ВЕСЦІ
АКАДЭМІІ НАВУК БССР

СЕРЫЯ
ФІЗІКА-МАТЭМАТЫЧНЫХ
НАВУК

3

ВЫДАВЕЦТВА „НАВУКА І ТЭХНІКА"

МІНСК 1966

НАВУКА
ТЭХНІКА

ИЗВЕСТИЯ

АКАДЕМИИ НАУК БССР

СЕРИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ
НАУК

№ 3

ИЗДАТЕЛЬСТВО „НАУКА И ТЕХНИКА"

МИНСК 1966

ВЕСЦІ

АКАДЭМІІ НАВУК БССР

СЕРЫЯ
ФІЗІКА-МАТЭМАТЫЧНЫХ
НАВУК

№ 3

ВЫДАВЕЦТВА „НАВУКА І ТЭХНІКА“

МІНСК 1966

ВЕСЦІ АКАДЭМІІ НАВУК БЕЛАРУСКАЙ ССР № 3 1966
СЕРЫЯ ФІЗІКА-МАТЭМАТЫЧНЫХ НАВУК

НГУЕН КОНГ ТУЙ

О СХОДИМОСТИ МЕТОДА ХАРАКТЕРИСТИК

Для численного решения дифференциальных уравнений и систем гиперболического типа с двумя независимыми переменными метод характеристик является, по-видимому, самым естественным. В [1 — 3] рассматривается метод Массо и доказывается его сходимость порядка $O(h)$; h — шаг сетки. Для более точного метода характеристик, изложенного в [5], насколько известно автору, анализа сходимости до сих пор не имеется. В этой заметке доказывается сходимость этого метода по норме порядка $O(h^2)$ в случае системы двух линейных уравнений первого порядка.

§ 1. Рассмотрим задачу Коши для линейной системы

$$\left.\begin{aligned} \alpha_{11} u_x + \alpha_{12} v_x + \beta_{11} u_y + \beta_{12} v_y = f_1 \\ \alpha_{21} u_x + \alpha_{22} v_x + \beta_{21} u_y + \beta_{22} v_y = f_2 \end{aligned}\right\}, \qquad (1)$$

где u, v — искомые, а α_{ij}, β_{ij}, f_i $(i, j = 1, 2)$ — заданные функции x, y. Характеристики линейной системы не зависят от решения, а потому можем предположить, что характеристики, исходящие из равноотстоящих точек начальной кривой, уже построены с достаточно высокой точностью.

Выберем преобразование независимых переменных $(x, y) \to (\xi, \eta)$, с помощью которого начальная кривая перейдет в прямую $\xi + \eta = \mathrm{const}$ (см. [4]), криволинейная сетка преобразуется в равномерную треугольную с шагом h.

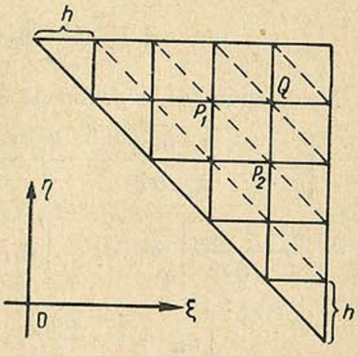


Рис. 1

Дифференциальные соотношения вдоль характеристик будут иметь вид

$$\left.\begin{aligned} a_{11}(\xi, \eta)\, du_\xi + a_{12}(\xi, \eta)\, dv_\xi = g_1 dx_\xi \\ a_{21}(\xi, \eta)\, du_\eta + a_{22}(\xi, \eta)\, dv_\eta = g_2 dx_\eta \end{aligned}\right\}. \qquad (2)$$

Пусть U, V — приближенные значения u, v; P_1P_2Q — элементарный треугольник сетки (рис. 1), в котором найдены значения $U(P_1)$, $V(P_1)$, $U(P_2)$, $V(P_2)$.

В рассматриваемом методе характеристик для вычисления $U(Q)$, $V(Q)$ система (2) заменяется системой, получающейся интегрированием (2) по правилу трапеций:

$$\frac{1}{2}[a_{11}(P_1) + a_{11}(Q)][U(Q) - U(P_1)] +$$

$$+ \frac{1}{2}[a_{12}(P_1) + a_{12}(Q)][V(Q) - V(P_1)] = l_1, \qquad (3)$$

$$\frac{1}{2}[a_{21}(P_2)+a_{21}(Q)][U(Q)-U(P_2)]+$$

$$+\frac{1}{2}[a_{22}(P_2)+a_{22}(Q)][V(Q)-V(P_2)]=l_2, \tag{3}$$

где $l_1=\int\limits_{P_1Q} g_1 dx_\xi$, $l_2=\int\limits_{P_2Q} g_2 dx_\eta$ считаем вычисленными с достаточно высокой точностью.

Учитывая

$$\int\limits_{P_1Q} a_{11}\,du_\xi=\frac{1}{2}[a_{11}(P_1)+a_{11}(Q)][u(Q)-u(P_1)]-$$

$$-\frac{1}{12}[u(Q)-u(P_1)]^3\frac{\partial^2 a_{11}}{\partial u^2}=\frac{1}{2}[a_{11}(P_1)+a_{11}(Q)][u(Q)-u(P_1)]-$$

$$-\frac{h^3}{12}\left[\frac{u(Q)-u(P_1)}{h}\right]^3\frac{\partial^2 a_{11}}{\partial u^2}$$

и обозначая $U-u$, $V-v$ соответственно через ω_1, ω_2, переходим к уравнениям для погрешностей ω_1, ω_2:

$$\left.\begin{aligned}&[a_{11}(P_1)+a_{11}(Q)][\omega_1(Q)-\omega_1(P_1)]+[a_{12}(P_1)+\\&\qquad+a_{12}(Q)][\omega_2(Q)-\omega_2(P_1)]=m_1'(Q)h^3\\&[a_{21}(P_2)+a_{21}(Q)][\omega_1(Q)-\omega_1(P_2)]+[a_{22}(P_2)+\\&\qquad+a_{22}(Q)][\omega_2(Q)-\omega_2(P_2)]=m_2'(Q)h^3\end{aligned}\right\}. \tag{4}$$

Уравнения (4) перепишем в виде

$$\left.\begin{aligned}&\left[a_{11}-\frac{h}{2}\frac{\partial a_{11}}{\partial\xi}+\frac{h^2}{4}\frac{\partial^2 a_{11}}{\partial\xi^2}\right]_Q\omega_1(Q)+\left[a_{12}-\frac{h}{2}\frac{\partial a_{12}}{\partial\xi}+\right.\\&\left.+\frac{h^2}{4}\frac{\partial^2 a_{12}}{\partial\xi^2}\right]_Q\omega_2(Q)=\left[a_{11}+\frac{h}{2}\frac{\partial a_{11}}{\partial\xi}+\frac{h^2}{4}\frac{\partial^2 a_{11}}{\partial\xi^2}\right]_{P_1}\omega_1(P_1)+\\&\qquad+\left[a_{12}+\frac{h}{2}\frac{\partial a_{12}}{\partial\xi}+\frac{h^2}{4}\frac{\partial^2 a_{12}}{\partial\xi^2}\right]_{P_1}\omega_2(P_1)+m_1(Q)h^3\\&\left[a_{21}-\frac{h}{2}\frac{\partial a_{21}}{\partial\eta}+\frac{h^2}{4}\frac{\partial^2 a_{21}}{\partial\eta^2}\right]_Q\omega_1(Q)+\left[a_{22}-\frac{h}{2}\frac{\partial a_{22}}{\partial\eta}+\right.\\&\left.+\frac{h^2}{4}\frac{\partial^2 a_{22}}{\partial\eta^2}\right]_Q\omega_2(Q)=\left[a_{21}+\frac{h}{2}\frac{\partial a_{21}}{\partial\eta}+\frac{h^2}{4}\frac{\partial^2 a_{21}}{\partial\eta^2}\right]_{P_2}\omega_1(P_2)+\\&\qquad+\left[a_{22}+\frac{h}{2}\frac{\partial a_{22}}{\partial\eta}+\frac{h^2}{4}\frac{\partial^2 a_{22}}{\partial\eta^2}\right]_{P_2}\omega_2(P_2)+m_2(Q)h^3\end{aligned}\right\}, \tag{5}$$

$[\ldots]_\lambda$ $(\lambda=Q,\ P_1,\ P_2)$ означает, что выражение в квадратных скобках берется в точке λ.

Введем векторы и матрицы:

$$\omega = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{pmatrix}, \qquad m = \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \end{pmatrix},$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \qquad \partial A = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial a_{11}}{\partial \xi} & \dfrac{\partial a_{12}}{\partial \xi} \\ \dfrac{\partial a_{21}}{\partial \eta} & \dfrac{\partial a_{22}}{\partial \eta} \end{vmatrix}, \qquad \partial^2 A = \partial(\partial A), \qquad (6)$$

$$B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

и запишем (5) в матричной форме

$$\left(A - \frac{h}{2} \partial A + \frac{h^2}{4} \partial^2 A \right)_Q \omega(Q) = \left(B + \frac{h}{2} \frac{\partial B}{\partial \xi} + \frac{h^2}{4} \frac{\partial^2 B}{\partial \xi^2} \right)_{P_1} \omega(P_1) +$$

$$+ \left(C + \frac{h}{2} \frac{\partial C}{\partial \eta} + \frac{h^2}{4} \frac{\partial^2 C}{\partial \eta^2} \right)_{P_2} \omega(P_2) + h^3 m(Q). \qquad (7)$$

Обозначим

$$A - \frac{h}{2} \partial A + \frac{h^2}{4} \partial^2 A = M, \qquad M\omega = z. \qquad (8)$$

При достаточно малом h $\det M \neq 0$, $\omega = M^{-1} z$.

Из (6) — (8) следует

$$z(Q) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} z(P_1) + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} z(P_2) + h \frac{\partial B(P_1)}{\partial \xi} M^{-1}(P_1) z(P_1) +$$

$$+ h \frac{\partial C(P_2)}{\partial \eta} M^{-1}(P_2) z(P_2) + h^3 m(Q), \qquad (9)$$

или

$$z(Q) = S(P_1) z(P_1) + T(P_2) z(P_2) + h^3 m(Q), \qquad (10)$$

где

$$S(P_1) = \begin{pmatrix} 1 + h\alpha(P_1) & h\beta(P_1) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad T(P_2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ h\gamma(P_2) & 1 + h\delta(P_2) \end{pmatrix}, \qquad (11)$$

$\alpha(P_1)$, $\beta(P_1)$, $\delta(P_2)$, $\gamma(P_2)$ — некоторые величины, зависящие от рассматриваемых точек и h.

Введем матрицы:

$$S = \begin{pmatrix} \mu & \nu h \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad T = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \nu h & \mu \end{pmatrix}, \qquad (12)$$

$$\left. \begin{aligned} \mu &= \max(1 + |\alpha| h, \quad 1 + |\delta| h) \\ \nu h &= \max(|\beta| h, \quad |\gamma| h) \end{aligned} \right\}, \qquad (13)$$

причем max берется по всем узлам сетки рассматриваемой области.

§ 2. Рассмотрим распространение погрешности при нахождении неизвестных функций по формулам (3). При вычислении погрешность накапливается слой за слоем за счет произведений некоммутативных операторов S и T (см. (10)). Каждое такое произведение охарактеризуем двумя числами: степенью p и числом чередования букв q $(0 \leqslant q \leqslant p-1)$.

Например, для произведений S^4, S^2TS, TS^3, $TSTS$ $p=4$, а $q=0$; 2; 1; 3 соответственно. Пусть Π_p^q обозначает произведение общего вида со степенью p, числом чередования букв q. Можно показать,

$$\Pi_p^q = \mu^{p-1-q}(\nu h)^q \sigma, \tag{14}$$

где матрица σ принимает один из видов:

$$\begin{pmatrix} \mu & \nu h \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \nu h & \mu \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \nu h & \mu \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \mu & \nu h \end{pmatrix}. \tag{15}$$

Пусть точка Q, в которой разыскивается погрешность, находится на $(n+2)$-ом слое, а предшествующие ей точки расположены, как изображено на рис. 2.

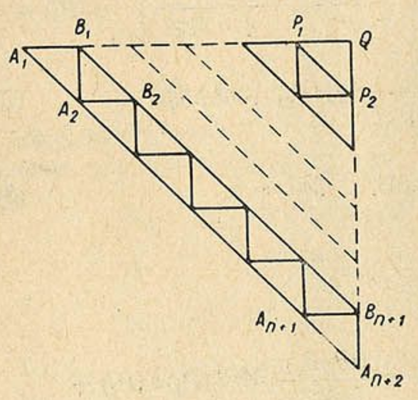


Рис. 2

Допустим для простоты, что начальные условия задаются точно. Тогда в точках $B_1, B_2, \ldots, B_{n+1}$ $z = h^3 m$ (Bi).

Для векторов X с элементами x_1, x_2 введем

$$\|X\| = |x_1| + |x_2|.$$

Применяя рекуррентно (10) и учитывая (12), получаем

$$\|z(Q)\| \leqslant Kh^3\|m\|, \tag{16}$$

где K означает сумму

$$\begin{aligned} K = (&\|\underbrace{SSS\ldots SS}_{n+1 \text{ раз}}\| + \|SSS\ldots ST\| + \\ &+ \|SSS\ldots TS\| + \|SSS\ldots TT\| + \ldots + \\ &+ \|TSS\ldots SS\| + \|TSS\ldots ST\| + \ldots + \\ &+ \|TTT\ldots TS\| + \|TTT\ldots TT\|) + \\ &+ (\|\underbrace{SS\ldots SS}_{n \text{ раз}}\| + \|SS\ldots ST\| + \ldots + \|TT\ldots TS\| + \|TT\ldots TT\|) + \\ &+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &+ (\|SS\| + \|ST\| + \|TS\| + \|TT\|) + \\ &+ (\|S\| + \|T\|) + \\ &+ 1. \end{aligned} \tag{17}$$

Для всех видов (15) $\|\sigma\| = \mu$. Используя (14) — (17), имеем

$$\|z(Q)\| \leqslant (2k\|\sigma\| + 1)h^3\|m\|, \tag{18}$$

где

$$k = \mu^n + n\mu^{n-1}(\nu h) + \frac{n(n-1)}{2}\mu^{n-2}(\nu h)^2 + \ldots + n\mu(\nu h)^{n-1} + (\nu h)^n +$$

$$+ \mu^{n-1} + (n-1)\mu^{n-2}(\nu h) + \frac{(n-1)(n-2)}{2}\mu^{n-3}(\nu h)^2 + \ldots +$$

$$+ (n-1)\mu(\nu h)^{n-2} + (\nu h)^{n-1} +$$
$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+ \mu^2 + 2\mu(\nu h) + (\nu h)^2 +$$
$$+ \mu + \nu h +$$
$$+ 1. \tag{19}$$

Условимся в (13) считать $\mu = 1 + \alpha h$. Тогда

$$k = \sum_{i=0}^{n} (\mu + \nu h)^i = \frac{[1 + (\alpha + \nu) h]^{n+1} - 1}{(\alpha + \nu) h},$$

$$\lim_{h \to 0} hk\mu = \frac{1}{\alpha + \nu} [e^{(\alpha+\nu)\tau} - 1], \tag{20}$$

где $h(n+1) = \tau = A_1 Q$.

Учитывая (18) и (20), получаем

$$\| z(Q) \| \leqslant \frac{2}{\alpha + \nu} [e^{(\alpha+\nu)\tau} - 1] h^2 \| m \| + h^3 \| m \|,$$

откуда следует сходимость метода порядка $O(h^2)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Veidinger L. MTA. Mat. Kutató Intez., 6, 323—331, 1961.
2. Veidinger L. MTA. Mat. Kutató Intez., 7, 273—281, 1962.
3. Courant R., Isaacson E., Rees M. Comm. Pure Appl. Mathem., 5, 243—255, 1952.
4. Вазов В., Форсайт Д. Разностные методы решения дифференциальных уравнений в частных производных. М., 1963.
5. Березин И. С., Жидков Н. П. Методы вычислений, т. 2. М., 1960.

Поступило в редакцию 12.IV 1966

А. Х. ТУРЕЦКИЙ

КОНЕЧНО-РАЗНОСТНЫЕ АНАЛОГИ ЗАДАЧИ АХИЕЗЕРА — КРЕЙНА И ФАВАРА

Ж. Фавар [1, 2] и независимо от него Н. И. Ахиезер и М. Г. Крейн [3] доказали следующую фундаментальную теорему.

Пусть $E_n(f)$ означает наилучшее приближение периодической функции $f(x)$ с помощью тригонометрических полиномов порядка не выше $n-1$. Пусть далее $W_*^{(r)}$ обозначает класс функций $f(x)$ периода 2π, имеющих абсолютно непрерывную производную порядка $r-1$ и производную r-го порядка, удовлетворяющую там, где она существует, неравенству $|f^{(r)}(x)| \leqslant 1$. Тогда

$$\sup_{f\in W_*^{(r)}} E_n(f) = \frac{K_r}{n^r},$$

где

$$K_r = \frac{4}{\pi}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{(-1)^{\nu(r+1)}}{(2\nu+1)^{r+1}}.$$

Экстремальной, т. е. функцией из класса $W_*^{(r)}$, для которой указанная верхняя грань достигается, является функция

$$f_0(x) = \frac{4}{\pi n^r}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{\sin\left[(2\nu+1)nx - \frac{\pi r}{2}\right]}{(2\nu+1)^{r+1}}.$$

Здесь мы рассмотрим задачу, аналогичную этой задаче Ахиезера — Крейна и Фавара.

Пусть $U_{q,h}$ обозначает класс функций $f(x)$ периода 2π, у которых q-ая конечная разность с шагом h удовлетворяет неравенству

$$\max_{0\leqslant x<2\pi}|\Delta_h^q f(x)| \leqslant h^q,$$

где

$$\Delta_h^q f(x) = \Delta^q f(x) = \Delta_h^{q-1} f(x+h) - \Delta_h^{q-1} f(x) \quad (q = 1, 2, \ldots);$$
$$\Delta_h^0 f(x) = f(x).$$

Требуется определить $\sup\limits_{f\in U_{q,h}} E_m(f)$.

Приводим решение этой задачи в следующих двух случаях: 1) $h = \pi/n$ в предположении, что n/m — число целое; 2) $h = \dfrac{2\pi}{2n+1}$ в предположении, что $\dfrac{2n+1}{m} = 2N+1$ — целое нечетное число и q нечетное.

Для решения нашей задачи понадобятся следующие леммы.

Лемма 1. *Пусть n/m — целое число, $x_k = k\pi/n$ $(k = 0, 1, \ldots, 2n-1)$ и $K(x)$ — четная функция периода 2π, такая, что если обозначить через $\sum\limits_{\nu=0}^{m-1} \xi'_\nu \cos \nu x$ полином, интерполирующий функцию $K(x)$ в нулях функции $\cos mx$ из отрезка $[0, \pi]$, т. е. в точках $\bar{x}_k = \frac{(2k-1)\pi}{2m}$ $(k = 1, \ldots, m)$, то разность*

$$K(x) - \sum_{\nu=0}^{m-1} \xi'_\nu \cos \nu x$$

меняет знак в этих точках и только в них. Тогда

$$\min_{\xi_\nu} \sum_{k=0}^{2n-1} \left| K(x_k) - \sum_{\nu=0}^{m-1} \xi_\nu \cos \nu x_k \right| = \left| \sum_{k=0}^{2n-1} K(x_k) \operatorname{sign} \cos m x_k \right| =$$

$$= \left| \sum_{i=0}^{2m} (-1)^i \sum_{k=k_i+1}^{k_{i+1}} K(x_k) \right|,$$

где $k_0 = -1$; $k_{2m+1} = 2n-1$; $k_i = \left[\frac{(2i-1)n}{2m}\right]$ $(i = 1, 2, \ldots, 2m)$. В частности, если $n/m = 2N$ — целое четное число, то $k_i = (2i-1)N$ $(i = 1, 2, \ldots, 2m)$, а если $n/m = 2N+1$ — целое нечетное число, то $k_i = (2N+1)i - N - 1$ $(i = 1, 2, \ldots, 2m)$.

Лемма 2. *Пусть $n/m = l$ — целое число, $\varphi_k = \frac{(2k+1)\pi}{2n}$ $(k = 0, 1, \ldots, 2n-1)$ и $K(\varphi)$ — нечетная функция периода 2π, такая, что если обозначить через $\sum\limits_{\nu=1}^{m-1} \xi'_\nu \sin \nu\varphi$ полином, интерполирующий функцию $K(\varphi)$ в нулях функции $\sin m\varphi$ из интервала $(0, \pi)$, т. е. в точках $\bar{\varphi}_k = k\pi/m$ $(k = 1, 2, \ldots, m-1)$, то разность $K(\varphi) - \sum\limits_{\nu=1}^{m-1} \xi'_\nu \sin \nu\varphi$ меняет знак в этих точках и только в них. Тогда*

$$\min_{\xi_\nu} \sum_{k=0}^{2n-1} \left| K(\varphi_k) - \sum_{\nu=1}^{m-1} \xi_\nu \sin \nu\varphi_k \right| = \left| \sum_{k=0}^{2n-1} K(\varphi_k) \operatorname{sign} \sin m\varphi_k \right| =$$

$$= \left| \sum_{i=0}^{2m-1} (-1)^i \sum_{k=k_i+1}^{k_{i+1}} K(\varphi_k) \right|,$$

где $k_i = il - 1$ $(i = 1, 2, \ldots, 2m-1)$; $k_0 = -1$; $k_{2m} = 2n-1$.

Лемма 3. *Пусть $\frac{2n+1}{m} = 2N+1$ — целое нечетное число, $\Theta_k = \frac{2k+1}{2n+1}\pi$ $(k = 0, 1, \ldots, 2n)$ и $K(\Theta)$ — нечетная функция периода*

2π, *такая, что если обозначить через* $\sum_{\nu=1}^{m-1} \xi'_\nu \sin \nu\Theta$ *полином, интерполирующий функцию* $K(\Theta)$ *в нулях функции* $\sin m\Theta$ *из интервала* $(0, \pi)$, *т. е. в точках* $\overline{\Theta}_k = k\pi/m$ $(k = 1, 2, \ldots, m-1)$, *то разность* $K(\Theta) - \sum_{\nu=1}^{m-1} \xi'_\nu \sin \nu\Theta$ *меняет знак в этих точках и только в них. Тогда*

$$\min_{\xi_\nu} \sum_{k=0}^{2n} \left| K(\Theta_k) - \sum_{\nu=1}^{m-1} \xi_\nu \sin \nu\Theta_k \right| = \left| \sum_{k=0}^{2n} K(\Theta_k) \operatorname{sign} \sin m\Theta_k \right| =$$

$$= \left| \sum_{i=0}^{m-1} \sum_{k=k_{2i}+1}^{k_{2i+1}-1} K(\Theta_k) - \sum_{i=1}^{m} \sum_{k=k_{2i-1}+1}^{k_{2i}} K(\Theta_k) \right|,$$

где $k_{2i} = i(2N+1) - 1$ $(i = 0, 1, \ldots, m)$; $k_{2i+1} = i(2N+1) + N$ $(i = 0, 1, \ldots, m-1)$.

Ограничимся изложением доказательства первой леммы, так как остальные две леммы доказываются аналогично.

Доказательство леммы 1. Обозначим через $\sum_{\nu=0}^{m-1} \xi'_\nu \cos \nu x$ интерполяционный полином, совпадающий с $K(x)$ в нулях функции $\cos mx$ из отрезка $[0, \pi]$, т. е. в точках $\bar{x}_k = \frac{(2k-1)\pi}{2m}$ $(k = 1, 2, \ldots, m)$. Имеем

$$\sum_{k=0}^{2n-1} \left| K(x_k) - \sum_{\nu=0}^{m-1} \xi'_\nu \cos \nu x_k \right| = \left| \sum_{k=0}^{2n-1} \left[K(x_k) - \sum_{\nu=0}^{m-1} \xi'_\nu \cos \nu x_k \right] \operatorname{sign} \cos mx_k \right| =$$

$$= \left| \sum_{i=0}^{2m} (-1)^i \sum_{k=k_i+1}^{k_{i+1}} \left[K(x_k) - \sum_{\nu=0}^{m-1} \xi'_\nu \cos \nu x_k \right] \right|, \qquad (1)$$

где числа k_i $(i = 0, 1, \ldots, 2m+1)$ выбраны так, что

$$x_{k_i} \leqslant \bar{x}_i < x_{k_i+1} \ (i = 1, 2, \ldots, 2m), \quad k_0 = -1, \ k_{2m+1} = 2n - 1. \qquad (2)$$

Условия (2) могут быть записаны так:

$$\frac{k_i \pi}{n} \leqslant \frac{(2i-1)\pi}{2m} < \frac{(k_i+1)\pi}{n}$$

или

$$k_i \leqslant \frac{(2i-1)n}{2m} < k_i + 1,$$

т. е.

$$k_i = \left[\frac{(2i-1)n}{2m} \right] \quad (i = 1, 2, \ldots, 2m).$$

Таким образом, если $n/m = 2N$ — целое четное число, то

$$k_i = (2i-1)N \quad (i = 1, 2, \ldots, 2m),$$

а если $n/m = 2N + 1$ — целое нечетное число, то

$$k_i = (2N+1)i - N - 1 \quad (i = 1, 2, \ldots, 2m).$$

Нетрудно проверить, что в обоих случаях имеем

$$\sum_{i=0}^{2m}(-1)^i \sum_{k=k_i+1}^{k_{i+1}} \cos\nu x_k = \frac{1}{\sin\frac{x_\nu}{2}} \sum_{i=1}^{2m}(-1)^{i+1}\sin\left(k_i + \frac{1}{2}\right)x_\nu$$

$$(1 \leqslant \nu \leqslant 2n-1).$$

Отсюда в случае, когда $n/m = 2N$, получаем

$$\sum_{i=0}^{2m}(-1)^i \sum_{k=k_i+1}^{k_{i+1}} \cos\nu x_k = \begin{cases} 0 & \text{при } \nu \neq (2l-1)m, \\ (-1)^{l+1}2m\operatorname{ctg}\frac{x_\nu}{2} & \text{при } \nu = (2l-1)m \end{cases} \tag{3}$$

$$(l = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots),$$

а в случае, когда $n/m = 2N + 1$, получаем

$$\sum_{i=0}^{2m}(-1)^i \sum_{k=k_i+1}^{k_{i+1}} \cos\nu x_k = \begin{cases} 0 & \text{при } \nu \neq (2l-1)m, \\ \dfrac{(-1)^{l+1}2m}{\sin\frac{x_\nu}{2}} & \text{при } \nu = (2l-1)m. \end{cases} \tag{4}$$

В частности, в обоих случаях имеем

$$\sum_{i=0}^{2m}(-1)^i \sum_{k=k_i+1}^{k_{i+1}} \cos\nu x_k = 0 \quad \text{при} \quad \nu = 0, 1, \ldots, m-1. \tag{5}$$

Следовательно, (1) может быть представлено в виде

$$\sum_{k=0}^{2n-1}\left|K(x_k) - \sum_{\nu=0}^{m-1}\xi_\nu' \cos\nu x_k\right| = \left|\sum_{i=0}^{2m}(-1)^i \sum_{k=k_i+1}^{k_{i+1}} K(x_k).\right|.$$

С другой стороны, при любых вещественных ξ_ν имеем, учитывая (5),

$$\sum_{k=0}^{2n-1}\left|K(x_k) - \sum_{\nu=0}^{m-1}\xi_\nu\cos\nu x_k\right| \geqslant \left|\sum_{k=0}^{2n-1}\left[K(x_k) - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \sum_{\nu=0}^{m-1}\xi_\nu\cos\nu x_k\right]\operatorname{sign}\cos mx_k\right| = \left|\sum_{i=0}^{2m}(-1)^i \sum_{k=k_i+1}^{k_{i+1}}\left[K(x_k) - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \sum_{\nu=0}^{m-1}\xi_\nu\cos\nu x_k\right]\right| = \left|\sum_{i=0}^{2m}(-1)^i \sum_{k=k_i+1}^{k_{i+1}} K(x_k)\right|.$$

Лемма доказана.

Теорема 1. *Пусть $U_{q,n}$ обозначает класс функций $f(x)$ периода 2π, у которых q-ая конечная разность с шагом $h = \pi/n$ удовлетворяет неравенству*

$$\max_{0 \leqslant x < 2\pi} |\Delta_h^q f(x)| \leqslant \left(\frac{\pi}{n}\right)^q.$$

Тогда

$$\sup_{f \in U_{2p,n}} E_m(f) = \frac{1}{N}\left(\frac{\pi}{2n}\right)^{2p} \sum_{\nu=1}^{N} \frac{(-1)^{\nu-1}\cos\frac{(2\nu-1)\pi}{4N}}{\left[\sin\frac{(2\nu-1)\pi}{4N}\right]^{2p+1}},$$

когда $n/m = 2N$ — *целое четное число, и*

$$\sup_{f \in U_{2p,n}} E_m(f) = \frac{2}{2N+1}\left(\frac{\pi}{2n}\right)^{2p} \left\{\frac{(-1)^N}{2} + \sum_{\nu=1}^{N} \frac{(-1)^{\nu-1}}{\left[\sin\frac{(2\nu-1)\pi}{4N+2}\right]^{2p+1}}\right\},$$

когда $n/m = 2N+1$ — *целое нечетное число,*

$$\sup_{f \in U_{2p+1,n}} E_m(f) = \frac{1}{N}\left(\frac{\pi}{2n}\right)^{2p+1} \sum_{\nu=1}^{N} \frac{1}{\left[\sin\frac{(2\nu-1)\pi}{4N}\right]^{2p+2}},$$

когда $n/m = 2N$ — *целое четное число, и*

$$\sup_{f \in U_{2p+1,n}} E_m(f) = \frac{2}{2N+1}\left(\frac{\pi}{2n}\right)^{2p+1} \left\{\frac{1}{2} + \sum_{\nu=1}^{N} \frac{1}{\left[\sin\frac{(2\nu-1)\pi}{4N+2}\right]^{2p+2}}\right\},$$

когда $n/m = 2N+1$ — *целое нечетное число.*

В случае четного q *точная верхняя граница достигается для функций* $f_*(x)$, *определяемых равенством*

$$\Delta^{2p} f_*(x) = \pm\left(\frac{\pi}{n}\right)^{2p} \operatorname{sign}\cos m(x + x_p)$$

и условием, что сумма $\sum_{k=0}^{2n-1} f_*(x_k + x - x_p)$ *обращается в нуль в точках* $x'_l = l\pi/m$ $(l = 0, 1, \ldots, 2m-1)$.

В случае нечетного q *точная верхняя граница достигается для функций* $f_*(x)$, *определяемых равенством*

$$\Delta^{2p+1} f_*(x) = \pm\left(\frac{\pi}{n}\right)^{2p+1} \operatorname{sign}\sin m\left(x + x_p + \frac{\pi}{2n}\right)$$

и условием, что сумма $\sum_{k=0}^{2n-1} f_*(x_k + x - x_p)$ *обращается в нуль в точках* $x'_l = l\pi/m$ $(l = 0, 1, \ldots, 2m-1)$.

Теорема 2. *Пусть* $U'_{q,n}$ *обозначает класс функций* $f(x)$ *периода* 2π, *у которых* q*-ая конечная разность с шагом* $h' = \dfrac{2\pi}{2n+1}$ *удовлетворяет неравенству*

$$\max_{0 \leqslant x < 2\pi} |\Delta_{h'}^{q} f(x)| \leqslant \left(\frac{2\pi}{2n+1}\right)^{q}$$

и $\dfrac{2n+1}{m} = 2N+1$ — *целое нечетное число. Тогда*

$$\sup_{f \in U'_{2p+1,\,n}} E_m(f) = \frac{4}{2N+1}\left(\frac{\pi}{2n+1}\right)^{2p+1} \sum_{\nu=1}^{N} \frac{\sin^2 \dfrac{\nu N \pi}{2N+1}}{\left[\sin \dfrac{\nu\pi}{2N+1}\right]^{2p+2}}.$$

Верхняя граница достигается для функций $f_*(x)$, *определяемых равенством*

$$\Delta^{2p+1} f_*(x) = \pm \left(\frac{2\pi}{2n+1}\right)^{2p+1} \operatorname{sign} \sin m\left(x + x_p + \frac{\pi}{2n+1}\right)$$

и условием, что сумма $\sum_{k=0}^{2n} f_*(x_k + x - x_p)$ *обращается в нуль в точках* $x'_l = l\pi/m$ $(l = 0, 1, \ldots, 2m-1)$, *где* $x_k = \dfrac{2k\pi}{2n+1}$ $(k = 0, 1, \ldots, 2n)$.

Ограничимся изложением доказательства теоремы 1 в случае четного q, так как доказательства остальных утверждений аналогичны.

Доказательство теоремы 1. Тригонометрический полином порядка n

$$T_n(x; f) = \frac{1}{2n} \sum_{k=0}^{2n-1} f(t_k) \sin n(x - t_k) \operatorname{ctg} \frac{x - t_k}{2}, \tag{6}$$

где

$$t_k = x_k + \alpha; \quad x_k = k\pi/n \quad (k = 0, 1, \ldots, 2n-1),$$

α — постоянное, интерполирует функцию $f(x)$ в узлах t_k, т. е.

$$T_n(t_k; f) = f(t_k) \quad (k = 0, 1, \ldots, 2n-1).$$

Представим $T_n(x; f)$ в виде

$$T_n(x; f) = \frac{a_0^{(n)}}{2} + \sum_{\nu=1}^{n-1} (a_\nu^{(n)} \cos \nu x + b_\nu^{(n)} \sin \nu x) + \frac{a_n^{(n)}}{2} \cos nx + \frac{b_n^{(n)}}{2} \sin nx, \tag{7}$$

где

$$a_\nu^{(n)} = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{2n-1} f(t_k) \cos \nu t_k \quad (\nu = 0, 1, \ldots, n); \tag{8}$$

$$b_\nu^{(n)} = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{2n-1} f(t_k) \sin \nu t_k \quad (\nu = 1, \ldots, n). \tag{9}$$

Применив к сумме (8) преобразование Абеля, используя тождество

$$\cos\nu t_k = \frac{\sin\left[\left(k+\frac{1}{2}\right)x_\nu + \nu\alpha\right] - \sin\left[\left(k-\frac{1}{2}\right)x_\nu + \nu\alpha\right]}{2\sin\frac{x_\nu}{2}}$$

$$(\nu = 1,\ 2,\ \ldots,\ n),$$

получим

$$a_\nu^{(n)} = \frac{1}{2n\sin\frac{x_\nu}{2}}\sum_{k=0}^{2n-1}\Delta f(t_k)\cos\left(\nu t_k + \frac{x_\nu - \pi}{2}\right) \quad (\nu = 1,\ 2,\ \ldots,\ n).$$

Применив это преобразование q раз, получим

$$a_\nu^{(n)} = \frac{1}{n\left(2\sin\frac{x_\nu}{2}\right)^q}\sum_{k=0}^{2n-1}\Delta^q f(t_k)\cos\left(\nu t_k + q\,\frac{x_\nu - \pi}{2}\right)$$

$$(\nu = 1,\ 2,\ \ldots,\ n).$$

Аналогично найдем

$$b_\nu^{(n)} = \frac{1}{n\left(2\sin\frac{x_\nu}{2}\right)^q}\sum_{k=0}^{2n-1}\Delta^q f(t_k)\sin\left(\nu t_k + q\,\frac{x_\nu - \pi}{2}\right)$$

$$(\nu = 1,\ 2,\ \ldots,\ n).$$

Подставив найденные значения коэффициентов в формулу (7), получим

$$T_n(x;\ f) = \frac{a_0^{(n)}}{2} + \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{2n-1}\Delta^q f(t_k)\sum_{\nu=1}^{n}{}' \frac{1}{\left(2\sin\frac{x_\nu}{2}\right)^q}\times$$

$$\times\cos\left[\nu(t_k - x) + q\,\frac{x_\nu - \pi}{2}\right], \tag{10}$$

где $\sum\limits_{\nu=1}^{n}{}'$ означает, что член этой суммы со значением $\nu = n$ надо взять с коэффициентом $1/2$.

Заменив в формуле (10) q на $2p$, найдем

$$T_n(x;\ f) = \frac{a_0^{(n)}}{2} + \frac{(-1)^p}{n}\sum_{k=0}^{2n-1}\Delta^{2p} f(t_k)\times$$

$$\times\sum_{\nu=1}^{n}{}' \frac{1}{\left(2\sin\frac{x_\nu}{2}\right)^{2p}}\cos\left[\nu(t_k - x) + px_\nu\right]. \tag{11}$$

Если в правой части формулы (6) или (11) положить $\alpha = x - x_p$ или $t_k = x_k + x - x_p$, то получим, очевидно, $f(x)$.

Таким образом,

$$f(x) = \frac{a_0^{(n)}(x)}{2} + \frac{(-1)^p}{n} \sum_{k=0}^{2n-1} \Delta^{2p} f(x_k + x - x_p) \sum_{\nu=1}^{n}{}' \frac{\cos \nu x_k}{\left(2 \sin \frac{x_\nu}{2}\right)^{2p}}, \quad (12)$$

где

$$a_0^{(n)}(x) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{2n-1} f(x_k + x - x_p).$$

Дадим для выражения (12) новое представление.

Пользуясь известным методом разложения мероморфной функции в ряд простых дробей (см., например, [4], стр. 243 — 248), нетрудно получить разложение

$$\frac{1}{\sin^{2p} z} = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{l=1}^{p} \frac{b_l}{(z - j\pi)^{2l}},$$

где $b_1, b_2, \ldots, b_{p-1}, b_p = 1$ — коэффициенты главной части разложения функции $1/\sin^{2p} z$ в ряд Лорана по степеням z:

$$\frac{1}{\sin^{2p} z} = \sum_{\nu=1}^{p} \frac{b_\nu}{z^{2\nu}} + P(z),$$

$P(z)$ — правильная часть ряда Лорана. Отсюда

$$\frac{1}{\left(\sin \frac{x_\nu}{2}\right)^{2p}} = \left(\frac{2n}{\pi}\right)^{2p} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{l=1}^{p} \frac{C_l}{(\nu - 2nj)^{2l}}, \quad (13)$$

где

$$C_l = \left(\frac{\pi}{2n}\right)^{2p-2l} b_l \quad (l = 1, 2, \ldots, p).$$

Поставив выражение (13) в сумму

$$\sum_{\nu=1}^{n}{}' \frac{\cos \nu x_k}{\left(\sin \frac{x_\nu}{2}\right)^{2p}} = \frac{1}{2} \sum_{\nu=-n+1}^{n}{}^{(0)} \frac{\cos \nu x_k}{\left(\sin \frac{x_\nu}{2}\right)^{2p}}$$

$\left(\sum\limits_{\nu=-n+1}^{n}{}^{(0)}\right.$ означает, что в сумме отсутствует член со значением $\left.\nu = 0\right)$, найдем

$$\sum_{\nu=1}^{n}{}' \frac{\cos \nu x_k}{\left(\sin \frac{x_\nu}{2}\right)^{2p}} = \frac{1}{2} \left(\frac{2n}{\pi}\right)^{2p} \sum_{l=1}^{p} \sum_{\nu=-n+1}^{n}{}^{(0)} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \frac{C_l \cos \nu x_k}{(\nu - 2nj)^{2l}} =$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{2n}{\pi}\right)^{2p} \sum_{l=1}^{p} C_l \sum_{\nu=-n+1}^{n}{}^{(0)} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \frac{\cos (\nu - 2nj) x_k}{(\nu - 2nj)^{2l}} =$$

$$= \left(\frac{2n}{\pi}\right)^{2p} \sum_{l=1}^{p} C_l \left[\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\cos \nu x_k}{\nu^{2l}} - \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{(2n\nu)^{2l}} \right]. \quad (14)$$

Подставив это выражение в (12), получим

$$f(x)=\frac{a_0^{(n)}(x)}{2}+\frac{(-1)^p}{n}\left(\frac{n}{\pi}\right)^{2p}\sum_{k=0}^{2n-1}\Delta^{2p}f(x_k+x-x_p)\times$$

$$\times\sum_{l=1}^{p}C_l\left[\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\cos\nu x_k}{\nu^{2l}}-\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{(2n\nu)^{2l}}\right].$$

Заметим, что ввиду периодичности $f(x)$ имеем

$$\sum_{k=0}^{2n-1}\Delta^{2p}f(x_k+x-x_p)=0.$$

Действительно,

$$\sum_{k=0}^{2n-1}\Delta^{2p}f(x_k+x-x_p)=\sum_{k=0}^{2n-1}\Delta^{2p-1}f(x_k+x-x_p+h)-$$

$$-\sum_{k=0}^{2n-1}\Delta^{2p-1}f(x_k+x-x_p)=\sum_{k=0}^{2n-1}\Delta^{2p-1}f(x_{k+1}+x-x_p)-$$

$$-\sum_{k=0}^{2n-1}\Delta^{2p-1}f(x_k+x-x_p)=\sum_{k-1}^{2n}\Delta^{2p-1}f(x_k+x-x_p)-$$

$$-\sum_{k=0}^{2n-1}\Delta^{2p-1}f(x_k+x-x_p)=\Delta^{2p-1}f(x_{2n}+x-x_p)-$$

$$-\Delta^{2p-1}f(x_0+x-x_p)=0.$$

Таким образом, получаем

$$f(x)=\frac{a_0^{(n)}(x)}{2}+\frac{(-1)^p}{n}\left(\frac{n}{\pi}\right)^{2p}\sum_{k=0}^{2n-1}\Delta^{2p}f(x_k+x-x_p)\times$$

$$\times\sum_{l=1}^{p}C_l\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\cos\nu x_k}{\nu^{2l}}. \tag{15}$$

Легко видеть, что можно ограничиться рассмотрением таких функций $f(x)\in U_{2p,\,n}$ и таких тригонометрических полиномов $P_{m-1}(x)$ порядка $m-1$, для которых

$$\max_{0\leqslant x<2\pi}|f(x)-P_{m-1}(x)|=|f(0)-P_{m-1}(0)|,$$

ибо если максимум достигается в некоторой точке $x'\in[0,\,2\pi]$, то можно $f(x)$ и $P_{m-1}(x)$ заменить соответственно на $f(x+x')$ и $P_{m-1}(x+x')$.

Имеем

$$f(0)=\frac{a_0^{(n)}}{2}+\frac{(-1)^p}{n}\left(\frac{n}{\pi}\right)^{2p}\sum_{k=0}^{2n-1}\Delta^{2p}f(x_k-x_p)\sum_{l=1}^{p}C_l\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\cos\nu x_k}{\nu^{2l}}, \tag{15'}$$

где

$$a_0^{(n)} = a_0^{(n)}(0) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{2n-1} f(x_k - x_p).$$

Обозначим

$$a_\nu' = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{2n-1} \Delta^{2p} f(x_k - x_p) \cos \nu x_k; \qquad b_\nu' = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{2n-1} \Delta^{2p} f(x_k - x_p) \sin \nu x_k.$$

$$(\nu = 1, \ldots, m-1)$$

и напишем тригонометрический полином порядка $m-1$

$$P_{m-1}(x) = a_0 + \sum_{\nu=1}^{m-1} (a_\nu \cos \nu x + b_\nu \sin \nu x),$$

коэффициенты которого заданы равенствами:

$$a_0 = \frac{a_0^{(n)}}{2} = \frac{a_0^{(n)}}{2} + \frac{(-1)^p}{n} \left(\frac{n}{\pi}\right)^{2p} \xi_0 \sum_{k=0}^{2n-1} \Delta^{2p} f(x_k - x_p),$$

$$a_\nu = (-1)^p \left(\frac{n}{\pi}\right)^{2p} a_\nu' \xi_\nu, \quad b_\nu = (-1)^p \left(\frac{n}{\pi}\right)^{2p} b_\nu' \xi_\nu \quad (\nu = 1, \ldots, m-1),$$

где числа ξ_ν $(\nu = 0, 1, \ldots, m-1)$ произвольны. Перепишем этот полином в виде

$$P_{m-1}(x) = \frac{a_0^{(n)}}{2} + \frac{(-1)^p}{n} \left(\frac{n}{\pi}\right)^{2p} \sum_{k=0}^{2n-1} \Delta^{2p} f(x_k - x_p) \sum_{\nu=0}^{m-1} \xi_\nu \cos \nu (x_k - x),$$

откуда

$$P_{m-1}(0) = \frac{a_0^{(n)}}{2} + \frac{(-1)^p}{n} \left(\frac{n}{\pi}\right)^{2p} \sum_{k=0}^{2n-1} \Delta^{2p} f(x_k - x_p) \sum_{\nu=0}^{m-1} \xi_\nu \cos \nu x_k.$$

Вычитая последнее равенство из (15′) почленно, получаем

$$f(0) - P_{m-1}(0) = \frac{(-1)^p}{n} \left(\frac{n}{\pi}\right)^{2p} \sum_{k=0}^{2n-1} \Delta^{2p} f(x_k - x_p) \times$$

$$\times \left[\sum_{l=1}^{p} C_l \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\cos \nu x_k}{\nu^{2l}} - \sum_{\nu=0}^{m-1} \xi_\nu \cos \nu x_k \right].$$

Так как $f(x) \in U_{2p,\,n}$, то получаем оценку

$$|f(0) - P_{m-1}(0)| \leqslant \frac{1}{n} \min_{\xi_\nu} \sum_{k=0}^{2n-1} \left| \sum_{l=1}^{p} C_l \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\cos \nu x_k}{\nu^{2l}} - \sum_{\nu=0}^{m-1} \xi_\nu \cos \nu x_k \right| = L_N.$$

Таким образом, для рассматриваемых функций имеем

$$E_m(f) \leqslant L_N.$$

Найдем явное выражение для L_N, вычислив минимум. Функция

$$K(x)=\sum_{l=1}^{p} C_l \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\cos \nu x}{\nu^{2l}}$$

удовлетворяет условиям леммы 1: она, очевидно, четная периода 2π; надо только убедиться, если $\sum\limits_{\nu=0}^{m-1} \xi_\nu' \cos \nu x$ есть полином, интерполирующий функцию $K(x)$ в нулях функции $\cos mx$ из отрезка $[0, \pi]$, т. е. в точках $\overline{x}_k=\frac{(2k-1)\pi}{2m}$ $(k=1, \ldots, m)$, то разность $K(x)-\sum\limits_{\nu=0}^{m-1} \xi_\nu' \cos \nu x$ меняет знак в этих точках и только в них, т. е.

$$\operatorname{sign}\left[K(x)-\sum_{\nu=0}^{m-1}{}' \xi_\nu' \cos \nu x\right]=\operatorname{sign} \cos mx.$$

Заметим, что, во-первых, как хорошо известно, этим свойством обладает каждая из функций $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \frac{\cos \nu x}{\nu^{2l}}$ (см., например, [5], стр. 211—213), и, во-вторых, все коэффициенты C_l $(l=1, 2, \ldots, p)$ положительны. Последнее следует из того, что положительными являются все коэффициенты разложения

$$\frac{1}{\sin z}=\frac{1}{z}+\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1} \frac{(2^{2k}-2) B_{2k}}{(2k)!} z^{2k-1}.$$

Таким образом, получаем

$$L_N=\frac{1}{n}\left|\sum_{i=0}^{2m}(-1)^i \sum_{k=k_i+1}^{k_{i+1}} K(x_k)\right|.$$

По (14) имеем

$$K(x_k)=\sum_{l=1}^{p}\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{C_l}{(2n\nu)^{2l}}+\left(\frac{\pi}{2n}\right)^{2p} \sum_{\nu=1}^{n}{}' \frac{\cos \nu x_k}{\left(\sin \frac{x_\nu}{2}\right)^{2p}}.$$

Следовательно,

$$L_N=\frac{1}{n}\left|\sum_{l=1}^{p}\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{C_l}{(2n\nu)^{2l}} \sum_{i=0}^{2m}(-1)^i (k_{i+1}-k_i)+\left(\frac{\pi}{2n}\right)^{2p} \sum_{\nu=1}^{n}{}' \frac{1}{\left(\sin \frac{x_\nu}{2}\right)^{2p}} \times\right.$$

$$\left.\times \sum_{i=0}^{2m}(-1)^i \sum_{k=k_i+1}^{k_{i+1}} \cos \nu x_k\right|=\frac{1}{n}\left(\frac{\pi}{2n}\right)^{2p}\left|\sum_{\nu=1}^{n}{}' \frac{1}{\left(\sin \frac{x_\nu}{2}\right)^{2p}} \times\right.$$

$$\left.\times \sum_{i=0}^{2m}(-1)^i \sum_{k=k_i+1}^{k_{i+1}} \cos \nu x_k\right|.$$

Учитывая равенства (3) и (4), получаем

$$L_N = \frac{2m}{n}\left(\frac{\pi}{2n}\right)^{2p}\sum_{l=1}^{N}\frac{(-1)^{l+1}\cos\dfrac{x_{(2l-1)m}}{2}}{\left(\sin\dfrac{x_{(2l-1)m}}{2}\right)^{2p+1}} =$$

$$= \frac{1}{N}\left(\frac{\pi}{2n}\right)^{2p}\sum_{l=1}^{N}\frac{(-1)^{l+1}\cos\dfrac{(2l-1)\pi}{4N}}{\left(\sin\dfrac{(2l-1)\pi}{4N}\right)^{2p+1}},$$

если $n/2m = 2N$ — целое четное число, и

$$L_N = \frac{2}{2N+1}\left(\frac{\pi}{2n}\right)^{2p}\sum_{l=1}^{N+1}{}'\frac{(-1)^{l+1}}{\left(\sin\dfrac{(2l-1)\pi}{4N+2}\right)^{2p+1}} =$$

$$= \frac{2}{2N+1}\left(\frac{\pi}{2n}\right)^{2p}\left[\frac{(-1)^N}{2} + \sum_{l=1}^{N}\frac{(-1)^{l+1}}{\left(\sin\dfrac{(2l-1)\pi}{4N+2}\right)^{2p+1}}\right],$$

если $n/m = 2N+1$ — целое нечетное число.

Эта верхняя граница достигается для функций $f_*(x)$, определяемых равенством

$$\Delta^{2p} f_*(x) = \pm\left(\frac{\pi}{n}\right)^{2p}\operatorname{sign}\cos m(x + x_p) \qquad (16)$$

и условием, что сумма $\sum_{k=0}^{2n-1} f_*(x_k + x - x_p)$ обращается в нуль в точках $x_l' = l\pi/m$ $(l = 0, 1, \ldots, 2m-1)$:

$$\sum_{k=0}^{2m-1} f_*(x_k + x_l' - x_p) = 0 \quad (l = 0, 1, \ldots, 2m-1). \qquad (17)$$

Действительно, пользуясь формулой (15), имеем для таких функций

$$f_*(x) = \frac{a_0^{(n)}(x)}{2} \pm \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{2n-1}\operatorname{sign}\cos m(x_k + x)\left[\sum_{\nu=1}^{\infty}\cos\nu x_k\sum_{l=1}^{p}\frac{C_l}{\nu^{2l}} - \right.$$

$$\left. - \sum_{l=1}^{p}\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{C_l}{(2n\nu)^{2l}}\right],$$

откуда видно, что $f_*(x)$ достигает значения L_N с чередующимися знаками в $2m$ точках из одного периода:

$$x_l' = \frac{l\pi}{m} \quad (l = 0, 1, \ldots, 2m-1).$$

Следовательно, по известной теореме Валле — Пуссена $E_m(f_*) \geqslant L_N$. Таким образом,

$$E_m(f_*) = L_N$$

и

$$\sup_{f \in U_{2p,\, n}} E_m(f) = L_N.$$

Заметим, что условиями (16) и (17) функция определяется неоднозначно. Действительно, пусть $f_*(x)$ удовлетворяет этим условиям. Обозначим через $\varphi(x)$ произвольную функцию периода π/n, удовлетворяющую условию $\varphi(0) = 0$. Тогда, очевидно, функция $f_*(x) + \varphi(x)$ также удовлетворяет (16) и (17).

В заключение заметим, что во всех случаях при фиксированном m и $n \to \infty$ (а значит, и $N \to \infty$) L_N стремится к константе Ахиезера — Крейна и Фавара.

ЛИТЕРАТУРА

1. Favard J. Comptes rendus, **203**. Paris, 1936.
2. Favard J. Bulletin des sciences mathématiques, **61**, 1937.
3. Ахиезер Н. И. и Крейн М. Г. ДАН СССР, т. XV, № 3, 1937.
4. Маркушевич А. И. Краткий курс теории аналитических функций. ГИТТЛ, М., 1957.
5. Ахиезер Н. И. Лекции по теории аппроксимации. М. — Л., 1947.

Поступило в редакцию 15.XI 1965

ВЕСЦІ АКАДЭМІІ НАВУК БЕЛАРУСКАЙ ССР № 3 1966
СЕРЫЯ ФІЗІКА-МАТЭМАТЫЧНЫХ НАВУК

С. В. ЯНОВСКИЙ

ПОЛНЫЕ УРАВНЕНИЯ ТИПА СВЕРТКИ

Полным интегральным уравнением типа свертки назовем уравнение

$$\lambda_j f(x) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^\infty a_j(x-t) f(t)\, dt + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^0 b_j(x-t) f(t)\, dt +$$

$$+ \int\limits_{-\infty}^\infty k(x; -t) f(t)\, dt = g(x), \quad j=1 \quad \text{при } x>0, \; j=2 \text{ при } x<0, \quad (A)$$

различные частные случаи которого изучались в работах [1—4] и др. Будем предполагать, что разностные ядра принадлежат классам вида $\{\alpha_k, \beta_k\}_1$, $k=1, 2, 3, 4$ (относительно символики см., например, [3]), а неизвестная функция $f(x) \in \{\alpha, \beta\}$, где α и β выражаются по определенным формулам через α_k и β_k. При $\alpha=\beta$ исследование уравнения (A) изложено в [4]; там же указан один из основных результатов, относящихся к случаю $\alpha > \beta$, поэтому ограничимся предположением $\alpha < \beta$.

Заметим, что во всех работах, посвященных уравнениям типа свертки с регулярным членом $(k(x, t) \neq 0)$, эти уравнения сводятся к полным сингулярным уравнениям с ядром Коши

$$A(\zeta)\Phi(\zeta) + \frac{B(\zeta)}{\pi i} \int\limits_\gamma \frac{\Phi(\tau)\, d\tau}{\tau - \zeta} + \int\limits_\gamma M(\zeta, \tau)\Phi(\tau)\, d\tau = Q(\zeta), \quad \zeta \in \gamma, \qquad (1)$$

лишь при условии $\alpha \geqslant \beta$. Правда, в [3] и [5] аналогичный результат получен и при $\alpha < \beta$, но только для так называемого уравнения с двумя разностными ядрами (уравнение (A) при $a_1 \equiv a_2$, $b_1 \equiv b_2$), причем указанный там способ не применим уже для парного уравнения (уравнение (A) при $a_1 \equiv b_1$, $a_2 \equiv b_2$). В настоящей работе этот пробел ликвидируется и попутно обнаруживается ряд необходимых условий разрешимости уравнения. Указываются также некоторые случаи эффективного решения уравнения (A) при $k(x, t) \equiv 0$.

1. Ограничимся наиболее характерным случаем, когда

$$a_j(x), \quad b_j(x) \in \{\beta, \alpha\}_1, \quad j=1, 2; \quad \alpha < \beta,$$

$$k(x, t) \in \begin{Bmatrix} \alpha, & \beta \\ \beta, & \alpha \end{Bmatrix}, \quad f(x) \in \{\alpha, \beta\},$$

а правая часть уравнения $g(x) \in \{\beta, \alpha\}$ (если $g(x) \overline{\in} \{\beta, \alpha\}$, то уравнение неразрешимо).

Запишем уравнение (А) при $x>0$ в виде

$$u(x)+v(x)=0, \quad x>0, \tag{2}$$

где

$$u(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty a_{1+}(x-t)f(t)\,dt+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^0 b_{1+}(x-t)f(t)\,dt-g_+(x),$$

а $v(x)$ содержит все остальные члены. Нетрудно проверить, что для любой функции $f(x)$, принадлежащей классу $\{\alpha, \beta\}$,

$$u(x)\in\{\beta, \beta\}, \quad v(x)\in\{\alpha, \alpha\}. \tag{3}$$

Переписывая равенство (2) в виде

$$u(x)+v(x)=\omega_-(x), \quad -\infty<x<\infty,$$

где $\omega_-(x)$ — новая неизвестная функция ($\omega_-(x)\equiv 0$ при $x>0$), из (3) устанавливаем, что $\omega_-(x)\in\{-\infty, \alpha\}$. Вводя затем еще одну неизвестную функцию $\omega_1(x)$, получим равенства

$$u(x)=-\omega_1(x), \quad v(x)-\omega_-(x)=\omega_1(x), \quad -\infty<x<\infty,$$

преобразование Фурье которых уже возможно и дает:

$$[\lambda_1-A_1^-(\zeta)]\,F^+(\zeta)+\int_\beta K_-^+(\zeta, \tau)\,F(\tau)\,d\tau-\int_\alpha K_-^+(\zeta, \tau)\,F(\tau)\,d\tau-$$

$$-\Omega^-(\zeta)=\Omega_1(\zeta), \quad \zeta=x+i\alpha, \tag{4_1}$$

$$A_1^+(\zeta)\,F^+(\zeta)-B_1^+(\zeta)\,F^-(\zeta)-G^+(\zeta)=-\Omega_1(\zeta), \quad \zeta=x+i\beta. \tag{4_2}$$

Поступая аналогично с уравнением (А) при $x<0$, получим еще два равенства, причем система всех четырех равенств (4) эквивалентна уравнению (А) и является краевым условием некоторой задачи для неизвестных функций $F^+(z)$, $F^-(z)$, $\Omega^+(z)$, $\Omega^-(z)$, аналитических соответственно в полуплоскостях $\operatorname{Im} z>\alpha$, $\operatorname{Im} z<\beta$, $\operatorname{Im} z>\beta$, $\operatorname{Im} z<\alpha$, и функций $\Omega_1(z)$, $\Omega_2(z)$, аналитических в полосе $\alpha<\operatorname{Im} z<\beta$. В общем случае свести эту задачу к сингулярному уравнению вида (1) не удается, поэтому в дальнейшем предполагается, что некоторые из известных функций допускают аналитическое продолжение (с возможными особенностями любого характера) на необходимые прямые.

