \leq i_0 \leq n$. Тогда $u_{\alpha\alpha, i_0 i_0} = \sum_j u_{\alpha\beta, i_0 j} = 1$ и $u_{\alpha\alpha, ii} = 1$, ибо $\alpha i \in M$. Это противоречит второму из условий (2б), если $i \neq i_0$. Аналогично, если $u_{\alpha\beta, ij} =$

$= 0$ и $\beta j \in M$, то $\alpha i \in M$. Таким образом, во всех случаях $u_{\alpha\beta, ij} = u_{\alpha\alpha, ii} \times \times u_{\beta\beta, jj} = t_{\alpha} t_{\beta} j$. Первая часть теоремы доказана. Второе утверждение является очевидным следствием первого.

Замечание 1. При $n \geq 4$ существуют матрицы U , удовлетворяющие условиям (2), $U = \sum \lambda_i U_{\tau_i}$, $\lambda_i \geq 0$, причем для всякого такого представления $\sum \lambda_i > 1$.

§ 2. Далее рассматривается частный случай задачи, рассмотренной в § 1, а именно, матрица B имеет вид

$$b_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } i > j, \\ 0, & \text{если } i \leq j. \end{cases}$$

Соотношения (2) достаточно громоздки, поэтому естественно в этом специальном случае получить более простые формулы.

Элементы матрицы B удовлетворяют, очевидно, следующим условиям:

- а) $b_{ij} + b_{ji} = 1$, $i \neq j$;
 б) $0 \leq b_{ij} + b_{ki} - b_{kj} \leq 1$, $k > i > j$;
 в) $b_{ii} = 0$, $b_{ij} \geq 0$.

Справедлива следующая

Лемма. Если матрица $B = \{b_{ij}\}$ (не обязательно целочисленная) удовлетворяет условиям (3), то матрица TBT^{-1} , где T — матрица перестановок, удовлетворяет условиям (3).

Доказательство. Проверки требует лишь условие (3б). Так как всякая перестановка представима в виде произведения транспозиций соседних элементов, то достаточно доказать лемму для случая, когда T переставляет l -й базисный элемент с $l+1$ -м. Рассмотрим лишь случаи а) $k = l+1$, $i = l$; б) $i = l+1$, $j = l$, так как в других случаях справедливость леммы очевидна. Обозначая элементы матрицы TBT^{-1} через b'_{ij} , получим

а) $b'_{ij} + b'_{ki} - b'_{kj} = b_{kj} + b_{ik} - b_{ij} = 1 + b_{kj} - b_{ki} - b_{ij} = 1 - (b_{ij} + b_{ki} - b_{kj})$, откуда следует, что $0 \leq b'_{ij} + b'_{ki} - b'_{kj} \leq 1$, что и требовалось;

б) $b'_{ij} + b'_{ki} - b'_{kj} = b_{ji} + b_{kl} - b_{ki} = 1 - b_{ij} + b_{kl} - b_{ki} = 1 - (b_{ij} + b_{ki} - b_{kj})$, и в этом случае соотношение (3б) сохраняется.

Лемма доказана.

Теорема 2. Всякая целочисленная матрица, удовлетворяющая условиям (3), имеет вид TBT^{-1} , где T — матрица перестановок,

$$B = (b_{ij}), \quad b_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } i > j, \\ 0, & \text{если } i \leq j. \end{cases}$$

Для любой матрицы A задача оптимизации суммы элементов, лежащих выше диагонали в матрице $T^{-1}AT$ (T — матрица перестановок) сводится к решению задачи целочисленного линейного программирования при ограничениях (3) и целевой функции

$$\text{Tr}(ATBT^{-1}) = \sum_i \sum_j a_{ij} b_{ji}. \quad (4)$$

Доказательство. 1) Заметим сначала, что $0 \leq b_{ij} \leq 1$. Так как подматрица B_0 , составленная из первых $n-1$ строк и первых $n-1$ столбцов матрицы B , удовлетворяет условию (3), то мы можем воспользоваться индукцией. При $n=2$ первое утверждение теоремы очевидно. По предположению индукции оно справедливо для подматрицы b_0 . Если $b_{n, n-1} = 1$, то из соотношений (3) вытекает, что $b_{ni} = 1$ для всех $i \leq n-1$. Если $b_{n, n-1} = 0$, то TBT^{-1} , где T — транспозиция

символов $(n-1, n)$, B — матрица, у которой $b_{ni} = 1$ при $i \leq n-1$. Применяя предположение индукции к подматрице вида B_0 матрицы TBT^{-1} и замечая, что подстановки T , оставляющие фиксированным символ n , при преобразовании TBT^{-1} лишь переставляют между собой элементы b_{ni} , $i \leq n-1$, заканчиваем доказательство первого утверждения теоремы.

2) Целевая функция (4) есть след матрицы $T^{-1}ATB$ или матрицы $ATBT^{-1}$. Чтобы определить матрицу TBT^{-1} , достаточно решить задачу целочисленного линейного программирования с целевой функцией (4) и системой ограничения (3). Восстановление матрицы T по матрице TBT^{-1} не представляет труда.

Замечание. При $n \leq 4$ матрица системы ограничений является унимодулярной, и потому всякое решение задачи (4) с ограничениями (3) обязано быть целочисленным.

При $n \geq 5$ матрица системы ограничений (3) не унимодулярна. Тем не менее представляется весьма вероятным, что всякое решение будет целочисленным и при $n \geq 5$.

§ 3. Здесь мы сводим к целочисленному линейному программированию следующее обобщение задачи „о бродячем торговце“. Требуется

найти минимум линейной формы $\sum_{i,j=1}^n x_{ij}c_{ij}$ при условиях

$$\sum_{i=1}^n x_{ij} = r_j, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad r_j - \text{целое число,}$$

а)

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = r_i, \quad i = 1, 2, \dots, n;$$

б) для любого подмножества I множества целых чисел $1, 2, \dots, n$ существует $x_{ij} \neq 0$, $i \in I, j \in \bar{I}$;

в) x_{ij} — целые числа, $x_{ij} \geq 0$.

Формулировка нашего утверждения мало отличается от формулировки, данной в работе [3] для задачи „о бродячем торговце“.

Теорема 3. Минимизация линейной формы $\sum x_{ij}c_{ij}$ при ограничениях а), б), в) сводится к решению задачи целочисленного по x_{ij} линейного программирования при ограничениях а),

г) $x_{ij} \geq y_{ij} \geq 0$,

$$\text{д) } \sum_{j=1}^n (y_{ij} - y_{ji}) = k, \quad i = 2, 3, \dots, n, \quad 0 < k \leq \frac{1}{n}.$$

Доказательство. Для доказательства необходимости покажем, что для всякой матрицы (x_{ij}) , удовлетворяющей условиям а), б), в), существует матрица (y_{ij}) , удовлетворяющая условиям г) и д). Сопоставим с матрицей (x_{ij}) ориентированный граф (с петлями) с вершинами $1, 2, \dots, n$ и числом дуг из i в j , равным x_{ij} . Этот граф удовлетворяет условию теоремы 2 главы 17 книги [5], и потому существует обход дуг графа, содержащий все дуги по одному разу, с началом и концом в вершине 1. Занумеруем дуги в порядке обхода числами $1, 2, \dots, s$ ($\sum r_i = s$).

Пусть i -я дуга входит в v -ю точку. Положим $y_1 = 1$; $y_{i+1} = y_i$, если есть дуга, входящая в v -ю точку с номером, большим i ($1 < i < s$);

$y_{i+1} = y_i - k$ в противном случае ($i < s$); $y_{ij} = \sum_l y_l$, где суммирование

ведется по номерам l дуг, выходящих из i -й точки и входящих в j -ю.

Теперь очевидно, что условия г) и д) выполняются.

Достаточность. Пусть условие б) не выполняется. Тогда числа $1, 2, \dots, n$ разбиваются на 2 непересекающихся подмножества M и L так, что $x_{ij} = 0$, если $i \in M, j \in L$. Тогда из а) следует, что $0 =$

$$= \sum_{i \in M} \sum_{j=1}^n x_{ij} - \sum_{j \in M} \sum_{i=1}^n x_{ij} = - \sum_{\substack{i \in L \\ j \in M}} x_{ij}, \text{ т. е. } x_{ij} = 0 \text{ при } i \in L, j \in M. \text{ Пусть}$$

теперь, например, множество M не содержит 1. Суммируя соотноше-

ния д) по $i \in M$, получаем $km = \sum_{i \in M} \sum_{j=1}^n (y_{ij} - y_{ji}) = 0$ (m — число элементов множества M), ибо $y_{ij} \leq x_{ij}, x_{ij} = 0$ для $i \in M, j \in L$, или $i \in L, j \in M$. Это противоречие доказывает теорему.

ЛИТЕРАТУРА

1. Крушевский А. В. Математическое моделирование и электрические цепи, в. II, Киев, 1964, стр. 364—370.
2. Крушевский А. В. «Материалы научных семинаров по теоретическим и прикладным вопросам кибернетики». Семинар «Экономическая кибернетика и исследование операций». Киев, 1964.
3. Мудров В. И. Журнал вычислительной математики и математической физики, 3, № 6, 1963.
4. Танаев В. С. Вестн АН БССР, сер. физ.-техн. наук, № 4, 1964.
5. Берж Ж. Теория графов. М., 1962.

Поступило в редакцию 25.III 1965

В. М. МАДОРСКИЙ

ОБ ОДНОМ ВАРИАНТЕ МЕТОДА УСРЕДНЕННЫХ ПОПРАВОК ДЛЯ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Предложенный Ю. Д. Соколовым [5, 6] метод приближенного решения нелинейных интегральных уравнений и систем таких уравнений в применении ко многим задачам дает лучшие приближения по сравнению с обычными итерационными методами. Сходимость и установление оценок погрешности этого метода рассматривались в работах [3—14].

При неплохой сходимости к решению метод этот в применении к нелинейным задачам обладает тем неудобством, что на каждом шаге вычислительного процесса для определения функциональных поправок необходимо решать либо нелинейное уравнение [5], либо систему нелинейных уравнений [6], иногда с высокой точностью.

Предлагаемый ниже вариант метода усреднения не требует решения нелинейных уравнений или систем нелинейных уравнений при нахождении поправок. Кроме того, как показывают примеры, в некоторых случаях он обладает более быстрой сходимостью.

1. ВАРИАНТ МЕТОДА УСРЕДНЕННЫХ ПОПРАВОК И ЕГО СХОДИМОСТЬ

Рассмотрим Банахово пространство X , точки которого f_1, f_2, \dots являются функциями, определенными на некотором множестве. Пусть T — оператор, переводящий это пространство в себя.

Рассмотрим операторное уравнение

$$f = \varphi + Tf. \quad (1)$$

Для решения этого уравнения применим метод усреднения, для чего предположим также, что задан еще некоторый линейный оператор усреднения $\alpha = Sf$ из X в X .

Первое приближение определяем по формулам:

$$f_1 = \varphi + T\alpha_1, \quad \alpha_1 = S\varphi.$$

Последовательные приближения при $n = 2, 3, \dots$ определим следующим образом:

$$\begin{aligned} f_2 &= \varphi + T(f_1 + \alpha_2), \\ \alpha_2 &= S(\tilde{f}_2 - f_1), \quad \text{где } \tilde{f}_2 = \varphi + Tf_1; \\ \alpha_2 &= S(\varphi + Tf_1) - Sf_1. \end{aligned}$$

Продолжая процесс, получим:

$$f_n = \varphi + T(f_{n-1} + \alpha_n), \quad (2)$$

$$\alpha_n = S(\tilde{f}_n - f_{n-1}), \text{ где } \tilde{f}_n = \varphi + T f_{n-1}, \quad (3)$$

$$\alpha_n = S(\varphi + T f_{n-1}) - S f_{n-1}. \quad (4)$$

Этот процесс сходится, если оператор T удовлетворяет условию Липшица

$$\|T f_2 - T f_1\| \leq L \|f_2 - f_1\| \quad (5)$$

с константой $L < \sqrt{2} - 1$, а для оператора S выполняется неравенство

$$\|S f\| \leq \|f\|. \quad (6)$$

Для доказательства того, что последовательность $\{f_n\}$ сходится по норме к решению операторного уравнения (1), установим некоторые оценки исходя из (4), (5), (6):

$$\begin{aligned} \|\alpha_n - \alpha_{n-1}\| &= \|S[\varphi + T f_{n-1}] - S f_{n-1} - S[\varphi + T f_{n-2}] + S f_{n-2}\| \leq \\ &\leq \|S[T f_{n-1}] - S[T f_{n-2}]\| + \|S f_{n-1} - S f_{n-2}\| \leq \\ &\leq \|T f_{n-1} - T f_{n-2}\| + \|f_{n-1} - f_{n-2}\| \leq L \|f_{n-1} - f_{n-2}\| + \\ &+ \|f_{n-1} - f_{n-2}\| = (L + 1) \|f_{n-1} - f_{n-2}\|. \end{aligned} \quad (7)$$

Используя (2), (5), (7), получим оценку

$$\begin{aligned} \|f_n - f_{n-1}\| &= \|T(f_{n-1} + \alpha_n) - T(f_{n-2} + \alpha_{n-1})\| \leq \\ &\leq L \|f_{n-1} - f_{n-2} + \alpha_n - \alpha_{n-1}\| \leq L (\|f_{n-1} - f_{n-2}\| + \|\alpha_n - \alpha_{n-1}\|) \leq \\ &\leq L [\|f_{n-1} - f_{n-2}\| + (L + 1) \|f_{n-1} - f_{n-2}\|] = L(L + 2) \|f_{n-1} - f_{n-2}\|. \end{aligned} \quad (8)$$

Пусть $L(L + 2) = \varepsilon$ и $\|f_2 - f_1\| = \Delta f_1$. Выполняя индукцию, перепишем формулу (8) в другом виде

$$\|f_n - f_{n-1}\| \leq \varepsilon \|f_{n-1} - f_{n-2}\| \leq \varepsilon^{n-2} \cdot \Delta f_1.$$

Так как при $L < \sqrt{2} - 1$ $\varepsilon < 1$, то при $n \rightarrow \infty$

$$\|f_n - f_{n-1}\| \rightarrow 0.$$

В силу полноты пространства X существует единственный элемент $f \in X$, к которому сходится последовательность $\{f_n\}$. Нетрудно показать, что он является решением уравнения (1). Убедимся вначале, что $\|f_n - \tilde{f}_n\| < \varepsilon_1$ ($\varepsilon_1 > 0$) при достаточно большом номере n .

Пользуясь формулами (2), (3), (6), (8), получаем оценку

$$\|f_n - \tilde{f}_n\| = \|T(f_{n-1} + \alpha_n) + \varphi - \varphi - T f_{n-1}\| \leq L \|\alpha_n\|, \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \|\alpha_n\| &= \|S(\tilde{f}_n - f_{n-1})\| \leq \|\tilde{f}_n - f_{n-1}\| = \|T f_{n-1} - T(f_{n-2} + \alpha_{n-1})\| \leq \\ &\leq L (\|f_{n-1} - f_{n-2}\| + \|\alpha_{n-1}\|) \leq L (\varepsilon^{n-3} \Delta f_1 + \|\alpha_{n-1}\|). \end{aligned} \quad (10)$$

Выполняя индукцию, перепишем формулу (10) следующим образом:

$$\begin{aligned} \|\alpha_n\| &\leq L \varepsilon^{n-3} \Delta f_1 + L^2 \varepsilon^{n-4} \Delta f_1 + \dots + L^{n-2} \|\alpha_2\| < \\ &< (n - 3) \varepsilon^{n-2} \Delta f_1 + L^{n-2} \|\alpha_2\|. \end{aligned}$$

Так как $L < \varepsilon$, окончательно при $\varepsilon < 1$ и при достаточно большом номере n будет

$$\|\alpha_n\| < \varepsilon_1 \quad (\varepsilon_1 > 0),$$

откуда $\|\tilde{f}_n - \tilde{f}_n\| \rightarrow 0$ при неограниченном возрастании n .

Теперь покажем, что f — решение уравнения (1):

$$\begin{aligned} \|Tf + \varphi - f\| &\leq \|Tf + \varphi - \tilde{f}_n\| + \|\tilde{f}_n - f_n\| + \|f_n - f\| = \\ &= \|Tf - T\tilde{f}_{n-1}\| + \|\tilde{f}_n - \tilde{f}_{n-1}\| + \|f_n - f\| \leq L\|f - \tilde{f}_{n-1}\| + \\ &\quad + \|\tilde{f}_n - \tilde{f}_{n-1}\| + \|f_n - f\|. \end{aligned}$$

Считая $\|f - \tilde{f}_{n-1}\| < \frac{\varepsilon_1}{3}$, $\|\tilde{f}_n - \tilde{f}_{n-1}\| < \frac{\varepsilon_1}{3}$, $\|f_n - f\| < \frac{\varepsilon_1}{3}$ при достаточно большом номере n , получим $\|Tf + \varphi - f\| < \varepsilon_1$. В силу произвольности $\varepsilon_1 > 0$ имеем $f = \varphi + Tf$.

Нетрудно установить оценку погрешности

$$\|f - f_n\| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \|f_k - f_{k-1}\| \leq \Delta f_1 \sum_{k=n+1}^{\infty} \varepsilon^{k-2} = \frac{\varepsilon^{n-1}}{1-\varepsilon} \Delta f_1. \quad (11)$$

В некоторых случаях выбором нормы можно улучшить сходимость метода (см. [1, 2]).

Замечание. Аналогичные выводы можно сделать, рассматривая уравнение $f = Tf$. При этом 1-е приближение придется находить, решая уравнение $\alpha_1 = T\alpha_1$ (как в методе Ю. Д. Соколова или взяв $\alpha_1 = T\alpha_0$, где α_0 — некоторое начальное приближение), используя затем алгоритм

$$\begin{aligned} \tilde{f}_n &= T(f_{n-1} + \alpha_n), \\ \alpha_n &= S(\tilde{f}_n - f_{n-1}), \quad \text{где } \tilde{f}_n = T\tilde{f}_{n-1}. \end{aligned}$$

Ниже алгоритм применяется для нахождения приближенного решения системы нелинейных интегральных уравнений.

II. ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ ПРИБЛИЖЕННОГО РЕШЕНИЯ СИСТЕМЫ НЕЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ТИПА ФРЕДГОЛЬМА

Метод усреднения функциональных поправок [5, 6], применяемый для нахождения приближенного решения нелинейного интегрального уравнения вида

$$y(x) = \varphi(x) + \int_a^b K(x, \xi) f[x, \xi, y(\xi)] d\xi$$

и для нахождения приближенного решения системы нелинейных интегральных уравнений с постоянными пределами вида

$$y_i(x) = \varphi_i(x) + \int_a^b K_i(x, \xi) f_i[x, \xi, y_1(\xi), \dots, y_m(\xi)] d\xi, \quad (12)$$

$$i = 1, 2, \dots, m,$$

обладает ускоренной сходимостью к решению по сравнению с обычным методом последовательных приближений, что показано рядом авторов [5—8]. Предполагается что данные функции $\varphi_i(x)$, наиболь-

шие и наименьшие значения которых на отрезке $[a, b]$ обозначим соответственно через Φ_i и φ_i , непрерывны на этом отрезке, $K_i(x, \xi)$ — непрерывны по обоим аргументам, либо ограниченные разрывные ядра 1-го рода, либо полярные ядра, $f_i[x, \xi, y_1(\xi), \dots, y_m(\xi)]$ — также непрерывные функции своих аргументов в некоторой области D , определяемой неравенствами:

$$a \leq x \leq b, \quad a \leq \xi \leq b, \quad -\mu_i + \varphi_i \leq y_i(x) \leq \mu_i + \Phi_i,$$

удовлетворяющие в ней по переменным $y_1(\xi), y_2(\xi), \dots, y_m(\xi)$ условиям Липшица:

$$\begin{aligned} |f_i[x, \xi, y_1(\xi), \dots, y_m(\xi)] - f_i[x, \xi, \bar{y}_1(\xi), \dots, \bar{y}_m(\xi)]| &\leq \\ &\leq \sum_{j=1}^m A_{ij} |y_j - \bar{y}_j|, \end{aligned} \quad (13)$$

где A_{ij} — постоянные, вообще зависящие от $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_m$. Но при применении этого метода на каждом шаге вычислительного процесса необходимо решать либо нелинейное уравнение [5], либо систему нелинейных уравнений [6], что значительно увеличивает объем вычислительной работы. Применим идеи, изложенные в пункте I метода, к решению системы (12).

§ 1. Итак, первое приближение определим формулами:

$$y_{i1}(x) = \varphi_i(x) + \int_a^b K_i(x, \xi) f_i(x, \xi, \alpha_{11}, \alpha_{21}, \dots, \alpha_{m1}) d\xi, \quad (14_1)$$

$$\alpha_{i1} = \frac{1}{h} \int_a^b \varphi_i(x) dx, \quad b - a = h > 0. \quad (15_1)$$

Второе приближение определим формулами:

$$y_{i2}(x) = \varphi_i(x) + \int_a^b K_i(x, \xi) f_i[x, \xi, y_{11}(\xi) + \alpha_{12}, \dots, y_{m1}(\xi) + \alpha_{m2}] d\xi, \quad (14_2)$$

$$\alpha_{i2} = \frac{1}{h} \int_a^b \delta_{i2}(x) dx, \quad \delta_{i2}(x) = \tilde{y}_{i2}(x) - y_{i1}(x), \quad (15_2)$$

где $\tilde{y}_{i2}(x)$ определяется формулой

$$y_{i2}(x) = \varphi_i(x) + \int_a^b K_i(x, \xi) f_i[x, \xi, y_{11}(\xi), y_{21}(\xi), \dots, y_{m1}(\xi)] d\xi. \quad (16_2)$$

Поставив (16₂) в (15₂), получаем

$$\begin{aligned} \alpha_{i2} = \frac{1}{h} \int_a^b dx \int_a^b K_i(x, \xi) \{ f_i[x, \xi, y_{11}(\xi), \dots, y_{m1}(\xi)] - \\ - f_i[x, \xi, \alpha_{11}, \dots, \alpha_{m1}] \} d\xi. \end{aligned}$$

Введя обозначения

$$\sup_{a < bx < b} |y_{i1} - \alpha_{i1}| \leq \delta_i, \quad \sup_{a < x < b} \int_a^b |K_i(x, \xi)| \sum_{j=1}^m A_{ij} d\xi \leq L,$$

$$\sup_{a < x < b} \frac{1}{h} \int_a^b dx \int_a^b |K_i(x, \xi)| \sum_{j=1}^m A_{ij} d\xi = N, \quad i = 1, 2, \dots, m,$$

имеем

$$\begin{aligned} |\alpha_{i2}| &= \frac{1}{h} \left| \int_a^b dx \int_a^b K_i(x, \xi) \{f_i[x, \xi, y_{11}(\xi), \dots, y_{m1}(\xi)] - \right. \\ &\quad \left. - f_i[x, \xi, \alpha_{11}, \dots, \alpha_{m1}] \} d\xi \right| \leq \frac{1}{h} \int_a^b dx \int_a^b |K_i(x, \xi)| \times \\ &\quad \times \sum_{j=1}^m A_{ij} |y_{j1}(\xi) - \alpha_{j1}| d\xi \leq N \delta_i. \end{aligned} \quad (17_2)$$

Используя (17₂), получим оценку

$$\begin{aligned} |y_{i2}(x) - y_{i1}(x)| &= \left| \int_a^b K_i(x, \xi) \{f_i[x, \xi, y_{11}(\xi) + \alpha_{12}, \dots, y_{m1}(\xi) + \alpha_{m2}] - \right. \\ &\quad \left. - f_i[x, \xi, \alpha_{11}, \alpha_{21}, \dots, \alpha_{m1}] \} d\xi \right| \leq \int_a^b |K_i(x, \xi)| \times \\ &\quad \times \sum_{j=1}^m A_{ij} |y_{j1} + \alpha_{j2} - \alpha_{j1}| d\xi \leq L (\delta_i + N \delta_i) = L \delta_i (1 + N). \end{aligned} \quad (18_2)$$

n -ое приближение определяется формулами:

$$\begin{aligned} y_{i1}(x) &= \varphi_i(x) + \int_a^b K_i(x, \xi) f_i[x, \xi, y_{1n-1}(\xi) + \\ &\quad + \alpha_{1n}, \dots, y_{mn-1}(\xi) + \alpha_{mn}] d\xi, \end{aligned} \quad (14_n)$$

$$\alpha_{in} = \frac{1}{h} \int_a^b \delta_{in}(x) dx, \quad \delta_{in}(x) = \tilde{y}_{in}(x) - y_{in-1}(x), \quad (15_n)$$

где

$$\tilde{y}_{in}(x) = \varphi_i(x) + \int_a^b K_i(x, \xi) f_i[x, \xi, y_{1n-1}(\xi), \dots, y_{mn-1}(\xi)] d\xi. \quad (16_n)$$

§.2. Процесс нахождения $|\alpha_{in} - \alpha_{in-1}|$ и $|y_{in}(x) - y_{in-1}(x)|$ проводится аналогично тому, как это мы делали в I части при определении $|\alpha_n - \alpha_{n-1}|$ и $|f_n - f_{n-1}|$.

После несложных преобразований получим

$$\begin{aligned}
|\alpha_{in} - \alpha_{in-1}| &= \frac{1}{h} \left| \int_a^b [\tilde{y}_{in}(x) - y_{in-1}(x) - \tilde{y}_{in-1}(x) + y_{in-2}(x)] dx \right| \leq \\
&\leq \frac{1}{h} \int_a^b (|\tilde{y}_{in}(x) - \tilde{y}_{in-1}(x)| + |y_{in-1}(x) - y_{in-2}(x)|) dx \leq \\
&\leq N \max |y_{in-1}(x) - y_{in-2}(x)| + \frac{1}{h} \int_a^b |y_{in-1}(x) - y_{in-2}(x)| dx. \quad (19_n)
\end{aligned}$$

На основании (19_n) имеем

$$\begin{aligned}
|y_{in}(x) - y_{in-1}(x)| &= \left| \int_a^b K_i(x, \xi) \{ f_i[x, \xi, y_{1n-1}(\xi) + \right. \\
&\quad \left. + \alpha_{1n}, \dots, y_{mn}(\xi) + \alpha_{mn}] - f_i[x, \xi, y_{1n-2}(\xi) + \right. \\
&\quad \left. + \alpha_{1n-1}, \dots, y_{mn-2}(\xi) + \alpha_{mn-1}] \} d\xi \right| \leq \int_a^b |K_i(x, \xi)| \times \\
&\quad \times \sum_{j=1}^m A_{ij} |y_{jn-1}(\xi) + \alpha_{jn} - y_{jn-2}(\xi) - \alpha_{jn-1}| d\xi \leq \\
&\leq (L + N + LN) \max |y_{jn-1}(\xi) - y_{jn-2}(\xi)| = \varepsilon \max |y_{jn-1} - y_{jn-2}|, \quad (18_n) \\
\varepsilon &= L + N + LN.
\end{aligned}$$

Выполняя индукцию и воспользовавшись формулой (18₂), перепишем (18_n) в следующем виде:

$$|y_{in}(x) - y_{in-1}(x)| \leq \varepsilon^{n-2} \max |y_{i2}(x) - y_{i1}(x)| \leq L \delta_i (1 + N) \varepsilon^{n-2}.$$

Для оценки $|\alpha_{in}|$, выполняя индукцию, получим, используя (18_n) после несложных преобразований, выражение

$$|\alpha_{in}| = \frac{1}{h} \left| \int_a^b [\tilde{y}_{in}(x) - y_{in-1}(x)] dx \right| \leq N \delta_i \varepsilon^{n-2}. \quad (17_n)$$

Используя полученные выше оценки, имеем

$$\begin{aligned}
|y_{in+p}(x) - y_{in}(x)| &\leq \sum_{k=n+1}^{n+p} |y_{ik}(x) - y_{ik-1}(x)| \leq \\
&\leq L \delta_i (1 + N) \sum_{k=n+1}^{n+p} \varepsilon^{k-2} \leq L \delta_i (1 + N) \frac{\varepsilon^{n-1}}{1 - \varepsilon}, \\
|y_{in}(x) - y_i(x)| &= \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} [y_{ik}(x) - y_{ik-1}(x)] \right| \leq L \delta_i (1 + N) \frac{\varepsilon^{n-1}}{1 - \varepsilon}.
\end{aligned}$$

Итак, если $\varepsilon = L + N + LN < 1$, то при $n \rightarrow \infty$ $y_{in}(x)$ на отрезке $[a, b]$ стремится к предельному значению $y_i(x)$, удовлетворяющему, как нетрудно убедиться, системе (12).

Таким образом, достаточным условием сходимости процесса является выполнение неравенства $\varepsilon = L + N + LN < 1$.

Достаточное условие сходимости процесса в методе осреднения функциональных поправок (см. в работах [5, 6])

$$\bar{\varepsilon} = \frac{L + N}{1 - N} = L + N + LN + LN^2 + \dots < 1.$$

Полученная нами оценка несколько лучше.

§ 3. Дадим условия, при которых все приближения находятся в области D .

Пусть

$$|y_{i1}(x) - \varphi_i(x)| \leq \frac{\mu_i}{2},$$

или

$$\left| \int_a^b K_i f_i(x, \xi, \alpha_{11}, \alpha_{21}, \dots, \alpha_{m1}) d\xi \right| \leq \frac{\mu_i}{2},$$

$$\begin{aligned} |y_{i2}(x) - \varphi_i(x)| &\leq |y_{i1}(x) - \varphi_i(x)| + |y_{i2} - y_{i1}| \leq \\ &\leq \frac{\mu_i}{2} + L \delta_i (1 + N), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |y_{i3}(x) - \varphi_i(x)| &\leq |y_{i2}(x) - \varphi_i(x)| + |y_{i3}(x) - y_{i2}(x)| \leq \\ &\leq \frac{\mu_i}{2} + L \delta_i (1 + N) + L \delta_i (1 + N) \varepsilon = \frac{\mu_i}{2} + L \delta_i (1 + N) (1 + \varepsilon). \end{aligned}$$

Пусть

$$|y_{in-1}(x) - \varphi_i(x)| \leq \frac{\mu_i}{2} + L \delta_i (1 + N) (1 + \varepsilon + \varepsilon^2 + \dots + \varepsilon^{n-3}).$$

Тогда

$$\begin{aligned} |y_{in}(x) - \varphi_i(x)| &\leq |y_{in-1}(x) - \varphi_i(x)| + |y_{in}(x) - y_{in-1}(x)| \leq \\ &\leq L \delta_i (1 + N) (1 + \varepsilon + \varepsilon^2 + \dots + \varepsilon^{n-3} + \varepsilon^{n-2}) \leq \frac{\mu_i}{2} + \frac{L \delta_i (1 + N)}{1 - \varepsilon}. \end{aligned}$$

Итак, при

$$\frac{L \delta_i (1 + N)}{1 - \varepsilon} \leq \frac{\mu_i}{2} \quad \text{и} \quad \left| \int_a^b K_i(x, \xi) f_i(x, \xi, \alpha_{11}, \dots, \alpha_{m1}) d\xi \right| \leq \frac{\mu_i}{2}$$

все последовательные приближения находятся в области D .

Замечание. Величины, полученные при вычислении $y_{in}(x)$, часто используются затем при вычислении $y_{in}(x)$, следовательно, объем вычислительной работы на каждом шаге лишь немногим больше, чем в обычном методе последовательных приближений. Предлагаемый метод содержит в себе элемент контроля, так как функциональные поправки (α_{in}) должны убывать на каждом шаге при правильном счете.

Посредством рассуждений, совершенно аналогичных приведенным выше, нетрудно убедиться, что достаточное условие сходимости алгоритма в случае системы, содержащей параметр λ , будет

$$\varepsilon = |\lambda| (L + N + |\lambda| LN) < 1.$$

Все вышеуказанное остается справедливым и для системы

$$U_i(P) = \varphi_i(P) + \int_B K_i(P, Q) f_i[P, Q, U_1(Q), \dots, U_m(Q)] d\omega_Q,$$

в которой $U_i(P)$ и $\varphi_i(P)$ — функции точки в некотором ограниченном множестве B произвольного числа измерений, $P, Q \in B$, $d\omega_Q$ — элемент объема (площади или длины дуги). При этом интегрирование по отрезку $[a, b]$ заменяется интегрированием по множеству B (поверхности или кривой), h — на объем области B (площадь поверхности или длину дуги кривой). Для одного нелинейного уравнения вида

$$y(x) = \varphi(x) + \int_a^b K(x, \xi) f[x, \xi, y(\xi)] d\xi$$

все оценки упрощаются. Достаточное условие сходимости процесса будет иметь вид $\varepsilon = AL + AN + LNA^2 < 1$, где в обозначениях работы [5] A — константа Липшица функции $f[x, \xi, y(\xi)]$

$$\int_a^b |K(x, \xi)| d\xi \leq L, \quad \frac{1}{h} \int_a^b dx \int_a^b |K(x, \xi)| d\xi = N,$$

$$\sup_{a < x < b} |y_1(x) - a_1| = \delta.$$

Оценка погрешности имеет вид

$$|y - y_n| \leq \frac{\varepsilon^{n-1}}{1 - \varepsilon} LA \delta (1 + NA).$$

§ 4. Для иллюстрации дадим несколько численных примеров.
1) Система уравнений:

$$y_1(x) = 1 + \frac{2}{15} x \int_0^1 [y_1^2(\xi) + y_2(\xi)] d\xi,$$

$$y_2(x) = \frac{1}{2} + \frac{x}{9} \int_0^1 [y_1(\xi) + y_2^2(\xi)] d\xi$$

имеет 4 действительных решения вида $y_1(x) = 1 + k_1 x$, $y_2(x) = \frac{1}{2} + k_2 x$, причем меньшие значения k_1 и k_2 равны $k_1 = 0,246389 \dots$, $k_2 = 0,162589 \dots$. Найдем решение системы, пользуясь обыкновенным методом последовательных приближений, методом осреднения функциональных поправок [6] и предлагаемым нами модифицированным методом функциональных поправок. Первое приближение во всех трех методах берем равным

$$y_{11}(x) = 1 + 0,24557x, \quad y_{21}(x) = \frac{1}{2} + 0,16228x.$$

y_{ij}	Метод последовательных приближений	Метод осреднения функциональных поправок	Модифицированный метод осреднения функциональных поправок
y_{11}	$1 + 0,24557x$	$1 + 0,24557x$	$1 + 0,24557x$
y_{21}	$\frac{1}{2} + 0,16228x$	$\frac{1}{2} + 0,16228x$	$\frac{1}{2} + 0,16228x$
y_{12}	$1 + 0,24624x$	$1 + 0,24638x$	$1 + 0,24638x$
y_{22}	$\frac{1}{2} + 0,16252x$	$\frac{1}{2} + 0,16259x$	$\frac{1}{2} + 0,16258x$

2) Пусть необходимо решить систему уравнений:

$$y_1(x) = \frac{13}{6}x - \frac{x}{5} \int_0^1 [y_1^2(\xi) - y_2(\xi)] d\xi,$$

$$y_2(x) = \frac{16}{15}x - \frac{x}{5} \int_0^1 [y_1^2(\xi) - 2y_2(\xi)] d\xi.$$

Найдем решение систем, пользуясь методом последовательных приближений, методом осреднения функциональных поправок [6] и модифицированным методом осреднения функциональных поправок.

Истинное решение системы $y_1(x) = 2x$, $y_2(x) = x$.

y_{ij}	Метод последовательных приближений	Метод осреднения функциональных поправок	Модифицированный метод осреднения функциональных поправок
y_{11}	$1,9604x$	$2,0611x$	$2,0387x$
y_{21}	$0,9670x$	$1,0679x$	$1,0453x$
y_{12}	$2,0072x$	$2,0019x$	$1,9984x$
y_{22}	$1,0039x$	$0,9941x$	$0,9984x$

3) Пусть дано уравнение

$$y(x) = \frac{9}{8}x + \frac{1}{8} - \frac{1}{2} \int_0^1 \xi(x+1)y^2(\xi) dx,$$

решение которого есть $y(x) = x$.

y_i	Обыкновенная итерация	Метод функциональных поправок	Модифицированный метод функциональных поправок
y_1	$0,9160x - 0,0840$	$1,0446x + 0,0446$	$1,0068x + 0,0068$
y_2	$1,0488x + 0,0488$	$0,9974x - 0,0026$	$1,0014x + 0,0014$
y_3	$0,9698x - 0,0302$		
y_4	$1,0172x + 0,0172$		
y_5	$0,9898x - 0,0102$		
y_6	$1,0059x + 0,0059$		
y_7	$0,9965x - 0,0035$		
y_8	$1,0021x + 0,0021$		
y_9	$0,9988x - 0,0012$		

Наибольшие невязки приближенных решений в норме C соответственно этим методом будут:

$$\|y - \eta_9\| = 0,0024, \quad \|y - \bar{y}_2\| = 0,0052, \quad \|y - y_2\| = 0,0028.$$

В этом случае две итерации предлагаемого метода соответствуют примерно девяти итерациям при использовании обыкновенным методом последовательных приближений.

ЛИТЕРАТУРА

1. Weissinger J. Z. angew. Math., Mech., 31, 245, 1951.
2. Collatz L. Z. angew. Math., Mech., 33, 116, 1953.
3. Соколов Ю. Д. ДАН УССР, № 2, 107, 1955.
4. Соколов Ю. Д. Украинск. матем. журн., 12, № 2, 1960.
5. Соколов Ю. Д. Украинск. матем. журн., 9, № 4, 1957.
6. Соколов Ю. Д. Украинск. матем. журн., 15, № 1, 1963.
7. Курпель Н. С. Украинск. матем. журн., 15, № 3, 1963.
8. Курпель Н. С. Украинск. матем. журн., 16, № 1, 1964.
9. Лучка А. Ю. ДАН СССР, 122, 179, 1958.
10. Лучка А. Ю., Курпель Н. С. Украинск. матем. журн., 16, № 3, 1964.
11. Сиренко В. Х. Украинск. матем. журн., 13, № 4, 1961.
12. Тивончук В. И. ДАН УРСР, № 8, 1014—1018, 1964.
13. Чернышенко Э. А. Украинск. матем. журн., 6, № 3, 1954.
14. Чернышенко Э. А. ДАН УРСР, № 1, 10—12, 1956.
15. Рисс Ф., Секефальви-Надь Б. Лекции по функциональному анализу. ИЛ., 1954.

Поступило в редакцию 16.VI 1965

В. А. ЕМЕЛИЧЕВ

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ВОГНУТОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

В статье [1] Хоанг Туи изложил общий метод решения задачи вогнутого программирования при линейных ограничениях и в частности

задачи минимизации функционала $F(X) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f_{ij}(x_{ij})$ при ограничениях

транспортного типа

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i \quad (i = 1, 2, \dots, m), \quad (1)$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j \quad (j = 1, 2, \dots, n), \quad (2)$$

$$x_{ij} \geq 0 \quad (i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n), \quad (3)$$

где $f_{ij}(x_{ij})$ — вогнутые функции ($f''_{ij}(x_{ij}) \leq 0$).

Предложенный метод состоит из двух этапов. На первом этапе любым из известных методов находим вершину многогранника, определенного ограничениями, т. е. строим опорный план задачи. Затем пытаемся улучшить допустимые решения, переходя, если это возможно, к соседней вершине с меньшим значением функционала $F(X)$, и так продолжаем до тех пор, пока не получим такую вершину X^0 , что $F(X) \geq F(X^0)$ для всех соседних с ней вершин X . После того, как изложенным способом найден локальный минимум X^0 , начинается второй этап — процесс отыскания глобального минимума, состоящий из решения некоторого числа вспомогательных задач. Каждая вспомогательная задача представляет собой задачу линейного программирования, а в случае ограничений вида (1) — (3) — обыкновенную транспортную задачу.

В настоящей статье рассматривается частный случай задачи вогнутого программирования, а именно — задача о нахождении минимума

функции $\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f(x_{ij})$, где $f(x_{ij})$ — вогнутая функция, при условиях (1) — (3).

Для этого частного случая предлагается прямой метод построения локального минимума, т. е. отпадает необходимость в первом этапе процедуры Хоанга Туя.

Отметим, что к этой задаче сводится, в частности, задача специализации литейного производства (m видов литья, n цехов, $f(x_{ij})$ — зависи-

мость размера занимаемой производственной площади от уровня концентрации однородного литья).

В дальнейшем будем пользоваться обычной терминологией транспортной задачи. Имеется m пунктов производства (отправления) с объемами a_1, a_2, \dots, a_m и n пунктов потребления (назначения) с объемами b_1, b_2, \dots, b_n . Предполагается, что суммарный объем производства совпадает с суммарным объемом потребления, т. е.

$$\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j.$$

Требуется так распределить объемы производств между потребителями, чтобы полученный план был локальным минимумом функции

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f(x_{ij})$$

при условиях (1)–(3). Как будет доказано, это достигается

с помощью следующего алгоритма, который будем называть *методом наибольшего элемента*.

Находим $\max(a_1, a_2, \dots, a_m) = a_\mu^*$ и $\max(b_1, b_2, \dots, b_n) = b_\nu^*$. Полагаем $x_{\mu\nu} = \min(a_\mu, b_\nu)$. Если $a_\mu \geq b_\nu$, то $x_{\mu\nu} = b_\nu$ и $x_{i\nu} = 0$ для $i = 1, 2, \dots, \mu-1, \mu+1, \dots, m$. Если $a_\mu < b_\nu$, то $x_{\mu\nu} = a_\mu$ и $x_{\mu j} = 0$ для $j = 1, 2, \dots, \nu-1, \nu+1, \dots, n$. Если $a_\mu = b_\nu$, то $x_{\mu\nu} = a_\mu = b_\nu$, а все остальные элементы как μ -ой строки, так и ν -го столбца равны нулю.

В первом случае вместо b_ν ставим 0, а a_μ заменяем числом $a_\mu - b_\nu$, т. е. ν -й потребитель теперь полностью удовлетворен, а запас груза μ -го отправителя составляет $a_\mu - b_\nu$.

Во втором случае вместо a_μ ставим 0, а b_ν заменяем числом $b_\nu - a_\mu$, т. е. запас груза в μ -ом пункте отправления свелся к нулю, а потребность ν -го пункта назначения уменьшилась на a_μ и составляет $b_\nu - a_\mu$.

В последнем случае на месте a_μ и b_ν одновременно ставим 0.

Изложенная процедура есть первый шаг алгоритма.

Следующий, второй, шаг аналогичен. Среди оставшихся объемов производств и объемов потребления выбираем соответственно максимальные числа и поступаем далее так же, как и в первом шаге.

Эту процедуру продолжаем до тех пор, пока не определим все неизвестные числа x_{ij} ($i = 1, 2, \dots, m$; $j = 1, 2, \dots, n$). В результате получаем план N , т. е. таблицу чисел $\{x_{ij}^0\}$, удовлетворяющих условиям (1)–(3).

Отметим, что в процессе построения плана N положительные числа, появляющиеся в нашей таблице, не могут возрастать.

Определение. Три отличные от нуля компоненты $x_{it}^0, x_{ij}^0, x_{kj}^0$ плана N , полученного методом наибольшего элемента, будем называть *нормальной тройкой*. Числа x_{it}^0 и x_{kj}^0 нашей тройки назовем *крайними*, а число x_{ij}^0 — *внутренним*.

Теорема 1. *Всякая нормальная тройка $x_{it}^0, x_{ij}^0, x_{kj}^0$ плана N , полученного методом наибольшего элемента, обладает тем свойством, что внутреннее число x_{ij}^0 меньше хотя бы одного из крайних чисел x_{it}^0, x_{kj}^0 .*

Доказательство. Допустим, что внутреннее число не меньше каждого крайнего, т. е. выполняются неравенства

* Если таких чисел несколько, то берем любое из них, например, первое в нашей последовательности.

$$\left. \begin{array}{l} x_{ij}^0 \geq x_{it}^0, \\ x_{ij}^0 \geq x_{kj}^0 \end{array} \right\} \quad (4)$$

Тогда в процессе построения плана N числа x_{it}^0 и x_{kj}^0 появляются после числа x_{ij}^0 . Следовательно, в момент заполнения клетки (i, j) запас груза в i -м пункте производства и потребность j -го пункта назначения превышают число x_{ij}^0 . Но это означает, что в клетке (i, j) должно появиться число большее, чем x_{ij}^0 . Полученное противоречие и доказывает, что неравенства (4) не могут одновременно иметь места, т. е. теорема 1 доказана.

Теорема 2. *Всякая нормальная тройка $x_{it}^0, x_{ij}^0, x_{kj}^0$ плана N , полученного методом наибольшего элемента, обладает тем свойством, что одно из крайних чисел (x_{kj}^0 или x_{it}^0) не меньше суммы остальных чисел этой тройки ($x_{kj}^0 \geq x_{ij}^0 + x_{it}^0$ или $x_{it}^0 \geq x_{ij}^0 + x_{kj}^0$).*

Доказательство. Из теоремы 1 следует, что $\max(x_{it}^0, x_{kj}^0) > x_{ij}^0$. Пусть для определенности $x_{it}^0 = \max(x_{it}^0, x_{kj}^0)^*$. Требуется доказать, что $x_{it}^0 \geq x_{ij}^0 + x_{kj}^0$. Допустим противное: $x_{it}^0 < x_{ij}^0 + x_{kj}^0$.

Так как $x_{it}^0 > x_{ij}^0$ и $x_{it}^0 \geq x_{kj}^0$, то в процессе построения плана N числа x_{ij}^0 и x_{kj}^0 появляются после числа x_{it}^0 . Следовательно, в момент заполнения клетки (i, t) запас груза в i -ом пункте производства превышает число x_{it}^0 , и потребность j -го пункта назначения в силу неравенства $x_{it}^0 < x_{ij}^0 + x_{kj}^0$ больше чем x_{it}^0 . Кроме того, в момент заполнения клетки (i, t) потребность t -го пункта назначения не меньше потребности любого другого пункта, в частности, не меньше чем потребность j -го пункта, т. е. больше числа x_{it}^0 . Поэтому в клетке (i, t) в момент ее заполнения должно появиться число, большее чем x_{it}^0 . Полученное противоречие доказывает теорему 2.

