

30К-3

58

ВЕСЦІ

АКАДЭМІІ НАВУК БССР

СЕРЫЯ
ФІЗІКА-МАТЭМАТЫЧНЫХ
НАВУК

1

ВЫДАВЕЦТВА „НАВУНА І ТЭХНІКА“

МІНСК 1986

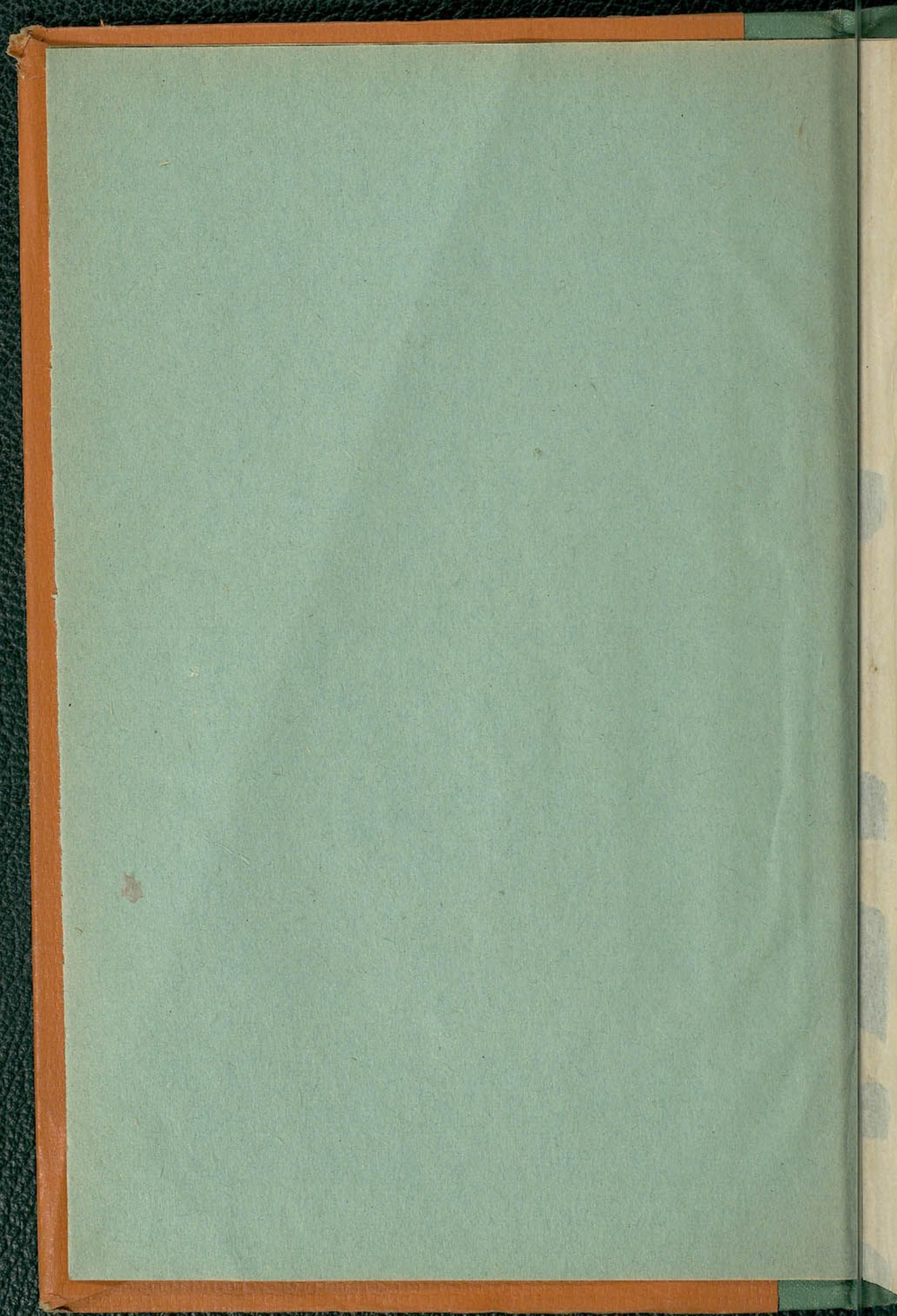


30K-3

58

05

3545





ИЗВЕСТИЯ

АКАДЕМИИ НАУК БССР

СЕРИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ
НАУК

№ 1

ИЗДАТЕЛЬСТВО „НАУКА И ТЕХНИКА“

МИНСК 1966

Ба 3545

26.04.1243

ВЕСЦІ

АКАДЭМІІ НАВУК БССР

30К-3

58

СЕРЫЯ
ФІЗІКА-МАТЭМАТЫЧНЫХ
НАВУК

№ 1

Ба 3545

ВЫДАВЕЦТВА „НАВУКА І ТЭХНІКА“

МІНСК 1966



РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

Ф. И. ФЕДАРАУ (галоўны рэдактар),
Л. Ф. ІЛЬЮШЭНКА (нам. галоўнага рэдактара),
М. М. АЛЯХНОВІЧ, А. П. ВЕРАБ'ЕУ, У. І. КРЫЛОУ,
М. М. СІРАТА, У. Г. СПРЫНДЖУК, Д. А. СУПРУНЕНКА,
Я. І. ФІРСАУ, С. А. ЧУНІХІН

В. В. БОБКОВ, В. И. КРЫЛОВ

**ОБ ОДНОЙ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ СХЕМЕ
МЕТОДА ИНТЕГРАЛЬНЫХ СООТНОШЕНИЙ
ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ**

В работе исследуется четырехточечное разностное уравнение, построенное при решении методом интегральных соотношений линейной задачи Гурса для канонического уравнения второго порядка. Получены оценки погрешности метода, гарантирующие второй порядок сходимости при неограниченном уменьшении шага сетки. Указывается на возможность перенесения результатов на задачу Коши и некоторые другие задачи, а также на возможность обобщения основных результатов на случай простейшего квазилинейного уравнения.

Рассмотрим следующую задачу Гурса:

$$u_{xy} = a(x, y)u_x + b(x, y)u_y + c(x, y)u + f(x, y), \quad (1)$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad u(0, y) = \psi(y), \quad \varphi(0) = \psi(0), \quad (2)$$

$$0 \leq x \leq l', \quad 0 \leq y \leq l''. \quad (3)$$

В прямоугольнике (3) требуется найти решение уравнения (1), удовлетворяющее дополнительным условиям (2).

Из соображений симметрии рассматриваемой задачи выберем шаг $h > 0$ одинаковым для обеих независимых переменных и будем искать решение поставленной задачи в какой-то произвольной точке (x_M, y_N) сеточной области, построенной по данному шагу h . Здесь $x_M = Mh \leq l'$, $y_N = Nh \leq l''$. Исходную задачу Гурса приближенно заменим аппроксимирующей системой линейных алгебраических уравнений, для построения которой воспользуемся идеей метода интегральных соотношений [1].

Проинтегрировав уравнение (1) поперек каждой из N полос, на которые разбивается прямыми $y = y_n = nh$ ($n = 1, 2, \dots, N-1$) прямоугольник $\{0 \leq x \leq x_M, 0 \leq y \leq y_N\}$, и интерполировав искомую функцию u линейно по значениям ее на границах каждой полосы, после несложных преобразований будем иметь [2]:

$$\alpha_{n+1} u'(x, y_{n+1}) - \beta_n u'(x, y_n) = \xi_{n+1} u(x, y_{n+1}) + \eta_n u(x, y_n) + \bar{f}_n + r_n, \quad (4)$$

$$0 \leq x \leq x_M, \quad n = 0, 1, \dots, N-1,$$

где

$$\alpha_{n+1} = \alpha_{n+1}(x) = 1 - h \int_0^1 a(x, y_n + th) t dt; \quad t = \frac{y - y_n}{h};$$

$$\beta_n = \beta_n(x) = 1 + h \int_0^1 a(x, y_n + th)(1-t) dt;$$

$$\xi_{n+1} = \xi_{n+1}(x) = b(x, y_{n+1}) + h \int_0^1 \left[c(x, y_n + th) - \frac{\partial b(x, y_n + th)}{\partial y} \right] t dt;$$

$$\eta_n = \eta_n(x) = -b(x, y_n) + h \int_0^1 \left[c(x, y_n + th) - \frac{\partial b(x, y_n + th)}{\partial y} \right] (1-t) dt;$$

$$f_n = f_n(x) = h \int_0^1 f(x, y_n + th) dt;$$

$$r_n = r_n(x) = \frac{1}{2} h^3 \int_0^1 \left\{ \frac{\partial^2 u(x, y_n + \Theta_1 h)}{\partial y^2} \left[c(x, y_n + th) - \frac{\partial b(x, y_n + th)}{\partial y} \right] + \frac{\partial^3 u(x, y_n + \Theta_1 h)}{\partial x \partial y^2} a(x, y_n + th) \right\} (t-1) t dt, \quad 0 < \Theta_1 < 1$$

(штрихом здесь обозначено дифференцирование по x).

Интегрируем далее каждое из равенств (4) уже поперек каждой из M полос, на которые прямыми $x = x_m = mh$ ($m = 1, 2, \dots, M-1$) разбивается тот же прямоугольник $\{0 \leq x \leq x_M, 0 \leq y \leq y_N\}$:

$$\begin{aligned} & \alpha_{n+1}(x_{m+1}) u(x_{m+1}, y_{n+1}) - \alpha_{n+1}(x_m) u(x_m, y_{n+1}) - \\ & - \beta_n(x_{m+1}) u(x_{m+1}, y_n) + \beta_n(x_m) u(x_m, y_n) = \\ & = \int_{x_m}^{x_{m+1}} \{ [\alpha'_{n+1}(x) + \xi_{n+1}(x)] u(x, y_{n+1}) - \\ & - [\beta'_n(x) - \eta_n(x)] u(x, y_n) + f_n(x) + r_n(x) \} dx, \\ & m = 0, 1, \dots, M-1; n = 0, 1, \dots, N-1. \end{aligned}$$

На отрезке $[x_m, x_{m+1}]$ интерполируем функции $u(x, y_n)$ и $u(x, y_{n+1})$ линейно по значениям их на границах этого отрезка

$$u(x, y_i) = u(x_{m+1}, y_i) \frac{x - x_m}{h} + u(x_m, y_i) \frac{x_{m+1} - x}{h} + \\ + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u(x_m^{(i)}, y_i)}{\partial x^2} (x - x_m)(x - x_{m+1}),$$

$$i = n, n+1; x_m^{(n)} = x_m + \Theta_2 h, x_m^{(n+1)} = x_m + \Theta_3 h, \\ 0 < \Theta_2, \Theta_3 < 1.$$

Заменяя в последнем интеграле функции $u(x, y_i)$, $i = n, n+1$ полученными для них выражениями, будем иметь:

$$\begin{aligned} & \alpha_{m+1, n+1} u(x_{m+1}, y_{n+1}) - \alpha_{mn+1}^* u(x_m, y_{n+1}) - \\ & - \beta_{m+1, n} u(x_{m+1}, y_n) + \beta_{mn}^* u(x_m, y_n) = f_{mn} + r_{mn}, \end{aligned} \quad (5)$$

$$m = 0, 1, \dots, M-1; n = 0, 1, \dots, N-1,$$

где

$$\alpha_{m+1, n+1} = \alpha_{n+1}(x_{m+1}) - h \int_0^1 [\alpha'_{n+1}(x_m + zh) + \xi_{n+1}(x_m + zh)] z dz, \quad z = \frac{x - x_m}{h};$$

$$\alpha_{mn+1}^* = \alpha_{n+1}(x_m) + h \int_0^1 [\alpha'_{n+1}(x_m + zh) + \xi_{n+1}(x_m + zh)] (1 - z) dz;$$

$$\beta_{m+1, n} = \beta_n(x_{m+1}) - h \int_0^1 [\beta'_n(x_m + zh) - \eta_n(x_m + zh)] z dz;$$

$$\beta_{mn}^* = \beta_n(x_m) + h \int_0^1 [\beta'_n(x_m + zh) - \eta_n(x_m + zh)] (1 - z) dz;$$

$$f_{mn} = h \int_0^1 f_n(x_m + zh) dz = h^2 \int_0^1 \left[\int_0^1 f(x_m + zh, y_n + th) dt \right] dz;$$

$$r_{mn} = h \int_0^1 r_n(x_m + zh) dz +$$

$$+ \frac{1}{2} h^3 \int_0^1 \left\{ [\alpha'_{n+1}(x_m + zh) + \xi_{n+1}(x_m + zh)] \frac{\partial^2 u(x_m + \Theta_3 h, y_{n+1})}{\partial x^2} - \right. \\ \left. - [\beta'_n(x_m + zh) - \eta_n(x_m + zh)] \frac{\partial^2 u(x_m + \Theta_2 h, y_n)}{\partial x^2} \right\} (z - 1) z dz = \\ = h \int_0^1 r_n(x_m + zh) dz + \rho_{mn}.$$

Заметим, что величину ρ_{mn} , воспользовавшись теоремой Лагранжа о конечном приращении, можно переписать в следующем виде:

$$\rho_{mn} = \frac{1}{2} h^3 \int_0^1 \left\{ [\alpha'_{n+1}(x_m + zh) + \xi_{n+1}(x_m + zh)] \frac{\partial^2 u(x_m + \Theta_3 h, y_{n+1})}{\partial x^2} - \right. \\ \left. - [\beta'_n(x_m + zh) - \eta_n(x_m + zh)] \frac{\partial^2 u(x_m + \Theta_2 h, y_n)}{\partial x^2} \right\} (z - 1) z dz = \\ = \frac{1}{2} h^3 \int_0^1 \left\{ \left[-h \int_0^1 \frac{\partial a(x_m + zh, y_n + th)}{\partial x} t dt + \right. \right. \\ \left. \left. + b(x_m + zh, y_n) + h \frac{\partial b(x_m + zh, y_n + \Theta_4 h)}{\partial y} + \right. \right. \\ \left. \left. + h \int_0^1 \left[c(x_m + zh, y_n + th) - \frac{\partial b(x_m + zh, y_n + th)}{\partial y} \right] t dt \right] \times \right. \\ \left. \times \left[\frac{\partial^2 u(x_m + \Theta_2 h, y_n)}{\partial x^2} + \right. \right.$$

$$\begin{aligned}
& + h \frac{\partial^3 u(x_m + \Theta_3 h, y_n + \Theta_5 h)}{\partial x^2 \partial y} + h(\Theta_3 - \Theta_2) \frac{\partial^3 u(x_m + (\Theta_2 + \Theta_6)h, y_n)}{\partial x^3} \Big] - \\
& - \left[h \int_0^1 \frac{\partial a(x_m + zh, y_n + th)}{\partial x} (1-t) dt + b(x_m + zh, y_n) - \right. \\
& - h \int_0^1 \left[c(x_m + zh, y_n + th) - \frac{\partial b(x_m + zh, y_n + th)}{\partial y} \right] (1-t) dt \Big] \times \\
& \times \frac{\partial^2 u(x_m + \Theta_2 h, y_n)}{\partial x^2} \Big\} (z-1) dz = \frac{1}{2} h^4 \int_0^1 \left\{ \left[\int_0^1 \left[c(x_m + zh, y_n + th) - \right. \right. \right. \\
& - \frac{\partial a(x_m + zh, y_n + th)}{\partial x} - \frac{\partial b(x_m + zh, y_n + th)}{\partial y} \Big] dt + \\
& + \frac{\partial b(x_m + zh, y_n + \Theta_4 h)}{\partial y} \Big] \frac{\partial^2 u(x_m + \Theta_2 h, y_n)}{\partial x^2} + \\
& + \left[\frac{\partial^3 u(x_m + \Theta_3 h, y_n + \Theta_5 h)}{\partial x^2 \partial y} + (\Theta_3 - \Theta_2) \times \right. \\
& \times \frac{\partial^3 u(x_m + (\Theta_2 + \Theta_6)h, y_n)}{\partial x^3} \Big] b(x_m + zh, y_n) + \\
& + h \left[\int_0^1 \left[c(x_m + zh, y_n + th) - \frac{\partial a(x_m + zh, y_n + th)}{\partial x} - \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - \frac{\partial b(x_m + zh, y_n + th)}{\partial y} \right] t dt + \right. \\
& + \frac{\partial b(x_m + zh, y_n + \Theta_4 h)}{\partial y} \Big] \left[\frac{\partial^3 u(x_m + \Theta_3 h, y_n + \Theta_5 h)}{\partial x^2 \partial y} + (\Theta_3 - \Theta_2) \times \right. \\
& \times \left. \left. \frac{\partial^3 u(x_m + (\Theta_2 + \Theta_6)h, y_n)}{\partial x^3} \right] \right\} (z-1) dz = \frac{1}{2} h^4 R_{mn}, \\
& 0 < \Theta_4, \Theta_5, \Theta_6 < 1.
\end{aligned}$$

Таким образом, для погрешности аппроксимации r_{mn} можно дать следующее представление:

$$\begin{aligned}
r_{mn} = & \frac{1}{2} h^4 \left\{ \int_0^1 \left[\int_0^1 \left\{ \frac{\partial^2 u(x_m + zh, y_n + \Theta_1 h)}{\partial y^2} \times \right. \right. \right. \\
& \times \left[c(x_m + zh, y_n + th) - \frac{\partial b(x_m + zh, y_n + th)}{\partial y} \right] + \\
& + \left. \left. \frac{\partial^3 u(x_m + zh, y_n + \Theta_1 h)}{\partial x \partial y^2} a(x_m + zh, y_n + th) \right\} (t-1) t dt \right] dz + R_{mn} \Big\}. \quad (6)
\end{aligned}$$

Пренебрегая величиной r_{mn} в равенстве (5) и учитывая условия (2), получаем следующую систему линейных алгебраических уравнений, аппроксимирующую исходную задачу Гурса в прямоугольнике $\{0 \leq x \leq x_M, 0 \leq y \leq y_N\}$ с погрешностью порядка $O(h^4)$:

$$\left. \begin{aligned} \alpha_{m+1, n+1} u_{m+1, n+1} - \alpha_{mn+1}^* u_{mn+1} - \beta_{m+1n} u_{m+1n} + \beta_{mn}^* u_{mn} &= f_{mn} \\ u_{m+10} = \varphi[(m+1)h], u_{0n+1} = \psi[(n+1)h], u_{00} = \varphi(0) = \psi(0) \\ m = 0, 1, \dots, M-1; n = 0, 1, \dots, N-1 \end{aligned} \right\}. \quad (7)$$

Здесь через u_{ij} обозначено приближенное решение поставленной задачи Гурса в точке (x_i, y_j) сеточной области.

Предлагаемая вычислительная схема является явной и позволяет последовательно находить приближенное решение поставленной задачи по строкам либо по столбцам сетки, при этом на каждом шаге счета будут связаны лишь четыре соседние точки сетки:

$$\begin{aligned} u_{m+1, n+1} &= \frac{1}{\alpha_{m+1, n+1}} (\alpha_{mn+1}^* u_{mn+1} + \beta_{m+1n} u_{m+1n} - \beta_{mn}^* u_{mn} + f_{mn}), \\ u_{m+1, 0} &= \varphi[(m+1)h], u_{0, n+1} = \psi[(n+1)h], u_{00} = \varphi(0) = \psi(0), \\ m &= 0, 1, \dots, M-1; n = 0, 1, \dots, N-1. \end{aligned}$$

Так как

$$\begin{aligned} \alpha_{m+1, n+1} &= 1 - h \left\{ \int_0^1 a(x_{m+1}, y_n + th) dt + \right. \\ &\quad \left. + \int_0^1 [\alpha'_{n+1}(x_m + zh) + \xi_{n+1}(x_m + zh)] z dz \right\}, \end{aligned} \quad (8)$$

то всегда можно считать выполненным условие $\alpha_{m+1, n+1} \neq 0$, если взять шаг $h > 0$ достаточно малым (конкретные ограничения на шаг будут приведены ниже).

Покажем, что решение аппроксимирующей задачи при $h \rightarrow 0$ сходится к точному решению исходной задачи Гурса со скоростью порядка $O(h^2)$, и дадим оценку погрешности $\gamma_{mn} = u(x_m, y_n) - u_{mn}$ предлагаемого метода.

Вычитая почленно из равенств (5) и (2) соответственно равенства (7), получаем для погрешности метода следующую систему линейных алгебраических уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \alpha_{m+1, n+1} \gamma_{m+1, n+1} - \alpha_{mn+1}^* \gamma_{mn+1} - \beta_{m+1n} \gamma_{m+1n} + \beta_{mn}^* \gamma_{mn} &= r_{mn} \\ \gamma_{m+1, 0} = \gamma_{0, n+1} = \gamma_{00} = 0, m = 0, 1, \dots, M-1; n = 0, 1, \dots, N-1 \end{aligned} \right\}. \quad (9)$$

Записав полученную систему в виде:

$$\gamma_{m+1, n+1} = \frac{1}{\alpha_{m+1, n+1}} (\alpha_{mn+1}^* \gamma_{mn+1} + \beta_{m+1n} \gamma_{m+1n} - \beta_{mn}^* \gamma_{mn} + r_{mn}),$$

$$\gamma_{m+1, 0} = \gamma_{0, n+1} = \gamma_{00} = 0, \quad m = 0, 1, \dots, M-1; n = 0, 1, \dots, N-1,$$

последовательно находим:

$$\gamma_{1n+1} = \frac{1}{\alpha_{1n+1}} (\beta_{1n} \gamma_{1n} + r_{0n}),$$

$$\begin{aligned}
\gamma_{2n+1} &= \frac{1}{\alpha_{2n+1}} (\alpha_{1n+1}^* \gamma_{1n+1} + \beta_{2n} \gamma_{2n} - \beta_{1n}^* \gamma_{1n} + r_{1n}) = \\
&= \frac{1}{\alpha_{2n+1}} \left[\beta_{2n} \gamma_{2n} + \frac{\alpha_{1n+1}^*}{\alpha_{1n+1}} (\beta_{1n} \gamma_{1n} + r_{0n}) - \beta_{1n}^* \gamma_{1n} + r_{1n} \right] = \\
&= \frac{1}{\alpha_{2n+1}} \left[\beta_{2n} \gamma_{2n} + \frac{\alpha_{1n+1}^* \beta_{1n} - \alpha_{1n+1} \beta_{1n}^*}{\alpha_{1n+1}} \gamma_{1n} + \frac{\alpha_{1n+1}^*}{\alpha_{1n+1}} r_{0n} + r_{1n} \right], \\
\gamma_{3n+1} &= \frac{1}{\alpha_{3n+1}} \left[\beta_{3n} \gamma_{3n} + \frac{\alpha_{2n+1}^*}{\alpha_{2n+1}} \frac{\alpha_{1n+1}^* \beta_{1n} - \alpha_{1n+1} \beta_{1n}^*}{\alpha_{1n+1}} \gamma_{1n} + \right. \\
&+ \left. \frac{\alpha_{2n+1}^* \beta_{2n} - \alpha_{2n+1} \beta_{2n}^*}{\alpha_{2n+1}} \gamma_{2n} + \frac{\alpha_{2n+1}^*}{\alpha_{2n+1}} \frac{\alpha_{1n+1}^*}{\alpha_{1n+1}} r_{0n} + \frac{\alpha_{2n+1}^*}{\alpha_{2n+1}} r_{1n} + r_{2n} \right], \\
\gamma_{4n+1} &= \frac{1}{\alpha_{4n+1}} \left[\beta_{4n} \gamma_{4n} + \frac{\alpha_{3n+1}^*}{\alpha_{3n+1}} \frac{\alpha_{2n+1}^*}{\alpha_{2n+1}} \frac{\alpha_{1n+1}^* \beta_{1n} - \alpha_{1n+1} \beta_{1n}^*}{\alpha_{1n+1}} \gamma_{1n} + \right. \\
&+ \left. \frac{\alpha_{3n+1}^*}{\alpha_{3n+1}} \frac{\alpha_{2n+1}^* \beta_{2n} - \alpha_{2n+1} \beta_{2n}^*}{\alpha_{2n+1}} \gamma_{2n} + \frac{\alpha_{3n+1}^* \beta_{3n} - \alpha_{3n+1} \beta_{3n}^*}{\alpha_{3n+1}} \gamma_{3n} + \right. \\
&+ \left. \frac{\alpha_{3n+1}^*}{\alpha_{3n+1}} \frac{\alpha_{2n+1}^*}{\alpha_{2n+1}} \frac{\alpha_{1n+1}^*}{\alpha_{1n+1}} r_{0n} + \frac{\alpha_{3n+1}^*}{\alpha_{3n+1}} \frac{\alpha_{2n+1}^*}{\alpha_{2n+1}} r_{1n} + \frac{\alpha_{3n+1}^*}{\alpha_{3n+1}} r_{2n} + r_{3n} \right], \\
&\dots \dots \dots \\
\gamma_{Mn+1} &= \frac{1}{\alpha_{Mn+1}} \left(\beta_{Mn} \gamma_{Mn} + \sum_{i=1}^{M-1} \xi_{in} \gamma_{in} \prod_{j=i+1}^{M-1} \lambda_{jn+1} + \sum_{i=0}^{M-1} r_{in} \prod_{j=i+1}^{M-1} \lambda_{jn+1} \right), \quad (10)
\end{aligned}$$

$$n = 0, 1, \dots, N-1,$$

где

$$\xi_{in} = \frac{\alpha_{in+1}^* \beta_{in} - \alpha_{in+1} \beta_{in}^*}{\alpha_{in+1}}, \quad \lambda_{jn+1} = \frac{\alpha_{jn+1}^*}{\alpha_{jn+1}}.$$

Прежде чем приступить к получению интересующей нас оценки погрешности γ_{MN} , из которой непосредственно будет следовать и утверждаемая сходимость метода со скоростью порядка $O(h^2)$, введем некоторые обозначения, при этом для упрощения записи будем опускать часть индексов и указания на пределы, в которых берутся экстремальные значения величин. Так, например, будем обозначать

$$A = A_{MN} = \max_{0 < x < x_M} \max_{0 < y < y_N} |a(x, y)| = \max_{x, y} |a(x, y)|$$

и аналогично:

$$B = \max_{x, y} |b(x, y)|, \quad C = \max_{x, y} |c(x, y)|,$$

$$A_x = \max_{x, y} \left| \frac{\partial a(x, y)}{\partial x} \right|, \quad B_y = \max_{x, y} \left| \frac{\partial b(x, y)}{\partial y} \right|, \quad \alpha = \min_{i, j} |\alpha_{ij}|,$$

$$\beta = \max_{i, j} |\beta_{ij}|, \quad \xi = \max_{i, j} |\xi_{ij}|, \quad r = \max_{i, j} |r_{ij}|,$$

$$|\gamma_{ij}| = \Gamma_{ij}, \quad \lambda = \max_j \left| \prod_{i=1}^{M-1} \lambda_{ij} \right|, \quad M_{pq} = \max_{x, y} \left| \frac{\partial^{p+q} u(x, y)}{\partial x^p \partial y^q} \right|,$$

$$p, q = 0, 1, 2, 3.$$

Из равенств (10) непосредственно следуют рекуррентные оценки

$$\Gamma_{Mn+1} \leq \frac{1}{\alpha} \left(\beta \Gamma_{Mn} + \xi \lambda \sum_{i=1}^{M-1} \Gamma_{in} + M \lambda r \right), \quad n = 0, 1, \dots, N-1,$$

из которых с учетом (9) последовательно находим:

$$\begin{aligned} \Gamma_{M0} &= 0, \quad \Gamma_{M1} \leq \frac{1}{\alpha} M \lambda r = R, \\ \Gamma_{M2} &\leq \frac{1}{\alpha} \beta R + \frac{1}{\alpha} \xi \lambda (M-1) R + R = \\ &= R \left[\frac{\beta + (M-1) \xi \lambda}{\alpha} + 1 \right] = R(Q+1), \\ \Gamma_{M3} &\leq \frac{1}{\alpha} \beta R(Q+1) + \frac{1}{\alpha} \xi \lambda (M-1) R(Q+1) + R = R(Q^2 + Q + 1), \\ \Gamma_{M4} &\leq R(Q^3 + Q^2 + Q + 1), \\ &\dots \dots \dots \\ \Gamma_{MN} &\leq R(Q^{N-1} + Q^{N-2} + \dots + Q + 1). \end{aligned} \tag{11}$$

Дадим оценки входящих в последнее неравенство величин

$$R = \frac{1}{\alpha} M \lambda r \quad \text{и} \quad Q = \frac{\beta + (M-1) \xi \lambda}{\alpha}.$$

Оценку снизу для α легко получить из равенства (8), если взять шаг $h > 0$ достаточно малым, например

$$0 < h < 2 \left[A + B + \frac{h}{2} (C + A_x + B_y) \right]^{-1}.$$

Тогда будем иметь

$$\alpha \geq 1 - \frac{h}{2} \left[A + B + \frac{h}{2} (C + A_x + B_y) \right] = 1 - hS > 0.$$

Равенство (6) позволяет непосредственно получить следующую оценку для величины r :

$$\begin{aligned} r \leq & \frac{h^4}{12} \left[AM_{12} + B(M_{21} + M_{30}) + C(M_{20} + M_{02}) + \right. \\ & \left. + A_x M_{20} + B_y (2M_{20} + M_{02}) + \frac{h}{2} (C + A_x + 3B_y) (M_{21} + M_{30}) \right] = h^4 T. \end{aligned}$$

Точно так же из определений β и λ получаем интересующие нас оценки сверху для этих величин:

$$\beta \leq 1 + hS, \quad \lambda \leq \left(\frac{1 + hS}{1 - hS} \right)^{M-1} \leq e^{2Sx_{M-1}}.$$

Прежде чем получить оценку сверху для величины

$$\xi = \max_{ij} |\xi_{ij}|,$$

преобразуем немного выражение ξ_{ij} :

$$\begin{aligned} \xi_{ij} &= \frac{\alpha_{ij+1}^* \beta_{ij} - \alpha_{ij+1} \beta_{ij}^*}{\alpha_{ij+1}} = \\ &= \frac{1}{\alpha_{ij+1}} \left\{ \alpha_{j+1}(x_i) \beta_j(x_i) - h \int_0^1 \alpha_{j+1}(x_i) \beta_j'(x_{i-1} + zh) dz + \right. \\ &+ h \int_0^1 \alpha_{j+1}(x_i) \eta_j(x_{i-1} + zh) dz + h \int_0^1 \beta_j(x_i) \alpha_{j+1}'(x_i + zh) (1-z) dz + \\ &+ h \int_0^1 \beta_j(x_i) \xi_{j+1}(x_i + zh) (1-z) dz - \alpha_{j+1}(x_i) \beta_j(x_i) - \\ &- h \int_0^1 \alpha_{j+1}(x_i) \beta_j'(x_i + zh) (1-z) dz + h \int_0^1 \alpha_{j+1}(x_i) \eta_j(x_i + zh) (1-z) dz + \\ &+ h \int_0^1 \beta_j(x_i) \alpha_{j+1}'(x_{i-1} + zh) dz + h \int_0^1 \beta_j(x_i) \xi_{j+1}(x_{i-1} + zh) dz \left. \right\} = \\ &= \frac{h^2}{\alpha_{ij+1}} \left\{ \int_0^1 \left[\alpha_{j+1}(x_i) \int_0^1 \frac{\partial a(x_i + zh, y_j + th)}{\partial x} (1-t) dt + \right. \right. \\ &+ \left. \beta_j(x_i) \int_0^1 \frac{\partial a(x_i + zh, y_j + th)}{\partial x} t dt \right] (z-1) dz - \\ &- \int_0^1 \left[\alpha_{j+1}(x_i) \int_0^1 \frac{\partial a(x_{i-1} + zh, y_j + th)}{\partial x} (1-t) dt + \right. \\ &+ \left. \beta_j(x_i) \int_0^1 \frac{\partial a(x_{i-1} + zh, y_j + th)}{\partial x} t dt \right] dz + \\ &+ \int_0^1 \left[\alpha_{j+1}(x_i) \int_0^1 \left[c(x_{i-1} + zh, y_j + th) - \right. \right. \\ &\left. \left. - \frac{\partial b(x_{i-1} + zh, y_j + th)}{\partial y} \right] (1-t) dt + \right. \\ &+ \left. \beta_j(x_i) \int_0^1 \left[c(x_{i-1} + zh, y_j + th) - \frac{\partial b(x_{i-1} + zh, y_j + th)}{\partial y} \right] t dt \right] dz + \\ &+ \int_0^1 \left[\alpha_{j+1}(x_i) \int_0^1 \left[c(x_i + zh, y_j + th) - \frac{\partial b(x_i + zh, y_j + th)}{\partial y} \right] (1-t) dt + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \beta_j(x_i) \int_0^1 \left[c(x_i + zh, y_j + th) - \frac{\partial b(x_i + zh, y_j + th)}{\partial y} \right] t dt \Big] (1-z) dz + \\
& \quad + \int_0^1 \left[b(x_{i-1} + zh, y_j) \int_0^1 a(x_i, y_j + th) t dt + \right. \\
& \quad + b(x_{i-1} + zh, y_{j+1}) \int_0^1 a(x_i, y_j + th) (1-t) dt \Big] z dz + \\
& \quad + \int_0^1 \left[b(x_i + zh, y_j) \int_0^1 a(x_i, y_j + th) t dt + \right. \\
& \quad + b(x_i + zh, y_{j+1}) \int_0^1 a(x_i, y_j + th) (1-t) dt \Big] (1-z) dz + \\
& \quad + \int_0^1 \frac{\partial b(x_{i-1} + zh, y_j + \Theta_7 h)}{\partial y} z dz + \int_0^1 \frac{\partial b(x_i + zh, y_j + \Theta_8 h)}{\partial y} (1-z) dz \Big\}.
\end{aligned}$$

Здесь $0 < \Theta_7, \Theta_8 < 1$, при этом для получения двух последних слагаемых была применена теорема Лагранжа о конечном приращении.

Теперь можно записать непосредственно и оценку для ξ :

$$\xi \leq \frac{h^2}{1-hS} \left[AB + \left(1 + \frac{h}{2} A \right) (C + A_x + B_y) + B_y \right] = h^2 D.$$

Таким образом, для R и Q получаем следующие оценки:

$$\begin{aligned}
R & \leq h^3 \frac{x_M T e^{2Sx_{M-1}}}{1-hS}, \\
Q & \leq \frac{1 + h(S + x_{M-1} D e^{2Sx_{M-1}})}{1-hS}.
\end{aligned}$$

Это позволяет получить из неравенства (11) интересующую нас оценку погрешности метода:

$$\begin{aligned}
\Gamma_{MN} & \leq R(Q^{N-1} + Q^{N-2} + \dots + Q + 1) \leq \\
& \leq h^2 \frac{x_M \cdot y_N \cdot T \cdot e^{2Sx_{M-1}}}{1-hS} \left[\frac{1 + h(S + x_{M-1} D e^{2Sx_{M-1}})}{1-hS} \right]^{N-1} \leq \\
& \leq h^2 \frac{x_M \cdot y_N \cdot T}{1-hS} \cdot e^{2S(x_{M-1} + y_{N-1}) + x_{M-1} \cdot y_{N-1} \cdot D \cdot e^{2Sx_{M-1}}} = O(h^2).
\end{aligned}$$

Из только что полученной оценки погрешности предлагаемого метода непосредственно следует также и его сходимость (при $h \rightarrow 0$) со скоростью порядка $O(h^2)$.

Заметим в заключение, что аналогичные результаты могут быть подобным же образом получены и в случае более общего уравнения

$$u_{xy} = a(x, y) u_x + b(x, y) u_y + f(x, y, u),$$

если при составлении задачи для погрешности метода воспользоваться теоремой Лагранжа о конечном приращении по аргументу u , при этом подобным же способом можно решать не только задачу Гурса, но также и некоторые другие задачи, например задачу Коши или первую либо вторую смешанные [3] задачи.

Отметим также, что при построении подобных четырехточечных разностных уравнений методом сеток с заменой производных, например, соответствующими разностными отношениями „вперед“ можно надеяться получить аналогичным способом оценки погрешности, гарантирующие лишь первый порядок сходимости метода.

ЛИТЕРАТУРА

1. Дородницын А. А. Тр. III Всес. матем. съезда, 1956 г., 3, 447—453. Изд. АН СССР, 1958.
2. Бобков В. В., Крылов В. И. Дифференциальные уравнения, 1, № 2, 230—243, 1965.
3. Березин И. С., Жидков Н. П. Методы вычислений, 2. Физматгиз, 1959.

Поступило в редакцию 26.XI 1965

М. Б. АКСЕНЬ, А. Х. ТУРЕЦКИЙ

НАИЛУЧШИЕ КВАДРАТУРНЫЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ ФУНКЦИЙ

В настоящей статье будем заниматься задачами, общая постановка которых дана в работах [1, 2].

§ 1. Обозначим через $W_{L_q}^{(r)}(M; 0, 1)$, где r — натуральное число, $1 \leq q \leq \infty$, класс функций, имеющих на отрезке $[0, 1]$ абсолютно непрерывную производную порядка $r-1$ и при $1 \leq q < \infty$ производную $f^{(r)}(x)$ порядка r , удовлетворяющую неравенству

$$\left(\int_0^1 |f^{(r)}(x)|^q dx \right)^{\frac{1}{q}} \leq M,$$

а при $q = \infty$ кусочно-непрерывную производную $f^{(r)}(x)$, удовлетворяющую на данном отрезке неравенству

$$|f^{(r)}(x)| \leq M.$$

Через $W_{0L_q}^{(r)}(M; 0, 1)$ будем обозначать класс функций, который состоит из всех функций класса $W_{L_q}^{(r)}(M; 0, 1)$, удовлетворяющих дополнительному условию

$$f(0) = f'(0) = \dots = f^{(r-1)}(0) = 0.$$

В этом параграфе будем предполагать, что $f(x) \in W_{0L_q}^{(r)}(M; 0, 1)$. Для таких функций будем рассматривать квадратурные формулы

$$\int_0^1 f dx \approx \frac{1}{r!} \sum_{k=0}^{m-1} \sum_{l=0}^{r-2} \lambda_k^{(l)} (r-l-1)! f^{(l)}(x_k) = L(f), \quad (1.1)$$

определяемые заданными узлами x_k ($0 \leq x_0 < x_1 < \dots < x_{m-1} \leq 1$) и коэффициентами $\lambda_k^{(l)}$. Квадратурные формулы такого вида рассматривались в [1, 2].

Для каждой квадратурной формулы (1.1) имеет место следующая точная оценка:

$$E_{m0L_q}^{(r)} = \sup_{f \in W_{0L_q}^{(r)}(M; 0, 1)} \left| \int_0^1 f dx - L(f) \right| = M \|F_r(t)\|_{L_p} \quad (1.2)$$

$$\left(1 \leq q \leq \infty, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \right),$$

где

$$F_r(t) = \frac{1}{r!} \left[(1-t)^r - \sum_{k=0}^{m-1} \sum_{l=0}^{r-2} \lambda_k^{(l)} K_{r-l}(x_k - t) \right], \quad (1.3)$$

$$K_s(u) = \begin{cases} u^{s-1} & \text{при } u \geq 0, \\ 0 & \text{при } u < 0, \end{cases} \quad (1.4)$$

$$\|F_r(t)\|_{L_p} = \begin{cases} \left(\int_0^1 |F_r(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} & \text{при } 1 \leq p < \infty, \\ \max_{0 < t < 1} |F_r(t)| & \text{при } p = \infty. \end{cases}$$

В справедливости оценки (1.2) можно убедиться, если учесть, что для всякой функции $f(x) \in W_{0L_q}^{(r)}(M; 0, 1)$ имеет место равенство [2], а затем воспользоваться рассуждениями, напечатанными петитом в § 4 этой же работы.

Рассмотрим следующую экстремальную задачу.

Среди всевозможных квадратурных формул (1.1), где m, r — заданные натуральные числа, найти наилучшую для класса $W_{0L_q}^{(r)}(M; 0, 1)$, т. е. найти такую квадратурную формулу, для которой величина (1.2) имеет наименьшее значение.

Эту задачу будем решать при произвольном четном r , $1 < q \leq \infty$.

Положим

$$1-t = u, \quad u_k = 1 - x_{m-k-1}, \quad \lambda_k^{(l)} = \mu_{m-k-1}^{(r-l)}. \quad (1.5)$$

Тогда величина (1.2) запишется в виде

$$E_{m0L_q}^{(r)} = \frac{M}{r!} \left(\int_0^1 \left| u^r - \sum_{k=0}^{m-1} \sum_{l=1}^{r-1} \mu_k^{(l)} K_{l+1}(u - u_k) \right|^p du \right)^{\frac{1}{p}} \quad (1.6)$$

($1 \leq p < \infty$).

Поставленная выше экстремальная задача сводится к нахождению при фиксированных m и r наименьшего значения интеграла, стоящего в правой части равенства (1.6), если варьировать числами u_k ($0 \leq u_0 < u_1 < \dots < u_{m-1} \leq 1$) и $\mu_k^{(l)}$.

Дадим этой задаче несколько иную формулировку.

Обратим внимание на двойную сумму, стоящую под знаком исследуемого интеграла. Положим

$$\varphi_m^{(r)}(u) = \sum_{k=0}^{m-1} \sum_{l=1}^{r-1} \mu_k^{(l)} K_{l+1}(u - u_k) \quad (0 \leq u \leq 1). \quad (1.7)$$

В нашей задаче функции $\varphi_m^{(r)}(u)$ рассматриваются для всевозможных систем чисел u_k ($0 \leq u_0 < u_1 < \dots < u_{m-1} \leq 1$) и $\mu_k^{(l)}$. Заметим, что для каждой такой системы чисел u_k и $\mu_k^{(l)}$ соответствующая функция $\varphi_m^{(r)}(u)$ обладает следующими свойствами: она непрерывна на отрезке $[0, 1]$, на отрезке $[0, u_0]$ равна тождественно нулю и на каждом из отрезков $[u_k, u_{k+1}]$ ($k=0, 1, \dots, m-1$; $u_m = 1$) является многочленом степени $\leq r-1$. В справедливости этих свойств нетрудно убедиться, если воспользоваться равенством (1.4).

Отметим, что перечисленные выше свойства полностью характеризуют рассматриваемые функции $\varphi_m^{(r)}(u)$: каждая наперед заданная функция, обладающая этими свойствами, однозначно определяет такую систему чисел u_k ($0 \leq u_0 < u_1 < \dots < u_{m-1} \leq 1$) и $\mu_k^{(l)}$, для которой соответствующая функция $\varphi_m^{(r)}(u)$ равна тождественно данной функции. Числа u_k определяются данной функцией непосредственно. Числа $\mu_k^{(l)}$ можно найти, разлагая данную функцию и функцию (1.7) по степеням $u - u_k$ на отрезках $[u_k, u_{k+1}]$ ($k = 0, 1, \dots, m-1$), а затем сравнивая полученные разложения.

Из сказанного следует, что наша экстремальная задача сводится к нахождению при фиксированных m и r наименьшего значения интеграла, стоящего в правой части равенства (1.6), если варьировать функциями $\varphi_m^{(r)}(u)$, обладающими перечисленными выше свойствами.

Эту задачу будем решать следующим образом.

Рассмотрим функции $\bar{\varphi}_m^{(r)}(u)$, которые обладают такими же свойствами, как и функции $\varphi_m^{(r)}(u)$, однако могут иметь разрывы первого рода в точках u_0, u_1, \dots, u_{m-1} . Отвлекаясь от нашей экстремальной задачи, будем искать наименьшее значение интеграла

$$\int_0^1 |u^r - \bar{\varphi}_m^{(r)}(u)|^p du \quad (1 \leq p < \infty) \quad (1.8)$$

среди всевозможных функций $\bar{\varphi}_m^{(r)}(u)$. Но если экстремальная функция окажется непрерывной на отрезке $[0, 1]$, то наименьшее значение этого интеграла будет найдено также и среди непрерывных функций $\varphi_m^{(r)}(u)$, т. е. наша задача о наилучшей квадратурной формуле будет решена. Ниже увидим, что это будет именно так, если r четное, как мы с самого начала предположили.

Итак, будем искать наименьшее значение интеграла (1.8) среди всевозможных функций $\bar{\varphi}_m^{(r)}(u)$.

Вначале заметим, что интеграл

$$\int_{a-h}^{a+h} |x^r - P_{r-1}(x)|^p dx,$$

где $P_{r-1}(x)$ — произвольный многочлен степени $r-1$, достигает своего наименьшего значения для единственного многочлена $P_{r-1}^*(x)$, для которого

$$h^r R_{r,p} \left(\frac{x-a}{h} \right) = x^r - P_{r-1}^*(x),$$

где $R_{r,p}(x)$ — многочлен степени r с коэффициентом при x^r , равным единице, наименее уклоняющийся от нуля на отрезке $[-1, 1]$ в метрике L_p . Известно, что такой многочлен $R_{r,p}(x)$ существует и единствен.

Из сказанного выше следует, что при закрепленных u_0, u_1, \dots, u_{m-1} интеграл (1.8) достигает своего наименьшего значения для единственной функции (эта функция в общем случае не является непрерывной на отрезке $[0, 1]$)

$$\bar{\varphi}_{m*}^{(r)}(u) = \begin{cases} 0 & \text{при } 0 \leq u \leq u_0, \\ u^r - \left(\frac{u_{k+1} - u_k}{2} \right)^r R_{r,p} \left[\frac{2(u - u'_k)}{u_{k+1} - u_k} \right] & \text{при } u_k < u \leq u_{k+1} \end{cases} \quad (1.9)$$

$$(k = 0, 1, \dots, m-1; u_m = 1),$$

где

$$u'_k = \frac{u_k + u_{k+1}}{2},$$

причем

$$\begin{aligned} \int_0^1 |u^r - \bar{\varphi}_{m*}^{(r)}(u)|^p du &= \int_0^{u_0} u^{rp} du + \sum_{k=0}^{m-1} \int_{u_k}^{u_{k+1}} \left(\frac{u_{k+1} - u_k}{2} \right)^{rp} \times \\ &\times \left| R_{r,p} \left[\frac{2(u - u'_k)}{u_{k+1} - u_k} \right] \right|^p du = \\ &= \frac{u_0^{r(p+1)}}{rp+1} + \sum_{k=0}^{m-1} \left(\frac{u_{k+1} - u_k}{2} \right)^{r(p+1)} \int_{-1}^1 |R_{r,p}(x)|^p dx = \\ &= \frac{u_0^{r(p+1)}}{rp+1} + \frac{[R_{r,p}(1)]^p}{(rp+1)2^{rp}} \sum_{k=0}^{m-1} (u_{k+1} - u_k)^{r(p+1)}. \end{aligned} \quad (1.10)$$

Выполняя тождественные преобразования, мы воспользовались равенством

$$\int_{-1}^1 |R_{r,p}(x)|^p dx = \frac{2[R_{r,p}(1)]^p}{rp+1}, \quad (1.11)$$

доказательство которого можно провести следующим образом.

Так как

$$R_{r,p}(x) = x^r + a_{r-1}x^{r-1} + \dots + a_0$$

есть такой многочлен, для которого интеграл

$$\int_{-1}^1 |P_r(x)|^p dx$$

достигает своего наименьшего значения среди произвольных многочленов $P_r(x)$ степени r с коэффициентом при x^r , равным единице, то, используя необходимые условия экстремума, получаем

$$\int_{-1}^1 |R_{r,p}(x)|^{p-1} x^k \operatorname{sign} R_{r,p}(x) dx = 0 \quad (k = 0, 1, \dots, r-1). \quad (1.12)$$

Учитывая равенства (1.12) и тот факт, что при r четном

$$R_{r,p}(-1) = R_{r,p}(1) > 0 \quad (1.13)$$

(см. [2], стр. 115—120), будем иметь:

$$\begin{aligned}
 & \int_{-1}^1 |R_{r,p}|^p dx = |R_{r,p}|^p x \Big|_{-1}^1 - \\
 & - p \int_{-1}^1 |R_{r,p}|^{p-1} \text{sign}(R_{r,p}) R'_{r,p} x dx = \\
 & = 2 [R_{r,p}(1)]^p - p \int_{-1}^1 |R_{r,p}|^{p-1} \times \\
 & \times \text{sign}(R_{r,p}) [rx^r + (r-1)a_{r-1}x^{r-1} + \dots + a_1x] dx = \\
 & = 2 [R_{r,p}(1)]^p - rp \int_{-1}^1 |R_{r,p}|^{p-1} \text{sign}(R_{r,p}) x^r dx = \\
 & = 2 [R_{r,p}(1)]^p - rp \int_{-1}^1 |R_{r,p}|^{p-1} \times \\
 & \times \text{sign}(R_{r,p}) (R_{r,p} - a_{r-1}x^{r-1} - \dots - a_0) dx = \\
 & = 2 [R_{r,p}(1)]^p - rp \int_{-1}^1 |R_{r,p}|^p dx,
 \end{aligned}$$

откуда следует равенство (1.11).

Обратим внимание на величину (1.10). Мы доказали, что она равна наименьшему значению интеграла (1.8), если варьировать функциями $\bar{\varphi}_m^{(r)}(u)$ при закрепленных u_k ($0 \leq u_0 < u_1 < \dots < u_{m-1} \leq 1$). Найдем теперь наименьшее значение величины (1.10), варьируя числами u_k , удовлетворяющими условию

$$0 \leq u_0 < u_1 < \dots < u_{m-1} \leq 1. \quad (1.14)$$

Решение этой задачи не вызывает затруднений и приводит нас к тому, что величина (1.10) достигает при условии (1.14) своего наименьшего значения, равного

$$\frac{[R_{r,p}(1)]^p}{(rp+1)[2m + \sqrt[r]{R_{r,p}(1)}]^p}, \quad (1.15)$$

для единственной системы чисел

$$u_k^* = \frac{2k + \sqrt[r]{R_{r,p}(1)}}{2m + \sqrt[r]{R_{r,p}(1)}} \quad (k = 0, 1, \dots, m-1). \quad (1.16)$$

Доказательство может быть проведено методом, изложенным в [3], стр. 147—148 (см. также [4]).

Совершенно очевидно, что величина (1.15) является вместе с тем наименьшим значением интеграла (1.8) среди всевозможных функций $\bar{\varphi}_m^{(r)}(u)$, причем она достигается для единственной функции $\varphi_{m*}^{(r)}(u)$, выражение для которой мы получим, если в формуле (1.9) положим $u_k = u_k^*$:



$$\varphi_{m^*}^{(r)}(u) = \begin{cases} 0 & \text{при } 0 \leq u \leq u_0^*, \\ u^r - h_*^r R_{r,p} \left(-1 + \frac{u - u_k^*}{h_*} \right) & \text{при } u_k^* < u \leq u_{k+1}^* \end{cases} \quad (1.17)$$

$$(k = 0, 1, \dots, m-1; u_m^* = 1),$$

где

$$h_* = \frac{u_{k+1}^* - u_k^*}{2} = \frac{1}{2m + \sqrt[r]{R_{r,p}(1)}}. \quad (1.18)$$

Заметим при этом, что экстремальная функция $\varphi_{m^*}^{(r)}(u)$ непрерывна на отрезке $[0, 1]$ (это видно из формулы (1.17), если при проверке непрерывности в точках u_k^* воспользоваться (1.13)). Поэтому величина (1.15) является также наименьшим значением интеграла (1.8) среди всевозможных непрерывных функций $\varphi_m^{(r)}(u)$, и, следовательно, эта величина является также наименьшим значением интеграла, стоящего в правой части равенства (1.6). Квадратурная формула

$$\int_0^1 f dx \approx L_*(f), \quad (1.19)$$

соответствующая экстремальной функции $\varphi_{m^*}^{(r)}(u)$, является единственной наилучшей формулой для класса функций $W_{0L_q}^{(r)}(M; 0, 1)$ среди всевозможных формул (1.1). Для нее, используя (1.15), получаем следующую точную оценку:

$$\sup_{f \in W_{0L_q}^{(r)}(M; 0, 1)} \left| \int_0^1 f dx - L_*(f) \right| = M \frac{h_*^r R_{r,p}(1)}{r! \sqrt[r]{rp+1}}, \quad (1.20)$$

где h_* определяется формулой (1.18).

Перейдем теперь к вычислению узлов и коэффициентов квадратурной формулы (1.19).

Вначале напомним, что числа u_k^* определяются по формулам (1.16). Числа $\mu_{k^*}^{(l)}$ будем определять следующим образом (см. [2], стр. 102—103).

Как видно из формул (1.7) и (1.17), функция $\varphi_{m^*}^{(r)}(u)$ на отрезке $u_0, u_1]$ равна

$$\sum_{l=1}^{r-1} \mu_{0^*}^{(l)} (u - u_0^*)^l = u^r - h_*^r R_{r,p} \left(-1 + \frac{u - u_0^*}{h_*} \right).$$

Если правую часть этого тождества разложить по степеням $u - u_0^*$, учесть, что при r четном

$$u_0^* = h_* \sqrt[r]{R_{r,p}(1)} = h_* \sqrt[r]{R_{r,p}(-1)}$$

(см. формулы (1.13), (1.16) и (1.18)), а затем в данном тождестве приравнять коэффициенты при одинаковых степенях $u - u_0^*$, то получим

$$\mu_{0^*}^{(l)} = \frac{h_*^{r-l}}{l!} \left\{ \frac{r!}{(r-l)!} [R_{r,p}(1)]^{\frac{r-l}{r}} - R_{r,p}^{(l)}(-1) \right\} \quad (l = 1, \dots, r-1). \quad (1.21)$$

Как видно из формул (1.7) и (1.17), функция $\varphi_{m^*}^{(r)}(u)$ на отрезках $[u_k^*, u_{k+1}^*]$ ($k = 1, \dots, m-1$; $u_m^* = 1$) равна

$$\begin{aligned} & u^r - h_*^r R_{r,p} \left(-1 + \frac{u - u_k^*}{h_*} \right) = \\ & = u^r - h_*^r R_{r,p} \left(-1 + \frac{u - u_{k-1}^*}{h_*} \right) + \sum_{l=1}^{r-1} \mu_{k^*}^{(l)} (u - u_k^*)^l, \end{aligned}$$

откуда получаем

$$\begin{aligned} \sum_{l=1}^{r-1} \mu_{k^*}^{(l)} (u - u_k^*)^l &= h_*^r \left[R_{r,p} \left(1 + \frac{u - u_k^*}{h_*} \right) - \right. \\ & \left. - R_{r,p} \left(-1 + \frac{u - u_k^*}{h_*} \right) \right]. \end{aligned}$$

Если правую часть этого тождества разложить по степеням $u - u_k^*$, учесть, что при четном r функция $R_{r,p}(x)$ четная (см. [2], стр. 115), и поэтому

$$R_{r,p}^{(l)}(-1) = (-1)^l R_{r,p}^{(l)}(1),$$

а затем в данном тождестве приравнять коэффициенты при одинаковых степенях $u - u_k^*$, то получим

$$\left. \begin{aligned} \mu_{k^*}^{(2i)} &= 0 \quad \left(i = 1, \dots, \frac{r-2}{2}; k = 1, \dots, m-1 \right), \\ \mu_{k^*}^{(2i+1)} &= \frac{2h_*^{r-2i-1}}{(2i+1)!} R_{r,p}^{(2i+1)}(1) \\ & \quad \left(i = 0, 1, \dots, \frac{r-2}{2}; k = 1, \dots, m-1 \right). \end{aligned} \right\} \quad (1.22)$$

Пересчет на исходные узлы x_k^* и коэффициенты $\lambda_{k^*}^{(l)}$ (см. (1.5)) приводит нас к следующим результатам:

$$\left. \begin{aligned} x_k^* &= 2(k+1)h_* \quad (k = 0, 1, \dots, m-1), \\ \lambda_{k^*}^{(2i+1)} &= 0 \quad \left(i = 0, 1, \dots, \frac{r-4}{2}; k = 0, 1, \dots, m-2 \right), \\ \lambda_{k^*}^{(2i)} &= \frac{2h_*^{2i+1}}{(r-2i-1)!} R_{r,p}^{(r-2i-1)}(1) \\ & \quad \left(i = 0, 1, \dots, \frac{r-2}{2}; k = 0, 1, \dots, m-2 \right), \\ \lambda_{m-1^*}^{(l)} &= \frac{h_*^{l+1}}{(r-l-1)!} \left\{ \frac{r!}{(l+1)!} [R_{r,p}(1)]^{\frac{l+1}{r}} - R_{r,p}^{(r-l-1)}(-1) \right\} \\ & \quad (l = 0, 1, \dots, r-2), \end{aligned} \right\} \quad (1.23)$$

где h_* определяется формулой (1.18).

