

Зок 4
58

✓

ВЕСЦІ

АКАДЭМІІ НАВУК БССР

СЕРЫЯ
ФІЗІКА-МАТЭМАТЫЧНЫХ
НАВУК

26485

1

ВЫДАВЕЦТВА „НАВУНА І ТЭХНІКА“

МІНСК 1967

1917. 10. 10. 10. 10.





ИЗВЕСТИЯ

АКАДЕМИИ НАУК БССР

СЕРИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ
НАУК

№ 1

ИЗДАТЕЛЬСТВО „НАУКА И ТЕХНИКА“

МИНСК 1967

30кч
58

ВЕСЦІ

АКАДЭМІІ НАВУК БССР

2505
26785

СЕРЫЯ
ФІЗІКА-МАТЭМАТЫЧНЫХ
НАВУК

№ 1

ВЫДАВЕЦТВА „НАВУКА І ТЭХНІКА“

МІНСК 1967



РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ:

Ф. І. ФЕДАРАУ (галоўны рэдактар),
Л. Ф. ІЛЬЮШЭНКА (нам. галоўнага рэдактара),
М. М. АЛЯХНОВІЧ, А. П. ВЕРАБ'ЕУ, У. І. КРЫЛОУ,
М. М. СІРАТА, У. І. СПРЫНДЖУК, Д. А. СУПРУНЕНКА,
Я. І. ФІРСАУ, С. А. ЧУНІХІН

ВАСИЛИЙ ФЕОФИЛОВИЧ КУПРЕВИЧ

(К 70-летию со дня рождения)



24 января исполнилось 70 лет со дня рождения выдающегося советского ученого и общественного деятеля президента Академии наук Белорусской ССР академика АН БССР и члена-корреспондента АН СССР Василия Феофиловича Купревича.

Василий Феофилович Купревич родился в семье крестьянина в Смолевичском районе Минской области. После окончания сельской школы поступил учиться в Смоленское сельскохозяйственное училище, которое окончил в 1913 г. В том же году поступил во флот юнгой, а в начале первой мировой войны был зачислен в Балтийский флот. Служил на эсминце «Самсон» в качестве старшины-комендора. Принимал участие в боях с немецким флотом.

В период подготовки и проведения Великой Октябрьской социалистической революции В. Ф. Купревич в составе команды эскадренного миноносца «Самсон» принимал участие в штурме Зимнего дворца и последующих боях с врагами советской власти.

Летом 1918 г. по причине болезни В. Ф. Купревич был демобилизован и начал работать учителем на родине в начальной и затем в средней школе. Уже тогда у молодого учителя проявился большой интерес к изучению природы родного края, к разработке методов преподавания природоведения.

В 1931 г. после окончания агробиологического отделения Московского института повышения квалификации педагогов В. Ф. Купревич поступил в аспирантуру Института биологии АН БССР и для аспирантской подготовки был направлен в Ботанический институт Академии наук СССР в Ленинграде.

В 1934 г. после окончания аспирантуры и защиты диссертации на тему «К физиологии больного растения. Физиологические данные о вредоносности некоторых грибных и вирусных болезней культивируемых растений» В. Ф. Купревич вернулся в Белорусскую академию наук. Здесь он продолжил начатые ранее работы по физиологии больного растения.

С октября 1938 г. по март 1952 г. научная деятельность В. Ф. Купревича протекала в Ботаническом институте АН СССР в Ленинграде. В 1941 г. В. Ф. Купревич защитил докторскую диссертацию. В годы Великой Отечественной войны, в тяжелых условиях блокады Ленинграда, Василий Феофилович Купревич не прекращал научно-исследовательской работы.

В 1952 г. общим собранием академиков АН БССР В. Ф. Купревич был избран президентом Академии наук Белорусской ССР.

Василий Феофилович проявил себя крупным исследователем в трех областях: микологии, физиологии растений и почвенной энзимологии.

Работы В. Ф. Купревича обеспечили успешное развитие чрезвычайно интересных в теоретическом и практическом отношении направлений — физиологии грибов-паразитов и физиологии пораженного ими растения и почвенной энзимологии. Итоги четырнадцатилетних его работ и наблюдений в этом направлении изложены в монографии «Физиология больного растения в связи с общими вопросами паразитизма» (1947). В монографии обобщен и критически переработан накопленный фактический материал по вопросам физиологии больного растения.

Помимо изучения болезней растений, вызванных паразитными организмами, В. Ф. Купревич занимался изучением физиологических (функциональных) болезней, характеризующихся глубоким нарушением естественного хода физиологических процессов в результате воздействия таких факторов, как температура, свет, вода, элементы минерального питания и т. д.

Исследованиями Василия Феофиловича была доказана способность растения усваивать углекислоту корневой системой из почвенного раствора (1940). Это коренным образом противоречило сложившимся в науке представлениям, что растения в процессе фотосинтеза могут усваивать углекислоту только листьями из воздуха. Это открытие послужило импульсом для ряда работ других советских ученых, по-новому поставило ряд вопросов не только в области фотосинтеза, но и в чисто практической области применения минеральных, органических удобрений и известкования почвы.

Большую практическую ценность представляет «Определитель паразитных грибов по питающим растениям флоры БССР (Паразиты злаков)», написанный им в соавторстве с другими исследователями (1938).

В работе В. Ф. Купревича «Распространенность и вредоносность вирусных болезней картофеля в БССР и меры борьбы с ними» обобщены материалы обследования посадок картофеля в 38 районах Белоруссии.

В 1940 г. вышла работа В. Ф. Купревича «О происхождении и эволюции паразитизма у грибов». В ней показано, что основные биологические свойства грибов, как например способ питания и характер воздействия на субстрат, определяются составом и характером ферментного аппарата, в связи с чем решение проблемы паразитизма надо искать в адаптивных изменениях ферментного аппарата.

В 1966 г. вышла из печати книга В. Ф. Купревича «Почвенная энзимология», в которой изложены результаты многолетних исследований ферментативной активности почвы.

В 1954 г. вышел в свет определитель «Болезни клевера и люцерны», а в 1957 г. был опубликован I том обширной монографии В. Ф. Купревича «Ржавчинные грибы СССР», написанной совместно с В. Г. Траншелем.

Научные работы В. Ф. Купревича широко известны не только в Советском Союзе, но и за его пределами.

В 1954 г. Василий Феофилович выступал в качестве докладчика на Международном ботаническом конгрессе в Париже, где руководил одной из экспедиционных групп участников конгресса, посетивших Центральную Африку.

В 1955 г. Василий Феофилович руководил правительственной делегацией БССР на Международной конференции по мирному использованию атомной энергии (в Женеве) и был избран в число председателей биологической и сельскохозяйственной секций этой конференции.

В 1958—1960 гг. Василий Феофилович в составе парламентской группы посетил Англию, Бельгию, Бразилию.

В честь В. Ф. Купревича ботаниками И. Т. Васильченко, П. Н. Головиним и другими названы новые формы цветковых растений с южных склонов Гисарского хребта и новые виды грибов.

Наряду с научно-исследовательской деятельностью В. Ф. Купревич все время проводил большую педагогическую работу. Он читал лекции в Военно-медицинской академии, Гомельском государственном педагогическом институте, Таджикском сельскохозяйственном институте.

В. Ф. Купревич руководит Лабораторией физиологии и систематики низших растений АН БССР, является председателем Редакционно-издательского совета АН БССР, главным редактором всесоюзного журнала «Микология и фитопатология» и журнала «Доклады АН БССР».

Василий Феофилович Купревич является не только крупным ученым, но и прекрасным организатором. Начав работу в 1938 г. в Ботаническом институте АН СССР в Ленинграде в должности старшего научного сотрудника, он вскоре назначается заведующим лабораторией, а в 1949 г. директором этого крупнейшего в системе АН СССР научного учреждения биологического профиля.

В 1952 г. Василий Феофилович избирается академиком Академии наук Белорусской ССР и одновременно президентом, в 1953 г. членом-корреспондентом АН СССР. Работая руководителем научных исследований АН БССР, он сразу завоевал авторитет и признание научной общественности республики. В работе на этом посту Василий Феофилович Купревич умело сочетал в себе талант ученого, государственного деятеля и организатора. Лучшей оценкой его работы является и то, что на протяжении 15 лет он является бессменным президентом АН БССР. В 1964 г. общее собрание академиков АН БССР в четвертый раз оказало ему свое доверие, избрав на пост президента.

Показателем деятельности Василия Феофиловича Купревича на посту президента являются определенные достижения в работе Академии. С 1952 г. и до настоящего времени число научных учреждений Академии

наук БССР увеличилось в два раза, а численность научного персонала — более чем в четыре раза. Число академиков и членов-корреспондентов увеличилось в 1,8 раза, докторов наук в 1,4 раза и кандидатов наук почти в 5 раз. Общий персонал Академии со всеми вспомогательными учреждениями к настоящему времени достиг 5,5 тыс. человек. За этот период были вновь организованы и выросли до уровня крупнейших научных учреждений страны Институт тепло- и массообмена, Институт ядерной энергетики, Институт физики, институты математики, физики твердого тела и полупроводников, технической кибернетики, генетики и цитологии и др. Этим было положено начало высокоэффективным исследованиям в различных областях точных наук, в том числе и в области спектрографии, квантовых генераторов, теплообмена, ядерной энергетики, технической кибернетики и т. д.

При некоторых институтах АН БССР были организованы и начали издаваться журналы союзного значения: «Инженерно-физический журнал», «Журнал прикладной спектроскопии», «Дифференциальные уравнения».

Таким образом, Академия наук БССР за последние годы стала крупным научным центром как в республике, так и в СССР и получила высокую оценку со стороны специальной комиссии АН СССР, проводившей во главе с президентом Академии наук СССР М. В. Келдышем обследование работы АН БССР. Во всем этом большая заслуга президента АН БССР Василия Феофиловича Купревича.

Деятельность В. Ф. Купревича не ограничивается только работой на посту президента. Еще работая в Ленинграде в Ботаническом институте АН СССР, он в 1950—1962 гг. избирается депутатом Петроградского райсовета депутатов трудящихся и, начиная с 1951 г., депутатом Верховного Совета БССР многих созывов, а затем и депутатом Верховного Совета СССР. Василий Феофилович Купревич неоднократно избирался и в настоящее время является членом Центрального Комитета Коммунистической партии Белоруссии.

Правительство Советского Союза высоко оценило деятельность Василия Феофиловича Купревича, наградив его орденами Ленина, Трудового Красного Знамени, «Знак почета», медалями «За оборону Ленинграда», «За доблестный труд в Великой Отечественной войне 1941—1945 гг.» и др.

Редколлегия

А. Г. ГОРЕЛИК

О ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ИНТЕРПРЕТАЦИИ ОДНОЙ ТРЕХЗНАЧНОЙ АЛГЕБРЫ

При алгоритмизации многих задач часто бывает необходимо провести сложный анализ формы геометрических объектов. Однако классические методы математического анализа непосредственно неприменимы для описания объектов сложной структуры. Между тем при определении геометрических характеристик машиностроительных деталей, при определении пересечения деталей, для определения эквидистанты, в задачах оптимального раскроя возникает необходимость составлять уравнения семейства кусочно-гладких поверхностей.

В настоящей работе для описания геометрических объектов используется формальный аппарат трехзначной алгебры.

Целесообразность использования трехзначной алгебры вытекает из необходимости различать три положения точки относительно геометрического объекта: точка является внутренней точкой множества D (все внутренние точки множества образуют открытое множество Q_1), точка расположена на границе множества (множество всех граничных точек образует множество Q_2), точка является внешней относительно множества \bar{D} (все внешние точки образуют открытое множество Q_3). При этом, очевидно, $Q_1 \cap Q_2 \cap Q_3 = \Lambda$ (Λ — пустое множество).

1. Рассмотрим следующую трехзначную алгебру.

Значения всех трехзначных функций, а также их аргументов определим на множестве $Q^3 = \{-1, 0, 1\}$.

Введем в рассмотрение логические операции дизъюнкции (обозначение V_3), конъюнкции (обозначение Λ_3) и отрицания (обозначение \sim , проставляется над знаком логической переменной). В качестве основных функций трехзначного исчисления рассмотрим функции $x_1 \Lambda_3 x_2$, $x_1 V_3 x_2$, \bar{x} , определяемые матрицами:

x_1	x_2	$x_1 \Lambda_3 x_2$	x_1	x_2	$x_1 V_3 x_2$	x	\bar{x}
-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	1
-1	0	-1	-1	0	0	0	0
-1	1	-1	-1	1	1	1	-1
0	-1	-1	0	-1	0		
0	0	0	0	0	0		
0	1	0	0	1	1		
1	-1	-1	1	-1	1		
1	0	0	1	0	1		
1	1	1	1	1	1		

Выбор значений трехзначных функций и их аргументов на множестве $Q^3 = \{-1, 0, 1\}$ допускает особенно простую арифметическую разрешающую процедуру.

Для указанного соответствия значений функций и их аргументов имеют место следующие свойства:

$$\tilde{x} = -x; \quad (1.1)$$

$$\tilde{\tilde{x}} = x \quad (1.2)$$

закон снятия двойного отрицания;

$$x_1 \wedge_3 x_2 = x_2 \wedge_3 x_1, \quad (1.3)$$

$$x_1 \vee_3 x_2 = x_2 \vee_3 x_1 \quad (1.4)$$

законы коммутативности;

$$x_1 \wedge_3 x_2 = \min(x_1, x_2); \quad (1.5)$$

$$x_1 \vee_3 x_2 = \max(x_1, x_2); \quad (1.6)$$

$$x_1 \wedge_3 (x_2 \wedge_3 x_3) = (x_1 \wedge_3 x_2) \wedge_3 x_3, \quad (1.7)$$

$$x_1 \vee_3 (x_2 \vee_3 x_3) = (x_1 \vee_3 x_2) \vee_3 x_3 \quad (1.8)$$

законы ассоциативности;

$$x_1 \wedge_3 (x_2 \vee_3 x_3) = (x_1 \wedge_3 x_2) \vee_3 (x_1 \wedge_3 x_3) \quad (1.9)$$

первый дистрибутивный закон;

$$x_1 \vee_3 (x_2 \wedge_3 x_3) = (x_1 \vee_3 x_2) \wedge_3 (x_1 \vee_3 x_3) \quad (1.10)$$

второй дистрибутивный закон;

$$\overbrace{x_1 \wedge_3 x_2} = \tilde{x}_1 \vee_3 \tilde{x}_2, \quad (1.11)$$

$$\overbrace{x_1 \vee_3 x_2} = \tilde{x}_1 \wedge_3 \tilde{x}_2 \quad (1.12)$$

аналог правил де Моргана для трехзначной алгебры.

$$x \wedge_3 1 = x; \quad (1.13)$$

$$x \wedge_3 -1 = -x; \quad (1.14)$$

$$x \vee_3 1 = 1; \quad (1.15)$$

$$x \vee_3 -1 = x; \quad (1.16)$$

$$x \wedge_3 x = x, \quad (1.17)$$

$$x \vee_3 x = x \quad (1.18)$$

законы идемпотентности;

$$x_1 \vee_3 (x_1 \wedge_3 x_2) = x_1, \quad (1.19)$$

$$x_1 \wedge_3 (x_1 \vee_3 x_2) = x_1 \quad (1.20)$$

законы поглощения.

Указанное трехзначное исчисление, определенное на множестве $Q^3 = \{-1, 0, 1\}$, полностью описывается также системой функций

$$f_1(x_1, x_2) = \min(x_1, x_2), \quad f_2(x_1, x_2) = \max(x_1, x_2), \quad f_3(x) = -x. \quad (1.21)$$

Приведенные здесь логические операции, определяемые формулами \tilde{x} , $x_1 \vee_3 x_2$, $x_1 \wedge_3 x_2$, совпадают соответственно с сильными в смысле Клини

операциями \bar{Q} , $Q \vee R$, $Q \wedge R$ [1]. Чтобы убедиться в этом, достаточно в [1] принять $t = 1$, $f = -1$, $u = 0$, где t , f , u — значения истинности переменных Q и R . При этом содержательное трехзначное исчисление Клини строится на основе формализации соотношений «истина» (t), «ложь» (f), «неопределенно» (u).

Одновременно следует отметить, что система функций (1.21) не является функционально полной, ибо она целиком содержится в одном из семнадцати предполных классов, а именно в классе $T_{3,1}^3$ [2].

Доказательство функциональной неполноты системы функций (1.21) вытекает также из функциональной неполноты логики Лукасевича. Действительно, исчисление Клини и трехзначная логика Лукасевича функционально эквивалентны [3], а система функций \bar{x} , $x_1 \wedge_3 x_2$, $x_1 \vee_3 x_2$ содержится в исчислении Клини.

2. Пусть D — множество в n -мерном пространстве и существует функция $\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n)$ такая, что $\varphi > 0$ во всех внутренних точках множества D , $\varphi = 0$ во всех граничных точках и $\varphi < 0$ во всех внешних точках множества D . Тогда, очевидно, для произвольной точки $M(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ функция $\text{sign } \varphi(M) = 1$ во всех внутренних точках множества D , $\text{sign } \varphi(M) = 0$ на границе множества D и $\text{sign } \varphi(M) = -1$ во всех внешних точках множества D . Принадлежность точки $M(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ множеству D будем определять значением S -функции, принимающей три значения:

$$S[D(M)] = \text{sign } \varphi(M). \quad (2.1)$$

Теорема 1. Пусть D_1 и D_2 — множества в n -мерном пространстве и существуют функции $\varphi_1(x_1, x_2, \dots, x_n)$ и $\varphi_2(x_1, x_2, \dots, x_n)$ такие, что принадлежность точки M множествам D_1 и D_2 определяется соответственно значениями функций $\text{sign } \varphi_1(M)$ и $\text{sign } \varphi_2(M)$. Пусть также известно, что M принадлежит границе множества D ($D = D_1 \cap D_2$), если M является граничной точкой каждого из множеств D_1 и D_2 . Тогда для пересечения множеств D_1 и D_2 справедливо равенство

$$S[D(M)] = \text{sign } \varphi_1(M) \wedge_3 \text{sign } \varphi_2(M).$$

Доказательство. Пусть $S[D(M)] = 1$. Тогда, согласно определению S -функции, точка M является внутренней точкой множества D . Так как $D = D_1 \cap D_2$, то M является также внутренней точкой каждого из множеств D_1 и D_2 . Следовательно, $\text{sign } \varphi_1(M) = 1$ и $\text{sign } \varphi_2(M) = 1$. Отсюда $\text{sign } \varphi_1(M) \wedge_3 \text{sign } \varphi_2(M) = 1$. Пусть теперь $S[D(M)] = -1$. Тогда, согласно определению S -функции, точка M является внешней точкой множества D . Покажем, что в этом случае точка M является внешней точкой по крайней мере одного из множеств D_1 или D_2 .

Пусть, напротив, $\text{sign } \varphi_1(M) \neq -1$ и $\text{sign } \varphi_2(M) \neq -1$. Тогда точка M принадлежит замыканию множества D_1 и замыканию множества D_2 . Так как $S[D(M)] = -1$, то, согласно приведенному в условии теоремы ограничению, точка M не может быть граничной точкой множеств D_1 и D_2 одновременно. Тогда остается рассмотреть следующие два случая:

1) Точка M является внутренней точкой множеств D_1 и D_2 . Тогда, очевидно, точка M является внутренней точкой множества D , что противоречит условию.

2) Точка M является внутренней точкой одного множества и граничной точкой другого множества. Тогда, очевидно, точка M является граничной точкой пересечения этих множеств, что также противоречит условию.

Следовательно, точка M является внешней точкой по крайней мере одного из множеств D_1 или D_2 . Тогда по крайней мере $\varphi_1(M) < 0$ или $\varphi_2(M) < 0$. Отсюда вытекает, что

$$\text{sign } \varphi_1(M) \wedge_3 \text{sign } \varphi_2(M) = -1.$$

Пусть, наконец, $S[D(M)] = 0$. Тогда, согласно определению S -функции, точка M является граничной точкой множества D . Так как $D = D_1 \cap D_2$, то точка M не может быть внешней точкой ни одного из множеств D_1 или D_2 . Точка M не может быть также внутренней точкой каждого из множеств D_1 и D_2 . Следовательно, остается предположить, что M является граничной точкой по крайней мере одного из множеств D_1 или D_2 (пусть это будет, например, множество D_1) и граничной или внутренней точкой другого множества (пусть это будет, например, множество D_2). Следовательно, $\varphi_1(M) = 0$ и $\varphi_2(M) \geq 0$. Тогда из определения операции конъюнкции вытекает, что

$$\text{sign } \varphi_1(M) \wedge_3 \text{sign } \varphi_2(M) = 0.$$

Обратное. Пусть $\text{sign } \varphi_1(M) \wedge_3 \text{sign } \varphi_2(M) = 1$. Тогда $\text{sign } \varphi_1(M) = 1$ и $\text{sign } \varphi_2(M) = 1$. Следовательно, точка M является внутренней точкой множеств D_1 и D_2 . Отсюда вытекает, что M является внутренней точкой множества D и $S[D(M)] = 1$.

Пусть теперь $\text{sign } \varphi_1(M) \wedge_3 \text{sign } \varphi_2(M) = -1$. Тогда по крайней мере $\text{sign } \varphi_1(M) = -1$ или $\text{sign } \varphi_2(M) = -1$. Следовательно, точка M является внешней точкой по крайней мере одного из множеств D_1 или D_2 . Отсюда вытекает, что M является внешней точкой пересечения множеств D_1 и D_2 и $S[D(M)] = -1$.

Пусть, наконец, $\text{sign } \varphi_1(M) \wedge_3 \text{sign } \varphi_2(M) = 0$. Тогда $\text{sign } \varphi_1(M) \neq -1$ и $\text{sign } \varphi_2(M) \neq -1$ и по крайней мере $\text{sign } \varphi_1(M) = 0$ или $\text{sign } \varphi_2(M) = 0$. Следовательно, точка M является граничной точкой по крайней мере одного из множеств D_1 или D_2 и граничной или внутренней точкой другого множества. По условию теоремы, если M является граничной точкой множеств D_1 и D_2 , то она является граничной точкой множества D . Если M является граничной точкой одного множества и внутренней точкой другого множества, то M является граничной точкой пересечения этих множеств. Следовательно, $S[D(M)] = 0$. Теорема доказана.

Если из условий теоремы 1 исключить приведенное в ней ограничение, то может оказаться, что M является внешней точкой множества D , т. е. $S[D(M)] = -1$, и в то же время для пересечения множеств D_1 и D_2 ($D = D_1 \cap D_2$) будет иметь место равенство $\text{sign } \varphi_1(M) \wedge_3 \text{sign } \varphi_2(M) = 0$. Для этого достаточно, например, чтобы множества D_1 и D_2 были открытыми и определялись соответственно неравенствами

$$\varphi_1(x_1, x_2, \dots, x_n) > 0, \quad \varphi_2(x_1, x_2, \dots, x_n) > 0$$

такими, что

$$\varphi_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \equiv -\varphi_2(x_1, x_2, \dots, x_n),$$

и чтобы в точке M выполнялось $\varphi_1(M) = \varphi_2(M) = 0$.

Теорема 2. Пусть D_1 и D_2 — множества в n -мерном пространстве и существуют функции $\varphi_1(x_1, x_2, \dots, x_n)$ и $\varphi_2(x_1, x_2, \dots, x_n)$ такие, что принадлежность точки $M(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ множествам D_1 и D_2 определяется соответственно значениями функций $\text{sign } \varphi_1(M)$ и $\text{sign } \varphi_2(M)$. Пусть также известно, что M принадлежит границе множества D ($D = D_1 \cup D_2$), если M является граничной точкой каждого из множеств D_1 и D_2 . Тогда для объединения множеств D_1 и D_2 справедливо равенство

$$S[D(M)] = \text{sign } \varphi_1(M) \vee_3 \text{sign } \varphi_2(M).$$

Теорема доказывается аналогично доказательству теоремы 1.

Если из условий теоремы 2 исключить приведенное в ней ограничение, то может оказаться, что M является внутренней точкой множества D , т. е. $S[D(M)] = 1$, и в то же время для объединения множеств D_1 и D_2 ($D = D_1 \cup D_2$) будет иметь место равенство $\text{sign } \varphi_1(M) \vee_3 \text{sign } \varphi_2(M) = 0$. Для этого достаточно, например, чтобы множества D_1 и D_2 были замкнутыми и определялись соответственно неравенствами

$$\varphi_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq 0, \quad \varphi_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq 0$$

такими, что

$$\varphi_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \equiv -\varphi_2(x_1, x_2, \dots, x_n),$$

и чтобы в точке M выполнялось $\varphi_1(M) = \varphi_2(M) = 0$.

Теорема 3. Пусть Q — множество в n -мерном пространстве и существует функция $\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n)$ такая, что принадлежность точки M множеству Q определяется значением функции $\text{sign } \varphi(M)$. Тогда если множество Q является дополнением множества D ($D = \bar{Q}$), то принадлежность точки M множеству D определяется значением функции

$$S[D(M)] = \text{sign} [-\varphi(M)].$$

Теорема доказывается аналогично доказательству теорем 1, 2 путем перебора всех возможных значений функций.

Отметим некоторые свойства S -функций, большинство из которых приводится здесь без доказательства:

$$S(\bar{D}) \sim \overline{S(D)}, \quad (2.2)$$

$$S(D) \wedge_3 1 \sim S(D), \quad (2.3)$$

$$S(D) \wedge_3 -1 \equiv -1, \quad (2.4)$$

$$S(D) \vee_3 1 \equiv 1, \quad (2.5)$$

$$S(D) \vee_3 -1 \sim S(D), \quad (2.6)$$

$$S[k\varphi(x_1, x_2, \dots, x_m)] \sim S[\varphi(x_1, x_2, \dots, x_m)] \text{ при } k > 0, \quad (2.7)$$

$$S[k\varphi(x_1, x_2, \dots, x_m)] \sim S[-\varphi(x_1, x_2, \dots, x_m)] \text{ при } k < 0. \quad (2.8)$$

Если выполняется ограничение, приведенное в условии теоремы 1, то имеют место следующие свойства:

$$S(D_1 \cap D_2) \sim S(D_1) \wedge_3 S(D_2), \quad (2.9)$$

$$\overline{S(D_1) \vee_3 S(D_2)} \sim \overline{S(D_1)} \wedge_3 \overline{S(D_2)}, \quad (2.10)$$

$$S[D_1 \cup (D_2 \cap D_3)] \sim S(D_1 \cup D_2) \wedge_3 S(D_1 \cup D_3). \quad (2.11)$$

При выполнении ограничения, приведенного в условии теоремы 2, имеют место следующие свойства:

$$S(D_1 \cup D_2) \sim S(D_1) \vee_3 S(D_2), \quad (2.12)$$

$$\overline{S(D_1) \wedge_3 S(D_2)} \sim \overline{S(D_1)} \vee_3 \overline{S(D_2)}, \quad (2.13)$$

$$S[D_1 \cap (D_2 \cup D_3)] \sim S(D_1 \cap D_2) \vee_3 S(D_1 \cap D_3). \quad (2.14)$$

Пусть теперь множество D задано теоретико-множественным описанием

$$D = F(D_1, D_2, \dots, D_m), \quad (2.15)$$

используя операции пересечения, объединения, дополнения, и пусть в этом описании фиксирована одна из возможных последовательностей выполнения операций. Операнты, над которыми должна выполняться операция пересечения (объединения), будем называть совместными оперантами операции пересечения (объединения). Совместные операнты в свою очередь могут представлять собой теоретико-множественные описания произвольной сложности. Пусть, например, $Q = Q_1 \cap (Q_2 \cup Q_3) \cap Q_4$ и выбрана следующая последовательность выполнения операций:

$$D_1 = Q_2 \cup Q_3, \quad D_2 = Q_1 \cap D_1, \quad Q = D_2 \cap Q_4.$$

Тогда операнты Q_2 и Q_3 называются совместными оперантами операции объединения, а операнты Q_1 , D_1 и операнты D_2 , Q_4 называются совместными оперантами операции пересечения.

Будем говорить, что выражение (2.15) задано в корректной форме, если в (2.15) можно указать по крайней мере одну такую последовательность выполнения операций, при которой для каждой пары совместных оперантов операции пересечения выполняется ограничение, приведенное в условии теоремы 1, а для каждой пары совместных оперантов операции объединения выполняется ограничение, приведенное в условии теоремы 2. В противном случае будем говорить, что выражение (2.15) задано в некорректной форме.