Следствие. Во всякой нормальной тройке $x_{it}^0, x_{ij}^0, x_{kj}^0$ плана N , полученного методом наибольшего элемента, одно из крайних чисел больше каждого из остальных чисел тройки, т. е. или $x_{it}^0 > x_{ij}^0, x_{it}^0 > x_{kj}^0$ или $x_{kj}^0 > x_{ij}^0, x_{kj}^0 > x_{it}^0$.

Теорема 3. *Множество «занятых клеток» $T = \{(i, j): x_{ij}^0 > 0\}$ плана N , полученного методом наибольшего элемента, состоит не более чем из $m + n - 1$ элементов и не содержит циклов.*

Доказательство. На каждом шаге построения плана N заполняется положительным числом x_{ij}^0 одна из клеток таблицы, а на месте одного или двух из чисел a_i или b_j ставятся нули. Только на последнем шаге одновременно на месте a_k и b_t ставятся нули. Следовательно, при заполнении клеток T потребуется не более чем $m + n - 1$ шагов, и план N будет содержать не более чем $m + n - 1$ положительных компонент x_{ij}^0 .

Отсутствие циклов докажем от противного. Если бы во множестве T существовал цикл, то наибольшее число в этом цикле можно было бы рассматривать как внутреннее число некоторой нормальной тройки. Таким образом, существовала бы нормальная тройка, в которой внутреннее число не меньше каждого из крайних чисел. Однако этого не может быть на основании теоремы 1.

* Для случая $x_{kj}^0 = \max(x_{it}^0, x_{kj}^0)$ доказательство проводится аналогично.

Доказательство теоремы 3 закончено.

Следствие. План N , построенный методом наибольшего элемента, является опорным, т. е. представляет собой вершину многогранника, определенного ограничениями (1) — (3).

Лемма. Если

$$a \leq b \leq c \leq d, \quad (5)$$

$$a+d = b+c,$$

то для любой вогнутой функции $f(x)$ имеет место неравенство

$$f(a) + f(d) \leq f(b) + f(c).$$

Доказательство. На основании теоремы Лагранжа внутри интервалов $[a, b]$ и $[c, d]$ существуют числа ξ_1 и ξ_2 такие, что

$$\left. \begin{aligned} f(b) - f(a) &= f'(\xi_1)(b-a) \\ f(d) - f(c) &= f'(\xi_2)(d-c) \end{aligned} \right\}, \quad (6)$$

причем $\xi_1 \leq \xi_2$ в силу неравенств (5).

С другой стороны, ввиду вогнутости функции $f(x)$ ($f''(x) \leq 0$), производная $f'(x)$ не возрастает. Поэтому из неравенства $\xi_1 \leq \xi_2$ следует неравенство $f'(\xi_1) \geq f'(\xi_2)$, т. е. $f'(\xi_1)(b-a) \geq f'(\xi_2)(d-c)$, так как $b-a = d-c \geq 0$. Отсюда на основании равенств (6) вытекает утверждение леммы.

Теорема 4. Если $a+c \leq b$ и $c > 0$, то для любой вогнутой функции $f(x)$ имеет место неравенство

$$f(a) + f(b) \leq f(a+c) + f(b-c). \quad (7)$$

Доказательство. Рассмотрим два возможных случая: $a+c > b-c$ и $a+c \leq b-c$.

1) Если $a+c > b-c$, то в силу неравенства $a+c \leq b$ имеем $b \geq a+c > b-c \geq a$. Поэтому на основании леммы справедливо неравенство (7).

2) Если $a+c \leq b-c$, то в силу неравенства $c > 0$ имеем $a < a+c \leq b-c < b$. Отсюда на основании леммы вновь получаем неравенство (7).

Теорема 4 доказана.

Теперь докажем основную теорему.

Теорема 5. План N , построенный методом наибольшего элемента,

является локальным минимумом функции $\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f(x_{ij})$, где $f(x_{ij})$ — вогнутая функция, при ограничениях

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i \quad (i = 1, 2, \dots, m), \quad (1)$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j \quad (j = 1, 2, \dots, n), \quad (2)$$

$$x_{ij} \geq 0 \quad (i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n) \quad (3)$$

(задача предполагается невырожденной).

Доказательство. Прежде всего, предположение о невырожденности не исключает общности наших рассуждений, так как всегда можно использовать известный прием „возмущения“, т. е. перейти к ε -задаче.

Итак, в силу предположения невырожденности задачи множество занятых клеток $T = \{(i, j): x_{ij}^0 > 0\}$ плана N состоит ровно из $m+n-1$ элементов, не образующих циклов, а каждая клетка $(i', j') \in T$ образует с занятыми клетками единственный цикл. Требуется доказать, что невозможно улучшить план N путем исправления на циклах, т. е. путем перехода в соседние вершины.

Рассмотрим произвольную клетку $(i', j') \in T$ и единственный цикл, который она образует с занятыми клетками. Обходим этот цикл против часовой стрелки, начиная с пустой клетки (i', j') . Все числа этого цикла запишем в виде последовательности

$$0, A_1, B_1, A_2, B_2, \dots, A_{p-1}, B_{p-1}, A_p.$$

Здесь $A_i > 0$ ($i = 1, 2, \dots, p$), $B_j > 0$ ($j = 1, 2, \dots, p-1$).

Как известно, для перехода в соседнюю вершину необходимо числа, стоящие на четных местах (A_1, A_2, \dots, A_p) , уменьшить на $\min(A_1, A_2, \dots, A_p)$, числа, стоящие на нечетных местах $(0, B_1, B_2, \dots, B_{p-1})$, увеличить на $\min(A_1, A_2, \dots, A_p)$, а числа, не вошедшие в цепь, оставить без изменения.

Пусть $A_k = \min(A_1, A_2, \dots, A_p)$. Не исключая общности, можно предположить, что $k > 1$ (в противном случае запись чисел нашего цикла можно произвести, двигаясь по часовой стрелке). Тогда $A_{k-1} > A_k$. Равенства $A_{k-1} = A_k$ быть не может, так как числа A_{k-1}, B_{k-1}, A_k образуют нормальную тройку (см. следствие теоремы 2). Поэтому в силу теоремы 2

$$A_{k-1} \geq B_{k-1} + A_k.$$

Отсюда $A_{k-1} \geq B_{k-1}$. А так как числа $B_{k-2}, A_{k-1}, B_{k-1}$ образуют нормальную тройку, то на основании следствия теоремы 2 $B_{k-2} > A_{k-1}$. Учитывая, что числа $A_{k-2}, B_{k-2}, A_{k-1}$ образуют нормальную тройку, из последнего неравенства в силу теоремы 2 следует

$$A_{k-2} \geq B_{k-2} + A_{k-1}.$$

Рассуждая далее аналогичным образом, получаем неравенства

$$A_{k-3} \geq B_{k-3} + A_{k-2},$$

.....

$$A_1 \geq B_1 + A_2.$$

Теперь рассмотрим два случая: $k = p$ и $k < p$.

Случай $k = p$. Справедливость неравенств

$$A_i \geq B_i + A_{i+1} \quad (i = 1, 2, \dots, p-1)$$

уже доказана. Так как $A_p = \min(A_1, A_2, \dots, A_p)$, то из последних неравенств следует

$$A_i \geq B_i + A_p \quad (i = 1, 2, \dots, p-1).$$

Отсюда в силу теоремы 4 вытекает неравенство

$$\sum_{i=1}^{p-1} [f(A_i) + f(B_i)] + f(A_p) + f(0) \leq \sum_{i=1}^{p-1} [f(A_i - A_p) + f(B_i + A_p)] + f(A_p - A_p) + f(0 + A_p),$$

которое указывает, что в любой соседней вершине значение функционала $\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f(x_{ij})$ не меньше, чем в вершине $\{x_{ij}^0\} = N$.

Случай $k < p$. Аналогично тому, как были доказаны неравенства $A_i \geq B_i + A_{i+1}$ ($i = 1, 2, \dots, k-1$), можно доказать, что

$$A_j \geq B_{j-1} + A_{j-1} \quad (j = k+1, k+2, \dots, p).$$

Таким образом, справедливы неравенства

$$A_i \geq B_i + A_k \quad (i = 1, 2, \dots, k-1),$$

$$A_j \geq B_{j-1} + A_k \quad (j = k+1, k+2, \dots, p).$$

Отсюда в силу теоремы 4 вытекает неравенство

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^{k-1} [f(A_i) + f(B_i)] + f(A_k) + f(0) + \sum_{j=k+1}^p [f(A_j) + f(B_{j-1})] \leq \\ & \leq \sum_{i=1}^{k-1} [f(A_i - A_k) + f(B_i + A_k)] + f(A_k - A_k) + f(0 + A_k) + \\ & \quad + \sum_{j=k+1}^p [f(A_j - A_k) + f(B_{j-1} + A_k)], \end{aligned}$$

которое указывает, что в любой соседней вершине значение функционала $\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f(x_{ij})$ не меньше, чем в вершине $\{x_{ij}^0\} = N$.

Таким образом, план N — локальный минимум функции $\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f(x_{ij})$ при ограничениях (1)–(3). Теорема 5 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Хоанг Туй. ДАН СССР, 159, № 1, 1964.

Поступило в редакцию 3. IV 1965

А. Ш. БЛОХ, А. И. ПАВЛОВСКИЙ

АЛГОРИТМ СИНТЕЗА СХЕМ С «РЕАЛЬНЫМИ» КОНТАКТАМИ

Существующие методы комбинационного синтеза переключательных устройств базируются на понятии идеальных контактов, идеальных реле, т. е. не учитывают переходные процессы в работе реле.

Но в реально работающих переключательных устройствах изменение состояний каждого реле происходит не мгновенно. Это значит, что в переходные периоды имеется возможность нарушения работы устройства за счет неодновременного срабатывания контактов одного и того же реле. Такое явление называют состязанием контактов. При переходе реле из одного устойчивого состояния в другое неодновременное срабатывание контактов этого реле может привести к обрыву цепей или к появлению ложных. Иначе говоря, состязания контактов могут привести к появлению на выходе схемы ложного сигнала или к исчезновению сигнала. На рис. 1, а, б даны примеры, иллюстрирующие состязания контактов.

На схеме рис. 1, а при $b = 0, c = 0$ на выходе может появиться ложный сигнал, если при переходе реле А из одного состояния в другое оба

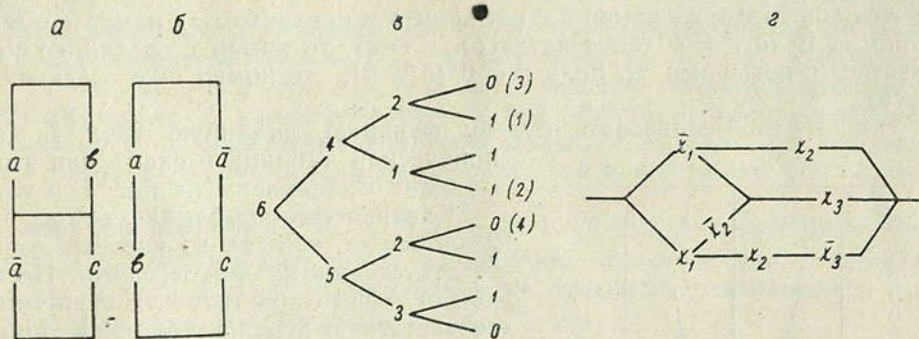


Рис. 1

его контакта окажутся одновременно замкнутыми. Такого рода состязания называют статическими состязаниями при сохранении на выходе нуля.

На схеме рис. 1, б видно, что если $b = c = 1$, то в момент переключения реле А выходной сигнал может исчезнуть, если окажется, что a и a одновременно разомкнуты. Такие состязания называют статическими состязаниями при сохранении на выходе единицы.

Вопросам работы релейных устройств в переходные периоды посвящен ряд статей [3—7].

В работах [3—5] предлагаются различные способы нахождения и устранения статических состязаний контактов в заданных схемах. Что

касается синтеза схем свободных от состязаний контактов, то этому вопросу посвящены работы [6, 7], в которых излагаются методы синтеза последовательно-параллельных схем без состязаний контактов.

Работа [8] посвящена анализу и формализованному синтезу схем с одним контуром обратной связи. В статье даются некоторые рекомендации по созданию схем, свободных от состязаний.

В настоящей работе авторы предлагают метод синтеза схем, лишенных статических состязаний контактов. При этом класс получаемых схем шире класса последовательно-параллельных схем. Алгоритм синтеза весьма прост и может быть легко запрограммирован для ЭВМ.

1. Алгоритм синтеза схем без состязаний базируется на каноническом методе [1, 2].

Синтез схем каноническим методом, как известно, проводится в два этапа. Вначале по булевой функции строится каноническая таблица, затем по таблице реализуется схема.

Каноническая таблица для булевой функции $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ содержит $(n+1)$ столбец. Крайний справа столбец содержит 2^n номеров, крайний слева — один номер. Крайний правый столбец представляет собой столбец реализуемой функции. Опишем метод построения канонической таблицы. Пусть k -ый столбец, считая справа налево, уже построен. Он содержит $2k$ номеров. Разбиваем k -ый столбец сверху вниз на пары. Слева и посередине от каждой пары (a, b) k -го столбца ставим номер c в $(k-1)$ -ом столбце, причем разным парам (a, b) ставим в соответствие разные номера c , одинаковым парам — одинаковые номера c . Паре (a, a) ставится в соответствие номер a . Построенная таким образом треугольная таблица названа канонической.

Реализация канонической таблицы сводится к реализации кустов с различными номерами. Каждый куст (c_b^a) k -го яруса заменяется переключателем, причем на каждом из n ярусов канонической таблицы размещаются контакты только одного реле. Если $a \neq b$ и $ab \neq 0$, то соединяются контактом x_k номер c с номером b и контактом \bar{x}_k номер c с номером a . Если $a = b$ (следовательно, $c = a$), то номер c соединяют накоротко с номерами a . Если $a = 0$ ($b = 0$), то номер c не соединяют с $a(b)$.

Пример. Реализовать булеву функцию, заданную табл. 1. Каноническая таблица и схема для этой функции изображены на рис. 1, в, г.

Таблица 1

x_1	x_2	x_3	y
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	0

Каноническая таблица состоит из 2^n ломаных, каждая из которых соответствует одному конституенту. Переход от одного конституента к другому соответствует переходу от одной ломаной к другой. Статические состязания контактов могут возникнуть при переходе от одной ломаной к другой, когда изменяет состояние только один переключатель. Так, при переходе от ломаной (1) к ломаной (2) (рис. 1, в) воз-

можно состязание в момент переключения контактов переключателя X_2 .

При синтезе схем каноническим методом статические состязания при сохранении на выходе нуля не возникают. В самом деле, если при переходе от ломаной (3) к ломаной (4) (рис. 1, в) оказалось, что оба контакта переключателя X_1 одновременно замкнуты, то и в этом случае проводимость будет равна нулю. Поэтому в дальнейшем нас будут интересовать лишь статические состязания контактов при сохранении на выходе 1.

В канонической таблице (рис. 1, в) состязания контактов переключателя X_2 обусловлены ломаными (1) и (2), которым соответствуют конститuentы $x_1 x_2 x_3$ и $\bar{x}_1 x_2 x_3$. Чтобы ликвидировать состязание по x_2 , достаточно вместо ломаных (1) и (2) взять ломаную, соответствующую импликанту $x_1 x_3 = x_1 x_2 x_3 + \bar{x}_1 x_2 x_3$, т. е. ликвидацию статического состязания по переменной x_2 можно интерпретировать как замену переключателя X_2 короткозамкнутой цепью.

Эти простые соображения легли в основу предлагаемого метода.

Пусть булева функция $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ задана дизъюнктивной нормальной формой, состоящей из конститuent и импликант. Данный импликант может не содержать букв x_i и \bar{x}_i , либо содержать одну из них. Условимся эти случаи отмечать соответственно равенствами $x_i = 2$, $x_i = 1$, $x_i = 0$. Приняв определенный порядок следования букв x_i , будем импликант задавать в виде набора чисел.

Пусть, например, аргументы имеют такой порядок следования: x_1, x_2, x_3, x_4 . Тогда импликанту $x_2 x_3$ соответствует набор (2, 0, 1, 2), а набору (0, 2, 0, 1) соответствует импликант $x_1 x_3 x_4$. Для дизъюнктивной нормальной формы булевой функции $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ определим зависящую уже от троичных аргументов $x_i = 0, 2, 1$ двоичную функцию $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ так, чтобы на наборе $x_1 = \alpha_1, x_2 = \alpha_2, \dots, x_n = \alpha_n$ функция $F = 1$ тогда и только тогда, когда соответствующий импликант входит в нормальную форму, в противном случае $F = 0$.

Две функции F_1 и F_2 назовем равносильными, если им соответствуют дизъюнктивные нормальные формы одной булевой функции. Одна булева функция f порождает целый класс равносильных функций F . Так как разных наборов может быть 3^n , то таблица значений функций F будет иметь 3^n строк. Строки для аргументов x_1, x_2, \dots, x_n записываются сверху вниз в порядке возрастания соответствующих троичных чисел (табл. 2).

Если два числа α, β равны или $\alpha = 2$, то будем обозначать это так: $\alpha \triangleright \beta$. Два набора $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ и $\beta = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$, у которых $\alpha_v \triangleright \beta_v$ или $\beta_v \triangleright \alpha_v$ ($v \neq i$) и $\alpha_i + \beta_i = 1$, назовем близкими наборами относительно x_i . В случае равенства $\alpha_v = \beta_v$ наборы назовем соседними относительно x_i . Если на близких относительно x_i наборах α и β функция F равна единице, то будем говорить, что α и β имеют состязание по x_i .

Например, наборы (1, 2, 1, 1) и (1, 2, 1, 0) будут соседними относительно x_4 , им соответствуют импликанты $x_1 x_3 x_4$ и $x_1 x_3 \bar{x}_4$, наборы (2, 1, 1, 0) и (0, 1, 0, 2) будут близкими наборами относительно x_3 . Соответствующие им импликанты $x_2 x_3 x_4$ и $\bar{x}_1 x_2 x_3$.

Определение. Если наборы α и β имеют состязание относительно x_i , но существует такой набор $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n)$, что $F(\gamma) = 1$, $\gamma_i = 2$, а для $v \neq i$ $\gamma_v = 2$ или $\gamma_v = \alpha_v$ при $\alpha_v \neq 2$ ($= \beta_v$ при $\beta_v \neq 2$), то будем говорить, что наборы α и β не образуют состязаний относительно x_i в таблице значений функции F .

Пусть, например, имеем состязание относительно x_4 наборы $\alpha = (2, 1, 0, 1)$ и $\beta = (0, 1, 2, 0)$. Состязания в таблице значений F для α и β по x_4 не существовало бы, если бы хотя бы на одном из наборов γ , например $\gamma = (0, 1, 0, 2)$, функция равнялась единице.

2. Укажем алгоритм исключения состязаний для заданной булевой функции $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Пусть $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ задана совершенной дизъюнктивной нормальной формой, иначе говоря, таблицей значений, состоящей из 2^n строк.

Определим по совершенной дизъюнктивной нормальной форме функ-

ции $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, т. е. по ее таблице значений, функцию $F_0(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Чтобы перейти к функции F_0 , нужно построить таблицу с 3^n строками, и в строках (наборах) таблицы F_0 , совпадающих со строками (наборами) таблицы функции f , ставим соответствующее значение функции f . В остальных строках таблицы F_0 , где хотя бы одно $x_i=2$, полагаем $F_0=0$.

Исключение состязаний в таблице будет заключаться в том, что от данной функции F_0 переходим к равносильной функции F , уже не имеющей состязаний. Алгоритм исключения состязаний заключается в последовательной ликвидации состязаний по x_1, x_2, \dots, x_n , т. е. в последовательном переходе от функции F_0 к равносильным функциям F_1, F_2, \dots, F_n, F .

1) Построение F_1 по F_0 происходит следующим образом. Находим все пары наборов, имеющие состязания по x_1 . Очевидно, что эти наборы не содержат ни одного $x_i=2$. Поэтому находим только пары наборов α и β , у которых $\alpha_1=0, \beta_1=1$, и $\alpha_v=\beta_v \neq 2$. Для этого рассматриваем только строки с номерами $k, k+3^{n-1}$. Если на этих наборах α и β функция F_0 принимает значение 1, то эти наборы имеют состязания по x_1 (так как F_0 на соответствующих наборах γ равна нулю). Поэтому для набора γ в соответствующей строке с номером $k+2 \cdot 3^{n-1}$ определим $F_1=1$, а в строках α и β единицы, находящиеся в столбцах F_0, F_1 , отмечаем индексом 1, который указывает, что наборы α и β участвовали в ликвидации состязаний по x_1 .

Если в F_0 есть m пар наборов, имеющих состязания по x_1 , то в столбце значений функции F_1 появится m единиц на соответствующих наборах γ . На остальных наборах полагаем $F_1=F_0$.

2) Предположим, что ликвидированы состязания по x_1, x_2, \dots, x_{i-1} , т. е. построена последовательность функций F_1, F_2, \dots, F_{i-1} . Определим F_i следующим образом. Находим такие соседние по x_i наборы α и β , у которых $\alpha_v \neq 2, \beta_v \neq 2$ для $v \geq i$. Для этого разбиваем все 3^n строк на 3^{i-1} частей и в каждой из этих частей рассматриваем пары, номера которых отличаются на 3^{n-i} . Если на таких наборах функция F_{i-1} принимает значение 1, то эти наборы α и β имеют состязания по x_i . Поэтому для набора γ в строке, находящейся ниже строк α и β на 3^{n-i} , полагаем $F_i=1$, а в строках α и β к индексам единиц, находящимся в столбце F_{i-1} , добавляем индекс i , который указывает, что α и β участвовали в состязании по x_i .

Если значения F_{i-1} на наборах α и β имеют общие индексы, то в столбце F_i на наборе γ ставим единицу с индексами, общими данным двум наборам.

На остальных наборах полагаем $F_i=F_{i-1}$.

3) Пусть построена функция F_n . Для перехода от F_n к F достаточно положить $F=0$ на наборах, где $F_n=1$ хотя бы с одним индексом. На прочих наборах полагаем $F=F_n$.

Пример. Построить для булевой функции $y=f(x_1, x_2, x_3)$, заданной табл. 1, функцию $F(x_1, x_2, x_3)$, свободную от состязаний.

В табл. 2 выписаны значения последовательно получаемых функций F_0, F_1, F_2, F_3, F . На $2^3=8$ наборах функция F_0 совпадает со значениями y , на остальных 19 наборах полагаем $F_0=0$.

Переход от F_0 к F_1 состоит в ликвидации состязаний по x_1 на парах наборов: $(0, 0, 1)$, $(1, 0, 1)$ и $(0, 1, 0)$, $(1, 1, 0)$. Строки состязующихся по x_1 наборов отстоят друг от друга на $3^{3-1}=9$. В столбце F_0 на этих четырех наборах значения функции отмечаем индексом 1 и в столбце F_1 ставим единицу для наборов $(2, 0, 1)$, $(2, 1, 0)$. На остальных наборах F_1 совпадает с F_0 . Переходим от F_1 к F_2 , т. е. ликвидируем состязания по x_2 для наборов $(0, 0, 1)$ и $(0, 1, 1)$. Чтобы найти эти два набора, нужно

разбить столбец значений F_1 на три части и в каждой части исследовать пары строк, отстоящие друг от друга на $3^{3-2}=3$. Значения F_1 на данных двух наборах отмечаем индексом 2, находим набор $\gamma=(0, 2, 1)$, строка которого находится ниже состоящих строк на 3, и определяем $F_2(\gamma)=1$. На остальных наборах полагаем $F_2=F_1$ со всеми индексами.

Переход от F_2 к F_3 состоит в ликвидации состязаний по x_3 . Разбиваем столбец F_2 на 9 частей и рассматриваем строки, отстоящие друг от друга на $3^{3-3}=1$. В результате находим составляющиеся наборы $(0, 1, 0)$ и $(0, 1, 1)$. Значения функции на этих наборах отмечаем индексом 3. Находим набор $\gamma=(0, 1, 2)$ и полагаем $F_3(\gamma)=1$. На остальных наборах полагаем $F_3=F_2$. При этом, если $F_2(\delta)=1$ с индексами, то и $F_3(\delta)=1$ с этими же индексами.

Наконец, переходим от F_3 к искомой функции F . Для этого полагаем $F(\alpha)=F_3(\alpha)$, если значения $F_3(\alpha)$ не имеют индексов, и $F(\alpha)=0$, если $F_3(\alpha)$ отмечено индексом. Функция F не имеет состязаний ни по одной из переменных.

3. Следует доказать, что приведенный алгоритм доставляет функцию, свободную от состязаний. Доказательство включает несколько лемм.

Лемма 1. Функции F_0, F_1, \dots, F_n обладают следующим свойством: если в наборе $\gamma=(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n)$ компонента $\gamma_v=2$ при $v > i$, то $F_i(\gamma)=0$.

Для F_0 утверждение очевидно. Предположим, что для F_k предположение справедливо. Докажем, что оно справедливо для F_{k+1} . В самом деле, пусть $F_{k+1}(\gamma)=1$. Если $F_k(\gamma)=1$, то для набора γ утверждение справедливо. Предположим, что $F_k(\gamma)=0$. Но в этом случае равенство $F_{k+1}(\gamma)=1$ выполняется лишь после ликвидации состязаний по x_{k+1} .

Следовательно, существует пара соседних наборов $\alpha=(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$, $\beta=(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$, что $F_k(\alpha)=1, F_k(\beta)=1$. Поэтому $\alpha_v \neq 2, \beta_v \neq 2$ для $v > k, \alpha_{k+1} + \beta_{k+1} = 1$. Следовательно, в наборе γ компонента $\gamma_{k+1}=2$, а $\gamma_v = \alpha_v \neq 2$ при $v > k+1$.

Лемма 2. Пусть для наборов $\alpha=(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ и $\gamma=(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n)$ имеет место соотношение $\gamma_i \triangleright \alpha_i$ ($i=1, 2, \dots, n$). Тогда из $F_v(\gamma)=1$ следует, что $F_v(\alpha)=1$.

Доказательство. Для F_1 лемма очевидна. В самом деле, пусть $F_1(\gamma)=1$. Если $\gamma_1 \neq 2$, то нет отличных от γ наборов, чтобы $\gamma_i \triangleright \alpha_i$. Если $\gamma_1=2$, то есть два набора $\alpha=(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ и $\beta=(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$, для которых $\gamma_i \triangleright \alpha_i, \gamma_i \triangleright \beta_i$. Первые компоненты α_1 и β_1 равны соот-

Таблица 2

x_1	x_2	x_3	F_0	F_1	F_2	F_3	F
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	1 ₁	1 ₁₂	1 ₁₂	1 ₁₂	0
0	0	2	0	0	0	0	0
0	1	0	1 ₁	1 ₁	1 ₁₃	1 ₁₃	0
0	1	1	1 ₁	1 ₂	1 ₂₃	1 ₂₃	0
0	1	2	0	0	0	0	1
0	2	0	0	0	0	0	0
0	2	1	0	0	1	1	1
0	2	2	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	1 ₁	1 ₁	1 ₁	1 ₁	0
1	0	2	0	0	0	0	0
1	1	0	1 ₁	1 ₁	1 ₁	1 ₁	0
1	1	1	0	0	0	0	0
1	1	2	0	0	0	0	0
1	2	0	0	0	0	0	0
1	2	1	0	0	0	0	0
1	2	2	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0	0	0
2	0	1	0	1	1	1	1
2	0	2	0	0	0	0	0
2	1	0	0	1	1	1	1
2	1	1	0	0	0	0	0
2	1	2	0	0	0	0	0
2	2	0	0	0	0	0	0
2	2	1	0	0	0	0	0
2	2	2	0	0	0	0	0

ветственно 0; 1, остальные компоненты совпадают с компонентами набора γ . Очевидно, что $F_0(\alpha) = 1$, $F_0(\beta) = 1$, ибо только в этом случае было возможным определение $F_1(\gamma) = 1$. Но, согласно приведенному алгоритму, из равенства $F_0(\alpha) = F_0(\beta) = 1$ следует, что $F_1(\alpha) = F_1(\beta) = 1$.

Пусть для F_k лемма 2 верна. Докажем справедливость ее для F_{k+1} . Возьмем наборы $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n)$ и $\delta = (\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n)$, где $\gamma_i \triangleright \delta_i$, $F_{k+1}(\gamma) = 1$. Докажем, что $F_{k+1}(\delta) = 1$. Если $F_k(\gamma) = 1$, то по допущению, сделанному выше, $F_k(\delta) = 1$. Следовательно, $F_{k+1}(\delta) = 1$. Пусть теперь $F_k(\gamma) = 0$. Следовательно, $\gamma_{k+1} = 2$, ибо переход от $F_k(\gamma) = 0$ к $F_{k+1}(\gamma) = 1$ происходит, согласно приведенному алгоритму, в результате ликвидации состязания по x_{k+1} двух соседних наборов $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_k, 0, \alpha_{k+2}, \dots, \alpha_n)$ и $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_k, 1, \beta_{k+2}, \dots, \beta_n)$, отличающихся от γ только $(k+1)$ -ой компонентой.

Если $\delta_{k+1} \neq 2$, то из $\gamma_i \triangleright \delta_i$ следует, что $\alpha_i \triangleright \delta_i$ или $\beta_i \triangleright \delta_i$. Но так как $F_k(\alpha) = 1$, то, согласно допущению, $F_k(\delta) = 1$ и поэтому $F_{k+1}(\delta) = 1$.

Пусть теперь $\delta_{k+1} = 2$. Тогда по лемме 1 $F_k(\delta) = 0$. Построим четыре набора:

$$\gamma' = (\gamma_1, \dots, \gamma_k, 1, \gamma_{k+2}, \dots, \gamma_n),$$

$$\gamma'' = (\gamma_1, \dots, \gamma_k, 0, \gamma_{k+2}, \dots, \gamma_n),$$

$$\delta' = (\delta_1, \dots, \delta_k, 1, \delta_{k+2}, \dots, \delta_n),$$

$$\delta'' = (\delta_1, \dots, \delta_k, 0, \delta_{k+2}, \dots, \delta_n).$$

Так как $F_k(\gamma) = 0$, то равенство $F_{k+1}(\gamma) = 1$ стало возможным в результате ликвидации состязания соседних наборов γ' и γ'' . Поэтому $F_k(\gamma') = F_k(\gamma'') = 1$. Но $\gamma'_i \triangleright \delta'_i$, $\gamma''_i \triangleright \delta''_i$. Тогда в соответствии с нашим допущением $F_k(\delta') = F_k(\delta'') = 1$. После применения алгоритма к наборам δ' и δ'' получаем $F_{k+1}(\delta) = 1$.

Лемма 3. Если в таблице для F_k имеются состязания для близких наборов, то обязательно имеются состязания для соседних наборов по той же переменной.

Пусть близкие наборы $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ и $\beta = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$ образуют в таблице значений функции F_k состязания по x_i . Предположим, что $\alpha_v = 2$, $\beta_v \neq 2$, $v \neq i$. Возьмем набор α' такой, что $\alpha'_v = \beta_v$, а для остальных компонент $\alpha'_j = \alpha_j$. Аналогично, если $\beta_p = 2$, $\alpha_p \neq 2$, то возьмем набор β' такой, что $\beta'_p = \alpha_p$, а для остальных компонент $\beta'_j = \beta_j$. Очевидно, что наборы α' и β' являются соседними и $\alpha_i \triangleright \alpha'_i$, $\beta_i \triangleright \beta'_i$. Согласно лемме 2, $F_k(\alpha') = F_k(\beta') = 1$. Если бы соседние наборы α' и β' не имели состязаний по x_i в таблице F_k , то существовал бы набор $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n)$, что $\gamma_i = 2$, а при $v \neq i$ $\gamma_v = 2$ или $\gamma_v = \alpha'_v = \beta'_v$. Но в этом случае не образовывали бы также состязаний наборы α и β по x_i в таблице для F_k .

Теорема. Применение алгоритма последовательного исключения состязаний приводит к таблице, свободной от состязаний.

Так как алгоритм исключает состязания по x_i в таблице значений функции F_i для соседних наборов, то, согласно лемме 3, не будет состязаний и для близких относительно x_i наборов в таблице значений функции F_i . Докажем, что применяя алгоритм к F_{i-1} , мы не создаем состязаний по предыдущим переменным x_k при $k < i$, иначе говоря, в таблице значений функции F_i не существует состязаний по x_1, x_2, \dots, x_i .

Для F_1 утверждение справедливо. Предположим, что утверждение справедливо для функции F_{i-1} . Докажем справедливость утверждения для функции F_i . Предположим противное. Пусть существуют два со-

седних набора $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$, $\beta = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$, которые имеют состязание по x_k , $k < i$. Согласно предположению, они не образуют состязаний для F_{i-1} . Следовательно, $F_{i-1}(\alpha) \neq F_{i-1}(\beta)$. Это свидетельствует о том, что наборы α или β являются результатом ликвидации состязаний по x_i , т. е. $\alpha_i = 2$ или $\beta_i = 2$. Наборы α , β являются соседними, поэтому $\alpha_k = 0$, $\beta_k = 1$, $\alpha_v = \beta_v$, $v \neq k$.

Возьмем два соседних относительно x_i набора α' и α'' , отличающихся от набора α только x_i . Аналогично для набора β возьмем два соседних набора β' и β'' , отличающихся от β только x_i . Согласно лемме 2, $F_i(\alpha') = F_i(\alpha'') = F_i(\beta') = F_i(\beta'') = 1$. Но так как x_i отлично от 2 для α' , α'' , β' , β'' , то $F_{i-1}(\alpha') = F_{i-1}(\alpha'') = F_{i-1}(\beta') = F_{i-1}(\beta'') = 1$. Пусть для α' и β' , $\alpha'_i = \beta'_i$. В этом случае наборы α' и β' являются соседними по x_k . Следовательно, они создают состязания для функции F_{i-1} , что противоречит сделанному допущению.

Если на всех отмеченных наборах для функции F_n определить функцию $F = 0$, а на остальных наборах $F = F_n$, то в таблице значений F не будет состязаний. Это следует из того, что для отмеченного индексами i_1, i_2, \dots, i_k набора α существуют наборы $\gamma^1, \gamma^2, \dots, \gamma^k$, каждый из которых ликвидирует состязание набора α по одному из аргументов с индексами i_1, i_2, \dots, i_k . Если окажется, что некоторые из γ^i тоже отмечены, то для них также имеются наборы γ , ликвидирующие состязания отмеченных наборов γ^i и тем самым ликвидирующие состязания α и т. д. Равносильность F_0, F_1, \dots, F_n, F очевидна.

4. Каноническая таблица для функции $F = F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ имеет треугольную форму и содержит $(n+1)$ столбец. В крайнем правом столбце содержится 3^n номеров, в крайнем левом — один номер. Крайний правый столбец является столбцом реализуемой функции F .

Пусть k -ый столбец, считая справа налево, уже построен и содержит 3^k номеров. Разбиваем этот столбец сверху вниз на тройки номеров, слева и посередине от каждой тройки (a, b, c) ставим номер d в $(k-1)$ -ом столбце, причем разным тройкам (a, b, c) ставим в соответствие разные номера d . Одинаковые тройки нумеруем следующим образом.

Вершины двух кустов k -го столбца с одинаковыми тройками нумеруются одинаковыми номерами только в том случае, если эти вершины определяются отрезками, которым соответствует $x_k = 0$, $x_k = 1$. Это условие является достаточным для предотвращения образования ложных цепей. Но оно является жестким и в некоторых случаях его можно ослабить.

Пусть в k -ом столбце канонической таблицы имеются две тройки одинаковых номеров. Нужно выяснить, можно ли их занумеровать одинаковыми номерами. Для этого рассматриваются две ломаные, определяемые входными вершинами кустов для данных троек. Каждая из этих ломаных состоит из k отрезков, которым соответствуют два набора $x_1 = \alpha_1, x_2 = \alpha_2, \dots, x_k = \alpha_k$ и $x_1 = \beta_1, x_2 = \beta_2, \dots, x_k = \beta_k$. Рассматриваем эти наборы, начиная с последних α_k, β_k . Если для каждой пары α_i, β_i выполняется одно из следующих условий, то данные две вершины можно нумеровать одинаковыми номерами:

а) если $\alpha_i = 1$ и $\beta_i = 1$ ($\alpha_i = 0$ и $\beta_i = 0$), то вершины $\alpha_i = 2$ и $\beta_i = 2$ должны иметь номер 0.

б) если $\alpha_i = 1$, ($\alpha_i = 0$) и $\beta_i = 2$, то вершины с $\alpha_i = 2$ и $\beta_i = 1$, ($\beta_i = 0$) должны иметь номер 0. Так же относительно $\alpha_i = 2$.

в) если $\alpha_i = 2$ и $\beta_i = 2$, то вершины с $\alpha_i = 1$, $\alpha_i = 0$, $\beta_i = 1$, $\beta_i = 0$ должны иметь номер 0.

Такая проверка прекращается на i -ом шаге, если $\alpha_i = 0$ и $\beta_i = 1$ или

$\alpha_i = 1$ и $\beta_i = 0$. В остальных случаях одинаковым тройкам ставятся в соответствие разные номера d . Тройке номеров $(0, 0, 0)$, ставим в соответствие номер 0. Для элементов с односторонней проводимостью можно пользоваться обычной методикой нумерации [1, 2]. При нумерации узлов канонической таблицы рекомендуется вначале проставить все номера 0.

Реализация канонической таблицы сводится к реализации кустов с различными номерами. На каждом ярусе канонической таблицы раз-

мещаются контакты только одного реле. Каждый куст $\begin{pmatrix} a \\ d & b \\ c \end{pmatrix}$ канонической таблицы заменяется переключателем, причем верхнему ребру куста соответствует цепь, замкнутая через размыкающий контакт переключателя, среднему ребру — цепь, замкнутая через замыкающий контакт переключателя, нижнему ребру соответствует короткозамкнутая цепь, т. е. цепь, в которую данный переключатель не включен.

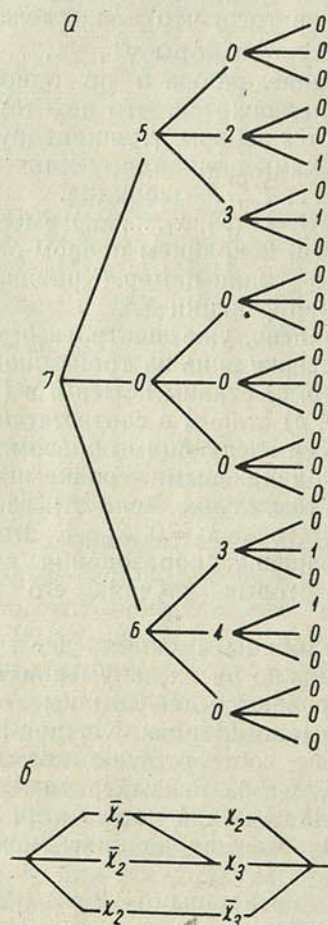


Рис. 2

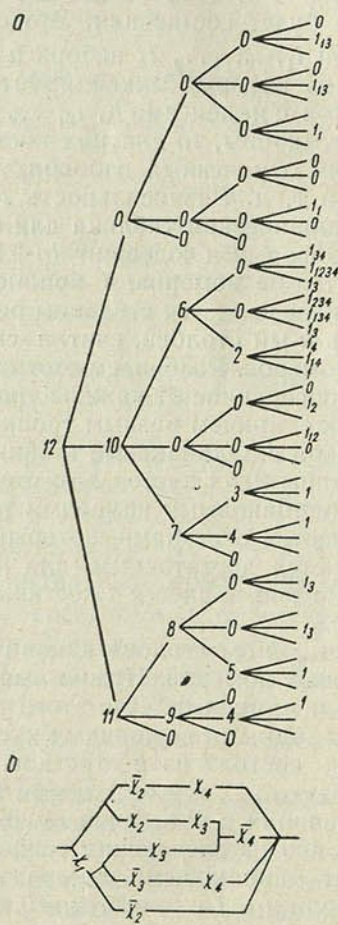


Рис. 3

Каноническая таблица и соответствующая ей схема для функции F , заданной табл. 2, даны на рисунке 2.

Построение по булевой функции $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ канонической таблицы для F можно проводить непосредственно на рисунке, не выписыв-

вая последовательно значения F_1, F_2, \dots, F_n . Проиллюстрируем это положение на примере.

Пример. Построить для булевой функции $y=f(x_1, x_2, x_3, x_4)$, заданной табл. 3, схему, свободную от статических состязаний контактов.

Так как функция y является функцией 4 переменных, то столбец функции должен содержать $3^4=81$ значение. Отметим столбец из 81 точек, который будем считать столбцом реализуемой функции. Построим по этому столбцу точек дерево (скелет) канонической таблицы. Если в каждом узле дерева перечеркнуть нижнюю ветвь и все ветви справа от нее, а в полюсах неперечеркнутых ломаных проставить в естественном порядке значения булевой функции y , то получим функцию F_0 , значения которой в полюсах перечеркнутых ломаных равны нулю. Так как каждой ломаной канонической таблицы соответствует только один набор, то в дальнейшем мы будем отождествлять ломаную и соответствующий ей набор.

Для нахождения состязающихся по x_1 соседних наборов нужно разбить столбец функции канонической таблицы на $3^1=3$ части и наложить друг на друга первую и вторую части. Тогда каждые две совпавшие единицы дадут пару состязающихся по x_1 наборов. Такими наборами будут $(0, 0, 0, 0)$ и $(1, 0, 0, 0)$, $(0, 0, 1, 1)$ и $(1, 0, 1, 1)$, $(0, 1, 1, 0)$ и $(1, 1, 1, 0)$. Выходные единицы, соответствующие этим наборам, отмечаем индексом 1, а в полюсах ломаных, которым соответствуют γ -наборы $(2, 0, 0, 0)$, $(2, 0, 1, 1)$ и $(2, 1, 1, 0)$, ставим 1.

Для нахождения состязающихся по x_2 наборов необходимо разбить столбец функции канонической таблицы на $3^2=9$ частей и наложить друг на друга 1 и 2, 4 и 5, 7 и 8 части. Тогда каждые две совпавшие 1 дадут пару наборов, имеющих состязания по x_2 . Это наборы: $(1, 1, 0, 1)$ и $(1, 0, 0, 1)$, $(1, 0, 1, 0)$ и $(1, 1, 1, 0)$. Выходные единицы, соответствующие этим наборам, отмечаем индексом 2. Ломаные, соответствующие наборам $\gamma'=(1, 2, 0, 1)$ и $\gamma''=(1, 2, 1, 0)$, лежат в части 9. В полюсах этих ломаных ставим 1.

Аналогично находятся наборы, состязающиеся по x_3 . Это будут наборы: $(0, 0, 0, 1)$ и $(0, 0, 1, 1)$, $(2, 0, 0, 1)$ и $(2, 0, 1, 1)$, $(1, 0, 0, 0)$ и $(1, 0, 1, 0)$, $(1, 0, 0, 1)$ и $(1, 0, 1, 1)$. Эти наборы отмечаем индексом 3. Наборы $(0, 0, 0, 1)$ и $(0, 0, 1, 1)$ уже имеют общий индекс 1, поэтому в полюсе ломаной, соответствующей набору $\gamma=(0, 0, 2, 1)$, ставим 1 с индексом 1. На γ -наборах $(2, 0, 2, 1)$, $(1, 0, 2, 0)$ и $(1, 0, 2, 1)$ ставим 1.

По x_4 состязаются наборы: $(1, 0, 0, 0)$ и $(1, 0, 0, 1)$, $(1, 0, 1, 0)$ и $(1, 0, 1, 1)$, $(1, 0, 2, 0)$ и $(1, 0, 2, 1)$. Первые четыре набора имеют общий индекс 3, поэтому на наборах $\gamma'=(1, 0, 0, 1)$ и $\gamma''=(1, 0, 1, 2)$ ставим 1 с индексом 3, а на наборе $\gamma=(1, 0, 2, 2)$ ставим 1 без индекса. Состязания по всем переменным ликвидированы. Для нумерации узлов таблицы нужно учесть следующее: все единицы с индексами при нумерации узлов считаем нулями, остаются только единицы без индексов. Каноническая таблица и схема даны на рис. 3, а, б.

Таблица 3

x_1	x_2	x_3	x_4	y
0	0	0	0	0
0	0	0	1	1
0	0	1	0	0
0	0	1	1	1
0	1	0	0	0
0	1	0	1	0
0	1	1	0	1
0	1	1	1	0
1	0	0	0	1
1	0	0	1	1
1	0	1	0	1
1	0	1	1	1
1	1	0	0	0
1	1	0	1	1
1	1	1	0	1
1	1	1	0	1
1	1	1	1	0

ЛИТЕРАТУРА

1. Блох А. Ш. Автоматика и телемеханика, 22, № 6, 1961.
2. Блох А. Ш. Автоматика и телемеханика, 23, № 4, 1962.
3. Рогинский В. Н. Автоматика и телемеханика, 20, № 10, 1959.
4. Huffman D. A. J. ASSOC. Comput. Mach., № 4, 1, 1957.
5. Моисил Гр. К. Bull. Math. de la Soc. Sci. Math. Phys. de R.P.R. t., 1(49), № 2, 1957.
6. Рогинский В. Н. Автоматика и телемеханика, 22, № 10, 1961.
7. Воржева В. В. Сб. «Структурная теория релейных устройств». М., 1963.
8. Якубайтис Э. А. Сб. «Автоматика и вычислительная техника», в. 7, 1964.

Поступило в редакцию 12.III 1965 г.