Определение. Пусть функция $K(z)$ регулярна в полуплоскости $\operatorname{Im} z>a$ и исчезает на бесконечности. Будем говорить, что она продолжима на прямую $\zeta=x+ib$ $(b<a)$ с произвольными особенностями в полосе $a\geqslant\operatorname{Im} z>b$, если:

а) существует функция $\tilde{K}(z)$, регулярная и однозначная на некотором множестве $D-E$, где D — полуплоскость $\operatorname{Im} z\geqslant b$, а E — конечное или бесконечное множество точек полосы $a\geqslant\operatorname{Im} z>b$;

б) множество $D-E$ есть область;

в) $\tilde{K}(z)\equiv K(z)$ в полуплоскости $\operatorname{Im} z>a$.

Функцию $\tilde{K}(x+ib)$ будем называть продолжением $K(z)$ на прямую $\zeta=x+ib$, а множество E — множеством особых точек функции $\tilde{K}(z)$. Если $K(z)$ есть одна из ветвей многозначной функции, то к E отнесем также разрезы, необходимые для того, чтобы область $D-E$ была односвязной.

2. Пусть функции $A_1^+(\zeta)$, $B_1^+(\zeta)$ и $G^+(\zeta)$, $\zeta = x + i\beta$, являющиеся предельными значениями аналитических в полуплоскости $\operatorname{Im} z > \beta$ функций $A_1^+(z)$, $B_1^+(z)$ и $G^+(z)$, допускают продолжение на прямую $\zeta = x + i\alpha$. Произведя это продолжение и объединяя равенства (4_1) и (4_2), получим:

$$[\lambda_1 + \tilde{A}_1^+(\zeta) - A_1^-(\zeta)]\, F^+(\zeta) - \tilde{B}_1^+(\zeta)\, F^-(\zeta) + \int\limits_{\beta} K_+^{\pm}(\zeta, \tau)\, F(\tau)\, d\tau -$$

$$- \int\limits_{\alpha} K_-^{\pm}(\zeta, \tau)\, F(\tau)\, d\tau - \tilde{G}^+(\zeta) = \Omega^-(\zeta), \quad \zeta = x + i\alpha. \qquad (5_1)$$

Аналогично построим краевое условие на прямой $\zeta = x + i\beta$, причем полученная краевая задача теперь уже может быть сведена к сингулярному уравнению вида (1).

Пусть γ — контур, состоящий из прямой $\zeta = x + i\alpha$, проходимой слева направо, и прямой $\zeta = x + i\beta$, проходимой справа налево. Если в качестве плотности интеграла типа Коши ввести неизвестную функцию (ср. [1], § 6)

$$\Phi(\zeta) = \begin{cases} \Omega^+(\zeta) - F(\zeta), & \zeta = x + i\beta, \\ \Omega^-(\zeta) - F(\zeta), & \zeta = x + i\alpha, \end{cases}$$

то, согласно формулам Сохоцкого, функции $\Omega^{\pm}(\zeta)$ и $F(\zeta)$, $\zeta \in \gamma$ можно выразить через нее. Кроме того,

$$F^+(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\alpha} \frac{\Phi(\tau)\, d\tau}{\tau - \zeta}, \quad \zeta = x + i\beta,$$

$$F^-(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\beta} \frac{\Phi(\tau)\, d\tau}{\tau - \zeta}, \quad \zeta = x + i\alpha, \qquad (6)$$

и после несложных преобразований (перестановку интегралов можно обосновать) получим уравнение вида (1). Коэффициенты его довольно громоздки и выписывать их не будем, однако отметим, что интегральный оператор с ядром $M(\zeta, \tau)$ является вполне непрерывным в $L_2(\gamma)$, где и разыскивается неизвестная функция $\Phi(\zeta)$. Зная $\Phi(\zeta)$, по формулам (6) найдем $F^{\pm}(\zeta)$, а затем обратным преобразованием Фурье и искомую функцию $f(x)$ — решение уравнения (A).

Замечание. Пусть среди функций $A_1^+(z)$, $B_1^+(z)$ и $G^+(z)$ имеется одна, которая свойством продолжимости на прямую $\zeta = x + i\alpha$ не обладает. Тогда из равенства (4_2) заключаем: а) если эта функция есть $G^+(z)$, то уравнение (A) неразрешимо; б) если эта функция есть $A_1^+(z)$, то $F^+(z) \equiv 0$. Отсюда решениями уравнения (A) являются функции $f(x) \equiv 0$ при $x > 0$ и само уравнение приобретает более простой вид ($\lambda_1 = 0$, $a_1(x) \equiv b_1(x) \equiv 0$).

3. Необходимо, однако, отметить, что уравнения (A) и (1) не эквивалентны, ибо не эквивалентны краевые задачи (4) и (5). Для их эквивалентности требуется обеспечить аналитичность исключенных функций $\Omega_1(z)$ и $\Omega_2(z)$ в полосе $\alpha < \operatorname{Im} z < \beta$ или точнее обеспечить выполнимость условий:

$$\omega_1(x) \in \{\alpha, \beta\}, \quad \omega_2(x) \in \{\alpha, \beta\}. \qquad (7)$$

Так как $\omega_1(x) = -u(x)$, а вид $u(x)$ известен, то условия (7) нетрудно выписать. Остановимся на таком случае, когда они имеют обозримый вид и когда можно указать количество линейно независимых решений уравнения (A) (если количество решений уравнения (1) известно).

А именно пусть

$$a_1(x) = \tilde{a}_1(x) + c_1(x), \quad b_1(x) = \tilde{b}_1(x) + c_2(x), \quad g_+(x) = \tilde{g}_+(x) + c_+(x),$$

$$c_1(x) = \sum_{k=1}^{n} P_{\nu_k}(x) e^{xz_k}, \quad c_2(x) = \sum_{k=1}^{n} Q_{\nu k}(x) e^{xz_k}, \quad c(x) = \sum_{k=1}^{n} R_{\nu_k}(x) e^{xz_k}, \quad (8)$$

где $\tilde{a}_1(x)$ и $\tilde{b}_1(x) \in \{\alpha, \alpha\}_1$; $\tilde{g}_+(x) \in \{\alpha, \infty\}$; $\alpha < \operatorname{Re} z_k < \beta$, а $P_{\nu_k}(x)$, $Q_{\nu_k}(x)$ и $R_{\nu_k}(x)$ — многочлены с постоянными коэффициентами*, степени которых не выше ν_k (возможно, что только один из них степени ν_k, а два других могут быть и тождественно равными нулю).

Замечание. Условия (8) означают, что функции $A_1^+(z)$, $B_1^+(z)$ и $G^+(z)$ имеют в полосе $\alpha < \operatorname{Im} z < \beta$ полюсы в точках iz_k порядков не выше $\nu_k + 1$. Поэтому если вид (8) имеют только две функции, то из равенства (4_2) видим:

а) Если эта пара есть $a_1(x)$ и $b_1(x)$, то функция $g_+(x)$ обязана иметь вид (8), причем степени многочленов $R_{\nu_k}(x)$ не выше степеней многочленов $P_{\nu_k}(x)$ и $Q_{\nu_k}(x)$. В противном случае уравнение (A) неразрешимо.

б) Если эта пара есть, например, $b_1(x)$ и $g_+(x)$, а функция $a_1(x)$ не представима в виде (8), то решениями уравнения (A) являются функции $f(x) \equiv 0$ при $x > 0$.

Если представления (8) имеют место, то уравнение (A) при $x > 0$ запишем в виде

$$v(x) + u_1(x) + u_2(x) = 0, \quad x > 0,$$

где

$$v(x) = \lambda_1 f(x) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} \tilde{a}_1(x-t) f(t) dt + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{0} \tilde{b}_1(x-t) f(t)\, dt +$$

$$+ \int_{-\infty}^{\infty} k^+(x; -t) f(t)\, dt - \tilde{g}_+(x) \in \{\alpha, \alpha\};$$

$$u_1(x) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} c_{1-}(x-t) f(t)\, dt - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{0} c_{2-}(x-t) f(t)\, dt \in \{\alpha, \alpha\},$$

а $u_2(x)$ содержит все остальные члены, причем $u_2(x) \in \{\beta, \beta\}$ для $f(x) \in \{\alpha, \beta\}$.

Так же, как в п. 1, убеждаемся, что необходимо $u_2(x) \in \{\alpha, \beta\}$, откуда $u_1(x) + u_2(x) \in \{\alpha, \alpha\}$. Но

$$u_1(x) + u_2(x) = \sum_{k=1}^{n} e^{xz_k} \sum_{q=0}^{\nu_k} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\, q!} A_{qk} x^q,$$

* Условие, что коэффициенты многочленов кусочно-постоянны (имеют одни значения при $x > 0$, а другие при $x < 0$), не расширяет предположений, так как этот случай сводится к указанному.

$$A_{qk} = \int_0^\infty P_{\nu_k}^{(q)}(-t)\, e^{-tz_k} f(t)\, dt + \int_{-\infty}^0 Q_{\nu_k}^{(q)}(-t)^- e^{tz_k} f(t)\, dt - \sqrt{2\pi}\, q!\, c_{qk}$$

(c_{qk} — коэффициенты $R_{\nu_k}(x)$ при $x > 0$). Поэтому $u_1(x) + u_2(x) \equiv 0$, откуда

$$A_{qk} = 0, \quad k = 1, 2, \ldots, n; \; q = 0, 1, \ldots, \nu_k. \tag{9_1}$$

Равенства (9_1) и есть искомая система условий, накладываемых на функции $f(x)$; она заменяет в данном случае первое условие (7). В предположении, что функции $a_2(x)$, $b_2(x)$ и $g_-(x)$ тоже имеют вид (8), аналогично строится еще одна система, которая заменит второе условие (7). С этими условиями уравнение (1) равносильно уравнению (A). В то же время краевая задача (5), а потому и уравнение (1) не меняют своего вида: нужно только заменить $\tilde{A}_1^+(\zeta) - A_1^-(\zeta)$ через $\tilde{A}_1(\zeta)$, а $B_2^+(\zeta) - \tilde{B}_2^-(\zeta)$ через $\tilde{B}_2(\zeta)$, где $\tilde{A}_1(\zeta)$ и $\tilde{B}_2(\zeta)$ — преобразования Фурье функций $\tilde{a}_1(x)$ и $\tilde{b}_2(x)$.

4. В заключение укажем несколько случаев, когда уравнение (A) при $k(x, t) \equiv 0$ допускает эффективное решение. По-прежнему предполагается, что функции $A_1^+(z)$, $B_1^+(z)$, $G^+(z)$ продолжимы на прямую $\zeta = x + i\alpha$, а функции $A_2^-(z)$, $B_2^-(z)$, $G^-(z)$ — на прямую $\zeta = x + i\beta$, причем в полосе $\alpha < \operatorname{Im} z < \beta$ они могут иметь любые особенности.

Случай 1. Функция $\tilde{B}_1^+(z)$ мероморфна в полуплоскости $\operatorname{Im} z < \alpha$. Тогда задача (5) может быть сведена к двум последовательно решаемым задачам Римана. Краевое условие первой из них задано на прямой $\zeta = x + i\alpha$, а второй — на прямой $\zeta = x + i\beta$.

Случай 2. Функция $\tilde{A}_2^-(z)$ мероморфна в полуплоскости $\operatorname{Im} z > \beta$. Решение производится аналогично случаю 1.

Случай 3. Функция $\tilde{A}_1^+(z) - \tilde{B}_1^+(z)$ мероморфна в полуплоскости $\operatorname{Im} z < \alpha$, а функция $\tilde{A}_2^-(z) - \tilde{B}_2^-(z)$ — в полуплоскости $\operatorname{Im} z > \beta$.

В этом случае задача (5) может быть сведена к одной задаче Римана на контуре γ, состоящем из прямых $\zeta = x + i\alpha$ и $\zeta = x + i\beta$. Метод решения задачи указан в работе [6].

ЛИТЕРАТУРА

1. Черский Ю. И. Изв. АН СССР, **22**, № 3, 1958.
2. Гохберг И. Ц., Крейн М. Г. Теор. и прикл. матем., в. 1, 1958, стр. 58—81.
3. Яновский С. В. ДАН СССР, **119**, № 3, 1958.
4. Яновский С. В. Труды 2-ой научн. конф. матем. кафедр пед. ин-тов Поволжья, в. 1, 1962, стр. 128—134.
5. Яновский С. В. Уч. зап. Ростовского пед. ин-та, в. 5, 1960, стр. 11—30.
6. Гахов Ф. Д., Черский Ю. И. Изв. АН СССР, **20**, № 1, 1956.

Поступило в редакцию 28. I 1966

ВЕСЦІ АКАДЭМІІ НАВУК БЕЛАРУСКАЙ ССР № 3 1966
СЕРЫЯ ФІЗІКА-МАТЭМАТЫЧНЫХ НАВУК

Н. А. РЫСЮК

УРАВНЕНИЯ И СИСТЕМЫ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ЛОГАРИФМИЧЕСКИМИ ЯДРАМИ

1. Рассмотрим систему интегральных уравнений с логарифмическими ядрами

$$-\sum_{k=1}^{m} a_{jk}(t)\int_a^t \rho_k(\tau)\,d\tau+\sum_{k=1}^{m}\frac{b_{jk}}{\pi i}\int_a^b \rho_k(\tau)\ln\frac{\tau-t}{b-t}\,d\tau=c_j(t) \qquad (1)$$

$$(j=1,\ 2,\ \ldots,\ m),$$

где $a_{jk}(t)$, $b_{jk}(t)$, $c_j(t)$ — заданные на L функции, производные которых удовлетворяют условию Гельдера; $\rho_k(t)$ — искомые функции, удовлетворяющие условию Гельдера всюду на L, кроме концов, где они допускают интегрируемую бесконечность. L — гладкая кривая с концами a и b.

В векторно-матричной форме система (1) может быть записана в виде уравнения

$$-A(t)\int_a^t \rho(\tau)\,d\tau+\frac{B(t)}{\pi i}\int_a^b \rho(\tau)\ln\frac{\tau-t}{b-t}\,d\tau=c(t), \qquad (2)$$

где

$$A(t)=\|a_{jk}(t)\|,\quad B(t)=\|b_{jk}(t)\|;$$

$$\rho(t)=[\rho_1(t),\ \ldots,\ \rho_m(t)];\quad c(t)=[c_1(t),\ \ldots,\ c_m(t)].$$

Во всех дальнейших рассуждениях будем считать, что $\det[A(t)]\neq 0$ и $\det[A(t)-2B(t)]\neq 0$ всюду на L.

Для решения системы (2) используем метод аналитического продолжения в комплексную плоскость.

Введем аналитический вектор

$$\varphi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_a^b \rho(\tau)\ln\frac{\tau-z}{b-z}\,d\tau, \qquad (3)$$

где $\rho(t)$ — решение уравнения (2).

Рассмотрев его предельные значения и пользуясь аналогами формул Сохоцкого, получим соотношения

$$\varphi^+(t)-\varphi^-(t)=-\int_a^t \rho(\tau)\,d\tau, \qquad (4)$$

$$\varphi^+(t)+\varphi^-(t)=\frac{1}{\pi i}\left[\int_a^t \rho(\tau)\ln\frac{t-\tau}{b-t}\,d\tau+\int_t^b \rho(\tau)\ln\frac{\tau-t}{b-t}\,d\tau\right]=$$

$$= \frac{1}{\pi i} \int_a^b \rho(\tau) \ln \frac{\tau - t}{b - t} \, d\tau - \int_a^t \rho(\tau) \, d\tau. \tag{5}$$

Формулы (4) и (5) позволяют уравнение (2) свести к следующей задаче Римана для системы m пар функций:

$$\varphi^+(t) = G(t)\varphi^-(t) + g(t), \quad \varphi(\infty) = 0, \tag{6}$$

где

$$G(t) = [A(t)]^{-1} [A(t) - 2B(t)];$$

$$g(t) = [A(t)]^{-1} c(t).$$

Если решение задачи (6) найдено [1], то решение системы (2) находится из соотношения (4) дифференцированием.

Чтобы решение системы (2) принадлежало $h(a, b)$, задачу Римана (6) надо решать в классе функций, ограниченных на концах. Класс решений задачи Римана, ограниченных на концах a и b, обозначим H_0. Пусть $\varkappa_1, \ldots, \varkappa_m$ — частные индексы класса H_0 краевой задачи (6), мы их будем называть частными индексами класса $h(a, b)$ системы интегральных уравнений (1).

Если все частные индексы системы положительны, то решение ее существует, содержит $\varkappa = \varkappa_1 + \varkappa_2 + \ldots + \varkappa_m$ произвольных постоянных и дается формулой

$$\rho(t) = -\left[A_0(t) c(t) + \frac{B_0(t)}{\pi i} \int_L \frac{Z(\tau) c(\tau)}{\tau - t} \, d\tau + B_0(t) P(t) \right]', \tag{7}$$

где

$$A_0(t) = \frac{1}{2} \{ [A(t)]^{-1} + [A(t) - 2B(t)]^{-1} \};$$

$$B_0(t) = \frac{1}{2} [X^+(t) - X^-(t)];$$

$$Z(t) = [X^+(t)]^{-1} [A(t)]^{-1} = [X^-(t)]^{-1} [A(t) - 2B(t)]^{-1};$$

$$P(t) = [p_{\varkappa_1 - 1}(t), \ldots, p_{\varkappa_m - 1}(t)];$$

p_α — полиномы степени α с произвольными коэффициентами

$$p_\alpha \equiv 0 \quad \text{при} \quad \alpha < 0.$$

Если среди частных индексов системы имеются отрицательные

$$\varkappa_1 \geqslant \varkappa_2 \geqslant \ldots \geqslant \varkappa_l \geqslant 0 > \varkappa_{l+1} \geqslant \ldots \geqslant \varkappa_m$$

и

$$\lambda = \varkappa_1 + \varkappa_2 + \ldots + \varkappa_l, \quad \mu = -(\varkappa_{l+1} + \ldots + \varkappa_m),$$

то для существования решений класса $h(a, b)$ системы (2) необходимо и достаточно, чтобы вектор $c(t)$ удовлетворял соотношению

$$\int_L q(t) Z(t) c(t) \, dt = 0, \tag{8}$$

где $q(t) = [q_{-\varkappa_1 - 1}(t), \ldots, q_{-\varkappa_m - 1}(t)]$; q_α — полином степени α с произвольными коэффициентами; $q_\alpha \equiv 0$ при $\alpha < 0$.

Если условие (8) выполнено, то система имеет решение, содержащее λ произвольных постоянных.

В точках автоматической ограниченности краевой задачи (6) не существует решений системы (1). (Ограниченные на концах a и b решения системы можно получить, наложив дополнительные условия на $c(t)$ в этих точках).

Если матрица $G(t)$ такова, что решение задачи Римана для системы m пар функций удается получить в замкнутой форме, то и решение системы интегральных уравнений (1) будем иметь в замкнутой форме.

Последнее имеет место, если матрица $G(t)$ представима в виде

$$G(t) = U(t) V(t),$$

где $U(z)$ — матрица, элементами которой являются функции, голоморфные в D^+, за исключением некоторого числа точек, где они могут иметь полюсы; $V(z)$ — матрица того же характера в D^-. (Имеется в виду, что краевая задача Римана (6) для разомкнутого контура решается приведением к задаче для замкнутого контура с разрывными коэффициентами, поэтому под $D^{\pm}$ понимаются те же, что и обычно, области). Каноническая матрица решений задачи тогда строится при помощи линейных преобразований.

Если матрица $G(t)$ функционально-коммутативна, то каноническую матрицу решений задачи Римана (6) можно получить по формуле

$$X(z) = e^{\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{\ln G(\tau)}{\tau - z} d\tau}.$$

2. Методом предыдущего пункта можно найти решения системы интегральных уравнений

$$-A(t)\int\limits_a^t \rho(\tau)\,d\tau + \frac{B(t)}{\pi i}\int\limits_a^b \rho(\tau)\ln\frac{f(\tau)-f(t)}{f(b)-f(t)}\,d\tau = c(t), \tag{9}$$

где $A(t)$, $B(t)$, $c(t)$ те же, что и выше; $f(z)$ — основной инвариант некоторой группы дробно-линейных преобразований. Контур L лежит в одной фундаментальной области группы или содержит конгруэнтные дуги.

Интегральное уравнение (9) сводится к краевой задаче Римана для системы m пар автоморфных функций. Для этого введем аналитический автоморфный вектор

$$\varphi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_a^b \rho(\tau)\ln\frac{f(\tau)-f(z)}{f(b)-f(z)}\,d\tau. \tag{10}$$

Ветвь логарифмической функции выбираем так, чтобы вектор $\varphi(z)$ в точке z_0 (точка z_0 является единственным полюсом $f(z)$ в фундаментальной области) обращался в нуль-вектор.

Предельные значения вектора (10) имеют вид

$$\varphi^{\pm}(t) = \frac{1}{2\pi i}\left\{\int\limits_a^t \rho(\tau)\left[\ln\frac{f(t)-f(\tau)}{f(b)-f(t)} \mp \pi i\right]d\tau + \right.$$

$$\left. + \int\limits_t^b \rho(\tau)\ln\frac{f(\tau)-f(t)}{f(b)-f(t)}\,d\tau\right\}.$$

Далее получаем соотношения:

$$\varphi^+(t) - \varphi^-(t) = -\int_a^t \rho(\tau)\, d\tau, \tag{11}$$

$$\varphi^+(t) + \varphi^-(t) = \frac{1}{\pi i}\left[\int_a^t \rho(\tau) \ln \frac{f(t)-f(\tau)}{f(b)-f(t)}\, d\tau + \right.$$

$$\left. + \int_t^b \rho(\tau) \ln \frac{f(\tau)-f(t)}{f(b)-f(t)}\, d\tau\right] = \frac{1}{\pi i}\int_a^b \rho(\tau) \ln \frac{f(\tau)-f(t)}{f(b)-f(t)}\, d\tau -$$

$$-\int_a^t \rho(\tau)\, d\tau, \tag{12}$$

которые позволяют интегральное уравнение (9) свести к краевой задаче Римана для системы m пар автоморфных функций

$$\varphi^+(t) = G(t)\,\varphi^-(t) + g(t), \quad \varphi(z_0) = 0, \tag{13}$$

где

$$G(t) = [A(t)]^{-1}\,[A(t) - 2B(t)]; \quad g(t) = [A(t)]^{-1}\, c(t).$$

(О решении этой задачи см. [6]).

Если задачу Римана (13) удается решить в замкнутой форме, то решение системы интегральных уравнений (9) получим в замкнутой форме и оно будет определяться формулой

$$\rho(t) = \left\{ -A_0(t)\, c(t) - \frac{B_0(t)}{\pi i}\int_a^b Z(\tau)\, c(\tau)\, \frac{f'(\tau)\, d\tau}{f(\tau)-f(t)} - \right.$$

$$\left. - B_0(t)\, P\,[f(t)]\right\}', \tag{14}$$

где $P\,[f(t)] = \{p_{\varkappa_1 - 1}\,[f(t)], \ldots, p_{\varkappa_m - 1}\,[f(t)]\}$, $p_\alpha \equiv 0$ при $\alpha < 0$, $\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_m$ — частные индексы класса H_0 задачи (13); $A_0(t)$, $B_0(t)$, $Z(t)$ — те же, что и в формуле (7).

Если среди частных индексов задачи (13) имеются отрицательные

$$\varkappa_1 \geqslant \varkappa_2 \geqslant \ldots > \varkappa_l \geqslant 0 > \varkappa_{l+1} \geqslant \ldots \geqslant \varkappa_m,$$

то для существования решений класса $h(a, b)$ системы интегральных уравнений (9) необходимо и достаточно, чтобы вектор $c(t)$ удовлетворял условию

$$\int_a^b q\,[f(t)]\, Z(t)\, c(t)\, dt = 0, \tag{15}$$

где $q\,[f(t)] = \{0, \ldots, 0, q_{-\varkappa_{l+1}-1}\,[f(t)], \ldots, q_{-\varkappa_m - 1}\,[f(t)]\}$, q_α — полином степени α с произвольными коэффициентами.

Таким образом, решение системы (9) получаем теми же рассуждениями, что и решение системы (1), с той лишь разницей, что приходим к задаче Римана для системы m пар автоморфных функций в случае группы, характеризующейся одним инвариантом.

3. Методом аналитического продолжения в комплексную плоскость можно найти решение обобщенного интегрального уравнения с логарифмическими ядрами

$$-2a(t)\int_a^{\alpha(t)}\varphi(\tau)\,d\tau+\frac{a(t)}{\pi i}\int_a^b\varphi(\tau)\ln\frac{\tau-\alpha(t)}{b-\alpha(t)}\,d\tau-$$

$$-\frac{b(t)}{\pi i}\int_a^b\varphi(\tau)\ln\frac{\tau-t}{b-t}\,d\tau=c(t),\qquad(16)$$

где $a(t)$, $b(t)$, $c(t)$ — заданные на контуре функции, производные которых удовлетворяют условию Гельдера; $\varphi(t)$ — искомое решение уравнения из класса $h(a, b)$; $a(t)$, $b(t)$ нигде на контуре не обращаются в нуль. Функция $\alpha(t)$ имеет отличную от нуля производную $\alpha'(t)$, удовлетворяющую условию Гельдера; переводит контур L взаимно однозначно в самого себя с сохранением направления.

С помощью аналогов формул Сохоцкого для интеграла

$$\Phi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_a^b\varphi(\tau)\ln\frac{\tau-z}{b-z}\,d\tau\qquad(17)$$

интегральное уравнение (16) сводится к неоднородной обобщенной задаче Римана

$$\Phi^+[\alpha(t)]=\frac{b(t)}{a(t)}\Phi^-(t)+\frac{c(t)}{2a(t)},\quad\Phi(\infty)=0.\qquad(18)$$

Решение задачи (18) надо искать в классе ограниченных функций на концах a и b.

Решение уравнения (16) выразится формулами [5]:

$$\varphi(t)=-\left\{\frac{1}{2}X^+(t)P_{\varkappa-1}[\beta(t)]-\frac{1}{2}X^-(t)P_{\varkappa-1}(t)+\right.$$

$$+\frac{X^+(t)}{2\pi i}\int_a^b\frac{P_{\varkappa-1}[\beta(\tau)]}{\tau-t}\,d\tau-\frac{X^-(t)}{2\pi i}\int_a^b\frac{P_{\varkappa-1}(\tau)\,d\tau}{\tau-t}+$$

$$\left.+\int_a^b R^*(t,\tau)\left[P_{\varkappa-1}(\tau)+\frac{g(\tau)}{X^+[\alpha(\tau)]}\right]d\tau+f(t)\right\},\qquad(19)$$

где

$$R^*(t,\tau)=\frac{1}{2}X^+(t)R[\beta(t),\tau]+\frac{1}{2}X^-(t)R(t,\tau)+$$

$$+\frac{X^+(t)}{2\pi i}\int_a^b\frac{R[\beta(\tau_1),\tau]}{\tau_1-t}\,d\tau_1-\frac{X^-(t)}{2\pi i}\int_a^b\frac{R(\tau_1,\tau)}{\tau_1-t}\,d\tau_1;$$

$$f(t)=\frac{1}{2}g[\beta(t)]+\frac{1}{2}\frac{X^-(t)}{X^+[\alpha(t)]}g(t)+$$

$$+\frac{X^+(t)}{2\pi i}\int\limits_a^b \frac{g[\beta(\tau)]}{X^+(t)}\frac{d\tau}{\tau-t}-\frac{X^-(t)}{2\pi i}\int\limits_a^b \frac{g(t)}{X^+[\alpha(t)]}\frac{d\tau}{\tau-t};$$

$$g(t)=-\frac{c(t)}{2a(t)};\quad \beta(t)\text{ — функция обратная } \alpha(t);$$

$$X^+(t)=[t-\alpha(a)]^{\lambda_1}[t-\alpha(b)]^{\lambda_2}e^{\frac{1}{2\pi i}\int\limits_a^b \frac{\sigma[\beta(\tau)]}{\tau-t}d\tau};$$

$$X^-(t)=t^{-\varkappa}\left(\frac{t-a}{t-t_0}\right)^{\lambda_1}\left(\frac{t-b}{t-t_0}\right)^{\lambda_2}e^{\frac{1}{2\pi i}\int\limits_a^b \frac{\sigma(\tau)}{\tau-t}d\tau};$$

$$\lambda_1=\frac{1}{2\pi i}\ln\frac{G(a-0)}{G(a+0)};\quad \lambda_2=\frac{1}{2\pi i}\ln\frac{G(b-0)}{G(b+0)};$$

$$G(t)=\frac{b(t)}{a(t)};\quad 0<\operatorname{Re}\lambda_j<1,\quad j=1,\ 2;$$

$$\varkappa=\operatorname{Ind}\left\{G(t)(t-z_0)^{-\lambda_1}\left[\frac{t-a}{\alpha(t)-\alpha(a)}\right]^{\lambda_1}(t-z_0)^{-\lambda_2}\left[\frac{t-b}{\alpha(t)-\alpha(b)}\right]^{\lambda_2}\right\};$$

$\sigma(t)$ — решение интегрального уравнения

$$T\sigma=\ln\left\{t^{-\varkappa}G(t)(t-z_0)^{-\lambda_1}\left[\frac{t-a}{\alpha(t)-\alpha(a)}\right]^{\lambda_1}(t-z_0)^{-\lambda_2}\left[\frac{t-b}{\alpha(t)-\alpha(b)}\right]^{\lambda_2}\right\},$$

$$T\sigma\equiv\sigma(t)+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_a^b\left[\frac{\alpha'(\tau)}{\alpha(\tau)-\alpha(t)}-\frac{1}{\tau-t}\right]\sigma(\tau)\,d\tau;$$

$$P_{\varkappa-1}(z)=C_0+C_1z+\ldots+C_{\varkappa-1}z^{\varkappa-1};$$

$R(t,\ \tau)$ — резольвента интегрального уравнения

$$T\rho=P_{\varkappa-1}(t)+\frac{g(t)}{X^+[\alpha(t)]}.$$

Если $\varkappa\leqslant 0$, то полагаем $P_{\varkappa-1}(t)=0$ в (19). При $\varkappa<0$ решение уравнения (16) существует, если выполняются $\varkappa$ условий разрешимости

$$\int\limits_a^b g(t)\,g_k(t)\,dt=0,\quad k=0,\ 1,\ \ldots,\ -\varkappa-1;$$

$$g_k(t)=\frac{1}{X^+[\alpha(t)]}\left\{t^k+\int\limits_a^b R(\tau,\ t)\,\tau^k\,d\tau\right\}.$$

Аналогично можно найти решение обобщенной системы интегральных уравнений с логарифмическими ядрами

$$-2A(t)\int_a^{\alpha(t)}\rho(\tau)\,d\tau+\frac{A(t)}{\pi i}\int_a^b\rho(\tau)\ln\frac{\tau-\alpha(t)}{b-\alpha(t)}\,d\tau-$$

$$-\frac{B(t)}{\pi i}\int_a^b\rho(\tau)\ln\frac{\tau-t}{b-t}\,d\tau=c(t), \tag{20}$$

где $A(t)$, $B(t)$ — матрицы, производные элементов которых удовлетворяют условию Гельдера; $c(t)$ — заданный на контуре вектор, компоненты которого имеют производные, удовлетворяющие условию Гельдера; $\rho(t)$ — искомый вектор из класса $h(a, b)$.

Кроме того, считаем, что

$$\det[A(t)]\neq 0 \quad \text{и } \det[B(t)]\neq 0 \quad \text{на } L.$$

Вводя аналитический вектор

$$\varphi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_a^b\rho(\tau)\ln\frac{\tau-z}{b-t}\,d\tau \tag{21}$$

и пользуясь аналогами формул Сохоцкого для интеграла (21), уравнение (20) можно свести к обобщенной краевой задаче Римана для системы m пар функций

$$\varphi^+[\alpha(t)]=[A(t)]^{-1}B(t)\varphi^-(t)+\frac{1}{2}[A(t)]^{-1}c(t),$$

$$\varphi(\infty)=0. \tag{22}$$

4. Остановимся коротко на решении еще двух обобщенных интегральных уравнений с полярным и логарифмическим ядрами.

Первое из них

$$a(t)\left\{\varphi[\alpha(t)]-\int_a^{\alpha(t)}F[\varphi(\tau)]\,d\tau\right\}+b(t)\left\{\varphi(t)-\right.$$

$$\left.-\int_a^t F[\varphi(\tau)]\,d\tau\right\}+\frac{a(t)}{\pi i}\left\{\int_a^b\frac{\varphi(\tau)\,d\tau}{\tau-\alpha(t)}+\right.$$

$$\left.+\int_a^b F[\varphi(\tau)]\ln\frac{\tau-\alpha(t)}{b-\alpha(t)}\,d\tau-\pi i\int_a^{\alpha(t)}F[\varphi(\tau)]\,d\tau\right\}-$$

$$-\frac{b(t)}{\pi i}\left\{\int_a^b\frac{\varphi(t)}{\tau-t}\,d\tau+\int_a^b F[\varphi(\tau)]\ln\frac{\tau-t}{b-t}\,d\tau-\right.$$

$$\left.-\pi i\int_a^t F_*[\varphi(\tau)]\,d\tau\right\}=c(t), \tag{23}$$

где $a(t)$, $b(t)$, $c(t) \in H$, $\alpha'(t) \in H$, $a(t)$, $b(t)$ нигде на L не обращаются в нуль; $F(z)$ — аналитическая функция (поэтому плотность интеграла с логарифмическим ядром удовлетворяет условию Гельдера).

Для решения уравнения используется метод аналитического продолжения в комплексную плоскость с помощью функции

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\left\{\int_a^b \frac{\varphi(\tau)\,d\tau}{\tau - z} + \int_a^b F[\varphi(\tau)] \ln \frac{\tau - z}{b - z}\,d\tau\right\}, \tag{24}$$

где $\varphi(t)$ — искомое решение уравнения (23). Функция $\Phi(z)$ аналитична во всей плоскости комплексной переменной z, разрезанной по кривой L с концами a и b; $\Phi(\infty) = 0$.

В силу аналогов формул Сохоцкого для интеграла (24) получаем соотношения:

$$\Phi^+(t) - \Phi^-(t) = \varphi(t) - \int_a^t F[\varphi(\tau)]\,d\tau, \tag{25}$$

$$\Phi^+(t) + \Phi^-(t) = \frac{1}{\pi i}\left\{\int_a^b \frac{\varphi(\tau)\,d\tau}{\tau - t} + \int_a^b F[\varphi(\tau)] \ln \frac{\tau - t}{b - t}\,d\tau\right\} - \\ - \int_a^t F[\varphi(\tau)]\,d\tau. \tag{26}$$

С помощью этих соотношений уравнение (23) сводится к обобщенной задаче Римана (18). Зная решение задачи (18), решение интегрального уравнения получим из соотношения (25). Обозначим

$$\int_a^t F[\varphi(\tau)]\,d\tau = u(t), \quad \Phi^+(t) - \Phi^-(t) = c_1(t),$$

тогда

$$\varphi(t) = F^{-1}[u'(t)].$$

Для определения $u(t)$ получаем дифференциальное уравнение первого порядка

$$u'(t) = F[u(t) + c_1(t)]. \tag{27}$$

Если $F[\varphi(t)] \equiv \varphi(t)$, $\alpha(t) \equiv t$, получаем случай, рассмотренный Ф. Д. Гаховым [2]. Уравнение (27) будет тогда линейным.

Второе уравнение

$$a(t)\left\{\varphi^{(m)}[\alpha(t)] - \int_a^{\alpha(t)} \varphi(\tau)\,d\tau\right\} + b(t)\left[\varphi^{(m)}(t) - \right. \\ \left. - \int_a^t \varphi(\tau)\,d\tau\right] + \frac{a(t)}{\pi i}\left\{\int_a^b \frac{\varphi^{(m)}(\tau)\,d\tau}{\tau - \alpha(t)} + \right. \\ \left. + \int_a^b \varphi(\tau) \ln \frac{\tau - \alpha(t)}{b - \alpha(t)}\,d\tau - \pi i \int_a^{\alpha(t)} \varphi(\tau)\,d\tau\right\} -$$

$$-\frac{b(t)}{\pi i}\left[\int_a^b \frac{\varphi^{(m)}(\tau)\,d\tau}{\tau-t}+\int_a^b \varphi(\tau)\ln\frac{\tau-t}{b-t}\,d\tau-\right.$$

$$\left.-\pi i\int_a^t \varphi(\tau)\,d\tau\right]=c(t), \tag{28}$$

где $a(t)$, $b(t)$, $c(t)$ те же, что в уравнении (23); $\varphi^{(m)}(t)\in H$.

С помощью голоморфной функции

$$\Phi(z)=\frac{1}{2\pi i}\left[\int_a^b \frac{\varphi^{(m)}(\tau)\,d\tau}{\tau-z}+\int_a^b \varphi(\tau)\ln\frac{\tau-z}{b-z}\,d\tau\right] \tag{29}$$

уравнение (28) сводится к обобщенной задаче Римана (18).

Если решение задачи Римана найдено, то решение интегрального уравнения находим из дифференциального уравнения

$$u^{(m+1)}(t)-u(t)=c_1(t), \tag{30}$$

где

$$u(t)=\int_a^t \varphi(\tau)\,d\tau;\quad c_1(t)=\Phi^+(t)-\Phi^-(t).$$

В заключение выражаю глубокую благодарность профессору Ф. Д. Гахову за внимательное руководство работой.

ЛИТЕРАТУРА

1. Векуа Н. П. Системы сингулярных интегральных уравнений, ГИТТЛ, М.— Л., 1950.
2. Гахов Ф. Д. Краевые задачи. Физматгиз, М., 1963.
3. Сакалюк К. Д. Диссертация на соискание степени канд. физ.-мат. наук. БГУ, 1963.
4. Чеботарев Г. Н. Уч. зап. Казанского ун-та, **116**, кн. 4, 1956.
5. Чибрикова Л. И. Уч. зап. Казанского ун-та, **112**, кн. 10, 1952.
6. Рысюк Н. А. Дифференциальные уравнения, № 5, 1966.

Поступило в редакцию 12. III 1966

ВЕСЦІ АКАДЭМІІ НАВУК БЕЛАРУСКАЙ ССР № 3 1966
СЕРЫЯ ФІЗІКА-МАТЭМАТЫЧНЫХ НАВУК

В. Б. ДЫБИН

ИСКЛЮЧИТЕЛЬНЫЙ СЛУЧАЙ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ТИПА СВЕРТКИ

Изучается известное уравнение

$$\lambda f(x) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty k(x-t) f(t)\,dt = g(x), \quad x > 0. \qquad (1)$$

Исключительность изучаемого случая состоит в том, что у функции $\lambda + K(x)$, где $K(x)$ есть преобразование Фурье ядра $k(x)$ уравнения, допускаются нули целого порядка в отдельных точках вещественной оси.

Среди большого количества работ, посвященных исследованию уравнения (1) как в нормальном ($\lambda + K(x) \neq 0$, $-\infty \leqslant x \leqslant \infty$), так и в исключительном случае, в качестве наиболее близких нам отметим статьи [1—4]. В последних уравнения (1) или его обобщения изучаются в различных классах обычных функций.

Ниже предлагается критерий разрешимости и схема решения уравнения (1) в классах функций вида $P_n(x) f(x)$, где $P_n(x)$—произвольный многочлен степени n, а $f(x)$—ограниченная на вещественной оси функция.

Случаи подобного рода часто возникают в различных задачах механики, радиоэлектроники и др. Отметим, в частности, цикл работ ростовских механиков по контактным задачам теории упругости (см., например, [5]).

Если потребовать, чтобы $P_n(x)\ k(x) \in L_1(-\infty, \infty)$, то интеграл, входящий в левую часть уравнения, можно понимать в обычном смысле, и тогда постановка задачи фактически не отличается от традиционной (см. [1]).

Однако более плодотворным оказывается подход, когда растущие на ∞ функции понимаются как о. ф. (обобщенные функции), а операции, проводимые над ними, как операции над о. ф., т. е. линейными непрерывными функционалами над некоторыми основными нормированными пространствами.

В результате оказываются доступными в достаточной мере разработанные методы преобразования Фурье о. ф. [6] и задачи Римана в пространствах о. ф. [7, 8].

Результаты, приводимые ниже, частично и в кратком изложении содержатся в заметке автора [9].

1. Классы основных и обобщенных функций. Пусть $n \geqslant 0$—целое число. Через $L_1\{-n; 0\}$ обозначим пространство основных функций $\varphi(x)$, определенных на вещественной оси, таких, что

$$(x+i)^n \varphi(x) \in L_1(-\infty, \infty),$$

с нормой

$$\|\varphi\| = \int_{-\infty}^{\infty} |(x+i)^n \varphi(x)|\,dx. \qquad (2)$$

Тогда $L_1\{n;\ 0\}$—пространство о. ф. f над основным пространством $L_1\{-n;\ 0\}$, т. е. пространство линейных, ограниченных по норме (2) функционалов над $L_1\{-n;\ 0\}$.

Можно показать, что любая о. ф. f пространства $L_1\{n;\ 0\}$ может быть представлена в виде $f(x) = (x+i)^n f_0(x)$, где $f_0(x) \in M$—пространству ограниченных функций.

Через $L_{1\pm}\{\pm n;\ 0\}$ обозначим подпространства функций из $L_1\{\pm n;\ 0\}$ вида $f_\pm(x) = \frac{1}{2}[\pm 1 + \operatorname{sgn} x] f(x)$, где $f(x) \in L_1\{\pm n;\ 0\}$.

Пусть a_k — вещественное, α_k, $0 \leqslant \alpha_k \leqslant n$,—целое числа. Если $\varphi(x) \in L_1\{-n;\ 0\}$, то через E^{kj}, $1 \leqslant j \leqslant \alpha_k$, обозначим пространство функций вида

$$\psi_k(x) = \begin{cases} \dfrac{i^j}{(j-1)!} e^{-ia_k x} \displaystyle\int_x^\infty (x-t)^{j-1} e^{ia_k t} \varphi(t)\, dt, & x > 0, \\ \dfrac{(-i)^j}{(j-1)!} e^{-ia_k x} \displaystyle\int_{-\infty}^x (x-t)^{j-1} e^{ia_k t} \varphi(t)\, dt, & x > 0, \end{cases}$$

с нормой

$$\|\psi\|_{E^{kj}} = \|\varphi\|_{L_1\{-n;\ 0\}}.$$

Тогда через E обозначим нормированное пространство основных функций $E = \bigcup_{k=1}^{p} \bigcup_{j=1}^{\alpha_k} E^{kj} \cup L_1\{-n;\ 0\}$ с нормой $\|\psi\| = \|\varphi\|_{L_1\{-n;\ 0\}}$.

Через D обозначим пространство о. ф. над основным пространством E. Нетрудно видеть, что $D = \bigcap_{k=1}^{p} \bigcap_{j=1}^{\alpha_k} D^{kj} \cap L_1\{n;\ 0\}$, где D^{kj} — пространство, сопряженное к E^{kj}.

Что касается вида и свойств о. ф. $g \in D$, то можно заметить, что в D содержатся те функции $g(x)$ из пространства $L_1\{n;\ 0\}$, для которых справедлива оценка

$$\left|\int_{-\infty}^{\infty} g(x)\,\psi_{kj}(x)\, dx\right| \leqslant C \int_{-\infty}^{\infty} \left|(x+i)^n \varphi(x)\right| dx, \text{ где } 1 \leqslant j \leqslant \alpha_k,\ 1 \leqslant k \leqslant p,$$

$$C = \text{const},\ \varphi(x) \in L_1\{-n;\ 0\}.$$

2. Преобразование Фурье. Через $R\{0;\ -n\}$ обозначим пространство функций $\Phi(x) = V\varphi = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t) e^{ixt}\, dt$, являющихся интегралами Фурье элементов $\varphi(t) \in L_1\{-n;\ 0\}$, с нормой $\|\Phi\| = \|\varphi\|_{L_1\{-n;\ 0\}}$.

Пространство $R\{0;\ -n\}$ можно описать следующим образом: $\Phi(x) \in R\{0;\ -n\}$ тогда и только тогда, когда $\Phi^{(k)}(x) \in R$, $0 \leqslant k \leqslant n$, где R—кольцо преобразований Фурье абсолютно интегрируемых на вещественной оси функций.

Через $R\{0;\ n\}$ обозначим пространство о. ф., являющихся преобразованиями Фурье элементов из $L_1\ \{n;\ 0\}$. Причем преобразование Фурье Vf о. ф. $f \in L_1\{n;\ 0\}$ определяется с помощью равенства $(Vf,\ \Phi(x)) = (f,\ \varphi(-x))$, где $\Phi(x) \in R\{0;\ n\}$, а $\varphi(x) = V^{-1}\Phi \in L_1\{-n;\ 0\}$.

Пространство $R\{0;\ n\}$ сопряжено пространству $R\{0;\ -n\}$ и состоит из о. ф. порядка не выше $n+1$. В частности, $\delta^{(k)}(x-a) \in R\{0;\ n\}$, $0 \leqslant k \leqslant n$, где $(\delta^{(k)}(x-a),\ \Phi(x)) = (-1)^k \Phi^{(k)}(a)$.

Над пространством $R\{0;\ -n\}$ определен ограниченный по его норме оператор Коши S

$$S\Phi = \frac{1}{\pi i}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\Phi(t)dt}{t-x} \in R\{0; -n\},\ \ \Phi(t)\in R\{0; -n\}.$$

Через $R^{\pm}\{0;\ \pm n\}$ мы обозначим подпространства пространства $R\{0;\ \pm n\}$ функций $F^{\pm}$ вида $F^{\pm} = \pm\frac{1}{2}F + \frac{1}{2}SF,\ F\in R\{0;\ \pm n\}$, где на о. ф. F оператор S действует, как обычно, по формуле $(SF, \Phi) = (F, -S\Phi)$.

Лемма 1. *Для того чтобы функция $F^{\pm}\in R^{\pm}\{0;\ \pm n\}$, необходимо и достаточно, чтобы ее оригинал Фурье $f_{\pm}\in L_1\{\pm n;\ 0\}$.*

Доказательство. Не останавливаясь на доказательстве формулы $V[\pm\frac{1}{2}\varphi(t) + \frac{1}{2}\operatorname{sgn} t\,\varphi(t)] = \pm\frac{1}{2}\Phi(x) + \frac{1}{2}(S\Phi)(x)$ в случае, когда $\varphi(t)\in L_1\{-n;\ 0\}$, заметим, что оно может быть легко получено из леммы [2].

Пусть $f_{\pm}\in L_{1\pm}\{n;\ 0\}$, покажем, что $Vf_{\pm} = \frac{1}{2}F + \frac{1}{2}SF$, где $F = Vf\in R\{0;\ n\}$. Действительно,

$$\left(Vf_{\pm}, \Phi(x)\right) = \left(f_{\pm}, \varphi(-x)\right) = \left(f, \pm\frac{1}{2}\varphi(-x) + \frac{1}{2}\operatorname{sgn} x\,\varphi(-x)\right) =$$

$$= \left(\pm\frac{1}{2}f, \varphi(-x)\right) \pm \left(\frac{1}{2}f, -\operatorname{sgn}(-x)\,\varphi(-x)\right) = \left(\pm\frac{1}{2}F,\ \Phi\right) +$$

$$+ \left(\frac{1}{2}F, -SF\right) = \left(\pm\frac{1}{2}F + \frac{1}{2}SF,\ \Phi\right).$$

Аналогично доказывается обратное соотношение $V^{-1}F^{\pm} = f_{\pm}\in L_{1\pm}\{n;\ 0\}$, где обратное преобразование Фурье $V^{-1}F$ о. ф. $F\in R\{0;\ n\}$ определяется равенством $\left(V^{-1}F,\ \varphi(x)\right) = \left(F,\ \Phi(-x)\right)$, $\varphi = V^{-1}\Phi\in L_1\{-n;\ 0\}$.

Перейдем к преобразованиям Фурье элементов пространств E и D.

Лемма 2. *Преобразование Фурье $\Psi_{kj}(x) = V\psi_{kj}\in R$ и имеет вид*

$$\Psi_{kj}(x) = \frac{\Phi(x) - T_{kj}(x)}{(x-a_k)^j},\quad \text{где } \Phi(x) = V\varphi\in R\{0;\ -n\},$$

а $T_{kj}(x)$ — интерполяционный многочлен Эрмита степени $j-1$ в точке a_k (в данном случае отрезок ряда Тейлора).

Доказательство. Остановимся для простоты на случае $j = 1$. Воспользовавшись возможностью интегрировать по частям, получим

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\psi_{k1}(t)\,e^{ixt}\,dt = \frac{i}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{0}^{\infty}e^{i(x-a_k)t}\,dt\int\limits_{t}^{\infty}e^{ia_k\tau}\varphi(\tau)\,d\tau -$$

$$-\frac{i}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{0}e^{i(x-a_k)t}\,dt\int\limits_{-\infty}^{t}e^{ia_k\tau}\varphi(\tau)\,d\tau =$$

$$=\left[\frac{e^{i(x-a_k)t}}{\sqrt{2\pi}(x-a_k)}\int_t^\infty e^{ia_k\tau}\varphi(\tau)d\tau\right]_0^\infty+\frac{1}{\sqrt{2\pi}(x-a_k)}\int_0^\infty e^{ixt}\varphi(t)\,dt-$$

$$-\left[\frac{e^{i(x-a_k)t}}{\sqrt{2\pi}(x-a_k)}\int_{-\infty}^t e^{ia_k\tau}\varphi(\tau)\,d\tau\right]_{-\infty}^0+\frac{1}{\sqrt{2\pi}(x-a_k)}\int_{-\infty}^0 e^{ixt}\varphi(t)\,dt=$$

$$=\frac{\Phi(x)-\Phi(a_k)}{x-a_k}\in R.$$

Общий случай рассматривается аналогично.

Через E_0^{kj} обозначим пространство преобразований Фурье функций $\psi_{kj}(x)\in E^{kj}$, т. е. функций $\Psi_{kj}(x)=V\psi_{kj}=\dfrac{\Phi(x)-T_{kj}(x)}{(x-a_k)^j}$, с нормой

$$\|\Psi_{kj}\|=\|\Phi\|_{R\{0;\,n\}}=\|\varphi\|. \tag{3}$$

Объединение пространств $E_0=\bigcup\limits_{k=1}^{p}\bigcup\limits_{j=1}^{\alpha_k}E_0^{kj}\cup R\{0;-n\}$ является пространством преобразований Фурье $E_0=V[E]$ основных функций из E. Тогда D, определенное как пространство преобразований Vg о. ф. $g\in D\subset L_1\{n;\ 0\}$, будет пространством линейных, ограниченных по норме (3) функционалов над основным пространством E_0. Ясно, что $D\subset R\{0;\ n\}$.

Ввиду того, что над пространством E определена ограниченная операция умножения на $\operatorname{sgn} x$, над пространством E_0 определен ограниченный оператор Коши S. Поэтому так же, как и выше, могут быть введены пары пространств: $E_\pm\subset L_{1\pm}\{-n;\ 0\}$ и $E_0^\pm\subset R^\pm\{0;\ -n\}$; $D_\pm\subset L_{1\pm}\{n;\ 0\}$ и $D^\pm\subset$ $\subset R^\pm\{0;\ n\}$, между элементами которых устанавливается взаимно однозначное соответствие с помощью оператора Фурье.

3. Уравнение (1) в классе $L_1\{n;\ 0\}$. Мы рассматриваем уравнение (1) в следующих предположениях относительно ядра $k(x)$:

а) $k(x)\in L_1\{-n;\ 0\}$, т. е. $K(x)=Vk\in R\{0;\ -n\}$;

б) $\lambda+K(x)=\dfrac{A(x)}{(x+i)^\alpha}\widetilde{K}(x)$, где $A(x)=\prod\limits_{k=1}^{p}(x-a_k)^{\alpha_k}$,

$\alpha=\sum\limits_{k=1}^{p}\alpha_k$, α_k, a_k удовлетворяют перечисленным выше требованиям, $\widetilde{K}(x)$ на сомкнутой оси x в нуль не обращается и представима в виде $c+\widetilde{K}_1(x)$, где $\widetilde{K}_1(x)\in R\{0;\ -n\}$.

Ввиду того, что операция свертки функции $k(x)$ с любой основной функцией $\varphi(x)\in L_1\{-n;\ 0\}$ непрерывна в пространстве $L_1\{-n;\ 0\}$, равенство (1) можно понимать в следующем смысле

$$\left(f_+\lambda,\ \varphi_+(x)+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}k(t-x)\varphi_+(t)\,dt\right)=(g,\ \varphi_+(x)), \tag{4}$$

где $f_+\in L_{1+}\{n;\ 0\}$—искомая о. ф.; $\varphi_+(x)$—произвольная основная функция из пространства $L_{1+}\{-n;\ 0\}$.

Для того чтобы применить к уравнению (4) преобразование Фурье, доопределим его так, чтобы равенство выполнялось на всем пространстве $L_1\{-n;\ 0\}$:

$$\left(f_+\lambda,\ \varphi(x)+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}k(t-x)\varphi(t)\,dt\right)=(g_+,\varphi)+(h_-,\varphi), \tag{5}$$

где $(h_-,\ \varphi)=\left(f_+,\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)\int\limits_{-\infty}^{\infty}k(t-x)\,\varphi_-(t)\,dt$—новая неизвестная о. ф. из пространства $L_{1-}\{n;\ 0\}$.

После преобразования уравнения (5) по Фурье*) мы приходим к следующей равносильной задаче Римана в пространстве $R\{0;\ n\}$:

$$[\lambda+K(x)]\,F^+=H^-+G^+ \tag{6}$$

с индексом $\varkappa=-\operatorname{Ind}\widetilde{K}(x)$.

Основной результат настоящего параграфа состоит в следующем.

Теорема 1. *Пусть $\varkappa$—индекс уравнения (4). Необходимыми и достаточными условиями разрешимости уравнения (4) в классе $L_1\{n;\ 0\}$ являются следующие условия:*

а) $g_+\in D_+$, если $\varkappa\geqslant 0$;

б) $g_+\in D_+$,

$(g_{+*}\chi_-(x),\ [x^{k-1}e^{-x}]_+)=0$, **) $k=1,\ 2,\dots,|\varkappa|$, *если $\varkappa<0$, где $\chi_-(x)\in L_{1-}\{-n;\ 0\}$ полностью определяется ядром $k(x)$.*

Необходимость. Пусть существует решение $F^+,\ H^-\in R\{0;\ n\}$ задачи (6). Тогда равенство

$$\left(\frac{A(x)}{(x+i)^{\alpha}}\widetilde{K}(x)\,F^+-H^-,\ \Phi\right)=(G^+,\ \Phi)$$

удовлетворяется для любых $\Phi\in R\{-n;\ 0\}$.

Покажем, что о. ф., стоящая в его левой части, принадлежит пространству $D=\bigcap\limits_{k=1}^{p}\bigcap\limits_{j=1}^{\alpha_k}D^{kj}\cap R\{n;\ 0\}$.

Действительно, для любых $1\leqslant j\leqslant\alpha_k$, $1\leqslant k\leqslant p$,

$$\left|\left(\frac{A(x)}{(x+i)^{\alpha}}\widetilde{K}(x)\,F^+,\ \Psi_{kj}(x)\right)\right|=\left|\left(A_1(x)\frac{(x-a_k)^j}{(x+i)^j}F^+,\ \frac{\Phi(x)-T_{kj}(x)}{(x-a_k)^j}\right)\right|=$$

$$=\left|\left(\frac{A_1(x)}{(x+i)^j}F^+,\ \Phi(x)\right)+\sum_{s=0}^{j-1}c_s\left(A_1(x)F^+,\frac{1}{(x+i)^j}\right)\left(\delta^{(s)}(x-a_k),\ \Phi(x)\right)\right|\leqslant$$

$$\leqslant C\,\|\Phi\|=C\,\|\Psi_{kj}\|.$$

С другой стороны, $H^-=[(\lambda+K(x))\,F^+]^-=\frac{1}{2}[S-1](\lambda+K(x))\,F^+$ и поэтому тоже принадлежит пространству D_{kj}. Следовательно, для всех $1\leqslant j\leqslant\alpha_k$, $1\leqslant k\leqslant p$, $G^+\in D^+_{kj}$, а поэтому и $G^+\in D^+$.

Пусть теперь $\varkappa<0$. Известными в теории краевых задач преобразованиями приведем тождество (7) к следующему равносильному виду:

---

*) Доказательство того факта, что $V[f_{+*}\,k(x)]=K(x)F^+$, проводится аналогично доказательству леммы 1.