Теорема 4. Пусть D_1, D_2, \dots, D_m — множества в n -мерном пространстве и существуют функции $\varphi_1(x_1, x_2, \dots, x_n), \varphi_2(x_1, x_2, \dots, x_n), \dots, \varphi_m(x_1, x_2, \dots, x_n)$ такие, что принадлежность точки $M(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ множествам D_1, D_2, \dots, D_m определяется соответственно значениями функций $\text{sign } \varphi_1(M), \text{sign } \varphi_2(M), \dots, \text{sign } \varphi_m(M)$. Пусть также множество D определяется функцией (2.15), заданной в корректной форме. Тогда, если в выражении (2.15) произвести формальную замену D_i на φ_i , $i = 1, 2, \dots, m$, знаков пересечения, объединения и дополнения соответственно знаками конъюнкции, дизъюнкции и отрицания трехзначного исчисления, то принадлежность точки M множеству D будет определяться значением функции

$$S[D(M)] = F[\text{sign } \varphi_1(M), \text{sign } \varphi_2(M), \dots, \text{sign } \varphi_m(M)]. \quad (2.16)$$

Доказательство. Так как выражение (2.15) имеет корректную форму, то существует такая последовательность выполнения операций, при которой для каждой пары совместных оперантов операции пересечения выполняется ограничение, приведенное в условии теоремы 1, а для каждой пары совместных оперантов операции объединения выполняется ограничение, приведенное в условии теоремы 2. Поэтому, чтобы получить выражение (2.16), для указанной последовательности выполнения операций достаточно воспользоваться результатами теорем 1, 2, 3, свойствами (2.10), (2.13) и операцией суперпозиции. Так как система функций $\bar{x}, x_1 \wedge_3 x_2, x_1 \vee_3 x_2$ функционально непротиворечива, то любая последовательность выполнения операций (определяемая как и в булевой алгебре) приведет к одинаковому результату.

Теорема доказана.

Рассмотрим операции конъюнкции (обозначение \wedge_3), дизъюнкции (обозначение \vee_3) и отрицания (обозначение $\bar{}$) алгебры непрерывной логики [4], которые определяются следующим образом:

$$a \wedge_3 b = \min(a, b), \quad a \vee_3 b = \max(a, b), \quad \bar{a} = -a.$$

Легко показать справедливость следующих равенств:

$$\begin{aligned} \text{sign } a \wedge_3 \text{sign } b &= \text{sign } (a \wedge_3 b), \\ \text{sign } a \vee_3 \text{sign } b &= \text{sign } (a \vee_3 b), \\ \text{sign } \bar{a} &= \text{sign } (-a). \end{aligned} \quad (2.17)$$

Теорема 4а. Пусть имеют место все условия теоремы 4. Тогда если в выражении (2.15) произвести формальную замену D_i на Φ_i , $i = 1, 2, \dots, t$, знаков пересечения, объединения и дополнения соответственно знаками конъюнкции, дизъюнкции и отрицания алгебры непрерывной логики, то принадлежность точки M множеству D будет определяться значением функции

$$S[D(M)] = \text{sign} \{ F[\Phi_1(M), \Phi_2(M), \dots, \Phi_m(M)] \}. \quad (2.18)$$

Для доказательства теоремы достаточно воспользоваться результатами теоремы 4 и равенствами (2.17).

Пример. Пусть Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 — множества на плоскости XOY , определяемые соответственно неравенствами

$$1 - x^2 - y^2 \geq 0, \quad 1 - y \geq 0, \quad y - x + 1 \geq 0, \quad -x \geq 0,$$

и пусть множество Q (рисунок) определяется функцией

$$Q = ((Q_2 \cap \bar{Q}_4) \cup Q_1) \cap Q_3. \quad (2.19)$$

Результаты теорем 4, 4а могут быть применены к выражению (2.19) для всех точек плоскости XOY .

Воспользуемся выражением (2.18) и определим принадлежность точки $M_1(-1, 0)$ множеству Q :

$$S[Q(M)] = \text{sign} [((-y + 1) \wedge_3 x) \vee_3 -x^2 - y^2 + 1] \wedge_3 y - x + 1],$$

$$S[Q(M_1)] = \text{sign} [(1 \wedge_3 -1) \vee_3 0] \wedge_3 2 = 0.$$

Точка $M_2(3, 0)$ является внешней точкой множества Q , так как

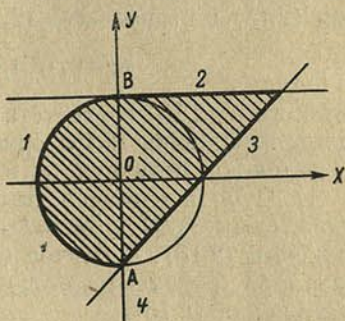
$$S[Q(M_2)] = \text{sign} [(1 \wedge_3 3) \vee_3 -8] \wedge_3 -2 = -1.$$

Пусть теперь множество Q (рисунок) определяется функцией

$$Q = (Q_1 \cap Q_4) \cup (Q_2 \cap Q_3 \cap \bar{Q}_4). \quad (2.20)$$

Результаты теорем 4, 4а могут быть применены к выражению (2.20) во всех точках плоскости XOY , за исключением точек интервала AB . Формальным образом результаты теорем 4, 4а могут быть применены к выражению (2.20) во всех точках плоскости XOY , за исключением точек сегмента AB .

Чтобы воспользоваться результатами теорем 4, 4а, необходимо предварительно провести сложный содержательный анализ корректности исходного теоретико-множественного описания. В связи с этим представляет интерес выделить те случаи, когда нет необходимости исследовать корректность исходного теоретико-множественного описания.



Множества Q , определяемые функциями (2.19) (1—4—границы Q_1 — Q_4)

Введем ограничение на последовательность выполнения операций при вычислении значения правой части выражения (2.16): запрещается выполнять операции конъюнкции и дизъюнкции над двумя нулями.

Покажем, что при таком ограничении всегда существует такая последовательность выполнения операций, при которой в результате вычисления значений правой части выражения (2.16) получается окончательный результат $(1, 0, -1)$, либо правая часть выражения (2.16) приведется к такому виду, что она будет состоять из одних нулей (не менее двух).

Воспользуемся результатами теорем 1, 2, 3, свойствами (2.10), (2.13) и операцией суперпозиции и совершим формальный переход от выражения (2.15) к выражению (2.16). Все предикатные переменные

$$\text{sign } \varphi_1(M), \text{ sign } \varphi_2(M), \dots, \text{ sign } \varphi_m(M)$$

заменим в (2.16) соответствующими им значениями. Анализируя правую часть выражения (2.16) слева направо, находим первую входящую в него величину, отличную от нуля. Возможны следующие случаи:

1) Первая величина, отличная от нуля, равна 1. Тогда воспользуемся свойствами $S(D) \Lambda_3 1 \sim S(D)$, $S(D) V_3 1 \equiv 1$ и упростим правую часть выражения (2.16). В случае необходимости предварительно выполняется операция трехзначного отрицания. Затем вновь возвращаемся к анализу выражения (2.16).

2) Первая величина, отличная от нуля, равна -1 . Тогда упростим правую часть выражения (2.16), воспользовавшись свойствами $S(D) \Lambda_3 -1 \equiv -1$, $S(D) V_3 -1 \sim S(D)$, и вновь вернемся к анализу выражения (2.16). В случае необходимости предварительно выполняется операция трехзначного отрицания.

Таким образом, проделав указанные выше тождественные преобразования, либо получим окончательный результат, либо после преобразования правая часть выражения (2.16) будет состоять из одних нулей (не менее двух).

Трехзначное исчисление с введенным ограничением на последовательность выполнения операций будем называть ограниченным трехзначным исчислением.

Пусть, например, после вычисления значений предикатных переменных правая часть выражения (2.16) имеет вид

$$\overbrace{((0 V_3 0) V_3 1) \Lambda_3 0 \Lambda_3 0 \Lambda_3 - 1} V_3 0.$$

Значение этого выражения в ограниченном трехзначном исчислении вычисляется в следующей последовательности:

$$\begin{aligned} & \overbrace{((0 V_3 0) V_3 1) \Lambda_3 0 \Lambda_3 0 \Lambda_3 - 1} V_3 0 \rightarrow \\ & \rightarrow (1 \Lambda_3 0 \Lambda_3 0 \Lambda_3 - 1) V_3 0 \rightarrow (0 \Lambda_3 0 \Lambda_3 - 1) V_3 0 \rightarrow \\ & \rightarrow (0 \Lambda_3 - 1) V_3 0 \rightarrow -1 V_3 0 \rightarrow 0. \end{aligned}$$

При вычислении значения выражения $\overbrace{((0 V_3 0) \Lambda_3 1) V_3 - 1}$ окончательный результат не получается:

$$\begin{aligned} & \overbrace{((0 V_3 0) \Lambda_3 1) V_3 - 1} \rightarrow \overbrace{(0 V_3 0) V_3 - 1} \rightarrow \\ & \rightarrow \overbrace{0 V_3 0} \rightarrow 0 \Lambda_3 0. \end{aligned}$$

Теорема 5. Пусть имеют место все условия теоремы 4, за исключением требования корректности выражения (2.15). Тогда, если в результате вычисления значения правой части выражения (2.16) в ограниченном трехзначном исчислении получается окончательный результат, то равенство (2.16) справедливо.

Для доказательства теоремы достаточно воспользоваться свойствами (2.2) — (2.6), (2.10), (2.13).

Если в алгебре непрерывной логики рассмотреть ограниченное исчисление, аналогичное ограниченному трехзначному исчислению, то будут справедливы результаты, аналогичные тем, которые получены в теореме 5.

Литература

1. Клини С. К. Введение в метаматематику. М., ИЛ, 1957.
2. Яблонский С. В. Труды математического института им. В. А. Стеклова. Изд-во АН СССР, 51, 1958.
3. Шестаков В. И. Успехи математических наук, 19, в. 2, 1964.
4. Entress G. Wissenschaftliche Zeitschrift der technischen Hochschule Ilmenau, 10, Heft 1/2, 1964.

Институт технической кибернетики
АН БССР

Поступило в редакцию 20.X 1965

Н. А. ЛЕПЕШИНСКИЙ

О КЛАССИФИКАЦИИ $2 \times n$ ЗАДАЧ ДЖОНСОНА—БЕЛЛМАНА

Пусть на двух станках по одному и тому же технологическому маршруту (1, 2) должны быть обработаны n деталей. Предполагается, что ни одна деталь не может одновременно обрабатываться более чем одним станком и что ни один станок не может одновременно обрабатывать более чем одну деталь. Известно время обработки каждой детали на каждом станке t_{ij} ($i=1, 2, \dots, n; j=1, 2$). Пусть t_{ij} — положительные рациональные числа. Ниже будем называть их параметрами задачи $2 \times n$.

Известно ([1], стр. 191—194 из [2]), что по крайней мере одно оптимальное расписание, т. е. порядок запуска деталей в обработку, обеспечивающий минимум времени, затраченного на обработку всех n деталей, можно определить на основании правила: деталь k идет в оптимальном расписании впереди детали l , если

$$\min(t_{k1}, t_{l2}) \leq \min(t_{l1}, t_{k2}). \quad (1)$$

Напомним алгоритм Джонсона — Беллмана, вытекающий из этого правила.

1) Записать значения t_{ij} в двух вертикальных колонках: в i -ю строку записываются значения t_{i1} и t_{i2} . Подготовить строку k_0 , состоящую из n свободных мест, для записи оптимальной перестановки.

2) Отыскать в построенной таблице наименьшее значение. В случае нескольких минимальных элементов для определенности выбирать значение с меньшим номером i . Когда $t_{i1} = t_{i2}$ и наименьшие, выбирать значение t_{i1} .

3) Если наименьшим значением окажется одно из t_{i1} , поставить номер соответствующей детали на первое свободное место в строке k_0 . Если это t_{i2} , номер i ставится на последнее свободное место в строке k_0 .

4) Вычеркнуть значения t_{i1}, t_{i2} из таблицы и возвратиться к этапу 2, если число оставшихся строк больше единицы. Если осталась одна невычеркнутая строка, то номер соответствующей детали записывается на оставшееся место в k_0 и задача решена.

З а м е ч а н и е. С помощью приведенного алгоритма для данной задачи не всегда можно найти все оптимальные расписания. Ниже будет идти речь только об оптимальных расписаниях, найденных при помощи алгоритма Джонсона—Беллмана (для сокращения записи: о. р. Д. Б.).

1. Пусть Ω — совокупность всевозможных задач $2 \times n$ Джонсона — Беллмана. Для любой задачи $\omega \in \Omega$ упорядочим $2n$ позиций $[i, j]$, полагая $[i, j] \leq [k, l]$, если $t_{ij} \leq t_{kl}$. Полученную цепь позиций выйдем в строку, причем группы равных между собой позиций выйдем в круглые скобки. Скажем, что задача ω определяет слово $p(\omega)$, буквами которого являются или отдельные позиции $[i, j]$, если они не расположены в круглых скобках, или набор позиций в круглых скобках независимо от порядка их записи. Два слова равны между собой, если они состоят из одинаковых букв, записанных в одинаковом порядке.

Для двух задач $\omega', \omega'' \in \Omega$ введем отношение \sim такое, что $\omega' \sim \omega''$ тогда и только тогда, когда $p(\omega') = p(\omega'')$.

Очевидно, отношение \sim является отношением эквивалентности ([3], стр. 16—19) и, следовательно, определяет разбиение множества Ω на классы

$$\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_{\tau(n)}. \tag{2}$$

Любой из этих классов Ω_ν можно задать канонической $2 \times n$ задачей, матрица (t_{ij}^0) которой строится следующим образом. Пусть $\omega \in \Omega_\nu$. Занумеруем буквы слова $p(\omega)$ по порядку номеров, начиная с 1. Положим теперь t_{ij}^0 равным тому номеру, с каким буква, содержащая позицию $[i, j]$, входит в слово. Ясно, что если буква есть набор позиций в круглых скобках, то значения $t_{\alpha\beta}^0$, соответствующие этим позициям, равны между собой.

Теорема 1. Задачи $2 \times n$, принадлежащие одному классу Ω_ν , имеют одно и то же о. р. Д. Б.

Действительно, для двух задач $\omega', \omega'' \in \Omega_\nu$ с матрицами (t'_{ij}) и (t''_{ij}) соответственно неравенства типа (1)

$$\begin{aligned} \min(t'_{k_1}, t'_{l_2}) &\leq \min(t'_{l_1}, t'_{k_2}) \\ \min(t''_{k_1}, t''_{l_2}) &\leq \min(t''_{l_1}, t''_{k_2}) \end{aligned}$$

выполняются одновременно для любых k и l .

Из теоремы 1 вытекает, в частности, что о. р. Д. Б. для какой-то задачи ω не изменяется при изменении любого параметра $t_{\alpha\beta}$ в интервале, концами которого являются значения параметров, соответствующих левой и правой соседним для $[\alpha, \beta]$ позициям в слове $p(\omega)$.

Утверждение, обратное теореме 1, неверно. (Например, из-за того, что число классов разбиения (2) больше, чем число всевозможных оптимальных расписаний).

2. Рассмотрим второе разбиение множества Ω . Пусть $\omega \in \Omega$ — какая-либо задача и $p(\omega)$ — определяемое ею слово. При построении о. р. Д. Б. для задачи ω подчеркнем в слове $p(\omega)$ $n - 1$ позиций, которые соответствуют найденным на этапе 2 алгоритма Джонсона — Беллмана наименьшим значениям. Образует слово $s(\omega)$, выписывая в строку подчеркнутые позиции по порядку их расположения в слове $p(\omega)$. Для двух задач $\omega', \omega'' \in \Omega$ введем отношение \approx такое, что $\omega' \approx \omega''$ тогда и только тогда, когда $s(\omega') = s(\omega'')$. Этим самым определено разбиение Ω на классы

$$\Omega_1^*, \Omega_2^*, \dots, \Omega_{\psi(n)}^*. \tag{3}$$

Все задачи, относящиеся к одному классу, порождают одно и то же слово $s(\omega)$. С другой стороны, буквы слова $s(\omega)$ и порядок их расположения однозначно определяют о. р. Д. Б. по построению. Таким образом, имеет место

Теорема 2. Задачи $2 \times n$, принадлежащие одному классу Ω_δ^* , имеют одно и то же о. р. Д. Б.

Следствием этой теоремы является вывод о возможностях изменения некоторых параметров данной задачи ω без влияния на о. р. Д. Б. Именно слово $s(\omega)$ задается величиной и порядком расположения $n - 1$ параметров, которые можно назвать ведущими. Обозначим их

$$t_{\alpha_1\beta_1}, t_{\alpha_2\beta_2}, \dots, t_{\alpha_{n-1}\beta_{n-1}}.$$

26786



Каждому ведущему параметру $t_{\alpha_i \beta_i}$ соответствует параметр $t_{\alpha_i(3-\beta_i)}$. (Напомним, что второй индекс принимает только одно из двух значений $\beta_i = 1, 2$). Кроме того, имеется еще два параметра $t_{\alpha_n 1}, t_{\alpha_n 2}$. Очевидно, что слово $s(\omega)$, а вместе с ним и о.р.Д.Б. (по теореме 2) остается тем же самым при любом изменении параметров $t_{\alpha_1(3-\beta_1)}, \dots, t_{\alpha_{n-1}(3-\beta_{n-1})}, t_{\alpha_n 1}, t_{\alpha_n 2}$, удовлетворяющем условиям

$$t_{\alpha_i(3-\beta_i)} > t_{\alpha_i \beta_i} \text{ для всех } i = 1, 2, \dots, n-1, \\ \min(t_{\alpha_n 1}, t_{\alpha_n 2}) > \max(t_{\alpha_1 \beta_1}, \dots, t_{\alpha_{n-1} \beta_{n-1}}).$$

Рассмотрим вопрос о связи между разбиениями (2) и (3). Ясно, что две любые задачи из одного класса разбиения (2) принадлежат одному классу разбиения (3). С другой стороны, задачи, относящиеся к различным классам разбиения (2), могут порождать одно и то же слово $s(\omega)$ и поэтому принадлежать одному классу разбиения (3). Таким образом, каждый класс разбиения (3) является объединением нескольких классов разбиения (2).

Пусть задана произвольная перестановка $k_0 = \{k_{01}, k_{02}, \dots, k_{0n}\}$ чисел $1, 2, \dots, n$. В разбиении (3) существует несколько классов, объединяющих задачи, о.р.Д.Б. которых задается перестановкой k_0 . Вычислим число l таких классов.

Теорема 3. Число классов разбиения (3), для которых произвольная перестановка $k_0 = \{k_{01}, k_{02}, \dots, k_{0n}\}$ является о.р.Д.Б., равно $l = 2^{n-1}$.

Для доказательства этого утверждения подсчитаем, сколько различных слов $s(\omega)$ соответствует о.р.Д.Б., заданному перестановкой k_0 . По построению каждое слово $s(\omega)$ состоит из $n-1$ позиций. Так как о.р.Д.Б. задано перестановкой k_0 , то при выполнении этапов 2 и 3 алгоритма Джонсона—Беллмана в первый раз в строке k_0 на первом свободном месте должен быть поставлен номер детали k_{01} или на последнем свободном месте k_{0n} . Следовательно, в слове $s(\omega)$ первой должна идти или позиция $[k_{01}, 1]$, или позиция $[k_{0n}, 2]$. При выполнении этапов 2 и 3 алгоритма во второй раз в зависимости от результата первого шага появляются следующие возможности. Если был определен номер k_{01} , то на первом свободном месте в строке k_0 должен быть поставлен номер детали k_{02} или на последнем свободном месте k_{0n} . Если же был определен номер k_{0n} , то на первом свободном месте должен быть поставлен номер детали k_{01} или на последнем свободном месте k_{0n-1} . Соответственно в слове $s(\omega)$ после позиции $[k_{01}, 1]$ второй должна идти или позиция $[k_{02}, 1]$, или $[k_{0n}, 2]$, а после позиции $[k_{0n}, 2]$ должна идти или $[k_{01}, 1]$, или $[k_{0n-1}, 2]$. Проводя последовательно рассуждения до $n-1$ шага алгоритма включительно, получим, что о.р.Д.Б., заданному перестановкой k_0 , соответствует 2^{n-1} различных слов $s(\omega)$. Например, пусть о.р.Д.Б. для некоторых 2×4 задач определяется перестановкой $k_0 = \{4, 1, 3, 2\}$. Тогда перестановке k_0 соответствуют следующие слова:

$$s_1 = \{[4,1], [1,1], [3,1]\}, \quad s_2 = \{[4,1], [1,1], [2,2]\}, \\ s_3 = \{[4,1], [2,2], [1,1]\}, \quad s_4 = \{[4,1], [2,2], [3,2]\}, \\ s_5 = \{[2,2], [4,1], [1,1]\}, \quad s_6 = \{[2,2], [4,1], [3,2]\}, \\ s_7 = \{[2,2], [3,2], [4,1]\}, \quad s_8 = \{[2,2], [3,2], [1,2]\}$$

и только они.

Следствие. Число классов разбиения (3)

$$\psi(n) = n! \cdot 2^{n-1}.$$

Это утверждение вытекает из теоремы 3, если учесть, что там рассматривалась произвольная перестановка k_0 и что число всевозможных перестановок равно $n!$.

3°. Пусть K — множество всех перестановок чисел $1, 2, \dots, n$. Для любой задачи $\omega \in \Omega$ и произвольной перестановки $k = \{k_1, k_2, \dots, k_n\} \in K$ вычислим величину

$$T_{\omega}(k) = \max_{1 \leq u < n} \left(\sum_{\mu=1}^u t_{k_{\mu}1} + \sum_{\mu=u}^n t_{k_{\mu}2} \right), \quad (4)$$

которая определяет для задачи ω общее затраченное время на обработку всех деталей при расписании, задаваемом перестановкой k . (Формула (4) вытекает, например, из исследований, проведенных в [1]).

На множестве K аналогично [4] определим частичный порядок $-\prec$, положив для любых $k, l \in K$:

$$\left. \begin{aligned} k -\prec l &\Leftrightarrow T_{\omega}(k) < T_{\omega}(l), \\ k \parallel l &\Leftrightarrow T_{\omega}(k) = T_{\omega}(l), \quad k \neq l, \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

где $k \parallel l$ означает, что k и l несравнимы.

Таким образом, каждой задаче $\omega \in K$ отвечает по формулам (4) и (5) некоторый частичный порядок на множестве K .

Для двух задач $\omega', \omega'' \in \Omega$ введем бинарное отношение \equiv такое, что $\omega' \equiv \omega''$ тогда и только тогда, когда $T_{\omega'}$ и $T_{\omega''}$ задают один и тот же частичный порядок на K . Это отношение — отношение эквивалентности на множестве Ω . Следовательно, получено еще одно разбиение множества Ω на классы

$$\Omega_1^0, \Omega_2^0, \dots, \Omega_{\sigma(n)}^0. \quad (6)$$

Представляется интересным найти критерий, с помощью которого можно было бы установить, принадлежат ли две данные задачи одному классу разбиения (6).

Отметим, что разбиения (2) и (6) не совпадают. Именно задачи, принадлежащие одному классу Ω_{γ} разбиения (2), не всегда индуцируют на множестве K одинаковый частичный порядок, задаваемый формулами (4), (5). Например, пусть 2×3 задача ω' задана значениями параметров

$$t_{11} = 2, \quad t_{12} = 5, \quad t_{21} = 9, \quad t_{22} = 9, \quad t_{31} = 2, \quad t_{32} = 1,$$

а задача ω'' —

$$t_{11} = 2, \quad t_{12} = 3, \quad t_{21} = 4, \quad t_{22} = 4, \quad t_{31} = 2, \quad t_{32} = 1.$$

Нетрудно видеть, что ω' и ω'' относятся к одному классу Ω_{γ} разбиения (2). С другой стороны, вычисления по формулам (4) и (5) показывают, что задачи относятся к различным классам разбиения (6).

Автор выражает благодарность Д. А. Супруненко за обсуждение и ценные советы.

Литература

1. Johnson S. M. Naval Research Logistics Quarterly, 1, № 1, 1954.
2. Беллман Р., Дрейфус С. Прикладные задачи динамического программирования. Изд. «Наука», М., 1965.
3. Курош А. Г. Лекции по общей алгебре. Физматгиз, М., 1962.
4. Супруненко Д. А. Кибернетика, № 2, 1968.

А. К. ЛАПКОВСКИЙ

О СТРОЕНИИ ГИПЕРПОВЕРХНОСТИ ПСЕВДОЕВКЛИДОВА ПРОСТРАНСТВА

А. Г. Костюченко [3] и В. И. Ведерников [4,5] доказали теорему: гиперповерхность евклидова пространства E_{n+1} является огибающей $(n-m)$ -параметрического семейства гиперсфер тогда и только тогда, когда имеется m равных главных кривизн.

В настоящей статье выясняются некоторые условия, при которых отмеченная теорема верна и для псевдоевклидова пространства E_{n+1} . При этом оказывается, что m -мерные сферы, являющиеся характеристиками, будут изотропны, если среди элементарных делителей, соответствующих равным кривизнам, есть кратные.

Далее это предложение применяется для геометрической характеристики 4-мерных римановых пространств индекса Минковского класса один, принадлежащих к первому и второму типу в классификации А. З. Петрова [6].

§ 1. Если пространство E_{n+1} отнесено к семейству ортонормированных реперов (A, e_1, \dots, e_{n+1}) , то формы связности этого семейства ω^i, ω^k_L ($L, K = 1, \dots, n+1$) удовлетворяют так называемым уравнениям структуры пространства E_{n+1} ([10], стр. 138):

$$D\omega^i = [\omega^L \omega^i_L], D\omega^k_L = [\omega^i_L \omega^k_L], L = 1, \dots, n+1. \quad (1)$$

Гиперповерхность, оснащенную ортонормированными реперами, векторы (e_1, \dots, e_n) которых принадлежат касательной плоскости, а вектор e_{n+1} нормален к ней, можно задать уравнением Пфаффа

$$\omega^{n+1} = 0. \quad (2)$$

Внешнее дифференцирование уравнения (2) с применением леммы Картана дает

$$\omega_i^{n+1} = \Lambda_{ij} \omega^j, \quad i, j = 1, 2, \dots, n,$$

где Λ_{ij} — симметрический двухвалентный тензор относительно локальных псевдоортогональных преобразований в касательной плоскости W_n , так называемый второй фундаментальный тензор гиперповерхности. Главные направления тензора Λ_{ij} : λ_{h1}^i задаются соотношениями

$$(\Lambda_{ij} - \lambda_h q_{ij}) \lambda_{h1}^j = 0, \quad (3)$$

где λ_h — корни уравнения $|\Lambda_{ij} - \lambda_h g_{ij}| = 0$, называемые главными кривизнами гиперповерхности W_n [7]. Линии, касательные к которым имеют главные направления, являются линиями кривизны.

Если λ_{h1}^i есть неизотропный вектор в главном направлении с собственным значением λ , то, выбирая смещение δA коллинеарным λ_{h1}^i , имеем

$$\Lambda_{ij} \omega^j / \sqrt{\sum_k \varepsilon_k (\omega^k(\delta))^2} = \varepsilon_i \lambda \omega^i(\delta) / \sqrt{\sum_k \varepsilon_k (\omega^k(\delta))^2}$$

(по i нет суммирования), откуда

$$\omega_i^{n+1}(\delta) = \varepsilon_i \lambda \omega^i(\delta). \quad (4)$$

Для изотропного главного направления равенство (4) также выполняется. Легко видеть, что верно и обратное: если для некоторого направления $\delta \mathbf{A}$ выполняется (4), то $\delta \mathbf{A}$ определяет главное направление.

Из равенств (4) следует

Теорема 1. *Для того чтобы направление $\delta \mathbf{A} = \omega^i(\delta) \mathbf{e}_i$ было главным на гиперповерхности для некоторого значения λ , необходимо и достаточно выполнения*

$$\tau \delta \mathbf{e}_{n+1} + \lambda \delta \mathbf{A} = 0, \quad \tau = \mathbf{e}_{n+1}^2 = \pm 1. \quad (5)$$

Для гиперповерхности в собственно евклидовом пространстве формула (5) носит название формулы Родрига.