В. А. ЛІСКОВЕЦ, В. З. ФЕЙНБЕРГ

ОБ АВТОМАТНЫХ ОТОБРАЖЕНИЯХ

Пусть X и Y — 2 конечных алфавита, а F и K — множества всех слов в алфавитах X и Y соответственно. Рассмотрим множество отображений F в K , реализуемых абстрактными автоматами (конечными или бесконечными), для которых X служит входным алфавитом, а Y — выходным. Такие отображения F в K называются автоматными. По В. М. Глушкову [1], всякое автоматное отображение φ множества F в K удовлетворяет следующим четырем условиям:

1. φ — однозначное отображение (вообще говоря, частичное) F в K .
2. Область определения отображения φ удовлетворяет условию полноты, т. е. вместе с любым содержащимся в ней словом содержит также все начальные отрезки этого слова. Пустое слово входит в область определения φ .
3. Отображение φ сохраняет длину слова: для $p \in F$ $\varphi(p)$ и p имеют равные длины.
4. φ переводит начальный отрезок слова p , на котором оно определено, в начальный отрезок слова $\varphi(p)$.

Всякое отображение φ , удовлетворяющее условиям 1—4, является автоматным (т. е. существует реализующий его автомат). Условия 1—4 называются условиями автоматности отображения [1].

Пусть теперь входной и выходной алфавиты совпадают. Множество A всех автоматных подстановок на F является группой [4]. Множество P всех вполне определенных (т. е. заданных всюду на F) автоматных отображений F в себя является, как легко видеть, полугруппой с единицей. Полугруппа P и группа A называются *автоматными*. В [3] решаются некоторые вопросы, относящиеся к данной области. Там же сформулирован ряд проблем. Некоторые результаты для A получены в [4, 8].

В этой статье изучаются свойства P и A . В § 3 исследуется строение P и A : показывается, что ограничения P и A на словах длины r , $r > 0$ являются сплетениями симметрических полугрупп и групп соответственно. Операция сплетения полугрупп вводится нами в § 2 по аналогии со сплетением групп (см. [5]). Для группы A аналогичные результаты получены ранее В. П. Заровным [8]. В § 3, кроме того, устанавливаются некоторые алгебраические свойства P и A , допускающие интерпретацию в теории автоматов. В § 4 развивается другой взгляд на P и A . Если ввести в множество F операцию V сокращения буквы справа: $V(px) = p$, $V(x) = V(e) = e$, $p \in F$, $x \in Xe$ — пустое слово, то F станет алгеброй с одной унарной операцией V , для которой P будет полугруппой всех изометрических (сохраняющих длину слова) эндоморфизмов, а A — группой всех автоморфизмов. В § 5 устанавливается зависимость между условиями автоматности для подстановок.

Свойства P и A очень близки. Результаты для них даются параллельно.

Авторы выражают глубокую благодарность Д. А. Супруненко, под руководством которого выполнена настоящая работа. Они благодарны также Р. И. Тышкевич за ценную помощь в работе.

§ 1. ОБОЗНАЧЕНИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Число букв в алфавите X обозначим n ; $n > 1$. F — свободная полугруппа с единицей e в алфавите X . P — автоматная полугруппа, A — автоматная группа. Длину слова $p \in F$ будем обозначать $|p|$. Множество всех слов из F длины r , $r \geq 0$, обозначим F_r , а множество слов длины r или меньшей — E_r . $E_r = \sum_{s=0}^r F_s$, $F_s \cap F_k = \emptyset$, $s \neq k$. Симметрическую полугруппу отображений множества M в себя (симметрическую группу подстановок на M) обозначим Σ_M (соответственно S_M). Отображение из Σ_F (Σ_{E_r}) называют *изометрическим*, если оно сохраняет длины всех слов. Все изометрические отображения из Σ_F образуют полугруппу U_F , на E_r полугруппа U_F индуцирует полугруппу U_{E_r} . U_F и U_{E_r} называются *изометрическими полугруппами*. Условие автоматности 3 означает изометричность элементов P , т. е. $P \subseteq U_F$. Полугруппа P (группа A) индуцирует на F_r полугруппу P_r (группу A_r), а на E_r — полугруппу Q_r (группу B_r). Эти полугруппы (группы) также назовем автоматными. Элементы P_r будем иногда обозначать буквами с соответствующим индексом: $g_r \in P_r$. Пусть $g \in P$ и g индуцирует на F_r и F_s , $s < r$, отображения g_r и g_s , тогда скажем, что g_r индуцирует g_s . Из условия автоматности 4 следует, что g_r однозначно задает g_s , хотя само g_r может индуцироваться разными $g \in P$. Наконец, порядок полугруппы G обозначим $o(G)$.

§ 2. СПЛЕТЕНИЕ ПОЛУГРУПП. ПОДОБИЕ ПОЛУГРУПП ОТОБРАЖЕНИЙ

1. В этом параграфе мы введем необходимую для дальнейшего операцию сплетения полугрупп аналогично тому, как это делается для групп (ср. [5, 6]).

Пусть C и D — две полугруппы с единицей преобразований множеств L и M в себя соответственно. *Сплетением* их $W = C \int D$ назовем полугруппу всех отображений множества $L \times M$ в себя таких, что для $\omega \in W$, $l \in L$, $m \in M$ $\omega(l, m) = (c^m(l), d(m))$, $c^m \in C$, $d \in D$. Элементы W можно изображать парами

$$\omega = \langle (c^m), d \rangle, \quad (1)$$

где (c^m) — семейство элементов из C ; $d \in D$; $m \in M$. Для $\omega = \langle (c^m), d \rangle$, $l \in L$, $m_0 \in M$

$$\omega(l, m_0) = (c^{m_0}(l), d(m_0)). \quad (2)$$

Отсюда вытекает, что $\langle (c^m), d \rangle = \langle (z^m), f \rangle$ тогда и только тогда, когда $d = f$ и $c^m = z^m$ для каждого $m \in M$.

Из (2) вытекает также, что элементы сплетения перемножаются по следующей формуле:

$$\langle (c_2^m), d_2 \rangle \langle (c_1^m), d_1 \rangle = \langle (c_2^{d_1(m)} c_1^m), d_2 d_1 \rangle. \quad (3)$$

Легко видеть, что W — действительно полугруппа (с единицей).

Если $M = \{1, 2, \dots, k\}$ — конечное множество, то пару (1) удобно изображать в виде: $\omega = \langle (c^1, c^2, \dots, c^k), d \rangle$. Из формулы (3) тогда получим

$$\begin{aligned} \langle (c_2^1, \dots, c_2^k), d_2 \rangle \langle (c_1^1, \dots, c_1^k), d_1 \rangle &= \\ &= \langle (c_2^{d_1(1)} c_1^1, \dots, c_2^{d_1(k)} c_1^k), d_2 d_1 \rangle. \end{aligned} \quad (4)$$

Совокупность всех отображений $\omega \in W$ вида $\omega = \langle (c^m), e \rangle$, где e — единица D , образует подполугруппу H полугруппы W . Совокупность всех отображений $\omega \in W$ вида $\omega = \langle (1^m), d \rangle$, где 1 — единица S , также образует подполугруппу G .

Лемма 1. 1. $W = GH$.

2. Если W конечна, то $o(W) = o(G) \cdot o(H)^*$.

3. $G \cong D$. Если M — конечно, то H — прямое произведение***) k экземпляров полугруппы S , где k — количество элементов в M .

Доказательство. Для любого $\omega \in W$ в силу (3) $\omega = \langle (c^m), d \rangle = \langle (1^m), d \rangle \langle (c^m), e \rangle$. Пункт 1 доказан. Пусть $g = \langle (1^m), d \rangle$, $g_1 = \langle (1^m), d_1 \rangle$, $h = \langle (c^m), e \rangle$, $h_1 = \langle (c_1^m), e \rangle$. Если $gh = g_1 h_1$, то $\langle (c^m), d \rangle = \langle (c_1^m), d_1 \rangle$ и $g = g_1$, $h = h_1$. Следовательно, каждый элемент $\omega \in W$ лишь единственным образом представляется в виде $\omega = gh$, $g \in G$, $h \in H$. Отсюда следует пункт 2 и первое утверждение пункта 3. В силу (4) $\langle (c^1, 1, \dots, 1), e \rangle \langle (1, c^2, 1, \dots, 1), e \rangle \dots \langle (1, \dots, 1, c^k), e \rangle = \langle (c^1, c^2, \dots, c^k), e \rangle$, откуда следует второе утверждение пункта 3.

Лемма доказана.

Лемма 2. Пусть в тех же обозначениях $M = \{1, 2, \dots, k\}$, R и T — системы образующих полугрупп S и D . Если группа всех обратимых элементов полугруппы D транзитивна, то W имеет систему образующих U , состоящую из всех отображений $\langle (c, 1, \dots, 1), e \rangle$, $\langle (1, \dots, 1), d \rangle$, где c и d пробегают R и T соответственно. Если при этом R и T — неприводимые системы образующих полугрупп S и D , то U — неприводимая система образующих W .

Доказательство. Очевидно, полугруппа G порождается всеми $\langle (1, \dots, 1), d \rangle$, где $d \in T$. Покажем, что H порождается элементами U . Так как H — прямое произведение полугрупп S , то достаточно построить все $f_i^c = \langle (1, \dots, 1, c, 1, \dots, 1), e \rangle$, где c — i -ая компонента вектора $(1, \dots, 1, c, 1, \dots, 1)$, $c \in R$. Пусть $i \neq 1$, тогда существует такая подстановка $d \in D$, что $d(i) = 1$. $b = \langle (1, \dots, 1), d \rangle$, $b \in G$, $f_i^c \in U$. Тогда $b^{-1} f_i^c b = \langle (1, \dots, 1), d^{-1} \rangle \langle (c, 1, \dots, 1), e \rangle \times \times \langle (1, \dots, 1), d \rangle = \langle (1, \dots, 1, c, 1, \dots, 1), e \rangle = f_i^c$. Лемма доказана.

Следствие. Пусть L_1, L_2, \dots, L_r — конечные множества, D_1, D_2, \dots, D_r — действующие в них полугруппы отображений с единицей, причем для $i=2, \dots, r$ группа обратимых элементов из D_i транзитивна. Если s_i — число элементов в некоторой (неприводимой) системе образующих D_i , то $D_1 \int D_2 \int \dots \int D_r^{***}$ имеет (неприводимую) систему

образующих, содержащую $\sum_{i=1}^r s_i$ элементов.

*) $o(W)$ — порядок W .

**) Операция прямого произведения определяется точно так же, как для групп.

***) Легко видеть, что операция сплетения ассоциативна.

2. Пусть M и N — произвольные множества, S — некоторая система преобразований M в себя, а T — некоторая система преобразований N в себя. Если существуют такие взаимно однозначные отображения ψ множества M на N и $\varphi: S$ на T , что для $m \in M$ и $s \in S$

$$t(\varphi(m)) = \varphi(s(m)), \quad (5)$$

где $t = \psi(s)$, то будем называть системы отображений S и T подобными. Равенство (5) можно записать в виде $\psi(s) = \varphi s \varphi^{-1}$ для любого $s \in S$. Отсюда

$$T = \varphi S \varphi^{-1}. \quad (6)$$

§ 3. СТРОЕНИЕ P И A

1. Условие автоматности 4 может быть записано следующим образом:

$$g(pq) = g(p)g^p(q), \quad (7)$$

где $p, q \in F$; $g^p(q) \in \Sigma_F$; $g \in P$.

Как известно (см. [2]), $g^p(q)$ при фиксированном p также являются автоматными. Кроме того, если $g \in A$, то $g^p(q)$ — подстановка. Равенство (7) можно переписать в виде

$$g(x_1, \dots, x_r) = g(x_1)g^{x_1}(x_2) \dots g^{x_1 x_2 \dots x_{r-1}}(x_r),$$

где $x_i \in X$, $i = 1, 2, \dots, r$, $r > 1$.

Теорема 1. *Группа A интранзитивна, F_r суть системы интранзитивности A . Для $r > 1$ A_r — импримитивная группа. Слова pq , где p — фиксированное слово, $|p| < r$, а q пробегает все $F_{r-|p|}$, являются системами импримитивности A_r .*

Доказательство. Пусть $p_1 = x_1 x_2 \dots x_r$ и $p_2 = y_1 y_2 \dots y_r$ — произвольные слова из F_r , $x_i, y_i \in X$. Докажем, что в A_r найдется подстановка g_r , переводящая p_1 в p_2 . Определим отображение $g: F \rightarrow F$ следующим образом: для $p = x_1 x_2 \dots x_i z_{i+1} \dots z_m$, $i \leq r$, $z_{i+1} \neq x_{i+1}$, $z_k \in X$

$$g(p) = y_1 y_2 \dots y_i z_{i+1} \dots z_m;$$

$$g(x_1 x_2 \dots x_i) = y_1 y_2 \dots y_i.$$

Если никакой начальный отрезок слова $p \in F$ не является начальным отрезком слова p_1 , то положим $g(p) = p$. Очевидно, g — обратимое автоматное отображение. Отображение g_r , индуцированное отображением g на F_r , принадлежит A_r , $g_r(p_1) = p_2$. Следовательно, A_r — транзитивная группа. Остальные утверждения теоремы очевидны.

Следствие. A есть подпрямое произведение групп A_r .

Теорема 1 верна и для полугруппы P . Под разбиением F на системы импримитивности мы понимаем в этом случае такое разбиение $F = \bigcup_{\alpha \in I} X_\alpha$, $\alpha \in I$, что для $g \in P$, $\alpha, \beta \in I$, $g(X_\alpha) \subseteq X_\beta$.

Теорема 2. *Полугруппа Q_r (группа B_r) изоморфна полугруппе P_r (соответственно группе A_r).*

Доказательство очевидным образом следует из того факта, что задание автоматных отображений на словах длины r однозначно определяет их значение на словах меньшей длины.

Лемма 3. *Для того чтобы отображение φ множества F_r , $r > 1$ в себя было автоматным, необходимо и достаточно, чтобы существовало такое отображение g множества F_{r-1} в себя, что*

$$1) \text{ для } p \in F_{r-1}, x \in X \quad \varphi(px) = g(p)y, y \in X.$$

$$2) g \text{ — автоматное отображение, т. е. } g \in P_{r-1}.$$

Доказательство. Необходимость очевидна, а для достаточности надо показать только, что если φ удовлетворяет условиям леммы, то оно индуцируется некоторым $g \in P_r$. g можно построить так, как в доказательстве теоремы 1.

Теорема 3. Для $r > 1$ полугруппа P_r подобна, как полугруппа отображений (см. определение в § 2), сплетению $\Sigma_X \int P_{r-1}$, а группа A_r подобна $S_X \int A_{r-1}$.

Доказательство. В силу (6) надо найти такие взаимно однозначные отображения

$$\varphi: F_r \rightarrow X \times F_{r-1},$$

$$\psi: P_r(A_r) \rightarrow \Sigma_X \int P_{r-1}(S_X \int A_{r-1}),$$

чтобы $\varphi g \varphi^{-1} = \psi(g)$ для любого $g \in P_r(A_r)$.

Положим $\varphi(px) = (x, p)$, $p \in F_{r-1}$, $x \in X$. Если $h \in \Sigma_X \int P_{r-1}$, то в силу (2)

$$h(x, p) = (h^p(x), g_{r-1}(p)), \quad (8)$$

где $x \in X$; $p \in F_{r-1}$; $h^p \in \Sigma_X$; $g_{r-1} \in P_{r-1}$ (или $g_{r-1} \in A_{r-1}$, если $h \in S_X \int A_{r-1}$).

Продолжим g_{r-1} до отображения $g_r \in P_r$:

$$g_r(px) = g_{r-1}(p)h^p(x), \quad (9)$$

где h^p и g_{r-1} определяются (8). В силу леммы 3, $g_r \in P_r(A_r)$. Положим $\psi: g_r \rightarrow h$, где g_r и h определяются соотношениями (8) и (9). Легко видеть, что φ — взаимно однозначное отображение F_r на $X \times F_{r-1}$, а ψ — взаимно однозначное отображение $P_r(A_r)$ на $\Sigma_X \int P_{r-1}(S_X \int A_{r-1})$.

Для $x \in X$, $p \in F_{r-1}$ и $g_r \in P_r$ имеем $\varphi g_r \varphi^{-1}(x, p) = \varphi g_r(px) = \varphi(g_{r-1}(p) \times h^p(x)) = (h^p(x), g_{r-1}(p))$. С другой стороны, $\psi(g_r)(x, p) = h(x, p) = (h^p(x), g_{r-1}(p))$. Следовательно, $\varphi g_r \varphi^{-1} = \psi(g_r)$. Теорема доказана.

Теорема 4. Автоматная полугруппа P_r подобна, как полугруппа отображений, $\Sigma_X \int \Sigma_X \int \dots \int \Sigma_X$, автоматная группа A_r подобна $S_X \int S_X \int \dots \int S_X$, где берется r сплетающихся сомножителей.

Доказательство получается последовательным применением предыдущей теоремы.

Следуя Л. А. Калужнину [6], можно сказать, что $P_r(A_r)$ подобна метасимметрической полугруппе (группе) метастепени (n, n, \dots, n) .

Таким образом, теорема 4 полностью решает вопрос о строении автоматной полугруппы P_r (группы A_r).

Для группы A_r такой же результат был получен ранее В. П. Заровным [8].

2. Перейдем к изучению образующих P_r и A_r . Как указано в [3], такой вопрос интересен с точки зрения интерпретации. Из [4] очевидно вытекает, что A не имеет конечной системы образующих (легко видеть, что это же справедливо и для P). См. также [8].

Теорема 5. $P_r(A_r)$ имеет неприводимую систему образующих, состоящую из $r \sigma_n(rs_n)$ элементов, где $\sigma_n(s_n)$ — минимальное число образующих $\Sigma_X(S_X)$, n — число букв в X .

Доказательство вытекает из леммы 2 и теоремы 4.

Как известно (это следует, например, из [7]), минимальная по числу система образующих S_n , $n > 2$ состоит из 2 подстановок. В качестве такой системы можно взять цикл $(1, 2, \dots, n)$ и транспозицию $(1, 2)$. Легко видеть, что Σ_n имеет минимальную систему образующих, со-

стоящую из 3 отображений. Достаточно к образующим S_n добавить отображение $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Отсюда получается

Следствие. $P_r(A_r)$ имеет неприводимую систему образующих, состоящую из $3r$ ($2r$) элементов, $n > 2^*$).

Такая система образующих $P_r(A_r)$ может быть построена естественным образом исходя из указанной выше системы образующих $\Sigma_n(S_n)$. При этом она может быть упорядочена таким образом, что $3s$ первых ее элементов ($2s$ для случая группы), $1 \leq s < r$, порождают (с точностью до изоморфизма) полугруппу P_s (группу A_s).

3. В силу теоремы 3, P_r можно отождествить со сплетением $\Sigma_X \{P_{r-1}$, а A_r — со сплетением $S_X \{A_{r-1}$. Обозначим H_r (аналогично D_r) совокупность всех элементов $P_r(A_r)$ вида $\langle (c_1, \dots, c_{n^{r-1}}), e \rangle$, где $c_i \in \Sigma_X(S_X)$; e — единица A_{r-1} ; n^{r-1} — число слов в F_{r-1} .

В силу леммы 1, H_r — подполугруппа P_r , H_r — прямое произведение n^{r-1} экземпляров полугруппы Σ_X . D_r — нормальный делитель A_r , являющийся прямым произведением n^{r-1} экземпляров группы S_X [5].

Полугруппу (группу) всех отображений вида $\langle (1, \dots, 1), d \rangle$, где d пробегает $P_{r-1}(A_{r-1})$, которая изоморфна $P_{r-1}(A_{r-1})$, будем обозначать также $P_{r-1}(A_{r-1})$. Тогда в силу леммы 1

$$P_r = P_{r-1}H_r; \quad A_r = A_{r-1}D_r;$$

$$o(P_r) = o(P_{r-1})o(H_r); \quad o(A_r) = o(A_{r-1})o(D_r).$$

Отсюда следует

$$\text{Теорема 6. } P_r = H_1H_2 \dots H_r; \quad A_r = D_1D_2 \dots D_r;$$

$$H_i \cap H_j = (e); \quad D_i \cap D_j = (e), \quad i \neq j.$$

$$\text{Следствие 1. } o(P_r) = (n^n)^{\frac{n^{r-1}}{n-1}}; \quad o(A_r) = (n!)^{\frac{n^{r-1}}{n-1}}.$$

Порядок группы A_r ранее был подсчитан В. П. Заровным [4].

Следствие 2. Любой элемент $g_r \in P_r$ единственным образом представляется в виде произведения $g_r = h_1h_2 \dots h_r$, где $h_i \in H_i$.

Таким образом, в силу следствия 2, g_r можно задавать конечной последовательностью h_1, h_2, \dots, h_r , где $h_i \in P_i$ и h_i меняет только i -ую букву слова, поданного на вход (вообще говоря, по-разному для разных начальных отрезков слов длины $i-1$, $i > 1$). Очевидно, вообще любое $g \in P$ можно задать счетной последовательностью

$$h_1, h_2, \dots, h_r, \dots$$

Следует отметить, что в этом представлении преобразование каждого слова происходит в порядке, обратном естественному, т. е. начиная с последней буквы слова.

§ 4. P — ПОЛУГРУППА ЭНДОМОРФИЗМОВ.

A — ГРУППА АВТОМОРФИЗМОВ

В этом параграфе мы представим P как полугруппу изометрических эндоморфизмов некоторой алгебры с одной унарной операцией, заданной на F , A будет группой всех автоморфизмов этой алгебры. Вместе с тем будет получено другое определение условий автоматности, эквивалентное условиям 1—4.

*) При $n = 2$ аналогично можно указать систему образующих A_r , состоящую из r элементов. Эта система является минимальной, так как всякая система образующих A_r при $n > 1$ содержит не менее r элементов [8].

Построим следующее отображение V множества F в себя: $V(e) = e$, $V(x) = e$, $V(px) = p$, где $x \in X$, $p \in F$, e — пустое слово. Для $r > 0$ $V(F_r) = F_{r-1}$. Обозначим V_r ограничение V на E_r .

Теорема 7. Полугруппа P является централизатором отображения V в изометрической полугруппе $U_F: P = Z_{U_F}(V)$. Q_r — централизатор V_r в U_{E_r} . Группа A — централизатор V в симметрической группе S_F . B_r — централизатор V_r в S_{E_r} .

Доказательство. Покажем сначала, что

$$P \subseteq Z_{U_F}(V). \quad (10)$$

Для $g \in P$ $Vg(e) = V(e) = e$, $gV(e) = g(e) = e$. Если $q \in F$, $q \neq e$, то запишем q в виде $q = px$, $x \in X$. Тогда $gV(q) = gV(px) = g(p)$, $Vg(q) = Vg(px) = V(g(p)g^p(x)) = g(p)$, ибо $g^p(x) \in X$. Следовательно, $Vg = gV$, $P \subseteq Z_{U_F}(V)$.

Пусть, обратно, $g \in Z_{U_F}(V)$. Покажем, что g удовлетворяет всем условиям автоматности и, следовательно, $g \in P$. $g(e) = e$, ибо $V(e) = e$ и $Vg = gV$. Если $q \in F$, $|q| > 1$, то можно представить q в виде $q = vp$, где $v \in F$, $p \in F$, $|p| = k < |q|$, т. е. $v \neq e$. Положим $q_1 = g(q)$, тогда $|q_1| = |q|$, ибо $g \in U_F$, и, следовательно, q_1 можно представить в виде $q_1 = v_1p_1$, $|v_1| = |v|$, $|p_1| = k$. Тогда $g(v) = gV^k(vp) = V^kg(vp) = V^k(v_1p_1) = v_1$, откуда $g(vp) = g(v)p_1$. Итак, g — автоматное отображение, т. е.

$$Z_{U_F}(V) \subseteq P. \quad (11)$$

Из включений (10) и (11) следует, что $P = Z_{U_F}(V)$. Для P теорема доказана.

Далее $A = P \cap S_F = Z_{U_F}(V) \cap S_F$, $Z_{S_F}(V) = Z_{U_F}(V) \cap S_F$. Значит, для A остается доказать, что $Z_{S_F}(V) \cap S_F = Z_{U_F}(V) \cap S_F$, т. е. что все подстановки из $Z_{S_F}(V)$ изометричны. Пусть, напротив, есть подстановка g на F , перестановочная с V , и существует такое $p \in F$, что $g(p) = p_1$, $|p| = k$, $|p_1| = k_1$, $k_1 \neq k$. Мы всегда можем предположить здесь $k_1 > k$, так как в противном случае можно вместо g рассмотреть g^{-1} . Тогда $p_1 = qv$, $|v| = k$, $q \neq e$, $gV^k = V^kg$, значит, $V^kg(p) = V^k(qv) = q = gV^k(p) = g(e)$. Итак, $g(e) = q$. Поэтому $gV(e) = g(e) = q$, а $Vg(e) = V(q) \neq q$, так как $q \neq e$. Таким образом, $gV \neq Vg$, что противоречит условию $g \in Z_{S_F}(V)$. Значит, и для A теорема доказана. Что касается Q_r и B_r , то для них теорема уже очевидна: они индуцированы P и A . Теорема полностью доказана.

Замечание. Теорема 7 означает, что для отображения g множества F в себя требование перестановочности с V (вместе с условием изометричности для отображений) равносильно условиям автоматности 1—4, т. е. является другой формой задания автоматности отображений. Можно ожидать, что на этом языке полезно выразятся многие свойства автоматных отображений. Строение $Z_{S_{E_r}}(V_r)$ описано в [9].

Легко доказывается следующее

Следствие. $P(Q_r)$ есть подполугруппа $Z_{S_F}(V)$ (соответственно $Z_{S_{E_r}}(V_r)$) всех таких отображений g , которые в e переводят только e .

Множество $F(E_r)$ вместе с внесенной в него операцией $V(V_r)$ является алгеброй с одной унарной операцией, которую мы будем обозначать $\langle F, V \rangle$ (соответственно $\langle E_r, V_r \rangle$). Тогда теорема 7 может быть сформулирована так [9]:

Теорема 7'. P — полугруппа всех изометрических эндоморфизмов алгебры $\langle F, V \rangle$, A — группа всех ее автоморфизмов. Q_r — полугруппа всех изометрических эндоморфизмов алгебры $\langle E_r, V_r \rangle$, B_r — группа всех ее автоморфизмов.

Заметим, что результаты, изложенные выше, мы могли бы, вообще говоря, вывести из теоремы 7 и результатов [9].

Теорема 7' допускает следующее обобщение. Пусть X — входной, Y — выходной алфавиты, F и K — множества слов в алфавитах X и Y соответственно. Определим отображения $V_F: F \rightarrow F$ и $V_K: K \rightarrow K$ так, как определено V в начале этого параграфа. Обозначим $\langle F, V_F \rangle$ ($\langle K, V_K \rangle$) — алгебру с одной унарной операцией, в которую превращается множество $F(K)$ после внесения в него операции $V_F(V_K)$. Тогда справедлива

Теорема 7''. Всякое частичное автоматное отображение F в K является изометрическим гомоморфизмом алгебры $\langle F', V'_F \rangle$ в $\langle K, V_K \rangle$, где F' — множество, на котором определено g , а V'_F — ограничение V_F на F' . Обратно, всякий изометрический гомоморфизм подалгебры $\langle F', V'_F \rangle$ алгебры $\langle F, V_F \rangle$ в алгебру $\langle K, V_K \rangle$, где множество F' удовлетворяет условию полноты 2, является автоматным отображением F в K с областью определения F' .

Здесь существенную роль играет тот факт, что если $F' \subseteq F$ удовлетворяет условию полноты 2, то V_F отображает F' в себя.

§ 5. УСЛОВИЯ АВТОМАТНОСТИ ДЛЯ ПОДСТАНОВОК

Если отображение $g \in \Sigma_F$ является подстановкой, то условия автоматности 1—4 для g сводятся лишь к 4, а именно, справедлива

Теорема 8. Подстановка g на F , удовлетворяющая условию автоматности 4, является автоматной, т. е., кроме того, является изометрической (условия 1, 2 здесь заведомо выполнены).

Доказательство. Предположим противное: g не сохраняет длину слов. Тогда возможны два случая: 1) g не уменьшает длины слов, но существует слово q , длину которого g увеличивает; 2) существует слово p , длину которого g уменьшает.

Разберем обе возможности.

1) Итак, пусть $g \in S_F$, $q \in F$, $g(q) = q_1$, $|q_1| = r$, $|q_1| > r$. Рассмотрим $g^{-1}(E_r)$. Из наших предположений относительно g следует, что $g^{-1}(E_r) \subseteq E_r$. Но, так как E_r конечно, необходимо будет $g^{-1}(E_r) = E_r$, т. е. $g(E_r) = E_r$. Это, однако, неверно, так как $q \in E_r$, но $g(q) \notin E_r$. Значит, 1) невозможно. Мы здесь даже не использовали условие автоматности 4 для g .

2) $g \in S_F$, $p \in F$, $|g(p)| < |p|$. Пусть $p = x_1 x_2 \dots x_r$, $r \geq 1$, $g(p) = p_1 = y_1 y_2 \dots y_{s_0}$, $x_i, y_j \in X$. Тогда $s_0 = |p_1|$, $r = |p|$ и $s_0 < r$. Обозначим для удобства $x_0 = e$, $y_0 = e$ и запишем p и p_1 так: $p = x_0 x_1 \dots x_r$, $p_1 = y_0 y_1 \dots y_{s_0}$, где $s_0 \geq 0$. Из условия автоматности 4 для g вытекает, что $g(x_0 x_1 \dots x_{r-1}) = y_0 y_1 \dots y_{s_1}$. Из обратимости g следует, что $s_1 < s_0$. Вообще имеем для $s_0 > 0$

$$g(x_0 x_1 \dots x_{r-k}) = y_0 y_1 \dots y_{s_k}, \quad 0 \leq s_k < s_{k-1}.$$

Так как $s_0 < r$, придем к такому $k = k_0$, $0 \leq k_0 < r$, что $s_{k_0} = 0$, т. е. $g(x_0 x_1 \dots x_{r-k_0}) = y_0 = e$. Но тогда из условия автоматности 4 $g(x_0 x_1 \dots x_{r-k_0-1}) = e = g(x_0 x_1 \dots x_{r-k_0})$, $r - k_0 - 1 \geq 0$, что противоречит обратимости g . Значит, и этот случай невозможен. Теорема доказана полностью.

Как мы видели, теорема 7 устанавливает аналогичный факт: изометричность подстановок там не требуется, она вытекает из их обратимости. Отметим, что для произвольных отображений F в себя теорема, аналогичная теореме 8, не верна; более того, отказ от изометричности (при выполнении условия автоматности 4) может привести к отображениям, не перестановочным с V .

ЛИТЕРАТУРА

1. Глушков В. М. Синтез цифровых автоматов. М., Физматгиз, 1962.
2. Глушков В. М. УМН, **16**, в. 5(101), 1961.
3. Nogués J. Проблемы кибернетики, в. 9, 1963.
4. Заровный В. П. ДАН СССР, **156**, № 6, 1964.
5. Холл М. Теория групп. ИЛ, 1962.
6. Калужнин Л. А. Acta Mathematica, Acad. Sci. Hung., 2, f. 3—4, 1951.
7. Чеботарев Н. Г. Основы теории Галуа, ч. 1. ОНТИ, 1934.
8. Заровный В. П. ДАН СССР, **160**, № 3, 1965.
9. Лисковец В. А., Фейнберг В. З. ДАН БССР, 7, № 6, 1963.

Поступило в редакцию 31.III 1965

В. И. ЛАДЕС

СИНТЕЗ ПЕРЕКЛЮЧАТЕЛЬНЫХ СХЕМ НА МНОГОФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ЛОГИЧЕСКИХ УЗЛАХ

Известно [1], что при каноническом методе синтеза принципиальных схем логических устройств используются переключательные узлы, реализующие булеву функцию

$$c = ax + bx. \quad (1)$$

В этом случае каждый столбец канонической таблицы относится к одной двоичной переменной и каждый куст содержит два отрезка, верхнему из которых приписывается значение $x = 0$, а нижнему — значение $x = 1$.

Применение многофункциональных логических узлов для реализации схем, синтезированных каноническим методом, позволяет в ряде случаев упростить принципиальные схемы устройств и облегчает их проектирование.

Поставим в соответствие отрезкам куста, изображенного на рис. 1, a , конstituенты единицы функции от двух переменных так, чтобы верхнему отрезку с номером 0 соответствовала конъюнкция $x_1 x_2$, отрезку с номером 1 — конъюнкция $x_1 \bar{x}_2$ и далее, как в табл. 1.

Таблица 1

$F(x_1, x_2)$	Номер отрезка
$\bar{x}_1 \bar{x}_2$	0
$\bar{x}_1 x_2$	1
$x_1 \bar{x}_2$	2
$x_1 x_2$	3

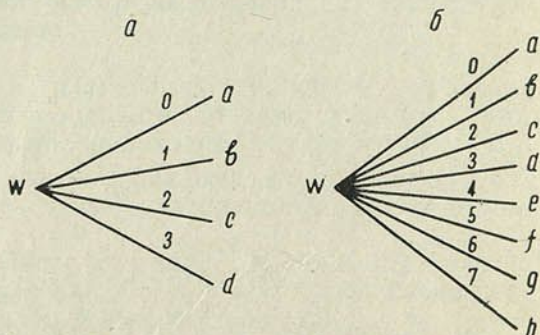


Рис. 1. Кусты канонической таблицы для двух аргументов (а) и для трех аргументов (б)

Назовем вершину W куста рис. 1, a входной вершиной, а вершины a, b, c, d — выходными вершинами. Такие кусты образуют каноническую таблицу, в которой каждый столбец относится одновременно к двум двоичным аргументам, причем первый столбец, столбец аргументов x_1, x_2 , содержит один куст, следующий столбец, столбец аргументов x_3, x_4 , содержит четыре куста и так далее, вплоть до столбца аргументов x_{k-1}, x_k , который содержит 2^{k-2} кустов, где k — число, кратное двум.

Каждой из входных вершин кустов канонической таблицы приписывается свое обозначение. Кусты с одинаковыми обозначениями выходных вершин должны иметь одинаковые обозначения входных вершин, если эти кусты расположены в одном столбце. Кусты с одинаковыми обозначениями выходных вершин, но расположенные в разных столбцах, должны иметь разное обозначение входных вершин. Если все выходные вершины некоторого куста обозначены одной буквой, то это обозначение приписывается и его входной вершине.

В структурную схему синтезируемого устройства переносятся отрезки с различающимися обозначениями входных вершин, начиная со столбца аргументов x_1, x_2 .

Если несколько отрезков одного куста имеют одинаковые обозначения выходных вершин, то эти отрезки заменяются одним отрезком, которому приписываются все номера объединяемых отрезков. Например, если выходные вершины отрезков с номерами 0, 2, 3 i -го куста ($i=1, 2, 3, \dots, k$) обозначены через N_i , то в структурную схему переносится только один отрезок N_i и ему приписываются номера 0, 2, 3. После этого все выходные вершины кустов с одинаковыми обозначениями соединяются между собой.

Отрезки структурной схемы заменяются многофункциональными логическими узлами, например узлами, описанными в [2].

В том случае, если синтезируемая схема имеет один вход и n выходов, выходные вершины отрезков соответствуют импульсным выходам многофункциональных узлов, а входные — их импульсным входам. Если синтезируемая схема с n входами и одним выходом, то импульсным входам узлов должны соответствовать выходные вершины отрезков, а импульсным выходам — входные вершины. Таким образом, соединения в структурной схеме дают схему подключения узлов по импульсным цепям.

Схемы подключения потенциальных входов узлов к выходам триггеров, представляющих аргументы x_1, x_2, \dots, x_n , находятся по номерам отрезков структурной схемы.

Рассмотрим описанную выше методику на примере синтеза принципиальной схемы устройства с тремя выходами, в котором на выход A импульс опроса проходит, если $X = 0$, на выход B , если $0 < X \leq 6$, и на выход C , если $6 < X \leq 15$.

Из условия задачи следует, что функция поведения принимает 3 значения:

$$\Phi(X) = \begin{cases} A, & \text{если } X = 0, \\ B, & \text{если } 0 < X \leq 6, \\ C, & \text{если } 6 < X \leq 15, \end{cases} \quad (2)$$

где $X = 2^3x_1 + 2^2x_2 + 2x_3 + x_4$.

Составим в соответствии с (2) таблицу значений функции поведения $\Phi(X)$. Продолжим верхнюю строку таблицы влево и запишем в ней пары переменных x_1, x_2 и x_3, x_4 (рис. 2).

Разбив столбец $\Phi(X)$ на группы по четыре строки, построим каноническую таблицу. Поскольку все выходные вершины двух нижних кустов столбца аргументов x_3, x_4 имеют общее обозначение C , то это обозначение сохраняется и для входных вершин этих кустов. Два верхних куста этого столбца должны иметь различные обозначения входных вершин, так как обозначения их выходных вершин различны. Обозначим эти вершины через D и E . То же касается и куста аргументов x_1, x_2 .

Найдем структурную схему устройства (рис. 3, а). Поскольку куст канонической таблицы рис. 2 имеет две выходные вершины с одинаковым обозначением С, то отрезки с номерами 2 и 3 объединяются. В структурную схему переносятся три отрезка с выходными вершинами С, Е и D, причем отрезку С присваиваются номера 2, 3. Куст D имеет три выходные вершины с одинаковыми обозначениями, поэтому в структурную схему переносятся из этого куста 2 отрезка: отрезок А с номером 0 и отрезок В с номерами 1, 2, 3. Из куста E в структурную схему переносится отрезок В с номерами 0, 1, 2, и отрезок С с номером 3. Так как у кустов С все вершины обозначены одинаково, то в структурную схему их переносить не следует, ибо одинаковые

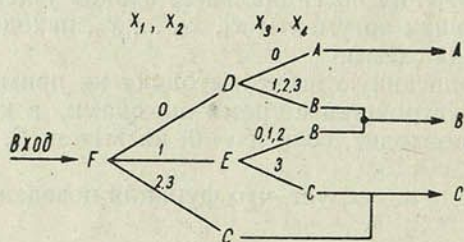
x_1, x_2	x_3, x_4	$\Phi(x)$	x_1	x_2	x_3	x_4
F	D	0 A	0	0	0	0
		1 B	0	0	0	1
		2 B	0	0	1	0
	E	0 B	0	1	0	0
		1 B	0	1	0	1
		2 C	0	1	1	0
	C	0 C	1	0	0	0
		1 C	1	0	0	1
		2 C	1	0	1	0
	C	0 C	1	1	0	0
		1 C	1	1	0	1
		2 C	1	1	1	0
C	0 C	1	1	1	1	
	1 C					
	2 C					

Рис. 2. Каноническая таблица

входные и выходные номера куста означают, что куст закорочен.

Заменим отрезки структурной схемы многофункциональными логическими узлами.

а



б

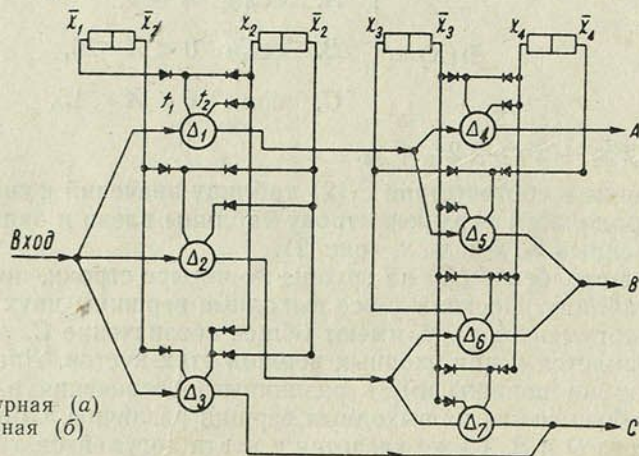


Рис. 3. Структурная (а) и принципиальная (б) схемы

Схема соединений узлов по импульсным входам и выходам задана структурной схемой. Для того чтобы найти схемы подключения потенциальных входов узлов к выходам триггеров, представляющих переменные x_1, x_2, x_3, x_4 , воспользуемся методикой, изложенной в [2].

Номера отрезка $C_{2,3}$ соответствуют вершинам единичного квадрата, принадлежащим стороне x_1 , следовательно, потенциальные входы узла Δ_3 , реализующего отрезок $C_{2,3}$, подключаются к выходным инверторам триггеров x_1 и x_2 по формуле

$$F_3(x_1, x_2) = f_1(x_1, x_2) \Delta f_2(x_1, x_2) = \bar{x}_1 \Delta (x_1 + \bar{x}_2),$$

где Δ — символ сложения по модулю два.

Потенциальные входы узла Δ_2 , реализующего отрезок E_1 , должны быть подключены в соответствии с формулой

$$F_2(x_1, x_2) = \bar{x}_2 \Delta (\bar{x}_1 + \bar{x}_2).$$

Формулы подключения остальных узлов находятся аналогичным способом (табл. 2).

Соединив импульсные входы узлов в соответствии со структурной схемой рис. 3, а и подключив их потенциальные входы в соответствии с табл. 2, получим принципиальную схему устройства, реализующего функцию (2) (рис. 3, б). На этой схеме многофункциональные узлы условно обозначены кружками.

Таблица 2

Обозначение отрезка	Обозначение узла	Формула подключения узла по потенциальным входам
D_0	Δ_1	$x_2 \Delta (\bar{x}_1 + x_2)$
E_1	Δ_2	$\bar{x}_2 \Delta (\bar{x}_1 + \bar{x}_2)$
$C_{2,3}$	Δ_3	$\bar{x}_1 \Delta (x_1 + \bar{x}_1)$
A_0	Δ_4	$x_4 \Delta (\bar{x}_3 + x_4)$
$B_{1,2,3}$	Δ_5	$\bar{x}_3 \Delta (x_3 + \bar{x}_4)$
$B_{0,1,2}$	Δ_6	$x_3 \Delta (\bar{x}_3 + x_4)$
C_3	Δ_7	$\bar{x}_3 \Delta (\bar{x}_3 + x_4)$

Выше рассматривалась методика синтеза схем, функция поведения которых зависела от четного числа аргументов. Если функция поведения зависит от числа аргументов, кратного трем, то целесообразно подключать многофункциональные узлы по схеме реализации булевых функций от трех переменных.

Таблица 3

$F(x_1, x_2, x_3)$	Номер отрезка
$\bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3$	0
$\bar{x}_1 \bar{x}_2 x_3$	1
$\bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3$	2
$\bar{x}_1 x_2 x_3$	3
$x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3$	4
$x_1 \bar{x}_2 x_3$	5
$x_1 x_2 \bar{x}_3$	6
$x_1 x_2 x_3$	7

В этом случае каноническая таблица составляется из кустов, показанных на рис. 1, б. Отрезкам куста рис. 1, б ставятся в соответствие конститuentы единицы функции от трех переменных (табл. 3). Верхняя строка усеченной таблицы значений функции поведения образуются аргументами, сгруппированными по три, и, следовательно, первый столбец канонической таблицы для аргументов x_1, x_2, x_3 , содержит один куст, столбец для аргументов x_4, x_5, x_6 — восемь кустов и так далее вплоть до столбца аргументов x_{m-2}, x_{m-1}, x_m , который содержит 2^{m-3} кустов, где m — число, кратное трем.

Структурная схема строится так же, как и в предыдущем случае.

Принципиальная схема получается путем замены отрезков структурной схемы принципиальными схемами многофункциональных узлов, причем каждый из узлов подключается по схеме реализации функции от трех переменных.

Для отыскания схемы подключения узлов к потенциальным выходам триггеров номера отрезков относятся к вершинам единичного трехмерного куба и формула подключения определяется по расположению этих вершин [2].

Каноническая таблица для функций поведения, зависящих от n двоичных аргументов, где n — любое целое положительное число, строится из кустов вида рис. 1, а и кустов вида рис. 1, б. При этом часть аргументов объединяется в группы по два, а часть — в группы по три.

Для синтеза схем потенциального типа отрезки структурной схемы заменяются потенциальными узлами. Так как номера отрезков структурной схемы соответствуют конституентам дизъюнктивной совершенной нормальной формы функции, представленной данным отрезком, то для получения принципиальной схемы узла достаточно реализовать полученную функцию с помощью логических элементов [3].

Пр и м е р. Отрезку с номерами 0 и 3 соответствует функция

$$F(x_1, x_2) = \bar{x}_1 \bar{x}_2 + x_1 x_2.$$

Очевидно, что данный отрезок реализуется узлом, состоящим из двух потенциальных элементов И, одного потенциального элемента ИЛИ и инвертора.

ЛИТЕРАТУРА

1. Блох А. Ш., Ладес В. И. Алгоритм синтеза электрических схем логических устройств. Изд. ГОСИНТИ, М., 1964.
2. Ладес В. И. Весті АН БССР, сер. фіз.-мат. навук, № 1, 1965.
3. Шприц Э. И., Чайковский Р. В. Автоматика и приборостроение, № 2, 1964.

Поступило в редакцию 2.VI 1965

отг 30

7077
↓

М. В. МИШУРНАЯ

АНАЛИЗ КОЛИЧЕСТВЕННОГО СОСТАВА МНОГОПУЛЬТОВОЙ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ СИСТЕМЫ

В [1] и [2] были рассмотрены общие принципы организации и временные характеристики многопультковой вычислительной системы (МВС). В данной статье рассмотрим некоторые количественные характеристики этой системы: такие, как количество пультов в МВС, количество участков в буферном запоминающем устройстве (БЗУ), предназначенных для приема и хранения поступающей с пультов информации. Так как количество обращений от любого из пультов и время одного обращения имеют преимущественно случайный характер, то для анализа количественного состава МВС используем некоторые результаты теории массового обслуживания.

Рассмотрим обслуживаемую систему с ожиданием, состоящую из n обслуживаемых аппаратов, каждый из которых может обслуживать в данный момент времени только одно требование. Допустим, что время обслуживания одного требования есть случайная величина γ , подчиненная показательному закону распределения:

$$P\{\gamma < t\} = 1 - e^{-\nu t}.$$

Очевидно, что ν — это среднее количество требований, которые могут быть обслужены в единицу времени. Предположим, что входной поток может состоять максимум из m требований, причем m — конечное число, и обладает следующими свойствами:

1. Вероятность поступления требования на обслуживание за время $(t, t + \Delta t)$, если оно не поступило до момента t , равна $\lambda \Delta t + o(\Delta t)$, где $\lambda > 0$ и не зависит от t , m и числа ранее поступивших требований. Очевидно, λ — это среднее количество требований, поступающих в единицу времени.