**) $[x^{k-1}e^{-x}]_+=\begin{cases}x^{k-1}e^{-x}, & x>0,\\ 0, & x<0,\end{cases}$, символом (*) обозначена операция свертывания.

$$\left(\frac{x-i}{x+i}\right)^{|\varkappa|} F_1^+ = H_1^- + G_1, \tag{7}$$

где

$$F_1^+ = \frac{A(x)}{(x+i)^\alpha} X^+(x) F^+;\quad H_1^- = X^-(x) H^-;$$

$$G_1 = X^-(x) G^+;\quad X^+(x)/X^-(x) = \left(\frac{x-i}{x+i}\right)^\varkappa \widetilde{K}(x);\quad X^\pm(x) \in R^\pm\{0; -n\}$$

и нигде в комплексной плоскости в нуль не обращаются.

Обозначив далее через $G_1^\pm$ о. ф. $G_1^\pm = \frac{1}{2}[S \pm I] G_1$ ввиду обобщенной теоремы Лиувилля [7], имеем

$$\left(\frac{x-i}{x+i}\right)^{|\varkappa|} F_1^+ - G_1^+ \equiv H_1^- - G_1^- \equiv 0,$$

откуда следует, что $F_1^+ = \left(\frac{x+i}{x-i}\right)^{|\varkappa|} G_1^+ \in R^+\{0;\ n\}$. Последнее условие равносильно требованию, чтобы $(F_1^+,\ \Phi^+) = 0$ для любой основной функции $\Phi^+(x) \in R^+\{0;\ -n\}$, в частности для функций $(x+i)^{-k}$, $k = 1, 2, \dots, |\varkappa|$.

Поэтому необходимо, чтобы

$$\left(\left(\frac{x+i}{x-i}\right)^{|\varkappa|} G_1^+,\ (x+i)^{-k}\right) = 0,\ k = 1, 2, \dots, |\varkappa|.$$

Последние условия равносильны требованиям

$$(G_1^+,\ (x-i)^{-k}) = 0,\quad k = 1, 2, \dots, |\varkappa|, \tag{8}$$

или возвращаясь к оригиналам Фурье,

$$(g_+ * \chi_-(x),\ [x^{k-1} e^{-x}]_+) = 0,\ k = 1, 2, \dots, |\varkappa|.$$

Достаточность. Пусть g_+ удовлетворяет условиям теоремы. Обратимся к задаче (7), равносильной исходному уравнению. Для решения ее воспользуемся приемом, предложенным В. С. Рогожиным [8].

В пространстве $R\{0;\ -n\}$ рассмотрим следующую краевую задачу:

$$\frac{(x+i)^\alpha}{A(x)} \widetilde{\Phi}^+(x) = \left(\frac{x-i}{x+i}\right)^{-\varkappa} \widetilde{\Phi}^-(x) + \Phi(x) \tag{9}$$

с произвольной правой частью $\Phi(x) \in R\{0;\ -n\}$.

Решение $\widetilde{\Phi}^\pm(x) \in R^\pm\{0;\ -n\}$ последней может быть получено также как в [3]. Сформулируем результат:

а) если $\varkappa < 0$, то неоднородная задача (9) разрешима при любой правой части $\Phi(x) \in R\{0;\ -n\}$, имеет $|\varkappa|$ линейно независимых решений и общее решение вида

$$\left.\begin{aligned} \widetilde{\Phi}^+(x) &= \frac{A(x)}{(x+i)^\alpha}\left[\frac{P_{|\varkappa|-1}(x)}{(x+i)^{|\varkappa|}} + \Phi^+(x)\right], \\ \widetilde{\Phi}^-(x) &= \frac{P_{|\varkappa|-1}(x)}{(x-i)^{|\varkappa|}} + \left(\frac{x+i}{x-i}\right)^{|\varkappa|}\Phi^-(x), \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

где $P_{|\varkappa|-1}(x)$ — многочлен степени $|\varkappa|-1$ с произвольными коэффициентами;

б) если $\varkappa \geqslant 0$, то $\varkappa$ необходимых и достаточных условий ее разрешимости имеют вид

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Phi(x)(x+i)^{-k}\,dx = 0, \quad k = 1, 2, \ldots, \varkappa; \tag{11}$$

при выполнении последних единственное решение задачи дается формулами

$$\widetilde{\Phi}^+(x) = \frac{A(x)}{(x+i)^\alpha}\Phi^+(x), \quad \widetilde{\Phi}^-(x) = \left(\frac{x-i}{x+i}\right)^\varkappa \Phi^-(x). \tag{12}$$

Вернемся к задаче (7). Пусть $\varkappa < 0$, записав краевое условие в виде

$$\frac{A(x)}{(x+i)^\alpha} F_2^+ = \left(\frac{x-i}{x+i}\right)^\varkappa [H_1^- + G_1], \tag{13}$$

где $F_2^+ = X^+(x)F^+$, найдем о. ф. F_2^+. Последовательно воспользовавшись равенствами (9), (13), (10), получим, что

$$(AF_2^+, \Phi) = \left(\frac{A(x)}{(x+i)^\alpha} F_2^+, \Phi\right) = \left(\frac{A(x)}{(x+i)^\alpha} F_2^+, \frac{(x+i)^\alpha}{A(x)}\widetilde{\Phi}^+(x) -\right.$$

$$\left.- \left(\frac{x+i}{x-i}\right)^\varkappa \widetilde{\Phi}^-(x)\right) = \left(\left(\frac{x-i}{x+i}\right)^\varkappa (H_1^- + G_1), -\left(\frac{x+i}{x-i}\right)^\varkappa \widetilde{\Phi}^-(x)\right) =$$

$$= \left(G_1, -\Phi^-(x) - \frac{P_{|\varkappa|-1}(x)}{(x-i)^{|\varkappa|}}\right) = (G_1^+, \Phi) + \sum_{k=1}^{|\varkappa|} c_k\,(G_1, (x-i)^{-k}),$$

откуда, ввиду (8),

$$(AF_2^+, \Phi) = (G_1^+, \Phi). \tag{14}$$

Обратимся к уравнению

$$A^*\Psi = \frac{A(x)}{(x+i)^\alpha}\Psi(x) = \Phi(x), \tag{15}$$

где $\Phi(x)$—произвольная основная функция из пространства $R\{0; -n\}$. Оператор A^* имеет непрерывный левый обратный, действующий из $R\{0; -n\}$ в E_0

$$[A^*]^{-1}\Phi = \frac{(x+i)^\alpha \Phi(x) - T_{\alpha-1}(x)}{A(x)},$$

где $T_{\alpha-1}(x)$ — интерполяционный многочлен Эрмита степени $\alpha-1$ с узлами интерполяции a_k, кратности α_k соответственно. Поэтому уравнение (15), а вместе с ним и уравнение (14) имеют единственное решение, первое в пространстве E_0, второе в пространстве $R\{0; n\}$:

$$(F_2^+, \Phi) = (G_1^+, [A^*]^{-1}\Phi) = \left(G_1^+, \frac{(x+i)^\alpha \Phi(x) - T_{\alpha-1}(x)}{A(x)}\right). \tag{16}$$

Пусть теперь $\varkappa \geqslant 0$. Аналогичным путем, воспользовавшись вместо равенств (10), равенствами (12), получим, что $(AF_2^+, \Phi) = (G_1^+, \Phi)$. Однако функционал (AF_2^+, Φ) определен не на всем пространстве $R\{0; -n\}$, а лишь на тех его элементах, которые удовлетворяют условиям (11)*). Вос-

*) Предполагается, что $\varkappa > 0$; если $\varkappa = 0$, единственное решение задачи дается формулой (16).

пользовавшись теоремой из [8], построим его продолжение на все пространство по формуле

$$(AF_2^+, \widetilde{\Phi}) = \left(G_1^+, \widetilde{\Phi}(x)\right) + \sum_{k=1}^{\varkappa} c_k \int_{-\infty}^{\infty} \widetilde{\Phi}(t)(t+i)^{-k}\, dt =$$

$$= \left(G_1^+ + \sum_{k=1}^{\varkappa} c_k (x+i)^{-k}, \widetilde{\Phi}(x)\right) = \left(G_1^+ + \frac{P_{\varkappa-1}(x)}{(x+i)^{\varkappa}},\ \widetilde{\Phi}(x)\right),$$

где $\widetilde{\Phi}(x) \in R\{0; -n\}$, а c_k — произвольные коэффициенты. И теперь в решении появляется дополнительное слагаемое—общее решение соответствующей однородной задачи Римана:

$$(F_2^+, \Phi) = \left(A^{-1}\left[G_1^+ + \frac{P_{\varkappa-1}(x)}{(x+i)^{\varkappa}}\right], \Phi\right) = (G_1^+, [A^*]^{-1}\Phi) +$$

$$+ \left(\frac{P_{\varkappa-1}(x)}{(x+i)^{\varkappa}}, \frac{(x+i)^{\alpha}\Phi(x) - T_{\alpha-1}(x)}{A(x)}\right) = (G_1^+, [A^*]^{-1}\Phi) +$$

$$+ \left(\frac{P_{\varkappa-1}(x)}{(x+i)^{\varkappa-1}} \sum_{k=1}^{p} \sum_{j=0}^{\alpha_k-1} A_{kj}\, \delta^{(j)+}(x-a_k),\ \Phi(x)\right),$$

где A_{kj} — вполне определенные постоянные.

Тем самым доказательство завершено.

Следствием теоремы 1 является следующий результат о количестве решений уравнения (4) в классе $L_1\{n; 0\}$:

Теорема 2. *Пусть выполняются условия разрешимости уравнения (4) в классе $L_1\{n; 0\}$. Тогда, если $\varkappa > 0$, уравнение (4) имеет точно $\varkappa$ линейно независимых решений в указанном классе функций, если же $\varkappa \leqslant 0$, то решение его единственно.*

Общее решение уравнения может быть получено в виде

$$f_+ = V^{-1}[X^+(x) F_2^+].$$

Тот факт, что количество решений уравнения (1) в классе $L_1\{n; 0\}$ равно точно $\varkappa(\varkappa > 0)$, а не $\varkappa - \alpha\,(\varkappa - \alpha > 0)$, как это имеет место в случае классов обычных функций (см. [3]), объясняется следующим. В качестве решений интегрального уравнения допускаются полиномиально растущие на ∞ функции, т. е. у соответствующей задачи Римана возможны решения с особенностями вида $(x-a)^{-1}$, где $\operatorname{Im} a = 0$. При этом характерный вид особенностей как задачи Римана $\delta^{(k)}(x-a)$, так и самого интегрального уравнения

$$[x^{k-1} e^{iax}]_+ = \begin{cases} x^{k-1} e^{iax}, & x > 0, \\ 0, & x < 0, \end{cases}$$

существенно зависит от предположения, что допустимый порядок нуля у функции $\lambda + K(x)$ не превышает n.

Аналогичный случай для уравнения первого рода изложен нами в [12].

В заключение отметим, что приведенные здесь результаты соответствующим образом переносятся на «парные» интегральные уравнения типа свертки.

ЛИТЕРАТУРА

1. Крейн М. Г. УМН, т. XIII, в. 5 (83), 3—120, 1958.
2. Джанашия Г. А. Сообщ. АН Гр. ССР, XXXVI, I, 1964.
3. Гахов Ф. Д., Смагина В. И. Изв. АН СССР. Математика. **26**. № 3. 1962.

4. Самко С. Г. ДУ, **1**, № 8, 1965.
5. Александров В. М., Бабешко В. А. Изв. АН СССР, Механика, № 2, 1965.
6. Гельфанд И. М., Шилов Г. Е. Обобщенные функции, в. I. М., 1957.
7. Черский Ю. И. УМН, т. XX, в. 5 (125), 1965.
8. Рогожин В. С. ДАН СССР, **164**, № 2, 1965.
9. Дыбин В. Б. ДАН СССР, **161**, № 4, 1965.
19. Иванов В. В. ДАН СССР, **151**, № 3, 1963.
11. Иванов В. В. ДУ, **1**, № 8, 1965.
12. Дыбин В. Б. Материалы шестой научной конференции аспирантов (серия точных и естественных наук). Изд-во Ростовского ун-та, 1965.

Поступило в редакцию 15. IV 1966

ВЕСЦІ АКАДЭМІІ НАВУК БЕЛАРУСКАЙ ССР № 3 1966
СЕРЫЯ ФІЗІКА-МАТЭМАТЫЧНЫХ НАВУК

В. М. МАДОРСКИЙ

О ДОСТАТОЧНЫХ ПРИЗНАКАХ СХОДИМОСТИ ОДНОГО ВАРИАНТА МЕТОДА УСРЕДНЕННЫХ ПОПРАВОК

В работе [4] были указаны некоторые простейшие достаточные признаки сходимости одного варианта метода усредненных поправок для решения нелинейных операторных уравнений, нелинейных интегральных уравнений и систем нелинейных интегральных уравнений. Эти условия сравнительно просто проверяются, однако являются излишне ограничительными.

В настоящей работе приводится ряд достаточных признаков сходимости этого метода, которые не столь ограничительны, как в работе [4].

§ 1. Рассмотрим Банахово пространство X, точки которого $f_1, f_2, \ldots$ являются функциями, определенными на некотором множестве. Пусть T — оператор, переводящий это пространство в себя.

Рассмотрим операторное уравнение

$$f = \varphi + Tf. \tag{1}$$

Для решения этого уравнения применим метод осреднения, для чего предположим также, что задан еще некотӧрый линейный оператор усреднения $\alpha = Sf$ из X в X.

Первое приближение определяем по формулам:

$$f_1 = \varphi + T\alpha_1; \quad \alpha_1 = S\varphi.$$

В n-ом приближении ($n = 2, 3, \ldots$) положим

$$f_n = \varphi + T(f_{n-1} + \alpha_n), \tag{2}$$

$$\alpha_n = S(\tilde{f}_n - f_{n-1}),$$

где $\tilde{f}_n = \varphi + Tf_{n-1}$,

$$\alpha_n = S(\varphi + Tf_{n-1}) - Sf_{n-1}. \tag{3}$$

Следуя Ю. Д. Соколову [3], введем операторы W и V:

$$Wz = Tz - STz; \qquad Vz = STz \tag{4}$$

и пусть

$$z_n = f_{n-1} + \alpha_n. \tag{5}$$

Тогда, исходя из (2)—(5), получаем

$$z_n = f_{n-1} + \alpha_n = \varphi + Tz_{n-1} + S(\varphi + Tf_{n-1}) - Sf_{n-1} = \varphi + Tz_{n-1} + S\varphi +$$
$$+ STf_{n-1} - S(\varphi + Tz_{n-1}) = \varphi + Vf_{n-1} + Wz_{n-1}. \tag{6}$$

Пусть оператор T удовлетворяет условию Липшица с константой L, а операторы W и V удовлетворяют условию Липшица с константами C и B соответственно, то есть пусть выполняются неравенства

$$\|Tz - T\bar{z}\| \leqslant L\|z - \bar{z}\|, \tag{7}$$

$$\|Wz - W\bar{z}\| \leqslant C\|z - \bar{z}\|, \tag{8}$$

$$\|Vz - V\bar{z}\| \leqslant B\|z - \bar{z}\|. \tag{9}$$

Используя (2) и (6)—(9), находим последовательно

$$\|\delta z_n\| = \|z_n - z_{n-1}\| = \|Vf_{n-1} + Wz_{n-1} - Vf_{n-2} - Wz_{n-2}\| \leqslant \|Vf_{n-1} - Vf_{n-2}\| + \\ + \|Wz_{n-1} - Wz_{n-2}\| \leqslant B\|f_{n-1} - f_{n-2}\| + C\|z_{n-1} - z_{n-2}\| = \\ = B\|Tz_{n-1} - Tz_{n-2}\| + C\|\delta z_{n-1}\| \leqslant (BL + C)\|\delta z_{n-1}\|. \tag{10}$$

Поскольку

$$\|\delta f_n\| = \|f_n - f_{n-1}\| = \|Tz_n - Tz_{n-1}\| \leqslant L\|\delta z_n\| < \varepsilon \quad (\varepsilon > 0)$$

при $n \to \infty$ и $BL + C < 1$, а в работе [4] показано, что при $\|\delta f_n\| \to \infty$ функция f_n стремится к f-точному решению уравнения (1) со скоростью геометрической прогрессии, то из (10) получаем признак сходимости процесса в виде

$$\varepsilon_1 = BL + C < 1. \tag{11}$$

Если для оператора S выполняется неравенство $\|Sf\| \leqslant \|f\|$, то условие (11) вырождается в условие

$$\varepsilon_2 = L^2 + C < 1.$$

§ 2. Приведем несколько достаточных признаков сходимости метода в применении к приближенному решению нелинейного интегрального уравнения

$$y(x) = \varphi(x) + \int_a^b K(x, \xi) f[x, \xi, y(\xi)]\, d\xi \qquad (h = b - a > 0) \tag{12}$$

и системы нелинейных интегральных уравнений.

Данная функция $\varphi(x)$ предполагается непрерывной на отрезке $[a, b]$, а $f(x, \xi, y)$ предполагается также непрерывной функцией своих аргументов в области (D_3), определенной условиями

$$a \leqslant x \leqslant b; \quad a \leqslant \xi \leqslant b; \quad m \leqslant y \leqslant M.$$

Будем предполагать, что функция $K(x, \xi)$ является ограниченным ядром первого рода (непрерывным почти всюду), или полярным ядром вида

$$K(x, \xi) = \frac{\bar{K}(x, \xi)}{|x - \xi|^{\rho}},$$

где $0 \leqslant \rho < 1$, а $\bar{K}(x, \xi)$ — функция, непрерывная при $a \leqslant x \leqslant b$; $a \leqslant \leqslant \xi \leqslant b$.

В дальнейшем все рассматриваемые переменные являются действительными.

Для построения приближенного решения уравнения (12) положим в первом приближении

$$y_1(x) = \varphi(x) + \int_a^b K(x, \xi) f(x, \xi, \alpha_1)\, d\xi,$$

где $\alpha_1 = \dfrac{1}{h} \int_a^b \varphi(x)\, dx$.

В n-ом приближении ($n = 2, 3, \ldots$) полагаем

$$y_n(x) = \varphi(x) + \int_a^b K(x, \xi) f[x, \xi, y_{n-1}(\xi) + \alpha_n] \, d\xi,$$

где

$$\alpha_n = \frac{1}{h} \int_a^b \tilde{\delta}_n(x) \, dx; \quad \tilde{\delta}_n(x) = \tilde{y}_n(x) - y_{n-1}(x),$$

а $\tilde{y}_n(x)$ определяется формулой

$$\tilde{y}_n(x) = \varphi(x) + \int_a^b K(x, \xi) f[x, \xi, y_{n-1}(\xi)] \, d\xi.$$

Таким образом, α_n находится из выражения

$$\alpha_n = \frac{1}{h} \int_a^b dx \int_a^b K(x, \xi) \{ f[x, \xi, y_{n-1}(\xi)] - f[x, \xi, y_{n-2}(\xi) + \alpha_{n-1}] \} \, d\xi.$$

§ 3. Введем следующие обозначения:

$$\delta_n(x) = y_n(x) - y_{n-1}(x),$$

$$z_n(x) = y_{n-1}(x) + \alpha_n,$$

$$V(\xi, z) = \frac{1}{h} \int_a^b K(x, \xi) f(x, \xi, z) \, dx,$$

$$W(x, \xi, z) = K(x, \xi) f(x, \xi, z) - V(\xi, z)$$

и, если в области (D_3)

$$|V(\xi, z) - V(\xi, \bar{z})| \leqslant B(\xi) |z - z,|$$

$$|W(x, \xi, z) - W(x, \xi, \bar{z})| \leqslant C(x, \xi) | z - z|,$$

то полагаем

$$N = \int_a^b B(\xi) \, d\xi; \qquad L_1 = \sup_x \int_a^b C(x, \xi) \, d\xi.$$

Пользуясь введенными выше обозначениями, последовательно находим

$$z_n(x) = y_{n-1}(x) + \alpha_n = \varphi(x) + \int_a^b K(x, \xi) f[x, \xi, y_{n-2} + \alpha_{n-1}] \, d\xi +$$

$$+ \frac{1}{h} \int_a^b dx \int_a^b K(x, \xi) \{ f[x, \xi, y_{n-1}] - f[x, \xi, y_{n-2} + \alpha_{n-1}] \} \, d\xi =$$

$$= \varphi(x) + \int_a^b V[\xi, y_{n-1}(\xi)] \, d\xi + \int_a^b W[x, \xi, z_{n-1}(\xi)] \, d\xi,$$

$$|\delta z_n(x)| = |z_n(x) - z_{n-1}(x)| \leqslant \left| \int_a^b [V(\xi, y_{n-1}) - V(\xi, y_{n-2})] \, d\xi \right| +$$

$$+\left|\int_a^b [W(x, \xi, z_{n-1}) - W(x, \xi, z_{n-2})]\, d\xi\right| \leqslant \int_a^b B(\xi)\,|\delta_{n-1}|\, d\xi +$$

$$+\int_a^b C(x, \xi)\,|\delta z_{n-1}|\, d\xi. \tag{13}$$

Но, так как

$$|\delta_{n-1}(x)| = |\delta z_n + \alpha_n - \alpha_{n-1}| \leqslant |\delta z_n| + |\alpha_n - \alpha_{n-1}| =$$

$$= |\delta z_n(x)| + \left|\int_a^b [V(\xi, y_{n-2}) - V(\xi, y_{n-1})]\, d\xi +\right.$$

$$\left. + \int_a^b [V(\xi, z_{n-1}) - V(\xi, z_{n-2})]\, d\xi\right| \leqslant |\delta z_n(x)| +$$

$$+ \int_a^b B(\xi)\,|\delta_{n-1}|\, d\xi + \int_a^b B(\xi)\,|\delta z_{n-1}|\, d\xi,$$

то

$$\max|\delta_{n-1}(x)| \leqslant \frac{1}{1-N}\left(\max|\delta z_n(x)| + N\max|\delta z_{n-1}(x)|\right). \tag{14}$$

Подставив (14) в (13), получим

$$|\delta z_n(x)| \leqslant \frac{1}{1-N}\int_a^b B(\xi)\left(\max|\delta z_n| + N\max|\delta z_{n-1}|\right) d\xi +$$

$$+\int_a^b C(x, \xi)\,|\delta z_{n-1}|\, d\xi,$$

$$|\delta z_n(x)| \leqslant \left[\frac{N^2}{1-2N} + L_1\left(1 + \frac{N}{1-2N}\right)\right]\max|\delta z_{n-1}|. \tag{15}$$

Исходя из формулы (15), получим признак сходимости в виде

$$\varepsilon = \frac{N^2}{1-2N} + L_1\left(1 + \frac{N}{1-2N}\right) < 1 \quad \left(N < \frac{1}{2}\right).$$

Если в области (D_3)

$$|f(x, \xi, z) - f(x, \xi, \bar{z})| \leqslant A\,|z - \bar{z}|,$$

то можно получить признак сходимости в другом виде.

Пусть $\max\limits_x \int_a^b |K(x, \xi)|\, d\xi \leqslant L_0$. Тогда

$$|\delta_{n-1}(x)| = \left|\int_a^b K(x, \xi)\,[f(x, \xi, z_{n-1}) - f(x, \xi, z_{n-2})]\, d\xi\right| \leqslant L_0 A \max_x |\delta z_{n-1}|. \tag{16}$$

Подставляя (16) в (13), получаем

$$|\delta z_n(x)| \leqslant \int_a^b B(\xi)\, L_0 A \max|\delta z_{n-1}|\, d\xi + \int_a^b C(x, \xi)\,|\delta z_{n-1}|\, d\xi.$$

На основании этого находим признак сходимости процесса в виде

$$\varepsilon_3 = NL_0 A + L_1 < 1.$$

§ 4. Рассмотрим теперь систему нелинейных интегральных уравнений

$$y_i(x) = \varphi_i(x) + \int_a^b K_i(x, \xi) f_i\left[x, \xi, y_1(\xi), \ldots, y_m(\xi)\right] d\xi \tag{17}$$

$$(i = 1, 2, \ldots, m)$$

при тех же предположениях относительно функций $\varphi_i(x)$, $K_i(x, \xi)$, $f_i(x, \xi, y_1, \ldots, y_m)$ в области (D_{m+2}), что и в работе [2].

Для получения приближенного решения системы (17) применим алгоритм модифицированного метода [4], для чего в первом приближении полагаем

$$y_{i1}(x) = \varphi_i(x) + \int_a^b K_i(x, \xi) f_i[x, \xi, \alpha_{11}, \alpha_{21}, \ldots, \alpha_{m1}] d\xi,$$

где

$$\alpha_{i1} = \frac{1}{h}\int_a^b \varphi_i(x)\, dx.$$

В n-ом приближении ($n = 2, 3, \ldots$) полагаем

$$y_{in}(x) = \varphi_i(x) + \int_a^b K_i(x, \xi) f_i[x, \xi, y_{1, n-1} + \alpha_{1, n}, \ldots, y_{m, n-1} + \alpha_{m, n}] d\xi,$$

где

$$\alpha_{in} = \frac{1}{h}\int_a^b \tilde{\delta}_{in}(x)\, dx; \quad \tilde{\delta}_{in}(x) = \tilde{y}_{in}(x) - y_{in-1}(x),$$

а $\tilde{y}_{in}(x)$ определяется формулой

$$\tilde{y}_{in}(x) = \varphi_i(x) + \int_a^b K_i(x, \xi) f_i[x, \xi, y_{1, n-1}, \ldots, y_{m, n-1}] d\xi.$$

Таким образом,

$$\alpha_{in} = \frac{1}{h}\int_a^b dx \int_a^b K_i(x, \xi) \{f_i[x, \xi, y_{1, n-1}, \ldots, y_{m, n-1}] -$$

$$- f_i[x, \xi, y_{1, n-2} + \alpha_{1, n-1}, \ldots, y_{m, n-2} + \alpha_{m, n-1}]\} d\xi.$$

Повторяя дословно рассуждения § 3, заменяя $z_n(x)$ на $z_{in}(x)$, α_n на α_{in}, $V(\xi, z)$ на $V_i(\xi, z_1, \ldots, z_m)$, $W(x, \xi, z)$ на $W_i(x, \xi, z_1, \ldots, z_m)$, используя то, что в области (D_{m+2})

$$|V_i(\xi, z_1, \ldots, z_m) - V_i(\xi, \bar{z}_1, \ldots, \bar{z}_m) \leqslant \sum_{j=1}^m B_{ij}(\xi)|z_j - \bar{z}_j|,$$

$$|W_i(x, \xi, z_1, \ldots, z_m) - W_i(x, \xi, \bar{z}_1, \ldots, \bar{z}_m) \leqslant \sum_{j=1}^m C_{ij}(x, \xi)|z_j - \bar{z}_j|,$$

и введя обозначения

$$N_{ij}=\int_a^b B_{ij}(\xi)\,d\xi;\quad L_{ij}=\sup_x\int_a^b C_{ij}(x,\xi)\,d\xi;\qquad \max_x\int_a^b |K_i(x,\xi)|\,d\xi\leqslant L_0;$$

$$N=\max_{1\leqslant i\leqslant m}\sum N_{ij};\quad L_1=\max_i\sum L_{ij};\quad A=\max\sum A_{ij},$$

получим признак сходимости в виде

$$\varepsilon=\frac{N^2}{1-2N}+L_1\left(1+\frac{N}{1-2N}\right)<1\qquad\left(N<\frac{1}{2}\right).$$

Если же в области (D_{m+2})

$$|f_i(x,\xi,z_1,\ldots,z_m)-f_i(x,\xi,\bar z_1,\ldots,\bar z_m)|\leqslant\sum_{j=1}^m A_{ij}|z_j-\bar z_j|,$$

то можно получить оценку вида

$$\varepsilon_3=NL_0A+L_1<1.$$

§ 5. Одномерная краевая задача для нелинейного дифференциального уравнения

$$y''(x)=f(x,y)$$

при условиях

$$y(a)=y^0;\qquad y(b)=y^1$$

сводится к решению интегрального уравнения типа Гаммерштейна

$$y(x)=y^0+\frac{y^1-y^0}{h}(x-a)-\int_a^b G(x,\xi)\,f\left[\xi,y(\xi)\right]d\xi,$$

где

$$G(x,\xi)=\begin{cases}\dfrac{(b-x)(\xi-a)}{h} & \text{при } \xi\leqslant x.\\[2ex] \dfrac{(x-a)(b-\xi)}{h} & \text{при } x\leqslant\xi.\end{cases}$$

Следовательно, предлагаемый метод может быть применен для решения указанного выше дифференциального уравнения.

Процесс нахождения приближенного решения может быть осуществлен без предварительного сведения дифференциального уравнения к интегральному.

Задача нахождения решения дифференциального уравнения

$$\Delta u=f(x,y,u),$$

принимающего заданные значения на контуре C области B (с известными ограничениями для $f(x,y,u)$, C и B), приводится к решению интегрального уравнения типа Гаммерштейна

$$u(P)=v(P)-\frac{1}{2\pi}\iint_B G(P,Q)\,f\left[Q,u(Q)\right]d\omega_Q,$$

где $v(P)$ — гармоническая функция в области B, принимающая на C заданные значения, а $G(P, Q)$ — функция Грина, соответствующая контуру C для внутренней задачи. Следовательно, для нахождения приближенного решения задачи Дирихле для уравнения Лапласа может быть применен описанный выше алгоритм.

ЛИТЕРАТУРА

1. Соколов Ю. Д. Украинский матем. журн., т. IX, № 4, 394—412, 1957.
2. Соколов Ю. Д. Украинский матем. журн., т. XV, № 1, 58—70, 1963.
3. Соколов Ю. Д. Украинский матем. журн., 17, № 3, 91—103, 1963.
4. Мадорский В. М. Весці АН БССР, сер. фіз.-мат. навук, № 3, 1965.

Поступило в редакцию 18.II 1966

ВЕСЦІ АКАДЭМІІ НАВУК БЕЛАРУСКАЙ ССР № 3, 1966
СЕРЫЯ ФІЗІКА-МАТЭМАТЫЧНЫХ НАВУК

З. М. ДЫМЕНТ

МАКСИМАЛЬНЫЕ КОММУТАТИВНЫЕ НИЛЬПОТЕНТНЫЕ ПОДАЛГЕБРЫ МАТРИЧНОЙ АЛГЕБРЫ ШЕСТОЙ СТЕПЕНИ

Пусть P_n — алгебра всех матриц порядка n над алгебраически замкнутым полем P нулевой характеристики. Построены все максимальные нильпотентные коммутативные подалгебры P_n для $n = 2, 3, 4, 5$ [1]. Для каждого из этих значений n P_n содержит лишь конечное число несопряженных максимальных нильпотентных коммутативных подалгебр. Д. А. Супруненко доказал, что при $n > 6$ P_n содержит бесконечное множество попарно несопряженных нильпотентных коммутативных подалгебр класса нильпотентности 3 [2].

Вопрос о конечности числа несопряженных максимальных нильпотентных коммутативных подалгебр алгебры P_6 оставался нерешенным. В настоящей работе доказывается конечность числа несопряженных максимальных нильпотентных коммутативных подалгебр P_6 и описываются все эти подалгебры классов нильпотентности 3 и 4.

Для классов нильпотентности 2 и n существует лишь конечное число несопряженных максимальных коммутативных подалгебр P_n [3]. Д. А. Супруненко доказал конечность числа несопряженных максимальных нильпотентных коммутативных подалгебр класса нильпотентности $n-1$. Поэтому для доказательства конечности числа несопряженных максимальных нильпотентных коммутативных подалгебр P_6 достаточно доказать, что в P_6 существует лишь конечное число таких подалгебр классов нильпотентности 3 и 4.

При построении всех несопряженных между собой максимальных коммутативных нильпотентных класса 3 подалгебр алгебры P_6 будет использована нормальная форма, введенная М. Ф. Кравчуком.

§ 1. По известной теореме М. Ф. Кравчука матрицы максимальной коммутативной нильпотентной подалгебры N алгебры P_n одновременно приводятся к виду

$$\begin{bmatrix} 0_{\nu\nu} & 0_{\nu m} & 0_{\nu\mu} \\ A_{m\nu} & B_{mm} & 0_{m\mu} \\ C_{\mu\nu} & D_{\mu m} & 0_{\mu\mu} \end{bmatrix},$$

где $0_{\alpha\beta}$ — нулевая матрица размеров $\alpha \times \beta$; $0_{\alpha\alpha}$ — нулевая $\alpha \times \alpha$ матрица, $\nu, m, \mu > 0$, $\nu + m + \mu = n$. Аннулятор M алгебры N состоит из всех матриц вида

$$\begin{bmatrix} 0_{n-\mu,\, \nu} & 0_{n-\mu,\, n-\nu} \\ C_{\mu\nu} & 0_{\mu,\, n-\nu} \end{bmatrix}.$$

Числа ν, m, μ определяются данной алгеброй однозначно. Как доказала Р. И. Тышкевич [4]: 1) если $\nu = 1$ или $\mu = 1$, то ранг алгебры

N равен $n-1$; 2) если ранг N равен $n-1$, то хотя бы одно из чисел ν, μ равно 1; 3) в P_n существует не более двух несопряженных между собой максимальных коммутативных нильпотентных подалгебр, изоморфных заданной нильпотентной алгебре N ранга $n-1$.

Если ранг аннулятора алгебры N равен 1, то все максимальные коммутативные нильпотентные подалгебры P_n, изоморфные N, сопряжены между собой. Если же ранг аннулятора алгебры N больше 1, то в P_n существуют всего две несопряженные между собой максимальные коммутативные подалгебры, изоморфные N. Для их построения достаточно поместить N в алгебру $P\cdot e+N$, где $e^2=e$; $e\cdot a=a\cdot e$ для всех $a\in N$.

Пусть N_1 — представление алгебры N, содержащееся в регулярном представлении алгебры $P\cdot e+N$, а N_1^* — алгебра, матрицы которой получаются транспонированием матриц N_1. Тогда алгебры N_1 и N_1^* не сопряжены в P_n. Из результатов [4] следует, что для построения всех попарно несопряженных максимальных коммутативных класса нильпотентности 5 подалгебр P_6 ранга 5 достаточно построить все неизоморфные между собой алгебры ранга 5 над P.

§ 2. Пусть N — коммутативная нильпотентная алгебра класса 3 ранга r над P. Она содержит отличные от нуля элементы v, такие, что $vN=0$. Все v из N, удовлетворяющие равенству $vN=0$, образуют подалгебру M алгебры N. M называется аннулятором алгебры N. Пусть t — ранг аннулятора, $v_1, v_2, \ldots, v_t$ — его базис. Тогда базис N можно взять в виде:

$$u_1, u_2, \ldots, u_s, \quad v_1, v_2, \ldots, v_t, \quad s+t=r,$$

$$u_i u_j=\sum_{k=1}^{t}\alpha_{ij}^k v_k, \quad i=1, 2, \ldots, s, \quad j=1, 2, \ldots, s,$$

$$\alpha_{ij}^k=\alpha_{ji}^k, \quad \alpha_{ij}^k\in P, \quad k=1, 2, \ldots, t.$$

Матрицы $A^{(1)}=(\alpha_{ij}^1)$, $A^{(2)}=(\alpha_{ij}^2)$, $\ldots$, $A^{(t)}=(\alpha_{ij}^t)$ называются структурными матрицами алгебры N. Они определяют алгебру с точностью до изоморфизма [2].

Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_s$, $b_1, b_2, \ldots, b_t$ — новый базис N, причем $b_1, b_2, \ldots, b_t$ принадлежат M. Тогда

$$a_i=\sum_{\nu=1}^{s}\gamma_{\nu i}u_\nu+v^i, \quad v^i\in M, \quad v^i=\sum_{\mu=1}^{t}\beta_{\mu i}b_\mu, \quad \gamma_{\nu i}, \beta_{\mu i}\in P. \tag{1}$$

Полагая $C=(\gamma_{\nu i})$, $B=(\beta_{\mu i})$, $a_i a_j=\sum_{\rho=1}^{t}\delta_{ij}b_\rho$, получим

$$(\delta_{ij})=D_\rho=\sum_{i=1}^{t}\beta_{\rho i}C'A^{(i)}C, \tag{2}$$

где C' — транспонированная C.

Для того чтобы две совокупности структурных матриц

$$A^{(1)}, A^{(2)}, \ldots, A^{(t)}, \tag{3}$$

$$D^{(1)}, D^{(2)}, \ldots, D^{(t)} \tag{4}$$

определяли с точностью до изоморфизма одну и ту же алгебру, необходимо и достаточно, чтобы существовали две неособенные матрицы $C=(\gamma_{\nu i})$, $B=(\beta_{\mu i})$, такие, что

$$D^{(\rho)}=\sum_{i=1}^{t}\beta_{\rho i}C'A^{(i)}C. \tag{5}$$

Будем говорить, что множества (3) и (4), связанные условием (5), где C и B — неособенные матрицы, принадлежат к одному классу. Условие (5) можно заменить эквивалентным условием

$$\left.\begin{aligned} C'A^{(i)}C&=\sum_{k=1}^{t}x_{ik}D^{(k)},\\ |x_{ik}|\neq 0,&\quad |C|\neq 0. \end{aligned}\right\} \tag{5'}$$

§ 3. Приступим к построению коммутативных нильпотентных класса 3 ранга 5 алгебр над P.

Пусть $t=1$. Тогда $u_iu_j=\alpha_{ij}v_1$, $i=1, 2, 3, 4$, $j=1, 2, 3, 4$. Алгебра N с точностью до изоморфизма задается матрицей (α_{ij}). (α_{ij}) — невырожденная матрица, в противном случае ранг аннулятора N был бы большим 1.

Существует неособенная матрица C, такая, что $C'(\alpha_{ij})C=E_4$ (здесь и в дальнейшем E_m означает единичную матрицу степени m). Таким образом, с точностью до изоморфизма существует только одна алгебра N_1 ранга 5, ранг аннулятора которой равен 1.

§ 4. $t=2$. Возможны 2 случая:

а) среди пар структурных матриц, определяющих N, есть пара, содержащая матрицу ранга 3;

б) класс пар, определяющих N, содержит только вырожденные матрицы.

Пусть имеет место случай а). Тогда среди пар структурных матриц $A^{(1)}$, $A^{(2)}$ есть такая, что $A_2=E_3$.

Матрица $A^{(1)}$ ортогонально подобна матрице $\tilde{A}^{(1)}=[\lambda_1E_{p_1}+S_{p_1}, \lambda_2E_{p_2}+S_{p_2}, \ldots, \lambda_uE_{p_u}+S_{p_u}]$, где

$$S_1=0,\quad S_2=\begin{bmatrix} i & 1\\ 1 & -i\end{bmatrix},\quad S_3=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & -i\\ 0 & -i & 0\end{bmatrix}\quad \text{(см. [7], стр. 290).}$$

Если $B_1, B_2, \ldots, B_m$ — матрицы, то $[B_1, B_2, \ldots, B_m]$ здесь и в дальнейшем обозначаем квазидиагональную матрицу с клетками B_1, $B_2, \ldots, B_m$.

Замечание. Теорема 5 и ее следствие 2, которые мы здесь используем, доказаны в [7] для комплексной симметрической матрицы, но, как нетрудно видеть, они верны и для симметрических матриц с элементами из произвольного алгебраически замкнутого поля нулевой характеристики.

1. Если $p_1=3$, то класс E_3, $A^{(2)}$ совпадает с классом E_3, S_3. Алгебру, определяемую этой парой, обозначим N_2.

2. Пусть $p_1=1$, $p_2=2$. Тогда $A^{(2)}=[\lambda_1, \lambda_2E_2+S_2]$. При $\lambda_1=\lambda_2$ получаем алгебру N_3, определяемую парой E_3, $[0, S_2]$. При $\lambda_1\neq\lambda_2$ пары

E_3, $[\lambda_1, \lambda_2 E_2 + S_2]$ и E_3, $[1, S_2]$ принадлежат одному классу. Достаточно доказать, что пары E_3, $[1, S_2]$; E_3, $[\lambda, S_2]$ при $\lambda \neq 0$ принадлежат одному классу.

Пусть $C = [\sqrt{\lambda}, 1, 1]$. Тогда $C'E_3C = \lambda E_3$, $C'[1, S_2]C = [\lambda, S_2]$. Но пары λE_3, $[\lambda, S_2]$; E_3, $[\lambda, S_2]$ принадлежат одному классу. Алгебру, определяемую парой E_3, $[1, S_2]$, обозначим N_4.

3. Пусть $p_1 = p_2 = p_3 = 1$. Тогда $A^{(2)} = [\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3]$. Если все λ_i равны между собой, то получим пару E_3, O_3. Алгебру, определяемую этой парой, обозначим N_5. Если $\lambda_1 = \lambda_2 \neq \lambda_3$, то получаем пару E_3, $[0, 0, 1]$, определяющую алгебру N_6.

Пусть λ_1, λ_2, λ_3 попарно различны. Тогда класс E_3, $A^{(2)}$ определяется парой E_3, $[0, 1, 2]$.

Достаточно доказать, что пары

$$E_3,\ [0,\ 1,\ 2];\quad E_3,\ [0,\ 1,\ \gamma];\quad \gamma \neq 0,\quad \gamma \neq 1,$$

принадлежат одному классу.

Пусть $C = [\gamma^{1/2}, 2^{1/2}(\gamma - 1)^{1/2}, \gamma^{1/2}(\gamma - 1)^{1/2}]$. Тогда

$$C'E_3C = [\gamma,\ 2(\gamma - 1),\ \gamma(\gamma - 1)],\quad C'[0,\ 1,\ 2]C = [0,\ 2(\gamma - 1),\ 2\gamma(\gamma - 1)],$$

$$\left.\begin{aligned} &\frac{1}{\gamma} C'E_3C + \frac{2-\gamma}{2\gamma(\gamma - 1)} C'[0,\ 1,\ 2]C = E_3, \\ &\frac{1}{2(\gamma - 1)} C'[0,\ 1,\ 2]C = [0,\ 1,\ \gamma]. \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

Из (6) следует, что пары E_3, $[0, 1, 2]$; E_3 $[0, 1, \gamma]$ принадлежат одному классу. Алгебру, определяемую парой E_3, $[0, 1, 2]$, обозначим N_7.

б) Рассмотрим теперь классы пар структурных матриц, не содержащие невырожденных матриц.

Пусть $A^{(1)}$, $A^{(2)}$ — пара, определяющая такой класс. Тогда среди матриц $\beta_1 A^{(1)} + \beta_2 A^{(2)}$ нет матрицы ранга 3. Не может быть, чтобы среди этих матриц не было матрицы ранга 2. Действительно, пусть $A^{(1)}$ ранга 1. Тогда существует такая неособенная ортогональная матрица C, что

$$C'A^{(1)}C = A_1 = [1,\ 0,\ 0].$$

Пусть $C'A^{(2)}C = A_2$. Так как по предложению среди матриц $\beta_1 A^{(1)} + \beta_2 A^{(2)}$ нет матрицы ранга 2, то $A_2 = [a, 0, 0]$. Но тогда ранг аннулятора алгебры, определяемого парой $A^{(1)}$, $A^{(2)}$, равен 4.

Итак, в классе пар $A^{(1)}$, $A^{(2)}$, определяющих алгебру, должна быть матрица ранга 2. Без ограничения общности можно принять, что $A^{(1)} = [E_2, 0]$. Существует неособенная ортогональная матрица $C = [X_{22}, y]$, такая, что

$$A_1 = C'A^{(1)}C = [E_2,\ 0],\quad A_2 = C'A^{(2)}C = \begin{bmatrix} a & 0 & c \\ 0 & b & d \\ c & d & e \end{bmatrix}$$

либо

$$A_1 = [E_2,\ 0],\qquad A_2 = \begin{bmatrix} b+i & 1 & c \\ 1 & b-i & d \\ c & d & a \end{bmatrix}.$$

Рассмотрим эти возможности.

1) Матрица $k[E_2, 0] + \begin{bmatrix} a & 0 & c \\ 0 & b & d \\ c & d & e \end{bmatrix}$ при любом k должна быть вырожденной. Из этого требования получаем, что

$$A_2 = [a, b, 0] \quad \text{либо} \quad A_2 = \begin{bmatrix} a & 0 & c \\ 0 & a & \pm ic \\ c & \pm ic & 0 \end{bmatrix}.$$

Но при $A_2 = [a, b, 0]$ ранг аннулятора алгебры N равен 3. Итак,

$$A_2 = \begin{bmatrix} a & 0 & c \\ 0 & a & \pm ic \\ c & \pm ic & 0 \end{bmatrix}.$$

Пару A_1, A_2 можно заменить парой

$$A_1,\ A_2' = \frac{1}{c}(A_2 - aA_1).$$

Легко видеть, что пары

$$[E_2, 0], \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & i \\ 1 & i & 0 \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad [E_2, 0), \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -i \\ 1 & -i & 0 \end{bmatrix}$$

определяют один и тот же класс. Алгебру, определяемую этим классом, обозначим N_8.

2)

$$A_1 = [E_2, 0], \qquad A_2 = \begin{bmatrix} b+i & 1 & c \\ 1 & b-i & d \\ c & d & a \end{bmatrix}.$$

Исходя из требований, чтобы среди матриц $kA_1 + A_2$ не было невырожденной матрицы, получим, что

$$A_2 = \begin{bmatrix} i & 1 & 0 \\ 1 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

либо

$$A_2 = \begin{bmatrix} i & 1 & c \\ 1 & -i & -ic \\ c & -ic & 0 \end{bmatrix}.$$

Но первый случай невозможен, так как ранг аннулятора алгебры был бы равен 3. Остается только второй случай.

Взяв $C = [E_2, ic^{-1}]$ ($c \neq 0$, так как иначе ранг аннулятора был бы равен 3), получим:

$$C' A_1 C = [E_2, 0], \qquad C' A_2 C = \begin{bmatrix} i & 1 & i \\ 1 & -i & 1 \\ i & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Пары

$$A_1 = [E_2, 0], \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & i \\ 1 & i & 0 \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad B_1 = [E_2, 0], \quad B_2 = \begin{bmatrix} i & 1 & i \\ 1 & -i & 1 \\ i & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

принадлежат одному классу. Действительно, пусть

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & i \\ 1 & 0 & 1 \\ i & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Тогда

$$C' B_1 C = A_1 + A_2, \quad C' B_2 C = i A_1.$$

Итак, в случае б) получаем с точностью до изоморфизма единственную алгебру N_8.

§ 5. $t = 3$. Пусть u_1, u_2, v_1, v_2, v_3 — базис N, причем v_1, v_2, v_3 — базис аннулятора. Пусть далее

$$u_1^2 = a_1 v_1 + a_2 v_2 + a_3 v_3,$$
$$u_1 \cdot u_2 = c_1 v_1 + c_2 v_2 + c_3 v_3,$$
$$u_2^2 = b_1 v_1 + b_2 v_2 + b_3 v_3.$$

Алгебра N определяется следующими матрицами:

$$A^{(1)} = \begin{bmatrix} a_1 & c_1 \\ c_1 & b_1 \end{bmatrix}, \quad A^{(2)} = \begin{bmatrix} a_2 & c_2 \\ c_2 & b_2 \end{bmatrix}, \quad A^{(3)} = \begin{bmatrix} a_3 & c_3 \\ c_3 & b_3 \end{bmatrix}. \tag{7}$$

Возможны 3 случая:

1) Матрицы $A^{(1)}, A^{(2)}, A^{(3)}$ — линейно независимы. Тогда $u_1^2, u_1 u_2, u_2^2$ можно принять за базисные элементы аннулятора. Получаем алгебру N_9, определяемую матрицами $[1, 0]$, $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $[0, 1]$.

2) Пусть максимальное число линейно независимых матриц (7) равно 2. Тогда можно считать, что $A^{(3)} = 0_2$.

Хотя бы одна из матриц $A^{(1)}, A^{(2)}$ — невырожденная. Действительно, пусть ранг $A^{(1)}$ равен 1. Тогда существует неособенная матрица C, такая, что $C' A^{(1)} C = A_1 = [1, 0]$.

Пусть

$$C' A^{(2)} C = A_2 = \begin{pmatrix} a_2' & c_2' \\ c_2' & b_2' \end{pmatrix}.$$

Если среди матриц (7) нет невырожденных, то ранг матрицы $kA_1 + A_2$ при любом k меньше двух. Но тогда $b_2' = c_2' = 0$.

Алгебра N определяется матрицами $[1, 0]$, $[a_2', 0]$, 0_2. Ранг аннулятора такой алгебры больше 3. Итак, хотя бы одна из матриц (7) должна быть невырожденной. Можно положить $A_1 = E_2$. Существует ортогональная матрица C, такая, что $C'A_2C$ — диагональная матрица, либо

$$C'A_2C = \begin{bmatrix} b+i & 1 \\ 1 & b-1 \end{bmatrix}.$$

Пусть $C'A_2C$ — диагональная. Тогда получается алгебра N_{10}, определяемая матрицами E_2, $[1, 0]$, 0_2. Во втором случае получаем алгебру N_{11}, структурные матрицы которой

$$E_2, \quad \begin{bmatrix} i & 1 \\ 1 & -i \end{bmatrix}, \quad 0_2.$$

3) Пусть $A^{(2)}$, $A^{(3)}$ линейно зависят от $A^{(1)}$. Тогда N_{12} задается матрицами $A^{(1)}$, 0_2, 0_2. Так как $A^{(1)}$ — невырожденная, то N_{12} можно задать матрицами E_2, 0_2, 0_2.

§ 6. $t = 4$. Очевидно, с точностью до изоморфизма существует только одна алгебра N_{13} ранга 5 класса нильпотентности 3, аннулятор которой имеет ранг 4. Базис N_{13} можно взять в виде: u_1, u_1^2, v_1, v_2, v_3, где u_1^2, v_1, v_2, v_3 — базис аннулятора.

§ 7. Итак, справедлива следующая

Теорема 1. *Существует не более 13 неизоморфных между собой коммутативных нильпотентных класса 3 ранга 5 алгебр над алгебраически замкнутым полем P.*

Можно показать, на чем мы здесь не останавливаемся, что все построенные выше 13 алгебр попарно неизоморфны.

Из теоремы 1 и работы [4] следует, что существует всего 25 попарно несопряженных максимальных коммутативных класса 3 ранга 5 подалгебр алгебры P_6.

Итак, каждая максимальная коммутативная класса нильпотентности 3 подалгебра P_6 ранга 5 сопряжена в P_6 с одной из следующих алгебр:

1. $[e_{21}+e_{62},\ e_{31}+e_{63},\ e_{41}+e_{64},\ e_{51}+e_{65},\ e_{61}]$.
2. $[e_{21}+e_{52}+e_{63},\ e_{31}+e_{53}+e_{62}-ie_{61},\ e_{41}+e_{54}-ie_{63},\ e_{51},\ e_{61}]$.
3. $[e_{12}+e_{25}+e_{36},\ e_{13}+e_{35}+e_{26}-ie_{16},\ e_{14}+e_{45}-ie_{36},\ e_{15},\ e_{16}]$.
4. $[e_{21}+e_{52},\ e_{31}+e_{53}+ie_{63}+e_{64},\ e_{41}+e_{54}+e_{63}-ie_{64},\ e_{51},\ e_{61}]$.
5. $[e_{12}+e_{25},\ e_{13}+e_{35}+ie_{36}+e_{46},\ e_{14}+e_{45}+e_{36}-ie_{46},\ e_{15},\ e_{16}]$.
6. $[e_{21}+e_{52}+e_{62},\ e_{31}+e_{53}+ie_{63}+e_{61},\ e_{41}+e_{54}+e_{63}-ie_{64},\ e_{51},\ e_{61}]$.
7. $[e_{12}+e_{25}+e_{26},\ e_{13}+e_{35}+ie_{36}+e_{46},\ e_{14}+e_{45}+e_{36}-ie_{46},\ e_{15},\ e_{16}]$.
8. $[e_{21}+e_{52},\ e_{31}+e_{53},\ e_{41}+e_{54},\ e_{51},\ e_{61}]$.
9. $[e_{12}+e_{25},\ e_{13}+e_{35},\ e_{14}+e_{45},\ e_{15},\ e_{16}]$.
10. $[e_{21}+e_{52},\ e_{31}+e_{53},\ e_{41}+e_{54}+e_{64},\ e_{51},\ e_{61}]$.
11. $[e_{12}+e_{25},\ e_{13}+e_{35},\ e_{14}+e_{45}+e_{46},\ e_{15},\ e_{16}]$.
12. $[e_{21}+e_{52},\ e_{31}+e_{53}+e_{63},\ e_{41}+e_{54}+2e_{64},\ e_{51},\ e_{61}]$.
13. $[e_{12}+e_{25},\ e_{13}+e_{35}+e_{36},\ e_{14}+e_{45}+2e_{46},\ e_{15},\ e_{16}]$.

14. $[e_{21}+e_{52}+e_{64},\quad e_{31}+e_{53}+ie_{61},\quad e_{41}+e_{54}+e_{62}+ie_{63},\quad e_{51},\quad e_{61}]$.

15. $[e_{12}+e_{25}+e_{16},\quad e_{13}+e_{35}+ie_{46},\quad e_{34}+e_{45}+e_{26}+ie_{36},\quad e_{15},\quad e_{16}]$.

16. $[e_{21}+e_{12}+e_{53},\quad e_{31}+e_{52}+e_{63},\quad e_{41},\quad e_{51},\quad e_{61}]$.

17. $[e_{12}+e_{21}+e_{35},\quad e_{13}+e_{25}+e_{36},\quad e_{14},\quad e_{15},\quad e_{16}]$.

18. $[e_{21}+e_{42}+e_{52},\quad e_{31}+e_{13},\quad e_{41},\quad e_{51},\quad e_{61}]$.

19. $[e_{12}+e_{24}+e_{25},\quad e_{13}+e_{31},\quad e_{14},\quad e_{15},\quad e_{16}]$.

20. $[e_{21}+e_{12}+ie_{52}+e_{63},\quad e_{31}+e_{43}+e_{52}-ie_{53},\quad e_{41},\quad e_{51},\quad e_{61}]$.

21. $[e_{12}+e_{21}+ie_{25}+e_{35},\quad e_{13}+e_{34}+e_{25}-ie_{35},\quad e_{14},\quad e_{15},\quad e_{16}]$.

22. $[e_{21}+e_{42},\quad e_{31}+e_{13},\quad e_{41},\quad e_{51},\quad e_{61}]$.

23. $[e_{12}+e_{24},\quad e_{13}+e_{31},\quad e_{14},\quad e_{15},\quad e_{16}]$.

24. $[e_{21}+e_{32},\quad e_{31},\quad e_{41},\quad e_{51},\quad e_{61}]$.

25. $[e_{12}+e_{23},\quad e_{13},\quad e_{14},\quad e_{15},\quad e_{16}]$.

§ 8. Переходим к построению всех попарно несопряженных максимальных коммутативных нильпотентности класса 3 подалгебр P_6, ранги которых не равны пяти. Будем исходить из нормальной формы М. Ф. Кравчука.

Если N — максимальная коммутативная нильпотентная класса 3 подалгебра P_6 и ранг N не равен пяти, то среди чисел ν и μ (см. § 1) нет равных 1. Пусть ранг аннулятора N равен 4. Тогда $\nu=m=\mu=2$.

Базис N можно составить из элементов аннулятора и из матриц вида

$$A_i=\begin{bmatrix}0&0&0\\ C_i&0&0\\ 0&D_i&0\end{bmatrix}. \tag{8}$$

Если $C_i=0$ или $D_i=0$, то и $A_i=0$.

Пусть

$$S=[X,\ Y,\ Z], \tag{9}$$

где X, Y, Z — неособенные матрицы степени 2.

Преобразование $(S^{-1},\ S)$ переводит A_i в

$$A^{(i)}=S^{-1}A_iS=\begin{bmatrix}0&0&0\\ C^{(i)}&0&0\\ 0&D^{(i)}&0\end{bmatrix},$$

где $C^{(i)}=Y^{-1}C_iX$; $D^{(i)}=Z^{-1}D_iY$.

Пусть A_1 и A_2 — две линейно независимые матрицы вида (8), принадлежащие N. Тогда линейно независимы матрицы C_1 и C_2, D_1 и D_2.

N содержит матрицу вида (8) ранга 2. Действительно, если ранг A_1 равен 4, то существует такая неособенная матрица S, что

$$A^{(1)}=S^{-1}A_1S=\begin{bmatrix}0&0&0\\ E_2&0&0\\ 0&E_2&0\end{bmatrix}.$$

Пусть

$$A^{(2)} = S^{-1}A_2S = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ C^{(2)} & 0 & 0 \\ 0 & D^{(2)} & 0 \end{bmatrix}.$$

Тогда $C^{(2)} = D^{(2)}$. Возьмем такое a, что определитель матрицы $C^{(2)} - aE_2$ равен нулю. Ранг матрицы $A^{(2)} - aA^{(1)}$ равен 2.

Пусть ранг каждой из матриц A_1 и A_2 равен 3. Если ранг C_1 равен 2, то ранг D_1 равен 1. Если A — произвольная матрица из N вида (8), то из перестановочности A и A_1 следует, что ранг D равен 1. Существует такое a, что матрица $C_2 - aC_1$ вырожденная. Тогда ранг матрицы $A_2 - aA_1$ равен 2. Точно так же устанавливается наличие в N матрицы ранга 2 из (8) и в случае, когда ранг C_1 равен 1. Пусть A_1 — матрица вида (8) ранга 2. Существует неособенная матрица S вида (9), такая, что

$$S^{-1}A_1S = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ C^{(1)} & 0 & 0 \\ 0 & D^{(1)} & 0 \end{bmatrix},$$

где

$$C^{(1)} = [1,\ 0], \quad D^{(1)} = [1,\ 0] \quad \text{либо} \quad C^{(1)} = [1,\ 0], \quad D^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Действительно, так как ранг C_1 равен 1, то существуют неособенные матрицы X и Y, такие, что

$$Y^{-1}C_1X = [1,\ 0].$$

Поэтому C_1 можно принять равной $[1,\ 0]$.