Таким образом, экстремальная задача, поставленная в начале настоящего параграфа, решена нами при произвольном четном r , $1 < q \leq \infty$. При произвольном четном r , $q = 1$ эта задача решена А. И. Киселевым (см. [2], стр. 107—109). Результаты, полученные в настоящем параграфе, вместе с результатами А. И. Киселева можно сформулировать в виде следующей теоремы.

Теорема 1. Среди всевозможных квадратурных формул (1.1), где m , r — фиксированные натуральные числа, причем r — четное число, наилучшей для класса $W_{0L_q}^{(r)}(M; 0, 1)$ ($1 \leq q \leq \infty$) является единственная формула

$$\int_0^1 f dx \approx L_*(f)$$

с узлами x_k^* и коэффициентами $\lambda_k^{(l)}$, выражаемыми при помощи равенств (1.23). Для этой формулы имеет место точная оценка (1.20).

Замечание. При произвольном четном r , $q = \infty$ теорема 1 доказана С. М. Никольским [1], [2], а при $r = 2$, $q = 2$ — Г. Я. Дорониным [5]. При произвольном четном r , $q = 2$ эта теорема доказана И. И. Ибрагимовым и Р. М. Алиевым (об этом сообщил Р. М. Алиев на семинаре по конструктивной теории функций в Белорусском государственном университете им. В. И. Ленина).

§ 2. В этом параграфе мы по-прежнему будем рассматривать квадратурные формулы (1.1), однако теперь будем предполагать, что они точны для любого многочлена степени $r-1$ и что $f(x) \in W_{L_q}^{(r)}(M; 0, 1)$. Для каждой такой квадратурной формулы имеет место следующая точная оценка:

$$E_{mL_q}^{(r)} = \sup_{f \in W_{L_q}^{(r)}(M; 0, 1)} \left| \int_0^1 f dx - L(f) \right| = M \|F_r(t)\|_{L_p} \quad (2.1)$$

$$\left(1 \leq q \leq \infty, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \right),$$

где $F_r(t)$ определяется при помощи равенства (1.3). Эта оценка может быть получена тем же способом, что и оценка (1.2).

Рассмотрим следующую экстремальную задачу.

Среди всевозможных квадратурных формул (1.1), точных для любого многочлена степени $r-1$ (m , r — заданные натуральные числа), найти наилучшую для класса $W_{L_q}^{(r)}(M; 0, 1)$, т. е. найти такую квадратурную формулу, для которой величина (2.1) имеет наименьшее значение.

Поставленную задачу будем решать при произвольном четном r , $1 < q \leq \infty$.

Предварительно докажем лемму.

Лемма. Для того чтобы квадратурная формула (1.1) была точна для любого многочлена степени $r-1$, необходимо и достаточно, чтобы для всех t выполнялось условие

$$L[(x-t)^{r-1}] = \int_0^1 (x-t)^{r-1} dx, \quad (2.2)$$

т. е.

$$\sum_{k=0}^{m-1} \sum_{l=0}^{r-2} \lambda_k^{(l)} (x_k - t)^{r-l-1} = (1-t)^r - t^r,$$

или, что то же самое, чтобы для всех u выполнялось следующее условие:

$$\sum_{k=0}^{m-1} \sum_{l=1}^{r-1} \mu_k^{(l)} (u - u_k)^l = u^r - (1 - u)^r \quad (2.3)$$

(см. обозначения (1.5)).

Необходимость этого условия очевидна. Достаточность непосредственно следует из тождеств

$$L[(x-t)^{r-k}] = \int_0^1 (x-t)^{r-k} dx \quad (k = 1, \dots, r),$$

которые можно получить при помощи последовательного дифференцирования по t тождества (2.2), если при этом учесть, что

$$L'_t[(x-t)^{r-k}] = -(r-k)L[(x-t)^{r-k-1}] \quad (k = 1, \dots, r-1).$$

Лемма доказана.

Возвратимся теперь к экстремальной задаче, поставленной в начале настоящего параграфа.

Заметим, что если воспользоваться обозначениями (1.5), то оценку (2.1) можно записать в виде

$$E_{mL_q}^{(r)} = \frac{M}{r!} \left(\int_0^1 \left| u^r - \sum_{k=0}^{m-1} \sum_{l=1}^{r-1} \mu_k^{(l)} K_{l+1}(u - u_k) \right|^p du \right)^{\frac{1}{p}} \quad (1 \leq p < \infty). \quad (2.4)$$

Далее, если принять во внимание лемму, то становится очевидным, что наша экстремальная задача сводится к нахождению при фиксированных m и r наименьшего значения интеграла, стоящего в правой части равенства (2.4), если варьировать числами u_k ($0 \leq u_0 < u_1 < \dots < u_{m-1} \leq 1$) и $\mu_k^{(l)}$, удовлетворяющими условию (2.3).

Дадим этой задаче несколько иную формулировку.

Обратим внимание на двойную сумму, стоящую под знаком исследуемого интеграла. Положим

$$\Phi_m^{(r)}(u) = \sum_{k=0}^{m-1} \sum_{l=1}^{r-1} \mu_k^{(l)} K_{l+1}(u - u_k) \quad (0 \leq u \leq 1). \quad (2.5)$$

В данной задаче функции $\Phi_m^{(r)}(u)$ рассматриваются для всевозможных систем чисел u_k ($0 \leq u_0 < u_1 < \dots < u_{m-1} \leq 1$) и $\mu_k^{(l)}$, удовлетворяющих условию (2.3). Заметим, что для каждой такой системы чисел u_k и $\mu_k^{(l)}$ соответствующая функция $\Phi_m^{(r)}(u)$ обладает следующими свойствами: она непрерывна на отрезке $[0, 1]$, на отрезке $[0, u_0]$ равна тождественно нулю, на каждом из отрезков $[u_k, u_{k+1}]$ ($k = 0, 1, \dots, m-2$) является многочленом степени $\leq r-1$, а на отрезке $[u_{m-1}, 1]$ равна тождественно $u^r - (1-u)^r$. Эти свойства непосредственно следуют из формулы (2.5), если при ее рассмотрении воспользоваться равенством (1.4) и тождеством (2.3) на отрезке $[u_{m-1}, 1]$.

Отметим, что перечисленные выше свойства полностью характеризуют рассматриваемые функции $\Phi_m^{(r)}(u)$: каждая наперед заданная функция, обладающая этими свойствами, однозначно определяет такую

систему чисел u_k ($0 \leq u_0 < u_1 < \dots < u_{m-1} \leq 1$) и $\mu_k^{(l)}$, удовлетворяющих условию (2.3), для которой соответствующая функция $\Phi_m^{(r)}(u)$ равна тождественно данной функции. Числа u_k определяются данной функцией непосредственно. Числа $\mu_k^{(l)}$ находятся точно так же, как и в соответствующем случае § 1. Причем найденные таким методом числа u_k и $\mu_k^{(l)}$ будут удовлетворять условию (2.3), так как левая и правая части этого условия являются лишь различными представлениями данной функции на отрезке $[u_{m-1}, 1]$.

Из сказанного следует, что наша экстремальная задача сводится к нахождению при фиксированных m и r наименьшего значения интеграла, стоящего в правой части равенства (2.4), если варьировать функциями $\Phi_m^{(r)}(u)$, обладающими перечисленными выше свойствами.

Мы пришли к задаче, аналогичной той, которая была рассмотрена в § 1. Разница лишь в том, что каждая из функций $\Phi_m^{(r)}(u)$ на отрезке $[u_{m-1}, 1]$ не является произвольным многочленом степени $\leq r-1$, а равна тождественно $u^r - (1-u)^r$.

В дальнейших исследованиях будем применять метод, подробно изложенный в предыдущем параграфе.

Рассмотрим функции $\bar{\Phi}_m^{(r)}(u)$, которые обладают такими же свойствами, как и функции $\Phi_m^{(r)}(u)$, однако могут иметь разрывы первого рода в точках u_0, u_1, \dots, u_{m-1} .

Как и в § 1, будем искать наименьшее значение интеграла

$$\int_0^1 |u^r - \bar{\Phi}_m^{(r)}(u)|^p du \quad (1 \leq p < \infty) \quad (2.6)$$

среди всевозможных функций $\bar{\Phi}_m^{(r)}(u)$. Эта задача решается двумя этапами.

Вначале находим наименьшее значение интеграла (2.6), варьируя функциями $\bar{\Phi}_m^{(r)}(u)$ при закрепленных u_k ($0 \leq u_0 < u_1 < \dots < u_{m-1} \leq 1$). Рассуждая точно так же, как и в предыдущем параграфе, приходим к выводу, что при закрепленных u_k интеграл (2.6) достигает своего наименьшего значения для единственной функции (эта функция в общем случае не является непрерывной на отрезке $[0, 1]$)

$$\bar{\Phi}_m^{(r)}(u) = \begin{cases} 0 & \text{при } 0 \leq u \leq u_0, \\ u^r - \left(\frac{u_{k+1} - u_k}{2} \right)^r R_{r,p} \left[\frac{2(u - u'_k)}{u_{k+1} - u_k} \right] & \text{при } u_k < u \leq u_{k+1} \\ & (k = 0, 1, \dots, m-2), \\ u^r - (1-u)^r & \text{при } u_{m-1} < u \leq 1, \end{cases} \quad (2.7)$$

где

$$u'_k = \frac{u_k + u_{k+1}}{2},$$

причем

$$\begin{aligned} & \int_0^1 |u^r - \bar{\Phi}_m^{(r)}(u)|^p du = \\ & = \int_0^{u_0} u^{rp} du + \sum_{k=0}^{m-2} \int_{u_k}^{u_{k+1}} \left(\frac{u_{k+1} - u_k}{2} \right)^{rp} \left| R_{r,p} \left[\frac{2(u - u'_k)}{u_{k+1} - u_k} \right] \right|^p du + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \int_{u_{m-1}}^1 (1-u)^{rp} du = \frac{u_0^{rp+1}}{rp+1} + \sum_{k=0}^{m-2} \left(\frac{u_{k+1} - u_k}{2} \right)^{rp+1} \times \\
& \quad \times \int_{-1}^1 |R_{r,p}(x)|^p dx + \frac{(1-u_{m-1})^{rp+1}}{rp+1} = \\
& = \frac{u_0^{rp+1}}{rp+1} + \frac{[R_{r,p}(1)]^p}{(rp+1)2^{rp}} \sum_{k=0}^{m-2} (u_{k+1} - u_k)^{rp+1} + \frac{(1-u_{m-1})^{rp+1}}{rp+1}. \quad (2.8)
\end{aligned}$$

Теперь найдем наименьшее значение величины (2.8), варьируя числами u_k , удовлетворяющими условию

$$0 \leq u_0 < u_1 < \dots < u_{m-1} \leq 1. \quad (2.9)$$

Эта задача может быть решена методом, изложенным в [3], стр. 147—148 (см. также [4]). При этом получим, что величина (2.8) при условии (2.9) достигает своего наименьшего значения, равного

$$\frac{[R_{r,p}(1)]^p}{(rp+1)2^{rp} [m-1 + \sqrt[r]{R_{r,p}(1)}]^{rp}} \quad (2.10)$$

для единственной системы чисел

$$u_k^* = \frac{2k + \sqrt[r]{R_{r,p}(1)}}{2[m-1 + \sqrt[r]{R_{r,p}(1)}]} \quad (k=0, 1, \dots, m-1). \quad (2.11)$$

Совершенно очевидно, что величина (2.10) является вместе с тем наименьшим значением интеграла (2.6) среди всевозможных функций $\Phi_m^{(r)}(u)$, причем она достигается для единственной функции $\Phi_{m^*}^{(r)}(u)$, выражение для которой мы получим, если в формуле (2.7) положим $u_k = u_k^*$:

$$\Phi_{m^*}^{(r)}(u) = \begin{cases} 0 & \text{при } 0 \leq u \leq u_0^*, \\ u^r - h_*^r R_{r,p} \left(-1 + \frac{u - u_k^*}{h_*} \right) & \text{при } u_k^* < u \leq u_{k+1}^* \\ & (k=0, 1, \dots, m-2), \\ u^r - (1-u)^r & \text{при } u_{m-1}^* < u \leq 1, \end{cases} \quad (2.12)$$

где

$$h_* = \frac{u_{k+1}^* - u_k^*}{2} = \frac{1}{2[m-1 + \sqrt[r]{R_{r,p}(1)}]}. \quad (2.13)$$

Заметим при этом, что экстремальная функция $\Phi_{m^*}^{(r)}(u)$ непрерывна на отрезке $[0, 1]$ (доказательство этого факта может быть проведено точно так же, как и для функции $\Phi_m^{(r)}(u)$, рассмотренной в § 1). Поэтому величина (2.10) является также наименьшим значением интеграла (2.6) среди всевозможных непрерывных функций $\Phi_m^{(r)}(u)$ и, следовательно,

эта величина является наименьшим значением интеграла, стоящего в правой части равенства (2.4). Квадратурная формула

$$\int_0^1 f dx \approx L_*(f), \quad (2.14)$$

соответствующая экстремальной функции $\Phi_{m*}^{(r)}(u)$, является единственной наилучшей формулой для класса функций $W_{L_q}^{(r)}(M; 0, 1)$ среди всевозможных квадратурных формул (1.1), точных для любого многочлена степени $r-1$. Для нее, используя (2.10), получаем следующую точную оценку:

$$\sup_{f \in W_{L_q}^{(r)}(M; 0, 1)} \left| \int_0^1 f dx - L_*(f) \right| = M \frac{h_*^r R_{r,p}(1)}{r! \sqrt[r]{rp+1}}, \quad (2.15)$$

где h_* определяется формулой (2.13).

Перейдем теперь к вычислению узлов и коэффициентов квадратурной формулы (2.14).

Напоминаем, что числа u_k^* определяются формулами (2.11). Числа $\mu_{k*}^{(l)}$ мы опять будем вычислять методом, предложенным С. М. Никольским.

Из сравнения аналитических выражений для функций $\Phi_{m*}^{(r)}(u)$ и $\Phi_{m*}^{(r)}(u)$ (см. формулы (2.12) и (1.17)) видно, что отличие в их записи наблюдается лишь на отрезке $[u_{m-1}^*, 1]$. Отсюда следует, что при $k=0, 1, \dots, m-2; l=1, \dots, r-1$ числа $\mu_{k*}^{(l)}$ находятся точно так же, как и в § 1, т. е. находятся по формулам (1.21) и (1.22), только лишь теперь h_* определяется формулой (2.13).

Перейдем к определению чисел $\mu_{m-1*}^{(l)}$.

Как видно из формул (2.5) и (2.12), функция $\Phi_{m*}^{(r)}(u)$ на отрезке $[u_{m-1}^*, 1]$ равна

$$u^r - (1-u)^r = u^r - h_*^r R_{r,p} \left(-1 + \frac{u - u_{m-2}^*}{h_*} \right) + \\ + \sum_{l=1}^{r-1} \mu_{m-1*}^{(l)} (u - u_{m-1}^*)^l.$$

Отсюда получаем

$$\sum_{l=1}^{r-1} \mu_{m-1*}^{(l)} (u - u_{m-1}^*)^l = h_*^r R_{r,p} \left(1 + \frac{u - u_{m-1}^*}{h_*} \right) - (1-u)^r.$$

Если правую часть этого тождества разложить по степеням $u - u_{m-1}^*$, а затем в данном тождестве приравнять коэффициенты при одинаковых степенях $u - u_{m-1}^*$, то получим

$$\mu_{m-1*}^{(l)} = \frac{h_*^{r-l}}{l!} \left\{ (-1)^{l+1} \frac{r!}{(r-l)!} [R_{r,p}(1)]^{\frac{r-l}{r}} + \right. \\ \left. + R_{r,p}^{(l)}(1) \right\} \quad (l=1, \dots, r-1).$$

Пересчет на исходные узлы x_k^* и коэффициенты $\lambda_{k^*}^{(l)}$ (см. (1.5)) приводит нас к следующим результатам:

$$\left. \begin{aligned} x_k^* &= (2k + \sqrt{R_{r,p}(1)}) h_* \quad (k = 0, 1, \dots, m-1), \\ \lambda_{0^*}^{(l)} &= \frac{h_*^{l+1}}{(r-l-1)!} \left\{ (-1)^{r-l} \frac{r!}{(l+1)!} [R_{r,p}(1)]^{\frac{l+1}{r}} + R_{r,p}^{(r-l-1)}(1) \right\} \\ &\quad (l = 0, 1, \dots, r-2), \\ \lambda_{k^*}^{(2i+1)} &= 0 \left(i = 0, 1, \dots, \frac{r-4}{2}; \quad k = 1, \dots, m-2 \right), \\ \lambda_{k^*}^{(2i)} &= \frac{2h_*^{2i+1}}{(r-2i-1)!} R_{r,p}^{(r-2i-1)}(1) \\ &\quad \left(i = 0, 1, \dots, \frac{r-2}{2}; \quad k = 1, \dots, m-2 \right), \\ \lambda_{m-1^*}^{(l)} &= \frac{h_*^{l+1}}{(r-l-1)!} \left\{ \frac{r!}{(l+1)!} [R_{r,p}(1)]^{\frac{l+1}{r}} - R_{r,p}^{(r-l-1)}(-1) \right\} \\ &\quad (l = 0, 1, \dots, r-2), \end{aligned} \right\} \quad (2.16)$$

где h_* определяется формулой (2.13).

Таким образом, экстремальная задача, поставленная в начале § 2, решена нами при произвольном четном r , $1 < q \leq \infty$. При произвольном четном r , $q = 1$, $q = 2$ и $q = \infty$ эта задача решена И. И. Ибрагимовым и Р. М. Алиевым [6]. Результаты, полученные в настоящем параграфе, вместе с результатами И. И. Ибрагимова и Р. М. Алиева можно сформулировать в виде следующей теоремы.

Теорема 2. Среди всевозможных квадратурных формул (1.1), точных для любого многочлена степени $r-1$ (m, r — фиксированные натуральные числа, причем r — четное число), наилучшей для класса $W_{L_q}^{(r)}(M; 0, 1)$ ($1 \leq q \leq \infty$) является единственная формула

$$\int_0^1 f dx \approx L_*(f)$$

с узлами x_k^* и коэффициентами $\lambda_{k^*}^{(l)}$, выражаемыми при помощи равенств (2.16). Для этой формулы имеет место точная оценка (2.15).

Замечание. При $r = 2$, $1 \leq q \leq \infty$ теорема 2 доказана Т. А. Шайдаевой [4].

ЛИТЕРАТУРА

1. Никольский С. М. УМН, 5, в. 2, 165, 1950.
2. Никольский С. М. Квадратурные формулы. М., 1958.
3. Крылов В. И. Приближенное вычисление интегралов. М., 1959.
4. Шайдаева Т. А. Тр. Матем. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР, 53, 313, 1959.
5. Доронин Г. Я. Сб. научн. тр. Днепропетр. инж.-стр. ин-та, № 1—2, 210, 1955.
6. Ибрагимов И. И., Алиев Р. М. ДАН СССР, 162, № 1, 23, 1965.

Поступило в редакцию 21.VI 1965

А. А. ИВАНОВ

РЕГУЛЯРНЫЕ РАСШИРЕНИЯ ТОПОЛОГИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВ

1. Регуляризация расширений. Считают, что расширение X' топологического пространства X является строгим расширением [1], если совокупность замыканий в X' подмножеств пространства X (достаточно ограничиться замкнутыми подмножествами) образует базис замкнутых множеств в X' .

Будем говорить, что точки $x \in X'$ и $y \in X'$ топологически различимы из X , если найдется такое множество $A \subset X$, что одна из этих точек принадлежит множеству $\bar{A}^{X'}$, а другая этому множеству не принадлежит; если такое множество не существует, то точки x и y будем называть топологически неразличимыми из X .

Будем говорить, что X' является регулярным расширением пространства X , если X' является строгим расширением и если любые точки $x \in X'$ и $y \in X'$, из которых хоть одна принадлежит наросту (множеству $X' \setminus X$), топологически различимы из X .

От произвольного расширения X' можно следующим образом перейти к регулярному расширению. Введем прежде всего на X' новую топологическую структуру τ' , взяв в качестве ее базиса замкнутых множеств замыкания в X' подмножеств пространства X и получив, таким образом, строгое расширение этого пространства. Разобьем затем множество точек пространства X' на (непересекающиеся) классы топологической неразличимости из X (мы пришли бы к тому же разбиению и в исходной топологической структуре пространства X') и в соответствии с этим разбиением образуем в X' подмножество X'_r , состоящее из точек пространства X и (единственных) представителей тех классов топологической неразличимости из X , в которых нет точек самого пространства X . Легко доказывается, что топологическая структура τ' индуцирует на X'_r структуру регулярного расширения пространства X и что это расширение определяется исходным расширением однозначно с точностью до эквивалентности расширений. Переход от исходного расширения к построенному таким способом регулярному расширению будем называть регуляризацией (исходного расширения). Регуляризация расширений определена нами однозначно. С другой стороны, исходя из одного и того же регулярного расширения, можно строить различные (неэквивалентные) расширения. Это построение осуществляется следующим образом.

Сопоставим каждой точке x регулярного расширения X'_0 пространства X множество A_x (оно может быть и пустым), причем $A_x \cap A_y = \emptyset$, если $x \neq y$, $A_x \cap X'_0 = \emptyset$ для всех $x \in X'_0$, и присоединим к X'_0 множество $A = \bigcup_{x \in X'_0} A_x$. На полученном таким образом множестве

X' будем считать замкнутыми множества вида $F \cup (\bigcup_{x \in F} A_x)$, где F — произвольное замкнутое в X'_0 множество. В этой топологической структуре пространства X' оказывается строгим расширением пространства X . Отходя еще дальше от исходного регулярного расширения, мы можем дополнить совокупность замкнутых множеств пространства X' некоторыми множествами вида $\bar{F}^{X'} \cup H$, где H — произвольное множество точек нароста. Этот процесс дает возможность получить любое расширение пространства X . Мы будем называть его искажением (исходного) регулярного расширения. Нетрудно заметить, что регуляризация искажения является тождественной операцией в классе регулярных расширений.

Предыдущие рассуждения убеждают нас в справедливости следующего утверждения.

Теорема 1. Любое расширение топологического пространства может быть получено из соответствующего (полученного регуляризацией) регулярного расширения операцией искажения.

Значение этой простой теоремы состоит в том, что она выделяет регулярные расширения как основной объект изучения в топологической теории расширений. Операция искажения состоит в произвольном добавлении новых точек нароста и в объявлении замкнутыми дополнительно некоторых (по произволу) множеств вида $\bar{F}^{X'} \cup H$, где множества H точек нароста опять произвольны, в то время как при построении регулярных расширений существенно используется топологическая структура расширяемого пространства.

2. Регулярные расширения. Рассмотрим следующие в определенном смысле двойственные друг другу методы построения регулярных расширений. Один из них основан на рассмотрении систем замкнутых множеств расширяемого пространства, другой — на рассмотрении систем открытых множеств.

Систему γ замкнутых множеств топологического пространства X будем называть кофилтром (замкнутым) в X , если для любых замкнутых множеств F_1, F_2 пространства X имеем $F_1 \cup F_2 \in \gamma$ тогда и только тогда, когда либо $F_1 \in \gamma$, либо $F_2 \in \gamma$ ($F_1 \cup F_2 \in \gamma \leftrightarrow F_1 \in \gamma$ или $F_2 \in \gamma$). Для любой точки $x \in X$ совокупность $\gamma(x) = \{F | x \in F\}$ является кофилтром. Множество $\{\gamma(x) | x \in X\}$ обозначим через $\gamma(X)$. Пусть \tilde{X} — какая-нибудь совокупность кофилтров в X , причем $\tilde{X} \cap \gamma(X) = \emptyset$. Положим, $\tilde{F} = \{\gamma | \gamma \in \tilde{X}, F \in \gamma\}$. Так как $\tilde{F}_1 \cup \tilde{F}_2 = \tilde{F}_1 \cup \tilde{F}_2$ ($\gamma \in \tilde{F}_1 \cup \tilde{F}_2 \leftrightarrow \gamma \in \tilde{F}_1$ или $\gamma \in \tilde{F}_2 \leftrightarrow F_1 \in \gamma$ или $F_2 \in \gamma \leftrightarrow F_1 \cup F_2 \in \gamma \leftrightarrow \gamma \in \tilde{F}_1 \cup \tilde{F}_2$), то совокупность множеств вида $F \cup \tilde{F}$ можно взять в качестве базиса замкнутых множеств в $X' = X \cup \tilde{X}$. Нетрудно доказать, что полученное таким методом пространство X' является регулярным расширением пространства X . С другой стороны, легко заметить, что так можно получить любое регулярное расширение X' пространства X . Действительно, пусть $sf(x) = \{F | x \in \bar{F}^{X'}\}$ — след (замкнутый) точки $x \in X' \setminus X$ в пространстве X , являющийся очевидно кофилтром. Положив $\tilde{X} = \{sf(x) | x \in X' \setminus X\}$ и построив по \tilde{X} регулярное расширение пространства X , получим расширение, эквивалентное расширению X' пространства X .

Перейдем теперь ко второму методу. Систему ω открытых подмножеств топологического пространства X будем называть филтром (открытым) в X , если для любых открытых множеств G_1, G_2 пространства X имеем $G_1 \cap G_2 \in \omega \leftrightarrow G_1 \in \omega$ и $G_2 \in \omega$. Для любой точки $x \in X$ совокупность $\omega(x) = \{G | x \in G\}$ является филтром. Множество

$\{\omega(x) | x \in X\}$ обозначим через $\omega(X)$. Пусть \hat{X} — какая-нибудь совокупность фильтров в X , причем $\hat{X} \cap \omega(X) = \emptyset$. Положим, $\hat{G} = \{\omega | \omega \in \hat{X}, G \in \omega\}$. Так как $\hat{G}_1 \cap \hat{G}_2 = \hat{G}_1 \cap G_2$ ($\omega \in \hat{G}_1 \cap \hat{G}_2 \leftrightarrow G_1 \in \omega$ и $G_2 \in \omega \leftrightarrow G_1 \cap G_2 \in \omega \leftrightarrow \omega \in \hat{G}_1 \cap G_2$), то совокупность множеств вида $G \cap \hat{G}$ можно взять в качестве базиса открытых множеств в $X' = XU\hat{X}$. Нетрудно доказать, что полученное таким методом пространство X' является регулярным расширением пространства X . С другой стороны, легко заметить, что так можно получить любое регулярное расширение X' пространства X . Действительно, пусть $su(x) = \{G | x \in X \setminus G\}$ — след (открытый) точки $x \in X' \setminus X$ в пространстве X , являющийся очевидно фильтром. Положив $\hat{X} = \{su(x) | x \in X' \setminus X\}$ и построив по \hat{X} регулярное расширение пространства X , получим расширение, эквивалентное расширению X' пространства X .

Имеет место простая связь между этими методами, основанная на связи между фильтрами и кофильтрами (двойственность). Произвольному кофильтру γ в X соответствует фильтр

$$\omega(\gamma) = \{G | X \setminus G \in \gamma\} \quad (G_1 \cap G_2 \in \omega \leftrightarrow X \setminus (G_1 \cap G_2) \in \gamma \leftrightarrow \\ \leftrightarrow (X \setminus G_1) \cup (X \setminus G_2) \in \gamma \leftrightarrow X \setminus G_1 \in \gamma \text{ и } X \setminus G_2 \in \gamma \leftrightarrow G_1 \in \omega \text{ и } G_2 \in \omega)$$

и произвольному фильтру ω в X соответствует кофильтр $\gamma(\omega) = \{F | X \setminus F \in \omega\}$ ($F_1 \cup F_2 \in \gamma \leftrightarrow X \setminus (F_1 \cup F_2) \in \omega \leftrightarrow X \setminus F_1 \in \omega$ или $X \setminus F_2 \in \omega \leftrightarrow F_1 \in \gamma$, или $F_2 \in \gamma$). Это соответствие очевидно взаимно-однозначно ($\gamma(\omega(\gamma)) = \gamma$ и $\omega(\gamma(\omega)) = \omega$), причем

$$\omega(\gamma(x)) = \{G | X \setminus G \in \gamma(x)\} = \{G | x \in X \setminus G\} = \{G | x \in G\} = \omega(x),$$

$$\gamma(\omega(x)) = \{F | X \setminus F \in \omega(x)\} = \{F | x \in X \setminus F\} = \{F | x \in F\} = \gamma(x),$$

т. е. $\omega(\gamma(X)) = \omega(X)$ и $\gamma(\omega(X)) = \gamma(X)$.

Если \tilde{X} — некоторая совокупность кофильтров в X , причем $\tilde{X} \cap \gamma(X) = \emptyset$, то ей соответствует совокупность $\hat{X} = \omega(\tilde{X})$ фильтров, причем $\hat{X} \cap \omega(X) = \omega(\tilde{X}) \cap \omega(\gamma(X)) = \omega(\tilde{X} \cap \gamma(X)) = \emptyset$.

Таким образом, определены регулярные расширения $XU\tilde{X}$ и $XU\hat{X}$ топологического пространства X и отображение $\omega: XU\tilde{X} \rightarrow XU\hat{X}$, тождественное на X . Так как $\omega(\tilde{F}) = \{\omega(\gamma) | \gamma \in \tilde{F}\} = \{\omega(\gamma) | F \in \gamma\} = \hat{X} \setminus \{\omega(\gamma) | F \in \gamma\} = \hat{X} \setminus \hat{G}$, где $G = X \setminus F$, то $\omega(FU\tilde{F}) = FU\omega(\tilde{F}) = (X \setminus G) \cup (\hat{X} \setminus \hat{G}) = (XU\hat{X}) \setminus (GU\hat{G})$ и отображение ω является топологическим отображением.

Регулярное расширение, полученное методом кофильтров (фильтров), будем называть γ -расширением (ω -расширением). Мы можем теперь сформулировать следующее утверждение.

Теорема 2. Любое регулярное расширение топологического пространства эквивалентно некоторому его γ -расширению (ω -расширению).

3. Расширение в классе T_0 . Изучение всех расширений X' произвольного топологического пространства X естественным образом сводится к изучению регулярных расширений T_0 -пространств переходом от X' и X к их подпространствам X'_0 и X_0 ($X_0 \subset X$, $X'_0 \subset X'$, $X_0 \subset X'_0$), состоящим из представителей всех классов топологической неразличимости из X , причем в качестве представителей классов, со-

держащих точки самого пространства X , берутся именно такие точки, и последующей регуляризацией расширения X'_0 пространства X_0 . В связи с этим ограничимся в дальнейшем рассмотрением T_0 -пространств и их регулярных расширений. Начнем с бикомпактных расширений T_0 -пространств. Пусть X' — бикомпактное (регулярное) расширение пространства X . Это расширение определяет на пространстве X отношение смежности σ (см. [3]), определяемое условием $\sigma(F_1, \dots, F_n) \leftrightarrow$

$$\leftrightarrow \bigcap_1^n \bar{F}_i^{X'} \neq \emptyset. \text{ Рассмотрим систему } \tilde{X}_\sigma, \text{ состоящую из всех кофилт-}$$

тров на X , являющихся системами σ -смежности, отличных от $\gamma(x)$ ($x \in X$). Эта система определяет расширение $\tilde{\sigma}X$, которое будем называть сильным σ -расширением в отличие от обычного σ -расширения. Имеем включение $\sigma X \subset \tilde{\sigma}X$. Можно считать с точностью до эквивалентности расширений, что $X \subset X' \subset \tilde{\sigma}X$. Более того, нетрудно доказать, что в силу бикомпактности пространства X' имеет место включение $\sigma X \subset X'$. Таким образом, мы имеем

$$X \subset \sigma X \subset X' \subset \tilde{\sigma}X.$$

С другой стороны, если для расширения X' пространства X имеют место эти включения, то X' бикомпактно. Доказательство этого проводится так же, как доказательство бикомпактности пространства σX . Таким образом, имеет место следующее утверждение.

Теорема 3. *Множество всех регулярных бикомпактных расширений топологического пространства X совпадает с точностью до эквивалентности расширений с множеством таких пространств X' , что $\sigma X \subset X' \subset \tilde{\sigma}X$ для какого-нибудь отношения смежности σ на X .*

Те же рассуждения приводят нас к аналогичному утверждению в общем случае необязательно бикомпактных расширений. Здесь будут иметь место включения $X \subset X' \subset \tilde{\sigma}X$ (включение $\sigma X \subset X'$ имеет место лишь для бикомпактного расширения). Однако между этими утверждениями имеется некоторое различие. Отношение σ , фигурирующее в теореме 3, определяется расширением X' однозначно, в то время как в общем случае такой однозначности нет. Действительно, если имеют место включения $X \subset \sigma X \subset X' \subset \tilde{\sigma}X$ и $X \subset \sigma_1 X \subset X' \subset \tilde{\sigma}_1 X$, то тогда $X \subset \sigma X \subset \tilde{\sigma}_1 X$ и $X \subset \sigma_1 X \subset \tilde{\sigma}X$, а в силу бикомпактности расширений σX и $\sigma_1 X$ имеем также $X \subset \sigma_1 X \subset \sigma X \subset \tilde{\sigma}_1 X$ и $X \subset \sigma X \subset \sigma_1 X \subset \tilde{\sigma}X$, откуда $\sigma X = \sigma_1 X$ и окончательно $\sigma = \sigma_1$. В общем же случае имеем, например, всегда $X \subset X' \subset \tilde{\sigma}_0 X$, где σ_0 — минимальное отношение смежности на X ($\sigma_0(F_1, F_2, \dots, F_n)$ имеет место, если все F_i не пусты), и здесь целесообразно рассматривать при данном расширении X' максимальное среди всех отношений смежности σ , для которых имеет место $X \subset X' \subset \tilde{\sigma}X$. Это отношение определяется условием

$$\sigma(F_1, F_2, \dots, F_n) \leftrightarrow \bigcap_1^n \bar{F}_i^{X'} \neq \emptyset. \text{ Задание на } X \text{ этого отношения смеж-}$$

ности еще не определяет расширение X' в классе T_0 даже в случае бикомпактных расширений. Учитывая, однако, что σ определяется соответствующей совокупностью открытых конечных покрытий, можно дополнить определение X' системой $\{Cx | x \in \tilde{\sigma}X, x \in X'\}$ и получить тем самым совокупность ρ систем открытых множеств, определяющую расширение X' однозначно.

4. Расширение в классе T_1 . При переходе к регулярным расширениям в классе T_1 -пространств результаты значительно упрощаются. Прежде всего отметим следующее.

Теорема 4. Произвольное регулярное бикompактное расширение пространства X в классе T_1 эквивалентно некоторому его σ -расширению (σX).

Это утверждение является непосредственным следствием теоремы 3, так как если $X \subset \sigma X \subset X' \subset \bar{\sigma} X$ и $X' \in T_1$, то $X' = \sigma X$.

Переходя к общему случаю, остановимся на совокупности ρ систем открытых множеств (определяющей расширение X' однозначно), о которой шла речь в конце предыдущего пункта. В случае T_0 -расширений эту совокупность невозможно было существенно изменить, сделав ее более удобной, в случае же T_1 -расширений это оказывается возможным. Заметим прежде всего, что нет смысла включать в ρ те Sx , которые не являются покрытиями (открытыми) пространства X , так как и без того ясно, что если $X' \in T_1$, то никакая точка x , для которой Sx не является покрытием пространства X , не может принадлежать X' . Выкинув все такие Sx из ρ , мы получаем совокупность покрытий (открытых), определяющую X' . Оставим за ней прежнее обозначение. Заметим теперь, что если $x \in X'$ и $y \subset x$ ($y \neq x$), то из условия $X' \in T_1$ непосредственно следует, что $y \in X'$, поэтому Sy также нет нужды включать в ρ . Но тогда в ρ остаются только открытые покрытия пространства X , продолжимые до открытых покрытий пространства X' (необязательно все, однако). Действительно, если $Sy \in \rho$ и $x \in X'$, то кофилтр y не содержится в кофилтре x и поэтому найдется такое замкнутое в X множество F , что $F \in y$ и $F \bar{\in} x$. Но тогда $x \bar{\in} \bar{F}^x$ и потому $x \in C\bar{F}^x$, а это и означает в силу произвольности x , что Sy продолжимо до открытого покрытия пространства X' . Нетрудно теперь показать, что если мы дополним ρ до равномерной структуры, то последняя определит расширение X' также однозначно. Прежде всего будет однозначно определено отношение смежности σ (совокупностью конечных открытых покрытий пространства X , входящих в ρ) и, следовательно, расширение $\bar{\sigma} X$, а точками множества $X' \setminus X$ будут кофилтры $x \in \bar{\sigma} X$, являющиеся максимальными среди всех таких кофилтров $y \in \bar{\sigma} X$, что $Sy \in \rho$. Будем обозначать в дальнейшем такое расширение через $\bar{\rho} X$. Мы получаем возможность сформулировать следующее утверждение.

Теорема 5. Произвольное регулярное расширение пространства X в классе T_1 эквивалентно некоторому его $\bar{\rho}$ -расширению.

5. Расширение в классе T_2 . Переход к классу T_2 дает дальнейшую специализацию теории расширений, однако не столь сильную, как это можно было бы ожидать (более существенным оказывается переход к классу T_3). Так, например, в классе T_2 , как и в классе T_1 , не всякое расширение эквивалентно какому-нибудь ρ -расширению (см. [4]). Действительно, рассмотрим некоторое пространство $X \in T_2$ и какую-нибудь исчезающую максимальную центрированную систему γ замкнутых в X множеств, содержащую нигде не плотное в X множество F_0 . Образует затем центрированную систему $\gamma' \subset \gamma$, состоящую из всех элементов системы γ , кроме содержащихся в множествах вида $F_0 \cup H$, $H \in \gamma$. Система γ' является кофилтром. Для того чтобы доказать это, заметим прежде всего, что $\gamma' \neq \emptyset$, так как $X \in \gamma'$ (если $X = F_0 \cup H$, то $H = X$). Пусть теперь $F \cup F' \in \gamma'$, тогда $F \cup F' \in \gamma$, и потому либо $F \in \gamma$, либо $F' \in \gamma$. Пусть для определенности $F \in \gamma$. Если

не найдется такого замкнутого в X множества $H \in \gamma$, что $F \subset F_0 \cup H$, то $F \in \gamma'$, если же такое множество H найдется, то из $F_0 \cup H \cup F \in \gamma$ и $F_0 \cup (H \cup F) \in \gamma'$ следует $H \cup F \in \gamma$, а так как $H \in \gamma$, то $F \in \gamma$.

Заметим теперь, что если $F' \subset F_0 \cup H'$ и $H' \in \gamma$, то $F \cup F' \subset F_0 \cup H \cup H'$ и $H \cup H' \in \gamma$, и мы получили бы противоречие условию $F \cup F' \in \gamma'$. Поэтому такого множества H' не существует и $F' \in \gamma$.

Если, с другой стороны, множество F принадлежит γ' , то для любого замкнутого в X множества F' включение $F \cup F' \subset F_0 \cup H$ ($H \in \gamma$) не может иметь места (в противном случае мы имели бы $F \subset F \cup F' \subset F_0 \cup H$ и $H \in \gamma$, что противоречит условию $F \in \gamma'$), и потому $F \cup F' \in \gamma'$.

Тем самым доказано, что γ' действительно является кофильтром. Беря в качестве \tilde{X} множество кофильтров, состоящее из одного кофильтра γ' , мы получаем одноточечное расширение X' пространства X . Так как γ' содержится в γ , а система γ является системой σ -смежности для любого отношения смежности σ на X , то пространство X' не содержится ни в каком σ -расширении пространства X и потому не является его ρ -расширением (соответствующее утверждение в [4] неверно). Взяв затем в качестве X множество $(0, 1]$ с естественной топологией, а в качестве системы γ произвольную максимальную центрированную систему, содержащую множество $F_0 = \left\{ \frac{1}{n} \right\}_1^\infty$, мы легко

убедимся в том, что построенное нами одноточечное расширение X' принадлежит классу T_2 . Чтобы не возвращаться вновь к этому вопросу, докажем сразу, что в классе T_3 имеет место другая ситуация, а именно оказывается справедливым следующее.

Теорема 6. *Произвольное регулярное расширение пространства X в классе T_3 эквивалентно некоторому его ρ -расширению.*

Пусть $X' \in T_3$ — произвольное регулярное расширение пространства X и $\rho = \rho(X)$ — равномерная структура на X , состоящая из всех открытых покрытий пространства X , продолжимых до открытых покрытий пространства X' . Тогда $\sigma = \sigma(\rho)$ является таким отношением смежности на X , что $\sigma(F_1, F_2, \dots, F_n)$ имеет место тогда и только тогда, когда $\bigcap_{i=1}^n \bar{F}_i^{X'} \neq \emptyset$, а расширение ρX является максимальным под-

пространством пространства σX , на которое продолжимы все покрытия из ρ , и состоит из пространства X и всех исчезающих максимальных систем σ -смежности γ с $S\gamma \in \rho$. Докажем, что расширения X' и ρX пространства X эквивалентны. Пусть $x \in X' \setminus X$ и $\gamma_x = \{F \mid x \in \bar{F}^{X'}\}$. Система γ является очевидно системой σ -смежности. Более того, γ является максимальной системой σ -смежности, так как если замкнутое в X множество F_0 таково, что имеет место $\sigma(F_0, F_1, \dots, F_n)$ для любых F_1, F_2, \dots, F_n , принадлежащих γ , то $F_0 \cap (\bar{U}^{X'} \cap X) \neq \emptyset$ для любого открытого в X множества U , содержащего точку x (это следует из того, что $\bar{U}^{X'} \cap X \in \gamma_x$), откуда, так как $X' \in T_3$, имеем $F_0 \cap U \neq \emptyset$, т. е. $x \in \bar{F}_0^{X'}$ и $F_0 \in \gamma$. Таким образом, определено отображение $X' \rightarrow \sigma X$, тождественное на X , являющееся очевидно эквивалентностью X' и ρX как расширений пространства X .

В заключение обратимся к регулярным H -замкнутым расширениям пространства класса T_2 . С этой точки зрения представляет интерес следующее утверждение.

Теорема 7. Операция регуляризации расширений не выводит из класса T_2 .

Пусть X' — произвольное хаусдорфово расширение пространства X , x, y — произвольные точки в X' , U_x, U_y — открытые множества, содержащие точки x, y соответственно, $U_x \cap U_y = \emptyset$. Тогда

$$\begin{aligned} \overline{CC(U_x \cap X)^{X'}} \cap \overline{CC(U_y \cap X)^{X'}} &= C(\overline{CC(U_x \cap X)^{X'}} \cup \overline{CC(U_y \cap X)^{X'}}) = \\ &= \overline{CC(U_x \cap U_y \cap X)^{X'}} = \emptyset. \end{aligned}$$

Кроме того, $U_x \cap C_X(U_x \cap X) = \emptyset$, откуда $x \in \overline{CC(U_x \cap X)^{X'}}$ и $x \in \overline{CC(U_x \cap X)^{X'}}$. Аналогично $y \in \overline{CC(U_y \cap X)^{X'}}$.

Таким образом, множества $\overline{CC(U_x \cap X)^{X'}}$ и $\overline{CC(U_y \cap X)^{X'}}$ отделяют точки x, y в регуляризации расширения X' пространства X .

Из теоремы 7 непосредственно следует

Теорема 8. Для любого пространства $X \in T_2$ существует регулярное H -замкнутое расширение. Любое H -замкнутое расширение пространства X является искажением некоторого его регулярного H -замкнутого расширения.

Произвольное регулярное H -замкнутое расширение X' пространства X определяется равномерной структурой $\rho = \rho(X')$, состоящей из всех открытых покрытий пространства X , продолжимых до открытых покрытий пространства X' . Так как X' является H -замкнутым пространством, то эта структура ρ обладает следующим свойством H . В любом $s \in \rho$ найдутся

такие множества G_1, G_2, \dots, G_n , что $X = \bigcup_{i=1}^n \overline{G_i^X}$. В частности, на X су-

ществует максимальная равномерная структура ρ_0 , обладающая свойством H . Нетрудно заметить, что $\rho_0 X$ является H -замкнутым расширением пространства X (в действительности это стоновское расширение, получаемое в [1] присоединением к X всех максимальных централизованных систем α открытых в X множеств с $\bigcap_{G \in \alpha} \overline{G^X} = \emptyset$). Это расширение

оказывается максимальным среди регулярных H -замкнутых расширений пространства X . Действительно, пусть X' — произвольное регулярное H -замкнутое расширение. Можно считать, что X' получается присоединением к X некоторых централизованных систем β открытых в X множеств, для которых $\bigcap_{G \in \beta} \overline{G^X} = \emptyset$. Пусть β — некоторая такая система

и α — максимальная централизованная система открытых в X множеств, содержащая систему β ($\beta \subset \alpha$). Положим $\varphi(\alpha) = \beta$. Отображение φ будет определено однозначно, так как если $\beta' \in X'$ и $\beta'' \in X'$, то в силу $X' \in T_2$ система $\beta' \cup \beta''$ не является централизованной системой. Кроме того, так как X' является H -замкнутым пространством, то для любой системы $\alpha \in \rho_0 X$ найдется $\beta \in \bigcap_{G \in \alpha} \overline{G^X}$, $\beta \subset \alpha$, т. е. $\varphi(\alpha) = \beta$. Положив

$\varphi(x) = x$, для $x \in X$ мы получаем в конечном счете отображение $\varphi: \rho_0 X \rightarrow X'$, являющееся, как нетрудно видеть, непрерывным отображением. Тем самым мы получаем следующее утверждение.

Теорема 9. Расширение $\rho_0 X$ является максимальным среди всех регулярных H -замкнутых расширений пространства X .

В заключение заметим, что в классе T_3 любое расширение будет регулярным расширением (см. [2]), и поэтому теория регулярных расширений совпадает на T_3 с теорией произвольных расширений.

ЛИТЕРАТУРА

1. Stone M. H. Trans. Amer. Math. Soc., 41, 375, 1934.
2. Čech E., Novák J. Čas. pěst. mat. fys., 72, 7, 1947.
3. Иванова В. М., Иванов А. А. Изв. АН СССР, сер. матем., 23, 613, 1959.
4. Иванов А. А. ДАН СССР, 128, № 1, 1959.

Поступило в редакцию 24.VII 1965

Л. Ф. ШУМ

**ОБ ОДНОМ СПОСОБЕ РЕШЕНИЯ ТЕЛЕГРАФНОГО УРАВНЕНИЯ
 С РАЗРЫВНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ**

Как известно, распространение электромагнитных волн вдоль линии, состоящей из n участков с различными электрическими параметрами, описывается системой телеграфных уравнений с разрывными коэффициентами:

$$\begin{aligned} -\frac{\partial u_j}{\partial x} &= R_j i_j + L_j \frac{\partial i_j}{\partial t} + h_{j1}(x, t), \\ -\frac{\partial i_j}{\partial x} &= G_j u_j + C_j \frac{\partial u_j}{\partial t} + h_{j2}(x, t), \end{aligned} \quad (1)$$

$$x \in S_j, \quad S_j = (x_{j-1}, x_j), \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b, \\ t > 0.$$

Здесь $u_j(x, t)$, $i_j(x, t)$ — искомые функции, выражающие напряжение и ток на S_j ; R_j , L_j , G_j , C_j — неотрицательные постоянные параметры на S_j , а $h_{j1}(x, t)$, $h_{j2}(x, t)$ — заданные функции, характеризующие внешние электромагнитные воздействия.

Начальные условия, выражающие значение напряжения и тока на S_j в начальный момент времени, имеют вид:

$$u_j(x, 0) = \varphi_j(x), \quad i_j(x, 0) = \psi_j(x), \quad x \in S_j. \quad (2)$$

Граничные условия задаются в виде некоторых линейных дифференциальных соотношений, которые можно составить на основании законов Кирхгофа. Так, если к линии с приемно-передающими устройствами на концах подключено напряжение $u_0(t)$, то граничные условия будут иметь вид [9, 13]:

$$D_1 \left(\frac{\partial}{\partial t} \right) u_1(a, t) + D_2 \left(\frac{\partial}{\partial t} \right) i_1(a, t) = D_0 \left(\frac{\partial}{\partial t} \right) u_0(t), \quad (3)$$

$$D_3 \left(\frac{\partial}{\partial t} \right) u_n(b, t) - D_4 \left(\frac{\partial}{\partial t} \right) i_n(b, t) = 0, \quad (4)$$

где
$$D_v \left(\frac{\partial}{\partial t} \right) = \sum_{k=0}^{n_v} d_{vk} \frac{\partial^k}{\partial t^k}, \quad v = 0, 1, 2, 3, 4;$$

d_{vk} — некоторые постоянные параметры, характеризующие приемно-передающие устройства. Кроме того, предположим, что на концах при $t = 0$ выполняются условия:

$$\frac{d^m u_k(a, 0)}{dt^m} = U_k^{(m)} (k = 0, 1; m = 0, 1, \dots, m_k),$$

$$\frac{d^m i_1(a, 0)}{dt^m} = U_2^{(m)} (m = 0, 1, \dots, m_2),$$

$$\frac{d^m u_n(b, 0)}{dt^m} = U_3^{(m)} (m = 0, 1, \dots, m_3),$$

$$\frac{d^m i_n(b, 0)}{dt^m} = U_4^{(m)} (m = 0, 1, \dots, m_4).$$
(5)

Здесь m_v — числа на единицу меньше степеней соответствующих многочленов $D_v(\partial/\partial t)$, а $U_v^{(m)}$ ($v = 0, 1, 2, 3, 4$) — заданные постоянные, которые находятся из физического состояния приемно-передающих устройств в момент $t = 0$.

Условия сопряжения, выражающие условия непрерывности напряжения и тока в точках соединения участков с различными параметрами, имеют вид:

$$u_j(x, t)|_{x=x_j-0} = u_{j+1}(x, t)|_{x=x_j+0},$$

$$i_j(x, t)|_{x=x_j-0} = i_{j+1}(x, t)|_{x=x_j+0} \quad (j = 1, 2, \dots, n-1).$$
(6)

В случае бесконечной линии вместо (3), (4) имеем:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} u_1 = 0, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} i_1 = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} u_n = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} i_n = 0.$$
(7)

Интегрированию системы (1) для случая $n = 2$ и $h_{jk} = 0$ ($j, k = 1, 2$) посвящен ряд работ [3, 8, 9, 11, 12]. В работе [3] предлагается метод численного интегрирования телеграфного уравнения при условиях (2), (6) и граничных условиях $u_1(a, t) = E_1(t)$, $U_2(b, t) = E_2(t)$. В работе [8] исследуется возможность применения преобразования Лапласа к интегрированию системы (1) при нулевых начальных условиях, а в работе [9] рассматривается более сложный случай пучка проводов различных длин. В работе [11] система (1) решена при помощи преобразования Лапласа для полубесконечной линии при $R_1 = 0$, $L_2 = 0$, $G_1 = G_2 = 0$, $\Phi_j = \Psi_j = 0$ ($j = 1, 2$). Наконец, в работе [12] при помощи преобразования Лапласа решено уравнение, к которому приводится система (1) для бесконечной линии, когда в условия сопряжения не входит производная по времени. В настоящей работе сформулированная ранее задача (1) — (7) решается при помощи преобразования Лапласа с использованием клеточной функции Грина [5]. Для любого n решение задачи (1) — (7) получено в виде контурных интегралов. Для $n = 2$ контурные интегралы удается выразить через известные специальные функции. Исследование полученного решения показывает, что оно носит характер бегущих волн.