2. Моменты поступления данного требования в непересекающиеся промежутки времени — события независимые.

Для характеристики работы рассматриваемой обслуживаемой системы выбираем величины: K_1 — коэффициент простоя обслуживаемого объекта и K_2 — коэффициент простоя обслуживающего аппарата. Значения K_1 и K_2 могут быть определены после нахождения величин $P_k(t)$ — вероятностей того, что в рассматриваемой системе обслуживания в момент времени t находится точно k требований, $k = 0, 1, 2, \dots, m$. Не выполняя подробных выкладок, укажем лишь, что для нахождения вероятностей $P_k(t)$ может быть составлена система из конечного числа дифференциальных уравнений [3], которая имеет стационарное решение, т. е. существуют пределы $\lim_{t \rightarrow \infty} P_k(t) = p_k$, $k = 0, 1, 2, \dots, m$, не зависящие от начального состояния системы. Величины p_k определяются из линейной однородной

системы алгебраических уравнений, которая получается в результате предельного перехода при $t \rightarrow \infty$ в системе дифференциальных уравнений для $P_k(t)$. А именно:

$$p_k = \frac{m!}{k!(m-k)!} \left(\frac{\lambda}{v}\right)^k p_0, \quad 1 \leq k \leq n, \quad (1)$$

$$p_k = \frac{m!}{n^{k-n} n!(m-k)!} \left(\frac{\lambda}{v}\right)^k p_0, \quad n < k \leq m, \quad (2)$$

$$p_0 = 1 - \sum_{k=1}^m p_k,$$

или

$$p_0 = \left[\sum_{k=0}^n \frac{m!}{k!(m-k)!} \left(\frac{\lambda}{v}\right)^k + \sum_{k=n+1}^m \frac{m!}{n^{k-n} n!(m-k)!} \left(\frac{\lambda}{v}\right)^k \right]^{-1}. \quad (3)$$

Тогда для коэффициентов K_1 и K_2 имеют место следующие соотношения:

$$K_1 = \frac{M_1}{m} = \frac{\sum_{k=n+1}^m (k-n) p_k}{m}, \quad (4)$$

где M_1 — среднее количество требований, ожидающих начала обслуживания,

$$K_2 = \frac{M_3}{n} = \frac{\sum_{k=0}^{n-1} (n-k) p_k}{n}, \quad (5)$$

где M_3 — среднее количество свободных обслуживающих аппаратов.

Многопультную вычислительную систему можно рассматривать как обслуживающую систему с ожиданием и для анализа ее количественного состава использовать полученные результаты (1) — (5). Действительно, обслуживаемыми аппаратами в МВС являются пульта, общее количество которых равно m , причем $1 < m < \infty$. С каждого из пультов может быть передано в ЭЦВМ требование на выполнение той или иной макрооперации [1, 2]. Информация, соответствующая передаваемому требованию, запоминается в одном из свободных участков БЗУ. Если все участки заняты, то информация сохраняется на пульте до момента освобождения одного из участков, а из обратившихся к ЭЦВМ пультов образуется очередь на обслуживание. Таким образом, каждый участок буферного ЗУ можно рассматривать как обслуживающий аппарат. Общее количество участков полагаем равным n . Время выполнения одного требования, т. е. время занятости участка БЗУ, есть случайная величина, зависящая от типа подлежащей выполнению макрооперации. Можно считать, что это время подчинено показательному закону распределения с параметром v . Относительно потока требований, поступающих с пультов в ЭЦВМ, допустим, что он обладает ранее отмеченными свойствами 1 и 2 и имеет параметр λ . В этом случае K_1 — коэффициент простоя пульта из-за занятости участков БЗУ, K_2 — коэффициент простоя участка БЗУ из-за отсутствия требований с пультов.

Рассмотрим такой вариант организации МВС, когда за группой пультов закрепляется один участок буферного ЗУ, т. е. $n=1$, m — количество пультов в группе, $1 < m < \infty$. В каждый данный момент времени с ЭЦВМ может быть связан только один пульт группы. Формулы для нахождения значений K_1 и K_2 в этом случае имеют вид:

$$K_1 = \frac{\sum_{k=2}^m (k-1) p_k}{m}, \quad (4')$$

$$K_2 = \frac{1}{1 + m \frac{\lambda}{\nu} + \sum_{k=2}^m \frac{m!}{(m-k)!} \left(\frac{\lambda}{\nu}\right)^k} = p_0, \quad (5')$$

При другом варианте организации МВС за m пультами закрепляется n участков БЗУ, причем $1 < n < m$. Требования на обслуживание могут поступить более, чем с n пультов, и тогда образуется очередь. Первый из ожидающих обслуживания пультов занимает первый освободившийся участок БЗУ. В этом случае значения коэффициентов K_1 и K_2 могут быть вычислены по формулам (4), (5).

Для обоих вариантов организации МВС была составлена программа вычисления значений K_1 и K_2 на ЭЦВМ «Минск-2» при различных ν и λ по формулам (4), (5) и (4'), (5'). В выборе значений параметров ν и λ допущен некоторый произвол, обусловленный отсутствием конкретных статистических данных относительно частоты обращений с пультов в единицу времени и сведений о типах макроопераций. Значения λ были выбраны, исходя из формулы (1), выведенной в [2], с учетом дополнительного времени, которое оператор может затратить на подготовительные операции перед началом передачи требования с пульта. При выборе значений ν исходили из допущения, что ЭЦВМ будет выполнять макрооперации из классов $M_1 - M_3$ [2]. За единицу времени взят один час. Некоторые из полученных значений коэффициентов K_1 и K_2 приведены в таблице.

На основании данных таблицы можно сделать следующие выводы:

1) с уменьшением частоты обращений λ к ЭЦВМ при фиксированных ν , m , n уменьшается коэффициент простоя пульта K_1 и увеличивается коэффициент простоя участка БЗУ K_2 ;

2) при фиксированных λ , ν , n с ростом m увеличивается коэффициент простоя пульта K_1 и уменьшается коэффициент простоя участка БЗУ K_2 . Заметим, что при $\lambda \leq 12$ имеет место увеличение K_2 наряду с увеличением K_1 при фиксированных λ , ν , $n > 1$ и возрастающем m ;

3) при фиксированных λ , m , n с увеличением среднего времени занятости участка БЗУ требованием с одного пульта, т. е. с уменьшением ν , имеет место увеличение коэффициента простоя пульта K_1 и уменьшение коэффициента простоя участка K_2 ;

4) при фиксированных λ , ν , m с возрастанием n имеет место уменьшение коэффициента простоя пульта K_1 и увеличение коэффициента простоя участка БЗУ K_2 ;

5) сравнение значений K_1 и K_2 при фиксированных λ , ν показывает, что объединение пультов в группы и жесткое закрепление за каждой группой одного участка БЗУ менее выгодно, чем нежесткое закрепление участков БЗУ за пультами. Действительно, при $\lambda=120$, $\nu=880$, $n=1$,

Зависимость коэффициентов простоя пульта и простоя участков БЗУ от количества поступающих требований и типов выполняемых макроопераций

λ	m	$v_1=880$		$v_2=660$		$v_3=526$	
		K_1	K_2	K_1	K_2	K_1	K_2
$n = 1$							
120	5	0,073	0,444	0,121	0,324	0,174	0,233
	7	0,130	0,269	0,213	0,152	0,295	0,083
	9	0,203	0,139	0,317	0,055	0,414	0,021
	11	0,286	0,058	0,418	0,014	0,512	0,004
60	5	0,019	0,687	0,034	0,597	0,052	0,515
	7	0,032	0,568	0,059	0,451	0,082	0,350
	9	0,049	0,454	0,092	0,319	0,145	0,212
	11	0,071	0,348	0,134	0,206	0,211	0,111
$n = 4$							
120	30	0,052	0,151	0,143	0,043	0,255	0,008
	35	0,098	0,072	0,236	0,009	0,356	0,0005
	40	0,164	0,024	0,326	0,001	0,437	0,00002
	45	0,241	0,005	0,400	0,000	0,499	0,00000
60	30	0,003	0,389	0,010	0,318	0,026	0,230
	35	0,006	0,353	0,019	0,252	0,049	0,149
	40	0,010	0,307	0,033	0,183	0,086	0,079
	45	0,016	0,255	0,056	0,118	0,140	0,031
$n = 5$							
120	30	0,016	0,280	0,054	0,141	0,123	0,053
	35	0,033	0,191	0,106	0,061	0,212	0,011
	40	0,061	0,112	0,178	0,017	0,303	0,001
	45	0,104	0,052	0,258	0,003	0,380	0,00007
60	30	0,0007	0,480	0,003	0,431	0,007	0,357
	35	0,002	0,456	0,005	0,377	0,015	0,280
	40	0,002	0,422	0,010	0,316	0,028	0,203
	45	0,004	0,381	0,017	0,252	0,048	0,131
$n = 6$							
120	30	0,005	0,385	0,020	0,249	0,052	0,136
	35	0,011	0,303	0,042	0,153	0,105	0,056
	40	0,022	0,221	0,081	0,076	0,181	0,015
	45	0,040	0,146	0,137	0,028	0,261	0,002
60	30	0,0001	0,543	0,0006	0,511	0,002	0,452
	35	0,0003	0,529	0,001	0,468	0,005	0,386
	40	0,0006	0,504	0,003	0,417	0,009	0,316
	45	0,001	0,472	0,005	0,362	0,017	0,245

$m=9$ имеем: $K_1=0,203$, $K_2=0,139$, в то время как $K_1=0,104$ и $K_2=0,052$ при этих же λ , v и $n=5$, $m=45$.

Для того чтобы определить количество пультов, которые могут быть присоединены к вычислительной машине, и необходимое количество участков буферного ЗУ для приема и хранения поступающей с пульта информации, можно воспользоваться таблицей, аналогичной приведенной выше. При заданных λ , v и граничных условиях на значения коэффициентов K_1 и K_2 по таблице можно найти соответствующие значения n и m . Например, положим $v=660$, $\lambda=60$, K_1 и K_2 должны удовлетворять неравенствам: $K_1 \leq 0,1$, $K_2 \leq 0,4$. Для указанных значений по таблице находим, что либо $m=30$, $n=4$, либо $m=35$, $n=5$, либо $m=45$, $n=6$. Очевидно, что в среднем на один участок БЗУ приходится 7 пультов в данном примере.

Общая емкость буферной памяти для приема информации с пультов может быть найдена по формуле

$$W = \nu n, \quad (6)$$

где ν — емкость одного участка БЗУ.

ЛИТЕРАТУРА

1. Мишурная М. В. О многопультной вычислительной системе. Сб. «Вычислительная техника», в. 2. Минск, 1965.
2. Мишурная М. В. Некоторые временные характеристики многопультной вычислительной системы, там же.
3. Розенберг В. Я., Прохоров А. И. Что такое теория массового обслуживания. М., 1962.

Поступило в редакцию 10.V 1965

Х. М. СОЦКАЯ, Ф. І. ФЕДАРАЎ, А. Р. ХАТКЕВІЧ

АСОБЫЯ НАПРАМКІ ДЛЯ ПРУГКІХ ХВАЛЬ У ТЭТРАГАНАЛЬНЫХ КРЫШТАЛЯХ

Пад асобымі напрамкамі для пругкіх хваль у крышталях (гл., напрыклад, [1]) разумеюцца такія напрамкі хвалевай нармалі \mathbf{n} , уздоўж якіх адна з трох пругкіх хваль, якія распаўсюджваюцца, з'яўляецца чыста папярочнай. Як паказана ў [1], сукупнасць гэтых напрамкаў утварае ў агульным выпадку конус 9-га парадку. Пытанне аб такіх напрамках у крышталях рознай сіметрыі неаднаразова абмяркоўвалася ў радзе работ (гл. [1—4]). Гэты артыкул прысвечан дэталёваму разгляду асобых напрамкаў у крышталях тэтраганальнай сістэмы.

У якасці каардынатнай сістэмы выбярэм сістэму, вось z якой супадае з восью 4-га парадку, а восі x і y накіруем так, каб $c_{16} = 0$ [5]. У [1, 4] паказана, што ў гэтым выпадку ўраўненне конуса 9-га парадку ў тэтраганальных крышталях распадаецца на ўраўненні трох каардынатных плоскасцей $x=0$, $y=0$, $z=0$, двух дыяганальных плоскасцей, якія праходзяць праз вось z ($x = \pm y$), і ўраўненне конуса 4-га парадку, якое мае выгляд

$$Az^4 + Bx^2y^2 - Cx^2y^2 + D\Gamma^4 = 0, \quad (1)$$

дзе ўведзены абазначэнні

$$\begin{aligned} \Gamma &= \pi; \quad A = a_2(a_2 + 1); \quad B = 2a_1a_2 + a_1 - a_2; \\ C &= a_3(a_3 + 2); \quad D = a_1(a_1 - 1), \end{aligned} \quad (2)$$

прычым

$$a_1 = g_2/g_5, \quad a_2 = g_4/g_5, \quad a_3 = c/g_5, \quad (3)$$

а параметры g_2 , g_4 , g_5 і c выражаюцца праз модулі пругкасці тэтраганальнага крышталю і яго шчыльнасць ρ наступным чынам [1]:

$$\begin{aligned} g_2 &= (2c_{44} + c_{13} - c_{11})/\rho, \quad g_5 = (c_{13} + c_{44} + c_{66} - c_{11})/\rho, \\ g_4 &= (c_{11} + c_{33} - 2c_{13} - 4c_{44})/\rho, \quad c = (c_{11} - c_{12} - 2c_{66})/\rho. \end{aligned} \quad (4)$$

Зроблены намі выбар каардынатнай сістэмы не з'яўляецца адназначным. Гэта ясна з таго, што ў нашай каардынатнай сістэме і ў павернутаай адносна яе на вугал $\pi/4$ выконваецца ўмова $c_{16} = 0$. Сапраўды, пераўтварэнне кампанент тэнзара модуляў пругкасці пры павароце любой з гэтых каардынатных сістэм на вугал γ вакол восі z мае выгляд [5]

$$\left. \begin{aligned} c'_{11} &= c_{11} - \frac{c}{2} \sin^2 2\gamma, & c'_{13} &= c_{13}, \\ c'_{12} &= c_{12} + \frac{c}{2} \sin^2 2\gamma, & c'_{33} &= c_{33}, \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} c'_{66} &= c_{66} + \frac{c}{2} \sin^2 2\gamma, & c'_{44} &= c_{44}, \\ c'_{16} &= -\frac{c}{2} \sin 4\gamma, & c' &= c \cos 4\gamma. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Адсюль ясна, што пры $c > 0$ маем $-c \leq c' \leq c$, $c'_{11} \leq c_{11}$, $c'_{12} \geq c_{12}$, $c'_{66} \geq c_{66}$, значыць, пры $\gamma = 0$ c , c_{11} маюць максімальныя значэнні, а c_{12} і c_{66} — мінімальныя. У сістэме, павернутай на вугал $\gamma = \pi/4$, c аказваецца такой жа велічыні, але з адваротным знакам, пагэтану c , c_{11} — мінімальныя, c_{12} , c_{66} — максімальныя. Такім чынам, абедзве памянёныя сістэмы раўнапраўныя ў сэнсе найбольш простага апісання ўласцівасцей тэтраганальных крышталёў, паколькі ў абедзвюх $c_{16} = 0$. Адзначым, што гексаганальны крышталёў з модулямі пругкасці тэтраганальнага крышталёў, узятымі ў сістэме, размешчанай пасярэдзіне паміж разгледжанымі ($\gamma = \pi/8$), з'яўляецца папярочнаізатропным асяроддзем [1], бліжэйшым у сярэднім да дадзенага тэтраганальнага крышталёў.

Формулы пераўтварэння параметраў g пры павароце каардынатных сістэм, у якіх $c_{16} = 0$, на вугал γ маюць выгляд

$$g'_2 = g_2 + \frac{c}{2} \sin^2 2\gamma, \quad g'_4 = g_4 - \frac{c}{2} \sin^2 2\gamma, \quad g'_5 = g_5 + c \sin^2 2\gamma. \quad (6)$$

Для даследавання конуса (1) разгледзім сячэнні яго плоскасцямі $y = kx$. З ураўнення (1) вынікае, што яго застаецца нязменным пры замене $x \rightarrow \pm y$, $y \rightarrow \pm x$, якая адпавядае адбіццю ў дыяганальных плоскасцях $y = \pm x$. Пагэтану і з прычыны наяўнасці восі 4-га парадку ўсе даведкі аб конусе можна атрымаць, змяняючы k у інтэрвале ад 0 да 1.

Пры $y = kx$ ураўненне сячэння прыводзіцца да выгляду

$$(A + B + D)\xi^4 + (B + 2D)\xi^2 + D - C \frac{k^2}{(1 + k^2)^2} = 0, \quad (7)$$

дзе

$$\xi^2 = \frac{z^2}{x^2(1 + k^2)} = \operatorname{ctg}^2 \vartheta, \quad (8)$$

а ϑ — вугал паміж утваральнай конуса (1), размешчанай у плоскасці $y = kx$, і воссю z . Рашэнне ўраўнення (7) мае выгляд

$$\left. \begin{aligned} \xi^2 &= M \pm N, \\ M &= \frac{1 - 2a_1}{2(a_1 + a_2)}, \quad N = \left| \frac{\sqrt{k^4 + 2k^2(1 + 4a_3 + 2a_3^2) + 1}}{2(a_1 + a_2)(1 + k^2)} \right|. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Падкарэнны выраз у N дадатны пры любых значэннях a_3 і k , бо яго мінімальнае значэнне, якое дасягаецца пры $a_3 = -1$, роўна $(k^2 - 1)^2$. Пагэтану ξ^2 заўсёды сапраўднае. Відавочна, плоскасць $y = kx$ перасякае конус толькі ў тым выпадку, калі выраз (9) для ξ^2 прымае дадатнае значэнне. Калі гэта ўмова выконваецца пры ўсіх значэннях k , то конус замыкаецца вакол восі z . Выкананне ўмовы $\xi^2 > 0$ залежыць ад знака M і суадносін абсалютных велічынь M і N . Разгледзім гэту залежнасць. У выпадку дадатнага M ξ^2 мае, прынамсі, адно дадатнае значэнне пры любых значэннях k незалежна ад знака $a_1 + a_2$. Другое дадатнае зна-

чэнне ξ^2 прымае пры тых значэннях k , для якіх выконваецца ўмова $M > N$ ці

$$D(k^2 + 1)^2 > Ck^2. \quad (10)$$

Пры $D > 0$ няроўнасць (10) зводзіцца да наступнай:

$$\frac{C}{D} = \alpha < \frac{(k^2 + 1)^2}{k^2}. \quad (11)$$

Паколькі k^2 змяняецца ў межах ад 0 до 1, то першая частка гэтай няроўнасці заключана ў межах $4 \leq \frac{(k^2 + 1)^2}{k^2} \leq \infty$. Пагэтакі калі $\alpha \leq 4$,

то ўмова (11) задавальняецца пры ўсіх значэннях k , значыць, вакол восі z замыкаецца і другі конус. Гэта мае месца для крышталю $ZrSiO_4$ (гл. табл. 1). Калі ж $\alpha > 4$, то няроўнасць (11) выконваецца толькі для значэнняў k , што ляжаць у інтэрвале $0 \leq k \leq k_0$, дзе

$$k_0 = \frac{\sqrt{\alpha} - \sqrt{\alpha - 4}}{2} \quad (12)$$

адзіны карань ураўнення $(k_0^2 + 1)^2 - \alpha k_0^2 = 0$, заключаны паміж 0 і 1. Паколькі $y = kx$, то пры гэтым мы атрымаем конус, заключаны паміж плоскасцямі $y = \pm k_0 x$, г. зн. які замыкаецца вакол восі x , і, разумеюцца, такі ж конус вакол восі y . Гэты выпадак мае месца для крышталю $NiSO_4 \cdot 6H_2O$, KH_2AsO_4 , KH_2PO_4 (гл. табл. 1).

Пры $D < 0$ замест (11) атрымаем

$$\alpha > \frac{(k^2 + 1)^2}{k^2}, \quad (13)$$

што можа выконвацца толькі пры $\alpha > 4$ і толькі для тых k з інтэрвалу $0 \leq k \leq 1$, для якіх $k_0 < k$. У гэтым выпадку ёсць два конусы, якія замыкаюцца вакол дыяганалей $y = \pm x$. Калі $\alpha < 4$, то ўмова (13) не выконваецца ні пры якіх значэннях k , г. зн. другі конус адсутнічае.

У выпадку $M < 0$ ξ^2 мае дадатныя значэнні толькі пры тых значэннях k , для якіх $M < N$, г. зн.

$$D(k^2 + 1)^2 < Ck^2. \quad (14)$$

Пры $D > 0$ (14) пераходзіць у (13), пры $D < 0$ — у (11), г. зн. разгледжаныя вышэй выпадкі мяняюцца ролямі.

Такім чынам, конус абодвух напрамкаў (1) для тэтраганальных крышталю можа мець: а) адну плоскасць, якая замыкаецца вакол восі z ; б) дзве плоскасці, якія замыкаюцца вакол восі z ; в) тры плоскасці, якія замыкаюцца вакол восей x , y , z або $y = \pm x$, z ; г) дзве плоскасці, якія замыкаюцца вакол восей x , y або $y = \pm x$.

Для вызначэння формы плоскасці конуса, якая замыкаецца вакол восі z , знойдзем экстрэмальныя значэнні ξ у залежнасці ад k . Гэтыя значэнні адпавядаюць $k=0$ і $k=1$. Пры $k=0$

$$\xi^2 = \frac{1 - 2a_1 \pm 1}{2(a_1 + a_2)} \quad (15)$$

і пры $k=1$

$$\xi^2 = \frac{1 - 2a_1 \pm \sqrt{1 + C}}{2(a_1 + a_2)} = \frac{1 - 2a_1 \pm |1 + a_3|}{2(a_1 + a_2)}. \quad (16)$$

Абазначым праз θ_0 вугал θ для поласці конуса, што замыкаецца вакол восі z , пры $k=0$ (каардынатыя плоскасці $y=0$, $x=0$), і праз θ_1 той жа вугал пры $k=1$ (дыяганальныя плоскасці $y=\pm x$). Калі $a_1+a_2>0$, то пры верхнім знаку ў выразях (15) і (16) дадатнаму значэнню C адпавядае поласць конуса, для якой $\theta_0>\theta_1$. Пры адмоўным C $\theta_0<\theta_1$. Калі і другі конус замыкаецца вакол восі z , то пры $a_1+a_2>0$ яму адпавядае ніжні знак у выразях (15) і (16). У гэтым выпадку пры $C>0$ $\theta_0<\theta_1$ і пры $C<0$ $\theta_0>\theta_1$.

Для даследавання формы поласцей конуса, што замыкаюцца вакол восей x і y , увядзём сферычныя каардынаты r , ψ , Θ з палярнай воссю x . Абазначыўшы $\text{tg}\Theta=\zeta$, прывядзём ураўненне (1) да выгляду

$$(A\sin^4\psi + B\sin^2\psi + D)\zeta^4 + (B\sin^2\psi - C\cos^2\psi + 2D)\zeta^2 + D = 0. \quad (17)$$

Гэта ж ураўненне ў сістэме каардынат, павернутай адносна разглядаемай на вугал $\gamma=\pi/4$ (гл. (5), (6)), поўнаасцю прымальнае для даследавання формы поласцей конуса, што замыкаюцца вакол дыяганалей $y=\pm x$. Знойдзем экстрэмальныя значэнні ζ у залежнасці ад вугла ψ . З (17) вынікае ў якасці ўмоў экстрэмума

$$\sin 2\psi = 0, \quad (2A\sin^2\psi + B)\zeta^2 + B + C = 0. \quad (18)$$

Першая з умоў (18) не залежыць ад модуляў пругкасці і паказвае, што для ўсіх крышталяў вугал Θ мае экстрэмальныя значэнні ў каардынатыя плоскасцях $y=0$, $z=0$. Другая з умоў (18) залежыць ад модуляў пругкасці. Праверка яе для 11 крышталяў, прыведзеных у табліцах 1—3, паказала, што ні для аднаго з іх яна не можа быць задаволена. У разгледжаных крышталях $\zeta^2=\text{tg}^2\Theta$ extg вызначаецца з ураўнення (17) пры $\psi=0$ і $\pi/2$ і роўна адпаведна k_0^2 (12) і ζ^2 (15). Пагэтам пры верхнім знаку няроўнасці

$$\frac{1 - 2a_1 \pm 1}{2(a_1 + a_2)} \geq k_0^2 \quad (19)$$

вугал Θ для плоскасці конуса, што замыкаецца вакол восі x , з'яўляецца найбольшым у плоскасці $y=0$ і найменшым у плоскасці $z=0$. Пры ніжнім знаку няроўнасці (19) найбольшы і найменшы вуглы Θ мяняюцца месцамі.

У заключэнне даследавання конуса (1) адзначым, што ў выпадку $a > 4$ пры пэўным знаку M поласці конуса замыкаюцца вакол восей x і y або вакол дыяганалей $y=\pm x$ у залежнасці ад знака D , а значыць, і C . Якая з суадносін $\theta_0 \geq \theta_1$ справядлівая пры пэўным знаку M для поласці конуса, што замыкаецца вакол восі z , таксама вызначаецца знакам каэфіцыента C . Пагэтам, выбіраючы для ўсіх крышталяў $C = -c(c+2g_5)$ якога-небудзь аднаго знака, можна скараціць лік магчымых варыянтаў конуса (1) у два разы. Такі выбар заўсёды магчымы, бо $c+2g_5$ з'яўляецца інварыянтам у адносінах да павароту сістэмы каардынат у плоскасці $z=0$, а знак c змяняецца на процілеглы пры павароце сістэмы каардынат на вугал $\gamma=\pi/4$ (гл. (5), (6)). У табліцах і на рысунку крышталі разглядаюцца ў той каардынатынай сістэме, у якой у іх $C > 0$.

У табл. 1 прадстаўлена зводка атрыманых рэзультатаў, якую можна разглядаць як класіфікацыю тэтраганальных крышталяў па выглядзе конуса асобых напрамкаў.

Разгледзім цяпер важнейшыя прыватныя выпадкі асобых напрамкаў — падоўжныя нармалі і акустычныя восі.

Табліца 1

Класіфікацыя тэтраганальных крышталёў па выглядзе конуса асобых напрамкаў

		$\alpha > 4$	$\alpha < 4$	
$M > 0$	Лік поласцей конуса	3	2	1
	Восі поласцей конуса	x, y, z	z	z
	Крышталёў	KH_2AsO_4 — калій дыгидраарсенат, KH_2PO_4 — калій дыгидрафасфат, $\text{NiSO}_4 \cdot 6\text{H}_2\text{O}$ — нікель сульфат гексагидрат	ZrSiO_4 — цыркон	Іп — індый
$M < 0$	Лік поласцей конуса	2	—	1
	Восі поласцей конуса	$y = \pm x$	—	z
	Крышталёў	BaTiO_3 — барый тытанат, $\text{NH}_4\text{H}_2\text{PO}_4$ — амоній дыгидрафасфат, $\text{NH}_4\text{D}_2\text{PO}_4$ — амоній дыгидрафасфат дэйтэрыраваны		Sp — волава белае TiO_2 — рутыл $\text{C}(\text{CH}_2\text{OH})_4$ — пентаэрытрыт

У тэтраганальных крышталёх заўсёды ёсць 5 падоўжных нармалей, што ляжаць на перасячэнні каардынатных плоскасцей паміж сабой і з дыяганальнымі плоскасцямі, якія праходзяць праз вось z [1]. Акрамя таго, падоўжныя нармалі могуць быць размешчаны ў каардынатных і дыяганальных плоскасцях, што праходзяць праз вось z , пад некаторымі вугламі θ да гэтай восі ($0 < \theta < \pi/2$), калі задавальняюцца адпаведна ўмовы

$$\text{tg}^2 \theta_0 = -\frac{g_2 + g_4}{g_2} = -\frac{a_1 + a_2}{a_1} > 0, \quad (20)$$

$$\text{tg}^2 \theta_1 = -\frac{g_2 + g_4}{g_2 + \frac{c}{2}} = -\frac{a_1 + a_2}{a_1 + \frac{a_3}{2}} > 0. \quad (21)$$

Як паказана ў [1], гэтыя падоўжныя нармалі заўсёды ляжаць на перасячэннях конуса (1) з каардынатнымі і дыяганальнымі плоскасцямі, што праходзяць праз вось z . Аднак не ўсе такія перасячэнні з'яўляюцца падоўжнымі нармалямі. Гэта вынікае з параўнання выказаў для $\text{tg}^2 \theta$ (20) і (21) адпаведна з ξ^2 (15) і (16) (гл. (8)). Падоўжнымі нармалямі з'яўляюцца толькі тыя перасячэнні, якім адпавядаюць ніжнія знакі ў (15) і (16)*.

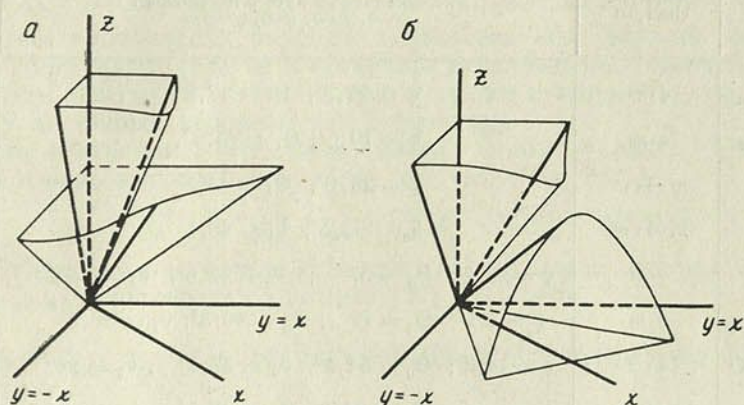
На рысунку *a* і *b* паказаны ў адным актанце конусы асобых напрамкаў для крышталёў ZrSiO_4 і KH_2AsO_4 (гл. табл. 1). Суцэльныя лініі абазначаюць падоўжныя нармалі.

У табл. 2 для 11 тэтраганальных крышталёў прыведзены вуглы паміж каардынатнымі восямі і лініямі перасячэння конуса (1) з плоскасцямі $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ і $y = \pm x$. Вуглы, адпаведныя падоўжным нармалям,

* Для формулы (16) гэта сапраўдна толькі пры $1 + a_3 = 0$.

адзначаны зорачкай. Пры разліках выкарыстаны значэнні модуляў пругкасці з [6] і [7].

Як паказана ў [1, 4], акустычныя восі ў тэтраганальным крышталі павінны ляжаць у плоскасцях $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $y = \pm x$. У [1] атры-



Поласці конуса асобых напрамкаў $ZrSiO_4$ (а) і KH_2AsO_4 (б)

маны выразы для вуглоў, што вызначаюць напрамкі акустычных восей, якія могуць быць прыведзены да выгляду:

$$\sin^2 2\varphi = \frac{(g_2 - g_5)(g_2 - g_3)}{\frac{c}{2} \left(g_5 - g_3 + \frac{c}{2} \right)}, \quad (22)$$

$$\cos^2 \vartheta_0 = \frac{(g_2 - g_5)(g_3 - g_5)}{g_5^2 - g_4(g_3 - g_5)}, \quad (23)$$

$$\cos^2 \vartheta_1 = \frac{(g_2 - g_5)(g_3 - g_5) + \frac{c}{2}(c - 2g_2 - g_3 + 3g_5)}{g_5^2 - g_4(g_3 - g_5) + \frac{c}{2}(c + g_3 + 2g_4 + 3g_5)}, \quad (24)$$

дзе $g_3 = (c_{13} + c_{44})/\rho$ з'яўляецца інварыянтам у адносінах да павароту сістэмы каардынат у плоскасці $z=0$ (гл. (5)); φ — вугал паміж воссю x і акустычнай воссю, размешчанай у плоскасці $z=0$; ϑ_0 і ϑ_1 — вуглы паміж воссю z і акустычнымі восямі, размешчанымі адпаведна ў плоскасцях $y=0$ ($x=0$) і $y=\pm x$. Зразумела, адпаведныя акустычныя восі існуюць, калі значэнні выказаў (22)–(24) заключаны паміж 0 і 1. У далейшым будзем разглядаць для дакладнасці крышталі ў каардынатнай сістэме, дзе $c > 0$. Пры павароце сістэмы каардынат на вугал $\gamma = \pi/4$ выраз (24) для $\cos^2 \vartheta_1$ прымае такі ж выгляд, як (23) у старой сістэме каардынат:

$$\cos^2 \vartheta_1 = \frac{(g'_2 - g'_5)(g'_3 - g'_5)}{g'_5 - g'_4(g'_3 - g'_5)}, \quad (25)$$

прычым $c' < 0$ у адпаведнасці з (5).

У выразе (22) назойнік заўсёды з'яўляецца адмоўнай велічынёй, што вынікае з дадатнай дакладнасці тэнзара модуляў пругкасці [1],

Табліца 2

Вуглы, якія вызначаюць напрамкі перасячэнняў поласцей і плоскасцей конуса асобых напрамкаў; лік падоўжных нармалей

Крыштал	Формула сіметрыі	Вуглы, якія вызначаюць напрамкі перасячэнняў конуса з плоскасцямі $x=0, y=0, z=0, y=\pm x$	Поўны лік падоўжных нармалей
$\text{NH}_4\text{H}_2\text{PO}_4$	$\bar{4} \cdot m$	$\varphi = 25,3^\circ; \Theta_1 = 47,9^\circ$	5
$\text{NH}_4\text{D}_2\text{PO}_4$	$\bar{4} \cdot m$	$\varphi = 19,5^\circ; \Theta_1 = 40,6^\circ$	5
BaTiO_3	$m \cdot 4 : m$	$\varphi = 26,6^\circ; \Theta_1 = 14,5^\circ$	5
In	$m \cdot 4 : m$	$\vartheta_0 = 56,5^\circ; \vartheta_1 = 45,1^\circ$ *	9
KH_2AsO_4	$\bar{4} \cdot m$	$\varphi = 22,2^\circ; \Theta_0 = 37^\circ$ * ; $\vartheta_0 = 42,8^\circ; \vartheta_1 = 34,8^\circ$ *	13
KH_2PO_4	$\bar{4} \cdot m$	$\varphi = 4,5^\circ; \Theta_0 = 6^\circ$ * ; $\vartheta_0 = 40,3^\circ; \vartheta_1 = 36,8^\circ$ *	13
$\text{NiSO}_4 \cdot 6\text{H}_2\text{O}$	4 : 2	$\varphi = 14,3^\circ; \Theta_0 = 51,2^\circ; \vartheta_0 = 37,5^\circ$ * ; $\vartheta_1 = 24^\circ$ *	13
Sn	$m \cdot 4 : m$	$\vartheta_0 = 64,3^\circ; \vartheta_1 = 42,7^\circ$ *	9
$\text{C}(\text{CH}_2\text{OH})_4$	$\bar{4}$	$\vartheta_0 = 44,2^\circ; \vartheta_1 = 31,2^\circ$	5
TiO_2	$m \cdot 4 : m$	$\vartheta_0 = 64,4^\circ$ * ; $\vartheta_1 = 48^\circ$	9
ZrSiO_4	$m \cdot 4 : m$	$\vartheta_0 = 27,1^\circ; \vartheta_1 = 21,1^\circ$ * ; $\vartheta_0' = 28,7^\circ$ * ; $\vartheta_1' = 55,9^\circ$	13

За ўвага: φ ($0 < \varphi < \pi/4$) — вугал, што адлічваецца ў плоскасці $z=0$ ад восі x ; $\vartheta_0, \vartheta_0'$ і $\vartheta_1, \vartheta_1'$ — вуглы ϑ адпаведна ў плоскасцях $y=0$ ($x=0$) і $y=\pm x$ для 1 і 2-ой поласцей, якія замыкаюцца вакол восі z ; Θ_0 і Θ_1 — вуглы Θ адпаведна ў плоскасці $y=0$ ($x=0$) для поласці, што замыкаюцца вакол восі x (y), і ў плоскасцях $y=\pm x$ для поласцей, якія замыкаюцца вакол дыяганалей $y=\pm x$.

паколькі $g_5 - g_3 + \frac{c}{2} = (c_{11} + c_{12})/\rho$. Множнік $g_2 + g_3 = (c_{44} - c_{11})/\rho$ таксама заўсёды адмоўны, бо ён роўны рознасці квадратаў скорасцей папярочнай хвалі са зрушэннем, паралельным восі z , і падоўжнай хвалі, якія распаўсюджваюцца ў напрамку восей x і y . Па гэтай умовы існавання акустычных восей у плоскасці $z=0$ з'яўляюцца $g_2 - g_5 > 0$ і $\frac{c}{2} \left(g_2 - g_3 + \frac{c}{2} \right) < (g_2 - g_3)(g_2 - g_5)$. Апошнюю няроўнасць можна

пераўтварыць да выгляду $\left(g_2 - g_3 + \frac{c}{2} \right) \left(g_5 - g_2 + \frac{c}{2} \right) < 0$ або, згодна з (6), $(g_2' - g_3')(g_5' - g_2') < 0$. Паколькі $g_2' - g_3' < 0$, то з яго вынікае $g_2' - g_5' < 0$ або (гл. (6)) $g_2 - g_5 < \frac{c}{2}$. Такім чынам, умовы наяўнасці акустычных восей у плоскасці $z=0$ зводзяцца да суадносін

$$g_2 - g_5 > 0, \quad g_2' - g_5' < 0 \quad (26)$$

або

$$0 < g_2 - g_5 < \frac{c}{2}. \quad (27)$$

Акустычныя восі размяшчаюцца ў каардынатных плоскасцях $x=0$,

$y = 0$, калі $0 < \cos^2 \theta_0 < 1$, што зводзіцца з прычыны дадатнасці $g_3 - g_5 = (c_{11} - c_{66})/\rho$ * да сістэмы няроўнасцей (гл. (23))

$$g_2 - g_5 \geq 0, \quad (28)$$

$$g_5^2 - g_4(g_3 - g_5) \geq 0, \quad (g_2 + g_3 + g_4)g_5 - g_3(g_2 + g_4) \geq 0,$$

дзе ва ўсіх няроўнасцях бяруцца адначасова або верхнія знакі, або ніжнія. Няроўнасці (28) не з'яўляюцца незалежнымі, бо сярэдняя з іх можа быць атрымана з дзвюх іншых з улікам суадносін $g_3 - g_5 > 0$. Па гэтаму ў далейшым выключым яе з разгляду.

Умовы існавання акустычных восей у дыяганальных плоскасцях $y = \pm x$ маюць выгляд $0 < \cos^2 \theta_1 < 1$ або (гл. (25), (28))

$$g_2' - g_5' \geq 0 \quad (g_2' + g_3' + g_4')g_5' - g_3'(g_2' + g_4') \geq 0,$$

што раўназначна наступным сістэмам (гл. (6)), якія могуць быць атрыманы таксама непасрэдна з выразу (24) для $\cos^2 \theta_1$:

$$g_2 - g_5 - \frac{c}{2} \geq 0 \quad (g_2 + g_3 + g_4)(g_5 + c) - g_3(g_2 + g_4) \geq 0. \quad (29)$$

Далусцім, што крышталі мае акустычныя восі ў плоскасці $z = 0$, г. зн. выконваюцца суадносіны (26), (27). Гэта накладвае абмежаванні на ўмовы (28), (29) наяўнасці акустычных восей у плоскасцях $y = 0$ ($x = 0$) і $y = \pm x$. А іменна ў гэтым выпадку ў (28) застаецца толькі сістэма няроўнасцей з верхнімі знакамі, у (29) — з ніжнімі. Гэтыя сістэмы аказваюцца несумяшчальнымі, бо рознасць апошніх няроўнасцей у іх прыводзіць да суадносін $c(g_2 + g_3 + g_4) = c(c_{33} - c_{44})/\rho < 0$, якія не могуць задавальняцца, паколькі абодва сумножнікі дадатныя**. Такім чынам, акустычныя восі не могуць існаваць адначасова ва ўсіх плоскасцях $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $y = \pm x$.

Разгледзім выпадак, калі акустычныя восі адсутнічаюць у плоскасці $z = 0$. Гэта мае месца, калі парушаецца адна з умоў (28) або (29), г. зн.

$$g_2 - g_5 < 0 \quad (30)$$

або

$$g_2' - g_5' = g_2 - g_5 - \frac{c}{2} > 0. \quad (31)$$

Калі справядліва (30), то ў (28) і (29) застаюцца толькі няроўнасці з ніжнімі знакамі. Пры гэтым (28) выцякае з (29). Такім чынам, у выпадку выканання ўмовы (30) існаванне акустычных восей у плоскасцях $y = \pm x$ магчыма толькі пры існаванні акустычных восей у каардынатных плоскасцях $x = 0$, $y = 0$. Калі справядліва (31), то ў (28) і (29) застаюцца толькі няроўнасці з верхнімі знакамі, з якіх сістэма (29) выцякае з сістэмы (28). Такім чынам, пры ўмове (31) наяўнасць акустычных восей у каардынатных плоскасцях $x = 0$, $y = 0$ заўсёды суправаджаецца наяўнасцю іх у дыяганальных плоскасцях $y = \pm x$.

У табл. 3 прыведзены значэнні вуглоў φ , θ_0 , θ_1 для акустычных восей у адпаведнасці з (22) — (24) для разгледжаных 11 тэтраганальных крышталяў.

* $(c_{11} - c_{66})/\rho$ роўна рознасці квадратаў скорасцей падоўжнай хвалі і папярочнай хвалі са зрушэннем, паралельным восі $y(x)$, якія распаўсюджваюцца ў напрамку восі $x(y)$.

** $(c_{33} - c_{44})/\rho$ ёсць рознасць квадратаў скорасцей падоўжнай і папярочнай хвалі, якія распаўсюджваюцца ў напрамку восі z .

Табліца 3
Вуглы, якія вызначаюць напрамкі акустычных восей; лік акустычных восей

Крышталі	φ	ϑ_0	ϑ_1	Поўны лік акустычных восей
$\text{NH}_4\text{H}_2\text{PO}_4$	$32,7^\circ$	—	—	5
$\text{NH}_4\text{D}_2\text{PO}_4$	$31,6^\circ$	—	—	5
BaTiO_3	$34,8^\circ$	—	—	9
In	$22,0^\circ$	$48,7^\circ$	$66,6^\circ$	9
KH_2AsO_4	$25,6^\circ$	—	—	5
KH_2PO_4	$26,3^\circ$	—	—	5
$\text{NiSO}_4 \cdot 6\text{H}_2\text{O}$	$18,1^\circ$	$40,7^\circ$	—	9
Sn	$8,6^\circ$	—	—	5
$\text{C}(\text{CH}_2\text{OH})_4$	—	—	—	1
TiO_2	$27,9^\circ$	—	—	5
ZrSiO_4	—	$18,9^\circ$	$71,3^\circ$	9

Паміж акустычнымі восямі ў плоскасці $z = 0$ і падоўжнымі нармалі для кожнага віду конуса асобых напрамкаў (табл. 1) існуе залежнасць, бо выразы $g_2 - g_5$, $g_2 - g_5 - \frac{c}{2}$, што вызначаюць акустычныя восі ў плоскасці $z = 0$, і g_2 , $g_2 + \frac{c}{2}$, што вызначаюць падоўжныя нармалі, уваходзяць у выразы, якія характарызуюць выгляд конуса. Разгледзім, напрыклад, крышталі, для якога $M > 0$, $\alpha > 4$ (гл. табл. 1), але будзем лічыць $c > 0$, $C \geq 0$. Тады ўмовы $\alpha > 4$ і $D \geq 0$ можна запісаць у выглядзе

$$\begin{aligned} & \left(a_1 + \frac{a_3}{2} \right) \left(\frac{a_3}{2} - a_1 + 1 \right) = \\ & = g_5^2 \left(g_2 + \frac{c}{2} \right) \left(g_5 - g_2 + \frac{c}{2} \right) \geq 0, \quad (32) \\ & a_1(a_1 - 1) = g_5^2 g_2 (g_2 - g_5) \geq 0. \end{aligned}$$

Калі разглядаемы крышталі мае акустычныя восі ў плоскасці $z = 0$, то выконваюцца ўмовы (26) і (27). У гэтым выпадку з (32) вынікае, што $g_2 \geq 0$ і $g_2 + \frac{c}{2} \geq 0$ і ўмова $M > 0$ прыводзіць да няроўнасцей $g_5 - 2g_2 \leq 0$ і $g_2 + g_4 \leq 0$. Гэта азначае, што задавальняюцца суадносіны (20) і (21), г. зн. крышталі абавязкова мае падоўжныя нармалі як у каардынатых, так і ў дыяганальных плоскасцях, што праходзяць праз воць z (KH_2AsO_4 , KH_2PO_4 , $\text{NiSO}_4 \cdot 6\text{H}_2\text{O}$; гл. табл. 1). Калі ж разглядаемы крышталі не мае акустычных восей у плоскасці $z = 0$, то аналагічны разважанні прыводзяць пры ўмове (30) да неабходнасці выканання няроўнасцей $g_2 \leq 0$, $g_2 + \frac{c}{2} \geq 0$, $g_2 + g_4 > 0$, а пры ўмове

(31) — няроўнасцей $g_2 \geq 0$, $g_2 + \frac{c}{2} \leq 0$, $g_2 + g_4 < 0$, з якіх вынікае, што пры $C > 0$ крышталі мае падоўжныя нармалі толькі ў плоскасцях $x = 0$, $y = 0$, пры $C < 0$ — толькі ў плоскасцях $y = \pm x$.