Пусть $D_1 = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}$ (ранг D_1 равен 1). Если $(\alpha;\ \gamma) \neq 0$, то полагаем

$$Y = \begin{bmatrix} 1 & y \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad X = E_2, \quad Z = \begin{pmatrix} \alpha & z \\ \gamma & z_1 \end{pmatrix},$$

где значение y определяется системой уравнений

$$\begin{cases} \alpha y + \beta = 0, \\ \gamma y + \delta = 0, \end{cases}$$

а z и z_1 выбраны так, что $\alpha z_1 - \gamma z \neq 0$. Тогда

$$Y^{-1}C_1X = C_1, \quad Z^{-1}D_1Y = C_1.$$

Если $\alpha = \gamma = 0$, то возьмем

$$X = E_2, \quad Y = E_2, \quad Z = \begin{bmatrix} \beta & z \\ \delta & z_1 \end{bmatrix},$$

где $\beta z_1 - \delta z \neq 0$. Тогда

$$Y^{-1}C_1X = C_1, \quad Z^{-1}D_1Y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Пусть $C_1=[1,\ 0]$, $D_1=[1,\ 0]$. Обозначим $C_2=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$. Без ограничения общности можно положить $a=0$. Из перестановочности A_1 и A_2 получаем:

$$C_2=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ c & d \end{bmatrix}, \quad D_2=\begin{bmatrix} 0 & \beta \\ 0 & \delta \end{bmatrix}.$$

Матрицы C_2 и D_2 ненулевые.

Легко проверить, что всякая матрица вида (8), перестановочная с A_1 и A_2, является их линейной комбинацией. Возможны следующие случаи:

1) $d=0,\quad \delta=0;$

2) $d=0,\quad \delta\neq 0;$

3) $d\neq 0,\quad \delta=0;$

4) $d\neq 0,\quad \delta\neq 0.$

В случае 1) полагаем:

$$X=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \beta \end{bmatrix}, \quad Y=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & c \end{bmatrix}, \quad Z=E_2,$$

$$S=[X,\ Y,\ Z],$$

тогда

$$S^{-1}A_1S=A_1, \quad S^{-1}A_2S=e_{41}+e_{54}.$$

2) $$X=E_2, \quad Y=[1,\ c], \quad Z=\begin{bmatrix} 1 & \beta c \\ 0 & \delta c \end{bmatrix}.$$

Тогда $S^{-1}A_1S=A_1$, $\quad S^{-1}A_2S=e_{41}+e_{64}$.

3) $$X=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -cd^{-1} & \beta^{-1}d^{-1} \end{bmatrix}, \quad Y=[1,\ \beta^{-1}], \quad Z=E_2.$$

$S^{-1}A_1S=A_1$, $\quad S^{-1}A_2S=e_{42}+e_{51}$.

4) $$X=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -cd^{-1} & d^{-1} \end{bmatrix}, \quad Y=E_2, \quad Z=\begin{bmatrix} 1 & \beta \\ 0 & \delta \end{bmatrix}.$$

$S^{-1}A_1S=A_1$, $\quad S^{-1}A_2S=e_{42}+e_{61}$.

Пусть

$$C_1=[1,\ 0], \quad D_1=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Обозначим

$$C_2=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \quad D_2=\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}.$$

β можно положить равным нулю. Из перестановочности A_1 и A_2 получаем:

$$C_2=\begin{bmatrix} a & b \\ c & 0 \end{bmatrix}, \quad D_2=\begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & \delta \end{bmatrix}.$$

Любые матрицы вида (8), перестановочные с A_1 и A_2, линейно выражаются через A_1 и A_2.

$c \neq 0$, так как иначе ранг аннулятора алгебры N был бы больше четырех. Можно положить $c = 1$. Возможны следующие случаи:

1) $b = 0, \quad \delta = 0.$
2) $b = 0, \quad \delta \neq 0.$
3) $b \neq 0, \quad \delta = 0.$
4) $b \neq 0, \quad \delta \neq 0.$

Пусть имеет место случай 1). Если $a \neq 0$, то полагаем:

$$X = E_2, \quad Y = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad Z = [a,\ 1].$$

Тогда

$$S^{-1}A_2S = e_{31} + e_{53}.$$

Если $a = 0$, то выбираем:

$$X = E_2, \quad Y = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad Z = 2E_2.$$

Тогда

$$S^{-1}A_2S = e_{31} + e_{53}.$$

Итак, при $b = \delta = 0$ получаем одну из ранее построенных алгебр.

2) Полагаем:

$$X = E_2, \quad Y = \begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad Z = [1,\ \delta].$$

Тогда

$$S^{-1}A_1S = A_1, \quad S^{-1}A_2S = e_{41} + e_{53} + e_{64}.$$

3) Пусть

$$X = \begin{bmatrix} 1 & a \\ -ab^{-1} & b^{-1} \end{bmatrix}, \quad Y = E_2, \quad Z = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Тогда

$$S^{-1}A_1S = A_1, \quad S^{-1}A_2S = e_{41} + e_{53} + e_{64}.$$

4) Пусть

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -ab^{-1} & b^{-1} \end{bmatrix}, \quad Y = E_2, \quad Z = [1,\ \delta].$$

Тогда

$$S^{-1}A_1S = A_1, \quad S^{-1}A_2S = e_{32} + e_{41} + e_{53} + e_{64}.$$

Выпишем базисы построенных в этом параграфе подалгебр алгебры P_6:

26. $[e_{31} + e_{53},\ e_{41} + e_{54},\ e_{51},\ e_{52},\ e_{61},\ e_{62}]$.
27. $[e_{31} + e_{53},\ e_{41} + e_{64},\ e_{51},\ e_{52},\ e_{61},\ e_{62}]$.
28. $[e_{31} + e_{53},\ e_{42} + e_{54},\ e_{51},\ e_{52},\ e_{61},\ e_{62}]$.
29. $[e_{31} + e_{53},\ e_{42} + e_{61},\ e_{51},\ e_{52},\ e_{61},\ e_{62}]$.
30. $[e_{31} + e_{54},\ e_{41} + e_{53} + e_{64},\ e_{51},\ e_{52},\ e_{61},\ e_{62}]$.
31. $[e_{31} + e_{54},\ e_{32} + e_{41} + e_{53},\ e_{51},\ e_{52},\ e_{61},\ e_{62}]$.
32. $[e_{31} + e_{54},\ e_{32} + e_{41} + e_{53} + e_{64},\ e_{51},\ e_{52},\ e_{61},\ e_{62}]$.

Каждая из алгебр 26—32 изоморфна одной из трех алгебр, определяемых следующими совокупностями структурных матриц:

$$E_2,\ 0_2,\ 0_2,\ 0_2 \qquad (N_{14}),$$

$$E_2,\ [0,\ 1],\ 0_2,\ 0_2 \qquad (N_{15}),$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},\ [0,\ 1],\ 0_2,\ 0_2 \qquad (N_{16}).$$

Легко проверить, что эти 3 алгебры попарно неизоморфны.

Можно доказать, на чем мы здесь не останавливаемся, что алгебры 26—32 попарно не сопряжены в P_6.

§ 9. Пусть ранг аннулятора алгебры N равен 6. Тогда 1) $\nu=3$, $m=1$, $\mu=2$ либо 2) $\nu=2$, $m=1$, $\mu=3$.

Пусть $\nu=3$, $m=1$, $\mu=2$. Возьмем из N матрицу A_1 вида (8). Тогда существует S, такое, что $S^{-1}A_1S=e_{41}+e_{54}$. Всякая матрица вида (8), перестановочная с A_1, представится в виде aA_1.

Итак, при $\nu=3$, $m=1$, $\mu=2$ в P_6 содержится с точностью до сопряженности только одна максимальная коммутативная подалгебра класса нильпотентности 3 : $[e_{41}+e_{54},\ e_{51},\ e_{52},\ e_{53},\ e_{61},\ e_{62},\ e_{63}]$. При $\nu=2$, $m=1$, $\mu=3$ получаем также только одну подалгебру: $A_1=e_{31}+e_{53}$. Базис этой алгебры: $[e_{31}+e_{53},\ e_{41},\ e_{42},\ e_{51},\ e_{52},\ e_{61},\ e_{62}]$. Последние две алгебры, как легко проверить, не сопряжены в P_6. Каждая из них изоморфна алгебре N_{17}, определяемой структурными константами: 1, 0, 0, 0, 0, 0.

Итак, справедлива следующая

Теорема 2. *В P_6 существует всего 34 попарно несопряженных максимальных коммутативных подалгебр класса нильпотентности 3. Каждая из них изоморфна одной из 17 попарно неизоморфных алгебр.*

§ 10. Опишем теперь все максимальные коммутативные нильпотентные класса 4 подалгебры алгебры P_6.

В статье [9] Д. А. Супруненко дал полное описание всех максимальных коммутативных нильпотентных подалгебр алгебры P_n класса нильпотентности $n-2$ при $n>6$. В частности, в P_n есть с точностью до сопряженности лишь одна максимальная коммутативная класса нильпотентности 4 подалгебра, ранг которой равен n. При доказательстве этого утверждения условие $n>6$ не использовано. Следовательно, в P_6 есть с точностью до сопряженности только одна подалгебра N_{18} ранга 6 класса нильпотентности 4. Базис этой алгебры можно взять в виде $[a,\ a^2,\ a^3,\ e_{65},\ e_{61},\ e_{45}]$, где $a=e_{21}+e_{32}+e_{43}+e_{65}$.

Все остальные максимальные коммутативные класса 4 подалгебры P_6 имеют ранг 5, и, следовательно, для каждой из них хотя бы одно из чисел ν, μ равно 1. Для построения всех максимальных коммутативных класса 4 ранга 5 подалгебр P_6 достаточно определить все коммутативные алгебры ранга 5 класса 4 над алгебраически замкнутым полем P.

§ 11. Пусть N — коммутативная нильпотентная алгебра класса 4 ранга 5 над P и пусть a — элемент этой алгебры, такой, что $a^3\neq 0$.

1. Пусть среди элементов N, не входящих в $[a,\ a^2,\ a^3]$, есть элемент b_1, такой, что ab_1 не принадлежит $[a,\ a^2,\ a^3]$. Тогда $a,\ a^2,\ a^3,\ b_1,\ ab_1$ — базис N, $a^2b_1=\gamma a^3$. Если $\gamma\neq 0$, то положим $b_1'=b_1-\gamma a$. Тогда $a^2b_1'=0$. Получаем алгебру $N:[a,\ a^2,\ a^3,\ b_1,\ b_2]$, $b_2=ab_1$, $a^2b_1=0$, $b_1^2=\gamma_1a^2+\gamma_2a^3+\delta b_2$.

Алгебру $N_{\gamma_1,\gamma_2,\delta}$ с базисом a, a^2, ..., a^{k-1}, b_1, b_2, для элементов которой $b_2 = ab_1$, $a^2 b_1 = 0$, $b_1^2 = \gamma_1 a^{k-2} + \gamma_2 a^{k-1} + \delta b_2$, рассматривал Д. А. Супруненко [9]. Он доказал, что если $k > 4$, то $N_{\gamma_1,\gamma_2,\delta} \cong N_{\psi(\gamma_1),\psi(\gamma_2),\psi(\delta)}$, где $\psi(0) = 0$, $\psi(x) = 1$ при $x \neq 0$. При $k = 4$ справедлива следующая теорема:

$$N_{\gamma_1,\gamma_2,\delta} \cong N_{1,0,0}, \quad \gamma_1 \neq 0, \quad \delta \neq \pm 2i \cdot \gamma_1^{1/2}, \tag{*}$$

$$N_{0,\gamma_2,\delta} \cong N_{0,0,1}, \quad \delta \neq 0, \tag{**}$$

$$N_{0,\gamma_2,0} \cong N_{0,1,0}, \quad \gamma_2 \neq 0. \tag{***}$$

Утверждения (**), (***) проверяются без труда, на их доказательстве мы не останавливаемся.

Лемма 1. *Если* $\gamma_1 \neq 0$, *то* $N_{\gamma_1,\gamma_2,\delta} \cong N_{\gamma_1,0,\delta}$.

Доказательство. Пусть $a' = a + xa^2$. Тогда $a'^2 = a^2 + 2xa^3$. Выберем $x = \gamma_2/2\gamma_1$. Тогда $\gamma_1 a^2 + \gamma_2 a^3 = \gamma_1 a'^2$, $b_2' = b_1 a' = b_2$, $b_1'^2 = \gamma_1 a'^2 + \delta b_2$. Тем самым лемма доказана.

Лемма 2. $N_{\gamma_1,0,\delta} \cong N_{1,0,\delta'}$, *где* $\gamma_1 \neq 0$; $\delta' = \delta\gamma_1^{-1/2}$.

Доказательство. Выберем в алгебре $N_{\gamma_1,0,\delta}$ новый базис c, c^2, c^3, d_1, d_2, где $c = xa$; $d_1 = yb_1$. Подберем x и y так, чтобы

$$d_1^2 = c^2 + \delta' d_2. \tag{10}$$

Из (10) получаем:

$$\begin{cases} y^2 \gamma_1 = x^2, \\ y^2 \delta = \delta' xy. \end{cases}$$

Последняя система совместна, если $\delta' = \delta\gamma^{-1/2}$.

Лемма 3. *Если элементы* c, d_1, d_2 *коммутативной нильпотентной алгебры* $N_{\gamma_1,0,\delta}$ *связаны соотношениями*:

$$\begin{cases} cd_1 = d_2, \\ c^2 d_1 = 0, \\ d_1^2 = c^2 \end{cases}$$

и $c^3 \neq 0$, *то* c, c^2, c^3, d_1, d_2 *линейно независимы над* P.

Доказательство. Пусть

$$\rho_1 c + \rho_2 c^2 + \rho_3 c^3 + \mu_1 d_1 + \mu_2 d_2 = 0. \tag{11}$$

Умножив (11) на c^2, получим $\rho_1 = 0$. Умножив далее (11) на c, получим

$$\rho_2 c^3 + \mu_1 d_2 = 0. \tag{12}$$

Умножив (12) на d_1, получим $\mu_1 c^3 = 0$, $\mu_1 = 0$. Из (12) имеем, что $\rho_2 = 0$, $\rho_3 c^3 + \mu_2 d_2 = 0$. По ранее доказанному отсюда следует, что $\rho_3 = \mu_3 = 0$. Тем самым лемма доказана.

Лемма 4. *Пусть* $\delta \neq \pm 2i$, *тогда* $N_{1,0,\delta} \cong N_{1,0,0}$.

Покажем, что в $N_{1,0,\delta}$ можно выбрать новый базис c, c^2, c^3, d_1, d_2, элементы которого были бы связаны следующими соотношениями:

$$\begin{cases} d_2 = cd_1, \\ d_1^2 = c^2, \\ c^2 d_1 = 0. \end{cases} \tag{13}$$

Очевидно, последнюю систему можно заменить следующей эквивалентной системой:

$$\begin{cases} d_2 = cd_1, \\ d_1^2 = c^2, \\ d_1^3 = 0. \end{cases} \tag{14}$$

Пусть

$$\begin{cases} c = x_1 a + x_2 b_1, \\ d_1 = y_1 a + y_2 b_1. \end{cases}$$

Для того чтобы выполнялись соотношения (14), величины x_1, x_2, y_1, y_2 должны удовлетворять следующим требованиям:

$$\begin{cases} y_1^3 + 3\, y_1 y_2^2 + y_2^3 \delta = 0, \\ 2\, y_1 y_2 + y_2^2 \delta = 2\, x_1 x_2 + x_2^2 \delta, \\ y_1^2 + y_2^2 = x_1^2 + x_2^2. \end{cases} \tag{15}$$

Для линейной независимости элементов c, c^2, c^3, d_1, d_2, связанных соотношениями (14), необходимо и достаточно, чтобы

$$c^3 \neq 0. \tag{16}$$

Пусть $y_1 = ky_2$, $x_1 = px_2$. Тогда из (15) получим:

$$\begin{cases} y_2^3 (k^3 + 3\, k^2 + \delta) = 0, \\ y_2^2 (2\, k + \delta) = x_2^2\, (2\, p + \delta), \\ y_2^2 (k^2 + 1) = x_2^2 (p^2 + 1), \end{cases} \tag{17}$$

а (16) заменится неравенством

$$x_2^3 (p^3 + 3\, p^2 + \delta) \neq 0. \tag{18}$$

Так как $\delta \neq \pm 2i$, то $k^2 + 1 \neq 0$, $2\, k + \delta \neq 0$.

Система, образованная двумя последними уравнениями (17), совместна, если

$$(p - k)(2\, kp + \delta\, p + \delta\, k - 2) = 0. \tag{19}$$

Для выполнения (19) достаточно, чтобы $p\,(2\, k + \delta) = -\delta\, k + 2$.

Пусть k_1, k_2, k_3 — корни уравнения $k^3 + 3\, k + \delta = 0$. Так как $\delta \neq \pm 2\, i$, то числа k_1, k_2, k_3 попарно различные. Для любого δ и любого k_j, $j = 1, 2, 3$, уравнение $p\,(2\, k + \delta) = -\delta\, k + 2$ имеет решение $p_j = \dfrac{-\delta\, k_j + 2}{2\, k_j + \delta}$. Числа $p_j = \dfrac{-\delta\, k_j + 2}{2\, k_j + \delta}$ являются корнями многочлена $\delta\, p^3 - 6\, p^2 - 3\delta\, p - \delta^2 - 2$. Многочлены $x^3 + 3\, x + \delta$, $\delta\, x^3 + 6\, x^2 - 3\delta\, x - \delta^2 - 2$ при $\delta \neq \pm 2\, i$, $\delta \neq 0$ взаимно просты. В (17) можно положить $x_2 = 1$. Так как p_j не обращает в нуль многочлен $x^3 + 3\, x + \delta$, то выполнено (18). Тем самым доказано, что при $\delta \neq \pm 2\, i$ $N_{1,\,0,\,\delta} \cong N_{1,0,0}$.

Легко видеть, что $N_{1,\,0,\,\delta} \cong N_{1,\,0,\,-\delta}$. Из лемм 2 и 4 следует, что при $\gamma_1 \neq 0$, $\delta \neq \pm 2\, i\, \gamma_1^{1/2}$ $N_{\gamma_1,\gamma_2,\delta} \cong N_{1,0,0}$. При $\gamma_1 \neq 0$, $\delta = \pm 2\, i\, \gamma_1^{1/2}$ $N_{\gamma_1,\gamma_2,\delta} \cong N_{1,0,2i}$.

Итак, любая алгебра $N_{\gamma_1,\gamma_2,\delta}$ изоморфна одной из алгебр:

$$N_{0,0,0},\quad N_{1,0,0},\quad N_{1,0,2i},\quad N_{0,1,0},\quad N_{0,0,1}.$$

2. Пусть a, a^2, a^3, b_1, b_2 — базис N и $ab_1 \in [a, a^2, a^3]$, $ab_2 \in [a, a^2, a^3]$. Без ограничения общности можно положить $ab_1 = ab_2 = 0$. Если b_1, b_1^2, a^3 линейно независимы, то a, a^2, a^3, b_1, b_1^2 — базис N. Тогда $b_1^3 = \gamma a^3$. Пусть $a' = a + xb_1$. Взяв x такое, что $\gamma x^3 + 1 \neq 0$, получим, что a', a'^2, a'^3, b_1, $a'b_1$ — также базис N. Но такие алгебры были построены выше. Пусть теперь b_1, b_1^2, a^3 линейно зависимы и b_2, b_2^2, a^3 также линейно зависимы. Тогда $b_1^2 = \gamma_1 a^3$, $b_2^2 = \gamma_2 a^3$, $b_1 b_2 = \gamma_3 a^3$. Алгебру, получаемую при $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3 = 0$, обозначим N_{19}. Пусть теперь не все $\gamma_i = 0$. Если $\gamma_1 \neq 0$, $\gamma_2 \neq 0$, то возьмем $b_2' = b_2 - xb_1$. Тогда $b_2'^2 = (\gamma_2 - 2\gamma_3 x + \gamma_1 x^2) a^3$. Можно взять x так, чтобы $\gamma_2 - 2x\gamma_3 + x^3 \gamma_1 = 0$. Тогда $b_2'^2 = 0$. Итак, можно положить

$$b_1^2 = \gamma a^3, \quad b_2^2 = 0.$$

Получаем с точностью до изоморфизма две алгебры:

$$N_{20} : [a, a^2, a^3, b_1, b_2]; \quad b_1^2 = a^3, \quad b_1 b_2 = a^3, \quad b_2^2 = 0,$$

$$N_{21} : [a, a^2, a^3, b_1, b_2]; \quad b_1^2 = a^3, \quad b_1 b_2 = 0, \quad b_2^2 = 0.$$

Итак, справедлива следующая

Теорема 3. *Над алгебраически замкнутым полем P существует не более 8 попарно неизоморфных коммутативных нильпотентных алгебр ранга 5 класса 4.*

Можно показать, что алгебры N_{19}, N_{20}, N_{21}, $N_{0,0,0}$, $N_{1,0,0}$, $N_{1,0,2i}$, $N_{0,1,0}$, $N_{0,0,1}$ попарно неизоморфны. Из построенных в этом параграфе алгебр 5 имеют аннулятор ранга, большего 1. Следовательно, справедлива

Теорема 4. *Любая максимальная коммутативная нильпотентная класса 4 ранга 5 подалгебра алгебры P_6 сопряжена в P_6 с одной из 13 попарно несопряженных в P_6 алгебр.*

Итак, в P_6 существует всего 14 попарно несопряженных максимальных коммутативных нильпотентных подалгебр класса 4. Выпишем их базисы:

1. $[e_{21} + e_{32} + e_{43} + e_{65},\ e_{31} + e_{42},\ e_{41},\ e_{45},\ e_{61},\ e_{65}]$.
2. $[a, a^2, a^3, e_{41}, e_{51}]$.
3. $[a', a'^2, a'^3, e_{14}, e_{15}]$.
4. $[a, a^2, a^3,\ e_{41} + e_{64} + e_{65},\ e_{51} + e_{64}]$.
5. $[a, a^2, a^3,\ e_{41} + e_{64},\ e_{51}]$.
6. $[a', a'^2, a'^3,\ e_{14} + e_{46},\ e_{15}]$.
7. $[a, a^2, a^3,\ e_{41} + e_{52},\ e_{51}]$.
8. $[a', a'^2, a'^3,\ e_{14} + e_{25},\ e_{15}]$.
9. $[a, a^2, a^3,\ e_{31} + e_{34} + e_{52} + e_{62},\ e_{51} + e_{64}]$.
10. $[a, a^2, a^3,\ e_{34} + e_{41} + e_{52} + 2ie_{54} + e_{65},\ e_{51} + e_{64}]$.
11. $[a, a^2, a^3,\ e_{41} + e_{52} + e_{64},\ e_{51}]$.
12. $[a', a'^2, a'^3,\ e_{14} + e_{25} + e_{46},\ e_{15}]$.

13. $[a,\ a^2,\ a^3,\quad e_{41}+e_{52}+e_{53},\quad e_{51}]$.

14. $[a',\ a'^2,\ a'^3,\quad e_{14}+e_{25}+e_{35},\quad e_{15}]$.

В базисах 2 — 6 $a=e_{21}+e_{32}+e_{63}$, $a'=e_{12}+e_{23}+e_{36}$; в базисах 7 — 14 $a=e_{21}+e_{32}+e_{54}+e_{63}$, $a'=e_{12}+e_{23}+e_{45}+e_{36}$.

Выражаю искреннюю благодарность члену-корреспонденту АН БССР Д. А. Супруненко и доценту БГУ имени В. И. Ленина Р. И. Тышкевич за постоянный интерес к работе и консультации.

ЛИТЕРАТУРА

1. Charles B. J. de Math., **33**, 81—145, 1954.
2. Супруненко Д. А. УМН, т. XI, в. 3(69), 181—184, 1956.
3. Кравчук М. Ф. Сообщения Харьковского математического общества, вторая серия, **14**, № 4, 1914, стр. 163—176.
4. Тышкевич Р. И. УМН, т. XIV, в. 5(89), 225, 1959.
5. Jordan C. J. de Math., **2**, 403—438, 1906.
6. Jordan C. J. de Math., **3**, 213—266, 1907.
7. Кравчук М. Ф., Гольдбаум Я. Труды КАИ, в. V, 1936, стр. 12—23.
8. Супруненко Д. А. Известия Академии наук БССР, сер. физико-техническая, № 3, 1956.

Поступило в редакцию 18.I 1966

ВЕСЦІ АКАДЭМІІ НАВУК БЕЛАРУСКАЙ ССР № 3 1966
СЕРЫЯ ФІЗІКА-МАТЭМАТЫЧНЫХ НАВУК

А. И. САКСОНОВ

О ЦЕЛОЧИСЛЕННОМ КОЛЬЦЕ ХАРАКТЕРОВ КОНЕЧНОЙ ГРУППЫ

Пусть G — конечная группа, Z — кольцо целых рациональных чисел, R — кольцо целых конечного расширения Δ поля Q рациональных чисел. Поскольку таблица умножения неприводимых характеров[1] группы G рациональна и целочисленна, R-линейные комбинации характеров группы G образуют относительно обычных операций коммутативную алгебру над кольцом R. Эту алгебру мы будем называть целочисленным кольцом характеров группы G и обозначать через $R\mathrm{X}(G)$. В частности, при $R=Z$ получаем кольцо обобщенных характеров группы G.

Кольцо $R\mathrm{X}(G)$ дает известную, хотя и неполную, информацию о группе G — в точности ту, которую дает таблица характеров группы G (см. следствие 2.1). Мы показываем, что строение кольца $R\mathrm{X}(G)$ определяет структуру нормальных делителей группы G, индексы всех главных факторов и строение центра любой факторгруппы группы G. В частности, кольцом $R\mathrm{X}(G)$ однозначно определяется строение факторов верхнего и нижнего центральных рядов группы G.

Если для двух конечных групп G и $\tilde{G}$ целочисленные групповые кольца RG и $R\tilde{G}$ изоморфны, то совпадают таблицы характеров этих групп и, следовательно, $R\mathrm{X}(G) \simeq R\mathrm{X}(\tilde{G})$. Пример неизоморфных неабелевых групп порядка p^3, p — простое, показывает, что обратное, вообще говоря, неверно. Поэтому наше следствие 2.2 является усилением соответствующих результатов Колемана [3] и Кона и Ливингстона [2], извлекающих ту же информацию о группе из строения группового кольца RG.

В § 3 в связи с изучением группы автоморфизмов кольца $R\mathrm{X}(G)$ формулируется предположение, доказательство которого дало бы ответ на некоторые нерешенные вопросы абстрактной теории конечных групп.

В заключение мы сравниваем строение кольца $R\mathrm{X}(G)$ со строением целочисленного кольца классов сопряженных элементов группы G.

Рассматриваются только конечные группы. Мы применяем следующие обозначения: $|G|$ — порядок группы G; G' — ее коммутант; $Z_i(G)$ — i-й центр группы G; G_j — j-й взаимный коммутант группы G; k — число классов сопряженных элементов группы G; K_i — сумма элементов i-го класса; h_i — порядок i-го класса; X_ρ — ρ-й абсолютно неприводимый характер; $\chi_\rho(i)$ — его значение на элементах i-го класса; $\nu_\rho = \chi_\rho(1)$ — степень ρ-го абсолютно неприводимого представления. Если рассматриваются две группы G и $\tilde{G}$, то соответствующие величины для группы $\tilde{G}$ снабжаются знаком $\sim$. Через Ω обозначается произвольное нормальное расширение поля Q, содержащее поле Δ и поле характеров группы G, т. е. Ω — нормальное замыкание поля

[1] Здесь и всюду в дальнейшем под неприводимыми понимаются абсолютно неприводимые характеры.

разложения алгебры $\Delta\mathrm{X}(G)$. Наконец, $U_0(R)$ обозначает периодическую часть группы единиц кольца R.

1. Как показал Г. Хигман [4], единственными единицами конечного порядка в групповом кольце RG абелевой группы G являются тривиальные единицы вида εx, где $x \in G$, а ε — корень из 1 в R. Поскольку абелева группа изоморфна группе своих неприводимых характеров, то следующую теорему можно интерпретировать как обобщение результата Г. Хигмана.

Теорема 1. *Пусть G — произвольная группа. Тогда единственными единицами конечного порядка в кольце $R\mathrm{X}(G)$ являются элементы вида εX, где ε — корень из 1 в R, а X — любой линейный характер группы G.*

Доказательство. Элементы указанного вида, очевидно, являются единицами конечного порядка в кольце $R\mathrm{X}(G)$. Покажем, что других единиц конечного порядка в кольце $R\mathrm{X}(G)$ нет.

Обозначим через e_i $(i = 1, 2, \ldots, k)$ минимальные идемпотенты алгебры $\Omega\mathrm{X}(G)$. Как известно,

$$e_i = \frac{h_i}{|G|}\sum_{\rho=1}^{k}\overline{\chi_\rho(i)}\,\mathrm{X}_\rho\,. \tag{1}$$

Пусть $v \in R\mathrm{X}(G)$, $v^m = 1$,

$$v = \sum_{\rho=1}^{k} v_\rho \mathrm{X}_\rho = \sum_{i=1}^{k}\beta_i e_i, \quad v_\rho \in R, \quad \beta_i^m = 1. \tag{2}$$

Подставляя (1) в (2) и учитывая линейную независимость $\{\mathrm{X}_\rho\}_1^k$, имеем $v_\rho = \frac{1}{|G|}\sum_{i=1}^{k}\beta_i h_i\overline{\chi_\rho(i)}$. Теперь с помощью неравенства Коши и соотношения ортогональности для групповых характеров получаем

$$|v_\rho| = \frac{1}{|G|}\left|\sum_{i=1}^{k}\beta_i\sqrt{h_i}\sqrt{h_i}\,\overline{\chi_\rho(i)}\right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{|G|}\sqrt{\sum_{i=1}^{k}|\beta_i|^2 h_i}\,\sqrt{\sum_{i=1}^{k}h_i|\chi_\rho(i)|^2} = 1.$$

Так как для любого автоморфизма Θ поля Ω/Q β_i^Θ суть корни из 1, а $\chi_\rho^\Theta(i)$, $i = 1, \ldots, k$, снова являются значениями характера, то тем же способом получаем, что все сопряженные с v_ρ в поле Ω по модулю также не превосходят 1. Поэтому для нормы $N(v_\rho)$ числа v_ρ относительно поля Ω имеем $N(v_\rho) \leqslant 1$, откуда либо $N(v_\rho) = 0$, либо $N(v_\rho) = 1$, что соответствует в нашем случае двум возможностям: $v_\rho = 0$ и $|v_\rho| = 1$.

Теперь введем в алгебре $\Omega\mathrm{X}(G)$ эрмитову метрику, полагая для элементов базиса $\{\mathrm{X}_\rho\}_1^k$ $(\mathrm{X}_\sigma, \mathrm{X}_\rho) = \delta_{\sigma\rho}|G|$. Равенства $(e_i, e_j) = \delta_{ij}h_i$ будут лишь формой записи одного из соотношений ортогональности для групповых характеров. Вычисляя скалярное произведение (v, v) в двух различных базисах, получим

$$(v, v) = \sum_{\rho=1}^{k}|v_\rho|^2(\mathrm{X}_\rho, \mathrm{X}_\rho) = |G|\sum_{\rho=1}^{k}|v_\rho|^2$$

и

$$(v, v) = \sum_{i=1}^{k}|\beta_i|^2(e_i, e_i) = \sum_{i=1}^{k}h_i = |G|,$$

откуда $\sum_{\rho} |v_\rho|^2 = 1$, т. е. отлично от нуля в точности одно v_ρ. Соответствующий неприводимый характер X_ρ необходимо является линейным, ибо по теореме Бернсайда нелинейный неприводимый характер имеет нули и, следовательно, необратим уже в алгебре $\Omega X(G)$. Доказательство теоремы 1 завершается очевидным замечанием, что v_ρ должен быть корнем из 1 в R.

Следствие 1.1. *Если для групп G и $\tilde{G}$ $RX(G) \simeq RX(\tilde{G})$, то $G/G' \simeq \tilde{G}/\tilde{G}'$. В частности, если G абелева, то из $RX(G) \simeq RX(\tilde{G})$ следует $G \simeq \tilde{G}$.*

Доказательство. По теореме 1 периодическая часть $U_0(RX(G))$ группы единиц $U(RX(G))$ кольца $RX(G)$ изоморфна прямому произведению $U_0(R)$ на группу $X_0(G)$ линейных характеров группы G. Из $RX(G) \simeq RX(\tilde{G})$, очевидно, следует $U_0(RX(G)) \simeq U_0(RX(\tilde{G}))$, т. е. $U_0(R) \times X_0(G) \simeq U_0(R) \times X_0(\tilde{G})$, откуда $X_0(G) \simeq X_0(\tilde{G})$. Остается заметить, что для любой группы G $X_0(G) \simeq G/G'$.

2. Если группы G и $\tilde{G}$ имеют одинаковые таблицы характеров, то, разумеется, $RX(G) \simeq RX(\tilde{G})$. Оказывается, что и обратно, строение кольца $RX(G)$ определяет таблицу характеров группы G. Базис $\{X_\rho\}_1^k$ кольца $RX(G)$ является привилегированным в следующем смысле.

Теорема 2. *Предположим, что для групп G и $\tilde{G}$ $RX(G) \simeq RX(\tilde{G})$, и пусть φ — изоморфизм $RX(\tilde{G})$ на $RX(G)$. Тогда $\varphi(\tilde{X}_\rho) = \varepsilon X_{\varphi(\rho)}$, где ε — корень из 1 в R, а $\varphi(\rho)$ — некоторая подстановка символов $1, \ldots, k$, индуцируемая автоморфизмом φ.*

Доказательство. Погрузим кольцо $RX(G)$ в алгебру $\Omega X(G)$ и в последней рассмотрим три базиса: $\{X_\rho\}_1^k$, $\{\varphi(\tilde{X}_\rho)\}_1^k$ и базис $\{e_i\}_1^k$ из минимальных идемпотентов.

Пусть S — кольцо целых поля Ω. Очевидно, $SX(G)$ является подкольцом алгебры $\Omega X(G)$. Назовем высотой элемента $x \in \Omega X(G)$ наименьшее натуральное число d такое, что $dx \in SX(G)$. Нетрудно убедиться, что высота d_i минимального идемпотента $e_i = \dfrac{h_i}{|G|} \sum_{\rho=1}^{k} \overline{\chi_\rho(i)}\, X_\rho$ равна $\dfrac{|G|}{h_i}$. В самом деле, для любого $i = 1, \ldots, k$ $\chi_1(i), \ldots, \chi_k(i)$ являются целыми числами поля Ω, а поскольку $\chi_1(i) = 1$, то $d_i = \dfrac{|G|}{h_i}$ является наименьшим натуральным числом, для которого $d_i e_i$ попадает в кольцо $SX(G)$. Применяя те же рассуждения к группе $\tilde{G}$, получаем, что $d_i = \dfrac{|\tilde{G}|}{\tilde{h}_i}$. Поэтому $|G| = |\tilde{G}|$ и $h_i = \tilde{h}_i$ $(i = 1, \ldots, k)$.

Введем теперь в алгебре $\Omega X(G)$ эрмитову метрику, полагая $(e_i, e_j) = \delta_{ij} d_i^{-1} \max\limits_{1 \leqslant l \leqslant k} d_l = h_i = \tilde{h}_i$. Используя соотношения ортогональности для групповых характеров, вычислим метрические матрицы в базисах $\{X_\rho\}_1^k$ и $\{\varphi(\tilde{X}_\rho)\}_1^k$:

$$\left.\begin{aligned} &(X_\sigma, X_\rho) = \left(\sum_{i=1}^{k} \chi_\sigma(i) e_i, \sum_{j=1}^{k} \chi_\rho(j) e_j\right) = \sum_{i=1}^{k} h_i \chi_\sigma(i) \overline{\chi_\rho(i)} = \delta_{\sigma\rho} |G|, \\ &\text{аналогично} \\ &(\varphi(\tilde{X}_\sigma), \varphi(\tilde{X}_\rho)) = \delta_{\sigma\rho} |\tilde{G}| = \delta_{\sigma\rho} |G|. \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

Матрица перехода A от базиса $\{X_\rho\}_1^k$ к базису $\{\varphi(\tilde{X}_\rho)\}_1^k$ должна быть целочисленной, а ввиду соотношений (3) и унитарной. Пусть теперь Θ — произвольный автоморфизм поля Ω/Q. Обозначим через $\{\varphi(\tilde{X}_\rho)^\Theta\}_1^k$ базис алгебры $\Omega X(G)$, выражающийся через базис $\{X_\rho\}_1^k$ с помощью матрицы A^Θ. Так как A^Θ обратима над R, то $\{\varphi(\tilde{X}_\rho)^\Theta\}_1^k$ является также базисом R-модуля $RX(G)$. Кроме того, структурные константы алгебры $\Omega X(G)$ в базисе $\{\varphi(\tilde{X}_\rho)^\Theta\}_1^k$ совпадают со структурными константами этой алгебры в базисе $\{\varphi(\tilde{X}_\rho)\}_1^k$. Это вытекает из рациональности структурных констант в базисах $\{X_\rho\}_1^k$ и $\{\varphi(\tilde{X}_\rho)\}_1^k$. Следовательно, к матрице A^Θ применимы те же рассуждения, и мы получаем, что A целочисленна и унитарна вместе со всеми своими сопряженными в поле Ω относительно поля Q. Отсюда следует, что A — мономиальна. Далее, если $\varepsilon \in R$ любой отличный от нуля элемент матрицы A, то $|\varepsilon^\Theta| = 1$ при любом Θ из группы Галуа поля Ω/Q. Но тогда, как известно, ε является корнем из 1. Теорема доказана.

Следствие 2.1. Если для групп G и $\tilde{G}$ $RX(G) \cong RX(\tilde{G})$, то таблицы характеров групп G и $\tilde{G}$ совпадают (с точностью до нумерации строк и столбцов).

Доказательство. Изменив, если нужно, нумерацию неприводимых характеров группы $\tilde{G}$, по теореме 2 будем иметь $\varphi(\tilde{X}_\rho) = \varepsilon_\rho X_\rho$, где ε_ρ — некоторый корень из 1. Так как структурные константы кольца $RX(G)$ рациональны как в базисе $\{X_\rho\}_1^k$, так и в базисе $\{\varepsilon_\rho X_\rho\}_1^k$, то они в этих базисах совпадают. Таким образом, таблицы умножения неприводимых характеров групп G и $\tilde{G}$ совпадают. Следовательно, при соответствующей нумерации классов сопряженных элементов групп G и $\tilde{G}$ совпадают таблицы характеров этих групп.

Следуя Э. М. Жмудю, назовем сохраняющий индексы изоморфизм структур нормальных делителей групп G и $\tilde{G}$ сильным N-структурным изоморфизмом групп G и $\tilde{G}$. Необходимое и достаточное условие сильного N-структурного изоморфизма двух конечных групп получено в работе [5]. Это условие заведомо выполняется для групп G и $\tilde{G}$, если $RX(G) \cong RX(\tilde{G})$. В последнем случае, однако, можно утверждать больше:

Следствие 2.2. Если для двух групп G и $\tilde{G}$ $RX(G) \cong RX(\tilde{G})$, то существует такой сильный N-структурный изоморфизм ψ групп G и $\tilde{G}$, что

1) для любого $N \lhd G$ из $L \lhd G$ и $L/N = Z_1(G/N)$ вытекает $\psi(L)/\psi(N) = Z_1(\tilde{G}/\psi(N))$ и $L/N \cong \psi(L)/\psi(N)$;

2) $\psi(Z_i(G)) = Z_i(\tilde{G})$ и $Z_{i+1}(G)/Z_i(G) \cong Z_{i+1}(\tilde{G})/Z_i(\tilde{G})$;

3) $\psi(G_j) = \tilde{G}_j$ и $G_j/G_{j+1} \cong \tilde{G}_j/\tilde{G}_{j+1}$.

В частности, если G нильпотентна класса c, то и $\tilde{G}$ нильпотентна того же класса.

Доказательство. По следствию 2.1 группы G и $\tilde{G}$ имеют одинаковые таблицы характеров. Для каждого $N \lhd G$ рассмотрим множество M_N всех неприводимых характеров группы G, ядро которых содержит N. Очевидно, M_N состоит в точности из всех неприводимых характеров факторгруппы G/N. (Отсюда, в частности, следует непустота множества M_N для любого $N \lhd G$). Обозначим через $\psi(N)$ нормальный делитель группы $\tilde{G}$, являющийся пересечением ядер всех характеров из множества M_N. Легко видеть, что ψ есть сильный N-структурный изоморфизм групп G и $\tilde{G}$, причем таблицы характеров групп G/N и $\tilde{G}/\psi(N)$ совпадают. Поскольку центр группы выделяется из множества нормальных делителей таблицей характеров группы, то $\psi(Z_1(G)) = Z_1(\tilde{G})$. Более того, из совпадения таблиц характеров двух групп вытекает изоморфизм центров этих групп. Действительно, таблица характеров группы однозначно определяет таблицу умножения классов сопряженных элементов, а последняя — строение центра группы. Поскольку в этих рассуждениях группу G можно заменить любой ее факторгруппой, то 1) доказано.

2) непосредственно следует из 1) с помощью индукции по i.

Для доказательства 3) также применим индукцию. $G_1 = G'$ характеризуется тем, что M_{G_1} состоит из всех линейных характеров группы G, поэтому $\psi(G_1)=\tilde{G}_1$. По следствию 1.1 $G/G_1 \simeq \tilde{G}/\tilde{G}_1$. Допустим теперь, что 3) верно для $j=n$, и покажем, что оно будет верно и для $j=n+1$. G_{n+1} является наименьшим нормальным делителем группы G, для которого $G_n/G_{n+1} \subseteq \subseteq Z_1(G/G_{n+1})$. Так как $\psi(G_n)=\tilde{G}_n$, то, учитывая 1), получаем, что $\tilde{G}_n/\psi(G_{n+1} \subseteq \subseteq Z_1(\tilde{G}/\psi(G_{n+1}))$. Следовательно, $\psi(G_{n+1}) \supseteq \tilde{G}_{n+1}$, а ввиду симметричности G и $\tilde{G}$ $\psi(G_{n+1}) \subseteq G_{n+1}$, откуда $\psi(G_{n+1})=\tilde{G}_{n+1}$. Теперь из 1) вытекает $G_n/G_{n+1} \simeq \simeq \tilde{G}_n/\tilde{G}_{n+1}$. Следствие 2.2 полностью доказано.

3. Теорему 2 можно применить к исследованию группы автоморфизмов A кольца $R\mathrm{X}(G)$. Группа A, очевидно, конечна. Действительно, любой автоморфизм кольца $R\mathrm{X}(G)$ продолжается до автоморфизма алгебры $\Delta\mathrm{X}(G)$ и, следовательно, определяется некоторой подстановкой минимальных идемпотентов этой алгебры, число которых не превышает k. Из теоремы 2 вытекает, что по отношению к автоморфизмам кольца $R\mathrm{X}(G)$ базис $\{\mathrm{X}_\rho\}_1^k$ кольца является замкнутым с точностью до некоторых множителей из $U_0(R)$ множеством. Именно справедлива следующая

Теорема 3. *Пусть α — автоморфизм целочисленного кольца характеров $R\mathrm{X}(G)$ группы G над кольцом R. Тогда α индуцирует мономиальную подстановку на множестве неприводимых характеров группы G:*

$$\alpha(\mathrm{X}_\rho) = \varepsilon \mathrm{X}_{\alpha(\rho)},$$

где ε — корень из 1 в R. Если $(|Z_1(G)|, |U_0(R)|) = 1$, то индуцируемая автоморфизмом α подстановка — обычная.

Доказательство. Если в теореме 2 положить $\tilde{G} \simeq G$, то получим, что $\alpha(\mathrm{X}_\rho) = \varepsilon \mathrm{X}_{\alpha(\rho)}$ и доказательства требует лишь второе утверждение теоремы 3.

Нетрудно убедиться, что α переводит минимальный идемпотент алгебры $\Delta\mathrm{X}(G)$ в минимальный идемпотент той же высоты. Рассмотрим минимальный идемпотент $e_1 = \dfrac{1}{|G|}\sum\limits_{\rho=1}^{k} \nu_\rho \mathrm{X}_\rho$ высоты $|G|$. Его образом при автоморфизме α может быть лишь минимальный идемпотент алгебры $\Delta\mathrm{X}(G)$, отвечающий некоторому центральному элементу группы G. Но любой такой идемпотент имеет вид $e_i = \dfrac{1}{|G|}\sum\limits_{\rho=1}^{k} \varepsilon_{i\rho} \nu_\rho \mathrm{X}_\rho$, где $\varepsilon_{i\rho}$ — корень из 1 степени, делящей $|Z_1(G)|$. Следовательно, если в R нет корней из 1, степени которых делят $|Z_1(G)|$, т. е. если $(|Z_1(G)|, |U_0(R)|) = 1$, то $\alpha(e_1) = e_1$ и α индуцирует обычную подстановку на множестве неприводимых характеров группы. Теорема доказана.

Так как любой автоморфизм $\alpha \in A$ оставляет главный характер на месте, то группа A точно представима мономиальными матрицами $(k-1)$-й степени. Для всякого $\alpha \in A$, действующего по закону $\alpha(\mathrm{X}_\rho) = \varepsilon \mathrm{X}_{\alpha(\rho)}$, найдется, очевидно, $\bar{\alpha} \in A$ такой, что $\bar{\alpha}(\mathrm{X}_\rho) = \mathrm{X}_{\alpha(\rho)}$. Поэтому как матричная группа A является полупрямым произведением своей диагональной части D на некоторую подгруппу T симметрической группы степени $k-1$. Если строение нормального делителя D группы A зависит от строения группы $U_0(R)$, то строение подгруппы T полностью определяется группой G.

Обозначим через T_1 подгруппу тех автоморфизмов кольца $RX(G)$, которые индуцируются автоморфизмами группы G, а через T_2 — подгруппу всех автоморфизмов кольца $RX(G)$, индуцируемых автоморфизмами поля характеров группы G. Легко проверить, что T_2 лежит в центре T, причем $T \supseteq \supseteq T_1T_2$.

Строение группы T как группы подстановок тесно связано со строением кольца $RX(G)$. В связи с этим можно высказать следующее

Предположение. Если автоморфизм $\tau \in T$ регулярно действует на множестве неглавных неприводимых характеров группы G, то мультипликативная группа кольца $RX(G)$ содержит нетривиальную периодическую часть.

Мы считаем здесь, что периодическая часть мультипликативной группы кольца $RX(G)$ тривиальна, если она совпадает с $U_0(R)$.

Можно показать, что если сформулированное предположение неверно, то опровергающий пример должен найтись среди простых неабелевых групп. Проверенные автором серии простых групп: $LF(2, p)$, $p > 3$ — простое, группы Судзуки, группы Ри, а также группы Матье 12-й и 24-й степеней не доставляют контрпримера.

Отметим, с другой стороны, некоторые следствия нашего предположения.

1. Разрешимость групп нечетного порядка.

Все неглавные неприводимые характеры группы G нечетного порядка, как известно, комплексны, и легко видеть, что отображение каждого неглавного характера в комплексно-сопряженный продолжается до автоморфизма кольца $RX(G)$, удовлетворяющего условию нашего предположения. Но тогда по заключению предположения и теореме 1 $G \neq G'$, откуда по индукции вытекает разрешимость группы G.

2. Разрешимость групп, допускающих регулярный автоморфизм любого порядка n.

Если σ — регулярный автоморфизм группы G, то он индуцирует регулярную подстановку на множестве неединичных классов сопряженных элементов группы G и в силу известной леммы Брауэра на множестве неглавных неприводимых характеров группы G. Следовательно, мы можем применить наше предположение и ввиду теоремы 1 снова получаем, что $G \neq G'$ и по индукции разрешимость группы G.

Заметим, что вопрос о разрешимости группы с регулярным автоморфизмом составного порядка не решен в настоящее время.

4. Среди целочисленных колец, ассоциируемых с группой G, кольцу $RX(G)$ в известном смысле двойственно кольцо $RC(G)$ классов сопряженных элементов группы G. В строении колец $RX(G)$ и $RC(G)$ имеется некоторая аналогия. Следующая теорема, полученная С. Д. Берманом [1] для $R = Z$ и Коном и Ливингстоном [2] в общем случае, двойственна нашей теореме 1.

Теорема 1а. *Единственными единицами конечного порядка в кольце $RC(G)$ являются элементы вида εx, где ε — корень из 1 в R, а $x \in Z_1(G)$.*

Для теоремы 3 автору удалось доказать лишь следующий ослабленный аналог:

Теорема 3а. *Если автоморфизм α кольца $RC(G)$ продолжается до автоморфизма групповой алгебры ΔG, то α индуцирует мономиальную подстановку на множестве классов K_i $(i = 1, \ldots, k)$ сопряженных элементов группы G:*

$$\alpha(K_i) = \varepsilon K_{\alpha(i)},$$

где ε — корень из 1 в R. Если $(|G/G'|, |U_0(R)|) = 1$, то указанная подстановка — обычная.

Отмеченный параллелизм в строении колец $R\mathrm{X}(G)$ и $RC(G)$ не идет, однако, слишком далеко. За исключением тривиального случая абелевой группы G, кольца $R\mathrm{X}(G)$ и $RC(G)$ не могут быть изоморфны.

Теорема 4. *Если $R\mathrm{X}(G)\cong RC(G)$, то G — абелева.*

Доказательство. Отобразим изоморфно кольцо $RC(G)$ на кольцо $R\mathrm{X}(G)$ и обозначим через K_i образ i-го класса сопряженных элементов группы G при этом отображении. Три базиса алгебры $\Omega\mathrm{X}(G)$ — $\{K_i\}_1^k$, $\{\mathrm{X}_\rho\}_1^k$ и базис из минимальных идемпотентов $\{e_s\}_1^k$ — связаны, как известно, следующим образом:

$$K_i = h_i \sum_{s=1}^{k} \frac{\chi_s(i)}{\nu_s} e_s, \quad e_s = \frac{\nu_s}{|G|} \sum_{i=1}^{k} \overline{\chi_s(i)}\, K_i;$$

$$\mathrm{X}_\rho = \sum_{s=1}^{k} \chi_\rho(s)\, e_s, \quad e_s = \frac{h_s}{|G|} \sum_{\rho=1}^{k} \overline{\chi_\rho(s)}\, \mathrm{X}_\rho .$$

Обозначим через D_1 и D_2 определители матриц перехода соответственно от $\{\mathrm{X}_\rho\}_1^k$ к $\{e_s\}_1^k$ и от $\{e_s\}_1^k$ к $\{K_i\}_1^k$. Вычисляя с помощью соотношения ортогональности для групповых характеров

$$\sum_{\rho=1}^{k} \chi_\rho(i)\, \overline{\chi_\rho(j)} = \delta_{ij} \frac{|G|}{h_i}$$

квадраты модулей этих определителей, получим

$$|D_1|^2 = \frac{h_1 \dots h_k}{|G|^k} \quad \text{и} \quad |D_2|^2 = \frac{|G|^k h_1 \dots h_k}{\nu_1^2 \dots \nu_k^2}.$$

Определитель матрицы A, связывающей базисы $\{\mathrm{X}_\rho\}_1^k$ и $\{K_i\}_1^k$ R-модуля $R\mathrm{X}(G)$, является единицей в R. Заметим теперь, что множество $\{K_i\}_1^k$ можно было бы погрузить в алгебру $\Omega\mathrm{X}(G)$ также с помощью матрицы A^Θ, где Θ — любой автоморфизм поля Ω. Действительно, и в этом случае $\{K_i\}_1^k$ был бы базисом R-модуля $R\mathrm{X}(G)$, ибо A^Θ обратима над R. Что же касается структурных констант алгебры $\Omega\mathrm{X}(G)$ в базисе $\{K_i\}_1^k$, то они не изменились бы ввиду рациональности таблиц умножения $\{\mathrm{X}_\rho\}_1^k$ и $\{K_i\}_1^k$.

Пусть $\det A = \varepsilon$. Поскольку

$$|\varepsilon^\Theta|^2 = |\det A^\Theta|^2 = |\det A|^2 = |D_1 D_2|^2 = \left(\frac{h_1 \dots h_k}{\nu_1 \dots \nu_k}\right)^2$$

и, следовательно, $|\varepsilon^\Theta|$ не зависит от Θ, то $|\varepsilon^\Theta| = 1$, откуда

$$h_1 \dots h_k = \nu_1 \dots \nu_k. \tag{4}$$

Высота минимального идемпотента e_s алгебры $\Omega C(G)$, с одной стороны, не превосходит $\dfrac{|G|}{\nu_s}$, а с другой, поскольку e_s является также минимальным идемпотентом алгебры $\Omega\mathrm{X}(G)$, — равна $\dfrac{|G|}{h_s}$. Следовательно, числа h_i, $i = 1, \dots, k$, и ν_ρ, $\rho = 1, \dots, k$, можно занумеровать так, чтобы выполнялось $\frac{|G|}{\nu_s} \geqslant \frac{|G|}{h_s}$, т. е. $h_s \geqslant \nu_s$ для каждого $s = 1, \ldots, k$. Но тогда ввиду (4) получаем $h_s = \nu_s$. Отсюда

$$\sum_{s=1}^{k} \nu_s = \sum_{s=1}^{k} h_s = |G| = \sum_{s=1}^{k} \nu_s^2. \tag{5}$$

Так как ν_s—целые положительные, то (5) влечет $\nu_s = 1$ для всех $s = 1, \ldots, k$. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Берман С. Д. ДАН СССР, **91**, 7—9, 1953.
2. Cohn J. A. and Livingstone. Canad. j. Math., **17**, N 4, 583—593, 1965.
3. Coleman D. B. Trans. Amer. Math. Soc., **105**, N 1, 1—8, 1962.
4. Higman G. Proc. Lond. Math. Soc., S. 2, **46**, 231—248, 1940.
5. Жмудь Э. М. Мат. сборник, **44** (86), 3, 353—408, 1958.

Поступило в редакцию 14.II 1966

ВЕСЦІ АКАДЭМІІ НАВУК БЕЛАРУСКАЙ ССР № 3 1966
СЕРЫЯ ФІЗІКА-МАТЭМАТЫЧНЫХ НАВУК

Л. Е. ЗАГОРИН

О НЕПРИВОДИМЫХ НИЛЬПОТЕНТНЫХ ГРУППАХ МАТРИЦ НАД ТЕЛОМ ВЕЩЕСТВЕННЫХ КВАТЕРНИОНОВ

Неприводимые нильпотентные и локально-нильпотентные группы матриц над алгебраически замкнутым полем, а также над произвольным полем изучались в работах Д. А. Супруненко [1—7]. В настоящей статье методы, разработанные Д. А. Супруненко, используются для изучения неприводимых нильпотентных и локально-нильпотентных подгрупп полной линейной группы над телом вещественных кватернионов.

Обозначения: Q — тело вещественных кватернионов с базисом $1, i, j, k$; P — поле действительных чисел; K — поле комплексных чисел; P^* и K^* — мультипликативные группы полей соответственно P и K; $GL(n, Q)$, $GL(n, K)$ — полные линейные группы; $<\Gamma>$ — линейная P-оболочка группы $\Gamma \subset GL(n, Q)$; $\Gamma : Z$ — индекс подгруппы Z в группе Γ; E_n — единичная матрица степени n; φ — регулярное представление тела Q; если $g \in GL(n, Q)$, то, заменяя каждый элемент α_{ij} матрицы g на $\varphi(\alpha_{ij})$, получим вещественную матрицу $\varphi(g)$ степени $4n$; $SL(n, Q)$ — группа всех матриц g из $GL(n, Q)$, для которых определитель $|\varphi(g)|$ равен 1. Запись $\Gamma = \Gamma(K)$ будет обозначать, что группа $\Gamma \subset GL(n, Q)$ сопряжена в $GL(n, Q)$ с какой-нибудь подгруппой группы $GL(n, K)$; $\Gamma \neq \Gamma(K)$ обозначает, что группа Γ не сопряжена в $GL(n, Q)$ ни с какой подгруппой группы $GL(n, K)$.

§ 1. Нильпотентные неприводимые подгруппы $GL(n, Q)$. В работе [2] Д. А. Супруненко показал, что центр Z неприводимой нильпотентной подгруппы Γ полной линейной группы $GL(n, \Delta)$ над произвольным полем Δ имеет конечный индекс в Γ, ограниченный числом, зависящим только от n и l, где l — класс нильпотентности Γ. Это утверждение верно и для матричной группы над конечномерным телом. Поэтому центр неприводимой нильпотентной группы $\Gamma \subset GL(n, Q)$ класса l имеет конечный индекс в Γ, ограниченный числом $\nu(n, l)$, зависящим только от n и l. Теперь сформулируем несколько лемм.

Лемма 1. *Если Γ — неприводимая подгруппа $GL(n, Q)$, Z — центр Γ, то Z сопряжен в $GL(n, Q)$ с подгруппой группы K^*E_n.*

Доказательство. $\langle Z \rangle$ — коммутативная алгебра конечного ранга над P. По лемме Шура, в $\langle Z \rangle$ нет делителей нуля, т. е. $\langle Z \rangle$ — поле. Поэтому либо $\langle Z \rangle = PE_n$, либо $\langle Z \rangle = K'$, где K' — поле, сопряженное с KE_n в $GL(n, Q)$. Отсюда и вытекает лемма. В частности, если $\Gamma \neq \Gamma(K)$, то $Z \subseteq P^*E_n$.

