

0306.186.496

ВЕСЦІ

АКАДЭМІІ НАВУК БССР

---

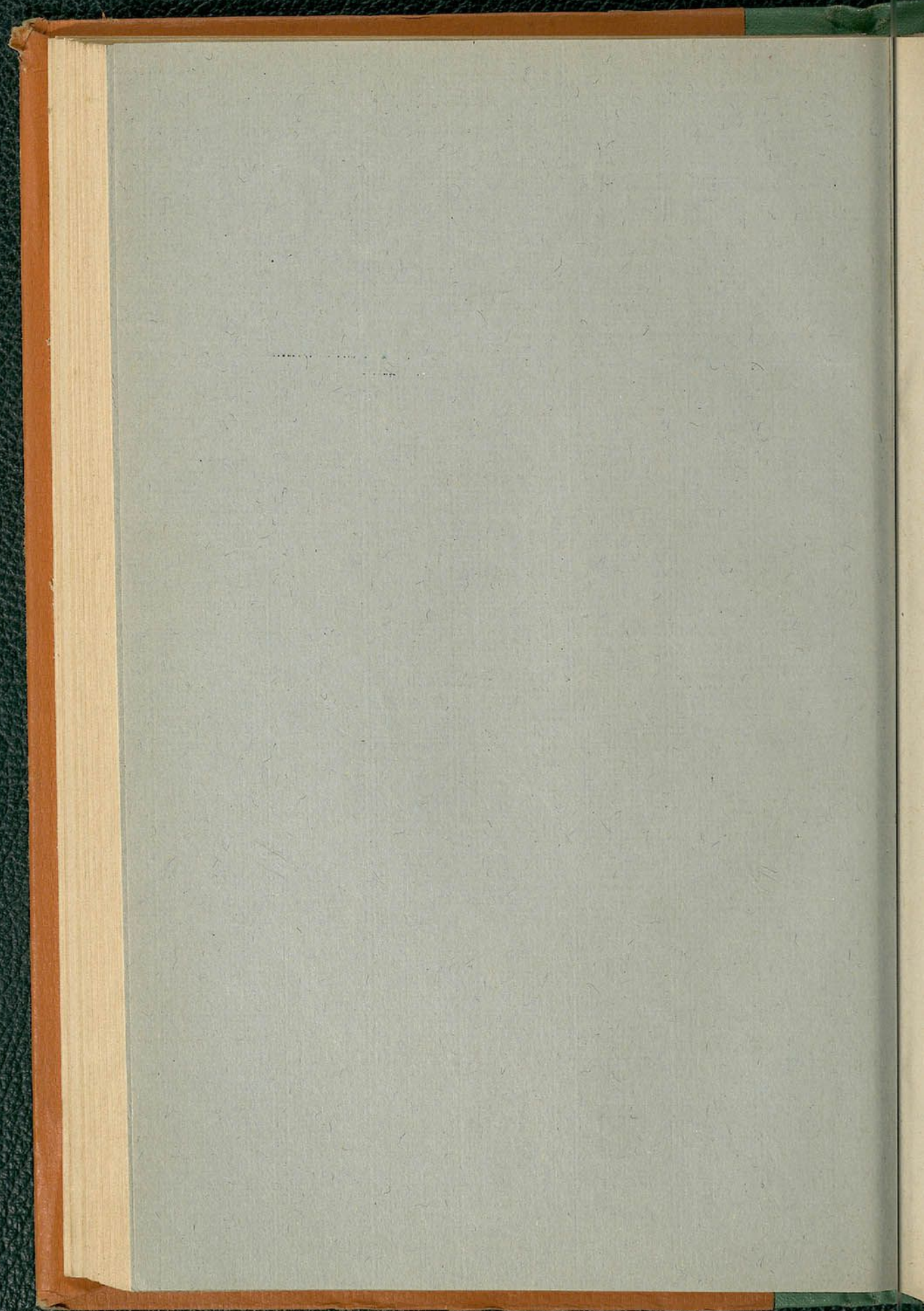
СЕРЫЯ  
ФІЗІКА-МАТЭМАТЫЧНЫХ  
НАВУК

2

ВЫДАВЕЦТВА „НАВУКА І ТЭХНІКА“

---

МІНСК 1988





# ИЗВЕСТИЯ

АКАДЕМИИ НАУК БССР

---

---

СЕРИЯ  
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ  
НАУК

№ 2

ИЗДАТЕЛЬСТВО „НАУКА И ТЕХНИКА“

---

МИНСК 1966

06.186.796

# ВЕСЦІ

АКАДЭМІІ НАВУК БССР

---

---

СЕРЫЯ  
ФІЗІКА-МАТЭМАТЫЧНЫХ  
НАВУК

№ 2

Ба 3545

ВЫДАВЕЦТВА „НАВУКА І ТЭХНІКА“

---

МІНСК 1986

Дзяржаўны  
бібліятэка  
БССР  
1987 г. 1. 1987 г.

РЭДАКЦЫЙНАЯ КАЛЕГІЯ

Ф. І. ФЕДАРАУ (галоўны рэдактар),  
Л. Ф. ІЛЬЮШЭНКА (нам. галоўнага рэдактара),  
М. М. АЛЯХНОВІЧ, А. П. ВЕРАБ'ЕУ, У. І. КРЫЛОУ,  
М. М. СІРАТА, У. Г. СПРЫНДЖУК, Д. А. СУПРУНЕНКА,  
Я. І. ФІРСАУ, С. А. ЧУНІХІН

А. Ш. БЛОХ, В. С. ТАНАЕВ

### МНОГООПЕРАТОРНЫЕ ПРОЦЕССЫ

Рассмотрим задачу построения оптимального расписания процесса обработки  $n$  однотипных деталей на  $m$  машинах. Время обработки каждой детали на  $i$ -ой машине равно  $t_i$ . Для межоперационной передачи деталей используется  $s$  одинаковых операторов переноса, каждый из которых одновременно транспортирует только одну деталь. Обозначим время, затрачиваемое оператором на перемещение обрабатываемой детали от  $i$ -ой машины к  $(i+1)$ -ой, через  $\sigma_i$ , а время перемещения незгруженного оператора от  $(i+1)$ -ой машины к  $j$ -ой машине через  $p_{ij}$ .

Предполагается, что между окончанием обработки некоторой детали  $i$ -ой машиной до начала обработки следующей детали этой машиной должно пройти не менее  $\Theta_i \geq 0$  единиц времени. Детали обрабатываются каждой машиной в одной и той же последовательности. Процесс обработки каждой детали непрерывен, т. е. если обработка детали начинается в момент времени  $\nu$  первой машиной, то она протекает непрерывно до момента времени  $\nu + t_1$ ; затем в течение  $\sigma_1$  единиц времени один из операторов доставляет эту деталь ко второй машине; в момент времени  $\nu + t_1 + \sigma_1$  начинается обработка ее второй машиной

и т. д., пока в момент времени  $\nu + z_u$ , где  $z_u = \sum_{i=1}^u t_i + \sum_{i=1}^{u-1} \sigma_i$ , не будет

завершен процесс обработки этой детали.

При этих условиях календарные сроки обработки каждой детали на каждой машине однозначно определяются заданием моментов запуска деталей в обработку  $\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_n$ , где  $\nu_j$  — момент запуска в обработку  $j$ -ой по порядку детали. В дальнейшем для краткости машины и операторы переноса будем называть системой, числа  $t_i, \sigma_i, p_{ij}, \Theta_i$  — параметрами системы, описанный процесс обработки деталей —  $s$ -операторным процессом обработки деталей в системе, числа  $\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_n$  — расписанием  $s$ -операторного процесса.

1. Найдем условия, которым должны удовлетворять числа  $\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_n$ , чтобы процесс обработки  $n$  деталей можно было реализовать в системе с заданными параметрами.

Так как каждая машина системы не может одновременно обрабатывать более одной детали, то необходимо, чтобы

$$\nu_{j+1} - \nu_j \geq t, \quad 1 \leq j \leq n-1, \quad (1)$$

где  $t = \max_{1 \leq i < m} (t_i + \Theta_i)$  (условие 1).

Числа  $\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_n$  определяют множество  $N$  сегментов

$$\eta_{ji} = [\nu_j + z_i, \nu_j + z_i + \sigma_i], \quad 1 \leq i \leq n, 1 \leq i \leq m-1. \quad (2)$$

Сегменты  $\eta_{j_1 i_1}$  и  $\eta_{j_2 i_2}$ ,  $j_2 > j_1$ , налагаются друг на друга, если

$$v_{j_2} - v_{j_1} \in (z_{i_1} - z_{i_2} - \sigma_{i_2} - p_{i_2 i_1}, z_{i_1} - z_{i_2} + \sigma_{i_1} + p_{i_1 i_2}). \quad (3)$$

Множество  $M \subseteq N$  называется независимым, если всякие два его сегмента налагаются друг на друга. Так как для межоперационной транспортировки деталей используется  $s$  операторов переноса, то всякое независимое подмножество множества  $N$  не может содержать более  $s$  сегментов (условие 2). Справедливо и обратное, т. е. если любое независимое подмножество множества  $N$  содержит не более  $s$  сегментов и существует хотя бы одно независимое подмножество, содержащее  $s$  сегментов, то для реализации расписания необходимо по крайней мере  $s$  операторов переноса.

В случае, когда  $s = 1$  [1], условия 1 и 2 можно записать в виде:

$$v_{j_2} - v_{j_1} \in K, \quad v_1 = 0, \quad 1 \leq j_1 < j_2 \leq n, \quad (4)$$

где  $K$  — множество, образованное удалением интервалов (3) из полу-сегмента  $[t, \infty)$ .

Расписание  $v_1, v_2, \dots, v_n$  обработки  $n$  однотипных деталей в системе с известными параметрами называется допустимым (обозначение:  $R\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ ), если числа  $v_1, v_2, \dots, v_n$  удовлетворяют условиям 1 и 2. При этом общее время обработки всех деталей выразится величиной  $T(n) = v_n + z_m$ . Допустимое расписание  $v_1, v_2, \dots, v_n$  называется оптимальным (обозначение:  $R_{\text{опт}}\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ ), если  $v_n \leq v_n$ , где  $v_1, v_2, \dots, v_n$  — произвольное допустимое расписание. Обозначим  $v_n + z_m = T_{\text{опт}}(n)$ , если  $v_1, v_2, \dots, v_n$  — оптимальное расписание.

2. Наряду с конечными процессами будем рассматривать бесконечные  $s$ -операторные процессы обработки однотипных деталей в системе. Допустимым расписанием бесконечного  $s$ -операторного процесса обработки однотипных деталей в системе с известными параметрами называется последовательность чисел  $\{v_j\}$ , удовлетворяющих условиям 1 и 2 (обозначение:  $R\{v_j\}$ ). Допустимое расписание  $R\{v_j\}$  называется периодическим с периодом  $T$ , если последовательность  $v_1, v_2, \dots, v_k, v_1 + T, \dots, v_k + T, v_1 + 2T, \dots$  — периодическая с тем же периодом (обозначение:  $R\{v_1, \dots, v_k; T\}$ ). Плотностью периодического расписания называется величина  $k/T$ , оптимальным периодическим расписанием (обозначение:  $R_{\text{опт}}\{v_1, \dots, v_k; T\}$ ) — периодическое расписание с максимальной плотностью.

Состояние системы в момент времени  $\tau$  полностью определяется заданием вектора  $W(\tau) = \langle X(\tau), Y(\tau), V(\tau) \rangle$ . При этом  $X(\tau) = \langle x_1(\tau), \dots, x_m(\tau) \rangle$  описывает загруженность машин в момент времени  $\tau$ , т. е. если  $x_i(\tau) = 0$ ,  $i$ -ая машина в момент времени  $\tau$  свободна, если  $x_i(\tau) > 0$ ,  $i$ -ая машина в момент времени  $\tau$  занята обработкой некоторой детали, и с начала обработки этой детали  $i$ -ой машиной прошло  $x_i(\tau)$  единиц времени.

Вектор  $Y(\tau) = \langle y_1^1(\tau), \dots, y_1^s(\tau), \dots, y_{m-1}^1(\tau), \dots, y_{m-1}^s(\tau) \rangle$  описывает загруженность операторов переноса, т. е. если  $y_i^l(\tau) > 0$ , то в момент времени  $\tau$  оператор с номером  $l$  транспортирует обрабатываемую деталь от  $i$ -ой к  $(i+1)$ -ой машине и с начала транспортировки этой детали до момента времени  $\tau$  прошло  $y_i^l(\tau)$  единиц времени. Если в момент времени  $\tau$  оператор с номером  $l$  не транспортирует обрабатываемую деталь от  $i$ -ой к  $(i+1)$ -ой машине, то  $y_i^l(\tau) = 0$ . Наконец, вектор  $V(\tau) = \langle v_1(\tau), \dots, v_s(\tau) \rangle$  описывает расположение операторов переноса в момент времени  $\tau$ .

Будем рассматривать только системы с рациональными параметрами.

Подходящим выбором единицы измерения времени систему с рациональными параметрами можно обратить в систему с целочисленными параметрами. Кроме того, будем полагать, что если  $\tau$  — целое число, то компоненты вектора  $V(\tau)$  могут принимать лишь конечное число значений. Так как в этом случае число различных состояний системы в моменты времени  $v_1, v_2, \dots, v_j, \dots$  при любом допустимом целочисленном расписании  $R\{v_j\}$  не превосходит некоторой величины  $P$  (так называемого числа допустимых состояний системы), существует подпоследовательность  $\{v_i\}$  последовательности целых чисел  $\{v_j\}$ , что состояния системы в моменты времени  $v_i, i=1, 2, \dots$ , одинаковы, т. е. описываются одним и тем же вектором  $W(v_i) = W(v_{i+1})$ .

**Теорема 1.** Среди периодических целочисленных расписаний  $s$ -операторного процесса обработки однотипных деталей в системе с целочисленными параметрами существует оптимальное расписание.

**Доказательство.** Пусть  $R\{v_1, \dots, v_l, \dots, v_{l+r}, \dots, v_n; T\}$  — оптимальное целочисленное расписание при заданном периоде  $T$ . При достаточно большом периоде  $T \geq T_0$  (в качестве  $T_0$  можно выбрать, например, величину  $Pz_m$ ) существуют такие числа  $v_l$  и  $v_{l+r}$ , что состояния системы в моменты времени  $v_l$  и  $v_{l+r}$  одинаковы. Если  $\frac{r}{v_{l+r} - v_l} \geq \frac{n}{T}$ , то можно построить такое допустимое расписание  $R'\{v_l, \dots, v_{l+r-1}; T'\}$ , где  $T' = v_{l+r} - v_l$ , что  $\frac{r}{T'} \geq \frac{n}{T}$  и  $T' < T$ . Если  $\frac{r}{v_{l+r} - v_l} < \frac{n}{T}$ , то можно построить такое допустимое расписание  $R''\{v_1, \dots, v_l, v_{l+1}, \dots, v_{n-r}; T''\}$ , где  $T'' = T - T'$  и  $v_{l+k} = v_{l+r+k} - (v_{l+r} - v_l)$ ,  $1 \leq k \leq n - l - r$ , что  $\frac{n-r}{T''} > \frac{n}{T}$  и  $T'' < T$ .

В обоих случаях периодическое расписание с периодом  $T \geq T_0$  можно заменить периодическим расписанием с периодом, меньшим  $T_0$ , и плотностью не ниже плотности исходного расписания. В заключение доказательства заметим, что плотность периодического расписания обработки однотипных деталей в системе с заданными параметрами не превышает величины  $1/l$ .

Обозначим плотность оптимального периодического целочисленного расписания через  $\rho_0$ . Не определяя понятия оптимального бесконечного расписания (обозначение:  $R_{\text{опт}}\{v_i\}$ ), естественно потребовать, чтобы оно обладало следующими свойствами:

1) если  $R_{\text{опт}}\{v_i\}$  — целочисленное расписание и состояния системы в моменты времени  $v_{i_k}$  и  $v_{i_{k+1}}$ ,  $k=1, 2, \dots$ , одинаковы, то  $\frac{i_{k+1} - i_k}{v_{i_{k+1}} - v_{i_k}} \geq \rho_0$ . Иными словами, если  $R_{\text{опт}}\{v_i\}$  — целочисленное расписание, то плотность переходов между одинаковыми состояниями системы не меньше  $\rho_0$ ;

2) если расписание, полученное в результате замены указанных переходов в целочисленном расписании  $R_{\text{опт}}\{v_i\}$  переходами не меньшей плотности, допустимо, то оно является оптимальным;

3) если  $R\{v_1, \dots, v_k, \dots\}$  и  $R'\{v_k, \dots\}$  — допустимые целочисленные расписания процессов обработки деталей в системе и  $R\{v_1, \dots, v_k, \dots\}$  — оптимальное расписание, то  $R'\{v_k, \dots\}$  — также оптимальное расписание;

4) если  $R\{v_i\}$  и  $R'\{\mu_i\}$ , где  $\mu_i \leq v_i$ ,  $i=1, 2, \dots$ , — допустимые расписания процессов обработки деталей в системе и  $R\{v_i\}$  — оптимальное расписание, то  $R'\{\mu_i\}$  — также оптимальное расписание.

Предполагая существование оптимального бесконечного расписания, докажем следующее предложение.

**Теорема 2.** Среди оптимальных бесконечных расписаний  $s$ -операторного процесса обработки однотипных деталей в системе с целочисленными параметрами существует целочисленное периодическое расписание.

**Доказательство.** Пусть  $R_{\text{опт}}\{v_i\}$  — оптимальное расписание  $s$ -операторного процесса обработки деталей в системе с известными параметрами. Рассмотрим расписание  $\{[v_i]\}$ , где  $[v_i]$  — целая часть числа  $v_i$ . Так как по условию теоремы параметры системы целочисленны и числа  $v_i$  удовлетворяют условиям 1 и 2, то числа  $[v_i]$  также удовлетворяют этим условиям.

Следовательно, расписание  $\{[v_i]\}$  является допустимым расписанием. Используя свойство 4, приходим к выводу, что  $\{[v_i]\}$  — оптимальное расписание. Так как  $R_{\text{опт}}\{[v_i]\}$  — целочисленное расписание, существует последовательность  $\{v_j\} \subset \{[v_i]\}$  такая, что состояния системы в моменты времени  $v_j$ ,  $j = 1, 2, \dots$ , одинаковы. Покажем, что плотность переходов между одинаковыми состояниями системы при этом равна  $\rho_0$ . По свойству 1 плотность указанных переходов не меньше  $\rho_0$ . Предположим, что  $k/T = p > \rho_0$ , где  $T = [v_{r+k}] - [v_r]$ ;  $[v_r] = v_i$ ;  $[v_{r+k}] = v_{i+1}$ . Расписание  $\{[v_1], \dots, [v_r], \dots, [v_{r+k-1}], [v_r] + T, \dots, [v_{r+k-1}] + T, [v_r] + 2T, \dots\}$ , очевидно, допустимо. Следовательно, расписание  $\{v_1, \dots, v_k; T\} = \{[v_r], \dots, [v_{r+k-1}]; T\}$  является целочисленным допустимым периодическим расписанием с плотностью  $p$ , превышающей плотность  $\rho_0$  оптимального периодического целочисленного расписания, что противоречит определению оптимального периодического расписания. Таким образом,  $p = \rho_0$  и на основании свойств 2—4 расписание  $\{v_1, \dots, v_k; T\}$  является оптимальным расписанием. Очевидно, вместо чисел  $v_i$  и  $v_{i+1}$  можно было выбрать любую пару чисел  $v_j$ , получив при этом другое периодическое расписание с той же плотностью. Заменяя расписание  $R\{v_1, \dots, v_k, \dots\}$  расписанием  $R\{v_k, \dots\}$ , тем самым изменяем состояние системы в момент времени  $t$ .

Таким образом, поиски оптимального расписания  $s$ -операторного процесса обработки однотипных деталей в системе с целочисленными параметрами можно ограничить рассмотрением периодических последовательностей целых чисел, удовлетворяющих условиям 1 и 2.

Частным видом периодических расписаний является расписание примитивного процесса  $R\{v; z_m\}$  и расписание циклического процесса, полученного в результате совмещения  $k$  примитивных процессов,  $R\{v_1, \dots, v_k; z_m\}$ . Метод построения расписаний циклических процессов, совмещающих максимальное число примитивных процессов, описан в [2, 3].

3. Связь между конечными и бесконечными оптимальными расписаниями  $s$ -операторного процесса обработки деталей в системе с целочисленными параметрами устанавливает следующая

**Теорема 3.**

$$0 \leq T_{\text{пер}}(n) - T_{\text{опт}}(n) \leq \left(\frac{T}{k} - t\right)P + \left(1 - \frac{1}{k}\right)T, \quad (5)$$

где  $T_{\text{пер}}(n)$  — время обработки  $n$  деталей при периодическом расписании  $R_{\text{опт}}\{v_1, \dots, v_k; T\}$ .

**Доказательство.** Пусть  $R_{\text{опт}}\{v_1, \dots, v_{i_1}, \dots, v_{i_2}, \dots, v_{i_l}, \dots, v_n\}$  — оптимальное расписание  $s$ -операторного процесса обработки  $n$  деталей в системе с известными параметрами. Так как параметры системы

целочисленны, расписание  $\{[v_1], \dots, [v_{i_1}], \dots, [v_{i_2}], \dots, [v_{i_0}], \dots, [v_n]\}$  является допустимым и, поскольку  $[v_n] \leq v_n$ , оптимальным расписанием. Пусть в моменты времени  $[v_{i_1}], [v_{i_2}], \dots, [v_{i_0}]$  состояния системы одинаковы.

Рассмотрим допустимое расписание  $R_1\{v_1^{(1)}, \dots, v_{n_1}^{(1)}\} = R_1\{[v_1], \dots, [v_{i_1}], [v_{i_0+1}] - ([v_{i_0}] - [v_{i_1}]), \dots, [v_n] - ([v_{i_0}] - [v_{i_1}])\}$ . Положим  $v_{n_1}^{(1)} + z_m = T_1$ . Очевидно  $T_{\text{опт}}(n) = T_1 + ([v_{i_0}] - [v_{i_1}])$ . Если в моменты времени  $v_{j_1}^{(1)}, \dots, v_{j_{l_1}}^{(1)}$  состояния системы одинаковы, рассмотрим допустимое расписание  $R_2\{v_1^{(2)}, \dots, v_{n_2}^{(2)}\} = R_2\{v_1^{(1)}, \dots, v_{j_1}^{(1)}, v_{j_{l_1}+1}^{(1)} - (v_{j_{l_1}}^{(1)} - v_{j_1}^{(1)}), \dots, v_{n_1}^{(1)} - (v_{j_{l_1}}^{(1)} - v_{j_1}^{(1)})\}$ . Очевидно  $T_1 = T_2 + (v_{j_{l_1}}^{(1)} - v_{j_1}^{(1)})$ , где  $T_2 = v_{n_2}^{(2)} + z_m$ .

В результате этих построений получаем такое расписание  $R_r\{v_1^{(r)}, \dots, v_{n_r}^{(r)}\}$ , что состояния системы в моменты времени  $v_1^{(r)}, \dots, v_{n_r}^{(r)}$  различны и, следовательно,  $n_r \leq P$  ( $P$  — число допустимых состояний системы). Имеем:

$$\begin{aligned} T_{\text{опт}}(n) &= T_r + ([v_{i_0}] - [v_{i_1}]) + (v_{j_{l_1}}^{(1)} - v_{j_1}^{(1)}) + \dots + (v_{l_{r-1}}^{(r-1)} - v_{u_1}^{(r-1)}) \geq \\ &\geq t(n_r - 1) + z_m + \frac{T}{k} \{(i_0 - i_1) + (j_{l_1} - j_1) + \dots + (u_{l_{r-1}} - u_1)\} = \\ &= t(n_r - 1) + \frac{T}{k} (n - n_r) + z_m, \end{aligned} \quad (6)$$

$$T_{\text{пер}}(n) = T \left[ \frac{n-1}{k} \right] + T_{\text{пер}} \left( n - k \left[ \frac{n-1}{k} \right] \right) \leq T \left( \frac{n-1}{k} + 1 \right) - t + z_m. \quad (7)$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} T_{\text{пер}}(n) - T_{\text{опт}}(n) &\leq T \left( \frac{n-1}{k} + 1 \right) - t - \left[ t(n_r - 1) + \frac{T}{k} (n - n_r) \right] = \\ &= \left( \frac{T}{k} - t \right) n_r + T - \frac{T}{k} \leq \left( \frac{T}{k} - t \right) P + \left( 1 - \frac{1}{k} \right) T. \end{aligned} \quad (8)$$

По определению  $T_{\text{опт}}(n) \leq T_{\text{пер}}(n)$ . Теорема доказана.

Аналогичный результат получен в теории дискретного управления И. В. Романовским [4].

Из теоремы следует, что в качестве расписания  $R_{\text{опт}}\{v_1, \dots, v_n\}$  при достаточно большом значении  $n$  можно использовать отрезок оптимального периодического расписания соответствующей длины. В большинстве практически важных случаев  $T_{\text{опт}}(n) = T_{\text{пер}}(n)$ .

4. Состояние системы называется допустимым, если существует такое целочисленное расписание  $R\{v_i\}$ , при котором система в некоторый момент времени  $\tau$  ( $\tau$  — целое число) будет находиться в этом состоянии. Состояние  $W'$  называется состоянием смежным допустимому состоянию  $W$ , если существует целочисленное расписание  $R\{v_i\}$ , при котором система переходит из состояния  $W$  в состояние  $W'$  за единицу времени.

Рассмотрим граф, вершинам которого соответствуют допустимые состояния, и каждая вершина которого, соответствующая состоянию  $W$ , соединена дугами с вершинами, соответствующими состояниям, смежным состоянию  $W$ . Если  $W' = \langle (x'_1, \dots, x'_m), Y', V' \rangle$  — состояние,

смежное состоянию  $W$ , и  $x'_1 = 1$ , то дуге, соединяющей соответствующие вершины графа, припишем массу, равную единице. Если  $x'_1 \neq 1$ , то этой дуге припишем массу, равную нулю. Длины всех дуг полагаем равными единице. Выберем произвольный контур в построенном таким образом графе. Определим длину и массу контура соответственно как сумму длин и масс его дуг. Плотностью контура назовем отношение массы контура к его длине.

Из теоремы 2 следует, что задача нахождения оптимального расписания эквивалентна задаче нахождения в описанном графе контура с наибольшей плотностью. Последняя задача в свою очередь эквивалентна задаче линейного программирования [4]. При этом число неизвестных и ограничений чрезвычайно велико. Хотя размер задачи в каждом конкретном случае можно существенно уменьшить, применение методов линейного программирования малоэффективно. На практике быстрее приводит к цели нахождение чисел  $v_i$ , удовлетворяющих условиям 1 и 2 (п. 1), путем нескольких проб. Оптимальность полученного таким способом расписания в большинстве случаев очевидна.

5. В заключение рассмотрим задачу определения наименьшего числа операторов переноса, необходимых для реализации допустимого расписания  $v_1, \dots, v_n$  некоторого многооператорного процесса обработки деталей в системе с известными параметрами. Расписание  $v_1, \dots, v_n$  однозначно определяет календарные сроки транспортировки соответствующих деталей от машины к машине, т. е. множество  $N$  сегментов (2).

Сегмент  $\eta_{j_1, i_1}$  предшествует сегменту  $\eta_{j_2, i_2}$ , если

$$v_{j_2} - v_{j_1} \geq z_{i_1} - z_{i_2} + \sigma_{i_1} + \rho_{i_1, i_2}. \quad (9)$$

Множество  $N$  является, вообще говоря, частично упорядоченным множеством с отношением порядка, определяемым (9). Так как одним оператором можно осуществить те и только те переносы деталей, соответствующие сегменты которых образуют вполне упорядоченное подмножество множества  $N$ , то для определения наименьшего числа операторов переноса, требуемых для реализации расписания  $v_1, \dots, v_n$  в системе с известными параметрами, достаточно найти наименьшее число непересекающихся вполне упорядоченных подмножеств (цепей) множества  $N$ , покрывающих множество  $N$ , — разложение Дилворта [5].

По известной теореме Дилворта наименьшее число таких цепей равно максимальному числу попарно несравнимых элементов множества  $N$ . В работе [6] нахождение минимального числа непересекающихся цепей и самих цепей в частично упорядоченном множестве сведено к решению задач линейного программирования. В. Г. Спринджук [7] установил необходимое и достаточное условие вхождения цепи в разложение Дилворта.

6. Известные моменты запуска деталей в обработку неоднозначно определяют перемещения операторов переноса и, таким образом, лишь частично описывают поведение системы. Действительно, задавая числа  $v_1, v_2, \dots, v_n$ , удовлетворяющие условиям 1 и 2, мы тем самым полностью определяем вектор  $X(\tau)$  при любом  $\tau$ , что несправедливо для векторов  $Y(\tau)$  и  $V(\tau)$ . В связи с возможной неоднозначностью определения векторов  $Y(\tau)$  и  $V(\tau)$  известным расписанием возникает задача нахождения оптимального в том или ином смысле режима работы операторов переноса.

Пусть на плоскости задано  $v_n - v_1 + z_m + 1$  параллельных прямых. Пронумеруем их в порядке  $0, 1, 2, \dots, v_n - v_1 + z_m$ . Рассмотрим граф,

вершины которого расположены на этих прямых, причем на  $i$ -ой прямой расположены вершины, соответствующие допустимым состояниям  $W(v_1 + i)$  системы при известном целочисленном расписании  $R\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ . Если  $W(v_1 + i + 1)$  — состояние, смежное состоянию  $W(v_1 + i)$ , то соответствующие вершины графа соединим дугой. Переход  $W(v_1 + i) \rightarrow W(v_1 + i + 1)$  вызывает изменение в расположении и загрузке операторов переноса, которое можно охарактеризовать некоторой величиной. Эту величину припишем соответствующей дуге графа и будем называть длиной дуги.

Очевидно, путь в этом графе, началом которого служит вершина, расположенная на первой прямой и соответствующая начальному состоянию системы  $W(v_1)$ , а концом — вершина, расположенная на  $(v_n - v_1 + z_m)$ -ой прямой, дает полную информацию о расположении загруженных и незагруженных операторов переноса в любой момент времени. Так как этот путь существует не для всех начальных состояний системы, то следует дополнить рассматриваемый граф вершинами, соответствующими всевозможным начальным состояниям системы.

Решение задачи нахождения пути наименьшей длины вида  $W(v_1) \rightarrow W(v_1 + 1) \rightarrow \dots \rightarrow W(v_n + z_m)$  в указанном графе методами динамического программирования описано в [8, 9]. В каждом конкретном случае размер графа можно существенно уменьшить.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Танаев В. С. ИФЖ, № 3, 1964.
2. Айзенштат В. С. ДАН БССР, 7, № 3, 1963.
3. Айзенштат В. С. ДАН БССР, 7, № 4, 1963.
4. Романовский И. В. ДАН СССР, 157, № 6, 1964.
5. Dilworth R. P. Annals of Math., 51, 161—166, 1950.
6. Данциг Дж. Б., Гофман А. Дж. Сб. «Линейные неравенства и смежные вопросы», ИЛ, 1959, стр. 311.
7. Спринджук В. Г. ДАН БССР, 7, № 12, 1963.
8. Моисеев Н. Н. Ж. вычисл. матем. и матем. физики, 5, № 1, 1965.
9. Сигал И. Х., Чебаков В. А. Ж. вычисл. матем. и матем. физики, 5, № 1, 1965.

Поступило в редакцию 23.VI 1965

смежное состоянию  $W$ , и  $x'_1 = 1$ , то дуге, соединяющей соответствующие вершины графа, припишем массу, равную единице. Если  $x'_1 \neq 1$ , то этой дуге припишем массу, равную нулю. Длины всех дуг полагаем равными единице. Выберем произвольный контур в построенном таким образом графе. Определим длину и массу контура соответственно как сумму длин и масс его дуг. Плотностью контура назовем отношение массы контура к его длине.

Из теоремы 2 следует, что задача нахождения оптимального расписания эквивалентна задаче нахождения в описанном графе контура с наибольшей плотностью. Последняя задача в свою очередь эквивалентна задаче линейного программирования [4]. При этом число неизвестных и ограничений чрезвычайно велико. Хотя размер задачи в каждом конкретном случае можно существенно уменьшить, применение методов линейного программирования малоэффективно. На практике быстрее приводит к цели нахождение чисел  $v_i$ , удовлетворяющих условиям 1 и 2 (п. 1), путем нескольких проб. Оптимальность полученного таким способом расписания в большинстве случаев очевидна.

5. В заключение рассмотрим задачу определения наименьшего числа операторов переноса, необходимых для реализации допустимого расписания  $v_1, \dots, v_n$  некоторого многооператорного процесса обработки деталей в системе с известными параметрами. Расписание  $v_1, \dots, v_n$  однозначно определяет календарные сроки транспортировки соответствующих деталей от машины к машине, т. е. множество  $N$  сегментов (2).

Сегмент  $\eta_{j_1 i_1}$  предшествует сегменту  $\eta_{j_2 i_2}$ , если

$$v_{j_2} - v_{j_1} \geq z_{i_1} - z_{i_2} + \sigma_{i_1} + p_{i_2}. \quad (9)$$

Множество  $N$  является, вообще говоря, частично упорядоченным множеством с отношением порядка, определяемым (9). Так как одним оператором можно осуществить те и только те переносы деталей, соответствующие сегменты которых образуют вполне упорядоченное подмножество множества  $N$ , то для определения наименьшего числа операторов переноса, требуемых для реализации расписания  $v_1, \dots, v_n$  в системе с известными параметрами, достаточно найти наименьшее число непересекающихся вполне упорядоченных подмножеств (цепей) множества  $N$ , покрывающих множество  $N$ , — разложение Дилворта [5].

По известной теореме Дилворта наименьшее число таких цепей равно максимальному числу попарно несравнимых элементов множества  $N$ . В работе [6] нахождение минимального числа непересекающихся цепей и самих цепей в частично упорядоченном множестве сведено к решению задач линейного программирования. В. Г. Спринджук [7] установил необходимое и достаточное условие вхождения цепи в разложение Дилворта.

6. Известные моменты запуска деталей в обработку неоднозначно определяют перемещения операторов переноса и, таким образом, лишь частично описывают поведение системы. Действительно, задавая числа  $v_1, v_2, \dots, v_n$ , удовлетворяющие условиям 1 и 2, мы тем самым полностью определяем вектор  $X(\tau)$  при любом  $\tau$ , что несправедливо для векторов  $Y(\tau)$  и  $V(\tau)$ . В связи с возможной неоднозначностью определения векторов  $Y(\tau)$  и  $V(\tau)$  известным расписанием возникает задача нахождения оптимального в том или ином смысле режима работы операторов переноса.

Пусть на плоскости задано  $v_n - v_1 + z_m + 1$  параллельных прямых. Пронумеруем их в порядке  $0, 1, 2, \dots, v_n - v_1 + z_m$ . Рассмотрим граф,

вершины которого расположены на этих прямых, причем на  $i$ -ой прямой расположены вершины, соответствующие допустимым состояниям  $W(v_1 + i)$  системы при известном целочисленном расписании  $R\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ . Если  $W(v_1 + i + 1)$  — состояние, смежное состоянию  $W(v_1 + i)$ , то соответствующие вершины графа соединим дугой. Переход  $W(v_1 + i) \rightarrow W(v_1 + i + 1)$  вызывает изменение в расположении и загрузке операторов переноса, которое можно охарактеризовать некоторой величиной. Эту величину припишем соответствующей дуге графа и будем называть длиной дуги.

Очевидно, путь в этом графе, началом которого служит вершина, расположенная на первой прямой и соответствующая начальному состоянию системы  $W(v_1)$ , а концом — вершина, расположенная на  $(v_n - v_1 + z_m)$ -ой прямой, дает полную информацию о расположении загруженных и незагруженных операторов переноса в любой момент времени. Так как этот путь существует не для всех начальных состояний системы, то следует дополнить рассматриваемый граф вершинами, соответствующими всевозможным начальным состояниям системы.

Решение задачи нахождения пути наименьшей длины вида  $W(v_1) \rightarrow W(v_1 + 1) \rightarrow \dots \rightarrow W(v_n + z_m)$  в указанном графе методами динамического программирования описано в [8, 9]. В каждом конкретном случае размер графа можно существенно уменьшить.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Танаев В. С. ИФЖ, № 3, 1964.
2. Айзенштат В. С. ДАН БССР, 7, № 3, 1963.
3. Айзенштат В. С. ДАН БССР, 7, № 4, 1963.
4. Романовский И. В. ДАН СССР, 157, № 6, 1964.
5. Dilworth R. P. Annals of Math., 51, 161—166, 1950.
6. Данциг Дж. Б., Гофман А. Дж. Сб. «Линейные неравенства и смежные вопросы», ИЛ, 1959, стр. 311.
7. Спринджук В. Г. ДАН БССР, 7, № 12, 1963.
8. Моисеев Н. Н. Ж. вычисл. матем. и матем. физики, 5, № 1, 1965.
9. Сигал И. Х., Чебаков В. А. Ж. вычисл. матем. и матем. физики, 5, № 1, 1965.

Поступило в редакцию 23.VI 1965

Л. Е. ЗАГОРИН

### О РАЗРЕШИМЫХ ГРУППАХ МАТРИЦ НАД ТЕЛОМ ВЕЩЕСТВЕННЫХ КВАТЕРНИОНОВ

Разрешимые группы матриц над произвольным полем, в том числе над алгебраически замкнутым полем, и разрешимые подгруппы мультипликативной группы тела изучались Д. А. Супруненко в работах [2—5] и др. В частности, в [2, 3] полностью описаны максимальные разрешимые неприводимые подгруппы полной линейной группы  $GL(n, K)$  над алгебраически замкнутым полем  $K$ , если число  $n$  не имеет квадратных делителей. В [2] для любого  $n$  устанавливается конечность числа несопряженных максимальных разрешимых подгрупп  $GL(n, K)$ .

В работах [6, 7] обобщаются некоторые результаты работ Д. А. Супруненко на случай разрешимых групп матриц над конечномерным телом.

В настоящей статье аппарат линейных разрешимых групп, разработанный Д. А. Супруненко, используется для изучения разрешимых подгрупп полной линейной группы  $GL(n, Q)$  над телом  $Q$  вещественных кватернионов.

Обозначения:  $Q$  — тело вещественных кватернионов с базисом  $1, i, j, k$ ;  $Q^*$  — мультипликативная группа тела  $Q$ ;  $P$  — поле действительных чисел;  $K$  — поле комплексных чисел;  $P^*$  и  $K^*$  — мультипликативные группы полей соответственно  $P$  и  $K$ ;  $GL(n, Q)$  — полная линейная группа над  $Q$ ;  $Q_n$  и  $K_n$  — полные матричные кольца; если  $a$  и  $b$  — матрицы, то  $a \times b$  — кронекерово произведение;  $\langle \Gamma \rangle$  — линейная  $P$ -оболочка группы  $\Gamma \subseteq GL(n, Q)$ ;  $GF(p^m)$  — конечное поле порядка  $p^m$ ;  $GL(n, p)$  — полная линейная группа над полем  $GF(p)$ ;  $SL(2, p)$  — группа всех матриц из  $GL(2, p)$ , определители которых равны единице;  $SL^\pm(2, p)$  — группа всех матриц из  $GL(2, p)$  с определителями, равными  $\pm 1$ ;  $S_p(2l, p)$  — симплектическая группа — группа всех матриц  $S$  степени  $2l$  над полем  $GF(p)$ , подчиненных условию  $S'\Phi S = \Phi$ , где  $S'$  — матрица, транспонированная по отношению к  $S$ ;  $\Phi = E_l \times \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ ;  $E_n$  — единичная матрица степени  $n$ ;  $S_n$  — симметрическая группа степени  $n$ ;  $\Gamma:V$  — индекс подгруппы  $V$  в группе  $\Gamma$ . Считаются известными определения неприводимых, импримитивных, примитивных подгрупп  $GL(n, Q)$ . Будем рассматривать, если не оговорена приводимость, лишь неприводимые разрешимые подгруппы  $GL(n, Q)$  и только к ним применять понятия импримитивности и примитивности.

#### § 1. ТЕОРЕМЫ О РАЗРЕШИМЫХ ПОДГРУППАХ $GL(n, Q)$

1. Один инвариантный ряд. Пусть  $\Gamma$  — максимальная разрешимая примитивная подгруппа  $GL(n, Q)$ . Для  $\Gamma$  можно построить инвариантный ряд  $\Gamma \supseteq V \supseteq A \supseteq F \supseteq E$  (см. [2, 3, 6]). Здесь  $F$  — максимальный

абелев нормальный делитель  $\Gamma$ ;  $V$  — централизатор  $F$  в  $\Gamma$ ;  $A/F$  — максимальный абелев нормальный делитель  $\Gamma/F$ , содержащийся в  $V/F$ , центр  $A$  совпадает с  $F$ .

Известно, что  $F$  — мультипликативная группа поля  $\langle F \rangle$  [2, 6]. По лемме 8 в [6] либо  $F = P^*E_n$ , либо  $F$  сопряжен в  $GL(n, Q)$  с  $K^*E_n$ . В дальнейшем будем считать, если  $F$  сопряжен с  $K^*E_n$ , что  $F = K^*E_n$ ,  $\langle F \rangle = KE_n$ . Итак, если  $\langle F \rangle$  ранга  $m$  над  $P$ , то  $m = 1$  или  $m = 2$ .

В группе  $A$  можно выбрать такие элементы  $a_1, b_1, \dots, a_t, b_t$ , что  $(a_s, b_s) = a_s b_s a_s^{-1} b_s^{-1} = \varepsilon_s$ ,  $s = 1, \dots, t$ ,  $\varepsilon_s$  — элемент порядка  $\nu_s$  из  $F$ , причем  $\nu_{s+1}$  делит  $\nu_s$ ,  $(a_s, a_r) = (b_s, b_r) = 1$ ,  $(a_s, b_r) = (b_s, a_r) = 1$ , если  $s \neq r$ ,  $a_s^{\nu_s}, b_s^{\nu_s} \in F$ , и любой элемент  $a \in A$  записывается единственным образом в виде  $a = f a_1^{\alpha_1} b_1^{\beta_1} \dots a_t^{\alpha_t} b_t^{\beta_t}$ ,  $f \in F$ ,  $0 \leq \alpha_s, \beta_s < \nu_s$  ([2], теорема 3, [6], теорема 1)\*.

Из следствия 2 теоремы 3 в [6] вытекает, что  $\nu_1 \nu_2 \dots \nu_t = 2n/m$ . Поэтому  $\nu_1 \nu_2 \dots \nu_t = 2n$  в случае  $\langle F \rangle = PE_n$  и  $\nu_1 \nu_2 \dots \nu_t = n$ , если  $\langle F \rangle = KE_n$ . Числа  $\nu_s$  не имеют квадратных делителей (лемма 15 в [2] лемма 6 в [6]).

Лемма 1. Либо  $\Gamma = V$ , либо  $\Gamma : V = 2$ .

В самом деле, если  $\Gamma \neq V$ , то  $F = K^*E_n$ ,  $g^{-1} i g = -i$  для  $g \in \Gamma \setminus V$ ,  $i^2 = -1$ . Поэтому  $g^2 \in V$ ,  $\Gamma = (g)V$ ,  $\Gamma : V = 2$ .

Лемма 2. Группа  $A$  (см. (1)) с точностью до сопряженности в  $GL(n, Q)$  однозначно определяется числом  $2n/m$ .

Доказательство. а)  $F = P^*E_n$ . Так как  $\pm 1$  — единственные корни из единицы в  $P^*$ , то (см. (1))  $\nu_1 = \nu_2 = \dots = \nu_t = 2$ ,  $\nu_1 \nu_2 \dots \nu_t = 2^t = 2n$ , откуда  $n = 2^{t-1}$ . Значит,  $F = P^*E_n$  лишь тогда, когда  $n$  — степень двойки. Действуя, как на стр. 57—58 в [2], все матрицы  $a_s, b_s$  из (1) можно одновременно для всех  $s$  привести к виду

$$a_s = E_{2^{s-1}} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \times E_{2^{t-s-1}}, \quad b_s = E_{2^{s-1}} \times \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \times E_{2^{t-s-1}}, \quad \text{если } s < t, \\ a_t = iE_n, \quad b_t = jE_n, \quad i^2 = j^2 = -1. \tag{2}$$

Группа  $A$  полностью определена.

б)  $F = K^*E_n$ . В этом случае доказательство сходно с рассуждениями на стр. 50—51 в [2]; группу  $A$  можно задать матрицами  $K^*E_n$  и матрицами ([2], стр. 51):

$$a_s = E_{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_{s-1}} \times \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \varepsilon_s & & \\ & & \ddots & \\ & & & \varepsilon_s^{\nu_s-1} \end{pmatrix} \times E_{\frac{n}{\nu_1 \dots \nu_s}}, \tag{3}$$

$$b_s = E_{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_{s-1}} \times \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix} \times E_{\frac{n}{\nu_1 \dots \nu_s}}, \quad s = 1, \dots, t,$$

$\varepsilon_s \in K^*$  — первообразный корень степени  $\nu_s$  из единицы.

\* Приведенную фразу принимаем за выражение (1).

2. Существование разрешимых примитивных подгрупп в  $GL(n, Q)$ . Сохраняем все предыдущие обозначения.

Теорема 1. Пусть  $2n/m = p_1^{l_1} p_2^{l_2} \dots p_k^{l_k}$  — каноническое разложение числа  $\frac{2n}{m}$ . Тогда фактор-группа  $V/A$  изоморфна некоторой разрешимой подгруппе прямого произведения  $k$  симплектических групп  $S_p(2l_1, p_1), \dots, S_p(2l_k, p_k)$ .

Доказательство совпадает с доказательством теоремы 11 в [2].

Пусть теперь  $H$  — подгруппа  $GL(n, Q)$ , содержащая группу  $A$  в качестве нормального делителя.  $H$  — неприводимая группа, ибо  $A$  неприводима ([6], лемма 7). Если централизатор группы  $A/F$  в  $H/F$  совпадает с  $A/F$ , то рассуждениями, сходными с доказательством теоремы 11 в [2], можно доказать, что  $H/A$  изоморфна некоторой подгруппе прямого произведения  $k$  групп  $GL(2l_1, p_1), \dots, GL(2l_k, p_k)$  ( $k$  взято из теоремы 1). Отсюда, как и на стр. 32—33 в [2], следует

Теорема 2. Если  $H$  — подгруппа  $GL(n, Q)$  — есть расширение группы  $A$ , а централизатор  $A/F$  в  $H/F$  совпадает с  $A/F$ , и если индуцируемые группой  $H$  подгруппы групп  $GL(2l_1, p_1), \dots, GL(2l_k, p_k)$  неприводимы, то группа  $H$  примитивна.

Теорема 3. В  $GL(n, Q)$  для любого  $n$  существуют максимальные разрешимые примитивные подгруппы, максимальный абелев нормальный делитель которых совпадает с  $K^*E_n$ .

Для доказательства применяем рассуждения на стр. 53 в [2] и теорему 2.

3. Конечность числа несопряженных максимальных разрешимых подгрупп  $GL(n, Q)$ . Сначала установим, что в  $GL(n, Q)$  может существовать лишь конечное число несопряженных максимальных примитивных разрешимых подгрупп  $\Gamma$ . Группа  $A$  — нормальный делитель  $\Gamma$ , поэтому для  $g \in \Gamma$

$$g^{-1} a_s g = \lambda_s a_1^{a_{1s}} b_1^{\beta_{1s}} \dots a_t^{a_{ts}} b_t^{\beta_{ts}}, \quad g^{-1} b_s g = \mu_s a_1^{\gamma_{1s}} b_1^{\delta_{1s}} \dots a_t^{\gamma_{ts}} b_t^{\delta_{ts}}, \quad (4)$$

$$0 \leq \alpha_{ks}, \beta_{ks}, \gamma_{ks}, \delta_{ks} < \nu_k, \quad s = 1, \dots, t, \quad \lambda_s, \mu_s \in F,$$

$$a_s^{\nu_s} = b_s^{\nu_s} = \pm 1, \quad a_s, b_s, \nu_s$$

взяты из (1). Конечность числа несопряженных в  $GL(n, Q)$  групп  $\Gamma$  следует теперь из леммы 2 и из конечности числа элементов  $\lambda_s, \mu_s$  и показателей  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  в (4), а также из конечности числа решений уравнений (4) при фиксированных для всех  $s$  правых частях.

Для импримитивных максимальных разрешимых подгрупп  $GL(n, Q)$  имеет место

Лемма 3. Группа  $\Gamma$  представима в виде полупрямого произведения  $\Gamma = T\Gamma$ , где группа  $T$  изоморфна некоторой максимальной разрешимой транзитивной подгруппе  $S_k$ ;  $k$  — число систем импримитивности  $\Gamma$  в полном разложении правого векторного пространства, в котором действует  $\Gamma$  (см. лемму 2 в [2]), а нормальный делитель  $G$  группы  $\Gamma$  изоморфен прямому произведению  $k$  экземпляров максимальной разрешимой примитивной подгруппы  $GL(n/k, Q)$ .

Доказательство: см. лемму 5 в [2].

Теперь ясно, что число несопряженных максимальных разрешимых неприводимых подгрупп  $GL(n, Q)$  конечно. Так как приводимая максимальная разрешимая подгруппа  $GL(n, Q)$  вполне определяется своими неприводимыми частями и их порядком следования ([2], глава 1, § 1 и [6]), то доказана

Теорема 4. Полная линейная группа  $GL(n, Q)$  обладает лишь конечным числом несопряженных максимальных разрешимых подгрупп.

4. Случай  $n \neq 2^{t-1}$ . Пусть  $\Gamma$  — максимальная разрешимая примитивная подгруппа  $GL(n, Q)$ .

Теорема 5. Если  $n$  не является степенью двойки, то централизатор фактор-группы  $A/F$  в  $\Gamma/F$  совпадает с  $A/F$ .

Доказательство. Пусть  $g \in \Gamma$  и для любого  $a$  из  $A(g, a) \in F$ . В группе  $A$  есть такой элемент  $c$ , что  $(gc^{-1}, a_s) = (gc^{-1}, b_s) = E_n$ ,  $s = 1, \dots, t$  (см. теорему 4.а в [2]). Тогда  $(gc^{-1}, (a_s, b_s)) = E_n$  для всех  $s$ . Но  $(a_s, b_s) = (\alpha + \beta i)E_n$ ,  $\alpha + \beta i \in K^*$ , и  $\beta \neq 0$  хотя бы для одного  $s$ , так как  $n$  не есть степень двойки. Поэтому  $gc^{-1}$  — комплексная матрица,  $gc^{-1} \in V$ . По теореме 2 из [6] (см. также теорему 4 в [2]),  $A/F$  совпадает со своим централизатором в  $V/F$ . Следовательно,  $g \in A$ , что и т. д.

Пусть теперь в  $GL(n, Q)$   $n = p_1 p_2 \dots p_s > 2$ ,  $p_i$  — различные простые числа. Тогда ([2], стр. 54)

$$A = (u_1)(v_1) \dots (u_s)(v_s) K^* E_n, \quad u_i^{p_i} = v_i^{p_i} \in E_n,$$

и для  $g \in \Gamma$

$$g^{-1} u_i g = \lambda_i u_i^{\alpha_i} v_i^{\beta_i}, \quad g^{-1} v_i g = \mu_i u_i^{\gamma_i} v_i^{\delta_i}, \quad (5)$$

$$\alpha_i, \beta_i, \gamma_i, \delta_i \in GF(p_i), \quad i = 1, \dots, s, \quad \lambda_i, \mu_i \in K^*.$$

Таковыми же рассуждениями, как на стр. 30—31 в [2], приходим к

Теорема 6. Если  $n = p_1 \dots p_s > 2$ ,  $p_i$  — различные простые числа, то фактор-группа  $\Gamma/A$  изоморфна подгруппе прямого произведения максимальных неприводимых разрешимых подгрупп  $G_{0i}$  групп  $SL^\pm(2, p_i)$ ,  $i = 1, \dots, s$ .

Матрицы  $\begin{pmatrix} \alpha_i & \gamma_i \\ \beta_i & \delta_i \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} \alpha_s & \gamma_s \\ \beta_s & \delta_s \end{pmatrix}$ , индуцируемые в  $SL^\pm(2, p_1), \dots, SL^\pm(2, p_s)$  элементом  $g \in \Gamma$ , пробегают независимо друг от друга максимальные неприводимые разрешимые подгруппы  $\Gamma_{01}, \dots, \Gamma_{0s}$  групп  $SL(2, p_1), \dots, SL(2, p_s)$ , если  $g \in V$ ; если же  $g \in \Gamma \setminus V$ , то матрицы  $\begin{pmatrix} \alpha_i & \gamma_i \\ \beta_i & \delta_i \end{pmatrix}$  пробегают независимо друг от друга множества  $G_{0i} \setminus \Gamma_{0i}$ ,  $i = 1, \dots, s$ .

Следствие. Если  $n = p > 2$  — простое число, то  $\Gamma/A$  изоморфна максимальной неприводимой разрешимой подгруппе  $SL^\pm(2, p)$ .

### § 2. ПРИМЕРЫ

Здесь описываются максимальные разрешимые неприводимые подгруппы  $\Gamma$  группы  $GL(n, Q)$  для  $n$  без квадратных делителей.

1.  $n = 2$ . а)  $\Gamma$  примитивна. Пусть  $F = P^* E_2$ . Тогда

$$t = 2, \quad v_1 = v_2 = 2, \quad A = (a_1)(b_1)(a_2)(b_2)F, \quad a_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad b_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$a_2 = iE_2, \quad b_2 = jE_2, \quad i^2 = j^2 = -1, \quad (a_1, b_1) = (a_2, b_2) = -E_2 \quad (\text{см. (1) и (2)}).$$

Элементы  $g$  группы  $\Gamma$  найдем из условий:

$$g^{-1} a_1 g = \lambda_1 a_1^{\alpha_{11}} b_1^{\beta_{11}} a_2^{\alpha_{21}} b_2^{\beta_{21}}, \quad g^{-1} a_2 g = \lambda_2 a_1^{\alpha_{12}} b_1^{\beta_{12}} a_2^{\alpha_{22}} b_2^{\beta_{22}}, \quad (6)$$

$$g^{-1} b_1 g = \mu_1 a_1^{\gamma_{11}} b_1^{\delta_{11}} a_2^{\gamma_{21}} b_2^{\delta_{21}}, \quad g^{-1} b_2 g = \mu_2 a_1^{\gamma_{12}} b_1^{\delta_{12}} a_2^{\gamma_{22}} b_2^{\delta_{22}}$$

(см. доказательство теоремы 11 в [2]). Здесь  $\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2 \in P^*$ , матрица

$$u = \begin{pmatrix} \alpha_{11} \gamma_{11} & \alpha_{12} \gamma_{12} \\ \beta_{11} \delta_{11} & \beta_{12} \delta_{22} \\ \alpha_{21} \gamma_{21} & \alpha_{22} \gamma_{22} \\ \beta_{21} \delta_{21} & \beta_{22} \delta_{22} \end{pmatrix} \quad (7)$$

пробегает в силу теоремы 1 разрешимую подгруппу  $\Gamma_0$  симплектической группы  $S_p(4, 2)$ . Матрицы из  $\Gamma_0$  не должны все одновременно быть ни вида

$$\begin{pmatrix} 1 & x_{12} & x_{13} & x_{14} \\ 0 & x_{22} & x_{23} & x_{24} \\ 0 & x_{32} & x_{33} & x_{34} \\ 0 & x_{42} & x_{43} & x_{44} \end{pmatrix}, \quad (8)$$

ни вида

$$\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & 0 \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & 0 \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} & 0 \\ x_{41} & x_{42} & x_{43} & 1 \end{pmatrix}. \quad (9)$$

Иначе для всех  $g \in \Gamma$  было бы в случае (8)  $g^{-1}a_1g = \lambda_1 a_1$ , а в случае (9)  $g^{-1}b_2g = \mu_2 b_2$  и  $\Gamma$  обладала бы абелевым нормальным делителем  $(a_1)F$  или  $(b_2)F$ , что невозможно.

Пользуясь равенствами  $a_1^2 = b_1^2 = E_2$ ,  $a_2^2 = b_2^2 = -E_2$ , легко проверить, что показатели  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  из (7) должны подчиняться соотношениям:

$$\begin{cases} \alpha_{11}\beta_{11} + \alpha_{21}\beta_{21} + \alpha_{21} + \beta_{21} = 0, \\ \gamma_{11}\delta_{11} + \gamma_{21}\delta_{21} + \gamma_{21} + \delta_{21} = 0, \\ \alpha_{12}\beta_{12} + \alpha_{22}\beta_{22} + \alpha_{22} + \beta_{22} = 1, \\ \gamma_{12}\delta_{12} + \gamma_{22}\delta_{22} + \gamma_{22} + \delta_{22} = 1. \end{cases} \quad (10)$$

Как показано в приложении, можно считать, что  $\Gamma_0$  порождается матрицами

$$t_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad t_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Поэтому для определения группы  $\Gamma$  достаточно найти две матрицы  $g_1$  и  $h_1$  из условий (6), в которых  $\lambda_1 = \lambda_2 = \mu_1 = \mu_2 = 1$ , а в (7)  $u = t_1$  или  $u = t_2$ . Получаем:

$$g_1 = \begin{pmatrix} 1-i & 1-i \\ k-j & j-k \end{pmatrix}, \quad h_1 = \begin{pmatrix} i+j & 0 \\ 0 & -1-k \end{pmatrix}, \quad i^2 = j^2 = k^2 = -1.$$

Таким образом,  $\Gamma$  порождается матрицами  $a_1, b_1, a_2, b_2, g_1, h_1, P^*E_2$ :

$$\Gamma = \{a_1, b_1, a_2, b_2, g_1, h_1, P^*E_2\} \cong \Gamma_1.$$

Легко проверить, что  $\Gamma_1$  не может быть импримитивной, и поэтому  $\Gamma_1$  — максимальная разрешимая примитивная подгруппа  $GL(2, Q)$ . Пусть теперь  $F = K^*E_2$ . Тогда

$$A = (a)(b)F, a = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, ab = -ba \text{ (см. (1) и (3)).}$$

Симплектическая группа  $S_p(2, 2)$  совпадает с  $GL(2, 2)$ .  $V/A$  изоморфна  $GL(2, 2)$  и  $V$  — примитивная группа.  $GL(2, 2)$  порядка 6 и порождается двумя образующими:  $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ . Отсюда следует, что для определения  $V$  достаточно найти две матрицы  $g_2$  и  $h_2$ , удовлетворяющие условиям:

$$g_2^{-1}ag_2 = \lambda b, g_2^{-1}bg_2 = \mu ab, h_2^{-1}ah_2 = \lambda_1 b, h_2^{-1}bh_2 = \mu_1 a. \quad (11)$$

Так как  $a^2 = b^2 = E_2$ ,  $(a, b) = -E_2$ , то  $\lambda^2 = -\mu^2 = \lambda_1^2 = \mu_1^2 = 1$ , поэтому можно считать, что  $\lambda = \lambda_1 = \mu_1 = 1$ ,  $\mu = i$ ,  $i^2 = -1$ . Теперь из (11) получаем:  $g_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix}, h_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, i^2 = -1$ . Из  $jh_2 = h_2j, jg_2 = g_2bj, j^2 = -1$ , следует, что  $V$  — нормальный делитель группы  $\Gamma_2$ ,  $\Gamma_2 = \{jE_2, V\}$ . Ясно, что  $\Gamma_2:V = 2$  и  $\Gamma_2$  — максимальная разрешимая примитивная подгруппа  $GL(2, Q)$ .

б)  $\Gamma$  импримитивна. По лемме 3  $\Gamma = TG$ , где  $T$  состоит из матриц  $E_2$  и  $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ , а  $G$  — нормальный делитель  $\Gamma$ , изоморфный прямому произведению двух экземпляров максимальной разрешимой подгруппы группы  $Q^*$ . В  $Q^*$  имеются всего две несопряженные максимальные разрешимые подгруппы (см. [5]):

$$S = \{i, j, 1+i, 1+k, P^*\}, R = \{j, K^*\}, i^2 = j^2 = k^2 = -1. \quad (12)$$

**Теорема 7.** *Всякая максимальная разрешимая неприводимая подгруппа  $GL(2, Q)$  сопряжена в  $GL(2, Q)$  с одной из четырех групп:  $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \Gamma_4$ , где  $\Gamma_1$  порождается матрицами  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, iE_2, jE_2, \begin{pmatrix} 1-i & 1-i \\ k-j & j-k \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i+j & 0 \\ 0 & -1-k \end{pmatrix}, P^*E_2, i^2 = j^2 = k^2 = -1, \Gamma_2$  порождается матрицами  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, jE_2, K^*E_2, \Gamma_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} s_1 & 0 \\ 0 & s_2 \end{pmatrix} \right\}, \Gamma_4 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} r_1 & 0 \\ 0 & r_2 \end{pmatrix} \right\}$ , где  $s_1, s_2, (r_1, r_2)$  пробегают независимо друг от друга группу  $S$  (группу  $R$ ) из (12).*

2.  $n = 3$ . **Теорема 8.** *Всякая максимальная разрешимая неприводимая подгруппа  $GL(3, Q)$  сопряжена в  $GL(3, Q)$  с одной из трех групп:  $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ , где  $\Gamma_1$  порождается матрицами*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \rho & 0 \\ 0 & 0 & \rho^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \rho^2 \rho & \\ \rho \rho^2 & 1 & \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \rho \rho^2 & \\ \rho^2 \rho & 1 & \end{pmatrix}, jE_3, K^*E_3,$$

$$\rho^3 = 1, \rho \neq 1, j^2 = -1,$$

а  $\Gamma_2$  и  $\Gamma_3$  порождаются матрицами соответственно

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} s_1 & 0 & 0 \\ 0 & s_2 & 0 \\ 0 & 0 & s_3 \end{pmatrix} \text{ и } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} r_1 & 0 & 0 \\ 0 & r_2 & 0 \\ 0 & 0 & r_3 \end{pmatrix},$$

$s_1, s_2, s_3 (r_1, r_2, r_3)$  пробегают независимо друг от друга группу  $S$  (группу  $R$ ) из (12).

3.  $n = p > 3$  — простое число. Будем обозначать через  $\Gamma^s, s = 1, 2, \dots$ , максимальную разрешимую примитивную подгруппу  $GL(p, Q)$ ,  $p > 3$ . Ясно, что  $F = K^*E_p, t = 1, \gamma_1 = p, A = (a)(b)F, (a, b) = \eta E_p, \eta \in K^*$  — первообразный корень степени  $p$  из единицы,  $a^p = b^p = E_p$ ,

$$a = \text{diag} (1, \eta, \dots, \eta^{p-1}), b = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Элементы  $g \in \Gamma^s$  определяются из уравнений

$$g^{-1}ag = \lambda a^\alpha b^\beta, g^{-1}bg = \mu a^\gamma b^\delta, \quad (13)$$

где матрицы  $\begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{pmatrix}$  пробегают ввиду следствия из теоремы 6 максимальную неприводимую разрешимую подгруппу  $SL^\pm(2, p)$ . Взяв, если нужно, вместо  $g$  матрицу  $a^{\alpha_1} b^{\beta_1} g$  или  $b^{\beta_1} a^{\alpha_1} g$ , где  $\alpha_1, \beta_1$  подобраны соответствующим образом, мы добьемся выполнения равенств  $\lambda = \mu = 1$  в (13). Сделаем следующее замечание. Пусть  $g^{-1}ag = a^\alpha b^\beta, g^{-1}bg = a^\gamma b^\delta$ , где  $\begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{pmatrix} \in SL^\pm(2, p); \beta \not\equiv 0 \pmod{p}$ ; определитель матрицы  $\begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{pmatrix}$  равен 1. Отсюда несложными вычислениями можно найти все элементы  $x_{sr}$  матрицы  $g$ :

$$x_s, t_{\beta + (s-1)\delta + 1} = \eta^q, s, t = 1, 2, \dots, p,$$

$$q = -\frac{t(t+1)}{2} \alpha\beta - s(s-1) t_{\beta\gamma} - \frac{s(s-1)}{2} \gamma\delta, \eta^p = 1, \eta \neq 1, \eta \in K^*$$

(благодаря тому что  $\beta \not\equiv 0 \pmod{p}$ , индекс  $t_{\beta + (s-1)\delta + 1}$  пробегает все числа от 1 до  $p$ , если брать его по модулю  $p$ ). Полученную матрицу  $g$  обозначим через  $g(u)$ , если

$$u = \begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{pmatrix}. \quad (14)$$

Максимальная разрешимая неприводимая подгруппа  $SL^\pm(2, p)$  является пересечением максимальной неприводимой разрешимой подгруппы  $G_s$  группы  $GL(2, p)$  с  $SL^\pm(2, p)$ . В [2] показано, что в  $GL(2, p)$  с точностью до сопряженности существуют только три подгруппы  $G_s$ ,

а также описаны максимальные разрешимые неприводимые подгруппы  $\Gamma_{0s}$  группы  $SL(2, p)$ ;  $p$  — простое число ([2], стр. 44—50).