Падобным чынам, ведаючы размяшчэнне падоўжных нармалі ў крышталі з любым тыпам конуса (1), можна адразу зрабіць вывады аб наяўнасці акустычных восей у плоскасці $z = 0$. І наадварот, маючы звесткі аб конусе (1) і наяўнасці акустычных восей у плоскасці $z = 0$, можна зрабіць заключэнне аб падоўжных нармаліх крышталі.

ЛІТАРАТУРА

1. Федоров Ф. И. Теория упругих волн в кристаллах. «Наука», 1965.
2. Waterman P. C. Phys. Rev., **113**, 1240, 1959.
3. Александров К. С. Кристаллография, **1**, 718, 1956.
4. Хаткевич А. Г. Кристаллография, **9**, 690, 1964.
5. Хаткевич А. Г. Кристаллография, **5**, 700, 1961.
6. Александров К. С. и Рыжова Т. В. Кристаллография, **6**, 209, 1961.
7. Srivastava R. C., Charaborty S. C. Phys. Soc. of Japan, **17**, 11, 1962.

Резюме

Рассмотрены особые направления тетрагонального кристалла, т. е. направления волновых нормалей, вдоль которых в кристалле может распространяться чисто поперечная волна. Показано, что полный конус особых направлений, кроме плоскостей, может иметь в зависимости от значений модулей упругости одну, две или три полости. Произведено разделение кристаллов на 6 групп по числу полостей и расположению направлений, вокруг которых они замыкаются. Проанализированы формулы, определяющие направления акустических осей и направления пересечения плоскостей и полостей особых направлений, в том числе продольных нормалей. Установлено, что для каждого вида конуса между акустическими осями, перпендикулярными к оси высшего порядка, и продольными нормалью существует определенная зависимость. Для 11 кристаллов приведены значения углов, определяющих направления акустических осей и пересечений плоскостей и полостей особых направлений, в том числе продольных нормалей.

Поступило в редакцию 16.VI 1965

А. А. БОГУШ, І. С. САЦУНКЕВІЧ

АБ ПРАВЕРЦЫ γ_5 -ІНВАРЫЯНТНАСЦІ ПРЫ РАССЕЯННІ ЛЕПТОНАУ НА ПРАТОНЕ

Эксперыментальнае выяўленне магчымых парушэнняў квантавай электрадынамікі, як паказвае вопыт [1], робіцца ўсё больш складанай і цяжкай задачай. Лічуць, што найбольш перспектыўным у гэтых адносінах з'яўляецца метада сустрэчных пучкоў электронаў і пазітронаў вялікай энергіі. Аднак гэта зусім не значыць, што іншыя магчымасці такога роду праверкі павінны быць адвергнуты. У прыватнасці ў рабоце [2] указваецца на несупадзенне эксперыментальных рэзультатаў і разлікаў, заснаваных на звычайнай квантавай электрадынаміцы, у працэсе фотанараджэння пар e^+e^- пры вялікім вугле разлёту пары і вялікай энергіі гама-кванта. Значыць, мэтазгодна зноў звярнуцца да абмеркавання магчымасцей знайсці парушэнні электрадынамікі ў доследах па рассеянню пучкоў лёгкіх часцінак на пратонных мішэннях. Пры гэтым трэба мець на ўвазе, што магчымасці такога роду эксперыментаў могуць быць расшыраны за кошт выкарыстання палярызаваных пучкоў і мішэняў.

З часу работы Дрэла [3] магчымыя парушэнні квантавай электрадынамікі звычайна звязваюць з відазмяненнем прапагатораў фатона або электрона. Побач з гэтым у апошні час шырокае распаўсюджанне атрымаў іншы, эквівалентны шлях, які зводзіцца да відазмянення вяршыняй функцыі за кошт увядзення дадатковых узаемадзеянняў і ўліку залежнасці гэтай функцыі ад велічыні перадаваемага імпульсу [4]. Другі падыход з'яўляецца, як відаць, больш зручным як з пункту гледжання фізічнай інтэрпрэтацыі, так і з пункту гледжання метадыкі разліку, паколькі ён па сутнасці не выходзіць за рамкі стандартнага метаду тэорыі ўздзеянняў з перанарміроўкай. На падставе такога падыходу ў прынцыпе можна ўлічыць усе вышэйшыя прыбліжэнні тэорыі шляхам адпаведнай інтэрпрэтацыі відазмененай вяршыняй функцыі як функцыі, якая адлюстроўвае размеркаванне зараду і магнітнага моманту электрона.

Разгледзім з гэтага пункту гледжання працэс рассеяння электрона (або μ -мезона) на пратоне. Матрычны элемент для дадзенага працэсу можна запісаць у выглядзе

$$(\bar{u}_1 \Gamma_\mu u_2)(\bar{v}_1 \Gamma'_\mu v_2) \frac{1}{q^2}, \quad (1)$$

дзе Γ_μ і Γ'_μ — вяршыняыя функцыі ферміёнаў; q — перадаваемы імпульс; u_i , v_i — хвалевыя функцыі (біспіноры) часцінак. Агульны выгляд Γ_μ і Γ'_μ , які выцякае з патрабаванняў лоранцавай і калібравачнай інварыянтнасці тэорыі:

$$\Gamma_\mu = F_1(q^2)\gamma_\mu + i l F_2(q^2) \frac{1}{4\kappa} (\gamma_\mu \hat{q} - \hat{q} \gamma_\mu), \quad (2)$$

$$\Gamma'_\mu = f_1(q^2)\gamma_\mu - i \lambda f_2(q^2) \frac{1}{4\kappa'} (\gamma_\mu \hat{q} - \hat{q} \gamma_\mu), \quad (2a)$$

дазваляе ўлічыць як магчымыя парушэнні электрадынамікі, так і ўклад вышэйшых прыбліжэнняў. У апошнім выпадку $f_2 = 1$, $\lambda \simeq \frac{\alpha}{2\pi}$ (праз

l і λ мы абазначылі адпаведныя аномальныя магнітныя моманты часцінак). Дарэчы адзначым, што да аналагічнага выгляду вяршынянай функцыі Γ'_μ (з дакладнасцю да множніка, які залежыць ад поўнай энергіі сістэмы) прыводзіць дапушчэнне аб рэджэўскім характары паходзін фатона [5].

Пры аналізе агульнага выразу для вяршынянай функцыі лёгкай часцінкі Γ_μ натуральна ўзнікае пытанне, ці заўсёды ў роўнай меры неабходна ўвядзенне двух складаемых, звязаных адпаведна з фармфактарамі f_1 і f_2 . Іншымі словамі, ці нельга знайсці такі прынцып, які ўстаўляў бы неабходнасць увядзення двух фармфактараў (гл. [5]), што ў якасці такога прынцыпу можна ўзяць патрабаванне γ_5 -інварыянтнасці, г. зн. інварыянтнасці тэорыі электрамагнітных узаемадзеянняў пры вялікіх перадаваемых імпульсах адносна ператварэнняў

$$u \rightarrow \gamma_5 u, \quad \bar{u} \rightarrow -\bar{u} \gamma_5.$$

Лёгка бачыць, што член з f_2 не інварыянтны адносна гэтага ператварэння. Значыць, калі патрабаваць, каб парушаная ў разгледжаным вышэй сэнсе квантавая электрадынаміка была γ_5 -інварыянтнай, то член з f_2 у ёй не павінен з'яўляцца. Адсюль адразу выцякае пастаноўка задачы аб эксперыментальнай правэрцы наяўнасці або адсутнасці ўкладу ў сячэнне рассеяння ад γ_5 -неінварыянтных членаў. Згодна з [6], дыферэнцыяльнае сячэнне рассеяння для працэсу, які апісваецца матрычным элементам (1), у выпадку непаларызаваных часцінак мае выгляд

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\alpha^2 \rho}{q^4} |M|^2 = \frac{\alpha^2 \rho}{q^4} \left\{ G_M^2 G_M'^2 \varepsilon_1 + G_M^2 G_E'^2 \varepsilon_2 + G_M'^2 G_E^2 \varepsilon_3 + G_E^2 G_E'^2 \varepsilon_4 \right\}, \quad (3)$$

дзе

$$\alpha = \frac{e^2}{\hbar c}; \quad \rho = \left[\kappa^2 + \kappa'^2 + \frac{1}{2}(q^2 - rr') \right]^{-1};$$

$$q = p_2 - p_1 = p'_1 - p'_2; \quad r = p_1 + p_2; \quad r' = p'_1 + p'_2; \quad (4)$$

$$q^2 + r^2 = -4\kappa^2; \quad q^2 + r'^2 = -4\kappa'^2,$$

а каэфіцыенты $\varepsilon_i = \varepsilon_i(q^2, rr')$ вызначаюцца выразамі

$$\varepsilon_1 = q^4(1 + \eta), \quad \varepsilon_2 = 4\kappa^2 q^2(\eta - 1), \quad \varepsilon_3 = 4\kappa'^2 q^2(\eta - 1), \quad (5)$$

$$\varepsilon_4 = 16\kappa^2 \kappa'^2 \eta, \quad \eta = \frac{(rr')^2}{r^2 r'^2}.$$

Акрамя таго, у (3) замест дзіракаўскіх і пауліеўскіх фармфактараў F_1 , f_1 і F_2 , f_2 уведзены так званыя зарадавыя і магнітныя фармфактары:

$$G_M = F_1 + lF_2, \quad G'_M = f_1 + \lambda f_2; \quad (6)$$

$$G_E = F_1 - \frac{q^2}{4\kappa^2} lF_2, \quad G'_E = f_1 - \frac{q^2}{4\kappa'^2} \lambda f_2.$$

Для наступнага аналізу зручна запісаць дыферэнцыяльнае сячэнне (3) такім чынам:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \gamma(q^2, rr') a(q^2) \{ \varepsilon_1(q^2, rr') + \varepsilon_2(q^2, rr') b(q^2) + \varepsilon_3(q^2, rr') c(q^2) + \varepsilon_4(q^2, rr') b(q^2) c(q^2) \}, \quad (7)$$

дзе

$$\gamma(q^2, rr') = \alpha^2 \rho(q^2, rr') q^{-4}; \quad a(q^2) = G_M^2 G'_M{}^2; \quad (8)$$

$$b(q^2) = G_E^2 / G'_E{}^2; \quad c(q^2) = G_E^2 / G'_E{}^2.$$

Калі ў эксперыменце вымяраюцца тры дыферэнцыяльныя сячэнні пры трох розных значэннях вуглоў і энергій, г. зн. пры розных значэннях $rr' = (rr')'$, $(rr)''$, $(rr)'''$, але пры адным і тым жа $q^2 = q_1^2$, то з (7) мы атрымліваем сістэму з двух ураўненняў для двух невядомых $b = b(q_1^2)$ і $c = c(q_1^2)$:

$$\frac{d\sigma_1/d\Omega_1}{d\sigma_2/d\Omega_2} = \frac{\rho'(\varepsilon'_1 + \varepsilon'_2 b_1 + \varepsilon'_3 c_1 + \varepsilon'_4 b_1 c_1)}{\rho''(\varepsilon''_1 + \varepsilon''_2 b_1 + \varepsilon''_3 c_1 + \varepsilon''_4 b_1 c_1)},$$

$$\frac{d\sigma_1/d\Omega_1}{d\sigma_3/d\Omega_3} = \frac{\rho'(\varepsilon'_1 + \varepsilon'_2 b_1 + \varepsilon'_3 c_1 + \varepsilon'_4 b_1 c_1)}{\rho'''(\varepsilon'''_1 + \varepsilon'''_2 b_1 + \varepsilon'''_3 c_1 + \varepsilon'''_4 b_1 c_1)}, \quad (9)$$

дзе

$$\rho' = \rho(q_1^2, (rr)'), \quad \rho'' = \rho(q_1^2, (rr)''), \quad \dots$$

$$\varepsilon'_i = \varepsilon_i(q_1^2, (rr)'), \quad \varepsilon''_i = \varepsilon_i(q_1^2, (rr)'') \dots \quad (10)$$

Апісаная схема дазваляе адразу ўстанавіць наяўнасць або адсутнасць γ_5 -інварыянтнага ўкладу ў сячэнне рассеяння. Відавочна, калі акажацца, што

$$b(q^2) = \frac{G_E^2}{G'_E{}^2} = 1,$$

то $f_2 = 0$, і эксперымент будзе сведчыць у карысць γ_5 -інварыянтнасці пры адпаведных значэннях перадаваемых імпульсаў.

Аднак у гэтай схеме мы можам атрымаць толькі абсалютную велічыню G'_E / G'_M . Для вызначэння яе знака (што эквівалентна вызначэнню знака f_2) трэба звярнуцца да доследаў з палярызаванымі часцінкамі.

Разгледзім той жа працэс пры ўліку пачатковых палярызаций пратона і лептона. Адпаведны разлік у гэтым выпадку прыводзіць да наступнага выразу для палярызацийнай папраўкі да сячэння:

$$P = \frac{d\sigma_+ - d\sigma_-}{d\Omega} = \frac{\alpha^2 \rho}{q^4} \frac{1}{2\kappa\kappa'} \{ G_M^2 G'_M{}^2 \zeta_1 +$$

$$+ G_M'^2 G_M G_E \zeta_2 + G_M^2 G_M' G_E' \zeta_3 + G_M G_E G_M' G_E' \zeta_4 \}, \quad (11)$$

дзе

$$\zeta_1 = \frac{q^2}{r^2 r'^2} (rr') (rs_1) (rs_2'); \quad \zeta_3 = \frac{q^2}{r^2} (rs_1) (rs_2') - \zeta_1; \quad (12)$$

$$\zeta_2 = \frac{q^2}{r'^2} (r's_1) (r's_2') - \zeta_1; \quad \zeta_4 = q^2 (s_1 s_2') - (qs_1)(qs_2') - (\zeta_1 + \zeta_2 + \zeta_3).$$

Тут s_1 і s_2' —4-вектары палярызацыі пратона і лептона адпаведна.

Уводзячы цяпер абазначэнні

$$G_M^2 G_M' = a(q^2), \quad \alpha^2 \rho [b^4 2\kappa\kappa']^{-1} = \varphi(q^2, rr'), \\ G_E / G_M = g(q^2), \quad G_E' / G_M' = h(q^2), \quad (13)$$

якія проста звязаны з формуламі (8), перапішам выразы для палярызацыйнай папраўкі (11) у выглядзе

$$P = \varphi(q^2, rr') a(q^2) \{ \zeta_1(q^2, rr', s_1, s_2') + \\ + \zeta_2(q^2, rr', s_1, s_2') g(q^2) + \zeta_3(q^2, rr', s_1, s_2') h(q^2) + \\ + \zeta_4(q^2, rr', s_1, s_2') g(q^2) h(q^2) \}. \quad (14)$$

Лёгка бачыць, што ў гэтым выпадку можна прапанаваць схему вызначэння невядомых $h(q^2)$ і $g(q^2)$, аналагічную выкладзенай вышэй для вызначэння $b(q^2)$ і $c(q^2)$. Зразумела, што вызначэнне саміх велічынь G_E'/G_M' і G_E/G_M , а не іх квадратаў, з'яўляецца эксперыментальна больш складанай задачай.

ЛІТАРАТУРА

1. Ramsey N. Препринт ОИЯИ, Е-1786, Дубна, 1964.
2. Blumenthal R. B., Ehn D. C., Faissner M. L., Joseph P. M., Lanzetta L. I., Pipkin F. M., Stairs O. G. Phys. Rev. Lett., **14**, 660, 1965.
3. Drell S. Ann. of Physics, **4**, 75, 1958.
4. Аваков Г. В. и Тер-Мартirosян К. А. Nucl. Phys., **13**, 685, 1963.
5. Нгуен Ван Хьеу. Препринт ОИЯИ, Р-1263, Дубна, 1963.
6. Богуш А. А. Весті АН БССР, сер. фіз.-мат. навук, № 2, 1965.

Резюме

В работе исследуется процесс электромагнитного рассеяния лептона на протоне в предположении о возможном нарушении квантовой электродинамики при больших передаваемых импульсах в случае, когда локальная вершина взаимодействия для электрона взята в виде

$$\Gamma'_\mu(q^2) = f_1(q^2) \gamma_\mu - \frac{i \lambda f_2(q^2)}{4\kappa'} (\hat{q} \gamma_\mu - \gamma_\mu \hat{q}),$$

где $q = p_2 - p_1$ — передаваемый импульс. Исходя из требования γ_5 -инвариантности теории, ставится вопрос о допустимости совместного существования в матричном элементе двух членов, стоящих соответственно при формфакторах $f_1(q^2)$ и $f_2(q^2)$ и обладающих различными трансформационными свойствами относительно преобразований волновых функций типа $\psi \rightarrow \gamma_5 \psi$ ($\bar{\psi} \rightarrow -\bar{\psi} \gamma_5$).

В статье показано, что, используя выражение для дифференциального сечения лептона на протоне, можно получить систему уравнений для двух неизвестных величин $b(q^2) = G_E^2 / G_M^2$ и $c(q^2) = G_E' / G_M'$. На этой основе предлагается схема для экспериментального определения γ_5 -неинвариантного вклада в сечение рассеяния. Она сводится к измерению трех дифференциальных сечений при различных энергиях и углах, но при одном и том же значении квадрата передаваемого импульса q^2 . О степени нарушения γ_5 -инвариантности квантовой электродинамики можно судить по отклонению определенной таким образом величины $b(q^2)$ от 1 (условие $b(q^2) = 1$ эквивалентно условию $f_2(q^2) = 0$). Аналогичная схема, основанная на измерении поляризационных поправок при учете поляризации начальных частиц, позволяет определить знак величины G_E' / G_M' , а следовательно, и знак формфактора $f_2(q^2)$.

Поступило в редакцию 16.VI 1965

А. М. ГОНЧАРЕНКО

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН В ПЛОСКОМ АНИЗОТРОПНОМ ВОЛНОВОДЕ

В последние годы анизотропные волноводы привлекают к себе большое внимание, и к настоящему времени выяснены свойства волноводов с гиротропным заполнением, а также волноводов из одноосных кристаллов (см., например, [1—5]). Однако теория таких волноводов довольно сложна. Причем решение многих задач о распространении электромагнитных волн в анизотропных волноводах может быть проведено только численным путем. Даже в сравнительно простом случае плоского металлического волновода, но с произвольной ориентацией осей тензора диэлектрической проницаемости ϵ задача не может быть полностью решена аналитически. Это связано с тем, что дисперсионное уравнение для постоянных распространения будет полным уравнением 4-ой степени относительно продольной составляющей h волнового вектора \mathbf{k} . Как следует из [6], оно сводится к биквадратному только в частных случаях ориентации тензора ϵ : одно из главных направлений ϵ должно быть либо параллельно, либо перпендикулярно плоскости волновода.

В данной работе рассматривается плоский металлический волновод с частными случаями ориентации осей тензора ϵ относительно волновода. Систему координат выбираем так, что ось x нормальна, а оси y, z параллельны плоскости волновода. Будем искать электромагнитное поле в волноводе в виде волн, распространяющихся вдоль оси z и не зависящих от координаты y (это не ограничивает общности решения).

В простейшем случае, когда главные оси тензора ϵ совпадают с координатными осями, для z -составляющих векторов \mathbf{E} и \mathbf{H} из уравнений Максвелла получаем следующие дифференциальные уравнения:

$$\frac{1}{\epsilon_3} \frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} + \frac{1}{\epsilon_1} \frac{\partial^2 E_z}{\partial z^2} + \omega^2 \mu E_z = 0, \quad (1)$$

$$\frac{1}{\epsilon_2} \frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2} + \frac{1}{\epsilon_2} \frac{\partial^2 H_z}{\partial z^2} + \omega^2 \mu H_z = 0, \quad (2)$$

где $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$ — главные значения тензора ϵ ; μ — магнитная проницаемость среды. Этим волновым уравнениям, а также граничным условиям на поверхности бесконечно проводящий металл — анизотропный диэлектрик удовлетворяют независимо ТМ и ТЕ волны вида

$$E_z = a \sin uxe^{ihz}, \quad (3)$$

$$H_z = b \cos uxe^{ihz}, \quad (4)$$

где u — постоянная распространения вдоль оси x , а h — вдоль оси z . Подставляя (3), (4) в (1), (2), убеждаемся, что постоянные распростра-

нения u , h ТМ и ТЕ волн должны подчиняться соответственно соотношениям

$$\frac{u^2}{k_3^2} + \frac{h^2}{k_1^2} = 1, \quad u^2 + h^2 = k_2, \quad (5)$$

где $k_i^2 = \epsilon_i \mu \omega^2$ ($i = 1, 2, 3$). Уравнения (5) являются обычными сечениями двуполостной поверхности постоянных распространения главной плоскостью (xz). Поперечная постоянная u , как и обычно, определяется из граничных условий ($E_z = E_y = 0$ при $x = 0, x = l$, l — толщина слоя) и равна $\frac{n\pi}{l}$ ($n = 1, 2, 3 \dots$). Продольная постоянная h при этом находится из уравнений (5).

Рассмотрим теперь более общий случай. Пусть, например, только одна из главных осей тензора ϵ параллельна плоскости волновода и совпадает с осью z . Решение уравнений Максвелла будем искать в виде плоских неоднородных волн, бегущих вдоль z . Полагаем поэтому, что z -составляющие полей имеют вид:

$$E_z = E_z(x) e^{ihz}, \quad H_z = H_z(x) e^{ihz}. \quad (6)$$

При этом из уравнений Максвелла получаем следующие выражения для E_x, E_y :

$$i(u_{11}^2 u_{22}^2 - k_{12}^4) E_x = -hu_{22}^2 \frac{\partial E_z}{\partial x} - k_{12}^2 \omega \mu \frac{\partial H_z}{\partial x}, \quad (7)$$

$$i(u_{11}^2 u_{22}^2 - k_{12}^4) E_y = hk_{12}^2 \frac{\partial E_z}{\partial x} + u_{11}^2 \omega \mu \frac{\partial H_z}{\partial x}, \quad (8)$$

где

$$\begin{aligned} u_{11}^2 &= k_{11}^2 - h^2 = \epsilon_{11} \mu \omega^2 - h^2; \\ u_{22}^2 &= k_{22}^2 - h^2 = \epsilon_{22} \mu \omega^2 - h^2; \\ k_{12}^2 &= \epsilon_{12} \mu \omega^2. \end{aligned} \quad (9)$$

Продольные составляющие векторов \mathbf{E} и \mathbf{H} удовлетворяют системе дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} (h^2 \epsilon_{33} - \omega^2 \mu \epsilon_{11} \epsilon_{33}) E_z - \epsilon_{11} \frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} + \omega \mu \epsilon_{12} h H_z &= 0, \\ (\omega^2 \epsilon_{22} \mu h - h^3) H_z + h \frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2} - \omega \epsilon_{12} \left(\omega^2 \mu \epsilon_{33} E_z + \frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} \right) &= 0. \end{aligned} \quad (10)$$

Из этих уравнений видим, что независимые решения для E_z и H_z возможны только при $\epsilon_{12} = 0$, т. е. если тензор ϵ имеет диагональный вид, что означает совпадение его главных направлений с осями координат. В общем же случае, следовательно, в анизотропной среде не могут существовать поперечно-магнитные (ТМ) и поперечно-электрические (ТЕ) волны. Уравнения Максвелла удовлетворяют только смешанные (гибридные) волны. Последнее, впрочем, совершенно очевидно из характера поляризации волн в кристалле в произвольном направлении.

Выражения (6) являются характерными для всех волноводных задач. В любой волноводной системе необходимо найти поле, представляемое

в виде неоднородных волн, бегущих вдоль оси. Решение волноводной задачи сводится к определению постоянной распространения h и распределения поля по его поперечнику. В нашем случае плоского волновода последнее означает, что мы должны найти возможное число плоских волн в анизотропном волноводе при определенном значении h (проекции волнового вектора \mathbf{k} на ось z). Иначе говоря, для определения распределения поля в поперечном сечении плоского волновода необходимо найти число возможных поперечных постоянных u для каждого h . Нетрудно убедиться, что в общем случае произвольной ориентации осей тензора ϵ относительно волновода каждому h будут соответствовать четыре разных \mathbf{k} , а следовательно, и четыре разных значения u (и наоборот). Однако в рассматриваемом случае каждому h будут соответствовать только два разных значения u .

Учитывая это, приходим к выводу, что уравнениям (10) и граничным условиям на поверхности анизотропная среда — металл должны удовлетворять решения вида

$$\begin{aligned} E_z &= A(\sin u_1 x + a \sin u_2 x), \\ H_z &= A(b_1 \sin u_1 x + b_2 \sin u_2 x). \end{aligned} \quad (11)$$

Подставляя (11) в (10) и используя граничное условие $E_y = 0$ при $x = 0, x = l$, получим следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} \epsilon_{11} u_1^2 - \epsilon_{33} u_{11}^2 + \omega h \mu \epsilon_{12} b_1 &= 0, \\ (\epsilon_{11} u_2^2 - \epsilon_{33} u_{11}^2) a + \omega h \mu \epsilon_{12} b_2 &= 0, \\ (u_{22}^2 - u_1^2) h b_1 - \omega \epsilon_{12} (k_{33}^2 - u_1^2) &= 0, \\ (u_{22}^2 - u_2^2) h b_2 - \omega \epsilon_{12} (k_{33}^2 - u_2^2) &= 0, \\ h k_{12}^2 (u_1 + u_2 a) + \omega \mu u_{11}^2 (u_1 b_1 + u_2 b_2) &= 0. \end{aligned} \quad (12)$$

Из этих уравнений находим коэффициенты a, b_1, b_2 :

$$a = \frac{(\epsilon_{11} u_1^2 - \epsilon_{33} u_{11}^2) u_{11}^2 - h^2 \epsilon_{12} k_{12}^2}{h \epsilon_{12} k_{12}^2 - (\epsilon_{11} u_2^2 - \epsilon_{33} u_{11}^2) u_{11}^2} \frac{u_1}{u_2}. \quad (13)$$

$$b_1 = - \frac{\epsilon_{11} u_1^2 - \epsilon_{33} u_{11}^2}{\omega \mu h \epsilon_{12}}, \quad (14)$$

$$b_2 = - \frac{(\epsilon_{11} u_2^2 - \epsilon_{33} u_{11}^2)}{\omega \mu h \epsilon_{12}} \frac{(\epsilon_{11} u_1^2 - \epsilon_{33} u_{11}^2) u_{11}^2 - h^2 \epsilon_{12} k_{12}^2}{h^2 \epsilon_{12} k_{12}^2 - (\epsilon_{11} u_2^2 - \epsilon_{33} u_{11}^2) u_{11}^2} \frac{u_1}{u_2}. \quad (15)$$

Для определения постоянной h из (12) имеем уравнение

$$(h^2 \epsilon_{33} - \epsilon_{33} k_{11}^2 + \epsilon_{11} u_1^2) (k_{22}^2 - h^2 - u_1^2) + \omega^2 \mu \epsilon_{12}^2 (k_{33}^2 - u_1^2) = 0. \quad (16)$$

Поперечные постоянные по-прежнему определяются из граничных условий и равны

$$u_1 = \frac{n_1 \pi}{l}, \quad u_2 = \frac{n_2 \pi}{l} \quad (n_1, n_2 = 1, 2, 3 \dots). \quad (17)$$

Таким образом, соотношения (11), (13) — (17) полностью определяют электромагнитное поле в металлическом плоском волноводе с анизотропным заполнением. Как видим, даже в простейших случаях решение является громоздким. Аналогичным образом можно решить задачу о распространении волн в произвольном анизотропном плоском и даже прямоугольном волноводе. Однако решение при этом оказывается настолько громоздким, что практически такого рода задачи имеет смысл решать только численным путем для каждого конкретного случая.

ЛИТЕРАТУРА

1. Van Trier. Appl. Sci. Res., sec. B, 3, 305, 1954.
2. Mattila P. Electr. theory antennas., 1963.
3. Гуревич А. Г. Ферриты на сверхвысоких частотах. Физматгиз. 1960.
4. Samaddar S. N. J. Electr. Contr., 16, 273, 1964.
5. Гусак Н. А., Ганчаренка А. М. Весті АН БССР, серия фіз.-мат. навук, № 1, 1965.
6. Федоров Ф. И. Оптика анизотропных сред. Минск, 1958.

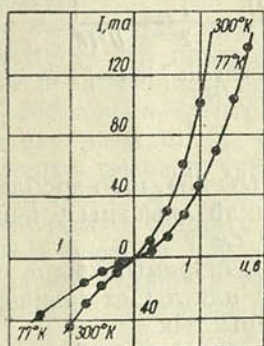
Поступило в редакцию 29.V 1965

У. І. АСІНСКІ, М. М. СІРАТА

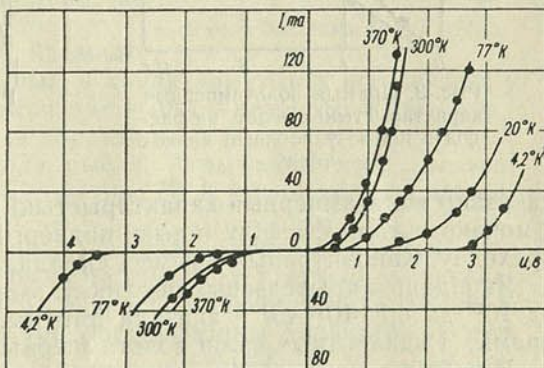
ТЭМПЕРАТУРНАЯ ЗАЛЕЖНАСЦЬ ВОЛЬТАМПЕРНЫХ ХАРАКТАРЫСТЫК $n-p$ ПЕРАХОДАЎ НА ФАСФІДзе ІНДЫЮ

Вялікую цікавасць цяпер набываюць даследаванні дыёдаў на злучэннях $A^{III}B^V$ пры розных тэмпературах [1—3]. У нашай лабараторыі былі прыгатаваны $n-p$ пераходы на монакрышталах фасфіду індыю. Мэтай гэтай работы з'яўлялася даследаванне тэмпературнай залежнасці вольтамперных характарыстык выпраменьваючых $n-p$ пераходаў на фасфідзе індыю з рознай канцэнтрацыяй носьбітаў току.

Фасфід індыю сінтэзаваўся ў дзвюхзоннай печы ў кварцавых ампулах. пасля сінтэзу праводзілася зонная ачыстка. Монакрысталі фасфіду



Рыс. 1. Вольтамперныя характарыстыкі дыёдаў з фасфідаў індыю з канцэнтрацыяй $n=10^{18} \text{ см}^{-3}$ пры тэмпературах 77 і 300° К



Рыс. 2. Вольтамперныя характарыстыкі дыёдаў з фасфіду індыю з канцэнтрацыяй $n=4,7 \cdot 10^{17} \text{ см}^{-3}$ пры тэмпературах 4,2; 20; 77; 300 і 370° К

індыю вырошчваліся па спосабу накіраванай крышталізацыі пры павольным ахалоджванні ампул з расплавам у печы з наяўнасцю градыенту тэмпературы. У ампулах падтрымліваўся некаторы лішні ціск фосфару. Для даследавання выкарыстоўваліся монакрысталі n -тыпу.

Электронна-дзірачныя пераходы рабіліся шляхам дыфузіі акцепторнай прымесі. Амічныя кантакты ствараліся з n - і p -бакоў $n-p$ пераходу. Да p -боку прыпайваліся залатыя дрошкі, а n -бокам крышталі прыпайваўся да трымальніка. Папярочнае сячэнне дыёдаў 0,25—1,5 мм^2 . Глыбіня залягання $n-p$ пераходу кантралявалася па рэкамбінацыйнаму выпраменьванню і складала каля 100 $\mu\text{м}$.

Вольтамперныя характарыстыкі вымяраліся па пунктах у рэжыме пастаяннага току. Пры токах вышэй 150 ма вымярэнне праводзілася ў імпульсным рэжыме з частотой імпульсаў 50 гц пры працягласці імпульсаў 5 $\mu\text{сек}$. Ток вымяраўся па падзенню напружання на эталонным

супраціўленні ў 1 ом , значна меншым, чым супраціўленне дыёда. Сілкаванне дыёда ажыццяўлялася ад крыніцы з электроннай стабілізацыяй.

Вымярэнні пры нізкіх тэмпературах праводзілі пры апусканні дыёда ў вадкі азот, вадкі вадарод і вадкі гелій. На рыс. 1 прыведзены вольтамперныя характарыстыкі дыёда I (№ 29), пры тэмпературах 300 і 77° К , прыгатаванага з монакрыштала фасфіду індые, што не падвяргаўся зоннай ачыстцы, з канцэнтрацыяй прымесі 10^{18} см^{-3} .

Дынамічныя супраціўленні ў прамым і адваротным напрамках былі роўны пры 300° К адпаведна 4 і 22 ом , а пры 77° К — 8 і 40 ом . На рыс. 2

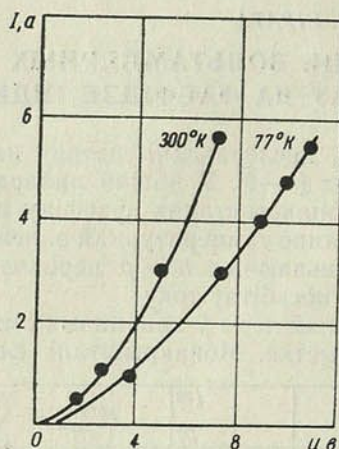


Рис. 3. Прямые вольтамперные характеристики дыёдаў на фасфідзе індые ў вобласці вялікіх токаў

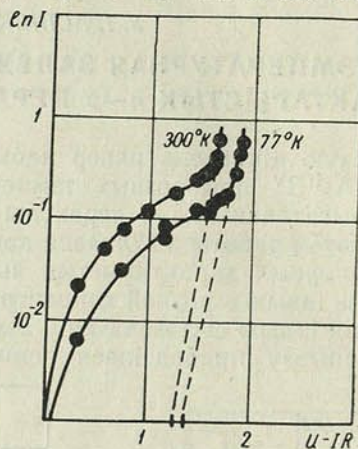


Рис. 4. Залежнасць $\ln I = f(U - IR)$

паказаны вольтамперныя характарыстыкі дыёда II (№ 35), што зроблен з монакрыштала фасфіду індые, падвергнутага зоннай ачыстцы ў пяць праходаў. Канцэнтрацыя прымесі складала $4,7 \cdot 10^{17} \text{ см}^{-3}$.

Як відаць з прыведзеных рысункаў, змяненне канцэнтрацыі прымесей ад 10^{18} да $4,7 \cdot 10^{17} \text{ см}^{-3}$ аказала істотны ўплыў на нахіл і становішча прамых і адваротных галін вольтамперных характарыстык.

У табліцы прыведзены значэнні дынамічных супраціўленняў дыёда пры розных тэмпературах у вобласці ад $4,2$ да 370° К , змяненні прамога і адваротнага падзення напружання пры пастаянным значэнні току, а таксама паказчыкі экспаненты $I \sim \exp \frac{B}{T} U$, на якія ўкладваюцца пачатковыя ўчасткі прамых галін вольтамперных характарыстык.

З паніжэннем тэмпературы прамыя і адваротныя галіны значна зрушваюцца ў бок большых напружанняў. Пры павышаных значэннях

Некаторыя параметры вольтамперных характарыстык $n-p$ пераходаў на фасфідзе індые

Тэмпература, $^\circ \text{ К}$	Дынамічнае супраціўленне, $r_d, \text{ ом}$		Падзенне напружання на дыёдзе $U_d, \text{ в}$		Паказчык экспаненты $\frac{B}{T}$
	прамая галіна пры $I=50 \text{ ма}$	адваротная галіна пры $I=20 \text{ ма}$	прамая галіна пры $I=50 \text{ ма}$	адваротная галіна пры $I=20 \text{ ма}$	
4,2	11,7	27,6	3,52	3,88	0,25
20	13,4	—	2,90	—	12,10
77	18,2	47,0	1,82	1,98	23,00
300	6,0	60,0	1,15	1,65	32,00
370	4,0	50,0	1,05	1,60	39,00

токаў выяўляецца адхіленне ад экспаненцыяльнай залежнасці сілы току ў функцыі напружання, якое звязана са змяненнем механізму праводнасці і ўзрастаючай роляй рэкамбінацыі носбітаў току. З паніжэннем тэмпературы змяншаюцца велічыні падзення напружання, пры якіх назіраюцца адхіленні прамых галін ад экспаненцыяльнай залежнасці, што, у прыватнасці, характарызуецца змяненнем дынамічных супраціўленняў у функцыі тэмпературы.

На рыс. 3 паказаны прамыя галіны вольтамперных характарыстык дыёда II, знятыя ў імпульсным рэжыме пры тэмпературы 300 і 77° К.

Супастаўленне вольтамперных характарыстык рыс. 2 пры малых токах і рыс. 3 пры вялікіх токах паказвае, што з павелічэннем току прамыя галіны характарыстык выпрамляюцца і адхіляюцца ад экспаненцыяльнай залежнасці.

На рыс. 4 паказаны прамыя галіны вольтамперных характарыстык $n-p$ пераходу дыёда II, якія прадстаўлены ў паўлагагарыфмічным маштабе па даных статычных і імпульсных вымярэнняў. Па восі ардынат адкладзены лагарыфм току, па восі абсцыс — падзенне напружання на $n-p$ пераходзе, г. зн. рознасці $(U-IR)$ падзення напружання на ўсім дыёдзе і на тоўшчы паўправадніковага матэрыялу з абодвух бакоў ад пераходу.

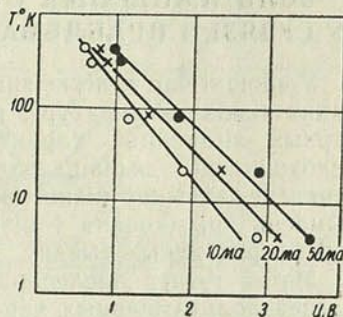


Рис. 5. Залежнасць $\lg T = f(U)$

Як вядома [2], экстрапаляцыя прамалінейнага ўчастка прыведзеных на рыс. 4 характарыстык к восі абсцыс у пункце перасячэння з воссю дае значэнне вышні патэнцыяльнага бар'ера ў вобласці $n-p$ пераходу, якая характарызуе шырыню забароненай зоны паўправадніковага матэрыялу дыёда. Атрыманыя намі значэнні 1,27 эВ пры тэмпературы 300° К і 1,38 эВ пры 77° К узгадняюцца з данымі вымярэнняў [4, 5].

Результаты нашага даследавання сведчаць таксама аб тым, што дыёды з фасфіду індые могуць выкарыстоўвацца ў якасці адчувальных датчыкаў нізкіх тэмператур [6]. У вобласці тэмператур 4,2—300° К змяненне напружання на дыёдзе мае лагарыфмічны характар, як гэта паказана на рыс. 5. Тэмпературны каэфіцыент $\frac{d \lg T}{dU}$ роўны $k_1 = -0,75$, $k_2 = -0,84$, $k_3 = -0,92$ пры токах 50, 20 і 10 ма адпаведна.

У заключэнне выказваем падзяку А. Д. Шнырову за дапамогу ў правядзенні вымярэнняў пры нізкіх тэмпературах.

ЛІТАРАТУРА

1. Наследов Д. Н., Царенков Б. В. ФТТ, сб. 1, 78, 1959.
2. Вул Б. М., Заварицкая Э. И., Шотов А. П. ФТТ, 6, в. 5, 1964.
3. Weiser K., Levitt R. S. Appl. Phys. let., 2, № 9, 1963.
4. Oswald F. Z. Naturforsch., 9a, 181, 1954.
5. Newman R. Phys. rev., III, 1518, 1958.
6. Осинский В. И., Сирота Н. Н. Гэты часопіс, стар. 130.

Резюме

Приводятся результаты исследования температурной зависимости вольтамперных характеристик излучающих $n-p$ переходов на фосфиде индия с различной концентрацией примесей. Установлено, что при повышении тока через диод выявляется отклонение вольтамперных характеристик от экспоненциальной зависимости. Коэффициент изменения напряжения на диоде при изменении температуры от 4,2° до 370° К $\frac{d \lg T}{dU}$ равен $k_1 = -0,75$, $k_2 = -0,84$, $k_3 = -0,92$ при токах 50, 20 и 10 ма соответственно.

Поступило в редакцию 16.IV 1965

Ф. П. КОРШУНАУ, М. М. СІРАТА

ВОЛЬТАМПЕРНЫЯ І ІНШЫЯ ХАРАКТАРЫСТЫКІ ДЫЁДАУ У СУВЯЗІ З ПРАБЛЕМАЙ ВЫМЯРЭННЯ НИЗКІХ ТЭМПЕРАТУР¹

У апошні час вялікае значэнне набыла праблема вымярэння і рэгулявання нізкіх тэмператур з вялікай дакладнасцю. З-за значных тэмпературных змяненняў характарыстык паўправадніковых дыёдаў узнікае неабходнасць выявіць мэтазгоднасць выкарыстання гэтых прылад у якасці датчыкаў нізкіх тэмператур. У работах [1—3] адзначалася магчымасць прымянення ў нізкатэмпературнай тэрмаметры арсенід-галіевых і германіевых дыёдаў.

Мэтай гэтага даследавання было вывучэнне тэмпературных залежнасцей вольтамперных характарыстык германіевых, крэмніевых і арсе-

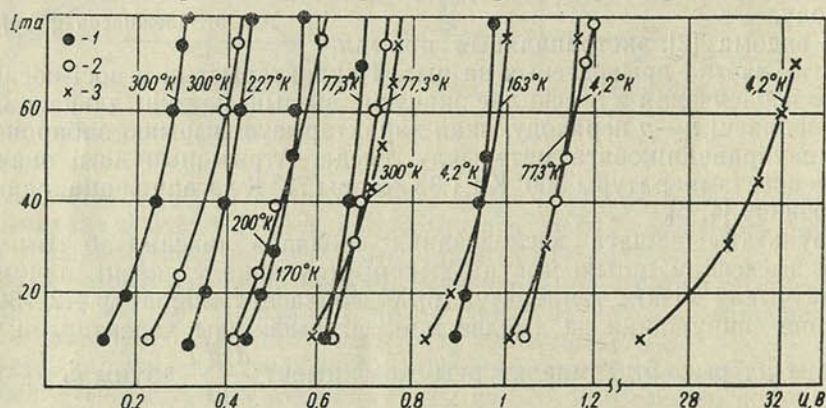


Рис. 1. Змяненні прамых галін вольтамперных характарыстык паўправадніковых дыёдаў і эмітэрнага пераходу транзістара ў дыяпазоне тэмператур ад 300 да 4,2° К:

1 — германіевы сплаўны дыёд; 2 — эмітэрны пераход германіевага транзістара; 3 — крэмніевы сплаўны дыёд

нід-галіевых дыёдаў у дыяпазоне тэмператур 300—4,2° К і параўнальная ацэнка магчымасці прымянення ўказаных дыёдаў для вымярэння нізкіх тэмператур.

Для зняцця вольтамперных характарыстык дыёды замацоўваліся на трымальніку, прыстасаваным для работы пры нізкіх тэмпературах, і апускаліся ў крыжэат, у якім тэмпература магла змяняцца ад 4,2° К да хатняй. Сілкаванне дыёдаў ажыццяўлялася ад крыніцы з высокім каэфіцыентам стабілізацыі і плаўнай рэгуліроўкай напружання. Вольтамперныя характарыстыкі здымаліся па пунктах.

На рыс. 1 паказаны прамыя галіны вольтамперных характарыстык

¹ Работа дакладзена на секцыі крыжэанай тэхнікі XI Усесаюзнай нарады па фізіцы нізкіх тэмператур у Мінску ў чэрвені 1964 г.

сплаўнога германіевага дыёда, эмітэрнага пераходу германіевага транзістара і сплаўнога крэмніевага дыёда, якія вымераны пры тэмпературах $300 \div 4,2^\circ \text{K}$. Пры паніжэнні тэмпературы напружанне на ўсіх прыладах (для дадзенага значэння току) ўзрастае, г. зн. павялічваецца супраціўленне дыёдаў. Аднак скорасць павелічэння супраціўлення з паніжэннем тэмпературы для розных тыпаў прылад неаднолькавая. Прамая галіна вольтампернай характарыстыкі эмітэрнага пераходу германіевага транзістара ссоўваецца ўправа пры геліевых тэмпературах у адносінах да хатніх тэмператур некалькі больш, чым характарыстыка германіевага дыёда. Нахіл характарыстык германіевага дыёда і транзістара з паніжэннем тэмпературы істотна не змяніўся ў параўнанні з першапачатковым ходам крывых.

У крэмніевага дыёда прамая галіна вольтампернай характарыстыкі таксама ссоўваецца ўправа. Да азотных тэмператур прамое супраціўленне дыёда расце практычна лінейна ў функцыі нізкай тэмпературы. Пры зніжэнні тэмпературы да геліевай характарыстыка крэмніевага дыёда ссоўваецца ўправа значна больш, чым у германіевага дыёда або

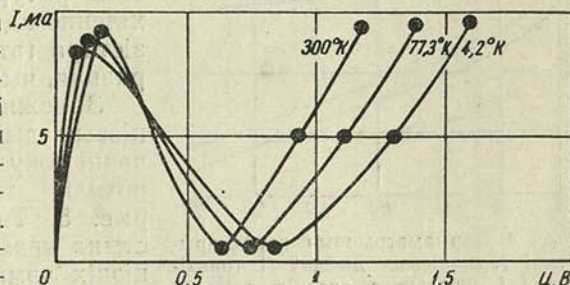


Рис. 2. Вольтамперныя характарыстыкі тунельнага арсенід-галіевага дыёда пры нізкіх тэмпературах

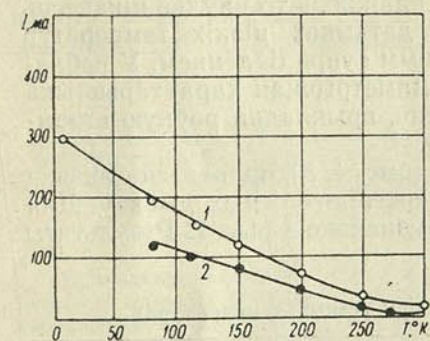


Рис. 3. Змяненне току праз нізкавольтны крэмніевы стабілітрон у функцыі нізкіх тэмператур пры двух фіксаваных напружаннях на дыёдзе:

1 — 7,1 в; 2 — 7 в

трыёда. Змяніўся таксама і нахіл характарыстыкі ў параўнанні з ходам пры хатняй тэмпературы. Нахіл прамой галіны панізіўся, што звязана з павелічэннем падзення напружання ў тоўшчы паўправадніка базавай вобласці дыёда пры нізкіх тэмпературах.