Лемма 2. *Пусть Γ — неприводимая нильпотентная подгруппа $GL(n, Q)$, $Z_0 = E \subset Z_1 \subset Z_2 \subset \ldots \subset Z_l = \Gamma$ — верхний центральный ряд Γ. Тогда порядок любого неединичного элемента фактор-группы Z_2/Z_1 есть делитель числа n, если $\Gamma = \Gamma(K)$, и равен 2, если $\Gamma \neq \Gamma(K)$.*

В самом деле, если $\Gamma = \Gamma(K)$, то лемма доказана ввиду леммы 19 в [1]. Если же $\Gamma \neq \Gamma(K)$, то для $a \in Z_2$, $g \in \Gamma$, имеем $ag = \lambda ga$, $\lambda \in P^*$.

Переходя к определителям матриц $\varphi(a)$ и $\varphi(g)$, получим $|\varphi(a)| \cdot |\varphi(g)| = \lambda^{4n} |\varphi(g)| \cdot |\varphi(a)|$. Отсюда $\lambda = \pm 1$, и из $ag = \pm ga$ следует $a^2 g = ga^2$ для любого $g \in \Gamma$, т. е. $a^2 \in Z_1$.

Лемма 3. *Пусть k — наибольшее число среди порядков элементов фактор-группы Z_2/Z_1. Тогда порядки элементов фактор-группы Z_{j+1}/Z_j, $j = 1, \ldots, l-1$, являются делителями числа k.*

Доказательство совпадает с доказательством леммы 22 в [1].

Следствие. Порядок любого элемента фактор-группы Γ/Z_1 является делителем числа k^{l-1}. Если $k = 2$, то $\Gamma : Z_1 = 2^{\sigma}$.

Лемма 4. *Пусть Γ — неприводимая нильпотентная подгруппа $GL(n, Q)$ класса нильпотентности l, Z_1 — центр Γ и либо Z_1 сопряжен с K^*E_n, либо $\Gamma \neq \Gamma(K)$ и $Z_1 = P^*E_n$. Тогда в Γ есть такая конечная подгруппа G, что $\Gamma = GZ_1$.*

В самом деле, если Z_1 сопряжен с K^*E_n, то лемма следует из теоремы 29 в [1] (см. также [3]). Если же $\Gamma \neq \Gamma(K)$ и $Z_1 = P^*E_n$, то рассмотрим группу $\varphi(\Gamma)$. $\varphi(\Gamma)$ вполне приводимая группа с эквивалентными блоками. $\varphi(\Gamma) = P^*G$, где G — конечная группа (см. [4], стр. 349). Отсюда и следует лемма.

Теорема 1. *Любая неприводимая нильпотентная подгруппа Γ группы $GL(n, Q)$ импримитивна для $n > 1$.*

Доказательство. Если $\Gamma = \Gamma(K)$, то см. теорему 24 в [1], если же $\Gamma \neq \Gamma(K)$, то см. теорему 3 в [6].

Следствие. Неприводимая нильпотентная подгруппа $\Gamma \subset GL(n, Q)$ сопряжена в $GL(n, Q)$ с мономиальной подгруппой $GL(n, Q)$, т. е. в правом n-мерном векторном пространстве Q^n, в котором действуют операторы из Γ, существует такой базис $u_1, u_2, \ldots, u_n$, что для любого $g \in \Gamma$

$$g(u_1) = u_{s_1}\lambda_1, \ \ldots, \ g(u_n) = u_{s_n}\lambda_n, \quad \lambda_j \in Q, \tag{1}$$

где $s_1, \ldots, s_n$ — перестановка чисел $1, \ldots, n$ (см. доказательство теоремы 24 в [1]).

Теорема 2. *Если Γ — неприводимая нильпотентная подгруппа $GL(n, Q)$ и $\Gamma \neq \Gamma(K)$, то n — степень двойки.*

Доказательство (ср. [1], лемму 23). Элементу $g \in \Gamma$ приведем в соответствие подстановку $j \to s_j$, $j = 1, 2, \ldots, n$ (см. (1)). Это соответствие есть гомоморфизм Γ в симметрическую группу S_n, ядром которого является нормальный делитель H. Γ/H изоморфна транзитивной нильпотентной подгруппе S_n, поэтому $\Gamma : H$ делится на n. Но $\Gamma : H$ делит $\Gamma : Z_1$ (Z_1 — центр Γ), а $\Gamma : Z_1$ — степень двойки (следствие из леммы 3). Значит, n — степень двойки. Теорема доказана.

Как известно ([1], теорема 35), в $GL(n, K)$ есть счетная цепь нильпотентных неприводимых в $GL(n, K)$ подгрупп $\Gamma_n^2 \subset \Gamma_n^3 \subset \ldots \subset \Gamma_n^l \subset \ldots$, где группа Γ_n^l класса l и не содержится в другой нильпотентной подгруппе $GL(n, K)$ того же класса. Группы Γ_n^l неприводимы в $GL(n, Q)$. В самом деле, в Γ_n^l содержится n^2 линейно независимых над K матриц, поэтому линейная K-оболочка группы Γ_n^l совпадает с полным матричным кольцом K_n. Так как $K^*E_n \subset \Gamma_n^l$, то P-оболочка группы Γ_n^l совпадает с ее K-оболочкой, т. е. $\langle \Gamma_n^l \rangle = K_n$. Поэтому $\langle \Gamma_n^l \rangle$ — простая алгебра ранга $2n^2$ над P. Следовательно, Γ_n^l вполне приводима и ее неприводимые блоки эквивалентны. Если число блоков больше одного, то ранг $\langle \Gamma_n^l \rangle$ над P меньше $2n^2$, что невозможно. Значит, Γ_n^l неприводима в $GL(n, Q)$. Γ_n^l максимальна среди неприводимых нильпотентных подгрупп $GL(n, Q)$ класса l. В самом деле, пусть $\Gamma_n^l \subset \Gamma$, Γ — нильпотентная подгруппа $GL(n, Q)$ класса l, Z — центр Γ. Легко видеть, что $Z \subseteq K^*E_n$. Если $\langle Z \rangle \neq PE_n$, то $\Gamma \subset GL(n, K)$, что противоречит максимальности Γ_n^l в $GL(n, K)$. Пусть поэтому P^*E_n — центр Γ, индекс $\Gamma : P^*E_n$ конечен. Но $K^*E_n \subset \Gamma_n^l$, $K^*E_n : P^*E_n$ бесконечно. Противоречие. Максимальность Γ_n^l доказана. Итак, в $GL(n, Q)$ для любого $l > 1$ существуют неприводимые нильпотентные подгруппы класса нильпотентности l. Отсюда и из теоремы 2 следует, что для $n \neq 2^\alpha$ изучение неприводимых нильпотентных подгрупп $GL(n, Q)$ полностью сводится к такой же задаче для $GL(n, K)$.

§ 2. Локально-нильпотентные неприводимые подгруппы $GL(n, Q)$.

Лемма 5. *Если Γ — локально-нильпотентная неприводимая подгруппа $GL(n, Q)$, такая, что $\Gamma \neq \Gamma(K)$, то n — степень двойки.*

Доказательство. Считаем, что центр Z группы Γ совпадает с P^*E_n. Как известно, $\langle \Gamma \rangle$ —простая алгебра конечного ранга над P. Следовательно, в Γ есть максимальная конечная система Σ линейно независимых над P матриц. Группа N, порождаемая $\Sigma \cup P^*E_n$, $N \neq N(K)$, есть нильпотентная неприводимая подгруппа $GL(n, Q)$. Из теоремы 2 теперь следует, что n — степень двойки. Лемма доказана.

Таким образом, если $n \neq 2^\alpha$, то изучение локально-нильпотентных неприводимых подгрупп $GL(n, Q)$ сводится к такой же задаче для $GL(n, K)$. В частности, верна

Теорема 3 (ср. теорему 40 в [1]). *Если n не есть степень двойки, то в $GL(n, Q)$ все максимальные локально-нильпотентные неприводимые подгруппы сопряжены между собой и приводятся к виду (18) из главы 3 в* [1].

Лемма 6. *Пусть Γ — максимальная локально-нильпотентная неприводимая подгруппа $GL(n, K)$. Тогда Γ — максимальная локально-нильпотентная неприводимая подгруппа $GL(n, Q)$.*

Доказательство. Как известно, с точностью до сопряженности в $GL(n, K)$, Γ однозначно определена, поэтому можно считать, что $\Gamma \supset \Gamma_n^l$, где Γ_n^l — группа из теоремы 35 [1]. Из неприводимости Γ_n^l в $GL(n, Q)$ следует, что Γ неприводима в $GL(n, Q)$. Пусть в $GL(n, Q)$ есть такая локально-нильпотентная подгруппа G, что $G \supset \Gamma$. Ясно, что P^*E_n — центр G. Фактор-группа K^*E_n/P^*E_n имеет элементы бесконечного порядка. Однако группа G/P^*E_n периодична, ибо из [6] следует периодичность $\varphi(G)/P^*E_{4n}$. Полученное противоречие и доказывает лемму. Из леммы 6 и теоремы 40 в [1] следует

Теорема 3а. *Все максимальные локально-нильпотентные неприводимые подгруппы $GL(n, Q)$ с центром K^*E_n при $n = 2^\alpha$ сопряжены между собой в $GL(n, Q)$ и приводятся к виду (18) из гл. 3 в [1].*

Теорема 4. *Локально-нильпотентная неприводимая подгруппа Γ группы $GL(n, Q)$ при $n > 1$ импримитивна.*

Доказательство. Если $\Gamma = \Gamma(K)$, то см. лемму 38 [1], если же $\Gamma \neq \Gamma(K)$, то схема доказательства такая же, как в теореме 4 из [6].

Следствие. Локально-нильпотентная неприводимая подгруппа $GL(n, Q)$ сопряжена в $GL(n, Q)$ с мономиальной подгруппой $GL(n, Q)$.

Обозначим через M_n группу всех матриц $\mathrm{diag}(h_1, \ldots, h_n)$, где h_i независимо друг от друга пробегают группу

$$(j)\left(\cos\frac{2\pi}{2^r} + i\sin\frac{2\pi}{2^r}\right) = L,\ i^2 = j^2 = -1,\ r = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

Очевидно, M_n — прямое произведение n экземпляров группы L. Пусть теперь N_n — максимальная транзитивная нильпотентная подгруппа S_n, $n = 2^\alpha$. Как показано в [8], все максимальные транзитивные нильпотентные подгруппы S_n сопряжены в S_n. Каждую подстановку N_n изобразим мономиальной матрицей степени n. Полученные так матрицы составляют группу, изоморфную N_n, которую тоже обозначим N_n. Обозначим через D_α произведение $D_\alpha = N_n M_n P^*$, если $n = 2^\alpha$. D_α — неприводимая локально-нильпотентная подгруппа $GL(n, Q)$, а ее центр совпадает с P^*E_n (см. [6], стр. 64). Очевидно, $D_\alpha \neq D_\alpha(K)$.

Лемма 7. *Всякая неприводимая локально-нильпотентная подгруппа D группы $GL(n, Q)$, $D \neq D(K)$, сопряжена в $GL(n, Q)$ с некоторой подгруппой группы D_α ($n = 2^\alpha$).*

Доказывается, как теорема 5 из [6], только надо заменить в [6] число $m = n/2$ на n, двумерные векторные подпространства Q_j над P на одномерные правые векторные подпространства пространства Q^n, группу $SL^{\pm}$ на $D \cap SL(n, Q)$, а также использовать лемму 4. Из леммы 7 вытекает

Теорема 5. *Максимальная локально-нильпотентная неприводимая подгруппа $GL(2^\alpha, Q)$, центр которой совпадает с $P^*E_{2^\alpha}$, сопряжена в $GL(2^\alpha, Q)$ с группой D_α.*

С помощью теоремы 5 и [1] (теорема 30) получается

Теорема 6. *В полной линейной группе $GL(n, Q)$, $n \geqslant 1$, может быть лишь конечное число несопряженных максимальных неприводимых нильпотентных подгрупп заданного класса нильпотентности.*

Пример. Укажем максимальные неприводимые нильпотентные подгруппы Γ группы $GL(2, Q)$ класса нильпотентности l, $l \geqslant 2$. Пусть

$$\rho = \cos\frac{2\pi}{2^l} + i\sin\frac{2\pi}{2^l},\quad c = jE_2,\quad d = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & j \end{pmatrix},$$

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \rho^2 \end{pmatrix},\quad h = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\quad i^2 = j^2 = -1.$$

Если $\Gamma = \Gamma(K)$, то Γ сопряжена в $GL(2, Q)$ с группой Γ_2^l, взятой из теоремы 35 [1]. Как показано в [7], Γ_2^l порождается матрицами f, h, K^*E_2, $\Gamma_2^l = \{f, h, K^*E_2\}$. Введем еще группу $G_2^l = \{c, f, h, \rho E_2, P^*E_2\}$ для $l \geqslant 2$ и группу H_2^l для $l \geqslant 4$ следующим образом: если l четно, $l = 2m$, то $H_2^l = \{d, f^{2^{m-1}}, h, P^*E_2\}$; если же l нечетно, $l = 2m+1$, то $H_2^l = \{\rho^{2^m}E_2, H_2^{l-1}\}$. Легко проверить, что G_2^l и H_2^l — максимальные неприводимые нильпотентные подгруппы $GL(2, Q)$ класса l, $G_2^l \neq G_2^l(K)$, $H_2^l \neq H_2^l(K)$. Сформулируем без доказательства следующую теорему.

Теорема 7. *В $GL(2, Q)$ есть три счетные цепи неприводимых нильпотентных подгрупп*

$$\Gamma_2^2 \subset \Gamma_2^3 \subset \ldots \subset \Gamma_2^l \subset \ldots,$$

$$G_2^2 \subset G_2^3 \subset \ldots \subset G_2^l \subset \ldots,$$

$$H_2^4 \subset H_2^5 \subset \ldots \subset H_2^l \subset \ldots,$$

где Γ_2^l, G_2^l, H_2^l — попарно несопряженные в $GL(2, Q)$ группы класса l. Каждая из групп Γ_2^l, G_2^l, H_2^l максимальна среди нильпотентных неприводимых подгрупп $GL(2, Q)$ класса l. Любая нильпотентная неприводимая *подгруппа* $GL(2, Q)$ *класса* l *сопряжена в* $GL(2, Q)$ *с подгруппой одной из групп* Γ_2^l, G_2^l, H_2^l.

В заключение статьи отметим без доказательства следующий факт. Пусть $N_n H_n$ — группа из [1] (стр. 83), а M_n — группа, определенная перед леммой 7. Пользуясь работой [9] Д. А. Супруненко, можно доказать следующую теорему.

Теорема 8. *Все* p*-подгруппы Силова* $GL(n, Q)$ *по любому простому числу* p *сопряжены в* $GL(n, Q)$. *Если*

$$n = a_0 + a_1 p + \ldots + a_\mu p^\mu, \quad 0 \leqslant a_\nu < p, \tag{2}$$

то p*-подгруппа Силова* Γ *группы* $GL(n, Q)$ *распадается на* $a = a_0 + a_1 + \ldots + a_\mu$ *неприводимых частей; каждая неприводимая часть* Γ *имеет степень* p^ν *и сопряжена в* $GL(p^\nu, Q)$ *с группой* $N_{p^\nu} H_{p^\nu}$ $(p \neq 2)$, *либо с группой* $N_{p^\nu} M_{p^\nu}$ $(p = 2)$; *число неприводимых частей* Γ *степени* p^ν *совпадает с числом* a_ν *из разложения* (2).

Заметим, что утверждение о сопряженности в $GL(n, Q)$ всех силовских p-подгрупп по любому простому p немедленно следует из одной теоремы В. П. Платонова ([10], теорема 5).

Я глубоко благодарен Д. А. Супруненко за помощь при написании этой статьи. Благодарю также А. Е. Залесского за обсуждение статьи.

ЛИТЕРАТУРА

1. Супруненко Д. А. Разрешимые и нильпотентные линейные группы. Минск, 1958.
2. Супруненко Д. А. Уч. зап. БГУ им. В. И. Ленина, в. 15, сер. физ.-мат., стр. 3—6, 1953.
3. Супруненко Д. А. Известия АН СССР, сер. матем., **19**, 273—274, 1955.
4. Супруненко Д. А. Матем. сб., **49** (91), № 3, 347—352, 1959.
5. Супруненко Д. А. ДАН СССР, **107**, № 1, 41—44, 1955.
6. Супруненко Д. А. Матем. сб., **50** (92), № 1, 59—66, 1960.
7. Супруненко Д. А. Матем. сб. **31** (73), № 2, 353—358, 1952.
8. Супруненко Д. А. ДАН СССР, **99**, № 1, 23—25, 1954.
9. Супруненко Д. А. ДАН БССР, **4**, № 6, 1960.
10. Платонов В. П. ДАН СССР, **160**, № 3, 541—544, 1965.

Поступило в редакцию 3.III 1966

ВЕСЦІ АКАДЭМІІ НАВУК БЕЛАРУСКАЙ ССР № 3 1966
СЕРЫЯ ФІЗІКА-МАТЭМАТЫЧНЫХ НАВУК

Р. Т. ВОЛЬВАЧЕВ

НЕПРИВОДИМЫЙ АБЕЛЕВ НОРМАЛЬНЫЙ ДЕЛИТЕЛЬ АБСОЛЮТНО НЕПРИВОДИМОЙ ЛОКАЛЬНО НИЛЬПОТЕНТНОЙ ЛИНЕЙНОЙ ГРУППЫ

Нильпотентные и локально нильпотентные линейные группы изучались в [1—6]. В частности, в [6] дано описание максимальных локально нильпотентных абсолютно неприводимых подгрупп $GL(n, \Delta)$, обладающих неприводимыми абелевыми нормальными делителями. Такая группа Γ имеет следующий инвариантный ряд:

$$\Gamma \supset F \supset \Delta^* \supset (E_n),$$

где E_n—единичная матрица степени n, Δ^*—мультипликативная группа поля Δ, а F — максимальный абелев нормальный делитель Γ, причем линейная Δ-оболочка $[F] = \Sigma$ группы F является сепарабельным нормальным расширением поля Δ и $\Sigma : \Delta = n$; фактор-группа Γ/F изоморфна группе Галуа поля Σ относительно Δ; F/Δ^* — Π-подгруппа Силова фактор-группы Σ^*/Δ^*, где $\Pi = \Pi(n)$ означает множество всех простых делителей числа n. Таким образом, строение неприводимого абелевого нормального делителя абсолютно неприводимой локально нильпотентной подгруппы $GL(n, \Delta)$ сведено к изучению Π-подгрупп Силова фактор-группы Σ^*/Δ^*, где $\Pi = \Pi(n)$, а Σ — нормальное сепарабельное расширение поля Δ с нильпотентной группой Галуа, причем в Δ есть элемент порядка q для любого простого q, делящего n. В настоящей заметке изучается строение таких Π-подгрупп Силова Σ^*/Δ^*. Отметим еще, что изучение линейных p-групп приводит нас к изучению p-подгрупп фактор-групп Σ^*/Δ^*, где Σ — частный вид указанных расширений, а именно $\Sigma = \Delta(\varepsilon)$, где $\varepsilon^{p^\gamma} = 1$ (см. [7]).

§ 1. Определения и обозначения. Символом $\Pi(n)$ будем обозначать множество всех простых делителей целого числа n.

Если Δ — поле, то символом Δ^* будем обозначать мультипликативную группу поля Δ.

Через $G(\Sigma, \Delta)$ обозначим группу Галуа поля Σ относительно Δ, где Σ — нормальное расширение поля Δ.

Если σ — относительный автоморфизм такого поля Σ относительно Δ, то через x^σ будем обозначать тот элемент из Σ, в который переводится этим автоморфизмом σ элемент $x \in \Sigma$.

Пусть p — простое число, а Δ — поле, в котором есть элемент порядка p. В настоящей заметке будут рассматриваться только такие пары $< \Delta, p >$. Будем говорить, что пара $< \Delta, p >$ удовлетворяет условию:

а) если p — нечетное простое число, или если одновременно $p = 2$ и в Δ есть элемент четвертого порядка;

б) если $p = 2$, в Δ нет элемента четвертого порядка и в $\Delta(i)$, $i^2 = -1$, есть элемент порядка 2^l для любого целого $l = 1, 2, \ldots$

Пусть теперь $p=2$, в Δ нет элемента четвертого порядка и существует такое целое число l, что в $\Delta(i)$, $i^2=-1$, есть элемент ε порядка 2^l $(l>1)$, но нет элемента порядка 2^{l+1}. Если σ — автоморфизм $i \to -i$ поля $\Delta(i)$ относительно Δ, то $\varepsilon\varepsilon^{\sigma} \in \Delta$ и $(\varepsilon\varepsilon^{\sigma})^{2^l}=1$. Следовательно, $\varepsilon\varepsilon^{\sigma} = \pm 1$. Поэтому будем говорить, что в рассматриваемом случае пара $<\Delta, 2>$ удовлетворяет условию

в), если $\varepsilon\varepsilon^{\sigma}=-1$,

г), если $\varepsilon\varepsilon^{\sigma}=1$.

Замечание. Если пара $<\Delta, 2>$ удовлетворяет условию г), то Δ — поле без характеристики (доказательство замечания см. в [7], стр. 1033).

Итак, если поле Δ имеет положительную характеристику $(\neq 2)$, то пара $<\Delta, 2>$ удовлетворяет условию в). Если же поле Δ без характеристики, то пары $<\Delta, 2>$ могут удовлетворять как условию г), так и условию в). Например, пара $<R, 2>$, где R — поле рациональных чисел, удовлетворяет условию г), а пара $<R(\sqrt{-2}), 2>$ удовлетворяет условию в).

§ 2. $\Sigma:\Delta=p$. I. В настоящем параграфе рассмотрим случай, когда $\Sigma:\Delta=p$, где p — простое число, причем в Δ есть элемент ε порядка p, и изучим строение П-подгруппы Силова Σ^*/Δ^*, если П — множество таких простых чисел q (не обязательно всех), что в Δ есть элемент порядка q.

Так как Σ — циклическое расширение поля Δ, то Σ — простое радикальное расширение поля Δ, т. е.

$$\Sigma=\Delta(\vartheta), \quad \vartheta^p=a\in\Delta$$

([8], стр. 217). Найдем сначала q-элементы фактор-группы Σ^*/Δ^*, где q такое простое число, что в Δ есть элемент порядка q.

Пусть

$$x=a_0+a_1\vartheta+\ldots+a_{p-1}\vartheta^{p-1}, \quad a_i\in\Delta \tag{1}$$

элемент Σ, являющийся решением уравнения

$$x^q=b, \quad b\in\Delta. \tag{2}$$

Нетождественный автоморфизм σ

$$\vartheta\to\varepsilon\vartheta, \quad \varepsilon^p=1, \quad \varepsilon\neq 1, \quad \varepsilon\in\Delta \tag{3}$$

поля Σ относительно Δ переводит элемент вида (1) в x^{σ}:

$$x^{\sigma}=a_0+a_1\varepsilon\vartheta+\ldots+a_{p-1}\varepsilon^{p-1}\vartheta^{p-1}, \tag{4}$$

а уравнение (2) — в следующее:

$$(x^{\sigma})^q=b. \tag{5}$$

Разделив (2) на (5), получим $\left(\dfrac{x}{x^{\sigma}}\right)^q=1$, откуда

$$x=\eta x^{\sigma}, \quad \eta^q=1, \quad \eta\in\Delta. \tag{6}$$

Из (6), (1) и (4) следует, что

$$a_j(1-\eta\varepsilon^j)=0 \tag{7}$$

для всех $j=0, 1, \ldots, p-1$.

Пусть теперь $q \neq p$. Так как ε и η — корни степеней соответственно p и q, то из (7) следует, что либо $a_0 = a_1 = \ldots = a_{p-1} = 0$, либо $\eta = 1$, $\varepsilon^j = 1$, т. е. $a_1 = a_2 = \ldots = a_{p-1} = 0$. Таким образом, любой элемент $x \in \Sigma$, удовлетворяющий уравнению (2), имеет вид $x = a_0 \in \Delta$.

Отсюда вытекает следующая

Лемма 1. *Пусть Δ — поле, содержащее элемент простого порядка p, а $\Sigma : \Delta = p$, и пусть Π — множество таких простых чисел q (не обязательно всех), что в Δ есть элемент порядка q. Тогда Π-подгруппа Силова фактор-группы Σ^*/Δ^* является единичной, если p не принадлежит Π. Если же $p \in \Pi$, то Π-подгруппа Силова фактор-группы Σ^*/Δ^* совпадает с p-подгруппой Силова Σ^*/Δ^*.*

Найдем теперь p-подгруппу Силова фактор-группы Σ^*/Δ^*. Полагая $q = p$, из (7) получим, что при некотором $\nu\,(0 \leqslant \nu < p)$ $\eta = \varepsilon^{-\nu}$ и, следовательно, $a_0 = a_1 = \ldots = a_{\nu-1} = a_{\nu+1} = \ldots = a_{p-1} = 0$.

Таким образом, все решения в Σ уравнений типа $x^p = b\,(b \in \Delta)$ имеют вид $x = c\vartheta^\nu$, где $c \in \Delta$, $\nu = 0, 1, \ldots, p-1$. Найдем теперь решения в Σ уравнений вида

$$y^p = c\vartheta^\nu, \quad c \in \Delta, \quad 1 \leqslant \nu \leqslant p-1. \tag{8}$$

Если $y \in \Sigma$ имеет вид

$$y = \beta_0 + \beta_1\vartheta + \ldots + \beta_{p-1}\vartheta^{p-1}, \ \beta_i \in \Delta, \tag{9}$$

то автоморфизм (3) поля Σ относительно Δ переводит элемент y в

$$y^\sigma = \beta_0 + \beta_1\varepsilon\vartheta + \ldots + \beta_{p-1}\varepsilon^{p-1}\vartheta^{p-1}, \tag{10}$$

а уравнение (8)—в следующее:

$$(y^\sigma)^p = c\,\varepsilon^\nu\,\vartheta^\nu. \tag{11}$$

Разделив (8) на (11), получим

$$\left(\frac{y}{y^\sigma}\right)^p = \varepsilon^{-\nu}. \tag{12}$$

Так как $\varepsilon \in \Delta$, то по только что доказанному имеем $\dfrac{y}{y^\sigma} = d\vartheta^l$, $\quad d \in \Delta$, или

$$y = d\vartheta^l y^\sigma, \quad 0 \leqslant l < p. \tag{13}$$

Если $l = 0$, то $y = dy^\sigma$. Отсюда, из (9) и (10) вытекает тогда, что

$$y = \beta_\mu\vartheta^\mu, \quad \mu = 0, 1, \ldots, p-1. \tag{14}$$

В этом случае y удовлетворяет уравнению $y^p = b \in \Delta$.

Пусть теперь $1 \leqslant l \leqslant p-1$. Обозначим $m = p - l$. Подставляя (8) и (11) в (13), получаем:

$$\left.\begin{aligned}
\beta_0 &= d\,\beta_m\,\varepsilon^m\,a,\\
\beta_1 &= d\,\beta_{m+1}\,\varepsilon^{m+1}\,a,\\
&\ldots\ldots\ldots\\
\beta_{l-1} &= d\,\beta_{p-1}\,\varepsilon^{p-1}\,a,\\
\beta_l &= d\,\beta_0,
\end{aligned}\right\} \tag{15}$$

$$\beta_{l+1} = d\,\beta_1 \varepsilon,$$
$$\cdots\cdots\cdots \qquad (15)$$
$$\beta_{p-1} = d\,\beta_{m-1}\,\varepsilon^{m-1}.$$

Перемножая эти соотношения, получим

$$\beta_0 \beta_1 \cdots \beta_{p-1} (1 - d^p \varepsilon^{\frac{p(p-1)}{2}} a^l) = 0. \qquad (16)$$

Рассмотрим теперь отдельно два случая

1) $p > 2$,
2) $p = 2$.

В первом случае $\varepsilon^{\frac{p(p-1)}{2}} = 1$ и тогда (16) перепишется в виде

$$\beta_0 \beta_1 \cdots \beta_{p-1} (1 - d^p a^l) = 0.$$

Отсюда следует, что $\beta_0 \beta_1 \cdots \beta_{p-1} = 0$, ибо если бы $d^p a^l = 1$, то $a^l = (d^{-1})^p$. Следовательно, в силу разрешимости сравнения $lx \equiv 1 \pmod p$ получили бы $a^{lx} = a \cdot a^{kp} = [(d^{-1})^x]^p$, откуда $a = (d^{-x} a^{-k})^p$, т. е. в Δ извлекается корень p-той степени из a. Но тогда уравнение $x^p - a$, корнем которого является ϑ, раскладывается на линейные множители в Δ ([8], стр. 219). Это противоречит выбору ϑ.

Итак, при нечетном p $\beta_0 \beta_1 \cdots \beta_{p-1} = 0$. Следовательно, $\beta_\nu = 0$ для некоторого $0 \leqslant \nu \leqslant p-1$. Но тогда $\beta_0 = \beta_1 = \ldots = \beta_{p-1} = 0$. Действительно, соотношения (15) можно переписать в виде

$$\beta_i = \delta_i \beta_{m+i},$$

где индексы берутся по $\mathrm{mod}\, p$, а δ_i — число либо вида $d\,\beta_{m+i}\,\varepsilon^{m+i}$, либо $d\,\varepsilon^j$. Так как в ряду чисел ν, $m+\nu$, $2m+\nu, \ldots, (p-1)\,m+\nu$ нет сравнимых между собой чисел по $\mathrm{mod}\, p$, то отсюда и следует, что $\beta_0 = \beta_1 = \ldots = \beta_{p-1} = 0$.

Итак, элемент y вида (9), удовлетворяющий уравнению типа (8), имеет вид $y = \beta\vartheta^\mu$, где $\beta \in \Delta$, $\mu = 0, 1, \ldots, p-1$. Но тогда y удовлетворяет уравнению типа $y^p = b \in \Delta$. Следовательно, все p-элементы из Σ^*/Δ^* при $p > 2$ имеют вид $\vartheta^\nu \Delta^*$, $\nu = 0, 1, \ldots, p-1$.

Рассмотрим теперь второй случай, когда $p = 2$. Пусть в Δ есть элемент четвертого порядка. Соотношение (16) перепишется в виде

$$\beta_0 \beta_1 (1 + d^2 a) = 0,$$

ибо в этом случае $\varepsilon = -1$, $l = 1$. Но тогда $\beta_0 \beta_1 = 0$, ибо если $d^2 a = -1$, то $(d\vartheta)^2 = -1$. Следовательно, $d\vartheta = \pm i$, где $i^2 = -1$. Так как $d \in \Delta$ и $i \in \Delta$, то отсюда следует, что $\vartheta \in \Delta$, что противоречит выбору ϑ.

Из $\beta_0 \beta_1 = 0$, используя (15), легко получить, что $\beta_0 = \beta_1 = 0$. Следовательно, все 2-элементы из Σ^*/Δ^* имеют вид $\vartheta^\nu \Delta^*$, где $\nu = 0, 1$ (напомним, что мы предполагали наличие в Δ элемента четвертого порядка).

Итак, нами доказана следующая

Лемма 2. *Пусть пара* $< \Delta, p >$ *удовлетворяет условию* а), *а* $\Sigma : \Delta = p$, $\Sigma = \Delta(\vartheta)$, $\vartheta^p = a$, $a \in \Delta$. *Тогда все* p-*элементы фактор-группы* Σ^*/Δ^* *имеют вид* $\vartheta^\nu \Delta^*$, *где* $\nu = 0, 1, \ldots, p-1$.

Замечание. Если пара $< \Delta, p >$ удовлетворяет условию а), то Σ^*/Δ^* не является p-группой.

II. Рассмотрим теперь случай, когда $p = 2$, а в Δ нет элемента четвертого порядка.

Пусть $\Sigma:\Delta=2$, $\Sigma=\Delta(\vartheta)$, $\vartheta^2=a$, $a\in\Delta$. Если в Σ есть ненулевые решения уравнения типа

$$y^2=c\vartheta,\quad c\in\Delta, \tag{17}$$

то, действуя автоморфизмом $\sigma:\vartheta\to-\vartheta$ на (17), получим $(y^\sigma)^2=-c\vartheta$, откуда $\left(\frac{y}{y^\sigma}\right)^2=-1$. Следовательно, $i\in\Delta$, $i^2=-1$. Отсюда вытекает следующая

Лемма 3. *Пусть Δ — поле, в котором есть элемент второго порядка, но нет элемента четвертого порядка, и пусть $\Sigma:\Delta=2$, $\Sigma=\Delta(\vartheta)$, $\vartheta^2=a$, $a\in\Delta$. Если $\Sigma\neq\Delta(i)$, $i^2=-1$, то все 2-элементы фактор-группы Σ^*/Δ^* имеют вид $\vartheta^\nu\Delta^*$, $\nu=0,1$.*

Пусть теперь $\Sigma=\Delta(i)$, $i^2=-1$. Все решения в Σ уравнений типа $x^2=b$, $b\in\Delta$, имеют, как показано ранее, вид ci^ν, $c\in\Delta$, $\nu=0,1$. Найдем теперь решения в Σ уравнений типа

$$y^2=ci,\quad c\in\Delta. \tag{18}$$

Если в Σ есть элемент восьмого порядка, то из (18) получаем $\left(\frac{y}{\varepsilon_1}\right)^2=c$, где $\varepsilon_1^2=i$. Так как $c\in\Delta$, то, как показано ранее, $\frac{y}{\varepsilon_1}=di^\mu$, $d\in\Delta$, или $y=d\varepsilon_1^\nu$, где ε_1 — элемент восьмого порядка.

Будем теперь искать решения в Σ уравнений типа

$$z^2=d\varepsilon_1^\nu, \tag{19}$$

где $d\in\Delta$; ε_1 — элемент восьмого порядка; ν — нечетное число.

Если в Σ есть элемент порядка 16, то из (19) следует, что $\left(\frac{z}{\varepsilon_2}\right)^2=d$, где $\varepsilon_2^2=\varepsilon_1^\nu$. Как и ранее, отсюда следует, что $z=\varepsilon_2^\mu f$, где $f\in\Delta$, ε_2 — элемент порядка 16.

Рассмотрим теперь уравнения типа

$$u^2=f\varepsilon_2^\mu, \tag{20}$$

где $f\in\Delta$; ε_2 — элемент порядка 16.

Применяя к (20) рассуждения, аналогичные приведенным выше, мы придем к следующему утверждению.

Лемма 4. *Пусть пара $<\Delta, 2>$ удовлетворяет условию б), а $\Sigma:\Delta=2$, $\Sigma=\Delta(i)$, $i^2=-1$. Тогда 2-элементы фактор-группы Σ^*/Δ^* имеют вид $\eta\Delta^*$, где η — элемент порядка 2^l, $l=1,2,\ldots$*

III. Пусть теперь пара $<\Delta, 2>$ удовлетворяет условию в) или г), т. е. в Δ нет элемента четвертого порядка, и существует такое целое число l, что в $\Delta(i)$, $i^2=-1$, есть элемент ε порядка 2^l $(l>1)$, но нет элемента порядка 2^{l+1}.

Следуя по пути, описанному в пункте II, мы придем, наконец, к нахождению решений в Σ уравнений вида

$$z^2=d\varepsilon, \tag{21}$$

где $d\in\Delta$; ε — элемент порядка 2^l. Действуя автоморфизмом $\sigma:i\to-i$ на уравнение (21), получим

$$(z^\sigma)^2=d\varepsilon^\sigma. \tag{22}$$

Разделив (21) на (22), получим

$$\left(\frac{z}{z^{\sigma}}\right)^2 = \frac{\varepsilon}{\varepsilon^{\sigma}}. \tag{23}$$

Так как $\varepsilon\varepsilon^{\sigma} = \pm 1$ (см. § 1), то из (23) вытекает $\left(\frac{z}{z^{\sigma}}\right)^2 = \pm\,\varepsilon^2$. Отсюда

$$z = z^{\sigma}\,\varepsilon^{\nu}, \tag{24}$$

где ν — нечетное число.

Обозначим $\eta = \varepsilon^{\nu}$; η — первообразный корень из единицы степени 2^l. Полагая $\eta = \alpha + i\beta$, $\alpha, \beta \in \Delta$, а $z = z_1 + iz_2$, z_1, $z_2 \in \Delta$, из (24) получаем

$$z_1 + iz_2 = (z_1 - iz_2)(\alpha + i\beta). \tag{25}$$

Это уравнение обладает ненулевыми решениями, если

$$\begin{vmatrix} \alpha - 1 & \beta \\ \beta & -\alpha - 1 \end{vmatrix} = 0,$$

или $\alpha^2 + \beta^2 = 1$.

Отсюда следует

Лемма 5. *Пусть пара* $<\Delta, 2>$ *удовлетворяет условию в), а* $\Sigma:\Delta = 2$, $\Sigma = \Delta(i)$, $i^2 = -1$. *Тогда все 2-элементы фактор-группы* Σ^*/Δ^* *имеют вид*

$$\varepsilon^{\nu}\,\Delta^*, \tag{26}$$

где ε — *элемент порядка* 2^l *поля* Σ, *причем в* Σ *нет элемента порядка* 2^{l+1}.

IV. Пусть теперь пара $<\Delta, 2>$ удовлетворяет условию г). Уравнение (21) имеет в этом случае решения, которые находятся из (25). Покажем, что в Σ нет ненулевых решений уравнений типа

$$u^2 = fz, \tag{27}$$

где $f \in \Delta$, а z находится из (24). Действительно, действуя на (27) автоморфизмом $\sigma: i \to -i$, получим

$$(u^{\sigma})^2 = fz^{\sigma}. \tag{28}$$

Разделив (27) на (28), получаем

$$\left(\frac{u}{u^{\sigma}}\right)^2 = \frac{z}{z^{\sigma}}.$$

Отсюда и из (24) вытекает, что $\left(\frac{u}{u^{\sigma}}\right)^2 = \eta$, где η — элемент порядка 2^l. Это противоречит тому, что в Σ нет элемента порядка 2^{l+1}. Следовательно, справедлива следующая

Лемма 6. *Пусть пара* $<\Delta, 2>$ *удовлетворяет условию г), а* $\Sigma:\Delta = 2$, $\Sigma = \Delta(i)$, $i^2 = -1$. *Тогда любой 2-элемент фактор-группы* Σ^*/Δ^* *имеет либо вид (26), либо* $z\Delta^*$, *где* z *находится из (24).*

Соединим ради удобства результаты, полученные в леммах 1—6, следующим образом.

Теорема 1. *Пусть* Δ — *поле, в котором есть элемент простого порядка* p, *а* $\Sigma:\Delta = p$, $\Sigma = \Delta(\vartheta)$, $\vartheta^p = a$, $a \in \Delta$. *Пусть, далее,* Π — *мно-*

жество таких простых чисел q (не обязательно всех), что в Δ *есть элемент порядка q. Тогда* Π*-подгруппа Силова фактор-группы* Σ^*/Δ^* *является единичной, если p не принадлежит* Π. *Если же* $p \in \Pi$, *то* Π*-подгруппа Силова фактор-группы* Σ^*/Δ^* *совпадает с p-подгруппой Силова* Σ^*/Δ^*. Π*-подгруппа Силова* Σ^*/Δ^* *является циклической порядка p, порожденной элементом* $\vartheta\Delta^*$, *когда либо p нечетно, либо когда одновременно* $p = 2$ *и* $\Sigma \neq \Delta(i)$, $i^2 = -1$.

Пусть теперь $p = 2$, *а в* Δ *нет элемента четвертого порядка. Пусть, далее, существует такое целое l, что в* $\Sigma = \Delta(i)$, $i^2 = -1$, *есть элемент* ε *порядка* 2^l, *но нет элемента порядка* 2^{l+1}. *Тогда 2-подгруппа Силова* Σ^*/Δ^* *является циклической порядка* 2^{l-1}, *порожденной элементом* $\varepsilon\Delta^*$, *если в* Σ *есть 2-элемент* η, *такой, что* $\eta\eta^\sigma = -1$, *где* σ *— нетождественный автоморфизм* $\Sigma = \Delta(i)$ *относительно* Δ *(единственными элементами из* Σ, *удовлетворяющими условию* $\eta\eta^\sigma = -1$, *являются первообразные корни из единицы степени* 2^l, *т. е. элементы вида* ε^k, *где* $(k, 2) = 1$). *Если же в* $\Sigma = \Delta(i)$, $i^2 = -1$, *любой 2-элемент* η *удовлетворяет условию* $\eta\eta^\sigma = 1$, *то 2-подгруппа Силова* Σ^*/Δ^* *порождается двумя элементами* $\varepsilon\Delta^*$ *и* $z\Delta^*$, *где z находится из уравнения* $z = z^\sigma\varepsilon$. *Если же* $p = 2$, *в* Δ *нет элемента четвертого порядка, а в* $\Sigma = \Delta(i)$, $i^2 = -1$, *есть элемент порядка* 2^l *для любого целого* $l = 1, 2, \ldots$, *то 2-подгруппа Силова* Σ^*/Δ^* *является группой типа* 2^∞, *а любой 2-элемент ее имеет вид* $\eta\Delta^*$, *где* $\eta^{2^l} = 1$.

§ 3. $\Sigma : \Delta = n$. Перейдем теперь к общему случаю. Пусть Σ — нормальное сепарабельное расширение поля Δ с нильпотентной группой Галуа $G(\Sigma, \Delta)$ порядка n, причем в Δ есть элемент порядка p для любого $p \in \Pi = \Pi(n)$.

Найдем вид Π-элементов фактор-группы Σ^*/Δ^*. Так как конечная нильпотентная группа сверхразрешима ([9], стр. 173), то $G(\Sigma, \Delta)$ обладает инвариантным рядом

$$G(\Sigma, \Delta) = \Gamma_0 \supset \Gamma_1 \supset \Gamma_2 \supset \ldots \supset \Gamma_r = (e), \tag{29}$$

все фактор-группы которого $\Gamma_{\nu-1}/\Gamma_\nu$ — циклические группы простых порядков ([9], стр. 180; [10]).

Обозначив через Σ_ν поле, отвечающее при соответствии Галуа группе Γ_ν из (29), получим цепочку полей

$$\Delta = \Sigma_0 \subset \Sigma_1 \subset \Sigma_2 \subset \ldots \subset \Sigma_r = \Sigma, \tag{30}$$

где каждое Σ_ν нормально над Δ и $\Sigma_\nu : \Sigma_{\nu-1} = p$, где $p \in \Pi = \Pi(n)$.

Теорема 2. *Пусть* Σ *— нормальное сепарабельное расширение поля* Δ *с нильпотентной группой Галуа порядка n, причем в* Δ *есть элемент порядка p для любого* $p \in \Pi = \Pi(n)$. *Без ограничения общности можно считать, что, если в* Δ *нет, а в* Σ *есть элемент четвертого порядка, то в (30)* $\Sigma_1 = \Delta(i)$, $i^2 = -1$. *Тогда элементы* η_ν, *где* $\Sigma_{\nu+1} = \Sigma_\nu(\eta_{\nu+1})$, $\nu = 2, 3, \ldots, r$ *(см. (30)), можно выбрать так, что любой* Π*-элемент из* Σ^*/Δ^* *имеет вид*

$$v\eta_2^{\mu_2} \ldots \eta_r^{\mu_r}, \tag{31}$$

где v — Π*-элемент фактор-группы* Σ_1^*/Δ^*.

Доказательство. Доказательство теоремы будем вести индукцией по числу r (см. (30)). При $r = 1$ наше утверждение следует из теоремы 1.

Пусть теперь $r > 1$. Если все Π-элементы фактор-группы Σ^*/Δ^* принадлежат Σ_{r-1}^*/Δ^*, то, по индуктивному предположению, они имеют вид

$$v\eta_2^{\mu_2} \ldots \eta_{r-1}^{\mu_{r-1}},$$

где v — П-элемент фактор-группы Σ_1^*/Δ^*, и, конечно, содержатся среди элементов вида (31).

Пусть поэтому в $\Sigma \setminus \Sigma_{r-1}$ есть элемент η, удовлетворяющий условию $\eta^l = a \in \Delta$, где $\Pi(l) \subset \Pi = \Pi(n)$. Так как $\eta^l \in \Delta \subseteq \Sigma_{r-1}$, то из § 2 следует, что $\eta = \alpha_{r-1}\vartheta^{\nu}$, где $\alpha_{r-1} \in \Sigma_{r-1}$, $\Sigma_r = \Sigma_{r-1}(\vartheta_r)$, $\nu > 0$. Очевидно, что $\Sigma_r = \Sigma_{r-1}(\eta)$. Любой элемент $y \in \Sigma_r$, удовлетворяющий уравнению $y^m = b \in \Delta$, где $\Pi(m) \subset \Pi(n)$, имеет вид $y = \beta_{r-1}\eta^{\mu}$, $\beta_{r-1} \in \Sigma_{r-1}$. Для доказательства теоремы теперь достаточно показать, что $\beta_{r-1}^k \in \Delta$, где $\Pi(k) \subset \Pi(n)$.

Из $\eta^l = a \in \Delta$ и из $y^m = b \in \Delta$ следует, что

$$y^{ml} = [(\beta_{r-1}\eta^{\mu})^l]^m = \beta_{r-1}^{ml} a^{\mu m} = b^{ml}.$$

Следовательно, $\beta_{r-1}^{ml} = b^{ml} a^{-\mu m} \in \Delta$. Кроме того, $\Pi(ml) \subset \Pi(n)$. Теорема доказана.

Отметим, что утверждение, обратное к теореме 2, не имеет места; точнее, не любой элемент вида (31) является П-элементом фактор-группы Σ^*/Δ^*.

В заключение хочу выразить глубокую благодарность Д. А. Супруненко за обсуждение вопросов, связанных с настоящей заметкой.

ЛИТЕРАТУРА

1. Супруненко Д. А., Тышкевич Р. И. Изв. АН СССР, сер. матем., 24, 787—806, 1960.
2. Супруненко Д. А. Разрешимые и нильпотентные линейные группы. Минск, 1958.
3. Супруненко Д. А. Матем. сборник, 49(91), 3, 1959, стр. 347-352.
4. Супруненко Д. А. Матем. сборник, 50 (92), 1, 1960, стр. 59—66.
5. Супруненко Д. А. Апатенок Р. Ф. ДАН БССР, т. III, № 12, 1959.
6. Супруненко Д. А. Матем. сборник, 68 (110), 4, 1965.
7. Вольвачев Р. Т. Изв. АН СССР, сер. матем., 27, 1031—1054, 1963.
8. Ван дер Варден. Современная алгебра, т. I, 1947
9. Холл М. Теория групп. М., 1962.
10. Курош А. Г. Теория групп. М. 1953.

Поступило в редакцию 22.III 1966

ВЕСЦІ АКАДЭМІІ НАВУК БЕЛАРУСКАЙ ССР № 3 1966
СЕРЫЯ ФІЗІКА-МАТЭМАТЫЧНЫХ НАВУК

Н. А. ЛЕПЕШИНСКИЙ

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ТЕОРИИ РАСПИСАНИЙ

Здесь, как и в [1], рассматривается следующая задача теории расписаний. На m станках по одному и тому же технологическому маршруту $(1, 2, \ldots, m)$ должны быть обработаны n деталей. Заданы времена обработок каждой детали на каждом станке — матрица $[t_{ij}]_{n,m}$ (всякое $t_{ij} > 0$). Предполагается, что:

а) на одном станке не могут обрабатываться две детали одновременно;

б) одна деталь не может обрабатываться на двух станках одновременно;

в) для каждой детали момент начала обработки на $j+1$-м станке совпадает с моментом окончания обработки на j-м станке.

Известно, что тривиально неуплотняемое расписание задается порядком, в котором обрабатываются детали, т. е. перестановкой $k = \{k_1, k_2, \ldots, k_n\}$ чисел $1, 2, \ldots, n$. Требуется найти хотя бы одну перестановку k_0, при которой общее время завершения обработки всех деталей T, равное разности между моментом окончания обработки последней в расписании детали на станке m и моментом начала обработки первой в расписании детали на первом станке, минимально.

Задачу описанного типа будем называть коротко R_{nm} задачей.

Отметим еще Q_{nm} задачу — классическую задачу теории расписаний, формулируемую как и R_{nm} задача, только вместо условия в) предполагается, что

г) на каждом станке детали обрабатываются в одном и том же порядке.

В [1] показано, в частности, что R_{nm} задача сводится к задаче коммивояжера с $(n+1) \times (n+1)$ матрицей

$$p^{(m)} = \left[p_{ij}^{(m)}\right],$$

где $p_{ij}^{(m)}$ — величина простоя станка m между обработкой двух соседних в расписании деталей i и j. Элементы матрицы, стоящие на главной диагонали, считаются достаточно большими числами. Остальные элементы определяются по формулам

$$p_{0j}^{(m)} = \sum_{k=1}^{m-1} t_{jk}, \quad p_{i0}^{(m)} = 0,$$

$$p_{ij}^{(m)} = p_{0j}^{(m)} - \min\left(\sum_{k=2}^{m} t_{ik}, \sum_{k=3}^{m} t_{ik} + t_{j1}, \ldots, t_{im} + \right.$$

$$\left. + \sum_{k=1}^{m-2} t_{jk}, \sum_{k=1}^{m-1} t_{jk}\right), \qquad (1)$$

$$i, j = 1, 2, \ldots, n; \; i \neq j.$$

Матрицу $p^{(m)}$ задачи коммивояжера для некоторой R_{nm} задачи с элементами, вычисленными по формулам (1), ниже будем обозначать $p(R_{nm})$.

Если $m=2$, то для R_{n2} и Q_{n2} задач будем обозначать через a_i и b_i времена обработки каждой i-й детали на станках A и B соответственно. Для R_{n2} задачи

$$p(R_{n2}) = p^{(B)} = \left[p_{ij}^{(B)}\right],$$

где

$$p_{ij}^{(B)} = \max(a_j - b_i, 0), \quad p_{i0}^{(B)} = 0, \quad p_{0j}^{(B)} = a_j, \tag{2}$$

$$i, j = 1, 2, \ldots, n; \ i \neq j.$$

В § 1 настоящей заметки отмечено свойство матрицы $p^{(B)}$, на основании которого можно выделить классы R_{n2} задач, равносильных между собой, а также R_{nm} задачи, сводящиеся к искусственным R_{n2} задачам. Далее (§ 2) найдены оценки длины оптимального расписания для любой R_{n2} задачи.

§ 1. Обозначим через K_{n+1} класс всевозможных $(n+1)\times(n+1)$ матриц, у которых элементы, стоящие на главной диагонали, являются достаточно большими числами. Строки и столбцы каждой матрицы пронумерованы 0, 1, 2, ..., n. Выделим из отмеченного класса множество матриц $\mathrm{K}_{0,\,n+1}$, у которых все элементы нулевого столбца, кроме диагонального, равны нулю. Из (1) ясно, что для любой R_{nm} задачи $p^{(m)} \in \mathrm{K}_{0,\,n+1}$.

Пусть $K_0 = [k_{ij}]$ — произвольная матрица из $\mathrm{K}_{0,\,n+1}$.

Для каждого множества индексов

$$J_i = \{1, 2, \ldots, i-1, i+1, \ldots, n\} \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

всех элементов i-й строки матрицы, кроме элементов с индексами $i0$ и ii (в обозначениях для сокращения первый индекс i опущен), отметим два подмножества

$$J_i' = \{j_1, j_2, \ldots, j_{\alpha(i)}\} \text{ и } J_i'' = \{j_{\alpha(i)+1}, j_{\alpha(i)+2}, \ldots, j_{n-1}\},$$

таких, что $j' \in J_i'$ тогда и только тогда, когда $k_{ij'} \neq 0$, и $j'' \in J_i''$ тогда и только тогда, когда $k_{ij''} = 0$. Естественно, одно из подмножеств может быть пустым.

Теорема 1. *Для того чтобы матрица K_0 описывала задачу коммивояжера для некоторой R_{n2} задачи, необходимо и достаточно, чтобы для каждой i-й строки $(i = 1, 2, \ldots, n)$ матрицы K_0 выполнялись условия*

$$k_{0j'} - k_{ij'} = \mathrm{const} = c_i > 0 \text{ для всех } j' \in J_i'$$

$$\max_{j'' \in J_i''} k_{0j''} \leqslant c_i, \tag{3}$$

Если для некоторого i $J_i' = \varnothing$, то никаких ограничений на эту строку не накладывается.

Доказательство. Если для некоторой R_{n2} задачи $K_0 = p(R_{n2}) = p^{(B)}$, то ее элементы вычисляются по формулам (2). Элементы i-й строки $k_{ij} = p_{ij}^{(B)} = \max(a_j - b_i, 0)$ определяют подмножества J_i' и J_i'', причем для всех $j' \in J_i'$ выполняется $p_{ij'}^{(B)} = a_{j'} - b_i$ и $p_{0j'}^{(B)} - p_{ij'}^{(B)} = a_{j'} - a_{j'} + b_i = b_i > 0$, а для любого $j'' \in J_i''$ по определению $p_{ij''}^{(B)} = 0$, т. е. $a_{j''} \leqslant b_i$ или (из-за произвольности j'') $\max\limits_{j'' \in J_i''} a_{j''} \leqslant b_i$. Таким образом, выполнимость условий вида (3) доказана.

Обратно, если для матрицы K_0 выполняются условия (3), то для R_{n2} задачи определяем времена обработок a_i и b_i ($i=1, 2, \ldots, n$) следующим образом. Задаем $a_i = k_{0j}$ ($i=j$, $j=1, 2, \ldots, n$). Для тех значений i, где $J'_i \neq \varnothing$, задаем $b_i = c_i$. Если для каких-либо $i - J'_i = \varnothing$, т. е. $J''_i = J_i$, то выбираем b_i, удовлетворяющее требованию

$$b_i \geqslant \max_{j'' \in J''_i} k_{0j''}. \tag{4}$$

Непосредственной проверкой по (2) убеждаемся, что для построенной R_{n2} задачи $p^{(B)} = K_0$.

Теорема доказана.

Назовем R'_{n2} задачу равносильной R''_{n2} задаче, если

$$p\left(R'_{n2}\right) = p\left(R''_{n2}\right).$$

Теорема 2. *Если для R_{n2} задачи существует хотя бы одно i_0, такое, что $b_{i_0} \geqslant \max_{i; i \neq i_0} a_i$, то имеется бесконечно много R_{n2} задач, равносильных исходной R_{n2} задаче.*

Вычислим для исходной R_{n2} задачи матрицу $p(R_{n2})$. По теореме 1 для этой матрицы выполняются условия (3), причем для i_0-й строки — $J'_{i_0} = \varnothing$. Следовательно, матрица, по утверждению второй части теоремы 1, определяет множество R_{n2} задач из-за неоднозначности выбора b_{i_0} по условию (4).

Теорема доказана.

Из множества равносильных между собой R_{n2} задач отметим каноническую R_{n2} задачу, в которой для всех i_0, удовлетворяющих условию теоремы 2, выбраны $b_{i_0} = \max_{i;\, i \neq i_0} a_i$.

Назовем R_{nm} задачу равносильной R_{n2} задаче тогда и только тогда, когда

$$p(R_{nm}) = p(R_{n_2}). \tag{5}$$

Пусть

$$M_{ij} = \min\left(\sum_{k=2}^{m} t_{ik},\ \sum_{k=3}^{m} t_{ik} + t_{j1},\ \ldots,\right.$$

$$\left. t_{im} + \sum_{k=1}^{m-2} t_{jk},\ \sum_{k=1}^{m-1} t_{jk}\right). \tag{6}$$

Если R_{nm} задача задана матрицей $p(R_{nm})$, то, учитывая (1), теорему 1 можно сформулировать следующим образом.

Теорема 1а. *Для того чтобы $p(R_{nm}) = p(R_{n2})$ для некоторой R_{n2} задачи, необходимо и достаточно, чтобы для каждой i-й строки ($i=1, 2, \ldots, n$) матрицы $p(R_{nm})$ выполнялись условия*

$$M_{ij'} = \text{const} = c_i > 0 \ \textit{для всех}\ j' \in J'_i,$$

$$\max_{j'' \in J''_i} M_{ij''} \leqslant c_i. \tag{3a}$$

Очевидно, алгоритм распознавания возможности замены R_{nm} задачи равносильной ей R_{n2} задачей состоит в построении матрицы $p(R_{nm})$ по формулам (1), вычислении величин M_{ij} по (6) и проверке выполнимости условий (3а). Если эти условия выполнены, то построение R_{n2} задачи проводится способом, примененным в доказательстве второй части теоремы 1.

Пусть имеются матрицы K' и K'' из K_{n+1}, такие, что

$$K' \leqslant K''. \tag{7}$$

Предположим, что известно хотя бы одно оптимальное решение задачи коммивояжера с матрицей K'. Обозначим его s_0. Элементы матрицы K', входящие в это решение, назовем отмеченными. Верна

Лемма. *Если две матрицы K', $K'' \in \mathrm{K}_{n+1}$ удовлетворяют условию (7) и отмеченные в матрице K' элементы равны соответствующим элементам матрицы K'', то для задачи коммивояжера с матрицей K'' решение s_0 является оптимальным.*

В самом деле, выполняется

$$K'' = K' + C,$$

где C — матрица с неотрицательными элементами, причем элементы, соответствующие отмеченным элементам матрицы K', равны нулю. Решение s_0 оптимально для задачи коммивояжера с матрицей K' по условию и оптимально для задачи коммивояжера с матрицей C, так как все входящие в это решение элементы равны нулю. Следовательно, s_0 будет оптимальным решением и для задачи коммивояжера с матрицей K''.

