

30К-1
58

ВЕСЦІ

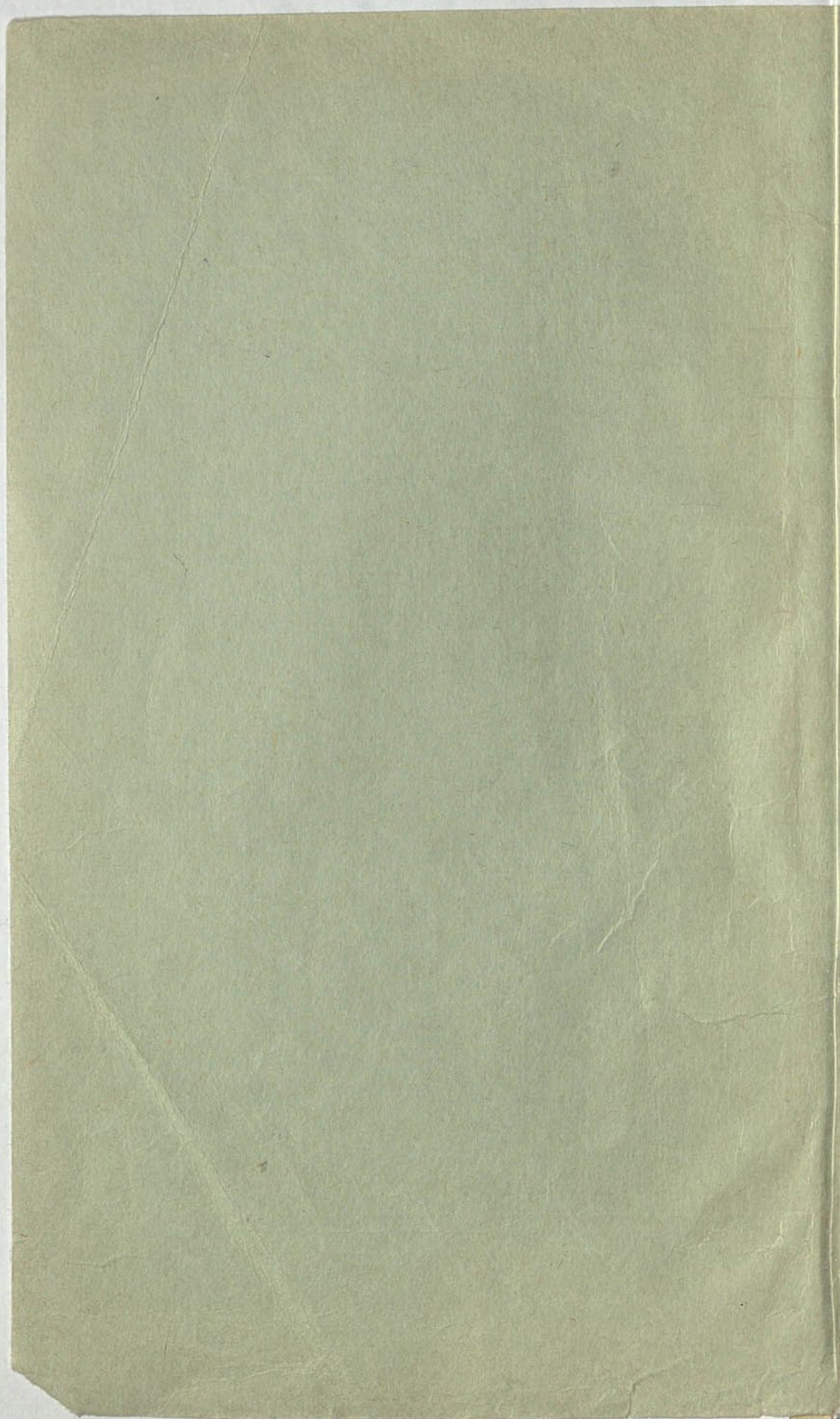
АКАДЭМІІ НАВУК БССР

СЕРЫЯ
ФІЗІКА-МАТЭМАТЫЧНЫХ
НАВУК

4

ВЫДАВЕЦТВА „НАВУНА І ТЭХНІКА“

МІНСК 1985





ИЗВЕСТИЯ

АКАДЕМИИ НАУК БССР

СЕРИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ
НАУК

№ 4

ИЗДАТЕЛЬСТВО „НАУКА И ТЕХНИКА“

МИНСК 1965

66.186.59

ВЕСЦІ

30К-1
58

АКАДЭМІІ НАВУК БССР

СЕРЫЯ
ФІЗІКА-МАТЭМАТЫЧНЫХ
НАВУК

№ 4

ВЫДАВЕЦТВА „НАВУКА І ТЭХНІКА“

М І Н С К 1 9 6 5



РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

Ф. И. ФЕДАРАУ (галоўны рэдактар),
Л. Ф. ІЛЬЮШЭНКА (нам. галоўнага рэдактара),
М. М. АЛЯХНОВІЧ, А. П. ВЕРАБ'ЕУ, У. І. КРЫЛОУ,
М. М. СІРАТА, У. СПРЫНДЖУК, Д. А. СУПРЫНЕНКА,
Я. І. ФІРСАУ, С. А. ЧУНІХІН

В. М. ФАИН

ФИЗИКА НЕЛИНЕЙНЫХ СРЕД

1. В связи с изобретением лазеров, которые могут генерировать электромагнитные поля очень больших напряженностей с высокой монохроматичностью, появился обширный круг задач, в которых существен учет нелинейных свойств среды. Это, в частности, задачи, связанные с преобразованием частот волн оптического диапазона, с комбинационным индуцированным излучением и различными многоквантовыми процессами.

Возникает вопрос, как ввести удобную меру нелинейных свойств среды таким образом, чтобы она характеризовала все возможные нелинейные процессы в среде. Другими словами, речь идет о модификации материальных уравнений, которые выражают линейную связь между поляризацией и намагниченностью среды, с одной стороны, электрическими и магнитными полями — с другой. Такую модификацию нетрудно осуществить для случая слабонелинейных сред.

Рассматривая линейную связь между поляризацией и полем как первый член разложения по степеням поля, в случае слабонелинейной среды можно записать

$$P_a(t) = \chi_{ab}(\omega_l) E_b(\omega_l) e^{-i\omega_l t} + \chi_{abc}(\omega_s, \omega_l) E_b(\omega_s) E_c(\omega_l) e^{-i(\omega_s + \omega_l)t} + \chi_{abcd}(\omega_s, \omega_l, \omega_r) E_b(\omega_s) E_c(\omega_l) E_d(\omega_r) e^{-i(\omega_s + \omega_l + \omega_r)t} + \dots \quad (1)$$

В этой формуле предполагается суммирование по всем дважды встречающимся индексам, $E_b(\omega_l)$ — фурье-компонента электрического поля, коэффициенты χ_{abc} , χ_{abcd} и т. д. характеризуют нелинейные свойства среды. Если среда обладает пространственной дисперсией и под $E_b(\omega_l)$ имеем в виду одновременно и пространственную фурье-компоненту, то величины χ_{abc} , χ_{abcd} , ... суть функции волновых векторов

$$\chi_{abc}(\mathbf{k}; \omega_l, \mathbf{k}'; \omega_s, \mathbf{k}'')$$

(для однородной среды $\mathbf{k} = \mathbf{k}' + \mathbf{k}''$).

Наряду с соотношениями (1) аналогичные соотношения существуют между намагниченностью и магнитными полями, а также между поляризацией и произведением магнитного и электрического полей и т. д.

Мы здесь подразумеваем, что поля можно описывать классическим образом, т. е. можно пренебречь чисто квантовыми корреляциями типа

$$\langle E_b(t) E_c(t') E_d(t'') \rangle - \langle E_b(t) \rangle \langle E_c(t') \rangle \langle E_d(t'') \rangle.$$

Этого нельзя сделать только для случая очень слабых полей, когда число фотонов сравнимо с единицей. Хотя поле можно рассматривать классически, сами тензоры χ_{abc} , χ_{abcd} , ... нужно рассчитывать, пользуясь квантовой теорией.

Таким образом, перед физикой (и в частности перед физикой твердого тела) возникают новые задачи, связанные с учетом нелинейных свойств среды, и в частности с расчетом тензоров χ_{abc} , χ_{abcd} ,... для слабонелинейных сред. Это по существу новая и довольно обширная область физики, которую можно назвать физикой нелинейных сред. О масштабе этой области можно судить по числу задач, связанных с расчетом линейных характеристик среды — диэлектрической и магнитной проницаемостей ϵ и μ . Не следует, однако, думать, что до появления лазеров эта область физики совсем не развивалась.

К физике нелинейных сред можно отнести все работы, связанные с нелинейными свойствами плазмы, а также работы по комбинационному рассеянию и нелинейным свойствам активных элементов в автоколебательных системах и усилителях.

2. В общем случае можно определить коэффициенты нелинейности χ_{abc} , χ_{abcd} ,... пользуясь квантово-механической нестационарной теорией возмущения. Гамильтониан системы во внешнем поле

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{V}(t), \quad (2)$$

где $\hat{V}(t)$ — энергия взаимодействия с внешним заданным полем.

Решение уравнения для матрицы плотности в представлении взаимодействия

$$ih \frac{\partial \hat{\rho}}{\partial t} = [\hat{V}, \hat{\rho}] \quad (3)$$

запишем в виде

$$\hat{\rho} = \hat{\rho}^{(0)} + \hat{\rho}^{(1)} + \dots + \hat{\rho}^{(n)} + \dots, \quad (4)$$

где

$$\hat{\rho}^{(n)}(t) = \frac{1}{(ih)^n} \int_{-\infty}^t dt_1 \int_{-\infty}^{t_1} dt_2 \dots \int_{-\infty}^{t_{n-1}} dt_n [\hat{V}(t_1), [\hat{V}(t_2) \dots [\hat{V}(t_n), \hat{\rho}] \dots]] \quad (5)$$

и

$$\hat{\rho} = \hat{\rho}^{(0)} = \hat{\rho}(-\infty).$$

Пользуясь матрицей плотности (уравнения (4), (5)), найдем среднее значение любой величины, описываемой оператором \hat{O} ,

$$\langle \hat{O} \rangle = \sum_n \langle \hat{O}^{(n)} \rangle,$$

где

$$\begin{aligned} \langle \hat{O}^{(n)} \rangle &= \frac{1}{(ih)^n} \int_{-\infty}^t dt_1 \int_{-\infty}^{t_1} dt_2 \dots \times \\ &\times \int_{-\infty}^{t_{n-1}} dt_n \langle [\dots [\hat{O}(t), \hat{V}(t_1)], \hat{V}(t_2) \dots] \hat{V}(t_n) \rangle. \end{aligned} \quad (6)$$

Если энергия взаимодействия

$$\hat{V} = - \sum_a f_a(t) \hat{x}_a,$$

где $f_a(t)$ — некоторая обобщенная сила (в частности, электрическое поле, если \hat{x}_a — дипольный момент), то отклик в виде среднего значения $\langle \hat{x}_a(t) \rangle$ можно записать

$$\langle \hat{x}_a(t) \rangle = \chi_{ab}(\omega_t) f_b(\omega_t) e^{-i\omega_t t} + \chi_{abc}(\omega_s, \omega_t) f_b(\omega_s) f_c(\omega_t) e^{-i(\omega_s + \omega_t)t} + \dots \quad (7)$$

Из этой формулы, в частности, получается связь (1). При выводе уравнения (7) нужно предположить, что система без внешнего поля находится в стационарном состоянии, т. е. матрица плотности $\hat{\rho}(-\infty)$ коммутирует с гамильтонианом \hat{H}_0 . Если предположения о „временной однородности“ системы не делать, то можно ввести тензоры $\chi_{ab}(\omega, \omega_l)$, $\chi_{abc}(\omega, \omega_s, \omega_l)$ и т. д., зависящие соответственно от двух, трех и т. д. частот. В случае „временной однородности“ системы $\omega = \omega_l$; $\omega = \omega_s + \omega_l$ и т. д. (аналогично соотношениям для пространственно однородных систем).

Из соотношений (6) и (7) для χ_{abc} следует:

$$\chi_{abc}(\omega_s, \omega_l) = \frac{1}{2} \left[\chi_{abc}(\omega_s, \omega_l) + \chi_{acb}(\omega_l, \omega_s) \right],$$

$$\chi_{abc}(\omega_s, \omega_l) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau_1 \int_{-\infty}^{\infty} d\tau_2 e^{i(\omega_s + \omega_l)\tau_1 + i\omega_l\tau_2} K_{abc}(\tau_1, \tau_2), \quad (8)$$

$$K_{abc}(\tau_1, \tau_2) = -\frac{(2\pi)^2}{h^2} \Theta(\tau_1) \Theta(\tau_2) \langle [[\hat{x}_a(\tau_1), \hat{x}_b(0)] \hat{x}_c(-\tau_2)] \rangle,$$

$$\Theta(\tau) = \begin{cases} 1 & \text{при } \tau > 0 \\ 0 & \text{при } \tau < 0 \end{cases}.$$

Аналогичные выражения можно записать для χ_{abcd} и т. д. Несложный анализ приводит к условию применимости разложения (1) в виде

$$E \ll E_{кр} \sim \frac{h \Delta\omega}{d}, \quad (9)$$

где $\Delta\omega$ — наименьшая разность частот внешнего поля и собственных частот системы, или соответствующая ширина линии в резонансном случае; d — матричный элемент дипольного момента.

Если $\Delta\omega$ порядка частоты в оптическом диапазоне, а d порядка 1 дебая (10^{-18} CGSE), то $E_{кр} \sim 10^8$ CGSE. Грубая оценка для χ_{abc} имеет вид

$$\chi_{abc} \sim \frac{\chi_{ab}}{E_{кр}}. \quad (10)$$

Следовательно, выражение (1) определяет связь между действующим или локальным полем и поляризацией. В случае разреженных газов действующее поле совпадает с макроскопическим и связь (1) можно использовать в уравнениях Максвелла. В общем случае еще необходимо установить связь между локальным и макроскопическим полями. Это приводит к модификации χ_{abcd} в случае изотропных материалов и кристаллов кубической симметрии ($\chi_{abc} = 0$)

$$\begin{aligned} \chi_{abcd}(\omega_1, \omega_2, \omega_3) \rightarrow & \frac{\varepsilon(\omega_1 + \omega_2 + \omega_3) + 2}{3} \frac{\varepsilon(\omega_1) + 2}{3} \frac{\varepsilon(\omega_2) + 2}{3} \times \\ & \times \frac{\varepsilon(\omega_3) + 2}{3} \chi_{abcd}(\omega_1, \omega_2, \omega_3). \end{aligned}$$

Обобщение на случай кристаллов некубической симметрии приведено в работе [1].

3. Коэффициенты χ_{abc} , χ_{abcd} , ... характеризуются рядом соотношений симметрии. Проведем несколько условную классификацию различных свойств симметрии.

Между тензорами χ_{abc} , χ_{abcd} , ... существуют соотношения, связывающие друг с другом различные компоненты χ_{abc} (или χ_{abcd} и т. д.), следующие из свойств преобразования тензоров и симметрии среды (классов симметрии кристаллов). Так, например, в среде с центром симметрии $\chi_{abc} = 0$.

Из вещественности величины поляризации следуют соотношения типа

$$\chi_{abc}(-\omega_s, -\omega_l) = \chi_{abc}^*(\omega_s, \omega_l),$$

а из определения величин χ_{abc} , χ_{abcd}

$$\chi_{abc}(\omega_s, \omega_l) = \chi_{acb}(\omega_l, \omega_s).$$

Из условия отсутствия поглощения в среде

$$\chi_{abc}(\omega_r, \omega_l) = \chi_{cba}(\omega_r, \omega_s) = \chi_{bac}(\omega_s, \omega_l); \quad \omega_r + \omega_s + \omega_l = 0.$$

Если в среде отсутствует также и дисперсия, то

$$\chi_{abc} = \chi_{bac}$$

(соотношения Клейнмана [2]).

Для величин χ_{abc} , χ_{abcd} , ... можно вывести соотношения, являющиеся обобщением соотношений Онзагера для тензоров. Эти соотношения являются, в частности, следствием обратимости уравнений микротeorии во времени.

Величины χ_{abc} , χ_{abcd} , ... удовлетворяют ряду дисперсионных соотношений, обобщающих соотношения Крамерса — Кронига [3, 4].

Кроме того, можно вывести ряд соотношений, являющихся обобщением флюктуационно-диссипационной теоремы.

4. Наряду с общими электродинамическими характеристиками нелинейной среды χ_{abc} , χ_{abcd} и т. д. можно ввести характеристики двухквантовых [5] процессов (как и многоквантовых), проведя следующее обобщение понятия восприимчивости.

Пусть на систему (нелинейную среду) действуют внешние силы с частотами ω_l , определяемые энергией взаимодействия

$$\hat{V}_1(t) = \sum_l \hat{V}_l e^{-i\omega_l t} \quad (\omega_{-l} = \omega_l).$$

Поглощение на частоте ω_2 в присутствии поля $\hat{V}_1(t)$ можно определить с помощью мнимой части восприимчивости на частоте ω_2 . В отличие от обычной восприимчивости, которая не зависит от поля, эта восприимчивость зависит от \hat{V}_1 . Ее диагональный элемент имеет вид [5]

$$\chi_{aa}''(\omega_2) = -\frac{\pi}{h} \sum_{\substack{1,2 \\ l=\pm 1}} (\rho_1 - \rho_2) |A'_{12}|^2 \delta(\omega_1 + \omega_2 - \omega_{12}), \quad (11)$$

где

$$A'_{12} = (A_{21}^{-1})^* = \sum_k \left\{ \frac{x_{a1k} V_{k2}^l}{h(\omega_l - \omega_{k2})} - \frac{V_{1k}^l x_{ak2}}{h(\omega_l - \omega_{1k})} \right\}.$$

Здесь ρ_1 и ρ_2 — населенности уровней E_1 и E_2 , разность которых

$$h\omega_{12} = h\omega_1 + h\omega_2,$$

и по определению восприимчивости

$$\langle x_a(t) \rangle = [\chi_{aa}(\omega_2) f_a(\omega_2) e^{-i\omega_2 t} + \chi_{aa}^*(\omega_2) f_a(\omega_2) e^{i\omega_2 t}].$$

Процессу комбинационного рассеяния соответствует $l = -1$, а двойному излучению и поглощению отвечает $l = 1$.

В состоянии термодинамического равновесия восприимчивость (11) связывается со спектральной плотностью флуктуаций (в присутствии поля частоты ω_1) $(x_a^{(1)} x_b^{(1)})_{\omega_2}$ следующей флуктуационно-диссипационной теоремой [5, 6]:

$$(x_a^{(1)} x_b^{(1)})_{\omega_2} = \frac{i\hbar}{4\pi} \frac{1 + e^{-h(\omega_1 + \omega_2)/kT}}{1 - e^{-h(\omega_1 + \omega_2)/kT}} [\chi_{ab}^*(\omega_2) - \chi_{ba}(\omega_2)].$$

Эта теорема позволяет связать интенсивность комбинационного рассеяния с $\chi''(\omega_2, |V_1|^2)$.

5. Рассмотрим роль различных процессов, дающих вклад в величины χ_{abc} , χ_{abcd} , ... Отметим, что имеется достаточно общий стандартный метод расчета этих величин с помощью многовременных функций Грина. Из формул (8) следует, что χ_{abc} выражается через фурье-компоненты трехвременной температурной функции Грина $K_{abc}(\tau_1, \tau_2)^*$

$$K_{abc}(\omega_s + \omega_1, \omega_1).$$

Таким образом, расчет χ_{abc} сводится к вычислению функций Грина $K_{abc}(\tau_1, \tau_2)$. Аналогично для вычисления χ_{abcd} можно ввести четырехвременную температурную функцию Грина $K_{abcd}(\tau_1, \tau_2, \tau_3)$. Для величины $K_{abc}(\tau_1, \tau_2)$ можно написать зашепляющуюся цепочку уравнений типа

$$\begin{aligned} \frac{\partial K_{abc}}{\partial \tau_1} &= -\delta(\tau_1) \Theta(\tau_2) \frac{(2\pi)^2}{\hbar^2} \langle [\hat{x}_a(0), \hat{x}_b(0)] \hat{x}_c(-\tau_2) \rangle - \\ &- \frac{(2\pi)^2}{\hbar^2} \Theta(\tau_1) \Theta(\tau_2) \langle [\dot{\hat{x}}_a(\tau_1), \dot{\hat{x}}_b(0)] \hat{x}_c(-\tau_2) \rangle. \end{aligned}$$

Последний член в правой части — новая функция Грина, для которой можно написать аналогичное уравнение. При наличии малого параметра эту цепочку уравнений можно свести к конечной системе уравнений.

6. Движение электронов и ядер, составляющих твердое тело, приближенно можно разбить на независимые движения электронов при закрепленных ядрах и колебания ядер. В следующем приближении можно учесть взаимодействие движения электронов и ядер — электрон-фононное взаимодействие. (Здесь мы рассмотрим лишь случай слабой связи). В оптическом диапазоне основной вклад в нелинейность среды дает электронное движение. Для оценки этого вклада выпишем выражение для величины $\chi_{abc}(\omega_s, \omega_1)$ через матричные элементы дипольных моментов d_{amn} , населенности в невозмущенном состоянии и собственные частоты

$$\begin{aligned} \chi_{abc}(\omega_s, \omega_1) &= \frac{\hat{P}}{2!} \frac{d_{anm} d_{bmk} d_{ckn}}{\hbar^2} \left(\frac{\rho_{nn} - \rho_{kk}}{\omega_1 - \omega_{kn}} - \right. \\ &\left. - \frac{\rho_{kk} - \rho_{mm}}{\omega_s - \omega_{mk}} \right) \frac{1}{\omega_s + \omega_1 - \omega_{mn}}, \end{aligned} \quad (12)$$

* Зависимость K_{abc} от двух времен связана с стационарностью процесса. В общем случае эта величина зависит от трех времен.

где \hat{P} — оператор суммы перестановок ω_s , b и ω_l , c . Если одна из частот ω_l совпадает с собственной частотой системы ω_{kn} , то при оценке вместо разности $\omega_l - \omega_{kn}$ необходимо подставить соответствующую ширину линии. В случае учета электронного движения матричный элемент дипольного момента по порядку величины равен заряду электрона, умноженному на линейный размер элементарной ячейки в кристаллической решетке,

$$d \sim ea. \quad (13)$$

Таким образом, из выражений (12) и (13) получаем следующую оценку для χ_{abc} (на один электрон)

$$\chi_{abc} \sim \frac{e^3 a^3}{h^2 \omega_1 \omega_2},$$

где ω_1 и ω_2 — характерные электронные частоты ($\omega_l \lesssim \omega_{kn}$). Эта оценка существенно не меняется в резонансном случае, так как при достаточно большой ширине энергетической зоны совпадение ω_l с центром зоны не приводит к большому увеличению χ_{abc} .

Аналогичная оценка для χ_{abcd} имеет вид

$$\chi_{abcd} \sim \frac{e^4 a^4}{h^3 \omega_1 \omega_2 \omega_3}. \quad (14)$$

Точное выражение для χ_{abc} при учете движения электронов в рамках зонной теории приведено в работе [7].

7. Рассмотрим вклад, связанный с учетом только колебательного движения ядер [8]. Когда ядра совершают чисто гармоническое движение (без учета эффектов пространственной дисперсии), среда линейна и все коэффициенты χ_{abc} , χ_{abcd} , ... равны нулю. Учитывая это обстоятельство и то что энергия ангармонизма сравнивается с энергией гармонических осцилляторов при смещении ядер на величину a , можно написать следующую оценку для

$$\chi_{abc} \sim \frac{e^3 l^3}{h^2 \omega^2} \frac{l}{a},$$

где $l \sim \sqrt{\hbar/M\omega_0}$ — характерное смещение ядер от положения равновесия; M — масса ядра; ω_0 — частота колебательного движения. Более точная оценка (использующая результаты расчета [8]) дает

$$\chi_{abc} \sim \frac{e^3 l^3}{h^2 \omega^2} \frac{l}{a} \left(\frac{\omega_0}{\omega} \right)^8, \quad (15)$$

где частота внешнего поля $\omega \gtrsim \omega_0$.

Аналогичная оценка для χ_{abcd} приводит к

$$\chi_{abcd} \sim \frac{e^4 l^4}{h^3 \omega^3} \left(\frac{l}{a} \right)^2 \left(\frac{\omega_0}{\omega} \right)^2. \quad (16)$$

Если резонанс наблюдается на одной из частот, то ω заменяется на соответствующую ширину линии.

При учете пространственной дисперсии получается нелинейность и для чисто гармонического движения.

Когда $l \ll \lambda$, где λ — длина волны внешнего поля,

$$\chi_{abc} \sim \frac{e^3 l^3}{h^2 \omega^2} \frac{l}{\lambda}, \quad \chi_{abcd} \sim \frac{e^4 l^4}{h^3 \omega^3} \left(\frac{l}{\lambda} \right)^2. \quad (17)$$

Эти оценки получаются также при более точном расчете.

8. Учет взаимодействия между гармоническими колебаниями ядер и движением электронов также приводит к нелинейности среды. Расчет здесь сводится к вычислению функций Грина, в которые входят средние коммутаторы:

$$\begin{aligned} & \langle [[\hat{x}_a^{\text{эл}}(\tau_1), \hat{x}_b^{\text{эл}}(0)] \hat{x}_c^{\text{эл}}(-\tau_2)] \rangle, \\ & \langle [[\hat{x}_a^{\text{эл}}(\tau_1), \hat{x}_b^{\text{эл}}(0)] \hat{x}_c^{\text{яд}}(-\tau_2)] \rangle, \\ & \langle [[\hat{x}_a^{\text{эл}}(\tau_1), \hat{x}_b^{\text{яд}}(0)] \hat{x}_c^{\text{яд}}(-\tau_2)] \rangle, \\ & \langle [[\hat{x}_a^{\text{яд}}(\tau_1), \hat{x}_b^{\text{яд}}(0)] \hat{x}_c^{\text{яд}}(-\tau_2)] \rangle, \end{aligned} \quad (18)$$

где через $\hat{x}^{\text{эл}}$ и $\hat{x}^{\text{яд}}$ обозначены операторы дипольных моментов соответственно электронов и ядер. Эти функции Грина вычисляются с учетом электрон-фононного взаимодействия. Оценка вклада первой из функций Грина в χ_{abc} имеет вид (в случае слабой связи)

$$\chi_{abc} \sim \frac{e^3 a^3}{h^2 \omega_1 \omega_2} \left(\frac{l}{a} \right)^2, \quad (19)$$

где ω_1 и ω_2 по порядку величин равны электронным частотам.

9. Рассмотрим сравнительную роль различных механизмов в возникновении нелинейных свойств твердого тела. Учитывая, что $l \ll a$, можно утверждать, что в оптическом диапазоне преобладающий вклад в нелинейность дает чисто электронный механизм. Это, однако, не означает, что экспериментальное и теоретическое исследование других механизмов не представляет интереса. Такие исследования могут дать информацию о физических процессах в твердом теле. В частности, значительный интерес представляет поведение нелинейных характеристик вблизи точек фазового перехода второго рода, в которых происходит перестройка кристаллической решетки и одна из собственных частот оптической ветви колебательного спектра обращается в нуль.

С другой стороны, в инфракрасном диапазоне, когда частоты внешних полей сравниваются с собственными частотами колебаний решетки, вклад колебаний ядер может оказаться преобладающим. В этой области частот (в которой сейчас эксперимент чрезвычайно скуден) исследование неэлектронных механизмов может представлять значительный практический интерес.

10. Наряду с коллективными эффектами, дающими вклад в нелинейность среды, нелинейность может быть обусловлена нелинейными свойствами отдельных молекул*. Это явление наблюдается в газах, в которых взаимодействие между молекулами можно учитывать в виде столкновений, и в какой-то мере в жидкостях (в них более существенно взаимодействие между молекулами). В твердых телах при исследовании парамагнитных примесей (которые, как известно, обуславливают нелинейность, существенную для работы квантовых генераторов) коллективными эффектами можно пренебречь. Нелинейные свойства молекул в двух- и трехуровневой идеализациях исследовались в работах [6, 9—11]. Параметрические эффекты в ферромагнитных системах [12] в ряде случаев связаны с нелинейными свойствами двухуровневой системы (спин в магнитном поле) [13].

* Следует иметь в виду условность такого разделения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Armstrong J. A., Bloembergen N., Ducuing J., Pershan P. S. *Phys. Rev.*, **127**, 1918, 1962.
2. Kleinman D. A. *Phys. Rev.*, **126**, 1977, 1962.
3. Бункин Ф. В. *Радиофизика*, **5**, 687, 1962.
4. Коган Ш. М. *ЖЭТФ*, **43**, 304, 1962.
5. Файн В. М., Яшин Э. Г. *ЖЭТФ*, **46**, 695, 1964.
6. Файн В. М., Ханнин Я. И. *Квантовая радиофизика*. Изд-во «Сов. радио», 1965.
7. Kelly P. L. *J. Phys. Chem. Solids.*, **26**, 607, 1963; **26**, 1118, 1963.
8. Генкин Г. М., Файн В. М. *ЖЭТФ*, **49**, 1118, 1965.
9. Файн В. М., Ханнин Я. И., Яшин Э. Г. *ЖЭТФ*, **41**, 986, 1961; *Радиофизика*, **5**, 697, 1962; **7**, 386, 1964.
10. Bloembergen N., Shen Y. R. *Phys. Rev.*, **133**, A37, 1964.
11. Bloembergen N. *Nonlinear Optics*, W. A. Benjamin, Inc. Publishers, 1965.
12. Suhl H. *Phys. Rev.*, **106**, 386, 1957.
13. Suhl H. *J. Phys. Chem. Solids.*, **4**, 278, 1958.

Поступило в редакцию 4.X 1965

А. М. БОНЧ-БРУЕВИЧ, В. А. ХОДОВОЙ

МНОГОФОТОННЫЕ ПРОЦЕССЫ В ОПТИЧЕСКОМ ДИАПАЗОНЕ

ВВЕДЕНИЕ

Под многофотонными процессами следует понимать процессы взаимодействия излучения с веществом, сопровождающиеся поглощением или испусканием (или тем и другим) в элементарном акте не менее двух фотонов. Вероятность такого элементарного акта не может быть формально представлена в виде произведения вероятностей поглощения и испускания отдельных фотонов. Представление о многофотонных процессах тесно связано с квантовой теорией возмущений для взаимодействия излучения с веществом. Это взаимодействие описывается через элементарные акты поглощения и испускания фотонов, причем p -приближению теории возмущений соответствует элементарный акт с одновременным участием p -фотонов. Хотя теоретически многофотонные процессы рассматривались еще в первые годы создания квантовой механики, экспериментальные возможности того времени не позволили наблюдать многие предсказываемые явления.

Основная трудность при изучении многофотонных процессов — их чрезвычайно малая вероятность по сравнению с однофотонными. В оптическом диапазоне до появления лазеров экспериментально доступным оказалось наблюдение только двухфотонных процессов рассеяния света (резонансная флуоресценция, рэлеевское и комбинационное рассеяние). Многофотонные процессы, связанные с поглощением или вынужденным испусканием в элементарном акте нескольких фотонов возбуждающего излучения, впервые наблюдались в радиодиапазоне в связи с созданием достаточно мощных источников излучения в нем, а затем с появлением лазеров и в оптическом диапазоне.

Возможность исследования многофотонных переходов в оптическом диапазоне в системах с дискретным энергетическим спектром ограничена в настоящее время из-за отсутствия перестраиваемых по частоте лазеров. Диапазон радиотехнических частот имеет преимущества, связанные не только с наличием достаточно интенсивных источников с плавно изменяющейся частотой излучения, но и с тем, что можно выбрать относительно большое число систем для наблюдения многофотонных переходов и легко изменять в широких пределах положение энергетических уровней, пользуясь эффектами Зеемана и Штарка.

Следует отметить и относительную простоту расчета многофотонных процессов, связанных с переходами между группой уровней, удаленных от всех других энергетических уровней квантовой системы. Поэтому основные результаты по теоретическому и экспериментальному исследованию многофотонных явлений были получены в радиодиапазоне [1]. В этом диапазоне были количественно исследованы такие стороны явления, как зависимость вероятности, ширины линии и смещения ча-

стоты многофотонных переходов от интенсивности излучения. При этом во всех случаях в пределах точности опыта теоретические выводы подтверждались экспериментом. Поскольку выводы о механизме многофотонных процессов не зависят от длины волны, то следует ожидать, что экспериментальное исследование многофотонных процессов в оптическом диапазоне не должно существенно отличаться от соответствующих исследований в радиодиапазоне.

Экспериментальное исследование многофотонных явлений в оптическом диапазоне интересно в двух отношениях. Во-первых, ввиду значительно большей по сравнению с однофотонными процессами сложности расчета вероятностей многофотонных процессов их экспериментальное исследование в системах со сложным спектром (особенно конденсированных) дает дополнительные сведения об оптических свойствах вещества, которые невозможно получить из теории или экспериментального исследования однофотонных процессов. Во-вторых, развитие техники лазеров уже в настоящее время позволяет достичь таких мощностей оптического излучения, при которых возможно эффективное преобразование частоты лазерного излучения в результате многофотонных процессов.

В настоящее время многофотонные процессы в нелинейных кристаллах (генерация оптических гармоник и смешение частот) и стимулированное комбинационное рассеяние в кристаллах и жидкостях являются одним из основных методов эффективного преобразования излучения рубинового и неодимового импульсных лазеров в видимую часть оптического спектра.

Среди работ по многофотонным явлениям в оптическом диапазоне, выполненных за последний год, особый интерес представляют исследования по двухфотонной спектроскопии кристаллов [2, 3]. Исследование спектров двухфотонного поглощения в условиях, когда частота одного из источников постоянна, а частота другого может плавно изменяться, позволяет изучить такие энергетические состояния кристалла, переходы в которые из основного состояния запрещены в однофотонных процессах (в дипольном приближении).

Экспериментальное и теоретическое исследование спектров двухфотонного поглощения кристаллов KJ и CsJ с использованием рубинового лазера и источника ультрафиолетового излучения с непрерывным спектром позволило получить новые данные об энергетических зонах этих кристаллов и сделать выбор между различными моделями данной структуры, который был невозможен на основании изучения только спектров однофотонного поглощения [2].

В работе [3] вычислена зависимость спектров двухфотонного поглощения от угла между поляризациями двух поглощаемых фотонов для всех 32 точечных групп кристаллов. Установлено, что исследование такой поляризационной зависимости дает дополнительные сведения о спектрах кристаллов без центра инверсии, где одновременно могут быть разрешены одно- и двухфотонные переходы в одно и то же состояние. На примере кристаллов $NaCl$, $CsCl$ и алмаза показано, каким образом полученные поляризационные зависимости могут быть использованы для определения максимального интервала между зонами разрешенных энергетических состояний в кристаллах.

Получены новые данные по двухфотонному возбуждению флуоресценции в антрацене [4, 5]. Хотя наличие механизма двухфотонного возбуждения флуоресценции было доказано ранее [1], однако полное количественное описание этого явления отсутствовало. Имеются две теории двухфотонного возбуждения: 1) основанная на существовании

полосы поглощения ${}^1B_{3g}$ вблизи удвоенной энергии фотона рубинового лазера, четность которой совпадает с четностью основного состояния, и использующая для дипольно-электрического взаимодействия выражение $H_{\text{int}} = \frac{e}{mc} \mathbf{A} \mathbf{p}$ [6]; 2) основанная на существовании полосы ${}^1B_{2u}$ с четностью, противоположной четности основного состояния, и использующая для взаимодействия формулу $H_{\text{int}} = \frac{e^2}{2mc^2} \mathbf{A}^2$ [4]. Эффективность возбуждения флуоресценции антрацена, согласно обеим теориям, по порядку величины совпадает с экспериментальной.

Экспериментальное исследование зависимости интенсивности флуоресценции от поляризации возбуждающего излучения рубинового лазера показало [5], что она совпадает с предсказываемой зависимостью при взаимодействии типа $H_{\text{int}} = \frac{e^2}{2mc^2} \mathbf{A}^2$. Результаты работы [5] показывают, что невозможно установить симметрию полос поглощения кристаллов только по данным двухфотонного поглощения. Для этого необходимо также исследование поляризационных зависимостей двухфотонных спектров.

Значительный прогресс наблюдается в исследовании процессов многофотонной ионизации. В работе [7] наблюдался внутренний объемный двухфотонный фотоэффект в полупроводнике Cs_3Sb под действием излучения неодимового лазера $h\omega = 1,17 \text{ эв}$. Красная граница однофотонного фотоэффекта в Cs_3Sb равна 2 эв , так что однофотонный фотоэффект невозможен. При мощности неодимового лазера около 100 вт/см^2 наблюдаемая величина фототока около 10^{-8} а соответствует предсказываемой теоретически. Внешний двухфотонный фотоэффект наблюдался в металлическом Na при возбуждении излучением полупроводникового лазера на GaAs ($h\omega = 1,49 \text{ эв}$) [8]. Энергия одного фотона $1,49 \text{ эв}$ была ниже красной границы фотоэффекта, равной $1,95 \text{ эв}$. При фокусировке излучения лазера мощностью около $0,4 \text{ вт}$ на поверхность металла Na наблюдаемая величина фототока составляла около 10^{-15} а . При этом среднее увеличение температуры (2°C) соответствовало току термоэмиссии ниже 10^{-23} а . Величина фототока квадратично зависела от мощности лазерного излучения, что указывает на двухфотонный механизм фотоэффекта. Внешний двухфотонный фотоэффект [9] и трехфотонное поглощение [10] наблюдались также в органических кристаллах.

В работах [11, 12] методом двухфотонного оптического возбуждения рубиновым лазером и стоксовой компонентой вынужденного комбинационного рассеяния света рубинового лазера в жидком азоте [11] ($\lambda = 8281 \text{ \AA}$), а также неодимовым лазером [12] получена стимулированная генерация в полупроводнике GaAs на длине волны $\lambda = 8365 \text{ \AA}$. К. п. д. генерации, определенный по отношению энергии генерируемого излучения к энергии возбуждающего импульса, составлял около $0,1\%$. Пороговая мощность возбуждающего света составляла 16 Мвт/см^2 при использовании неодимового лазера. Многофотонная ионизация атомов рассматривалась теоретически [13–15] и экспериментально [16, 17]. На основании результатов теории многофотонной ионизации [13] в работе [18] изучена предельная мощность оптических генераторов на кристаллах GaAs и рубина, обусловленная внутренним многофотонным фотоэффектом в них. Для генератора на кристаллах GaAs эта предельная мощность составляет 10 квт , а для генератора на рубине около 10^5 Мвт .

Значительный прогресс наблюдается в использовании многофотонных процессов для эффективного преобразования частоты лазерного излучения. Сочетание техники генерации оптических гармоник в нелинейных кристаллах со стимулированным комбинационным рассеянием позволило получить мощность излучения порядка 1 Мвт (гигантский импульс) на новых частотах видимого и ультрафиолетового диапазона спектра. Предельные возможности преобразования энергии лазерного излучения при стимулированном комбинационном рассеянии будут рассмотрены ниже.

В настоящее время эффективность преобразования мощности рубинового лазера во вторую гармонику порядка $20\text{--}30\%$ достигнута в кристалле АДП при мощности рубинового лазера 1 Мвт , причем достигнуто насыщение, когда с дальнейшим увеличением мощности лазера относительная эффективность преобразования не изменяется [19].

Увеличение эффективности преобразования при еще меньших мощностях идет по пути нахождения кристаллов с большей нелинейной восприимчивостью; использования резонаторов для основной и второй гармоник, а также использования новых, более эффективных направлений синхронизма. Успехи в исследовании генерации оптических гармоник, смешении оптических частот в нелинейных кристаллах, а также в исследовании стимулированного комбинационного рассеяния [20—32] подтверждают возможность создания в ближайшие годы новых источников лазерного излучения в видимом диапазоне оптического спектра, используя неодимовый и рубиновый лазеры не только в режимах гигантского импульса, но и в обычном пиковом режиме.

В последнее время было открыто еще одно нелинейное явление — вынужденное мандельштам-бриллюэновское рассеяние (ВМБР). В первых экспериментах [33] ВМБР наблюдалось при фокусировке луча рубинового лазера (пороговая мощность в фокусе 1000 Мвт/см^2) в кристаллы кварца и сапфира, а затем в жидкости (сероуглерод, бензол, нитробензол и др.).

Использование резонаторов для рассеянного излучения [25, 34—36] позволило уменьшить пороговую мощность наблюдения ВМБР до 10 Мвт/см^2 . Изучение ВМБР дает новые сведения о поглощении и дисперсии ультразвука в диапазоне частот до $5 \cdot 10^{10} \text{ гц}$, представляет интерес для исследования механизма разрушения материалов, прозрачных для лазерного излучения [37], и открывает новый метод создания генераторов ультразвука в диапазоне частот $10^8\text{—}10^{11} \text{ гц}$.

Этим методом при мощностях возбуждения порядка 100 Мвт могут быть получены мощности ультразвукового излучения порядка нескольких киловатт.

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ МНОГОФОТОННЫХ ПРОЦЕССОВ

Некоторые характеристики однофотонных процессов. При отсутствии эффектов насыщения многофотонные процессы могут быть описаны теорией возмущений. Элементарная теория возмущений дает основания для изучения элементарного акта многофотонного процесса в виде последовательного поглощения (или испускания) нескольких фотонов за короткий интервал времени.

Рассмотрим основные характеристики многофотонных процессов в целом, вытекающие из элементарной теории возмущений, а также вопрос о продолжительности многофотонного процесса и выполнении закона сохранения энергии при отдельных последовательных актах поглощения или испускания фотонов в многофотонном переходе.

Для выяснения понятия продолжительности элементарного акта перехода рассмотрим в дипольном электрическом приближении однофотонный переход атома из нижнего состояния в верхнее под действием поля излучения с мало изменяющейся спектральной плотностью $I(\omega)$ в интервале частот $\Delta\omega$ вблизи частоты перехода ω_{nm} . Согласно теории возмущений, вероятность перехода $m \rightarrow n$ в единицу времени $P_{mn}(t)$, т. е. скорость изменения состояния атома в момент t [1] равна

$$P_{mn}(t) = \frac{8\pi}{c} \frac{|d_{mn}|^2}{h^2} \int_0^t d(t-t') \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega I(\omega - \omega_{nm}) \times \\ \times \cos(\omega - \omega_{nm})(t-t'). \quad (1)$$

Здесь d_{mn} — матричный элемент оператора дипольного момента для перехода $m \rightarrow n$. Поскольку $I(\omega - \omega_{nm})$ приближенно постоянна в интервале частот $\Delta\omega$ вблизи $\omega = \omega_{nm}$, а $\cos(\omega - \omega_{nm})(t-t')$ как функция ω имеет период осцилляции $1/(t-t')$, то при $t-t' \gg \Delta\omega^{-1}$ интеграл по ω стремится к нулю. Это означает, что вклад в скорость изменения состояния атома в момент времени t вносит только область времен t' , для которой $t-t' \lesssim \Delta\omega^{-1}$. Интервал времени $\Delta t = \Delta\omega^{-1}$ можно, таким образом, рассматривать как эффективную продолжительность элементарного акта однофотонного перехода.

Эта интерпретация согласуется с классическим представлением поля излучения как совокупности отдельных цугов длительностью $\Delta t = \Delta\omega^{-1}$. Время $\Delta t = \Delta\omega^{-1}$ определяет время корреляции между значениями напряженности поля излучения в разные моменты времени и, следовательно, время единичного регулярного воздействия поля излучения на атом.

Вопрос о сохранении энергии в однофотонном переходе рассмотрим на примере перехода $m \rightarrow n$ под действием монохроматического излучения частоты ω . Тогда теория возмущений дает для вероятности $W_{mn}(t)$ перехода $m \rightarrow n$ к моменту времени t [1]

$$W_{mn}(t) = \frac{8\pi}{c} \frac{|d_{mn}|^2}{h^2} I(\omega) \frac{4 \sin^2(\omega - \omega_{nm})t/2}{(\omega - \omega_{nm})^2}. \quad (2)$$

На рис. 1 приведена зависимость $W_{mn}(t)$ от частоты ω возбуждающего излучения. Максимальная вероятность перехода соответствует резонансному возбуждению $\omega = \omega_{nm}$. Однако к моменту времени t возникает значительная вероятность перехода $m \rightarrow n$ при нерезонансном возбуждении в интервале частот $\omega = \omega_{nm} \pm 2\pi/t$. Иначе говоря, для каждой частоты ω существует область времен $\Delta t_{nm} \simeq 2\pi/|\omega_{nm} - \omega|$, в пределах которой вероятность перехода $m \rightarrow n$ такого же порядка, как и при резонансном возбуждении. Только в предельном случае $t \rightarrow \infty$ требование закона сохранения энергии приводит к возможности возбуждения перехода $m \rightarrow n$ лишь одной резонансной гармоникой $\omega = \omega_{nm}$.

Этот результат соответствует энергетическому соотношению неопределенности $\Delta E \Delta t \gtrsim h$. Измерение вероятности возбуждения перехода $m \rightarrow n$ полем излучения частоты ω можно рассматривать как способ измерения энергии $E_{nm} = h\omega_{nm}$. Тогда из соотношения $\Delta E \Delta t \gtrsim h$ следует, что за время Δt нельзя измерить энергию перехода точнее, чем с неопределенностью $h \Delta\omega \simeq h \Delta t^{-1}$.

Двухфотонные переходы. Проанализируем вопросы продолжительности двухфотонных переходов и сохранения энергии при таких переходах.

Рассмотрим переход $m \rightarrow n$ с поглощением двух фотонов частоты $\omega = \omega_{nm}/2$, считая, что существует еще один уровень k (положение которого может быть любым при условии $h\omega \neq h\omega_{km}$), конечное состояние состоит из набора близких состояний с плотностью ρ_n и правилами отбора разрешены только переходы $m \rightarrow k$ и $k \rightarrow n$, т. е. отличны от

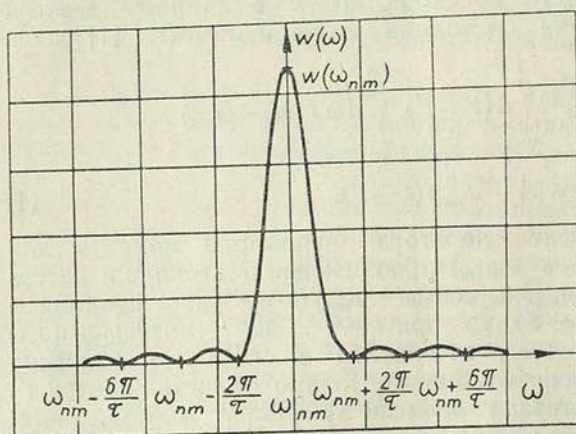


Рис. 1. Зависимость $W_{mn}(t)$ от частоты ω

нуля только матричные элементы переходов $m \rightarrow k$ и $k \rightarrow n$ (рис. 2, а). Тогда вероятность перехода в единицу времени из состояния m в любое из состояний n равна [1]

$$P_{mn}^{(2)} = \frac{2\pi}{h} \times \left| \frac{V_{mk}V_{kn}}{h(\omega_{km} - \omega)} \right|^2 \rho_n. \quad (3)$$

Здесь $V_{ab} = (-dE)_{ab}$ — матричный элемент перехода $a \rightarrow b$. Формула (3) отличается от соответствующей формулы для вероятности однофотонного

перехода $m \rightarrow n$ только заменой матричного элемента V_{mn} на составной матричный элемент $K_{mn}^{(2)} = \frac{V_{mk}V_{kn}}{h(\omega_{km} - \omega)}$. Он пропорционален произведению матричных элементов перехода из начального в проме-

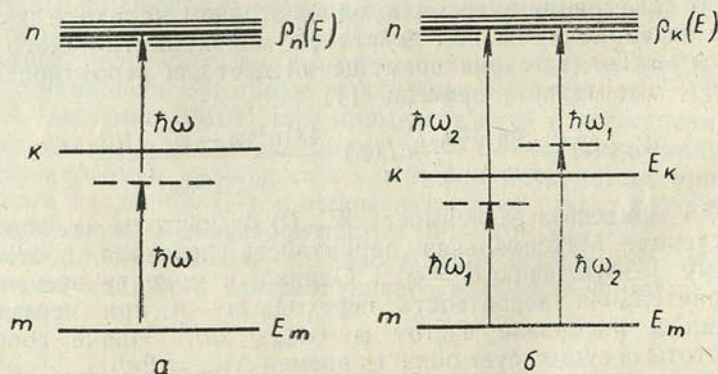


Рис. 2. Трехуровневая схема двухфотонного перехода:

а) $\omega = \omega_{nm}/2$; б) $\omega_{km} - \omega_1 = \omega_2 - \omega_{km}$

жуточное и из промежуточного в конечное состояние, а также величине $(\omega_{km} - \omega)^{-1} \sim \Delta t_{km}$, которая ранее была интерпретирована нами как время нахождения системы в промежуточном состоянии при поглощении фотона $h\omega \neq h\omega_{km}$. Такая структура формулы для вероятности двухфотонного перехода позволяет рассматривать его происходящим в виде двух последовательных однофотонных переходов. Сначала поглощается один фотон и система оказывается в состоянии k на время $\Delta t_{km} \simeq |\omega_{km} - \omega|^{-1}$, затем поглощается второй фотон с переходом системы в конечное состояние n , при этом естественным образом

30K-1
58

вероятность всего двухфотонного перехода в целом оказывается пропорциональной времени существования промежуточного состояния Δt_{km} . Время Δt_{km} можно рассматривать как эффективную продолжительность двухфотонного перехода.

Часто промежуточные состояния делят на реальные и виртуальные (реальные, для которых $\hbar\omega = \hbar\omega_{km}$, а виртуальные, когда $\hbar\omega \neq \hbar\omega_{km}$), полагая, что для последних (как это принято считать) не выполняется закон сохранения энергии. Однако, как уже отмечалось при рассмотрении однофотонных процессов, при любом, сколь угодно большом отклонении частоты ω от резонансной ω_{km} в интервале времени $\Delta t_{km} \sim |\omega_{km} - \omega|^{-1}$ вероятность обнаружить систему в состоянии k того же порядка, что и при $\omega = \omega_{km}$. Поэтому на промежутке времени $\Delta t_{km} = |\omega_{km} - \omega|^{-1}$ система имеет энергию E_k с неопределенностью $\Delta E_k = \hbar(\omega_{km} - \omega)$. Закон сохранения энергии в квантовом смысле (т. е. с точностью до соотношения неопределенности $\Delta E_k \Delta t_{km} \gtrsim \hbar$) выполняется, таким образом, и для виртуальных промежуточных состояний, существующих только на интервале времени Δt_{km} .

Общие характеристики многофотонных процессов могут быть получены из формулы квантовой теории возмущений для вероятности многофотонного перехода в единицу времени. В этой теории для вычисления вероятности p -фотонного перехода в системе «атом + поле излучения» сначала находят методом теории возмущений амплитуду конечного дискретного состояния в p -порядке. Записанное в общем виде выражение для вероятности p -фотонного перехода сложно. Его можно упростить, если иметь в виду, что в большинстве практически интересных случаев многофотонных переходов конечным является не одно дискретное состояние, а группа близко расположенных состояний с плотностью ρ_n . При этом представляет интерес вероятность обнаружить систему в любом из состояний этой группы, если вначале она находилась в состоянии m . Эта вероятность при p -фотонном переходе возрастает линейно с течением времени, и, следовательно, можно говорить о вероятности перехода в единицу времени, которая оказывается равной [1]

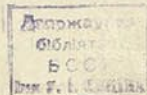
$$P_{mn}^{(p)} = \frac{2\pi}{\hbar} |K_{mn}^{(p)}|^2 \rho_n. \quad (4)$$

Здесь

$$K_{mn}^{(p)} = \sum_{k', k'', \dots, k^{(p-1)}} \frac{V_{mk'} V_{k'k''} \dots V_{k^{(p-1)}n}}{(E_m - E_{k'}) (E_m - E_{k''}) \dots (E_m - E_{k^{(p-1)}})} \quad (5)$$

составной матричный элемент порядка p ; E_i — энергия невозмущенной системы «атом + поле излучения» в состоянии i ; V_{ab} — матричный элемент оператора взаимодействия атома с полем излучения \hat{V} между состояниями a и b .

Формула (4) отличается от соответствующей формулы для вероятности однофотонного перехода только заменой матричного элемента прямого перехода V_{mn} на составной матричный элемент $K_{mn}^{(p)}$ порядка p . Числитель $K_{mn}^{(p)}$ содержит произведение p матричных элементов вида V_{ab} : первый матричный элемент исходит из начального состояния m , а последний приходит к конечному состоянию n . Знаменатель $K_{mn}^{(p)}$ содержит произведение $(p-1)$ разностей энергий между начальными и промежуточными состояниями.



В рассмотренном случае двухфотонного перехода с участием одного промежуточного состояния k этот знаменатель определял время промежуточного состояния $\Delta t_{km} \approx |\omega_{km} - \omega|^{-1}$.

В случае p -фотонного перехода величина

$$[(E_m - E_{k'}) (E_m - E_{k''}) \dots (E_m - E_{k^{(p-1)}})]^{-1}$$

пропорциональна произведению $(p-1)$ эффективных времен нахождения системы в $(p-1)$ промежуточных состояниях. Структура соотношений (4) и (5) дает основание рассматривать p -фотонный переход как происходящий в p -этапов через $(p-1)$ промежуточное состояние невозмущенной системы: сначала поглощается (или испускается) один фотон и система оказывается в состоянии k' , затем поглощается (или испускается) второй фотон и система оказывается в состоянии k'' и т. д.; наконец, в результате p -элементарных однофотонных актов система оказывается в конечном состоянии n . При такой интерпретации вероятность всего p -фотонного процесса в целом пропорциональна произведению $(p-1)$ эффективных времен существования промежуточных состояний.

Таким образом, вычисление вероятности многофотонного перехода сводится к вычислению матричных элементов всех возможных однофотонных переходов через ряд промежуточных состояний, соответствующих действительным (стационарным) энергетическим уровням. Для этого необходимо знать матричные элементы переходов через все промежуточные состояния, что значительно усложняет задачу по сравнению с вычислением вероятности однофотонного перехода. Вместе с тем соотношения (4) и (5) позволяют сделать важные заключения о характерных особенностях многофотонных процессов без вычисления точных значений составных матричных элементов:

1) Вероятность p -фотонного перехода отлична от нуля только при выполнении закона сохранения энергии для всего процесса в целом. В отличие от однофотонного перехода закон сохранения энергии может быть выполнен при результирующем переходе атома из более низкого в более высокое энергетическое состояние не только с поглощением, но и с испусканием отдельных фотонов (например, комбинационное рассеяние).

2) В случае перехода с поглощением p -фотонов одинаковой частоты ω величина $P_{mn}^{(p)}$ пропорциональна $|V_{ab}|^{2p} \sim N^p(\omega)$ — числу фотонов этой частоты в степени p , т. е. интенсивности излучения в этой степени.

3) При наличии резонансных промежуточных состояний (когда $E_m - E_{k^{(i)}} \rightarrow 0$) вероятность многофотонного процесса резко возрастает. Формальное стремление этой вероятности к ∞ в формуле (4) связано с тем, что в ней не учитывалась конечная релаксационная ширина промежуточных состояний. Примеры ее учета рассмотрены в [1]. Из формулы (4) видим, что вероятность перехода с участием p -фотонов отличается от вероятности с участием $(p-1)$ фотона множителем порядка $[V_{ab}/(E_m - E_k)]^2$. В оптическом диапазоне для нерезонансных разрешенных дипольных электрических переходов этот множитель имеет порядок $(E_{св}/E_{ат})^2$, где $E_{св}$ — амплитуда напряженности светового поля излучения, $E_{ат}$ — средняя напряженность атомного электрического поля (имеет порядок 10^9 в/см). Для всех существующих источников излучения, кроме лазерных, $E_{св} \ll E_{ат}$ и с увеличением числа фотонов вероятность многофотонных переходов резко уменьшается. Для лазерных источников излучения уже достигнуты такие мощности излучения (10^9 вт/см²), когда $E_{св}/E_{ат} \sim 1$ и вероятности процессов с участием

большого числа фотонов становятся сравнимыми с вероятностями однофотонных переходов.

4) Правила отбора для многофотонных процессов отличны от правил отбора для однофотонных. Для многофотонного процесса разрешены такие переходы, которые имеют отличный от нуля составной матричный элемент перехода, т. е. начальное и конечное состояния должны быть связаны отличными от нуля матричными элементами. В системах с центром симметрии дипольные электрические переходы с участием четного числа фотонов разрешены только между состояниями с одинаковой четностью, а с участием нечетного числа фотонов — между состояниями с разной четностью. На этом принципе основана двухфотонная спектроскопия, в которой измерение спектров двухфотонного поглощения позволяет оптическими методами исследовать энергетические состояния, возбуждение которых запрещено из основного состояния в однофотонных процессах.

5) Если имеется не одно, а несколько промежуточных состояний типа $k', k'', \dots, k^{(p-1)}$, то складываются не вероятности, а амплитуды вероятностей различных возможных путей p -фотонного перехода. Это обстоятельство отражает неоднозначность пути перехода системы из начального в конечное состояние и имеет простой физический смысл: достоверного знания начального и конечного состояний системы недостаточно для того, чтобы указать, по какому пути система перешла из одного состояния в другое. Такая неоднозначность может быть вызвана или неразличимостью порядка поглощения (или испускания) отдельных фотонов, или возможностью перехода при заданном порядке через различные промежуточные состояния.

Примером „интерференции вероятностей“ вследствие неоднозначности порядка поглощения фотонов может служить двухфотонный переход $m \rightarrow n$ через одно промежуточное состояние k (рис. 2, б) под действием двух полей излучения с частотами ω_1 и ω_2 такими, что $\omega_1 + \omega_2 = \omega_{nm}$. При тех же предположениях, что к рис. 2, а, вероятность такого перехода в единицу времени равна [1]

$$P_{mn}^{(2)} = \frac{2\pi}{\hbar} |V_{mk}|^2 |V_{kn}|^2 \left| \frac{1}{\omega_{km} - \omega_1} + \frac{1}{\omega_{km} - \omega_2} \right|^2 \rho_n. \quad (6)$$

Сумма слагаемых $(\omega_{km} - \omega_1)^{-1}$ и $(\omega_{km} - \omega_2)^{-1}$ появилась из общей формулы (4) вследствие наличия двух промежуточных состояний системы „атом + поле излучения“, отличающихся тем, что в одном из них поглощен фотон ω_1 , а во втором — ω_2 .

Формула (6) показывает, что при таком принципиально неоднозначном пути перехода для определения вероятности $P_{mn}^{(2)}$ следует сначала сложить амплитуды вероятностей переходов по возможным путям, а потом образовать квадрат модуля суммы этих амплитуд. В результате такой „интерференции вероятностей“ величина $P_{mn}^{(2)}$ может изменяться от нуля до квадрата суммы амплитуд вероятностей переходов по возможным путям. Так, при точно эквидистантном расположении уровней $\omega_{km} - \omega_1 = \omega_2 - \omega_{km}$ полная вероятность $P_{mn}^{(2)} = 0$. Такая неоднозначность (т. е. равная возможность разных путей) исчезает, если промежуточный уровень является резонансным для одного из фотонов. Действительно если $|\omega_{km} - \omega_1| \rightarrow 0$, то слагаемым с $(\omega_{km} - \omega_2)$ в формуле (6) можно пренебречь.

Примеры интерференционных явлений, связанных с наличием многих промежуточных состояний в атомной системе (отдельном атоме или ансамбле), рассмотрены в работе [1].

НЕКОТОРЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ МНОГОФОТОННЫХ ПРОЦЕССОВ

Наблюдение семифотонной ионизации атомов ксенона. До недавнего времени наблюдались только двух- и трехфотонные процессы поглощения возбуждающего излучения [1, 10].