Залежнасць току праз нізкавольтны крэмніевы стабілітрон у функцыі нізкай тэмпературы пры двух фіксаваных напружаннях (7в, 7,1 в) паказана на рыс. 2. Пры напружанні на дыёдзе 7,1 в ток праз прыладу рэзка ўзрастае са зніжэннем тэмператур ад 300 да $4,2^\circ \text{K}$. Пры напружанні на дыёдзе 7 в гэты рост мае месца толькі да азотных тэмператур. Далейшае зніжэнне тэмпературы выклікае рэзкае падзенне току.

Рост току ў першым і другім выпадках тлумачыцца больш інтэнсіўным развіццём ударнай іанізацыі, якая ўзрастае са змяншэннем тэмпературы, па прычыне павелічэння свабоднага прабегу носьбітаў. Падзенне току ў другім выпадку ($U=7 \text{ в}$) пры тэмпературах ніжэй азотных звязана, відаць, з тым, што напружанасць электрычнага поля ў вобласці $n-r$ пераходу пры гэтых тэмпературах недастатковая для таго, каб надаць носьбітам энергію, неабходную для разрыву валентных сувязей.

У тунельнага арсенід-галіевага дыёда пры зніжэнні тэмпературы ад 300 да $4,2^\circ \text{K}$ моцна змяняецца дыфузійная галіна (рыс. 3). Супраціўленне дыёда ў дыфузійнай вобласці расце амаль лінейна з паніжэннем тэмпературы. Назіраецца нязначнае змяненне току максімуму і зрух упадзіны ў бок большых напружанняў пры паніжэнні тэмпературы.

Змяненне напружання на германіевым дыёдзе і транзістары і тунельным арсенід-галіевым дыёдде ў функцыі нізкіх тэмператур (тэмпературная характарыстыка) пры фіксаваным значэнні току праз дыёд (для тунельнага дыёда $I=5$ ма, для астатніх прылад $I=10$ ма) паказана на

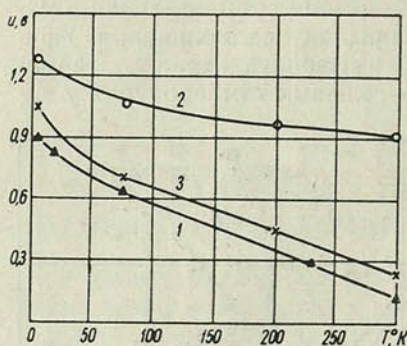


Рис. 4. Тэрмаметрычныя характарыстыкі германіевых дыёдаў і транзістара і тунельнага арсенід-галіевага дыёда пры фіксаваным значэнні току праз прыладу ($I=10$ ма для германіевых дыёдаў, $I=5$ ма для тунельнага дыёда):

1 — германіевы сплаўны дыёд; 2 — арсенід-галіевы тунельны дыёд; 3 — эмітэрны пераход германіевага транзістара

пры выкарыстанні такіх дыёдаў у якасці датчыкаў нізкіх тэмператур у вымяральных сістэмах з вялікім унутраным супраціўленнем. У вобласці тэмператур ад хатніх да азотных тэрмаметрычная характарыстыка амаль лінейная (рис. 5, а) і мае стромкасць, прыкладна роўную стромкасці характарыстыкі германіевага дыёда.

Па тэрмаметрычных характарыстыках (рис. 4, 5) праведзена ацэнка адчувальнасці крэмніевых, германіевых і арсенід-галіевых дыёдаў. Для крэмніевых стабілітронаў адчувальнасць вызначана з рис. 2. Рэзультаты зведзены ў табліцу.

Адчувальнасць паўправадніковых дыёдаў пры розных тэмпературах

Прылада	Адчувальнасць, мв/град		
	300° К	77° К	4,2° К
Дыёд германіевы	1,5	2,5	4,5
Эмітэрны пераход германіевага транзістара	1,0	2,3	7,0
Дыёд крэмніевы	1,0	3,0	1000
Тунельны дыёд арсенід-галіевы	0,8	2,0	3,0
Стабілітрон крэмніевы ¹	0,02	1,0	1,8
Тэрмапара жалеза-канстантан	0,05	0,045	0,002

¹ Адчувальнасць у ма/град.

Для параўнання ў табліцы прыведзены даныя жалеза-канстантанавай тэрмапары [3]. Як відаць з табліцы, адчувальнасць паўправадніковых дыёдаў датчыкаў нізкіх тэмператур значна вышэйшая за найбольш адчувальную тэрмапару.

Адчувальнасць даследаваных паўправадніковых дыёдаў з паніжэннем тэмпературы ўзрастае, у той час як у тэрмапары яна падае. Да азотных тэмператур адчувальнасць даследаваных прылад прыблізна аднолькавая. Пры паніжэнні тэмператур да вадародных адчувальнасць ўзрастае асабліва моцна ў крэмніевых дыёдаў. Найменшую адчувальнасць маюць тунельныя дыёды. Пры праверцы ўзнаўляемасці паказанняў дыёдаў пасля 50-разовага ахалоджвання і награвання да хатніх тэмператур прыкметных адхіленняў не выяўлена.

Адзначым, што даследаваныя паўправадніковыя дыёды маюць вялікае ўнутранае супраціўленне пры нізкіх тэмпературах, што дазваляе выкарыстоўваць іх для вымярэнняў і рэгулявання гэтых тэмператур на вялікіх адлегласцях.

Аўтары выказваюць удзячнасць А. Д. Шнырову за дапамогу ў правядзенні вымярэнняў пры нізкіх тэмпературах.

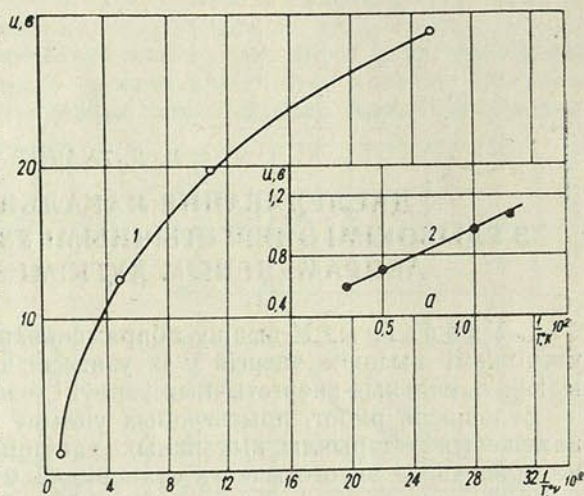


Рис. 5. Тэрмаметрычная характарыстыка сплаўнога крэмніевага дыёда пры $I = 10$ ма:

1 — у дыяпазоне тэмператур ад $77,3$ да $4,2^\circ\text{K}$; 2 — ад 300 да $77,3^\circ\text{K}$

ЛІТАРАТУРА

1. Cohen B. G., Snow W. B., Tretola A. R. RSI, 34, № 10, 1963.
2. Barton L. E. Electronics, № 18, 24—28, 1962. (Русский перевод).
3. Уайт Г. К. Экспериментальная техника в физике низких температур. М., 1961.

Резюме

Приводятся вольтамперные и термометрические характеристики германиевых, кремниевых и арсенид-галлиевых диодов в диапазоне температур 300 — $4,2^\circ\text{K}$. Изменение напряжения на германиевых и арсенид-галлиевых диодах в функции температуры составляет 1 — 3 мВ/град. Характеристика близка к линейной. Для кремниевых диодов чувствительность в области гелиевых температур равна примерно 1000 мВ/град. Диоды имеют вполне удовлетворительную воспроизводимость показаний, что позволяет использовать их для измерения и регулирования низких температур.

Поступило в редакцию 28. V 1965

В. Д. ТКАЧОУ

ДАСЛЕДАВАННЕ ЛАКАЛЬНЫХ ЦЭНТРАЎ З ГЛЫБОКІМІ ЭНЕРГЕТЫЧНЫМІ ЎЗРОЎНЯМІ У КРЭМНІІ, АБПРАМЕНЕНЫМ ХУТКІМІ ЭЛЕКТРОДАМІ

1. Уводзіны. У выніку абпраменьвання монакрышталаў крэмнію часцінкамі высокіх энергій у іх узнікае цэлая «гама» цэнтраў, якія маюць лакальныя энергетычныя ўзроўні ў забароненай зоне.

Большасць работ, прысвечаных уплыву абпраменьвання на паўправадніковыя матэрыялы, выкананых у апошнія дзесяцігоддзе, накіравана на вызначэнне энергетычнага становішча ўзроўняў радыяцыйных парушэнняў і вывучэнне іх тэмпературнай устойлівасці (адпал) [1—5].

Сукупнасць існуючых у цяперашні час даных сведчыць аб тым, што большасць уводзімых абпраменьваннем устойлівых цэнтраў, якія маюць глыбокія энергетычныя ўзроўні ў забароненай зоне, з'яўляецца асацыяцыямі простых дэфектаў (вакансій і міжвузелляў) з прымеснымі атамамі [6, 7]. Таму нам здавалася мэтазгодным больш дэталёва даследаваць уплыў абпраменьвання на монакрысталі крэмнію, легіраваныя пэўнымі прымесямі.

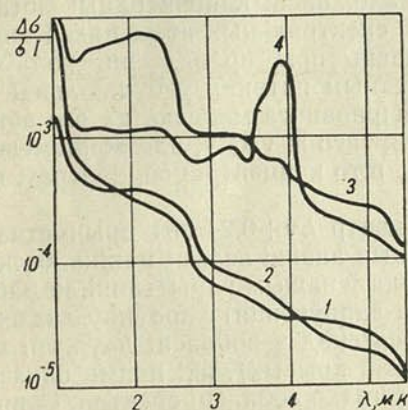
У якасці метаду даследавання мы спыніліся на вывучэнні фотаэлектрычных уласцівасцей абпраменьаных крышталаў, бо гэты метад з'яўляецца найбольш адчувальным пры вывучэнні цэнтраў, якія маюць глыбокія энергетычныя ўзроўні [8]. Мы даследавалі монакрысталі крэмнію, атрыманыя як метадам бястыгельнай зоннай плаўкі ў вакууме, так і выцягнутыя з тыгляў і легіраваныя меддзю і золатам да канцэнтрацыі 10^{15} прымесных атамаў у кубічным сантыметры.

2. Методыка эксперымента. Узорами былі пласцінкі велічыней $15 \times 2,5 \times 0,8$ мм, на тарцы якіх электралітычна наносіліся кантакты. Фотахолаўскія вымярэнні праводзіліся на фігурных узорах. Для выключэння паверхневых эфектаў узоры шліфаваліся і травіліся перад абпраменьваннем і пасля яго. Спектры фотаправоднасці здымаліся пры ўзбуджэнні пастаянным і мадуляваным светлавым патокам. Частата мадуляцыі светлага патоку складала 20,5 гц.

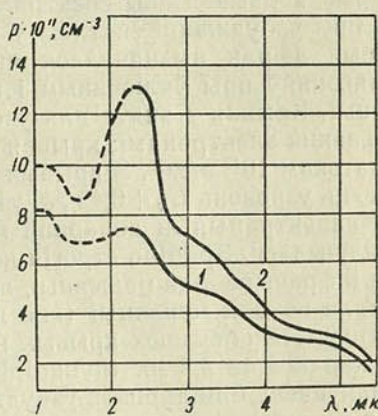
Прыкладаемае да ўзораў электрычнае поле было дастаткова слабым, так што генерыруемая святлом носыбіты знікалі галоўным чынам за кошт рэкамбінацыі і захопу цэнтрамі прыліпання, а не за кошт дрэйфа да электродаў. Для ўзбуджэння ў інфрачырвовай вобласці спектра выкарыстоўваўся манахраматар ИКС-12. Дадатковая падсветка ўзораў ва ўласнай і прымеснай вобласці рабілася пры дапамозе другога такога ж манахраматара. Для вывучэння пераходных працэсаў у вобласці 10^{-5} — 10^{-1} сек быў скарыстаны прадуманцьяльнік пастаяннага току ў злучэнні з асцылографам СІ-19. Пастаянныя часу, перавышаючыя 10 сек, рэгістраваліся з дапамогай самапісца, падключанага да выхаду стабілізаванага ўзмацняльніка пастаяннага току. Амаль усе вымярэнні выкананы пры тэмпературы 80° К. Для ўстаранення рознага роду засвятленняў узо-

раў яны змяшчаліся ў ахалоджаны экран, выкарыстоўваліся тоўстыя крэмніевыя і германіевыя фільтры. Напружанасць магнітнага поля складала 5÷8 тыс. эрст.

3. Рэзультаты эксперыменту і іх абмеркаванне. Як паказана ў нашай апошняй рабоце [7], далейшае ўдасканаленне метадыкі эксперыменту дазволіла выявіць многія цэнтры, якія маюць глыбокія энергетычныя ўзроўні ў забароненай зоне і ў зыходным, г. зн. неабпраменьеным матэрыяле. Пры абпраменьванні крышталю крэмнію звычайна назіраецца павелічэнне канцэнтрацыі гэтых цэнтраў. Характар і велічы-



Рыс. 1. Спектральныя залежнасці фотаправоднасці крэмнію *p*-тыпу (адносна адзінкі), легіраванага меддзю і абпраменьенага патокам хуткіх электронаў $2,5 \cdot 10^{17}$ э/см²



Рыс. 2. Спектральныя залежнасці канцэнтрацыі фотадзірак (ρ):

1 — да абпраменьвання; 2 — пасля абпраменьвання патокам 10^{17} э/см²

ня канцэнтрацыі ўводзімых абпраменьваннем цэнтраў у вялікай ступені залежаць ад прымеснага саставу даследуемага крышталю. Усё гэта сведчыць, што для разумення працэсаў утварэння радыяцыйных парушэнняў неабходна прымаць пад увагу ўзаемадзеянне пунктавых радыяцыйных дэфектаў структуры з атамамі астаткавых хімічных прымесяў.

Таму нам здавалася мэтазгодным легіраваць даследуемыя крышталі крэмнію пэўнымі хімічнымі прымесямі, якія даюць глыбокія ўзроўні ў забароненай зоне. Акрамя таго, неабходна, каб гэтыя прымесі меліся ў зыходным матэрыяле. У рабоце [9] паказана, што такія прымесі ў крышталях, якія мы даследавалі, з'яўляюцца медзь і золата.

Спачатку даследаваўся ўплыў электроннага абпраменьвання на фотаэлектрычныя ўласцівасці монакрышталю крэмнію, легіраванага меддзю да канцэнтрацыі 10^{14} — 10^{15} атамаў у 1 см³. На рыс. 1 паказаны спектральныя залежнасці фотаправоднасці для аднаго з узораў крэмнію *p*-тыпу з зыходным удзельным супраціўленнем 105 ом · см, легіраванага меддзю. Крывая 1 абазначае спектр фотаправоднасці неабпраменьанага ўзору, вымераны пры $T = 80^\circ$ К. Спектр фотаправоднасці мае структуру ў прымеснай вобласці. Крывыя 2 і 3 вымераны на тым жа ўзоры, але абпраменьеным патокам электронаў $2,5 \cdot 10^{17}$ э/см²; крывая 2 атрымана пры хатняй тэмпературы, крывая 3 — пры 80° К. Крывая 4 паказвае спектр фотаправоднасці ўзору, выразанага з таго ж злітка, але не легіраванага меддзю. Паток электронаў таксама быў $2,5 \cdot 10^{17}$ э/см². На крывой 1 уздым фотаправоднасці ў вобласці энергій фатона 0,24 эв звязаны з пераходам электронаў з валентнай зоны на донарны ўзровень медзі $E_v + 0,24$ эв. Узровень Фермі размяшчаўся на 0,21 эв вышэй верхняй мяжы валентнай зоны. Ступенька фотаправоднасці ў вобласці энергій

фатона $0,49$ эв звязана з наяўнасцю глыбокага акцэптарнага ўзроўню медзі $E_v + 0,49$ эв. Невялікія ўздымы ў вобласці $3,0$ і $3,75$ мк можна, відавочна, звязаць з наяўнасцю ў зыходным матэрыяле астаткавых прымесных атамаў цынку і золата, якія маюць глыбокія донарныя ўзроўні $E_v + 0,40$ эв і $E_v + 0,35$ эв адпаведна [10]. З крывых 2 і 3 відаць, што пасля абпраменьвання электронамі ступенька фотаправоднасці, звязаная з акцэптарным узроўнем медзі $E_v + 0,49$ эв, моцна ўзрасла, што гаворыць аб павелічэнні канцэнтрацыі цэнтраў, якія ўносяць гэтыя ўзроўні. Для пацвярджэння гэтага эфекту былі праведзены фотахолаўскія вымярэнні. На рыс. 2 прыведзены спектральныя залежнасці канцэнтрацыі фотадзірак пры ўзбуджэнні святлом у розных спектральных абласцях. Канцэнтрацыя дзірак вызначалася як рознасць пры правядзенні холаўскіх вымярэнняў пры ўключаным і выключаным патоках узбуджальнай радыяцыі. Крывая 1 знята для ўзору, легіраванага меддзю, да яго абпраменьвання электронамі; крывая 2 — для таго ж узору, але абпраменьванага патокам 10^{17} э/см². З крывых відаць, што канцэнтрацыя цэнтраў, якія ўносяць узровень $E_v + 0,49$ эв, узрасла.

Канцэнтрацыя ж донарнай медзі (цэнтр $E_v + 0,24$ эв) прыкметна не павялічылася. Зрабіць строга колькасныя ацэнкі вельмі цяжка, бо крывіца інфрачырвонай радыяцыі, якая была ў нашым карыстанні, не забяспечвала поўнай іанізацыі (або поўнага запаўнення) узроўняў дадзеных цэнтраў. На абедзвюх крывых назіраўся спад у вобласці даўжыні хваляў карацей за $2,2$ мк (пункцірныя часткі крывых), які прама паказвае на наяўнасць біпалярнага ўзбуджэння ў гэтай вобласці спектра. Сапраўды, тут энергія фатона пераважае большую з адлегласцей ад прымеснага цэнтра ($E_v + 0,49$ эв) да краёў зон. Пры роўнасці рухомасці і часу жыцця носбітаў у зонах (фотадзірак і фотаэлектронаў) на гэтай частцы крывых фотахолаўскія вымярэнні павінны былі б даваць «нулявую» канцэнтрацыю, г. зн. мае месца адначасовая генерацыя свабодных дзірак у валентнай зоне і свабодных электронаў у зоне праводнасці.

Акрамя таго, з параўнання крывых 3 і 4 на рыс. 2 вынікае, што ў адносінах ад узораў, якія не былі спецыяльна легіраваны меддзю ці якой-небудзь іншай прымессю (крывая 4), ва ўзорах з меддзю (крывая 3) пасля абпраменьвання не былі выяўлены ў прыкметнай канцэнтрацыі цэнтры, якія ўносяць глыбокія энергетычныя ўзроўні $E_v + 0,30$, $E_v + 0,38$, $E_v + 0,45$ эв. У адпаведным інтэрвале даўжыні хваляў крывыя 2 і 3 у адносінах ад крывой 4 маюць больш нізкую фотаправоднасць і не выяўляюць выразнай структуры.

На рыс. 3 паказаны спектральныя залежнасці велічыні $\frac{\Delta\sigma}{\sigma I}$ (I — магутнасць падаючага выпраменьвання) для крэмнію n -тыпу, легіраванага меддзю. Крывая 1 знята пасля абпраменьвання патокам $2 \cdot 10^{14}$ э/см², а крывая 2 — пасля абпраменьвання патокам 10^{16} э/см². З параўнання крывых відаць, што ступенька фотаправоднасці ў вобласці энергій фатона $0,67$ эв узраслае з павелічэннем дозы абпраменьвання. Гэта ступенька звязана з фотаіанізацыяй акцэптарнага ўзроўню медзі $E_v + 0,49$ эв ($E_c - 0,67$ эв пры 80° К). Нязначнае павелічэнне фотаправоднасці ў вобласці $3,1$ мк звязана з наяўнасцю ўводзімага выпраменьванням цэнтра, які ўносіць пэўны ўзровень $E_c - 0,40$ эв [5]. Структура на абедзвюх крывых у вобласці $2,2-2,3$ мк звязана з акцэптарным узроўнем астаткавых прымесяў золата $E_c - 0,54$ эв.

Мы лічым магчымым тлумачыць гэтыя рэзультаты эксперымента наступным чынам. Пры абпраменьванні ўзораў, легіраваных меддзю, узнікаючыя простыя дэфекты (вакансіі) ідуць у асноўным на ўтварэнне цэнтраў, якія ўносяць узровень $E_v + 0,49$ эв. Такім чынам, мае месца

павелічэнне канцэнтрацыі электрычна актыўнай прымесі (акцэптарнай), у нашым выпадку медзі. Для пацвярджэння гэтага меркавання быў праведзены рад эксперыментаў па абпраменьванню монакрышталяў крэмнію *n*- і *p*-тыпу, легіраваных іншай прымессю — золатам, электрафізічныя ўласцівасці якога падобны да ўласцівасцей медзі.

На рыс. 4 мы бачым тыповыя крывыя спектральнай залежнасці фотаправоднасці монакрышталяў крэмнію *p*-тыпу, легіраваных золатам у канцэнтрацыі 10^{14} атамаў у 1 см^3 . Крывая 1 атрымана для ўзору, абпрамененага патокам $7 \cdot 10^{13} \text{ э/см}^2$; крывая 2 — для таго ж узору, але

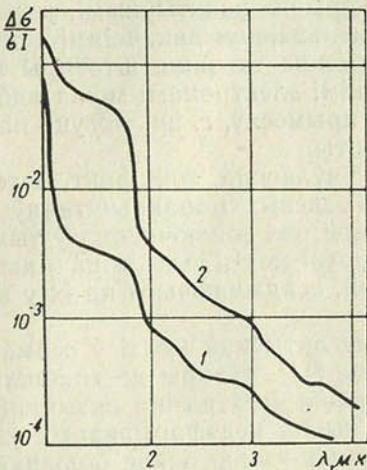


Рис. 3. Спектры фотаправоднасці крэмнію *n*-тыпу (адносныя адзінкі), легіраванага медзю:

1 — паток $2 \cdot 10^{14} \text{ э/см}^2$; 10^{16} э/см^2 ; 2 — паток

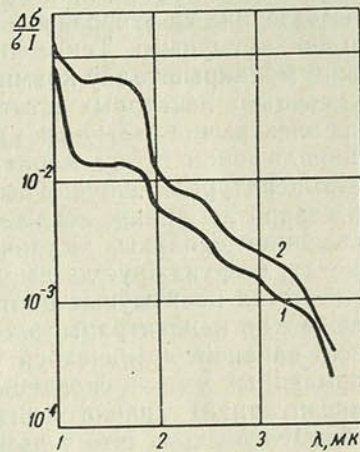


Рис. 4. Спектры фотаправоднасці крэмнію *p*-тыпу (адносныя адзінкі) легіраванага золатам:

1 — паток $7 \cdot 10^{13} \text{ э/см}^2$; 2 — паток $5 \cdot 10^{15} \text{ э/см}^2$

пасля паўторнага абпраменьвання патокам $5 \cdot 10^{15} \text{ э/см}^2$. Абедзве крывыя зняты пры $T=80^\circ \text{ К}$. Узровень Фермі пасля паўторнага абпраменьвання размяшчаўся на адлегласці $0,32 \text{ эв}$ ад верхняй мяжы валентнай зоны. Узростанне фотаправоднасці ў вобласці $3,6 \text{ мк}$, якое назіраецца на абедзвюх крывых, натуральна звязана з донарным узроўнем золата $E_v + 0,35 \text{ эв}$, а ўзрастанне ў вобласці 2 мк — з акцэптарным узроўнем золата $E_c - 0,54 \text{ эв}$ [10]. Ступеньку фотаправоднасці ў вобласці $2,5 \text{ мк}$, відавочна, можна растлумачыць наяўнасцю ў крышталях астаткавай прымесі медзі, якая ўносіць узровень $E_v + 0,49 \text{ эв}$. З параўнання крывых 1 і 2 відаць, што з павелічэннем дозы абпраменьвання ступенька ў вобласці 2 мк , абумоўленая пераходам электронаў з валентнай зоны на ўзроўні золата $E_c - 0,54 \text{ эв}$, моцна ўзрасла, што гаворыць аб павелічэнні канцэнтрацыі золата з акцэптарным узроўнем $E_c - 0,54 \text{ эв}$ ($E + 0,62 \text{ эв}$ пры $T=80^\circ \text{ К}$). Правядзенне фотахлаўскіх вымярэнняў пацвердзіла гэты рэзультат. Прыкметнага павелічэння ступенькі ў вобласці $3,6 \text{ мк}$, звязанай з донарным узроўнем золата $E_v + 0,35 \text{ эв}$, не назіраецца.

На падставе прыведзеных вышэй рэзультатаў эксперымента і рада больш ранніх работ [5, 7] мы лічым магчымым выказаць наступнае меркаванне адносна ўтварэння ў працэсе абпраменьвання монакрышталяў крэмнію некаторых цэнтраў, якія ўносяць глыбокія энергетычныя ўзроўні. У крэмніі, вырашчаным як у кварцавых тыглях, так і метадам вертыкальнай зоннай плаўкі ў вакууме, заўсёды прысутнічаюць астаткавыя прымесі, прычым дамінуючымі ў даследаваных намі матэрыялах з'яўляюцца медзь і золата. Натуральна лічыць, што ў крэмніі звычайна маецца

ца больш прымесьяў, чым іх «электрычна актыўнай» канцэнтрацыі, г. зн. той колькасці, якая можа быць вызначана з электрычных вымярэнняў. Вядома, што разгледжаныя намі прымесі з'яўляюцца электрычна актыўнымі, калі яны знаходзяцца ў вузлах. Некаторыя колькасць прымесных атамаў медзі і золата можа знаходзіцца ў выглядзе Cu^+ , Au^+ у міжвузелях або ў выглядзе электрычна нейтральных украпванняў (вядома, што медзь лёгка асаджаецца на дыслакацыях). Пры абпраменьванні хуткімі электронамі ў крышталях адбываецца інтэнсіўная генерацыя пунктавых дэфектаў. Павелічэнне колькасці вакансій і прыводзіць да таго, што медзь і золата, якія былі электрычна неактыўнымі, уступаюць ва ўзаемадзеянне са створанымі абпраменьваннем вакансіямі і робяцца электрычна актыўнымі. Такім чынам, можна сказаць, што пры абпраменьванні монакрышталаў крэмнію хуткімі электронамі можа адбывацца «акывацыя» некаторых астаткавых прымесьяў, г. зн. могуць павялічвацца іх электрычна актыўныя кампаненты.

Пацвярджэннем гэтага меркавання з'яўляецца той факт, што пры высокатэмпературнай апрацоўцы абпраменьных монакрышталаў адбываецца адваротны працэс асаджэння медзі, які заключаецца ў тым, што пад уздзеяннем цеплавых хістанняў рашоткі медзь выходзіць з вакансій і, відавочна, дыфундуе да дыслакацый, асаджаючыся на іх у выглядзе электрычна неактыўных цэнтраў.

Залежнасць канцэнтрацыі электрычна актыўнай медзі ў германі ад колькасці вакансій зазначалася ў рабоце [11]. Аўтары яе знайшлі, што ў дэфармаваных узорах скорасць насычэння электрычна актыўнай медзю (акцэптарнай) значна вышэйшая, чым у недэфармаваных узорах. Гэта абумоўлена тым, што ў дэфармаваных узорах існуе большая канцэнтрацыя вакансій.

Такім чынам, можна лічыць, што некаторыя з неапазнаных цэнтраў, якія назіраліся намі раней у абпраменьных крышталях крэмнію, з'яўляюцца «акывіраванымі» прымеснымі атамамі.

Так, цэнтры, якія ўносяць узроўні $E_c - 0,54$ эв і $E_v + 0,49$ эв, з'яўляюцца акцэптарнымі ўзроўнямі золата і медзі адпаведна. Некаторыя іншыя цэнтры, што назіраюцца ў абпраменьным крэмніі (напрыклад, $E_v + 0,38$ і $E_v + 0,55$ эв), можна растлумачыць павелічэннем канцэнтрацыі электрычна актыўнай кампаненты прымесных атамаў цынку і жалеза, якія таксама маюцца ў крышталях у якасці астаткавых прымесьяў.

Результаты, атрыманыя ў гэтай рабоце, дазваляюць зрабіць вывад, што абпраменьванне хуткімі электронамі, акрамя стварэння цэнтраў «радыяцыйнага» паходжання ($E_v + 0,30$, $E_v + 0,45$, $E_c - 0,16$ і $E_c - 0,40$ эв), можа прыводзіць да «выяўлення» некаторых астаткавых прымесьяў. Такое «выяўленне» эквівалентна стварэнню новых цэнтраў, бо звязаныя з імі працэсы фотаправоднасці (да абпраменьвання крышталаў) прыводзіць да з'яў, якія ляжаць ніжэй парога фотачулівасці.

ЛІТАРАТУРА

1. Hill D. Phys. Rev., 114, 1414, 1959.
2. Longo T., Lark-Horovitz. Bull. Am. Phys. Soc., Ser. II, 2, 157, 1959.
3. Wertheim. G. J. Appl. Phys., 30, 1166, 1959.
4. Вавилов В. С., Плотников А. Ф. ФТТ, 3, 6, 8, 1961.
5. Ткачев В. Д., Плотников А. Ф., Вавилов В. С. ФТТ, 5, 7, 1826, 1963.
6. Вавилов В. С., Плотников А. Ф., Ткачев В. Д. ФТТ, 4, 3446, 1962.
7. Ткачев В. Д., Плотников А. Ф., Вавилов В. С. ФТТ, 5, 11, 3188, 1963.
8. Плотников А. Ф., Вавилов В. С., Копыловский Б. Д. ПТЭ, № 3, 185, 1962.
9. Плотников А. Ф., Ткачев В. Д., Вавилов В. С. ФТТ, 4, 12, 1962.
10. Болтакс Б. И. Диффузия в полупроводниках. Физматгиз, 1961.
11. Fuller G., Ditzenberger J. J. Appl. Phys., 28, 40, 1957.

Резюме

В работе на основе анализа спектров фотопроводимости монокристаллов кремния *n*- и *p*- типа исследованы процессы образования радиационных нарушений структуры, образованных при облучении материала быстрыми электронами. Исследование кристаллов с различным содержанием остаточных химических примесей показывает, что большинство наблюдаемых нарушений, имеющих глубокие локальные энергетические уровни, представляют собой довольно сложные ассоциации точечных радиационных нарушений (вакансии, междоузельные атомы) с атомами химических примесей. Опыты с кристаллами, специально легированными некоторыми примесями, позволили показать, что в процессе облучения может идти процесс «активации» химических примесей, который состоит в том, что наблюдается увеличение электрически активной компоненты данных примесных атомов. Эти результаты подтверждены проведением фотохолловских экспериментов.

Поступило в редакцию 19.V 1965

Б. Б. БОЙКА, Л. Г. МАРОЗ

ХІБНАСЦІ ПРЫ ВЫМЯРЭННІ ЧАСУ ЖЫЦЦЯ ЎЗБУДЖАННЫХ ЯДРАУ З ДАПАМОГАЙ ШМАТКАНАЛЬНАГА АНАЛІЗАТАРА

Метад вызначэння з дапамогай шматканальнага аналізатара часу жыцця ўзбуджаных ядраў заснаваны на шматразовым вымярэнні пра-
 межку часу паміж момантам утварэння ўзбуджанага ядра і момантам
 яго распаду. Напрыклад, калі ўтварэнне ўзбуджанага ядра і яго распад
 суправаджаюцца вылучэннем γ -квантаў, то на аналізатары вымяраецца
 прамежак часу паміж з'яўленнем γ_1 -кванта ў момант утварэння ядра
 і з'яўленнем γ_2 -кванта, што суправаджае яго распад.

Колькасць актаў вымярэння, зафіксаваная кожным з каналаў аналі-
 затара, з пэўнай хібнасцю адпавядае пунктам крывой распаду, па якой
 можна меркаваць аб часе жыцця ўзбуджанага ядра.

Гэта хібнасць, калі не браць пад увагу прычын, абумоўленых уну-
 транымі асаблівасцямі вымяральной схемы, зводзіцца да наступнага.
 Шматканальны аналізатар запускаецца і пачынае адлічваць час з мо-
 манту з'яўлення γ_1 -кванта і здольны прарэагаваць на наступны γ_1 -квант
 (γ -квант, суправаджаючы з'яўленне наступнага ўзбуджанага ядра)
 пасля таго, як будзе спынены γ_2 -квантам. Пры адносна вялікім часе
 жыцця ўзбуджаных ядраў і вялікай частаце іх з'яўлення ў значнай част-
 цы актаў вымярэння будзе зафіксаван прамежак часу паміж вылучэннем
 γ_1 -кванта аднаго з ядраў і з'яўленнем γ_2 -кванта ад якогасьці другога
 ядра. Натуральна, што такія вымярэнні скажаюць крывую распаду. Для
 ацэнкі гэтай хібнасці перш за ўсё вызначым імавернасць таго, што інтэр-
 вал часу паміж з'яўленнем на ўзбуджаным узроўні двух непасрэдна
 следуючых адно за адным ядраў ляжыць у прамежку ад Θ да $\Theta + d\Theta$.
 Абазначым яе праз $\rho(\Theta)d\Theta$. Тады імавернасць таго, што наступнае ядро
 не з'явіцца на ўзбуджаным узроўні да моманту часу t , роўна

$$1 - \int_0^t \rho(\Theta) d\Theta. \quad (1)$$

А паколькі з'яўленне наступнага ядра — падзея, якая не залежыць ад
 з'яўлення папярэдняга, то момант часу t нічым не вылучан. Адсюль вы-
 нікае, што калі пачаць адлік часу з моманту t , то імавернасць з'яўлення
 наступнага ядра, калі яно да гэтага часу не з'явілася, павінна апісвацца
 той жа функцыяй $\rho(\Theta)$. Выкарыстаўшы гэта, $\rho(t')dt'$ — імавернасць
 з'яўлення наступнага ядра ў прамежку часу ад t' да $t' + dt'$ — можна вы-
 разіць як імавернасць складанай падзеі праз $\rho(t' - t)dt'$ — тую ж іма-
 вернасць са зрушаным пачаткам адліку часу ў пункт t — і імавер-
 насць (1):

$$\rho(t')dt' = \rho(t' - t) \left[1 - \int_0^{t'} \rho(\Theta) d\Theta \right] dt'. \quad (2)$$

Рашэннем гэтага ўраўнення з'яўляецца функцыя

$$\rho(\Theta) = ne^{-n\Theta}. \quad (3)$$

Такім чынам, імавернасць таго, што наступнае ядро з'явіцца ў прамежку часу ад Θ да $\Theta + d\Theta$, роўна $ne^{-n\Theta} d\Theta$, дзе n — сярэдні лік ядраў, якія з'явіліся за 1 сек на ўзбуджаным узроўні.

Вылічым з дапамогай (3) хібнасць у вымярэнні, абумоўленую заўчасным распадам наступнага ядра (гл. рысунак, а). Няхай аналізатар запускаяецца ў момант часу $t=0$, калі з'явіцца 0-ядро на ўзбуджаным узроўні, а наступнае ядро з'явіцца праз прамежак часу Θ_1 . Тады імавернасць такой падзеі ў канале $(t, t + \Delta t)$ аналізатара будзе роўна здабытку імавернасці таго, што ядро да моманту часу t не распалася, на імавернасць распаду наступнага ядра ў прамежку часу ад t да $t + \Delta t$:

$$e^{-\frac{t}{\tau}} e^{-\frac{t-\Theta_1}{\tau}} \frac{\Delta t}{\tau} = e^{-\frac{2t}{\tau}} \frac{\Delta t}{\tau} e^{\frac{\Theta_1}{\tau}}. \quad (4)$$

Пасля ўсераднення (4) з дапамогай (3) атрымаем імавернасць шукаемай хібнасці

$$e^{-\frac{2t}{\tau}} \frac{\Delta t}{\tau} \int_0^t e^{\frac{\Theta_1}{\tau}} ne^{-n\Theta_1} d\Theta_1 = \frac{n\tau}{1-n\tau} \left(e^{-nt} - e^{-\frac{t}{\tau}} \right) \frac{\Delta t}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}}. \quad (5)$$

Адносіны (5) да $e^{-\frac{t}{\tau}} \frac{\Delta t}{\tau}$ — імавернасці распаду 0-ядра ў інтэрвале $(t, t + \Delta t)$ — даюць адносную хібнасць R_1 у канале $(t, t + \Delta t)$ аналізатара ад наступнага ядра:

$$R_1 = \frac{n\tau}{1-n\tau} \left(e^{-nt} - e^{-\frac{t}{\tau}} \right). \quad (6)$$

Заўважым, што калі ў выразе (5) пад інтэгралам замяніць $e^{-n\Theta_1}$ на 1, то ад гэтага ўвесь выраз толькі павялічыцца. Рэзультат інтэгравання пасля такой замены дае для R_1 наступную ацэнку:

$$R_1 < n\tau \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right). \quad (7)$$

Пры вылічэнні адносных хібнасцей ад заўчасных распадаў усіх астатніх наступных ядраў, а таксама ад запазнення распадаў усіх папярэдніх ядраў мы ўсюды не будзем браць пад увагу падобныя множнікі, у выніку чаго мы будзем атрымліваць не адносную хібнасць, а яе верхнюю ацэнку.

Адносныя хібнасці ад заўчасных распадаў наступных ядраў вылічваюцца аналагічна. Імавернасць памылковага рэзультату ў канале аналізатара $(t, t + \Delta t)$, абумоўленага, напрыклад, k -ым наступным ядром (гл. рысунак, а), роўна здабытку імавернасцей дажывання ўсіх з'явіўшыхся да яго ядраў, у тым ліку і 0-ядра, да моманту t і імавернасці распаду k -га ядра ў інтэрвале $(t, t + \Delta t)$. Усерадненне па часу з'яўлення

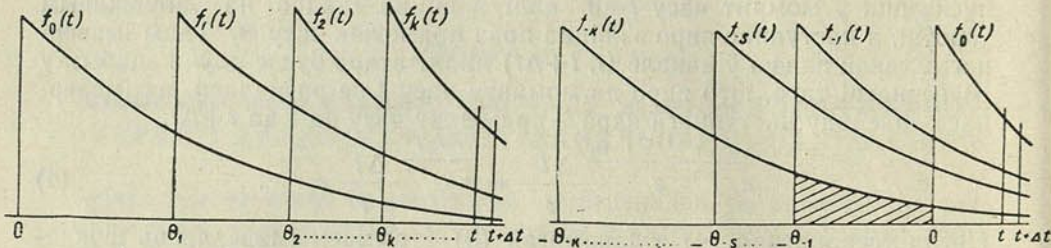
кожнага з 1, 2, 3, ... ядраў і далейшае дзяленне на $e^{-\frac{t}{\tau}} \frac{\Delta t}{\tau}$ прыводзіць да наступнай верхняй ацэнкі для R_k — адноснай хібнасці ад заўчаснага распаду k -га ядра:

$$R_k < e^{-\frac{kt}{\tau}} \int_0^t e^{\frac{\Theta_1}{\tau}} nd\Theta_1 \int_{\Theta_1}^t e^{\frac{\Theta_2}{\tau}} nd\Theta_2 \dots \int_{\Theta_{k-1}}^t e^{\frac{\Theta_k}{\tau}} nd\Theta_k = \frac{(n\tau)^k}{k!} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right)^k. \quad (8)$$

Адносная хібнасць ад усіх наступных ядраў $R_{\text{наст}}$ у канале $(t, t + \Delta t)$ аналізатара роўна суме R_k ад $k = 1$ да $k = \infty$. Такім чынам,

$$R_{\text{наст}} = \sum_{k=1}^{\infty} R_k < \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(n\tau)^k}{k!} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)^k = \exp\left[n\tau\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)\right] - 1. \quad (9)$$

Пяройдзем да ацэнкі адноснай хібнасці вымярэння часу жыцця 0-ядра ад запазнення распадаў папярэдніх ядраў з нумарамі $-1, -2,$



Функцыя імавернасці выжывання ядраў (крывыя) і моманты з'яўлення ўзбуджаных ядраў (вертыкальныя лініі):

а) $f_0(t) = \frac{1}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}}$ — для 0-ядра, $f_k(t) = \frac{1}{\tau} e^{-\frac{t-\theta_k}{\tau}}$ — для k -га наступнага ядра (τ — сярэдні час жыцця ўзбуджанага ядра); б) знак абазначае, што f і θ адносяцца да падзей, што адбыліся да з'яўлення 0-ядра; заштрыхаваная плошча дае імавернасць распаду k -га наступнага ядра ў інтэрвале часу $(-\theta_{-1}, 0)$.

—3, —4, ... (рысунак, б). Пры гэтым трэба ўлічыць, што любое з іх здольна даць няправільны рэзультат толькі пры ўмове, што яно з'явіцца ў праемежку часу паміж запускам і спыненнем аналізатара ядрамі, што папярэднічаюць 0-ядру. З другога боку, спыненне аналізатара распадам якога-небудзь папярэдняга ядра павінна адбыцца да нулявога моманту часу, інакш 0-ядро не запусціла б аналізатар. Няхай прычынай такой сітуацыі будзе k -ае папярэдняе ядро (з нумарам $-k$). Тады гэтыя дзве ўмовы будуць задаволены, калі гэта ядро распадзецца ў інтэрвале $(-\theta_{-1}, 0)$. Імавернасць памылковага рэзультату ў канале $(t, t + \Delta t)$ аналізатара, абумоўленага распадам s -га папярэдняга ядра ($s < k$), роўна здабытку імавернасці распаду k -га ядра ў інтэрвале $(-\theta_{-1}, 0)$ на імавернасць распаду s -га ядра ў інтэрвале $(t, t + \Delta t)$ і на імавернасці выжывання да моманту часу t усіх астатніх папярэдніх ядраў ад k -га да першага. Пасля скарачэння на $e^{-\frac{t}{\tau}} \frac{\Delta t}{\tau}$ і ўсераднення па ўсіх момантах

з'яўлення папярэдніх ядраў мы прыходзім да наступнай формулы для ацэнкі адноснай хібнасці ад k -га папярэдняга ядра:

$$R_{ks} < e^{-\frac{k-1}{\tau} t} \int_0^{\infty} \left(1 - e^{-\frac{\theta_{-1}}{\tau}}\right) n d\theta_{-1} \dots \int_{\theta_{-k+1}}^{\infty} e^{-\frac{\theta_{-k}}{\tau}} n d\theta_{-k} = \frac{(n\tau)^k}{k!(k-1)} e^{-\frac{k-1}{\tau} t}. \quad (10)$$

Поўная адносная хібнасць, выкліканая k -ым папярэднім ядром, будзе роўна суме R_{ks} па s ад 1 да $k - 1$. Сумаванне па s зводзіцца да множання (10) на $k - 1$. Такім чынам,

$$R'_k = \sum_{s=1}^{k-1} R_{ks} < \frac{(n\tau)^k}{k!} e^{-\frac{k-1}{\tau} t}. \quad (11)$$

Для вызначэння адноснай хібнасці ад усіх папярэдніх ядраў у канале $(t, t + \Delta t)$ аналізатара дастаткова прасумаваць R'_k па k ад 2 да ∞ . Гэта прыводзіць да наступнай ацэнкі:

$$R_{\text{папярэд}} = \sum_{k=2}^{\infty} R'_k < \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(n\tau)^k}{k!} e^{-\frac{k-1}{\tau} t} = e^{\frac{t}{\tau}} \left[\exp\left(n\tau e^{-\frac{t}{\tau}}\right) - 1 - n\tau e^{-\frac{t}{\tau}} \right]. \quad (12)$$

Аб'ядноўваючы (9) і (12), атрымліваем ацэнку адноснай хібнасці ад папярэдніх і наступных ядраў у канале $(t, t + \Delta t)$ аналізатара пры вымярэнні часу жыцця 0-ядра:

$$R\left(\frac{t}{\tau}\right) = R_{\text{наст}} + R_{\text{папярэд}} < \exp\left[n\tau\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)\right] - 1 + e^{\frac{t}{\tau}} \left[\exp\left(n\tau e^{-\frac{t}{\tau}}\right) - 1 - n\tau e^{-\frac{t}{\tau}} \right]. \quad (13)$$

Формула (13) справядліва пры ўсіх значэннях $n\tau$. Аднак для $n\tau > 1$ ацэнка з дапамогай (13) будзе грубейшая, чым для $n\tau < 1$. І наадварот, пры $n\tau \ll 1$ у формуле (13) без вялікай памылкі няроўнасць можна замяніць роўнасцю.

Відавочна, што разлік справядлівы для любога ядра, якое сваім з'яўленнем запуская аналізатар. Адсюль вынікае, што пры ўмове поўнай незалежнасці актаў вымярэння часу жыцця асобных ядраў формула (13) дае верхнюю ацэнку адноснай хібнасці шматразовага вымярэння прамежку часу ў канале $(t, t + \Delta t)$ аналізатара. Атрыманая на

шматканальным аналізатары крывая будзе адрознівацца ад $\frac{N}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}}$. Пры гэтай умове яе аналітычны выраз можа быць запісан у выглядзе

$$f\left(\frac{t}{\tau}\right) = \frac{N}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}} \frac{1 + R\left(\frac{t}{\tau}\right)}{\int_0^{\infty} \frac{dt'}{\tau} e^{-\frac{t'}{\tau}} \left[1 + R\left(\frac{t'}{\tau}\right) \right]}, \quad (14)$$

дзе N — лік актаў вымярэння.