Пользуясь этим описанием, можно найти все несопряженные в  $SL^\pm(2, p)$  максимальные разрешимые неприводимые подгруппы  $G_{0s}$  группы  $SL^\pm(2, p)$  и, следовательно, все несопряженные в  $GL(p, Q)$  группы  $\Gamma^s$ ,  $s = 1, 2, \dots$

Укажем эти группы, опустив вычисления.

1)  $G_{01} = G_1 \cap SL^\pm(2, p)$  порождается матрицами  $\begin{pmatrix} \gamma & 0 \\ 0 & \gamma^{-1} \end{pmatrix}$ ,  $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ;  $\gamma$  — первообразный корень сравнения  $x^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$ . Теперь из уравнений вида (13) найдем образующие элементы  $f_1, g_1, h_1$  группы  $\Gamma^1$ :

$$\begin{aligned} f_1 &= (x_{\alpha\beta}), \quad \alpha, \beta = 1, \dots, p, \quad x_{\alpha\beta} = 0 \text{ при } \beta \not\equiv (\alpha - 1)\gamma^{-1} + 1 \pmod{p}, \\ x_{\alpha\beta} &= 1 \text{ при } \beta \equiv (\alpha - 1)\gamma^{-1} + 1 \pmod{p}, \quad g_1 = (y_{\alpha\beta}), \quad y_{\alpha\beta} = \eta^{(\alpha-1)(\beta-1)}, \\ h_1 &= jE_p, \quad j^2 = -1; \end{aligned}$$

$\eta$  — первообразный корень степени  $p$  из единицы. Таким образом,

$$\Gamma^1 = \{a, b, f_1, g_1, h_1, K^*E_p\}.$$

2)  $G_{02} = G_2 \cap SL^\pm(2, p)$  порождается матрицами  $u_2 = \begin{pmatrix} 1 & \varepsilon \\ \varepsilon & 1 + \varepsilon^2 \end{pmatrix}$ ,  $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $\begin{pmatrix} 1 & \varepsilon \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ ,  $\varepsilon = \lambda^p + \lambda$ ,  $\lambda \in GF(p^2)$  — первообразный корень уравнения  $x^{2(p+1)} = 1$ . Этим матрицам соответствуют образующие элементы  $f_2, g_2, h_2$  группы  $\Gamma^2$ :  $f_2 = g(u_2)$  (см. (14)),  $g_2 = g_1$ ,  $h_2 = (y_{\alpha\beta})$ ,  $y_{\alpha\beta} = j\eta^{\frac{\alpha(\alpha-1)\beta}{2}}$ , если  $\beta \equiv p - \alpha + 2 \pmod{p}$ ;  $y_{\alpha\beta} = 0$ , если  $\beta \not\equiv p - \alpha + 2 \pmod{p}$ ,  $j^2 = -1$ ,  $\Gamma^2 = \{a, b, f_2, g_2, h_2, K^*E_p\}$ .

3) При указании группы  $G_{03} = G_3 \cap SL^\pm(2, p)$  и соответствующей группы  $\Gamma^s$  отметим лишь случаи  $p \equiv -3 \pmod{8}$  и  $p \equiv -1 \pmod{8}$ .

а)  $p \equiv -3 \pmod{8}$ .  $\Gamma^3 = \{a, b, c_3, d_3, f_3, h_3, K^*E_p\}$ , где  $c_3 = g(u_3)$ ;  $u_3 = \begin{pmatrix} \delta & \delta \\ -\delta\tau & \delta\tau \end{pmatrix}$ ;  $\delta, \tau \in GF(p)$ ;  $\tau^2 = -1$ ,  $\delta^2 = (2\tau)^{-1}$ ;  $d_3 = g_1^{-1}$ ;  $f_3 = (x_{\alpha\beta})$ ;  $\alpha, \beta = 1, \dots, p$ ;  $x_{\alpha\beta} = 0$  при  $\beta \not\equiv (1 - \alpha)\tau + 1 \pmod{p}$ ,  $x_{\alpha\beta} = 1$  при  $\beta \equiv (1 - \alpha)\tau + 1 \pmod{p}$ ,  $x_{\alpha\beta} = 1$  при  $\beta \equiv (1 - \alpha)\tau + 1 \pmod{p}$ ,  $h_3 = jE_p$ ,  $j^2 = -1$ .

б)  $p \equiv -1 \pmod{8}$ . Максимальные разрешимые неприводимые подгруппы  $SL^\pm(2, p)$  разбиваются на два класса сопряженных подгрупп — класс подгрупп  $SL^\pm(2, p)$ , сопряженных в  $SL^\pm(2, p)$  с группой

$$\begin{aligned} M &= \left\{ \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, u_4, \omega_4, t_4 \right\}, \quad u_4 = \begin{pmatrix} 1 & \xi \\ \xi & -1 \end{pmatrix}, \\ \omega_4 &= \begin{pmatrix} \theta & \theta(\xi - 1) \\ \theta(\xi + 1) & -\theta \end{pmatrix}, \quad t_4 = \begin{pmatrix} (1 - \xi)\zeta(\xi - 1)\zeta & \\ (2\xi + 1)\zeta(\xi^2 - 1)\zeta & \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

и класс подгрупп  $SL^\pm(2, p)$ , сопряженных с  $M' = T^{-1}MT$ , где

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}; \quad \xi, \theta, \zeta \in GF(p); \quad \xi^2 + 2 = 0; \quad \theta^2 = 2^{-1}; \quad \zeta^2 = (4\xi + 2)^{-1}$$



Теперь находим соответствующие группы  $\Gamma^4$  и  $\Gamma^5$ :

$$\begin{aligned} \Gamma^4 &= \{a, b, c_1, d_1, f_1, g_1, K^*E_p\}, \quad \Gamma^5 = \{a, b, c_5, d_5, f_5, g_5, K^*E_p\}, \\ c_1 &= g_1, \quad d_1 = g(u_1), \quad f_1 = g(\omega_1), \quad g_1 = g(t_1), \quad c_5 = g_1^{-1}, \quad d_5 = g(T^{-1}u_1T), \\ f_5 &= g(T^{-1}\omega_1T), \quad g_5 = g(T^{-1}t_1T). \end{aligned}$$

Таким образом, в случае  $p \equiv -1 \pmod{8}$ ,  $\langle \Gamma^4 \rangle = \langle \Gamma^5 \rangle = K_p$  и, следовательно, для максимальной разрешимой неприводимой примитивной подгруппы  $\Gamma$  группы  $GL(n, Q)$  в случае  $\langle F \rangle = KE_n$  возможно как  $\langle \Gamma \rangle = Q_n$ , так и  $\langle \Gamma \rangle = K_n$ . Этот факт отмечен и в [6].

Если максимальная разрешимая неприводимая подгруппа  $\Gamma$  группы  $GL(p, Q)$  импримитивна, то  $\Gamma$  сопряжена в  $GL(p, Q)$  с группой  $\Gamma' = \{u, t, s\}$  или  $\Gamma'' = \{u, t, r\}$ , где

$$u = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad t = (x_{\alpha\beta}), \quad \begin{cases} x_{\alpha\beta} = 0, & \alpha \not\equiv \beta\gamma \pmod{p}, \\ x_{\alpha\beta} = 1, & \alpha \equiv \beta\gamma \pmod{p}; \end{cases}$$

$\gamma$  — первообразный корень сравнения  $x^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$ ;  $s = \text{diag}(s_1, \dots, s_p)$ ,  $r = \text{diag}(r_1, \dots, r_p)$ ,  $s_i(r_i)$  пробегает независимо друг от друга группу  $S$  (группу  $R$ ) из (12).

4.  $n = p_1 p_2 \dots p_s$  — произведение различных простых чисел,  $s > 1$ . Если  $\Gamma$  — максимальная разрешимая примитивная подгруппа  $GL(n, Q)$ , то образующие элементы  $g$  группы  $\Gamma$  определяются из условий (5), где матрицы  $\begin{pmatrix} \alpha_1 & \gamma_1 \\ \beta_1 & \delta_1 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} \alpha_s & \gamma_s \\ \beta_s & \delta_s \end{pmatrix}$  пробегает максимальные разрешимые неприводимые подгруппы  $G_{01}, \dots, G_{0s}$  групп  $SL^\pm(2, p_1), \dots, SL^\pm(2, p_s)$  в соответствии с теоремой 6.

В  $SL^\pm(2, p)$  имеется самое большее 4 несопряженные максимальные разрешимые неприводимые подгруппы, поэтому в  $GL(n, Q)$  содержится самое большее  $4^s$  несопряженных максимальных разрешимых примитивных подгрупп.

### § 3. ПРИЛОЖЕНИЕ

Из теоремы 1 следует, что если  $\Gamma$  — максимальная разрешимая неприводимая примитивная подгруппа  $GL(2, Q)$  и ее максимальный абелев нормальный делитель есть  $P^*E_2$ , то фактор-группа  $\Gamma/A$  изоморфна некоторой разрешимой подгруппе  $\Gamma_0$  симплектической группы  $S_p(4, 2)$ . Сейчас мы найдем  $\Gamma_0$ .

Матрицы из  $\Gamma_0$  не должны все одновременно быть ни вида (8), ни вида (9). Элементы матриц из  $\Gamma_0$  удовлетворяют условиям (10) и подчиняются соотношениям, вытекающим из определения симплектической группы (см. обозначения).

Легко проверить непосредственно, что все матрицы из  $S_p(4, 2)$  удовлетворяющие условиям (10), составляют группу  $G_0$  порядка 120.  $G_0$  порождается матрицами:

$$t_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad t_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad t_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad t_1^5 = t_2^4 = t_3^3 = E_4. \quad (15)$$

В  $G_0$  нет элементов порядка 15, а следовательно, и подгрупп порядка 15, поэтому  $G_0$  неразрешима ([1], стр. 161, теорема Холла).

Любую подгруппу группы  $G_0$ , имеющую порядок  $r$ , обозначим через  $G_0^r$ . В  $G_0$  нет разрешимой подгруппы  $G_0^{60}$ , иначе вся  $G_0$  была бы разрешимой. Подгруппы  $G_0^{30}$  (они разрешимы) в  $G_0$  тоже нет, иначе в  $G_0$  были бы  $G_0^{15}$ .

Все  $G_0^3$  сопряжены в  $G_0$ , ибо они 3-подгруппы Силова группы  $G_0$ . По этой же причине все  $G_0^5$  сопряжены в  $G_0$ .

Будем искать максимальные разрешимые подгруппы  $G_0$ .

1. Нормализатор группы  $G_0^3$  в  $G_0$  должен быть порядка 12. Отсюда следует, что все  $G_0^{12}$ , имеющие нормальный делитель порядка 3, сопряжены в  $G_0$ . Обозначим одну из таких  $G_0^{12}$  через  $G_{01}^{12}$ .  $G_{01}^{12}$  — максимальная разрешимая подгруппа  $G_0$ . Матрицы

$$t_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad t_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

из  $G_0$  порождают подгруппу порядка 12 с нормальным делителем порядка 3. Поэтому можно считать, что  $G_{01}^{12} = \{t_4, t_5\}$ . Матрицы  $t_4$  и  $t_5$  вида (9), поэтому ни одна  $G_0^{12}$  с нормальным делителем порядка 3 не является искомой группой  $G_0$ .

2. Если  $G_0^{12}$  имеет нормальный делитель порядка 4, то будем говорить, что  $G_0^{12}$  — группа вида  $G_{02}^{12}$ . В  $G_0$  заведомо имеются группы вида  $G_{02}^{12}$ , например  $\Delta = \{t_2^2, t_3\}$  (см. (15)).  $\Delta$  содержится в группе  $\Phi$  порядка 24;  $\Phi = \{t_2, t_3\}$  — максимальная разрешимая подгруппа  $G_0$ . В  $G_0$  есть 5 сопряженных с  $\Delta$  подгрупп (включая  $\Delta$ ). В каждой группе вида  $G_{02}^{12}$  из  $G_0$  есть 4 подгруппы порядка 3, и две различные группы вида  $G_{02}^{12}$  из  $G_0$  должны отличаться друг от друга самое меньшее тремя своими подгруппами порядка 3. В  $G_0$  10 подгрупп  $G_0^3$ . Из десяти объектов можно составить только 5 сочетаний по 4, отличающихся друг от друга самое меньшее тремя объектами. Поэтому в  $G_0$  не более пяти различных подгрупп вида  $G_{02}^{12}$ . Значит, в  $G_0$  все группы вида  $G_{02}^{12}$  сопряжены с  $\Delta$ . Отсюда следует, что все  $G_0^{24}$  сопряжены в  $G_0$  с группой  $\Phi$ . Так как  $\Phi$  порождается матрицами вида (8), то ни одна  $G_0^{24}$  не является искомой группой  $G_0$ .

3. Нормализатор группы  $G_0^5$  в  $G_0$  должен быть порядка 20. С другой стороны, любая  $G_0^{20}$  является нормализатором некоторой  $G_0^5$  в  $G_0$ . Поэтому все  $G_0^{20}$  сопряжены в  $G_0$ . В  $G_0$  нет подгрупп порядка 40, иначе нормализатор  $G_0^5$  в  $G_0$  был бы порядка 40. Поэтому  $G_0^{20}$  — максимальная разрешимая подгруппа  $G_0$ . Можно считать, что  $G_0^{20} = \{t_1, t_2\}$ . Таким образом, группа  $G_0$ , упомянутая в начале § 3, определена с точностью до сопряженности в  $G_0$  однозначно, и можно положить  $G_0 = \{t_1, t_2\}$ .

В заключение выражаю благодарность Д. А. Супруненко за помощь и внимание к работе, а также А. Е. Залескому за обсуждение статьи.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Холл М. Теория групп. ИЛ, М., 1962.
2. Супруненко Д. А. Разрешимые и нильпотентные линейные группы. Минск, 1958.
3. Супруненко Д. А. Матем. сб., 41 (83), № 3, 1957.
4. Супруненко Д. А. ДАН СССР, 83, № 2, 1952.
5. Супруненко Д. А. Изв. АН СССР, сер. матем., 26, № 4, 1962.
6. Залесский А. Е. ДАН БССР, 7, № 2, 1963.
7. Залесский А. Е. Матем. сб., 61, № 4, 1963.

*Поступило в редакцию 30.VI 1965*

В. А. ЕМЕЛИЧЕВ

### РЕГУЛЯРНОСТЬ КОНЕЧНО-ОПРЕДЕЛЕННОЙ КОММУТАТИВНОЙ ПОЛУГРУППЫ \*)

В конструктивной алгебре видное место занимают вопросы, относящиеся к конечно-определенным алгебраическим системам. К этой области принадлежат классическая теорема П. С. Новикова [1] о неразрешимости проблемы тождества для конечно-определенных групп, теоремы А. А. Маркова [2] и С. И. Адяна [3] о неразрешимости проблемы распознавания широкого семейства свойств конечно-определенных полугрупп и групп.

При изучении конечно-определенных коммутативных полугрупп [4, 6—8] выяснилось, что многие массовые проблемы алгоритмически разрешимы, хотя элементарная теория коммутативных полугрупп является неразрешимой [5]. В настоящее время всюду возникают границы разрешимости алгоритмических вопросов и любая сколь угодно частная алгоритмическая проблема может оказаться последней в списке разрешимых проблем или по крайней мере эта граница разрешимости может быть вовсе не далеко. Поэтому целесообразно решать алгоритмические вопросы повсюду, где они возникают.

Развитие теории полугрупп показывает, что понятие регулярности является существенным и важным. В настоящей работе строится алгоритм, проверяющий регулярность любой конечно-определенной коммутативной полугруппы. Этот алгоритм представляет собой обобщение алгоритма, позволяющего определить, является ли конечно-определенная коммутативная полугруппа группой [7].

§ 1. Пусть  $G$  — коммутативная полугруппа, заданная образующими элементами

$$a_k, \quad k = 1, 2, \dots, n \quad (1)$$

и определяющими соотношениями

$$A_i = B_i, \quad i = 1, 2, \dots, s, \quad (2)$$

где  $A_i, B_i$  являются непустыми словами в символах  $a_k$ . Причем будем предполагать, что среди определяющих соотношений (2) отсутствуют определяющие соотношения вида

$$a_j = N \quad \text{или} \quad N = a_j, \quad (3)$$

где  $j$  — одно из чисел  $1, 2, \dots, n$ , а слово  $N$  не содержит образующего  $a_j^*$ .

\*) Результаты настоящей работы доложены 28 сентября 1965 г. на VII Всесоюзном коллоквиуме по общей алгебре в г. Кишиневе и опубликованы без доказательства в [9].

\*\*) Определяющее соотношение вида (3) можно всегда удалить из системы (2), заменив всюду  $a_j$  словом  $N$  и получив тем самым самую изоморфную полугруппу с меньшим числом образующих. Процедура удаления подобных определяющих соотношений описана в [7, 8] и состоит из первых  $s$  шагов алгоритма Ф.

Если  $X$  — произвольное слово, то преобразования слова вида  $A_iX$  в слово  $B_iX$  и обратно будем называть элементарными. Представлять эти преобразования будем в виде схем:

$$\begin{aligned} A_iX &\rightarrow B_iX, \\ B_iX &\rightarrow A_iX. \end{aligned}$$

Элементарным преобразованием будем также называть замену  $A_i$  на  $B_i$  и обратно с предварительной перестановкой образующих с целью получения  $A_i$  или  $B_i$  в начале преобразуемого слова.

Условимся говорить, что к слову  $A_iX$  (или  $B_iX$ ) применимо элементарное преобразование  $A_i \rightarrow B_i$  (или  $B_i \rightarrow A_i$ ). Если слово  $B_i$  (или  $A_i$ ) содержит образующие, которых нет в  $A_iX$  (или  $B_iX$ ), то будем говорить, что преобразование  $A_i \rightarrow B_i$  (или  $B_i \rightarrow A_i$ ) порождает в  $A_iX$  (или  $B_iX$ ) новые образующие.

Схемы вида

$$\begin{aligned} A_i &\rightarrow B_i, \quad i = 1, 2, \dots, s, \\ B_i &\rightarrow A_i, \quad i = 1, 2, \dots, s, \end{aligned}$$

будем называть основными схемами определяющих соотношений (2). Преобразования вида  $X \rightarrow X$  назовем тавтологическими.

Если слова  $P$  и  $Q$  равны в полугруппе  $G$  ( $P = Q$ ), то существует последовательность элементарных преобразований, переводящая  $P$  в  $Q$ . Такую последовательность будем представлять в виде цепочки:

$$P \rightarrow N_1 \rightarrow N_2 \rightarrow \dots \rightarrow N_{r-1} \rightarrow Q.$$

Число  $r$  будем называть длиной цепочки. Если слово  $Q$  содержит образующие, которых нет в  $P$ , то будем говорить, что данная последовательность элементарных преобразований порождает в  $P$  новые образующие.

Пусть слово  $F$  подгруппы  $G$  не содержит образующего  $a_k$ . Условимся говорить, что цепочка элементарных преобразований

$$a_k F \rightarrow F_1 \rightarrow \dots \rightarrow F_r$$

изменяет природу слова  $a_k F$ , если она порождает в  $a_k F$  новые образующие или изменяет степень  $a_k$ . Слово  $F$  будем называть словом, обладающим свойством  $V_k$ , если всякое элементарное преобразование  $A_i \rightarrow B_i$  или  $B_i \rightarrow A_i$  ( $i = 1, 2, \dots, s$ ) либо не применимо к слову  $a_k F^q$  ни при каком натуральном  $q$ , либо применимо к нему при некотором натуральном  $q$ , но не изменяет природы этого слова ( $a_k F^q$ ).

§ 2. Элемент  $A$  полугруппы  $G$  называется регулярным, если в  $G$  существует такой элемент  $X$ , что  $A = AXA (= A^2X)$ . Полугруппа  $G$  называется регулярной, если все ее элементы регулярны. Ясно, что полугруппа  $G$  будет регулярной тогда и только тогда, когда каждый ее образующий элемент регулярен.

Лемма 1. Если образующий элемент  $a_k$  полугруппы  $G$  регулярен, то в системе (2) должно быть хотя бы одно определяющее соотношение вида

$$a_k = a_k C \quad \text{или} \quad a_k C = a_k. \quad (4)$$

Доказательство. Так как  $a_k$  — регулярный элемент, то в  $G$  найдется такое слово  $X$ , что  $a_k = a_k^2 X$ . Это равенство означает, что существует последовательность элементарных преобразований, переводящая  $a_k$  в  $a_k^2 X$ . Если бы в системе определяющих соотношений (2) не было ни одного соотношения вида (4), то всякое элементарное преобразо-

вание, применимое к слову  $a_k$ , было бы тавтологическим и указанной последовательности не могло бы существовать.

Лемма 2. Если слово  $F$  обладает свойством  $V_k$ , то не существует цепочки элементарных преобразований, изменяющей природу слова  $a_k F$ .

Доказательство проведем индукцией по длине цепочки. Для цепочек длины 1 справедливость нашего утверждения следует из определения свойства  $V_k$ . Предположим, что всякая цепочка длины  $r-1$  не изменяет природы слова  $a_k F$ . Отсутствие цепочки длины  $r$ , изменяющей природу этого слова, докажем от противного.

Пусть  $a_k F \rightarrow F_1 \rightarrow \dots \rightarrow F_{r-1} \rightarrow F_r$  — такая цепочка. Тогда в силу предположения индукции цепочка

$$a_k F \rightarrow F_1 \rightarrow \dots \rightarrow F_{r-1}$$

не изменяет природы слова  $a_k F$ , т. е. слово  $F_{r-1}$  содержит лишь те образующие, которые есть в  $F$ , а образующий элемент  $a_k$  входит в  $F_{r-1}$  в первой степени.

Следовательно, существует элементарное преобразование  $A_i \rightarrow B_i$  (или  $B_i \rightarrow A_i$ ), где  $i$  — одно из чисел  $1, 2, \dots, s$ , изменяющее природу слова  $F_{r-1}$  и переводящее это слово в  $F_r$ .

Очевидно, что указанное элементарное преобразование  $A_i \rightarrow B_i$  (или  $B_i \rightarrow A_i$ ) применимо также к слову  $a_k F^q$  при некотором натуральном  $q$  и изменяет его природу, т. е. слово  $F$  не обладает свойством  $V_k$ . Полученное противоречие и доказывает лемму 2.

Лемма 3. Если образующий элемент  $a_k$  полугруппы  $G$  имеет единичу<sup>\*</sup>, обладающую свойством  $V_k$ , то полугруппа  $G$  не регулярна.

Доказательство. Пусть  $F$  — единица образующего  $a_k$  полугруппы  $G$ , удовлетворяющая условию леммы. Если бы полугруппа  $G$  была регулярной полугруппой, то образующий элемент  $a_k$  был бы регулярным элементом, т. е. существовало бы такое слово  $P \in G$ , что

$$a_k F = a_k = a_k^2 P.$$

Это в свою очередь означало бы, что существует последовательность элементарных преобразований, увеличивающая степень  $a_k$  в слове  $a_k F$ , т. е. изменяющая природу слова  $a_k F$ . Однако в силу леммы 2 этого быть не может. Из противоречия вытекает справедливость леммы 3.

§ 3. В настоящем параграфе излагается алгоритм  $(\Phi_k)$ , выясняющий некоторые свойства произвольного образующего  $a_k$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ) полугруппы  $G$ . Алгоритм  $\Phi_k$  описывается следующим образом.

Для данного фиксированного  $k$  выписывают все определяющие соотношения вида (4):

$$a_k = a_k C_i, \quad i = 1, 2, \dots, h^{**}.$$

Если таких определяющих соотношений нет, то процесс обрывается, так как на основании леммы 1 образующий элемент  $a_k$  не является регулярным элементом, т. е.  $G$  не регулярная полугруппа. Если  $h \geq 1$ , то составляют произведение  $E_0 = C_1 C_2 \dots C_h$ , являющееся единицей образующего  $a_k$  ( $a_k = a_k E_0$ ), и смотрят, содержит ли оно образующий элемент  $a_k$ . Если содержит, то процесс обрывается и  $a_k$  — регулярный

<sup>\*</sup> Элемент  $E$  полугруппы  $G$  называется единицей элемента  $A$ , если в  $G$  справедливы равенства  $AE = EA = A$ .

<sup>\*\*</sup> Предполагается, что среди определяющих соотношений (2) полугруппы  $G$  отсутствуют определяющие соотношения вида (3) (см. сноску на стр. 23).

элемент. Если нет, то записывают все основные схемы определяющих соотношений (2):

$$\left. \begin{array}{l} A_1 \rightarrow B_1, \quad B_1 \rightarrow A_1, \\ \dots \dots \dots \\ A_{s_0} \rightarrow B_{s_0}, \quad B_{s_0} \rightarrow A_{s_0}^* \end{array} \right\} \quad (5)$$

и переходят к следующей процедуре.

Этап I. Он содержит не более  $s_0 + 1$  шагов и перерабатывает единицу  $E_0$  образующего  $a_k$  и схемы (5) следующим образом.

$i$ -ый шаг ( $i = 1, 2, \dots, s_0$ ) состоит в том, что испытывают слово  $a_k E_{i-1}$  элементарными преобразованиями

$$A_i \rightarrow B_i, \quad B_i \rightarrow A_i \quad (6)$$

в той последовательности, которая описана ниже до выполнения одного из пунктов 1°—5°.

1°. Если одно из этих преобразований применимо к слову  $a_k E_{i-1}^q$  при некотором натуральном  $q$  и увеличивает степень  $a_k$  в этом слове, то алгоритм  $\Phi_k$  заканчивает свою работу и образующий  $a_k$  — регулярный элемент.

2°. Если одно из этих преобразований применимо к слову  $a_k E_{i-1}^q$  при некотором натуральном  $q$  и уничтожает образующий  $a_k$ , то действуют этим преобразованием  $a_k = a_k E_{i-1}^q \rightarrow M$ , где слово  $M$  не содержит  $a_k$ , и во всех определяющих соотношениях (2) заменяют  $a_k$  полученным словом  $M$ . В результате имеют изоморфную полугруппу  $G'$  с образующими  $a_1, a_2, \dots, a_{k-1}, a_{k+1}, \dots, a_n$  и определяющими соотношениями, полученными из (2) заменой образующего  $a_k$  словом  $M^{**}$ ). Работа алгоритма  $\Phi_k$  заканчивается.

3°. Если одно из этих преобразований применимо к слову  $a_k E_{i-1}^q$  при некотором натуральном  $q$  и, не изменяя степени  $a_k$ , порождает новые образующие, то действуют на  $a_k E_{i-1}^q$  этим преобразованием ( $a_k E_{i-1}^q \rightarrow a_k E_i$ ), исключают (6) из системы (5) и переходят к  $(i+1)$ -му шагу. Число  $q$  выбирают настолько большим, чтобы при этом преобразовании  $a_k E_{i-1}^q \rightarrow a_k E_i$  не исчезало ни одно образующее, входящее в  $E_{i-1}$ .

4°. Если одно из этих преобразований применимо к слову  $a_k E_{i-1}^q$  при некотором натуральном  $q$  и не изменяет его природу, то оставляя  $a_k E_{i-1}$  без изменения ( $a_k E_{i-1} \rightarrow a_k E_i$ ), исключают (6) из системы (5) и переходят к  $(i+1)$ -му шагу. В этом случае преобразование  $a_k E_{i-1} \rightarrow a_k E_i$  тавтологическое.

5°. Если ни одно из этих преобразований не применимо к слову  $a_k E_{i-1}^q$  ни при каком натуральном  $q$ , то оставляют  $a_k E_{i-1}$  без изменения ( $a_k E_{i-1} \rightarrow a_k E_i$ ) и переходят к  $(i+1)$ -му шагу. В этом случае преобразование  $a_k E_{i-1} \rightarrow a_k E_i$  тавтологическое.

Этими пунктами (1°—5°) исчерпываются все возможные случаи.

Пусть после  $s_0$ -го шага в системе (5) остается  $s_1$  ( $0 \leq s_1 \leq s_0$ ) строк и работа алгоритма  $\Phi_k$  еще не закончена. Следовательно, эти шаги перерабатывают единицу  $E_0$  образующего  $a_k$  в единицу  $E_{s_0}$  того же образующего.

\*) Для удобства вводим обозначение  $s_0 = s$ .

\*\*) Заметим, что среди определяющих соотношений полугруппы  $G'$  не будет определяющих соотношений вида (3), так как их по предположению не было среди определяющих соотношений полугруппы  $G$ .

Последний  $(s_0 + 1)$ -ый шаг этапа I состоит в том, что проверяют, какое из следующих трех условий имеет место: 1)  $s_1 = 0$ ; 2)  $s_1 = s_0^*$ ; 3)  $0 < s_1 < s_0$ . Если  $s_1 = 0$  или  $s_1 = s_0$ , то процесс  $\Phi_k$  обрывается. Если  $0 < s_1 < s_0$ , то переходят к следующему этапу.

Этап II. Он перерабатывает слово  $E_{s_0}$  и схемы, оставшиеся в системе (5) (их осталось  $s_1$  штук), таким же образом, как на этапе I перерабатывались слово  $E_0$  и схемы (5). Поэтому он содержит не более  $s_1 + 1$  шагов.

Пусть работа алгоритма  $\Phi_k$  не заканчивается внутри этапа II. Тогда первые  $s_1$  шагов этого этапа перерабатывают единицу  $E_{s_0}$  образующего  $a_k$  в единицу  $E_{s_0+s_1}$  того же образующего, а в системе (5) остается  $s_2$  ( $0 \leq s_2 \leq s_1$ ) строк.

Последний  $(s_1 + 1)$ -ый шаг этапа II состоит в проверке того, какое из следующих трех условий выполняется: 1)  $s_2 = 0$ ; 2)  $s_2 = s_1$ ; 3)  $0 < s_2 < s_1$ . В первых двух случаях процесс  $\Phi_k$  обрывается, в третьем переходит к следующему этапу III).

Аналогичным образом продолжается работа алгоритма  $\Phi_k$  и на последующих этапах. Конечность числа определяющих соотношений (2) гарантирует, что процесс  $\Phi_k$  оборвется.

§ 4. Целью настоящего параграфа является доказательство следующей теоремы.

*Теорема. Если работа алгоритма  $\Phi_k$  заканчивается после завершения  $p$  ( $p \geq 1$ ) полных этапов, то полугруппа  $G$  не регулярна.*

В случае, когда работа алгоритма  $\Phi_k$  заканчивается после завершения  $p$  ( $p \geq 1$ ) полных этапов, можно говорить, что в процессе работы алгоритма  $\Phi_k$  последовательно появляются единицы

$$E_1, E_2, \dots, E_{p-1} \\ \sum_{i=0}^{p-1} s_i$$

образующего  $a_k$ . Причем единицы  $E_1, \dots, E_{s_0}$  появляются на I этапе, единицы  $E_{s_0+1}, \dots, E_{s_0+s_1}$  на II этапе и т. д.

Предварительно рассмотрим несколько лемм.

*Лемма 4. Если работа алгоритма  $\Phi_k$  заканчивается после завершения  $p$  ( $p \geq 1$ ) полных этапов, то*

1) единицы  $E_i$ ,  $i = 0, 1, 2, \dots, \sum_{i=0}^{p-1} s_i$  образующего, получающиеся в ходе работы алгоритма, не содержат этого образующего;

2) все образующие, содержащиеся в единице  $E_l$ , содержатся и в единице  $E_j$  при  $0 \leq l < j \leq \sum_{i=0}^{p-1} s_i$ .

Доказательство очевидно, так как из условий леммы следует, что в течение всей работы алгоритма  $\Phi_k$  могут встретиться лишь случаи  $3^\circ - 5^\circ$  (иначе работа алгоритма  $\Phi_k$  закончилась бы внутри некоторого этапа).

*Лемма 5. Пусть работа алгоритма  $\Phi_k$  заканчивается после завершения  $p$  ( $p \geq 1$ ) полных этапов. Тогда если на некотором шаге работы этого алгоритма строка (6) была исключена из (5), то существует такое натуральное число  $q$ , что к слову  $a_k E_{\sum_{i=0}^{p-1} s_i}^q$  применимы оба элементар-*

*ных преобразования (6).*

\*) Предполагается, что  $s_0 > 0$ .

Доказательство. Если выполняется условие леммы, то одно из преобразований (6), например  $A_i \rightarrow B_i$  (или  $B_i \rightarrow A_i$ ), было применено на некотором шаге алгоритма  $\Phi_k$ :

$$a_k E_l^q \rightarrow a_k E_{l+1}, \quad l < \sum_{t=0}^{p-1} s_t.$$

Поэтому на основании леммы 4 указанное преобразование применимо и к словам  $a_k E_l^q$ , где  $l \leq i \leq \sum_{t=0}^{p-1} s_t$ , при некотором натуральном  $q$ . На том же основании преобразование  $B_i \rightarrow A_i$  (или  $A_i \rightarrow B_i$ ) применимо к словам  $a_k E_i^q$ , где  $l+1 \leq i \leq \sum_{t=0}^{p-1} s_t$  при некотором натуральном  $q$ . Отсюда и следует утверждение леммы 5.

Непосредственно из леммы 5 следует

Лемма 6. При выполнении условий леммы 5 ни одно из указанных элементарных преобразований (6) не изменяет природы слова  $a_k E_{\sum_{t=0}^{p-1} s_t}^q$  ни

при каком натуральном  $q$ .

Доказательство. Если бы одно из преобразований (6), например  $A_i \rightarrow B_i$ , изменило природу слова  $a_k E_{\sum_{t=0}^{p-1} s_t}^q$  при некотором натуральном  $q$ , то преобразование  $B_i \rightarrow A_i$  было бы не применимо к слову  $a_k E_{\sum_{t=0}^{p-1} s_t}^r$  ни при каком натуральном  $r$ , что противоречит утверждению леммы 5.

Лемма 7. Пусть работа алгоритма  $\Phi_k$  заканчивается после завершения  $p$  полных этапов. Тогда если в результате работы алгоритма  $\Phi_k$  некоторая строка (6) оказалась не исключенной из системы (5), то ни одно из этих преобразований (6) не применимо к слову  $a_k E_{\sum_{t=0}^{p-1} s_t}^q$  ни при ка-

ком натуральном  $q$ .

Доказательство. Если некоторая строка (6) оказалась не исключенной из системы (5) после окончания работы алгоритма  $\Phi_k$ , то это означает, что последний  $p$ -ый этап закончился случаем  $s_{p-1} = s_p$ , т. е. во время работы последнего этапа встречался лишь случай 5°. А поэтому все шаги последнего этапа ( $p$ ) состояли из тавтологических преобразований:

$$a_k E_{s_0 + \dots + s_{p-2}} \rightarrow a_k E_{s_0 + \dots + s_{p-2} + 1} \rightarrow \dots \rightarrow a_k E_{s_0 + \dots + s_{p-2} + s_{p-1}}.$$

Это означает, что ни одно из элементарных преобразований, оставшихся в системе (5) после  $(p-1)$ -го этапа, не применимо к слову  $a_k E_{\sum_{t=0}^{p-2} s_t}^q$ , а поэтому и к слову  $a_k E_{\sum_{t=0}^{p-1} s_t}^q$  ни при каком натуральном  $q$ .

Однако строка (6) содержится среди элементарных преобразований, оставшихся после  $(p-1)$ -го этапа работы алгоритма  $\Phi_k$ . Лемма 7 доказана.

Для завершения доказательства нашей теоремы остается лишь проверить, что единица  $E_{p-1}$  образующего  $a_k$  обладает свойством  $V_k$ .

$$\sum_{t=0} s_t$$

Прежде всего на основании леммы 4 единица  $E_{p-1}$  образующего  $a_k$

$$\sum_{t=0} s_t$$

не содержит этого образующего.

Рассмотрим произвольное элементарное преобразование  $A_i \rightarrow B_i$  (или  $B_i \rightarrow A_i$ ), где  $i$  — одно из чисел  $1, 2, \dots, s$ .

Если в результате работы алгоритма  $\Phi_k$  строка

$$A_i \rightarrow B_i, \quad B_i \rightarrow A_i$$

была исключена из (5), то в силу лемм 5 и 6 преобразование  $A_i \rightarrow B_i$  ( $B_i \rightarrow A_i$ ) применимо к слову  $a_k E_{p-1}^q$  при некотором натуральном  $q$ ,

$$\sum_{t=0} s_t$$

но не изменяет его природы.

Если же в результате работы алгоритма  $\Phi_k$  указанная строка оказалась не исключенной из (5), то в силу леммы 7 преобразование  $A_i \rightarrow B_i$  ( $B_i \rightarrow A_i$ ) не применимо к слову  $a_k E_{p-1}^q$  ни при каком натуральном  $q$ .

$$\sum_{t=0} s_t$$

рациональном  $q$ .

Это и доказывает, что единица  $E_{p-1}$  образующего  $a_k$  обладает свой-

$$\sum_{t=0} s_t$$

ством  $V_k$ , а поэтому на основании леммы 3 полугруппа  $G$  не регулярна. Доказательство теоремы закончено.

Будем говорить об алгоритме  $\Phi_k$ , что он применим к исходным данным полугруппы  $G$ , среди определяющих соотношений которой отсутствуют определяющие соотношения вида (3).

Итак, в результате применения алгоритма  $\Phi_k$  к исходным данным полугруппы  $G$  указанного вида обнаруживают одно из следующих трех утверждений:

- 1)  $a_k$  — регулярный элемент в  $G$ ;
- 2)  $a_k$  — не регулярный элемент в  $G$ ;
- 3)  $a_k$  — выражается через другие образующие полугруппы  $G$ , т. е.  $a_k = M$ , где слово  $M$  не содержит образующего  $a_k$ .

Иными словами, в результате работы алгоритма  $\Phi_k$  через конечное число шагов обнаруживают или регулярность образующего  $a_k$ , или нерегулярность полугруппы  $G$  или переходят к изоморфной полугруппе  $G'$  с меньшим числом образующих.

**Замечание.** Используя алгоритм  $\Phi_k$ , легко построить алгоритм, позволяющий определить, делится ли образующий элемент  $a_k$  на произвольное слово  $A$  (в случае, когда  $a_k$  не выражается через другие образующие).

§ 5. Теперь сформулируем алгоритм  $\psi$ , распознающий регулярность полугруппы  $G$ , заданной образующими (1) и определяющими соотношениями (2). Искомый алгоритм  $\psi$  описывается следующим образом.

$i$ -ый шаг ( $i = 1, 2, \dots, s$ ) состоит в том, что берут определяющее соотношение  $A_i = B_i$  и смотрят, имеет ли оно вид (3). Если не имеет, то переходят к следующему шагу алгоритма  $\psi$ . Если имеет, то, заменив в остальных определяющих соотношениях  $a_j$  словом  $N$ , исклю-

\*) Очевидно, если все образующие, входящие в слово  $M$ , регулярны, то и  $a_k$  регулярен.

чают соотношение  $A_i = B_i$  из системы (2), а образующий элемент  $a_i$  из системы (1) и переходят к следующему шагу алгоритма  $\psi$ .

Совершив  $s$  таких шагов, получают полугруппу  $G^{(1)} (\cong G)$ , заданную образующими  $a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_r}$ ,  $r \leq n$ , и определяющими соотношениями  $A'_i = B'_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ ,  $m \leq s$ .

$(s+k)$ -ый шаг ( $k = 1, 2, \dots, r-1$ ) состоит в том, что применяют алгоритм  $\Phi_{i_k}$  к исходным данным полугруппы  $G^{(k)}$ .

Если в результате работы алгоритма  $\Phi_{i_k}$  обнаружится регулярность образующего  $a_{i_k}$ , то, обозначив через  $G^{(k+1)}$  полугруппу  $G^{(k)}$ , переходят к следующему шагу алгоритма  $\psi$ .

Если в результате работы алгоритма  $\Phi_{i_k}$  получают полугруппу  $G^{(k+1)}$ , изоморфную полугруппе  $G^{(k)}$ , то переходят к следующему шагу алгоритма  $\psi$ .

Если в результате работы алгоритма  $\Phi_{i_k}$  обнаружится нерегулярность полугруппы  $G^{(k)} (\cong G)$ , то работа алгоритма  $\psi$  заканчивается.

Последний  $(s+r)$ -ый шаг алгоритма  $\psi$  состоит в том, что применяют алгоритм  $\Phi_{i_r}$  к исходным данным полугруппы  $G^{(r)}$  и смотрят, каков результат этого применения.

Если в результате работы алгоритма  $\Phi_{i_r}$  обнаружится регулярность образующего  $a_{i_r}$ , то полугруппа  $G$  регулярна, так как  $G \cong G^{(r)}$ , а в последней полугруппе ( $G^{(r)}$ ) все образующие элементы регулярны.

Если в результате работы алгоритма  $\Phi_{i_r}$  обнаружится нерегулярность образующего  $a_{i_r}$ , то полугруппа  $G (\cong G^{(r)})$  не регулярна.

Если в результате работы алгоритма  $\Phi_{i_r}$  обнаружится, что  $a_{i_r}$  выражается через другие образующие полугруппы  $G^{(r)}$ , то  $G$  — регулярная полугруппа, так как в полугруппе  $G^{(r)} (\cong G)$  все остальные образующие регулярны.

В заключение отметим, что алгоритм  $\Phi_{i_k}$  применим к исходным данным полугруппы  $G^{(k)}$  для всякого  $k = 1, 2, \dots, r$ , так как среди определяющих соотношений полугруппы  $G^{(k)}$  отсутствуют определяющие соотношения вида (3).

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Новиков П. С. Труды Мат. ин-та им. Стеклова АН СССР, 44, 1955, стр. 1—143.
2. Марков А. А. Труды Мат. ин-та им. Стеклова АН СССР, 42, 1954, стр. 1—376.
3. Адян С. И. Труды математического общества, 6. М., 1957, стр. 231—298.
4. Мальцев А. И. Уч. записки Ивановского пед. ин-та, т. XVIII, 1958, стр. 49—60.
5. Ершов Ю. Л., Лавров И. А., Тайманов А. Д., Тайцлин М. А. УМН, т. XX, в. 4, 1965.
6. Емеличев В. А. Уч. записки Шуйского пед. ин-та, т. VI, 1958, стр. 227—242.
7. Емеличев В. А. ДАН СССР, 144, № 2, 1962.
8. Емеличев В. А. Сибирский математический журнал, т. IV, № 4, 1963.
9. Емеличев В. А. ДАН БССР, т. IX, № 11, 1965.

Поступило в редакцию 27.X 1965

\*) Очевидно, что те образующие, которые были регулярны в полугруппе  $G^{(k)}$ , будут регулярны и в полугруппе  $G^{(k+1)}$ .

Н. А. ЛЕПЕШИНСКИЙ

### К ВОПРОСУ УПОРЯДОЧЕНИЯ ОБРАБОТКИ ДЕТАЛЕЙ

Рассматривается следующая задача теории расписаний. На  $m$  станках по одному и тому же технологическому маршруту  $(1, 2, \dots, m)$  должны быть обработаны  $n$  деталей.

Известно время обработки  $i$ -й детали на  $j$ -м станке  $t_{ij} > 0$ . Предполагается, что

а) на одном станке не могут обрабатываться две детали одновременно;

б) одна деталь не может обрабатываться на двух станках одновременно;

в) для каждой детали момент начала обработки на  $j+1$ -м станке совпадает с моментом окончания обработки на  $j$ -м станке.

Пусть  $v_i$  — момент начала обработки  $i$ -й детали на первом станке. Тогда в силу в) вектор

$$(v, k) = (v_{k_1}, v_{k_2}, \dots, v_{k_n})$$

определяет расписание обработки деталей, где  $v_{k_i}$  подчиняются неравенству

$$v_{k_1} < v_{k_2} < \dots < v_{k_n}$$

и таковы, что выполняются условия а) — в), а  $k = \{k_1, k_2, \dots, k_n\}$  — перестановка чисел  $1, 2, \dots, n$ .

Введем величину

$$T_j(v, k) = v_{k_n} + \sum_{h=1}^j t_{k_n h} - v_{k_1},$$

которая определяет общее время завершения обработки всех деталей на станке  $j$  ( $j = 1, 2, \dots, m$ ) при описанных выше условиях.

Естественно возникает задача выбрать такое расписание, при котором время обработки  $T_j(v, k)$  окажется минимальным.

Прежде всего мыслимы тривиальные улучшения расписания  $(v, k)$ , сохраняющие перестановку  $k$  неизменной, а именно число  $v_{k_{i+1}} > v_{k_i}$  (для всех  $i = 1, 2, \dots, n-1$ ) можно выбирать настолько близким к  $v_{k_i}$ , насколько позволяют условия а) — в).

Если расписание не допускает таких улучшений, то будем называть его тривиально неуплотняемым.

Очевидно, тривиально неуплотняемое расписание задается просто перестановкой

$$k = \{k_1, k_2, \dots, k_n\},$$

другими словами, порядком, в котором обрабатываются детали.

Таким образом, всего имеется  $n!$  тривиально неуплотняемых расписаний. Поставленная задача сводится к определению по крайней мере одной такой перестановки  $k_0$ , при которой время

$$T_j(v, k_0) = T_j(k_0) = \min_k T_j(k).$$

Этот порядок обработки будем называть оптимальным для станка  $j$ .

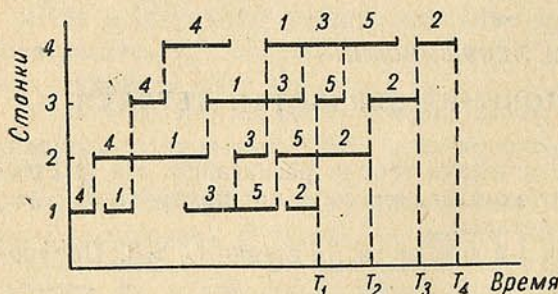


Диаграмма Ганта

В дальнейшем, если не оговорено особо, рассматриваются тривиально неуплотняемые расписания, причем момент начала обработки  $k_i$ -й детали на первом станке принимается равным нулю.

При построении и изучении графов приняты обозначения и термины из [1].

Для наглядности часто используется так называемая

диаграмма Ганта, которая отражает величины времени обработки  $t_{ij}$  и порядок запуска деталей на всех станках.

Например, при запуске пяти деталей в обработку на четырех станках в порядке  $\{4, 1, 3, 5, 2\}$  и при некоторых фиксированных  $t_{ij}$  ( $i=1, 2, 3, 4, 5$ ;  $j=1, 2, 3, 4$ ) диаграмма может выглядеть следующим образом (рисунок).

Задача минимизации общего времени обработки всех деталей  $T_m(k)$  рассмотрена в [2—5]. В § 1 настоящей заметки к задаче коммивояжера сводится задача минимизации общего времени обработки всех деталей  $T_j(k)$  для любого  $j=1, 2, \dots, m$ . Результаты этого параграфа используются в § 2 для изучения условий построения расписания при требовании непрерывной с точностью до  $t$  ( $t \geq 0$ ) загрузки станков  $j_1, j_2, \dots, j_l$  ( $1 \leq l \leq m$ ). В § 3 отмечены некоторые свойства расписаний для частных случаев.

§ 1. Пусть  $p_{k_i k_{i+1}}^{(j)}$  — величина простоя станка  $j$  ( $j=1, 2, \dots, m$ ) между обработкой двух соседних в расписании деталей  $k_i$  и  $k_{i+1}$  ( $i=1, 2, \dots, n-1$ ). Введем еще  $p_{k_0 k_1}^{(j)}$ , положив

$$p_{k_0 k_1}^{(j)} = \sum_{h=1}^{j-1} t_{k, h}.$$

Утверждение 1. Задача минимизации  $T_j(k)$  эквивалентна задаче нахождения порядка движения деталей с минимальной суммой простоев на  $j$ -м станке.

В самом деле для любого порядка  $k$

$$T_j(k) = \sum_{l=k_1, k_2, \dots, k_n} t_{lj} + \sum_{i=0}^{n-1} p_{k_i k_{i+1}}^{(j)}.$$

Легко видеть, что  $\sum_{l=k_1, \dots, k_n} t_{lj}$  не зависит от перестановки  $k$ .

При  $j=m$  это утверждение неоднократно встречалось в литературе для различных задач теории расписаний.

Определение 1. Назовем обработку последовательной относительно пары деталей  $k_i$  и  $k_{i+1}$ , если  $k_{i+1}$ -я деталь начинает обрабатываться на первом станке в момент окончания обработки  $k_i$ -й детали на последнем станке  $m$ .

Пусть  $\Pi_{k_i k_{i+1}}^{(j)}$  — величина простоя станка  $j$  между последовательной обработкой деталей  $k_i$  и  $k_{i+1}$ .

Утверждение 2.

$$\Pi_{k_i k_{i+1}}^{(j)} = \sum_{h=j+1}^m t_{k_i h} + \sum_{h=1}^{j-1} t_{k_{i+1} h} \quad (j = 1, 2, \dots, m), \quad (1)$$

где для  $j = 1$   $\sum_{h=1}^0 t_{k_i h} = 0$ , а для  $j = m$   $\sum_{h=m+1}^m t_{k_i h} = 0$ .

Для доказательства достаточно рассмотреть последовательную обработку деталей  $k_i$  и  $k_{i+1}$  на диаграмме Ганта.

Мы можем уплотнить последовательную относительно  $k_i$  и  $k_{i+1}$  обработку, сдвигая влево на величину  $T_{k_i k_{i+1}}$  момент начала обработки  $k_{i+1}$ -й детали, где

$$T_{k_i k_{i+1}} = \min_{1 < l < m} \Pi_{k_i k_{i+1}}^{(l)}. \quad (2)$$

Тогда

$$p_{k_i k_{i+1}}^{(j)} = \Pi_{k_i k_{i+1}}^{(j)} - T_{k_i k_{i+1}} \quad (j = 1, 2, \dots, m). \quad (3)$$

Для любого фиксированного  $j$  построим полный симметрический граф, состоящий из  $n+1$  вершины, обозначенных  $0, 1, 2, \dots, n$ . Припишем дугам, соединяющим вершины  $k_i$  и  $k_{i+1}$ , длину  $p_{k_i k_{i+1}}^{(j)}$ . Дуги  $(0 k_i)$

имеют длину  $\Pi_{0 k_i}^{(j)} = \sum_{h=1}^{j-1} t_{k_i h}$  ( $k_i = 1, 2, \dots, n$ ), так как принимается  $T_{0 k_i} = 0$ .

Длину дуг  $(k_{i+1} 0)$  ( $k_{i+1} = 1, 2, \dots, n$ ) естественно считать равной нулю.

Таким образом, задача минимизации суммарных простоев на станке  $j$  сводится к нахождению кратчайшего гамильтонова контура (задача коммивояжера), начинающегося в точке  $0$ , на построенном графе.

Длины дуг построенного графа задают в виде матрицы

$$p^{(j)} = [p_{k_i k_{i+1}}^{(j)}]_{k_i, k_{i+1} = 0, 1, 2, \dots, n}, \quad (4)$$

элементы которой для  $k_i \neq k_{i+1}$  вычисляются по формулам (2), (3), а элементы, стоящие на главной диагонали, считают достаточно большими числами.

§ 2. Определение 2. Назовем станок непрерывно загруженным с точностью до  $t$ , если после начала его работы наибольшее время простоя в ожидании очередной детали не превышает  $t \geq 0$ .

Рассмотрим задачу отыскания хотя бы одного такого порядка запуска деталей для модели, описанной в начале работы, при котором станки с номерами  $j_1, j_2, \dots, j_l$  ( $1 \leq l \leq m$ ) предполагаются непрерывно загруженными с точностью до  $t$ .

Для любой пары деталей  $i$  и  $h$  и станка  $j_h$  из рассматриваемого набора в расписании, где эти детали являются соседними, с помощью (3) вычисляется величина простоя  $p_{ih}^{(j_h)}$ .

В соответствии с целью задачи естественно сравнить  $t$  и  $p_{ih}^{(j_h)}$ . Здесь возможны два случая:

1)  $p_{ih}^{(j_h)} \leq t$ , т. е. пара деталей  $i$  и  $h$ , обрабатываемая на станке  $j_h$ , непрерывно с точностью до  $t$  загружает этот станок;

2)  $p_{ih}^{(jk)} > t$ , в этом случае порядок обработки  $\{i, h\}$  не дает непрерывную с точностью до  $t$  загрузку станка  $j_k$ .

Построим  $n \times n$  матрицу

$$R_{jk} = [r_{ih}]_{i,h},$$

где  $r_{ii} = 0$ ;  $r_{ih} = 1$ , если  $p_{ih}^{(jk)} \leq t$ ;  $r_{ih} = 0$ , если  $p_{ih}^{(jk)} > t$ .

Теперь определим граф  $\Gamma_{j_k}$ , множество вершин которого совпадает с множеством номеров деталей. Построим дуги графа  $(i, h)$ , такие и только такие, что  $r_{ih} = 1$ , причем дуга исходит из вершины  $i$  и заходит в вершину  $h$ .

Очевидно, что элементарный путь на графе  $\Gamma_{j_k}$ , проходящий через вершины  $i_1, i_2, \dots, i_g$ , является частью расписания, в котором во всяком случае последовательность деталей  $\{i_1, i_2, \dots, i_g\}$  загружает станок  $j_k$  с точностью до  $t$ .

Для решения задачи непрерывной с точностью до  $t$  загрузки станков  $j_1, j_2, \dots, j_l$  введем операцию пересечения графов  $\Gamma_{j_1}, \Gamma_{j_2}, \dots, \Gamma_{j_l}$ , результатом которой является граф  $\Gamma^*$  с теми же вершинами и дугами, общими для всех графов  $\Gamma_{j_1}, \Gamma_{j_2}, \dots, \Gamma_{j_l}$ . Нетрудно видеть, что графу  $\Gamma^*$  соответствует матрица  $R^* = R_{j_1} \times R_{j_2} \times \dots \times R_{j_l}$ , где операция  $\times$  означает поэлементное умножение матриц.

Ясно, что элементарный путь на графе  $\Gamma^*$ , проходящий через вершины  $i_1, i_2, \dots, i_g$ , является частью расписания, в котором по крайней мере последовательность деталей  $\{i_1, i_2, \dots, i_g\}$  загружает станки  $j_1, j_2, \dots, j_l$  непрерывно с точностью до  $t$ .

Итак, задача нахождения хотя бы одного порядка запуска деталей в условиях а) — в), при котором станки  $j_1, j_2, \dots, j_l$  непрерывно с точностью до  $t$  загружены, сводится к нахождению хотя бы одного гамильтонова пути на графе  $\Gamma^*$ . Отсутствие такого пути на  $\Gamma^*$  позволяет утверждать, что не существует расписания, удовлетворяющего условиям задачи.

§ 3. Отметим следующее свойство.

Если для технологического маршрута  $(1, 2, \dots, m)$  расписание  $k = \{k_1, k_2, \dots, k_n\}$  имеет длину  $T_m(k)$ , то расписание  $k' = \{k_n, k_{n-1}, \dots, k_1\}$  для обратного технологического маршрута  $(m, m-1, \dots, 1)$  с прежними временами обработок имеет длину  $T_m(k') = T_m(k)$ .

Для доказательства этого факта достаточно сравнить диаграммы Ганта для расписаний  $k$  и  $k'$ .

Рассмотрим случай двух станков. Обозначим время обработки  $i$ -й детали ( $i = 1, 2, \dots, n$ )  $a_i$  и  $b_i$  соответственно для станков  $A$  и  $B$ . Элементы матрицы (4) тогда будут

$$p_{k_i k_{i+1}}^{(B)} = \max(a_{k_{i+1}} - b_{k_i}, 0), \quad k_i, k_{i+1} = 0, 1, \dots, n. \quad (5)$$

Требуется определить оптимальное расписание для станка  $B$  в условиях а) — в).

Замечание. Оптимальное расписание для  $m=2$  в задаче без ограничения в) дает алгоритм Джонсона [6]. Но этот алгоритм, вообще говоря, не приводит к оптимальному расписанию в рассматриваемой модели. Например, если  $a_1 = 1, b_1 = 5, a_2 = 2, b_2 = 4, a_3 = 5, b_3 = 5$ , то по алгоритму Джонсона оптимальный порядок (для задачи без условия в)) будет  $\{1, 2, 3\}$ . Перебор всевозможных случаев для задачи с условием в) дает оптимальное расписание  $\{1, 3, 2\}$ .

Утверждение 3. Если  $a_i \leq a_1, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$ , то имеется оптимальное расписание, у которого  $i$ -я деталь идет первой.

Если  $p(k_1, \dots, k_i, \dots, k_n)$  — величина суммарных простоев на станке  $B$  для произвольного расписания  $\{k_1, \dots, k_i, \dots, k_n\}$ , у которого  $i$ -я деталь идет  $k_i$ -й (т. е.  $a_{k_i} = a_i$ ), то покажем, что

$$p(k_i, \dots, k_n, k_1, \dots, k_{i-1}) \leq p(k_1, \dots, k_i, k_{i+1}, \dots, k_n). \quad (6)$$

Но

$$p(k_1, \dots, k_i, \dots, k_n) = p_{0k_1}^{(B)} + p_{k_1k_2}^{(B)} + \dots + p_{k_{i-1}k_i}^{(B)} + p_{k_ik_{i+1}}^{(B)} + \dots + p_{k_{n-1}k_n}^{(B)}$$

и

$$p(k_i, \dots, k_n, k_1, \dots, k_{i-1}) = p_{0k_i}^{(B)} + p_{k_ik_{i+1}}^{(B)} + \dots + p_{k_{n-1}k_n}^{(B)} + \dots + p_{k_{i-2}k_{i-1}}^{(B)}.$$

Следовательно, (6) можно записать в виде

$$p_{0k_i}^{(B)} + p_{k_{n-1}k_n}^{(B)} \leq p_{0k_1}^{(B)} + p_{k_{i-1}k_i}^{(B)}$$

или, учитывая (5),

$$a_{k_i} + \max(a_{k_i} - b_{k_n}, 0) \leq a_{k_1} + \max(a_{k_i} - b_{k_{i-1}}, 0).$$

Как отмечено выше,  $a_{k_i} = a_i$ , а  $\max(a_i - b_{k_{i-1}}, 0) = 0$  по предположению.

Но  $a_i + \max(a_{k_i} - b_{k_n}, 0) \leq a_{k_i}$  всегда выполняется, потому что если  $\max(a_{k_i} - b_{k_n}, 0) = 0$ , то  $a_i \leq a_{k_i}$  верно по предположению, а если  $\max(a_{k_i} - b_{k_n}, 0) = a_{k_i} - b_{k_n}$ , то  $a_i + a_{k_i} - b_{k_n} \leq a_{k_i}$ , что тоже верно.

Утверждение 3. а. Если  $b_i \leq a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_{i-1}, b_{i+1}, \dots, b_n$ , то имеется оптимальное расписание, у которого  $i$ -я деталь идет последней.

Доказательство аналогично предыдущему, если рассматривать обработку деталей по технологическому маршруту  $(B, A)$  с временами обработки  $b_i, a_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) соответственно и учесть свойство, отмеченное в начале параграфа.

Автор выражает благодарность Д. А. Супруненко за внимание к работе.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Берж К. Теория графов и ее применение. ИЛ, М., 1962.
2. Танаев В. С. Вестн АН БССР, сер. физ.-техн., № 4, 1964.
3. Шкурба В. В. Теория расписаний, II. Общие подходы и методы моделирования. Семинар «Экономическая кибернетика и исследование операций», КДНТН. Киев, 1964.
4. Pichler J. Unternehmensforschung, 4, № 3, 1960.
5. Seiffart E. Fertigungstechnik und Betrieb, 13, № 9, 1963.
6. Johnson S. M. Naval Research Logistics Quarterly, 1, № 1, 1954.

Поступило в редакцию 22.XI 1965

Р. П. ХАЦКЕВИЧ

К ТЕОРИИ ЛИНИЙ В 4-МЕРНОМ АФФИННОМ ПРОСТРАНСТВЕ

§ 1. УРАВНЕНИЯ ИНФИНИТЕЗИМАЛЬНЫХ СМЕЩЕНИЙ РЕПЕРА  $(A, e_0, e_1, e_2, e_3)$

$$\begin{aligned} d\bar{A} &= \omega^i \bar{e}_i \\ d\bar{e}_i &= \omega^j \bar{e}_j \end{aligned} \quad (i, j = 0, 1, 2, 3), \quad (1)$$

где  $\omega^i, \omega_j^i$  — формы Праффа.

Отнесем начало координат к точке кривой  $A(\sigma)$ , а вектор  $\bar{e}_0$  — к касательной  $d\bar{A} = \omega^0 \bar{e}_0$

$$\omega^\alpha = 0, \text{ где } \alpha = 1, 2, 3. \quad (2)$$

После внешнего дифференцирования системы (2) и применения леммы Картана

$$da_1^\alpha = 2a_1^\alpha \omega_0^0 - a_1^\beta \omega_\beta^\alpha + a_2^\alpha \omega^0. \quad (3)$$

После продолжения системы (3):

$$\begin{aligned} da_2^\alpha &= 3a_2^\alpha \omega_0^0 + 3a_1^\alpha a_1^\beta \omega_\beta^0 - a_2^\beta \omega_\beta^\alpha + a_3^\alpha \omega^0, \\ da_3^\alpha &= 4a_3^\alpha \omega_0^0 + 6a_2^\alpha a_1^\beta \omega_\beta^0 + 4a_1^\alpha a_2^\beta \omega_\beta^0 - a_3^\beta \omega_\beta^\alpha + a_4^\alpha \omega^0, \\ da_4^\alpha &= 5a_4^\alpha \omega_0^0 + 10a_3^\alpha a_1^\beta \omega_\beta^0 + 10a_2^\alpha a_2^\beta \omega_\beta^0 - 5a_4^\beta \omega_\beta^0 + a_5^\alpha \omega^0, \\ da_5^\alpha &= 6a_5^\alpha \omega_0^0 + 15a_4^\alpha a_1^\beta \omega_\beta^0 + 20a_3^\alpha \omega_\beta^0 + 15a_2^\alpha a_3^\beta \omega_\beta^0 + \\ &+ 6a_4^\beta a_1^\alpha \omega_\beta^0 - a_5^\beta \omega_\beta^0 + a_6^\alpha \omega^0. \end{aligned} \quad (4)$$

Полагая в уравнениях (3), (4)  $a_1^1 = a_2^2 = 1$ ;  $a_1^2 = a_1^3 = a_2^1 = a_2^3 = 0$ ;  $a_3^3 = 1$ ;  $a_3^1 = a_3^2 = a_4^1 = a_4^2 = a_4^3 = 0$ ;  $a_5^3 = -10\varepsilon$ ;  $\varepsilon = \pm 1$

и вводя обозначения  $\frac{a_6^3 - 3a_5^2}{-20\varepsilon} = k_1$ ;  $-\frac{a_5^2}{10} = k_2$ ;  $-\frac{a_5^1}{10} = k_3$ , получаем:

$$\begin{aligned} d\bar{A} &= \omega_0^0 \bar{e}_0, \\ d\bar{e}_0 &= k_1 \omega^0 \bar{e}_0 + \omega^0 \bar{e}_1, \\ d\bar{e}_1 &= \varepsilon \omega^0 \bar{e}_0 + 2k_1 \omega^0 \bar{e}_1 + \omega^0 \bar{e}_2, \\ d\bar{e}_2 &= k_2 \omega^0 \bar{e}_0 + 3\varepsilon \omega^0 \bar{e}_1 + 3k_1 \omega^0 \bar{e}_2 + \omega^0 \bar{e}_3, \\ d\bar{e}_3 &= k_3 \omega^0 \bar{e}_0 + 4k_2 \omega^0 \bar{e}_1 + 6\varepsilon \omega^0 \bar{e}_2 + 4k_1 \omega^0 \bar{e}_3. \end{aligned} \quad (5)$$

При этом из рассмотрения исключены: 1) прямая линия ( $a_1^1 = a_1^2 = a_1^3 = 0$ ); 2) линия в двумерной плоскости ( $a_2^1 = a_2^2 = a_2^3 = 0$ ); 3) линия в гиперплоскости ( $a_3^1 = a_3^2 = a_3^3 = 0$ ).