1. Линия конечной длины. Для решения задачи (1) — (6) воспользуемся преобразованием Лапласа. Обозначив $L_t\{u_j(x, t)\} = \bar{u}_j(x, p)$, $L_t\{u_0(t)\} = \bar{u}_0(p)$, $L_t\{i_j(x, t)\} = \bar{i}_j(x, p)$, $L_t\{h_{jk}(x, t)\} = \bar{h}_{jk}(x, p)$ и исключив \bar{i}_j , получим вместо (1) — (6) следующую задачу:

$$L_{ix}(\bar{u}_j) \equiv \frac{d^2 \bar{u}_j}{dx^2} - \gamma_j^2 \bar{u}_j = -\bar{\Phi}_j(x, p) \quad (j = 1, 2, \dots, n),$$
(8)

$$\bar{u}_j - \bar{u}_{j+1}|_{x=x_j} = 0, \quad \mu_{j+1} \frac{d\bar{u}_j}{dx} - \mu_j \frac{d\bar{u}_{j+1}}{dx} \Big|_{x=x_j} = \bar{F}_j(\rho) \quad (j = 1, 2, \dots, n-1), \quad (9)$$

$$l_{1x}(\bar{u}_1) = \alpha_a \bar{u}_1 + \beta_a \frac{d\bar{u}_1}{dx} \Big|_{x=a} = \bar{F}_0(\rho), \quad l_{2x}(\bar{u}_n) = \alpha_b \bar{u}_n + \beta_b \frac{d\bar{u}_n}{dx} \Big|_{x=b} = \bar{F}_n(\rho). \quad (10)$$

Здесь $\gamma_j = \sqrt{(R_j + \rho L_j)(G_{j+1} + \rho C_j)}$; $\mu_j = R_j + \rho L_j$;
 $\alpha_a = \mu_1 D_1(\rho)$; $\beta_a = -D_2(\rho)$; $\alpha_b = \mu_n D_3(\rho)$; $\beta_b = D_4(\rho)$;

$$\bar{F}_j(\rho) = \mu_{j+1}(L_j \psi_j - \bar{h}_{j1}) - \mu_j(L_{j+1} \psi_{j+1} - \bar{h}_{j+1,1})|_{x=x_j} \quad (j = 1, 2, \dots, n-1); \quad (11)$$

$$\bar{F}_0(\rho) = \mu_1[D_0(\rho)u_0(\rho) + A_1 + A_2 - A_0] - D_2(\rho)(L_1 \psi_1 - \bar{h}_{11})|_{x=a};$$

$$F_n(\rho) = D_4(\rho)(L_n \psi_n - \bar{h}_n) + (A_3 - A_4)\mu_n|_{x=b},$$

где $D_\nu(\rho)$ получается из $D_\nu(\partial/\partial t)$ заменой $\partial^k/\partial t^k$ на ρ^k ,

$$A_\nu(\rho) = \sum_{k=0}^{\nu} d_{\nu k} \sum_{s=0}^{k-1} \rho^s U_\nu^{(k-s-1)} \quad (\nu = 0, 1, 2, 3, 4),$$

$$\bar{\Phi}_j(x, \rho) = \hat{\psi}_j(x) + \rho \hat{\phi}_j(x) + \hat{h}_{j1}(x, \rho) + \rho \hat{h}_{j2}(x, \rho),$$

где

$$\hat{\psi}_j(x, \rho) = R_j C_j \varphi_j(x) - L_j \frac{d\psi_j}{dx}; \quad \hat{\phi}_j(x) = L_j C_j \varphi_j(x); \quad (12)$$

$$\hat{h}_{j1}(x, \rho) = \frac{d\bar{h}_{j1}}{dx} - R_j \bar{h}_{j2}(x, \rho); \quad \hat{h}_{j2} = -L_j \bar{h}_{j2}(x, \rho).$$

Известно [7], что решение задачи (8) — (10) при $\bar{F}_k \neq 0$ ($k = 0, 1, \dots, n$) может быть записано в виде

$$\bar{u}(x, \rho) = \int_a^b \bar{G}(x, \xi, \rho) \bar{\Phi}(\xi, \rho) d\xi. \quad (13)$$

Здесь

$$\bar{u}(x, \rho) = \bar{u}_j(x, \rho) \quad \text{при } x \in S_j; \quad \bar{\Phi}(\xi, \rho) = \bar{\Phi}_k(\xi, \rho) \quad \text{при } \xi \in S_k \quad (j, k = 1, 2, \dots, n);$$

$\bar{G}(x, \xi, \rho)$ — функция Грина задачи (8) — (10). Чтобы удовлетворить условиям сопряжения в точках $x = x_j$ ($j = 1, 2, \dots, n-1$) и обычным условиям для функции Грина при $x = \xi$, будем считать [5] функцию Грина определенной в различных областях плоскости (x, ξ) так:

$$\bar{G}(x, \xi, \rho) = \bar{G}_{jk}(x, \xi, \rho) \quad (j \neq k, \quad j, k = 1, 2, \dots, n) \quad \text{при } x \in S_j, \quad \xi \in S_k, \quad (14)$$

$$\bar{G}(x, \xi, \rho) = \bar{G}_{jj}(x, \xi, \rho) = \begin{cases} \bar{G}_j^-(x, \xi, \rho) & \text{при } \xi < x \\ \bar{G}_j^+(x, \xi, \rho) & \text{при } \xi > x \end{cases} \quad (j = 1, 2, \dots, n).$$

Тогда формула (13) запишется

$$\bar{u}_j(x, \rho) = \sum_{k=1}^n \sum_{x_{k-1}}^{x_k} \bar{G}_{jk}(x, \xi, \rho) \bar{\Phi}_k(\xi, \rho) d\xi. \quad (15)$$

Таким образом, решение задачи (8) — (10) сводится к нахождению функции Грина $\bar{G}(x, \xi, \rho)$, которую, следуя работе [5], будем называть клеточной функцией Грина. Подставив (15) в (8) — (10), при $\bar{F}_j(\rho) = 0$ ($j = 0, 1, \dots, n$) получим следующие условия для определения функции $\bar{G}(x, \xi, \rho)$:

$$L_{jx}(\bar{G}_{jk}) = 0 \quad (j, k = 1, 2, \dots, n), \quad \bar{G}_j - \bar{G}_j^*|_{\xi=x} = 0, \quad (16)$$

$$\left. \frac{\partial \bar{G}_j}{\partial x} - \frac{\partial \bar{G}_j^*}{\partial x} \right|_{\xi=x} = -1,$$

$$l_{1x}(\bar{G}_{1k}) = 0, \quad l_{2x}(\bar{G}_{nk}) = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, n), \quad (17)$$

$$\bar{G}_{jk}|_{x=x_j} = \bar{G}_{j+1,k}|_{x=x_j}, \quad \nu_{j+1} \frac{\partial \bar{G}_{jk}}{\partial x} \Big|_{x=x_j} = \nu_j \frac{\partial \bar{G}_{j+1,k}}{\partial x} \Big|_{x=x_j} \quad (j, k = 1, 2, \dots, n). \quad (18)$$

Функция $\bar{G}(x, \xi, \rho)$, удовлетворяющая этим условиям, имеет вид

$$\bar{G}_{jk}(x, \xi, \rho) = \frac{\Delta_{jk}(x, \xi, \rho)}{\Delta(\rho)} \quad (j, k = 1, 2, \dots, n). \quad (19)$$

Здесь $\Delta(\rho)$ и $\Delta_{jk}(x, \xi, \rho)$ — блочные определители вида

$$\Delta(\rho) = \begin{vmatrix} a_0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{11} & a_{12} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{vmatrix}, \quad (20)$$

где $a_0 = [l_{1x}(e^{\gamma_1 x}) l_{1x}(e^{-\gamma_1 x})]$; $a_n = [l_{2x}(e^{\gamma_n x}) l_{2x}(e^{-\gamma_n x})]$;

$$a_{ii} = \begin{bmatrix} e^{\gamma_i x_i} & e^{-\gamma_i x_i} \\ z_{i+1} e^{\gamma_i x_i} & -z_{i+1} e^{-\gamma_i x_i} \end{bmatrix}; \quad a_{i, i+1} = \begin{bmatrix} -e^{\gamma_i x_i} & -e^{-\gamma_i x_i} \\ -z_i e^{\gamma_i x_i} & z_i e^{-\gamma_i x_i} \end{bmatrix} \quad (i = 1, 2, \dots, n-1); \quad (21)$$

$$a_{ik} = 0 \quad (k \neq i, i+1); \quad z_i = \sqrt{\frac{R_i + \rho L_i}{G_i + \rho C_i}} \quad (i = 1, 2, \dots, n);$$

$$\Delta_{jk}(\rho) = \begin{vmatrix} g_{jk} & b_1 & \dots & b_j & \dots & b_n \\ C_0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ C_1 & & & \Delta(\rho) & & \\ \vdots & & & & & \\ C_n & & & & & \end{vmatrix}. \quad (22)$$

В этом определителе $b_i = [0 \ 0]$ ($i \neq j$); $b_j = [e^{\gamma_j x} e^{-\gamma_j x}]$;

$$C_0 = \begin{bmatrix} 0, & k \neq 1 \\ l_{1x}(g_1^*), & k = 1 \end{bmatrix}; \quad C_n = \begin{bmatrix} 0, & k \neq n \\ l_{2x}(g_n), & k = n \end{bmatrix}; \quad C_j = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (j \neq k, k-1);$$

$$C_{k-1} = \begin{bmatrix} -g_k^*(x_{k-1}) \\ -z_{k-1} g_k^*(x_{k-1}) \end{bmatrix} \quad (k = 2, \dots, n);$$

$$C_k = \begin{bmatrix} g_k(x_k) \\ -z_{k+1} g_k(x_k) \end{bmatrix} \quad (k = 1, 2, \dots, n-1); \quad (23)$$

$$g_{jk} = \begin{cases} 0, & j \neq k \\ g_{jj}, & j = k \end{cases}; \quad g_{jj} = \begin{cases} g_j(x, \xi, p), & \xi < x \\ g_j^*(x, \xi, p), & \xi > x \end{cases};$$

$$g_j(x, \xi, p) = \frac{1}{2\gamma_j} e^{-\gamma_j(x-\xi)};$$

$$g_j^*(x, \xi, p) = \frac{1}{2\gamma_j} e^{-\gamma_j(\xi-x)} \quad (j, k = 1, 2, \dots, n). \quad (24)$$

Решение задачи (8) — (10) при $\bar{F}_k \neq 0$ ($k = 0, 1, \dots, n$) находим, интегрируя два раза по частям правую часть тождества

$$\sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} \bar{G}_{jk} \bar{\Phi}_k d\xi = - \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} \bar{G}_{jk} L_{k\xi}(\bar{u}_k) d\xi \quad (25)$$

и используя свойства функций \bar{G}_{jk} по ξ :

$$L_{k\xi}(\bar{G}_{jk}) = 0, \quad \bar{G}_j - \bar{G}_j^*|_{\xi=x} = 0, \quad \frac{\partial \bar{G}_j}{\partial \xi} - \frac{\partial \bar{G}_j^*}{\partial \xi} \Big|_{\xi=x} = 1, \quad (26)$$

$$l_{1\xi}(\bar{G}_{j1}) = 0, \quad l_{2\xi}(\bar{G}_{jn}) = 0, \quad (27)$$

$$\mu_k \bar{G}_{jk} |_{\xi=x_k} = \mu_{k+1} \bar{G}_{j, k+1} |_{\xi=x_k},$$

$$\frac{\partial \bar{G}_{jk}}{\partial \xi} \Big|_{\xi=x_k} = \frac{\partial \bar{G}_{j, k+1}}{\partial \xi} \Big|_{\xi=x_k} \quad (j, k = 1, 2, \dots, n). \quad (28)$$

Зная $\bar{u}_j(x, p)$, легко находим $\bar{i}_j(x, p)$ и, применяя к функциям $\bar{u}_j(x, p)$, $\bar{i}_j(x, p)$ обратное преобразование Лапласа, получаем решение задачи (1) — (6) в виде:

$$\begin{aligned} u_j(x, t) = & \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{pt} dp \left\{ \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} \bar{G}_{jk}(x, \xi, p) \bar{\Phi}_k(\xi, p) d\xi + \right. \\ & + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\mu_{k+1}} \bar{G}_{jk}(x, x_k, p) \bar{F}_k(p) + \frac{1}{\beta_b} \bar{G}_{jn}(x, b, p) \bar{F}_n(p) - \\ & \left. - \frac{1}{\beta_a} \bar{G}_{j1}(x, a, p) \bar{F}_0(p) \right\}, \quad (29) \end{aligned}$$

$$i_j(x, t) = \psi_j(x) e^{-\frac{R_j}{L_j} t} - \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{e^{pt}}{\mu_j} \left[\bar{h}_{j1}(x, p) + \frac{du_j(x, p)}{dx} \right] dp, \quad (30)$$

где a выбирается так, чтобы все особенности \bar{u}_j , \bar{i}_j находились слева от прямой $\text{Re } p = a$.

Проведем исследование полученного решения. Для чего составим асимптотическое представление элементов определителей (20) и (22),

пользуясь теоремой Тамаркина [10] об асимптотическом представлении фундаментальной системы частных интегралов однородного дифференциального уравнения, содержащего параметр. Преобразовав далее эти определители так, чтобы их элементы содержали экспоненциальные множители с неположительной вещественной частью, получаем асимптотическое представление функции Грина. Так, например, для \bar{G}_{1n} имеем:

$$\bar{G}_{1n}(x, \xi, p) = \sum_{l=1}^6 M_l(p) e^{-\omega_l},$$

$$\omega_1 = \frac{b - \xi}{v_n} + \frac{x - a}{v_1} +$$

$$+ \sum_{k=1}^n \frac{x_k - x_{k-1}}{v_k} \text{ и т. д.}, \quad (31)$$

где $v_i = 1/\sqrt{L_i C_i}$ — скорость распространения колебаний на участке S_i ; $M_l(p) = \frac{\Delta_{jk}^{(l)}(p)}{\Delta(p)}$, а $\Delta_{jk}^{(l)}(p)$ — соответствующие алгебраические дополнения определителя (22).

Это представление справедливо вне ε -окрестности особых точек функции Грина, относительно которых можно заметить следующее. Все точки ветвления функции Грина находятся в конечной части комплексной p -плоскости, т. е. существует окружность $|p| = R_0$, содержащая внутри себя эти точки. Полюсами функции Грина являются корни уравнения $\Delta(p) = 0$. Можно показать [10], что это уравнение имеет счетное множество нулей p_ν , находящихся в полосе ограниченной ширины, симметричной относительно мнимой оси. Кроме того, если p_ν занумеровать в порядке возрастания их модулей, то для $|p_\nu|$ можно записать следующее асимптотическое представление:

$$|p_\nu| = \frac{\nu\pi}{\sum_{k=1}^n (x_k - x_{k-1})/v_k} \left(1 + O\left(\frac{1}{p}\right) \right) \quad (\nu = 1, 2, 3, \dots). \quad (32)$$

Следовательно, можно провести прямую $\operatorname{Re} p = a$ такую, что все особые точки будут находиться слева от этой прямой и последовательность концентрических окружностей, не проходящих через особые точки, $|p| = R_\nu$ ($\nu = 1, 2, 3, \dots$), $R_\nu \neq |p_\nu|$, $R_\nu > R_0$ (рис. 1). Тогда представление (31) будет справедливо на $ABCA$, $ADCA$. При этом на окружности $|p| = R_\nu$, $M_l(p)$ удовлетворяет условиям леммы Жордана. Последнее утверждение выполняется всегда при $n_1 \neq n_2$, $n_3 \neq n_4$. Если же $n_1 = n_2$, $n_3 = n_4$, то должно быть $\sqrt{L_1} d_{1n_1} \neq \pm \sqrt{C_1} d_{2n_1}$; $\sqrt{L_n} d_{3n_3} \neq \pm \sqrt{C_n} d_{4n_3}$, см. (3), (4).

Пусть для определенности точка наблюдения $x \in S_1$, а точка, в которой находится мгновенный точечный источник колебаний, $\xi \in S_n$, тогда $\bar{G} = \bar{G}_{1n}$. Выделив в первой сумме выражения (29) слагаемое, содержащее \bar{G}_{1n} , и подставив в него правую часть (31), получим

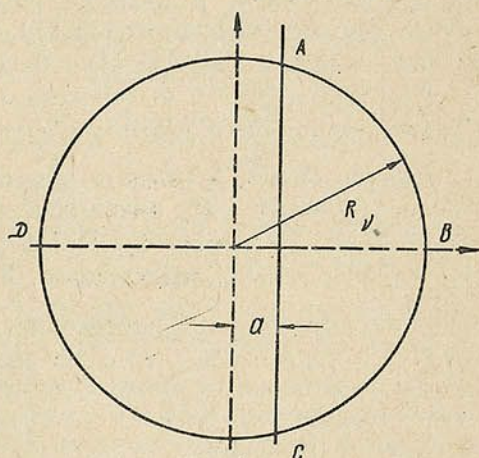


Рис. 1 -

$$\frac{1}{2\pi i} \sum_{l=1}^6 \int_{\gamma} M_l(p) \bar{\Phi}_n(\xi, p) e^{p(t-\omega_l)} dp = \sum_{l=1}^6 u_{ln}^{(l)}(\gamma). \quad (33)$$

Исследуем первое слагаемое (33) $u_{ln}^{(1)}(\gamma)$, где в скобках указывается контур интегрирования. Если $t < \omega_1$, то интегрирование следует вести по контуру $ABCA$. В области, ограниченной этим контуром, подынтегральная функция интеграла $u_{ln}^{(1)}$ не имеет особенностей. Следовательно, интеграл $u_{ln}^{(1)}(ABCA) = 0$ для любого R_ν . Но $u_{ln}^{(1)}(ABCA) = u_{ln}^{(1)}(ABC) + u_{ln}^{(1)}(CA)$, и, согласно лемме, $u_{ln}^{(1)}(ABC) = 0$ при $R_\nu \rightarrow \infty$. Следовательно, $\lim_{R_\nu \rightarrow \infty} u_{ln}^{(1)}(CA) = 0$. Если $t > \omega_1$, то интегрирование ведется по контуру $ADCA$. В области, ограниченной этим контуром, подынтегральная функция в $u_{ln}^{(1)}$ имеет особенности. Поэтому $u_{ln}^{(1)}(ADCA)$ отличен от нуля. При этом $u_{ln}^{(1)}(ADCA) = u_{ln}^{(1)}(ADC) + u_{ln}^{(1)}(CA)$. Но по лемме $\lim_{R_\nu \rightarrow \infty} u_{ln}^{(1)}(ADC) = 0$. Следовательно, $\lim_{R_\nu \rightarrow \infty} u_{ln}^{(1)}(CA) \neq 0$.

Таким образом, $u_{ln}^{(1)}$ определяет бегущую волну, которая пришла в точку x только при $t > \omega_1$. Из выражения ω_1 видно, что эта волна, пройдя расстояние от точки ξ до точки b , отражается от точки b , пробегает все участки S_k ($k = n, n-1, \dots, 2, 1$). И, наконец, отразившись от точки a , попадает в точку x . Из сказанного выше следует также, что $u_{ln}^{(1)}$ имеет разрыв, соответствующий фронту волны, который распространяется на S_1 со скоростью v_1 . Если $M_1(p)$ разложить в ряд по экспоненциальным функциям, то получим вторичные волны на S_1 , которые получаются из рассмотренной выше волны при многократном ее отражении от граничных точек и преломлении ее в соседние участки. Аналогично можно получить физический смысл остальных слагаемых выражения (33).

Итак, мы приходим к следующему выводу. Клеточная функция Грина $\bar{G}_{jk}(x, \xi, p)$ есть изображение по Лапласу бегущих волн, которые распространяются на участке S_j и обусловлены точечными источниками колебаний, расположенными на участке S_k с плотностью $\bar{\Phi}_k(\xi, p)$. Таким образом, применение клеточной функции Грина дает возможность получить решение телеграфного уравнения в форме бегущих волн (падающих, отраженных, преломленных). Решение телеграфного уравнения в такой форме обычно дает метод Римана [14, 15]. Но для составной линии построение функции Римана весьма затруднительно. А если на одном из участков индуктивность L_l равна нулю, то телеграфное уравнение на этом участке превращается в общее уравнение теплопроводности, и для такой составной линии метод Римана уже принципиально не применим, в то время как метод [5], использованный автором в этой статье, переносится без всяких изменений на случай задачи сопряжения уравнений параболического и гиперболического типов.

2. Бесконечная линия. Распространение электромагнитных колебаний вдоль бесконечной линии описывается системой (1) при условиях (2), (6), (7). Применив к этой задаче преобразование Лапласа и исключив $\bar{i}_j(x, p)$, получим уже известные нам равенства (8), (9), а вместо (10) будем иметь:

$$\left. \frac{d^l \bar{u}_1}{dx^l} \right|_{x=-\infty} = 0, \quad \left. \frac{d^l \bar{u}_n}{dx^l} \right|_{x=+\infty} = 0 \quad (l = 0, 1). \quad (34)$$

При этом функции $\bar{F}_j(p)$ и $\bar{\Phi}_j(x, p)$ ($j = 1, 2, \dots, n$) из (8), (9) по-прежнему определяются формулами (11), (12). Решение задачи (8), (9), (34) при $\bar{F}_j(p) = 0$ ищем в виде

$$\bar{u}_j(x, p) = \int_{-\infty}^{\infty} \bar{G}(x, \xi, p) \bar{\Phi}(\xi, p) d\xi. \quad (35)$$

Аналогично предыдущему для определения клеточной функции Грина $\bar{G}(x, \xi, p)$ получаем условия (16), (18), а вместо (17) имеем:

$$\left. \frac{d^l \bar{G}_{1k}}{dx^l} \right|_{x=-\infty} = 0, \quad \left. \frac{d^l \bar{G}_{kn}}{dx^l} \right|_{x=+\infty} = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, n; l = 0, 1). \quad (36)$$

Из этих условий следует, что функция $\bar{G}(x, \xi, p)$ определяется равенствами (19)–(24), если только в (21), (23) в качестве a_0, a_n, C_0, C_n взять $a_0 = [0 \ 1], a_n = [1 \ 0], C_0 = 0, C_n = 0$. Далее аналогично предыдущему получаем решение задачи (1), (2), (6), (7). Оно совпадает с (29), (30), если там положить два последних слагаемых равными нулю в соответствии с (36).

3. Представление контурных интегралов в случае $n=2$ через специальные функции. Рассмотрим решение системы (1) при условиях (2), (6), (7) для случая $n=2$. Прежде всего из (19)–(24) с учетом (35) получаем функцию Грина:

$$\begin{aligned} \bar{G}_i(x, \xi, p) &= \frac{1}{2\gamma_i} \left\{ e^{-\gamma_i v_i \eta_{i1}} + (-1)^j \frac{z_1 - z_2}{z_1 + z_2} e^{-\gamma_i v_i \eta_{i4}} \right\}, \\ \bar{G}_{jk}(x, \xi, p) &= \frac{z_i}{\gamma_k} \frac{1}{z_1 + z_2} e^{-\gamma_k v_k \eta_{k3}} e^{-\gamma_i v_i \eta_{i2}}, \end{aligned} \quad (37)$$

$$\bar{G}_i^*(x, \xi, p) = \bar{G}_i(\xi, x, p) \quad (i, k = 1, 2; i \neq k),$$

где

$$\begin{aligned} \gamma_i &= \sqrt{(R_i + pL_i)(G_i + pC_i)}; \quad z_i = \sqrt{\frac{R_i + pL_i}{G_i + pC_i}}; \quad v_i = \frac{1}{\sqrt{L_i C_i}}; \\ v_i \eta_{i1} &= x - \xi; \quad v_i \eta_{i2} = (-1)^j (x - x_1); \quad v_i \eta_{i3} = (-1)^j (\xi - x_1); \\ v_i \eta_{i4} &= (-1)^j (x + \xi - 2x_1). \end{aligned}$$

При отыскании оригиналов функций (37) будем пользоваться обозначением $\gamma_1 \gamma_2 \left(\frac{z_1}{z_2} - \frac{z_2}{z_1} \right) = Z(p)$ и следующими формулами:

$$\begin{aligned} \bar{N}_i(p) &= \frac{G_i + pC_i}{Z(p)} \doteq N_i(t), \quad \bar{P}_i(p) = \frac{\gamma_i}{Z(p)} \doteq P_i(t), \\ \bar{K}_i(p, \eta) &= \frac{1}{2\gamma_i} e^{-\gamma_i v_i \eta} \doteq K(t, \eta) H(t - \eta), \end{aligned} \quad (38)$$

где вид функций $N_i(t), P_i(t), K_i(t, \eta)$ определяется соответственно формулами (1.33), (2.28), (3.144) [4]. Далее

$$\bar{N}_i^*(p, \eta) = \bar{N}_i(p) z_{3-1} e^{-\gamma_i v_{3-1} \eta} \doteq N_i^*(t, \eta) H(t - \eta),$$

$$\begin{aligned}\bar{P}_i^*(p, \eta) &\equiv \bar{P}_i(p) e^{-\eta v_3 - i \tau_3 - i} \doteq P_i^*(t, \eta) H(t - \eta), \\ \bar{K}_i(p, \eta) e^{-\xi v_3 - i \tau_3 - i} &\doteq K_i^*(t, \eta, \xi) H(t - \eta - \xi), \\ \bar{T}_i^*(p, \eta) e^{-\xi v_3 \tau_i} &\doteq T_i^*(t, \eta, \xi) H(t - \eta - \xi),\end{aligned}\quad (39)$$

где $\bar{T}_i^* = (\bar{N}_i^*$ или $\bar{P}_i^*)$, $i = 1, 2$.

Здесь $H(t)$ — единичная функция Хевисайда, а вид функций $N_i^*(t, \eta)$, $P_i^*(t, \eta)$, $K_i^*(t, \eta, \xi)$, $T_i^*(t, \eta, \xi)$ определяется формулами (8.6), (8.4) [13]. Тогда оригиналы функций (37) имеют вид:

$$\begin{aligned}G_i(x, \xi, t) &= K_i(t, \eta_{i1}) H(t - \eta_{i1}) + K_{ii}(t, \eta_{i1}) H(t - \eta_{i1}), \\ G_{ik}(x, \xi, t) &= K_{ik}(t, \eta_{k3}, \eta_{i2}) H(t - \eta_{k3} - \eta_{i2}), \\ G_i^*(x, \xi, t) &= G_i(\xi, x, t) \quad (i, k = 1, 2; \quad i \neq k),\end{aligned}\quad (40)$$

где

$$\begin{aligned}K_{ii}(t, \eta) &= K_i(t, \eta) + (-1)^i [N_{3-i}^*(t, \eta) - P_{3-i}^*(t, \eta)], \\ K_{ik}(t, \eta, \xi) &= 2K_k^*(t, \eta, \xi) - (-1)^i [N_i^{**}(t, \eta, \xi) - P_i^{**}(t, \eta, \xi)] \\ &\quad (i, k = 1, 2; \quad i \neq k).\end{aligned}\quad (41)$$

Записав на основании (29) решение рассматриваемой задачи, подставив сюда F_k из (11), применив теорему о свертке, теорему о дифференцировании оригинала и, наконец, преобразовав интегралы, содержащие единичную функцию Хевисайда, по формуле (31) работы [12] получим окончательное решение задачи. Так, например, $u_1(x, t)$ имеет вид

$$u_1(x, t) = u_1^{(1)}(x, t) + H\left(t + \frac{x - x_1}{v_1}\right) u_1^{(2)}(x, t) \quad (-\infty < x \leq x_1, \quad t > 0),$$

где $u_1^{(1)}$, $u_1^{(2)}$ выражаются через специальные функции (38), (39). При этом [12] $u_1^{(1)}$ представляет собой падающую волну, а $u_1^{(2)}$ волну, отраженную от точки x_1 , преломленную из второго участка в первый, и волну, обусловленную неоднородностью в точке x_1 . Контурные интегралы при $n = 2$ удается также преобразовать к специальным функциям и для того случая, когда на одном из участков индуктивность L_i ($i = 1$ или 2) равна нулю. Полученное при этом решение для участка S_i уже не имеет характера бегущих волн, а получается в присущей для уравнения теплопроводности форме интегралов Пуассона.

ЛИТЕРАТУРА

1. Барк А. С. и Кузнецов П. И. Таблицы цилиндрических функций от двух мнимых переменных. ВЦ АН СССР, 1962.
2. Бразма Н. А. Изв. АН ЛатвССР, 8, 1955, стр. 133—141.
3. Гаврилов А. Ф. Изв. военной эл.-техн. академии РККА, т. XI, Л., 1935.
4. Диткин В. А. и Кузнецов П. И. Справочник по операционному исчислению. ГИТТЛ, 1951.
5. Иванов А. В. Вестн. АН БССР, сер. физ.-техн., № 3, 1963.
6. Кузнецов П. И. и Стратонович Р. Л. Распространение электромагнитных волн в многопроводных системах. ВЦ АН СССР, 1958.
7. Наймарк М. А. Линейные дифференциальные операторы. ГИТТЛ, 1954, стр. 32.

8. Риекстыньш Э. Я. Уч. записки Латв. ин-та, т. VIII, в. 2, 1956.
9. Риекстыньш Э. Я. ПММ, т. XVI, в. 3, 1952.
10. Расулов М. Л. Метод контурного интеграла. М., 1964.
11. Уфлянд Я. С. ИФЖ, т. VII, № 1, 1964.
12. Шум Л. Ф. Весті АН БССР, сер. фіз.-тэхн., № 4, 1964.
13. Maiti M. and Golomb M. Journal of the Franklin Institute, 235, p. 41—73, 101—118, 1943.
14. Picard E. Bulletin de la Société mathém., 22, p. 2—8, 1894.
15. Teszner S. Revue générale de l'électricité, 45, p. 47—58, 87—95, 1939. Bulletin scientifique A. I. M., N 12, p. 399—414, 1939; N 1, p. 16—35, 1940.

Поступило в редакцию 26. VII 1965

Д. А. СУПРУНЕНКО

О ПРИМИТИВНЫХ РАЗРЕШИМЫХ ПОДГРУППАХ БЕСКОНЕЧНОЙ СИММЕТРИЧЕСКОЙ ГРУППЫ

Пусть X — произвольное непустое множество, а $S(X)$ — группа всех биективных отображений $f: X \rightarrow X$. В настоящей статье устанавливается условие примитивности разрешимой подгруппы $S(X)$ и условие сопряженности двух разрешимых примитивных подгрупп $S(X)$.

§ 1. Группа H автоморфизмов группы D называется неприводимой, если единичная подгруппа и группа D являются единственными H -допустимыми подгруппами группы D [1].

Пусть теперь F — регулярная подгруппа группы $S(X)$, т. е. F — транзитивная подгруппа с единичной стационарной подгруппой. Тогда, как известно, на множестве X можно определить такую групповую операцию „+“, что $\langle X, + \rangle$ окажется группой, а F образом левого регулярного представления ρ группы $\langle X, + \rangle$. Так как ниже нам понадобится регулярное представление ρ , то здесь выпишем связанные с ним формулы. Пусть o — фиксированная точка множества X . Зададим биективное отображение $\rho: X \rightarrow F$, положив для $a \in X$

$$\rho(a) = f_a \in F, \quad f_a(o) = a. \quad (1)$$

Групповую операцию „+“ на X зададим с помощью формулы

$$a + b = f_a f_b(o), \quad a, b \in X. \quad (2)$$

Тогда из (1) и (2) для любого $x \in X$ получаем

$$f_a(x) = a + x. \quad (3)$$

Следовательно, $\rho: X \rightarrow F$ — левое регулярное представление группы $\langle X, + \rangle$. Пусть теперь N_0 — группа всех автоморфизмов группы $\langle X, + \rangle$. Тогда, согласно известной теореме о голоморфе ([2], стр. 103), группа $N = N_0 F$ совпадает с нормализатором группы F в $S(X)$.

Пусть теперь Γ — подгруппа N , содержащая F . Тогда, как легко видеть,

$$\Gamma = \Gamma_0 F, \quad (4)$$

где Γ_0 — стационарная подгруппа группы Γ , оставляющая на месте нуль o группы $\langle X, + \rangle$. Так как N_0 — стационарная подгруппа группы N , то $\Gamma_0 = \Gamma \cap N_0$.

Теорема 1. Пусть Γ — подгруппа $S(X)$, содержащая регулярную группу F в качестве нормального делителя. Γ тогда и только тогда примитивна, когда ее стационарная подгруппа Γ_0 , оставляющая на месте нуль o группы $\langle X, + \rangle$, неприводима. В частности, нормализатор N регулярной группы F тогда и только тогда примитивен, когда F элементарна.

Доказательство. Пусть $\Gamma = \Gamma_0 F$ импримитивна. Тогда, согласно критерию импримитивности, Γ обладает такой истинной подгруппой U , что $U \supset \Gamma_0$, $U \neq \Gamma_0$. Для $u \in U$ можно написать $u = gf$, где $g \in \Gamma_0$, $f \in F$. Следовательно, $F_1 = U \cap F \neq (e)$, $F_1 \neq F$. Далее, для любого $g \in \Gamma_0$

$$gF_1g^{-1} = F_1. \quad (5)$$

Пусть теперь $X_1 = \rho^{-1}(F_1)$, где $\rho: X \rightarrow F$ — регулярное представление $\langle X, + \rangle$, определяемое формулой (1). Тогда для $x_1 \in X_1$ и $g \in \Gamma_0$ находим $g(x_1) = gf_{x_1}(o) = gf_{x_1}g^{-1}(o) = f_{x_2}(o) = x_2$, где f_{x_2} в силу формулы (5) принадлежит F_1 . Следовательно, $x_2 \in X_1$. Таким образом, $\langle X, + \rangle$ обладает Γ_0 -допустимой подгруппой $\langle X_1, + \rangle$.

Пусть теперь в $\langle X, + \rangle$ есть нетривиальная Γ_0 -допустимая подгруппа $\langle X_1, + \rangle$. Покажем импримитивность Γ . Рассмотрим $F_1 = \rho(X_1)$. Очевидно, $F_1 \neq (e)$, $F_1 \neq F$. Для $y \in X_1$ и $g \in \Gamma_0$, используя формулу (1), можно получить $gf_yg^{-1}(o) = gf_y(o) = g(y) = y_1 \in X_1$. Следовательно, $gf_yg^{-1} = f_{y_1} \in \rho(X_1) = F_1$. Отсюда $gF_1g^{-1} = F_1$. Тогда $V = F_1\Gamma_0 = \Gamma_0F_1$ — подгруппа группы Γ такая, что $V \neq \Gamma$, $V \neq \Gamma_0$, $V \supset \Gamma_0$. Согласно критерию импримитивности, Γ импримитивна. Теорема доказана.

Доказанную теорему можно сформулировать без привлечения группы $\langle X, + \rangle$. Пусть F — регулярная подгруппа группы $S(X)$, N — нормализатор F в $S(X)$, Γ — такая подгруппа $S(X)$, что $N \supset \Gamma \supset F$, а Γ_1 — любая стационарная подгруппа группы Γ . Пусть, далее, H — группа всех автоморфизмов F вида

$$f \rightarrow gifg^{-1}, \quad g_i \in \Gamma_1. \quad (6)$$

Теперь теорему 1 можно сформулировать так:

Группа Γ тогда и только тогда примитивна, когда H — неприводимая группа автоморфизмов группы F .

Пусть теперь G — транзитивная разрешимая подгруппа группы $S(X)$. Тогда G обладает отличным от единицы абелевым нормальным делителем F . Если G примитивна, то, согласно теореме о нормальных делителях транзитивных групп, F — транзитивная абелева группа. Очевидно, F регулярна. Отсюда и из теоремы 1 вытекает следующее условие примитивности.

Разрешимая подгруппа Γ группы $S(X)$ тогда и только тогда примитивна, когда Γ обладает регулярным абелевым нормальным делителем F и группа автоморфизмов H , определяемая стационарной подгруппой Γ_1 с помощью формулы (6), неприводима.

Замечание. Как легко проверить, примитивная группа не может обладать двумя отличными от единицы абелевыми нормальными делителями.

§ 2. Теорема 2. Пусть $F \neq (e)$ — коммутативная подгруппа $S(X)$, N — нормализатор F в $S(X)$, Γ и G — примитивные подгруппы группы N , содержащие F . Группы Γ и G тогда и только тогда сопряжены в $S(X)$, когда группы Γ_0 и G_0 сопряжены в N_0 , где Γ_0 , G_0 , N_0 — стационарные подгруппы групп Γ , G , N , оставляющие на месте одну и ту же точку o из X .

Доказательство. В силу примитивности Γ группа F регулярна. Следовательно,

$$N = N_0F, \quad \Gamma = \Gamma_0F, \quad G = G_0F. \quad (7)$$

Если в N_0 есть такой элемент v , что $v\Gamma_0v^{-1} = G_0$, то, согласно (7), находим $v\Gamma v^{-1} = v\Gamma_0Fv^{-1} = G_0F = G$. Следовательно, достаточность доказана. Пусть теперь в $S(X)$ есть такой элемент r , что

$$r\Gamma r^{-1} = G. \quad (8)$$

Докажем сопряженность Γ_0 и G_0 в N_0 . В силу (8) rFr^{-1} — абелев нормальный делитель группы G . Так как G примитивна, то $rFr^{-1} = F$. Следовательно, $r \in N$. В силу (7) r можно записать в виде

$$r = vf, \quad (9)$$

где $v \in N_0$, $f \in F$. Из формул (8) и (9) находим

$$r \Gamma r^{-1} = v \Gamma v^{-1} = G_0 F. \quad (10)$$

Очевидно, стационарная подгруппа группы $v \Gamma v^{-1}$, оставляющая на месте точку o , совпадает с группой $v \Gamma_0 v^{-1}$. Следовательно, в силу (10) $v \Gamma_0 v^{-1} = G_0$. Теорема доказана.

§ 3. Доказанные выше две теоремы приводят к следующему способу задания примитивных разрешимых подгрупп группы $S(X)$.

Пусть A — любая абстрактная элементарная абелева группа, мощность которой совпадает с мощностью множества X . Зададим на X такую групповую операцию „+“, что группа $\langle X, + \rangle$ окажется изоморфной группе A , и построим образ F регулярного представления группы $\langle X, + \rangle$. Пусть далее N_0 — группа всех автоморфизмов группы $\langle X, + \rangle$. Выберем в N_0 разрешимую неприводимую подгруппу Γ_0 . Тогда

$$\Gamma = \Gamma_0 F \quad (11)$$

будет разрешимой примитивной подгруппой группы $S(X)$. Очевидно, таким способом мы можем получить любую примитивную разрешимую подгруппу $S(X)$, причем если A задается с точностью до изоморфизма, а группа Γ_0 с точностью до сопряженности в N_0 , то разрешимая группа Γ (формула (11)) будет задаваться с точностью до сопряженности в $S(X)$. Ясно, что не при любой мощности X в $S(X)$ существуют разрешимые примитивные подгруппы. Как известно, в случае конечного X в $S(X)$ тогда и только тогда есть примитивные подгруппы, когда мощность X равна степени простого числа. Заметим также, что для конечного X теорема 1 давно известна (см. [3], стр. 194). В этом случае группу $N = N_0 F$ можно трактовать как аффинную группу, F — как группу параллельных переносов, а N_0 — как полную линейную группу $GL(n, p)$, где p^n — мощность X (см. [3], стр. 184—188).

В связи с предыдущими рассмотрениями сформулируем две проблемы.

Пусть D — бесконечная элементарная абелева группа, а $A(D)$ — группа всех автоморфизмов группы D .

Проблема 1. Для каких D в группе $A(D)$ есть неприводимые разрешимые подгруппы?

Проблема 2. Для каких D из локальной разрешимости подгруппы H группы $A(D)$ следует разрешимость H ?

§ 4. Докажем еще одну теорему о примитивных подгруппах группы $S(X)$.

Теорема 3. Пусть Γ и G — две такие примитивные подгруппы группы $S(X)$, что каждая из них обладает отличным от единицы абелевым нормальным делителем. Тогда изоморфизм групп Γ и G влечет за собой их сопряженность в $S(X)$.

Доказательство. Пусть $\Phi \neq (e)$ — абелев нормальный делитель Γ , а $F \neq (e)$ — абелев нормальный делитель группы G . Так как Γ и G примитивны, то Φ и F — регулярные подгруппы $S(X)$ и $\Gamma = \Gamma_0 \Phi$, $G = G_0 F$, где Γ_0 и G_0 — стационарные подгруппы Γ и G . Пусть, далее, $\psi: \Gamma \rightarrow G$ изоморфизм. Рассмотрим $\psi(\Phi)$. Очевидно, $\psi(\Phi)$ — абелев нормальный делитель группы G . В силу замечания, приведенного в § 1, $\psi(\Phi) = F$.

Следовательно, группы Φ и F изоморфны. Но изоморфные регулярные подгруппы $S(X)$ сопряжены в $S(X)$, т. е. в $S(X)$ есть такой элемент t , что $t\Phi t^{-1} = F$. Рассмотрим группу A :

$$A = t\Gamma t^{-1}. \quad (12)$$

Очевидно, A — примитивная группа, изоморфная группе G , причем $A = A_0F$, где A_0 — стационарная подгруппа A , а F — инвариантна в A . Пусть $\varphi: A \rightarrow G$ — изоморфизм. Тогда $\varphi(F) = F$, ибо $\varphi(F)$ — абелев нормальный делитель группы G . Таким образом, ограничение φ/F есть автоморфизм группы F . Следовательно, в нормализаторе N группы F в $S(X)$ есть такой элемент l , что для $\lambda: A \rightarrow lAl^{-1}$, где $\lambda(x) = lxl^{-1}$, $\lambda/F = \varphi/F$. Так как нормализатор N представим в виде $N = N_0F$, где N_0 — стационарная подгруппа N , то мы можем считать, что $l \in N_0$. Построим теперь изоморфизм $\gamma = \lambda^{-1}\varphi$, $\gamma: A \rightarrow \gamma(A)$. Очевидно, ограничение γ/F есть тождественный автоморфизм группы F . Для любых $a_0 \in A_0$ и $f \in F$ можно написать

$$a_0fa_0^{-1} = f_1, \quad (13)$$

где $f_1 \in F$. Применяя к последнему равенству изоморфизм γ , получаем

$$\gamma(a_0)f\gamma(a_0)^{-1} = f_1. \quad (14)$$

Из (13) и (14) находим $a_0^{-1}\gamma(a_0)f = fa_0^{-1}\gamma(a_0)$ для любого f из F . Следовательно, $a_0^{-1}\gamma(a_0) \in F$, $\gamma(a_0) = a_0f_2$, где $f_2 \in F$. Отсюда $\gamma(A) = \gamma(A_0F) = A_0F = A$. Следовательно, γ — автоморфизм A . Таким образом, для A можно написать

$$A = \gamma(A) = \lambda^{-1}\varphi(A) = \lambda^{-1}(G) = l^{-1}Gl.$$

Отсюда и из формулы (12) следует сопряженность групп G и Γ в $S(X)$. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ваег R. Pac. Journal of Math., 14, № 2, 385—406, 1964.
2. Холл М. Теория групп. ИЛ, 1962.
3. Шмидт О. Ю. Избранные труды. Математика. Изд. АН СССР, 1959.

Поступило в редакцию 29.IX 1965

Т. Д. СОКОЛОВСКИЙ

О ВЫЧИСЛЕНИИ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ ЭРМИТОВОЙ МАТРИЦЫ

В математике и ее приложениях нередко возникает потребность находить собственные значения (характеристические числа) конечной квадратной матрицы H порядка n , элементами которой являются числа из поля K . Для решения этой задачи составляется характеристический определитель матрицы H

$$D(\lambda) = |H - \lambda E|, \quad (1)$$

где E — единичная матрица порядка n ; λ — неизвестный параметр, который предстоит определить.

Для приложений интересен случай, когда H — эрмитова (в частности, симметрическая) матрица. Тогда, как это следует из теории матриц [1], все λ_i ($i = 1, 2, \dots, n$) вещественны так же, как и коэффициенты p_k ($k = 0, 1, 2, \dots, n$) характеристического многочлена

$$D(\lambda) = |H - \lambda E| = (-1)^n \sum_{k=0}^n p_k \lambda^{n-k} = 0. \quad (2)$$

I. Поскольку E — единичная матрица, то $p_0 = 1$. Остальные p_k ($k = 1, 2, \dots, n$) последовательно определяются из рекуррентных соотношений Ньютона [1]

$$p_k = -\frac{1}{k} \sum_{m=1}^k S_m p_{k-m}. \quad (3)$$

Здесь S_m — след матрицы H^m , т. е.

$$S_m = \text{Sp} H^m = \sum_{i=1}^n h_{ii}^{(m)}, \quad (4)$$

где H^m — m -ая степень матрицы H ; $h_{ii}^{(m)}$ — диагональный элемент матрицы H^m .

Наиболее громоздкой вычислительной работой на этом пути является получение H^m . Каждая операция умножения матриц $H^{m-1} \cdot H = H^m$ требует n^3 умножений и $n^2(n-1)$ сложений (вообще говоря) комплексных чисел.

Если же воспользоваться тем, что $H^{m-1} \cdot H = H^m = H \cdot H^{m-1}$ и, следовательно, любая целая положительная степень эрмитовой (симметрической) матрицы есть эрмитова (симметрическая) матрица [1], то объем вычислительной работы на одну операцию умножения матриц уменьшается в $2n/(n+1)$ раз, где n — порядок матрицы H .

Считая, что p_k ($k=1, 2, \dots, n$) найдены из (3) и (4), можно перейти к решению уравнения (2).

II. Верхнюю границу положительных корней уравнения (2) определим по формуле

$$K_1 = 1 + \sqrt[n]{|p_1|}, \quad (5)$$

где $|p_1|$ — наибольший из модулей отрицательных коэффициентов уравнения (2) [2].

Нижнюю границу отрицательных корней уравнения (2) найдем из равенства

$$-K_2 = -\left(1 + \sqrt[n]{|p'_2|}\right), \quad (6)$$

где $|p'_2|$ — наибольший из модулей отрицательных коэффициентов уравнения

$$\sum_{k=0}^n p_k (-\lambda)^{n-k} = \sum_{k=0}^n p'_k \lambda^{n-k} = 0. \quad (7)$$

Итак, корни уравнения (2) лежат в интервале

$$-K_2 < \lambda_i < K_1 \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (8)$$

Пусть $\lambda = px$, $p_k = p^k q_k$, где $p = \max\{K_1; K_2\}$, тогда уравнение (2) заменяется уравнением

$$\sum_{k=0}^n q_k x^{n-k} = 0, \quad (9)$$

корни которого находятся в интервале $(-1; 1)$. Такая замена не обязательна, но удобна при одновременном решении конечного множества алгебраических уравнений на ЭЦМ.

Отделение корней уравнения (9) можно выполнить с помощью правила знаков Декарта [2], так как заранее известно, что все корни уравнения (9) вещественны.

Пусть $x = u + v$, тогда уравнение (9) преобразуется

$$\sum_{k=0}^n q_k x^{n-k} = \sum_{k=0}^n q_k (u+v)^{n-k} = \sum_{k=0}^n \sum_{s=0}^{n-k} \binom{n-k}{s} q_k u^{n-k-s} v^s = 0. \quad (10)$$

Полагая $k+s=r$, вместо (10) будем иметь

$$\sum_{r=0}^n \sum_{s=0}^r \binom{n-r+s}{s} q_{r-s} v^s u^{n-r} = \sum_{r=0}^n t_r u^{n-r} = 0, \quad (11)$$

где

$$t_r = \sum_{s=0}^r \binom{n-r+s}{s} q_{r-s} v^s. \quad (12)$$

Число перемен знаков $\Delta(v)$ в ряду коэффициентов t_r (12) уравнения (11) при фиксированных n и $q_{r-s} = q_k$ зависит только от v и равно числу корней уравнения (9), расположенных на интервале $v \leq x < 1$, где v изменяется в интервале $(-1; 1)$.

Отсюда следует, что число корней уравнения (9) на любом интервале $(v_1; v_2)$ равно $\Delta(v_1) - \Delta(v_2)$.

Выбирая значения ν некоторым упорядоченным образом, в частности, разбивая отрезок $[-1; 1]$ на равные отрезки и продолжая этот процесс для тех более мелких отрезков, на которых имеется более одного корня, можно отделить все n корней или показать кратность некоторых из корней в пределах заданной точности.

Наконец, корни уравнения (9) можно найти, комбинируя метод секущих и метод Ньютона [3], но удобнее применить итерационный процесс Вегстейна [4], известный своей универсальностью и быстрой сходимостью.

Описанная выше схема легко реализуется на ЭЦМ и была использована для расчетов частотных спектров колебаний атомов в кристаллических решетках.

Автор выражает глубокую признательность академику АН БССР Н. Н. Сироте за постановку упомянутой темы, полезные обсуждения и постоянный интерес к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц, 1953.
2. Мишина А. П., Проскураков И. В. Справочная математическая библиотека. Высшая алгебра, 1965.
3. Березин И. С., Жидков Н. П. Методы вычислений, т. 2, 1960.
4. Ланс Дж. Н. Численные методы для быстродействующих вычислительных машин, перевод с англ. И. А. Брига, 1962.

Поступило в редакцию 21.VII 1965

В. И. МАТЮХИН

МАКСИМАЛЬНЫЕ РАЗРЕШИМЫЕ ПОДГРУППЫ $GL(2, Z)$

Пусть Z — кольцо целых рациональных чисел, M — свободный двучленный Z -модуль, а $GL(2, Z)$ — группа всех автоморфизмов модуля M . Как и в [6], подгруппу Γ группы $GL(2, Z)$ будем называть приводимой, если в M есть инвариантные относительно Γ подмодули размерности единица (тогда (см. [6]) в M есть прямое слагаемое размерности единица, инвариантное относительно Γ).

В настоящей статье изучается строение максимальных разрешимых подгрупп группы $GL(2, Z)$.

§ 1. Если Γ — приводимая подгруппа $GL(2, Z)$, то, очевидно, матрицы g группы Γ одновременно приводятся к виду

$$g = \begin{bmatrix} \pm 1 & z \\ 0 & \pm 1 \end{bmatrix}, \quad z \in Z. \quad (1)$$

Из (1) следует, что в $GL(2, Z)$ имеется единственная с точностью до сопряженности в $GL(2, Z)$ максимальная разрешимая приводимая подгруппа.

Таким образом, изучать надо только неприводимые максимальные разрешимые подгруппы $GL(2, Z)$.

Пусть Γ — неприводимая подгруппа группы $GL(2, Z)$. Группа Γ называется импримитивной, если M можно представить в виде прямой суммы подмодулей, перемещаемых автоморфизмами группы Γ между собой. Если Γ — импримитивная подгруппа $GL(2, Z)$, то, очевидно, M обладает таким базисом

$$u_1, u_2, \quad (2)$$

что матрицы $g \in \Gamma$ в базисе (2) мономиальны. Следовательно, матрицы g из Γ имеют один из двух видов:

$$\begin{bmatrix} \pm 1 & 0 \\ 0 & \pm 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & \pm 1 \\ \pm 1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (3)$$

Таким образом, в $GL(2, Z)$ имеется единственная с точностью до сопряженности в $GL(2, Z)$ максимальная импримитивная разрешимая подгруппа Γ , состоящая из восьми матриц вида (3).

Значит, остается рассмотреть только примитивные разрешимые подгруппы $GL(2, Z)$.

§ 2. Пусть теперь Γ — максимальная примитивная разрешимая подгруппа $GL(2, Z)$, а H — ее максимальный абелев нормальный делитель. Рассмотрим отдельно два следующих случая:

- 1) H — приводимая подгруппа группы $GL(2, Z)$;
- 2) H — неприводимая подгруппа группы $GL(2, Z)$.

Пусть H — приводимый максимальный абелев нормальный делитель группы Γ . Очевидно, группа H сопряжена в $GL(2, Z)$ с некоторой подгруппой группы всех матриц вида (1). Так как группа Γ будет неприводима и как подгруппа группы $GL(2, Q)$, где Q — поле рациональных чисел (см. лемму 2 в [6]), то H — вполне приводимая подгруппа $GL(2, Q)$. Поэтому порядок группы H не больше четырех. Следовательно, в H нет матриц вида $\begin{bmatrix} -1 & z \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ и $\begin{bmatrix} 1 & z \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ при $z \neq 0$.

Здесь возможны два случая.

а) Порядок группы H равен 4. Тогда H порождается двумя матрицами вида: $h_1 = \begin{bmatrix} -1 & z_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ и $h_2 = \begin{bmatrix} 1 & -z_1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, где $z_1 \in Z$.

б) Порядок группы H равен 2. Тогда H состоит из двух матриц: $H = \{\pm E_2\}$.

Случай а) разбивается в свою очередь на два:

$$a_1) z_1 \equiv 0 \pmod{2}; \quad a_2) z_1 \equiv 1 \pmod{2}.$$

В случае $a_1)$ мы можем считать, что

$$h_1 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad h_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

В случае $a_2)$ мы можем считать, что

$$h_1 = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad h_2 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Рассмотрим случай $a_1)$. Пусть $g \in \Gamma \setminus H$, $g = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, $a, b, c, d \in Z$, $ad - bc = \pm 1$ и $gh_1g^{-1} = h_2$. Тогда из $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ находим: $g = \begin{bmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{bmatrix}$, $bc = \pm 1$. Следовательно, группа Γ импримитивна, а потому случай $a_1)$ невозможен.

Рассмотрим теперь случай $a_2)$. Существует $g \in \Gamma \setminus H$, $g = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, что $gh_1g^{-1} = h_2$. Из этого равенства находим:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix} -a & a+b \\ -c & c+d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a-c & b-d \\ -c & -d \end{bmatrix}.$$

Отсюда для матрицы g имеем две возможности:

$$g_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}, \quad g_2 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Им соответствуют следующие две группы Γ :

$$\Gamma_1 = (g_1)H; \quad \Gamma_2 = (g_2)H;$$

$$\Gamma_1 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}; H \right\}; \quad \Gamma_2 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}; H \right\}.$$

Так как $g_1^{-1}g_2 = g_1g_2 = h_2$, то $\Gamma_1 = \Gamma_2$. Далее, группа Γ_1 с помощью матрицы $f = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ сопряжена с группой $G = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right\}$, а потому импримитивна. Следовательно, и случай a_2) невозможен.

Рассмотрим теперь случай б), т. е. случай, когда $H = \{\pm E_2\}$. Пусть A/H — максимальный абелев нормальный делитель группы Γ/H . Ввиду леммы 8 в [6] A/H является 2-группой. Поэтому по лемме 10 в [6] группа A представима в виде: $A = (a_1)(b_1)$, где $(a_1, b_1) = -1$, $a_1^2 = \pm 1$, $b_1^2 = \pm 1$. Всегда можно считать, что $a_1^2 = b_1^2 = 1$. Для любого g из Γ имеем:

$$ga_1g^{-1} = \lambda a_1^\alpha b_1^\beta = c_1, \quad gb_1g^{-1} = \mu a_1^\gamma b_1^\delta = d_1, \quad (4)$$

где $\alpha, \mu = \pm 1$; $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in Z_2 = Z/(2)$. Ясно, что $c_1^2 = a_1^2$; $d_1^2 = b_1^2$.

Отсюда и из (4) находим: $\alpha + \beta + \alpha\beta = \gamma + \delta + \gamma\delta$. Так как $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in Z_2$, то $\alpha = \beta = \gamma = \delta$. Последнее невозможно.

Итак, в $GL(2, Z)$ нет максимальных примитивных разрешимых подгрупп с приводимым максимальным абелевым нормальным делителем.

§ 3. Пусть теперь группа H неприводима.

Из теоремы 2 в [6] и максимальной группы Γ следует, что H является мультипликативной группой кольца $R = Z(\theta)$, где θ — корень неприводимого над Z полинома $x^2 + \alpha x + \beta = 0$. Регулярное представление корней θ_1 и θ_2 этого полинома в базисе $[1, \theta]$ имеет вид:

$$\theta_1 = \begin{bmatrix} 0 & -\beta \\ 1 & -\alpha \end{bmatrix}; \quad \theta_2 = \begin{bmatrix} -\alpha & \beta \\ -1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (5)$$

Ввиду следствия из теоремы 3 в [6] и максимальной группы Γ группа Γ/H изоморфна группе относительных автоморфизмов кольца $Z(\theta)$. Поэтому $\Gamma:H = 2$. Следовательно, в неабелевой группе Γ всегда можно выбрать элемент g так, что $g\theta_1g^{-1} = \theta_2$. При любом операторе $t \in \Gamma$ имеем: $t\theta_1t^{-1} = \theta_i$, $i = 1, 2$, поэтому справедливо представление $\Gamma = (g)H$.

Найдем матрицу g . Обозначим через $g = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, где $a, b, c, d \in Z$; $ad - bc = \pm 1$, матрицу, соответствующую оператору g в базисе $[1, \theta]$. Ясно, что $g^2 \in H$. Из $g\theta_1 = \theta_2g$ находим

$$g = \begin{bmatrix} a & -\alpha a + \beta c \\ c & -a \end{bmatrix}. \quad (6)$$

Пусть $g^2 = \omega + v\theta_1$, где $\omega, v \in Z$. Тогда $g^2 = g(\omega + v\theta_1)g^{-1} = \omega + v\theta_2 = \omega + v\theta_1$. Следовательно, $(\theta_2 - \theta_1)v = 0$. Так как корни θ_1 и θ_2 различны, то $v = 0$. Но тогда $g^2 = \pm E_2$.

Рассмотрим оба эти случая.