§ 2. Рассмотрим строение гиперповерхности в случае наличия равных главных кривизн. Предварительно докажем несколько лемм.

Лемма 1. *Если среди элементарных делителей λ -матрицы (3), имеющих одинаковый базис с собственным корнем λ , имеется два простых и $\mathbf{I}_1, \mathbf{I}_2$ — векторы отвечающих им главных направлений, то*

$$d\lambda = (x d_1 + y d_2) \lambda = 0, \quad (6)$$

где d_1, d_2 означает знак дифференцирования в направлении векторов $\mathbf{I}_1, \mathbf{I}_2$, а x, y — произвольные постоянные.

Доказательство. Выбираем векторы $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ ортонормированного базиса направленными по векторам $\mathbf{I}_1, \mathbf{I}_2$. Внешнее дифференцирование системы $\omega_i^{n+1} = \Lambda_{ij} \omega^j$ дает $[\Omega_{ij} \omega^i] = 0$, где $\Omega_{[ij]} = 0$, причем:

$$\Omega_{11} = \varepsilon_1 d\lambda = \Lambda_{11i} \omega^i, \quad (7)$$

$$\Omega_{22} = \varepsilon_2 d\lambda = \Lambda_{22i} \omega^i, \quad (8)$$

$$\Omega_{12} = 0 = \Lambda_{12i} \omega^i. \quad (9)$$

Компоненты Λ_{ijk} являются компонентами второго продолженного объекта [2].

Так как

$$d_1 \rightarrow (\omega^1, 0, \dots, 0); \quad d_2 \rightarrow (0, \omega^2, 0, \dots, 0),$$

то надо доказать, что:

$$\Lambda_{111} = 0; \quad \Lambda_{222} = 0; \quad \Lambda_{112} = 0; \quad \Lambda_{221} = 0. \quad (10)$$

Равенства (10₃) и (10₄) непосредственно следуют из

$$\Lambda_{12i} = 0; \quad (9')$$

(10₁) и (10₂) следуют из (9') и условий

$$\varepsilon_1 \Lambda_{11i} = \varepsilon_2 \Lambda_{22i},$$

вытекающих на основании соотношения

$$\varepsilon_1 \Omega_{11} = \varepsilon_2 \Omega_{22}.$$

Лемма 2. *Если в касательной плоскости гиперповерхности содержится неоднородная площадка главных направлений, соответствующая собственному значению λ , в которой имеется по крайней мере одно направление неизотропное и хотя бы одно изотропное, то для дифференцирования δ вдоль изотропного направления имеем*

$$\delta \lambda = 0.$$

Доказательство. Нам достаточно рассмотреть случай, когда изотропному направлению соответствует кратный элементарный дели-

$$\begin{array}{c}
 m = 2k + 1 \\
 \left\| \begin{array}{cccccccc}
 \lambda & \frac{1}{2} & & & & & -\frac{1}{2} & 0 \\
 \frac{1}{2} & & & & & & & \frac{1}{2} \\
 & & \dots & & & & & \\
 & & & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & & \\
 & & & \frac{1}{2} & \lambda & \varepsilon & 0 & \frac{1}{2} \\
 & & & & \varepsilon & \varepsilon\lambda & \varepsilon & \\
 & & & -\frac{1}{2} & 0 & \varepsilon & -\lambda & -\frac{1}{2} \\
 & & & & \frac{1}{2} & & -\frac{1}{2} & \\
 & & & & & \dots & & \\
 -\frac{1}{2} & & & & & & & -\frac{1}{2} \\
 0 & \frac{1}{2} & & & & & & -\frac{1}{2} & -\lambda
 \end{array} \right\|
 \end{array} \quad (11')$$

Вектор $\mathbf{I} = \kappa(\mathbf{e}_{p_1} - \mathbf{e}_{p_m})$ определит главное направление. Система Пфаффа, определяющая изотропную линию кривизны с касательным вектором \mathbf{I} , имеет вид

$$\omega^a = 0, \quad \omega^{p_1} + \omega^{p_m} = 0, \quad a \neq p_1, p_m.$$

Таким образом, нам нужно доказать, что в разложении

$$\varepsilon_{i_0} d\lambda = \Lambda_{i_0 i_0 I} \omega^I, \quad I = 1, \dots, n,$$

имеет место

$$\Lambda_{i_0 i_0 p_1} = \Lambda_{i_0 i_0 p_m}. \quad (12)$$

Для этого рассмотрим симметричные формы $\Omega_{i_0 p_1}$, $\Omega_{i_0 p_m}$ из продолжения

$$[\Omega_{IK} \omega^K] = 0, \quad I = 1, \dots, n,$$

системы

$$\omega_i^{p+1} = \Lambda_{ij} \omega^j.$$

Непосредственным вычислением убеждаемся, что

$$\Omega_{i_0 p_1} = \Omega_{i_0 p_m} = -\frac{1}{2} (\omega_{i_0}^{p_2} + \omega_{i_0}^{p_m-1}).$$

Отсюда следует: $\Lambda_{i_0 p_1 i_0} = \Lambda_{i_0 p_m i_0}$, что равносильно (12) в силу симметрии компонент Λ_{IKL} ($K, L = 1, \dots, n$).

Лемма 3. Если среди t ($t > 1$) элементарных делителей λ -матрицы (3), имеющих одинаковый базис с собственным корнем λ , нет таких, кратность которых больше двух, то для любого вектора x из соответствующей площадки главных направлений имеет место

$$\delta_x \lambda = 0,$$

где, как обычно, δ_x означает дифференцирование вдоль вектора x .

Доказательство. Отметим прежде всего, что если все элементарные делители λ -матрицы (3) простые, то требуемое выполняется в силу

леммы 1. Остается предположить, что существуют двукратные элементарные делители.

Для доказательства леммы нам, во-первых, надо показать, что если имеется простой элементарный делитель с собственным вектором e_i (его мы включаем в ортонормированный базис), то

$$\delta_i \lambda = 0.$$

Во-вторых, если

$$I_\alpha = (e_{p_\alpha} - e_{q_\alpha}), I_\beta = (e_{p_\beta} - e_{q_\beta}), q_\alpha = p_\alpha + 1, q_\beta = p_\beta + 1$$

два изотропных главных направления, соответствующие двукратным элементарным делителям (с номерами α и β), то

$$\delta \lambda = (x \delta_\alpha + y \delta_\beta) \lambda = 0.$$

Специализируем ортонормированный репер таким образом, чтобы матрица $\|\Lambda_{ij}\|$ приняла вид

$$\left\| \begin{array}{ccccccc} * & 0 & * & 0 & * & 0 & * \\ 0 & \varepsilon_i \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & 0 & * & 0 & * & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & \begin{array}{c} \varepsilon_\alpha (\lambda + 1) \quad \varepsilon_\alpha \\ \varepsilon_\alpha - \varepsilon (\lambda - 1) \end{array} & 0 & 0 & 0 \\ * & 0 & * & 0 & * & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \begin{array}{c} \varepsilon_\beta (\lambda + 1) \quad \varepsilon_\beta \\ \varepsilon_\beta - \varepsilon_\beta (\lambda - 1) \end{array} & 0 \\ * & 0 & * & 0 & * & 0 & * \end{array} \right\|$$

Возможность такой специализации следует из работы [9].

Всегда можно считать, не ограничивая общности доказательства, что

$$\varepsilon_{p_\alpha} = -\varepsilon_{q_\alpha} = \varepsilon_{p_\beta} = -\varepsilon_{q_\beta} = -1.$$

В системе ковариант $[\Omega_{jk} \omega^k] = 0$ ($j, k = 1, \dots, n$) для уравнений Пфаффа $\omega_j^{n+1} = \Lambda_{jk} \omega^k$ имеем следующие равенства:

$$\begin{aligned} \Omega_{ii} &= \varepsilon_i d \lambda, \\ \Omega_{p_\alpha p_\alpha} &= -d \lambda + 2\omega_{p_\alpha}^{q_\alpha}, \quad \Omega_{p_\beta p_\beta} = -d \lambda + 2\omega_{p_\beta}^{q_\beta}, \\ \Omega_{p_\alpha q_\alpha} &= 2\omega_{p_\alpha}^{q_\alpha}, \quad \Omega_{p_\beta q_\beta} = 2\omega_{p_\beta}^{q_\beta}, \\ \Omega_{q_\alpha q_\alpha} &= d \lambda + 2\omega_{p_\beta}^{q_\beta}, \quad \Omega_{q_\beta q_\beta} = d \lambda + 2\omega_{p_\beta}^{q_\beta}. \end{aligned} \tag{13}$$

Формы Ω_{JK} не независимы, а именно:

$$\varepsilon_i \Omega_{ii} = -\Omega_{p_\alpha p_\alpha} + \Omega_{p_\alpha q_\alpha} = -\Omega_{q_\alpha q_\alpha} - \Omega_{p_\alpha q_\alpha},$$

что дает условия на компоненты Λ_{IKL} :

$$\Lambda_{iii} = \Lambda_{p_\alpha q_\alpha^i} - \Lambda_{p_\alpha p_\alpha^i} = \Lambda_{p_\alpha q_\alpha^i} - \Lambda_{q_\alpha q_\alpha^i}$$

Но

$$\Lambda_{ip_\alpha p_\alpha} = \Lambda_{ip_\alpha q_\alpha} = \Lambda_{iq_\alpha q_\alpha},$$

если заметить, что

$$\Omega_{ip_\alpha} = \Omega_{iq_\alpha} = \omega_{iq_\alpha} - \omega_{ip_\alpha}.$$

Таким образом, получаем

$$\Lambda_{iii} = 0,$$

откуда следует первое утверждение.

Из выражения

$$-d\lambda = \Omega_{p_\alpha p_\alpha} - \Omega_{p_\alpha q_\alpha} = -\Omega_{q_\alpha q_\alpha} + \Omega_{p_\alpha q_\alpha}$$

видно, что для доказательства второго требования необходимо показать выполнимость условий

$$\Lambda_{p_\alpha p_\alpha p_\delta} - \Lambda_{p_\alpha q_\alpha p_\delta} = \Lambda_{p_\alpha p_\alpha q_\delta} - \Lambda_{p_\alpha q_\alpha q_\delta}, \quad \delta = \alpha, \beta. \quad (14)$$

Но неравенство (14) для $\delta = \alpha$ следует из зависимости

$$\Omega_{p_\alpha p_\alpha} + \Omega_{q_\alpha q_\alpha} = 2\Omega_{p_\alpha q_\alpha},$$

получаемой из (13), а для $\delta = \beta$ — из соотношений

$$\Omega_{p_\alpha q_\beta} + \Omega_{p_\beta q_\alpha} = 2\Omega_{q_\alpha q_\beta} = 2\Omega_{p_\alpha p_\beta},$$

которые выполняются на основании равенств:

$$\Omega_{p_\alpha p_\beta} = \omega_{p_\alpha q_\beta} + \omega_{p_\beta q_\alpha},$$

$$\Omega_{p_\alpha q_\beta} = \omega_{q_\alpha q_\beta} + 2\omega_{p_\alpha q_\beta} - \omega_{p_\alpha p_\beta},$$

$$\Omega_{p_\beta q_\alpha} = \omega_{q_\alpha q_\beta} + 2\omega_{p_\beta q_\alpha} + \omega_{p_\alpha p_\beta},$$

$$\Omega_{q_\alpha q_\beta} = \omega_{p_\alpha q_\beta} - \omega_{q_\alpha q_\beta}.$$

В силу предыдущих лемм с учетом обобщенного соотношения Родрига можем сделать выводы о геометрическом строении гиперповерхностей с равными базисами элементарных делителей. Имеет место основная

Теорема. Если для гиперповерхности W_n с t ($1 < t \leq n$) элементарными делителями, имеющими одинаковый базис, выполняется одно из двух условий:

1) в данной совокупности элементарных делителей содержится по крайней мере два простых или

2) если кратность каждого из t элементарных делителей не превышает двух,

то гиперповерхность расслаивается на $(n-t)$ -параметрическое семейство t -мерных сфер. Эти t -мерные сферы изотропны, если среди указанных t элементарных делителей имеется по крайней мере один кратный.

В следующей части статьи мы применим основную теорему для выяснения геометрического строения 4-мерных римановых пространств индекса Минковского первого класса, принадлежащих к первому и второму типу в классификации А. З. Петрова [6].

§3. Все гиперповерхности W_n ($n \geq 3$) с индуцированной метрикой Минковского можно отнести к трем видам [1] в соответствии с характеристикой λ -матрицы (3):

$$1. \text{ а) } \underbrace{[1 \dots 1]}_n, \text{ б) } \underbrace{[11 \dots 1, \bar{1}]}_{n-1}; \text{ 2. } \underbrace{[1 \dots 12]}_{n-2}; \text{ 3. } \underbrace{[1 \dots 13]}_{n-3}.$$

Для каждой гиперповерхности можно выбрать действительный неизотропный ортонормированный репер, который окажется каноническим репером при условии, если нет элементарных делителей с одинаковым базисом; в противном случае канонический репер вообще не определен [10].

В этих реперах для $n=4$ мы составляем тензор конформной кривизны C_{ijkn} и изучаем спектр собственных значений характеристического уравнения

$$|C_{ab} - \mu q_{ab}| = 0, \quad a, b = 1, \dots, 6 \quad (15)$$

в бивекторном пространстве.

Элементарными преобразованиями можно привести [6] μ -матрицу $\|C_{ab} - \mu q_{ab}\|$ к виду

$$\left\| \begin{array}{c} M + iN + \varepsilon\mu \\ M - iN + \varepsilon\mu \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{c} Q(\mu) \\ \bar{Q}(\mu) \end{array} \right\|$$

Трехмерная матрица $Q(\mu)$ может иметь только один из трех возможных типов характеристик: 1) [111]; 2) [12]; 3) [3].

Посредством несложных вычислений мы приходим к следующим соответствиям характеристик μ -матрицы (15) и λ -матрицы (3):

$$\text{I. а) } [111, 111] \leftrightarrow [1111]$$

$$\text{б) } [(11)1, (11)\bar{1}] \leftarrow \begin{array}{l} \rightarrow [(11)11] \\ \rightarrow [(11)\bar{1}\bar{1}] \\ \rightarrow [(11)2] \end{array}$$

$$\text{в) } [1\bar{1}\bar{1}, 1\bar{1}\bar{1}] \leftarrow \begin{array}{l} \rightarrow [111\bar{1}] \\ \rightarrow [13] \end{array}$$

$$\text{II. г) } [12, 12] \leftrightarrow [112]$$

$$\text{д) } [(12), (12)] \leftarrow [1(12)]$$

$$\text{III. } [33] \leftrightarrow [1(3)]$$

Итак, к первому типу Петрова относятся, во-первых, наиболее общие гиперповерхности с характеристиками второго фундаментального тензора вида: [1111], [111 $\bar{1}$], [13]; во-вторых, гиперповерхности, расслаивающиеся на двухпараметрическое семейство двумерных неизотропных сфер (им соответствуют характеристики: [(11)11], [(11) $\bar{1}\bar{1}$], [(11)2]). Произвол существования гиперповерхностей первых двух видов ([1111], [111 $\bar{1}$]) есть одна функция от четырех аргументов. Имеет место более общее утверждение: произвол существования гиперповерхности с характеристикой простого типа при наличии k пар ($k \leq \frac{n}{2}$) комплексно-сопряженных собственных значений при условии, если различные элементарные делители не имеют одинакового базиса, есть одна функция от n аргументов. Это следует из линейной независимости симметрических форм Ω_{ab} ($a, b = 1, \dots, n$), получаемых при втором продолжении уравнения Пфаффа $\omega^{n+1} = 0$. Гиперповерхность с характеристикой [13] существует с произволом двух функций от двух аргументов.

Из соответствий 1б следует предложение:

Если для μ -матрицы $Q(\mu)$ простого типа два элементарных делителя имеют одинаковый базис, то гиперповерхность представляет собой огибающую двупараметрического семейства гиперсфер; характеристиками этого семейства являются двумерные неизотропные сферы.

Очевидно, верно и обратное: гиперповерхность, распадающаяся на двупараметрическое семейство двумерных неизотропных сфер, принадлежит к первому типу Петрова; среди элементарных делителей матрицы $Q(\mu)$ имеется два с одинаковым базисом.

Ко второму типу Петрова относятся наиболее общие гиперповерхности с характеристикой [112], существующие с произволом двух функций от трех аргументов, и гиперповерхности, распадающиеся на двупараметрическое семейство двумерных изотропных сфер. Интересно отметить тот частный случай этого семейства, когда центры изотропных сфер принадлежат двумерной плоскости. Оказывается, такая плоскость абсолютно изотропна, т. е. любой вектор в ней — нулевой длины. Естественно, что такая конструкция может существовать в пространствах с сигнатурой (— — — + +). Конгруэнции главных векторов на такой гиперповерхности — нормальны.

Гиперповерхности 3-го типа Петрова имеют характеристику λ -матрицы (3) типа [(13)]. Они существуют с произволом двух функций от двух аргументов.

З а м е ч а н и е 1. В предлагаемую схему не вошли гиперповерхности характеристики [(111)1], [(1111)], [(112)].

Как следует из [10], гиперповерхности типа 1. а) [(1 ... 1)1], б) [(1 ... 1)], 2. [(1 ... 12)] для любого n ($n > 3$) и любой сигнатуры являются конформно-плоскими. Они представляют собой однопараметрическое семейство $(n-1)$ -мерных сфер, причём для второго случая эти сферы изотропны.

З а м е ч а н и е 2. Во всех рассмотренных случаях двумерные сферы обращаются в плоскости, если соответствующие собственные значения для (3) равны нулю.

Автор выражает искреннюю благодарность А. С. Феденко за полезное обсуждение работы.

Литература

1. Петров А. З. Уч. зап. Казанск. ун-та, 109, кн. 4, 1949, стр. 37—51.
2. Лаптев Г. Ф. Тр. Моск. матем. общества, № 2, 1953, стр. 275—382.
3. Костюченко А. Г. УМН, 8, № 5 (57), 1953.
4. Ведерников В. И. Изв. вузов СССР — Математика, № 1, 1957, 89—97. Казань.
5. Ведерников В. И. Волжский мат. сб., в. 4. Куйбышев, 1966.
6. Петров А. З. Изв. вузов СССР — Математика, № 6, 1958, 226—233. Казань.
7. Эйзенхарт Л. П. Риманова геометрия. ИЛ, 1948.
8. Вербицкий Л. Л. Тр. сем. по вект. и тенз. анализу, в. IX. М., 1952, стр. 146—182.
9. Голиков В. И. Тр. сем. по вект. и тенз. анализу, в. 12. М., 1964, стр. 97—128.
10. Фиников С. П. Метод внешних форм Картана. М.—Л., 1948.
11. Лапковский А. К. Вестн. АН БССР, сер. физ.-мат. наук, № 4, 1966.

Белорусский государственный университет
им. В. И. Ленина

Поступило в редакцию 8.IX 1966

А. П. РЯБУШКО

НЕКОТОРЫЕ ЦЕНТРАЛЬНО-СИММЕТРИЧЕСКИЕ
 КОСМОЛОГИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ЭЙНШТЕЙНА

Известно [1] общее решение уравнений тяготения Эйнштейна

$$R_k^i - \frac{1}{2} \delta_k^i R = - \frac{8\pi k}{c^4} T_k^i, \quad i, k = 0, 1, 2, 3 \quad (1)$$

для центрально-симметрической метрики риманова пространства-времени

$$ds^2 = dt^2 - e^{\omega(t, R)} dR^2 - r^2(t, R) (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \quad (2)$$

в том случае, когда система отсчета выбирается «сопутствующей» и давление p материи, заполняющей все пространство, полагается равным нулю (см. также [2], § 97, задачи 4 и 5). Физические приложения этого общего решения имеют заведомо ограниченный характер ибо при значительных плотностях материи ϵ давление p не может считаться исчезающе малым. Поэтому было бы интересным найти и исследовать точные решения уравнений (1) и в тех случаях, когда $p \neq 0$. Это является целью настоящей работы.

Придерживаясь обозначений, данных в [2], § 97, для метрики (2) из уравнений (1) при $i = 1, k = 0$ получаем уравнение

$$2\dot{r}^2 = \dot{\omega} r' \quad (3)$$

(штрих всегда будет обозначать $\partial/\partial R$, а точка над буквой — $\partial/\partial t$), которое легко интегрируется по t :

$$e^{\omega} = \frac{r'^2}{1 + f(R)}, \quad (4)$$

где $f(R)$ — произвольная функция интегрирования, удовлетворяющая условию $1 + f(R) > 0$. Уравнение (1) при $i = k = 1$ после замены ω его значением из (4) приводится к виду

$$\Phi_0 \equiv 2r\ddot{r} + \dot{r}^2 - f + \alpha pr^2 = 0, \quad \alpha \equiv \frac{8\pi k}{c^4}, \quad (5)$$

а при $i = k = 2$ из (1) получаем уравнение $\Phi'_0 = 0$, так как для рассматриваемой метрики (2) $p' = 0$ (последнее следует из общих соотношений (7), приведенных в [2], стр. 345). При $i = k = 3$ уравнение (1) опять дает $\Phi'_0 = 0$. Наконец, при $i = k = 0$ уравнение (1) можно переписать следующим образом:

$$(rr^2 - rf)' = \alpha \epsilon r^2 r'. \quad (6)$$

Остальные уравнения (1) дают тривиальные тождества $0 \equiv 0$.

Итак, решение всей системы уравнений (1) сводится для рассматриваемой задачи к решению системы из двух уравнений (5) и (6), в которых содержатся три неизвестные функции $p(t)$, $\varepsilon(t, R)$ и $r(t, R)$. Отсюда следует, что, исходя из некоторых разумных предположений, одну из этих функций можно задавать, а тогда оставшиеся две будут определяться из получаемой системы.

Сделаем следующее замечание. Обычно предполагают (см., например, [3]), что должно быть $\varepsilon \geq 0$, $p \geq 0$. Однако имеются работы, в которых обсуждается гипотеза существования отрицательных масс во Вселенной [4]. Есть также мнения [5, 6], что для космологических моделей Вселенной возможны отрицательные значения p при положительных значениях ε . Поэтому, находя обычные решения ($\varepsilon \geq 0$, $p \geq 0$), попутно укажем и некоторые решения при $p < 0$.

Целесообразно рассмотреть при решении поставленной задачи два основных случая: $p = \text{const}$ и $p = p(t) \neq \text{const}$.

I. Если $p = \text{const}$, то нетрудно найти первый интеграл уравнения (5):

$$\dot{r}^2 = f(R) + \frac{F(R)}{r} - \frac{\alpha p}{3} r^2, \quad (7)$$

где $F(R)$ — еще одна произвольная функция интегрирования. С его помощью уравнение (6), определяющее плотность материи ε , можно переписать в виде

$$\alpha(\varepsilon + p) = \frac{F'}{r^2 r'}. \quad (8)$$

Далее находим, интегрируя (7):

$$\pm [t - t_0(R)] = \int \frac{r^{1/2} dr}{\left(F + fr - \frac{\alpha p}{3} r^3\right)^{1/2}}, \quad (9)$$

где $t_0(R)$ — третья произвольная функция интегрирования.

Таким образом, в случае $p = \text{const}$ соотношения (4), (8), (9) определяют общее решение задачи. Общим оно является потому, что зависит от трех произвольных функций f , F , t_0 , связанных некоторым соотношением (в силу произвольного выбора радиальной координаты R), т. е. фактически зависит от двух «физически различных» произвольных функций, что полностью определяет в общем случае центрально-симметрическое распределение материи (см. [2], стр. 346). В частном случае $p = 0$ приходим к общему решению Толмана [1].

Интеграл в (9) не выражается, вообще говоря, через элементарные функции. Но в некоторых частных случаях это оказывается возможным.

Ia. Полагаем $f = 0$. Тогда (например, с помощью одной из подстановок Чебышева) интеграл в (9) берется в конечном виде и после элементарных преобразований получаем:

$$r = \left(\frac{3F}{\alpha p}\right)^{1/3} \cos^{2/3} t_1, \quad t_1 \equiv \left(\frac{3\alpha p}{4}\right)^{1/2} (t - t_0), \quad \text{если } p > 0, F > 0; \quad (10)$$

$$r = -\left(\frac{3F}{\alpha p}\right)^{1/3} \text{sh}^{2/3} t_2, \quad t_2 \equiv \left(\frac{3\alpha p}{-4}\right)^{1/2} (t - t_0), \quad \text{если } p < 0, F > 0; \quad (11)$$

$$r = \left(\frac{3F}{\alpha p}\right)^{1/3} \text{ch}^{2/3} t_2, \quad \text{если } p < 0, F < 0. \quad (12)$$

Используя эти выражения для r , из (8) находим соответственно ($F(R) \neq \text{const}$):

$$\alpha(\varepsilon + p) = \left[\frac{1}{\alpha p} \cos^2 t_1 + \left(\frac{3}{\alpha p} \right)^{1/2} \frac{F t'_0}{F'} \sin t_1 \cos t_1 \right]^{-1}; \quad (13)$$

$$\alpha(\varepsilon + p) = - \left[\frac{1}{\alpha p} \text{sh}^2 t_2 + \left(\frac{-3}{\alpha p} \right)^{1/2} \frac{F t'_0}{F'} \text{sh} t_2 \text{ch} t_2 \right]^{-1}; \quad (14)$$

$$\alpha(\varepsilon + p) = \left[\frac{1}{\alpha p} \text{ch}^2 t_2 + \left(\frac{-3}{\alpha p} \right)^{1/2} \frac{F t'_0}{F'} \text{sh} t_2 \text{ch} t_2 \right]^{-1}. \quad (15)$$

В частном случае $t_0 = \text{const}$ эти выражения значительно упрощаются. Соответственно имеем:

$$\varepsilon = p \text{tg}^2 t_1, \quad (16)$$

$$\varepsilon = -p \text{cth}^2 t_2, \quad (17)$$

$$\varepsilon = -p \text{th}^2 t_2. \quad (18)$$

16. Пусть произвольные функции $f(R)$ и $F(R)$ выбраны так, что $F^2/4 = f^3/9\alpha p$. Тогда интеграл в (9) также можно выразить через элементарные функции. Имеем:

$$\begin{aligned} \pm [t - t_0(R)] &= \left(\frac{3}{\alpha p} \right)^{1/2} \int \left(\frac{r}{2\beta - r} \right)^{1/2} \frac{dr}{r + \beta} = \\ &= \left(\frac{4}{\alpha p} \right)^{1/2} \left[\sqrt{3} \arcsin \left(\frac{r}{2\beta} \right)^{1/2} - \arcsin \times \right. \\ &\quad \left. \times \left(\frac{3}{2} \frac{r}{r + \beta} \right)^{1/2} \right], \quad \beta \equiv \left(\frac{3F}{2\alpha p} \right)^{1/3}. \end{aligned} \quad (19)$$

Ясно, что r не может превышать 2β . Найдем r' как функцию r из продифференцированного по R соотношения (19)

$$r' = \frac{r}{3} \frac{F'}{F} - t'_0 \left(\frac{\alpha p}{3} \frac{2\beta - r}{r} \right)^{1/2} (r + \beta). \quad (20)$$

Желая выразить ε через r , подставим найденное r' в (8):

$$\alpha(\varepsilon + p) = \left[\frac{r^3}{3F} - \frac{t'_0}{F'} \left(\frac{\alpha p}{3} \frac{2\beta - r}{r^3} \right)^{1/2} (r + \beta) \right]^{-1}. \quad (21)$$

В частности, при $t_0 = \text{const}$ (20) легко интегрируется. Находим

$$r = \psi(t)\beta, \quad (22)$$

где функция $\psi(t)$ определяется из соотношения

$$\begin{aligned} \pm (t - t_0) &= \left(\frac{4}{\alpha p} \right)^{1/2} \left[\sqrt{3} \arcsin \left(\frac{\psi}{2} \right)^{1/2} - \right. \\ &\quad \left. - \arcsin \left(\frac{3}{2} \frac{\psi}{\psi + 1} \right)^{1/2} \right]. \end{aligned} \quad (23)$$

В этом частном случае

$$\alpha(\varepsilon + p) = \frac{3F}{r^3} \quad \text{или} \quad \varepsilon = p \left(\frac{2}{\psi^3} - 1 \right). \quad (24)$$

Ив. Во всех предыдущих случаях считалось $F(R) \neq \text{const}$. Если же $F = \text{const}$, то выражения для метрик (10), (11), (12), (19) остаются прежними. Что касается плотности материи ε , то из (8) следует, что $\varepsilon = -p$, т. е. плотность материи должна быть также постоянной, но со знаком, противоположным знаку давления p .