Тогда уравнение линии в каноническом разложении:

$$\begin{aligned}
 x^0 &= \sigma + \frac{k_1}{2} \sigma^2 + \frac{k_1^{(1)} + k_1^{(2)} + \varepsilon}{6} \sigma^3 + \\
 &+ \frac{k_1^{(2)} + 3k_1 k_1^{(1)} + k_1^3 + 4k_1 \varepsilon + k_2}{24} \sigma^4 + [5], \\
 x^1 &= \frac{1}{2} \sigma^2 + \frac{k_1}{2} \sigma^3 + \frac{4k_1^{(1)} + 7k_1^2 + 4\varepsilon}{24} \sigma^4 + [5], \\
 x^2 &= \frac{1}{6} \sigma^3 + \frac{k_1}{4} \sigma^4 + [5], \\
 x^3 &= \frac{1}{24} \sigma^4 + \frac{k_1}{12} \sigma^5 + [6],
 \end{aligned} \tag{6}$$

где  $k^i = \frac{d^i k}{d \sigma^i}$ , а [6] — остаток ряда, начиная с членов шестого порядка.

Оставляя первые члены в разложении (6), получаем уравнение соприкасающейся алгебраической линии четвертого порядка:

$$\begin{aligned}
 x^0 &= \sigma, \\
 x^1 &= \frac{1}{2} \sigma^2, \\
 x^2 &= \frac{1}{6} \sigma^3, \\
 x^3 &= \frac{1}{24} \sigma^4.
 \end{aligned} \tag{7}$$

## § 2. ОТНОШЕНИЕ ВЫБРАННОГО КАНОНИЧЕСКОГО РЕПЕРА К ЛИНИИ

1. Легко проверить, что векторы  $d\bar{A}$  и  $d^2\bar{A}$  лежат в координатной гиперплоскости  $\{A, \bar{e}_0, \bar{e}_1, \bar{e}_3\}$  и  $d\bar{A}, d^2\bar{A}, d^3\bar{A}$  — в гиперплоскости  $\{A, \bar{e}_0, \bar{e}_1, \bar{e}_2\}$ .

2. Линия  $A(\sigma)$  расположена по одну сторону от координатной гиперплоскости  $(A, \bar{e}_0, \bar{e}_1, \bar{e}_2)$  и по разные стороны относительно гиперплоскости  $(A, \bar{e}_0, \bar{e}_1, \bar{e}_3)$  (в достаточно малой окрестности точки).

3. Через каждую точку дуги  $A(\sigma)$  в достаточно малой окрестности начальной точки  $A$  проходит единственная хорда с серединой в соприкасающейся гиперплоскости  $(A, \bar{e}_0, \bar{e}_1, \bar{e}_3)$ .

4. Спроектируем кривую  $A(\sigma)$  на гиперплоскость  $x^3 = 0$  параллельно вектору  $\bar{e}_3$ . Справедлива

**Теорема 1.** *Линия  $P(\sigma)$  — проекция линии  $A(\sigma)$  на соприкасающуюся гиперплоскость  $x^3 = 0$  имеет репер  $(A, \bar{e}_0, \bar{e}_1, \bar{e}_2)$  своим каноническим репером.*

Его отношение к линии  $P(\sigma)$  рассмотрено в работе [1].

5. Рассмотрим проекцию  $A(\sigma)$  на двумерную координатную плоскость  $x^2 = 0$ ,  $x^0 = 0$  параллельно двумерной плоскости  $x^1 = 0$ ,  $x^3 = 0$ . Получим линию  $L(\sigma)$ :

$$\begin{aligned}x^1 &= \frac{1}{2}\sigma^2 + [3], \\x^2 &= \frac{1}{24}\sigma^4 + [5].\end{aligned}\quad (8)$$

Соприкасающаяся с ней парабола  $6x^2 = x^{1^2}$  имеет ось  $Ax^1$  своей касательной в вершине параболы, а ось  $Ax^3$  является ее диаметром.

Поскольку точки  $E_1, E_2, E_3$  уже известны (теорема 1), то можно найти точку  $E_3$ : пересечение параболы (8) с прямой  $x^1 = \sqrt{6}$ ,  $x^2 = 0$ ,  $x^3 = 0$  даст точку  $L(0, \sqrt{6}, 1, 0)$ , а ее проекция на ось  $Ax^3$  параллельно оси  $Ax^1$  даст  $E_3$ .

6. Пусть  $B(\sigma)$  — линия, образованная серединами хорд кривой  $A(\sigma)$ . Назовем ее диаметром линии  $A(\sigma)$  [3].

Теорема 2. *Ось  $Ax^1$  является касательной к диаметру  $B(\sigma)$  в начальной точке  $A$ .*

Действительно, пусть  $P_1(\sigma)$  и  $P_2(\sigma)$  — концы хорды линии  $A(\sigma)$ , середина которой лежит в гиперплоскости  $x^2 = 0$  (см. п. 2), и пусть  $(y^0, y^1, 0, y^3)$  — координаты этой середины. Тогда

$$\begin{aligned}y^0 &= \frac{x_1^0 + x_2^0}{2} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} + \frac{k_1}{4}(\sigma_1^2 + \sigma_2^2) + [3], \\y^1 &= \frac{x_1^1 + x_2^1}{2} = \frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}{2} + \frac{k_1}{4}(\sigma_1^3 + \sigma_2^3) + [4], \\y^2 &= 0 = \frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}{12} + \frac{k_1}{8}(\sigma_1^4 + \sigma_2^4) + [5], \\y^3 &= \frac{x_1^3 + x_2^3}{2} = \frac{\sigma_1^4 + \sigma_2^4}{48} + \frac{k_1}{24}(\sigma_1^5 + \sigma_2^5) + [6].\end{aligned}\quad (10)$$

Из третьего уравнения системы (10) имеем:

$$\sigma_1 + \sigma_2 = -\frac{k_1}{2}(\sigma_1^2 + \sigma_2^2) + [3] \text{ и } \lim_{\sigma_1 \rightarrow 0} \frac{\sigma_1}{\sigma_2} = -1.$$

$$\text{Тогда } \lim_{\sigma_1 \rightarrow 0} \frac{y^0}{y^2} = 0, \quad \lim_{\sigma_1 \rightarrow 0} \frac{y^3}{y^1} = 0.$$

Следствие. Диаметр кривой  $A(\sigma)$  и диаметр ее проекции на гиперплоскость  $x^2 = 0$  касаются друг друга в начальной точке  $A$ .

7. Проекция  $A(\sigma)$  на гиперплоскость  $x^3 = 0$  соприкасается с кривой:

$$x^0 = \sigma, \quad x^1 = \frac{1}{2}\sigma^2, \quad x^2 = \frac{1}{6}\sigma^3.$$

Последняя лежит на гиперболическом параболоиде  $3x^2 = x^1x^0$ . Тогда оси  $Ax^1$  и  $Ax^0$  являются асимптотами сечения параболоида гиперплоскостью  $x^2 = 0$ , а ось  $Ax^2$  — диаметр параболсечений его плоскостями  $x^1 = 0$  и  $x^0 = 0$ .

8. Проекция  $A(\sigma)$  на гиперплоскость  $x^1 = 0$  соприкасается с кривой:  $x^0 = \sigma$ ,  $x^1 = \frac{1}{6}\sigma^3$ ,  $x^2 = \frac{1}{24}\sigma^4$ , лежащей на гиперболическом парабо-

лоиде  $4x^3 = x^0x^2$ . Получаем еще одну геометрическую характеристику осей  $Ax^2$ ,  $Ax^0$ ,  $Ax^3$ .

9. Характеристикой соприкасающейся гиперплоскости  $x^3 = 0$  в начальной точке является двумерная плоскость ( $x^2 = 0$ ,  $x^3 = 0$ ).

### § 3. ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ ИСТОЛКОВАНИЕ КРИВИЗН

Инварианты  $k_1$ ,  $k_2$ ,  $k_3$  определяют кривую  $A(\sigma)$  с точностью до положения в пространстве; назовем их кривизнами линии  $A_2(\sigma)$  и дадим им геометрическую интерпретацию.

1. Рассмотрим хорды, соединяющие точки кривой  $A_1(\sigma)$  и  $A_2(\sigma)$ . Их середины образуют кривую  $R(\sigma)$ , координаты произвольной точки которой:

$$y^0 = \frac{x^0(\sigma) + x^0(-\sigma)}{2} = \frac{k_1}{2} \sigma^2 + [4],$$

$$y^1 = \frac{x^1(\sigma) + x^1(-\sigma)}{2} = \frac{1}{2} \sigma^2 + [4],$$

$$y^2 = \frac{x^2(\sigma) + x^2(-\sigma)}{2} = \frac{k_1}{4} \sigma^4 + [6],$$

$$y^3 = \frac{x^3(\sigma) + x^3(-\sigma)}{2} = \frac{1}{24} \sigma^4 + [6].$$

Тогда касательная к линии  $R(\sigma)$  в точке  $A_0$ :

$$y^0 = k_1 y^1, \quad y^2 = y^3 = 0,$$

где  $k_1$  — угловой коэффициент ее.

2. Уравнение характеристик гиперплоскостей  $x^1 = 0$ :

$$x^0 + 3\varepsilon x^2 + 4k_2 x^3 = 0,$$

$$x^1 = 0.$$

Ее пересечение с гиперплоскостью  $x^2 = 0$  даст прямую:

$$x^0 + 4k_2 x^3 = 0, \quad x^1 = x^2 = 0,$$

а  $4k_2$  — угловой коэффициент этой прямой.

3. Геометрическое истолкование  $k_1$  и  $k_2$  следует также из теоремы 1.

4. Уравнение характеристики нормальных гиперплоскостей:

$$1 - \varepsilon x^1 - k_2 x^2 - k_3 x^3 = 0,$$

$$x^0 = 0.$$

Ее пересечение с координатной гиперплоскостью  $x^2 = 0$ :

$$1 - \varepsilon x^1 - k_3 x^3 = 0, \quad x^0 = x^2 = 0,$$

что дает интерпретацию  $k_3$ .

### § 4. ЛИНИИ С ПОСТОЯННЫМИ КРИВИЗНАМИ

1. Линии со всеми нулевыми кривизнами:

$$\frac{dA}{d\sigma} = \bar{e}_0, \quad \frac{d^2A}{d\sigma^2} = \bar{e}_1, \quad \frac{d^3A}{d\sigma^3} = \varepsilon \bar{e}_0 + \bar{e}_2,$$

$$\frac{d^4A}{d\sigma^4} = 4\varepsilon \bar{e}_0 + \bar{e}_2, \quad \frac{d^5A}{d\sigma^5} = 4\bar{e}_0 + 10\varepsilon \bar{e}_2.$$

Их дифференциальное уравнение

$$\frac{d^5 A}{d\sigma^5} - 10\varepsilon \frac{d^3 A}{d\sigma^3} + 6 \frac{dA}{d\sigma} = 0,$$

отсюда

$$а) \bar{A}(\sigma) = \bar{C}_0 + \bar{C}_1 e^{h_1 \sigma} + \bar{C}_2 e^{h_2 \sigma} + \bar{C}_3 e^{h_3 \sigma} + \bar{C}_4 e^{h_4 \sigma},$$

$$б) A(\sigma) = \bar{C}_0 + \bar{C}_1 \cos h_1 \sigma - \bar{C}_2 \sin h_1 \sigma + \bar{C}_3 \cos h_2 \sigma - \bar{C}_4 \sin h_2 \sigma,$$

$$\text{где } h_1 = 0; \quad h_{2, 3, 4, 5} = \pm \sqrt{5\varepsilon \pm \sqrt{19}}.$$

2.  $k_1 = k_2 = 0$ ,  $k_3 = \text{const}$ . Дифференциальное уравнение этой линии

$$\frac{d^5 A}{d\sigma^5} - 10\varepsilon \frac{d^3 A}{d\sigma^3} - (k_3 - 6) \frac{dA}{d\sigma} = 0,$$

тогда корни характеристического уравнения:

$$h_0 = 0, \quad h_{1, 2, 3, 4} = \pm \sqrt{5\varepsilon \pm \sqrt{31 - k_3}}.$$

В этом случае:

$$A(\sigma) = \bar{C}_0 + \bar{C}_1 e^{h_1 \sigma} + \bar{C}_2 e^{h_2 \sigma} + \bar{C}_3 \cos h_3 \sigma - \bar{C}_4 \sin h_3 \sigma,$$

$$A(\sigma) = \bar{C}_0 + \bar{C}_1 \sigma + \bar{C}_2 \sigma^2 + \bar{C}_3 e^{V\sqrt{10}\sigma} + \bar{C}_4 e^{-V\sqrt{10}\sigma},$$

$$A(\sigma) = \bar{C}_0 + \bar{C}_1 e^{h_1 \sigma} + \bar{C}_2 e^{-h_1 \sigma} + \bar{C}_3 e^{h_2 \sigma} + \bar{C}_4 e^{-h_2 \sigma},$$

$$A(\sigma) = \bar{C}_0 + \bar{C}_1 e^{\alpha \sigma} \cos \beta \sigma + \bar{C}_2 e^{\alpha \sigma} \sin \beta \sigma + \bar{C}_3 e^{-\alpha \sigma} \cos \beta \sigma + \bar{C}_4 e^{-\alpha \sigma} \sin \beta \sigma,$$

$$A(\sigma) = \bar{C}_0 + \bar{C}_1 \sigma + \bar{C}_2 \sigma^2 + \bar{C}_3 \sin h \sigma + \bar{C}_4 \cos h \sigma.$$

3.  $k_1 = k_3 = 0$ ,  $k_2 = \text{const}$ . Дифференциальное уравнение

$$\frac{d^5 A}{d\sigma^5} - 10\varepsilon \frac{d^3 A}{d\sigma^3} - 5k_2 \frac{d^2 A}{d\sigma^2} + 6 \frac{dA}{d\sigma} = 0,$$

его характеристическое уравнение:

$$h^5 - 10\varepsilon h^3 - 5k_2 h^2 + 6 = 0,$$

$$A(\sigma) = \bar{C}_0 + \bar{C}_1 e^{h_1 \sigma} + \bar{C}_2 e^{-h_1 \sigma} + \bar{C}_3 e^{h_2 \sigma} + \bar{C}_4 e^{h_3 \sigma},$$

$$A(\sigma) = \bar{C}_0 + \bar{C}_1 \cos \beta_1 \sigma + \bar{C}_2 \sin \beta_1 \sigma + \bar{C}_3 e^{h_2 \sigma} + \bar{C}_4 \sigma e^{h_2 \sigma}.$$

4.  $k_1 = \text{const}$ ,  $k_2 = k_3 = 0$ .

$$\begin{aligned} \frac{d^5 A}{d\sigma^5} - 10k_1 \frac{d^4 A}{d\sigma^4} + (35k_1^2 - 10\varepsilon) \frac{d^3 A}{d\sigma^3} + (50k_1^3 + 28k_1\varepsilon) \frac{d^2 A}{d\sigma^2} + \\ + (24k_1^4 - 12\varepsilon k_1^2 - 6) \frac{dA}{d\sigma} = 0. \end{aligned}$$

Для этого случая возможны кривые:

$$\bar{A}(\sigma) = \bar{C}_0 + \bar{C}_1 e^{h_1 \sigma} + \bar{C}_2 e^{h_2 \sigma} + \bar{C}_3 \cos \alpha \sigma + \bar{C}_4 \sin \alpha \sigma,$$

$$\bar{A}(\sigma) = \bar{C}_0 + \bar{C}_1 \sigma + \bar{C}_2 e^{h_1 \sigma} + \bar{C}_3 e^{h_2 \sigma} + \bar{C}_4 e^{h_3 \sigma},$$

$$\bar{A}(\sigma) = \bar{C}_0 + \bar{C}_1 e^{h_1 \sigma} + \bar{C}_2 \sigma e^{h_1 \sigma} + \bar{C}_3 e^{h_2 \sigma} + \bar{C}_4 e^{h_3 \sigma},$$

$$\bar{A}(\sigma) = \bar{C}_0 + \bar{C}_1 e^{h_1 \sigma} + \bar{C}_2 e^{h_2 \sigma} + \bar{C}_3 e^{h_3 \sigma} \cos \beta \sigma + \bar{C}_4 e^{h_4 \sigma} \sin \beta \sigma,$$

$$A(\sigma) = \bar{C}_0 + \bar{C}_1 e^{h_1 \sigma} + \bar{C}_2 e^{h_2 \sigma} + \bar{C}_3 e^{h_3 \sigma} + \bar{C}_4 e^{h_4 \sigma}.$$

Те же кривые получаем при  $k_2 = \text{const}$ ,  $k_3 = \text{const}$ .

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Тутаев Л. К. Линии и поверхности в 3-мерном аффинном пространстве. Минск, 1962.
2. Фиников С. П. Метод внешних форм Картана. М.—Л., 1948.
3. Blasche W. Vorlesungen über Differentialgeometrie und geometrische Grundlagen von Einsteins Relativitätstheorie, 2. Berlin, 1923.

*Поступило в редакцию 14.XII 1965*

А. А. ПАЛЬЦЕВ

О КВАДРАТУРНОЙ ФОРМУЛЕ ГАУССОВА ТИПА

$$\text{ДЛЯ } \int_0^1 \ln \frac{1}{x} f(x) dx$$

В работах [1—3] опубликованы таблицы узлов и коэффициентов квадратурной формулы гауссова типа с весом, имеющим логарифмическую особенность

$$\int_0^1 \ln \frac{1}{x} f(x) dx \approx \sum_{k=1}^n A_k f(x_k). \quad (1)$$

Однако значения узлов  $x_k$  и коэффициентов  $A_k$ , приведенных в [1], особенно для  $n = 9, 10$ , намного отличаются от их точных значений.

В настоящей работе даются более точные значения параметров  $x_k$  и  $A_k$  формулы (1), а также значения коэффициентов многочленов  $\omega_n(x) = x^n + \sum_{i=1}^n (-1)^i a_i x^{n-i}$ , ортогональных по весу  $p(x) = \ln \frac{1}{x}$  на отрезке  $[0, 1]$ .

В табл. 1 приводятся коэффициенты многочленов  $\omega_n(x)$ , в табл. 2 — значения узлов  $x_k$  и коэффициентов  $A_k$  квадратурной формулы (1) для  $n = 1$  (1) 16.

Таблица 1

Коэффициенты многочлена  $\omega_n(x) = x^n + \sum_{i=1}^n (-1)^i a_i x^{n-i}$

$n$	$i$	$a_i$						$n$	$i$	$a_i$					
1	1	0,25000	00000	00000	00000	( 0)	5	1	0,21868	99741	37160	03895	( 1)		
	2	0,71428	57142	85714	28571	( 0)		2	16612	72172	88383	15422	( 1)		
3	1	0,11997	68160	74188	56260	( 1)	6	3	51411	84074	36520	28399	( 0)		
	2	35554	86862	44204	01855	( 0)		4	57030	64829	53668	67319	(-1)		
	3	18079	59814	52859	35085	(-1)		5	12646	93509	04825	21951	(-2)		
4	1	0,16918	71242	61324	64846	( 1)	6	1	0,26834	79253	01515	84880	( 1)		
	2	88522	97117	57502	33728	( 0)		2	26854	00968	93567	95298	( 1)		
	3	14966	86424	59288	07508	( 0)		3	12344	45444	48728	68660	( 1)		
	4	48002	56416	20521	99133	(-2)		4	25758	79939	90396	91627	( 0)		
							5	20329	31497	70564	43904	(-1)			
							6	33116	91423	63203	76445	(-3)			

Продолжение таблицы 1

$n$	$i$	$a_i$					$n$	$i$	$a_i$				
7	1	0,31809	80554	32011	67292	( 1)	13	1	0,61737	96452	22	( 1)	
	2	39583	96326	38112	21786	( 1)		2	16836	77648	95	( 2)	
	3	24347	62710	32834	69455	( 1)		3	26700	39427	80	( 2)	
	4	76866	24400	94773	80977	( 0)		4	27277	15389	62	( 2)	
	5	11658	42529	42813	73893	( 0)		5	18790	29368	75	( 2)	
	6	69069	01818	15745	89108	(-2)		6	88793	03632	92	( 1)	
	7	86296	67905	18044	78755	(-4)		7	28718	67050	73	( 1)	
8	1	0,36790	74572	52436	85832	( 1)	8	62330	30152	08	( 0)		
	2	54806	63793	35372	81241	( 1)	9	87192	02715	97	(-1)		
	3	42396	11388	75010	01198	( 1)	10	73285	13359	60	(-2)		
	4	18144	78874	71946	10914	( 1)	11	32724	43751	84	(-3)		
	5	42271	73873	37656	24076	( 0)	12	61029	11692	40	(-5)		
	6	48965	17194	31954	12233	(-1)	13	25346	75316	35	(-7)		
	7	22629	14583	48287	49464	(-2)	14	1	0,66731	78639	9	( 1)	
	8	22398	41250	95791	90171	(-4)		2	19857	45968	2	( 2)	
9	1	0,41775	72374	50262	133	( 1)		3	34754	28646	4	( 2)	
	2	72524	35443	39953	895	( 1)		4	19733	12754	8	( 2)	
	3	67737	29392	66361	275	( 1)		5	31163	98098	9	( 2)	
	4	36815	49451	01596	436	( 1)		6	17138	90763	8	( 2)	
	5	11756	94073	54785	666	( 1)		7	66381	06366	0	( 1)	
	6	21184	81266	89396	839	( 0)		8	17927	36881	3	( 1)	
	7	19415	86511	82473	844	(-1)	9	32932	01254	5	( 0)		
	8	72057	81266	75701	886	(-3)	10	39383	74053	3	(-1)		
	9	57945	45775	05033	819	(-5)	11	28511	47764	1	(-2)		
10	1	0,46763	57697	15831	4	( 1)	12	11026	95469	2	(-3)		
	2	92738	53839	45343	1	( 1)	13	17887	45030	8	(-5)		
	3	10161	95572	30106	1	( 2)	14	64897	24957	2	(-8)		
	4	67187	77131	81475	6	( 1)	15	1	0,71726	40612	( 1)		
	5	27478	97144	25457	1	( 1)		2	23128	04418	( 2)		
	6	68523	70367	13970	0	( 0)		3	44286	99826	( 2)		
	7	98750	10283	18426	9	(-1)		4	56040	71367	( 2)		
	8	73547	20186	68416	5	(-2)		5	49342	67650	( 2)		
	9	22424	37214	89295	4	(-3)		6	31001	64217	( 2)		
	10	14949	61367	77954	7	(-5)		7	14025	55291	( 2)		
11	1	0,51753	55050	32547	( 1)	8		45540	21623	( 1)			
	2	11545	01147	52916	( 2)	9		10454	77988	( 1)			
	3	14529	18580	64908	( 2)	10		16496	34978	( 0)			
	4	11337	50387	14547	( 2)	11	17079	78505	(-1)				
	5	56783	25814	54575	( 1)	12	10769	04217	(-2)				
	6	18269	50340	12749	( 1)	13	36439	40893	(-4)				
	7	36739	76460	50086	( 0)	14	51898	98985	(-6)				
	8	43425	74153	30638	(-1)	15	16593	66875	(-8)				
	9	26839	90652	17430	(-2)	16	1	0,76721	678	( 1)			
	10	68476	56498	24886	(-4)		2	26648	548	( 2)			
	11	38479	33714	24526	(-6)		3	55423	509	( 2)			
12	1	0,56745	13272	0035	( 1)		4	76923	663	( 2)			
	2	14065	97102	5281	( 2)		5	75166	984	( 2)			
	3	0,20000	34864	7217	( 2)		6	53169	291	( 2)			
	4	18011	53523	0750	( 2)		7	27566	290	( 2)			
	5	10703	81955	2924	( 2)		8	10490	262	( 2)			
	6	42423	40513	8752	( 1)		9	29059	486	( 1)			
	7	11079	72014	0245	( 1)		10	57529	570	( 0)			
	8	18408	29058	8895	( 0)	11	78925	567	(-1)				
	9	18202	10465	1596	(-1)	12	71501	719	(-2)				
	10	94956	13780	1947	(-3)	13	39639	804	(-3)				
	11	20581	26488	3137	(-4)	14	11837	835	(-4)				
	12	98844	78129	7647	(-7)	15	14924	564	(-6)				
					16	42377	458	(-9)					

Все вычисления выполнены на электронно-счетной машине „Минск-2“ с утроенным числом разрядов. Контроль, которому подвергались результаты вычислений, позволяет думать, что ошибка каждого числа, приведенного ниже, не больше одной единицы младшего разряда этого числа. Все числа в таблицах представлены в виде  $0, b_1 b_2 \dots b_n(p)$ , где  $b_1 \neq 0$ , а  $p$  — десятичный порядок числа.

Таблица 2

Значения узлов  $x_k$  и коэффициентов  $A_k$  квадратурной формулы (1)

$n$	$k$	$x_k$						$A_k$					
1	1	0,25000	00000	00000	00000	( 0)	0,10000	00000	00000	00000	( 1)		
2	1	0,11200	88061	66976	18296	( 0)	0,71853	93190	30384	44067	( 0)		
	2	60227	69081	18738	10276	( 0)	28146	06809	69615	55933	( 0)		
3	1	0,63890	79308	73254	04996	(-1)	0,51340	45522	32363	32513	( 0)		
	2	36899	70637	15618	76555	( 0)	39198	00412	01487	55481	( 0)		
	3	76688	03039	38941	45542	( 0)	94615	40656	61491	20064	(-1)		
4	1	0,41448	48019	93832	20803	(-1)	0,38346	40681	45135	12485	( 0)		
	2	24527	49143	20602	25194	( 0)	38687	53177	74762	62734	( 0)		
	3	55616	54535	60275	83718	( 0)	19043	51269	50142	41536	( 0)		
	4	84898	23945	32985	17465	( 0)	39225	48712	99598	32453	(-1)		
5	1	0,29134	47215	19720	53304	(-1)	0,29789	34717	82894	45727	( 0)		
	2	17397	72133	20897	62870	( 0)	34977	62265	13224	18038	( 0)		
	3	41170	25202	84902	04317	( 0)	23448	82900	44052	41889	( 0)		
	4	67731	41745	82820	38070	( 0)	98930	45951	66331	46976	(-1)		
	5	89477	13610	31008	28364	( 0)	18911	55214	31957	96490	(-1)		
6	1	0,21634	00584	41169	48996	(-1)	0,23876	36625	78547	56972	( 0)		
	2	12958	33911	54950	79613	( 0)	30828	65732	73946	79297	( 0)		
	3	31402	04499	14765	50880	( 0)	24531	74265	63210	38598	( 0)		
	4	53865	72173	51802	14455	( 0)	14200	87565	66476	68542	( 0)		
	5	75691	53373	77402	85216	( 0)	55454	62232	48862	90015	(-1)		
	6	92266	88513	72120	23733	( 0)	10168	95869	29322	75887	(-1)		
7	1	0,16719	35540	82585	15942	(-1)	0,19616	93894	25248	20753	( 0)		
	2	10018	56779	15675	12159	( 0)	27030	26442	47272	98215	( 0)		
	3	24629	42462	07930	59905	( 0)	23968	18730	07690	94831	( 0)		
	4	43346	34932	57033	10583	( 0)	16577	57748	10432	90656	( 0)		
	5	63235	09880	47766	08846	( 0)	88943	22713	76579	64436	(-1)		
	6	81111	86267	40105	57653	( 0)	33194	30435	65710	67025	(-1)		
	7	94084	81667	43347	72176	( 0)	59327	87015	12592	39992	(-2)		
8	1	0,13320	24416	08924	65012	(-1)	0,16441	66047	28002	88683	( 0)		
	2	79750	42901	38949	38410	(-1)	23752	56100	23306	02050	( 0)		
	3	19787	10293	26188	05379	( 0)	22684	19844	31919	12637	( 0)		
	4	35415	39943	51909	41967	( 0)	17575	40790	06070	24499	( 0)		
	5	52945	85752	34917	27771	( 0)	11292	40302	46759	05185	( 0)		
	6	70181	45299	39099	96384	( 0)	57872	21071	77820	72399	(-1)		
	7	84937	93204	41106	67605	( 0)	20979	07374	21329	78043	(-1)		
	8	95332	64500	56359	78877	( 0)	36864	07104	02761	90134	(-2)		
9	1	0,10869	33608	41754	771	(-1)	0,14006	84387	48134	734	( 0)		
	2	64983	66633	80079	394	(-1)	20977	22052	01030	448	( 0)		
	3	16222	93980	23882	939	( 0)	21142	71498	96602	729	( 0)		
	4	29374	99039	71674	658	( 0)	17715	62339	38079	990	( 0)		
	5	44663	18819	05468	037	( 0)	12779	92280	33205	496	( 0)		
	6	60548	16627	76128	621	( 0)	78478	90261	15621	725	(-1)		
	7	75411	01371	57163	567	( 0)	39022	50498	53990	968	(-1)		
	8	87726	58288	35838	253	( 0)	13867	29554	95930	233	(-1)		
	9	96225	05594	10281	841	( 0)	24080	41036	39231	157	(-2)		

Продолжение таблицы 2

$n$	$k$	$x_k$					$A_k$				
10	1	0,90426	30962	19965	1	(-2)	0,12095	51319	54570	5	(0)
	2	53971	26622	25006	3	(-1)	18636	35425	64071	9	(0)
	3	13531	18246	39250	8	(0)	19566	08732	77760	0	(0)
	4	24705	24162	87159	8	(0)	17357	71421	82906	9	(0)
	5	38021	25396	09332	3	(0)	13569	56729	95484	2	(0)
	6	52379	23179	71843	2	(0)	93646	75853	81105	3	(-1)
	7	66577	52055	16424	6	(0)	55787	72735	14158	7	(-1)
	8	79419	04160	11966	2	(0)	27159	81089	92333	3	(-1)
	9	89816	10912	19003	5	(0)	95151	82602	84851	5	(-2)
	10	96884	79887	18633	5	(0)	16381	57633	59826	3	(-2)
11	1	0,76439	41174	63771		(-2)	0,10565	22560	99100		(0)
	2	45541	82825	65789		(-1)	16657	16806	00629		(0)
	3	11452	22974	55125		(0)	18056	32182	87754		(0)
	4	21037	85812	27034		(0)	16727	87367	73784		(0)
	5	32669	55532	21693		(0)	13869	70574	01631		(0)
	6	45545	32469	28813		(0)	10383	34333	65044		(0)
	7	58764	83563	59084		(0)	69536	69788	87352		(-1)
	8	71396	38500	12561		(0)	40541	60080	35963		(-1)
	9	82545	32178	01812		(0)	19435	40247	62182		(-1)
	10	91419	39216	12543		(0)	67374	29342	45006		(-2)
	11	97386	02562	75586		(0)	11524	86961	05748		(-2)
12	1	0,65487	22279	0801		(-2)	0,93192	69144	3931		(-1)
	2	38946	80956	0450		(-1)	14975	18275	7632		(0)
	3	98150	26310	6007		(-1)	16655	74543	6459		(0)
	4	18113	85815	9063		(0)	15963	35594	3699		(0)
	5	28322	00676	6737		(0)	13842	48318	6484		(0)
	6	39843	44351	6344		(0)	11001	65706	3572		(0)
	7	51995	26267	9235		(0)	79961	82177	0829		(-1)
	8	64051	09167	1611		(0)	52406	95482	4642		(-1)
	9	75286	50120	5183		(0)	30071	08887	3761		(-1)
	10	85024	00241	6230		(0)	14249	24558	7998		(-1)
	11	92674	96832	2391		(0)	48999	24582	3218		(-2)
	12	97775	61296	9000		(0)	83402	90380	5690		(-3)
13	1	0,56747	66256	24		(-2)	0,82900	49679	33		(-1)
	2	33690	10879	90		(-1)	13536	86731	66		(0)
	3	85036	75447	42		(-1)	15377	32843	92		(0)
	4	15749	75594	78		(0)	15145	81585	10		(0)
	5	24756	95788	77		(0)	13604	03365	37		(0)
	6	35074	43123	61		(0)	11317	68228	82		(0)
	7	46177	37467	62		(0)	87374	43048	00		(-1)
	8	57495	94665	26		(0)	62160	23064	18		(-1)
	9	68445	98803	50		(0)	40087	72893	42		(-1)
	10	78460	25688	10		(0)	22723	84494	00		(-1)
	11	87018	64284	08		(0)	10671	23041	30		(-1)
	12	93675	78293	07		(0)	36464	92275	97		(-2)
	13	98084	34518	12		(0)	61827	00348	52		(-3)
14	1	0,49660	03573	9		(-2)	0,74291	22506	8		(-1)
	2	29432	54011	9		(-1)	12298	87724	7		(0)
	3	74376	29222	5		(-1)	14219	93065	6		(0)
	4	13813	84919	9		(0)	14322	92976	4		(0)
	5	21805	56485	0		(0)	13234	50837	7		(0)
	6	31066	20839	2		(0)	11413	58757	4		(0)
	7	41187	24751	8		(0)	92283	03807	9		(-1)
	8	51717	93074	0		(0)	69753	67329	4		(-1)
	9	62186	48597	3		(0)	48830	32360	1		(-1)
	10	72122	07452	1		(0)	31101	79606	4		(-1)
	11	81076	59880	7		(0)	17462	81195	0		(-1)
	12	88645	40380	3		(0)	81424	23429	9		(-2)

Продолжение таблицы 2

$n$	$k$	$x_k$				$A_k$			
14	13	94485	91394	6	( 0)	27684	36418	6	(-2)
	14	98333	10264	9	( 0)	46793	59140	4	(-3)
	1	0,43831	10175		(-2)	0,67009	97892		(-1)
	2	25935	89811		(-1)	11226	41503		( 0)
	3	65596	09541		(-1)	13176	01770		( 0)
	4	12210	19341		( 0)	13521	76491		( 0)
15	5	19339	52624		( 0)	12788	17986		( 0)
	6	27677	28387		( 0)	11353	29075		( 0)
	7	36901	51271		( 0)	95205	23978		(-1)
	8	46652	43290		( 0)	75389	31417		(-1)
	9	56547	34738		( 0)	56078	42449		(-1)
	10	66196	29190		( 0)	38768	29538		(-1)
	11	75217	88834		( 0)	24451	48327		(-1)
	12	83254	80339		( 0)	13624	63014		(-1)
	13	89988	20501		( 0)	63164	47599		(-2)
	14	95150	61887		( 0)	21388	89916		(-2)
16	15	98536	44681		( 0)	36061	38183		(-3)
	1	0,38978	345		(-2)	0,60791	710		(-1)
	2	23028	946		(-1)	10291	568		( 0)
	3	58280	398		(-1)	12235	566		( 0)
	4	10867	837		( 0)	12756	925		( 0)
	5	17260	945		( 0)	12301	357		( 0)
	6	24793	705		( 0)	11184	724		( 0)
	7	33209	455		( 0)	96596	385		(-1)
	8	42218	391		( 0)	79356	664		(-1)
	9	51508	247		( 0)	61850	495		(-1)
	10	60755	612		( 0)	45435	247		(-1)
	11	69637	565		( 0)	31098	975		(-1)
	12	77843	257		( 0)	19459	766		(-1)
	13	85085	027		( 0)	10776	255		(-1)
	14	91108	686		( 0)	49725	429		(-2)
	15	95702	557		( 0)	16782	011		(-2)
16	98704	780		( 0)	28235	376		(-3)	

Коэффициенты многочленов  $\omega_n(x)$  определялись из системы уравнений:

$$\sum_{i=0}^n (-1)^i a_i c_{n+k-i} = 0, \quad k = 0, 1, \dots, n-1; \quad a_0 = 1, \quad (2)$$

где

$$c_k = \int_0^1 x^k \ln \frac{1}{x} dx.$$

Система (2) решалась методом перекрестного умножения [4] и методом Гаусса с выбором главного элемента [5].

Найденные значения  $a_i$  сравнивались между собой, а также с коэффициентами многочленов  $\omega_n(x)$ , полученных из линейного рекуррентного соотношения

$$\omega_n(x) = (x - \alpha_n) \omega_{n-1}(x) - \lambda_n \omega_{n-2}(x),$$

где

$$\alpha_n = \frac{\int_0^1 x^n \ln \frac{1}{x} \omega_{n-1}(x) dx}{\int_0^1 x^{n-1} \ln \frac{1}{x} \omega_{n-1}(x) dx} + \beta_{n-1};$$

$$\lambda_n = \frac{\int_0^1 x^{n-1} \ln \frac{1}{x} \omega_{n-1}(x) dx}{\int_0^1 x^{n-2} \ln \frac{1}{x} \omega_{n-2}(x) dx};$$

$\beta_{n-1}$  — коэффициент при  $x^{n-2}$  в  $\omega_{n-1}(x)$ ,  $\omega_0(x) = 1$ ,  $\omega_1(x) = x - \frac{c_1}{c_0}$ .

В табл. 1 помещались лишь те значащие цифры в значениях  $a_i$ , которые совпадали в трех методах счета.

Параметры  $x_k$  и  $A_k$  квадратурной формулы (1) находились двумя методами.

Метод 1. Узлы  $x_k$  (корни многочленов  $\omega_n(x)$ ) вычислялись по методу Ньютона. Затем по значениям  $x_k$  из формулы

$$A_k = \frac{B}{\omega_{n-1}(x_k) \omega'_n(x_k)},$$

где

$$B = \frac{c_0}{\sum_{k=1}^n \frac{1}{\omega_{n-1}(x_k) \omega'_n(x_k)}},$$

определялись  $A_k$ .

Метод 2. Параметры  $x_k$  и  $A_k$  находились непосредственно из системы

$$\sum_{k=1}^n A_k x_k^i = c_i, \quad i = 0, 1, \dots, 2n-1$$

по Ньютону.

За начальное приближение  $x_{k,0}$  системы порядка  $2n$  бралось среднее арифметическое двух соседних значений  $x_k$  системы порядка  $2n-2$ .

Для крайних узлов  $x_1$  и  $x_n$  за начальные приближения были взяты числа  $\frac{\bar{x}_1}{2}$  и  $\frac{\bar{x}_{n-1} + 1}{2}$ , где  $\bar{x}_1$  и  $\bar{x}_{n-1}$  являются наименьшей и наибольшей абсциссами формулы (1) с  $n-1$  узлами. За начальное же приближение  $A_{k,0}$  для  $A_k$  было взято решение линейной относительно  $A_k$  системы

$$\sum_{k=1}^n A_k x_{k,0}^i = c_i, \quad i = 0, 1, \dots, n-1.$$

Счет  $x_k$  и  $A_k$  продолжался до совпадения двух соседних приближений с точностью более высокой, чем указано в таблицах.

В табл. 2 помещались только те значащие цифры в  $x_k$  и  $A_k$ , которые совпадали в обоих методах счета.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Anderson D. G. *Math. Comp.*, **19**, 1965, pp. 477—482.
2. Mineur H. *Techniques de Calcul Numérique a l'Usage des Mathématiciens, Astronomes, Physiciens et Ingénieurs, Suivi de Quatre Notes Par: Mme. Henri Berthod-Zabrowski, Jean Bouzitat, et Marcel Mayot, Béranger, Paris, 1952.*
3. Abramowitz M. I. Stegun (Eds.), *Handbook of Mathematical Functions*, National Bureau of Standards Applied Mathematics Series, 55, Washington, D. C., 1964, p. 920.
4. Гроссман Д. *Успехи математических наук*, т. V, в. 3 (37), 1950.
5. Березин И. С. и Жидков Н. П. *Методы вычислений*, т. II. М., 1959.

*Поступило в редакцию 9. XI 1965*

А. А. ИВАНОВ

### ПОПОЛНЕНИЯ РАВНОМЕРНЫХ ПРОСТРАНСТВ

Под равномерным пространством  $(X, \rho)$  мы будем понимать здесь топологическое пространство  $X$  с фиксированной на нем равномерной структурой  $\rho$ , являющейся такой системой открытых покрытий пространства  $X$ , что:

- $P_1$ : если покрытие  $s \in \rho$  вписано в открытое покрытие  $s'$ , то  $s' \in \rho$ ;  
 $P_2$ : если  $s \in \rho$  и  $s' \in \rho$ , то  $s \wedge s' \in \rho$

$$(s \wedge s' = \{G \cap G' \mid G \in s, G' \in s'\}).$$

1. Рассмотрим равномерное пространство  $(X, \rho)$  и некоторое заданное на  $X$  отношение смежности  $\sigma$  (об отношениях смежности, а также связанных с ними понятиях и конструкциях, которые понадобятся нам в дальнейшем, см. в [5]). Обозначим через  $\hat{X}$  подпространство  $\sigma$ -расширения пространства  $X$ , состоящее из всех точек  $x \in X$  и таких исчезающих максимальных систем  $\sigma$ -смежности  $\gamma$ , что  $C\gamma \in \rho$  ( $C\gamma = \{CF \mid F \in \gamma\}$ ,  $CF = X \setminus F$  — операция дополнения относительно  $X$ ).

Пусть  $s$  — произвольное покрытие из  $\rho$ . Положим  $\hat{s} = \{C\overline{CG}^{sX} \cap \hat{X} \mid G \in s\}$ , где внутренняя операция дополнения берется относительно пространства  $X$ , а внешняя — относительно пространства  $\sigma X$ . Для любого  $s \in \rho$  система  $\hat{s}$  является открытым покрытием пространства  $\hat{X}$ . Действительно, если  $a \in \hat{X}$ , то  $Ca \in \rho$ , и потому существует такое множество  $G \in s$ , что  $G \in Ca$ . Но тогда  $CG \in a$ ,  $a \in \overline{CG}^{sX}$  и, наконец,  $a \in C\overline{CG}^{sX}$ .

Пусть  $s' \in \rho$  и  $s'' \in \rho$ , положим  $s = s' \wedge s''$ . Тогда  $\hat{s} = \hat{s}' \wedge \hat{s}''$ . Это утверждение следует из соотношений

$$\begin{aligned} C\overline{CG}^{sX} \cap C\overline{CG}^{s''X} &= C(\overline{CG}^{sX} \cup \overline{CG}^{s''X}) = \\ &= C\overline{CG}' \cup C\overline{CG}^{s''X} = C\overline{C(G' \cap G'')^{sX}}. \end{aligned}$$

Образуем теперь совокупность  $\hat{\rho}$  открытых покрытий пространства  $\hat{X}$ , в каждое из которых вписано какое-нибудь покрытие вида  $\hat{s}(s \in \rho)$ . На основании предыдущего можно утверждать, что  $\hat{\rho}$  является равномерной структурой на топологическом пространстве  $\hat{X}$ . Нетрудно показать, что для любого  $s \in \rho$  имеем  $\hat{s} \wedge \hat{X} = s$ . Отсюда следует, что построенное нами равномерное пространство  $(\hat{X}, \hat{\rho})$  будет расширением равномерного пространства  $(X, \rho)$ . Будем называть его  $\sigma$ -пополнением, а равномерное пространство  $\sigma$ -полным, если оно совпадает со своим  $\sigma$ -пополнением.

В процессе построения  $\sigma$ -пополнения мы определили на пространстве  $\hat{X}$  равномерную структуру  $\hat{\rho}$ . Вместе с тем введем на  $\hat{X}$  отношение

смежности  $\hat{\sigma} = \hat{\sigma}(\rho)$ , определяемое пространством  $\sigma X$  как правильным бикompактным расширением пространства  $\hat{X}$ . Это отношение смежности интересно тем, что имеет место следующее утверждение.

**Теорема 1.**  *$\sigma$ -пополнение равномерного пространства является  $\hat{\sigma}$ -полным равномерным пространством.*

Достаточно показать, что для любой системы  $\gamma \in \sigma X \setminus \hat{X}$  имеет место  $C\gamma \in \hat{\rho}$ , где  $\gamma' = \{F | \gamma \in \bar{F}^{\sigma X}\}$ , причем множества  $F$  являются замкнутыми подмножествами пространства  $\hat{X}$ .

Так как  $\gamma \in \hat{X}$ , то  $s = C\gamma \in \rho$  и  $\hat{s} \in \hat{\rho}$ . Положим  $\beta = \{\bar{F}^{\hat{X}} | F \in \gamma'\}$ . Имеем очевидно  $\beta \subset \gamma'$ , и потому  $C\beta \subset C\gamma'$ . С другой стороны,

$$\begin{aligned} C\hat{s} &= \{\overline{C\bar{G}^{\sigma X}} \cap \hat{X} | G \in s\} = \{\bar{F}^{\sigma X} \cap \hat{X} | F \in Cs\} = \\ &= \{\bar{F}^{\hat{X}} | F \in \gamma'\} = \beta. \end{aligned}$$

Таким образом,  $\hat{s} \subset C\gamma'$ , и потому  $C\gamma' \in \hat{\rho}$ .

Рассмотрим теперь частный случай  $\sigma$ -пополнения, когда отношение смежности  $\sigma$  согласовано с равномерной структурой  $\rho$  ( $\sigma = \sigma(\rho)$ ) в том смысле, что для любой конечной системы  $\alpha$  замкнутых множеств пространства  $X$  имеем  $\sigma(\alpha)$  тогда и только тогда, когда  $C\alpha \in \rho$ . В этом случае  $\sigma$ -пополнение  $(\hat{X}, \hat{\rho})$  равномерного пространства  $(X, \rho)$  будем называть его пополнением по структуре или просто пополнением и соответственно  $\sigma$ -полное равномерное пространство  $(X, \rho)$  будем называть полным по структуре или просто полным равномерным пространством. Пополнение по структуре не обязано быть полным по структуре равномерным пространством. Идея построения соответствующего примера может быть описана следующим образом.

Рассмотрим такое топологическое пространство  $X$ , его разбиение  $X = X^0 \cup X^1$  на два замкнутых непересекающихся множества и такое отношение смежности  $\sigma$  на  $X$ , что пересечение множеств  $X^{0^{\sigma X}}$  и  $X^{1^{\sigma X}}$  состоит из единственной точки  $x_{01}$ , являющейся предельной точкой для множеств  $A^0 = \bar{X}^{0^{\sigma X}} \setminus X^0$  и  $A^1 = \bar{X}^{1^{\sigma X}} \setminus X^1$ . Рассмотрим затем такую систему  $\alpha^0$  замкнутых множеств в  $X^0$ , что  $A^0 = \bigcap_{F \in \alpha^0} \bar{F}^{\sigma X}$ , а присоединение покрытия  $C\alpha^0 \cup \{X^0\}$  к конечным открытым покрытиям пространства  $X$ , согласованным с  $\sigma$ , определяет равномерную структуру  $\rho$ , согласованную с  $\sigma$ . Тогда  $\hat{X} = \sigma X \setminus x_{01}$ , а множества  $B^0 = A^0 \setminus x_{01}$  и  $X^1 \setminus x_{01}$  оказываются  $\hat{\sigma}$ -смежными, но не  $\sigma(\hat{\rho})$ -смежными, и в  $\hat{X}$  существует исчезающая максимальная система  $\gamma$  смежности  $\gamma$ , содержащая  $B^0$  и не содержащая  $X^1 \setminus x_{01}$ . Для этой системы  $\gamma$  имеем  $C\gamma \in \hat{\rho}$ , и, таким образом, равномерное пространство  $(\hat{X}, \hat{\rho})$  не является полным по структуре. Следует заметить, что несовпадение отношений смежности  $\sigma(\hat{\rho})$  и  $\hat{\sigma}(\rho)$  не обязательно влечет за собой неполноту пространства  $(\hat{X}, \hat{\rho})$ . В этом можно убедиться, немного видоизменив предыдущий пример. Наряду с системой  $\alpha^0$  рассмотрим теперь и систему  $\alpha^1$  замкнутых множеств в  $X^1$ , для которой  $A^1 = \bar{X}^{1^{\sigma X}} \setminus X^1 = \bigcap_{F \in \alpha^1} \bar{F}^{\sigma X}$ , а вместо покрытия  $C\alpha^0 \cup \{X^0\}$  возьмем покрытие  $C\alpha^0 \cup C\alpha^1$ . Тогда множества  $B^0 = A^0 \setminus x_{01}$  и  $B^1 = A^1 \setminus x_{01}$  оказываются  $\hat{\sigma}$ -смежными, но не  $\sigma(\hat{\rho})$ -смежными. Однако здесь имеет место важное в данном случае обстоятельство — если некоторая система  $\alpha$  является системой  $\sigma(\hat{\rho})$ -смежно-

сти и  $F$  — такое замкнутое в  $X$  множество, что система  $\alpha \cup \{\bar{F}^X\}$  является системой  $\hat{\sigma}$ -смежности, то она является и системой  $\sigma(\hat{\rho})$ -смежности. Отсюда следует непосредственно то, что любая исчезающая максимальная система  $\sigma(\hat{\rho})$ -смежности  $\gamma$  содержит  $\bar{F}^X$  для всех  $F \in \alpha^0 \cup \alpha^1$ , а это означает в свою очередь, что  $C\gamma \in \hat{\rho}$ .

2. Если равномерное пространство является вейлевским (пространством с вполне регулярной равномерной структурой, согласованной со структурой топологической; см. [1, 2]), то в этом случае наряду с описанной выше конструкцией пополнения по структуре мы имеем и вейлевское пополнение. Однако справедливо следующее утверждение.

**Теорема 2.** *Для вейлевских равномерных пространств пополнение по структуре эквивалентно вейлевскому пополнению.*

Основным содержанием этой теоремы является естественное взаимно однозначное соответствие между множеством классов эквивалентности исчезающих фильтров Коши пространства  $(X, \rho)$  и множеством исчезающих максимальных систем  $\sigma(\rho)$ -смежности  $\gamma$ , для которых  $C\gamma \in \rho$ . Это соответствие в действительности состоит в том, что каждая такая система  $\gamma$  является просто совокупностью всех замкнутых множеств, входящих в исчезающие фильтры Коши некоторого класса эквивалентности, и каждая такая совокупность является исчезающей максимальной системой  $\sigma(\rho)$ -смежности  $\gamma$  с  $C\gamma \in \rho$ .

При доказательстве этой теоремы удобно пользоваться аппаратом псевдометрик, рассматривая соответствующую совокупность  $\mathbf{R}$  псевдометрик на  $X$ , определяющую вейлевскую равномерную структуру  $\rho$  (о равномерных структурах и псевдометриках см. [3, 4]). В дальнейшем нам понадобится следующее утверждение.

**Лемма 1.** *Пусть  $\gamma$  — исчезающая максимальная система  $\sigma(\rho)$ -смежности. Имеем  $C\gamma \in \rho$  ( $\gamma \in \hat{X}$ ) тогда и только тогда, когда для любой псевдометрики  $r \in \mathbf{R}$  в  $\gamma$  найдутся сколь угодно малые (относительно  $r$ ) множества.*

Пусть  $\gamma \in \hat{X}$  и  $r \in \mathbf{R}$ . Тогда  $\{U_\varepsilon(x)\}_r \in \rho$  и для некоторого  $x_0 \in X$  имеем  $X \setminus U_\varepsilon(x_0) \in \gamma$ , следовательно, найдется такое множество  $F \in \gamma$ , что  $F \subset U_\varepsilon(x_0)$  и, таким образом,  $d_r(F) < 2\varepsilon$ .

Пусть теперь  $\gamma$  — такая исчезающая максимальная система  $\sigma(\rho)$ -смежности, что для любой псевдометрики  $r \in \mathbf{R}$  в  $\gamma$  найдутся сколь угодно малые (относительно  $r$ ) множества и  $s \in \rho$ . Существует такая псевдометрика  $r \in \mathbf{R}$ , что для любого достаточно малого  $\varepsilon > 0$  покрытие  $s' = \{U_\varepsilon(x)\}_r$  вписано в  $s$ . Фиксируем любое такое число  $\varepsilon > 0$  и возьмем в  $\gamma$  множество  $F$ , для которого  $d_r(F) < \varepsilon/4$ . Тогда имеем  $F \subset U_{\varepsilon/2}(x)$  для некоторого  $x \in X$ , и поэтому  $U_{\varepsilon/2}(F) \subset G \in s$ . Но тогда  $\sigma(F, X \setminus G)$

не имеет места,  $X \setminus G \in \gamma$  и  $G \in C\gamma$ , откуда в силу произвольности  $s$  следует  $C\gamma \in \rho$ . Лемма 1 доказана.

Пусть  $\alpha$  — произвольный фильтр Коши и  $\gamma \in \bigcap_{F \in \alpha} \bar{F}^X$ . Обозначим через  $\beta(\alpha)$  совокупность всех замкнутых в  $X$  множеств, принадлежащих фильтру  $\alpha$ . Очевидно  $\beta \subset \gamma$ , и так как для любой псевдометрики  $r \in \mathbf{R}$   $\beta$  содержит как угодно малые множества, то тем же свойством обладает и система  $\gamma$ .

Рассмотрим произвольные системы  $\gamma', \gamma''$ , принадлежащие множеству  $\bigcap_{F \in \alpha} \bar{F}^X$ . Так как  $\beta \subset \gamma'$  и  $\beta \subset \gamma''$ , то для любых  $F \in \beta$ ,  $F' \in \gamma'$  и  $F'' \in \gamma''$  мы имеем в силу соотношения  $r(F', F'') \leq r(F', F) + d_r(F) + r(F, F'')$  оценку  $r(F', F'') \leq d_r(F)$ . Но  $\beta$  содержит как угодно малые множества, и по-

тому  $r(F', F'') = 0$ , т. е.  $\gamma' = \gamma''$ . Тем самым мы установили однозначное соответствие  $\alpha \rightarrow \gamma = \bigcap_{F \in \alpha} \bar{F}^{\rho, X}$ . В силу леммы 1 имеем  $\gamma \in \hat{X}$ .

Так как эквивалентные (исчезающие) фильтры Коши содержат для любой псевдометрики  $r \in \mathbf{R}$  как угодно близкие (относительно  $r$ ) множества, то установленное нами соответствие определяет соответствие систем  $\gamma \in \hat{X}$  классам  $\{\alpha\}$  эквивалентности. Докажем теперь, что она является отображением на  $\hat{X} \setminus X$ .

Пусть  $\gamma \in \hat{X}$ . Рассмотрим произвольное множество  $F_0 \in \gamma$  и образуем систему  $\beta$ , состоящую из всех множеств вида  $\bar{U}_\varepsilon(F) \cap F_0$ , где  $\varepsilon > 0$  произвольно;  $\bar{U}_\varepsilon(F)$  — замкнутая  $\varepsilon$ -окрестность какого-нибудь множества  $F \in \gamma$  относительно некоторой (произвольной) псевдометрики  $r \in \mathbf{R}$ . Эта система  $\beta$  является центрированной системой, так как если  $r_i \in \mathbf{R}$ ,  $F_i \in \gamma$ ,  $\varepsilon_i > 0$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ), то, взяв  $r = \max r_i$ ,  $\varepsilon = \min \varepsilon_i$ , имеем  $\bigcap \bar{U}_\varepsilon(F_i) \subset \bar{U}_\varepsilon(F_i)$ , а в силу  $\sigma(\rho)$ -смежности множеств  $F_0, F_1, \dots, F_n$  имеем  $U_{\varepsilon/2}(x) \cap F_i \neq \emptyset$  для некоторой точки  $x \in X$ , и потому  $\bigcap \bar{U}_\varepsilon(F_i) \cap F_0 \neq \emptyset$ . Таким образом, система  $\beta$  является базой некоторого фильтра  $\alpha$ . Так как в силу леммы 1 система  $\gamma$  содержит произвольно малые относительно  $\mathbf{R}$  множества, то фильтр  $\alpha$  также содержит произвольно малые относительно  $\mathbf{R}$  множества, т. е. является фильтром Коши в  $(X, \rho)$ . По самому определению фильтра  $\alpha$  любое его замкнутое множество принадлежит системе  $\gamma$ , т. е.  $\gamma \in \bigcap_{F \in \alpha} \bar{F}^{\rho, X}$ . Заметим, наконец, что установленное нами соответствие  $\{\alpha\} \rightarrow \gamma$  взаимно однозначно, так как если  $\alpha' \rightarrow \gamma$  и  $\alpha'' \rightarrow \gamma$ , то для любой псевдометрики  $r \in \mathbf{R}$  и любых  $F' \in \alpha'$ ,  $F'' \in \alpha''$  из неравенства

$$d_r(F' \cup F'') \leq d_r(F') + r(F', F'') + d_r(F'')$$

получаем оценку

$$d_r(F' \cup F'') \leq d_r(F') + d_r(F''),$$

из которой непосредственно следует эквивалентность фильтров  $\alpha'$  и  $\alpha''$ .

То, что при установленном нами соответствии сохраняется как топологическая, так и равномерная структура рассматриваемых пополнений, доказывается также достаточно просто. Тем самым устанавливается справедливость теоремы 2.

3. Вейлевская конструкция пополнения равномерных пространств не может быть перенесена без изменений на более общие (чем вейлевские) равномерные пространства. Попытку соответствующего изменения этой конструкции сделал Морита [2]. Он называет фильтром Коши в  $(X, \rho)$  такой фильтр  $\alpha$ , что для любого покрытия  $s \in \rho$  найдется такое покрытие  $s' \in \rho$  и множество  $F \in \alpha$ , что  $St_{s'}(F)$  содержится в некотором множестве  $G \in s$ . Два фильтра Коши  $\alpha$  и  $\alpha'$  Морита называет эквивалентными, если для любых  $F \in \alpha$  и  $s \in \rho$  найдутся такие  $F' \in \alpha'$  и  $s' \in \rho$ , что  $St_{s'}F' \subset St_s F$ . К исходному пространству  $X$  Морита присоединяет все классы эквивалентности исчезающих фильтров Коши, на полученном множестве вводится естественная топология и равномерная структура так, что полученное равномерное пространство оказывается расширением исходного. Если это равномерное пространство не полно, то процедура повторяется (в общем случае трансфинитно) до тех пор, пока не будет получено полное равномерное пространство.

Заметим сразу, что конструкция Морита обладает некоторыми особенностями. Например, равномерное пространство  $(X, \rho)$ , являю-

щеся небикомпактным топологическим пространством с прекомпактной равномерной структурой  $\rho$ , может оказаться полным по Морита. В этом легко убедиться на следующем примере. Пространство  $X$  является множеством точек  $(x, y)$  на плоскости, для которых  $0 \leq x \leq 1$ ,  $0 \leq y \leq 1$  и в случае  $x \neq 0$  или  $x \neq 1$ ,  $0 \leq y < 1$  с естественной топологией. Равномерная структура  $\rho$  порождается конечными покрытиями, состоящими из множеств вида  $\{(x, y) \mid 0 \leq x < 1, a < y < b\} \cap X$  и множеств вида  $\{(x, y) \mid 0 < x \leq 1, a < y < b\} \cap X$ . Здесь вообще нет исчезающих фильтров Коши (по Морита), так как звезда любого множества, содержащего хоть одну точку  $(x, y)$  с  $x \neq 0$  и  $x \neq 1$ , относительно любого покрытия содержит точки  $(x, y)$  с  $x = 0$  и точки  $(x, y)$  с  $x = 1$  одновременно и потому не может содержаться в каком-нибудь элементе покрытия, состоящего из множеств указанного выше вида. Тем самым наше пространство  $(X, \rho)$  оказывается полным (по Морита). Особенности конструкции пополнения по Морита наводят на мысль о принципиальной невозможности применения классов эквивалентности исчезающих фильтров Коши (понимаемых в том или ином смысле) для создания удачной конструкции пополнения равномерных пространств, тем более что и для вейлевских равномерных пространств имеется в литературе (см. [7]) другая (эквивалентная вейлевской) конструкция, основанная на фильтрах Коши в обычном смысле. В этой конструкции к исходному пространству  $(X, \rho)$  присоединяются минимальные фильтры Коши, не сходящиеся к точкам пространства  $X$ , и на построенном таким образом множестве естественно определяется соответствующая топологическая структура и соответствующая равномерная структура. Эта конструкция применима в общем случае, распадаясь при этом на два варианта. В первом варианте конструкция остается без изменений, т. е. к исходному общему равномерному пространству  $(X, \rho)$  присоединяются все минимальные фильтры Коши, не сходящиеся к точкам пространства  $X$ . В этом варианте пополнение не обязано быть подпространством соответствующего прекомпактного пополнения (отсюда, в частности, следует его неэквивалентность пополнению по структуре), однако пополнение пространства с прекомпактной равномерной структурой будет все же бикомпактным.

Во втором варианте к исходному общему равномерному пространству  $(X, \rho)$  присоединяются не все минимальные фильтры Коши, не сходящиеся к точкам пространства  $X$ , а только те, которые остаются минимальными фильтрами Коши при переходе к соответствующей прекомпактной равномерной структуре (совокупности конечных открытых покрытий пространства  $X$ , в которые вписаны покрытия из  $\rho$ ). Эта конструкция оказывается эквивалентной нашей конструкции пополнения по структуре.

Пусть  $\gamma \in \tilde{X}$ . Рассмотрим систему  $\omega(\gamma) = \{G \mid CG \bar{\in} \gamma\}$ . Эта система открытых в  $X$  множеств центрирована, так как если  $G_i \in \omega$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ), то  $C(\bigcap G_i) = \bigcup CG_i \bar{\in} \gamma$ , и потому  $\bigcap G_i \in \omega$ , а пустое множество не принадлежит системе  $\omega$  ( $C\emptyset = X \notin \gamma$ ). Пусть  $\alpha = \alpha(\gamma)$  — фильтр, имеющий систему  $\omega$  своим базисом. Для любого покрытия  $s \in \rho$  найдется такое открытое в  $X$  множество  $G \in s$ , что  $CG \bar{\in} \gamma$  (так как  $C\gamma \bar{\in} \rho$ ), и потому  $G \in \omega$ , т. е. фильтр  $\alpha$  является фильтром Коши. Более того, фильтр  $\alpha$  является минимальным фильтром Коши. Чтобы убедиться в этом, рассмотрим произвольный фильтр Коши  $\alpha'$ , содержащийся в  $\alpha$ , и систему  $\gamma' = \{F \mid CF \bar{\in} \alpha'\}$ , состоящую из замкнутых в  $X$  множеств. Пусть  $F_1, F_2, \dots, F_n$  — произвольные множества из  $\gamma'$ . Тогда  $\{CF_i\} \bar{\in} \rho$ , в противном случае нашлось бы такое множество  $G \in \alpha'$  и множество

с  $F_i (1 \leq i \leq n)$ , что  $G \subset CF_i$  (так как  $\alpha'$  является фильтром Коши), откуда следовало бы, что  $CF_i \in \alpha'$ . Но последнее противоречит условию  $F_i \in \gamma'$ , и таким образом система  $\gamma'$  является системой  $\sigma(\rho)$ -смежности. Из включения  $\alpha' \subset \alpha$  следует включение  $\gamma \subset \gamma'$ , и по максимальнойности  $\gamma$  имеем  $\gamma = \gamma'$ , откуда имеем  $\alpha = \alpha'$ . Тем самым доказано, что  $\alpha(\gamma)$  является минимальным фильтром Коши в  $(X, \rho)$ . Заметим, наконец, что  $\alpha(\gamma)$  не сходится ни к какой точке  $x \in X$ , так как  $\gamma$  является исчезающей системой замкнутых множеств.

Пусть теперь  $\alpha$  — минимальный фильтр Коши, остающийся таковым при переходе от  $\rho$  к  $\rho_0$ . Система  $\gamma(\alpha) = \{F | CF \in \alpha\}$ , состоящая из замкнутых в  $X$  множеств, является системой  $\sigma$ -смежности, так как если  $F_1, F_2, \dots, F_n \in \gamma(\alpha)$ , то  $CF_i \in \alpha$ , и потому  $\{CF_1, CF_2, \dots, CF_n\} \in \rho$ . Кроме того,  $C\gamma(\alpha) \in \rho$ . Нам осталось доказать максимальность системы  $\gamma(\alpha)$ . Но это следует из того, что  $\alpha$  является минимальным фильтром Коши относительно  $\rho_0$ .

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Weil A. Sur les espaces a structure uniforme et sur la topologie general. Paris, 1937.
2. Morita K. Proc. Japan. Acad., 27, 65—72, 130—137, 166—171, 632—636, 1957.
3. Arenz R. Canadian J. Math. v. S., 211—215, 1953.
4. Bourbaki N. Elements de mathematique, L. III. Topologie general, Ch. 9, 1958.
5. Иванова В. М., Иванов А. А. Изв. АН СССР, сер. матем., 23, 613—634, 1959.
6. Иванов А. А. ДАН СССР, 128, № 1, 1959.
7. Bourbaki N. Elements de mathematique, L. III. Topologie general, Ch. 1, 2, 3-ed, 1961.

