

5em

660.000

ВЕСЦІ

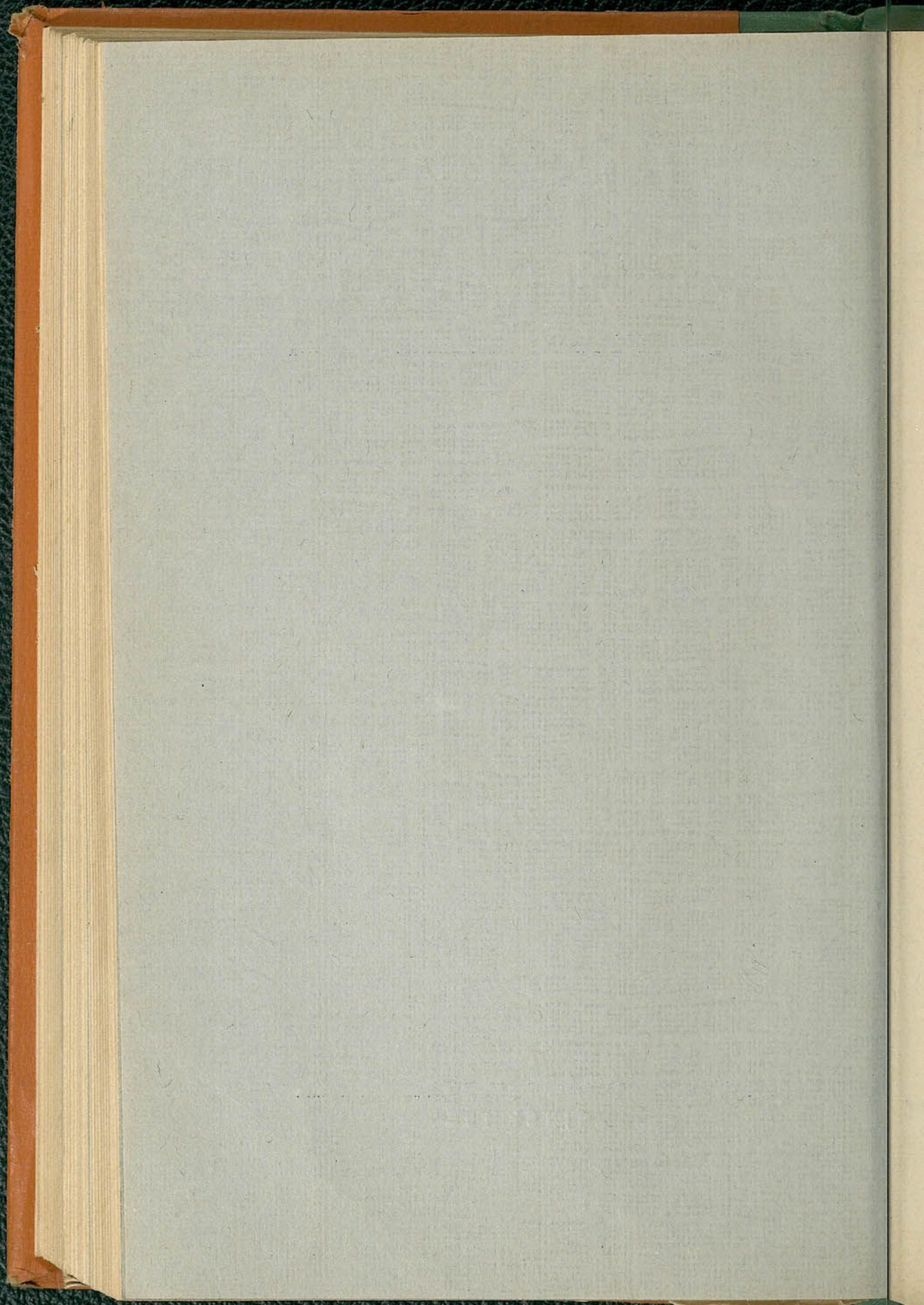
АКАДЭМІІ НАВУК БССР

СЕРЫЯ
ФІЗІКА-МАТЭМАТЫЧНЫХ
НАВУК

4

ВЫДАВЕЦТВА „НАБУНА І ТЭХНІКА“

МІНСК 1986





ИЗВЕСТИЯ

АКАДЕМИИ НАУК БССР

СЕРИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ
НАУК

№ 4

ИЗДАТЕЛЬСТВО „НАУКА И ТЕХНИКА“

М И Н С К 1 9 6 6

66 0 7 5 0 0

ВЕСЦІ

АКАДЭМІІ НАВУК БССР

СЕРЫЯ
ФІЗІКА-МАТЭМАТЫЧНЫХ
НАВУК

№ 4

Ба 3545

ВЫДАВЕЦТВА „НАВУКА І ТЭХНІКА“

МІНСК 1966



РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ:

Ф. И. ФЕДАРАУ (галоўны рэдактар),
Л. Ф. ІЛЬЮШЭНКА (нам. галоўнага рэдактара),
М. М. АЛЯХНОВІЧ, А. П. ВЕРАБ'ЕУ, У. І. КРЫЛОУ,
М. М. СІРАТА, У. Г. СПРЫНДЖУК, Д. А. СУПРУНЕНКА,
Я. І. ФІРСАУ, С. А. ЧУНІХІН

А. К. ЛАПКОВСКИЙ

О КОНФОРМНО-ПЛОСКИХ ПРОСТРАНСТВАХ 1-ГО КЛАССА
 НЕОПРЕДЕЛЕННОЙ МЕТРИКИ

1. Рассматриваем два римановых пространства V_n и \bar{V}_n , находящихся в конформном соответствии:

$$d\bar{s}^2 = a^2 ds^2, \quad (1)$$

где a — функция класса C_2 от x^1, \dots, x^n .

Если $\omega^i, \bar{\omega}^i$ — формы инфинитезимального смещения соответственно в пространствах V_n и \bar{V}_n относительно семейства ортонормированных, вообще говоря, неголономных реперов, то условие (1) представится в виде

$$\bar{\omega}^i \bar{\omega}_i = a^2 \omega^i \omega_i \quad (i = 1, \dots, n), \quad (1')$$

откуда

$$\bar{\omega}^i = a \omega^i. \quad (2)$$

Дифференцируя (2) внешним образом, в соответствии с первой группой уравнений структуры пространств V_n и \bar{V}_n

$$D\omega^i = [\omega^k \omega_i^k], \quad D\bar{\omega}^i = [\bar{\omega}^k \bar{\omega}_i^k] \quad (k = 1, \dots, n) \quad (3)$$

получим следующую зависимость на формы римановых связностей $\omega_{ij}, \bar{\omega}_{ij}$:

$$\bar{\omega}_{ij} = \omega_{ij} + b_i \omega_j - b_j \omega_i \quad (j = 1, \dots, n), \quad (4)$$

где b_i определяется из условия

$$\frac{da}{a} = b_j \omega^j. \quad (5)$$

Формы кривизны Ω_{ij} и $\bar{\Omega}_{ij}$ пространств V_n и соответственно \bar{V}_n

$$\Omega_{ij} = D\omega_{ij} - [\omega_{ik} \omega_j^k], \quad \bar{\Omega}_{ij} = D\bar{\omega}_{ij} - [\bar{\omega}_{ik} \bar{\omega}_j^k] \quad (6)$$

связаны соотношениями

$$\bar{\Omega}_{ij} = \Omega_{ij} + p_{ik} [\omega^k, \omega_j] - p_{jk} [\omega^k, \omega_i] + b^k b_k [\omega_i, \omega_j], \quad (7)$$

где симметрическая матрица (p_{ik}) определяется из разложения

$$db_i - b_k \omega_i^k - b_i \frac{da}{a} = p_{ik} \omega^k. \quad (8)$$

Соотношение (8) примет вид

$$dc_i - c_k \omega_i^k = \frac{p_{ik}}{a} \omega^k, \quad (9)$$

если ввести

$$c_i = \frac{b_i}{a}. \quad (10)$$

Формулы (1) — (10) при предположении положительно-определенной метрики рассматривал М. Курита ([1], стр. 13 — 14). При этом условии симметрическая матрица (p_{ik}) имеет ортонормированный репер главных направлений; соответствующие собственные значения p_i называются характеристическими корнями \bar{V}_n , конформно-соответствующего V_n ([1], стр. 15). В общем случае неопределенной метрики могут существовать не простые элементарные делители μ -матрицы

$$(p_{ik} - \mu g_{ik}) \quad (11)$$

и матрица (p_{ik}) не приводится к диагональному виду.

2. Мы изучаем конформное соответствие пространства V_n первого класса с псевдоевклидовым пространством ${}^l E_n$. Это означает, что формы кривизны $\bar{\Omega}_{ij}$ равны нулю, а $\bar{\Omega}_{ij}$ представимы в виде

$$\bar{\Omega}_{ij} = -\tau [\bar{\omega}_i^{n+1}, \bar{\omega}_j^{n+1}] = -\tau (\Lambda_{ik} \Lambda_{jl} - \Lambda_{il} \Lambda_{jk}) [\bar{\omega}^k \bar{\omega}^l] \quad (12)$$

$$(\tau = \pm 1, l = 1, \dots, n),$$

где формы Пфаффа $\bar{\omega}_i^{n+1} = \Lambda_{ij} \bar{\omega}^j$ являются формами вложения гиперповерхности с метрической формой $d\bar{s}^2$ в (псевдо) евклидово пространство ${}^m E_{n+1}$ (m может отличаться от l на 1 в зависимости от знака τ).

Они удовлетворяют уравнениям структуры (псевдо) евклидова пространства ${}^m E_{n+1}$

$$D \bar{\omega}_i^{n+1} = [\bar{\omega}^l \omega_j^{n+1}]. \quad (13)$$

В работе [2] показано, что для конформно-евклидовой гиперповерхности характеристика Сегре λ -матрицы

$$(\Lambda_{ij} - \lambda g_{ij}) \quad (14)$$

может быть только двух видов:

$$1) \text{ а. } \underbrace{[(1 \dots 1)]}_{n-1} \quad \text{б. } \underbrace{[(1 \dots 1)]}_n; \quad 2) [(1 \dots 12)]. \quad (15)$$

В случае (15₂) можно выбрать такой вещественный орторепер, в котором тензор Λ_{ij} примет вид

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \lambda & & & & & \\ & \cdot & & & & \\ & & \varepsilon_{n-2} \lambda & & & \\ & & \varepsilon (\lambda + 1) & & \varepsilon & \\ & & \varepsilon & & -\varepsilon (\lambda - 1) & \end{bmatrix}, \quad (16)$$

где невыписанные элементы матрицы равны нулю.

Приравнявая правые части равенств (7), (12) с учетом (16), получим условия на элементы матрицы (p_{jk}) :

$$-\tau a^2 \lambda^2 = b^k b_k + \varepsilon_\alpha p_{\alpha\alpha} + \varepsilon_\beta p_{\beta\beta}, \quad p_{\alpha\beta} = 0 \quad (\alpha \neq \beta, \alpha, \beta = 1, \dots, n-2), \quad (17)$$

$$-\tau a^2 \lambda^2 = b^k b_k + \varepsilon p_{n-1n-1} - \varepsilon p_{nn}, \quad p_{an-1} = p_{an} = 0, \quad (18)$$

$$-\tau a^2 \lambda (\lambda + 1) = b^k b_k + \varepsilon_\alpha p_{\alpha\alpha} + \varepsilon p_{n-1n-1}, \quad (19)$$

$$-\tau a^2 \lambda (\lambda - 1) = b^k b_k + \varepsilon_\alpha p_{\alpha\alpha} - \varepsilon p_{nn}, \quad (20)$$

$$-\tau a \lambda^2 = \varepsilon p_{n-1n}. \quad (21)$$

Из условий (19) или же (20) следует, что

$$\varepsilon_1 p_{11} = \dots = \varepsilon_{n-2} p_{n-2n-2} = p. \quad (22)$$

Здесь введено обозначение $\varepsilon_\alpha p_{\alpha\alpha} = p$.

Из других зависимостей легко получить, что

$$p_{n-1,n-1} = p_{n-1n} + p\varepsilon, \quad p_{nn} = p_{n-1n} - \varepsilon p.$$

Можно показать, что μ -матрица $(p_{ij} - \mu g_{ij})$

$$\left[\begin{array}{cccc} \varepsilon_1 (p - \mu) & & & \\ & \ddots & & \\ & & \varepsilon_{n-2} (p - \mu) & \\ & & & \varepsilon (p + \varepsilon p_{n-1n} - \mu) & p_{n-1n} \\ & & & p_{n-1n} & -\varepsilon (p - \varepsilon p_{n-1n} - \mu) \end{array} \right] \quad (23)$$

имеет характеристику типа $[(1\dots 12)]$, а p — ее собственное значение.

Итак, доказана

Теорема 1. Пусть V_n ($n > 3$) — конформно-плоское пространство первого класса с характеристикой Сегре λ -матрицы $(\Lambda_{ij} - \lambda q_{ij})$ второго фундаментального тензора гиперповерхности W_n в E_{n+1} типа $[(1\dots 12)]$. Тогда такую же характеристику имеет и μ -матрица

$$(p_{jk} - \mu g_{jk}).$$

3. Рассмотрим обратную задачу. Пусть V_n — конформно-плоское пространство. Тогда его формы кривизны $\bar{\Omega}_{ij}$ представимы в виде (7), где формы Ω_{ij} равны нулю. Докажем, что если характеристика μ -матрицы (11) типа $[(1\dots 12)]$ и выполняется неравенство $\tau(2p + b^i b_i) < 0$, где p — собственное значение матрицы (p_{ik}) , то V_n есть пространство 1-го класса.

Вследствие заданной характеристики μ -матрицы (11) матрица (p_{ik}) в некотором вещественном орторепере примет канонический вид (16), где вместо λ следует положить p . Сравнивая представление (7) форм кривизны $\bar{\Omega}_{ij}$ при условии каноничности матрицы (p_{jk}) с представлением (12), приходим к системе условий на тензор Λ_{ij} :

$$\Lambda_{\alpha\beta} = 0 \quad (\alpha \neq \beta), \quad (2p \neq b^i b_i),$$

$$\varepsilon_1 \Lambda_{11} = \dots = \varepsilon_{n-2} \Lambda_{n-2n-2} = \lambda, \quad \Lambda_{n-1\alpha} = \Lambda_{n\alpha} = 0,$$

$$2p + b^i b_i = -\tau a^2 \lambda^2, \quad (24)$$

$$2p + 1 + b^i b_i = -\tau a^2 \varepsilon \lambda \Lambda_{n-1n-1}, \quad (25)$$

$$-\varepsilon \tau a^2 \lambda \Lambda_{n-1n} = 1, \quad (26)$$

$$2p - 1 + b^i b_i = \tau a^2 \varepsilon \lambda \Lambda_{nn}. \quad (27)$$

Из (25), (27) в силу (24), (26) следует:

$$\Lambda_{n-1n-1} = \varepsilon (\lambda + \Lambda_{n-1n}), \quad \Lambda_{nn} = -\varepsilon (\lambda - \Lambda_{n-1n}).$$

Итак, второй фундаментальный тензор искомой гиперповерхности примет вид

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \lambda & & & \\ & \varepsilon_{n-2} \lambda & & \\ & & \varepsilon (\lambda - \tau/a^2 \lambda) & \varepsilon \tau/a^2 \lambda \\ & & \varepsilon \tau/a^2 \lambda & -\varepsilon (\lambda + \tau/a^2 \lambda) \end{bmatrix}, \quad (28)$$

где λ определяется через величины, характеризующие пространство V_n равенством (24). Для существования λ функция a должна быть такова, чтобы

$$\tau (2\rho + b^i b_i) < 0. \quad (29)$$

Докажем, что тензор Λ_{ij} удовлетворяет уравнениям Петерсона — Кодацци:

$$\Lambda_{ijkl} - \Lambda_{iklj} = 0, \quad (30)$$

где знаком | отмечена ковариантная производная во внутренней связности гиперповерхности, совпадающей со связностью пространства V_n :

$$\bar{\omega}_{ij} = \omega_{ij} + ac_i \omega_j - ac_j \omega_i,$$

где c_i определяется условием (10), а ω_i и ω_{ij} являются формами связности (псевдо) евклидова пространства 1E_n .

Но уравнения (30) эквивалентны уравнениям структуры (псевдо) евклидова пространства ${}^mE_{n+1}$ (13), причем формы $\bar{\omega}_i^{n+1}$ в зависимости от i принимают вид:

$$\begin{aligned} \bar{\omega}_\alpha^{n+1} &= \lambda a \omega_\alpha, \\ \bar{\omega}_{n-1}^{n+1} &= \lambda a \omega_{n-1} - \frac{\tau}{a \lambda} \Theta, \\ \bar{\omega}_n^{n+1} &= -\frac{\tau}{a \lambda} \Theta + \lambda a \omega_n, \end{aligned} \quad (31)$$

где $\Theta = \omega_{n-1} - \omega_n$.

Рассмотрим условия на связность $\bar{\omega}_{ij}$ пространства V_n , отнесенного к семейству реперов, в которых матрица (p_{jk}) принимает вид (16), где вместо λ следует положить p .

Эти условия мы получим, дифференцируя внешне соотношения (9) и раскладывая коварианты по лемме Картана ([3], стр. 101).

Имеем:

$$\begin{aligned} \omega_\alpha^{n-1} + \omega_\alpha^n &= -a (v \omega_\alpha + r_\alpha \Theta), \\ (2/a) \omega_{n-1}^n + \varepsilon r_\beta \omega^\beta + c_i \omega^i + v \omega_{n-1} &= s \Theta, \\ (2/a) \omega_{n-1}^n + \varepsilon r_\beta \omega^\beta + c_i \omega^i + v \omega_n &= (s - v) \Theta. \end{aligned} \quad (32)$$

Непосредственным вычислением показывается, что уравнения (13) тождественно удовлетворяются в силу соотношений (31), (32) и уравнения

$$-\tau a \lambda d \lambda = d(p/a) + (c^{n-1} + c^n) \Theta,$$

полученного дифференцированием (24) с учетом (10).

Тем самым доказана

Теорема 2. Если V_n — конформно-плоское пространство и характеристика μ -матрицы $(p_{jk} - \mu g_{jk})$ типа [(1...12)], то при выполнении неравенства

$$\tau(2p + b^i b_i) < 0,$$

V_n есть пространство первого класса.

Заметим, что, как следует из (28), λ -матрица (14) второго фундаментального тензора гиперповерхности имеет характеристику типа [(1...12)].

Мы не рассмотрели случай, когда характеристика тензора Λ_{ij} имеет вид:

$$\text{а. [(1...1) 1]; б. [(1...1)].} \quad (33)$$

Для пространств положительно определенной метрики этот случай является единственно возможным; он подробно был исследован в работе [1]. Можно показать, что теоремы 1—5 (стр. 22—30 этой работы) сохраняют силу и для того случая неопределенной метрики, когда характеристика μ -матрицы $(p_{jk} - \mu g_{jk})$ имеет вид (33); такой же вид имеет и характеристика λ -матрицы $(\Lambda_{jk} - \lambda g_{jk})$.

Пусть пространство V_n отнесено к голономной системе координат. Тогда

$$ds^2 = a^2 \sum_{i=1}^n \varepsilon_i (dx^i)^2.$$

Следовательно, $\omega^i = dx^i$ и $\omega_{ij} = 0$. В силу (5) и (8) b_i, p_{ik} представляем в виде

$$b_i = \alpha_{,i}, \quad p_{ik} = \alpha_{,ik} - \alpha_{,i} \alpha_{,k},$$

где

$$\alpha_{,i} = \frac{\partial \ln a}{\partial x^i}, \quad \alpha_{,ik} = \frac{\partial^2 \ln a}{\partial x^i \partial x^k}.$$

В заключение сформулируем основной результат.

Теорема 3. Для того чтобы риманово пространство V_n с метрикой

$$ds^2 = a^2 \sum_{i=1}^n \varepsilon_i (dx^i)^2$$

имело класс вложения один, необходимо и достаточно,

чтобы характеристика μ -матрицы $(\alpha_{,ik} - \alpha_{,i} \alpha_{,k} - \mu \delta_{ik} \varepsilon_i)$ была одного из двух типов:

1) а. [(1...1) 1], б. [(1...1)];

2) [(1...12)]

и общее значение собственных корней удовлетворяло неравенству

$$\tau(2p + \alpha_{,i} \alpha^i) < 0.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Kurita M. Journal of the Mathematical Soc. of Japan, 7, N 1, January 1955.
2. Лапковский А. К. Весті АН БССР, сер. фіз.-мат. навук, № 3, 1966.
3. Фиников С. П. Метод внешних форм Картана. М., 1948, стр. 101.

Поступило в редакцию 25.III 1966

А. А. БУРДУН

К ГЕОМЕТРИИ ПОЛЯ
 ЕДИНИЧНЫХ ВРЕМЕННОПОДОБНЫХ ВЕКТОРОВ
 В ПРОСТРАНСТВЕ МИНКОВСКОГО

Геометрия векторного поля в трехмерных пространствах достаточно хорошо изучена. Так, в евклидовом пространстве этому вопросу посвящены работы [1—6] и др., в аффинном пространстве работы [7, 8], в пространстве Лоренца и Кэли — работы [9, 10].

В настоящей работе изучается поле временноподобных [11] единичных векторов в пространстве Минковского (1R_4), которое физически можем трактовать как поле 4-скоростей потока масс [12].

Рассмотрение ведется методом подвижного репера.

1. Математический аппарат. Уравнения инфинитезимальных смещений репера в пространстве Минковского (1R_4) с метрическим тензором

$$g_{ij} = g^{ij} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1) \quad (i, j, k, \dots = 0, 1, 2, 3) \quad (1.1)$$

имеют вид

$$dM = \omega^i e_i, \quad de_i = \omega_i^j e_j \quad (1.2)$$

(суммирование по повторяющимся индексам), где ω^i , ω_i^j — формы Пфаффа [13], удовлетворяющие в силу (1.1) соотношениям:

$$\omega_\alpha^\beta + \omega_\beta^\alpha = 0, \quad \omega_\alpha^\alpha - \omega_\alpha^0 = 0, \quad \omega_i^i = 0 \quad (\alpha, \beta, \gamma, \dots = 1, 2, 3). \quad (1.3)$$

Структурные уравнения, соответствующие уравнениям (1.2):

$$D\omega^i = [\omega^j \omega_k^i], \quad D\omega_i^j = [\omega_k^j \omega_i^k]. \quad (1.4)$$

В репере (1.2) имеется единственный временноподобный вектор e_0 ($e_0^0 = -1$). Поэтому будем изучать поле векторов $\{e_0\}$. Неподвижность элемента — точки M с закрепленным вектором e_0 — обеспечивается равенствами

$$\omega^0 = \omega^1 = \omega^2 = \omega^3 = \omega_0^0 = \omega_0^1 = \omega_0^2 = \omega_0^3 = 0. \quad (1.5)$$

Эти формы для рассматриваемого геометрического образа являются главными. Так как изучаемый образ четырехпараметрический, то на семь главных форм накладываются три зависимости. Приняв формы ω^i за базисные, зависимости эти запишем в виде

$$\omega_0^\alpha = \gamma_{0i}^\alpha \omega^i, \quad (1.6)$$

где в силу соотношений (1.3)

$$\gamma_{0i}^\alpha = \gamma_{\alpha i}^0. \quad (1.6')$$

Уравнения (1.6) являются основными уравнениями Пфaffа рассматриваемого геометрического образа. Продифференцировав систему (1.6) внешне с использованием уравнений структуры (1.4), получим

$$[d\gamma_{0k}^\alpha - \gamma_{0j}^\alpha \omega_k^j + \gamma_{0k}^i \omega_i^\alpha, \omega^k] = 0. \quad (1.7)$$

Отсюда по лемме Картана [13]

$$\delta\gamma_{0k}^\alpha = \gamma_{0j}^\alpha \pi_k^j - \gamma_{0k}^i \pi_i^\alpha, \quad (1.8)$$

где δ и π_k^i — символ дифференцирования и дифференциальные формы, соответствующие вторичным параметрам, причем в силу (1.5) для вторичных форм имеем

$$\pi^i = \pi_0^\alpha = 0. \quad (1.9)$$

2. Тензор, подтензоры и инварианты поля векторов. Согласно [14], из системы (1.8) видно, что совокупность величин (γ_{0k}^α) образует основной фундаментальный объект векторного поля, причем этот объект является тензором

$$T^* = (\gamma_{\alpha k}^0). \quad (2.1)$$

Система уравнений (1.8) распадается на две:

$$\delta\gamma_{00}^\alpha = -\gamma_{00}^\beta \pi_\beta^\alpha, \quad (2.2)$$

$$\delta\gamma_{0\nu}^\alpha = \gamma_{0\beta}^\alpha \pi_\nu^\beta - \gamma_{0\nu}^\beta \pi_\beta^\alpha. \quad (2.3)$$

Отсюда видно, что системы величин

$$T_1 = (\gamma_{00}^\alpha), \quad (2.4)$$

$$T_2 = (\gamma_{\alpha\beta}^0) \quad (2.5)$$

являются подтензорами.

Совокупность величин T_2 можем представить как

$$T_2 = T_3 + T_4, \quad (2.6)$$

где

$$T_3 = \frac{1}{2} (\gamma_{(\alpha\beta)}^0); \quad T_4 = \frac{1}{2} (\gamma_{[\alpha\beta]}^0) \quad (2.7)$$

тоже подтензоры, полученные симметрированием и альтернацией [12] подтензора (2.5). Аналогично

$$T^* = T_1^* + T_2^*,$$

где

$$T_1^* = \frac{1}{2} (\gamma_{(ij)}^0); \quad T_2^* = \frac{1}{2} (\gamma_{[ij]}^0). \quad (2.8)$$

Характеристические уравнения [15]

$$|A_{ij} - g_{ij}\lambda| = 0 \quad (2.9)$$

для подтензоров следующие:

$$T_3: \quad \lambda^3 - I_1 \lambda^2 + I_2 \lambda - I_3 = 0, \quad (2.10)$$

$$T_4: \quad \lambda^3 - \frac{1}{4} I_4 \lambda = 0, \quad (2.11)$$

$$T_2: \lambda^3 - I_1 \lambda^2 + \left(I_2 + \frac{1}{4} I_4 \right) \lambda - I_5 = 0, \quad (2.12)$$

$$T_1^*: \lambda^4 - I_1 \lambda^3 + \left(I_2 + \frac{1}{4} I_6 \right) \lambda^2 - I_7 \lambda + I_8 = 0, \quad (2.13)$$

$$T_2^*: \lambda^4 + \frac{1}{4} (I_4 - I_6) \lambda^2 - \frac{1}{16} I_9^2 = 0, \quad (2.14)$$

где

$$I_1 = \gamma_{01}^1 + \gamma_{02}^2 + \gamma_{03}^3; \quad (2.15)$$

$$I_2 = \gamma_{11}^0 \gamma_{22}^0 + \gamma_{11}^0 \gamma_{33}^0 + \gamma_{22}^0 \gamma_{33}^0 - \frac{1}{4} [(\gamma_{13}^0 + \gamma_{31}^0)^2 + (\gamma_{12}^0 + \gamma_{21}^0)^2 + (\gamma_{23}^0 + \gamma_{32}^0)^2]; \quad (2.16)$$

$$I_3 = \gamma_{11}^0 \gamma_{22}^0 \gamma_{33}^0 + \frac{1}{4} [(\gamma_{12}^0 + \gamma_{21}^0)(\gamma_{13}^0 + \gamma_{31}^0)(\gamma_{23}^0 + \gamma_{32}^0) - \gamma_{11}^0(\gamma_{23}^0 + \gamma_{32}^0)^2 - \gamma_{22}^0(\gamma_{31}^0 + \gamma_{13}^0)^2 - \gamma_{33}^0(\gamma_{21}^0 + \gamma_{12}^0)^2]; \quad (2.17)$$

$$I_4 = (\gamma_{23}^0 - \gamma_{32}^0)^2 + (\gamma_{13}^0 - \gamma_{31}^0)^2 + (\gamma_{12}^0 - \gamma_{21}^0)^2; \quad (2.18)$$

$$I_5 = \det(\gamma_{\alpha\beta}^0); \quad (2.19)$$

$$I_6 = (\gamma_{00}^1)^2 + (\gamma_{00}^2)^2 + (\gamma_{00}^3)^2; \quad (2.20)$$

$$I_7 = I_3 + \frac{1}{4} \{ \gamma_{33}^0 [(\gamma_{00}^1)^2 + (\gamma_{00}^2)^2] + \gamma_{22}^0 [(\gamma_{00}^1)^2 + (\gamma_{00}^3)^2] + \gamma_{11}^0 [(\gamma_{00}^2)^2 + (\gamma_{00}^3)^2] - \gamma_{00}^1 \gamma_{00}^3 (\gamma_{13}^0 + \gamma_{31}^0) - \gamma_{00}^1 \gamma_{00}^2 (\gamma_{12}^0 + \gamma_{21}^0) - \gamma_{00}^2 \gamma_{00}^3 (\gamma_{23}^0 + \gamma_{32}^0) \}; \quad (2.21)$$

$$I_8 = \frac{1}{4} [(\gamma_{00}^1)^2 \gamma_{22}^0 \gamma_{33}^0 + (\gamma_{00}^2)^2 \gamma_{11}^0 \gamma_{33}^0 + (\gamma_{00}^3)^2 \gamma_{11}^0 \gamma_{22}^0 - \gamma_{00}^1 \gamma_{22}^0 \gamma_{00}^3 (\gamma_{13}^0 + \gamma_{31}^0) - \gamma_{00}^1 \gamma_{00}^2 \gamma_{33}^0 (\gamma_{12}^0 + \gamma_{21}^0) - \gamma_{00}^3 \gamma_{00}^2 \gamma_{11}^0 (\gamma_{23}^0 + \gamma_{32}^0)] + \frac{1}{8} [\gamma_{00}^1 \gamma_{00}^3 (\gamma_{12}^0 + \gamma_{21}^0)(\gamma_{23}^0 + \gamma_{32}^0) + \gamma_{00}^1 \gamma_{00}^2 (\gamma_{13}^0 + \gamma_{31}^0)(\gamma_{23}^0 + \gamma_{32}^0) + \gamma_{00}^2 \gamma_{00}^3 (\gamma_{12}^0 + \gamma_{21}^0)(\gamma_{13}^0 + \gamma_{31}^0) - \frac{1}{16} [(\gamma_{00}^1)^2 (\gamma_{23}^0 + \gamma_{32}^0)^2 + (\gamma_{00}^2)^2 (\gamma_{13}^0 + \gamma_{31}^0)^2 + (\gamma_{00}^3)^2 (\gamma_{12}^0 + \gamma_{21}^0)^2]]; \quad (2.22)$$

$$I_9 = \gamma_{00}^1 (\gamma_{32}^0 - \gamma_{23}^0) + \gamma_{00}^2 (\gamma_{13}^0 - \gamma_{31}^0) + \gamma_{00}^3 (\gamma_{21}^0 - \gamma_{12}^0). \quad (2.23)$$

С помощью системы уравнений (1.8) нетрудно установить, что

$$\delta I_1 = 0, \quad \delta I_2 = 0, \quad \dots, \quad \delta I_9 = 0, \quad (2.24)$$

то есть величины I_1, I_2, \dots, I_9 являются абсолютными инвариантами [14] поля векторов.

3. Инвариантные формы поля. Дифференцируя внешне главные формы ω^i , ω_0^α с учетом уравнений структуры (1.4), находим их вариации при изменении вторичных форм [16]:

$$\delta\omega^0 = 0, \quad \delta\omega^\alpha = -\omega^\beta \pi_\beta^\alpha, \quad \delta\omega_0^\alpha = -\omega_0^\beta \pi_\beta^\alpha. \quad (3.1)$$

Из системы уравнений (3.1) получим следующие не зависящие от вторичных форм комбинации главных форм — инвариантные формы:

$$F_0 = \omega^0, \quad (3.2)$$

$$F_1 = (\omega^1)^2 + (\omega^2)^2 + (\omega^3)^2, \quad (3.3)$$

$$F_2 = \omega^\alpha \omega_\alpha^0, \quad (3.4)$$

$$F_3 = (\omega_0^1)^2 + (\omega_0^2)^2 + (\omega_0^3)^2, \quad (3.5)$$

$$F_4 = (\omega_0^3 \omega^2 - \omega_0^2 \omega^3)^2 + (\omega_0^1 \omega^3 - \omega_0^3 \omega^1)^2 + (\omega_0^2 \omega^1 - \omega_0^1 \omega^2)^2. \quad (3.6)$$

Между квадратичными формами F_1 , F_2 , F_3 и формой четвертого порядка F_4 существует зависимость

$$F_1 F_3 = (F_2)^2 + F_4. \quad (3.7)$$

Наряду с формами F_0 , F_1 , F_2 , F_3 и F_4 инвариантными для рассматриваемого геометрического образа являются и следующие внешние формы:

$$\Phi_1 = [\omega^0 \omega^1 \omega^2 \omega^3], \quad (3.8)$$

$$\Phi_2 = [\omega^1 \omega^2 \omega^3], \quad (3.9)$$

$$\Phi_3 = [\omega_0^1 \omega_0^2 \omega_0^3], \quad (3.10)$$

$$\Phi_4 = [\omega^\alpha \omega_\alpha^0]. \quad (3.11)$$

4. Геометрическое истолкование некоторых подтензоров, инвариантов, инвариантных форм. Рассмотрим гиперповерхность, описываемую точкой M и ортогональную к вектору поля e_0 , ее уравнение

$$\omega^0 = 0. \quad (4.1)$$

Если это уравнение не вполне интегрируемое, то гиперповерхность называется неголономной [17].

Нормальные кривизны гиперповерхности. Нормальной кривизной и геодезическим кручением в данном направлении в E_3 называется кривизна и кручение геодезической, касательная к которой имеет это же направление [18]. Будем называть в 1R_4 первой, второй и третьей нормальными кривизнами гиперповерхности в данном направлении первую, вторую и третью соответственно кривизну геодезической.

Если за базисные формы на гиперповерхности принять формы ω^α , то кривая на гиперповерхности будет однозначно определена отношением базисных форм $\omega^1 : \omega^2 : \omega^3$ [3], а дифференциал дуги равенством

$$ds^2 = (\omega^1)^2 + (\omega^2)^2 + (\omega^3)^2. \quad (4.2)$$

Единичный вектор касательной к кривой

$$t = \frac{\omega^\alpha e_\alpha}{ds}. \quad (4.3)$$

Дифференцируя равенство (4.3) с учетом уравнений (1.2, 2), получим

$$\frac{dt}{ds} = A^\alpha e_\alpha + \frac{\omega^\alpha \omega_\alpha^0}{ds^2} e_0, \quad (4.4)$$

где A^α — некоторые коэффициенты.

Геодезической на гиперповерхности является кривая, главная нормаль которой служит нормалью к гиперповерхности [18]. Для геодезической, следовательно, имеем:

$$\frac{dt}{ds} = \frac{\omega^\alpha \omega_\alpha^0}{ds^2} e_0, \quad (4.5)$$

$$\frac{d^2t}{ds^2} = \frac{d(\omega^\alpha \omega_\alpha^0)}{ds^3} e_0 + \frac{\omega^\alpha \omega_\alpha^0 \omega_\beta^0}{ds^3} e_\beta, \quad (4.6)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^3t}{ds^3} = \frac{1}{ds^4} \{ & [d^2(\omega^\alpha \omega_\alpha^0) + \omega^\alpha \omega_\alpha^0 \omega_\beta^0 \omega_\beta^0] e_0 + \\ & + [2d(\omega^\alpha \omega_\alpha^0) \omega_\beta^0 + \omega^\alpha \omega_\alpha^0 (d\omega_\beta^0 + \omega_\gamma^0 \omega_\gamma^0)] e_\beta \}. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Для кривой в 1R_4 с касательным вектором \mathbf{a}_1 и вектором главной нормали \mathbf{a}_0 (класс 2 по классификации [25]) формулы Френе имеют вид:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{M}}{ds} = \mathbf{a}_1, \quad \frac{d\mathbf{a}_1}{ds} = k_1 \mathbf{a}_0, \quad \frac{d\mathbf{a}_0}{ds} = k_1 \mathbf{a}_1 + k_2 \mathbf{a}_2, \\ \frac{d\mathbf{a}_2}{ds} = k_3 \mathbf{a}_3 + k_0 \mathbf{a}_0, \quad \frac{d\mathbf{a}_3}{ds} = -k_3 \mathbf{a}_2. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Формулы для вычисления кривизн линии:

$$k_1 = \left| \frac{d\mathbf{a}_1}{ds} \right|, \quad (4.9)$$

$$k_2 = \frac{1}{k_1^2} \left| \left[\mathbf{a}_1 \frac{d\mathbf{a}_1}{ds} \frac{d^2\mathbf{a}_1}{ds^2} \right] \right|, \quad (4.10)$$

$$k_3 = \frac{1}{k_1^3 k_2^2} \left| \left[\mathbf{a}_1 \frac{d\mathbf{a}_1}{ds} \frac{d^2\mathbf{a}_1}{ds^2} \frac{d^3\mathbf{a}_1}{ds^3} \right] \right|. \quad (4.11)$$

Заменяя в формулах (4.9) — (4.11) вектор \mathbf{a}_1 на \mathbf{t} , получим формулы для вычисления кривизн геодезической на гиперповерхности. Из равенств (4.5) с учетом формул (4.8) получаем первую нормальную кривизну гиперповерхности

$$k_1 = \frac{\omega^\alpha \omega_\alpha^0}{ds^2}. \quad (4.12)$$

Правая часть равенства (4.12) есть не что иное, как отношение инвариантных квадратичных форм $F_2 : F_1$.

Подставляя выражения (4.5), (4.6) в формулу (4.10), получаем вектор второй нормальной кривизны

$$\mathbf{k}_2 = \frac{F_{41} \mathbf{e}_1 + F_{42} \mathbf{e}_2 + F_{43} \mathbf{e}_3}{ds^2}, \quad (4.13)$$

где

$$F_{41} = \omega_0^3 \omega^2 - \omega_0^2 \omega^3; \quad F_{42} = \omega_0^1 \omega^3 - \omega_0^3 \omega^1; \quad F_{43} = \omega_0^2 \omega^1 - \omega_0^1 \omega^2. \quad (4.14)$$

При получении формулы (4.13) совершен переход от координатных три-векторов к дуальным им векторам по формуле

$$e^i = \frac{1}{6} \varepsilon^{ijkl} [e_j e_k e_l], \quad (4.15)$$

где

$$\varepsilon^{ijkl} = \varepsilon_{ijkl} = \pm 1, 0 \quad (4.16)$$

символ Леви — Чивита, причем [11]

$$e_j = g_{ji} e^i. \quad (4.17)$$

Возводя в квадрат вектор (4.13), получим геометрическое истолкование инвариантной формы F_4 (3.6)

$$k_2^2 = \frac{F_4}{(F_1)^2}. \quad (4.18)$$

Подставив выражения (4.5) — (4.7) в формулу (4.11), получим

$$k_3 = \frac{1}{k_2^2} \left\{ \frac{F_{4\beta} (d\omega_0^\beta + \omega_0^\alpha \omega_\alpha^\beta)}{ds^4} \right\}. \quad (4.19)$$

Первая нормальная кривизна гиперповерхности. Подставив в формулу (4.12) вместо ω_0^α их значения (1.6), получим

$$k_1 [(\omega^1)^2 + (\omega^2)^2 + (\omega^3)^2] = \omega^\beta \gamma_{\beta\alpha}^0 \omega^\alpha. \quad (4.20)$$

Для того чтобы найти экстремальные значения кривизны, продифференцируем равенство (4.20) по ω^α , считая при этом k_1 постоянным. Отсюда

$$\begin{aligned} 2(\gamma_{11}^0 - k_1) \omega^1 + (\gamma_{21}^0 + \gamma_{12}^0) \omega^2 + (\gamma_{31}^0 + \gamma_{13}^0) \omega^3 &= 0, \\ (\gamma_{21}^0 + \gamma_{12}^0) \omega^1 + 2(\gamma_{22}^0 - k_1) \omega^2 + (\gamma_{23}^0 + \gamma_{32}^0) \omega^3 &= 0, \\ (\gamma_{31}^0 + \gamma_{13}^0) \omega^1 + (\gamma_{23}^0 + \gamma_{32}^0) \omega^2 + 2(\gamma_{33}^0 - k_1) \omega^3 &= 0. \end{aligned} \quad (4.21)$$

Исключив из системы (4.21) формы ω^α , имеем

$$k_1^3 - H_1 k_1^2 + R_1 k_1 - K_1 = 0, \quad (4.22)$$

где $H_1 = k_{11} + k_{12} + k_{13} = I_1$ — средняя кривизна; $R_1 = k_{11} k_{12} + k_{11} k_{13} + k_{12} k_{13} = I_2$ — смешанная кривизна; $K_1 = k_{11} k_{12} k_{13} = I_3$ — полная кривизна неголономной гиперповерхности (4.1).

Таков геометрический смысл инвариантов I_1, I_2, I_3 (2.15) — (2.17).

Вторая нормальная кривизна. Для геометрического истолкования инварианта I_4 найдем значения вектора (4.13) вдоль координатных линий на гиперповерхности, имеем:

$$\begin{aligned} k_{21} \Big|_{\substack{\omega^1=ds \\ \omega^2=\omega^3=0}} &= \gamma_{01}^2 e_3 - \gamma_{01}^3 e_2, & k_{22} \Big|_{\substack{\omega^2=ds \\ \omega^1=\omega^3=0}} &= \gamma_{02}^3 e_1 - \gamma_{02}^1 e_3, \\ k_{23} \Big|_{\substack{\omega^3=ds \\ \omega^1=\omega^2=0}} &= \gamma_{03}^1 e_2 - \gamma_{03}^2 e_1. \end{aligned} \quad (4.23)$$

Квадрат вектора

$$H_2 = k_{21} + k_{22} + k_{23} = (\gamma_{32}^0 - \gamma_{23}^0) e_1 + (\gamma_{13}^0 - \gamma_{31}^0) e_2 + (\gamma_{21}^0 - \gamma_{12}^0) e_3 \quad (4.24)$$

является инвариантом I_4 .

Как известно [19], неголономность порождается кручением пространства. Гиперповерхность (4.1) можем рассматривать как трехмерное пространство с кручением. Тогда структурные уравнения (1.4,1) берем в виде

$$D\omega^0 = [\omega^j\omega_j^0] + A_{jk}^0[\omega^j\omega^k]. \quad (4.25)$$

Отсюда имеем с учетом (1.6) для компонент тензора кручения:

$$A_{12}^0 = \gamma_{21}^0 - \gamma_{12}^0, \quad A_{23}^0 = \gamma_{32}^0 - \gamma_{23}^0, \quad A_{31}^0 = \gamma_{13}^0 - \gamma_{31}^0. \quad (4.26)$$

Таким образом, подтензор T_4 (2.7) является тензором кручения неголономной гиперповерхности (4.1), а вектор (4.24), компоненты которого являются компонентами тензора кручения, можем назвать вектором кручения.

Если гиперповерхность (4.1) голономна, вектор

$$H_2 = 0.$$

Гауссова кривизна гиперповерхности. Гауссову кривизну неголономной гиперповерхности [3] определим как отношение элемента «площади» сферического отображения к элементу «площади» самой гиперповерхности. Из равенств

$$dM = \omega^1 e_1 + \omega^2 e_2 + \omega^3 e_3, \quad (4.27)$$

$$de_0 = \omega_0^1 e_1 + \omega_0^2 e_2 + \omega_0^3 e_3 \quad (4.28)$$

находим элемент «площади» гиперповерхности

$$dS = [\omega^1 \omega^2 \omega^3] \quad (4.29)$$

и элемент «площади» ее сферического отображения

$$dS' = [\omega_0^1 \omega_0^2 \omega_0^3], \quad (4.30)$$

и тогда

$$K_g = \frac{\Phi_3}{\Phi_2} = \frac{[\omega_0^1 \omega_0^2 \omega_0^3]}{[\omega^1 \omega^2 \omega^3]} \quad (4.31)$$

или с учетом (1.6)

$$K_g = \det(\gamma_{\alpha\beta}^0) = I_5. \quad (4.32)$$

Из равенства (4.28) имеем линейный элемент сферического отображения гиперповерхности (4.1)

$$ds'^2 = (de_0)^2 = (\omega_0^1)^2 + (\omega_0^2)^2 + (\omega_0^3)^2. \quad (4.33)$$

Сравнение равенств (4.33) и (3.5) дает истолкование инвариантной формы F_3 .

Кривизна центральной линии поля. Центральной линией поля [3] называют кривую, описанную центром поля и огибаемую вектором этого поля. Дифференциальными уравнениями центральной линии поля $\{e_0\}$ будут

$$\omega^1 = \omega^2 = \omega^3 = 0. \quad (4.34)$$

Для нее имеем

$$dM = \omega^0 e_0, \quad de_0 = \gamma_{0\alpha}^0 \omega^0 e_\alpha. \quad (4.35)$$

Отсюда видим, что инвариантная форма (3.2) является дифференциалом дуги центральной линии поля

$$F_0 = \omega^0 = d\sigma.$$

Вектор первой кривизны центральной линии

$$k = \frac{d\mathbf{e}_0}{d\sigma} = \gamma_{00}^\alpha \mathbf{e}_\alpha. \quad (4.36)$$

Компоненты этого вектора образуют подтензор (2.4), квадрат вектора (4.36) является инвариантом поля

$$(k)^2 = I_6. \quad (4.37)$$

Скалярное произведение вектора (4.36) на вектор кручения тоже инвариант

$$(k\mathbf{H}_2) = I_9. \quad (4.38)$$

Нормальная кривизна поля. Назовем нормальной кривизной поля [3] в данном направлении отношение

$$\kappa = \frac{(dM)^2}{(dMd\mathbf{e}_0)} = \frac{\omega^\alpha \omega_\alpha^0}{(\omega^1)^2 + (\omega^2)^2 + (\omega^3)^2 - (\omega^0)^2}. \quad (4.39)$$

Отсюда с учетом значений (1.6) форм ω_α^0

$$\kappa [(\omega^1)^2 + (\omega^2)^2 + (\omega^3)^2 - (\omega^0)^2] = \omega^\alpha \gamma_{\alpha i}^0 \omega^i. \quad (4.40)$$

Поступая так же, как и для неголономной гиперповерхности, получим следующее уравнение 4-го порядка для определения экстремальных значений нормальной кривизны поля:

$$\kappa^4 - \tilde{H}_1 \kappa^3 + \tilde{R}_1 \kappa^2 + \tilde{P}_1 \kappa + \tilde{K}_1 = 0, \quad (4.41)$$

где

$$\tilde{H}_1 = \kappa_1 + \kappa_2 + \kappa_3 + \kappa_4 = I_1 \quad (4.42)$$

средняя кривизна;

$$\tilde{R}_1 = \kappa_1 \kappa_2 + \kappa_1 \kappa_3 + \kappa_1 \kappa_4 + \kappa_2 \kappa_3 + \kappa_2 \kappa_4 + \kappa_3 \kappa_4 = I_2 + \frac{1}{4} I_6 \quad (4.43)$$

первая смешанная кривизна;

$$\tilde{P}_1 = \kappa_1 \kappa_2 \kappa_3 + \kappa_1 \kappa_2 \kappa_4 + \kappa_2 \kappa_3 \kappa_4 = I_7 \quad (4.44)$$

вторая смешанная кривизна;

$$\tilde{K}_1 = \kappa_1 \kappa_2 \kappa_3 \kappa_4 = I_8 \quad (4.45)$$

полная кривизна поля.

Отсюда видим, что [3] средняя кривизна поля равна средней кривизне неголономной гиперповерхности, ортогональной вектору поля:

$$\tilde{H}_1 = H_1. \quad (4.46)$$

Первая смешанная кривизна поля \tilde{R}_1 равна сумме смешанной кривизны неголономной гиперповерхности, ортогональной вектору поля, и квадрата половины кривизны центральной линии поля

$$\tilde{R}_1 = R_1 + \left(\frac{k}{2}\right)^2. \quad (4.47)$$

Истолкуем геометрически $\tilde{P}_1 = I_7$. Если векторы \mathbf{e}_α репера (1.2) направить по главным направлениям неголономной гиперповерхности (4.1), то [20] получим:

$$\gamma_{12}^0 + \gamma_{21}^0 = 0, \quad \gamma_{13}^0 + \gamma_{31}^0 = 0, \quad \gamma_{23}^0 + \gamma_{32}^0 = 0, \quad (4.48)$$

и тогда главные кривизны гиперповерхности:

$$k_{11} = \gamma_{11}^0, \quad k_{12} = \gamma_{22}^0, \quad k_{13} = \gamma_{33}^0. \quad (4.49)$$

Двумерной полосой [21] в 1R_4 называют кривую, в каждой точке которой дана двумерная плоскость, проходящая через касательную к кривой. Центральная линия поля определяет три двумерные полосы $\{e_0e_1\}$, $\{e_0e_2\}$, $\{e_0e_3\}$. Квадраты нормальных кривизн этих двумерных полос соответственно равны

$$\begin{aligned} (\tau_{01})^2 &= (\gamma_{00}^2)^2 + (\gamma_{00}^3)^2, & (\tau_{02})^2 &= (\gamma_{00}^1)^2 + (\gamma_{00}^3)^2, \\ (\tau_{03})^2 &= (\gamma_{00}^1)^2 + (\gamma_{00}^2)^2. \end{aligned} \quad (4.50)$$

И тогда для второй смешанной кривизны поля имеем

$$\tilde{P}_1 = K_1 + k_{11} \left(\frac{\tau_{01}}{2} \right)^2 + k_{12} \left(\frac{\tau_{02}}{2} \right)^2 + k_{13} \left(\frac{\tau_{03}}{2} \right)^2. \quad (4.51)$$

Вторая смешанная кривизна поля равна сумме полной кривизны неголомной гиперповерхности, ортогональной вектору поля, и произведений главных кривизн этой гиперповерхности на квадраты половин нормальных кривизн соответствующих этим главным направлениям двумерных полос.

Трехмерной полосой назовем кривую, в каждой точке которой дана гиперплоскость, проходящая через касательную к кривой. Центральная линия поля (4.34) определяет три трехмерные полосы:

$$\{e_0e_1e_2\}, \quad \{e_0e_2e_3\}, \quad \{e_0e_3e_1\}.$$

Квадраты нормальных кривизн этих трехмерных полос соответственно равны:

$$(\tau_{012})^2 = (\gamma_{00}^3)^2, \quad (\tau_{023})^2 = (\gamma_{00}^1)^2, \quad (\tau_{031})^2 = (\gamma_{00}^2)^2. \quad (4.52)$$

При условии (4.48) полная кривизна поля

$$K_1 = I_8 = \left(\frac{\tau_{012}}{2} \right)^2 k_{11}k_{12} + \left(\frac{\tau_{023}}{2} \right)^2 k_{12}k_{13} + \left(\frac{\tau_{031}}{2} \right)^2 k_{13}k_{11}. \quad (4.53)$$

Таким образом, полная кривизна поля равна сумме произведений квадратов половин нормальных кривизн трехмерных полос на соответствующие главные кривизны неголомной гиперповерхности, ортогональной вектору поля.

5. Кинематический смысл некоторых инвариантов. Обобщенный оператор Гамильтона. Найдем вид оператора Гамильтона относительно подвижного репера [22] в 1R_4 . Градиент скалярной функции f в 1R_4 представим в виде

$$\text{Grad } f = B^i e_i. \quad (5.1)$$

Здесь и ниже градиент, дивергенцию и ротор в 1R_4 будем писать с большой буквы [23] в отличие от аналогичных понятий в E_3 .

Известно [24], что

$$(\text{Grad } f \cdot dM) = df. \quad (5.2)$$

Тогда

$$df = -B^0 \omega^0 + B^1 \omega^1 + B^2 \omega^2 + B^3 \omega^3. \quad (5.3)$$

Умножив равенство (5.3) поочередно на внешние произведения

получим:

$$\begin{aligned} & [\omega^1 \omega^2 \omega^3], \quad [\omega^0 \omega^2 \omega^3], \quad [\omega^0 \omega^3 \omega^1], \quad [\omega^0 \omega^1 \omega^2], \\ & \Phi_1 B^0 = [\omega^1 \omega^2 \omega^3 df], \quad \Phi_1 B^1 = [\omega^0 \omega^2 \omega^3 df], \\ & \Phi_1 B^2 = [\omega^0 \omega^3 \omega^1 df], \quad \Phi_1 B^3 = [\omega^0 \omega^1 \omega^2 df], \end{aligned} \quad (5.4)$$

где $\Phi_1 = [\omega^0 \omega^1 \omega^2 \omega^3]$ — внешняя инвариантная форма (3.8).

Подставив выражения (5.4) в соотношение (5.1), имеем

$$\begin{aligned} \Phi_1 \text{Grad } f = & [(e_0 [\omega^1 \omega^2 \omega^3] + e_1 [\omega^0 \omega^2 \omega^3] + e_2 [\omega^0 \omega^3 \omega^1] + \\ & + e_3 [\omega^0 \omega^1 \omega^2]) df]. \end{aligned} \quad (5.5)$$

Но

$$\text{Grad } f = \nabla f. \quad (5.6)$$

Следовательно, оператор Гамильтона в 1R_4 в подвижном репере имеет вид

$$\nabla = \frac{[(e_0 [\omega^1 \omega^2 \omega^3] + e_1 [\omega^0 \omega^2 \omega^3] + e_2 [\omega^0 \omega^3 \omega^1] + e_3 [\omega^0 \omega^1 \omega^2]) d]}{[\omega^0 \omega^1 \omega^2 \omega^3]}. \quad (5.7)$$

Дивергенция поля. Действуя оператором (5.7) на вектор e_0 скалярно, получим

$$\text{Div } e^0 = (\nabla e_0) = \gamma_{01}^1 + \gamma_{02}^2 + \gamma_{03}^3 = I_1. \quad (5.8)$$

Таким образом, дивергенция поля $\{e_0\}$ равна средней кривизне неголономной гиперповерхности, ортогональной вектору поля. Если поле соленоидальное, то неголономная гиперповерхность $\omega^0 = 0$ минимальная.

4-ротатор поля. Подействовав оператором (5.7) на вектор e_0 внешне, получим

$$\begin{aligned} \text{Rot } e_0 = [\nabla e_0] = & \gamma_{00}^1 [e_1 e_0] + \gamma_{00}^2 [e_2 e_0] + \gamma_{00}^3 [e_3 e_0] + \\ & + (\gamma_{21}^0 - \gamma_{12}^0) [e_1 e_2] + (\gamma_{32}^0 - \gamma_{23}^0) [e_2 e_3] + (\gamma_{31}^0 - \gamma_{13}^0) [e_3 e_1]. \end{aligned} \quad (5.9)$$

Отсюда видим, что компоненты 4-ротатора образуют подтензор T_2^* (2.8, 2). Компоненты 4-ротатора можем получить и другим путем, а именно раскрывая инвариантную внешнюю форму (3.11) с учетом (1.6):

$$\Phi_4 = D \omega^0 = \gamma_{[ij]}^0 [\omega^i \omega^j]. \quad (5.10)$$

Из равенства (5.9) получим:

$$(\text{Rot } e_0 \cdot \text{Rot } e_0) = I_4 - I_6, \quad (5.11)$$

$$[\text{Rot } e_0 \cdot \text{Rot } e_0] = 2I_9. \quad (5.12)$$

4-ускорение поля. Если e_0 — вектор 4-скорости движущейся материальной частицы, то ее мировой линией является центральная линия поля. Тогда

$$\frac{dM}{d\sigma} = e_0, \quad (5.13)$$

$$\frac{d^2 M}{d\sigma^2} = \gamma_{00}^\alpha e_\alpha \quad (5.14)$$

вектор 4-ускорения. Квадрат вектора 4-ускорения — инвариант

$$\left(\frac{d^2 M}{d\sigma^2} \right)^2 = I_6. \quad (5.15)$$

Если поле $\{e_0\}$ не ускоренное, то инварианты поля

$$I_6 = I_8 = I_9 = 0. \quad (5.16)$$

Если поле потенциальное

$$\text{Rot } e_0 = 0, \quad (5.17)$$

то оно не ускоренное и гиперповерхность, ортогональная вектору поля, голономна. Из равенства (5.10) следует, что форма ω^0 в этом случае является полным дифференциалом.

(5.5)

ЛИТЕРАТУРА

1. Delens P. Rend. cir. matemat., Palermo, LVI, 1932.
2. Бюшгенс С. С. Изв. АН СССР, серия матем., 10, в. 1, 1946.
3. Кованцов Н. И. Теория комплексов. К., 1963.
4. Георгиев Г. О дифференциальной геометрии векторных полей и о некоторых ее приложениях. Изв. матем. ин-та Болгарской Академии наук, 4, № 1, 1959.
5. Долговых В. П. Геометр. сб., в. 4. Томск, 1964.
6. Долговых В. П. Геометр. сб., в. 5. Томск, 1965.
7. Gheorghiev Gh. Lucr. conf. de geom. și top. Iași, 1958.
8. Слухаев В. В. Сибирский матем. ж., т. VI, в. 4, 1965.
9. Матеев А. Изв. математ. ин-та Болгарской Академии наук, 4, № 2, 1960.
10. Матеев А. Вестник Моск. ун-та, Матем., механ., № 3, 1960.
11. Синг Дж. Общая теория относительности. ИЛ, М., 1963.
12. Рашевский П. К. Риманова геометрия и тензорный анализ. М., Гостехиздат, 1953.
13. Фиников С. П. Метод внешних форм Картана. ГИТТЛ, М.—Л., 1948.
14. Лаптев Г. Ф. Труды Московск. матем. общества, 2, 1953.
15. Дандау Л. Д. и Лифшиц Е. М. Теория поля. Физматгиз, М., 1962.
16. Фиников С. П. Теория конгруэнций. ГИТТЛ, М.—Л., 1959.
17. Щербаков Р. Н. Геометр. сб., в. 3. Томск, 1963.
18. Картан Э. Риманова геометрия в ортогональном репере. Изд-во МГУ, 1960.
19. Картан Э. Пространства аффинной, проективной и конформной связности. Изд-во Казанск. ун-та, 1962.
20. Гутаев Л. К. Движения и некоторые поверхности в пространстве Минковского. Материалы II Прибалтийской геом. конф. Тарту, 1965.
21. Березина Л. Я. Изв. вузов СССР. Матем., № 4 (41), 1964.
22. Бюшгенс С. С. Учен. зап. МГУ, 148, Математика, 4, 1951.
23. Sommerfeld A. Elektrodynamics, Leipzig, 1964.
24. Фавар Ж. Курс локальной дифференциальной геометрии. ИЛ, М., 1960.
25. Франк Б. Вестник ЛГУ, № 7, 1964.