Пусть $g^2 = E_2$. Тогда $a^2 - \alpha ac + \beta c^2 = 1$. Если $Z(\theta)$ — мнимое квадратичное расширение кольца Z , а квадратичная форма $\{1, -\alpha, \beta\}$ имеет дискриминант Δ , то при $\Delta = -3$ эта форма переводится в приведенную

форму унимодулярной подстановкой $s = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1+\alpha}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Следовательно,

(1, 0) будет решением уравнения $a^2 - aac + \beta c^2 = 1$. Остальные решения этого уравнения находятся при умножении матрицы s слева на автоморфизмы квадратичной формы $\{1, 1, 1\}$. Этими решениями будут

пары: $(-1, 0)$; $\left(\frac{1+\alpha}{2}, 1\right)$; $\left(\frac{-1+\alpha}{2}, 1\right)$; $\left(\frac{-1-\alpha}{2}, -1\right)$; $\left(\frac{1-\alpha}{2}, -1\right)$.
Значит, при $\Delta = -3$ условию $g\vartheta_1g^{-1} = \vartheta_2$ удовлетворяют следующие три пары матриц:

$$g_{1,2} = \pm \begin{bmatrix} 1 & -\alpha \\ 0 & -1 \end{bmatrix}; \quad g_{3,4} = \pm \begin{bmatrix} \frac{1+\alpha}{2} & \frac{3-\alpha}{2} - \beta \\ 1 & -\frac{1-\alpha}{2} \end{bmatrix};$$

$$g_{5,6} = \pm \begin{bmatrix} \frac{1-\alpha}{2} & \frac{-3-\alpha}{2} + \beta \\ -1 & \frac{-1+\alpha}{2} \end{bmatrix}. \quad (6a)$$

При $\Delta = -4$ решениями уравнения $a^2 - aac + \beta c^2 = 1$ будут пары:

$$(\pm 1, 0); \quad \left(-\frac{\alpha}{2}, -1\right); \quad \left(\frac{\alpha}{2}, 1\right).$$

Следовательно, в этом случае

$$g_{1,2} = \pm \begin{bmatrix} 1 & -\alpha \\ 0 & -1 \end{bmatrix}; \quad g_{3,4} = \pm \begin{bmatrix} \frac{\alpha}{2} & 2-\beta \\ 1 & -\frac{\alpha}{2} \end{bmatrix}.$$

Если $\Delta < 0$, но $\Delta \neq -3$ и $\Delta \neq -4$, то уравнение $a^2 - aac + \beta c^2 = 1$ имеет два решения. Однако в этом случае H состоит лишь из $\pm E_2$, и по сказанному в § 2 в $GL(2, Z)$ нет примитивных подгрупп, имеющих это H своим максимальным абелевым нормальным делителем. Следовательно, в случае положительно определенной квадратичной формы $\{1, -\alpha, \beta\}$ и $g^2 = E_2$ рассмотрению подлежат лишь дискриминанты $\Delta = -3$ и $\Delta = -4$.

Так как положительно определенная квадратичная форма не может представлять число -1 , то при $\Delta < 0$ $g^2 \neq -E_2$.

По теореме Дирихле о группе единиц [3] мультипликативная группа мнимого квадратичного расширения кольца Z будет конечной циклической. Рассмотрим конечные максимальные примитивные разрешимые подгруппы $GL(2, Z)$. По сказанному выше достаточно рассмотреть случаи $\Delta = -3$ и $\Delta = -4$. Так как $\Gamma = (g)H$, то при $\Delta = -4$ $\Gamma =$

$$= \left\{ g; \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right\}. \text{ Легко видеть, что порядок группы } \Gamma \text{ в этом случае равен}$$

восемью. Имеется всего пять типов групп восьмого порядка (см. [5]), и группа Γ принадлежит к одному из них (диэдра) лишь при $\alpha = 0$. Но в этом случае Γ не будет примитивной.

При $\Delta = -3$ нами были построены три пары (см. (6a)) матриц g , но лишь при $\alpha = -1$ найденные матрицы g вместе с $H = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right\}$

образуют группы (группы типа 3 в [5], стр. 98), причем все эти группы совпадают.

Теорема 1. *С точностью до сопряженности в $GL(2, Z)$ группа двенадцатого порядка*

$$\Gamma = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right\} \quad (7)$$

будет единственной максимальной примитивной разрешимой подгруппой конечного порядка группы $GL(2, Z)$.

§ 4. Рассмотрим теперь случай, когда $Z(\mathfrak{D})$ — вещественное квадратичное расширение кольца Z , т. е. дискриминант $\Delta > 0$. Если $\Delta = 4k$, где k — натуральное число, и $g^2 = E_2$, то квадратичная форма $\{1, -\alpha, \beta\}$, представляющая единицу, эквивалентна форме $\{1, 0, -k\}$ и пере-

водится в нее подстановкой $s = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{\alpha}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Неопределенное уравне-

ние Ферма $X^2 - kY^2 = 1$ имеет бесконечное множество решений в целых числах, поэтому существует бесконечное множество матриц g , имеющих вид (6). Нахождение таких матриц сводится к отысканию числителей и знаменателей подходящих дробей к \sqrt{k} .

Случай $\Delta = 4k$ и $g^2 = -E_2$ также приводится к решению только что упоминавшегося неопределенного уравнения Ферма.

При $\Delta = 4k+1$ квадратичная форма $\{1, -\alpha, \beta\}$ эквивалентна форме $\{1, 1, -k\}$ при $g^2 = E_2$ и форме $\{-1, 1, k\}$ при $g^2 = -E_2$. Диофантовы уравнения $X^2 + XY - kY^2 = 1$ и $X^2 - XY - kY^2 = 1$ имеют бесконечное множество решений. Если обозначить через ξ_1 и ξ_2 корни уравнения $X^2 + X - k = 0$, то, например, первое из этих двух уравнений переписывается так: $(X - \xi_1 Y)(X - \xi_2 Y) = 1$. Но если норма $N(X - \xi_1 Y) = 1$, то $X - \xi_1 Y$ — единица вещественного квадратичного кольца $Z(\mathfrak{D})$, а потому представима в виде некоторой степени ν основной единицы ϵ_0 этого кольца: $X - \xi_1 Y = \epsilon_0^\nu$.

Этим вопрос построения матриц g , имеющих вид (6), решается полностью для всех случаев.

Если порядок группы H не конечен, то H является мультипликативной группой вещественного квадратичного кольца. По уже упоминавшейся теореме Дирихле эта мультипликативная группа является расширением циклической группы второго порядка, состоящей из $\pm E_2$, при помощи бесконечной циклической группы. Из сказанного здесь следует, что все элементы группы H представимы в виде $\epsilon = a + \mathfrak{D}c$, где $a, c \in Z$; $a^2 - aac + \beta c^2 = \pm 1$; \mathfrak{D} — корень неприводимого уравнения $x^2 + ax + \beta = 0$. Регулярное представление элемента ϵ в фундаментальном базисе имеет вид

$$\epsilon = \begin{bmatrix} a & -\beta c \\ c & a - ac \end{bmatrix}. \quad (8)$$

Найдем произведение матриц g из (6) и ϵ из (8):

$$g\epsilon = \begin{bmatrix} a^2 - aac + \beta c^2 & -a\beta c^2 - a^2 + a^2 ac \\ 0 & -a^2 + aac - \beta c^2 \end{bmatrix}.$$

Отсюда $g = \pm \begin{bmatrix} 1 & -\alpha \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \epsilon^{-1}$. Следовательно, справедлива

Теорема 2. *Максимальные примитивные разрешимые подгруппы группы $GL(2, Z)$, у которых максимальный абелев нормальный делитель H*

совпадает с группой единиц вещественного квадратичного расширения кольца Z корнем неприводимого над полем рациональных чисел полинома $x^2 + \alpha x + \beta = 0$, имеют вид

$$\Gamma = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & -\alpha \\ 0 & -1 \end{bmatrix}; H \right\}.$$

Пусть в вещественном квадратичном кольце R , группой единиц которого является H , имеется h классов идеалов. Так как характеристический полином матрицы регулярного представления основной единицы кольца R рационально неприводим, то в силу [2] $r_i^{-1} H r_i = H_i \subset GL(2, Z)$, где r_i — матрица перехода от базиса кольца R к базису идеала I_i этого кольца, $i = 1, 2, \dots, h$. Переход от специального базиса кольца к специальному базису идеала (см. [3]) осуществляется преобразованием с матрицей $r = \begin{bmatrix} m_1 & m_2 \\ 0 & m_3 \end{bmatrix}$, поэтому матрица $g = \begin{bmatrix} 1 & -\alpha \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ этим преобразованием переводится в матрицу

$$r^{-1} g r = \begin{bmatrix} 1 & 2 \frac{m_2}{m_1} - \alpha \frac{m_3}{m_1} \\ 0 & -1 \end{bmatrix}. \quad (9)$$

Из (9) видно, что матрица $r^{-1} g r$ лишь тогда принадлежит группе $GL(2, Z)$, когда выполняется следующее условие делимости:

$$m_1 / (2m_2 - \alpha m_3). \quad (10)$$

Отсюда следует, что если условие (10) выполняется, то группа $r^{-1} \Gamma r$ будет несопряженной с Γ в $GL(2, Z)$ максимальной примитивной разрешимой подгруппой $GL(2, Z)$. Если же условие (10) не выполняется, то группа H_i будет максимальной неприводимой примитивной разрешимой подгруппой группы $CL(2, Z)$.

Так как на группу единиц вещественного квадратичного расширения кольца Z никаких ограничений не накладывается, то из сказанного следует

Теорема 3. В группе $GL(2, Z)$ имеется бесконечное множество несопряженных в $GL(2, Z)$ максимальных примитивных разрешимых подгрупп. Всяким вещественным квадратичным кольцом R определяется h классов сопряженных в $GL(2, Z)$ максимальных примитивных разрешимых подгрупп $GL(2, Z)$, если h — число классов идеалов в кольце R .

§ 5. Рассмотрим два примера бесконечных максимальных разрешимых подгрупп группы $GL(2, Z)$.

Пример 1. Определим максимальные примитивные неприводимые разрешимые группы из $GL(2, Z)$, связанные с расширением кольца Z корнем полинома $x^2 - x - 1 = 0$.

Основная единица $\varepsilon_0 = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$ кольца $Z(\sqrt{5})$ имеет следующее регулярное представление в фундаментальном базисе этого кольца:

$$\varepsilon_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

В кольце $Z(\sqrt{5})$ имеется лишь один класс идеалов, поэтому его группа единиц H однозначно выписывается в виде подгруппы $GL(2, Z)$:

$$H = \left\{ -E_2; \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

Следовательно, группа $\Gamma = \left\{ -E_2; \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right\}$ будет единственной максимальной неприводимой разрешимой подгруппой группы $GL(2, Z)$, у которой максимальный абелев нормальный делитель совпадает с группой единиц кольца $Z(\sqrt{5})$.

Пример 2. Если группа H_1 является мультипликативной группой расширения R кольца Z корнем полинома $x^2 - 6x - 1 = 0$, то из наличия в $Z(\sqrt{10})$ двух классов идеалов следует существование группы H_2 , которая принадлежит $GL(2, Z)$ и рационально сопряжена с H_1 , но не сопряжена с ней в $GL(2, Z)$.

Основной единицей этого расширения будет $\varepsilon_0 = 3 + \sqrt{10}$. Легко убедиться, что $[\omega_1, \omega_2] = [1, \sqrt{10}]$ — базис кольца R , а $[v_1, v_2] = [3, 2 + \sqrt{10}]$ — базис идеала этого кольца. Матрица перехода от первого базиса ко второму имеет вид $r = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Единице ε_0 в базисе $[\omega_1, \omega_2]$

кольца R соответствует матрица $\phi_1 = \begin{bmatrix} 3 & 10 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$, а в базисе $[v_1, v_2]$ идеала — матрица $\phi_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$.

Условие (10) не выполняется, так как 3 не делит 10. Поэтому расширением $Z(\sqrt{10})$ определяются с точностью до сопряженности в $GL(2, Z)$ следующие две максимальные неприводимые разрешимые подгруппы группы $GL(2, Z)$:

$$\Gamma_1 = \left\{ -E_2; \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 3 & 10 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \right\}$$

$$\text{и } \Gamma_2 = \left\{ -E_2; \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \right\}.$$

Из этих примеров видно, что задача построения максимальной примитивной разрешимой подгруппы Γ группы $GL(2, Z)$, у которой максимальный абелев нормальный делитель совпадает с мультипликативной группой кольца $Z(\sqrt{d})$, $d > 0$, сводится к отысканию основной единицы этого расширения.

Автор выражает глубокую благодарность Д. А. Супруненко за предложенную тему и постоянную помощь в работе и Р. Т. Вольвачеву за полезные консультации.

ЛИТЕРАТУРА

1. Супруненко Д. А. Разрешимые и нильпотентные линейные группы. Минск, 1958.
2. Чеботарев Н. Г. О числе классов матриц. Собрание сочинений, т. 2, 1949.
3. Хассе Г. Лекции по теории чисел. ИЛ, 1953.
4. Супруненко Д. А. ДАН БССР, т. VII, № 4, 1963.
5. Шмидт О. Ю. Избранные труды, Математика, 1959.
6. Супруненко Д. А., Матюхин В. И. Весті АН БССР, сер. фіз.-мат., № 3, 1965.

Поступило в редакцию 10. IX 1965

НГУЕН КОНГ ТУЙ

**ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ
 И СИСТЕМ МЕТОДОМ ТИПА РУНГЕ — КУТТА. II**

В первой части статьи двухитерационные алгоритмы типа Рунге — Кутта применяются к решению задачи Коши для гиперболических уравнений и систем с двумя независимыми переменными, когда начальные данные задаются вдоль отрезка прямой $x + y = \text{const}$.

Во второй части статьи рассматривается аналогичная задача для одного уравнения с данными Коши вдоль отрезка кривой.

Ниже используются обозначения статьи [1] и продолжается нумерация ее параграфов, формул и рисунков.

§ 6. Постановка задачи. Пусть дано уравнение

$$u_{xy} = f(x, y, u, p, q) \quad (41)$$

(u — неизвестная функция от x, y ; $p = u_x, q = u_y$) с начальными условиями, заданными вдоль отрезка AB некоторой кривой Γ_0 в виде:

$$u^0 = u^0(x), \quad p^0 = p^0(x), \quad q^0 = q^0(x); \quad (42)$$

u^0, p^0, q^0, f предположим непрерывными и достаточное число раз дифференцируемыми. Γ_0 считаем достаточно гладкой линией, заданной в виде

$$y = y^0(x) \quad \text{или} \quad x = x^0(y), \quad (43)$$

причем $x^0(y), y^0(x)$ — убывающие функции.

Построим в области ABC определения решения сетку следующим образом (рис. 3). Разделим AC на достаточно мелкие интервалы длины h , из точек деления проведем прямые, параллельные оси Oy , из пересечений их с Γ_0 — параллельные оси Ox и узлы сетки расположим по слоям. Узлы n -го слоя соединим кривой Γ_n . Кривая Γ_n может рассматриваться как отрезок начальной кривой Γ_0 , сдвинутой на nh в направлении Ox , так что имеем уравнение Γ_n в виде

$$y^n(x) = y^0(x - nh) = y^0(z), \quad z = x - nh.$$

При вычислении на n -ом слое для простоты будем задавать уравнение кривой Γ_{n-1} в виде (43) и обозначать ранее найденные значения u, p, q в узлах $(n-1)$ -го слоя, как и начальные данные, через u^0, p^0, q^0 .

Для элементарного криволинейного треугольника MNP сетки с вершинами $M(x_1, y_1), N(x_2 = x_1 + h, y_2 = y^0(x_1 + h))$ на $(n-1)$ -ом слое и вершиной $P(x_2, y_1)$ на n -ом слое (рис. 4) известны формулы:

$$u(P) = u^0(x_1) + \int_{x_1}^{x_1+h} p^0(x) dx + \iint F(x, y) dx dy, \quad (44.a)$$

$$p(P) = p^0(x_2) + \int_{y^0(x_1+h)}^{y^0(x_1)} F(x_1+h, y) dy, \quad (44.6)$$

$$q(P) = q^0(x_1) + \int_{x_1}^{x_1+h} F(x, y_1) dx, \quad (44.7)$$

где кратный интеграл в (44.а) берется в области MNP . Как и в [1], для приращений $\Delta^* u = u(P) - u(M)$, $\Delta^* p = p(P) - p(M)$, $\Delta^* q = q(P) - q(M)$, используя (44), можно найти разложения по степеням h в точке M :

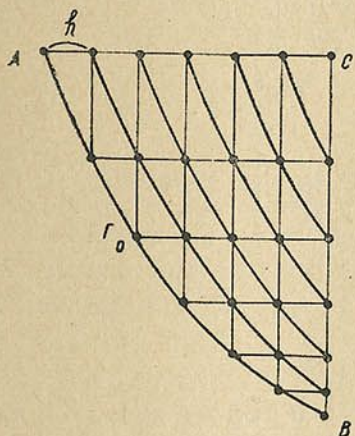


Рис. 3

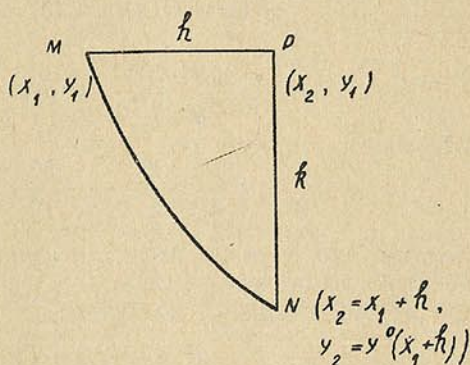


Рис. 4

$$\begin{aligned} \Delta^* u = & hp^0(x_1) + \frac{h^2}{2!} \frac{dp^0(x_1)}{dx} + \frac{h^3}{3!} \frac{d^2p^0(x_1)}{dx^2} - \\ & - \frac{h^2}{2!} \frac{dy^0(x_1)}{dx} F(M) - \frac{h^3}{3!} \frac{d^2y^0(x_1)}{dx^2} F(M) - \\ & - \frac{h^3}{3!} \frac{dy^0(x_1)}{dx} \left(2 \frac{\partial F(M)}{\partial x} + \frac{dy^0(x_1)}{dx} \frac{\partial F(M)}{\partial y} \right) + O(h^4), \quad (45.a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta^* p = & h \frac{dp^0(x_1)}{dx} + \frac{h^2}{2!} \frac{d^2p^0(x_1)}{dx^2} - h \frac{dy^0(x_1)}{dx} F(M) - \\ & - \frac{h^2}{2!} \frac{d^2y^0(x_1)}{dx^2} F(M) - \frac{h^2}{2!} \frac{dy^0(x_1)}{dx} \times \\ & \times \left(2 \frac{\partial F(M)}{\partial x} + \frac{dy^0(x_1)}{dx} \frac{\partial F(M)}{\partial y} \right) + O(h^3), \quad (45.6) \end{aligned}$$

$$\Delta^* q = hF(M) + \frac{h^2}{2!} \frac{\partial F(M)}{\partial x} + O(h^3). \quad (45.в)$$

Мы ставим задачу построения алгоритмов типа Рунге — Кутты, дающих приближенные значения приращений Δu , Δp , Δq .

§ 7. Формальные алгоритмы типа Рунге—Кутта. Обозначим $\int_{x_1}^{x_1+h} p^0(x) dx = I(h)$. (О вычислении $I(h)$ см. § 4). Вводим значения k :

$$k = k(h) = y^0(x_1) - y^0(x_1 + h) \quad (h \geq 0).$$

При предположении, что $y^0(x)$ — убывающая функция, значения k будут положительны. На рис. 4 $k(h)$ равно длине NP . (Построение сетки в § 6 и введение значений $k(h)$ заимствованы из [2]). По определению $k(h)$ имеем:

$$\begin{aligned} k(h) &= O(h), \quad k'(0) = \left. \frac{dk(h)}{dh} \right|_{h=0} = \\ &= -\frac{dy^0(x_1)}{dx}, \quad k''(0) = -\frac{d^2y^0(x_1)}{dx^2}. \end{aligned} \quad (46)$$

Положим

$$S = \frac{hk}{2} + \frac{h^3}{12} \frac{d^2y^0(x_1)}{dx^2}.$$

Заметим, что S равно площади криволинейного треугольника MNP с точностью до порядка $O(h^4)$.

При первой итерации полагаем:

$$u^1 = u^0(x_1) + I(h) + SF_1,$$

$$F_1 = \omega_1 F(M) + \tau_1 F(N), \quad \omega_1, \tau_1 \geq 0, \quad \omega_1 + \tau_1 = 1, \quad (47.a)$$

$$p^1 = p^0(x_2) + kF_{\hat{1}}, \quad F_{\hat{1}} = F(N), \quad (47.б)$$

$$q^1 = q^0(x_1) + hF_{\bar{1}}, \quad F_{\bar{1}} = F(M). \quad (47.в)$$

Образует элементарные приращения:

$$\left. \begin{aligned} \Delta^1 u &= u^1 - u^0(x_1) \\ \Delta^1 p &= p^1 - p^0(x_1) \\ \Delta^1 q &= q^1 - q^0(x_1) \end{aligned} \right\}, \quad (47.г)$$

$$\left. \begin{aligned} \delta^1 u &= u^1 - u^0(x_2) \\ \delta^1 p &= p^1 - p^0(x_2) \\ \delta^1 q &= q^1 - q^0(x_2) \end{aligned} \right\}. \quad (47.д)$$

Далее вводим промежуточные точки $M_2^j (j = u, q)$, $N_2^j (j = u, p)$:

$$\begin{aligned} M_2^j &= (x_1 + \rho^j h; \quad y_1 + \sigma^j k; \quad u^0(x_1) + \alpha^j \Delta^1 u; \\ &\quad p^0(x_1) + \beta^j \Delta^1 p; \quad q^0(x_1) + \gamma^j \Delta^1 q), \end{aligned} \quad (48.a)$$

$$\begin{aligned} N_2^j &= (x_2 + \bar{\rho}^j h; \quad y_2 + \bar{\sigma}^j k; \quad u^0(x_2) + \bar{\alpha}^j \delta^1 u; \\ &\quad p^0(x_2) + \bar{\beta}^j \delta^1 p; \quad q^0(x_2) + \bar{\gamma}^j \delta^1 q), \end{aligned} \quad (48.б)$$

где $\rho^j, \sigma^j, \alpha^j, \dots, \bar{\gamma}^j$ — численные параметры.

При второй итерации полагаем:

$$u^2 = u^0(x_1) + I(h) + SF_2,$$

$$F_2 = \omega_2 F(M_2^u) + \tau_2 F(N_2^u); \quad \omega_2, \tau_2 \geq 0, \quad \omega_2 + \tau_2 = 1, \quad (49.a)$$

$$p^2 = p^0(x_2) + kF_{\hat{2}}, \quad F_{\hat{2}} = F(N_2^p), \quad (49.б)$$

$$q^2 = q^0(x_1) + hF_{\bar{2}}, \quad F_{\bar{2}} = F(M_2^q), \quad (49.в)$$

$$\left. \begin{aligned} \Delta^2 u &= u^2 - u^0(x_1), \\ \Delta^2 p &= p^2 - p^0(x_1), \\ \Delta^2 q &= q^2 - q^0(x_1) \end{aligned} \right\} \quad (49.г)$$

Наконец, за Δu , Δp , Δq возьмем линейные комбинации:

$$\left. \begin{aligned} \Delta u &= \lambda_1 \Delta^1 u + \lambda_2 \Delta^2 u, \\ \Delta p &= \mu_1 \Delta^1 p + \mu_2 \Delta^2 p, \\ \Delta q &= \nu_1 \Delta^1 q + \nu_2 \Delta^2 q \end{aligned} \right\} \quad (50)$$

(λ_i , μ_i , ν_i — численные параметры).

§ 8. Численное определение параметров. Для $\Delta^i u$, $\Delta^i p$, $\Delta^i q$ справедливы следующие разложения по степеням h в точке M :

$$\begin{aligned} \Delta^i u &= hp^0(x_1) + \frac{h^2}{2!} \frac{dp^0(x_1)}{dx} + \frac{h^3}{3!} \frac{d^2p^0(x_1)}{dx^2} + \frac{h^2}{2!} k'(0)F(M) + \\ &+ \frac{h^3}{3!} \left[\frac{3}{2} k''(0) + \frac{1}{2} \frac{d^2y^0(x_1)}{dx^2} \right] F(M) + \\ &+ \frac{h^3}{3!} 3k'(0) \left(\frac{dF_i}{dh} \right)_M + O(h^4), \end{aligned} \quad (51.a)$$

$$\begin{aligned} \Delta^i p &= h \frac{dp^0(x_1)}{dx} + \frac{h^2}{2!} \frac{d^2p^0(x_1)}{dx^2} + hk'(0)F(M) + \\ &+ \frac{h^2}{2!} k''(0)F(M) + \frac{h^2}{2!} 2k'(0) \left(\frac{dF_{\hat{1}}}{dh} \right)_M + O(h^3), \end{aligned} \quad (51.б)$$

$$\Delta^i q = hF(M) + \frac{h^2}{2!} 2 \left(\frac{dF_{\bar{1}}}{dh} \right)_M + O(h^3). \quad (51.в)$$

Сопоставляя (50) и (51) и заменяя $k'(0)$, $k''(0)$ их значениями в (46), получаем разложения по степеням h в точке M для Δu , Δp , Δq :

$$\begin{aligned} \Delta u &= (\lambda_1 + \lambda_2) \left[hp^0(x_1) + \frac{h^2}{2!} \frac{dp^0(x_1)}{dx} + \right. \\ &+ \left. \frac{h^3}{3!} \frac{d^2p^0(x_1)}{dx^2} \right] - (\lambda_1 + \lambda_2) \frac{h^2}{2!} \frac{dy^0(x_1)}{dx} F(M) - \\ &- (\lambda_1 + \lambda_2) \frac{h^3}{3!} \frac{d^2y^0(x_1)}{dx^2} F(M) - \frac{h^3}{3!} \frac{dy^0(x_1)}{dx} \times \\ &\times 3 \left(\lambda_1 \frac{dF_1}{dh} + \lambda_2 \frac{dF_2}{dh} \right)_M + O(h^4), \end{aligned} \quad (52.a)$$

$$\begin{aligned} \Delta p &= (\mu_1 + \mu_2) \left[h \frac{dp^0(x_1)}{dx} + \frac{h^2}{2!} \frac{d^2p^0(x_1)}{dx^2} \right] - \\ &- (\mu_1 + \mu_2) \left[h \frac{dy^0(x_1)}{dx} F(M) - \frac{h^2}{2!} \frac{d^2y^0(x_1)}{dx^2} F(M) \right] - \\ &- \frac{h^2}{2!} \frac{dy^0(x_1)}{dx} 2 \left(\mu_1 \frac{dF\hat{\cdot}}{dh} + \mu_2 \frac{dF\hat{\cdot}}{dh} \right)_M + O(h^3), \end{aligned} \quad (52.6)$$

$$\Delta q = (\nu_1 + \nu_2) h F(M) + \frac{h^2}{2!} 2 \left(\nu_1 \frac{dF\bar{\cdot}}{dh} + \nu_2 \frac{dF\bar{\cdot}}{dh} \right)_M + O(h^3). \quad (52.6)$$

Выбор параметров производится так, чтобы соответствующие разложения (52) и (45) совпадали при произвольной функции $F(x, y)$ и произвольном шаге h . В результате сравнения (52) и (45) получаем следующие условия:

$$\lambda_1 + \lambda_2 = \mu_1 + \mu_2 = \nu_1 + \nu_2 = 1, \quad (53)$$

$$3 \left(\lambda_1 \frac{dF_1}{dh} + \lambda_2 \frac{dF_2}{dh} \right)_M = 2 \frac{\partial F(M)}{\partial x} + \frac{dy^0(x_1)}{dx} \frac{\partial F(M)}{\partial y}, \quad (54)$$

$$2 \left(\mu_1 \frac{dF\hat{\cdot}}{dh} + \mu_2 \frac{dF\hat{\cdot}}{dh} \right)_M = 2 \frac{\partial F(M)}{\partial x} + \frac{dy^0(x_1)}{dx} \frac{\partial F(M)}{\partial y}, \quad (55)$$

$$2 \left(\nu_1 \frac{dF\bar{\cdot}}{dh} + \nu_2 \frac{dF\bar{\cdot}}{dh} \right)_M = \frac{\partial F(M)}{\partial x}. \quad (56)$$

Для правых частей (54) — (56) имеем:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial u} p + \frac{\partial f}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial q} f,$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial u} q + \frac{\partial f}{\partial p} f + \frac{\partial f}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial y},$$

$$\text{где } \frac{\partial p}{\partial x} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Delta^* p}{h} = \frac{dp^0(x)}{dx} - \frac{dy^0(x)}{dx} f;$$

$$\frac{\partial q}{\partial y} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{q^0(x_1) + \Delta^* q - q^0(x_1 + h)}{k} =$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \frac{q^0(x_1) + \Delta^* q - q^0(x_1 + h)}{k/h} =$$

$$= \left[\frac{dq^0(x)}{dx} - f \right] / \left(\frac{dy^0(x)}{dx} \right).$$

Из (57) следует

$$2 \frac{\partial F(M)}{\partial x} + \frac{dy^0(x_1)}{dx} \frac{\partial F(M)}{\partial y} =$$

$$= \left[2 \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{dy^0}{dx} \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial u} \left(2p^0 + \frac{dy^0}{dx} q^0 \right) + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial f}{\partial p} \left(2 \frac{dp^0}{dx} - \frac{dy^0}{dx} f \right) + \frac{\partial f}{\partial q} \left(\frac{dq^0}{dx} + f \right) \right]_M. \quad (58)$$

Для вычисления левых частей (54)—(56) нужно найти $(d/dh)_M$ для $F(N)$, $F(M_2^i)$, $F(N_2^i)$:

$$\begin{aligned} \frac{dF(N)}{dh} &= \frac{dF(x_1 + h, y_1 - k(h))}{dh} = \\ &= \frac{\partial F(N)}{\partial x} - \frac{dk(h)}{dh} \frac{\partial F(N)}{\partial y}, \end{aligned}$$

так что в силу (46) и (57)

$$\begin{aligned} \left[\frac{dF(N)}{dh} \right]_M &= \left[\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{dy^0}{dx} \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial u} \left(p^0 + \frac{dy^0}{dx} q^0 \right) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial f}{\partial p} \frac{dp^0}{dx} + \frac{\partial f}{\partial q} \frac{dq^0}{dx} \right]_M. \end{aligned} \quad (59)$$

Далее из (51) следует:

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\Delta^1 u}{dh} \right)_M &= p^0(x_1), \quad \left(\frac{d\Delta^1 p}{dh} \right)_M = \\ &= \frac{dp^0(x_1)}{dx} - \frac{dy^0(x_1)}{dx} F(M), \quad \left(\frac{d\Delta^1 q}{dh} \right)_M = F(M), \end{aligned} \quad (60)$$

а из сравнений $\delta^1 u$, $\delta^1 p$, $\delta^1 q$ с $\Delta^1 u$, $\Delta^1 p$, $\Delta^1 q$ следует:

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\delta^1 u}{dh} \right)_M &= -q^0(x_1) \frac{dy^0(x_1)}{dx}, \\ \left(\frac{d\delta^1 p}{dh} \right)_M &= -\frac{F dy^0(x_1)}{dx} F(M), \\ \left(\frac{d\delta^1 q}{dh} \right)_M &= -\frac{dq^0(x_1)}{dx} + F(M). \end{aligned} \quad (61)$$

Из (48.а), используя (60), имеем

$$\begin{aligned} \left[\frac{dF(M_2^u)}{dh} \right]_M &= \left[\rho^j \frac{\partial f}{\partial x} - \sigma^j \frac{dy^0}{dx} \frac{\partial f}{\partial y} + \alpha^j p^0 \frac{\partial f}{\partial u} + \right. \\ &\quad \left. + \beta^j \left(\frac{dp^0}{dx} - \frac{dy^0}{dx} f \right) \frac{\partial f}{\partial p} + \gamma^j \frac{\partial f}{\partial q} \right]_M. \end{aligned} \quad (62)$$

Из (48.б), где $x_2 = x_1 + h$, $y_2 = y_1 - k(h)$, используя (61), имеем

$$\begin{aligned} \left[\frac{dF(N_2^u)}{dh} \right]_M &= \left[(1 + \bar{\rho}^j) \frac{\partial f}{\partial x} + (1 - \sigma^j) \frac{dy^0}{dx} \frac{\partial f}{\partial y} + \right. \\ &\quad \left. + \left(p^0 + q^0 \frac{dy^0}{dx} - \bar{\alpha}^j q^0 \frac{dy^0}{dx} \right) \frac{\partial f}{\partial u} + \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{dp^0}{dx} - \bar{\beta}^j \frac{dy^0}{dx} f \right) \frac{\partial f}{\partial p} + \left(\frac{dq^0}{dx} - \bar{\gamma}^j \frac{dq^0}{dx} + \bar{\gamma}^j f \right) \frac{\partial f}{\partial q} \right]_M. \end{aligned} \quad (63)$$

Рассмотрим условие (54). Его правая часть задана в (58), а левую часть можно выписать в следующем виде, используя для этого (47.а), (49.а), (59), (62) и (63):

$$\begin{aligned}
 & 3 \frac{\partial f}{\partial x} (\lambda_1 \tau_1 + \lambda_2 \tau_2 + \lambda_2 \omega_2 \rho + \lambda_2 \tau_2 \bar{\rho}) + \\
 & + 3 \frac{\partial f}{\partial y} (\lambda_1 \tau_1 + \lambda_2 \tau_2 - \lambda_2 \omega_2 \sigma - \lambda_2 \tau_2 \bar{\sigma}) \frac{dy^0}{dx} + \\
 & + 3 \frac{\partial f}{\partial u} \left[(\lambda_1 \tau_1 + \lambda_2 \tau_2 + \lambda_2 \omega_2 \alpha) p^0 + (\lambda_1 \tau_1 + \lambda_2 \tau_2 - \lambda_2 \tau_2 \bar{\alpha}) q^0 \frac{dy^0}{dx} \right] + \\
 & + 3 \frac{\partial f}{\partial p} \left[(\lambda_1 \tau_1 + \lambda_2 \tau_2 + \lambda_2 \omega_2 \beta) \frac{dp^0}{dx} - (\lambda_2 \omega_2 \beta + \lambda_2 \tau_2 \bar{\beta}) \frac{dy^0}{dx} f \right] + \\
 & + 3 \frac{\partial f}{\partial q} \left[(\lambda_1 \tau_1 + \lambda_2 \tau_2 - \lambda_2 \tau_2 \bar{\gamma}) \frac{dq^0}{dx} + (\lambda_2 \omega_2 \gamma + \lambda_2 \tau_2 \bar{\gamma}) f \right]. \quad (64)
 \end{aligned}$$

Здесь все значения задаются в точке M и для простоты все индексы $j = u$ опущены.

Как и в [1], положим:

$$\bar{\alpha} = \alpha, \quad \bar{\beta} = \beta, \quad \bar{\gamma} = \gamma, \quad \bar{\rho} = \rho - 1, \quad \bar{\sigma} = \sigma + 1. \quad (65)$$

Учитывая (53), (65) и приравнявая (64) правой части (58), получим для параметров при Δu систему уравнений (24) из [1]. Итак, для параметров при Δu остаются в силе результаты табл. 1 статьи [1].

Рассматривая аналогично условия (55), (56), получим для параметров при Δp , Δq системы уравнений (25), (26) из [1], так что для параметров при Δp , Δq остаются в силе результаты табл. 2 статьи [1].

Схема вычислений по предложенным алгоритмам будет иметь вид, аналогичный (27), (28) из [1].

ЛИТЕРАТУРА

1. Нгуен Конг Туи. Вестн АН БССР, сер. физ.-мат. наук, № 4, 1965.
2. Schechter E. Studii si secretari Mathem. (Cluj), 12, № 2, 377—392, 1961.

Поступило в редакцию 22. XI 1965

Л. А. ЯНОВИЧ

О ПРИБЛИЖЕНИИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ НЕКОТОРЫМИ СИНГУЛЯРНЫМИ ИНТЕГРАЛАМИ

В настоящей статье даются разложения на сумму величин возрастающих порядков малости остатков приближения периодических функций, непрерывных в полосе с прямолинейной границей и регулярных в ее внутренних точках, интегралами Дирихле, Фейера, Джексона и другими методами. Установлены оценки, характеризующие близость некоторых из этих методов к соответствующим методам приближения интерполяционного типа.

Асимптотика остатков приближения частными суммами рядов Фурье и довольно общими методами суммирования этих рядов в классах непрерывных и дифференцируемых функций исследовалась многими авторами (см., например, [1—18]). Скорость сходимости на действительной оси частных сумм Фурье для 2π -периодических функций, регулярных в полосе $|\operatorname{Im} x| \leq d$ ($d > 0$), а также для функций, регулярных внутри этой полосы и имеющих полярную особенность на ее границе, впервые изучалась Валле Пуссеном [19], который для этих классов функций получил оценки остатка ряда Фурье, точные в смысле порядка.

Как отмечалось выше, будем рассматривать 2π -периодические функции, регулярные внутри полосы $|\operatorname{Im} x| \leq d$ и непрерывные вплоть до ее границы. Одной из наших задач будет построение указанных выше разложений остатков для этих интегралов в точках комплексной плоскости.

Известно, что никаким улучшением дифференциальных свойств функций нельзя, вообще говоря, получить сходимости, например, таких методов, как интегралы Фейера и Джексона, более быструю, чем соответственно $O\left(\frac{1}{n}\right)$ и $O\left(\frac{1}{n^2}\right)$. Однако представляет интерес (по крайней мере в теоретическом отношении) определение точных коэффициентов при членах с низшими порядками и получение остальных членов разложения с более высоким порядком малости для остатков этих методов в классе аналитических функций. К тому же такие разложения могут быть положены в основу построения методов улучшения сходимости приближений.

Введем некоторые обозначения.

Пусть

$$a_m^{(p)}(x) = \frac{1}{4\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(\xi_1 + id) e^{im\xi_1} d\xi_1}{\sin^p \frac{1}{2}(\xi_1 + id - x)},$$

$$b_m^{(p)}(x) = \frac{1}{4\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(\xi_1 - id) e^{-im\xi_1} d\xi_1}{\sin^p \frac{1}{2}(\xi_1 - id - x)}$$

и

$$c_m^{(p)}(x) = a_m^{(p)}(x) + b_m^{(p)}(x).$$

Максимальное значение функции $f(x)$ на прямых $\text{Im } x = \pm d$ будем обозначать через M , а через Γ обозначим контур интегрирования, состоящий из отрезков ($0 \leq \text{Re } \xi \leq 2\pi$, $\text{Im } \xi = \pm d$), понимая при этом, что интегрирование выполняется в направлении, оставляющем полосу регулярности $|\text{Im } x| \leq d$ слева.

Начнем рассмотрение указанных задач с интеграла Дирихле

$$S_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)(t-x)}{\sin \frac{1}{2}(t-x)} f(t) dt.$$

1. Пусть $r_n^{(1)}(x) = f(x) - T_n^{(1)}(x)$ и $r_n^{(2)}(x) = f(x) - T_n^{(2)}(x)$ — остаточные члены следующих интерполяционных тригонометрических многочленов:

$$T_n^{(1)}(x) = \frac{1}{2n+1} \sum_{k=0}^{2n} \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)(t_k - x)}{\sin \frac{1}{2}(t_k - x)} f(t_k)$$

и

$$T_n^{(2)}(x) = \frac{1}{2n+1} \sum_{k=0}^{2n} \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)(x_k - x)}{\sin \frac{1}{2}(x_k - x)} f(x_k)$$

по равноотстоящим узлам $t_k = \frac{2k+1}{2n+1}\pi$ и $x_k = \frac{2k\pi}{2n+1}$ ($k = 0, 1, \dots, 2n$).

Теорема 1. В любой точке x ($|\text{Im } x| < d$) и для всякой 2π -периодической функции $f(x)$, регулярной во внутренних точках полосы $|\text{Im } x| \leq d$ и непрерывной на ее границе, имеет место равенство

$$\begin{aligned} r_n(x) = f(x) - S_n(x) &= \frac{1}{2} r_n^{(1)}(x) + \frac{1}{2} r_n^{(2)}(x) + \\ &+ e^{-\left(n + \frac{1}{2}\right)d} \sum_{\nu=1}^{\infty} e^{-\nu(2n+1)d} \left[A_{\nu, n}(x) \sin\left(n + \frac{1}{2}\right)x + \right. \\ &\left. + B_{\nu, n}(x) \cos\left(n + \frac{1}{2}\right)x \right], \end{aligned}$$

где коэффициенты $A_{\nu, n}(x)$ и $B_{\nu, n}(x)$ стремятся к нулю, когда хотя бы один из индексов ν или n неограниченно возрастает.

Доказательство. Представим остаток приближения $r_n(x)$ во внутренних точках x полосы регулярности в виде

$$r_n(x) = b_{n+\frac{1}{2}}^{(1)}(x) e^{-(n+\frac{1}{2})(d-ix)} - a_{n+\frac{1}{2}}^{(1)}(x) e^{-(n+\frac{1}{2})(d+ix)}. \quad (1)$$

Для этого запишем функцию $f(x)$ при помощи интеграла

$$f(x) = \frac{1}{4\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\cos\left(n + \frac{1}{2}\right)(\xi - x)}{\sin \frac{1}{2}(\xi - x)} f(\xi) d\xi,$$

а $S_n(x)$ ввиду регулярности и 2π -периодичности подынтегрального выражения заменим двумя интегралами по отрезкам прямых $\text{Im } x = \pm d$ длины 2π . После элементарных преобразований придем к выражению (1).

В видоизмененную запись остатка (1)

$$r_n(x) = e^{-(n+\frac{1}{2})d} \left\{ \left[b_{n+\frac{1}{2}}^{(1)}(x) - a_{n+\frac{1}{2}}^{(1)}(x) \right] \cos\left(n + \frac{1}{2}\right)x + \right. \\ \left. + i \left[b_{n+\frac{1}{2}}^{(1)}(x) + a_{n+\frac{1}{2}}^{(1)}(x) \right] \sin\left(n + \frac{1}{2}\right)x \right\}$$

вместо $e^{\pm i(n+\frac{1}{2})(\xi_i \pm id)}$ в коэффициентах при $\cos\left(n + \frac{1}{2}\right)x$ и

$\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)x$ подставим соответственно

$$e^{\pm i(n+\frac{1}{2})(\xi_i \pm id)} = \frac{1}{2} \left[\cos\left(n + \frac{1}{2}\right)(\xi_i \pm id) \right]^{-1} \times \\ \times [1 + e^{\pm i(2n+1)(\xi_i \pm id)}]$$

и

$$e^{\pm i(n+\frac{1}{2})(\xi_i \pm id)} = \mp \frac{1}{2i} \left[\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)(\xi_i \pm id) \right]^{-1} \times \\ \times [1 - e^{\pm i(2n+1)(\xi_i \pm id)}],$$

после чего будем иметь

$$r_n(x) = \frac{\cos\left(n + \frac{1}{2}\right)x}{8\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\xi) d\xi}{\cos\left(n + \frac{1}{2}\right)\xi \sin \frac{1}{2}(\xi - x)} + \\ + \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)x}{8\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\xi) d\xi}{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)\xi \sin \frac{1}{2}(\xi - x)} + R_n(x), \quad (2)$$

где

$$R_n(x) = \frac{e^{-(2n+1)d}}{4\pi i} \times$$

$$\times \left\{ \int_0^{2\pi} \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)(\xi_1 - id - x) e^{-i(2n+1)\xi_1}}{\sin(2n+1)(\xi_1 - id) \sin \frac{1}{2}(\xi_1 - id - x)} f(\xi_1 - id) d\xi_1 - \right.$$

$$\left. - \int_0^{2\pi} \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)(\xi_1 + id - x) e^{i(2n+1)\xi_1}}{\sin(2n+1)(\xi_1 + id) \sin \frac{1}{2}(\xi_1 + id - x)} f(\xi_1 + id) d\xi_1 \right\}.$$

Первый и второй члены в (2), как легко установить непосредственным вычислением этих интегралов, дают соответственно $\frac{1}{2} r_n^{(1)}(x)$ и $\frac{1}{2} r_n^{(2)}(x)$, а $R_n(x)$ после подстановки

$$\frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)(\xi_1 \pm id - x)}{\sin(2n+1)(\xi_1 \pm id)} =$$

$$= e^{-(n+\frac{1}{2})d} \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu e^{-\nu(2n+1)d} e^{\pm i\left(\nu + \frac{1}{2}\right)(2n+1)\xi_1} \times$$

$$\times \left[\cos\left(n + \frac{1}{2}\right)x \pm (-1)^\nu i \sin\left(n + \frac{1}{2}\right)x \right]$$

и почленного интегрирования даст остальные члены указанного в теореме разложения. Коэффициенты $A_{\nu, n}(x)$ и $B_{\nu, n}(x)$ будут при этом:

$$A_{\nu, n}(x) = -ic_{\left(\nu + \frac{1}{2}\right)(2n+1)}^{(1)}(x),$$

$$B_{\nu, n}(x) = (-1)^\nu \left[a_{\left(\nu + \frac{1}{2}\right)(2n+1)}^{(1)}(x) - b_{\left(\nu + \frac{1}{2}\right)(2n+1)}^{(1)}(x) \right]$$

и, следовательно, стремятся к нулю при $\nu \rightarrow \infty$ или $n \rightarrow \infty$.

Разложение остатка интерполирования $r_n^{(2)}(x)$ для этого класса функций, из которого видно, что этот остаток имеет оценку вида

$$O\{e^{-n(d-|\operatorname{Im}x|)}\},$$

было рассмотрено в [20].

Аналогичным образом, используя интегральное представление для остаточного члена $r_n^{(1)}(x)$ интерполяционной формулы $T_n^{(1)}(x)$, получаем равенство

$$r_n^{(1)}(x) = - \frac{2 \cos\left(n + \frac{1}{2}\right)x}{e^{\left(n + \frac{1}{2}\right)d}} \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu B_{\nu, n}(x) e^{-\nu(2n+1)d}, \quad (3)$$

обеспечивающее тот же порядок приближения, что и интерполяционный многочлен $T_n^{(2)}(x)$.

Теорема 2. Во всякой точке x ($|\operatorname{Im} x| < d$) и для любой 2π -периодической функции $f(x)$, непрерывной в полосе $|\operatorname{Im} x| \leq d$ и регулярной во внутренних точках этой полосы, выполняются неравенства:

$$|f(x) - S_n(x)| \leq \frac{e^{-(n+\frac{1}{2})d}}{2} \times \left\{ \frac{e^{(n+\frac{1}{2})\operatorname{Im} x}}{\operatorname{sh} \frac{1}{2}(d - \operatorname{Im} x)} + \frac{e^{-(n+\frac{1}{2})\operatorname{Im} x}}{\operatorname{sh} \frac{1}{2}(d + \operatorname{Im} x)} \right\} M, \quad (4)$$

$$|2S_n(x) - T_n^{(1)}(x) - T_n^{(2)}(x)| \leq \frac{e^{-(2n+1)d} \operatorname{ch} \left(n + \frac{1}{2} \right) \operatorname{Im} x}{\operatorname{sh} \left(n + \frac{1}{2} \right) d \operatorname{sh} \frac{1}{2}(d - |\operatorname{Im} x|)} M, \quad (5)$$

$$|S_n(x) - T_n^{(j)}(x)| \leq \frac{\operatorname{cth} \left(n + \frac{1}{2} \right) d \operatorname{ch} \left(n + \frac{1}{2} \right) \operatorname{Im} x}{e^{(n+\frac{1}{2})d} \operatorname{sh} \frac{1}{2}(d - |\operatorname{Im} x|)} M \quad (6)$$

($j = 1, 2$).

Доказательство. Неравенство (4) немедленно получается, если оценить интегралы в представлении (1) остатка $r_n(x) = f(x) - S_n(x)$. Это неравенство для действительных x имеется в [19]. Аналогичным образом устанавливаются и остальные приведенные в теореме оценки.

Действительно, так как $2S_n(x) - T_n^{(1)}(x) - T_n^{(2)}(x) = -2R_n(x)$, то после оценки интегралов, входящих в $R_n(x)$, используя при этом неравенство

$$\left| \frac{\sin \left(n + \frac{1}{2} \right) (\xi_1 \pm id - x)}{\sin(2n+1)(\xi_1 \pm id) \sin \frac{1}{2}(\xi_1 \pm id - x)} \right| < \frac{\operatorname{ch} \left(n + \frac{1}{2} \right) (d \mp \operatorname{Im} x)}{\operatorname{sh}(2n+1) d \operatorname{sh} \frac{1}{2}(d - |\operatorname{Im} x|)},$$

получим (5).

Для получения (6) представим разность $r_n(x) - r_n^{(1)}(x)$ в точке x ($|\operatorname{Im} x| < d$) в следующем виде:

$$r_n(x) - r_n^{(1)}(x) = e^{-(n+\frac{1}{2})(d-ix)} \left\{ \frac{e^{(n+\frac{1}{2})d}}{8\pi i} \times \right.$$

$$\begin{aligned}
& \times \int_0^{2\pi} \frac{f(\xi_1 + id) d\xi_1}{\cos\left(n + \frac{1}{2}\right) (\xi_1 + id) \sin \frac{1}{2} (\xi_1 + id - x)} + \\
& + \left. \frac{e^{-(n+\frac{1}{2})d}}{8\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(\xi_1 - id) e^{-i(2n+1)\xi_1} d\xi_1}{\cos\left(n + \frac{1}{2}\right) (\xi_1 - id) \sin \frac{1}{2} (\xi_1 - id - x)} \right\} - \\
& - e^{-(n+\frac{1}{2})(d+ix)} \left\{ \frac{e^{(n+\frac{1}{2})d}}{8\pi i} \times \right. \\
& \times \int_0^{2\pi} \frac{f(\xi_1 - id) d\xi_1}{\cos\left(n + \frac{1}{2}\right) (\xi_1 - id) \sin \frac{1}{2} (\xi_1 - id - x)} + \\
& \left. + \frac{e^{-(n+\frac{1}{2})d}}{8\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(\xi_1 + id) e^{i(2n+1)\xi_1} d\xi_1}{\cos\left(n + \frac{1}{2}\right) (\xi_1 + id) \sin \frac{1}{2} (\xi_1 + id - x)} \right\}. \quad (7)
\end{aligned}$$

Имеет место аналогичное равенство и для разности остаточных членов $r_n(x) - r_n^{(2)}(x)$, т. е.

$$\begin{aligned}
r_n(x) - r_n^{(2)}(x) &= e^{-(n+\frac{1}{2})(d-ix)} \left\{ \frac{e^{-(n+\frac{1}{2})d}}{8\pi} \times \right. \\
& \times \int_0^{2\pi} \frac{f(\xi_1 - id) e^{-i(2n+1)\xi_1} d\xi_1}{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right) (\xi_1 - id) \sin \frac{1}{2} (\xi_1 - id - x)} - \\
& - \frac{e^{(n+\frac{1}{2})d}}{8\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(\xi_1 + id) d\xi_1}{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right) (\xi_1 + id) \sin \frac{1}{2} (\xi_1 + id - x)} \left. \right\} + \\
& + e^{-(n+\frac{1}{2})(d+ix)} \left\{ \frac{e^{-(n+\frac{1}{2})d}}{8\pi} \times \right. \\
& \times \int_0^{2\pi} \frac{f(\xi_1 + id) e^{i(2n+1)\xi_1} d\xi_1}{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right) (\xi_1 + id) \sin \frac{1}{2} (\xi_1 + id - x)} -
\end{aligned}$$

$$\left. - \frac{e^{(n+\frac{1}{2})d}}{8\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(\xi_1 - id) d\xi_1}{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)(\xi_1 - id) \sin \frac{1}{2}(\xi_1 - id - x)} \right\}. \quad (8)$$

Эти равенства получаются, если вместо $r_n(x)$ подставить выражение (1), а вместо остатков интерполирования $r_n^{(1)}(x)$ и $r_n^{(2)}(x)$ — соответственно их интегральные представления

$$r_n^{(1)}(x) = \frac{\cos\left(n + \frac{1}{2}\right)x}{4\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\xi) d\xi}{\cos\left(n + \frac{1}{2}\right)\xi \sin \frac{1}{2}(\xi - x)},$$

$$r_n^{(2)}(x) = \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)x}{4\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\xi) d\xi}{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)\xi \sin \frac{1}{2}(\xi - x)}$$

и проделать несложные преобразования.

Оценивая, наконец, разности $r_n(x) - r_n^{(j)}(x)$, заменив при этом подынтегральные выражения в интегралах, входящих в (7) и (8), их максимальными величинами, в частности, подставив вместо

$$\left| \cos\left(n + \frac{1}{2}\right)(\xi_1 \pm id) \sin \frac{1}{2}(\xi_1 \pm id - x) \right|^{-1}$$

и

$$\left| \sin\left(n + \frac{1}{2}\right)(\xi_1 \pm id) \sin \frac{1}{2}(\xi_1 \pm id - x) \right|^{-1}$$

выражение $\left[\operatorname{sh}\left(n + \frac{1}{2}\right)d \operatorname{sh} \frac{1}{2}(d \mp \operatorname{Im} x) \right]^{-1}$, придем к неравенствам

$$|r_n(x) - r_n^{(j)}(x)| \leq \frac{e^{-(n+\frac{1}{2})d}}{2 \operatorname{sh}\left(n + \frac{1}{2}\right)d} \times$$

$$\times \left\{ \frac{\operatorname{ch}\left(n + \frac{1}{2}\right)(d + \operatorname{Im} x)}{\operatorname{sh} \frac{1}{2}(d + \operatorname{Im} x)} + \frac{\operatorname{ch}\left(n + \frac{1}{2}\right)(d - \operatorname{Im} x)}{\operatorname{sh} \frac{1}{2}(d - \operatorname{Im} x)} \right\} M \quad (9)$$

($j = 1, 2$).

Так как $T_n^{(j)}(x) - S_n(x) = r_n(x) - r_n^{(j)}(x)$, то после замены знаменателей в фигурных скобках неравенства (9) наименьшим из них и выполнения некоторых преобразований получим неравенство (6).

Как видно из доказательства теоремы, при более точных оценках соответствующих выражений можно было получить оценки несколько точнее, чем указанные в теореме 2, однако они имели бы более громоздкий вид.

II. Обозначим через $\sigma_n(x)$ интеграл Фейера

$$\sigma_n(x) = \frac{1}{2n\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 \frac{1}{2} n(t-x)}{\sin^2 \frac{1}{2} (t-x)} f(t) dt. \quad (10)$$

Нетрудно установить, что для остатка $\rho_n(x) = f(x) - \sigma_n(x)$ в точке x ($|\operatorname{Im} x| < d$) имеет место равенство

$$\rho_n(x) = \frac{c_0^{(2)}(x)}{2n\pi i} - \frac{e^{-n(d+ix)}}{2n\pi i} a_n^{(2)}(x) - \frac{e^{-n(d-ix)}}{2n\pi i} b_n^{(2)}(x). \quad (11)$$

Действительно, если записать функцию $f(x)$ в виде

$$f(x) = \frac{1}{8n\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\sin n(\xi-x)}{\sin^2 \frac{1}{2} (\xi-x)} f(\xi) d\xi,$$

а интеграл в (10), как и в случае приближения суммами Фурье, заменить двумя интегралами по отрезкам ($0 \leq \operatorname{Re} \xi \leq 2\pi$, $\operatorname{Im} x = \pm d$) в направлении, оставляющем полосу регулярности $|\operatorname{Im} \xi| \leq d$ слева, то разность $\rho_n(x) = f(x) - \sigma_n(x)$ преобразуется после некоторых вычислений к требуемому виду (11).

Как видно из равенства (11), коэффициент в члене с нижним порядком относительно n может быть достаточно мал в точках x , близких к действительной оси, если только полоса регулярности $|\operatorname{Im} \xi| \leq d$ приближаемой функции широка, а значение $f(\xi_1 \pm id)$ мало, и, следовательно, уже при небольших n интеграл Фейера также может давать неплохую точность.