На основании леммы можно указать класс R_{nm} задач, сводящихся к искусственным R_{n2} задачам.

Пусть R_{nm} задача задана своей матрицей $p(R_{nm})$, элементы которой не удовлетворяют условим (3а). Построим искусственную R_{n2}^{*} задачу следующим образом.

Время обработки i-й детали на станке A примем равным $a_i = p_{0i}^{(m)}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$.

Для каждой i-й строки $(i = 1, 2, \ldots, n)$ рассматриваемой матрицы $p(R_{nm})$ определено множество J_i. Найдем величину $\max\limits_{j \in J_i}(p_{0j}^{(m)} - p_{ij}^{(m)}) = b_i$ и примем это значение за время обработки i-й детали на станке B. Учитывая (6), запишем $b_i = \max\limits_{j \in J_i} M_{ij}$.

При принятых значениях a_i и b_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ по (2) построим матрицу $p(R_{n2}^{*})$.

Пусть известно оптимальное решение для R_{n2}^{*} задачи. Будем говорить, что R_{nm} задача сводится к искусственной R_{n2}^{*} задаче, построенной выше, если для матриц $p(R_{n2}^{*})$ и $p(R_{nm})$ выполняются условия леммы.

Отметим, что условие (7) леммы выполняется по построению, т. е. всегда $p(R_{n2}^{*}) \leqslant p(R_{nm})$. В самом деле, элементы нулевой строки и нулевого столбца матрицы $p(R_{n2}^{*})$, очевидно, равны соответствующим элементам матрицы $p(R_{nm})$. Произвольный элемент $p_{ik}^{(m)}$ матрицы $p(R_{nm})$ с учетом (6) равен $p_{ik}^{(m)} = p_{0k}^{(m)} - M_{ik}$ $(i, k = 1, 2, \ldots, n;\ i \neq k)$. Для матрицы $p(R_{n2}^{*})$ $p_{ik}^{(B)} = \max(p_{0k}^{(m)} - \max\limits_{j \in J_i} M_{ij}, 0)$. Но для заданных i и k $\max(p_{0k}^{(m)} - \max\limits_{j \in J_i} M_{ij}, 0) \leqslant p_{0k}^{(m)} - M_{ik}$, так как $M_{ik} \leqslant \max\limits_{j \in J_i} M_{ij}$ и $p_{ik}^{(m)} \geqslant 0$.

§ 2. Рассмотрим R_{n2} и Q_{n2} задачи. Для Q_{n2} задачи существует алгоритм Джонсона [2], по которому находится оптимальное расписание. Не уменьшая общности, можно считать, что детали занумерованы так, что оптимальное расписание Q_{n2} задачи задает перестановка $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$. Для этого расписания определим набор пар $\{(\nu_1^A, \nu_1^B), (\nu_2^A, \nu_2^B), \ldots, (\nu_n^A, \nu_n^B)\}$, где ν_i^A, ν_i^B — моменты начала обработки i-й детали на станках A и B соответственно. Для Q_{n2} задачи обработку всякой i-й детали на станке A можно начинать в момент окончания обработки $i-1$-й детали на этом станке. Поэтому

$$\nu_1^A = 0,\ \nu_2^A = a_1,\ \ldots,\ \nu_n^A = \sum_{i=1}^{n-1} a_i. \tag{8}$$

Обработку первой в расписании детали на станке B естественно начинать в момент $\nu_1^B = a_1$. Вторая деталь начнет обрабатываться на станке B в момент $\nu_2^B = a_1 + a_2$, если к моменту окончания обработки этой детали на станке A станок B будет не занят, или в момент $\nu_2^B = \nu_1^B + b_1$, если к моменту окончания обработки второй детали на станке A станок B обрабатывает первую деталь. Таким образом, момент

$$\nu_2^B = \max(\nu_1^B + b_1,\ a_1 + a_2).$$

Проводя аналогичные рассуждения для любой k-й детали, получим

$$\nu_k^B = \max\left(\nu_{k-1}^B + b_{k-1},\ \sum_{i=1}^{k} a_i\right) \quad (k = 2, 3, \ldots, n). \tag{9}$$

Вычислим величины

$$\tau_i = \nu_i^B - \nu_{i+1}^A \left(i = 1, 2, \ldots, n; \quad \text{при } i = n\ \nu_{n+1}^A = \sum_{i=1}^{n} a_i\right), \tag{10}$$

$$\Delta\tau_i = \tau_i - \tau_{i-1} \quad (i = 2, 3, \ldots, n), \tag{11}$$

$$\delta = \sum_{i=2}^{n} \max(-\Delta\tau_i,\ 0). \tag{12}$$

Для рассматриваемого расписания $\{1, 2, \ldots, n\}$ в условиях R_{n2} задачи определим вектор $\{\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n\}$, где каждое μ_i — момент начала обработки i-й детали на станке A. Примем $\mu_1 = 0$. Обработку любой i-й детали можно начать в момент окончания обработки $i-1$-й детали на станке A, т. е. в момент $\mu_i = \mu_{i-1} + a_{i-1}$, если $b_{i-1} \leqslant a_i$. Если $b_{i-1} > a_i$, то для того, чтобы не нарушить условий обработки а) — в), обработку i-й детали необходимо начать в момент $\mu_i = \mu_{i-1} + a_{i-1} + b_{i-1} - a_i$. Объединяя оба случая, получаем, что

$$\mu_i = \mu_{i-1} + a_{i-1} + \max(b_{i-1} - a_i,\ 0), \tag{13}$$
$$i = 2, 3, \ldots, n;\ \mu_1 = 0.$$

Пусть T_0 — общее время обработки всех деталей при оптимальном расписании для Q_{n2} задачи, и T_0^* — общее время обработки всех деталей при оптимальном расписании для R_{n2} задачи.

Так как $\{1, 2, \ldots, n\}$ — оптимальное расписание для Q_{n2} задачи, то, учитывая (8), (9), получаем

$$T_0 = \nu_n^B + b_n. \tag{14}$$

Теорема 3. *$T_0 \leqslant T_0^* \leqslant T_0 + \delta$, где δ определяется по (12).*

Доказательство нижней оценки величины T_0^* следует из того, что общее время обработки всех деталей по заданному расписанию в условиях Q_{n2} задачи может только увеличиться для того же расписания, если потребовать выполнение условия в).

Для доказательства второй части теоремы покажем, что общее время обработки всех деталей в условиях R_{n2} задачи для расписания $\{1, 2, \ldots, n\}$ равно $T^* = T_0 + \delta$.

Пусть детали обрабатываются при условиях а), б), г) в порядке $\{1, 2, \ldots, n\}$. Проведем необходимые вычисления по (8) — (11). Перейдем теперь к обработке, при которой первые $n-1$ деталей обрабатываются при условиях а), б), г), а обработка n-й детали удовлетворяет условиям а), б), в). Очевидно, момент начала обработки n-й детали на станке A должен быть больше, чем момент ν_n^A, на величину τ_n:

$$\mu_n^{(1)} = \nu_n^A + \tau_n.$$

Отметим, что в этом случае станок A между моментом окончания обработки $n-1$-й детали и моментом начала обработки n-й детали будет свободен τ_n единиц времени. Общее время обработки всех деталей T_1 не изменится по сравнению с величиной T_0, вычисляемой по (14).

На втором шаге опишем обработку, при которой первые $n-2$ детали обрабатываются при условиях а), б), г), а обработка $n-1$-й и n-й детали удовлетворяет условиям а), б), в). Момент начала обработки $n-1$-й детали на станке A должен быть больше, чем момент ν_{n-1}^A, на величину τ_{n-1}:

$$\mu_{n-1}^{(2)} = \nu_{n-1}^A + \tau_{n-1}.$$

Относительно момента начала обработки n-й детали возможны два случая. Если $\tau_{n-1} \leqslant \tau_n$, то $\mu_n^{(2)} = \mu_n^{(1)}$, потому что после первого шага на станке A между моментом окончания обработки $n-1$-й детали и моментом начала обработки n-й детали ничего не обрабатывалось τ_n единиц времени. Если $\tau_{n-1} > \tau_n$, то $\mu_n^{(2)} = \mu_n^{(1)} + \tau_{n-1} - \tau_n$. Объединяя эти возможности, запишем

$$\mu_n^{(2)} = \mu_n^{(1)} + \max(-\Delta\tau_n, 0) = \nu_n^A + \tau_n + \max(-\Delta\tau_n, 0).$$

Теперь станок A между моментом окончания обработки $n-2$-й детали и моментом начала обработки $n-1$-й детали будет свободен τ_{n-1} единиц времени. В силу возможного увеличения момента начала обработки n-й детали $\mu_n^{(2)}$ увеличивается и общее время обработки всех деталей

$$T_2 = T_1 + \max(-\Delta\tau_n, 0).$$

После выполнения третьего шага, почти повторяя рассуждения, получим

$$T_3 = T_1 + \max(-\Delta\tau_n, 0) + \max(-\Delta\tau_{n-1}, 0).$$

Проводя аналогичные рассуждения до n-го шага включительно, получим обработку всех деталей при условиях а), б), в) в порядке $\{1, 2, \ldots, n\}$, причем общее время обработки всех деталей

$$T^* = T_n = T_1 + \max(-\Delta\tau_n, 0) + \max(-\Delta\tau_{n-1}, 0) + \\ + \ldots + \max(-\Delta\tau_2, 0).$$

Учитывая, что $T_1 = T_0$ и (12), получим

$$T^* = T_0 + \delta.$$

Теорема доказана.

Следствие. Если последовательность $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n$ неубывающая, то расписание $\{1, 2, \ldots, n\}$ (оптимальное для Q_{n2} задачи) оптимально для R_{n2} задачи и $T_0^* = T_0$.

Из-за того, что последовательность $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n$ неубывающая, значение δ, входящее в оценки теоремы 3, равно нулю.

Автор благодарен Д. А. Супруненко за неизменное внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Лепешинский Н. А. Весцi АН БССР, сер. фiз.-мат. навук, № 2, 1966.
2. Johnson S. M. Naval Research Logistics Quarterly, 1, № 1, 1954.

Поступило в редакцию 28. III 1966

ВЕСЦІ АКАДЭМІІ НАВУК БЕЛАРУСКАЙ ССР № 3 1966
СЕРЫЯ ФІЗІКА-МАТЭМАТЫЧНЫХ НАВУК

А. К. ЛАПКОВСКИЙ

О КОНФОРМНО-ЕВКЛИДОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ ПЕРВОГО КЛАССА НЕОПРЕДЕЛЕННОЙ МЕТРИКИ

В настоящей статье изучаются т. н. конформно-евклидовы пространства $V_n (n > 3)$ первого класса, т. е. такие римановы пространства V_n, для которых выполняются условия ([3], стр. 116)

$$R_{hijk} + \frac{1}{n-2}(q_{jh} R_{ik} - q_{hk} R_{ij} + q_{ik} R_{hj} - q_{ij} R_{hk}) +$$

$$+ \frac{R}{(n-1)(n+2)}(q_{hk} q_{ij} - q_{hj} q_{ik}) = 0, \tag{1}$$

причем тензор кривизны имеет следующее представление через компоненты второго фундаментального тензора голономной гиперповерхности в (псевдо) евклидовом пространстве ${}^lE_{n+1}$, на которой реализуется метрика рассматриваемого V_n:

$$R_{ijkh} = \tau (\Lambda_{ik} \Lambda_{jh} - \Lambda_{ih} \Lambda_{jk}) \quad (\tau = \pm 1). \tag{2}$$

Симметрический тензор Λ_{ij} удовлетворяет уравнениям Петерсона — Кодацци $\Lambda_{ij|k} - \Lambda_{ik|j} = 0$, где знаком «$|$» обозначена ковариантная производная относительно тензора q_{ij}.

Если λ-матрица

$$\Lambda_{ij} - \lambda q_{ij} \tag{3}$$

имеет все элементарные делители простыми, а корни вещественными, то в ортонормированном репере главных направлений тензор Λ_{ij} принимает диагональный вид; диагональные элементы Λ_{ij} связаны с главными кривизнами гиперповерхности соотношениями $\Lambda_{ij} = \varepsilon_j \sigma_j$, где ε_j — скалярный квадрат j-го вектора из ортонормированного репера главных направлений.

В частности, этой возможностью исчерпывается случай определенной метрики V_n.

Имеет место теорема (Лопшиц — Розенсон):

Гиперповерхность V_n евклидова пространства $E_{n+1} (n > 3)$, допускающая конформное отображение на E_n, характеризуется тем, что $\sigma_1 = \rho$, $\sigma_2 = \ldots = \sigma_n = \sigma$, т. е. все главные кривизны, кроме, может быть, одной, равны друг другу; характеристика Сегре λ-матрицы (3) имеет в этом случае вид

$$[1 (1 \ldots 1)]. \tag{4}$$

Доказательство этой теоремы, приведенное в [2] для случая знакоопределенной метрики, сохраняет силу и для того случая знаконеопределенной метрики, когда корни матрицы (3) вещественны, а элементарные делители просты.

§ 1. Докажем, что конформно-евклидова гиперповерхность пространства ${}^{l}E_n$, имеющая характеристику (4), существует с произволом $(n+1)$ функции от одного аргумента.

Действительно, если оснастить нашу гиперповерхность дифференцируемыми ортонормированными, вообще говоря, неголономными реперами главных направлений, то уравнение гиперповерхности примет вид

$$\omega^{n+1} = 0 \tag{5}$$

с формами вложения:

$$\omega_1^{n+1} = \varepsilon_1 \rho \omega^1, \quad \omega_\alpha^{n+1} = \varepsilon_\alpha \sigma \omega^\alpha \quad (\alpha = 2, \ldots, n). \tag{6}$$

Формы ω_J^K, ω^L $(J, K, L = 1, \ldots, n+1)$ подчиняются уравнениям структуры евклидова пространства ([4], стр. 138):

$$D\omega^J = [\omega^K, \omega_K^J], \quad D\omega_J^K = [\omega_J^L, \omega_L^K]. \tag{7}$$

Дифференцируя внешне уравнения Пфаффа (6), в соответствии с уравнениями структуры получим:

$$[d\rho, \omega^1] + (\sigma - \rho)[\omega_\beta^1, \omega^\beta] = 0 \quad (\beta = 2, \ldots, n), \tag{8}$$

$$(\rho - \sigma)[\omega_1^\alpha, \omega^1] + [d\sigma, \omega^\alpha] = 0. \tag{9}$$

Продолжим эту внешнюю дифференциальную систему по лемме Картана ([4], стр. 101):

$$d\rho = \rho_1 \omega^1 + \varepsilon_1 \Lambda^\beta \omega_\beta, \tag{10}$$

$$(\rho - \sigma)\omega_1^\alpha = \Lambda^\alpha \omega^1 + \Lambda \omega^\alpha, \tag{11}$$

$$d\sigma = \Lambda \omega^1. \tag{12}$$

Система (8), (9) содержит $(n+1)$ независимых форм: $d\rho$, ω_1^β, $d\sigma$.

Количество независимых квадратичных уравнений $s_1 = n$, отсюда число Картана Q ([4], стр. 249) равно:

$$s_1 + 2s_2 = n + 2.$$

Как следует из (10)—(12), интегральный элемент E_n зависит от $N = n+1$ параметров.

Таким образом, $N < Q$. Система (6) не в инволюции и надо найти ее 2-е продолжение, дифференцируя внешне уравнения (10) — (12):

$$[\varepsilon_1 d\rho_1, \omega^1] + \left[\varepsilon_\beta d\Lambda^\beta + \varepsilon_\beta \frac{(\rho_1 + \Lambda)\Lambda^\beta}{\rho - \sigma}\omega^1 - \varepsilon_\gamma \Lambda^\gamma \omega_\beta^\gamma, \omega^\beta\right] = 0, \tag{13}$$

$$[d\Lambda\omega^\alpha] + \frac{\varepsilon_1\varepsilon_\beta \Lambda\Lambda^\beta}{\rho - \sigma}[\omega^\alpha \omega^\beta] + 2\frac{\varepsilon_1\varepsilon_\beta\Lambda^\alpha\Lambda^\beta}{\rho - \sigma}[\omega^1\omega^\beta] = 0, \tag{14}$$

$$\left[d\Lambda - \varepsilon_1\varepsilon_\beta \frac{\Lambda\Lambda^\beta}{\rho - \sigma}\omega^\beta, \omega^1\right] = 0. \tag{15}$$

Полученная система $(n+1)$ уравнений Пфаффа содержит $(n+1)$ независимых форм:

$$\varepsilon_1 d\rho, \quad \Delta\Lambda^\beta = \varepsilon_\beta d\Lambda^\beta - \varepsilon_\gamma \Lambda^\gamma \omega_\beta^\gamma + \varepsilon_\beta \frac{(\rho_1 + \Lambda)\Lambda^\beta}{\rho - \sigma}\omega^1,$$

$$\Delta\Lambda = d\Lambda - \varepsilon_1\varepsilon_\beta \frac{\Lambda\Lambda^\beta}{\rho - \sigma}\omega^\beta ,$$

которые раскладываются по главным формам ω^1, ω^α:

$$\varepsilon_1 d\rho_1 = v_{11}\omega^1 + v_{1\beta}\omega^\beta , \quad \Delta\Lambda^\beta = \varepsilon_\beta v_{\beta\gamma}\omega^\gamma , \quad \Delta\Lambda = u_1\omega^1$$

с $(n+1)$ независимыми параметрами v_{11}, $v_{1\beta}$, u_1, так как параметры $v_{\alpha\alpha}$, $v_{\alpha\beta}$ не свободны:

$$v_{\alpha\alpha} = \varepsilon_\alpha \left(u_1 - \frac{\rho_1 - \Lambda^\alpha}{\rho - \sigma}\Lambda \right), \quad v_{\alpha\beta} = 2\varepsilon_1\varepsilon_\alpha\varepsilon_\beta \frac{\Lambda^\alpha\Lambda^\beta}{\rho - \sigma} .$$

Таким образом, $Q = N$; система (6), (10) — (12) находится в инволюции и определяет многообразие искомых гиперповерхностей с произволом $(n+1)$ функции от одного аргумента.

§ 2. Далее мы рассмотрим конформно-евклидовы гиперповерхности в ${}^l E_{n+1}$ в произвольном случае и выясним, какие они допускают характеристики Сегре. Рассмотрим характеристику вида

$$[\underbrace{1 \ldots 1}_{n-2k} \quad \underbrace{1\bar{1} \ldots 1\bar{1}}_{2k}].$$

Как известно ([1], стр. 46), в некотором вещественном репере:

$$\mathbf{a}_\alpha^2 = \varepsilon_\alpha, \quad \mathbf{a}_\alpha\mathbf{a}_\beta = 0, \quad \varepsilon_\alpha = \pm 1, \quad \alpha \neq \beta \quad (\alpha, \beta = 1, \ldots, n-2k),$$

$$\mathbf{a}^2_{n-2(k-i)-1} = 1, \quad \mathbf{a}^2_{n-2(k-i)} = -1 \quad (i = 1, 2, \ldots, k),$$

$$\mathbf{a}_{n-2(k-i)-1}\,\mathbf{a}_{n-2(k-i)} = 1$$

матрица тензора Λ_{ij} имеет вид

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1\lambda_1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & \underset{n-2k}{\varepsilon}\ \underset{n-2k}{\lambda} & & & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & & & \alpha_i - \beta_i & \alpha_i + \beta_i & \\ & & & & \alpha_i + \beta_i & -\alpha_i + \beta_i & \\ & & & & & & \ddots \end{bmatrix} \qquad (16)$$

(невыписанные элементы матрицы равны нулю).

Применяя преобразование:

$$x^\alpha = y^\alpha ,$$

$$y^{n-2(k-i)-1} = \frac{1}{\sqrt{2}}\, x^{n-2(k-i)-1},$$

$$y^{n-2(k-i)} = \frac{1}{\sqrt{2}}\, x^{n-2(k-i)-1} + x^{n-2(k-i)},$$

перейдем к ортонормированному базису $\mathbf{e}_a$ $(a = 1, \ldots, n)$

$$\mathbf{e}_a^2 = \varepsilon_a, \quad \mathbf{e}_{n-2(k-i)-1}^2 = 1, \quad \mathbf{e}_{n-2(k-i)}^2 = -1 \quad (i = 1, \ldots, k), \tag{17}$$

в котором, как легко проверить, тензор Λ_{ij} примет вид

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1\lambda_1 & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & \\ & & \varepsilon_{n-2k}\lambda_{n-2k} & & & & & \\ & & & \alpha_1+\beta_1 & \sqrt{2}\beta_1 & & & \\ & & & \sqrt{2}\beta_1 & -\alpha_1+\beta_1 & & & \\ & & & & & \ddots & & \\ & & & & & & \alpha_k+\beta_k & \sqrt{2}\beta_k \\ & & & & & & \sqrt{2}\beta_k & -\alpha_k+\beta_k \end{bmatrix}. \tag{18}$$

Выписывая в репере (17) соотношения (1) для неравных между собой h, i, j, k, придем к равенству нулю R_{hijk}. Из соотношений

$$R_{n-2(k-i)-1\, n-2(k-j)-1\, n-2(k-i)\, n-2(k-j)} = 2\beta_i\beta_j$$

приходим к зависимостям

$$\beta_i\beta_j = 0 \quad (i \neq k, \quad i, j = 1, \ldots, k),$$

откуда необходимо все β_i должны быть равны нулю, за исключением, быть может, одного, например β_k. Это означает, что в характеристике λ-матрицы (3) не может быть больше одной пары комплексно-сопряженных корней.

Для дальнейшего изучения случая простых элементарных делителей с одной парой комплексно-сопряженных корней (характеристика λ-матрицы типа $[1 \ldots 1, 1\ \bar{1}]$) получим зависимость на компоненты 2-го фундаментального тензора гиперповерхности, вытекающие из условия ее конформной евклидовости.

Пусть Λ_{ij} имеет вид

$$\begin{bmatrix} \Lambda_{11} & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \Lambda_{n-2\,n-2} & & \\ & & & \varepsilon\Lambda_{n-1\,n-1} & \Lambda_{n-1n} \\ & & & \Lambda_{n-1n} & -\varepsilon\Lambda_{nn} \end{bmatrix} \tag{19}$$

относительно репера

$$\mathbf{e}_i^2 = \varepsilon_i, \ \mathbf{e}_{n-1}^2 = \varepsilon, \ \mathbf{e}_n^2 = -\varepsilon \quad (i = 1, \ldots, n-2, \ \varepsilon_i = \pm 1, \ \varepsilon = \pm 1). \tag{20}$$

Уравнения (1) для индексов h, i, j, k, равных $i, n-1, i, n$, в нашем ортореперe примут вид

$$R_{in-1\,in} + \frac{1}{n-2}\varepsilon_i R_{n-1n} = 0. \tag{21}$$

Вычисляя R_{n-1n}:

$$R_{n-1n} = \sum_{i=1}^{n-2} \varepsilon_i R_{in-1ni} = -\tau\Lambda_{n-1n} \sum_{i=1}^{n-2} \rho_i,$$

где $\rho_i = \varepsilon_i \Lambda_{ii}$, и подставляя в (21), получим

$$\Lambda_{n-1n}\left[(n-2)\rho_i - \sum_{j=1}^{n-2}\rho_j\right] = 0 \quad (i = 1, \ldots, n-2).$$

Таким образом, если

$$\Lambda_{n-1n} \neq 0, \tag{22}$$

то приходим к следующей однородной системе $(n-2)$ линейных уравнений относительно неизвестных $\rho_1, \ldots, \rho_{n-2}$:

$$-\rho_1 - \ldots - \rho_{j-1} + (n-3)\rho_j - \rho_{j+1} - \ldots - \rho_{n-2} = 0 \quad (j = 1, \ldots, n-2),$$

решая которую, получим

$$\rho_1 = \ldots = \rho_{n-2} = \rho. \tag{23}$$

Выписывая уравнения (1) в базисе (20) для индексов h, i, j, k, равных i, j, i, j, получим

$$(n-1)(n-2) R_{ijij} + (n-1)(\varepsilon_j R_{ii} + \varepsilon_i R_{jj}) - \varepsilon_i \varepsilon_j R = 0. \tag{24}$$

Вычислив при условии (23) соответственно $R_{ii}, R_{n-1n-1}, R_{nn}, R$:

$$\tau R_{ii} = -\varepsilon_i [\rho^2 (n-3) + \rho(\Lambda_{n-1\,n-1} + \Lambda_{nn})],$$

$$\tau R_{n-1\,n-1} = -\varepsilon[(n-2)\rho\Lambda_{n-1\,n-1} + \Lambda_{n-1\,n-1}\Lambda_{nn} + \Lambda^2_{n-1n}],$$

$$\tau R_{nn} = \varepsilon[(n-2)\Lambda_{nn} + \Lambda_{n-1\,n-1}\Lambda_{nn} + \Lambda^2_{n-1n}],$$

$$\tau R = -(n-2)(n-3)\rho^2 - 2(n-2)\rho(\Lambda_{n-1\,n-1} + \Lambda_{nn}) - $$
$$- 2(\Lambda_{n-1n}\Lambda_{nn} + \Lambda^2_{n-1n})$$

и подставив в (24), придем к следующему соотношению:

$$\rho^2 - \rho(\Lambda_{n-1\,n-1} + \Lambda_{nn}) + \Lambda_{n-1\,n-1}\Lambda_{nn} + \Lambda^2_{n-1n} = 0. \tag{25}$$

Можно показать, что уравнения (1) для индексов h, i, j, k, равных соответственно: $i, n-1, i, n-1$; i, n, i, n; $n-1, n, n-1, n$ $(i = 1, \ldots, n-2)$, приводят к условию (25).

Подчиняя этим условиям второй фундаментальный тензор для характеристики типа $[1 \ldots 11]$ в ее каноническом виде (18) при предположении $\rho \neq 0$ и $\varepsilon = 1$, приходим к соотношению

$$(\rho - \alpha)^2 + \beta^2 = 0,$$

откуда, так как ρ, α, β действительны, необходимо $\beta = 0$, что противоречит (22).

Итак, доказана

Теорема 1. *Если элементарные делители λ-матрицы 2-го фундаментального тензора конформно-евклидовой гиперповерхности пространства ${}^1E_{n+1}$ простые, то корни характеристического уравнения вещественны.*

§ 3. Перейдем к исследованию кратных элементарных делителей. Пусть характеристика имеет вид $[2k]$. В силу [1] (стр. 43) в некотором изотропном репере:

$$\mathbf{a}_i \mathbf{a}_{2k+1-i} = \varepsilon, \quad \mathbf{a}_i \mathbf{a}_j = 0, \quad j \neq 2k+1-i \quad (i = 1, \ldots, k)$$

матрица симметрического тензора Λ_{ij} принимает вид

$$\begin{bmatrix} 0 & & & & & & & \varepsilon\lambda \\ & & & & & & & \varepsilon \\ & & & & & & \cdot & \cdot \\ & & & & & \cdot & \cdot & \\ & & & & \cdot & \cdot & & \\ & & & 0 & \varepsilon\lambda & & & \\ & & & \varepsilon\lambda & \varepsilon & & & \\ & & \cdot & \cdot & & & & \\ & \cdot & \cdot & & & & & \\ \cdot & \cdot & & & & & & \\ \varepsilon\lambda\varepsilon & & & & & & & 0 \end{bmatrix}.$$

Применяя преобразование

$$y^j = \frac{1}{2}(x^j - x^{n+1-j}), \quad y^{n+1-j} = x^j + x^{n+1-j} \quad (j = 1, \ldots, k),$$

приводящее к ортонормированному реперу

$$\mathbf{e}_i^2 = 1, \quad \mathbf{e}_{n+1-i}^2 = -1 \quad (i = 1, \ldots, k), \tag{26}$$

получаем следующие значения компонент Λ_{k-1k}, Λ_{k-1k+2}, Λ_{kk+1}, Λ_{k+1k+} тензора Λ_{ij}:

$$\Lambda_{k-1k} = \frac{1}{2}, \quad \Lambda_{k-1k+2} = 0, \quad \Lambda_{kk+1} = \varepsilon, \quad \Lambda_{k+1k+2} = -\frac{1}{2}. \tag{27}$$

Так как в силу (27) $R_{k-1k+1kk+2} \neq 0$, то уравнения (1) не удовлетворяются, а значит, характеристика $[2k]$ $(k > 1)$ невозможна. Аналогичным образом можно показать, что невозможна и характеристика $[\ldots 2k]$ $(k > 1)$.

Рассмотрим характеристику вида $[1 \ldots 12]$. Тогда в репере (26) матрица Λ_{ij} приводится к виду

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1\rho_1 & & & & & \\ & \cdot & & & & \\ & & \cdot & & & \\ & & & \varepsilon_{n-2}\rho_{n-2} & & \\ & & & & \varepsilon(\lambda+1) & \varepsilon \\ & & & & \varepsilon & -\varepsilon(\lambda-1) \end{bmatrix}. \tag{28}$$

Как было доказано ранее, в рассматриваемом случае имеют место соотношения (23) и (25). Из этих соотношений на основании (28) следует:

$$\rho_1 = \rho_2 = \ldots = \rho_{n-2} = \lambda.$$

И, значит, все элементарные делители имеют одинаковый базис, т. е. характеристика типа $[(1 \ldots 12)]$; в касательной плоскости гиперповерхности существует $(n-1)$-мерный пучок главных направлений, среди которых одно изотропное. Очевидно, верно и обратное: если λ-матрица (3) второго фундаментального тензора голономной гиперповерхности имеет характеристику $[(1\ \ldots\ 12)]$, то гиперповерхность конформно-евклидова.

Рассмотрим характеристику $[2k+1]$. Преобразованием:

$$y^i = \frac{\varepsilon}{2}(x^i - x^{n+1-i}) \quad (i = 1, \ldots, k),$$
$$y^{n+1-i} = x^i + x^{n+1-i} \quad (n = 2k+1),$$
$$y^{k+1} = x^{k+1},$$

которое переводит репер с $2k$ изотропными векторами

$$\mathbf{a}_i \mathbf{a}_{2k+2-i} = \varepsilon, \quad \mathbf{a}_i \mathbf{a}_j = 0 \quad (j \neq 2k+2-i, \quad i = 1, \ldots, k+1)$$

в вещественный ортонормированный репер:

$$\mathbf{e}_i^2 = 1, \quad \mathbf{e}_{n+1-i}^2 = -1, \quad \mathbf{e}_{2k+1} = \varepsilon,$$

приведем матрицу Λ_{ij} ([1], стр. 43)

$$\begin{bmatrix} 0 & & & & & \varepsilon\lambda \\ & & & & & \varepsilon \\ & & & & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & \\ & & 0 & \varepsilon\lambda\varepsilon & & \\ & & \varepsilon\lambda\varepsilon & 0 & & \\ & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & & & & \\ \varepsilon\lambda\varepsilon & & & & & 0 \end{bmatrix}$$

к виду

$$\begin{bmatrix}
\lambda & \frac{1}{2} & 0 & \cdots & & & 0 & & & & \cdots & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\
\frac{1}{2} & \lambda & \frac{1}{2} & \cdots & & & 0 & & & & \cdots & & 0 & \frac{1}{2} \\
& \ddots & & & & & & & & & & & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & \\
& & & & \lambda & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & & & & \\
& & & & \frac{1}{2} & \lambda & \varepsilon & 0 & \frac{1}{2} & 0 & & & & \\
0 & \cdots & & & 0 & \varepsilon & \varepsilon\lambda & \varepsilon & 0 & 0 & & \cdots & & 0 \\
& & & & -\frac{1}{2} & 0 & \varepsilon & -\lambda & -\frac{1}{2} & 0 & & & & \\
& & & & 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & -\lambda & -\frac{1}{2} & & & & \\
& \cdot^{\cdot^{\cdot}} & & & & & & & & & & & \ddots & \\
-\frac{1}{2} & 0 & & \cdots & & & 0 & & & & \cdots & & -\lambda & -\frac{1}{2} \\
0 & \frac{1}{2} & & & & & 0 & & & & & & -\frac{1}{2} & \lambda
\end{bmatrix}.$$

Вычисляя $R_{k-1k+2\,kk+3} \neq 0$, приходим к неудовлетворению уравнений (1) для $k > 1$. Легко видеть, что то же доказательство проходит и для утверждения невозможности характеристики типа $[\ldots\ 2k+1]$ $(k > 1)$. Для $k = 1$ и характеристики $[\ldots\ 3]$ в некотором ортонормированном базисе: $\mathbf{e}_i^2 = \varepsilon_i$, $\mathbf{e}_{n-2}^2 = \mathbf{e}_{n-1}^2 = \varepsilon$, $\mathbf{e}_n^2 = -\varepsilon$ $(i = 1, \ldots, n-3)$ имеем:

$$\begin{bmatrix} B & \cdot & & O & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ & \cdot & \varepsilon\lambda & \varepsilon & 0 \\ O & \vdots & \varepsilon & \varepsilon\lambda & \varepsilon \\ & \cdot & 0 & \varepsilon & -\varepsilon\lambda \end{bmatrix},$$

где B — некоторая квадратная матрица порядка $n-3$, 0 — нулевые, вообще говоря, прямоугольные матрицы.

Выписывая уравнения (1) для индексов h, i, j, k, равных $n-2$, $n-1$, $n-1$, n, получим

$$R_{n-2\,n-1\,n-1n} - \frac{\varepsilon}{n-2} R_{n-2n} = 0.$$

Заметив, что

$$R_{n-2n} = \varepsilon R_{n-1\,n-2\,nn-1},$$

приходим к противоречию.

Итак, характеристика вида $[\ldots\ 2k+1]$ невозможна.

Рассмотрим теперь характеристику $[m, \overline{m}]$. Известно ([1], стр. 46), что при некотором выборе вещественного базиса матрицы (q_{ij}) и $(\Lambda_{\alpha\beta})$ принимают вид:

$$G'_{2m} = \begin{bmatrix} & & & & 1 & 1 \\ & & & & 1 & -1 \\ & & & \cdot & & \\ & & \cdot & & & \\ & \cdot & & & & \\ 1 & 1 & & & & \\ 1 & -1 & & & & \end{bmatrix},$$

$$\Lambda'_{2m} = \begin{bmatrix} & & & & \alpha-\beta & \alpha+\beta \\ & & & & \alpha+\beta & -\alpha+\beta \\ & & & & 1 & 1 \\ & & & & 1 & -1 \\ & & \cdot & \cdot & \cdot & \\ & \cdot & \cdot & \cdot & & \\ & \cdot & \cdot & & & \\ \alpha-\beta & \alpha+\beta & 1 & 1 & & \\ \alpha+\beta & \alpha+\beta & 1 & -1 & & \end{bmatrix}.$$

Преобразованием координат для $n = 2k$:

$$y^{2i-1} = \frac{1}{2}(x^{2i-1} + x^{2n+2-2i}), \qquad y^{2i} = \frac{1}{2}(x^{2i} + x^{2n-2i+1}),$$

$$y^{2n+1-2i} = x^{2n-2i+1} - x^{2n-2i+2}, \quad y^{2n-2i+2} = x^{2i-1} + x^{2i}$$

$$(i = 1, \ldots, k)$$

и $n = 2k+1$:

$$y^{2i-1} = \frac{1}{2}(x^{2i-1} + x^{2n+2-2i}), \quad y^{2i} = \frac{1}{2}(x^{2i} + x^{2n+1-2i}),$$

$$y^{2n+1-2i} = x^{2n-2i+1} - x^{2n-2i+2}, \quad y^{2n+2-2i} = x^{2i-1} + x^{2i},$$

$$y^{2k+1} = \frac{1}{\sqrt{2}}(x^{2k+1} + x^{2k+2}), \quad y^{2k+2} = \frac{1}{\sqrt{2}}(x^{2k+1} - x^{2k+2}),$$

дающим переход к ортонормированному реперу: $\mathbf{e}^2_{2i-1} = 1$, $\mathbf{e}^2_{2i} = -1$ $(i = 1, \ldots, k)$, переведем матрицу Λ'_{2m} в первом случае $m = 2k$ в некоторую матрицу, для которой центральной клеткой 4-го порядка будет матрица вида

$$\begin{bmatrix} \alpha+\beta-1 & \beta-1 & 1 & \beta-1 \\ \beta-1 & -\alpha+\beta-1 & \beta+1 & -1 \\ 1 & \beta+1 & \alpha+\beta+1 & -\beta-1 \\ \beta-1 & -1 & -\beta-1 & -\alpha+\beta-1 \end{bmatrix},$$

а во втором случае $(m = 2k+1)$ получаем матрицу, для которой центральной клеткой 6-го порядка будет матрица вида

$$\begin{bmatrix} \alpha+\beta & \beta & 0 & \sqrt{2} & 0 & \beta \\ \beta & -\alpha+\beta & 0 & \sqrt{2} & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \alpha+\beta & \alpha-\beta & \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} & \alpha-\beta & -\alpha-\beta & 0 & 0 \\ 0 & \beta & \sqrt{2} & 0 & \alpha+\beta & -\beta \\ \beta & 0 & \sqrt{2} & 0 & -\beta & -\alpha+\beta \end{bmatrix}.$$

Вычисляя для первого случая $R_{mm+1m-1m+2}$, а для второго $R_{m-2m+3m-1m+2}$, приходим к неудовлетворению уравнений (1), что и т. д. Итак, характеристика $[\overline{mm}]$ невозможна. Аналогично доказывается, что невозможна характеристика $[\ldots \overline{mm}]$.

§ 4. Мы рассмотрели всевозможные типы характеристик. Теперь докажем следующую теорему:

Теорема 2. *Гиперповерхность V_n с характеристикой типа* $[(1 \ldots 12)]$ *для λ-матрицы $(\Lambda_{ij} - \lambda q_{ij})$ существует и определяется с произволом n функций от одного аргумента.*

Действительно, система Пфаффа, определяющая такую гиперповерхность, является следующей:

$$\omega^{n+1}_i = \varepsilon_i \lambda \omega^i, \tag{29}$$

$$\omega^{n+1}_{n-1} = \varepsilon(\lambda+1)\omega^{n-1} + \varepsilon\omega^n, \tag{30}$$

$$\omega^{n+1}_n = \varepsilon\omega^{n-1} - \varepsilon(\lambda-1)\omega^n, \tag{31}$$

внешнее дифференцирование которой на основании уравнений структуры (7), дает

$$[\Omega_{ab}\omega^b] = 0 \quad (a, b = 1, \ldots, n), \tag{32}$$

где формы Ω_{ab}, симметричные по a, b, имеют значения:

$$\Omega_{ij} = \delta_{ij}\varepsilon_i d\lambda \quad (i, j = 1, \ldots, n-2), \tag{33}$$

$$\Omega_{in} = \Omega_{in-1} = -\varepsilon(\omega_i^{n-1} + \omega_i^n),$$

$$\Omega_{n-1\,n-1} = \varepsilon\, d\lambda - 2\varepsilon\omega_{n-1}^n, \quad \Omega_{n-1n} = -2\varepsilon\omega_{n-1}^n,$$

$$\Omega_{nn} = -\varepsilon\, d\lambda - 2\varepsilon\omega_{n-1}^n.$$

В системе (33) содержится n независимых форм:

$$\Omega = d\lambda, \quad \Omega_{in-1}, \quad \Omega_{n-1n};$$

остальные зависимы:

$$\Omega_{in} = \Omega_{in+1}, \quad \Omega_{n-1\,n-1} = \varepsilon\Omega - \Omega_{n-1n}, \quad \Omega_{nn} = -\varepsilon\Omega + \Omega_{n-1n}.$$

Так как все n уравнений (32) независимы, то первый характер интегральной цепи равен n: $s_1 = n$. Число Картана $Q = n$. Для подсчета произвола интегрального элемента максимальной размерности продолжим систему (32). Для $a, b = 1, \ldots, n-2$, имеем:

$$\Omega = d\lambda = v(\omega^{n-1} + \omega^n), \tag{34}$$

$$-\varepsilon\Omega_{in-1} = \omega_i^{n-1} + \omega_i^n = -\varepsilon[\varepsilon_i v \omega^i + v_i(\omega^{n-1} + \omega^n)]. \tag{35}$$

В полученной системе содержится $(n-1)$ параметров v, v_i.

Уравнения (32) для a, $b = n-1$, n представляются соответственно следующим образом:

$$[\omega^{n-1} + \omega^n, \quad v_{in-1}\omega^i - \Omega_{n-1n} + \varepsilon v\omega^{n-1}] = 0,$$

$$[\omega^{n-1} + \omega^n, \quad v_{in-1}\omega^i - \Omega_{n-1n} - \varepsilon v\omega^n] = 0,$$

откуда получаем еще один параметр u:

$$-\frac{\varepsilon}{2}\Omega_{n-1n} = \omega_{n-1}^n = -\frac{\varepsilon}{2}[v_{in-1}\omega^i + (u - \varepsilon v)\omega^{n-1} + u\,\omega^n]. \tag{36}$$

Таким образом, $N = Q$; система в инволюции и определяет гиперповерхность с произволом n функций от одного аргумента.

Сформулируем полученные нами результаты в виде следующей основной теоремы:

Теорема 3. *Для того чтобы гиперповерхность V_n (псевдо) евклидова пространства ${}^lE_{n+1}$ была конформно-евклидовой, необходимо и достаточно, чтобы характеристика Сегре ее второго фундаментального тензора Λ_{ij} имела один из видов:*

$$1)\ [(1\ \ldots\ 1)\,1], \qquad 2)\ [(1\ \ldots\ 12)].$$

В обоих случаях тензор Λ_{ij} имеет $(n-1)$-мерный пучок главных направлений, причем для случая 2) среди этих направлений имеется изотропное.

Выражаю искреннюю благодарность доценту А. С. Феденко за помощь в работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Петров А. З. Уч. зап. Казанского университета, **109**, кв. 4, 1949, стр. 37—51.
2. Вербицкий Л. Л. Труды сем. по вект. и тенз. анализу, в. IX. М., 1952, стр. 146—182.
3. Эйзенхарт А. П. Риманова геометрия. М., ИЛ, 1948.
4. Фиников С. П. Метод внешних форм Картана. М. — Л., 1948.

Поступило в редакцию 23.II 1966

Х. Н. СОТСКАЯ, Ф. И. ФЕДОРОВ

ОСОБЫЕ ТОЧКИ КРИВЫХ СЕЧЕНИЯ ПОВЕРХНОСТЕЙ УПРУГИХ ВОЛН В КРИСТАЛЛАХ

Волновые поверхности в кристаллах являются очень сложными поверхностями, порядок которых может достигать 150 [1, 2]. Поэтому до сих пор рассматривались только сечения волновых поверхностей плоскостями симметрии для некоторых гексагональных и кубических кристаллов (см. [3—6]). В данной работе получены уравнения сечений волновых поверхностей плоскостями симметрии для ромбических, гексагональных, тетрагональных и кубических кристаллов в параметрической и для любых кристаллов в неявной форме и произведено исследование особых точек этих сечений.

Сечения полости чисто поперечных волн плоскостями симметрии кристаллов представляют собой эллипсы [1]. Параметрические уравнения сечений волновой поверхности плоскостью симметрии для двух других полостей имеют вид (см. [1])

$$\mathbf{s} = \frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}} = \frac{\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}}\left(\lambda_c^{\mathbf{n}} \pm \sqrt{2\,[(\lambda^{\mathbf{n}})^2]_c - (\lambda_c^{\mathbf{n}})^2}\right)}{2\sqrt{2\left(\lambda_c^{\mathbf{n}} \pm \sqrt{2\,[(\lambda^{\mathbf{n}})^2]_c - (\lambda_c^{\mathbf{n}})^2}\right)}}, \tag{1}$$

где верхние знаки соответствуют квазипродольной волне, а нижние — квазипоперечной. Параметром здесь является угол φ между нормалью $\mathbf{n}$ и одной из координатных осей в рассматриваемой плоскости симметрии. Двумерный тензор $\lambda^{\mathbf{n}}$, определенный в плоскости симметрии, нормальной к оси x_2, для ромбических кристаллов равен (см. [7])

$$\lambda^{\mathbf{n}} = \begin{pmatrix} \lambda_{11} n_1^2 + \lambda_{55} n_3^2 & (\lambda_{13} + \lambda_{55}) n_1 n_3 \\ (\lambda_{13} + \lambda_{55}) n_1 n_3 & \lambda_{55} n_1^2 + \lambda_{33} n_3^2 \end{pmatrix}. \tag{2}$$

В случае гексагонального, тетрагонального и кубического кристаллов в плоскости симметрии, нормальной к оси 2-го порядка, он отличается от (2) для первых двух кристаллов заменой

$$\lambda_{55} \to \lambda_{44} \tag{3}$$

и для третьего дополнительной заменой

$$\lambda_{11} \to \frac{1}{2}(\lambda_{11} + \lambda_{12} + 2\lambda_{44}), \quad \lambda_{33} \to \lambda_{11}, \quad \lambda_{13} \to \lambda_{12}. \tag{4}$$

Здесь ось x_3 для всех кристаллов, кроме ромбического, является осью более высокого порядка, чем ось x_2. В том случае, когда рассматривается сечение волновой поверхности плоскостью симметрии, нормальной к оси x_2 четвертого порядка, тензор λ^n для кубического кристалла принимает вид

$$\lambda^n = \begin{pmatrix} \lambda_{11} n_1^2 + \lambda_{44} n_3^2 & (\lambda_{12} + \lambda_{44}) n_1 n_3 \\ (\lambda_{12} + \lambda_{44}) n_1 n_3 & \lambda_{44} n_1^2 + \lambda_{11} n_3^2 \end{pmatrix} \tag{5}$$

и для тетрагонального кристалла такой же вид, только с заменой λ_{44} на λ_{55} и λ_{12} на λ_{13}*).

Исходя из тензора (2), получаем параметрические уравнения сечений для ромбического кристалла в виде:

$$s_1 = \frac{n_1 \left[b_1 \pm \frac{1}{k} \left(c_1 n_1^2 + L n_3^2 \right) \right]}{\sqrt{2 \left(b_1 n_1^2 + b_2 n_3^2 \pm k \right)}}, \quad s_3 = \frac{n_3 \left[b_2 \pm \frac{1}{k} \left(c_2 n_3^2 + L n_1^2 \right) \right]}{\sqrt{2 \left(b_1 n_1^2 + b_2 n_3^2 \pm k \right)}}, \tag{6}$$

где верхние знаки соответствуют квазипродольным, нижние — квазипоперечным волнам. Здесь введены обозначения

$$\begin{gathered} b_1 = \lambda_{11} + \lambda_{55}, \quad b_2 = \lambda_{33} + \lambda_{55}, \quad c_1 = (\lambda_{11} - \lambda_{55})^2, \quad c_2 = (\lambda_{33} - \lambda_{55})^2, \\ k = \sqrt{c_1 n_1^4 + c_2 n_3^4 + 2 L n_1^2 n_3^2}, \quad L = g^2 + a_0, \quad a_0 = g^2 - \sqrt{c_1 c_2}, \\ g = \lambda_{13} + \lambda_{55}. \end{gathered} \tag{7}$$

Соответствующие параметрические уравнения для гексагонального, тетрагонального и кубического кристаллов получаются из (6) при указанной выше замене модулей упругости. Параметрические уравнения для кубического кристалла в плоскости, нормальной к оси x_2 четвертого порядка, имеют вид:

$$s_1 = \frac{n_1 \left(b \pm \frac{l}{k} \right)}{\sqrt{2 (b n^2 \pm k)}}, \quad s_3 = \frac{n_3 \left(b \pm \frac{f}{k} \right)}{\sqrt{2 (b n^2 \pm k)}}, \tag{8}$$

где

$$\begin{gathered} l = d^2 - a_0 \cos 2\varphi; \quad f = d^2 + a_0 \cos 2\varphi; \quad k = \sqrt{d^2 - a_0 \cos^2 2\varphi}; \\ b = \lambda_{11} + \lambda_{44}; \quad c = (\lambda_{11} - \lambda_{44})^2; \quad d = \lambda_{12} + \lambda_{44}; \quad a_0 = d^2 - c; \end{gathered} \tag{9}$$

φ — угол между волновой нормалью и осью x_1.

Необходимым условием наличия точек возврата на кривой (6) является $\frac{\partial s_a}{\partial \varphi} = 0$, $a = 1,3$, которое может быть сведено к уравнению (см. [1])

$$\frac{\partial s_a}{\partial n_a} = 0, \tag{10}$$

где $a = 1,3$. Дифференцируя (6) соответственно по n_1 и n_3, приводим уравнение (10) к виду

$$\begin{gathered} k \left[(b_1 b_2 + L)(c_1 n_1^4 + c_2 n_3^4) + (2 b_1 b_2 L - L^2 + 3 c_1 c_2) n_1^2 n_3^2 \right] = \\ = \mp \left[(b_1 c_2 + b_2 L)(c_2 n_3^4 + 3 c_1 n_1^4) n_3^2 + (b_2 c_1 + b_1 L)(c_1 n_1^4 + 3 c_2 n_3^4) n_1^2 \right] = 0. \end{gathered} \tag{11}$$

*) Модули упругости тетрагонального кристалла в этом случае следует брать в системе координат, где ось x_2 является осью симметрии 4-го порядка.

После освобождения от иррациональности это уравнение становится полным уравнением 6-й степени относительно n_1^2 или n_3^2.

Уравнение 6-й степени для точек возврата в другой форме было также получено и рассмотрено для гексагональных кристаллов в работе [5]. В частности, было установлено, что при определенных соотношениях между модулями упругости кристалла возможно появление точек возврата на кривой сечения полости квазипоперечных волн плоскостью симметрии в зависимости от знака параметра a_0, равного для гексагонального кристалла $a_0 = (\lambda_{13} + \lambda_{44})^2 - (\lambda_{11} - \lambda_{44})(\lambda_{33} - \lambda_{44})$.

Уравнение (11) существенно упрощается лишь в случае, когда плоскость симметрии нормально к оси 4-го порядка. Для кубического кристалла оно принимает в этом случае вид

$$k^3 + 3pk + 2q = 0, \tag{12}$$

где

$$p = \frac{cd^2}{m}; \quad q = \mp \frac{bcd^2}{m}; \quad m = d^2 - 4a; \quad a = \lambda_{11}\lambda_{44}, \tag{13}$$

а остальные обозначения соответствуют (9). Дискриминант уравнения (10) равен

$$\Delta = p^2 + q^3 = \frac{4ac^2d^4}{m^3}(d^2 - b^2) = -Km, \tag{14}$$

где $K > 0$, так как $a > 0$ и $d^2 - b^2 = (\lambda_{12} - \lambda_{11})(\lambda_{11} + \lambda_{12} + 2\lambda_{44}) < 0$ вследствие положительной определенности тензора модулей упругости. Таким образом, знак дискриминанта кубического уравнения (12) является обратным знаку величины m. При $m < 0$ уравнение (12) имеет одно положительное действительное решение для полости квазипоперечных волн и ни одного для полости квазипродольных волн. При $m > 0$ уравнение (12) имеет два положительных действительных решения для полости квазипоперечных волн и одно для полости квазипродольных волн. Но точкам возврата на кривых (8) соответствуют только те действительные положиные корни уравнения (12), которые удовлетворяют, согласно (9), соотношению

$$\cos^2 2\varphi = \frac{d^2 - k^2}{a_0}. \tag{15}$$

Из (15) ясно, что достаточно рассматривать интервал изменения φ от 0 до $\pi/4$. Как показывают данные для 127 кубических кристаллов, приведенные в обзоре [8], кристаллы, обладающие малой анизотропией (алюминий, вольфрам, золото и другие), не имеют на рассматриваемых кривых точек возврата. Кристаллы с большей анизотропией (натрий, никель, бромистый калий и другие) имеют в интервале $0 < \varphi < \pi/4$ только одну точку возврата на кривой для квазипоперечных волн и ни одной — на кривой для квазипродольных волн.

Исследование особых точек другого типа на кривых сечения волновой поверхности плоскостями симметрии в общем случае до сих пор не производилось. Параметрическая форма уравнений делает такое исследование затруднительным. Для решения этой задачи воспользуемся уравнением рассматриваемых кривых в форме $f(s_1, s_3) = 0$ (см. [1, 7]), которое можно получить из уравнений (4) путем исключения угла φ. При этом удобно упомянутое уравнение рассмотреть в системе координат, повернутой вокруг оси x_2 на некоторый угол Θ относительно кристаллографической системы координат, в которой обычно задаются модули упругости кристалла.

Уравнение сечения плоскостью симметрии полостей квазипродольных и квазипоперечных волн для любого кристалла имеет в этом случае вид

$$R = (\alpha'\beta' - \zeta'^2) - \{[\gamma'^2 - 4(\alpha'\beta' - \zeta'^2)]^2 + 36a_0'\gamma'\zeta'^2\} - - a_0'\zeta'^2(\gamma'^3 + 27a_0'\zeta'^2) = 0, \tag{16}$$

где

$$\left.\begin{aligned} \alpha' &= \lambda_{11}'\lambda_{55}' - \lambda_{11}' s_3'^2 - \lambda_{35}' s_1'^2 - \lambda_{15}'(\lambda_{15}' - 2s_1's_3'), \\ \beta' &= \lambda_{33}'\lambda_{55}' - \lambda_{33}' s_1'^2 - \lambda_{55}' s_3'^2 - \lambda_{35}'(\lambda_{35}' - 2s_1's_3'), \\ \gamma' &= \alpha' + \beta' - a_0', \quad a_0' = (\lambda_{13}' + \lambda_{55}')^2 - (\lambda_{11}' - \lambda_{55}')(\lambda_{33}' - \lambda_{55}') - \\ &\quad - (\lambda_{15}' + \lambda_{35}')^2, \\ \zeta' &= \lambda_{11}'\lambda_{35}' - \lambda_{13}'\lambda_{15}' - \lambda_{35}' s_1'^2 - \lambda_{15}' s_3'^2 + (\lambda_{13}' + \lambda_{55}') s_1's_3'; \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

$$\left.\begin{aligned} s_1' &= s_1\cos\Theta + s_3\sin\Theta, \quad s_3' = -s_1\sin\Theta + s_3\cos\Theta, \\ \lambda_{11}' &= \lambda_{11}\cos^4\Theta + \lambda_{33}\sin^4\Theta + 2\sin 2\Theta(\lambda_{15}\cos^2\Theta + \lambda_{35}\sin^2\Theta) + \\ &\quad + \frac{1}{2}\sin^2 2\Theta(\lambda_{13} + 2\lambda_{55}), \\ \lambda_{33}' &= \lambda_{11}\sin^4\Theta + \lambda_{33}\cos^4\Theta - 2\sin 2\Theta(\lambda_{15}\sin^2\Theta + \lambda_{35}\cos^2\Theta) + \\ &\quad + \frac{1}{2}\sin^2 2\Theta(\lambda_{13} + 2\lambda_{55}), \\ \lambda_{55}' &= \frac{1}{4}(\lambda_{11} + \lambda_{33})\sin^2 2\Theta - \frac{1}{2}(\lambda_{15} - \lambda_{35})\sin 4\Theta - \\ &\quad - \frac{1}{2}\lambda_{13}\sin^2 2\Theta + \lambda_{55}\cos^2 2\Theta, \\ \lambda_{13}' &= \frac{1}{4}(\lambda_{11} + \lambda_{33})\sin^2 2\Theta - \frac{1}{2}(\lambda_{15} - \lambda_{35})\sin 4\Theta + \\ &\quad + \lambda_{13}(\sin^4\Theta + \cos^4\Theta) - \lambda_{55}\sin^2 2\Theta, \\ \lambda_{15}' &= \frac{1}{2}\sin 2\Theta[\lambda_{33}\sin^2\Theta - \lambda_{11}\cos^2\Theta + (\lambda_{13} + 2\lambda_{55})\cos 2\Theta] + \\ &\quad + \lambda_{15}\cos^2\Theta(\cos^2\Theta - 3\sin^2\Theta) + \lambda_{35}\sin^2\Theta(3\cos^2\Theta - \sin^2\Theta), \\ \lambda_{35}' &= \frac{1}{2}\sin 2\Theta[\lambda_{33}\cos^2\Theta - \lambda_{11}\sin^2\Theta - (\lambda_{13} + 2\lambda_{55})\cos 2\Theta] + \\ &\quad + \lambda_{15}\sin^2\Theta(3\cos^2\Theta - \sin^2\Theta) + \lambda_{35}\cos^2\Theta(\cos^2\Theta - 3\sin^2\Theta). \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

В преобразованиях (18) для тригонального кристалла следует положить $\lambda_{35} = 0$, $\lambda_{55} = \lambda_{44}$, $\lambda_{66} = \dfrac{\lambda_{11} - \lambda_{12}}{2}$, для ромбического $\lambda_{15} = \lambda_{35} = 0$. Переход от ромбического кристалла к гексагональному, тетрагональному и кубическому кристаллам осуществляется путем дальнейшей замены (3), (4).