Поступило в редакцию 15.XI 1965

П. И. МОНАСТЫРНЫЙ

**МЕТОД ОРТОГОНАЛЬНОЙ ПРОГОНКИ  
 В СЛУЧАЕ МНОГОТОЧЕЧНОЙ ЗАДАЧИ  
 ДЛЯ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ**

1°. Рассмотрим многоточечную задачу на конечном отрезке  $a \leq t \leq b$ :

$$y' = P(t) \cdot y + f(t), \quad (1)$$

$$(a_i, y(t_i)) = A_i, \quad (2)$$

$$i = 1, 2, 3, 4; \quad a = t_1 < t_2 < t_3 < t_4 = b,$$

где

$$y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \\ y_4(t) \end{pmatrix}; \quad P(t) = \begin{bmatrix} p_{11}(t) & \dots & p_{14}(t) \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ p_{41}(t) & \dots & p_{44}(t) \end{bmatrix}; \quad f(t) = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ f_3(t) \\ f_4(t) \end{pmatrix};$$

$a_i = (\alpha_1^{(i)}, \alpha_2^{(i)}, \alpha_3^{(i)}, \alpha_4^{(i)})$ ;  $A_i = \text{const}$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ . Все рассматриваемые функции предполагаются достаточно гладкими, предполагается также, что при всех значениях  $i$   $|a_i| = 1$ .

Описываемый ниже метод представляет собой вариант широко применяющегося метода прогонки, в котором ортогонализация проводится непрерывно по мере изменения аргумента. Аналогичный метод в случае краевой задачи для системы разностных уравнений рассматривался С. К. Годуновым [1, 2] и в дифференциальной форме А. А. Абрамовым [3, 4], несколько позже К. Моцинским [5].

При выводе формул метода прогонки для задачи (1), (2) будет дано также описание схем методов прогонки применительно к подобным задачам для систем трех и двух уравнений. Излагаемые методы, как нам кажется, имеют практический интерес.

Рассмотрим неизвестные вспомогательные функции  $\alpha_1(t)$ ,  $\alpha_2(t)$ ,  $\alpha_3(t)$  и по ним построим матрицу  $B(t)$  четвертого порядка, такую, чтобы при любых значениях  $\alpha_1(t)$ ,  $\alpha_2(t)$ ,  $\alpha_3(t)$  она удовлетворяла условию ортогональности. Для этого введем в рассмотрение величины  $\omega_s(t)$ , определяемые по формуле

$$\omega_s(t) = \sin \alpha_s(t) \prod_{k=1}^{s-1} \cos \alpha_k(t) \quad (s = \overline{1, 4}), \quad \alpha_4(t) \equiv \pi/2.$$

Заметим, что при любых  $a \leq t \leq b$   $\sum_{s=1}^4 \omega_s^2(t) \equiv 1$ . Следовательно, исконая матрица  $B(t)$  будет иметь такой вид:

$$B(t) = \begin{bmatrix} \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 & \omega_4 \\ -\omega_2 & \omega_1 & \omega_4 & -\omega_3 \\ \omega_3 & \omega_4 & -\omega_1 & -\omega_2 \\ -\omega_4 & \omega_3 & -\omega_2 & \omega_1 \end{bmatrix}.$$

Легко проверить, что  $B(t)B^*(t) \equiv E$ ; звездочкой помечен переход к транспонированной матрице. Рассмотрим теперь новый неизвестный вектор  $R(t)$ , определяемый формулой

$$R(t) = B(t) \cdot y(t), \quad (3)$$

где  $y(t)$  — искомая вектор-функция, удовлетворяющая многоточечной задаче (1), (2);  $R(t) = (r_1(t), r_2(t), r_3(t), r_4(t))$ . Из (3) получим

$$y(t) = B^*(t) \cdot R(t). \quad (4)$$

Дифференциальные уравнения для функций  $\alpha_i(t)$  ( $i = 1, 2, 3$ ) и  $r_k(t)$  ( $k = 1, 4$ ) должны быть найдены таким путем, чтобы определяемая в процессе решения задачи вектор-функция  $y(t)$  по формуле (4) удовлетворяла условиям (1), (2). С этой целью продифференцируем соотношение (4) один раз и заменим в нем  $y'(t)$  по формуле (1), а  $y(t)$  в полученном выражении — по формуле (4):

$$R' = (BPB^* - BB^*) \cdot R + B \cdot f. \quad (5)$$

Введем обозначения:

$$\begin{aligned} \underline{\rho}_1(t) &= (\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4); \quad \underline{\rho}_2(t) = (-\omega_2, \omega_1, \omega_4, -\omega_3); \\ \underline{\rho}_3(t) &= (\omega_3, \omega_4, -\omega_1, -\omega_2); \quad \underline{\rho}_4(t) = (-\omega_4, \omega_3, -\omega_2, \omega_1); \\ p_k(t) &= (p_{1k}, p_{2k}, p_{3k}, p_{4k}) \quad (k = \overline{1, 4}). \end{aligned}$$

Тогда матрицу  $\Psi(t) = BPB^* - BB^*$ , стоящую в уравнении (5) при  $R(t)$ , можно записать в таком виде:

$$\begin{aligned} \Psi(t) &= \{\psi_{ik}(t)\} \quad (i, k = \overline{1, 4}), \quad \text{где } \psi_{ik}(t) = \sigma_{ik}(t) - \varphi'_{ik}(t), \\ \sigma_{ik}(t) &= (t_i(t), \underline{\rho}_k(t)), \quad \varphi'_{ik}(t) = (\underline{\rho}_i(t), \underline{\rho}'_k(t)), \\ t_k(t) &= (\tau_{k1}(t), \tau_{k2}(t), \tau_{k3}(t), \tau_{k4}(t)), \quad \tau_{ik}(t) = (\underline{\rho}_i(t), p_k(t)). \end{aligned}$$

В развернутом виде систему (5) после этого можно записать так:

$$\left. \begin{aligned} r'_1 &= \psi_{11}r_1 + \psi_{12}r_2 + \psi_{13}r_3 + \psi_{14}r_4 + \psi_1, \\ r'_2 &= \psi_{21}r_1 + \psi_{22}r_2 + \psi_{23}r_3 + \psi_{24}r_4 + \psi_2, \\ r'_3 &= \psi_{31}r_1 + \psi_{32}r_2 + \psi_{33}r_3 + \psi_{34}r_4 + \psi_3, \\ r'_4 &= \psi_{41}r_1 + \psi_{42}r_2 + \psi_{43}r_3 + \psi_{44}r_4 + \psi_4, \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

где  $\psi_k = (\underline{\rho}_k, f)$  ( $k = \overline{1, 4}$ ).

Вспомогательные неизвестные функции  $\alpha_1(t)$ ,  $\alpha_2(t)$ ,  $\alpha_3(t)$  выберем таким образом, чтобы система (6) имела частично диагональный вид.

Для этого положим  $\psi_{ik}(t) = 0$  при  $i=4$ ,  $k=1, 2, 3$ . Это дает систему трех дифференциальных уравнений для функций  $\alpha_k(t)$  ( $k=1, 2, 3$ ):

$$\left. \begin{aligned} \varphi'_{41}(t) - \sigma_{41}(t) &= 0, \\ \varphi'_{42}(t) - \sigma_{42}(t) &= 0, \\ \varphi'_{43}(t) - \sigma_{43}(t) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

В силу (7) уравнение для функции  $r_4(t)$  можно интегрировать независимо от остальных уравнений системы (6):

$$r'_4 = \psi_{44}(t) \cdot r_4 + \psi_4(t). \quad (8)$$

Осталось указать, каким образом следует выбирать начальные условия для функций  $\alpha_1(t)$ ,  $\alpha_2(t)$ ,  $\alpha_3(t)$  и  $r_4(t)$ .

Так как по предположению в формуле (3)  $y(t)$  — искомое решение задачи (1), (2), то в точке  $t = t_1$  мы должны иметь

$$(\mathbf{a}_1, \mathbf{B}^*(t_1) \cdot \mathbf{R}(t_1)) = A_1$$

или

$$(\mathbf{a}_1, \underline{\rho}_1)r_1 + (\mathbf{a}_1, \underline{\rho}_2)r_2 + (\mathbf{a}_1, \underline{\rho}_3)r_3 + (\mathbf{a}_1, \underline{\rho}_4)r_4|_{t=t_1} = A_1.$$

Заметим, что по идее метода прогонки это равенство должно выполняться при любых значениях  $r_1(t_1)$ ,  $r_2(t_1)$ ,  $r_3(t_1)$ . Следовательно, начальные значения для  $\alpha_1(t_1)$ ,  $\alpha_2(t_1)$ ,  $\alpha_3(t_1)$  надо выбирать так, чтобы выполнялись условия

$$(\mathbf{a}_1, \underline{\rho}_k(t_1)) = 0 \quad (k=1, 2, 3).$$

Эти условия будут автоматически выполняться, если положить

$$\underline{\rho}_k(t_1) = \mathbf{a}_1.$$

Значит,

$$\left. \begin{aligned} \sin \alpha_1(t_1) &= \alpha_4^{(1)}, \quad \sin \alpha_2(t_1) = \frac{-\alpha_3^{(1)}}{\sqrt{1 - \alpha_4^{2(1)}}}, \\ \operatorname{tg} \alpha_3(t_1) &= -\frac{\alpha_2^{(1)}}{\alpha_1^{(1)}} \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

в предположении, что, например,  $\alpha_1^{(1)} \neq 0$ .

Для  $r_4(t_1)$  получим

$$r_4(t_1) = A_1. \quad (10)$$

Таким образом, функции  $\alpha_k(t)$  ( $k=1, 2, 3$ ) могут быть найдены на отрезке  $[a, b]$  как решение задачи Коши для системы (7) с начальным условием в точке  $t=t_1$  (9), а функция  $r_4(t)$  как решение задачи (8), (10). После нахождения указанных функций решение многоточечной задачи для системы четырех уравнений первого порядка сводится к решению трехточечной задачи для системы трех уравнений первого порядка.

2°. Перейдем к краткому изложению схемы метода ортогональной прогонки для системы трех уравнений первого порядка, которая получилась после решения задач (7), (9) и (8), (10):

$$\left. \begin{aligned} r'_1 &= \psi_{11}r_1 + \psi_{12}r_2 + \psi_{13}r_3 + U_1, \\ r'_2 &= \psi_{21}r_1 + \psi_{22}r_2 + \psi_{23}r_3 + U_2, \\ r'_3 &= \psi_{31}r_1 + \psi_{32}r_2 + \psi_{33}r_3 + U_3, \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

где  $U_k(t) = \psi_{k4}(t) \cdot r_4(t) + \psi_k(t)$ ,  $k = 1, 2, 3$ . Граничные условия для системы (11) получаются в точках  $t = t_2$ ,  $t = t_3$  и  $t = t_4$  после подстановки в условия (2) при  $i = 2, 3, 4$  значений  $y(t_i)$ , определяемых по формуле (4). Запишем эти условия в таком виде:

$$(\mathbf{b}_k, \mathbf{T}(t_k)) = B_k, \quad (12)$$

где

$$\mathbf{b}_k = (\beta_1^{(k)}, \beta_2^{(k)}, \beta_3^{(k)}); \quad \beta_i^{(k)} = \mu_k b_i^{(k)};$$

$$b_i^{(k)} = (a_k, \rho_i(t_k)); \quad B_k = \mu_k (A_k - b_4^{(k)} r_4(t_k));$$

$\mu_k = 1 / \sqrt{b_1^{(k)2} + b_2^{(k)2} + b_3^{(k)2}}$ ,  $k = 2, 3, 4$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ , в предположении, что  $|b_1^{(k)}| + |b_2^{(k)}| + |b_3^{(k)}| \neq 0$ ,  $\mathbf{T}(t) = (r_1(t), r_2(t), r_3(t))$ . Заметим, что  $|\mathbf{b}_k| = 1$  для всех значений  $k$ .

Пусть функции  $r_1(t)$ ,  $r_2(t)$ ,  $r_3(t)$  являются искомым решением задачи (11), (12). Введем на  $[a, b]$  ортогональную замену переменных  $r_1(t)$ ,  $r_2(t)$ ,  $r_3(t)$  по формуле (см. [6]):

$$\mathbf{S}(t) = C(t) \cdot \mathbf{T}(t), \quad (13)$$

где

$$\mathbf{S}(t) = \begin{pmatrix} s_1(t) \\ s_2(t) \\ s_3(t) \end{pmatrix}; \quad C(t) =$$

$$= \begin{bmatrix} \sin \Theta_1(t), & \sin \Theta_2(t) \cos \Theta_1(t), & \cos \Theta_2(t) \cos \Theta_1(t) \\ \cos \Theta_1(t), & -\sin \Theta_2(t) \sin \Theta_1(t), & -\sin \Theta_1(t) \cos \Theta_2(t) \\ 0, & \cos \Theta_2(t), & -\sin \Theta_2(t) \end{bmatrix}.$$

Функции  $\Theta_1(t)$  и  $\Theta_2(t)$ , входящие в матрицу  $C(t)$ , являются вспомогательными, а  $s_1(t)$ ,  $s_2(t)$ ,  $s_3(t)$  — основными неизвестными функциями, подлежащими определению. Поскольку выполняется условие  $C^*(t) \times C(t) = E$ , то из (13) получим

$$\mathbf{T}(t) = C^*(t) \cdot \mathbf{S}(t). \quad (14)$$

Для написания дифференциальных уравнений для функций  $\Theta_i(t)$  и  $s_k(t) \times \times (i = 1, 2; k = 1, 2, 3)$  используется прием, описанный нами в 1°. Применительно к задаче (11), (12) получаем такую систему уравнений для функций  $\Theta_1(t)$  и  $\Theta_2(t)$ :

$$\left. \begin{aligned} \Phi'_{12}(t) - \sigma_{12}(t) &= 0, \\ \Phi'_{13}(t) - \sigma_{13}(t) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

и линейное дифференциальное уравнение для функции  $s_1(t)$ :

$$\dot{s}_1(t) = \bar{\psi}_{11}(t) s_1(t) + \bar{\psi}_1(t), \quad (16)$$

где

$$\bar{\psi}_{kj}(t) = \sigma_{kj}(t) - \Phi'_{kj}(t); \quad \sigma_{kj}(t) = (t_k(t), \rho_j(t));$$

$$\Phi'_{kj}(t) = (\rho_k(t), \rho_j(t)); \quad t_k(t) = (\tau_{k1}(t), \tau_{k2}(t), \tau_{k3}(t));$$

$$\tau_{kj}(t) = (\rho_k(t), d_j(t)); \quad d_k(t) = (\psi_{1k}(t), \psi_{2k}(t), \psi_{3k}(t));$$

$$\underline{\rho}_1(t) = (\sin \Theta_1, \sin \Theta_2 \cdot \cos \Theta_1, \cos \Theta_2 \cdot \cos \Theta_1);$$

$$\underline{\rho}_2(t) = (\cos \Theta_1, -\sin \Theta_1 \cdot \sin \Theta_2, -\sin \Theta_1 \cdot \cos \Theta_2);$$

$$\underline{\rho}_3(t) = (0, \cos \Theta_2, \sin \Theta_2);$$

$$\bar{\Psi}_k(t) = (\underline{\rho}_k(t), \mathbf{q}(t)) \quad (k, j = 1, 2, 3); \quad \mathbf{q}(t) = (U_1(t), U_2(t), U_3(t)).$$

Начальные условия для функций  $\Theta_1(t)$ ,  $\Theta_2(t)$  и  $s_1(t)$  выберем таким образом, чтобы граничное условие (12) в точке  $t = t_2$  выполнялось при любых функциях  $s_2(t)$  и  $s_3(t)$ . Это дает

$$\sin \Theta_1(t_2) = \beta_1^{(2)}, \quad \operatorname{tg} \Theta_2(t_2) = \beta_2^{(2)}/\beta_3^{(2)} \quad (17)$$

в предположении, что  $\beta_3^{(2)} \neq 0$ . Это предположение не является существенным ограничением, поскольку начальные условия для  $\Theta_1(t_2)$  и  $\Theta_2(t_2)$  определяются из условия  $\underline{\rho}_1(t_2) = \mathbf{b}_2$  и  $|\mathbf{b}_2| = 1$ . Для функции  $s_1(t_2)$  получим

$$s_1(t_2) = c_2. \quad (18)$$

Таким образом, функции  $\Theta_1(t)$  и  $\Theta_2(t)$  можно найти как решение задачи Коши для системы (15) с начальными условиями (17), а  $s_1(t)$  — как решение задачи (16), (18). После нахождения этих функций трехточечная задача (11), (12) свелась к граничной задаче для системы двух уравнений. Запишем эту систему:

$$\left. \begin{aligned} \dot{s}_2 &= \bar{\Psi}_{22} s_2 + \bar{\Psi}_{23} s_3 + v_2, \\ \dot{s}_3 &= \bar{\Psi}_{32} s_2 + \bar{\Psi}_{33} s_3 + v_3, \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

где  $v_k(t) = \bar{\Psi}_k(t) - \bar{\Psi}_{k1}(t) s_1(t)$  ( $k=2, 3$ ), с граничными условиями в точках  $t = t_3$  и  $t = t_4$ :

$$\left. \begin{aligned} \lambda_1 s_2(t_3) + \mu_1 s_3(t_3) &= D_3, \\ \lambda_2 s_2(t_4) + \mu_2 s_3(t_4) &= D_4, \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

где

$$\lambda_1 = \bar{\lambda}_1/\lambda; \quad \mu_1 = \bar{\mu}_1/\lambda; \quad \lambda_2 = \bar{\lambda}_2/\mu; \quad \mu_2 = \bar{\mu}_2/\mu;$$

$$\bar{\lambda}_1 = (\mathbf{b}_3, \underline{\rho}_2(t_3)); \quad \bar{\mu}_1 = (\mathbf{b}_3, \underline{\rho}_3(t_3));$$

$$\bar{\lambda}_2 = (\mathbf{b}_4, \underline{\rho}_2(t_4)); \quad \bar{\mu}_2 = (\mathbf{b}_4, \underline{\rho}_3(t_4));$$

$$D_3 = 1/\lambda (c_3 - (\mathbf{b}_3, \underline{\rho}_1(t_3))); \quad D_4 = 1/\mu (c_4 - (\mathbf{b}_4, \underline{\rho}_1(t_4)));$$

$$\lambda = \sqrt{\bar{\lambda}_1^2 + \bar{\mu}_1^2}; \quad \mu = \sqrt{\bar{\lambda}_2^2 + \bar{\mu}_2^2},$$

предполагаем, что  $\lambda \neq 0$ ,  $\mu \neq 0$ .

3°. В заключение изложим метод ортогональной прогонки для задачи (19), (20). Как и ранее, введем замену

$$\mathbf{U}(t) = D(t) \cdot \mathbf{V}(t), \quad (21)$$

где

$$\mathbf{U}(t) = \begin{vmatrix} \tau_1(t) \\ \tau_2(t) \end{vmatrix}; \quad D(t) = \begin{bmatrix} \sin \gamma(t), & \cos \gamma(t) \\ -\cos \gamma(t), & \sin \gamma(t) \end{bmatrix}; \quad \mathbf{V}(t) = \begin{vmatrix} s_2(t) \\ s_3(t) \end{vmatrix};$$

$\gamma(t)$  — неизвестная вспомогательная функция, а  $\tau_1(t)$ ,  $\tau_2(t)$  — основные неизвестные функции. Из (21) получим

$$\mathbf{V}(t) = D^*(t) \cdot \mathbf{U}(t). \quad (22)$$

Для функций  $\tau_1(t)$  и  $\tau_2(t)$  обычным путем можно получить такую систему уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \tau_1' &= \bar{\varphi}_{11}\tau_1 + \bar{\varphi}_{12}\tau_2 + z_1, \\ \tau_2' &= \bar{\varphi}_{21}\tau_1 + \bar{\varphi}_{22}\tau_2 + z_2, \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

где

$$\begin{aligned} \bar{\varphi}_{kj}(t) &= \sigma_{kj}(t) - \varphi'_{kj}(t); \quad \sigma_{kj}(t) = (\mathbf{t}_k(t), \underline{\rho}_j(t)); \quad \varphi'_{kj}(t) = \\ &= (\underline{\rho}_k(t), \underline{\rho}'_j(t)); \quad \mathbf{t}_k(t) = (\tau_{k1}(t), \tau_{k2}(t)); \quad \tau_{kj}(t) = (\underline{\rho}_k(t), \mathbf{b}_j(t)); \\ z_k(t) &= (\underline{\rho}_k(t), \mathbf{f}_2(t)); \quad \mathbf{b}_l(t) = (\bar{\psi}_{2l}(t), \bar{\psi}_{3l}(t)) \quad (l = 2, 3); \\ (k, j &= 1, 2); \quad \mathbf{f}_2(t) = (v_2(t), v_3(t)); \quad \underline{\rho}_1(t) = (\sin \gamma(t), \cos \gamma(t)); \\ \underline{\rho}_2(t) &= (-\cos \gamma(t), \sin \gamma(t)). \end{aligned}$$

Функцию  $\gamma(t)$  найдем из дифференциального уравнения

$$\varphi'_{12}(t) - \sigma_{12}(t) = 0 \quad (24)$$

с начальным условием

$$\sin \gamma(t_3) = \lambda_1, \quad \cos \gamma(t_3) = \mu_1, \quad (25)$$

а  $\tau_1(t)$  — из уравнения

$$\tau_1'(t) = \bar{\varphi}_{11}(t)\tau_1(t) + z_1(t) \quad (26)$$

с условием

$$\tau_1(t_3) = D_3. \quad (27)$$

Функцию  $\tau_2(t)$  находим при обратном ходе прогонки как решение задачи Коши для уравнения

$$\tau_2'(t) = \bar{\varphi}_{21}(t)\tau_1(t) + \bar{\varphi}_{22}(t)\tau_2(t) + z_2(t) \quad (28)$$

с начальным условием на правом конце отрезка

$$\tau_2(t_4) = \frac{1}{\Delta} (D_4 - (\underline{\gamma}_2, \underline{\rho}_1(t_4))), \quad (29)$$

где  $\Delta = (\underline{\gamma}_2, \underline{\rho}_2(t_4))$ ; вектор  $\underline{\gamma}_2 = (\lambda_2, \mu_2)$ ; считаем, что  $\Delta \neq 0$ .

Следовательно, решение искомой многоточечной задачи (1), (2) можно осуществить по такой схеме:

1. Первоначально решаем задачу Коши для системы уравнений (7) с начальными условиями (9), затем находим функцию  $r_4(t)$  по дифференциальному уравнению (8) с условием (10).

2. На втором этапе решаем задачу Коши для системы уравнений (15) с условиями (17) и для уравнения (16) — с начальным условием (18).

3. Наконец, решаем задачи Коши для уравнений (24) с условием (25); (26) — с условием (27) и уравнения (28) — с условием (29).

Искомая вектор-функция определяется теперь так: по формуле (22) находим вектор  $\mathbf{V}(t)$ , по формуле (14) — вектор  $\mathbf{T}(t)$  и, наконец, по формуле (4) — искомую вектор-функцию  $\mathbf{y}(t)$ .

Проверкой устанавливается, что найденная по такому правилу вектор-функция  $\mathbf{y}(t)$  удовлетворяет условиям (1), (2). Заметим, что при решении задачи (1), (2) по известному методу редукции к задачам Коши приходится вычислять на  $[a, b]$  двадцать функций, в случае метода ортогональной прогонки число таких функций вдвое меньше — десять.

4°. Выясним степень устойчивости изложенного метода. Начнем с вопроса устойчивости сведения многоточечной задачи для системы четырех уравнений к трехточечной задаче для системы трех уравнений первого порядка. Из соотношений (4) следует, что

$$y_1^2(t) + y_2^2(t) + y_3^2(t) + y_4^2(t) \equiv r_1^2(t) + r_2^2(t) + r_3^2(t) + r_4^2(t).$$

Значит, вычисляемые в процессе решения краевой задачи по методу прогонки функции  $r_k(t)$  ( $k = \overline{1, 4}$ ) будут величинами того же порядка, что и искомое решение задачи (1), (2), —  $y_k(t)$  ( $k = \overline{1, 4}$ ).

Предположим, что уравнения (7) и (8) решаются приближенно. Тогда будем иметь  $\tilde{\alpha}_1(t)$ ,  $\tilde{\alpha}_2(t)$ ,  $\tilde{\alpha}_3(t)$  и  $\tilde{r}_4(t)$ , получаемые по формулам:

$$\tilde{\varphi}'_{4j}(t) - \tilde{\sigma}_{4j}(t) = \varepsilon_j(t) \quad (j = \overline{1, 3}) \quad (7)$$

$$\tilde{r}'_4(t) = \tilde{\psi}_{44}(t) \cdot \tilde{r}_4(t) + \tilde{\psi}_4(t) + \varepsilon_4(t), \quad (8)$$

$$\tilde{\rho}_1(t_1) = \mathbf{a}_1 + \underline{\delta}_1, \quad \tilde{r}_4(t_1) = A_1 + \eta_1,$$

где  $\varepsilon_i(t)$  ( $i = \overline{1, 4}$ ) — скалярные величины;  $\underline{\delta}_1 = (\delta_1^{(1)}, \delta_2^{(1)}, \delta_3^{(1)}, \delta_4^{(1)})$ ;  $\eta_1$  — какое-то малое число. Можно показать (см., например, [7]), что вектор-функция  $\tilde{y}(t)$ , определяемая по формуле  $\tilde{y}(t) = \tilde{B}^*(t) \cdot \tilde{R}(t)$ , будет удовлетворять такой системе дифференциальных уравнений:

$$\tilde{y}'(t) = \tilde{P}(t) \cdot \tilde{y}(t) + \tilde{f}(t) \quad (1)$$

и условиям

$$\left. \begin{aligned} (\tilde{\mathbf{a}}_1, \tilde{y}(t_1)) &= A_1 + \eta_1, \\ (\tilde{\mathbf{a}}_k, \tilde{y}(t_k)) &= A_k \quad (k = 2, 3, 4), \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

в которых матрица  $\tilde{P}(t)$  и вектор-функция  $\tilde{f}(t)$  мало отличаются на  $[a, b]$  соответственно от  $P(t)$  и  $f(t)$ , а  $\tilde{\mathbf{a}}_1$  от  $\mathbf{a}_1$ . Значит,  $\tilde{y}(t)$  является решением задачи (1), (2), аппроксимирующей задачу (1), (2). Это позволяет утверждать, что предложенный метод сведения многоточечной задачи для системы четырех уравнений первого порядка к трехточечной задаче для системы трех уравнений будет устойчивым, если устойчивой относительно малых изменений величин, определяющих задачу, была искомая задача (1), (2).

Аналогично можно показать, что этими же свойствами обладает сведение по методу прогонки трехточечной задачи к двухточечной и сведение последней к задачам Коши. При этом важное значение имеет то обстоятельство, что для всех  $t$  из  $[a, b]$  выполняются тождества:

$$s_2^2(t) + s_3^2(t) \equiv \tau_1^2(t) + \tau_2^2(t),$$

$$s_1^2(t) + s_2^2(t) + s_3^2(t) \equiv r_1^2(t) + r_2^2(t) + r_3^2(t),$$

$$r_1^2(t) + r_2^2(t) + r_3^2(t) + r_4^2(t) \equiv y_1^2(t) + y_2^2(t) + y_3^2(t) + y_4^2(t),$$

указывающие на один и тот же порядок величин, вычисляемых в процессе решения по методу прогонки многоточечной задачи (1), (2), и искомого решения. Отсюда и из предыдущего следует заключение об устойчивости метода ортогональной прогонки в том смысле, что найденное по схеме этого метода решение будет удовлетворять такой системе уравнений и граничным условиям, которые аппроксимируют (1), (2).

Заметим также, что изложенный метод с небольшими изменениями пригоден и для решения задач с граничными условиями иного вида, когда точки совпадают:

$$a = t_1 = t_2, \quad b = t_3 = t_4, \quad a = t_1 = t_2 < t_3 < t_4 = b,$$
$$a = t_1 = t_2 = t_3 < t_4 = b.$$

## ЛИТЕРАТУРА

1. Годунов С. К. УМН, 16, 3(99), 1961.
2. Годунов С. К. Ж. вычисл. матем. и матем. физики, 2, № 5, 1962.
3. Абрамов А. А. Ж. вычисл. матем. и матем. физики, 1, № 2, 1961.
4. Абрамов А. А. Ж. вычисл. матем. и матем. физики, 1, № 3, 1961.
5. Moszynski K. Algorytmy, 2, № 3, 1964.
6. Монастырный П. И. ДАН БССР, 8, № 5, 1964.
7. Монастырный П. И. Ж. вычисл. матем. и матем. физики, 5, № 2, 1965.

Поступило в редакцию 24.XI 1965

І. С. САЦУНКЕВІЧ

### АБ ЦЯЖКІХ ЛЕПТОНАХ

У цяперашні час элементарныя часцінкі можна падзяліць на два класы: клас лептонаў і клас адронаў. Да першага класа адносяцца часцінкі, якія ўдзельнічаюць толькі ў слабых і электрамагнітных рэакцыях. Часцінкі другога класа валодаюць дадаткова моцным узаемадзеяннем. Характэрна, што колькасць адронаў у шмат фазоў перавышае колькасць лептонаў. Гэта асаблівасць, а таксама прысутнасць у лептонным класе  $\mu$ -мезона з незразумела вялікай у параўнанні з электронам масай прывялі да спроб расшырэння класа лептонаў. Упершыню на такую магчымасць указаў Э. М. Ліпманаў [1]. Гэту гіпотэзу падтрымалі Я. Б. Зельдовіч [2] і Л. Б. Окунь [3]. Некалькі з другога пункту гледжання да яе прыйшоў Ф. Лоу [4]. Згодна з гэтай гіпотэзай, мяркуецца існаванне лептонаў больш цяжкіх, чым  $\mu$ -мезон. Верхняя граніца масы не можа быць апырыоры ўказана і ў прынцыпе можа перавышаць масы адронаў. Эксперымент дазваляе атрымаць толькі ніжнія граніцы мас новых часцінак, калі дапусціць, што іх узаемадзеянні такія ж, як у звычайных лептонах. Тады адсутнасць распадаў  $K \rightarrow L + \nu$  і  $K \rightarrow L + \gamma$  адразу ўказвае на тое, што масы новых лептонаў павінны быць большыя за масы  $K$ -мезона.

Пытанне аб паходжанні такіх вялікіх мас, таксама як і пытанне аб масе  $\mu$ -мезона, пакуль што застаецца адкрытым. Асаблівую вострыню гэтыя пытанні набудуць толькі з выяўленнем новых лептонаў, а таксама ў выпадку выяўлення праежкавага вектарнага мезона, які таксама можна аднесці да класа лептонаў.

Слабае ўзаемадзеянне новых лептонаў можа ажыццяўляцца аналагічна слабаму ўзаемадзеянню звычайных лептонаў, г. зн. праз узаемадзеянне тыпу здабытку токаў. Пры гэтым новы лептон можа стаяць у адной токавай дужцы альбо са сваім нейтральным партнёрам, альбо з адным з вядомых нейтрына, у прыватнасці з міюнным нейтрына:

$$j_a^L = \bar{L} \gamma_a (1 + \gamma_5) L^0, \quad (1)$$

$$j_a^L = \bar{L} \gamma_a (1 + \gamma_5) \nu_\mu.$$

Калі ажыццяўляецца першы варыянт, відавочна, новыя лептоны зручней за ўсё шукаць па ўтварэнню пар у пучках  $\gamma$ -квантаў. Калі ж магчымы другі варыянт, новыя лептоны павінны нараджацца пры ўзаемадзеянні пучка міюнных нейтрына высокай энергіі з рэчывам.

Разгледзім другую магчымасць. Грубую ацэнку сячэнняў працэсаў

$$\nu_\mu + p \rightarrow n + L^+, \quad (A)$$

$$\nu_\mu + n \rightarrow p + L^- \quad (B)$$

можна атрымаць, калі не лічыцца з уплывам індцыраваных моцным і электрамагнітным узаемадзеяннямі членаў у слабым барыённым току

і лічыць формфактары роўнымі адзінцы. Для імпульсаў перадачы, якія знаходзяцца ў межах сучаснага эксперыменту, гэтыя дапушчэнні могуць змяніць ацэнкі не больш, чым на парадак. Тады слабы барыённы ток будзе мець выгляд

$$j_a^B = \bar{p} \gamma_a (1 + \gamma_5) n. \quad (2)$$

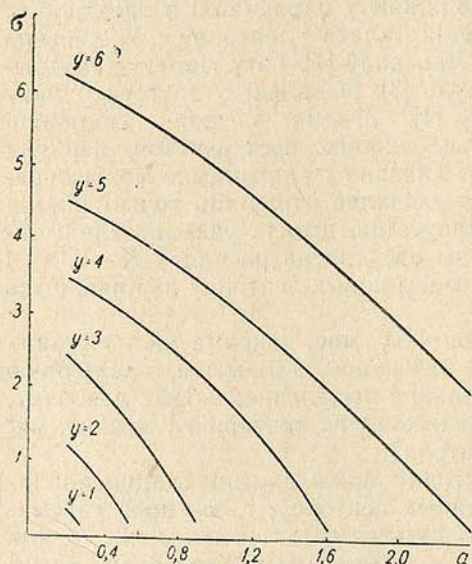
Сячэнне працэсаў (А) і (Б) у лабараторнай сістэме каардынат роўна [5]:

$$\sigma_a = \frac{\sigma_0}{3} \left\{ 1 - \frac{2+a}{2(1+y)} - \frac{a(a-4)}{2(1+y)^2} - \frac{1+a^2}{(1+y)^3} + \frac{(1-a)^2}{(1+y)^4} \right\},$$

$$\sigma_b = \sigma_0 \left\{ 1 - \frac{1}{1+y} \right\} \left\{ 1 - \frac{1+a}{1+y} \right\},$$

$$\sigma_0 = \frac{G^2 x^2}{\pi h^2 c^2} \frac{(1+y)^2}{y} \sqrt{1 - \frac{2(1+a)}{1+y} + \frac{(1-a)^2}{(1+y)^2}},$$

дзе  $a = x_L^2/x^2$ ;  $y = 2E_\nu/Mc^2$ ;  $x_i = M_L c/h$ ;  $x = Mc/h$ ;  $M$  — маса нуклона;  $M_L$  — маса цяжкага лептона;  $E_\nu$  — энергія нейтрына ў лабараторнай сістэме каардынат;  $G = 1,41 \cdot 10^{-49}$  эрг·см<sup>3</sup>.



Залежнасць сячэння працэсу (А) ад параметра  $a$

жыцця часцінкі будзе малым з прычыны вялікага фазавога аб'ёму.

У [1] прыведзена ацэнка часу жыцця  $L$ -лептона пры распадзе на  $\mu + \nu_\mu + \bar{\nu}_\mu$  — яна складае  $0,4 \cdot 10^{-9}$  сек. Аднак магчымы і іншыя каналы слабага распаду, напрыклад  $\pi^+$  або  $\mu^+$  і г. д. Ацэнку часу жыцця адносна такіх распадаў на ўзроўні дакладнасці ацэнкі сячэння нараджэння можна атрымаць, выкарыстоўваючы феноменалагічны матрычны элемент распаду  $\pi \rightarrow l + \nu$  [6]. Пасля замены  $l \leftrightarrow \pi$  атрымліваем для адносна часу жыцця  $L$ -лептона з  $M_\pi$ -масай  $\pi$ -мезона

$$R = \frac{\tau(L \rightarrow \pi \nu)}{\tau(L \rightarrow l \nu \bar{\nu})} = \frac{1}{24\pi^2 \left(1 - \frac{x_\pi^2}{x_L^2}\right)^2}. \quad (3)$$

Залежнасць сячэння працэсу (А) ад параметра  $a$ , звязанага з масай лептона, прыведзена на рысунку. Выразна відаць, падаўленне сячэння нараджэння новых лептонаў з павелічэннем іх масы. Але гэта падаўленне такое, што сячэнне нараджэння новых лептонаў пры энергіях нейтрына  $> 0,9$  Гэв толькі на парадак меншае за сячэнні нараджэння  $\mu$ -мезона, калі мы дапускаем універсальнасць канстанты сувязі для ўсіх слабых узаемадзеянняў. Тая акалічнасць, што такія лептоны не назіраліся ў сучасных даследах па рассеянню нейтрына на ядрах, можа быць звязана з велічынёй часу жыцця новага лептона ў адносінах да распаду на звычайныя лептоны. Калі такі распад ідзе нават праз звычайныя слабыя ўзаемадзеянні, час

Пры масе  $L$ -часцінкі ў  $560 \text{ Мэв}/c^2$  маем  $R \simeq 7 \cdot 10^{-3}$  (пры  $\kappa_L \gg \kappa_\pi = 4 \cdot 10^{-3}$ ). Гэта дае для часу жыцця велічыню  $\sim 4,2 \cdot 10^{-12} \text{ сек}$ . Лептоны з такім часам жыцця ў нейтрынных доследах маглі і не наглядацца з прычыны адносна хуткага распаду.

Трэба адзначыць, што ў прыведзенай схеме існуе магчымасць яшчэ больш хуткага электрамагнітнага распаду  $L \rightarrow l + \gamma$  праз узаемадзеянне тыпу  $g \psi_L \sigma_{\alpha\beta} F_{\alpha\beta} \psi_l$ . Справа ў тым, што нараджэнне  $L$ -лептонаў мяюць нейтрына магчыма, калі па сваіх лептонных ліках  $L$  не адрозніваюцца ад  $\mu$ . Тады закон захавання лептонных лікаў не перашкаджае электрамагнітнаму пераходу  $L \rightarrow \mu$ . Ацэньваючы ў гэтым выпадку час жыцця, атрымліваем

$$\tau(L \rightarrow \mu \gamma) = \frac{g^2}{2\pi h} \frac{(\kappa_L^2 - \kappa_\mu^2)^3}{\kappa_L^5} \quad (4)$$

Для лептона з масай  $560 \text{ Мэв}/c^2$  і канстантай сувязі  $g/\sqrt{hc} = \sqrt{\alpha}$ , дзе  $\alpha$  — пастаянная тонкай структуры, маем хуткі электрамагнітны распад з часам жыцця  $\sim 2 \cdot 10^{-21} \text{ сек}$ .

Такім чынам,  $\pi\nu$  і  $\mu\gamma$  — каналы распаду  $L$ -часцінак з часам жыцця  $\ll 10^{-12} \text{ сек}$  могуць растлумачыць цяжкасць назірання лептонаў і ўказваюць на неабходнасць стараннага пошуку  $L$ -лептонаў. Для гэтага трэба вывучаць квазіпружкія працэсы тыпу нараджэння  $\mu$ -мезона на ядры, але толькі з  $\pi$ -мезонам замест  $\mu$ -мезона або з дадатковым  $\gamma$ -квантам. Гэта працэсы наступнага выгляду:

$$\nu_\mu + \rho \begin{cases} \pi^+ + \bar{\nu}_\mu + n, \\ \mu^+ + \gamma + n, \end{cases} \quad (A')$$

$$\nu + n \begin{cases} \pi^- + \nu + \rho, \\ \mu^- + \gamma + \rho. \end{cases} \quad (B')$$

Нам здаецца, што працэс (B') асабліва падыходзіць для пошукаў дзякуючы таму, што пры веданні энергетычнага спектра нейтрына вымярэнне імпульсаў астатніх часцінак дазволіць атрымаць грубую ацэнку масы  $L$ -лептона, калі ён існуе.

ЛІТАРАТУРА

1. Липманов Э. М. ЖЭТФ, 43, 893, 1962.
2. Зельдович Я. Б. УФН, 78, 549, 1962.
3. Окунь Л. Б. ЖЭТФ, 47, 1777, 1964.
4. Low F. Phys. Rev. Lett., 14, 238, 1965.
5. Марков М. А. Нейтрино. Изд. «Наука», М., 1964.
6. Окунь Л. Б. Слабое взаимодействие элементарных частиц. ГИФМЛ, М., 1963.

РЕЗЮМЕ

Предполагается существование лептонов более тяжелых, чем  $\mu$ -мезон. Наряду с универсальностью взаимодействия во всем расширенном классе лептонов мы полагаем, что слабый ток имеет вид

$$j_\alpha^L = \bar{L} \gamma_\alpha (1 + \gamma_5) \nu_\mu.$$

Хотя сечение рождения таких лептонов лишь на один-два порядка меньше сечения рождения  $\mu$ -мезона,  $L$ -лептоны могли избежать детектирования из-за их быстрого, слабого или электромагнитного распада. Оценка времени жизни  $L$ -лептона даст величины порядка  $10^{-12} \text{ сек}$  или  $10^{-21} \text{ сек}$  в зависимости от типа распада. Указано, что каналы  $L \rightarrow \pi\nu$  и  $L \rightarrow \mu\gamma$  могут служить средством для обнаружения  $L$ -лептонов.

Поступило в редакцию 12. II 1966

С. І. ЛАБКО

### КАМПТОНАЎСКАЕ РАССЕЙННЕ ПАЛЯРЫЗАВАНАГА СВЯТЛА НА ЧАСЦІНЦЫ СА СПІНАМ $1/2-3/2$

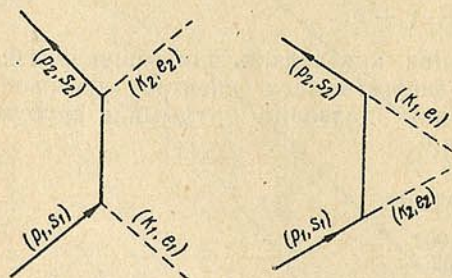
Разглядаецца рассяенне лінейна палярызаванага святла на часцінцы, якая знаходзіцца ў спакоі і можа прымаць два значэнні масы спакою  $m_1$  і  $m_2$  ( $\frac{m_2}{m_1} = \lambda$ ), прычым масе  $m_1$  адпавядае спін  $1/2$ , а масе  $m_2$  — спін  $3/2$ . Ураўненне для часцінкі з гэтымі ўласцівасцямі можа быць запісана ў выглядзе [1, 2, 5, 6]

$$(\alpha_k \nabla_k + z) \psi = 0, \quad (1)$$

дзе  $\alpha_k$  — квадратныя матрыцы 20-га парадку;  $z$  — пастаянная, звязаная з масавымі станамі часцінкі ( $m_2 = z, h = c = 1$ ).

Вылічэнне разнастайных эфектаў з такімі часцінкамі звычайнымі метадамі патрабуе вялікіх затрат працы і часу, паколькі алгебра матрыц  $\alpha_k$  вельмі складаная [7]. Аднак развіты ў [3] (гл. таксама [4]) метады практычных апэратараў значна спрашчае разлікі, а таксама дазваляе вылічыць эфекты ўзаемадзеяння палярызаваных часцінак.

Разгледзім камптонаўскае рассяенне палярызаванага святла на часцінцы  $1/2-3/2$ , якая знаходзіцца ў спакоі, у выпадку, калі на квадрат імпульсу часцінкі пасля рассяення можна не звяртаць увагі, абмежаваўшыся толь-



Рыс. 1.

кі яго першай ступенню. Пры гэтым мы будзем дапускаць, што часцінка змяняе свой масавы стан. Як і ў выпадку электрона [9], камптонаўскаму рассяенню на часцінцы  $1/2-3/2$  у агульным выпадку адпавядаюць наступныя дзве дыяграмы Фейнмана (рыс. 1).

У гэтым выпадку  $s_1$  і  $s_2$  могуць прымаць значэнні  $1/2$  або  $3/2$ . Матрычны элемент, які адпавядае гэтым дыяграмам, у імпульсным прадстаўленні будзе мець наступны выгляд:

$$S_{1-2} = \frac{ie^2}{2\sqrt{\omega_1\omega_2}} \bar{u}_2 \{ \hat{e}_2 (i\alpha_k q_k^{(1)} + z)^{-1} \hat{e}_1 + \hat{e}_1 (i\alpha_k q_k^{(2)} + z)^{-1} \hat{e}_2 \} \times u_1 (2\pi)^4 \delta(p_1 + k_1 - p_2 - k_2), \quad (2)$$

дзе  $q^{(1)} = p_1 + k_1$ ;  $q^{(2)} = p_1 - k_2$ ;  $(i\alpha_k q_k + z)^{-1}$  — апэратар, адваротны апэратару ўраўнення  $(i\alpha_k p_k + z)\psi = 0$  для часцінкі ў імпульсным прад-

стаўленні. Хвалевыя функцыі фатона і часцінкі выбраны ў выглядзе плоскіх хваль:

$$\psi_k = u_k e^{ip_k x}, \quad A_k(x) = \frac{e_k}{\sqrt{2\omega_k}} e^{ikx}, \quad k = 1, 2. \quad (3)$$

Адваротны аператар можа быць знойдзены з дапамогай мінімальнага палінома для матрыцы, якія ўваходзяць ва ўраўненне (1) [8]. Мінімальны паліном для разглядаемага аператара мае наступны выгляд:

$$\hat{p}^2 [(i\hat{p})^2 + p^2] [(i\hat{p})^2 + \lambda^2 p^2] = 0, \quad (4)$$

дзе  $\hat{p} = \alpha_i p_i$ .

Калі абазначыць  $\alpha_i q_i = \hat{q}$ , то

$$(i\alpha_k q_k + x)^{-1} = \frac{-i\hat{q} + x}{x^2} \left[ 1 + \frac{\hat{q}^4 - (x^2 + q^2 + q^2 \lambda^2) \hat{q}^2}{(x^2 + q^2)(x^2 + q^2 \lambda^2)} \right]. \quad (5)$$

Няхай часцінка да рассеяння знаходзілася ў спакоі і мела масу  $m_1$ . Тады з  $\delta$ -функцыі, якая ўваходзіць у (2), знаходзім:

$$p_1 + k_1 = p_2 + k_2, \quad p_1^2 + 2p_1 k_1 + k_1^2 = p_2^2 + 2p_2 k_2 + k_2^2.$$

Паколькі  $k_i^2 = 0$ ,  $p_1^2 = -m_1^2$ ,  $p_2^2 = -m_2^2$ , то

$$-m_1^2 - 2m_1 \omega_1 = -m_2^2 + 2(p_1 + k_1 - k_2) k_2,$$

$$m_2^2 - m_1^2 - 2m_1 \omega_1 = -2m_1 \omega_2 - 2\omega_1 \omega_2 + 2\omega_1 \omega_2 \cos \Theta,$$

$$\omega_2 = \frac{2m_1 \omega_1 + m_1^2 - m_2^2}{2m_1 + 2\omega_1 (1 - \cos \Theta)}, \quad (6)$$

дзе  $\Theta$  — вугал рассеяння. Выраз (6) прадстаўляе сабой абагульненне вядомай формулы Камптона, якая паказвае залежнасць частаты рассеяння святла ад частаты падаючага святла і вугла рассеяння, на выпадак двух масавых станаў часцінкі.

Дыферэнцыяльнае свячэнне рассеяння мае наступны выгляд:

$$d\sigma = \frac{e^4}{4\omega_1 \omega_2} |\bar{u}_2 \hat{M} u_1|^2 \frac{dp_2 dk_2}{I(2\pi)^2} \delta(k_1 - p_2 - k_2) \delta(m_1 + \omega_1 - \varepsilon_2 - \omega_2), \quad (7)$$

дзе  $\hat{M} = \hat{e}_2 (i\hat{q}^{(1)} + x)^{-1} \hat{e}_1 + \hat{e}_1 (i\hat{q}^{(2)} + x)^{-1} \hat{e}_2$ ;  $I$  — шчыльнасць патоку фатонаў, якую ў выпадку часцінкі, што знаходзіцца ў спакоі, можна дапусціць роўнай 1. Выкарыстоўваючы ўласцівасці  $\delta$ -функцыі, можна лёгка праінтэграваць па  $dp_2$  і  $d\omega_2$ , ажыццяўляючы замену  $\delta(k_1 - p_2 - k_2) dp_2 \rightarrow 1$ ,

$$\delta(m_1 + \omega_1 - \varepsilon_2 - \omega_2) dk_2 \rightarrow \frac{\omega_2^2 d\Omega}{\left| \frac{\partial}{\partial \omega_2} (\omega_2 + \varepsilon_2) \right|} = \frac{\varepsilon_2 \omega_2^3 d\Omega}{p_2 k_2}, \quad \text{дзе } d\Omega \text{ — элемент}$$

цялеснага вугла, у якім ляжыць вектар  $k_2$ . З улікам сказанага з (7) атрымаем наступны выраз:

$$d\sigma = \frac{e^4 \varepsilon_1 \omega_2^2}{16\pi^2 (p_2 k_2) \omega_1} |\bar{u}_2 \hat{M} u_1|^2 d\Omega. \quad (8)$$

Сячэнне  $d\sigma$  будзе вызначацца значэннем  $|\bar{u}_2 \hat{M} u_1|^2$ , якое залежыць ад палярызацыі як фатонаў, так і часцінкі да і пасля рассеяння. Будзем знаходзіць  $\bar{u}_2 \hat{M} u_1$ , выкарыстоўваючы тэорыю праектыўных апэратараў [3, 4], згодна з якой матрычны элемент адпаведнага пераходу ў нашым выпадку можа быць запісан ў наступным выглядзе:

$$\bar{u}_2 \hat{M} u_1 = \frac{\text{Sp}(\hat{M} P_1 P_2) e^{i\varphi_{1,2}}}{[\text{Sp}(P_1 P_2)]^{1/2}}, \quad (9)$$

дзе  $P_1$  і  $P_2$  — праектыўныя апэратары, роўныя здабытку масавага і спінавага праектыўных апэратараў для часцінкі адпаведна да і пасля рассеяння;  $\varphi_{1,2}$  — рознасць фаз часцінкі да і пасля рассеяння. Паколькі нас будзе цікавіць толькі квадрат модуля выразу (9), то рознасць фаз  $\varphi_{1,2}$  можна не ўлічваць. На аснове таго, што  $P_1$  і  $P_2$  можна прадставіць у выглядзе дыяд, будзем мець:  $P_1 = u_1 \cdot \bar{u}_1$ ,  $P_2 = u_2 \cdot \bar{u}_2$ ,  $P_1 P_2 = u_1 \cdot (\bar{u}_1 u_2) \cdot \bar{u}_2$ ,  $\text{Sp}(P_1 P_2) = (\bar{u}_1 u_2)(u_1 \bar{u}_2)$ , і з дакладнасцю да фазовага множніка атрымаем  $u_1 u_2 = \sqrt{\text{Sp}(P_1 P_2)}$ . Акрамя таго,  $\text{Sp}[\hat{M}(\bar{u}_1 u_2)(u_1 \bar{u}_2)] = \text{Sp}(\hat{M} P_1 P_2) = (\bar{u}_1 u_2) \text{Sp}(\hat{M} u_1 \cdot \bar{u}_2) = (\bar{u}_1 u_2)(\bar{u}_2 \hat{M} u_1)$ . Такім чынам,  $\bar{u}_2 \hat{M} u_1 = \frac{\text{Sp}(\hat{M} P_1 P_2)}{u_1 u_2} = \frac{\text{Sp}(\hat{M} P_1 P_2)^*}{\sqrt{\text{Sp}(P_1 P_2)}}$ .

Вызначым праектыўныя апэратары  $P_1$  і  $P_2$  наступным чынам:  $P_1 = P_{m_1} \sigma_1$ ,  $P_2 = P_{m_2} \sigma_2$ . Пры гэтым  $P_{m_1}$  — масавы праектыўны апэратар для часцінкі ў стане  $m_1$  — запісана наступным чынам:

$$P_{m_1} = \frac{(i\hat{p} - \kappa)(\hat{p}^2 - m_1^2 \hat{p}^2)}{2\kappa^3} \frac{m_1}{\lambda \varepsilon_1}, \quad \hat{p} = \alpha_k p_k, \quad m_1 = \frac{\kappa}{\lambda} \quad (10)$$

або, паколькі  $\hat{p} = \alpha_4 p_4 = i\alpha_4 m_1$ , то

$$P_{m_1} = \frac{\alpha_4^2 (\alpha_4^2 - 1) (\alpha_4 + \lambda)}{2\lambda^4 (\lambda^2 - 1)}. \quad (10a)$$

У якасці  $\sigma_1$  можна выбраць апэратар праекцыі спіна на вось  $x$ .

$$\sigma_1 \left( \pm \frac{1}{2} \right) = \frac{\left( \hat{s}_1 \pm \frac{1}{2} \right) \left( \hat{s}_1^2 - \frac{9}{4} \right)}{\mp 2}, \quad \hat{s}_1 = iI^{23}, \quad (11)$$

дзе  $I^{uv}$  — інфінітэзімальныя апэратары прадстаўлення групы Лоранца ў 20-мернай прасторы хвалевак функцый часцінкі. Аналагічна для стану  $m_2 = \kappa$

$$P_{m_2} = \frac{(i\hat{p} - \kappa)(\hat{p}^4 - \hat{p}^2 \kappa^2 \lambda^2)}{2\kappa^5 (\lambda^2 - 1)} \frac{\kappa}{\varepsilon_2}. \quad (12)$$

$P_{m_1}$  і  $P_{m_2}$  выбраны так, каб выконвалася нарміроўка  $\bar{\psi} \alpha_4 \psi = 1$ . У якасці  $\sigma_2$  трэба ўзяць апэратары, якія даюць праекцыі спіна часцінкі на напрамак імпульсу аддачы  $(\pm 1/2, \pm 3/2)$ , г. зн.

$$\sigma_2 \left( \pm \frac{1}{2} \right) = \frac{\left( \hat{s}_2 \pm \frac{1}{2} \right) \left( \hat{s}_2^2 - \frac{9}{4} \right)}{\mp 2}, \quad \sigma_2 \left( \pm \frac{3}{2} \right) = \frac{\left( \hat{s}_2 \pm \frac{3}{2} \right) \left( \hat{s}_2^2 - \frac{1}{4} \right)}{\pm 6}, \quad (13)$$

\* Гэты спосаб атрымання выразу (9) быў указан праф. Ф. І. Фёдаравым.

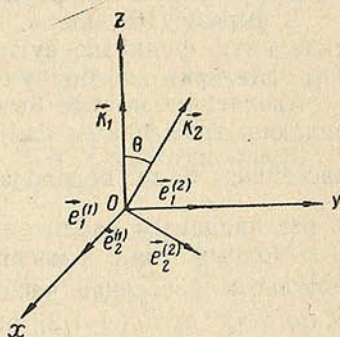
дзе  $\hat{s}_2 = \frac{i \delta_{\mu\nu} p_2 \mu J^{\nu\mu}}{2 |p_2|}$ . Палярызацыі фатонаў уваходзяць у апэратар у выглядзе множнікаў  $\hat{e}_\mu = e_{\mu\nu} \alpha_\nu$ , дзе  $\mu = 1; 2$  адносіцца адпаведна да падаючага і рассеянага фатона. Для спрашчэння разліку выберам па два незалежныя вектары палярызацыі для кожнага з двух фатонаў у наступным выглядзе:

$$e_1^{(1)} = \frac{[k_1 \times k_2]}{|[k_1 \times k_2]|}, \quad e_1^{(2)} = \frac{1}{|k_1|} [k_1 \times e_1^{(1)}], \quad e_2^{(1)} = e_1^{(1)}, \quad e_2^{(2)} = \frac{1}{|k_2|} [k_2 \times e_2^{(1)}].$$

Акрамя таго, сістэму каардынат, адносна якой часцінка да рассеяння знаходзілася ў спакоі, выберам так, каб вектар  $k_1$  быў накіраван па восі  $z$ , а вектар  $k_2$  ляжаў у плоскасці  $xoy$  (рыс. 2). Тады  $k_1(0, 0, k_1)$ ,  $k_2(0, k_2 \sin \Theta, k_2 \cos \Theta)$ ,  $e_1^{(1)}(1, 0, 0, 0)$ ,  $e_1^{(2)}(0, 1, 0, 0)$ ,  $e_2^{(1)} = e_1^{(1)}$ ,  $e_2^{(2)}(0, \cos \Theta, -\sin \Theta, 0)$ ,  $\hat{e}_1^{(1)} = \hat{e}_2^{(1)} = \alpha_1$ ,  $\hat{e}_1^{(2)} = \alpha_2$ ,  $\hat{e}_2^{(2)} = \alpha_2 \cos \Theta - \alpha_3 \sin \Theta$ .

Няхай цяпер на часцінку, якая знаходзіцца ў спакоі, з масай  $m_1$  і праекцыяй спіна на вось  $x$ , роўнай  $1/2$ , падае фатон, палярызаваны па  $e_1^{(1)}$ . Знайдзем  $d\sigma$  для выпадку, калі рассеяны фатон будзе мець тую ж палярызацыю, што і падаючы, а часцінка, перайшоўшы ў стан  $m_2$ , будзе мець праекцыю спіна на напрамак імпульсу  $+1/2$ . У гэтым выпадку вылічэнне  $d\sigma$  зводзіцца да падліку наступнага выразу:

$$\begin{aligned} & \text{Sp} \left\{ \alpha_1 (i\hat{q}^{(1)} + z)^{-1} \alpha_1 P_{m_1} \sigma_1 \left( \frac{1}{2} \right) \times \right. \\ & \quad \times P_{m_2} \sigma_2 \left( \frac{1}{2} \right) + \alpha_1 (i\hat{q}^{(2)} + \\ & \quad \left. + z)^{-1} \alpha_1 P_{m_1} \sigma_1 \left( \frac{1}{2} \right) P_{m_2} \sigma_2 \left( \frac{1}{2} \right) \right\}. \quad (14) \end{aligned}$$



Рыс. 2.

Знаходжанне выказаў тыпу (14) у нашым выпадку некалькі аблягчаецца тым, што ўсе ўваходзячыя сюды матрыцы  $\alpha_k$  могуць быць выражаны праз здабыткі матрыц Дзірака.

Падлік назоўніка выразу (9) дае

$$\text{Sp} \left\{ P_{m_1} \sigma_1 \left( \frac{1}{2} \right) P_{m_2} \sigma_2 \left( \frac{1}{2} \right) \right\} = -\frac{2}{9} \frac{a(x + \varepsilon_2) K^2}{x^2 \lambda^3 \varepsilon_2}. \quad (15)$$

Прымаючы пад увагу (15) і апускаючы даволі грувасткае вылічэнне выразу (14), атрымаем канчаткова для сячэння рассеяння (8) наступнае значэнне:

$$\begin{aligned} d\sigma_1 = & -\frac{ae^1 \left( \frac{\omega_2}{\omega_1} \right) \varepsilon_2}{32 \cdot 9\pi^2 (x + \varepsilon_2) x^5 \lambda^4} \frac{d\Omega}{\left( m_1 + 2\omega_1 \sin^2 \frac{\Theta}{2} \right) K^2} \times \\ & \times \left\{ \left[ \frac{2}{3} \left( \lambda - 1 - 2a + \frac{2a}{3\lambda} \right) K^2 + x(\omega_1 - \omega_2) \cos^2 \frac{\Theta}{2} \frac{B}{\lambda^2} (\lambda + 1) \right] (\varepsilon_2 + x) + \right. \\ & \left. + \left[ \frac{(\lambda - 1)x^2 - \frac{4}{3}(m_1 + \omega_1)^2}{\Delta_1} - \frac{4}{3} \frac{a(m_1 + \omega_1)^2}{x\omega_1} \right] \Omega_1 (\varepsilon_2 + x) + \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left[ \frac{(\lambda - 1)x^2 - \frac{4}{3}(m_1 - \omega_2)^2}{\Delta_2} + \frac{4}{3} \frac{a(m_1 - \omega_2)^2}{x\omega_2} \right] \Omega_2 (\varepsilon_2 + x) - \\
& - \left( B - \frac{2}{3} a \lambda - \frac{2}{3} a \right) (m_1 + \varepsilon_2) \left[ 2m_1 (\omega_1 - \omega_2) \cos^2 \frac{\Theta}{2} + K^2 \right] + \frac{2}{3} x \lambda \times \\
& \times (\lambda + 1) (m_1 + \varepsilon_2) \times \left[ \frac{(m_1 + \omega_1) \Omega_1}{\Delta_1} + \frac{(m_1 - \omega_2) \Omega_2}{\Delta_2} \right]^2, \quad (16)
\end{aligned}$$

дзе  $\Delta_1 = m_2^2 - m_1^2 - 2m_1 \omega_1$ ;  $\Delta_2 = m_2^2 - m_1^2 + 2m_1 \omega_2$ ;  $K^2 = \omega_1^2 + \omega_2^2 - 2\omega_1 \omega_2 \cos \Theta$ ;  $\Omega_1 = \omega_1 (\omega_1 - \omega_2 \cos \Theta)$ ;  $\Omega_2 = \omega_2 (\omega_2 - \omega_1 \cos \Theta)$ ;  $B = \lambda^3 - \frac{8}{3} a \lambda + \frac{4}{3} a$ ;  $a = \left( c_1 + \frac{1}{2} \right) \left( c_2 + \frac{1}{2} \right) < 0$ ;  $c_1, c_2$  — постійні, якія ўваходзяць у матрыцы  $\alpha_k$  асноўнага ўраўнення.

З выразу (16) відаць, што сячэнне рассеяння прадстаўляе сабой складаную функцыю вугла рассеяння і энергіі фатонаў. Акрамя таго,  $d\sigma_1$  залежыць ад абодвух масавых станаў часцінкі.

Аналагічна могуць быць падлічаны сячэнні рассеяння, якія адпавядаюць тром іншым камбінацыям праекцый спіна часцінкі да і пасля рассеяння, г. зн. пераходам  $\frac{1}{2} \rightarrow -\frac{1}{2}$ ,  $-\frac{1}{2} \rightarrow \frac{1}{2}$ ,  $-\frac{1}{2} \rightarrow -\frac{1}{2}$ , якія ў разглядаемым набліжэнні ўсе будуць роўныя  $d\sigma_1$ . Калі часцінка ў зыходным стане з масай  $m_1$  знаходзілася ў спакоі, то пры любых імпульсах рассеянай часцінкі матрычныя элементы віды  $|\bar{u}_{m_2}(\pm 3/2)\alpha_i \times \times (\hat{iq} + x)^{-1} \alpha_k u_{m_1}(\pm 1/2)|$  роўны нулю. Гэта значыць, што пры рассеянні святла на часцінцы, якая знаходзіцца ў спакоі, немагчымы пераходы яе ў стан з масай і спінам  $\pm 3/2$ . Такім чынам, сячэнне  $d\sigma_1$ , усярэднянае па палярызацыях часцінкі ў пачатковым і прасумаванае па палярызацыях часцінкі ў канечным станах, будзе роўна  $2d\sigma_1$ .