На самай справе асобныя акты вымярэння залежаць адзін ад аднаго, бо кожнае вымярэнне, якое прыводзіць да хібнасці, не толькі само па сабе ўносіць хібнасць у той ці іншы канал, але памяншае лік актаў вымярэння часу жыцця ядра ва ўсіх наступных каналах. Строга кажучы, асобныя акты вымярэння з'яўляюцца незалежнымі толькі ў межах $n\tau \rightarrow 0$, пры гэтым велічыня $R\left(\frac{t}{\tau}\right)$, што абумоўлівае гэту залежнасць, імкнецца да нуля. Тым не менш пры $n\tau \ll 1$ (выпадак, часцей за ўсё рэалізуемы на практыцы) залежнасць асобных актаў вымярэння можна не прымаць пад увагу, бо выкліканая ёй хібнасць — эфект

больш высокага парадку ў параўнанні з самой хібнасцю. У гэтым выпадку ў формулу (14) замест $R\left(\frac{t}{\tau}\right)$ можна падставіць яе верхнюю ацэнку. Тады $f\left(\frac{t}{\tau}\right)$, раскладзеная ў рад па $n\tau$, у якім пакінуты толькі першыя члены, прымае выгляд

$$f\left(\frac{t}{\tau}\right) = \frac{N}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}} \left\{ 1 + n\tau \left(\frac{1}{2} - e^{-\frac{t}{\tau}} \right) - \frac{(n\tau)^2}{2} \left(\frac{1}{3} - e^{-\frac{2t}{\tau}} \right) - \dots \right\}. \quad (15)$$

З формулы (15) вынікае, што памылка мінімальная ў прамежку часу, блізкага да перыяду паўраспаду ўзбуджанага ядра. Для меншага часу памылка адмоўная, для большага — дадатная, і ва ўсякім выпадку памылка заўсёды меншая за $n\tau$. Адсюль можна зрабіць важны для практыкі вывад. Пры вымярэнні часу жыцця $\tau \leq 10^{-7}$ сек з дакладнасцю 1% скорасць лічэння, прапарцыянальную n , можна павялічыць да $n = 10^5$ сек $^{-1}$, г. зн. можна поўнасю выкарыстаць магчымасць існуючых дэтэктараў і аналізатараў для больш хуткага набывання інфармацыі.

У заключэнне аўтары дзякуюць семінару лабараторыі ядзернай спектраскапіі Інстытута фізікі АН БССР і яго кіраўніку Я. І. Фірсаву за каштоўныя заўвагі пры абмеркаванні атрыманых рэзультатаў.

Резюме

В работе рассчитана погрешность при измерении времени жизни возбужденных ядер с помощью многоканального анализатора, связанная с самим принципом измерения. Эта погрешность обусловлена тем, что многоканальный анализатор, измеряя время жизни возбужденного ядра, может в отдельных случаях зафиксировать промежуток времени между возникновением и распадом различных ядер.

Расчет выполнен в приближении, в котором отношение n — частоты появления возбужденных ядер в опыте значительно меньше $1/\tau$ — вероятности распада возбужденного ядра: $n\tau \ll 1$. При этом получено выражение для ожидаемой экспериментальной кривой в виде

$$f\left(\frac{t}{\tau}\right) = \frac{N}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}} \left\{ 1 + n\tau \left(\frac{1}{2} - e^{-\frac{t}{\tau}} \right) - \frac{(n\tau)^2}{2} \left(\frac{1}{3} - e^{-\frac{2t}{\tau}} \right) - \dots \right\}.$$

Здесь N — число актов измерения; t — зафиксированное время распада, отвечающее тому или иному каналу анализатора. Как следует из этого выражения, относительная ошибка при измерении времени жизни на многоканальном анализаторе меньше $n\tau$ и, оставаясь в рамках 1% точности, скорость счета обычно можно довести до $n = 10^5$ сек $^{-1}$.

Поступило в редакцию 16.VI 1965

М. А. СУЛТАНАУ, Л. І. КІСЯЛЕУСКИ

ДАСЛЕДАВАННЕ СТРУКТУРЫ РАЗРАДНАГА ВОБЛАКА НІЗКАВОЛЬТНАЙ ІСКРЫ

Спектр вылучэння нізкавольтнай іскры (генератар тыпу ДГ-2) істотна адрозніваецца ад спектра дугавога разраду. Гэты спектр багаты лініямі, што патрабуюць для свайго ўзбуджэння вялікай энергіі, у ім прадстаўлены лініі аднакратна і двухкратна іанізаваных атамаў і лініі цяжка ўзбуджальных атамаў. Для іскры характэрны таксама адносна моцны фон і пашыраныя лініі [1—3].

У [2, 4, 5] было ўстаноўлена, што асноўныя асаблівасці спектраў, што вылучаюцца разрадам нізкавольтнай іскры, абумоўлены высокай шчыльнасцю току ў канале, якая аказваецца значна большай, чым пры дугавым разрадзе, і можа перавышаць 10^5 а/см².

У апошні час было паказана, што важныя спектраскапічныя характарыстыкі імпульсных іскравых разрадаў вызначаюцца структурнымі ўтварэннямі ў разрадным прамежку, што абумоўлены ўзаемадзеяннем факелаў, якія выкідваюцца з процілеглых электродаў. Пры некаторых рэжымах разраду факелы могуць мець звышгукавыя скорасці і ўтвараць пры ўзаемадзеянні скачкі ўшчыльнення, з якіх адбываецца асноўнае выпраменьванне разраду.

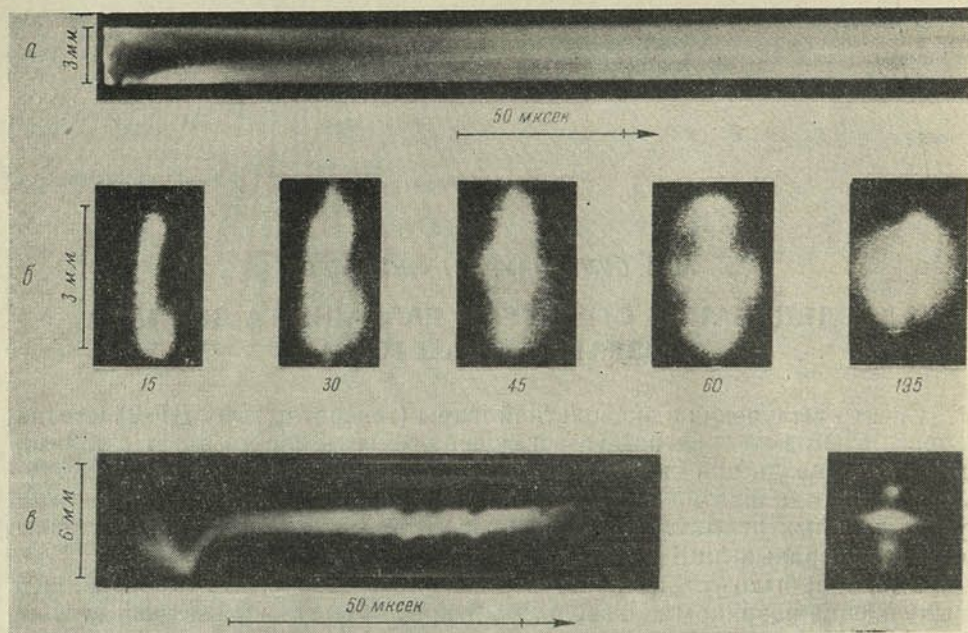
Цікава разгледзець пытанне аб магчымасці ўтварэння падобных ушчыльненых зон у факелах нізкавольтнай іскры і іх уплыў на спектраскапічныя характарыстыкі разраду. Гэтаму прысвечана дадзеная работа.

Даследаванні праводзіліся з прымяненнем камеры СФР у рэжымах лупы часу і фотарэгістра. Фатаграфаваліся адзінкавыя разрады, што адпавядаюць аднаму з рэжымаў нізкавольтнай іскры ($C=12$ мкф, $L=0,09$ мГн). Пачатковае напружанне на электродах складала 300 в. Электроды (металічныя) мелі форму шпянёў, якія заточаны на ўсечаны конус.

Міжэлектродны прамежак складаў ~ 3 мм. Разрад падпальваўся ад пульта кіравання СФР. Разрад меў хістальны характар, паўперыяд яго складаў $2,5 \cdot 10^{-4}$ сек. Асноўнае выпраменьванне разраду адбывалася на працягу 2—3 першых паўперыядаў току.

Тыповая часавая разгортка выпраменьвання разраду ў час яго першага паўперыяду прыведзена на рысунку (а). З рысунка відаць, што іскра мае неаднароднае поле свячэння ўздоўж міжэлектроднага прамежку. У пачатковай стадыі імпульсу, пакуль пара матэрыялу электродаў не запоўніла ўвесь прамежак, пераважнае свячэнне ідзе з прыэлектродных абласцей. Пасля сустрэчы пары, што распаўсюджваецца з процістаячых электродаў, у сярэдняй частцы прамежку ўтвараецца вузкая палоска павышанай яркасці, якая існуе большую частку паўперыяду току.

Змяненне формы разраднага воблака ў час імпульсу можна прасачыць на кадрах скораснага фатаграфавання. На рысунку (б) паказана некалькі такіх кадраў, якія адпавядаюць рознай стадыі разраду. Відаць,



Часавая разгортка імпульсу нізкавольнай іскры (а), пакадравая здымка імпульсу нізкавольнай іскры (лічбы ўнізе паказваюць час ад пачатку імпульсу, мксек) (б) і часавая разгортка і кадр скораснай здымкі ўзаемадзеяння двух звышгукавых факелаў імпульснага разраду (в)

што ў пачатковай стадыі яркая вобласць нагрэтага газу, што ўключае ў сябе канал разраду, мае цыліндрычную форму невялікага дыяметра. Электродныя факелы, што ўтвараюцца адначасова, характарызуюцца большымі папяročнымі сячэннямі. Таму пара электродаў рухаецца не толькі ўнутры прагрэтай разрадам вобласці газу, але таксама ў напрамку халодных слаёў паветра. Характэрна, што факелы, якія распаўсюджваюцца ў халоднай атмасферы, хутка затухаюць і не даходзяць да процілеглага электрода.

Пасля павелічэння размераў цэнтральнай гарачай вобласці разраду факелы, што распаўсюджваюцца ў напрамку халодных абласцей, перастаюць назірацца. Таму можна лічыць, што ў гэтай стадыі разраду пара электродаў пераважна распаўсюджваюцца ўнутры абалонкі разраду. Лакалізацыя становіцца факелаў унутры абалонкі павінна выклікаць сустрэчу факелаў процілеглых электродаў у міжэлектродным прамежку. Гэта меркаванне ўзгадняецца з карцінай далейшага змянення формы абалонкі разраду.

Прыблізна праз 40 мксек пасля пачатку імпульсу адбываецца патаўшчэнне абалонкі разраду ў сярэдняй частцы міжэлектроднага прамежку. Яркая зона разраду пачынае нагадваць крыжавіну. Паяўленне яе можна растлумачыць утварэннем вобласці павышанай шчыльнасці пары ў цэнтральнай частцы міжэлектроднага прамежку, што абумоўлена ўзаемадзеяннем сустрэчных факелаў. Можна меркаваць, што сустрэчныя факелы рухаюцца адносна адзін аднаго са звышгукавой скорасцю, таму што скорасць кожнага з іх, якая вымерана па косых палосах, перавышае 1 км/сек. Аб наяўнасці ўшчыльненай вобласці ў сярэдняй частцы міжэлектроднага прамежку сведчыць вузкая палоска павышанай яркас-

ці, што назіраецца на часовай разгортцы. (рысунак, а). Для таго каб пацвердзіць выказаны пункт погляду, на рысунку (б) дадаткова прыведзены бесперапынная разгортка і кадр скораснай здымкі структурнага ўтварэння, што назіраецца пры сустрэчы двух факелаў імпульснага разраду, калі іх скорасць заведама звышгукавая [6]. З рысунка відаць, што пры ўзаемадзеянні звышгукавых факелаў утвараецца карціна, падобная да апісанай вышэй. Вобласць ушчыльнення ў выпадку імпульснага разраду больш інтэнсіўная, чым астатнія зоны разраду, што звязана з большай скорасцю ўзаемадзеянняючых факелаў.

У наступных стадыях разраду першага паўперыяду адбываецца размыццё крыжавіны і разрадлае воблака набывае грушападобную форму адносна вялікіх размераў. У гэтых умовах лакалізацыя факелаў паблізу прывосевай часткі разраду парушаецца, і яны не абавязкова павінны сустракацца ў міжэлектродным прамежку. Можна назірацца, напрыклад, слізгаценне факелаў адзін адносна другога (гл. апошні кадр на рысунку, б). Ушчыльненія вобласці ў гэтай стадыі разраду таксама павінны адсутнічаць. Указаная стадыя разраду адпавядае, відаць, дугавой фазе іскрывага разраду.

Прыведзеныя даследаванні паказваюць, што распаўсюджванне электродных факелаў у нізкавольтнай іскры адбываецца, як правіла, унутры гарачай зоны разраду. Таму ў пачатковай стадыі разраду, да таго як яго абалонка атрымае вялікія размеры, назіраецца пераважная канцэнтрацыя пары электрода паблізу канала разраду. Усё гэта узгадняецца з данымі работ аб тым, што асноўныя спектраскапічныя характарыстыкі іскры звязаны з умовамі ў канале разраду.

Пераважную лакалізацыю факелаў унутры гарачай абалонкі разраду можна зразумець з улікам гідродынамічнага механізму іх утварэння. Утварэнне факелаў з'яўляецца выбуховым працэсам, які абумоўлен хуткім выдзяленнем вялікай энергіі ў малым паверхневым аб'ёме электрода. У пачатковай стадыі разраду асяроддзе над электродам, на паверхні якога адбываецца выбух, з'яўляецца неаднародным. Яно складаецца з цыліндрычнай гарачай абалонкі невялікага дыяметра і акаляючых халодных слаёў атмасферы. У гэтых умовах вялікая скорасць і пераважны ўнос энергіі факелам павінны мець месца ў напрамку канала разраду [7]. Факелы, што выкідваюцца ў напрамку халодных слаёў, рухаюцца са звышгукавой скорасцю і пры малой магутнасці разраду (апошняя справядліва для выпадку нізкавольтнай іскры) хутка губляюць сваю скорасць і энергію.

ЛІТАРАТУРА

1. Свентицкий Н. С., Бланк О. В. ДАН СССР, 48, 269, 1945.
2. Свентицкий Н. С. ЖТФ, 14, 605, 1944.
3. Свентицкий Н. С. Изв. АН СССР, сер. физич., 11, 319, 1947.
4. Свентицкий Н. С. ДАН СССР, 37, 233, 1942.
5. Свентицкий Н. С., Абрамсон И. С. ЖТФ, 17, 43, 1947.
6. Султанов М. А., Киселевский Л. И. Журн. прикл. спектр., 1, 268, 1964.
7. Компанеев А. С. ДАН СССР, 130, 1001, 1960.

Резюме

Показано, что при искровых разрядах электродные факелы преимущественно локализируются вблизи центральной горячей зоны разряда, что способствует встрече факелов противостоящих электродов в межэлектродном промежутке. Взаимодействие встречных факелов приводит к образованию зон уплотнения, определяющих важные структурные и спектроскопические характеристики разряда. Влияние взаимодействия факелов особенно существенно, когда они являются сверхзвуковыми.

Поступило в редакцию 16.IV 1965

Д. А. ГРАНЬКОВА, Л. І. КІСЯЛЕУСКІ

НЕКАТОРЫЯ СПЕКТРАСКАПІЧНЫЯ ДАСЛЕДАВАННІ ДУГАВОГА РАЗРАДУ ПАЇЖАНАГА ЦІСКУ

Асаблівасцю спектраў вылучэння дугавых разрадаў пры паніжаным ціску акружаючай атмасферы ($p < 1$ атм) з'яўляецца значнае павелічэнне інтэнсіўнасці малекулярных палос, якія належаць кампанентам атмасферы або прадуктам, што ўтвараюцца ў плазме разраду [1]. У дузе паніжанага ціску ў паветры інтэнсіўна ўзбуджаецца другая дадатная сістэма N_2 , першая адмоўная сістэма N_2^+ , фіялетавая сістэма CN, γ -сістэма вокісу азоту NO і некаторыя іншыя палосы. Адзначаныя сістэмы палос запаўняюць практычна ўсю бачную і блізкую ультрафіялетавую вобласці спектра.

Вывучэнне прычын і ўмоў узнікнення малекулярных палос у спектрах вылучэння разрадаў пры паніжаным ціску з'яўляецца цікавым для распрацоўкі метадаў атрымання плазмы, пазбаўленай электродных забруджванняў, а таксама для стварэння новых крыніц святла для спектральнага аналізу.

У гэтай рабоце вывучаюцца прычыны ўзмацнення інтэнсіўнасці малекулярных палос у дугавых разрадах паніжанага ціску, якія гараць у атмасферы паветра.

Даследаванні праводзіліся з дугой пастаяннага і пераменнага току (генератар ДГ-2). Сіла току дугі складала 3 а, міжэлектродны прамежак 3 мм. Электроды (металічныя) змяшчаліся ў баракамеру, у якой ціск змяняўся ад 50 да 760 мм рт. сл. Асноўныя даследаванні праведзены з прымяненнем бесперапыннага прадзімання камеры, паколькі папярэднія доследы паказалі, што без прадзімання камеры састаў атмасферы ў ёй істотна змяняецца з часам. Спектры вылучэння дугавых разрадаў фатаграфаваліся па падоўжнаму сячэнню разраду на спектрографе ИСП-28.

Даследаванні паказалі, што са змяненнем ціску ў камеры павялічваецца інтэнсіўнасць малекулярных палос кампанентаў паветра і змяншаецца інтэнсіўнасць спектральных ліній элементаў, што паступаюць у разрад з электродаў. Пры гэтым характар спектра не вызначаецца толькі велічыняй ціску, але таксама залежыць ад матэрыялу электродаў. Павелічэнне інтэнсіўнасці малекулярных палос адбываецца найбольш моцна ў тым выпадку, калі паступленне рэчыва ў электроднае воблака аказваецца нязначным. Паступленне рэчыва кантралявалася па велічыні эрозіі электродаў. Так, напрыклад, пры ціску 150 мм рт. сл. малекулярныя палосы інтэнсіўна ўзбуджаюцца пры разрадзе паміж слаба выпараючыміся меднымі электродамі (рыс. 1, б) і амаль не рэгіструюцца пры разрадзе паміж моцна выпараючыміся жалезнымі электродамі (рыс. 1, а).

Інтэнсіўнасць малекулярных палос неаднолькавая ўздоўж міжэлектроднага прамежку. Даследаванні паказалі, што яна вышэй паблізу ад

тых электродаў, скорасць паступлення пары з якіх меншая. На рыс. 2, а паказана змяненне па падоўжнаму сячэнню дугі адносін інтэнсіўнасці рада кантаў малекул N_2 , N_2^+ і NH да інтэнсіўнасці ліній медзі ў разрадзе паміж меднымі электродамі пры $r=150$ мм рт. сл. З рысунка відаць, што

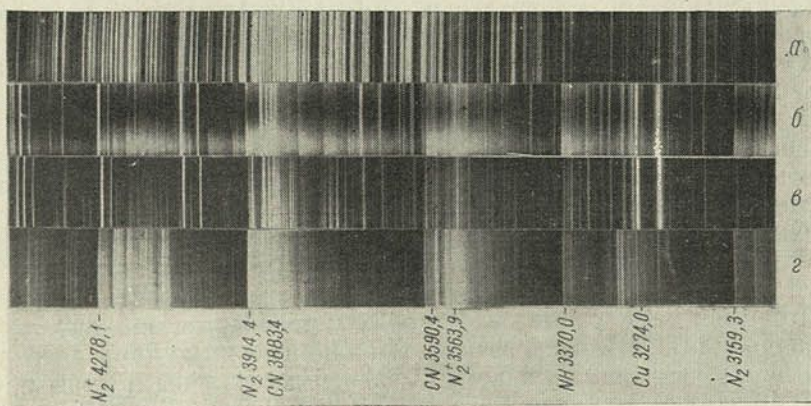


Рис. 1. Спектры дугі пераменнага току:

а — электроды жалезныя; б — электроды медныя; в — электроды медныя, уздыманне з боку электрода (для а, б, в $P=200$ мм рт. сл.); г — электроды медныя; $P=760$ мм рт. сл., выцяжка з боку электродаў

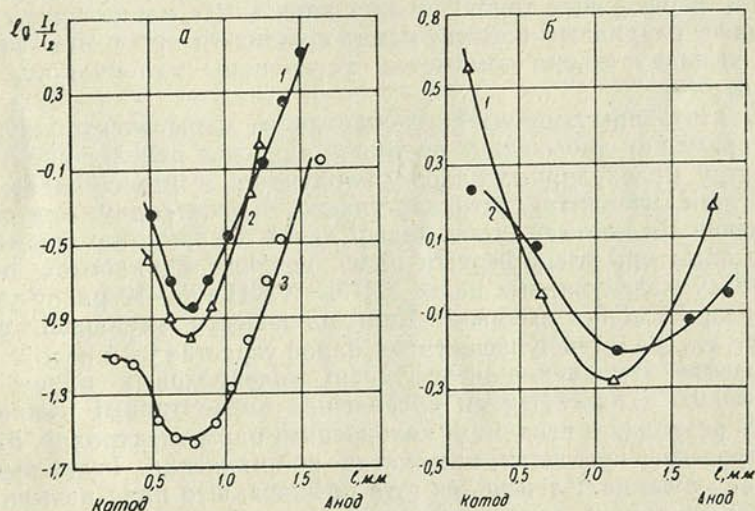


Рис. 2. Змяненне адносін інтэнсіўнасці кантаў малекулярных палос да інтэнсіўнасці спектральных ліній медзі і алюмінію:

а — электроды медныя (1 — NH 3370,0 — CuI 3398,0 Å, 2 — N_2 2976,0 — CuI 3010,8 Å, 3 — N_2^+ 4236,5 — CuI 4275 Å); б — электроды алюмініевыя (1 — NH 3370,0 — Al 3054,7 Å, 2 — N_2 3159,3 — Al 3054,7 Å)

палосы больш інтэнсіўныя ў прыаноднай вобласці, г. зн. паблізу ад таго электрода, скорасць паступлення пары з якога меншая [2]. У алюмініевых электродаў скорасць паступлення пары вышэй з анода, і размеркаванне малекулярных палос па прамежку таксама змяняецца на процілеглае (рыс. 2, б).

Праведзеныя даследаванні дазваляюць выказаць меркаванне аб тым, што адноснае ўзмацненне інтэнсіўнасці малекулярных палос у дузе паніжанага ціску ў асноўным звязана з адносным змяншэннем канцэнтрацыі пары электродаў у разрадным воблаку. Гэта ўзмацненне нельга растлумачыць змяненнем умоў узбуджэння. Вымярэнні тэмпературы дугі па інтэнсіўнасці спектральных ліній паказалі, што ў даследуемым інтэрвале ціску тэмпература прыкметна не змяняецца. Гэтыя даныя ўзгадняюцца з рэзультатамі вымярэння тэмпературы, атрыманымі ў рабоце [3].

Змяншэнне канцэнтрацыі пары электродаў у разрадным воблаку пры паніжаным ціску, відаць, тлумачыцца наступнымі прычынамі. Па-першае, пры нізкім ціску змяншаецца паступленне рэчыва электродаў, аб чым сведчыць змяншэнне ступені іх эрозіі. Па-другое, пры нізкім ціску павялічваецца скорасць расейвання атамаў, што паступаюць у разрад, па аб'ёму камеры ў выніку дыфузіі і канвектыўных патокаў [5].

Калі інтэнсіўнасць малекулярных палос у асноўным вызначаецца канцэнтрацыяй пары рэчыва электродаў у разрадным воблаку, то можна змяняць іх інтэнсіўнасць, рэгулюючы канцэнтрацыю пары электродаў. Гэты вывад узгадняецца з вядомымі эксперыментальнымі данымі. У рабоце [4] было паказана, што ў дузе пастаяннага току, прымяняючы адсос пары з боку электродаў і тым самым змяншаючы яе канцэнтрацыю, можна атрымаць інтэнсіўны малекулярны спектр паветра пры ціску $p=1$ атм. Аналагічная з'ява назіраецца ў рабоце і з дугой пераменнага току, калі электроды змясціць у фарфоравыя трубка і прыводзіць праз іх адсос плазмы (рыс. 1, г). Калі прымяніць не адсос, а ўдзіманне атмасферы праз фарфоравыя трубка, можна павялічыць канцэнтрацыю пары электродаў у разрадным воблаку нават пры нізкім ціску. Як і чакалася, у гэтым выпадку можна прыкметна ўстараняць малекулярны спектр (рыс. 1, в).

Цікава, што пры змяншэнні канцэнтрацыі пары электродаў у разрадным прамежку адбываецца не толькі адноснае павелічэнне інтэнсіўнасці кантаў малекулярных палос у параўнанні з інтэнсіўнасцю спектральных ліній элементаў, што паступаюць з электродаў, але таксама і павелічэнне абсалютнай інтэнсіўнасці палос. Напрыклад, прымяняючы выцяжку пары пры атмасферным ціску, удаецца павялічыць інтэнсіўнасць кантаў малекулярных палос N_2 , N_2^+ і NH у 5—10 разоў у параўнанні з разрадамі без выцяжкі. Калі адначасова зменшыць ціск да 200 мм рт. сл., то інтэнсіўнасць гэтых палос узрастае ў 14 разоў.

Назіраемае ўзмацненне інтэнсіўнасці малекулярных палос можна звязаць толькі з павелічэннем абсалютнай канцэнтрацыі кампанентаў паветра ў разрадах з невялікімі колькасцямі пары электродаў, паколькі тэмпература дугі пры гэтым прыкметна не змяняецца. Гэты вывад некалькі нечаканы, калі лічыць, як гэта прынята, што пара рэчыва электродаў складае толькі нязначную частку ад канцэнтрацыі атмасферы, у якой гарыць дуга. У гэтых умовах змяненне канцэнтрацыі рэчыва электродаў практычна не павінна адбівацца на велічыні абсалютнай канцэнтрацыі атмасферы і, значыць, на велічыні інтэнсіўнасці палос малекул. Таму трэба прызнаць, што канцэнтрацыя пары электродаў у дузе пры атмасферным ціску складае значную частку ад агульнай канцэнтрацыі часцінак.

Праведзеныя даследаванні дазваляюць зрабіць вывад аб тым, што ў дугах паніжанага ціску ў паветры ўзмацненне інтэнсіўнасці малекулярных палос звязана ў асноўным са змяншэннем канцэнтрацыі пары электродаў у разрадным воблаку. Змяняючы гэту канцэнтрацыю, можна ўзмацняць ці аслабляць інтэнсіўнасць малекулярных палос.

ЛИТАРАТУРА

1. Семенова О. П., Петрова Н. В. Известия вузов. Физика, 1, 111, 1962.
2. Киселевский Л. И., Свентицкий Н. С. Известия АН СССР, серия физич., 24, 7, 863, 1962.
3. Коханенко В. В. Диссертация. Томск, 1959.
4. Александров В. Я., Гуревич Д. В., Подмошенский И. В. Журнал прикладной спектроскопии, 1, 231, 1964.
5. Белоусова И. М. Оптика и спектроскопия, 13, 1, 12, 1962.

Резюме

Проведено изучение причин усиления интенсивности молекулярных полос в дуговых разрядах пониженного давления, горящих в атмосфере воздуха. Показано, что это усиление в основном связано с относительным уменьшением концентрации паров электродов в разрядном облаке. Регулируя концентрацию паров электродов, можно усиливать или ослаблять интенсивность молекулярных полос. Наблюдаемые экспериментальные зависимости не согласуются с общепринятой точкой зрения о том, что пары электродов в дуге составляют только незначительную часть от общей концентрации частиц.

Поступило в редакцию 19.V 1965

Л. В. ВАЛОДЗЬКА

ІНФРАЧЫРВОНЫЯ СПЕКТРЫ КОМПЛЕКСНЫХ ЗЛУЧЭННЯЎ НІТРАТУ УРАЊІЛУ

Метады інфрачырвонай спектраскапіі знайшлі шырокае прымяненне ў рашэнні рада пытанняў структурнай хіміі уранілавых злучэнняў [1]. Асноўная ўвага ўдзяляецца вывучэнню ўзаемадзеянняў паміж комплексаванымі і аддэнтамі. Для гэтага звычайна даследуецца вузкі спектральны інтэрвал інфрачырвонага паглынання рада блізкіх злучэнняў. Пры гэтым губляецца вельмі каштоўная інфармацыя аб структуры хістальных спектраў уранілавых комплексаў, неабходная для расшыфроўкі іх электронных станаў, адкуль у далейшым можна спадзявацца атрымаць найбольш поўныя звесткі аб хімічных сувязях з удзелам 5f-электронаў. Каб папоўніць гэты прагал, мы даследавалі інфрачырвоныя спектры комплексаў нітрату уранілу з метылавым спіртамі, дыэтылавым эфірам, ацэтанам і нітраметанам. Спектры рэгістраваліся на спектрафатометры Цэйс UR-10 у абласцях $400\text{--}2000\text{ см}^{-1}$ і $2600\text{--}3600\text{ см}^{-1}$.

Методыка прыгатавання рэчываў не адрознівалася ад прымяняемай раней пры вывучэнні спектраў люмінесценцыі [2], толькі працэс замашчэння праводзіўся не ў шкляннай ампуле, а ў герметычнай тэфлонавай кюветце з акенцамі з KRS-5, у якой у далейшым даследавалася комплекснае злучэнне. Каб атрымаць аднародны тонкі слой парашку, прыгодны для рэгістрацыі інфрачырвоных спектраў, асаджэнне комплексу з раствору праводзілася адпампоўваннем пары з гарызантальна размешчанай кюветы з дапамогай форвакуумнай помпы праз полую іголку, што праведзена праз тэфлонавую сценку. Пара выдалялася да праяўлення ў спектрах палос паглынання арганічных аддэнтаў, змяніўшых месца ў выніку ўзаемадзеяння з асноўным саставам комплексу. Грунтуючыся на рэзультатах шматразовых даследаванняў трайных сістэм уранілнітрат — вада — арганічны растваральнік, можна меркаваць, што састаў атрыманых комплексаў нітрату уранілу апісваецца агульнай формулай $\text{UO}_2(\text{NO}_3)_2 \cdot 2\text{A}$, дзе А — малекула аддэнта [3, 4]. Толькі ў комплексе уранілнітрату з нітраметанам больш верагодна чакаць, што нітраметан з'яўляецца бідэнтатным аддэнтам і на групу $\text{UO}_2(\text{NO}_3)_2$ прыпадае адна малекула ліганду. Такое меркаванне вынікае з вельмі блізкай адпаведнасці частот хістанняў уранілавых і нітратных груп у інфрачырвоным спектры трынітрату уранілу [5] і комплексу уранілнітрату з нітраметанам.

У табліцы прыведзены частоты максімумаў палос паглынання ў вобласці асноўных хістанняў інфрачырвоных спектраў комплексных злучэнняў уранілнітрату і іх магчымая інтэрпрэтацыя. Частоты свабодных малекул арганічных злучэнняў, якія ў радзе выпадкаў праяўляюцца ў спектрах па ўмовах доследу, адзначаны ў табліцы зорачкай. Для хістанняў уранілу захавана традыцыйная класіфікацыя частот лінейнай трохатамнай малекулы. Аднясенне адпаведных палос інфрачырвоных

Частоты інфрачырвоных спектраў комплексных злучэнняў нітрату уранілу (ν см^{-1})

Інтэрпрэтацыя	UN·CH ₃ NO ₂	UN·2CH ₃ OH	UN·2(C ₂ H ₅) ₂ O	UN·2(H ₃ C) ₂ CO
?	слаб. 433	слаб. 455	слаб. 440	
NO ₂ веернае	слаб. 480		слаб. 505	сярэд. 528
C—O—C дэфармацыйнае				
XYZ ₂ няплоскаснае	слаб. 606	слаб. 605	слаб. 615	
NO ₂ маятнікавае				
?				
NO ₂ дэфармацыйнае	моц. 650		моц. 725	
$\nu_6(\text{ONO}_2)$	моц. 711		сярэд. 748	моц. 745
$\nu_3(\text{ONO}_2)$	моц. 734	моц. 754	слаб. 783	слаб. 790
?	сярэд. 750		слаб. 810	сярэд. 810
$\nu_6(\text{ONO}_2)$	сярэд. 802	моц. 808	слаб. 837	сярэд. 830
?			слаб. 842*	сярэд. 845
$\nu_1(\text{UO}_2^{++})$	моц. 884	сярэд. 872	слаб. 864	слаб. 865
?			слаб. 890	слаб. 886
?			слаб. 920	слаб. 910
CNO ₂ сіметрычнае пульсіруючае	моц. 917		моц. 940	моц. 950
$\nu_3(\text{UO}_2^{++})$	моц. 960	моц. 946		сярэд. 985
?		сярэд. 975		сярэд. 1030
$\nu_2(\text{ONO}_2)$	сярэд. 1025	моц. 1028	моц. 1028	слаб. 1065
CH ₃ маятнікавае	сярэд. 1075		моц. 1072	сярэд. 1090*
	сярэд. 1102*			
C—O—H дэфармацыйнае		слаб. 1075		
		сярэд. 1120*		
C—O—C антысіметрычнае			моц. 1105	
			моц. 1140*	
XYZ ₂ валентнае антысіметрычнае	моц. 1296	моц. 1282	моц. 1275	моц. 1222
$\nu_1(\text{ONO}_2)$			сярэд. 1350	сярэд. 1250
CH ₃ сім. дэфармацыйнае			моц. 1380*	слаб. 1320
	моц. 1378			моц. 1370*
NO ₂ сім. валентнае				слаб. 1415
CH ₃ антысіметрычнае	моц. 1406	сярэд. 1450	сярэд. 1453	сярэд. 1438*
дэфармацыйнае				
$\nu_4(\text{ONO}_2)$	сярэд. 1492	сярэд. 1505	моц. 1490	сярэд. 1502
	сярэд. 1532	моц. 1556	моц. 1530	сярэд. 1542
N ₂ O антысіметрычнае валентнае	моц. 1567			сярэд. 1570*
?				сярэд. 1626
C=O валентнае				моц. 1730*
			моц. 2870	
C—H валентнае	сярэд. 2988	сярэд. 2962	моц. 2940	сярэд. 2975
	сярэд. 3060	сярэд. 3040	моц. 2980	сярэд. 3005
O—H валентнае		моц. 3370		

Абзначэнні: UN — уранілнітрат; слаб.—слабая; сярэд.—сярэдняя; моц.—моцная

спектраў да гэтых хістанняў не выклікае сумненняў, таму што яны вельмі добра ўзгадняюцца з надзейна інтэрпрэтаванымі частотамі спектраў люмінесценцыі тых жа злучэнняў [6]. Як адзначалася пры вывучэнні спектраў люмінесценцыі і відаць з табліцы, частоты валентных хістанняў уранілу ў комплексных злучэннях уранілнітрату істотна залежаць ад прыроды лігандаў. Гэта залежнасць якасна добра растлумачваецца зыходзячы з уяўленняў аб донарна-акцепторнай сувязі, што ўзнікае шляхам абагульнення уранам непадзеленай пары 2p-электронаў кіслароду лігандаў [7], і часта выкарыстоўваецца ў якасці своеасаблівай меры трываласці гэтай сувязі [8].

Абзначэнні частот хістанняў нітратных груп адпавядаюць прынятым для сіметрыі C_{2v} [5]. Нармальныя хістанні нітрату маюць сіметрыю гэтай пунктавай групы ў злучэннях з кавалентнымі сувязямі, у той час як у іонных злучэннях канфігурацыя іона NO_3^- адносіцца да пунктавай групы D_{3h} і ў інфрачырвоным паглыннанні праяўляюцца толькі тры частаты. Інтэрпрэтацыя частот хістанняў для кожнай з гэтых канфігурацый надзейна абгрунтавана рэзультатамі аналізу інфрачырвоных спектраў вялікай колькасці нітратных злучэнняў з рознымі тыпамі сувязей: ад іонных да кавалентных [9]. Паніжэнне сіметрыі нітрату пры ўзнікненні каардынацыйнай сувязі паміж адным або двума з яго атамаў кіслароду і цэнтральным атамам комплексу суправаджаецца расшчапленнем двойчы выраджанага антысіметрычнага валентнага хістання $\nu_3(E) = 1380 \text{ см}^{-1}$ пунктавай групы D_{3h} на хістанні $\nu_1(A_1)$ і $\nu_4(B_1)$ пунктавай групы C_{2v} . Велічыня гэтага расшчаплення, якая дасягае ў метылнітраце 385 см^{-1} , з'яўляецца крытэрыем утварэння сувязей са значным кавалентным характарам [1]. У даследаваных намі комплексах уранілнітрату з нітраметанам, метылавым спіртам, дыэтылавым эфірам і ацэтанам рознасць $\nu_4 - \nu_1$ складае адпаведна 196, 223, 215 і 252 см^{-1} — велічыні, характэрныя для злучэнняў з каардынацыйнымі сувязямі [9]. Як адзначалася вышэй, узнікненне такіх сувязей ва уранілавых злучэннях праяўляецца ў змяненні частот валентных хістанняў уранілу. З табліцы відаць, што ўзрастанне рознасці $\nu_4 - \nu_1$ у разглядаемых комплексах суправаджаецца змяншэннем частот валентных хістанняў уранілу. Магчыма, што гэта сувязь чыста выпадковая, таму што выяўлена на невялікай колькасці аб'ектаў. Аднак на яе неабходна звярнуць увагу, таму што, наколькі нам вядома, да цяперашняга часу не праводзілася супастаўлення рэзультатаў якасных ацэнак трываласцей донарна-акцепторных сувязей ва уранілнітратных комплексах пры выкарыстанні кожнага з адзначаных крытэрыяў утварэння такіх сувязей.

Уключэнне арганічнага аддэнду ў комплекс слаба ўплывае на частоты яго хістанняў у тых з вывучаных намі злучэнняў, у якіх утварэнне каардынацыйных сувязей стварае малую велічыню рознасці $\nu_4 - \nu_1$. Найбольш моцна зрушаны частоты інфрачырвонага спектра ацэтона, у той час як у комплексах з нітраметанам не выяўлена істотнай розніцы ў хістаннях каардынаванай і свабоднай малекулы. У апошнім выпадку зрушэнне частот не перавышае $5-10 \text{ см}^{-1}$ і толькі паласа паглынання 1102 см^{-1} вадкага нітраметану змяніла становішча на 27 см^{-1} . Калі прапанаванае Вільсанам [10] аднясенне гэтай паласы да маятнікавага хістання групы CH_3 адпавядае сапраўднасці, назіраемае змяненне яго частаты ў выніку ўзнікнення каардынацыйнай сувязі паміж атамамі кіслароду нітрагрупы і уранам трэба разглядаць як празмерна вялікае. Паласа паглынання каля 1070 см^{-1} прысутнічае ў спектрах усіх вывучаных намі уранілнітратных комплексаў, і нязменнасць яе становішча для такіх розных лігандаў здаецца некалькі здзіўляючай. Аднак у спектры комплексу з метылавым спіртам больш верагодным будзе аднясенне паласы паглынання з частатой 1075 см^{-1} да дэфармацыйных хістанняў каардынаванай групы $C-O-H$ (1112 см^{-1} у пары метанолу [11]), а не да хістанняў CH_3 . У вадкім метылавым спірце апошнія праяўляюцца частатамі 1418 і 1454 см^{-1} , і наўрад ці належыць чакаць іх памяншэння да 1075 см^{-1} у выніку зрушэння непадзеленай пары $2p$ -электронаў атама кіслароду гідраксілу. Гэта зрушэнне змяншае на 104 см^{-1} частату хістанняў карбанільнай групы ў комплексе уранілнітрату з ацэтанам, што можна лёгка растлумачыць паніжэннем кратнасці сувязі $C=O$ з-за неабходнасці кампенсацыі лішку дадатнага зараду, што ўзнік на атаме кіслароду [1]. Частоты сіметрычных і антысіметрычных дэфар-

мацыйных хістанняў метыльных груп зніжаюцца пры гэтым на 50 і 23 см^{-1} адпаведна, а частата маятнікавых хістанняў на 25 см^{-1} . У комплексе з дыэтылавым эфірам змяненне частаты антысіметрычных дэфармацыйных хістанняў гэтых груп не выяўлена, а частоты сіметрычнага дэфармацыйнага і маятнікавага хістанняў зменшыліся на 10 см^{-1} , у той час як паласа паглынання, што абумоўлена антысіметрычнымі валентнымі хістаннямі C—O—C 1140 см^{-1} у вадкім эфіры, зрушана на 35 см^{-1} . У спектры комплексу з метылавым спіртам нізкачастотная кампанента дэфармацыйных хістанняў метыльнай групы не праяўляецца, а зрушэнне высокачастотнай кампаненты, таксама як і для комплексу з нітраметанам, ляжыць у межах памылкі вымярэнняў (каля 5 см^{-1}). Становішчы шырокіх палос паглынання, што абумоўлены валентнымі хістаннямі C—H , таксама істотна не змяняюцца ва ўсіх даследаваных комплексных злучэннях нітрату уранілу.

Такім чынам, каардынацыя арганічных аддэндаў уранам аказвае значны ўплыў на хістанні тых груп атамаў, якія непасрэдна звязаны з комплексаўтваральнікам. Выключэнне назіраецца толькі ў спектры комплексу з нітраметанам, калі справядліва адзначаная інтэрпрэтацыя паласы 1075 см^{-1} як узбуджанага маятнікавага хістання групы NH_3 . Гэта аднясенне не адназначанае, таму што ў спектры прысутнічае інтэнсіўная нязрушаная паласа 1102 см^{-1} і з'яўленне паласы 1075 см^{-1} пры ўтварэнні комплексу можа атрымаць у далейшым больш аргументаванае тлумачэнне. З-за малой колькасці эксперыментальных даных не інтэрпрэтаван таксама рад слабых палос у нізкачастотнай вобласці інфрачырвоных спектраў даследаваных комплексаў. Але з аналізаў зрушэнняў тых палос, інтэрпрэтацыя якіх не выклікае сумненняў, можна зрабіць вывад, што велічыня змянення частот валентных хістанняў групы UO_2^{++} пры замяшчэннях лігандаў адлюстроўвае не адносную трываласць іх сувязей з уранам, а сумарны эфект уцягнення на арбіты уранілу непадзеленых пар электронаў ад усіх шасці донараў, што каардынаваны ў яго экватарыяльнай плоскасці. Па гэтай прычыне вызначэнне становішча лігандаў у спектрахімічнай серыі ў залежнасці толькі ад сілавых пастаянных сувязей уран—кісларод уранілу ў адпаведных комплексных злучэннях [8] не можа лічыцца абгрунтаваным. Калі размясціць арганічныя ліганды ў рад па значэннях частот валентных хістанняў уранілу, то пры пераходзе ад аднаго члена рада да другога ў комплексах нітрату уранілу назіраюцца як узмацненні, так і аслабленні каардынацыйных сувязей паміж уранам і нітратнай групай, якія абумоўлены канкурэнцыйнай аддэндаў. Гэты эфект выяўляецца таксама і пры аналізе частот хістанняў нітратных груп і уранілу ў шасці комплексных злучэннях уранілу нітрату, даследаваных Улавенка і супрацоўнікамі [12], аднак адсутнасць у гэтай рабоце апісання метадыкі эксперыменту і частот арганічных лігандаў не дазваляе правесці больш поўнае супастаўленне іх даных з прыведзенымі вышэй заключэннямі.

Аўтар выказвае шчырую ўдзячнасць акадэміку АН БССР А. Н. Сеўчанка, які з вялікай увагай аднёсся да гэтага даследавання, а таксама лабаранту А. І. Серафімовічу за дапамогу ў правядзенні эксперыментаў.

ЛІТАРАТУРА

1. «Спектроскопические методы в химии комплексных соединений», под ред. В. М. Вдовенко. Изд. «Химия», М.—Л., 1964.
2. Володько Л. В., Севченко А. Н. Оптика и спектроскоп., 4, 40, 1958.
3. Katzin L. I., Sullivan J. C. J. Phys. Coll. Chem., 55, 346, 1951.
4. Вдовенко В. М., Ковальская М. П., Ковалева Т. В. ЖНХ, 2, 1677, 1957.
5. Gatehouse V. M., Comyns A. E. J. Chem. Soc., 3965, 1958.

6. Володько Л. В., Севченко А. Н. Оптика и спектроскоп., 4, 47, 1958.
7. Дяткина М. Е., Михайлов Ю. Н. Журн. структурн. химии, 3, 724, 1962.
8. McGlynn S. P., Smith J. K., Neely W. C. J. Chem. Phys., 35, 105, 1961.
9. Ferraro J. R. J. Mol. Spectroscopy, 4, 99, 1960.
10. Wilson T. P. J. Chem. Phys., 11, 361, 1943.
11. Кольрауш К. Спектры комбинационного рассеяния. ИЛ, 1952.
12. «Физические проблемы спектроскопии». Материалы XIII совещания, т. 1. Изд. АН СССР, М., 1962, стр. 420.

Резюме

Исследованы инфракрасные спектры полученных ранее [2] комплексов уранилнитрата с нитрометаном, метиловым спиртом, диэтиловым эфиром и ацетоном в областях 400—2000 и 2600—3600 см^{-1} . В этом ряду комплексов наблюдается расщепление дважды вырожденного антисимметричного валентного колебания нитрата соответственно на 196, 223, 215 и 252 см^{-1} , характерное для образования связей частично ковалентного характера, что сопровождается уменьшением частот валентных колебаний иона уранила. При этом частоты колебаний органических лигандов изменяются в большей степени в той же последовательности соединений. Отсюда следует, что величина изменения частот валентных колебаний уранилового иона при замещениях лигандов отражает не относительную прочность связей последних с ураном, а суммарный эффект вовлечения на орбиты уранила неподеленных пар электронов от всех шести доноров, координированных в его экваториальной плоскости. По этой причине применяющееся в ряде исследований определение положения лигандов в спектрохимической серии в зависимости только от значения силовых постоянных связей иона уранила не может считаться обоснованным.