Пусть далее

$$U_n(x) = \frac{1}{2n^2} \sum_{k=1}^{2n} \frac{\sin^2 \frac{1}{2} n(x-\theta_k)}{\sin^2 \frac{1}{2} (x-\theta_k)} f(\theta_k), \quad (12)$$

где $\theta_k = \frac{k\pi}{n}$ ($k = 1, 2, \dots, 2n$). Остаточный член $\rho_n^{(1)}(x) = f(x) - U_n(x)$ формулы (12) во внутренней точке x полосы регулярности представим в виде контурного интеграла

$$\rho_n^{(1)}(x) = \frac{1}{4n\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\sin \frac{1}{2} n(\xi+x) \sin \frac{1}{2} n(\xi-x)}{\sin n\xi \sin^2 \frac{1}{2} (\xi-x)} f(\xi) d\xi. \quad (13)$$

Имеет место следующая

Теорема 3. Для любой 2π -периодической функции $f(x)$, регулярной внутри полосы $|\operatorname{Im} x| \leq d$ и непрерывной вплоть до ее границы, справедливо в точке x ($|\operatorname{Im} x| < d$) равенство

$$\rho_n(x) = \rho_n^{(1)}(x) + \frac{e^{-nd}}{4n} \sum_{k=0}^{\infty} [D_{n,k}^{(n,0)}(x) - 2D_{n,k}^{(0,n)}(x)e^{-nd} + D_{n,k}^{(-n,2n)}(x)e^{-2nd}] e^{-2knd}.$$

Доказательство. Равенство (13) запишем в форме

$$\begin{aligned} \rho_n^{(1)}(x) &= \frac{\cos nx}{8n\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\xi) d\xi}{\sin n\xi \sin^2 \frac{1}{2}(\xi - x)} - \\ &- \frac{1}{8n\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\operatorname{ctg} n\xi f(\xi) d\xi}{\sin^2 \frac{1}{2}(\xi - x)} = J_1(x) - J_2(x). \end{aligned} \quad (14)$$

Второе слагаемое преобразуем к виду

$$\begin{aligned} J_2(x) &= -\frac{c_0^{(2)}(x)}{2ni} + \frac{e^{-nd}}{8n\pi i} \times \\ &\times \left\{ \int_0^{2\pi} \frac{f(\xi_1 - id) e^{-in\xi_1} d\xi_1}{\sin n(\xi_1 - id) \sin^2 \frac{1}{2}(\xi_1 - id - x)} - \right. \\ &\left. - \int_0^{2\pi} \frac{f(\xi_1 + id) e^{in\xi_1} d\xi_1}{\sin n(\xi_1 + id) \sin^2 \frac{1}{2}(\xi_1 + id - x)} \right\}, \end{aligned}$$

а первое слагаемое $J_1(x)$ представим в следующем виде:

$$\begin{aligned} J_1(x) &= -\frac{e^{-n(d+ix)}}{2ni} a_n^{(2)}(x) - \frac{e^{-n(d-ix)}}{2ni} b_n^{(2)}(x) - \\ &- \frac{e^{-inx}}{16n\pi i} \left\{ \int_0^{2\pi} \frac{e^{i2nx} f(\xi_1 + id) d\xi_1}{\sin n(\xi_1 + id) \sin^2 \frac{1}{2}(\xi_1 + id - x)} - \right. \\ &\left. - \int_0^{2\pi} \frac{f(\xi_1 - id) d\xi_1}{\sin n(\xi_1 - id) \sin^2 \frac{1}{2}(\xi_1 - id - x)} \right\} - \\ &- \frac{e^{-n(2d-ix)}}{16n\pi i} \left\{ \int_0^{2\pi} \frac{e^{-i2nx} f(\xi_1 + id) e^{i2n\xi_1} d\xi_1}{\sin n(\xi_1 + id) \sin^2 \frac{1}{2}(\xi_1 + id - x)} - \right. \end{aligned}$$

$$- \int_0^{2\pi} \frac{f(\xi_1 - id) e^{-i2n\xi_1} d\xi_1}{\sin n(\xi_1 - id) \sin^2 \frac{1}{2}(\xi_1 - id - x)} \Bigg\}.$$

Подставляя в (14) вместо $J_1(x)$ и $J_2(x)$ полученные выше выражения придем к соотношению

$$\rho_n^{(1)}(x) = \rho_n(x) - \frac{1}{4n} g_{n,0}^{(n)}(x) + \frac{e^{-nd}}{2n} g_{n,n}^{(0)}(x) - \frac{e^{-2nd}}{4n} g_{n,2n}^{(-n)}(x), \quad (15)$$

где

$$g_{n,\nu}^{(m)}(x) = \frac{1}{4\pi i} \left\{ \int_0^{2\pi} \frac{e^{imx} f(\xi_1 + id) e^{i\nu\xi_1} d\xi_1}{\sin n(\xi_1 + id) \sin^2 \frac{1}{2}(\xi_1 + id - x)} - \int_0^{2\pi} \frac{e^{-imx} f(\xi_1 - id) e^{-i\nu\xi_1} d\xi_1}{\sin n(\xi_1 - id) \sin^2 \frac{1}{2}(\xi_1 - id - x)} \right\}.$$

Воспользовавшись разложением

$$[\sin n(\xi_1 \pm id)]^{-1} = \mp 2ie^{-nd} \sum_{k=0}^{\infty} e^{\pm i(2k+1)n\xi_1} e^{-2knd},$$

представим функцию $g_{n,\nu}^{(m)}(x)$ в виде ряда

$$g_{n,\nu}^{(m)}(x) = e^{-nd} \sum_{k=0}^{\infty} D_{n,k}^{m,\nu}(x) e^{-2knd}, \quad (16)$$

где

$$D_{n,k}^{m,\nu}(x) = -2i [e^{imx} a_{(2k+1)n+\nu}^{(2)}(x) + e^{-imx} b_{(2k+1)n+\nu}^2(x)].$$

И, наконец, подставляя в соотношение (15) ряд (16) при $\nu = 0$, n и $2n$, получаем равенство, приведенное в теореме 3.

Теорема 4. Во всякой внутренней точке x полосы $|\operatorname{Im} x| \leq d$ и для любой функции $f(x)$ из рассматриваемого класса имеют место неравенства:

$$|f(x) - \sigma_n(x)| \leq \frac{1}{2n} \left\{ \frac{1 + e^{-n(d-\operatorname{Im} x)}}{\operatorname{sh}(d - \operatorname{Im} x)} + \frac{1 + e^{-n(d+\operatorname{Im} x)}}{\operatorname{sh}(d + \operatorname{Im} x)} \right\} M, \quad (17)$$

$$|\sigma_n(x) - U_n(x)| \leq \frac{1 + \operatorname{ch} nd \operatorname{ch} n \operatorname{Im} x}{ne^{nd} \operatorname{sh} nd \operatorname{sh}(d - |\operatorname{Im} x|)} M, \quad (18)$$

где, как и раньше, $M = \max_{|\xi_1| < \infty} |f(\xi_1 \pm id)|$.

Доказательство. Эти оценки, как и оценки теоремы 2, получаются в результате грубых оценок разностей $\rho_n(x) = f(x) - \sigma_n(x)$ и $\rho_n(x) - \rho_n^{(1)}(x)$.

В самом деле, остаток приближения (11) перепишем в виде

$$\rho_n(x) = -\frac{1}{8n\pi} \left\{ \int_0^{2\pi} \frac{[1 - e^{ni(\xi_1 + id - x)}] f(\xi_1 + id) d\xi_1}{\sin^2 \frac{1}{2} (\xi_1 + id - x)} + \right. \\ \left. + \int_0^{2\pi} \frac{[1 - e^{-ni(\xi_1 - id - x)}] f(\xi_1 - id) d\xi_1}{\sin^2 \frac{1}{2} (\xi_1 - id - x)} \right\}.$$

Оценим эти интегралы, воспользовавшись неравенствами

$$\left| \frac{1 - e^{\pm in(\xi_1 \pm id - x)}}{\sin^2 \frac{1}{2} (\xi_1 \pm id - x)} \right| = \\ = \frac{[1 - 2 \cos n(\xi_1 - \operatorname{Re} x) e^{-n(d \mp \operatorname{Im} x)} + e^{-2n(d \mp \operatorname{Im} x)}]^{1/2}}{\sin^2 \frac{1}{2} (\xi_1 - \operatorname{Re} x) + \operatorname{sh}^2 \frac{1}{2} (d \mp \operatorname{Im} x)} \ll \\ \ll \frac{1 + e^{-n(d \mp \operatorname{Im} x)}}{\sin^2 \frac{1}{2} (\xi_1 - \operatorname{Re} x) + \operatorname{sh}^2 \frac{1}{2} (d \mp \operatorname{Im} x)} \quad (19)$$

и значениями интегралов

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\xi_1}{\sin^2 \frac{1}{2} (\xi_1 - \operatorname{Re} x) + \operatorname{sh}^2 \frac{1}{2} (d \mp \operatorname{Im} x)} = \frac{4\pi}{\operatorname{sh} (d \mp \operatorname{Im} x)}. \quad (20)$$

В результате получим оценку (17).

Таким же путем устанавливается справедливость и оценки (18). Применяя (20) к оценке функции $g_{n,\nu}^{(m)}(x)$, будем иметь неравенство

$$|g_{n,\nu}^{(m)}(x)| \ll \frac{M}{\operatorname{sh} nd} \left| \frac{e^{-m \operatorname{Im} x}}{\operatorname{sh} (d - \operatorname{Im} x)} + \frac{e^{m \operatorname{Im} x}}{\operatorname{sh} (d + \operatorname{Im} x)} \right| \ll \\ \ll \frac{2 \operatorname{ch} m \operatorname{Im} x}{\operatorname{sh} nd \operatorname{sh} (d - |\operatorname{Im} x|)} M.$$

Отсюда для $|\sigma_n(x) - U_n(x)|$, используя (15) и (21), получаем

$$|\sigma_n(x) - U_n(x)| \ll \frac{2e^{-nd} + [1 + e^{-2nd}] \operatorname{ch} n \operatorname{Im} x}{2n \operatorname{sh} nd \operatorname{sh} (d - |\operatorname{Im} x|)} M. \quad (21)$$

Преобразуя правую часть этого неравенства, получаем (18).

Как известно, существует тесная связь между сходимостью и суммируемостью рядов Фурье и сходимостью и суммируемостью интерполяционного тригонометрического процесса с равноотстоящими узлами. В частности, если имеет место сходимость в классе непрерывных периодических функций или в некотором другом классе функций приближенных методов одного из этих видов, то, как правило, соответствующий процесс другого вида также является сходящимся в этом же классе функций [21—24]. В рассматриваемом здесь классе аналитических функций, как видно из полученной асимптотики и оценок (5), (6), (18), частные суммы Фурье и средние Фейера и соответствующие интерполяционные многочлены $T_n^{(1)}(x)$, $T_n^{(2)}(x)$ и $U_n(x)$ на действительной оси имеют достаточно высокий порядок совпадения.

Остановимся еще на вопросе приближения периодических аналитических функций суммами Валле Пуссена

$$\begin{aligned}\tau_n^{(q)}(x) &= \frac{1}{n} [S_{qn}(x) + S_{q(n+1)}(x) + \dots + S_{(q+1)n-1}(x)] = \\ &= (q+1)\sigma_{(q+1)n}(x) - q\sigma_{qn}(x) \\ &(q = 1, 2, \dots).\end{aligned}$$

Теорема 5. Для любой 2π -периодической функции $f(x)$, непрерывной в полосе $|\operatorname{Im} x| \leq d$ и регулярной в ее внутренних точках, имеет место неравенство

$$\begin{aligned}|f(x) - \tau_n^{(q)}(x)| &\leq \frac{M}{2ne^{nd}} \times \\ &\times \left\{ \frac{1 + e^{-n(d-\operatorname{Im}x)}}{e^{-qn\operatorname{Im}x} \operatorname{sh}(d - \operatorname{Im}x)} + \frac{1 + e^{-n(d+\operatorname{Im}x)}}{e^{qn\operatorname{Im}x} \operatorname{sh}(d + \operatorname{Im}x)} \right\},\end{aligned}\quad (22)$$

где x — внутренняя точка этой полосы, а $M = \max_{|\xi_1| < \infty} |f(\xi_1 \pm id)|$.

Доказательство. Поскольку $f(x) - \tau_n^{(q)}(x) = (q+1)\rho_{(q+1)n}(x) - q\rho_{qn}(x)$, то на основании равенства (11) можем записать, что

$$\begin{aligned}f(x) - \tau_n^{(q)}(x) &= \frac{e^{-qn(d+ix)}}{2ni} [a_{qn}^{(2)}(x) - e^{-n(d+ix)} a_{(q+1)n}^{(2)}(x)] + \\ &+ \frac{e^{-qn(d-ix)}}{2ni} [b_{qn}^{(2)}(x) - e^{-n(d-ix)} b_{(q+1)n}^{(2)}(x)]\end{aligned}$$

или в другом виде

$$\begin{aligned}f(x) - \tau_n^{(q)}(x) &= \frac{e^{-qn(d+ix)}}{8n\pi} \times \\ &\times \int_0^{2\pi} \frac{f(\xi_1 + id) e^{iqn\xi_1}}{\sin^2 \frac{1}{2} (\xi_1 + id - x)} [e^{in(\xi_1 + id - x)} - 1] d\xi_1 + \\ &+ \frac{e^{-qn(d-ix)}}{8n\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(\xi_1 - id) e^{-iqn\xi_1}}{\sin^2 \frac{1}{2} (\xi_1 - id - x)} [e^{-in(\xi_1 - id - x)} - 1] d\xi_1.\end{aligned}\quad (23)$$

Оценивая правую часть (23), используя при этом (19) и (20), получаем неравенство (22), которое для действительных x имеет следующий простой вид:

$$|f(x) - \tau_n^{(q)}(x)| \leq \frac{1 + e^{-nd}}{ne^{qnd} \operatorname{sh} d} M$$

($q = 1, 2, \dots; n = 1, 2, \dots$).

III. Рассмотрим, наконец, асимптотику остатка приближения интегралом Джексона

$$D_n(x) = \frac{3}{2n(2n^2 + 1)\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\sin^4 \frac{1}{2} n(t-x)}{\sin^4 \frac{1}{2} (t-x)} f(t) dt.$$

И. П. Натансон показал [25], что если у 2π -периодической функции $f(x)$ существует и ограничена вторая производная $f''(x)$, то имеет место соотношение

$$D_n(x) = f(x) + \frac{3}{2n^2} f''(x) + o\left\{\frac{1}{n^2}\right\}.$$

Аналогичное равенство им установлено и для сингулярных интегралов некоторого общего вида.

Здесь выясняется более полная асимптотика остаточного члена интеграла Джексона в точках комплексной плоскости, но в более узком классе функций. Другими словами, может быть доказана следующая

Теорема 6. *Какая бы ни была 2π -периодическая аналитическая внутри и непрерывная на границе полосы $|\operatorname{Im} x| \leq d$ функция $f(x)$, имеет место в точке x ($|\operatorname{Im} x| < d$) равенство*

$$D_n(x) = f(x) + \frac{3}{2n^2 + 1} f''(x) - \frac{9c_0^{(4)}(x)}{8n(2n^2 + 1)i} +$$

$$+ \frac{3e^{-n(d+ix)}}{2n(2n^2 + 1)i} a_n^{(4)}(x) + \frac{3e^{-n(d-ix)}}{2n(2n^2 + 1)i} b_n^{(4)}(x) -$$

$$- \frac{3e^{-2n(d+ix)}}{8n(2n^2 + 1)i} a_{2n}^{(4)}(x) - \frac{3e^{-2n(d-ix)}}{8n(2n^2 + 1)i} b_{2n}^{(4)}(x).$$

Доказательство. Перепишем интеграл Джексона в виде

$$D_n(x) = \frac{3}{4\pi n(2n^2 + 1)} \left\{ \int_0^{2\pi} \frac{\sin^4 \frac{1}{2} n(\xi_1 + id - x)}{\sin^4 \frac{1}{2} (\xi_1 + id - x)} f(\xi_1 + id) d\xi_1 + \right.$$

$$\left. + \int_0^{2\pi} \frac{\sin^4 \frac{1}{2} n(\xi_1 - id - x)}{\sin^4 \frac{1}{2} (\xi_1 - id - x)} f(\xi_1 - id) d\xi_1 \right\}, \quad (24)$$

а функцию $f(x)$ представим следующим образом:

$$f(x) = -\frac{3}{2n^2 + 1} f''(x) + \frac{3}{32n(2n^2 + 1)\pi i} \times \\ \times \int_1^{\infty} \frac{4\sin n(\xi - x) - \sin 2n(\xi - x)}{\sin^4 \frac{1}{2}(\xi - x)} f(\xi) d\xi.$$

Справедливость последнего равенства легко проверить непосредственным вычислением контурного интеграла, входящего в это равенство.

Функцию $\sin^4 \frac{1}{2} nt$ выразим через косинусы по известному тождеству

$$\sin^4 \frac{1}{2} nt = \frac{1}{8} \cos 2nt - \frac{1}{2} \cos nt + \frac{3}{8}$$

и подставим ее в интегралы (24). После этого для разности $f(x) - D_n(x)$ будем иметь равенство

$$f(x) - D_n(x) = -\frac{3}{2n^2 + 1} f''(x) - \\ - \frac{9}{32\pi n(2n^2 + 1)} \left\{ \int_0^{2\pi} \frac{f(\xi_1 + id) d\xi_1}{\sin^4 \frac{1}{2}(\xi_1 + id - x)} + \right. \\ \left. + \int_0^{2\pi} \frac{f(\xi_1 - id) d\xi_1}{\sin^4 \frac{1}{2}(\xi_1 - id - x)} \right\} - \frac{3}{32n(2n^2 + 1)\pi} \times \\ \times \int_0^{2\pi} \frac{f(\xi_1 + id)}{\sin^4 \frac{1}{2}(\xi_1 + id - x)} [e^{2ni(\xi_1 + id - x)} - 4e^{ni(\xi_1 + id - x)}] d\xi_1 - \\ - \frac{3}{32n(2n^2 + 1)\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(\xi_1 - id)}{\sin^4 \frac{1}{2}(\xi_1 - id - x)} \times \\ \times [e^{-2ni(\xi_1 - id - x)} - 4e^{-ni(\xi_1 - id - x)}] d\xi_1,$$

которое и дает нужное нам разложение интеграла Джексона.

В заключение отметим, что все изложенное выше при небольших изменениях переносится и для класса 2π -периодических функций, непрерывных в полосе $-h \leq \text{Im } x \leq d$ ($d, h > 0, d \neq h$) и регулярных во внутренних точках этой полосы. Несколько иной подход необходим при изучении асимптотики этих методов в классе периодических функций с криволинейной полосой регулярности.

ЛИТЕРАТУРА

1. Колмогоров А. Н. *Ann. of Math.*, **36**, 521—526, 1935.
2. Пинкевич В. Т. *Изв. АН СССР, сер. матем.*, **4**, 521—528, 1940.
3. Никольский С. М. *Труды Матем. ин-та им. В. А. Стеклова*, **XV**, 1945.
4. Никольский С. М. *Изв. АН СССР, сер. матем.*, **4**, 501—508, 1940.
5. Zygmund A. *Duke Mathem. J.*, **12**, 695—704, 1945.
6. Nagy V. *Acta sci. Math. Szeged*, **12**, pars B, 204—210, 1950.
7. Тиман А. Ф. *ДАН СССР*, **81**, 508—511, 1951.
8. Тиман А. Ф. *Изв. АН СССР, сер. матем.*, **17**, 99—134, 1953.
9. Соколов И. Г. *ДАН СССР*, **103**, 23—26, 1955.
10. Ефимов А. В. *ДАН СССР*, **114**, 930—933, 1957.
11. Ефимов А. В. *ДАН СССР*, **131**, 234—237, 1960.
12. Ефимов А. В. *Матем. сб.*, (95), **54**, № 1, 51—92, 1961.
13. Ефимов А. В. *Труды Матем. ин-та им. В. А. Стеклова*, **LXII**, 1961.
14. Теляковский С. А. *ДАН СССР*, **121**, 426—429, 1958.
15. Теляковский С. А. *Изв. АН СССР, сер. матем.*, **24**, 213—242, 1960.
16. Турецкий А. Х. *ДАН СССР*, **126**, 30—32, 1959.
17. Турецкий А. Х. *ДАН СССР*, **126**, 1207—1209, 1959.
18. Покало А. К. *Учен. зап. Минского пединститута им. А. М. Горького. Юбил. вып. № 7, сер. физ.-мат.*, 1957.
19. Poussin Valleeé. *Leçons l'approximation des fonctions d'une variable réelle. Paris*, 1919.
20. Крылов В. И., Янович Л. А. *ДАН БССР*, **9**, 73—76, 1965.
21. Бернштейн С. Н. *Собр. соч.*, **2**, 1954, стр. 161—165.
22. Лозинский С. М. *Матем. сб.*, т. 14 (56), **3**, 175—262, 1944.
23. Натансон И. П. *Конструктивная теория функций. ГИТТЛ*, 1949.
24. Погодичева Н. А., Тиман А. Ф. *ДАН СССР*, **111**, 542—543, 1956.
25. Натансон И. П. *ДАН СССР*, **73**, 273—276, 1950.

Поступило в редакцию 29.VII 1965

Б. И. СТЕПАНОВ, Ю. И. ЧЕКАЛИНСКАЯ

ГЕНЕРАЦИЯ СОСТАВНОЙ СИСТЕМЫ ИЗ НЕСКОЛЬКИХ ПАРАЛЛЕЛЬНО РАСПОЛОЖЕННЫХ СТЕРЖНЕЙ

При последовательном соединении стержней нельзя добиться существенного увеличения генерируемого потока за счет увеличения числа стержней, а также их длины. Суммарная длина составной системы ограничивается некоторой оптимальной величиной, зависящей от параметров резонатора [1]. Кроме того, накопление большой энергии в выходном стержне часто приводит к его разрушению.

Эти недостатки можно обойти, используя другие типы соединения генераторов. Расчет потоков, выходящих из составной генерирующей системы, в общем случае довольно сложен, однако в ряде практически важных случаев он упрощается.

В данной работе исследуется свечение нескольких параллельно соединенных активных образцов. Расчет проводится на основании энергетических соображений в нелинейном приближении. При параллельном соединении, как и при других типах связи, наличие связи обеспечивает когерентность излучения за счет взаимного проникновения потоков.

Вначале рассмотрим общий случай произвольной связи и различной длины стержней, а затем — два частных случая, когда все стержни одинаковы.

Пусть имеется составной генератор из n активных стержней, связанных между собой некоторой системой связи (рис. 1). Введем следующие обозначения: r_j — коэффициент отражения на несвязанных торцах; R_j — доля излучения, возвращающегося в j -й стержень после отражения в системе связи, включая отражение от связанного торца; Δ_{ij} — доля излучения, поступающего от i -го стержня в j -й благодаря наличию связи; S_j' — поток у левой границы j -го активного слоя, распространяющийся вдоль оси z ; S_j'' — поток у правой границы, распространяющийся навстречу¹. Если x_j — коэффициент усиления потока за одно прохождение в j -ом активном слое, то потоки, подходящие к правой и левой границам, равны соответственно $x_j S_j'$ и $x_j S_j''$.

Величина x_j выражается формулой

$$x_j = e^{\int_0^{l_j} [k_j(z) - \rho_j(z)] dz}, \quad (1)$$

где l_j — длина j -го активного слоя; $k_j(z)$ и $\rho_j(z)$ — соответственно коэффициент усиления и коэффициент вредных потерь активного вещества.

¹ Потоки S_j' и S_j'' представляют собой интегральные по частоте и углу величины, усредненные по времени.

В случае однородного уширения зависимость коэффициента усиления $k(z)$ от плотности излучения $u(z)$ имеет вид [2]

$$k(z) = \frac{k_0}{1 + \alpha u(z)}. \quad (2)$$

Здесь k_0 и α — соответственно начальный коэффициент усиления и параметр нелинейности, зависящие от свойств вещества и величины накачки.

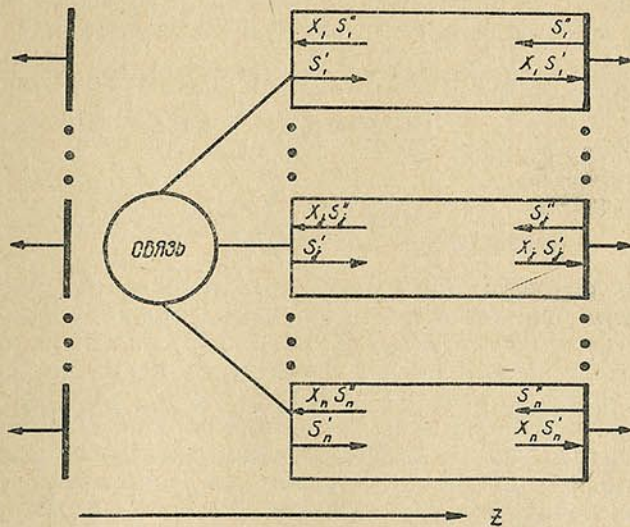


Рис. 1. Схема составного генератора

Потоки у границ любого j -го стержня удовлетворяют следующим соотношениям:

$$S_j' = R_j x_j S_j'' + \sum_{i=1}^n \Delta_{ij} x_i S_i'',$$

$$S_j'' = r_j x_j S_j'. \quad (3)$$

Таким образом, получается система из n линейных однородных уравнений относительно неизвестных S_j' и S_j'' . Отличное от нуля решение этой системы имеет место только при равенстве нулю ее определителя:

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & \dots & 0 & R_1 x_1 & \Delta_{21} x_2 & \dots & \Delta_{n1} x_n \\ 0 & -1 & \dots & 0 & \Delta_{12} x_1 & R_2 x_2 & \dots & \Delta_{n2} x_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & -1 & \Delta_{1n} x_1 & \Delta_{2n} x_2 & \dots & R_n x_n \\ x_1 r_1 & 0 & \dots & 0 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & x_2 r_2 & \dots & 0 & 0 & -1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & r_n x_n & 0 & 0 & \dots & -1 \end{vmatrix} = 0 \quad (4)$$

Это соотношение является условием стационарной генерации рассматриваемой составной системы. Оно устанавливает, в частности, связь между параметрами системы в порог генерации.

При выполнении условия (4) любой поток внутри активного слоя может быть выражен через коэффициенты усиления x_1, x_2, \dots, x_n , параметры резонатора и один из потоков, например, S_n'

$$S_j = f_j(x_1 \dots x_n, r_1 \dots r_n, R_1 \dots R_n, \Delta_{ij}) S_n'. \quad (5)$$

Вид функции f_j зависит только от параметров резонатора и активного вещества и не зависит от потоков внутри активных стержней.

Выражение для мощности излучения, выходящего за пределы j -го стержня, записывается, согласно [1], в следующем виде:

$$P_j = \frac{vs}{\alpha} \left[k_{0j} - \rho_j - \frac{1}{l_j} \ln x_j \right] \frac{\ln x_j}{\rho_j + \frac{1}{l_j} \ln x_j} = (1 - R_j) x_j S_j'' + (1 - r_j) x_j S_j' - \sum_{i \neq j}^n \Delta_{ij} x_i S_i''. \quad (6)$$

Если разделить P_j на P_n и учесть (5), то совместно с условием стационарной генерации (4) получим трансцендентную систему из n уравнений относительно n неизвестных x_j ($j=1, 2, \dots, n$). Если при решении этой системы для какого-нибудь x_j получится несколько значений, то необходимо брать наименьшее, соответствующее наиболее устойчивой моде. Определяя (численно) из этой системы все значения x_j , можно из (6) и (5) найти потоки у всех границ активных слоев системы. Умножив потоки, подходящие к торцам, на соответствующие коэффициенты пропускания, получим значения потоков, выходящих из рассматриваемой составной системы.

Перейдем теперь к рассмотрению двух частных случаев, когда все стержни одинаковы, связь находится соответственно около глухих или около выводных торцов и обеспечивает равномерное распределение излучения между стержнями.

1. Связь у глухих торцов. Пусть все стержни составного генератора одинаковы ($l_j = l_i = l$, $k_{0i} = k_{0j} = k_0$, $\rho_i = \rho_j = \rho$, $R_i = R_j = R$, $r_i = r_j = r$). Генерируемое системой излучение выходит через правые торцы, коэффициент отражения которых равен r . Излучение, выходящее из левых торцов, заблокировано зеркалами и либо перераспределяется между стержнями, либо поглощается в системе связи.

Допустим, что связь обеспечивает такое распределение потоков, при котором поток, выходящий через левый торец и попадающий затем в другие стержни, полностью компенсируется точно таким же потоком, приходящим от остальных стержней

$$\left(\sum_{i \neq j}^n \Delta_{ji} x_j S_j'' = \sum_{i \neq j}^n \Delta_{ij} x_i S_i'' \right)$$

В силу симметрии системы поле внутри всех активных образцов одинаково ($x_i = x_j = x$, $S_i' = S_j' = S'$, $S_i'' = S_j'' = S$), а следовательно, все $\sum_i \Delta_{ij} = \sum_i \Delta_{ji}$ и равны между собой. При этом система (3) значительно упрощается и сводится к двум уравнениям:

$$S' = (R + \sum_{i \neq j}^n \Delta_{ij}) x S'', \quad (7)$$

$$S'' = r x S'.$$

Величина $\sum_i \Delta_{ji} = \sum_i \Delta_{ij}$ представляет долю потока одного стержня, идущую на связь с другими стержнями. Если a — потери излучения в системе связи, то в случае глухих торцов имеем

$$R + \sum_{i \neq j}^n \Delta_{ji} + a = 1. \quad (8)$$

Учитывая (8), можно записать (7) в следующем виде:

$$\begin{aligned} S' &= (1 - a)xS'', \\ S'' &= rxS'. \end{aligned} \quad (7')$$

В этом случае условие генерации (4) принимает вид

$$x = \frac{1}{\sqrt{r(1-a)}} = \frac{1}{\sqrt{R_{эф}}}, \quad (9)$$

где $R_{эф}$ — эффективный коэффициент отражения, характеризующий потери, обусловленные выходом излучения за пределы активного слоя.

Следовательно, в данном случае коэффициент полезных потерь $\frac{1}{l} \ln x$ определяется только параметрами резонатора, длиной активного слоя и не зависит от свойств самого активного вещества. При $a = 0$ выражение (9) полностью совпадает с условием генерации для одного стержня, когда один из торцов глухой.

Формула (6) применительно к рассматриваемому случаю записывается в виде

$$\begin{aligned} P_j = P_i = P &= \frac{vs}{\alpha} \left[k_0 - \rho - \frac{1}{l} \ln x \right] \frac{\ln x}{\rho + \frac{1}{l} \ln x} = \\ &= (1 - R)xS'' + (1 - r)xS' - xS'' \sum_{i \neq j}^n \Delta_{ij}. \end{aligned} \quad (6')$$

Из (6'), учитывая (8) и (9), получаем выражение для потока, подходящего к выходному торцу каждого стержня:

$$\begin{aligned} xS' &= \frac{vs}{\alpha} \left[k_0 - \rho - \frac{1}{l} \ln \frac{1}{\sqrt{R_{эф}}} \right] \frac{\ln \frac{1}{\sqrt{R_{эф}}}}{\rho + \frac{1}{l} \ln \frac{1}{\sqrt{R_{эф}}}} \times \\ &\times \frac{1}{\frac{ar}{\sqrt{R_{эф}}} + (1-r)}. \end{aligned} \quad (10)$$

Соответственно полный поток излучения, выходящий из составной системы, равен

$$S_{\text{вых}} = nx S't = \frac{nvs}{\alpha} \left[k_0 - \rho - \frac{1}{l} \ln \frac{1}{\sqrt{R_{\text{эф}}}} \right] \frac{\ln \frac{1}{\sqrt{R_{\text{эф}}}}}{\left(\rho + \frac{1}{l} \ln \frac{1}{\sqrt{R_{\text{эф}}}} \right)} \times \times \frac{t}{\frac{ar}{\sqrt{R_{\text{эф}}}} + (1-r)}, \quad (11)$$

где t — коэффициент пропускания выходного торца.

Из (11) следует, во-первых, что выходящий поток пропорционален числу генерирующих стержней, и, во-вторых, что для $a=0$ выходящий поток не зависит от характера связи между стержнями и совпадает по величине с потоком, генерируемым такой же системой несвязанных стержней. Доля полезных потерь при этом зависит только от длины активных образцов и коэффициента отражения на выходном торце.

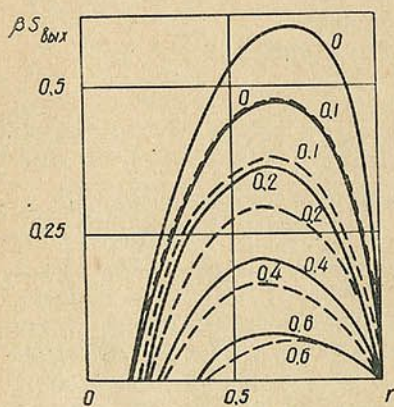


Рис. 2. Зависимости $\beta S_{\text{вых}}$ от коэффициента отражения на выходном торце системы ($\beta = a/vsn$). Сплошные кривые соответствуют $\rho = 0,005 \text{ см}^{-1}$, пунктирные — $\rho = 0,01 \text{ см}^{-1}$; цифрами у кривых обозначено α ; $k_0 = 0,1 \text{ см}^{-1}$

В рассматриваемом случае составной системы кривые зависимости выходящего потока от коэффициента отражения выходного торца имеют максимум (см. рис. 2), как и для одного стержня [3, 4]. Положение и высота максимума зависят от потерь излучения в системе связи и внутри активного вещества. Чем больше потери излучения, тем меньше выходящий поток при прочих одинаковых условиях. С увеличением ρ и поглощения в системе связи положение максимума смещается вначале в сторону меньших, а затем в сторону больших r .

Свечение составной генерирующей системы целесообразно характеризовать величиной полезного потока, снимаемого с единицы объема активного вещества $S_{\text{вых}}/nsl$. Будем называть эту величину удельной мощностью генерируемого потока. Если $\rho \neq 0$, то для рассматриваемой составной системы, как и для одного стержня [3], существует оптимальная длина активного слоя, при которой удельная мощность генерируемого потока максимальна.

Оптимальная длина каждого стержня, соответствующая максимальной удельной мощности генерируемого потока, в рассматриваемом случае равна¹

$$l_{\text{опт}} = \frac{\ln \frac{1}{\sqrt{R_{\text{эф}}}}}{\sqrt{k_0 \rho} - \rho}. \quad (12)$$

При $a=0$ это значение совпадает с оптимальной длиной для простого генератора [3], т. е. для системы несвязанных стержней.

¹ Здесь предполагается, что k_0 и α не зависят от длины стержня l . При наличии шумов это требование может не соблюдаться, что приведет к смещению максимума.

Выражение (12) определяет значение оптимальной длины активного вещества при заданных параметрах составной системы: k_0 , ρ , a и r . Из (12) следует, что оптимальное значение длины тем меньше, чем ниже коэффициент усиления k_0 . Зависимость от ρ более сложная. При $\rho \rightarrow 0$ и $\rho \rightarrow k_0$ оптимальное значение $l_{\text{опт}}$ стремится к бесконечности. Поэтому по мере увеличения ρ значение $l_{\text{опт}}$ вначале убывает, а затем снова растет. При $\rho = 0$ функция $S_{\text{вых}}/nsl$ не имеет максимума. В этом случае, приближенно соответствующем газовым лазерам, увеличение длины активного слоя приводит к более эффективному использованию энергии накачки. В случае $\rho = k_0$ система вообще не генерирует. Из (12) видно, что с ростом поглощения в системе связи оптимальная длина увеличивается. При $a = 0$ переход от несвязанной системы к системе, связанной у глухих торцов, не выводит генерирующую систему из оптимального режима. Для $a \neq 0$ наличие связи нарушает оптимальный режим.

Из (11) с учетом (12) получаем следующее выражение для максимально возможной удельной мощности генерируемого потока

$$(S_{\text{вых}}/nsl)_{\text{max}} = \frac{v}{\alpha} (\sqrt{k_0} - \sqrt{\rho})^2 \frac{t}{\frac{ar}{\sqrt{R_{\text{эф}}}} + (1-r)}. \quad (13)$$

Полная полезная энергия, снимаемая со всего генератора в оптимальном режиме, равна

$$S_{\text{вых}} = \frac{vs}{\alpha} (\sqrt{k_0} - \sqrt{\rho})^2 nl_{\text{опт}} \frac{t}{\frac{ar}{\sqrt{R_{\text{эф}}}} + (1-r)}. \quad (14)$$

Следовательно, в рассматриваемом случае можно получить достаточно большие когерентные потоки за счет увеличения числа генерирующих стержней. При $a = 0$ это может быть достигнуто без снижения эффективности использования генерирующей системы. В этом случае максимальная удельная мощность генерируемого потока не зависит от свойств резонатора и степени связи, а полностью определяется особенностями рабочего вещества и интенсивностью накачки. С ростом потерь излучения в системе связи оптимальная длина увеличивается, а выходящий поток и удельная мощность генерируемого потока уменьшаются.

На рис. 3 приведены зависимости удельной мощности генерируемого излучения от длины активного стержня при различных значениях коэффициента поглощения в системе связи. Из рисунка видно, что, кроме отмеченных выше закономерностей, увеличение поглощения в системе связи не только уменьшает удельную мощность генерируемого потока,

но и изменяет форму кривых $\frac{\alpha}{vnls} S_{\text{вых}}(l)$. С увеличением коэффициента поглощения α максимум на кривых сглаживается.

2. Связь у выходных торцов. Рассмотрим второй вариант параллельного соединения стержней. Данный случай отличается от предыдущего местом расположения связи между образцами. В предыдущем случае связь осуществлялась у глухих торцов, а в данном — у выходных.

Допустим, как и в предыдущем случае, что все генерирующие стержни совершенно идентичны и связь обеспечивает однородное распределение потоков между ними $\sum_{i+j} \Delta_{ji} x_j S_j' = \sum_{i+j} \Delta_{ij} x_i S_i''$. Отражение на

торцах всех стержней также одинаково, генерируемое излучение выходит через левые торцы, правые, не связанные торцы глухие. В силу симметрии потоки внутри всех стержней одинаковы ($S_j'' = S_i'' = S''$, $S_j' = S_i' = S'$, $x_i = x_j = x$) и $\sum_{i+j} \Delta_{ij} = \sum_{i+j} \Delta_{ji}$.

В данном частном случае система (3) записывается в следующем виде:

$$\frac{\beta}{\ell} S_{\text{вых}} \quad \begin{array}{c} 0 \\ 0,1 \\ 0,2 \\ 0,4 \end{array} \quad \begin{array}{c} 0 \\ 40 \\ 80 \\ \ell \end{array}$$

$$S'' = x S',$$

$$S' = R x S'' + x S'' \sum_{i+j}^n \Delta_{ij}. \quad (15)$$

Если t —доля излучения, выходящего через связь наружу, a и a' —соответственно доли излучения, поглощаемого в системе связи и в покрытиях на выходном торце, то выполняется равенство

$$R + \sum_{i+j} \Delta_{ij} + t + a + a' = 1. \quad (16)$$

Рис. 3. Зависимости $\frac{\beta}{\ell} S_{\text{вых}}$ от l ($\beta = \alpha/vsn$). Цифрами у кривых обозначено a ; $k_0 = 0,1 \text{ см}^{-1}$, $\rho = 0,005 \text{ см}^{-1}$

Условие генерации (4) в данном случае имеет вид

$$x = \frac{1}{\sqrt{1-t-a-a'}} = \frac{1}{\sqrt{R_{\text{эф}}}}. \quad (17)$$

Отсюда следует, что для рассматриваемой составной системы, как и в предыдущем случае, коэффициент полезных потерь определяется только свойствами резонатора и длиной активного вещества.

Формула (6) в данном случае принимает вид

$$P_i = P_j = P = \frac{vs}{\alpha} \left[k_0 - \rho - \frac{1}{l} \ln x \right] \frac{\ln x}{\rho + \frac{1}{l} \ln x} =$$

$$= (1-R) x S'' - x S'' \sum_{i+j}^n \Delta_{ij}. \quad (6'')$$

Из (6''), учитывая (16) и (17), получаем следующее выражение для полного потока, выходящего из всей системы:

$$S_{\text{вых}} = n x S'' t = \frac{nvs}{\alpha} \left[k_0 - \rho - \frac{1}{l} \ln \frac{1}{\sqrt{R_{\text{эф}}}} \right] \frac{\ln \frac{1}{\sqrt{R_{\text{эф}}}}}{\left(\rho + \frac{1}{l} \ln \frac{1}{\sqrt{R_{\text{эф}}}} \right)} (1-R_{\text{эф}}). \quad (18)$$

Оптимальная длина, при которой обеспечивается максимальный съем энергии с единицы объема активного вещества, рассчитывается по формуле (12), в которую необходимо подставить эффективный коэффициент отражения $R_{\text{эф}}$, определяемый (17).

Наибольшее количество полезной энергии, снимаемой с единицы объема активного вещества, и полный выходящий поток, соответствующий

щий наиболее эффективному использованию энергии активного вещества, рассчитываются соответственно по формулам:

$$(S_{\text{вых}}/nls)_{\text{max}} = \frac{v}{\alpha} (V\bar{k}_0 - V\bar{\rho})^2 \frac{t}{1 - R_{\text{эф}}}, \quad (19)$$

$$S_{\text{вых}}^{\text{опт}} = \frac{vS}{\alpha} (V\bar{k}_0 - V\bar{\rho})^2 \frac{tnl_{\text{опт}}}{1 - R_{\text{эф}}}. \quad (20)$$

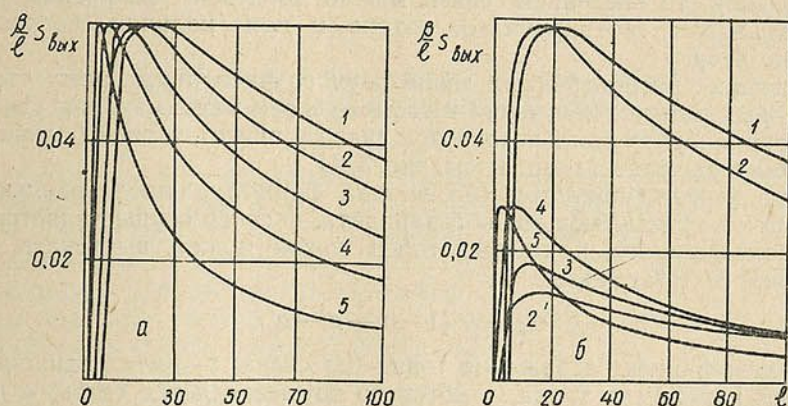


Рис. 4. Зависимости $\frac{S}{\ell} S_{\text{вых}}$ от l ($\beta = \alpha/vsn$) при отсутствии потерь излучения в системе связи (а) и при наличии потерь (б) для различной степени связи:

1 — $\Sigma\Delta_{ij} = 0$; 2 и 2' — 0,1; 3 — 0,2; 4 — 0,3; 5 — 0,4; $k_0 = 0,1 \text{ см}^{-1}$; $\rho = 0,005 \text{ см}^{-1}$; $R = 0,5$ (для кривых рис. 4, б: 1 и 2 — $a = 0$; 2' — 0,3; 3 — 0,2; 4 — 0,1; 5 — 0,05)

Если потери излучения в системе связи и отражающих покрытиях отсутствуют, то множитель $t/1 - R_{\text{эф}}$ в формулах (18) — (20) равен единице.

В отличие от предыдущего в данном случае эффективный коэффициент отражения $R_{\text{эф}}$ всегда, даже при $a = 0$, больше коэффициента отражения на выходном торце при отсутствии связи. Поэтому наличие связи у выходных торцов независимо от величины потерь излучения в системе связи приводит всегда к изменению свечения составной системы по сравнению с характеристиками свечения системы не связанных между собой стержней.

На рис. 4, а изображены зависимости удельной мощности генерируемого потока от l при различной степени связи $\Sigma\Delta_{ij}$ и отсутствии потерь излучения в системе связи. Наличие связи, даже при отсутствии в ней потерь излучения, приводит к изменению положения максимума и формы кривой $\alpha S_{\text{вых}}/nlsv$. Максимальное значение удельной мощности при этом не изменяется. С увеличением степени связи положение максимума смещается в сторону меньших длин. При $l < l_{\text{опт}}$ переход от несвязанной системы стержней к связанной, как правило, сопровождается увеличением удельной мощности генерируемого потока. Если $l > l_{\text{опт}}$, то при образовании связи удельная мощность уменьшается.

Из формулы (17), а также из рис. 4, а следует, что наличие связи у выходных торцов уменьшает порог генерации. Поэтому система, которая в отсутствие связи не генерировала, может начать генерировать при образовании связи.

С ростом поглощения излучения в системе связи оптимальная длина увеличивается, а выходящий поток и удельная мощность уменьшаются (рис. 4, б).

При наличии поглощения в системе связи переход от несвязанной системы стержней в оптимальном режиме к связанной системе также нарушает оптимальный режим, приводит к росту доли вредных потерь и, следовательно, к снижению удельной мощности генерируемого потока. Если до образования связи у выходных торцов длина стержней меньше оптимальной, то введением связи можно добиться увеличения удельной мощности генерируемого потока и при наличии поглощения (см. рис. 4, б).

Сравнение рассмотренных выше двух случаев показывает, что при одинаковых потерях излучения в системе связи максимальная удельная мощность генерируемого потока при связи у глухих торцов больше, чем при связи у выходных торцов (см. рис. 3, 4).

В заключение приведем без вывода формулу, определяющую $R_{эф}$ для случая, объединяющего оба варианта, — связь осуществляется, как во втором варианте, но правый торец также может выпускать часть радиации. В этом случае

$$R_{эф} = r(1 - t - a - a'),$$

где r — коэффициент отражения торца без связи; t — доля радиации, выходящей наружу из торца, у которого осуществляется связь; a и a' — доли излучения, поглощаемого в системе связи и в отражающих покрытиях на торцах, где осуществляется связь.

ЛИТЕРАТУРА

1. Степанов Б. И., Чекалинская Ю. И. ЖПС, 3, 325, 1965.
2. Степанов Б. И. Сб. «Спектроскопия рассеивающих сред». Изд. АН БССР, Минск, 1963.
3. Степанов Б. И. ДАН СССР, 148, 74, 1963.
4. Сцяпанаву Б. І., Чэкалінская Ю. І. Весці АН БССР, сер. фіз.-тэхн. навук, № 1, 1963.

Поступило в редакцию 9. XII 1965

Ф. И. ФЕДОРОВ

ФОРМУЛА ДЛЯ ТЕМПЕРАТУРЫ ДЕБАЯ ПОПЕРЕЧНО-ИЗОТРОПНЫХ СРЕД

В работе [1] был предложен общий метод, а в [2] произведен расчет температур Дебая Θ для гексагональных кристаллов. В настоящей работе дается существенное упрощение метода расчета Θ в случае поперечно-изотропной среды, которое позволяет получить для нее сравнительно простую явную формулу.

Как известно, задача вычисления температуры Дебая по упругим константам сводится к определению величины

$$I = \left\langle \frac{1}{v_0^3} + \frac{1}{v_1^3} + \frac{1}{v_2^3} \right\rangle, \quad (1)$$

где v_0, v_1, v_2 — фазовые скорости упругих волн, а угловые скобки означают усреднение по всем направлениям волновой нормали. В случае поперечно-изотропной среды (гексагональный кристалл) одна из волн (v_1) всегда является чисто поперечной и для нее (см. [3])

$$v_1^2 = \lambda_{66} + (\lambda_{44} - \lambda_{66})n_3^2,$$

где $n_3 = \mathbf{n} \cdot \mathbf{e}$; \mathbf{n}, \mathbf{e} — единичные векторы волновой нормали и оси симметрии кристалла. Следовательно,

$$\left\langle \frac{1}{v_1^3} \right\rangle = \frac{1}{4\pi} \int \frac{d\Omega}{v_1^3} = \int_0^1 \frac{dx}{V[\lambda_{66} + (\lambda_{44} - \lambda_{66})x^2]^3},$$

где $x = \cos \vartheta = \mathbf{n} \cdot \mathbf{e}$. Интеграл здесь вычисляется элементарно, и мы получаем

$$\left\langle \frac{1}{v_1^3} \right\rangle = \frac{1}{\lambda_{66} \sqrt{\lambda_{44}}}.$$

Таким образом, для гексагональных кристаллов

$$I = \frac{1}{\lambda_{66} \sqrt{\lambda_{44}}} + I_{02}, \quad (2)$$

где I_{02} обозначает усредненную сумму обратных кубов фазовых скоростей квазипродольной и квазипоперечной волн

$$I_{02} = \left\langle \frac{1}{v_0^3} + \frac{1}{v_2^3} \right\rangle. \quad (3)$$

Квадраты этих скоростей являются собственными значениями двумерного тензора (см. [3])

$$\lambda^n = c_0 + c_1 \mathbf{n} \cdot \mathbf{n} + c_2 \mathbf{e} \cdot \mathbf{e}, \quad (4)$$

где

$$c_0 = g_1 + g_2 n_3^2; \quad c_1 = g_3; \quad c_2 = g_2 + g_4 n_3^2. \quad (5)$$

Соответственно смещения квазипродольной (\mathbf{u}_0) и квазипоперечной (\mathbf{u}_2) волн являются решениями уравнения

$$\lambda_n \mathbf{u} = v^2 \mathbf{u}. \quad (6)$$

Следовательно, в данном случае задача становится двумерной.

Мы используем для ее решения метод сравнения с ближайшей изотропной средой [3], однако применим его не к полному трехмерному тензору Λ , а к двумерному тензору (4). Таким образом, мы будем искать тензор

$$\lambda_0 = a_0 + b_0 \mathbf{n} \cdot \mathbf{n}, \quad (7)$$

ближайший в среднем к тензору (4), причем усреднение будет распространяться на все направления \mathbf{n} , лежащие в меридиональной плоскости кристалла.

Аналогично [3] мы получим соотношения:

$$\langle \lambda^n - \lambda_0 \rangle_c = 0, \quad \langle \mathbf{n} (\lambda^n - \lambda_0) \mathbf{n} \rangle = 0, \quad (8)$$

которые, однако, теперь приводят к уравнениям:

$$2a_0 + b_0 = \langle \lambda^n \rangle_c, \quad a_0 + b_0 = \langle \mathbf{n} \lambda^n \mathbf{n} \rangle, \quad (9)$$

отличным от соответствующих трехмерному случаю. Решения их имеют вид:

$$a_0 = \langle \lambda_c^n - \mathbf{n} \lambda^n \mathbf{n} \rangle, \quad b_0 = \langle 2\mathbf{n} \lambda^n \mathbf{n} - \lambda_c^n \rangle. \quad (10)$$

Используя (4), (5), находим отсюда

$$a_0 = g_1 + g_2 + \frac{2}{15} g_4, \quad b_0 = g_3 - \frac{1}{3} g_2 + \frac{1}{15} g_4. \quad (11)$$

Теперь тензор (4) можно представить в виде

$$\lambda^n = a_0 + b_0 (\mathbf{n} \cdot \mathbf{n} + \alpha), \quad (12)$$

где

$$\begin{aligned} \alpha = \frac{1}{b_0} (\lambda^n - \lambda_0) = & - \left(f_2 (1 - n_3^2) + \frac{2f_4}{15} \right) + \\ & + \frac{1}{3} \left(f_2 - \frac{f_4}{5} \right) \mathbf{n} \cdot \mathbf{n} + (f_2 + f_4 n_3^2) \mathbf{e} \cdot \mathbf{e}. \end{aligned} \quad (13)$$

Здесь использованы обозначения

$$f_2 = \frac{g_2}{b_0}, \quad f_4 = \frac{g_4}{b_0}. \quad (14)$$

Тензор α характеризует относительное отличие λ^n от λ_0 . В качестве меры этого отличия может служить величина

$$\langle \alpha^2 \rangle_c = \frac{4}{225} (35f_2^2 + 30f_2 f_4 + 8f_4^2). \quad (15)$$

Заметим, что, согласно (8),

$$\langle \alpha \rangle_c = \langle \mathbf{n} \alpha \mathbf{n} \rangle = 0. \quad (16)$$

Введем обозначение

$$v^2 = a_0 + b_0 \xi. \quad (17)$$

Согласно [3], § 25,

$$v^4 - \lambda_c^n v^2 + |\lambda^n| = 0. \quad (18)$$

Из (12) находим:

$$\lambda_c^n = 2a_0 + b_0(1 + \alpha_c), \quad (19)$$

$$|\lambda^n| = \frac{1}{2} [(\lambda_c^n)^2 - (\lambda^n)^2] = a_0^2 + a_0 b_0(1 + \alpha_c) + b_0^2(\alpha_c - \mathbf{n} \alpha \mathbf{n} + |\alpha|). \quad (20)$$

Подставляя (17), (19), (20) в (18), получаем

$$\xi^2 - (1 + \alpha_c)\xi + \alpha_c - \mathbf{n} \alpha \mathbf{n} + |\alpha| = 0. \quad (21)$$

Тем же путем, как в [1], приходим к уравнениям:

$$(\mathbf{n} \cdot \mathbf{n} + \alpha) \mathbf{u} = \xi \mathbf{u}, \quad \mathbf{u} = \mathbf{n} + \mathbf{u}', \quad \mathbf{u}' \cdot \mathbf{n} = 0. \quad (22)$$

$$\xi = 1 + \mathbf{n} \alpha \mathbf{n} + \mathbf{n} \alpha \mathbf{u}', \quad (23)$$

$$\gamma \mathbf{u}' = \mathbf{k} - k \mathbf{u}' \cdot \mathbf{u}', \quad (24)$$

$$\gamma = 1 + \mathbf{n} \alpha \mathbf{n} + (\mathbf{n} \cdot \mathbf{n} - 1)\alpha, \quad k = \alpha \mathbf{n} - \mathbf{n} \alpha \mathbf{n} \cdot \mathbf{n}, \quad (25)$$

однако теперь все векторы, включая \mathbf{u}' , являются двумерными и лежат в плоскости (\mathbf{e}, \mathbf{n}) . Поэтому мы можем воспользоваться формулами для двумерных тензоров [3], § 14, с помощью которых получаем

$$\beta = \gamma^{-1} = \frac{\bar{\gamma}}{|\gamma|} = \frac{\gamma_c - \gamma}{|\gamma|} = \frac{1 + 2\mathbf{n} \alpha \mathbf{n} - \alpha_c + (1 - \mathbf{n} \cdot \mathbf{n})\alpha}{(1 + \mathbf{n} \alpha \mathbf{n})(1 + 2\mathbf{n} \alpha \mathbf{n} - \alpha_c)}. \quad (26)$$

Таким образом, уравнение (24) принимает вид

$$\mathbf{u}' = \beta \mathbf{k} - k \mathbf{u}' \cdot \beta \mathbf{u}' \quad (27)$$

и имеет в первом и втором приближениях решения для смещения квазипродольных волн:

$$\mathbf{u}'_{(1)} = \beta \mathbf{k}, \quad \mathbf{u}'_{(2)} = \beta \mathbf{k} - k \beta \mathbf{k} \cdot \beta^2 \mathbf{k}. \quad (28)$$

Из (23) для квазипродольной волны следует:

$$\xi_0 = 1 + \varepsilon, \quad \varepsilon = \mathbf{n} \alpha \mathbf{n} + \mathbf{n} \alpha \mathbf{u}', \quad (29)$$

причем, согласно (28),

$$\varepsilon_{(1)} = \mathbf{n} \alpha \mathbf{n} + \mathbf{n} \alpha \beta \mathbf{k}, \quad \varepsilon_{(2)} = \varepsilon_{(1)} - k \beta \mathbf{k} \cdot \mathbf{n} \alpha \beta^2 \mathbf{k}. \quad (30)$$

Из (21) имеем для суммы корней:

$$\xi_0 + \xi_2 = 1 + \alpha_c,$$

т. е.

$$\xi_2 = \alpha_c - \varepsilon. \quad (31)$$

Следовательно, найдя ξ_0 с любой степенью точности, мы сразу получаем ξ_2 с той же точностью.