Знойдем цяпер сячэнне рассеяння фатона з палярызацыяй  $e_1^1$  на часцінцы са спінам  $1/2$ , калі праекцыя яе спіна пасля рассеяння роўна  $1/2$ , а рассеяны фатон палярызаван на  $e_2^2$ . Як і ў папярэднім выпадку, задача зводзіцца да вылічэння следу ад выразу

$$\begin{aligned}
& (\alpha_2 \cos \Theta - \alpha_3 \sin \Theta) (\hat{iq}^{(1)} + x)^{-1} \alpha_1 P_{m_1 \sigma_1} \left( \frac{1}{2} \right) P_{m_2 \sigma_2} \left( \frac{1}{2} \right) + \\
& + \alpha_1 (\hat{iq}^{(2)} + x)^{-1} (\alpha_2 \cos \Theta - \alpha_3 \sin \Theta) P_{m_1 \sigma_1} \left( \frac{1}{2} \right) P_{m_2 \sigma_2} \left( \frac{1}{2} \right). \quad (17)
\end{aligned}$$

Назоўнік матрычнага элемента будзе па-ранейшаму роўны выразу (15). Падстаўляючы вылічаныя значэнні (17) і (15) у формулу (8), атрымаем сячэнне рассеяння для пераходу са змяненнем палярызацыі фатона ў наступным выглядзе:

$$d\sigma_2 = -\frac{9}{2^9} \frac{ae^4 \left( \frac{\omega_2}{\omega_1} \right) \varepsilon_2 d\Omega}{\pi^2 (x + \varepsilon_2) \left( m_1 + 2\omega_1 \sin^2 \frac{\Theta}{2} \right) K^4 x^5 \lambda^4} \times$$

$$\begin{aligned}
 & \times \left\{ \frac{2}{3} (\varepsilon_2 + z) \frac{\Omega_1 \Omega_2}{\omega_2} \left[ \frac{z^2}{\Delta_1} - \left( \frac{a}{z\omega_1} + \frac{1}{\Delta_1} \right) (m_1 + \omega_1)^2 - \frac{2}{3} \frac{z(m_1 + 2\omega_1)}{\Delta_1} + \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. + \left( B\lambda - \frac{a}{3} \right) \frac{(m_1 + 2\omega_1)}{\omega_1 \lambda} \right] - \frac{4}{9} \omega_1 \cos \Theta (\varepsilon_2 + z) K^2 \times \right. \\
 & \quad \left. \times \left[ -\frac{z^2}{\Delta_1} + \frac{2}{3} \left( \frac{a}{z\omega_1} + \frac{1}{\Delta_1} \right) (m_1 + \omega_1)^2 - \frac{\left( \lambda - \frac{1}{2} \right) B(m_1 + 2\omega_1)}{\omega_1 \lambda} \right] - \right. \\
 & \quad - \frac{4}{3} (m_1 + \omega_1) z (z + \lambda \varepsilon_2) \frac{\Omega_1 \Omega_2}{\omega_2} \left( \frac{B - \frac{4}{3} a \lambda}{-2z\lambda\omega_1} + \frac{\lambda}{\Delta_1} \right) - \frac{2}{9} (z + \varepsilon_2) \omega_2 K^2 \times \\
 & \quad \times \left[ \frac{z^2}{\Delta_2} - \frac{2}{3} \left( \frac{-a}{z\omega_2} + \frac{1}{\Delta_2} \right) (m_1 - \omega_2)^2 - \frac{\left( \lambda - \frac{1}{2} \right) B(m_1 - 2\omega_1)}{\lambda\omega_2} \right] + \\
 & \quad + (z + \varepsilon_2) \omega_2 (2\omega_1^2 \sin^2 \Theta - K^2) \left[ -\frac{2}{9} \left( \frac{-a}{z\omega_2} + \frac{1}{\Delta_2} \right) (m_1 - \omega_2)^2 + \right. \\
 & \quad \left. + \frac{4}{9} \frac{z(-m_1 + 2\omega_2)}{\Delta_2} + \frac{1}{3} \frac{(-m_1 + 2\omega_2)}{\omega_2 \lambda} \left( B - \frac{2}{3} a \right) \right] + \frac{2}{9} (m_1 - \omega_2) \times \\
 & \quad \times z (z + \lambda \varepsilon_2) \omega_2 (K^2 - 2\omega_1^2 \sin^2 \Theta) \left( \frac{\lambda + 2}{\Delta_2} + \frac{3}{2} \frac{B - \frac{4}{3} a}{z\lambda\omega_2} \right)^2. \quad (18)
 \end{aligned}$$

Адносна  $d\sigma_2$  можна зрабіць тыя ж вывады, што і адносна  $d\sigma_1$ . Адрозненне заключаецца толькі ў тым, што сячэнне  $d\sigma_2$  больш складаным чынам залежыць ад энергіі падаючага і рассеянага фатонаў, абодвух масавых станаў часцінкі і вугла рассеяння. Сячэнне рассеяння, прасумаванае па праекцыях спіна часцінкі ў канчатковым стане і ўсярэдненае па спінах у пачатковым стане, будзе роўна  $2d\sigma_2$ .

Разгледзім цяпер выпадак, калі падаючы фатон палярызаваны па  $e_1^{(2)}$ , а рассеяны па  $e_2^{(1)}$ . Сячэнне рассеяння, адпавядаючае пераходу часцінкі, якая знаходзіцца ў спакоі, з масай  $m_1$  і праекцыяй спіна на напрамак  $x$ , роўнай  $+1/2$ , у стан з масай  $m_2$  і праекцыяй спіна на напрамак імпульсу  $+1/2$ , прыме наступны выгляд:

$$\begin{aligned}
 d\sigma_3 = & -\frac{9}{2^9} \frac{ae^4 \left( \frac{\omega_2}{\omega_1} \right) \varepsilon_2}{\pi^2 (z + \varepsilon_2) K^4 z^5 \lambda^4} \frac{d\Omega}{\left( m_1 + 2\omega_1 \sin^2 \frac{\Theta}{2} \right)} \times \\
 & \times \left\{ \frac{2}{9} (z + \varepsilon_2) \omega_1 K^2 \left[ \frac{z^2}{\Delta_1} - \frac{2}{3} \left( \frac{a}{z\omega_1} + \frac{1}{\Delta_1} \right) (m_1 + \omega_1)^2 + \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. + \frac{\left( \lambda - \frac{1}{2} \right) B(m_1 + 2\omega_1)}{\omega_1 \lambda} \right] + \omega_1 (K^2 - 2\omega_2^2 \sin^2 \Theta) \left[ -\frac{2}{9} \left( \frac{a}{z\omega_1} + \frac{1}{\Delta_1} \right) \times \right. \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times (m_1 + \omega_1)^2 - \frac{4}{9} \frac{(m_1 + 2\omega_1)z}{\Delta_1} + \frac{1}{3} \frac{(m_1 + 2\omega_1)}{\omega_1 \lambda} \left( B - \frac{2}{3} a \right) - \\
& \quad - \left( \frac{2}{9} \frac{\lambda + 2}{\Delta_1} - \frac{1}{3} \frac{B - \frac{4}{3} a}{z\omega_1 \lambda} \right) z(z + \lambda \varepsilon_2) (m_1 + \omega_1) \Big] + \\
& + \frac{2}{9} \frac{\left( \lambda - \frac{1}{2} \right) B (m_1 - \omega_2)}{\omega_2 \lambda} (z + \varepsilon_2) (3\omega_1 \omega_2^2 \sin^2 \Theta - \omega_2 \cos \Theta K^2) + \\
& + (z + \varepsilon_2) \frac{\Omega_1}{\omega_1} \omega_2^2 \sin^2 \Theta \left[ \frac{1}{3} \frac{z^2 (\lambda - 2)}{\Delta_2} + \frac{1}{9} \frac{(m_1 - 2\omega_2)z}{\Delta_2} + \right. \\
& \quad \left. + \frac{2}{3} \left( \frac{-a}{z\omega_2} + \frac{1}{\Delta_2} \right) (m_1 - \omega_2)^2 \right] + \frac{2}{9} (z + \varepsilon_2) \left[ \frac{z^2}{\Delta_2} - \right. \\
& \quad \left. - \frac{2}{3} \left( \frac{-a}{z\omega_2} + \frac{1}{\Delta_2} \right) (m_1 - \omega_2)^2 \right] (K^2 - 3\omega_2^2 \sin^2 \Theta) \omega_2 \cos \Theta - (z + \varepsilon_2) \times \\
& \times \frac{\Omega_1^2}{\omega_1} \omega_2 \cos \Theta \left[ \frac{4}{9} \frac{z(m_1 - 2\omega_2)}{\Delta_2} + \frac{1}{3} \frac{(m_1 - 2\omega_2) \left( B - \frac{2}{3} a \right)}{\omega_2 \lambda} + \right. \\
& \quad \left. + \frac{2}{9} \left( \frac{-a}{z\omega_2} + \frac{1}{\Delta_2} \right) (m_1 - \omega_2)^2 \right] + (m_1 - \omega_2) z (z + \lambda \varepsilon_2) \frac{\Omega_1 \Omega_2}{\omega_1} \times \\
& \quad \times \left[ \frac{4}{9} \frac{\lambda}{\Delta_2} + \frac{2}{3} \frac{\left( B - \frac{4}{3} a \lambda \right)}{z\omega_2 \lambda} \right]^2. \tag{19}
\end{aligned}$$

Сячэнне  $d\sigma_3$ , усярэдненае па спінах часцінкі да рассеяння і прасумаванае па спінах пасля рассеяння, будзе роўна  $2d\sigma_3$ . Нарэшце, калі падаючы фатон палярызаваны па  $\mathbf{e}_1^2$ , а рассеяны па  $\mathbf{e}_2^2$ , то, вылічыўшы адпаведны матрычны элемент, будзем мець для сячэння рассеяння наступны выраз:

$$\begin{aligned}
d\sigma_4 &= - \frac{9ae^4 \left( \frac{\omega_2}{\omega_1} \right) \varepsilon_2}{2^9 \pi^2 (z + \varepsilon_2) K^2 z^5 \lambda^4} \frac{d\Omega}{\left( m_1 + 2\omega_1 \sin^2 \frac{\Theta}{2} \right)} \times \\
& \times \left\{ (z + \varepsilon_2) \frac{\omega_1 \Omega_2}{\omega_2} \left[ - \frac{4}{9} \frac{(\lambda - 1)z^2}{\Delta_1} + \frac{16}{27} \left( \frac{a}{z\omega_1} + \frac{1}{\Delta_1} \right) (m_1 + \omega_1)^2 - \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - \frac{2}{9} \frac{(m_1 + 2\omega_1)}{\omega_1 \lambda} B(\lambda + 1) \right] + (z + \varepsilon_2) \omega_1 \omega_2 \sin^2 \Theta \times \right. \\
& \quad \times \left[ - \frac{8}{27} \frac{z(m_1 + 2\omega_1)}{\Delta_1} - \frac{4}{27} \left( \frac{a}{z\omega_1} + \frac{1}{\Delta_1} \right) (m_1 + \omega_1)^2 + \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{2}{9} \frac{(m_1 + 2\omega_1)}{\lambda\omega_1} \left( B - \frac{2}{3} a \right) \Big] + \frac{2}{9} \cos \Theta \Omega_1 (m_1 + \omega_1) (z + \lambda\varepsilon_2) \times \\
 & \times \left( \frac{B - \frac{4}{3} a}{z\omega_1\lambda} - \frac{2}{3} \frac{\lambda + 2}{\Delta_1} \right) - \frac{2}{9} \cos \Theta \Omega_2 (m_1 - \omega_2) (z + \lambda\varepsilon_2) \times \\
 & \times \left( \frac{B - \frac{4}{3} a}{z\omega_2\lambda} + \frac{2}{3} \frac{\lambda + 2}{\Delta_2} \right) + (z + \varepsilon_2) \omega_1 \omega_2 \sin^2 \Theta \left[ -\frac{8}{27} \frac{(m_1 - 2\omega_2) z}{\Delta_2} - \right. \\
 & - \frac{2}{9} \frac{(m_1 - 2\omega_2)}{\lambda\omega_2} \left( B - \frac{2}{3} a \right) - \frac{4}{27} \left( \frac{-a}{z\omega_2} + \frac{1}{\Delta_2} \right) (m_1 - \omega_2)^2 \Big] - \\
 & - (z + \varepsilon_2) \frac{\omega_2}{\omega_1} \Omega_1 \left[ -\frac{2}{9} \frac{(m_1 - 2\omega_2)}{\lambda\omega_2} (\lambda + 1) B - \right. \\
 & \left. \left. - \frac{16}{27} \left( \frac{-a}{z\omega_2} + \frac{1}{\Delta_2} \right) (m_1 - \omega_2)^2 + \frac{4}{9} \frac{z^2 (\lambda - 1)}{\Delta_2} \right] \right\}^2. \quad (20)
 \end{aligned}$$

Для атрымання сячэння рассеяння непаларызаваных фатонаў на вугал  $\Theta$  трэба ўзяць суму  $d\sigma = d\sigma_1 + d\sigma_2 + d\sigma_3 + d\sigma_4$ . Пры падліку атрымліваецца складаная функцыя ад вугла рассеяння, энергіі падаючага і рассеянага фатонаў, а таксама абодвух масавых станаў часцінкі.

Неабходна адзначыць, што выразы для сячэнняў рассеяння маюць члены з  $\Delta_1 = m_2^2 - m_1^2 - 2m_1\omega_1$  у назоўніку, якія пры частаце падаючага святла  $\omega_1 = \frac{m_2^2 - m_1^2}{2m_1}$  ( $m_2 > m_1$ ) робяцца бесканечнымі (рэзанансныя чле-

ны). Гэты фізічна бяссэнсавы рэзультат атрымаўся таму, што мы не ўлічылі рэакцыю з боку выпрамененага фатона на рух часцінкі (затуханне). Элік затухання зробіць сячэнне рассеяння канечным у пункце рэзанансу і карэнным чынам зменіць залежнасць сячэння ад энергіі фатона ў гэтай вобласці і ў вобласці вялікіх частот. Паколькі мы разглядаем сячэнне ў нерэлятывісцкім прыбліжэнні, то папраўку на затуханне ўлічым, выкарыстоўваючы тое, што яе лёгка можна звязаць з шырынёй узроўню энергіі ўзбуджанага стану часцінкі [11]. Шырыня ўзроўню вызначаецца імавернасцю спантаннага пераходу з узбуджанага стану ў нармальны за адзінку часу, г. зн.

$$\text{Re}(\gamma) = \omega_{1-2} = 2\pi \int |H_1|^2 \rho_k d\Omega, \quad (21)$$

дзе  $H_1$  — матрычны элемент, які адпавядае выпраменьванню часцінкі пры спантанным пераходзе;  $\rho_k$  — шчыльнасць узроўняў выпраменьвальнай часцінкі;  $d\Omega$  — элемент цялеснага вугла. Няхай шырыня ўзроўню вызначаецца імавернасцю спантаннага пераходу з выпраменьваннем фатона частаты  $\omega$ . Апошняя дапушчэнне справядліва толькі ў пэўных інтэрвалах энергіі ўзбуджанага стану. У гэтым выпадку  $H_1$  матрычны элемент, які адпавядае выпраменьванню фатона, а  $\rho_k = \rho_\omega = \frac{\omega^2}{(2\pi)^3}$ .

Вылічым значэнне  $\text{Re}(\gamma)$  у так званым статычным прыбліжэнні, г. зн. будзем лічыць, што да і пасля выпраменьвання фатона часцінка знаходзіцца ў спакоі, пераходзячы толькі з масавага стану  $m_2$  у стан

$m_1$ . Пры гэтым з закону захавання энергіі вынікае, што  $m_2 - m_1 = \omega$ . Тады

$$|H_1|^2 = e^2 |\psi_2 \hat{A} \psi_1|^2. \quad (22)$$

Пераходзячы да імпульснага прадстаўлення і выкарыстоўваючы метады практычных апэратараў, атрымаем з (22)

$$|H_1|^2 = \frac{e^2}{2\omega} \text{Sp} \{ \eta \hat{e}^\dagger \eta P_{m_1} \hat{\sigma}_1 \hat{e} P_{m_2} \hat{\sigma}_2 \}, \quad (23)$$

дзе  $\eta$  — матрыца інварыянтнай білінейнай формы. Пры гэтым у (23) для практычных апэратараў  $P_{m_1}$ ,  $P_{m_2}$  і вектарнага патэнцыялу  $\hat{A}_k$  выкарыстаны выразы (10а), (12) і (3). Улічваючы, што  $\eta \hat{e}^\dagger = -\hat{e} \eta$ ,  $\eta^2 = 1$ , атрымаем для  $|H_1|^2$ , усярэднянага па спінах часцінкі да выпраменьвання і прасумаванага па спінах часцінкі пасля выпраменьвання і па палярызаваных фатона, наступны выраз:

$$|H_1|^2 = -\frac{e^2}{8\omega} \text{Sp} \{ \alpha_k P_{m_1} \alpha_k P_{m_2} \}. \quad (24)$$

У рэзультате простых вылічэнняў для  $|H_1|^2$  атрымаем

$$|H_1|^2 = -\frac{2}{3} a \frac{e^2 \omega}{m_2^2 \lambda}, \quad (25)$$

дзе  $a = \left( c_1 + \frac{1}{2} \right) \left( c_2 + \frac{1}{2} \right) < 0$ . Тады для шырыні ўзроўню будзем мець

$$\text{Re}(\gamma) = -\frac{8}{3} a \frac{e^2}{m_2^2 \lambda} \omega_1^3. \quad (26)$$

Прыведзены разлік велічыні затухання  $\gamma$  з'яўляецца толькі арыенціровачным, паколькі поўная велічыня затухання вызначаецца спантаннымі пераходамі не толькі з выпраменьваннем фатонаў, але і іншых часцінак, у прыватнасці  $\pi$ -мезонаў. Пры гэтым аказваецца, што ў пэўных інтэрвалах энергій пераход у канечны стан з вылучэннем мезона (фотанараджэнне) можа быць пераважаючым [5]. Поўная велічыня затухання будзе роўна суме  $\Gamma = \Sigma \gamma_i$ . Яе звычайна бяруць з доследу, асабліва пры паўфенаменалагічным разглядзе працэсаў узаемадзеяння.

Паколькі ў вобласці рэзанансу асноўную ролю адыгрываюць члены з  $\Delta_1$  у назоўніку, то ў разглядаемым прыбліжэнні дастаткова ўлічыць затуханне толькі ў гэтых членах, праводзячы замену  $\omega_1 \rightarrow \omega_1 + \frac{i}{2} \times \text{Re}(\Gamma)$ . У прыватнасці, калі абмежавацца толькі затуханнем за кошт спантаннага выпраменьвання фатонаў, то трэба зрабіць замену  $\omega_1 \rightarrow \omega_1 + \frac{1}{2} \text{Re}(\gamma) = \omega_1 - \frac{4}{3} i a \frac{e^2 \omega_1^3}{m_2^2 \lambda}$ . У пункце рэзанансу пры  $\omega_1 = \frac{1}{2m_1} \times (m_2^2 - m_1^2)$  частата рассеянага фатона, як вынікае з (6), роўна нулю. Калі ўлічыць затуханне ўзбуджанага стану, то атрымаем значэнне  $\omega_2$ , якое адрозніваецца ад нуля, паколькі ўлік затухання прыводзіць да зрушэння частаты ліній на велічыню  $\frac{1}{2} \text{Im}(\gamma)$ .

Далейшае абмеркаванне атрыманых рэзультатаў мэтазгодна праводзіць, маючы пэўнае значэнне велічыні  $\lambda$  (а таксама велічыні  $a$ ).

Мы абмежаваліся малымі імпульсамі аддачы і атрымалі, што ўсе  $d\sigma_k$  залежаць ад  $\omega_1$  у ступені не вышэй другой. Калі не накладваць абмежаванняў на імпульс часцінкі пасля рассеяння, то атрымаем, што ў выразу для сячэння рассеяння будуць уваходзіць члены, прапарцыянальныя  $\omega_1$  у ступенях да чацвёртай уключна, г. зн. сячэнне рассеяння будзе хутка расці з ростам энергіі фатонаў. Гэты вывад узгадняецца з рэзультатамі работы [10] па камптон-эфекту на часціцы са спінам  $3/2$ .

Дакладна такім жа спосабам можна падлічыць сячэнне рассеяння палярызаванага святла на часціцы, якая да рассеяння знаходзілася ў масавым стане  $m_2$ , а пасля рассеяння ў стане  $m_1$ . Сячэнне рассеяння і агульныя заканамернасці аналагічны разгледжаным вышэй. Адрозненні заключаюцца ў тым, што ў гэтым выпадку магчымы пераходы часцінкі з масай  $m_2$  і спінам  $\pm 3/2$  у стан з масай  $m_1$  і спінам  $\pm 1/2$ .

У заключэнне выказваю ўдзячнасць прафесару Ф. І. Фёдараву за каштоўныя парады і заўвагі.

#### ЛІТАРАТУРА

1. Vhabha N. Phil. Mag., 43, 33, 1952.
2. Гельфанд И. М., Яглом А. М. ЖЭТФ, 18, 708, 1948.
3. Федоров Ф. И. ЖЭТФ, 35, в. 2 (8), 493, 1958.
4. Bellotto E. Nuovo Cimento, v. XXI, № 5, 730, 1961.
5. Файнберг В. Я. Труды ФИАН СССР, 6, 269, 1955.
6. Лобко С. И. и Федоров Ф. И. ДАН БССР, т. IV, № 5, 1960.
7. Шелелин Л. А. ЖЭТФ, 37, 6 (12), 1627, 1959.
8. Федоров Ф. И. ДАН СССР, 79, 787, 1951.
9. Ахизер А. И., Берестецкий В. Б. Квантовая электродинамика, 1959.
10. Mathews J. Phys. Rev., 102, № 1, 270, 1956.
11. Гайтлер В. Квантовая теория излучения, 1956.

#### РЕЗЮМЕ

Рассмотрено комptonовское рассеяние поляризованного света на покоящейся частице со спином  $1/2$ — $3/2$  и двумя массами покоя. При этом считается, что частица в результате рассеяния света переходит из нижнего массового состояния в высшее. Найдено выражение для частоты рассеянного света (обобщение формулы Комптона), а также сечения рассеяния в нерелятивистском приближении.

Поступило в редакцию 21.XII 1964

Г. В. ШЫШКІН

АБ ПАЛЯРЫЗАЦЫЙНЫХ УЛАСЦІВАСЦЯХ МЮЁНАУ  
 У ПРАЦЭСАХ АДВАРОТНАГА  $\mu$ - $e$ -РАСПАДУ

Гэта работа з'яўляецца развіццём работы [1], дзе намі даследаваны працэсы адваротнага  $\mu$ - $e$ -распаду ў сувязі з магчымасцю апісання іх рознымі відамі гамільтаніяна слабага ўзаемадзеяння — гамільтаніяна з нейтральных токаў (Лі і Янг [2]) і гамільтаніяна з зараджаных токаў (Фейнман і Гел-Ман [3]). У рабоце [1] намі атрыманы выразы для верагоднасці працэсаў адваротнага  $\mu$ - $e$ -распаду і ступені падоўжнай палярызацыі мюёнаў, якія ўтвараюцца ў гэтых працэсах, пры адвольных пачатковых умовах для абодвух відаў гамільтаніяна. Непасрэднымі вылічэннямі паказана ідэнтычнасць вынікаў для абодвух гамільтаніянаў пры  $G_V = -G_A$ , што знаходзіцца ў адпаведнасці з вядомымі тоеонасцямі Фірца [4, 5].

У гэтай рабоце асноўная ўвага ўдзяляецца вывучэнню палярызацыйных уласцівасцей мюёнаў, якія ўтвараюцца ў працэсах адваротнага  $\mu$ - $e$ -распаду:

$$\left. \begin{aligned} \text{а) } \tilde{\nu}_e + e^- &\rightarrow \tilde{\nu}_\mu + \mu^-, & \text{в) } \nu_e + e^+ &\rightarrow \nu_\mu + \mu^+, \\ \text{б) } \nu_\mu + e^- &\rightarrow \nu_e + \mu^-, & \text{г) } \tilde{\nu}_\mu + e^+ &\rightarrow \tilde{\nu}_e + \mu^+ \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

(у гэтых формулах выкарыстана двухкампанентнае нейтрына).

У адрозненне ад [1], дзе намі выкарыстана толькі двухкампанентнае нейтрына [6] (г. зн. лічыцца, што мюённае і электроннае нейтрына і антынейтрына ўтвараюць два двухкампанентных, матэматычна не адрозніваемых нейтрына), у гэтай рабоце ўлічваецца і тэарэтычна дапушчальная схема чатырохкампанентнага нейтрына [6—11]. Разгляд праводзіцца паралельна для абодвух тэарэтычна магчымых выпадкаў.

У адпаведнасці з двухкампанентнай тэорыяй нейтрына [6] да часцінак адносяцца электроннае і мюённае нейтрына ( $\nu_e, \nu_\mu$ ), электрон ( $e^-$ ) і адмоўны мюён ( $\mu^-$ ), тады як антычасцінкамі будуць адпаведна электроннае і мюённае антынейтрына ( $\tilde{\nu}_e, \tilde{\nu}_\mu$ ), пазітрон ( $e^+$ ) і дадатны мюён ( $\mu^+$ ).

У чатырохкампанентнай тэорыі нейтрына [6—11] з масай, роўнай нулю, узнікаючыя пры рашэнні ўраўнення Дзірака становішчы з  $s_\nu = 1$  ( $\epsilon = 1$ ) і  $s_\nu = -1$  ( $\epsilon = -1$ ) апісваюць правапалярызаванае і левапалярызаванае нейтрына ( $\nu_R, \nu_L$ ), а становішчы з  $s_\nu = 1$  ( $\epsilon = -1$ ) і  $s_\nu = -1$  ( $\epsilon = 1$ ) апісваюць правапалярызаванае і левапалярызаванае антынейтрына ( $\tilde{\nu}_R, \tilde{\nu}_L$ ).  $\epsilon = E/|E|$  вызначае знак энергіі адпаведнага становішча. У работах [6—9] левапалярызаванае нейтрына  $\nu_L$  ( $s = -1, \epsilon = 1$ ) і правапалярызаванае антынейтрына  $\tilde{\nu}_R$  ( $s = 1, \epsilon = -1$ ) прапануецца звязаць толькі з электронным полем, тады як правапалярызаванае нейтрына

$\nu_R (s = 1, \epsilon = 1)$  і левапалярызаванае антынейтрына  $\tilde{\nu}_L (s = -1, \epsilon = -1)$  звязваюцца толькі з мяённым полем. Такім чынам,  $\nu_L = \nu_e, \tilde{\nu}_R = \tilde{\nu}_e, \nu_R = \nu_\mu, \tilde{\nu}_L = \tilde{\nu}_\mu$ .

Згодна з чатырохкампанентнай тэорыяй нейтрына, працэсы (1) неабходна перапісаць наступным чынам:

$$\left. \begin{aligned} \text{а) } \tilde{\nu}_e + e^- &\rightarrow \nu_\mu + \mu^-, & \text{в) } \nu_e + e^+ &\rightarrow \tilde{\nu}_\mu + \mu^+, \\ \text{б) } \tilde{\nu}_\mu + e^- &\rightarrow \nu_e + \mu^-, & \text{г) } \nu_\mu + e^+ &\rightarrow \tilde{\nu}_e + \mu^+. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Каб выконваўся закон захавання часцінак і антычасцінак, у чатырохкампанентнай тэорыі нейтрына дадатны мяён адносіцца да часцінак, адмоўна — да антычасцінак.

У адрозненне ад двухкампанентнай тэорыі нейтрына, дзе  $\dot{y}$  лагранжыяне ўзаемадзеяння лептонны слабы ток запісваецца  $\dot{y}$  выглядзе

$$I^L = \bar{e} \gamma_\alpha (1 + \gamma_5) \nu_e + \bar{\mu} \gamma_\alpha (1 + \gamma_5) \nu_\mu, \quad (3)$$

пры выкарыстанні чатырохкампанентнага нейтрына лептонны ток неабходна запісаць крыху інакш [12]

$$I^L = \bar{e} \gamma_\alpha (1 + \gamma_5) \nu_e + \bar{\mu} \gamma_\alpha (1 - \gamma_5) \nu_\mu, \quad (4)$$

г. зн. адступіць ад агульнапрынятага  $V-A$ -варыянта слабага ўзаемадзеяння.

Згодна з [13], лічым, што пры чатырохкампанентным нейтрына магчымы толькі зараджаныя слабыя токі.

Пры вывучэнні палярызацыйных уласцівасцей мяёнаў у працэсах адваротнага  $\mu-e$ -распаду мы карысталіся метадам тэорыі дзіракаўскіх часцінак з арыентаваным спінам, развітым у [14], і каварыянтным вызначэннем вектара палярызацыі ферміёна, развітым у работах [15, 16].

Гамільтаніян слабага ўзаемадзеяння працэсаў адваротнага  $\mu-e$ -распаду, згодна з [9], у выпадку Лі і Янга запішам у выглядзе

$$H^{yz} = \sum_j G_j (\psi_\mu^+ O_j \psi_e) (\psi_e^+ O_j \psi_\nu). \quad (5)$$

У выпадку Феймана і Гел-Мана гамільтаніян узаемадзеяння мае выгляд

$$H^{yz} = \sum_j G_j (\psi_\mu^+ O_j \psi_\nu) (\psi_e^+ O_j \psi_e). \quad (6)$$

Тут  $\psi$  — хвалевыя функцыі ўдзельнічаючых у працэсах (1) часцінак;  $O_j$  — матрыцы ўзаемадзеяння;  $G_j$  — канстанта сувязі  $j$ -га віду слабага ўзаемадзеяння.

Абмяжуемся агульнапрынятай камбінацыяй вектарнага і аксіяльна-вектарнага ўзаемадзеяння, запісваючы, як звычайна:

$$O_V = (i\vec{\alpha}, 1), \quad O_A = (\vec{\sigma}, i\rho_1). \quad (7)$$

Пры  $G_V \neq -G_A$  гамільтаніяны (5) і (6) не эквівалентныя (гл. [4, 5]).

У выніку вылічэнняў нам атрыманы выразы для палярызацыйных характарыстык пучкоў мяёнаў, якія ўтвараюцца ў працэсах адваротнага  $\mu-e$ -распаду, і счэнняў рэакцый (1).

Выкарыстоўваючы двухкампанентнае нейтрына, у выпадку гамільтаніяна Лі і Янга для ступені падоўжнай палярывацыі мяёнаў маем:

$$\begin{aligned}
 P_z = s_0^{-1} & \left\{ (G_V^\dagger G_V + G_A^\dagger G_A) \left[ \mp (k_\mu^0 k_{\nu\mu}^0) \pm (k_\mu^0 k_{\nu_e}^0) + \right. \right. \\
 & + (k_{\nu_e}^0 s_e^0) (k_{\nu\mu}^0 k_\mu^0) + (k_{\nu_e}^0 k_\mu^0) (k_{\nu\mu}^0 s_e^0) - \frac{k_\mu}{K_\mu} \{ (s_e^0 k_{\nu\mu}^0) + (s_e^0 k_{\nu_e}^0) \} \left. \right] + \\
 & + (G_V^\dagger G_A + G_A^\dagger G_A) \left[ \mp (k_\mu^0 k_{\nu\mu}^0) \mp (k_\mu^0 k_{\nu_e}^0) + (i k_\mu^0 s_e^0) [k_{\nu\mu}^0 k_{\nu_e}^0] - \right. \\
 & \left. - \frac{k_\mu}{K_\mu} \{ \mp 2 + (s_e^0 k_{\nu_e}^0) - (s_e^0 k_{\nu\mu}^0) \} \right] + \\
 & + (G_V^\dagger G_V - G_A^\dagger G_A) \frac{k_{0\mu}}{K_\mu} [(s_e^0 k_\mu^0) \mp (k_\mu^0 k_{\nu_e}^0) \pm (k_\mu^0 k_{\nu\mu}^0) + \\
 & + (k_{\nu_e}^0 k_{\nu\mu}^0) (s_e^0 k_\mu^0) + (k_{\nu\mu}^0 s_e^0) (k_{\nu_e}^0 k_\mu^0) + (k_{\nu\mu}^0 k_\mu^0) (k_{\nu_e}^0 s_e^0)] + \\
 & + i (G_V^\dagger G_A - G_A^\dagger G_V) \frac{k_{0\mu}}{K_\mu} \left[ (k_\mu^0 [k_{\nu\mu}^0 k_{\nu_e}^0]) \mp (k_{\nu_e}^0 [s_e^0 k_\mu^0]) \mp \right. \\
 & \left. \mp (k_{\nu\mu}^0 [s_e^0 k_\mu^0]) \right] \left. \right\}. \tag{8a}
 \end{aligned}$$

Для ступені папярочнай палярывацыі мяёнаў, палярываваных у плоскасці імпульсаў налятаючага нейтрына і народжанага мяёна ў плоскасці рэакцыі, атрыман выраз

$$\begin{aligned}
 P_x = s_0^{-1} & \left\{ \left[ \frac{k_{0\mu}}{K_\mu} (G_V^\dagger G_V + G_A^\dagger G_A) - (G_V^\dagger G_V - G_A^\dagger G_A) \right] \times \right. \\
 & \times \left[ \frac{1}{2} (1 - (k_{\nu_e}^0 k_{\nu\mu}^0)) (s_x^e \cos \theta_\mu - s_z^e \sin \theta_\mu) \mp k_{\nu_e}^{0x} \cos \theta_\mu \mp (1 - \right. \\
 & \left. - k_{\nu_e}^{0z}) \sin \theta_\mu + k_{\nu_e}^{0z} (s_z^e \sin \theta_\mu + s_x^e \cos \theta_\mu) + k_{\nu_e}^{0x} (s_x^e \sin \theta_\mu - \right. \\
 & \left. - s_z^e \cos \theta_\mu) \right] \pm i \frac{k_\mu}{2K_\mu} (G_V^\dagger G_A - G_A^\dagger G_V) s_y^e (1 + (k_{\nu_e}^0 k_{\nu\mu}^0)) + \\
 & + \frac{k_\mu}{K_\mu} (G_V^\dagger G_V - G_A^\dagger G_A) [(1 + k_{\nu_e}^{0z}) s_x^e - k_{\nu_e}^{0x} s_z^e \mp k_{\nu_e}^{0y}] \mp i (G_V^\dagger G_A - \\
 & - G_A^\dagger G_V) [(1 + k_{\nu_e}^{0z}) s_y^e \cos \theta_\mu + k_{\nu_e}^{0x} s_y^e \sin \theta_\mu] + \frac{k_{0\mu}}{K_\mu} (G_A^\dagger G_V + G_A^\dagger G_V) \times \\
 & \times [k_{\nu_e}^{0x} (s_z^e \cos \theta_\mu + s_x^e \sin \theta_\mu) \mp (1 + k_{\nu_e}^{0z}) \sin \theta_\mu \pm k_{\nu_e}^{0x} \cos \theta_\mu] + \\
 & + \frac{1}{2} \left[ \frac{k_{0\mu}}{K_\mu} (G_V^\dagger G_V + G_A^\dagger G_A) + (G_V^\dagger G_V - G_A^\dagger G_A) \right] (1 + (k_{\nu_e}^0 k_{\nu\mu}^0)) \times \\
 & \left. \times (s_z^e \sin \theta_\mu - s_x^e \cos \theta_\mu) \right\}. \tag{8b}
 \end{aligned}$$

Нарэшце, для ступені палярывацыйнай палярывацыйнай мяёнаў, палярывацыйнай перпендыкулярна плоскасці рэакцыі, маем:

$$\begin{aligned}
 P_y = s_0^{-1} & \left\{ - (G_V^\dagger G_V - G_A^\dagger G_A) s_y^e (1 + (k_e^0 k_\mu^0)) \mp \right. \\
 \mp i \frac{k_\mu}{K_\mu} & (G_V^\dagger G_A - G_A^\dagger G_V) [s_x^e \cos \theta_\mu - s_z^e \sin \theta_\mu \mp k_e^{0x} \cos \theta_\mu \mp (1 - k_e^{0z}) \sin \theta_\mu + \\
 + k_e^{0z} (s_z^e \sin \theta_\mu & + s_x^e \cos \theta_\mu) + k_e^{0x} (s_x^e \sin \theta_\mu - s_z^e \cos \theta_\mu)] + \frac{k_\mu}{K_\mu} (G_V^\dagger G_V - \\
 - G_A^\dagger G_A) & [k_e^{0x} s_y^e \sin \theta_\mu + (1 + k_e^{0z}) s_y^e \cos \theta_\mu] - \\
 - i (G_V^\dagger G_A - G_A^\dagger G_V) & \left. [\pm k_e^{0x} s_z^e \mp (1 + k_e^{0z}) s_x^e + k_e^{0x}] \right\}. \quad (8B)
 \end{aligned}$$

Нарміруючы каэфіцыент  $s_0$  з дакладнасцю да каэфіцыента супадаючы з верагоднасцю працэсаў (I)  $\omega$ , мае выгляд:

$$\begin{aligned}
 s_0 = (G_V^\dagger G_V + G_A^\dagger G_A) & [2 \mp (s_e^0 k_\mu^0) \pm (s_e^0 k_\mu^0) - \\
 - \frac{k_\mu}{K_\mu} & \{ (k_\mu^0 k_\mu^0) + (k_\mu^0 k_\mu^0) \mp ([s_e^0 k_\mu^0] [k_e^0 k_\mu^0]) \}] + \\
 + (G_V^\dagger G_A + G_A^\dagger G_V) & [\mp (s_e^0 k_\mu^0) \mp (s_e^0 k_\mu^0) - \frac{k_\mu}{K_\mu} \{ (k_\mu^0 k_\mu^0) - \\
 - (k_\mu^0 k_\mu^0) & \mp (s_e^0 k_\mu^0) (k_\mu^0 k_\mu^0) \mp (s_e^0 k_\mu^0) (k_\mu^0 k_\mu^0) \}] + \\
 + (G_V^\dagger G_V - G_A^\dagger G_A) & \frac{k_{0\mu}}{K_\mu} [(k_e^0 k_\mu^0) \mp (s_e^0 k_\mu^0) \pm (s_e^0 k_\mu^0) - 1] - \\
 - i (G_V^\dagger G_A - G_A^\dagger G_V) & \frac{k_{0\mu}}{K_\mu} (s_e^0 [k_e^0 k_\mu^0]). \quad (9)
 \end{aligned}$$

Верхнія знакі ў выразях (8), (9) і далей адносяцца да рэакцый а) і б), ніжнія — да в) і г). У формулах прыняты наступныя абазначэнні:  $k = p/h$ , дзе  $p$  — імпульс часцінкі;  $k_0 = m_0 c/h$ , дзе  $m_0$  — маса спакою часцінкі;  $K^2 = k^2 + k_0^2$  характарызуе поўную энергію часцінкі;  $k_i^0 = k_i/|k_i|$  — адзінкавыя вектары напрамкаў імпульсаў часцінак ( $k_i^0 = (k_i^{0x}, k_i^{0y}, k_i^{0z})$ );  $s_e^0$  — адзінкавы вектар напрамку спіна электрона-мішэні ( $s_e^0 = (s_e^x, s_e^y, s_e^z)$ ). Вось  $Z$  для зручнасці накіравана па імпульсу налятаючага нейтрына  $k_\nu$ , плоскасць  $XZ$  сумешчана з імпульсамі  $k_\nu$  і  $k_\mu$ , г. зн. з плоскасцю рэакцыі.  $\theta_\mu$  — вугал паміж  $k_\nu$  і  $k_\mu$ , г. зн.  $\cos \theta_\mu = (k_\nu^0 k_\mu^0)$ .

Імпульс народжанага нейтрына  $k_\nu$  з законаў захавання можна выразіць праз імпульсы налятаючага нейтрына  $k_\nu$  і мяёна  $k_\mu$  наступным чынам:

$$k_\nu^x = k_\nu - k_\mu \cos \theta_\mu, \quad k_\nu^y = -k_\mu \sin \theta_\mu, \quad k_\nu^z = 0. \quad (10)$$

Мы, аднак, не ўводзім гэтыя выразы ў атрыманыя вынікі, каб не рабіць іх занадта грувацкімі.

Для гамільтаніяна Фейнмана і Гел-Мана ў выпадку двухкампанентнага нейтрына замест (8) і (9) маем:

$$P_z = \mp \frac{\frac{k_\mu}{K_\mu} - (k_\mu^0 k_{\nu_e}^0)}{1 - \frac{k_\mu}{K_\mu} (k_\mu^0 k_{\nu_e}^0)}, \quad P_y = 0, \quad (11)$$

$$P_x = s_0^{-1} (G_V^\dagger G_V + G_A^\dagger G_A - G_V^\dagger G_A - G_A^\dagger G_V) \frac{k_{0\mu}}{K_\mu} \times \\ \times \{ [(s_e^0 k_{\nu_e}^0) \pm k_{\nu_e}^{0z} - k_{\nu_e}^{0x} s_x^e] \sin \theta_\mu - (s_z \pm 1) k_{\nu_e}^{0x} \cos \theta_\mu \},$$

дзе

$$s_0 = (G_V^\dagger G_V + G_A^\dagger G_A - G_V^\dagger G_A - G_A^\dagger G_V) \times \\ \times \{ 1 \pm (s_e^0 k_{\nu_e}^0) \} \left\{ 1 - \frac{k_\mu}{K_\mu} (k_\mu^0 k_{\nu_e}^0) \right\}. \quad (12)$$

Лічачы  $G_V = -G_A = g$ , як з (8), (9), так і з (11), (12) атрымліваем наступныя ідэнтычныя вынікі:

$$P_z = \mp \frac{\frac{k_\mu}{K_\mu} - (k_\mu^0 k_{\nu_e}^0)}{1 - \frac{k_\mu}{K_\mu} (k_\mu^0 k_{\nu_e}^0)}, \quad P_y = 0, \quad (13)$$

$$P_x = s_0^{-1} g^2 \frac{k_{0\mu}}{K_\mu} \{ [(s_e^0 k_{\nu_e}^0) \pm k_{\nu_e}^{0z} - k_{\nu_e}^{0x} s_x^e] \sin \theta_\mu - (s_z \pm 1) k_{\nu_e}^{0x} \cos \theta_\mu \},$$

дзе

$$s_0 = g^2 \{ 1 \pm (s_e^0 k_{\nu_e}^0) \} \left\{ 1 - \frac{k_\mu}{K_\mu} (k_\mu^0 k_{\nu_e}^0) \right\}, \quad (14)$$

г. зн. у адпаведнасці з [4, 5] пры  $G = -G_A$  гамільтаніяны (6) і (7) эквівалентныя.

Калі прымяніць схему чатырохкампанентнага нейтрына, то, выкарыстоўваючы гамільтаніян з зараджаных токаў (6), атрымліваем наступныя выразы для палярызацыйных характарыстык мюёнаў і верагоднасці працэсаў адваротнага  $\mu - e$ -распаду:

$$P_z = \mp \frac{\frac{k_\mu}{K_\mu} + (k_\mu^0 k_{\nu_e}^0)}{1 + \frac{k_\mu}{K_\mu} (k_\mu^0 k_{\nu_e}^0)}, \quad P_y = 0, \quad (15)$$

$$P_x = s_0^{-1} (G_V^\dagger G_V + G_A^\dagger G_A + G_V^\dagger G_A + G_A^\dagger G_V) \frac{k_{0\mu}}{K_\mu} \times \\ \times \{ [-(s_e^0 k_{\nu_e}^0) \pm k_{\nu_e}^{0z} + k_{\nu_e}^{0x} s_x^e] \sin \theta_\mu - (s_z \mp 1) k_{\nu_e}^{0x} \cos \theta_\mu \},$$

дзе

$$s_0 = (G_V^\dagger G_V + G_A^\dagger G_A + G_V^\dagger G_A + G_A^\dagger G_V) \times \\ \times \{ 1 \mp (s_e^0 k_{\nu_e}^0) \} \left\{ 1 + \frac{k_{0\mu}}{K_\mu} (k_\mu^0 k_{\nu_e}^0) \right\}. \quad (16)$$

У адпаведнасці з [15, 16] можна запісаць і кампаненты каварыянтнага вектара палярызацыі мюёнаў

$$\xi_z = K_\mu P_z, \quad \xi_y = k_{0y} P_y, \quad \xi_x = k_{0x} P_x. \quad (17)$$

Ніжэй прыводзіцца кароткі аналіз атрыманых рэзультатаў.

Перш за ўсё з выказаў (11), (12) і (15), (16) заўважаем, што ў выпадку гамільтаніяна Фейнмана і Гел-Мана, незалежна ад выкарыстоўваемай мадэлі нейтрына, палярызацыйныя ўласцівасці мюёнаў наогул не залежаць ад канстант сувязі слабага ўзаемадзеяння  $G_V$  і  $G_A$ . Вектар палярызацыі мюёнаў ляжыць пры гэтым у плоскасці рэакцыі  $\xi_y = 0$ , г. зн. у пучку мюёнаў не ўзнікае палярызацыя ў напрамку, перпендыкулярным плоскасці рэакцыі ( $P_y = 0$ ). У выпадку ж гамільтаніяна Лі і Янга (двухкампанентнае нейтрына) у пучку мюёнаў узнікае палярызацыя ва ўсіх трох напрамках ( $P_x \neq 0$ ,  $P_y \neq 0$ ,  $P_z \neq 0$ ), а палярызацыйныя ўласцівасці мюёнаў складаным чынам залежаць ад канстант сувязі  $G_V$  і  $G_A$  (гл. формулы (8), (9)).

Ва ультрарэлятывісцкай мяжы ступень падоўжнай палярызацыі мюёнаў у выпадку гамільтаніяна Фейнмана і Гел-Мана, незалежна ад выкарыстоўваемай мадэлі нейтрына, імкнецца да адзінкі. Цікава, што адмоўны мюён, незалежна ад мадэлі нейтрына, палярызаван пры гэтым супраць напрамку свайго імпульсу ( $P_z = -1$ ), а дадатны мюён палярызаван па напрамку свайго імпульсу ( $P_z = 1$ ). Такім чынам, аказваецца, што ў выпадку гамільтаніяна Фейнмана і Гел-Мана рэлятывісцкі мюён палярызаваны як адпаведнае нейтрына. Пры двухкампанентнай мадэлі нейтрына  $P_z = -1$  для  $\nu_\mu$  і  $\mu^-$ ,  $P_z = 1$  для  $\bar{\nu}_\mu$  і  $\mu^+$ . Пры чатырохкампанентным нейтрына  $P_z = 1$  для  $\nu_\mu$  і  $\mu^+$  (часцінкі),  $P_z = -1$  для  $\bar{\nu}_\mu$  і  $\mu^-$  (антычасцінкі). Папярочная кампанента  $P_x$  у выпадку Фейнмана і Гел-Мана ва ультрарэлятывісцкай мяжы імкнецца да нуля, а  $P_y$  роўнае нулю тоесна, што знаходзіцца ў адпаведнасці з агульнай тэорыяй палярызацыі [15, 16]. У выпадку гамільтаніяна Лі і Янга (двухкампанентнае нейтрына) пры  $G_V \neq -G_A$  нават ва ультрарэлятывісцкай мяжы ступень падоўжнай палярызацыі мюёнаў (8а) не імкнецца да адзінкі; не абарачаюцца ў нуль і папярочныя кампаненты палярызацыі мюёнаў  $P_x$  і  $P_y$ .

Адзначым, што ў выпадку гамільтаніяна Фейнмана і Гел-Мана (любая мадэль нейтрына) падоўжная палярызацыя мюёнаў наогул не залежыць ад палярызацыі электронаў-мішэняў, тады як папярочная палярызацыя мюёнаў жорстка звязана з палярызацыяй мішэні. Цікава, што складаючая  $s_y^e$  не ўваходзіць у палярызацыйныя характарыстыкі мюёнаў у выпадку гамільтаніяна Фейнмана і Гел-Мана (гл. (11), (12), (15), (16)). У выпадку гамільтаніяна Лі і Янга ўсе складаючыя палярызацыі мюёнаў істотным чынам залежаць ад палярызацыі электронаў-мішэняў.

Спынімся далей на ўласцівасцях сячэнняў працэсаў адваротнага  $\mu$ - $e$ -распаду (гл. (9), (12), (16)).

У агульным выпадку адвольна палярызаванага поля электронаў-мішэняў верагоднасці працэсаў а), б) і в), г) розныя. Калі ж поле электронаў-мішэняў не палярызавана, то, як відаць з выказаў (9), (12), (16) пасля звядзення іх да сярэдняга па напрамках  $s_e^0$ , верагоднасці ўсіх працэсаў адваротнага  $\mu$ - $e$ -распаду становяцца аднолькавымі. Застаюцца, аднак, адрозненні ў залежнасці ад выкарыстоўваемага гамільтаніяна і мадэлі нейтрына. Такім чынам, выкарыстанне палярызаванай мішэні прыводзіць да павелічэння або змяншэння

сячэнняў таго або іншага працэсу (1), што асабліва добра відаць з выказаў [12] і [16]. У прыватнасці, напрыклад, верагоднасць працэсу (6) у выпадку двухкампанентнага нейтрына максімальная (у выпадку чатырохкампанентнага нейтрына мінімальная, а пры поўнай палярызацыі мішэні ператвараецца ў нуль) пры палярызацыі мішэні па напрамку імпульсу налятаючага нейтрына і мінімальная, а пры поўнай палярызацыі мішэні ператвараецца ў нуль (у выпадку чатырохкампанентнага нейтрына максімальная) пры палярызацыі мішэні супраць імпульсу налятаючага нейтрына. У выпадку працэсу г) мае места адваротная з'ява і г. д. Уяўляецца магчымым, што ўказаныя адрозненні могуць быць выкарыстаны пры эксперыментальнай праверцы мадэлі нейтрына.

Істотныя адрозненні ў залежнасці ад выкарыстоўваемай мадэлі існуюць і ў вуглавых размеркаваннях мюёнаў.

Устаноўленыя адрозненні ў сячэннях, вуглавых размеркаваннях і палярызацыйных уласцівасцях мюёнаў працэсаў адваротнага  $\mu$ - $e$ -распаду даюць магчымасць меркаваць, што эксперыментальнае вывучэнне працэсаў адваротнага  $\mu$ - $e$ -распаду можа даць вельмі важную інфармацыю аб прыродзе нейтрына. Параўнанне вынікаў для розных гамільтаніянаў пры адвольных  $G_V$  і  $G_A$  дазваляе зрабіць вывад аб магчымасці з эксперыментальнага вывучэння працэсаў адваротнага  $\mu$ - $e$ -распаду ўстанавіць, які з гамільтаніянаў бліжэй апісвае прыроду  $\mu$ - $e$ -узаемадзеяння, а вывучэнне сячэнняў гэтых працэсаў на палярызаванай мішэні магло б быць адным з метадаў устанаўлення колькасці кампанент нейтрына (два двухкампанентных нейтрына або адно чатырохкампанентнае).

Карыстаюся выпадкам падзякаваць акадэміка АН БССР А. К. Краціна за пастаянную ўвагу і цікавасць да работы.

#### ЛІТАРАТУРА

1. Шышкін Г. В. Весті АН БССР, сер. фіз.-мат. навук, № 2, 1965.
2. Lee T. D., Yang G. N. Phys. Rev., 105, 1671, 1957.
3. Feynman R., Gell-Mann M. Phys. Rev., 109, 193, 1958.
4. Fierz R. Zs. f. Phys., 102, 572, 1936.
5. Умэдзава Х. Квантовая теория поля. ИЛ, 1958.
6. Керимов Б. К., Романов Ю. Н. ЖЭТФ, 47, 1123, 1964.
7. Nishijima N. Phys. Rev., 108, 907, 1957.
8. Iso G. Nuovo Cimento, 25, 456, 1962.
9. Соколов А. А. Phys. Letters, 3, 211, 1963.
10. Kabir P. K. Nuovo Cimento, 28, 165, 1963.
11. Gatto R. Nuovo Cimento, 28, 567, 1963.
12. Окунь Л. Б. Слабое взаимодействие элементарных частиц. М., 1963.
13. Марков М. А. Нейтрино. М., 1964.
14. Соколов А. А. Введение в квантовую электродинамику. М., 1958.
15. Соколов А. А., Тернов И. М., Лоскутов Ю. М. ЖЭТФ, 36, 930, 1959.
16. Соколов А. А., Колесникова М. М. ЖЭТФ, 38, 1960.

#### РЕЗЮМЕ

В работе изучаются процессы обратного  $\mu$ - $e$ -распада с использованием двухкомпонентного и четырехкомпонентного нейтрино. Обсуждаются различия, возникающие в поляризационных свойствах мюонов и сечениях процессов в зависимости от используемого гамильтониана и модели нейтрино.

Поступило в редакцию 8.VII 1965

Э. П. ЗЕГЕ, С. І. ВАЙТОВІЧ

### ЭКСПЕРЫМЕНТАЛЬНАЕ ДАСЛЕДАВАННЕ НЕЛІНЕЙНАЙ ЛЮМІНЕСЦЭНЦЫ ПЛОСКАПАРАЛЕЛЬНАГА СЛОЯ

У работах [1, 2] тэарэтычна разлічана свяцімасць люмінесценцыі плоскапаралельнага аднароднага [1] і светарассейваючага [2] слоя таўшчыні  $l$  для розных аптычных канстант слоя з улікам нелінейнай залежнасці каэфіцыента паглынання  $\kappa$  ад інтэнсіўнасці ўзбуджэння  $S$  па формуле [3, 4]

$$\kappa = \frac{\kappa_0}{1 + \alpha S} \quad (1)$$

Тут  $\alpha$ —параметр нелінейнасці рэчыва;  $\kappa_0$  — каэфіцыент паглынання пры вельмі малой інтэнсіўнасці ўзбуджаючай радыяцыі. У гэтай рабоце выкладзены рэзультаты эксперыментальнага даследавання нелінейнай люмінесценцыі плоскапаралельнага слоя і супастаўленне іх з разліковымі данымі работ [1, 2].

Для правядзення вымярэнняў належала выбраць аб'ект, які задавальняе раду патрабаванняў.

1. Нелінейная залежнасць ад магутнасці радыяцыі назіраюцца пры параўнальна малых магутнасцях апошніх. У гэтым выпадку ўсе вымярэнні можна праводзіць са звычайнымі лабараторнымі крыніцамі святла, якія працуюць у бесперапынным рэжыме, што значна спрашчае метадыку вымярэнняў і паляпшае іх дакладнасць.

2. Спектраскапічныя ўласцівасці аб'екта (у элементарным аб'ёме) параўнальна добра вивучаны, ёсць звесткі аб схеме ўзроўняў рэчыва, абгрунтавана прымяняльнасць формулы (1).

3. Існуе магчымасць вымярэння і вар'іравання ў шырокім інтэрвале аптычных параметраў рэчыва (каэфіцыентаў паглынання ўзбуджаючага святла і святла люмінесценцыі, канстанты рассяяння).

4. Магчыма атрыманне аптычна аднародных плоскапаралельных слаёў рэчыва рознай таўшчыні  $l$ .

5. Неабходна ўлічваць таксама пытанні ўстойлівасці ў часе, да ўздзеяння святла, вільгаці і г. д.

Пералічаным умовам у той ці іншай меры адпавядаюць арганалюмінафоры [5, 6]. Наяўнасць метастабільнага стану рэзка аблягчае назіранне нелінейных эфектаў. У гэтай рабоце выкарыстоўваліся цукровыя люмінафоры, актывіраваныя трыпафлавінам, і ў меншай ступені борна-гліцэрынавыя, актывіраваныя флуарэсцынамі і акрыдзінавым аранжавым. Усе пералічаныя арганалюмінафоры, асабліва цукровыя, пры захоўванні хутка крышталізуюцца, засвойваючы ваду з паветра [7]. Прымяненне інвертнага цукру павысіла ўстойлівасць цукровых люмінафораў, і ўзоры, заціснутыя паміж дзвюма пласцінкамі шкла, захоўваліся без прыкметных змяненняў на працягу многіх месяцаў.

Падбор тэмпературнага рэжыму астывання і спецыяльная канструкцыя кюветы з адтулінай для адтоку залішняга рэчыва пры астыванні дазволілі атрымліваць аптычна аднародныя плоскапаралельныя слаі без пазырчатасці і свіляватасці. Велічыня  $\eta_0$  вар'іравалася змяненнем канцэтрацыі актыватара. Даследаванне спектраў паглынання неактывіраваных цукровых фасфораў паказала, што ў рабочай вобласці (410—600 мкм) можна не браць пад увагу паглынання асновы і ўлічваць толькі паглынання актыватара. У вобласці максімуму паласы люмінесценцыі паглынання асновы і актыватара малое, і ў некаторым прыбліжэнні можна лічыць каэфіцыент паглынання люмінесценцыі  $\kappa_d$  роўным 0. Розная велічыня  $\kappa_d$  можа быць атрымана ўвядзеннем другога дадатковага фарбавальніка, паглынання якога не мае значэння ў паласе паглынання актыватара і значнае ў паласе люмінесценцыі апошняга. Напрыклад, у якасці такога дадатковага фарбавальніка для цукровых люмінафораў, актывіраваных трыпафлавінам, выкарыстоўваўся азін. Спектры паглынання такіх узораў былі вывучаны, змяненне канцэтрацыі асноўнага і дадатковага фарбавальнікаў дазваляла змяняць суадносіны паміж паглынанням узбуджаючага святла і святла люмінесценцыі.

Для атрымання светарассейваючых слаёў у аснову дадаваліся монадысперсныя парашкі аптычнага шкла, не паглынаючага ў бачнай вобласці спектра. (Шкло здрабнялася на вібрамлыне, ачышчалася ад прымесей і металічнага пылу хімічнымі спосабам, раздзялялася на фракцыі па размерах часцінак пры дапамозе калібраваных сітаў і седыментацыйным метадам). Змяняючы канцэтрацыю расейваючых цэнтраў і іх каэфіцыент праламлення (мы мелі шырокі набор узораў шкла — ад лёгкіх кронаў да цяжкіх флінтаў), можна ў шырокіх межах вар'іраваць канстанту расейвання. Спецыяльным кантролем пад мікраскопам і фотаметрыраваннем мікрапляцовак узору было паказана, што размеркаванне расейваючых часцінак па слою дадаткова раўнамернае. Вымярэнні паказалі, што ў бачнай вобласці канстанта расейвання  $s$  не залежыць ад даўжыні хвалі святла, і можна лічыць, што яна аднолькавая для ўзбуджаючага святла і святла люмінесценцыі ( $s=s_d$ ).

Вымярэнне нелінейнай люмінесценцыі праводзілася на ўстаноўках двух тыпаў — з інтэгруючай сферай, якая дазваляе зарэгістраваць сумарны паток люмінесценцыі ўверх або ўніз, і з прымальным прыстасаваннем, якое рэгіструе святло люмінесценцыі ў цялесным вугле  $2 \cdot 10^{-3}$  л пад вуглом  $45^\circ$  да напрамку ўзбуджэння.

Для ўзбуджэння выкарыстоўвалася ртутная лампа ДРШ-1000, якая працуе на стабілізаваным пастаянным току. З ртутнага спектра для ўзбуджэння люмінесценцыі пры дапамозе інтэрферэнцыйнага фільтра выдзялялася лінія 436 мкм. Змяненне інтэнсіўнасці праводзілася калібраванымі нейтральнымі светафільтрамі. Святло люмінесценцыі адзялялася ад адлюстраванага або расейнага ўзбуджаючага святла монахраматам УМ-2 і рэгістравалася фотапазнавальнікам ФЭУ-20 з узмацняльнікам У1-2. На барабане монахраматара ўстанаўліваўся адлік, які адпавядаў максімуму спектра люмінесценцыі (уласна ў доследзе рэгістравалася велічыня, прапарцыянальная спектральнай шчыльнасці свяцімасці люмінесценцыі слоя ў даўжыні хвалі максімуму люмінесценцыі).

У далейшым выкладанні мы будзем карыстацца спектральнай шчыльнасцю свяцімасці люмінесценцыі, аднесенай да асветленасці, якая ствараецца на паверхні ўзору ўзбуджаючай радыяцыяй. Атрыманая велічыня для люмінесценцыі, якая выйшла са слоя ўніз, абазначым  $I_d$ , уверх —  $I_u$ , і будзем для кароткасці называць адпаведна свяцімасцю «на прасвет» і «на адлюстраванне». У радзе выпадкаў не праводзілася вымярэнне па-

даючої інтенсивності  $S_0$ , вядома было тільки яе змяненне на працягу до-  
следу. У гэтых выпадках  $I \downarrow$  і  $I \uparrow$  выражаюцца ва ўмоўных адзінках (адлік  
выходнага прыбора дзялілі непасрэдна на прапусканне нейтральных све-  
тафільтраў, якія змяняюць магутнасць узбуджэння).

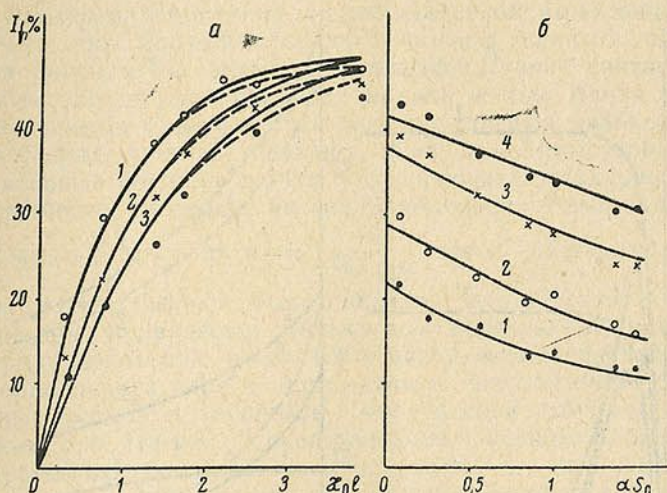


Рис. 1. Залежнасць свяцімасці люмінесценцыі «на прасвет» аднароднага слоя  $x_l=0$  ад аптычнай таўшчыні слоя (а) і параметра  $\alpha S_0$  (б):

а — 1 —  $\alpha S_0 = 0$ ; 2 — адпаведна 0,5; 3 — 1; перарывістыя лініі па-  
будаваны па даных тэарэтычных разлікаў для  $x_l/x_0 = 0,01$ ; б — 1 —  
—  $x_0 l = 0,57$ ; 2 — адпаведна 0,73; 3 — 1,4; 4 — 1,8

### 1. ЛЮМІНЕСЦЭНЦЫЯ ПЛОСКАПАРАЛЕЛЬНАГА АДНАРОДНАГА СЛОЯ

На рис. 1 прыведзены асноўныя рэзультаты вывучэння свяцімасці люмінесценцыі нерасейваючага плоскапаралельнага слоя, калі паглыннанне люмінесценцыі адсутнічае. Крывыя праведзены па даных тэарэтычных разлікаў [1]; рознымі значкамі адзначаны эксперыментальныя пункты. (Свяцімасць люмінесценцыі вымяралася ва ўмоўных адзінках, і накладанне эксперыментальных і тэарэтычных рэзультатаў дасягалася сумяшчэннем у адным пункце).

Павелічэнне аптычнай таўшчыні слоя прыводзіць да плаўнага ўзрастання свяцімасці, для малых  $x_0 l$  гэта ўзрастанне практычна ідзе па лінейнаму закону, затым рост замаруджваецца і пры вялікіх аптычных таўшчынях свячэнне практычна не залежыць ад велічыні  $x_0 l$ . Павелічэнне  $\alpha S_0$  выклікае змяншэнне свяцімасці люмінесценцыі. Гэта змяншэнне люмінесценцыі (гл. рис. 1, б, які дае залежнасць свяцімасці люмінесценцыі ад велічыні  $\alpha S_0$ ) больш прыкметна на малых аптычных таўшчынях, але ва ўсіх выпадках карціна залежнасці  $I$  ад  $\alpha S_0$  якасна такая ж, як для элементарнага аб'ёму, хаця колькасныя адрозненні могуць быць дастаткова вялікія. (Адзначым, што «лінейнаму выпадку», калі каэфіцыент паглыннання не залежыць ад шчыльнасці радыяцыі, адпавядае незалежнасць  $I \downarrow$  і  $I \uparrow$  ад  $S_0$ , г. зн. на рис. 1, б у гэтым выпадку павінны атрымацца проста прамыя, паралельныя восі абсцыс). Эксперыментальныя пункты добра ўкладваюцца на тэарэтычныя крывыя для малых аптычных таўшчынь ( $x_0 l = 0,57; 0,73$ ) і значна горш для большых ( $x_0 l = 1,4; 1,8$ ).

Ёсць і іншае несупадзенне доследных і разліковых даных; для  $\kappa_{л}=0$  свячэнне ўверх і ўніз аднолькавае; на доследзе, аднак, як правіла,  $I_{\uparrow}$  мае некалькі большае значэнне. Апошняе звязана з тым, што ў сапраўднасці існуе некаторае, хаця і вельмі малое, паглынне люмінесценцыі, якое асабліва моцна адбіваецца для слаёў вялікай аптычнай таўшчыні.