Поступило в редакцию 27.IV. 1966

(5.11)

(5.12)

(5.13)

(5.14)

(5.15)

$$(8.1) \quad \frac{2b}{1b} = v, \quad \dots$$

(7.1) *Л. К. ТУГАЕВ*

**О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ ТРАЕКТОРИЙ
 ПРОБНОГО ЗАРЯДА**

В этой статье содержится обоснование утверждения о том, что пробный заряд может двигаться в электромагнитном поле в евклидовом трехмерном пространстве по траектории с законом движения, принадлежащим к определенному множеству траекторий и законов движений. Здесь имеется в виду, что произвольно заданной траектории с произвольно заданным законом движения в евклидовом трехмерном пространстве соответствует линия в четырехмерном пространстве Минковского — интегральная линия уравнений Френе, дифференциальных уравнений перемещения ее канонического репера. Обратно, заданной так произвольно линии в пространстве Минковского соответствует траектория заряда в евклидовом трехмерном пространстве с определенным законом движения. Условие для возможных траекторий пробного заряда выражено в виде зависимости между двумя из трех кривизн линии в пространстве Минковского.

1. Основные соотношения. В четырехмерном пространстве Минковского указаны два ортонормированных конгруэнтных репера: неподвижный (O, a_1, a_2, a_3, a_4) и подвижный (M, e_1, e_2, e_3, e_4) .

Уравнения дифференциальных перемещений подвижного репера [1]:

$$dM = \omega^i e_i, \quad de_i = \omega^j e_j \quad (i, j, k, l, \dots = 1, 2, 3, 4) \quad (1.1)$$

Метрический тензор пространства Минковского 1R_4 :

$$(g_{ij}) = \text{diag}(-1, -1, -1, +1) \quad (1.2)$$

Нижний индекс в символе 1R_4 означает размерность пространства, верхний — число единиц со знаком + в матрице (1. 2).

В уравнениях (1. 1) e_α ($\alpha, \beta, \gamma = 1, 2, 3$) — пространственноподобные векторы, e_4 — временноподобный вектор.

В соответствии с метрическим тензором (1. 2) получим дифференциальную квадратичную форму пространства

$$d\sigma^2 = -dx^1{}^2 - dx^2{}^2 - dx^3{}^2 + dx^4{}^2, \quad (1.3)$$

в которой x^i — координаты точки, σ — собственное время, а также и условия между относительными компонентами ω^i :

$$\omega_\alpha^\beta + \omega_\beta^\alpha = 0, \quad \omega_4^\alpha = \omega_\alpha^4, \quad \omega_4^4 = 0. \quad (1.4)$$

В евклидовом трехмерном пространстве соответственно имеем:

$$x^1 = x, \quad x^2 = y, \quad x^3 = z, \quad x^4 = ct, \quad (1.5)$$

x, y, z — координаты точки относительно ортогонального репера; t — момент времени при этом положении точки; c — скорость света;

$$d\sigma^2 = (c^2 - v^2) dt^2, \quad ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2, \quad v = \frac{ds}{dt}. \quad (1.6)$$

Зависимость между координатными векторами неподвижного репера Oa_i и подвижного Me_i можно представить в виде

$$a_i = \xi_i^j e_j. \quad (1.7)$$

После дифференцирования этих уравнений и применения соотношений (1.1) получим

$$d\xi_i^j + \xi_i^k \omega_k^j = 0. \quad (1.8)$$

Система дифференциальных уравнений (1.8) вполне интегрируемая; функции ξ_i^j подчинены еще условию

$$g_{ij} = g_{kl} \xi_i^k \xi_j^l. \quad (1.9)$$

Уравнения Френе (см., например [2]) линии с временноподобным касательным единичным текущим вектором $e_1 = u$:

$$\frac{dM}{d\sigma} = u = e_1, \quad \frac{du}{d\sigma} = k_0 e_1, \quad \frac{de_1}{d\sigma} = k_0 e_1 + k_1 e_2, \quad \frac{de_2}{d\sigma} = -k_1 e_1 - k_2 e_3, \\ \frac{de_3}{d\sigma} = k_2 e_2, \quad (1.10)$$

k_0, k_1, k_2 — кривизны линии. Следовательно:

$$\frac{d^2 u}{d\sigma^2} = \frac{dk_0}{d\sigma} e_1 + k_0 k_1 e_2 + k_0^2 e_1, \quad (1.11)$$

$$\frac{d^3 u}{d\sigma^3} = \left(\frac{d^2 k_0}{d\sigma^2} + k_0^3 - k_0 k_1^2 \right) e_1 + \left(2k_1 \frac{dk_0}{d\sigma} + k_0 \frac{dk_1}{d\sigma} \right) e_2 - \\ - k_0 k_1 k_2 e_3 + 3k_0 \frac{dk_0}{d\sigma} e_1.$$

Из сопоставления уравнений (1.1) и (1.10) находим матрицу

$$[\omega_i^j] = \begin{bmatrix} 0 & k_1 d\sigma & 0 & k_0 d\sigma \\ -k_1 d\sigma & 0 & -k_1 d\sigma & 0 \\ 0 & k_2 d\sigma & 0 & 0 \\ k_0 d\sigma & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (1.12)$$

Если в пространстве 1R_4 линия задана уравнением

$$M = M(\sigma)$$

относительно репера Oa_i , σ — натуральный параметр (собственное время), то [2] формулы для вычисления кривизн имеют вид:

$$k_0^2 = \left(\frac{d u}{d \sigma} \right)^2, \quad k_1 = k_0^2 - \frac{\left(\frac{d u}{d \sigma} \frac{d^2 u}{d \sigma^2} \right)^2}{k_0^4} + \frac{\left(\frac{d^2 u}{d \sigma^2} \right)^2}{k_0^2},$$

$$k_2 = - \frac{\det \begin{vmatrix} \mathbf{u} & \frac{d\mathbf{u}}{d\sigma} & \frac{d^2\mathbf{u}}{d\sigma^2} & \frac{d^3\mathbf{u}}{d\sigma^3} \end{vmatrix}}{k_0^3 k_1^2}. \quad (1.13)$$

Матрица компонент тензора электромагнитного поля

$$(F^{ij}) = \begin{bmatrix} 0 & H^3 - H^2 - E^1 \\ -H^3 & 0 & H^1 - E^2 \\ H^2 - H^1 & 0 & -E^3 \\ E^1 & E^2 & E^3 & 0 \end{bmatrix}. \quad (1.14)$$

Уравнение траектории пробного заряда относительно неподвижного репера Oa_i в заданном электромагнитном поле [3]

$$\frac{d\mathbf{u}}{d\sigma} = \frac{e_0}{m_0 c} F^{ij} u_j^* \mathbf{a}_i, \quad (1.15)$$

e_0 и m_0 — заряд и масса покоя; \mathbf{u} — единичный вектор 4-скорости заряда; u_i и u^i — его ковариантные и контравариантные координаты; E^i — координаты вектора напряженности электрического поля \mathbf{E} , H^i — вектора напряженности магнитного поля \mathbf{H} [3].

Уравнение (1.15) получено при условии, что электромагнитное поле, создаваемое зарядом, не влияет на поле F^{ij} .

2. Условия совпадения подвижного репера с неподвижным. При инвариантности уравнений (1.10) и (1.11) относительно движений в пространстве Минковского можно считать неподвижный репер Oa_i занимающим одно из положений подвижного канонического репера Me_i , соответствующее значению $\sigma = \sigma_0$. Условие совпадения этих реперов, как следует из соотношений (1.7), при $\sigma = \sigma_0 = 0$

$$\xi_i^j = \sigma_i^j, \quad (2.1)$$

σ_i^j — символ Кронекера. Из уравнений (1.8), (1.10) и из матрицы (1.12) при условии (2.1) следует:

$$\frac{d\xi_i^j}{d\sigma} = -\xi_i^k \omega_k^j. \quad (2.2)$$

Матрица

$$\left[\frac{d\xi_i^j}{d\sigma} \right] = \begin{bmatrix} 0 & -k_1 & 0 & -k_0 \\ k_1 & 0 & k_2 & 0 \\ 0 & -k_2 & 0 & 0 \\ -k_0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.3)$$

Переменный вектор $\mathbf{u}(\sigma)$, вектор-функция натурального параметра σ , задан относительно неподвижного репера Oa_i в виде

$$\mathbf{u} = u^i(\sigma) \mathbf{a}_i. \quad (2.4)$$

Этот вектор в соответствии с формулой (1.6) относительно подвижного репера Me_i будет определен в виде:

$$\mathbf{u} = u^j \xi_j^i \mathbf{e}_i = u^i(\sigma) \mathbf{e}_i, \quad (2.5)$$

$$u^j \xi_j^i = u^i. \quad (2.6)$$

Дифференцируя по σ соотношение (2.5) и пользуясь равенствами (1.1), (1.4) и (1.8), получим

$$\frac{d\mathbf{u}}{d\sigma} = \frac{d\dot{u}^i}{d\sigma} \xi_j^i \mathbf{e}_i. \quad (2.7)$$

После дифференцирования по σ соотношения (2.7), применения равенств (1.1), (1.4) и (1.8), дифференцирования полученного выражения и т. д. получим

$$\frac{d^n \mathbf{u}}{d\sigma^n} = \frac{d^n \dot{u}^i}{d\sigma^n} \xi_j^i \mathbf{e}_i. \quad (2.8)$$

Условие совпадения траектории пробного заряда, определенной уравнениями его движения, и линии, определенной уравнениями Френе. Если траектория пробного заряда, интегральная линия уравнений (1.15), совпадает с интегральной линией системы уравнений (1.10), то в точках этих совпавших линий, как следует из соотношений (1.11), (1.13):

$$\mathbf{e}_1 = \mathbf{u}, \quad \frac{d\mathbf{u}}{d\sigma} = k_0 \mathbf{e}_1, \quad \frac{d^2 \mathbf{u}}{d\sigma^2} = \frac{dk_0}{d\sigma} \mathbf{e}_1 + k_0 k_1 \mathbf{e}_2 + k_0^2 \mathbf{e}_1. \quad (3.1)$$

$$\frac{d^3 \mathbf{u}}{d\sigma^3} = \left(\frac{d^2 k_0}{d\sigma^2} + k_0^3 - k_0 k_1^2 \right) \mathbf{e}_1 + \left(2k_1 \frac{dk_0}{d\sigma} + k_0^2 \frac{dk_1}{d\sigma} \right) \mathbf{e}_2 - k_0 k_1 k_2 \mathbf{e}_3 + 3k_0 \frac{dk_0}{d\sigma} \mathbf{e}_1,$$

$$k_0^2 = \left(\frac{d\mathbf{u}}{d\sigma} \right)^2, \quad k_1^2 = \left(\frac{d\mathbf{u}}{d\sigma} \right)^2 - \frac{\left(\frac{d\mathbf{u}}{d\sigma} \frac{d^2 \mathbf{u}}{d\sigma^2} \right)^2}{\left(\frac{d\mathbf{u}}{d\sigma} \right)^4} + \frac{\left(\frac{d^2 \mathbf{u}}{d\sigma^2} \right)^2}{\left(\frac{d\mathbf{u}}{d\sigma} \right)^2}, \quad (3.2)$$

$$k_2 = - \frac{\det \left| \mathbf{u} \quad \frac{d\mathbf{u}}{d\sigma} \quad \frac{d^2 \mathbf{u}}{d\sigma^2} \quad \frac{d^3 \mathbf{u}}{d\sigma^3} \right|}{-k_0^3 k_1^2}.$$

Траектория пробного заряда определена уравнениями (1.15) относительно неподвижного репера Oa_i .

В соответствии с условием (1.7) уравнение движения этого заряда по линии (M) вместе с каноническим репером будет

$$\frac{d\mathbf{u}}{d\sigma} = \frac{e_0}{m_0 c^2} F^{ij} \dot{u}_j \xi_i^k \mathbf{e}_k. \quad (3.3)$$

Следовательно, в соответствии с формулой (2.8):

$$\frac{d^2 \mathbf{u}}{d\sigma^2} = \frac{e_0}{m_0 c} \left(\frac{dF^{ij}}{d\sigma} \dot{u}_j + F^{ij} \frac{d\dot{u}_j}{d\sigma} \right) \xi_i^k \mathbf{e}_k, \quad (3.4)$$

$$\frac{d^3 \mathbf{u}}{d\sigma^3} = \frac{e_0}{m_0 c} \left(\frac{d^2 F^{ij}}{d\sigma^2} \dot{u}_j + 2 \frac{dF^{ij}}{d\sigma} \frac{d\dot{u}_j}{d\sigma} + F^{ij} \frac{d^2 \dot{u}_j}{d\sigma^2} \right) \xi_i^k \mathbf{e}_k. \quad (3.5)$$

Условие совпадения траектории пробного заряда, определенной уравнением (1.15), и линии (M), определенной уравнениями (1.10), состоит в тождестве

дественном равенстве соответствующих правых частей в формулах (3.1), (3.3), (3.4), (3.5), так как кривизны (3.2) линии (M) определены единичным вектором касательной \mathbf{u} и производными $du/d\sigma$, $d^2u/d\sigma^2$, $d^3u/d\sigma^3$. Уравнения (3.3) — (3.5) запишем в виде:

$$U_{11} = F^{11} = \frac{e_0}{m_0 c} k_0, \quad U_{12} = F^{12} = -E^2, \quad U_{13} = F^{13} = -E^3, \quad U_{14} = F^{14} = -E^4, \quad (3.6)$$

В соответствии с первым уравнением системы (1.10) при $\sigma = \sigma_0$:

$$u^1 = u^2 = u^3 = 0, \quad u^4 = 1, \quad \epsilon^1 = u^1, \quad \epsilon^2 = u^2, \quad \epsilon^3 = u^3, \quad \epsilon^4 = u^4. \quad (3.7)$$

Из соотношений (3.3), (1.10), (3.9) и (1.12):

$$U_{11} = F^{11} = \frac{m_0 c}{e_0} k_0, \quad U_{12} = F^{12} = -E^2, \quad U_{13} = F^{13} = -E^3, \quad U_{14} = F^{14} = -E^4, \quad U_{21} = 0, \quad U_{22} = 0, \quad U_{23} = 0, \quad U_{24} = 0, \quad U_{31} = 0, \quad U_{32} = 0, \quad U_{33} = 0, \quad U_{34} = 0, \quad U_{41} = 0, \quad U_{42} = 0, \quad U_{43} = 0, \quad U_{44} = 0. \quad (3.8)$$

$$\frac{du^1}{d\sigma} = k_0, \quad \frac{du^2}{d\sigma} = \frac{du^3}{d\sigma} = \frac{du^4}{d\sigma} = 0. \quad (3.9)$$

Вектор напряженности электрического поля направлен по оси Me_1 канонического репера. Будем теперь сравнивать выражения $d^2u/d\sigma^2$ при $\sigma = \sigma_0$ в формулах (3.1), относящихся к линии (M) , и в формулах (3.4), относящихся к траектории заряда. Из уравнения (3.4) при условиях (2.1), (2.3), (3.7) — (3.9) и обозначении (3.6) при $\sigma = \sigma_0$ имеем:

$$U_{21} = \frac{e_0}{m_0 c} \frac{dF^{14}}{d\sigma}, \quad U_{22} = \frac{e_0}{m_0 c} \left(\frac{dF^{24}}{d\sigma} + F^{12} k_0 \right), \quad U_{23} = \frac{e_0}{m_0 c} \left(\frac{dF^{34}}{d\sigma} + F^{13} k_0 \right), \quad U_{24} = k_0^2. \quad (3.10)$$

Поэтому из соотношений (3.1) и (3.4) при $\sigma = \sigma_0$:

$$\frac{e_0}{m_0 c} \frac{dF^{14}}{d\sigma} = \frac{dk_0}{d\sigma}, \quad \frac{e_0}{m_0 c} \left(\frac{dF^{24}}{d\sigma} + F^{12} k_0 \right) = k_0 k_1, \quad \frac{e_0}{m_0 c} \left(\frac{dF^{34}}{d\sigma} + F^{13} k_0 \right) = 0. \quad (3.11)$$

Наконец, будем сравнивать выражения производных $d^3u/d\sigma^3$ в формулах (3.1), (3.5), пользуясь условиями (3.7) — (3.9) и обозначением (3.6).

После соответствующих вычислений получим при $\sigma = \sigma_0$:

$$U_{31} = \frac{e_0}{m_0 c} \left(\frac{d^2 E^{14}}{d\sigma^3} + F^{1j} \frac{d^2 u_j}{d\sigma^2} \right), \quad U_{32} = \frac{e_0}{m_0 c} \left(\frac{d^2 F^{24}}{d\sigma^3} + 2k_0 \frac{dF^{12}}{d\sigma} - F^{12} \frac{d^2 u_1}{d\sigma^2} + F^{23} \frac{d^2 u_3}{d\sigma^2} \right), \quad U_{33} = \frac{e_0}{m_0 c} \left(\frac{d^2 F^{34}}{d\sigma^3} + 2k_0 \frac{dF^{13}}{d\sigma} - F^{13} \frac{d^2 u_1}{d\sigma^2} + F^{23} \frac{d^2 u_2}{d\sigma^2} \right), \quad U_{34} = \frac{e_0}{m_0 c} \left(F^{41} \frac{d^2 u_1}{d\sigma^2} + 2k_0 \frac{dF^{14}}{d\sigma} \right). \quad (3.12)$$

Преобразуем формулы (3.12) так, чтобы в них были только F^{ij} , k_0 , k_1 , k_2 и производные от них. Соотношения (3.11) получены при $\sigma = \sigma_0$.

Но значение σ_0 выбрано произвольно, и соотношения (3.12) будут такими же при произвольном значении σ и соответствующем каноническом репере. Линия (M) может быть определена ее кривизнами $k_0(\sigma)$, $k_1(\sigma)$, $k_2(\sigma)$; кривизны определены формулами (3.2) как функции только от \mathbf{u} , $d\mathbf{u}/d\sigma$, $d^2\mathbf{u}/d\sigma^2$, $d^3\mathbf{u}/d\sigma^3$. Следовательно, условие совпадения линии (M) с траекторией пробного заряда:

$$\mathbf{u} = \mathbf{e}_4, \quad \frac{d^a \mathbf{u}}{d\sigma^a} = U^{ai} \mathbf{e}_i \quad (a = 1, 2, 3). \quad (3.13)$$

4. Совместные инварианты линии и траектории пробного заряда. Совместными инвариантами линии и траектории, определяющими их, будут скалярные произведения векторов в пространстве Минковского:

$$\begin{aligned} & \mathbf{u}^2, \quad \mathbf{u} \frac{d\mathbf{u}}{d\sigma}, \quad \left(\frac{d\mathbf{u}}{d\sigma} \right)^2, \quad \mathbf{u} \frac{d^2\mathbf{u}}{d\sigma^2}, \quad \frac{d\mathbf{u}}{d\sigma} \frac{d^2\mathbf{u}}{d\sigma^2}, \\ & \left(\frac{d^2\mathbf{u}}{d\sigma^2} \right)^2, \quad \mathbf{u} \frac{d^3\mathbf{u}}{d\sigma^3}, \quad \frac{d\mathbf{u}}{d\sigma} \frac{d^3\mathbf{u}}{d\sigma^3}, \quad \frac{d^2\mathbf{u}}{d\sigma^2} \frac{d^3\mathbf{u}}{d\sigma^3}, \quad \left(\frac{d^3\mathbf{u}}{d\sigma^3} \right)^2. \end{aligned} \quad (4.1)$$

Выражения для этих инвариантов, относящихся к линии (M), можно получить из формул (1.10), (1.11), а к траектории заряда — из формул (3.9), (3.12).

Из уравнения (1.15) при условиях (3.8) — (3.11):

$$\begin{aligned} \frac{d^2 u^1}{d\sigma^2} &= \frac{e_0}{m_0 c} \frac{dF^{14}}{d\sigma}, \quad \frac{d^2 u^2}{d\sigma^2} = \frac{e_0}{m_0 c} \left(\frac{dF^{24}}{d\sigma} + k_0 F^{12} \right), \\ \frac{d^2 u^3}{d\sigma^2} &= \frac{e_0}{m_0 c} \left(\frac{dF^{34}}{d\sigma} + k_0 F^{13} \right), \quad \frac{d^2 u^4}{d\sigma^2} = \frac{e_0}{m_0 c} k_0 F^{14}. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Из формул (1.2), (1.11):

$$\frac{d^2 u_1}{d\sigma^2} = -\frac{dk_0}{d\sigma}, \quad \frac{d^2 u_2}{d\sigma^2} = -k_0 k_1, \quad \frac{d^2 u_3}{d\sigma^2} = 0, \quad \frac{d^2 u_4}{d\sigma^2} = k_0^2. \quad (4.3)$$

Формулы (3.12) после замены $d^2 u_i / d\sigma^2$ их выражениями (4.3) при $\sigma = \sigma_0$ примут вид:

$$\begin{aligned} U^{31} &= \frac{e_0}{m_0 c} \left(\frac{d^2 F^{14}}{d\sigma^2} - F^{12} k_0 k_1 + F^{14} k_0^2 \right), \\ U^{32} &= \frac{e_0}{m_0 c} \left(\frac{d^2 F^{24}}{d\sigma^2} + 2k_0 \frac{dF^{12}}{d\sigma} + F^{12} \frac{dk_0}{d\sigma} \right), \\ U^{33} &= \frac{e_0}{m_0 c} \left(\frac{d^2 F^{34}}{d\sigma^2} + 2k_0 \frac{dF^{13}}{d\sigma} + F^{13} \frac{dk_0}{d\sigma} + F^{23} k_0 k_1 \right), \\ U^{34} &= \frac{e_0}{m_0 c} \left(F^{14} \frac{dk_0}{d\sigma} + 2k_0 \frac{dF^{14}}{d\sigma} \right). \end{aligned} \quad (4.4)$$

Сравнивая выражения (4.4) и (1.11, 2), получим:

$$\frac{e_0}{m_0 c} \left(\frac{d^2 F^{14}}{d\sigma^2} - F^{12} k_0 k_1 \right) = \frac{d^2 k_0}{d\sigma^2} - k_0 k_1^2,$$

$$\frac{e_0}{m_0 c} \left(\frac{d^2 F^{24}}{d\sigma^2} + 2k_0 \frac{dF^{12}}{d\sigma} + F^{12} \frac{dk_0}{d\sigma} \right) = 2k_1 \frac{dk_0}{d\sigma} + k_0 \frac{dk_1}{d\sigma}, \quad (4.5)$$

$$\frac{e_0}{m_0 c} \left(\frac{d^2 F^{34}}{d\sigma^2} + 2k_0 \frac{dF^{13}}{d\sigma} + F^{13} \frac{dk_0}{d\sigma} + F^{23} k_0 k_1 \right) = -k_0 k_1 k_2.$$

Условия мгновенного совпадения подвижного канонического репера Me_i с неподвижным Oa_i определены соотношениями (3.7) — (3.9), (3.11) и (4.5). Выполнение этих условий во всех точках линии (M) означает совпадение линии (M) с траекторией пробного заряда. Рассматривая инварианты (4.1) и пользуясь уравнениями (3.8), (3.11), (4.5), получим условие совпадения линии (M) с траекторией пробного заряда относительно произвольного репера, конгруэнтного каноническому реперу Me_i при условии

$$k_0 \neq 0, \quad k_1 \neq 0, \quad (4.6)$$

в виде:

$$k_0 = \frac{e_0}{m_0 c} F^{14}, \quad \frac{dk_0}{d\sigma} = \frac{e_0}{m_0 c} \frac{dF^{14}}{d\sigma}, \quad k_0 k_1 = \frac{e_0}{m_0 c} \left(\frac{dF^{24}}{d\sigma} + F^{12} k_0 \right),$$

$$\frac{dF^{34}}{d\sigma} + F^{13} k_0 = 0, \quad k_1 = \frac{e_0}{m_0 c} F^{12}, \quad k_1 \frac{dk_0}{d\sigma} = \frac{e_0}{m_0 c} k_0 \frac{dF^{12}}{d\sigma}, \quad (4.7)$$

$$k_0 k_1 k_2 + \frac{e_0}{m_0 c} \left(k_0 \frac{dF^{13}}{d\sigma} + F^{23} k_0 k_1 \right) = 0.$$

Из соотношения (4.7, 1) при условии (3.10) следует:

$$k_0^2 = \frac{e_0^2}{m_0^2 c_0^2} \mathbf{E}^2, \quad (4.8)$$

квадрат кривизны k_0 пропорционален скалярному квадрату вектора напряженности электрического поля. Уравнение (4.7, 2) — результат дифференцирования уравнения (4.7, 1).

Соотношения (4.7, 3), (4.7, 4), (4.7, 7) выражают условия, наложенные соответственно на величины F^{24} , F^{13} , F^{23} , которых нет в других уравнениях системы (4.7). Только уравнения (4.7, 5) и (4.7, 6) содержат условия, наложенные на одну компоненту F^{12} вектора напряженности магнитного поля. Оба эти уравнения не зависимы от остальных, но зависимы между собою. Из них следует, если они имеют место в окрестности σ_0 :

$$k_1 = c_0 k_0, \quad (4.9)$$

c_0 — произвольная константа. Рассмотрим отдельно условия (4.6). Как следует из формул (1.13), кривизна k_0 должна быть отличной от нуля, чтобы существовали кривизны k_1 и k_2 ; кривизны k_0 и k_1 должны быть отличными от нуля для существования кривизны k_2 . Если

$$k_0 = 0, \quad (4.10)$$

то из формул (1.10) получим: оп (3.11.1) и (4.4) риважьрваз рванвадф

$$\frac{dM}{d\sigma} = e_4, \quad \frac{de_4}{d\sigma} = 0,$$

вектор $e_4 \equiv a_4$ — постоянный, и уравнение линии будет: (4.11)

$$M = a_4 \sigma + c, \quad (4.11)$$

c — произвольный постоянный вектор; этот вектор можно считать расположенным в евклидовом подпространстве пространства Минковского, т. е.

$$c = c^a a_a. \quad (4.12)$$

Текущие координаты точки M относительно неподвижного репера Oa_i :

$$x^a = c^a, \quad x^4 = \sigma. \quad (4.13)$$

Итак, условию (4.10) соответствует фиксированная точка в евклидовом пространстве. Если

$$k_1 = 0, \quad (4.14)$$

то из формул (1.10):

$$\frac{dM}{d\sigma} = e_4, \quad \frac{de_4}{d\sigma} = k_0 e_1, \quad \frac{de_1}{d\sigma} = k_0 e_4. \quad (4.15)$$

Это значит, что линия, описываемая точкой M , может быть расположена в двумерной плоскости Oa_1a_4 фиксированного репера Oa_i и соответствует движению по прямой в евклидовом пространстве. Такую траекторию можно осуществить. Из изложенного следует при условии на стр. 27

Теорема. Траекторией пробного заряда в электромагнитном поле евклидова трехмерного пространства, кроме прямой, может быть такая линия и с таким законом движения по ней, которым соответствует линия в пространстве Минковского с пропорциональными кривизнами k_0 и k_1 .

5. Уравнения траекторий пробного заряда, выраженные степенными рядами. Пусть точка M_0 произвольно взята на линии в пространстве 1R_4 и соответствует некоторому значению натурального параметра σ .

Изменяя начало отсчета значений натурального параметра, если это потребуется, можем считать $\sigma_0 = 0$. Будем считать, что канонический репер линии с началом в точке M_0 совпал с фиксированным репером M_0a_i .

Канонические разложения текущих координат x^a точки этой линии с помощью уравнений Френе (1.10) относительно репера Oa_i можно представить в виде степенных рядов [2]:

$$x^1 = \frac{k_0}{2} \sigma^2 + \frac{k_0^{(1)}}{3!} \sigma^3 + \dots, \quad (5.1)$$

$$x^2 = \frac{k_0 k_2}{3!} \sigma^3 + \frac{2k_0^{(1)} k_1 + k_0 k_1^{(1)}}{4!} \sigma^4 + \dots$$

$$x^3 = -\frac{k_0 k_1 k_2}{4!} \sigma^4 - \frac{(2k_0^{(1)} k_1 + k_0 k_1^{(1)}) k_1 + (k_0 k_1 k_2)^{(1)}}{5!} \sigma^5 + \dots,$$

$$x^4 = \sigma + \frac{k_0^2}{3!} \sigma^3 + \frac{3}{4!} k_0 k_0^{(1)} \sigma^4 + \dots, \quad (5.1)$$

где $k_0^{(1)} = \frac{dk_0}{d\sigma}$, ..., а у кривизн k_0, k_1, k_2 и всех их производных берутся значения при $\sigma = 0$. Для того чтобы эти уравнения соответствовали траектории пробного заряда, надо присоединить к ним условие (4.9).

Если положить в нарушение условия (4.9), например,

$$k_1 = (c_0 + \varepsilon + \sigma) k_0, \quad (5.2)$$

то при этом уравнения (5.1), не могут точно соответствовать траектории пробного заряда.

При значениях ε , сколь угодно малых по абсолютной величине, через любую окрестность точки M проходит несчетное множество линий, которые не могут точно соответствовать траекториям пробного заряда. Из формул (1.5) и (5.1) следует:

$$ct = \sigma + \frac{k_0^2}{3!} \sigma^3 + \frac{3}{4!} k_0 k_0^{(1)} \sigma^4 + \dots \quad (5.3)$$

Если для решения конкретной задачи движения пробного заряда удастся решить уравнение (5.3) относительно σ , то, вставляя полученное выражение в первые три уравнения системы (5.1) при условии (4.9), получим уравнения траектории пробного заряда в евклидовом трехмерном пространстве с законом движения его по этой траектории.

ЛИТЕРАТУРА

1. Фиников С. П. Метод внешних форм Картана. ГИТТЛ, М.—Л., 1948, стр. 405.
2. Тутаев Л. К. Тр. I респ. конф. мат. БССР. Изд. «Высш. шк.», Минск, 1965, стр. 290—294.
3. Ландау Л. и Лифшиц Е. Теория поля. ГИТТЛ, М.—Л., 1941, стр. 58.

Поступило в редакцию 28.VI 1966

Л. Б. ШНЕПЕРМАН

НЕПОДВИЖНАЯ ТОЧКА ПОЛУГРУППЫ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ И ИНВАРИАНТНОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ НА БИКОМПАКТНОЙ ПОЛУГРУППЕ

В статье обобщается на полугруппы известная теорема Какутани [5] о неподвижной точке: найдены необходимые и достаточные условия существования неподвижной точки у равностепенно непрерывной полугруппы преобразований локально выпуклого линейного топологического пространства. Далее установлено, что всякая бикомпактная топологическая полугруппа алгебраически антиизоморфна полугруппе равностепенно непрерывных преобразований некоторого локально выпуклого линейного топологического пространства. Это дает возможность получить условия существования инвариантного интеграла и инвариантной меры на бикомпактной полугруппе, не используя даже существование меры Хаара на бикомпактной группе.

§ 1. Теорема о неподвижной точке полугруппы преобразований. Семейство L линейных операторов линейного топологического пространства X называется равностепенно непрерывным на подмножестве K пространства X , если для каждой окрестности V нуля пространства X , найдется такая окрестность U нуля, что если $k_1, k_2 \in K$ и $k_1 - k_2 \in U$, то $L(k_1 - k_2) \subset V$, т. е. $l(k_1 - k_2) \in V$ при $l \in L$.

Какутани показал, что если пространство X локально выпуклое, его подмножество K бикомпактное и выпуклое, а L — группа преобразований, равностепенно непрерывная и инвариантная на K , то K содержит неподвижную точку группы L . Обобщением этого результата на полугруппу преобразований является

Теорема 1. Пусть K — бикомпактное выпуклое подмножество локально выпуклого линейного топологического пространства X , а L — такая равностепенно непрерывная на K полугруппа линейных преобразований, что $LK \subset K$ и $l_1 L \cap l_2 L \neq \emptyset$ при любых $l_1, l_2 \in L$. Тогда в K существует такая точка x_0 , что $Lx_0 = x_0$.

Доказательство. Пусть $\mathbf{K} = \{K_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ — упорядоченная по включению система всех бикомпактных выпуклых подмножеств множества K , инвариантных относительно полугруппы преобразований L : $LK_\lambda \subset K_\lambda$ для любого $\lambda \in \Lambda$. По лемме Цорна в \mathbf{K} содержится минимальный элемент K_0 . Если K_0 содержит только одну точку, то теорема доказана. Поэтому в дальнейшем будем считать, что множество K_0 содержит более одной точки.

Покажем, что при любом конечном n система уравнений $l_1 x_1 = l_2 x_2 = \dots = l_n x_n$ в полугруппе L имеет решение. Из условия следует справедливость этого утверждения для $n=2$. Пусть оно справедливо для $n-1$ и $x_i = c_i$ ($i=1, 2, \dots, n-1$) — одно из решений системы $l_1 x_1 = l_2 x_2 = \dots = l_{n-1} x_{n-1}$. Уравнение $l_1 c_1 x = l_n x_n$ имеет решение $x = c$, $x_n = c_n$, следовательно, $c_1 c, c_2 c, \dots, c_{n-1} c, c_n$ — решение системы $l_1 x_1 = l_2 x_2 = \dots = l_n x_n$.

Теперь ясно, что множество $\bigcap_{i=1}^n l_i K_0$ не пусто, так как $l_i K_0 \supseteq l_i x_i K_0 = l_i x_i K_0$ ($i = 1, 2, \dots, n$). Из бикомпактности и выпуклости множества K_0 следует непустота, бикомпактность и выпуклость множества $K'_0 = \bigcap_{l \in L} l K_0$. Если теперь l_0 — произвольное преобразование из L , то $l_0 K'_0 \subset l_0 x K_0 = l_0 x K_0 \subset l K_0$ при любом $l \in L$. А из $l_0 K'_0 \subset K'_0 \subset K_0$ следует $K'_0 = K_0$. Итак, $l K_0 = K_0$ при любом $l \in L$.

Дальше с небольшими изменениями использован метод, примененный в [1] при доказательстве теоремы Какутани. Множество $K_0 - K_0$ бикомпактно и содержит точку $z \neq 0$. Пусть V — такая выпуклая симметричная окрестность нуля, что ни V , ни ее замыкание не содержат z . Так как полугруппа L равномерно непрерывна на K , а значит, и на K_0 , то найдется такая окрестность нуля U , что как только $x_1 - x_2 \in (K_0 - K_0) \cap U$, так $L(x_1 - x_2) \subset V$.

Пусть теперь N — выпуклая оболочка множества $U \cup L U$. Непосредственной проверкой легко убедиться, что $LN \subset N$. Ясно также, что $L\bar{N} \subset \bar{N}$. Так как множество $K_0 - K_0$ бикомпактно, то оно ограничено, т. е. существует такое $\alpha > 0$, что $\alpha(K_0 - K_0) \subset U \subset N$. Пусть $\alpha_0 = \sup \{ \alpha | \alpha > 0, \alpha(K_0 - K_0) \subset N \}$. Легко заметить, что для каждого $\varepsilon \in (0, 1)$ множество $K_0 - K_0$ не содержится в $(1 - \varepsilon) \frac{1}{\alpha_0} \bar{N}$, но $K_0 - K_0 \subset (1 + \varepsilon) \frac{1}{\alpha_0} N$. Семейство открытых множеств $\left\{ \frac{1}{2\alpha_0} U + x \mid x \in K_0 \right\}$ покрывает K_0 . Выберем из него конечное покрытие $\frac{1}{2\alpha_0} U + x_1, \dots, \frac{1}{2\alpha_0} U + x_n$. Тогда и семейство $\frac{1}{2\alpha_0} N + x_1, \dots, \frac{1}{2\alpha_0} N + x_n$ покрывает K_0 . Положим $y = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$.

Если $x \in K_0$, то $x_1 - x \in \frac{1}{2\alpha_0} N$ при некотором i ($1 \leq i \leq n$). Так как $x_i - x \in (1 + \varepsilon) \frac{1}{\alpha_0} N$ при любом i ($1 \leq i \leq n$) и $\varepsilon > 0$, то $y \in \frac{1}{n} \times \left(\frac{1}{2\alpha_0} N + (n-1) \left(1 + \varepsilon \right) \frac{1}{\alpha_0} N \right) + x$. Полагая $\varepsilon = \frac{1}{4(n-1)}$, получаем, что $y \in \left(1 - \frac{1}{4n} \right) \frac{1}{\alpha_0} N + x$ для каждого $x \in K_0$. Положим $Q = K_0 \cap \left\{ \bigcap_{x \in K_0} \left(\left(1 - \frac{1}{4n} \right) \frac{1}{\alpha_0} \bar{N} + x \right) \right\}$. Так как $y \in Q$, то $Q \neq \emptyset$. Множество $\left(1 - \frac{1}{4n} \right) \frac{1}{\alpha_0} \bar{N}$ не содержит $K_0 - K_0$, а потому $Q \neq K_0$. Множество Q бикомпактно и выпукло. Далее, так как $l\beta N \subset \beta N$ при $l \in L$, то $l(\beta \bar{N} + x) \subset \beta \bar{N} + lx$ при $x \in K_0$. Поскольку $lK_0 = K_0$, то $LQ \subset Q$, но это противоречит минимальности K_0 .

§ 2. Бикомпактная топологическая полугруппа как полугруппа операторов линейного топологического пространства. Пусть A — бикомпактная топологическая полугруппа; Φ — банахово пространство всех непрерывных вещественных функций на A (для каждого $\varphi \in \Phi: \|\varphi\| = \max_{x \in A} |\varphi(x)|$); F — совокупность всех вещественных линейных функционалов на Φ , а F^+ — множество всех позитивных

функционалов из F ($f \in F^+$ тогда и только тогда, когда $f(\varphi) \geq 0$ для каждого $\varphi \geq 0$).

Каждому элементу φ из Φ сопоставим экземпляр вещественной прямой D_φ и пусть D — их прямое произведение. Элемент из D это функция f , определенная на каждом D_φ и сопоставляющая ему число $f(D_\varphi) \in D_\varphi$. Поэтому каждую точку $f \in D$ можно трактовать как функцию, заданную на Φ : $f(\varphi) = f(D_\varphi)$. При такой интерпретации точек пространства D имеем $F^+ \subset F \subset D$.

Лемма 1. F^+ и F — непустые замкнутые множества в пространстве D .
Доказательство. F^+ (а следовательно, и F) непусто, так как содержит нулевой функционал. Зафиксируем на минуту φ_1 и φ_2 . Условие $f(\varphi_1 + \varphi_2) = f(\varphi_1) + f(\varphi_2)$ выделяет в множестве D замкнутое подмножество. Пересечение всех таких подмножеств замкнуто и есть F . Зафиксировав далее $\varphi \geq 0$, с помощью условия $f(\varphi) \geq 0$ опять выделим замкнутое подмножество в D . Пересечение всех таких подмножеств $\in F$ замкнуто и дает F^+ .

Лемма 2 [3]. Пусть $\varphi_0(x) \equiv 1$. Совокупность F_0 положительных функционалов, отображающих φ_0 в 1, образует непустое, выпуклое бикомпактное подмножество в топологическом пространстве D .

Доказательство. Существование хотя бы одного положительного функционала f , удовлетворяющего условию $f(\varphi_0) = 1$, следует из [8]. Зафиксируем φ и пусть c_φ — ограничивающая φ константа: $c_\varphi \geq \|\varphi\|$ (непрерывная функция φ на бикompакте A ограничена). $f(c_\varphi \pm \varphi) \geq 0$ для любого $f \in F_0$, и отсюда $c_\varphi \geq |f(\varphi)| = |f(D_\varphi)|$. На каждой вещественной прямой D_φ выберем отрезок $[c_\varphi, c_\varphi]$. Прямое произведение этих отрезков есть бикompакт, содержащий F_0 . Множество F^+ замкнуто в D , и условие $f(\varphi_0) = 1$ тоже выделяет в D замкнутое множество. Являясь пересечением этих множеств с бикompактом, F_0 также бикompактно. Выпуклость множества F_0 проверяется непосредственно.

Сильная операторная топология на F [1] — это топология, определяемая следующим базисным множеством окрестностей:

$$U(f; \Psi, \varepsilon) = \{g \mid g \in F, |(f-g)\varphi| < \varepsilon, \varphi \in \Psi\},$$

где Ψ — произвольное конечное подмножество Φ и ε — произвольное положительное число.

Лемма 3. На множестве F сильная операторная топология совпадает с топологией, индуцированной из D .

Доказательство. Базисная окрестность точки $f \in F$ в топологии, индуцированной из D , определяется так:

$$V(f; \Psi, \varepsilon) = F \cap \left(\prod_{\varphi \in \Phi \setminus \Psi} D_\varphi \times \prod_{\varphi \in \Psi} U_{\varphi, \varepsilon}(f) \right),$$

где Ψ — произвольное конечное подмножество Φ ; ε — произвольное положительное число и $U_{\varphi, \varepsilon}(f) = \{g \mid g \in D, |(f-g)\varphi| < \varepsilon\}$. Так как $F \cap U_{\varphi, \varepsilon}(f) = \{g \mid g \in F, |(f-g)\varphi| < \varepsilon\}$, то отсюда уже ясно, что $V(f; \Psi, \varepsilon) = U(f; \Psi, \varepsilon)$.

Множество F образует векторное пространство над полем вещественных чисел. Наделенное сильной операторной топологией, оно становится локально выпуклым топологическим векторным пространством. В дальнейшем при упоминании о пространстве F будем иметь в виду именно это пространство.

Каждому элементу $a \in A$ сопоставим оператор h_a банахова пространства Φ : $[h_a \varphi](x) = \varphi(xa)$. Оператор h_a аддитивный

$$\left[h_a \sum_{i=1}^n \varphi_i \right] (x) = \left[\sum_{i=1}^n \varphi_i \right] (xa) = \left[\sum_{i=1}^n h_a \varphi_i \right] (x)$$

и ограниченный

$$\|h_a \varphi\| = \max_{x \in A} |\varphi(xa)| \leq \max_{x \in A} |\varphi(x)| = \|\varphi\|,$$

а значит, непрерывный.

Непосредственно ясно, что множество $H = \{h_a\}_{a \in A}$ образует полугруппу линейных операторов пространства Φ .

Не ограничивая общности, всюду в дальнейшем будем считать, что A содержит единицу e . В противном случае эту единицу можно было бы присоединить к полугруппе A внешним образом [2], а к пространству полугруппы A как изолированную точку.

Лемма 4. Полугруппа H , наделенная сильной операторной топологией, топологически изоморфна полугруппе A .

Доказательство. Рассмотрим отображение γ полугруппы A на полугруппу H : $\gamma(a) = h_a$ для любого $a \in A$. Непосредственно ясно, что $\gamma(ab) = \gamma(a)\gamma(b)$. Пусть теперь a и b — две произвольные различные точки из A , а φ — такая непрерывная вещественная функция на A , что $\varphi(a) \neq \varphi(b)$. Тогда $[h_a \varphi](e) = \varphi(a) \neq \varphi(b) = [h_b \varphi](e)$, т. е. $h_a \neq h_b$. Итак, γ — изоморфизм полугруппы A на полугруппу H .

Установим непрерывность отображения γ . Для этого достаточно, очевидно, показать, что прообраз $\gamma^{-1}W$ окрестности $W = W(h_a; \varphi, \varepsilon)$ при отображении γ будет множеством открытым. Из $a' \in \gamma^{-1}W$ следует, что $\|(h_a - h_{a'})\varphi\| < \varepsilon$, а это равносильно $|\varphi(xa) - \varphi(xa')| < \varepsilon$ для всех $x \in A$. Покажем, что вместе с a' этому условию удовлетворяет и некоторая его окрестность. Если $\eta = \max_{x \in A} |\varphi(xa) - \varphi(xa')|$, то пусть $\delta < \varepsilon - \eta$. Зафикси-

руем на минуту точку x и обозначим через Q_x прообраз $\frac{\delta}{2}$ - окрест-

ности точки $\varphi(xa')$ при отображении φ . И пусть U_x и V_x такие открытые окрестности точек x и a' соответственно, что $U_x V_x \subset Q_x$. Если теперь точка x пробегает все пространство полугруппы A , то из покрытия $\{U_x\}_{x \in A}$

выберем конечное покрытие U_{x_1}, \dots, U_{x_n} и положим $V = \bigcap_{i=1}^n V_{x_i}$. Произвольный элемент $x \in A$ принадлежит одной из окрестностей U_{x_i} . Значит, для любого z из V

$$xa', xz \in U_{x_i} V \subset U_{x_i} V_{x_i} \subset W_{x_i},$$

откуда следует, что для всех $x \in A$

$$|\varphi(xa') - \varphi(xz)| < \delta.$$

А это в свою очередь влечет

$$\begin{aligned} |\varphi(xa) - \varphi(xz)| &\leq |\varphi(xa) - \varphi(xa')| + \\ &+ |\varphi(xa') - \varphi(xz)| < \eta + \delta < \varepsilon. \end{aligned}$$

Итак, элемент a' принадлежит $\gamma^{-1}W$ вместе со своей окрестностью V , что и устанавливает непрерывность отображения γ .

Сильная операторная топология суть отделимая топология, а потому взаимно однозначное и непрерывное отображение γ является гомеоморфизмом.

Каждому линейному оператору h_a банахова пространства Φ сопоставим сопряженный оператор h_a^* локально выпуклого топологического векторного пространства F : $h_a^* f = fh_a$.

Лемма 5. Оператор h_a^* непрерывен на F .

Доказательство. Пусть $V(fh_a; \Psi, \varepsilon)$ — окрестность точки fh_a в F . Если теперь g лежит в окрестности $U(f, h_a \Psi, \varepsilon)$ точки f , то $|(fh_a - h_a^*g)\varphi| = |(fh_a - gh_a)\varphi| = |(f-g)h_a\varphi| < \varepsilon$ для любого $\varphi \in \Psi$, т. е. из $g \in U(f; h_a \Psi, \varepsilon)$ следует, что $h_a^*g \in V(fh_a; \Psi, \varepsilon)$. А это означает непрерывность оператора h_a^* на F .

Совокупность операторов $H^* = \{h_a^*\}_{a \in A}$ образует полугруппу, антиизоморфную полугруппе H : непосредственно убеждаемся, что $h_a^*h_b^* = h_{ba}^*$.

Теорема 2. Полугруппа H^* равномерно непрерывна на F_0 .

Доказательство. Пусть $K = F_0 - F_0$. Нам надо доказать, что для любой окрестности нуля $V(0; \Psi, \varepsilon)$ в F существует такая окрестность нуля U , что как только $f \in U \cap K$, так $H^*f = fH \in V$. Иными словами, $|fh_a\varphi| < \varepsilon$ для всех $\varphi \in \Psi$, $h_a \in H$ и $f \in U \cap K$. Это можно еще записать и так: $|(U \cap K)H\Psi| < \varepsilon$. Если положить $U \cap K = Q$ и $H\Psi = R$, то нам нужно доказать существование такого Q , что $|QR| < \varepsilon$.

Множество R является бикомпактом. Действительно, $R = \bigcup_{\varphi \in \Psi} H\varphi$ и $H\varphi = \bigcup_{a \in A} h_a\varphi$. Если $\{h_b\varphi\}_{b \in B}$ — бесконечное подмножество из $H\varphi$, то $\{h_b\}_{b \in B}$ — бесконечное подмножество из H . А так как H бикомпакт, то $\{h_b\}_{b \in B}$ имеет предельную точку $h \in H$ в сильной операторной топологии, т. е. в окрестности $W(h; \varphi, \varepsilon)$ содержится бесконечно много точек h_b , для которых $|(h - h_b)\varphi| < \varepsilon$. Но это значит, что $h\varphi \in H\varphi$ — предельная точка для множества $\{h_b\varphi\}_{b \in B}$. Множество R бикомпактно как объединение конечного числа бикомпактов.

Отметим, что множество $K\varphi$ бикомпактно при любом φ . Действительно, если $\{f_\sigma\varphi\}_{\sigma \in \Sigma}$ — бесконечное подмножество из $K\varphi$, то $\{f_\sigma\}_{\sigma \in \Sigma}$ — бесконечное подмножество бикомпакта — имеет предельную точку f_0 . В окрестности этой точки $W(f_0; \varphi, \varepsilon)$ содержится бесконечно много точек из $\{f_\sigma\}_{\sigma \in \Sigma}$, т. е. $|f_\sigma\varphi - f_0\varphi| < \varepsilon$ для бесконечно большого числа точек. А это значит, что $f_0\varphi \in K\varphi$ — предельная точка множества $\{f_\sigma\}_{\sigma \in \Sigma}$.

Отметим еще, что из бикомпактности множества $K\varphi$ следует его ограниченность. Поэтому принцип равномерной ограниченности [1] позволяет утверждать, что для данного $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что $|K\varphi| <$

$$< \frac{\varepsilon}{2} \text{ как только } \|\varphi\| < \delta.$$

Зафиксируем на минуту какое-нибудь φ из R , и пусть

$$Q_\varphi = K \cap U\left(0; \varphi, \frac{\varepsilon}{2}\right) = \left\{f \in K; |f\varphi| < \frac{\varepsilon}{2}\right\}.$$

Если теперь φ' принадлежит δ -окрестности точки φ , то

$$|f\varphi'| \leq |f(\varphi - \varphi')| + |f\varphi| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Пусть теперь точка φ пробегает все R . Из бесконечного числа δ -окрестностей, покрывающих R , выберем конечное число $P(\varphi_1), \dots, P(\varphi_k)$ и положим

$$Q = \bigcap_{i=1}^k Q_{\varphi_i}. \text{ Тогда для любого } f \in Q \text{ и } \varphi \in R \text{ имеем, так как } \varphi \in P(\varphi_i):$$

$$|f\varphi| \leq |f(\varphi - \varphi_i)| + |f\varphi_i| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \text{ Итак, существует такая окрестность } Q, \text{ что } |QR| < \varepsilon, \text{ что и доказывает теорему.}$$

В качестве простого следствия теорем 1 и 2 получается важная

Теорема 3. Если в бикомпактной полугруппе A для любых $a, b \in A$ выполняется условие $Aa \cap Ab \neq \emptyset$, то существует такой функционал $f_0 \in F_0$, что $H^* f_0 = f_0$.

Доказательство. Прежде всего ясно, что $H^* F_0 \subset F_0$. А так как полугруппа H^* антиизоморфна полугруппе H , а следовательно, и A (лемма 4), то $h_a^* H^* \cap h_b^* H^* \neq \emptyset$ при любых a и b из A . Итак, выполняются все условия теоремы 1.

§ 3. Инвариантное интегрирование на бикомпактной полугруппе. Результаты этого параграфа в неявном виде имеются в [6] и [7]. Там для их получения использовалось существование меры Хаара на бикомпактной группе. Заметим, что принятое в этих работах определение инвариантной меры неудачно: существование инвариантного интеграла не влечет там существования инвариантной меры, а существование инвариантной меры в свою очередь не влечет существования инвариантного интеграла.

Преобразование t пространства A называется сохраняющим меру, если прообраз каждого измеримого множества измерим и имеет ту же меру, что и само это множество [4]. Мера в этом случае называется инвариантной относительно t (t -инвариантной [1]). Итак, мера μ инвариантна относительно t , если $\mu(t^{-1}Z) = \mu(Z)$ для любого измеримого множества $Z \subset A$ ($t^{-1}Z$ — это полный прообраз множества Z при преобразовании t).

Каждому элементу $a \in A$ сопоставим правый сдвиг t_a полугруппы A : $t_a x = xa$ для любого $x \in A$. Меру μ на бикомпактной полугруппе A назовем правоинвариантной, если она инвариантна относительно каждого правого сдвига полугруппы A .

Интеграл по мере μ на бикомпактной полугруппе A называется правоинвариантным, если

$$\int \varphi(x) d\mu(x) = \int \varphi(xa) d\mu(x)$$

для любого $a \in A$ и $\varphi \in \Phi$.

Существование правоинвариантного интеграла и правоинвариантной меры на бикомпактной полугруппе равносильно. Поэтому в дальнейшем при доказательствах мы не будем различать эти понятия.

Левоиинвариантная мера и интеграл определяются симметрично.

Мера и интеграл право- и левоинвариантные называются инвариантными.

Теорема 4. Для того чтобы на бикомпактной полугруппе A существовала правоинвариантная регулярная борелевская мера (правоинвариантный интеграл по регулярной борелевской мере), необходимо и достаточно, чтобы $Aa \cap Ab \neq \emptyset$ для любых a и b из A .

Доказательство. Необходимость. Пусть μ — правоинвариантная регулярная борелевская мера на бикомпактной полугруппе A . Не ограничивая общности, будем считать, что $\mu(A) = 1$. Допустим, что существуют такие элементы $a, b \in A$, что $Aa \cap Ab = \emptyset$. Множества Aa и Ab бикомпактные, а потому измеримые. Из $t_a^{-1}(Aa) = A$ и правой инвариантности меры μ следует, что $\mu(A) = \mu(t_a^{-1}(Aa)) = \mu(Aa)$. Аналогично $\mu(A) = \mu(Ab)$. Так как $A \supset Aa \cup Ab$ и $Aa \cap Ab = \emptyset$, то $\mu(A) \geq \mu(Aa) + \mu(Ab) = \mu(A) + \mu(A)$, т. е. $\mu(A) \leq 0$, что невозможно.

Достаточность. Обратимся к теореме 3. Функционал $f_0 \in F^+$, поэтому он может быть представлен в виде интеграла по регулярной борелевской мере μ [4]:

$$f_0(\varphi(x)) = \int \varphi(x) d\mu(x).$$

Далее, теорема 3 устанавливает, что $h_a^* f_0 = f_0$ для любого a из A ; при $\varphi \in \Phi$ это означает, что $f_0(\varphi(x)) = f_0(\varphi(xa))$, откуда уже следует

$$\int \varphi(x) d\mu(x) = \int \varphi(xa) d\mu(x).$$

Лемма 6. На бикompактной полугруппе A условие $Aa \cap Ab \neq \emptyset$ при любых $a, b \in A$ равносильно тому, что минимальный двусторонний идеал полугруппы A является полугруппой с левой обратимостью.

Доказательство. 1. Пусть $Aa \cap Ab \neq \emptyset$ при любых $a, b \in A$. Тогда, как и при доказательстве теоремы 1, легко показать, что пересечение любого конечного числа множеств вида Aa не пусто, а в силу бикompактности A не пусто и множество $C = \bigcap_{a \in A} Aa$.

Покажем, что C — полугруппа с левой обратимостью, или, что равносильно, не имеет собственных левых идеалов. При любом $c \in C$ и $a \in A$ уравнение $c = xa$ разрешимо, так как $c \in Aa$. Поэтому $C \subset Ac \subset Axa \subset Aa$ и, следовательно, $C \subset Ac \subset \bigcap_{a \in A} Aa = C$, что влечет $C = Ac$. Значит, $Cc = Ac \cdot c = Ac^2 = C$, т. е. C не имеет собственных левых идеалов.

Равенство $C = Ac$ при любом $c \in C$ указывает еще и на то, что C является минимальным левым идеалом полугруппы A . Других минимальных левых идеалов полугруппа A не имеет. Действительно, если X такой идеал, то $C \subset Ax \subset X$ при любом $x \in X$, т. е. $X = C$. Но объединение всех минимальных левых идеалов полугруппы A является ее минимальным двусторонним идеалом. Значит, C — минимальный двусторонний идеал полугруппы A .

2. Допустим, что $Aa \cap Ab \neq \emptyset$ при каких-то $a, b \in A$. Левый идеал Aa полугруппы A содержит минимальный левый идеал L , а левый идеал Ab — минимальный левый идеал M . Если C — минимальный двусторонний идеал полугруппы A , то $L \cup M \subset C$. Так как C — полугруппа с левой делимостью, то уравнение $xl = m$ ($l \in L, m \in M$) разрешимо в C . Если $l = ua, m = vb$, то $xua = vb \in Aa \cap Ab$, что противоречит допущению.

Из теоремы 4 и леммы 6 непосредственно следует

Теорема 5. Для того чтобы на бикompактной полугруппе A существовала правоинвариантная регулярная борелевская мера (правоинвариантный интеграл по регулярной борелевской мере), необходимо и достаточно, чтобы минимальный двусторонний идеал полугруппы A был полугруппой с левой обратимостью.

Здесь уместно отметить, что строение бикompактной полугруппы с левой обратимостью известно: она является прямым произведением бикompактной полугруппы Q левых нулей ($q_1 q_2 = q_1; q_1, q_2 \in Q$) и бикompактной группы.

Разумеется, что для левоинвариантного интегрирования (меры) справедливы все симметричные утверждения. Если еще заметить, что полугруппа с двусторонней обратимостью является группой, то становится ясным следующее утверждение:

Теорема 6. Для того чтобы на бикompактной полугруппе A существовала инвариантная регулярная борелевская мера (инвариантный интеграл по регулярной борелевской мере), необходимо и достаточно, чтобы минимальный двусторонний идеал полугруппы A был группой.