В работах [16, 17] впервые наблюдалась семифотонная ионизация атомов ксенона (потенциал ионизации $I_0 = 12, 13$ эв) излучением рубинового лазера ($h\nu = 1,78$ эв) (рис. 3). Гигантский импульс излучения рубинового лазера (длительность 20 нсек) фокусировался с помощью

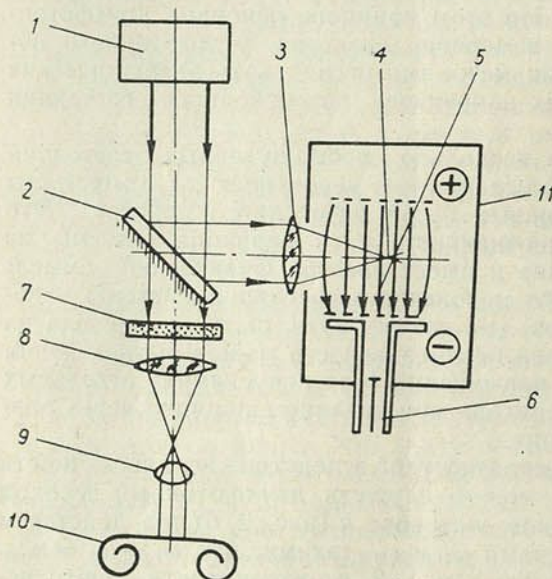


Рис. 3. Схема экспериментальной установки для наблюдения семифотонной ионизации атомов ксенона:

1 — рубиновый лазер; 2 — полупрозрачная отражающая пластинка; 3, 8 — фокусирующие линзы; 4, 9 — области, в которых сфокусировано излучение; 5 — слабое электрическое поле, вытягивающее ионы на зонд; 6 — зонд; 7 — фильтр; 10 — фотолинза; 11 — вакуумная камера

объектива 3 в средней части камеры, заполненной ксеноном при давлении $10^{-3} - 10^{-2}$ мм. Ионы, образованные в области фокусировки излучения 4 (область с линейными размерами 10^{-2} см), вытягивались однородным электрическим полем 5 напряженностью 10 в/см на коллектор 6, специально сконструированный так, чтобы на него не могли попасть ионы из других частей прибора. Ионный ток регистрировался специальной электронной схемой с пороговой чувствительностью около $4 \cdot 10^3$ ионов.

Для оценки напряженности электрического поля лазерного излучения в области фокусировки производилось фотометрическое измерение пространственного распределения электрического поля. Для этого часть излучения лазера, прошедшая через

зеркало 2 и ослабленная ней-

тральными фильтрами 7, попадала на объектив 8, тождественный объективу 3 и расположенный на том же расстоянии от лазера. Пространственное распределение освещенности в различных сечениях области фокусировки фотографировалось в увеличенном масштабе на фотолинзу 10, а затем тщательно анализировалось.

Экспериментально было найдено, что пороговое значение электрического поля, при котором появляется минимальный регистрируемый ток, $E_{\text{пор}} = 8,0 \cdot 10^6 \div 1,5 \cdot 10^7$ в/см. Это значение $E_{\text{пор}}$ близко к рассчитанному теоретически $E_{\text{пор}} = 2,7 \cdot 10^7$ в/см [14]. Исследование зависимости числа образованных ионов N_i от числа фотонов возбуждающего излучения N_Φ показало, что [17]

$$N_i = \text{const } N_\Phi^m, \quad m = 6,2 \pm 0,9. \quad (7)$$

Несмотря на то что значение $m = 7$, соответствующее теоретической величине для семифотонного процесса, лежит в пределах погрешности, авторы работы считают, что наиболее вероятное значение $m = 6$. Окон-

чательный вывод относительно этого значения можно сделать только после увеличения точности эксперимента и интервала изменения мощности возбуждающего излучения.

Возможность наблюдения семифотонного процесса ионизации атомов непосредственно вытекает из оценок вероятности многофотонного возбуждения. При достигнутых в области фокуса напряженностях светового поля $E_{св} \approx 10^7 \div 10^8$ в/см величина отношения $E_{св}/E_{ат.ксен} \approx 0,1 \div 1,0$ и вероятности процессов ионизации с участием большого числа фотонов приближаются к вероятностям однофотонной ионизации, когда $\hbar\omega \geq I_0$.

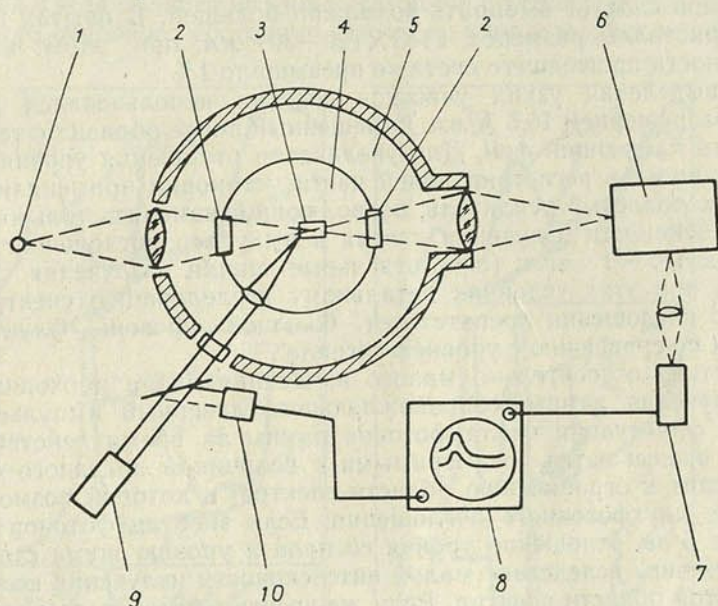


Рис. 4. Схема экспериментальной установки для исследования двухфотонного спектра поглощения в кристаллах KJ и CsJ:
 1 — ксеноновая лампа; 2 — кварцевое окно; 3 — образец; 4 — газообразный гелий (или азот); 5 — вакуумная камера; 6 — монохроматор; 7 — ФЭУ; 8 — двухлучевой осциллограф; 9 — рубиновый лазер; 10 — фотоэлемент

Исследование спектров двухфотонного поглощения в кристаллах KJ и CsJ [2]. Представление о возможностях и специфических трудностях двухфотонной спектроскопии дают эксперименты по исследованию спектров двухфотонного поглощения в кристаллах KJ и CsJ. Эти исследования имели целью выяснить структуру края основной полосы поглощения с тем, чтобы использовать эти сведения для установления природы экситонных состояний. Йодные кристаллы были выбраны вследствие малой ширины запрещенной зоны (менее 6 эв) и относительно простой структуры края их полосы поглощения.

Схема экспериментальной установки без указания ряда светофильтров для выделения нужной части спектра приведена на рис. 4. Исследование спектра двухфотонного поглощения заключается в сопоставлении интенсивности прошедшего через кристалл излучения импульсной ксеноновой лампы в присутствии и отсутствии импульса излучения рубинового лазера. Из всего непрерывного спектра излучения лампы выбиралась область, в которой кристаллы прозрачны. Они прозрачны также и для излучения лазера, т. е. энергии фотонов лампы и лазера недостаточно для однофотонного поглощения. При одновременном действии

излучения обоих источников наблюдается уменьшение интенсивности проходящего света лампы, причем осциллограмма сигнала, отвечающего изменению поглощения, совпадает по форме с осциллограммой импульса лазера. Это указывает на то, что наблюдаемое явление связано с двухфотонным поглощением, в каждом акте которого участвует один фотон из непрерывного спектра излучения лампы и один фотон излучения лазера.

Поскольку с увеличением пути, проходимого излучением лампы в образце, возрастает изменение интенсивности прошедшего света, длину образцов следует выбирать возможно большей. В опытах использовались кристаллы размером $2 \times 3 \times (20 \div 30)$ мм, при этом изменение интенсивности прошедшего света не превышало 1%.

Для выделения узких участков спектра использовался монохроматор с разрешением 16,5 Å/мм, помещенный после образца с тем, чтобы уменьшить мешающий фон. Для увеличения отношения уровня сигнала к уровню шума в регистрирующей части установки применяли относительно узкополосный усилитель, позволяющий измерять только огибающую интенсивности излучения лазера и импульса поглощения образца длительностью ~ 1 мсек (а не отдельные пикеты излучения лазера). Однако и при этих условиях детальному исследованию спектра двухфотонного поглощения препятствует большой уровень флуктуационных помех по сравнению с уровнем сигнала.

Вследствие относительно малого изменения числа проходящих фотонов излучения лампы, сопровождающего лазерный импульс, статистические флуктуации числа фотонов лампы за время действия этого импульса оказываются соизмеримыми с величиной полезного сигнала. Это приводит к ограничению области спектра, в которой возможно исследование двухфотонного поглощения. Если энергия фотонов лампы превышает 5 эв, отношение уровня сигнала к уровню шума становится меньше единицы вследствие малой интенсивности излучения ксеноновой лампы в этой области спектра. Если же энергия фотонов лампы меньше 4 эв, двухфотонное поглощение падает ниже 0,01% и относительный уровень шума снова становится слишком большим. Эти трудности могут быть преодолены (и соответственно расширен спектральный диапазон, в котором ведутся исследования) увеличением интенсивности источника непрерывного излучения или интенсивности излучения лазера (в описываемых опытах энергия излучения лазера была около 15 Дж). Увеличить мощность лазерного излучения переходом к гигантским импульсам оказалось невозможно вследствие пробоя кристаллов. Выбрать источник непрерывного излучения большей яркости также не было возможности.

Серьезным ограничением точности наблюдений в рассматриваемой работе было обнаруженное авторами изменение интенсивности проходящего через кристалл излучения, имеющее направление, обратное ожидаемому, — под действием лазерного излучения поглощение кристалла на некоторое время уменьшалось. Степень уменьшения поглощения и время его изменения зависели от области спектра. Причины этого явления не выяснены.

Общая погрешность наблюдения формы полосы двухфотонного поглощения по оценке авторов работы была около 10—20% в спектральном диапазоне энергий фотонов ксеноновой лампы от 3,8 до 5 эв, в котором проводились исследования.

На рис. 5, а, б приведены спектры одно- и двухфотонного поглощения кристаллов KJ и CsJ при различной температуре. Детальный теоретический анализ этих спектров послужил авторам работы [2] основанием для суждения о том, какая из возможных моделей экситонов реа-

лизуется в щелочногалогидных кристаллах. В одной из таких моделей под экситоном понимается возбужденное состояние иона галоида (переход $3p \rightarrow 4s$), в другой — возбужденное состояние с переносом одного электрона $3p$ иона галоида в состояние $3d$ шести окружающих ион галоида ионов металла и, наконец, в третьей возбуждение приписывается многим ячейкам решетки кристалла. Наиболее интересной особенностью спектра двухфотонного поглощения является отсутствие в нем полосы, соответствующей суммарной энергии фотона лазера и фотона ксеноновой лампы, равной $5,6\text{--}5,8 \text{ эв}$. Это означает, что полоса поглощения в этой области не имеет состояний с четностью, соответствующей четности основного состояния. Этому не удовлетворяет модель пере-

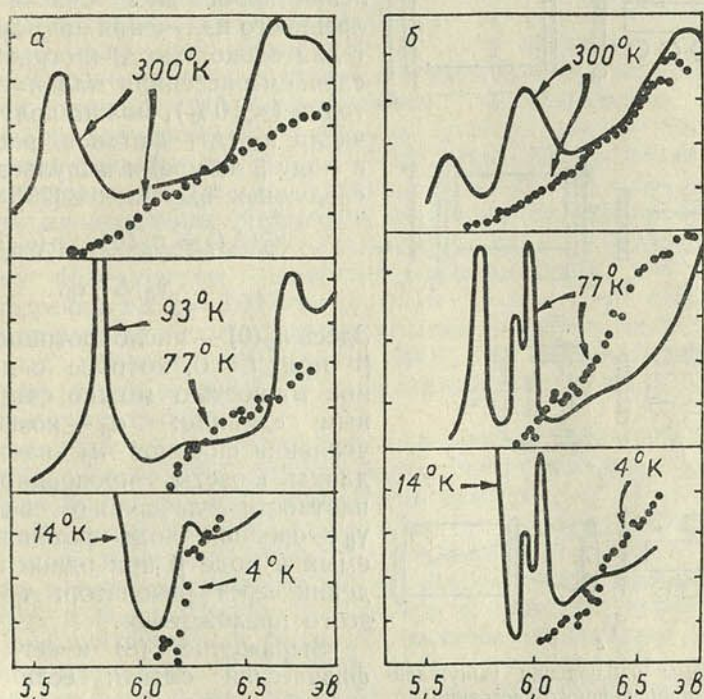


Рис. 5. Спектры одно- и двухфотонного поглощения кристаллов (по вертикали — оптическая плотность, по горизонтали — энергия конечного возбужденного состояния):

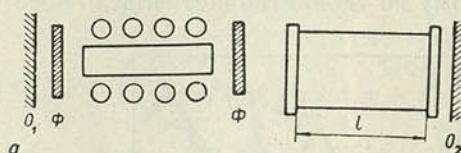
а — KJ; б — CsJ (— спектры однофотонного поглощения; ● — спектры двухфотонного поглощения)

носа заряда. Для получения более полных и надежных результатов необходимо расширить границы области спектра, в которой ведутся исследования, увеличить отношение уровня сигнала к уровню шума, а также спектральное разрешение и исследовать поляризационные зависимости в спектре двухфотонного поглощения.

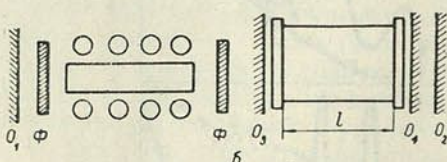
Исследование эффективности вынужденного комбинационного рассеяния (ВКР) для преобразования частоты излучения лазеров. Высокие эффективности преобразования мощности излучения при помощи ВКР сразу же выдвинули ВКР как новый эффективный метод преобразования частоты излучения лазеров [1]. В настоящее время получена эффективность преобразования мощности излучения гигантского импульса рубинового лазера в линию КР нитробензола (линия 1345 см^{-1}) по-

рядка 30% и ВКР наблюдалось не только при использовании гигантских импульсов, но и в обычном пиковом режиме рубинового лазера [20—24]. Однако условия и оптимальные схемы эффективного преобразования лазерного излучения в линии ВКР еще не достаточно исследованы.

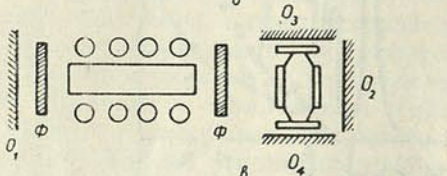
В связи с этим приведем теоретические оценки эффективности преобразования в ВКР в различных схемах (здесь имеется в виду только стоксово КР). Рассмотрим случай, когда кювета длиной l с активным к КР веществом помещена внутрь резонатора лазера с модуляцией добротности (рис. 6, а), причем в импульсе лазера создана плотность



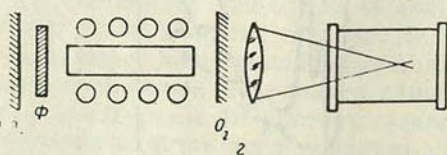
излучения, достаточная для преодоления порога ВКР. Считая импульс лазерного излучения прямоугольным с длительностью Δt и ограничиваясь случаем рассеяния малой доли фотонов ($< 10\%$), можно получить для числа $n_\beta(\Delta t)$ фотонов, рассеянных в моду β за время импульса лазера, следующее выражение [25]:



$$n_\beta(\Delta t) = n_\beta(0) \exp(\alpha_\beta l - \gamma_\beta \Delta t / \tau_\beta) \quad (8)$$



Здесь $n_\beta(0)$ — число фотонов в моде β при $t = 0$, которое с достаточной точностью можно считать равным единице; α_β — коэффициент усиления фотонов n_β на единице длины кюветы, пропорциональный плотности лазерного излучения; γ_β — средняя доля фотонов, теряемых в моде β при одном прохождении через резонатор; τ_β — время этого прохождения.



Выражение (8) имеет простой физический смысл: если вначале в каждой моде β имеется $n_\beta(0)$ фотонов, то после одного прохождения через резонатор их число

Рис. 6. Схемы наблюдения вынужденного комбинационного рассеяния:

O — отражатели; Ф — просветляющиеся фильтры

возрастает в $\exp(\alpha_\beta l - \gamma_\beta)$ раз, $\Delta t / \tau_\beta$ равно числу таких прохождений за время действия лазерного импульса.

Условие $\alpha_\beta l - \gamma_\beta > 0$ экспоненциального нарастания $n_\beta(t)$ определяет пороговую мощность возбуждающего излучения для возникновения ВКР. Пренебрегая нелинейными потерями преобразованного излучения, величину γ_β можно представить в виде $\gamma_\beta = \alpha_n l + \gamma$, где α_n — коэффициент потерь внутри кюветы, а γ — остальные потери. Из соотношения $\alpha_\beta l > \alpha_n l + \gamma$ видим, что минимальная пороговая мощность возбуждения соответствует отсутствию внешних потерь (или $\gamma \ll \alpha_n l$), при котором усиление α_β должно превосходить α_n : $\alpha_\beta > \alpha_n$. Это дает для возбуждения линии 1345 см^{-1} нитробензола рубиновым лазером ($\alpha_n \approx 3 \cdot 10^{-4} \text{ см}^{-1}$ [26], $\alpha_\beta = 3 \cdot 10^{-3} I_0$, где I_0 — мощность рубинового лазера, Вт/см^2 [27, 28]) минимальную пороговую плотность мощности $I_0 = 100 \text{ квт/см}^2$.

Однако преодоление порога ВКР еще не достаточно для эффективного преобразования при ограниченной длительности возбуждающего импульса Δt . Для преобразования в комбинационную линию существ-

венной доли излучения лазера показатель $D = (\alpha_\beta l - \gamma_\beta) \Delta t / \tau_\beta$ должен быть не только положительным, но и не менее определенной величины $D_{\text{эф}}$, которую легко оценить. В случае 10-процентного преобразования энергии импульса рубинового лазера 1 дж в линию нитробензола величина $D_{\text{эф}} \approx 30$ [20].

Для выполнения условия $D \geq D_{\text{эф}}$ при заданной мощности лазерного импульса необходимо обеспечить достаточное число проходов $\Delta t / \tau_\beta$ за время действия лазерного импульса. Это требование вытекает из нестационарных условий процесса ВКР при ограниченной длительности возбуждающего импульса и ограничивает его минимальную длительность при заданной мощности. Оптимальному варианту соответствует случай заполнения большей части резонатора активным к ВКР веществом, когда $\tau_\beta \approx l / c n_\beta$, где n_β — показатель преломления вещества для рассеянного излучения. Тогда при $\alpha_\beta l \gg \gamma_\beta$ величина $D_{\text{эф}} = \alpha_\beta c n_\beta \Delta t$ определяет минимальную длительность импульса Δt , необходимую для получения определенной эффективности преобразования. В случае нитробензола значению $D_{\text{эф}} \approx 30$ при $I_0 = 100 \text{ квт/см}^2$ соответствует минимальная длительность $\Delta t_{\text{мин}} = 2 \cdot 10^{-6} \text{ сек}$. Отсюда видно, что мощность гигантских импульсов длительностью 20—30 нсек должна превосходить минимальную пороговую примерно на два порядка для эффективного преобразования. Из соотношения (8) следует также, что поскольку большинство жидкостей, используемых для наблюдения ВКР, прозрачны на $\lambda = 700 \text{ мкм}$ ($\alpha_\beta \approx 10^{-4} \div 10^{-3} \text{ см}^{-1}$ [26]), то внутренние потери в них $\alpha_\beta l$ остаются малыми по сравнению с внешними в обычных условиях наблюдения ВКР, и, следовательно, выгодно увеличивать длину кюветы l при заданной мощности и длительности возбуждающего импульса.

Режимы, близкие к оптимальным условиям эффективного преобразования, при мощностях, близких к пороговым, реализуются в схемах, использующих селективные резонаторы (рис. 6, б, в). В первой схеме с продольным селективным резонатором (рис. 6, б) отражатели O_1 и O_2 должны иметь возможно больший коэффициент отражения возбуждающего луча и быть прозрачными для преобразованного излучения, а отражатели O_3 и O_4 , помещенные вплотную к кювете, должны быть прозрачны для луча лазера и иметь оптимальное пропускание для преобразованного излучения. Во второй схеме с поперечным резонатором селективность осуществляется разделением направлений возбуждающего и рассеянного излучений. Эта схема позволяет резко снизить требования к селективности отражения зеркал, что особенно существенно при преобразовании излучения с малым смещением частоты. В обеих схемах исключаются потери преобразованного излучения в кристалле лазера и реализуется случай непрерывного на всей длительности возбуждающего импульса прохождения преобразованного излучения через активную среду.

Экспериментальное исследование схем ВКР (рис. 6, а, б, в) было проведено для генерации линии 992 см^{-1} в бензоле [25]. Была подтверждена целесообразность увеличения длины кюветы в первой обычной схеме рис. 6, а. С увеличением длины кюветы от 5 до 60 см наблюдалось уменьшение мощности и энергии импульса возбуждения рубинового лазера, необходимых для получения заданной эффективности преобразования. При длине кюветы $l = 60 \text{ см}$ (более половины длины резонатора) ВКР наблюдалось в нескольких пиках обычного пикового режима лазера (мощность $0,5 \text{ Мвт/см}^2$, $\Delta t = 300 \text{ нсек}$). Аналогичное эффективное ВКР в бензоле наблюдалось в обычном пиковом режиме рубинового лазера [22], когда использовался короткий резонатор с кюветой $l = 10 \text{ см}$.

В работе [25] показано, что применение схемы с продольным селективным резонатором (рис. 6, б) позволяет наблюдать ВКР при наименьших мощностях и энергиях возбуждающего импульса.

Значительный интерес представляет сравнение эффективностей схем, использующих резонаторы, со схемой наблюдения ВКР при фокусировке лазерного луча в кювету с активным к КР веществом (рис. 6, в). В этой схеме ВКР происходит на одном прохождении преобразованного излучения через область фокусировки луча, поэтому оценку числа рассеянных n_{β} фотонов сделаем по формуле $n_{\beta} = \exp(\alpha_{\beta} l_{\text{фокус}} - \gamma_{\beta})$. Легко оценить мощности, требуемые для эффективного преобразования в этой схеме. Так, в случае нитробензола для 10-процентного преобразования энергии импульса рубинового лазера 1 Дж ($D_{\text{эф}} \approx \alpha_{\beta} l \approx 30$) при размерах объема фокусировки 0,1 мм × 0,1 мм × 0,1 мм необходима плотность мощности возбуждения (до фокусировки) $I_0 \approx 100 \text{ Мвт/см}^2$ отсутствие отражающих зеркал в схеме с фокусировкой удобно в тех случаях, когда преобразованное излучение должно быть выведено из лазерного резонатора.

В реальных условиях такие схемы позволяют получать мегаваттные мощности преобразованного излучения при плотности мощности возбуждения лазера 20—50 Мвт/см² [28—33]. Возможностью снижения пороговых мощностей возбуждения для наблюдения ВКР является сочетание принципа фокусировки с использованием продольного и поперечного селективных резонаторов. К сожалению, имеющийся экспериментальный материал [32] недостаточен для оценки возможностей использования таких схем для преобразования лазерного излучения.

Вынужденное мандельштам-бриллюэновское рассеяние (ВМБР). При бриллюэновском рассеянии излучения возбуждаются акустические колебания среды (кристалл, жидкость) с частотами в диапазоне 0,1—1,0 см⁻¹. В известной мере этот эффект аналогичен комбинационному рассеянию на всей среде в целом, рассматриваемой как одна большая молекула. Для этого процесса законы сохранения энергии и импульса имеют вид:

$$\begin{aligned}\omega_0 &= \omega_p + \omega_{\text{ак}}, \\ \mathbf{k}_0 &= \mathbf{k}_p + \mathbf{k}_{\text{ак}}.\end{aligned}\quad (9)$$

Здесь ω_0 , ω_p , $\omega_{\text{ак}}$ и \mathbf{k}_0 , \mathbf{k}_p , $\mathbf{k}_{\text{ак}}$ — частоты и волновые векторы возбуждающей, рассеянной и акустической волн соответственно. Если θ — угол между падающим и рассеянным оптическими фотонами, то из формулы (9) следует, что акустическая волна (фонон) возбуждается преимущественно в направлении, удовлетворяющем условию $\mathbf{k}_0 = \mathbf{k}_p + \mathbf{k}_{\text{ак}}$ с частотой

$$\omega_{\text{ак}} = 2\omega_0 \frac{v n}{c} \sin \frac{\theta}{2}, \quad (10)$$

где v — скорость распространения акустической волны частоты $\omega_{\text{ак}}$ в среде, а n — показатель ее преломления.

Если в среде одновременно с возбуждающими фотонами присутствуют рассеянные фотоны и фононы, то имеет место вынужденное испускание рассеянных фотонов ω_p и акустических фононов $\omega_{\text{ак}}$. Интенсивность этого процесса ВМБР пропорциональна плотности возбуждающего излучения I_0 . Если усиление рассеянной и акустической волн при распространении в среде превосходит их потери, то эти волны будут экспоненциально нарастать. Оценки пороговых мощностей возбуждения для наблюдения ВМБР в резонаторе дают $I_{0 \text{ порог}} \sim 1 \text{ Мвт/см}^2$ [33].

ВМБР впервые обнаружено в кварце и сапфире при фокусировке излучения гигантского импульса рубинового лазера [33]. Рассеянное излучение наблюдалось в обратном возбуждающем луче направлении и обнаруживало четко выраженный порог порядка 10^6 Мвт/см². Измеренные значения смещения частоты рассеянного излучения относительно частоты возбуждающего излучения в пределах экспериментальной точности совпадали с вычисленными по формуле (10). ВМБР в той же схеме наблюдения было затем обнаружено и в жидкостях [34], причем пороговые плотности мощности возбуждения были около 1000 Мвт/см² (достигались фокусировкой излучения лазера). Помещение кюветы с жидкостями внутрь лазерного резонатора с использованием резонатора на рассеянное излучение под углом к оси резонатора лазера позволило снизить порог возбуждения до 50 Мвт/см² в бензоле [35]. В работе [36] ВМБР наблюдалось в направлении возбуждающего излучения рубинового лазера (также при помещении кюветы с жидкостями внутрь резонатора лазера). Вследствие малого смещения частоты рассеянного излучения относительно частоты излучения лазера рассеянное излучение усиливалось, проходя через рубиновый кристалл. Это позволило наблюдать ВМБР при плотности мощности лазера около 10 Мвт/см².

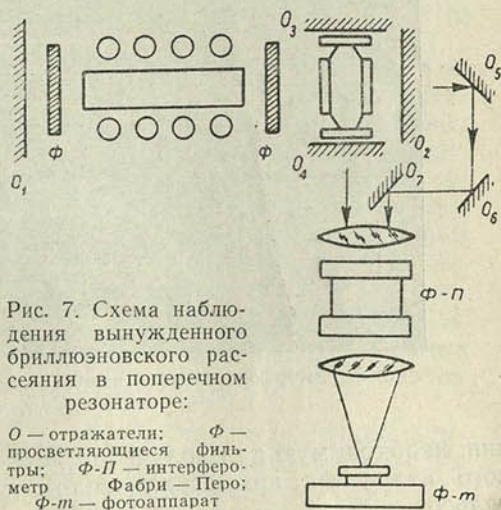


Рис. 7. Схема наблюдения вынужденного бриллюэновского рассеяния в поперечном резонаторе:
 О — отражатели; Ф — просветляющиеся фильтры; Ф-П — интерферометр Фабри — Перо; Ф-м — фотоаппарат

Нами ВМБР наблюдалось в схеме с поперечным селективным резонатором (рис. 6, в) [25]. Схема опыта представлена на рис. 7. Для измерения смещения частоты рассеянного излучения относительно частоты рубинового лазера использовался интерферометр Фабри—Перо ИТ-51. Трудность измерения была связана с нестабильностью частоты излучения лазера, которая могла заметно (на доли обратного сантиметра) меняться от импульса к импульсу. Поэтому на одной интерферограмме совместно анализировалось исходное и рассеянное излучение, отвечающее одному импульсу генерации лазера. Исходное излучение вводилось в интерферометр симметрично относительно его оси и образовывало полную систему колец. Рассеянное излучение выводилось с таким угловым распределением, что образовывало преимущественно полукольца. Это позволяло надежно разделить исходное и рассеянное излучение и легко измерять величины смещения частоты (рис. 8).

Вычисленные по данным измерений смещения частоты для сероуглерода и бензола, равные соответственно $0,14 \pm 0,01$ см⁻¹ и $0,15 \pm 0,01$ см⁻¹, совпадают с предсказываемыми соотношением (10). Пороговые плотности мощности возбуждения для нитробензола и бензола были около 5—10 Мвт/см², а для сероуглерода 1—3 Мвт/см². Угол расходимости рассеянного излучения во всех трех жидкостях был порядка 10^{-2} рад, а его поляризация совпадала с поляризацией возбуждающего излучения.

Результаты этих экспериментов показывают, что поперечный резонатор очень удобен для наблюдения ВМБР. Он позволяет относительно

легко выделить преобразованное излучение из исходного и обеспечить низкую пороговую мощность возбуждения. По сравнению с внеосевым резонатором [35] поперечный резонатор может иметь меньшую длину, что обеспечивает, как и в случае ВКР, более быстрый темп нарастания интенсивности рассеянного излучения и понижает мощность возбужде-

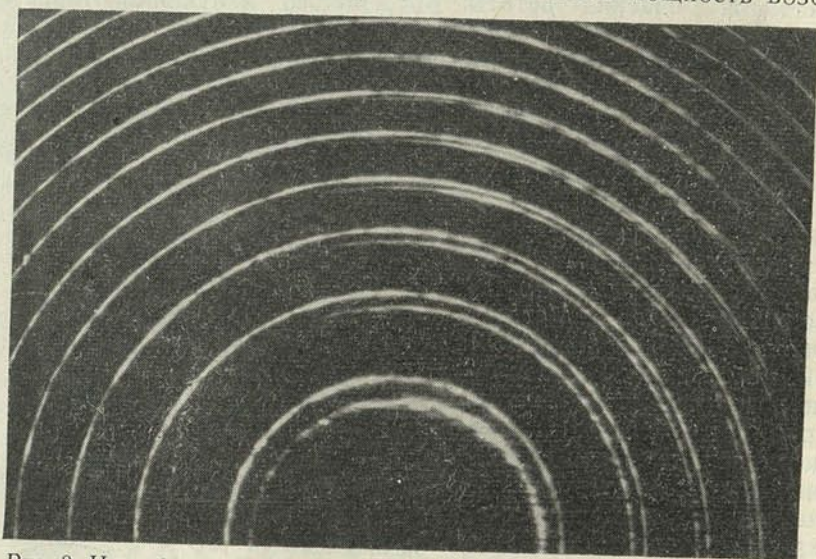


Рис. 8. Интерферограмма вынужденного бриллюэновского рассеяния в сероуглероде

ния, необходимую для получения детектируемой интенсивности рассеянного излучения при ограниченной длительности возбуждающих импульсов.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В связи с развитием новых экспериментальных возможностей в оптическом диапазоне число исследований в области многофотонных явлений в настоящее время нарастает очень быстро. Выше мы остановились лишь на результатах последних исследований, не вошедших в обзор [1].

Основные квантовомеханические представления о многофотонных явлениях были проверены в диапазоне частот, относящемся к радиотехническому. В этом диапазоне раньше появились экспериментальные возможности для постановки соответствующих опытов, вероятность многофотонных процессов больше, чем в оптическом (при равных фотонных плотностях в обоих диапазонах), а результаты экспериментов легко могут быть интерпретированы количественно. Поэтому постановка экспериментов в оптическом диапазоне, преследующих цель — проверить выводы теоретического рассмотрения, за исключением некоторых специальных случаев, в настоящее время едва ли рациональна. С другой стороны, поскольку такие фундаментальные величины, как сечение многофотонных процессов в оптическом диапазоне, практически не могут быть рассчитаны, их определение представляет несомненный интерес. В настоящее время постановка надежных количественных исследований многофотонных процессов с использованием оптических квантовых генераторов затруднена вследствие недостаточной стабильности их работы, неоднородного и непостоянного распределения плотности излучения по сечению генерируемого луча. Другая трудность заключается в том, что

при малой вероятности многофотонных процессов существенную роль могут играть сопутствующие паразитные эффекты вроде нагрева вещества, с которым взаимодействует оптическое излучение большой плотности, или нарушение его целостности. Поэтому большинство выполненных работ носит качественный характер и лишь демонстрирует возможность наблюдения многофотонных процессов.

В то время как большинство выполненных работ по многофотонным явлениям представляет самостоятельные исследования, не предполагающие развития нового направления, многофотонная спектроскопия может привести к развитию новых спектральных методов исследования энергетической структуры и строения вещества. Изложенную выше работу по многофотонной спектроскопии следует рассматривать как первый шаг в этом направлении.

Нет сомнения, что многофотонные явления в дальнейшем будут все больше привлекаться для решения практических задач. Примером этого в настоящее время могут служить генерация гармоник и вынужденное комбинационное рассеяние, позволяющие осуществлять преобразование частоты излучения для практического использования. Имея в виду эту сторону многофотонных процессов, мы рассмотрели эффективности преобразования частоты с помощью вынужденного комбинационного рассеяния. Работы в направлении повышения эффективности преобразования частоты нам представляются весьма важными. Они могут привести, в частности, к значительному расширению экспериментальных возможностей постановки исследований многофотонных процессов, которые ограничиваются тем, что оптические квантовые генераторы позволяют получать мощное излучение лишь на нескольких длинах волн.

Следует отметить, что генерация гармоник может быть успешно описана в рамках представлений о нелинейной поляризуемости среды, т. е. без использования понятия многофотонных процессов.

Примером того, что исследование многофотонных процессов может привести к наблюдению новых явлений, служит вынужденное мандельштам-бриллюэновское рассеяние. Эти явления могут дать новую информацию о физике сред, в которых они наблюдаются, и открыть новые возможности их исследования.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бонч-Бруевич А. М., Ходовой В. А. УФН, **85**, 3, 1965.
2. Hopfield I. I. and Worlock I. M. Phys. Rev., **137**, A1455, 1965.
3. Masaharu Inoue and Yutaka Toyozawa. J. Phys. Soc. Japan, **20**, 363, 1965.
4. Iannuzzi M. and Polacco E. Phys. Rev. Letters, **13**, 371, 1964.
5. Iannuzzi M. and Polacco E. Phys. Rev., **138**, A807, 1965.
6. Singh S. and Stoicheff B. P. Proceedings of the Symposium on Optical Masers, Brooklyn Polytechnic Press. N. Y., 1963, 385.
7. Sonneberg H., Heffner H. and Spicer W. Appl. Phys. Letters, **5**, 95, 1964.
8. Teich M. C., Schroeer I. M. and Wolga G. I. Phys. Rev. Letters, **13**, 611, 1964.
9. Pope M., Kallman H. and Giachino I. J. Chem. Phys., **42**, 2450, 1964.
10. Singh S., Bradley L. T. Phys. Rev. Letters, **12**, 612, 1964.
11. Басов Н. Г., Грасюк А. З., Катулин В. А. ДАН СССР, **161**, 1306, 1965.
12. Басов Н. Г., Грасюк А. З., Зубарев И. Г., Катулин В. А. ЖЭТФ, Письма, **1**, 29, 1965.
13. Келдыш Л. В. ЖЭТФ, **47**, 1945, 1964.
14. Gold A. and Bebb B. Phys. Rev. Letters, **14**, 60, 1965.
15. Tomlinson R. G. Phys. Rev. Letters, **14**, 489, 1965.
16. Воронов Г. С., Делоне Н. Б. ЖЭТФ, Письма, **1**, 42, 1965.
17. Воронов Г. С., Делоне Н. Б. ЖЭТФ (в печати).
18. Бункин Ф. В., Прохоров А. М. ЖЭТФ, **48**, 1084, 1965.

19. Terhune R. Appl. Phys. Letters, 2, 55, 1963.
20. Hellwarth R. W. Appl. Optics, 2, 847, 1963.
21. Geller M., Bortfeld D. P., Sooy W. R., Woodbury E. I. Proc. IEEE, 51, 1236, 1963.
22. Takuma H. and Jennings D. A. Appl. Phys. Letters, 5, 146, 1964.
23. Takuma H. and Jennings D. A. Appl. Phys. Letters, 4, 185, 1964.
24. Броуде В. Л., Вильчинская Л. П., Салькова К. Н., Соскин М. С. Украинский физический журнал, 9, 1031, 1964.
25. Александров Е. Б., Бонч-Бруевич А. М., Костин Н. Н., Ходовой В. А. ЖЭТФ, 49, в. 5, 1965.
26. Leite R. C. S., Moore R. S., Whinnery I. R. Appl. Phys. Letters, 5, 141, 1964.
27. Hellwarth R. W., McClung F. I., Wagner W. G. and Weiner R. Bull. Am. Phys. Soc. 9, 490, 1964.
28. Shen Y. R. and Bloembergen N. Phys. Rev., 137, A1787, 1965.
29. Stoicheff B. Stimulated Raman Radiation, Int. School of Physics, «Enrico Fermi», 1963.
30. Mink R. W., Terhune R. W., Rado W. G. Appl. Phys. Letters, 3, 181, 1963.
31. Ахманов С. А., Ковригин А. И., Кулакова Н. К., Романюк А. К., Струков М. Н., Хохлов Р. В. ЖЭТФ, 48, 1202, 1965.
32. Dennis I. H. and Tannenwald P. E. Appl. Phys. Letters, 5, 58, 1964.
33. Chiao R. Y., Townes C. H. and Stoicheff B. P. Phys. Rev. Letters, 12, 592, 1964.
34. Garmire E. and Townes C. H. Appl. Phys. Letters, 5, 84, 1964.
35. Takuma H. and Jennings D. A. Appl. Phys. Letters, 5, 239, 241, 1964.
36. Burlefinger E. and Puell H. Phys. Letters, 15, 313, 1965.
37. Concetto R. G. Appl. Phys. Letters, 5, 137, 1964.

Поступило в редакцию 4.X 1965

А. М. САМСОН

НЕЛИНЕЙНЫЕ ЯВЛЕНИЯ В ОПТИЧЕСКИХ КВАНТОВЫХ ГЕНЕРАТОРАХ И УСИЛИТЕЛЯХ

Систематическая разработка теории нелинейных явлений в оптическом диапазоне длин волн связана с появлением оптических квантовых генераторов (ОКГ) и усилителей. Учет этих явлений позволяет создать теорию ОКГ.

Свойства ОКГ могут быть описаны на основе уравнений Максвелла для резонатора, заполненного активным веществом, и соответствующих квантово-механических уравнений для вещества. Как уравнения Максвелла, так и уравнения для вещества нелинейны. Их решение в общем случае представляет трудоемкую и чаще всего неразрешимую задачу. Поэтому теорию ОКГ следует строить на основе более простых уравнений, достаточно полно описывающих суть процессов.

К настоящему времени имеется большое количество литературы, посвященной оптическим квантовым генераторам и усилителям [1—3]. В двух библиографических указателях [4, 5] насчитывается свыше шести тысяч названий статей. Из них значительная часть посвящена теории ОКГ. Полный обзор существующих способов расчета свойств ОКГ практически невозможен. Можно только указать, что имеются работы с попыткой строгого решения уравнений Максвелла и матрицы плотности. Результаты таких работ позволяют правильно понять суть процессов в ОКГ, но не всегда пригодны для практических расчетов.

Имеются работы, где в качестве исходных используются уравнения Максвелла и упрощенные выражения или уравнения для вещества.

В ряде работ решаются уравнения для матрицы плотности совместно с уравнением для числа фотонов в резонаторе (плотности излучения). Эти уравнения часто используются, например, для анализа нестационарного режима.

Наконец, очень большое число работ посвящено расчету ОКГ на основе кинетических уравнений вероятностного метода и уравнений переноса. Для большинства практически важных задач такой метод расчета дает наиболее полную и простую картину явлений в ОКГ, а главное позволяет связать между собой различные энергетические характеристики квантового генератора и разработать методы их инженерного расчета. При этом результаты расчета во многих случаях совпадают с результатами более строгой теории. В настоящем обзоре предполагается изложить специфику явлений в ОКГ и усилителях на основе наиболее простых уравнений. В ходе изложения будут затрагиваться результаты, полученные путем решения более строгих уравнений.

Обзор написан в основном по работам сотрудников Института физики АН БССР.

§ 1. СТАЦИОНАРНЫЙ РЕЖИМ

Коэффициент усиления и показатель преломления. Квантовая теория дисперсии приводит к следующей формуле для комплексного показателя преломления \tilde{n} [2]:

$$\tilde{n}(\nu) = n(\nu) + i\kappa_1(\nu) - y_{ij}a(\nu) - ib(\nu)y_{ij}, \quad (1)$$

где $n(\nu)$ — показатель преломления основы в частоте ν ; $\kappa_1(\nu)$ — не зависящий от инверсии показатель поглощения (за счет, например, примесей); $a(\nu)$ и $b(\nu)$ — постоянные, зависящие от свойств активных частиц и основы;

$$y_{ij} = \frac{n_i - n_j}{n_0} \quad (2)$$

инверсная населенность i -го уровня относительно j -го¹.

В общем случае действительная и мнимая части комплексного показателя преломления (следовательно, $a(\nu)$ и $b(\nu)$) связаны между собой дисперсионным соотношением [6].

Величина $a(\nu)y_{ij}$ определяет изменение коэффициента преломления, вызванного заселенностью метастабильного уровня. Согласно [7], ay_{ij} в случае рубина $\sim 10^{-5}$. Значения by_{ij} и κ_1 связаны с коэффициентами усиления $k(\nu)$ и внутренних потерь ρ :

$$k(\nu) = \frac{4\pi b(\nu)\nu}{c} y_{ij} = \kappa(\nu)y_{ij}, \quad \rho = \frac{4\pi\kappa_1(\nu)\nu}{c}, \quad (3)$$

где $\kappa(\nu)$ — максимально возможный для данного вещества коэффициент усиления.

Сопоставляя (3) с принятым в спектроскопии [8, 9] выражением для коэффициента усиления (поглощения) через коэффициент Эйнштейна $B_{ij}(\nu)$, постоянную Планка h и полное число частиц n_0 в единице объема

$$k(\nu) = \frac{B_{ij}(\nu)h\nu}{c} n_0 y_{ij}, \quad (4)$$

видим, что

$$b(\nu) = \frac{B_{ij}(\nu)h}{4\pi} n_0.$$

Формулы (1) — (4), связывающие между собой показатели преломления, поглощения и населенность энергетических уровней, справедливы для описания стационарных и квазистационарных процессов. Если процессы быстропеременны ($\sim 10^{-10}$ — 10^{-11} сек), соотношения (1) — (4) могут быть несправедливы.

Формулы (1) — (4) написаны применительно к случаю однородного уширения спектральных линий и аналогичному ему случаю быстрого перераспределения населенностей по подуровням основного и возбужденного состояний. При неоднородном уширении n_i и n_j относятся не ко всему уровню, а к отдельному подуровню.

Населенности энергетических уровней найдем из кинетических уравнений [10]

$$\frac{dn_i}{dt} = -n_i \sum_{j=i} \left[p_{ij} + \int B_{ij}(\nu) u_{ij}(\nu) d\nu \right] +$$

¹ Для упрощения статистические веса предполагаются равными единице.

$$+ \sum_{j \neq i} n_j \left[p_{ji} + \int B_{ji}(\nu) u_{ij}(\nu) d\nu \right], \quad (5)$$

$i = 1, 2, 3, \dots, m,$

характеризующих баланс частиц по подуровням. Здесь p_{ij} — суммарная вероятность спонтанного и неоптического переходов; $\int B_{ij}(\nu) u_{ij}(\nu) d\nu$ — вероятность вынужденных переходов под действием плотности излучения $u_{ij}(\nu)$ частоты ν .

Уравнение (5) применимо в условиях стационарного и нестационарного режимов. При стационарном режиме ($dn_i/dt=0$) сочетание (4) и (5) приводит к следующей формуле для коэффициента усиления [11—13]:

$$k_{ij}(\nu) = \frac{k_{ij}^0(\nu)}{1 + \int a_{ij}(\nu) u_{ij}(\nu) d\nu} \approx \frac{k_{ij}^0(\nu)}{1 + a_{ij} u_{ij}}, \quad (6)$$

где $k_{ij}^0(\nu)$ — коэффициент усиления (или поглощения) при отсутствии излучения в канале $i \leftrightarrow j$; $a_{ij}(\nu)$ — параметр нелинейности.

Соотношение (6) справедливо для систем с любым числом уровней [10—14]. Оно же получается и из более общих соображений [15—17]. Формула (6) сохраняет свой вид и при наличии зависимости a от направления [18].

Формула (6) характеризуется тем, что зависимость коэффициента усиления от излучения выделена особо: $k_{ij}^0(\nu)$ и $a_{ij}(\nu)$ не зависят от интенсивности излучения в канале $i \leftrightarrow j$ (от плотности излучения в других каналах они зависят).

Если нет быстрого перераспределения энергии по подуровням (неоднородное уширение), то вместо (6) следует написать более общее выражение, также вытекающее из уравнений вероятностного метода. Для разреженных газов в случае, когда доплеровская ширина значительно больше естественной, вместо (6) можно написать [19]

$$k_{ij}(\nu) = \frac{k_{ij}^0(\nu)}{[1 + \beta_{ij} u_{ij}]^{\frac{1}{2}}}, \quad (7)$$

где β_{ij} — параметр нелинейности, отличный от a_{ij} . В промежуточных случаях выражение для коэффициента усиления более сложно.

Из формулы (1) вытекает, что для переменной части коэффициента преломления можно написать соотношения, аналогичные (6), (7).

Формулы (6), (7) отражают два крайних случая нелинейной зависимости коэффициента усиления от плотности излучения. Использование того или иного вида $k(\nu)$ может привести к различной зависимости свойств генерации от характеристик вещества, резонатора и мощности накачки. Ниже рассмотрим случай, когда справедлива формула (6), — случай однородного уширения. Случай, когда следует применять формулу (7) или более сложную формулу, может быть рассмотрен аналогичным образом.

Усиление излучения. Если известна зависимость коэффициента усиления от плотности излучения, то довольно просто исследовать закономерности усиления излучения [20—29]. Уравнение переноса для потока S в среде с начальным коэффициентом усиления k_0^0 и коэффициентом внутренних потерь ρ имеет вид

$$\frac{dS}{dz} = \left(\frac{k_0^0}{1 + \frac{a_0}{\nu} S} - \rho \right) S, \quad (8)$$

где z — координата, отсчитываемая от начала входа луча в активную среду. Применимость этого уравнения к бегущей волне бесспорна. Интегрирование (8) приводит к следующему выражению:

$$\left[\frac{S(z)}{S(0)} \right]^{\frac{\rho}{k_v^0 - \rho}} = \left[\frac{S(z) - \frac{k_v^0 - \rho}{\alpha_v \rho} v}{S(0) - \frac{k_v^0 - \rho}{\alpha_v \rho} v} \right]^{\frac{k_v^0}{k_v^0 - \rho}} = e^{-\rho z} \quad (9)$$

На рис. 1 приведено несколько кривых зависимости $S(z)$ для разных ρ и $S(0)$ [20]. С увеличением $S(0)$ усиление потока падает. Графики име-

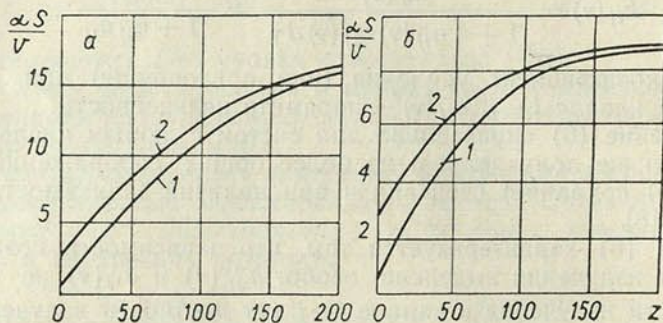


Рис. 1. Зависимость интенсивности потока, проходящего через усиливающую среду, от длины стержня при $k_0 = 0,2 \text{ см}^{-1}$ ($\alpha - \rho = 0,01 \text{ см}^{-1}$; $\delta = 0,02$):

$$1 - \alpha S(0)/v = 1; 2 - 3$$

ют вид кривых насыщения. С увеличением α , $S(0)$ или z значения $S(z)$ стремятся к пределу, определяемому соотношением

$$S \rightarrow S_{\text{пред}} = \frac{v}{\alpha_v} \frac{k_v^0 - \rho}{\rho} \approx \frac{v k_v^0}{\alpha_v \rho} \quad (10)$$

Предельное значение усиливаемого потока не зависит от $S(0)$ и определяется только величиной начального коэффициента усиления и коэффициента потерь. В общем случае это большая величина.

Формула (9) достаточно проста для экспериментального применения. Ею можно пользоваться для определения параметров усиливающей среды [26, 30].

Генерация излучения. Излучение, прошедшее через длинный стержень, не зависит от интенсивности начального потока $S(0)$. Это значит, что такой длинный стержень является генератором излучения.

На практике отрицательный коэффициент усиления создается в ограниченных объемах, и, следовательно, кроме внутренних потерь, имеются потери за счет выхода излучения за пределы стержня. Если полные потери энергии больше энергии, возникающей за счет вынужденных переходов, то генерация отсутствует. При обратной ситуации происходит накопление излучения внутри объема до тех пор, пока не снизится коэффициент усиления в соответствии с формулой (6).

Математическое описание генерации можно дать исходя из энергетических соотношений [25, 31—33]. Выделение энергии в объеме V

$$W_{\text{ген}} = v \int_V dz \int_V k(z, \nu) u(z, \nu) d\nu = v \int_V k_v(z) u(z) dz. \quad (11)$$

Потери внутри объема

$$W_p = v \int_V dz \int_V \rho(z, \nu) u(z, \nu) d\nu = v \int_V \rho_v(z) u(z) dz. \quad (12)$$

Выходящая из объема энергия:

$$S_{\text{вых}} = W_{\text{ген}} - W_p. \quad (13)$$

Подставляя в (11) — (13) значение u , выраженное в соответствии с (6) через k^0 , k и α , получаем:

$$W_{\text{ген}} = \frac{vV}{\alpha_v} [k_v^0 - \bar{k}_v], \quad W_p = \frac{vV}{\alpha_v} \left[k_v^0 \left(\frac{\bar{\rho}}{k_v} \right) - \bar{\rho} \right], \quad (14)$$

и, следовательно,

$$S_{\text{вых}} = \frac{vV}{\alpha_v} \left[(k_v^0 - \bar{k}_v) \left(1 - \frac{\rho}{k_v} \right) + k_v^0 \rho \left(\frac{1}{\bar{k}_v} - \frac{1}{k_v} \right) \right], \quad (15)$$

где

$$\bar{k}_v = \frac{1}{V} \int k_v(z) dz; \quad \frac{1}{\bar{k}_v} = \frac{1}{V} \int \frac{dz}{k_v(z)}. \quad (16)$$

Таким образом, значение выходящего из активного объема излучения определяется только k_v^0 , α_v , ρ и средними значениями коэффициентов усиления \bar{k}_v и $\frac{1}{\bar{k}_v}$. Это означает, что для определения $S_{\text{вых}}$ необязательно знать распределение светового поля и $k_v(z)$ по объему (важно знать их средние величины).

Значения \bar{k}_v и $\frac{1}{\bar{k}_v}$ можно найти, решив уравнения переноса. Их применимость для описания генерации будет рассмотрена несколько ниже. Отметим только, что решение линейных уравнений Максвелла для одномерной задачи, усредненное за период, полностью совпадает с решением соответствующих уравнений переноса [34]. Если уравнения Максвелла нелинейны, то переход к уравнениям переноса имеет приближенный характер, однако степень приближения достаточно высока.

Уравнения переноса излучения в стержне с плоскопараллельными торцами имеют вид

$$\frac{dS_1(z)}{dz} = [k_v(z) - \rho] S_1(z), \quad -\frac{dS_2(z)}{dz} = [k_v(z) - \rho] S_2(z), \quad (17)$$

где

$$k_v = \frac{k_v^0}{1 + \frac{\alpha_v}{v} (S_1 + S_2)} \quad (18)$$

коэффициент усиления; S_1 и S_2 — потоки, распространяющиеся вдоль оси стержня во взаимно противоположных направлениях. Интегрирование (17) приводит к выражениям [24]:

$$\ln \frac{\alpha_v S_1(z)}{v} + \frac{k_v^0}{A} \ln \frac{2\rho \frac{\alpha_v}{v} S_1(z) - k_v^0 + \rho - A}{2\rho \frac{\alpha_v}{v} S_1(z) - k_v^0 + \rho + A} = -\rho z + c_1, \quad (19)$$

$$S_1(z) S_2(z) = c_2. \quad (20)$$

Для определения постоянных c_1 и c_2 следует использовать граничные условия:

$$S_1(0) = r_1 S_2(0), \quad S_2(l) = r_2 S_1(l), \quad (21)$$

где r_1 и r_2 — коэффициенты отражения зеркал; l — длина стержня.

Анализ полученных выражений показывает, что в режиме генерации

$$\bar{k}_v = \bar{\rho} + \frac{1}{l} \ln \frac{1}{\sqrt{r_1 r_2}} = k^{\text{пот}}, \quad \bar{I} \approx \frac{1}{\bar{k}_v}. \quad (22)$$

Это приводит к простой формуле для мощности генерируемого излучения [29, 35, 92]:

$$S_{\text{вых}} = \frac{vls}{a_v} \frac{k_v^0 - \rho - \frac{1}{l} \ln \frac{1}{\sqrt{r_1 r_2}}}{\rho + \frac{1}{l} \ln \frac{1}{\sqrt{r_1 r_2}}} \frac{1}{l} \ln \frac{1}{\sqrt{r_1 r_2}}, \quad (23)$$

где s — площадь поперечного сечения генерируемого пучка. Мощности излучения $S_{1\text{вых}}$ и $S_{2\text{вых}}$, выходящие соответственно через первый и второй торцы, равны:

$$S_{1\text{вых}} = S_{\text{вых}} \frac{(1-r_1) \frac{1}{\sqrt{r_1}}}{\frac{1-r_1}{\sqrt{r_1}} + \frac{1-r_2}{\sqrt{r_2}}}, \quad S_{2\text{вых}} = S_{\text{вых}} \frac{(1-r_2) \frac{1}{\sqrt{r_2}}}{\frac{1-r_1}{\sqrt{r_1}} + \frac{1-r_2}{\sqrt{r_2}}}. \quad (24)$$

Выражения (23), (24) не вполне строгие. Однако, как показывает детальное сопоставление результатов строгого решения уравнений переноса (17) в широком интервале изменений k_v^0 , ρ , r_1 , r_2 , l с результатами расчета по формулам (23), (24), последние имеют высокую степень точности. Точное решение отличается от (23), (24) на доли процента.

С помощью приведенных выражений нетрудно получить формулы, учитывающие поглощение в покрытиях, наличие внешних зеркал, выводящих пластинок и т. д. [31, 36—38].

Анализ (25), (26) позволяет найти распределение потоков S_1 и S_2 и плотности излучения $(S_1 + S_2)/v$ по длине стержня. В результате можно показать, что потоки S_1 и S_2 экспоненциально изменяются по длине стержня. Плотность излучения максимальна у торцов стержня, в центральной части его она минимальна. При $r_1 = r_2 = 1$ плотность излучения одинакова по всей длине стержня. Излучение выше у торца с большим коэффициентом пропускания (меньшее r).

Выражения (23), (24) также просты для анализа. Во-первых, видно, что для возникновения генерации необходимо, чтобы

$$k_v^0 \geq k^{\text{пот}}. \quad (25)$$

Соотношение (25) является пороговым условием стационарной генерации. Раскрывая зависимость k_v^0 от свойств вещества и мощности накачки, из (25) можно получить выражение для пороговой энергии накачки в различных конкретных системах [10, 35, 39—44], а также оценивать минимальные значения длин и коэффициентов отражения, при которых возникает генерация, и т. д.

Во-вторых, из (22) — (24) видно, что средний коэффициент усиления в стационарном режиме не зависит от свойств вещества и мощности накачки. Следовательно, населенность метастабильного уровня и люминесценция не зависят в режиме генерации от накачки, а являются только функцией r_1, r_2, l, ρ [10, 13, 42].

В-третьих, из формул (23), (24) видна зависимость $S_{\text{вых}}$ от $\rho, k_0^0, \alpha,$ и $k_{\text{пол}}^{\text{пот}} = \frac{1}{l} \ln \frac{1}{\sqrt{r_1 r_2}}$ [21—24, 29, 45]. Несколько кривых $S_{\text{вых}}(k_{\text{пол}}^{\text{пот}})$ изображены на рис. 2. Из рисунка следует, что с изменением коэффици-

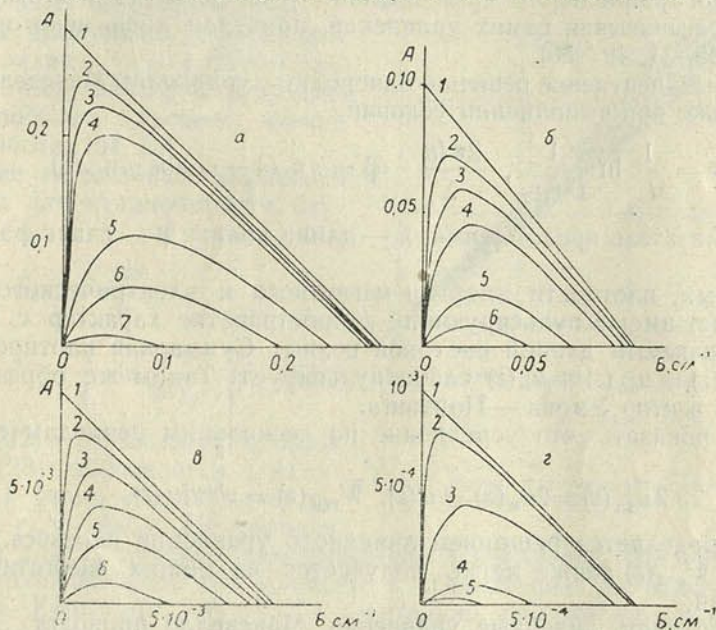


Рис. 2. Зависимость интенсивности потока $S \alpha / slv \equiv A$ от коэффициента полезных потерь $\left(\frac{1}{l} \ln \frac{1}{\sqrt{r_1 r_2}} \equiv B \right)$ ($a - k_0 = 0,3;$
 $\delta - 0,1; \text{в} - 0,01; \text{г} - 0,001 \text{ см}^{-1}$. Значения ρ в см^{-1}):
 а) 1— $\rho=0$; 2—0,002; 3—0,005; 4—0,01; 5—0,05; 6—0,1; 7—0,2;
 б) 1— $\rho=0$; 2—0,002; 3—0,005; 4—0,01; 5—0,03; 6—0,05; в) 1— $\rho=0$;
 2— $1 \cdot 10^{-4}$; 3— $5 \cdot 10^{-4}$; 4— $1 \cdot 10^{-3}$; 5— $2 \cdot 10^{-3}$; 6— $5 \cdot 10^{-3}$; г) 1— $\rho=0$; 2—
 $1 \cdot 10^{-5}$; 3— $1 \cdot 10^{-4}$; 4— $5 \cdot 10^{-4}$; 5— $7 \cdot 10^{-4}$

ентов отражения зеркал изменяется и выходная мощность. Величина и положение максимума $S_{\text{вых}}$ зависят от k_0^0 и ρ . Максимальное значение выходящей энергии соответствует

$$\frac{1}{l} \ln \frac{1}{\sqrt{r_1 r_2}} = \sqrt{k_0^0 \rho} - \rho \tag{26}$$

и равно

$$S_{\text{вых}}^{\text{max}} = \frac{vls}{\alpha} (\sqrt{k_0^0} - \sqrt{\rho})^2 \tag{27}$$

По формулам (23), (24) можно определить размеры стержня, при которых съем энергии с единицы объема максимален (рис. 2). Приведенные формулы могут служить основой для изучения зависимостей характеристик генерации от температуры, если учесть зависимость от температуры и параметров $k_0^0, \alpha,$

Различные закономерности, вытекающие из приведенных выше формул, подтверждаются экспериментально. В результате получены методики для определения параметров квантового генератора [46—48].

Волновые характеристики ОКГ. Информация, содержащаяся в формулах, получаемых на основе решений уравнений переноса, касается энергетических характеристик генерации. Более полная картина изучаемого явления может быть получена путем решения уравнений Максвелла.