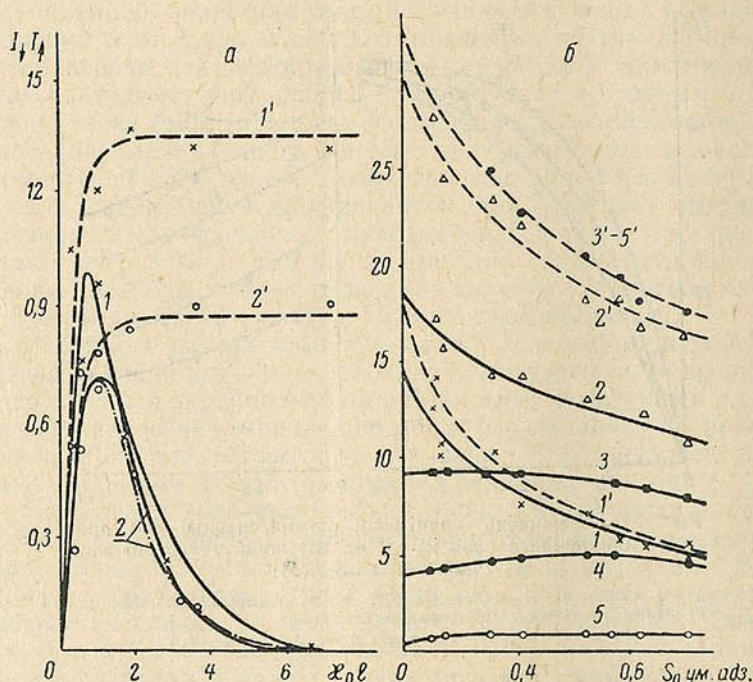


Рис. 2. Залежнасць  $I_{\uparrow}$  і  $I_{\downarrow}$  (ва ўмоўных адзінках) для плоскапаралельнага аднароднага слоя ад аптычнай таўшчыні: (а) і магучнасці ўзбуджэння (б); перарывістыя крывыя даюць свяцімасць люмінесценцыі «на адлюстраванне», суцэльныя — «на прасвет» (а —  $\kappa_{л}/\kappa_0 = 2$ ; крывыя 1, 1' адпавядаюць  $\alpha S_0 = 0$ , 2, 2' —  $\alpha S_0 = 1$ ; штрихпункцірная крывая праведзена па эксперыментальных пунктах; б —  $\kappa_{л}/\kappa_0 = 1,8$ ; лічы каля крывых адпавядаюць розным значэнням аптычнай таўшчыні: 1, 1' —  $\kappa_0 l = 0,4$ ; 2, 2' — адпаведна 1,8; 3, 3' — 2,8; 4, 4' — 3,5; 5, 5' — 6; крывыя 3', 4' і 5' вельмі блізкія і паказаны адной крывой)

Відавочна, менавіта гэта прычына растлумачвае той факт, што эксперыментальныя пункты для большых  $\kappa_0 l$  даюць меншыя значэнні  $I_{\downarrow}$ , чым тэарэтычныя крывыя (гл., напрыклад, рис. 1, а  $\kappa_0 l > 2$ ). На рис. 1, а перарывістыя лініі даюць свяцімасць люмінесценцыі слоя «на прасвет» для  $\kappa_{л}/\kappa_0 = 0,01$ . Верагодна, у выкарыстоўваемых узорах каэфіцыент паглынання люмінесценцыі быў нават крыху большы. (Лёгка паказаць, што значэнні  $\kappa_{л}/\kappa_0$  ва ўсякім выпадку не пераўзыходзяць 0,05).

Наяўнасць некаторага паглынання люмінесценцыі з'яўляецца крыніцай памылак, важнай менавіта ў дадзеным выпадку. Пры вывучэнні люмінесценцыі аднароднага плоскапаралельнага слоя такімі крыніцамі несупадзення тэарэтычных і эксперыментальных даных могуць быць наступныя прычыны.

1. Недакладнасць вызначэння аптычных таўшчынь  $\kappa_0 l$  і ў асабліва-сці абсалютнай велічыні  $\alpha S_0$  (змяненне яе вымяраецца з дакладнасцю 1%, а абсалютная велічыня  $\alpha S_0$  [8] можа быць атрымана толькі прыбліз-

на) і, значыць, недакладнасць сумяшчэння тэарэтычных і эксперыментальных даных.

2. Пры выкарыстоўваемых асветленасцях узору пэўную ролю могуць іграць выцвітанне і наяўнасць трыplet-трыpletнага паглынання ў арганафасфорах. Апошнія некалькі відазмяняе выгляд формулы (1), пакладзенай у аснову тэарэтычных разлікаў.

Што датычыць выцвітання, то спецыяльнымі вымярэннямі было паказана, што пры ўзбуджэнні люмінесценцыі святлом хвалі 436 мкм (асабліва фотахімічна актыўнае ультрафіялетавае святло) і выкарыстоўваемых экспазіцыях яно параўнальна малое. Аднак пры аналізе магчымых крыніц памылак гэты фактар таксама неабходна ўлічваць.

3. Ва ўзорах, якія даследуюцца, абавязкова прысутнічаюць некаторыя дадатковыя крыніцы страты ўзбуджаючага святла: паглынне асновы і прымесей, рассеянне на неаднароднасцях, г. зн. замест формулы

$$(1) \text{ належыла б запісаць } \kappa = \kappa' + \frac{\kappa_0}{1 + \alpha S}$$

дзе  $\kappa'$  улічвае памянёныя працэсы. Як ужо гаварылася, было паказана, што  $\kappa'$  малое ў параўнанні з  $\kappa_0$ . Аднак пры правядзенні колькасных вымярэнняў наяўнасць  $\kappa' \neq 0$  можа іграць некаторую ролю. Свяцімасць люмінесценцыі аднароднага плоскапаралельнага слоя з прыкметным паглыннем люмінесценцыі для розных аптычных таўшчынь і магутнасцей узбуджэння дэманструецца рыс. 2, а, б. На рыс. 2, а па-ранейшаму крывыя пабудаваны па даных тэарэтычных разлікаў, рознымі значкамі адзначаны эксперыментальныя пункты. Эксперыментальныя і тэарэтычныя даныя прыведзены да 1 у максімуме крывой, якая выражае залежнасць  $I \downarrow$  ад  $\kappa_0 l$  для  $\alpha S_0 = 0$ .

Для свячэння «на адлюстраванне» (перарывістыя крывыя), як і ў выпадку  $\kappa_n = 0$ , характэрна крывая, якая насычаецца. Свяцімасць люмінесценцыі ўніз з павелічэннем аптычнай таўшчыні слоя спачатку ўзрастае, дасягае максімальнага значэння, а затым хутка ўбывае. Павелічэнне магутнасці ўзбуджэння змяняе форму крывой  $I \downarrow = f(\kappa_0 l)$ : велічыня максімуму змяншаецца і зрушваецца ў бок большых аптычных таўшчынь, уся крывая размываецца, робіцца шырэй і перасякае крывую  $I \downarrow = f(\kappa_0 l)$  для  $\alpha S_0 = 0$ . Для выпадку малой шчыльнасці ўзбуджэння эксперыментальныя і тэарэтычныя даныя вельмі добра супадаюць (пункты добра размяшчаюцца ўздоўж крывой 1); калі  $\alpha S_0 = 1$ , контур эксперыментальнай крывой прыкметна вузей (ён паказаны штрих-пункцірам), пункт перасячэння крывых 1 і 2 зрушваецца ў бок большых  $\kappa_0 l$ . Гэта з'ява выклікана сумесным дзеяннем трох фактараў, аб якіх гаварылася вышэй. Якаснае супадзенне, аднак, у наяўнасці. На рыс. 2, б прыведзена залежнасць  $I \downarrow$  і  $I \uparrow$  ад магутнасці ўзбуджэння (па восі абсцыс адкладзена прапусканне нейтральных светафільтраў, якія прымяняліся для змянення велічыні  $S_0$ ). Розныя крывыя адпавядаюць розным аптычным таўшчыням. Свячэнне слоя ўверх убывае з ростам магутнасці ўзбуджэння такім жа чынам, як і ў выпадку  $\kappa_n = 0$ . Для малых  $\kappa_0 l$  рэзкае ўбыванне з павелічэннем  $S_0$  характэрна таксама і для  $I \downarrow$  (крывая 1), для крыху большых  $\kappa_0 l$  гэта ўбыванне робіцца менш прыкметным (крывая 2). Пры некаторай аптычнай таўшчыні свячэнне «на прасвет» амаль не залежыць ад магутнасці ўзбуджэння ў дастаткова шырокім інтэрвале змянення апошняй (крывая 3). Далейшае павелічэнне  $\kappa_0 l$  прыводзіць да таго, што  $I \downarrow$  расце з павелічэннем  $S_0$  — якасна новая залежнасць, характэрная толькі для слаёў з вялікімі значэннямі  $\kappa_0 l$  і  $\kappa_n$  і звязаная з асабліваасцямі распаўсюджвання ў слоі ўзбуджаючага святла і святла люмінесценцыі [1]. Поўнаасцю аналагічная карціна была атрымана ў [1] на аснове тэарэтычных разлікаў.

## 2. ЛЮМІНЕСЦЭНЦЫЯ ПЛОСКАПАРАЛЕЛЬНАГА РАССЕЙВАЮЧАГА СЛОЯ

Папярэдне зробім некалькі заўваг.

1. Тэарэтычны разлік свяцімасці люмінесценцыі плоскапаралельнага рассеяваючага слоя, выкананы ў [2], скарыстоўвае цэлы рад спрашчаючых меркаванняў (разглядаецца бясконца працяглы слой, раўнамерна асветлены дыфузным святлом, не ўлічваюцца вуглавая структура ўзбуджаючага святла і святла люмінесценцыі, палярызацыйныя з'явы і г. д.),

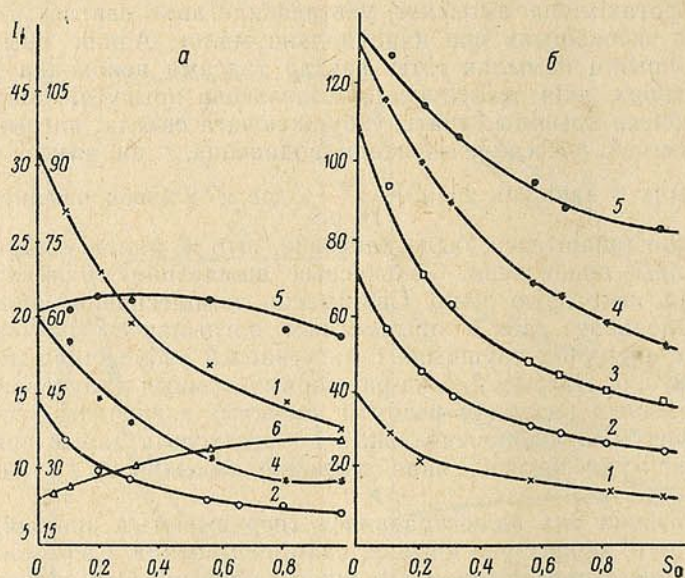


Рис. 3. Свяцімасць люмінесценцыі ўніз (а) і ўверх (б) (ва ўмоўных адзінках) у залежнасці ад магутнасці ўзбуджэння (таксама дадзена ва ўмоўных адзінках) для  $k_0/s = k_l/s = 2$  і розных аптычных таўшчынь:

1 —  $\tau = 0,54$ ; 2 — адпаведна 0,9; 3 — 1,8; 4 — 3,6; 5 — 5,4; 6 — 7,2; крывыя 2 і 4 пабудаваны на маштабе, паказаным справа ад восі ардынат

і з гэтай прычыны можа даць толькі якасную, у лепшым выпадку паўколькасную карціну з'явы.

2. У разліковай мадэлі лічыцца, што рассеяваючыя і паглынаючыя часцінкі знаходзяцца ў паветры; ва ўзорах, якія выкарыстоўваюцца, ёсць сувязнае асяроддзе і 2 шкляныя грані.

3. Для супастаўлення тэарэтычных і эксперыментальных даных неабходна мець дакладныя значэнні канстант паглынання ўзбуджаючага святла  $K_0$  і святла люмінесценцыі  $K_l$  і рассеяння  $s$ . Іх вызначэнне [9] звязана з пэўнымі цяжкасцямі. У той жа час няцяжка атрымаць адносныя велічыні гэтых параметраў. Напрыклад, можна лічыць [10], што канстанта паглынання прапарцыянальная каэфіцыенту паглынання  $i$ , значыць, канцэнтрацыі актыватара.

4. Натуральна, што да рассеяючых узораў цалкам адносяцца ўсе заўвагі аб рознасці тэарэтычнай мадэлі і аб'екта эксперыменту, зробленыя вышэй для аднародных слаёў.

Са сказанага ясна, што не належыць чакаць дакладнага супадзення эксперыментальных і разліковых даных. Сапраўды, забягаючы крыху наперад, трэба адзначыць, што тэарэтычны і доследны шляхі даюць адну і тую ж фізічную карціну з'явы, назіраецца поўная якасная адпавед-

нась (з гэтай прычыны ў далейшым выкладанні мы абмяжумся апісаннем эксперыментальных даных). Колькасныя ж супастаўленні цяжкаватыя і не заўсёды даюць добрыя рэзультаты.

Рыс. 3, а, б дэманструе ўплыў магутнасці ўзбуджэння на свяцімасць люмінесценцыі расейваючага «нелінейнага слоя». Тут назіраюцца ўсе заканамернасці, адзначаныя вышэй, пры разгляданні аднароднага слоя: падаўленне люмінесценцыі «на адлюстраванне» пры ўзрастанні магутнасці ўзбуджэння; якасна розны ход залежнасці  $I_{\downarrow}$  ад  $S_0$  для розных

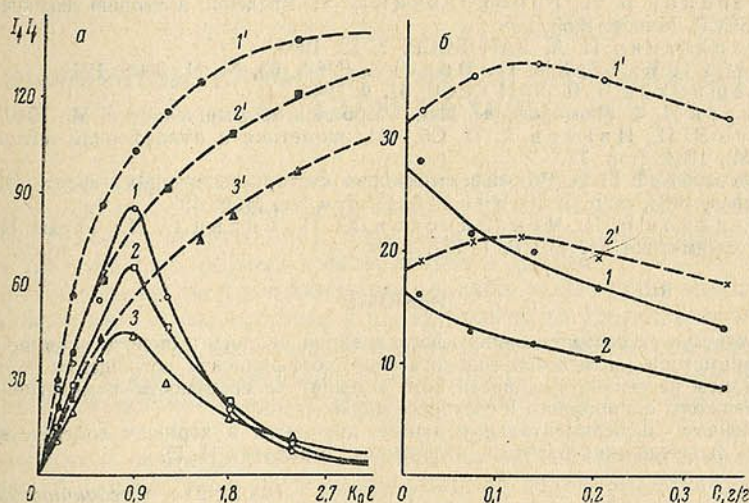


Рис. 4. Залежнасць свяцімасці «на адлюстраванне» (перарывістыя лініі) і «на прасвет» (суцэльныя лініі) (ва ўмоўных адзінках) ад  $k_0 l$  (а) і ўдзельнай канцэнтрацыі расейваючых часцінак  $S$  прапарцыянальнай параметру  $s$  (б). Лічбы каля крывых адпавядаюць розным значэнням магутнасці ўзбуджэння: а -  $k_0/s = k_{\downarrow}/s = 2$ ; 1, 1' -  $S_0 = 0,1$ ; 2, 2' - адпаведна 0,3; 3, 3' - 1; б -  $k_{\downarrow} = 0,6$ ;  $k_0 = 2,1$ ;  $l = 0,3$ ; 1, 1' -  $S_0 = 0,05$ ; 2, 2' -  $S_0 = 1$ . Тут велічыня  $S_0$  прыведзена ў адносных адзінках

аптычных таўшчынь слоя  $\tau = (k_0 + s)l$ : памяншэнне свячэння «на прасвет» для малых  $\tau$  і пастаянства або павелічэнне для большых аптычных таўшчынь пры ўзрастанні  $\alpha S_0$  (параўн. крывыя 1, б, в рыс. 3, а). Трэба адзначыць, што ў адрозненне ад аднароднага слоя, падобная карціна ў разглядаемым выпадку назіраецца і пры адсутнасці паглынання люмінесценцыі. Прычына гэтага факта ў спецыфіцы распаўсюджвання святла ў расейваючых асяроддзях [2].

Усе асноўныя заканамернасці ўплыву аптычнай таўшчыні слоя на яго свячэнне пры розных магутнасцях узбуджэння відаць з разгледжання рыс. 4, а; адзначым што тут, як і ў выпадку рыс. 3, а, б, ёсць аналогія з залежнасцямі, якія назіраюцца пры вывучэнні свячэння аднароднага слоя. Адзначым таксама, што і ў выпадку, калі каэфіцыент паглынання люмінесценцыі роўны 0,  $I_{\downarrow}$  з павелічэннем  $\tau$  спачатку ўзрастае, дасягае максімуму, а потым убывае.

Павелічэнне ступені мутнасці асяроддзя (параметра расейвання  $s$ ) выклікае ўбыванне свячэння «на прасвет» (рыс. 4, б). Больш цікавыя заканамернасці назіраюцца для велічыні  $I_{\uparrow}$ : апошняя ў некаторым інтэрвале змянення канстанты расейвання можа ўзрастаць пры павелічэнні  $s$  (за кошт павелічэння каэфіцыента адлюстравання ляжачых ніжэй слаёў

адбываецца пераразмеркаванне энергіі паміж патокамі святла люмінесцэнцыі, якія распаўсюджваюцца ўніз і ўверх у карысьць апошняга).

У заключэнне аўтары выказваюць падзяку кандыдату фізіка-матэматычных навук А. П. Іванову за ўвагу да работы.

#### ЛІТАРАТУРА

1. Зеге Э. П., Іванов А. П. ЖПС, 3, № 3, 1965.
2. Зеге Э. П., Іванов А. П. ЖПС, 3, № 5, 1965.
3. Степанов Б. И., Грибковский В. П. Введение в теорию люминесценции. Изд. АН БССР, Минск, 1963.
4. Апанасевич П. А. ДАН БССР, 7, 22, 1963.
5. Lewis C. W., Lipkin D., Magel J. JOSA, 63, № 11, 3005, 1941.
6. Свешников Б. Я. ДАН СССР, 51, 9, 1946.
7. Жиров Н. Ф. Люминофоры. Изд. оборонной промышленности, М., 1940.
8. Зеге Э. П., Іванов А. П. Сб. «Актинометрия и атмосферная оптика». Изд. «Наука», М., 1964, стар. 77.
9. Розенберг Г. В. Сб. «Спектроскопия светорассеивающих сред». Изд. АН БССР, Минск, 1963, стар. 5; Іванов А. П. Там же, стар. 42.
10. Степанов Б. И., Чекалинская Ю. И., Гирич О. П. Труды Института физики и математики АН БССР, 1, 152, 1956.

#### РЕЗЮМЕ

В результате экспериментального исследования удалось выявить влияние всех основных параметров (оптической толщины слоя, коэффициента поглощения люминесценции, константы рассеяния, мощности возбуждения) на светимость люминесценции плоскопараллельного однородного и светорассеивающего слоя.

Полученные экспериментальные данные находятся в хорошем соответствии с результатами теоретических расчетов, изложенных в работах [1, 2].

*Поступило в редакцию 25.IX 1965*

Л. І. ГРАЧЫХІН, Я. І. НЕКРАШЭВІЧ

### ВЫМЯРЭННЕ КАЭФІЦЫЕНТАЎ ПАГЛЫНАННЯ АРГОНУ НА УДАРНАЙ ТРУБЕ

Пры высокай тэмпературы гарачага газу важна ведаць яго выпраменьвальную і паглынальную здольнасці. У гэтай сувязі неабходна эксперыментальна распрацаваць метады вымярэння каэфіцыентаў паглынання плазмы пры розных тэмпературах і цісках.

У гэтай рабоце разгледжаны два спосабы вызначэння монахраматычных каэфіцыентаў паглынання ў дастасаванні да ўдарнай трубы. Першы спосаб заснаваны на выкарыстанні метаду самапрасветкі выпраменьваўчага аб'ёму з дапамогай аднаго люстэрка [1, 2], другі — на вызначэнні адноснай інтэнсіўнасці выпраменьвання нагрэтага газу пры рознай таўшчыні.

Вымярэнні праводзіліся на стальной ударнай трубе з храміраванай унутранай паверхняй. Канструкцыя ўдарнай трубы прадугледжвала таксама магчымасць выкарыстання шкляной камеры нізкага ціску. У абодвух варыянтах унутраны дыяметр складаў 57 мм. Даўжыня камеры высокага ціску 0,5 м, нізкага ціску 6 м. Камера нізкага ціску заканчвалася аптычным адсекам, які меў акно ў тарцы для назіранняў уздоўж ўдарнай трубы і два размешчаныя адзін супраць другога круглыя вокны, якія выкарыстоўваліся для вымярэнняў упоперак трубы каля яе тарца. Аптычная вось акон, якія былі з арганічнага шкла, знаходзілася на адлегласці 7 мм ад тарца. У якасці штурхаючага газу скарыстоўвалі вадарод (максімальны ціск да 250 атм дасягаўся з дапамогай спецыяльнага мультыплікатара), камеру нізкага ціску напаўнялі аргонам пры ціску 10 мм рт. сл.

Вядома [3], што падобная камбінацыя штурхаючага і рабочага газаў дазваляе атрымаць максімальную тэмпературу за падаючай і адбітай ударнай хваляй. Перад напускам аргону камера нізкага ціску адпампоўвалася да ціску 0,02 мм рт. сл., затым напаўнялася аргонам да ціску 100 мм рт. сл. і зноў адпампоўвалася да 0,02 мм рт. сл. Гэта аперацыя паўтаралася 3 разы, пасля чаго камера напаўнялася аргонам да неабходнага ціску. У выніку такой «прамыўкі» камера добра ачышчалася ад прымесі паветра. Пры пачатковым ціску аргону 10 мм рт. сл. у трубе прысутнічала менш 1% газападобных прымесей. Пасля кожнага выстралу труба праціралася спіртам.

Скорасць падаючай ударнай хвалі вымяралася іанізацыйнымі датчыкамі, выходнае напружанне з якіх падавалася на ўваход асцылографу ОК-17М. Датчыкі скорасці былі размешчаны па ўсёй даўжыні трубы, прычым адлегласць ад апошняга датчыка да тарца складала 20 см. На такой адлегласці затуханне скорасці нязначнае, і яго можна не ўлічваць. Памылка вымярэння скорасці падаючай ударнай хвалі складала  $\pm 3\%$ .

Яркасная тэмпература газу, нагрэтага адбітай ударнай хваляй, вызначалася па метаду, апісанаму ў [4]. З формулы Планка вынікае

$$a \frac{d}{d_0} = \frac{e^{c_2/\lambda T_0} - 1}{e^{c_2/\lambda T_x} - 1},$$

дзе  $T_x$ — тэмпература газу за адбітай хваляй;  $T_0$ — тэмпература эталоннай крыніцы святла;  $a$ — каэфіцыент аслаблення нейтральнага светафільтра;  $d$ — амплітуда асцылаграмы выпраменьвання;  $d_0$ — амплітуда калібровачнай асцылаграмы;  $\lambda$ — даўжыня хвалі, у вобласці якой вядуцца вымярэнні;  $c_2 = 1,44 \text{ см} \cdot \text{град}$ .

Вымярэнні тэмпературы праводзілі ў двух участках спектра, свабодных ад ліній, пры  $\lambda$  5790 Å і 5460 Å. Дакладнасць вымярэння ацэньвалася ў сярэднім  $\pm 10\%$ .

Знойдзеныя такім спосабам тэмпературы ў межах памылкі вымярэнняў супадаюць з тэарэтычнымі [3] (табл. 1). Аналагічны вынік быў атры-

Табліца 1  
Результаты вымярэння каэфіцыентаў паглынання ўпоперак ударнай трубы

Даўжыня хвалі, Å	Лік Маха падаючай ударнай хвалі	Каэфіцыент паглынання $\times 10^2$ , см <sup>-1</sup>	Колькасць эксперыментаў	Тэмпература аргону за адбітай ударнай хваляй, °С	
				эксперыментальная	тэарэтычная
5790	8,8	9,0	2	11200	12000
5790	8,9	2,5	2	11500	12100
5790	9,5	6,0	1	11500	12600
5460	8,8	4,8	2	11100	12000
5769	8,8	5,2	3	10900	12000
4916	9,3	0,8	2	11600	12400

маны ў рабоце [5]. У сувязі з гэтым у далейшым прадстаўляецца магчымым выкарыстаць значэнні тэмпературы аргону за адбітай ударнай хваляй, вылічаныя тэарэтычна.

Пры вымярэннях каэфіцыента паглынання нагрэтага аргону за адбітай ударнай хваляй упоперак трубы выкарыстоўваўся варыянт з адным плоскім люстэркам [2]. Выкарыстанне гэтага варыянта было абумоўлена канструктыўнымі асаблівасцямі эксперыментальнай устаноўкі.

Аптычная схема методыкі вымярэнняў прыведзена на рыс. 1, а. Знешняя паверхня бакавога акна 5 па дыяметру напалавіну пакрывалася люстраным слоём. Акно ўстанаўлівалася такім чынам, каб мяжа падзелу люстраной і празрыстай частак яго была размешчана перпендыкулярна шчыліне спектрографа. З дапамогай кандэнсара ( $F=94 \text{ мм}$ ) на шчыліну спектрографа праектавалася адбіццё люстраной паверхні акна, так што яе мяжа дзяліла шчыліну спектрографа па вышыні на дзве часткі. На ўваходную шчыліну спектрографа праз акно 4 пападалі два светлавых патокі: на адну палавіну непасрэдна ад аб'ёму свецячага газу, на другую — сумарны светавы паток ад выпраменьваючага аб'ёму газу і паток, які адбіты люстраной паверхняй і затым прайшоў праз гэты ж аб'ём. У факальнай плоскасці спектрографа ИСП-51 змяшчалася выходная шчыліна, з дапамогай якой выдзяляўся пэўны ўчастак спектра. Затым светлавая патокі ад верхняй і ніжняй палавін шчыліны падзяляліся люстраной гранню прызмы фотаэлектрычнай прыстаўкі. Прыёмнікамі выпраменьвання служылі фотопамнажальнікі ФЭУ-12. Сігналы з фотопамнажальнікаў праз катодныя паўтаральнікі падаваліся на два праменні асцылографа ОК-17М. Абодва каналы асцылографа мелі адноль-

кавы каэфіцыент узмацнення. Кантроль велічыні каэфіцыентаў узмацнення абодвух каналаў праводзіўся перад кожнай серыяй вымярэнняў.

Параўноўваючы велічыню сігналаў ад абодвух фотапамнажальнікаў, знойдзем адносіны велічынь светлавых патокаў, якія пападаюць на верхнюю і ніжнюю палавіны ўваходнай шчыліны спектрографа. Калі  $d_1$ —

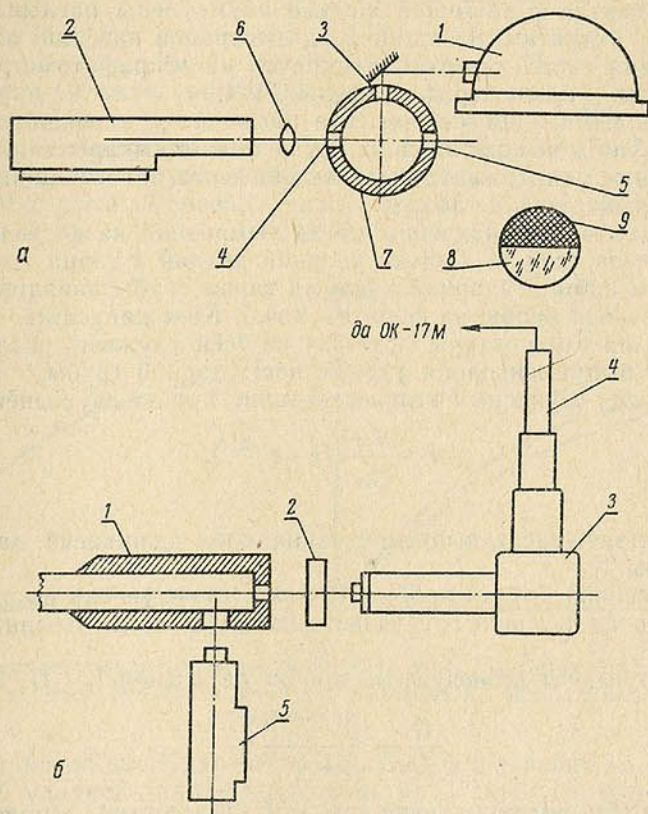


Рис. 1. Аптычная схема вымярэння каэфіцыентаў паглынання газу за адбітай хваляй уоперак ударнай трубы (а) і з яе тарца (б):

а) 1—чакаючы фотарэгістратар ЖФР-2; 2—спектрограф ИСП-51; 3—люстэрка; 4—аптычнае акно; 5—аптычнае акно з люстраным пакрыццём; 6—кандэнсар; 7—ударная труба; 8—выгляд акна збоку; 9—люстэраная наверхня;  
 б) 1—аптычны адсек ударнай трубы; 2—набор нейтральных светафільтраў; 3—монахраматар УМ-2; 4—фотазэлектрычная прыстаўка; 5—чакаючы фотарэгістратар ЖФР-2

амплітуда асцылаграмы сумарнага светлавога патоку,  $d_2$ —амплітуда асцылаграмы светлавога патоку ад даследуемага аб'ёму газу, то

$$\frac{d_1}{d_2} = \frac{I + bI}{I} = 1 + b, \quad (1)$$

дзе  $I$ —інтэнсіўнасць выпраменьвання газу;  $b$ —паглынне святла ў аптычнай сістэме,

$$b = Ee^{-2k_1 l_1}, \quad (2)$$

$E$ —каэфіцыент адбіцця люстранага пакрыцця;  $k_1$ —каэфіцыент паглынання акна;  $l_1$ —таўшчыня акна.

З формул (1) і (2)

$$e^{k_\lambda l} = \frac{d_1}{d_2} - b_0 - 1. \quad (3)$$

Па формуле (3) вызначаем  $k_\lambda^*$ .

Страты святла ў аптычнай сістэме абумоўлены паглыннаннем акна 5 (рыс. 1, а) і стратамі на адбіццё ад люстраной паверхні акна. Каэфіцыент адбіцця гэтай паверхні вымяраўся на мікрафатометры МФ-2, а страты ў акне — на спектрафатометры СФ-4.

Хібнасць вымярэння каэфіцыента паглынання ацэньвалася ў сярэднім  $\pm 50\%$ . Такім чынам, апісаны метады можна выкарыстаць толькі для грубых ацэнак монахраматычнага каэфіцыента паглынання. Вынікі вымярэнняў прыведзены ў табл. 1.

Больш дакладны і надзейны метады вымярэння каэфіцыентаў паглынання гарачага газу за адбітай ударнай хваляй з тарца трубы ўздоўж яе восі. Пры адбіцці ўдарнай хвалі ад тарца трубы павялічваецца даўжыня свецячайся пробкі за фронтам хвалі. Калі дапусціць, што пробка аднародная па тэмпературы і саставу па ўсёй даўжыні, разлічым інтэнсіўнасць яе выпраменьвання ўздоўж восі ўдарнай трубы.

Поўная інтэнсіўнасць  $I$  выпраменьвання пробкі даўжынёй  $l$

$$I = \frac{I_{0T}}{k_\lambda} (1 - e^{-k_\lambda l}), \quad (4)$$

дзе  $I_{0T}$  — інтэнсіўнасць выпраменьвання слоя адзінкавай даўжыні пры тэмпературы  $T$ .

Пры бясконца доўгай пробцы ( $l \rightarrow \infty$ ) інтэнсіўнасць выпраменьвання імкнецца да  $I_{0T}/k_\lambda$ , што адпавядае выпадку выпраменьвання абсалютна чорнага цела.

Параўноўваючы інтэнсіўнасць пробкі даўжынёй  $l_1$  і  $l_2$ , атрымліваем

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{1 - e^{-k_\lambda l_1}}{1 - e^{-k_\lambda l_2}}. \quad (5)$$

З формулы (5), ведаючы адносіны  $I_1/I_2$  і даўжыні выпраменьваючай пробкі  $l_1$  і  $l_2$ , знаходзім каэфіцыент паглынання  $k_\lambda$ .

Калі  $k_\lambda l_2 \gg 1$  (што адпавядае выпадку  $I_2 = I_0/k_\lambda$ ), то

$$\frac{I_1}{I_2} = 1 - e^{-k_\lambda l_1}. \quad (6)$$

Графік залежнасці  $I_1/I_2$  ад  $k_\lambda l_1$  прыведзены на рыс. 2, а, з якога відаць, што мінімальная памылка вымярэння  $k_\lambda$  будзе пры  $1 > k_\lambda l_1 > 0$  (прамалінейны ўчастак крывой). Такім чынам, найлепшая адчувальнасць метаду мае месца пры выкананні умоў:

$$1 > k_\lambda l_1 > 0, \quad k_\lambda l_2 \gg 1. \quad (7)$$

Апошняя няроўнасць указвае на тое, што пажадана мець як можна больш доўгую пробку гарачага газу\*\*).

\*) Атрымання выразы з'яўляюцца справядлівымі для плоскага тонкага выпраменьваючага слоя газу.

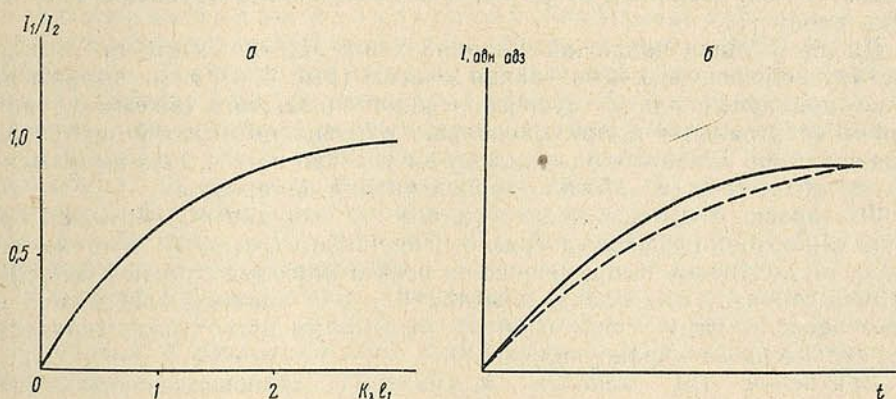
\*\*\*) Неабходна ўлічваць, што з павелічэннем аб'ёму гарачага газу за адбітай ударнай хваляй узрастае градыент тэмператур у выніку астывання газу, г. зн. пры пэўных умовах можа не выконвацца патрабаванне аднароднасці пробкі па тэмпературы.

Адносная хібнасць вымярэння  $k_\lambda$  пры выкананні ўмоў (7)

$$\frac{\Delta k_\lambda}{k_\lambda} = \pm \left[ \frac{\Delta l_1}{l_1} + \frac{\Delta \left( \frac{I_1}{I_2} \right)}{\left( 1 - \frac{I_1}{I_2} \right) \ln \frac{1}{1 - \frac{I_1}{I_2}}} \right] \quad (8)$$

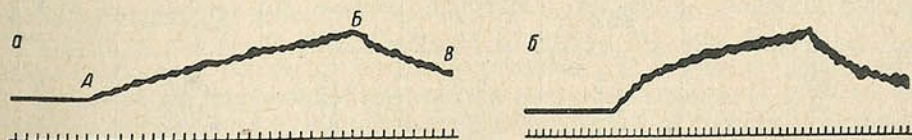
Найбольшая хібнасць уносіцца вымярэннем велічыні  $l_1$ , прычым максімальная адносная памылка  $\Delta l_1/l_1$  складае  $\pm 10\%$ .

Размяшчэнне апаратуры для вымярэння монахраматычных каэфіцыентаў з тарца ўдарнай трубы схематычна прыведзена на рыс. 1, б. Монахраматар УМ-2 устанаўліваецца такім чынам, каб яго аптычная вось



Рыс. 2. Залежнасць адноснай інтэнсіўнасці  $I_1/I_2$  ад  $k_\lambda l_1$  і інтэнсіўнасці выпраменьвання ад часу (суцэльная крывая — тэарэтычная, штрыхавая — эксперыментальная)

была накіравана па восі ўдарнай трубы. Выпраменьванне ад пробкі газу за адбітай ударнай хваляй праходзіць праз аптычнае акно ў тарцы і пападае на ўваходную шчыліну монахраматара. Выкарыстоўвалі бескандэнсарны метад асвятлення шчыліны. Інтэрвал даўжынь хваляў  $\Delta \lambda$ , выразаны выхадной шчылінай, складае ў сярэднім 1 Å. Прыёмнікам выпраменьвання служыў фотапамнажальнік ФЭУ-12. Сігнал з фотапамнажальніка праз катодны паўтаральнік падаваўся на асцылаграф



Рыс. 3. Асцылаграмы выпраменьвання аргону, атрыманыя з тарца ўдарнай трубы: а —  $M_s = 7,5$ ; б —  $M_s = 8,5$  (адзінкі часу задаюцца генератарам 125 кГц)

ОК-17М, які запускаўся іанізацыйным датчыкам. Для таго каб засцепагчы фотапамнажальнік ад перагрузак, светлавы сігнал аслабляўся нейтральнымі светафільтрамі. Скорасць адбітай ударнай хвалі вымяралася фотарэгістратарам ЖФР-2.

На рыс. 3, а, б прыведзены тыповыя асцылаграмы выпраменьвання. У момант адбіцця ўдарнай хвалі ад тарца ўзнікае яркае свячэнне газу, інтэнсіўнасць якога расце па меры павелічэння даўжыні пробкі (уча-

стак *АВ*, рыс. 3, *а*). Тэмпература газу ў пробцы значна вышэй тэмпературы газу за падаючай хваляй. У момант сутыкнення фронту адбітай ударнай хвалі з кантактнай паверхняй інтэнсіўнасць выпраменьвання хутка падае (участак *ВВ*).

Вымяраючы скорасць адбітай ударнай хвалі і вызначаючы па часавых метках працягласць свячэння пробкі да сутыкнення фронту адбітай хвалі з кантактнай паверхняй, знаходзім даўжыню пробкі. Такі метада фотаэлектрычнай рэгістрацыі выпраменьвання з тарца ўдарнай трубы ў камбінацыі са скарасной камерай ЖФР-2 для вызначэння скорасці адбітай ударнай хвалі дазваляе ўстанавіць памеры пробкі гарачага газу за адбітай хваляй. Ён значна прасцей шлірэн-метаду, які часта выкарыстоўваецца для падобных мэт, але менш дакладны. Вымяраная такім спосабам даўжыня пробкі ў нашых эксперыментах для розных пачатковых умоў складала 8–20 см, што не дазволіла поўнаасцю забяспечыць умову (7).

Да лікаў Маха падаючай ударнай хвалі  $M_s \sim 8$  назіраўся лінейны рост інтэнсіўнасці выпраменьвання з часам (рыс. 3, *а*), г. зн. выпраменьванне прапарцыянальна таўшчыні выпраменьваючага аб'ёму, і, такім чынам, спектральная выпраменьвальная здольнасць малая ў параўнанні з адзінкай [6]. Лінейны ход асцылаграм указвае на тое, што выпраменьваючы аб'ём газу за адбітай ударнай хваляй аднародны.

Лінейнасць асцылаграм захоўвалася і ў выпадку  $M_s > 8$ , аднак пры такіх ліках Маха ход асцылаграм быў нелінейны (рыс. 3, *б*). У гэтым выпадку інтэнсіўнасць выпраменьвання пробкі нарастае хутчэй і імкнецца да насычэння, г. зн., відаць, пры  $M_s > 8$  умова аднароднасці пробкі не выконваецца, таму асцылаграмы, атрыманыя пры такіх значэннях  $M_s$ , колькасна не апрацоўваліся.

Ураўненне (5) адносна  $k_\lambda$  з'ўляецца трансцэндэнтным, таму яго рашалі графічным метадам. Для кожнай асцылаграмы выбіралі некалькі пар значэнняў  $I_1$  і  $I_2$ , па формуле (5) выяўлялі значэнне для кожнай пары і затым выконвалі ўсерадненне.

Вымярэнне монахраматычных каэфіцыентаў паглынання выконвалася ў вобласці даўжынь хваляў 4077 Å, 4108, 4339, 4347, 5460, 5769, 5790 Å. Гэтыя ўчасткі былі свабодныя ад спектральных ліній.

Табліца 2

Результаты вымярэння каэфіцыентаў паглынання з тарца ўдарнай трубы ўздоўж яе вос

Даўжыня хвалі, Å	Лік Маха падаючай ударнай хвалі	Каэфіцыент паглынання $\times 10^2$ , см <sup>-1</sup>	Адносная памылка, %	Тэмпература за адбітай ударнай хваляй, °К	Колькасць эксперыментаў, па якіх праводзілася ўсерадненне
4077	7,8	2,0	19	10700	3
4103	7,8	3,5	17	10700	3
4339	8,1	5,7	20	11200	3
4347	7,8	5,2	13	10700	5
4916	7,8	7,1	15	10700	8
5460	7,8	5,8	15	10700	10
5769	7,8	5,8	13	10700	10
5790	7,5	5,7	13	10400	12

Вымярэння апісаным вышэй метадам велічыні монахраматычных каэфіцыентаў паглынання прыведзены ў табл. 2, з якой відаць, што сярэдня адносная памылка вымярэння складае  $\pm 15\%$ .

Для ўсерадненняў выкарыстоўваліся рэзультаты эксперыментаў, у якіх скорасці падаючых ударных хваляў супадалі ў межах памылкі вы-

мярэння ( $\pm 3\%$ )\*. На рис. 2, б прадстаўлена эксперыментальная крывая хода інтэнсіўнасці выпраменьвання пробкі ( $M_s=7,5$ ) і тэарэтычная, вылічаная з выкарыстаннем сярэдняга значэння  $k_\lambda=5,0 \cdot 10^{-2} \text{ см}^{-1}$ . Тэарэтычная крывая ляжыць некалькі ніжэй эксперыментальнай, аднак згода паміж імі добрая, што яшчэ раз указвае на правільнасць меркавання аб аднароднасці пробкі.

Прыведзеныя ў табл. 2 значэнні тэмпературы за адбітай ударнай хваляй былі вызначаны па скорасці падаючай хвалі з тэарэтычных разлікаў [3]. Велічыня каэфіцыентаў паглынання залежыць ад тэмпературы [7, 8]. Таму недахоп дадзенай работы — адсутнасць дакладнага кантролю тэмпературы для кожнага асобнага доследу, што ўскладняе параўнанне атрыманых значэнняў з тэарэтычна разлічанымі і эксперыментальнымі рэзультатамі іншых работ. Аднак у межах памылак вымярэнняў такое параўнанне можна правесці.

Аб меркаванні рэзультатаў. Каэфіцыент паглынання аргону ў суцэльным спектры можна вызначыць у адпаведнасці з тэорыяй Унзольда — Крамерса для часткова іанізаванага газу, справядлівай для атама вадароду і вадародападобных атамаў. Калі ж разглядаецца выпраменьванне шматэлектронных атамаў, то для ўліку асаблівасці іх будовы неабходна ўвесці эфектыўны зарад  $Z_{эф}$  і множнік  $G$ . Аднак, як адзначаюць [7, 9], разлік па формуле Унзольда для складаных атамаў дае велічыні, якія часам разыходзяцца з эксперыментальнымі на цэлы парадок. Акрамя таго, выбар множніка  $G$  і эфектыўнага зараду  $Z_{эф}$  характарызуецца пэўнай адвольнасцю.

У рабоце [7] прыводзіцца ўдакладненая формула для каэфіцыентаў паглынання складаных атамаў, разлік па якой добра ўзгадняецца з эксперыментам. У разліку на адзін атам велічыня каэфіцыента паглынання будзе [7]:

$$k_{\nu, T} = c_1 (2\Sigma_1/\Sigma_0) T e^{-u_1+u} Z^2 \xi(\nu, T) \nu^{-3} \quad (\nu \leq \nu_g) \quad (9)$$

і

$$k_{\nu, T} = c_1 (2\Sigma_1/\Sigma_0) T e^{-u_1+u_g} Z^2 \xi(\nu, T) \nu^{-3} \quad (\nu \geq \nu_g),$$

дзе  $c_1=0,89 \cdot 10^{24}$ ;  $T$  — тэмпература плазмы, °К;  $u=h\nu/kT$ ;  $\nu_1$  — парогавая частата фотаэфекту з асноўнага стану;  $\Sigma_0$  — сума станаў атама;  $\Sigma_1$  — сума станаў астаткавага іона. Велічыня задаецца ніжнім узбуджаным узроўнем [10];  $Z$  — зарад ядра;  $\xi(\nu, T)$  — паправачны множнік, які ўлічвае асаблівасці сячэння ўзроўняў. Прыведзеныя формулы ўлічваюць звязана-свабодныя і свабодна-свабодныя пераходы. У бачнай спектральнай вобласці і пры тэмпературы  $\sim$  да  $20\,000^\circ \text{ К}$  галоўны ўклад даецца звязана-свабоднымі пераходамі. Уклад свабодна-свабодных пераходаў будзе парадку  $\exp(-h\nu/kT)$ . Паводле Шлютэра [8], пры  $\lambda=4000 \text{ \AA}$  свабодна-свабодныя пераходы складаюць толькі 2%, а пры  $\lambda=6800 \text{ \AA}$  10% ад агульнай інтэнсіўнасці безупыннага выпраменьвання. У сувязі з гэтым для аргону пры ўказанай вышэй тэмпературы ў бачнай спектральнай вобласці замест формулы (9) можна карыстацца больш простай формулай, якая ўлічвае толькі звязана-свабодныя пераходы і выпадак  $\nu \leq \nu_g$ . Гэты спрошчаны выраз формулы (9) можна знайсці ў рабоце [8].

Атрыманыя намі велічыні каэфіцыентаў паглынання ў межах памылак вымярэнняў знаходзяцца ў здавальняючай згодзе з разлічанымі па спрошчанай формуле (9) і атрыманымі эксперыментальна ў рабоце [8].

\* Аднаўленне пачатковых умоў эксперымента ажыццяўлялася тым, што на алюмініевых дыяфрагмах з дапамогай прэса наносіліся дзве ўзаемна-перпендыкулярныя канаўкі. Гэта дазваляла атрымаць раскід у перападзе піскаў на дыяфрагме для розных доследаў  $\pm 5\%$ .

дзе ў якасці даследуемай крыніцы была скарыстана дуга ў аргоне пры атмасферным ціску, стабілізаваная сценкай.

Для параўнання нашых даных з рэзультатамі ўказаных работ меркавалася, што канцэнтрацыя нейтральных атамаў у пробцы за адбітай ударнай хваляй прапарцыянальная ціску. Для разліку выкарыстоўваліся прыведзеныя ў рабоце Шлютэра даныя для канцэнтрацыі нейтральных атамаў аргону пры атмасферным ціску і адпаведнай тэмпературы. Гэта меркаванне з'яўляецца цалкам дапушчальным, калі ўлічыць, што пры інтэнсіўнасці ўдарных хваляў, з якімі мы мелі справу, ступень іанізацыі не перавышае 0,02 [3].

#### ВЫВАДЫ

1. Прапанаван просты і параўнальна дакладны ( $\sim 15\%$ ) спосаб вымярэння каэфіцыентаў паглынання гарачых газаў на ўдарнай трубе. Вымераныя каэфіцыенты паглынання аргону пры тэмпературы  $\sim 10\,700^\circ\text{K}$  у дыяпазоне даўжынь хваляў 4000—6000 Å добра адпавядаюць тэарэтычным разлікам [7]. Адначасовая рэгістрацыя розных участкаў даўжынь хваляў (апаратам тыпу квантометра) з непасрэдным вымярэннем тэмпературы ў кожным доследзе дазволіць атрымаць больш дакладныя рэзультаты вымярэнняў.

2. Выяўлена, што пры пэўных умовах эксперымента да  $M_s \sim 8$  пробка гарачага газу за адбітай ударнай хваляй па восі трубы прадстаўляе сабой аднародную плазму.

У заключэнне аўтары выказваюць падзяку М. А. Ельшэвічу за цікавасць да работы і карысныя парады.

#### ЛІТАРАТУРА

1. Gouy A. Ann. chim. et phys., 5, 5, 1879.
2. Фриш С. Э. Доклады на совещании, посвященном измерению и вычислению сил осцилляторов в спектрах атомов. Изд. Ленингр. ун-та, 1959; Разумовская Л. П., Бочкова О. П. Опт. и спектр., 9, 271, 1960.
3. Resler E., Lin Ch.-C., Kantrowitz A. J. Appl. Phys., 23, N 12, 1962.
4. Холев С. Р. Изв. вузов. Физика, № 4, 30, 1960.
5. Кудрявцев Е. М., Соболев Н. Н. и др. Труды ФИАН, т. XVIII, 159, 1962.
6. Кеск J., Kivel B., Wentink T. Emissivity of High Temperature Air. Heat Transfer and Fluid Mechanics Institute, Preprints of Papers, Stanford Univ. Press, 1957, p. 279—294.
7. Биберман Л. М., Норман Г. Э. J. Quant. Spectrosc. Transfer, 3, 221, 1963.
8. Schluter D. Z. Astrophys., 56, 43, 1962.
9. Alsen L. N. Phys. Rev., 124, 1703, 1961.
10. Vitense E. Z. Astrophys., 28, 1951; Maecker H. and Peters T. Z. Phys., 139, 448, 1954.

#### РЕЗЮМЕ

Предложена и описана методика экспериментального определения монохроматических коэффициентов поглощения в непрерывном спектре с торца ударной трубы. На примере аргона показано, что значения коэффициентов поглощения в области спектра 4000—6000 Å и при температуре  $10500^\circ\text{K}$  хорошо согласуются с теоретическими расчетами, а точность значительно выше других способов измерения и составляет  $\pm 15\%$ . Показано, что столб плазмы за отраженной ударной волной по оси трубы представляет однородный источник.

Поступило в редакцию 4. X 1965

А. М. САМСОН

### НЕСТАЦЫЯНАРНАЕ СВЯЧЭННЕ ЧАТЫРОХУЗРОЎНЕВЫХ ГЕНЕРАТАРАЎ СВЯТЛА

Уводзіны. Для стварэння адмоўнага каэфіцыента паглынання ў рэчыве з трыма ўзроўнямі энергіі (напрыклад, у рубіне) патрабуецца даволі вялікая магутнасць узбуджальнага святла. Парогавая магутнасць узбуджальнага святла значна ніжэй у рэчываў, аптычныя ўласцівасці якіх могуць быць апісаны на аснове чатырохузроўневай схемы (флюарыты з самарыем, уранам, шкла з неадзімам, рэдкімі землямі [1] і г. д.). Генерацыя гэтых рэчываў мае цэлы рад асаблівасцей у параўнанні з рубінам. Разам з тым матэматычнае апісанне такіх сістэм больш складанае, паколькі павялічваецца лік зыходных ураўненняў.

У дадзенай рабоце праведзен аналіз нестацыянарнага свячэння чатырохузроўневых генератараў на аснове кінетычных ураўненняў імавернаснага метаду і геаметрычнай оптыкі. Разлік выканан па аналогіі з разлікам для трохузроўневага генератара [2—5].

Асноўныя ўраўненні. У выпадку чатырохузроўневага генератара (рысунак) сістэма ураўненняў для населенасцей і шчыльнасці выпраменьвання ў рэзанатары мае выгляд [2—5, 6]:

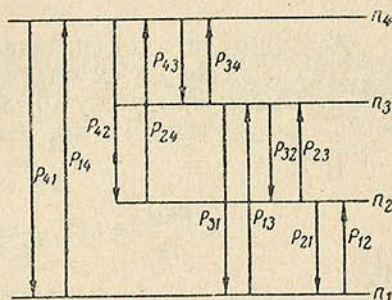


Схема ўзроўняў

$$\frac{dn_1}{dt} = n_1 B_{14} u_{41} + p_{34} n_3 - n_1 \times (p_{41} + p_{42} + p_{43}), \quad (1)$$

$$\frac{dn_3}{dt} = \frac{B_{32}}{\Delta\nu} u_{32} n_2 - n_3 \times \left( p_{31} + p_{32} + \frac{B_{32}}{\Delta\nu} u_{32} + p_{31} \right) + n_4 p_{13}, \quad (2)$$

$$\frac{dn_2}{dt} = -n_2 \left( p_{21} + \frac{B_{32}}{\Delta\nu} u_{32} \right) + n_3 \left( p_{32} + \frac{B_{32}}{\Delta\nu} u_{32} \right) + n_4 p_{12}, \quad (3)$$

$$n_1 + n_2 + n_3 + n_4 = n, \quad (4)$$

$$\frac{du_{32}}{dt} = - \frac{v}{1 + \frac{L}{l} \frac{v}{c}} \left[ k^{\text{стр}} - \frac{B_{32} h \nu_{32}}{v \Delta\nu} (n_3 - n_2) \right] u_{32} + \epsilon. \quad (5)$$

Тут  $n_1, n_2, n_3, n_4$  — населенасці ўзроўняў;  $n$  — поўны лік часцінак;  $p_{ij}$  — сумарная імавернасць пераходу з  $i$ -га на  $j$ -ы ўзровень;  $B_{41}u_{41}$  — імавернасць паглынання кванта пампавання ( $u_{41}$  — спектральная шчыльнасць пампавання);  $B_{41}$  і  $B_{32}$  — каэфіцыенты Эйнштэйна для паглынання;  $\Delta\nu_{32}$  — шырыня лініі люмінесценцыі ў канале  $3 \leftrightarrow 2$ ;  $u_{32}$  — інтэгральная шчыльнасць выпраменьвання генерацыі;  $\varepsilon$  — каэфіцыент, які характарызуе павелічэнне шчыльнасці выпраменьвання за кошт люмінесценцыі;  $v$  і  $c$  — скорасці святла ў рэчыве і вакууме;  $l$  — даўжыня працоўнага шпяня;  $L$  — адлегласць паміж люстрамі за вылікам даўжыні шпяня;  $k^{\text{стр}}$  — каэфіцыент страт  $\left( k^{\text{стр}} = \frac{1}{2l} \ln \frac{1}{r_1 r_2} + \rho \right)$ .

Ураўненні (1) — (5) напісаны для выпадку, калі пампаванне адбываецца ў канале  $1 \leftrightarrow 4$ , а генерацыя ў канале  $3 \leftrightarrow 2$ .

Мяркуецца таксама, што безвыпраменьвальныя пераходы з ніжняга ўзроўню на больш высокі (за выключэннем  $d_{34}$ ) адсутнічаюць.

У рэальных сістэмах паміж двума рабочымі ўзроўнямі (напрыклад, у неодзіме) размяшчаецца рад прамежкавых узроўняў, на якія магчымы спантанны або безвыпраменьвальны пераход з трэцяга ўзроўню. Аднак для матэматычнага апісання такіх сістэм гэта неістотна, паколькі памянёныя пераходы магчыма ўлічыць павелічэннем імавернасцей  $p_{32}$  і  $p_{31}$ .

Рашэнне ўраўненняў (1) — (5) з'яўляецца даволі працаёмкай задачай. Разлік спрашчаецца, калі сістэму (1) — (5) звесці да рашэння трох, а яшчэ лепш двух ураўненняў. Такая сітуацыя рэалізуецца, напрыклад, пры вялікай імавернасці  $p_{43}$  ( $p_{43} \gg p_{ij}$ ). Ва ўмовах стацыянарнага рэжыму ў адпаведнасці з (1) лік часцінак на верхнім узроўні роўны

$$n_4 = \frac{n_1 B_{14} u_{41} + n_3 p_{34}}{p_{41} + p_{42} + p_{43}}. \quad (6)$$

Далучым, што (6) справядліва і ва ўмовах нестацыянарнага рэжыму. Тады, адзін раз складаючы (2) і (3), а другі раз аднімаючы (3) ад (2), атрымаем пры ўліку (6) замест (1) — (5) сістэму ўраўненняў:

$$\frac{dn_1}{dt} = -n_1 A + n y_{32} B + n F, \quad (7)$$

$$n \frac{dy_{32}}{dt} = n_1 E - n y_{32} D_0 + G_0 n - 2n y_{32} \frac{B_{32}}{\Delta\nu} u_{32}, \quad (8)$$

дзе

$$y_{32} = \frac{n_3 - n_2}{n};$$

$$A = B_{14} u_{41} + p_{41} + \frac{p_{41} + p_{42} + p_{43} + B_{41} u_{41}}{2p_{41} + 2p_{43} + p_{34}} (p_{31} + p_{21} - 2p_{41});$$

$$B = \frac{(p_{21} + p_{31})(p_{41} + p_{42} + p_{43}) + p_{41} p_{34}}{2p_{41} + 2p_{42} + 2p_{43} + p_{34}} - p_{21};$$

$$F = p_{41} + \frac{(p_{41} + p_{42} + p_{43})(p_{21} + p_{31} - 2p_{41})}{2p_{41} + 2p_{43} + 2p_{42} + p_{34}};$$

$$E = \frac{p_{41} + p_{42} + p_{43} + B_{41} u_{41}}{2p_{41} + 2p_{43} + 2p_{42} + p_{34}} (2p_{43} + 2p_{32} - p_{21} + p_{34} + p_{31} - 2p_{42}) - p_{43} + p_{42}; \quad (9)$$

$$D_0 = \frac{\rho_{41} + \rho_{42} + \rho_{43}}{2\rho_{41} + 2\rho_{43} + 2\rho_{42} + \rho_{34}} (2\rho_{43} + 2\rho_{32} + \rho_{31} + \rho_{34} - \rho_{21} - 2\rho_{42}) - \\ - \rho_{43} + \rho_{21} + \rho_{42};$$

$$G_0 = \rho_{43} - \rho_{42} - \frac{\rho_{41} + \rho_{42} + \rho_{43}}{2\rho_{41} + 2\rho_{42} + 2\rho_{43} + \rho_{34}} \times \\ \times (2\rho_{43} - 2\rho_{42} + 2\rho_{32} + \rho_{31} + \rho_{34} - \rho_{21}).$$

Уравнение (5) имеет следующий вид.

Нелинейная система (7), (8), (5) пригодна для большинства практически реализуемых генераторов. Если дополнительно предположить  $\rho_{34} \ll \rho_{43}$ , то коэффициенты (9) принимают следующий вид:

$$A = B_{14} u_{41} \frac{\rho_{42} + \rho_{43} + \frac{1}{2} (\rho_{31} + \rho_{21})}{\rho_{42} + \rho_{43} + \rho_{41}} + \frac{\rho_{31} + \rho_{21}}{2};$$

$$B = \frac{\rho_{31}}{2} - \frac{\rho_{21}}{2}; \quad F = \frac{\rho_{21} + \rho_{31}}{2};$$

$$E = B_{14} u_{41} \frac{\rho_{43} + \rho_{32} - \rho_{42} + \frac{1}{2} (\rho_{31} - \rho_{21})}{\rho_{41} + \rho_{42} + \rho_{43}} + \rho_{32} + \frac{\rho_{31} - \rho_{21}}{2}; \quad (10)$$

$$D_0 = \rho_{32} + \frac{\rho_{21} + \rho_{31}}{2};$$

$$G_0 = -\rho_{32} - \frac{\rho_{31}}{2} + \frac{\rho_{21}}{2}.$$

Уравнения (5), (7), (8) дают возможность описать поведение квантовых генераторов как при стационарных, так и нестационарных режимах. Так, если в (7), (8) и (5) допустить  $\frac{dn_1}{dt} = \frac{dy_{32}}{dt} = \frac{du_{32}}{dt} = 0$ , то получаем:

$$y_{32}^{CT} = \frac{k^{CTP}}{\alpha} = \frac{\Delta \nu v k^{CTP}}{B_{32} n h \nu_{32}}, \quad (11)$$

$$n_1^{CT} = n \frac{F + B y_{32}}{A} = \\ = n \frac{\rho_{21} + \rho_{31} + y_{32}^{CT} (\rho_{31} - \rho_{21})}{\rho_{42} + \rho_{43} + \frac{1}{2} (\rho_{31} + \rho_{21})}, \quad (12)$$

$$\rho_{31} + \rho_{21} + 2B_{14} u_{41} \frac{\rho_{42} + \rho_{43} + \rho_{41}}{\rho_{42} + \rho_{43} + \rho_{41}}$$

$$u_{32}^{CT} = \frac{k_0 - k^{CTP}}{\alpha k^{CTP}} = \frac{EF + AG_0}{AD_0 - BE} \frac{\alpha - k^{CTP}}{2B_{32} A}, \quad (13)$$

$$\frac{\Delta \nu}{AD_0 - BE}$$

$$\begin{aligned}
 u_{41}^{\text{пар}} = & \frac{1}{B_{41}} \frac{k^{\text{стр}}}{z} (p_{32} + p_{31}) p_{21} \times \\
 & \times \left[ \frac{p_{43}(p_{21} - p_{32}) - p_{42}(p_{31} + p_{32})}{p_{41} + p_{42} + p_{43}} - \frac{k^{\text{стр}}}{z} \times \right. \\
 & \left. \times \frac{p_{42}p_{31} + p_{43}p_{21} + p_{32}p_{21} + p_{31}p_{21} + p_{32}p_{42} + p_{32}p_{43}}{p_{41} + p_{42} + p_{43}} \right]^{-1}. \quad (14)
 \end{aligned}$$

Звычайна мяркуюць, што  $p_{43} + p_{41} \gg p_{ij}$ . У гэтым выпадку каэфіцыенты ўраўненняў  $A$  і  $E$ , у склад якіх уваходзіць імавернасць  $B_{14}u_{41}$ , і выразы для  $u_{41}^{\text{пар}}$  можна запісаць у выглядзе:

$$A = B_{14}u_{41} \eta + \frac{p_{31} + p_{21}}{2},$$

$$E = B_{14}u_{41} \eta + p_{32} + \frac{p_{31} - p_{21}}{2}, \quad (15)$$

$$u_{41}^{\text{пар}} = \frac{1}{B_{41} \eta} \frac{k^{\text{стр}}}{z} \frac{p_{31} + p_{32}}{1 - \frac{p_{32}}{p_{21}} - \frac{k^{\text{стр}}}{z} \left(1 + \frac{p_{32}}{p_{21}}\right)}, \quad (16)$$

дзе

$$\eta = \frac{p_{43}}{p_{43} + p_{41}} \quad (17)$$

доля часцінак, якія пераходзяць з чацвёртага ўзроўню на трэці, прапарцыянальная выхату люмінесцэнцый.

Для аналітычных даследаванняў мэтазгодна мець справу з магчыма меншай колькасцю ўраўненняў. У прыватнасці, два ўраўненні (7), (8) трэба паспрабаваць замяніць адным ураўненнем. Мэта будзе дасягнута, калі ўдасца знайсці хоць бы прыбліжаную сувязь паміж  $n_1$  і  $y_{32}$ . Гэта можа быць выканана ў розных выпадках па-рознаму.

Калі імавернасць уходу часцінак з другога ўзроўню вельмі вялікая, то ён застаецца заўсёды пустым, г. зн.  $n_2 = 0$ . Таму пры вялікіх  $p_{21}$

$$ny_{32} = n_3, \quad n_1 = n - n_3 = n(1 - y_{32}). \quad (18)$$

Аднімаючы ад (8) пачленна (7) і падстаўляючы (15) пры ўліку (14), атрымаем

$$\frac{dy_{32}}{dt} = -(B_{14}u_{41} \eta + p_{32} + p_{31}) y_{32} + B_{14}u_{41} \eta - \frac{B_{32}u_{32}}{\Delta v} y_{32}. \quad (19)$$

Ураўненне (19) сумесна з (5) падобнае да сістэм, якія выкарыстоўваліся ў літаратуры [9—11] для апісання чатырохузроўневых генератараў. Як паказана вышэй, яно справядлівае, калі колькасць часцінак на другім узроўні практычна роўна нулю.

Для гэтага неабходна, каб колькасць часцінак, уходячых з гэтага ўзроўню, значна перавышала колькасць часцінак, прыходзячых на яго. Гэта ўмова заўсёды выконваецца, калі разглядаецца перыяд накаплення часцінак на метастабільным узроўні. Сапраўды, у гэтым выпадку

адсутнічаюць вымушаныя пераходы  $\frac{B_{32}u_{32}}{\Delta\nu}$ , а імавернасць  $p_{32}$  звычайна меншая, чым імавернасць  $p_{21}$  (інакш немагчымым рэжым генерацыі). Калі ж узнік рэжым генерацыі, то імавернасць пераходу часцінак на другі ўзровень рэзка павялічваецца і  $n_2$  ужо нельга лічыць блізкім да нуля. Апісанне ўласцівасцей генератара ў рэжыме генерацыі з дапамогай (19) становіцца неабгрунтаваным. Яно законнае, калі  $p_{21}$  на некалькі парадкаў вышэй  $\frac{B_{32}u_{32}}{\Delta\nu}$ .

У рэжыме генерацыі з (7), (8) магчыма атрымаць прыбліжанае ўраўненне, выкарыстоўваючы наступныя меркаванні. Дапусцім, што і ва ўмовах нестационарнага рэжыму  $n_1$  вызначаецца як рашэнне (7) пры  $\frac{dn_1}{dt} = 0$ . Падстаўляючы атрыманае такім чынам значэнне  $n_1$  у (8), будзем мець:

$$\frac{dy_{32}}{dt} = -y_{32} \left( D_0 - \frac{EB}{A} \right) + \left( G_0 + \frac{EF}{A} \right) - 2 \frac{B_{32}}{\Delta\nu} u_{32} y_{32}. \quad (20)$$

Дапускаючы  $p_{43} + p_{41} \gg p_{ij}$  пры  $p_{21}$  дастаткова вялікім у параўнанні з  $p_{31}$ ,  $p_{32}$  і  $B_{14}u_{41}\eta$  (але не з  $\frac{B_{32}}{\Delta\nu} u_{32}^{ст!}$ ), з (20) атрымліваем

$$\frac{dy_{32}}{dt} = -2y_{32} (B_{14}u_{41}\eta + p_{32} + p_{31}) + 2B_{14}u_{41}\eta - 2 \frac{B_{32}}{\Delta\nu} u_{32} y_{32}. \quad (21)$$

Супастаўляючы (21) з (19), бачым, што яны адрозніваюцца адзін ад аднаго каэфіцыентамі правай часткі. Адзінае ўраўненне, прыгоднае для апісання генератара як у рэжыме накіплення часцінак на трэцім узроўні, так і ў рэжыме генерацыі, адсутнічае.