ЛИТЕРАТУРА

1. Данфорд Н. Линейные операторы. М., ИЛ, 1962.
2. Ляпин Е. С. Полугруппы. М., Физматгиз, 1960.
3. Марков А. А. ДАН СССР, 1, 299—302, 1936.
4. Халмош П. Теория меры. М., ИЛ, 1963.
5. Kakutani S. Proc. Imp. Acad. Tokyo, 14, 242—245, 1938.
6. Шварц Шт. Чех. м. ж., 7(82), № 2, 165—182, 1957.
7. Raaijman-de Miranda A. B. Topological semigroups, Amst., 1964.
8. Крейн М. Г. и Рутман М. А. УМН, 3, в. 1(23), 1948.

Поступило в редакцию 16.VI 1966

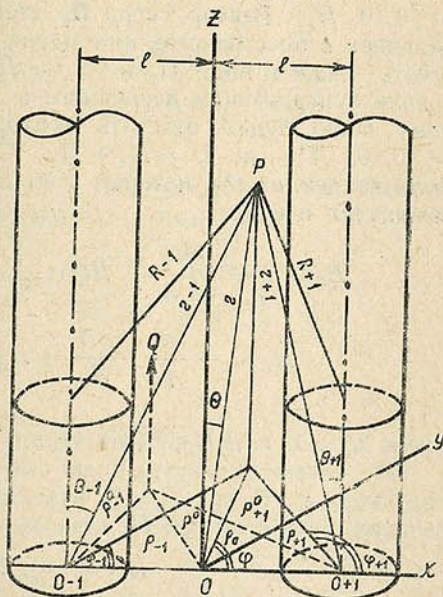
А. В. МОШИНСКИЙ

**ДИФРАКЦИЯ ПОЛЯ
 ПРОДОЛЬНОГО ДИПОЛЬНОГО ИЗЛУЧАТЕЛЯ
 НА ДВУХ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ЦИЛИНДРАХ.
 I. ЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ДИПОЛЬНЫЙ ИЗЛУЧАТЕЛЬ**

При конструировании антенных систем приходится учитывать влияние близлежащих структур на характеристики излучения. В большинстве случаев сложные поверхности таких структур заменяют более простыми, в частности, поверхностями эллиптических цилиндров.

К настоящему времени имеется ряд работ, посвященных строгому решению задачи о дифракции плоской волны на двух эллиптических цилиндрах, например [2—7] и др. Что же касается излучения элементарных антенн в присутствии цилиндров, укажем, что ранее [8—10] теоретически и экспериментально было изучено влияние лишь одного эллиптического цилиндра на характеристики излучения, а совсем недавно была решена аналогичная задача для двух круговых цилиндров [1]. Однако, насколько известно, до сих пор не рассматривалась задача об излучении дипольного источника, размещенного вблизи нескольких цилиндров с эллиптическим сечением, хотя решение подобного вида задач весьма интересно с точки зрения управления характеристикой направленности излучателей с помощью пассивных элементов. Отметим, что применяемая для решения задачи методика может быть при определенных условиях распространена на случай возбуждения плоскопараллельного волновода либо открытого резонатора, образованных идеально проводящими параллельными пластинами.

1. Формулировка задачи. Рассмотрим систему, состоящую из двух бесконечно длинных идеально проводящих эллиптических цилиндров с образующими параллельными оси Oz декартовой системы координат с началом в точке O (рисунок). Центры эллипсов O_s ($s = \pm 1$) в секущей плоскости Oxy приняты за начала локальных декартовых координат (x_s, y_s) , которые в свою очередь связаны с локальными эллиптическими координатами (ξ_s, η_s) преобразованиями:



Геометрия рассеивающей системы

$$x_s = d \operatorname{ch} \xi_s \cos \eta_s; \quad y_s = d \operatorname{sh} \xi_s \sin \eta_s, \quad (1)$$

где $0 \leq \xi_s \leq \infty$; $0 \leq \eta_s \leq 2\pi$ ($s = \pm 1$); d — фокусное расстояние, одинаковое для обоих цилиндров.

Предполагается, что большие и малые оси эллипсов в секущей плоскости Oxy взаимно параллельны, расстояние между осями цилиндров равно $2l$. В локальных эллиптических координатах поверхность s -го цилиндра задается уравнением $\xi_s = \xi_0$ ($s = \pm 1$). Положение дипольного излучателя в пространстве определяется точкой Q , имеющей локальные координаты ξ_s^0 , η_s^0 и z_0 . Для простоты будем считать, что направление электрического дипольного момента параллельно оси Oz , т. е. $\mathbf{p} = \{0, 0, p\}$, где p ($p = \frac{I dz_0}{-i\omega}$) — электрический дипольный момент; I — электрический ток диполя.

После такого диполя в свободном пространстве ($\varepsilon = \mu = 1, \sigma = 0$) определяется через электрический вектор Герца

$$\mathbf{\Pi}_1 = \mathbf{p} \frac{\exp(ikR)}{R} \quad (2)$$

(R — расстояние от диполя до точки наблюдения, $k = 2\pi/\lambda$ — волновое число) из соотношений:

$$\mathbf{E}_1 = \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{\Pi}_1; \quad \mathbf{H}_1 = -ik \operatorname{rot} \mathbf{\Pi}_1 \quad (3)$$

(здесь и в дальнейшем временная зависимость, заданная множителем $\exp(-i\omega t)$, для краткости записи опускается).

Из (2) видно, что для первичного поля $\mathbf{E}_1, \mathbf{H}_1$ вектор Герца $\mathbf{\Pi}_1 = \{0, 0, \Pi_1\}$. Вектор Герца $\mathbf{\Pi}_2$ вторичного поля $\mathbf{E}_2, \mathbf{H}_2$, обусловленного наличием в пространстве цилиндров, в рассматриваемом нами случае будем искать также в виде $\mathbf{\Pi}_2 = \{0, 0, \Pi_2\}$. Полное поле можно представить в виде суперпозиции первичного и вторичного полей. Очевидно, что полному полю будет отвечать вектор Герца $\mathbf{\Pi} = \mathbf{\Pi}_1 + \mathbf{\Pi}_2$, причем $\mathbf{\Pi} = \{0, 0, \Pi\}$, где $\Pi = \Pi_1 + \Pi_2$. Составляющие векторов \mathbf{E}, \mathbf{H} полного поля найдем из (3), которые в одной из систем эллиптических координат запишутся в виде:

$$\left. \begin{aligned} E_\xi &= \frac{1}{\lambda_1} \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \xi \partial z}; & E_\eta &= \frac{1}{\lambda_2} \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \eta \partial z}; & E_z &= \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + k \right) \Pi; \\ H_\xi &= -\frac{ik}{\lambda_2} \frac{\partial \Pi}{\partial \eta}; & H_\eta &= \frac{ik}{\lambda_1} \frac{\partial \Pi}{\partial \xi}; & H_z &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Здесь $\lambda_1 = \lambda_2 = d \sqrt{\operatorname{ch}^2 \xi \sin^2 \eta + \operatorname{sh}^2 \xi \cos^2 \eta}$ — коэффициенты Ламе.

Из условия равенства нулю тангенциальных составляющих E_η, E_z полного поля \mathbf{E}, \mathbf{H} при $\xi_s = \xi_0$ находим из (4), что на поверхности каждого из цилиндров функция Π должна удовлетворять условию

$$(\Pi_1 + \Pi_2)|_{\xi_s = \xi_0} = 0 \quad (s = \pm 1). \quad (5)$$

Так как первичное поле $\mathbf{E}_1, \mathbf{H}_1$ известно (известен вектор Герца $\mathbf{\Pi}_1$), то задача сводится к отысканию функции Π_2 вектора Герца $\mathbf{\Pi}_2$, определяющего вторичное поле $\mathbf{E}_2, \mathbf{H}_2$.

Искомая функция Π_2 должна удовлетворять однородному уравнению Гельмгольца

$$\Delta \Pi_2 + k^2 \Pi_2 = 0, \quad (6)$$

условию излучения на бесконечности, а также граничным условиям (5), выполняющимся одновременно на каждом из цилиндров.

2. Решение задачи. Если искать решение уравнения (6) методом разделения переменных в эллиптических координатах, то его частные решения, удовлетворяющие условию излучения на бесконечности, будут иметь вид:

$$\text{Me}_n^{(1)}(\xi_s, q) \text{ce}_n(\eta_s, q) \exp(ihz); \text{Ne}_n^{(1)}(\xi_s, q) \text{se}_n(\eta_s, q) \exp(ihz),$$

где $n=0, 1, 2, \dots$; $-\infty < h < \infty$. Поэтому исходя из требований, предъявляемых к функции Π_2 , будем искать ее в виде

$$\begin{aligned} \Pi_2 = ip \sum_{s=\pm 1} \sum_{n=0}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [x_n^{(s)} c_n \text{Me}_n^{(1)}(\xi_s, q) \text{ce}_n(\eta_s, q) + \\ + y_n^{(s)} d_n \text{Ne}_n^{(1)}(\xi_s, q) \text{se}_n(\eta_s, q)] \exp[ih(z - z_0)] dh, \end{aligned} \quad (7)$$

где $q = k_1^2 = d^2(k^2 - h^2)/4$; $x_n^{(s)}$, $y_n^{(s)}$ — коэффициенты, зависящие от n и h и подлежащие определению. (Здесь s -ое слагаемое в сумме по s ($s = \pm 1$) определяет при соответствующем выборе коэффициентов разложения вторичное поле, обусловленное s -ым цилиндром). Коэффициенты c_n , d_n для четных и нечетных n соответственно равны [2]:

$$\begin{aligned} c_{2n} = \frac{A_0^{(2n)}}{\text{ce}_{2n}(0) \text{ce}_{2n}\left(\frac{\pi}{2}\right)}; \quad c_{2n+1} = \frac{-ik_1 A_1^{(2n+1)}}{\text{ce}_{2n+1}(0) \text{ce}'_{2n+1}\left(\frac{\pi}{2}\right)}; \\ d_{2n+2} = \frac{k_1^2 B_2^{(2n+2)}}{\text{se}'_{2n+2}(0) \text{se}'_{2n+2}\left(\frac{\pi}{2}\right)}; \quad d_{2n+1} = \frac{ik_1^2 B_1^{(2n+1)}}{\text{se}'_{2n+1}(0) \text{se}_{2n+1}\left(\frac{\pi}{2}\right)}. \end{aligned} \quad (8)$$

Для отыскания коэффициентов $x_n^{(s)}$, $y_n^{(s)}$ предварительно представим функцию Π_1 в s -ой локальной системе координат в виде [11]:

$$\begin{aligned} \Pi_1 = ip \sum_{n=0}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left[c_n^2 \text{ce}_n(\eta_s, q) \text{ce}_n(\eta_s^0, q) \begin{Bmatrix} \text{Me}_n^{(1)}(\xi_s, q) \text{Ce}_n(\xi_s^0, q) \\ \text{Ne}_n^{(1)}(\xi_s^0, q) \text{Ce}_n(\xi_s, q) \end{Bmatrix} + \right. \\ \left. + d_n^2 \text{se}_n(\eta_s, q) \text{se}_n(\eta_s^0, q) \times \right. \\ \left. \times \begin{Bmatrix} \text{Ne}_n^{(1)}(\xi_s, q) \text{Se}_n(\xi_s^0, q) \\ \text{Ne}_n^{(1)}(\xi_s^0, q) \text{Se}_n(\xi_s, q) \end{Bmatrix} \right] \exp[ih(z - z_0)] dh, \end{aligned} \quad (9)$$

где в фигурных скобках верхняя строка записана для $\xi_s^0 < \xi_s$, нижняя — для $\xi_s^0 > \xi_s$. Функции Матье ($\text{Me}_n^{(1)}$, $\text{Ne}_n^{(1)}$, Se_n , Ce_n , se_n , ce_n), входящие в выражения (7) — (9), определены и обозначены как в [12].

Применив к выражению (7) теорему сложения для элементарных волновых функций эллиптического цилиндра [14] и воспользовавшись граничными условиями (5), после замены неизвестных

$$x_n^{(s)} = c_n \text{Ce}_n(\xi_0, q) X_n^{(s)}; \quad y_n^{(s)} = d_n \text{Se}_n(\xi_0, q) Y_n^{(s)} \quad (10)$$

для искомых коэффициентов $X_n^{(s)}$, $Y_n^{(s)}$ получим бесконечную линейную систему уравнений, имеющую в канонической форме вид

$$X_n^{(s)} + \sum_{m=0}^{\infty} \{ \lambda_{nm}^{-s,s} X_m^{(-s)} + \mu_{nm}^{-s,s} Y_m^{(-s)} \} = f_{n,s}^{(1)}, \quad (11)$$

($s = \pm 1$)

$$Y_n^{(s)} + \sum_{m=0}^{\infty} \{ \sigma_{nm}^{-s,s} Y_m^{(-s)} + \tau_{nm}^{-s,s} X_m^{(-s)} \} = f_{n,s}^{(2)}, \quad (12)$$

где

$$f_{n,s}^{(1)} = - \frac{c e_n(\eta_s^0, q) \text{Me}_n^{(1)}(\xi_s^0, q)}{\text{Me}_n^{(1)}(\xi_0, q)}; \quad (13)$$

$$f_{n,s}^{(2)} = - \frac{s e_n(\eta_s^0, q) \text{Ne}_n^{(1)}(\xi_s^0, q)}{\text{Ne}_n^{(1)}(\xi_0, q)}; \quad (14)$$

$$\lambda_{nm}^{-s,s} = \frac{2c_m \text{Ce}_m(\xi_0, q)}{c_n \text{Me}_n^{(1)}(\xi_0, q)} \sum_{p=0}^{\infty} c_p a_p^{(m,n)} \text{Me}_p^{(1)}(\xi_{-s,s}, q) \text{se}_p(\eta_{-s,s}, q); \quad (15)$$

$$\mu_{nm}^{-s,s} = \frac{2d_m \text{Se}_m(\xi_0, q)}{c_n \text{Me}_n^{(1)}(\xi_0, q)} \sum_{p=0}^{\infty} d_p b_p^{(m,n)} \text{Ne}_p^{(1)}(\xi_{-s,s}, q) \text{se}_p(\eta_{-s,s}, q); \quad (16)$$

$$\sigma_{nm}^{-s,s} = \frac{2d_m \text{Se}_m(\xi_0, q)}{d_n \text{Ne}_n^{(1)}(\xi_0, q)} \sum_{p=0}^{\infty} c_p c_p^{(m,n)} \text{Me}_p^{(1)}(\xi_{-s,s}, q) \text{se}_p(\eta_{-s,s}, q); \quad (17)$$

$$\tau_{nm}^{-s,s} = \frac{2c_m \text{Ce}_m(\xi_0, q)}{d_n \text{Ne}_n^{(1)}(\xi_0, q)} \sum_{p=0}^{\infty} d_p b_p^{(m,n)} \text{Ne}_p^{(1)}(\xi_{-s,s}, q) \text{se}_p(\eta_{-s,s}, q). \quad (18)$$

Коэффициенты $a_p^{(m,n)}$, $b_p^{(m,n)}$, $c_p^{(m,n)}$ определены в [14].

В рассматриваемом нами случае большие оси эллипсов в секущей плоскости Oxy лежат на координатной оси Ox . Последнее обстоятельство приводит к упрощению системы (11), (12). Так как в этом случае $\eta_{-s,s} = 0$ или π , то $\text{se}_p(\eta_{-s,s}, q) = 0$ и, как следует из (16) и (17), $\mu_{nm}^{-s,s} = \tau_{nm}^{-s,s} = 0$. Следовательно:

$$X_n^{(s)} = f_{n,s}^{(1)} - \sum_{m=0}^{\infty} \lambda_{nm}^{-s,s} X_m^{(-s)}; \quad (19)$$

$$Y_n^{(s)} = f_{n,s}^{(2)} - \sum_{m=0}^{\infty} \sigma_{nm}^{-s,s} Y_m^{(-s)}. \quad (20)$$

В результате введения замены (10) система (11), (12) или же (19), (20) для новых неизвестных $X_n^{(s)}$, $Y_n^{(s)}$ оказываются квазирегулярными. Таким же путем, как это сделано в работе [2] для систем подобного вида, можно показать, что их решения могут быть найдены методом усечения для каждого заданного значения $h(q)$ при условии, что $l > d$. Решения систем удовлетворяют неравенствам:

$$\sum_{n=0}^{\infty} |X_n^{(s)}|^2 < \infty, \quad \sum_{n=0}^{\infty} |Y_n^{(s)}|^2 < \infty.$$

Определением коэффициентов разложения $X_n^{(s)}$, $Y_n^{(s)}$ фактически и заканчивается формальное решение задачи. При этом необходимо помнить, что системы уравнений (19), (20) могут быть разрешены только для фиксированных значений h , что является ограничением данного решения. Однако, как мы увидим дальше, оно может быть устранено для волновой зоны.

Решение систем (19), (20) численным методом позволит найти коэффициенты разложения $X_n^{(s)}$, $Y_n^{(s)}$, определяющие функцию Π_2 , а последняя в сумме с Π_1 полностью определяет полное поле вне цилиндров.

Прежде чем приступить к следующему разделу, заметим, что для численного счета систем (19), (20) целесообразно входящие в (15) и (17) суммы по индексу p выразить через функции Бесселя. Согласно [3], можно записать, что

$$\begin{aligned} & \sum_{p=0}^{\infty} c_p a_p^{(m,n)} \text{Me}_p^{(1)}(\xi_{-s,s}, q) c e_p(\eta_{-s,s}, q) = \\ & = \frac{1}{2} \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} A_{\nu}^{(n)} A_l^{(m)} [i^{\nu-l} H_{|\nu-l}^{(1)}(kd \text{ch } \xi_{-s,s}) \cos(\nu-l)\eta_{-s,s} + \\ & \quad + i^{\nu+l} H_{\nu+l}^{(1)}(kd \text{ch } \xi_{-s,s}) \cos(\nu+l)\eta_{-s,s}], \end{aligned} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} & \sum_{p=0}^{\infty} c_p c_p^{(m,n)} \text{Me}_p^{(1)}(\xi_{-s,s}, q) c e_p(\eta_{-s,s}, q) = \\ & = \frac{1}{2} \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} B_{\nu}^{(n)} B_l^{(m)} [i^{\nu-l} H_{|\nu-l}^{(1)}(kd \text{ch } \xi_{-s,s}) \cos(\nu-l)\eta_{-s,s} - \\ & \quad - i^{\nu+l} H_{\nu+l}^{(1)}(kd \text{ch } \xi_{-s,s}) \cos(\nu+l)\eta_{-s,s}], \end{aligned} \quad (22)$$

где A и B — коэффициенты Фурье функций Матье [12].

3. Поле электрического дипольного излучателя в волновой зоне. Переходя к определению поля диполя в присутствии двух параллельных эллиптических цилиндров, заметим, что на практике представляет известный интерес определение полей на большом расстоянии от рассеивающих объектов, т. е. в волновой зоне, для которой обычно полагают

$$\xi_s \rightarrow \infty, \quad \left[\frac{d \exp(\xi_s)}{2} \simeq R_s \rightarrow \infty \right].$$

Из выражения (7) нетрудно видеть, что функция Π_2 содержит интеграл в комплексной плоскости, вычисление которого весьма затруднительно в общем случае. Однако для волновой зоны, когда расстояние между цилиндрами $2l$ много меньше расстояния R_s до точки наблюдения (рис. 1), метод перевала позволяет вычислить асимптотику интеграла, входящего в (7), (9).

Как и в случае кругового цилиндра [13], для того чтобы к интегралу вида

$$\int_{-\infty}^{\infty} X_n^{(s)} c_n^2 ce_n(\eta_s) Ce_n(\xi_0) Me_n^{(1)}(\xi_s) \exp[ih(z - z_0)] dh$$

применить метод перевала, необходимо воспользоваться асимптотическим представлением функции $Me_n^{(1)}(\xi_s, q)$, а затем перейти к новой переменной интегрирования. После введения замены $h = k \cos \alpha$, $z - z_0 = R_s \cos \Theta$ и $\rho_s = R_s \sin \Theta$ метод перевала (точкой перевала будет $\alpha = \Theta$) даст

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} X_n^{(s)} c_n^2 Ce_n(\xi_0, q) ce_n(\eta_s, q) Me_n^{(1)}(\xi_s, q) \exp[ih(z - z_0)] dh = \\ & = -2iX_n^{(s)} c_n Ce_n(\xi_0, q') ce_n(\varphi, q') \frac{\exp(ikR_s)}{R_s}, \end{aligned} \quad (23)$$

где

$$q' = \frac{d^2 k^2 \sin \Theta}{4} \quad (h = k \cos \Theta, \Theta_s \approx \Theta, \eta_s \approx \varphi_s = \varphi).$$

Аналогичным образом вычисляется интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} Y_n^{(s)} d_n^2 Se_n(\xi_0, q) se_n(\eta_s, q) Ne_n^{(1)}(\eta_s, q) \exp[ih(z - z_0)] dh.$$

Переходя к сферическим координатам с центром в точке O , для которых в волновой зоне $R_s = r_s - z_0 \cos \Theta$, $\rho_s = \rho - sl \cos \varphi$, $r_s = \sqrt{\rho_s^2 + z^2} \approx r - sl \cos \varphi \sin \Theta$ ($s = \pm 1$), найдем, что

$$P_2 = 2p \frac{\exp[ik(r - z_0 \cos \Theta)]}{r} T_2(\varphi, \Theta), \quad (24)$$

где

$$\begin{aligned} T_2(\varphi, \Theta) &= \sum_{s=\pm 1} \exp(-iksl \cos \varphi \sin \Theta) \times \\ &\times \sum_{n=0}^{\infty} [X_n^{(s)} c_n Ce_n(\xi_0, q') ce_n(\varphi, q') + Y_n^{(s)} d_n Se_n(\xi_0, q') se_n(\varphi, q')], \end{aligned} \quad (25)$$

а коэффициенты $X_n^{(s)}$, $Y_n^{(s)}$ находятся из систем (19), (20) при $h = k \cos \Theta$. Для первичного поля функция P_1 в волновой зоне в сферических координатах с началом в точке O запишется в виде

$$P_1 = 2p \frac{\exp[ik(r - z_0 \cos \Theta)]}{r} T_1(\varphi, \Theta). \quad (26)$$

Здесь

$$\begin{aligned} T_1(\varphi, \Theta) &= \exp\{-ikd \sqrt{\text{ch}^2 \xi^0 - \sin^2 \eta^0} \cos \times \\ &\times [\varphi - \text{arc tg}(\text{th} \xi^0 \text{tg} \eta^0)] \sin \Theta\} \times \\ &\times \sum_{n=0}^{\infty} [c_n ce_n(\varphi, q') ce_n(\eta^0, q') Ce_n(\xi^0, q') + \end{aligned}$$

$$+ d_n \operatorname{se}_n(\varphi, q') \operatorname{se}_n(\eta^0, q') \operatorname{Se}_n(\xi^0, q') \quad (27)$$

$(\eta^0, \xi^0$ — координаты диполя в эллиптической системе с центром в точке O).
Используя (24) — (27), из (3) получим следующие выражения для сферических составляющих поля в волновой зоне:

$$E_\Theta = H_\varphi = -2pk^2 \sin \Theta \frac{\exp[ik(r - z_0 \cos \Theta)]}{r} T(\varphi, \Theta). \quad (28)$$

В этой формуле функцию $T(\varphi, \Theta) = T_1(\varphi, \Theta) + T_2(\varphi, \Theta)$ можно рассматривать как поправочный множитель к характеристике направленности элементарного электрического излучателя, обусловленный наличием двух взаимно параллельных цилиндров эллиптического сечения.

Случай $kl \gg 1$. Полученное выше решение задачи для волновой зоны требует решения бесконечных систем уравнений сложной структуры. Однако в частном случае, когда, например, расстояние между цилиндрами $2l$ много больше длины волны, приближенное решение систем (19), (20) может быть найдено в явном виде.

Сначала остановимся на решении системы (19). Придерживаясь той же схемы, что и в [1, 4], применим к ней формально метод последовательных приближений, взяв в качестве нулевого приближения $X_{n,0}^{(s)}$ ($s = \pm 1$). Тогда предел j -го приближения для $X_{n,j}^{(s)}$ при $j \rightarrow \infty$ даст выражение для $X_n^{(s)}$

$$X_n^{(s)} = \lim X_{n,j}^{(s)} = f_{n,s}^{(1)} + \sum_{t=1}^{\infty} (-1)^t \sum_{n', n'', \dots, n^{(t)}} \lambda_{nn'}^{-s,s} \lambda_{n'n''}^{s,-s} \dots \lambda_{n^{(t-1)}n^{(t)}}^{(-1)^t s, (-1)^{t-1} s} f_{n^{(t)}, (-1)^t s}^{(1)}, \quad (29)$$

в котором

$$\sum_{n', n'', \dots, n^{(t)}} = \sum_{n'} \sum_{n''} \dots \sum_{n^{(t)}}.$$

В сделанном выше предположении, что $dk \sin \Theta \operatorname{ch} \xi_{-s,s} = 2lk \sin \Theta \gg 1$, на основе асимптотической формулы для $\operatorname{Me}_p^{(1)}(\xi_{-s,s}, q')$ и формулы (9) из [14] матричные элементы (15) приближенно запишутся в виде

$$\lambda_{nm}^{-s,s} = H a_m^{(s)} b_n^{(s)}, \quad (30)$$

где

$$c_p \operatorname{Me}_p^{(1)}(\xi_{-s,s}, q') \approx H = \sqrt{\frac{1}{\pi lk \sin \Theta}} \exp \left[i \left(2kl \sin \Theta - \frac{\pi}{4} \right) \right]; \quad (31)$$

$$a_n^{(s)} = c_m \operatorname{Ce}_m(\xi_0, q') \operatorname{ce}_m(\eta_{-s,s}, q'); \quad b_n^{(s)} = \frac{2 \operatorname{ce}_n(\eta_{-s,s}, q')}{c_n \operatorname{Me}_n^{(1)}(\xi_0, q')}. \quad (32)$$

В результате подстановки (30) в (29) получим

$$X_n^{(s)} = f_{n,s}^{(1)} + b_n^{(s)} \sum_{t=1}^{\infty} (-1)^t H^t \left[\sum_{n'} a_{n'}^{(-s)} b_{n'}^{(-s)} \right] \dots \dots \dots \left[\sum_{n^{(t-1)}} a_{n^{(t-1)}}^{(-1)^{t-1} s} b_{n^{(t-1)}}^{(-1)^{t-1} s} \right] \sum_{n^{(t)}} a_{n^{(t)}}^{(-1)^t s} f_{n^{(t)}, (-1)^t s}^{(1)} \quad (33)$$

или после введения обозначений

$$Q = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(s)} b_n^{(s)}; \quad F^{(s)} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(s)} f_{n,s}^{(1)} \quad (34)$$

и представления суммы по t в (33) в виде двух частных сумм по четным и нечетным индексам запишем

$$\begin{aligned} X_n^{(s)} &= f_{n,s}^{(1)} + \sum_{t=2,4,\dots} H^t b_n^{(s)} F^{(s)} Q^{t-1} - \sum_{t=1,3,\dots} H^t b_n^{(s)} F^{(-s)} Q^{t-1} = \\ &= f_{n,s}^{(1)} + H b_n^{(s)} \frac{HQF^{(s)} - F^{(-s)}}{1 - H^2 Q^2} \quad (s = \pm 1), \end{aligned} \quad (35)$$

в котором предполагается $|HQ| < 1$. (Заметим, что это условие всегда будет выполняться при соответствующем выборе величины $2lk \sin \Theta$).

Теперь обратимся к системе (20). Заменяя, как и выше, в (17) $Me_p^{(1)} \times (\xi_{-s,s}, q')$ асимптотическим разложением и воспользовавшись формулой (11) из [14], найдем, что $\sum_{p=0}^{\infty} c_p^{(m,n)} ce_p(\eta_{-s,s}, q') = se_n(\eta_{-s,s}, q') se_m(\eta_{-s,s}, q') = 0$ при $\eta_{-s,s} = 0$ или π . В результате приближенно $\sigma_{nm}^{-s,s} \approx 0$, а

$$Y_n^{(s)} \approx f_{n,s}^{(2)}. \quad (36)$$

Подставив (35) и (36) в (25), найдем, что поправочная функция в выражении (24) может быть теперь представлена в виде суммы двух функций

$$T_2(\varphi, \Theta) = \Psi_1(\varphi, \Theta) + \Psi_2(\varphi, \Theta), \quad (37)$$

где

$$\begin{aligned} \Psi_1(\varphi, \Theta) &= \sum_{s=\pm 1} \exp[-iksl \cos \varphi \sin \Theta] \times \\ &\times \sum_{n=0}^{\infty} [f_{n,s}^{(1)} c_n Ce_n(\xi_0, q') ce_n(\varphi, q') + f_{n,s}^{(2)} d_n Se_n(\xi_0, q') se_n(\varphi, q')]; \end{aligned} \quad (38)$$

$$\begin{aligned} \Psi_2(\varphi, \Theta) &= H \sum_{s=\pm 1} \exp[-iksl \cos \varphi \sin \Theta] \times \\ &\times \sum_{n=0}^{\infty} \left[c_n b_n^{(s)} \frac{HQF^{(s)} - F^{(-s)}}{1 - H^2 Q^2} Ce_n(\xi_0, q') ce_n(\varphi, q') \right]. \end{aligned} \quad (39)$$

Физически функция Ψ_1 определяет вторичное поле, обусловленное возбуждением цилиндров только лишь полем диполя без учета последовательных взаимодействий дифракционных волн от цилиндров. Функция Ψ_2 приближенно определяет вторичное поле как результат возбуждения цилиндров дифракционными полями высших порядков рассеяния.

Формулы (38) и (39) удобны для анализа и численного счета, а пользование ими не требует предварительного расчета матричных элементов систем (19), (20).

Продольная линейная антенна. Обобщая полученные результаты на случай продольной линейной антенны с током $I = I(z_0)$, простирающейся от z_1 до z_2 , запишем

$$E_\theta = \frac{2k^2 \sin \theta \exp(ikr)}{i\omega r} T(\varphi, \theta) \int_{z_1}^{z_2} I(z_0) \exp(-ikz_0 \cos \theta) dz_0. \quad (40)$$

Приняв длину антенны $z_2 - z_1 = 2L$, предположим, что ток в ней изменяется по синусоидальному закону, имея на концах нулевые значения, а фаза тока во всех точках антенны одинаковая. Таким образом,

$$I(z_0) = \begin{cases} I_m \sin k(L - z_0) & \text{при } z_0 > 0, \\ I_m \sin k(L + z_0) & \text{при } z_0 < 0. \end{cases} \quad (41)$$

Тогда для полного поля линейной антенны в присутствии двух эллиптических цилиндров

$$E_\theta = H_\varphi = \frac{2I_m k^2 \sin \theta \exp(ikr)}{i\omega r} T(\varphi, \theta) \times \\ \times \left[\int_{-L}^0 \exp(-ikz_0 \cos \theta) \sin k(L + z_0) dz_0 + \right. \\ \left. + \int_0^L \exp(-ikz_0 \cos \theta) \sin k(L - z_0) dz_0 \right]. \quad (42)$$

Вычисление интегралов в (42) не представляет труда. Окончательно для напряженности поля имеем

$$E_\theta = H_\varphi = \frac{4I_m k \exp(ikr)}{i\omega r} \left\{ \frac{\cos(kL \cos \theta) - \cos kL}{\sin \theta} \right\} T(\varphi, \theta), \quad (43)$$

при этом $T(\varphi, \theta)$ представляет собой сумму выражений (27), (38) и (39).

В частном случае, когда линейная антенна расположена на оси O_z ($\xi_{+1}^0 = \xi_{-1}^0$, $\eta_{+1}^0 = \pi$, $\eta_{-1}^0 = 0$), поправочные функции Ψ_1 и Ψ_2 несколько упрощаются. Как следует из (13), (14), (32) и (34),

$$Y_n^{(s)} = 0; \quad F^{(s)} = F^{(-s)} = F.$$

Тогда:

$$\Psi_1(\varphi, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[c_n C_n(\xi_0, q') c_n(\varphi, q') i_{n,1}^{(1)} \sum_{s=\pm 1} (-s)^n e^{-iks l \cos \varphi \sin \theta} \right], \quad (44)$$

$$\Psi_2(\varphi, \theta) =$$

$$= -\frac{HF}{1+HQ} \sum_{s=\pm 1} \sum_{n=0}^{\infty} [c_n b_n^{(s)} C_n(\xi_0, q') c_n(\varphi, q') e^{-iks l \cos \varphi \sin \theta}], \quad (45)$$

а функция $T_1(\varphi, \theta)$ принимает вид

$$T_1(\varphi, \Theta) = \sum_{n=0}^{\infty} [c_n ce_n(\varphi, q') ce_n(\eta^0, q') Ce_n(\xi^0, q') + d_n se_n(\varphi, q') se_n(\eta^0, q') Se_n(\xi^0, q')], \quad (46)$$

где $\xi^0 = 0$; $\eta^0 = \pi/2$.

Пользуясь случаем, автор благодарит Е. А. Иванова за постоянное внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Иванов Е. А. Изв. вузов СССР—Радиофизика, 9, № 3, 1966.
2. Иванов Е. А., Родов А. М. Весті АН БССР, сер. фіз.-техн. наук, № 2, 1960.
3. Иванов Е. А. Весті АН БССР, сер. фіз.-техн. наук, № 1, 1962.
4. Иванов Е. А. Весті АН БССР, сер. фіз.-техн. наук, № 4, 1963.
5. Germeu K. Ann. der Physik, 7 Folge, 13, Heft 5-6, 1964.
6. Saermark K. Appl. Sci. Res., B7, № 6, 1954.
7. Twersky V. J. of appl. Physics, 23, № 4, 1952.
8. Sinclair G. Proc. Inst. Radio Engrs., 39, № 6, 1951.
9. Lucke W. S. J. of Appl. Phys., 22, 14—19, 1951.
10. Айзенберг Г. З. Антенны ультракоротких волн. Связьиздат, 1957.
11. Морс Ф. М. и Фешбах Г. Методы теоретической физики, 2. ИЛ, М., 1960.
12. Мак-Лахлан Н. В. Теория и приложения функций Матье. М., 1953.
13. Уэйт Д. Электромагнитное излучение из цилиндрических систем. Изд. «Советское радио», М., 1963.
14. Иванов Е. А. ДАН БССР, 3, № 10, 1959.

Поступило в редакцию 5.VII 1966

А. А. БУРДУН, Л. К. ТУТАЕВ

К ТЕОРИИ ЛИНИЙ В ПРОСТРАНСТВЕ МИНКОВСКОГО С ЦЕНТРОМ

Вопросам центраффинной и центроевклидовой дифференциальной геометрии посвящены работы многих авторов. Дифференциальная геометрия псевдоевклидовых пространств исследована и в статье [1], в которой приведены формулы Френе кривой в n -мерном пространстве с неособой псевдоевклидовой метрикой любого индекса и формулы для вычисления кривизн.

В настоящей статье изложено более подробно исследование линий в пространстве Минковского с центром с помощью метода внешних форм.

1. Постановка задачи. Пространством Минковского с центром называют четырехмерное псевдоевклидово пространство индекса 1 с группой движений — преобразований Лоренца, оставляющих неподвижной точку. Будем обозначать такое пространство ${}^1R_4^c$.

Линия в ${}^1R_4^c$ задана вектор-функцией скалярного аргумента

$$\bar{A} = \bar{A}(u), \quad (1.1)$$

\bar{A} — радиус-вектор точки линии с началом в центре пространства. Относительно вектор-функции $\bar{A}(u)$ будем предполагать, что она дифференцируема необходимое число раз.

Каждой точке A линии отнесем репер $(\bar{A}, \bar{a}_0, \bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3)$ с условием ортонормированности:

$$\bar{a}_0^2 = -1, \quad \bar{a}_\alpha^2 = 1, \quad (\bar{a}_i, \bar{a}_j) = 0 \text{ при } i \neq j \quad (1.2)$$

$$(\alpha, \beta, \gamma = 1, 2, 3; i, j, k = 0, 1, 2, 3).$$

Уравнения инфинитезимальных смещений репера [2]

$$d\bar{A} = \omega^i \bar{a}_i, \quad d\bar{a}_i = \omega_k^i \bar{a}_k. \quad (1.3)$$

Соответствующие уравнения структуры

$$D\omega^i = [\omega^i \omega^j], \quad D\omega_k^i = [\omega_k^j \omega^j]. \quad (1.4)$$

В соответствии с (1.2) на дифференциальные формы ω_i^j накладываются следующие условия:

$$\omega_i^i = 0, \quad \omega_\alpha^\beta = -\omega_\beta^\alpha, \quad \omega_0^\alpha = \omega_\alpha^0. \quad (1.5)$$

Условие сохранения неподвижного центра [3] — один из векторов репера (\bar{A}, \bar{a}_i) направлен по радиус-вектору. При этом возможны два условия:

1) по радиус-вектору направлен мнимоединичный вектор (репер R_0)

$$\bar{A} = \rho \bar{a}_0; \quad (1.6)$$

2) один из пространственно подобных векторов \bar{a}_α , например \bar{a}_1 (репер R_1):

$$\bar{A} = \rho \bar{a}_1. \quad (1.7)$$

2. Репер R_0 . В этом случае при условии (1.6)

$$\bar{A} = \rho \bar{a}_0.$$

Тем самым направление вектора \bar{a}_0 выбрано.

Направим вектор \bar{a}_1 по касательной к кривой, тогда в силу (1.3,1) имеем

$$d\bar{A} = \omega^1 \bar{a}_1. \quad (2.1)$$

С другой стороны, дифференцируя (1.6) с учетом (1.3, 2), получим

$$d\bar{A} = d\rho \bar{a}_0 + \rho \omega_0^i \bar{a}_i. \quad (2.2)$$

Из соотношений (2.1) и (2.2):

$$\omega^1 = \rho \omega_0^1, \quad (2.3)$$

$$d\rho = 0. \quad (2.4)$$

Из последнего равенства

$$\rho = \text{const}. \quad (2.5)$$

Это значит, что при условии (2.1) будет выделен только класс линий, расположенных на гиперсфере постоянного радиуса. Этот класс кривых будет рассмотрен ниже.

Для закрепления репера поступим следующим образом. Направим $d\bar{a}$ по вектору \bar{a}_1 . В силу (1.3,2) получим:

$$d\bar{a}_0 = \omega_0^1 \bar{a}_1, \quad (2.6)$$

$$\omega_0^2 = 0, \quad \omega_0^3 = 0. \quad (2.7)$$

Дифференцируя (2.7) внешне, получим

$$[\omega_0^1 \omega_1^2] = 0, \quad [\omega_0^1 \omega_1^3] = 0. \quad (2.8)$$

Отсюда по лемме Картана

$$\omega_1^2 = \alpha \omega_0^1, \quad \omega_1^3 = \beta \omega_0^1. \quad (2.9)$$

Дифференцируя (2.9) внешне, получим, учитывая (2.9):

$$[d\alpha + \beta \omega_3^2, \omega_0^1] = 0, \quad [d\beta + \alpha \omega_2^3, \omega_0^1] = 0 \quad (2.10)$$

или

$$d\alpha + \beta \omega_3^2 = \gamma \omega_0^1, \quad d\beta + \alpha \omega_2^3 = \gamma \omega_0^1. \quad (2.11)$$

Для окончательного выбора репера положим в (2.11)

$$\beta = 0, \quad \alpha \neq 0, \quad (2.12)$$

имеем

$$\omega_1^3 = 0, \quad \omega_2^3 = \frac{\gamma}{\alpha} \omega_0^1. \quad (2.13)$$

Таким образом, все формы ω_i^j определены, репер выбран. Форма ω_0^1 является полным дифференциалом, так как

$$D\omega_0^1 \equiv 0.$$

Введем обозначения

$$\omega_0^1 = d\varphi, \quad \alpha = k_1, \quad \frac{\gamma}{\alpha} = k_2. \quad (2.14)$$

Подставив (2.7), (2.14) в (1.3,2), получим формулы Френе:

$$\frac{d\bar{a}_0}{d\varphi} = \bar{a}_1, \quad \frac{d\bar{a}_1}{d\varphi} = \bar{a}_0 + k_1\bar{a}_2, \quad (2.15)$$

$$\frac{d\bar{a}_2}{d\varphi} = -k_1\bar{a}_1 + k_2\bar{a}_3, \quad \frac{d\bar{a}_3}{d\varphi} = -k_2\bar{a}_2.$$

Величины k_1 и k_2 — кривизны линии.

3. Геометрический смысл параметра φ . Продифференцировав (1.6) с учетом (2.15), получим

$$\frac{d\bar{A}}{d\varphi} = \frac{d\rho}{d\varphi} \bar{a}_0 + \rho \bar{a}_1. \quad (3.1)$$

Отсюда

$$d\bar{A}^2 = \rho^2 d\varphi^2 - d\rho^2. \quad (3.2)$$

Но

$$d\bar{A}^2 = d\sigma^2, \quad (3.3)$$

где σ — длина дуги кривой в 1R_4 . Следовательно,

$$d\sigma^2 = \rho^2 d\varphi^2 - d\rho^2. \quad (3.4)$$

Если $\rho=1$, т. е. рассматриваем линии на гиперсфере мнимоединичного радиуса, то имеем

$$d\sigma^2 = d\varphi^2. \quad (3.5)$$

Это значит, что φ является дугой на проекции кривой из центра пространства на мнимоединичную гиперсферу.

4. Геометрическое истолкование инвариантов. Величина ρ является простейшим инвариантом кривой. Она характеризует удаленность подвижного репера от центра пространства.

Для геометрического истолкования кривизны k_1 рассмотрим гиперплоскость, содержащую векторы $\bar{a}_0, \bar{a}_2, \bar{a}_3$. Уравнение такой гиперплоскости будет

$$|\bar{X} - \bar{A}\bar{a}_0 \bar{a}_2 \bar{a}_3| = 0, \quad (4.1)$$

где $\bar{X} - \bar{A}$ — радиус-вектор текущей точки относительно подвижного репера, в левой части уравнения и в дальнейшем так обозначен определитель.

Будем искать характеристику семейства гиперплоскостей, образованного гиперплоскостью (4.1) при движении репера по кривой $\bar{A}(\varphi)$, решая совместно уравнения (4.1) и

$$\frac{d}{d\varphi} |\bar{X} - \bar{A} \bar{a}_0 \bar{a}_2 \bar{a}_3| = 0. \quad (4.2)$$

С учетом (2.15) получим

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\varphi} |\bar{X} - \bar{A} \bar{a}_0 \bar{a}_2 \bar{a}_3| &= -\rho |\bar{a}_1 \bar{a}_0 \bar{a}_2 \bar{a}_3| + \\ &+ |\bar{X} - \bar{A} \bar{a}_1 \bar{a}_2 \bar{a}_3| - k_1 |\bar{X} - \bar{A} \bar{a}_0 \bar{a}_1 \bar{a}_3| = 0. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Относительно подвижного репера система (4.2) с учетом (4.3) имеет вид

$$x^1 = 0, \quad x^3 = 0, \quad \rho + x^0 - k_1 x^2 = 0. \quad (4.4)$$

Таким образом, характеристикой семейства гиперплоскостей (4.1) является прямая в плоскости Ax^0x^2 подвижного репера с угловым коэффициентом k_1 .

Рассмотрим гиперплоскость

$$|\bar{X} - \bar{A} \bar{a}_0 \bar{a}_1 \bar{a}_3| = 0 \quad (4.5)$$

и найдем характеристику семейства гиперплоскостей (4.5) при движении репера по кривой.

Дифференцируя (4.5) с учетом (2.15), получим

$$k_1 |\bar{X} - \bar{A} \bar{a}_0 \bar{a}_2 \bar{a}_3| - k_2 |\bar{X} - \bar{A} \bar{a}_0 \bar{a}_1 \bar{a}_2| = 0. \quad (4.6)$$

Относительно подвижного репера уравнения (4.5) и (4.6) дают

$$x^0 = 0, \quad x^2 = 0, \quad x^1 = \frac{k_2}{k_1} x^3. \quad (4.7)$$

Система (4.7) определяет прямую в плоскости Ax^1x^3 с угловым коэффициентом k_2/k_1 .

Таким образом, кривизны k_1 и k_2 геометрически истолкованы.

5. Вычислительные формулы. Дифференцируя (1.6) с учетом формул (2.15), получим:

$$\begin{aligned} \bar{A} &= \rho \bar{a}_0, \quad \bar{A}' = \rho' \bar{a}_0 + \rho \bar{a}_1, \\ \bar{A}'' &= (\rho'' + \rho) \bar{a}_0 + 2\rho' \bar{a}_1 + \rho k_1 \bar{a}_2, \end{aligned} \quad (5.1)$$

$$\begin{aligned} \bar{A}''' &= (\rho''' + 3\rho') \bar{a}_0 + (3\rho'' + \rho - \rho k_1^2) \bar{a}_1 + \\ &+ (3\rho' k_1 + \rho k_1') \bar{a}_2 + \rho k_1 k_2 \bar{a}_3. \end{aligned}$$

Составим внешнее произведение векторов \bar{A} и \bar{A}' [4]:

$$[\bar{A} \bar{A}'] = \rho^2 [\bar{a}_0 \bar{a}_1], \quad (5.2)$$

отсюда

$$\rho^4 = -([\bar{A} \bar{A}'] [\bar{A} \bar{A}']).$$

Рассмотрим внешнее произведение трех векторов \bar{A} , \bar{A}' , \bar{A}''

$$[\bar{A} \bar{A}' \bar{A}''] = \rho^3 k_1 [\bar{a}_0 \bar{a}_1 \bar{a}_2].$$

Вычислив скалярный квадрат этого равенства, получим

$$k_1^2 = -\frac{1}{\rho^6} ([\bar{A} \bar{A}' \bar{A}''] [\bar{A} \bar{A}' \bar{A}'']). \quad (5.3)$$

Составив внешнее произведение векторов \bar{A} , \bar{A}' , \bar{A}'' , \bar{A}''' и вычислив квадрат, получим

$$k_2^2 = -\frac{1}{\rho^8 k_1^4} ([\bar{A} \bar{A}' \bar{A}'' \bar{A}'''] [\bar{A} \bar{A}' \bar{A}'' \bar{A}''']). \quad (5.4)$$

6. Кривые в пространстве Лобачевского 1S_3 . Положив в равенстве (1.6)

$$\rho = \text{const}, \quad (6.1)$$

из соотношения (3.4) получим

$$d\sigma = \pm \rho d\varphi. \quad (6.2)$$

Если ввести обозначения

$$k = \frac{k_1}{\rho}, \quad h = \frac{k_2}{\rho}, \quad (6.3)$$

то формулы (2.15) с учетом (6.2) принимают вид:

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{A}}{d\sigma} &= \rho \frac{d\bar{a}_0}{d\sigma} = \bar{a}_1; & \frac{d\bar{a}_1}{d\sigma} &= \frac{1}{\rho} \bar{a}_0 + k\bar{a}_2, \\ \frac{d\bar{a}_2}{d\sigma} &= -k\bar{a}_1 + h\bar{a}_3; & \frac{d\bar{a}_3}{d\sigma} &= -h\bar{a}_2. \end{aligned} \quad (6.4)$$

Формулы (6.4) не что иное, как формулы Френе кривой в трехмерном пространстве Лобачевского, приведенные в работах [4, 5]. Таким образом, кривые 1S_3 являются частным случаем кривых ${}^1R_4^c$. Они выделяются условием (6.1). Теория кривых в 1S_3 подробно изучена. Здесь приведем выражение кривизны линии в 1S_3 через скорость и ускорения евклидова пространства.

7. Еще одно выражение для кривизны линии в 1S_3 . Предположим, что кривая $\bar{A} = \bar{A}(\sigma)$ в 1S_3 является мировой линией движущейся материальной точки. Так как построение ведется в пространстве событий 1R_4 , то

$$\bar{A} = x^i \bar{e}_i = ct \bar{e}_0 + \bar{r}, \quad (7.1)$$

где

$$\bar{r} = x^a \bar{e}_a, \quad (7.2)$$

c — скорость света и (\bar{Oe}_i) — орторепер, неподвижно связанный с центром пространства.

Дифференцируя (7.1), получим

$$d\bar{A} = c dt \bar{e}_0 + d\bar{r}, \quad (7.3)$$

отсюда

$$\dot{\bar{A}} = \frac{d\bar{A}}{dt} = c \bar{e}_0 + \dot{\bar{v}}, \quad (7.4)$$

где $\dot{\bar{v}} = d\bar{r}/dt$ — вектор скорости частиц.

Дифференцируя (7.4) по t , получим

$$\ddot{\bar{A}} = \frac{d\dot{\bar{v}}}{dt} = \dot{\bar{\omega}}, \quad \ddot{\bar{A}} = \dot{\bar{\omega}}. \quad (7.5)$$

Возводя (7.4) в квадрат с учетом (3.3), получим

$$\left(\frac{d\sigma}{dt}\right)^2 = v^2 - c^2, \quad \frac{d\sigma}{dt} = \sqrt{v^2 - c^2}. \quad (7.6)$$

Для вычисления кривизн k и h воспользуемся формулами работы [4], которые получаются из (5.3) и (5.4) переходом к дифференцированию по параметру t с учетом (6.2) и (6.3):

$$k^2 = - \frac{([\bar{A} \dot{\bar{A}} \ddot{\bar{A}}] [\bar{A} \ddot{\bar{A}} \ddot{\bar{A}}])}{\rho^2 |\dot{\bar{A}}|^6}, \quad (7.7)$$

$$h^2 = - \frac{([\bar{A} \ddot{\bar{A}} \ddot{\bar{A}} \ddot{\bar{A}}] [\bar{A} \ddot{\bar{A}} \ddot{\bar{A}} \ddot{\bar{A}}])}{\rho^2 k^4 |\dot{\bar{A}}|^{12}}. \quad (7.8)$$

Подставляя в формулы (7.7) и (7.8) значения (7.1), (7.4) — (7.6), получим:

$$k^2 = \frac{c^2 ([\bar{r}\bar{\omega}] - t[\bar{v}\bar{\omega}])^2 - (\bar{r}\bar{v}\bar{\omega})^2}{(r^2 - c^2 t^2)(c^2 - v^2)^3}, \quad (7.9)$$

$$h^2 = \frac{c^2 (c^2 t^2 - r^2) [t(\bar{v}\bar{\omega}\bar{\omega}) - (\bar{r}\bar{\omega}\bar{\omega})]^2}{\{c^2 ([\bar{r}\bar{\omega}] - t[\bar{v}\bar{\omega}])^2 - (\bar{r}\bar{v}\bar{\omega})^2\}^2}. \quad (7.10)$$

Здесь действия над векторами в евклидовом пространстве E_3 .

Возведем (7.1) в квадрат с учетом (1.6) и продифференцируем с учетом (6.1); получим

$$(\bar{A} d\bar{A}) = 0$$

или

$$(\bar{r} d\bar{r}) - c^2 t dt = 0,$$

отсюда

$$t = \frac{(\bar{r}\bar{v})}{c^2}. \quad (7.11)$$

Подставив (7.11) в равенство

$$\bar{r}^2 - c^2 t^2 = -\rho^2,$$

получим

$$\bar{r}^2 - \frac{(\bar{r}\bar{v})^2}{c^2} = -\rho^2. \quad (7.12)$$

Так как $\rho \neq 0$ — число действительное, то равенство (7.12) будет выполняться только в случае $v > c$. Таким образом, кривая в 1S_3 может быть мировой линией движущейся материальной точки, если последняя движется со сверхсветовой скоростью.

8. Репер R_1 . Условие сохранения неподвижного центра в этом случае

$$\bar{A} = \rho \bar{a}_1. \quad (8.1)$$

Действуя так же, как и в п. 2, получим формулы Френе:

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{a}_0}{d\varphi} &= \bar{a}_1 + \tau_1 \bar{a}_2, & \frac{d\bar{a}_1}{d\varphi} &= \bar{a}_0, \\ \frac{d\bar{a}_2}{d\varphi} &= \tau_1 \bar{a}_0 + \tau_2 \bar{a}_3, & \frac{d\bar{a}_3}{d\varphi} &= -\tau_2 \bar{a}_3. \end{aligned} \quad (8.2)$$

Геометрическое истолкование инвариантов аналогично п. 4, вычислительные формулы для τ_1 и τ_2 аналогичны формулам (5.3), (5.4).

Условие

$$\rho = \text{const} \quad (8.3)$$

выделяет класс временно подобных кривых, расположенных на гиперсфере постоянного радиуса. Если принять такую кривую за мировую линию движущейся точки, то кривизны k_1 и h_1 ($k_1 = \tau_1/\rho$, $h_1 = \tau_2/\rho$) через скорость и ускорения евклидова пространства выражаются следующим образом:

$$k_1^2 = \frac{(c^2 [\bar{r} \bar{\omega}] - (\bar{r} \bar{v}) [\bar{v} \bar{\omega}])^2 - c^2 (\bar{r} \bar{v} \bar{\omega})^2}{[c^2 r^2 - (\bar{r} \bar{v})^2] (c^2 - v^2)^3}, \quad (8.4)$$

$$h_1^2 = \frac{[(\bar{r} \bar{v}) (\bar{v} \bar{\omega} \bar{\omega}) - c^2 (\bar{r} \bar{\omega} \bar{\omega})]^2 [c^2 r^2 - (\bar{r} \bar{v})^2]}{\{[c^2 [\bar{r} \bar{\omega}] - (\bar{r} \bar{v}) [\bar{v} \bar{\omega}]]^2 - c^2 (\bar{r} \bar{v} \bar{\omega})^2\}^2}. \quad (8.5)$$

В собственной системе отчета, т. е. в такой, в которой точка в каждый данный момент покоится, скорость $\bar{v} = 0$. Тогда

$$k_1^2 = \frac{|\bar{r} \bar{\omega}|^2}{c^4 r^2}, \quad h_1^2 = \frac{r^2 (\bar{r} \bar{\omega} \bar{\omega})^2}{c^2 |\bar{r} \bar{\omega}|^4}. \quad (8.6)$$

9. Репер R_2 . Этот канонический репер должен быть отнесен к линии в том же пространстве без требования принадлежности центра пространства его оси.

Если точка C — центр пространства и точка O — начало фиксированного репера, точка A — начало подвижного репера ($A, \bar{a}_0, \bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3$), то радиус-вектор

$$\bar{OC} = \bar{OA} + \bar{AC} = \bar{A} + c^i \bar{a}_i,$$

$\bar{OA} = \bar{A}$, c^i — координаты центра пространства относительно подвижного репера. Следовательно,

$$\begin{aligned} d\bar{OC} &= (\omega^i + dc^i + c^k \omega_k^i) \bar{a}_i = 0, \\ \omega^\alpha &= -dc^\alpha - c^k \omega_k^\alpha. \end{aligned} \quad (9.1)$$

Если вектор \bar{a}_1 направлен по касательной к линии (A) в точке A , то

$$d\bar{A} = \omega^1 \bar{a}_1, \quad \omega^0 = \omega^2 = \omega^3 = 0, \quad (9.2)$$

$$dc^0 + c^i \omega_i^0 = 0, \quad dc^2 + c^i \omega_i^2 = 0, \quad dc^3 + c^i \omega_i^3 = 0. \quad (9.3)$$

После внешнего дифференцирования уравнений (9.1 : 2—4) получим

$$\omega_0^1 = \lambda_1 \omega^1, \quad \omega_1^2 = \lambda_2 \omega^1, \quad \omega_2^3 = \lambda_3 \omega^1. \quad (9.4)$$

Обозначим

$$\delta \bar{A} = d\bar{A}|_{\omega^1=0}, \quad \delta \bar{a}_i = d\bar{a}_i|_{\omega^1=0}, \quad \pi_i^k = \omega_i^k|_{\omega^1=0}. \quad (9.5)$$

Системе (9.4) соответствует условие

$$\pi_0^1 = \pi_1^2 = \pi_2^3 = 0. \quad (9.6)$$

Кроме того, функция

$$I = c^0{}^2 - c^2{}^2 - c^3{}^2 \quad (9.7)$$

— абсолютный инвариант. С учетом этого положим

$$c^2 = c^3 = 0. \quad (9.8)$$

При таком выборе двумерная плоскость $(\bar{A}\bar{a}_0 \bar{a}_1)$ всегда проходит через центр S .