Рассмотрим, что дает решение уравнений Максвелла для безграничного плоскопараллельного слоя активного вещества (для нормальных лучей). Не выписывая самих уравнений, приведем лишь некоторые результаты [25, 31, 49—55].

Во-первых, ненулевое решение однородных уравнений Максвелла возможно только при выполнении условий:

$$k = \frac{1}{l} \ln \frac{1}{V r_1 r_2}, \quad \frac{2\pi l n}{\lambda} - \beta = s\pi \quad (s - \text{целое число}), \quad (28)$$

где n — показатель преломления; λ — длина волны; β — сдвиг фазы при отражении.

Во-вторых, плотности энергии магнитного и электрического полей $u_m(z)$ и $u_{эл}(z)$ имеют пульсирующий в пространстве характер с периодом, определяемым длиной световой волны. Суммарная плотность излучения $u(z) = u_{эл}(z) + u_m(z)$ слабо пульсирует. Таким же образом ведет себя и вектор Умова — Пойтинга.

Можно показать, что усреднение по нескольким периодам пульсаций дает

$$2\bar{u}_{эл}(z) = 2\bar{u}_m(z) = u(z), \quad \bar{W}_{ген}(z) = vk^{пот}u(z), \quad (29)$$

где $u(z)$ определяется решением линейного уравнения переноса. Выражение для $\bar{W}_{ген}(z)$ также легко получается из общих энергетических соотношений.

Таким образом, линейные уравнения Максвелла приводят лишь к дополнительному фазовому условию генерации (28), согласно которому в стационарном режиме возможны решения с дискретным набором частот.

К аналогичным выводам можно прийти и при анализе решений с наклонным падением лучей.

Рассмотрим, что дает решение нелинейных уравнений Максвелла [56—58]. В этом случае комплексный показатель преломления \tilde{n} (или соответствующая ему диэлектрическая постоянная $\epsilon = \tilde{n}^2$) зависит от плотности излучения $u \sim |E|^2$. Подставляя в (1) вместо y_{ij} выражение

$$y_{ij} = \frac{k_v^0}{z(\nu)} \frac{1}{1 + \alpha u} = \frac{k_v^0}{z(\nu)} \frac{1}{1 + \alpha' |E|^2}, \quad (30)$$

возводя его в квадрат и пренебрегая малыми членами, получаем

$$\tilde{\epsilon} = \tilde{n}^2 = \epsilon + \frac{c_1}{1 + \alpha' |E|^2} + \frac{ic_2}{1 + \alpha' |E|^2}. \quad (31)$$

Здесь ϵ — не зависящая от поля диэлектрическая постоянная; $\alpha' \sim \alpha$, c_1 и c_2 — постоянные.

Влияние дополнительных нелинейных членов в $\tilde{\epsilon}$ на характер решения можно понять исходя из следующих соображений. Периодическая структура электрического поля E , по-видимому, сохранится и при на-

личии нелинейности. Следовательно, возникает периодичность и в $\tilde{\epsilon}$. В результате распространение плоской волны в стержне напоминает распространение волны в слоистой среде. Число слоев определяется отношением l/λ . Хотя различие показателей преломления слоев очень мало, вследствие большого количества слоев возникает отраженная волна. Возникновение отраженной волны в нелинейной среде и есть, по-видимому, главная особенность решений нелинейных уравнений Максвелла. Отраженная волна в линейной среде может возникнуть только в результате локальных неоднородностей.

Решение нелинейных уравнений — сложная задача. Ограничимся приведением лишь некоторых результатов. Подробности расчета можно найти в работах [57, 58].

Решение нелинейных уравнений Максвелла для стационарного случая дает

$$S_{\text{вых}} = \frac{vls}{\alpha} \times \left[k_0 - Y - \frac{1}{l} \ln \frac{1}{\sqrt{r_1 r_2}} \right]. \quad (32)$$

Отличие (32) от соответствующей формулы (23) заключается в наличии члена Y (при $\rho=0$), который зависит от l, r_1, r_2, k_0, α . Не приводя выражения для Y , отметим некоторые его особенности. Прежде всего Y всегда положительно, что приводит к уменьшению выходящего потока. Далее, $Y=0$ при $r_1=r_2=1$. Следовательно, при больших r_1 и r_2 решение нелинейных уравнений приводит к тем же результатам для выходящего потока, что и решение уравнений переноса. При r_1 и $r_2 \sim 50\%$ отклонения могут быть более заметны. Наибольшее относительное влияние Y на интенсивность выходящего потока наблюдается при малых $S_{\text{вых}}$. С увеличением l уменьшается Y . Чем больше l , тем слабее влияние дополнительных отражений внутри слоя.

На рис. 3 приведены результаты расчета $\alpha S_{\text{вых}}/vl$ в зависимости от $k_0 - \frac{1}{l} \ln \sqrt{\frac{1}{r_1 r_2}}$ при разных коэффициентах отражения $r_1 = r_2 = r$.

Прямая 1 соответствует приближению теории переноса. Из рисунка следует, что отклонение результатов обеих теорий относительно невелико и даже в предельном случае (при малых $S_{\text{вых}}$) составляет всего 33%.

Расчеты работ [57, 58] выполнены для идеального случая. В частности, предположения об однородности слоя никогда не выполняются, поскольку n и l заметно варьируются в любом кристалле. Следовательно, собственная хаотичная неоднородность среды может превысить периодические неоднородности за счет действия поля. В этом случае фазы волн можно не учитывать и при расчетах выходящих лучей пользоваться простыми формулами теории переноса.

Вывод формулы (32) предполагает полную монохроматичность излучения. На самом деле генерируется несколько длин волн, что также нарушает строгую периодичность показателя преломления. Это в свою

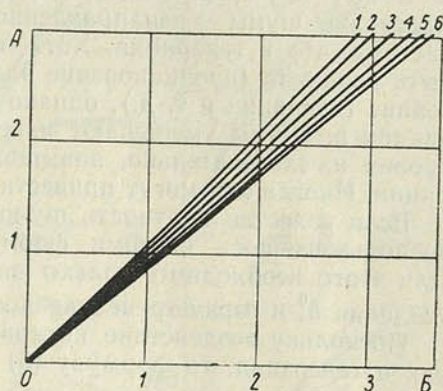


Рис. 3. Зависимость $\alpha S_{\text{вых}}/vl \equiv A$ от $k_0 - \frac{1}{l} \ln \frac{1}{\sqrt{r_1 r_2}} \equiv B$:

2 — $r_1 = r_2 = 0,96$; 3 — 0,75; 4 — 0,5; 5 — 0,11; 6 — 0,03. Кривая 1 рассчитана по формуле (23), кривые 2—6 — по формуле (32)

очередь приводит к возможности использования соотношений типа (23), (24).

Таким образом, при описании энергетических характеристик генерации в большинстве случаев не следует пользоваться уравнениями Максвелла. Однако, когда речь идет о модовых свойствах генератора (генерации различных частот и направлений), необходимо решать волновые уравнения.

Учет шумов в ОКГ. На работу генераторов сильное влияние оказывают шумы — ненаправленное и некогерентное излучение той же частоты, что и генерация. Хотя природа возникновения шумов может быть различна (проникновение радиации накачки, люминесценция, рассеяние генерации и т. д.), однако характер их влияния на работу ОКГ одинаков. Шумы уменьшают инверсную населенность метастабильного уровня и, следовательно, повышают порог и снижают мощность генерации. Иногда они могут привести к срыву генерации.

Если известна плотность шумов $u^{\text{ш}}$, то их влияние можно учесть, воспользовавшись общими формулами для стационарной генерации. Для этого необходимо только видоизменить начальный коэффициент усиления k_v^0 и параметр нелинейности α , [59—61].

Поскольку воздействие шумов на инверсную населенность такое же, как и генерации, то формулу (6) следует переписать в виде

$$k_v = \frac{k_v^0}{1 + \alpha_v u^{\text{ш}} + \alpha_v u^{\text{ген}}} = \frac{\frac{k_v^0}{1 + \alpha_v u^{\text{ш}}}}{1 + \frac{\alpha_v u^{\text{ген}}}{1 + \alpha_v u^{\text{ш}}}} = \frac{k_0^*}{1 + \alpha^* u^{\text{ген}}}. \quad (33)$$

Введение эффективных k_0^* и α^* оставляет все остальные формулы для характеристик генерации неизменными.

Плотность излучения шумов для твердотельных ОКГ сравнительно просто может быть оценена экспериментально [46]. Эти оценки показывают, что для реальных длин стержней твердотельных ОКГ (рубин, неодимовое стекло, флюориты) плотность шумов сравнима с плотностью генерируемого излучения. При этом шумы растут с увеличением размеров стержня и коэффициента потерь.

Зависимость плотности излучения шумов от размеров стержня, коэффициента усиления, свойств вещества и т. д. можно исследовать геометрически [61—68].

Если активный материал высокого качества (мал коэффициент внутренних потерь) и приняты меры для фильтрации излучения накачки в полосе генерации, то основной причиной возникновения шумов является люминесценция. В случае полированного стержня длины l , используемого в генераторе с выносными зеркалами, для плотности шумов $u^{\text{ш}}$ запишем выражение

$$u^{\text{ш}} = \frac{2a\varepsilon}{kv} \left[\frac{(1 - r_\phi)(e^{kbl} - 1)}{kbl(1 - r_\phi e^{kbl})} - 1 \right]. \quad (34)$$

Здесь r_ϕ — эффективный коэффициент отражения люминесценции от торцов стержня; v — скорость света в стержне; a и b — постоянные, учитывающие неосевой ход лучей в цилиндре. Для их оценки можно воспользоваться выражениями:

$$a \approx \frac{(n-1)(n+3)}{2(n+1)^2}, \quad b \approx \frac{1}{1 - \frac{1}{n}} \ln n, \quad (35)$$

где n — показатель преломления активной среды. В случае рубина ($n \sim 1,76$) $a \sim 0,24$, $b \sim 1,31$; в случае неодимового стекла ($n \sim 1,53$) $a \sim 0,19$, $b \sim 1,21$. Значение r_ϕ можно принять равным френелевскому коэффициенту отражения при нормальном падении (для рубина $r_\phi \sim 0,08$, для стекла $r_\phi \sim 0,04$).

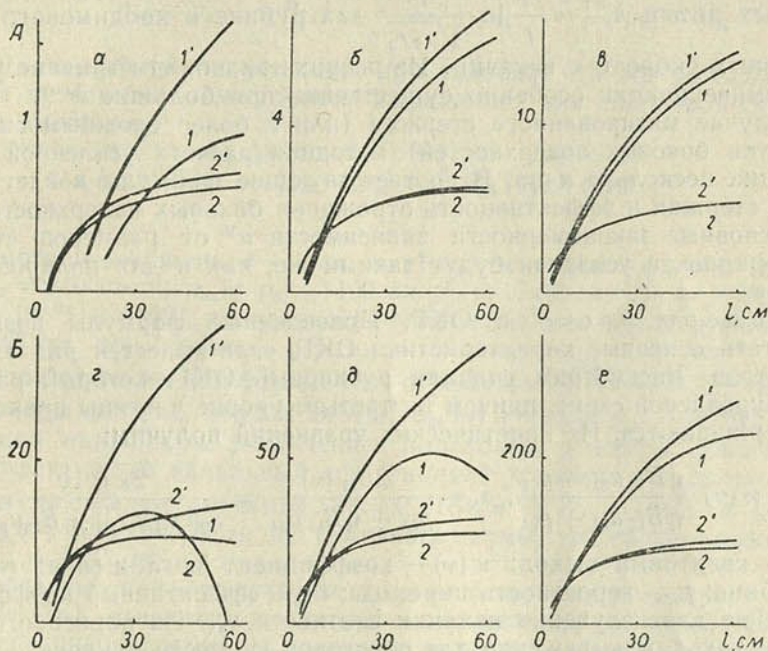


Рис. 4. Зависимость мощности генерации $B_{32}S/\Delta\nu sv(p_{32} + p_{31}) \equiv A$ и $2B_{21}S/\Delta\nu sv p_{21} \equiv B$ от длины стержня при $\rho = 0,02 \text{ см}^{-1}$ с учетом (1 и 2) и без учета (1' и 2') усиленной люминесценции (а, б, в — неодимовое стекло с $\chi = 10 \text{ см}^{-1}$; г, д, е — рубин с $\chi = 0,4 \text{ см}^{-1}$; 1 и 1' — $\sqrt{r_1 r_2} = 0,4$; 2 и 2' — 0,8):

а — $\eta B_{14}u_{41}/(p_{32} + p_{31}) = 0,01$; б — 0,03; в — 0,06; г — $\eta B_{13}u_{31}/p_{21} = 5$; д — 10; е — 30

Испускательная способность ε связана с инверсной населенностью y_{ij} соответственно для рубина и неодимового стекла:

$$\varepsilon = A_{21} h \nu_{21} \frac{n_0}{2} (1 + y_{21}) = A_{21} h \nu_{21} \frac{n_0}{2} \left(1 + \frac{k^{\text{пот}}}{\chi} \right), \quad (36)$$

$$\varepsilon \geq A_{32} h \nu_{32} n_0 y_{ij} = A_{32} h \nu_{32} n_0 \frac{k^{\text{пот}}}{\chi}, \quad (37)$$

где A_{ij} — вероятность спонтанного перехода с метастабильного уровня.

Максимальное значение коэффициента усиления k в генерирующем стержне равно коэффициенту потерь $k^{\text{пот}}$. Однако из-за того что люминесценция заключена в некотором спектральном интервале, в формулу (34) вместо k следует подставлять некоторое эффективное значение. В качестве заниженных оценок возьмем $k = 0,71 k^{\text{пот}}$ для гауссовой и $k = 0,5 k^{\text{пот}}$ для дисперсионной форм линии люминесценции.

Формулы (34), (35) позволяют оценить плотность шумов в зависимости от l и $k^{\text{пот}}$ для генерирующего стержня и, следовательно, после подстановки $u^{\text{ш}}$ в (33) и затем в (23), (24) дают возможность проана-

лизировать зависимости $S_{\text{вых}}$ от параметров вещества, резонатора и накачки. Для негенерирующего стержня формула (34) позволяет оценить количество запасенной в стержне энергии, которая может высвободиться в виде стимулированного излучения.

На рис. 4 представлены кривые зависимости $S_{\text{вых}}$ от коэффициента полезных потерь $k_{\text{пол}}^{\text{пот}} = \frac{1}{l} \ln \frac{1}{\sqrt{r_1 r_2}}$ для рубина и неодимового стекла при разных скоростях накачки. Из рисунка видно, что влияние усиленной люминесценции особенно существенно при больших $k^{\text{пот}}$.

В случае матированного стержня (или с более сложным способом обработки боковых поверхностей) методика расчета усиленной люминесценции несколько иная. В соответствующие формулы войдет также радиус стержня и эффективность отражения боковых поверхностей. Однако основные закономерности зависимости $u^{\text{ш}}$ от размеров стержня и коэффициента усиления будут такими же, как и для полированного стержня.

Примеры расчета ОКГ. Приведенные формулы позволяют рассчитать основные характеристики ОКГ, если известен ряд входных параметров. Рассмотрим сначала рубиновый ОКГ, который работает по трехуровневой схеме, причем на третьем уровне частицы практически не задерживаются. Из кинетических уравнений получим:

$$k_v^0 = \kappa(v) \frac{\eta B_{13} u_{31} - p_{21}}{\eta B_{13} u_{31} + p_{21}}, \quad \alpha_v = \frac{2B_{21}(v)}{p_{21} + \eta B_{13} u_{31}} = \frac{2\kappa(v)v}{n_0 h \nu (p_{21} + \eta B_{13} u_{31})}, \quad (38)$$

где η — квантовый выход; $\kappa(v)$ — коэффициент поглощения; R_1 — линии рубина; p_{21} — вероятность перехода; B_{13} — эффективный коэффициент Эйнштейна для излучения накачки плотности u_{31} . Из порогового условия (25) находим выражение для пороговой скорости накачки

$$\eta B_{13} u_{31}^{\text{пор}} = p_{21} \frac{1 + \frac{k^{\text{пот}}}{\kappa} + 2 \frac{k^{\text{пот}}}{\kappa} \int \frac{B_{21}(v) u^{\text{ш}}(v) dv}{-p_{21}}}{1 - \frac{k^{\text{пот}}}{\kappa}}. \quad (39)$$

Пусть имеем стержень: $l = 12$ см, $s = 1$ см², $\kappa = 0,4$ см⁻¹ ($n_0 = 1,6 \cdot 10^{19}$ см⁻³), $p_{21} = 300$ сек⁻¹, $\rho = 0,02$ см⁻¹, $n = 1,76$, $h\nu_{21} = 2,8 \cdot 10^{-12}$ эрг, длительность генерации T равна $500 \cdot 10^{-6}$ сек при накачке $\eta B_{13} u_{31} = 30 p_{21}$. Возьмем сначала зеркала с $\sqrt{r_1 r_2} = 0,3$. Тогда $k_v^0 = 0,374$ см⁻¹, $\alpha = 0,033$ см³/эрг, $k_{\text{пол}}^{\text{пот}} = 0,10$ см⁻¹, $k^{\text{пот}} = 0,12$ см⁻¹. Плотность шумов $B_{21}(v) u^{\text{ш}}/p_{21} = 5,67$ и, следовательно, $k_0^* = 0,229$ см⁻¹, $\alpha^* = 0,0200$ см³/эрг. Пороговая скорость накачки $\eta B_{13} u_{31}^{\text{пор}}$, согласно (39), равна $6,73 p_{21}$. При отсутствии шумов $\eta B_{13} u_{31}^{\text{пор}} = 1,86 p_{21}$. Значение генерируемой энергии $S_{\text{вых}} T = 46$ дж, при отсутствии шумов $S_{\text{вых}} T = 66$ дж. Если накачку уменьшить в три раза ($\eta B_{13} u_{31} = 10 p_{21}$), то при наличии шумов $S_{\text{вых}} T = 15$ дж.

Из рис. 4,б видим, что максимальное количество генерируемого излучения соответствует $k_{\text{пол}}^{\text{пот}} \sim 0,05$ см⁻¹ ($\sqrt{r_1 r_2} = 0,55$). Для этого случая при $\eta B_{13} u_{31} = 30 p_{21}$ влияние шумов мало и $S_{\text{вых}} T = 6,6 T \frac{l s p_{21} n_0 h \nu_{21}}{\kappa} = 66,5$ дж. Если накачку уменьшить в три раза, то $S_{\text{вых}} T = 20$ дж.

ОКГ на неодимовом стекле относятся к генераторам, работающим по четырехуровневой схеме. В неодимовом стекле можно считать, что вероятность p_{43} велика и, следовательно, частицы на четвертом уровне не

задерживаются. Вероятности p_{32} и p_{31} отличны от нуля. Так как о скорости ухода частиц со второго уровня ничего не известно, p_{21} положим также большим. Из кинетических уравнений получим:

$$k_v^0 = \kappa(v) \frac{\eta B_{14} u_{41}}{p_{32} + p_{31} + \eta B_{14} u_{41}} \approx \frac{\kappa \eta B_{14} u_{41}}{p_{32} + p_{31}}, \quad \alpha \approx \frac{B_{32}(v)}{p_{32} + p_{31}}, \quad (40)$$

где $\kappa(v)$ — коэффициент усиления при условии, что все частицы находятся на метастабильном уровне. Выражение для пороговой скорости накачки имеет вид

$$\eta B_{14} u_{41}^{\text{пор}} = \frac{k^{\text{пот}}}{\kappa} [p_{32} + p_{31} + \int B_{32}(v) u^{\text{ин}}(v) dv]. \quad (41)$$

Рассмотрим стержень: $l = 12 \text{ см}$, $s = 1 \text{ см}^2$, $\kappa = 10 \text{ см}^{-1}$ ($n_0 = 6 \cdot 10^{20} \text{ см}^{-3}$), $A_{32} \sim p_{32} = 840 \text{ сек}^{-1}$, $p_{32} + p_{31} = 1400 \text{ сек}^{-1}$, $\rho = 0,02 \text{ см}^{-1}$, $n = 1,53$, $h\nu_{32} = 1,875 \cdot 10^{-12} \text{ эрг}$ [69], длительность генерации, как и для рубина, $T = 500 \cdot 10^6 \text{ сек}$ при накачке $\eta B_{14} u_{41} = 0,03$ ($p_{32} + p_{31} = 42 \text{ сек}^{-1}$). Пусть зеркала имеют те же коэффициенты отражения ($\sqrt{r_1 r_2} = 0,3$). Подсчет дает: $k_v^0 = 0,3 \text{ см}^{-1}$, $\alpha_v = 0,124 \text{ см}^3/\text{эрг}$, $B_{32}(v) u^{\text{ин}}/(p_{32} + p_{31}) = 0,386$. Наличие шумов приводит к увеличению пороговой мощности накачки на 39%. Эффективный начальный коэффициент усиления и параметр нелинейности принимают значения: $k_0^* = 0,216 \text{ см}^{-1}$, $\alpha^* = 0,0892$. В результате $TS_{\text{вых}} = 10,6 \text{ дж}$. Если не учитывать шумы, то генерируемая энергия $TS_{\text{вых}} = 14,2 \text{ дж}$.

Приведенные примеры расчета энергии генерации рубинового и неодимового ОКГ относятся к случаю, когда источником шума является люминесценция. Если шумы возникают и за счет рассеяния генерации, то энергия стимулированного излучения будет еще меньше.

В данном параграфе был рассмотрен ряд вопросов, касающихся стационарной генерации. Подобная методика может быть использована и для многих других задач теории генерации излучения. Так, определяя α_v и k_v^0 для различных веществ, нетрудно дать рекомендации для подбора сред, перспективных на генерацию [10, 70, 71]. Подобная методика может быть использована, например, для определения к. п. д. генератора, влияния дополнительных уровней и т. д. [43, 72].

§ 2. НЕСТАЦИОНАРНЫЙ РЕЖИМ ОКГ

Исследование нестационарного режима ОКГ важно не только для выяснения сущности процессов и определения параметров генератора. В настоящее время все большее практическое применение находят генераторы с переменными потерями, испускающие интенсивный и короткий импульс когерентного света. Приобретает интерес получение стационарной или квазистационарной генерации и последующей управляемой модуляции генерируемого излучения. Важно знать условия формирования одномодового режима ОКГ. Все эти вопросы можно решить, если будет глубоко изучен нестационарный режим квантовых генераторов.

Основные уравнения. При решении нестационарных задач можно исходить из уравнений Максвелла и уравнений для квантовомеханической матрицы плотности [2, 56]. Однако этот путь довольно сложен и не всегда быстро приводит к цели. Поэтому для исследования нестационарного режима необходимо применять более простые уравнения переноса и кинетические уравнения вероятностного метода. Неста-

ционарное уравнение переноса для потока излучения яркости S , распространяющегося вдоль оси x , имеет вид [73]

$$\frac{\partial S(x, t)}{\partial x} + \frac{1}{v} \frac{\partial S(x, t)}{\partial t} = [k(x, t) - \rho] S(x, t), \quad (42)$$

где $k(x, t)$ — коэффициент усиления в точке x в момент t ; ρ — коэффициент внутренних потерь.

Если в среде существуют встречные потоки, как, например, в квантовых генераторах, вместо одного уравнения необходимо написать два: одно для яркости потока S_1 , распространяющегося в положительном направлении оси x , второе для яркости потока S_2 , распространяющегося в противоположном направлении:

$$\frac{\partial S_1(x, t)}{\partial x} + \frac{1}{v} \frac{\partial S_1(x, t)}{\partial t} = [k(x, t) - \rho] S_1(x, t), \quad (43)$$

$$-\frac{\partial S_2(x, t)}{\partial x} + \frac{1}{v} \frac{\partial S_2(x, t)}{\partial t} = [k(x, t) - \rho] S_2(x, t). \quad (44)$$

В задаче о распространении потоков в активном стержне с коэффициентами отражения на торцах r_1 и r_2 (43), (44) следует решать при граничных условиях:

$$\begin{aligned} S_1(0, t) &= (1 - r_1) S_{10}(t) + r_1 S_2(0, t), \\ S_2(l, t) &= r_2 S_1(l, t), \end{aligned} \quad (45)$$

где $S_{10}(t)$ — яркость потока, падающего на переднюю грань стержня.

Уравнения (43), (44) вытекают из уравнений Максвелла, если последние усреднить по периоду световой волны [34]. Вместе с тем полученные (43), (44) из уравнений Максвелла показывает, что они неприменимы к сильно поглощающим (усиливающим) средам, а также для быстропеременных процессов. Однако осуществляемые на опыте коэффициенты усиления лежат далеко за пределами неприменимости уравнений переноса. Длительность отдельных импульсов лазерного излучения (10^{-9} — 10^{-6} сек) также достаточно велика, и, следовательно, (43), (44), по-видимому, применимы для описания нестационарного режима.

Коэффициент усиления в уравнениях (43), (44) является не только функцией параметров среды, но и величины поля. Поэтому решение уравнений переноса с граничными условиями (45) затруднительно, и в ряде случаев систему (43) — (45) следует заменять более простым уравнением. Это тем более имеет смысл, если учесть, что в кинетические уравнения, из которых определяется $k(x, t)$, входит плотность излучения, а не потоки S_1 и S_2 .

Усредняя (43), (44) по длине стержня с учетом граничных условий, подставляя вместо $k(x, t)$ выражение (3) и вводя среднюю по объему плотность излучения $u(t) = \frac{\bar{S}_1(t) + \bar{S}_2(t)}{v}$, вместо (43)—(45) получаем

$$\frac{du}{dt} = -v^* [k^{\text{пот}} - \kappa y_{ij}] u + \varepsilon. \quad (46)$$

Здесь $k^{\text{пот}}$ — коэффициент потерь, определяемый (22); κ — максимально возможный коэффициент усиления; y_{ij} — инверсная населенность;

$$v^* = \frac{v}{1 + \frac{L}{\ln}}, \quad (47)$$

где L — длина воздушного промежутка в генераторе с разнесенными зеркалами; ln — оптическая длина стержня. Член ε характеризует увеличение плотности излучения генерации за счет сторонних источников (люминесценция, внешнее излучение и т. д.).

Уравнение (46) может быть получено не только путем усреднения уравнений переноса [74], но и путем рассмотрения процессов накопления и расхода радиации внутри плоскопараллельного слоя [75—78].

К уравнению (46) следует присоединить уравнения (5), с помощью которых можно было бы определить инверсную населенность $y_{ij} = (n_i - n_j)/n_0$, входящую в (46).

Во многих случаях систему (5) можно свести к одному уравнению для инверсной населенности рабочего уровня y_{ij} [79, 80]

$$\frac{dy_{ij}}{dt} = G - Dy_{ij} - 2B_{ij}(\nu) u_{ij} y_{ij}. \quad (48)$$

В случае рубинового ОКГ:

$$G = \eta B_{13} u_{31} - p_{21}, \quad D = \eta B_{13} u_{31} + p_{21}. \quad (49)$$

В случае четырехуровневых ОКГ в режиме генерации:

$$G \approx 2\eta B_{14} u_{41}, \quad D \approx 2(p_{32} + p_{31} + \eta B_{14} u_{41}). \quad (50)$$

В режиме накопления частиц на метастабильном уровне коэффициенты G и D для четырехуровневых ОКГ в два раза меньше.

Система уравнений (46) — (50) (или более общая система (46) и (5)) является исходной для решения задач нестационарной генерации. Подобные системы использовались многими авторами [81—87], однако не всегда правильно выбирались коэффициенты G и D .

Приведенных выше уравнений достаточно, чтобы решить многие вопросы нестационарного свечения ОКГ (одновременная генерация нескольких мод, пиковый режим, режим гигантских импульсов, генерация с просветляющимися затворами, усиление моноимпульсов).

Одновременная генерация многих мод. Изучение закономерностей сосуществования многих мод в ОКГ в настоящее время весьма актуально. Эксперимент показывает, что строго стационарного режима не бывает. Высвечивается одновременно много мод (типов колебаний), различающихся частотой и направлением. Эти моды изменяются во времени хаотически. В обычной пиковой генерации, как правило, не наблюдается правильного чередования импульсов. Лишь при приближении к одномодному режиму или, наоборот, при переходе к генерации большого числа мод наблюдается упорядоченность пульсаций. Одновременная генерация многих мод приводит к значительному угловому и спектральному расширению генерируемого пучка света. Все это затрудняет практическое использование ОКГ.

Несмотря на важность изучения этого вопроса, закономерности одновременной генерации многих мод менее всего изучены. Имеется ряд работ, посвященных теоретическому изучению взаимодействия мод в ОКГ [88—93]. Авторы некоторых из них исходят из уравнений Максвелла и квантово-механических уравнений для матрицы плотности.

Рассмотрим задачу одновременного сосуществования мод при однородном расширении линий, решенную на основании приведенных выше уравнений [91—93]. Если происходит одновременная генерация нескольких мод, то для плотности излучения каждой моды можно написать свое уравнение

$$\frac{du_i}{dt} = -v^* [k_i^{\text{пот}} - \alpha_i y] u_i + \varepsilon_i, \quad i = 1, 2, 3, \dots \quad (51)$$

В уравнении (48) в нелинейном члене следует заменить u на Σu_i . Полностью решить эту задачу можно, используя электронную вычислительную машину. Однако ряд первых интегралов можно получить без учета уравнения (48). Для этого следует рассмотреть совместно два уравнения: i -ое и j -ое. Пренебрегая ε_i , из них получим

$$\frac{u_i(t)}{u_i(0)} = \left[\frac{u_j(t)}{u_j(0)} \right]^{\frac{x_i}{x_j}} e^{v^* x_i \left(\frac{k_i^{\text{пот}}}{x_j} - \frac{k_i^{\text{пот}}}{x_i} \right) t}. \quad (52)$$

Отсюда видно, что из двух мод быстрее затухает та, для которой $k^{\text{пот}}/x$ больше. Следовательно, в ОКГ устойчивыми являются моды, для которых $k^{\text{пот}}/x$ минимально.

Формула (52) позволяет оценить угловую и спектральную ширину генерируемого пучка, если известны зависимости $k^{\text{пот}}$ и x от угла и частоты. Пусть, например, генерация происходит вдоль оси стержня и $k^{\text{пот}}$ для всех частот одинаково, а коэффициент усиления задается дисперсионной формулой [94] с полушириной γ . Будем считать, что одновременно в течение времени t_0 сосуществуют моды, относительная интенсивность которых в конце генерации уменьшается в e раз, т. е. показатель экспоненты в (52) равен единице. Отсюда получаем оценку для спектральной ширины излучения, генерируемого за время t_0 :

$$\Delta\nu \approx \frac{2\gamma}{V v^* k^{\text{пот}} t_0}. \quad (53)$$

Если, например, $2\gamma = 10 \text{ см}^{-1}$, $v^* = 6 \cdot 10^9 \text{ см/сек}$, $k^{\text{пот}} = 0,04 \text{ см}^{-1}$, $t_0 = 200 \cdot 10^{-6} \text{ сек}$, то $\Delta\nu = 0,05 \text{ см}^{-1}$.

Во многих ОКГ имеются моды, направление излучения которых не совпадает с осевым (например, моды, распространяющиеся по спирали в полированном стержне). Коэффициент потерь для таких мод иногда значительно меньше, чем для осевых. Они устойчивы и подавляют генерацию в осевом направлении. Чтобы возникла генерация в осевом направлении, необходимо подавить кольцевые моды соответствующей обработкой боковых поверхностей (матировка, срезы, погружение в жидкость) [92, 95].

Пичковый режим ОКГ. В осциллограммах генерации и импульса накачки обычно видны две области: отсутствия генерации и хаотичных пичков генерации. Начальный участок осциллограммы характерен тем, что в это время под действием излучения накачки происходит накопление частиц на метастабильном уровне. И только в момент $t_{\text{разг}}$, когда коэффициент усиления $x y_{ij} = k^{\text{пот}}$, возникает генерация. Она может быть пичковой и беспичковой, а пички в свою очередь упорядоченные и хаотичные.

Исследовать описанный режим генерации можно с помощью уравнений (46) и (48).

Накопление частиц на метастабильном уровне описывается следующей формулой, полученной интегрированием (48) при $u=0$ [66, 96—99]:

$$y_{ij}(t) = e^{-\int_0^t D(t') dt'} \left[\int_0^t G(t'') e^{\int_0^{t''} D(t') dt'} dt'' + y_{ij}(0) \right], \quad (54)$$

где G и D в случае рубина задаются формулами (49), а в случае четырехуровневого ОКГ — величинами (50), уменьшенными в два раза. Накачка u_{31} и u_{41} в этих формулах может иметь произвольную зависи-

мость от времени. Для рубина $y_{ij}(0) = -1$, для четырехуровневых ОКГ $y_{ij}(0) = 0$.

Приравняв (54) $k^{пот}/\chi$ и подставив $t = t_{разг}$, получим выражение для определения времени появления генерации $t_{разг}$

$$\frac{k^{пот}}{\chi} = e^{-\int_0^{t_{разг}} D(t') dt'} \left[\int_0^{t_{разг}} G(t') e^{\int_0^{t'} D(t'') dt''} dt' + y_{ij}(0) \right]. \quad (55)$$

Если импульс накачки прямоугольный ($u^{нак} = 0$ при $t \leq 0$; $u^{нак} = const$ при $t > 0$), то из (55) имеем

$$t_{разг} = \frac{1}{D} \ln \frac{G/D - y_{ij}(0)}{G/D - k^{пот}/\chi}. \quad (56)$$

Пусть для рубина $\eta B_{13} u_{31} = 20 p_{21}$, $k^{пот}/\chi = 0,1$, $p_{21} = 300 \text{ сек}^{-1}$, тогда, учитывая, что $D = 21 p_{21}$, $G = 19 p_{21}$, $y_{ij}(0) = -1$, получаем $t_{разг} = 137 \cdot 10^{-6} \text{ сек}$.

Формулу (56) можно использовать для экспериментального определения параметров ОКГ. В самом деле, $k^{пот}$, $t_{разг}$ и форма импульса накачки довольно точно измеряются экспериментально. Из совокупности значений $t_{разг}$ при разных $k^{пот}$ по кривым $t_{разг}(k^{пот})$ при разных мощностях накачки можно определить коэффициент внутренних потерь ρ и скорость накачки $\eta B u^{нак}$ в максимуме [98, 100].

Этот метод удобен для нахождения параметров генератора на неодимовом стекле [98]. Определение параметров ОКГ по измерению $t_{разг}$ и $f(t)$ в случае рубина более сложно, но также перспективно [99, 100].

В больших стержнях возникает интенсивная усиленная люминесценция (шумы), затрудняющая накопление частиц на метастабильном уровне. В этом случае кривые $y_{ij}(t)$ при высокой инверсной населенности идут ниже кривых, не учитывающих усиленную люминесценцию. Время появления генерации $t_{разг}$ увеличивается [66].

Как только в системе достигается такая инверсная населенность, когда коэффициент усиления χy_{ij} превышает коэффициент потерь, плотность излучения u_{ij} начинает быстро расти и возникает генерация [96, 101—103].

На рис. 5 представлено несколько кривых $u_{21}(t)$ и $y_{21}(t)$, являющихся решением (46) и (48) в случае рубина. Расчет выполнен на электронной вычислительной машине. Из рисунка видно, что плотность излучения сильно пульсирует во времени. Величина отдельных всплесков мощности может на порядки превосходить уровень стационарной генерации. Всплески мощности постепенно уменьшаются, переходя к стационарному режиму. Постепенно уменьшается до некоторой постоянной величины и период пульсаций.

Инверсная населенность также пульсирует около стационарной величины $k^{пот}/\chi$, однако эти пульсации значительно слабее пульсаций плотности излучения. Следовательно, пульсируют во времени и люминесценция и коэффициент усиления.

Хотя пульсации плотности излучения велики, тем не менее возможно приближенное аналитическое решение уравнений (46) и (48) путем их линеаризации. Полагая в (46) и (48)

$$u_{ij} = u_{ij}^{ст} + \Delta u_{ij}, \quad y_{ij} = y_{ij}^{ст} + \Delta y_{ij} \quad (57)$$

($u_{ij}^{ст}$ и $y_{ij}^{ст}$ — решения (46) и (48) при стационарном режиме) и пренебрегая квадратичными членами $\Delta u_{ij} \Delta y_{ij}$, получаем:

$$\frac{d \Delta y_{ij}}{dt} = -\frac{G \kappa}{k^{\text{пот}}} \Delta y_{ij} - 2B_{ij}(\nu) \frac{k^{\text{пот}}}{\kappa} \Delta u_{ij}, \quad \frac{d \Delta u_{ij}}{dt} = v^* \kappa u_{ij}^{\text{ст}} \Delta y_{ij}. \quad (58)$$

Система (58) линейна. Ее решение зависит от корней характеристического уравнения

$$\lambda_{1,2} = -\frac{G \kappa}{2k^{\text{пот}}} \pm \sqrt{\left(\frac{G \kappa}{2k^{\text{пот}}}\right)^2 - v^* (\kappa G - Dk^{\text{пот}})}. \quad (59)$$

В случае действительных корней (59) (подкоренное выражение положительно) решение (58) имеет плавный характер. Никаких pulsa-

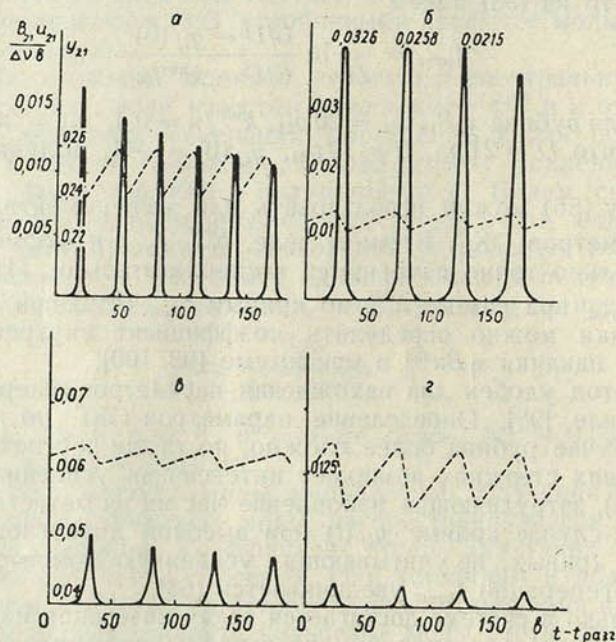


Рис. 5. Зависимость плотности излучения $B_{21}u_{21}/\Delta\nu\delta$ ($b = 2 \cdot 10^7 \text{ сек}^{-1}$) и инверсной населенности y_{21} от времени при $\gamma B_{13}u_{31}/b = 10^{-4}$.

а - $v^* \kappa/b = 1000$ и $v^* k^{\text{пот}}/b = 25$; б - 400 и 5; в - 400 и 25; г - 400 и 50.

ций не наблюдается. В случае комплексно сопряженных корней, т. е. при

$$\left(\frac{G \kappa}{2k^{\text{пот}}}\right)^2 < v^* (\kappa G - Dk^{\text{пот}}), \quad (60)$$

решение (58), а следовательно, (46) и (48) имеет пульсирующий характер:

$$y_{ij}(t) = y_{ij}^{\text{ст}} + c_1 e^{-\theta t} \cos(\omega t + \psi), \quad u_{ij} = u_{ij}^{\text{ст}} + c_2 e^{-\theta t} \cos \omega t. \quad (61)$$

Здесь

$$\omega = \sqrt{v^* (\kappa G - Dk^{\text{пот}}) - \left(\frac{G \kappa}{2k^{\text{пот}}}\right)^2} \quad (62)$$

частота пульсаций;

$$\theta = \frac{G \kappa}{2k^{\text{пот}}}, \quad \psi = \arctg\left(\frac{\omega}{\theta}\right) \quad (63)$$

соответственно постоянная затухания и разность фаз колебаний плотности излучения u_{ij} и избыточной населенности y_{ij} .

Сопоставление расчетов на электронной вычислительной машине и по формулам (61) — (63) показывает удовлетворительное согласие обоих методов расчета.

Из (61) — (63) следует, что временной ход плотности излучения и инверсной населенности зависит от параметров $v^* k^{пот}$, $v^* \chi$, G и D . При выполнении условия (60) системе (46) — (48) удовлетворяет пульси-

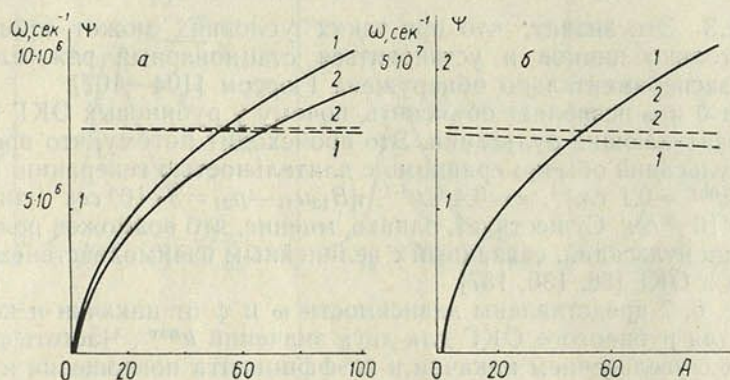


Рис. 6. Зависимость частоты пульсаций ω (—) и фазового сдвига (---) от мощности накачки $\gamma B_{13} u_{31} / \rho_{21} \equiv A$ в рубиновом ОКГ ($\rho_{21} = 300 \text{ сек}^{-1}$, $v^* = 10^{10} \text{ см/сек}$):

$a - \chi = 0,4 \text{ см}^{-1}$; $b - \chi = 10 \text{ см}^{-1}$; $1 - k^{пот} = 0,02 \text{ см}^{-1}$, $2 - 0,1$

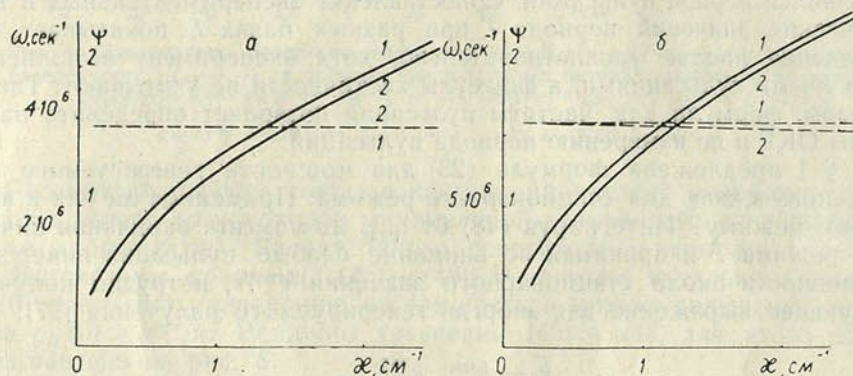


Рис. 7. Зависимость частоты пульсаций ω (—) и фазового сдвига (---) от коэффициента поглощения R_1 -линии рубина ($\rho_{21} = 300 \text{ сек}^{-1}$, $v^* = 10^{10} \text{ см/сек}$):

$a - \gamma B_{13} u_{31} = 5 \rho_{21}$; $b - \gamma B_{13} u_{31} = 20 \rho_{21}$; $1 - k^{пот} = 0,02 \text{ см}^{-1}$, $2 - 0,1$

рующее решение. Как показывают оценки, для большинства реальных генераторов условие (60) практически всегда выполняется. Невыполнение (60) и, следовательно, отсутствие пульсирующего режима возможно при очень больших накачках либо при очень малых $k^{пот}$, либо при очень большой базе интерферометра, что в одинаковой степени трудно осуществимо.

Пульсации могут быть незаметны, если велика скорость приближения системы к стационарному состоянию (велико θ). Действительно, отношение двух следующих друг за другом максимумов плотности излучения Δu_{ij} равно $e^{\frac{2\pi}{\omega} \theta}$. Если характеристики ОКГ таковы, что θ ве-

лико, а ω мало, то стационарный режим устанавливается после возникновения одного или двух пичков. Такой режим в случае ОКГ на рубине осуществляется путем увеличения накачки либо увеличением κ (понижением температуры), либо раздвижением зеркал интерферометра (уменьшение v^*) и, наконец, уменьшением $k^{\text{пот}}$. Так, например, если в рубине $\eta B_{13} u_{31} - p_{21} = 20 p_{21}$, $k^{\text{пот}} = 0,05 \text{ см}^{-1}$, $\kappa = 5 \text{ см}^{-1}$, $\frac{L}{ln} = 9$, то $e^{2\pi \frac{\theta}{\omega}} \approx \approx e^{0,27} = 1,3$. Это значит, что при таких условиях может проявиться лишь несколько пичков и установиться стационарный режим. Такая ситуация экспериментально обнаружена Гюрсом [104—107].

Оценка θ и ω позволяет объяснить, почему у рубиновых ОКГ наблюдаются незатухающие пульсации. Это происходит потому, что время затухания пульсаций обычно сравнимо с длительностью генерации. Например, при $k^{\text{пот}} = 0,1 \text{ см}^{-1}$, $\kappa = 0,4 \text{ см}^{-1}$, $\eta B_{13} u_{31} - p_{21} = 3 \cdot 10^3 \text{ сек}^{-1}$ значение $1/\theta = 0,17 \cdot 10^{-3} \text{ сек}$. Существует, однако, мнение, что возможен режим незатухающих пульсаций, связанный с нелинейным взаимодействием типов колебаний в ОКГ [88, 136, 137].

На рис. 6, 7 представлены зависимости ω и ψ от накачки и коэффициента κ для рубинового ОКГ для двух значений $k^{\text{пот}}$. Частота пульсаций растет с увеличением накачки и коэффициента поглощения κ R_1 -линии рубина. С увеличением $k^{\text{пот}}$ частота пульсаций падает.

В работах [99, 100, 104—108] подобные закономерности зависимости периода пульсаций от параметров вещества резонатора и накачки наблюдались экспериментально. В частности, в [99, 100] по времени разгорания генерации $t_{\text{разг}}$ определялась скорость накачки и затем рассчитывался период пульсаций. Сопоставление экспериментальных и теоретических значений периода T при разных базах L показывает, что совпадение вполне удовлетворительно, хотя эксперимент выполнен с хаотичными пульсациями, а формулы хаотичности не учитывают. Таким образом, формула для частоты пульсаций позволяет определять параметры ОКГ и по измерению периода пульсаций.

В § 1 предложена формула (23) для мощности генерируемого потока, полученная для стационарного режима. Применима ли она к пичковому режиму? Интегрируя (48) от $t_{\text{разг}}$ до момента окончания пичкового режима T и принимая во внимание слабые пульсации инверсной населенности около стационарного значения $k^{\text{пот}}/\kappa$, нетрудно получить следующее выражение для энергии генерируемого излучения [97]:

$$S = lsv \frac{\bar{k}_0 - k^{\text{пот}}}{\bar{\alpha}} \frac{k_{\text{пол}}^{\text{пот}}}{k^{\text{пот}}} (T - t_{\text{разг}}), \quad (64)$$

где

$$\bar{k}_0 = \kappa \int_{t_{\text{разг}}}^T G(t) dt / \int_{t_{\text{разг}}}^T D(t) dt, \quad \bar{\alpha} = 2B_{ij}(v) \left/ \frac{1}{T - t_{\text{разг}}} \int_{t_{\text{разг}}}^T D(t) dt \right. \quad (65)$$

Подстановка в (65) выражений G и D , определяемых формулами (49) и (50), позволяет оценить эффективный начальный коэффициент усиления \bar{k}_0 и $\bar{\alpha}$ соответственно для трехуровневого и четырехуровневого генераторов.

Генерация моноимпульсов при изменении потерь ОКГ. Для получения световых импульсов когерентного излучения большой мощности используют ОКГ, работающие в режиме так называемых гигантских импульсов [109—117]. Наиболее эффективные методы полу-

чения мощных импульсов генерации основаны на управлении потерями $k^{\text{пот}}$.

К настоящему времени имеется ряд теоретических работ, в которых рассматриваются генераторы с переменными потерями [96, 102, 112—114]. Ниже изложим теорию этих генераторов по материалам работ [96, 102, 117].

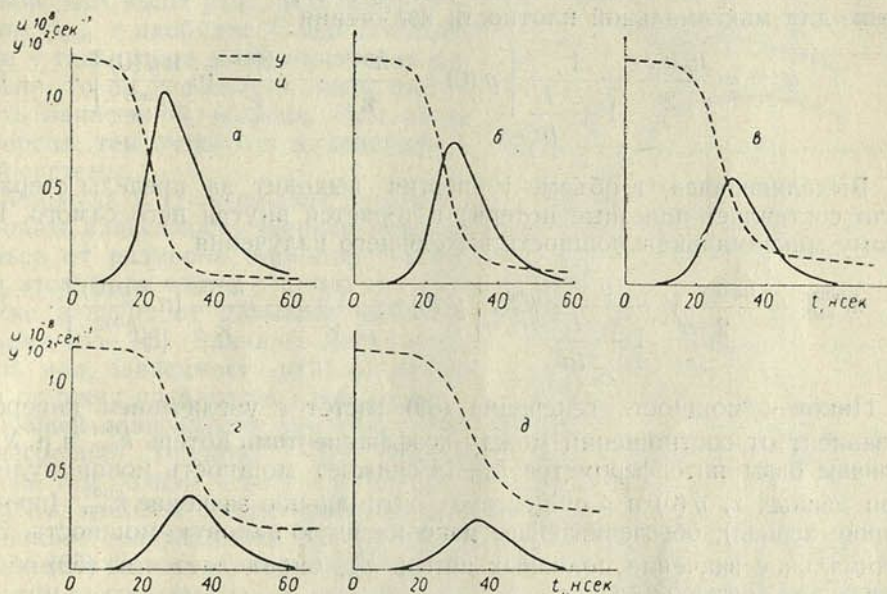


Рис. 8. Зависимость плотности излучения $u = B_{ij}(\nu) u_{ij}$ (—) и инверсной населенности y (---) от времени при различных потерях включенного интерферометра $k^{\text{пот}}$ ($\kappa = 10 \text{ см}^{-1}$, $\nu^* = 0,399 \cdot 10^{10} \text{ см/сек}$, $y(0) = 0,01$):

$a - k^{\text{пот}} = 0,03 \text{ см}^{-1}$; $b - 0,04$; $в - 0,05$; $г - 0,06$; $д - 0,07$

Рассмотрим случай, когда в накачанной системе мгновенно уменьшаются потери до некоторой минимальной величины (мгновенное включение добротности). Расчет такого генератора можно выполнить на основе системы уравнений (46) — (48). В качестве начального значения $y_{ij}(0)$ надо взять инверсную населенность в момент включения резонатора $y_{ij}(0) > k^{\text{пот}}/\kappa$. Решение уравнений (46) и (48) для этого случая представлено на рис. 8.

Анализ численных решений показывает, что при описании моноимпульса в уравнении (48) можно пренебречь влиянием накачки и релаксации, несущественным в силу быстрого протекания импульсной генерации (доли микросекунды), т. е. считать

$$\frac{dy_{ij}}{dt} = -2B_{ij}(\nu) u_{ij} y_{ij}. \tag{66}$$

В системе уравнений (46) и (66) исчезает специфика трехуровневого и четырехуровневого генераторов, поэтому в дальнейшем индексы i и j опустим.

Разделив (66) на (46) и проинтегрировав, получим [117]

$$u = u(0) + \frac{n_0 h \nu}{1 + \frac{L}{\ln}} \frac{1}{2} \left[y(0) - y - \frac{k^{\text{пот}}}{\kappa} \ln \frac{y(0)}{y} \right] \approx$$

$$\approx \frac{n_0 h \nu}{2 \left(1 + \frac{L}{\ln}\right)} \left[y(0) - y - \frac{k^{\text{пот}}}{\kappa} \ln \frac{y(0)}{y} \right], \quad (67)$$

где $u(0)$ и $y(0)$ — значения плотности излучения и инверсной населенности в начальный момент. Подставив в (67) $y = k^{\text{пот}}/\kappa$, получим выражение для максимальной плотности излучения

$$u^{\text{max}} = \frac{n_0 h \nu}{2} \frac{1}{1 + \frac{L}{\ln}} \left[y(0) - \frac{k^{\text{пот}}}{\kappa} - \frac{k^{\text{пот}}}{\kappa} \ln \frac{\kappa y(0)}{k^{\text{пот}}} \right]. \quad (68)$$

Выделяющаяся в объеме V энергия выходит за пределы стержня (что составляет полезные потери) и теряется внутри него самого. Поэтому максимальная мощность выходящего излучения

$$W_{\text{вых}}^{\text{max}} = \frac{n_0 h \nu}{2} V \frac{\nu}{1 + \frac{L}{\ln}} k_{\text{пол}}^{\text{пот}} \left[y(0) - \frac{k^{\text{пот}}}{\kappa} - \frac{k^{\text{пот}}}{\kappa} \ln \frac{\kappa y(0)}{k^{\text{пот}}} \right]. \quad (69)$$

Пиковая мощность генерации (69) растет с увеличением инверсии и зависит от соотношений между коэффициентами потерь $k_{\text{пол}}^{\text{пот}}$ и ρ . Увеличение базы интерферометра $L + \ln$ снижает мощность моноимпульса. При данных κ , $y(0)$ и ρ существует оптимальное значение $k_{\text{пол}}^{\text{пот}}$ (пропускание зеркал), обеспечивающее максимальную пиковую мощность. Это оптимальное значение полезных потерь $k_{\text{пол}}^{\text{пот}}$ определяется из (69) обычным путем ($dW^{\text{max}}/dk_{\text{пол}}^{\text{пот}} = 0$).

Энергия, выделяющаяся при генерации моноимпульса:

$$S_{\text{выд}} = V \frac{n_0 h \nu}{2} [y(0) - y_{\text{min}}], \quad (70)$$

где y_{min} — значение инверсии после генерации моноимпульса, т. е. решение (67) при $u = 0$.

Энергия моноимпульса излучения, вышедшего из резонатора,

$$S = S_{\text{выд}} \frac{k_{\text{пол}}^{\text{пот}}}{k_{\text{пол}}^{\text{пот}} + \rho} = V \frac{n_0 h \nu}{2} \frac{y(0) - y_{\text{min}}}{k_{\text{пол}}^{\text{пот}} + \rho} k_{\text{пол}}^{\text{пот}}. \quad (71)$$

Зависимость энергии моноимпульса от коэффициента полезных потерь представлена на рис. 9. Оптимальный коэффициент потерь вообще отличается от оптимума по мощности и от оптимума в стационарном режиме.

Полная длительность генерируемого моноимпульса $\Delta t = S/W_{\text{max}}$ и составляет обычно десятки наносекунд.

В работе [120] проведено сопоставление экспериментальных данных по измерению мощности и длительности моноимпульса с теоретическими расчетами. Сравнение показывает удовлетворительное согласие.

Если инверсная населенность $y(0)$, то количество запасенной энергии в стержне, которая в принципе может высветиться в виде стимулированного излучения:

$$W_{\text{зап}} = V \frac{n_0 h \nu}{2} y(0). \quad (72)$$

Сопоставляя (72) с (71), видим, что при мгновенном включении резонатора не вся запасенная энергия высвечивается в виде вынужденного излучения. Часть энергии теряется внутри за счет ρ , часть остается в виде остаточной инверсной заселенности y_{\min} .

Из формулы (71) следует, что энергия моноимпульса сильно зависит от начальной инверсии $y(0)$. Причем эта зависимость не является линейной: чем выше $y(0)$, тем ниже значение y_{\min} и наоборот. Следовательно, если у генератора мала начальная инверсия, то он использует лишь малую часть запасенной энергии. Чем выше инверсия, тем выше к. п. д. генерирующей системы.

Формула (71) позволяет проанализировать зависимость энергии моноимпульса от размеров стержня. Однако при этом надо иметь в виду, что $y(0)$ также зависит от размеров рабочего объема [65—68]. Вначале, когда стержень мал, зависимость $y(0)$ от размеров стержня появляется из-за соответствующей зависимости усиленной люминесценции (шумов). Чем больше длина, тем больше шумы и ниже $y(0)$. При дальнейшем увеличении стержня возникает генерация на френелевском отражении света от торцов стержня, и в этом случае инверсная населенность изменяется точно так, как и коэффициент потерь, т. е.

$$\kappa y(0) = \frac{1}{2l} \ln \frac{1}{r_{\text{фр}}} + \rho.$$

Уменьшение инверсной населенности с увеличением длины стержня приводит к тому, что энергия моноимпульса сначала растет, затем после достижения максимума падает. Для ОКГ на рубине и неодимовом стекле максимум S приходится на значения $l \sim 10 \div 20$ см. Количество запасенной энергии (72) при увеличении l достигает предельного значения, не зависящего от длины стержня.

Форму импульса генерируемого излучения можно рассчитать приближенно, аппроксимируя зависимость $y(t)$ кусочно-линейной функцией. Оказывается, что форма импульса зависит от величины $\kappa y(0)/k^{\text{пот}}$. Если $\kappa y(0)/k^{\text{пот}}$ мало, то импульс симметричен (гауссова форма). Если $\kappa y(0)/k^{\text{пот}}$ велико, то импульс асимметричен крутым передним фронтом.

Так как до появления моноимпульса инверсная населенность практически не изменяется, то из (46) можно получить оценку для времени появления максимума генерации

$$t_{\text{max}} \sim \frac{1 + \frac{L}{\ln}}{v[\kappa y(0) - k^{\text{пот}}]} \ln \frac{u^{\text{max}}}{\mu u^{\text{ш}}} + \frac{\left(\frac{\kappa y(0)}{k^{\text{пот}}} - 1\right) \frac{n_0 h \nu}{v \kappa}}{4u^{\text{max}}}. \quad (73)$$

Здесь $\mu u^{\text{ш}}$ — количество „затравочных квантов“ шумов, которые, усиливаясь, приводят к генерации. Оценка t_{max} для рубиновых и неодимовых ОКГ составляет 50—200 нсек. При этом оценка слабо зависит от количества начальных квантов $\mu u^{\text{ш}}$.

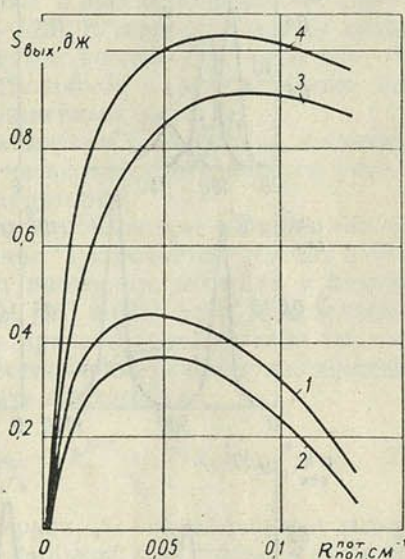


Рис. 9. Зависимость выходящей энергии S моноимпульса от полезных потерь ($V=1 \text{ см}^{-3}$, $\kappa=0,4 \text{ см}^{-1}$, $n_0=1,6 \cdot 10^{19} \text{ см}^{-3}$, $h\nu_{21}=2,8 \cdot 10^{-12} \text{ эрг}$):
1 — $\kappa y(0)=0,16 \text{ см}^{-1}$, $\rho=0,01 \text{ см}^{-1}$; 2—0,16 и 0,02; 3—0,32 и 0,01; 4—0,32 и 0,02

Мы рассмотрели случай мгновенного включения интерферометра. Однако если время включения зеркал t_1 больше времени появления импульса генерации t_{\max} при мгновенном включении добротности, то приведенные формулы дадут завышенные результаты.