Если рассматриваются кривые в сечениях волновой поверхности плоскостью, нормальной к оси 4-го порядка, например, для кубического кристалла, то в выражениях (18) для ромбического кристалла следует произвести замену (ср. (2) и (5))

$$\lambda_{13} \to \lambda_{12}, \quad \lambda_{33} \to \lambda_{11}, \quad \lambda_{55} \to \lambda_{44}. \tag{19}$$

Заметим, что если раскрыть в этом случае уравнение (16) для кубического кристалла при $\Theta = 0$, то мы получим

$$R = 16a_0^3 s_1^6 s_3^6 + a_0^2 s_1^4 s_3^4 (F_0 + F_1 s^2 + F_2 s^4) + a_0 s_1^2 s_3^2 (g_0 + g_1 s^2 + g_2 s^4 + \\ + g_3 s^6 + g_4 s^8) - a (s^2 - \lambda_{11})(s^2 - \lambda_{44}) [cs^4 + 2a_0 bs^2 + a_0 (a_0 - 4a)]^2 = 0, \tag{20}$$

где

$$s^2 = s_1^2 + s_3^2; \quad F_0 = 20d^2 (c + 2a) + 8 (b^2 c - 2a^2) - d^4;$$

$$F_1 = 4b (4a - 4c - 5d^2); \quad F_2 = 8 (c - 2a);$$

$$g_0 = -d^6 (c + 2a) + d^4 (3b^2 c + 32a^2) - d^2 (3c^2 + 18ac^2 + 40a^2 c + 32a^3) + \\ + c (c^3 + 8ac^2 + 8a^2 c - 32a^3);$$

$$g_1 = b [d^6 - 2 (3b^2 + 4a) d^4 + d^2 (9b^2 c + 4ab^2 + 32a^2) - 4c (b^2 c - 2ab^2 - 4a^2)];$$

$$g_2 = d^4 (3b^2 + 20a) - d^2 (9b^2 c + 26ab^2 - 8a^2) + 2c (3b^2 c - 12ab^2 - 4a^2);$$

$$g_3 = b [d^2 (3b^2 + 4a) - 4c (c - 6a)]; \quad g_4 = c (c - 8a),$$

а остальные обозначения соответствуют (9), (13).

В [1] было показано, что уравнение сечения волновой поверхности плоскостью симметрии в любом кристалле имеет порядок не выше 12 (в изотропных средах оно сводится к четвертому порядку [7]). Согласно (20), мы можем утверждать, что степень этого уравнения в любом кристалле равна 12.

Особые точки кривой (16) должны одновременно удовлетворять системе 3 уравнений:

$$R = 0, \quad \frac{\partial R}{\partial x'} = 0, \quad \frac{\partial R}{\partial z'} = 0, \tag{21}$$

где введено обозначение $s_1' = x'$, $s_3' = z'$,

$$\frac{\partial R}{\partial x'} = \left[\frac{\partial \alpha'}{\partial x'} \beta' + \frac{\partial \beta'}{\partial x'} \alpha' - 2\zeta' \frac{\partial \zeta'}{\partial x'}\right] \left\{[\gamma'^2 - 4 (\alpha'\beta' - \zeta'^2)]^2 + 36a_0' \gamma' \zeta'^2 \right\} + \\ + (\alpha'\beta' - \zeta'^2) \left\{2 [\gamma'^2 - 4 (\alpha'\beta' - \zeta'^2)] \left(2\gamma' \frac{\partial \gamma'}{\partial x'} - 4\alpha' \frac{\partial \beta'}{\partial x'} - 4\beta' \frac{\partial \alpha'}{\partial x'} + \right.\right. \\ \left.\left. + 8\zeta' \frac{\partial \zeta'}{\partial x'}\right) + 36a_0' \zeta'^2 \frac{\partial \gamma'}{\partial x'} + 72a_0' \gamma' \frac{\partial \zeta'}{\partial x'} \zeta' \right\} - 2a_0' \zeta' \frac{\partial \zeta'}{\partial x'} (\gamma'^3 + 27a_0' \zeta'^2) - \\ - a_0' \zeta'^2 \left(3\gamma'^2 \frac{\partial \gamma'}{\partial x'} + 54a_0' \zeta' \frac{\partial \zeta'}{\partial x'}\right) = 0. \tag{22}$$

Условие $\partial R/\partial z' = 0$ отличается от (22) лишь заменой $\partial/\partial x'$ на $\partial/\partial z'$. Рассмотрим условия (21) в предположении, что $z' = 0$. Это не ограничивает в данном случае общности, так как при изменении угла Θ ось x' принимает всевозможные направления. При $z' = 0$ условия (21) приводят к уравнениям:

$$\zeta' = 0, \quad \gamma'^2 - 4\alpha'\beta' = 0. \tag{23}$$

Система (23) представляет собой систему двух уравнений относительно неизвестных Θ и x'. Определяя x' из первого уравнения (23) и подставляя во второе, получим уравнение, определяющее направление (угол Θ) на особые точки. Обозначая

$$\alpha' = A - \lambda'_{55} x'^2, \quad \beta' = B - \lambda'_{33} x'^2, \quad \gamma' = C - (\lambda'_{33} + \lambda'_{55}) x'^2,$$
$$\zeta' = D - \lambda'_{35} x'^2, \tag{24}$$

где

$$A = \lambda'_{11}\lambda'_{55} - \lambda'^2_{15}, \quad B = \lambda'_{33}\lambda'_{55} - \lambda'^2_{35}, \tag{25}$$
$$C = \lambda'_{11}\lambda'_{33} - \lambda'^2_{13} - 2\lambda'_{13}\lambda'_{55} + 2\lambda'_{15}\lambda'_{35}, \quad D = \lambda'_{11}\lambda'_{35} - \lambda'_{13}\lambda'_{15},$$

приводим искомое уравнение для угла Θ к виду

$$(\lambda'_{33} - \lambda'_{55})^2 D^2 + 2D\lambda'_{35}\left[\lambda'_{33}(2A - C) + \lambda'_{55}(2B - C)\right] +$$
$$+ \lambda'_{35}(C^2 - 4AB) = 0. \tag{26}$$

В общем случае уравнение (26), согласно (18), содержит $\sin\Theta$ и $\cos\Theta$ в 24-й степени. Но для ромбического кристалла оно значительно упрощается. Соотношения (25) принимают в этом случае вид:

$$A = -\frac{a_0 \sin^2 2\Theta}{4} + \lambda_{55}(\lambda_{11}\cos^2\Theta + \lambda_{33}\sin^2\Theta), \quad B = -\frac{a_0\sin^2 2\Theta}{4} +$$
$$+ \lambda_{55}(\lambda_{11}\sin^2\Theta + \lambda_{33}\cos^2\Theta), \tag{27}$$
$$C = -a_0\left(1 - \frac{3}{2}\sin^2 2\Theta\right) + \lambda_{55}(\lambda_{11} + \lambda_{33}),$$
$$D = \frac{1}{2}\sin 2\Theta\,[-a_0\cos 2\Theta + \lambda_{55}(\lambda_{33} - \lambda_{11})].$$

Поскольку выражения для D и λ'_{35} содержат множитель $\sin 2\Theta$, то левая часть уравнения (26) распадается на множители $\sin^2 2\Theta$ и полином 6-й степени относительно $\sin^2\Theta$ или $\cos^2\Theta$. Сомножитель $\sin^2 2\Theta$ обращается в нуль при $\Theta = n\pi/2$, где $n = 0, 1, 2, \ldots$ Следовательно, на осях x и z могут находиться особые точки. Для определения характера особой точки следует вычислить дискриминант

$$\Delta = \frac{\partial^2 R}{\partial x'^2}\frac{\partial^2 R}{\partial z'^2} - \frac{\partial^2 R}{\partial x'\,\partial z'}\frac{\partial^2 R}{\partial z'\,\partial x'}. \tag{28}$$

При выполнении условий $z' = 0$ и (23):

$$\frac{\partial^2 R}{\partial x'^2} = 32\alpha'\beta' x'^2 \left\{\left[\lambda'_{55}(\gamma' - 2\beta') + \lambda'_{33}(\gamma' - 2\alpha')\right]^2 + 8a'_0\gamma'\lambda'^2_{35}\right\},$$

$$\frac{\partial^2 R}{\partial z'^2} = 32\alpha'\beta' x'^2 \left\{\left[\lambda'_{15}(\gamma' - 2\beta') + \lambda'_{35}(\gamma' - 2\alpha')\right]^2 + 2a'_0\gamma'(\lambda'_{13} + \lambda'_{55})^2\right\}, \tag{29}$$

$$\frac{\partial^2 R}{\partial x'\partial z'}=\frac{\partial^2 R}{\partial z'\partial x'}=32\alpha'\beta' x'^2\{[\lambda_{55}'(\gamma'-2\beta')+\lambda_{33}'(\gamma'-2\alpha')]\times$$
$$\times[\lambda_{15}'(\gamma'-2\beta')+\lambda_{35}'(\gamma'-2\alpha')]-4a_0'\gamma'\lambda_{35}'(\lambda_{13}'+\lambda_{55}')\}.$$

Согласно (29),

$$\Delta=2\cdot 32^2\alpha'^2\beta'^2x'^4a_0'\gamma'\{(\lambda_{13}'+\lambda_{55}')[(\gamma'-2\beta')\lambda_{55}'+(\gamma'-2\alpha')\lambda_{33}']-$$
$$-2\lambda_{35}'[(\gamma'-2\beta')\lambda_{15}'+(\gamma'-2\alpha')\lambda_{35}']\}^2. \tag{30}$$

Особая точка является узловой, если $\Delta<0$, или

$$a_0'\gamma'<0. \tag{31}$$

При $\Delta=0$ особая точка является точкой возврата. Случай $\Delta>0$ соответствует существованию на рассматриваемых кривых изолированной точки, которая не имеет физического смысла. Анализ особой точки последнего типа, проведенный для ряда конкретных кристаллов и для изотропной среды [7], показал, что она не принадлежит кривой, задаваемой параметрическими уравнениями (6), которые являются исходными для получения уравнения (16). Следовательно, появление изолированной точки является результатом лишних решений, вносимых в процессе исключения φ из (6).

Из выражений (23) и (30) следует, что точка возврата на рассматриваемой кривой существует при выполнении любой из трех совокупностей условий

$$1.\ \alpha'=0,\quad \beta'-a_0'=0,\quad \zeta'=0, \tag{32}$$

$$2.\ \beta'=0,\quad \alpha'-a_0'=0,\quad \zeta'=0, \tag{33}$$

$$3.\ \gamma'^2-4\alpha'\beta'=0,\qquad \zeta'=0, \tag{34}$$

$$[(\lambda_{13}'+\lambda_{55}')\lambda_{55}'-2\lambda_{15}'\lambda_{35}'](\gamma'-2\beta')+[(\lambda_{13}'+\lambda_{55}')\lambda_{33}'-2\lambda_{35}'^2](\gamma'-2\alpha')=0.$$

Каждая из этих совокупностей представляет собой систему 3 уравнений относительно двух неизвестных x' и Θ, исключив которые, можно найти соответствующие условия, связывающие модули упругости кристалла.

Рассмотрим подробнее случай, когда особая точка лежит на оси x или z ($\Theta=0,\ \pi/2$). При $\Theta=0$ (ось x) имеем, согласно (17), (18):

$$\alpha'=\alpha=\lambda_{11}\lambda_{55}-\lambda_{55}x^2,\quad \beta'=\beta=\lambda_{33}\lambda_{55}-\lambda_{33}x^2,\quad a_0'=a_0,\quad \zeta'=\zeta=0, \tag{35}$$

а второе уравнение (23) с учетом (7) принимает вид

$$c_2x^4-2\left[\sqrt{c_2}\,(\lambda_{11}\lambda_{33}-\lambda_{55}^2)-g^2b_2\right]x^2+(\lambda_{11}\lambda_{33}+\lambda_{55}^2-g^2)^2-$$
$$-4\lambda_{11}\lambda_{33}\lambda_{55}^2=0, \tag{36}$$

откуда находим для квадрата лучевой скорости

$$x^2=\frac{1}{c^2}\left[\sqrt{c_2}\,(\lambda_{11}\lambda_{33}-\lambda_{55}^2)-g^2b_2\pm 2g\sqrt{\lambda_{33}\lambda_{55}a_0}\right]. \tag{37}$$

Из (37) видно, что особая точка может находиться на оси x только при условии $a_0>0$, если $\lambda_{33}>0$, $\lambda_{55}>0$ (в соответствии с [5]).

Выражение (30) при $\Theta=0$ принимает вид

$$\Delta=2\cdot 32^2\alpha^2\beta^2x^4a_0\gamma g^2[(\gamma-2\beta)\lambda_{55}+(\gamma-2\alpha)\lambda_{33}]^2, \tag{38}$$

откуда следует, что на оси x может быть узловая точка при условии $\gamma = \alpha + \beta - a_0 < 0$, или, с учетом (35), (37), при

$$\gamma_{\Theta=0} = 2\left[\lambda_{33}\lambda_{55}(a_0 + g^2) - b_2\left|g\sqrt{\lambda_{33}\lambda_{55}a_0}\right|\right] < 0. \tag{39}$$

При этом в (37) следует взять такой знак, чтобы последний член был положительным. Неравенство (39) можно представить в виде $\left[\sqrt{\lambda_{33}\lambda_{55}a_0} - |g|\lambda_{55}\right]\left[\sqrt{\lambda_{33}\lambda_{55}a_0} - |g|\lambda_{33}\right] < 0$, или

$$|g|\lambda_{55} < \left|\sqrt{\lambda_{33}\lambda_{55}a_0}\right| < |g|\lambda_{33}. \tag{40}$$

Особая точка на оси x является точкой возврата, если выражение Δ (38) равняется для нее нулю. Можно показать, что квадратная скобка в (38) на основании (35), (37) равна $\mp 2g\sqrt{\lambda_{33}\lambda_{55}a_0}$ и обращается в нуль только при $a_0 = 0$. Поэтому условие наличия точки возврата на оси x имеет вид

$$\gamma = \alpha + \beta - a_0 = 0, \tag{41}$$

где x^2 определяется по формуле (37). Условие (41) выполняется для оси x, если в (40) один из знаков неравенства переходит в знак равенства. Используя для $\gamma_{\Theta=0}$ представление (39), перепишем (41) в виде

$$\left(\lambda_{55}\sqrt{c_1} + g^2\right)\left(\lambda_{33}\sqrt{c_1} - g^2\right) = 0, \tag{42}$$

что полностью соответствует (32) и (33).

При $\Theta = \pi/2$ (ось z) все приведенные для оси x рассуждения и выводы сохраняют силу, только в формулах (36) — (42) следует произвести замену

$$x \to x' = z, \quad \lambda_{11} \to \lambda_{33}, \quad \lambda_{33} \to \lambda_{11}. \tag{43}$$

Рассмотрим теперь кривые в сечении волновой поверхности плоскостью, нормальной к оси 4-го порядка (кубический или тетрагональный кристалл). Переход, например, к кубическому кристаллу обеспечивает в этом случае замена (19) во всех выражениях для ромбического кристалла. При этом (см. (18), (25)):

$$\left.\begin{aligned}
&\lambda'_{11} = \gamma'_{33} = \lambda_{11}(\sin^4\Theta + \cos^4\Theta) + \frac{1}{2}(\lambda_{12} + 2\lambda_{44})\sin^2 2\Theta,\\
&\lambda'_{55} = \frac{1}{2}\lambda_{11}\sin^2 2\Theta + \lambda_{44}\cos^2 2\Theta - \frac{1}{2}\lambda_{12}\sin^2 2\Theta,\\
&\lambda'_{35} = -\lambda'_{15} = -\frac{a_0}{4(\lambda_{11}+\lambda_{12})}\sin 4\Theta,
\end{aligned}\right\} \tag{44}$$

$$A = B = -\frac{a_0\sin^2 2\Theta}{4} + \lambda_{11}\lambda_{44}, \quad C = -a_0\left(1 - \frac{3}{2}\sin^2 2\Theta\right) + 2\lambda_{11}\lambda_{44},$$

$$D = -\frac{a_0}{4}\sin 4\Theta \tag{45}$$

и условия (23) для особых точек принимают вид

$$\zeta' = -\frac{a_0}{4}\sin 4\Theta\left(1 - \frac{x'^2}{\lambda_{11} + \lambda_{12}}\right) = 0, \tag{46}$$

$$\gamma'^2 - 4\alpha'\beta' = \frac{a_0^2}{16}\sin^2 4\Theta\,\left[3a_0^2\cos^4 2\Theta + a_0\left(2\lambda_{11}\lambda_{12} - 8\lambda_{11}\lambda_{44} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + 5\lambda_{11}^2 - 3\lambda_{12}^2\right)\cos^2 2\Theta + a_0^2 - 4\lambda_{12}\lambda_{44}a_0 + c\,(\lambda_{11} + \lambda_{12})^2\right] = 0.$$

Приравнивая нулю $\sin^2 4\Theta = 4\sin^2 2\Theta\cos^2 2\Theta$, находим, что если особые точки имеются, то они могут лежать либо на осях x и z $\left(\Theta = k\,\frac{\pi}{2},\ k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots\right)$, либо в среднем положении между ними $\left(\Theta = \frac{\pi}{4} + k\,\frac{\pi}{2},\ k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots\right)$. Приравнивая нулю выражение в квадратной скобке, получаем уравнение 2-й степени относительно $\cos^2 2\Theta$, которое дает направления (углы Θ) на особые точки в интервале $0 - \frac{\pi}{4}$. Этим углам Θ соответствует квадрат длины луча, найденный из первого уравнения (46)

$$x'^2 = \lambda_{11} + \lambda_{12}. \qquad (47)$$

Характер особых точек определяется на основании соотношений (31)—(34).

Рассмотрим подробнее случай, когда особые точки лежат на осях x и z. При этом в силу наличия оси симметрии 4-го порядка достаточно рассмотреть особую точку на одной из осей. Модули упругости (см. (44)) становятся равными:

$$\lambda'_{11} = \lambda'_{33} = \lambda_{11},\quad \lambda'_{55} = \lambda_{44},\quad \lambda'_{35} = \lambda'_{15} = 0,\quad \lambda'_{13} = \lambda_{12}, \qquad (48)$$

и выражение (36) в соответствии с обозначениями (9) принимает вид

$$x^2 = \frac{1}{c}\left(-a_0 b \pm 2d\sqrt{\lambda_{11}\lambda_{44}a_0}\right). \qquad (49)$$

Рассматриваемая особая точка существует при $a_0 > 0$ и является узловой точкой, если (см. (39))

$$\lambda_{11}\lambda_{44}(a_0 + d^2) \mp bd\sqrt{\lambda_{11}\lambda_{44}a_0} < 0 \qquad (50)$$

или

$$|d|\,\lambda_{44} < \left|\sqrt{\lambda_{11}\lambda_{44}a_0}\right| < |d|\,\lambda_{11}, \qquad (51)$$

и точкой возврата, если в (51) один из знаков неравенств переходит в знак равенства. В (49) знак перед квадратным корнем берется совпадающим со знаком d.

Пусть теперь особые точки лежат на биссектрисе угла между координатными осями. При повороте координатной системы на угол $\Theta = \pi/4$ (см. (18)):

$$\lambda'_{11} = \lambda'_{33} = \frac{1}{2}(\lambda_{11} + \lambda_{12} + 2\lambda_{44}),\quad \lambda'_{13} = \frac{1}{2}(\lambda_{11} + \lambda_{12} - 2\lambda_{44}),$$

$$\lambda'_{55} = \frac{1}{2}(\lambda_{11} - \lambda_{12}),\quad \lambda'_{15} = \lambda'_{35} = 0,\quad a'_0 = -a_0 \qquad (52)$$

и α', β', γ', a'_0 выражаются через штрихованные модули так же, как α, β, γ, a_0 через штрихованные в (35), а $\zeta' \equiv 0$. Поэтому и в этом случае можно воспользоваться выражением (37) для x^2, заменив в нем все нештрихованные величины на штрихованные. Теперь (37) будет определять длину луча до особой точки уже не вдоль координатной оси, а под углом $\pi/4$ к ней.

Учтя (52), получим

$$x'^2 = \frac{1}{d^2}\left[a_0 b \pm \sqrt{-a_0 c (\lambda_{11} - \lambda_{12})(\lambda_{11} + \lambda_{12} + 2\lambda_{44})}\right]. \tag{53}$$

Два последних сомножителя под корнем положительны, что следует из положительной определенности тензора модулей упругости для кубического кристалла. Следовательно, особые точки могут находиться на лучах под углами $\Theta = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$ только для кристаллов, для которых $a_0 < 0$; поскольку первое слагаемое в квадратной скобке в этом случае отрицательно, перед квадратным корнем следует брать только положительный знак. Рассматриваемая точка является узловой, если, согласно (39), (40), (52), выполняются условия

$$\frac{1}{4}(\lambda_{11} - \lambda_{12})(\lambda_{11} + \lambda_{12} + 2\lambda_{44})(2c - d^2) - \\ - b\sqrt{-a_0 c (\lambda_{11} - \lambda_{12})(\lambda_{11} + \lambda_{12} + 2\lambda_{44})} < 0 \tag{54}$$

или

$$(\lambda_{11} - \lambda_{44})(\lambda_{11} + \lambda_{12} + 2\lambda_{44}) < 2\left|\sqrt{-a_0(\lambda_{11} - \lambda_{12})(\lambda_{11} + \lambda_{12} + 2\lambda_{44})}\right| < \\ < (\lambda_{11} - \lambda_{44})(\lambda_{11} - \lambda_{12}). \tag{55}$$

Особая точка является точкой возврата, если один из знаков неравенства в (55) переходит в знак равенства.

ЛИТЕРАТУРА

1. Федоров Ф. И. Теория упругих волн в кристаллах. Изд-во «Наука», М., 1965.
2. Musgrave M. Proc. Roy. Soc., **A226**, 339, 1954.
3. Musgrave M. Proc. Roy. Soc., **A226**, 356, 1954.
4. Miller G., Musgrave M. Proc. Roy. Soc., **A236**, 352, 1956.
5. Хаткевич А. Г. Изв. АН СССР, сер. геофиз., № 9, 1300, 1964.
6. Хаткевич А. Г. Весцi АН БССР, серыя фiз.-мат. навук, № 1, 93, 1965.
7. Федоров Ф. И. ДАН БССР, **10**, 301, 1966.
8. Александров К. С., Рыжова Т. В. Кристаллография, **6**, 289, 1961.

Поступило в редакцию 10.V 1966

ВЕСЦІ АКАДЭМІІ НАВУК БЕЛАРУСКАЙ ССР № 3 1966
СЕРЫЯ ФІЗІКА-МАТЭМАТЫЧНЫХ НАВУК

В. С. ІВАНІЦКАЯ, Н. Ф. КАСЦЮК

АБ СУВЯЗІ ЛАКАЛЬНАЙ АБСАЛЮТНАЙ АДНАЧАСОВАСЦІ З НЕЭЎКЛІДАВАСЦЮ ГЕАМЕТРЫІ

1. Уводзіны. Сярод зыходных палажэнняў агульнай тэорыі адноснасці (АТА) асабліва фундаментальнымі з'яўляюцца патрабаванні лакальнай справядлівасці спецыяльнай тэорыі адноснасці (СТА) і неэўклідавасці чатырохмернай прасторы ў прысутнасці гравітацыйнага поля. Першае з указаных палажэнняў уносіць у АТА патрабаванне лакальнай адноснасці адначасовасці; другое — дапускае адрозненне ад нуля па крайняй меры некаторых з кампанент тэнзара Рымана — Крыстофеля. Гэтыя абодва патрабаванні залежаць адзін ад аднаго. Цесная сувязь паміж імі задаецца перш за ўсё ўраўненнем Эйнштэйна, а таксама дадатковымі ўмовамі.

Ніжэй правядзём аналіз эйнштэйнавага ўраўнення і некаторых дадатковых умоў з пункту погляду сувязі паміж лакальнай адноснасцю адначасовасці і неэўклідавасцю геаметрыі. Зробім гэта шляхам пераходу да такога гранічнага выпадку АТА, калі патрабаванне лакальнай адноснай адначасовасці замяняецца патрабаваннем лакальнай абсалютнай адначасовасці. Абмяжуемся таксама выпадкам «слабага» тэнзара энергіі-імпульса.

2. Абмежаванне, непасрэдна накладваемае патрабаваннем лакальнай абсалютнай адначасовасці на неэўклідавасць геаметрыі. Будзем зыходзіць з тэтраднай фармуліроўкі АТА, паколькі ў ёй патрабаванне лакальнай справядлівасці СТА вельмі разгорнута.

Абазначым тэнзарыяльныя, сусветныя кампаненты тэнзараў грэчаскімі індэксамі, фізічныя (лакальныя) кампаненты — лацінскімі. Прымем, што грэчаскія (лацінскія) індэксы пачатку алфавіту да $\varkappa$ (да k) прабягаюць значэнні 1, 2, 3, пачынаючы з $\varkappa$ (k) — 1, 2, 3, 0. У АТА, наогул кажучы, пры любых значэннях індэксаў кампаненты тэнзара Рымана — Крыстофеля адрозніваюцца ад нуля:

$$R^{\mu}{}_{\nu\lambda\rho} \neq 0, \quad R^{k}{}_{n\lambda\rho} \equiv h^{k}{}_{\mu}\, h_{n}{}^{\nu}\, R^{\mu}{}_{\nu\lambda\rho} \neq 0, \tag{1}$$

$h^{\nu}{}_{n}$, $h^{k}{}_{\mu}$ — абагульненыя каэфіцыенты Ламэ (прамыя і адваротныя). Бясконца малое абагульненае лоранцава пераўтварэнне мае выгляд [1 — 9]

$$\begin{aligned} \delta L^{k}{}_{n} &= \delta^{k}{}_{n} + \delta\omega^{k}{}_{n}; \qquad \delta\omega^{k}{}_{n} = \delta L^{k}{}_{n} - \delta^{k}{}_{n} = \gamma^{k}_{[\cdot n]\lambda}\, dx^{\lambda}, \\ \delta L_{k}{}^{n} &= \delta_{k}{}^{n} + \delta\omega_{k}{}^{n}; \qquad \delta\omega_{k}{}^{n} = \delta L_{k}{}^{n} - \delta_{k}{}^{n} = \gamma_{[k\cdot]\lambda}^{\;\;n}\, dx^{\lambda}, \end{aligned} \tag{2}$$

дзе $\gamma^{k}_{[\cdot n]\lambda}$, $\gamma_{[k\cdot]\lambda}^{\;\;n}$ — змешаныя кампаненты каэфіцыентаў вярчэння Рычы; dx^{λ} — дыферэнцыялы негалілеевых каардынат; $\delta L^{k}{}_{n}$, $\delta L_{k}{}^{n}$ — лоранцава пераўтварэнне, прамое і адваротнае, якое бясконца мала адрозніваецца ад адзінкавага.

Пераход да лакальнай абсалютнай адначасовасці азначае пераход ад (2) к бясконца малым абагульненым галілеевым пераўтварэнням [9], дзе па вызначэнню

$$\delta G^k_n - \delta^k_n = \lim_{c \to \infty} \left(\gamma^k_{[\cdot n] \lambda} dx^\lambda \right) \equiv \tilde{\gamma}^k_{[\cdot n] \lambda} dx^\lambda,$$
$$\delta G^n_k - \delta^n_k = \lim_{c \to \infty} \left(\gamma_{[k \cdot]}{}^n{}_\lambda \, dx^\lambda \right) \equiv \tilde{\gamma}_{[k \cdot]}{}^n{}_\lambda \, dx^\lambda \tag{3}$$

з умовай, што

$$\delta G^{\hat 0}_b = \lim_{c \to \infty} \delta L^{\hat 0}_b = 0; \quad \delta G^{\hat 0}_b = \lim_{c \to \infty} \delta L^{\hat 0}_b = 0. \tag{4}$$

Лікавае значэнне лацінскага індэкса будзем адзначаць сімвалам $\wedge$. Выкананне гранічнага пераходу пры дапамозе $c \to \infty$, дзе c — гранічная скорасць, дапускае хранаметрычную фармуліроўку СТА [10], калі c уваходзіць у матрыцу пераўтварэння Лоранца не сіметрычна адносна дыяганалі.

Такім чынам,

$$\tilde{\gamma}^{\hat 0}_{[\cdot n] \lambda} dx^\lambda = 0; \quad \tilde{\gamma}_{[k \cdot]}{}^{\hat 0}{}_\lambda \, dx^\lambda = 0. \tag{5}$$

Калі (5) справядліва пры любых dx^λ, то

$$\tilde{\gamma}^{\hat 0}_{[\cdot a] \lambda} = 0; \quad \tilde{\gamma}_{[a \cdot]}{}^{\hat 0}{}_\lambda = 0. \tag{6}$$

Значыць, незалежна ад ураўненняў Эйнштэйна патрабаванне лакальнай абсалютнай адначасовасці накладвае абмежаванне на гранічны характар неэўклідавай геаметрыі:

$$R^0{}_{n \mu\nu} = \partial_\mu \gamma^{\hat 0}_{\cdot n\nu} - \partial_\nu \gamma^{\hat 0}_{\cdot n\mu} + \gamma^{\hat 0}{}_{k\mu} \gamma^k{}_{n\nu} - \gamma^{\hat 0}{}_{k\nu} \gamma^k{}_{n\mu} = 0,$$
$$R_n{}^{\hat 0}{}_{\mu\nu} = \partial_\mu \gamma_{n \cdot \nu}^{\hat 0} - \partial_\nu \gamma_{n \cdot \mu}^{\hat 0} + \gamma_n{}^k{}_\mu \gamma_k{}^{\hat 0}{}_\nu - \gamma_n{}^k{}_\nu \gamma_k{}^{\hat 0}{}_\mu = 0. \tag{7}$$

Аб астатніх кампанентах тэнзара Рымана—Крыстофеля патрабаванне лакальнай абсалютнай адначасовасці непасрэдна не дае ніякіх звестак.

3. Абмежаванні, накладваемыя ўраўненнем Эйнштэйна на неэўклідавасць геаметрыі ў выпадку лакальнай абсалютнай адначасовасці і «слабага» тэнзара масы-энергіі-імпульса. Карыстаючыся крытэрыем $c \to \infty$, можна, па-першае, увесці выраджаны метрычны тэнзар па Фрыдрыхсу [11]. Аднак поўнасцю галілейінварыянтны выраджаны метрычны тэнзар Фрыдрыхса ахоплівае метрычныя ўласцівасці геаметрыі трохмернай часткі прасторы вельмі абмежавана—толькі з дапамогай контраварыянтных кампанент метрычнага тэнзара. Таму выкарыстаем гранічны метрычны тэнзар, як гэта зроблена Хавасам [12], вызначыўшы яго патрабаваннем, каб толькі прасторавыя яго кампаненты былі галілейінварыянтнымі. Абазначым яго каварыянтныя кампаненты праз k_{mn}, контраварыянтныя — N^{mn}. Тады

$$N^{a'b'} = G^{a'}{}_k G^{b'}{}_n N^{kn} = \mathrm{inv}, \quad k_{a'b'} = G_{a'}{}^k G_{b'}{}^n k_{kn} = \mathrm{inv}. \tag{8}$$

З (8) вынікае, што:

$$N^{\hat 0 \hat 0} = 0; \quad N^{\hat 0 a} = 0; \quad N^{ab} = \mathrm{diag}\,(1, 1, 1) = \mathrm{inv}, \tag{9}$$

$$k_{ab} = \mathrm{diag}\,(1, 1, 1) = \mathrm{inv},$$
$$k_{\hat 0', \hat 0'} = G_{\hat 0'}{}^a \, G_{\hat 0'}{}^b \, k_{ab} \neq \mathrm{inv}, \tag{10}$$
$$k_{a'\hat 0'} = k_{\hat 0' a'} = G_{\hat 0'}{}^r \, G_{a'}{}^s \, k_{rs} \neq \mathrm{inv}.$$

Для атрымання далейшых звестак аб гранічных значэннях кампанентаў тэнзара Рымана — Крыстофеля разгледзім такі гранічны выпадак ураўнення Эйнштэйна, калі пры $c \to \infty$ мае месца (6), а значыць, і (7), а метрычныя тэнзары η^{kn} і η_{kn} адпаведна пераходзяць у N^{mn} і k_{mn}. Выкарыстаем эйнштэйнава ўраўненне ў тэтраднай форме з чыста фізічнымі кампанентамі, паколькі гэта дазволіць спачатку абысці пытанне аб гранічных значэннях $h_{k\mu}$. Неабходныя ж звесткі аб гранічных значэннях N^{kn} і k_{mn} больш простыя. Абмяжуемся таксама выпадкам, калі пры $c \to \infty$ кампаненты тэнзара энергіі-імпульса $T_{\hat{0}\hat{0}}$ ва ўраўненні Эйнштэйна захоўваюцца, а $T_{\hat{0}a}$ і T_{ab} выпадаюць. Тады

$$\tilde{R}_{\hat{0}\hat{0}} - \frac{1}{2} k_{\hat{0}\hat{0}} \tilde{R} = \varkappa \tilde{T}_{\hat{0}\hat{0}}, \tag{11,1}$$

$$\tilde{R}_{aa} - \frac{1}{2} k_{aa} \tilde{R} = 0, \tag{11,2}$$

$$\tilde{R}_{ab} - \frac{1}{2} k_{ab} \tilde{R} = 0, \tag{11,3}$$

$$\tilde{R}_{a\hat{0}} - \frac{1}{2} k_{a\hat{0}} \tilde{R} = 0, \tag{11,4}$$

дзе тыльда азначае, што $\tilde{R}_{kn}$ і $\tilde{R}$ падлічаны пры ўмовах (7) — (10).

Паколькі іменна змешаныя кампаненты каэфіцыентаў вярчэння Рычы ўваходзяць у абагульненыя лоранцавы пераўтварэнні, яны з'яўляюцца першаснымі. Існаванне ка- і контраварыянтных кампанент залежыць ад прынятага метрычнага тэнзара. У выпадку (9), згодна з (6), маем:

$$\gamma^{a\,\hat{0}}{}_{\lambda} = N^{00} \gamma^{a}{}_{\hat{0}\lambda} = 0; \quad \gamma^{ab}{}_{\lambda} = N^{bc} \gamma^{a}{}_{c\lambda} \neq 0, \tag{12}$$

$$\gamma_{a\hat{0}\lambda} = k_{ab} \gamma^{b}{}_{\hat{0}\lambda} \neq 0; \quad \gamma_{ab\lambda} = k_{ac} \gamma^{c}{}_{b\lambda} \neq 0. \tag{13}$$

Такім чынам, першаснымі кампанентамі тэнзара Рымана — Крыстофеля таксама з'яўляюцца змешаныя кампаненты выгляду $R^{a}{}_{krs}$ або $R_{k}{}^{a}{}_{rs}$, г. зн., наогул кажучы, згодна з (7), знаходзім

$$\begin{aligned} R^{a\,\hat{0}}{}_{rs} &= N^{\hat{0}\hat{0}} R^{a}{}_{\hat{0}rs} = 0, \\ R_{a\hat{0}rs} &= -k\hat{0}i; \quad R^{i}{}_{ars} = -k_{0b} R^{b}{}_{ars}. \end{aligned} \tag{14}$$

У выпадку лакальнай абсалютнай адначасовасці з (7) знаходзім

$$\tilde{R} = 2R^{ab}{}_{ab}, \tag{15}$$

дзе па a і b праходзіць падсумаванне. Тады з кампанент эйнштэйнавага ўраўнення (11,2) і (11,3) адпаведна выцякае

$$\tilde{R}^{a}{}_{bab} = 0; \quad \tilde{R} = 0; \quad \tilde{R}^{ac}{}_{ab} = N^{cb} \tilde{R}^{a}{}_{bab} = 0, \tag{16}$$

$$\tilde{R}^{a}{}_{bac} = 0; \quad a \neq b \neq c \neq a; \quad \tilde{R}^{ab}{}_{ac} = 0 \tag{17}$$

пры любых значэннях індэксаў a, b, c незалежна ад таго, ці праводзіцца па індэксу a падсумаванне.

Кампаненты эйнштэйнавага ўраўнення (11,4) складаюцца з дзвюх наступных груп:

$$\tilde{R}_{b\hat{0}} = \tilde{R}^a{}_{ba\hat{0}} = \partial_a \gamma^a{}_{b\,\hat{0}} - \partial_{\hat{0}}\, \gamma^a{}_{ba} + \gamma^a{}_{ca}\gamma^c{}_{b\,\hat{0}} - \gamma^a{}_{c\,\hat{0}}\, \gamma^c{}_{ba} = 0, \quad (11{,}4\text{а})$$

$$\tilde{R}_{\hat{0}b} = -\tilde{R}_{b\hat{0}} = \tilde{R}^a{}_{\hat{0}ab} = \partial_a \gamma^a{}_{\hat{0}b} - \partial_b\, \gamma^a{}_{\hat{0}a} + \gamma^a{}_{ca}\gamma^c{}_{\hat{0}b} - \gamma^a{}_{cb}\gamma^c{}_{\hat{0}a} = 0. \quad (11{,}4\text{в})$$

Па індэксу a падсумаванне праводзіцца.

Гэтыя дзве групы, нягледзячы на тое што $\tilde{R}_{b\hat{0}} = -\tilde{R}_{\hat{0}b}$, даюць звесткі аб розных кампанентах тэнзара Рымана — Крыстофеля. У сілу (17) ураўненні (11,4в) выконваюцца тоесна, паколькі

$$R^a{}_{\hat{0}ab} = k_{\hat{0}c}\, R^{ac}{}_{ab} = 0; \quad R^{a\,\hat{0}}{}_{cd} = 0, \quad (18)$$

незалежна ад таго, праводзіцца падсумаванне па індэксу a або не.

Аднак тоеснага выканання ўраўнення (11,4а) не патрабуецца і яно ў сваю чаргу не дае звестак аб роўнасці або няроўнасці нулю кампанент выгляду $R^a{}_{cd\hat{0}}$.

Такім чынам, (11,1) пры $c \to \infty$ з улікам (16) — (18) прымае выгляд

$$\tilde{R}_{\hat{0}\hat{0}} = \tilde{R}^a{}_{\hat{0}a\,\hat{0}} = \partial_a \gamma^a{}_{\hat{0}\hat{0}} - \partial_{\hat{0}}\, \gamma^a{}_{\hat{0}a} + \gamma^a{}_{ba}\gamma^b{}_{\hat{0}\hat{0}} - \gamma^a{}_{b\,\hat{0}}\, \gamma^b{}_{\hat{0}a}. \quad (19)$$

Відаць,

$$R^a{}_{\hat{0}\,b\hat{0}} = k_{\hat{0}c}\, R^{ac}{}_{b\,\hat{0}} = -N^{ad} R_{\hat{0}db\hat{0}} = -N^{aa} k_{\hat{0}c}\, R^{cb}{}_{b\,\hat{0}}, \quad (20)$$

г. зн. у сілу (11,4а) пры прынятых умовах не выцякае роўнасць нулю кампанент выгляду $R^a{}_{\hat{0}\,b\hat{0}}$.

Разаб'ем бясконца малое абагульненае пераўтварэнне Галілея на 2 часткі: вярчэнне ў трохмернай частцы прасторы і ў прасторава-часавых гіперпаверхнях, г. зн.

$$\delta G^a{}_b = \gamma^a{}_{b\lambda}\, dx^\lambda = \gamma^a{}_{b0}\, dx^0 + \gamma^a{}_{b\gamma}\, dx^\gamma, \quad (21)$$

$$\delta G^a{}_{\hat{0}} = \gamma^a{}_{\hat{0}\lambda}\, dx^\lambda = \gamma^a{}_{\hat{0}0}\, dx^0 + \gamma^a{}_{\hat{0}\gamma}\, dx^\gamma. \quad (22)$$

Відаць, пры прынятых умовах ураўненні (16), (17) і (11,4а) вызначаюць толькі трохмернае вярчэнне, змяшчаюць толькі $\gamma^a{}_{b\lambda}$. Ураўненне ж (19) апісвае, наогул кажучы, вярчэнне як у прасторава-часавых гіперплоскасцях, так і ў трохмернай частцы прасторы. Аднак для апісання аднаго трохмернага вярчэння, калі $\gamma^a{}_{\hat{0}\lambda} = 0$, эйнштэйнава ўраўненне (19) не прыстасавана, тады як адваротнае мае месца.

4. Выраджэнне некаторых калібровачных і каардынатных умоў, выкліканае пераходам да лакальнай абсалютнай адначасовасці. Лік калібровачных умоў у выніку пераходу да абсалютнай адначасовасці змяняецца, хоць галілеева пераўтварэнне застаецца шасціпараметрычным. Гэта выклікана выраджэннем метрычнага тэнзара η_{kn}.

Абазначым гранічныя тэнзарыяльныя кампаненты метрычнага тэнзара $g^{\mu\nu}$ і $g_{\mu\nu}$ адпаведна праз $N^{\mu\nu}$ і $n_{\mu\nu}$, а гранічныя тэтрадныя кампаненты праз $H^\mu{}_k$, $H_\mu{}^k$.

Высветлім уплыў выраджэння метрычнага тэнзара на калібровачныя ўмовы для прамых каэфіцыентаў Ламэ.

У абодвух выпадках метрык Фрыдрыхса і Хаваса маем

$$N^{\mu\nu} = H^\mu{}_{k'}\, H^\nu{}_{n'}\, N^{k'n'} = G_{k'}{}^r\, G_{n'}{}^s\, H^\mu{}_r\, H^\nu{}_s N^{k'n'} =$$

$$= G_{a'}{}^c\, G_{b'}{}^d\, H^\mu{}_c\, H^\nu{}_d\, N^{a'b'} = \text{inv}. \quad (23)$$

Суадносіны (23), паколькі ў іх уваходзяць толькі тры параметры галілеевага пераўтварэння (вярчэнне ў трохмернай частцы прасторы), патрабуюць толькі трох калібровачных умоў для прамых каэфіцыентаў Ламэ H^{μ}_{c}, г. зн. H^{0}_{c} і H^{α}_{c}. Хоць гэтыя ўмовы звязаны толькі з трохмернай умовай, але яны ў роўнай меры могуць быць як «часавай» каліброўкай (умовай, накладваемай на H^{0}_{c}), так і каліброўкай «прасторавай» (накладваемай на H^{α}_{c}).

Некалькі іншым чынам уплывае выраджэнне метрыкі на зваротныя каэфіцыенты Ламэ. Суадносіны, змяшчаючыя метрыку Фрыдрыхса

$$n_{\mu\nu} = H_{\mu}^{k'} H_{\nu}^{n'} n_{k'n'} = G^{\hat{0}'}_{\hat{0}}\; G^{\hat{0}'}_{\hat{0}}\; H_{\mu}^{\hat{0}} H_{\nu}^{\hat{0}}\, n_{\hat{0}'\hat{0}'} = \mathrm{inv}, \tag{24}$$

зусім не ўносяць калібровачных умоў для тэтрад. Аналагічныя суадносіны, змяшчаючыя метрыку Хаваса, г. зн.

$$n_{\alpha\beta} = H_{\alpha}^{c'} H_{\beta}^{\alpha'} n_{c'd'} = G^{c'}_{k} G^{d'}_{n} H_{\alpha}^{k} H_{\beta}^{n} k_{c'd'} = \mathrm{inv}, \tag{25}$$

уключаюць у сябе ўсе 6 параметраў галілеевага пераўтварэння, г. зн., наогул кажучы, прыводзяць к 6 калібровачным умовам.

Аднак, калі прынята «часавая» каліброўка Швінгера, г. зн.

$$h^{0}_{b} = 0, \tag{26}$$

то (25) змяшчае толькі $G^{c'}_{b}$. Тады (25) прыводзіць толькі да трох калібровачных умоў для чыста прасторавых адваротных каэфіцыентаў Ламэ, г. зн. да «прасторавай» каліброўкі тэтрад.

Паколькі прамыя і адваротныя каэфіцыенты Ламэ звязаны паміж сабой метрычным тэнзарам, г. зн.

$$H^{\hat{0}}_{\beta} = n_{\beta\gamma} N^{\hat{0}i} H_{i}^{\gamma} = 0; \quad H^{\alpha}_{c} = N^{\alpha\beta} n_{cd} H^{\alpha}_{\beta}, \tag{27}$$

то пры $c \to \infty$ «часавая» каліброўка распаўсюджваецца і на адваротныя каэфіцыенты Ламэ, а «прасторавая» — і на прамыя.

У тэорыі квантавання гравітацыйнага поля Кіблам прапанавана каліброўка, якая патрабуе сіметрыі прасторавых тэтрад. Пры $c\to\infty$, згодна з Кіблам, маем:

$$H^{\alpha}_{b} = H^{\beta}_{a} \text{ або } H^{\beta a} = H^{\alpha b}, \text{ або } H^{b}_{\alpha} = H^{a}_{\beta}, \tag{28}$$

$$H^{1}_{\hat{2}} = H^{2}_{\hat{1}},\; H^{2}_{\hat{3}} = H^{3}_{\hat{2}},\; H^{3}_{\hat{1}} = H^{1}_{\hat{3}},$$

дзе

$$|\alpha| = |a|;\; |\beta| = |b|;\; \alpha = 1, 2, 3;\; |a| \neq |b|.$$

«Прасторава-часавая» каліброўка Кібла—Швінгера найбольш натуральная ў разглядаемым гранічным выпадку. Сапраўды, па-першае, «часавую» частку гэтай каліброўкі (26) і (27) пры выраджанай метрыцы вельмі проста забяспечваюць умовы (6) лакальнай абсалютнай адначасовасці. На самай справе,

$$\gamma^{k}{}_{m\lambda} = h^{\mu}{}_{m}\, \partial_{\lambda} h^{k}{}_{\mu} + \Gamma_{\mu}{}^{\nu}{}_{\lambda}\, h_{\nu}{}^{k}\, h^{\mu}{}_{m}, \tag{29}$$

г. зн.

$$\tilde{\gamma}^{\hat{0}}_{a\lambda} = H^{0}_{a}\, \partial_{\lambda} H^{\hat{0}}_{0} + H^{\beta}_{a}\, \partial_{\lambda} H^{\hat{0}}_{\beta} + \tilde{\Gamma}^{0}_{0\lambda} H_{0}{}^{\hat{0}}\, H^{0}_{a} + \tilde{\Gamma}^{0}_{\gamma\lambda}\, H_{0}{}^{\hat{0}}\, H^{\gamma}_{a}\,. \tag{30}$$

Далей

$$\tilde{\Gamma}^{0}_{\gamma\lambda} = \frac{1}{2} N^{0\mu} (\partial_{\gamma} n_{\lambda\mu} + \partial_{\lambda} n_{\gamma\mu} - \partial_{\mu} n_{\gamma\lambda}), \tag{31}$$

$$N^{00} = H^{0}_{k} H^{0}_{n} N^{kn} = H^{0}_{a} H^{0}_{b} N^{ab}, \quad N^{0\alpha} = H^{0}_{a} H^{\alpha}_{b} N^{ab}. \tag{32}$$

Калі прынята (26), то ў сілу (32) маем $\tilde{\Gamma}^{0}_{\gamma\lambda} = 0$. Калі таксама прынята (27), то з (30) лёгка відаць, што ўмова (6) задавальняецца. Калі лакальна мае месца адноснасць аднaчасовасці, то, вядома, умовы (26) і (27) не патрабуюць роўнасці нулю $\tilde{\Gamma}^{0}_{\gamma\lambda}$ і ўмоў (6).

Па-другое, «прасторавая» частка калібpoўкі Кібла — Швінгера вельмі зручная, калі выкарыстоўваюцца такія трохмерныя крывалінейныя каардынатныя сістэмы, для якіх адрозніваюцца ад нуля кампаненты каэфіцыентаў Ламэ толькі выгляду $H^{\alpha}_{\ a}$, дзе $|\alpha| = |a|$, г. зн. калі

$$H^{\alpha}_{\ b} = 0; \ \alpha = 1, 2, 3, \ |\alpha| \neq |b|, \tag{33}$$

г. зн.

$$H^{1}_{\ \hat{2}} = H^{2}_{\ \hat{3}} = H^{3}_{\ \hat{1}} = 0. \tag{33}$$

У гранічным выпадку практычна толькі такія каардынатныя сістэмы і выкарыстоўваюцца. Тады калі прынята калібpoўка Кібла (28), то таксама

$$H^{2}_{\ \hat{1}} = H^{3}_{\ \hat{2}} = H^{1}_{\ \hat{3}} = 0. \tag{34}$$

Прынятыя ўмовы калібpoўкі спрашчаюць запіс каардынатных умоў. Так, напрыклад, умова гарманічнасці [13] у выпадку абсалютнай лакальнай аднaчасовасці, калі прынята калібpoўка Швінгера, распаўсюджваецца толькі на трохмерную частку каардынатнай сістэмы. Сапраўды, з (26), (31) і (32) вынікае, што

$$\tilde{\Gamma}^{0} = N^{\mu\nu}\, \tilde{\Gamma}^{0}_{\mu\nu} = 0; \tilde{\Gamma}^{\alpha} = N^{\beta\gamma}\, \tilde{\Gamma}^{\alpha}_{\beta\gamma} = 0. \tag{35}$$

Эўклідавасць геаметрыі трохмернай часткі прасторы не выключае выкарыстання крывалінейнай часавай восі. Калібpoўка Швінгера ў гранічным выпадку дапускае пераход да дэкартавай часавай восі, паколькі тады

$$dx^{0} = H^{0}_{\ k}\, dx^{k} = H^{0}_{\ \hat{0}}\, dx^{\hat{0}}. \tag{36}$$

Такім чынам, калі крыніцай гравітацыйнага поля з'яўляецца слабы гідрадынамічны тэнзар, то з пераходам да лакальнай абсалютнай аднaчасовасці ўраўненне Эйнштэйна аўтаматычна выключае неэўклідавасць геаметрыі трохмернай часткі прасторы, але абавязкова дапускае неэўклідавасць геаметрыі ў часава-прасторавых гіперплоскасцях. Застаецца нявырашаным пытанне, ці сумясцімыя патрабаванні лакальнай абсалютнай аднaчасовасці неэўклідавасці геаметрыі трохмернай часткі прасторы пры іншых крыніцах поля.

ЛІТАРАТУРА

1. Utiyama R. Phys. Rev., **101**, 1597, 1956.
2. Sciama D. W. J. Math. Phys., **2**, 472, 1960; Ann. Inst. Henri Poincaré, **17**, 1, 1961.
3. Kibble T. W. J. Math. Phys., **2**, 212, 1961; **4**, 1433, 1963.
4. Moller C. Ann. Phys., **4**, 347, 1958; Mat. Fys. Skr. Dan. vid. Selsk., **1**, № 10, 1961.
5. Левашев А. Е., Иваницкая О. С. Наук. повід. Киевск. ун-та, **1**, 5, 1956; Acta Phys. Polon., **23**, 647, 1963.
6. Родичев В. И. Изв. вузов, Физика, № 1, 1965.
7. Иваненко Д. Д. Nuovo Cim., **2**, 161, 1964.
8. Schwinger J. Phys. Rev., **130**, 800, 1963; **130**, 1253, 1963; **132**, № 3, 1963.
9. Иваницкая О. С. Пробл. совр. теор. элем. частиц. Ужгород, № 2, 45, 1959; Весці АН БССР, сер. фіз-мат. навук, № 1, 1966; № 2, 1966; Пробл. гравитации. Тбилиси, 1965, стар. 143.

10. Синг Дж. Общая теория относительности, 1963.
11. Fridrichs K. Math. Ann., **98**, 567, 1927.
12. Havas P. Rev. Mod. Phys., **36**, 938, 1964.
13. Фок В. А. Теория пространства, времени и тяготения, 1961.

РЕЗЮМЕ

Исследована структура предельного случая тетрадного уравнения Эйнштейна с помощью локального преобразования Лоренца и вырожденной метрики Хаваса. Установлены ограничения, накладываемые на тензор Римана—Кристоффеля требованием локальной абсолютной одновременности (независимо от уравнения Эйнштейна), а также ограничения, накладываемые на этот тензор уравнением Эйнштейна, его структурой (в случае слабого гидродинамического тензора). Рассмотрены предельные случаи некоторых калибровочных и координатных условий, дополняющих уравнение Эйнштейна.

Поступило в редакцию 22.II 1966

Г. К. ІЛЫЧ, П. Б. БОЙКА

АЗІМУТАЛЬНАЯ СТРУКТУРА АДБІТАГА СВЯТЛА

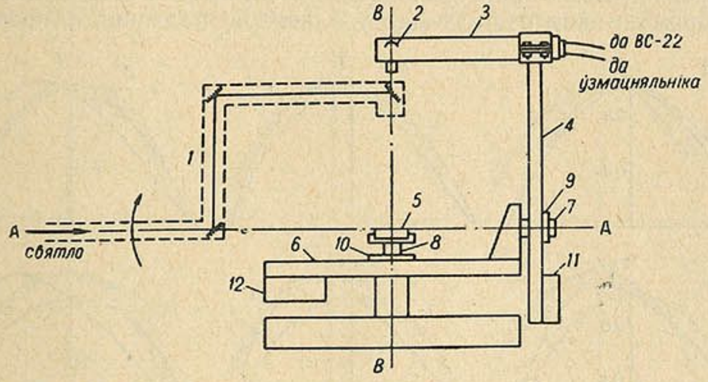
Рад характарыстык выпраменьвання, дыфузна адбітага паўбясконцым слоем святлорассейваючага асяроддзя, вывучан у рабоце [1]. Даныя па вуглавому размеркаванню адбітага патоку, прыведзеныя ў [1], адносяцца да плоскасці падзення абпраменьваючага пучка. Паколькі ўласцівасці адбітага светлавога патоку ў асяроддзі з індыкатрысай рассеяння, якая адрозніваецца ад сферычнай, залежаць ад рознасці азімутаў адбітага і ўпаўшага праменяў, то для высвятлення прасторавай карціны размеркавання рассеянага выпраменьвання неабходна праводзіць вымярэнні ў розных плоскасцях адносна плоскасці падзення абпраменьваючага пучка. Мэта дадзенай работы — устанаўленне ўплыву характарыстык элементарнага аб'ёму рассейваючага аб'екту на вуглавое размеркаванне выпраменьвання, дыфузна адбітага ў розных плоскасцях адносна да плоскасці падзення промня.

У якасці параметраў, якія вызначаюць аптычныя ўласцівасці рассейваючага асяроддзя, на аснове тэорыі пераносу выпраменьвання былі выбраны імавернасць выжывання фатону $\Lambda = \frac{\sigma}{k+\sigma}$, дзе σ і k—адпаведна паказчыкі рассеяння і паглынання элементарнага аб'ёму асяроддзя і індыкатрыса, або вуглавая функцыя рассеяння $\varkappa(\gamma)$.

Спосабы варыяцыі і вымярэння гэтых велічынь у мадэльных сістэмах (парашкі шкла розных марак, канцэнтраваныя эмульсіі і суспензіі), а таксама рад эксперыментальных асаблівасцей вымярэння характарыстык дыфузна адбітага святла, якія прымяняліся ў дадзенай рабоце, апісаны ў [1]. Для вывучэння прасторавага размеркавання адбітай радыяцыі была створана ўстаноўка, схематычна прадстаўленая на рыс. 1.

Паралельны пучок святла ртутнай лямпы ДРШ-250, ствараемы сістэмай лінз і дыяфрагм, пры дапамозе паваротных люстраў накіроўваўся на ўзор.

Асвятляльная прылада *1* круцілася вакол восі *AA*, якая супадала з паверхняй узору, што дазваляла змяняць вугал падзення паралельнага пучка святла ад 0 да 80°, прычым плоскасць падзення заставалася пастаяннай. Акрамя вярчэння, для зручнасці юстыроўкі асвятляльнік мог перамяшчацца ў трох узаемна перпендыкулярных напрамках пры дапамозе юстыровачных вінтоў. Прыёмнік святла фотапамнажальнік тыпу ФЭУ 18-А памяшчаўся ў кожусе, ролю якога выконвала труба *3*, замацаваная на швелеры *4*. Вугал назірання змяняўся вярчэннем прыёмнай прылады вакол восі *AA*, якая супадала з воссю вярчэння асвятляльніка (граніцы змянення ад 0 да 90°). Прыёмнік выпраменьвання мог паварочвацца таксама вакол восі *BB* за кошт вярчэння рамы *6*, змяняючы пры гэтым азімутальны вугал назіраемага адбітага пучка. Пры выкарыстанні апісанай устаноўкі частка вуглоў назірання (8°) выпадае з вобласці вымярэнняў за кошт зацянення фотакатода ФЭУ корпусам асвятляльніка. Аднак пры апрацоўцы эксперыментальных даных аказваецца, як правіла, што экстрапаляцыя атрымліваемых крывых адноснага вуглавога размеркавання дыфузна адбітага святла, якія маюць дастаткова плаўны ход, на вобласць, дзе адсутнічаюць непасрэдныя вымярэнні, не прадстаўляе цяжкасці.



Рыс. 1. Устаноўка для вымярэння характарыстык дыфузна адбітага святла:

1 — асвятляльная прылада; 2 — фотапамнажальнік; 3 — кожух; 4 — швелер; 5 — трымальнік узораў; 6 — рама; 7, 8 — восі; 9, 10 — лімбы; 11, 12 — процівагі

Абпраменьваючы пучок перад уваходам у асвятляльнік перарываўся з частатой 1 *кгц*, што дазваляла выкарыстоўваць для рэгістрацыі светлавога сігналу ўзмацняльнік пераменнага току ў 2-4.