Из уравнений (9.4, 8, 3)

$$\omega_0^2 = -\frac{c^1 \lambda_2}{c^0} \omega^1, \quad \omega_0^3 = -\frac{c^1 \lambda_3}{c^0} \omega^1 \quad (9.9)$$

при условии

$$c^0 \neq 0. \quad (9.10)$$

Это значит, что ось Ax^1 канонического репера не проходит через центр пространства. Среди вторичных параметров остался только один π_2^3 . После внешнего дифференцирования уравнения (9.4:2)

$$[d\lambda_3 - \lambda_2 \omega_2^3, \omega^1] = 0. \quad (9.11)$$

При условии

$$\lambda_3 = 0, \quad \lambda_2 \neq 0 \quad (9.12)$$

из уравнений (9.4, 11, 9)

$$\omega_1^3 = 0, \quad \omega_2^3 = k_2^3 \omega^1, \quad \omega_0^3 = 0. \quad (9.13)$$

Репер выбран. Заменяем обозначения

$$\lambda_2 = k_1^2, \quad \lambda_1 = k_0^1. \quad (9.14)$$

Имеем:

$$D\omega^1 \equiv 0, \quad \omega^1 = d\sigma. \quad (9.15)$$

Уравнения (1.3) для выбранного репера:

$$\frac{d\bar{A}}{d\sigma} = \bar{a}_1, \quad \frac{da_0}{d\sigma} = k_0^1 \bar{a}_1 - \frac{c^1 k_1^2}{c^0} \bar{a}_2, \quad (9.16)$$

$$\frac{d\bar{a}_1}{d\sigma} = k_0^1 \bar{a}_0 + k_1^2 \bar{a}_2,$$

$$\frac{d\bar{a}_2}{d\sigma} = -\frac{c^1 k_1^2}{c^0} \bar{a}_0 - k_1^2 \bar{a}_1 + k_2^3 \bar{a}_3, \quad \frac{d\bar{a}_3}{d\sigma} = -k_2^3 \bar{a}_2.$$

Уравнения (9.3) теперь:

$$\text{при } dc^0 + c^1 k_0^1 d\sigma = 0, \quad dc^1 + (1 + c^0 k_0^1) d\sigma = 0 \quad (9.17)$$

$$k_1^2 \neq 0. \quad (9.18)$$

Плоскость $(\bar{A}\bar{a}_1\bar{a}_0)$ проходит через ось $\bar{A}\bar{a}_1$ и центр пространства C ; ось $\bar{A}\bar{a}_0$ — перпендикулярна в этой двумерной плоскости к оси $\bar{A}\bar{a}_1$. Вектор $d^2\bar{A}/d\sigma^2$ нормален к вектору \bar{a}_1 и находится в двумерной плоскости $(\bar{A}\bar{a}_0\bar{a}_2)$; вектор \bar{a}_2 — в этой плоскости и перпендикулярен вектору \bar{a}_0 . Вектор \bar{a}_3 перпендикулярен гиперплоскости $(\bar{A}, \bar{a}_0, \bar{a}_1, \bar{a}_2)$. Каноническое разложение текущих координат относительно локального репера при $\sigma = 0$, как следует из уравнений (9.16):

$$\begin{aligned} x^0 &= \frac{k_0^1}{2} \sigma^2 + \frac{1}{3} \left(\frac{dk_0^1}{d\sigma} - \frac{c^1 k_1^{22}}{c^0} \right) \sigma^3 + \dots, \\ x^1 &= \sigma + \frac{1}{3} (k_0^1 - k_1^{22}) \sigma^3 + \dots, \\ x^2 &= \frac{k_1^2}{2} \sigma^2 + \frac{1}{3} \left(\frac{dk_1^2}{d\sigma} - \frac{c^1 k_0^1 k_1^2}{c_0} \right) \sigma^3 + \dots, \\ x^3 &= -\frac{k_1^2 k_2^3}{3} \sigma^3 + \dots \end{aligned} \quad (9.19)$$

Относительно фиксированного репера с началом в центре пространства C :

$$\bar{A}^2 = c^0{}^2 - c^1{}^2. \quad (9.20)$$

Из уравнений (9.17) и (9.20):

$$\begin{aligned} c^1 &= \bar{A} \frac{d\bar{A}}{d\sigma}, \quad c^0{}^2 = \bar{A}^2 - \left(\bar{A} \frac{d\bar{A}}{d\sigma} \right)^2, \\ k_0^1 &= \frac{\left(\frac{d\bar{A}}{d\sigma} \right)^2 + \bar{A} \frac{d^2\bar{A}}{d\sigma^2} - 1}{\left\{ \bar{A}^2 - \left(\bar{A} \frac{d\bar{A}}{d\sigma} \right)^2 \right\}^{1/2}}, \quad k_1^{22} = k_0^2 - \left(\frac{d^2\bar{A}}{d\sigma^2} \right)^2, \\ k_2^{32} &= \frac{1}{k_1^{22}} \left\{ \left(\frac{dk_0^1}{d\sigma} - \frac{c^1 k_1^{22}}{c^0} \right)^2 - (k_0^1 - k_1^{22})^2 - \right. \\ &\quad \left. - \left(\frac{dk_1^2}{d\sigma} - \frac{c^1 k_0^1 k_1^2}{c^0} \right)^2 - \left(\frac{d^3\bar{A}}{d\sigma^3} \right)^2 \right\}. \end{aligned} \quad (9.22)$$

Пользуясь формулами (9.21), можно правую часть равенства (9.22) выразить через вектор-функцию $\bar{A}(\sigma)$ и ее производные.

Обозначим E_1 и E_3 — единичные точки на осях $\bar{A}\bar{a}_1$ и $\bar{A}\bar{a}_3$. При смещении точки A по линии (A) указанные точки описывают соответствующие линии (E_1) и (E_3) . Точка пересечения касательной к линии (E_1) в точке E_1 с гиперплоскостью $x^1 = 2$ есть $(k_0^1, 2, k_1^2, 0)$. Этим геометрически истолкованы кривизны k_0^1 и k_1^2 . Точка пересечения касательной к линии (E_3) в точке E_3 с гиперплоскостью $x^1 = 1$ есть $(0, 1, k_2^3, 1)$. Так получено геометрическое истолкование и последней кривизны k_2^3 .

ЛИТЕРАТУРА

1. Витнер Ч. Чехосл. матем. ж., 14, № 2, 1963.
2. Фиников С. П. Метод внешних форм Картана. ОГИЗ, Гостехиздат, М.—Л., 1948.
3. Витнер Ч. Чехосл. матем. ж., 12, № 1, 1962.
4. Франк Х. Сибирск. матем. ж., 11, № 4, 1961.
5. Тутаев Л. К. Уч. зап. БГУ, в. 32, сер. физ.-мат. Минск, 1957.

Поступило в редакцию 26.III 1966

Р. П. ХАЦКЕВИЧ

**К ТЕОРИИ ДВУМЕРНЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ
 В ЧЕТЫРЕХМЕРНОМ АФФИННОМ ПРОСТРАНСТВЕ**

В настоящей статье изложен выбор канонического репера поверхности, дано геометрическое истолкование отношения этого репера к поверхности и всех дифференциальных инвариантов. Рассмотрены конгруэнции нормалей, семейство нормальных плоскостей и связанная с ним фокальная кривая нормальной плоскости, определены линии кривизны на поверхности.

§ 1. Выбор канонического репера. В аффинном четырехмерном пространстве A_4 поверхность (A) может быть задана относительно некоторого репера радиусом-вектором текущей точки поверхности

$$A = A(u^1, u^2), \quad (1,1)$$

где u^1, u^2 — независимые скалярные аргументы.

Уравнения инфинитезимальных перемещений репера (A, e_1, e_2, e_3, e_4) в пространстве A_4 :

$$\begin{aligned} dA &= \omega^i e_i \\ de_i &= \omega_i^k e_k \quad (i, k, \dots = 1, \dots, 4), \end{aligned} \quad (1,2)$$

компоненты ω^i, ω_i^k — формы Пфаффа от параметров группы аффинных преобразований — определены структурными уравнениями:

$$\begin{aligned} D\omega^i &= [\omega^k \omega_k^i], \\ D\omega_i^k &= [\omega_i^j \omega_j^k]. \end{aligned} \quad (1,3)$$

Поместив начало репера в текущую точку поверхности, а векторы e_1 и e_2 в касательной плоскости к ней в точке A , отнесем поверхность к реперу первого порядка. Тогда

$$dA = \omega^{i_1} e_{i_1} \quad (i_1, i_2, \dots = 1, 2) \quad (1,4)$$

и

$$\omega^\alpha = 0 \quad (\alpha, \beta, \dots = 3, 4). \quad (1,5)$$

Дифференцируя внешне уравнения (1,5) и применяя лемму Картана получим

$$\omega_{i_1}^\alpha = a_{i_1, i_2}^\alpha \omega^{i_2}. \quad (1,6)$$

Уравнения продолженной системы имеют вид:

$$da_{i_1 i_2}^\alpha = a_{i_1 i_3}^\alpha \omega_{i_2}^{i_3} + a_{i_2 i_3}^\alpha \omega_{i_1}^{i_3} - a_{i_1 i_2}^\beta \omega_\beta^\alpha + a_{i_1 i_2 i_3}^\alpha \omega^{i_3},$$

$$da_{i_1 i_2}^\alpha = a_{i_1 i_2 i_3}^\alpha \omega_{i_3}^{i_4} + a_{i_1 i_2 i_4}^\alpha \omega_{i_4}^{i_3} + a_{i_2 i_3 i_4}^\alpha \omega_{i_1}^{i_4} - a_{i_1 i_2 i_3}^\beta \omega_\beta^\alpha + \\ + (a_{i_1 i_4}^\alpha a_{i_2 i_3}^\beta + a_{i_2 i_4}^\alpha a_{i_1 i_3}^\beta + a_{i_1 i_2}^\alpha a_{i_3 i_4}^\beta) \omega_\beta^{i_4} + a_{i_1 i_2 i_3 i_4} \omega^{i_4}. \quad (1,7)$$

Два направления на поверхности назовем сопряженными, если касательная к одному направлению при движении вдоль другого направления образует развертывающуюся поверхность.

Если $d_1 \mathbf{A} = \omega_1^{i_1} \mathbf{e}_{i_1}$ и $d_2 \mathbf{A} = \omega_2^{i_1} \mathbf{e}_{i_1}$ — два направления на поверхности, то условие их сопряженности получим в виде

$$a_{i_1 i_2}^\alpha \omega_1^{i_1} \omega_2^{i_2} = 0. \quad (1,8)$$

Следовательно, только на тех поверхностях, для которых

$$a_{i_1 i_2}^4 = k a_{i_1 i_2}^3, \quad (1,9)$$

в каждой точке поверхности для каждого направления существует ему сопряженное. В общем же случае, когда условие (1,9) не выполняется в каждой точке поверхности, может быть лишь два взаимно сопряженных направления.

Мы будем рассматривать поверхности общего типа, но предварительно выясним, что геометрически означает условие (1,9). Второе и третье уравнения из системы (1,2) при условии (1,9) дают:

$$d\mathbf{e}_1 = \omega_1^1 \mathbf{e}_1 + \omega_1^2 \mathbf{e}_2 + a_{i_1 i_1}^3 (\omega^{i_1} \mathbf{e}_3 + k \omega^{i_1} \mathbf{e}_4), \quad (1,10)$$

$$d\mathbf{e}_2 = \omega_2^1 \mathbf{e}_1 + \omega_2^2 \mathbf{e}_2 + a_{i_2 i_1}^3 (\omega^{i_1} \mathbf{e}_3 + k \omega^{i_1} \mathbf{e}_4).$$

Из уравнения (1,10) следует: рассматриваемая поверхность целиком помещается в некоторой гиперплоскости (т. е. в трехмерном пространстве).

Эти поверхности изучены в работах [2, 3]. Мы их исключаем из рассмотрения. Направим теперь оси $(A\mathbf{e}_1)$ и $(A\mathbf{e}_2)$ по касательным к единственной паре сопряженных направлений. Тогда

$$a_{i_1 i_2}^\alpha = 0, \text{ если } i_1 \neq i_2. \quad (1,11)$$

Уравнения преобразований стационарной подгруппы, оставляющей точку A_0 неподвижной, теперь принимают вид

$$\delta a_{i_1 i_2}^\alpha = a_{i_1 i_3}^\alpha \pi_{i_2}^{i_3} + a_{i_2 i_3}^\alpha \pi_{i_1}^{i_3} - a_{i_1 i_2}^\beta \pi_\beta^\alpha. \quad (1,12)$$

В системе (1,12) можно положить:

$$a_{11}^3 = a_{22}^4 = 0; \quad a_{11}^4 = a_{22}^3 = 1. \quad (1,13)$$

При этом мы исключаем из рассмотрения поверхности, на которых выполняется условие

$$\det |a_{i_1 i_1}^\alpha| = 0. \quad (1,14)$$

Поскольку для рассматриваемых нами поверхностей $a_{i_1 i_1}^4 \neq k a_{i_1 i_1}^3$, то условие (1,14) может быть выполнено лишь в случаях:

$$a_{11}^3 = a_{22}^3 = a_{11}^4 = 0, \quad a_{22}^4 \neq 0; \quad (1,15)$$

$$a_{11}^3 = a_{22}^3 = a_{22}^4 = 0, \quad a_{11}^4 \neq 0; \quad (1,16)$$

$$a_{11}^3 = a_{11}^4 = a_{22}^4 = 0, \quad a_{22}^3 \neq 0; \quad (1,17)$$

$$a_{22}^3 = a_{11}^4 = a_{22}^4 = 0, \quad a_{11}^3 \neq 0. \quad (1,18)$$

Легко показать, пользуясь системой (1,2), что этим условиям удовлетворяют линейчатые поверхности.

Относительно реперов первого порядка с координатными линиями на поверхности, отнесенными к сопряженной сети, линейчатые поверхности выделяются одним из условий (1,15)—(1,18).

Относительно реперов первого порядка гиперплоские поверхности выделяются условием (1,10).

Первое уравнение продолженной системы (1,7) при условиях (1,13) дает:

$$\begin{aligned} \omega_4^3 &= a_{11}^3 \omega^{i_1}, \quad \omega_2^1 = -a_{12}^4 \omega^{i_1}, \\ \omega_1^2 &= -a_{12}^3 \omega^{i_1}, \quad \omega_3^4 = a_{22}^4 \omega^{i_1}, \\ \omega_3^3 &= 2\omega_2^2 + a_{22}^3 \omega^{i_1}, \quad \omega_4^4 = 2\omega_1^1 + a_{11}^4 \omega^{i_1}. \end{aligned} \quad (1,19)$$

Уравнения вариаций вторичных параметров относительно преобразований стационарной подгруппы, оставляющих точку A_0 инвариантной, позволяют выбрать:

$$a_{222}^0 = a_{112}^3 = a_{111}^4 = a_{221}^4 = 0, \quad (1,20)$$

$$a_{112}^4 = a_{122}^3 = 1. \quad (1,21)$$

Легко проверить, что относительно реперов второго порядка условиями (1,20) и $a_{112}^4 = 0$ или (1,20) и $a_{122}^3 = 0$ выделяются поверхности, обладающие тем свойством, что при смещении репера вдоль координатной линии ω^1 в первом случае и вдоль ω^2 — во втором касательные к другой координатной линии образуют цилиндрическую поверхность.

Уравнения инфинитезимальных перемещений канонического репера поверхности теперь принимают вид:

	e_1	e_2	e_3	e_4
dA	ω^1	ω^2	0	0
de_1	$r_1 \omega^1 + r_2 \omega^2$	$-\omega^2$	0	ω^1
de_2	$-\omega^1$	$r_3 \omega^1 - (q_1 - 1) \omega^2$	ω^2	0 (1,22)
de_3	$q_1 \omega^1 + q_2 \omega^2$	$p_1 \omega^1 + p_2 \omega^2$	$(2r_3 + 1) \omega^1 + 2(q_1 - 1) \omega^2$	$B \omega^2$
de_4	$p_3 \omega^1 + p_4 \omega^2$	$q_3 \omega^1 + (r_1 + 1) \omega^2$	$A \omega^1$	$2r_1 \omega^1 + (2r_2 + 1) \omega^2$

Причем,

$$AB = 3p_1 - 3 - r_2, \quad (1,23)$$

$$p_4 = p_1 + \frac{r_3 - r_2}{3}. \quad (1,24)$$

В системе уравнений (1,22) десять независимых инвариантов

$$r_1, r_2, r_3, p_1, p_2, p_3, A, q_1, q_2, q_3.$$

§ 2. Отношение канонического репера к поверхности.
1. Как было указано, оси (Ae_1) и (Ae_2) направлены по единственной паре сопряженных направлений в точке A поверхности. Рассмотрим произвольную точку на оси (Ae_1) :

$$P = A + t e_1. \quad (2,1)$$

Когда точка A смещается по линии ω^2 , касательная к линии ω^1 опишет развертывающуюся поверхность, при этом радиус-вектор точки P получит смещение

$$dP|_{\omega^1=0} = (dt + tr_2 \omega^2) e_1 + (\omega^2 - t \omega^2) e_2. \quad (2,2)$$

Из уравнения (2,2) следует, что при $t=1$ точка P описывает ребро возврата соответствующей развертывающейся поверхности.

Итак, при смещении точки A по линии ω^2 единичная точка E_1 оси (Ae_1) описывает ребро возврата развертывающейся поверхности, образованной касательными к линиям ω^1 . Пусть точка P_2 лежит на оси (Ae_2) , касающейся линии ω^2 . Тогда

$$dP_2|_{\omega^2=0} = (\omega^1 - t \omega^1) e_1 + (dt + tr_3 \omega^1) e_2. \quad (2,3)$$

Следовательно, при смещении точки A по линии ω^1 точка E_2 описывает ребро возврата развертывающейся поверхности, образованной при этом осью (Ae_2) .

Проведенная нормировка исключает из рассмотрения поверхности, на которых из конгруэнции (Ae_1) координатными линиями ω^2 , а из конгруэнции (Ae_2) линиями ω^1 выделились бы цилиндрические поверхности.

2. Легко проверить, что центры соприкасающихся гиперквадрик лежат в плоскости (Ae_3e_4) .

Рассмотрим двумерные соприкасающиеся плоскости к координатным линиям в начальной точке:

$$\begin{aligned} dA &= \omega^i e_{i1}, \\ d^2A &= [d\omega^1 + \omega^1(r_1\omega^1 + r_2\omega^2) - \omega^1\omega^2] e_1 + \{d\omega^2 + \omega^2[r_3\omega^1 + \\ &+ (q_1 - 1)\omega^2] - \omega^1\omega^2\} e_2 + \omega^{22} e_3 + \omega^{12} e_4. \end{aligned} \quad (2,4)$$

Тогда соприкасающаяся плоскость к линии ω^2 образована векторами:

$$\begin{aligned} dA &= \omega^2 e_2, \\ d^2A &= [d\omega^2 + (q_1 - 1)\omega^{22}] e_2 + \omega^{22} e_3, \end{aligned} \quad (2,5)$$

а соприкасающаяся плоскость к линии ω^1 образована векторами:

$$\begin{aligned} dA &= \omega^1 e_1, \\ d^2A &= [d\omega^1 + r_1\omega^{12}] e_1 + \omega^{12} e_4. \end{aligned} \quad (2,6)$$

Отсюда получаем: ось (Ae_3) есть линия пересечения нормальной плоскости с двумерной соприкасающейся плоскостью к линии ω^2 , а ось (Ae_4) есть линия пересечения нормальной плоскости с двумерной соприкасающейся плоскостью к линии ω^1 . Тогда нормальная плоскость является нормалью Фосса [5].

3. Пересечение прямой

$$x^1 = 0; \quad x^2 = 0; \quad x^3 = 0, \quad (2,7)$$

отнесенной к реперу в точке A , с соприкасающейся гиперквадрикой к поверхности в точке A

$$x^1^2 + x^2^2 - 2x^3 - 2x^4 = 0 \quad (2,8)$$

происходит в точке $L \left(0, 1, 0, \frac{1}{2} \right)$. Через точку L проведем прямую, параллельную оси (Ae_2) , до пересечения с осью (Ae_1) в точке $L_1 \left(0, 0, 0, \frac{1}{2} \right)$. Тогда точка E_1 симметрична точке A относительно L_1 на оси (Ae_1) .

Аналогично пересечение прямой

$$x^1 = 0; \quad x^2 = 0; \quad x^4 = 0 \quad (2,9)$$

с соприкасающейся гиперквадрикой (2,8) происходит в точке $M \left(0, 1, \frac{1}{2}, 0 \right)$. Проведя в плоскости (A, e_2, e_3) прямую, параллельную оси (Ae_2) , до пересечения с (Ae_3) , получим точку $M_1 \left(0, 0, \frac{1}{2}, 0 \right)$, а точка E_3 симметрична точке A относительно M_1 на оси (Ae_3) .

Геометрическая интерпретация всех дифференциальных инвариантов дается аналогично тому, как это делается в [3], т. е. рассматриваются координаты векторов смещения единичных точек осей при смещении начала репера A вдоль координатных линий на поверхности.

§ 3. Конгруэнции нормалей и семейство нормальных плоскостей. В трехмерном аффинном пространстве конгруэнция нормалей поверхности распадается на 2 однопараметрических семейства развертывающихся поверхностей вдоль линии кривизны.

В четырехмерном пространстве мы имеем 2 нормали (Ae_3, Ae_4) в каждой точке поверхности. Естественно рассмотреть 2 конгруэнции нормалей и выяснить существование аналогичных семейств в каждой из конгруэнций.

1. Пусть точка P принадлежит нормали (Ae_3) и является фокусом указанного семейства. Тогда

$$dP = dA + \lambda de_3 = \varphi e_3. \quad (3,1)$$

Следовательно, однопараметрическое семейство нормалей удовлетворяет требуемому условию, если:

$$\frac{\omega_3^1}{\omega^1} = \frac{\omega_3^2}{\omega^2}; \quad \lambda B \omega^2 = 0. \quad (3,2)$$

На поверхности $B = 0$ вдоль линии (3,2) нормали (Ae_3) образуют развертывающиеся поверхности. Эти линии записываются уравнением:

$$-p_1 \omega^1^2 + (q_1 - p_2) \omega^1 \omega^2 + q_2 \omega^2^2 = 0.$$

Очевидно, что условия (3,2) выполняются и на поверхностях $p_1 = 0$. При этом нормали образуют указанные семейства вдоль координатных линий ω^1 .

На поверхностях же $B_1 \neq 0$, $p_1 \neq 0$ из конгруэнции нормалей такие семейства не выделяются.

Аналогично для нормалей (Ae_4) линии, вдоль которых выполняются эти условия:

$$\begin{aligned} -q_3 \omega^{1^2} + (p_3 - r_1 - 1) \omega^1 \omega^2 + p_4 \omega^{2^2} &= 0, \\ A \omega^1 &= 0. \end{aligned} \quad (3,3)$$

Из условий (3,3) видно, что это выполняется лишь на поверхностях $A = 0$ вдоль линии (3,3) или на поверхностях $p_4 = 0$ вдоль линий ω^2 .

2. Рассмотрим 2-параметрическое семейство нормальных плоскостей (A, e_3, e_4). Найдем характеристические точки этого семейства:

$$|X - A, e_1, e_4, e_3| = 0 \quad |X - A, e_2, e_3, e_4| = 0. \quad (3,4)$$

Продифференцируем уравнения (3,4) и найдем:

$$\begin{aligned} x^1 = x^2 &= 0, \\ x^3 \omega_3^2 + x^4 \omega_4^2 &= -\omega^2, \\ x^3 \omega_3^1 + x^4 \omega_4^1 &= -\omega^1. \end{aligned} \quad (3,5)$$

Итак, координаты характеристической точки:

$$x^3 = \frac{\begin{vmatrix} -\omega^2 & \omega_4^2 \\ -\omega^1 & \omega_4^1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \omega_3^2 & \omega_4^2 \\ \omega_3^1 & \omega_4^1 \end{vmatrix}}; \quad x^4 = \frac{\begin{vmatrix} \omega_3^2 & -\omega^2 \\ \omega_3^1 & -\omega^1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \omega_3^2 & \omega_4^2 \\ \omega_3^1 & \omega_4^1 \end{vmatrix}}. \quad (3,6)$$

Семейство имеет характеристикой прямую линию лишь при условиях

$$\frac{\omega_3^2}{\omega^2} = \frac{\omega_3^1}{\omega^1}, \quad \frac{\omega_4^2}{\omega^2} = \frac{\omega_4^1}{\omega^1}, \quad (3,7)$$

что следует из (3,5).

Отсюда видно, что нормальные плоскости имеют прямолинейную характеристику лишь на некотором специальном классе поверхностей. Инварианты их должны удовлетворять условию

$$\frac{p_1}{q_3} = \frac{q_1 - p_2}{p_3 - r_1 - 1} = \frac{q_2}{p_4}. \quad (3,8)$$

Итак, лишь на поверхностях (3,8) из двухпараметрического семейства нормальных плоскостей выделяется однопараметрическое линией (3,7), вдоль которой нормальные плоскости огибают линейчатую поверхность. Назовем характеристическую точку нормальной плоскости ее фокусом. Найдем геометрическое место фокусов нормальных плоскостей. Для этого в уравнениях (3,5) подставим значения ω_k^i . Тогда получим

$$\begin{aligned} \omega^1 (q_1 x^3 + p_3 x^4 + 1) + \omega^2 (q_2 x^3 + p_4 x^4) &= 0, \\ \omega^1 (p_1 x^3 + q_3 x^4) + \omega^2 [p_2 x^3 + (r_1 + 1) x^4 + 1] &= 0. \end{aligned} \quad (3,9)$$

Чтобы система (3,9) имела ненулевое решение, необходимо:

$$\begin{vmatrix} q_1 x^3 + p_3 x^4 + 1 & q_2 x^3 + p_4 x^4 \\ p_1 x^3 + q_3 x^4 & p_2 x^3 + (r_1 + 1) x^4 + 1 \end{vmatrix} = 0, \quad (3,10)$$

т. е. из двупараметрического семейства нормальных плоскостей выделяется однопараметрическое фокальное семейство вдоль линии (3,9). Все фокусы расположены на кривой второго порядка (3,10) в нормальной плоскости. Ее можно записать в виде:

$$(q_1 p_2 - p_1 q_2) x^3 + [p_3 (r_1 + 1) - q_3 p_4] x^4 + (p_2 p_3 + q_1 (r_1 + 1) - p_1 p_4 - q_2 q_3) x^5 + (p_2 + q_1) x^6 + (p_3 + r_1 + 1) x^7 + 1 = 0.$$

Найдем на поверхности линии, вдоль которых фокусы лежат на нормали (Ae_3) , т. е. $x^4 = 0$ или

$$-p_1 \omega^2 + (q_1 - p_2) \omega^3 + q_2 \omega^4 = 0. \quad (3,11)$$

Эти линии назовем линиями кривизны первого рода. Аналогично, линиями кривизны второго рода назовем линии, вдоль которых фокусы нормальной плоскости лежат на оси (Ae_4) , т. е.

$$q_3 \omega^2 + (r_1 + 1 - p_3) \omega^3 - p_4 \omega^4 = 0.$$

Кривую (3,10) назовем фокальной кривой нормальной плоскости.

Можно получить целый ряд следствий, относящихся к фокальной кривой. С помощью нее можно получить аффинную классификацию точек поверхности четырехмерного аффинного пространства.

Назовем точки поверхности (A) точками эллиптического типа, если кривая (14) эллиптического типа, т. е. $\delta > 0$

$$\delta = \begin{vmatrix} q_1 p_2 - p_1 q_2 & \frac{1}{2} [p_1 p_3 + q_1 (r_1 + 1) - p_1 p_4 - q_2 q_3] \\ \frac{1}{2} [\dots] & [p_3 (r_1 + 1) - q_3 p_4] \end{vmatrix}. \quad (3,12)$$

Те точки поверхности, для которых $\delta < 0$, назовем точками гиперболического типа, а точки, где $\delta = 0$ — точками параболического типа.

Коника (3,10) может быть распадающейся и не распадающейся на пару прямых в зависимости от того, равен или не равен нулю определитель D :

$$D = \begin{vmatrix} \delta & \frac{1}{2} (p_2 + q_1) \\ \frac{1}{2} (p_2 + q_1) & \frac{1}{2} (p_3 + r_1 + 1) \\ \frac{1}{2} (p_2 + q_1) & \frac{1}{2} (p_3 + r_1 + 1) & 1 \end{vmatrix} \quad (3,13)$$

Легко можно доказать следующие утверждения:

1. Поверхности, фокальная коника которых распадается на пару прямых, параллельных осям (Ae_3) и (Ae_4) , задаются уравнениями:

$$p_1 p_4 + q_2 q_3 + q_1 p_3 + r_1 p_2 + p_2 = 0; \quad q_1 p_2 - p_1 q_2 = 0; \quad (3,14)$$

$$p_3 r_1 + p_3 - q_3 p_4 = 0,$$

произвол существования этих поверхностей 8 функций одного аргумента. Все точки этих поверхностей являются точками гиперболического типа.

2. Поверхности, фокальная коника которых есть сдвоенная прямая, параллельная оси (Ae_3), могут быть заданы натуральными уравнениями:

$$p_2 + q_1 = 0,$$

$$q_1 p_2 - p_1 q_2 = 0, \quad (3,15)$$

$$p_2 p_3 + q_1 (r_1 + 1) - p_1 p_4 + q_2 q_3 = 0,$$

$$2p_3 r_1 + 2p_3 - 4q_3 p_4 - 2r_1 - 1 - p_3^2 - r_1^2 = D.$$

Произвол их существования равен 6 функциям одного аргумента. Из этого класса выделяются подклассы

$$1) \quad q_1 = p_1 = q_2 = B = 0,$$

$$2) \quad q_1 = p_1 = q_2 = p_3 = 0,$$

$$3) \quad q_1 = p_1 = 0, \quad q_2 \neq 0,$$

$$4) \quad q_1 = p_2 = q_2 = 0, \quad p_1 \neq 0.$$

Первый подкласс обладает тем свойством, что конгруэнции нормалей (Ae_3) несут 2 однопараметрических фокальных семейства. Второй подкласс обладает свойством, что вдоль координатной линии ω^1 из конгруэнции (Ae_3) выделяется однопараметрическое фокальное семейство, а из конгруэнции (Ae_4) линией ω^2 выделяется аналогичное семейство.

Третий подкласс можно охарактеризовать тем свойством, что вдоль координатной линии ω^2 из конгруэнции (Ae_3) выделяется фокальное семейство, а конгруэнция (Ae_4) таких семейств не имеет.

На всех четырех подклассах нормальные плоскости пересекаются по прямой вдоль линии (3,9).

3. На поверхностях $B = 0$ вдоль линий кривизны первого рода выделяется фокальное семейство из конгруэнции (Ae_3).

4. На поверхностях $A = 0$ вдоль линий кривизны второго рода выделяется фокальное семейство из конгруэнции нормалей (Ae_4).

5. На поверхностях $\{p_1 = q_2 = 0, q_1 \neq p_2\}$ линии кривизны первого рода совпадают с координатными линиями. На поверхностях $p_1 = q_2 = q_1 - p_2 = 0$ линии кривизны первого рода не определены.

6. На поверхностях $q_3 = p_4 = 0$ линии кривизны второго рода совпадают с координатными линиями. На поверхностях $q_3 = p_4 = r_1 + 1 - p_3 = 0$ линии кривизны второго рода не определены.

7. На поверхностях $p_1 = q_2 = q_3 = p_4 = 0$ линии кривизны первого и второго рода совпадают с координатными линиями.

ЛИТЕРАТУРА

1. Фиников С. П. Метод внешних форм Картана. ГИТТЛ, М.—Л., 1948.
2. Щербачев Р. Н. Курс аффинной и проективной дифференциальной геометрии. Изд. Томского ун-та, Томск, 1960.
3. Тутаев Л. К. Линии и поверхности в аффинном трехмерном пространстве. Минск, 1962.
4. Акивис М. А. ДАН СССР, 139, 6, 1961.
5. Акивис М. А. Матем. сб., 58, № 2, 1962.

Поступило в редакцию 18.IV 1966

А. А. БОГУШ, А. И. БОЛСУН

**ОБ ИСПОЛЬЗОВАНИИ БАЗИСА
 ПОЛНОЙ МАТРИЧНОЙ АЛГЕБРЫ ПРИ РАСЧЕТЕ
 МАТРИЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ВЕКТОРНЫХ ЧАСТИЦ**

В [1, 2] разработана общая методика и проведен непосредственный расчет матричных элементов для поляризованных векторных частиц. При этом в качестве набора вершинных операторов, для которых вычислены матричные элементы, взяты следующие комбинации 10×10 -матриц Даффина — Кеммера:

$$I, \beta_\mu, \beta_\mu \beta_\nu, \beta_\mu \beta_\nu \beta_\rho, \beta_\mu \beta_\nu \beta_\rho \beta_\delta, \quad (1)$$

$$\eta_5 \beta_\mu \beta_\nu \beta_\rho, \eta_5 \beta_\mu \beta_\nu, \eta_5 \beta_\mu, \eta_5.$$

Здесь $\eta_5 = \bar{P} - P$, $I = P + \bar{P}$, где $P = \beta^2 - 2$, $\bar{P} = 3 - \beta^2$ — проективные операторы, выделяющие соответственно 4-мерную (векторную) и 6-мерную (тензорную) части 10-мерного пространства.

Нетрудно видеть, что матрицы (1), охватывая все независимые элементы базиса алгебры Даффина — Кеммера в 10-мерном пространстве, содержат в себе сверх того и некоторые их линейные комбинации. Между тем очевидно, что целесообразно использовать набор матричных элементов только для независимых элементов (базиса) алгебры матриц Даффина — Кеммера.

Для получения этого базиса алгебры матриц удобно воспользоваться представлением 10×10 матриц β_μ через элементы полной матричной алгебры ε^{AB} ($A, B = \rho, [\mu\sigma]$; $(\varepsilon^{AB})_{CD} = \delta_{AC}\delta_{BD}$, $\varepsilon^{AB}\varepsilon^{CD} = \delta_{BC}\varepsilon^{AD}$, $\delta_{[\mu\nu]}\delta_{[\rho\sigma]} = \delta_{\mu\rho}\delta_{\nu\sigma} - \delta_{\mu\sigma}\delta_{\nu\rho}$):

$$\beta_\mu = \varepsilon^{[\mu\gamma]\eta} + \varepsilon^{\eta([\mu\gamma])}. \quad (2)$$

Тогда, исходя из очевидных соотношений, полученных на основе использования свойств операторов P и \bar{P} [3]:

$$P = \varepsilon^{\eta\eta}, \quad \bar{P} = \frac{1}{2} \varepsilon^{[\omega\eta][\omega\eta]},$$

$$\beta_\mu P = \varepsilon^{[\mu\gamma]\eta}, \quad \beta_\mu \bar{P} = \varepsilon^{\eta([\mu\gamma])},$$

$$\beta_\mu \beta_\nu P = \delta_{\mu\nu} P - \varepsilon^{\nu\mu}, \quad \beta_\mu \beta_\nu \bar{P} = \varepsilon^{[\mu\omega][\nu\omega]},$$

$$\beta_\mu \beta_\nu \beta_\rho P = \delta_{\nu\rho} \varepsilon^{[\mu\gamma]\eta} - \varepsilon^{[\mu\rho]\nu},$$

$$\beta_\mu \beta_\nu \beta_\rho \bar{P} = \delta_{\mu\nu} \varepsilon^{\eta([\mu\gamma])} - \varepsilon^{\nu([\rho\mu])}, \quad (3)$$

$$\beta_\mu \beta_\nu \beta_\rho \beta_\sigma P = \delta_{\mu\nu} (\delta_{\rho\sigma} P - \varepsilon^{\rho\sigma}) + \delta_{\mu\sigma} \varepsilon^{\nu\rho} + \delta_{\rho\sigma} \varepsilon^{\nu\mu},$$

$$\beta_\mu \beta_\nu \beta_\rho \beta_\sigma \bar{P} = \delta_{\nu\rho} \varepsilon^{[\mu\sigma][\sigma\omega]} - \varepsilon^{[\mu\rho][\sigma\nu]},$$

сразу можно выразить через β_μ все 100 независимых элементов полной матричной алгебры в 10-мерном пространстве (см. [4, 5]):

$$\varepsilon^{\nu\mu} = (\delta_{\mu\nu} - \beta_\mu \beta_\nu) P \quad (16 \text{ элементов}),$$

$$\varepsilon^{\nu[\rho\mu]} = (\beta_\mu \beta_\nu \beta_\rho - \delta_{\mu\nu} \beta_\rho) \bar{P} \quad (24 \text{ элемента}),$$

(4)

$$\varepsilon^{[\mu\rho]\nu} = (\delta_{\mu\nu} \beta_\rho - \beta_\rho \beta_\nu \beta_\mu) P \quad (24 \text{ элемента}),$$

$$\varepsilon^{[\mu\rho][\sigma\nu]} = (\delta_{\rho\nu} \beta_\mu \beta_\sigma - \beta_\mu \beta_\nu \beta_\rho \beta_\sigma) \bar{P} \quad (36 \text{ элементов}).$$

Очевидно, что стоящие справа комбинации произведений матриц β_μ можно рассматривать как один из возможных базисов алгебры 10×10 -матриц Даффина-Кеммера.

Из приведенных соотношений, в частности, следует, что все элементы базиса содержатся по существу в четырех типах произведений матриц β_μ : $\beta_\mu \beta_\nu \beta_\rho P$, $\beta_\mu \beta_\nu \beta_\rho \bar{P}$, $\beta_\mu \beta_\nu P$ и $\beta_\mu \beta_\nu \beta_\rho \beta_\sigma \bar{P}$. Поэтому их можно выделить непосредственно из этих произведений путем соответствующей антисимметризации по парам индексов при матрицах β . В результате имеем:

$$\beta_\mu \beta_\nu \beta_\rho P = -4\varepsilon^{[\mu\rho]\nu} ([\mu\rho], [\nu\rho]),$$

$$\beta_\mu \beta_\nu \beta_\rho \bar{P} = -4\varepsilon^{\nu[\rho\mu]} ([\mu\rho], [\nu\mu]). \quad (5)$$

$$\beta_\mu \beta_\nu P = \delta_{\mu\nu} P - \varepsilon^{\nu\mu},$$

$$\beta_\mu \beta_\nu \beta_\rho \beta_\sigma \bar{P} = -8\varepsilon^{[\mu\rho][\nu\sigma]} ([\mu\rho], [\nu\sigma], [\nu\rho]).$$

Здесь в скобках приведены обозначения пар индексов $[\mu\rho]$, по которым проводится антисимметризация в произведениях матриц β .

Заметим, что иной вариант базиса алгебры 10×10 -матриц Даффина — Кеммера, отличный от (4) и (5), был предложен Х. Ёйглане (частное сообщение, см. также [6]).

Специфическое преимущество базиса (4) состоит в том, что он позволяет по-новому подойти к непосредственному расчету матричных элементов векторных частиц. Рассмотрим матричный элемент $M = \bar{\psi}_2 Q \psi_1$, связывающий два состояния векторной частицы $\psi_1 = \psi^{a_1 r_1}(p_1)$ и $\psi_2 = \psi^{a_2 r_2}(p_2)$, где p_1 и p_2 — импульсы; $a_1^{r_1}$ и $a_2^{r_2}$ — векторы поляризации, определяющие спиновые состояния ($r = +1, 0, -1$) [1, 2]; Q — вершинный оператор, представляющий собой некоторую комбинацию произведений матриц β .

Согласно (3) и (4), любая комбинация матриц β может быть всегда выражена через элементы полной матричной алгебры. Поэтому, не нарушая общности, мы можем рассмотреть случай, когда в качестве вершинного оператора Q взят некоторый элемент полной матричной алгебры ε^{AB} . Тогда в соответствии с определением ε^{AB} ($(\varepsilon^{AB})_{CD} = \delta_{AC} \delta_{BD}$) можно записать

$$\bar{\psi}_2 \varepsilon^{AB} \psi_1 = \bar{\psi}_{2A} \psi_{1B}. \quad (6)$$

Взяв теперь в качестве Q все элементы базиса (4), будем иметь:

$$\bar{\psi}_2 \varepsilon^{\nu\mu} \psi_1 = \bar{\psi}_{2\nu} \psi_{1\mu},$$

$$\bar{\psi}_2 \varepsilon^{\mu[\rho\sigma]} \psi_1 = \bar{\psi}_{2\mu} \psi_{1[\rho\sigma]}, \quad (7)$$

$$\bar{\psi}_2 \varepsilon^{[\lambda]\nu} \psi_1 = \bar{\psi}_{2[\lambda]} \psi_{1\nu}, \quad (7)$$

$$\bar{\psi}_2 \varepsilon^{[\lambda][\rho\sigma]} \psi_1 = \bar{\psi}_{2[\lambda]} \psi_{1[\rho\sigma]},$$

где ψ_μ и $\psi_{[\rho\sigma]}$ представляют собой соответственно векторные и тензорные компоненты функций.

Отсюда следует вывод, что выражение для матричного элемента типа $\bar{\psi}_2 Q \psi_1$ при любом значении вершинного оператора Q можно записать в виде линейной комбинации матричных элементов (7). Для этого достаточно предварительно представить входящие в Q комбинации матриц β_μ через элементы полной матричной алгебры ε^{AB} .

В частности, если взять Q в виде (3), мы получим:

$$\begin{aligned} \bar{\psi}_2 P \psi_1 &= \bar{\psi}_{2\eta} \psi_{1\eta}, & \bar{\psi}_2 \bar{P} \psi_1 &= \frac{1}{2} \bar{\psi}_{2[\omega\eta]} \psi_{1[\omega\eta]}, \\ \bar{\psi}_2 \beta_\mu P \psi_1 &= \bar{\psi}_{2[\mu\eta]} \psi_{1\eta}, & \bar{\psi}_2 \beta_\mu \bar{P} \psi_1 &= \bar{\psi}_{2\eta} \psi_{1[\mu\eta]}, \\ \bar{\psi}_2 \beta_\mu \beta_\nu P \psi_1 &= \delta_{\mu\nu} \bar{\psi}_{2\eta} \psi_{1\eta} - \bar{\psi}_{2\nu} \psi_{1\mu}, \\ \bar{\psi}_2 \beta_\mu \beta_\nu \bar{P} \psi_1 &= \bar{\psi}_{2[\mu\eta]} \psi_{1[\nu\eta]}, \\ \bar{\psi}_2 \beta_\mu \beta_\nu \beta_\rho P \psi_1 &= \delta_{\nu\rho} \bar{\psi}_{2[\mu\eta]} \psi_{1\eta} - \bar{\psi}_{2[\mu\rho]} \psi_{1\nu}, \\ \bar{\psi}_2 \beta_\mu \beta_\nu \beta_\rho \bar{P} \psi_1 &= \delta_{\mu\nu} \bar{\psi}_{2\eta} \psi_{1[\rho\eta]} - \bar{\psi}_{2\nu} \psi_{1[\rho\mu]}, \\ \bar{\psi}_2 \beta_\mu \beta_\nu \beta_\rho \beta_\sigma P \psi_1 &= \delta_{\mu\nu} (\delta_{\rho\sigma} \bar{\psi}_{2\eta} \psi_{1\eta} - \bar{\psi}_{2\sigma} \psi_{1\rho}) + \\ &+ \delta_{\mu\sigma} \bar{\psi}_{2\nu} \psi_{1\rho} - \delta_{\rho\sigma} \bar{\psi}_{2\nu} \psi_{1\mu}, \\ \bar{\psi}_2 \beta_\mu \beta_\nu \beta_\rho \beta_\sigma \bar{P} \psi_1 &= \delta_{\nu\rho} \bar{\psi}_{2[\mu\omega]} \psi_{1[\sigma\omega]} - \\ &- \bar{\psi}_{2[\mu\rho]} \psi_{1[\sigma\nu]}. \end{aligned} \quad (8)$$

Если теперь воспользоваться найденными в [1, 2] выражениями для 10-мерных волновых функций векторных частиц:

$$\psi_1 = \left\{ \begin{array}{l} \psi_{1\mu} \\ \psi_{1[\lambda\lambda]} \end{array} \right\} = \frac{1}{m\sqrt{2}} \left\{ \begin{array}{l} -ima_{1\mu}^{(r_1)} \\ (p_{1x} a_{1\lambda}^{(r_1)} - p_{1\lambda} a_{1x}^{(r_1)}) \end{array} \right\}, \quad (9)$$

$$\bar{\psi}_2 = \left\{ \begin{array}{l} \bar{\psi}_{2\nu} \\ \bar{\psi}_{2[\rho\sigma]} \end{array} \right\} = \frac{-1}{m\sqrt{2}} \left\{ \begin{array}{l} -ima_{2\nu}^{(r'_2)} \\ (p_{2\rho} a_{2\sigma}^{(r'_2)} - p_{2\sigma} a_{2\rho}^{(r'_2)}) \end{array} \right\} \quad (10)$$

и подставить соответствующие значения векторных (ψ_μ) и тензорных компонент ($\psi_{[\rho\sigma]}$) в соотношения (7) и (8), то нетрудно проверить, что эти результаты находятся в полном согласии с выражениями, полученными для матричных элементов в работе [2].

Изложенный подход без труда переносится на случай скалярных частиц в 5-мерном β -формализме, а также может представить интерес в теории частиц с высшими целыми спинами, построенной на основе уравнений первого порядка.

Авторы выражают благодарность Ф. И. Федорову и Л. Г. Морозу за полезные обсуждения, а также Х. Х. Ыйглане, чьи замечания стимулировали появление данной заметки.

ЛИТЕРАТУРА

1. Богуш А. А. ДАН СССР, 149, 1286, 1963.
2. Богуш А. А., Болсун А. И. ДАН СССР, 155, 1046, 1964.
3. Богуш А. А., Федоров Ф. И. ДАН БССР, 6, 81, 1962.
4. Богуш А. А. ДАН БССР, 5, 155, 1961; Диссертация, Минск, 1962.
5. Богуш А. А., Мороз Л. Г. Весті АН БССР, сер. фіз.-тэхн. навук, № 4, 60, 1961.
6. Айнсаар А., Ыйглане Х. Труды Института физики и астрономии АН ЭССР, № 19, 132, 1962.

Поступило в редакцию 4.VI 1966

У. М. ТРЭЦЦЯКОУ

ПАЛЯРЫЗУЕМАСЦЬ НЕЙТРОНА І НЕЙТРОННЫ КАМПТОН-ЭФЕКТ

На карысць уяўлення аб «фізічным» нуклоне як складанай сістэме, у якой (віртуальна) ідуць працэсы паглынання і вылучэння тыпу:

$$\begin{aligned} N &\leftrightarrow N' + \pi, \\ N &\leftrightarrow N' + \rho, \\ N &\leftrightarrow N' + e^- + e^+, \end{aligned}$$

гаворыць наяўнасць адпаведных рэакцый, дзе налятаючая часцінка разрывае віртуальную сувязь. Напрыклад, у выпадку фотанараджэння:

$$\begin{aligned} \gamma + N &\rightarrow N' + \pi, \\ \gamma + N &\rightarrow N' + \rho, \\ \gamma + N &\rightarrow N' + e^- + e^+. \end{aligned}$$

Гэта азначае, што ў камптон-эфекце (к.-э.) на нуклонах побач з дыяграмай *a* на рыс. 1 адыгрываюць ролю таксама «структурныя» дыяграмы *б, в, г*. Таму эксперыменты па камптонаўскаму рассеянню на нуклонах, таксама як і нейтрон-ядзерныя і электрон-нуклонныя эксперыменты, служаць пашырэнню нашых уяўленняў аб структуры нуклонаў.

Нейтронны к.-э. з гэтага пункту гледжання з'яўляецца асабліва цікавым. У 1957 г. Ю. А. Аляксандраў [1] выявіў аномальны ход сячэння нейтрон-ядзернага рассеяння для цяжкіх ядраў (U, Th, Pu). Эксперыментальныя сячэнні рассеяння на вуглы $< 10^\circ$ значна адрозніваліся ад прад-

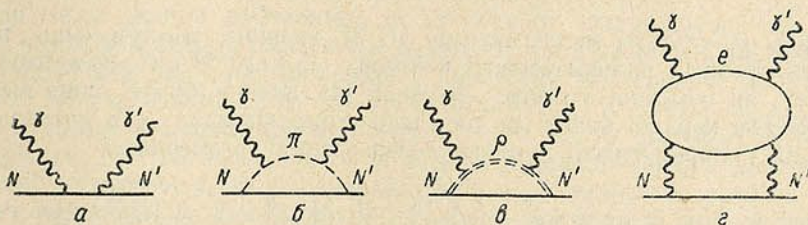


Рис. 1. Дыяграмы нуклоннага камптон-эфекту

казаных гэрэтычна. В. С. Барашэнкаў і іншыя [2] выказалі меркаванне, што адрозненне ўзнікае ад рассеяння на электрычным дыпольным моманце нейтрона, індцыруемым кулонаўскім полем ядра. Аднак гэта натуральнае тлумачэнне сутыкнулася з цяжкасцямі. Нават калі дапусціць канструктыўны характар інтэрферэнцыі «палярызацыйнага» рассеяння з ядзерным,

Табліца 1

 Палярызуемасці нуклонаў у адзінках 10^{-43} см^3
 (α -электрычная, β -магнітная)

№ п. п.	Аўтары	Ацэнка	Метад
1	Барашэнкаў і інш. [2]	а) $\alpha_n < 10\,000$ б) $\alpha_n \sim 210$	а) набліжэнне цв. сферы для экспер. [1] б) статыч. мезонная тэорыя
2	Аляксандраў [1]	$\alpha_n = 800 \pm 350$	з эксперыменту па n -ядзерн. рассеянню на малыя вуглы (мадэль цвёрдай сферы)
3	Брайт, Рустгі [20]	$\alpha_n \leq 20$	па даных фотанараджэння ў S -стане
4	Талер [21]	$0 < \alpha_n \leq 200$	з даных Лангсдорфа і інш. [24] па расс. нейтронаў сярэдніх энергій на ядрах
5	Балдзін [10]	$4 \leq \alpha_p \leq 15$ $\alpha_n \cong 1,2 \alpha_p$	па даных фотанараджэння і камптон-эфекту на пратоне
6	Гальданскі і інш. [22]	$\alpha_p = 9 \pm 2$ $\beta_p = 2 \mp 2$	з экспер. па γp -расс. [22]
7	Барашэнкаў, Кайзер [5]	$\alpha_n = \alpha_p \sim 12$ $\beta_n = \beta_p \sim 0,4 \div 0,8$	мезонная тэорыя з фіксав. нукл.
8	Герасімаў і інш. [9]	$\alpha_{ep} \approx 7000$ $\alpha_{en} \approx 0,1$	па вірт. нараджэнню эл.-паз. пар на нуклонах
9	Пятрунькін [19]	$\alpha_n \leq 40$	з даных па фотадэзінтэграцыі гелію
10	Фядзянін [7]	$\alpha_p \approx 10$ $\beta_p \approx 0,7$	па даных фотанараджэння на пратонах
11	Мароз, Трэцякоў [8]	$\alpha_n = 12,3 \pm 2,5$ $\beta_n = 0,77 \pm 1,0$	з даных па фотанараджэнню на пратонах і σ^-/σ^+ -адносінах
12	Ценарэ, Верганелакіс [18]	$\alpha_n \sim 12$	з эксперым. па γd -рассеянню і фотанараджэнню піёнаў
13	Уолт, Фосан [4]	а) $\alpha_n \leq 2000$ б) $\alpha_n \geq 5000$	а) з эксперым. [4] (аптыч. мадэль) б) тое ж з эксперым. [1, 3]
14	Аляксандраў, Самасват [6]	$\alpha_n < 100$	па рассеянню нейтронаў сярэдніх энергій на вялікія вуглы (патэнцыял Вуда — Саксона)

то і тады рэзультаты эксперыменту [1, 3] удаецца вытлумачыць толькі пры электрычнай палярызуемасці нейтрона $\alpha_n \sim 10^{-40} \text{ см}^3$ (у адваротным выпадку, як паказана Уолтам і Фосанам [4], ацэнка будзе яшчэ вышэй). Гэта на два парадкі больш за тое, што атрымліваецца для электрычнай мезоннай палярызуемасці нуклона з меркаванняў размернасці

$$\alpha_n \approx \alpha_p \sim \frac{1}{2\pi} \left(\frac{e^2}{hc} \right) \left(\frac{g^2}{hc} \right) \left(\frac{h}{m_{\pi}c} \right)^3 \sim 16$$

(тут і далей выкарыстоўваюцца адзінкі 10^{-43} см^3), але для пратона добра ўзгадняецца з доследам (гл. табл. 1, № 5, 6, 10). Рабіліся спробы знайсці эфекты, якія імітуюць палярызуемасць нейтрона ў нейтрон-ядзерным рассеянні, але яны аказаліся беспаспяховымі (гл. агляды [5, 6]). Таму ацэнка па даных нейтрон-ядзернага рассеяння на малыя вуглы (табл. 1, № 1, 2, 4, 13) стаяць пакуль асобна ад ацэнак, атрымліваемых на аснове іншых

эксперыментальных даных (№ 3, 5, 7, 9, 11, 12). Патрэбны далейшыя эксперыментальныя і тэарэтычныя намаганні для іх збліжэння.

У гэтай рабоце ў аднамезонным набліжэнні разглядаюцца «дынамічныя» палярызуемасці нейтрона і сячэнні нейтроннага к.-э. Праводзіцца параўнанне (па неабходнасці ўскоснае) атрыманых рэзультатаў з эксперыментам.

Палярызуемасці нейтрона. Увядзём «дынамічныя» палярызуемасці нуклона:

$$\alpha(\delta) = \frac{d}{d\delta^2} R_1, \quad \beta(\delta) = \frac{d}{d\delta^2} R_2, \quad (1)$$

дзе R_1 і R_2 — амплітуды паглынання ў электрычна- і магнітнадыпольных станах; δ — энергія фатона ў с.ц.і. ў адзінках масы нуклона M . Паколькі ў нізкачастотным прэдзе R_1 і R_2 пераходзяць у амплітуды r_1 і r_2 рэлееўскага рассеяння на электрычных і магнітных дыпольных момантах:

$$r_1 = \alpha\delta^2, \quad r_2 = \beta\delta^2, \quad (2)$$

то прыцып адпаведнасці, як відаць з (1) і (2), выконваецца.

Нам будзе зручна формулы (1) выразіць праз інтэгральныя часткі D_i шасці незалежных амплітуд Φ_i камптон-эфекту [7,8]. Тады

$$\alpha(\delta) = \frac{\omega r_0}{k_n^2} (D_1 + D_2 + D_3 + D_4 + D_5),$$

$$\beta(\delta) = \frac{\omega r_0}{k_n^2} (D_6 - D_2 - D_4), \quad (3)$$

дзе $\omega = \delta + \sqrt{1 + \delta^2}$; $k_n = M\delta\omega$.

Велічыні $\alpha(\delta)$ і $\beta(\delta)$ маюць прамы фізічны сэнс («статычных» палярызуемасцей нуклонаў) толькі пры малых энергіях δ . Аднак вывучэнне іх энергетычных залежнасцей ва ўсёй падпарагавай вобласці энергій дазваляе зрабіць заключэнне аб разумнасці дыпольнага набліжэння пры разглядзе к.-э., меркаваць аб укладзе палярызацыйнага рассеяння ў сячэнне і да т. п. Пры надпарагавых энергіях к.-э. ужо не можа быць апісаны праз велічыні $\alpha(\delta)$ і $\beta(\delta)$, паколькі яны становяцца ўсяго толькі некаторымі характарыстыкамі рэальных частак амплітуд R_1 і R_2 .

Для знаходжання нейтронных і пратонных «палярызуемасцей» $\alpha(\delta)$ і $\beta(\delta)$ неабходна ведаць амплітуды камптонаўскага рассеяння на нейтроне і пратоне. Паколькі ўклад ρ^0 -мезона ў амплітуду нуклоннага к.-э. (дыяграма *в*) не перавышае 1,5% ад усёй амплітуды, а эксперыментальныя хібнасці даных фотанараджэння значныя (~ 10%), то дыяграму *в* можна не ўлічваць. Па той жа прычыне можна не прымаць у разлік дыяграму *г*, паколькі электронна-пазітронная палярызуемасць нейтрона складае ўсяго 1% ад мезоннай [9] (дыяграма *б*). Праўда, дыяграма *г* для палярызуемасці пратона даволі істотная (табл. 1, № 8), але праяўляецца яна толькі ў вобласці блізкіх да нуля вуглоў рассеяння, дзе вымярэнні пакуль што немагчымыя. Таму пры знаходжанні амплітуд к.-э. можна абмежавацца дыяграмамі *а* і *б*. Разлік праводзіцца ў квадратычным па частаце фатона набліжэнні і ў рамках дыпольнай мадэлі фотанараджэння [7, 8].

Рэзультаты разліку велічынь $\alpha(\delta)$ і $\beta(\delta)$ прыведзены на рыс. 2 (для выразнасці графіка калідор памылак не нанесен). Сфармулюем асноўныя вывады.

1. Прэдзел $\delta \rightarrow 0$ азначае пераход ад «дынамічных» палярызуемасцей $\alpha(\delta)$ і $\beta(\delta)$ нуклона да агульнапрынятых «статычных». Экстрапаляруючы даныя для $\alpha(\delta)$ да $\delta = 0$, атрымаем

$$\alpha_n(0) = 11,5 \pm 2,5, \quad (4)$$

$$\alpha_p(0) = 9,5 \pm 2,5. \quad (5)$$

Велічыні (4) і (5) блізкія да адзін аднаго, атрыманых на аснове даных па к.э. і фотанараджэнню на нуклонах (табл. 1, № 11, 12, 3 і 10, 6, 7).

2. З рыс. 2. відаць, што пры ўсіх энергіях δ

$$\alpha_n > \alpha_p.$$

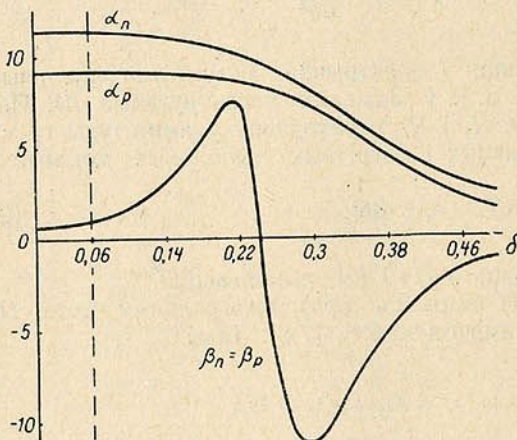
У статычным прэдзеце

$$2 \frac{\alpha_n(0) - \alpha_p(0)}{\alpha_n(0) + \alpha_p(0)} \approx 19\%,$$

што добра ўзгадняецца з ацэнкай Балдзіна [10] (табл. 1, № 5).

3. У рамках прынятых набліжэнняў $\beta_n(\delta) = \beta_p(\delta)$ (інтэгральныя часткі амплітуд рассяяння D_2, D_4 і D_6 інварыянтныя адносна пераходу ад пратона да нейтрона), таму і статычныя прэдзелы роўныя:

$$\beta_n(0) = \beta_p(0) = 1 \pm 1 \quad (6)$$



Рыс. 2. Каэфіцыенты $\alpha(\delta)$ і $\beta(\delta)$ для нейтрона і пратона (у адзінках 10^{-43} см^2). Участкі левей $\delta=0,06$ атрыманы экстрапаляцыяй

(параўнай з № 6, 7, 10, 11 табл. 1).