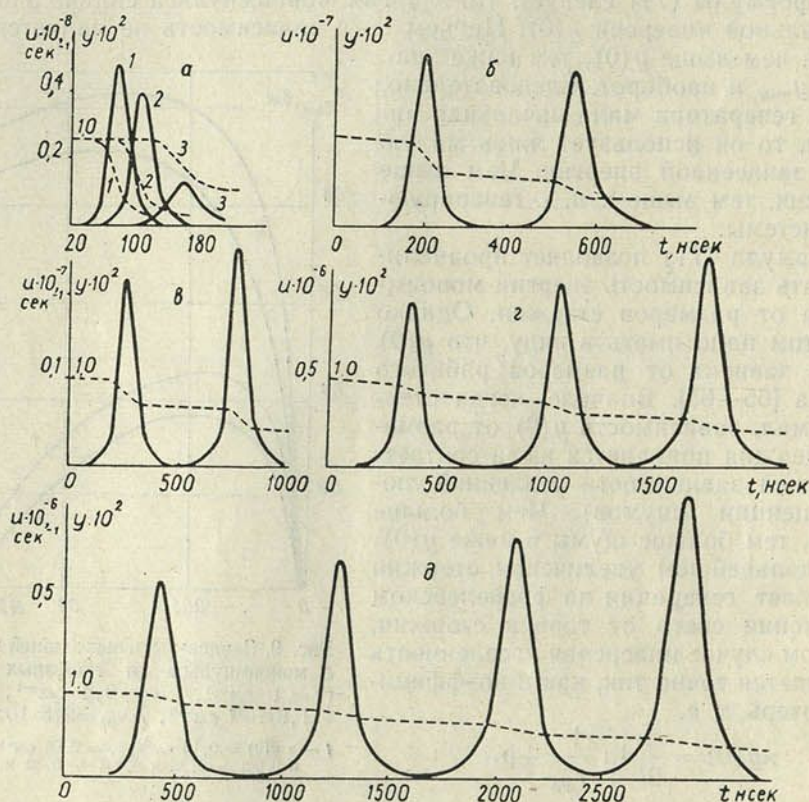


Рис. 10. Зависимость плотности излучения $u = B_{ij}(\nu) u_{ij}$ (—) и инверсной населенности y (---) от времени при линейном включении потерь ($y(0) = 0,01$, $B_{ij}(\nu) u_{ij}(0) = 2,423 \cdot 10^3$ сек $^{-1}$, $\nu^* = 0,399 \cdot 10^{10}$ см/сек, $\alpha = 10$ см $^{-1}$, $k^{\text{пот}} = 0,04$ см $^{-1}$, t^* — время выключения потерь):

а — $t^* = 50$ нсек (1), 100 (2), 250 (3); б — 500; в — 1000; г — 2000; д — 3000

Расчет ОКГ при произвольной форме зависимости $k^{\text{пот}}$ от времени сложен, и строгий расчет возможен лишь на электронной вычислительной машине. На рис. 10 представлены решения (46) и (48) для

$$k^{\text{пот}}(t) = \begin{cases} \alpha y(0) - \beta t & \text{при } 0 < t < t^* = \frac{\alpha y(0) - k_{\min}^{\text{пот}}}{\beta}, \\ k_{\min}^{\text{пот}} & \text{при } t \geq t^*, \end{cases} \quad (74)$$

где β характеризует скорость уменьшения потерь. Параметры выбирались близкими к параметрам ОКГ на неодимовом стекле. Из рисунка видно, что в момент t_{\max} излучение внутри резонатора достигает максимума. Инверсная населенность в это время быстро падает до некоторой величины. После возникновения первого импульса продолжается уменьшение $k^{\text{пот}}$ и затем в некоторый момент появляется еще один всплеск мощности. Инверсная населенность снова быстро уменьшается. Такой процесс сбрасывания инверсной населенности продолжается до тех пор, пока не высветятся все частицы.

Использование кусочно-линейной аппроксимации для инверсной населенности $y(t)$ позволяет с достаточной степенью точности оценить все основные характеристики моноимпульсов в случае медленного включения добротности (мощность моноимпульсов, расстояние между импульсами, их ширину, форму, время появления и т. д.).

ОКГ с просветляющимися затворами. Для получения коротких импульсов используются ОКГ с просветляющимися (фототронными, пассивными) затворами [121—123]. В генератор между активным веществом и зеркалом интерферометра помещается вещество, поглощающее на частоте генерации и способное к просветлению под действием генерируемого излучения (нелинейный фильтр).

Работа ОКГ с просветляющимися затворами рассмотрена в статьях [124—128]. Наше изложение отличается несколько более полным учетом различных факторов в работе таких генераторов¹.

Свойства ОКГ с просветляющимся затвором можно описать той же системой уравнений (46) и (48). Различие заключается только в том, что коэффициент потерь $k^{\text{пот}}$ зависит от плотности радиации в резонаторе (в фильтре). Поэтому к уравнениям (46) и (48) надо присоединить еще уравнение, описывающее кинетику просветления фильтра (пассивного затвора). Если, в частности, известен коэффициент поглощения фильтра $k_{\phi}(t)$, то для $k^{\text{пот}}$ можно написать выражение

$$k^{\text{пот}} = \rho + \rho_{\phi} \frac{l_{\phi}}{l} + \frac{1}{l} \ln \frac{1}{\sqrt{r_1 r_2}} = k_0^{\text{пот}} + \frac{l_{\phi}}{l} k_{\phi}(t), \quad (75)$$

где r_1 и r_2 — коэффициенты отражения зеркал; ρ_{ϕ} — коэффициент потерь на рассеяние и неактивное поглощение в фильтре; l_{ϕ} — толщина фильтра.

Чтобы определить k_{ϕ} , необходимо выбрать соответствующую модель просветляющегося затвора. Наиболее простой моделью является двухуровневая система, поглощающая излучение на частоте генерации. В этом случае

$$k_{\phi} = \frac{B^{\phi}(\nu) h \nu (n_1^{\phi} - n_2^{\phi})}{\nu_{\phi}} = \frac{B^{\phi}(\nu) h \nu n_{\phi}}{\nu_{\phi}} N = \kappa_{\phi} N, \quad (76)$$

где $B^{\phi}(\nu)$ — коэффициент Эйнштейна для фильтра; ν_{ϕ} — скорость света в фильтре; N — разность населенностей первого и второго уровней. Если p_{21}^{ϕ} — вероятность перехода со второго уровня на первый, то кинетическое уравнение для вещества затвора имеет вид

$$\frac{dN}{dt} = p_{21}^{\phi} - p_{21}^{\phi} N - 2NB^{\phi}(\nu) q u, \quad (77)$$

где u — плотность генерируемого излучения; q — коэффициент, характеризующий изменение плотности излучения в фильтре за счет сужения пучка (например, с помощью линз).

Уравнения (46), (48), (77) с учетом (75), (76) представляют систему уравнений, необходимую для расчета генератора с просветляющимся затвором. Все три дифференциальных уравнения нелинейны, и их решение в общем виде затруднительно.

Если нелинейный член в (77) мал по сравнению с двумя первыми членами ($2NB^{\phi}(\nu) q u \ll p_{21}^{\phi}$), то коэффициент поглощения фильтра не зависит от плотности излучения; имеем случай обычной пиковой генерации, где фильтр вносит дополнительные потери.

¹ Данная работа выполнена совместно с К. Н. Дравовичем и В. А. Савва.

На рис. 11 и 12 приведено несколько примеров решения системы (46), (48) и (77) на электронной цифровой вычислительной машине (ЭЦВМ) при начальных условиях $y(0) = k^{\text{пот}} [N(0)]/\chi$, $u(0) = 0$, $N(0) = 1$. Мощность накачки предполагалась постоянной. Из рисунков видно, что вначале возникает обычная пиковая генерация. Под действием

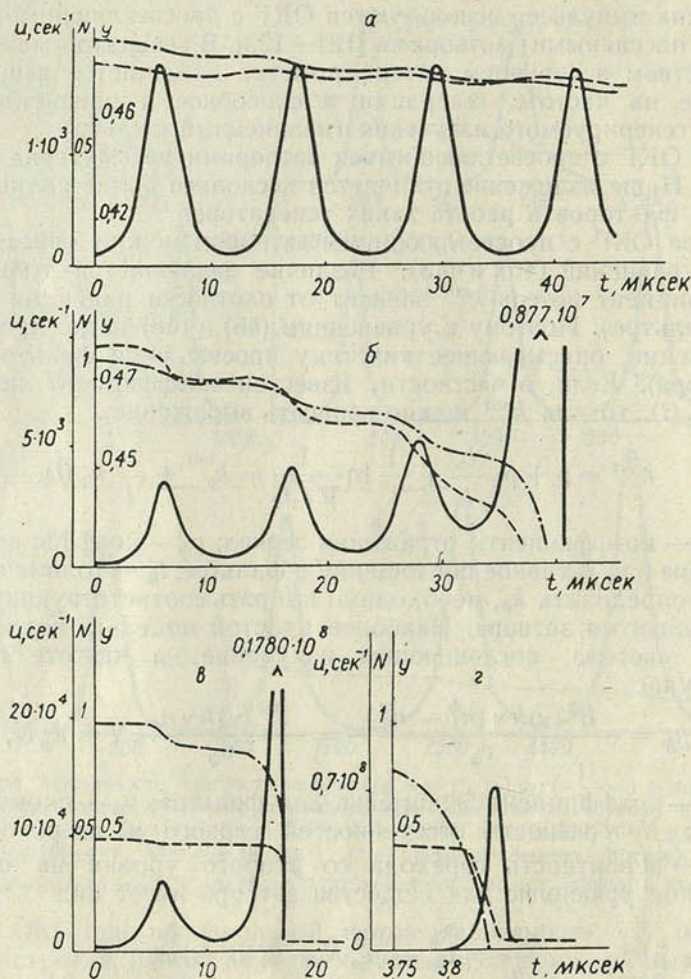


Рис. 11. Зависимость плотности излучения $u = B_{ij}(\nu) u_{ij}$ (—), инверсии y (---) и разности населенностей фильтра N (---) от времени ($r_1 = 1,0$, $r_2 = 0,5$, $y(0) = 0,4775$, $\chi_{\text{флф}} = 3$, $\chi = 0,4 \text{ см}^{-1}$):

$a - \sigma = 1,5$ и $p_{21}^{\text{ф}} = 10^4 \text{ сек}^{-1}$; $б - 2,5$ и 300 ; $в - 3$ и 300 ; $г - 10$ и 300

этого излучения фильтр просветляется (уменьшается N). Одновременно уменьшается и инверсная населенность. Затем через некоторый промежуток времени возникает интенсивный всплеск мощности. В некоторых случаях моноимпульс не появляется совсем.

Из рис. 12 следует, что генерация существенно зависит от отношения вероятностей вынужденных переходов в фильтре и веществе, т. е. от

$$\sigma = B^{\text{ф}}(\nu) q/B(\nu).$$

С увеличением σ наблюдается переход от обычной пиковой генерации к генерации моноимпульса. При этом моноимпульс возрастает по высоте и его длительность сокращается.

Расчет показывает, что интенсивность моноимпульса слабо зависит от мощности накачки (коэффициентов G и D). Более сильна зависимость от отношения $k_0^{\text{пот}} [N(0)]/\chi y(0)$.

Анализ решений на ЭЦВМ показывает, что при неизменных значениях σ , $k_0^{\text{пот}}$, $\chi_\Phi N(0) l_\Phi/l$, G и D с увеличением скорости релаксации p_{21}^Φ

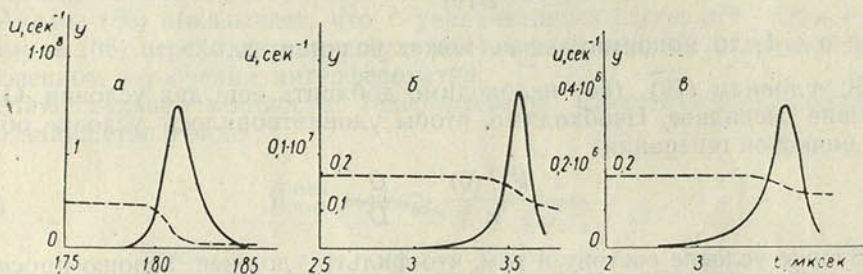


Рис. 12. Зависимость плотности излучения $u = B_{ij}(\nu) u_{ij}$ (—) и инверсии y (---) от времени при разных $k_0^{\text{пот}}$ и $\chi_\Phi l_\Phi N(0)/l$ ($r_0 = r_\Phi = 0$):

а — $k_0^{\text{пот}} = 0,05567 \text{ см}^{-1}$, $\chi_\Phi l_\Phi N/l = 0,1353 \text{ см}^{-1}$ и $\sigma = 20$; б — $0,05567$, $0,02$ и 10 ;
в — $0,05567$, $0,02$ и 5

ухудшаются параметры моноимпульса (снижается мощность и расширяется импульс). Когда $2B^\Phi(\nu) u^r q \ll p_{21}^\Phi$, вместо моноимпульса получается обычная пиковая генерация.

Из рис. 12 видно также, что форма импульса генерации может быть различна. При $k_0^{\text{пот}} l/\chi_\Phi l_\Phi N(0) > 1$ возможно появление импульсов, у которых задний фронт более крутой, чем передний.

Анализ численных расчетов позволяет представить схему работы ОКГ следующим образом. До некоторого момента времени t_0 идет накопление частиц на метастабильном уровне. В этот период генерация отсутствует. Коэффициент поглощения фильтра максимален, т. е. $N = N(0) = 1$. Выражение в квадратных скобках уравнения (46) отрицательно, и, следовательно, плотность излучения может только уменьшаться. Как только инверсия населенностей достигает порогового значения $y_0 = k_0^{\text{пот}} [N(0)]/\chi$, возникает генерация. Согласно (77), возникшая плотность излучения приводит к уменьшению N , т. е. к просветлению затвора. Инверсная населенность в силу действия накачки (если $y(0) < G/D$) может еще возрастать на незначительную величину, но скоро под действием возрастающей плотности излучения начинает падать. В этом, кстати, заключается причина независимости энергии моноимпульса от мощности накачки.

Если скорость снижения $k^{\text{пот}}$ больше скорости уменьшения χy , то выражение в квадратных скобках (46) остается положительным (усиление преобладает над потерями) и происходит дальнейшее увеличение плотности излучения. Система генерирует гигантский импульс.

Таким образом, критерием возникновения моноимпульса является неравенство

$$\frac{d}{dt} [\chi y - k^{\text{пот}}] > 0. \tag{78}$$

Подставляя в (78) выражения dy/dt и dN/dt из (48) и (77), пренебрегая членами $p_{21}^\Phi(1-N)$ и $G-Dy$, полагая $N(t_0) \approx N(0)$, получаем

$$(\sigma - 1) \frac{l_\Phi \kappa_\Phi N(0)}{l} > k_0^{\text{пот}}. \quad (79)$$

При прочих равных условиях необходимо, чтобы

$$\sigma = \frac{B^\Phi(\nu)}{B(\nu)} q > 1. \quad (80)$$

Если $\sigma \leq 1$, то моноимпульс не может возникнуть.

К условиям (79), (80) необходимо добавить еще два условия. Одно условие очевидное. Необходимо, чтобы удовлетворялось условие обычной пиковой генерации.

$$\frac{k^{\text{пот}}(0)}{\kappa} < \frac{G}{D}. \quad (81)$$

Второе условие состоит в том, что фильтр должен хорошо просветляться под действием возникшей в генераторе плотности излучения, т. е.

$$2B^\Phi(\nu) u^r q > p_{21}(1-N) \quad \text{или} \quad B^\Phi(\nu) q u^r \sim p_{21}. \quad (82)$$

Здесь u^r — плотность генерации при коэффициенте потерь $k^{\text{пот}}(0)$. Условиями (80) и (82) необходимо пользоваться при подборе веществ для пассивных затворов. Так как известна интегральная по частоте вероятность спонтанного перехода $A_\Phi = \frac{8\pi h \nu^3}{c^3} B^\Phi$ и ширина линии $\Delta\nu^\Phi$, то соотношения (80) и (82) удобнее переписать в виде:

$$\frac{A_\Phi}{A_{ij}} \frac{\Delta\nu}{\Delta\nu_\Phi} q > 1, \quad \frac{2}{\Delta\nu_\Phi} \frac{8\pi h \nu^3}{c^3} q u^r \sim 1, \quad (83)$$

где $\Delta\nu$ — ширина линии люминесценции активного вещества. Из (83) видно, что при подборе затворов надо выбирать вещества с малой шириной $\Delta\nu_\Phi$ и большой вероятностью спонтанного перехода. Если выбрано вещество, удовлетворяющее условиям (80) и (82) или (83), то необходимо затем подбирать толщину затвора и концентрацию, чтобы удовлетворить (79). Однако это еще не значит, что генератор, удовлетворяющий всем четырем условиям (79) — (82), будет работать в наиболее выгодном режиме. Чтобы судить об оптимальных параметрах ОКГ, необходимо проанализировать зависимость энергии и мощности моноимпульса от параметров генератора. Соответствующие зависимости нетрудно получить из (46), (48) и (77).

При генерации моноимпульса в уравнениях (48) и (77) можно оставить только нелинейный член. Тогда легко получаются два первых интеграла этой упрощенной системы. Разделив (48) на (77), получим

$$N = N_0 \left[\frac{y}{y_0} \right]^\sigma, \quad (84)$$

где $N_0 \approx N(0)$, $y_0 \approx y(0)$.

Из (48) и (46), учитывая (75), (76), (84), интегрированием находим связь между u и y

$$u = \frac{v^*}{2B(\nu)} \left[\kappa(y_0 - y) - k_0^{\text{пот}} \ln \frac{y}{y_0} - \frac{l_\Phi \kappa_\Phi N_0}{l\sigma} \left(1 - \frac{y^\sigma}{y_0^\sigma} \right) \right] + u_0. \quad (85)$$

Условием максимума плотности излучения является равенство коэффициента потерь и усиления. Определив из этого условия y_{\max} и подставив его в (85), получим выражение для максимальной плотности излучения

$$u^{\max} = \frac{v^*}{2B(v)} \left[\kappa(y_0 - y_{\max}) - k_0^{\text{пот}} \ln \frac{y_0}{y_{\max}} - \frac{l_{\phi} \kappa_{\phi} N_0}{\sigma l} \left(1 - \frac{y_{\max}^2}{y_0^2} \right) \right]. \quad (86)$$

Значением начальной плотности u_0 мы пренебрегаем.

Анализ (86) показывает, что с увеличением σ растет u^{\max} . При $\sigma \rightarrow \infty$ формула (86) переходит в формулу (68) для плотности излучения при мгновенном включении интерферометра.

Максимальная мощность генерируемого излучения по аналогии с (69) запишется в виде

$$W_{\text{вых}}^{\max} = v u_{\max} \frac{1}{l} \ln \frac{1}{V r_1 r_2}. \quad (87)$$

Полная энергия моноимпульса, вышедшего за пределы резонатора, может быть найдена как энергия, выделившаяся в стержне, умноженная на отношение полезных потерь ко всем потерям:

$$S_{\text{вых}} = \frac{n_0 h \nu}{2} V (y_0 - y_{\min}) \frac{k_{\text{пол}}^{\text{пот}}}{\rho + k_{\text{пол}}^{\text{пот}} + \frac{\rho_{\phi} l_{\phi}}{l} + \frac{\kappa_{\phi} l_{\phi} N_0}{\sigma l} \frac{1 - y_{\min}^2 / y_0^2}{\ln(y_0 / y_{\min})}}. \quad (88)$$

Для нахождения y_{\min} в общем случае можно использовать (85), положив в нем $u = 0$. Формула (88) при $\sigma \rightarrow \infty$ переходит в формулу (71) за небольшим исключением. В случае пассивного затвора появляются дополнительные потери энергии на просветление фильтра.

Разделив (88) на (87), можно получить оценку длительности импульса Δt .

Анализируя формулы (87) и (88), можно определить параметры ОКГ, при которых максимальны либо мощность моноимпульса, либо его энергия. Однако этот анализ требует громоздких численных расчетов.

Усиление моноимпульсов ОКГ. Значительная часть запасенной энергии, определяемой (72), идет на внутренние потери и остается неиспользованной в виде остаточной инверсии. Более полное использование накопленной энергии возможно в режиме усиления моноимпульсов. Помимо этого, применение усилителей позволяет увеличить энергию импульса и в некоторых случаях сузить его во времени.

Со времени первых сообщений об использовании набора стержней с инверсной населенностью для увеличения интенсивности лазерного пучка [129—131] появился ряд теоретических работ [20, 74, 132—135], в которых рассматривается этот вопрос с различных сторон.

Рассмотрим зависимость энергии моноимпульса от длины проходного им пути. Распространение интенсивного импульса в общем случае описывается уравнением переноса (42) и уравнением для вещества (66). Проинтегрируем (42) по времени (по ширине усиливаемого сигнала). Тогда (42) переписывается в виде

$$\frac{dS(x)}{dx} = -\rho S(x) + \int k(x, t) S(x, t) dt, \quad (89)$$

где $S(x) = \int S(x, t) dt$.

Умножая (85) на $n_0 h \nu$ и интегрируя в тех же пределах, получаем

$$y_{\min}(x) - y(0) = - \frac{2}{n_0 h \nu} \int k(x, t) S(x, t) dt. \quad (90)$$

С другой стороны, интегрирование (66) после разделения переменных дает

$$y_{\min}(x) = y(0) e^{-\frac{2B(\nu)}{\nu} S(x)}. \quad (91)$$

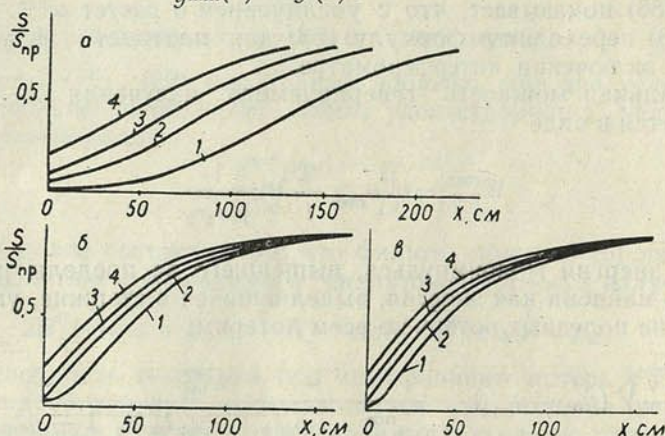


Рис. 13. Зависимость энергии моноимпульса $S/S_{\text{пр}}$ в расчете на 1 см^2 поперечного сечения от длины стержня x (а — $x y(0)/\rho = 3$; б — 10; в — 15, $\rho = 0,02 \text{ см}^{-1}$):
1 — $S(0)/S_{\text{пр}} = 0,01$; 2 — 0,05; 3 — 0,10; 4 — 0,20

Подстановка (91) в (90) и затем в (89) приводит к следующему уравнению для $S(x)$:

$$\frac{dS}{dx} = -\rho S + \frac{n_0 h \nu}{2} y(0) [1 - e^{-\frac{2B(\nu)}{\nu} S}]. \quad (92)$$

Обозначая

$$S_{\text{пред}} = \frac{n_0 h \nu}{2\rho} y(0) \quad (93)$$

и интегрируя, получаем

$$\int_{S(0)}^S \frac{dS}{S_{\text{пред}} [1 - e^{-\frac{x y(0) S}{e S_{\text{пред}}}]}} = \rho x. \quad (94)$$

Здесь $S(0)$ — энергия моноимпульса в начале пути; $S(x)$ — его энергия в конце пути x .

Из (94) видим, что при $x \rightarrow \infty S(x) \rightarrow S_{\text{пред}}$. Таким образом, $S_{\text{пред}}$, определяемое (93), есть максимальная энергия усиливающего сигнала.

На рис. 13 приведены зависимости S от длины стержня при разных ρ , $x y(0)$ и $S(0)$, рассчитанные по формуле (94). Из рисунка видно, что при малых $S(0)$ наблюдается относительно быстрый рост S с увеличением x . Затем рост замедляется и значение S стремится к пределу, определяемому соотношением (93). По мере увеличения $S(0)$ усиление сигнала также замедляется. Кривые для более высоких $S(0)$ представляют уча-

стки кривых при малых $S(0)$, сдвинутые по оси абсцисс влево. Увеличение коэффициента потерь ρ приводит к уменьшению усиления на единице пути dS/dx и соответственно к снижению всей кривой.

Из рис. 13 нетрудно оценить, какая необходима суммарная длина стержней, чтобы при начальной энергии $S(0)$ получить импульс заданной величины. Например, пусть $\kappa = 0,4 \text{ см}^{-1}$, $n_0 = 1,6 \cdot 10^{19} \text{ см}^3$, $h\nu = 2,8 \cdot 10^{-12} \text{ эрг}$, $y(0) = 0,5$, $\rho = 0,02 \text{ см}^{-1}$. Тогда $S_{\text{пред}} = 56 \text{ дж/см}^2$. Пусть $S(0) = 0,56 \text{ дж/см}^2$. Тогда для получения на выходе $S = 25 \text{ дж}$ необходима суммарная длина рубиновых стержней 44 см .

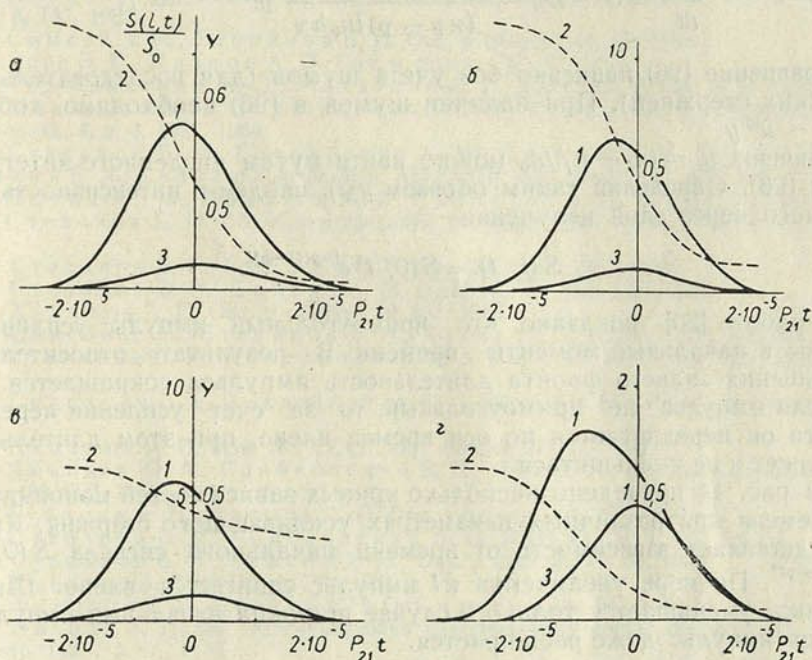


Рис. 14. Зависимость инверсии y (кривая 2) и мощности усиливаемого моноимпульса $S(l, t)$ (кривая 1) от времени (форма начального импульса $S(0, t)/S_0 = e^{-\gamma t^2}$, $\rho_{21} = 300 \text{ сек}^{-1}$, $\gamma/\rho_{21}^2 = 10^{12}/144$, $l = 10 \text{ см}$, $\kappa = 0,4 \text{ см}^{-1}$, $\rho = 0,02 \text{ см}^{-1}$, $D = 6 \rho_{21}$, $G = 4 \rho_{21}$):
 а — $2S_0/\ln_0 h\nu = 1500$; б — 2000; в — 2500; г — 25000

В работе [134] решением квантово-механических уравнений матрицы плотности показано, что при распространении в среде интенсивных потоков инверсная населенность уменьшается не до нуля, а может заходить в область отрицательных значений. Если это так, то значение $S_{\text{пред}}$, определяемое (93), необходимо удвоить.

Более сложной представляется задача об определении формы моноимпульса при прохождении его через усиливающую среду. Строгого решения нестационарного уравнения переноса совместно с (66) не получено. Однако если пренебречь временем пролета кванта света по стержню, то задача сильно упрощается. При этом в (42) значение $\frac{1}{v} \frac{\partial S}{\partial t} \approx 0$ и зависимость яркости S от времени в данном случае определяется лишь зависимостью населенностей $n_i(t)$ и $n_j(t)$. Однако и в данном случае для получения конкретных оценок необходимы дальнейшие упрощения. Предположим, что коэффициенты поглощения (населенности n_i и n_j)

одинаковы по длине стержня и зависят при прочих равных условиях от средней плотности излучения

$$\bar{S} = \frac{1}{lv} \int_0^l S(x, t) dx = \frac{S(0, t)}{v[\chi y(t) - \rho]l} [e^{[\chi y(t) - \rho]l} - 1]. \quad (95)$$

Тогда уравнение для избыточной населенности принимает вид

$$\frac{dy}{dt} = G - Dy - \frac{2\chi y S(0, t)}{(\chi y - \rho)ln_0 h v} [e^{(\chi y - \rho)l} - 1]. \quad (96)$$

Уравнение (96) написано без учета шумов (для последовательности коротких стержней). При наличии шумов в (96) необходимо добавить член $\sim u^m y$.

Значение $y = (n_i - n_j)/n_0$ можно найти путем численного интегрирования (96). Определив таким образом $y(t)$, найдем и интенсивность прошедшего через слой излучения

$$S(l, t) = S(0, t) e^{[\chi y(t) - \rho]l}. \quad (97)$$

В работе [20] показано, что прямоугольный импульс усиливается больше в начальные моменты времени. В результате относительного уменьшения заднего фронта длительность импульса сокращается.

Если импульс не прямоугольный, то за счет усиления переднего фронта он передвигается по оси времен влево, при этом длительность его может и не уменьшиться.

На рис. 14 приведено несколько кривых зависимостей моноимпульса от времени при различных параметрах усиливающего стержня. Кривая 3 представляет зависимость от времени начального сигнала $S(0, t) = S_0 e^{-\nu t^2}$. По мере увеличения χl импульс сдвигается влево. Ширина импульса уменьшается только в случае широких начальных импульсов. Иногда импульс даже расширяется.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кац М. Л., Ковнер М. А., Сидоров Н. К. Оптические квантовые генераторы. Изд-во Саратовского университета, 1964.
2. Файн В. М., Ханнин Я. И. Квантовая радиофизика. Изд-во «Советское радио», М., 1965.
3. Лендьял Б. Лазеры. Изд-во «Мир», М., 1964.
4. Вольфсон Н. С., Шитова Е. И. Библиогр. указатель отечественной и зарубежной литературы «Квантовые оптические генераторы». Изд-во «Наука», 1964.
5. Кравченко Н. Б., Мешкуть Т. М., Попкова Н. К. Указатель литературы «Квантовые оптические генераторы». Библиотека АН БССР, 1965.
6. Мосс Т. Оптические свойства полупроводников. ИЛ, 1961.
7. Горбань И. С., Конончук Г. Л. Опт. и спектр., 17, 880, 1964.
8. Степанов Б. И. Основы спектроскопии отрицательных световых потоков. Минск, 1961.
9. Степанов Б. И., Грибковский В. П. Введение в теорию люминесценции. Изд-во АН БССР, Минск, 1963.
10. Степанов В. И., Грибковский В. П. УФН, 82, 2, 1964.
11. Степанов Б. И. ДАН БССР, 5, 489, 1961.
12. Сцяпанав Б. І., Самсон А. М. Весці АН БССР, сер. фіз.-тэхн., № 1, 1961.
13. Степанов Б. И., Самсон А. М., Грибковский В. П. Изв. АН СССР, сер. физич., 27, 488, 1963.
14. Грибковский В. П. Сб. «Взаимодействие неравновесного излучения с веществом». Изд-во «Наука и техника», Минск, 1965.
15. Апанасевич П. А. ДАН БССР, 6, 94, 1962; 6, 768, 1962; Опт. и спектр., 14, 612, 1963.

16. Апанасевич П. А. Изв. АН СССР, сер. физич., 27, 492, 1963; ДАН БССР, 7, 22, 1963.
17. Апанасевич П. А. Чехослов. физ. журн., В 13, 201, 1963.
18. Грибковский В. П., Степанов Б. И. Опт. и спектр., 14, 484, 1963.
19. Рубанов В. С. Отчет Института физики АН БССР, № 35, 1964.
20. Самсон А. М. ЖПС, 1, 41, 1964.
21. Степанов Б. И., Иванов А. П., Берковский Б. М., Кацев И. Л. Опт. и спектр., 12, 533, 1962.
22. Иваноў А. П., Бяркоўскі Б. М., Кацаў І. Л. Весці АН БССР, сер. фіз.-тэхн., № 3, 1962.
23. Иванов А. П., Берковский Б. М., Кацев И. Л. ИФЖ, 5, № 10, 1962.
24. Иванов А. П., Степанов Б. И., Берковский Б. М., Кацев И. Л. ДАН БССР, 6, 147, 1962.
25. Самсон А. М., Степанов Б. И. Опт. и спектр., 14, 57, 1963.
26. Зега Э. П., Иванов А. П. Опт. и спектр., 27, 87, 1964.
27. Тер-Микаелян М. Л., Микаелян А. Л. ДАН СССР, 155, № 6, 1964.
28. Микаэлян А. Л., Тер-Микаелян М. Л., Турков Ю. Г. Радиотехника и электроника, 9, в. 8, 1357, 1964.
29. Степанов Б. И., Гончаренко А. М., Иванов А. П., Самсон А. М., Сотский Б. А., Хапалюк А. П. Изв. АН СССР, сер. физич., 27, 473, 1963.
30. Ищенко Е. Ф., Ладыгин М. В., Свиридов А. Н. ЖПС, 1, 31, 1964.
31. Степанов Б. И. Сб. «Спектроскопия рассеивающих сред». Изд-во АН БССР, 1963.
32. Степанов Б. И. Весці АН БССР, сер. фіз.-тэхн., № 2, 1962.
33. Степанов Б. И., Самсон А. М. ДАН СССР, 142, 1282, 1962.
34. Хапалюк А. П. Опт. и спектр., 19, 387, 1965.
35. Самсон А. М., Степанов Б. И., Хазов Л. Д. ДАН СССР, 148, 317, 1963.
36. Степанов Б. И., Чекалинская Ю. И. Весці АН БССР, сер. фіз.-тэхн., № 1, 1962.
37. Сцяпанаў Б. І., Чакалінская Ю. І. Весці АН БССР, сер. фіз.-тэхн., № 1, 1963.
38. Хапалюк А. П. Изв. АН СССР, сер. физич., 27, 477, 1963.
39. Ананьев Ю. А., Грибковский В. П., Мак А. А., Степанов Б. И. ДАН СССР, 150, 507, 1963.
40. Рубинов А. Н., Иванов А. П. Опт. и спектр., 17, 759, 1964.
41. Степанов Б. И., Грибковский В. П. ДАН БССР, 7, 17, 1963.
42. Степанов Б. И., Самсон А. М. Опт. и спектр., 14, 65, 1963.
43. Рубанов А. С. ЖПС, 1, 148, 1964.
44. Фрадкин Э. Е., Чайка М. П. Опт. и спектр., 12, 796, 1962.
45. Иванов А. П. Сб. «Спектроскопия рассеивающих сред». Изд-во АН БССР, 1963, стр. 145.
46. Ванюков М. П., Исаенко В. И., Серебряков В. А., Степанов Б. И. ЖПС, 1, 141, 1964.
47. Пилипович В. А., Лебедев В. И., Моргун Ю. Ф. ЖПС, 2, 132, 1965.
48. Ванюков М. П., Исаенко В. И., Серебряков В. А. Опт. и спектр., 17, 854, 1964.
49. Хапалюк А. П., Степанов Б. И. Весці АН БССР, сер. фіз.-тэхн., № 1, 1961.
50. Самсон А. М. ДАН БССР, 6, 151, 1962.
51. Kotik D. K., Newstein M. Journ. Appl. Phys., 32, 178, 1961.
52. Хапалюк А. П., Степанов Б. И., Сотский Б. А. Опт. и спектр., 13, 282, 1962.
53. Хапалюк А. П. ДАН БССР, 6, 297, 1962.
54. Бойко Б. Б., Петров Н. С., Валявко В. В., Вашкевич И. М. ЖПС, 3, 234, 1965.
55. Сотский Б. А., Гончаренко А. М. Кристаллография, 7, 278, 1963; ДАН БССР, 6, 297, 1962; ДАН БССР, 6, 223, 1962.
56. Островский Л. А., Якубович Е. И. ЖЭТФ, 46, 963, 1964.
57. Кузнецова Т. И., Раутиан С. Г. ЖТФ, 5, 2105, 1963; ЖЭТФ, 43, 1897, 1962.
58. Кузнецов Т. И., Раутиан С. Г. Изв. вузов. Радиофизика, 7, 682, 1964.
59. Степанов Б. И., Рубанов А. С. ЖПС, 1, 35, 1964.
60. Самсон А. М., Степанов Б. И. ЖПС, 1, 158, 1964.
61. Ананьев Ю. А., Седов Б. М. ЖЭТФ, 48, 782, 1965.
62. Степанов Б. И., Самсон А. М. ДАН СССР, 145, 560, 1962.
63. Самсон А. М., Чекалинская Ю. И. ДАН БССР, 6, 663, 1962.
64. Степанов Б. И., Самсон А. М., Чекалинская Ю. И. Изв. АН СССР, сер. физич., 27, 477, 1963.
65. Самсон А. М. ЖПС, 2, 233, 1965.
66. Самсон А. М. ЖПС, 2, 299, 1965.

67. Самсон А. М. Отчет Ин-та физики АН БССР, № 18, 1963.
68. Рубинов А. Н. Диссертация, Минск, 1965.
69. Карапетян Г. О., Каррис Я. Э., Лунтер С. Г., Феофилов П. П. ЖПС, 1, 193, 1964.
70. Степанов Б. И., Грибковский В. П. Изв. АН СССР, сер. физич., 29, 1333, 1965.
71. Грибковский В. П., Кузнецова В. В. ЖПС, 1, 340, 1964.
72. Рубинов А. Н. ЖПС, 2, 495, 1965.
73. Соболев В. В. Перенос лучистой энергии в атмосферах звезд и планет. ГИТТЛ, М., 1956.
74. Микаэлян А. Л., Тср-Микаэлян М. Л., Турков Ю. Г. Радиотехника и электроника, 9, 1788, 1964.
75. Степанов Б. И. Опт. и спектр., 12, 443, 1962.
76. Степанов Б. И. ДАН БССР, 5, 489, 1961.
77. Зеге Э. П., Самсон А. М., Степанов Б. И. ДАН БССР, 6, 288, 1962.
78. Самсон А. М. Вестн АН БССР, сер. физ.-техн., № 3, 1964.
79. Самсон А. М. Опт. и спектр., 16, 869, 1964.
80. Самсон А. М. Отчет Ин-та физики АН БССР, № 12, 1962.
81. Kaiser W., Garret C. J. B., Wood D. L. Phys. Rev., 123, 766, 1961.
82. Statz H. and de Mars G. A. Quantum Electr., 530, 1960.
83. Bostik H. A., O'Connor J. R. Proc. IRE, 50, 219, 1962.
84. Hellwarth R. W. Phys. Rev., Lett., 6, 9, 1961.
85. Dunsmuir R. J. Electron. and Control, 10, 453, 1961.
86. Makhov G. J. Appl. Phys., 33, 202, 1962.
87. Kaplan J. J., Zier R. J. Appl. Phys., 33, 2372, 1962.
88. Басов Н. Г., Морозов В. Н., Ораевский А. М. ДАН СССР, 162, 781, 1965.
89. Kingston R. H., McWhorter A. L. Proc. IEEE, 53, N 1, 1965.
90. Bennett W. R. Phys. Rev., 126, 580, 1962.
91. Степанов Б. И. ДАН БССР, 6, 629, 1962.
92. Степанов Б. И. ДАН СССР, 148, 74, 1963.
93. Степанов Б. И., Самсон А. М. Опт. и спектр., 16, 167, 1964.
94. Бельский Н. К., Мухамедова Д. А. ДАН СССР, 158, 317, 1964.
95. Бонч-Бруевич А. М., Имас Я. А., Соколов А. П. ЖПС, 1, 80, 1964.
96. Самсон А. М., Савва В. А. Опт. и спектр., 16, 1045, 1964.
97. Самсон А. М., Степанов Б. И. ЖПС, 1, 158, 1964.
98. Бураков В. С., Жуковский В. В., Самсон А. М. ЖПС, 2, 504, 1965.
99. Гинтофт Р. И., Самсон А. М., Саржевский А. М. ЖПС, 2, 142, 1965.
100. Гинтофт Р. И., Самсон А. М., Саржевский А. М. ЖПС, 3, 128, 1965.
101. Самсон А. М., Савва В. А. ДАН БССР, 6, 418, 1962.
102. Самсон А. М., Савва В. А. Изв. АН СССР, сер. физич., 27, 609, 1963.
103. Самсон А. М. Опт. и спектр., 16, 869, 1964.
104. Gürs K. Quantum Electr. Proc. of 3 Intern. Congr., Paris, 1113, 1964.
105. Gürs K. Z. Naturforsch., 17, 990, 1962.
106. Gürs K. Z. Naturforsch., 18 a, 510, 1963; 18 a, 1363, 1963.
107. Gürs K. Z. f. Phys., 172, N. 2, 1963.
108. Галанин М. Д., Леонтович А. М., Свириденков З. А., Сморгчов В. Н., Чижикова З. А. Опт. и спектр., 16, 165, 1963.
109. Hellwarth R. W. Phys. Rev., Lett., 6, (1) 1961.
110. Hellwarth R. W. Advances in Quantum Electr., 334, N.—Y., Columbia University Press, 1961.
111. McClung F. J., Hellwarth R. W. Proc. IEEE, 51, 46, 1963.
112. Прохоров А. М. Радиотехника и электроника, 8, 1073, 1963.
113. Vuilsteke A. A. J. Appl. Phys., 34, 1615, 1963.
114. Wagner W. G., Lengyel V. A. J. Appl. Phys., 34, 2040, 1963.
115. Wang C. C. Proc. IEEE, 51 (2), русск. пер., 1736, 1963.
116. Микаэлян А. Л., Турков Ю. Г. Радиотехника и электроника, 9, 973, 1964.
117. Самсон А. М., Савва В. А. ДАН БССР, 9, 22, 1965.
118. Буряковский Г. Ю., Машкевич В. С. Укр. физ. журн., 10, 65, 1965.
119. Буряковский Г. Ю., Машкевич В. С. Укр. физ. журн., 10, 398, 1965.
120. Пилипович В. А., Моргун Ю. Ф. ЖПС, 3, 92, 1965.
121. Sorokin P. P., Luzzi J. J., Lankard J. R., IBM, J. Res. of Develop., 8, 182, 1964.
122. Kafalas P., Masters J. J., Murray E. M. E. J. Appl. Phys., 35, 2349, 1964.
123. Bret G. C. Acad. Sci., 258, 4702, 1964.
124. Szabo A., Stein R. A. J. Appl. Phys., 36, 1562, 1965.
125. Овчинников В. М., Харциев В. Е. ЖЭТФ, 49, 315, 1965.
126. Бородулин В. И., Ермакова Н. А., Ривлин Л. А., Шильдяев В. С. ЖЭТФ, 48, 845, 1965.

127. Sooy W. R. Appl. Phys. Lett., 7, 36, 1965.
128. Ривлин Л. А. ЖЭТФ, 47, 624, 1964.
129. Geusik J. E., Scovil H. E. D. Bell. System. Techn. Journ, 41, 1371, 1962.
130. Geusik J. E., Scovil H. E. D. Quant. Electr. Proc., 3 Intern. Congr., Paris, 1211, 1964.
131. Басов Н. Г., Амбарцумян Р. В., Зусев В. С., Крюков П. Г., Стойлов Ю. Ю. ЖЭТФ, 47, 1595, 1964.
132. Bellman R., Birnbaum G., Wagner W. G. J. Appl. Phys., 34, 780, 1963.
133. Frantz L. M., Nodvik J. S. J. Appl. Phys., 34, 2346, 1963.
134. Басов Н. Г., Летохов В. С. Препринт ФИАН СССР, А—2, 1965.
135. Таланов В. И. Изв. вузов. Радиофизика, 7, 491, 1964.
136. Fleck J. A., Kidder R. E. Journ. Appl. Phys., 35, N 10, 1964.
137. Сучков А. Ф. ЖЭТФ, 49, 1495, 1965.

Поступило в редакцию 4.X 1965

С. А. АХМАНОВ

КОГЕРЕНТНЫЕ НЕЛИНЕЙНЫЕ ВОЛНОВЫЕ ПРОЦЕССЫ В ОПТИКЕ

*(умножение, смешение и параметрическое преобразование частот
в оптическом диапазоне)*

1. ВВЕДЕНИЕ

При теоретическом рассмотрении все нелинейные оптические процессы естественным образом можно разделить на две группы: процессы, для которых исходное и конечное состояния квантовой системы одинаковы, и процессы, для которых указанные состояния различны. Характер протекания процессов первого типа существенно определяется фазовыми соотношениями между взаимодействующими электромагнитными полями, и, следовательно, их описание невозможно в терминах населенностей, характеризующих заданными числами фотонов.

К процессам этого типа относятся генерация оптических гармоник, смешение частот, параметрическое усиление и преобразование и т. п. Для процессов второй группы, связанных с реальным изменением состояния квантовой системы, фазовые соотношения между электромагнитными полями не играют такой определяющей роли; важными примерами таких процессов являются стоксово комбинационное рассеяние и фотоэффект.

Предлагаемый доклад посвящен обзору результатов теоретических и экспериментальных работ, в которых исследуются процессы первого типа; далее для краткости мы будем называть их когерентными нелинейными процессами. В литературе эти процессы часто называют «параметрическими» (см. [1, 2]); ниже, однако, этот термин употребляется в более узком смысле, в котором он используется в теории колебаний.

Основное внимание будет уделено особенностям развития когерентных нелинейных процессов в пространстве, т. е. волновой картине нелинейных оптических эффектов.

Теория процессов рассматриваемого типа весьма успешно разрабатывается в последние годы на основе квазиклассического приближения, в котором поле не квантуется; именно такой подход и будет в дальнейшем принят нами за основу.

Следует отметить, что теория когерентных нелинейных взаимодействий плоских волн была в значительной мере разработана еще в годы, предшествовавшие созданию лазеров, положивших начало современному этапу в развитии нелинейной оптики (см. [3, 4], где приведена подробная библиография). В последнее же время значительное внимание уделялось распространению этой теории на реальные пучки — учет многомодовой структуры, конечной ширины спектральной линии, дифракционных явлений.

II. ПРИБЛИЖЕННЫЕ УРАВНЕНИЯ ВОЛНОВОЙ НЕЛИНЕЙНОЙ ОПТИКИ

Процесс распространения электромагнитных волн в нелинейной среде описывается волновым уравнением вида

$$\vec{\nabla}[\vec{\nabla}\mathbf{E}] + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} + \frac{4\pi}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{P}^{(л)}}{\partial t^2} + \frac{4\pi}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{P}^{(нл)}}{\partial t^2} = 0, \quad (1)$$

где

$$\mathbf{P}^{(л)} = \int_0^\infty \hat{\chi}(t') \mathbf{E}(t-t') dt' \quad (2)$$

и

$$\mathbf{P}^{(нл)} = \int_0^\infty dt' \int_0^\infty dt'' \hat{\chi}(t', t'') \mathbf{E}(t-t') \mathbf{E}(t-t'-t'') + \dots, \quad (3)$$

где $\hat{\chi}$, $\hat{\chi}$ — тензоры второго, третьего и более высоких рангов.

1. Для случая плоских (пока для простоты, немодулированных) волн методика анализа нелинейного уравнения (1) заключается в его упрощении, сводящемся к пренебрежению вторыми производными по координатам (амплитуды и фазы взаимодействующих волн считаются медленно меняющимися функциями координаты, см., например [4]). Решение уравнения (1) ищется в виде

$$\mathbf{E} = \sum_n \mathbf{e}_n A_n(\mu \mathbf{r}) \exp\{i(\omega_n t - \mathbf{k}_n \mathbf{r})\}, \quad (4)$$

где μ — малый параметр, имеющий величину $\sim A/A_{ат}$, где в свою очередь $A_{ат}$ — атомное поле. Подставляя (4) в (1) и удерживая лишь члены $\sim \mu$ (нелинейные и диссипативные члены в (1) имеют такой же порядок), приходим к системе так называемых укороченных уравнений, описывающих взаимодействия плоских волн в нелинейной среде:

$$[\mathbf{e}_n [\mathbf{k}_n \mathbf{e}_n]] \vec{\nabla} A_n + \mathbf{e}_n \hat{\alpha} \mathbf{e}_n A_n = F_n^{(2)}(A_i, A_k \dots) + \dots, \quad (5)$$

где $\hat{\alpha}$ определяется тензором проводимости среды и $F_n^{(2)}$ — члены, связанные с нелинейной поляризацией. На уравнениях типа (5) базируется большинство выполненных к настоящему времени теоретических работ по нелинейной оптике. Уравнения вида (5) характеризуют, как нетрудно видеть, изменения амплитуд взаимодействующих волн вдоль лучей: вектор $[\mathbf{e}_n [\mathbf{k}_n \mathbf{e}_n]]$ параллелен лучевому вектору \mathbf{s}_n . Поэтому использование уравнений типа (5) для анализа явлений в ограниченных пучках соответствует по существу приближению геометрической оптики.

2. Для учета дифракционных эффектов в пучке конечного сечения следует ввести в рассмотрение производные амплитуды не только вдоль, но и поперек лучей. Так как в направлениях, перпендикулярных лучу, происходит переход в область тени, изменения амплитуды вдоль луча следует считать более медленными, нежели поперек луча. Поэтому для ограниченного пучка решение уравнения (1) естественно искать в виде

$$\mathbf{E} = \sum_n \mathbf{e}_n A_n(\mu \mathbf{r} s_n, \sqrt{\mu} |\mathbf{r} s_n|) \exp\{i(\omega_n t - \mathbf{k}_n \mathbf{r})\} \quad (6)$$

и, подставляя (6) в (1), в первом приближении по μ получаем вместо (5) уравнение в частных производных

$$[\mathbf{e}_n [\mathbf{k}_n \mathbf{e}_n]] \vec{\nabla} A_n + \frac{i}{2} \Delta_{\perp} A_n + \mathbf{e}_n \hat{\alpha} \mathbf{e}_n A_n = F_n^{(2)}(A_i, A_k \dots) + \dots, \quad (7)$$

где Δ_{\perp} — лапласиан, соответствующий дифференцированию по направлениям, перпендикулярным лучу. В линейной среде (все $F_n^{(k)} = 0$) уравнение (7) переходит в уравнение параболического типа с мнимым коэффициентом „диффузии“, широко используемое в теории дифракции. К настоящему времени методом параболического уравнения проведено решение ряда задач о дифракции в линейных изотропных (см. [5]—[6]) и анизотропных (см. [7]) средах.

Таким образом, метод медленно меняющихся амплитуд в теории нелинейных волн удается естественно сочетать с квазиоптическим приближением в теории дифракции. Уравнения типа (7) пригодны для описания нелинейных эффектов, таких, как генерация гармоник, вынужденное рассеяние, в слабо сходящихся и слабо расходящихся пучках, в том числе в фокусированных.

3. Обратимся, наконец, к учету временной зависимости комплексных амплитуд волн, взаимодействующих в нелинейной среде. Считая для простоты волны плоскими (хотя без труда можно записать упрощенные уравнения, учитывающие одновременно временные изменения амплитуды и дифракционные эффекты, их решение оказывается весьма трудоемким), решение уравнения (1) будем искать в виде

$$\mathbf{E} = \sum_n \mathbf{e}_n A_n(\mu t, \mu \mathbf{r}) \exp\{i(\omega_n t - \mathbf{k}_n \mathbf{r})\}. \quad (8)$$

Зависимость комплексных амплитуд от времени также считается медленной. Это предположение хорошо выполняется, если относительные ширины спектральных линий взаимодействующих волн не слишком велики: $\Delta\omega_n/\omega_n \ll 1$. Для таких квазимонохроматических волн учет дисперсионных эффектов достаточно провести, ограничиваясь лишь первым приближением в теории дисперсии, т. е. учетом лишь группового запаздывания взаимодействующих волн.

Подставляя (8) в (1) и ограничиваясь членами первого порядка по μ , приходим к упрощенным уравнениям, описывающим взаимодействие плоских модулированных волн в слабонелинейной среде (см. [4]):

$$[\mathbf{e}_n [\mathbf{k}_n \mathbf{e}_n]] s_n \frac{\partial A_n}{\partial t} + [\mathbf{e}_n [\mathbf{k}_n \mathbf{e}_n]] \vec{\nabla} A_n + \mathbf{e}_n \hat{\alpha} \mathbf{e}_n A_n = F_n^{(2)} + \dots, \quad (9)$$

где s_n — лучевой вектор,

$$s_n = \frac{\partial \omega_n}{\partial \mathbf{k}_n} / \left(\frac{\partial \omega_n}{\partial \mathbf{k}_n} \right)^2, \quad (10)$$

модуль которого равен обратной величине, соответствующей групповой скорости. Заметим, что при $F_n^{(k)} \equiv 0$ (линейная диссипативная среда) можно записать общее решение уравнения (9), позволяющее более отчетливо высветить характер волн, описываемых этим уравнением. Это решение имеет вид

$$A_n = f_n\{\mu(t - s_n \mathbf{r}); [s_n \mathbf{r}]\} \exp(-\delta_n s_n \mathbf{r}), \quad (10. a)$$

где

$$\delta_n = \mathbf{e}_n \hat{\alpha} \mathbf{e}_n / (s_n \mathbf{k}_n),$$

т. е. описывает волну, форма которой остается неизменной в процессе распространения.

Сказанное означает, что уравнения типа (9), как и говорилось выше, учитывают лишь групповые запаздывания взаимодействующих волн. Затухание волны происходит вдоль лучевого вектора. Изменения же комплексной амплитуды (10.а) в плоскости, перпендикулярной к лучевому вектору, могут быть произвольными, в том числе разрывными. Последнее вполне понятно, так как в (9) не включены члены, описывающие поперечную диффузию амплитуды; $\Delta_{\perp} = 0$ (ср. с (7)).

III. ТЕОРИЯ ГЕНЕРАЦИИ ВТОРОЙ ОПТИЧЕСКОЙ ГАРМОНИКИ В РЕАЛЬНЫХ ПУЧКАХ

1. Нефокусированный пучок оптического квантового генератора; приближение геометрической оптики; к.п.д. оптического удвоителя. Простейшей моделью лазерного пучка, как уже указывалось, является набор плоских волн, распространяющихся под различными углами к некоторому заданному направлению. Если ограничиться приближением геометрической оптики, теорию генерации второй гармоники в таком пучке можно построить, пользуясь уравнениями типа (5); записанными для каждого из лучей; полная мощность гармоники может быть вычислена затем путем интегрирования по поперечному сечению пучка. Следует иметь в виду при этом, что необходимость даже в такой сравнительно простой процедуре отпадает, если на длине нелинейной среды изменение поперечного сечения лазерного пучка за счет его конечной расходимости мало, можно пренебречь так называемым «апертурным эффектом», связанным с различием направлений волнового и лучевого векторов за счет анизотропии среды (см. [14, 16]), и фазовые скорости взаимодействующих волн не совпадают ни для одного из лучей. Количественно указанные условия можно сформулировать следующим образом: Первое:

$$2\alpha_0 l < d. \quad (11.а)$$

Здесь $2\alpha_0$ — расходимость лазерного пучка; l — длина нелинейной среды, d — поперечное сечение лазерного пучка на входе в нелинейную среду. Второе:

$$\beta l < d. \quad (11.б)$$

Здесь β — угол анизотропии. Величина, входящая в правую часть неравенства (11.б), равна d для модели слабо расходящейся сферической волны; для волн более сложного типа вместо d фигурирует, вообще говоря, меньшая величина. Третье:

$$\Delta(\Theta, \Phi) / \Delta(0, 0) \simeq 1. \quad (11.в)$$

Здесь $\Delta = k_2 - 2k_1 = \frac{2\pi}{\lambda_2}(n_2 - n_1)$ — расстройка фазовых скоростей, различная в анизотропной среде для разных лучей; $\Delta(0, 0)$ — расстройка для оси пучка; Θ, Φ — полярные углы. При выполнении условий (11) волна лазера с точки зрения картины протекания нелинейных эффектов может вообще с достаточной степенью точности рассматриваться как плоская. Именно так обстоит дело в опытах по генерации оптических гармоник нефокусированным пучком основного излучения в оптически изотропных средах и в анизотропных средах, обладающих сравнительно небольшим двойным лучепреломлением [8, 9]. При этом расчет мощности гармоники можно производить, умножая поток мощности гармони-

ки, вычисленный для плоской волны, на эффективную площадь пучка. Со значительными нарушениями условия (11.в) приходится сталкиваться в том случае, когда генерация гармоники происходит вблизи так называемого направления синхронизма, вдоль которого $\Delta(\theta, \varphi) = 0$; в эксперименте с этим направлением совмещают обычно ось пучка лазера. В дальнейшем мы будем рассматривать одноосные кристаллы и угол θ отсчитывать от направления синхронизма в плоскости, содержащей оптическую ось, а угол φ — в азимутальной плоскости.

Считая по-прежнему, что условия (11.а) и (11.б) выполняются, проиллюстрируем кратко методику расчета выходной мощности и к. п. д. оптического удвоителя частоты, возбуждаемого слабо расходящимся пучком основного излучения.

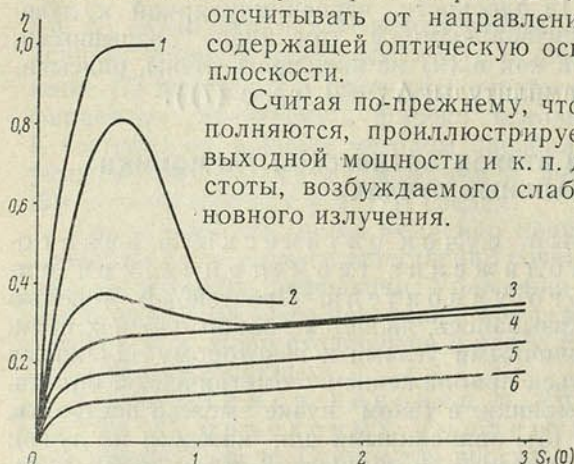


Рис. 1. Теоретические графики зависимости к. п. д. удвоителя частоты от нормированной мощности основного излучения $S_1(0)$ (параметр кривых — приведенная расходимость пучка основного излучения $\Delta_k = \gamma\alpha_0$):

1 — $\Delta_k = 0$; 2—1; 3—2; 4—3; 5—5; 6—10

ляризуемостью вдоль одного из лучей слабо расходящегося пучка, удовлетворяющего условиям (11.а) и (11.б), можно представить в виде:

$$k_1 \cos \widehat{k_1 s_1} \cos \widehat{s_1 z_0} \frac{dA_1}{dz} + i \omega^2 \frac{4\pi}{c^2} (\mathbf{e}_1 \chi^{2\omega-\omega} \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_1) A_2 A_1^* e^{i\Delta r} = 0, \quad (12.a)$$

$$k_2 \cos \widehat{k_2 s_2} \cos \widehat{s_2 z_0} \frac{dA_2}{dz} + i (2\omega)^2 \frac{2\pi}{c^2} (\mathbf{e}_2 \chi^{2\omega} \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1) A_1^2 e^{-i\Delta r} = 0. \quad (12.б)$$

Здесь $A_{1,2}$ — комплексные амплитуды плоских волн основной частоты и второй гармоники; $\mathbf{e}_{1,2}$; $\mathbf{k}_{1,2}$; $\mathbf{s}_{1,2}$ — векторы поляризации, волновые и лучевые векторы этих волн соответственно; $\chi^{2\omega-\omega}$ и $\chi^{2\omega}$ — спектральные компоненты нелинейной поляризуемости на соответствующих частотах; $\vec{\Delta} = 2\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2$ — вектор расстройки (в направлении синхронизма $\vec{\Delta} = 0$); \mathbf{z}_0 — единичный вектор в направлении нормали к границе нелинейной среды. Общее решение системы (12) для A_2 (при краевых условиях $A_1(0) \neq 0$; $A_2(0) = 0$) имеет вид¹:

$$A_2(z) = \frac{1}{2} A_1(0) \left\{ \left[4 \frac{\sigma_2}{\sigma_1} + \left(\frac{\Delta}{2\sigma_1 A_1(0)} \right)^2 \right]^{1/2} - \frac{|\Delta|}{2\sigma_1 A_1(0)} \right\} \times \\ \times \operatorname{sn} \left\{ \frac{1}{2} \left[4 \frac{\sigma_2}{\sigma_1} + \left(\frac{\Delta}{2\sigma_1 A_1(0)} \right)^2 \right]^{1/2} + \frac{\Delta}{4\sigma_1 A_1(0)} \right\} \sigma_1 A_1(0) z. \quad (13)$$

Здесь sn — эллиптический синус.

¹ При этом указанное решение удается записать не только для среды без потерь, но и для среды, в которой декременты затухания основного излучения и второй гармоники одинаковы.