Можно указать еще ряд метрик исходя из предположения $F = 0$. В этом случае (9) интегрируется в конечном виде, и в итоге несложных вычислений находим:

$$r = \left(-\frac{3f}{\alpha p} \right)^{1/2} \text{sh} \left[\left(\frac{\alpha p}{-3} \right)^{1/2} (t - t_0) \right], \text{ если } f > 0; \quad (25)$$

$$r = \left(\frac{3f}{\alpha p} \right)^{1/2} \text{ch} \left[\left(\frac{\alpha p}{-3} \right)^{1/2} (t - t_0) \right], \text{ если } f < 0; \quad (26)$$

$$r = \exp \left[\left(\frac{\alpha p}{-3} \right)^{1/2} (t - t_0) \right], \text{ если } f = 0. \quad (27)$$

II. Теперь укажем несколько точных решений в случае зависимости давления от времени: $p = p(t) > 0$.

IIIa. Пусть $f = 0$, а p зададим следующим образом:

$$p = a/t^2, \quad a = \text{const} > 0. \quad (28)$$

Тогда решением уравнения (5) будет

$$r = r_0 |t|^{1/3} \cos^{2/3} \left[\frac{1}{2} \sqrt{3\alpha a - 1} \ln(t_0 |t|) \right], \text{ если } 3\alpha a - 1 > 0; \quad (29)$$

$$r = r_0 |t|^{1/3} \text{ch}^{2/3} \left[\frac{1}{2} \sqrt{1 - 3\alpha a} \ln(t_0 |t|) \right], \text{ если } 3\alpha a - 1 < 0; \quad (30)$$

$$r = r_0 |t|^{1/3} \ln^{2/3}(t_0 |t|), \text{ если } 3\alpha a - 1 = 0. \quad (31)$$

Произвольными функциями интегрирования здесь и всюду в дальнейшем являются $r_0 = r_0(R)$ и $t_0 = t_0(R)$. Выражения для ε соответственно находим из (6):

$$\varepsilon = \frac{p}{3\alpha a} \left[(1 - \sigma \text{tg } \tau_0)^2 - \frac{\sigma^2}{3} \frac{t'_0}{t_0} \frac{1 - \sigma \text{tg } \tau_0}{\frac{r'_0}{r_0} - \frac{\sigma}{3} \frac{t'_0}{t_0} \text{tg } \tau_0} \frac{1}{\cos^2 \tau_0} \right]; \quad (32)$$

$$\varepsilon = \frac{p}{3\alpha a} \left[(1 + \sigma^* \text{th } \tau^*)^2 + \frac{\sigma^{*2}}{3} \frac{t'_0}{t_0} \frac{1 + \sigma^* \text{th } \tau^*}{\frac{r'_0}{r_0} + \frac{\sigma^*}{3} \frac{t'_0}{t_0} \text{th } \tau^*} \frac{1}{\text{ch}^2 \tau^*} \right]; \quad (33)$$

$$\varepsilon = p \left\{ \left[1 + \frac{2}{\ln(t_0 |t|)} \right]^2 - \frac{4}{3} \frac{t'_0}{t_0} \frac{1 + 2[\ln(t_0 |t|)]^{-1}}{\frac{r'_0}{r_0} + \frac{2}{3} \frac{t'_0}{t_0} \frac{1}{\ln(t_0 |t|)}} \frac{1}{\ln^2(t_0 |t|)} \right\}, \quad (34)$$

где введены обозначения $\sigma \equiv \sqrt{3\alpha a - 1}$; $\sigma^* \equiv \sqrt{1 - 3\alpha a}$; $\tau_0 \equiv \frac{1}{2} \times$
 $\times \sqrt{3\alpha a - 1} \ln(t_0|t)$, $\tau^* \equiv \frac{1}{2} \sqrt{1 - 3\alpha a} \ln(t_0|t)$. При $t_0 = \text{const}$ для ε
 получаем более простые выражения. Соответственно имеем:

$$\varepsilon = \frac{p}{3\alpha a} (1 - \sigma \operatorname{tg} \tau_0)^2; \quad (35)$$

$$\varepsilon = \frac{p}{3\alpha a} (1 + \sigma^* \operatorname{th} \tau^*)^2; \quad (36)$$

$$\varepsilon = p \left[1 + \frac{2}{\ln(t_0|t)} \right]^2. \quad (37)$$

Пб. Принимая опять $f = 0$, выберем для p значение

$$p = a/t^{4/3}, \quad a = \text{const} > 0. \quad (38)$$

Введя обозначение $\gamma \equiv \frac{3}{2} \sqrt{3\alpha a} t^{1/3}$, решение уравнения (5) можно пред-
 ставить в виде

$$r = r_0 [\cos(\gamma + t_0) + \gamma \sin(\gamma + t_0)]^{2/3}. \quad (39)$$

Воспользовавшись найденным значением r и уравнением (6), можем легко
 определить плотность материи ε , выражение которой в общем случае до-
 вольно громоздко и поэтому выписывать его не будем. В частном же
 случае $t_0 = \text{const}$ (но $r_0 \neq \text{const}$) имеем

$$\varepsilon = \frac{27}{4} \frac{\alpha a^2}{t^{2/3}} \frac{\cos^2(\gamma + t_0)}{[\cos(\gamma + t_0) + \gamma \sin(\gamma + t_0)]^2}, \quad (40)$$

а при $r_0 = \text{const}$ (но $t_0 \neq \text{const}$)

$$\varepsilon = \frac{81}{16} \frac{\alpha a^2}{t^{2/3}} \left[\frac{\cos^2(\gamma + t_0)}{\cos(\gamma + t_0) + \gamma \sin(\gamma + t_0)} - \frac{\sin 2(\gamma + t_0)}{1/2(\gamma^2 - 1) \sin 2(\gamma + t_0) + \gamma \cos 2(\gamma + t_0)} \right]. \quad (41)$$

Пв. Желательно найти решение, для которого бы p нигде не обраща-
 лось в бесконечность. Полагая $f = 0$, зададим

$$p = \frac{a}{(t^2 + 1)^2}, \quad a = \text{const} > 0. \quad (42)$$

Тогда из (5) находим

$$r = r_0 (t^2 + 1)^{1/3} \sin^{2/3} \left(t_0 + \sqrt{1 + \frac{3}{4} \alpha a} \operatorname{arctg} t \right). \quad (43)$$

Если ввести обозначение $t^* \equiv t_0 + \sqrt{1 + \frac{3}{4} \alpha a} \operatorname{arctg} t$, то ε предста-
 вится следующим образом:

$$\varepsilon = \frac{4p}{3\alpha a} \left[\left(t + \sqrt{1 + \frac{3}{4} \alpha a \operatorname{ctg} t^*} \right)^2 - \frac{2}{3} \sqrt{1 + \frac{3}{4} \alpha a} t'_0 \frac{t + \sqrt{1 + \frac{3}{4} \alpha a \operatorname{ctg} t^*}}{\frac{r'_0}{r_0} + \frac{2}{3} t'_0 \operatorname{ctg} t^*}} \frac{1}{\sin^2 t^*} \right]. \quad (44)$$

Если $r_0 = \text{const}$, то для ε получаем более простое выражение

$$\varepsilon = \frac{4p}{3\alpha a} \left[\left(t + \sqrt{1 + \frac{3}{4} \alpha a \operatorname{ctg} t^*} \right)^2 - \sqrt{1 + \frac{3}{4} \alpha a} \frac{t + \sqrt{1 + \frac{3}{4} \alpha a \operatorname{ctg} t^*}}{\sin t^* \cos t^*} \right]. \quad (45)$$

Если же другая произвольная функция $t_0 = \text{const}$, то выражение для ε совсем простое

$$\varepsilon = \frac{4p}{3\alpha a} \left(t + \sqrt{1 + \frac{3}{4} \alpha a \operatorname{ctg} t^*} \right)^2. \quad (46)$$

III. До сих пор при отыскании решений системы (5), (6) давление p задавалось или как постоянное, или как функция t , а затем искались неизвестные функции $r(t, R)$ и $\varepsilon(t, R)$. Попробуем теперь задавать ε или r , а затем решать получаемую систему.

IIIa. Будем считать $\varepsilon = \varepsilon(t)$ заданной функцией и $f=0$. Тогда система (5), (6) будет удовлетворена, в частности, следующими значениями r и p :

$$r = r_0 \exp \left[\pm \left(\frac{\alpha}{3} \right)^{1/2} \int \varepsilon^{1/2} dt \right], \quad p = - \left[\varepsilon \pm \frac{\dot{\varepsilon}}{(3\alpha\varepsilon)^{1/2}} \right], \quad (47)$$

где знаки \pm берутся в обеих формулах соответственно.

IIIб. Предположим теперь, что $f(R) \neq 0$ и

$$r = c_0 f^{1/2} |t|, \quad c_0 = \text{const} > 0. \quad (48)$$

Тогда из (5) и (6) соответственно имеем:

$$\varepsilon = \frac{3(c_0^2 - 1)}{\alpha c_0^2 t^2}, \quad p = \frac{1 - c_0^2}{\alpha c_0^2 t^2}. \quad (49)$$

В заключение сделаем несколько самых общих замечаний о свойствах полученных космологических решений.

Все найденные частные решения (при $f=0$) превращаются в фридмановские с евклидовым пространством (см. [2], § 104–106, случай $\lambda=0$), если для произвольной функции интегрирования $t_0(R)$ положить $t_0 = \text{const}$. Другими словами, получаются однородные изотропные пространства с конкретным уравнением состояния материи, метрика которых всегда приводится к виду

$$ds^2 = dt^2 - \Phi(t) [d\rho^2 + \rho^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)]. \quad (50)$$

Метрика пространства-времени, определяемая решением (19) (здесь $f(R) \neq 0$), при $t_0 = \text{const}$ преобразованием координат приводится к виду

$$ds^2 = dt^2 - \frac{1}{a\rho} \psi^2(t) [d\rho^2 + \text{sh}^2\rho (d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)] \quad (51)$$

и, следовательно, определяет открытую (гиперболическую) изотропную фридмановскую космологическую модель с уравнением состояния материи (24). Подобная же модель определяется решением (48):

$$ds^2 = dt^2 - c_0^2 t^2 [d\rho^2 + \text{sh}^2\rho (d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)], \quad (52)$$

в которой при $c_0 \neq 1$ уравнение состояния материи имеет вид $\varepsilon + 3p = 0$. Но при $c_0 = 1$ $\varepsilon = p = 0$ и мы приходим к плоскому пространству-времени, в которое вложено трехмерное пространство с постоянной отрицательной кривизной (см. [7], (3,3)).

Во всех остальных случаях метрики являются центрально-симметрическими. Свойства соответствующих им центрально-симметрических пространств будут детально обсуждены в следующей работе.

Литература

1. Tolman R. C. Proc. Nat. Acad. Sci., 20, 169, 1934.
2. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теория поля. Физматгиз, М., 1960.
3. Мак-Витти Г. К. Общая теория относительности и космология. ИЛ, М., 1961.
4. Терлецкий Я. П. Проблемы гравитации. Тезисы докладов Второй советской гравитационной конференции. Тбилиси, 1965, стр. 238.
5. McGrea W. H. Proc. Roy. Soc., A 206, 562, 1951.
6. Whittaker J. M. Nature, 209, № 5022, 491, 1966.
7. Рябушко А. П. Изв. вузов СССР — Физика, № 1, 88, 1964.

Белорусский государственный университет
им. В. И. Ленина

Поступило в редакцию 28.IX 1966

М. А. ШЕШКО

ОБ ОБЩЕЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ЛИНЕЙНОГО СОПРЯЖЕНИЯ ДЛЯ СИСТЕМЫ n ПАР ФУНКЦИЙ

Постановка задачи. Пусть $\Gamma = \Gamma_0 + \Gamma_1 + \dots + \Gamma_m$ — совокупность $m + 1$ простых замкнутых непересекающихся контуров типа Ляпунова, ограничивающих некоторую конечную область D^+ . Область, дополняющую $D^+ + \Gamma$ до полной плоскости, обозначим через D^- . Положительным обходом контура Γ считается тот, который оставляет область D^+ слева. Рассматривается следующая краевая задача.

Найти кусочно аналитический вектор $\varphi(z) = (\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n)$ так, чтобы почти всюду на Γ он имел граничные значения $\varphi^+(t)$ и $\varphi^-(t)$, принадлежащие $L_2(\Gamma)$, и удовлетворял краевому условию

$$\varphi^+(t) = A(t)\varphi^-(t) + B(t)\overline{\varphi^-(t)} + C(t), \quad \varphi^-(\infty) = 0, \quad (1)$$

где $A(t)$, $B(t)$, — заданные матрицы: $A(t) = \|a_{ij}(t)\|$, $B(t) = \|b_{ij}(t)\|$, ($i, j = 1, 2, \dots, n$), $C(t) = (c_1, c_2, \dots, c_n)$ — заданный вектор, причем $a_{ij}(t)$ непрерывны, $b_{ij}(t)$ ограничены и измеримы, $c_i(t) \in L_2(\Gamma)$. Кроме того, будем предполагать, что $\det A(t) \neq 0$ всюду на Γ .

Для $n = 1$ эта задача поставлена А. И. Маркушевичем [1] и является некоторым обобщением краевой задачи Римана. Она находит применение в теории изгибаания склеенных поверхностей [2]. Наиболее полные результаты для нее были получены Л. Г. Михайловым [3] и И. Х. Сабитовым [4]. Названные авторы для некоторых частных случаев получили точные теоремы разрешимости задачи (1).

Для любого n задача (1) была впервые рассмотрена Н. П. Векуа в [5]. В этой работе получены лишь альтернативные утверждения типа теорем Нёгера. Нами будут получены некоторые точные теоремы, аналогичные теоремам, полученным в [3] и [4].

§ 1. Сначала предположим, что $a_{ij}(t) \in H$ (условие Гельдера) и рассмотрим вспомогательную задачу

$$\omega^+(t) = A(t)\omega^-(t). \quad (2)$$

Пусть $X(z)$ — каноническая матрица решений задачи (2) (см. [6], стр. 12). Так как она удовлетворяет условию

$$X^+(t) = A(t)X^-(t), \quad (3)$$

то $A(t) = X^+(t)[X^-(t)]^{-1}$. Подставляя это выражение в (1), получим

$$\begin{aligned} [X^+(t)]^{-1}\varphi^+(t) - [X^-(t)]^{-1}\varphi^-(t) &= \\ &= [X^+(t)]^{-1}B(t)\overline{\varphi^-(t)} + [X^+(t)]^{-1}C(t). \end{aligned} \quad (4)$$

Полагая $[X(z)]^{-1} \varphi(z) = \psi(z)$, приведем краевое условие (4) к виду

$$\psi^+(t) - \psi^-(t) = [X^+(t)]^{-1} B(t) \overline{X^-(t)} \overline{\psi^-(t)} + [X^+(t)]^{-1} C(t). \quad (5)$$

Будем искать решение задачи (5) в виде

$$\psi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\mu(\tau)}{\tau - z} d\tau + P(z),$$

где $\mu(t) = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n)$ — неизвестный, а $P(z) = (p_1, p_2, \dots, p_n)$ — пока произвольный вектор, компоненты которого являются многочленами.

Применив формулы Сохоцкого к $\psi(z)$, из (5) получим систему интегральных уравнений

$$\begin{aligned} \mu(t) = & \frac{1}{2} [X^+(t)]^{-1} B(t) \overline{X^-(t)} \left[-\overline{\mu(t)} + \frac{1}{\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\mu(\tau)}{\tau - t} d\tau \right] + \\ & + [X^+(t)]^{-1} C(t) + [X^+(t)]^{-1} B(t) \overline{X^-(t)} \overline{P(t)}. \end{aligned} \quad (6)$$

Введем обозначения $Z(t) = [X^+(t)]^{-1} B(t) \overline{X^-(t)}$, $S\mu = \frac{1}{\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\mu(\tau)}{\tau - t} d\tau$,

$T\mu = \frac{1}{2} Z(t) [-\overline{\mu(t)} + S\mu]$ и оценим норму оператора $T\mu$ в L_2 :

$$\begin{aligned} \|T\mu\| = & \left\| \frac{1}{2} Z(t) (-\overline{\mu} + S\mu) \right\| \leq \frac{1}{2} \left[\|Z(t)\mu(t)\| + \right. \\ & \left. + \|Z(t)S\mu\| \right] \leq \frac{1}{2} n \left(\sup_{\substack{t \in \Gamma, \\ i, j=1, \dots, n}} |z_{ij}(t)| \|\mu\| + \sup_{\substack{t \in \Gamma, \\ i, j=1, \dots, n}} |z_{ij}(t)| \|S\mu\| \right), \end{aligned}$$

где $z_{ij}(t)$ — элементы матрицы $Z(t)$.

Используя неравенство

$$\begin{aligned} \left[\int_{\Gamma} \left| \frac{1}{\pi} \int_{\Gamma} \frac{\mu_k(\tau)}{\tau - t} d\tau \right|^2 ds \right]^{1/2} \leq \\ \leq M \left[\int_{\Gamma} |\mu_k(t)|^2 ds \right]^{1/2}, \end{aligned}$$

где M — постоянная, не зависящая от $\mu_k(t)$, получим

$$\begin{aligned} \|S\mu\| = & \left[\sum_{k=1}^n \int_{\Gamma} \left| \frac{1}{\pi} \int_{\Gamma} \frac{\mu_k(\tau)}{\tau - t} d\tau \right|^2 ds \right]^{1/2} \leq \\ \leq & M \left[\sum_{k=1}^n \int_{\Gamma} |\mu_k(t)|^2 ds \right]^{1/2} = M \|\mu\|. \end{aligned}$$

Итак,

$$\|T\mu\| \leq \frac{(1+M)n}{2} \sup_{\substack{t \in \Gamma, \\ i, j=1, \dots, n}} |z_{ij}(t)| \|\mu\|,$$

а значит,

$$\|T\| \leq \frac{(1+M)n}{2} \sup_{t \in \Gamma, i, j=1, \dots, n} |z_{ij}(t)|.$$

Если

$$\frac{(1+M)n}{2} \sup_{t \in \Gamma, i, j=1, \dots, n} |z_{ij}(t)| < 1, \tag{7}$$

то уравнение (6), согласно принципу сжатых отображений, имеет единственное решение при любом фиксированном $P(t)$ и $C(t)$.

Пусть теперь $a_{ij}(t)$ непрерывны, тогда, равномерно аппроксимируя $a_{ij}(t)$ функциями $\tilde{a}_{ij}(t) \in H$ (например, многочленами), краевую задачу (1) запишем в виде

$$\begin{aligned} \varphi^+(t) = & \tilde{A}(t) \varphi^-(t) + B(t) \overline{\varphi^-(t)} + [A(t) - \tilde{A}(t)] \varphi^-(t) + \\ & + C(t), \quad \tilde{A}(t) = \|\tilde{a}_{ij}(t)\|. \end{aligned}$$

Матрицу $A(t)$ приблизим матрицей $\tilde{A}(t)$ так, чтобы выполнялось условие

$$\|A(t) - \tilde{A}(t)\| < 1 - \frac{2}{(1+M)n}.$$

После этого применяем только что описанный метод.

Полагая $P(t) \equiv 0$ и применяя к (6) оператор обращения, найдем частное решение

$$\mu = \mu^0(t) = (\mu_1^0, \mu_2^0, \dots, \mu_n^0)$$

через некоторый матричный оператор над $C(t)$:

$$\mu^0(t) = Q[C(t)].$$

Полагая $C(t) = 0$, а $P(t)$ последовательно равным $\gamma_1 = (1, 0, \dots, 0)$, $\gamma_2 = (0, 1, \dots, 0)$, ..., $\gamma_n = (0, 0, \dots, 1)$, получим n линейно независимых решений $\mu = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n)$, $\mu = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n)$, ..., $\mu = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n)$ уравнения (6), по которым однозначно найдем

$$\begin{aligned} \mu^1(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\mu^1(\tau)}{\tau - z} d\tau + \gamma_1, \\ \mu^2(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\mu^2(\tau)}{\tau - z} d\tau + \gamma_2, \dots, \\ \mu^n(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\mu^n(\tau)}{\tau - z} d\tau + \gamma_n. \end{aligned}$$

Пусть частные индексы задачи (2) равны

$$\begin{aligned} \kappa_1 \geq \kappa_2 \geq \dots \geq \kappa_m \geq 0 > \kappa_{m+1} \geq \dots \geq \kappa_n, \\ \kappa_1 + \kappa_2 + \dots + \kappa_m = \lambda, \quad -\kappa_{m+1} - \kappa_{m+2} - \dots - \kappa_n = \nu. \end{aligned}$$

Возвращаясь к искомому вектору $\varphi(z)$, запишем решение $\varphi(z)$ однородной краевой задачи

$$\begin{aligned} \varphi(z) = X(z)\psi(z) &= \overset{1}{X}(z)\overset{1}{\psi}(z) + \overset{2}{X}(z)\overset{2}{\psi}(z) + \dots + \\ &+ \overset{m}{X}(z)\overset{m}{\psi}(z) = \overset{1}{X}(z) \left[\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\overset{1}{\mu}(\tau)}{\tau-z} d\tau + \gamma_1 \right] + \\ &+ \overset{2}{X}(z) \left[\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\overset{2}{\mu}(\tau)}{\tau-z} d\tau + \gamma_2 \right] + \\ &+ \dots + \overset{m}{X}(z) \left[\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\overset{m}{\mu}(\tau)}{\tau-z} d\tau + \gamma_m \right]. \end{aligned}$$

Чтобы получить общее решение, исчезающее на бесконечности, нужно положить $P(z) = (p_{x_1-1}, \dots, p_{x_m-1}, 0, \dots, 0)$, где p_{x_j-1} — произвольный многочлен степени $x_j - 1$ ($j = 1, 2, \dots, m$). Однородная краевая задача имеет 2λ линейно независимых решений над полем вещественных чисел.

Общее решение неоднородной задачи

$$\begin{aligned} \widetilde{\varphi}(z) = \varphi(z) + \varphi^0(z) &= \overset{1}{X}(z) \left[\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\overset{1}{\mu}(\tau)}{\tau-z} d\tau + p_{x_1-1}(z) \right] + \\ &+ \overset{2}{X}(z) \left[\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\overset{2}{\mu}(\tau)}{\tau-z} d\tau + p_{x_2-1}(z) \right] + \dots + \\ &+ \overset{m}{X}(z) \left[\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\overset{m}{\mu}(\tau)}{\tau-z} d\tau + p_{x_m-1}(z) \right] + \\ &+ \overset{1}{X}(z) \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\overset{0}{\mu}_1(\tau)}{\tau-z} d\tau + \overset{2}{X}(z) \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\overset{0}{\mu}_2(\tau)}{\tau-z} d\tau + \\ &+ \dots + \overset{n}{X}(z) \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\overset{0}{\mu}_n(\tau)}{\tau-z} d\tau, \end{aligned}$$

где $\varphi(z)$ — общее решение однородной задачи; $\varphi^0(z)$ — частное решение неоднородной.

При достаточно больших $|z|$ имеем

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} \frac{\overset{0}{\mu}_k(\tau)}{\tau-z} d\tau &= -z^{-1} \int_{\Gamma} \overset{0}{\mu}_k(\tau) d\tau - \\ &- z^{-2} \int_{\Gamma} \tau \overset{0}{\mu}_k(\tau) d\tau - z^{-3} \int_{\Gamma} \tau^2 \overset{0}{\mu}_k(\tau) d\tau - \dots \end{aligned}$$

Отсюда следует, что для существования решений, исчезающих на бесконечности, необходимо и достаточно, чтобы вектор $\mu^0(t) = (\mu_1^0, \mu_2^0, \dots, \mu_n^0)$ удовлетворял ν условиям

$$\int_{\Gamma} \tau^j \mu_k^0(\tau) d\tau = 0, \quad j = 0, 1, \dots, -\kappa_k - 1,$$

$$k = m + 1, m + 2, \dots, n$$

или

$$\int_{\Gamma} \tau^j Q_k[C(\tau)] d\tau = 0, \quad (8)$$

где Q_k — линейный оператор, получаемый из решения уравнения (6).

Таким образом, имеет место

Теорема 1. Однородная краевая задача (1) при выполнении условия (7) имеет 2λ линейно независимых решений над полем вещественных чисел, где λ — сумма положительных частных индексов задачи (2). Для разрешимости неоднородной задачи (1) необходимо и достаточно, чтобы свободный член $C(t)$ удовлетворял 2ν вещественным или ν комплексным условиям (8), где ν — сумма отрицательных частных индексов задачи (2).

§ 2. Приступим к исследованию задачи (1) в случае, когда матрицы $A(t)$ и $B(t)$ удовлетворяют условиям

$$A(t)\overline{B(t)} = \overline{B(t)}A(t), \quad \overline{B(t)}B(t) = A(t)\overline{A(t)}, \quad (9)$$

причем функции $a_{ij}(t)$, $b_{ij}(t)$, $c_i(t)$ из класса функций Гельдера.

Из равенств

$$\begin{aligned} \varphi^+(t) &= A(t)\varphi^-(t) + B(t)\overline{\varphi^-(t)} + C(t), \\ \overline{\varphi^+(t)} &= \overline{B(t)}\varphi^-(t) + \overline{A(t)}\overline{\varphi^-(t)} + \overline{C(t)} \end{aligned}$$

можно исключить сразу $\varphi^-(t)$ и $\overline{\varphi^-(t)}$, что дает

$$\varphi^+(t) = [\overline{B(t)}]^{-1}A(t)\overline{\varphi^+(t)} + C(t) - [\overline{B(t)}]^{-1}A(t)\overline{C(t)}. \quad (10)$$

После введения обозначений

$$[\overline{B(t)}]^{-1}A(t) = G(t), \quad C(t) - [\overline{B(t)}]^{-1}A(t)\overline{C(t)} = N(t)$$

(10) примет вид

$$\varphi^+(t) = G(t)\overline{\varphi^+(t)} + N(t). \quad (11)$$

Легко проверить, что необходимые условия разрешимости задачи (11)

$$G(t)\overline{G(t)} = E, \quad G(t)\overline{N(t)} + N(t) = 0$$

выполнены.

Будем считать, что краевое условие (11) задано на единичной окружности. К случаю единичного круга можно привести любую односвязную область при помощи конформного отображения.

Введя вспомогательный кусочно аналитический вектор $\Phi(z) = (\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_n)$ по формуле

$$\Phi(z) = \begin{cases} \varphi(z), & |z| < 1, \\ \overline{\varphi\left(\frac{1}{z}\right)}, & |z| > 1 \end{cases} \quad (*)$$

и учитывая, что $\Phi^-(t) = \overline{\Phi^+(t)}$, из (11) получим

$$\Phi^+(t) = G(t)\Phi^-(t) + N(t). \quad (12)$$

Краевая задача (12) есть обычная краевая задача Римана для системы n пар функций с разрывными коэффициентами, изученная в работах [6] и [7]. Нужно только иметь в виду, что, согласно (*), решениями задачи (11) будут те и только те решения задачи (12), которые удовлетворяют условию

$$\Phi(z) = \overline{\Phi\left(\frac{1}{z}\right)}.$$

Решив задачу (11), найдем $\Phi^+(t)$. Подставляя его в (1), получим внешнюю задачу

$$\overline{\Phi^-(t)} = -[B(t)]^{-1}A(t)\Phi^-(t) + [B(t)]^{-1}[\Phi^+(t) - C(t)],$$

которую можно решить аналогично задаче (11).

§ 3. Наконец, рассмотрим общий случай, когда условия (7) или (9) могут быть не выполненными. Будем считать, что функции $a_{ij}(t)$ непрерывны, $b_{ij}(t) \in H$, $\det A(t) \neq 0$, $c_i(t) \in L_2(\Gamma)$, Γ — единичная окружность.