4. Велічыні адносных адхіленняў $\alpha(\delta)$ і $\beta(\delta)$ ад $\alpha(0)$ і $\beta(0)$ характарызуюць змяненне «пружкіх» уласцівасцей нуклон-піоннай сістэмы («фізічнага нуклона») са змяненнем частаты электрамагнітнага поля. З рыс. 2 непасрэдна відаць, што электрычна-дыпольныя ўласцівасці нуклона больш устойлівыя, чым магнітнадыпольныя.

Сячэнні нейтроннага камптон-эфекту. Як паказана ў [7], дыферэнцыяльнае сячэнне рассяяння на нуклоне (фатон і нуклон непаларызаваны) можа быць прыведзена да выгляду

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma_{\gamma N}}{d\Omega} = & \frac{1}{2} \Phi_{11} (1+x^2) + 2\Phi_{56} x + \frac{1}{2} (\Phi_{55} + \Phi_{66}) \times \\ & \times (3-x^2) + (1-x^2) \left[-\Phi_{12} x + \frac{1}{2} \Phi_{22} (1-x^2) + \right. \\ & + \frac{1}{2} \Phi_{33} (1+x^2) + \frac{1}{2} \Phi_{44} (1-x^2)^2 - \Phi_{34} x (1-x^2) + \\ & \left. + \Phi_{35} x + \Phi_{36} - \Phi_{45} (1-x^2) \right]. \quad (7) \end{aligned}$$

Тут x — косінус вугла рассяяння $\tilde{\gamma}$ с. ц. і.; $\Phi_{ik} = \frac{1}{2} (\Phi_i^* \Phi_k + \Phi_i \Phi_k^*)$,

$\Phi_k = d_k + D_k + iA_k = \sum_{l=0}^2 \Phi_k^l x^l$ ($k = 1, \dots, 6$) — амплітуды нуклоннага

к.-э. Па формуле (7), ведаючы борнаўскія d_k [7], інтэгральныя D_k [8] і ўяўныя A_k [11] часткі нейтронных амплітуд Φ_k , можна разлічыць энергетычныя залежнасці дыферэнцыяльных сячэнняў $d\sigma_{\gamma n}/d\Omega$ нейтроннага к.-э.

Разлікі праводзіліся ў інтэрвале энергій $\delta = 0,06 \div 0,5$ ($60 \div 750$ Мэв у л. с.). На рыс. 3 і 4 прыведзены рэзультаты разлікаў дыферэнцыяль-

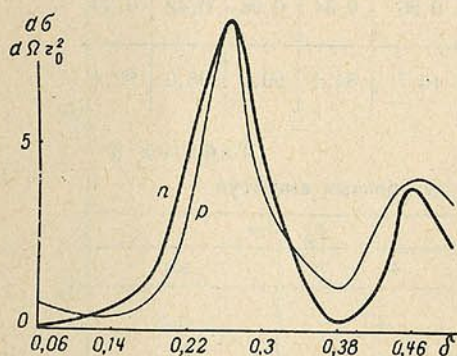


Рис. 3. Дыферэнцыяльныя сячэнні рассеяння ўперад (n — на нейтроне, p — на пратоне). $r_0 = 1,53 \cdot 10^{-16}$ см — класічны радыус нуклона

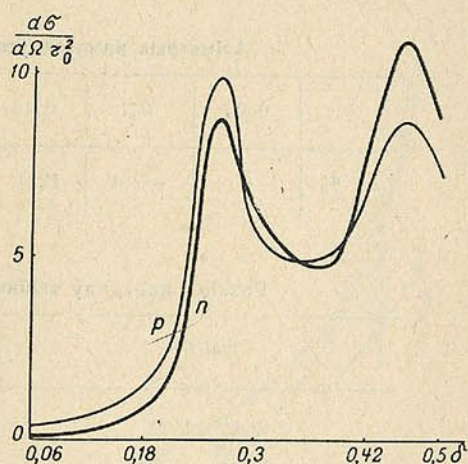


Рис. 4. Дыферэнцыяльныя сячэнні рассеяння на вугал 90° у с. ц. і. (n — на нейтроне, p — на пратоне)

ных сячэнняў $d\sigma_{\gamma n}/d\Omega$ для рассеяння на вуглы 0 і 90° у с. ц. і. Для параўнання на гэтых жа графіках пабудаваны сячэнні пратоннага к.-э. $d\sigma_{\gamma p}/d\Omega$ (па даных Фядзяніна [7]) для тых жа вуглоў.

Атрыманыя даныя дазваляюць зрабіць наступныя вывады.

1. Дыферэнцыяльныя сячэнні камптонаўскага рассеяння як на нейтроне, так і на пратоне маюць два максімуы (гл. рыс. 3 і 4) пры $\delta = 0,26$ і $0,46$ ($k_n \sim 320$ і ~ 660 Мэв адпаведна). Гэтыя значэнні k_n^{maxI} і k_n^{maxII} добра ўзгадняюцца з эксперыментальнымі данымі. Напрыклад, для пратона паводле даных, прыведзеных у [12]: $k_p^{\text{maxI}} \sim 300$ Мэв, $k_p^{\text{maxII}} \sim 700$ Мэв.

2. Рассеянне ў заднюю паўсферу пры вялікіх энергіях пераважае над рассеяннем на пярэднія вуглы. Некаторай характарыстыкай такога рассеяння могуць служыць суадносіны

$$A = \frac{d\sigma(180^\circ) - d\sigma(0^\circ)}{d\sigma(180^\circ)},$$

якія вызначаюць асіметрыю рассеяння (табл. 2).

3. Адносныя вышыні максімуаў у рассеянні залежаць ад вуглоў рассеяння. Пры малых вуглах вышыня другога максімуму намнога меншая за вышыню першага; з ростам вугла адрозненне змяншаецца. Прыкладна пры $\cos \vartheta_1 = 0,2$ адносіны вышынёў роўныя 1. Для вуглоў $\vartheta > \vartheta_1$ другі максімум вышэй за першы, прычым пры $\vartheta = 180^\circ$ адрозненне найбольш значнае.

4. Пры 60—100 Мэв уклад палярызацыйнага рассеяння γ сячэнне па парадку велічыні параўнальны з пауэлаўскім. Пры больш высокіх энергіях ён становіцца пераважаючым. Для ілюстрацыі гэтага факта прывядзем табл. 3, якая паказвае змяненне розніцы парадкаў борнаўскіх d_i^k і інтэгральных D_i^k частак галоўных нейтронных амплітуд $\Phi_i^k(\delta)$ пры павелічэнні энергіі фатона з 60 да 600 Мэв.

Параўнанне з эксперыментам. Па прычыне адсутнасці нейтронных мішеняў параўнанне атрыманых рэзультатаў з эксперыментам можа быць толькі ўскосным.

Табліца 2

Асіметрыя камптонаўскага рассеяння на нейтроне

δ	0,06	0,1	0,14	0,26	0,34	0,38	0,42	0,50
A, %	0	-2,4	12,1	16,7	84,4	99,3	96,0	92,4

Табліца 3

Розніцы парадкаў велічынь нейтронных амплітуд

$\lg(d/D)$	k_n , Мэв	
	60	200
$\lg d_2^0 - \lg D_2^0$	+1	-0,5
$\lg d_5^0 - \lg D_5^0$	0	-0,5
$\lg d_6^0 - \lg D_6^0$	+2	0
$\lg d_1^1 - \lg D_1^1$	+1	-0,5

1. Будзем разглядаць рассеяне γ -квантаў на дэйтроне, лічачы, што яго стан апісваецца хвалевай функцыяй Хюльцэна [13]:

$$\Phi_H(r) = \sqrt{\frac{ab(a+b)}{2\pi(a-b)^2}} \frac{e^{-ar} - e^{-br}}{r},$$

дзе $a = 0,2317 f^{-1}$; $b = 1,506 f^{-1}$. Тады сячэнне пругкага рассеяння γ імпульсным набліжэнні можна прадставіць у выглядзе [15]

$$d\sigma_{\gamma d} = S(q) \frac{1}{2(2D+1)} \sum_{e, e', i, f} |\chi_f(L + KD)\chi_i|^2 d\Omega. \quad (8)$$

Тут $K(L)$ азначае суму залежных (незалежных) ад спіна дэйтрона частак амплітуд нейтроннага і пратоннага к.-э.:

$$K = K_n + K_p, \quad L = L_n + L_p;$$

χ_i і χ_f — спінавыя функцыі дэйтрона да і пасля рассеяння, а $S(q)$ — так званы «каэфіцыент зліпання» (sticking factor) дэйтрона. Яго можна вылічыць двума спосабамі [16, 17]:

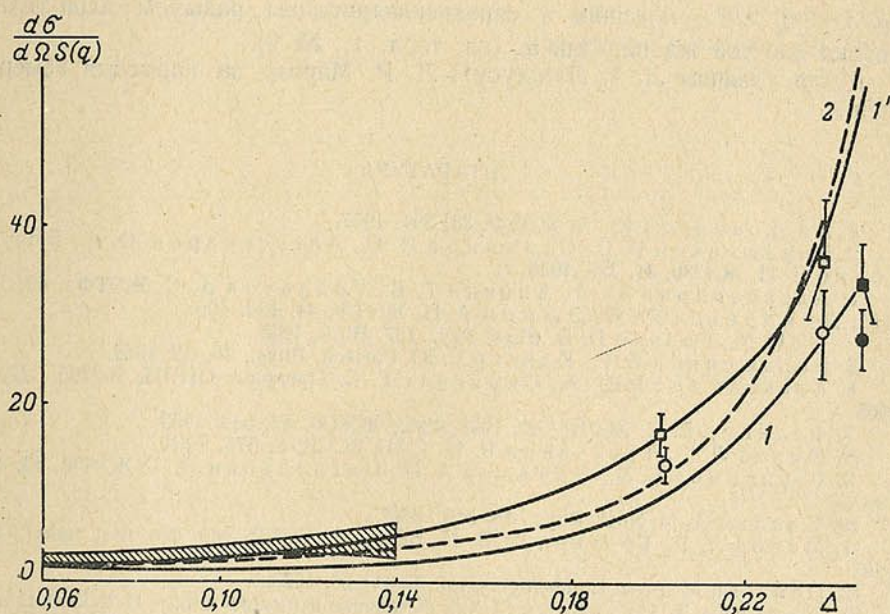
$$1) S^{1/2}(q) \equiv F_H(q) = \int dr e^{1/2 i q r} \Phi_H^2(r)$$

(r — адлегласць паміж нуклонамі, q — пераданы імпульс);

$$2) S \equiv S_{ed}(q) = F_d^2(q) F_p^{-2}(q)$$

(F_d і F_p — формфактары дэйтрона і пратона, вызначаемыя з эксперымен- таў па рассеянню электронаў на дэйтронах і пратонах).

Для лікавага вызначэння сячэнняў дэйтроннага к.-э. выкарыстаем зной- дзеныя раней [7, 8, 11] пратонныя Φ_k^p і нейтронныя Φ_k^n амплітуды і ўлі- чым, што



Рыс. 5. Нармалізаваныя на $S(q)$ тэарэтычныя і эксперыментальныя сячэнні пругкага рассеяння γ -квантаў на дэйтронах (сячэнні ў адзінках 10^{-32} см^2 ,

у с. ц. і. фатон—дэйтрон), $\Delta = \delta\omega (1 + \delta\omega)^{-1/2}$, $q = \sqrt{2} \Delta (1-x)^{1/2}$;
 ● і ■ — эксперыментальны пункт з [26] пры $S = S_H$ і $S = S_{ed}$ (88° , с. ц. і.); ○ і □ — экспе- рыментальны пункт з [27] пры $S = S_H$ і $S = S_{ed}$ (110° , с. ц. і.); заштрыхаваная вобласць — эксперыментальныя даныя з [25] для 90° у л. с. пры $S = S_H$; 1 — разліковая крывая [18] для 90° у с. ц. і.; 1' і 2 — наш разлік для 90° і 110° у с. ц. і.

$$K_{n,p} = \Phi_3^{n,p} [n'n] (e'e) + \Phi_4^{n,p} i [n'n] (e'n) \times \\ \times (en) + \Phi_5^{n,p} i [e'e] + \Phi_6^{n,p} i [[e'n'] [en]], \quad (9)$$

дзе $n(n')$ і $e(e')$ — адзінкавыя вектары імпульсу і палярызацыі падаю- чага (рассеянага) фатона.

Рэзультаты разліку для вуглоў рассеяння, блізкіх да 90° (у с. ц. і. фатон — дэйтрон), прадстаўлены на графіку (рыс. 5), дзе папраўкі да імпульснага набліжэння ўзяты з работы [18]. Якая згода разліковых крывых з наяўнымі эксперыментальнымі данымі гаворыць на карысць правільнасці меркаванняў, якія ляжаць у аснове разліку, і справядліва- сці рэзультатаў, атрыманых для нейтроннага к.-э. Акрамя таго, яна па- цвярджае правільнасць ацэнкі электрычнай палярызуемасці нейтрона $\alpha_n \sim 10$, атрыманай на аснове тых жа нейтронных амплітуд, што і ся- чэнне дэйтроннага к.-э.

2. Магчыма і больш непасрэднае выяўдзенне α_n з эксперыментальных даных. Напрыклад, так: знайсці палярную частку α_{He} з эксперыменту па рассеянню на He, а паводле даных фотарасшчаплення вызначыць «нуклонную» палярную частку α_n ядра гелію, можна затым ацаніць α_n па формуле [19]

$$\alpha_{He} = \alpha_n + 2(\alpha_p + \alpha_n) - \frac{1}{3} r_0 \alpha < r_a^2 >$$

($r_0 \alpha$ і $< r_a^2 >^{1/2}$ — класічны і сярэднеквадратычны радыусы ядра гелію). Ацэнка дае той жа парадак α_n (гл. табл. 1, № 9).

Аўтар удзячны Л. І. Лапідусу і Л. Р. Марозу за карысныя абмеркаванні.

ЛІТАРАТУРА

1. Александров Ю. А. ЖЭТФ, 33, 294, 1957.
2. Барашенков В. С., Стаханов И. П., Александров Ю. А., Бондаренко И. И. ЖЭТФ, 31, 726, 1956.
3. Александров Ю. А., Аникин Г. В., Солдатов А. С. ЖЭТФ, 40, 1878, 1961; Дукаревич Ю. В., Дюмин А. Н. ЖЭТФ, 44, 130, 1963.
4. Walt M., Fossan D. B. Phys. Rev., 137, B629, 1965.
5. Барашенков В. С., Кайзер Г. Ю. Fortsch. Phys., 10, 33, 1962.
6. Александров Ю. А., Самосват Г. С. Препринт ОИЯИ, P-2495, Дубна, 1965.
7. Федянин В. К. ЖЭТФ, 42, 1038, 1962; ЖЭТФ, 44, 633, 1963.
8. Мороз Л. Г., Третьяков В. Н. ДАН БССР, 8, 575, 1964.
9. Герасимов С. Б., Лебедев А. И., Петрунькин В. А. ЖЭТФ, 43, 1872, 1962.
10. Балдин А. М. Nucl. Phys., 18, 310, 1960.
11. Мороз Л. Г., Третьяков В. Н. Весті АН БССР, сер. фіз.-мат. навук, № 2, 1965.
12. Deutsch M. Proc. Cambridge Conf., p. IV, 20, 1963.
13. Хюльтен Л., Сугавара М. Сб. «Строение атомного ядра». ИЛ, 1959, стар. 43.
14. Chew G. F. Phys. Rev., 80, 196, 1950; Carrs R. H. Phys. Rev., 106, 1031, 1957.
15. Третьяков В. Н. Доклад на VI Всесоюзной конференции по теории элементарн. частиц. Ужгород, 1965.
16. Chew G. F. Phys. Rev., 74, 809, 1948.
17. McIntyre J. A., Burlson G. R. Phys. Rev., 112, 2077, 1958.
18. Tenore A., Verganelakis A. Nuovo Cim., 35, 261, 1965.
19. Петрунькин В. А. Nucl. Phys., 55, 197, 1964.
20. Breit G., Rustigi M. L. Phys. Rev., 114, 830, 1959.
21. Thaler R. M. Phys. Rev., 114, 827, 1958.
22. Гольданский В. Н., Карпунин О. А., Куценко А. В., Павловская В. В. ЖЭТФ, 38, 1965, 1960.
23. Петрунькин В. А. Nucl. Phys., 55, 197, 1964.
24. Langsdorf, Lane, Monahan. Phys. Rev., 107, 1077, 1957.
25. Human L., Ely R., Frisch D., Wahlig H. Phys. Rev. Lett., 3, 93, 1959.
26. Fox J., Criegee L., Gerber H.—J., Hanson A. O., Jones R. S. Bull. Am. Phys. Soc., 9, № 1, 69, 1964.
27. Jones R. S., Gerber H.—J., Hanson A. O., Wattenberg A. Phys. Rev., 128, 1357, 1962.

РЕЗЮМЕ

На основе амплитуд нейтронного комптон-эффекта (к.-э.), найденных ранее [8,11] в предположении одномерной унитарности и в рамках резонансной дипольной модели фоторождения, изучаются электрическая и магнитная «динамические» поляризуемости нейтрона $\alpha_n(\delta)$ и $\beta_n(\delta)$, соответствующие общепринятым в «статическом» пределе $\delta = 0$. Сравнение с рассчитанными по амплитудам протонного к.-э. «динамическими» поляризуемостями протона $\alpha_p(\delta)$ и $\beta_p(\delta)$ показывает: $\alpha_n(\delta) > \alpha_p(\delta)$, $\beta_n(\delta) = \beta_p(\delta)$ во всей допороговой области энергий. Найденное значение $\alpha_n(0) = 1,2$, $\alpha_p(0) = (1,15 \pm 0,25) \cdot 10^{-42}$ см³

подтверждает вывод о том, что электрическая поляризуемость нейтрона α_n в действительности много меньше той, которая получается при анализе экспериментов по нейтрон-ядерному рассеянию на малые углы.

С помощью тех же нейтронных амплитуд рассчитываются дифференциальные сечения $d\sigma_{\gamma n}$ нейтронного к.-э. Они сопоставляются (для углов рассеяния 0 и 90° в с. ц. и.) с протонными сечениями $d\sigma_{\gamma p}$. Полученные для поляризуемостей нейтрона и нейтронного к.-э. результаты и выводы косвенно подтверждаются качественным согласием рассчитанных в импульсном приближении (с учетом поправок на обменные силы) дифференциальных сечений $d\sigma_{\gamma d}$ упругого рассеяния на H^2 (для углов 90 и 110° в с. ц. и. фотон — дейтрон) с имеющимися экспериментальными данными.

Поступило в редакцию 1.VII 1966

Т. Г. БЫСТРОВА

ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИЕ ТЕМПЕРАТУРЫ ДЕБАЯ ДЛЯ РОМБИЧЕСКИХ КРИСТАЛЛОВ

В работах Ф. И. Федорова [1—3] предложен метод расчета характеристических температур Дебая на основе сравнения данного кристалла с ближайшей в среднем по упругим свойствам изотропной и поперечно-изотропной средой. В настоящей работе этот метод применяется к расчету температур Дебая для ромбических кристаллов.

Вычисление характеристической температуры Θ сводится к нахождению усредненной по всем направлениям волновой нормали суммы обратных кубов фазовых скоростей упругих волн

$$I = \left\langle \frac{1}{v_0^3} + \frac{1}{v_1^3} + \frac{1}{v_2^3} \right\rangle. \quad (1)$$

Квадраты этих скоростей являются собственными значениями тензора $\Lambda = \frac{1}{\rho} c_{ijkl} n_i n_j n_k n_l$ (ρ — плотность среды, c_{ijkl} — тензор упругих констант, n_i — компоненты единичного вектора волновой нормали), который, согласно [1, 2], может быть представлен в виде $\Lambda = \Lambda^h + \Lambda''$, где тензор

$$\Lambda^h = (g_1 + g_2 n_3^2) + g_3 \mathbf{n} \cdot \mathbf{n} + (g_2 + g_4 n_3^2) \mathbf{e} \cdot \mathbf{e} + g_5 [\mathbf{ne}]^2 \mathbf{e} \cdot \mathbf{e} \quad (2)$$

характеризует поперечно-изотропную среду, ближайшую к данному ромбическому кристаллу. В качестве \mathbf{e} для ромбических кристаллов следует выбирать направление оси симметрии второго порядка. Поскольку рассматриваемое направление является не единственным, то следует выбирать то, для которого относительная разность скоростей поперечных волн является наименьшей, т. е. является наименьшим отношение

$$\frac{|v_1^2 - v_2^2|}{v_1^2 + v_2^2}. \quad (3)$$

Для направлений $\mathbf{n} \parallel x^{(1)}, x^{(2)}, x^{(3)}$ отношение (3) соответственно выражается следующим образом:

$$\frac{|\lambda_{66} - \lambda_{55}|}{\lambda_{66} + \lambda_{55}}, \quad \frac{|\lambda_{66} - \lambda_{44}|}{\lambda_{66} + \lambda_{44}}, \quad \frac{|\lambda_{55} - \lambda_{44}|}{\lambda_{55} + \lambda_{44}}. \quad (4)$$

Будем считать, что для каждого ромбического кристалла минимальное значение (3) соответствует направлению оси $x^{(3)}$. Если оно соответствует оси $x^{(2)}$ или $x^{(1)}$, то всегда можно произвести перестановку индексов в упругих постоянных $2 \rightarrow 3 \rightarrow 1 \rightarrow 2$ (например, $c_{23} = c_{2233} \rightarrow c'_{3311} = c'_{31}$) или $1 \rightarrow 3 \rightarrow 2 \rightarrow 1$ (например, $c_{23} = c_{2233} \rightarrow c'_{1122} = c'_{12}$).

Параметры тензора (2), рассчитанные по формулам, полученным в [1], равны:

$$\left. \begin{aligned} g_1 &= \frac{1}{8} (3m_1 + 2m_2 - 4m_3 - 4m_4), \quad g_2 = \frac{1}{8} (-3m_1 - 2m_2 + 8m_3 + 4m_4), \\ g_3 &= \frac{1}{2} (m_3 + m_4), \quad g_4 = \frac{1}{8} (3m_1 + 2m_2 - 4m_3 - 8m_4 + 8\lambda_{33}), \\ g_5 &= \frac{1}{4} (-m_1 + 2m_3 + 2m_4 - 2\lambda_{12}), \end{aligned} \right\} (5)$$

где

$$m_1 = \lambda_{11} + \lambda_{22}; \quad m_2 = \lambda_{12} + 2\lambda_{66}; \quad m_3 = \lambda_{44} + \lambda_{55}; \quad m_4 = \lambda_{13} + \lambda_{23}. \quad (6)$$

Величина I для ромбического кристалла может быть выражена так:

$$I = I^h + \Delta I_{\text{ромб}}. \quad (7)$$

В первом приближении величина I^h рассчитывается по формуле [2]

$$\begin{aligned} I^h &= I_0 + (r_1 a_0^{-3/2} - r_2 c_0^{-3/2}) (A_0 + 2A_1 - 2A_2) + \\ &+ r_1^2 a_0^{-3/2} (A_3 - 5A_4 + r_1 A_4) + r_2^2 c_0^{-3/2} (A_5 + 5A_2 - r_2 A_6), \end{aligned} \quad (8)$$

где

$$\left. \begin{aligned} I_0 &= \frac{1}{(g_1 + g_5) \sqrt{g_1 + g_2}} + a_0^{-3/2} + c_0^{-3/2}, \\ a_0 &= g_1 + g_2 + \frac{2}{15} g_4, \quad b_0 = g_3 - \frac{1}{3} g_2 + \frac{1}{15} g_4, \quad c_0 = a_0 + b_0, \\ A_0 &= \frac{1}{105} (21f_2^2 + 18f_2 f_4 + 5f_4^2), \quad A_1 = \frac{1}{175} f_4 \left(f_2^2 + \frac{34}{33} f_2 f_4 + \right. \\ &+ \left. \frac{335}{1287} f_4^2 \right), \quad A_2 = \frac{2}{105} \left(f_2^3 + \frac{11}{5} f_2^2 f_4 + \frac{239}{165} f_2 f_4^2 + \frac{43}{143} f_4^3 \right), \\ A_3 &= \frac{1}{70} f_4^2, \quad A_4 = \frac{19}{96525} f_4^3, \quad A_5 = 2 \left(\frac{1}{3} f_2^2 + \frac{2}{7} f_2 f_4 + \frac{1}{15} f_4^2 \right), \\ A_6 &= \left(\frac{2}{3} f_2 \right)^3 + \frac{8}{15} f_4 \left(f_2^2 + \frac{19}{33} f_2 f_4 + \frac{7}{65} f_4^2 \right), \\ f_2 &= g_2/b_0, \quad f_4 = g_4/b_0, \quad r_1 = b_0/a_0, \quad r_2 = b_0/c_0. \end{aligned} \right\} (9)$$

Первое приближение для I^h оказывается достаточным для всех кристаллов ромбической симметрии, так как для них значение величины $\delta = \frac{4}{225} (35f_2^2 + 30f_2 f_4 + 8f_4^2)$, характеризующей относительную ошибку, мало.

Поправку $\Delta I_{\text{ромб}}$ можно определить по формулам, приведенным в [3], заменив в них a на $\frac{1}{b} \Lambda$, т. е.

$$\Delta I_{\text{розб}} = a^{-3/2} \left\langle -\frac{3}{2} r'_1 (\xi_1 + \xi_2) + \frac{15}{8} r_1'^2 (\xi_1^2 + \xi_2^2) - \frac{35}{16} r_1'^3 (\xi_1^3 + \xi_2^3) \right\rangle + \\ + c^{-3/2} \left\langle -\frac{3}{2} r_2 \varepsilon + \frac{15}{8} r_2'^2 \varepsilon^2 - \frac{35}{16} r_2'^3 \varepsilon^3 \right\rangle, \quad (10)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \langle \varepsilon \rangle &= \langle n \Lambda''^2 n - (n \Lambda'' n)^2 - 3n \Lambda''^2 n \cdot n \Lambda'' n + n \Lambda''^3 n + 2(n \Lambda'' n)^3 \rangle, \\ \langle \varepsilon^2 \rangle &= \langle (n \Lambda'' n)^2 + 2n \Lambda''^2 n \cdot n \Lambda'' n - \\ &\quad - 2(n \Lambda'' n)^3 \rangle, \quad \langle \varepsilon^3 \rangle = \langle (n \Lambda'' n)^3 \rangle, \\ \langle \xi_1 + \xi_2 \rangle &= -\langle \varepsilon \rangle, \quad \langle \xi_1^2 + \xi_2^2 \rangle = \langle (\Lambda''^2)_c - 2\varepsilon - \varepsilon^2 \rangle, \\ \langle \xi_1^3 + \xi_2^3 \rangle &= \langle -0,5 (\Lambda''^3)_c + 1,5 (\Lambda''^2)_c \Lambda''_c - 1,5 (\Lambda''^2)_c n \Lambda'' n - \\ &\quad - 3\Lambda''_c n \Lambda''^2 n + 3n \Lambda''^2 n \cdot n \Lambda'' n - (n \Lambda'' n)^3 + 1,5 (\Lambda''_c)^2 n \Lambda'' n \rangle, \end{aligned} \right\} (11)$$

$$\left. \begin{aligned} a &= g_1 + \frac{2}{3} g_2 + \frac{1}{15} g_4 + \frac{1}{3} g_5, \quad b = g_3 + \frac{2}{15} g_4 - \frac{1}{3} g_5, \\ c &= a + b, \quad r'_1 = b/a, \quad r'_2 = b/c. \end{aligned} \right\} (12)$$

В работе [5] изложен метод вычисления усредненных инвариантов типа $\langle n \Lambda''^2 n \rangle$, $\langle (n \Lambda'' n)^2 \rangle$ и т. д. и приведены результаты этого усреднения:

$$\left. \begin{aligned} \langle n \Lambda''^2 n \rangle &= \frac{1}{105} [(M^2)_c + 2R_c], \quad \langle (n \Lambda'' n)^2 \rangle = \\ &= \frac{1}{945} [(M_c)^2 + 8(M^2)_c + 8R_c], \\ \langle (\Lambda''_c)^3 \rangle &= \frac{1}{105} [(\mu_c)^3 + 6\mu_c (\mu^2)_c + 8(\mu^3)_c], \\ \langle \Lambda''_c (\Lambda''^2)_c \rangle &= \frac{1}{105} [\mu_c (\mu^2 + \rho + \rho')_c + 4(\mu(\rho + \rho'))_c + 4\mu_{ab} \lambda''_{abcd} \mu_{cd}], \\ \langle (\Lambda''_c)^2 n \Lambda'' n \rangle &= \frac{1}{945} [(\mu_c)^2 M_c + 8\mu_c (\mu M)_c + 2M_c (\mu^2)_c + \\ &\quad + 16(\mu^2 M)_c + 8\mu_{ab} \lambda'_{abcd} \mu_{cd}], \\ \langle \Lambda''_c n \Lambda''^2 n \rangle &= \frac{1}{945} [\mu_c (M^2)_c + 2(\mu M^2)_c + 2\mu_c R_c + \\ &\quad + 12(\mu R)_c + 4\mu_{ab} \lambda'_{abcd} M_{cd}], \\ \langle (\Lambda''^2)_c n \Lambda'' n \rangle &= \frac{1}{945} [M_c (\mu^2 + \rho + \rho')_c + 8(M(\rho + \rho'))_c + \\ &\quad + 8\mu_{ab} \lambda''_{abcd} M_{cd} + 8(\sigma_3 + \sigma_4 + \sigma_5)], \end{aligned} \right\} (13)$$

$$\left. \begin{aligned}
 \langle n \Lambda'' n \cdot n \Lambda'' n \rangle &= \frac{1}{10395} \{ M_c [(M^2)_c + 2R_c] + 4(M^3)_c + 40(MR)_c + \\
 &+ 8M_{ab} \lambda'_{abcd} M_{cd} + 8(\sigma_1 + 6\sigma_2 + 12\sigma_3 + 4\sigma_4 + 4\sigma_5) \}, \\
 \langle (n \Lambda'' n)^3 \rangle &= \frac{1}{135 \cdot 1001} [(M_c)^3 + 24M_c (M^2)_c + 64(M^3)_c + \\
 &+ 24M_c R_c + 384(MR)_c + 96M_{ab} \lambda'_{abcd} M_{cd} + \\
 &+ 64(\sigma_1 + 6\sigma_2 + 12\sigma_3 + 4\sigma_4 + 4\sigma_5)],
 \end{aligned} \right\} (13)$$

где

$$\left. \begin{aligned}
 \mu &= (\mu_{ab}) = (\lambda''_{accb}), \quad \mu' = (\mu'_{ab}) = (\lambda''_{ccab}), \\
 \rho &= (\rho_{ab}) = (\lambda''_{cdpa} \lambda''_{cpdb}), \quad \rho' = (\rho'_{ab}) = (\lambda''_{cdpa} \lambda''_{cdpb}), \\
 \sigma_1 &= \lambda''_{abcd} \lambda''_{cdpq} \lambda''_{pqab}, \quad \sigma_2 = \lambda''_{abcd} \lambda''_{cdpq} \lambda''_{paqb}, \\
 \sigma_3 &= \lambda''_{abcd} \lambda''_{cpdq} \lambda''_{paqb}, \quad \sigma_4 = \lambda''_{abcd} \lambda''_{bpdq} \lambda''_{paqc}, \\
 \sigma_5 &= \lambda''_{abcd} \lambda''_{bpdq} \lambda''_{pcqa}, \quad \lambda'_{abcd} = \lambda''_{abcd} + 2\lambda''_{acbd}, \\
 M &= 2\mu + \mu', \quad R = 2\rho + \rho'.
 \end{aligned} \right\} (14)$$

Чтобы получить конкретные выражения (14) для ромбических кристаллов, нужно знать $\Lambda'' = \Lambda - \Lambda^h$ и λ''_{ijkl} . Ромбический кристалл характеризуется тензором Λ с компонентами [1]:

$$\left. \begin{aligned}
 \Lambda_{11} &= \lambda_{11} n_1^2 + \lambda_{66} n_2^2 + \lambda_{55} n_3^2, \quad \Lambda_{23} = (\lambda_{23} + \lambda_{44}) n_2 n_3, \\
 \Lambda_{22} &= \lambda_{66} n_1^2 + \lambda_{22} n_2^2 + \lambda_{44} n_3^2, \quad \Lambda_{13} = (\lambda_{13} + \lambda_{55}) n_1 n_3, \\
 \Lambda_{33} &= \lambda_{55} n_1^2 + \lambda_{44} n_2^2 + \lambda_{33} n_3^2, \quad \Lambda_{12} = (\lambda_{12} + \lambda_{66}) n_1 n_2.
 \end{aligned} \right\} (15)$$

Сравнивая его с тензором Λ^h (2), получаем для компонент тензора Λ'' , характеризующего отличие ромбического кристалла от гексагонального, выражения:

$$\left. \begin{aligned}
 \Lambda''_{11} &= (\lambda_{11} - g_3) n_1^2 + (\lambda_{66} - g_5) n_2^2 + (\lambda_{55} - g_2) n_3^2 - g_1, \\
 \Lambda''_{22} &= (\lambda_{66} - g_5) n_1^2 + (\lambda_{22} - g_3) n_2^2 + (\lambda_{44} - g_2) n_3^2 - g_1, \\
 \Lambda''_{33} &= \lambda_{55} n_1^2 + \lambda_{44} n_2^2 + (\lambda_{33} - g_2 - g_3 - g_4) n_3^2 - g_1 - g_2, \\
 \Lambda''_{23} &= (\lambda_{23} + \lambda_{44} - g_3) n_2 n_3, \quad \Lambda''_{13} = (\lambda_{13} + \lambda_{55} - g_3) n_1 n_3, \\
 \Lambda''_{12} &= (\lambda_{12} + \lambda_{66} - g_3 + g_5) n_1 n_2.
 \end{aligned} \right\} (16)$$

Из сравнения (15) и (16) находим:

$$\left. \begin{aligned}
 \lambda''_{11} &= \lambda_{11} - g_1 - g_3, \quad \lambda''_{22} = \lambda_{22} - g_1 - g_3, \quad \lambda''_{33} = 0, \\
 \lambda''_{44} &= \lambda''_{55} = \frac{1}{2} (\lambda_{44} - \lambda_{55}), \quad \lambda''_{23} = -\lambda''_{13} = \frac{1}{2} (\lambda_{23} - \lambda_{13}), \\
 \lambda''_{66} &= \lambda''_{12} = -\frac{1}{2} (\lambda''_{11} + \lambda''_{22}).
 \end{aligned} \right\} (17)$$

Кроме того, для ромбических кристаллов (см. [1], § 19):

$$\mu = (\lambda''_{accb}) = \begin{pmatrix} \mu_{11} & 0 & 0 \\ 0 & -\mu_{11} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mu' = (\lambda''_{acab}) = \begin{pmatrix} \mu'_{11} & 0 & 0 \\ 0 & -\mu'_{11} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (18)$$

$$\mu_c = \mu'_c = (\mu^3)_c = (\mu'^3)_c = (\mu^2\mu')_c = (\mu\mu'^2)_c = 0,$$

$$(\mu^2)_c = 2\mu_{11}^2, \quad (\mu'^2)_c = 2\mu_{11}'^2, \quad (\mu\mu')_c = 2\mu_{11}\mu_{11}'.$$

С учетом (17), (18) получаем:

$$\left. \begin{aligned} \mu_{11} &= \lambda''_{11} + \lambda''_{66} - \lambda''_{44}, & \mu'_{11} &= \lambda''_{11} + \lambda''_{66} + \lambda''_{13}, \\ \rho_c &= \lambda''_{11}^2 + \lambda''_{22}^2 + 6\lambda''_{66}^2 + 4\lambda''_{44}^2 - 8\lambda''_{13}\lambda''_{44}, \\ \rho'_c &= \lambda''_{11}^2 + \lambda''_{22}^2 + 6\lambda''_{66}^2 + 8\lambda''_{44}^2 + 4\lambda''_{13}^2, \end{aligned} \right\} (19)$$

$$(\mu\rho)_c = (\mu\rho')_c = \mu_{11}\Phi_1, \quad (\mu'\rho)_c = (\mu'\rho')_c = \mu'_{11}\Phi_1, \quad (20)$$

$$\left. \begin{aligned} \mu_{ab}\lambda''_{abcd}\mu_{cd} &= \mu_{ab}\lambda''_{acbd}\mu_{cd} = \mu_{11}^2\Phi_2, \\ \mu_{ab}\lambda''_{abcd}\mu'_{cd} &= \mu_{ab}\lambda''_{acbd}\mu'_{cd} = \mu_{11}\mu'_{11}\Phi_2, \\ \mu'_{ab}\lambda''_{abcd}\mu'_{cd} &= \mu'_{ab}\lambda''_{acbd}\mu'_{cd} = \mu_{11}'^2\Phi_2, \\ \sigma_1 &= \Phi_3 - 12\lambda''_{13}\lambda''_{66}, & \sigma_2 &= \Phi_3 - 4\lambda''_{13}\lambda''_{66}(\lambda''_{13} - 2\lambda''_{44}), \\ \sigma_3 &= \Phi_3 - 4\lambda''_{44}\lambda''_{66}(\lambda''_{44} - 2\lambda''_{13}), & \sigma_4 &= \sigma_5 = \Phi_3 - 12\lambda''_{44}\lambda''_{66}, \end{aligned} \right\} (21)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \Phi_1 &= \lambda''_{11}^2 - \lambda''_{22}^2, & \Phi_2 &= 4\lambda''_{66}, \\ \Phi_3 &= \lambda''_{11}^3 + \lambda''_{22}^3 + 4\lambda''_{66}^3. \end{aligned} \right\} (22)$$

Подставляя (18)–(22) в (13), а затем полученные выражения в (10)–(11), получаем для $\Delta I_{\text{ромб}}$ следующее выражение:

$$\begin{aligned} \Delta I_{\text{ромб}} &= \frac{3}{2} (\varphi_1 - 3\psi_1 + \psi_3 + 2\psi_2) (r_1 a^{-3/2} - r_2 c^{-3/2}) + \\ &+ \frac{5}{16} c^{-3/2} [6r_2^2 (\varphi_2 + 2\psi_1 - 2\psi_2) - 7r_2^3 \psi_2] + \\ &+ \frac{15}{16} a^{-3/2} \left[2r_1^2 (\varphi_3 + 4\psi_1 - 2\psi_2 - 2\psi_3) - \right. \\ &\quad \left. - 3,5r_1^3 \left(2\psi_1 - \frac{2}{3}\psi_2 + \psi_4 \right) \right], \end{aligned} \quad (23)$$

где

$$\varphi_1 = \frac{1}{945b^2} (2M_{11}^2 + 5\varphi), \quad \varphi_2 = \frac{1}{945b^2} (16M_{11}^2 + 4\varphi),$$

Таблица 1

Упругие константы ромбических кристаллов

Кристалл	Химическая формула	$\frac{C_{11}-10C_{12}}{Dh/cm^2}$									
		3	4	5	6	7	8	9	10	11	
Арагонит	$CaCO_3$	16,0	8,67	8,45	4,14	2,56	4,27	3,73	0,177	1,57	
Барит	$BaSO_4$	8,8	7,81	10,38	1,17	2,79	2,55	4,77	2,69	2,89	
Бензофенон	$C_6H_6CO \cdot C_6H_5$	10,70	10,00	7,10	2,03	1,55	3,58	5,5	1,69	3,21	
Йодноватая кислота	HJO_3	3,03	5,45	4,36	1,84	2,19	1,74	1,19	1,17	0,55	
Лигний аммоний тартрат	$Li(NH_4)C_4H_4O_6$	3,86	5,39	3,63	1,19	0,67	2,33	1,65	0,87	2,01	
Магний сульфат гептагидрат	$MgSO_4 \cdot 7H_2O$	4,03	3,73	3,52	0,77	1,61	0,83	2,68	2,36	2,42	
Натрий аммоний тартрат	$Na(NH_4)C_4H_4O_6$	3,68	5,09	5,54	1,06	0,303	0,87	2,72	3,08	3,47	
Натрий тартрат	$Na_2C_4H_4O_6 \cdot 2H_2O$	4,61	5,47	6,65	1,24	0,31	0,98	2,86	3,20	3,52	
Резорцин	$C_6H_4(OH)_2$	1,03	1,44	1,29	0,33	0,44	0,40	0,62	0,74	0,69	
Сера	S	2,40	2,05	4,83	0,43	0,87	0,76	1,33	1,71	1,59	
Стронций формат		4,39	3,48	3,74	1,54	1,07	1,72	1,04	-1,49	-0,14	
Топаз	$Al_2(F, OH)_2SiO_4$	28,2	34,9	29,5	10,8	13,3	13,10	12,6	8,5	8,80	
α -Уран	U	21,5	19,9	26,7	12,4	7,3	7,4	4,6	2,2	10,7	
Целестин	$SrSO_4$	10,44	10,61	12,86	1,35	2,79	2,66	7,73	6,05	6,19	
Цинк сульфат гептагидрат	$ZnSO_4 \cdot 7H_2O$	4,00	3,22	5,45	0,50	1,70	1,81	1,32	1,08	1,19	
Сегнетова соль	$NaK(C_4H_4O_6) \cdot 4H_2O$	2,55	3,81	3,71	1,34	0,321	0,979	1,41	1,16	1,46	
		4,25	5,15	6,29	1,25	0,304	0,996	2,96	3,57	3,42	

Таблица 2

Упругие константы ближайших изотропных и поперечно-изотропных сред и температуры Дебая ромбических кристаллов

Кристалл	$\rho, \text{г/см}^3$	$B_1 \cdot 10^{11}, \text{см}^2/\text{сек}^2$	$B_2 \cdot 10^{11}, \text{см}^2/\text{сек}^2$	$B_3 \cdot 10^{11}, \text{см}^2/\text{сек}^2$	$B_4 \cdot 10^{11}, \text{см}^2/\text{сек}^2$	$B_5 \cdot 10^{11}, \text{см}^2/\text{сек}^2$	$B_6 \cdot 10^{11}, \text{см}^2/\text{сек}^2$	$B_7 \cdot 10^{11}, \text{см}^2/\text{сек}^2$	ΔT	$a \cdot 10^{11}, \text{см}^2/\text{сек}^2$	$b \cdot 10^{11}, \text{см}^2/\text{сек}^2$	Δm	e	s	l	№. Ф.
Арагонит	2,95	1,23	0,192	2,32	-1,00	0,222	0,25	1,37	0,26	2,12	0,26	X ⁽²⁾	2	1,55	172	
Барит	4,5	0,384	0,209	1,42	-0,269	0,0906	0,15	0,536	0,16	1,36	0,16	X ⁽¹⁾	2	6,10	217	
Бензофенон	1,0976	6,09	-4,46	3,86	5,44	-3,36	0,084	2,36	0,23	5,71	0,23	X ⁽³⁾	1	0,676	241	
Йодноватая кислота	4,63	0,324	0,0629	0,575	0,153	0,0491	0,12	0,392	0,15	0,579	0,15	X ⁽²⁾	2	9,74	201	
Литий аммоний тартрат	1,71	1,57	-1,02	1,39	1,21	-0,449	0,16	0,816	0,25	1,70	0,25	X ⁽³⁾		3,53		
Магний сульфат гептагидрат	1,636	-0,0191	0,765	2,29	-1,33	0,439	0,078	0,548	0,13	1,96	0,13	X ⁽¹⁾		5,96		
Натрий аммоний тартрат	1,587	0,201	0,407	2,56	-0,366	0,135	0,14	0,493	0,15	2,46	0,15	X ⁽²⁾		6,76		
Натрий тартрат	1,818	0,483	0,128	2,37	-0,0949	-0,0633	0,15	0,541	0,16	2,37	0,16	X ⁽²⁾		5,92		
Резорцин	1,285	0,203	0,124	0,856	-0,505	0,0564	0,043	0,271	0,11	0,770	0,11	X ⁽¹⁾	1	16,0	102	
Сера	2,07	0,414	-0,0205	1,13	-0,342	-0,0870	0,28	0,349	0,30	1,11	0,30	X ⁽¹⁾	1	11,8	246	
Строциий формат	2,25	0,503	0,222	0,924	-0,324	0,352	0,23	0,746	0,23	0,764	0,23	X ⁽²⁾		4,14		
Топаз	3,55	2,25	1,46	6,69	-3,93	0,915	0,055	3,27	0,088	5,86	0,088	X ⁽¹⁾	1	0,382	249	
α -Уран	19,05	0,819	-0,433	0,564	0,612	-0,328	0,14	0,462	0,20	0,755	0,20	X ⁽¹⁾	1	7,83	249	
Целестин	4,0	0,352	0,329	2,40	-0,804	0,163	0,094	0,572	0,11	2,24	0,11	X ⁽¹⁾	2	5,28	235	
Цинк сульфат гептагидрат	1,97	0,428	0,463	1,50	-0,823	0,0977	0,20	0,714	0,22	1,36	0,22	X ⁽¹⁾		4,13		
Сегнетова соль	1,775	0,115	0,539	1,46	-0,507	0,253	0,16	0,524	0,21	1,31	0,21	X ⁽²⁾		6,54		
	1,775	0,385	0,247	2,43	-0,408	-0,0603	0,14	0,503	0,15	2,40	0,15	X ⁽²⁾		6,77		

$$\begin{aligned} \Phi_3 &= \frac{2}{15b^2} [\mu_{11}^2 + (\lambda_{11}''^2 + \lambda_{22}''^2) + 6(\lambda_{44}''^2 + \lambda_{66}''^2) + \\ &+ 2(\lambda_{13}''^2 - 2\lambda_{13}''\lambda_{44}'')] - \frac{2}{945b^2} (10M_{11}^2 + 7\Phi), \\ \Phi &= 6(\lambda_{11}''^2 + \lambda_{22}''^2) + 36\lambda_{66}''^2 + 8\lambda_{13}''^2 + 32(\lambda_{44}''^2 - \lambda_{13}''\lambda_{44}''), \\ \Psi_1 &= \frac{8}{3465b^3} [5\Phi_1 M_{11} + \Phi_2 M_{11}^2 + 9\Phi_3 - 12\lambda_{66}''(\lambda_{13}'' - 2\lambda_{44}'')]^2, \\ \Psi_2 &= \frac{32}{15 \cdot 1001b^3} [4\Phi_1 M_{11} + \Phi_2 M_{11}^2 + 6\Phi_3 - 8\lambda_{66}''(\lambda_{13}'' - 2\lambda_{44}'')]^2, \\ \Psi_3 &= \frac{2}{945b^3} [4M_{11}(2\Phi_2 \mu_{11} + \Phi_1) + 3\mu_{11}(3\Phi_1 - 5\mu_{11}\Phi_2) + \\ &+ 18\Phi_3 - 4\lambda_{66}''(9\lambda_{13}''^2 + 23\lambda_{44}''^2 - 22\lambda_{13}''\lambda_{44}'')], \\ \Psi_4 &= \frac{4}{945b^3} [15\mu_{11}^2 \Phi_2 - 4M_{11}(2\Phi_2 \mu_{11} + \Phi_1) - 6\Phi_3 + \\ &+ 8\lambda_{44}''\lambda_{66}''(7\lambda_{44}'' - 2\lambda_{13}'')]. \end{aligned}$$

В табл. 1 приведены упругие константы ромбических кристаллов [4], а в табл. 2 — упругие константы ближайших изотропных (9, 10 столбцы) и поперечно-изотропных (3—7 столбцы) сред (см. (12), (5)) и вычисленные из них значения I и Θ . В 12 столбце табл. 2 указаны направления $X^{(i)}$, которым для каждого кристалла соответствует единичный вектор e , а в 13 столбце — число структурных узлов s , приходящихся на молекулу. Для тех кристаллов, для которых s неизвестно, приводятся лишь значения I , но не Θ . В 11 и 8 столбцах даются значения средней квадратичной анизотропии $\Delta_m = \sqrt{(\langle \Lambda^2 \rangle)_c - \langle \Lambda_{\text{изотр.}}^2 \rangle)_c / \langle \Lambda^2 \rangle_c}$ и средней поперечной анизотропии $\Delta_t = \sqrt{\langle \Lambda''^2 \rangle_c / \langle \Lambda^2 \rangle_c}$, характеризующих отличие данного кристалла от ближайшей к нему изотропной и поперечно-изотропной сред соответственно.

Автор выражает глубокую благодарность проф. Ф. И. Федорову за руководство и ценные советы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Федоров Ф. И. Теория упругих волн в кристаллах. «Наука», 1965.
2. Федоров Ф. И. Вестн. АН БССР, сер. физ.-мат. наук, № 1, 1966.
3. Федоров Ф. И. ДАН СССР, 164, 804, 1965.
4. Александров К. С., Рыжова Т. В. Кристаллография, 6, 289, 1961.
5. Федоров Ф. И. ДАН БССР, 10, 636, 1966.

Поступило в редакцию 9.VII 1966

И. А. БАКУТО

О ПРОБОЕ ДИЭЛЕКТРИКОВ В ИЗМЕНЯЮЩЕМСЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ПОЛЕ

Ранее [1], исходя из энергетических соображений, было получено уравнение, пригодное для описания явления электрического пробоя диэлектриков:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{j_-}{v_-} \right) = (\alpha - \beta) j_- E + \beta j E + \kappa P, \quad (1)$$

где $\alpha = \frac{\alpha' q}{W}$; $\beta = \frac{\beta' q}{W}$; $\kappa = \frac{\kappa' q}{W}$, при этом $\alpha' = \frac{dQ^-}{dt} / j_- E$; $\beta' = \frac{dQ^+}{dt} / j_+ E$; $\kappa' = \frac{dQ'}{dt} / P$; j_- и j_+ — электронная и ионная составляющие плотности тока j ; v_- — дрейфовая скорость электронов в диэлектрике; E — напряженность электрического поля; P — плотность мощности, поглощаемой от источника неэлектрической энергии; W — энергия ионизации атомов диэлектрика; Q^- , Q^+ и Q' — количества тепла, выделяющегося в единице объема, обусловленные соответственно электронной и ионной составляющими тока и неэлектрической энергией; t — время.

Это уравнение было ранее [2—4] решено для различных условий при постоянной напряженности электрического поля E .

Здесь ставится задача о решении данного уравнения при изменяющейся во времени величине напряженности поля E .

Учитывая, что $dx = v_- dt$, преобразуем уравнение (1) к виду

$$\frac{dj_-}{dx} = \left[(\alpha - \beta) E + \frac{d}{dx} \ln v_- \right] j_- + \beta j E + \kappa P. \quad (2)$$

Это линейное уравнение первого порядка имеет следующее решение в общем виде при условии, что $\frac{dj}{dx} = 0$ (условие непрерывности тока) и на катоде $j_- = j_{k-}$, а на аноде (т. е. при $x = l$) $j_- = j$:

$$j = \left\{ j_{k-} \frac{v_l}{v_0} \exp \left[\int_0^l (\alpha - \beta) E dx \right] + v_l \exp \left[\int_0^l (\alpha - \beta) E dx \right] \times \right. \\ \left. \times \int_0^l \frac{\kappa P}{v_-} \exp \left[- \int_0^x (\alpha - \beta) E dx \right] dx \right\} \left\{ 1 - v_l \exp \left[\int_0^l (\alpha - \beta) E dx \right] \times \right.$$

$$\times \int_0^l \frac{\beta E}{v_-} \exp \left[- \int_0^x (\alpha - \beta) E dx \right] dx \Bigg\}^{-1}, \quad (3)$$

где l — длина межэлектродного промежутка.

Если электронный ток на катоде равен j_0 и обусловлен, например, облучением или другого вида неэлектрической энергией, то из (3) получаем

$$j = \left\{ j_0 \frac{v_l}{v_0} \exp \left[\int_0^l (\alpha - \beta) E dx \right] + v_l \exp \left[\int_0^l (\alpha - \beta) E dx \right] \int_0^l \frac{xP}{v_-} \times \right. \\ \times \exp \left[- \int_0^x (\alpha - \beta) E dx \right] dx \Bigg\} \left\{ 1 - v_l \exp \left[\int_0^l (\alpha - \beta) E dx \right] \times \right. \\ \times \int_0^l \frac{\beta E}{v_-} \exp \left[- \int_0^x (\alpha - \beta) E dx \right] dx \Bigg\}^{-1}. \quad (4)$$

Применяя условие наступления пробоя по Таундсенду $j = \infty$, получим критерий пробоя в следующем виде:

$$1 = v_l \exp \left[\int_0^l (\alpha - \beta) E dx \right] \int_0^l \frac{\beta E}{v_-} \exp \left[- \int_0^x (\alpha - \beta) E dx \right] dx. \quad (5)$$

Если на катоде имеют место электронные γ — процессы, т. е. если $j_k = j_0 + \gamma j$, то имеем:

$$j = \left\{ j_0 \frac{v_l}{v_0} \exp \left[\int_0^l (\alpha - \beta) E dx \right] + v_l \exp \left[\int_0^l (\alpha - \beta) E dx \right] \times \right. \\ \times \int_0^l \frac{xP}{v_-} \exp \left[- \int_0^x (\alpha - \beta) E dx \right] dx \Bigg\} \left\{ 1 - \gamma \frac{v_l}{v_0} \exp \left[\int_0^l (\alpha - \beta) E dx \right] - \right. \\ \left. - v_l \exp \left[\int_0^l (\alpha - \beta) E dx \right] \int_0^l \frac{\beta E}{v_-} \exp \left[- \int_0^x (\alpha - \beta) E dx \right] dx \right\}^{-1}. \quad (6)$$

Отсюда условие пробоя $j = \infty$ дает следующий критерий пробоя:

$$1 = \gamma \frac{v_l}{v_0} \exp \left[\int_0^l (\alpha - \beta) E dx \right] + v_l \exp \left[\int_0^l (\alpha - \beta) E dx \right] \times \\ \times \int_0^l \frac{\beta E}{v_-} \exp \left[- \int_0^x (\alpha - \beta) E dx \right] dx. \quad (7)$$

Полученные соотношения при условии постоянства α , β , v_- , E и $x = 0$ переходят в известные соотношения теории Таундсенда, а при $x \neq 0$ в соотношения, полученные нами [1, 3].

Для решения поставленной задачи используем следующее выражение для дрейфовой скорости электронов в общем виде:

$$v_- = k_- E^n, \quad (8)$$

где k_- — коэффициент пропорциональности.

Если $n = 1$, то (8) переходит в известную формулу, применяемую к разреженным газам, а если $n = 1/2$, то из (8) получается выражение, оправдывающееся для плотных газов, жидкостей и твердых тел во многих случаях.

Пусть $E = E(t)$ есть некоторая возрастающая функция времени, непрерывная и дифференцируемая в точке $t = t_0$. Причем, момент времени t_0 определяет собою момент начала ионизационных процессов в диэлектрике. Воспользовавшись разложением функции в ряд Тейлора получим:

$$E(t) = E(t_0 + t') = E(t_0) + \left(\frac{dE(t)}{dt}\right)_{t_0} \frac{t'}{1!} + \left(\frac{d^2E(t)}{dt^2}\right)_{t_0} \frac{t'^2}{2!} + \dots$$

Ограничиваясь первым приближением, будем иметь:

$$E(t) = E_0 + At', \quad (9)$$

где $E_0 = E(t_0)$ — величина пробивной напряженности поля, а $A = \left(\frac{dE(t)}{dt}\right)_{t_0}$ представляет собою крутизну переднего фронта импульса напряженности поля в момент t_0 начала ионизационных процессов.

Взятое здесь приближение оправдывается малостью времени развития разряда.