Для амплитуды $A_1(z)$ аналогичное выражение может быть записано через функции Вейерштрасса. В (13) приняты обозначения:

$$\sigma_1 = \frac{4\pi}{c^2} \omega^2 \frac{(\mathbf{e}_1 \hat{\chi}^{2\omega-\omega} \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_1)}{k_1 \cos k_1 s_1 \cos s_2 z_0} \simeq \sigma_2 = \frac{8\pi}{c^2} \omega^2 \frac{(\mathbf{e}_2 \hat{\chi}^{2\omega} \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1)}{k_2 \cos k_2 s_2 \cos s_2 z_0}.$$

Из (13) непосредственно следуют известные решения для частных случаев $\Delta \ll 2\sigma_1 A_1(0)$ и $\Delta \gg 2\sigma_1 A_1(0)$.

Имеем для случая малой расстройки фазовых скоростей:

$$\Delta \ll 2\sigma_1 A_1(0), \quad A_2(z) \simeq \left(\frac{\sigma_2}{\sigma_1}\right)^{1/2} A_1(0) \operatorname{th}(\sigma_1 \sigma_2)^{1/2} A_1(0) z, \quad (14.a)$$

а для случая большой расстройки известное осциллирующее решение:

$$\Delta \gg 2\sigma_1 A_1(0), \quad A_2(z) \simeq \sigma_2 A_1^2(0) z \frac{\sin \Delta z/2}{\Delta z}. \quad (14.6)$$

Пользуясь (13), можно проанализировать процесс генерации второй гармоники нефокусированным пучком реального лазера. Учет расходимости пучка лазера в (12) при сделанных предположениях может быть выполнен, если считать расстройку Δ функцией углового отклонения Θ луча от направления синхронизма; для малых расходимостей α_0 расстройка $\Delta = \gamma \Theta$. Пользуясь (13), можно рассчитать плотность мощности второй гармоники $S_2(\Delta) = \frac{n_2 c}{8\pi} A_2^2(\Delta)$ и, интегрируя по сечению луча, — полную мощность гармоники P_2 и полный к.п.д. удвоителя¹. Для одноосного кристалла длиной l к.п.д. равен

$$\eta(l) = \frac{P_2(l)}{P_1(0)} = (\gamma \alpha_0)^{-1} \int_0^{\Delta_k} \tilde{A}_2^2(\Delta, l) d\Delta, \quad (15)$$

где $P_1(0)$ — полная мощность основного излучения на входе в нелинейный кристалл; $\Delta_k = \gamma \alpha_0$ — расстройка для крайнего луча.

Интеграл (15) был вычислен с помощью цифровой вычислительной машины (более подробно результаты этого расчета изложены в сообщении В. Г. Дмитриева, представленном на настоящем симпозиуме). Результаты вычислений для типичного значения $l = 3$ см представлены на рис. 1. По оси абсцисс отложены значения нормированной плотности мощности основного излучения на входе в нелинейный кристалл; $\bar{S}_1(0) = S_1(0) \frac{8\pi \sigma_1^2}{n_1 c}$ (полная мощность $P_1(0) = S_1(0) \Sigma$, где Σ — сечение пучка основного излучения); по оси ординат — значение η . Параметром кривых является величина Δ_k . Из приведенных кривых видно, что характер зависимости к.п.д. удвоителя от $P_1(0)$ существенно определяется величиной параметра Δ_k . На рис. 1 кривая $\Delta_k = 0$ соответствует режиму генерации второй гармоники плоской волной, распространяющейся вдоль направления синхронизма (14.a).

¹ В приближении заданного поля ($A_1 \gg A_2$) такой расчет был выполнен Клейнманом [16], Бокутем и Хаткевичем [10].

При достаточно малых $\Delta_k \eta$ является осциллирующей функцией $P_1(0)$; в этом смысле поведение слабо расходящегося пучка в известной мере аналогично случаю плоской волны с $\Delta \neq 0$ (см. графики, приведенные в [4]); однако для слабо расходящегося пучка с ростом Δ_k период пространственных биений возрастает. Для $\Delta_k > 2$ поведение расходящегося пучка существенно отличается от случая плоской волны с $\Delta \neq 0$; с ростом $\Delta \eta$ становится все более монотонной функцией $P_1(0)$ (суммируется большое число волн с разными Δ). Для $\Delta_k = 2 \div 10$ (для кри-

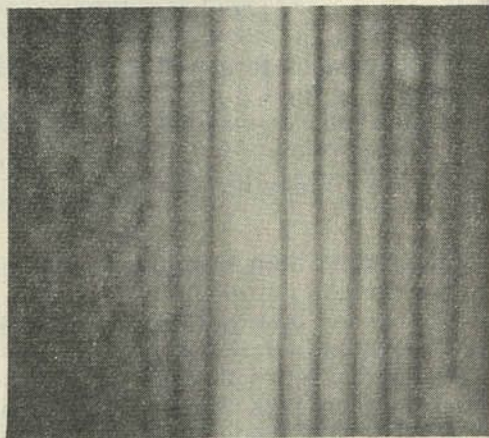


Рис. 2. Фотография поперечного сечения луча второй гармоники, возбуждаемой в кристалле KDP длиной $l=2$ см. Кристалл ориентирован таким образом, что ось пучка основного излучения совпадает с направлением синхронизма

сталла KDP и $\gamma = 0,25 \cdot 10^4 \text{ см}^{-1}$ им соответствуют расходимости $2\alpha_0 = 6' \div 30'$ η линейно нарастает с ростом $P_1(0)$ до значений, не превышающих 20—25%; дальнейший рост $P_1(0)$ приводит к более медленному увеличению к. п. д. Области значений безразмерного параметра $\bar{S}_1(0)$, с которыми приходится иметь дело в эксперименте, определяются прежде всего свойствами нелинейного кристалла, а именно порогом светового пробоя кристалла $\bar{S}_1^{(m)}(0)$ и величиной работающей компоненты тензора нелинейной поляризуемости. Для KDP максимальные значения параметра $\bar{S}_1^{(m)} \leq 0,8 \div 0,9$. Для ADP эта величина примерно в 1,5 раза больше за счет более высокого порога светового пробоя (см. [1]). Для нового нелинейного кристалла LiNbO_3 , насколько можно судить из [11], $\bar{S}_1^{(m)}$ по крайней мере не ниже десяти.

Рассмотренная модель нефокусированного пучка лазера хорошо подтверждается экспериментально.

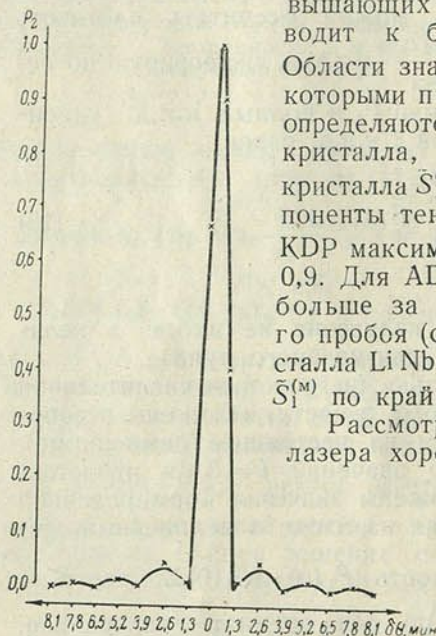


Рис. 3. Распределение интенсивности второй гармоники по поперечному сечению луча (см. рис. 2). Кривая построена по формуле (14.6)

В условиях опыта, соответствующих выполнению условий (11.а), (11.б), пространственная структура излучения второй гармоники при $A_2 \ll A_1$ очень хорошо описывается формулой типа (14.6) (см. рис. 2 и 3) [12].

Таким образом, зависимость дисперсионных свойств нелинейной среды от направления луча может быть причиной экспериментально наблюдаемого насыщения оптического удвоителя частоты при сравнительно низком к. п. д., не превышающем 25—30% (см. [13] и доклад А. И. Ковригина, представленный на этом симпозиуме); напомним, что учет толь-

ко затухания в нелинейном кристалле приводит к предельному к. п. д. удвоителя 80—85% (см. [4]).

Разумеется, невыполнение одного из условий (11.а), (11.б) существенно усложняет дело и может привести к коррективам в теории максимального к. п. д. Поскольку обычно $\beta < \alpha_0$, учет апертурных эффектов более важен. Это в особенности относится к пучкам сложной поперечной структуры, для которых в правой части (11.б) фигурирует величина меньшая d .

Проведенное выше рассмотрение можно обобщить, учитывая изменение интенсивности основного излучения вдоль луча, связанное с расходимостью пучка лазера. При этом, как нетрудно показать, темп роста амплитуды гармоники с расстоянием замедляется даже в условиях точного выполнения условия синхронизма ($\Delta=0$).

При этом оказывается, что при $A_1 \gg A_2$ в цилиндрической волне $A_2 \sim \sqrt{z}$ (напомним, что в плоской волне при этих условиях $A_2 \sim z$), а в сферической волне $A_2 \sim \ln z$.

2. Учет дифракционных явлений. Генерация второй гармоники в фокусированных пучках. Более общая теория генерации второй гармоники, в которой учитывается поперечная диффузия амплитуды, должна строиться, очевидно, на уравнениях типа (7). Строго говоря, количественный анализ пределов применимости приближений, принятых в п. I, должен базироваться именно на результатах такой более общей теории.

Излагаемые ниже приемы позволяют решить задачу о протекании нелинейных эффектов в ограниченных пучках в довольно общих для нелинейной оптики предположениях; однако заранее ясно, что если речь идет о сравнительно слабо расходящихся пучках лазеров, учет дифракции наиболее важен при анализе нелинейных взаимодействий в фокусе. К краткому рассмотрению¹ важного примера такого взаимодействия — задачи о генерации второй гармоники цилиндрически сходящейся волной мы и обратимся. Общую формулу для цилиндрически сходящейся в точку $z=0$ немодулированной волны

$$E(x, z, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\alpha) \exp\{i[\omega t - kr \cos(\Theta - \alpha)]\} d\alpha \quad (16)$$

(где r, Θ — полярные координаты в плоскости x, z) для слабо сходящейся (функция $f(\alpha)$ отлична от нуля для углов $|\alpha| < \alpha_0 \sim \sqrt{\mu}$) волны представим в виде:

$$E = e A(x, z) \exp\{i(\omega t - kz)\}, \quad (17.а)$$

$$A(x, z) = \sqrt{\frac{P_1 k}{\alpha_0 c b}} \int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} \exp\left\{-ikx\alpha + \frac{ik\alpha^2}{2}z\right\} d\alpha, \quad (17.б)$$

где $P_1 = \frac{cb}{8\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} AA^* dx$ — полная мощность пучка; b — ширина пучка

в направлении, перпендикулярном плоскости xz ; при $b \gg \lambda$ дифракцию в этом направлении можно не учитывать.

¹ Более подробно результаты соответствующего анализа изложены в [15].

Представление (17) можно считать удовлетворительной моделью лазерного пучка, фокусируемого с помощью сравнительно длиннофокусной цилиндрической линзы, а также нефокусированного пучка, генерируемого плоским лазерным кристаллом. Нетрудно убедиться также, что (17) полностью соответствует приближениям, принятым в теории дифракции, базирующейся на анализе параболического уравнения; медленно меняющаяся амплитуда (17.6) удовлетворяет линейному уравнению типа (7).

Амплитуда цилиндрически сходящейся волны достигает максимума на фокальной линии длиной b ($x=0$; $z=0$) и равна

$$A_{\Phi} = 2 \sqrt{\frac{P_1 k \alpha_0}{cb}}, \quad (18)$$

в плоскости x, z фокусное пятно имеет форму эллипса с полуосями:

$$z_{\Phi} = \lambda/(\alpha_0)^2; \quad x_{\Phi} = \lambda/2\alpha_0. \quad (19)$$

Картина изменения структуры поля фокусируемого пучка детально проанализирована в классических работах по теории фокусировки. В непосредственной близости от фокальной плоскости $z=0$ волну с достаточной степенью точности можно считать плоской; на границе фокального пятна и по мере удаления от него фронт все более приближается к цилиндрическому. Для конкретности можно рассмотреть задачу о генерации второй гармоники в одноосном отрицательном кристалле волной типа (17); в таком кристалле условия синхронизма выполняются, в частности, если волна второй гармоники необыкновенная, а волна основного излучения обыкновенная (поскольку мы интересуемся здесь принципиальной стороной дела, более сложные случаи

рассматривать не будем). Тогда, считая угол анизотропии $\beta = k_2^e s_2^e$ малым, и полагая, что ось пучка основного излучения совпадает с направлением синхронизма (вдоль него $2k_1^0 = k_2^e$) и нормалью к кристаллу, вместо (12), получаем систему уравнений в частных производных:

$$\frac{\partial A_1}{\partial z} + i \frac{1}{2k_1^0} \frac{\partial^2 A_1}{\partial x^2} + i \sigma_1 A_2 A_1^* = 0, \quad (20.a)$$

$$\frac{\partial A_2}{\partial z} + i \frac{1}{2k_2^e} \frac{\partial^2 A_2}{\partial x^2} + \beta \frac{\partial A_2}{\partial x} + i \sigma_2 A_1^2 = 0, \quad (20.б)$$

где z — координата, отсчитываемая вдоль луча основного излучения (единичный вектор $\mathbf{z}_0 \parallel \mathbf{s}_1^0$), а x — координата, отсчитываемая поперек

луча ($\mathbf{x}_0 \perp \mathbf{s}_1^0$). В силу сделанных предположений $\widehat{s_1^0 s_2^e} = \beta$. В уравнениях (20) учтены две причины изменения амплитуд вдоль оси x : дифракция (этот эффект описывается вторыми производными по x) и анизотропия (соответствующий член, пропорциональный β , фигурирует лишь в уравнении для второй гармоники), приводящая к отличию направлений волнового и лучевого векторов; последний член, разумеется, должен фигурировать и в уравнениях геометрической оптики, учитывающих апертурный эффект.

Таким образом, с учетом апертурного эффекта уравнения геометрической оптики для двумерного пучка учитывающие и расстройку фазовых скоростей, принимают вид (ср. с (12)):

$$\frac{\partial A_1}{\partial z} + i\sigma_1 A_2 A_1^* e^{i\Delta r} = 0, \quad (21.a)$$

$$\frac{\partial A_2}{\partial z} + \beta \frac{\partial A_2}{\partial x} + i\sigma_2 A_1^2 e^{-i\Delta r} = 0. \quad (21.б)$$

Теперь уже даже в случае $A_1 \gg A_2$ и $\Delta = 0$ амплитуда $A_2 \sim z$ лишь для z меньших апертурной длины $L_{\text{ап}}$, определяемой соотношением типа (11.б). При $z \gg L_{\text{ап}}$ $A_2 \sim \sqrt{z}$. Если $L_{\text{ап}}$ больше так называемой „когерентной“ длины для расходящегося пучка $L_{\text{ап}} \simeq d/\beta > 2\pi/\beta k_1^0 \alpha_0$, то теория предельного к. п. д., развитая выше, правильно описывает экспериментальные условия. При $L_{\text{ап}} < 2\pi/\beta k_1^0 \alpha_0$, теорию предельного к. п. д. следует строить с помощью уравнений (21).

Общее решение уравнений (20), т. е. решение типа решения, описываемого формулой (13), получить затруднительно. Однако основные особенности процесса генерации оптических гармоник в фокусированных пучках можно выявить, ограничиваясь приближением $A_1 \gg A_2$, т. е. случаем малых к. п. д. преобразования.

В этом случае удастся записать точное решение уравнения (20.б) и, подставляя в него поле основной волны, проанализировать факторы, определяющие пространственную структуру и выходную мощность второй гармоники.

При этом естественным образом можно выделить два предельных случая: $z_{\text{ф}} \gg l$ — случай длиннофокусной линзы и случай короткофокусной линзы — $z_{\text{ф}} \ll l$.

Получаемые при этом результаты оказываются достаточно наглядными, в связи с чем представляется целесообразным хотя бы кратко на них остановиться. Обратимся сначала к случаю $z_{\text{ф}} \gg l$.

Анализ решений показывает, что вид пространственной структуры амплитуды второй гармоники $A_2(x, l)$ и полной мощности гармоники P_2 существенно зависит от соотношения между углами α_0 и β . При $\alpha_0 \gg \beta$

$$P_2' = \frac{8\sigma_2^2 P_1^2 \alpha_0 k_1^0 l^2}{3cb}, \quad (22)$$

а распределение $A_2(x)$ является однородным по x .

При $\beta \gg \alpha_0$

$$P_2'' = \frac{4\pi\sigma_2^2 P_1^2 l}{cb\beta}. \quad (23)$$

При этом в зависимости от угла наблюдения Θ для угловой структуры гармоники получаем

$$|A_2(x, l)|^2 = \frac{16\pi\sigma_2^2 P_1^2 \sin^2 \beta k_1^0 \Theta l}{c^2 b^2 k_1^0 \beta^2 \Theta^2 l}. \quad (24)$$

Формулы (22), (23) свидетельствуют, что при $z_{\text{ф}} \gg l$ доминирующую роль в процессе генерации второй гармоники играют одномерные взаимодействия. Действительно, формула (22) имеет ту же структуру, что и формула для мощности гармоники, генерируемой плоской волной, распространяющейся в направлении одномерного синхронизма, $P_2^{(\text{пл})} = 4\pi\sigma_2^2 P_1^2 l^2 / c\Sigma$, где Σ — площадь пучка основного излучения. Формулы (23), (24) аналогичны выведенным ранее формулам для слабо расходящегося пучка (см. (14.б)), в котором генерация второй гармо-

ники происходит за счет одномерных взаимодействий вдоль каждого из лучей¹.

С помощью (22), (23) можно определить и энергетический выигрыш, связанный с фокусировкой основного излучения, сравнивая P'_2 и P''_2 с мощностями гармоники, генерируемых на той же длине нефокусированным пучком площадью $\Sigma = b^2$. Величину P'_2 следует, очевидно, сравнивать с $P_2^{(пл)}$, а P''_2 — с мощностью второй гармоники, генерируемой расходящимся пучком, обладающим расходимостью α_0 и площадью b^2 . Имеем

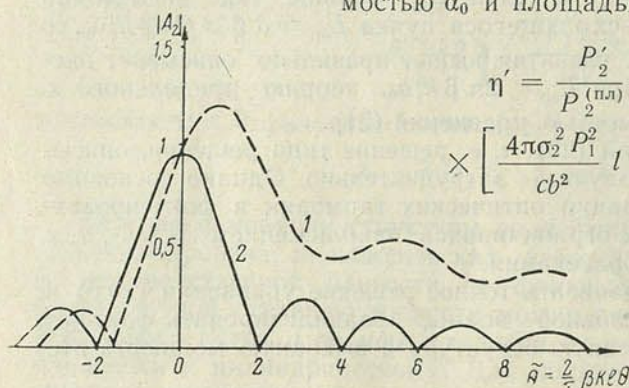


Рис. 4. Пространственная структура излучения второй гармоники (кривая 1), возбуждаемой на выходе нелинейного кристалла короткофокусной линзой. По оси ординат отложена амплитуда второй гармоники в относительных единицах, по оси абсцисс — нормированное значение угла наблюдения, $\tilde{\theta} = \frac{2}{\pi} \beta k_1^0 \theta$. Кривая 2 — пространственная структура гармоники, генерируемой за счет одномерных взаимодействий в расходящемся пучке (см. формулу 14.6)

мального к. п. д., развитая в п. I, применима и в случае фокусировки лазерного пучка длиннофокусной линзой, часто используемой в эксперименте [13]. Для расходящегося пучка с расходимостью, отличной от α_0 и равной α_1 , $\eta'' = \frac{\alpha_1}{\alpha_0} \frac{b}{x_\phi}$ и при $\alpha_1/\alpha_0 \ll 1$ выигрыш за счет фокусировки может существенно уменьшиться; $\eta'' = 1$ при $\alpha_1 \approx \lambda/b$, т. е. дифракционной расходимости.

Аналогичное рассмотрение можно провести и для сферически сходящейся волны; при $\alpha_0 \gg \beta$ и $z_\phi \gg l$ здесь $\eta = b^2/x_\phi^2$. Новые обстоятельства возникают в том случае, когда фокусировка пучка осуществляется короткофокусной линзой ($z_\phi \ll l$). Соответствующая пространственная структура излучения второй гармоники изображена на рис. 4. Здесь в отличие от длиннофокусной линзы в области углов, превышающих угол синхронизма (область „эффективной аномальной дисперсии“), вместо угловой зависимости $\sin \beta k_1^0 l \theta / \theta$, появляется слабо модулированный сплошной фон. Последнее свидетельствует, как известно, о вкладе двумерных взаимодействий в процессе генерации. Экспериментально это обстоятельство было установлено ранее (см. [12]), однако

$$\eta' = \frac{P'_2}{P_2^{(пл)}} = \frac{2}{3} \frac{b}{x_\phi} ; \quad \eta'' = P_2'' \times \left[\frac{4\pi\sigma_2^2 P_1^2}{cb^2} l \frac{2\pi}{\beta\alpha_0 k_1^0} \right]^{-1} = \frac{b}{x_\phi} . \quad (25)$$

Таким образом, выигрыш за счет фокусировки при $z_\phi \gg l$ определяется только возрастанием напряженности поля в фокусе; расчет характеристик второй гармоники в этом случае можно проводить с помощью формул, выведенных в приближении геометрической оптики, подставляя в них $b x_\phi$ вместо b^2 . Последнее означает, что теория максимального к. п. д., развитая в п. I, применима и в случае фокусировки лазерного пучка длиннофокусной линзой, часто используемой в эксперименте [13]. Для расходящегося пучка с расходимостью, отличной от α_0 и равной α_1 , $\eta'' = \frac{\alpha_1}{\alpha_0} \frac{b}{x_\phi}$ и при $\alpha_1/\alpha_0 \ll 1$ выигрыш за счет

¹ Заметим, что пользуясь (20.6), можно более строго, чем это сделано в п. I, рассмотреть и задачу о генерации гармоники в слабо расходящемся пучке, возбуждающем нелинейный кристалл, расположенный вдали от фазового центра волны. При этом удается строго установить пригодность формул (14) для $\alpha_0 l < d$ и $\beta l < d$.

в работах по теории генерации второй гармоники (см. [16]) ему не уделялось должного внимания.

3. Нестационарные явления; генерация второй гармоники модулированными волнами. Конкретизация уравнений типа (9) для случая задачи о генерации второй гармоники приводит к укороченным уравнениям в частных производных вида:

$$\frac{\partial A_1}{\partial z} + \frac{1}{u_1} \frac{\partial A_1}{\partial t} + i \sigma_1 A_2 A_1^* e^{i \Delta z} = 0, \quad (26)$$

$$\frac{\partial A_2}{\partial z} + \frac{1}{u_2} \frac{\partial A_2}{\partial t} + i \sigma_2 A_1^2 e^{-i \Delta z} = 0. \quad (27)$$

Здесь u_1, u_2 — групповые скорости волны основной частоты и волны гармоники.

Решение уравнений (26), (27) представляет, вообще, существенно более сложную задачу, нежели решение соответствующих уравнений для немодулированных плоских волн (ср. уравнения (12)).

Имеется, однако, важный частный случай, для которого учет производных комплексных амплитуд по времени тривиален — случай равенства групповых скоростей $u_1 = u_2 = u$. В этом случае заменой переменных $\xi = t + \frac{z}{u}$; $\eta = t - \frac{z}{u}$ система (26), (27) приводится к системе уравнений в обыкновенных производных:

$$\frac{\partial A_1}{\partial \xi} + i \sigma_1 e^{i \Delta \frac{u}{2} (\xi - \eta)} A_2 A_1^* = 0, \quad (28)$$

$$\frac{\partial A_2}{\partial \xi} + i \sigma_2 e^{-i \Delta \frac{u}{2} (\xi - \eta)} A_1^2 = 0, \quad (29)$$

имеющих тот же вид, что и для немодулированных волн.

Поэтому случай $u_1 = u_2$ может быть назван квазистатическим; характер изменения комплексных амплитуд с координатой остается таким же, как и в немодулированной волне, однако вид спектра в процессе нелинейного взаимодействия несколько модифицируется. Новые обстоятельства возникают в случае $u_1 \neq u_2$, когда возникает групповое запаздывание взаимодействующих волн. На длине нелинейной среды l групповое запаздывание $T = l \left(\frac{1}{u_1} - \frac{1}{u_2} \right)$. Здесь характер изменения комплексных амплитуд в пространстве определяется соотношением между запаздыванием T и характерным временем τ , определяющим ширину спектра волны основного излучения $\tau \sim 1/\Delta\omega$. Для случайно модулированной волны τ имеет порядок времени корреляции, а для импульсно модулированной — длительности импульса. Нетрудно убедиться путем непосредственного вычисления (подробности см. в [19]), что при

$$\tau \gg T = l \left(\frac{1}{u_1} - \frac{1}{u_2} \right) \quad (30)$$

процесс генерации гармоники происходит, как и в немодулированной волне (т. е. справедливо квазистатическое приближение), а при $\tau < T$ возникают существенные отличия.

При $A_1 \gg A_2$ и $\Delta = 0$ из (26), (27) следует, что при

$$\tau > T \quad |A_2|^2 \sim l^2, \quad (31)$$

а при

$$\tau < T \quad |A_2|^2 \sim l. \quad (32)$$

Таким образом, если при $\tau > T$ интенсивность гармоника изменяется как квадрат числа частиц N среды, участвующих в нелинейном процессе: $|A_2|^2 \sim N^2$, то при $\tau < T$, $|A_2|^2 \sim N$, зависимость интенсивности от N

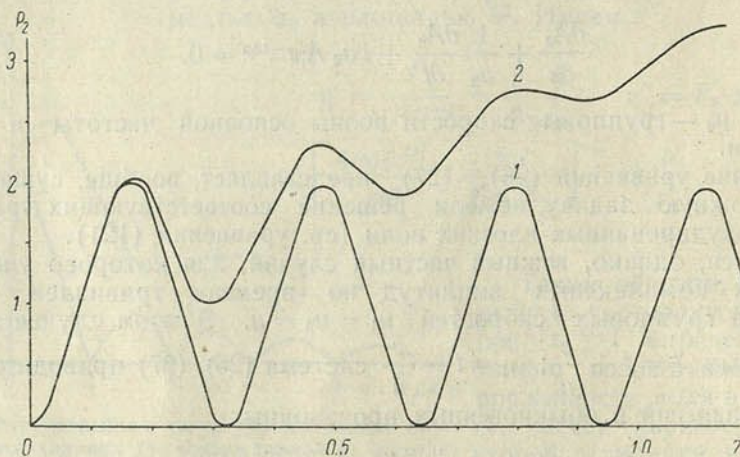


Рис. 5. Теоретическая зависимость мощности второй гармоники (в относительных единицах) от расстояния, пройденного в нелинейной среде. Кривая 1 соответствует идеальной монохроматической волне; 2 — волне, обладающей конечной шириной спектральной линии (форма линии считалась лоренцевской) $\Delta = k_2 - 2k_1 = 20 \text{ см}^{-1}$

имеет такой же вид, как и соответствующая зависимость для типичного процесса некогерентного рассеяния (например, спонтанного комбинационного или спонтанного рассеяния Мандельштама — Бриллюэна). Интересно, что формула (32) приложима к описанию процесса генерации второй гармоники, при $\tau < T$ независимо от дисперсионных характеристик среды. Последнее означает, что в некоторых случаях (в частности, при больших Δ) некогерентный нелинейный процесс может оказаться более эффективным, нежели когерентный; это иллюстрируется графиками, приведенными на рис. 5. Предельный к. п. д. некогерентного процесса определяется, по-видимому, термодинамическими соображениями и не превышает 50%.

Уравнения (26), (27) позволяют проследить и изменение формы импульса гармоники в нелинейной среде в том случае, когда временная зависимость связана с импульсным характером излучения лазера. При этом оказывается, что для $\tau > T$ форма импульса гармоники определяется квадратом импульса основного излучения, а при $\tau < T$ импульс гармоники несколько расплывается и соответственно сужается спектр гармоники.

Поэтому длина

$$l_k = (\Delta\omega)^{-1} \left| \frac{1}{u_1} - \frac{1}{u_2} \right|^{-1}, \quad (33)$$

для которой $\tau = T$ может быть названа когерентной длиной.

С зависимостью типа (32) приходится сталкиваться и в задаче о генерации второй гармоники в статистически неоднородной среде. Наиболее ярким примером такой ситуации является задача о нелинейном рассеянии в среде с центром инверсии, в которой отдельные молекулы обладают отличным от нуля тензором χ_{ijk} (см. [17, 18]). Здесь в отличие от когерентных процессов волновая задача тривиальна, а центр тяжести переносится на вычисление поперечника рассеяния.

Отметим, что термин «когерентная длина» широко используется в современной нелинейной оптике и для определения пространственных масштабов нелинейного взаимодействия, не связанных со статистическими эффектами, в частности пространственных масштабов, определяемых только дисперсионными свойствами нелинейной среды.

Здесь уместно заметить, что уравнения в частных производных, типа уравнений (26), (27), должны, строго говоря, использоваться и при исследовании других нелинейных процессов: смешения, параметрического усиления, вынужденного рассеяния. К счастью, в большинстве практически интересных случаев можно ограничиться квазистатическим приближением, полагая $d/dt=0$. Действительно, даже для $\tau \approx 10^{-8}$ сек (характерная длина импульса лазера с модулируемой добротностью) в задачах о смешении частот, вынужденном комбинационном рассеянии $\tau \approx T$ при $l \approx 10^2$ см, что заметно превышает длины нелинейных сред, используемых в эксперименте. Важным исключением, однако, оказывается вынужденное рассеяние Мандельштама—Бриллюэна. Здесь $T \sim l/v$, где v — скорость звука. Подставляя $v \approx 10^5$ см/сек и $\tau \sim 10^{-8}$ сек, убеждаемся, что квазистатическое приближение становится неприменимым уже при $l = 10^{-3}$ см.

4. **Обсуждение.** Теоретические методы, описанные в II и проиллюстрированные в III на примере стандартной задачи о генерации второй гармоники, позволяют решать широкий круг задач волновой нелинейной оптики. Общее предположение об относительной медленности изменения комплексных амплитуд в пространстве и во времени вполне адекватно подавляющему большинству практически интересных ситуаций. Следует заметить, однако, что приведенный выше материал не исчерпывает полностью даже круг теоретических вопросов, возникающих при анализе процесса генерации второй оптической гармоники. Например, представляет большой интерес рассмотрение генерации второй гармоники волной, имеющей дискретно-сплошной спектр или многогорбый сплошной спектр (излучение лазера, работающего в многомодовом режиме), анализ влияния пространственной когерентности основной волны на процесс генерации оптических гармоник, учет воздействия волн на дисперсионные свойства нелинейной среды и т. п. Разумеется, эти проблемы возникают и при исследовании других нелинейных оптических явлений. Подробный анализ указанных задач показывает, что они могут быть успешно рассмотрены с помощью методов, изложенных в II. Действительно, колебание, имеющее дискретно-сплошной спектр или многогорбый сплошной спектр, можно представить в виде случайно модулированного колебания и эффективно использовать методику, описанную в II.3 и в III.3 [19, 21, 22]. Получаемые при этом результаты в частном случае чисто дискретного спектра и $A_1 \gg A_2$ совпадают с результатами, изложенными в известной работе Бломбергера и Дюкуэнга [20]. При анализе влияния пространственной когерентности на протекание волновых нелинейных эффектов весьма существенным оказывается учет анизотропии среды (напомним, что обычно накапливающиеся нелинейные взаимодействия наблюдаются в анизотропных средах). В последнем нетрудно убедиться, обращаясь к задаче о генерации второй гармоники.

В пренебрежении дифракционными эффектами, в предположении, что $A_1 \gg A_2$ и $\Delta = 0$, процесс генерации необыкновенной волны второй гармоники цилиндрической волной описывается уравнением

$$\frac{\partial A_2}{\partial z} + \beta \frac{\partial A_2}{\partial x} + i\sigma_2 A_1^2(x) = 0 \quad (34)$$

и длина, на которой даже при $\Delta = 0$, амплитуда гармоники $A_2 \sim z$, оказывается тем меньше, чем меньше радиус корреляции, вообще говоря, случайной функции $A_1^2(x)$ (см. II. 3).

Последнее обстоятельство необходимо учитывать при анализе нелинейных эффектов в поле обычных (не лазерных) источников света и при интерпретации результатов опытов по смешению когерентного и некогерентного света типа опытов Смита и Браслау (см. [23]).

Для учета влияния взаимодействующих волн на дисперсионные свойства нелинейной среды следует принять во внимание кубичный член в разложении нелинейной поляризации по полю. При этом в уравнениях этого параграфа появятся члены, описывающие зависимость фазовых скоростей взаимодействующих волн от их интенсивности. Учет последних представляет наибольший интерес при анализе явлений в фокусированных пучках. Не останавливаясь подробнее на этом вопросе [24], отметим только, что если для случая цилиндрической линзы учет указанных эффектов, как правило, несущественен, то для сферической линзы диаметр фокусного пятна может существенно уменьшиться по сравнению с таковым, рассчитанным по линейной теории; происходит самофокусировка пучка в нелинейной среде¹. Указанное обстоятельство может оказать сильное влияние не только на процесс генерации второй оптической гармоники, но и на протекание целого ряда других нелинейных эффектов.

В заключение этого раздела следует сказать несколько слов о нелинейных взаимодействиях в оптических резонаторах и волноводах. В настоящее время теория таких явлений еще далека от завершения; можно сказать что здесь делаются лишь первые шаги. Более или менее подробно рассмотрена задача о генерации второй оптической гармоники в одномодовом резонаторе Фабри — Перо [25, 26], причем в первой из указанных работ исследованы и переходной и стационарный режимы (правда, с использованием цифровой вычислительной машины), а во второй — стационарный режим. Надо надеяться, что в ближайшее время теория нелинейных эффектов в оптических резонаторах и волноводах² получит дальнейшее развитие, тем более, что соответствующая линейная теория находится, как известно, на достаточно высоком уровне.

IV. ПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ В ОПТИКЕ

Другим важным примером когерентного взаимодействия волн в нелинейной среде является так называемое параметрическое взаимодействие.

Предложения о возможности реализации указанного эффекта в оптическом диапазоне и его теория даны в [28—30, 39] и монографии [4]; результаты опытов, в которых производилась косвенная регистрация параметрического усиления на $\lambda = 0,63 \text{ мк}$, описаны в [32]. В нелинейной

¹ Мы не рассматриваем здесь эффекта самоканализации.

² Среди многочисленных работ в этой области упомянем недавно опубликованную работу [27].

среде с поляризацией, квадратично зависящей от напряженности электрического поля, энергия интенсивной волны накачки (частота ω_n) может передаваться волнам с частотами ω_1 и ω_2 , удовлетворяющими соотношению $\omega_n = \omega_1 + \omega_2$. Передача энергии происходит наиболее эффективно, если выполняется условие синхронизма

$$\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 = \mathbf{k}_n. \quad (35)$$

В теории параметрического усиления, как и в теории генерации гармоник, за основу могут быть взяты упрощенные уравнения типа уравнений, приведенных в II. Затем, точно так же, как и для задачи о генерации второй гармоники, может быть реализована аналогичная теоретическая программа: параметрическое усиление в поле плоских волн, учет дифракционных эффектов, нестационарности накачки, дискретно сплошного характера спектра накачки, эффектов пространственной когерентности и т. д. (затем, что ее выполнение представляет значительный интерес и для теорий вынужденного рассеяния, во многом аналогичной теории параметрического усиления). Надо сказать, что, хотя соответствующие уравнения могут быть без труда записаны, к настоящему времени указанная программа еще не выполнена полностью. Поэтому для количественных оценок часто пользуются результатами теории плоских волн¹. Здесь мы однако не будем подробно останавливаться на теории, а обратимся к экспериментальным данным. Напомним, что до последнего времени попытки получить параметрическую генерацию и усиление в оптическом диапазоне наталкивались на значительные трудности.

Как показывает теория, в отличие от эффекта генерации гармоник эффект параметрического усиления обладает четко выраженным порогом. Приближенное соотношение (справедливое при достаточно большой длине кристалла l) для определения пороговой амплитуды накачки $A_{n.пор}$ имеет вид (его вывод можно найти в [4])

$$\Gamma_0^2 = \left(\frac{2\pi}{c^2} \right)^2 \frac{\omega_1^2 \omega_2^2 A_{n.пор}^2}{k_1 k_2} \frac{(\mathbf{e}_1 \chi^{\omega_n - \omega_2} \mathbf{e}_n \mathbf{e}_2) (\mathbf{e}_2 \chi^{\omega_n - \omega_1} \mathbf{e}_n \mathbf{e}_1)}{\cos \hat{k}_1 \hat{s}_1 \cos \hat{k}_2 \hat{s}_2 \cos \hat{s}_2 \hat{z}_0 \cos \hat{s}_1 \hat{z}_0} = \delta_1 \delta_2. \quad (36)$$

Здесь \mathbf{e}_i — единичные векторы, характеризующие поляризацию взаимодействующих волн; \mathbf{k}_i — их лучевые векторы; \mathbf{z}_0 — нормаль к границе нелинейной среды; χ спектральные компоненты тензора нелинейной поляризуемости; δ_i — декременты затухания на частотах $\omega_{1,2}$. При $A_n < A_{n.пор}$ волна, входящая в кристалл на частоте ω_1 (сигнальная волна), затухает, а родившаяся в кристалле дополнительная волна с частотой ω_2 сначала растет, а затем также затухает. Поэтому косвенные методы измерения параметрического усиления, например, по регистрации колебаний разностной частоты (именно такая методика была принята в работе [32]) не всегда оказываются достаточно надежными. В последнее время параметрическое усиление удалось непосредственно наблюдать в лаборатории физического факультета МГУ [31].

В этих опытах, проводившихся с кристаллами KDP, условие (36) удовлетворялось при использовании в качестве генератора накачки оптического удвоителя частоты. Блок-схема экспериментальной уста-

¹ Анализ параметрического усиления при случайно модулированной накачке дан в [33]. Интересен также вывод этой работы о возможности усиления в случайно неоднородной среде, в которой спектральная плотность флуктуаций диэлектрической проницаемости достаточно велика.

новки показана на рис. 6. Здесь лазер на стекле, активированном неодимом, использовался в качестве задающего генератора удвоителя частоты (кристалл КДР-I длиной $l=3$ см) и одновременно в качестве генератора усиленного сигнала. На выходе удвоителя частоты соотношение мощностей второй гармоники (P_2) и основного излучения (P_1) составляло $P_2/P_1=0,2 \div 0,3$. После системы фильтров Φ_1 это отношение становилось равным $P_2/P_1=10^4 \div 10^5$.

Таким образом, на второй, усилительный кристалл КДР подавался слабый сигнал ($\lambda_1=1,06$ мк) и мощная волна накачки ($\lambda_2=0,53$ мк). Волна

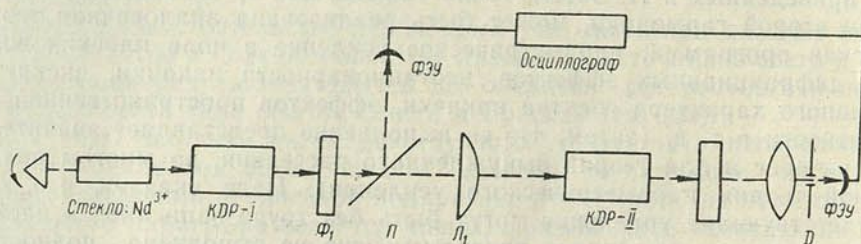


Рис. 6. Блок-схема экспериментальной установки для наблюдения параметрического усиления:

Φ_1 — фильтр СЗС-21; Φ_2 — инфракрасный фильтр ИКС-1; Д — диафрагма; L_1 — цилиндрическая линза, П — плоскопараллельная пластинка

накачки фокусировалась на кристалл КДР-II ($l=3$ см) с помощью цилиндрической линзы (L_1 , фокусное расстояние 13 см), так что плотность мощности накачки во втором кристалле достигала $P_2=100$ Мвт/см². Для регистрации изменения интенсивности сигнала в кристалле КДР-II использовалась двухканальная фотоэлектрическая схема или фотопленка. В проведенных опытах было установлено, что заметное параметрическое усиление имеет место лишь в сравнительно узком угле $\Delta\theta^{(s)} \approx 10'$. Максимальное усиление $G_{\text{макс}}$ соответствует точному направлению синхронизма. В опытах величина $G_{\text{макс}}$ флуктуировала от вспышки к вспышке. Среднее значение, зарегистрированное экспериментально, составляло $G_{\text{макс}}=2,5$. Теоретическое значение $G_{\text{макс}}^{(\text{теор})}$ для условий, соответствующих эксперименту, составляет $G_{\text{макс}}^{(\text{теор})}=6$ (здесь использовались следующие значения: $\Gamma_0=2,2 \cdot 10^{-6}$ А_н см⁻¹; $P_2=10^8$ Вт/см²; $l=3$ см; $\delta_1=0,05$ см⁻¹). Теоретическое значение $\Delta\theta^{(T)}$ (так называемый угол захватывания) определяется из условия $\gamma\Delta\theta^{(T)}=2k_1\Gamma_0$. Для использованных кристаллов $\gamma=0,25 \cdot 10^4$ см⁻¹ и $\Delta\theta \approx 1,5'$. Различие $\Delta\theta^{(T)}$ и $\Delta\theta^{(s)}$ связано, по-видимому, с конечной шириной спектра и расходимостью волны накачки.

Значительные флуктуации параметрического усиления от импульса к импульсу и небольшая (в сравнении с теоретической) величина среднего усиления могут быть связаны с особенностями параметрического взаимодействия в вырожденном режиме. Действительно в вырожденном режиме величина усиления равна $G_{\text{макс}}^{\text{теор}}$, как известно, лишь при наличии оптимального сдвига фаз между накачкой и сигналом. В описанной установке роль фазовращателя играла система фильтров, расположенных между кристаллами I и II. Вместе с тем следует отметить, что фазовая селективность вырожденного оптического параметрического усилителя с многомодовой накачкой (в наших опытах ширина спектра накачки достигала 10 Å) меньше, нежели в одномодовом режиме; спектр многомодового сигнала при взаимодействии с многомодовой накачкой расши-

ряется; появляются дополнительные моды, усиление которых происходит по законам невырожденного параметрического усиления.

Достигнутое значение усиления достаточно для реализации параметрического генератора света — прибора, позволяющего осуществить плавную перестройку частоты когерентных оптических колебаний. Таким образом, в настоящее время эффект параметрического усиления и генерации становится доступным экспериментальному изучению. Особенно перспективным здесь представляется использование в качестве рабочего тела эффективного нелинейного кристалла LiNbO_3 (см. [11]).

Можно ожидать, что в ближайшем будущем разработка параметрических усилителей и перестраиваемых параметрических генераторов света станет одним из наиболее интересных и многообещающих направлений бурно развивающейся нелинейной оптики.

V. О СПЕКТРЕ ЧАСТОТ, ПЕРЕКРЫВАЕМЫХ СРЕДСТВАМИ НЕЛИНЕЙНОЙ ОПТИКИ

Число экспериментальных работ, посвященных наблюдению различных когерентных нелинейных оптических эффектов и опубликованных к настоящему времени, очень велико. Остановимся лишь на одном из многочисленных экспериментальных направлений, интенсивно разрабатываемых во многих лабораториях: на обсуждении возможности наблюдения нелинейных эффектов в поле спектральных линий, получаемых средствами нелинейной оптики. Действительно, возможности наблюдения нелинейных оптических эффектов до последнего времени были существенно ограничены тем обстоятельством, что в распоряжении экспериментаторов находились лишь два источника мощного излучения: рубиновый лазер ($\lambda \approx 0,7 \text{ мк}$) и лазер на стекле, активированном неодимом ($\lambda \approx 1,06 \text{ мк}$). Вместе с тем для наблюдения таких нелинейных эффектов, как резонансное комбинационное рассеяние, релеевское рассеяние вблизи края поглощения (о резком возрастании упругооптических констант вблизи края поглощения сообщалось, например, в [34]), резонансное нелинейное молекулярное рассеяние¹, двухфотонное поглощение в диэлектриках, необходимо располагать достаточно мощными источниками излучения в более коротковолновых диапазонах. В настоящее время единственной возможностью получения интенсивного излучения на волнах короче $0,7 \text{ мк}$ является использование методов нелинейной оптики. В последнее время появились экспериментальные работы, имевшие целью создание источников излучения в диапазоне $0,53\text{—}0,26 \text{ мк}$, причем в некоторых случаях выходные мощности достигали $3\text{—}5 \text{ Мвт}$ [13, 31, 35—38]. Одной из возможностей перекрытия указанного диапазона является использование каскадного преобразования частоты генератора на стекле, активированном неодимом [31, 37, 38]. В работах [31, 38] излучение от лазера на стекле с неодимом $\lambda_1 = 1,06 \text{ мк}$ мощностью P_1 (модуляция добротности его резонатора осуществлялась с помощью вращающейся призмы) подвергалось последовательным нелинейным преобразованиям в кристаллах KDP или ADP. Все преобразования проводились в нефокусированных пучках. В первом кристалле KDP (длина $l = 3 \text{ см}$) происходило удвоение частоты лазера (выходная длина волны $\lambda_2 = 0,53 \text{ мк}$). Мощность гармоники P_2 была достаточной для дальнейшего эффективного преобразования частоты; в качестве такового использовались либо еще одно удвоение частоты (при этом на выходе появлялась четвертая гармоника основного излучения $\lambda_4 = 0,265 \text{ мк}$

¹ Возможности его экспериментального наблюдения обсуждаются в [18].

с мощностью P_4) либо смещение частот основного излучения и второй гармоники (при этом генерировалась третья гармоника основного излучения $\lambda_3 = 0,353 \text{ мк}$, мощностью P_3). Длины соответствующих нелинейных кристаллов были 2—3 см. Используя вынужденное комбинационное рассеяние на λ_1 или λ_2 (см. [35]), можно было получить набор дискретных спектральных линий, отстоящих от λ_1 или λ_2 на величину соответствующей частоты молекулярных колебаний. При этом интенсивность линий комбинационного рассеяния составляла 5—10% от интенсивности основного излучения. Лучшие значения к. п. д. первого удвоения частоты $\eta_2 = P_2/P_1$ не превышали 30—35%. Значения $\eta \approx 30\%$ являются типичными для расходимости пучка основного излучения $2\alpha_0 \approx 10' \div 15'$ и длине нелинейного кристалла $l = 2 \div 3 \text{ см}$ (ср. с теорией, развитой в III, см. также [13]). Существенному увеличению η_2 при таких параметрах установки препятствует пробой кристалла при достаточно больших значениях P_1 (рост величины η_2 с увеличением мощности P_1 для $\eta_2 > 30\%$ является, как следует из графиков рис. 1, очень медленным). К. п. д. второго удвоения частоты $\eta'_2 = P_4/P_2$ в этих опытах составлял приблизительно 10%. Здесь, по-видимому, в определенной мере предельное значение к. п. д. может ограничиваться двухфотонным поглощением в нелинейном кристалле. Некоторые наиболее важные параметры установки сведены в таблицу.

Экспериментальные характеристики гармоник

Генерация гармоник	P_1 , Мвт.см ⁻²	P_3 , Мвт.см ⁻²	P_4 , Мвт.см ⁻²	θ_0^*
Четвертой	150	—	3	77°
Третьей	150	8	—	49° 58°

*) θ_0 — угол между оптической осью и направлением синхронизма.

Заслуживает внимания то обстоятельство, что процесс каскадного преобразования частоты сопровождается значительным сужением импульса; при генерации четвертой гармоники импульс сужается почти вдвое. (Напомним, см. III, что нестационарные процессы здесь еще не существенны). Таким образом, метод каскадного преобразования является одновременно методом существенного укорочения лазерных импульсов. Следует отметить, что на пути дальнейшего преобразования частоты неодимового лазера в сторону более коротких волн возникают существенные трудности. Предельной волной, для которой еще, по-видимому, возможна реализация накапливающихся взаимодействий в кристаллах KDP, является 5-я гармоника неодимового лазера ($\lambda_5 = 0,212 \text{ мк}$); мощности, которые могут быть здесь получены, составляют $P_5 \approx 10^5 \text{ вт}$. Спектральные линии в вакуумном ультрафиолете (например, $\lambda_3 = 0,133 \text{ мк}$) могут быть получены путем использования локальных нелинейных эффектов в кристаллах с краем полосы вблизи $0,12\text{—}0,13 \text{ мк}$ ¹. По оценкам мощности, которые здесь могут быть получены путем удвоения частоты четвертой гармоники ($\lambda_4 = 0,26 \text{ мк}$) мощностью $P_4 \approx 3 \div 5 \cdot 10^6 \text{ вт}$, не превышают $P_8 \approx 0,01 \div 1 \text{ вт}$. Дальнейшее

¹ Для получения накапливающихся нелинейных эффектов здесь в принципе могут быть использованы различные варианты схем компенсации фазовых сдвигов, предложенные, напр. в [8], однако техническая их реализация весьма сложна.

продвижение таким путем в область мягкого рентгеновского излучения представляется малоперспективным.

Следует отметить, что генерация излучения на волнах $\sim 0,35$ мк и $\sim 0,23$ мк возможна также путем удвоения и утроения частоты рубинового лазера. Хотя в принципе эти процессы могут быть достаточно эффективными, их использование связано с рядом технических трудностей. Наиболее существенной из них представляется значительно худшая однородность рубиновых стержней, нежели стержней из неодимового стекла; последнее приводит к возрастанию величины $2a_0$, а следовательно, и уменьшению к.п.д. и выходной мощности соответствующего удвоителя частоты. Коэффициент полезного действия оптического утроителя частоты рубинового лазера на кристалле CaCO_3 (см. [13]) при $P_1 \approx 10^8$ Вт/см² остается еще более низким, нежели к.п.д. каскадного преобразователя излучения лазера на стекле к волне $\lambda_4 = 0,265$ мк. Интересно, что мощности, полученные в диапазоне 0,53—0,26 мк, представляются вполне достаточными для регистрации целого ряда нелинейных эффектов: вынужденного комбинационного рассеяния [35], светового пробоя [36], двухфотонного поглощения и, возможно, соответствующего рекомбинационного свечения во многих диэлектриках. Использование генераторов гармоник позволяет измерять частотную зависимость нелинейного поглощения. Так, предварительные опыты с кристаллами KDP показали, что излучение на $\lambda_4 = 0,265$ мк с мощностью 100 МВт/см² приводит к сильному разрушению указанного кристалла; вместе с тем аналогичные потоки мощности на $\lambda_2 = 0,53$ мк разрушений не вызывают.

Таким образом, экспериментальные возможности нелинейной оптики расширяются средствами самой же нелинейной оптики.

Здесь я коснулся лишь некоторых аспектов когерентных нелинейных волновых взаимодействий. Важно подчеркнуть, что хотя в теоретической части речь шла прежде всего о взаимодействиях, в которых участвуют только фотоны, рассмотренные методы (а во многих случаях и конкретные результаты) применимы и при изучении волновых особенностей процессов вынужденного рассеяния, в которых фотоны взаимодействуют с фононами (комбинационное рассеяние и рассеяние Мандельштама — Бриллюэна), магнонами (вынужденное рассеяние на спиновых волнах), плазмонами и т. п.

ЛИТЕРАТУРА

1. Bloembergen N. Nonlinear Optics. New York, 1965.
2. Файн В. М., Ханин Я. И. Квантовая радиофизика. Изд-во «Сов. Радио», М., 1965.
3. Хохлов Р. В. Радиотехника и электроника, **6**, 1116, 1961.
4. Ахманов С. А., Хохлов Р. В. Проблемы нелинейной оптики. М., 1964.
5. Малюжинец Г. Д. УФН, **69**, 321, 1959.
6. Малюжинец Г. Д., Вайнштейн Л. А. Радиотехника и электроника, **6**, № 8, 1247, 1961; **6**, № 9, 1489, 1961.
7. Сухоруков А. П., Хохлов Р. В. Вестник МГУ, № 6, 1965.
8. Franken P., Ward J. Rev. Mod. Physics, **35**, 23, 1963.
9. Maker P., Terhune R., Nisenoff M., Savage A. Phys. Rev. Lett., **8**, 21, 1962.
10. Бокуть Б. В., Хаткевич А. Г. Ж. прикл. спектроскопии, **1**, 97, 1964.
11. Miller R., Boyd G., Savage C. Appl. Phys. Lett., **6**, 77, 1965.
12. Ахманов С. А., Ковригин А. И., Кулакова Н. К. ЖЭТФ, **48**, 1545, 1965.
13. Terhune R., Maker P., Savage A. Appl. Phys. Lett., **2**, 54, 1963.
14. Boyd G., Ashkin A., Dziedzic I., Kleinman D. Phys. Rev., **137**, A 1305, 1965.
15. Ахманов С. А., Сухоруков А. П., Хохлов Р. В. ЖЭТФ, **50**, № 2, 1966.
16. Kleinman D. Phys. Rev., **128**, 1761, 1962.

17. Terhune R., Maker P., Savage C. Phys. Rev. Lett., 14, 681, 1965.
18. Ахманов С. А., Клышко Д. Н. ЖЭТФ, письма, 2, 171, 1965.
19. Ахманов С. А., Ковригин А. И., Чиркин А. С., Чунаев О. Н. ЖЭТФ, 50, № 3, 1966.
20. Bloembergen N., Duscuing J. Phys. Rev., 133, A 1493, 1964.
21. Ахманов С. А., Чиркин А. С. Вестник МГУ, № 5, 1965.
22. Ахманов С. А., Чиркин А. С. Изв. вузов, Радиофизика, 7, 569, 1965.
23. Smith A., Braslay N. IBM Res. and Development, 6, 361, 1962.
24. Ахманов С. А., Сухоруков А. П., Хохлов Р. В. ЖЭТФ, 50, № 4.
25. Ахманов С., Дмитриев В., Моденов В. Радиотехника и электроника, 10, № 4, 649, 1965.
26. Kingston R., McWhorter A. Proc. IEEE, 53, № 1, 4, 1965.
27. Марченко В. Ф., Гольдин Ю. А. Вестник МГУ, № 3, 1965.
28. Kingston R. Proc. IRE, 50, 472, 1962.
29. Ахманов С. А., Хохлов Р. В. ЖЭТФ, 43, 351, 1962.
30. Kroll N. Phys. Rev. 127, 1207, 1962.
31. Ахманов С. А., Ковринин А. И., Пискарскас А. С., Фадеев В. В., Хохлов Р. В. ЖЭТФ, Письма, 2, 300, 1965.
32. Wang C. Racette G. Appl. Phys. Lett., 8, № 8, 1965.
33. Ахманов С. А., Чиркин А. С. Изв. вузов, Радиофизика, 7, 1965.
34. Tell B., Worlock J., Martin R. Appl. Phys. Lett., 6, 123, 1965.
35. Ахманов С. А., Ковригин А. И., Кулакова Н. К., Романюк А. К., Струков М. М., Хохлов Р. В. ЖЭТФ, 48, № 4, 1965.
36. Ахманов С. А., Ковригин А. И., Струков М. М., Хохлов Р. В. ЖЭТФ, письма, 1, № 1, 1965.
37. Johnson F. Nature, 204, 985, 1964.
38. Ахманов С. А., Ковригин А. И., Пискарскас А. С., Хохлов Р. В. ЖЭТФ, письма, 2, 223, 1965.
39. Ахманов С. А., Дмитриев В. Г., Моденов В. П., Фадеев В. В. Радиотехника и электроника, 10, № 12, 1965.

Поступило в редакцию 4.X 1965

П. А. АПАНАСЕВИЧ

ВЫНУЖДЕННОЕ КОМБИНАЦИОННОЕ РАССЕЯНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Создание квантовых генераторов света привело к открытию и практическому использованию многих нелинейных оптических явлений, среди которых видное место занимает вынужденное комбинационное рассеяние (ВКР). Принципиальная возможность существования этого явления была установлена еще в конце двадцатых годов [1]. Однако тогда же было показано, что в реальных условиях эксперимента того времени его вероятность пренебрежимо мала по сравнению с вероятностью спонтанного комбинационного рассеяния (СКР). Поэтому в дальнейших исследованиях ВКР не рассматривалось.

Впервые ВКР наблюдалось Вудбери и Нго [2] при исследовании рубинового квантового генератора с импульсной добротностью. Используя в качестве затвора ячейку Керра на нитробензоле, они обнаружили, что наряду с основной линией $\lambda = 6943 \text{ \AA}$ такой генератор испускает излучение с $\lambda = 7670 \text{ \AA}$, т. е. генерирует линию, сдвинутую относительно основной линии на 1370 см^{-1} . Этот сдвиг хорошо согласуется с частотой симметричного колебания молекулы нитробензола. Поэтому линия 7670 \AA была интерпретирована как стоксово комбинационное рассеяние излучения рубинового генератора на нитробензоле. Однако интенсивность этой линии несколько не соответствовала интенсивности обычного рассеяния. Она составляла около 20% интенсивности основной линии. Ширина импульсов на обеих частотах равнялась 16—20 нсек. На основной линии наблюдалось несколько таких импульсов. Эти факты, а также экспериментальные данные, полученные в [3] для широкого набора веществ, убедительно доказывали, что обнаружен новый вид генерации излучения, а именно генерация на основе вынужденного комбинационного рассеяния.

К настоящему времени по ВКР выполнено большое число экспериментальных и теоретических работ. Наряду с экспериментами по ВКР на веществе внутри резонатора первичного генератора (внутренний вариант) широкое развитие получили начатые работой [4] исследования ВКР при облучении фокусированным лазерным пучком рассеивающего вещества вне резонатора (внешний вариант). При внутреннем варианте ВКР получено как в резонаторе задающего генератора, когда рассеянное излучение проходит через его активную среду, так и в собственном резонаторе, ось которого параллельна [5], перпендикулярна [5, 6] и ориентирована под углом [7] к оси основного резонатора.

Не останавливаясь подробно на всех полученных результатах, отметим лишь некоторые, основные. Более подробный обзор части работ можно найти в [8—10].

Экспериментально доказано, что ВКР: 1) возникает только при выполнении пороговых условий; 2) сильно зависит от наличия и добротности

сти резонатора; 3) распространяется в узком угле и 4) обладает, как правило, очень узким спектральным составом. В [11, 12] показано, что высота порога приблизительно пропорциональна отношению ширины линии γ к интегральному сечению σ обычного комбинационного рассеяния. Наряду со стоксовой линией первого порядка, как правило, наблюдаются линии антистоксового рассеяния и стоксового рассеяния более высоких порядков, причем смещение всех линий по отношению к линии рассеиваемого излучения кратно смещению стоксовой линии первого порядка. Все излучение антистоксовых линий и часть излучения стоксовых линий наблюдаются в строго определенных направлениях, образующих конусы с осями вдоль первичного излучения [4, 13—15], что указывает на явно когерентный характер этого излучения. Достигнутые коэффициенты преобразования лазерного излучения на основе ВКР измеряются десятками процентов.

Исследовались и многие другие стороны ВКР. Отметим лишь противоречащие друг другу работы по изучению влияния модовой структуры излучения на процесс ВКР [16, 17], исследование углового распределения рассеянного излучения газового лазера [18] и изучение влияния межмолекулярного взаимодействия на ВКР [19]. В настоящее время уже получено ВКР первой гармоники неодимового лазера [20] и смещение комбинационной и основной частот [21].

Большинство экспериментальных данных уже нашло теоретическое объяснение. В основном понята сущность оптических процессов, протекающих в рассеивающей среде при ее облучении мощным потоком излучения, раскрыта роль резонатора в возникновении ВКР, уяснены исходные положения и сформулированы основные уравнения теории ВКР. В простейших случаях проведены количественные оценки некоторых параметров (углов рассеяния, коэффициентов преобразования и т. д.), хорошо согласующиеся с экспериментом. Однако в целом теория ВКР еще не доведена до такого состояния, чтобы можно было дать количественный ответ на все вопросы, выдвигаемые практикой.

Большинство теоретических работ по ВКР посвящено анализу закономерностей взаимодействия молекул с излучением, частоты которого различаются между собой на собственную частоту молекулы, и расчету параметров вещества, характеризующих ВКР. Эти работы выполнялись в рамках как классических [20, 22—24], так и квантовых [9, 25—31] представлений во взаимодействии излучения с веществом.