Разложим функции $b_{ij}(t)$ в ряды Фурье

$$b_{ij}(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} d_k^{ij} t^k, \quad i, j, = 1, 2, \dots, n. \quad (13)$$

Пусть N_{ij} — наименьший номер, для которого имеет место неравенство

$$\left| b_{ij}(t) - \sum_{k=-N_{ij}}^{N_{ij}} d_k^{ij} t^k \right| < \frac{1}{n} |a_{ij}(t)|, \quad (14)$$

$d_{-m_{ij}}^{ij}$ — первый из коэффициентов $d_{-N_{ij}}^{ij}, d_{-N_{ij}+1}^{ij}, \dots$, отличный от нуля. Будем предполагать, что функции $b_{ij}(t)$ таковы, что для всего столбца элементов номер m_{ij} один и тот же, но каждый столбец имеет свой номер, который мы будем обозначать через m_j ($j = 1, 2, \dots, n$). Тогда (14) переписывается так:

$$\left| b_{ij}(t) - \sum_{k=-m_{ij}}^{N_{ij}} d_k^{ij} t^k \right| < \frac{1}{n} |a_{ij}(t)|. \quad (15)$$

Положим

$$T_{ij}(t) = \frac{p_{ij}(t)}{t^{m_j}} = \frac{d_{-m_j}^{ij} + d_{-m_j+1}^{ij} t + \dots + d_{N_{ij}}^{ij} t^{N_{ij}+m_j}}{t^{m_j}}$$

и переписем задачу (1) в виде

$$\begin{aligned} \Phi_1^+(t) - \frac{p_{11}(t)}{t^{m_1}} \overline{\Phi_1^-(t)} - \dots - \\ - \frac{p_{1n}(t)}{t^{m_n}} \overline{\Phi_n^-(t)} = a_{11}(t) \Phi_1^-(t) + \dots + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &+ a_{1n}(t) \varphi_n^-(t) + [b_{1n}(t) - T_{1n}(t)] \overline{\varphi_1^-(t)} + \\
 &+ \dots + [b_{1n}(t) - T_{1n}(t)] \overline{\varphi_n^-(t)} + c_1(t), \\
 &\varphi_2^+(t) - \frac{p_{21}(t)}{t^{m_1}} \overline{\varphi_1^-(t)} - \dots - \\
 &- \frac{p_{2n}(t)}{t^{m_n}} \overline{\varphi_n^-(t)} = a_{21}(t) \varphi_1^-(t) + \dots + \\
 &+ a_{2n}(t) \varphi_n^-(t) + [b_{21}(t) - T_{21}(t)] \overline{\varphi_1^-(t)} + \dots + \\
 &+ [b_{2n}(t) - T_{2n}(t)] \overline{\varphi_n^-(t)} + c_2(t) \\
 &\dots \dots \dots \\
 &\varphi_n^+(t) - \frac{p_{n1}(t)}{t^{m_1}} \overline{\varphi_1^-(t)} - \dots - \\
 &- \frac{p_{nn}(t)}{t^{m_n}} \overline{\varphi_n^-(t)} = a_{n1}(t) \varphi_1^-(t) + \dots + \\
 &+ a_{nn}(t) \varphi_n^-(t) + [b_{n1}(t) - T_{n1}(t)] \overline{\varphi_1^-(t)} + \dots + \\
 &+ [b_{nn}(t) - T_{nn}(t)] \overline{\varphi_n^-(t)} + c_n(t).
 \end{aligned} \tag{16}$$

Будем считать $m_1 \geq m_2 \geq \dots \geq m_n$; этого всегда можно достигнуть перенумерацией компонент вектора.

Введем аналитический вектор $\psi^+(z) = \overline{\varphi^-\left(\frac{1}{z}\right)}$, $z \in D^+$. Очевидно, $\psi^+(t) = \overline{\varphi^-(t)}$. Поэтому (16) можно записать так:

$$\Phi^+(t) = R(t) \varphi^-(t) + S(t) \overline{\varphi^-(t)} + M(t), \tag{17}$$

где

$$\begin{aligned}
 \Phi^+(t) &= (\Phi_1^+, \Phi_2^+, \dots, \Phi_n^+); \quad \Phi_i^+ = \\
 &= t^{m_1} \varphi_i^+ - p_{i1} \psi_1^+ - t^{m_1-m_2} p_{i2} \psi_2^+ - \dots - \\
 &\quad - t^{m_1-m_n} p_{in} \psi_n^+; \quad R(t) = \|r_{ji}(t)\|; \\
 r_{ij}(t) &= t^{m_1} a_{ij}(t); \quad S(t) = \|s_{ij}(t)\|; \quad s_{ij}(t) = \\
 &= t^{m_1} [b_{ij}(t) - T_{ij}(t)]; \quad M(t) = (m_1, m_2, \dots, m_n); \\
 m_i &= t^{m_1} c_i, \quad i = 1, 2, \dots, n.
 \end{aligned}$$

Легко видеть, что для (17) условие (7) выполнено, поэтому применима теорема 1.

Очевидно, что каждому решению задачи (1) соответствует определенное решение задачи (17), но не наоборот. Для того чтобы из решения задачи (17) можно было получить решение задачи (1), функции $\Phi_i^+(z)$, $\varphi_i^-(z)$ должны удовлетворять условию: сумма

$$\Phi_i^+ + p_{i1} \psi_1^+ + t^{m_1-m_2} p_{i2} \psi_2^+ + \dots + t^{m_1-m_n} p_{in} \psi_n^+$$

в точке $z = 0$ должна обращаться в нуль порядка m_1 .

Пусть функции $\Phi_i^+(z)$, $\varphi_i^-(z)$ имеют следующие разложения в окрестности точек $z = 0$ и $z = \infty$ соответственно:

$$\Phi_i^+(z) = p_0^i + p_1^i z + \dots + p_{m_i-1}^i z^{m_i-1} + z^{m_i} f_i^+(z), \quad (18)$$

$$\varphi_i^-(z) = \frac{q_1^i}{z} + \dots + \frac{q_{m_i-1}^i}{z^{m_i-1}} + \frac{\omega_i^-(z)}{z^{m_i-1}}, \quad \omega_i^-(\infty) = 0, \quad (19)$$

$$i = 1, 2, \dots, n.$$

Тогда

$$\psi_i^+(z) = \bar{q}_1^i z + \dots + \bar{q}_{m_i-1}^i z^{m_i-1} + z^{m_i-1} \bar{\omega}_i^-\left(\frac{1}{z}\right)$$

и сумма

$$\begin{aligned} & p_0^i + p_1^i z + \dots + p_{m_i-1}^i z^{m_i-1} + z^{m_i} f_i^+(z) + \\ & + p_{i1}(z) \left[\bar{q}_1^i z + \dots + \bar{q}_{m_i-1}^i z^{m_i-1} + z^{m_i-1} \bar{\omega}_i^-\left(\frac{1}{z}\right) \right] + \\ & + z^{m_i-m_2} p_{i2} \left[\bar{q}_1^2 z + \dots + \bar{q}_{m_2-1}^2 z^{m_2-1} + z^{m_2-1} \bar{\omega}_2^-\left(\frac{1}{z}\right) \right] + \\ & + \dots + z^{m_i-m_n} p_{in}(z) \left[\bar{q}_1^n z + \dots + \bar{q}_{m_n-1}^n z^{m_n-1} + z^{m_n-1} \bar{\omega}_n^-\left(\frac{1}{z}\right) \right]. \end{aligned}$$

должна иметь нуль порядка m_1 .

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях z нулю, получим соотношения:

$$\begin{aligned} p_0^i = 0, \dots, p_{m_i-1}^i = -d_{-m_1}^{i1} \bar{q}_{m_i-1}^1 - \dots - d_{-2}^{i1} \bar{q}_1^1 - \\ - d_{-m_2}^{i2} \bar{q}_{m_2-1}^2 - \dots - d_{-2}^{i2} \bar{q}_1^2 - \dots - d_{-m_n}^{in} \bar{q}_{m_n-1}^n - \dots - \\ - d_{-2}^{in} \bar{q}_1^n, \quad i = 1, 2, \dots, n. \end{aligned} \quad (20)$$

Следовательно, $\Phi_i^+(z)$, $\varphi_i^-(z)$, кроме удовлетворения условию (17), должны еще подчиняться условиям (20). Поэтому берем $\Phi_i^+(z)$, $\varphi_i^-(z)$ в виде (18) и (19), считая, что p_k^i ($k = 0, 1, \dots, m_i - 1$, $i = 1, 2, \dots, n$) выражены через q_j^i , и подставляем в (17). Получим краевое условие для

$$F^+(t) = (f_1^+, f_2^+, \dots, f_n^+) \text{ и}$$

$$\Omega^-(t) = (\omega_1^-, \omega_2^-, \dots, \omega_n^-):$$

$$F^+(t) = A(t)V(t)\Omega^-(t) + [B(t) - T(t)]\bar{V}(t)\bar{\Omega}^-(t) + \Gamma(t) + C(t), \quad (21)$$

где

$$V(t) = \|t^{1-m_i}j\|; \quad T(t) = \|T_{ij}(t)\|;$$

$$\Gamma(t) = (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n); \quad \gamma_k = \alpha_{k1}(t) \delta_1^k + \dots + \\ + \alpha_{k, m-n} \delta_{m-n}^k + \alpha_{k, m-n+1} \varepsilon_1^k + \dots + \alpha_{k, r(m-n)} \varepsilon_{m-n}^k,$$

$\alpha_{ik}(t)$ — определенные функции; $q_j^k = \delta_j^k + i \varepsilon_j^k$ ($k = 1, 2, \dots, n, j = 1, 2, \dots, m-n$). Постоянные $\delta_j^k, \varepsilon_j^k$, входящие в $\Gamma(t)$, являются произвольными; всех их $2(m-n)$. Для краевой задачи (21) условие (7) § 1 выполнено.

Легко видеть, что частные индексы задачи

$$U^+(t) = A(t)V(t)U^-(t)$$

равны $\kappa_1 - m_1 + 1, \kappa_2 - m_2 + 1, \dots, \kappa_n - m_n + 1$, если частные индексы задачи (2) $\kappa_1, \kappa_2, \dots, \kappa_n$.

Пусть

$$\kappa_1 - m_1 + 1 \geq \dots \geq \kappa_s - m_s + 1 \geq 0 > \\ > \kappa_{s+1} - m_{s+1} + 1 \geq \dots \geq \kappa_n - m_n + 1,$$

тогда, согласно теореме 1, однородная краевая задача (21) имеет $2(\kappa_1 + \dots + \kappa_s + s - m_1 - \dots - m_s)$ линейно независимых решений над полем вещественных чисел. Неоднородная краевая задача (21) разрешима тогда и только тогда, если выполнены $-(\kappa_{s+1} \dots \kappa_n - m_{s+1} - \dots - m_n + n - s)$ комплексных условий:

$$\int_{\Gamma} \tau^j R_k[\Gamma(\tau)] d\tau = 0, \quad (22)$$

$k = s+1, s+2, \dots, n, j = 0, 1, \dots, -(\kappa_k - m_k + 1)$, R_k — некоторый линейный оператор.

Подставляя в (22) значение $\Gamma(t)$, получим вещественную систему из $-2(\kappa_{s+1} + \dots + \kappa_n - m_{s+1} - \dots - m_n + n - s)$ линейных уравнений относительно $2(m-n)$ вещественных неизвестных $\delta_j^k, \varepsilon_j^k$.

Пусть $C(t) \equiv 0$, т. е. задача (1) однородна, тогда и (22) тоже однородна. Если r — ранг матрицы системы (22), то свободных постоянных $\delta_j^k, \varepsilon_j^k$, дающих линейно независимые решения (21), а следовательно, и (1), будет $2(m-n) - r$. Значит, однородная задача (1) будет иметь

$$2(\kappa_1 + \dots + \kappa_s + s - m_1 - \dots - m_s + m_1 + \dots + m_n - n) - r = \\ = 2(\kappa_1 + \dots + \kappa_s + m_{s+1} + \dots + m_n + s - n) - r$$

линейно независимых решений над полем вещественных чисел.

Если $C(t) \neq 0$, то система (22) разрешима при совпадении рангов ее основной и расширенной матриц, что дает $-2(\kappa_{s+1} + \dots + \kappa_n - m_{s+1} - \dots - m_n + n - s) - r$ условий обращения в нуль определителей $r+1$ порядка, в которых $r+1$ столбец состоит из свободных членов системы. Условия разрешимости неоднородной системы (22), очевидно, будут одновременно условиями разрешимости неоднородной задачи (1).

Таким образом, имеет место

Теорема 2. Если элементы матрицы $A(t) = \|a_{ij}(t)\|$ непрерывны, $B(t) = \|b_{ij}(t)\|$ удовлетворяют условию Гельдера, $C(t) = (c_1, c_2, \dots, c_n)$,

$$c_i \in L_2(\Gamma) \quad (i, j = 1, 2, \dots, n),$$

$\det A(t) \neq 0$, Γ — единичная окружность, l — число линейно независимых решений над полем вещественных чисел задачи (1), p — число условий разрешимости неоднородной, то

$$l = 2(\kappa_1 + \dots + \kappa_s + m_{s+1} + \dots + m_n + s - n) - r,$$

$$p = -2(\kappa_{s+1} + \dots + \kappa_n - m_{s+1} - \dots - m_n + n - s) - r,$$

где r — ранг матрицы системы (22).

В заключение выражаю искреннюю благодарность профессору Ф. Д. Гахову за руководство работой.

Литература

1. Маркушевич А. И. Ученые записки МГУ. 1, 100, 1946.
2. Векуа И. Н. Обобщенные аналитические функции. Физматгиз, 1959.
3. Михайлов Л. Г. Новый класс особых интегральных уравнений и его применение к диф. уравнениям с сингулярными коэффициентами. Изд. АН ТаджССР, 1963.
4. Сабитов И. Х. Сибирский мат. журнал, 5, 1, 1964.
5. Векуа И. П. ДАН СССР, 86, 3, 1952.
6. Гахов Ф. Д. УМН, 7, 4(50), 1952.
7. Векуа И. П. Системы сингулярных интегральных уравнений. ГИИТЛ, 1950.

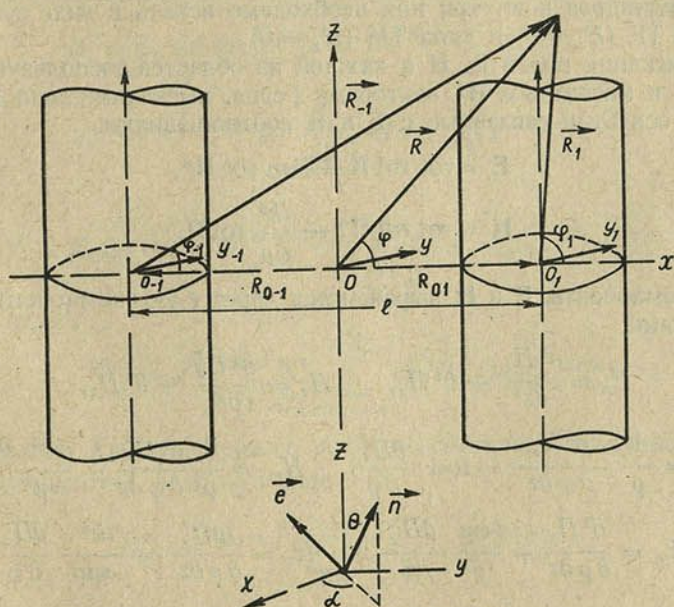
Белорусский государственный университет
им. В. И. Ленина

Поступило в редакцию 6.VI 1966

С. Ф. ИЛЮКЕВИЧ

ДИФРАКЦИЯ НАКЛОННО ПАДАЮЩЕЙ ПЛОСКОЙ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ВОЛНЫ НА ДВУХ НЕПРОВОДЯЩИХ КРУГОВЫХ ЦИЛИНДРАХ

В настоящей работе дается строгое решение задачи о дифракции плоской электромагнитной волны на системе из двух параллельных бесконечно длинных цилиндров кругового сечения (среди внутри цилиндров отвечают физические константы $\epsilon_1, \mu_1, \sigma_1$, где в общем случае $\sigma_1 \neq \infty$), когда волна распространяется в направлении единичного вектора \mathbf{n} , образующего угол Θ с осями цилиндров, проекция которого на плоскость, нормальную к осям цилиндров, образует угол α с линией центров цилиндров,



Геометрия задачи

и волна поляризована так, что ее электрический вектор \mathbf{E}^0 лежит в плоскости, проходящей через вектор \mathbf{n} и ось цилиндра. Окружающему цилиндры однородному изотропному пространству приписаны константы $\epsilon_0, \mu_0, \sigma_0$ ($\sigma_0 = 0$).

Решение такой задачи для одного диэлектрического цилиндра изложено в [1]. Частный случай дифракции плоской наклонно падающей волны на одном идеально проводящем цилиндре рассматривается в [2].

В [3] дается строгое решение и приведены некоторые результаты численного счета дифракционной задачи в случае двух цилиндров произвольной проводимости при нормальном падении плоской волны.

Рассматриваемая нами задача решается в предположении, что цилиндры имеют одинаковые радиусы $\rho = a$ и что их физические свойства не меняются вдоль продольных осей цилиндров. Координатная система $Oxyz$ введена так, что ее начало O совпадает с серединой отрезка l , соединяющего центры сечения цилиндров нормальной плоскостью, совпадающей с плоскостью Oxy , ось Oz параллельна осям цилиндров, а ось Ox направлена вдоль линии центров цилиндров. Введены также локальные координатные системы $O_s x_s y_s z_s$ ($s = \pm 1$) и связанные с ними формулами $x_s = \rho_s \cos \varphi_s$, $y_s = \rho_s \sin \varphi_s$, $z_s = z$ ($s = \pm 1$) цилиндрические координаты ρ_s , φ_s , z_s ($s = \pm 1$). (См. рисунок).

В координатах системы $Oxyz$ уравнение падающей волны

$$\mathbf{E}^0 = E_0' \mathbf{e} e^{ik_0 \mathbf{nR} - i\omega t} \quad (1)$$

($H_z^0 = 0$, поле падающей волны является полем типа ТМ), где \mathbf{R} — радиус-вектор точки наблюдения; \mathbf{e} — единичный вектор вдоль \mathbf{E}^0 , $k_0 = (\epsilon_0 \mu_0)^{1/2} \omega$ (среде внутри цилиндров отвечает $k_1^2 = \frac{\epsilon_1 \mu_1 \omega^2 + 4i\pi\sigma_1 \mu_1 \omega}{c^2}$).

Так же, как и в случае одного диэлектрического цилиндра, в рассматриваемой нами задаче при наклонном падении плоской волны вторичные поля вне цилиндров и внутри них необходимо искать в виде суперпозиции полей типа ТЕ ($E_z = 0$) и типа ТМ ($H_z = 0$).

Для отыскания полей \mathbf{E} , \mathbf{H} в каждой из областей воспользуемся электрическим $\mathbf{\Pi}$ и магнитным $\mathbf{\Pi}^*$ векторами Герца, имеющими лишь составляющие вдоль оси Oz и связанные с \mathbf{E} и \mathbf{H} соотношениями

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \text{rot rot } \mathbf{\Pi} + i\omega\mu \text{ rot } \mathbf{\Pi}^*, \\ \mathbf{H} &= \text{rot rot } \mathbf{\Pi}^* - \frac{ik^2}{\omega\mu} \text{ rot } \mathbf{\Pi}. \end{aligned} \quad (2)$$

Тогда компоненты \mathbf{E} и \mathbf{H} выражаются через z -ую компоненту $\mathbf{\Pi}$ и $\mathbf{\Pi}^*$ соотношениями:

$$\begin{aligned} E_z &= \frac{\partial^2 \Pi_z}{\partial z^2} + k^2 \Pi_z, & H_z &= \frac{\partial^2 \Pi_z^*}{\partial z^2} + k^2 \Pi_z^*, \\ E_\varphi &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 \Pi_z}{\partial \varphi \partial z} - i\omega\mu \frac{\partial \Pi_z^*}{\partial \rho}, & H_\varphi &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 \Pi_z^*}{\partial \varphi \partial z} + \frac{ik^2}{\omega\mu} \frac{\partial \Pi_z}{\partial \rho}, \\ E_\rho &= \frac{\partial^2 \Pi_z}{\partial \rho \partial z} + \frac{i\omega\mu}{\rho} \frac{\partial \Pi_z^*}{\partial \varphi}, & H_\rho &= \frac{\partial^2 \Pi_z^*}{\partial \rho \partial z} - \frac{ik^2}{\omega\mu\rho} \frac{\partial \Pi_z}{\partial \varphi} \end{aligned} \quad (3)$$

(внутри каждого из цилиндров $k = k_1$, $\mu = \mu_1$, а вне их $k = k_0$, $\mu = \mu_0$, в дальнейшем индекс z у Π_z и Π_z^* всюду опускается).

Пусть Π_s^2 и Π_s^{2*} — векторы Герца вторичного поля внутри s -го цилиндра ($s = \pm 1$), а Π^0 , Π^{0*} — векторы Герца вторичного поля вне цилиндров. Соответственно с этим сами вторичные поля внутри s -го цилиндра и вне цилиндров будем обозначать через \mathbf{E}_s^2 , \mathbf{H}_s^2 и \mathbf{E}^0 , \mathbf{H}^0 .

Для полного поля \mathbf{E}^1 , \mathbf{H}^1 вне цилиндров

$$\mathbf{\Pi}^1 = \mathbf{\Pi}^0 + \mathbf{\Pi}^p, \quad \mathbf{\Pi}^{1*} = \mathbf{\Pi}^{0*} + \mathbf{\Pi}^{p*} \quad (4)$$

($\mathbf{E}^1 = \mathbf{E}^0 + \mathbf{E}^p$, $\mathbf{H}^1 = \mathbf{H}^0 + \mathbf{H}^p$, где поле \mathbf{E}^p , \mathbf{H}^p должно удовлетворять условиям излучения на бесконечности), а Π^0 , Π^{0*} — векторы Герца поля падающей волны, причем для поля падающей волны $\Pi^{0*} = 0$.

На поверхности каждого из цилиндров касательные компоненты векторов \mathbf{E} и \mathbf{H} удовлетворяют условиям

$$E_z^1 = E_z^2, \quad H_z^1 = H_z^2, \quad \rho_s = a, \quad s = \pm 1. \quad (5)$$

$$E_\varphi^1 = E_\varphi^2, \quad H_\varphi^1 = H_\varphi^2,$$

Учитывая, что

$$E_z^0 = E_0' \sin \Theta e^{ik_0 n R} \quad (6)$$

и что для поля падающей волны $\Pi^{0*} = 0$, из (2) находим, что z-я составляющая электрического вектора Герца поля падающей волны равна

$$\Pi^0 = E_0 \sin \Theta e^{ik_0 n R}, \quad (7)$$

где $E_0 = \frac{E_0'}{\lambda_0^2}$ и $\lambda_0 = k_0 \sin \Theta$.

Так как $\mathbf{R} = \mathbf{R}_s + \mathbf{R}_{0s}$, где \mathbf{R}_s — радиус-вектор точки наблюдения в координатной системе $O_s x_s y_s z_s$, а \mathbf{R}_{0s} — радиус-вектор начала координат O_s в координатной системе $Oxyz$, то в координатах s-го цилиндра ($s = \pm 1$)

$$\Pi^0 = E_0 \sin \Theta e^{ik_0 z \cos \Theta - i\lambda_0 \rho_s \cos(\varphi_s - \alpha)} e^{ik_0 n R_{0s}} \quad (8)$$

Так как [4]

$$e^{-i\lambda_0 \rho_s \cos(\varphi_s - \alpha)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n J_n(\lambda_0 \rho_s) e^{in(\varphi_s - \alpha)},$$

то

$$\Pi^0 = E_0 \sin \Theta e^{ik_0 z \cos \Theta + ik_0 n R_{0s}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n J_n(\lambda_0 \rho_s) e^{in(\varphi_s - \alpha)}. \quad (9)$$

Π^p ищем в виде¹

$$\Pi^p = e^{ik_0 z \cos \Theta} \sum_{s=\pm 1} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n^s H_n^{(1)}(\lambda_0 \rho_s) e^{in\varphi_s} \quad (10)$$

(наличие функции Ханкеля первого рода обеспечивает требуемое поведение на бесконечности), а Π_s^2 — в виде

$$\Pi_s^2 = e^{ik_0 z \cos \Theta} \sum_{n=-\infty}^{\infty} y_n^s J_n(\lambda_1 \rho_s) e^{in\varphi_s}, \quad (11)$$

где $\lambda_1^2 = k_1^2 - k_0^2 \cos^2 \Theta$. (Наличие функции Бесселя первого рода обеспечивает конечность поля при $\rho_s = 0$).

z-ые составляющие магнитных векторов Герца Π^{p*} и Π_s^{2*} ищем в виде:

$$\Pi^{p*} = e^{ik_0 z \cos \Theta} \sum_{s=\pm 1} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n^s H_n^{(1)}(\lambda_0 \rho_s) e^{in\varphi_s}, \quad (12)$$

¹ Декартовы прямоугольные компоненты векторов Герца удовлетворяют, как известно, скалярному уравнению Гельмгольца $\Delta u + k^2 u = 0$.

$$\Pi_s^{2*} = e^{ik_0 z \cos \Theta} \sum_{n=-\infty}^{\infty} d_n^s J_n(\lambda_1 \rho_s) e^{in \varphi_s}. \quad (13)$$

Здесь $x_n^s, y_n^s, c_n^s, d_n^s$ — неизвестные коэффициенты, подлежащие определению в дальнейшем.