І. М. ЯРМОЛЕНКА, М. Я. РЭЗНІКАУ, І. К. СЯРЖАНІН

ДЫЭЛЕКТРЫЧНЫЯ ТЭМПЕРАТУРНА-ЧАСТОТНЫЯ ХАРАКТАРЫСТЫКІ НЕКАТОРЫХ ЦЭЛЮЛОЗНЫХ МАТЭРЫЯЛАУ

Вывучэнне рада электрафізічных уласцівасцей адкрывае новыя перспектывы ў вывучэнні будовы палімераў. У работах [1—3] паказана магчымасць ідэнтыфікацыі пэўных максімумаў на крывых, якія адлюстроўваюць тэмпературную і частотную залежнасці дыэлектрычных страт і іх аднясенне да пэўных тыпаў палярных груп.

Электраізаляцыйныя матэрыялы на аснове целюлозы і яе вытворных (папера, лакі і г. д.) адносяцца да найбольш масавых, і іх электрафізічныя характарыстыкі маюць вялікае практычнае значэнне. Па эканамічных паказчыках і даступнасці яны значна перавышаюць многія сінтэтычныя матэрыялы, некаторыя з уласцівасцей якіх не задавальняюць растучым патрабаванням сучаснай электратэхнікі. Таму ў апошнія гады вядуцца даследаванні па вывучэнню хімічных мадыфікацый целюлозы для стварэння электратэхнічных матэрыялаў з задазенымі ўласцівасцямі. Аднак няма поўнай і сістэматычнай інфармацыі аб залежнасці электрафізічных уласцівасцей вытворных целюлозы ад яе саставу. Таму накапленне колькасных даных у гэтай вобласці з'яўляецца вельмі важным.

Мы вывучалі ўплыў акісляльнай мадыфікацыі, а таксама некаторых рэакцый этэрыфікацыі на электрычныя ўласцівасці вытворных целюлозы. З усіх дэструктыўных ператварэнняў целюлозы найбольш распаўсюджаны акісляльныя ператварэнні. Яны працякаюць пры вытворчасці і захаванні целюлозных матэрыялаў, а таксама ў працэсе іх эксплуатацыі. У прыватнасці, тэрмаакісляльная дэструкцыя целюлозы і звязаная з гэтым яе пагаршэнне, і змяншэнне тэрміну службы інтэнсіўна працякае пры эксплуатацыі папяровых кандэнсатараў у жорсткіх электрычных рэжымах.

У выніку акісляльных ператварэнняў праходзіць дэпалімерызацыя і накапленне палярных і іанізаваных груп, якія характэрны для акісленай целюлозы, перш за ўсё карбаксільных і карбанільных у розных суадносінах і рознага тыпу ў залежнасці ад умоў рэакцыі. Для даследавання ролі карбаксільных груп мы выкарыстоўвалі прадукты накіраванай акісляльнай мадыфікацыі, калі ў саставе прадукту накопляюцца пераважна уронавыя карбаксілы [4].

З другога боку, вядома, што прысутнасць вугляводаў, якія змяшчаюць карбанільныя і карбаксільныя групы, часам спрыяльна адбіваецца на ўласцівасцях электраізаляцыйных матэрыялаў. На гэта ўказваюць даныя аб зніжэнні дыэлектрычных страт пры ўвядзенні ў кандэнсатарную паперу геміцелюлоз і спадарожнікаў целюлозы, якія ўключаюць вугляводы, што змяшчаюць СООН- і СО-групы. Адгезійныя ўласцівасці ацэтылцелюлозных лакаў удалося палепшыць шляхам частко-

вага акіслення, якое вядзе да наапаўнення ў саставе палімеру палярных груп. А роля электростатычных сіл паміж палярнымі групамі падложкі і палімеру ў адгезійным узаемадзеянні вядомая [5].

Раней была вывучана электраправоднасць некаторых акісленых целюлоз і іх солей [6] і на падставе атрыманых тэмпературна-частотных залежнасцей паказана, што для гэтых аб'ектаў, як і для іншых целюлозных матэрыялаў, значную долю праводнасці складае іонная праводнасць. У сувязі з тым, што акісленая целюлоза змяшчае карбаксілы,

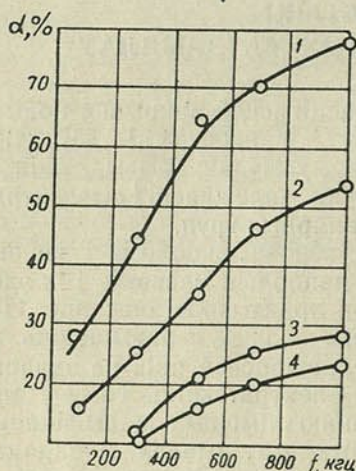


Рис. 1. Изотермы частотных залежнасцей змяненняў, якія выкліканы акісленнем:

1 — тэмпература 20° С; 2 — 50; 3 — 80; 4 — 100

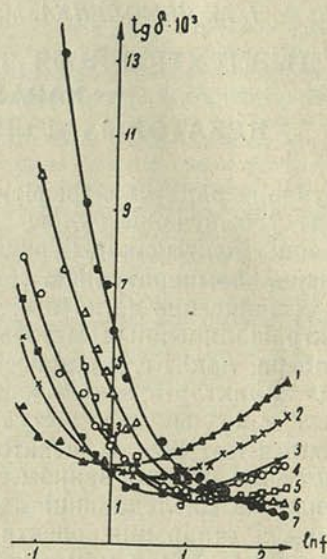


Рис. 2. Изотермы $\text{tg } \delta$ для вобласці нізкіх частот (f — у кГц):

1 — 15° С; 2 — 30; 3 — 40; 4 — 50; 5 — 60; 6 — 75; 7 — 92

здольныя да катыёнаабмену, які вядзе да інтэнсіўнай сорбцыі катыёнаў металаў, гэты фактар можа ўносіць істотны ўклад у агульную карціну электрафізічных характарыстык целюлозных матэрыялаў [7—9]. Пры адсутнасці катыёнаў металаў, што адзначаецца не для тэхнічных, а для некаторых чыстых лабараторных прэпаратаў, больш істотны ўплыў на іонную праводнасць аказвае колькасць сарбіраванай вільгаці, яе стан ва ўзоры, уплыў на ступень дысацыяцыі іанагенных груп, перш за ўсё карбаксілаў. Асабліва вялікі ўплыў вільгаці на электрафізічныя ўласцівасці целюлозных матэрыялаў, якія змяшчаюць іанагенныя групы або катыёны металаў. Уплыў сарбіраванай вільгаці на электрафізічныя ўласцівасці тэхнічных целюлозных матэрыялаў вядомы [10].

У гэтай рабоце мы даследавалі дыэлектрычныя страты для храматаграфічнай целюлозы зыходнай і атрыманых на яе аснове акісленых целюлоз па метаду [4], а таксама часткова ацэтыліраваных целюлоз, апісаных у [11].

Перад вымярэннямі кожны ўзор вытрымліваўся ў вымяральной ячэйцы над пяцівоксам фосфару 2—3 дні. У гэты час перыядычна праводзіліся кантрольныя вымярэнні да атрымання не змяняючыхся ў часе велічынь $\text{tg } \delta$ і R , што ўказвала на заканчэнне працэсу сушкі.

Вымярэнні на частотах 100 кГц — 10 МГц выконваліся на вымяраль-

ніку фактару страт ВМ-271 (Tesla), які працуе па рэзанансному прынцыпу. Вызначаліся актыўная састаўляючая супраціўлення і ёмістасць вымяральнага кандэнсатара, што змяшчае даследуемы ўзор. Дыэлектрычныя страты разлічваліся па формуле $\operatorname{tg} \delta = \frac{1}{\omega RC}$, дзе R — актыўная састаўляючая супраціўлення; C — ёмістасць вымяральнага кандэнсатара з узорам і ω — кругавая частата.

Вымярэнні на частотах 50 гц — 200 кгц выконваліся на прыладзе TR-9701 (Orion), якая ўяўляе сабой мост пераменнага току. Сілкаванне моста ажыццяўлялася ад гукавога генератара, і індывідуальна — селектыўным узмацняльнікам ТТ-1301 (Orion).

Для ацэнкі ўплыву акіслення на велічыню дыэлектрычных страт было разлічана адноснае змяненне $\operatorname{tg} \delta$ у рэзультате акіслення $\alpha = \frac{\operatorname{tg} \delta_1}{\operatorname{tg} \delta_2}$, дзе $\operatorname{tg} \delta_1$ — тангенс вугла

страт для акісленай (COOH—14,4%)

цэлюлозы, а $\operatorname{tg} \delta_2$ — для неакісленай. На рис. 1 паказана частотная залежнасць велічыні α для доследаў пры розных тэмпературах. Пры больш нізкіх тэмпературах назіраюцца вялікія адносныя змяненні страт з частатой для акісленай цэлюлозы ў параўнанні з неакісленай.

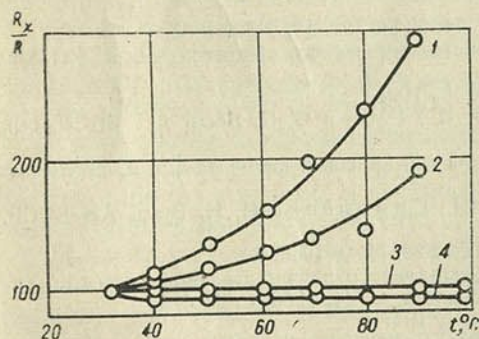


Рис. 4. Залежнасць адносных змяненняў актыўных састаўляючых супраціўленняў узору ад тэмпературы:

1 — зыходная цэлюлоза пры частаце 300 кгц; 2 — зыходная цэлюлоза, 1000 кгц; 3 — акісленая (14,4%) цэлюлоза, 300 кгц; 4 — акісленая (14,4%) цэлюлоза, 1000 кгц (R — супраціўленне (актыўная састаўляючая) пры тэмпературы 30° С, R_x — пры дадзенай тэмпературы)

цэлюлозы. У адпаведнасці з [6] электраправоднасць акісленай цэлюлозы з ростам частаты павялічваецца. Трэба адзначыць, што для акісленай цэлюлозы адносныя змяненні электраправоднасці з тэмпературай значна меншыя, чым для неакісленай (рис. 4).

У выніку ацэтыліравання на частотнай залежнасці з'яўляецца максімум, які пры ўсіх вывучаных тэмпературах знаходзіцца ў вобласці

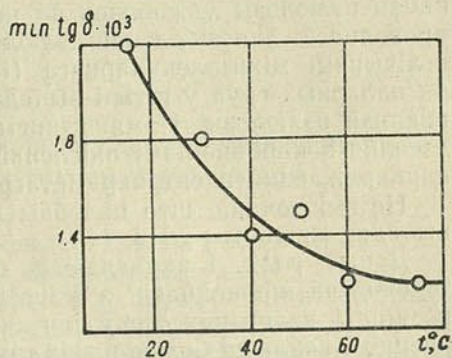


Рис. 3. Тэмпературная залежнасць $\operatorname{tg} \delta$ у мінімуме

Доследы паказалі, што ў адпаведнасці з літаратурнымі данымі пры пэўнай частаце назіраецца мінімум $\operatorname{tg} \delta$ для неакісленай цэлюлозы. Мінімум $\operatorname{tg} \delta$ ляжыць у вобласці нізкіх частот (да 1 кгц) (рис. 2). Значэнне $\operatorname{tg} \delta$ у мінімуме змяншаецца з павышэннем тэмпературы (рис. 3). У вывучаным частотным дыяпазоне выяўлен мінімум, што ляжыць паміж двума максімамі страт, якія адносяцца да розных палярных груп. Таму становіцца мінімуму і велічыні $\operatorname{tg} \delta$ у мінімуме вызначаюцца тэмпературнымі змяненнямі часу рэлаксацыі адпаведных палярных груп, адказных за гэтыя максімумы.

Вымяралася таксама электраправоднасць мадыфікаванай цэлюлозы.

300 кГц. Адзначым, што для акісленай цэлюлозы, а таксама для часткова ацэтыліраванай акісленай цэлюлозы ў гэтай жа вобласці частот назіраецца невялікі максімум.

Такім чынам, дыэлектрычныя страты вывучаных палімерных матэрыялаў, якія ўключаюць страты праводнасці і дыпольна-радыкальныя страты, істотна змяняюцца ў рэзультате акісляльнай мадыфікацыі і этэрыфікацыі. Даняны па тэмпературнай залежнасці праводнасці для акісленай і неакісленай цэлюлозы (рыс. 4), а таксама для ацэтыліраванай цэлюлозы ўказваюць на павелічэнне энергіі актывацыі электраправоднасці для акісленай цэлюлозы, што можа тлумачыцца большымі велічынямі міжмалекулярнага (і ўнутрымалекулярнага) узаемадзеяння палярных груп у гэтым выпадку, чым для неакісленай або ацэтыліраванай цэлюлозы, і змяншэннем рухомасці іонаў за кошт іх узаемадзеяння з карбаксіламі акісленай цэлюлозы. Апошнія, у прыватнасці, пацвярджаецца электрахраматаграфічнымі данымі [12].

Не выключана, што падобны механізм адыгрывае пэўную ролю і ў выпадку, апісаным у [13, 14].

Даняны рыс. 1 адпавядаюць вывучанаму характару тэмпературнай залежнасці праводнасці з акісленнем і паказваюць, што найбольшая розніца ў велічынях страт для акісленай і неакісленай цэлюлозы назіраецца ў вобласці больш нізкіх тэмператур, што сведчыць аб павелічэнні дысацыяцыі палярных груп, якія ўдзельнічаюць у дыпольных узаемадзеяннях, і, значыць, аб збліжэнні характару рэлаксацыі дыпольных груп, адказных за дыэлектрычныя страты структур акісленай і неакісленай цэлюлозы ў вобласці высокай тэмпературы (да 100°C).

Такім чынам, даняны нашых доследаў паказваюць, што па дыэлектрычных уласцівасцях можна меркаваць аб характары мадыфікацыі цэлюлозных матэрыялаў.

ЛІТАРАТУРА

1. Михайлов Г. П. и Борисова Т. Н. ЖТФ, 23, 12, 2159, 1953.
2. Михайлов Г. П. Журнал Всесоюзного химического общества им. Д. И. Менделеева, 6, № 4, 404—411, 1961.
3. Михайлов Г. П. Успехи химии, № 5, 1964.
4. Ермоленко И. Н., Макатун В. Н., Гусев С. С. Весті АН БССР, сер. фіз.-тэхн. навук, № 2, 1962.
5. Шампетье Г., Рабатэ Г. Химия лаков, красок и пигментов, т. 1. Госхимиздат, М., 1960.
6. Резников М. Я., Капуцкий Ф. Н., Ермоленко И. Н. Весті АН БССР, сер. фіз.-тэхн. навук, № 3, 1962.
7. Ренне В. Т., Морозова М. Н. ЖТФ, 28, № 9, 1958.
8. Китаева С. Х. Научные труды Центрального научно-исследовательского института целлюлозной и бумажной промышленности, в. 44, 1960, стар. 161.
9. Chuch H. F. J. Soc. Chem. Ind., 66, 221, 1947.
10. Tsuge Kenji, Wada Vasaku. J. Phys. Soc. Japan, 17, № 1, 156—164, 1962; РЖФ, 7, 7D93, 1962.
11. Елина Г. Л., Гусев С. С., Ермоленко И. Н. ДАН БССР, 8, № 2, 104, 1964.
12. Ермоленко И. Н., Логин М. Л. Журнал аналитической химии, 19, в. 4, 425—430, 1964.
13. Ренне В. Т. Известия высших учебных заведений. Физика, № 6, 1956.
14. Ренне В. Т. Сб. «Вопросы производства конденсаторной бумаги». Гослесбумиздат, 6, 1959, стар. 251.

Резюме

Тангенс угла диэлектрических потерь целлюлозы увеличивается с ее окислением, причем это увеличение более значительно при низких температурах.

Наблюдается уменьшение значения тангенса угла диэлектрических потерь в минимуме со смещением последнего в область более высоких частот при увеличении температуры (область 30 кГц—200 кГц).

Кривые зависимостей относительного изменения активной составляющей сопротивления свидетельствуют о росте последней с увеличением температуры для исходной целлюлозы. Для окисленной целлюлозы наблюдалось небольшое уменьшение активной составляющей сопротивления с ростом температуры.

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

А. Е. ЗАЛЕСКИЙ

О ЛОКАЛЬНО КОНЕЧНЫХ ГРУППАХ С УСЛОВИЕМ МИНИМАЛЬНОСТИ ДЛЯ ЦЕНТРАЛИЗАТОРОВ

Если для любой возрастающей последовательности абелевых подгрупп H_i группы G последовательность централизаторов (H_i) групп H_i в G стабилизируется на конечном номере, то G будем называть C -группой, или группой с условием минимальности для централизаторов абелевых подгрупп. Оказывается, что в локально конечной C -группе максимальные полные абелевы p -подгруппы сопряжены¹. Отсюда легко следует, что если все силовские p -подгруппы локально конечной C -группы (для фиксированного p) являются конечными расширениями полных абелевых подгрупп, то они сопряжены.

Поводом для рассмотрения локально конечных C -групп послужила недавно доказанная В. П. Платоновым теорема о сопряженности силовских p -подгрупп в периодических линейных группах [1], которые, как известно, удовлетворяют условию минимальности для централизаторов. Напомним, что линейные p -группы удовлетворяют условию минимальности для подгрупп, если p не равно характеристике поля. Сопряженность силовских p -подгрупп в группах с условием минимальности для подгрупп отмечена Р. Бэртом [2] (частный случай см. [3]).

В заключение доказывается некоторое утверждение о строении локально конечных p -подгрупп групп с условием минимальности для централизаторов, из которого, в частности, следует, что они разрешимы и что всякая полная p -группа абелева.

Обозначения. Централизатор группы H в G обозначается через $(H)_G$ или просто (H) ; $G:H$ — индекс H в G ; $\{H_1, H_2\}$ — группа, порожденная $H_1, H_2 \subset G$; H' — коммутант группы H ; H^p — группа, порожденная p -ми степенями элементов группы H .

Пусть H — подгруппа C -группы G и $(Y)_H$ — централизатор в H некоторой подгруппы $Y \subset H$. Тогда $(Y)_H = H \cap (Y)_G$. Отсюда следует, что условие C наследственно для подгрупп.

Предположим, что H в свою очередь является централизатором некоторой подгруппы $Z \subset G$. Тогда $(Y)_H = ((Z, Y))_G$.

Если C -группа не удовлетворяет некоторому условию R , которому удовлетворяют все абелевы группы, то существует такая подгруппа $H \subset G$, H — централизатор некоторой абелевой подгруппы группы G , что R выполняется для всех подгрупп группы H вида $(Y)_H$, $Y \subset H$, $Y' = 1$, и не выполняется для H . Группу H будем называть минимальным контрпримером для условия R .

¹ Полной называется группа, не имеющая истинных подгрупп конечного индекса.

Заметим еще, что условие C эквивалентно в локально конечных группах условию минимальности для централизаторов конечных абелевых подгрупп.

Теорема 1. *Максимальные коммутативные полные p -подгруппы в локально конечной C -группе сопряжены.*

Прежде всего отметим, что если H — полная коммутативная p -подгруппа C -группы G , то существует конечная подгруппа $\bar{H} \subset H$ такая, что $(\bar{H}^p) = (H)$. Действительно, если H_1 — любая конечная подгруппа H и $(H_1^p) \neq (H^p) = (H)^*$, то существует $h_2 \in H$, такое, что (h_2^p) не включает (H_1^p) . Положим $H_2 = \{H_1, h_2\}$. Тогда $(H_2^p) = (H_1^p) \cap (h_2^p) \neq (H_1^p)$. Аналогично строим H_i , пока возможно. Получаем возрастающую последовательность подгрупп $H_i^p \subset H$ и убывающую последовательность их централизаторов (H_i^p) , которая стабилизируется на конечном номере $i = k$. Это возможно лишь в том случае, если $(H) = (H^p) = (H_k^p) = (\bar{H})$, что и требовалось.

Переходим к доказательству теоремы. Пусть G — минимальный контрпример, S_i , $i=1, 2$, — максимальные полные коммутативные p -подгруппы, \bar{S}_i — конечные подгруппы S_i , $(\bar{S}_i^p) = (S_i)$. Положим $T = \{\bar{S}_1, \bar{S}_2\}$. Так как силовские p -подгруппы в T сопряжены, то можно считать, что сама T уже p -группа. Положим $Z = T$, если T абелева, Z порождается центром группы T и одним элементом t второго центра группы T , t^p содержится в центре группы T , если T неабелева. Имеем $(Z)_T \supset \bar{S}_i^p$, $Z \subset (\bar{S}_i^p)_T \subset (\bar{S}_i^p)_G = (S_i)_G$, $i=1, 2$. Тогда $S_i \subset (Z)$. Если $(Z) \neq G$, то S_i сопряжены ввиду минимальности G , так как Z абелева. Если $(Z) = G$, то $Z = T$ и вырывает следующее соотношение:

$$(S_1) = (\bar{S}_1^p) \supset (T) = (Z) = G \supset S_2,$$

т. е. S_1 и S_2 поэлементно перестановочны, так что $S_1 = S_2$. Теорема доказана.

Теорема 2. *Пусть все силовские p -подгруппы локально конечной C -группы G являются конечными расширениями полных абелевых групп. Тогда силовские p -подгруппы G сопряжены.*

Доказательство. Легко видеть, что если S — силовская p -подгруппа G , A — ее максимальный полный нормальный делитель, $S:A < \infty$, то A — максимальная полная коммутативная p -подгруппа G . Действительно, если B — полная абелева p -группа, содержащая A , то существует конечная подгруппа $B_0 \subset B$ такая, что $B_0 : B_0 \cap A > S : A$. Пусть S_0 — конечная подгруппа S , такая, что $S_0 A = S$. Положим $T = \{S_0, B_0\}$. T содержится в нормализаторе группы A в G ; так как силовские p -подгруппы T сопряжены, то будем считать, что T — p -группа. Тогда TA — p -группа, но $TA : A \geq B_0 A : A > S : A$, $S \subset TA$, $S \neq TA$, что невозможно.

Пусть теперь S и S_1 — силовские p -подгруппы G ; A, A_1 — их максимальные полные нормальные делители. Из сделанного только что замечания и теоремы 1 следует, что A_1 и A сопряжены. Пусть уже $A_1 = A$; S_0, S_{10} — конечные подгруппы S, S_1 такие, что $AS_0 = S$, $AS_{10} = S_1$, $T = \{S_0, S_{10}\}$. T содержится в нормализаторе A , и потому силовские p -подгруппы T нормализуют A , откуда следует, что S и S_1 сопряжены. Теорема доказана.

*) По поводу равенства $H = H^p$ см. [4], теорема 1.1.

Отметим, что если силовские p -подгруппы S -группы абелевы, то они сопряжены.

Рассмотрим теперь группы с условием минимальности для централизаторов подгрупп (которое эквивалентно условию максимальности для централизаторов конечных подгрупп). Замечания, сделанные перед теоремой 1, справедливы и в этом случае.

Теорема 3. Пусть G — группа, удовлетворяющая условию минимальности для централизаторов, $S \subset G$ — локально конечная p -подгруппа. S обладает нормальным рядом $S = S_1 \supset S_2 \supset S_3 \supset \dots \supset S_{n-1} \supset S_n = 1$, причем S_i/S_{i+1} — абелева группа, $i = 1, 2, \dots, n-1$, $S_i^p \subset S_{i+1}$, $i = 1, 2, \dots, n-2$.

Доказательство. Так как условие минимальности для централизаторов наследственно для подгрупп, то будем считать $G = S$. Пусть H_k — конечная подгруппа S . Если (S^p) не включает (H_k^p) , то существует $s_1 \in S$ такое, что (s_1^p) не включает (H_k^p) . Если (S') не включает (H_k') , то существуют $s_2, s_3 \in S$ такие, что $([s_2, s_3])$ не включает (H_k') . Положим $H_{k+1} = \langle H_k, s_1, s_2, s_3 \rangle$, $(H_{k+1}^p) \subset (H_k^p)$, $(H_{k+1}') \subset (H_k')$, причем если $(H_{k+1}^p) = (H_k^p)$, то для всех $s \in S$, $(s^p) \supset (H_k^p)$, $(S^p) \subset (H_k^p)$, т. е. $(S^p) = (H_k^p)$, и если $(H_{k+1}') = (H_k')$, то аналогично $(S') = (H_k')$. Продолжая построение H_i , пока возможно, получаем возрастающие последовательности H_{k+i} , H_{k+i}^p , H_{k+i}' , и убывающие последовательности их централизаторов (H_{k+i}^p) , (H_{k+i}') . По условию, начиная с некоторого конечного номера m они стационарны: $(H_{k+m}^p) = (H_{k+m+1}^p) = (S^p)$, $(H_{k+m}') = (H_{k+m+1}') = (S')$. Если S некоммутативная группа, то мы могли взять H_k некоммутативной, тогда и H_{k+m} некоммутативна.

H_{k+m} — нильпотентная группа, Z — центр H_{k+m} , Y — совокупность всех тех элементов y из второго центра группы H_{k+m} , для которых $y^p \in Z$, $Y \supset Z$. Тогда, очевидно, $H_{k+m}^p \subset (Y)$, $H' \subset (Y)$. Тогда $(Y) \supset S^p$, $(Y) \supset S'$. (Y) — нормальный делитель S , так как содержит коммутант S' , и если S не абелева, то $(Y) \neq S$. Полагая $(Y) = S_2$ и применяя аналогичные рассуждения к S_2 , найдем S_3 , $S_3 \supset S_2'$, $S_3 \supset S_2^p$, S_3 является централизатором в S_2 некоторой подгруппы $Y_2 \subset S_2$ и т. д. Тогда $S_i = (\langle Y_1, Y_2, \dots, Y_i \rangle)$, так что для некоторого конечного n S_{n-1} будет абелевой. Полагая $S_n = 1$, заканчиваем доказательство.

Разумеется, локально конечная p -группа с условием минимальности для централизаторов обладает нетривиальным центром.

Следствие. Максимальные полные p -подгруппы локально конечной группы с условием минимальности для централизаторов абелевы и сопряжены.

ЛИТЕРАТУРА

1. Платонов В. П. ДАН СССР, 160, № 3, 1965.
2. Ваег R. Math. Ann., 150, № 1, 1963.
3. Ваег R. Trans. Amer. Math. Soc., 79, 521—540, 1955.
4. Черников С. Н. УМН, т. XIV, № 5, 1959.

Поступило в редакцию 4. VI 1965

В. И. ОСИНСКИЙ, Н. Н. СИРОТА

ИЗМЕРЕНИЕ НИЗКИХ ТЕМПЕРАТУР ПО ВОЛЬТАМПЕРНЫМ И РЕКОМБИНАЦИОННЫМ ХАРАКТЕРИСТИКАМ АРСЕНИДГАЛЛИЕВЫХ ДИОДОВ

Полупроводниковые арсенидгаллиевые диоды быстро приобретают практическое значение в различных областях, особенно после разработки излучающих и лазерных диодов.

В работах [1, 2] рассматриваются вопросы измерения низких температур с помощью кремниевых, германиевых и арсенидгаллиевых выпрямительных диодов.

В настоящем сообщении¹ рассмотрена температурная зависимость вольтамперных характеристик арсенидгаллиевых излучающих диодов в линейной области, представляющей интерес для измерения низких температур, а также возможность измерения низких температур по интенсивности и длине волны максимума рекомбинационного излучения диодов.

Измерения проведены на диодах, приготовленных диффузией цинка из газовой фазы в монокристаллическую пластинку арсенида галлия *n*-типа с концентрацией доноров около 10^{18} см^{-3} .

Вольтамперные характеристики, снятые на постоянном токе, представлены на рис. 1. При понижении температуры до азотной прямые ветви вольтамперной характеристики сдвигаются вправо, причем сдвиг практически линейно зависит от температуры в области токов 80—150 *ма*. Дальнейшее понижение температуры до гелиевой вызывает изменение наклона прямой ветви вольтамперной характеристики в указанной области токов (кривая 1). По-видимому, при гелиевых температурах существенно сказывается сопротивление полупроводникового материала с обеих сторон от перехода. На рис. 2 показана температурная зависимость интенсивности и длины волны максимума спектра рекомбинационного излучения при токе 100 *ма*.

При снятии рекомбинационных характеристик арсенидгаллиевый диод обдувался струей охлажденного гелия, который одновременно являлся хладоагентом и обуславливал оптическую прозрачность среды над диодом. Излучение регистрировалось фотоумножителем ФЭУ-28.

С понижением температуры интенсивность излучения возрастает, что связано с возрастанием числа излучательных переходов из-за уменьшения взаимодействия носителей с фононами кристаллической решетки. Ниже 230° К наблюдается практически линейное увеличение интенсивности излучения с понижением температуры. Длина волны максимума рекомбинационного излучения почти линейно изменяется во всем исследованном интервале температур.

¹ Работа доложена на секции криогенной техники XI Всесоюзного совещания по физике низких температур (г. Минск, июнь 1964 г.).

С целью проверки воспроизводимости измерения проводились многократно. Разброс вольтамперных характеристик и длины волны максимума не выходил за пределы 0,1%. Разброс величины интенсивности при многократных измерениях в интервале температур 290—230° К составлял 0,2%, при более низких температурах около 0,5%.

В низкотемпературной термометрии существенно отсутствие локального нагрева датчика проходящим через него током. В случае германиевых и кремниевых диодов энергия, выделяющаяся при рекомбинации носителей в $p-n$ переходе, поглощается кристаллом в форме тепла,

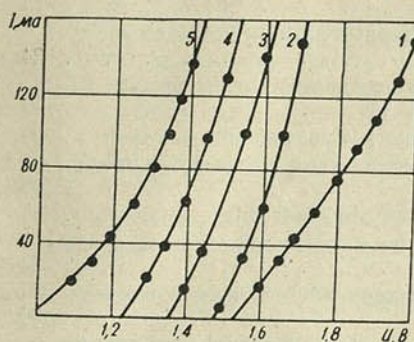


Рис. 1. Вольтамперные характеристики арсенидгаллиевых диодов при 4,2° К (1), 77° К (2), 145° К (3), 195° К (4), 300° К (5)

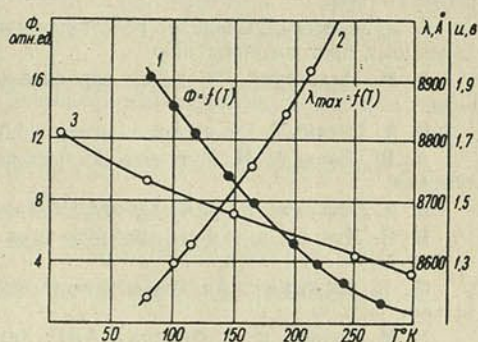


Рис. 2. Температурная зависимость интенсивности (1), длины волны максимума рекомбинационного излучения (2) и напряжения на диоде (3)

в то время как в арсениде галлия (и некоторых других полупроводниковых соединениях) большая часть энергии выделяется при рекомбинации в виде энергии фотонов, что существенно уменьшает локальный нагрев области $p-n$ перехода; это способствует повышению достоверности измерений низких температур.

Таким образом, арсенидгаллиевые диоды пригодны для измерения низких температур по вольтамперным и рекомбинационным характеристикам и имеют сравнительно высокую чувствительность. В нашем случае она составляла: при измерении температуры по вольтамперным характеристикам от 1,2 до 4,5 мВ/град, при измерении температуры по изменению длины волны максимума рекомбинационного излучения 1,62 Å/град и по интенсивности — 0,01 ¹/град при 290° К и 1,2 ¹/град при более низких температурах.

Измерение температур по рекомбинационному излучению позволяет передавать информацию о низких температурах посредством света, а не электрического тока, как в случае уже известных методов измерения низких температур, и может найти широкое применение в лабораторной практике и в технике.

ЛИТЕРАТУРА

1. Cohen B. G., Snow W. B., Tretola A. R. RSI, 34, № 10, 1091, 1963.
2. Barton L. E. Electronics, № 18, 24, 1962 (русский перевод).

Поступило в редакцию 19.III 1965

З М Е С Т

Д. А. Супруненко, В. И. Матюхин. О разрешимых группах матриц над евклидовым кольцом	5
В. И. Крылов, Л. А. Янович. О приближении периодических аналитических функций тригонометрическими суммами	10
А. А. Пальцев, Н. С. Скобля. Об интегрировании ограниченных функций с весом Лягерра	15
А. Е. Залесский. Сведение некоторых комбинаторных задач к целочисленному линейному программированию	24
В. М. Мадорский. Об одном варианте метода усредненных поправок для решения нелинейных интегральных уравнений	29
В. А. Емеличев. Об одной задаче вогнутого программирования	39
А. Ш. Блох, А. И. Павловский. Алгоритм синтеза схем с «реальными» контактами	45
В. А. Лисковец, В. З. Фейнберг. Об автоматных отображениях	55
В. И. Ладес. Синтез переключаемых схем на многофункциональных логических узлах	64
М. В. Мишурная. Анализ количественного состава многопультовой вычислительной системы	69
Х. М. Соцкая, Ф. І. Фёдараў, А. Р. Хаткевіч. Асобыя напрамкі для пругкіх хваляў у тэтраганальных крышталях	74
А. А. Богуш, І. С. Сацункевіч. Аб праверцы ўз-інварыянтнасці пры рассеянні лептонаў на пратоне	84
А. М. Гончаренко. Распространение электромагнитных волн в плоском анизотропном волноводе	89
У. І. Асінскі, М. М. Сірата. Тэмпературная залежнасць вольтамперных характарыстык $n-r$ пераходаў на фасфідзе індыю	93
Ф. П. Коршунаў, М. М. Сірата. Вольтамперныя і іншыя характарыстыкі дыёдаў у сувязі з праблемай вымярэння нізкіх тэмператур	96
В. Д. Ткачоў. Даследаванне лакальных цэнтраў з глыбокімі энергетычнымі ўзроўнямі ў крэмніі, абпрамененым хуткімі электродамі	100
Б. Б. Бойка, Л. Г. Мароз. Хібнасці пры вымярэнні часу жыцця ўзбуджаных ядраў з дапамогай шматканальнага аналізатара	106
М. А. Султанаў, Л. І. Кісялеўскі. Даследаванне структуры разрадлага воблака нізкавольтажнай іскры	111
Д. А. Гранькова, Л. І. Кісялеўскі. Некаторыя спектраскапічныя даследаванні дугавога разраду паніжанага ціску	114
Л. В. Валодзька. Інфрачырвоныя спектры комплексеных злучэнняў нітрату уранілу	118
І. М. Ярмоленка, М. Я. Рэзнікаў, І. К. Сяржанін. Дыэлектрычныя тэмпературна-частотныя характарыстыкі некаторых цэлюлозных матэрыялаў	123

КРАТКІЕ СООБЩЕНИЯ

А. Е. Залесский. О локально конечных группах с условием минимальности для централизаторов	127
В. И. Осинский, Н. Н. Сирота. Измерение низких температур по вольтамперным и рекомбинационным характеристикам арсенид-галлиевых диодов	130

СОДЕРЖАНИЕ

Д. А. Супруненко, В. И. Матюхин. О разрешимых группах матриц над евклидовым кольцом	5
В. И. Крылов, Л. А. Янович. О приближении периодических аналитических функций тригонометрическими суммами	10
А. А. Пальцев, Н. С. Скобля. Об интегрировании ограниченных функций с весом Лягерра	15
А. Е. Залесский. Сведение некоторых комбинаторных задач к целочисленному линейному программированию	24
В. М. Мадорский. Об одном варианте метода усредненных поправок для решения нелинейных интегральных уравнений	29
В. А. Емеличев. Об одной задаче вогнутого программирования	39
А. Ш. Блох, А. И. Павловский. Алгоритм синтеза схем с «реальными» контактами	45
В. А. Лисковец, В. З. Фейнберг. Об автоматных отображениях	55
В. И. Ладес. Синтез переключательных схем на многофункциональных логических узлах	64
М. В. Мишурная. Анализ количественного состава многопультной вычислительной системы	69
Х. Н. Сотская, Ф. И. Федоров, А. Г. Хаткевич. Особые направления для упругих волн в тетрагональных кристаллах	74
А. А. Богущ, И. С. Сацункевич. О проверке γ -инвариантности при рассеянии лептонов на протоне	84
А. М. Гончаренко. Распространение электромагнитных волн в плоском анизотропном волноводе	89
В. И. Осинский, Н. Н. Сирота. Температурная зависимость вольтамперных характеристик n - p переходов на фосфиде индия	93
Ф. П. Коршунов, Н. Н. Сирота. Вольтамперные и другие характеристики диодов в связи с проблемой измерения низких температур	96
В. Д. Ткачев. Исследование локальных центров с глубокими энергетическими уровнями в кремнии, облученном быстрыми электродами	100
Б. Б. Бойко, Л. Г. Мороз. Погрешности при измерении времени жизни возбужденных ядер с помощью многоканального анализатора	106
М. А. Султанов, Л. И. Киселевский. Исследование структуры разрядного облака низковольтной искры	111
Д. А. Гранькова, Л. И. Киселевский. Некоторые спектроскопические исследования дугового разряда пониженного давления	114
Л. В. Володько. Инфракрасные спектры комплексных соединений нитрата уранила	118
И. Н. Ермоленко, М. Я. Резников, И. К. Сержанин. Диэлектрические температурно-частотные характеристики некоторых целлюлозных материалов	123
КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ	
А. Е. Залесский. О локально конечных группах с условием минимальности для централизаторов	127
В. И. Осинский, Н. Н. Сирота. Измерение низких температур по вольтамперным и рекомбинационным характеристикам арсенид-галлиевых диодов	130

АТ 14552. Здана ў набор 27/VII 1965 г. Падпісана да друку 12/X 1965 г. Фармац 70×108^{1/16}. Фіз. друк. арк. 8,5. Ум. друк. арк. 11,6. Уч. выд. арк. 11,8. Выд. заказ 187. Друк. заказ 909. Цана 60 кап.

Друкарня навукова-тэхнічнай літаратуры выдавецтва «Навука і тэхніка» АН БССР
і Дзяржакамітэта Савета Міністраў БССР па друку
Мінск, Ленінскі праспект, 68

К сведению читателей
В издательстве „Наука и техника“

ГОТОВИТСЯ К ПЕЧАТИ

Ю. В. Скорынин. Надежность и долговечность опор подвижных систем приборов. 5 л. На русском языке. Цена 25 коп.

В работе освещены некоторые общие вопросы надежности и долговечности опор подвижных систем приборов. В основу расчетов надежности и долговечности приборных шарикоподшипников, цилиндрических опор, применяемых в некоторых типах приборов, предлагается положить оценку их работоспособности по величине момента трения. В книге приведена методика расчета приборных шарикоподшипников и цилиндрических опор, работающих в условиях вибрации; представлены результаты экспериментальных исследований; приведены конструкции специальных осциллирующих опор, обеспечивающих высокую надежность работы приборов.

Предназначена для работников проектных и исследовательских организаций, занимающихся вопросами надежности и долговечности машин и приборов.

Книгу можно заказать предварительно во всех магазинах Книготорга и потребительской кооперации республики, а также в магазинах «Академкнига».

Для получения книги почтой заказы направлять по адресу: г. Минск, Железнодорожная улица, 27, Республиканский магазин «Книга—почтой» или г. Москва, К-12, Б. Черкасский переулок, 2/10, контора «Академкнига», отдел «Книга—почтой».

Книготоргующие и другие организации направляют заказы Управлению книжной торговли Госкомитета Совета Министров БССР по печати.

К сведению читателей

В ИЗДАТЕЛЬСТВЕ «НАУКА И ТЕХНИКА»

ВЫЙДЕТ В СВЕТ В 1966 г.

КОЛЛЕКТИВ АВТОРОВ. Методы расчета оптических квантовых генераторов, т. 1. Издательство «Наука и техника». 40 л. На русском языке. 5000 экз. Цена 2 руб. 95 коп. (I кв.).

Работа состоит из четырех томов. В ней излагается общая теория и методы расчета оптических свойств квантовых генераторов света различных типов.

Первый том содержит общие основы теории оптических генераторов, работающих в стационарном режиме. Излагаются основные положения спектроскопии, необходимые для понимания механизма действия квантовых генераторов, особенности распространения интенсивных световых потоков в поглощающих и усиливающих средах. Рассмотрены вопросы теории генерации и свойства трех- и четырехуровневых ОКГ. Особое внимание при этом уделяется исследованию зависимости мощности генерации от свойств вещества, параметров резонатора и интенсивности накачки. Излагается люминесцентно-спектрокопический метод поиска новых генерирующих сред.

Книга рассчитана на научных сотрудников, инженеров, конструкторов и студентов физических факультетов.

Книгу можно заказать предварительно во всех магазинах Книготорга и потребительской кооперации республики, а также в магазинах «Академкнига».

Для получения книги почтой заказы направлять по адресу: г. Минск, Железнодорожная улица, 27, Республиканский магазин «Книга—почтой» или г. Москва, К-12, Б. Черкасский переулок, 2/10, контора «Академкнига», отдел «Книга — почтой».

Книготоргующие и другие организации направляют заказы Управлению книжной торговли Госкомитета Совета Министров БССР по печати.

К сведению читателей

В ИЗДАТЕЛЬСТВЕ „НАУКА И ТЕХНИКА“

ВЫЙДУТ В СВЕТ В 1966 г.

СУПРУНЕНКО Д. А., ТЫШКЕВИЧ Р. И. **Перестановочные матрицы.** Издательство «Наука и техника». 6 л. На русском языке. 3000 экз. Цена 30 коп. (I кв.).

В книге излагаются элементарные свойства систем перестановочных матриц, общие свойства коммутативных матричных алгебр над произвольным полем и некоторые классификационные вопросы, относящиеся к теории максимальных коммутативных подалгебр полной матричной алгебры над полем комплексных чисел. Формулируется несколько нерешенных проблем из теории коммутативных матричных алгебр.

Книга рассчитана на научных работников и студентов математических и физических факультетов, интересующихся матричным аппаратом.

КАСПЕРОВИЧ А. С. **Термисторы косвенного подогрева.** Издательство «Наука и техника». 6 л. На русском языке. 2000 экз. Цена 30 коп. (I кв.).

В книге изложен обобщенный материал по изучению термисторов косвенного подогрева как элемента электрической цепи и установлению связей между параметрами термистора и цепи подогрева.

Описываются статические и динамические характеристики термисторов косвенного подогрева, методы определения динамических параметров и характеристик. Приведены схемы возможного применения термисторов косвенного подогрева.

Книга рассчитана на широкий круг научных и инженерно-технических работников.

Книги можно заказать предварительно во всех магазинах Книготорга и потребительской кооперации республики, а также в магазинах «Академкнига».

Для получения книги почтой заказы направлять по адресу: г. Минск, Железнодорожная улица, 27, Республиканский магазин «Книга — почтой» или г. Москва, К-12, Б. Черкасский переулок, 2/10, контора «Академкнига», отдел «Книга — почтой».

Книготоргующие и другие организации направляют заказы Управлению книжной торговли Госкомитета Совета Министров БССР по печати.



К сведению читателей

В ИЗДАТЕЛЬСТВЕ „НАУКА И ТЕХНИКА“

ВЫИДЕТ В СВЕТ В 1966 ГОДУ

КОЛЛЕКТИВ АВТОРОВ. **Конечные группы.** 12 л. На русском языке. 2000 экз. Цена 99 коп. (II кв.).

Теория конечных групп в настоящее время переживает период интенсивного развития и привлекает внимание математиков и специалистов других областей науки.

Книга включает труды советских математиков, работающих в коллективе научного семинара лаборатории теории конечных групп Института математики АН БССР, содержит результаты по характеристике конечных групп при помощи некоторых видов подгрупп, вопросы о существовании, сопряженности и вложении подгрупп, а также свойства факторизуемых групп.

Книга предназначена для научных работников, аспирантов и студентов физико-математических факультетов университетов и педагогических институтов, интересующихся современной алгеброй.

Книгу можно заказать предварительно во всех магазинах Книготорга и потребительской кооперации республики, а также в магазинах «Академкнига».

Для получения книги почтой заказы направлять по адресу: г. Минск, Железнодорожная улица, 27, Республиканский магазин «Книга — почтой» или г. Москва, К-12, Б. Черкасский переулок, 2/10, контора «Академкнига», отдел «Книга — почтой».

Книготоргующие и другие организации направляют заказы Управлению книжной торговли Госкомитета Совета Министров БССР по печати.

ПРОИЗВОДИТСЯ ПОДПИСКА НА 1966 ГОД

НА ЖУРНАЛ

„ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК БССР“

Серия физико-математических наук

Журнал освещает общие принципиальные вопросы развития советской науки, публикует материалы научных исследований и итоги работ институтов Академии наук БССР и других научно-исследовательских учреждений БССР в области математики (методы вычислительной математики, уравнения математической физики, алгебра и теория групп и др.), общей и теоретической физики (оптика, физика твердого тела и полупроводников, теория полей и элементарных частиц и др.). Печатает обзоры по важнейшим разделам физико-математических наук, рецензии на выходящие в СССР научные издания а также хронику научной жизни.

Журнал рассчитан на научных работников научно-исследовательских учреждений, преподавателей высших учебных заведений, аспирантов и студентов старших курсов вузов физико-математического профиля.

ЖУРНАЛ ВЫХОДИТ 4 РАЗА В ГОД

Печатается на белорусском языке, статьи сопровождаются резюме на русском языке. Отдельные статьи печатаются на русском языке.

ПОДПИСНАЯ ЦЕНА НА ГОД 2 РУБ. 40 КОП.

Подписка принимается всеми городскими, районными органами «Союзпечать», конторами и отделениями связи и местными уполномоченными по подписке на предприятия в учебных заведениях и учреждениях.

#34/127259/050)



B000000 128940 1