Другая группа работ содержит исследование процесса ВКР на веществе конечных размеров и с учетом реальных экспериментальных условий (потерь в веществе и на границе, геометрии эксперимента и т. д.). В этих работах явно наметилось два подхода к решению такого типа задач: волновой и вероятностно-энергетический. Волновой подход [9, 10, 25, 33, 34] основан на решении уравнений Максвелла с учетом нелинейного взаимодействия электромагнитных волн в рассеивающей среде. В настоящее время он наиболее развит для решения задач о пространственном и угловом распределении излучения в условиях стационарного режима. В основе энергетического подхода, примененного в работах [35—38] и использованного для интерпретации экспериментального материала в [5, 11, 12], лежат уравнения переноса излучения в рассеивающей среде. Энергетический подход сравнительно просто позволяет оценить эффективность преобразования излучения на основании ВКР, рассмотреть развитие процесса рассеяния как в пространстве, так и во времени. Последнее очень важно, так как в настоящее время ВКР исследуется только в импульсном режиме. Для описания ВКР — процесса, характеризуемого вероятностью рассеяния, — применимость уравнений переноса вполне обоснована.

Следует отметить, что в настоящее время термином вынужденное комбинационное рассеяние называют весь комплекс явлений, которые наблюдаются при облучении рассеивающего вещества лазерным излучением. На самом деле при этом протекают явления двух типов, существенно различающиеся по своей природе, а именно собственно ВКР и явления, сопутствующие ВКР.

При рассеянии лазерного излучения на веществе, находящемся в условиях термодинамического равновесия, под ВКР следует понимать некогерентную часть вынужденного стоксового рассеяния всех порядков. Для протекания этих процессов несущественно выполнение условий фазового синхронизма (сохранения импульса излучения). С квантовой точки зрения они являются двухфотонными процессами взаимодействия излучения с веществом.

Антистоксово комбинационное рассеяние и когерентная часть стоксового рассеяния, наблюдаемые в экспериментах по ВКР, по существу вообще не являются процессами комбинационного рассеяния. Эти явления возникают как результат нелинейного взаимодействия падающего и рассеянного потоков излучения с рассеивающим веществом. Они представляют собой процессы преобразования излучения, протекающие при участии четырех фотонов, причем вещество, преобразующее излучение, не изменяет своего состояния. Такие процессы протекают когерентно на различных частицах и для них существенно выполнение условий фазового синхронизма.

К ВКР тесно примыкает вынужденное мандельштам-бриллюэновское рассеяние (ВМБР), обнаруженное в кристаллических и жидких средах при облучении их мощными потоками излучения [5, 40—44] и теоретически рассмотренное в [9, 45]. По существу ВМБР представляет собой комбинационное рассеяние. Однако в отличие от обычного комбинационного рассеяния оно происходит не на внутренних колебаниях молекул вещества, а на гиперзвуковых колебаниях среды в целом. ВМБР, как правило, сопровождается возбуждением гиперзвуковых волн в среде.

ОСНОВЫ ТЕОРИИ ВКР ПЕРВОГО ПОРЯДКА

С квантовой точки зрения комбинационным рассеянием называется процесс преобразования фотона частоты ν' в фотон частоты ν при одновременном переходе молекулы с уровня i на уровень j , причем $\nu = \nu' - \nu_{ij}$, где ν_{ij} — собственная частота молекулы (рис. 1). Если при этом молекула переходит с более низкого уровня на более высокий, то $\nu < \nu'$ и рассеяние называют стоксовым (рис. 1, а). При обратном переходе молекулы, когда $\nu > \nu'$, происходит антистоксово рассеяние.

Из квантовой электродинамики [1, 46] следует, что вероятность комбинационного рассеяния, т. е. число актов рассеяния в единицу времени, определяется соотношением

$$N_{ij}(\nu' \rightarrow \nu) = S_{ij}(\nu' \rightarrow \nu) u_{\nu'} [u_{\nu} + h\nu g(\nu)]. \quad (1)$$

Здесь $u_{\nu'}$ и u_{ν} — спектральные плотности энергии излучения частот ν' и ν ; $g(\nu)$ — плотность собственных колебаний поля излучения, в

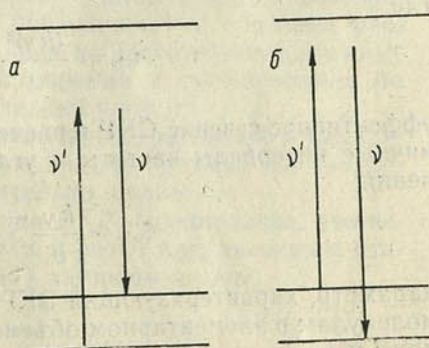


Рис. 1. Квантовая схема переходов при стоксовом (а) и антистоксовом (б) комбинационном рассеянии

расчете на единичный телесный угол равная v^2/v^3 (v — скорость света в рассеивающей среде); $S_{ij}(v' \rightarrow v)$ — матрица рассеяния, в дипольном приближении и с учетом ширины линии имеющая вид [1, 46, 47]:

$$S_{ij}(v' \rightarrow v) = \frac{(2\pi)^4}{h^4} \frac{\gamma_{ji}}{\pi} \frac{\left| \sum_{\sigma, \rho} e'_\sigma c_{ij}^{\sigma\rho} e_\rho e^{i(\vec{k} - \vec{k}') \cdot \vec{r}} \right|^2}{(v' - v - v_{ji})^2 + \gamma_{ji}^2}, \quad (2)$$

$$c_{ij}^{\sigma\rho} = \sum_l \left[\frac{p_{jl}^\sigma p_{li}^\rho}{v_{li} - v'} + \frac{p_{jl}^\rho p_{li}^\sigma}{v_{li} + v} \right], \quad (3)$$

где σ и ρ пробегает значения x, y, z ; p_{jl}^σ — компонента вектора дипольного момента для перехода $j \rightarrow l$; \mathbf{k} и \mathbf{e} (\mathbf{k}' и \mathbf{e}') — волновой вектор поляризации рассеянного (падающего) излучения; \mathbf{r} — радиус-вектор центра масс молекулы; γ_{ij} — спектральная ширина перехода $i \rightarrow j$; $c_{ij}^{\sigma\rho}$ — тензор рассеяния (по индексам σ и ρ). При рассеянии, конечно, может изменяться направление распространения Ω и поляризация излучения. Однако для краткости соответствующие индексы опускаем.

Таким образом, вероятность комбинационного рассеяния состоит из двух частей. Одна часть не зависит от плотности энергии излучения частоты рассеяния ν . Это — вероятность обычного СКР. Вторая часть пропорциональна плотности u_ν , т. е. отлична от нуля в тех случаях, когда на молекулу наряду с рассеиваемым излучением падает излучение, частота которого совпадает с частотой рассеяния ν . Эта часть и представляет собой вероятность ВКР. При обычных условиях эксперимента u_ν равно плотности энергии СКР, т. е. значительно меньше величины $h\nu g(\nu)$. Именно поэтому процессом ВКР всегда можно было пренебречь. Наоборот, при облучении рассеивающего вещества мощным лазерным потоком возможно усиление рассеянного излучения благодаря ВКР.

Зная вероятность комбинационного рассеяния на одной частице и учитывая как прямой $iv' \rightarrow j\nu$, так и обратный $j\nu \rightarrow iv'$ процесс рассеяния, мощность рассеяния, т. е. энергию, преобразованную единичным объемом вещества за 1 сек, можно представить в виде

$$W(v' \rightarrow \nu) = \nu \xi_{\nu'} u_{\nu'} u_\nu + \nu \sigma_{\nu'} u_{\nu'}, \quad (4)$$

где

$$\sigma_{\nu'} = \frac{(h\nu)^2}{\nu} \overline{S_{ij}(v' \rightarrow \nu)} n_i g(\nu) \quad (5)$$

эффективное сечение СКР в расчете на единичный объем вещества и единичные интервалы частоты и углов распространения рассеянного излучения;

$$\xi_{\nu'} = \frac{h\nu}{\nu} \overline{S_{ij}(v' \rightarrow \nu)} (n_i - n_j) \quad (6)$$

параметр, характеризующий ВКР. Черта над S_{ij} означает усреднение по молекулам в элементарном объеме; n_i и n_j — плотности молекул на уровнях i и j .

Выражение (4) имеет определенный физический смысл только в том случае, если $\overline{S_{ij}(v' \rightarrow \nu)}$ не зависит от выбора элементарного объема, в котором проводится усреднение. Для комбинационного рассеяния эта зависимость действительно отсутствует, что легко показать на основании (2). При переходе к совокупности молекул в (2) следует провести под знаком модуля суммирование по молекулам в некотором

элементарном объеме. Учитывая, что тензор (3) содержит фазовый множитель $\exp i\varphi_{ij}$, и предполагая, что внутренние состояния разных молекул независимы, после усреднения по φ_{ij} это суммирование можно вынести из-под знака квадрата модуля [31]. В результате $S_{ij}(v' \rightarrow v)$ вообще теряет зависимость от \mathbf{g} .

Следует отметить, что для процессов преобразования излучения, происходящих без изменения внутреннего состояния молекулярной системы, нельзя ввести усредненной по частицам вероятности перехода. Например, в случае релеевского рассеяния, которое описывается формулами (1) — (3) при $i=j$, зависимость от \mathbf{g} после суммирования по частицам не выпадает. Это приводит к тому, что в однородной среде вероятность рассеяния пропорциональна $\delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}')$, т. е. отлична от нуля только в направлении $\mathbf{k} - \mathbf{k}'$. К описанию таких процессов понятие мощности преобразования, отнесенной к единице объема, неприменимо.

В том, что выражение (4) действительно описывает мощность рассеяния, можно убедиться таким образом. Рассчитав, пользуясь уравнениями для матрицы плотности, нелинейную поляризацию $\mathbf{P}_{v'v}$ среды, находящейся в поле двух волн $\mathbf{E}_{v'}$ и \mathbf{E}_v [25], можно показать, что работа, совершаемая над средой полем \mathbf{E}_v , точно равна $W(v' \rightarrow v)$. Работа, совершаемая полем $\mathbf{E}_{v'}$, равна $W(v' \rightarrow v)$ (точнее $W(v' \rightarrow v)$, умноженному на $v'/v \approx 1$). Отсюда следует, что в результате ВКР излучение частоты v' преобразуется без потерь фотонов в излучение частоты v .

При предположении, что фазы волн, распространяющихся в различных направлениях, независимы, из уравнений Максвелла для рассеивающей среды с нелинейной поляризацией $\mathbf{P}_{v'v}$ можно вывести уравнения для потоков излучения I_v и $I_{v'}$:

$$\frac{\partial I_v}{\partial t} + \frac{\partial I_v}{\partial l} = \frac{1}{v'} \int \xi_{v'v} I_{v'} dv' I_v + \frac{v}{v'} \int \sigma_{v'v} I_{v'} dv' - \rho I_v, \quad (7)$$

$$\frac{\partial I_{v'}}{\partial t} + \frac{\partial I_{v'}}{\partial l'} = -\frac{1}{v'} \int \xi_{v'v} I_v dv I_{v'} - \rho' I_{v'}, \quad (8)$$

где dl — элемент пути вдоль направления распространения рассматриваемого потока; v' — скорость рассеиваемого излучения; ρ и ρ' — коэффициенты линейных потерь, обусловленных поглощением и обычным рассеянием. В (7) и (8) наряду с интегрированием по частоте имеется в виду интегрирование по направлениям распространения и суммирование по поляризациям. СКР в (8) включено в последний член $\rho' I_{v'}$.

Решение уравнений (7) и (8) при произвольных граничных и начальных условиях представляет собой сложную задачу. Однако многие результаты можно получить из них сравнительно просто.

Рассмотрим вопрос о пороге возбуждения ВКР. Предполагая, что вещество облучается квазимонохроматическим и резко направленным стационарным потоком, решение уравнения (7) запишем в виде

$$I_v(l) = v \sigma_{v_0 v} \int_0^l u_{v'} e^{i \int_0^{l'} (\xi_{v'v} u_{v'} - \rho) dl''} dl', \quad (9)$$

где $u_{v'} = \frac{I_{v'}}{v'}$ — интегральная плотность энергии падающего излучения в точке l' . В (9) принято, что $I_v(0) = 0$.

Физический смысл (9) прост. Формула показывает (рис. 2), что поток рассеянного излучения в точке l равен интегралу от мощности спонтанного рассеяния в точке l' , ослабленной (при $\int (\xi u' - \rho) dl'' < 0$) или усиленной (при $\int (\xi u' - \rho) dl'' > 0$) на отрезке пути от l' до l .

Таким образом, СКР играет роль источника рассеянного излучения, а ВКР выступает как процесс, уменьшающий или полностью перекрывающий потери ρ . Из (9) видно, что выполнение неравенства

$$\xi_{v_0} u' \geq \rho \quad (10)$$

является необходимым условием возникновения ВКР. Однако, чтобы процесс ВКР мог привести к значительному росту потока рассеянного излучения, должно выполняться условие

$$\int_0^{l_0} [\xi_{v_0} v u_{l'} - \rho] dl' \gg 1. \quad (11)$$

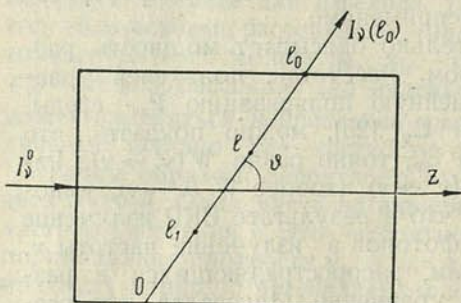


Рис. 2. Комбинационное рассеяние под углом θ к облучающему потоку

Соотношения (10) и (11) по существу представляют собой необходимые и достаточные условия наблюдения ВКР (пороговые условия). Из (10) следует, что на нитробензоле $\xi_{v_0} v_m = 4,5 \cdot 10^{-6} \text{ см}^2/\text{эрг}^{-1}$, $\rho \leq (\leq 10^{-3} \text{ см}^{-1})$ ВКР может наблюдаться только при облучении его потоком излучения мощностью в несколько сотен киловатт.

На основании (9) легко заключить, что ВКР приводит к максимальному усилению рассеянного излучения тех направлений, частот и поляризаций, для которых условие (11) выполняется наиболее сильно. Степень выполнения этого условия зависит как от параметра $\xi_{v_0} v$, так и от геометрии рассеивающей среды. Частотная зависимость $\xi_{v_0} v$ и $\sigma_{v_0} v$ определена формулой (2), т. е. обладает максимумом при частоте $\nu_m = \nu_0 - \nu_{ji}$. Можно показать [31], что в случае свободновращающихся и хаотически ориентированных молекул анизотропные свойства ξ и σ определяются соотношениями

$$\sigma = \sigma_{\parallel} (\mathbf{e}\mathbf{e}')^2 + \sigma_{\perp} [\mathbf{e}\mathbf{e}']^2, \quad \sigma = h\nu g(\nu) \xi, \quad (12)$$

где $(\mathbf{e}\mathbf{e}')^2$ и $[\mathbf{e}\mathbf{e}']^2$ — скалярное и векторное произведения; σ_{\parallel} и σ_{\perp} — эффективные сечения СКР соответственно при параллельной и перпендикулярной ориентации векторов \mathbf{e} и \mathbf{e}' , причем $0 \leq \sigma_{\perp} \leq \sigma_{\parallel}/3$. В (12) учтено, что $n_i \gg n_j$.

Из (12) следует, что при облучении вещества линейно поляризованным излучением сечение рассеяния, поляризованного перпендикулярно к плоскости рассеяния (содержащей \mathbf{k}' и \mathbf{k}), равно

$$\sigma^{(1)} = \sigma_{\parallel} \sin^2 \varphi + \sigma_{\perp} \cos^2 \varphi, \quad (12.a)$$

а сечение рассеяния, поляризованного в плоскости рассеяния,

$$\sigma^{(2)} = (\sigma_{\parallel} \cos^2 \varphi + \sigma_{\perp} \sin^2 \varphi) \cos^2 \theta + \sigma_{\perp} \sin^2 \theta, \quad (12.б)$$

где θ — угол между направлениями распространения падающего \mathbf{k}' и рассеянного \mathbf{k} излучения; φ — угол наклона вектора \mathbf{e}' к плоскости

рассеяния. При рассеянии неполяризованного излучения эти сечения равны

$$\sigma_{н.п}^{(1)} = \frac{1}{2}(\sigma_{||} + \sigma_{\perp}), \quad (12.в)$$

$$\sigma_{н.п}^{(2)} = \frac{1}{2}[2\sigma_{\perp} + (\sigma_{||} - \sigma_{\perp})\cos^2\vartheta]. \quad (12.г)$$

Подставляя (2) и (12) в (9), можно получить некоторые общие выводы о влиянии ВКР на свойства рассеянного излучения. Во-первых, ВКР

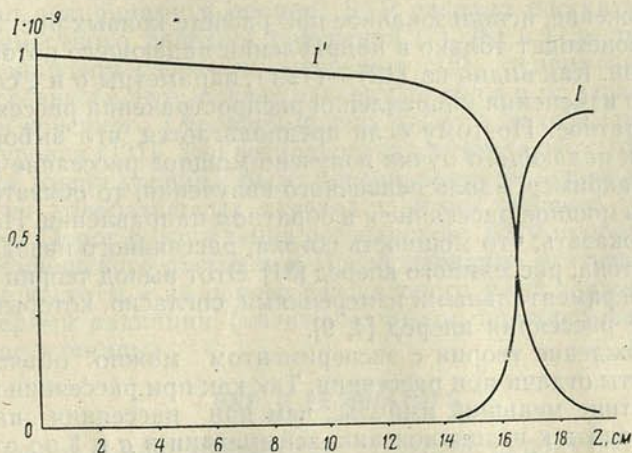


Рис. 3. Зависимость падающего I' и рассеянного I ($вт/см^2$) излучения от толщины рассеивающего слоя ($см$) при рассеянии только вперед:

$$I'_0 = 10^9 \text{ вт/см}^2; \quad \xi_m = 6 \cdot 10^{-6} \text{ см}^2 \text{ эрг}^{-1}; \quad \sigma_m = h\nu \xi_m = 8,6 \cdot 10^{-10} \text{ см}^{-1}; \\ \rho' = \rho = 0,01 \text{ см}^{-1}$$

должно приводить к сужению линий рассеяния. Благодаря зависимости $\xi_{\nu_0\nu}$ от ν наиболее эффективно усиливается излучение, соответствующее максимальному значению $\xi_{\nu_0\nu m}$. На крыльях линии условие (10) может не выполняться вообще. Во-вторых, благодаря ВКР должна возникать направленность рассеянного излучения в направлениях, в которых размеры рассеивающего вещества, заполненного рассеиваемым излучением, максимальны. В-третьих, ВКР должно вызывать повышение поляризации излучения рассеяния. Исключение составляет лишь случай рассеяния неполяризованного излучения в переднем и обратном направлениях. Так как зависимость рассеянного излучения от ξ и l содержится в (9) в показателе экспоненты, то все эти эффекты могут быть очень резко выражены.

Для количественных расчетов соотношение (9) пригодно только при условии, что процесс рассеяния не влияет на плотность энергии падающего излучения, т. е. рассеивается малая доля падающего излучения. В [12] на ряде веществ показано, что получающаяся из (9) зависимость I_{ν} от l' и пороговые условия удовлетворительно согласуются с данными эксперимента.

При сильном рассеянии (9) представляет собой лишь интегральную запись стационарного уравнения (7). В этом случае расчет должен проводиться на основании совместного решения уравнений (7) и (8). Типичное решение этих уравнений в случае стационарного режима при предположении, что падающий и рассеянный потоки монохроматичны и рас-

пространяются в одном направлении, приведено на рис. 3. Из рисунка видно, что до некоторой глубины, зависящей, конечно, от конкретного значения параметров, ВКР не влияет заметно на распространение падающего излучения, и происходит лишь накопление рассеянной радиации от уровня плотности излучения СКР, на 11—13 порядков меньшей плотности падающего потока, до плотностей, отличающихся от плотности падающего излучения на два-три порядка. Затем на сравнительно малых расстояниях происходит практически полное преобразование первичного излучения в рассеянное. Дальше распространяется только рассеянный поток.

Предположение, использованное при расчете кривых рис. 3, о том, что рассеяние происходит только в направлении падающего потока, не вытекает из теории. Как видно из (12)—(12.г), параметры σ и ξ симметричны относительно изменения направления распространения рассеянного излучения на обратное. Поэтому если предполагается, что выбором геометрии кюветы и падающего пучка получено мощное рассеяние в одном направлении, например, вдоль первичного излучения, то обязательно будет существовать мощное рассеяние и в обратном направлении. На основании (9) можно показать, что мощность потока, рассеянного назад, не меньше мощности потока, рассеянного вперед [31]. Этот вывод теории не подтверждается экспериментальными измерениями, согласно которым рассеяние назад слабее рассеяния вперед [4, 9].

Это расхождение теории с экспериментом можно объяснить, если учесть эффекты отдачи при рассеянии. Так как при рассеянии вперед поле передает частице меньший импульс, чем при рассеянии назад, то это должно приводить к возникновению асимметрии в σ и ξ по отношению к этим направлениям. При рассеянии в перпендикулярном направлении такая асимметрия не должна появляться. В работе [9] соотношение между интенсивностями рассеяния вперед и назад объясняется на основании предположения, что постоянная затухания колебаний оптической ветви зависит от направления рассеяния.

Следует отметить, что вероятность рассеяния (1), а следовательно, и параметры σ и ξ определены здесь не только без учета эффектов отдачи, но и при предположении, что взаимодействие молекулы с полем излучения является слабым. При этом условия параметры σ и ξ не зависят от мощности излучения и являются однозначными характеристиками вещества. Более точные расчеты [31], однако, показывают, что при достаточно высоких плотностях энергии поля излучения зависимость σ и особенно ξ от свойств радиации может стать существенной.

Из теории следует [31], что ВКР может, во-первых, оказывать влияние на распределение молекул по уровням (на n_i и n_j) и, во-вторых, вызывать уширение и сдвиг линий рассеяния, а также изменение вероятностей поглощения. Особенно сильным это влияние может быть в случае резонансного рассеяния, когда оно возникает уже при плотностях потоков порядка десятков и сотен киловатт. При отсутствии резонанса влияние процесса ВКР на ширину линий и на вероятности переходов может стать заметным лишь при мощностях потоков порядка сотен и тысяч гигаватт. Зависимость населенностей n_i и n_j от мощности излучения возникает при более низких плотностях энергии радиации.

Можно показать [31, 38], что при отсутствии резонанса зависимость разности заселенностей n_i и n_j от вероятности рассеяния определяется уравнением

$$\frac{d(n_i - n_j)}{dt} = - \left(N_{ij} + \frac{1}{\tau_{ij}} \right) (n_i - n_j) + \frac{1}{\tau_{ij}} (n_i^0 - n_j^0), \quad (13)$$

где N_{ij} — интегральная по частотам вероятность рассеяния; τ_{ij} — время релаксации заселенностей и $n_i^0 - n_j^0$ — разность заселенностей при отсутствии рассеяния. Из (13) видно, что ВКР приводит к уменьшению разности заселенностей уровней i и j , а следовательно, и к уменьшению параметра ξ , входящего в уравнения (7) и (8). Однако это изменение ξ может быть значительным лишь тогда, когда N_{ij} сравнимо или больше $1/\tau_{ij}$. Принимая время релаксации τ_{ij} равным 10^{-7} сек, в случае нитробензола получаем, что влияние ВКР на значение ξ становится существенным при плотностях потоков порядка гигаватт. При этих плотностях энергии излучения параметры ξ и σ нельзя считать постоянными величинами и процесс ВКР следует рассчитывать на основании совместного решения уравнений (7), (8) и (13) при учете (6).

При резонансном рассеянии уравнение (13) неприменимо, так как процесс рассеяния в этом случае зависит не только от заселенностей начального i и конечного j уровней молекулы, но и от резонансного промежуточного уровня l [31]. Для возникновения резонансного ВКР требуется, чтобы время жизни уровня j было меньше времени жизни уровня l . При рассеянии на колебательных переходах этому условию удовлетворить очень трудно. Порог возбуждения резонансного ВКР приближенно равен порогу нерезонансного рассеяния. Преобразование излучения частоты ν' в излучение частоты ν на основе резонансного ВКР должно сопровождаться потерями радиации (квантовый выход преобразования на молекуле меньше единицы).

ВКР В РЕЗОНАТОРЕ

Вынужденное комбинационное рассеяние часто получают при помещении кюветы с рассеивающим веществом в резонатор. Даже в тех случаях, когда зеркала отсутствуют, роль резонатора в некоторой степени могут выполнять стенки кюветы. На рис. 4 приведены схемы различных вариантов расположения кюветы, зеркал и первичного генератора.

Наличие зеркал, как известно, приводит к увеличению направленности рассеянного излучения. Однако и в этом случае рассеянное излучение состоит из двух потоков, распространяющихся в противоположных направлениях. Первичное излучение в резонаторе также должно состоять из двух потоков. Отсюда задача о ВКР в резонаторе сводится к решению четырех связанных между собой уравнений типа (7) и (8). В общем случае такая задача неразрешима. Однако если учесть, что из-за наличия двух противоположных потоков неоднородность в распределении энергии поля излучения, по-видимому, не должна быть слишком большой, из уравнений (7) и (8) в частных производных можно получить более простые уравнения для средних плотностей энергии излучения. Действительно, складывая уравнения для противоположных потоков и проводя интегрирование по всему пути их распространения, вместо четырех уравнений можно получить систему двух уравнений вида [31]:

$$\frac{du_\nu}{dt} = c \delta (\xi_{\nu_0} \nu u' - k_n) u_\nu + c \delta h \nu \mu \xi_{\nu_0} \nu u', \quad (14)$$

$$\frac{du'}{dt} = W \delta' - c \delta' \int \xi_{\nu_0} \nu u_\nu d\nu - c \delta' k_n' u', \quad (15)$$

где u' и u_ν — средние плотности энергии падающего и рассеянного излучения внутри вещества; μ — число мод, на которых осуществляется рассеяние; k_n и k_n' — коэффициенты потерь рассеянного и первичного

излучения с учетом потерь на выход из резонатора; δ и δ' — коэффициенты заомления резонаторов для рассеянного и рассеиваемого излучения рассеивающим веществом¹; c — скорость света в вакууме; W — энергия первичного излучения, подводимая за одну секунду к единице объема рассеивающего вещества. В случае внешнего варианта

$$W = \frac{(1 - r'_1) n' \alpha}{l'} I_{v'_0}(t), \quad (16)$$

где $I_{v'_0}(t)$ — плотность падающего потока; α — коэффициент фокусиров-

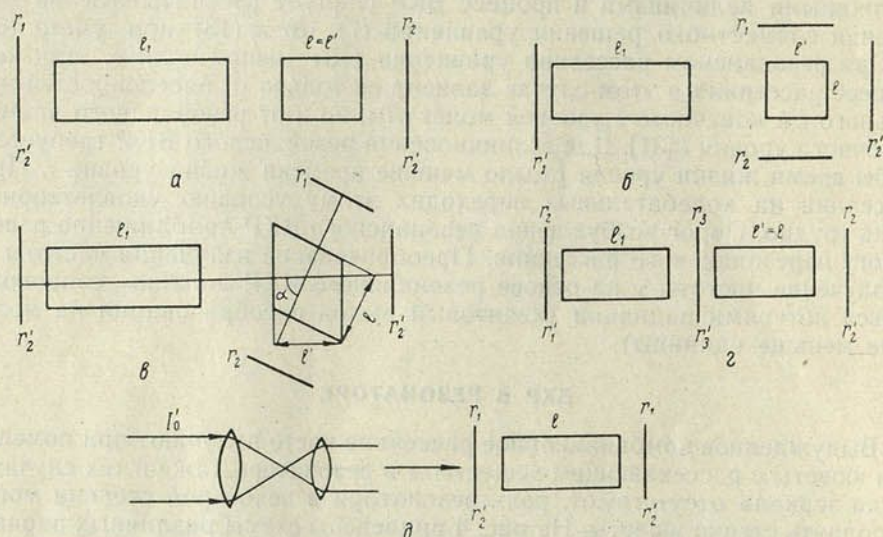


Рис. 4. Различные варианты расположения кюветы и резонатора для рассеянного излучения

ки; n' — показатель преломления рассеивающего вещества в частоте ν'_0 ; r'_1 — коэффициент отражения входного зеркала (поверхности); l' — толщина вещества вдоль падающего потока. При работе с внутренним вариантом

$$W = c \kappa q u' \frac{l_1}{l'}. \quad (17)$$

Здесь κ , q и l_1 — соответственно коэффициент максимального усиления, относительная инверсия и длина активного вещества первичного генератора. Инверсия q зависит от плотности энергии излучения u' . Эта зависимость в большинстве практически важных случаев передается уравнением [48]

$$dq/dt = -2B \frac{n'_1}{n_1} q u' - Pq + Q, \quad (18)$$

где B — спектральный коэффициент Эйнштейна; P и Q — параметры, зависящие от вероятностей переходов активного вещества и интенсивности накачки. Множитель n'_1/n_1 возник в (18) из-за перехода от плотности излучения внутри активного стержня к плотности в рассеивающем веще-

¹ Связь коэффициентов k_n , k'_n , δ_1 и δ' с параметрами зеркал и вещества для вариантов а, б, в и г рис. 4 можно найти в [31, 38, 39]. В случае варианта г эта связь зависит от u и имеет сложный вид.

стве. Таким образом, в случае внутренних вариантов эксперимента процесс ВКР описывается системой трех уравнений.

Пользуясь уравнениями (14) и (15), можно достаточно подробно исследовать многие особенности работы квантового генератора на основе ВКР и рассчитать основные характеристики рассеиваемого излучения.

В случае стационарного режима эти уравнения допускают аналитическое решение [31, 38, 39], на основании которого можно найти порог, эффективность преобразования, мощность и спектральный состав преобразованного излучения. Из решения следует, что преобразование излучения на основе ВКР обладает всеми особенностями работы квантовых генераторов на основе вынужденного испускания. При возрастании мощности первичного излучения до порогового значения происходит постепенное нарастание плотности энергии СКР. ВКР при этом проявляется лишь в уменьшении потерь и незначительном сужении линии рассеяния. При переходе через порог происходит очень резкое изменение мощности и ширины линий рассеяния. Плотность энергии u' падающего излучения внутри рассеивающего вещества становится постоянной и равной

$$u'' = \frac{k_n}{\xi_{v'_0} v_m}. \quad (19)$$

От мощности подводимой энергии теперь зависит плотность энергии u и ширина линии Γ рассеянного излучения:

$$u = \frac{k'_n}{k_n} \left(\frac{W}{ck'_n} - \frac{k_n}{\xi_{v'_0} v_m} \right), \quad (20)$$

$$\Gamma = \gamma_{ij} \frac{k_n h v \xi_{v'_0} v_m u}{k'_n \left(\xi_{v'_0} v_m \frac{W}{ck'_n} - k_n \right)} = \gamma_{ij} \frac{u_{\text{сп}}}{u}, \quad (21)$$

где $u_{\text{сп}} = h v m$ — плотность энергии спонтанного рассеяния. Величина W/ck'_n представляет собой плотность энергии первичного излучения, которая установилась бы в рассеивающем веществе, если бы ВКР отсутствовало.

Таким образом, u пропорционально избытку плотности энергии излучения v' , которая установилась бы при отсутствии комбинационного рассеяния, над плотностью энергии излучения, реально существующей в рассеивающем веществе при наличии ВКР. Отсюда условие минимальности этого избытка, т. е. соотношение

$$\frac{W}{ck'_n} \geq \frac{k_n}{\xi_{v'_0} v_m}, \quad (22)$$

должно рассматриваться как пороговое условие, необходимое и практически всегда достаточное для возбуждения ВКР.

Из (21) видно, что ВКР должно приводить к резкому сужению линии рассеяния. В реальных условиях эксперимента, по-видимому, невозможно получить такое сужение, так как всегда найдутся причины, вызывающие уширение, значительно большее Γ .

На основании (20) легко показать, что эффективность преобразования $\gamma_{v' \rightarrow v}$, т. е. отношение мощности потока рассеянного излучения,

выводимого из резонатора $c/n \beta uV$, к мощности потока, подводимого к рассеивающему веществу WV , определяется соотношением

$$\gamma_{\nu' \rightarrow \nu} = n'/n \left(1 - \frac{1}{\eta}\right) \beta/k_{\pi}, \quad (23)$$

где β — коэффициент полезных потерь; V — объем рассеивающего вещества и $\eta = (W/c k'_{\pi}) / (k_{\pi} / \xi_{\nu'_0 \nu_m})$ — число порогов. Чем выше η , тем полнее падающая радиация ν' преобразуется в излучение комбинационной частоты. Из (23) также следует, что зависимость $\gamma_{\nu' \rightarrow \nu}$ от полезных потерь β обладает максимумом.

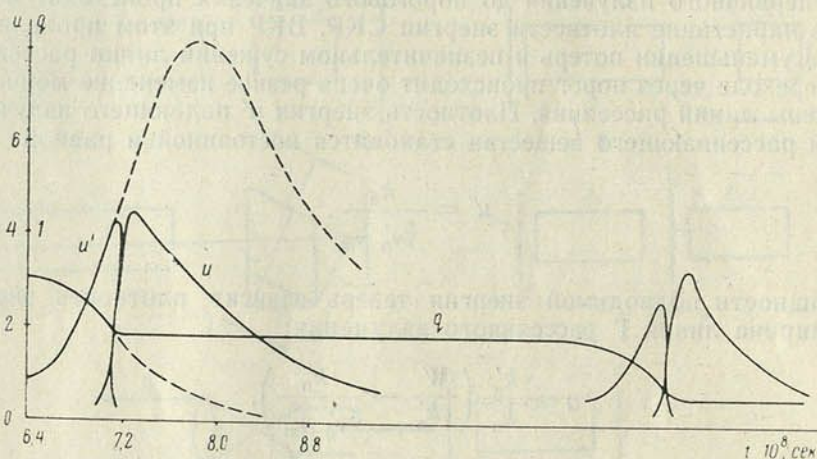


Рис. 5. Типичный вид зависимости u' , u (эрг/см³) и q от времени в случае внутреннего варианта ВКР (см. рис. 4,а):

$$\begin{aligned} \xi_m &= 6 \cdot 10^{-6} \text{ эрг}^{-1}/\text{см}^2; \sigma = 1,5 \cdot 10^{-13} \text{ см}^{-1}; k_{\pi} = k'_{\pi} = 0,02 \text{ см}^{-1}; \chi q_0 = 0,16 \text{ см}^{-1}; \delta = \delta' = 0,2; \\ l_1 = l = 0,7; 2Bn'_1/n' &= 3 \cdot 10^2 \text{ эрг}^{-1}\text{см}^3 \cdot \text{сек}^{-1}; P = Q = 10^2 \text{ сек}^{-1}; n = n' = 1,5; n_1 = n'_1 = 1,76 \end{aligned}$$

Исследование ВКР в стационарном режиме в настоящее время представляет в основном теоретический интерес, так как на практике оно получается обычно при использовании квантовых генераторов с переменной добротностью, т. е. явно в импульсном режиме. Известна лишь одна работа [49], в которой говорится о ВКР в режиме работы пичковых генераторов. Однако и в этой работе режим протекания ВКР был далек от стационарного.

Получить решение уравнений (14) и (15) в аналитическом виде при отсутствии стационарного режима не удастся. Однако эти уравнения сравнительно легко могут быть решены методами численного интегрирования [31]. Проведенные расчеты показывают, что между внешним и внутренним вариантами эксперимента по ВКР имеются существенные различия. В случае внутреннего варианта возможно сильное влияние процесса рассеяния на работу задающего генератора, тогда как при внешнем варианте такое влияние отсутствует. Различия между процессами преобразования, соответствующими конкретным значениям параметров системы, внутри каждого варианта эксперимента носят лишь количественный характер.

На рис. 5 приведено типичное решение уравнений (14), (15) и (18) в случае внутреннего варианта эксперимента. Это решение получено при начальных условиях, которые задаются определенной накачкой q_0 актив-

ного стержня первичного генератора, стационарной люминесценцией u'_0 и комбинационным рассеянием u_0 при этой накачке и отсутствии зеркал. Зеркала включались мгновенно при $t = 0$. Для сравнения приведено также решение уравнений (15) и (18) (пунктирные кривые), соответствующее работе того же генератора при отсутствии ВКР ($\xi = 0$).

Из рисунка видно, что ВКР может оказывать очень сильное влияние на работу задающего генератора. До моментов времени, пока плотность излучения комбинационного рассеяния мала, формирование импульса задающего генератора не зависит от процесса комбинационного рассеяния. После включения зеркал происходит быстрое нарастание плотности энергии излучения исходной частоты u' . Как только эта плотность достигает значений, больших $k_n/\xi v'_0 v_m$ (выполнение необходимых пороговых условий $u' > k_n/\xi$), начинается еще более быстрый рост плотности энергии комбинационной частоты u . До выполнения пороговых условий u практически пропорционально росту u' . Как только энергия рассеянного излучения становится значительной, сравнимой с энергией излучения первичной частоты, т. е. как только вы-

полняются достаточные пороговые условия $v \int_0^t [\xi v'_0 v_m u' - k_n] dt' \gg 1$

происходит быстрое (за время нескольких наносекунд) и практически полное преобразование излучения исходной частоты в излучение рассеяния. Если до этого момента рабочий стержень не успел отдать всю энергию, то ВКР приводит к срыву генерации, так как оно равнозначно быстрому включению мощных потерь генерируемого излучения. После срыва генерации инверсия активной среды остается практически постоянной и происходит (с длительностью порядка $(v \sigma k_n)^{-1}$) затухание рассеянного излучения. Если при этом остаточная инверсия достаточно высока ($\kappa q_{\text{ост}} > k'_n$), то после затухания излучения комбинационной частоты может возникнуть второй импульс генерации задающего лазера, а при достаточной его мощности и второй импульс ВКР. После завершения второго импульса может произойти третий импульс и т. д.

Таким образом, процесс мощного ВКР может привести к делению гигантского импульса задающего генератора на несколько импульсов, быстро убывающих по мощности, и сам при этом состоять из ряда импульсов. Этот вывод теории подтверждается экспериментальными данными работы [2], в которой отмечается, что ВКР вызывало деление моноимпульса на два-три более слабых импульса с убывающей энергией. Расстояние между импульсами равнялось приблизительно 20 нсек.

Основываясь на результатах численных расчетов, можно построить приближенное аналитическое решение уравнений (14), (15) и (18). Хотя получающееся решение сравнительно громоздко, оно вполне пригодно для анализа работы квантового генератора на ВКР.

Анализ решений показывает [31], что влияние ВКР на работу задающего генератора тем сильнее, чем выше относительная скорость нарастания процесса рассеяния $c \delta(\xi u' - k_n)$ по сравнению со скоростью развития генерации первичного лазера $c \delta(\kappa q_0 \frac{l_1}{l'} - k'_n)$. С ростом это-

го влияния увеличивается число импульсов генерации на частоте комбинационного рассеяния, но длительность и, как правило, энергия каждого импульса уменьшаются. Эффективность преобразования излучения на основе ВКР при этом растет и может быть очень высокой,

Рассмотрим особенности импульсного ВКР в случае внешнего варианта эксперимента, когда кювета помещается на пути выходящего лазерного потока (см. рис. 4, *д*). Типичный ход зависимости от времени средней плотности энергии рассеянного u и первичного u' излучения внутри кюветы, а также плотности энергии падающего потока $u''(t)$ изображены на рис. 6. Эти кривые получены численным интегрированием уравнений (14) и (15), причем $u''(t)$ являлось решением уравнений, описывающих работу первичного квантового генератора.

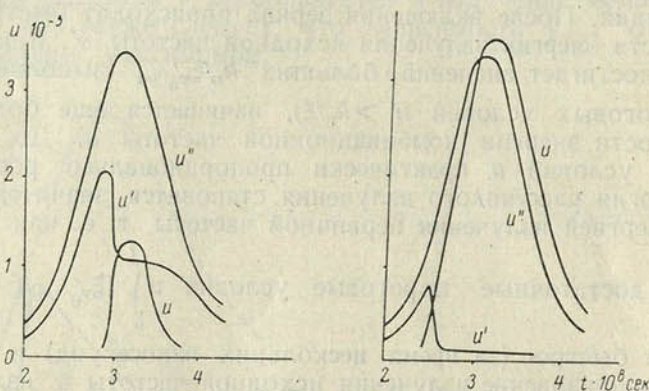


Рис. 6. Типичный вид зависимости u и u' (эрг/см³) от времени в случае внешнего варианта ВКР (см. рис. 4, *д*):

а— $k_{\Pi} = k'_{\Pi} = 0,68$ см⁻¹, $r'_1 = 0,1$, $\alpha = 2$; *б*— $k_{\Pi} = k'_{\Pi} = 0,06$ см⁻¹, $r'_1 = 0,85$; $\alpha = 1$; $l = 2$ см. u'' —плотность энергии падающего потока

Как видно из рис. 6, по мере нарастания мощности падающего потока происходит практически пропорциональный рост плотности рассеиваемого излучения u' в кювете. Это приводит к возникновению и ускоренному росту плотности энергии рассеянного излучения. До некоторого момента времени, практически до момента t_m , когда u' достигает максимального значения, процесс ВКР не влияет на изменение u' , т. е. u' задается лишь падающим потоком и потерями резонатора на частоте ν' . Если к моменту времени t_m в резонаторе с кюветой плотность энергии излучения комбинационной частоты становится сравнимой по порядку величины с u' , то практически незначительное влияние рассеяния на u' при $t < t_m$ становится весьма сильным при $t > t_m$. В результате происходит почти мгновенное преобразование излучения частоты ν' в излучение частоты ν . Плотность энергии первичного излучения внутри кюветы падает при этом от своего максимального значения до значений, близких k_{Π}/ξ ; соответственно на столько же увеличивается энергия рассеянного излучения. Далее плотность рассеиваемого излучения u' уменьшается очень медленно. Плотность энергии рассеянного излучения изменяется на этом интервале приблизительно пропорционально мощности падающего потока $I_0(t)$. Чем сильнее комбинационное рассеяние, тем более строго выполняется эта пропорциональность. После того как значительно уменьшается плотность энергии падающего потока (величина $u'_0(1-r'_1)n'a/l'$ становится сравнимой с k_{Π}/ξ), происходит быстрое затухание как u , так и u' .

Используя вывод, вытекающий из численных решений, о том, что в случае сильного рассеяния u' изменяется медленно в области максимума u , легко найти максимальную плотность энергии u_m импульса рассеяния. Действительно, пренебрегая в (15) du'/dt и подставляя в

правую часть этого равенства $u' = k_{\pi}/\xi$, что, как видно из (14), соответствует значению u' в точке, где u максимально, получаем

$$u_m = \frac{k'_{\pi}}{k_{\pi}} \left(\frac{W_m}{ck'_{\pi}} - \frac{k_{\pi}}{\xi v'_0 v_m} \right), \quad (24)$$

где W_m — максимальное значение подводимого потока. В (24) принято, что максимумы падающего и рассеянного потоков расположены очень близко друг относительно друга. При сильном рассеянии в резонаторе с невысокой добротностью это условие выполняется очень хорошо. По внешнему виду формула (24), определяющая максимальное значение u_m в импульсе рассеяния, совпадает с формулой (20), дающей u при стационарном режиме.

Требование положительности (24) приводит к пороговому условию для возбуждения импульсной генерации. Однако, чтобы генерация на комбинационной частоте была достаточно мощной, сравнимой с падающим потоком, необходимо, чтобы превышение W_m/ck'_{π} над k_{π}/ξ было значительным и на достаточно большом промежутке времени.

Из анализа решений следует, что использование резонатора (уменьшение k_{π} и k'_{π}) может быть весьма полезным для повышения эффективности импульсного преобразования излучения на основе ВКР и в случае внешнего варианта эксперимента.

ВКР БОЛЕЕ ВЫСОКИХ ПОРЯДКОВ. КОГЕРЕНТНЫЕ ПРОЦЕССЫ СМЕЩЕНИЯ ЧАСТОТЫ

В предыдущих разделах рассмотрено только ВКР первого порядка. В обычных условиях эксперимента это — первая стоксова линия с частотой $\nu \equiv \nu_{-1} = \nu_0 - \nu_k$, где ν_k — колебательная частота молекул. Наряду с ней на опыте очень часто наблюдаются и другие линии излучения, а именно первая антистоксова линия $\nu_1 = \nu_0 + \nu_k$ и линии более высокого порядка с частотами $\nu_{\pm n} = \nu_0 \pm n\nu_k$ ($n = 0, 1, 2, \dots$). Эксперимент показывает также, что интенсивность линий более высокого порядка может быть значительной, иногда даже превышать интенсивность первой стоксовой линии. Поэтому большой интерес представляет анализ процессов возникновения этих линий, их влияния на падающее излучение, излучение ВКР первого порядка и вообще взаимодействия между различными линиями. Остановимся кратко на физической сущности процессов, приводящих к образованию этих линий.

ВКР первого порядка, как показано выше, приводит к образованию в веществе мощного потока излучения стоксовой частоты ν_{-1} . В результате этого молекулы вещества оказываются в поле действия двух мощных волн, разность частот которых совпадает с их собственной колебательной частотой. Благодаря резонансу взаимодействие молекул с этими волнами очень сильное, что приводит к возбуждению в среде новых волн.

В результате комбинационного рассеяния стоксова излучения первого порядка в среде будет возбуждаться стоксово излучение второго порядка ν_{-2} . При выполнении пороговых условий для мощности рассеянного излучения первого порядка ($u_{\nu_{-1}} > \rho/\xi_{\nu_{-1}, \nu_{-2}}$) благодаря ВКР в среде может образоваться мощная волна частоты ν_{-2} . Вынужденное комбинационное рассеяние этого излучения приведет к возникновению стоксова излучения третьего порядка и т. д. В результате может возникнуть целая цепочка процессов ВКР, приводящих к каскадному смещению на ν_k частоты излучения в стоксову область.

ВКР более высоких порядков, так же как и ВКР первого порядка, является двухфотонным процессом, происходящим на различных молекулах некогерентно, если только внутренние состояния этих молекул независимы. Предположение о фазовой независимости внутримолекулярных колебаний в газовой и жидкой фазах вещества, по-видимому, вполне соответствует действительности. Поэтому по крайней мере в случае жидкостей и газов можно ввести понятие мощности этих процессов, отнесенной к единице объема вещества и определяемой соотношением (4) с соответствующей заменой частот и других индексов. Учитывая это, ВКР всех порядков можно рассматривать на основании уравнений для потоков излучения, аналогичных уравнениям (7), (8), или при наличии резонатора (14), (15). Для применимости этих уравнений, как уже отмечалось, необходимо, чтобы отсутствовала интерференция потоков различных направлений. В обычных условиях эксперимента это условие выполняется очень часто.

Таким образом, исследование ВКР нескольких порядков сводится к получению и анализу решения системы нелинейных дифференциальных уравнений. Число уравнений в этой системе равно числу рассматриваемых потоков. Мощность ВКР каждого порядка учитывается в уравнениях для потоков исходной частоты как потери, а в уравнениях для результирующей частоты как прибыль. Ввиду этого получается система зацепляющихся уравнений, в которой уравнения для потоков ВКР порядка n связаны с уравнениями для потоков $n-1$ и $n+1$ порядков рассеяния. Например, ВКР первого и второго порядков в резонаторе описывается следующей системой уравнений:

$$\frac{1}{\delta_0 c} \frac{du_0}{dt} = \frac{1}{v} W - \xi_{\nu_0 \nu_1} u_0 u_1 - k_0 u_0, \quad (25)$$

$$\frac{1}{\delta_1 c} \frac{du_1}{dt} = \xi_{\nu_0 \nu_1} u_0 u_1 - \xi_{\nu_1 \nu_2} u_1 u_2 - k_1 u_1, \quad (26)$$

$$\frac{1}{\delta_2 c} \frac{du_2}{dt} = \xi_{\nu_1 \nu_2} u_1 u_2 - k_2 u_2. \quad (27)$$

Здесь мы пренебрегаем СКР и предполагаем, что рассеяние каждого порядка монохроматично и распространяется лишь вдоль одного направления.

В стационарном режиме система уравнений (25)–(27), а также подобная система для ВКР любого порядка решается просто. Из решения следует, что для возбуждения ВКР второго порядка необходимо, чтобы мощность падающего излучения удовлетворяла следующему пороговому условию:

$$\frac{W}{ck_0} > \frac{k_1}{\xi_{\nu_0 \nu_1}} + \frac{k_1}{k_0} \frac{k_2}{\xi_{\nu_1 \nu_2}}, \quad (28)$$

т. е. должна быть на $k_1 k_2 / k_0 \xi_{\nu_1 \nu_2}$ выше, чем мощность возбуждения ВКР первого порядка. При выполнении условия

$$\frac{W}{ck_0} \sim \frac{k_1 + k_2}{\xi_{\nu_0 \nu_1}} + \frac{k_1 + k_2}{k_0} \frac{k_2}{\xi_{\nu_1 \nu_2}} \quad (29)$$

плотности энергии ВКР второго и первого порядков сравнимы.

При отсутствии стационарного режима или при стационарном режиме, но без проведения усреднения по объему рассеивающего вещества, задача о ВКР любого порядка может быть решена только численно. Численное

решение при предположении, что все потоки распространяются в одном направлении [9], показывает, что в условиях стационарного режима ВКР разных порядков преимущественно происходит в разных объемах вещества. В случае импульсного рассеяния при наличии резонатора, как можно показать на основании (25) — (27), они в значительной мере разделены во времени.

Как следует из квантовой электродинамики, наряду с процессами двухфотонного комбинационного рассеяния в рассеивающем веществе могут протекать и другие процессы преобразования излучения, происходя-

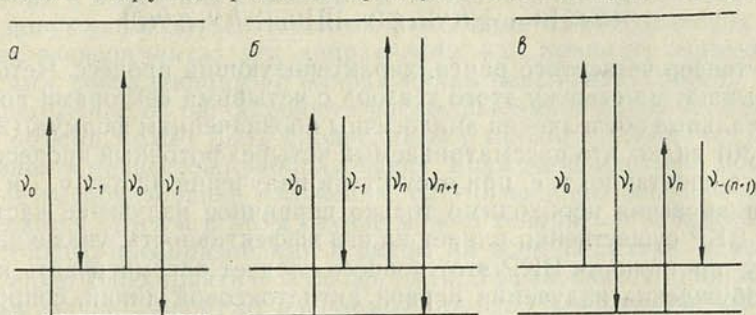


Рис. 7. Квантовые схемы переходов в случае когерентного четырехфотонного комбинационного смещения частот:

a, δ — антистоксово смещение; σ — стоксово смещение

щие с участием более двух фотонов. Многообразие возможных многофотонных процессов очень велико. Остановимся на наиболее вероятных из них. Это четырехфотонные процессы преобразования двух падающих фотонов в два новых, протекающие без изменения состояния молекулы.

Рассмотрим взаимодействие одной молекулы, активной к комбинационному рассеянию, с мощными электромагнитными волнами частот ν_0 и ν'_0 . В такой системе могут протекать как спонтанные, так и вынужденные многофотонные процессы преобразования излучения частот ν_0 и ν'_0 в излучение частот ν_1 , ν_2 и т. д. Возможные значения частот преобразованного излучения легко определяются на основании закона сохранения энергии.

Так, например, на молекулах, не обладающих центром инверсии, возможен процесс трехфотонного комбинационного рассеяния, в результате которого два фотона падающего излучения преобразуются в один фотон частоты $\nu = 2\nu_0 - \nu_{ji}$. Однако вероятность этого процесса значительно меньше вероятности двухфотонного комбинационного рассеяния. Поэтому порог возбуждения вынужденного трехфотонного рассеяния очень высок. Спонтанное трехфотонное рассеяние может наблюдаться и в современных условиях эксперимента, если выполнены правила отбора для соответствующего перехода молекулы.

Вероятность многофотонного процесса (в случае системы, размеры которой значительно меньше длины волны, такая вероятность имеет смысл) зависит от многих факторов и прежде всего от числа фотонов, участвующих в процессе, мощности излучения всех частот и наличия резонансов между одной или группой частот излучения и собственной частотой перехода молекул на промежуточный уровень. Поэтому в случае молекул, активных к комбинационному рассеянию, наиболее вероятны четырехфотонные процессы преобразования, изображенные на рис. 7. Приведенные на рисунке процессы протекают без изменения состояния молекулы и фактически представляют собой связанную по фазе совокупность двух процессов двухфотонного комбинационного рассеяния. Их ве-

роятность не ограничена какими-либо правилами отбора и из-за наличия резонанса на промежуточном уровне может быть значительной по сравнению с другими четырехфотонными процессами, оставаясь, конечно, несравненно меньше вероятности двухфотонного рассеяния.

На рис. 7, а изображен процесс преобразования двух фотонов падающего излучения ν_0 в два фотона соответственно стоксовой ν_{-1} и антистоксовой ν_1 частот. Вероятность этого процесса можно записать в виде

$$N(\nu_0 + \nu_0 \rightarrow \nu_{-1} + \nu_1) \sim |\hat{c} : \mathbf{e}_0 \mathbf{e}_0 \mathbf{e}_{-1} \mathbf{e}_1 e^{i(\vec{k}_{-1} + \vec{k}_1 - \vec{k}_0 - \vec{k}_0) \vec{r}}|^2 \times \\ \times u_0 u_0 [u_{-1} + h\nu_{-1} g(\nu_{-1})][u_1 + h\nu_1 g(\nu_1)], \quad (30)$$

где \hat{c} — тензор четвертого ранга, характеризующий процесс. Четыре точки указывают на свертку этого тензора с четырьмя векторами поляризации. Остальные обозначения аналогичны обозначениям формул (2) и (3).

Из (30) видно, что рассматриваемый четырехфотонный процесс может протекать спонтанно, т. е. при отсутствии излучения частот ν_{-1} и ν_1 . Для его возникновения необходимо только первичное излучение частоты ν_0 . Однако ВКР существенно влияет на его эффективность, увеличивая ν_{-1} . Поэтому при наличии ВКР этот процесс следует рассматривать как процесс возбуждения излучения первой антистоксовой линии, сопровождающийся одновременным усилением излучения первой стоксовой линии.

Высокая эффективность этого четырехфотонного процесса, наблюдаемая на опыте, обусловлена не только наличием резонанса и большой плотностью падающего и стоксова излучения, но и тем, что он протекает когерентно на различных молекулах (так как состояния молекул не изменяются). Качественно это можно показать на основании (30). Предполагая, что внутри рассеивающего вещества u_0 и u_{-1} постоянны, а u_1 мало, вероятность процесса на совокупности молекул можно получить суммированием по всем молекулам под знаком модуля. При объемах вещества, больших длин волн излучения, и однородном распределении молекул по объему из (30) следует, что вероятность этого процесса отлична от нуля при выполнении условия фазового синхронизма

$$2\mathbf{k}_0 = \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_{-1}, \quad (31)$$

когда она пропорциональна квадрату полного числа частиц ($n_0 V$). В других направлениях, отличных от направлений фазового согласования, этот процесс может наблюдаться лишь как результат неоднородности (флуктуаций) распределения молекул по объему. Так как векторы \mathbf{k}_0 и \mathbf{k}_{-1} задаются направлением облучения вещества и генерации излучения на основе ВКР и в каждом эксперименте являются заданными величинами, то условие (31) определяет направление распространения антистоксова излучения первого порядка.

Аналогичным образом можно рассмотреть особенности процессов преобразования, изображенных на рис. 7, б, в. Эти процессы приводят к преобразованию стоксова и антистоксова излучений n -порядка в излучение $n+1$ -порядка. Их вероятность легко получить из (30) соответствующей заменой индексов. В результате можно показать, что для протекания этих процессов необходимо, чтобы была отличной от нуля не только плотность энергии падающего излучения, но и плотность энергии излучения n -го порядка рассеяния. Отличие от нуля плотности энергии излучения первой антистоксовой (стоксовой) линии повышает эффективность процесса стоксова (антистоксова) смещения, не являясь при этом обязательно необходимым.

Переходя к совокупности молекул, равномерно распределенных в некотором конечном объеме, электромагнитные поля внутри которого мож-

но считать постоянными, в рамках вероятностно-энергетических представлений можно показать, что рассматриваемые процессы преобразования протекают только при выполнении условий фазового синхронизма

$$\mathbf{k}_0 + \mathbf{k}_n = \mathbf{k}_{-1} + \mathbf{k}_{n+1}, \quad (32)$$

$$\mathbf{k}_0 + \mathbf{k}_{-n} = \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_{-(n+1)}.$$

Следовательно, четырехфотонные процессы преобразования падающего излучения в излучение стоксовых и антистоксовых частот различного порядка могут наблюдаться только в определенных направлениях. В современных экспериментах эти направления, как правило, образуют конусы с осями, совпадающими с направлением первичного потока.

Предположение об однородности распределения полей внутри рассеивающего объема может быть справедливым только в условиях слабой эффективности процессов преобразования. Если же происходит достаточно мощное преобразование излучения, то это предположение, безусловно, нарушается. Хотя и в этом случае можно говорить о вероятности четырехфотонного преобразования в целом на всем веществе, однако это понятие теряет свою практическую ценность. Эффективность преобразования в этом случае зависит от распределения излучения внутри вещества, для отыскания которого необходимо решение уравнений Максвелла с учетом взаимодействия между волнами различных частот. Условия фазового синхронизма сохраняются и в случае сильного преобразования; необходимо лишь подставлять в них волновые векторы, рассчитанные для вещества в поле мощных электромагнитных волн. Анализ, проведенный в [9], показывает, что направления, в которых распространяется преобразованное излучение, в результате этого могут несколько отличаться от направлений, вытекающих из (32) без учета влияния излучения на свойства вещества.

Условие фазового синхронизма играет существенную роль не только в процессах преобразования излучения, протекающих без изменения состояний вещества, но и в процессах, в которых изменение состояния вещества не локализовано на одной частице, а относится к целой их совокупности, как например в твердых телах. Примером такого преобразования может служить вынужденное мандельштам-бриллюэновское рассеяние лазерного излучения, наблюдаемое на твердых телах и жидкостях. При этом рассеянии происходит изменение акустических колебаний среды на один фотон. В результате этого в выражении для вероятности процесса, вид которого аналогичен (1) и (2), под знаком модуля появляется множитель $e^{i\mathbf{k}_a \cdot \mathbf{r}}$, где \mathbf{k}_a — волновой вектор соответствующей акустической волны. Интегрирование под знаком модуля по объему среды приводит к тому, что такой процесс отличен от нуля при условии, что

$$\mathbf{k} = \mathbf{k}' + \mathbf{k}_a. \quad (33)$$

Так как в среде акустические волны могут распространяться в различных направлениях, то это условие не ограничивает направлений распространения рассеянного излучения. Оно лишь приводит к зависимости частоты рассеянного излучения от угла рассеяния. Действительно, учитывая связь между волновыми векторами и частотами, из (33) можно получить

$$\mathbf{v}' - \mathbf{v} = \boldsymbol{\Omega} = 2\mathbf{v}'(c/nv) \sin \vartheta/2, \quad (34)$$

где $\boldsymbol{\Omega}$ и v — частота и скорость акустической волны; n — показатель преломления света; ϑ — угол рассеяния (между векторами \mathbf{k} и \mathbf{k}'). При выводе (34) учтено, что $\boldsymbol{\Omega} \ll v'$ и v .

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Здесь рассмотрен вероятностно-энергетический подход к изучению процессов комбинационного преобразования излучения. Этот метод, обладающий известной простотой и наглядностью по сравнению с волновыми методами, во многих практически важных случаях позволяет дать количественный анализ работы устройств для преобразования лазерного излучения в излучение комбинационной частоты. Как уже отмечалось, пользуясь им, сравнительно просто можно рассчитывать как пространственное распределение излучения ВКР, так и усредненные по объему характеристики импульсного ВКР. Он весьма удобен для исследования и расчета эффективности преобразования излучения на основе ВКР. Однако, как показано в предыдущем разделе, он не пригоден для расчета процессов мощного когерентного (на разных молекулах) преобразования излучения, для протекания которых существенно выполнение условий фазового синхронизма; хотя и в этих случаях на его основании можно получить некоторые качественные результаты. Количественный расчет когерентных процессов преобразования, безусловно, должен основываться на волновых уравнениях для поля излучения и квантово-механических уравнениях для вещества.