В цилиндрических координатах s -го цилиндра граничные условия (5) на основании (3) принимают вид:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho_s} \frac{\partial^2 \Pi^1}{\partial \varphi_s \partial z} - i \omega \mu_0 \frac{\partial \Pi^{1*}}{\partial \rho_s} &= \frac{1}{\rho_s} \frac{\partial^2 \Pi_s^2}{\partial \varphi_s \partial z} - i \omega \mu_1 \frac{\partial \Pi_s^{2*}}{\partial \rho_s}, \\ \frac{1}{\rho_s} \frac{\partial^2 \Pi^{1*}}{\partial \varphi_s \partial z} + \frac{ik_0^2}{\omega \mu_0} \frac{\partial \Pi^1}{\partial \rho_s} &= \frac{1}{\rho_s} \frac{\partial^2 \Pi_s^{2*}}{\partial \varphi_s \partial z} + \frac{ik_1^2}{\omega \mu_1} \frac{\partial \Pi_s^2}{\partial \rho_s}, \\ \frac{\partial^2 \Pi^1}{\partial z^2} + k_0^2 \Pi^1 &= \frac{\partial^2 \Pi_s^2}{\partial z^2} + k_1^2 \Pi_s^2, \\ \frac{\partial^2 \Pi^{1*}}{\partial z^2} + k_0^2 \Pi^{1*} &= \frac{\partial^2 \Pi_s^{2*}}{\partial z^2} + k_1^2 \Pi_s^{2*}. \end{aligned} \quad (14)$$

Подставляя выражения (9)—(13) в систему (14) и используя теорему сложения [5]

$$H_n^{(1)}(k \rho_j) e^{in \varphi_j} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} J_m(k \rho_s) H_{n-m}^{(1)}(k \rho_{js}) e^{im \varphi_s - i(n-m) \varphi_{js}}, \quad (15)$$

позволяющую переписать волновые функции s -го цилиндра через волновые функции $-s$ -го цилиндра ($s = \pm 1$), что необходимо для одновременного удовлетворения (9)—(13) краевым условиям (14) на поверхности обоих цилиндров (здесь $\varphi_{-1,1} = 0, \varphi_{1,-1} = \pi, l > \rho_s$), получаем бесконечную систему линейных уравнений для неизвестных коэффициентов, которая после замены коэффициентов $x_n^s, y_n^s, c_n^s, d_n^s$ на новые $X_n^s, Y_n^s, C_n^s, D_n^s$ по формулам [6]:

$$\begin{aligned} x_n^s &= J_n(\lambda_0 a) X_n^s, \quad y_n^s = H_n^{(1)}(\lambda_1 a) Y_n^s, \\ c_n^s &= J_n(\lambda_0 a) C_n^s, \quad d_n^s = H_n^{(1)}(\lambda_1 a) D_n^s, \end{aligned} \quad (16)$$

записывается в виде:

$$\begin{aligned} X_n^s + \frac{1}{H_n^{(1)}(\lambda_0 a)} \sum_{m=-\infty}^{\infty} J_m(\lambda_0 a) H_{m-n}^{(1)}(\lambda_0 l) e^{-i(m-n) \varphi_{-s, s}} X_m^s + \\ + \frac{i \omega \mu_0 a \lambda_0}{k_0 n \cos \Theta} \frac{H_n^{(1)'}(\lambda_0 a)}{H_n^{(1)}(\lambda_0 a)} C_n^s + \frac{i \omega \mu_0 a \lambda_0}{k_0 n \cos \Theta} \frac{J_n'(\lambda_0 a)}{J_n(\lambda_0 a) H_n^{(1)}(\lambda_0 a)} \times \\ \times \sum_{m=-\infty}^{\infty} J_m(\lambda_0 a) H_{m-n}^{(1)}(\lambda_0 l) e^{-i(m-n) \varphi_{-s, s}} C_m^s - \\ - \frac{J_n(\lambda_1 a) H_n^{(1)}(\lambda_1 a)}{J_n(\lambda_0 a) H_n^{(1)}(\lambda_0 a)} Y_n^s - \frac{i \omega a \lambda_1 \mu_1}{k_0 n \cos \Theta} \frac{J_n'(\lambda_1 a) H_n^{(1)}(\lambda_1 a)}{H_n^{(1)}(\lambda_0 a) J_n(\lambda_0 a)} D_n^s = \end{aligned}$$

$$= -E_0 \sin \Theta e^{ik_0 n R_{0s}} i^n e^{-ina} \frac{1}{H_n^{(1)}(\lambda_0 a)}, \quad (17)$$

$$\begin{aligned} X_n^s + \frac{J_n'(\lambda_0 a)}{J_n(\lambda_0 a) H_n^{(1)'}(\lambda_0 a)} \sum_{m=-\infty}^{\infty} J_m(\lambda_0 a) H_{m-n}^{(1)}(\lambda_0 l) e^{-i(m-n)\varphi-s, s} X_m^{-s} + \\ + \frac{i \omega n \cos \Theta \mu_0}{a \lambda_0 k_0} \frac{H_n^{(1)}(\lambda_0 a)}{H_n^{(1)'}(\lambda_0 a)} C_n^s + \frac{i \omega n \cos \Theta \mu_0}{a \lambda_0 k_0} \frac{1}{H_n^{(1)'}(\lambda_0 a)} \times \\ \times \sum_{m=-\infty}^{\infty} J_m(\lambda_0 a) H_{m-n}^{(1)}(\lambda_0 l) e^{-i(m-n)\varphi-s, s} C_m^{-s} - \\ - \frac{\lambda_1 k_1^2 \mu_0 J_n'(\lambda_1 a) H_n^{(1)}(\lambda_1 a)}{\lambda_0 k_0^2 \mu_1 J_n(\lambda_0 a) H_n^{(1)'}(\lambda_0 a)} Y_n^s - \frac{i \omega n \cos \Theta \mu_0}{a \lambda_0 k_0} \frac{J_n(\lambda_1 a) H_n^{(1)}(\lambda_1 a)}{H_n^{(1)'}(\lambda_0 a) J_n(\lambda_0 a)} D_n^s = \\ = -E_0 \sin \Theta e^{ik_0 n R_{0s}} i^n e^{-ina} \frac{J_n'(\lambda_0 a)}{J_n(\lambda_0 a) H_n^{(1)'}(\lambda_0 a)}, \quad (18) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X_n^{(s)} + \frac{1}{H_n^{(1)}(\lambda_0 a)} \sum_{m=-\infty}^{\infty} J_m(\lambda_0 a) H_{m-n}^{(1)}(\lambda_0 l) e^{-i(m-n)\varphi-s, s} X_m^{-s} - \\ - \frac{\lambda_1^2}{\lambda_0^2} \frac{J_n(\lambda_1 a) H_n^{(1)}(\lambda_1 a)}{J_n(\lambda_0 a) H_n^{(1)}(\lambda_0 a)} Y_n^s = -E_0 \sin \Theta e^{ik_0 n R_{0s}} i^n e^{-ina} \frac{1}{H_n^{(1)}(\lambda_0 a)}, \quad (19) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_n^s + \frac{1}{H_n^{(1)}(\lambda_0 a)} \sum_{m=-\infty}^{\infty} J_m(\lambda_0 a) H_{m-n}^{(1)}(\lambda_0 l) e^{-i(m-n)\varphi-s, s} C_m^{-s} - \\ - \frac{\lambda_1^2}{\lambda_0^2} \frac{J_n(\lambda_1 a) H_n^{(1)}(\lambda_1 a)}{J_n(\lambda_0 a) H_n^{(1)}(\lambda_0 a)} D_n^s = 0. \quad (20) \end{aligned}$$

Исключая Y_n^s и D_n^s , получаем:

$$X_n^s + \sum_{m=-\infty}^{\infty} D_{nm}^{-s, s} X_m^{-s} - A_n C_n^s - B_n \sum_{m=-\infty}^{\infty} D_{nm}^{-s, s} C_m^{-s} = F_n^s, \quad (21)$$

$$C_n^s + \sum_{m=-\infty}^{\infty} D_{nm}^{-s, s} C_m^{-s} + K_n X_n^s + G_n \sum_{m=-\infty}^{\infty} D_{nm}^{-s, s} X_m^{-s} = f_n^s,$$

где

$$A_n = a_n \begin{vmatrix} \mu_0 J_n(\lambda_1 a) & \lambda_0 H_n^{(1)}(\lambda_0 a) \\ \mu_1 J_n'(\lambda_1 a) & \lambda_1 H_n^{(1)'}(\lambda_0 a) \end{vmatrix};$$

$$B_n = b_n \begin{vmatrix} \mu_0 J_n(\lambda_1 a) & \lambda_0 J_n(\lambda_0 a) \\ \mu_1 J_n'(\lambda_1 a) & \lambda_1 J_n'(\lambda_0 a) \end{vmatrix};$$

$$K_n = a_n \begin{vmatrix} \frac{k_0^2}{\omega^2 \mu_0} J_n(\lambda_1 a) & \lambda_0 H_n^{(1)}(\lambda_0 a) \\ \frac{k_1^2}{\omega^2 \mu_1} J_n'(\lambda_1 a) & \lambda_1 H_n^{(1)'}(\lambda_0 a) \end{vmatrix};$$

$$G_n = b_n \begin{vmatrix} \frac{k_0^2}{\omega^2 \mu_0} J_n(\lambda_1 a) & \lambda_0 J_n(\lambda_0 a) \\ \frac{k_1^2}{\omega^2 \mu_1} J_n'(\lambda_1 a) & \lambda_1 J_n'(\lambda_0 a) \end{vmatrix};$$

$$a_n = \frac{N_n}{H_n^{(1)}(\lambda_0 a)}; \quad b_n = \frac{N_n}{J_n(\lambda_0 a)}; \quad 22$$

$$N_n = \frac{-i \omega a \lambda_0 \lambda_1}{k_0 n \cos \Theta (\lambda_1^2 - \lambda_0^2) J_n(\lambda_1 a)};$$

$$D_{nm}^{-s, s} = \frac{J_m(\lambda_0 a) H_{m-n}^{(1)}(\lambda_0 l)}{H_n^{(1)}(\lambda_0 a)} e^{-i(m-n)\varphi_{-s, s}};$$

$$F_n^s = -E_0 \sin \Theta e^{ik_0 n R_{0s}} i^n e^{-ina} \frac{1}{H_n^{(1)}(\lambda_0 a)};$$

$$f_n^s = -E_0 \sin \Theta G_n e^{ik_0 n R_{0s}} i^n e^{-ina} \frac{1}{H_n^{(1)}(\lambda_0 a)}.$$

Вычислив отсюда X_n^s и C_n^s , значения Y_n^s и D_n^s затем можно найти из (19)–(20).

Преобразуем систему (17)–(20) к виду, более удобному для исследования и вычисления X_n^s , C_n^s , для чего воспользуемся идеями работы [7].

Заметим, что

$$D_{nm}^{-1} = (-1)^{m-n} D_{nm}, \quad (23)$$

где через D_{nm} обозначено $D_{nm}^{-1, 1}$. На основании (23) систему (17)–(20) можно записать в виде:

$$X_n^1 + \sum_{m=-\infty}^{\infty} D_{nm} X_m^{-1} - A_n C_n^1 - B_n \sum_{m=-\infty}^{\infty} D_{nm} C_m^{-1} = F_n^1,$$

$$X_n^{-1} + (-1)^n \sum_{m=-\infty}^{\infty} (-1)^m D_{nm} X_m^1 - A_n C_n^{-1} -$$

$$-B_n (-1)^n \sum_{m=-\infty}^{\infty} (-1)^m D_{nm} C_m^1 = F_n^{-1},$$

$$C_n^1 + \sum_{m=-\infty}^{\infty} D_{nm} C_m^{-1} + K_n X_n^1 + G_n \sum_{m=-\infty}^{\infty} D_{nm} X_m^{-1} = f_n^1, \quad (24)$$

$$C_n^{-1} + (-1)^n \sum_{m=-\infty}^{\infty} (-1)^m D_{nm} C_m^1 + K_n X_n^{-1} + \\ + G_n (-1)^n \sum_{m=-\infty}^{\infty} (-1)^m D_{nm} X_m^1 = f_n^{-1},$$

где

$$D_{im} = \frac{J_m(\lambda_0 a) H_{m-n}^{(1)}(\lambda_0 l)}{H_n^{(1)}(\lambda_0 a)};$$

$$F_n^s = -E_0 \sin \Theta i^n e^{-ina} e^{ik_0 s l \sin \Theta \cos \alpha} \frac{1}{H_n^{(1)}(\lambda_0 a)}; \quad (25)$$

$$f_n^s = -E_0 \sin \Theta i^n e^{-ina} e^{ik_0 s l \sin \Theta \cos \alpha} G_n \frac{1}{H_n^{(1)}(\lambda_0 a)} \quad (s = \pm 1).$$

Умножив второе и четвертое уравнения из (24) на $(-1)^n$, сложим по-членно первое со вторым и третье с четвертым уравнения из (24), а затем вычтем из первого уравнения второе и из третьего четвертое и введем обозначения:

$$\begin{aligned} \alpha_n &= X_n^1 + (-1)^n X_n^{-1}, & \varphi_n &= F_n^1 + (-1)^n F_n^{-1}, \\ \beta_n &= X_n^1 - (-1)^n X_n^{-1}, & \sigma_n &= F_n^1 - (-1)^n F_n^{-1}, \\ \gamma_n &= C_n^1 + (-1)^n C_n^{-1}, & \psi_n &= f_n^1 + (-1)^n f_n^{-1}, \\ \tau_n &= C_n^1 - (-1)^n C_n^{-1}, & \kappa_n &= f_n^1 - (-1)^n f_n^{-1}. \end{aligned} \quad (26)$$

В результате получаем систему вида:

$$\begin{aligned} \alpha_n - A_n \gamma_n + \sum_{m=-\infty}^{\infty} (-1)^m D_{nm} \alpha_m - B_n \sum_{m=-\infty}^{\infty} (-1)^m D_{nm} \gamma_m &= \varphi_n, \\ \gamma_n + K_n \alpha_n + \sum_{m=-\infty}^{\infty} (-1)^m D_{nm} \gamma_m + G_n \sum_{m=-\infty}^{\infty} (-1)^m D_{nm} \alpha_m &= \psi_n, \\ \beta_n - A_n \tau_n - \sum_{m=-\infty}^{\infty} (-1)^m D_{nm} \beta_m + B_n \sum_{m=-\infty}^{\infty} (-1)^m D_{nm} \tau_m &= \sigma_n, \\ \tau_n + K_n \beta_n - \sum_{m=-\infty}^{\infty} (-1)^m D_{nm} \tau_m - G_n \sum_{m=-\infty}^{\infty} (-1)^m D_{nm} \beta_m &= \kappa_n, \end{aligned} \quad (27)$$

разрешая которую относительно $\alpha_n, \beta_n, \gamma_n, \tau_n$, найдем, что

$$\alpha_n + \sum_{m=-\infty}^{\infty} Q_{nm} \alpha_m = \bar{\varphi}_n, \quad (28)$$

$$\gamma_n + \sum_{m=-\infty}^{\infty} R_{nm} \gamma_m = \bar{\psi}_n, \quad (29)$$

$$\beta_n + \sum_{m=-\infty}^{\infty} P_{nm} \beta_m = \bar{\sigma}_n, \quad (30)$$

$$\tau_n + \sum_{m=-\infty}^{\infty} S_{nm} \tau_m = \bar{\kappa}_n. \quad (31)$$

Здесь

$$\begin{aligned} Q_{nm} &= (-1)^m a_{nm} D_{nm} + \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^{k+m} b_{nk} D_{nk} D_{km}, \\ R_{nm} &= (-1)^m g_{nm} D_{nm} + \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^{k+m} t_{nk} D_{nk} D_{km}, \\ P_{nm} &= -(-1)^m a_{nm} D_{nm} + \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^{k+m} b_{nk} D_{nk} D_{km}, \\ S_{nm} &= -(-1)^m g_{nm} D_{nm} + \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^{k+m} t_{nk} D_{nk} D_{km}, \\ a_{nm} &= \frac{[1 + A_n G_n][B_m - A_m] + [B_n - A_n][1 + B_m K_m]}{[B_m - A_m][1 + A_n K_n]}, \\ b_{nk} &= \frac{[1 + B_k G_k][B_n - A_n]}{[B_k - A_k][1 + A_n K_n]}, \\ g_{nm} &= \frac{[1 + B_n K_n][G_m - K_m] + [1 + A_m G_m][G_n - K_n]}{[G_m - K_m][1 + A_n K_n]}, \\ t_{nk} &= \frac{[1 + B_k G_k][G_n - K_n]}{[G_k - K_k][1 + A_n K_n]}, \\ \bar{\varphi}_n &= \frac{\varphi_n + A_n \psi_n}{1 + A_n K_n} + \sum_{m=-\infty}^{\infty} (-1)^m \frac{[\varphi_m + B_m \psi_m][B_n - A_n]}{[B_m - A_m][1 + A_n K_n]} D_{nm}, \\ \bar{\psi}_n &= \frac{\psi_n - K_n \varphi_n}{1 + A_n K_n} - \sum_{m=-\infty}^{\infty} (-1)^m \frac{[G_m \varphi_m - \psi_m][G_n - K_n]}{[G_m - K_m][1 + A_n K_n]} D_{nm}, \\ \bar{\sigma}_n &= \frac{A_n \tau_n + \sigma_n}{1 + A_n K_n} - \sum_{m=-\infty}^{\infty} (-1)^m \frac{[\sigma_m + B_m \tau_m][B_n - A_n]}{[B_m - A_m][1 + A_n K_n]} D_{nm}, \\ \bar{\kappa}_n &= \frac{\tau_n - \sigma_n K_n}{1 + A_n K_n} + \sum_{m=-\infty}^{\infty} (-1)^m \frac{[\sigma_m G_m - \tau_m][G_n - K_n]}{[G_m - K_m][1 + A_n K_n]} D_{nm}. \end{aligned} \quad (32)$$

Матрицы коэффициентов систем (28)—(31), подобно тому, как и в [6], образуют вполне непрерывную форму в гильбертовом пространстве l^2 (при условии, что цилиндры не касаются) и их правые части $\{\bar{\varphi}_n\} \in l^2$, $\{\bar{\psi}_n\} \in l^2$, $\{\bar{\sigma}_n\} \in l^2$, $\{\bar{\kappa}_n\} \in l^2$.

Системы (28)–(31) являются квазирегулярными, разрешимыми методом усечения. Их решения удовлетворяют условиям $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |\alpha_n|^2 < \infty$, $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |\beta_n|^2 < \infty$, $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |\gamma_n|^2 < \infty$, $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |\tau_n|^2 < \infty$, пользуясь которыми нетрудно доказать сходимость искомых рядов для составляющих векторов Герца.

Определением коэффициентов $\alpha_n, \beta_n, \gamma_n, \tau_n$, а затем $X_n^s, Y_n^s, C_n^s, D_n^s$ полностью решается задача по отысканию поля **E, H**. Заметим, что преобразование (16) введено исходя из соображений, указанных в [6].

В случае нормального падения волны (т. е. $\Theta = \pi/2$) при указанной выше поляризации для отыскания полного поля (вне цилиндров) достаточно воспользоваться только одним электрическим вектором Герца Π ($\Pi = z\Pi, z \parallel Oz$).

Краевые условия на поверхности цилиндров имеют вид

$$E_z^1 = E_z^2, \quad H_\varphi^1 = H_\varphi^2, \quad \rho_s = a, \quad s = \pm 1$$

и для неизвестных коэффициентов X_n^s ($C_n^s = 0, D_n^s = 0$) получаются бесконечные системы линейных уравнений (такие же, как и в [3], если там положить $b = a$)

$$X_n^s + T_n \sum_{m=-\infty}^{\infty} D_{nm}^{-s,s} X_m^{-s} = \Phi_n^s,$$

где

$$T_n = \frac{\begin{vmatrix} \frac{k_0^2}{\mu_0} J_n(\lambda_1 a) & \lambda_0 J_n(\lambda_0 a) \\ \frac{k_1^2}{\mu_1} J'_n(\lambda_1 a) & \lambda_1 J'_n(\lambda_0 a) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{k_0^2}{\mu_0} J_n(\lambda_1 a) & \lambda_0 H_n^{(1)}(\lambda_0 a) \\ \frac{k_1^2}{\mu_1} J'_n(\lambda_1 a) & \lambda_1 H_n^{(1)'}(\lambda_0 a) \end{vmatrix}} \frac{H_n^{(1)}(\lambda_0 a)}{J_n(\lambda_0 a)},$$

$$\Phi_n = -E_0 e^{-ina} e^{ik_1 s i \cos \alpha} e^{jn} \frac{1}{J_n(\lambda_0 a)} \frac{\begin{vmatrix} \frac{k_0^2}{\mu_0} J_n(\lambda_1 a) & \lambda_0 J_n(\lambda_0 a) \\ \frac{k_1^2}{\mu_1} J'_n(\lambda_1 a) & \lambda_1 J'_n(\lambda_0 a) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{k_0^2}{\mu_0} J_n(\lambda_1 a) & \lambda_0 H_n^{(1)}(\lambda_0 a) \\ \frac{k_1^2}{\mu_1} J'_n(\lambda_1 a) & \lambda_1 H_n^{(1)'}(\lambda_0 a) \end{vmatrix}},$$

$\lambda_0 = k_0, \lambda_1 = k_1$, а $D_{nm}^{-s,s}$ определено в (22). Y_n^s определяются из (19).

В случае двух идеально проводящих цилиндров решение задачи также может быть получено введением в рассмотрение лишь одного электрического вектора Герца.

Задача для случая, когда полем наклонно падающей волны является поле типа ТЕ, решается аналогично.

Литература

1. Уэйт Д. Электромагнитное излучение из цилиндрических систем. Изд. «Сов. радио», М., 1963.
2. Менцер Д. Дифракция и рассеяние радиоволн. Изд. «Сов. радио», М., 1958.
3. Иванов Е. А., Ильюкевич С. Ф. Дифференциальные уравнения, № 1, 1965.
4. Стрэттон Д. Теория электромагнетизма. Гостехиздат, М., 1948.
5. Лебедев Н. Н. Специальные функции и их приложения. Гос. изд. физ.-мат. литературы, М.—Л., 1963.
6. Иванов Е. А., Родов А. М. Весці АН БССР, сер. фіз.-тэхн. навук, № 4, 1964.
7. Иванов Е. А. Дифференциальные уравнения, № 6, 1966.

Институт математики
АН БССР

Поступило в редакцию 8.VI 1966

А. А. ПАЛЬЦЕВ

КВАДРАТУРНЫЕ ПРАВИЛА С НАПЕРЕД ЗАДАНЫМИ УЗЛАМИ ДЛЯ ВЫЧИСЛЕНИЯ ИНТЕГРАЛА

$$\int_0^1 x^\alpha \operatorname{lg} \frac{e}{x} f(x) dx$$

В некоторых задачах прикладной математики, например при численном решении интегральных уравнений Фредгольма второго рода или при решении граничной задачи для дифференциальных уравнений при помощи приведения ее к интегральному уравнению, полезно применить квадратурные правила с узлами, фиксированными на одном или на обоих концах отрезка интегрирования.

Общая теория квадратурных правил такого типа была дана А. Марковым [1].

Квадратурные правила для постоянной весовой функции и с узлами, фиксированными на одном или на обоих концах отрезка интегрирования, рассматривались в работах Лобатто [2] и Радо [3].

Для весовой функции Лягерра квадратурное правило с фиксированным узлом в точке $x=0$ построено В. И. Крыловым и Н. П. Феденко [4].

В настоящей работе рассматриваются квадратурные правила

$$\int_0^1 x^\alpha \operatorname{lg} \frac{e}{x} f(x) dx \approx \sum_{j=1}^m A_j f(a_j) + \sum_{k=1}^n B_k f(x_k), \quad \alpha > -1 \quad (1)$$

для интегрирования функций с логарифмической и степенной особенностями и с узлами, фиксированными на одном и на обоих концах отрезка $[0, 1]$.

Введем обозначения

$$\sigma(x) = (x - a_1)(x - a_2) \dots (x - a_m), \quad \omega(x) = (x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n).$$

Чтобы квадратурное правило (1) имело наивысшую алгебраическую степень точности, должны выполняться следующие условия, определяющие узлы x_k и коэффициенты A_j и B_k в формуле (1):

1. Многочлен $\omega(x)$ должен быть ортогонален на $[0, 1]$ по весу $x^\alpha \sigma(x) \operatorname{lg} \frac{e}{x}$ к любому многочлену степени, меньшей n , или, что равносильно, ко всем степеням x^i , где $i < n$, т. е.

$$\int_0^1 x^{\alpha+i} \sigma(x) \omega(x) \operatorname{lg} \frac{e}{x} dx = 0, \quad i=0, 1, \dots, n-1.$$

2. Коэффициенты A_j и B_k должны быть интерполяционными:

$$A_j = \int_0^1 x^\alpha \lg \frac{e}{x} \frac{\sigma(x) \omega(x)}{(x-a_j) \sigma'(a_j) \omega(a_j)} dx,$$

$$B_k = \int_0^1 x^\alpha \lg \frac{e}{x} \frac{\sigma(x) \omega(x)}{(x-x_k) \omega'(x_k) \sigma(x_k)} dx.$$

3. Узлы x_k не должны совпадать ни с одним из a_j .

Всюду в дальнейшем эти условия считаются выполненными.

Ниже приводятся значения параметров A_j , B_k и x_k квадратурного правила (1) для $n=1(1)10$ и $\alpha=0$ с узлами a_j , фиксированными на одном и на обоих концах отрезка $[0, 1]$. Значения A_j , B_k и x_k даны в нормализованном виде.

Все вычисления выполнены на ЭВМ «Минск-2» с утроенным числом разрядов.

$$\int_0^1 \lg \frac{e}{x} f(x) dx \approx A_1 f(0) + \sum_{k=1}^n B_k f(x_k)$$

$n = 1$

$$\begin{array}{l} x_1 = 0,5925 \ 9259 \ 2592 \ 5926 \ (0) \\ A_1 = 0,7343 \ 7500 \ 0000 \ 0000 \ (0) \\ B_{11} = 0,1265 \ 6250 \ 0000 \ 0000 \ (1) \end{array}$$

$n = 2$

$$\begin{array}{l} x_1 = 0,2996 \ 3485 \ 0455 \ 0378 \ (0) \\ x_2 = 0,8161 \ 7666 \ 7869 \ 5695 \ (0) \\ A_1 = 0,3953 \ 9475 \ 2491 \ 7339 \ (0) \\ B_{11} = 0,1083 \ 4386 \ 3998 \ 9534 \ (1) \\ B_{22} = 0,5211 \ 6660 \ 7518 \ 7319 \ (0) \end{array}$$

$n = 3$

$$\begin{array}{l} x_1 = 0,1772 \ 7933 \ 8030 \ 7697 \ (0) \\ x_2 = 0,5497 \ 9894 \ 3588 \ 3565 \ (0) \\ x_3 = 0,8983 \ 5982 \ 0192 \ 8906 \ (0) \\ A_1 = 0,2518 \ 8243 \ 6132 \ 4496 \ (0) \\ B_{11} = 0,8255 \ 2913 \ 7795 \ 6401 \ (0) \\ B_{22} = 0,6459 \ 8653 \ 1319 \ 7272 \ (0) \\ B_{33} = 0,2766 \ 0189 \ 4752 \ 1831 \ (0) \end{array}$$

$n = 4$

$$\begin{array}{l} x_1 = 0,1166 \ 6141 \ 7662 \ 0435 \ (0) \\ x_2 = 0,3811 \ 2537 \ 1351 \ 3754 \ (0) \\ x_3 = 0,6970 \ 0357 \ 8397 \ 4120 \ (0) \\ x_4 = 0,9360 \ 3378 \ 3390 \ 3197 \ (0) \\ A_1 = 0,1764 \ 6583 \ 7942 \ 1681 \ (0) \\ B_{11} = 0,6361 \ 7365 \ 8137 \ 8873 \ (0) \\ B_{22} = 0,6096 \ 6161 \ 6405 \ 6694 \ (0) \\ B_{33} = 0,4071 \ 4564 \ 1414 \ 4733 \ (0) \\ B_{44} = 0,1705 \ 5324 \ 6099 \ 8019 \ (0) \end{array}$$

$n = 5$

$$\begin{array}{l} x_1 = 0,8249 \ 7549 \ 4799 \ 6401 \ (-1) \\ x_2 = 0,2765 \ 8436 \ 2829 \ 4275 \ (0) \\ x_3 = 0,5340 \ 2972 \ 6084 \ 4071 \ (0) \\ x_4 = 0,7850 \ 0864 \ 0717 \ 1869 \ (0) \\ x_5 = 0,9561 \ 7434 \ 6719 \ 5263 \ (0) \\ A_1 = 0,1314 \ 5735 \ 1728 \ 9424 \ (0) \\ B_{11} = 0,5029 \ 0562 \ 4152 \ 3783 \ (0) \\ B_{22} = 0,5395 \ 3321 \ 5365 \ 1058 \ (0) \\ B_{33} = 0,4342 \ 4645 \ 1600 \ 7036 \ (0) \\ B_{44} = 0,2763 \ 3688 \ 6625 \ 0672 \ (0) \\ B_{55} = 0,1155 \ 2047 \ 0527 \ 8027 \ (0) \end{array}$$

$n = 6$

$x_1 = 0,6140$	6055	4523	4913	(-1)	$A_1 = 0,1022$	3330	5531	8691	(0)
$x_2 = 0,2088$	8171	1489	2103	(0)	$B_1 = 0,4073$	7653	2322	1174	(0)
$x_3 = 0,4158$	4741	4121	7154	(0)	$B_2 = 0,4695$	7060	6963	5518	(0)
$x_4 = 0,6419$	4749	2232	0892	(0)	$B_3 = 0,4206$	9140	5761	2386	(0)
$x_5 = 0,8405$	0170	1846	3632	(0)	$B_4 = 0,3177$	7658	9338	2132	(0)
$x_6 = 0,9681$	4189	0429	0503	(0)	$B_5 = 0,1989$	6389	4150	0741	(0)
					$B_6 = 0,8338$	7665	9329	3583	(-1)

$n = 7$

$x_1 = 0,4748$	6334	2280	9189	(-1)	$A_1 = 0,8208$	0994	5994	9695	(-1)
$x_2 = 0,1629$	5397	8426	0297	(0)	$B_1 = 0,3369$	9375	3663	1422	(0)
$x_3 = 0,3306$	3924	1068	9922	(0)	$B_2 = 0,4081$	7703	7023	2194	(0)
$x_4 = 0,5258$	4778	9832	7616	(0)	$B_3 = 0,3921$	7824	4645	1138	(0)
$x_5 = 0,7184$	3655	9089	0577	(0)	$B_4 = 0,3271$	7213	0514	5535	(0)
$x_6 = 0,8773$	5072	8129	3305	(0)	$B_5 = 0,2405$	2354	5163	8630	(0)
$x_7 = 0,9758$	1406	6663	1603	(0)	$B_6 = 0,1498$	5849	8482	7028	(0)
					$B_7 = 0,6301$	5795	9079	0836	(-1)