Теперь для величины I_{02} (3) получим на основании (17)

$$\begin{aligned} I_{02} &= \langle (a_0 + b_0 \xi_0)^{-3/2} \rangle + \langle (a_0 + b_0 \xi_2)^{-3/2} \rangle = \\ &= a_0^{-3/2} \langle (1 + r_1 \xi_2)^{-3/2} \rangle + c_0^{-3/2} \langle (1 + r_2 \varepsilon)^{-3/2} \rangle, \end{aligned} \quad (32)$$

где $c_0 = a_0 + b_0$; $r_1 = b_0/a_0$; $r_2 = b_0/c_0$. Используя биномиальное разложение, можем написать в первом приближении, т. е. с точностью до 3-й степени ε , ξ_2 ,

$$\begin{aligned} I_{02}^{(1)} &= a_0^{-3/2} \left\langle 1 - \frac{3}{2} r_1 \xi_2 + \frac{15}{8} r_1^2 \xi_2^2 - \frac{35}{16} r_1^3 \xi_2^3 \right\rangle + \\ &+ c_0^{-3/2} \left\langle 1 - \frac{3}{2} r_2 \varepsilon + \frac{15}{8} r_2^2 \varepsilon^2 - \frac{35}{16} r_2^3 \varepsilon^3 \right\rangle. \end{aligned} \quad (33)$$

Во втором приближении получим

$$\begin{aligned} I_{02}^{(2)} &= I_{02}^{(1)} + \frac{63}{256} [a_0^{-3/2} \langle 10r_1^4 \xi_2^4 - 11r_1^5 \xi_2^5 \rangle + \\ &+ c_0^{-3/2} \langle 10r_2^4 \varepsilon^4 - 11r_2^5 \varepsilon^5 \rangle]. \end{aligned} \quad (34)$$

Из (13) следует:

$$\alpha_c = (2f_2 + f_4) \left(n_3^2 - \frac{1}{3} \right), \quad \text{п а п} = 2f_2 \left(n_3^2 - \frac{1}{3} \right) + f_4 \left(n_3^4 - \frac{1}{5} \right). \quad (35)$$

Поскольку

$$\langle n_3^{2k} \rangle = \frac{1}{2k+1}, \quad (36)$$

то условия (16) выполняются.

Ограничиваясь первым приближением, согласно (30), (25), (26), имеем

$$\varepsilon_{(1)} = \sigma + \frac{k^2}{1 + 2\sigma - \alpha_c} = \sigma + k^2(1 - 2\sigma + \alpha_c). \quad (37)$$

Здесь для сокращения введено обозначение $\sigma = \text{п а п}$. С той же степенью точности получим (см. (31)):

$$\begin{aligned} \varepsilon_{(1)}^2 &= \sigma^2 + 2\sigma k^2, \quad \varepsilon_{(1)}^3 = \sigma^3, \quad \xi_2 = \alpha_c - \sigma - k^2(1 - 2\sigma + \alpha_c), \\ \xi_2^2 &= (\alpha_c - \sigma)^2 + 2k^2(\alpha_c - \sigma), \quad \xi_2^3 = (\alpha_c - \sigma)^3. \end{aligned} \quad (38)$$

Согласно (25), (13),

$$k = (f_2 + f_4 n_3^2) n_3 (\varepsilon - n_3 \text{п}), \quad k^2 = (f_2 + f_4 n_3^2)^2 n_3^2 (1 - n_3^2), \quad (39)$$

$$\langle k^2 \rangle = f_2^2 p_1 + 2f_2 f_4 p_2 + f_4^2 p_3 = \frac{2}{315} (21f_2^2 + 18f_2 f_4 + 5f_4^2), \quad (40)$$

где

$$p_s = \langle n_3^{2s} (1 - n_3^2) \rangle = \frac{2}{(2s+1)(2s+3)}. \quad (41)$$

Из (2), (33) получаем в первом приближении

$$\begin{aligned} I &= I_0 + \frac{3}{2} (r_1 a_0^{-3/2} - r_2 c_0^{-3/2}) \langle \varepsilon \rangle + \\ &+ \frac{5}{16} r_1^2 a_0^{-3/2} \langle 6 \xi_2^2 - 7r_1 \xi_2^3 \rangle + \frac{5}{16} r_2^2 c_0^{-3/2} \langle 6 \varepsilon^2 - 7r_2 \varepsilon^3 \rangle. \end{aligned} \quad (42)$$

Здесь I_0 обозначает нулевое приближение:

$$I_0 = \frac{1}{\lambda_{66} \sqrt{\lambda_{44}}} + \alpha_0^{-3/2} + c_0^{-3/2}. \quad (43)$$

С помощью (35) — (41) находим

$$I = I_0 + (r_1 \alpha_0^{-3/2} - r_2 c_0^{-3/2}) (A_0 + 2A_1 - 2A_2) + \\ + r_1^2 \alpha_0^{-3/2} (A_3 + 5A_1 + r_1 A_4) + r_2^2 c_0^{-3/2} (A_5 + 5A_2 - r_2 A_6), \quad (44)$$

где

$$\left. \begin{aligned} A_0 &= \frac{3}{2} \langle k^2 \rangle = \frac{1}{105} (21f_2^2 + 18f_2 f_4 + 5f_4^2); \\ A_1 &= \frac{3}{4} \langle \alpha_c - \sigma \rangle k^2 = \frac{f_4}{175} \left(f_2^2 + \frac{34}{33} f_2 f_4 + \frac{335}{1287} f_4^2 \right); \\ A_2 &= \frac{3}{4} \langle \sigma k^2 \rangle = \frac{2}{105} \left(f_2^3 + \frac{11}{5} f_2^2 f_4 + \frac{239}{165} f_2 f_4^2 + \frac{43}{143} f_4^3 \right); \\ A_3 &= \frac{15}{8} \langle (\alpha_c - \sigma)^2 \rangle = \frac{f_4^2}{70}; \quad A_4 = -\frac{35}{16} \langle (\alpha_c - \sigma)^3 \rangle = \frac{19f_4^3}{96525}; \\ A_5 &= \frac{15}{8} \langle \sigma^2 \rangle = 2 \left(\frac{1}{3} f_2^2 + \frac{2}{7} f_2 f_4 + \frac{1}{15} f_4^2 \right); \\ A_6 &= \frac{35}{16} \langle \sigma^3 \rangle = \left(\frac{2}{3} f_2 \right)^3 + \frac{8f_4}{15} \left(f_2^2 + \frac{19}{33} f_2 f_4 + \frac{7}{65} f_4^2 \right). \end{aligned} \right\} (45)$$

При вычислении второго приближения ограничимся, как в [1], членами 4-го порядка по α . Таким образом, возьмем для $\varepsilon_{(2)}$ выражение (см. (30), (26))

$$\varepsilon_{(2)} = \sigma + \frac{k^2}{1 + 2\sigma - \alpha_c} \frac{k^2 \cdot n \alpha \beta^2 k}{(1 + \sigma)(1 + 2\sigma - \alpha_c)}. \quad (46)$$

Для двумерных тензоров справедливо соотношение $\beta^2 = \beta_c \beta - |\beta|$, поэтому

$$n \alpha \beta^2 k = \beta_c n \alpha \beta k - |\beta| n \alpha k = \frac{\beta_c k^2}{1 + 2\sigma - \alpha_c} - \frac{k^2}{|\gamma|},$$

но

$$\beta_c = \frac{\gamma_c}{|\gamma|} = \frac{2 + 3\sigma - \alpha_c}{(1 + \sigma)(1 + 2\sigma - \alpha_c)}.$$

Следовательно,

$$n \alpha \beta^2 k = \frac{k^2}{(1 + 2\sigma - \alpha_c)^2},$$

В результате получим, оставляя в (46) члены до 4-й степени,

$$\varepsilon_{(2)} = \sigma + k^2 [1 - (2\sigma - \alpha_c) + (2\sigma - \alpha_c)^2] - k^4 = \\ = \varepsilon_{(1)} + k^2 [(2\sigma - \alpha_c)^2 - k^2]. \quad (47)$$

По сравнению с (37) мы имеем здесь добавочные члены четвертой степени, которые должны быть учтены в выражении (33). Кроме того, из (34) войдут члены

$$\frac{315}{128} [a_0^{-3/2} r_1^4 \langle \xi_2^4 \rangle + c_0^{-3/2} r_2^4 \langle \varepsilon^4 \rangle]. \quad (48)$$

С принятой точностью имеем, обозначая через ξ_2' второе приближение для ξ_2 ,

$$\begin{aligned} \varepsilon_{(2)}^2 &= \varepsilon_{(1)}^2 + k^2 [k^2 - 2\sigma(2\sigma - \alpha_c)], \\ \varepsilon_{(2)}^3 &= \varepsilon_{(1)}^3 + 3\sigma^2 k^2, \quad \varepsilon_{(2)}^4 = \sigma^4, \\ \xi_2' &= \xi_2 - k^2 [(2\sigma - \alpha_c)^2 - k^2], \end{aligned} \quad (49)$$

$$\xi_2'^2 = \xi_2^2 + k^2 [k^2 + 2(\alpha_c - \sigma)(2\sigma - \alpha_c)],$$

$$\xi_2'^3 = \xi_2^3 - 3(\alpha_c - \sigma)^2 k^2, \quad \xi_2'^4 = (\alpha_c - \sigma)^4.$$

Таким образом, добавка второго приближения к выражению (44) будет иметь вид (см. (42), (48)):

$$\begin{aligned} I' &= r_1 a_0^{-3/2} [B_0(5r_1 - 4) + B_1(8 - 20r_1 + 35r_1^2) + 8B_2 + r_1^2 B_3] + \\ &+ r_2^2 c_0^{-3/2} [B_0(5r_2 + 4) - B_2(8 + 20r_2 + 35r_2^2) - 8B_1 + r_2^2 B_4], \end{aligned} \quad (50)$$

где

$$\begin{aligned} B_0 &= \frac{3}{8} \langle k^2 [k^2 + 2\sigma(\alpha_c - \sigma)] \rangle = \\ &= \frac{1}{21450} \left(\frac{1430}{7} f_2^4 + \frac{4576}{11} f_2^3 f_4 + \frac{665071}{1155} f_2^2 f_4^2 + \right. \\ &\quad \left. + \frac{148094}{315} f_2 f_4^3 + \frac{52847}{357} f_4^4 \right); \\ B_1 &= \frac{3}{16} \langle (\alpha_c - \sigma)^2 k^2 \rangle = \frac{f_4^2}{450450} \left(\frac{391}{5} f_2^2 + \frac{358}{5} f_2 f_4 + \frac{961}{51} f_4^2 \right); \\ B_2 &= \frac{3}{16} \langle \sigma^2 k^2 \rangle = \frac{1}{4200} \left(\frac{80}{3} f_2^4 + \frac{1856}{33} f_2^3 f_4 + \right. \\ &\quad \left. + \frac{235717}{6435} f_2^2 f_4^2 + \frac{5222}{2145} f_2 f_4^3 - \frac{487}{143} f_4^4 \right); \\ B_3 &= \frac{315}{128} \langle (\alpha_c - \sigma)^4 \rangle = \frac{1603 f_4^4}{7293000}; \\ B_4 &= \frac{315}{128} \langle \sigma^4 \rangle = \frac{2}{3} f_2^4 + \\ &+ \frac{2f_4}{5} \left(\frac{36}{11} f_2^3 + \frac{5378}{2145} f_2^2 f_4 + \frac{628}{715} f_2 f_4^2 + \frac{651}{5525} f_4^3 \right). \end{aligned} \quad (51)$$

Выражения (45), (51) для коэффициентов A , B являются результатом точного усреднения соответствующих соотношений. Для числен-

Температуры Дебая для гексагональных кристаллов

| № п.п. | Кристалл | $\rho, \text{г/см}^3$ | $V_{\text{ат}}, 10^{-21}, \text{см}^3$ | $a_0, 10^{11}, \text{см}^2/\text{сек}^2$ | $b_0, 10^{11}, \text{см}^2/\text{сек}^2$ | δ | f_0 | f_1 | f_2 | θ°, K |
|--------|--------------------------|-----------------------|--|--|--|----------|--------|-------|-------|----------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 |
| 1 | Барий титанат | 5,72 | 0,0135 | 0,753 | 2,12 | 0,00020 | 3,21 | 3,21 | — | 386 |
| 2 | Берилл | 2,66 | — | 3,40 | 6,80 | 0,022 | 0,353 | 0,359 | — | — |
| 3 | Бериллий | 1,82 | 0,00822 | 8,6 | 8,7 | 0,019 | 0,0997 | 0,100 | — | 1449 |
| 4 | Иттрий | 4,472 | 0,03301 | 0,590 | 1,1 | 0,0035 | 5,12 | 5,13 | — | 245 |
| 5 | Кадмий | 8,648 | 0,02158 | 0,229 | 0,886 | 0,12 | 15,09 | 16,91 | 17,23 | 189 |
| 6 | Кадмий сульфат | 4,82 | 0,0249 | 0,32 | 1,34 | 0,00076 | 11,44 | 11,47 | — | 206 |
| 7 | Канкринит | 2,44 | — | 1,06 | 1,41 | 0,11 | 2,319 | 2,371 | 2,377 | — |
| 8 | β -кварц | 2,650 | 0,01255 | 1,45 | 2,79 | 0,0036 | 1,144 | 1,147 | — | 558 |
| 9 | Кобальт | 8,84 | 0,0111 | 1,09 | 2,34 | 0,019 | 2,38 | 2,43 | — | 453 |
| 10 | Лед | 0,9 | 0,0111 | 0,428 | 1,023 | 0,0066 | 8,25 | 8,34 | — | 300 |
| 11 | Магний | 1,779 | 0,02269 | 1,132 | 2,396 | 0,0026 | 1,913 | 1,920 | — | 385,9 |
| 12 | Цинк | 7,279 | 0,01491 | 0,5458 | 1,495 | 0,15 | 4,117 | 4,489 | 4,610 | 331,5 |

ных расчетов удобно записать некоторые из них в следующем виде:

$$\begin{aligned}
 A_1 &= 10^{-3} f_1 (5,71 f_2^2 + 5,89 f_2 f_4 + 1,49 f_4^2), \\
 A_2 &= 10^{-2} (1,90 f_2^3 + 4,19 f_2^2 f_4 + 2,76 f_2 f_4^2 + 0,57 f_4^3), \\
 A_4 &= 0,00197 f_4^3, \\
 A_6 &= 0,296 f_2^3 + 0,533 f_2^2 f_4 + 0,307 f_2 f_4^2 + 0,057 f_4^3, \\
 B_0 &= 10^{-2} (0,95 f_2^3 + 1,94 f_2^2 f_4 + 2,68 f_2 f_4^2 + 2,19 f_2 f_4^3 + 0,69 f_4^4), \\
 B_1 &= 10^{-4} f_4^2 (1,74 f_2^2 + 1,59 f_2 f_4 + 0,42 f_4^2), \quad B_3 = 0,00022 f_4^4, \\
 B_2 &= 10^{-3} (6,35 f_2^4 + 13,39 f_2^3 f_4 + 8,72 f_2^2 f_4^2 + 0,58 f_2 f_4^3 - 0,81 f_4^4), \\
 B_4 &= 0,667 f_2^4 + 1,309 f_2^3 f_4 + 1,003 f_2^2 f_4^2 + 0,351 f_2 f_4^3 + 0,047 f_4^4.
 \end{aligned} \tag{52}$$

Результаты вычисления температур Дебая для всех гексагональных кристаллов, упругие константы которых известны к настоящему времени, приведены в таблице. В 7-м столбце таблицы приведены значения величины $\delta = \langle \alpha^2 \rangle_c$, которая характеризует относительную анизотропию двумерного тензора λ^n (4). Из сравнения 8 и 9-го столбцов можно заключить, что для таких кристаллов, как титанат бария, бериллий, иттрий, сульфат кадмия, β -кварц, достаточную точность дает уже нулевое приближение. Для остальных кристаллов почти всегда достаточно первого приближения. Лишь для такого анизотропного кристалла, каким является цинк ($\delta = 0,15$), относительное различие между I_1 и I_2 составляет около 2,5%. Однако поскольку температура Дебая Θ определяется формулой $\Theta = 135,78 (IV_a)^{-1/3}$, где V_a — атомный объем в 10^{-21} см^3 , то относительное изменение Θ при переходе от первого приближения (I_1) ко второму (I_2) даже в случае цинка составит менее одного процента. С большим запасом точности можно считать, что для $\delta \leq 0,1$ достаточно первого приближения (формулы (44), (45)).

В заключение отметим, что полученные здесь формулы для температуры Дебая гексагональных кристаллов могут существенно упростить вычисление этой величины для кристаллов более низкой симметрии, если воспользоваться методом сравнения их с ближайшей в среднем поперечно-изотропной средой, изложенным в [3], §34.

Автор благодарен Т. Г. Быстровой за выполнение расчетов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Федоров Ф. И. ДАН СССР, 164, 804, 1965.
2. Федоров Ф. И., Быстрова Т. Г. Кристаллография (в печати).
3. Федоров Ф. И. Теория упругих волн в кристаллах. Изд. «Наука», 1965.

Поступило в редакцию 20.XII 1965

А. И. БОЛСУН, Ф. И. ФЕДОРОВ

**ПСЕВДОСКАЛЯРНАЯ МАТРИЦА β_5
 И ЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ДИПОЛЬНЫЙ МОМЕНТ W -мезона**

1. Матрица β_5 и ее свойства. При описании векторных частиц с помощью уравнений первого порядка

$$(\beta_\mu \nabla_\mu + m)\psi = 0, \quad \mu = 1, 2, 3, 4 \quad (1)$$

может быть введена пятая матрица β_5 [1, 2], удовлетворяющая наряду с β_μ известному соотношению алгебры Даффина — Кеммера:

$$\beta_M \beta_N \beta_L + \beta_L \beta_N \beta_M = \delta_{MN} \beta_L + \delta_{LN} \beta_M \quad (2)$$

$(M, N, L = 1, 2, 3, 4, 5).$

В [3, 4] показано, что β_5 -матрица может рассматриваться как аналог матрицы γ_5 в теории Дирака. Псевдоскалярная матрица в теории частиц со спином 1 была найдена также в [5] путем решения системы матричных уравнений в явном виде.

Матрица β_5 играет существенную роль в теории векторных частиц. Она необходима при введении псевдовекторного взаимодействия, связанного с наличием внутреннего электрического дипольного момента (ЭДМ) у W -мезона. Покажем, что матрица β_5 может быть найдена на основе самых общих соображений. Матрица β_5 должна удовлетворять условиям:

$$\beta_5 S = S \beta_5, \quad (3.a)$$

$$\beta_5 \eta_4 = -\eta_4 \beta_5, \quad (3.b)$$

где S — матрица преобразования представления собственной группы Лоренца; $\eta_4 = 2\beta_4^2 - 1$ — матрица пространственного отражения.

В нашем случае пространство представлений является десятимерным

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_I \\ \psi_{II} \end{pmatrix}, \quad \psi_I = (\psi_\mu), \quad \psi_{II} = (\psi_{\mu\nu}), \quad (4)$$

причем ψ_μ — компоненты 4-вектора, $\psi_{\mu\nu} = -\psi_{\nu\mu}$ — шесть независимых компонент антисимметричного тензора,

$$\psi_{\mu\nu} = \psi_{23}, \psi_{31}, \psi_{12}, \psi_{14}, \psi_{24}, \psi_{34}.$$

По отношению к собственным преобразованиям Лоренца ψ_μ является неприводимым представлением, а $\psi_{\mu\nu}$ распадается на два неприводимых трехмерных представления. Это распадение осуществляется при дейст-

вии на $\psi_{II} = \psi_{\mu\nu}$ 6×6 -матрицы R , которая в 3×3 -блочной форме имеет вид:

$$R = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, R^2 = 1,$$

в результате чего получаем:

$$R \psi_{II} = \begin{pmatrix} \psi_+ \\ \psi_- \end{pmatrix}, \psi_{\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \psi_{23} \pm \psi_{14} \\ \psi_{31} \pm \psi_{24} \\ \psi_{12} \pm \psi_{34} \end{pmatrix}. \quad (5)$$

Согласно лемме Шура, из коммутации β_5 с приводимым S (3.а), распадающимся на три неприводимых, следует, что β_5 должна состоять из трех диагональных скалярных блоков

$$\beta_5 = \begin{pmatrix} a_4 & 0 & 0 \\ 0 & a_3 & 0 \\ 0 & 0 & a'_3 \end{pmatrix}, \quad (6)$$

где индексы при числе a указывают размерность блоков.

При обычном выборе β_{μ} -матриц $\beta_{\mu} = \varepsilon^{[\mu\nu]} \nu + \varepsilon^{\nu[\mu\sigma]}$ (см. [6]) они имеют следующую структуру:

$$\beta_{\mu} = \begin{pmatrix} 0 & \alpha_{\mu} \\ \tilde{\alpha}_{\mu} & 0 \end{pmatrix}, \beta_{\mu}^3 = \begin{pmatrix} 0 & \alpha_{\mu} \tilde{\alpha}_{\mu} \alpha_{\mu} \\ \tilde{\alpha}_{\mu} \alpha_{\mu} \tilde{\alpha}_{\mu} & 0 \end{pmatrix} = \beta_{\mu}, \quad (7)$$

где α_{μ} — 4×6 -матрицы; \sim — знак транспозиции. Поэтому

$$\eta_4 = 2\beta_4^2 - 1 = \begin{pmatrix} 2\alpha_4 \tilde{\alpha}_4 - 1 & 0 \\ 0 & 2\tilde{\alpha}_4 \alpha_4 - 1 \end{pmatrix}. \quad (8)$$

В (7) и (8) разбиение на блоки осуществляется по приводимым представлениям ψ_I, ψ_{II} . Поскольку в (6) вместо ψ_{II} взято представление (5), то, чтобы вернуться к представлению (4), нужно осуществить преобразование

$$R \begin{pmatrix} a_3 & 0 \\ 0 & a'_3 \end{pmatrix} R = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} a_3 + a'_3 & a_3 - a'_3 \\ a_3 - a'_3 & a_3 + a'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & a' \\ a' & a \end{pmatrix},$$

в результате чего вместо (6) получим

$$\beta_5 = \begin{pmatrix} a_4 & 0 & 0 \\ 0 & a & a' \\ 0 & a' & a \end{pmatrix}. \quad (9)$$

Используя теперь условие (3.б), имеем:

$$2a_4(2\alpha_4 \tilde{\alpha}_4 - 1) = 0, \quad (10.а)$$

$$2a(2\tilde{\alpha}_4 \alpha_4 - 1) + a' \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} (2\tilde{\alpha}_4 \alpha_4 - 1) + (2\tilde{\alpha}_4 \alpha_4 - 1) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right] = 0. \quad (10.б)$$

Из (10.а) следует $\alpha_4 = 0$, так как $2\alpha_4\tilde{\alpha}_4 - 1 \neq 0$. Действительно, если $\alpha_4\tilde{\alpha}_4 = \frac{1}{2}$, то условие (7) привело бы к $\alpha_4 = \tilde{\alpha}_4 = 0$, $\beta_4 = 0$. При обычном выборе β_μ -матриц $2\tilde{\alpha}_4\alpha_4 - 1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, поэтому из (10.б) следует $a = 0$. Таким образом, нормируя β_5 так, чтобы $\beta_5^3 = \beta_5$, получим

$$\beta_5 = \pm \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (11)$$

Используя представление β -матриц через элементы полной матричной алгебры (см. [6]) и выбирая в формуле (11) знак $-$, матрицу β_5 можно выразить следующим образом:

$$\beta_5 = -\frac{1}{4} \delta_{\mu\nu\rho\sigma} \varepsilon^{[\mu\nu][\rho\sigma]}, \quad (12)$$

или с учетом того, что $\varepsilon^{[\mu\nu][\rho\sigma]} = (\delta_{\nu\sigma}\beta_\mu\beta_\rho - \beta_\mu\beta_\sigma\beta_\nu\beta_\rho) \bar{P}$ (см. [10]), матрице β_5 можно придать вид, аналогичный дираковской γ_5 :

$$\beta_5 = \frac{1}{4} \delta_{\mu\nu\rho\sigma} \beta_\mu\beta_\nu\beta_\rho\beta_\sigma, \quad (13)$$

где $\delta_{\mu\nu\rho\sigma}$ — 4-мерный символ Леви — Чивита. Отметим, что в работах [2—4] приведено выражение для β_5 , отличающееся от (13) тем, что вместо коэффициента $1/4$ стоит $1/4! = 1/24$. Нетрудно проверить, например с помощью (12), что у нас $\beta_5^3 = \beta_5$, в то время как, согласно [2—4],

получается $\beta_5^3 = \frac{1}{36} \beta_5$. Следовательно, матрица, приведенная в [2—4], вопреки утверждениям авторов этих работ, не удовлетворяет соотношениям (2).

Матрица β_5 обладает следующими свойствами:

$$\beta_5 P = P \beta_5 = 0; \quad \beta_5 \bar{P} = \bar{P} \beta_5 = \beta_5, \quad (14.a)$$

$$\beta_5^2 = \bar{P}; \quad \eta_5 = 2\beta_5^2 - 1 = \bar{P} - P, \quad (14.б)$$

здесь P и \bar{P} — проективные операторы, выделяющие векторную и тензорную части 10-мерного пространства соответственно. Легко также убедиться, что матрица β_5 удовлетворяет общему соотношению алгебры матриц Даффина — Кеммера (2) и вытекающим из него следствиям. Интересно отметить, что в отличие от теории Дирака, где γ_5 играет одновременно роль псевдоскаляра и матрицы полной инверсии, в теории Даффина — Кеммера эти функции разделены: матрица β_5 является псевдоскаляром, а матрица $\eta_5 = 2\beta_5^2 - 1$ — матрицей полной инверсии.

При решении конкретных задач методом непосредственного вычисления матричных элементов (см. [8, 9]) с применением матрицы β_5 приходится находить следы вида: $\text{Sp} \beta_5 \beta_{\mu_1} \dots \beta_{\mu_n} P$ и $\text{Sp} \beta_5 \beta_{\mu_1} \dots \beta_{\mu_n} \bar{P}$. При этом оказывается очень удобным пользоваться выражением (12). В силу свойства (14.а) с учетом $\beta_\mu P = \bar{P} \beta_\mu$ имеют место следующие общие правила:

$$\text{Sp} \beta_5 \beta_{\mu_1} \dots \beta_{\mu_n} P = 0 \text{ при любом } n,$$

$$\text{Sp } \beta_5 \beta_{\mu_1} \dots \beta_{\mu_n} \bar{P} = 0 \text{ при нечетном } n, \quad (15)$$

$$\text{Sp } \beta_5 \beta_{\mu_1} \dots \beta_{\mu_n} \bar{P} = \text{Sp } \beta_5 \beta_{\mu_1} \dots \beta_{\mu_n} \text{ при четном } n.$$

Для произвольного четного числа β_μ -матриц, используя формулы работы [10] и выражение β_5 в виде (12), получим

$$\begin{aligned} & \text{Sp } \beta_5 \beta_{\mu_1} \beta_{\mu_2} \dots \beta_{\mu_{n-1}} \beta_{\mu_n} \bar{P} = \\ & = -\frac{1}{4} \delta_{\mu_1 \nu_1 \rho_1 \sigma} \text{Sp } \varepsilon^{[\mu_1 \nu_1] [\rho_1 \sigma]} \varepsilon^{[\mu_2 \alpha]} \varepsilon^{[\mu_3 \beta]} \dots \varepsilon^{[\mu_{n-3} \tau]} \varepsilon^{[\mu_{n-2} \tau]} \varepsilon^{[\mu_{n-1} \eta]} \varepsilon^{[\mu_n \eta]} = \\ & = -\frac{1}{4} \delta_{\mu_1 \nu_1 \rho_1 \sigma} \delta_{[\rho_1 \sigma] [\mu_2 \alpha]} \delta_{[\mu_2 \alpha] [\mu_3 \beta]} \dots \delta_{[\mu_{n-2} \tau] [\mu_{n-1} \eta]} \delta_{[\mu_{n-1} \eta] [\mu_n \nu]}, \end{aligned} \quad (16)$$

где $\delta_{[\lambda \mu] [\tau \omega]} = \delta_{\lambda \tau} \delta_{\mu \omega} - \delta_{\lambda \omega} \delta_{\mu \tau}$. Приведем еще одно соотношение, которое следует из (16) и (14.а) и является полезным при вычислении следов от различных комбинаций произведений β_5 с четным числом β_μ -матриц:

$$\begin{aligned} \text{Sp } \beta_5 \beta_{\mu_1} \dots \beta_{\mu_n} \bar{P} &= -\text{Sp } \beta_{\mu_1} \beta_5 \beta_{\mu_2} \dots \beta_{\mu_n} P = \\ &= \text{Sp } \beta_{\mu_1} \beta_{\mu_2} \beta_5 \dots \beta_{\mu_n} \bar{P} = \dots = \text{Sp } \beta_{\mu_1} \dots \beta_{\mu_n} \beta_5 \bar{P}, \end{aligned} \quad (17)$$

т. е. матрицу β_5 можно переставлять под знаком следа с соседней β_μ -матрицей, причем одна перестановка меняет знак перед всем выражением и P переходит в \bar{P} (и обратно).

Используя (16), легко получить следующие формулы для вычисления следов:

$$\text{Sp } \beta_5 \beta_\mu = \text{Sp } \beta_5 \beta_\mu \beta_\nu = \text{Sp } \beta_5 \beta_\mu \beta_\nu \beta_\rho = 0, \quad (18)$$

$$\text{Sp } \beta_5 \beta_\mu \beta_\nu \beta_\rho \beta_\sigma = \delta_{\mu \nu \rho \sigma}, \quad (19)$$

$$\text{Sp } \beta_5 \beta_\mu \beta_\nu \beta_\rho \beta_\sigma \beta_\lambda = \delta_{\nu \rho} \delta_{\mu \nu \lambda} + \delta_{\sigma \lambda} \delta_{\mu \nu \rho \lambda} + \delta_{\nu \lambda} \delta_{\mu \rho \sigma \lambda}. \quad (20)$$

2. Внутренний электрический дипольный момент (ЭДМ) W -мезона. Матрица β_5 позволяет ввести псевдоскалярный, псевдовекторный и псевдотензорный токи в 10-мерном формализме Даффина—Кеммера. Введем, в частности, в лагранжиан взаимодействующий член, соответствующий псевдовекторному току:

$$L_{вз}^g = ieg \bar{\psi}(p_2) (\beta_\mu \beta_5 + \beta_5 \beta_\mu) \psi(p_1) A_\mu(k), \quad (21)$$

где g — константа, физический смысл которой выяснится ниже; $\psi(p_1)$ и $\bar{\psi}(p_2)$ — волновые функции начального и конечного состояний векторной частицы в p -представлении; $A_\mu(k)$ — вектор-потенциал электромагнитного поля.

Используя выражение для диады $\psi(p_1) \cdot \bar{\psi}(p_2)$ (см. [8, 9]), формулу (28) можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned} L_{вз}^g &= ieg \text{Sp} \{ (\beta_\mu \beta_5 + \beta_5 \beta_\mu) \psi(p_1) \cdot \bar{\psi}(p_2) \} A_\mu = \\ &= ieg \frac{1}{2m^2} \text{Sp} \{ (\beta_\mu \beta_5 + \beta_5 \beta_\mu) (\hat{p}_1 + im) (\hat{a}_2 \hat{a}_1 - a_1 a_2) P (\hat{p}_2 + im) \} A_\mu, \end{aligned}$$

где a_1 и a_2 — 4-векторы поляризации начального и конечного состояний векторной частицы; m — ее масса; $\hat{p} = p_\alpha \beta_\alpha$. На основе формул (17) и (19) получаем

$$L_{вз}^g = g \frac{e}{2m} a_{2\mu} a_{1\nu} A_\rho k_\sigma \delta_{\mu\nu\rho\sigma}, \quad (22)$$

где $g \frac{e}{2m}$ можно рассматривать как внутренний электрический дипольный момент (ЭДМ) векторной частицы в единицах $\hbar = c = 1$; k — импульс виртуального фотона. Из структуры (22) следует, что $L_{вз}^g$ отличен от 0 лишь в случае начальной и конечной круговых поляризаций векторных частиц. Выражение (22) совпадает с членом, описывающим взаимодействие внутреннего ЭДМ векторной частицы с электромагнитным полем и приведенным в [11].

Чтобы сделать выражение (22) более „прозрачным“, удобно перейти к системе Брейта, в которой $p_1 + p_2 = 0$, $k = p_2 - p_1$, $k_4 = 0$. Тогда (22) принимает вид

$$L_{вз}^g = g \frac{e}{2m} [a_2 a_1] k A_4 = \pm g \frac{e}{2m} s E, \quad (23)$$

где $s = \frac{k}{|k|}$ — направление ЭДМ векторной частицы; знаки \pm связаны с направлением вращения начальной и конечной круговой поляризации; $E = -A_0 k$ — напряженность внешнего электрического поля, выраженная в системе Брейта в p -представлении.

Таким образом, формула (23) выражает энергию взаимодействия внутреннего ЭДМ векторной частицы с электрическим полем, а присутствие в лагранжиане взаимодействия члена типа (21) соответствует наличию внутреннего ЭДМ у векторной частицы.

3. Влияние ЭДМ W -мезона на процесс $e^+ + e^- \rightarrow W^+ + W^-$. В последнее время возможность существования промежуточного векторного W -мезона, обладающего внутренним ЭДМ, обсуждалась рядом авторов [11 — 13]. Так, в работе [11] исследовано влияние ЭДМ W -мезона на процесс $\mu \rightarrow e + \gamma + \bar{\nu} + \nu$, а в [12] указывается на значительную зависимость сечения процесса $\gamma + Z \rightarrow W^+ + W^- + Z$ от величины ЭДМ W -мезона. В [13] предлагается схема объяснения $K_2^0 \rightarrow 2\pi$ распада при условии существования W -мезона, обладающего внутренним ЭДМ.

Здесь мы хотим обсудить влияние ЭДМ W -мезона в процессе $e^+ + e^- \rightarrow W^+ + W^-$. Этому процессу в первом приближении по константе электромагнитного взаимодействия α соответствует диаграмма Фейнмана, изображенная на рисунке, где p_1, p_2 и p'_1, p'_2 — 4-импульсы W^\pm и e^\mp соответственно; $q = p_1 + p_2$ — импульс передачи; γ_μ — матрицы Дирака.

Вершинный оператор B_μ , описывающий электромагнитное взаимодействие W -мезона с учетом ЭДМ, согласно (21), будет иметь вид

$$B_\mu = G_1(q^2) \beta_\mu + \frac{i}{2m} G_2(q^2) (\beta_\mu \hat{q} - \hat{q} \beta_\mu) + G_3(q^2) (\beta_\mu \beta_5 + \beta_5 \beta_\mu), \quad (24)$$

где β_μ — 10×10 -матрицы Даффина — Кеммера; $G_1(q^2)$ и $G_2(q^2)$ — линейные комбинации формфакторов, описывающих в общем случае распределение электрического заряда, магнитного и квадрупольного элек-

трического момента [17]; $G_3(q^2)$ — формфактор, связанный с распределением внутреннего ЭДМ W -мезона. Последнее слагаемое в (24) приводит к нарушению пространственной четности и инвариантности относительно обращения времени.

Матричный элемент рассматриваемого процесса можно записать следующим образом:

$$M_{r_1 r_2}^{\varepsilon_1 \varepsilon_2} = T_{\mu}^{\varepsilon_1 \varepsilon_2} R_{\mu}^{r_1 r_2}, \quad (25)$$

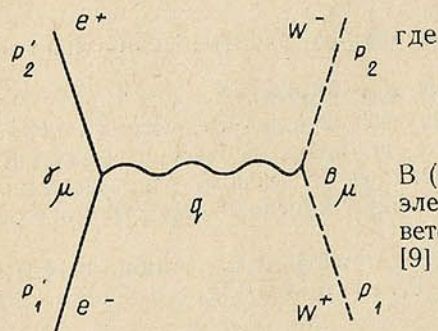


Диаграмма Фейнмана для процесса $e^+ + e^- \rightarrow W^+ + W^-$

$$T_{\mu}^{\varepsilon_1 \varepsilon_2} = \text{Sp} [\gamma_{\mu} \varphi^{\varepsilon_1} (-p_1) \cdot \bar{\varphi}^{\varepsilon_2} (p_2)],$$

$$R_{\mu}^{r_1 r_2} = \text{Sp} [B_{\mu} \psi^{r_1} (-p_1) \cdot \bar{\psi}^{r_2} (p_2)].$$

В (25) ε и r — поляризационные индексы электрона (позитрона) и W -мезонов соответственно. Используя результаты работ [9] и формулы (18)–(20), находим

$$R_{\mu}^{r_1 r_2} = \frac{i}{2m} \{ (G_1 + G_2) [2(a_1 a_2) p_{2\mu} + (p_1 a_2) a_{1\mu} - (p_2 a_1) a_{2\mu}] +$$

$$+ \frac{G_2}{m^2} [2(a_1 a_2) p_2^2 + (p_1 a_2) (p_2 a_1)] p_{2\mu} + G_3 a_2 a_1 q_{\sigma} \delta_{\mu\nu\rho\sigma} \}. \quad (26)$$

Здесь и в дальнейшем $G_i = G_i(q^2)$, $i = 1, 2, 3$. Выражения для $R_{\mu}^{r_1 r_2}$ (26) и для $T_{\mu}^{\varepsilon_1 \varepsilon_2}$ (см. [14]) дают возможность определить дифференциальные сечения рассматриваемого процесса при различных поляризационных состояниях образовавшихся W -мезонов в системе центра инерции:

$$\frac{d\sigma_{\pm\pm}}{d(\cos\Theta)} = A \{ |G_1 + \gamma^2 G_2|^2 + \beta^{-2} |G_3|^2 \} \sin^2 \Theta, \quad (27)$$

$$\frac{d\sigma_{00}}{d(\cos\Theta)} = \frac{1}{2} A |G_1 + G_2|^2 \sin^2 \Theta, \quad (28)$$

$$\frac{d\sigma_{\pm 0}}{d(\cos\Theta)} = A \gamma^2 \{ |G_1 + G_2|^2 + \beta^{-2} |G_3|^2 \} (1 + \cos^2 \Theta), \quad (29)$$

где $A = \frac{\pi \alpha^2 \beta^3}{8\kappa^2}$; индексы \pm и 0 обозначают круговые и линейную поляризации W -мезонов; $\beta = \frac{|p|}{\omega}$; $\gamma = \frac{\omega}{m}$; Θ — угол вылета одного из мезонов.

Здесь также учтено, что в системе центра инерции

$$p_2 = -p_1 = p, \quad p_{10} = p_{20} = p'_{10} = p'_{20} = \omega.$$

Суммирование по поляризациям конечных и усреднение по поляризациям начальных состояний частиц приводят к выражению для дифференциального сечения рассматриваемого процесса

$$\frac{d\sigma}{d(\cos\Theta)} = A \left\{ \frac{3}{2} |G_1 + \gamma^2 G_2|^2 \sin^2 \Theta + \gamma^2 |G_1 + G_2|^2 (1 + \cos^2 \Theta) + \beta^{-2} |G_3|^2 [\sin^2 \Theta + \gamma^2 (1 + \cos^2 \Theta)] \right\},$$

которое при $G_1 = 1$, $G_2 = G_3 = 0$ дает дифференциальное сечение, приведенное в [15].

Выражения (27) — (29) позволяют сделать грубую оценку отношения $f = \frac{|G_3|^2}{\beta^2 |G_1 + G_2|^2}$ по анализу угловых распределений продуктов распада поляризованных W -мезонов. Вблизи порога рождения мезонов, когда γ^2 близко к единице, формулы (27) — (29) будут иметь вид:

$$d\sigma_{00}^{\perp} = \frac{1}{2} A |G_1 + G_2|^2, \quad (30)$$

$$d\sigma_{\pm\pm}^{\perp} = 2d\sigma_{00}^{\perp} + A\beta^{-2}|G_3|^2, \quad (31)$$

$$d\sigma_{\pm 0}^{\parallel} = 2d\sigma_{\pm\pm}^{\perp}, \quad (32)$$

$$d\sigma_{\pm 0}^{\perp} = d\sigma_{\pm\pm}^{\perp}, \quad (33)$$

где индексы \parallel и \perp выделяют W -мезоны, вылетающие под углом $\Theta = 0$ и $\Theta = \frac{\pi}{2}$. Согласно [16], вблизи порога рождения распад линейно поляризованных W -мезонов приводит к появлению лептонных пар, летящих перпендикулярно импульсу мезона, а распад W -мезонов, поляризованных по кругу, к появлению лептонных пар, летящих вдоль или против импульса W -мезонов. С учетом этого обстоятельства на основе (30) — (33) получаем отношение

$$F = \frac{N_{\perp}}{N_{\parallel}} = \frac{d\sigma_{\pm\pm}^{\perp} + \frac{1}{2} d\sigma_{\pm 0}^{\parallel} + \frac{1}{2} d\sigma_{\pm 0}^{\perp}}{d\sigma_{00}^{\perp} + \frac{1}{2} d\sigma_{\pm 0}^{\parallel} + d\sigma_{\pm 0}^{\perp}}, \quad (34)$$

где N_{\parallel} и N_{\perp} — число лептонных пар, вылетающих под углами $\Theta = 0$ и $\Theta = \frac{\pi}{2}$ соответственно.

Формула (34) с учетом (30) — (33) приводит к следующему результату:

$$F = 1,25 \left(1 + \frac{f}{3f + 4} \right), \quad (35)$$

где $f = \frac{|G_3|^2}{\beta^2 |G_1 + G_2|^2}$.

Следовательно, в случае $f = 0$, т. е. когда $G_3 = 0$, величина $F = 1,25$. В общем случае F возрастает от 1,25 до 1,58 при изменении f от 0 до ∞ .

Таким образом, экспериментальное обнаружение значений $F = 1,25 \div 1,58$ могло бы служить доводом в пользу существования промежуточного векторного мезона, обладающего внутренним ЭДМ.

Авторы благодарны всем участникам семинара лаборатории теоретической физики Института физики АН БССР за полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Lubanski I., Rosenfeld L. Physica, 9, 117, 1942.
2. Schrodinger E. Proc. R. Irish. Acad., 48, 134, 1943.
3. Bludman S. A. Phys. Rev., 107, 1163, 1957.
4. Beckers I. Physica, 28, 1019, 1962.

5. Попов Ю. А. Дис. М., 1961.
6. Богуш А. А. ДАН БССР, 5, 155, 1961.
7. Федоров Ф. И. ДАН БССР, 5, 101, 194, 1961.
8. Богуш А. А. ДАН СССР, 149, 1286, 1963.
9. Богуш А. А., Болсун А. И. ДАН СССР, 155, 1046, 1964.
10. Богуш А. А., Федоров Ф. И. ДАН БССР, 6, 81, 1962.
11. Brunet R. C. Nuovo Cimento, 34, 599, 1964.
12. Williamson W., Salzman G. Phys. Rev. Lett., 11, 225, 1963.
13. Salzman F., Salzman G. Phys. Lett., 15, 91, 1965.
14. Богуш А. А. Вестн АН БССР, сер. физ.-техн. наук, № 2, 29, 1964.
15. Cabbibo N., Gatto R. Nuovo Cimento, 20, 185, 1961.
16. Uberall H. Phys. Rev., 133B, 444, 1964.
17. Zichichi A. Berman S. M., Cabbibo N., Gatto R. Nuovo Cimento, 24, 170, 1962.

Поступило в редакцию 20. XII 1965

М. М. СІРАТА, Э. М. СМАЛЯРЭНКА

ТЭРМАЭЛЕКТРЫЧНЫЯ УЛАСЦІВАСЦІ СПЛАВАУ

$Zn_3As_2 - Cd_3As_2$

Паўправадніковыя злучэнні Cd_3As_2 і Zn_3As_2 , якія належаць да групы злучэнняў $A^{IV}B^V$, характарызуюцца радам адметных асаблівасцей, якія прыцягваюць увагу даследчыкаў. Шырыня забароненай зоны Zn_3As_2 ляжыць у межах 0,91—0,93 эв, у Cd_3As_2 велічыня $\Delta E = 0,13 \div 0,14$ эв. Рухомасць электронаў у Cd_3As_2 складае велічыню парадку $15000 \text{ см}^2/\text{в} \cdot \text{сек}$. Злучэнні Zn_3As_2 маюць тэтраганальную структуру з адносінамі восей адпаведна ў Zn_3As_2 $c/a = 1,995$ пры $a = 12,65 \text{ \AA}$ і $c = 25,24 \text{ \AA}$ і ў Cd_3As_2 $c/a = 2,007$ пры $a = 11,78 \text{ \AA}$ і $c = 23,65 \text{ \AA}$.

Паміж сабой злучэнні Zn_3As_2 і Cd_3As_2 утвараюць безупынны рад цвёрдых раствораў. Адпаведна з наяўнымі літаратурнымі данымі [1, 2], як арсенід цынку, так і арсенід кадмію зазнаюць паліморфнае пераўтварэнне пры тэмпературах 672 і 578° С адпаведна. Пры гэтым, адпаведна з данымі [2], высокатэмпературныя мадыфікацыі таксама ўтвараюць паміж сабой безупынны рад цвёрдых раствораў.

У дадзенай рабоце распачата сістэматычнае даследаванне тэрмаэлектрычных уласцівасцей арсенідаў цынку і кадмію і іх узаемных раствораў. Усе даследаванні ўзоры прыгатаўляліся з мыш'яку маркі В5 і цынку з кадміем, ачышчаным дыстыляцыяй і зоннай плаўкай.

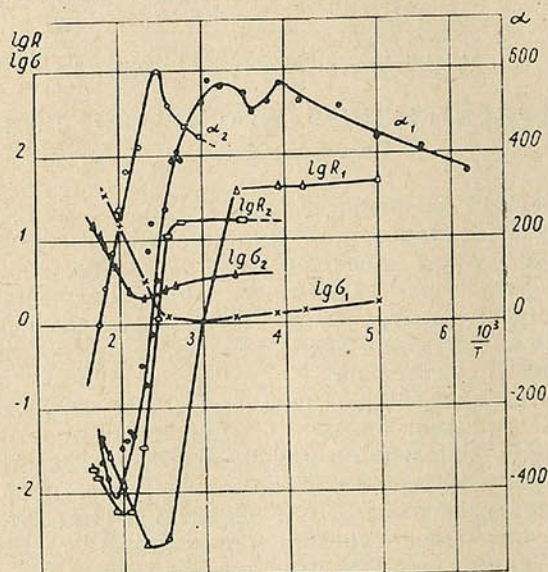
Папярэдні сінтэз праводзіўся прамым сплаўленнем у кварцавых графітаваных прабірках, якія змяшчаліся ў эвакуіраваную кварцавую ампулу. Адна серыя ўзораў пасля сплаўлення падвяргалася зоннаму выраўноўванню. Тэмпература зоны падтрымлівалася на 10° вышэй тэмпературы плаўлення, тэмпература фону—на 10° ніжэй $T_{пл}$. Звычайна праводзілася 8—10 праходаў. Другая серыя ўзораў пераплаўлялася пад уздзеяннем вібрацыі частатой у 100 *гц*. Узоры гэтай серыі аказаліся механічна больш трывалымі і зручнымі ў рабоце.

На атрыманых узорах праводзіліся вымярэнні тэрмаэдс, электраправоднасці і каэфіцыента Хола ў інтэрвале тэмператур 100—600° К. Вымярэнне тэрмаэдс праводзілася ў кварцавым посудзе, які папярэдне эвакуіраваўся і запаўняўся нейтральным газам. На ўзоры ўтвараўся перапад тэмператур 10—15° С, які вымяраўся дзвума медзь-канстантанавымі тэрмапарамі. Посуд з узорам змяшчаўся ў дзюар з вадкім азотам, пасля чаго праводзілася ступеньчатае павышэнне тэмпературы з дапамогай печы, якая знаходзілася ўнутры посуду. Вымярэнні праводзіліся па схеме з дапамогай патэнцыяметра ППТВ-1. Вымярэнні электраправоднасці і каэфіцыента Хола праводзіліся ў вакууме. Да ўзораў іскравым разрадам прыварваліся плацінавыя электроды. Напружанасць магнітнага поля раўнялася 4000 эрст.

Вымярэнні тэрмаэдс паказалі, што ўсе ўзоры ад Zn_3As_2 да сярэдняга саставу (50% Zn_3As_2 —50% Cd_3As_2) мелі *p*-тып правадзімасці пры хатняй тэмпературы і ўсе ўзоры ад сярэдняга саставу да Cd_3As_2 —*n*-тып. Для

ўзораў n -тыпу аж да саставу 40% Zn_3As_2 —60% Cd_3As_2 велічыня тэрмаэдс спачатку павольна расце з тэмпературай, а затым пачынае падаць пры дасягненні вобласці асабістай правадзімасці. Узоры p -тыпу ад 70% Zn_3As_2 —30% Cd_3As_2 да арсеніду цынку маюць такі ж ход тэрмаэдс.

Узоры саставаў, блізкіх да эквівалентнага, змяняюць тып правадзімасці пры павышэнні тэмпературы. На рыс. 1 прыведзены залежнасці



Рыс. 1. Тэмпературная залежнасць каэфіцыента Хола, электраправоднасці і тэрмаэдс:

1 — узор саставу 50% Zn_3As_2 —50% Cd_3As_2 , 2 — 60% Zn_3As_2 —40% Cd_3As_2

тэрмаэдс, электраправоднасці і каэфіцыента Хола ад тэмпературы для саставу 50% Zn_3As_2 —50% Cd_3As_2 і 60% Zn_3As_2 —40% Cd_3As_2 . Шырыня забароненай зоны, падлічанай па тэмпературнай залежнасці электраправоднасці, склала 0,78 і 0,76 эв адпаведна.

Інтэрпрэтацыя атрыманых рэзультатаў па тэмпературнай залежнасці эфекта Зеебека можа быць заснавана на меркаванні, што з цынкам і кадміем звязана ўвядзенне донарнай і акцэптарнай прымесі. Велічыня пастаяннай Хола ў гэтым выпадку ў вобласці змешанай правадзімасці выражаецца, як вядома, суадносінамі

$$R = \frac{1}{e} \frac{p\mu_h h^2 - n\mu_e^2}{(p\mu_h + n\mu_e)^2},$$

дзе p — канцэнтрацыя дзірак; μ_h — рухомасць дзірак; n — канцэнтрацыя электронаў; μ_e — рухомасць электронаў; e — зарад электрона.

Разглядаючы крывую $lg R - \frac{10^3}{T}$ для ўзору саставу 60% Zn_3As_2 —40% Cd_3As_2 , дапусцім, што ў вобласці $10^3/T \geq 2,6$ лік уласных электронаў і дзірак, які выражаецца формулай

$$n = n_0 e^{-\frac{\Delta E_0}{2kT}},$$

дзе ΔE_0 — шырыня забароненай зоны разглядаемага ўзору, зусім

малы і што ўсе прымесныя атомы іанізаваны. Тады мы можам запісаць два ўраўненні. Па-першае, не прымаючы пад увагу ўласную правадзімасць:

$$R_{T_1} = \frac{1}{e} \frac{N_a \mu_h^2 - N_d \mu_e^2}{(N_a \mu_h + N_d \mu_e)^2},$$

дзе R_{T_1} — значэнне R у вобласці $10^3/T \gg 2,6$; N_a і N_d — канцэнтрацыі акцептараў і донараў адпаведна.

Пры павышэнні тэмпературы ($10^3/T < 2,6$) ужо нельга не прымаць пад увагу ўласную правадзімасць. У гэтым выпадку ў пункце $R = 0$ атрымаем другое ўраўненне

$$\frac{1}{e} \frac{(N_a + n_0 e^{-\frac{\Delta E_0}{2kT}}) \mu_h^2 - (N_d + n_0 e^{-\frac{\Delta E_0}{2kT}}) \mu_e^2}{[(N_a + n_0 e^{-\frac{\Delta E_0}{2kT}}) \mu_h + (N_d + n_0 e^{-\frac{\Delta E_0}{2kT}}) \mu_e]^2} = 0.$$

Прыраўноўваючы да нуля вытворную $d(\lg R)/d(10^3/T)$ у пункце R_{\max} , атрымліваем трэцяе ўраўненне.

Акрамя таго, для ўсіх саставаў і тэмператур нам вядома велічыня электраправоднасці (4-е ўраўненне)

$$\sigma = p e \mu_h + n e \mu_e.$$

Такім чынам, мы маем сістэму з 4 ураўненняў з чатырма невядомымі — N_a , N_d , μ_e і μ_h .

Пасля рашэння гэтай сістэмы атрымаем рашэнні, прыведзеныя ў тэблицы.

На рыс. 2 паказан ход тэрмаэдс пры розных тэмпературах у залежнасці ад саставу.

Такім чынам, у рэзультате праведзенага даследавання намі паказана, што ў сістэме Zn_3As_2 — Cd_3As_2 тэрмаэлектрарухаючая сіла змяняецца ў залежнасці ад саставу ад параўнальна высокіх

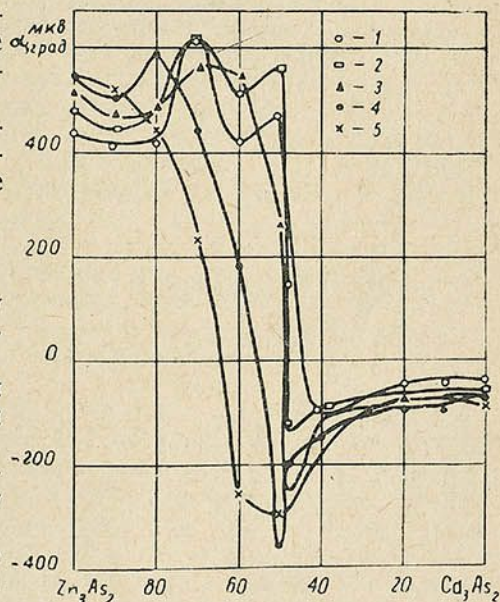


Рис. 2. Залежнасць тэрмаэдс ад саставу (у %) пры розных тэмпературах: 1—200° К; 2—300; 3—400; 4—500; 5—600° К

Канцэнтрацыі прымесей і рухомасці носьбітаў для сплаваў сістэмы Zn_3As_2 — Cd_3As_2

| Састаў | $N_a \cdot 10^{-17}$ | $N_d \cdot 10^{-17}$ | μ_e 297° К, см ² /в·сек | μ_h 27° К, см ² /в·сек |
|----------------|----------------------|----------------------|---|--|
| 40% Zn_3As_2 | | | | |
| 60% Cd_3As_2 | 15,66 | 11,52 | 4,45 | 4,19 |
| 50% Zn_3As_2 | | | | |
| 50% Cd_3As_2 | 1,76 | 1,57 | 19,29 | 18,25 |

дадатных значэнняў праз пункт інверсіі ў вобласці сярэдніх саставаў да невялікіх адмоўных значэнняў. Пры гэтым тэрмаэлектрарухаючая сіла сплаваў, якія змяшчаюць 40—55% Cd_3As_2 , пры змяненні тэмпературы

таксама змяняе знак. Наяўнасць пунктаў інверсіі на крывых тэрмаэда у залежнасці ад саставу і тэмпературы, як паказваюць нашы падлікі, звязана з тым, што змяненне суадносін Cd_3As_2 і Zn_3As_2 у сплавах суправаджаецца змяненнем адносін донорных і акцептарных прымесей.

ЛІТАРАТУРА

1. Хансен М., Андерко К. Структура бинарных сплавов. 1962.
2. Naake H. I., Belcher S. C. J. Appl. Phys., 35, No. 10, 1964.