Накіпленне часцінак на метастабільным узроўні і час разгарання генерацыі. У перыяд накіплення часцінак на трэцім узроўні каэфіцыент узмацнення меншы за каэфіцыент страт, з прычыны чаго вымушанае выпраменьванне ў канале  $3 \leftrightarrow 2$  можна не ўлічваць. Заканамернасці накіплення часцінак на метастабільным узроўні апісваюцца ўраўненнямі (7), (8). Пры вялікіх  $p_{21}$  можна выкарыстаць ўраўненне (19).

Агульнае рашэнне ўраўненняў (7), (8) пры прававугольным імпульсе ўзбуджальнага святла мае выгляд

$$n_1 = n_1^{(0)} + C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}, \quad y_{32} = y_{32}^{(0)} + D_1 e^{\lambda_1 t} + D_2 e^{\lambda_2 t}, \quad (22)$$

дзе

$$n_1^{(0)} = n \frac{FD_0 + BG_0}{-BE + AD_0}; \quad y_{32}^{(0)} = \frac{EF + AG_0}{-BE + AD_0} \quad (23)$$

рашэнні (7), (8) ва ўмовах стацыянарнага рэжыму пры адсутнасці генерацыі  $\left( \frac{dn_1}{dt} = \frac{dy_{32}}{dt} = u_{32} = 0 \right)$ ,

$$\lambda_{1,2} = \frac{-(A + D_0) \pm \sqrt{(A + D_0)^2 - 4(AD_0 - BE)}}{2}, \quad (24)$$

$$C_1 = \frac{Bn}{\lambda_1 + A} D_1,$$

$$D_1 = \frac{-y_{32}^{(0)}(\lambda_2 + D_0) - E \left(1 - \frac{n_1^{(0)}}{n}\right)}{\lambda_2 + D_0 - \frac{BE}{\lambda_1 + A}}, \quad (25)$$

$$C_2 = n \left(1 - \frac{n_1^{(0)}}{n} - \frac{B}{\lambda_1 + A} D_1\right), \quad D_2 = \frac{E}{\lambda_2 + D_0} C_2/n.$$

Рашэнне (23) — (25) атрымана пры дапушчэнні, што ўсе часцінкі ў пачатковы момант знаходзіліся на трэцім узроўні.

Калі  $\rho_{21}$  вялікае, то з (20) — (22) няцяжка атрымаць (пры  $\rho_{43} + \rho_{41} \gg \rho_{ij}$ ), што

$$\lambda_1 \approx -(\rho_{31} + \rho_{32} + B_{14}u_{41}\gamma), \quad \lambda_2 = -\rho_{21},$$

$$n_1^{(0)} = n \frac{\rho_{31} + \rho_{32}}{\rho_{31} + \rho_{32} + B_{14}u_{41}\gamma},$$

$$y_{32}^{(0)} = \frac{B_{14}u_{41}\gamma}{\rho_{32} + \rho_{31} + B_{14}u_{41}\gamma}, \quad D_1 = -y_{32}^{(0)}, \quad C_1 = ny_{32}^{(0)}. \quad (26)$$

У рэзультате накіплення часцінак на метастабільным узроўні пры прамавугольным імпульсе ўзбуджальнага святла апісваецца суадносінамі:

$$n_1 = n \frac{\rho_{32} + \rho_{31}}{\rho_{31} + \rho_{32} + B_{14}u_{41}\gamma} [1 + e^{-(\rho_{31} + \rho_{32} + \gamma B_{14}u_{41})t}], \quad (27)$$

$$y_{32} = \frac{B_{14}u_{41}\gamma}{\rho_{31} + \rho_{32} + B_{14}u_{41}\gamma} [1 - e^{-(\rho_{31} + \rho_{32} + \gamma B_{14}u_{41})t}]. \quad (28)$$

Формулы (27), (28) магчыма атрымаць і непасрэдна з ураўнення (19). Атрыманне (27), (28) шляхам прэзельнага пераходу з сістэмы (7), (8) яшчэ раз указвае на справядлівасць (19) для рашэння задачы аб накіпленні часцінак на метастабільным узроўні.

У табліцы прыведзена некалькі значэнняў меншага караня характарыстычнага ўраўнення (слупкі I) для некалькіх значэнняў  $\rho_{21}$  і скорасці паглынання  $B_{14}u_{41}$ . У слупках II прыведзены значэнні  $B_{14}u_{41}\gamma + \rho_{32} + \rho_{31}$  для тых жа  $B_{14}u_{41}\gamma$ . Відаць, што нават для адносна малых  $\rho_{21}$  супадзенне значэнняў у слупках I і II здавальняючае.

Значэнні  $\lambda_1$  у  $\text{сек}^{-1}$  (слупкі I) і  $\rho_{32} + \rho_{31} + \gamma B_{14}u_{41}$  (слупкі II) пры розных  $\rho_{21}$  і  $B_{14}u_{41}\gamma$ ,  $\rho_{32} + \rho_{31} = 4,17 \times 10^5 \text{ сек}^{-1}$ ,  $\gamma = 120 \text{ см}^{-1}$

	$\frac{\gamma}{k_{\text{СТР}}} \frac{B_{14}u_{41}}{\rho_{32} + \rho_{31}}$											
	20				50							
	$k_{\text{СТР}}, \text{ см}^{-1}$				$k_{\text{СТР}}, \text{ см}^{-1}$							
$\rho_{21}$	0,012		0,12		0,012		0,12		0,8		0,9	
	I	II	I	II	I	II	I	II	I	II	I	II
$2(\rho_{31} + \rho_{32})$	—	—	—	—	$4,21 \times 10^5$	$4,19 \times 10^5$	$4,61 \times 10^5$	$4,38 \times 10^5$	—	—	$5,92 \times 10^5$	$5,73 \times 10^5$
$10(\rho_{31} + \rho_{32})$	$4,18 \times 10^5$	$4,18 \times 10^5$	$4,26 \times 10^5$	$4,25 \times 10^5$	$4,19 \times 10^5$	$4,19 \times 10^5$	$4,40 \times 10^5$	$4,38 \times 10^5$	$5,72 \times 10^5$	$5,66 \times 10^5$	—	—

З (28) вынікае, што скорасць накіслення часцінак на трэцім узроўні вызначаецца ў асноўным магутнасцю выпраменьвання  $u_{41}$ . Чым вышэй  $u_{41}$ , тым хутчэй дасягаецца інверсійная населенасць метастабільнага ўзроўню.

Ведаючы заканамернасці накіслення часцінак на метастабільным узроўні, можна ацаніць час  $t_{\text{разг}}$ , неабходны для ўзнікнення генерацыі. Генерацыя наступае ў момант, калі залішняя населенасць  $y_{32}$  пачынае перавышаць  $k^{\text{стр}}$ . Пабудаваўшы  $y_{32}$  як функцыю часу, па адпаведнай ардынаце  $\frac{k^{\text{стр}}}{x}$  можна вызначыць  $t_{\text{разг}}$ . У выпадку пастаянай інтэнсіўнасці ўзбуджальных лямп ( $u_{41} = \text{const}$ ) пры вялікіх  $\rho_{21}$  накісленне часцінак вызначаецца формулай (28) і

$$t_{\text{разг}} = \frac{1}{\rho_{31} + \rho_{32} + \eta B_{14} u_{41}} \times \\ \times \ln \frac{1}{1 - \frac{k^{\text{стр}}}{x} \frac{\rho_{32} + \rho_{31} + B_{14} u_{41} \eta}{B_{14} u_{41} \eta}}. \quad (29)$$

У чатырохузроўневых генератарах імавернасць паглынання ўзбуджальнага кванта звычайна значна меншая, чым імавернасць уходу часцінак з метастабільнага ўзроўню  $\eta B_{14} u_{41} \ll \rho_{32} + \rho_{31}$ . Таму замест (29) можна напісаць

$$t_{\text{разг}} \sim \frac{1}{\rho_{32} + \rho_{31}} \ln \frac{1}{1 - \frac{k^{\text{стр}}}{x} \frac{\rho_{32} + \rho_{31}}{B_{14} u_{41} \eta}}. \quad (30)$$

З (29), (30) вынікае, што час разгарання генерацыі пры іншых роўных умовах прапарцыянальны часу жыцця метастабільнага ўзроўню  $\tau = \frac{1}{\rho_{32} + \rho_{31}}$ . Калі  $t_{\text{разг}}$  параўноўваецца з працягласцю свячэння лямпы, то канечнасць  $t_{\text{разг}}$  аказвае значны ўплыў на характарыстыкі генерацыі. У прыватнасці, парогавая шчыльнасць  $u_{41}(T)$  для імпульсу працягласцю  $T$  будзе вызначацца з суадносін

$$t_{\text{разг}} = T \text{ або } \frac{1}{\rho_{32} + \rho_{31} + \eta B_{14} u_{41}(T)} \times \\ \times \ln \frac{1}{1 - \frac{k^{\text{стр}}}{x} \frac{\rho_{32} + \rho_{31} + \eta B_{14} u_{41}(T)}{\eta B_{14} u_{41}(T)}}. \quad (31)$$

Рэжым генерацыі. Калі ў сістэме дасягнута інверсійная населенасць метастабільнага ўзроўню, якая задавальняе ўмове  $y_{32} \geq \frac{k^{\text{стр}}}{x}$ , то ўзнікае рэжым генерацыі. Строгае рашэнне ўраўненняў (5), (7), (8), а таксама больш прастай сістэмы двух ураўненняў (5), (20) або (5), (21) у агульным выглядзе цяжкаватае. Іх рашэнне магчыма толькі на электронна-вылічальнай машыне. Тут жа мы прыядзём рэзультаты прыбліжанага аналізу, заснаванага на лінеарызацыі зыходных ураўненняў.

Разгледзім для прыкладу сістэмы (5), (7), (8). Дапусцім

$$n_1 = n_1^{\text{ст}} + \Delta n, \quad y_{32} = y_{32}^{\text{ст}} + \Delta y, \quad u_{32} = u_{32}^{\text{ст}} + \Delta u, \quad (32)$$

дзе  $n_1^{\text{ст}}$ ,  $y_{32}^{\text{ст}}$  і  $u_{32}^{\text{ст}}$  — рашэнні (5), (7), (8) пры  $\frac{dn_1}{dt} = \frac{dy_{32}}{dt} = \frac{du_{32}}{dt} = 0$  і вызначаюцца формуламі (11) — (13).

Падстаноўка (32) у (5), (7), (8) дае

$$\frac{d(\Delta n)}{dt} = -\Delta n A + Bn \Delta y,$$

$$\frac{d(\Delta y)}{dt} = -D_0 n \Delta y + E \Delta n - 2n \Delta y \frac{B_{32}}{\Delta v} u_{32}^{\text{ст}} - 2ny_{32}^{\text{ст}} \frac{B_{31}}{\Delta v} \Delta u, \quad (33)$$

$$\frac{d(\Delta u)}{dt} = \frac{v}{1 + \frac{L}{l} \frac{v}{c}} \times u_{32}^{\text{ст}} \Delta y.$$

Агульнае рашэнне сістэмы (33) мае выгляд:

$$\Delta n = M_1 e^{\lambda_1 t} + L_1 e^{-\theta t} \cos(\omega t + \varphi_1), \quad \Delta y = M_2 e^{\lambda_2 t} + L_2 e^{-\theta t} \cos(\omega t + \varphi_2),$$

$$\Delta u = M_3 e^{\lambda_3 t} + L_3 e^{-\theta t} \cos(\omega t + \varphi_3). \quad (34)$$

Тут  $M_i$ ,  $L_i$  і  $\varphi_i$  — некаторыя пастаянныя, вызначаемыя параметрамі рэчыва, рэзанатара і магнутнасцю узбуджальнага святла. Значэнні  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2 = -\Theta + i\omega$ ,  $\lambda_3 = -\Theta - i\omega$  з'яўляюцца каранямі характарыстычнага ўраўнення

$$\lambda^3 + b\lambda^2 + c\lambda + d = 0, \quad (35)$$

дзе

$$b = A + D_0 + \frac{2B_{32}}{\Delta v} u_{32}^{\text{ст}},$$

$$c = AD_0 + \frac{2B_{32}}{\Delta v} u_{32}^{\text{ст}} \left( A + \frac{vk^{\text{стр}}}{1 + \frac{L}{l} \frac{v}{c}} \right) - BE; \quad (36)$$

$$d = \frac{2v}{1 + \frac{L}{l} \frac{v}{c}} k^{\text{стр}} \frac{B_{32}}{\Delta v} u_{32}^{\text{ст}} A.$$

Аналіз караняў характарыстычнага ўраўнення паказвае, што або ўсе карані сапраўдныя, або адзін з трох караняў сапраўдны і адмоўны, а два іншыя комплексна-спалучаныя. У апошнім выпадку ўстанаўленне стацыянарнага рэжыму адбываецца пульсаваннямі з частатой  $\omega$ .

Больш наглядны малюнак аб характары ўстанаўлення стацыянарнага стану ў рэжыме генерацыі магчыма атрымаць, аналізуючы спрошчаную сістэму (5), (20) або (5), (21). Зрабіўшы аналігічную працэдуру лінарызацыі, напрыклад, ураўненняў (5) і (20), атрымаем:

$$\Delta y = \text{const} \sqrt{\frac{2k^{\text{стр}} \Delta v \left( 1 + \frac{L}{l} \frac{v}{c} \right)^2}{v \times^2 u_{32}^{\text{ст}} B_{32}}} e^{-\theta t} \cos(\omega t + \psi), \quad (37)$$

$$\Delta u = \text{const} \frac{\Delta v}{B_{32}} e^{-\theta t} \cos \omega t, \quad (38)$$

$$\Theta = \frac{z}{2k_{\text{стр}}} \left[ \frac{G_0 A + EF}{A} \right], \quad (39)$$

$$\omega = \left[ \left( \frac{G_0 A + EF}{A} z - \frac{D_0 A - EB}{A} k_{\text{стр}} \right) \frac{v}{1 + \frac{L}{l} \frac{v}{c}} - \frac{(G_0 A + EF)^2 z^2}{4A^2 (k_{\text{стр}})^2} \right]^{1/2}, \quad (40)$$

$$\psi = -\frac{\omega}{\Theta}. \quad (41)$$

Кали дапусціць дадаткова  $\rho_{43} + \rho_{41} \gg \rho_{ij}$  і  $\rho_{21} \rightarrow \infty$ , то

$$\Theta = \frac{B_{14} u_{41} \eta z}{k_{\text{стр}}}, \quad (42)$$

$$\omega = \left[ \frac{2v}{1 + \frac{L}{l} \frac{v}{c}} [B_{14} u_{41} \eta z - (\rho_{32} + \rho_{31} + B_{14} u_{41} \eta) k_{\text{стр}}] - \frac{(B_{14} u_{41} \eta z)^2}{(k_{\text{стр}})^2} \right]^{1/2}. \quad (43)$$

З (40) і (43) вынікае, што пульсуючы рэжым чатырохуровневых генераторов вызначаецца ў асноўным тымі ж фактарамі, што і ў выпадку трохуровневага генератора [2—5]. Калі прыраўняць (40) і (43) нулю, то атрымаем суадносіны, якія вызначаюць наяўнасць або адсутнасць пульсацый. З іх, у прыватнасці, вынікае, што пульсацыі знікаюць або пры вялікіх  $u_{41}$ , або пры вельмі вялікіх  $z$ , або пры малых  $k_{\text{стр}}$ .

У заключэнне прыношу вялікую ўдзячнасць Б. І. Сцяпанаву за ўвагу да работы.

#### ЛІТАРАТУРА

1. Лендъел Б. Лазеры. Изд-во «Мир», М., 1964.
2. Самсон А. М., Савва В. А. ДАН БССР, 6, 418, 1962.
3. Самсон А. М., Савва В. А. Изв. АН СССР, сер. физ., 27, 609, 1963.
4. Самсон А. М. Оптика и спектр., 16, 869, 1964.
5. Самсон А. М., Савва В. А. Оптика и спектр., 16, 1045, 1964.
6. Самсон А. М. Весті АН БССР, сер. фіз.-тэхн. навук, № 3, 1964.
7. Ананьев Ю. А., Грибковский В. П., Мак А. А., Степанов Б. И. ДАН СССР, 150, 507, 1963.
8. Степанов Б. И., Самсон А. М., Грибковский В. П. Изв. АН СССР, сер. физ., 27, 473, 1963.
9. Kaiser W., Garrett C. G. B., Wood D. L. Phys. Rev., 123, 766, 1961.
10. Stutz H. W., de Mars G. A. Quantum Electr., 1960.
11. Bostik H. A., O'Connor J. R. Proc. IRE, 50, 219, 1962.

#### РЕЗЮМЕ

Формулируется система уравнений для описания нестационарного режима четырехуровневых генераторов света. Выяснены условия, при которых система четырех уравнений сводится к системе из трех уравнений.

При определенных соотношениях между вероятностями переходов нестационарная генерация четырехуровневого генератора может быть описана системой из двух уравнений.

Однако коэффициенты в этих уравнениях зависят от того, описывают ли они режим накопления частиц на метастабильном уровне или режим генерации.

На основе сформулированных уравнений исследовано накопление частиц на метастабильном уровне в зависимости от мощности накачки и характеристик вещества и резонатора. Выведены и проанализированы формулы для времени возникновения генерации. Путем линеаризации системы уравнений получены формулы для частоты пульсаций твердотельного генератора и выяснены условия отсутствия пикового режима.

*Поступило в редакцию 28.XII 1964*

П. Я. ГАНІЧ, І. Ф. ЕЛІСТРАТАЎ, Г. К. ІЛЫЧ,  
І. М. ЛЕВІН, Т. М. ЛАМАНОСАВА, С. А. МАКАРЭВІЧ

### АПТЫЧНЫЯ ХАРАКТАРЫСТЫКІ І ПАРАМЕТРЫ СВЕТАВОГА ПОЛЯ У АЗЁРНАЙ ВАДЗЕ

Нягледзячы на значную колькасць работ, прысвечаных вывучэнню распаўсюджвання святла ў прыродных вадаёмах (напрыклад, [1—4]), наяўных даных часта недастаткова для вырашэння практычных задач, звязаных з падводным асвятленнем аб'ектаў рознымі крыніцамі святла. Таму даследаванні распаўсюджвання выпраменьвання ў марской і азёрнай вадзе маюць інтэрас з пункту гледжання ўстанаўлення агульных заканамернасцей рассеяння і канкрэтных прыкладных праблем.

Для выкарыстання тэарэтычных рэзультатаў, якія выцякаюць з тэорыі пераносу выпраменьвання [5] і некаторых спрошчаных разгледжванняў [2, 6, 7], а таксама эксперыментальных даных, атрыманых у прыродных і лабараторных умовах [1, 3, 4, 8], неабходна веданне пэўных аптычных параметраў, якія характарызуюць пранікальную здольнасць светлавой радыяцыі ў прыродных водах.

Згодна з тэорыяй рассеяння, любыя асяроддзі тоесныя, калі пры аднолькавых умовах асвятлення супадаюць наступныя параметры: аптычная таўшчыня  $\tau = \epsilon l = (k + \rho) l$ , дзе  $\epsilon$  — паказчык экстынкцыі;  $k$  — паказчык паглынання;  $\rho$  — паказчык рассеяння;  $l$  — геаметрычная таўшчыня; верагоднасць выжывання кванта святла  $\Lambda = \rho / (k + \rho)$ ; індикатрыса рассеяння элементарнага аб'ёму  $x$  ( $\gamma$ ).

Вымярэнні індикатрысы рассеяння ў розных вадаёмах паказалі, што форма  $x$  ( $\gamma$ ) параўнальна слаба залежыць ад месца назірання. Акрамя таго, пры дастаткова вялікіх аптычных таўшчынях дэталь індикатрысы не павінны істотна ўплываць на заканамернасці распаўсюджвання светлавой радыяцыі. Таму ў першую чаргу цікавым з'яўляецца вывучэнне велічынь  $\epsilon$  і  $\Lambda$ .

У дадзенай рабоце разглядаюцца метады і некаторыя рэзультаты вызначэння аптычных параметраў азёрнай вады, а таксама вывучаецца светлавае поле ў асяроддзі, ствараемае накіраванай і дыфузнай крыніцамі радыяцыі.

1. Для вымярэння паказчыка поўнага аслаблення святла вадой выкарыстоўваўся празрыстамер, прынцыповая схема якога прыведзена на рыс. 1. Кювета, напоўненая вадой (праба вады бралася з дапамогай батометра з глыбіні 6 і 3 м), змяшчалася паміж аб'ектывамі 4 і 6 у паралельны пучок святла. Светлавы паток рэгістраваўся з дапамогай фотопамнажальніка ФЭУ-14А і мікраамперметра М-95. Для выдзялення вузкага спектральнага інтэрвалу прымяняліся інтэрферэнцыйныя светафільтры. Наяўнасць рассеяння ў вадзе перашкаджае вымярэнню аслаблення прамого святла, таму што на прыёмнік выпраменьвання падае не толькі прамое святло, але і радыяцыя, рассеяная ў зададзеным напрамку. Напэўна, чым меншы вугал прыёму, тым меншая

хібнасць у вызначэнні  $\epsilon$ . Апертурны вугал, у якім рассеянае святло трапляла на прыёмнік выпраменьвання ў празрыстамеры, выкарыстаным у дадзенай рабоце, не перавышаў  $30'$ . Велічыня паказчыка аслаблення  $\epsilon$  разлічвалася па формуле

$$\epsilon = -\frac{1}{L} \ln \frac{N}{N_0},$$

дзе  $L$ —даўжыня кюветы (звычайна выкарыстоўваліся кюветы даўжынёй 0,25; 0,2 і 0,1 м);  $N$ —адлік па рэгіструючаму прыборы пры праходжанні святла праз кювету з вадой;  $N_0$ —адлік пры праходжанні святла праз кампенсуючую кювету.

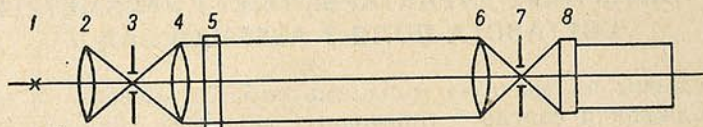


Рис. 1. Аптычная схема празрыстамера:

1—крыніца святла (лямпа СГ-2); 2—лінза з  $f=90$  мм; 3, 7—дыяфрагмы;  
4, 6—аб'ектывы Ю-3; 5—светафільтр; 8—фотаэлектрычны прыёмнік  
ФЭУ-14А

У табл. 1 прыведзены значэнні  $\epsilon$  у залежнасці ад даўжыні хвалі святла для вымярэнняў у розныя дні (1964 г.).

Табліца 1

Велічыня паказчыка аслаблення  $\epsilon$  ( $m^{-1}$ ) у залежнасці ад даўжыні хвалі

$\lambda$ , ммк	12.IX	29.IX	1.X	5.X	8.X
429	2,66	2,78	3,00	2,94	2,65
440	2,49	2,66	2,87	2,85	2,56
480	2,41	—	—	—	—
509	2,26	2,50	2,56	2,53	2,12
547	2,24	2,36	2,47	2,33	1,92
573	2,22	2,08	2,03	2,17	1,74
592	2,16	—	—	—	—
608	2,23	2,00	2,17	2,07	1,74
627	2,16	—	—	—	—
642	1,92	1,94	2,04	1,99	1,67
668	1,98	1,88	2,02	2,07	1,61
690	1,94	1,83	1,95	1,97	1,58
715	—	2,39	2,39	—	1,97

Параўнанне даных табл. 1 з рэзультатамі вымярэнняў спектральнага ходу празрыстасці марской вады [1—3, 8] паказвае, што ў азёрнай вадзе вобласць максімальнай празрыстасці зрушваецца ў бок большых даўжынь хваляў. Гэты рэзультат знаходзіцца ў згодзе з аналагічнымі вымярэннямі іншых аўтараў [1].

2. Для ацэнкі бачнасці падводных аб'ектаў неабходна ведаць не толькі агульны паказчык аслаблення вады, але і суадносіны паміж паказчыкамі сапраўднага паглынання і рассеяння (г. зн. велічыню  $\Delta$ ).

Раздзельнае вызначэнне велічыні сапраўднага паглынання і рассеяння ў асяроддзі з'яўляецца даволі складанай задачай. Пры выкарыстанні некаторых спрашчэнняў з тэорыі пераносу выпраменьвання Г. В. Розенбергам [9] і В. А. Цімафеевай [10] была атрымана формула

для вызначэння паказчыка сапраўднага паглынання ў рассеиваючым асяроддзі вяду

$$k = \gamma \frac{E_1 - E_2}{E_0}, \quad (1)$$

дзе  $\gamma$ —паказчык аслаблення поўнасю рассеянага святла;  $E_1$ —асветленасць пляцоўкі на баку, звернутым да крыніцы;  $E_2$ —асветленасць з супрацьлеглага боку;  $E_0$ —аб'ёмная асветленасць, прапарцыянальная шчыльнасці светлавога патоку ў дадзеным пункце асяроддзя.

З прычыны таго што святло становіцца максімальна рассеяным на вялікіх адлегласцях ад крыніцы радыяцыі, у рэальных умовах выкарыстанне формулы (1) ускладняецца. Таму разлік паказчыка паглынання праводзіўся па формуле

$$k = \frac{\gamma_1 E_1 - \gamma_2 E_2}{E_0},$$

атрыманай у рабоце [11], дзе  $\gamma_1$  і  $\gamma_2$ —адпаведна паказчыкі аслаблення для асветленасці  $E_1$  і  $E_2$ .

Для вымярэння паказчыка паглынання вады выкарыстоўваўся падводны святлопадводнік з лямпай ДРШ-1000 (вуглавая разыходзімасць у вадзе  $5^\circ$ ) і фотаэлектрычны вымяральнік яркасці з ФЭУ-14А. Крыніца і прыёмнік радыяцыі замацоўваліся на жорсткіх штангах на глыбінях 6 і 3 м. Становіцца святлопадводніка з штангай у час вымярэнняў заставалася пастаянным. Вымяральнік яркасці меў магчымасць перамяшчацца ўздоўж светлавога праменя (у дадзеным выпадку паралельна паверхні вады) і паварочвацца на палярны вугал  $\varphi = 0 \pm 180^\circ$ . Вугал прыёму вымяральніка яркасці  $5^\circ$ . Велічыні асветленасцей  $E_1$ ,  $E_2$  і  $E_0$  вызначаліся графічным інтэграваннем. Паказчыкі  $\gamma_1$  і  $\gamma_2$  знаходзіліся з нахілу крывой  $\lg E = f(l)$ .

Паколькі ўсе далейшыя вымярэнні праводзіліся пры даўжыні хвалі абпраменьваючага патоку 546 мкм (выкарыстоўваліся фільтры з набору для выдзялення ртутных ліній), паказчык сапраўднага паглынання вызначаўся толькі для гэтай даўжыні хвалі. У табл. 2 дадзены значэнні  $k$  і  $\Delta$  ( $\lambda = 546$  мкм) у розныя дні 1964 г.

Табліца 2

Значэнні сапраўднага паказчыка паглынання  $k$  і верагоднасці выжывання кванта святла  $\Delta$  для  $\lambda = 546$  мкм у розныя дні

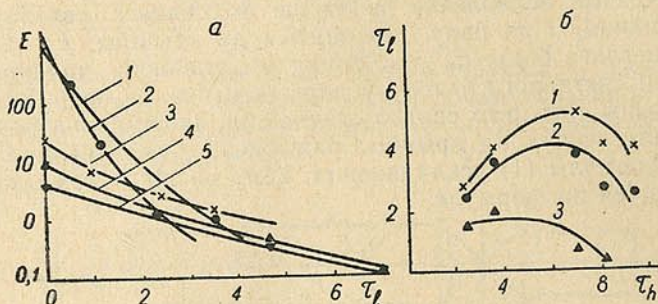
	12. IX	29. IX	8. X
$k, \text{ м}^{-1}$	0,825	0,966	0,740
$\Delta$	0,60	0,60	0,62

Атрыманыя рэзультаты (табл. 1, 2) паказваюць, што змяненне пракрыстасці азёрнай вады адбываецца такім чынам, што суадносіны паміж велічынямі сапраўднага паглынання і рассеяння застаюцца прыблізна пастаяннымі. Выкарыстоўваемая методка дастаткова простая і можа быць прыменена для раздзельнага вызначэння велічынь  $k$  і  $\rho$  у прыродных вадаёмах.

3. Вывучэнне размыцця каліміраванага пучка святла праводзілася наступным чынам. Падводны святлопадводнік (гл. п. 2) пасылаў пучок святла вертыкальна ўніз. Прыёмнік перамяшчаўся як у гарызантальным,

так і ў вертыкальным напрамку такім чынам, што забяспечвалася вымярэнне асветленасці ў плоскасці, перпендыкулярнай восі святлянага пучка.

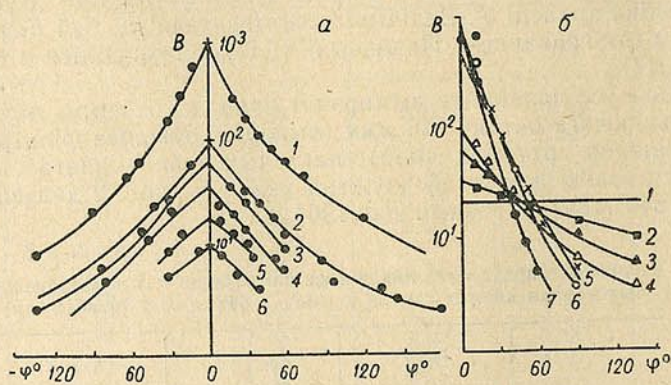
На рыс. 2 у адносных адзінках прадстаўлены некаторыя рэзультаты вызначэння падводнай асветленасці.



Рыс. 2. Змяненне падводнай асветленасці  $E$  ў залежнасці ад  $\tau_h$  і  $\tau_l$ :

$a$  — залежнасць  $E$  ад  $\tau_l$  ( $1-\tau_h=4,64$ ;  $2-6,96$ ;  $3-13,92$ ;  $4-16,14$ ;  $5-18,46$ );  $b$  — ізафоты ( $1-E_1$ ;  $2-2 E_1$ ;  $3-20 E_1$ )

Крывыя рыс. 2,  $a$  адпавядаюць розным аптычным адлегласцям  $\tau_h$  паміж прыёмнікамі і крыніцай. Ведаючы заканамернасць аслаблення святла ў гарызантальным напрамку (з ростам аптычнай адлегласці  $\tau_l$ ), з рыс 2,  $a$  можна знайсці геаметрычнае месца пунктаў прасторы, якія



Рыс. 3. Заканамернасць фарміравання светлавой дымкі:

$a$  — залежнасць  $B$  ад  $\varphi$  для  $\theta=30^\circ$  ( $1-\tau_l=1,16$ ;  $2-2,32$ ;  $3-3,48$ ;  $4-4,64$ ;  $5-6,96$ ;  $6-9,28$ );  $b$  — тое ж, пры  $\tau_l=3,2$  ( $1-\theta=0^\circ$ ;  $2-10$ ;  $3-20$ ;  $4-30$ ;  $5-45$ ;  $6-60$ ;  $7-75^\circ$ )

маюць аднолькавую асветленасць. Атрыманыя крывыя, якія называюцца ізафотамі, паказаны на рыс. 2,  $b$  для трох асветленасцей, вызначаных у адносных адзінках, прычым  $E_1=0,5$   $E_2=0,05$   $E_3$ .

4. Для вивучэння фону выпраменьвання, рассяянага вадой, звычайна называемага светлавой дымкай, выкарыстоўваліся ўжо апісаныя святлянік і вымяральнік яркасцей. Апошні мог паварочвацца на падляны вугал  $\varphi$  у межах ад  $0$  да  $\pm 180^\circ$  і азімутальны вугал  $\theta$  ад  $0$  да  $75^\circ$ . За нулявое значэнне  $\varphi$  прымаўся напрамак прыёмніка на крыніцу святла, за  $0^\circ$  азімутальнага вугла — напрамак вертыкальна ўніз.

Заканамернасці фарміравання дымкі можна вызначыць з рыс. 3. Прыклад размеркавання яркасці дымкі па вуглу на розных аптычных глыбінях пры  $\theta = 30^\circ$  паказан на рыс. 3, а, які дазваляе для дадзенага выпадку вызначыць рассеяны фон, калі вядомы паток, які пасылаецца крыніцай святла. Аналагічныя крывыя, атрыманыя для іншых значэнняў  $\theta$ , дазваляюць вызначыць велічыню фону пры розных умовах назірання. Дапаўняючы даныя прыведзены на рыс. 3, б, дзе ў адносных адзінках дадзена велічыня дымкі для аптычнай глыбіні  $\tau = 2,3$  у залежнасці над вуглоў  $\theta$  і  $\varphi$ .

5. Для даследавання заканамернасцей змянення з глыбінёй яркасці самасвецячыхся аб'ектаў была выкарыстана спецыяльная падводная крыніца святла. Яна ўяўляла сабой скрыню памерам  $1 \times 1 \times 0,5$  м, запаўняемую вадой, у якой раўнамерна размяшчаліся 9 асвятляльных ламп па  $300$  вт. Свечыцца бок крыніцы памерам  $1$  м<sup>2</sup> пакрываўся малочным шклом. Для змянення памераў самасвецячыхся аб'ектаў выкарыстоўваліся дыяфрагмы дыяметрам  $0,9$  м;  $0,5$ ;  $0,2$  і  $0,1$  м. Фотаэлектрычны вымяральнік яркасці, аналагічны апісанаму вышэй, замацоўваўся на жорсткай штанзе і меў магчымасць перамяшчацца ўздоўж пучка святла і паварочвацца на вугал  $\varphi = 0 \pm 90^\circ$ . Рэзультаты вымярэнняў прадстаўлены на рыс. 4. Суцэльнымі крывымі паказаны цэлы яркасці ад самасвецячага аб'екта дыяметрам  $0,9$  м. Штрыхавым адпавядае дыяметр крыніцы  $0,5$  м і штрых-пункцірнай —  $0,2$  м. Крывыя, абазначаныя лічбамі, даюць залежнасць яркасці ад вугла  $\varphi$  на розных аптычных глыбінях.

Непасрэднае фатаграфаванне крыніцы падводнага асвятлення з наступным мікрафотаметрыраваннем дае для аслаблення яркасці з глыбінёй і вуглавога размеркавання яркасці аналагічныя вынікі.

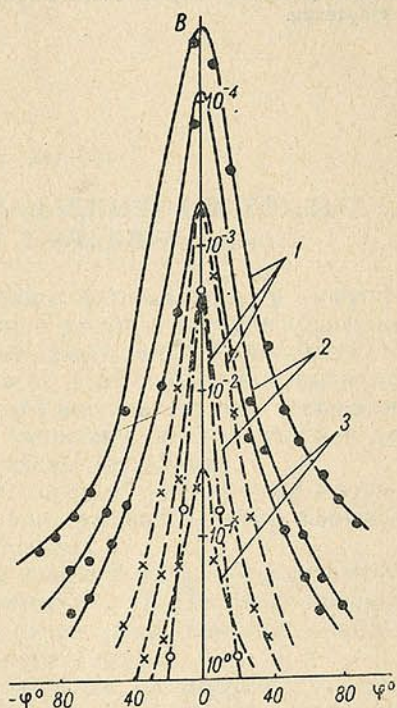


Рис. 4. Характар змянення яркасці  $B$  самасвецячыхся аб'ектаў у залежнасці ад іх памераў і адлегласці да прыёмніка радыяцыі:

1 —  $\tau = 5$ ; 2 —  $\tau = 10$ ; 3 —  $\tau = 15$

#### ЛІТАРАТУРА

1. Dorsey N. Ernest. Properties of ordinary water substance. New York, 1940.
2. Березкин В. А., Гершун А. А., Янишевский Ю. Д. Прозрачность и цвет моря. Л., 1940.
3. Шулейкин В. В. Физика моря. М., 1953.
4. Duntley S. Q. JOSA, 53, № 2, 1963.
5. Lenobl. Revue D'optique, t. 35, № 1, 1956.
6. Иванов Р. Н. Журнал геофизики, т. VI, в. 2—3, 1936.
7. Овчинский Б. В. ДАН СССР, № 6, 1944.
8. Hulbert E. O. JOSA, 33, № 11, 1945.
9. Розенберг Г. В. Сб. «Спектроскопия светорассеивающих сред». Минск, 1963, стр. 5.
10. Тимофеева В. А. Оптика и спектроскопия, X, № 4, 1961.
11. Левин И. М., Иванов А. П. Оптика и спектроскопия, № 5, 1965.

### РЕЗЮМЕ

Экспериментальна ісследованы аптычныя характэрыстыкі азернай вады: паказатэль аслаблення, паказатэль істиннага паглыннення і верагоднасць выжывання кванта света. Описана апаратура і метады вызначэння гэтых велічын. Ісследована размыцце коліміраванага пучка света в азернай ваде і вызначены свойства фона рассеянага іслучення.

*Поступило в редакцию 23.X 1965*

А. П. БАГДАНАУ, Я. І. ФІРСАУ

### МЕТОДЫКА ВЫМЯРЭННЯ $\gamma$ — $\gamma$ -СУПАДЗЕННЯУ І ВУГЛАВЫХ КАРЭЛЯЦЫЙ $\gamma$ -ПРАМЕННЯУ З РЭАКЦЫІ ( $n, \gamma$ )

Адной з істотных перашкод, якія ўзнікаюць пры вымярэнні  $\gamma$ — $\gamma$ -супадзенняў і вуглавых карэляцый  $\gamma$ -праменняў з рэакцыі ( $n, \gamma$ ), з'яўляецца высокі ўзровень фону нейтроннага і  $\gamma$ -выпраменьванняў, непазбежны пры рабоце на выведзеным пучку нейтронаў. Для дасягнення высокай скорасці ліку супадзенняў неабходна выкарыстаць вялікія цялесныя вуглы спектрометраў, г. зн. размяшчаць дэтэктары як мага бліжэй да мішэні. Пры гэтым пагаршаюцца ўмовы аховы дэтэктараў.

Другая цяжкасць звязана з характарам спектраў  $\gamma$ -праменняў з рэакцыі ( $n, \gamma$ ). Для большасці ядраў яны вельмі складаныя, таму выразна выдзеліць з кампанент каскада часта немагчыма.

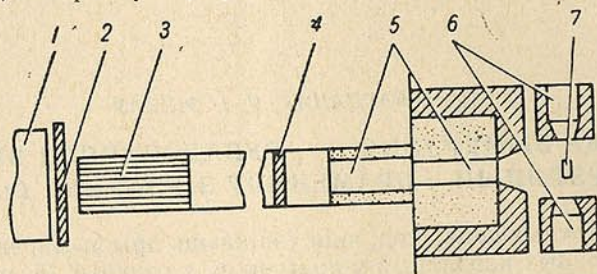
У гэтай рабоце апісваецца методыка вымярэння  $\gamma$ — $\gamma$ -супадзенняў і вуглавых карэляцый  $\gamma$ -праменняў з рэакцыі ( $n, \gamma$ ). Паколькі прыбор прызначаецца ў асноўным для работы на раздзеленых ізатопах, асабліва ўвага была звернута на зніжэнне ўзроўню фону.

1. Вывад пучка. Спектрометр устаноўлен на цеплавой калоне рэактара ИРТ-2000 АН БССР. З мэтай павелічэння патоку цеплавых нейтронаў на мішэні з калоны выдалены тры графітавыя пробкі агульнай даўжынёй 120 см. Пры гэтым кадмевыя адносіны застаюцца ў 20 разоў лепшымі, чым у астатніх каналах рэактара. Дзякуючы гэтаму ў апісваемай устаноўцы практычна адсутнічае кампанента фону, абумоўленая хуткімі нейтронамі.

Паміж актыўнай зонай рэактара і цеплавой калонай размешчаны свінцовы шчыт таўшчынёй 5 см, прызначаны для аслаблення  $\gamma$ -выпраменьвання актыўнай зоны; з той жа мэтай у адну з секцый шыбера ўстаўлена свінцовая пробка таўшчынёй 5 см.

Пучок нейтронаў фарміруецца з дапамогай двух паслядоўных каліматараў з сумесі парафіну з карбідам бору даўжынёй 30 см кожны. Першы каліматар мае дыяметр праходнай адтуліны 3 см і размешчаны ў сярэдзіне канала рэактара, другі з дыяметрам адтуліны 2 см размешчаны за межамі біялагічнай аховы. Знешні парафінавы блок акружан слоём свінцу таўшчынёй 15 см, паглынаючым захопныя  $\gamma$ -праменні і  $\gamma$ -праменні, якія выходзяць з канала рэактара. Нейтронны пучок у месцы размяшчэння мішэні мае дыяметр 2 см. Работа з пучком меншага дыяметра мае больш пераваг у сэнсе зручнасці аховы дэтэктараў і геаметрыі доследу, але пры гэтым вельмі ўскладняецца юсціроўка мішэні пры вымярэнні вуглавых карэляцый. Паток цеплавых нейтронаў на мішэні роўны  $4 \times 10^6$  нейтр/см<sup>2</sup> · сек. Пучок нейтронаў, якія прайшлі праз мішэнь, трапляе ў лавушку, размешчаную на адлегласці 3 м ад дэтэктара. Блізкае размяшчэнне лавушкі да дэтэктараў непажадана, таму што рассеяныя назад нейтроны і  $\gamma$ -праменні, а таксама  $\gamma$ -праменні ад захопу нейтронаў у цэле лавушкі ствараюць дадатковы фон.

Схематычны чарцёж канала і знешняй аховы прыведзен на рыс. 1.  
 2. Фон і ахова дэтэктара ў. Фон, які прысутнічае ў падобных эсперыментах, можна ўмоўна падзяліць на дзве кампаненты:  
 1) фон ад нейтронаў і  $\gamma$ -праменьняў, якія выходзяць з канала рэактара, вымяраемы без мішэні;  
 2) фон ад нейтронаў і  $\gamma$ -праменьняў, рассеяных на мішэні.



Рыс. 1. Схема эксперымента:

1— актыўная зона; 2— свінцовы шчыт; 3— графітавая пробка; 4— свінцовая пробка; 5— каліметры; 6— дэтэктары; 7— мішэнь.

Абодва дэтэктары акружаны свінцовай аховай таўшчынай 5 см, у якой зроблен канічны ўваход з боку мішэні. Гэтым забяспечваецца надзейная ахова дэтэктараў ад  $\gamma$ -выпраменьвання пры адсутнасці мішэні.

Найбольш падыходзячымі матэрыяламі для аховы ад цеплавых нейтронаў з'яўляюцца  $B^{10}$  і  $Li^6$ , якія валодаюць высокімі сячэннямі ўзаемадзеяння з цеплавымі нейтронамі.

Ніжэй прыведзены сячэнні  $B^{10}$  і  $Li^6$  для рэакцыі ( $n, \alpha$ ) і іх працэнтныя колькасці ў натуральнай сумесі ізатопаў [1]:

Ізотоп	$\sigma$ , барн	Працэнтная колькасць у натуральнай сумесі ізатопаў	$\sigma$ , барн, для натуральнай сумесі ізатопаў
$B^{10}$	3838	19,8	757,7
$Li^6$	945	7,5	71,0

Значыць, бор можна выкарыстаць для аховы ад нейтронаў у натуральнай сумесі ізатопаў, у той час як літый прыгодны толькі пры высокай ступені ўзбагачэння літыем-6. Пры выкарыстанні бору ў якасці ахоўнага матэрыялу ў спектры фону з'яўляецца інтэнсіўная лінія, якая адпавядае  $\gamma$ -праменьням з энергіяй 0,48 Мэв.

У дадзенай устаноўцы прыменена камбінаваная ахова з карбіду бору і вокісу літыю, узбагачанага літыем-6: адзін з дэтэктараў ахаваны карбідам бору, другі — вокісам літыю.

На ўстаўцы рыс. 2 схематычна паказана будова аховы аднаго з дэтэктараў і яго размяшчэнне ў адносінах да пучка і мішэні. Абодва крышталі змешчаны ў экраны з карбіду бору (вокісу літыю), якія паглынаюць нейтроны, што выходзяць з аховы. Для аховы ад нейтронаў, рассеяных на мішэні, уваход канічнага свінцовага каліметара кожнага дэтэктара закрыты тонкім слоem карбіду бору (вокісу літыю). Гэта асабліва важна для дэтэктара, ахаванага карбідам бору, таму што пры гэтым цялесны вугал для рэгістрацыі  $\gamma$ -праменьняў 0,48 Мэв значна меншы, чым пры размяшчэнні экрана ў непасрэднай блізкасці ад дэтэктара.

Дасягнуты ўзровень фону ў адсутнасці мішэні складае  $10^3$  імп/сек на дэтэктары, ахаваным літыем-6, і  $2 \cdot 10^3$  імп/сек на дэтэктары, ахаваным карбідам бору. Прыкметнай актывацыі дэтэктараў пасля 10—12-гадзіннай работы не назіраецца. Амплітудныя размеркаванні імпульсаў фону прыведзены на рыс. 2. У спектры фону ад дэтэктара, ахаванага літыем-6, лінія 0,48 Мэв мае значна меншую інтэнсіўнасць.

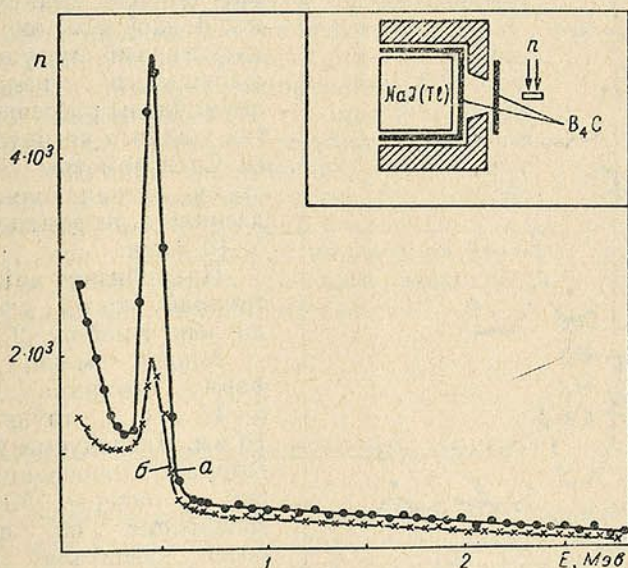


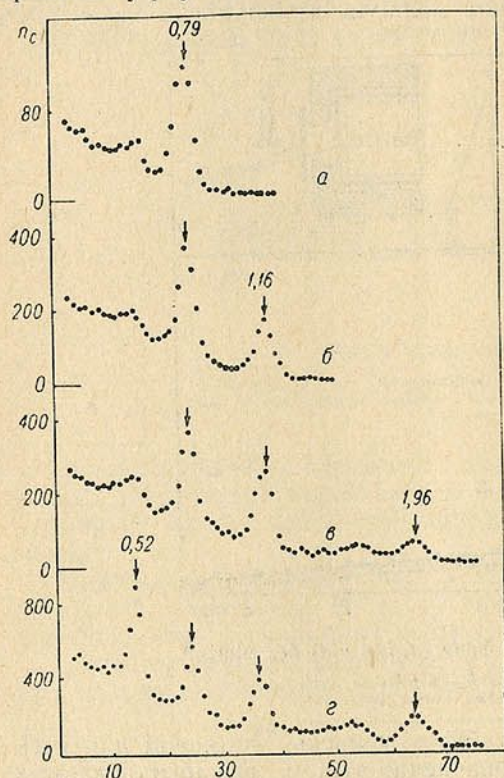
Рис. 2. Спектры імпульсаў фону ( $n$ , імп/мін) без мішэні:

$a$  — рухомы дэтэктар;  $b$  — нерухомы дэтэктар.  
На ўстаўцы — схема аховы дэтэктара

3. Дэтэктары і мішэні. Эфектыўнасць устаноўкі для рэгістрацыі супадзенняў у многім вызначаецца тыпам выкарыстоўваемых спектрометраў. Пры рэгістрацыі  $\gamma$ - $\gamma$ -супадзенняў з рэакцыі ( $n$ ,  $\gamma$ ), як правіла, адзін з спектрометраў рэгіструе  $\gamma$ -праменні высокай энергіі (4—10 Мэв), якія адпавядаюць пераходам з захопнага станавішча на ніжнія энергетычныя ўзроўні, другі — мяккія  $\gamma$ -праменні, якія адпавядаюць пераходам паміж ніжнімі ўзроўнямі. Для рэгістрацыі мяккага  $\gamma$ -выпраменьвання найбольш мэтазгодна выкарыстоўваць аднакрышталёвы спектрометр з вялікім крышталем NaJ(Tl). Як паказвае вопыт, для крышталёў дыяметрам 70 мм і вышынёй 50—70 мм у амплітудным размеркаванні імпульсаў аж да энергіі 2,5 Мэв прысутнічае толькі пік поўнага паглынання і бесперапыннае камптонаўскае размеркаванне. Для больш жорсткіх  $\gamma$ -праменьняў пачынае выяўляцца ўцечка з крышталю анігіляцыйных квантаў. Пры наяўнасці вялікай колькасці ліній апаратурны спектр становіцца вельмі складаным і з цяжкасцю паддаецца расшыфроўцы. Аднак у тым выпадку, калі не ставіцца задача падрабязнага вывучэння жорсткай часткі спектра, можна выкарыстаць спектрометр з адным крышталем вялікага аб'ёму. Акіом аднаканальнага аналізатара фіксуецца пэўны інтэрвал энергіі.

У нашай устаноўцы выкарыстаны крышталі NaJ(Tl) дыяметрам 70 мм і вышынёй 50 мм. Абодва спектрометры валодаюць разрашэннем 10% пры энергіі  $\gamma$ -выпраменьвання 661 кэв. Уваходныя паверхні крышталёў размешчаны на адлегласці 10 см ад восі пучка (цэнтра мішэні).  $\gamma$ -праменьнямі ад мішэні асвятляецца толькі цэнтральная

частка крышталю дыяметрам 60 мм, што вядзе да змяншэння ўплыву краявых эфектаў. Цялесны вугал, пад якім бачны крышталю з цэнтры мішэні, складае 2,2% ад 4π. Адзін з дэтэктараў нерухома, другі можа займаць два фіксаваныя становішчы, так што вугал  $\Theta$  паміж восямі крышталю роўны 90 або 180°. Вымярэнні  $\gamma$ - $\gamma$  супадзенняў праводзяцца



Рыс. 3. Спектры супадзенняў  $\gamma$ -праменняў з рэакцыі  $\text{Cl}^{35}(n, \gamma)\text{Cl}^{36}$  (па гарызанталі — нумары каналаў):

а — 7,79—0,79 Мэв; б — 7,42—1,16; в — 6,62—1,96; г — 6,11—0,52 Мэв

звычайна пры  $\Theta=90^\circ$ , паколькі пры  $\Theta=180^\circ$  дзякуючы адсутнасці ахоўнага экрана паміж дэтэктарамі могуць узнікаць фальшывыя супадзенні, якія абумоўлены рассеяннем  $\gamma$ -квантаў з аднаго крышталю на другі. Спектрометры ўключаны ў схему хуткавольных супадзенняў з разрашаючым часам  $5 \cdot 10^{-8}$  сек.

Падрабязнае апісанне электроннай часткі спектрометра дадзена ў рабоце [2].

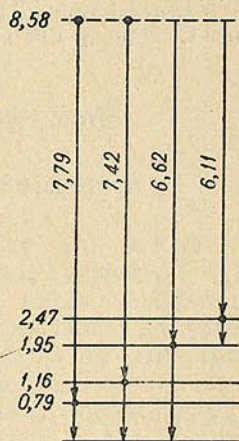
Мішэні маюць звычайна форму цыліндра дыяметрам 8—15 мм і таўшчынёй 3—10 мм. Даследуемы ўзор прасуецца або змяшчаецца ў кантэйнер з паперы. Мішэнь размяшчаецца на перасячэнні восяў крышталю такім чынам, што яе плоскасць перпендыкулярная восі пучка нейтронаў. Пры гэтым абодва становішчы рухомага дэтэктара аказваюцца раўназначнымі ў адносінах да мішэні. Пры вымярэнні  $\gamma$ - $\gamma$  супадзенняў да размяшчэння мішэні не ставіліся жорсткія патрабаванні. Пры вымярэнні вуглавых карэляцый мішэнь спачатку юсты-

руецца візуальна, а потым па скорасці ліку на адной з ліній даследуемага каскада ў двух становішчах рухомага дэтэктара.

4. Кантрольныя эксперыменты. Для высвятлення магчымасцей прыбора і праверкі яго прыгоднасці да работы вымераны спектры супадзенняў  $\gamma$ -праменняў з рэакцыі  $\text{Cl}^{35}(n, \gamma)\text{Cl}^{36}$ , добра вывучаныя ў радзе работ [3, 4]. Аднакрышталёвыя спектры  $\gamma$ -праменняў з рэакцыі  $\text{Cl}^{35}(n, \gamma)\text{Cl}^{36}$  прыведзены ў рабоце [5]. Паколькі ў жорсткай частцы спектра немагчыма выдзеліць акном аднакрышталёвага аналізатара асобную лінію, паслядоўна фіксаваліся толькі пэўныя інтэрвалы энергіі, пачынаючы з жорсткага краю спектра. Пры гэтым кожны наступны спектр супадзенняў змяшчае ўсе лініі, якія выяўлены ў папярэднім.

На рыс. 3, а прадстаўлены спектр супадзенняў з  $\gamma$ -праменнямі 7,79 Мэв. Акном аднаканальнага аналізатара фіксаваўся інтэрвал энергіі 7,6—8,1 Мэв. Як і належыць чакаць у адпаведнасці з схемай распаду  $\text{Cl}^{36}$  з захопнага становішча [6], у спектры супадзенняў з  $\gamma$ -праменнямі 7,79 Мэв прысутнічае толькі адна лінія, якая адпавядае пера-

ходу з узроўню 0,79 Мэв у асноўнае становішча. На рыс. 3, б паказан спектр супадзенняў з  $\gamma$ -праменьнямі 7,42 Мэв, якія адпавядаюць пераходу з захопнага становішча на ўзровень 1,16 Мэв. Акнум аднаканальнага аналізатара фіксуецца інтэрвал энергіі 7,2—7,7 Мэв. Паколькі ў гэты інтэрвал трапляюць таксама і імпульсы ад  $\gamma$ -праменьняў 7,79 Мэв, у спектры супадзенняў прысутнічае фотапик ад  $\gamma$ -праменьняў 0,79 Мэв. Акрамя таго, у гэтым спектры з'яўляецца лінія, якая адпавядае пераходу з узроўню 1,16 Мэв у асноўнае становішча. На рыс. 3, в паказаны спектры супадзенняў з  $\gamma$ -праменьнямі 6,62 Мэв. Акрамя ўжо вымераных ліній, тут прысутнічае лінія, якая адпавядае прамому пераходу з узроўню 1,96 Мэв, насыляемага  $\gamma$ -праменьнямі 6,62 Мэв, у асноўнае становішча. І нарэшце, з рыс. 3, г вынікае, што пераход 0,52 Мэв знаходзіцца ў каскадзе з пераходам 6,11 Мэв з захопнага становішча на ўзровень 2,47 Мэв. Схема выяўленых намі каскадных пераходаў у ядры  $\text{Cl}^{36}$  паказана на рыс. 4.



Рыс. 4. Схема каскадных пераходаў у ядры  $\text{Cl}^{36}$

У гэтых доследах выкарыстоўваўся ўзор з гексахлорбензолу  $\text{C}_6\text{Cl}_6$  вагой 0,3 г, што ў пераліку на ізатоп  $\text{Cl}^{35}$  складае прыкладна 0,17 г. Сячэнне захопу цеплавых нейтронаў для  $\text{Cl}^{35}$  роўна 30 барн [1]. Такім чынам, здабытак вагі ўзору на сячэнне ў дадзеным доследзе роўнае 5 г·барн. Час набору супадзенняў у кожным доследзе не перавышае 2 гадз. Пры павелічэнні часу вымярэнняў да 10 гадз можна даследаваць узоры са здабыткам вагі на сячэнне рэакцыі 1—2 г·барн.

У якасці другога кантрольнага эксперымента была вымерана вуглавая карэляцыя для каскада 1,17—1,33 Мэв у ядры  $\text{Ni}^{60}$ . Вымярэнні выкананы з кропкавай крыніцай  $\text{Co}^{60}$ .

Функцыя карэляцыі для каскада 4 (E2) 2 (E2) 0 мае выгляд

$$W(\Theta) = 1 + 0,102P_2(\cos \Theta) + 0,009P_4(\cos \Theta).$$

Адсюль пасля ўвядзення папраўкі на канечнае вуглавое разрашэнне дэтэктараў атрымліваем чакаемую велічыню анізатропіі

$$A_{\text{тэар}} = 0,15.$$

Атрыманая эксперыментальная велічыня анізатропіі  $A_{\text{эксп}} = 0,15 \pm 0,01$  добра ўзгадняецца з чакаемай тэарэтычнай велічыняй.

Такім чынам, апісаны прыбор дзякуючы адносна нізкаму ўзроўню фону прыгодны для даследавання спектраў супадзенняў і вуглавых карэляцый  $\gamma$ -праменьняў з рэакцыі ( $n, \gamma$ ) на ўзорах з малым здабыткам вагі на сячэнне рэакцыі.

#### ЛІТАРАТУРА

1. Гордеев И. В., Кардашев Д. А., Малышев А. В. Ядерно-физические константы. Госатомиздат, 1963.
2. Богданов А. П., Фирсов Е. И. ПТЭ, № 3, 35, 1964.
3. Бурмистров В. Р. Атомная энергия, 7, 260, 1959.
4. Segel R. E. Phys. Rev., 113, 844, 1959.
5. Богданов А. П., Фирсов Е. И. ДАН БССР, 8, 376, 1964.
6. Грошев Л. В., Демидов А. М., Луценко В. Н., Пелехов В. И. Атлас спектров  $\gamma$ -лучей радиационного захвата тепловых нейтронов. Атомиздат, 1958.

## РЕЗЮМЕ

Описана методика измерения  $\gamma$ - $\gamma$ -совпадений и угловых корреляций  $\gamma$ -лучей из реакции ( $n, \gamma$ ). Поток тепловых нейтронов на мишени равен  $4 \cdot 10^6$  нейтр/см<sup>2</sup>·сек. Детекторами  $\gamma$ -излучения служат два сцинтилляционных счетчика с кристаллами NaJ (Tl) диаметром 70 мм и высотой 50 мм, включенные в схему быстро-медленных совпадений с разрешающим временем  $5 \cdot 10^{-8}$  сек.

Один детектор защищен от нейтронов окисью лития-6, другой — карбидом бора. Скорость счета импульсов фона равна соответственно  $10^3$  имп/сек и  $2 \cdot 10^3$  имп/сек.

В качестве контрольных экспериментов измерены спектры совпадений  $\gamma$ -лучей из реакции  $\text{Cl}^{35} (n, \gamma) \text{Cl}^{36}$  и угловая корреляция для каскада 1,17—1,33 Мэв в ядре  $\text{Ni}^{60}$ .

Поступило в редакцию 29.XII 1965

## КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

А. Е. ЗАЛЕССКИЙ

### МАКСИМАЛЬНЫЕ ПЕРИОДИЧЕСКИЕ ПОДГРУППЫ ПОЛНОЙ ЛИНЕЙНОЙ ГРУППЫ НАД ПОЛЕМ ПОЛОЖИТЕЛЬНОЙ ХАРАКТЕРИСТИКИ

В работе [1] показано, что силовские  $\pi$ -подгруппы ( $\pi$  — произвольное множество простых чисел) разбиваются в полной линейной группе над комплексным основным полем в конечное число классов сопряженных подгрупп. Этот результат верен для произвольных алгебраически замкнутых полей нулевой характеристики. В то же время для произвольного основного поля аналогичный вопрос изучен мало.

В данной работе классифицируются максимальные периодические подгруппы полной линейной группы над произвольным полем положительной характеристики.

**Лемма 1.** Пусть  $\Gamma$  — неприводимая периодическая подгруппа полной линейной группы  $GL(n, P)$  над полем  $P$  положительной характеристики,  $Q$  — простое подполе поля  $P$ . Тогда линейная оболочка  $\langle \Gamma \rangle_Q$  группы  $\Gamma$  над полем  $Q$  изоморфна полной матричной алгебре  $Z_m$ , где  $Z$  — конечное поле, или объединение конечных полей,  $m \leq n^*$ .

**Доказательство.** Пусть  $\Gamma_0$  — конечная подгруппа  $\Gamma$ , такая, что  $\langle \Gamma \rangle_P = \langle \Gamma_0 \rangle_P$  (напомним, что  $\Gamma$  — локально конечная группа [2]). Тогда  $\langle \Gamma_0 \rangle_Q$  — конечномерная алгебра над  $Q$ ; если  $R$  — радикал  $\langle \Gamma_0 \rangle_Q$ , то  $R$  — нильпотентное кольцо, и потому  $\langle R \rangle_P$  — нильпотентный ([3], стр. 291) идеал в  $\langle \Gamma_0 \rangle_P = \langle \Gamma \rangle_P$ . Однако из неприводимости  $\Gamma$  следует, что  $\langle R \rangle_P = 0$ , так что и  $R = 0$ .

Итак,  $\langle \Gamma_0 \rangle_Q$  — полупростая алгебра. Если  $\langle \Gamma_0 \rangle_Q$  не проста, то  $\langle \Gamma_0 \rangle_Q = U + V$ ,  $UV = VU = 0$ ,  $U, V$  — подалгебры  $\langle \Gamma_0 \rangle_Q$ . Тогда  $\langle U \rangle_P \cdot \langle V \rangle_P = 0$ ,  $\langle V \rangle_P \supset \langle \Gamma_0 \rangle_P \langle V \rangle_P = \langle \Gamma \rangle_P \langle V \rangle_P$ , что противоречит неприводимости  $\Gamma$ . Отсюда следует, что  $\langle \Gamma_0 \rangle_Q$  — простая алгебра для любой конечной группы  $\Gamma_0$ , такой, что  $\langle \Gamma_0 \rangle_P = \langle \Gamma \rangle_P$ . Поэтому  $\langle \Gamma \rangle_Q$  — простая алгебра. Пусть  $Z$  — центр алгебры  $\langle \Gamma \rangle_Q$ . Тогда  $\langle \Gamma \rangle_Q: Z = m \leq n$  ([3], стр. 327) и  $\langle \Gamma \rangle_Q$  — полная матричная алгебра над полем  $Z$  (так как тела с периодической мультипликативной группой коммутативны). Поле  $Z$  алгебраично над простым подполем  $Q$ , потому оно либо конечно, либо является объединением конечных полей.

В связи с вопросом ([4], стр. 543) отметим

**Следствие.** Периодическая линейная группа  $\Gamma$  обладает нильпотентным нормальным делителем  $N$ , факторгруппа  $\Gamma/N$  по которому счетна.

**Доказательство.** Для полей нулевой характеристики это известно. Пусть  $\Gamma \subseteq GL(n, P)$ ,  $P$  — поле положительной характеристики. Известно, что  $\Gamma$  гомоморфно отображается на вполне приводимую

\* Близкое к этому утверждение имеется в [8].

матричную группу, причем ядро  $N$  гомоморфизма содержится в группе специальных треугольных матриц и потому нильпотентно (см., например, [5], стр. 142). Из леммы 1 следует, что  $\Gamma/N$  счетна.

*Лемма 2. Пусть  $D$  — конечное расширение поля  $P$  положительной характеристики,  $Q$  — простое подполе поля  $P$ ,  $Z$  — максимальное алгебраическое над  $Q$  подполе поля  $D$ ,  $K = P \cap Z$ . Тогда  $Z : K \leq D : P$ .*

*Доказательство\**). Предположим, что  $Z : K > D : P$ . Так как поле  $K$  совершенно, то существует элемент  $\beta \in Z$ , такой, что  $K(\beta) : K > D : P$  ([6], т. I, стр. 103). Пусть  $f(x)$  — минимальный полином элемента  $\beta$  над полем  $K$ . Над полем  $P$   $f(x)$  обязан распадаться на множители:  $f(x) = g(x)h(x)$ . Так как мультипликативная группа поля  $Z$  периодическая, то  $\beta$  — корень из 1,  $K(\beta)$  — нормальное расширение поля  $K$ , и полином  $f(x)$  и тем более  $g(x)$  распадается в поле  $K(\beta)$  на линейные множители. Тогда коэффициенты полинома  $g(x)$  принадлежат одновременно полю  $K(\beta) \subset Z$  и полю  $P$ , а следовательно, их пересечению  $K = P \cap Z$ . Это противоречит неприводимости полинома  $f(x)$  над полем  $K$ . Лемма доказана.