$n = 8$

$x_1 = 0,3782$	1727	9177	3764	(-1)	$A_1 = 0,6754$	1724	4899	5196	(-1)
$x_2 = 0,1305$	1382	1692	8233	(0)	$B_1 = 0,2837$	4150	7790	3308	(0)
$x_3 = 0,2681$	7428	9807	2351	(0)	$B_2 = 0,3563$	5531	1045	5038	(0)
$x_4 = 0,4349$	4099	7299	4307	(0)	$B_3 = 0,3596$	4372	0515	1633	(0)
$x_5 = 0,6107$	6261	7137	6810	(0)	$B_4 = 0,3204$	6319	7206	5275	(0)
$x_6 = 0,7737$	6086	2796	9010	(0)	$B_5 = 0,2584$	1408	9741	2375	(0)
$x_7 = 0,9029$	2533	3118	5798	(0)	$B_6 = 0,1876$	7924	5333	7817	(0)
$x_8 = 0,9810$	2049	1838	6381	(0)	$B_7 = 0,1168$	6686	1037	1524	(0)
					$B_8 = 0,4929$	4342	8403	5097	(-1)

$n = 9$

$x_1 = 0,3083$	9184	2139	6119	(-1)	$A_1 = 0,5667$	5778	3414	6020	(-1)
$x_2 = 0,1068$	0929	8226	5778	(0)	$B_1 = 0,2424$	8703	1704	4516	(0)
$x_3 = 0,2213$	9688	6633	3574	(0)	$B_2 = 0,3130$	7643	0856	8159	(0)
$x_4 = 0,3639$	9053	8607	5152	(0)	$B_3 = 0,3276$	7231	0381	3449	(0)
$x_5 = 0,5208$	3941	5950	6985	(0)	$B_4 = 0,3060$	4174	1072	1236	(0)
$x_6 = 0,6763$	7529	6594	5142	(0)	$B_5 = 0,2624$	9588	5013	0923	(0)
$x_7 = 0,8147$	2310	6788	5183	(0)	$B_6 = 0,2080$	0109	3631	9607	(0)
$x_8 = 0,9213$	4120	3915	7154	(0)	$B_7 = 0,1502$	6502	6988	8956	(0)
$x_9 = 0,9847$	1295	9539	4915	(0)	$B_8 = 0,9367$	0617	4700	4785	(-1)
					$B_9 = 0,3961$	4084	5398	0728	(-1)

$n = 10$

$x_1 = 0,2563$	0359	2357	3223	(-1)	$A_1 = 0,4832$	2205	5675	4230	(-1)
$x_2 = 0,8898$	8104	2275	8340	(-1)	$B_1 = 0,2098$	6396	6103	3027	(0)
$x_3 = 0,1856$	2375	2904	2501	(0)	$B_2 = 0,2769$	2390	7761	8549	(0)
$x_4 = 0,3081$	9175	0055	8463	(0)	$B_3 = 0,2980$	5186	7203	5762	(0)
$x_5 = 0,4469$	9392	7360	0536	(0)	$B_4 = 0,2883$	7053	0225	1804	(0)
$x_6 = 0,5907$	6277	6446	6298	(0)	$B_5 = 0,2585$	9835	7659	3492	(0)
$x_7 = 0,7275$	5709	8124	1312	(0)	$B_6 = 0,2171$	6770	2803	8219	(0)
$x_8 = 0,8457$	4244	4606	8605	(0)	$B_7 = 0,1704$	9459	2163	2306	(0)
$x_9 = 0,9350$	1572	0310	0065	(0)	$B_8 = 0,1229$	2334	5877	0429	(0)
$x_{10} = 0,9874$	2541	5833	1278	(0)	$B_9 = 0,7675$	3146	0297	6695	(-1)
					$B_{10} = 0,3253$	0378	6053	3195	(-1)

$$\int_0^1 \lg \frac{e}{x} f(x) dx \approx A_1 f(1) + \sum_{k=1}^n B_k f(x_k)$$

$n = 1$

$$x_1 = 0,2444 \ 4444 \ 4444 \ 4444 \ (\ 0) \quad \begin{array}{l} A_1 = 0,3455 \ 8823 \ 5294 \ 1176 \ (\ 0) \\ B_1 = 0,1654 \ 4117 \ 6470 \ 5882 \ (\ 1) \end{array}$$

 $n = 2$

$$\begin{array}{l} x_1 = 0,1121 \ 9267 \ 6104 \ 3249 \ (\ 0) \\ x_2 = 0,5907 \ 7228 \ 3464 \ 4083 \ (\ 0) \end{array} \quad \begin{array}{l} A_1 = 0,1370 \ 1972 \ 6158 \ 3863 \ (\ 0) \\ B_1 = 0,1018 \ 8834 \ 3984 \ 1309 \ (\ 1) \\ B_2 = 0,8440 \ 9683 \ 4000 \ 3042 \ (\ 0) \end{array}$$

 $n = 3$

$$\begin{array}{l} x_1 = 0,6474 \ 6591 \ 9601 \ 6547 \ (-1) \\ x_2 = 0,3631 \ 6725 \ 0421 \ 8703 \ (\ 0) \\ x_3 = 0,7593 \ 1688 \ 4672 \ 9514 \ (\ 0) \end{array} \quad \begin{array}{l} A_1 = 0,7296 \ 7963 \ 2605 \ 0957 \ (-1) \\ B_1 = 0,6894 \ 9868 \ 9743 \ 1583 \ (\ 0) \\ B_2 = 0,7756 \ 9330 \ 5595 \ 1332 \ (\ 0) \\ B_3 = 0,4618 \ 4004 \ 1401 \ 1990 \ (\ 0) \end{array}$$

 $n = 4$

$$\begin{array}{l} x_1 = 0,4225 \ 8944 \ 5223 \ 5214 \ (-1) \\ x_2 = 0,2427 \ 8801 \ 7163 \ 7988 \ (\ 0) \\ x_3 = 0,5494 \ 4645 \ 5940 \ 6071 \ (\ 0) \\ x_4 = 0,8443 \ 7608 \ 7885 \ 4390 \ (\ 0) \end{array} \quad \begin{array}{l} A_1 = 0,4522 \ 5472 \ 8786 \ 4757 \ (-1) \\ B_1 = 0,5001 \ 7622 \ 8839 \ 9499 \ (\ 0) \\ B_2 = 0,6521 \ 0553 \ 4137 \ 0810 \ (\ 0) \\ B_3 = 0,5163 \ 6555 \ 3842 \ 7469 \ (\ 0) \\ B_4 = 0,2861 \ 2721 \ 0301 \ 5746 \ (\ 0) \end{array}$$

 $n = 5$

$$\begin{array}{l} x_1 = 0,2980 \ 4417 \ 9706 \ 5514 \ (-1) \\ x_2 = 0,1730 \ 3987 \ 3003 \ 4453 \ (\ 0) \\ x_3 = 0,4072 \ 5460 \ 8145 \ 1554 \ (\ 0) \\ x_4 = 0,6716 \ 9287 \ 8813 \ 7369 \ (\ 0) \\ x_5 = 0,8918 \ 7393 \ 9378 \ 9520 \ (\ 0) \end{array} \quad \begin{array}{l} A_1 = 0,3075 \ 1909 \ 7596 \ 1934 \ (-1) \\ B_1 = 0,3812 \ 4856 \ 4464 \ 2285 \ (\ 0) \\ B_2 = 0,5420 \ 4550 \ 3967 \ 8785 \ (\ 0) \\ B_3 = 0,4958 \ 8067 \ 1515 \ 2160 \ (\ 0) \\ B_4 = 0,3563 \ 2520 \ 2226 \ 0527 \ (\ 0) \\ B_5 = 0,1937 \ 4814 \ 8067 \ 0050 \ (\ 0) \end{array}$$

 $n = 6$

$$\begin{array}{l} x_1 = 0,2217 \ 4654 \ 0855 \ 5037 \ (-1) \\ x_2 = 0,1293 \ 5703 \ 5769 \ 4851 \ (\ 0) \\ x_3 = 0,3113 \ 0264 \ 1527 \ 8073 \ (\ 0) \\ x_4 = 0,5339 \ 3709 \ 7805 \ 6341 \ (\ 0) \\ x_5 = 0,7525 \ 7916 \ 1577 \ 8388 \ (\ 0) \\ x_6 = 0,9207 \ 5997 \ 1337 \ 1068 \ (\ 0) \end{array} \quad \begin{array}{l} A_1 = 0,2225 \ 9227 \ 3960 \ 5504 \ (-1) \\ B_1 = 0,3014 \ 0139 \ 4347 \ 3469 \ (\ 0) \\ B_2 = 0,4536 \ 3517 \ 6379 \ 1840 \ (\ 0) \\ B_3 = 0,4531 \ 6134 \ 5266 \ 4601 \ (\ 0) \\ B_4 = 0,3719 \ 6832 \ 8959 \ 4317 \ (\ 0) \\ B_5 = 0,2578 \ 9104 \ 8334 \ 2598 \ (\ 0) \\ B_6 = 0,1396 \ 8347 \ 9317 \ 2624 \ (\ 0) \end{array}$$

 $n = 7$

$$\begin{array}{l} x_1 = 0,1715 \ 6731 \ 0815 \ 2918 \ (-1) \\ x_2 = 0,1002 \ 8678 \ 2954 \ 3300 \ (\ 0) \\ x_3 = 0,2446 \ 9522 \ 5970 \ 4621 \ (\ 0) \\ x_4 = 0,4299 \ 4548 \ 2830 \ 5532 \ (\ 0) \\ x_5 = 0,6280 \ 7627 \ 1398 \ 0837 \ (\ 0) \\ x_6 = 0,8078 \ 3048 \ 5030 \ 3190 \ (\ 0) \\ x_7 = 0,9395 \ 3507 \ 0232 \ 7801 \ (\ 0) \end{array} \quad \begin{array}{l} A_1 = 0,1685 \ 4294 \ 1553 \ 0306 \ (-1) \\ B_1 = 0,2450 \ 1772 \ 4514 \ 7912 \ (\ 0) \\ B_2 = 0,3839 \ 3879 \ 9071 \ 1652 \ (\ 0) \\ B_3 = 0,4068 \ 9100 \ 9582 \ 3687 \ (\ 0) \\ B_4 = 0,3628 \ 7691 \ 6992 \ 2333 \ (\ 0) \\ B_5 = 0,2845 \ 1027 \ 8331 \ 7363 \ (\ 0) \\ B_6 = 0,1944 \ 8524 \ 9808 \ 3217 \ (\ 0) \\ B_7 = 0,1054 \ 2572 \ 7544 \ 0806 \ (\ 0) \end{array}$$

$n = 8$

$x_1 = 0,1367$	7628	5887	6057	(-1)	$A_1 = 0,1320$	3252	5614	9592	(-1)
$x_2 = 0,7999$	8392	5616	0967	(-1)	$B_1 = 0,2036$	0686	2722	3408	(0)
$x_3 = 0,1969$	6856	6567	4583	(0)	$B_2 = 0,3287$	8670	6441	8665	(0)
$x_4 = 0,3516$	5559	1009	5446	(0)	$B_3 = 0,3635$	1204	2438	1451	(0)
$x_5 = 0,5258$	2477	4414	6304	(0)	$B_4 = 0,3431$	7301	8060	5226	(0)
$x_6 = 0,6981$	7284	7998	9815	(0)	$B_5 = 0,2906$	7943	3744	7685	(0)
$x_7 = 0,8468$	7485	7961	7663	(0)	$B_6 = 0,2230$	1657	4047	7074	(0)
$x_8 = 0,9523$	8897	5663	9623	(0)	$B_7 = 0,1516$	4148	9501	6757	(0)
					$B_8 = 0,8238$	0620	4814	7735	(-1)

$n = 9$

$x_1 = 0,1116$	4840	4558	7542	(-1)	$A_1 = 0,1062$	1828	7881	3602	(-1)
$x_2 = 0,6529$	0897	1692	9058	(-1)	$B_1 = 0,1722$	2335	1149	3550	(0)
$x_3 = 0,1617$	5819	8201	1769	(0)	$B_2 = 0,2846$	7433	7368	4235	(0)
$x_4 = 0,2920$	1860	1827	8237	(0)	$B_3 = 0,3248$	9905	9609	0425	(0)
$x_5 = 0,4437$	3840	2685	8828	(0)	$B_4 = 0,3196$	9258	0571	8279	(0)
$x_6 = 0,6020$	7039	2157	1439	(0)	$B_5 = 0,2857$	2846	8852	4919	(0)
$x_7 = 0,7510$	8113	3954	0096	(0)	$B_6 = 0,2356$	6436	0916	9874	(0)
$x_8 = 0,8753$	3529	2518	6857	(0)	$B_7 = 0,1788$	9121	0149	9333	(0)
$x_9 = 0,9615$	5988	1376	4846	(0)	$B_8 = 0,1214$	6045	8006	5580	(0)
					$B_9 = 0,6614$	4344	5872	4426	(-1)

$n = 10$

$x_1 = 0,9289$	8628	5549	1626	(-2)	$A_1 = 0,8729$	6171	2136	8345	(-2)
$x_2 = 0,5429$	4559	4319	9768	(-1)	$B_1 = 0,1478$	2251	7320	1553	(0)
$x_3 = 0,1351$	0828	5806	3152	(0)	$B_2 = 0,2489$	4805	2752	1355	(0)
$x_4 = 0,2458$	7432	9616	4523	(0)	$B_3 = 0,2912$	2603	2065	5569	(0)
$x_5 = 0,3779$	8236	6604	3451	(0)	$B_4 = 0,2957$	1396	6755	3221	(0)
$x_6 = 0,5208$	3952	0172	5719	(0)	$B_5 = 0,2749$	6968	1179	6844	(0)
$x_7 = 0,6627$	1622	6268	8570	(0)	$B_6 = 0,2385$	4573	7628	0192	(0)
$x_8 = 0,7916$	8973	2569	3237	(0)	$B_7 = 0,1938$	9733	3463	1668	(0)
$x_9 = 0,8966$	5159	8976	5285	(0)	$B_8 = 0,1464$	2636	5323	0089	(0)
$x_{10} = 0,9683$	2542	5036	0818	(0)	$B_9 = 0,9944$	3168	2075	9293	(-1)
					$B_{10} = 0,5427$	7528	1839	8955	(-1)

$$\int_0^1 \lg \frac{e}{x} f(x) dx \approx A_1 f(0) + A_2 f(1) + \sum_{k=1}^n B_k f(x_k)$$

$n = 1$

					$A_1 = 0,5423$	9766	0818	7134	(0)
					$A_2 = 0,2122$	2222	2222	2222	(0)
$x_1 = 0,4318$	1818	1818	1818	(0)	$B_1 = 0,1245$	3801	1695	9064	(1)

$n = 2$

					$A_1 = 0,3163$	9866	0394	7234	(0)
					$A_2 = 0,9895$	5406	4483	2573	(-1)
$x_1 = 0,2319$	0075	5019	6798	(0)	$B_1 = 0,9601$	2614	7786	1278	(0)
$x_2 = 0,6859$	5203	0665	5581	(0)	$B_2 = 0,6245$	1978	5370	8230	(0)

$n = 3$

	$A_1 = 0,2111$	0659	3184	4208	(0)				
	$A_2 = 0,5712$	9369	6907	7310	(-1)				
$x_1 = 0,1441$	5444	9636	3503	(0)	$B_1 = 0,7290$	1717	5777	9643	(0)
$x_2 = 0,4613$	0065	6299	8018	(0)	$B_2 = 0,6403$	5356	3565	3771	(0)
$x_3 = 0,8068$	1415	2504	5536	(0)	$B_3 = 0,3623$	9329	7781	4647	(0)

 $n = 4$

	$A_1 = 0,1524$	2656	2515	1530	(0)				
	$A_2 = 0,3716$	7620	3555	0202	(-1)				
$x_1 = 0,9821$	6457	3107	5390	(-1)	$B_1 = 0,5672$	9170	9213	0143	(0)
$x_2 = 0,3257$	6223	3083	5102	(0)	$B_2 = 0,5785$	2157	9404	7570	(0)
$x_3 = 0,6148$	3204	5147	9930	(0)	$B_3 = 0,4297$	6535	8616	6800	(0)
$x_4 = 0,8705$	1682	2348	0410	(0)	$B_4 = 0,2348$	2716	9894	8937	(0)

 $n = 5$

	$A_1 = 0,1159$	8648	3892	2216	(0)				
	$A_2 = 0,2610$	4513	0890	1622	(-1)				
$x_1 = 0,7122$	0283	8523	7911	(-1)	$B_1 = 0,4533$	8163	0641	9350	(0)
$x_2 = 0,2407$	7319	6592	4994	(0)	$B_2 = 0,5056$	1746	4089	6761	(0)
$x_3 = 0,4730$	1983	7251	3426	(0)	$B_3 = 0,4316$	7139	5572	6156	(0)
$x_4 = 0,7149$	4813	7528	1105	(0)	$B_4 = 0,3030$	5634	5997	5174	(0)
$x_5 = 0,9075$	7531	6881	7369	(0)	$B_5 = 0,1641$	8216	6717	0181	(0)

 $n = 6$

	$A_1 = 0,9163$	6519	1904	4081	(-1)				
	$A_2 = 0,1933$	8296	2330	1009	(-1)				
$x_1 = 0,5402$	0603	2405	8978	(-1)	$B_1 = 0,3709$	0164	5140	9291	(0)
$x_2 = 0,1846$	7486	6728	6847	(0)	$B_2 = 0,4389$	5800	4135	9919	(0)
$x_3 = 0,3715$	7069	4412	1641	(0)	$B_3 = 0,4083$	9036	6831	7393	(0)
$x_4 = 0,5832$	0472	7574	7297	(0)	$B_4 = 0,3258$	1817	3036	7830	(0)
$x_5 = 0,7820$	0907	5221	3306	(0)	$B_5 = 0,2237$	8640	7793	4428	(0)
$x_6 = 0,9308$	6343	4715	3420	(0)	$B_6 = 0,1211$	7058	7637	6629	(0)

 $n = 7$

	$A_1 = 0,7447$	6086	0114	9614	(-1)				
	$A_2 = 0,1489$	9845	3308	9716	(-1)				
$x_1 = 0,4239$	0251	9977	4646	(-1)	$B_1 = 0,3094$	3691	3227	4853	(0)
$x_2 = 0,1459$	2288	2083	6136	(0)	$B_2 = 0,3820$	2655	4175	7548	(0)
$x_3 = 0,2981$	4295	2273	6200	(0)	$B_3 = 0,3767$	9584	9856	6707	(0)
$x_4 = 0,4792$	9968	2898	3245	(0)	$B_4 = 0,3257$	0686	3334	7465	(0)
$x_5 = 0,6648$	1485	5736	0831	(0)	$B_5 = 0,2519$	7430	3032	1009	(0)
$x_6 = 0,8285$	2998	3257	4388	(0)	$B_6 = 0,1715$	9629	7049	5728	(0)
$x_7 = 0,9463$	9635	1193	1043	(0)	$B_7 = 0,9308$	7287	9812	7551	(-1)

 $n = 8$

	$A_1 = 0,6188$	2396	1862	8290	(-1)				
	$A_2 = 0,1183$	1636	5668	8100	(-1)				
$x_1 = 0,3415$	8498	1671	8231	(-1)	$B_1 = 0,2624$	3155	3031	0392	(0)
$x_2 = 0,1181$	1498	4097	0058	(0)	$B_2 = 0,3343$	9211	6176	9417	(0)
$x_3 = 0,2438$	5924	7945	4203	(0)	$B_3 = 0,3440$	2247	5799	9732	(0)
$x_4 = 0,3984$	4195	9927	2492	(0)	$B_4 = 0,3143$	2007	8456	1911	(0)
$x_5 = 0,5652$	7224	4720	9582	(0)	$B_5 = 0,2620$	3841	7741	8136	(0)
$x_6 = 0,7258$	7486	0038	7668	(0)	$B_6 = 0,1997$	1218	9237	7848	(0)
$x_7 = 0,8618$	9460	6926	5450	(0)	$B_7 = 0,1356$	1746	8820	1813	(0)
$x_8 = 0,9572$	5209	7948	1925	(0)	$B_8 = 0,7375$	1667	9829	1115	(-1)

$n = 9$

	$A_1 = 0,5234$	0256	2204	8770	(-1)				
	$A_2 = 0,9622$	4289	3261	7014	(-2)				
$x_1 = 0,2811$	7970	4343	5152	(-1)	$B_1 = 0,2256$	6640	9069	6291	(0)
$x_2 = 0,9751$	8901	6120	6322	(-1)	$B_2 = 0,2946$	7939	7089	9200	(0)
$x_3 = 0,2028$	3108	7029	4749	(0)	$B_3 = 0,3129$	7146	7166	6276	(0)
$x_4 = 0,3352$	4062	5436	9954	(0)	$B_4 = 0,2978$	0309	9658	7706	(0)
$x_5 = 0,4832$	1123	4710	4938	(0)	$B_5 = 0,2615$	5244	2440	3921	(0)
$x_6 = 0,6334$	9732	3809	5481	(0)	$B_6 = 0,2138$	5627	5860	3488	(0)
$x_7 = 0,7723$	0194	4685	2099	(0)	$B_7 = 0,1617$	9896	6666	4315	(0)
$x_8 = 0,8865$	3819	9791	7110	(0)	$B_8 = 0,1098$	3397	5072	8983	(0)
$x_9 = 0,9651$	2798	3457	3398	(0)	$B_9 = 0,5987$	5281	8218	7719	(-1)

 $n = 10$

	$A_1 = 0,4492$	0942	2230	9600	(-1)				
	$A_2 = 0,7979$	0104	6589	4021	(-2)				
$x_1 = 0,2355$	3703	9341	8926	(-1)	$B_1 = 0,1963$	4749	9450	5066	(0)
$x_2 = 0,8185$	5007	2319	2899	(-1)	$B_2 = 0,2614$	6364	7406	0744	(0)
$x_3 = 0,1711$	7492	4043	1920	(0)	$B_3 = 0,2846$	7761	2773	7529	(0)
$x_4 = 0,2853$	2191	9046	8710	(0)	$B_4 = 0,2794$	1317	4500	3495	(0)
$x_5 = 0,4160$	5745	6674	8855	(0)	$B_5 = 0,2550$	5975	9751	9050	(0)
$x_6 = 0,5537$	1107	5575	6574	(0)	$B_6 = 0,2190$	4711	6478	6732	(0)
$x_7 = 0,6878$	8318	3853	5611	(0)	$B_7 = 0,1771$	7468	9572	6851	(0)
$x_8 = 0,8082$	1709	9013	2122	(0)	$B_8 = 0,1335$	8557	1570	3014	(0)
$x_9 = 0,9052$	1007	9394	2764	(0)	$B_9 = 0,9075$	0618	3797	4756	(-1)
$x_{10} = 0,9710$	1884	5967	0483	(0)	$B_{10} = 0,4958$	0357	4270	1416	(-1)

Литература

1. Markoff A. Mat. Ann., 25, 427—432, 1885.
2. Lobatto R. Lessen over de Integral — Rekening. Hague, 1852.
3. Radau R. J. Math. Pures Appl., 6, 3, 283—336, 1880.
4. Крылов В. И., Феденко Н. П. Весті АН БССР, сер. фіз.-техн. навук, № 2, 1962.

Институт математики
АН БССР

Поступило в редакцию 30.IX 1966

Л. А. ЯНОВИЧ

**ПРИБЛИЖЕНИЕ ПЕРИОДИЧЕСКИХ АНАЛИТИЧЕСКИХ
 ФУНКЦИЙ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИМИ МНОГОЧЛЕНАМИ
 И РАЦИОНАЛЬНЫМИ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИМИ ФУНКЦИЯМИ. I**

Пусть Ω — замкнутая полоса вдоль действительной оси, ограниченная 2π -периодическими жордановыми кривыми, а E — множество точек ξ ($0 \leq \operatorname{Re} \xi < 2\pi$) из некоторой замкнутой полосы Ω_0 , лежащей внутри Ω .

Через Z обозначим бесконечную треугольную матрицу точек $\{z_k^n\}$ ($k = 0, 1, \dots, 2n; n = 1, 2, \dots$) из E . Пусть, далее, $T_n(z)$ — интерполяционный тригонометрический многочлен степени n , построенный по узлам z_k^n ($k = 0, 1, \dots, 2n$) для 2π -периодической функции $f(z)$, регулярной в Ω :

$$T_n^{(i)}(z_j^n) = f^{(i)}(z_j^n),$$

$$i = 0, 1, \dots, \alpha_j - 1; j = 0, 1, \dots, q; \sum_{j=0}^q \alpha_j = 2n + 1. \quad (1)$$

Такой многочлен всегда существует и, как нетрудно проверить, представим в любой внутренней точке z полосы Ω в виде контурного интеграла

$$T_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{l_n(\xi) - l_n(z) \cos \frac{1}{2}(\xi - z)}{l_n(\xi) \sin(\xi - z)} f(\xi) d\xi, \quad (2)$$

где $l_n(z) = \prod_{j=0}^q \sin^{\alpha_j} \frac{1}{2}(\xi - z_j^n)$; Γ — лежащая в полосе $0 \leq \operatorname{Re} \xi \leq 2\pi$ граница полосы Ω (интегрирование ведется в направлении, оставляющем полосу регулярности слева), для всякой 2π -периодической функции, непрерывной на Ω и регулярной в ее внутренних точках, и для любых узлов z_k^n ($k = 0, 1, \dots, 2n$) из Ω_0 .

Действительно, непосредственно вычисляя интеграл в равенстве (2) получим, что $T_n(z)$ есть тригонометрический многочлен степени n , а из равенства

$$T_n(z) = f(z) - \frac{l_n(z)}{4\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\xi) d\xi}{l_n(\xi) \sin \frac{1}{2}(\xi - z)} = f(z) - r_n(z)$$

следует, что условия (1) выполняются, так как в остатке

$$r_n(z) = \frac{l_n(z)}{4\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\xi) d\xi}{l_n(\xi) \sin \frac{1}{2}(\xi - z)} \quad (3)$$

множитель $l_n(z)$ имеет нуль порядка α_j в точке z_j^n , а интеграл в равенстве (3) и производные от него в точке $z = z_j^n$ будут ограничены.

Приведем определение предельной функции распределения узлов интерполирования $\{z_k^n\}$. В точках z_j^n поместим массы величины $\frac{\alpha_j}{2n+1}$, где α_j — число узлов z_j^n в n -ой строке матрицы Z . Обозначим через $\mu_n(e)$ счетно-аддитивную функцию множеств, заданную на системе подмножеств $\Lambda = \{e\}$ множества E и принимающую значение на e , равное суммарной массе, сосредоточенной на подмножестве e .

Последовательность функций $\{\mu_n(e)\}$ ($n = 1, 2, \dots$) или одна из ее подпоследовательностей будет сходиться к некоторой счетно-аддитивной функции множеств $\mu(e)$ на Λ или на некоторой всюду плотной в Λ сети Λ_0 , т. е. на такой системе Λ_0 подмножеств множества E , что каждое ее непустое множество подразделяется на непересекающиеся множества этой системы со сколь угодно малым диаметром, причем в Λ_0 включаются все E и пустое множество. Предположим, что такая функция $\mu(e)$ единственна, и назовем ее предельной функцией распределения узлов матрицы Z .

В дальнейшем будем считать, что индекс n при стремлении к бесконечности пробегает ту же последовательность целых чисел, что и индекс n в сходящейся к $\mu(e)$ последовательности.

Сходимость интерполяционного процесса в классе аналитических функций, как увидим ниже, зависит от свойств интеграла Стильеса

$$u(z) = \int_E \ln \frac{1}{|\sin \frac{1}{2}(z - \xi)|} d\mu(\xi), \quad (4)$$

$$z = x + iy, \quad \xi = \xi_1 + i\xi_2.$$

Теорема 1. Для того чтобы последовательность $T_n(z)$ при $n \rightarrow \infty$ сходилась к $f(z)$ равномерно в Ω , какая бы ни была 2π -периодическая функция $f(z)$ регулярная в Ω , необходимо и достаточно, чтобы потенциал $u(z)$ принимал на границе в Ω одно и то же значение.

Достаточность. По условию теоремы граница полосы Ω является линией уровня потенциала $u(z)$. Обозначим эту линию через $u(z) = c$.