Значительным оправданием того, что волновые методы не нашли своего отражения в данном докладе, является более полное по сравнению с вероятностно-энергетическим методом их освещение в теоретической литературе. Достаточно подробное изложение волнового подхода к решению проблем нелинейной оптики содержится в [10], а применительно к расчету вынужденного комбинационного рассеяния в [9]. В докладе С. А. Ахманова¹ волновые методы нашли широкое отражение. Хотя вероятностно-энергетический подход к анализу многих нелинейных эффектов в настоящее время широко используется в экспериментальных работах, в теоретических работах по принципиальным вопросам нелинейной оптики он рассмотрен недостаточно.

Следует еще отметить, что независимо от метода теоретического рассмотрения оптических нелинейных явлений для практических приложений и количественного сопоставления выводов теории с экспериментом требуется знание параметров, характеризующих нелинейные свойства вещества. Достаточно точный теоретический расчет этих параметров, по-видимому, невозможен. Поэтому возникает необходимость в развитии работ по их экспериментальному определению. Что касается данных по параметрам для ВКР, то они в настоящее время весьма скудны. В литературе имеются лишь две работы [18, 50], в которых измерялись абсолютные эффективные сечения комбинационного рассеяния на бензоле, нитробензоле, толуоле, пригодные для расчета параметра ξ , характеризующего ВКР. Обширный экспериментальный материал по СКР, накопленный до открытия ВКР, для расчетов ξ мало пригоден из-за относительности измерений и отсутствия количественных данных об условиях эксперимента.

Параметры, характеризующие процессы четырехуровневого стоксова и антистоксова смещений частот, могут быть рассчитаны по эффективным сечениям обычного комбинационного рассеяния.

ЛИТЕРАТУРА

1. Плачек Г. Релеевское рассеяние и раман-эффект. Харьков, 1935.
2. Woodbury E. J., Ng W. K. Proc. IRE, **50**, 2367, 1962.
3. Eckhardt G., Hellwarth W., McClung T. J., Schwarz S. E., Weiner D., Woodbury E. J. Phys. Rev. Letts., **9**, 455, 1962; Geller M., Bortfield D. P.

¹ Доклад С. А. Ахманова печатается в этом номере журнала.

- Sooy W. R. Appl. Phys. Letts., 3, 36, 1963.
4. Stoicheff V. P. Phys. Letts., 7, 186, 1963.
 5. Бонч-Бруевич А. М., Ходовой В. А. Этот журнал, стр. 13.
 6. Dennis J. H., Tannenwald P. E. Appl. Phys. Letts., 5, 58, 1964.
 7. Tokuma H., Jennigs D. E. Appl. Phys. Letts., 4, 185, 1964.
 8. Зубов В. А., Сушинский М. М., Шувалов И. К. УФН, 83, 187, 1964.
 9. Shen I. R., Bloembergen N. Phys. Rev., 137, A1787, 1965.
 10. Ахманов С. А., Хохлов Р. В. Принципы нелинейной оптики. Изд. ВИНТИ, 1964.
 11. Зубов В. А., Сушинский М. М., Шувалов И. К. ЖЭТФ, 47, 784, 1964; 48, 378, 1965.
 12. Зубов В. А., Сушинский М. М., Шувалов И. К. ЖПС, 3, 336, 1965.
 13. Chiao R., Stoicheff V. P. Phys. Rev. Letts., 12, 290, 1964.
 14. Zeiger H. J., Tannenwald P. E., Kern S., Herendeen R. Phys. Rev. Letts., 11, 419, 1963.
 15. Garmire E. Phys. Letts., 17, 251, 1965.
 16. Lammermand P., Bloembergen N. Appl. Phys. Letts., 6, 210, 1965.
 17. McClung F. J., Wagner W. G., Weiner D. Phys. Rev. Letts., 15, 96, 1965.
 18. Damen T. C., Leite R. C. C., Porto S. P. S. Phys. Rev. Letts., 14, 9, 1965.
 19. Kaiser W., Maier M., Giordmaine J. A. Appl. Phys. Letts., 6, 25, 1965.
 20. Ахманов С. А., Ковригин А. И., Кулакова Н. К., Романюк А. К., Струков М. М., Хохлов Р. В. ЖЭТФ, 48, 1202, 1965.
 21. Martin M. D., Thomas E. L., Wright J. K. Phys. Letts., 15, 136, 1965.
 22. Garmire E., Pandarese F., Townes Ch. H. Phys. Rev. Letts., 11, 160, 1963.
 23. Платоненко В. Т., Хохлов Р. В. ЖЭТФ, 46, 2126, 1964; Опт. и спектр., 18, 369, 1965.
 24. Луговой В. Н. ЖЭТФ, 48, 1216, 1965.
 25. Файн В. М., Ханин Я. И. Квантовая радиофизика. Изд. «Сов. радио», 1965.
 26. Файн В. М., Яшин Э. Г. ЖЭТФ, 46, 695, 1964.
 27. Хронополо Ю. Г. Изв. вузов, Радиофизика, 17, 674, 1964.
 28. Bloembergen N., Shen I. R. Phys. Rev., 133, A37, 1964.
 29. Tang C. L. Phys. Rev., 134, A 1166, 1964.
 30. Grab K. Phys. Letts., 10, 52, 1964.
 31. Апанасевич П. А., Степанов Б. И. Отчет Ин-та физики АН БССР, № 33, 1964.
 32. Kleinman D. A. Phys. Rev., 134, A423, 1964.
 33. Bloembergen N., Shen Y. R. Phys. Rev. Letts., 12, 504, 1964; 13, 720, 1964.
 34. Haus H. A., Kelley P. L., Zeiger H. J. Phys. Rev., 138, 960, 1965.
 35. Hellwarth R. W. Appl. Optics, 2, 847, 1963; Phys. Rev., 130, 1850, 1963.
 36. Машкевич В. С. Укр. физ. журн., 8, 1032, 1963.
 37. Машкевич В. С., Марушко И. А. Опт. и спектр., 19, 136, 1965.
 38. Апанасевич П. А., Степанов Б. И. ЖПС, 1, 202, 1964.
 39. Степанов Б. И., Апанасевич П. А. ЖПС, 2, 37, 1965.
 40. Kroll N. M. Phys. Rev., 127, 1207, 1962.
 41. R. Y. Chiao, Townes C. H., Stoicheff V. P. Phys. Rev., Letts., 12, 592, 1964.
 42. Brewer R. C., Rieckhoff K. E. Phys. Rev. Letts., 13, 334, 1964.
 43. Burlifinger E., Puell H. Phys., Letts., 15, 313, 1965.
 44. Hsu H., Trushima T. Phys. Letts., 15, 207, 1965.
 45. Loudon R. Proc. Phys. Soc. (London), A275, 218, 1963; A282, 393, 1963.
 46. Гайтлер В. Квантовая теория излучения. ИЛ, 1956.
 47. Апанасевич П. А. Сб. «Физические проблемы спектроскопии», т. I. Изд. АН СССР, 1963, стр. 352.
 48. Самсон А. М. Этот журнал, стр. 33.
 49. Geller M., Bortfiel, Sooy W. R., Woodbury E. J. Proc. IEEE, 51, 1230, 1963 (русский перевод).
 50. McClung F. J., Weiner D. JOSA, 54, 641, 1964.

Поступило в редакцию 4.X 1965

НГУЕН КОНГ ТУЙ

**ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ
 И СИСТЕМ С ДВУМЯ НЕЗАВИСИМЫМИ ПЕРЕМЕННЫМИ
 МЕТОДОМ ТИПА РУНГЕ—КУТТА. I**

Вопрос о применении методов типа Рунге—Кутта к численному решению уравнений в частных производных рассматривался несколькими авторами [1—3].

В настоящей статье двухитерационные алгоритмы Рунге—Кутта применяются к решению задачи Коши для гиперболических уравнений и систем с двумя независимыми переменными. Результаты для одного уравнения $u_{xy} = f(x, y, u, u_x, u_y)$ с данными Коши вдоль отрезка прямой $x + y = \text{const}$ обобщаются на случай системы таких уравнений и используются для решения нелинейного уравнения Монжа—Ампера. Аналогичная задача с данными Коши вдоль отрезка кривой будет рассмотрена позднее.

§ 1. Постановка задачи. Пусть задано уравнение

$$u_{xy} = f(x, y, u, p, q), \quad (1)$$

(u — неизвестная функция x и y ; $p = u_x$; $q = u_y$) с начальными условиями, заданными вдоль отрезка AB прямой $x + y = \text{const}$, в виде:

$$u^0 = u^0(x), \quad p^0 = p^0(x), \quad q^0 = q^0(x). \quad (2)$$

u^0, p^0, q^0, f считаем непрерывными и достаточное число раз дифференцируемыми.

Построим в области ABC определения решения прямоугольную равномерную сетку с шагом h (рис. 1). Узлы сетки расположим по слоям, параллельным начальному отрезку AB . При вычислении на k -ом слое для простоты обозначим ранее найденные значения u, p, q в узлах $(k-1)$ -го слоя, как и начальные данные в задаче (1), (2), через u^0, p^0, q^0 .

Введем обозначения: $f(x, y, u, p, q) = F(x, y)$, $F(x_1, y_1) = F(M)$.

Для элементарного треугольника MNP сетки с вершинами $M(x_1, y_1)$, $N(x_2 = x_1 + h, y_2 = y_1 - h)$ на $(k-1)$ -ом слое и вершиной $P(x_2, y_1)$ на k -ом слое (рис. 2) известны формулы:

$$u(P) = u^0(x_1) + \int_{x_1}^{x_1+h} p^0(x) dx + \iint F(x, y) dx dy, \quad (3.a)$$

$$p(P) = p^0(x_2) + \int_{y_1-h}^{y_1} F(x_2, y) dy, \quad (3.б)$$

$$q(P) = q^0(x_1) + \int_{x_1}^{x_1+h} F(x, y_1) dx, \quad (3.в)$$

где кратный интеграл в (3.a) берется в области MNP .

Возьмем за исходную точку точку M , соответствующую $h = 0$. Тогда, используя (3), можно найти разложения по степеням h в точке M для приращений $\Delta^* u = u(P) - u(M)$, $\Delta^* p = p(P) - p(M)$, $\Delta^* q = q(P) - q(M)$ в виде

$$\Delta^* u = hp^0(x_1) + \frac{h^2}{2!} \frac{dp^0(x_1)}{dx} + \frac{h^3}{3!} \frac{d^2p^0(x_1)}{dx^2} + \\ + \frac{h^2}{2!} F(M) + \frac{h^3}{3!} \left(2 \frac{\partial F(M)}{\partial x} - \frac{\partial F(M)}{\partial y} \right) + O(h^4), \quad (4.a)$$

$$\Delta^* p = h \frac{dp^0(x_1)}{dx} + \frac{h^2}{2!} \frac{d^2p^0(x_1)}{dx^2} + \\ + hF(M) + \frac{h^2}{2!} \left(2 \frac{\partial F(M)}{\partial x} - \frac{\partial F(M)}{\partial y} \right) + O(h^3), \quad (4.б)$$

$$\Delta^* q = hF(M) + \frac{h^2}{2!} \frac{\partial F(M)}{\partial x} + O(h^3). \quad (4.в)$$

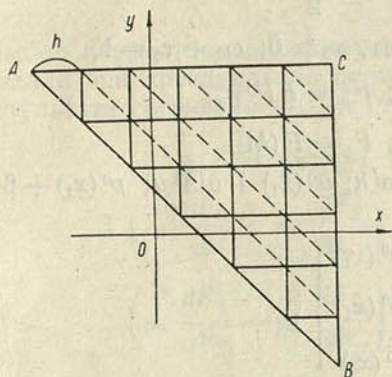


Рис. 1.

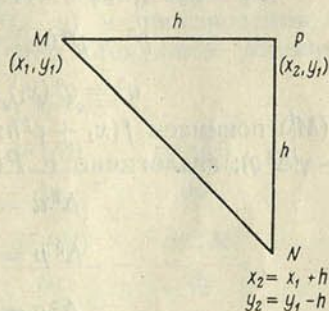


Рис. 2.

В настоящей статье ставится задача — построить алгоритмы типа Рунге — Кутты, дающие приближенные значения приращений Δu , Δp , Δq .

§ 2. Формальные алгоритмы типа Рунге — Кутты. Значения функции $F(x, y)$, используемые при i -ой итерации ($i = 1, 2$) для вычисления Δu , Δp , Δq , будем в дальнейшем обозначать соответственно через F_i , F_i^+ , F_i^- . Пусть значения u , p , q в точке P , полученные после i -ой итерации, будут u^i , p^i , q^i , а $\int_{x_1}^{x_1+h} p^0(x) dx = I(h)$ (о вычислении $I(h)$ см. § 4).

При первой итерации полагаем:

$$u^1 = u^0(x_1) + I(h) + \frac{1}{2} h^2 F_1, \quad (5.a)$$

$$F_1 = \omega_1 F(M) + \tau_1 F(N); \quad \omega_1, \tau_1 \geq 0, \quad \omega_1 + \tau_1 = 1, \quad (5.б)$$

$$p^1 = p^0(x_2) + hF_1^+; \quad F_1^+ = F(N), \quad (5.в)$$

$$q^1 = q^0(x_1) + hF_1^-; \quad F_1^- = F(M).$$

Образуем элементарные приращения:

$$\left. \begin{aligned} \Delta^1 u &= u^1 - u^0(x_1) \\ \Delta^1 p &= p^1 - p^0(x_1) \\ \Delta^1 q &= q^1 - q^0(x_1) \end{aligned} \right\}, \quad (5.г) \quad \left. \begin{aligned} \delta^1 u &= u^1 - u^0(x_2) \\ \delta^1 p &= p^1 - p^0(x_2) \\ \delta^1 q &= q^1 - q^0(x_2) \end{aligned} \right\}. \quad (5.д)$$

Приращения (5.г) и ниже (7.г) относятся к точке M , а приращения (5.д) — к точке N .

Далее вводим промежуточные точки $M_2^j (j = u, q)$, $N_2^j (j = u, p)$:

$$\begin{aligned} M_2^j &= (x_1 + \rho^j h; y_1 + \sigma^j h; u^0(x_1) + \alpha^j \Delta^1 u; \\ & p^0(x_1) + \beta^j \Delta^1 p; q^0(x_1) + \gamma^j \Delta^1 q), \end{aligned} \quad (6.а)$$

$$\begin{aligned} N_2^j &= (x_2 + \bar{\rho}^j h; y_2 + \bar{\sigma}^j h; u^0(x_2) + \bar{\alpha}^j \delta^1 u; p^0(x_2) + \\ & + \bar{\beta}^j \delta^1 p; q^0(x_2) + \bar{\gamma}^j \delta^1 q), \end{aligned} \quad (6.б)$$

$\rho^j, \bar{\rho}^j, \sigma^j, \bar{\sigma}^j, \dots, \gamma^j, \bar{\gamma}^j$ — численные параметры.

При второй итерации полагаем:

$$u^2 = u^0(x_1) + I(h) + \frac{1}{2} h^2 F_2, \quad (7.а)$$

$$\begin{aligned} F_2 &= \omega_2 F(M_2^u) + \tau_2 F(N_2^u); \quad \omega_2, \tau_2 \geq 0; \quad \omega_2 + \tau_2 = 1, \\ p^2 &= p^0(x_2) + hF_{\hat{2}}; \quad F_{\hat{2}} = F(N_2^p), \end{aligned} \quad (7.б)$$

$$q^2 = q^0(x_1) + hF_{\bar{2}}; \quad F_{\bar{2}} = F(M_2^q) \quad (7.в)$$

(под $F(M_2^j)$ понимаем $f(x_1 + \rho^j h; y_1 + \sigma^j h; u^0(x_1) + \alpha^j \Delta^1 u; p^0(x_1) + \beta^j \Delta^1 p; q^0(x_1) + \gamma^j \Delta^1 q)$; аналогично с $F(N_2^j)$),

$$\left. \begin{aligned} \Delta^2 u &= u^2 - u^0(x_1) \\ \Delta^2 p &= p^2 - p^0(x_1) \\ \Delta^2 q &= q^2 - q^0(x_1) \end{aligned} \right\}. \quad (7.г)$$

Окончательно за $\Delta u, \Delta p, \Delta q$ возьмем линейные комбинации:

$$\left. \begin{aligned} \Delta u &= \lambda_1 \Delta^1 u + \lambda_2 \Delta^2 u \\ \Delta p &= \mu_1 \Delta^1 p + \mu_2 \Delta^2 p \\ \Delta q &= \nu_1 \Delta^1 q + \nu_2 \Delta^2 q \end{aligned} \right\}, \quad (8)$$

λ_i, μ_i, ν_i — численные параметры.

§ 3. Численное определение параметров Рунге—Кутты. Для $\Delta^i u, \Delta^i p, \Delta^i q$ справедливы следующие разложения по степеням h :

$$\begin{aligned} \Delta^i u &= hp^0(x_1) + \frac{h^2}{2!} \frac{dp^0(x_1)}{dx} + \frac{h^3}{3!} \frac{d^2 p^0(x_1)}{dx^2} + \\ & + \frac{h^2}{2!} F(M) + \frac{h^3}{3!} 3 \left(\frac{dF_i}{dh} \right)_M + O(h^4), \end{aligned} \quad (9.а)$$

$$\begin{aligned} \Delta^i p &= h \frac{dp^0(x_1)}{dx} + \frac{h^2}{2!} \frac{d^2 p^0(x_1)}{dx^2} + hF(M) + \\ & + \frac{h^2}{2!} 2 \left(\frac{dF_{\hat{i}}}{dh} \right)_M + O(h^3), \end{aligned} \quad (9.б)$$

$$\Delta^i q = hF(M) + \frac{h^2}{2!} 2 \left(\frac{dF_{\bar{i}}}{dh} \right)_M + O(h^3). \quad (9.в)$$

$(d/dh)_M$ в (9) и ниже означает, что производная по h берется в точке M .
Учитывая (8), получаем разложения по степеням h для Δu , Δp , Δq :

$$\begin{aligned} \Delta u = & (\lambda_1 + \lambda_2) \left[hp^0(x_1) + \frac{h^2}{2!} \frac{dp^0(x_1)}{dx} + \frac{h^3}{3!} \frac{d^2p^0(x_1)}{dx^2} \right] + \\ & + (\lambda_1 + \lambda_2) \frac{h^2}{2!} F(M) + \frac{h^3}{3!} 3 \left(\lambda_1 \frac{dF_1}{dh} + \lambda_2 \frac{dF_2}{dh} \right)_M + O(h^4), \end{aligned} \quad (10.a)$$

$$\begin{aligned} \Delta p = & (\mu_1 + \mu_2) \left[h \frac{dp^0(x_1)}{dx} + \frac{h^2}{2!} \frac{d^2p^0(x_1)}{dx^2} \right] + (\mu_1 + \mu_2) hF(M) + \\ & + \frac{h^2}{2!} 2 \left(\mu_1 \frac{dF_{\hat{1}}}{dh} + \mu_2 \frac{dF_{\hat{2}}}{dh} \right)_M + O(h^3), \end{aligned} \quad (10.б)$$

$$\Delta q = (\nu_1 + \nu_2) hF(M) + \frac{h^2}{2!} 2 \left(\nu_1 \frac{dF_{\bar{1}}}{dh} + \nu_2 \frac{dF_{\bar{2}}}{dh} \right)_M + O(h^3). \quad (10.в)$$

Выбор параметров производится так, чтобы разложения (10) и (4) совпадали при произвольной функции $F(x, y)$ и произвольном шаге h .
В результате сравнения (10) и (4) получаем следующие условия:

$$\lambda_1 + \lambda_2 = \mu_1 + \mu_2 = \nu_1 + \nu_2 = 1, \quad (11)$$

$$3 \left(\lambda_1 \frac{dF_1}{dh} + \lambda_2 \frac{dF_2}{dh} \right)_M = 2 \frac{\partial F(M)}{\partial x} - \frac{\partial F(M)}{\partial y}, \quad (12)$$

$$2 \left(\mu_1 \frac{dF_{\hat{1}}}{dh} + \mu_2 \frac{dF_{\hat{2}}}{dh} \right)_M = 2 \frac{\partial F(M)}{\partial x} - \frac{\partial F(M)}{\partial y}, \quad (13)$$

$$2 \left(\nu_1 \frac{dF_{\bar{1}}}{dh} + \nu_2 \frac{dF_{\bar{2}}}{dh} \right)_M = \frac{\partial F(M)}{\partial x}. \quad (14)$$

Для правых частей (12)–(14) имеем:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial x},$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial y},$$

где

$$\frac{\partial u}{\partial x} = p; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = q; \quad \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial q}{\partial x} = f; \quad (15)$$

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Delta^* p}{h} = \frac{dp^0(x)}{dx} + \dot{f};$$

$$\frac{\partial q}{\partial y} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{q^0(x_1) + \Delta^* q - q^0(x_2)}{h} = -\frac{dq^0(x)}{dx} + \dot{f}.$$

Из (15) следует

$$2 \frac{\partial F(M)}{\partial x} - \frac{\partial F(M)}{\partial y} = \left[2 \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial u} (2p^0 - q^0) + \right. \\ \left. + \frac{\partial f}{\partial p} \left(2 \frac{dp^0}{dx} + f \right) + \frac{\partial f}{\partial q} \left(\frac{dq^0}{dx} + f \right) \right]_M. \quad (16)$$

Для вычисления левых частей (12)–(14) найдем $(d/dh)_M$ для $F(N)$, $F(M_2^j)$, $F(N_2^j)$:

$$\frac{dF(N)}{dh} = \frac{dF(x_1 + h, y_1 - h)}{dh} = \frac{\partial F(N)}{\partial x} - \frac{\partial F(N)}{\partial y},$$

так что на основании (15) имеем

$$\left[\frac{d}{dh} F(N) \right]_M = \left[\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial u} (p^0 - q^0) + \right. \\ \left. + \frac{\partial f}{\partial p} \frac{dp^0}{dx} + \frac{\partial f}{\partial q} \frac{dq^0}{dx} \right]_M. \quad (17)$$

Далее из (9) следует:

$$\left(\frac{d\Delta^1 u}{dh} \right)_M = p^0(x_1), \quad \left(\frac{d\Delta^1 p}{dh} \right)_M = \\ = \frac{dp^0(x_1)}{dx} + f(M), \quad \left(\frac{d\Delta^1 q}{dh} \right)_M = f(M), \quad (18)$$

а из сравнения $\delta^1 u$, $\delta^1 p$, $\delta^1 q$ с $\Delta^1 u$, $\Delta^1 p$, $\Delta^1 q$ получаем:

$$\left(\frac{d\delta^1 u}{dh} \right)_M = q^0(x_1), \quad \left(\frac{d\delta^1 p}{dh} \right)_M = f(M), \\ \left(\frac{d\delta^1 q}{dh} \right)_M = -\frac{dq^0(x_1)}{dx} + f(M). \quad (19)$$

Из (6.a), используя (18), имеем

$$\left[\frac{d}{dh} F(M_2^j) \right]_M = \left[\rho^j \frac{\partial f}{\partial x} + \sigma^j \frac{\partial f}{\partial y} + \alpha^j p^0 \frac{\partial f}{\partial u} + \right. \\ \left. + \beta^j \left(\frac{dp^0}{dx} + f \right) \frac{\partial f}{\partial p} + \gamma^j f \frac{\partial f}{\partial q} \right]_M. \quad (20)$$

Аналогично из (6.б), где $x_2 = x_1 + h$, $y_2 = y_1 - h$, используя (19), имеем

$$\left[\frac{d}{dh} F(N_2^j) \right]_M = \left[(1 + \bar{\rho}^j) \frac{\partial f}{\partial x} + (\bar{\sigma}^j - 1) \frac{\partial f}{\partial y} + (p^0 - q^0 + \bar{\alpha}^j q^0) \frac{\partial f}{\partial u} + \right. \\ \left. + \left(\frac{dp^0}{dx} + \bar{\beta}^j f \right) \frac{\partial f}{\partial p} + \left(\frac{dq^0}{dx} - \bar{\gamma}^j \frac{dq^0}{dx} + \bar{\gamma}^j f \right) \frac{\partial f}{\partial q} \right]_M. \quad (21)$$

Вернемся к выражению (12). Правая часть этого равенства задана в (16).

Используя (5.a), (7.a), (17), (20), (21), его левую часть можно записать в следующем виде:

$$\begin{aligned}
 & 3 \frac{\partial f}{\partial x} (\lambda_1 \tau_1 + \lambda_2 \tau_2 + \lambda_2 \omega_2 \rho + \lambda_2 \tau_2 \bar{\rho}) + \\
 & + 3 \frac{\partial f}{\partial y} (-\lambda_1 \tau_1 - \lambda_2 \tau_2 + \lambda_2 \omega_2 \sigma + \lambda_2 \tau_2 \bar{\sigma}) + \\
 & + 3 \frac{\partial f}{\partial u} [(\lambda_1 \tau_1 + \lambda_2 \tau_2 + \lambda_2 \omega_2 \alpha) \rho^0 - (\lambda_1 \tau_1 + \lambda_2 \tau_2 - \lambda_2 \tau_2 \bar{\alpha}) q^0] + \\
 & + 3 \frac{\partial f}{\partial p} \left[(\lambda_1 \tau_1 + \lambda_2 \tau_2 + \lambda_2 \omega_2 \beta) \frac{dp^0}{dx} + (\lambda_2 \omega_2 \beta + \lambda_2 \tau_2 \bar{\beta}) f \right] + \\
 & + 3 \frac{\partial f}{\partial q} \left[(\lambda_1 \tau_1 + \lambda_2 \tau_2 - \lambda_2 \tau_2 \bar{\gamma}) \frac{dq^0}{dx} + (\lambda_2 \omega_2 \gamma + \lambda_2 \tau_2 \bar{\gamma}) f \right]. \quad (22)
 \end{aligned}$$

Здесь все значения задаются в точке M и для простоты все индексы $j = u$ опущены. Положим:

$$\bar{\alpha} = \alpha, \quad \bar{\beta} = \beta, \quad \bar{\gamma} = \gamma, \quad \bar{\rho} = \rho - 1, \quad \bar{\sigma} = \sigma + 1. \quad (23)$$

(Такой подбор $\bar{\sigma}$, $\bar{\rho}$ вызван формой области MNP ; при этом подборе соответствующие проекции точек M_2^u и N_2^u в плоскости xy совпадают).

Учитывая (11), (23) и приравнявая (22) правой части (16), получаем следующую систему уравнений для параметров при Δu :

$$\left. \begin{aligned}
 \lambda_1 \tau_1 + \lambda_2 \rho &= \frac{2}{3}, \quad \lambda_1 \tau_1 - \lambda_2 \sigma = \frac{1}{3}, \\
 \lambda_1 \tau_1 + \lambda_2 \tau_2 + \lambda_2 \omega_2 \alpha &= \lambda_1 \tau_1 + \lambda_2 \tau_2 + \lambda_2 \omega_2 \beta = \frac{2}{3}, \\
 \lambda_1 \tau_1 + \lambda_2 \tau_2 - \lambda_2 \tau_2 \alpha &= \lambda_1 \tau_1 + \lambda_2 \tau_2 - \lambda_2 \tau_2 \gamma = \frac{1}{3}, \\
 \lambda_2 \beta &= \lambda_2 \gamma = \frac{1}{3}.
 \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

Решениями системы (24) будут являться, например, параметры из табл. 1.

Таблица 1

	ω_1	τ_1	ω_2	τ_2	λ_1	λ_2	ρ	σ	$\bar{\rho}$	$\bar{\sigma}$	$\alpha, \bar{\alpha}$	$\beta, \bar{\beta}$	$\gamma, \bar{\gamma}$	Положение проекций M_2^u, N_2^u в плоскости xy
1)	0	1	1	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}$	0	—	—	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	
2)	1	0	0	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	—	—	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	
3)	1	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	1	$\frac{2}{3}$	$-(\frac{1}{3})$	$-(\frac{1}{3})$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	
4)	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{6}$	$-(\frac{1}{6})$	$-(\frac{1}{6})$	$\frac{5}{6}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	

Аналогично получаем для параметров при Δp и Δq :

$$\mu_2 \bar{\rho}^p = 0, \mu_2 \bar{\sigma}^p = \frac{1}{2}, \mu_2 \bar{\alpha}^p = \mu_2 \bar{\beta}^p = \mu_2 \bar{\gamma}^p = \frac{1}{2}, \quad (25)$$

$$v_2 \rho^q = \frac{1}{2}, \sigma^q = 0, v_2 \alpha^q = v_2 \beta^q = v_2 \gamma^q = \frac{1}{2}. \quad (26)$$

Уравнения (25), (26) выполнимы при выборе параметров, например, из вариантов табл. 2.

Таблица 2

μ_1, γ_1	μ_2, γ_2	$\bar{\rho}^p, \sigma^q$	$\bar{\sigma}^p, \rho^q$	$\bar{\alpha}^p, \alpha^q$	$\bar{\beta}^p, \beta^q$	$\bar{\gamma}^p, \gamma^q$
0	1	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	1	1	1	1

Фактическая схема вычислений по предложенным алгоритмам имеет вид:

$$\left. \begin{aligned} u(P) &= u^0(x_1) + \lambda_1 \Delta^1 u + \lambda_2 \Delta^2 u, \\ p(P) &= p^0(x_2) + \mu_1 \delta^1 p + \mu_2 \delta^2 p, \\ q(P) &= q^0(x_1) + v_1 \Delta^1 q + v_2 \Delta^2 q, \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \Delta^1 u &= I(h) + \frac{1}{2} h^2 F_1, \\ \delta^1 p &= h F_{\hat{1}}, \\ \Delta^1 q &= h F_{\hat{1}}; \end{aligned} \right\} \quad (28.a) \quad \left. \begin{aligned} \delta^1 u &= \Delta^1 u + u^0(x_1) - u^0(x_2), \\ \Delta^1 p &= \delta^1 p + p^0(x_2) - p^0(x_1), \\ \delta^1 q &= \Delta^1 q + q^0(x_1) - q^0(x_2); \end{aligned} \right\} \quad (28.б)$$

$$\left. \begin{aligned} \Delta^2 u &= I(h) + \frac{1}{2} h^2 F_2, \\ \delta^2 p &= h F_{\hat{2}}, \\ \Delta^2 q &= h F_{\hat{2}}. \end{aligned} \right\} \quad (28.в)$$

Если принять первые варианты табл. 1 и 2, то на каждом шаге придется вычислять только четыре значения f : $f(M)$, $f(N)$, $f(M_2^M) = f(M_2^N)$, $f(N_2^N)$.

§ 4. Исследование устойчивости метода. Находим $\int_{x_1}^{x_1+h} p^0(x) dx = I(h)$ по формуле Симпсона

$$I(h) \approx \frac{1}{6} h [p^0(M) + 4p^0(Q) + p^0(N)],$$

где Q — середина отрезка MN . Неизвестное $p^0(Q)$ вычисляем при помощи интерполяционного многочлена Бесселя или при необходимости многочлена Ньютона. При этом если значения $p^0(x)$ в узлах данного слоя найдены с погрешностью η и если пренебречь остатком порядка $O(h^5)$ формулы Симпсона, то неустранимая погрешность в вычислении $I(h)$ будет примерно $h\eta$.

Формулы (27) на k -ом слое будут иметь вид:

$$u_k = u_{k-1} + \lambda_1 \Delta^1 u_{k-1} + \lambda_2 \Delta^2 u_{k-1}, \quad (29.a)$$

$$p_k = p_{k-1} + \mu_1 \delta^1 p_{k-1} + \mu_2 \delta^2 p_{k-1}, \quad (29.б)$$

$$q_k = q_{k-1} + \nu_1 \Delta^1 q_{k-1} + \nu_2 \Delta^2 q_{k-1}, \quad (29.в)$$

где индексы k относятся к точке P треугольника MNP , индексы $k-1$ в (29.a), (29.в) относятся к точке M , в (29.б) — к точке N .

Наряду с (29) выпишем:

$$u_k^* = u_{k-1}^* + \lambda_1 \Delta^1 u_{k-1}^* + \lambda_2 \Delta^2 u_{k-1}^* + r_1, \quad (30.a)$$

$$p_k^* = p_{k-1}^* + \mu_1 \delta^1 p_{k-1}^* + \mu_2 \delta^2 p_{k-1}^* + r_2, \quad (30.б)$$

$$q_k^* = q_{k-1}^* + \nu_1 \Delta^1 q_{k-1}^* + \nu_2 \Delta^2 q_{k-1}^* + r_3. \quad (30.в)$$

Здесь $\Delta^1 u_{k-1}^*$, $\Delta^2 u_{k-1}^*$, $\delta^1 p_{k-1}^*$, ..., $\Delta^2 q_{k-1}^*$ — элементарные приращения, вычисленные по (28.a) — (28.в), в которых приближенные значения u , p , q заменяются точными u^* , p^* , q^* ; r_1 , r_2 , r_3 — локальные погрешности метода, имеющие в нашем случае порядки $O(h^4)$, $O(h^3)$, $O(h^3)$ (см. (10)).

Введем обозначения погрешностей:

$$|u_k^* - u_k| = \varepsilon_k, \quad |p_k^* - p_k| = \eta_k, \quad |q_k^* - q_k| = \Theta_k. \quad (31)$$

Вычитая (29) из (30), пользуясь обозначениями (31), получаем:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_k &\leq \varepsilon_{k-1} + \lambda_1 |\Delta^1 u_{k-1}^* - \Delta^1 u_{k-1}| + \lambda_2 |\Delta^2 u_{k-1}^* - \Delta^2 u_{k-1}| + r_1, \\ \eta_k &\leq \eta_{k-1} + \mu_1 |\delta^1 p_{k-1}^* - \delta^1 p_{k-1}| + \mu_2 |\delta^2 p_{k-1}^* - \delta^2 p_{k-1}| + r_2, \\ \Theta_k &\leq \Theta_{k-1} + \nu_1 |\Delta^1 q_{k-1}^* - \Delta^1 q_{k-1}| + \nu_2 |\Delta^2 q_{k-1}^* - \Delta^2 q_{k-1}| + r_3. \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

Пусть $f(x, y, u, p, q)$ удовлетворяет условию Липшица по u , p , q с константой K и пусть

$$U = K(\varepsilon_{k-1} + \eta_{k-1} + \Theta_{k-1}).$$

В силу (28.a) имеем:

$$\left. \begin{aligned} |\Delta^1 u_{k-1}^* - \Delta^1 u_{k-1}| &\leq h \eta_{k-1} + \frac{1}{2} h^2 U, \\ |\delta^1 p_{k-1}^* - \delta^1 p_{k-1}| &\leq h U, \quad |\Delta^1 q_{k-1}^* - \Delta^1 q_{k-1}| \leq h U. \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

Далее из (33) и (28.б) следует:

$$|\delta^1 u_{k-1}^* - \delta^1 u_{k-1}| \leq 2\varepsilon_{k-1} + h \eta_{k-1} + \frac{1}{2} h^2 U,$$

$$|\Delta^1 p_{k-1}^* - \Delta^1 p_{k-1}| \leq 2\eta_{k-1} + h U,$$

$$|\delta^1 q_{k-1}^* - \delta^1 q_{k-1}| \leq 2\Theta_{k-1} + h U.$$

Учитывая (6.а) и (6.б), имеем:

$$|f(M_2^{i*}) - f(M_2^j)| \leq V = K \left[\left(\varepsilon_{k-1} + h\eta_{k-1} + \frac{1}{2} h^2 U \right) + \right. \\ \left. + (3\eta_{k-1} + hU) + (\Theta_{k-1} + hU) \right];$$

$$|f(N_2^{i*}) - f(N_2^j)| \leq W = K \left[\left(3\varepsilon_{k-1} + h\eta_{k-1} + \frac{1}{2} h^2 U \right) + \right. \\ \left. + (\eta_{k-1} + hU) + (3\Theta_{k-1} + hU) \right].$$

Из вышеизложенного и равенства (28.в) получаем:

$$\left. \begin{aligned} |\Delta^2 u_{k-1}^* - \Delta^2 u_{k-1}| &\leq h\eta_{k-1} + \frac{1}{2} h^2 (V + W), \\ |\delta^2 p_{k-1}^* - \delta^2 p_{k-1}| &\leq hW, \quad |\Delta^2 q_{k-1}^* - \Delta^2 q_{k-1}| \leq hV. \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

Используя (33) и (34), запишем (32) в виде:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_k &\leq \varepsilon_{k-1} + h\eta_{k-1} + \frac{1}{2} h^2 [\lambda_1 U + \lambda_2 (V + W)] + r_1, \\ \eta_k &\leq \eta_{k-1} + h(\mu_1 U + \mu_2 W) + r_2, \\ \Theta_k &\leq \Theta_{k-1} + h(\nu_1 U + \nu_2 V) + r_3. \end{aligned} \right\} \quad (35)$$

Обозначим векторы с компонентами ε_k , η_k , Θ_k и r_1 , r_2 , r_3 соответственно через X_k и r ($r \sim \{O(h^4), O(h^3), O(h^3)\}$) и допустим, что на нулевом слое u^0 , p^0 , q^0 заданы точно. На основании (35)

$$X_k \leq AX_{k-1} + r, \quad k = 1, 2, \dots, \left[\frac{AC}{h} \right].$$

Диагональные элементы матриц A есть

$$1 + c_1 h^2 + \dots, \quad 1 + c_2 h + \dots, \quad 1 + c_3 h + \dots,$$

где c_1 , c_2 , c_3 — константы, не зависящие от h ; многоточия означают некоторые слагаемые высших степеней h ; недиагональные элементы A суть величины порядка не больше $O(h)$.

Таким образом, при обычных нормах векторов и матриц коэффициент распространения ошибок на каждом шаге не превышает $1 + O(h)$, откуда следует устойчивость метода в смысле [4].

§ 5. Некоторые обобщения метода. Пусть задана система n уравнений

$$u_{xy} = f(x, y, u, p, q) \quad (36)$$

с начальными условиями:

$$u^0 = u^0(x), \quad p^0 = p^0(x), \quad q^0 = q^0(x), \quad (37)$$

заданными вдоль отрезка AB прямой $x + y = \text{const}$, где u — n -мерная

вектор-функция от x , y ; $p = u_x$; $q = u_y$. Все изложенное в § 2, 3 остается справедливым для задачи (36), (37) с тем отличием, что все функ-

ции и приращения в алгоритмах (27), (28) — векторные величины, зависящие от скалярного шага h ; $\lambda_i, \mu_i, \nu_i, \alpha^i, \beta^i, \gamma^i, \bar{\alpha}^i, \bar{\beta}^i, \bar{\gamma}^i, \rho^i, \bar{\rho}^i, \sigma^i, \bar{\sigma}^i$ — скалярные коэффициенты. Доказательство аналогично проведенному в § 2, 3; остаются в силе условия (11), (24) — (26) и результаты табл. 1, 2.

Изложенный метод применим к решению задачи Коши для нелинейных уравнений гиперболического типа с двумя независимыми переменными путем приведения таких уравнений к системе (36) с начальными условиями (37). Рассмотрим, например, задачу Коши для уравнения Монжа — Ампера

$$ar + 2bs + ct + g(rt - s^2) + f = 0, \quad (g \neq 0), \quad (38)$$

где $r = u_{xx}$; $s = u_{xy}$; $t = u_{yy}$; u — неизвестная функция от x, y ; a, b, c, g, f — заданные функции от x, y, u, p, q , причем $p = u_x$ и $q = u_y$. Предположим, что начальные условия заданы вдоль отрезка $A'B'$ нехарактеристической кривой Γ в виде $u^0 = u^0(x)$, $p^0 = p^0(x)$, $q^0 = q^0(x)$.

Известно [5], что в гиперболическом случае уравнение (38) эквивалентно системе

$$\left. \begin{aligned} c \frac{\partial x}{\partial \alpha} + \varphi_1 \frac{\partial y}{\partial \alpha} + g \frac{\partial p}{\partial \alpha} &= 0, \\ \varphi_2 \frac{\partial x}{\partial \alpha} + a \frac{\partial y}{\partial \alpha} + g \frac{\partial q}{\partial \alpha} &= 0, \\ p \frac{\partial x}{\partial \alpha} + q \frac{\partial y}{\partial \alpha} - \frac{\partial u}{\partial \alpha} &= 0, \\ c \frac{\partial x}{\partial \beta} + \varphi_2 \frac{\partial y}{\partial \beta} + g \frac{\partial p}{\partial \beta} &= 0, \\ \varphi_1 \frac{\partial x}{\partial \beta} + a \frac{\partial y}{\partial \beta} + g \frac{\partial q}{\partial \beta} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (39)$$

где α, β — параметры характеристических семейств; φ_1, φ_2 — корни характеристического уравнения $\varphi^2 - 2b\varphi + ac - gf = 0$, причем φ_1 соответствует семейству α , φ_2 — семейству β .

Следуя Леви и Фридрихсу, продифференцируем три первых уравнения системы (39) по β , а остальные — по α и разрешим полученную таким образом систему относительно вторых производных. В результате получим систему из пяти уравнений:

$$x_{\alpha\beta} = f_1, \quad y_{\alpha\beta} = f_2, \quad u_{\alpha\beta} = f_3, \quad p_{\alpha\beta} = f_4, \quad q_{\alpha\beta} = f_5, \quad (40)$$

где f_j ($j = 1 \div 5$) — известные функции от $x, y, u, p, q, x_\alpha, y_\alpha, u_\alpha, p_\alpha, q_\alpha, x_\beta, y_\beta, u_\beta, p_\beta, q_\beta$.

Выберем преобразование $(x, y) \rightarrow (\alpha, \beta)$ таким образом, чтобы отрезок $A'B'$ начальной кривой преобразовался в отрезок AB прямой $\alpha + \beta = \text{const}$. Вдоль AB мы знаем x^0, y^0, u^0, p^0, q^0 и можем однозначно вычислить $x_\alpha^0, y_\alpha^0, u_\alpha^0, p_\alpha^0, q_\alpha^0, x_\beta^0, y_\beta^0, \dots, q_\beta^0$. (Подробно по поводу изложенного см., например, [6] или [7]). Таким образом, задачу Коши для (38) мы привели к задаче (36), (37), откуда следует ее разрешимость посредством предложенных алгоритмов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Albrecht J. ZAMM, 37, 202, 1957.
2. Strang G. Numerische Mathematik, 6, No 1, 37, 1964.
3. Moore H. Archive Rat. Mech. Analysis, 7, 37, 1961.
4. Рябенский В. С., Филиппов А. Ф. Об устойчивости разностных уравнений. М., 1956.
5. Sauer R. Anfangswertprobleme bei Partiellen Differentialgleichungen. Berlin, 1958.
6. Курант Р., Фридрихс К. Сверхзвуковое течение и ударные волны. ИЛ, 1950.
7. Вазов В., Форсайт Д. Разностные методы решения дифференциальных уравнений в частных производных. ИЛ 1963.

Поступило в редакцию 28.IX 1965

А. П. РАБУШКА

АБ РУХУ І ЭВАЛЮЦЫІ ВЯРЧАЛЬНЫХ СКАПЛЕННЯЎ МАТЭРЫІ Ў КАСМАЛАГІЧНЫХ МАДЭЛЯХ ФРЫДМАНА

1. Ураўненні руху вярчальнай часцінкі. Ураўненні па-ступальнага руху для пробнай вярчальнай часцінкі ў знешнім гравітацыйным полі маюць выгляд [1]

$$\frac{D}{ds} \left(mu^i + u_j \frac{DS^{ij}}{ds} \right) + \frac{1}{2} S^{kl} u^n R_{nkl}^i = 0. \quad (1.1)$$

Тут $i, j, k, l, n = 0, 1, 2, 3$; D/ds абазначае каварыянтную вытворную; $u^i \equiv dx^i/ds$; $m = m(s)$; R_{ijkl}^i — тэнзар крывізны рыманавай прасторы — часу, у якім рухаецца вярчальная часцінка; S^{ij} з'яўляецца антысіметрычным тэнзарам, які апісвае ўласны вуглавы момант імпульсу вярчальнай часцінкі і задавальняе ўраўненням вярчальнага руху [1]

$$\frac{DS^{ij}}{ds} + u^t u_k \frac{DS^{jk}}{ds} - u^j u_k \frac{DS^{ik}}{ds} = 0, \quad (1.2)$$

якія могуць быць прыведзены да эквівалентнага выгляду [1]

$$\frac{DS^{ij}}{ds} + \frac{u^i}{u^0} \frac{DS^{i0}}{ds} - \frac{u^j}{u^0} \frac{DS^{i0}}{ds} = 0. \quad (1.3)$$

Няхай знешняе поле, у якім знаходзіцца вярчальная часцінка, апісваецца метрыкай, знойдзенай А. А. Фрыдманам [2, 3] як рашэнне ўраўненняў прыцягнення Эйнштэйна на падставе меркавання, якое падказваецца назіраннямі, што матэрыя ў сярэднім размеркавана ў прасторы аднародна і ізатропна. У спадарожнай сістэме адліку ў „сферычных“ каардынатах метрыка Фрыдмана запісваецца ў выглядзе [14], § 104—106):

$$ds^2 = dt^2 - dl^2, \quad dl^2 = a^2 \{ dr^2 + f^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \}, \quad (1.4)$$

дзе вядомая функцыя $a = a(t)$ называецца радыусам прасторы; $f = \text{sh } r$, або $f = r$, або $f = \sin r$.

Ураўненні (1.1) і (1.2) для метрыкі (1.4) аказваецца магчымым у некаторых прыватных выпадках дакладна праінтэграваць і атрымаць рад фізічных следстваў агульнага характару.

2. Рух невярчальнай часцінкі. Разгледзім спачатку рух невярчальнай часцінкі ($S^{ij} \equiv 0$). Для яе ўраўненні руху атрымліваюцца з (1.1) як прыватны выпадак і маюць выгляд [1, 5]:

$$m = \text{const}, \quad (2.1)$$

$$\frac{du^i}{ds} + \Gamma_{jk}^i u^j u^k = 0. \quad (2.2)$$

Ураўненні (1.2), (1.3) ператвараюцца ў тоеснасці.

Прыступаючы да інтэгравання ўраўненняў, трэба перш за ўсё вылічыць сімвалы Крыстофеля Γ_{jk}^i . Лічачы, што каардынатам t, r, Θ, φ адпавядаюць x^0, x^1, x^2, x^3 , знаходзім наступныя не роўныя нулю Γ_{jk}^i

$$\Gamma_{01}^1 = \Gamma_{02}^2 = \Gamma_{03}^3 = \frac{\dot{a}}{a}, \quad \Gamma_{11}^0 = a\dot{a}, \quad \Gamma_{22}^0 = a\dot{a}f^2, \quad \Gamma_{33}^0 = a\dot{a}f^2 \sin^2 \Theta,$$

$$\Gamma_{12}^2 = \Gamma_{13}^3 = \frac{f'}{f}, \quad \Gamma_{22}^1 = -ff', \quad \Gamma_{33}^1 = -ff' \sin^2 \Theta, \quad \Gamma_{23}^3 = \operatorname{ctg} \Theta, \quad (2.3)$$

$$\Gamma_{33}^2 = -\sin \Theta \cos \Theta.$$

Кропка і шрых абазначаюць звычайныя вытворныя па t і r адпаведна. Раскрываючы ўраўненні (2.2) паслядоўна для $i=0, i=1, i=2, i=3$, атрымліваем:

$$\frac{du^0}{ds} + a\dot{a}(u^{1^2} + f^2 u^{2^2} + f^2 \sin^2 \Theta u^{3^2}) = 0, \quad (2.4)$$

$$\frac{du^1}{ds} + 2\frac{\dot{a}}{a}u^0 u^1 - ff'(u^{2^2} + \sin^2 \Theta u^{3^2}) = 0, \quad (2.5)$$

$$\frac{du^2}{ds} + 2\frac{\dot{a}}{a}u^0 u^2 + 2\frac{f'}{f}u^1 u^2 - \sin \Theta \cos \Theta u^{3^2} = 0, \quad (2.6)$$

$$\frac{du^3}{ds} + 2\left(\frac{\dot{a}}{a}u^0 + \frac{f'}{f}u^1 + \operatorname{ctg} \Theta u^2\right)u^3 = 0. \quad (2.7)$$

Акрамя гэтай сістэмы дыферэнцыяльных ураўненняў, маем яе першы інтэграл, які атрымліваецца пры пачленным дзяленні (1.4) на ds^2 :

$$u^{0^2} - 1 = a^2(u^{1^2} + f^2 u^{2^2} + f^2 \sin^2 \Theta u^{3^2}). \quad (2.8)$$

Пасля замены дужкі ў (2.4) яе значэннем з (2.8) атрымаем ураўненне

$$\frac{du^0}{ds} + \frac{\dot{a}}{a}(u^{0^2} - 1) = 0, \quad (2.9)$$

якое лёгка інтэгруецца:

$$u^0 = \pm \frac{(a^2 + c_1^2)^{1/2}}{a}, \quad c_1 = \text{const}. \quad (2.10)$$

З дапамогай (2.8) і (2.10) знаходзім велічыню

$$u^{2^2} + \sin^2 \Theta u^{3^2} = \frac{c_1^2 - a^4 u^{1^2}}{a^4 f^2}, \quad (2.11)$$

замыняем яе значэннем выраз у дужках у (2.5) і прыходзім да ўраўнення тыпу Бернуллі адносна u^1 :

$$\frac{du^1}{dt} + \left(2 \frac{\dot{a}}{a} + \frac{\dot{f}}{f}\right) u^1 = \frac{c_1^2}{a^4} \frac{\dot{f}}{f} \frac{1}{u^1}. \quad (2.12)$$

Звычайным прыёмам знаходзім яго рашэнне

$$u^1 = \pm \frac{(c_1^2 f^2 + c_2)^{1/2}}{a^2 f}, \quad c_2 = \text{const}. \quad (2.13)$$

Далей відавочнымі пераўтварэннямі ўраўненне (2.7) прыводзіцца да выгляду

$$\frac{du^3}{dt} + 2 \left(\frac{\dot{a}}{a} + \frac{\dot{f}}{f} + \dot{\Theta} \text{ctg} \Theta \right) u^3 = 0. \quad (2.14)$$

Рашэннем апошняга будзе функцыя

$$u^3 = \frac{c_3}{a^2 f^2 \sin^2 \Theta}, \quad c_3 = \text{const}. \quad (2.15)$$

Нарэшце, з (2.11) знаходзім невядомую велічыню u^2 :

$$u^2 = \pm \frac{(-c_2 \sin^2 \Theta - c_3^4)^{1/2}}{a^2 f^2 \sin \Theta}, \quad (2.16)$$

якая задавальняе і ўраўненню (2.6).

Ураўненні геадэзічных (2.2), такім чынам, праінтэграваны ў агульным выпадку. Для атрымання траекторый часцінкі ў яўным выглядзе можна праінтэграваць ураўненні (2.10), (2.13), (2.15) і (2.16), памятаючы, што $u^i \equiv \frac{dx^i}{ds} = \frac{dx^i}{dt} u^0$. Аднак гэтага не варта рабіць, паколькі агульныя заканамернасці руху можна атрымаць непасрэдна са знойдзеных формул. Адзначым толькі, што траекторыямі руху невярчальнай часцінкі могуць быць, у прыватнасці, часавыя лініі ($r, \Theta, \varphi = \text{const}$, часцінка знаходзіцца ў спакоі), каардынаты лініі $r(\Theta, \varphi = \text{const})$, „плоскія“ лініі ($\varphi = \text{const}$) і „прасторавыя лініі“ (усе каардынаты r, Θ, φ змяняюцца з часам).

З (1.4) і (2.10) знаходзім:

$$\left(\frac{dt}{ds}\right)^2 = u^0^2 - 1 = \frac{c_1^2}{a^2}, \quad v = \frac{dl}{d\tau} = \frac{cc_1}{(a^2 + c_1^2)^{1/2}} = c \left(1 + \frac{a^2}{c_1^2}\right)^{-1/2}, \quad (2.17)$$

дзе v — велічыня трохмернай скорасці часцінкі, вымераная адносна ўласнага часу $\tau \equiv t/c$ фрыдманаўскага поля; c — скорасць святла. Як бачым, $v \rightarrow c$, калі $a \rightarrow 0$, і $v \rightarrow 0$, калі $a \rightarrow \infty$, г. зн. v затухае з часам па закону (2.17). Для адкрытых ізатропных мадэлей ($f = \text{sh } r$ або $f = r$) гэта затуханне адбываецца да нуля, у той час як для закрытай ізатропнай мадэлі ($f = \sin r$) затуханне адбываецца да не роўнага нуля мінімуму (адпавядаючага максімуму a), пасля чаго павінна наступіць узростанне v з імкненнем да скорасці святла c .

Па вызначэнню скаляра m маем [1]

$$m = \frac{1}{u^0} \int_V \tilde{T}^{00} dV, \quad (2.18)$$

дзе \bar{T}^{00} — кампанента шчыльнасці тэнзара энергіі-імпульсу часцінкі а інтэграл бярэцца па трохмернаму аб'ёму V , які заключае ў сябе часцінку. Гэты інтэграл вызначае поўную энергію (масу) часцінкі. У сістэме спакою часцінкі ($u^0 = 1, u^1 = u^2 = u^3 = 0$) ён супадае з масай спакою часцінкі m_0 [1, 6].

Разгледзім больш падрабязна, як з цягам часу змяняецца энергія часцінкі $E \equiv \int_V \bar{T}^{00} dV$ і яе імпульс $P \equiv Ev$. З (2.18) і (2.10) маем

$$E = mu^0 = m \frac{(a^2 + c_1^2)^{1/2}}{a} = m \left(1 + \frac{c_1^2}{a^2} \right)^{1/2}. \quad (2.19)$$

Знак мінус у u^0 апушчан для таго, каб m і E былі дадатнымі. Для змянення імпульсу знаходзім, выкарыстаўшы (2.17) і (2.19), вядомую заканамернасць [7, 8]

$$P = \frac{mcc_1}{a} = \frac{\text{const}}{a}. \quad (2.20)$$

3. Вярчэнне часцінкі, якая знаходзіцца ў спакоі на фрыдманаўскім фоне. Як зараз будзе відаць, ураўненні (1.1) і (1.2) можна дакладна прайнтэграваць у выпадку, калі $u^\alpha \equiv 0$ ($\alpha, \beta, \gamma = 1, 2, 3$), $S^{ij} \neq 0$. З (2.8) вынікае, што $u^{0i} = 1$, а ураўненні (1.1) пры $i = 0$ даюць

$$\frac{d}{ds} (mu^0) = 0, \quad \text{г. зн. } m = \text{const}. \quad (3.1)$$

Раскрываючы (1.1) у выпадку $i = \alpha$, з улікам (2.3) прыходзім да ураўненняў

$$\dot{S}^{0\alpha} + 2 \frac{\dot{a}}{a} \dot{S}^{0\alpha} = 0, \quad (3.2)$$

якія можна прайнтэграваць:

$$S^{0\alpha} = A^\alpha \int a^{-2} dt + B^\alpha, \quad A^\alpha = \text{const}, \quad B^\alpha = \text{const}. \quad (3.3)$$

Ураўненні вярчальнага руху (1.3) для $i = \alpha, j = \beta$ зводзяцца да ураўненняў

$$\dot{S}^{\alpha\beta} + 2 \frac{\dot{a}}{a} S^{\alpha\beta} = 0, \quad (3.4)$$

а для $i = 0, j = \alpha$ атрымліваем тоеснасці. Рашэннем (3.4) будзе

$$S^{\alpha\beta} = K^{\alpha\beta} a^{-2}, \quad (3.5)$$

дзе канстанты інтэгравання $K^{\alpha\beta}$ антысіметрычныя. Ураўненні руху (1.1), (1.3) у разглядаемым прыватным выпадку поўнаасцю прайнтэграваны. Канстанты інтэгравання $m, K^{\alpha\beta}, A^\alpha, B^\alpha$ вызначаюцца з пачатковых умоў.

Як відаць з (3.3) і (3.5), кампаненты ўласнага вуглавога моманту імпульсу мяняюцца з цягам часу. Падлічым інварыянт $S^2 \equiv S_{ij} S^{ij}$ (па індэксах, якія паўтараюцца, мяркуецца сумаванне). Маем:

$$S^2 = 2[f^2 (K^{12})^2 + f^2 \sin^2 \Theta (K^{13})^2 + f^4 \sin^2 \Theta (K^{23})^2 - (aS^{01})^2 - (afS^{02})^2 - (af \sin \Theta^{03})^2]. \quad (3.6)$$

Калі ўлічыць, што $r, \Theta, \varphi = \text{const}$, то S^2 , змяняючыся з часам, можа ператварыцца ў нуль і змяніць знак. На думку многіх аўтараў [1, 9, 10], трэба лічыць

$$S^{0\alpha} \equiv 0 \quad (3.7)$$

для таго, каб часцінка супала з сваім цэнтрам цяжару. Ускосным пацверджаннем гэтай думкі трэба лічыць таксама рэзультат работы [11], (10). Прымаючы ўмову (3.7) ($A^\alpha = 0, B^\alpha = 0$), атрымаем, што інварыянт S пастаянны, хаця кампаненты $S^{\alpha\beta}$, змяняючыся па закону (3.5), імкнуцца да бесканечнасці або да нуля пры імкненні a да нуля або да бесканечнасці адпаведна. Інварыянт S^2 супадае (з дакладнасцю да пастаяннага множніка) з квадратам модуля трохмернага вектара S_α , які вызначае вярчальны момант часцінкі. Кампаненты S_α выражаюцца праз $S^{\alpha\beta}$ па формуле [12]

$$S_\gamma = \frac{1}{2} \varepsilon_{\gamma\alpha\beta} S^{\alpha\beta}, \quad (3.8)$$

дзе $\varepsilon_{\gamma\alpha\beta}$ — антысіметрычны па ўсіх індэксах тэнзар; $\varepsilon_{123} = \sqrt{g_{11} g_{22} g_{33}}$. Такім чынам, часцінка, знаходзячыся ў спакой адносна фрыдманаўскага фону, але вярчальная, з цягам часу захоўвае паступальную скорасць нулявой і захоўвае велічыню ўласнага вуглавога моманту імпульсу. На апошнюю акалічнасць звярнуў нашу ўвагу І. Д. Новікаў.

4. Рух вярчальнай часцінкі ў больш агульным выпадку. Разгарнём ураўненні руху (1.1) і (1.3) у больш агульным выпадку, калі $u^i \neq 0, S^{\alpha\beta} \neq 0$. Умову (3.7), аднак, пакідаем у сіле.