Резюме

Исследовалась температурная зависимость электропроводности, эффекта Холла и термоэда для образцов квазибинарной системы $\text{Zn}_3\text{As}_2\text{—Cd}_3\text{As}_2$. Тип проводимости изменяется в зависимости от состава. Составы, близкие к эквимолярному, изменяют тип проводимости при повышении температуры. В предположении, что с цинком и кадмием связано введение акцепторной и донорной примеси, подсчитывается концентрация примесей и подвижности носителей для некоторых составов систем $\text{Zn}_3\text{As}_2\text{—Cd}_3\text{As}_2$. Подсчеты показывают, что изменение соотношения Zn_3As_2 и Cd_3As_2 в сплавах сопровождается изменением соотношения донорных и акцепторных примесей.

Поступило в редакцию 26. VII 1965

Л. В. ВАЛОДЗЬКА, А. І. КАМЯК, К. В. САБІЛА,
А. Н. СЕУЧАНКА, Л. Е. СЛЯПЦОУ

ЛЮМІНЕСЦЭНТНЫ І ХІСТАЛЬНЫЯ СПЕКТРЫ КАЛІЙУРАНІЛХЛАРЫДУ

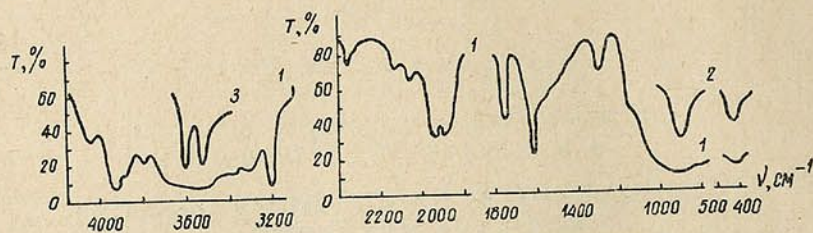
Злучэнні уранілу з галагенідамі даследаваны да гэтага часу недастаткова, хаця і шырока прымяняюцца ў прэпаратыўнай хіміі. На іх аснове сінтэзавана вялікая колькасць комплексаў [1], устойлівых пры хатніх тэмпературах. Рад з іх падвяргаўся спектраскапічным даследаванням [2—6], аднак спробы інтэрпрэтацыі наглядаемых частот не ўвянчаліся поспехам. Значныя цяжкасці выкліканы тым, што спектры камбінацыйнага рассеяння, люмінесценцыі і інфрачырвонага паглынання былі атрыманы на розных аб'ектах і не паддаюцца дэталёваму супастаўленню.

У пошуках тлумачэння электронных спектраў хларыдаў уранілу мы правялі паралельнае вывучэнне інфрачырвонага паглынання пры хатняй тэмпературы і спектра люмінесценцыі пры 77°K монакрыштала калійуранілхларыду. Як паказана ў [7], такі шлях дазваляе аднесці рад частот спектра люмінесценцыі да ўнутрыкомплексных хістанняў лігандаў, акружаючых іон уранілу.

Крышталі калійуранілхларыду вырошчваліся з насычанага воднага раствору эквівалентных колькасцей KCl і $\text{UO}_2\text{Cl}_2 \cdot 3\text{H}_2\text{O}$ з невялікім лішкам салянай кіслаты пры тэмпературы 300°K . Інфрачырвоныя спектры ўзораў рэгістраваліся з дапамогай спектрафатометра UR-10. Узор монакрыштала прыклеяўся да алюмініевай шайбы з адтулінай дыяметрам 10 мм, шліфаваўся і паліраваўся да таўшчынь 0,3—0,2 мм. Зрабіць механічным шляхам дастаткова тонкія пласцінкі крыштала, неабходныя для поўнага вырашэння структуры спектра ў вобласці 1000 см^{-1} (гл. рыс. 1), нам не ўдалося. Таму паралельна былі зарэгістраваны спектры плёнак, асаджаных на акенцах AgCl і CaF_2 з насычанага воднага раствору даследуемага злучэння, а таксама эмульсіі ў вазелінавым масле. Супастаўленне інфрачырвоных спектраў узораў, прыгатаваных рознымі метадамі, паказвае, што ў выпадку эмульсіі калійуранілхларыду ў вазелінавым масле розныя палосы ссоўваліся ў рознай ступені адносна спектра монакрыштала. Частата антысіметрычных валентных хістанняў іона уранілу ν_3 у выпадку эмульсіі ў масле мае амаль на 20 см^{-1} меншае значэнне, чым ў монакрышталі. Становішча максімумаў палос паглынання для крыштала і плёнкі, асаджанай на AgCl або CaF_2 , супадае, але існуе некаторае адрозненне ў вобласці палос валентных хістанняў вады.

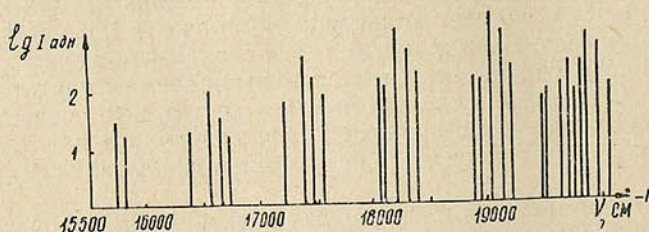
З прычыны таго што вобласць частот ніжэй 400 см^{-1} недаступная для рэгістрацыі на прыборы UR-10, мы абмежаваліся даследаваннем спектра камбінацыйнага рассеяння насычанага воднага раствору калійуранілхларыду. Методыка рэгістрацыі спектраў камбінацыйнага рассеяння і люмінесценцыі апісана ў [7] і [8] адпаведна.

Спектр люмінесценцыі прадстаўлен на рыс. 2, значэнні частот апошняга прыведзены ў табліцы, якая складзена наступным чынам. У першым слупку прыведзены рознасці частот галоўнай лініі першай паласы (лік вядзецца з кароткахвалевага боку спектра) і астатніх ліній гэтай паласы, а таксама ліній іншых палос, не маючых сабе гамалагічных ана-



Рыс. 1. Інфрачырвоны спектр каліюранілхларыду:

1— монакрышталёвая таўшчыняй 0,2 мм; 2— плёнка, асаджаная на AgCl; 3— парашок у масле



Рыс. 2. Спектр люмінесценцыі крышталю каліюранілхларыду пры тэмпературы 77° К

лагаў у папярэдняй частцы спектра. Наступныя слупкі пабудаваны аналагічным чынам: для стварэння рознасцей бралася частата галоўнай лініі адпаведнай паласы і з яе аднімаліся частоты наступных за ёй ліній за выключэннем аднесеных да папярэдніх груп. У сёмым і восьмым слупках табліцы прыведзены найбольш характэрныя палосы інфрачырвонага спектра паглынання і камбінацыйнага рассеяння воднага раствору.

Звяртае на сябе ўвагу той факт, што лік ліній у кожнай паласе спектра люмінесценцыі значна меншы, чым у спектрах злучэнняў уранілу з складанымі аніёнамі. Частата $\nu_0 = 19969 \text{ см}^{-1}$ належыць чыста электроннаму пераходу, яна супадае з найбольш даўгахвалевай лініяй спектра паглынання. Валентнае сіметрычнае хістанне $\nu_1 = 836 \text{ см}^{-1}$ іона уранілу праяўляецца ва ўсіх палосах спектра люмінесценцыі і адсутнічае ў спектры інфрачырвонага паглынання, што гаворыць у карысць лінейнасці іона уранілу і высокай сіметрыі комплексу. Дадатковым пацверджаннем гэтага меркавання служыць той факт, што разглядаемае хістанне характарызуецца інтэнсіўнай лініяй у спектры камбінацыйнага рассеяння насычанага воднага раствору каліюранілхларыду. У апошнім лініі спектра двойныя: $833, 866 \text{ см}^{-1}$ і $177, 197 \text{ см}^{-1}$, што, на нашу думку, абумоўлена існаваннем у раствору двух розных комплексаў: $\text{K}_2\text{UO}_2\text{Cl}_4 \cdot 2\text{H}_2\text{O}$ і $\text{UO}_2\text{Cl}_2 \cdot 4\text{H}_2\text{O}$. У спектры камбінацыйнага рассеяння воднага раствору уранілхларыду выяўлены частоты 204 і 866 см^{-1} , што належаць, як відаць, дэфармацыйнаму і валентнаму сіметрычным хістанням іона уранілу [8].

Вельмі інтэнсіўную паласу інфрачырвонага спектра паглынання ў вобласці 927 см^{-1} звычайна адносяць да антысіметрычных валентных

Частоты спектра люмінесценцыі монакрыштала каліюуранілхларыду пры тэмпературы 77° К

| Частоты (см^{-1}) гамалагічных груп ліній | | | | | | Частоты ІЧ спектра | Частоты КР водн. раствору | Адзясење частот |
|--|-----|-----|-----|-----|-----|--------------------|---------------------------|--------------------------------------|
| I | II | III | IV | V | VI | | | |
| 92 | | | | | | | | ? |
| 19969 | | | | | | | | ν_0 —эл. пераход |
| 0 | 836 | 835 | 829 | 827 | 825 | — | 833) 866) | $\nu_1 \text{UO}_2^{++}$ |
| 95 | н | н | н | н | н | ** | | ? |
| 148 | — | — | — | — | ** | ** | | ? |
| 202 | 202 | 201 | — | — | ** | ** | 177) 197) | $\nu'_2 \text{UO}_2^{++}$ |
| 248 | 250 | 244 | 245 | 251 | ** | ** | | $\nu''_2 \text{UO}_2^{++}$ |
| 316 | — | — | — | — | ** | ** | | ? |
| 450 | — | — | — | — | ** | 452 | | $\nu'_2 + \nu''_2 \text{UO}_2^{++}?$ |
| 482 | — | — | — | — | ** | — | | $2\nu''_2 \text{UO}_2^{++}?$ |
| 742 | 747 | 740 | 731 | — | ** | — | | $\nu \text{H}_2\text{O}$ |
| 930 | 923 | 905 | 897 | 898 | ** | 927 | | $\nu_3 \text{UO}_2^{++}$ |

Заўвагі: н — лінія можа быць скрыта накладаннем інтэнсіўнай лініі антысіметрычнага валентнага хістання іона уранілу; ** — адпаведная вобласць спектра не паглядалася; — лінія не выяўлена ў адпаведнай вобласці спектра.

хістанняў ν_3 іона уранілу. У спектры люмінесценцыі $\text{K}_2\text{UO}_2\text{Cl}_4 \cdot 2\text{H}_2\text{O}$ гэта хістанне праяўляецца лінійай, адлеглай ад частаты чыста электроннага пераходу на 930 см^{-1} , а ў наступных палосах з прычыны ангарманічнасці хістанняў памяншаецца пры прасоўванні ў даўгахвалевую вобласць.

Найбольш складаныя пошукі ў спектры люмінесценцыі хларыдаў уранілу дэфармацыйных хістанняў іона уранілу. Ізатапічнае замашчэнне атамаў кіслароду ў іоне UO_2^{++} , што выканана Дзіке і Дунканам [3] для цэзійуранілхларыду, не прывяло да адназначных рэзультатаў. Таму мэтазгодна супаставіць даныя па камбінацыйнаму рассеянню насычанага раствору каліюуранілхларыду з люмінесцэнтным спектрам крыштала. У кожнай паласе спектра люмінесценцыі існуюць дзве лініі, аддаленыя ад галаўной на 202 і 248 см^{-1} . Малыя змяненні гэтых частот у залежнасці ад прыроды лігандаў [3] могуць служыць асновай для таго, каб з пэўнай ступенню верагоднасці аднесці іх да дэфармацыйных хістанняў іона ўранілу. У выпадку ізаляванага іона UO_2^{++} дэфармацыйнае хістанне з'яўляецца двухкратна выраджаным, у крышталі выраджэнне можа здымацца за кошт змяненняў сіметрыі поля. У спектры камбінацыйнага рассеяння раствору $\text{K}_2\text{UO}_2\text{Cl}_4 \cdot 2\text{H}_2\text{O}$ у вадзе да гэтых хістанняў найбольш верагодна аднесці частату 177 см^{-1} . Розніцу ў частотах для раствору і крыштала можна вытлумачыць наступным чынам. Аналіз спектраў крышталаў комплексных злучэнняў уранілу паказвае, што ў залежнасці ад прыроды лігандаў частоты сіметрычных валентных і дэфармацыйных хістанняў іона UO_2^{++} змяняюцца ў процілеглых напрамках. Калі пры змяшчэннях лігандаў частата валентных хістанняў узрастае, то дэфармацыйных памяншаецца. У мадэлі ізаляванага лінейнага трохатамнага іона UO_2^{++} гэта адваротна прапарцыянальная залежнасць частот патрабуе памяншэння квазіпругкай пастаяннай дэфармацыйных

хістанняў пры ўзмацненні валентных сувязей, што супярэчыць заканамернасцям, характэрным для ўсіх сіметрычных трохатамных малекул. Тлумачэнне гэтай супярэчнасці, відаць, трэба шукаць у стабілізуючым лінейнасць іона уранілу ўплыве каардынаваных у яго экватарыяльнай плоскасці адэндаў. Да аналагічнага эфекту прывядзе стабілізуючая комплексы крышталізацыя уранілавых злучэнняў, што выклікае павелічэнне частаты дэфармацыйных хістанняў іона уранілу на $30\text{--}50\text{ см}^{-1}$, у той час як частата яго поўнасіметрычных хістанняў змяняецца не больш, чым на $10\text{--}12\text{ см}^{-1}$.

Для адназначнага аднясення нізкачастотных хістанняў ($95, 148, 316\text{ см}^{-1}$), што праяўляюцца ў спектры люмінесценцыі, у сучасны момант няма дастатковага эксперыментальнага матэрыялу. Частоты 457 і 482 см^{-1} у прынцыпе можна разглядаць як абертаны або састаўныя частоты дэфармацыйных хістанняў уранілу, хоць рэзультаты вывучэння эфектаў ізатапічнага замяшчэння ў спектрах люмінесценцыі цэзіюранілхларыду [3] не даюць адназначнага адказу аб магчымасці праяўлення такіх камбінацый.

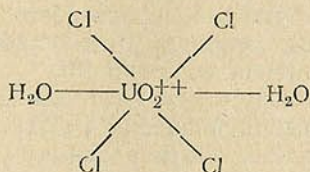
Крышталізацыйная вада мае істотнае значэнне ў фарміраванні спектра люмінесценцыі [9, 10], таму варта больш падрабязна спыніцца на магчымасці праяўлення адпаведных частот хістанняў у спектры люмінесценцыі. У апошнім наглядаецца даволі інтэнсіўная лінія $\nu=742\text{ см}^{-1}$, якую трэба аднесці да хістанняў каардынаваных малекул вады. Верагоднасць гэтага пацвярджаецца прысутнасцю аналагічнай частаты ў іншых крышталегідратах $\text{K}_2\text{UO}_2(\text{SO}_4)_2 \cdot 2\text{H}_2\text{O}$, а рад хларыдных злучэнняў уранілу, не змяшчаючых крышталізацыйную ваду ($\text{Cs}_2\text{UO}_2\text{Cl}_4$, $[(\text{CH}_3)_4\text{N}]_2 \cdot \text{UO}_2\text{Cl}_4$), не мае ў гэтай вобласці блізкай частаты. Біст і Пант [11] адносяць гэту частату ў $\text{UO}_2\text{Cl}_2 \cdot 3\text{H}_2\text{O}$ да запапласкных хістанняў малекул вады, хоць у інфрачырвоным спектры, па іх даных, гэтыя хістанні не праяўляюцца. Прыналежнасць частаты 655 см^{-1} хістанням каардынацыйна звязанай вады ў нітратных злучэннях уранілу даказана доследамі па ізатапічнаму замяшчэнню звычайнай вады на цяжкую [12]. У інфрачырвоным спектры крышталю каліюранілхларыду мы не знайшлі частаты 742 см^{-1} , хоць у спектры люмінесценцыі адпаведная лінія інтэнсіўная і праяўляецца ў некалькіх палосах. З улікам выкладзенага вышэй ёсць некаторая падстава аднесці гэту частату да поўнасіметрычных хістанняў каардынаваных малекул вады як цэлага адносна іона уранілу.

Паласу 1609 см^{-1} звычайна адносяць да дэфармацыйных ваганняў каардынаванай вады [11, 12]. Блізкія частоты ў гэтай вобласці спектра наглядаюцца ў інфрачырвоным паглыннанні ва ўсіх крышталегідратах уранілавых злучэнняў. Біст і Пант [11] лічаць, што слабая паласа інфрачырвонага спектра паглынання уранілхларыду ў вобласці 2360 см^{-1} належыць камбінацыі частот хістанняў каардынаванай вады ($1610 + 748\text{ см}^{-1}$). Аднак з прычыны таго што хістанне 742 см^{-1} больш верагодна аднесці да поўнасіметрычнага, то праяўленне камбінацыі сіметрычнага хістання з дэфармацыйным сіметрычным, відаць, будзе забаронена правіламі адбору.

У вобласці частот валентных хістанняў ($3000\text{--}4000\text{ см}^{-1}$) звязанай вады ў інфрачырвоным спектры крышталю праяўляецца некалькі палос (рыс. 1, крывая 1), прычым адны палосы даволі вузкія і рэзкія ($3192, 3295, 3784\text{ см}^{-1}$), а другія вельмі шырокія ($3400\text{--}3700\text{ см}^{-1}$). Аднясенне частот да валентных хістанняў каардынаванай вады выклікае некаторыя цяжкасці, паколькі ў гэтай вобласці можа прысутнічаць рад абертанаў або састаўных таноў іншых хістанняў. У інфрачырвоным спектры крышталічнага парашку ў масле (рыс. 1, крывая 3) у гэтай вобласці мы наглядзілі дзве паласы паглынання ($3520, 3605\text{ см}^{-1}$). У спектры люмінес-

цэнці крышталю пры тэмпературы 77°K мы не змаглі выявіць валентных хістанняў каардынаванай вады, паколькі апошнія супадаюць з камбінацыяй абертонаў поўнасіметрычнага валентнага хістання іона уранілу з яго дэфармацыйным хістаннем ($n \cdot 833 + 242$, дзе $n \geq 4$), хоць у іншых злучэннях уранілу [10], змяшчаючых крышталізацыйную ваду, у гэтай вобласці прысутнічаюць адпаведныя частоты.

Паколькі інфрачырвоныя спектры адзначна ўказваюць на каардынацыю малекул вады ў $\text{K}_2\text{UO}_2\text{Cl}_4 \cdot 2\text{H}_2\text{O}$, то можна меркаваць, што ўсе малекулы крышталізацыйнай вады непасрэдна звязаны з іонам уранілу. Калі б у гэтым злучэнні прысутнічалі іншыя тыпы ўзаемадзеяння малекул вады з іонамі комплексу, то гэта праявілася б у спектрах люмінесценцыі з прычыны выключэння магчымасці накладання частот у вобласці абертонаў і састаўных тонаў хістанняў іона уранілу. Паколькі ў пераважнай большасці выпадкаў каардынацыйны лік іона уранілу роўны шасці, то дзве малекулы вады непасрэдна звязаны з іонам уранілу і займаюць два каардынацыйных месцы, а іншыя чатыры месцы — атомы хлору. Такім чынам, зыходзячы з атрыманых даных для комплексу $\text{K}_2\text{UO}_2\text{Cl}_4 \cdot 2\text{H}_2\text{O}$, можна дапусціць наступную сіметрычную структуру ў праекцыі на экватарыяльную плоскасць



Такая структура ўзгадняецца з данымі, атрыманымі вышэй люмінесцентным і інфрачырвоным метадамі.

ЛИТЕРАТУРА

1. Комплексные соединения урана. М., 1964.
2. Nichols E. L., Howes H. L. Fluorescence of the Uranil Salts. Washington, 1919.
3. Dieke G. H., Duncan A. B. F. Spectroscopic Properties of Uranium Compounds. New York, 1949.
4. Pant D. D. Proc. Ind. Acad. Sci., 22A, 95, 110, 1945.
5. Freymann M. Compt. Rend., 225, 529, 1947.
6. Narasimham K. V. Indian J. Phys., 35, 282—298, 1961.
7. Володько Л. В., Комяк А. И., Слепцов Л. Е. ЖПС, 3, в. 2, 1965.
8. Володько Л. В., Сабило К. В. ЖПС, 4, в. 1, 1966.
9. Севченко А. Н., Степанов Б. И. ЖЭТФ, 19, 1113, 1949.
10. Володько Л. В. Оптика и спектроскопия, 19, в. 5, 751, 1965.
11. Bist H. D., Pant D. D. Indian J. Pure and Appl. Phys., 2, 107—120, 1964.
12. Вдовенко В. М., Суглобов Д. Н., Таранов А. П. Радиохимия, 6, в. 5, 559, 1964.

РЕЗЮМЕ

При комнатной температуре изучен спектр инфракрасного поглощения монокристалла $\text{K}_2\text{UO}_2\text{Cl}_4 \cdot 2\text{H}_2\text{O}$ и сопоставлен со спектром люминесценции при температуре 77°K . Отнесение частот в спектре люминесценции произведено с учетом инфракрасного поглощения и комбинационного рассеяния насыщенного водного раствора калийуранилхлорида. Из последнего определены четыре частоты, которые приписываются различным комплексам, существующим в растворе. Обсуждены частоты колебаний координированной воды и предложена структура комплекса.

Поступило в редакцию 16. X 1965

В. С. ІВАНІЦКАЯ

ДА ВЫРАДЖЭННЯ МЕТРЫЧНАГА ТЭНЗАРА СПЕЦЫЯЛЬНАЙ ТЭОРЫ АДНОСНАСЦІ

1. Уводзіны. Шматразова выказваліся меркаванні, напрыклад у [1, 2]; аб змяненні прасторава-часавых суадносін спецыяльнай тэоры адноснасці (СТА) з пераходам у мікравобласць размеру $< 10 \text{ см}^{-17}$. Пошукавыя даследаванні ў гэтым напрамку разнастайныя. У прыватнасці, вядзецца дыскусія аб магчымасці некаторага некласічнага выраджэння метрычнага тэнзара (аб ператварэнні ў нуль яго дэтэрмінанта або асобных дыяганальных элементаў), якое абумоўлена яшчэ не вядомымі ўласцівасцямі памянёнай вобласці [3].

У апошнія гады зноў вывучаўся гранічны выпадак метрычнай фармуліроўкі агульнай тэоры адноснасці (АТА) пры $c \rightarrow \infty$ [4–9], дзе c — скорасць распаўсюджвання ўзаемадзеянняў у вакууме. Гэта прывяло да дадатковага разгледжання гранічнага выпадку СТА з класічным (галілейінварыянтным) выраджэннем метрычнага тэнзара [10], якое было выклікана пераходам $c \rightarrow \infty$.

Метрычны тэнзар СТА адыгрывае вялікую ролю ў тэтраднай фармуліроўцы АТА. Вывучэнне гранічнага выпадку гэтай фармуліроўкі з дапамогай выраджанага метрычнага тэнзара СТА яшчэ не разглядалася. Поўнае апісанне класічнага выраджэння метрычнага тэнзара СТА карысна мець для пераходу да вывучэння яго некласічнага выраджэння і для разгледжання гранічнага выпадку тэтраднай фармуліроўкі АТА.

Далей дадзім падрабязнае апісанне афінных суадносін з улікам прыяцыпа дваістасці, разгледзім частковае выраджэнне тэнзарыяльных кампанент метрычнага тэнзара і тэтрадны крытэрыі ізатропнасці, а таксама спынімся на сувязі паміж контра- і каварыянтнымі велічынямі, якая ўстанаўліваецца шляхам згортвання з 4-вектарам (мультивектарам).

2. Гранічны выпадак афінных суадносін СТА. Няхай заданы афінны рэпер СТА (тэтрада), \bar{e}_k і незалежна з дапамогай гіперплоскасцей — \underline{e}^k . Каардынаты, адпаведна контраварыянтныя і незалежна ад іх каварыянтныя, устанавім пры дапамозе суадносін [11, 12]

$$\bar{x} = x^k \bar{e}_k = \text{inv}, \quad \underline{x} = x_k \underline{e}^k = \text{inv}, \quad (1)$$

дзе \bar{x} і \underline{x} — інварыянтныя адносна пераўтварэнняў Лорэнца. Калі x^0 не мае размернасці часу, пераўтварэнні Лорэнца ў граніцы $c \rightarrow \infty$ непасрэдна не з'яўляюцца пераўтварэннямі Галілея. У такім выпадку да выканання гранічнага пераходу паграбуюцца папярэднія выкладкі. Калі ж x^0 мае размернасць часу, то лорэнцавы пераўтварэнні ўяўляюцца ў такім выглядзе, што

$$\lim_{c \rightarrow \infty} \alpha_n^{k'} = \lim_{c \rightarrow \infty} \left(\frac{\gamma}{-v^a \gamma} \left| \frac{-v^a \gamma / c^2}{\alpha_b^{a'}} \right. \right) = \left(\frac{1}{-v^a} \left| \frac{0}{G_b^{a'}} \right. \right) = G_n^{k'}, \quad (2)$$

$$\lim_{c \rightarrow \infty} a_{k'}^n = \lim_{c \rightarrow \infty} \left(\frac{\gamma}{v^a \gamma / c^2} \left| \frac{v^a \gamma}{a_{a'}^b} \right. \right) = \left(\frac{1}{0} \left| \frac{v^a}{G_{a'}^b} \right. \right) = G_{k'}^n. \quad (3)$$

$\gamma = 1/\sqrt{1-v^2/c^2}$, індэкс, якія абазначаюцца літарамі пачатку лацінскага алфавіта (да k), прабягаюць значэнні 1, 2, 3, пачынаючы з $k=0, 1, 2, 3$. $G_n^k, G_{k'}^n$ — галілеевы пераўтварэнні адпаведна для контраварыянтных і каварыянтных велічынь. У такім выпадку маем

$$\lim_{c \rightarrow \infty} \bar{e}_{0'} = \lim_{c \rightarrow \infty} a_{0'}^k \bar{e}_k \equiv \bar{\varepsilon}_{0'} = \bar{\varepsilon}_0 + v^a \bar{\varepsilon}_a \neq \bar{\varepsilon}_0, \quad (4)$$

$$\lim_{c \rightarrow \infty} \bar{e}_{a'} = \lim_{c \rightarrow \infty} a_{a'}^k \bar{e}_k \equiv \bar{\varepsilon}_{a'} = \bar{\varepsilon}_a. \quad (5)$$

З (1) вынікае

$$\lim_{c \rightarrow \infty} x^{0'} \equiv \xi^{0'} = \xi^0; \quad \lim_{c \rightarrow \infty} x^{a'} = \xi^{a'} = \xi^a - v^a \xi^0; \quad (6)$$

$$\lim_{c \rightarrow \infty} \bar{x} \equiv \bar{\xi} = \xi^k \bar{\xi}_k = \text{inv}. \quad (7)$$

Тэтрада, якой карыстаемся, можа быць галілейінварыянтна нарміравана:

$$\lim_{c \rightarrow \infty} \bar{e}_{0'} \bar{e}_{0'} \equiv \bar{\varepsilon}_{0'} \bar{\varepsilon}_{0'} = \bar{\varepsilon}_0 \bar{\varepsilon}_0 + v^a v^b \bar{\varepsilon}_a \bar{\varepsilon}_b + v^a \bar{\varepsilon}_a \bar{\varepsilon}_0, \quad (8)$$

$$\lim_{c \rightarrow \infty} \bar{e}_{a'} \bar{e}_{b'} = G_a^0 G_b^0 \bar{\varepsilon}_0 \bar{\varepsilon}_0 + G_a^c G_b^d \bar{\varepsilon}_c \bar{\varepsilon}_d. \quad (9)$$

Адсюль вынікае, што адзіная галілейінварыянтная, не залежачая ад скорасці, нарміроўка тэтрад мае выгляд

$$\bar{\varepsilon}_0 \bar{\varepsilon}_0 = -1; \quad \bar{\varepsilon}_0 \bar{\varepsilon}_a = 0; \quad \bar{\varepsilon}_a \bar{\varepsilon}_b = 0 \quad (10)$$

пры любых значэннях a і b . З прычыны прынцыпа дваістасці, справядлівага ў цэнтрафііннай прасторы, маем

$$\lim_{c \rightarrow \infty} e^{0'} \equiv \underline{\varepsilon}^{0'} = \underline{\varepsilon}^0; \quad \lim_{c \rightarrow \infty} e^{a'} = -v^a \underline{\varepsilon}^0 + G_b^{a'} \underline{\varepsilon}^b = \underline{\varepsilon}^{a'} \neq \underline{\varepsilon}^a, \quad (11)$$

г. зн. у граніцы трохмерныя вектары задаюцца гіперплоскасцямі чатырохмернай прасторы, а не плоскасцямі трохмернай. З (1) вынікае

$$\lim_{c \rightarrow \infty} x_{0'} \equiv \xi_{0'} = \xi_0 + v^a \xi_a \neq \xi_0; \quad \lim_{c \rightarrow \infty} x_{1'} \equiv \xi_{1'} = \xi_1. \quad (12)$$

З (9) і (12) відаць розніцу ў паводзінах гранічных значэнняў контраварыянтных каардынат СТА. Адпаведнасць (12) з абсалютнай адначасовасцю легка заўважаецца, калі ўлічыць (4) і (5).

Устанавім інварыянтную нарміроўку каварыянтных тэтрад, выкарыстоўваючы здабытак $e^k e^n$:

$$\lim_{c \rightarrow \infty} e^{0'} e^{0'} \equiv \underline{\varepsilon}^{0'} \underline{\varepsilon}^{0'} = G_0^{0'} G_0^{0'} \underline{\varepsilon}^0 \underline{\varepsilon}^0 + G_a^{0'} G_b^{0'} \underline{\varepsilon}^a \underline{\varepsilon}^b, \quad (13)$$

$$\lim_{c \rightarrow \infty} e^{a'} e^{b'} = v^a v^b \underline{\varepsilon}^0 \underline{\varepsilon}^0 + \underline{\varepsilon}^a \underline{\varepsilon}^b. \quad (14)$$

Адсюль вынікае, што адзіная галілейінварыянтная, не залежачая ад скорасці нарміроўка тэтрад мае выгляд

$$\underline{\varepsilon}^0 \underline{\varepsilon}^0 = 0; \quad \underline{\varepsilon}^0 \underline{\varepsilon}^b = 0; \quad \underline{\varepsilon}^a \underline{\varepsilon}^b = 1; \quad \lim_{c \rightarrow \infty} x = \underline{\xi} = \xi_k \underline{\xi}^k = \text{inv}, \quad (15)$$

прычым усе чатыры вектары \underline{e}^k і, гаворачы ўвогуле, усе кампаненты каардынат ξ_k адрозніваюцца ад нуля. Для скалярнага здабытку (згортвання) маем

$$\lim_{c \rightarrow \infty} \bar{x} \cdot \underline{x} \equiv \bar{\xi} \cdot \underline{\xi} = \xi^k \xi_n \bar{e}_k \cdot \underline{e}^n = \text{inv}, \quad (16)$$

г. зн.

$$\lim_{c \rightarrow \infty} \bar{e}_{k'} \cdot \underline{e}^{n'} = \bar{e}_{k'} \cdot \underline{e}^{n'} = \delta_{k'}^{n'}. \quad (17)$$

3. Выраджэнне метрычнага тэнзара. Прыняцце галілей-інварыянтнай нарміроўкі тэтрад эквівалентна заданню класічна выраджанага (галілейінварыянтнага) метрычнага тэнзара

$$\lim_{c \rightarrow \infty} \bar{x} \bar{x} = \xi^k \xi_n \bar{e}_k \bar{e}_n \equiv \xi^k \xi_n; n_{kn}; n_{kn} = \lim_{c \rightarrow \infty} \bar{e}_k \bar{e}_n, \quad (18)$$

дзе

$$\begin{aligned} n_{k' n'} &= G_r^{k'} G_s^{n'} n_{rs} = \lim_{c \rightarrow \infty} \text{diag} \left(-1 \frac{1}{c^2} \frac{1}{c^2} \frac{1}{c^2} \right) = \\ &= \text{diag} (-1000); \text{Det } n_{kn} = 0. \end{aligned} \quad (19)$$

$$\lim_{c \rightarrow \infty} \underline{x} \underline{x} = \xi_k \xi_n \underline{e}^k \underline{e}^n \equiv \xi_k \xi_n N^{kn}; N^{kn} = \lim_{c \rightarrow \infty} \underline{e}^k \underline{e}^n, \quad (20)$$

$$\begin{aligned} N^{k' n'} &= G_r^{k'} G_s^{n'} N_{rs} = \lim_{c \rightarrow \infty} \text{diag} \left(-\frac{1}{c^2} 111 \right) = \text{diag} (0, 111); \\ \text{Det } N^{kn} &= 0; n_{km} N^{kn} = 0. \end{aligned} \quad (21)$$

Значыць, калі ў СТА ўсе тры прыведзеныя выразы даюць аднолькавы рэзультат

$$\bar{x} \cdot \underline{x} = \bar{x} \bar{x} = \underline{x} \underline{x}, \quad (22)$$

то ў граніцы, гаворачы ўвогуле, гэта не мае месца

$$\bar{\xi} \cdot \underline{\xi} = \xi^0 \xi_0 + \xi^a \xi_a \neq \bar{\xi} \bar{\xi} = \xi^k \xi_n n_{kn} = -\xi^0 \xi^0, \quad (23)$$

$$\bar{\xi} \cdot \underline{\xi} \neq \underline{\xi} \underline{\xi} = \xi_a \xi^a. \quad (24)$$

З (23) і (24) вынікае, што ўраўненне метрычнай гіперпаверхні ў граніцы мае выгляд

$$\xi^0 = \text{const} \quad \text{або} \quad \xi_a \xi_b N^{ab} = \text{const}, \quad (25)$$

а ўраўненне ізатропнай гіперпаверхні

$$\xi^0 = \text{const} = 0; \xi_a \xi_b N^{ab} = 0. \quad (26)$$

Каб умова ізатропнасці

$$\bar{\varepsilon}_0 \bar{\varepsilon}_0 \xi^0 \xi^0 + \bar{\varepsilon}_a \bar{\varepsilon}_b \xi^a \xi^b + \varepsilon_0 \varepsilon_a \xi^0 \xi^a = 0 \quad (27)$$

супала з (26), неабходна прыняцце нарміроўкі

$$\bar{\varepsilon}_a \bar{\varepsilon}_b = 0. \quad (28)$$

Гэта умова можа разглядацца як тэтрадная ўмова ізатропнасці, якая патрабуе супадзення ізатропнай гіперпаверхні з абсалютнай прасторай, супадзення любога прасторавага контраварыянтнага вектара з ізатропным.

У СТА з прычыны (22) усе ка-і контраварыянтныя каардынаты можна знайсці двума рознымі спосабамі

$$\begin{aligned} \bar{x} \cdot e^n &= \underline{x} e^n = x_m \underline{e}^m e^n = x_m g^{mn} = x^n; \\ \underline{x} \cdot \bar{e}_n &= \bar{x} \bar{e}_n = x^m \bar{e}_m \bar{e}_n = x^m g_{mn} = x_n. \end{aligned} \quad (29)$$

У гранічным выпадку — толькі адным спосабам. З (1) і (16) таксама маем

$$\xi^n = \bar{\xi} \cdot \underline{\varepsilon}^n; \quad \xi_n = \bar{\varepsilon}_n \cdot \bar{\xi} \quad (30)$$

пры любым значэнні n . Аднак наступныя выразы забяспечваюць адшуканне каардынат толькі часткова. На самой справе

$$\bar{\varepsilon}_0 \bar{\xi} = \xi^k \bar{\varepsilon}_k \bar{\varepsilon}_0 = \xi_0; \quad \bar{\xi} \underline{\varepsilon}^a = \xi_k \underline{\varepsilon}^k \underline{\varepsilon}^a = \xi^a, \quad (31)$$

але

$$\bar{\varepsilon}_a \bar{\xi} = \xi^k \bar{\varepsilon}_k \bar{\varepsilon}_a = \xi^a n_{aa} = 0; \quad \bar{\xi} \underline{\varepsilon}^0 = \xi_k \underline{\varepsilon}^k \underline{\varepsilon}^0 = \xi_0 N^{00} = 0, \quad (32)$$

г. зн. прасторавападобны вектар $\bar{\xi}$ адначасова і ізатропны. Любыя чапаводобныя вектары $\bar{\xi}$, у прыватнасці ε_0 , ε_0' , ε_0'' і р. д., артаганальныя кожнаму з прасторавападобных вектараў ε_a . Увядзенне „унутранай“ метрыкі, якая забяспечвае эўклідаваць геаметрыі ў трохмернай прасторы, ёсць у [9, 10].

4. Частковае выраджэнне тэнзарыяльных кампанент метрычнага тэнзара. Індэксы тэнзарыяльных кампанент тэнзараў, вызначаных у СТА адносна крывалінейнай сістэмы каардынат („сусветных тэнзараў“) абазначым грэчаскімі літарамі. Індэксы, якія абазначаюцца літарамі пачатку алфавіту (да κ), прабягаюць значэнні 1, 2, 3; пачынаючы з $\kappa = 0, 1, 2, 3$. Вызначым тэнзарыяльныя кампаненты метрычнага тэнзара СТА, абазначым іх $g_{\mu\nu}$, з дапамогай разгледжанага вышэй тэнзара g_{kn} , інварыянтнага адносна α_k^n , і $\alpha_n^{k'}$. Тады

$$\lim_{c \rightarrow \infty} g_{\mu\nu} = \lim_{c \rightarrow \infty} h_\mu^k h_\nu^n g_{kn} = H_\mu^k h_\nu^n n_{kn} \equiv n_{\mu\nu} = H_\mu^{\hat{0}} h_\nu^{\hat{0}} n_{\hat{0}\hat{0}}. \quad (33)$$

Сімвал \wedge ставіцца над лічбавымі значэннямі індэксаў, якія абазначаюцца лацінскімі літарамі. Легка пераканацца, што

$$\text{Det } n_{\mu\nu} = 0. \quad (34)$$

Аналагічна

$$\lim_{c \rightarrow \infty} g^{\mu\nu} = \lim_{c \rightarrow \infty} h_\mu^k h_\nu^n g^{kn} \equiv h_\mu^k h_\nu^n N^{kn} \equiv N^{\mu\nu} = h_a^\mu h_b^\nu N^{ab}. \quad (35)$$

Гаворачы ўвогуле,

$$\text{Det } N^{\mu\nu} \neq 0. \quad (36)$$

Такім чынам, у граніцы выраджаюцца толькі тэнзарыяльныя кампаненты каварыянтнага метрычнага тэнзара.

5. Галілейінварыянтная сувязь контра- і каварыянтных велічынь з дапамогай 4-вектара (мульцівектара). Метрычны тэнзар устанаўлівае сувязь паміж контра- і каварыянтнымі велічынямі аднаадзначна. Калі аднаадзначнай сувязі не існуе, метрычны тэнзар выраджаецца. Другі спосаб сувязі контра- і каварыянтных велічынь шляхам 4-вектара (мульцівектара) у прынцыпе не патрабуе абавязковай адзначнасці, паколькі поўнасьцю антысіметрычны тэнзар 4-вектар падвержаны „скошванню“ — яму могуць быць прыведзены ў адпаведнасць па-рознаму дэфармаваныя (дэфармацыя зруш-

вання) адзінкавыя аб'ёмы. З прычыны гэтага ў граніцы $c \rightarrow \infty$ 4-вектар робіцца галілейінварыянтным без выраджэння

$$e^{\hat{0}\hat{1}\hat{2}\hat{3}} = G_k^{\hat{0}\hat{1}} G_e^{\hat{1}\hat{2}} G_m^{\hat{2}\hat{3}} G_n^{\hat{3}\hat{0}} e^{kemn} = \text{inv}, \quad e_{\hat{0}\hat{1}\hat{2}\hat{3}} = \text{inv}. \quad (37)$$

Што датычыць дыскрымінантага тэнзара, г. зн. $\varepsilon^{0123} = \sqrt{g} e_{0123}$, то ў граніцы $c \rightarrow \infty$ у некаторых выпадках, напрыклад з прычыны (34), ён можа выраджацца.

ЛІТАРАТУРА

1. Тамм И. Е. Труды XII междунар. конф. по физике высоких энергий. 1965.
2. Блохинцев Д. И. Phys. lett., 12, 272, 1964.
3. Treder H. Ann. d. Phys., 9, 283, 1962.
4. Іваніцка О. С., Левашев А. Е. Наук. повід. Київск. ун-та, фіз., I, 5, 1956.
5. Trautman A. C. R., 257, 617, 1963.
6. Kilmister C. W. J. Math. Mech., 12, 1, 1963.
7. Керес Х. П. ЖЭТФ, 46, 1741, 1964.
8. Керес Х. П. ЖЭТФ, 48, 1319, 1965.
9. Doutcourt G. Acta phys. polon., 25, № 5, 1964.
10. Navas P. Rev. Mod. phys., 36, 938, 1964.
11. Рашевский П. К. Риманова геометрия и тензорный анализ. 1964.
12. Фавар Ж. Курс локальной диф. геометрии. 1960.

РЕЗЮМЕ

С помощью тетрадного формализма рассмотрены предельный случай аффинных соотношений специальной теории относительности при $c \rightarrow \infty$, вырожденный галилейинвариантный метрический тензор и тетрадное условие изотропности. Кроме того, рассмотрены простейший случай вырождения тензориальных (мировых) компонент метрического тензора, когда его ранг совпадает с рангом галилейинвариантного вырожденного метрического тензора, а также галилейинвариантная связь контро-и ковариантных величин с помощью 4-вектора (мультивектора).

Поступило в редакцию 23.VII 1965

А. П. ІВАНОВ, І. Д. ШЭРБАФ

УПЛУЎ АПТЫЧНЫХ ПАРАМЕТРАУ
НА РАССЕЯННЕ ВУЗКАГА ПУЧКА СВЯТЛА
У МУТНЫМ АСЯРОДДЗІ

Распаўсюджваючыся ў мутным асяроддзі, вузкі паралельны пучок у выніку рассеяння моцна дэфармуецца, размываючыся на ўсё большую і большую плошчу. Пры гэтым структура пучка па папярочнаму сячэнню, натуральна, не застаецца пастаяннай. Асветленасць і яркасць ад восі пучка падаюць да яго краёў. Заканамернасці такога рассеяння залежаць ад наступных характарыстык асяроддзя: аптычнай плошчы папярочнага сячэння падаючага пучка святла $Q = S\varepsilon^2 = S(k + \sigma)^2$ (S — геаметрычная плошча; ε , k , σ — адпаведна паказчыкі экстынкцыі, паглынання і рассеяння), імавернасці выжывання фатона $\Lambda = \sigma / (k + \sigma)$, індикатрысы рассеяння элементарнага аб'ёма $\chi(\gamma)$, аптычных каардынат пункту назірання $\tau_h = \varepsilon h$ і $\tau_r = \varepsilon r$, дзе h — геаметрычная адлегласць ад пункту назірання да плоскасці, перпендыкулярнай снапу прамяняў, у якой знаходзіцца выпраменьвальнік; r — мінімальная адлегласць ад пункту назірання да восі геаметрычнай зоны распаўсюджвання вузкага пучка святла.

Як відаць, лік параметраў, якія вызначаюць працэс размыцця пучка святла, дастаткова вялікі. У выніку гэтага правядзенне эксперыментальных работ па разглядаемаму пытанню ў прыродных умовах (вада, атмасфера) для высветлення агульных заканамернасцей рассеяння вузкіх пучкоў святла ў мутных асяроддзях немэтазгодна. У гэтых умовах цяжка вар'іраваць у шырокіх межах і кантраляваць значэнні аптычных параметраў асяроддзя.

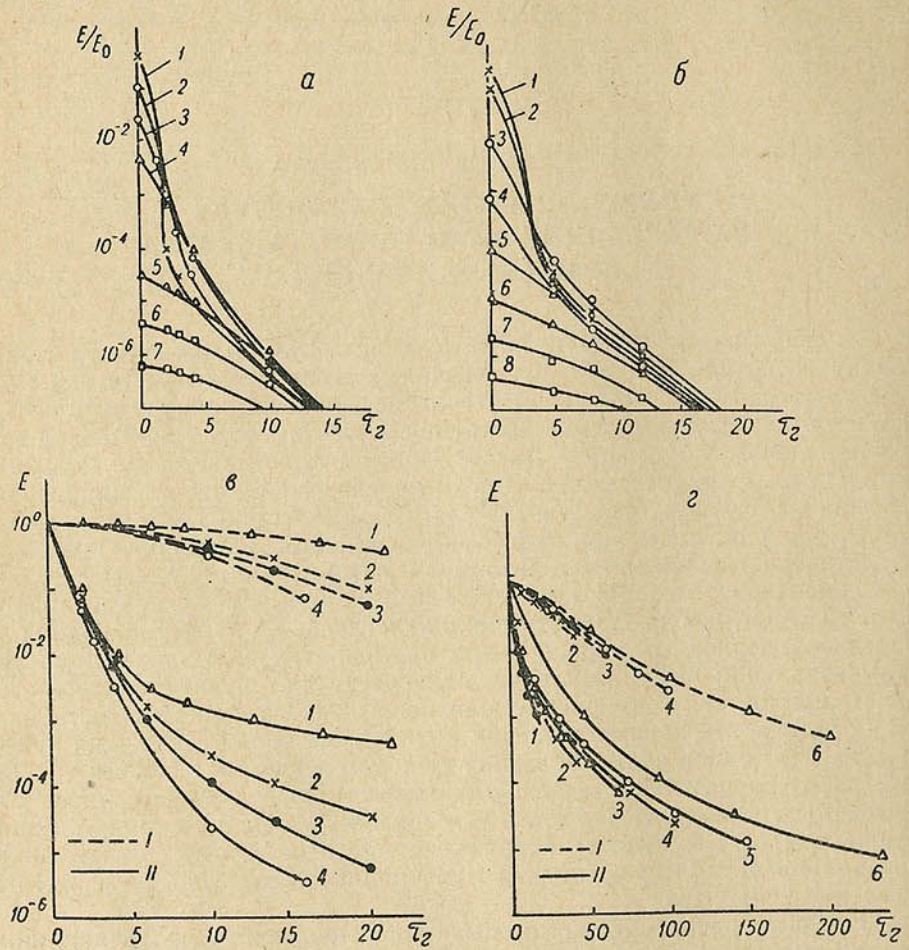
Намі была распрацавана метадыка стварэння такіх асяроддзяў, у якіх можна змяняць і дакладна вымяраць такія характарыстыкі, як Q , $\Lambda\chi(\gamma)$, τ_h , τ_r . Доследы праводзіліся ў невялікім басейне, у які накіроўваўся вузкі пучок святла, меўшы плошчу папярочнага сячэння $3,14 \text{ см}^2$ і вугал расхадзімасці прамяняў менш 1° . У замуценую рознымі рэчывамі ваду змяшчаўся тарцовы фотапамнажальнік ФЭУ-25, які мог вымяраць асветленасць у любых участках асяроддзя. Рабочая плошча прыёмніка таксама была роўная $3,14 \text{ см}^2$.

Падрабязней з метадычнымі пытаннямі і папярэднімі данымі па вывучэнню рассеяння вузкіх пучкоў святла можна пазнаёміцца ў работах [1—4].

Спынімся на атрыманых у апошні час рэзультатах па памянёнаму пытанню. Пры гэтым размова будзе весціся толькі аб такой характарыстыцы светлавога поля, як асветленасць E гарызантальнай плошчы з боку падзення паралельнага пучка святла.

На рыс. 1, а, б пабудаваны залежнасці E/E_0 ад τ_r пры розных τ_h і $\Lambda = 0,7$. Тут E і E_0 — асветленасць у разглядаемым пункце і каля выпраменьвальніка. Аналагічныя даныя намі былі атрыманы для розных Λ ,

але не прыводзяцца з-за недахопу месца. Тут і далей разглядаецца выпадак малочнага асяроддзя, у якога індикатрыса рассеяння $\chi(\gamma)$ элементарнага аб'ёму мае каэфіцыент асіметрыі, роўны 19. Рысунк ілюструе працэсы размыцця вузкіх пучкоў святла пры розных аптычных улас-



Рыс. 1. Залежнасць E/E_0 ад τ_r пры $\Lambda=0,7$ і розных значэннях ϵ (а: $\epsilon=0,4 \text{ см}^{-1}$; 1— $\tau_h=0,8$; 2—3,6; 3—5,6; 4—7,6; 5—15; 6—20; 7—24; б: $\epsilon=0,8 \text{ см}^{-1}$; 1— $\tau_h=1,6$; 2—3,2; 3—7,2; 4—11; 5—15; 6—19; 7—23; 8—27) і E ад τ_r пры розных значэннях Λ , ϵ і τ_h (в: $\epsilon=0,4 \text{ см}^{-1}$; 1— $\Lambda=0,998$; 2—0,9; 3—0,8; 4—0,7; I— $\tau_h=32$; II— $\tau_h=6$; г: $\Lambda=0,998$; 1— $\epsilon=0,42 \text{ см}^{-1}$; 2—0,85; 3—1,4; 4—2,1; 5—3; 6—9,3; I— $\tau_h=40$; II— $\tau_h=10$)

цівасянях рассеяючага асяроддзя. Што вынікае з прыведзенага рысунка?

На малой глыбіні крывыя E маюць рэзка выражаны максімум. Невялікае павелічэнне τ_r прыводзіць да рэзкага падзення асветленасці. З ростам τ_h велічыня максімуму памяншаецца, а інтэнсіўнасць пры вялікіх τ_r павялічваецца. Адбываецца як быццам перапампоўванне энергіі з вобласці малых τ_r у вобласць вялікіх τ_r . Гэта мае месца толькі да пэўных τ_h . На вялікіх глыбінях свячэнне аслабляецца па ўсёй прасторы. Пры гэтым крывыя $E=f(\tau_h)$ моцна сплэшчаюцца.

Для вялікіх τ_r мае месца прамалінейная залежнасць паміж $\lg E$ і τ_r . Цікава параўнаць крывыя размыцця вузкага пучка прамяняў пры

розных імавернасцях выжывання фатона і розных каэфіцыентах экстынкцыі.

На рыс. 1, в пабудаваны функцыі $E=f(\tau_r)$ пры розных Λ і τ_h , роўных 32 і 6. Даныя атрыманы для $\varepsilon=0,4 \text{ см}^{-1}$. Каб выразней бачыць скажэнне разглядаемых крывых, яны пры $\tau_r=0$ зведзены ў адзін пункт. З рысунка вынікае, што незалежна ад Λ на малых аптычных глыбінях асветленасць хутка зніжаецца з павелічэннем τ_r , а пры вялікіх τ_h такой рэзкай залежнасці не назіраецца. Чым менш удзельнае паглынне k/σ у асяроддзі, тым мацней размываецца паралельны пучок святла на адной і той жа аптычнай глыбіні.

Уплыў ε на размеркаванне асветленасці па каардынаце τ_r паказана на рыс. 1, г. Даныя атрыманы для $\Lambda=0,998$ і τ_h , роўных 10 і 50. Як і на папярэднім рысунку, пры $\tau_r=0$ значэнні асветленасці прыроўнены адзінцы.

Звяртае на сябе ўвагу той факт, што на адносна малой аптычнай глыбіні каэфіцыент экстынкцыі істотным чынам уплывае на форму крывой $E=f(\tau_r)$. Чым менш ε , тым больш заостраны выгляд у памянёнай крывой, тым слабей рассеіваецца паралельны пучок святла ў асяроддзі. Аднак пры вялікіх τ_h залежнасць формы крывых $E=f(\tau_r)$ ад каэфіцыента экстынкцыі неістотная.

Спынімся на пытанні аб тым, як змяняецца асветленасць E з узростаннем τ_h пры розных τ_r . На рыс. 2, а і б пабудаваны графікі функцый $E/E_0=f(\tau_h)$ пры розных імавернасцях выжывання фатона. У межах кожнага рысунка даследаваны выпадкі максімальнага і мінімальнага каэфіцыентаў экстынкцыі, рэалізаваных у доследзе. З прыведзеных даных відаць, што незалежна ад Λ і ε функцыі $E/E_0=f(\tau_h)$ маюць максімум. Ён зрушваецца ў бок вялікіх τ_h з ростам τ_r . Пры гэтым вобласць найбольшых значэнняў E расшыраецца, паколькі крывыя сплэшчаюцца.

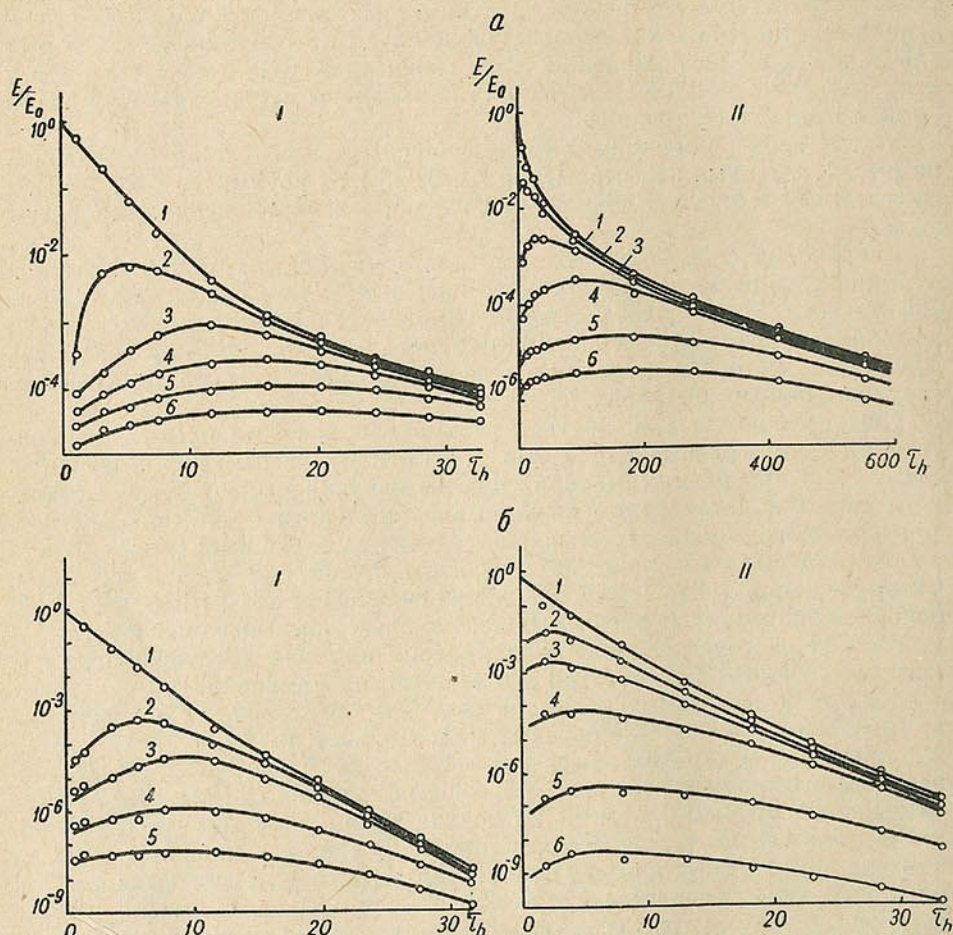
Можна разгледзець больш падрабязна пытанне аб становішчы максімуму функцый $E/E_0=f(\tau_h)$ і яго велічыні пры змяненні Λ і ε .