Выкарыстоўваючы метад В. А. Амбарцумяна пры рашэнні ўраўнення пераносу выпраменьвання [2, 3], можна запісаць для інтэнсіўнасці $B(\eta, \zeta, \varphi-\varphi_0)$ дыфузна адбітага выпраменьвання плоскапаралельным асяроддзем бясконца вялікай аптычнай таўшчыні ў выпадку індыкатрысы рассеяння тыпу $\varkappa(\gamma) = 1 + x_1 \cos\gamma$ наступны выраз:

$$B(\eta, \zeta, \varphi-\varphi_0) = \frac{\Lambda S}{4} \frac{\zeta}{\eta+\zeta} [\varphi_0^0(\eta)\varphi_0^0(\zeta) - $$
$$- x_1 \varphi_1^0(\eta)\varphi_1^0(\zeta) - x_1 \varphi_1^1(\eta)\varphi_1^1(\zeta)\cos(\varphi-\varphi_0)], \quad (1)$$

дзе ζ і η — косінусы вуглоў падзення і адбіцця выпраменьвання на верхняй мяжы асяроддзя; $\varphi-\varphi_0$ — рознасць азімутаў адбітага і ўпаўшага праменняў; πS — асветленасць пляцоўкі, размешчанай на верхняй мяжы асяроддзя перпендыкулярна да падаючых праменняў; Λ — па-ранейшаму імавернасць выжывання фатона; γ — вугал рассеяння; x_1 — першы каэфіцыент у раскладанні $\varkappa(\gamma)$ па паліномах Лежандра, які характарызуе ступень выцягнутасці індыкатрысы рассеяння.

Для функцый $\varphi_0^0(\eta)$, $\varphi_1^0(\eta)$, $\varphi_1^1(\eta)$ у рабоце [4] з упаўне здавальняючай дакладнасцю знойдзены прыблізныя аналітычныя выразы.

Пры вядомых велічынях Λ і x_1, выкарыстоўваючы рэзультаты [4], можна разлічыць значэнні ўказаных функцый.

Калі цікавіцца толькі адносным вуглавым размеркаваннем дыфузна адбітага святла ў розных плоскасцях, то, вызначыўшы значэнні функцый φ_0^0, φ_1^0, φ_1^1 і прыняўшы велічыню падаючага светлавога патоку за адзінку, з (1) лёгка знайсці яркасць выпраменьвання, адбітага ў любым напрамку.

Для нагляднага супастаўлення з эксперыментальнымі данымі рэзультаты разліку можна выразіць у тэрмінах сілы святла $I\ (\eta,\ \zeta,\ \varphi-\varphi_0) = \eta B(\eta,\ \zeta,\ \varphi-\varphi_0)$ і прыраўняць адзінцы пры вугле назірання 0°. У выпадку індыкатрысы рассеяння тыпу $\varkappa(\gamma) = 1+\cos\gamma$ для некалькіх значэнняў вуглоў падзення і велічынь Λ разліковыя даныя прадстаўлены на рыс. 2.

Суцэльныя крывыя адпавядаюць адноснай залежнасці сілы святла ад вугла назірання, якая рэалізуецца ў плоскасці падзення абпраменьваю-

Рыс. 2. Вуглавое размеркаванне сілы святла, дыфузна адбітага асяроддзем з індыкатрысай рассеяння тыпу $\varkappa(\gamma) = 1+\cos\gamma$ (разлік па формуле (1)). Лічбы каля крывых адпавядаюць розным плоскасцям назірання:

1 — у плоскасці падзення промня; *2* — у плоскасці, перпендыкулярнай плоскасці падзення; *I* — $\Lambda = 0{,}99$; *II* — 0,90; *III* — 0,70; *а* — $\Phi_{пад} = 40°$; *б* — 60°; *в* — 70°

чага пучка, штрыхавыя — у плоскасці, перпендыкулярнай ёй. Прамежкавыя выпадкі, якія не паказаны на рысунку, прадстаўляюць плаўны пераход ад крывой *1* да крывой *2*. Вобласць змянення вуглоў падзення абпраменьваючага пучка размяшчаецца ў левай палавіне рысункаў.

Здзяйсненне эксперыменту ва ўмовах, з дакладнасцю адпавядаючых тэарэтычным, прадстаўляе значныя цяжкасці, у першую чаргу пры рэалізацыі асяроддзя з індыкатрысай рассеяння $\varkappa(\gamma) = 1+\cos\gamma$. Будзем характарызаваць індыкатрысу каэфіцыентам асіметрыі δ, які вызначаецца выразам

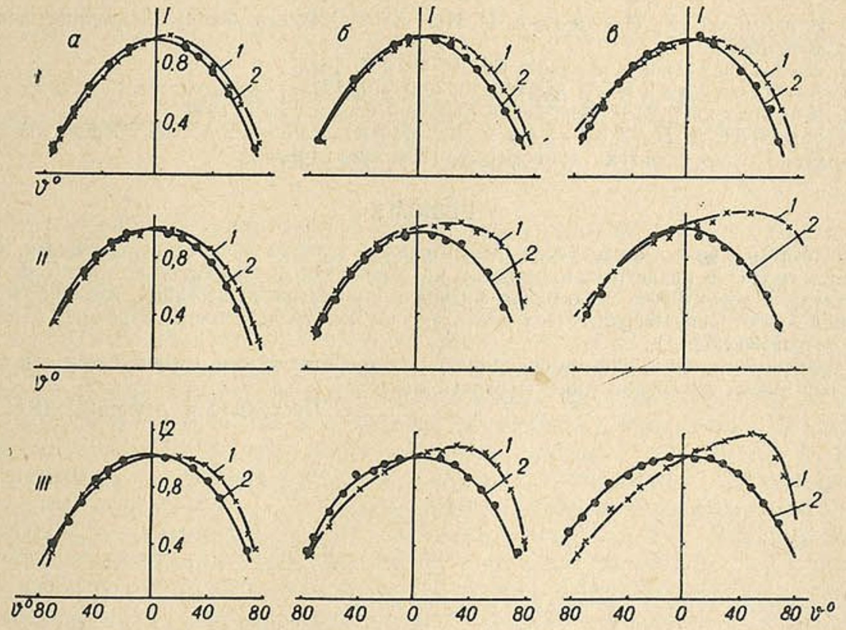
$$\delta = \frac{\int_0^{\pi/2} \varkappa(\gamma)\sin\gamma\, d\gamma}{\int_{\pi/2}^{\pi} \varkappa(\gamma)\sin\gamma\, d\gamma},$$

дзе γ — вугал рассеяння. Лёгка знайсці, што $\delta = 3$ для $\varkappa(\gamma) = 1+\cos\gamma$.

Разгляд эксперыментальна вымераных [5] індыкатрыс рассеяння парашкоў шкла розных марак паказвае, што параметр δ у залежнасці ад паглынаючай здольнасці парашкоў змяняецца ад 3,6 да 10.

Рэзультаты вымярэнняў адноснага вуглавога размеркавання святла, дыфузна адбітага ў розных плоскасцях, для экранаў з парашкоў шкла прадстаўлены на рыс. 3. Значэнні імавернасці выжывання фатона Λ узяты блізкімі да тэарэтычных.

З супастаўлення рыс. 2 і 3 відаць, што, нягледзячы на даволі моцнае адрозненне ў ступені выцягнутасці $\varkappa(\gamma)$, адноснае вуглавое размеркаванне адбітага святла, вымеранае эксперыментальна і разлічанае тэарэтычна па формуле (1) для дзвюх узаемна перпендыкулярных плоскас-



Рыс. 3. Рэзультаты эксперыментальнага вымярэння вуглавога адбітага патоку ў розных плоскасцях для экранаў з парашкоў шкла розных марак (межы змянення параметра σ ад 3,6 да 10). Абазначэнні, як і на рыс. 1.

цей назірання, мае прыблізна аднолькавы якасны ход. Дэталёвае супастаўленне эксперыментальных і тэарэтычных даных паказвае, аднак, што ў плоскасці падзення промня супадзенне больш поўнае пры дастаткова вялікіх значэннях Λ.

Рэзультаты непасрэдных вымярэнняў для $\Lambda<0{,}8$ даюць больш плаўны ход адноснага вуглавога размяшчэння, чым можна было б чакаць на аснове разлікаў па формуле (1); велічыня адбітага светлавога патоку, назіраемага эксперыментальна ў напрамку, люстраным да падаючага промня, заніжана параўнальна з тэарэтычнымі данымі. Прычыны ўказаных адрозненняў тэарэтычных і эксперыментальных рэзультатаў, відаць, заключаюцца ў тым, што форма індыкатрысы рассеяння выкарыстоўваемага мадэльнага асяроддзя адрозніваецца ад тэарэтычнай.

У плоскасці, перпендыкулярнай плоскасці падзення праменняў, назіраецца лепшае супадзенне эксперыментальных і разліковых даных.

Разгляд рыс. 2, 3 паказвае, што адрозненні ў адносным размеркаванні патоку, дыфузна адбітага ў плоскасці падзення промня і плоскасці, перпендыкулярнай да яе, узрастаюць з павелічэннем удзельнага паглынання асяроддзя і вугла падзення. Для сістэм са слаба выцягнутай $\varkappa(\gamma)$ і значэннем велічыні $\Lambda>0{,}8$ добра прымянімы тэарэтычныя рэзультаты [2—4]. У рассейваючых аб'ектах з большым значэннем каэфіцыента асіметрыі, як паказалі эксперыментальныя доследы, вобласць прымянення тэарэтычных даных для $\varkappa(\gamma) = 1 + \cos\gamma$ значна вузейшая. У гэтым выпадку яны могуць быць выкарыстаны толькі пры Λ, блізкіх да адзінкі, і не вельмі косых вуглах падзення.

Аўтары выказваюць глыбокую падзяку А. П. Іванову за пастаянную ўвагу і дапамогу.

ЛІТАРАТУРА

1. Ильич Г. К., Иванов А. П. Изв. АН СССР, сер. Физика атмосферы и океана, **1**, № 6, 1965.
2. Амбарцумян В. А. ДАН СССР, **38**, 257, 1943.
3. Амбарцумян В. А. ЖЭТФ, **13**, в. 9—10, 1943.
4. Яновицкий Э. Г. Изв. вузов СССР.— Физика, № 1, 1962.
5. Иванов А. П., Копаник Е. К., Пришивалко А. П., Предко К. Г. Сб. «Актинометрия и оптика атмосферы», 1964, стар. 108.

РЕЗЮМЕ

Экспериментально исследуется относительное угловое распределение потока, отраженного средой в различных плоскостях по отношению к плоскости падения. В среде варьируются вероятность выживания фотона и индикатриса рассеяния, изменяется угол падения лучей. Описана установка для изучения пространственной картины отраженного светового поля.

Экспериментальные данные сравниваются с теоретическими, имеющимися для среды с индикатрисой рассеяния типа $\varkappa(\gamma) = 1 + \cos\gamma$.

Поступило в редакцию 19.II 1966

ВЕСЦІ АКАДЭМІІ НАВУК БЕЛАРУСКАЙ ССР № 3 1966
СЕРЫЯ ФІЗІКА-МАТЭМАТЫЧНЫХ НАВУК

Э. А. РУДАК

СТРУКТУРА НІЖНІХ УЗРОЎНЯЎ ЯДРА Sc^{48} І ЭФЕКТЫЎНАЕ ПРАТОН-НЕЙТРОННАЕ ЎЗАЕМАДЗЕЯННЕ Ў ПАДАБАЛОНЦЫ $1f_{7/2}$

Для тлумачэння ўласцівасцей ніжніх узроўняў рада лёгкіх і сярэдніх ядраў, у якіх зверху над замкнёнымі пратоннай і нейтроннай абалонкамі знаходзяцца некалькі нуклонаў, можа быць з поспехам прыменена мадэль абалонак у прыбліжэнні j—j сувязі паміж валентнымі нуклонамі. Энергія асобнага валентнага нуклона ў гэтым выпадку можа быць прадстаўлена як энергія сувязі адпаведнага адначасткавага стану ў патэнцыяльнай яме і сумы энергій эфектыўнага двухчасткавага ўзаемадзеяння дадзенага нуклона з астатнімі валентнымі нуклонамі. Энергія эфектыўнага ўзаемадзеяння пары нуклонаў, напрыклад пратона ў стане са спінам j_p і нейтрона ў стане са спінам j_n, залежыць ад велічыні поўнага моманту $J=j_p+j_n$. У выніку гэтага дадзены ўзровень расшчапляецца на $2j+1$ кампанент, дзе j — меншая з лічбаў j_p і j_n. Даследаванне ўласцівасцей ніжніх узроўняў ядраў, у якіх здзяйсняецца j—j сувязь паміж валентнымі нуклонамі, дазваляе рабіць вывады адносна характару эфектыўнага ўзаемадзеяння паміж парай нуклонаў, якія знаходзяцца ў пэўных адначасткавых станах.

Мадэль абалонак у прыбліжэнні j—j сувязі паміж валентнымі нуклонамі добра апісвае рад уласцівасцей ядраў, у якіх запаўняецца падабалонка $1f_{7/2}$. Натуральна таму дапусціць, што і эфектыўнае ўзаемадзеянне паміж парай нуклонаў у стане $1f_{7/2}$ можна даследаваць у прыбліжэнні j—j сувязі. Для гэтай мэты вельмі зручнае ядро Sc^{48}, у якога зверху над пратоннай і нейтроннай абалонкамі 20 знаходзяцца адзін пратон і адна нейтронная «дзірка» ў стане $1f_{7/2}$. Характар эфектыўнага ўзаемадзеяння паміж парай пратон—нейтрон у ядры Sc^{48} можна ацаніць непасрэдна па эксперыментальных даных аб эфектыўным пратон-нейтронным узаемадзеянні ў ядры Sc^{42} і даследуючы агульную форму эфектыўнага пратон-нейтроннага ўзаемадзеяння

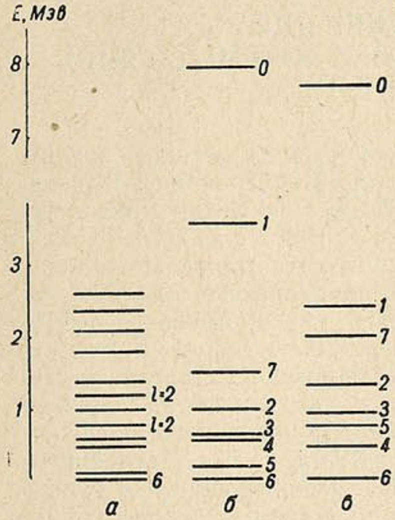
$$v = V[(1-\alpha)+\alpha(\sigma_1\sigma_2)]f(r),$$

дзе σ_1 і σ_2 — аператары спіну пратона і нейтрона; $Vf(r)$ — патэнцыял узаемадзеяння; α — параметр сумесі звычайных і спінавых сіл [1].

Разлік спектра ўзроўняў ядра Sc^{48} на аснове даных аб энергіях і спінах ядра Sc^{42} быў праведзен у рабоце [2]. Разлічаны спектр якасна даволі добра ўзгадняецца з эксперыментальнымі данымі. Правільна прадказан спін асноўнага стану — 6. Тым не менш да гэтага выніку трэба аднесціся з некаторай асцярожнасцю, паколькі спіны некаторых узроўняў ядра Sc^{42} былі ідэнтыфікаваны ў рабоце [2], відаць, няправільна. У цяперашні час апублікавана некалькі эксперыментальных работ, у якіх вызначаны энергіі і спіны ўзроўняў ядра Sc^{42} [3—6]. Згодна з рэзультатамі гэтых работ, у ядры Sc^{42} узровень 0,610 *Мэв* мае спін 1, а не

7, як дапускалася ў рабоце [2]. Спін 7 належыць, напэўна, узроўню 0,526 *Мэв*. Таму быў праведзен разлік спектра ўзроўняў Sc^{48} на аснове новых даных па ядру Sc^{42}. Разлік быў зроблен з дапамогай суадносін Пандыя, які звязваў энергіі ўзроўняў канфігурацыі тыпу «нуклон» — «нуклон» з энергіяй узроўняў канфигурацыі тыпу «нуклон» — «дзірка» [7]. Для энергій і спінаў узроўняў ядра Sc^{42} былі прыняты наступныя значэнні: 0,000—0^+; 0,526—7^+; 0,610—1^+; 1,510—2^+; 1,958—5^+; 2,220—3^+; 3,000—4^+; 3,400—6^+.

Разлічаны спектр узроўняў ядра Sc^{48} і параўнанне яго з эксперыментальнымі рэзультатамі [8—10] прыведзены на рысунку. Калі не ўлічваць эксперыментальныя ўзроўні з энергіяй 0,77 і 1,40 *Мэв*, якія, згодна з работай [9], маюць арбітальны момант $l=2$ і не могуць належаць да разглядаемых тут узроўняў, то згоду паміж эксперыментальным спектрам і разлічаным можна лічыць здавальняючай. Спін асноўнага стану роўны 6, што знаходзіцца ў згодзе з данымі работы [11]. Першы ўзбуджаны ўзровень, згодна з разлікам, павінен мець спін 5, што пацвярджаецца, відаць, у рабоце [10]. У даследаванай рэакцыі Ca^{48} $(p, n\gamma)$ Sc^{48} групы нейтронаў, адпавядаючыя пераходам у асноўны стан і на першы ўзбуджаны ўзровень, валодаюць вельмі малой інтэнсіўнасцю, што можа быць растлумачана вялікімі значэннямі спінаў гэтых станаў.



Параўнанне эксперыментальнага і разлічаных спектраў узроўняў ядра Sc^{48}:

а—эксперыментальны спектр па даных работ [8—10]; *б*—спектр узроўняў ядра Sc^{48}, разлічаны з дапамогай суадносін Пандыя на аснове даных работы [5]; *в*—спектр узроўняў ядра Sc^{48}, разлічаны ў мадэлі абалонак у прыбліжэнні $j-j$ сувязі і δ-узаемадзеяння паміж пратонам і нейтронамі ў стане $1f_{7/2}$

Цікавай асаблівасцю разлічанага спектра з'яўляецца вельмі вялікая энергія ўзроўняў са спінам 1 і 0—3,597 і 7,918 *Мэв* адпаведна. Для высвятлення гэтых умоў быў праведзен разлік спектра ўзроўняў ядра Sc^{48} у меркаванні кароткадзейнічаючых сіл паміж нейтронам і пратонам (δ-узаемадзеянне). У разліках пастаянную ўзаемадзеяння V бралі роўнай 15 *Мэв*, параметр сумесі α—0,1. У выпадку δ-узаемадзеяння разлік спектра па сутнасці зводзіцца да вылічэння інтэграла Слетэра $F^0(l, l')$

$$F^0(l, l') = \frac{V}{4\pi} \int (ru_l)^2 (ru_{l'})^2 \frac{dr}{r^2},$$

дзе u_l—радыяльная частка хвалевай функцыі нуклона, які знаходзіцца ў стане з арбітальным момантам l. Для ацэнкі інтэграла Слетэра выкарыстоўвалася адначастковая хвалевая функцыя, адпавядаючая стану $1f_{7/2}$ у патэнцыяльнай яме з размытым краем [12]. Згодна з разлікам, $F^0 = 113{,}95 \cdot 10^{-3}\ V$ *(Мэв)*.

Разлічаны спектр прыведзен на рысунку. Парадак следавання спінаў узроўняў такі ж, як і ў спектры, разлічаным на аснове даных па Sc^{42}. Выключэнне складае інверсія спінаў першага і другога ўзбуджаных узроўняў. У цэлым згода гэтага спектра з эксперыментальным горшая, чым у выпадку разліку па даных Sc^{42}. Аднак для ўзроўню са спінам 0 тут таксама атрымліваецца вялікая энергія — 7,726 *Мэв*. Узровень са спінам 1 знаходзіцца пры больш нізкай энергіі — 2,402 *Мэв*. Такім чынам, разлікі, заснаваныя на агульных меркаваннях адносна характару эфектыўнага ўзаемадзеяння паміж пратонам і нейтронам у падабалонцы 1 $f_{7/2}$, паказваюць, што ў канфігурацыі тыпу «пратон» — «нейтронная дзірка» станы са спінам 0 і 1 звязаны значна слабей, чым станы з больш высокімі спінамі.

Дадатак

Сістэма ўраўненняў для вызначэння энергіі ўзроўняў ядра Sc^{48} па вядомых энергіях узроўняў ядра Sc^{42}

$$E_1 - E_0 = 1/84\,[21\,(E_1' - E_0') - 40\,(E_2' - E_1') + 55\,(E_3' - E_2') - 64\,(E_4' - E_3') + 65\,(E_5' - E_4') - 56\,(E_6' - E_5') + 35\,(E_7' - E_6')];$$

$$E_2 - E_1 = 1/84\,[-21\,(E_1' - E_0') + 34\,(E_2' - E_1') - 33\,(E_3' - E_2') + 16\,(E_4' - E_3') + 13\,(E_5' - E_4') - 42\,(E_6' - E_5') + 49\,(E_7' - E_6')];$$

$$E_3 - E_2 = 1/924\,[231\,(E_1' - E_0') - 264\,(E_2' - E_1') + 33\,(E_3' - E_2') + 320\,(E_4' - E_3') - 481\,(E_5' - E_4') + 168\,(E_6' - E_5') + 441\,(E_7' - E_6')];$$

$$E_4 - E_3 = 1/924\,[-231\,(E_1' - E_0') + 110\,(E_2' - E_1') + 275\,(E_3' - E_2') - 404\,(E_4' - E_3') - 65\,(E_5' - E_4') + 518\,(E_6' - E_5') + 245\,(E_7' - E_6')];$$

$$E_5 - E_4 = 1/12012\,[3003\,(E_1' - E_0') + 1144\,(E_2' - E_1') - 5291\,(E_3' - E_2') - 834\,(E_4' - E_3') + 6695\,(E_5' - E_4') + 5320\,(E_6' - E_5') + 1225\,(E_7' - E_6')];$$

$$E_6 - E_5 = 1/12012\,[-3003\,(E_1' - E_0') - 4290\,(E_2' - E_1') + 2145\,(E_3' - E_2') + 7696\,(E_4' - E_3') + 6175\,(E_5' - E_4') + 2226\,(E_6' - E_5') + 315\,(E_7' - E_6')];$$

$$E_7 - E_6 = 1/12012\,[3003\,(E_1' - E_0') + 8008\,(E_2' - E_1') + 9009\,(E_3' - E_2') + 5824\,(E_4' - E_3') + 2275\,(E_5' - E_4') + 504\,(E_6' - E_5') + 49\,(E_7' - E_6')].$$

Тут праз E і E' абазначаны энергіі ўзроўняў ядраў Sc^{42} і Sc^{48} адпаведна. Лічбавы індэкс пры энергіі ўзроўню абазначае спін узроўню.

ЛІТАРАТУРА

1. De Shalit A., Walecka J. D. Phys. Rev., **120**, 1790, 1960.
2. Mc Cullen J. D., Bayman B. F., Zamick L. Phys. Rev., **134**, 515B, 1964.
3. Zurmuhle R. W., Fou C. M. BAPS, **10**, 478, 1965.
4. Cline D., Gove H. E., Čujec B. BAPS, **10**, 25, 1965.
5. Nelson J. W., Oberholtzer J. D., Plendl H. S. Nucl. Phys., **62**, 434, 1965.
6. Zurmuhle R. W., Fou C. M., Swenson L. W. BAPS, **9**, 456, 1964.
7. Pandya S. P. Phys. Rev., **103**, 956, 1956.
8. Fergusson A. T. G., Paul E. B. Nucl. Phys., **12**, 426, 1959.
9. Intema J. L., Satchler G. R. Phys. Rev., **134**, 976B, 1964.
10. El-Nadi M., Badawy O. E., El-Sourogy A., Darwish A. E., Gontchar V. G. Nucl. Phys., **64**, 449, 1965.
11. Van Nooijen B. Thesis, Technical University of Delft, 1958.
12. Green A. E. S., Lee K. Phys. Rev., **99**, 772, 1955.

РЕЗЮМЕ

В статье приводятся результаты расчета спектра уровней ядра Sc^{48} на основании экспериментальных данных об остаточном взаимодействии протона и нейтрона в одночастичных состояниях $1f_{7/2}$ и в приближении δ-сил. Расчет с использованием экспериментальных данных о взаимодействии протона и нейтрона удовлетворительно согласуется со схемой уровней ядра Sc^{48}. В приближении δ-сил согласие расчета с экспериментом хуже.

Поступило в редакцию 13.I 1966

ВЕСЦІ АКАДЭМІІ НАВУК БЕЛАРУСКАЙ ССР № 3 1966
СЕРЫЯ ФІЗІКА-МАТЭМАТЫЧНЫХ НАВУК

Ю. Ф. СТРОКАЎ

АПТЫЧНАЯ МАДЭЛЬ ДЛЯ АНТЫНУКЛОН-ЯДЗЕРНЫХ СУТЫКНЕННЯЎ ПРЫ НЕРЭЛЯТЫВІСЦКІХ ЭНЕРГІЯХ

За апошні час з'явілася вельмі вялікая колькасць эксперыментальных даных па антынуклон-нуклонных сутыкненнях пры нерэлятывісцкіх энергіях. Для інтэрпрэтацыі такіх сутыкненняў была прыцягнута аптычная мадэль [1—3]. У выніку ўдалося атрымаць фазы антынуклон-нуклоннага ўзаемадзеяння пры нерэлятывісцкіх энергіях, якія добра апісвалі эксперыментальныя даныя.

Метад Рызенфельда і Ватсана [7] дазваляе на падставе ведання фаз антынуклон-нуклоннага ўзаемадзеяння знайсці канстанты эфектыўнага патэнцыялу ўзаемадзеяння антынуклонаў з ядрамі. Упершыню такая задача была выканана Болам і Фулко [4], якія выкарысталі значэнні фаз, знойдзеных наблíжана Болам і Чу [5].

Мэтай гэтай работы з'яўляецца спроба знайсці канстанты аптычнага патэнцыялу ўзаемадзеяння антынуклонаў з ядрамі па фазах антынуклон-нуклонных узаемадзеянняў, разлічаных намі [1, 2]. Для атрымання патэнцыялу быў праведзены разлік сячэнняў узаемадзеянняў антынуклонаў з ядрамі Be, C і Al у інтэрвале энергіі 20 *Мэв* $\leqslant E_л \leqslant$ $\leqslant$ 140 *Мэв*.

Як вядома [4], антынуклон-ядзернае ўзаемадзеянне пры нерэлятывісцкіх энергіях можа быць апісана ўраўненнем Шрэдзінгера

$$-\frac{1}{2m}\Delta\Psi + U\Psi = E\Psi \tag{1}$$

з комплексным патэнцыялам, які задаецца ў тым жа выглядзе, што і для нуклон-ядзернага ўзаемадзеяння [6]:

$$U(x) = -[V + iW]f(x) + [(V_S + iW_S)h(x)\cdot(\mathbf{Sl})], \tag{2}$$

дзе першы член вызначае цэнтральнае ўзаемадзеянне, а другі — спін-арбітальнае; E — прыведзеная энергія ў сістэме цэнтра мас антынуклон —ядро; $m = AM/(A+1)$ — прыведзеная маса; $h = c = 1$; $x = \mu r$, дзе μ — маса π-мезона; M — маса нуклона; A — атамны лік ядра.

У якасці функцый, якія характарызуюць залежнасць патэнцыялу ад адлегласцей, выкарыстоўваліся наступныя выразы:

$$f(x) = \frac{1}{1 + \exp\left(\frac{x - \mu R_0}{a\mu}\right)},$$

$$h(x) = \left(\frac{\mu}{2M}\right)^2 \frac{1}{x}\frac{df}{dx}, \tag{3}$$

дзе $a=\frac{1}{1,55}\cdot 10^{-13}$ *см* — велічыня, якая характарызуе размытасць мяжы дзеяння ядзерных сіл; $R_0=1,24\cdot A^{1/3}\cdot 10^{-13}$ *см* — радыус ядра.

§ 1. Разлік канстант эфектыўнага патэнцыялу ўзаемадзеяння антынуклонаў з ядрамі

Канстанты V, W, V_S і W_S вызначаліся ў адпаведнасці з метадам Рызенфельда і Ватсана. Формулы для знаходжання гэтых канстант [7], выражаныя праз каэфіцыенты рассеяння антынуклон-нуклоннага ўзаемадзеяння η_{jlS}^T, у нашых абазначэннях запішуцца ў выглядзе:

$$V=\frac{3\mu^3}{32\lambda^3 Mk}\sum_{jlST}(2T+1)(2j+1)\operatorname{Im}\eta_{jlS}^T,$$

$$W=\frac{3}{4\pi\lambda^3}\frac{k\bar{\sigma}\mu^3}{M},$$

$$V_S=\frac{3\mu^5}{128\lambda^3 Mk^3}\sum_{Tjl,S=1}(2T+1)(2j+1)[-\operatorname{Im}\eta_{j,l=j,1}^T+ \tag{4}$$

$$+(j-1)\operatorname{Im}\eta_{j,l=j-1,1}^T-(j+2)\operatorname{Im}\eta_{j,l=j+1,1}^T],$$

$$W_S=\frac{3\mu^5}{128\cdot\lambda^3 Mk^3}\sum_{Tjl,S=1}(2T+1)(2j+1)[-(1-\operatorname{Re}\eta_{j,l=j,1}^T)+$$

$$+(j-1)(1-\operatorname{Re}\eta_{j,l=j-1,1}^T)-(j+2)(1-\operatorname{Re}\eta_{j,l=j+1,1}^T)],$$

дзе k — імпульс налятаючага антынуклона ў сістэме цэнтра мас антынуклон — нуклон; $\bar{\sigma}$ — сярэдняе значэнне поўнага сячэння ўзаемадзеяння антынуклонаў з нуклонамі; $\lambda=0,8857$ — некаторы параметр.

Падстаўляючы ў гэтыя формулы каэфіцыенты рассеяння η_{jeS}^T, знойдзеныя намі раней [1, 2], атрымаем велічыні канстант V, W, V_S і W_S у даследуемым інтэрвале энергіі 20 *Мэв* $< E <$ 140 *Мэв*, якія прыводзяцца ў табл. 1. Для параўнання ў табліцы выпісаны значэнні тых жа канстант, разлічаных па фазах Бола і Чу [5].

Табліца 1

Канстанты аптычнага патэнцыялу (*Мэв*)

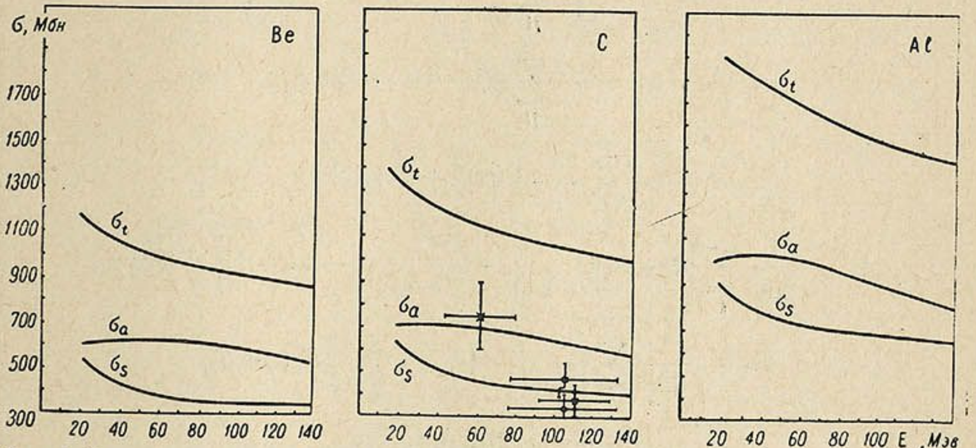
	Разлік па нашых фазах пры розных энергіях (*Мэв*)				Разлік па фазах Бола і Чу пры розных энергіях (*Мэв*)	
	20,05	40,2	80,86	142,7	50,0	140,0
V	—22,68	—18,4	—20,9	— 8,68	— 0,66	—12,1
W	65,88	76,12	87,32	97,12	64,0	77,0
V_S	— 2,07	3,19	2,18	1,2	3,2	2,9
W_S	—14,87	— 7,1	— 3,32	— 1,66	— 4,2	1,7

З узрастаннем энергіі амаль усе канстанты патэнцыялу змяншаюцца па абсалютнай велічыні, акрамя W, што апісвае паглынанне, якая, наадварот, узрастае. Цікава адзначыць, што аналагічныя паводзіны канстант назіраюцца і для выпадку нуклон-ядзернага ўзаемадзеяння, адрозніваючыся толькі знакам перад V. Параўноўваючы канстанты.

атрыманыя на аснове нашых каэфіцыентаў рассеяння, з канстантамі, разлічанымі на аснове фаз Бола і Чу, можна заўважыць даволі вялікае адрозненне асабліва пры малых энергіях. Таму натуральнай з'яўляецца спроба разгледзець антынуклон-ядзернае ўзаемадзеянне для патэнцыялу з канстантамі, атрыманымі на аснове нашых разлікаў адносна антынуклон-нуклонных сутыкненняў.

§ 2. Вызначэнне сячэнняў узаемадзеяння антынуклонаў з ядрамі Be, C і Al

Для атрыманага намі патэнцыялу былі знойдзены сячэнні паглынання, пругкага рассеяння і поўнага сячэння, а таксама вуглавога размеркавання і палярызацыі пры сутыкненнях антынуклонаў з ядрамі Be, C і Al у інтэрвале энергіі 20 *Мэв* $\leqslant E_л \leqslant$140 *Мэв*. Пры гэтым меркавалася, што спіны антынуклонаў, якія налятаюць на ядры, арыентаваны



Рыс. 1. Сячэнні паглынання, пругкага рассеяння, а таксама поўныя сячэнні ўзаемадзеяння антынуклонаў з ядрамі Be, C і Al (эксперыментальныя даныя ўзяты з работ: × — з [11], ● — з [10], ■ — з [10])

хаатычна, а ў ядраў спін роўны нулю. Тады хвалевая функцыя налятаючага антынуклона можа быць запісана ў выглядзе раскладання па сферычных функцыях са спінам $\Phi_{jm}^{lS}(\vartheta)$

$$\psi = \sum_{jml} \frac{u_{jl}}{x} \Phi_{jm}^{lS}(\vartheta). \tag{5}$$

Падставіўшы гэты выраз ва ўраўненне [1], праінтэграваўшы па ϑ і адпаведным чынам прасумаваўшы па j, l, m, S, атрымаем для радыяльнай часткі хвалевай функцыі наступную пару ўраўненняў:

$$\begin{aligned} &\frac{d^2 u_{l+\frac{1}{2},\, l}}{dx^2} + \frac{2AM}{(A+1)\mu^2}[E-(V+iW)f(x)+ \\ &+(l+1)(V_S+iW_S)h(x)]\, u_{l+\frac{1}{2},\, l} - \frac{l(l+1)}{x^2}\, u_{l+\frac{1}{2},\, l} = 0, \\ &\frac{d^2 u_{l-\frac{1}{2},\, l}}{dx^2} + \frac{2AM}{(A+1)\mu^2}[E-(V+iW)f(x)- \end{aligned} \tag{6}$$

$$- l (V_S + i W_S) h(x)] u_{l-\frac{1}{2}, l} - \frac{l(l+1)}{x^2} u_{l-\frac{1}{2}, l} = 0.$$

Рашэнне гэтых ураўненняў праводзілася на машыне «Мінск-2» для $0 \leqslant l \leqslant 9$.

Па звычайных формулах квантавай тэорыі рассеяння адшукваюцца сячэнні пругкага рассеяння, паглынання і поўнага сячэння, а таксама вуглавое размеркаванне пругкага рассеяння і адносная велічыня палярызацыі:

$$\sigma_S = \frac{\pi\lambda^2}{2} \sum_{jl} (2j+1) |1 - \eta_{jl}|^2,$$

$$\sigma_a = \frac{\pi\lambda^2}{2} \sum_{jl} (2j+1) (1 - |\eta_{jl}|^2), \tag{7}$$

$$\sigma_t = \pi\lambda^2 \sum_{jl} (2j+1) (1 - \mathrm{Re}\, \eta_{jl});$$

$$\frac{d\sigma_S}{d\cos\vartheta} = 2\pi \{|A_1|^2 + |A_2|^2\}, \tag{8}$$

$$A_1 = \frac{1}{2ik} \sum_l \left\{(l+1) \eta_{l+\frac{1}{2}, l} + l \eta_{l-\frac{1}{2}, l} - (2l+1)\right\} P_l(\cos\vartheta),$$

$$A_2 = \frac{1}{2ik} \sum_l \left\{\eta_{l+\frac{1}{2}, l} - \eta_{l-\frac{1}{2}, l}\right\} P_l^1(\cos\vartheta),$$

$$P(\vartheta) = \frac{2 \operatorname{Im} A_1 A_2^*}{\dfrac{d\sigma_S}{d\cos\vartheta}} \cdot n,$$

дзе $\mathbf{n} = [\mathbf{k}_1\mathbf{k}_1']/|[\mathbf{k}_1\mathbf{k}_1']|$ — адзінкавы вектар, $\mathbf{k}_1$ і $\mathbf{k}_1'$ — імпульсы адпаведна да і пасля рассеяння; $\lambda = \sqrt{\mu^2 (A+1)/2MAE}$.

У разліках не прымалася пад увагу кулонаўскае ўзаемадзеянне, паколькі ў тым інтэрвале энергіі, у якім праводзіліся разлікі, папраўка на кулонаўскія сілы, відаць, невялікая. Уплыў кулонаўскага прыцягнення пры ўзаемадзеянні антынуклонаў з ядрамі ў даследуемым інтэрвале энергіі, як адзначалася ў [8, 9], нязначны.

На рыс. 1 прыводзяцца вынікі разлікаў сячэнняў пругкага рассеяння σ_s, паглынання σ_a і поўнага сячэння σ_t для ўзаемадзеяння антынуклонаў з ядрамі Be, C і Al. Для параўнання быў праведзены разлік сячэнняў узаемадзеянняў для патэнцыялу з канстантамі, знойдзенымі па фазах Бола і Чу, якія выпісаны ў табл. 1. Рэзультаты гэтага разліку прыводзяцца ў табл. 2.

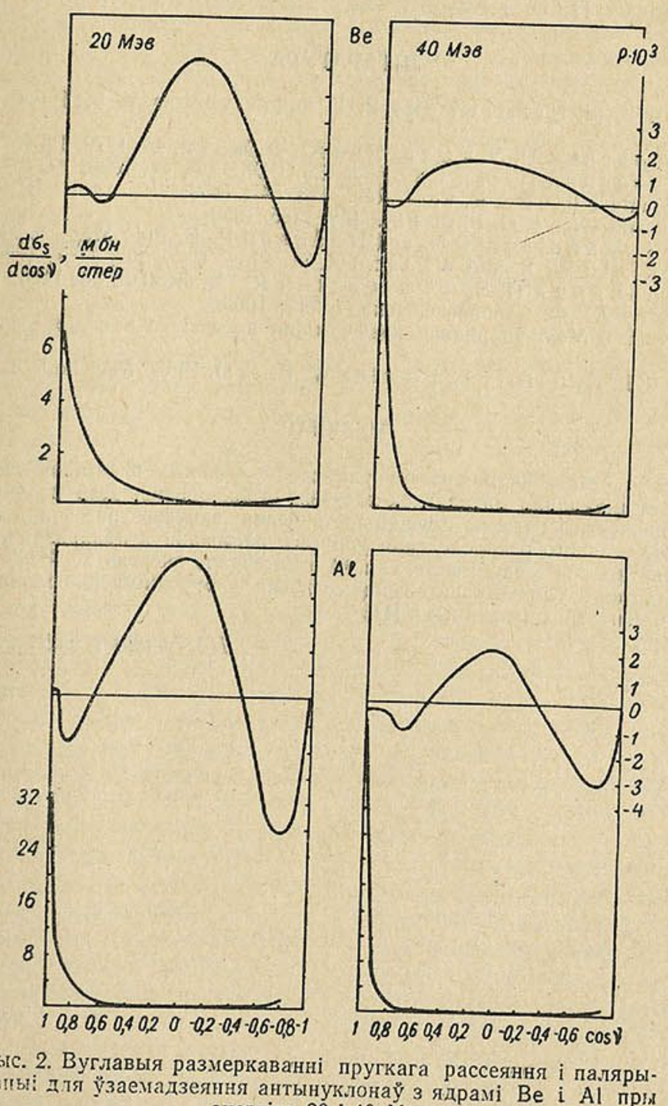
Пры малых энергіях разлікі з нашымі канстантамі на 20—25% бліжэй да эксперымента [10, 11], чым з канстантамі, знойдзенымі па фазах Бола і Чу. З узрастаннем энергіі гэта адрозненне згладжваецца, паколькі значэнні саміх канстант набліжаюцца адно да аднаго. Пры павелічэнні атамнага ліку сячэнні ўзрастаюць прыблізна як $A^{1/3}$.

На рыс. 2 прыведзены крывыя дыферэнцыяльнага пругкага рассеяння і палярызацыі антынуклонаў на ядрах Be і Al для дзвюх

Табліца 2

Рэзультаты разліку сячэнняў узаемадзеянняў для патэнцыялу з канстантамі, знойдзеннымі на фазах Бола і Чу

$E_л$, Мэв / σ, Мбн	Be		C		Al	
	50	140	50	140	50	140
σ_s	341	299	406	359	667	633
σ_a	596	497	683	566	984	816
σ_t	937	796	1089	925	1651	1449



Рыс. 2. Вуглавыя размеркаванні пругкага рассеяння і палярызацыі для ўзаемадзеяння антынуклонаў з ядрамі Be і Al пры энергіях 20 і 40 *Мэв*

энергій 20 і 40 *Мэв*. Дыферэнцыяльнае сячэнне пругкага рассеяння моцна анізатропнае ў адпаведнасці з наяўнымі, праўда не вельмі дакладнымі, эксперыментальнымі данымі [11]. З пераходам да больш цяжкага ядра прыкметна павелічэнне анізатропіі ў вуглавым размеркаванні, але палярызацыя не змяняецца, застаючыся практычна роўнай нулю.

З прычыны недастатковай колькасці эксперыментальных даных па антынуклон-ядзерных сутыкненнях і іх невысокай дакладнасці нельга правесці канчатковага выбару канстант аптычна-мадэльнага патэнцыялу, але ўсё ж і для скарыстоўваемых у гэтых разліках канстант атрымана здавальняючая ўзгодненасць з эксперыментальнымі данымі, праўда, не ва ўсёй даследуемай вобласці энергіі.

У заключэнне выказваю глыбокую ўдзячнасць доктару фізіка-матэматычных навук П. Э. Неміроўскаму за каштоўныя парады і заўвагі.

ЛІТАРАТУРА

1. Elagin Y. P., Nemirowsky P. E. and Strokov Y. F. Phys. Lett., **7**, 352, 1963.
2. Немировский П. Э. и Строков Ю. Ф. ЖЭТФ, **46**, 1379, 1964.
3. Немировский П. Э. и Елагин Ю. П. ЖЭТФ, **44**, 1099, 1963.
4. Ball J. and Fulco J. R. Phys. Rev., **113**, 647, 1959.
5. Ball J. and Chew G. Phys. Rev., **109**, 1385, 1958.
6. Buck B., Maddison R. N. and Hodgson P. E. Phil. Mag., **5**, 1181, 1960.
7. Riesenfeld W. B. and Watson K. M. Phys. Rev., **102**, 1157, 1956.
8. Немировский П. Э. и Фивейский Ю. Д. ЖЭТФ, **38**, 1486, 1960.
9. Строков Ю. Ф. Ядерная физика, **1**, 713, 1965.
10. Сегре Э. 9 Международная конференция по физике высоких энергий. Киев, 1959.
11. Agnew L. E., Elioff T., Fowler W. B. et al. Phys. Rev. Lett., **1**, 27, 1958.

РЕЗЮМЕ

В работе на основе знания фаз антинуклон-нуклонных взаимодействий [1, 2] найден оптический потенциал антинуклон-ядерных столкновений. Для полученного потенциала были проведены расчеты сечений поглощения, упругого рассеяния и полного сечения, а также углового распределения упругого рассеяния и поляризации при взаимодействии антинуклонов с ядрами Be, C и Al в интервале энергии 20 *Мэв* $< E_л <$ 140 *Мэв*, которые находятся в удовлетворительном согласии с имеющимися, правда незначительными, экспериментальными данными [11].

Поступило в редакцию 8.VII 1965

ХРОНІКА

СЕСІЯ АКАДЭМІІ НАВУК БССР

30 чэрвеня 1966 г. адбылася сесія Акадэміі навук БССР, на якой абмяркоўваліся рашэнні майскага (1966 г.) Пленума ЦК КПСС і перспектывы развіцця меліярацыі ў БССР.

Сесію адкрыў прэзідэнт АН БССР акадэмік АН БССР В. Ф. Купрэвіч. Ён падкрэсліў, што меліярацыя тарфяна-балотных глеб з'яўляецца складанай праблемай, для вырашэння якой патрабуецца прыцягненне шырокіх колаў навуковых работнікаў. У сваіх даследаваннях вучоным неабходна ўдзяляць асаблівую ўвагу пытанню ўздыму ўрадлівасці як на новых сельскагаспадарчых угоддзях, так і на землях, якія знаходзяцца ў выкарыстанні.

З дакладам «Майскі Пленум ЦК КПСС і перспектывы развіцця меліярацыі ў БССР» выступіў міністр сельскай гаспадаркі БССР акадэмік АН БССР С. Г. Скарапанаў. Дакладчык падкрэсліў важнае значэнне меліярацыі зямель для развіцця сельскай гаспадаркі Беларусі. Агульная плошча пераўвільготненых зямель, якія адносяцца да аб'ектаў першачарговай меліярацыі, складае звыш 2,5 млн. га. Мільён га забалочаных зямель запланавана меліярыраваць ужо ў бягучай пяцігодцы. Меліярацыя пераўвільготненых зямель у аб'ёмах, якія прадугледжаны рашэннем майскага Пленума ЦК КПСС, у спалучэнні з угнаеннямі дазволіць павялічыць праз пяць гадоў прадукцыю кожнага гектара ў 1,6 раза.

З дакладам «Майскі Пленум ЦК КПСС і задачы навуковых установ АН БССР» выступіў галоўны вучоны сакратар АН БССР акадэмік АН БССР Ф. П. Вінакураў.

Акадэмік Ф. П. Вінакураў далажыў сесіі, што навукова-даследчыя ўстановы АН БССР абмеркавалі і адобрылі рашэнне ЦК КПСС па меліярацыі. Вучоныя АН БССР прымуць актыўны ўдзел у распрацоўцы праблем комплекснага выкарыстання зямельных і водных рэсурсаў, у садзейнічанні эфектыўнаму ўцягненню ў гаспадарчы абарот запасаў падземных вод. Будуць дадзены навуковыя рэкамендацыі для лепшага выкарыстання ўсіх арашаемых і асушаемых зямель з улікам прымянення розных відаў угнаенняў і хімічных сродкаў аховы раслін, распрацаваны меры барацьбы з ветравой і воднай эрозіяй глеб, наступленнем пяскоў і яроў, з паляганнем злакаў і рад іншых пытанняў, звязаных з меліярацыяй.

Далей акадэмік Ф. П. Вінакураў адзначыў, што да цяперашняга часу работа па асваенню Палескай нізіны праводзіцца навуковымі арганізацыямі і ведамствамі БССР разрознена, без узаемнага ўвязвання і ўсебаковага навуковага абгрунтавання. У сувязі з гэтым неабходна стварыць адзіны савет, які аб'ядноўваў бы вучоных і спецыялістаў рэспублікі, для каардынавання работ па Палессю.

У спрэчках выступілі: акадэмікі АН БССР І. Д. Юркевіч, М. А. Дарожкін, Г. В. Багамолаў, А. В. Лыкаў, П. П. Рагавы, члены-карэспандэнты АН БССР А. І. Івіцкі, А. Р. Мядзведзеў, М. У. Смольскі, І. М. Сяржанін, доктар тэхнічных навук М. М. Севярнёў, доктар біялагічных навук С. А. Самцэвіч і іншыя.

Сесія прыняла пастанову, у якой адобрыла рашэнне майскага (1966 г.) Пленума ЦК КПСС па далейшаму развіццю меліярацыі зямель і прапанавала навуковым арганізацыям няўхільна выконваць ускладзеныя на іх задачы па здзяйсненню шырокай праграмы паляпшэння зямель, павышэння іх урадлівасці і атрымання на гэтай аснове высокіх ураджаяў.

4—5 ліпеня 1966 г. адбыўся Агульны сход АН БССР, на якім праведзены выбары акадэмікаў і членаў-карэспандэнтаў АН БССР.

Акадэмікамі АН БССР выбраны:

Фёдараў Фёдар Іванавіч — па спецыяльнасці «тэарэтычная фізіка»,

Чуніхін Сяргей Антонавіч — па спецыяльнасці «матэматыка»,

Супруненка Дзмітрый Аляксеевіч — па спецыяльнасці «матэматыка»,

Вечар Аляксандр Сцяпанавіч — па спецыяльнасці «біяхімія раслін»,

Барбашын Яўгеній Аляксеевіч — па спецыяльнасці «матэматыка»,

Гахаў Фёдар Дзмітрыевіч — па спецыяльнасці «матэматыка»,

Альсмік Пётр Іванавіч — па спецыяльнасці «генетыка і селекцыя»,

Казлоў Мікалай Сямёнавіч — па спецыяльнасці «арганічная «хімія»,

Мішэнін Іван Дзмітрыевіч — па спецыяльнасці «тэрапія»,

Броўка Пётр Усцінавіч — па спецыяльнасці «літаратуразнаўства».

Членамі-карэспандэнтамі АН БССР выбраны:

Барысевіч Мікалай Аляксандравіч — па спецыяльнасці «оптыка»,

Вафіядзі Уладзімір Гаўрылавіч — па спецыяльнасці «фізічная электроніка»,

Забродскі Сяргей Сцяпанавіч — па спецыяльнасці «цепла- і масаабмен»,

Канавалаў Яўменій Рыгоравіч — па спецыяльнасці «фізіка цвёрдага цела»,

Арынчын Мікалай Іванавіч — па спецыяльнасці «фізіялогія чалавека»,

Марцынкевіч Фелікс Станіслававіч — па спецыяльнасці «эканоміка».

Агульны сход зацвердзіў змяненні ў Статуце АН БССР.

ЗМЕСТ

МАТЭМАТЫКА

Нгуен Конг Туй. О сходимости метода характеристик 5

А. Х. Турецкий. Конечно-разностные аналоги задачи Ахиезера — Крейна и Фавара 10

С. В. Яновский. Полные уравнения типа свертки 23

Н. А. Рысюк. Уравнения и системы интегральных уравнений с логарифмическими ядрами 28

В. Б. Дыбин. Исключительный случай интегральных уравнений типа свертки 37

В. М. Мадорский. О достаточных признаках сходимости одного варианта метода усредненных поправок 46

З. М. Дымент. Максимальные коммутативные нильпотентные подалгебры матричной алгебры шестой степени 53

А. И. Саксонов. О целочисленном кольце характеров конечной группы . . 69

Л. Е. Загорин. О неприводимых нильпотентных группах матриц над телом вещественных кватернионов 77

Р. Т. Вольвачев. Неприводимый абелев нормальный делитель абсолютно неприводимой локально нильпотентной линейной группы 82

Н. А. Лепешинский. Об одной задаче теории расписаний 90

А. К. Лапковский. О конформно-евклидовых пространствах первого класса неопределенной метрики 97

ФІЗІКА

Х. Н. Сотская, Ф. И. Федоров. Особые точки кривых сечения поверхностей упругих волн в кристаллах 107

В. С. Іваніцкая, Н. Ф. Касцюк. Аб сувязі лакальнай абсалютнай адначасовасці з неэўклідавасцю геаметрыі 117

Г. К. Ільіч, П. Б. Бойка. Азімутальная структура адбітага святла . . . 124

Э. А. Рудак. Структура ніжніх узроўняў ядра Sc^{48} і эфектыўнае пратон-нейтроннае ўзаемадзеянне ў падабалонцы $l_{7/2}$ 129

Ю. Ф. Строкаў. Аптычная мадэль для антынуклон-ядзерных сутыкненняў пры нерэлятывісцкіх энергіях 133

ХРОНІКА

Сесія Акадэміі навук БССР 139

СОДЕРЖАНИЕ

МАТЕМАТИКА

Нгуен Конг Туй. О сходимости метода характеристик 5

А. Х. Турецкий. Конечно-разностные аналоги задачи Ахиезера—Крейна и Фавара 10

С. В. Яновский. Полные уравнения типа свертки 23

Н. А. Рысюк. Уравнения и системы интегральных уравнений с логарифмическими ядрами 28

В. Б. Дыбин. Исключительный случай интегральных уравнений типа свертки 37

В. М. Мадорский. О достаточных признаках сходимости одного варианта метода усредненных поправок 46

З. М. Дымент. Максимальные коммутативные нильпотентные подалгебры матричной алгебры шестой степени 53

А. И. Саксонов. О целочисленном кольце характеров конечной группы . . 69

Л. Е. Загорин. О неприводимых нильпотентных группах матриц над телом вещественных кватернионов 77

Р. Т. Вольвачев. Неприводимый абелев нормальный делитель абсолютно неприводимой локально нильпотентной линейной группы 80

Н. А. Лепешинский. Об одной задаче теории расписаний 90

А. К. Лапковский. О конформно-евклидовых пространствах первого класса неопределенной метрики 97

ФИЗИКА

Х. Н. Сотская, Ф. И. Федоров. Особые точки кривых сечения поверхностей упругих волн в кристаллах 107

О. С. Иваницкая, Н. Ф. Костюк. О связи локальной абсолютной одновременности с неевклидовостью геометрии 117

Г. К. Ильич, П. Б. Бойко. Азимутальная структура отраженного света . . 124

Э. А. Рудак. Структура нижних уровней ядра Sc^{48} и эффективное протоннейтронное взаимодействие в подоболочке $1f_{7/2}$ 129

Ю. Ф. Строков. Оптическая модель для антинуклон-ядерных столкновений при нерелятивистских энергиях 133

ХРОНИКА

Сессия Академии наук БССР 139

АТ 04483. Здадзена ў набор 13/VI-66 г. Падпісана да друку 28/IX-66 г. Фармат $70 \times 108^1/_{16}$. Фіз. друк. арк. 9,0. Ум. друк. арк. 12,33. Уч.-выд. арк. 12,5. Выд. заказ 140. Друк. заказ 656. Цана 60 кап.

Друкарня выдавецтва «Навука і тэхніка» АН БССР і Камітэта па друку пры Савеце Міністраў БССР. Мінск, Ленінскі праспект, 68.

ВНИМАНИЮ АВТОРОВ

Статьи, присылаемые авторами в наш журнал, будут приниматься редакцией к печати только при наличии двух экземпляров автореферата, удовлетворяющего указанным ниже требованиям.

ИНСТРУКЦИЯ

по составлению рефератов для авторов отечественных периодических изданий

Постановлением Совета Министров СССР от 18/IV 1959 г. № 418 и последующим решением Государственного комитета по координации научно-исследовательских работ СССР и Президиума Академии наук СССР редакции научных и научно-технических журналов обязаны представлять в ВИНИТИ рефераты публикуемых материалов.

В настоящей инструкции сформулированы требования к содержанию и оформлению рефератов, которыми и следует руководствоваться.

Требования, предъявляемые к реферату

1. В реферате кратко излагается основное содержание статьи. Реферат должен дать читателю представление о характере освещаемой работы, оригинальности постановки вопроса, методике проведения исследования и его основных результатах.

2. Реферату должно предшествовать библиографическое описание в следующем виде: название статьи, фамилия и инициалы автора, название журнала, где помещается статья. Текст реферата начинается непосредственно с изложения существа работы без повторения заголовка. Форма изложения материала не обязательно должна повторять форму изложения оригинальной статьи.

3. Если оригинал содержит большое количество цифровых данных, их следует обобщить и систематизировать.

4. Средний объем реферата 0,5—2 страницы машинописного текста, отпечатанного через два интервала на белой писчей бумаге обычного формата (30×21) в двух экземплярах с полем 4 *см* с левой стороны.

5. Таблицы, схемы, графики и пр. могут быть включены в том случае, если они отражают основное содержание работы или сокращают текст реферата. Сообщение о наличии в реферируемой работе таблиц, схем, графиков, фотографий, карт, рисунков необходимо давать в конце реферата. Например, табл. 2, илл. 10.

6. Формулы приводятся только в том случае, если они необходимы для понимания статьи. Громоздкие математические выражения помещать не следует. Формулы следует вписывать четко, не изменяя принятых в оригинале обозначений величин. Формулы и буквенные обозначения вписываются черными чернилами в оба экземпляра.

7. В конце реферата в квадратных скобках указывается название учреждения или предприятия, в которых автор реферируемой работы (если эти данные приводятся в статье) провел работу. Подпись автора и дату написания реферата следует ставить в левом нижнем углу на обоих экземплярах реферата.

60 коп.

Индекс
74346

ПРОИЗВОДИТСЯ ПОДПИСКА НА 1967 ГОД

НА ЖУРНАЛ

„ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК БССР"

Серия физико-математических наук

Журнал освещает общие принципиальные вопросы развития советской науки, публикует материалы научных исследований и итоги работ институтов Академии наук БССР и других научно-исследовательских учреждений БССР в области математики (методы вычислительной математики, уравнения математической физики, алгебра и теория групп и др.), общей и теоретической физики (оптика, физика твердого тела и полупроводников, теория полей и элементарных частиц и др.). Печатает обзоры по важнейшим разделам физико-математических наук, рецензии на выходящие в СССР научные издания, а также хронику научной жизни.

Журнал рассчитан на научных работников научно-исследовательских учреждений, преподавателей высших учебных заведений, аспирантов и студентов старших курсов вузов физико-математического профиля.

Журнал печатается на белорусском языке, статьи сопровождаются резюме на русском языке. Отдельные статьи печатаются на русском языке.

ВЫХОДИТ 4 РАЗА В ГОД.

ПОДПИСНАЯ ЦЕНА НА ГОД 2 РУБ. 40 КОП.

Подписка принимается всеми конторами, отделениями связи, отделами «Союзпечать», почтальонами, а также общественными распространителями печати на промышленных предприятиях, в научно-исследовательских институтах, учебных заведениях и учреждениях.