Подстановка (9) в (8) и интегрирование при постоянном k_- дает

$$x = \frac{k_-}{(n+1)A} [E_0 + At']^{n+1} + C,$$

где C — произвольная постоянная интегрирования, которую определяем из условия, что при $t' = 0$ $x = 0$:

$$C = -\frac{k_-}{(n+1)A} E_0^{n+1},$$

после чего

$$x = \frac{k_-}{(n+1)A} [E_0 + At']^{n+1} - \frac{k_-}{(n+1)A} E_0^{n+1}.$$

Определяя отсюда величину At' и подставляя в (9), получим

$$E = \left[\frac{(n+1)A}{k_-} x + E_0^{n+1} \right]^{\frac{1}{n+1}}. \quad (10)$$

Следовательно, и (8) примет новый вид

$$v_- = k_- \left[\frac{(n+1)A}{k_-} x + E_0^{n+1} \right]^{\frac{n}{n+1}}. \quad (11)$$

Подстановка (10) и (11) в выражения (4), (5), (6) и (7) при $A/k_- = \eta = \text{const}$ дает:

$$j = j_0 \left\{ \frac{[(n+1)\eta l + E_0^{n+1}]^{\frac{n}{n+1}}}{E_0^n} \Phi_1(l) + [(n+1)\eta l + E_0^{n+1}]^{\frac{n}{n+1}} \Phi_1(l) \times \right. \\ \left. \times \int_0^l \frac{xP}{[(n+1)\eta x + E_0^{n+1}]^{\frac{n}{n+1}}} \Phi_2(x) dx \right\} \left\{ 1 - [(n+1)\eta l + E_0^{n+1}]^{\frac{n}{n+1}} \Phi_1(l) \times \right. \\ \left. \times \int_0^l \beta [(n+1)\eta x + E_0^{n+1}]^{\frac{1-n}{1+n}} \Phi_2(x) dx \right\}^{-1}, \quad (12)$$

$$1 = [(n+1)\eta l + E_0^{n+1}]^{\frac{n}{n+1}} \Phi_1(l) \int_0^l \beta [(n+1)\eta x + E_0^{n+1}]^{\frac{1-n}{1+n}} \Phi_2(x) dx, \quad (13)$$

$$j = \left\{ j_0 \frac{[(n+1)\eta l + E_0^{n+1}]^{\frac{n}{n+1}}}{E_0^n} \Phi_1(l) + [(n+1)\eta l + E_0^{n+1}]^{\frac{n}{n+1}} \Phi_1(l) \times \right. \\ \left. \times \int_0^l \frac{xP}{[(n+1)\eta x + E_0^{n+1}]^{\frac{n}{n+1}}} \Phi_2(x) dx \right\} \times \\ \times \left\{ 1 - \gamma \frac{[(n+1)\eta l + E_0^{n+1}]^{\frac{n}{n+1}}}{E_0^n} \Phi_1(l) - [(n+1)\eta l + E_0^{n+1}]^{\frac{n}{n+1}} \Phi_1(l) \times \right. \\ \left. \times \int_0^l \beta [(n+1)\eta x + E_0^{n+1}]^{\frac{1-n}{1+n}} \Phi_2(x) dx \right\}^{-1}, \quad (14)$$

$$1 = \gamma \frac{[(n+1)\eta l + E_0^{n+1}]^{\frac{n}{n+1}}}{E_0^n} \Phi_1(l) + [(n+1)\eta l + E_0^{n+1}]^{\frac{n}{n+1}} \Phi_1(l) \times \\ \times \int_0^l \beta [(n+1)\eta x + E_0^{n+1}]^{\frac{1-n}{1+n}} \Phi_2(x) dx, \quad (15)$$

где

$$\Phi_1(l) = \exp \left\{ \int_0^l (\alpha - \beta) [(n+1)\eta x + E_0^{n+1}]^{\frac{1}{n+1}} dx \right\}; \\ \Phi_2(x) = \exp \left\{ - \int_0^x (\alpha - \beta) [(n+1)\eta x + E_0^{n+1}]^{\frac{1}{n+1}} dx \right\}.$$

Внимательное изучение выражений (12), (13), (14) и (15) показывает, что как ионизационные токи j , так и величина пробивной напряженности электрического поля E_0 при прочих равных условиях являются функцией от-

ношения крутизны переднего фронта импульса напряженности электрического поля к коэффициенту пропорциональности между скоростью электронов в диэлектрике и функцией от напряженности электрического поля в нем, т. е.:

$$j = \psi(\eta), \quad E_0 = \varphi(\eta). \quad (16)$$

Эта закономерность обладает значительной общностью, так как она соблюдается при любой зависимости α , β и κP от напряженности электрического поля и при любом значении показателя n .

При n равном единице величина k_- будет иметь смысл подвижности электронов в диэлектрической среде, а величина η будет представлять собою отношение скорости возрастания электрического поля к подвижности электронов в диэлектрике.

Для рассмотрения частных случаев в целях упрощения положим $\alpha = \text{const}$, $\beta = 0$ и $\kappa = 0$. После этого выражения (12), (14) и (15) примут вид:

$$j = j_0 \frac{[(n+1)\eta l + E_0^{n+1}]^{\frac{n}{n+1}}}{E_0^n} \exp \left\{ \frac{\alpha}{\eta(n+2)} [(n+1)\eta l + E_0^{n+1}]^{\frac{n+2}{n+1}} - \frac{\alpha}{\eta(n+2)} E_0^{n+2} \right\}, \quad (17)$$

$$j = \left\{ j_0 \frac{[(n+1)\eta l + E_0^{n+1}]^{\frac{n}{n+1}}}{E_0^n} \exp \left\{ \frac{\alpha}{\eta(n+2)} [(n+1)\eta l + E_0^{n+1}]^{\frac{n+2}{n+1}} - \frac{\alpha}{\eta(n+2)} E_0^{n+2} \right\} \right\} \left\{ 1 - \gamma \frac{[(n+1)\eta l + E_0^{n+1}]^{\frac{n}{n+1}}}{E_0^n} \times \right. \\ \left. \times \exp \left\{ \frac{\alpha}{\eta(n+2)} [(n+1)\eta l + E_0^{n+1}]^{\frac{n+2}{n+1}} - \frac{\alpha}{\eta(n+2)} E_0^{n+2} \right\} \right\}^{-1}, \quad (18)$$

$$1 = \gamma \frac{[(n+1)\eta l + E_0^{n+1}]^{\frac{n}{n+1}}}{E_0^n} \exp \left\{ \frac{\alpha}{\eta(n+2)} [(n+1)\eta l + E_0^{n+1}]^{\frac{n+2}{n+1}} - \frac{\alpha}{\eta(n+2)} E_0^{n+2} \right\}. \quad (19)$$

При этом упрощении выражение (13) не будет иметь места. Кроме того, из (17), (18) и (19) видно, что как ионизационные токи, так и величина пробивной напряженности электрического поля при прочих равных условиях являются функциями двух величин α/η и ηl , т. е.:

$$j = \psi \left(\frac{\alpha}{\eta}, \eta l \right), \quad E = \varphi \left(\frac{\alpha}{\eta}, \eta l \right). \quad (20)$$

Следовательно, представляется возможным говорить о подобии физического процесса пробоя диэлектриков в импульсном электрическом поле, а величины α/η и ηl считать критериями подобия для рассматриваемого частного случая.

Рассмотрим несколько конкретных примеров при наиболее широко используемом в литературе значении величины n : $n = 1/2$.

I. Пусть $E = At$ и пусть момент времени t_0 представляет собою начало ионизационных процессов в диэлектрике, тогда

$$E = E_0 + At', \quad (21)$$

где $E_0 = At_0$ — величина, которую естественно считать пробивной напряженностью поля.

Следовательно, для $n = \frac{1}{2}$ выражения (17), (18) и (19) примут вид:

$$j = j_0 \frac{\left[\frac{3}{2} \eta l + E_0^{\frac{3}{2}} \right]^{\frac{1}{3}}}{E_0^{\frac{1}{2}}} \exp \left\{ \frac{2\alpha}{5\eta} \left(\frac{3}{2} \eta l + E_0^{\frac{3}{2}} \right)^{\frac{5}{3}} - \frac{2\alpha}{5\eta} E_0^{\frac{5}{2}} \right\}, \quad (22)$$

$$j = \frac{j_0 \frac{\left[\frac{3}{2} \eta l + E_0^{\frac{3}{2}} \right]^{\frac{1}{3}}}{E_0^{\frac{1}{2}}} \exp \left\{ \frac{2\alpha}{5\eta} \left(\frac{3}{2} \eta l + E_0^{\frac{3}{2}} \right)^{\frac{5}{3}} - \frac{2\alpha}{5\eta} E_0^{\frac{5}{2}} \right\}}{1 - \gamma \frac{\left[\frac{3}{2} \eta l + E_0^{\frac{3}{2}} \right]^{\frac{1}{3}}}{E_0^{\frac{1}{2}}} \exp \left\{ \frac{2\alpha}{5\eta} \left(\frac{3}{2} \eta l + E_0^{\frac{3}{2}} \right)^{\frac{5}{3}} - \frac{2\alpha}{5\eta} E_0^{\frac{5}{2}} \right\}}, \quad (23)$$

$$1 = \gamma \frac{\left[\frac{3}{2} \eta l + E_0^{\frac{3}{2}} \right]^{\frac{1}{3}}}{E_0^{\frac{1}{2}}} \exp \left\{ \frac{2\alpha}{5\eta} \left(\frac{3}{2} \eta l + E_0^{\frac{3}{2}} \right)^{\frac{5}{3}} - \frac{2\alpha}{5\eta} E_0^{\frac{5}{2}} \right\}. \quad (24)$$

II. Пусть $E = E_1 \sin \omega t$ и пусть начало ионизационных процессов определяется моментом времени t_0 , тогда будем иметь:

$$E = E_1 \sin \omega (t_0 + t')$$

или

$$E = E_1 \sin \omega t_0 \cos \omega t' + E_1 \cos \omega t_0 \sin \omega t'.$$

Разложение в ряд функций $\cos \omega t'$ и $\sin \omega t'$ в первом приближении дает:

$$\cos \omega t' \simeq 1, \quad \sin \omega t' \simeq \omega t'.$$

После этого имеем

$$E = E_0 + At',$$

где $E_0 = E_1 \sin \omega t_0$, $A = E_1 \omega \cos \omega t_0$ — крутизна переднего фронта синусоидального импульса напряженности электрического поля в момент начала ионизационных процессов. Причем

$$A = E_1 \omega \sqrt{1 - \sin^2 \omega t_0} = E_1 \omega \sqrt{1 - \frac{E_0^2}{E_1^2}} = \omega \sqrt{E_1^2 - E_0^2}.$$

Подстановка в (17), (18) и (19) при $n = 1/2$ и при $\eta = \omega \sqrt{E_1^2 - E_0^2}/k$ дает:

$$j = j_0 \frac{\left[\frac{3\omega \sqrt{E_1^2 - E_0^2}}{2k_-} l + E_0^{\frac{3}{2}} \right]^{\frac{1}{3}}}{E_0^{\frac{1}{2}}} \exp \left\{ \frac{2\alpha k_-}{5\omega \sqrt{E_1^2 - E_0^2}} \times \right. \\ \left. \times \left[\frac{3\omega \sqrt{E_1^2 - E_0^2}}{2k_-} l + E_0^{\frac{3}{2}} \right]^{\frac{5}{3}} - \frac{2\alpha k_- E_0^{\frac{5}{2}}}{5\omega \sqrt{E_1^2 - E_0^2}} \right\}, \quad (25)$$

$$j = \left\{ j_0 \frac{\left[\frac{3\omega \sqrt{E_1^2 - E_0^2}}{2k_-} l + E_0^{\frac{3}{2}} \right]^{\frac{1}{3}}}{E_0^{\frac{1}{2}}} \exp \left\{ \frac{2\alpha k_-}{5\omega \sqrt{E_1^2 - E_0^2}} \times \right. \right. \\ \left. \left. \times \left[\frac{3\omega \sqrt{E_1^2 - E_0^2}}{2k_-} l + E_0^{\frac{3}{2}} \right]^{\frac{5}{3}} - \frac{2\alpha k_- E_0^{\frac{5}{2}}}{5\omega \sqrt{E_1^2 - E_0^2}} \right\} \right\} \times \\ \times \left\{ 1 - \gamma \frac{\left[\frac{3\omega \sqrt{E_1^2 - E_0^2}}{2k_-} l + E_0^{\frac{3}{2}} \right]^{\frac{1}{3}}}{E_0^{\frac{1}{2}}} \exp \left\{ \frac{2\alpha k_-}{5\omega \sqrt{E_1^2 - E_0^2}} \times \right. \right. \\ \left. \left. \times \left[\frac{3\omega \sqrt{E_1^2 - E_0^2}}{2k_-} l + E_0^{\frac{3}{2}} \right]^{\frac{5}{3}} - \frac{2\alpha k_- E_0^{\frac{5}{2}}}{5\omega \sqrt{E_1^2 - E_0^2}} \right\} \right\}^{-1}, \quad (26)$$

$$1 = \gamma \frac{\left[\frac{3\omega \sqrt{E_1^2 - E_0^2}}{2k_-} l + E_0^{\frac{3}{2}} \right]^{\frac{1}{3}}}{E_0^{\frac{1}{2}}} \times \\ \times \exp \left\{ \frac{2\alpha k_-}{5\omega \sqrt{E_1^2 - E_0^2}} \left[\frac{3\omega \sqrt{E_1^2 - E_0^2}}{2k_-} l + E_0^{\frac{3}{2}} \right]^{\frac{5}{3}} - \frac{2\alpha k_- E_0^{\frac{5}{2}}}{5\omega \sqrt{E_1^2 - E_0^2}} \right\}. \quad (27)$$

Из этих выражений видно, что 'ионизационные токи и величина пробивной напряженности электрического поля зависят, кроме всего прочего, как от амплитудного значения напряженности поля, так и от циклической частоты.

III. Пусть на межэлектродном промежутке будет напряжение конденсатора емкостью C , подключенного параллельно промежутку и заряжаемого через омическое сопротивление R от постоянного источника питания с напряжением U_n . Пусть длина межэлектродного промежутка равна l . Тогда для напряженности электрического поля в промежутке будем иметь

$$E = E_n \left[1 - \exp \left(-\frac{t}{RC} \right) \right].$$

Здесь $E_n = U_n/l$. Далее, пусть начало ионизационных процессов в диэлектрическом промежутке определяется временем t_0 , тогда можно написать

$$E = E_n \left[1 - \exp \left(-\frac{t_0}{RC} \right) \exp \left(-\frac{t'}{RC} \right) \right].$$

Принимая за пробивную напряженность электрического поля величину

$$E_0 = E_n \left[1 - \exp \left(-\frac{t_0}{RC} \right) \right],$$

вышестоящее выражение можно представить в следующем виде:

$$E = E_n \left[1 - \frac{E_n - E_0}{E_n} \exp \left(-\frac{t'}{RC} \right) \right].$$

Далее, производя разложение экспоненты в ряд и ограничиваясь первым приближением, получим: $E = E_0 + \frac{E_n - E_0}{RC} t'$ или $E = E_0 + At'$, где

$A = \frac{E_n - E_0}{RC}$ — крутизна переднего фронта импульса напряженности электрического поля в момент начала ионизационных процессов в диэлектрике. После этого выражения (17), (18) и (19) при $n = 1/2$ и $\eta = (E_n - E_0)/RC$ примут следующий вид:

$$j = j_0 \frac{\left[\frac{3}{2} \frac{E_n - E_0}{RC} l + E_0^{\frac{3}{2}} \right]^{\frac{1}{3}}}{E_0^{\frac{1}{2}}} \exp \left\{ \frac{2\alpha k RC}{5(E_n - E_0)} \times \right. \\ \left. \times \left[\frac{3}{2} \frac{E_n - E_0}{k RC} l + E_0^{\frac{3}{2}} \right]^{\frac{5}{3}} - \frac{2\alpha k RC}{5(E_n - E_0)} E_0^{\frac{5}{2}} \right\}, \quad (28)$$

$$j = \left\{ j_0 \frac{\left[\frac{3}{2} \frac{E_n - E_0}{k RC} l + E_0^{\frac{3}{2}} \right]^{\frac{1}{3}}}{E_0^{\frac{1}{2}}} \exp \left\{ \frac{2\alpha k RC}{5(E_n - E_0)} \times \right. \right. \\ \left. \left. \times \left[\frac{3}{2} \frac{E_n - E_0}{k RC} l + E_0^{\frac{3}{2}} \right]^{\frac{5}{3}} - \frac{2\alpha k RC}{5(E_n - E_0)} E_0^{\frac{5}{2}} \right\} \right\} \times \\ \times \left\{ 1 - \gamma \frac{\left[\frac{3}{2} \frac{E_n - E_0}{k RC} l + E_0^{\frac{3}{2}} \right]^{\frac{1}{3}}}{E_0^{\frac{1}{2}}} \times \right.$$

$$\left. \left. \times \exp \left\{ \frac{2\alpha k RC}{5(E_n - E_0)} \left[\frac{3}{2} \frac{E_n - E_0}{k RC} l + E_0^{\frac{3}{2}} \right]^{\frac{5}{3}} - \frac{2\alpha k RC}{5(E_n - E_0)} E_0^{\frac{5}{2}} \right\} \right\}^{-1}, \quad (29)$$

$$\begin{aligned}
 1 = \gamma & \frac{\left[\frac{3}{2} \frac{E_{\text{н}} - E_0}{k_{\text{RC}}} l + E_0^{\frac{3}{2}} \right]^{\frac{1}{3}}}{E_0^{\frac{1}{2}}} \exp \left\{ \frac{2\alpha k_{\text{RC}}}{5(E_{\text{н}} - E_0)} \times \right. \\
 & \left. \times \left[\frac{3}{2} \frac{E_{\text{н}} - E_0}{k_{\text{RC}}} l + E_0^{\frac{3}{2}} \right]^{\frac{5}{3}} - \frac{2\alpha k_{\text{RC}}}{5(E_{\text{н}} - E_0)} E_0^{\frac{5}{2}} \right\}. \quad (30)
 \end{aligned}$$

Отсюда видно, что при прочих равных условиях как ионизационные токи, так и величина пробивной напряженности электрического поля являются функциями параметров электрической цепи и напряжения источника питания.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бакуто И. А. Весті АН БССР, сер. фіз.-мат. навук, № 1, 1965.
2. Некрашевич И. Г., Бакуто И. А. Изв. вузов СССР. Физика, № 3, 1965.
3. Бакуто И. А. ДАН БССР, т. VII, № 12, 1963.
4. Некрашевич И. Г., Бакуто И. А. Весті АН БССР, сер. фіз.-мат. навук, № 2, 1965.

Поступило в редакцию 25.III 1966

В. П. ГРЫБКОУСКИ

ЗАЛЕЖНАСЦЬ ПАГЛЫНАННЯ І ЛЮМІНЕСЦЭНЦЫІ УЛАСНЫХ ПАЎПРАВАДНІКОУ АД ІНТЭНСІУНАСЦІ ЎЗБУДЖАЛЬНАГА СВЯТЛА

Да з'яўлення магутных крыніц святла паглыннанне паўправаднікоў разлічвалася звычайна без уліку стымуляванага вылучэння [1, 2]. Атрыманне генерацыі на паўправадніковых матэрыялах паказвае, што лік нераўнаважных носьбітаў току ў зоне правадзімасці можа быць дастаткова вялікім, каб выклікаць не толькі памяншэнне каэфіцыента паглынання $k(\omega)$, але і з'яўленне адмоўных значэнняў $k(\omega)$. Стымуляванае і спантаннае вылучэнне, выкліканае аптычнымі пераходамі паміж зонай правадзімасці і акцептарным узроўнем, разгледжана ў [3], а для міжзонных пераходаў без правіл адбору па хвалеваму вектару \mathbf{k} у [4]. Агульны разгляд ефекту насычэння ў паўправадніках і набліжаныя формулы для каэфіцыента паглынання ў выпадку прамых міжзонных пераходаў прыведзены ў [5].

Ніжэй прыводзяцца рэзультаты тэарэтычнага даследавання залежнасці каэфіцыента паглынання і магутнасці люмінесценцыі ад інтэнсіўнасці ўзбуджальнага святла і тэмпературы для мадэлі парабалічных зон і міжзонных пераходаў з выкананнем правіл адбору па \mathbf{k} .

Разгледзім уласны ізатропны паўправаднік, узбуджаемы святлом у вузкім спектральным інтэрвале частот ад ω_{ij} да $\omega_{ij} + \Delta\omega_{ij}$. Шчыльнасць энергіі выпраменьвання роўная $u(\omega)$. Пад дзеяннем знешняга выпраменьвання электроны будуць пераходзіць з валентнай зоны ў зону правадзімасці, дзе іх канцэнтрацыя стане большай, чым пры тэрмадынамічнай раўнавазе. Адначасова адбываецца адваротны працэс спантаннай і вымушанай рэкамбінацыі электронаў і дзірак з вылучэннем квантаў святла. Імавернасці неаптычных пераходаў у многіх паўправадніках зусім малыя і тут не ўлічваюцца.

Паколькі час устанаўлення раўнавагі паміж носьбітамі ў межах адной зоны парадку 10^{-12} сек, а час рэкамбінацыі, як правіла, каля 10^{-9} — 10^{-10} сек [5], то размеркаванне электронаў па ўзроўнях энергіі зоны правадзімасці E_c і валентнай зоны E_v характарызуецца функцыяй Фермі—Дзірака $f_e(E_c)$ і $f_e(E_v)$ і двума квазіўзроўнямі Фермі F_c і F_v адпаведна.

Калі пры аптычных пераходах выконваецца правіла адбору па \mathbf{k} , то лікі індукцыраваных і спантаннага выпраменьвання пераходаў за 1 сек, разлічаныя на адзінкавы цялесны вугал, адзінкавы спектральны інтэрвал і адну палярызацыю вылучаемага святла, роўныя [6]:

$$r_{\text{ind}}^{(\alpha)} = \frac{ne^2 \mu\omega}{8\pi^2 m^2 c} |\mathbf{M}|^2 g(E) N [f_e(E_c) - f_e(E_v)], \quad (1)$$

$$r_{\text{sp}}^{(\alpha)} = \frac{ne^2 \mu\omega}{8\pi^2 m^2 c} |\mathbf{M}|^2 g(E) f_e(E_c) [1 - f_e(E_v)], \quad (2)$$

дзе n — паказчык праламлення; e і m — зарад і маса электрона; c — скорасць святла; N — лік квантаў святла дадзенай моды; μ — магнітная пранікальнасць у сістэме СИ. Пры пераходзе да гаусавай сістэмы адзінак у аптычнай вобласці μ неабходна замяніць на $4\pi/c^2$. Індэкс α указвае на палярызацыю і прымае два значэнні.

Уводзячы прыведзеную масу $m_r = m_v m_c / (m_v + m_c)$, дзе m_c і m_v — эфектыўныя масы электронаў і дзірак, і абмяжоўваючыся дыпольным набліжэннем, матрычны элемент пераходу M і шчыльнасць станаў $g(E)$ можна прадставіць у выглядзе:

$$M = (\psi_c | \mathbf{a}_\alpha \exp(ikr) p | \psi_v) = (\mathbf{a}_\alpha p_{cv}) = im \omega_{cv} \frac{1}{e} (\mathbf{a}_\alpha \mathbf{D}_{cv}), \quad (3)$$

$$g(E) = (2\pi^2)^{-1} (2m_r/h^2)^{3/2} (h\omega - E_g)^{1/2}. \quad (4)$$

Тут \mathbf{a}_α — адзінкавы вектар палярызацыі паглынаемага або вылучаемага святла; E_g — шырыня забароненай зоны; \mathbf{D}_{cv} — матрычны элемент дыпольнага моманту; p — аператар імпульсу; $h = 1,05 \cdot 10^{-27}$ эрг·сек.

Улічваючы, што

$$N \rho^{(\alpha)}(\omega, \Omega) h\omega = u^{(\alpha)}(\omega, \Omega), \quad g(E) = h^{-1} g(\omega), \quad (5)$$

замест (1), (2) атрымаем:

$$r_{\text{ind}} = b^{(\alpha)}(\Omega) g(\omega) u^{(\alpha)}(\omega, \Omega) [f_e(E_c) - f_v(E_v)], \quad (6)$$

$$r_{\text{sp}} = a^{(\alpha)}(\Omega) g(\omega) f_e(E_c) [1 - f_e(E_v)],$$

дзе

$$a^{(\alpha)}(\Omega) = \frac{n e^2 \mu \omega}{8\pi^2 c m^2 h} |M|^2; \quad b^{(\alpha)}(\Omega) = \frac{\pi e^2 \mu c v_g}{n \omega^2 m^2 h^2} |M|^2; \quad (7)$$

$$\rho^{(\alpha)}(\omega, \Omega) = \frac{n^2 \omega^2}{8\pi^3 c^2 v_g}$$

шчыльнасць станаў электрамагнітнага поля ў разліку на адзінкавы цялесны вугал і адну палярызацыю [6]; v_g — групавая скорасць святла.

Улічваючы (3) і пераходзячы ў (7) да гаусавай сістэмы адзінак, атрымаем пры $n=1$ звычайныя выразы для дыферэнцыяльных каэфіцыентаў Эйнштэйна [7]:

$$a_{cv}^{(\alpha)}(\Omega) = \frac{\omega^3}{2\pi h c^3} |\mathbf{a}_\alpha \mathbf{D}_{cv}|^2, \quad b_{cv}^{(\alpha)}(\Omega) = \frac{4\pi^2}{h^2} |\mathbf{a}_\alpha \mathbf{D}_{cv}|^2. \quad (8)$$

Велічыні $a^{(\alpha)}(\Omega)$ і $b^{(\alpha)}(\Omega) u^{(\alpha)}(\omega, \Omega)$ маюць размернасць сек^{-1} і вызначаюць лік квантаў святла зададзенай палярызацыі, вылучаемых (паглынаемых) крышталем у адзінку часу ў разліку на адзінкавы цялесны вугал пры меркаванні, што імавернасці запаўнення зыходнага і канечнага ўзроўняў роўныя адпаведна 1 і 0. Пры гэтым электрон робіць пераход паміж узроўнямі энергіі зоны правадзімасці з хвалевым вектарам \mathbf{k}_c і ўзроўнем энергіі валентнай зоны з такім жа значэннем вектара $\mathbf{k}_v = \mathbf{k}_c$.

Інакш кажучы, калі прадставіць энергетычныя зоны паўправадніка як сукупнасць дыскрэтных узроўняў, то каэфіцыенты $a_{cv}^{(\alpha)}(\Omega)$ і $b_{cv}^{(\alpha)}(\Omega)$ адносяцца да адной пары ўзроўняў двух зон з зададзеным значэннем k , прычым $b_{cv}^{(\alpha)}(\Omega) = b_{vc}^{(\alpha)}(\Omega)$.

Здабытак $g(\omega) d\omega = (2\pi^2)^{-1} h^{-2} (2m_r)^{3/2} (h\omega - E_g)^{1/2} d\omega$ выражаецца ў см^{-3} і роўны ліку пар пераходаў, якія адпавядаюць частаце выпраменьвання ў інтэрвале ад ω да $\omega + d\omega$. Ступень запаўнення ўзроўняў улічваецца функцыяй Фермі—Дзірака.

Для правядзення рада канкрэтных разлікаў зручна выразіць косінусы вуглоў паміж вектарамі \mathbf{a}_α і \mathbf{D}_{cv} праз трыганаметрычныя функцыі вуглоў ϑ і φ , якія вызначаюць напрамак распаўсюджвання святла κ і функцыі вуглоў ϑ_1 і φ_1 , што задаюць арыентацыю \mathbf{D}_{cv} . Калі для любога напрамку вектара κ выбіраць \mathbf{a}_1 у плоскасці *хоу* левай сістэмы прамавугольных каардынат, а \mathbf{a}_2 перпендыкулярнае да κ і \mathbf{a}_1 , то лёгка пераканацца, што

$$\cos(\mathbf{a}_1, \mathbf{D}_{cv}) = \sin \vartheta_1 \sin(\varphi_1 - \varphi),$$

$$\cos(\mathbf{a}_2, \mathbf{D}_{cv}) = -\sin \vartheta_1 \cos \vartheta \cos(\varphi_1 - \varphi) + \cos \vartheta_1 \sin \vartheta. \quad (9)$$

Падстаўляючы (9) у (7) і адкідваючы знакапераменныя члены, якія знікаюць пры інтэграванні па вуглах, атрымаем:

$$a_{cv}^{(1)}(\Omega, \Omega_1) = \frac{3}{8\pi} A_{cv} \sin^2 \vartheta_1 \sin^2(\varphi_1 - \varphi),$$

$$b_{cv}^{(1)}(\Omega, \Omega_1) = 3B_{cv} \sin^2 \vartheta_1 \sin^2(\varphi_1 - \varphi), \quad (10)$$

$$a_{cv}^{(2)}(\Omega, \Omega_1) = \frac{3}{8\pi} A_{cv} [\sin^2 \vartheta_1 \cos^2 \vartheta \cos(\varphi_1 - \varphi) + \cos^2 \vartheta_1 \sin^2 \vartheta],$$

$$b_{cv}^{(2)}(\Omega, \Omega_1) = 3B_{cv} [\sin^2 \vartheta_1 \cos^2 \vartheta \cos^2(\varphi_1 - \varphi) + \cos^2 \vartheta_1 \sin^2 \vartheta],$$

дзе

$$A_{cv} = \frac{n\mu\omega^3}{3\pi ch} |\mathbf{D}_{cv}|^2; \quad B_{cv} = \frac{\pi c v_g \mu}{3nh^2} |\mathbf{D}_{cv}|^2 \quad (11)$$

інтэгральныя каэфіцыенты Эйнштэйна.

Пры стацыянарным рэжыме абпраменьвання лікі паглынутых і вылучаных квантаў святла за адзін і той жа прамежак часу роўныя паміж сабой. Улічваючы, што скорасць паглынання вызначаецца велічынёй $r_{\text{ind}}^{(\alpha)}$, узятай з адваротным знакам, прыходзім да наступнага скораснага ўраўнення:

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha=1}^2 \int_{\omega} d\omega \int_{\Omega} d\Omega \int_{\Omega_1} b^{(\alpha)}(\Omega, \Omega_1) g(\omega, \Omega_1) u^{(\alpha)}(\omega, \Omega) [f_e(E_v) - f_e(E_c)] d\Omega_1 = \\ = \sum_{\alpha=1}^2 \int_{\omega} d\omega \int_{\Omega} d\Omega \int_{\Omega_1} a^{(\alpha)}(\Omega, \Omega_1) g(\omega, \Omega_1) f_e(E_c) [1 - f_e(E_v)] d\Omega_1. \end{aligned} \quad (12)$$

Ураўненне (12) справядлівае як для ізатропных, так і для неізатропных крышталяў. У агульным выпадку $g(\omega, \Omega_1) = g(\omega) f(\Omega_1)$, дзе нарміраваная функцыя вуглоў $\int f(\Omega_1) d\Omega_1 = 1$.

У ізатропных крышталі $g(\omega, \Omega_1) = g(\omega)/4\pi$ і не залежыць ад Ω_1 . Падстаноўка (10) у (12) і інтэграванне левай часткі роўнасці па вуглах Ω_1 , а правай па вуглах Ω_1, Ω і падсумоўванне па дзвюх палярызацыях дае

$$\sum_{\alpha=1}^2 \int_{\omega} B_{cv} [f_e(E_v) - f_e(E_c)] g(\omega) d\omega \int_{\Omega} u^{(\alpha)}(\omega, \Omega) d\Omega =$$

$$= \int_{\omega} A_{cv} f_e(E_c) [1 - f_e(E_v)] g(\omega) d\omega. \quad (12a)$$

Пры тэрмадынамічнай раўнавазе шчыльнасць выпраменьвання выражаецца функцыяй Планка і не залежыць ад Ω , а ўраўненне (12a) ператвараецца ў тоеснасць з $F_c = F_v$.

Калі ўзбуджальнае святло распаўсюджваецца ўздоўж восі x , а электрычны вектар хвалі накіраван па восі z , то $u^{(1)}(\omega, \Omega) = 0$, $u^{(1)}(\omega, \Omega) = u(\omega_{ij}) \delta(\vartheta - \pi/2) \delta(\varphi)$ і замест (12a) будзем мець

$$u(\omega_{ij}) [f_e(E_{vj}) - f_e(E_{ci})] \Delta\omega_{ij} = \\ = \frac{n^2 h}{\pi^2 c^2 v_g (h\omega_{ij} - E_g)^{1/2}} \int_{\omega} \omega^3 (h\omega - E_g)^{1/2} f_e(E_c) [1 - f_e(E_v)] d\omega. \quad (13)$$

Тут індэксамі i, j адзначаны велічыні, якія адпавядаюць частаце ўзбуджальнага святла i , акрамя таго, дапушчана меркаванне, што $|\mathbf{D}_{cv}|^2 = |\mathbf{D}_{ij}|^2$. Калі $f_e(E_c)$ адрозніваецца ад нуля ў параўнальна невялікім інтэрвале энергій, а ω_{ij} ляжыць паблізу $\omega_0 = E_g/h$, то гэта меркаванне, нават калі яно і не выконваецца ў агульным выпадку, не зробіць істотнага ўплыву на рэзультаты разлікаў.

Ураўненне (13) звязвае шчыльнасць узбуджальнай радыяцыі са ступенню ўзбуджэння (насычэння) крышталю, якая характарызуецца квазіўзроўнямі Фермі для носбітаў у зоне правадзімасці F_c і для носбітаў у валентнай зоне F_v . Паколькі ва ўласным паўправадніку агульны лік электронаў у зоне правадзімасці роўны ліку дзірак у валентнай зоне, то адсюль вынікае ўраўненне [8]

$$F_{1/2}(\zeta_c) - \left(\frac{m_v}{m_c}\right)^{3/2} F_{1/2}(\zeta_v) = 0, \quad (14)$$

дзе

$$F_n(\zeta) = \int_0^{\infty} \frac{x^n dx}{e^{(x-\zeta)} + 1}$$

інтэгралы Фермі—Дзірака;

$$x_c = (E_c - E_{c0})/kT; \quad \zeta_c = F'_c/kT; \quad F'_c = F_c - E_{c0};$$

$$x_v = (E_{v0} - E_v)/kT; \quad \zeta_v = F'_v/kT; \quad F'_v = E_{v0} - F_v;$$

E_{c0}, E_{v0} — энергія дна зоны правадзімасці і вяршыні валентнай зоны адпаведна.

Велічыні E_c і E_v , якія ўваходзяць у падынтэгральны выраз (13), не з'яўляюцца незалежнымі пераменнымі. Яны звязаны паміж сабой законамі захавання энергіі і імпульса і адназначна вызначаюцца частатой вылучаемага святла

$$E_c = E_{c0} + \left(\frac{m_r}{m_c}\right)(h\omega - E_g), \quad E_v = E_{v0} - \left(\frac{m_r}{m_v}\right)(h\omega - E_g). \quad (15)$$

Уводзячы новую пераменную інтэгрыравання $x = (h\omega - E_g)/kT$, замест (13) атрымаем

$$u(\omega_{ij}) \Delta\omega_{ij} [f_e(E_{vj}) - f_e(E_{ci})] = \frac{n^2 E_g^3}{\pi^2 c^2 h^3 v_g (h\omega_{ij} - E_g)^{1/2}} \times$$

$$\times \int_0^{\infty} \frac{(kT)^{3/2} (1 + kTx/E_g)^3 x^{1/2} dx}{\left[\exp\left(\frac{m_r}{m_c} x - \zeta_c\right) + 1 \right] \left[\exp\left(\frac{m_r}{m_v} x - \zeta_v\right) + 1 \right]} \quad (16)$$

Ураўненні (14) і (16) даюць магчымасць пры зададзенай частаце і шчыльнасці ўзбуджальнай радыяцыі вызначыць квазіўзроўні Фермі, а значыць, і вылічыць усярэднены па вуглах каэфіцыент паглынання $k(\omega)$ і сумарную па вуглах і палярных магнутнасць спантаннага вылучэння ва ўмовах насычэння па формулах [6]:

$$k(\omega) = \frac{1}{v_g} B_{cv} g(\omega) h \omega [f_e(E_v) - f_e(E_c)] = \\ = \alpha(\omega) (h \omega - E_g)^{1/2} [f_e(E_v) - f_e(E_c)], \quad (17)$$

$$W_{\text{люм}}(\omega) = A_{cv} g(\omega) h \omega f_e(E_c) [1 - f_e(E_v)] = \\ = \beta(\omega) (h \omega - E_g)^{1/2} f_e(E_c) [1 - f_e(E_v)], \quad (18)$$

дзе

$$\alpha(\omega) = \frac{1}{2\pi^2 v_g} \left(\frac{2m_r}{h^2}\right)^{3/2} B_{cv} h^2 \omega = \frac{c \mu \omega}{6\pi n} \left(\frac{2m_r}{h^2}\right)^{3/2} |D_{cv}|^2 = \\ = \frac{c \mu e^2}{2\pi n m^2 \omega} \left(\frac{2m_r}{h^2}\right)^{3/2} |\mathbf{M}|^2; \\ \beta(\omega) = \frac{h^2 \omega}{2\pi^2} \left(\frac{2m_r}{h^2}\right)^{3/2} A_{cv} = \frac{n \mu h \omega^4}{6\pi^3} \left(\frac{2m_r}{h^2}\right)^{3/2} |D_{cv}|^2 = \\ = \frac{n \mu e^2 h \omega^2}{2\pi^3 m^2 c} \left(\frac{2m_r}{h^2}\right)^{3/2} |\mathbf{M}|^2.$$

Разгледзім два прыватных выпадкі.

а) $kT \rightarrow 0$.

У гэтым выпадку немагчыма прымяніць набліжаныя формулы для каэфіцыента паглынання, атрыманых ў рабоце [5]. У той жа час можна атрымаць аналітычныя рашэнні ўраўненняў (14) і (16).

Улічваючы, што назоўнік у падынтэгральных выразах (14) роўны адзінцы пры $x < \zeta$ і ∞ , калі $x > \zeta$, знаходзім

$$m_v \zeta_v = m_c \zeta_c.$$

Такім чынам, назоўнік у (16) можна пакласці роўным адзінцы і абмежаваць верхнюю мяжу інтэгравання да $x = \zeta_c m_c / m_r = \zeta_v m_v / m_r$.

Тады інтэграл у правай частцы (16) I будзе роўны

$$I = \frac{2}{3} \left(\frac{m_c}{m_r}\right)^{3/2} (F_c - E_{cv})^{3/2} \left[1 + \frac{9}{5} \left(\frac{m_c}{m_r}\right) \xi + \right. \\ \left. + \frac{9}{7} \left(\frac{m_c}{m_r}\right)^2 \xi^2 + \frac{1}{3} \left(\frac{m_c}{m_r}\right)^3 \xi^3 \right],$$

дзе $\xi = (F_c - F_{c0})/E_g$. Паколькі $m_c/m_r \sim 1$, а $\xi \ll 1$, то абмяжоўваючыся першым складаемым у I і ўводзячы паток энергіі выпраменьвання $S = u(\omega_{ij}) \Delta\omega_{ij} v_g$, з (16) знаходзім

$$(F_c')^{3/2} = \frac{3\pi^2}{2} \frac{h^3 c^2 (h\omega_{ij} - E_g)^{1/2}}{n^2 E_g^3 (1 + m_c/m_v)} S. \quad (19)$$

Згодна з (19), ступень узбуджэння крышталю не залежыць ад часу рэкамбінацыі электронаў і дзірак, які адваротна прапарцыянальны матрычнаму элементу пераходу $|M|^2$. Гэты вывад справядлівы не толькі для $T \rightarrow 0$, але і для іншых тэмператур, паколькі ў зыходным скорасным ураўненні (12) велічыня $|M|^2$ змяшчаецца як у правай, так і ў левай частках. Час рэкамбінацыі аднолькава ўплывае на скорасці пераходаў электронаў у абодвух напрамках, а ступень узбуджэння вызначаецца толькі суадносінамі гэтых скорасцей, а не іх абсалютным значэннем. У той жа час становіцца квазіўроўню Фермі пры $S = \text{const}$ істотна залежыць ад шырыні забароненай зоны. Чым большае E_g , тым больш магутныя патокі радыяцыі патрабуюцца для атрымання прыкметнага насычэння. Аналагічныя рэзультаты атрымліваюцца і для іншых квантава-механічных сістэм [9].

Неабходна звярнуць увагу на тое, што выраз (19) справядлівы толькі для частот узбуджальнага святла, для якіх $k(\omega_{ij}) > 0$ пры зададзеным S . У адваротным выпадку $f_e(E_{vj}) < f_e(E_{ci})$ і ўраўненне (16) не мае рашэння. З умоў $k(\omega_{ij}) > 0$ выцякае няроўнасць

$$h\omega_{ij} > E_g + \frac{m_c}{m_r} F_c',$$

якая і вызначае межы прымяняльнасці формулы (19).

Калі ўзбуджэнне рабіць мінімальна магчымай частатой, то $h\omega_{ij} - E_g = F_c' m_c/m_r$, а

$$F_c' = \frac{3\pi^2 c^2 h^3}{2n^2 (1 + m_c/m_v)^{1/2}} S. \quad (19a)$$

Залежнасць каэфіцыента паглынання ад частаты пры $T = 0$ вызначаецца множнікам $(h\omega - E_g)^{1/2}$ у формуле (17), прычым у пачатку $k(\omega)$ мае адмоўнае значэнне, а затым у пункце

$$h\omega^* = E_g + F_c' + F_v' = E_g + \left(1 + \frac{m_c}{m_v}\right) F_c'$$

змяняе знак і манатонна павялічваецца з ростам S . Велічыня ω^* адначасна вызначаецца інтэнсіўнасцю ўзбуджальнага святла (гл. (19a)).

Разгледзім зараз залежнасць ліку электронаў у зоне правадзімасці n_c ад шчыльнасці патоку знешняй радыяцыі. У агульным выпадку

$$n_c = \int_{E_{c0}}^{\infty} g_c(E) f_e(E_c) dE_c = \frac{1}{2\pi^2} \left(\frac{2kTm_c}{h^2}\right)^{3/2} F_{1/2}(\zeta_c), \quad (20)$$

дзе

$$g_c(E_c) = \frac{1}{2\pi^2} \left(\frac{2m_c}{h^2}\right)^{3/2} (E_c - E_{c0})^{1/2} \quad (21)$$

шчыльнасць станаў у зоне правадзімасці, а для $T = 0$

$$n_c = \frac{1}{3\pi^2} \left(\frac{2m_c}{h^2}\right)^{3/2} (F_c')^{3/2}. \quad (20a)$$

Падстаўляючы ў (19а) і (20а) значэнні параметраў для GaAs: $m_c = 0,072m$, $m_v = 0,5m$ [4], $E_g = 1,52$ эв, $n = 3,3$, атрымаем:

$$F'_c (\text{мэв}) = 0,58 \cdot 10^{-3} S (\text{вт/см}^2), \quad (19б)$$

$$n_c = 4,17 \cdot 10^{15} (F'_c)^{3/2} \text{ см}^{-3}, \quad (20а)$$

дзе F'_c выражана ў міліэлектронвольтах, S у вт/см^2 , а n_c разлічана на 1 см^3 .

Калі ў якасці крыніцы ўзбуджэння выкарыстаць аптычны квантавы генератар, які вылучае 1 дж за $\Delta t = 500$ мсек, то пры сячэнні праменя ў 1 см^2 $S = 2 \cdot 10^3 \text{ вт/см}^2$, і, згодна з (19б), (20а),

$$F'_c = 1,15 \text{ мэв}, \quad n_c = 5,25 \cdot 10^{15} \text{ см}^{-3}.$$

З дапамогай факусіроўкі праменя велічыню F'_c лёгка павысіць на 2—3 парадкі і больш. Другі шлях павелічэння F'_c — гэта памяншэнне часу ўзбуджэння Δt пры нязменнай энергіі імпульса. Аднак трэба мець на ўвазе, што пры Δt , меншым або роўным часу рэкамбінацыі электронаў і дзірак, формулы (19) непряманыя, паколькі яны атрыманы для стацыянарнага рэжыму.

Напэўна, лік электронаў у зоне правадзімасці не можа быць большым за лік упаўшых квантаў святла, які роўны $N_{\Phi} = \Delta E_{\text{вып}}/h\omega$. У прыведзеным прыкладзе $N_{\Phi} \approx 4 \cdot 10^{18}$ і, значыць, за час Δt у крышталі адбылася шматразовая генерацыя і рэкамбінацыя электронаў і дзірак.

б) $T \neq 0$.

Калі $T \neq 0$, ураўненні (14) і (16) не маюць аналітычных рашэнняў. Таму неабходна або шукаць набліжаныя формулы, або праводзіць лікавыя разлікі. Аднак некаторыя якасныя заканамернасці можна ўстанавіць і з аналізу саміх ураўненняў.

Як лёгка бачыць з (17), каэфіцыент паглынання прымае адмоўнае значэнне ў наступным інтэрвале частот:

$$E_g < h\omega < E_g + F'_c + F'_v.$$

Пры $T = 0$ сума $F'_c + F'_v$ заўсёды большая за нуль, калі лік носбітаў току ў зонах не роўны нулю і, значыць, існуюць частоты, для якіх $k(\omega) < 0$. Калі ж $T \neq 0$, то $F'_c + F'_v$, як будзе паказана ніжэй, можа быць як дадатным, так і адмоўным. У апошнім выпадку значэнне $k(\omega) < 0$ узнікае толькі пры дасягненні пэўнай ступені ўзбуджэння паўправадніка. Тэмпературная залежнасьць квазіўзроўню Фермі $F'_c(T)$ апісваецца ўраўненнем

$$F_{1/2} [\zeta_c(T_1)] - \left(\frac{T_2}{T_1} \right)^{3/2} F_{1/2} [\zeta_c(T_2)] = 0 \quad (22)$$

або

$$F_{1/2} [\zeta_c(T)] = \frac{2}{3} (kT)^{-3/2} [F'_c(0)]^{3/2}, \quad (22а)$$

якое атрымліваецца з ўмовы, што лікі электронаў у зоне правадзімасці пры пачатковай і канечнай тэмпературах роўныя $n_c(T_1) = n_c(T_2)$. Паколькі інтэграл Фермі—Дзірака $F_{1/2}(\zeta)$ манатонна ўзрастае ад 0,018 да 24,19 з павелічэннем ζ ад -4 да 10 [10], то з (22) вынікае, што павышэнне тэмпературы прыводзіць да змяншэння F'_c . Аналагічнае сцвярдженне справядлівае і ў адносінах да F'_v .

Такім чынам, інтэрвал частот з $k(\omega) < 0$ мае максімальнае значэнне пры $T = 0$ і звужаецца да нуля з ростам тэмпературы.

З дапамогай табліц для $F_n(\zeta)$ і інтэрпаляцыйных формул, прыведзеных у [10], нескладана атрымаць рашэнне ўраўнення (14). На рыс. 1 прыве-

дзены крывыя, якія вызначаюць залежнасць ζ_v ад ζ_c пры дзесяці значэннях m_v/m_c ад 1 да 10. Для $m_c = m_v$ атрымліваецца прамая лінія $\zeta_v = \zeta_c$. Чым большыя адносіны m_v/m_c , тым далей у вобласць адмоўных значэнняў заходзіць ζ_v . Калі $m_v/m_c = 7$, што адпавядае разгледжанаму вышэй лікаваму прыкладу, то адмоўны каэфіцыент паглынання ўзнікае толькі тады, калі $\zeta_c > 1,8$ або $F_c = 45,5$ мэв пры $T = 300^\circ \text{К}$. Для меншых ζ_c велічыня $F_c + F_v$ адмоўная, а $k(\omega) > 0$.

Крывыя рис. 1 даюць магчымасць даследаваць рашэнні ўраўнення (22), іх можна прымяняць у многіх іншых выпадках,

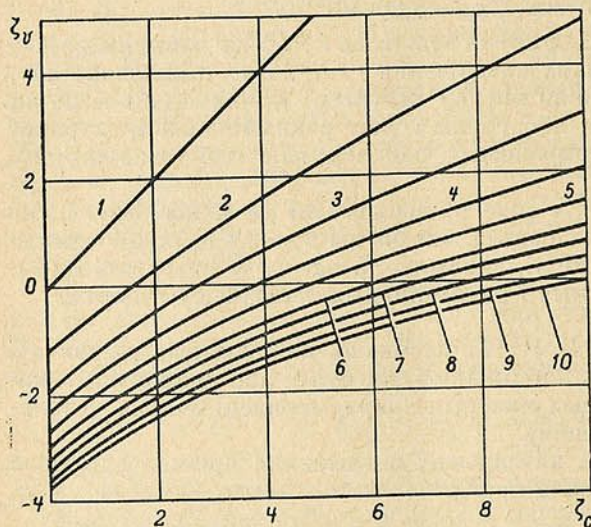


Рис. 1. Намаграмы-рашэнні ўраўнення (14). Каля крывых прыведзены велічыні адносін m_v/m_c

мае больш шырокія межы прымянення, чым выкарыстаная тут мадэль рэчыва. Падстаўляючы значэнні ζ_c і ζ_v , якія задавальняюць ураўненню (14), у (16), лёгка разлічыць значэнне патоку радыяцыі $S = u(\omega_{ij}) \times \Delta\omega_{ij} v_g$. Выкарыстоўваючы далей тыя ж значэнні ζ_c і ζ_v у формуле (17), знаходзім залежнасць каэфіцыента паглынання ад інтэнсіўнасці ўзбуджальнага святла. Праілюструем гэту залежнасць на прыватным прыкладзе. Няхай паўправаднік знаходзіцца пры тэмпературы 80°К , а энергія квантаў святла $h\omega_{ij} = 1,62$ эв, што адпавядае стоксавай кампаненце вымушанага камбінацыйнага рассеяння R_1 — лініі рубіна ў нітрабензоле [11]. Дапускаем, што параметры рэчыва такія ж, як і ў выпадку $T = 0$. На рис. 2 прыведзены крывыя $k(\omega)/\alpha(\omega)$, атрыманыя для розных значэнняў S . Першая крывая, пабудаваная для $S = 0$, характарызуе каэфіцыент паглынання пры адсутнасці электронаў у зоне правадзімасці. Знешняе ўзбуджэнне спачатку дэфармуе форму краю паласы паглынання, а затым з ростам S прыводзіць да ўзнікнення адмоўных значэнняў $k(\omega)$. У прэдзе, калі $S \rightarrow \infty$, пункт перасячэння крывой $k(\omega)/\alpha(\omega)$ з восяю абсцыс ω^* набліжаецца да $\omega = \omega_{ij}$. Для $\omega > \omega_{ij}$ каэфіцыент паглынання большы за нуль пры любых значэннях шчыльнасці патоку ўзбуджальнага святла. Гэты вывад вынікае з аналізу ўраўнення (16), якое пры $f_e(E_{vj}) < f_e(E_{ci})$, а значыць, $k(\omega_{ij}) < 0$ не мае рашэння. З павелічэннем S пункт перасячэння ω^* перамяшчаецца ўправа па восі абсцыс толькі да той пары, пакуль $k(\omega)$ застаецца дадатнай велічыняй, а знешняе ўзбуджэнне павялічвае канцэнтрацыю электронаў у зоне правадзімасці. Прыведзеныя каля крывых лікавыя значэнні шчыльнасці патоку S у кілаватах на квадратны сантыметр адпавядаюць велічыням, якія дасягаюцца на доследзе з дапамогай існуючых крыніц святла¹.

¹ Гэта значыць, што тонкія пласцінкі з паўправадніковых матэрыялаў могуць быць выкарыстаны ў якасці прасвятляючыхся (пасіўных) затвораў у квантавых генераторах святла з імпульснай дабротнасцю.

Тэмпературную залежнасьць формы паласы паглынання і люмінесценцы можна прасачыць на рыс. 3. Крывыя рыс. 3, а пабудаваны для пастаяннага значэння сумы квазіўзроўняў Фермі $F'_c + F'_v = 8$ мэв, што забяспечвае перасячэнне крывых $k(\omega)$ з воссю абсцыс у адным пункце, незалежна ад тэмпературы. Пры гэтым значэнне F'_c змяняецца ад 8,9 мэв пры $T = 20^\circ \text{К}$ да 54 мэв для $T = 300^\circ \text{К}$. Характэрна, што з павышэннем тэмпературы частата ω_m , якая адпавядае найбольшаму адмоўнаму значэнню $k(\omega)$, змяняецца. Калі $T \rightarrow 0$, $h\omega_m = E_g + F'_c + F'_v$, калі ж $kT \gg F'_c + F'_v$, то, як паказана ў [5] і відаць з рыс. 2,

$$h\omega_m = E_g + \frac{1}{3}(F'_c + F'_v). \text{ Такім}$$

чынам, найбольшы адмоўны каэфіцыент паглынання размешчан у інтэрвале частот

$$(T \rightarrow \infty) E_g + \frac{1}{3}(F'_c + F'_v) \leq h\omega_m \leq E_g + (F'_c + F'_v) (T \rightarrow 0). \quad (23)$$

На рыс. 3, б пабудаваны графікі $k(\omega)$ і $W_{\text{люм}}(\omega)$ пры ўмове, што лік электронаў у зоне правадзімасці пастаянны, $n_c = 0,89 \times 10^{17} \text{ см}^{-3}$. Як відаць з рысунка, з павышэннем тэмпературы вобласць адмоўных значэнняў $k(\omega)$ звужаецца, а пры $T = 200$ і 300°К $k(\omega)$ дадатнае для ўсіх частот. Частата ω_m перамяшчаецца ўлева хутчэй, чым пункт перасячэння $k(\omega)$ з воссю абсцыс у адпаведнасці з умовай (23).

Мінімальнае значэнне n_c , якое забяспечвае з'яўленне адмоўнага каэфіцыента паглынання пры хатняй тэмпературы, можна вызначыць з умовы $F'_c + F'_v = 0$.

З дапамогай рыс. 1 знаходзім, што для $m_v/m_c = 7$ гэта ўмова выконваецца, калі $\zeta_c = 1,8$, $F'_c = 45,5$ мэв. Падстаноўка атрыманых значэнняў у (20) дае $n_c^{\text{min}} = 1,39 \cdot 10^{18} \text{ см}^{-3}$. З памяншэннем адносін m_v/m_c n_c^{min} змяняецца. Калі $m_v = m_c = 0,072m$, то $n_c^{\text{min}} = 1,5 \cdot 10^{17} \text{ см}^{-3}$.

Змяненне тэмпературы прыводзіць таксама да моцнай дэфармацыі спектра люмінесценцы. Калі $T = 20$ або 40°К , то максімум выпраменьвання размешчан паміж пунктамі E_g і $E_g + F'_c + F'_v$. З павышэннем тэмпературы ён ссоўваецца ў бок большых частот. Пры пастаяннай канцэнтрацыі электронаў у зоне правадзімасці гэта ссоўванне максімуму суправаджаецца рэзкім зніжэннем усёй крывой выпраменьвання (рыс. 3, б). На рыс. 3, а крывыя для $T = 200$ і 300°К ляжаць дастаткова высока, паколькі яны пабудаваны для выпадку, калі рост тэмпературы суправаджаецца павелічэннем ліку электронаў.

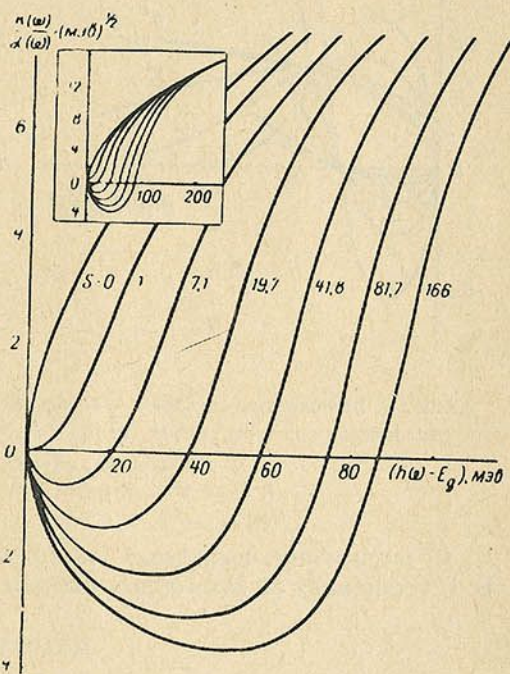


Рис. 2. Змяненне спектра паглынання пад дзеяннем узбуджальнага святла для $T = 80^\circ \text{К}$. Лічы каля крывых — значэнні шчыльнасці патоку ў квт/см^2 . У рамцы паказаны тыя ж крывыя ў больш шырокім спектральным інтэрвале. Для $h\omega - E_g > 250$ мэв усе крывыя зліваюцца ў адну

Атрыманыя вышэй рэзультаты могуць быць выкарыстаны пры вывучэнні насычэння ў паўправадніках, выкліканага магутнымі патокамі радыяцыі і часткова іншымі крыніцамі ўзбуджэння.

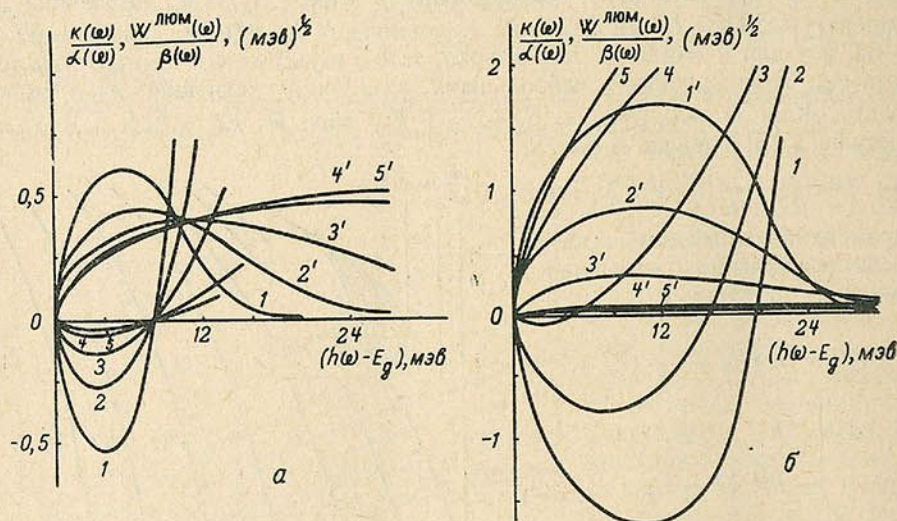


Рис. 3. Залежнасць спектраў паглынання і люмінесценцы ад тэмпературы пры пастаянным значэнні сумы (а) $F_c + F_v = 8$ мэв і пры пастаянным узроўні ўзбуджэння (б), калі $n_c = 8,9 \cdot 10^{16}$ см⁻³.

1, 1' — $T = 20^\circ$ К; 2, 2' — 40; 3, 3' — 80; 4, 4' — 200; 5, 5' — 300

У заключэнне выказваю глыбокую падзяку акадэміку АН БССР Б. І. Сцяпанаву за каштоўныя парады і дэталёвае абмеркаванне работы.

ЛІТАРАТУРА

1. Мосс Т. Оптические свойства полупроводников. М., ИЛ, 1961.
2. McLean T. P. Progress in Semiconductors, 5, 53—102, 1960.
3. Dumke W. P. Proc. of the Symposium on Optical Masers, New York, 1963, p. 461—468.
4. Lasher G. and Stern F. Phys. Rev., 133, 2A, 553—563, 1964.
5. Крохин О. Н. ФТТ, 7, 2612, 1965.
6. Stern F. Solid States Physics, 15, 299—408, 1963.
7. Блохинцев Д. И. Основы квантовой механики. М., «Высш. школа», 1961.
8. Смит Р. Полупроводники. М., ИЛ, 1962.
9. Степанов Б. И., Грибковский В. П. Введение в теорию люминесценции. Минск, Изд. АН БССР, 1963.
10. Блекмор Дж. Статистика электронов в полупроводниках. М., изд. «Мир», 1964.
11. Александров Е. Б., Бонч-Бруевич А. М., Костин Н. Н., Ходовой В. А. ЖЭТФ, 49, 1435, 1965.