*Теорема 1. Максимальные неприводимые периодические подгруппы полной линейной группы  $GL(n, P)$  над полем  $P$  положительной характеристики сопряжены и изоморфны  $GL(n, K)$ , где  $K$  — максимальное алгебраическое подполе поля  $P$ .*

*Доказательство.* Пусть  $\Gamma$  — максимальная неприводимая периодическая подгруппа  $GL(n, P)$ ,  $Q$  — простое подполе поля  $P$ . Ввиду максимальной группы  $\Gamma$  из леммы 1 следует, что  $\Gamma$  изоморфна  $GL(m, Z) \subset Z_m = \langle \Gamma \rangle_Q$ , причем, очевидно,  $\langle \Gamma \rangle_P = D_m$ , где  $D = \langle Z \rangle_P$ ;  $Z$  — максимальное алгебраическое над  $Q$  подполе поля  $D$ ;  $K = Z \cap P$  ( $D$  — поле, ибо  $\Gamma$  неприводима). По построению  $D$ ,  $D : P \leq Z : K$  и учитывая лемму 2, получаем, что  $D : P = Z : K$ . Отсюда следует, что  $K_n$  содержит простую неприводимую подалгебру  $Z'_m$ , изоморфную  $Z_m$ ,  $Z'_m$  и  $Z_m$  сопряжены (см. [3], стр. 92). Но тогда ввиду максимальной  $\Gamma$   $Z = K$ ,  $\Gamma \cong GL(n, K)$  и все максимальные периодические подгруппы сопряжены ([3], стр. 92).

*Теорема 2. Число несопряженных максимальных периодических подгрупп полной линейной группы  $GL(n, P)$  над полем  $P$  положительной характеристики, трансцендентным над своим простым подполем, равно числу разложений  $n$  в сумму целых положительных слагаемых (учитывая порядок).*

*Доказательство.* Каждому разложению  $n = \sum n_i$ ,  $n_i > 0$ , сопоставим квазиреугольную группу  $\Gamma$  матриц, составленных из блоков  $A_{ij}$ ,  $A_{ij} = 0$ , если  $i > j$ ,  $A_{ij}$  независимо друг от друга пробегает полную линейную группу  $GL(n_i, K)$ , где  $K$  — максимальное алгебраическое подполе поля  $P$ ;  $A_{ij}$ ,  $i < j$  — произвольные матрицы размера  $n_i \times n_j$ .

Из теоремы 1 следует, что  $\Gamma$  — максимальная периодическая подгруппа  $GL(n, P)$  и что всякая максимальная периодическая подгруппа  $GL(n, P)$  сопряжена с одной из групп  $\Gamma$ . Тот факт, что различные построенные таким образом группы не сопряжены, следует из теоремы 1 работы [7].

Из теорем 1, 2 вытекает, что вопрос о сопряженности конкретных классов вполне приводимых периодических подгрупп в полной линейной группе над полем положительной характеристики сводится к соответствующему вопросу для подгрупп периодической полной линейной группы.

\*) Доказательство этой леммы сообщил автору А. В. Яковлев, указав при этом, что она верна и для полей нулевой характеристики.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Супруненко Д. А. Сиб. мат. ж., т. III, № 1, 1962.
2. Супруненко Д. А., Платонов В. П. ДАН БССР, т. VII, № 8, 1963.
3. Джекобсон Н. Строение колец. М., 1961.
4. Платонов В. П. ДАН СССР, 160, № 3, 1965.
5. Ван дер Варден Б. Л. Современная алгебра. М., 1947.
6. Зарисский О., Самюэль П. Коммутативная алгебра. М., 1963.
7. Супруненко Д. А. ДАН БССР, т. V, № 9, 1961.

*Поступило в редакцию 4.XI 1965*

М. С. ГАРАЩУК

### О НЕКОТОРЫХ КЛАССАХ ЛИНЕЙНЫХ ГРУПП

В работе [1] вводятся и изучаются  $\nu$ -группы. Через  $N^{(1)}$  обозначим многообразие абелевых групп, т. е. групп с соотношением  $f^{(1)}(x, y) = \varphi^{(1)}(x, y)$ , где  $f^{(1)}(x, y) = xy$ ;  $\varphi^{(1)}(x, y) = yx$ . Многообразие  $N^{(2)}$  определяется соотношением  $f^{(2)}(x, y) = \varphi^{(2)}(x, y)$ ,  $f^{(2)}(x, y) = f^{(1)}(xy, yx)$ ,  $\varphi^{(2)}(x, y) = \varphi^{(1)}(xy, yx)$ . Аналогичным образом определяются многообразия  $N^{(3)}$ ,  $N^{(4)}$ , ... и т. д. Группы, принадлежащие многообразию  $N^{(k)}$ , называются  $\nu_k$ -группами, или просто  $\nu$ -группами.

В указанной работе дается полное описание конечных  $\nu$ -групп. Доказывается, что расширения нильпотентных групп нечетного порядка с помощью 2-групп и только они являются  $\nu$ -группами среди конечных групп. С другой стороны, приведен пример конечной разрешимой группы, не являющейся  $\nu$ -группой. Установлено, что классы  $\nu$ -групп и групп Энгеля не совпадают.

В § 1 настоящей работы доказывается разрешимость линейной  $\nu$ -группы. В § 2 рассматриваются линейные группы, все подгруппы которых циклически.

§ 1. Теорема 1. *Всякая линейная  $\nu$ -группа разрешима.*

Доказательство. Как известно, всякая линейная локально разрешимая группа разрешима. Поэтому достаточно доказать локальную разрешимость линейной  $\nu$ -группы. Пусть  $G$  — линейная  $\nu$ -группа степени  $n$  над каким-нибудь полем, а  $H$  — произвольная подгруппа группы  $G$ , порожденная конечной системой элементов из  $G$ . Докажем разрешимость  $H$ . Воспользуемся понятием предельной группы А. И. Мальцева [2].

Группа  $\Gamma$  называется предельной для последовательности групп  $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots$ , если существует такая последовательность гомоморфизмов  $\Gamma \rightarrow \Gamma_1, \Gamma \rightarrow \Gamma_2, \dots$ , при которой каждый неединичный элемент группы  $\Gamma$  имеет неединичный образ во всех гомоморфизмах, начиная с некоторого из них.

Из работы [2] следует, что  $H$  является пределом последовательности конечных линейных групп  $H_1, H_2, \dots$  степени  $n$ . Каждая  $H_i$ , будучи гомоморфным образом  $H$ , является конечной  $\nu$ -группой, а следовательно, разрешимой [1]. Длина ряда коммутантов разрешимой линейной группы степени  $n$  меньше некоторого числа  $k = k(n)$ , зависящего только от  $n$ . В частности, длина ряда коммутантов любой группы  $H_i$  меньше  $k$ . Введем высшие коммутаторы  $D^1, D^2, \dots, D^m$ , где  $D^1(a_1, a_2) = [a_1, a_2]$  — коммутатор элементов  $a_1, a_2$ ;  $D^m = D^1(D^{m-1}(a_1, \dots, a_{2^{m-1}}), D^{m-1}(a_{2^{m-1}}, \dots, a_{2^m}))$  [3].

Как известно, группа  $U$  тогда и только тогда разрешима и длина ряда коммутантов  $U$  не превышает  $k$ , когда высший коммутатор  $D^k$  равен единице для любых элементов из  $U$ . Рассмотрим  $D^k(h_1, \dots, h_{2^k}) =$

$= D^k$  для любых элементов  $h_1, \dots, h_{2k}$  из  $H$ . Докажем, что  $D^k = D^k(h_1, \dots, h_{2k}) = 1$ .

Действительно, если  $D^k \neq 1$ , то существует такое натуральное  $i$ , что образ коммутатора  $D^k$  в  $H_i$  отличен от единицы. Но образ коммутатора  $D^k$  в  $H_i$  есть  $D^k(h'_1, \dots, h'_{2k})$ , где  $h'_v \in H_i$ , т. е.  $D^k(h'_1, \dots, h'_{2k}) \neq 1$ . Последнее противоречит критерию расширяемости и замечанию о длине ряда коммутантов линейной разрешимой группы. Следовательно,  $D^k$  тождественно равно единице для любых элементов из  $H$ , а поэтому  $H$  разрешима. Теорема доказана.

Заметим, что в работе [4] доказана нильпотентность всякой энгелевой линейной группы. А так как всякая нильпотентная группа является  $\nu$ -группой [5], то не существует энгелевых линейных групп, не являющихся  $\nu$ -группами.

§ 2. Теорема 2. *Бесконечная линейная группа, все истинные подгруппы которой циклически, коммутативна.*

Доказательство. Пусть  $\Gamma$  — бесконечная некоммутативная линейная группа, все истинные подгруппы которой циклически. Очевидно, два любых непостоянных элемента  $\Gamma$  порождают группу  $\Gamma$ . Линейная группа с конечным числом образующих обладает нормальным делителем  $N$  конечного индекса [2]. В силу основного результата работы [6]  $N$  содержится в центре  $Z$  группы  $\Gamma$ . Следовательно,  $\Gamma/Z$  — конечная группа.

Легко показать, что все максимальные подгруппы  $\Gamma$  содержат центр  $Z$ . В самом деле пусть  $H$  — максимальная подгруппа группы  $\Gamma$ . Очевидно,  $HZ$  — абелева группа. Так как по предположению  $\Gamma$  некоммутативна, то  $HZ$  — истинная подгруппа  $\Gamma$ , и в силу максимальной  $HZ = H$ ,  $Z \subseteq H$ . Отсюда следует, что всякая максимальная подгруппа  $H$  группы  $\Gamma$  имеет конечный индекс в  $\Gamma$ .

Далее легко видеть, что всякая подгруппа  $F$  группы  $\Gamma$  содержится в некоторой максимальной подгруппе  $\Gamma$ . Все максимальные подгруппы  $\Gamma$  циклически. Поэтому каждая подгруппа  $F$  группы  $\Gamma$  имеет в своей максимальной подгруппе конечный индекс, а значит, имеет конечный индекс и в  $\Gamma$ . Но группа, все подгруппы которой имеют конечный в ней индекс, циклическа [7]. Это противоречит предположению о группе. Теорема доказана.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Ширшов А. И. Алгебра и логика, семинар, 2, в. 5, 1963.
2. Мальцев А. И. Матем. сб., 8(50), в. 3, 1940.
3. Zassenhaus H. Abh. aus Math. sem. der Haus. Universität., 12, Н. 3—4, 1938.
4. Супруненко Д. А., Гаращук М. С. ДАН БССР, т. VI, № 5, 1962.
5. Мальцев А. И. Уч. записки Ивановского гос. пед. ин-та, 4, 1953, стр. 107—111.
6. Зельманзон М. Е. УМН, т. XVI, в. 2, 1961.
7. Федоров Ю. Г. УМН, 6, в. 1, 1951.

Поступило в редакцию 6.XII 1965

В. К. ГРОНСКИЙ, И. С. САЦУНКЕВИЧ  
**ФОТОННЫЙ РАСПАД  $\Omega^-$ -ГИПЕРОНА**

Как известно, предсказанная  $SU(3)$ -схемой  $\Omega^-$ -частица была обнаружена экспериментально в 1964 г. [1]. До сих пор наблюдались следующие каналы распада этой частицы [2]:

$$\begin{aligned}\Omega^- &\rightarrow \Xi^0 + \pi^-, \\ \Omega^- &\rightarrow \Xi^- + \pi^0, \\ \Omega^- &\rightarrow \Lambda + K^-.\end{aligned}$$

Имеются теоретические оценки слабого лептонного распада  $\Omega^-$  по схеме  $\Omega^- \rightarrow \Xi^0 + e^- + \nu$ .

В настоящей работе рассматривается еще один возможный канал распада:  $\Omega^- \rightarrow \Xi^- + \gamma$ . Исходя из требования лоренц-инвариантности, наиболее общее выражение матричного элемента такого процесса можно представить в виде

$$M = \bar{U}(p') \left\{ \frac{g_A}{\sqrt{2}} Q_\alpha^\beta + \frac{g_V}{\sqrt{2}} i \gamma_5 O_\alpha^\beta \right\} U_\beta(p) \varepsilon^\alpha. \quad (1)$$

Здесь  $p, p'$  — 4-импульсы начального и конечного гиперонов;  $U_\beta, U$  — соответствующие волновые функции;  $\varepsilon^\alpha$  — вектор поляризации фотона;  $g_A$  и  $g_V$  — константы связи.

Используя уравнение Дирака и уравнение для частицы со спином  $3/2$ , а также условие  $\varepsilon^\alpha k_\alpha = 0$  ( $k$  — 4-импульс фотона), легко показать, что

$$\begin{aligned}Q_\alpha^\beta &= f_1 g_\alpha^\beta + \frac{1}{m^2} f_2 p'_\alpha p'^\beta + \frac{1}{m} f_3 \gamma_\alpha p'^\beta, \\ O_\alpha^\beta &= f'_1 g_\alpha^\beta + \frac{1}{m^2} f'_2 p'_\alpha p'^\beta + \frac{1}{m} f'_3 \gamma_\alpha p'^\beta,\end{aligned} \quad (2)$$

где  $f_i, f'_i$  — неизвестные комплексные формфакторы.

Используя (1) и (2) для полной вероятности распада в системе покоя  $\Omega^-$ -частицы, получаем

$$\begin{aligned}W &= \frac{x^2 - m^2}{48\pi x^3} \left\{ g_A^2 (x+m)^2 \left[ |f_1|^2 + \frac{(x-m)^4}{4x^2 m^2} |f_3|^2 - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{(x-m)^2}{4xm} (f_1 f_3^* + f_3 f_1^*) \right] + g_V^2 (x-m)^2 \left[ |f'_1|^2 + \frac{(x+m)^4}{4x^2 m^2} |f'_3|^2 - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{(x+m)^2}{4xm} (f'_1 f'_3^* + f'_3 f'_1^*) \right] \right\} = W_A + W_V.\end{aligned}$$

Подставляя сюда  $z \approx 1,7 \text{ Гэв}$ ,  $m \approx 1,3 \text{ Гэв}$ , имеем  $W_A/W_V \sim 15$ , т. е. основной вклад в вероятность распада дает аксиальная часть тока.

Авторы выражают благодарность Ф. И. Федорову и участникам семинара лаборатории теоретической физики Института физики АН БССР за внимание и интерес к работе.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Barnes V. et al. Phys. Rev. Lett., 12, 204, 1964.
2. Barnes V. et al. Phys. Lett., 12, 134, 1964; Abrams G. S. et al. Phys. Rev. Lett., 13, 670, 1964.
3. Glaschow S. L., Socolow R. H. Phys. Lett., 10, № 1, 1964; Yellin J. Phys. Rev., 135, B1203, 1964; De Santis V. Phys. Rev. Lett., 13, 217, 1964.

*Поступило в редакцию 9.11 1966*

В. И. БЕЛОУСОВА, Э. А. РУДАК, Е. И. ФИРСОВ

РАДИАЦИОННЫЙ ЗАХВАТ ТЕПЛОВЫХ НЕЙТРОНОВ ЯДРОМ  $\text{Sr}^{52}$

Известно, что реакция  $(n, \gamma)$  на медленных нейтронах служит классическим примером протекания ядерных реакций посредством образования составного ядра. Однако в ряде случаев может быть существенным и другой механизм реакции  $(n, \gamma)$  — так называемый «прямой» захват нейтрона [1]. Под «прямым» захватом обычно понимается потенциальный захват нейтрона и вклад в сечение реакции «хвостов» далеко отстоящих резонансов. Наиболее вероятным «прямой» захват оказывается для ядер с массовыми числами  $A$  порядка 50 и 210, у которых вблизи захватного состояния проходят одночастичные  $3S$ - и  $4S$ -уровни, а вблизи основного — одночастичные  $2p$ - и  $3p$ -уровни соответственно.

В процессе реакции происходит захват нейтрона на одночастичное захватное состояние с последующим переходом на нижние  $p$ -уровни. При этом переходы нейтрона сопровождаются  $\gamma$ -излучением типа  $E1$ . Для указанных выше групп ядер основной вклад в «прямой» захват вносит потенциальный захват нейтрона. Сечение потенциального захвата нейтрона дано в работе [2]:

$$\sigma(n, \gamma) = \frac{4\pi(2j+1)}{9hv} \left( \frac{2\pi E_\gamma}{hc} \right)^3 \left( \frac{eZ}{A+1} \right)^2 \left| \int_0^\infty \psi_f^* r \psi_i r^2 dr \right|^2.$$

Здесь  $E_\gamma$  — энергия  $\gamma$ -перехода типа  $E1$  из захватного состояния на  $p$ -уровень;  $j$  — спин  $p$ -уровня;  $v$  — скорость нейтрона;  $\psi_f$  — волновая функция  $p$ -уровня и  $\psi_i$  — волновая функция падающего нейтрона, нормированная на единицу потока. Наибольшую трудность в оценке сечения представляет вычисление матричного элемента. В ряде работ [3, 4] при подсчетах использовалась прямоугольная потенциальная яма. Для сечений потенциального захвата тепловых нейтронов средними ядрами были получены значения порядка 0,1 барна, что в общем меньше на порядок наблюдаемых экспериментально сечений. Предполагалось, что расхождение теоретических оценок с экспериментальными связано с использованием в расчетах прямоугольной потенциальной ямы. Более правильные теоретические оценки, естественно, могут быть получены при расчете волновых функций нейтрона в потенциальной яме с размытым краем. Однако вычисления с таким потенциалом достаточно сложны и громоздки. Например, уравнение Шредингера с потенциалом типа Саксона — Вудса можно решить только численным методом с помощью электронно-счетных машин. Подобные расчеты можно упростить, если вместо потенциала Саксона — Вудса использовать потенциал типа

$$V(r) = \begin{cases} -V_0, & 0 \leq r \leq a, \\ -V_0 \exp \left\{ \frac{a-r}{\delta a} \right\}, & r \geq a. \end{cases}$$

Здесь  $V_0$ —глубина потенциальной ямы;  $a$  и  $\delta$ —параметры, характеризующие зависимость величины потенциала от расстояния. Этот потенциал, являющийся достаточно хорошим приближением к потенциалу Саксона—Вудса, позволяет рассчитывать одночастичные волновые функции нейтрона аналитическим путем [5, 6], что значительно облегчает оценку матричного элемента сечения потенциального захвата нейтрона.

С помощью таких волновых функций было оценено сечение перехода типа  $E1$  с энергией  $7,93 \text{ Мэв}$  из захватного состояния ядра  $\text{Cr}^{53}$  в реакции  $(n, \gamma)$  на тепловых нейтронах в основное  $p_{3/2}$ -состояние. Параметры потенциальной ямы были следующие:  $V_0 = -42 \text{ Мэв}$ ,  $a = 4,2 \times 10^{-13} \text{ см}$  и  $\delta = 0,25$  и  $0,3$ . Результаты расчета следующие: при  $\delta = 0,25$   $\sigma(n, \gamma) = \sim 0,07$  барна, а при  $\delta = 0,3$   $\sigma(n, \gamma) = 0,23$  барна. Из этого следует, что величина сечения очень сильно зависит от параметра размытия края потенциальной ямы. С увеличением размытия края потенциальной ямы сечение потенциального захвата нейтрона возрастает. Для ядер с  $A \approx 50$  наиболее разумное значение параметра  $\delta$  находится в пределах  $0,25-0,3$ . Поэтому значение  $0,23$  барна для данного перехода в ядре  $\text{Cr}^{53}$  является, по-видимому, максимальным. Экспериментальное значение сечения для этого перехода примерно  $0,38$  барна [7]. Теоретическая оценка в случае  $\delta = 0,3$  довольно хорошо согласуется с экспериментальным значением. Следует, однако, отметить, что в расчетах основное состояние ядра  $\text{Cr}^{53}$  предполагалось одночастичным. В действительности же приведенная нейтронная ширина этого состояния может быть значительно меньше 1, что приведет к уменьшению сечения потенциального захвата нейтрона.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Lane A. M., Lynn J. E. Nucl. Phys., 17, 563, 1960.
2. Breit G., Yost F. L. Phys. Rev., 48, 203, 1935.
3. Lane A. M., Lynn J. E. Nucl. Phys., 17, 586, 1960.
4. Bockelman C. K. Nucl. Phys., 14, 205, 1959.
5. Green A. E., Lee K. Phys. Rev., 99, 772, 1955.
6. Green A. E. Phys. Rev., 104, 1617, 1956.
7. Рудак Э. А., Фирсов Е. И. Ядерная физика, 1, 235, 1965.

Поступило в редакцию 7.VIII 1965

О. С. ИВАНИЦКАЯ

## ПРЕДЕЛЬНЫЙ СЛУЧАЙ ОБОБЩЕННЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ЛОРЕНЦА

1. Введение. Существуют два предельных перехода в общей теории относительности (ОТО): 1)  $v^2 \ll c^2$ ,  $\varphi^2 \ll c^2$ ; 2)  $c \rightarrow \infty$  [1—3]. Первый приводит к приближенной теории («ньютонову приближению»), второй — к строгой теории, принимающей бесконечную скорость распространения взаимодействий.

Значительное развитие в последние годы исследований структуры ОТО, в частности, выразилось в дополнительном изучении ее предельного случая. При этом, во-первых, рассматривается в основном метрическая формулировка ОТО, во-вторых, получает распространение правило [3, 4]: сохранять в предельном случае ОТО те величины, которые при  $c \rightarrow \infty$  остаются конечными, и отбрасывать величины, которые в пределе стремятся к бесконечности (подобно тому, как это делается в известных случаях в квантовой теории полей элементарных частиц).

Естественно возникает потребность исследования расходимостей [5]. При переходе к предельному случаю специальной теории относительности (СТО) посредством  $c \rightarrow \infty$  такое правило не привлекается — найдены пути обходиться без него. Это достигается следующими двумя способами. Если матрица преобразований Лоренца задана в таком виде, что при  $c \rightarrow \infty$  не переходит в матрицу преобразований Галилея, то переход  $c \rightarrow \infty$  осуществляется не сразу, а после предварительных выкладок, обеспечивающих появление в пределе только конечных величин. Если матрица преобразований Лоренца представлена в таком виде, что при  $c \rightarrow \infty$  переходит в матрицу преобразований Галилея, то переход  $c \rightarrow \infty$  осуществляется сразу. Это приводит к вырожденному метрическому тензору [6, 7] и сразу обеспечивает отсутствие бесконечных членов. Целесообразно применять такие же способы и в ОТО.

Локальный метрический тензор СТО широко используется в тетрадной формулировке ОТО. Поэтому развитие второго способа в ОТО естественно произвести в рамках тетрадной формулировки.

Рассмотрим предельный случай тетрадной формулировки ОТО, переход к которому состоит в замене локального метрического тензора СТО его предельным вырожденным значением. Оно инвариантно относительно предельного случая обобщенных (зависящих от координат) преобразований Лоренца. Рассмотрим эти преобразования при условии, что ранги локальной вырожденной метрики и предельного значения метрического гравитационного потенциала совпадают.

2. Случай полного вырождения метрических потенциалов и тетрадных компонент (потенциалов Ламэ). Представим метрический гравитационный потенциал  $g_{\mu\nu}$  через лоренц-инвариантный в пределе вырождающийся метрический тензор СТО:

$$g_{\mu\nu} = h_{\nu}^k h_{\nu}^n g_{kn}, \quad g_{kn} = \text{diag} \left( -1 \frac{1}{c^2} \frac{1}{c^2} \frac{1}{c^2} \right), \quad (1)$$

$$g^{\mu\nu} = h_k^{\nu} h_n^{\nu} g^{kn}, \quad g^{kn} = \text{diag} \left( -\frac{1}{c^2} 1 1 1 \right). \quad (2)$$

Используем обозначения, принятые в [7]. В пределе имеем:

$$\lim_{c \rightarrow \infty} g_{\mu\nu} \equiv n_{\mu\nu} = H_{\mu}^{\hat{0}} H_{\nu}^{\hat{0}} n_{\hat{0}\hat{0}}, \quad H_{\mu}^k = \lim_{c \rightarrow \infty} h_{\mu}^k, \quad n_{kn} = \lim_{c \rightarrow \infty} g_{kn}, \quad (3)$$

$$\lim_{c \rightarrow \infty} g^{\mu\nu} \equiv N^{\mu\nu} = H_a^{\mu} H_b^{\nu} N^{ab}, \quad H_{\mu}^k H_n^{\nu} = \delta_n^k, \quad H_{\mu}^k H_k^{\nu} = \delta_{\mu}^{\nu}, \quad (4)$$

т. е.  $\text{Det } n_{\mu\nu} = 0$ , но, вообще говоря,

$$\text{Det } N^{\mu\nu} \neq 0. \quad (5)$$

Рассмотрим случай, когда вырожден не только метрический тензор  $n_{\mu\nu}$ , но и  $N^{\mu\nu}$  и когда их ранги соответственно совпадают с рангами метрических тензоров  $n_{kn}$  и  $N^{kn}$ , а тетрадные компоненты не зависят от  $c$ , т. е.

$$n_{\mu\nu} = \left( \begin{array}{c|c} n_{00} & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right), \quad N^{\mu\nu} = \left( \begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline 0 & N^{\alpha\beta} \end{array} \right). \quad (6)$$

Тогда

$$H_a^{\hat{0}} = 0, \quad H_a^0 = 0, \quad (7)$$

$$H_{\mu}^k = \left( \begin{array}{c|c} H_0^{\hat{0}} & H_0^k \\ \hline 0 & H_a^b \end{array} \right), \quad H_k^{\nu} = \left( \begin{array}{c|c} H_0^{\hat{0}} & 0 \\ \hline H_0^{\alpha} & H_b^{\nu} \end{array} \right), \quad (8)$$

$$H^{\mu k} = \left( \begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline 0 & H^{\alpha\beta} \end{array} \right) = N^{\mu\nu} H_{\nu}^k, \quad H_{\mu k} = \left( \begin{array}{c|c} H_0^{\hat{0}} & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right) = n_{kn} H_{\mu}^n, \quad (9)$$

$$\text{Det } H^{\mu k} = 0, \quad \text{Det } H_{\mu k} = 0, \quad (10)$$

$$H^{\mu k} H_{\mu n} = 0, \quad H^{\mu k} H_{\nu k} = 0. \quad (11)$$

Такие тетрадные компоненты вырождены.

3. Предельный случай обобщенных преобразований Лоренца. Рассмотрим предельный случай обобщенных преобразований Лоренца, когда зависимость  $H_0^{\hat{0}}$  от координат обусловлена гравитационным полем. Из (8), (9) и известных соотношений [8]

$$\begin{aligned} \Upsilon_{[km]n} = \frac{1}{2} \{ & \partial_{\rho} h_{\sigma n} (h_k^{\rho} h_m^{\sigma} - h_m^{\rho} h_k^{\sigma}) + \partial_{\rho} h_{\sigma k} (h_n^{\rho} h_m^{\sigma} - h_m^{\rho} h_n^{\sigma}) + \\ & + \partial_{\rho} h_{\sigma m} (h_k^{\rho} h_n^{\sigma} - h_n^{\rho} h_k^{\sigma}) \} \end{aligned} \quad (12)$$

находим в пределе:

$$\Upsilon_{[km]0} = \left( \begin{array}{c|c} 0 & \Upsilon_{[\hat{0}a]0} \\ \hline \Upsilon_{[a\hat{0}]0} & 0 \end{array} \right), \quad \Upsilon_{[km]a} = \left( \begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right), \quad (13)$$

т. е. при принятых ограничениях коэффициенты вращения Риччи  $\Upsilon_{[a\hat{0}]0} = -\Upsilon_{[\hat{0}a]0} \neq 0$  составляют общую часть строгой тетрадной формулировки ОТО и ее предельного случая. Из (13) вытекает отличие от нуля следующего тензора кручения:

$$S_{\hat{0}a\hat{0}} \equiv \frac{1}{2} (\Upsilon_{[\hat{0}a]\hat{0}} - \Upsilon_{[\hat{0}\hat{0}]a}) \neq 0. \quad (14)$$

Однако смешанные компоненты коэффициентов вращения Риччи, образованные вырожденным метрическим тензором, естественно вырождаются:

$$\gamma^k_{mn} = N^{kk} \gamma_{kmn} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \gamma^a_{0n} & 0 \end{pmatrix}, \quad (15)$$

$$\gamma^m_{kn} = N^{mn} \gamma_{kmn} = \begin{pmatrix} 0 & \gamma_{0n}^a \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (16)$$

Тогда предельный случай обобщенных преобразований Лоренца (обобщенных преобразований Галилея), удовлетворяющий (14) и (15), имеет вид:

$$\lim_{c \rightarrow \infty} \delta L^k_n = \delta G^k_n = \gamma^k_{mn} dx^n, \quad \lim_{c \rightarrow \infty} \delta L_k^n = \delta G_k^n = \gamma^m_{kn} dx^n. \quad (17)$$

С помощью (13) — (16) находим:

$$R_{\hat{0}a0\beta} = -\partial_\beta \gamma_{\hat{0}a0}, \quad R_{\hat{0}a\alpha\beta} = 0, \quad R_{ab0\beta} = 0, \quad R = 0, \quad (18)$$

$$R_{ab\alpha\beta} = 0. \quad (19)$$

Если задан гидродинамический тензор энергии-импульса, получаем

$$R_{\hat{0}0} = H^a_\beta R_{\hat{0}a0\beta} = -\partial^a (H^a_{\hat{0}} \gamma_{\hat{0}a\hat{0}}) = \partial^a (H^a_{\hat{0}} H^0_{\hat{0}} \partial_a H_{\hat{0}} \hat{0}) = \Delta H_{\hat{0}} \hat{0}. \quad (20)$$

Это показывает, что рассмотренный предельный случай тетрадного уравнения Эйнштейна, встречающийся, например, в [9], соответствует предельному случаю обобщенных преобразований Лоренца (17) и условию вырождения метрических тензоров  $n_{\mu\nu}$  и  $N^{\mu\nu}$  при сохранении для них ранга матриц  $n_{kn}$  и  $N^{kn}$ .

Криволинейная система координат может быть установлена и в СТО. Поскольку тогда пространство псевдоевклидово, то из (18) или из (14) следует, что  $H_{\hat{0}\hat{0}} = 0$ , т. е. что при принятых условиях в рамках СТО невозможно установление координатной системы с искривленной временной осью координат.

Выше предполагалось, что  $n_{00} = n_{00}(x^\nu)$ . Интересный случай указанного совпадения ранга предельных значений метрических тензоров СТО и ОТО имеет место в полугеодезической системе координат при следующих условиях. Пусть в этой системе

$$ds^2 = -dt^2 + \frac{1}{c^2} \gamma_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta, \quad g_{\alpha\beta} = \frac{1}{c^2} \gamma_{\alpha\beta}. \quad (21)$$

Пусть также

$$g^{\mu\nu} g_{\mu\sigma} = \frac{1}{c^2} \delta^\nu_\sigma, \quad N^{\mu\nu} n_{\nu\sigma} = \frac{1}{c^2} \delta^\mu_\sigma, \quad (22)$$

а  $\gamma_{\alpha\beta}$  диагонально и не зависит от  $c$ . Тогда

$$n_{\mu\nu} = \lim_{c \rightarrow \infty} g_{\mu\nu} = \text{diag}(-1000), \quad \lim_{c \rightarrow \infty} g^{\mu\nu} = N^{\mu\nu} \text{diag} \left( 0 \frac{1}{\gamma_{11}} \frac{1}{\gamma_{22}} \frac{1}{\gamma_{33}} \right). \quad (23)$$

Возможны следующие выводы:

$$n_{00} = \lim_{c \rightarrow \infty} g_{00} = H^{\hat{0}}_{\hat{0}} H^{\hat{0}}_{\hat{0}} n_{\hat{0}\hat{0}} = -H^{\hat{0}}_{\hat{0}} H^{\hat{0}}_{\hat{0}} = -1, \quad (24)$$

т. е. возможно

$$H^{\hat{0}}_{\hat{0}} = 1. \quad (25)$$

Если также

$$H_{\alpha}^{\hat{0}} = 0, \quad (26)$$

то из соотношения

$$g_{\alpha\beta} = \frac{1}{c^2} \gamma_{\alpha\beta} = H_{\alpha}^{\hat{0}} H_{\beta}^{\hat{0}} n_{\hat{0}\hat{0}} + H_{\alpha}^a H_{\beta}^b n_{ab} \quad (27)$$

находим, что в пределе можно принять:

$$\gamma_{\alpha\beta} = H_{\alpha}^a H_{\beta}^b \eta_{ab} \neq 0, \quad \eta_{ab} = \text{diag}(111). \quad (28)$$

Это в согласии с [4] приводит к трехмерному евклидову интервалу, и тогда сведения об уравнениях поля должны извлекаться из свойств самой полугеодезической системы координат.

При принятых ограничениях, как видно из (19), евклидовость геометрии трехмерного пространства является неизбежным следствием требований  $c \rightarrow \infty$ . Интересно исследовать возможность такого случая с несовпадающими рангами предельных значений метрических тензоров СТО и ОТО, когда устранение в пределе  $c \rightarrow \infty$  относительности одновременности, вносимой в ОТО локальной справедливостью СТО, не влечет за собой перехода к евклидовой геометрии трехмерного пространства.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Фок В. А. Теория пространства, времени и тяготения, 1961.
2. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теория поля, 1962.
3. Керес Х. П. ЖЭТФ, **46**, 1741, 1964.
4. Керес Х. П. ЖЭТФ, **48**, 1319, 1965.
5. Dautcourt G. Acta phys. polon., **25**, № 5, 1964.
6. Navas P. Rev. Mod. phys., **36**, 938, 1964.
7. Иваницкая О. С. Весті АН БССР, сер. фіз.-мат. навук, № 1, 1966.
8. Румер Ю. Б. Исследования по 5-оптике, 1956.
9. Родичев В. И. Докт. дис., 1963.

Поступило в редакцию 23.VII 1965

## ХРОНИКА

ГОДИЧНОЕ ОБЩЕЕ СОБРАНИЕ  
АКАДЕМИИ НАУК БССР

24—26 февраля 1966 г. состоялось годовичное Общее собрание Академии Наук БССР.

24 февраля на общих собраниях Отделений были заслушаны и обсуждены доклады академиков-секретарей Отделений о важнейших результатах работы за 1965 г.

25 февраля годовичное Общее собрание АН БССР открыл президент АН БССР академик В. Ф. Купревич.

В своем вступительном слове академик В. Ф. Купревич отметил, что за последние годы в структуре Академии наук произошли существенные изменения. Создан ряд новых институтов, крупных самостоятельных отделов, предполагается реорганизовать некоторые отделы в институты. Значительно выросли научные кадры Академии.

Академик В. Ф. Купревич остановился на некоторых результатах деятельности Академии наук за прошедший год.

Институтами Отделения физико-математических наук внесли значительный вклад в теорию дифференциальных уравнений, в теорию методов расчета оптических квантовых генераторов, в область плазмы и высокомолекулярных соединений.

Вычислительным центром решено свыше 600 задач разного характера, имеющих огромное значение для нашей экономики.

Институтами Отделения физико-технических наук успешно проводятся исследования в области массо- и теплопереноса, атомной энергетики, физики пластичности, технической кибернетики, в области применения полимерных материалов.

Важные для теории и практики результаты принесла многолетняя работа биологов. Ими проведена классификация лесов Белоруссии, изучены и разработаны мероприятия по осушению болот, что будет иметь большое значение в производственном освоении природных ресурсов Полесья и в целом республики.

Академик В. Ф. Купревич отметил, что в течение семилетия из года в год увеличивалось количество хозяйственных работ, которые в настоящее время составляют существенную часть бюджета институтов.

Далее президент остановился на проекте «Директив XXIII съезда КПСС по пятилетнему плану развития народного хозяйства СССР на 1966—1970 годы», где указы-

вается на необходимость ускорить научно-технический прогресс на основе широкого развития научных исследований и быстрого использования их результатов в производстве.

Большое значение придается развитию исследований в области технической и прикладной математики, дальнейшему изучению космического пространства с целью практического использования результатов этих исследований, расширению научных работ по изучению земной коры и закономерностей размещения месторождений полезных ископаемых для лучшего использования природных ресурсов, развитию исследований в области химии в целях разработки процессов получения новых материалов. Предусматривается дальнейшее изучение процессов, протекающих в живой материи, селекции растений и животных с целью создания высокопродуктивных пород животных, разработки проблем генетики.

Большая работа предстоит Институту экономики, так как в проекте Директив науки указывается, что в области экономических наук необходимо разработать теорию планового ведения народного хозяйства, определить пути и методы повышения эффективности общественного производства.

Много внимания уделяется повышению эффективности научных исследований и ускорению их внедрения, необходимости сосредоточения основных сил на те задачи, решение которых является наиболее необходимым и эффективным для развития народного хозяйства.

Президент отметил далее, что в проекте Директив говорится о повышении роли науки в развитии колхозно-совхозного производства, о расширении исследований в области биологии, о повышении ответственности научно-исследовательских учреждений за научную обоснованность их рекомендаций, за эффективность внедрения научных достижений.

Большие задачи стоят перед Академией по проблеме освоения Полесской низменности. В последнее время при Академии создается междуведомственный Совет по проблеме Полесья, который обязан координировать всю научно-исследовательскую работу по данной проблеме. Таким образом, на Академию возлагается большая ответствен-

ность за решение проблемы освоения природных ресурсов Полесской низменности.

Академик В. Ф. Купревич подчеркнул, что ученым предоставляются исключительно благоприятные условия для научно-исследовательской работы, и выразил уверенность, что поставленные перед учеными задачи будут выполнены.

Присутствовавшие на Общем собрании почтили вставанием память скончавшихся в 1965 г. академиков АН БССР А. Р. Жебрака, Н. И. Гращенко, членов-корреспондентов АН БССР П. С. Пищимука, Н. М. Замятина.

Затем слово для доклада «О научно-организационной деятельности Академии наук БССР в 1965 г.» было предоставлено Главному ученому секретарю Президиума АН БССР академику АН БССР Ф. П. Винокурову.

В своем докладе академик Ф. П. Винокуров отметил важнейшие вопросы, обсуждавшиеся на годичном Общем собрании Академии наук СССР, остановился на задачах, поставленных перед Советской научкой решенными октябрьского и ноябрьского Пленумов ЦК КПСС 1964 г., мартовского и сентябрьского Пленумов ЦК КПСС 1965 г., а также рассказал о результатах исследований, выполненных учеными АН БССР в 1965 г. самостоятельно и в содружестве с научными учреждениями других союзных республик. Академик Ф. П. Винокуров отметил, что по плану научно-исследовательских и опытных работ в АН БССР в 1965 г. разрабатывалось 210 тем по 54 проблемам, из них 22 темы по Государственному плану развития народного хозяйства СССР и 132 темы по плану развития народного хозяйства БССР. Завершены исследования по 113 темам, план научных исследований выполнен.

В Институте математики найдены новые решения в области обыкновенных дифференциальных уравнений, составлены систематические таблицы для численного обращения преобразований Лапласа и Фурье, составлены вспомогательные таблицы для интегрирования функций, имеющих логарифмические и степенные особенности. Разработаны алгоритмы трансляции с алгоритмического языка «Алгол-60» на язык «Минск-2», составлен и отлажен транслятор для реализации этих алгоритмов.

В Институте физики завершена разработка методов инженерного расчета энергетических характеристик твердотельных и газовых оптических квантовых генераторов и даны рекомендации по выбору оптимальных условий их работы; проведен теоретический анализ различных способов генерации моноимпульсов; построена феноменологическая теория смещения электромагнитных волн нелинейными одноосными кристаллами, проведен расчет оптимальных параметров и даны оценки эффективного преобразования лазерного излучения на основе вынужденного комбинационного рассеяния; развита эффективная методика расчета

процессов электромагнитных взаимодействий мезонов с учетом их внутренней электромагнитной структуры.

В Институте физики твердого тела и полупроводников разработан метод расчета потенциала в кристаллах; изучено распределение электронных плотностей в нитридах алюминия, индия и др. и определена степень ионности этих соединений. Разработана методика получения ферромагнитных пленок с прямоугольной петлей гистерезиса трехкомпонентных сплавов железо—никель—кобальт. Установлена связь между среднеквадратичными динамическими смещениями и электропроводностью сплавов ниобий—ванадий.

В Институте тепло- и массообмена построена полная математическая теория сопряженных задач, возникающих при точной формулировке высококонденсивного нестационарного и стационарного теплообмена. Впервые построены сколько угодно точные граничные условия для задачи теплопроводности в обтекаемом теле, отражающие влияние потока жидкости. Получены данные о распределении концентрации веществ продуктов реакции и инертных компонентов в пограничном слое для случая подачи горючей жидкости через пористое тело. Создан ряд конструкций плазматронов мощностью до 3000 квт и к. п. д. до 0,8, которые могут быть с успехом использованы в химической промышленности. Предложен и создан принципиально новый метод сушки нарезанных овощей, пекарских дрожжей, льняной тресты. Разработан новый метод термообработки железобетонных изделий в переменном магнитном поле.

В Физико-техническом институте разработаны научно обоснованные рекомендации для промышленности по конструированию и применению высокопроизводительного обкатного инструмента, предложен принципиально новый метод механической обработки металлов ротационным режущим инструментом, разработана новая жаростойкая сталь Х17Н13ЮЗ с пониженным содержанием никеля.

В Институте технической кибернетики разработаны методы поиска оптимальных параметров, алгоритмы и программы для автоматизации некоторых этапов проектирования и конструирования машин, а также для проектирования технологических процессов.

В Отделе физики неразрушающего контроля разработан ряд новых приборов для контроля прочности стальных деталей и конструкций для различных отраслей машиностроительной промышленности.

Отделом механики полимеров завершена работа по созданию принципиально нового комплексного технологического процесса получения деталей типа «звездочка» и шестерня методом радиальной штамповки зубчатого венца вместо фрезерования, неизвестного ранее в практике отечественного и зарубежного машиностроения.

Исследования **Лаборатории электроники** по управлению и моделированию электронных процессов привели к созданию специального электронинтегратора для инженерных расчетов токопрохождения в электронных приборах с учетом пространственного заряда. Получены важные результаты по электронной микроскопии, масс-спектрографии, спектроскопии, электронной технике.

Исследования **Института ядерной энергетики** ведутся по двум направлениям:

1. Изыскание радиационно-химических методов получения производственных процессов. 2. Изучение свойств теплоносителей.

В отчетном году на реакторе пущены в эксплуатацию петлевые установки, позволяющие в лабораторном и укрупненном масштабах изучать радиационно-химические процессы. Пущена в эксплуатацию опробование петлевая установка для изучения радиационно-термического крекинга нефтепродуктов. По теплофизике новых теплоносителей в ИЯЭ АН БССР получены новые данные по диссоциирующим газам как теплоносителям для энергетических установок.

В **Институте физико-органической химии** проводились исследования по термическому разложению твердых веществ, автоокислению органических соединений, окислению эфиров стеариновой кислоты, дейтероводному обмену в этилене и метане, в результате чего планируется построить промышленную установку по получению каинфоли с применением новых катализаторов. Предполагается получить полупромышленные партии синтетических моноциклических терпенов для использования их при получении ценных присадок к смазочным маслам.

В **Институте общей и неорганической химии** разработан новый метод щелочно-кислотной активации глины, позволяющей на основе природных алюмосиликатов получить катализаторы крекинга. На Полоцком заводе стекловолокна проведена опытно-промышленная выработка стекловолокна и стеклотканей из безборного бесщелочного стекла. Получен новый состав стекла 402-5, по своим характеристикам не уступающий зарубежным образцам. Предложен способ получения нового вида радиационно-защитных материалов с улучшенными свойствами. Методом термического пиролиза в вакууме получены высокотемпературоустойчивые металлуглеродные волокнистые материалы, обладающие повышенной прочностью, долговечностью, химической стойкостью и гибкостью.

**Лабораторией геохимических проблем** установлено большое значение соленосных толщ в распределении геотермальных полей Полесья, что имеет важное значение в выявлении и оценке нефтеносности геологических структур. Даны рекомендации по применению метода магнитотеллурического зондирования в комплексе геофизических работ на нефть в Припятской впадине и

выполнены опытно-методические работы на Речицкой нефтеносной площади. Получены новые данные по литолого-геохимической характеристике четвертичных отложений и грунтовых вод Полесья, имеющие важное значение для мелиорации и сельскохозяйственного освоения этих районов республики. Выявлен аномальный годовой ход магнитной возмущенности с одним максимумом в июле и минимумом в ноябре, что вносит изменение в классическое представление о решающем влиянии на ход магнитной активности равнодействующих положений Земли и Солнца.

В **Институте экспериментальной ботаники и микробиологии** найдены новые места произрастания редких и ценных видов растений, подлежащих охране; разработана типологическая классификация черноольховых лесов в зависимости от типа леса, обводненности и проточности вод, даны нормы осушения. Успешно продолжались работы по фотосинтезу.

В **Институте физиологии** получен ряд новых данных, расширяющих и углубляющих проблему кортико-висцеральных взаимоотношений, а также по проблеме «Радиобиология», где показана роль гормонов коры надпочечников в возникновении метаболической реакции организма на радиационные воздействия малыми дозами.

В **Институте генетики и цитологии** выведены самоопыленные линии кукурузы, отличающиеся высокой комбинационной способностью, скороспелостью и холодостойкостью. Рядом испытаний подтверждена высокая эффективность выведенных в институте триплоидных гибридов.

**Центральным ботаническим садом** внедрены в практику зеленого строительства первые белорусские сорта гладиолусов, сирени и георгин.

**Отдел зоологии и паразитологии** успешно вел работы по экологии вредителей, по ихтиологии.

**Отделом физиологии и систематики низших растений** впервые в Белоруссии выявлены и изучены вирусные болезни томатов и огурцов в условиях открытого и закрытого грунта. Получены новые данные по воздействию грибной и вирусной инфекции на пигментный состав растений и впервые в Советском Союзе установлен количественный состав и динамика свободных аминокислот в ряде минеральных и торфяно-болотных почв республики.

**Лабораторией биофизики и изотопов** совместно с Институтом физики АН БССР впервые измерен новый физический параметр белков — время жизни возбужденного состояния флуоресценции.

**Сектором геронтологии** изучены взаимодействия сигнальных систем и двигательного анализатора у лиц пожилого возраста, что позволило выявить ряд различных взаимоотношений между этими системами, складывающихся в процессе старения.

В **Институте экономики** разработан и

внесен ряд предложений по совершенствованию экономических отношений между промышленными предприятиями и органами управления, укреплению внутривзаводского хозрасчета. Комиссия Госплана БССР, разрабатывающая предложения по этому вопросу по поручению Госплана СССР, приняла за основу рекомендации Института.

В Институте философии и права завершены исследования по теме «Гражданско-правовые средства обеспечения и улучшения качества продукции и строительных работ», закончена разработка темы «Социальная структура советского общества».

В Институте истории завершена работа по второму тому пятитомной «Истории БССР».

Получены богатые материалы о культуре славян в VI—XIII вв. В верховьях Березины открыты новые ранее не известные славянские поселения, относящиеся ко второй половине первого тысячелетия.

В Институте литературы им. Я. Купалы завершена большая работа над капитальным научным трудом «История белорусской дооктябрьской литературы» в двух томах. Наиболее существенным результатом исследований следует считать написание работы «Белорусская литература в семье братских литератур народов СССР».

Институтом языкознания им. Я. Коласа завершены исследования по темам «Фонетическая система белорусских народных говоров», «Неударенный вокализм в белорусских народных говорах», а также по теме «Грамматика белорусского языка», том II. Подготовлен двухтомный коллективный труд «Лексика Полесья».

Ряд научных исследований, проводимых в институтах по Государственному плану развития народного хозяйства СССР, имеет непосредственный выход в производство. Однако не менее эффективной формой реализации результатов законченных работ являются исследования по хозяйственным договорам. В 1964 г. выполнено хозяйственных работ на сумму 1126 тыс. руб., в 1965 г.—2227 тыс. руб., а на 1966 г. заявки на заключение договоров составляют 3315 тыс. руб. Удельный вес хозяйственных работ по отношению к бюджету составит по Отделению физико-технических наук 62%, по Отделению физико-математических наук—41%, по Отделению химических наук—16%, по Отделению биологических наук—6%.

Обращает на себя внимание широкий территориальный диапазон внедрения законченных работ. Институты Отделения физико-технических наук имеют связь с сотнями предприятий и заводов Советского Союза, где внедряются результаты их хозяйственных работ. Такую широкую связь можно объяснить исключительной актуальностью тематики, которую ведут институты.

В 1965 г. значительно улучшилась работа по организации научно-технической информации о деятельности научных учре-

ждений АН БССР. Институтами и Отделами АН БССР совместно с другими организациями проведен ряд всесоюзных и республиканских совещаний и конференций, в работе которых принимали участие видные советские и зарубежные ученые. Например, были проведены 15-я Всесоюзная конференция по ядерной спектроскопии, 1-й Всесоюзный симпозиум по нелинейной оптике, 3-е Всесоюзное совещание по проблеме химической связи в полупроводниках, Всесоюзный симпозиум по устойчивости растений против полегания и др.

**Редакционно-издательская деятельность.** В 1965 г. научными учреждениями АН БССР опубликовано 1374 научные работы. Количественную сторону изданной научной продукции можно охарактеризовать следующим образом:

Отделение общественных наук—262 работы объемом 569,4 п. л., в том числе 19 монографий.

Отделение биологических наук—375 работ объемом 386,7 п. л., в том числе 14 монографий.

Отделение физико-технических наук—323 работы объемом 313 п. л., в том числе 10 монографий.

Отделение физико-математических наук—271 работа объемом 222 п. л., в том числе 2 монографии.

Отделение химических наук—143 работы объемом 123,5 п. л., в том числе 4 монографии.

Издательством «Наука и техника» в отчетном году было издано 1992,9 учетно-издательских листа, или 94,6% к плану, а по тиражу 80,5%. Дотация издательству была несколько снижена, однако все ещё продолжает быть весьма значительной. В АН БССР в 1965 г. издавалось 10 журналов.

Типография в основном выполнила свой план, но по улучшению качества выпускаемой продукции необходимо провести большую работу. В типографии недостает площадей для установки нового оборудования, позволяющего увеличить набор сложного текста научных книг. Президиум рассмотрел этот вопрос и утвердил предложение об увеличении площади типографии, чтобы довести издание в ближайшие годы до 5 тыс. листов в год.

**Фундаментальная библиотека АН БССР** на 1 января 1965 г. насчитывала 1213857 библиотечных единиц. Из них иностранной литературы 285723 библиотечные единицы. Большую работу проводит библиотека по библиографии изданий АН БССР. Книгообмен велся с 557 библиотеками и учреждениями, в том числе международный книгообмен с 302 учреждениями 37 стран.

**Координация научной деятельности.** В 1965 г. в АН БССР работало 24 научных проблемных совета, в том числе 5 по физико-математическим и физико-техническим наукам, 8 по биологическим, 3 по химическим, 8 по общественным наукам. Значи-

тельных улучшений в деятельности Совета не произошло. Менее всего налажена работа по координации физико-технических наук. Научные советы по проблемам мало помогали вузам, недостаточно привлекали их к разработке комплексных исследований. Поэтому научно-исследовательская работа в вузах продолжает оставаться раздробленной, мелкой и малоэффективной.

В связи с усилением аппарата Совета по координации деятельность его должна значительно улучшиться.

**Подготовка научных кадров.** На 1 января 1966 г. в учреждениях АН БССР работало 4655 чел. Численность научных сотрудников составляет 1894 чел., или на 273 чел. больше, чем в 1964 г. Из них докторов наук — 59 и кандидатов наук — 472. Количество докторов наук за отчетный год увеличилось на 7 чел. и кандидатов наук на 68 чел. Из 49 академиков и 34 членов-корреспондентов на штатных должностях работает 25 академиков и 12 членов-корреспондентов. Сотрудники, имеющие ученую степень, составляют 28,3%.

В 1965 г. закончили аспирантуру 134 чел., в том числе 100 чел. с отрывом от производства и 34 без отрыва от производства. Из них закончили с защитой диссертаций 15 чел., подготовили диссертации к защите 60 чел. и отчислены из аспирантуры по истечении срока обучения 59 чел. Аспирантами и научными сотрудниками защищены 75 кандидатских диссертаций. 6 человек защитили диссертации на соискание ученой степени доктора наук.

На 15 декабря 1965 г. в аспирантуре обучалось 641 чел., в том числе с отрывом от производства 395 чел. и без отрыва 246.

**Международные научные связи АН БССР** были направлены на изучение результатов научных исследований зарубежных стран. В отчетном году за границу выезжало 36 человек, из них 16 для изучения научных достижений, чтения лекций и оказания технической помощи и 20 для участия в работе международных и национальных научных конгрессов, конференций и совещаний. По плану научного сотрудничества на условиях эквивалентного обмена в социалистические страны выезжало 9 научных сотрудников, 40 зарубежных ученых и специалистов посетили научные учреждения нашей Академии.

Академик Ф. П. Винокуров коснулся в своем докладе и вопросов обеспечения научных исследований, т. е. вопросов финансирования, капитального строительства, материально-технического снабжения, работы экспериментального завода и т. д. Было отмечено, что в отчетном году упорядочена заработная плата для работников издательства, библиотеки, домоуправлений и центрального аппарата. Подготовлен материал для упорядочения заработной платы

работников, не имеющих ученых степеней.

План капитального строительства выполнен на 92%. Жилищное строительство выполнено лишь на 78%.

В заключение академик Ф. П. Винокуров отметил, что в Академии проделана большая научно-организационная работа, расширен и укрупнен масштаб научно-исследовательских работ, создано много институтов, ряд из них занимает ведущее место. Материально-техническая база продолжает расти и улучшаться, выросли и продолжают расти кадры молодых ученых.

Для того чтобы успешно решать задачи, поставленные перед учеными, надо существенно повысить эффективность научных исследований, ускорить процесс внедрения, укрепить и оснастить новейшим научным лабораторным оборудованием наши институты, добиваться в решающих направлениях науки и техники высокого уровня.

Далее академик Ф. П. Винокуров выразил надежду, что в недалеком будущем будут расширены права директоров институтов, отменены ограничения на хозяйственные работы, будет улучшен порядок финансирования и усилено материальное стимулирование научных учреждений Академии. Это окажет большую помощь ученым в скорейшем разрешении задач, поставленных перед ними пятилетним планом.

Академик Ф. П. Винокуров выразил уверенность в том, что ученые Академии наук БССР приложат все силы и знания и внесут достойный вклад во всемирное дело построения материально-технической базы коммунизма.

В обсуждении отчета о научной деятельности Академии наук БССР за 1965 г., а также доклада Главного ученого секретаря Президиума приняли участие академики АН БССР Б. И. Степанов, Н. П. Еругин, А. Н. Севченко, Н. Ф. Ермоленко, Б. В. Ерофеев, Н. А. Дорожкин, Д. А. Марков, Н. В. Турбин, член-корреспондент АН СССР В. Н. Авдеев, члены-корреспонденты АН БССР Ф. И. Федоров, П. Е. Прокопов, Н. В. Каменская, доктор экономических наук Ф. С. Мартикевич, кандидаты технических наук К. Г. Горанский, В. А. Белый, кандидат геолого-минералогических наук А. С. Махнач.

Годичное Общее собрание приняло постановление, в котором одобрило отчет о научной деятельности Академии наук БССР за 1965 г. и сделало ряд рекомендаций.

26 февраля на Общем собрании были заслушаны научные доклады:

1. К столетию второго закона термодинамики (к критике теории тепловой смерти Вселенной) (докладчик академик АН БССР Н. Н. Сирота).

2. Проблемы теории и практики проведения хозяйственной реформы в промышленности СССР (докладчик кандидат экономических наук О. Н. Пашкевич).

## З М Е С Т

### МАТЭМАТЫКА

А. Ш. Блох, В. С. Танаев. Многооператорные процессы . . . . .	5
Л. Е. Загорин. О разрешимых группах матриц над телом вещественных кватернионов . . . . .	12
В. А. Емеличев. Регулярность конечно-определенной коммутативной подгруппы . . . . .	23
Н. А. Лепешинский. К вопросу упорядочения обработки деталей . . . . .	31
Р. П. Хацкевич. К теории линий в 4-мерном аффинном пространстве . . . . .	36
А. А. Пальцев. О квадратурной формуле гауссова типа для $\int_0^1 \ln \frac{1}{x} f(x) dx$ . . . . .	42
А. А. Иванов. Пополнения равномерных пространств . . . . .	49
П. И. Монастырный. Метод ортогональной прогонки в случае многоточечной задачи для систем дифференциальных уравнений . . . . .	55

### ФІЗІКА

І. С. Сацункевіч. Аб цяжкіх лептонах . . . . .	63
С. І. Лабко. Камптонаўскае рассеянне палярызаванага святла на часціцы са спінам $1/2-3/2$ . . . . .	66
Г. В. Шышкін. Аб палярызацыйных уласцівасях мяёнаў у працэсах адваротнага $\mu-e$ -распаду . . . . .	76
Э. П. Зеге, С. І. Вайтовіч. Эксперыментальнае даследаванне нелінейнай люмінесцэнцыі плоскапаралельнага слоя . . . . .	83
Л. І. Грачыхін, Я. І. Некрашэвіч. Вымярэнне каэфіцыентаў паглынання аргону на ўдарнай трубе . . . . .	91
А. М. Самсон. Нестацыянарнае свечэнне чатырохузроўневых генератараў святла . . . . .	99
П. Я. Ганіч, І. Ф. Елістратаў, Г. К. Ільіч, І. М. Левін, Т. М. Ламаносава, С. А. Макарэвіч. Апытныя характарыстыкі і параметры светавога поля ў азёрнай вадзе . . . . .	109
А. П. Багданаў, Я. І. Фірсаў. Методыка вымярэння $\gamma$ - $\gamma$ -супадзенняў і вуглавых карэляцый $\gamma$ -праменьняў з рэакцыі $(n, \gamma)$ . . . . .	115

### КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

А. Е. Залесский. Максимальные периодические подгруппы полной линейной группы над полем положительной характеристики . . . . .	121
М. С. Гарашук. О некоторых классах линейных групп . . . . .	124
В. К. Гронский, И. С. Сацункевич. Фотонный распад $\Omega$ -гиперона . . . . .	126
В. И. Белоусова, Э. А. Рудак, Е. И. Фирсов. Радиационный захват тепловых нейтронов ядром $St^{52}$ . . . . .	128
О. С. Иваницкая. Предельный случай обобщенных преобразований Лоренца . . . . .	130

### ХРОНИКА

Годичное Общее собрание Академии наук БССР . . . . .	134
--	-----

## СОДЕРЖАНИЕ

## МАТЕМАТИКА

А. Ш. Блох, В. С. Танаев. Многооператорные процессы . . . . .	5
Л. Е. Загорин. О разрешимых группах матриц над телом вещественных кватернионов . . . . .	12
В. А. Емеличев. Регулярность конечно-определенной коммутативной подгруппы . . . . .	23
Н. А. Лепешинский. К вопросу упорядочения обработки деталей . . . . .	31
Р. П. Хацкевич. К теории линий в 4-мерном аффинном пространстве . . . . .	36
А. А. Пальцев. О квадратурной формуле гауссова типа для $\int_0^1 \ln \frac{1}{x} f(x) dx$ . . . . .	42
А. А. Иванов. Пополнения равномерных пространств . . . . .	49
П. И. Монастырный. Метод ортогональной прогонки в случае многоточечной задачи для систем дифференциальных уравнений . . . . .	55

## ФИЗИКА

И. С. Сацункевич. О тяжелых лептонах . . . . .	63
С. И. Лобко. Комптоновское рассеяние поляризованного света на частице со спином $1/2-3/2$ . . . . .	66
Г. В. Шишкин. О поляризационных свойствах мюонов в процессах обратного $\mu-e$ -распада . . . . .	76
Э. П. Зега, С. И. Войтович. Экспериментальное исследование нелинейной люминесценции плоскопараллельного слоя . . . . .	83
Л. И. Гречихин, Я. И. Некрашевич. Измерение коэффициентов поглощения аргона на ударной трубе . . . . .	91
А. М. Самсон. Нестационарное свечение четырехуровневых генераторов света . . . . .	99
П. Я. Ганич, И. Ф. Елистратов, Г. К. Ильич, И. М. Левин, Т. Н. Ломоносова, С. А. Макаревич. Оптические характеристики и параметры светового поля в озерной воде . . . . .	109
А. П. Богданов, Е. И. Фирсов. Методика измерения $\gamma-\gamma$ -совпадений и угловых корреляций $\gamma$ -лучей из реакции $(n, \gamma)$ . . . . .	115

## КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

А. Е. Залесский. Максимальные периодические подгруппы полной линейной группы над полем положительной характеристики . . . . .	121
М. С. Гарашук. О некоторых классах линейных групп . . . . .	124
В. К. Гронский, И. С. Сацункевич. Фотонный распад $\Omega$ -гиперона . . . . .	126
В. И. Белоусова, Э. А. Рудак, Е. И. Фирсов. Радиационный захват тепловых нейтронов ядром $Ct^{52}$ . . . . .	128
О. С. Иванецкая. Предельный случай обобщенных преобразований Лоренца . . . . .	130

## ХРОНИКА

Годичное Общее собрание Академии наук БССР . . . . .	134
--	-----

AT 04385. Здана ў набор 19/III-66 г. Падпісана да друку 27/V-66 г. Фармат 70×108<sup>1/16</sup>. Фіз. друк. арк. 8,75. Ум. друк. арк. 11,98. Уч. выд. арк. 12,0. Выд. заказ 107.

Друк. заказ 343. Цана 60 к.

Друкарня выдавецтва «Навука і тэхніка» АН БССР і Камітэта па друку пры Савеце Міністраў БССР. Мінск, Ленінскі праспект, 68



## **ВНИМАНИЮ АВТОРОВ**

Статьи, присылаемые авторами в наш журнал, будут приниматься редакцией к печати только при наличии двух экземпляров автореферата, удовлетворяющего указанным ниже требованиям.

### **ИНСТРУКЦИЯ**

**по составлению рефератов для авторов  
отечественных периодических изданий**

Постановлением Совета Министров СССР от 18/IV 1959 г. № 418 и последующим решением Государственного комитета по координации научно-исследовательских работ СССР и Президиума Академии наук СССР редакции научных и научно-технических журналов обязаны представлять в ВИНТИ рефераты публикуемых материалов.

В настоящей инструкции сформулированы требования к содержанию и оформлению рефератов, которыми и следует руководствоваться.

#### *Требования, предъявляемые к реферату*

1. В реферате кратко излагается основное содержание статьи. Реферат должен дать читателю представление о характере освещаемой работы, оригинальности постановки вопроса, методике проведения исследования и его основных результатах.

2. Реферату должно предшествовать библиографическое описание в следующем виде: название статьи, фамилия и инициалы автора, название журнала, где помещается статья. Текст реферата начинается непосредственно с изложения существа работы без повторения заголовка. Форма изложения материала не обязательно должна повторять форму изложения оригинальной статьи.

3. Если оригинал содержит большое количество цифровых данных, их следует обобщить и систематизировать.

4. Средний объем реферата 0,5—2 страницы машинописного текста, отпечатанного через два интервала на белой писчей бумаге обычного формата (30×21) в двух экземплярах с полем 4 см с левой стороны.

5. Таблицы, схемы, графики и пр. могут быть включены в том случае, если они отражают основное содержание работы или сокращают текст реферата. Сообщение о наличии в реферируемой работе таблиц, схем, графиков, фотографий, карт, рисунков необходимо давать в конце реферата. Например, табл. 2, илл. 10.

6. Формулы приводятся только в том случае, если они необходимы для понимания статьи. Громоздкие математические выражения помещать не следует. Формулы следует вписывать четко, не изменяя принятых в оригинале обозначений величин. Формулы и буквенные обозначения вписываются черными чернилами в оба экземпляра.

7. В конце реферата в квадратных скобках указывается название учреждения или предприятия, в которых автор реферируемой работы (если эти данные приводятся в статье) провел работу. Подпись автора и дату написания реферата следует ставить в левом нижнем углу на обоих экземплярах реферата.

60 к.

Индекс  
74846