З аналізу атрыманых даных на рыс. 3, а пабудавана залежнасць каардынаты τ_h , на якой рэалізуецца максімальнае значэнне E , ад τ_r . Тут жа прыведзены значэнні E_{\max} пры розных τ_r . Разгледжан уплыў імавернасці выжывання кванта на памянёныя залежнасці пры каэфіцыенце экстынкцыі, роўным $0,4 \text{ см}^{-1}$. З рысунка відаць, што пры малых і вялікіх τ_r залежнасць $\tau_h=f(\tau_r)$ прамалінейная, аднак у першым выпадку тангенс вугла нахілу крывых значна больш, чым у другім выпадку. Характэрна, што пры адным і тым жа τ_r максімум асветленасці перамяшчаецца ў зону вялікіх τ_h з ростам імавернасці выжывання фатона. Гэта вынікае з таго, што з павелічэннем Λ крывыя размяшчаюцца на графіку вышэй. Звяртае таксама на сябе ўвагу той факт, што пры вялікіх τ_r са змяненнем гэтай каардынаты змяненні ў значэннях τ_h тым менш, чым менш Λ . Максімальныя значэнні асветленасці E_{\max} з павелічэннем τ_r змяншаюцца асабліва хутка пры малых τ_r . Чым больш імавернасць выжывання фатона, тым больш E_{\max} .

На рыс. 3, б пабудаваны такія ж залежнасці, што і на папярэднім рысунку, пры розных ε . Імавернасць выжывання фатона была роўная 0,998. З аналізу рыс. 3, б можна зрабіць наступныя вывады: з павелічэннем ε пры пастаянным τ_r значэнні τ_h , пры якіх рэалізуецца максімальная асветленасць E_{\max} , павялічваюцца. Характэрна, што ў вобласці малых τ_r заўсёды $\tau_h > \tau_r$, у той час як пры вялікіх τ_r , наадварот, $\tau_h < \tau_r$. З ростам τ_r велічыня E_{\max} хутка падае. Гэта асабліва выразна праяўляецца пры малых каэфіцыентах экстынкцыі. Трэба таксама падкрэсліць, што пры пэўных аптычных каардынатах, дзе рэалізаваны максімум E , чым менш ε , тым менш велічыня асветленасці.

Разгледзім пытанне аб уплыве каэфіцыента экстынкцыі асяроддзя на асцеленасць у розных участках мутнага аб'ёму.

На рыс. 4, а пры $\tau_h = 10$, $\Lambda = 0,998$ і розных τ_r пабудаваны графікі $E/E_0 = f(\varepsilon^2)$ у лагарыфічным маштабе. З рысунка відаць, што ў значным інтэрвале разгледжаных значэнняў ε залежнасці $\lg E/E_0 = f(\lg \varepsilon^2)$



Рыс. 2. Залежнасць E/E_0 ад τ_h пры розных значэннях Λ , ε і τ_r :

- а) $\Lambda = 0,998$; 1— $\varepsilon = 0,4$ см⁻¹; 1— $\tau_r = 0$; 2—2; 3—5; 4—9; 5—14; 6—21; 11— $\varepsilon = 9,3$ см⁻¹; 1— $\tau_r = 0$; 2—20; 3—60; 4—140; 5—320; 6—460;
 б) $\Lambda = 0,7$; 1— $\varepsilon = 0,4$ см⁻¹; 1— $\tau_r = 0$; 2—2,5; 3—5; 4—10; 5—16; 11— $\varepsilon = 2$ см⁻¹; 1— $\tau_r = 0$; 2—2,5; 3—5; 4—10; 5—20; 6—30

прамалінейныя, хаця яны не могуць мець усюды такі выгляд, паколькі пры вельмі вялікіх і малых ε крывыя імкнуцца да сваіх асімптатычных гранічных велічынь. Характэрна, што прамыя лініі маюць пры розных τ_r адзін і той жа нахіл, што і ў выпадку $\tau_r = 0$. Гэта спрашчае разгледжанне аналагічных пытанняў пры павелічэнні адлегласці ад восі падаючага пучка да пункту назірання.

Рыс. 4, б ілюструе ўплыў τ_h на залежнасць E/E_0 ад ε^2 пры $\tau_r = 10$ і $\Lambda = 0,998$. Як і на папярэднім рысунку, тут выкарыстаны лагарыфічны маштаб. Звяртае на сябе ўвагу тое, што па-за падаючым пучком святла няма істотнай розніцы ў нахиле прамых ліній $E/E_0 = f(\varepsilon^2)$ (у лагарыф-

мічным маштабе). Усе гэтыя рэзультаты цікавыя для тэарэтычных распрацовак, якія абапіраюцца на некаторыя прыбліжэнні, дапусцімасць якіх вышэй з эксперымента.

Цікава, як залежыць асветленасць па-за зонай распаўсюджвання паралельнага пучка праменняў пры змяненні Λ ? На рыс. 4, в пры $\tau_h = 10$ і

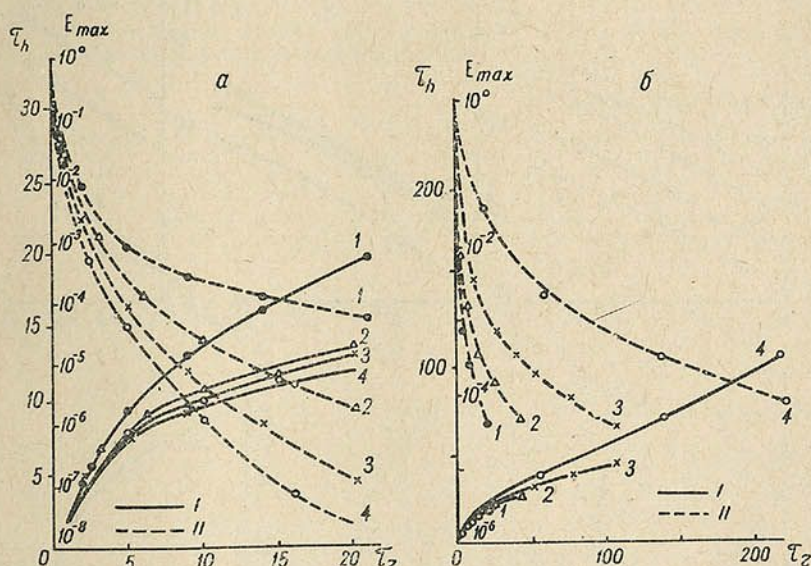


Рис. 3. Залежнасць τ_h і E_{max} ад τ_r пры розных значэннях Λ і ϵ (I—залежнасць τ_h ад τ_r , II—залежнасць E_{max} ад τ_r):

а) $\epsilon = 0,4 \text{ см}^{-1}$; 1— $\Lambda = 0,998$; 2—0,9; 3—0,8; 4—0,7;
б) $\Lambda = 0,998$; 1— $\epsilon = 0,4 \text{ см}^{-1}$; 2—0,85; 3—2,1; 4—9,3

розных τ_r пабудаваны графікі $E/E_0 = f(\Lambda)$. З рысунка відаць, што ў любых выпадках з памяншэннем імавернасці выжывання фатона асветленасць памяншаецца. Пры малых τ_r гэта залежнасць не вельмі моцная, аднак з ростам τ_r , асабліва ў вобласці слабага паглынання, нязначнае памяншэнне Λ прыводзіць да рэзкага падзення E .

Для многіх практычных задач важна ведаць, як размяркоўваецца светлае поле ў прасторы, асветленай вузкім пучком радыяцыі. На рыс. 4, г прыведзена сям'я крывых, атрыманых на аснове апрацоўкі эксперыментальных даных пры $\Lambda = 0,998$, $\epsilon = 0,42 \text{ см}^{-1}$. Кожная кривая вызначае геаметрычнае месца пунктаў у сістэме каардынат τ_h , τ_r , у якіх E пастаяннае. Лічбы ў крывых адпавядаюць розным значэнням E/E_0 . З рысунка відаць, што ізафоты некалькі выцягнуты ў напрамку восі τ_h . Гэта асабліва ярка выражана пры высокім узроўні асветленасці. Чым менш разглядаемая велічыня E/E_0 , тым больш вобласць прасторы, дзе рэалізуецца памянёны ўзровень асветленасці.

На рыс. 4, д пры ўзроўні асветленасці $E/E_0 = 3 \cdot 10^{-4}$ пабудаваны аналагічныя крывыя, якія адпавядаюць розным значэнням каэфіцыента экстынкцыі пры $\Lambda = 0,998$. З рысунка вынікае, што чым больш ϵ , тым на больш аддаленых участках ад месца ўваходжання святла ў асяроддзе рэалізуецца пастаянная асветленасць. Ступень выцягнутасці ізафот у напрамку распаўсюджвання прамога святла памяншаецца з ростам змутненасці асяроддзя.

Уплыў імавернасці выжывання кванта святла на выгляд і форму ізафот разгледжан на рыс. 4, *e*. Тут аналізуецца выпадак $\varepsilon = 0,8 \text{ см}^{-1}$ і $E/E_0 = 10^{-4}$.

Як відаць з рыс. 4, *e*, значэнне Λ у значнай ступені вызначае тэя ўчасткі прасторы, дзе асветленасць пастаянная. Пры $\Lambda = 0,998 \text{ E}/E_0 = 10^{-4}$

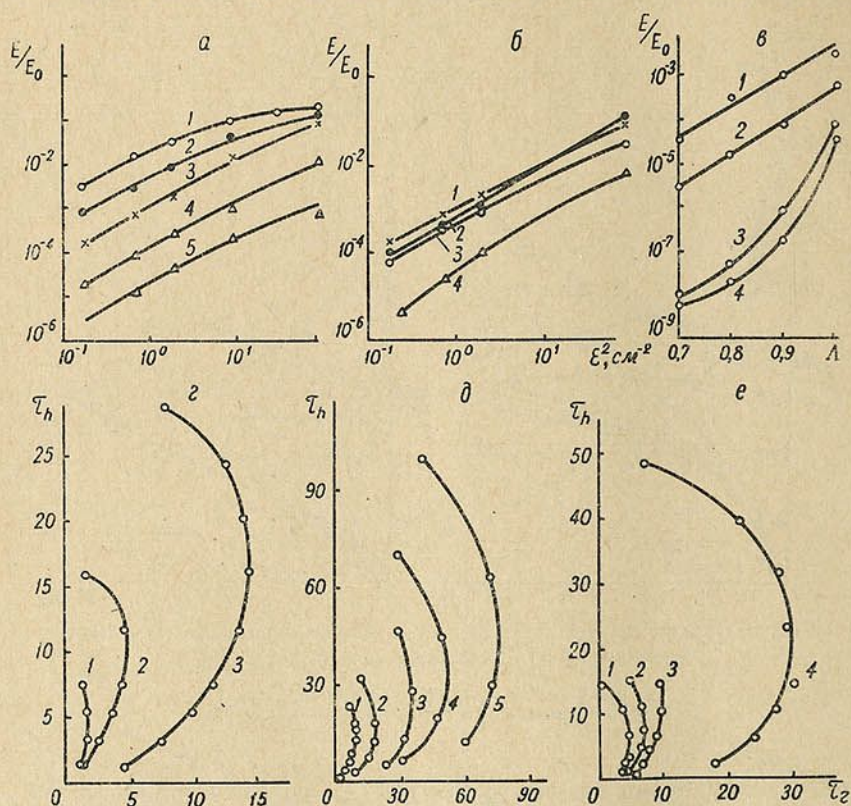


Рис. 4. Залежнасць E/E_0 ад ε^2 і Λ (а: $\tau_h=10$; $\Lambda=0,998$; 1— $\tau_r=0$; 2—5; 3—10; 4—30; 5—60; б: $\tau_r=10$; $\Lambda=0,998$; 1— $\tau_h=10$; 2—5; 3—30; 4—70; в: $\tau_h=10$; $\varepsilon=0,8 \text{ см}^{-1}$; 1— $\tau_h=5$; 2—10; 3—30; 4—40) і сям'я крывых, якія вызначаюць пастаянную велічыню E/E_0 у сістэме каардынат τ_h — τ_r (г: $\Lambda=0,998$; $\varepsilon=0,42 \text{ см}^{-1}$; 1— $E/E_0=10^{-2}$; 2— 10^{-3} ; 3— 10^{-4} ; д: $\Lambda=0,998$; $\varepsilon=3,10^{-4}$; 1— $\varepsilon=0,4 \text{ см}^{-1}$; 2—0,85; 3—1,4; 4—2,1; 5—3; е: $\varepsilon=0,8 \text{ см}^{-1}$; $E/E_0=10^{-4}$; 1— $\Lambda=0,7$; 2—0,8; 3—0,9; 4—0,998)

можна ажыццявіць пры вялікім аддаленні ад пачатку каардынат. Аднак змяншэнне Λ прыводзіць да рэзкага прыбліжэння ізафот у вобласць малых τ_h і τ_r . Пры гэтым крывыя больш выцягваюцца ў напрамку восі τ_h , чым у напрамку восі τ_r .

ЛІТАРАТУРА

1. Іванов А. П., Шербаф І. Д. Весці АН БССР, сер. фіз.-тэхн. навук, № 2, 1962.
2. Іванов А. П., Шербаф І. Д. Оптика і спектроскопія, 18, в. 4, 1965.
3. Іванов А. П., Шербаф І. Д. ДАН БССР, 7, 673, 1963.
4. Іванов А. И., Шербаф І. Д. Актинометрия и оптика атмосферы. Изд. «Наука», 1964, стар. 267.

РЕЗЮМЕ

Для изучения размытия узкого пучка света в рассеивающей среде использованы модельные системы, в которых имелась возможность варьировать такие параметры как Λ , τ_h , τ_r , ε .

Показано, что при одном и том же τ_h , чем меньше Λ , тем меньше рассеивается вбок пучок света.

Роль ε на форму кривой размытия пучка при малых глубинах существенна, а при больших τ_h — несущественна.

Приведены диаграммы изофот, характеризующие геометрическое место точек постоянной освещенности в пространстве при разных ε и Λ .

Поступило в редакцию 20.X 1965

В. І. БЕЛАВУСАВА, Э. А. РУДАК, Я. І. ФІРСАУ

РЭАКЦЫЯ $\text{Cr}^{50}(n, \gamma)\text{Cr}^{51}$ НА ЦЕПЛАВЫХ НЕЙТРОНАХ

Рэакцыя $\text{Cr}^{50}(n, \gamma)\text{Cr}^{51}$ на цеплавых нейтронах у апошні час дастаткова падрабязна даследавалася ў радзе эксперыментальных работ [1—3]. Дадзеная рэакцыя мае дзве цікавыя асаблівасці: 1) велічыня сячэння дадзенай рэакцыі (~ 17 барн) значна большая, чым для суседніх цотна-цотных ізатопаў тытану, хрому і жалеза; 2) імавернасці γ -пераходаў тыпу $E1$ з захопнага стану Cr^{51} на ніжнія p -узроўні вельмі добра карэлююць з прыведзенымі нейтроннымі шырынямі гэтых узроўняў [3]. Гэтыя факты прадстаўляюць цікавасць у сувязі з магчымасцю „прамога“ захопу цеплавых нейтронаў на ядрах з масавымі лікамі $A \approx 50$ [4]. Пад „прамым“ захопам разумеецца патэнцыяльны захоп цеплавога нейтрона ядром-мішэнню і ўклад у сячэнне рэакцыі „хвастоў“ аддаленых рэзанансаў. Пры „прамым“ захопе ўтвараецца адначастковы захопны s -стан, з якога нейтрон пераходзіць на ніжнія p -узроўні без утварэння састаўнога ядра. Гэтыя пераходы суправаджаюцца інтэнсіўным γ -выпраменьваннем тыпу $E1$, прычым імавернасць гэтых γ -пераходаў павінна быць прапарцыянальнай прыведзеным нейтронным шырыням канечных p -узроўняў. У ядрах з $A \approx 50$ паблізу ад захопнага стану праходзіць адначастковы $3s_{1/2}$ -узровень, а паблізу ад асноўнага — $2p_{3/2}$ -узровень. Таму для гэтай групы ядраў „прамы“ захоп найбольш імаверны. Добрая карэляцыя, якая назіраецца ў эксперыменце, паміж імавернасцямі γ -пераходаў тыпу $E1$ з захопнага стану з прыведзенымі нейтроннымі шырынямі канечных p -узроўняў павінна, здавалася б, сведчыць у карысць „прамога“ захопу цеплавых нейтронаў у дадзенай рэакцыі. Аднак вельмі вялікая велічыня сячэнняў працэсаў супярэчыць меркаванню аб перавазе ў рэакцыі механізма „прамога“ захопу. Згодна з эксперыментальнымі данымі, сячэнні захопу цеплавых нейтронаў ядром Cr^{50} з далейшымі пераходамі тыпу $E1$ на p -узроўні 0,77 і 1,90 Мэв роўныя адпаведна 9,5 і 2,5 барн. Тэарэтычныя ж ацэнкі аналагічных γ -пераходаў у ядры Cr^{53} даюць значэнні парадку 0,2—0,3 барна [4], што на парадак менш за эксперыментальныя значэнні. Дадзеныя тэарэтычныя ацэнкі былі атрыманы з выкарыстаннем у разліках хвалевых функцый звязаных p -узроўняў і падаючых s -нейтронаў прамавугольнай патэнцыяльнай ямы. Прамавугольная патэнцыяльная яма з'яўляецца занадта грубым набліжэннем да сапраўднага патэнцыялу. Таму можна было меркаваць, што тэарэтычныя ацэнкі ў выпадку прамавугольнай ямы заніжаны і разлікі сячэнняў з выкарыстаннем патэнцыялу з размытым краем дадуць больш блізкія да эксперыментальнага значэнні. Намі былі разлічаны сячэнні пераходаў тыпу $E1$ ядра Cr^{51} з захопнага стану на p -узроўні 0,77 і 1,90 Мэв па формуле для сячэння патэнцыяльнага захопу [5]

$$\sigma(n, \gamma) = \frac{2(2j+1)}{9hv} \left(\frac{E_\gamma}{hc} \right)^3 \left(\frac{eZ}{A+1} \right)^2 \left| \int_0^\infty \psi_j^* r \psi_i r^2 dr \right|^2,$$

дзе E_γ — энергія γ -пераходу; j — спін p -узроўню; v — хуткасць нейтрона; ψ_j — хвалевае функцыя p -узроўню і ψ_i — хвалевае функцыя падаючага нейтрона. Для разліку хвалевых функцый p -узроўняў выкарыстоўваўся патэнцыял з размытым краем тыпу

$$V(r) = \begin{cases} -V_0, & 0 \leq r \leq a, \\ -V_0 \exp\left\{\frac{a-r}{\delta a}\right\}, & r \geq a, \end{cases}$$

дзе V_0 — глыбіня патэнцыяльнай ямы; a і δ — параметры, характарызуючыя залежнасць велічыні патэнцыялу ад адлегласці. Метад разліку адначастковых хвалевых функцый з такім патэнцыялам прыведзен у работах [6, 7]. Для ядра Cr^{51} былі выбраны наступныя параметры патэнцыялу $V(r)$: $V_0 = -42$ Мэв, $a = 4,15 \times 10^{-13}$ см і $\delta = 0,25$ і $0,3$. Пры $\delta = 0,25$ для пераходаў на ўзроўні $0,77$ і $1,90$ Мэв сячэнні роўныя адпаведна $0,092$ і $0,041$ барн. У выпадку $\delta = 0,3$ сячэнні роўныя $0,31$ і $0,14$ барн. Гэтыя вынікі паказваюць, што сячэнні вельмі моцна залежаць ад параметра размыцця δ . Для ядраў з $A \approx 50$ найбольш разумнае значэнне параметра δ прыкладна $0,25$ і не больш $0,3$ [7]. Таму можна лічыць, што значэнні $0,31$ і $0,14$ барн з'яўляюцца верхняй мяжой ацэнкі. Пры гэтым не ўлічана тая акалічнасць, што p -узроўні $0,77$ і $1,90$ Мэв у сапраўднасці не з'яўляюцца чыста адначастковымі, г. зн. прыведзеныя гэтых узроўняў менш за 1. Гэта прывядзе да некаторага змяншэння атрыманых тэарэтычных ацэнак сячэння патэнцыяльнага захопу. Значыць, тэарэтычныя ацэнкі сячэння патэнцыяльнага захопу нейтронаў ядром Cr^{50} у рэакцыі (n, γ) значна меншыя за эксперыментальныя значэнні і ў выпадку выкарыстання ў разліках патэнцыяльнай ямы з размытым краем. Таму можна лічыць, што ў рэакцыі $\text{Cr}^{50}(n, \gamma)\text{Cr}^{51}$ „прамы“ захоп не адыгрывае істотнай ролі, а наяўнасць карэляцыі паміж імавернасцямі γ -пераходаў тыпу $E1$ з прыведзенымі нейтроннымі шырынямі канечных p -узроўняў не з'яўляецца дастатковай прыкметай працякання рэакцыі (n, γ) на цеплавых нейтронах шляхам „прамога“ захопу нейтрона.

Падобнае разыходжанне эксперыментальных значэнняў сячэнняў з тэарэтычнымі ацэнкамі сячэння патэнцыяльнага захопу сведчыць, напэўна, аб больш складаным характары працэсу захопу нейтрона. У апошні час з'явіўся рад работ, у якіх указваецца на магчымасць утварэння вельмі простых узбуджаных канфігурацый ядра тыпу „дзве часцінкі і адна „дзірка“ у працэсе рэзананснага захопу нейтрона [8—11]. Звычайна можа ўтварацца некалькі разнастайных канфігурацый. Усе гэтыя канфігурацыі ў выніку астаткавага ўзаемадзеяння паміж нахленамі могуць быць не выраджанымі па энергіі і знаходзіцца як вышэй энергіі сувязі апошняга нейтрона B_n у ядры-прадукце (рэзанансы ў вобласці дадатных энергій), так і ніжэй энергіі сувязі B_n (рэзанансы ў вобласці адмоўных энергій). Імавернасці γ -пераходаў з дадзенага рэзананснага стану на канечныя ўзроўні вызначаюцца як уласцівасцямі хвалевай функцыі дадзенага рэзананснага стану, так і ўласцівасцямі хвалевай функцыі канечнага узроўню. Таму імавернасці парцыяльных γ -пераходаў могуць моцна флуктуіраваць па велічыні ад рэзанансу да рэзанансу. Аднак калі ў сячэнне рэакцыі (n, γ) істотны ўклад уносяць некалькі рэзанансаў, то назіраемыя ў эксперыменце імавернасці парцыяльных γ -пераходаў з'яўляюцца ўсярэдненымі па гэтых рэзанансах. Падобнае ўсярэдняе можа прывесці да таго, што імавернасці парцыяльных γ -пераходаў будуць вызначацца ў значнай ступені толькі ўласцівасцямі канечных узроўняў. У прыватнасці, у гэтым выпадку можа назі-

рацца карэляцыя паміж імавернасцямі γ -пераходаў тыпу $E1$ з зыходнага стану ў рэакцыі (n, γ) на ніжнія p -узроўні з прыведзенымі нейтроннымі шырынямі гэтых узроўняў. Зусім магчыма, што падобны выпадак мы маем у рэакцыі $\text{Cr}^{50}(n, \gamma)\text{Cr}^{51}$ на цеплавых нейтронах. У рабоце [12] указваецца, што ў сячэнні узаемадзеяння нейтронаў з ядром Cr^{50} пры энергіі нейтронаў прыкладна 5,5 кэВ назіраецца група нявырашаных рэзанансаў з поўнай радыяцыйнай шырынёй Γ , звыш 3эв . На аснове гэтых даных можна зразумець наяўнасць добрай карэляцыі паміж імавернасцямі γ -пераходаў тыпу $E1$ з захопнага стану ў рэакцыі (n, γ) на ядры Cr^{50} на цеплавых нейтронах з прыведзенымі нейтроннымі шырынямі канечных p -узроўняў і без прыцягнення тэорыі „прамога“ захопу нейтрона.

ЛІТАРАТУРА

1. Kane W. R., Fiebiger N. F., Fox J. D. Phys. Rev., 125, 2037, 1962.
2. Bartholomew G. A., Gunye M. R. BAPS, 8, 367, 1963.
3. Рудак Э. А., Фірсов Е. И. Ядерная физика, 1, 235, 1965.
4. Lane A. M., Lynn J. E. Nucl. Phys., 17, 586, 1960.
5. Breit G., Yost F. L. Phys. Rev., 48, 203, 1935.
6. Green A. E., Lee K. Phys. Rev., 99, 772, 1955.
7. Green A. E. Phys. Rev., 104, 1617, 1956.
8. Shakin C. M. Ann. Phys. (N. Y.), 22, 373, 1963.
9. Isumo K. Inst. nucl. study univ. Tokyo, I—59, 24, 1963.
10. Lande A., Blok B. Phys. Rev. letters, 12, 334, 1964.
11. Seth K. K. Phys. letters, 16, 306, 1965.
12. Капчигашев С. П., Попов Ю. П. Атомная энергия, 16, 256, 1964.

РЕЗЮМЕ

В статье рассматриваются возможные причины обнаруженной экспериментально корреляции между вероятностями γ -переходов типа $E1$ из захватного состояния в реакции $\text{Cr}^{50}(n, \gamma)\text{Cr}^{51}$ на конечные p -уровни с приведенными нейтронными ширинами этих уровней. Путем теоретической оценки сечений отдельных переходов показано, что наблюдаемые экспериментально сечения не могут быть объяснены «прямым» захватом нейтронов, при котором подобная корреляция возможна. Наличие корреляции между указанными выше величинами рассматривается как следствие вклада в сечение реакции на тепловых нейтронах нескольких резонансных состояний, имеющих простую структуру типа «две частицы и одна «дырка».

Поступило в редакцию 7.III 1965

КАРОТКІЯ ПАВЕДАМЛЕННІ

Б. И. СТЕПАНОВ, В. П. ГРИБКОВСКИЙ, Ф. К. РУТКОВСКИЙ

ВЛИЯНИЕ ДОБРОТНОСТИ РЕЗОНАТОРА НА МОЩНОСТЬ ГЕНЕРИРУЕМОГО ИЗЛУЧЕНИЯ

При исследовании генерируемого излучения обычно предполагается, что плотность радиации накачки определяется действием ламп накачки и свойствами осветителя, но не зависит от параметров резонатора и, в частности, от коэффициентов отражения зеркал. Однако на опыте постоянная плотность возбуждающей радиации u_0 обеспечивается только вне рабочего вещества генератора. Плотность излучения накачки внутри стержня u , определяющая мощность генерации, зависит не только от u_0 , но и от коэффициента поглощения самого вещества, а следовательно, и от добротности резонатора, определяющей степень просветления вещества. Пренебрежение этим обстоятельством может приводить к систематическим ошибкам при сравнении теории с опытом и интерпретации экспериментальных данных.

Ниже рассматривается зависимость мощности генерируемого потока от коэффициента отражения зеркал r с учетом влияния r на эффективность накачки.

Согласно [1], поток генерируемой радиации через элемент поверхности торца ds определяется выражением

$$dS_{\text{ген}} = W_{\text{ген}} \frac{\ln(1/\sqrt{rr'}) ds}{\rho + l^{-1} \ln(\sqrt{rr'})}, \quad (1)$$

где $W_{\text{ген}}$ — мощность стимулированного испускания в расчете на единицу объема рабочего вещества; l — длина стержня; r и r' — коэффициенты отражения торцов. Знаменатель в (1) равен коэффициенту потерь, причем ρ характеризует вредные потери, а $l^{-1} \ln(1/\sqrt{rr'})$ — выход излучения через торцы.

Подставляя в (1) выражение для мощности генерации трехуровневой системы [2] и усредняя по объему цилиндра, получаем поток, выходящий через торец:

$$S_{\text{ген}} = \nu l \pi R_0^2 \frac{\nu_{21}}{\nu_{31}} \eta \Delta \nu_{31} k_{13}^r (\bar{u}_{31} - u_{31}^{\text{пор}}) \frac{\ln(1/\sqrt{rr'})}{l \rho + \ln(1/\sqrt{rr'})}, \quad (2)$$

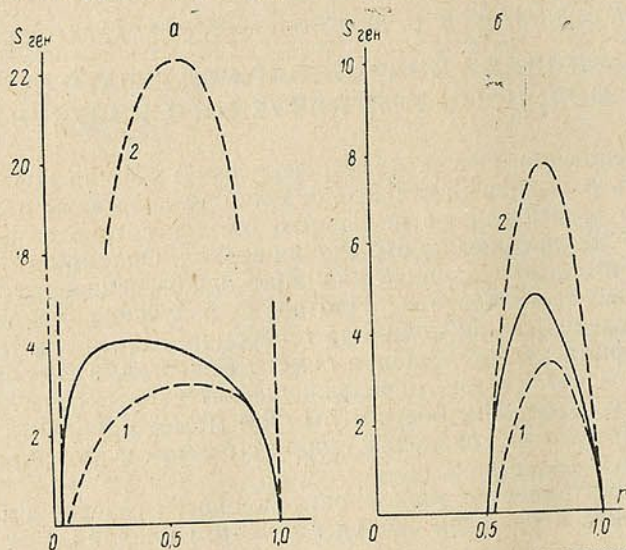
где

$$\eta = \frac{\rho_{32}^0}{\rho_{32}^0 + \rho_{31}^0}; \quad k_{13}^r = \frac{\kappa_{13}(1 - \delta)}{1 + g_2/g_1}; \quad \delta = \frac{\rho + l^{-1} \ln(1/\sqrt{rr'})}{\kappa_{21}};$$

$$\bar{u}_{31} = u_0 \bar{q}(k_{13}^r R_0); \quad u_{31}^{\text{пор}} = \frac{\rho_{21}^0(1 + \delta)}{\eta B_{13}(1 - \delta)}. \quad (3)$$

В (2) и (3) приняты следующие обозначения: ν — скорость света; R_0 —

радиус стержня; ν_{21} — частота генерации; ν_{31} и $\Delta\nu_{31}$ — частота и ширина линии возбуждения; $u_{31}^{\text{пор}}$ и \bar{u}_{31} — пороговая и средняя плотность радиации накачки в образце; p_{ij}^0 — вероятность перехода $i \rightarrow j$; k_{13}^r — коэффициент поглощения радиации накачки в режиме генерации; κ_{13} и κ_{21} — предельные коэффициенты поглощения и усиления; g_i — статистический вес i -го уровня; \bar{q} — усредненная по сечению цилиндра отно-



Зависимость генерируемого потока (в относительных единицах) от коэффициента отражения r при $r'=1$, $R_0=1$ см, $\kappa_{21}=0,4$ см $^{-1}$, $\rho=0,02$ см $^{-1}$, $u_0=0,47 \cdot 10^{-13}$ эрг/см $^3 \cdot$ сек $^{-1}$, $l=5$ см, $\kappa_{13}=6$ см $^{-1}$ (а) и $l=20$ см, $\kappa_{13}=3$ см $^{-1}$ (б). Сплошные кривые рассчитаны с учетом зависимости $\bar{u}(r)$, а штриховые — в предположении, что \bar{u} постоянно и равно $\bar{u}(1)$ (1) и $\bar{u}(\text{пор})$ (2)

сительная плотность радиации накачки [3]; V_{13} — коэффициент Эйнштейна.

Для простоты коэффициент k_{13}^r предполагается постоянным в пределах ширины линии $\Delta\nu_{31}$. Расчеты для общего случая более громоздки и не дают качественно новых результатов.

Как видно из (3), при небольшой длине стержня увеличение коэффициента отражения от 0 до 1 может привести к сильному изменению k_{13}^r и, следовательно, к изменению $u = u_{31}$ при постоянном u_0 . Расчеты показывают [3], что при изменении параметра $k_{13}^r R_0$ от 0 до 3,2 среднее значение \bar{u} плотности радиации в полированном рубиновом цилиндре уменьшается в 6,5 раза. Пределы изменения \bar{u} как функции r будут тем шире, чем шире пределы для параметра $k_{13}^r R_0$ при изменении r от 0 до 1. При больших длинах и малых радиусах цилиндра зависимостью k_{13}^r , а следовательно, и u от r можно пренебречь. Наоборот, при малых l , ρ и больших R_0 зависимость $u(r)$ существенна.

Эти рассуждения всегда справедливы для трехуровневых генераторов и тех четырехуровневых, у которых происходит заметное обеднение частицами основного состояния. Во многих четырехуровневых генераторах в режиме генерации населенность нижнего уровня изменяется незначительно и поэтому зависимостью $u(r)$ можно пренебречь.

Для иллюстрации указанных закономерностей (см. рисунок) приведен график $S_{\text{ген}}(r)$ при $r' = 1$, построенный по формуле (2) с учетом зависимости $u(r)$, выраженной формулами (3) (сплошные кривые). К каким ошибкам может приводить пренебрежение этой зависимостью, показывают штриховые кривые, рассчитанные для двух предельных случаев: 1) $\bar{u} = \bar{u}(r=1)$ и 2) $u = u(r_{\text{пор}})$, где $r_{\text{пор}} = \exp 2l(\rho - \kappa_{21})$ — значение r , при котором $k_{13}^{\text{F}} = 0$. При малом l и большом κ_{13} (рисунок, а) сплошная и штриховые кривые, а также положения их максимумов сильно различаются. После увеличения l в четыре раза и уменьшения κ_{13} в 2 раза кривые значительно сблизились (рисунок, б).

В заключение необходимо отметить, что возникновение новых полос поглощения в возбужденных частицах может значительно ослабить зависимость $u(r)$. Если бы полосы поглощения, связанные с синглетными и триплетными переходами, полностью перекрывались между собой, а вероятности соответствующих переходов были равны, то суммарный коэффициент поглощения не зависел бы от распределения частиц по уровням и u оставалось бы постоянным при изменении r . У рубины эти полосы перекрываются только частично [4] и поэтому зависимость $u(r)$ сохраняется.

ЛИТЕРАТУРА

1. Степанов Б. И. ДАН СССР, 143, 74, 1963.
2. Степанов Б. И., Грибковский В. П. УФН, 82, 201, 1964.
3. Рутковский Ф. К., Грибковский В. П., Кравцов Л. А. Известия АН СССР, сер. физич., № 8, 1965.
4. Иванов А. Н., Рубинов А. Н., Михинов С. А. Оптика и спектроскопия, 17, 598, 1964.

Поступило в редакцию 30.VII 1965

А. И. БОЛСУН

ПОЛЯРИЗАЦИОННЫЕ ЭФФЕКТЫ В ПРОЦЕССЕ ФОТОРОЖДЕНИЯ ПАР W -МЕЗОНОВ НА ЯДРЕ

Продолжительные поиски промежуточного векторного W -мезона в нейтринных опытах $\nu + Z \rightarrow Z' + l + W$ показали, что масса этой частицы, если она существует, должна быть больше $1,7 \div 2,2 \text{ гэв}/c^2$ [1]. Результаты этих опытов рассеяли надежду на легкое обнаружение массивного W -мезона при взаимодействии нейтрино с ядрами. Эффекты фона, предполагавшиеся первоначально незначительными, с увеличением энергии нейтрино сильно возрастают. Это связано с неупругими процессами $\nu + Z \rightarrow Z' + l + \pi$, в которых происходит рождение нескольких π -мезонов. В связи с этим разумно искать и другие пути обнаружения W -мезона.

Принципиально такую возможность представляет фоторождение пар W -мезонов на ядрах [2]. По предложению Бладмена и Юнга [3] основным средством выделения продуктов распада W -мезона может служить поиск лептонных пар под большими углами к направлению пучка налетающих γ -квантов.

Следует отметить, что лептонные пары под большими углами будут появляться только вблизи порога рождения W -мезонов, когда их импульс мал по сравнению с массой. В этом случае угловое распределение лептонов от распада W -мезона изотропно. При большой энергии W -мезона, т. е. вдали от порога рождения, оно сильно вытянуто вперед. Поэтому можно было думать, что при больших энергиях γ -квантов, когда рождаются почти релятивистские W -мезоны, лептонные пары от распада мезонов под большими углами появляться не будут. Однако при больших энергиях работает другой механизм, который приводит к появлению лептонных пар под очень большими углами к направлению γ -пучка, т. е. практически в обратном направлении. Этот механизм связан со спиновыми свойствами W -мезона. В [4] показано, что полные сечения рождающихся W -мезонов в этом случае для различных поляризаций имеют вид:

$$\begin{aligned} \sigma_{00}^{\gamma} &= \frac{5}{8} r_0^2 \pi \frac{k_0^2}{m^2}, \\ \sigma_{\pm\pm}^{\gamma} &= \frac{1}{8} r_0^2 \pi \frac{k_0^2}{m^2}, \\ \sigma_{\pm\mp}^{\gamma} &= \frac{1}{12} r_0^2 \pi \frac{k_0^2}{m^2}, \end{aligned} \quad (1)$$

где индексы у сечения означают характер поляризации мезона (+, — круговые поляризации; 0 — линейная поляризация вдоль импульса); k_0 — энергия γ -кванта в системе центра масс; $r_0 = a \frac{\hbar}{mc}$; m — масса W -мезона.

Используя (1), при помощи ковариантного метода Вейцекера—Вильямса [5—7], обобщенного на случай поляризованных частиц, можно получить сечение фоторождения пар W^+ , W^- -мезонов на ядре

$$\sigma_{rr'} = \frac{\alpha Z^2}{\pi} \int \sigma_{rr'}^{\gamma}(\omega^2) F^2(q^2) \left(1 - \frac{\omega^4}{4E^2 q^2}\right) \frac{d\omega^2}{\omega^2} \frac{dq^2}{q^2}, \quad (2)$$

где ω^2 — квадрат суммы 4-импульсов W -мезонов; E — энергия γ -кванта в лабораторной системе координат; q — импульс передачи; r и r' принимают значения, как и в (1). Формфактор ядра $F(q^2)$ в приближении малых импульсов передачи можно представить в виде $F(q^2) = 1 - 2b^2 q^2$, где $b^2 = \frac{1}{12} \langle r^2 \rangle$; $\langle r^2 \rangle^{1/2}$ — среднеквадратичный радиус распределения заряда ядра.

Пределы интегрирования в (2) находятся из кинематических ограничений задачи и максимально возможного импульса передачи Q :

$$\frac{\omega^4}{4E^2} \leq q^2 \leq Q^2, \quad 4m^2 \leq \omega^2 \leq 2EQ. \quad (3)$$

Из (1) — (3) получаем сечения фоторождения пар поляризованных W -мезонов при больших энергиях γ -квантов

$$\sigma_{00} = \frac{5}{12} B, \quad \sigma_{\pm\pm} = \frac{1}{12} B, \quad \sigma_{\pm\mp} = \frac{1}{18} B, \quad (4)$$

где

$$B = \alpha^3 Z^2 \frac{QE}{m^2} \left(1 - \frac{4}{3} b^2 Q^2\right).$$

Угловые распределения лептонов в распаде поляризованных мезонов $W \rightarrow l + \nu$ можно получить из следующего квадрата модуля матричного элемента:

$$|M|^2 = \frac{1}{8\pi} g^2 \frac{m}{l_0 \nu_0 p_0} \frac{1}{4} \text{Sp} \{ \hat{l} \gamma_x (1 + \gamma_5) \hat{\nu} (1 - \gamma_5) \gamma_\beta \} a_x a_\beta, \quad (5)$$

где $\frac{g^2}{m^2} = \frac{G}{\sqrt{2}}$; G — константа взаимодействия Ферми; p , l , ν — 4-импульсы W -мезона, лептона и нейтрино; p_0 , l_0 , ν_0 — их энергии соответственно. Вектор поляризации a принимает следующие значения:

$$a^{(\pm)} = \frac{1}{\sqrt{2}} (a_1 \pm ia_2) \text{ — для круговых поляризаций;}$$

$$a^{(0)} = \frac{1}{m} (p_0 s, i|p|) \text{ — для линейной поляризации;}$$

$$s = \frac{p}{|p|}, \quad s = [a, a_2].$$

Угловые распределения лептонов, образовавшихся при распаде поляризованных W -мезонов, имеют вид:

$$\frac{d\omega_0}{d\Omega_l} = \frac{G}{8\pi^2 \sqrt{2}} \frac{m^8}{p_0^5} \frac{1-x^2}{(1-\beta x)^4}, \quad (6)$$

$$\frac{d\omega_{\pm}}{d\Omega_{\pm}} = \frac{G}{8\pi^2 \sqrt{2}} \frac{m^8}{p_0^5} \left(\frac{1 + \varepsilon x}{(1 - \beta)(1 - \beta x)^3} - \frac{1 - x^2}{2(1 - \beta x)^4} \right), \quad (7)$$

где $\beta = \frac{|p|}{p_0}$; ε равно \pm и \mp для W^+ и W^- соответственно; x — косинус угла между импульсами лептона и W -мезона. При переходе к системе покоя W -мезона ($\beta = 0$, $p_0 = m$) угловые распределения (6) и (7) совпадают с приведенными в работе [7].

Из формул (6) и (7) видно, что в пределе высоких энергий, когда β близко к единице, угловое распределение лептонов от распада линейно поляризованных W -мезонов сильно вытянуто вперед, а угловое распределение лептонов от распада циркулярно поляризованных мезонов — вперед или назад в зависимости от знака круговой поляризации. С учетом этого обстоятельства из формул (4) вытекает следующее отношение:

$$\frac{n}{N} = \frac{\frac{1}{2} \sigma_{\pm\pm} + \frac{1}{2} \sigma_{\pm\mp}}{\sigma_{00} + \frac{1}{2} \sigma_{\pm\pm} + \frac{1}{2} \sigma_{\pm\mp}} = \frac{1}{7}, \quad (8)$$

где n и N — число лептонных пар, вылетающих в обратном и прямом направлениях к пучку γ -квантов соответственно. Отношение (8) показывает, что в пределе высоких энергий около 10% всех лептонных пар будут появляться под очень большими углами к γ -пучку, тогда как в процессах рождения электронно-позитронных пар на ядрах угловые распределения сильно вытянуты только вперед. Следовательно, обнаружение в подобных опытах лептонных пар, вылетающих в обратном направлении к γ -пучку, могло бы свидетельствовать в пользу существования промежуточного векторного мезона.

В заключение отметим, что сечение образования пары циркулярно поляризованных W -мезонов, дающих при распаде лептонные пары в обратном направлении, при энергии γ -квантов 50 гэв, массе W -мезона около 1,8 гэв и параметре $Q = 0,126$ гэв на ядре Pb^{208} ($Z = 82$) равно $0,12 \cdot 10^{-30} \text{ см}^2$.

Автор благодарен И. С. Сацункевичу за участие в начальной стадии исследования, а также Ф. И. Федорову и участникам семинара лаборатории теоретической физики Института физики АН БССР за полезные обсуждения и внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Bernardini G. et al. Nuovo Cimento, 38, 608, 1965.
2. Понтекорво Б. IX Междунар. конф. по физике выс. энергий. М., 602, 1961.
3. Bludman S. A., Young J. A. Phys. Rev., 126, 303, 1962.
4. Болсун А. И. Весті АН БССР, сер. фіз.-мат. наук, в. 1, 1965.
5. Бадалян А. М., Смородинский Я. А. ЖЭТФ, 40, 1231, 1961.
6. Грибов В. Н., Колкунов В. А., Окунь Л. Б., Шехтер В. М. ЖЭТФ, 41, 1824, 1961.
7. Uberall H. Phys. Rev., 133B, 444, 1964.

Поступило в редакцию 20.XII 1965

З М Е С Т

МАТЭМАТЫКА

| | |
|--|----|
| В. В. Бобков, В. И. Крылов. Об одной вычислительной схеме метода интегральных соотношений для гиперболического уравнения | 5 |
| М. Б. Аксень, А. Х. Турецкий. Наилучшие квадратурные формулы для некоторых классов функций | 15 |
| А. А. Иванов. Регулярные расширения топологических пространств | 28 |
| Л. Ф. Шум. Об одном способе решения телеграфного уравнения с разрывными коэффициентами | 36 |
| Д. А. Супруненко. О примитивных разрешимых подгруппах бесконечной симметрической группы | 46 |
| Т. Д. Соколовский. О вычислении собственных значений эрмитовой матрицы | 50 |
| В. И. Матюхин. Максимальные разрешимые подгруппы $GL(2, Z)$ | 53 |
| Нгуен Конг Туй. Численное решение гиперболических уравнений и систем методом типа Рунге—Кутты. II | 60 |
| Л. А. Янович. О приближении периодических аналитических функций некоторыми сингулярными интегралами | 67 |

ФІЗІКА

| | |
|--|-----|
| Е. И. Степанов, Ю. И. Чекалинская. Генерация составной системы из нескольких параллельно расположенных стержней | 82 |
| Ф. И. Федоров. Формула для температуры Дебая поперечно-изотропных сред | 91 |
| А. И. Болсун, Ф. И. Федоров. Псевдоскалярная матрица β_5 и электрический дипольный момент W -мезона | 99 |
| М. М. Сирата, Э. М. Смалярэнка. Термаэлектричныя ўласцівасці сплаваў Zn_3As_2 — Cd_3As_2 | 107 |
| Л. В. Валодзька, А. І. Камяк, К. В. Сабіла, А. Н. Сеўчанка, Л. Е. Сляпцоў. Люмінесцэнтны і хістальныя спектры калійуранілхларыду | 111 |
| В. С. Іваніцкая. Да выраджэння метрычнага тэнзара спецыяльнай тэорыі адноснасці | 116 |
| А. П. Іваноў, І. Д. Шэрбаф. Уплыў аптычных параметраў на рассеянне вузкага пучка святла ў мутным асяроддзі | 121 |
| В. І. Белавусава, Э. А. Рудак, Я. І. Фірсаў. Рэакцыя $Cr^{50}(n, \gamma)Cr^{51}$ на цеплавых нейтронах | 128 |

ҚАРОТҚІЯ ПАВЕДАМЛЕННІ

| | |
|---|-----|
| Е. И. Степанов, В. П. Грибковский, Ф. К. Рутковский. Влияние добротности резонатора на мощность генерируемого излучения | 131 |
| А. И. Болсун. Поляризационные эффекты в процессе фоторождения пар W -мезонов на ядре | 134 |

СОДЕРЖАНИЕ

МАТЕМАТИКА

| | |
|--|----|
| В. В. Бобков, В. И. Крылов. Об одной вычислительной схеме метода интегральных соотношений для гиперболического уравнения | 5 |
| М. Б. Аксень, А. Х. Турецкий. Наилучшие квадратурные формулы для некоторых классов функций | 15 |
| А. А. Иванов. Регулярные расширения топологических пространств | 28 |
| Л. Ф. Шум. Об одном способе решения телеграфного уравнения с разрывными коэффициентами | 36 |
| Д. А. Супруненко. О примитивных разрешимых подгруппах бесконечной симметрической группы | 46 |
| Т. Д. Соколовский. О вычислении собственных значений эрмитовой матрицы | 50 |
| В. И. Матюхин. Максимальные разрешимые подгруппы $GL(2, Z)$ | 53 |
| Нгуен Конг Туй. Численное решение гиперболических уравнений и систем методом типа Рунге—Кутты. II | 60 |
| Л. А. Янович. О приближении периодических аналитических функций некоторыми сингулярными интегралами | 67 |

ФИЗИКА

| | |
|--|-----|
| Б. И. Степанов, Ю. И. Чекалинская. Генерация составной системы из нескольких параллельно расположенных стержней | 82 |
| Ф. И. Федоров. Формула для температуры Дебая поперечно-изотропных сред | 91 |
| А. И. Болсун, Ф. И. Федоров. Псевдоскалярная матрица β_5 и электрический дипольный момент W -мезона | 99 |
| Н. Н. Сирота, Э. М. Смоляренко. Термоэлектрические свойства сплавов Zn_3As_2 — Cd_3As_2 | 107 |
| Л. В. Володько, А. И. Комяк, К. В. Сабилло, А. Н. Севченко, Л. Е. Слепцов. Люминесцентный и колебательные спектры калийуранилхлорида | 111 |
| О. С. Иваницкая. К вырождению метрического тензора специальной теории относительности | 116 |
| А. П. Иванов, И. Д. Шербаф. Влияние оптических параметров на рассеяние узкого пучка света в мутной среде | 121 |
| В. И. Белоусова, Э. А. Рудак, Е. И. Фирсов. Реакция $Cr^{50}(n, \gamma)Cr^{51}$ на тепловых нейтронах | 128 |

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

| | |
|---|-----|
| Б. И. Степанов, В. П. Грибковский, Ф. К. Рутковский. Влияние добротности резонатора на мощность генерируемого излучения | 131 |
| А. И. Болсун. Поляризационные эффекты в процессе фоторождения пар W -мезонов на ядре | 134 |

AT 04276. Здана ў набор 14/1-66 г. Падпісана да друку 26/11-66 г. Фармат $70 \times 108 \frac{1}{16}$.
 Фіз. друк. арк. 8,75. Ум. друк. арк. 11,98. Уч. выд. арк. 12,0. Выд. заказ 82,
 Друк. заказ 81. Цана 60 к.

Друкарня выдавецтва «Навука і тэхніка» АН БССР і Камітэта па друку пры Савеце
 Міністраў БССР. Мінск, Ленінскі праспект. 68

В издательстве
„НАУКА И ТЕХНИКА“

готовится к печати

Коллектив авторов. **Методы расчета оптических квантовых генераторов**, т. 1. 30 л. На русском языке. 5000 экз. Цена 2 руб. 25 коп.

Работа состоит из четырех томов. В ней излагается общая теория и методы расчета оптических свойств квантовых генераторов света различных типов.

Первый том содержит общие основы теории оптических генераторов, работающих в стационарном режиме. Излагаются основные положения спектроскопии, необходимые для понимания механизма действия квантовых генераторов, особенности распространения интенсивных световых потоков в поглощающих и усиливающих средах. Рассмотрены вопросы теории генерации и свойства трех- и четырехуровневых ОКГ. Особое внимание при этом уделяется исследованию зависимости мощности генерации от свойств вещества, параметров резонатора и интенсивности накачки. Излагается люминесцентно-спектроскопический метод поиска новых генерирующих сред.

Книга рассчитана на научных сотрудников, инженеров, конструкторов и студентов физических факультетов.

Книгу можно заказать предварительно во всех магазинах Книготорга и потребительской кооперации республики, а также в магазинах «Академкнига».

Для получения книги почтой заказы направлять по адресу: г. Минск, Железнодорожная улица, 27, Республиканский магазин «Книга—почтой» или г. Москва, К-12, Б. Черкасский переулок, 2/10, контора «Академкнига», отдел «Книга—почтой».

Книготоргующие и другие организации направляют заказы Управлению книжной торговли Комитета по печати при Совете Министров БССР.



В издательстве
„НАУКА И ТЕХНИКА“

готовится к печати

Коллектив авторов. **Химическая связь в полупроводниках и термодинамика.** 20 л. На русском языке. 3000 экз. Цена 1 руб. 55 коп.

Книга посвящена важнейшим проблемам химической связи в полупроводниках, металлах и других твердых телах. Подробно обсуждаются возможности познания природы химической связи на основе экспериментального изучения распределения электронной плотности в кристаллах, приводятся результаты термохимических определений теплот образования и атомизации полупроводниковых соединений, рассматриваются возможности магнетохимического изучения проблемы химической связи, анализируется связь между физическими свойствами и между структурой зон и характером межатомного взаимодействия. Значительное внимание в книге уделено динамике кристаллической решетки.

Книга представляет большой интерес для специалистов, работающих в области физики и химии твердого тела и полупроводников, аспирантов и студентов старших курсов физических, физико-химических и металлургических специальностей.

Книгу можно заказать предварительно во всех магазинах Книготорга и потребительской кооперации республики, а также в магазинах «Академкнига».

Для получения книги почтой заказы направлять по адресу: г. Минск, Железнодорожная улица, 27, Республиканский магазин «Книга—почтой» или г. Москва, К-12, Б. Черкасский переулок, 2/10, контора «Академкнига», отдел «Книга—почтой».

Книготоргующие и другие организации направляют заказы Управлению книжной торговли Комитета по печати при Совете Министров БССР.

ВНИМАНИЮ АВТОРОВ

Статьи, присылаемые авторами в наш журнал, будут приниматься редакцией к печати только при наличии двух экземпляров автореферата, удовлетворяющего указанным ниже требованиям.

ИНСТРУКЦИЯ

по составлению рефератов для авторов
отечественных периодических изданий

Постановлением Совета Министров СССР от 18/IV 1959 г. № 418 и последующим решением Государственного комитета по координации научно-исследовательских работ СССР и Президиума Академии наук СССР редакции научных и научно-технических журналов обязаны представлять в ВИНТИ рефераты публикуемых материалов.

В настоящей инструкции сформулированы требования к содержанию и оформлению рефератов, которыми и следует руководствоваться.

Требования, предъявляемые к реферату

1. В реферате кратко излагается основное содержание статьи. Реферат должен дать читателю представление о характере освещаемой работы, оригинальности постановки вопроса, методике проведения исследования и его основных результатах.

2. Реферату должно предшествовать библиографическое описание в следующем виде: название статьи, фамилия и инициалы автора, название журнала, где помещается статья. Текст реферата начинается непосредственно с изложения существа работы без повторения заголовка. Форма изложения материала не обязательно должна повторять форму изложения оригинальной статьи.

3. Если оригинал содержит большое количество цифровых данных, их следует обобщить и систематизировать.

4. Средний объем реферата 1,5—2 страницы машинописного текста, отпечатанного через два интервала на белой писчей бумаге обычного формата (30×21) в двух экземплярах с полем 4 см с левой стороны.

5. Таблицы, схемы, графики и пр. могут быть включены в том случае, если они отражают основное содержание работы или сокращают текст реферата. Сообщение о наличии в реферируемой работе таблиц, схем, графиков, фотографий, карт, рисунков необходимо давать в конце реферата. Например, табл. 2, илл. 10.

6. Формулы приводятся только в том случае, если они необходимы для понимания статьи. Громоздкие математические выражения помещать не следует. Формулы следует вписывать четко, не изменяя принятых в оригинале обозначений величин. Формулы и буквенные обозначения вписываются черными чернилами во второй экземпляр. Вписывание формул и буквенных обозначений, а также исправление замеченных опечаток в первом экземпляре не делается.

7. В конце реферата в квадратных скобках указывается название учреждения или предприятия, в которых автор реферируемой работы (если эти данные приводятся в статье) провел работу. Подпись автора и дату написания реферата следует ставить в левом нижнем углу на обоих экземплярах реферата.

В издательстве
„НАУКА И ТЕХНИКА“

ГОТОВИТСЯ К ПЕЧАТИ

Коллектив авторов. **КОНЕЧНЫЕ ГРУППЫ**. 12 л. На русском языке.
2000 экз. Цена 99 коп.

Теория конечных групп в настоящее время переживает период интенсивного развития и привлекает внимание математиков и специалистов других областей науки.

Книга включает труды советских математиков, работающих в коллективе научного семинара лаборатории теории конечных групп Института математики АН БССР, содержит результаты по характеристике конечных групп при помощи некоторых видов подгрупп, вопросы о существовании, сопряженности и вложении подгрупп, а также свойства факторизуемых групп.

Книга предназначена для научных работников, аспирантов и студентов физико-математических факультетов университетов и педагогических институтов, интересующихся современной алгеброй.

Книгу можно заказать предварительно во всех магазинах Книготорга и потребительской кооперации республики, а также в магазинах «Академкнига».

Для получения книги почтой заказы направлять по адресу: г. Минск, Железнодорожная улица, 27, Республиканский магазин «Книга — почтой» или г. Москва, К-12, Б. Черкасский переулок, 2/10, контора «Академкнига», отдел «Книга — почтой».

Книготоргующие и другие организации направляют заказы Управлению книжной торговли Комитета по печати при Совете Министров БССР.