Пачнем з больш простых ураўненняў (1.3). Пры $i = 1, j = 2; i = 1, j = 3$ і $i = 2, j = 3$ паслядоўна знаходзім:

$$\begin{aligned} \frac{dS^{12}}{ds} + \left(2\Gamma_{01}^1 u^0 + \Gamma_{12}^2 u^1 - \frac{u^{1^2}}{u^0} \Gamma_{11}^0 - \frac{u^{2^2}}{u^0} \Gamma_{22}^0 \right) S^{12} + \\ + \left(\Gamma_{33}^2 - \frac{u^2}{u^0} \Gamma_{33}^0 \right) u^3 S^{13} - \left(\Gamma_{33}^1 - \frac{u^1}{u^0} \Gamma_{33}^0 \right) u^3 S^{23} = 0; \end{aligned} \quad (4.1)$$

$$\begin{aligned} \frac{dS^{13}}{ds} + \left(2\Gamma_{01}^1 u^0 + \Gamma_{13}^3 u^1 + \Gamma_{23}^3 u^2 - \frac{u^{1^2}}{u^0} \Gamma_{11}^0 - \frac{u^{3^2}}{u^0} \Gamma_{33}^0 \right) S^{13} + \\ + \left(\Gamma_{23}^3 - \frac{u^2}{u^0} \Gamma_{22}^0 \right) u^3 S^{12} + \left(\Gamma_{22}^1 - \frac{u^1}{u^0} \Gamma_{22}^0 \right) u^2 S^{23} = 0; \end{aligned} \quad (4.2)$$

$$\begin{aligned} \frac{dS^{23}}{ds} + \left(2\Gamma_{01}^1 u^0 + 2\Gamma_{12}^2 u^1 + \Gamma_{23}^3 u^2 - \frac{u^{2^2}}{u^0} \Gamma_{22}^0 - \frac{u^{3^2}}{u^0} \Gamma_{33}^0 \right) S^{23} + \\ + \left(\Gamma_{12}^2 - \frac{u^1}{u^0} \Gamma_{11}^0 \right) \left(u^2 S^{13} - u^3 S^{12} \right) = 0. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Пры $i = 0, j = \alpha$ атрымліваем трывіяльныя тоеснасці. Далей ва ўраўненнях паступальнага руху (1.1) замяняем велічыню DS^i/ds яе значэн-

нем, знойдзеным з (1.3). Затым раскрываем атрыманя ўраўненні ўлічваючы толькі не роўныя нулю Γ_{jk}^i з (2.3), і падстаўляем выражаныя з дапамогай (4.1)–(4.3) значэнні $dS^{\alpha\beta}/ds$. У выніку прыходзім да наступных ураўненняў:

$$\frac{d}{ds}(mu^0) + m\Gamma_{11}^0(u^{1^2} + f^2 u^{2^2} + f^2 \sin^2 \Theta u^{3^2}) = 0; \quad (4.4)$$

$$\begin{aligned} & \frac{d}{ds}(mu^1) + m(2\Gamma_{01}^1 u^0 u^1 + \Gamma_{22}^1 u^{2^2} + \Gamma_{33}^1 u^{3^2}) + \\ & + \left[\frac{d}{ds} \left(\Gamma_{22}^0 \frac{u^2}{u^0} \right) - ff'' u^2 + (\Gamma_{11}^0 u^{1^2} + \Gamma_{22}^0 u^{2^2}) \Gamma_{22}^0 \frac{u^2}{u^0} + \left(\Gamma_{22}^0 \frac{u^2}{u^0} - \right. \right. \\ & \left. \left. - \Gamma_{23}^3 \right) \Gamma_{33}^0 \frac{u^{3^2}}{u^0} \right] S^{12} + \left[\frac{d}{ds} \left(\Gamma_{33}^0 \frac{u^3}{u^0} \right) - ff'' \sin^2 \Theta u^3 + (\Gamma_{11}^0 u^{1^2} + \Gamma_{22}^0 u^{2^2} + \right. \\ & \left. + \Gamma_{33}^0 u^{3^2}) \Gamma_{33}^0 \frac{u^3}{u^{0^2}} \right] S^{13} = 0; \end{aligned} \quad (4.5)$$

$$\begin{aligned} & \frac{d}{ds}(mu^2) + m(2\Gamma_{02}^2 u^0 u^2 + 2\Gamma_{12}^2 u^1 u^2 + \Gamma_{33}^2 u^{3^2}) + \\ & + \left[-\frac{d}{ds} \left(\Gamma_{11}^0 \frac{u^1}{u^0} \right) + u^1 \frac{\partial}{\partial r} \Gamma_{12}^2 + \Gamma_{02}^2 \Gamma_{12}^2 u^0 + \Gamma_{01}^1 \Gamma_{11}^0 u^1 + \Gamma_{12}^2 \Gamma_{12}^2 u^1 - \right. \\ & \left. - \Gamma_{11}^0 \Gamma_{11}^0 \frac{u^{1^2}}{u^{0^2}} + \left(\Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^0 \frac{u^1}{u^{0^2}} \right) \left(\Gamma_{22}^0 u^{2^2} + \Gamma_{33}^0 u^{3^2} \right) \right] S^{12} + \\ & + \left[\frac{d}{ds} \left(\Gamma_{33}^0 \frac{u^3}{u^0} \right) + u^3 \frac{\partial}{\partial \Theta} \Gamma_{33}^2 + \Gamma_{12}^2 \Gamma_{33}^1 u^3 - \Gamma_{02}^2 \Gamma_{33}^0 u^3 + (\Gamma_{11}^0 u^{1^2} + \right. \\ & \left. + \Gamma_{22}^0 u^{2^2} + \Gamma_{33}^0 u^{3^2}) \Gamma_{33}^0 \frac{u^3}{u^{0^2}} \right] S^{23} = 0; \end{aligned} \quad (4.6)$$

$$\begin{aligned} & \frac{d}{ds}(mu^3) + 2mu^3(\Gamma_{03}^3 u^0 + \Gamma_{13}^3 u^1 + \Gamma_{23}^3 u^2) + \\ & + \left[-\frac{d}{ds} \left(\Gamma_{11}^0 \frac{u^1}{u^0} \right) + u^1 \frac{\partial}{\partial r} \Gamma_{13}^3 + \Gamma_{13}^3 \Gamma_{13}^3 u^1 - \Gamma_{11}^0 \Gamma_{11}^0 \frac{u^{1^2}}{u^{0^2}} + \right. \\ & \left. + \left(\Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^0 \frac{u^1}{u^{0^2}} \right) \left(\Gamma_{22}^0 u^{2^2} + \Gamma_{33}^0 u^{3^2} \right) \right] S^{13} + \left[-\frac{d}{ds} \left(\Gamma_{22}^0 \frac{u^2}{u^0} \right) + \right. \\ & \left. + u^2 \frac{\partial}{\partial \Theta} \Gamma_{23}^3 + \Gamma_{23}^3 \Gamma_{23}^3 u^2 - \Gamma_{13}^3 \Gamma_{22}^1 u^2 - (\Gamma_{11}^0 u^{1^2} + \Gamma_{22}^0 u^{2^2}) \Gamma_{22}^0 \frac{u^2}{u^{0^2}} + \right. \\ & \left. + \left(\Gamma_{23}^3 - \Gamma_{22}^0 \frac{u^2}{u^0} \right) \Gamma_{33}^0 \frac{u^{3^2}}{u^0} \right] S^{23} = 0. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Дакладна праінтэграваць гэту сістэму ўраўненняў без дадатковых меркаванняў цяжка. Разгледзім два выпадкі: а) вось вярчэння часцінкі накіравана па руху (калінеарны выпадак); б) вось вярчэння ўтварае некаторы вугал з напрамкам паступальнага руху часцінкі (агульны выпадак).

а) Дапусцім $u^0 \neq 0$, $u^1 \neq 0$, $u^2 = u^3 = 0$, $S^{23} \neq 0$, $S^{12} = S^{13} = 0$, г. зн. $S_1 \neq 0$, $S_2 = S_3 = 0$. Для гэтага выпадку ўраўненні (4.1), (4.2), (4.6), (4.7) задавальняюцца тоесна, а ўраўненні (4.3) — (4.5) пасля замены Γ_{jk}^i іх значэннямі (2.3) прымаюць выгляд

$$\frac{dS^{23}}{ds} + 2 \left(\frac{\dot{a}}{a} + \frac{f'}{f} u^1 \right) S^{23} = 0, \quad (4.8)$$

$$\frac{d}{ds} (mu^0) + maau^{12} = 0, \quad (4.9)$$

$$\frac{d}{ds} (mu^1) + 2 \frac{\dot{a}}{a} u^0 mu^1 = 0. \quad (4.10)$$

Таксама спрашчаецца (2.8):

$$u^{02} - 1 = a^2 u^{12}. \quad (4.11)$$

У выпадку, які разглядаецца, як відаць з атрыманых ураўненняў, уласнае вярчэнне ніяк не ўплывае на паступальны рух часцінкі і наадварот.

Ураўненне (4.10) лёгка інтэгруецца адносна mu^1 . Знаходзім

$$\frac{d(mu^1)}{mu^1} = -2 \frac{\dot{a}}{a} dt, \quad mu^1 = \frac{k_1}{a^2}, \quad k_1 = \text{const}. \quad (4.12)$$

Далей, падставіўшы ў (4.11) узятае з (4.12) u^1 , вызначаем u^0 :

$$u^0 = \pm \frac{(m^2 a^2 + k_1^2)^{1/2}}{ma}. \quad (4.13)$$

Нарэшце, уносячы знойдзеныя значэнні u^0 і u^1 у (4.9), атрымліваем ураўненне для знаходжання m

$$\frac{(m^2 a^2 + k_1^2)^{1/2}}{a} \frac{d}{dt} \left[\frac{(m^2 a^2 + k_1^2)^{1/2}}{a} \right] + k_1^2 \frac{\dot{a}}{a^3} = 0, \quad (4.14)$$

якое лёгка інтэгруецца і прыводзіць да рэзультату

$$m = \text{const}. \quad (4.15)$$

Паколькі $u^1/u^0 = dr/dt$, то (4.8) таксама лёгка інтэгруецца:

$$S^{23} = \frac{k_2}{a^2 f^2}, \quad k_2 = \text{const}. \quad (4.16)$$

Выкарыстаўшы формулы (3.8) і (4.16), знаходзім, што велічыня ўласнага моманту часцінкі застаецца пастаяннай: $S = \text{const}$.

Такім чынам, снарадападобны рух часцінкі магчымы і яе вуглавая скорасць не змяняецца, а паступальная скорасць v , энергія E і імпульс P змяняюцца па тых жа законах (2.17), (2.19), (2.20), што і ў

невярчальнай часцінкі. Траекторыя руху супадае з каардынатнай лініяй r і з'яўляецца геадэзічнай фрыдманаўскай прасторы — часу. З прычыны аднароднасці і ізатрапіі прасторы траекторыяй руху ў разглядаемым калінеарным выпадку будзе любая геадэзічная фрыдманаўскага поля.

б) Як паказана вышэй, для невярчальнай і вярчальнай часцінкі (калінеарны выпадак) каардынатная лінія $r(u^2 = u^3 = 0)$, якая з'яўляецца геадэзічнай, можа быць траекторыяй руху. У агульным жа выпадку гэта немагчыма. На самай справе, мяркуючы ва ўраўненнях руху (4.1) — (4.7): $u^0 \neq 0$, $u^1 \neq 0$, $u^2 = u^3 = 0$, $S^{23} \neq 0$. Тады ўраўненні (4.4), (4.5) і першы інтэграл (2.8) супадаюць з (4.9) — (4.11) і, значыць, атрымліваем тыя ж выразы (4.12), (4.13), (4.15) для функцый u^1 , u^0 , m . Але цяпер яшчэ ўраўненні (4.6) і (4.7) даюць дадатковыя суадносіны (каэфіцыенты пры S^{12} і S^{13} прыраўноўваюцца да нуля), якія для адвольнага моманту часу знойдзенымі функцыямі не задавальняюцца. Іншымі словамі, сістэма ўраўненняў у гэтым выпадку аказваецца супярэчлівай.

Такім чынам, прыходзім да агульнага вываду: толькі ў калінеарным выпадку сусветная лінія вярчальнай часцінкі з'яўляецца геадэзічнай знешняй фрыдманаўскай прасторы — часу; ва ўсіх астатніх выпадках уласнае вярчэнне часцінкі выклікае адхіленне траекторыі яе руху ад геадэзічнай.

Як відаць, велічыня ўласнага моманту ў любым выпадку застаецца пастаяннай.

Для вярчальнай часцінкі пры ўмове (3.7) скаляр m вызначаецца суадносінамі [1]

$$m = \frac{u_i u^i}{u^0} \int_V \tilde{T}^{00} dV + \frac{1}{2} \frac{u_i}{u^0} \Gamma_{jk}^0 (S^{ij} u^k + S^{ik} u^j). \quad (4.17)$$

Лёгка паказаць, скарыстоўваючы значэнні Γ_{jk}^0 з (2.3), што дабаўка да інтэграла тоесна роўная нулю. Значыць, і ў агульным выпадку скаляр m выражаецца па формуле (2.18), паколькі $u_i u^i = 1$. Гэта акалічнасць павінна, як відаць, прыводзіць да заключэння, што ў агульным выпадку (але $S^{0\alpha} \equiv 0$) $m = \text{const}$. Тады ўраўненне (4.4) пасля скарачэння на m супадзе з (2.4), якое з дапамогай (2.8) ператворыцца ва ўраўненне (2.9) з вядомым рашэннем (2.10). Значыць, энергія вярчальнай часцінкі павінна змяняцца з часам таксама па закону (2.19).

5. Фізічная інтэрпрэтацыя атрыманых рэзультатаў і некаторыя пытанні эвалюцыі вярчальных аб'ектаў. Пераходзячы да фізічнай інтэрпрэтацыі атрыманых рэзультатаў, перш за ўсё адзначым, што пад часцінкамі ў касмалагічных мадэлях Фрыдмана могуць разумецца розныя аб'екты: вельмі малыя целы (пробныя часцінкі) або, наадварот, велізарныя газавыя і пылавыя воблакі, галактыкі і іх скапленні. Менавіта так абстаіць справа, калі разглядаецца ўпершыню пацверджанае назіраннямі ў 1929 г. [13] „разбеганне“ галактык — яны лічацца часцінкамі, якія знаходзяцца ў спакоі ў спадарожнай сістэме адліку, якая расшыраецца [4, 14, 15]. Трэба толькі, каб аб'ект слаба змяняў знешняе фрыдманаўскае поле. Далей вядома, што многія скапленні матэрыі ў цэлым круцяцца як цвёрдыя целы ([16], стар. 415). Значыць, можна атаясамліваць вярчальную часцінку з вярчальным газавым або пылавым воблакам або з вярчальнай на фрыдманаўскім фоне галактыкай.

Рух аб'екта адносна фрыдманаўскага фону, які расшыраецца па закону Хабла, прынята называць выпадковым, а скорасць гэтага ру-

ху — выпадковай. Як паказваюць назіранні, выпадковыя скорасці v некаторых галактык дасягаюць $\sim 100-300$ км/сек. Выпадковая ж скорасць v розных часцінак у касмічных праменнях параўнальная з скорасцю святла $c = 300000$ км/сек. Так званы „ўзрост“ Сусвету па апошніх даных [14—16] вызначаецца велічыняй $\tau^* = 10^{10}$ гадоў $\approx 3 \cdot 10^{17}$ сек. Умовімся ў далейшым значэнні ўсіх велічынь, якія адносяцца да нашай эпохі, адзначаць індэксам $*$ (напрыклад, a^* , v^* , E^* і г. д.). У цяперашні час у даступнай для назірання частцы Сусвету адбываецца „разбеганне“ галактык, г. зн. Сусвет расшыраецца (а павялічваецца з часам). Назіранні таксама даюць падставу лічыць, што ціск матэрыі p у Сусвеце да сучаснай эпохі зрабіўся вельмі малым. З гэтай прычыны можна карыстацца касмалагічнымі мадэлямі Фрыдмана, якія адпавядаюць выпадку $p = 0$. Вядома ([4], § 106), што для адкрытай ізатропнай мадэлі з $\dot{r} = \text{sh } r$ пры $p = 0$

$$a = a_0(\text{ch } \eta - 1), \quad t = a_0(\text{sh } \eta - \eta), \quad (5.1)$$

дзе $a_0 = \text{const}$. Калі параметр η вялікі ($\eta \gg 1$), то вялікае t і

$$a \approx t = c\tau. \quad (5.2)$$

Будзе цікава зрабіць некаторыя колькасныя ацэнкі, звязаныя са змяненнямі v і E . Для гэтага неабходна вызначыць парадак пастаяйнай інтэгравання c_1 з пачатковых умоў. З (2.17) знаходзім

$$c_1^2 = a^2 \left(\frac{c^2}{v^2} - 1 \right)^{-1}. \quad (5.3)$$

Калі $v^* = 300$ км/сек, то

$$c_1 \approx 10^{-3} a^* \text{ см}, \quad (5.4)$$

а пры $v^* = 150000$ км/сек

$$c_1 = \frac{a^*}{\sqrt{3}} \text{ см}. \quad (5.5)$$

Цяпер можна падлічваць змяненні выпадковай скорасці v і поўнай энергіі E па формулах (2.17) і (2.19), прымаючы значэнні для c_1 з (5.4) або (5.5). Разгледзім выпадак (5.2). Тады формулы (2.17) і (2.19) з улікам (5.4) і (5.5) перапішуцца адпаведна ў выглядзе:

$$v = 10^{-3} c \left(\frac{\tau^2}{\tau^{*2}} + 10^{-6} \right)^{-1/2}, \quad E = m \left(1 + 10^{-6} \frac{\tau^{*2}}{\tau^2} \right)^{1/2}; \quad (5.6)$$

$$v = c \left(3 \frac{\tau^2}{\tau^{*2}} + 1 \right)^{-1/2}, \quad E = m \left(1 + \frac{1}{3} \frac{\tau^{*2}}{\tau^2} \right)^{1/2}. \quad (5.7)$$

З (5.6) вынікае, што $5 \cdot 10^9$ гадоў назад выпадковая скорасць галактыкі павінна была быць удвая больш цяперашняга значэння $v^* = 300$ км/сек, а ў будучым, праз $5 \cdot 10^9$ гадоў, яна павінна зменшыцца да 200 км/сек. Кінетычная энергія W , якая падлічваецца па нерэлятывіскай формуле $\frac{1}{2} m_0 v^2$, у першым выпадку павінна павялічыцца ў чатыры разы, а ў другім — зменшыцца прыблізна ў два разы. Калі ўлічыць, што масы галактык вялікія $\sim 10^{41} - 10^{44}$ з (маса Сонца $\sim 10^{33}$ з),

то страты кінетычнай энергіі таго ж парадку, што і велічыня $W^* = \frac{1}{2} m_0 v^{*2} \sim 10^{56} \div 10^{59}$ эрг. Гэта каласальная энергія была б упаўне

дастатковай для ўтварэння звышзоркі [17], калі б адбывалася наапаўненне энергіі ўнутры аб'екта з наступным раптоўным выслабаненнем (выбух) у пэўны момант часу. Але рэлятывісцкая формула (5.6) для поўнай энергіі E , як няцяжка падлічыць, дае тыя ж ацэнкі для змянэння энергіі аб'екта, які мае выпадковую скорасць $v^* = 300$ км/сек.

З гэтай прычыны павінна адбывацца выпраменьванне энергіі ў значных колькасцях: $\sim 10^{39} - 10^{42}$ эрг/сек (для параўнання напамнім, што поўнае выпраменьванне Сонца $\sim 10^{33}$ эрг/сек). Аднак не зусім ясна, у якім выглядзе энергія пакідае аб'ект, які механізм перакачкі энергіі з аб'екта ў акалячую прастору. Адно з меркаванняў аб гэтым наступнае. Калі б Сусвет не расшыраўся, а сціскаўся, то выпадковая скорасць і энергія павялічваліся б. Павелічэнне E магло б адбывацца, на наш погляд, за кошт перадачы нейкім чынам аб'екту энергіі знешняга гравітацыйнага поля. Значыць, натуральна меркаваць, што пры расшырэнні Сусвету ўсё адбываецца ў адваротным парадку. Пры гэтым не выключана, што энергія пераходзіць з аднаго віду ў другі, якасна ператвараецца (гравітацыйная — у электрамагнітную і г. д.). Ва ўсякім выпадку памянёнае памяншэнне поўнай энергіі павінна іграць некаторую ролю ў эвалюцыі скапленняў матэрыі.

У заключэнне ацэнім змянэнні v і E для хуткіх часцінак. Згодна (5.7), $5 \cdot 10^9$ гадоў назад выпадковая скорасць v павінна была пераўзыходзіць $v^* = \frac{1}{2} c$ у паўтара раза, а ў будучым, праз $5 \cdot 10^9$ гадоў,

прыкладна ў паўтара раза зменшыцца. Што датычыць энергіі E , то ў тым жа далёкім мінулым яна была прыкладна роўная $1,25 E^*$, а ў момант $\tau = 1,5 \tau^*$ павінна $E = 0,9 E^*$. Відавочна, разглядаемыя страты энергіі рэлятывісцкай часцінкай павінны ажыццяўляцца с дапамогай некаторага своеасаблівага тармазнага выпраменьвання.

ЛІТАРАТУРА

1. Parapetrou A. Proc. Roy. Soc., A 209, 248, 1951.
2. Friedmann A. A. Z. Physik, 10, 337, 1922; 21, 326, 1924.
3. УФН (памяці А. А. Фридмана), 80, в. 3, 1963.
4. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теория поля. Физматгиз, 1962.
5. Фок В. А. Теория пространства, времени и тяготения. Физматгиз, 1961.
6. Tulczyjew W. Acta Phys. Polon., 18, 393, 1959.
7. Hoyle F. La Structure de l'Univers (11 Conseil de Solvay), Bruxelles, 1958, стр. 66.
8. Дмитриев Н. А., Зельдович Я. Б. ЖЭТФ, 45, 1150, 1963.
9. Corinaldesi E., Parapetrou A. Proc. Roy. Soc. A 209, 259, 1951.
10. Schiff L. J. Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 46, 871, 1960.
11. Пустовойт В. И., Баутин А. В. ЖЭТФ, 46, 1386, 1964.
12. Зельманов А. Л. Труды 6-го совещания по вопросам космогонии. М., 1959, стр. 155.
13. Hubble E. P. Proc. Nat. Acad. Amer., 15, 168, 1929.
14. Мак-Витти Г. К. Общая теория относительности и космология. ИЛ, 1961.
15. Зельдович Я. Б. УФН, 80, 357, 1963.
16. Строение звездных систем. ИЛ, 1962.
17. Гринштейн Дж. УФН, 83, 549, 1964.

Резюме

Интегрируются уравнения движения для вращающейся частицы, находящейся во внешнем фридмановском поле. Показано, что геодезические линии поля являются траекториями движения вращающейся частицы только в том случае, когда ось вращения частицы совпадает с направлением ее поступательного движения. Собственный угловой момент частицы сохраняется. Получены формулы, согласно которым трехмерная скорость, полная энергия и импульс частицы в расширяющейся Вселенной уменьшаются. Сделан ряд количественных оценок, из которых следует, что эти эффекты должны сопровождаться излучением $\sim 10^{39} - 10^{42}$ эрг/сек для туманностей с массами $\sim 10^8 \div 10^{11}$ масс Солнца.

Поступило в редакцию 10.VII 1965

до размеров 3—5 мк. Для съемки применяли плоские образцы размером $15 \times 8 \times 2$ мм. Съемки производились в фильтрованном с помощью никелевой фольги CuK_α излучении на дифрактометре УРС-50И с ионизационным счетчиком Гейгера — Мюллера. Вводились поправки на абсорбцию, дисперсию и лоренц-поляризационный эффект. Поправкой на экстинкцию пренебрегали, поскольку использовались тонкоизмельченные порошки [12].

В работе [7] использовался сферический монокристаллический образец InSb диаметром $0,43 \pm 0,01$ мм; для которого учитывались поправки на абсорбцию, дисперсию и лоренц-поляризационный эффект. Поправка на экстинкцию учитывалась методом Ванда [13]. Съемки производились в MoK_α излучении, отфильтрованном фильтрами из Zr или Y_2O_3 .

Анализируя достоинства и недостатки экспериментальных методов, можно прийти к следующим выводам.

Метод порошков позволяет с большой надежностью ввести поправки на абсорбцию и не учитывать поправку на экстинкцию, а метод монокристаллов — разделить парные рефлексы, суммы квадратов индексов которых одинаковы.

В работе [7] получено большее число рефлексов. Однако использование жесткого молибденового излучения могло несколько повлиять на точность определения интенсивности передних рефлексов. В работе [1] было измерено меньшее число рефлексов на более мягком излучении, при этом учитывались четные рефлексы, сумма индексов которых не делится на четыре и которые, по-видимому, не учитывались в работе [7].

Следует отметить, что экспериментальные значения атомно-рассеивающих факторов работ [1] и [7] согласуются, взаимно дополняя и корректируя друг друга.

В работе [7] при исследованиях применялась более совершенная экспериментальная техника. Поэтому при определении электронной плотности в кристаллах необходимо сочетание порошковых и монокристаллических исследований.

Поскольку подсчет электронной плотности целесообразно проводить применительно к низким температурам и даже к абсолютному нулю, то необходимо знание характеристических температур или факторов Дебая — Валлера, для определения которых целесообразны измерения при различных температурах (см. [1—6]), а также использование возможности оценки их по зависимости [7]:

$$\ln \frac{|F|_{\text{взвч}}^2}{|F|_{\text{набл}}^2} = 2B \frac{\sin^2 \theta}{\lambda^2}.$$

Дебаевская температура InSb , определенная в работе [1] при 233°K , равна $\Theta_D = 210^\circ \text{K}$. Как показывают данные [14], дебаевская температура InSb изменяется в широких пределах в функции температуры. При температуре 230°K , по данным [14], $\Theta_D = 200^\circ \text{K}$.

Определение распределения электронной плотности путем синтеза трехмерных рядов Фурье. Как известно [15], возможность подсчета распределения электронной плотности в кристаллах основана на использовании синтеза трехмерных рядов Фурье, коэффициентами которых являются структурные амплитуды F_{hkl} :

$$\rho(x, y, z) = \frac{1}{V} \sum_h \sum_k \sum_l F_{hkl} \exp[-2\pi i(hx + ky + lz)].$$

Однако непосредственное использование методов прямого синтеза практически исключается вследствие чрезвычайно медленной сходимости рядов и невозможности получения бесконечно большого числа членов (структурных амплитуд), даже при применении весьма жесткого излучения. Ограничиваться же малым числом членов при суммировании трехмерных рядов Фурье невозможно вследствие огромного эффекта обрыва ряда, по абсолютному значению значительно превосходящему величину распределения электронной плотности.

Поэтому были сделаны попытки устранения эффектов обрыва ряда путем введения температурных множителей [10], аппроксимирующих функций [16, 17], или применения разностных методов [18—20].

В работе [7] для построения карты распределения электронной плотности в кристалле InSb использовались прямой и разностный методы синтеза трехмерного ряда Фурье. При разностном методе определялась разность электронных плотностей в кристалле InSb и электронной плотности внутренней части атомов индия и сурьмы, соответствующих атомам палладия:

$$\Delta\rho(x, y, z) = \rho_{\text{InSb}} - \rho_{\text{Pd}} = \frac{1}{V} \sum_h \sum_k \sum_l (F_{\text{InSb}} - F_{\text{Pd}})_{hkl} \exp[-2\pi i(hx + ky + lz)].$$

В данном случае разность $(F_{\text{InSb}} - F_{\text{Pd}})$ для рефлекса (111) равна 18,7, а для рефлекса (1395), последнего в суммированном разностном ряду в работе [7], равна 7,4, следовательно, далека от нуля и не обеспечивает сходимости ряда.

Таким образом, по существу правильный прием приводит к неопределенным результатам, поскольку при этом не устраняется эффект обрыва ряда.

Поскольку отрицательное значение электронной плотности между атомами In и Sb в направлении [111] в плоскости (110) в решетке InSb невозможно (см. рис. 2 в [7]), то погрешность R , судя по конечным результатам, достигает весьма больших значений. Если, согласно квантово-механическим представлениям, электронная плотность ковалентной связи должна составлять величину порядка $0,3-0,5 \text{ \AA}^3$, а вычисляемая величина составляет физически нереальное отрицательное значение $3-5 \text{ \AA}^3$, то, таким образом, $R > 1000\%$. Очевидно, этот отрицательный результат обусловлен не неточностями экспериментальных определений структурных факторов ($R=2\%$), а результатом подсчета, при котором не устранялся эффект обрыва ряда.

Анализ роли различных членов указанных выше трехмерных рядов Фурье при определении электронных плотностей показывает, что учет рефлексов с большими значениями индексов влияет на величину электронной плотности вблизи ядра и практически не оказывает влияния на величину электронной плотности во внешней части атомов. Поэтому приемы подсчета электронных плотностей путем суммирования разностных трехмерных рядов Фурье должны быть такими, при которых распределение электронов вблизи ядра выбирается так, чтобы уже при сравнительно малых значениях суммы индексов разность $(F_{\text{InSb}} - F_1)_{hkl}$ стремилась к нулю. В таком случае

$$\Delta\rho(x, y, z) = \frac{1}{V} \sum_h \sum_k \sum_l (F_{\text{InSb}} - F_1)_{hkl} \exp[-2\pi i(hx + ky + lz)]$$

обеспечивается устранение эффекта обрыва ряда и получение надежных результатов.

$$f_{3, \text{In}} = f_{\text{In, эксп}} - f_{1, \text{In}} - f_{2, \text{In}},$$

$$f_{3, \text{Sb}} = f_{\text{Sb, эксп}} - f_{1, \text{Sb}} - f_{2, \text{Sb}}.$$

При этом, так же как и в работе [1], суммировался быстросходящийся трехмерный ряд Фурье, коэффициентами которого являются разностные структурные амплитуды $F_{3, hkl}$:

$$\rho(x, y, z) = \rho_1(x, y, z) + \rho_2(x, y, z) + \rho_3(x, y, z) = \rho_1(x, y, z) + \rho_2(x, y, z) + \frac{1}{V} \sum_h \sum_k \sum_l F_{3, hkl} \exp[-2\pi i(hx + ky + lz)].$$

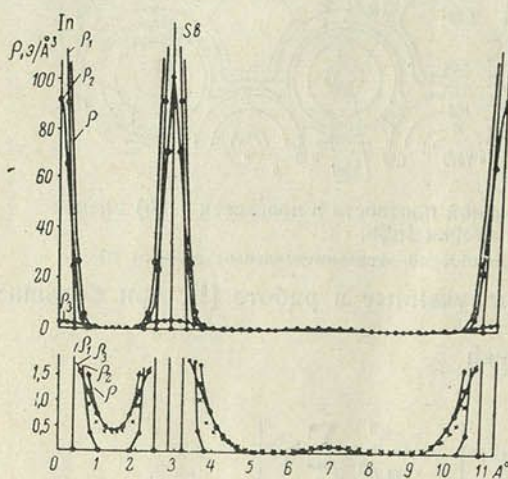


Рис. 2. Распределение электронной плотности в направлении [111] плоскости (110) элементарной ячейки InSb. Точками указаны значения, рассчитанные нами по данным [7] при 0° К, крестиками — по [1] при 20° С

$= 320$), а $\rho_3(x, y, z)$ в основном передними рефлексами с малыми значениями индексов (до $\sum_{i=1}^3 h_i^2 = 35$).

Как видно из приведенных рисунков, в средних частях между атомами индия и сурьмы первой и второй координационных сфер значения электронных плотностей, подсчитанные по данным обеих работ, весьма близки. Различие наблюдается вблизи центров атомов, как это отмечалось выше.

Электронные мостики между ближайшими разноименными атомами в InSb. Рассмотрение карт распределения электронной плотности, подсчитанной нами по данным [1] и [7] (рис. 1, а, б), и распределения ее между ближайшими разноименными атомами In и Sb в направлении [111] (рис. 2) позволяет сделать однозначный вывод о существовании электронных мостиков, которые в первом приближении можно рассматривать как области перекрытия электронных облаков атомов. Полученные данные свидетельствуют также о существовании и других нюансов в распределении электронной плотности в соединении InSb, которые не могут быть следствием погрешности измерений f -кривой или подсчета.

Как видно, рис. 1 а и б сходны между собой, а различие наблюдается лишь в значениях электронных плотностей вблизи центров атомов.

На рис. 2 приведено распределение электронной плотности между атомами In и Sb в направлении [111]. Точками указаны значения распределения электронной плотности, подсчитанные нами по данным [7], а крестиками — по работе [1]. Показаны также составляющие $\rho_1(x, y, z)$, $\rho_2(x, y, z)$ и $\rho_3(x, y, z)$, подсчитанные по F_{hkl} значениям работы [7]. Составляющие электронных плотностей ρ_1 и ρ_2 определяются в основном f -функцией в области отражения с большими значениями индексов Миллера (до $\sum_{i=1}^3 h_i^2 =$

Ориентировочная оценка погрешности определения электронной плотности на середине межатомного расстояния In—Sb не превышает $0,05 \text{ э}/\text{Å}^3$.

Величина электронной плотности в центре мостика, определенная по данным [1], составляет $0,35 \text{ э}/\text{Å}^3$, а по данным [7] $0,38 \text{ э}/\text{Å}^3$ и, следовательно, значительно превышает возможную погрешность эксперимента.

Полученные результаты свидетельствуют о возможности и целесообразности подсчетов физических свойств по экспериментально определенным распределениям электронной плотности, аналогично сделанным ранее [21—23].

О зарядах ионов в соединении InSb. По картам электронной плотности и кривым изменения атомно-рассеивающих факторов в зависимости от суммы квадратов индексов можно оценить заряды ионов соединения InSb. Знание величины и знака зарядов имеет большое значение для физики полупроводников. Оценки величины зарядов ионов по оптическим данным [24, 25], имея сравнительно высокую точность по абсолютным значениям, не содержат сведений о знаке зарядов.

На основании полученных данных по распределению электронной плотности проведена оценка величины ионных зарядов путем численного интегрирования электронной плотности по объему ионов [21]. При этом получены следующие значения: заряд иона индия положительный и равен $0,38 \pm 0,1 \text{ э}$, заряд иона сурьмы такой же по абсолютной величине, но противоположного знака. Аналогичные значения получены нами на основании численного интегрирования по карте распределения электронной плотности по данным [7]: величина заряда иона индия положительная и равна $0,32 \text{ э}$, а сурьмы отрицательная и равна $0,28 \text{ э}$.

Оценка величины ионных зарядов по кривым атомно-рассеивающих факторов на основании определения интенсивности рефлексов (200), по данным работы [1], дает значение $0,18 \text{ э}$ [21].

Авторы выражают благодарность профессору Л. В. Азарову за предоставление численных экспериментальных значений структурных амплитуд F_{hkl} для InSb, полученных в работе [7].

ЛИТЕРАТУРА

1. Сирота Н. Н., Гололобов Е. М. ДАН СССР, **143**, 156, 1962.
2. Сирота Н. Н., Гололобов Е. М. ДАН СССР, **138**, 162, 1961.
3. Сирота Н. Н., Гололобов Е. М. ДАН СССР, **144**, 398, 1962.
4. Сирота Н. Н., Олехнович Н. М. ДАН СССР, **136**, 660, 1961.
5. Сирота Н. Н., Олехнович Н. М. ДАН СССР, **136**, 879, 1961.
6. Сирота Н. Н., Олехнович Н. М. ДАН СССР, **143**, 370, 1962.
7. Attard A. E., Azaroff L. V. J. Appl. Phys., **34**, 774, 1963.
8. Агеев Н. В. Изв. АН СССР, х. н., № 1, 176, 1954.
9. Taylor W. H. The Phys. Chem. of Metal. Solut. and Intermet. Compound, **1**, 1959.
10. Grimm H. G., Brill R., Hermann C., Peters C. Ann. Phys., **34**, 393, 1939.
11. Witte H., Wölfel E. Z. phys. Chem., NF, **3**, 296, 1955.
12. Batterman B. W. Phys. Rev. Letters, **2**, No. 2, 1959.
13. Vand V. J. Appl. Phys., **26**, 1191, 1955.
14. Piesbergen U. Z. Naturforschung, **18 a**, 141, 1963.
15. Джеймс Р. Д. Оптические принципы дифракции рентгеновских лучей. ИЛ, 1950.
16. Van Beijen L. L. Phys., **9**, 461, 1942.
17. Hosemann R., Bagchi S. N. Nature, **171**, 785, 1953.
18. Сирота Н. Н., Олехнович Н. М., Шелег А. У. ДАН СССР, **132**, 160, 1960.
19. Brill R. Acta Cryst., **3**, 333, 1950.
20. Carpenter G. B. J. Chem. Phys., **32**, No. 2, 1960.
21. Сирота Н. Н., Гололобов Е. М. ДАН СССР, **156**, 1075, 1964.
22. Сирота Н. Н., Олехнович Н. М. ДАН СССР, **148**, 71, 1963; **151**, 1079, 1963.
23. Сирота Н. Н., Шелег А. У. ДАН СССР, **147**, 1344, 1962.
24. Spitzer W. G., Fan N. Y. Phys. Rev., **93**, 1893, 1955.
25. Hass M., Henvis B. W. J. Phys. Solids, **23**, 1099, 1962.

Поступило в редакцию 4.X 1965

Кароткія паведамленні

Л. М. ТОМИЛЬЧИК

МОНОПОЛЬ ДИРАКА И ИЗОТОПИЧЕСКАЯ ИНВАРИАНТНОСТЬ

Как известно, поиски монополя, предпринятые за последние годы, оказались безуспешными, причем отсутствие магнитных зарядов в каждом новом эксперименте фиксируется со все более возрастающей достоверностью [1].

Ситуация такова, что путь к решению проблемы состоит, по-видимому, скорее в отыскании запрета, препятствующего существованию монополя, чем в попытках его экспериментального обнаружения.

До настоящего времени такой запрет не сформулирован, хотя некоторые принципиально возможные его варианты обсуждались.

В частности, в работах [2—4] отмечена возможность существования связи между отсутствием монополя и сохранением четности в электромагнитных взаимодействиях. Однако эта интерпретация неоднозначна, поскольку она основана на априорном по существу предположении о векторном характере магнитного тока.

В работах [5—7] указывается на существенные трудности, связанные с описанием монополя в рамках квантовоэлектродинамической теории возмущений и формализма S -матрицы. Однако эти трудности, по-видимому, являются не столько аргументом в пользу отсутствия монополя, сколько свидетельствуют о невозможности создания логически замкнутой электродинамической схемы на основе потенциалов и задания взаимодействия в форме ток — поле при одновременном наличии электрических и магнитных зарядов [8].

Таким образом, в настоящее время можно констатировать отсутствие необходимой ясности в теоретической трактовке проблемы монополя.

Ситуация оказывается значительно более определенной, если обратить внимание на одну весьма существенную сторону этой проблемы, которая до сих пор совершенно игнорировалась.

Введение монополя означает появление второй константы связи с электромагнитным полем наряду с электрическим зарядом. С другой стороны, заряд выступает не только в качестве константы электромагнитного взаимодействия, но является одновременно величиной, связанной с изотопическими свойствами сильных взаимодействий, причем симметрия последних существенно зависит от числа зарядов различного типа. Известно, что выбор группы симметрии тех или иных взаимодействий регламентируется прежде всего числом аддитивных сохраняющихся квантовых чисел («зарядов»), вводимых в теорию. В частности, это число должно совпадать с числом одновременно диагонализированных операторов группы.

Для изотопической симметрии сильных взаимодействий вся совокупность современных экспериментальных данных и теоретических пред-

ставлений совершенно однозначно свидетельствует в пользу группы $SU(2)$.

Однако все генераторы этой группы некоммутативны, в связи с чем она может обеспечить сохранение только одного заряда.

Поэтому введение монополя в качестве сохраняющегося заряда, связанного с электромагнитным взаимодействием, необходимым образом требует расширения группы изотопического спина.

Оставляя пока открытым вопрос о возможных путях такого расширения, который требует специального исследования, можно с определенностью утверждать, что наличие двух сохраняющихся зарядов, связанных с электромагнитным взаимодействием, несовместимо с группой $SU(2)$ изотопической симметрии сильных взаимодействий.

С этой точки зрения одновременное существование электрических и магнитных зарядов в рамках группы $SU(2)$ для изотопического спина запрещено.

Разумеется, этот запрет не распространяется на частицы, не участвующие в сильных взаимодействиях.

ЛИТЕРАТУРА

1. Devons S. Sci. Progr., 51, N 204, 601, 1963; русский перевод — УФН, 85, 755, 1965.
2. Томильчик Л. М. ЖЭТФ, 44, 160, 1963.
3. Pintacuda N. Nuovo Cim., 29, 216, 1963.
4. Snupp P. Proc. IRE, 50, 2026, 1962.
5. Zwanziger D. Phys. Rev., 137, B647, 1965.
6. Cavalleri G. Nuovo Cim., 35, 1236, 1965.
7. Weinberg S. Phys. Rev., 138, B988, 1965.
8. Томильчик Л. М. ДАН БССР, 8, 379, 1964.

Поступило в редакцию 21.VII 1965

ПЕРАЛІК АРТЫКУЛАУ, ЗМешчаных у часопісе «ВЕСЦІ АН БССР»,
 СЕРЫЯ ФІЗІКА-МАТЭМАТЫЧНЫХ НАВУК,
 ЗА 1965 ГОД

	<i>N</i>	<i>стар.</i>
Апанасевич П. А. Вынужденное комбинационное рассеяние	4	89
Апанасевич П. А. Некаторы асаблівасці ўзаемадзеяння магутных па- токаў выпраменьвання з рэчывам	1	54
Асінскі У. І., Сірата М. М. Тэмпературныя залежнасці вольт-амперных n - p пераходаў на фасфідзе індые	3	93
Ахманов С. А. Когерентныя нелінейныя волновыя працэсы в оптике (умножение, смешение и параметрическое преобразование частот в опти- ческом диапазоне)	4	68
Бакута І. А. Аб уплыве незэлектрычнай энергіі на з'яву прабоіу ды- электрыкаў	1	132
Бекбулатаў М. С. Ферамагнітны рэзананс у цвёрдых растворах трай- ных сістэм ферытаў $(\text{NiCuZn})\text{Fe}_2\text{O}_4$, $(\text{NiMgMn})\text{Fe}_2\text{O}_4$ і $(\text{NiMnZn})\text{Fe}_2\text{O}_4$	2	99
Блох А. Ш., Матюшков Л. П. О надежности конечного автомата	2	25
Блох А. Ш., Павловский А. И. Алгоритм синтеза схем с «реаль- ными» контактами	3	45
Богуш А. А. Аб сувязі матрычных элементаў для дзіракаўскага і пау- ліёўскага токаў	2	76
Богуш А. А., Сацункевіч І. С. Аб праверцы ўз-інварыянтнасці пры рассеянні лептонаў на пратоне	3	84
Бойка Б. Б., Мароз Л. Г. Хібнасці пры вымярэнні ўзбуджаных ядраў з дапамогай шматканальнага аналізатара	3	106
Болсуи А. І. Фотанараджэнне пар палярызаваных вектарных ω -мезонаў	1	98
Бонч-Бруевич А. М., Ходовой В. А. Многофотонные процессы в опти- ческом диапазоне	4	13
Быстрова Г. Г., Фёдораў Ф. І. Аб пругкіх уласцівасцях кубічных крышталаў	1	98
Валадзько Л. В., Умрэйка Д. С. Тэмпературная залежнасць і пры- рода электрычных спектраў арганічных раствораў уранілавых солей.	1	83
Валадзько Л. В. Інфрачырвоныя спектры комплексных злучэнняў нітрату уранілу	3	118
Варыкаш В. М. Вырошчванне крышталаў трыгліцынсульфату і змя- ненне фізічных уласцівасцей у зоне тэмпературы кюры	1	101
Вольвачев Р. Т. О порядке элемента матричной группы	2	11
Галалобаў Я. М. Вызначэнне цяплынь атамізацыі і эфектыўных зара- даў іонаў злучэнняў $\text{A}^{\text{III}}\text{B}^{\text{V}}$ па даных рэнтгенаграфічнага аналізу	1	110
Ганчарэнка А. М. Электрамагнітныя ўласцівасці прамавугольнага хва- лявода, запоўненага гіратропным асяроддзем	2	71
Гончаренко А. М. Распространение электромагнитных волн в плоском анизотропном волноводе	3	89
Гранькова Д. А., Кісялеўскі Л. І. Даследаванне структуры разрадлага воблака нізкавольтнай іскры	3	114
Гронский В. К. Нелептонный распад поляризованного Ω -гиперона	2	62
Гронскі В. К., Сацункевіч І. С. Нараджэнне рэзанансу са спінам $3/2$ у нейтрынным пучку высокай энергіі	1	49
Гусак Г. М. О влиянии адресности на скорость работы вычислитель- ной машыны	2	41
Гусак М. А., Ганчарэнка А. М. Уплыву анізатропіі на тыпы хваляў дыэлектрычнага хвалявода	1	90
Емеличев В. А. Об одной задаче вогнутого программирования	3	39
Жаврид Г. П. Нильпотентные подгруппы знакопеременной группы	2	110

Жбанкоў Р. Г., Гарбуз М. І., Скрыган А. І., Шышко А. М. Инфрачырвоныя спектры цэлюлоз рознага паходжання і ўзросту. III. Цэлюлоза з драўніны рознага ўзросту	2	95
Загорин Л. Е. О нормальной форме Жордана матриц над телом	2	21
Залесский А. Е. О локально конечных группах с условием минимальности для централизаторов	3	127
Залесский А. Е. Сведение некоторых комбинаторных задач к целочисленному линейному программированию	3	24
Іваноў А. П. Рассеяние света буйнымі часцінкамі сферычнай формы	1	63
Іваноў А. П., Прэдка К. Р. Эксперыментальнае вивучэнне размыцця вузла пучка святла ў рассеіваючым экране	2	54
Козел П. Т. О ядре одного гомоморфизма	1	32
Корань М. М., Сірата М. М. Аб кінетыцы росту дыфузійных слаёў у сістэме кобальт—волава	2	43
Коршунаў Ф. П., Сірата М. М. Вольт-амперныя і іншыя характарыстыкі дыёдаў у сувязі з праблемай вымярэння нізкіх тэмператур	3	96
Крылов В. И., Пальцев А. А. Численное интегрирование функций, имеющих логарифмические особенности на концах отрезка интегрирования	1	10
Крылов В. И., Пальцев А. А. Численное интегрирование функций, имеющих логарифмическую особенность в начале координат	1	5
Крылов В. И., Янович Л. А. О приближении периодических аналитических функций тригонометрическими функциями	3	10
Ладес В. И. Многофункциональный логический узел импульсно-потенциального типа	1	19
Ладес В. И. Синтез переключаемых схем на многофункциональных логических узлах	3	64
Лисковец В. А., Фейнберг В. З. Об автоматных отображениях	3	55
Мадорский В. М. Об одном варианте метода усредненных поправок для решения нелинейных интегральных уравнений	3	29
Мишурная М. В. Анализ количественного состава многопультовой вычислительной системы	3	69
Монастырный В. И. Периодические подгруппы мультипликативной группы тела	1	29
Мороз Л. Г., Третьяков В. Н. О связи мнимой части амплитуды комптон-эффекта на нейтроне с фоторождением π -мезонов	2	83
Нгуен Конг Туй. Численное решение гиперболических уравнений и систем с двумя независимыми переменными методом типа Рунге — Кутты. I.	4	110
Нгуен-Тхыа-Хоп. О задаче Неймана для уравнения эллиптического типа	2	17
Некрашэвіч І. Г., Бакута І. А. Да пытання аб іанізацыі газу электронамі	2	115
Непакайчыкі А. Р., Панцалееў У. У., Янкоўскі А. А. Аб магчымасці выкарыстання заканамернасцей выгарання рэчыва ў крыніцах святла для павышэння канцэнтрацыйнай адчувальнасці спектральнага аналізу	1	68
Осинский В. И., Сирота Н. Н. Измерение низких температур по вольт-амперным и рекомбинационным характеристикам арсенид-галлиевых диодов	3	130
Пальцев А. А., Скобля Н. С. Об интегрировании ограниченных функций с весом Лягерра	3	15
Прышывалка А. П., Капанік А. К. Разлік люмінесценцыі ў рэзанатары са знешнімі люстрамі пры наяўнасці раз'юстыроўкі	2	65
Рабушка А. П. Аб руху і эвалюцыі вярчальных скапленняў матэрыі ў касмалагічных мадэлях Фрыдмана	4	121
Раманова Т. С., Фёдарав Ф. І. Аб ураўненнях з вышэйшымі выводнымі для электрамагнітнага поля	2	47
Рудак Э. А. О некоторых особенностях уровня 1,90 Мэв изотопа Cr^{51}	2	113
Самсон А. М. Нелинейные явления в оптических квантовых генераторах и усилителях	4	33
Сирота Н. Н., Гололобов Е. М. О распределении электронной плотности в антимониде индия	4	132
Соцкая Х. М., Фёдарав Ф. І., Хаткевіч А. Р. Асобныя напрамкі для пругкіх хваль у тэтраганальных крышталях	3	74
Султанаў М. А., Кісялеўскі Л. І. Да пытання аб паступленні рэчыва электроднаў пры імпульсным разрадзе	1	80
Султанаў М. А., Кісялеўскі Л. І. Даследаванне структуры разрадлага воблака нізкавольтавай іскры	3	111
Супруненко Д. А., Матюхин В. И. О разрешимых группах матриц над евклидовым кольцом	3	5
Ткачоў В. Д. Даследаванне лакальных цэнтраў з глыбокімі энергетычнымі ўзроўнямі ў крэмніі, абрамененым хуткімі электронамі	3	100
Томильчик Л. М. Монополю Дирака и изотопическая инвариантность	4	138

Турецкий А. Х. Замечание об обратной задаче теории аппроксимации в метрике L	2	5
Файн В. М. Физика нелинейных сред	4	5
Фірсаў Я. І., Рудак Э. А. Даследаванне спектраў раздзеленых ізатопаў з рэакцыі (n, γ) на рэактары ИРТ АН БССР	1	77
Фірсаў Я. І., Рудак Э. А. Даследаванне фонавых умоў датычнага канала рэактара ИРТ АН БССР	1	73
Хаткевіч А. Р. Уплыў анізатропіі кубічнага крышталю на распаўсюджванне і палярызацыю пругкіх хваляў	1	93
Хачатран Ю. М. Аб уплыве гідрастатычнага ціску на тэмпературу Кюры і магнітныя ўласцівасці нікель-медзь-цынковых ферытаў	1	120
Хохряков А. Я. О периодической краевой задаче для нелинейного дифференциального уравнения третьего порядка	1	14
Чупригин О. А. Об интерполяционной функции Лебега, соответствующей интерполированию Эрмита по равноотстоящим узлам	2	9
Чупригин О. А. О тригонометрическом $(0, 1, 2, \dots, r-2, r)$ -интерполировании	1	129
Шышкін Г. В. Да тэорыі адваротнага μ - e -распаду	2	88
Щербина П. И. Арифметические коды, исправляющие искажения заданного вида	2	31
Ярмоленка І. М., Рэзнікаў М. Я., Сяржанін І. К. Дыэлектрычныя тэмпературна-частотныя характарыстыкі некаторых цэлюлозных матэрыялаў	3	123
Яцкевич З. П. Годичное общее собрание Академии наук БССР	1	135

З М Е С Т

МАТЭРЫЯЛЫ УСЕСАЮЗНАГА СІМПОЗІУМА ПА НЕЛІНЕЙНАЙ ОПТЫЦЫ
(МІНСК, ЧЭРВЕНЬ 1965 г.)

В. М. Файн. Физика нелинейных сред	5
А. М. Бонч-Бруевич, В. А. Ходовой. Многофотонные процессы в оптическом диапазоне	13
А. М. Самсон. Нелинейные явления в оптических квантовых генераторах в усилителях	33
С. А. Ахманов. Когерентные нелинейные волновые процессы в оптике (умножение, смещение и параметрическое преобразование частот в оптическом диапазоне)	68
П. А. Апанасевич. Вынужденное комбинационное рассеяние	89

МАТЭМАТЫКА

Нгуен Конг Туй. Численное решение гиперболических уравнений и систем с двумя независимыми переменными методом типа Рунге—Кутты. I	110
---	-----

ФІЗІКА

А. П. Рабушка. Аб руху і эвалюцыі вярчальных скапленняў матэрыі ў касмалагічных мадэлях Фрыдмана	121
Н. Н. Сирота, Е. М. Гололобов. О распределении электронной плотности в антимониде индия	132

КАРОТКІЯ ПАВЕДАМЛЕННІ

Л. М. Томильчик. Монополь Дирака и изотопическая инвариантность	138
Пэралік артыкулаў, змешчаных у часопісе «Весці АН БССР», серыя фізіка-матэматычных навук, за 1965 год	140

СОДЕРЖАНИЕ

МАТЕРИАЛЫ ВСЕСОЮЗНОГО СИМПОЗИУМА ПО НЕЛИНЕЙНОЙ ОПТИКЕ (МИНСК, ИЮНЬ 1965 г.)

В. М. Файн. Физика нелинейных сред	5
А. М. Бонч-Бруевич, В. А. Ходовой. Многофотонные процессы в оптическом диапазоне	13
А. М. Самсои. Нелинейные явления в оптических квантовых генераторах и усилителях	33
С. А. Ахманов. Когерентные нелинейные волновые процессы в оптике (умножение, смещение и параметрическое преобразование частот в оптическом диапазоне)	68
П. А. Апанасевич. Вынужденное комбинационное рассеяние	89

МАТЕМАТИКА

Нгуен Конг Туй. Численное решение гиперболических уравнений и систем с двумя независимыми переменными методом типа Рунге—Кутты. I	110
---	-----

ФИЗИКА

А. П. Рябушко. О движении и эволюции вращающихся скоплений материи в космологических моделях Фридмана	121
Н. Н. Сирота, Е. М. Гололобов. О распределении электронной плотности в антимониде индия	132

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

Л. М. Томильчик. Монополь Дирака и изотопическая инвариантность	138
Перечень статей, помещенных в журнале «Известия АН БССР», серия физико-математических наук, за 1965 год	140

АТ 04213. Здана ў набор 9/XII-65 г. Падпісана да друку 20/I-66 г. Фармат 70×108^{1/16}. Друк. арк. 9,0. Ум. друк. арк. 12,33. Уч.-выд. арк. 12,2. Выд. заказ 1. Друк. заказ 1270. Цана 60 кап.

Друкарня навукова-тэхнічнай літаратуры выдавецтва «Навука і тэхніка» АН БССР
і Камітэта па друку пры Савеце Міністраў БССР
Мінск, Ленінскі праспект, 68

ББК 01.01
 БССР
 Ін-т фізікі
 АН БССР

ВНИМАНИЮ АВТОРОВ

Статьи, присылаемые авторами в наш журнал, будут приниматься редакцией к печати только при наличии двух экземпляров автореферата, удовлетворяющего указанным ниже требованиям.

ИНСТРУКЦИЯ

по составлению рефератов для авторов отечественных периодических изданий

Постановлением Совета Министров СССР от 18/IV. 1959 г. № 418 и последующим решением Государственного комитета по координации научно-исследовательских работ СССР и Президиума Академии наук СССР редакции научных и научно-технических журналов обязаны представлять в ВИНТИ рефераты публикуемых материалов.

В настоящей инструкции сформулированы требования к содержанию и оформлению рефератов, которыми и следует руководствоваться.

Требования, предъявляемые к реферату

1. В реферате кратко излагается основное содержание статьи. Реферат должен дать читателю представление о характере освещаемой работы, оригинальности постановки вопроса, методике проведения исследования и его основных результатах.

2. Реферату должно предшествовать библиографическое описание в следующем виде: название статьи, фамилия и инициалы автора, название журнала, где помещается статья. Текст реферата начинается непосредственно с изложения существа работы без повторения заголовка. Форма изложения материала не обязательно должна повторять форму изложения оригинальной статьи.

3. Если оригинал содержит большое количество цифровых данных, их следует обобщить и систематизировать.

4. Средний объем реферата 1,5—2 страницы машинописного текста, отпечатанного через два интервала на белой писчей бумаге обычного формата (30×21) в двух экземплярах с полем 4 см с левой стороны.

5. Таблицы, схемы, графики и пр. могут быть включены в том случае, если они отражают основное содержание работы или сокращают текст реферата. Сообщение о наличии в реферируемой работе таблиц, схем, графиков, фотографий, карт, рисунков необходимо давать в конце реферата. Например, табл. 2, илл. 10.

6. Формулы приводятся только в том случае, если они необходимы для понимания статьи. Громоздкие математические выражения помещать не следует. Формулы следует вписывать четко, не изменяя принятых в оригинале обозначений величин. Формулы и буквенные обозначения вписываются черными чернилами во второй экземпляр. Вписывание формул и буквенных обозначений, а также исправление замеченных опечаток в первом экземпляре не делается.

7. В конце реферата в квадратных скобках указывается название учреждения или предприятия, в которых автор реферируемой работы (если эти данные приводятся в статье) провел работу. Подпись автора и дату написания реферата следует ставить в левом нижнем углу на обоих экземплярах реферата.

ПРОИЗВОДИТСЯ ПОДПИСКА НА 1966 ГОД

НА ЖУРНАЛ

„ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК БССР“

Серия физико-математических наук

Журнал освещает общие принципиальные вопросы развития советской науки, публикует материалы научных исследований и итоги работ институтов Академии наук БССР и других научно-исследовательских учреждений БССР в области математики (методы вычислительной математики, уравнения математической физики, алгебра и теория групп и др.), общей и теоретической физики (оптика, физика твердого тела и полупроводников, теория полей и элементарных частиц и др.). Печатает обзоры по важнейшим разделам физико-математических наук, рецензии на выходящие в СССР научные издания, а также хронику научной жизни.

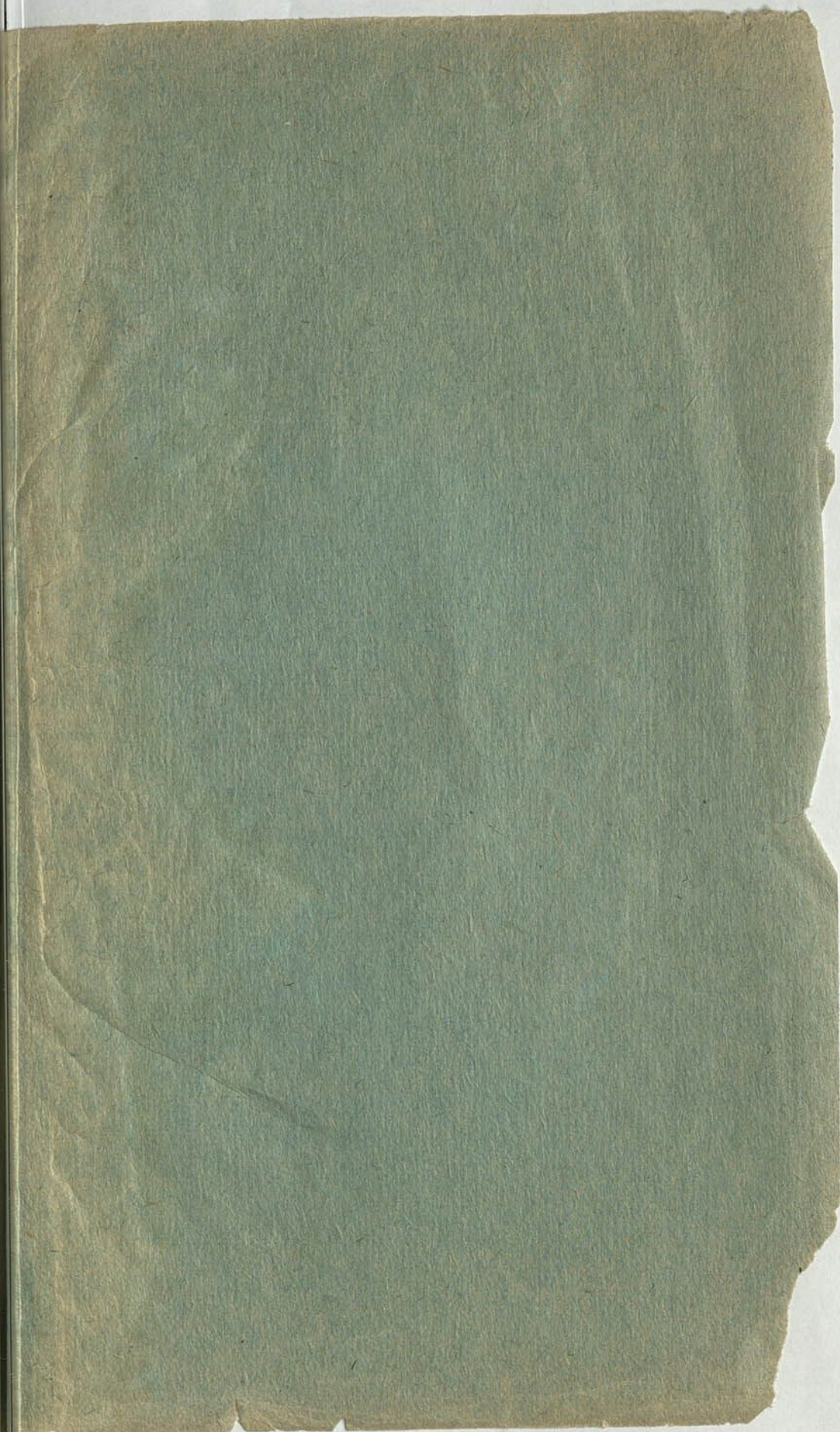
Журнал рассчитан на научных работников научно-исследовательских учреждений, преподавателей высших учебных заведений, аспирантов и студентов старших курсов вузов физико-математического профиля.

ЖУРНАЛ ВЫХОДИТ 4 РАЗА В ГОД

Печатается на белорусском языке, статьи сопровождаются резюме на русском языке. Отдельные статьи печатаются на русском языке.

ПОДПИСНАЯ ЦЕНА НА ГОД 2 РУБ. 40 КОП.

Подписка принимается всеми городскими, районными отделами «Связьпечать», конторами и отделениями связи и общественными уполномоченными по подписке на предприятиях, в учебных заведениях и учреждениях.



34/406157(050)