РЕЗЮМЕ

Рассматривается собственный изотропный полупроводник, возбуждаемый линейно поляризованным светом в узком спектральном интервале. Распределение электронов по уровням энергии зоны проводимости E_c и валентной зоны E_v описывается функцией Ферми—Дирака $f_c(E_c)$ и $f_v(E_v)$ и двумя квазиуровнями Ферми F_c и F_v соответственно. Исследование зависимости коэффициента поглощения и мощности люминесценции от интенсивности возбуждающего света и температуры проводится на базе решения двух уравнений: уравнения нейтральности и скоростного уравнения, учитывающего поглощение, стимулированное и спонтанное испускание света в стационарном режиме. Для низ-

ких температур $T \rightarrow 0$ получены аналитические решения обоих уравнений, для $T \neq 0$ проводятся результаты численного расчета.

Показана независимость степени возбуждения кристалла от времени рекомбинации электронов и дырок, которое обратно пропорционально матричному элементу перехода. Существующие лазерные источники света позволяют не только вызвать просветление полупроводниковых кристаллов, но и получить значительные коэффициенты усиления.

Поступило в редакцию 14.IV 1966

Н. Н. СИРОТА, В. А. БРЖЕЗИНСКИЙ, В. Г. ДЮКОВ, А. П. КАРАЦЮБА,
 Ф. П. КОРШУНОВ, Ю. Ф. ЛЕЗЖОВ, А. А. ЧЕРНЫШЕВ

ИССЛЕДОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ РЕАКТОРНОГО ОБЛУЧЕНИЯ НА СТРУКТУРУ И ПАРАМЕТРЫ $p-n$ -ПЕРЕХОДОВ В КРЕМНИИ *

Процессы, происходящие в области $p-n$ -перехода при прохождении тока через него, лежат в основе действия важнейших полупроводниковых приборов (транзисторов, диодов, фотоэлектрических преобразователей, счетчиков ядерных излучений и др.). В литературе накоплен обширный материал о влиянии ядерных излучений на изменение основных параметров полупроводниковых приборов и материалов [1—3].

В данной работе было исследовано влияние реакторного гамма-нейтронного излучения на изменение структуры и электро-физических параметров опытных образцов $p-n$ -переходов, изготовленных методом диф-

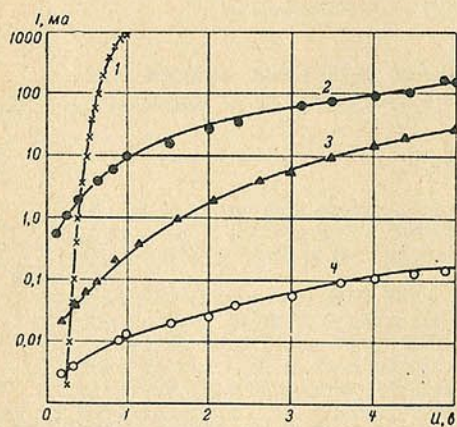


Рис. 1. Прямые ветви вольтамперных характеристик $p-n$ -переходов на основе кремния с различным удельным сопротивлением до и после облучения интегральным потоком нейтронов $1 \cdot 10^{15}$ нейтр/см²:

1 — $\rho = 2; 10; 250$ ом·см (до облучения); 2 — $\rho = 2; 3 - \rho = 10; 4 - \rho = 250$

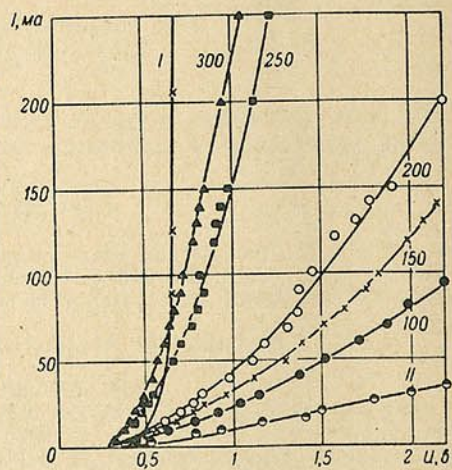


Рис. 2. Прямые ветви вольтамперной характеристики облученного (1×10^{15} нейтр/см²) $p-n$ -перехода на основе кремния с $\rho = 2$ ом·см до и после отжига при различных температурах:

I — до облучения; II — после облучения

фузии на кремнии n -типа с удельным сопротивлением 2; 10 и 250 ом·см. Образцы облучались в вертикальном канале реактора АН БССР.

* Работа доложена на Первом совещании по радиационной физике твердого тела 8.IX 1965 г. в г. Киеве.

Для обрезания тепловых нейтронов образцы во время облучения защищались кадмиевым фильтром толщиной 1 мм. Интегральный поток нейтронов, которым облучались $p-n$ -переходы, был равен $1 \cdot 10^{15}$ нейтр/см². Измерение потока нейтронов проводилось при помощи серных индикаторов. Температура во время облучения была равна 40°С.

До и после облучения образцов $p-n$ -переходов измерялись их электрофизические параметры (вольтамперные характеристики, барьерная емкость перехода) и изучалась структура $p-n$ -переходов путем наблю-

дения и внутривакуумного фотографирования во вторично-эмиссионном электронном микроскопе с ионно-электронной эмиссией. Методика электронно-оптического исследования $p-n$ -переходов была разработана на кафедре электроники физического факультета МГУ им. Ломоносова под руководством проф. Г. В. Спивака и подробно описана в работах [4, 5].

После облучения произошли изменения как в прямой, так и в обратной ветви вольтамперной характеристики исследуемых образцов, причем наибольшие изменения претерпела прямая ветвь вольтамперной характеристики.

На рис. 1 представлены в полулогарифмическом масштабе усредненные вольтамперные характеристики исследуемых образцов до облучения и после облучения интегральным потоком быстрых нейтронов $1 \cdot 10^{15}$ нейтр/см². Из графиков видно, что если до облучения вольтамперные характеристики образцов с различным удельным сопротивлением практически совпадали, то после облучения их поведение становится различным. Наиболее сильные изменения испытала вольтамперная характеристика образца с $\rho = 250$ ом·см. Для этого образца сопротивление диода в прямом и обратном направлениях отличалось менее, чем на порядок, вследствие резкого уменьшения проводимости базовой области.

Для исследования возможности восстановления параметров облученных диодов был проведен изохронный отжиг радиационных дефектов. Образцы прогревались в течение 15 мин при температурах 100, 150, 200, 250, 300 и 350°С. После каждой ступени отжига производилось измерение вольтамперных характеристик образцов при комнатной температуре.

Результаты отжига для низкоомных (2 ом·см) образцов приведены на рис. 2. При этом были замечены следующие особенности кинетики отжига:

1. После отжига при $T = 350^\circ\text{C}$ прямые вольтамперные характеристики образцов существенно восстанавливаются, причем у низкоомных диодов падение прямого напряжения восстанавливается почти до исходной величины.

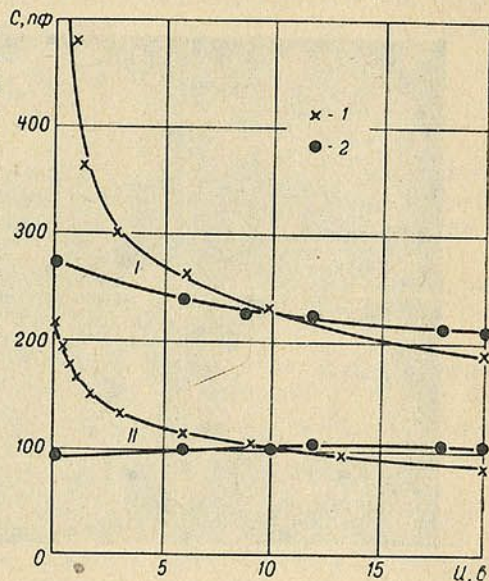


Рис. 3. Изменение барьерной емкости $p-n$ -переходов на основе кремния с $\rho = 10$; 250 ом·см (I и II соответственно) в функции обратного напряжения после облучения ($1 \cdot 10^{15}$ нейтр/см²):

I — до облучения; 2 — после облучения

2. Скорость отжига не постоянна. В интервале температур от 200 до 250—300° С отжиг происходил наиболее интенсивно.

На рис. 3 приведены результаты измерений вольтёмкостных характеристик диодов при обратном смещении методом сравнения [4] на частоте 100 кГц при напряжении переменного сигнала 50 мВ. Из кривых видно, что после облучения образцов с удельным сопротивлением $\rho = 10 \text{ ом} \cdot \text{см}$ зависимость $C=f(U)$ становится весьма слабой, а для образца с $\rho = 250 \text{ ом} \cdot \text{см}$ совершенно пропадает. Для обоих образцов кри-

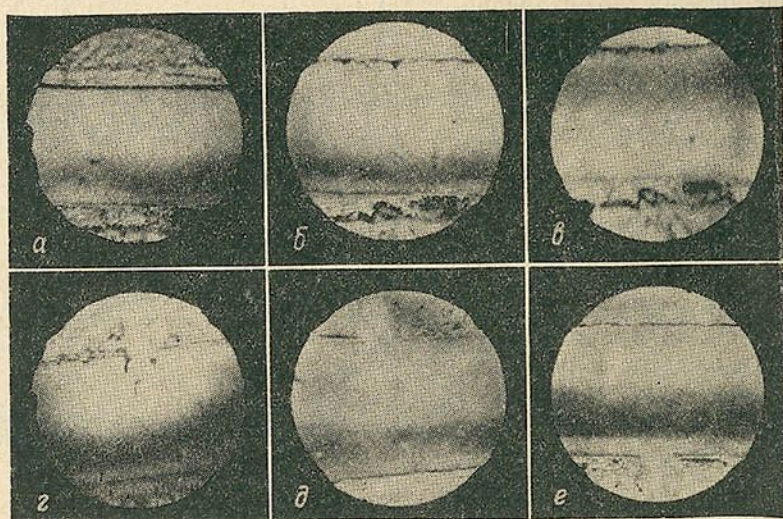


Рис. 4. Электронно-микроскопическое изображение $p-n$ -переходов при обратном и прямом смещении 30 в до и после облучения ($1 \cdot 10^{15}$ нейтр/см²):

a и $б$ — до и после облучения при обратном смещении 30 в ($\rho = 10 \text{ ом} \cdot \text{см}$); $в$ — то же после облучения при прямом смещении; $г$ и $д$ — до и после облучения при обратном смещении 30 в ($\rho = 250 \text{ ом} \cdot \text{см}$); $е$ — то же после облучения при прямом смещении

вые $C=f(U)$ до и после облучения имеют точку пересечения при обратном напряжении порядка 10 в. Уменьшение барьерной емкости по абсолютной величине, а также снижение ее зависимости от напряжения, указывает на существенные изменения электрофизических параметров $p-n$ -перехода.

Для выявления изменений структуры и параметров $p-n$ -перехода было проведено электронно-микроскопическое исследование $p-n$ -переходов, результаты которого приведены на рис. 4.

Для исключения влияния краевых эффектов на электронно-оптическое изображение образцы площадью $5 \times 5 \text{ мм}^2$ запаивались между двумя кубиками с ребром 5 мм из нержавеющей стали, после чего грани образцов подвергались шлифовке и травлению по обычной методике.

Изображение $p-n$ -перехода при обратном смещении наблюдается в виде темной полосы на фоне геометрического микрорельефа поверхности (рис. 4, $a, б, г, д$).

До облучения на всех образцах наблюдалось заметное расширение области пространственного заряда в сторону более высокоомной базовой области диодов. После облучения для образцов с $\rho = 10$ и $250 \text{ ом} \cdot \text{см}$.

этого расширения не наблюдалось. Этот факт хорошо согласуется с полученными результатами по измерению вольтамперных характеристик исследуемых образцов, так как постоянство емкости указывает на то, что ширина области объемного заряда также заметно не меняется.

Форма и расположение $p-n$ -перехода относительно границ кристалла до и после облучения также не меняются.

Весьма интересным является тот факт, что в облученных образцах становится возможным непосредственное наблюдение падения прямого напряжения в базе диодов с исходным удельным сопротивлением 10 и 250 $ом \cdot см$ (рис. 4, в и е, соответственно).

ВЫВОДЫ

1. Вольтамперные характеристики кремниевых диффузионных $p-n$ -переходов в результате облучения испытывают значительные изменения, которые тем больше, чем выше сопротивление исходного кремния, на основе которого изготовлен $p-n$ -переход.

2. В результате облучения ($1 \cdot 10^{15}$ нейтр/см²) уменьшается барьерная емкость $p-n$ -перехода и практически исчезает зависимость ее от обратного напряжения.

3. Электронно-оптическое изображение $p-n$ -перехода, смещенного в обратном направлении напряжением -30 в, показывает, что: а) форма, расположение и ширина $p-n$ -перехода при этом смещении (после облучения) не изменились; б) ширина $p-n$ -перехода также не зависит после облучения от величины напряжения смещения.

Для $p-n$ -переходов, изготовленных на основе высокоомного кремния, при достигнутых уровнях облучения $1 \cdot 10^{15}$ нейтр/см² возможно наблюдение электронно-оптическим методом распределения падения прямого напряжения в базе диода. Область с максимальным сопротивлением в базовой области отстоит на некотором расстоянии (по-видимому, сравнимом с диффузионной длиной неосновных носителей) от границы $p-n$ -перехода, а также от границы контакта.

4. При изохронном отжиге вплоть до температур 350°С наступает существенное восстановление прямой ветви вольтамперной характеристики исследованных $p-n$ -переходов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Easley J. W. Nucleonics, 20, № 7, 52, 1962.
2. Bertolotto. Alta frequenza, 31, № 2, 104, 1962.
3. Носов Ю. Р. ФТТ, 4, 12, 3665, 1962.
4. Седов Н. Н., Спивак Г. В., Иванов Р. Д. Изв. АН СССР, сер. физ., 26, 1232, 1962.
5. Седов Н. Н., Спивак Г. В., Дюков В. Г. Изв. АН СССР, сер. физ., 27, 1173, 1179, 1963.

Поступило в редакцию 25.VI 1966

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

Е. Д. ЗЛЕБОВ

ЧИСЛА ПИЗО — ВИДЖАЯРАГХАВАНА
И ОСНОВНЫЕ ЕДИНИЦЫ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ПОЛЕЙ

Целое алгебраическое число называется числом Пизо — Виджаярагхавана, или PV-числом, если оно вещественно и больше единицы, а все его сопряженные по модулю меньше единицы.

Пусть среди n сопряженных производящего числа поля вещественных чисел будет n_1 , остальные $2n_2$ чисел комплексные. Тогда по основной теореме Дирихле число основных единиц поля равно $t = n_1 + n_2 - 1$.

Докажем теорему, связывающую PV-числа с основными единицами вещественных алгебраических полей K . Для определенности считаем, что основные единицы по абсолютной величине больше рациональной единицы.

Теорема. Основные единицы базиса группы всех единиц поля степени n можно заменить такими основными единицами, каждая из которых является PV-числом.

Перед доказательством теоремы заметим, что основная единица ε квадратичного поля всегда является PV-числом, так как норма $N(\varepsilon) = \pm 1$. Поэтому считаем $n \geq 3$.

Рассмотрим случай $n_2 = 0$.

Лемма А. Если $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ — основные единицы базиса группы всех единиц поля K и хотя бы одна из них есть PV-число, то $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ можно заменить такими основными единицами, каждая из которых есть PV-число.

Доказательство. Пусть ε_1 является PV-числом. Тогда при

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{для } i \geq j, \text{ кроме } a_{i1} \quad (i = 2, \dots, n), \\ 0 & \text{в противном случае} \end{cases}$$

и достаточно больших a_{i1} ($i = 2, \dots, n$) числа

$$\eta_i = \prod_{j=1}^n \varepsilon_j^{a_{ij}} \quad (i = 1, \dots, n)$$

являются PV-числами и основными единицами, так как $\det(a_{ij}) = 1$.

Лемма 1. Система неравенств

$$\begin{aligned} f_1(x) &= \sum_{j=1}^n a_{1j} x_j > 0, \\ f_s(x) &= \sum_{j=1}^n a_{sj} x_j < 0 \quad (s = 2, \dots, n), \end{aligned} \tag{1}$$

$$g(x) = \sum_{j=1}^n b_j x_j < 0,$$

где $b_j = \sum_{i=1}^n a_{ij}$, a_{ij} — вещественные, $\det(a_{ij}) \neq 0$, имеет решение в целых числах.

Доказательство. Очевидно, система (1) определяет в n -мерном евклидовом пространстве некоторое выпуклое открытое множество R .

Пусть $x_0 = (x_{10}, \dots, x_{n0})$ — решение системы уравнений $f_1(x) = 1$, $f_s(x) = -1$ и $\delta = \min(|a_1 - x_0|, \dots, |a_n - x_0|)$, где a_i — точки, удовлетворяющие уравнению $f_i(x) = 0$. Тогда R содержит вместе с точками вида $h x_0$ ($h \geq 1$) и их δ — окрестности, определяемые неравенством $|x - h x_0| < \delta$.

Рассмотрим точки вида $k x_0$ ($k = 1, 2, \dots$). Так как $q \frac{1}{n} \max(\|q x_{10}\|, \dots, \|q x_{n0}\|) < 1$ для бесконечного числа целых $q > 0$, то можно указать k_0 такое, что $\max(\|k x_{10}\|, \dots, \|k x_{n0}\|) < \delta$ для любого сколь угодно малого $\delta > 0$ и всех $k > k_0$, т. е. в δ -окрестности точки $k x_0$ находится целочисленная точка.

Лемма 2. Если н. о. д. $(b_1, \dots, b_n) = 1$, то всегда можно построить такой определитель порядка n , у которого b_1, \dots, b_n являются элементами одной из строк, а значение определителя равно ± 1 .

Доказательство. Так как н. о. д. $(b_1, \dots, b_n) = 1$, то, не ограничивая общности, можно считать, что н. о. д. $(b_1, b_2) = 1$. При

$$a_{ij} = b_j, \quad a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{для } i = j \quad (i = 3, \dots, n), \\ 0 & \text{для } i > j \quad (i = 3, \dots, n) \end{cases}$$

$\det(a_{ij}) = a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}$ и всегда существуют такие целые a_{21} и a_{22} , что $\det(a_{ij}) = 1$.

Лемма В. Пусть ни одна из основных единиц ε_i не есть PV-число. Тогда существуют такие целые числа a_i , что

$$\eta = \prod_{i=1}^n \varepsilon_i^{a_i} \tag{2}$$

есть PV-число и основная единица.

Доказательство. Прологарифмировав (2), получим $r(\mathbf{a}) = \ln |\eta| =$

$$= \sum_{i=1}^n a_i \ln |\varepsilon_i|. \text{ Так как каждое рациональное соотношение между чис-$$

лами из поля K с коэффициентами из числового поля остается справедливым, если алгебраические числа заменить сопряженными с одинаковы-

ми индексами, то $r_j(\mathbf{a}) = \ln |\eta_j| = \sum_{i=1}^n a_i \ln |\varepsilon_i^{(j)}|$ ($j = 1, \dots, n+1$), где

$\eta = \eta_1, \dots, \eta_{n+1}$; $\varepsilon_1 = \varepsilon_1^{(1)}, \dots, \varepsilon_1^{(n+1)}$; \dots ; $\varepsilon_n = \varepsilon_n^{(1)}, \dots, \varepsilon_n^{(n+1)}$ являются сопряженными. Система неравенств

$$r_1(\mathbf{a}) > 0, \quad r_j(\mathbf{a}) < 0 \quad (j = 2, \dots, n+1) \tag{3}$$

по лемме 1 имеет решение в целых a_i , т. е. η является PV-числом. Если н. о. д. $(a_1, \dots, a_n) = 1$, то по лемме 2 можно построить $\det(a_{ij}) = \pm 1$

и, таким образом, η будет основной единицей. Если же $a_i = a'_i d$, где н. о. д. $(a'_1, \dots, a'_n) = 1$, то $\eta' = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i a'_i$ является PV-числом и основной единицей.

Леммы А и В доказывают теорему для $n_2 = 0$.

Рассмотрим случай $n_2 \neq 0$.

Учитывая введенную нумерацию для сопряженных производящего числа поля, получим $n_1 + n_2$ неравенств типа (3), левые части которых различны, причем одно из неравенств есть сумма остальных, взятых со знаком минус. Этим самым случай $n_2 \neq 0$ доказывается аналогично случаю $n_2 = 0$.

Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гекке Э. Лекции по теории алгебраических чисел. М., 1940.
2. Касселс Дж. В. С. Введение в теорию диофантовых приближений, М., ИЛ, 1961.
3. Касселс Дж. В. С. Введение в геометрию чисел, М., ИЛ, 1965.

Поступило в редакцию 16.II 1966

О. С. ИВАНИЦКАЯ

О НЕКОТОРЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЯХ В ОБЩЕЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

В [1] рассматриваются применения неинтегрируемых дифференциальных преобразований в общей теории относительности (ОТО) между дифференциалами, вообще говоря, негалилеевых координат. Введение этих преобразований, в частности, трактуется как обобщение преобразований Лоренца при наличии гравитационного поля (G -поля).

Н. А. Умов еще в период создания специальной теории относительности (СТО), анализируя известные выводы преобразований Лоренца, заметил, что «эти выводы не дают никаких спорных пунктов для обсуждения положения, которое занимает преобразование Лоренца в ряду других преобразований, и не указывает путей, которые могли бы привести к новым преобразованиям» [2]. В своем выводе [2] Н. А. Умов по существу ввел такой пункт.

В настоящее время, во-первых, развитие лоренцинвариантной теории элементарных частиц поставило преобразования Лоренца в ряд преобразований другого рода (калибровочные преобразования, учет высших симметрий и др.). Это полностью сохраняет преобразования Лоренца и их структуру, но устанавливает некоторые их сочетания и связи с другими преобразованиями [3]. В [4] обнаружена интересная связь между галилейинвариантностью и калибровочной инвариантностью.

Во-вторых, развитие общековариантных теорий элементарных частиц, например [5], т. е. ковариантных в смысле ОТО, а также развитие самой ОТО привело к обобщению преобразований Лоренца на неоднородное пространство, связав их структуру с введением отличных от нуля тензоров Римана — Кристоффеля. В пределе, когда этот тензор стремится к нулю, обобщенные преобразования переходят в обычные лоренцовы преобразования СТО. Различные подходы, например, имеются в [6]. Обобщенные преобразования Лоренца тетрадной формулировки ОТО [7], являясь функциями координат, оставляют инвариантным в ОТО локальный тензор СТО [8], т. е.

$$\eta_{k'n'} = L_{k'}^r(x^\lambda) L_{n'}^s(x^\lambda) \eta_{rs} = \text{inv}, \quad (1)$$

где x^λ — негалилеевы координаты.

Обобщение преобразований Лоренца при наличии G -поля, данное в [1], выполняется сравнением галилеевой квадратичной формы СТО с некоторой римановой, удовлетворяющей уравнениям Эйнштейна. Полученные преобразования, например, в простейшем случае имеют вид:

$$cdt^0 = \frac{\sqrt{g_{00}}dt + \beta \sqrt{-g_{11}}dx}{\sqrt{1-\beta^2}}; \quad dx^0 = \frac{\sqrt{-g_{11}}dx + c\beta \sqrt{g_{00}}dt}{\sqrt{1-\beta^2}}; \quad (2)$$

$$dy^0 = \sqrt{-g_{22}} dy; \quad dz^0 = \sqrt{-g_{33}} dz; \quad \beta = v/c,$$

где t^0, x^0, y^0, z^0 — галилеевы координаты; t, x, y, z — негалилеевы.

В [1] не рассматривается, каким способом и в какой мере однозначно извлекается корень из метрического тензора. В случае преобразования дифференциалов галилеевых координат в дифференциалы негалилеевых (или обратно) требование ковариантности записи, очевидно, указывает, что корень из метрического тензора и сами коэффициенты неинтегрируемого преобразования являются коэффициентами Ламэ (тетрадными компонентами). В случае же неинтегрируемых преобразований, связывающих дифференциалы координат одной негалилеевой системы координат с дифференциалами координат другой негалилеевой системы, требуется другой способ извлечения корня из метрического тензора, который дал бы функцию, содержащую только «мировые» («тензориальные») индексы. Возможно, следует применить специальный способ, предложенный в [9].

Фактически обобщение преобразований Лоренца в [1] при наличии G -поля означает замену лоренцовых преобразований СТО тетрадным коэффициентом (гравитационным потенциалом Ламэ) ОТО.

Ниже рассмотрим эту замену в явном виде, исходя из линейных форм, на которые может быть разложена квадратичная форма, а также укажем предельный случай, соответствующий вырожденной метрике. Пусть:

$$ds^2 = dx \cdot dx; \quad dx = dx^k e_k = dx^\mu e_\mu = \text{inv.} \quad (3)$$

Латинские (лоренцовы) и греческие индексы пробегают значения 0, 1, 2, 3. Первые относятся к галилеевой системе координат (декартовой), вторые — к криволинейной. Физическая тетрада e_k (ортореper системы координат) испытывает лоренцовы преобразования:

$$e_{k'} = L_k^n(x^\lambda) e_n; \quad dx_{k'} = L_k^n(x^\lambda) dx_n \quad (4)$$

и образует локальный метрический тензор СТО $\eta_{kn} = e_k \cdot e_n$. Тетрада e_μ — единичные векторы, касательные к координатным линиям криволинейной системы координат. Умножив (4) скалярно на dx , имеем:

$$dx_{\delta'} = L_\delta^0 e_0 \cdot dx^\mu e_\mu + L_\delta^a e_a \cdot e \cdot dx^\gamma, \quad (5)$$

$$dx_{\delta'} = L_\delta^0 e_0 \cdot dx^\mu e_\mu + L_\delta^b e_b \cdot e \cdot dx^\gamma.$$

Символом \wedge отмечены численные значения лоренцовых индексов, первые буквы латинского алфавита (до k) принимают значения 1, 2, 3, т. е. в тетрадном представлении «обобщенные преобразования Лоренца, связанные с G -полем», имеют вид:

$$\begin{aligned} dx_{k'} &= h_{k'}^\mu dx_\mu \equiv a_k^\mu dx_\mu = L_k^n h_n^\mu dx_\mu = \\ &= L_k^0 h_\delta^\mu dx_\mu + L_k^a h_a^\mu dx_\mu, \end{aligned} \quad (6)$$

$$h_{k'}^\mu \equiv a_k^\mu = L_k^n h_n^\mu; \quad h_n^\mu = e_n \cdot e^\mu, \quad (7)$$

e^μ — ковариантные векторы тетрады, геометрически образованные посредством пар гиперплоскостей.

Следовательно, «объединение преобразований Лоренца и Меллера» [1] (т. е. L_k^n и h_n^μ) или «обобщение преобразований Меллера» [1] состоит в выведении из коэффициентов Ламэ некоторого обобщенного пре-

образования Лоренца (локального), что всегда возможно, поскольку L_k^n играет роль калибровочного преобразования [7], т. е. обобщение преобразований Лоренца на G -поле является переходом от одного коэффициента Ламэ к другому, преобразованному с помощью локальных преобразований Лоренца.

Естественно, что преобразование посредством коэффициентов Ламэ («неинтегрируемое преобразование») не обладает основной чертой лоренцовых преобразований — не оставляет инвариантным метрический тензор СТО, но, наоборот, переводит его в метрический тензор ОТО:

$$h_{\mu}^{k'} h_{\nu}^{n'} \eta_{k'n'} = g_{\mu\nu} \neq \eta_{k'n'}, \quad (8)$$

но сходство этих преобразований остается в том смысле, что и из компонент лоренцового преобразования, и из коэффициентов Ламэ метрический тензор СТО может быть построен:

$$\eta_{k'n'} = L_{k'}^r L_{n'r} = h_{k'}^{\mu} h_{n'\mu} = \text{inv}. \quad (9)$$

Очевидно, в (6) содержится общий случай, когда $g_{\mu\nu}$ неортогонален. Аналогично для обратных неинтегрируемых преобразований имеем

$$dx_{\mu} = h_{\mu}^{k'} dx_{k'} \equiv a_{\mu}^k dx_k = h_{\mu}^n L_n^{k'} dx_{k'}; \quad h_{\mu}^n = e_{\mu} \cdot e^n. \quad (10)$$

Естественно, что переход от прямых преобразований к обратным состоит не только в замене L_k^n на $L_n^{k'}$, но и в замене

$$h_k^{\mu} \rightarrow h_{\mu}^k = g_{\mu\nu} \eta^{kn} h_{\nu}^n, \quad (11)$$

где $g_{\mu\nu}$ — потенциал гравитационного поля. Конечно, это указывает на неэквивалентность галилеевой и негалилеевой систем координат.

Выражение локальных преобразований Лоренца через скорость неинерциальной системы, приобретенную в гравитационном поле, осуществляемое в [1] и существенное для применений, а также отождествление неинерциальной системы с негалилеевой системой координат требуют дополнительного обоснования. В результате такого отождествления коэффициенты Ламэ h_k^{μ} становятся не только функцией координат, как в тетрадной формулировке ОТО, но и функцией, зависящей от координат скорости. Это аналогично, но противоположно замене в динамике СТО массы, зависящей от скорости, эквивалентным потенциалом Богославского — Верле [10], зависящим от координат.

Соотношения (1) — (11) справедливы и в однородном пространстве СТО. Тогда они описывают переход от дифференциалов декартовых координат к дифференциалам криволинейных координат СТО, оставляющий равным нулю тензор Римана — Кристоффеля. Тогда преобразование вырождается в интегрируемое, зависящее лишь от характера искривления осей координат.

В предельном случае (6), когда $c \rightarrow \infty$, т. е. когда переход к предельному случаю ОТО [11] ведется от вырожденной метрики [12, 13] СТО, имеем:

$$\lim_{c \rightarrow \infty} dx^0 = h_0^0 dx^0 + h_a^0 dx^a, \quad (12)$$

$$\lim_{c \rightarrow \infty} dx^{a'} = G_0^{a'} h_0^0 dx^0 + G_b^{a'} h_{\mu}^b dx^{\mu}, \quad (13)$$

где $G_n^{k'}$ — локальные преобразования Галилея, оставляющие инвариантным вырожденный метрический тензор СТО, т. е.

$$n_{k'n'} \equiv \lim_{c \rightarrow \infty} \eta_{k'n'} = G_n^{k'} G_n^{s'} n_{rs} = \text{inv}; \quad n_{rs} = \lim_{c \rightarrow \infty} \eta_{rs}; \quad (14)$$

$$n_{rs} = \text{diag}(-1000); \quad n^{rs} = \text{diag}(0, 111).$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Мирианашвили М. М., Кирия В. С., Гобеджишвили М. С. «Проблемы гравитации». Тезисы 2-й Сов. грав. конференции, 1965, стр. 14; Кирия В. С. Там же, стр. 46; Салня Р. Н. Там же, стр. 106.
2. Умов Н. А. Собрание сочинений. ГИТТЛ, 1950, стр. 492; Иваницкая О. С., Левашев А. Е. Труды ФТИ АН УзССР, 3, 20, 1950.
3. Carasse H., Jasselette P. Nuovo cim., 37, 179, 1965; Feldman J. Nuovo cim., 37, 104, 1965.
4. Jauch J. M. Helv. Physica Acta, 37, 284, 1964.
5. Peres A. Nuovo cim., 24, № 2, 389, 1962; Loos H. G. Ann. Phys., 25, 109, 1963; E. Schmutzer. Z. Naturforschg., 19a, 1027, 1964.
6. Иваницкая О. С. Труды физ. фак. КДУ, № 6, 17, 1952.
7. Левашев А. Е. Труды Киевского симпозиума по ОТО, 1965.
8. Иваницкая О. С. «Проблемы гравитации». Тезисы 2-й Сов. грав. конференции, 1965, стр. 143.
9. Огиевецкий В. И., Полубаринов И. В. «Проблемы гравитации». Тезисы 2-й Сов. грав. конференции, 1965, стр. 147.
10. Verle J. Bull. Acad. Polon. Sci., 1, 281, 1953; Богуславский С. А. Пути электронов в электромагнитных полях, 1929.
11. Иваницкая О. С. Весті АН БССР, сер. физ.-мат. наук, № 2, 1966.
12. Navas P. Rev. Mod. Phys., 36, 938, 1964.
13. Иваницкая В. С. Весті АН БССР, сер. физ.-мат. наук, № 1, 1966.

Поступило в редакцию 22.II 1966

А. В. МИНКЕВИЧ

ГРАВИТАЦИОННОЕ ПОЛЕ И ПРИНЦИП ЛОКАЛЬНОЙ ИНВАРИАНТНОСТИ

1. Существующие попытки трактовки гравитационного поля как компенсирующего [1—7] обладают некоторыми принципиальными недостатками. Локализация группы при рассмотрении координатных преобразований обычно понимается лишь как замена постоянных параметров группы на произвольные функции координат, вид же вариаций для исходных полей остается неизменным. Однако в случае преобразования координат вид вариаций исходных полей не является произвольным, а определяется трансформационными свойствами полей, при этом вид вариации может измениться. Так, например, при рассмотрении группы трансляций $\delta x^\alpha = \text{const}$ вариация векторного поля $\delta A_\mu = 0$, т. е. δA_μ вовсе не зависит от δx^α , однако при локализации группы трансляций $\delta x^\alpha = \varepsilon^\alpha(x)$ $\delta A_\mu = -\frac{\partial \varepsilon^\alpha}{\partial x^\mu} A_\alpha$. Далее гравитационное поле обычно связыва-

ют с локализацией группы Лоренца. Получаемые уравнения движения при этом рассматриваются как обобщение эйнштейновской теории на случай учета кручения пространства—времени [2, 3]. При этом не вполне ясен вопрос о том, какие величины следует рассматривать как волновую функцию гравитационного поля. В [7] гравитационное поле связывается с некоей вводимой аффинной группой. В [6] вообще делается утверждение, что на основе принципа локальной инвариантности невозможно ввести гравитационное поле. Поскольку некоторые из этих положений в корне противоречат самой физической идее введения компенсирующего поля, сделаем несколько замечаний.

Сама по себе идея компенсирующего поля служит установлению той глубокой связи, которая существует между наличием у материи некоторых важнейших свойств и существованием в природе фундаментальных физических полей. Наличие сохраняющейся физической величины связано, согласно теореме Нетер, с инвариантностью теории по отношению к некоторой группе преобразований. Локализация этой группы приводит к введению компенсирующего поля, которое, как обычно, имеет в качестве своего источника соответствующую сохраняющуюся величину. Тем самым вполне определенной оказывается тензорная размерность компенсирующего поля. Инвариантность теорий по отношению к однородной группе Лоренца приводит к сохранению двух тензоров — тензора энергии-импульса, связанного с группой трансляций, и тензора момента импульса, связанного с однородной группой Лоренца. В связи с этим поле тяготения, которое обычно связывают с тензором энергии-импульса, следует вводить на основе локализации группы трансляций, а не группы Лоренца. Что касается однородной группы Лоренца, то ее ло-

кализация должна привести к тензорному полю 3-го ранга, кососимметричному по двум индексам и связанному с моментом импульса.

2. Учитывая сделанные замечания, рассмотрим локализацию группы трансляций для того случая, когда в качестве исходного поля взято векторное поле A_μ . Требование инвариантности интеграла действия по отношению к локальной группе трансляций $\delta x^\alpha = \varepsilon^\alpha(x)$ связано с введением симметричного тензорного поля 2-го ранга $h^{\mu\nu} = h^{\nu\mu}$. Из инвариантности интеграла действия $\delta S = \delta \int L(A_\mu, A_{\mu,\nu}, h^{\mu\nu}, h^{\mu\nu}_{,\lambda}, h^{\mu\nu}_{,\lambda\rho}) d^4x = 0$ следует соотношение

$$\delta L + L \varepsilon_{,\mu}{}^\mu = \delta_0 L + (L \varepsilon^\mu)_{,\mu} = 0, \quad (1)$$

где δ_0 означает вариацию формы функции. Для поля A_μ

$$\delta_0 A_\mu = -\partial_\mu \varepsilon^\sigma A_\sigma - \varepsilon^\sigma \partial_\sigma A_\mu. \quad (2)$$

Что касается поля $h^{\mu\nu}$, то, поскольку в рассматриваемой процедуре оно занимает особое положение, вариацию $\delta h^{\mu\nu}$ представим в виде $\delta h^{\mu\nu} = \delta_{\text{калибр}} h^{\mu\nu} + \delta_{\text{коорд}} h^{\mu\nu}$. Калибровочная часть вариации должна строиться с помощью $\varepsilon^\mu(x)$ и удовлетворять следующим требованиям: являться симметричным тензором в исходном плоском пространстве с метрикой $\delta_{\mu\nu}$ и образовывать в сумме с координатной частью вариации группу. Этим довольно жестким ограничениям удовлетворяет следующая вариация:

$$\delta_0 h^{\mu\nu} = b(\partial_\mu \varepsilon^\nu + \partial_\nu \varepsilon^\mu) + (\partial_\nu \varepsilon^\sigma h^{\mu\sigma} + \partial_\sigma \varepsilon^\mu h^{\sigma\nu} - \varepsilon^\sigma \partial_\sigma h^{\mu\nu}) \quad (3)$$

(b — некоторая постоянная). Вводя величины $g^{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu} + \frac{1}{b} h^{\mu\nu}$, соотношение (3) можно представить в виде

$$\delta_0 g^{\mu\nu} = \partial_\sigma \varepsilon^\sigma g^{\mu\nu} + \partial_\nu \varepsilon^\sigma g^{\mu\sigma} - \varepsilon^\sigma \partial_\sigma g^{\mu\nu}. \quad (4)$$

Матрица $g_{\mu\nu}$, обратная $g^{\mu\nu}$, обладает следующей вариацией:

$$\delta_0 g_{\mu\nu} = -\partial_\mu \varepsilon^\sigma g_{\sigma\nu} - \partial_\nu \varepsilon^\sigma g_{\mu\sigma} - \varepsilon^\sigma \partial_\sigma g_{\mu\nu}.$$

Заметим, что с помощью тензоров $g^{\mu\nu}$ и $g_{\mu\nu}$ можно поднимать и опускать индексы у тензорных объектов в смысле риманового пространства с метрикой $g_{\mu\nu}$. Соотношение (1) в развернутом виде можно представить так:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial L}{\partial g^{\mu\nu}} \delta_0 g^{\mu\nu} + \frac{\partial L}{\partial g^{\mu\nu}_{,\lambda}} \delta_0 g^{\mu\nu}_{,\lambda} + \frac{\partial L}{\partial g^{\mu\nu}_{,\lambda\rho}} \delta_0 g^{\mu\nu}_{,\lambda\rho} + \\ & + \frac{\partial L}{\partial A_\mu} \delta_0 A_\mu + \frac{\partial L}{\partial A_{\mu,\nu}} \delta_0 A_{\mu,\nu} = -(L \varepsilon^\mu)_{,\mu}. \end{aligned} \quad (1')$$

Соотношение (1') и вытекающие из него 4 уравнения для функции Лагранжа были получены из других соображений в [8], где было показано, что при некоторых естественных допущениях эти соотношения приводят к уравнениям Эйнштейна с обычной связью с векторным полем. Однако в то время как в [8] вариации полей рассматриваются как калибровочные преобразования, проводимые в одной и той же координатной системе, в нашем случае вариации полей существенно связаны с преобразованием координат. Принцип локальной инвариантности позволяет ввести аналогичным образом гравитационное поле также для случая

скалярного и спинорного полей, если воспользоваться выражением вариации спинорного поля, полученным в [9].

Поскольку метрический тензор изменяется при локализации группы трансляций, отсутствие соответствующего члена в (1') является аргументом в пользу того, что тензор $g_{\mu\nu}$ связан с метрикой физического пространства-времени. Об этом свидетельствует также зависимость вариации спинорного поля от $h^{\mu\nu}$ в случае преобразования координат.

Вместе с тем следует отметить ту роль, которую играет исходная инерциальная система, поскольку в ней теоретико-полевое описание поля тяготения на основе законов сохранения, сил и пр. имеет обычный вид. Поскольку гравитационный потенциал $h^{\mu\nu}$ связан с добавкой к метрическому тензору, которым характеризовалась бы координатная система в отсутствие гравитационного поля, теряет физический смысл принцип эквивалентности.

ЛИТЕРАТУРА

1. Utiyama R. Phys. Rev., **101**, 1597, 1956.
2. Kibble T. W. B. Journ. of Math. Phys., **2**, 212, 1961.
3. Brodskii A. M., Ivanenko D., Sokolik N. A. Acta phys. Hungar., **14**, 21, 1962; ЖЭТФ, **41**, 1307, 1963.
4. Фролов Б. Н., Вестник МГУ, сер. физ., астр., **6**, 48, 1963.
5. Соколик Г. А., Коноплева Н. П. ДАН СССР, **154**, 310, 1964.
6. Коноплева Н. П. Вестник МГУ, сер. физ., астр., **3**, 73, 1965.
7. Гутман И. И., Арифов Л. Я. «Проблемы гравитации». Тезисы 2-й советской гравитационной конференции, 1965, стр. 168.
8. Огиевецкий В. И., Полубаринов И. В. Препринт ОИЯИ Р-2106, 1965.
9. Огиевецкий В. И., Полубаринов И. В. Препринт ОИЯИ Р-1890, 1964.

Поступило в редакцию 4.VII 1966

А. А. БОГУШ, А. И. БОЛСУН, Л. Г. МОРОЗ

ОБЩИЙ РАСЧЕТ МАТРИЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ДЛЯ ВЕКТОРНЫХ ЧАСТИЦ С РАЗЛИЧНЫМИ МАССАМИ

В последнее время в связи с интенсивным изучением процессов взаимодействия векторных частиц, в частности таких процессов, как фоторождение и радиационные распады векторных резонансов, возникает потребность в расчете матричных элементов (амплитуд), связывающих состояния частиц со спином 1 с различными массами, включая случаи, когда одна из частиц имеет нулевую массу, т. е. является фотоном.

В настоящей заметке показано, что на эти случаи может быть без труда обобщена разработанная в [1, 2] ковариантная методика непосредственного расчета матричных элементов, связывающих состояния одной и той же векторной частицы.

Исходя из вида волновой функции векторной частицы с отличной от нуля массой [1, 2]

$$\psi^{(r_l)}(p_l) = \frac{1}{m_l \sqrt{2}} (\hat{p}_l - im_l) a_{l\mu}^{(r_l)} \varepsilon^{\mu} \quad (l = 1, 2), \quad (1)$$

можно, следуя [1, 2], получить общее выражение для матричного элемента, связывающего состояния векторных частиц с различными массами:

$$M_{p_1 \rightarrow p_2}^{r_1 \rightarrow r_2} = \text{Sp} \{ Q \psi_1 \cdot \bar{\psi}_2 \} = \\ = \frac{1}{2m_1 m_2} \text{Sp} \{ Q (\hat{p}_1 - im_1) (\hat{a}_2^{r_2} \hat{a}_1^{r_1} - \hat{a}_1^{r_1} \hat{a}_2^{r_2}) P (\hat{p}_2 - im_2) \}, \quad (2)$$

где использованы обозначения работ [1, 2]. Вычисляя стандартным образом следы от этого выражения при различных значениях вершинного оператора Q , мы можем получить сводку формул для матричных элементов, аналогичную приведенной в работе [2] для случая $m_1 = m_2$. Однако легко видеть, что эти результаты могут быть получены непосредственно из упомянутых выражений для матричных элементов частиц с одинаковыми массами, если последние записать через p_1/m и p_2/m , а затем провести замену $p_1/m \rightarrow p_1/m_1$ и $p_2/m \rightarrow p_2/m_2$.

В предлагаемую схему можно включить и случай, когда одна из частиц обладает массой, равной нулю. Для этого воспользуемся той аналогией, которая имеет место между волновыми функциями в 10-мерной формулировке для случаев электромагнитного поля и поля векторных частиц с ненулевой массой покоя.

В работе [3] было показано, что волновая функция фотона в десятимерной формулировке теории электромагнитного поля может быть представлена в виде¹

$$\psi^{(r)}(k) = (1 + ik) a_{\mu}^{(r)} \varepsilon^{\mu}. \quad (3)$$

¹ В [3] используются матрицы β_{\pm} с обратным знаком.

Здесь k — 4-импульс фотона ($k^2 = k^2 - k_0^2 = 0$), а под $a_\mu^{(r)}$ можно подразумевать не только круговые 4-векторы e^- и e^+ , определяющие два возможных спиновых состояния фотона (две круговые поляризации), но и так называемый вектор продольной поляризации фотона, пропорциональный 4-вектору k (ср. [4, 5]).

Из (3) видно, что, в отличие от компонент функции векторного поля с неравной нулю массой (1), обладающих одинаковой размерностью, векторные и тензорные компоненты 10-мерной фотонной функции, соответствующие потенциалам и напряженностям электромагнитного поля, имеют разные размерности. Однако при конструировании лагранжианов взаимодействия компоненты фотонной функции умножаются на соответствующие величины других полей таким образом, что части лагранжиана, содержащие по отдельности векторные и тензорные компоненты, приобретают одинаковую размерность. Поэтому путем соответствующего изменения констант связи с другими полями всегда можно привести векторные и тензорные компоненты волновой функции фотона к одной и той же размерности. Этого можно достигнуть, вводя при тензорных компонентах фотонной функции размерный множитель, равный отношению константы связи «аномального» электромагнитного взаимодействия (взаимодействия непосредственно через напряженности электромагнитного поля) к константе связи минимального электромагнитного взаимодействия (взаимодействия через потенциалы), который мы обозначим через $1/m$.

При этом константа связи минимального электромагнитного взаимодействия одновременно будет являться и константой связи «аномального» взаимодействия, а выражение для фотонной функции переписется в виде

$$\psi^{(r)}(k) = \frac{i}{m} (\hat{k} - im) a_\mu^{(r)} \varepsilon^{\mu 1}. \quad (4)$$

Величина m в каждом конкретном случае взаимодействия будет определяться характером взаимодействия. В частности, при использовании выражения (4) для описания электромагнитного взаимодействия дираковской частицы с массой M и аномальным моментом μ (в безразмерных единицах) она равна $2M/\mu$.

Изменение размерности тензорных компонент фотонной функции ведет к соответствующему изменению соотношений теории электромагнитного поля в β -формализме. Например, вместо уравнения $(i\hat{k} - \bar{P})\psi(k) = 0$ [3] будем иметь $(i\hat{k} - m\bar{P})\psi(k) = 0$.

После такого переопределения волновая функция фотона (4) по своей форме почти не отличается от волновой функции векторной частицы с ненулевой массой покоя $\psi^{(r)}(p)$ (1). Если учесть еще, что функция $\psi^{(r)}(p)$ (1) определена с точностью до произвольного фазового множителя, то нетрудно видеть, что обе функции могут быть записаны в общей форме

$$\psi^{(r)}(p) = \frac{i}{\sqrt{m^2 - p^2}} (\hat{p} - im) a_\mu^{(r)} \varepsilon^{\mu 1}. \quad (5)$$

Действительно, если в (5) положить $p^2 = -m^2$ и под m подразумевать массу векторной частицы, мы (с точностью до i) получим формулу (1). Если же положить $p^2 = 0$ и под m подразумевать введенное отношение констант связи, мы автоматически приходим к формуле (4). При этом в обоих случаях векторы поляризации имеют один и тот же смысл: при поперечной поляризации они одинаковы для фотона и векторной частицы, а в слу-

чае продольной поляризации вектор $a_3 = \frac{1}{m} \left(p_0 \frac{p}{|p|}, i |p| \right)$ [2] при $p^2 \rightarrow 0$ автоматически переходит $a_3 = p/m$.

После этих замечаний нетрудно видеть, что указанная выше схема расчета матричных элементов векторных частиц с различными массами включает в себя как частный случай и взаимодействие между частицами с ненулевой и нулевой массами покоя. В частности, если в формуле (2) и полученных на ее основе выражениях для матричных элементов провести замену $p_2 \rightarrow k$ и считать, что $m_2 = m$ является уже не массой частицы, а некоторой величиной, связанной с константой связи с внешним полем, то мы автоматически получим матричные элементы, связывающие состояние фотона с векторной частицей.

Так, например, матричный элемент радиационного распада $V \rightarrow P + \gamma$ векторных мезонов (ω, ρ, ϕ, K^*) на псевдоскалярные (π, K, η) будет иметь вид

$$\begin{aligned} M_{VP\gamma} &= \sqrt{\alpha} q_\mu \bar{\psi}(k) (\beta_5 \beta_\mu + \beta_\mu \beta_5) \psi(p) = \\ &= \sqrt{\alpha} q_\mu \text{Sp} \{ (\beta_5 \beta_\mu + \beta_\mu \beta_5) \psi(p) \cdot \bar{\psi}(k) \}, \end{aligned} \quad (6)$$

где $\psi(p)$ и $\psi(k)$ — волновые функции векторного мезона и фотона, взятые в виде (1) и (4); β_5 — псевдоскалярная матрица в теории Даффина — Кеммера (см. [6]); q — импульс псевдоскалярного мезона.

После взятия следа получим

$$M_{VP\gamma} = \frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{2} m_V} \left(1 - \frac{m_V}{m} \right) \delta_{\mu\nu\rho\sigma} q_\nu e_\nu k_\rho a_\sigma, \quad (7)$$

где m_V — масса векторного мезона; e и a — векторы поляризации фотона и векторного мезона соответственно.

Это выражение для матричного элемента совпадает с приведенным в [7], если положить, что

$$g_{VP}^i = \frac{1}{\sqrt{2} m_V} \left(1 - \frac{m_V}{m_i} \right), \quad (8)$$

где g_{VP}^i — константы связи различных радиационных распадов, соотношения между которыми получены на основе унитарной симметрии в [7] и [8]. Из (8) видно, что множитель $1/m_i$, входящий в волновую функцию фотона (4), является по существу частью константы g_{VP}^i .

Авторы выражают благодарность Ф. И. Федорову за полезные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. Богуш А. А. ДАН СССР, 149, 1286, 1963.
2. Богуш А. А., Болсун А. И. ДАН СССР, 155, 1046, 1964.
3. Богуш А. А., Мороз Л. Р. Весті АН БССР, сер. фіз.-тэхн. навук, № 4, 1961.
4. Мороз Л. Г., Федоров Ф. И. Труды Института физики АН БССР, 3, 154, 1959.
5. Feunpman R. P. Phys. Rev., 76, 769, 1949.
6. Болсун А. И., Федоров Ф. И. Весті АН БССР, сер. фіз.-мат. навук, № 1, 1966.
7. Нгуен Ван Хьеу. Препринт ОИЯИ 2571, 178, 1966.
8. Мещеряков В. А., Соловьев Л. Д., Ткебучава Ф. Г. ЯФ, 3, 116, 1966.

Поступило в редакцию 4.VI 1966

Б. В. БОКУТЬ

ОБ ЭФФЕКТЕ САДОВСКОГО В ОПТИЧЕСКИ АКТИВНЫХ ИЗОТРОПНЫХ СРЕДАХ

Как известно, эффект Садовского заключается в том, что под действием световой волны анизотропное тело испытывает момент силы, или вращающий момент. Возникновение этого момента обусловлено тем, что диэлектрическая проницаемость анизотропной среды является тензором, и поэтому напряженность электрического поля \mathbf{E} световой волны оказывается непараллельной поляризации \mathbf{P} или индукции \mathbf{D} . Следуя А. И. Садовскому [1], вращающий момент $d\mathbf{M}$ объема dV , производимый действием электрического поля на среду, есть

$$d\mathbf{M} = [\mathbf{PE}] = \frac{1}{4\pi} [\mathbf{DE}] dV. \quad (1)$$

На основании этого выражения А. И. Садовским теоретически исследованы пондеромоторные действия электромагнитных волн различной поляризации на кристаллы. Им приведено численное значение вращающего момента для пластинки в $1/2$ волны с поверхностью в 1 см^2 , на которую нормально падает солнечный свет круговой поляризации (желтая область спектра) мощностью $0,2 \text{ вт/см}^2$, который оказался равным $1,28 \cdot 10^{-9} \text{ эрг}$. Экспериментально эта величина момента была подтверждена Р. А. Бетом [2].

Вращающее действие электромагнитного излучения имеет место не только в анизотропных средах. Вообще среда, изменяющая поляризацию электромагнитных волн, должна получать от этих волн некоторый вращающий импульс. Поэтому эффект Садовского должен наблюдаться и в оптически активных изотропных средах, вращающих плоскость поляризации падающего линейно поляризованного света. Ввиду малости параметра оптической активности вращающий момент таких сред должен быть значительно меньше, чем момент анизотропной среды. Использование мощного излучения оптического квантового генератора может привести к сравнительно большому вращающему моменту оптически активной изотропной среды.

Рассмотрим непоглощающий оптически активный изотропный слой, на который нормально падает электромагнитная волна амплитуды \mathbf{E} . Поляризованные по кругу электрические поля внутри такого плоскопараллельного слоя имеют вид [8]

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{\pm} &= \frac{n}{\xi} (n_{\mp} + n) (\mathbf{E} \pm i [q\mathbf{E}]) e^{-i\varphi_{\pm}}, \\ \mathbf{E}'_{\pm} &= \frac{n}{\xi} (n_{\mp} - n) (\mathbf{E} \mp i [q\mathbf{E}]) e^{-2i\varphi_0} e^{i\varphi_{\pm}}, \end{aligned} \quad (2)$$

где

$$\xi = (n_+ + n)(n_- + n) - (n_+ - n)(n_- - n)e^{-2i\varphi_0}; \quad (3)$$

$$n_{\pm} = n_0 \pm \frac{1}{2} \alpha k; \quad \varphi_0 = kn_0 l; \quad \varphi_{\pm} = kn_{\pm} z - \omega t.$$

Здесь $n_0^2 = \epsilon_0$ и $n^2 = \epsilon$ — диэлектрические проницаемости плоскопараллельного слоя и окружающей этот слой изотропной среды; n_{\pm} — показатели преломления распространяющихся в активной среде круговых волн; k — волновое число падающей волны для вакуума; α — параметр оптической активности; l — толщина активного слоя; q — единичный вектор нормали к активной среде, направленный внутрь слоя; E'_{\pm} — отраженные от второй граничной поверхности волны. Из уравнений Максвелла и условия круговой поляризации распространяющихся в активной среде волн легко находим выражения для электрической индукции внутри слоя

$$D_{\pm} = n_{\pm}^2 E_{\pm}, \quad D'_{\pm} = n_{\pm}^2 E'_{\pm}. \quad (4)$$

Подставляя (4) и (2) в (1), усредняя по времени и интегрируя по z от 0 до l , получаем значение вращающего момента оптически активного слоя площади S и толщины l

$$M = \frac{\alpha n^2 S}{\pi |\xi|^2} \left\{ |E|^2 (n_0^2 - n^2) \sin^2(kn_0 l) \cdot q - \frac{inn_0^2}{\alpha k} (|EE^*| - q \cdot q |EE^*|) \sin^2\left(\frac{1}{2} k^2 \alpha l\right) \right\}, \quad (5)$$

где $|\xi|^2 = 4[(n_0^2 + n^2)^2 - (n_0^2 - n^2)^2 \cos^2(kn_0 l)]$. В (5) не учтены члены порядка α^2 . Будем считать, что падающая волна линейно поляризована, т. е. $|EE^*| = 0$. В этом случае из (5) следует

$$M = \frac{\alpha n^2 (n_0^2 - n^2) S |E|^2 \sin^2(kn_0 l)}{4\pi [(n_0^2 + n^2)^2 - (n_0^2 - n^2)^2 \cos^2(kn_0 l)]} \cdot q. \quad (6)$$

Такое же выражение момента получается и при круговой поляризации падающей волны ($E = \pm i(qE)$).

Из (6) видно, что момент направлен по q и пропорционален $\sin^2(kn_0 l)$. Если толщина оптически активного слоя будет равна $l = \frac{\lambda}{2n_0} m$, $m = 1, 2, 3, \dots$, то среда не будет испытывать вращающего момента. Момент также обращается в нуль при $n_0 = n$. Максимальное значение достигается при толщине слоя $l = \frac{\lambda}{4n_0} (2m + 1)$, $m = 0, 1, 2, \dots$. В этом случае (6) принимает вид

$$M = \frac{\alpha n^2 (n_0^2 - n^2) S |E|^2}{4\pi (n_0^2 + n^2)^2} q. \quad (7)$$

Величина момента пластинки из кристалла NaClO_3 с $l = \frac{\lambda}{4n_0}$, $S = 1 \text{ см}^2$,

и при $\lambda = 5890 \text{ \AA}$ удельное вращение которого 32° см^{-1} и $n = 1,5$, для солнечного света составляет $M \sim 10^{-13} \text{ эрг}$, а для излучения рубинового квантового генератора ($|E| \sim 10^6 \text{ в/см}$) $M \sim 10^{-3} \text{ эрг}$. Такая величина момента легко может быть определена на опыте.

Как видно из выражения для \mathbf{M} (6), изотропная оптически активная пластинка испытывает непрерывный вращающий момент, причем \mathbf{M} не зависит от характера поляризации падающей волны. В случае же анизотропной неактивной пластинки линейно поляризованный свет вызывает только ориентирующее воздействие на пластинку, а свет круговой поляризации — непрерывное вращательное движение, совпадающее с направлением вращения вектора \mathbf{E} . Из (6) следует, что если активная изотропная среда является правовращающей ($\alpha > 0$), т. е. плоскость поляризации линейно поляризованной волны поворачивается против часовой стрелки, глядя вдоль направления распространения света, то пластинка будет поворачиваться в противоположную сторону. Левовращающая оптически активная пластинка, наоборот, должна вращаться против часовой стрелки.

ЛИТЕРАТУРА

1. Садовский А. И. Ученые записки Юрьевского университета, 7, в. 1, 1899; 8, в. 2, 1900.
2. Beth R. A. Phys. Rev., 48, 471, 1935; 50, 115, 1936.
3. Бокуть Б. В., Сотский Б. А. Оптика и спектроскопия, 14, 117, 1963.

Поступило в редакцию 25.III 1966

И. Н. ЕРМОЛЕНКО, М. З. ГАВРИЛОВ

О МЕТОДИКЕ ИЗМЕРЕНИЯ СПЕКТРОВ ДИФFUЗНОГО ОТРАЖЕНИЯ ВОЛОКНИСТЫХ ЦЕЛЛЮЛОЗНЫХ МАТЕРИАЛОВ

Для большинства целлюлозных материалов (ткани, бумаги и т. д.) характерно волокнистое строение. Поэтому непосредственное измерение электронных спектров поглощения и определение концентрации поглощающих свет компонент при изучении процессов модификации и деструкции целлюлозы затрудняется интенсивным светорассеянием.

Для растворения многих волокнистых материалов с целью получения спектров поглощения растворов или пленок отсутствуют индифферентные растворители. Кроме того, растворение усложняет картину изучаемых процессов.

Одним из наиболее распространенных методов определения поглощательной способности светорассеивающих сред является метод диффузно-отражательной спектрофотометрии. Из соотношений, связывающих отражательную способность светорассеивающей среды с ее оптическими константами, наиболее широкое применение получило соотношение Гуревича, Кубелки и Мунка

$$\frac{K}{S} = \frac{(1 - R)^2}{2R} \quad (1)$$

(K и S — константы поглощения и рассеяния слоя единичной толщины, R — коэффициент диффузного отражения бесконечно толстого слоя). Из спектров отражения при выполнении положенных в основу теории предпосылок это соотношение позволяет определять величину K/S , зависимость от длины волны которой в некоторой степени характеризует кривую поглощения светорассеивающей среды. К теоретическим предпосылкам относятся: бесконечная толщина слоя, слабо поглощающая среда и диффузность падающего на образец излучения. Кроме того, для получения истинной формы спектра поглощения светорассеивающей среды необходимо выполнение условия независимости константы рассеяния от длины волны.

Целью работы было определить условия выполнения некоторых теоретических предпосылок и применимость соотношения (1) для получения истинной формы кривых поглощения ряда целлюлозных материалов. Критерием применимости соотношения (1) служило соответствие формы кривых зависимости величины K/S от длины волны спектрам поглощения пленок химически идентичных веществ.

Спектры диффузного отражения измерялись на установке, описанной в [1, 2]. Образцом сравнения служила хроматографическая бумага. Постоянство ее спектра отражения во времени периодически проверялось

по свежевоскуренной окиси магния. Для получения абсолютных коэффициентов отражения вводились поправки на отражение применявшихся стандартов. При этом пренебрегали возможной неидентичностью индикатрис рассеяния исследуемых образцов и окиси магния.

Нарушение условия диффузности падающей на образец радиации, как правило, не оказывает существенного влияния на результаты измерений. Поэтому в данной установке был использован направленный пучок радиации, который составлял с плоскостью образца угол 45° . Радиация рассеянной радиации велась в направлении нормали к плоскости образца. При таких углах падения и наблюдения радиации практически исключается попадание на приемник зеркальной компоненты отраженной радиации, которая, как известно, искажает спектры.

Минимальная толщина бесконечно толстого слоя определялась путем изучения зависимости отражательной способности от толщины слоя образца, расположенного на черной подложке. Измерения велись относительно такого же образца, заведомо удовлетворяющего условию бесконечной толщины. Толщина, при которой прекращается зависимость коэффициента отражения от толщины (при $R=99 \div 100\%$), является искомой. Она непосредственно зависит от констант поглощения и рассеяния. Зависимость R технических бумаг от толщины слоя изучалась ранее в узком спектральном диапазоне [3].

Экспериментально найденные минимальные толщины бесконечно толстого слоя хлопковой целлюлозы для $\lambda=300, 500$ и 700 мкм составляют $0,4, 0,6$ и $0,7$ мм (рис. 1, кривые 1—3). Так как в области $500-700$ мкм практически отсутствует селективное поглощение, то зависимость минимальной толщины бесконечно толстого слоя от λ определяется изменением константы рассеяния. В области 300 мкм эта зависимость определяется обеими константами K и S .

Образцы перед измерением прессовались для устранения проявляющегося влияния плотности упаковки и состояния поверхности образцов на отражательную способность. Оптимальное давление прессования было определено путем изучения отражательной способности образцов бесконечной толщины в зависимости от давления прессования, измеренной относительно такого же образца, но спрессованного под давлением, равным 250 кг/см^2 .

Зависимость относительного коэффициента отражения хлопковой целлюлозы от давления прессования приведена на рис. 1 (кривая 4). Из рисунка видно, что в интервале давлений прессования до $\approx 250 \text{ кг/см}^2$ отражательная способность растет. В диапазоне давлений $200-300 \text{ кг/см}^2$, являющемся оптимальным, отражательная способность максимальна. Эффект роста отражательной способности при увеличении давления прессования имеет место для образцов с недостаточной плотностью упаковки, обладающих «ворсистой» поверхностью. При отсутствии этих свойств, например, в бумагах (рис. 1, кривая 5) эффект не наблюдается. При дальнейшем росте давления прессования отражательная способ-

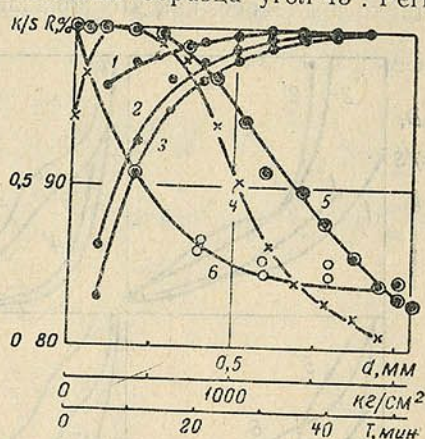


Рис. 1. Влияние толщины слоя, давления прессования и времени размола на отражательную способность

ность опять падает. Это обусловлено уменьшением константы рассеяния, связанным с ростом плотности образца.

Так как хлопковая целлюлоза обладает слабым поглощением в ультрафиолетовой области спектра, то приведенные значения толщины бесконечно толстого слоя достаточны для выполнения этого условия для целлюлоз иного происхождения, а также для ряда других производных целлюлозы, если только константа рассеяния при этом не уменьшается. Однако последнее, как это показано ниже, часто не выполняется. В та-

ких случаях необходимо определять минимальную толщину бесконечно толстого слоя для каждого образца.

Это имеет место при некоторых видах модификации волокнистых целлюлоз. Так, окисление целлюлозы периодатом натрия сопровождается сильным ростом межмолекулярных взаимодействий, обусловленных образованием межмолекулярных связей, например, гемиацетальных, что приводит к уменьшению константы рассеяния, а следовательно, и к росту минимальной толщины бесконечно толстого слоя.

Диспергирование таких образцов путем размола приводит к росту константы рассеяния. Иллюстрацией этого эффекта служит кривая 6, приведенная на рис. 1, показывающая падение отно-

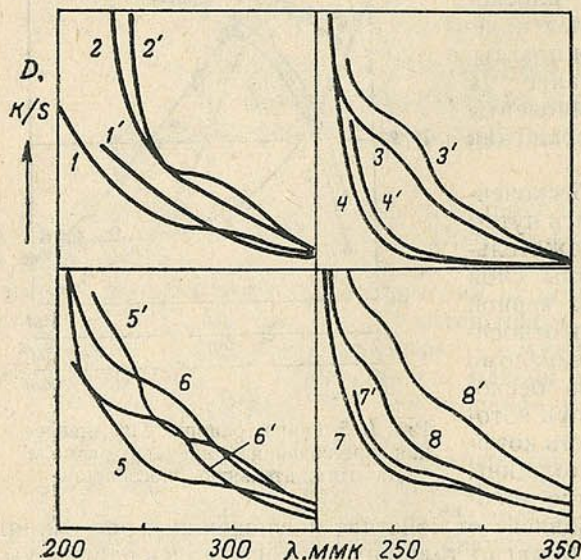


Рис. 2. Зависимость оптической плотности (D) (1—8) и K/S (1'—8') от длины волны:

1 — целлофан, 1' — хлопковая целлюлоза; 2, 3 — монокарбоксилцеллюлоза (МКЦ) и диальдегидцеллюлоза (ДАЦ), полученные на основе целлофана, 2', 3' — МКЦ и ДАЦ, полученные на основе хлопковой целлюлозы; 4, 4' — нитроцеллюлоза (пленка и волокна); 5, 6' — целлофан и хлопковая целлюлоза, облученные радиацией лампы ПРК-4; 7, 7' — натрийкарбоксиметилцеллюлоза (пленка и порошок); 8, 8' — этилцеллюлоза (пленка и порошок). D и K/S — относительные величины

сительной величины K/S диальдегидцеллюлозы от длительности размола.

Аналогичный эффект имеет место для образцов цинковой соли монокарбоксилцеллюлозы. В этом случае одной из причин повышения плотности образцов является «сшивание» макромолекул двухзарядными катионами цинка, которые вступают в обмен с ионами водорода COOH -групп, принадлежащих соседним макромолекулам.

Изменение константы рассеяния, сопровождающее ряд превращений целлюлозных материалов, сильно затрудняет применение диффузно отражательной спектрофотометрии для количественного определения накапливающихся поглощающих центров.

На определение же формы кривой поглощения изменение константы рассеяния не оказывает существенного влияния.

С целью проверки применимости соотношения (1) для получения истинной формы кривых поглощения из спектров отражения на рис. 2 приведена зависимость величины K/S от длины волны для целлюлозы и ряда ее производных, обладающих светорассеянием, и спектры поглощения пленок соответствующих образцов. Как видно из рисунка, имеет ме-

сто хорошее подобие этих спектров в широкой области (210—350 мкм). Это указывает на применимость соотношения (1).

Применимость этого соотношения недавно была установлена для целлюлозы и монокарбоксилцеллюлозы, окрашенных различными красителями [4], для димедонового комплекса диальдегидцеллюлозы [5] и для ацетилцеллюлозы [2].

ЛИТЕРАТУРА

1. Гаврилов М. З., Каплан И. М., Ермоленко И. Н. «Спектроскопические и химические методы анализа материалов». Сборник методик. Изд. «Металлургия». М., 1964.
2. Гаврилов М. З., Ермоленко И. Н., Елина Г. Л. Оптика и спектроскопия, **18**, 515, 1965.
3. Judd D. V. J. Natl. Bur. Stand., **19**, 287, 1937.
4. Гаврилов М. З., Ермоленко И. Н. ЖФХ, **37**, 2491, 1963.
5. Ермоленко И. Н., Ключникова Л. Н., Гаврилов М. З. Заводская лаборатория, № 4, 434, 1966.

Поступило в редакцию 4.III 1966

ПИСЬМО В РЕДАКЦИЮ

А. А. БОГУШ, Л. Г. МОРОЗ, Ф. И. ФЕДОРОВ

ПО ПОВОДУ СТАТЕЙ Н. С. АКУЛОВА ОБ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦАХ¹

Первая статья Н. С. Акулова «Теория элементарных частиц» представляет собой попытку создания новой модели элементарных частиц. Автор исходит из предположения о существовании субэлементарной системы, представляющей собой ядро, вокруг которого по круговой орбите движется частица. Такая система может находиться в различных состояниях с целочисленными значениями зарядов. Четыре состояния системы с $B=0$ (B — барионный заряд) отождествляются с обычными лептонами. Следующие четыре (с $B=1$) автор рассматривает как «возбужденные» состояния первых и называет их «реонами». Введенный дополнительно (+)-реон в отличие от остальных «не может иметь странного возбуждения». Из реонов автор конструирует реальные сильно-взаимодействующие частицы (адроны).

Таковы вкратце предпосылки «теории» Н. С. Акулова. Нет необходимости разбирать в деталях все допущения и рассуждения автора. Приведем лишь отдельные характерные примеры того, как строится эта «теория».

Для построения октета и декуплета барионов Н. С. Акулов вводит «алгоритм», в основе которого лежит предположение о возможности последовательного «возбуждения» странности у реонов. При этом, например, для получения триплетта Σ^* из квадруплета Δ -частиц автор «возбуждает» у (-)-реона, входящего в состав Δ^0 - и Δ^+ -частицы, странность, равную -1 , забывая о том, что этот (-)-реон является античастицей для (+)-реона и, следовательно, так же, как и (+)-реон, не может иметь «странного возбуждения». Если бы автор последовательно придерживался исходных положений, то он из квадруплета Δ -частиц получил бы совершенно другие наборы зарядовых состояний Σ^* - и Ξ^* -частиц. Появилась бы частица с положительной странностью, а Ω^- -частица не появилась бы вообще, так как у анти-ноль-реона (0), согласно исходному допущению Н. С. Акулова, может возбуждаться только странность, равная $+1$.

В связи с «алгоритмом построения барионов» автор постулирует формулу $-1 \geq Q - S \geq B + 1$, где B — барионный заряд; Q — электрический заряд; S — странность, и полагает, что она дает общую связь между B , Q и S . В частности, Н. С. Акулов утверждает, что, согласно этой формуле, при $B=1$ и $S=0, -1, -2, -3$ число барионов z для заданных значений странности равно соответственно 4, 3, 2, 1, т. е. $z=4-|S|$. Между тем, переписав приведенное неравенство в виде $-1 + S \geq Q \geq B + 1 + S$, при $B=1$ независимо от значений S получим одно и то же число возможных значений заряда Q : $z=4$.

¹ Доклады АН БССР, т. 10, 151; т. 10, 456, 1966.

Реальные барионы, по замыслу автора, представляют собой такие соединения двух реонов и одного антиреона, в которых (см. рисунок в статье Н. С. Акулова) орбиты всех трех субэлементарных систем проходят через центры соседних систем. При этом автор, очевидно, считает все три орбиты окружностями, лежащими в одной плоскости, так как только в этом случае они, перекрываясь, отсекают друг у друга ровно одну треть по длине. Заметим, что при объемном перекрытии орбит автор не получил бы нужной $1/3$. Такие модели, по мнению Н. С. Акулова, позволяют получить правильное значение отношения магнитных моментов протона и нейтрона. Однако, во-первых, плоская модель протона или нейтрона в корне противоречит установленной экспериментальной объемной структуре этих частиц и, во-вторых, сама идея автора получить путем частичного перекрытия орбит нужные значения магнитных моментов порочна в своей основе. Как известно, сумма магнитных моментов, обусловленных орбитальным движением заряженных частиц, не зависит от того, перекрываются эти орбиты или нет. Поэтому никакие рассуждения Н. С. Акулова о «нейтральных зонах...», весьма важных для обеспечения связи», не могут служить оправданием проведенного автором «расчета» отношения магнитных моментов нейтрона и протона.

В статье нет четких определений вводимых и используемых понятий, допускается их путаница. Так, например, предполагая вначале, что как лептон, так и реон являются системами, образованными из ядра и вращающейся вокруг него частицы (ни слова не говоря о том, что представляют собой эти «ядро» и «частица»), Н. С. Акулов в конце статьи фактически отождествляет последнюю частицу с самим лептоном. Об этом говорят такие применяемые к реону термины, как «круговая орбита лептона», «лептонное» и «электронное» облако.

Автор обходит молчанием такие принципиально важные для модели вопросы, как природа сил, связывающих ядро и частицу в единое целое, как механизм «возбуждения» странности и барионного заряда у «слабо возбужденных реонов», т. е. лептонов. А между тем сама возможность «возбуждения» барионного заряда у лептона, на основе которой Н. С. Акулов пытается объединить адроны и лептоны в единую схему, противоречит хорошо известным свойствам элементарных частиц. Остается по существу открытым и вопрос о природе сил, связывающих реоны в образованном из них барионе или мезоне. После этого излишне останавливаться на том, как автор на основе «теории реонов» дает «физическое обоснование» основных положений теории кварков (не используя «чуждые ей по методике следствия из теории групп!»).

Приведенных замечаний более чем достаточно для того, чтобы убедиться в полной несостоятельности предложенной Н. С. Акуловым новой «теории» элементарных частиц. Автор, видимо, считает себя вправе не принимать во внимание самые фундаментальные положения, лежащие в основе современной физики. Он подгоняет свою «теорию» под желаемые следствия, вводя произвольные допущения, не обоснованные даже интуитивными соображениями, нарушая элементарные правила логики и последовательности рассуждений. Таким образом, предлагаемая Н. С. Акуловым «теория» лежит за рамками того, что принято называть научным исследованием.

Недавно появилась вторая статья Н. С. Акулова «О включении лептонов в систематику кварков», в которой автор дополняет и «развивает» свою теорию. Здесь нет возможности подвергнуть более или менее полному анализу то нагромождение нелепостей, какое представляет из себя цитируемая работа Н. С. Акулова. Ограничимся несколькими замечаниями, вполне характеризующими научный уровень этой статьи. В ней, в ча-

стности, утверждается, что «силы связи между реонами и антиреонами в мезонах и барионах» есть «следствие уменьшения массы гравитона, возникающего при соединении частицы с античастицей». Читателю приходится догадываться о том, что имеет в виду автор, говоря об уменьшении массы гравитона. Обычно силы связи между микрообъектами объясняются уменьшением (дефектом) массы системы, образованной из этих объектов, по сравнению с суммой их масс, взятых по отдельности. Тогда из утверждения Н. С. Акулова следует, что высокая устойчивость таких частиц, как нуклоны, обусловлена гравитационными силами (гравитоны!), которые в 10^{43} раз слабее ядерных сил. Отсюда очевидна вся ложность концепций Н. С. Акулова.

Выше уже отмечалось, что автор иногда оказывается не в ладах с правилами элементарной математики (см. следствия из формулы на стр. 152 первой статьи). Разительный пример этому мы находим и в соотношении (5) второй статьи:

$$\pi^+ \rightarrow e^+ \nu_e D \rightarrow e^+ \nu_e \tilde{\nu}_\mu + \nu_\mu,$$

полученном при предположении, что распад «барионного диполя-гравитона» (?) D идет по каналу $D \rightarrow \tilde{\nu}_\mu + \nu_\mu$. Очевидно, это соотношение следовало бы записать иначе, а именно:

$$\pi^+ \rightarrow e^+ \nu_e D \rightarrow e^+ \nu_e (\tilde{\nu}_\mu + \nu_\mu) = e^+ \nu_e \tilde{\nu}_\mu + e^+ \nu_e \nu_\mu.$$

Но тогда рушится столь существенный для «общей лептонно-реонной систематики» Н. С. Акулова вывод о том, что «активный комплекс» (?) $e^+ \nu_e \tilde{\nu}_\mu$ является μ^+ -мезоном. Кстати заметим, что в основе этой «систематики» лежат и такие допущения автора, как возможность «обращения в нуль гравитонов» (стр. 458) и т. д. и т. п.

Таким образом, вторая статья Н. С. Акулова, как и первая, является недоразумением.

Поступило в редакцию 23.IX 1966

ХРОНИКА

ПОЛЬСКИЕ УЧЕНЫЕ В БЕЛАРУССКОЙ АКАДЕМИИ НАУК

12 октября в Академии наук БССР состоялась объединенная научная сессия АН БССР, Белорусского государственного университета, Белорусского политехнического института, Белорусского общества дружбы и культурной связи с зарубежными странами, посвященная дням польской науки и техники.

В работе сессии приняли участие белорусские и польские ученые, общественные и государственные деятели, научные сотрудники, инженеры, техники.

Сессию открыл вице-президент АН БССР академик АН БССР К. И. Лукашев. Он тепло и сердечно приветствовал польских друзей и выразил им самые искренние чувства симпатии и уважения, которые белорусский народ питает к своему соседу — польскому народу.

Проходящие сейчас в Белоруссии дни науки и техники Польской Народной Республики, и в частности настоящая объединенная сессия, говорит К. И. Лукашев в заключение, явятся новым огромным стимулом в укреплении дружбы, в развитии культурного и технического сотрудничества братских народов, в расширении плодотворных научных контактов между польскими и белорусскими учеными.

От имени польских ученых и специалистов к собравшимся обратился глава делегации Тадеуш Дрызек. Он от себя лично и от всей делегации благодарил партийные и советские органы и всех присутствующих за теплый и радушный прием.

С докладом «Основные направления и узловые вопросы развития науки в Польской Народной Республике в период 1966—1970 гг.» выступил член Президиума Польской академии наук профессор Варшавского политехнического института Игнаци Маленки. Ученый остановился на развитии важнейших областей польской науки. Особенно интенсивное развитие наблюдается в области биохимии с биофизикой, генетики, микробиологии, экологии, развиваются исследования в области кибернетики и комплексной автоматизации, радиоэлектроники. Докладчик рассказал присутствующим также о принципах организации научной работы в Польше.

Заместитель председателя Комитета науки и техники при СМ ПНР, магистр-инженер Ежи Метера сделал доклад на тему «Развитие научно-технической базы в Поль-

ше». Докладчик подробно рассказал присутствующим о научных кадрах, их подготовке и росте, о научно-технической базе. Известны достижения польской научной и технической мысли, подчеркнул Ежи Метера, в области подземного плавления серы, применения лазеров, получения окиси алюминия из руд с небольшим содержанием сырья.

На тему «Научно-техническое сотрудничество Польши и Советского Союза» был сделан доклад членом Президиума Главного правления технической организации Польши профессором Альфонсом Зеленко. Ученый осветил основные стороны экономического, культурного и научно-технического сотрудничества между обеими странами, указал пути дальнейшего развития и совершенствования форм этого сотрудничества, подчеркнул роль Комитета по делам науки и техники Советского Союза и Польши, общественных и профессиональных организаций и особенно Общества польско-советской дружбы. На базе советской технической мысли и советского оборудования, как отметил профессор А. Зеленко, были созданы десятки польских ключевых предприятий.

С докладом «Белорусско-польские научные связи» выступила член-корреспондент АН БССР, доктор исторических наук, профессор Н. В. Каменская. Она подробно и обстоятельно рассказала о научных связях в области физики, биологии, химии, медицины, геологии, литературоведения, языкознания, философии, истории, археологии. Большую пользу для белорусских и польских биологов и физиологов, как отметила профессор Н. В. Каменская, принесла конференция по изучению внутренних водоемов Балтийского бассейна. Академик АН БССР А. В. Лыков принимал активное участие в работе съезда энергетиков в Польше. Хорошо налажены творческие контакты у гидробиологов Белоруссии и ПНР. Обмениваются научным опытом и ботаники. Давняя дружба и плодотворное сотрудничество связывают белорусских и польских историков, как отметил докладчик. Белорусский ученый И. С. Кравченко принимал участие в работе юбилейного собрания польских историков в честь 50-летия первой русской революции. Большой вклад в укрепление творческих связей вносят библиотеки научных учреждений Белоруссии. Библиотека АН БССР

установила контакты с 49 научными учреждениями Польши.

Закрывая заседание, академик АН БССР К. И. Лукашев горячо и сердечно поблагодарил докладчиков за интересные и обстоятельные доклады. Он высказал пожелание, чтобы боевой союз ученых и впредь развивался и крепнул на благо наших народов, на благо общего дела мира и полного торжества самых передовых и справедливых форм общественной жизни людей — социализма и коммунизма.

По окончании сессии в Президиуме АН БССР состоялась беседа с членами делегации Общества польско-советской дружбы и польских ученых. В беседе были затронуты вопросы работы Белорусской и Польской академий наук и дальнейшего развития научных контактов между ними.

Одним из мероприятий дней польской науки и техники явились научные семинары и конференции, которые были проведены в ряде институтов Академии наук БССР.

13 октября в Институте физики АН БССР был проведен научный семинар белорусских и польских ученых. Профессор Вроцлавского университета Богуслава Ежовска-Тшебятовска и доцент доктор Адам Бартецкий сделали доклад на тему «Развитие и достижения в спектроскопии Польской Народной Республики», а доктор Эмануэль Валентинович — «Исследования в области люминесценции, проводимые кафедрой экспериментальной физики имени Николая Коперника» в Торунском университете. В докладах отмечалось развитие спектроскопии в ПНР, где этой научной проблемой занимается не менее 20 научных центров.

Белорусские ученые выступили с двумя докладами: «Универсальное соотношение и молекулярная энергетика» (член-корреспондент АН БССР Н. А. Борисевич) и «Электронно-колебательные спектры хлорофиллоподобных молекул» (кандидат физико-математических наук К. Н. Соловьев). В докладах были доложены результаты новых исследований, выполненных Институтом физики АН БССР. После доклада состоялась оживленная дискуссия.

15 октября польские ученые ознакомились с работой Физико-технического института и с работой Института физико-органической химии АН БССР. На научном семинаре в Институте физико-органической химии с докладом «Физико-химические основы разделения составных органических смесей» выступил профессор доктор Анджей Былиц-

ки. Участие в семинаре и дискуссии приняли доктор Эмануэль Валентинович, магистр-инженер Ежи Метера и магистр Ежи Ауэрбах.

Академик-секретарь Отделения химических наук Н. Ф. Ермоленко дал объяснение польским гостям. Он рассказал о развитии химии в Академии наук БССР, ознакомил польских ученых с работой отдельных лабораторий.

На научной конференции в Физико-техническом институте доклад «Новые методы и устройства по обработке металлов» сделал доктор, инженер Анджей Узаревич. Магистр-инженер Юзеф Романовский из Комитета науки и техники при СМ ПНР прочитал доклад «Новые методы и оборудование для обработки металлов давлением». В беседе участвовали польские ученые профессор Альфонс Зеленко, инженер Станислав Каралов.

От белорусских ученых с докладом «Новые методы обработки металлов резанием» выступил член-корреспондент АН БССР профессор Е. Г. Коновалов. Особый интерес вызвало сообщение о работах по взрывной штамповке при производстве вагонов, цистерн и днищ аппаратов, выполняемых в ПНР. Польские ученые особенно интересовались работами по изучению точкой структуры металлов в электронном микроскопе, проводимыми в лаборатории пластичности, руководимой академиком АН БССР В. П. Северденко.

17 октября польские гости посетили атомный реактор АН БССР. Академик АН БССР А. К. Красин, В. Б. Нестеренко и др. ознакомили польских ученых с работой атомного реактора. В беседе с польской стороны принимали участие заместитель уполномоченного правительства ПНР по использованию атомной энергии магистр Ежи Ауэрбах, магистр-инженер Тадеуш Подгурский, профессор, доктор Богуслава Ежовска-Тшебятовска.

Ученые Белоруссии и Польши в дни польской науки и техники ознакомились с новейшими достижениями научной и технической мысли обеих стран, поделились опытом исследовательских работ и внедрения прогрессивных методов в производство. Дружеские встречи, беседы, научные семинары, конференции будут способствовать дальнейшему сотрудничеству ученых, научно-исследовательских учреждений и промышленных предприятий.

В. ЧЕРНИКОВА

ПЕРАЛІК АРТЫКУЛАУ, ЗМЕШЧАННЫХ У ЧАСОПІСЕ
 «ВЕСЦІ АН БССР»,
 СЕРЫЯ ФІЗІКА-МАТЭМАТЫЧНЫХ НАВУК,
 ЗА 1966 г.

	№	Стар.
Аксень М. Б., Турецкий А. Х. Наилучшие квадратурные формулы для некоторых классов функций	1	15
Багданаў А. П., Фірсаў Я. І. Методыка вымярэння γ - γ супадзенняў і вуглавых карэляцый γ -праменьняў з рэакцыі (n, γ)	2	115
Бакуто И. А. О пробое диэлектриков в изменяющемся электрическом поле	4	86
Белавусава В. І., Рудак Э. А., Фірсаў Я. І. Рэакцыя $\text{Cr}^{50} (n, \gamma) \text{Cr}^{51}$ на цеплавых нейтронах	1	128
Белоусова В. И., Рудак Э. А., Фирсов Е. И. Радиационный захват тепловых нейтронов ядром Cr^{52}	2	128
Блох А. Ш., Танаев В. С. Многооператорные процессы	2	5
Бобков В. В., Крылов В. И. Об одной вычислительной схеме метода интегральных соотношений для гиперболического уравнения	1	5
Богуш А. А., Болсун А. И. Об использовании базиса полной матричной алгебры при расчете матричных элементов векторных частиц	4	65
Богуш А. А., Болсун А. И., Мороз Л. Г. Общий расчет матричных элементов для векторных частиц с различными массами	4	120
Богуш А. А., Мороз Л. Г., Федоров Ф. И. По поводу статей Н. С. Акулова об элементарных частицах	4	130
Бокуть Б. В. Об эффекте Садовского в оптически активных изотропных средах	4	123
Болсун А. И. Поляризационные эффекты в процессе фоторождения пар W -мезонов на ядре	1	134
Болсун А. И., Федоров Ф. И. Псевдоскалярная матрица β_5 и электрический дипольный момент W -мезона	1	99
Бурдун А. А. К геометрии поля единичных временно-подобных векторов в пространстве Минковского	4	10
Бурдун А. А., Тутаев Л. К. К теории линий в пространстве Минковского с центром	4	47
Быстрова Т. Г. Характеристические температуры Дебая для ромбических кристаллов	4	78
Валодзька Л. В., Камяк А. І., Сабіла К. В., Сеўчанка А. Н., Сляпцоў Л. Е. Люмінесцэнтны і хістальныя спектры калійуранілхларыду	1	111
Вольвачев Р. Т. Неприводимый абелев нормальный делитель абсолютно неприводимой локально нильпотентной линейной группы	3	82
Ганіч П. Я., Елістратаў І. Ф., Ільч Г. К., Левін І. М., Ламаносава Т. М., Макарэвіч С. А. Апытныя характарыстыкі і параметры светлавога поля ў азэрнай вадзе	2	109
Гарашук М. С. О некоторых классах линейных групп	2	124
Годичное Общее собрание Академии наук БССР	2	134
Грачыхін Л. І., Некрашэвіч Я. І. Вымярэнне каэфіцыентаў паглынання аргону на ударнай трубе	2	91
Гронский В. К., Сацункевич И. С. Фотонный распад Ω -гиперона	2	126
Грыбкоўскі В. П. Залежнасць паглынання і люмінесцэнцыі ўласных паўправаднікоў ад інтэнсіўнасці ўзбуджальнага святла	4	95
Дыбин В. Б. Исключительный случай интегральных уравнений типа свертки	3	37
Дымент З. М. Максимальные коммутативные нильпотентные подалгебры матричной алгебры	3	53

Емеличев В. А. Регулярность конечно-определенной коммутативной полугруппы	2	23
Ермоленко И. Н., Гаврилов М. З. О методике измерения спектров диффузного отражения волокнистых целлюлозных материалов	4	126
Загорин Л. Е. О неприводимых нильпотентных группах матриц над телом вещественных кватернионов	3	77
Загорин Л. Е. О разрешимых группах матриц над телом вещественных кватернионов	2	12
Залесский А. Е. Максимальные периодические подгруппы полной линейной группы над полем положительной характеристики	2	121
Зеге Э. П., Вайтовіч С. І. Экспериментальнае даследаванне нелінейнай люмінесценцыі плоскапаралельнага слоя	2	83
Злебов Е. Д. Числа Пизо—Виджаярагхавана и основные единицы алгебраических полей	4	110
Іваніцкая В. С. Да выраджэння метрычнага тэнзара спецыяльнай тэорыі адноснасці	1	116
Іваніцкая В. С., Касцюк Н. Ф. Аб сувязі лакальнай абсалютнай адначасовасці з незуклідаваасцю геаметрыі	3	117
Іваніцкая О. С. О некоторых дифференциальных преобразованиях в общей теории относительности	4	113
Іваніцкая О. С. Предельный случай обобщенных преобразований Лоренца	2	130
Иванов А. А. Пополнения равномерных пространств	2	49
Иванов А. А. Регулярные расширения топологических пространств	1	128
Іваноў А. П., Шэрбаф І. Д. Уплыў аптычных параметраў на рассеянне вужлага пучка святла ў мутным асяроддзі	1	121
Ільіч Г. К., Бойка П. Б. Азімутальная структура адбітага святла	3	124
Лабко С. І. Камптонаўскае рассеянне палярызаванага святла на часціцы са спінам $1/2-3/2$	2	66
Лапковский А. К. О конформно-евклидовых пространствах первого класса неопределенной метрики	3	97
Лапковский А. К. О конформно-плоских пространствах первого класса неопределенной метрики	4	5
Лепешинский Н. А. К вопросу упорядочения обработки деталей	2	31
Лепешинский Н. А. Об одной задаче теории расписаний	3	90
Малдорский В. М. О достаточных признаках сходимости одного варианта метода усредненных поправок	3	46
Матюхин В. И. Максимальные разрешимые подгруппы $GL(2, Z)$	1	53
Минкевич А. В. Гравитационное поле и принцип локальной инвариантности	4	117
Монастырный П. И. Метод ортогональной прогонки в случае многоточечной задачи для систем дифференциальных уравнений	2	55
Мошинский А. В. Дифракция поля продольного дипольного излучателя на двух параллельных эллиптических цилиндрах. I. Электрический дипольный излучатель	4	37
Нгуен Конг Туй. О сходимости метода характеристик	3	5
Нгуен Конг Туй. Численное решение гиперболических уравнений и систем методом типа Рунге—Кутты. II.	1	60
Пальцев А. А. О квадратурной формуле гауссова типа для $\int_0^1 \ln \frac{1}{x} f(x) dx$	2	42
Рудак Э. А. Структура ніжніх узроўняў ядра Sc^{48} і эфектыўнае пратон-нейтронае ўзаемадзеянне ў падабалонцы $1f_{7/2}$	3	129
Рысюк Н. А. Уравнения и системы интегральных уравнений с логарифмическими ядрами	3	28
Саксонов А. И. О целочисленном кольце характеров конечной группы	3	69
Самсон А. М. Нестационарное свячэнне чатырохузроўневых генератораў святла	2	99
Сацункевіч І. С. Аб цяжкіх лептонах	2	63
Сесія Акадэміі навук БССР	3	139
Сірата М. М., Смалярэнка Э. М. Тэрмаэлектрычныя ўласцівасці сплаваў $Zn_3As_2-Cd_3As_2$	1	107
Сирота Н. Н., Бржезинский В. А., Дюков В. Г., Карацуба А. П., Коршунов Ф. П., Лезжов Ю. Ф., Чернышев А. А. Исследование влияния реакторного облучения на структуру и параметры $p-n$ -переходов в кремнии	4	106
Соколовский Т. Д. О вычислении собственных значений эрмитовой матрицы	1	50
Сотская Х. Н., Федоров Ф. И. Особые точки кривых сечения поверхностей упругих волн в кристаллах	3	107

Степанов Б. И., Грибковский В. П., Рутковский Ф. К. Влияние добротности резонатора на мощность генерируемого излучения	1	131
Степанов Б. И., Чекалинская Ю. И. Генерация составной системы из нескольких параллельно расположенных стержней	1	82
Строкаў Ю. Ф. Апытная мадэль для антынуклонядзерных сутыкненняў пры нерэлятывісцкіх энергіях	3	133
Супруненко Д. А. О примитивных разрешимых подгруппах бесконечной симметрической группы	1	46
Трэцякоў У. М. Палярызуемасць нейтрона і нейтронны камптон-эфект	4	69
Турецкий А. Х. Конечно-разностные аналоги задачи Ахиезера—Крейна и Фавара	3	10
Тутаев Л. К. О некоторых свойствах траекторий пробного заряда	4	21
Федоров Ф. И. Формула для температуры Дебая поперечно-изотропных сред	1	91
Хацкевич Р. П. К теории двумерных поверхностей в четырехмерном аффинном пространстве	4	54
Хацкевич Р. П. К теории линий в 4-мерном аффинном пространстве	2	36
Черникова В. Польские ученые в Белорусской академии наук	4	133
Шнеперман Л. Б. Неподвижная точка полугруппы преобразований и инвариантное интегрирование на бикompактной полугруппе	4	30
Шум Л. Ф. Об одном способе решения телеграфного уравнения с переменными коэффициентами	1	36
Шышкін Г. В. Аб палярызацыйных уласцівасцях мюёнаў у працэсах адваротнага μ - e -распаду	2	76
Янович Л. А. О приближении периодических аналитических функций некоторыми сингулярными интегралами	1	67
Яновский С. В. Полные уравнения типа свертки	3	23

З М Е С Т

МАТЭМАТЫКА

А. К. Лапковский. О конформно-плоских пространствах 1-го класса неопределенной метрики	5
А. А. Бурдин. К геометрии поля единичных временноподобных векторов в пространстве Минковского	10
Л. К. Тутаев. О некоторых свойствах траекторий пробного заряда	21
Л. Б. Шнеперман. Неподвижная точка полугруппы преобразований и инвариантное интегрирование на бикompактной полугруппе	30
А. В. Мошинский. Дифракция поля продольного дипольного излучателя на двух параллельных эллиптических цилиндрах. I. Электрический дипольный излучатель	37
А. А. Бурдун, Л. К. Тутаев. К теории линий в пространстве Минковского с центром	47
Р. П. Хацкевич. К теории двумерных поверхностей в четырехмерном аффинном пространстве	57

ФІЗІКА

А. А. Богуш, А. И. Болсун. Об использовании базиса полной матричной алгебры при расчете матричных элементов векторных частиц	65
У. М. Трэциякоў. Палярызуемасць нейтрона і нейтронны камптон-эфект	69
Т. Г. Быстрова. Характеристические температуры Дебая для ромбических кристаллов	78
И. А. Бакуто. О пробое диэлектриков в изменяющемся электрическом поле	86
В. П. Грыбкоўскі. Залежнасць паглынання і люмінесцэнцыі ўласных паўправаднікоў ад інтэнсіўнасці ўзбуджальнага святла	95
Н. Н. Сирота, В. А. Бржезинский, В. Г. Дюков, А. П. Карацуба, Ф. П. Коршунов, Ю. Ф. Лезжов, А. А. Чернышев. Исследование влияния реакторного облучения на структуру и параметры p - n -переходов в кремнии	106

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

Е. Д. Злебов. Числа Пизо — Виджаярагхавана и основные единицы алгебраических полей	110
О. С. Иваницкая. О некоторых дифференциальных преобразованиях в общей теории относительности	113
А. В. Минкевич. Гравитационное поле и принцип локальной инвариантности	117
А. А. Богуш, А. И. Болсун, Л. Г. Мороз. Общий расчет матричных элементов для векторных частиц с различными массами	120
Б. В. Бокуть. Об эффекте Садовского в оптически активных изотропных средах	123
И. Н. Ермоленко, М. З. Гаврилов. О методике измерения спектров диффузного отражения волокнистых целлюлозных материалов	126

ПИСЬМО В РЕДАКЦИЮ

А. А. Богуш, Л. Г. Мороз, Ф. И. Федоров. По поводу статей Н. С. Акулова об элементарных частицах	130
--	-----

ХРОНИКА

В. Черникова. Польские ученые в Белорусской академии наук	133
Пералік артыкулаў, змешчаных у часопісе «Весці АН БССР», серыя фізіка-матэматычных навук, за 1966 г.	135

СОДЕРЖАНИЕ

МАТЕМАТИКА

А. К. Лапковский. О конформно-плоских пространствах 1-го класса неопределенной метрики	5
А. А. Бурдун. К геометрии поля единичных временноподобных векторов в пространстве Минковского	10
Л. К. Тутаев. О некоторых свойствах траекторий пробного заряда	21
Л. Б. Шнеперман. Неподвижная точка полугруппы преобразований и инвариантное интегрирование на бикompактной полугруппе	30
А. В. Мошинский. Дифракция поля продольного дипольного излучателя на двух параллельных эллиптических цилиндрах. I. Электрический дипольный излучатель	37
А. А. Бурдун, Л. К. Тутаев. К теории линий в пространстве Минковского с центром	47
Р. П. Хацкевич. К теории двумерных поверхностей в четырехмерном аффинном пространстве	57

ФИЗИКА

А. А. Богуш, А. И. Болсун. Об использовании базиса полной матричной алгебры при расчете матричных элементов векторных частиц	65
В. Н. Третьяков. Полярризуемость нейтрона и нейтронный комптон-эффект	69
Т. Г. Быстрова. Характеристические температуры Дебая для ромбических кристаллов	78
И. А. Бакуто. О пробое диэлектриков в изменяющемся электрическом поле	86
В. П. Грибковский. Зависимость поглощения и люминесценции собственных полупроводников от интенсивности возбуждающего света	95
Н. Н. Сирота, В. А. Бржезинский, В. Г. Дюков, А. П. Карацуба, Ф. П. Коршунов, Ю. Ф. Лезжов, А. А. Чернышев. Исследование влияния реакторного облучения на структуру и параметры $p-n$ -переходов в кремнии	106

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

Е. Д. Злебов. Числа Пизо — Виджаярагхавана и основные единицы алгебраических полей	110
О. С. Иваницкая. О некоторых дифференциальных преобразованиях в общей теории относительности	113
А. В. Минкевич. Гравитационное поле и принцип локальной инвариантности	117
А. А. Богуш, А. И. Болсун, Л. Г. Мороз. Общий расчет матричных элементов для векторных частиц с различными массами	120
В. В. Бокуть. Об эффекте Садовского в оптически активных изотропных средах	123
И. Н. Ермоленко, М. З. Гаврилов. О методике измерения спектров диффузного отражения волокнистых целлюлозных материалов	126

ПИСЬМО В РЕДАКЦИЮ

А. А. Богуш, Л. Г. Мороз, Ф. И. Федоров. По поводу статей Н. С. Акулова об элементарных частицах	130
--	-----

ХРОНИКА

В. Черникова. Польские ученые в Белорусской академии наук	133
Перечень статей, помещенных в журнале «Известия АН БССР», серия физико-математических наук, за 1966 г.	135

Д

Е

Р

Д

Е

С

Р

Э

К

В

Н

Е

Ч

Т

Д

Н

О

М

ПОПРАВКА

В статье А. Е. Залесского «Максимальные периодические подгруппы полной линейной группы над полем положительной характеристики» («Весті АН БССР», № 2, 1966 г.) в списке литературы пропущена статья: 8. Платонов В. П. Изв. АН СССР, сер. матем., 30, № 3, 1966.

АТ 04552. Здана ў набор 24/IX-66 г. Падпісана да друку 29/XI-66 г. Фармат 70×108^{1/16}.
Фіз. друк. арк. 8,75. Ум. друк. арк. 11,98. Уч. выд. арк. 12,2. Выд. заказ 197.
Друк. заказ 902. Цана 60 кап.

Друкарня выдавецтва «Навука і тэхніка» АН БССР і Камітэта па друку пры Саўеце Міністраў БССР. Мінск, Ленінскі праспект, 63

ВНИМАНИЮ АВТОРОВ

Статьи, присылаемые авторами в наш журнал, будут приниматься редакцией к печати только при наличии двух экземпляров автореферата, удовлетворяющего указанным ниже требованиям.

ИНСТРУКЦИЯ

по составлению рефератов для авторов
отечественных периодических изданий

Постановлением Совета Министров СССР от 18/IV 1959 г. № 418 и последующим решением Государственного комитета по координации научно-исследовательских работ СССР и Президиума Академии наук СССР редакции научных и научно-технических журналов обязаны представлять в ВИНТИ рефераты публикуемых материалов.

В настоящей инструкции сформулированы требования к содержанию и оформлению рефератов, которыми и следует руководствоваться.

Требования, предъявляемые к реферату

1. В реферате кратко излагается основное содержание статьи. Реферат должен дать читателю представление о характере освещаемой работы, оригинальности постановки вопроса, методике проведения исследования и его основных результатах.

2. Реферату должно предшествовать библиографическое описание в следующем виде: название статьи, фамилия и инициалы автора, название журнала, где помещается статья. Текст реферата начинается непосредственно с изложения существа работы без повторения заголовка. Форма изложения материала не обязательно должна повторять форму изложения оригинальной статьи.

3. Если оригинал содержит большое количество цифровых данных, их следует обобщить и систематизировать.

4. Средний объем реферата 0,5—2 страницы машинописного текста, отпечатанного через два интервала на белой писчей бумаге обычного формата (30×21) в двух экземплярах с полем 4 см с левой стороны.

5. Таблицы, схемы, графики и пр. могут быть включены в том случае, если они отражают основное содержание работы или сохраняют текст реферата. Сообщение о наличии в реферируемой работе таблиц, схем, графиков, фотографий, карт, рисунков необходимо давать в конце реферата. Например, табл. 2, илл. 10.

6. Формулы приводятся только в том случае, если они необходимы для понимания статьи. Громоздкие математические выражения помещать не следует. Формулы следует вписывать четко, не изменяя принятых в оригинале обозначений величин. Формулы и буквенные обозначения вписываются черными чернилами в оба экземпляра.

7. В конце реферата в квадратных скобках указывается название учреждения или предприятия, в которых автор реферируемой работы (если эти данные приводятся в статье) провел работу. Подпись автора и дату написания реферата следует ставить в левом нижнем углу на обоих экземплярах реферата.

ПРОДОЛЖАЕТСЯ ПОДПИСКА НА 1967 ГОД

НА ЖУРНАЛ

„ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК БССР“

Серия физико-математических наук

Журнал освещает общие принципиальные вопросы развития советской науки, публикует материалы научных исследований и итоги работ институтов Академии наук БССР и других научно-исследовательских учреждений БССР в области математики (методы вычислительной математики, уравнения математической физики, алгебра и теория групп и др.), общей и теоретической физики (оптика, физика твердого тела и полупроводников, теория полей и элементарных частиц и др.). Печатает обзоры по важнейшим разделам физико-математических наук, рецензии на выходящие в СССР научные издания, а также хронику научной жизни.

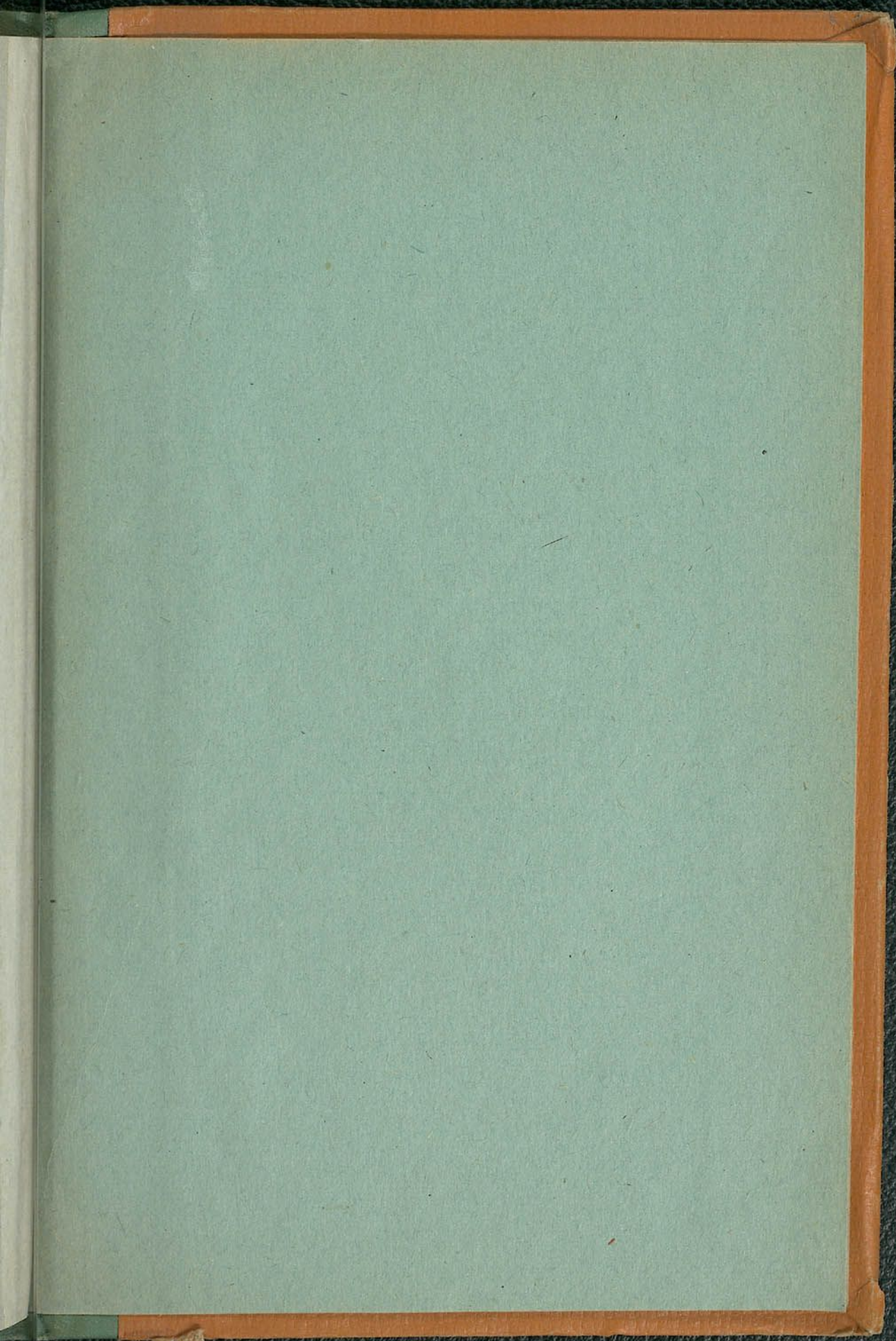
Журнал рассчитан на научных работников научно-исследовательских учреждений, преподавателей высших учебных заведений, аспирантов и студентов старших курсов вузов физико-математического профиля.

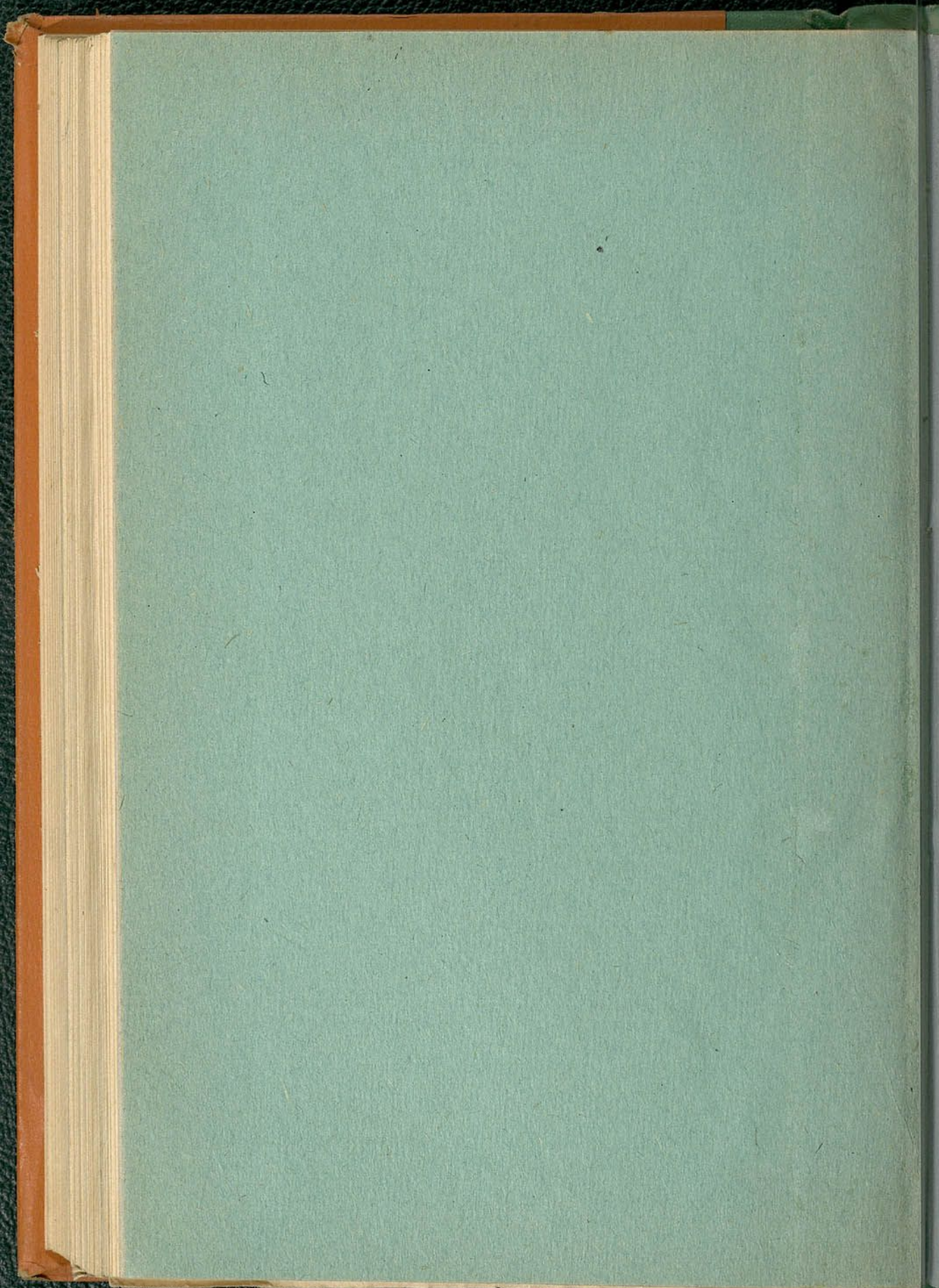
Журнал печатается на белорусском языке, статьи сопровождаются резюме на русском языке. Отдельные статьи печатаются на русском языке.

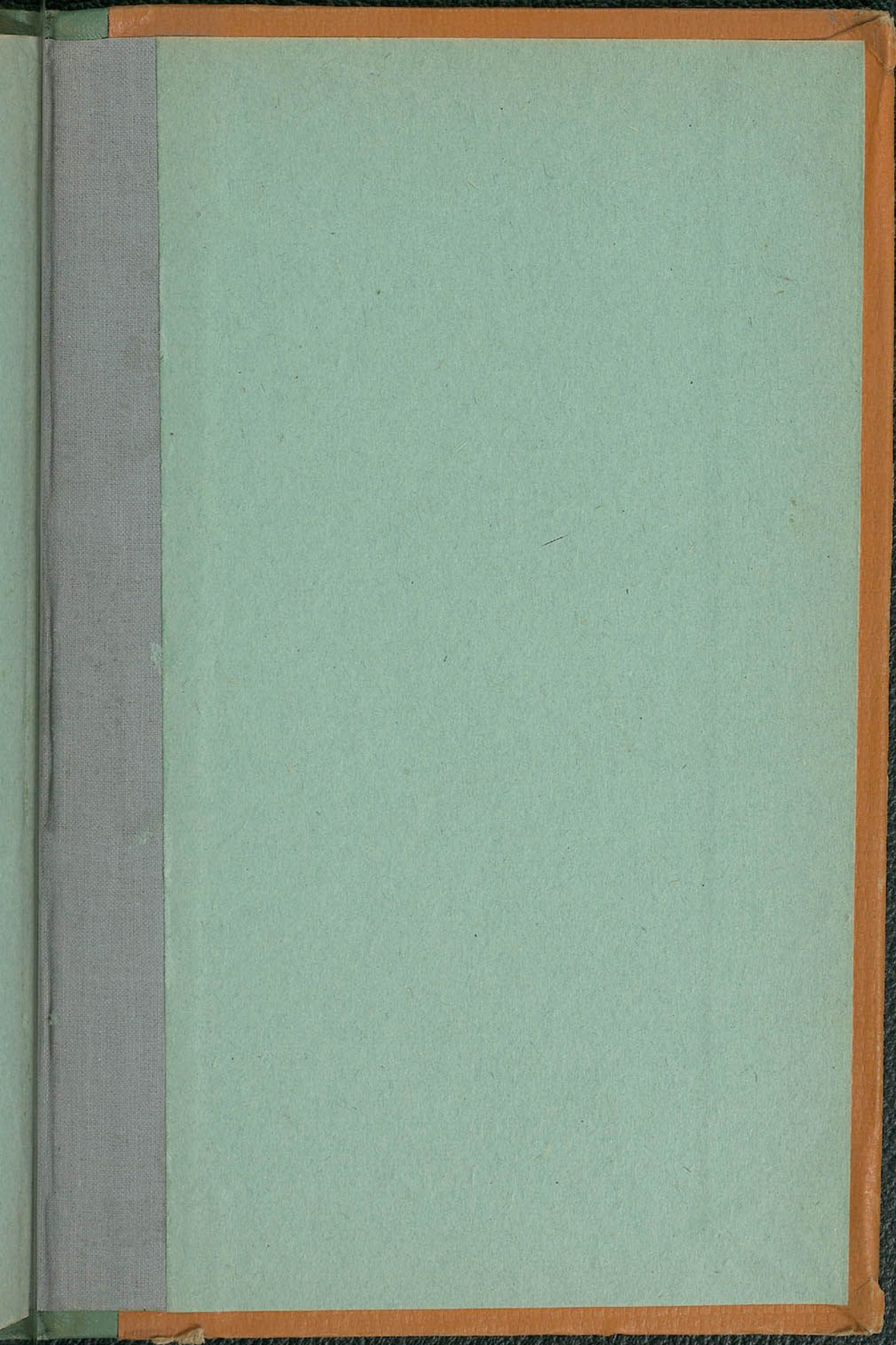
ЖУРНАЛ ВЫХОДИТ 4 РАЗА В ГОД

ПОДПИСНАЯ ЦЕНА НА ГОД 2 РУБ. 40 КОП.

Подписка принимается всеми городскими, районными отделами «Союзпечати», конторами и отделениями связи и общественными уполномоченными по подписке на предприятиях, в учебных заведениях и учреждениях.







#3H // 12726110501



8000000 1289404