Выберем такое число $c_1 < c$, чтобы линия уровня $u(z) = c_1$ принадлежала области регулярности функции $f(z)$. В остатке интерполирования $r_n(z) = f(z) - T_n(z)$, который в каждой точке z полосы Ω представим в виде интеграла (3), где за контур интегрирования Γ возьмем лежащую в полосе $0 \leq \text{Re } \xi \leq 2\pi$ часть линии уровня $u(\xi) = c_1$, будем считать z произвольной точкой линии уровня $u(z) = c$.

Из построения функции множеств $\mu_n(e)$ легко установить, что

$$\left| \frac{l_n(z)}{l_n(\xi)} \right| = \exp \{-(2n+1)[u_n(z) - u_n(\xi)]\}, \quad (5)$$

где

$$u_n(z) = \int_E \ln \frac{1}{|\sin \frac{1}{2}(z - \xi)|} d\mu_n(\xi).$$

Тогда для остатка (3) можем написать оценку

$$|r_n(z)| \leq \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} \left| \frac{f(\xi)}{\sin \frac{1}{2}(z - \xi)} \right| ds \max_{\xi \in u(\xi)=c_1} \left| \frac{l_n(z)}{l_n(\xi)} \right| \ll$$

$$\leq M_0 \max_{\xi \in u(\xi)=c_1} \exp \{-(2n+1)[u_n(z) - u_n(\xi)]\}, \quad (6)$$

$$0 < M_0 < \infty.$$

Применяя теорему Хелли о предельном переходе в интеграле Стилтеса (см. [1-3]), получим для больших n неравенство

$$|u_n(z) - u_n(\xi) - u(z) + u(\xi)| < \varepsilon, \quad 0 < \varepsilon < c - c_1,$$

а так как z и ξ лежат соответственно на линиях $u(z) = c$ и $u(\xi) = c_1$, то, используя (6), будем иметь

$$|r_n(z)| \leq M_0 \exp \{-(2n+1)(c - c_1 - \varepsilon)\}, \quad n > N_0.$$

Из последнего неравенства и из регулярности остаточного члена $r_n(z)$ в полосе, ограниченной ветвями линии уровня $u(z) = c$, следует достаточность теоремы 1.

Необходимость. Пусть z_1 и z_2 — граничные точки полосы регулярности Ω , в которых $u(z_2) - u(z_1) \geq 2\delta_0$ ($\delta_0 > 0$). Ввиду непрерывности потенциала $u(z)$ в точке z_2 можно выбрать такую точку η_2 из внешности полосы Ω , чтобы $u(\eta_2) - u(z_1) \geq \delta_0$.

Рассмотрим остаток интерполирования

$$r_n(z) = \frac{l_n(z)}{l_n(\eta_2) \sin \frac{1}{2}(z - \eta_2)} \quad (7)$$

функции $f(z) = \operatorname{ctg} \frac{1}{2}(z - \eta_2)$. Эта функция 2π -периодическая и регулярная в полосе Ω , т. е. принадлежит рассматриваемому классу, и остаток интерполирования ее $r_n(z)$ должен стремиться к нулю равномерно в полосе Ω .

На основании равенства (5) можем представить модуль остатка интерполирования этой функции в виде

$$|r_n(z)| = \left| \sin \frac{1}{2}(z - \eta_2) \right|^{-1} \exp \{ (2n+1)[u_n(\eta_2) - u_n(z)] \}. \quad (8)$$

Так как подынтегральная функция в $u_n(z)$ в точках z_1 и η_2 непрерывна, то, используя теорему Хелли, можем записать, что

$$u_n(z_1) < u(z_1) + \frac{1}{2}\varepsilon, \quad u_n(\eta_2) > u(\eta_2) - \frac{1}{2}\varepsilon,$$

$$n > N(\varepsilon), \quad 0 < \varepsilon < \delta_0,$$

откуда

$$|r_n(z_1)| > \left| \sin \frac{1}{2}(z_1 - \eta_2) \right|^{-1} e^{(2n+1)(\delta_0 - \varepsilon)}, \quad n > N(\varepsilon),$$

т. е. остаток интерполирования в точке z_1 полосы Ω неограниченно растет для функции $f(z) = \operatorname{ctg} \frac{1}{2}(z - \eta_2)$, регулярной в этой полосе, что противоречит условию теоремы 1.

Доказанная теорема является обобщением ранее установленных в [4, 5] аналогичных теорем.

Замечание 1. Как видно из доказательства, если потенциал $u(z)$ на границе полосы Ω принимает постоянное значение, то интерполяционный процесс сходится для всякой 2π -периодической функции, регулярной в полосе Ω , и в случае, когда $\Omega_n = \Omega$.

Замечание 2. В статьях [4, 5] ошибочно указано, что равенство (7) является остатком интерполирования функции $f(z) = 2 [\sin(z - \eta_2)]^{-1}$, а не функции $f(z) = \operatorname{ctg} \frac{1}{2} (z - \eta_2)$, как есть на самом деле.

Имеет место также следующая

Теорема 2. Для того чтобы тригонометрический интерполяционный процесс, определяемый узлами $\{z_k^n\}$ ($k = 0, 1, \dots, 2n; n = 1, 2, \dots$) из полосы $-h \leq \operatorname{Im} z \leq h$, сходиллся равномерно в полосе $-d \leq \operatorname{Im} z \leq d$ ($d \geq h$) в классе 2π -периодических регулярных в последней полосе функций, необходимо и достаточно, чтобы

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[2n+1]{|l_n(z)|} \leq e^{-\gamma_0}$$

для всех z из полосы $|\operatorname{Im} z| \leq d$, где

$$\gamma_0 = \max_{|\operatorname{Im} z|=d} u(z).$$

Достаточность. Прежде всего заметим, что

$$\gamma_1 = \max_{|\operatorname{Im} z|=d} u(z \pm i\delta) < \max_{|\operatorname{Im} z|=d} u(z) = \gamma_0$$

для $\delta > 0$. Это нетрудно проверить, если воспользоваться неравенством

$$\ln \left| \sin \frac{1}{2} (z \pm i\delta - \xi) \right| > \ln \left| \sin \frac{1}{2} (z - \xi) \right|,$$

которое справедливо при $\operatorname{Im} z = \pm d$ и $|\operatorname{Im} \xi| \leq h$ и легко следует из того, что

$$\begin{aligned} & \operatorname{sh}^2 \frac{1}{2} (\pm d \pm \delta - \xi_2) - \operatorname{sh}^2 \frac{1}{2} (\pm d - \xi_2) = \\ & = \pm \operatorname{sh} \left(\pm d - \xi_2 \pm \frac{1}{2} \delta \right) \operatorname{sh} \frac{1}{2} \delta \geq \operatorname{sh}^2 \frac{1}{2} \delta > 0 \end{aligned}$$

для $-h \leq \xi_2 \leq h$.

Поскольку $|l_n(z \pm i\delta)|^{\frac{1}{2n+1}} = e^{-u_n(z \pm i\delta)}$, а к последовательности $u_n(z \pm i\delta)$ при $\operatorname{Im} z = \pm d$ применима теорема Хелли о предельном переходе в интеграле Стильбеса, то

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |l_n(z \pm i\delta)|^{\frac{1}{2n+1}} = e^{-u(z \pm i\delta)} \geq e^{-\gamma_1}.$$

По условию теоремы

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |l_n(z)|^{\frac{1}{2n+1}} \leq e^{-\gamma_0}$$

для всех z из полосы $|\operatorname{Im} z| \leq d$. Значит,

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{l_n(z)}{l_n(\xi)} \right|^{\frac{1}{2n+1}} \leq e^{-\gamma_0 + \gamma_1}, \quad \operatorname{Im} \xi = \pm (d + \delta). \quad (9)$$

Возьмем сейчас в остатке (3) за контур интегрирования Γ отрезки $(0 \leq \operatorname{Re} \xi \leq 2\pi, \operatorname{Im} \xi = \pm(d + \delta))$, где δ выбрано такое, чтобы полоса $|\operatorname{Im} z| \leq d + \delta$ принадлежала области регулярности функции $f(z)$. Тогда из оценки

$$|r_n(z)| \leq M_0 \max_{\xi \in \Gamma} \left| \frac{l_n(z)}{l_n(\xi)} \right|$$

и неравенства (9) будет следовать сходимость интерполирования.

Необходимость. Пусть в какой-нибудь точке z_1 полосы $|\operatorname{Im} z| \leq d$ имеет место неравенство

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[2n+1]{|l_n(z_1)|} = e^{-\lim_{n \rightarrow \infty} u_n(z_1)} > e^{-\gamma_0},$$

т. е. $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n(z_1) < \gamma_0$. Если z_2 — точка, где $u(z_2) = \gamma_0$ ($|\operatorname{Im} z_2| = d$), тогда можем записать, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n(z_1) = u(z_2) - 3\delta_2,$$

где $\delta_2 > 0$.

Ввиду справедливости предельного перехода

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} u(z \pm i\delta) = u(z),$$

где z — точки соответственно на прямых $\operatorname{Im} z = \pm d$ (см. [5]), найдется такая точка η_2 вида $z_2 \pm i\delta$ из внешности полосы $|\operatorname{Im} z| \leq d$, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n(z_1) < u(\eta_2) + \varepsilon - 3\delta_2 < u(\eta_2) - 2\delta_2, \quad 0 < \varepsilon < \delta_2.$$

Из последнего неравенства будем иметь для $n_k > N_1$

$$u_{n_k}(z_1) \leq u(\eta_2) - \delta_2.$$

С другой стороны, благодаря применимости теоремы Хелли к последовательности $u_n(\eta_2)$ получим

$$u(\eta_2) \leq u_{n_k}(\eta_2) + \varepsilon, \quad n_k > N_2.$$

Из этих двух неравенств следует, что

$$u_n(\eta_2) - u_n(z_1) \geq \delta_2 - \varepsilon$$

при $n_k > N = \max\{N_1, N_2\}$.

Тогда из равенства (8) для модуля остатка функции $f(z) = \operatorname{ctg} \frac{1}{2}(z - \eta_2)$ получаем в точке z_1 оценку

$$|r_n(z_1)| \geq \left| \sin \frac{1}{2}(z - \eta_2) \right|^{-1} e^{(2n+1)(\delta_2 - \varepsilon)},$$

$$n > N, \quad \delta_2 > \varepsilon,$$

что противоречит условию сходимости в полосе $|\operatorname{Im} z| \leq d$ для всякой 2π -периодической функции, регулярной в этой полосе.

Следует отметить, что задача получения условий сходимости тригонометрического интерполирования в классе 2π -периодических функций, регулярных в полосе Ω , сводится к выяснению условий сходимости обобщенных интерполяционных многочленов вида

$$P_n(z) = \sum_{k=-n}^n a_k^n z^k \quad (10)$$

в классе функций, регулярных на некотором множестве, дополнение которого состоит из двух односвязных областей, содержащих соответственно нулевую и бесконечно удаленную точки. Поскольку условия сходимости интерполяционных многочленов вида (10) на таких множествах известны (см. [6], стр. 61—76), то необходимые и достаточные условия тригонометрического интерполирования в изучаемом классе функций также считаются известными. В эти условия входят функции, конформно отображающие некоторые множества на внешность единичного круга. Полученные здесь условия сходимости не включают отображающих функций, а даются непосредственно через предельную функцию распределения узлов интерполирования.

Приведем примеры матриц узлов интерполирования и их предельные функции распределения, для которых потенциал $u(z)$ на соответствующих множествах принимает постоянное значение.

Пусть z_0 — фиксированная точка комплексной плоскости. Рассмотрим класс 2π -периодических функций, регулярных на множестве точек z , для которых $|\sin \frac{1}{2}(z - z_0)| \leq d$ ($d > 0$). Очевидно, что матрица $Z = \{z_k^n\}$ с элементами $z_k^n = z_0$ для всех n и k обеспечивает сходимость тригонометрического интерполирования в этом классе функций, так как потенциал $u(z)$ имеет вид

$$u(z) = \ln \frac{1}{|\sin \frac{1}{2}(z - z_0)|}$$

и принимает на границе множества регулярности одно и то же значение $\ln \frac{1}{d}$.

Если за множество регулярности функций взять совокупность точек z , удовлетворяющих неравенству $|\sin \frac{1}{2}(z - z_0) \sin \frac{1}{2}(z - z_1)| \leq d$, где z_0 и z_1 — некоторые фиксированные точки полосы $0 \leq \operatorname{Re} z \leq 2\pi$, тогда в качестве матрицы узлов интерполирования можно взять, например, матрицу вида

$$Z = \{z_k^n = z_0, z_{n+k}^n = z_1, z_0^n\}, \quad k = 1, 2, \dots, n; \quad n = 1, 2, \dots,$$

где точки z_0^n ($n = 1, 2, \dots$) — любые из области регулярности данного класса функций.

Последовательность функций множеств $\{\mu_n(e)\}$ ($n = 1, 2, \dots$) в этом случае имеет своей предельной функцией следующую функцию множеств:

$$\mu(e) = \begin{cases} 0, & \text{если } z_0, z_1 \notin e, \\ \frac{1}{2}, & \text{если } z_0 \in e, z_1 \notin e \text{ или } z_1 \in e, z_0 \notin e, \\ 1, & \text{если } z_0, z_1 \in e, \end{cases}$$

и следовательно, потенциал $u(z)$ будет

$$u(z) = -\frac{1}{2} \ln \left| \sin \frac{1}{2}(z - z_0) \sin \frac{1}{2}(z - z_1) \right|.$$

Укажем примеры узлов интерполирования, для которых интерполяционный процесс будет сходиться в классе 2π -периодических регулярных в полосе $|\operatorname{Im} z| \leq d$ функций.

Пусть E есть прямоугольник вида $\{0 \leq \xi_1 \leq 2\pi, -h \leq \xi_2 \leq h\}$, где $d \gg h \gg 0$. Через $g_n(\xi) = g_n(\xi_1, \xi_2)$ обозначим функцию двух независимых переменных, значение которой на E в точке $\xi = (\xi_1, \xi_2)$ равно суммарной массе, расположенной на прямоугольнике $(0 \leq x \leq \xi_1, -h \leq y \leq \xi_2)$ такого же распределения единичной массы на E , как и при построении функции $\mu_n(e)$. Ввиду равномерной ограниченности на E последовательности $\{g_n(\xi)\}$ ($n = 1, 2, \dots$) существует [7, 8] неубывающая по каждой переменной функция $g(\xi) = g(\xi_1, \xi_2)$, в точках непрерывности которой будет сходиться к ней некоторая подпоследовательность функций $\{g_{n_k}(\xi)\}$ ($k = 1, 2, \dots$). По этой функции $g(\xi)$ строим интеграл Стильеса на плоскости [9], который также будем обозначать через $u(z)$. Для класса функций, регулярных в полосах с прямолинейными границами, удобнее рассматривать интеграл Стильеса (4) по функции точки $g(\xi)$, а не по счетно-аддитивной функции множеств $\mu(e)$, как мы делали это раньше.

Нетрудно убедиться, что для всякой функции $g(\xi)$, удовлетворяющей на E условиям

$$\frac{\partial^2 g(\xi_1, \xi_2)}{\partial \xi_1 \partial \xi_2} = \rho(\xi_2), \quad \rho(\xi_2) = \rho(-\xi_2), \quad (11)$$

потенциал $u(z)$ на прямых $\text{Im } z = \pm d$ принимает постоянное значение. В этом случае интеграл Стильеса превращается в интеграл Римана

$$u(z) = u(x, y) = \int_{-h}^h \int_0^{2\pi} \ln \frac{1}{|\sin \frac{1}{2}(z - \xi)|} \rho(\xi_2) d\xi_1 d\xi_2,$$

который ввиду 2π -периодичности по ξ_1 подынтегральной функции не зависит от x , а из-за четности функции $\rho(\xi_2)$ будет сам являться четной функцией относительно y .

Пусть n -ая строка матрицы Z имеет вид

$$z_{\nu, k}^n = \frac{2k\pi}{2n+1} + i \frac{2\nu h}{2n+1},$$

$$k = 0, 1, \dots, 2n; \nu = -n, -n+1, \dots, n.$$

По узлам $z_{\nu, k}^n$ строим интерполяционный тригонометрический многочлен $T_{2n(n+1)}(z)$ степени $2n(n+1)$ для функции $f(z)$. Этой матрице узлов соответствует последовательность $g_{2n(n+1)}(\xi)$, которая сходится в каждой точке E к функции $g(\xi) = \frac{1}{4\pi h} \xi_1(h + \xi_2)$.

Действительно, пусть (ξ_1, ξ_2) — произвольная точка прямоугольника E . Найдутся такие целые значения k и ν ($0 \leq k \leq 2n; -n \leq \nu \leq n$), что

$$\frac{2k\pi}{2n+1} < \xi_1 \leq \frac{2(k+1)\pi}{2n+1}, \quad \frac{2\nu h}{2n+1} \leq \xi_2 < \frac{2(\nu+1)h}{2n+1}. \quad (12)$$

Значение функции $g_{2n(n+1)}(\xi)$ в этой точке по определению равно числу точек $z_{\nu, k}^n$, лежащих в прямоугольнике $(0 \leq x < \xi_1, -h \leq y \leq \xi_2)$, умноженному на величину массы $[2n+1]^{-2}$, сосредоточенной в каждой точке $z_{\nu, k}^n$, т. е.

$$g_{2n(n+1)}(\xi) = \frac{(k+1)(n+\nu+1)}{(2n+1)^2}.$$

Отсюда, учитывая неравенства (12), будем иметь

$$-\frac{\frac{k}{2n} + \frac{1}{2n}}{(2n+1)\left(2 + \frac{1}{n}\right)} \leq g_{2n(n+1)}(\xi) - g(\xi) \leq \frac{1 + \frac{\nu}{n} + \frac{k}{2n} + \frac{1}{n}}{(2n+1)\left(2 + \frac{1}{n}\right)}.$$

Из этого неравенства следует сходимость функций $g_{2n(n+1)}(\xi)$ при $n \rightarrow \infty$ к функции $g(\xi)$ не только в фиксированной точке ξ , но также и равномерная сходимость на прямоугольнике E .

Таким образом, функция $g(\xi) = \frac{1}{4\pi h} \xi_1(h + \xi_2)$ есть предельная функ-

ция распределения узлов матрицы $Z = \{z_{\nu, k}^n\}$ и удовлетворяет условию (11), т. е. является функцией, для которой потенциал $u(z)$ на границе полосы регулярности $|\operatorname{Im} z| \leq d$ ($d \geq h \geq 0$) имеет одно и то же значение.

Другим, менее очевидным примером системы узлов, по которой имеет место сходимость тригонометрического интерполирования в полосе $-d \leq \operatorname{Im} z \leq d$ ($d \geq h = 1$), какая бы ни была 2π -периодическая регулярная в этой полосе функция $f(z)$, является матрица

$$Z = \left\{ z_{\nu, k}^n = \frac{2k\pi}{2n+1} + ix_{\nu}^n \right\}, \quad x_{\nu}^n < x_{\nu+1}^n, \quad (13)$$

$$k, \nu = 0, 1, \dots, 2n; \quad n = 1, 2, \dots,$$

где x_{ν}^n — корни ортогональных на $[-1, 1]$ многочленов степени $2n+1$ по почти везде положительному, суммируемому на этом отрезке весу.

Справедливость этого утверждения проверяется сравнительно нетрудно, если воспользоваться тем (см. [10], стр. 188), что предельная функция распределения корней ортогональных на отрезке $[-1, 1]$ многочленов по указанному весу есть функция распределения Чебышева

$$\mu(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}.$$

Покажем, что предельной функцией распределения узлов интерполирования (13) является функция

$$g(\xi) = \frac{1}{2\pi^2} \xi_1 \int_{-1}^{\xi_2} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}, \quad (14)$$

откуда ввиду выполнения условия (11) будет следовать сходимость интерполяционного процесса в данном классе функций.

Пусть $\{g_{2n(n+1)}(\xi)\}$ ($n = 1, 2, \dots$) — последовательность функций распределения, соответствующая матрице (13). Для каждой фиксированной точки (ξ_1, ξ_2) функция $g_{2n(n+1)}(\xi) = \frac{k+1}{2n+1} \frac{\nu+1}{2n+1}$, где k и ν определяются неравенствами

$$\frac{2k\pi}{2n+1} < \xi_1 \leq \frac{2(k+1)\pi}{2n+1}, \quad x_{\nu}^n \leq \xi_2 < x_{\nu+1}^n.$$

На основании того, что $0 \leq \frac{k+1}{2n+1} - \frac{1}{2\pi} \xi_1 < \frac{1}{2n+1}$, а $\mu_{2n+1}(\xi_2) =$

$= \frac{\nu + 1}{2n + 1}$, где $(\nu + 1)$ — число корней ортогонального многочлена степени $(2n + 1)$, лежащих левее точки ξ_2 , есть функция распределения, соответствующая n -ой строке матрицы $X = \{x_{\nu}^n\}$ ($\nu = 0, 1, 2, \dots, 2n; n = 1, 2, \dots$), и, следовательно, на основании сходимости последовательности $\mu_{2n+1}(\xi_2)$ при $n \rightarrow \infty$ к функции распределения Чебышева получим

$$\lim_{n \rightarrow \infty} g_{2n(n+1)}(\xi) = g(\xi) = \frac{1}{2\pi^2} \int_{-1}^{\xi_2} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}},$$

т. е. функция (14) есть предельная функция распределения узлов матрицы (13).

Сейчас рассмотрим сходимость интерполирования 2π -периодических аналитических функций рациональными тригонометрическими функциями. Через $T_{n,m}(z)$ обозначим тригонометрическую дробь вида

$$T_{n,m}(z) = P_n(z)/Q_m(z).$$

($P_n(z)$ и $Q_m(z)$ — тригонометрические многочлены соответственно степени n и m), интерполирующую функцию $f(z)$ в точках z_k^n ($k = 0, 1, 2, \dots, 2n$),

$$T_{n,m}^{(i)}(z_j^n) = f^{(i)}(z_j^n),$$

$$i = 0, 1, \dots, \alpha_j - 1; \quad j = 0, 1, \dots, q; \quad \sum_{j=0}^q \alpha_j = 2n + 1,$$

где α_j — кратность узла z_j^n , а корни $\{\eta_{\nu}^m\}$ ($\nu = 1, 2, \dots, 2m$) многочлена $Q_m(z)$ при данном n считаются фиксированными. Функцию $f(z)$ будем считать 2π -периодической и регулярной в полосе $|\operatorname{Im} z| \leq d$ ($d > 0$).

Пусть бесконечные треугольные матрицы чисел $\{z_k^n\}$ ($k = 0, 1, \dots, 2n; n = 1, 2, \dots$) и $\{\eta_{\nu}^m\}$ ($\nu = 1, 2, \dots, 2m; m = 1, 2, \dots$) таковы, что соответствующие элементам этих матриц точки лежат в прямоугольнике $\sigma_1 = \{0 \leq \operatorname{Re} z < 2\pi, -h \leq \operatorname{Im} z \leq h\}$ и соответственно на множестве $\sigma_2 = \{0 \leq \operatorname{Re} z < 2\pi, |\operatorname{Im} z| \geq d\}$ ($d > h$). Аналогично тому, как мы определяли предельную функцию распределения узлов интерполирования $\{z_k^n\}$, определим предельную функцию распределения полюсов $\{\eta_{\nu}^m\}$. Для удобства будем считать, что полюса $\{\eta_{\nu}^m\}$ лежат в конечной части полосы $0 \leq \operatorname{Re} z < 2\pi$. Через $\mu_m(\xi)$ обозначим функцию, которая в каждой точке $\xi = \xi_1 + i\xi_2$ множества σ_2 принимает значение, равное суммарной массе, сосредоточенной на множестве $(0 \leq x < \xi_1, -\infty < y \leq \xi_2)$, такого распределения единичной массы на σ_2 , когда в точках η_s^m сосредоточены массы величины $\beta_s/2m$, где β_s — число полюсов η_s^m в m -ой строке матрицы $\{\eta_{\nu}^m\}$.

Существует неубывающая по каждой переменной функция $\mu(\xi) = \mu(\xi_1, \xi_2)$, определенная в области расположения полюсов, к которой будет сходиться последовательность или некоторая подпоследовательность функций $\{\mu_m(\xi)\}$ ($m = 1, 2, \dots$) во всех точках непрерывности $\mu(\xi)$. Предположим, что такая функция $\mu(\xi)$ единственна, и назовем ее предельной функцией распределения полюсов $\{\eta_{\nu}^m\}$.

С предельными функциями распределения узлов и полюсов будем связывать интеграл Стильтеса

$$U(z) = \int_{\sigma_0} \ln \left| \frac{\sin \frac{1}{2}(z - \zeta)}{\sin \frac{1}{2}(z - \xi)} \right| dg(\xi) d\mu(\zeta),$$

$$\sigma_0 = \sigma_1 \times \sigma_2.$$

Через $U_{n,m}(z)$ обозначим предыдущий интеграл, в котором функции $g(\xi)$ и $\mu(\zeta)$ заменены соответственно на $g_n(\xi)$ и $\mu_n(\zeta)$.

Прежде чем сформулировать условия сходимости интерполирования дробями $T_{nm}(z)$ аналитических периодических функций, получим необходимые в дальнейшем равенства.

Пусть задана последовательность функций $\{\lambda_m(z)\}$ ($m = 1, 2, \dots$) таких, что дроби $f(z)/\lambda_m(z)$ являются 2π -периодическими регулярными внутри полосы Ω и непрерывными вплоть до границы Ω . Получим интегральное представление обобщенного многочлена $f_{n,m}(z) = \lambda_m(z) T_n(z)$ и его остатка $r_{n,m}^\lambda(z)$ во внутренних точках z полосы Ω , построенного путем интерполирования $f(z)$ функциями $\{\lambda_m(z) (\cos kz, \lambda_m(z) \sin kz)\}$ ($k = 0, 1, \dots, n$), т. е. определяя коэффициенты тригонометрического многочлена $T_n(z)$ из условий

$$\{\lambda_m(z) T_n(z)\}_{z=z_j^n}^{(i)} = f^{(i)}(z_j^n), \tag{15}$$

$$i = 0, 1, \dots, \alpha_j - 1, \quad j = 0, 1, \dots, q; \quad \sum_{j=1}^n \alpha_j = 2n + 1.$$

Заметим, что система (15) равносильна системе

$$T_n^{(i)}(z_j^n) = \left\{ \frac{f(z)}{\lambda_m(z)} \right\}_{z=z_j^n}^{(i)}, \tag{16}$$

где индексы i и j изменяются в тех же пределах, что в (15), а $\lambda_m(z)$ не обращается в нуль в узлах z_j^n .

Доказательство этого факта аналогично, как и в случае интерполирования непериодическими рациональными функциями [11]. Укажем только на идею доказательства.

При $i = 0$ соответствующие группы уравнений этих систем эквивалентны. Для уравнений системы (16) при $i = 1$, используя уравнения этой системы для $i = 0$, будем иметь

$$T_n'(z_j^n) = \frac{f'(z_j^n)}{\lambda_m(z_j^n)} - \frac{f(z_j^n)}{\lambda_m(z_j^n)} \frac{\lambda_m'(z_j^n)}{\lambda_m(z_j^n)} = \frac{f'(z_j^n)}{\lambda_m(z_j^n)} - T_n(z_j^n) \frac{\lambda_m'(z_j^n)}{\lambda_m(z_j^n)},$$

т. е. эта группа уравнений эквивалентна уравнениям

$$\{\lambda_m(z) T_n(z)\}'_{z_j^n} = f'(z_j^n).$$

Пусть уравнения системы (15) при $i = 0, 1, \dots, r$ эквивалентны уравнениям системы (16) при этих же i . Тогда ввиду того, что группа уравнений при $i = r + 1$ системы (16) может быть записана в виде

$$T_n^{(r+1)}(z_j^n) - \left\{ \frac{f(z)}{\lambda_m(z)} \right\}_{z=z_j^n}^{(r+1)} = \left\{ \frac{[\lambda_m(z) T_n(z)]' - f'(z)}{\lambda_m(z)} \right\}_{z=z_j^n}^{(r)} = 0,$$

а соответствующие группы уравнений для производных низших порядков эквивалентны, придем к эквивалентности уравнений систем (15) и (16) и для индекса $i = r + 1$.

Таким образом, используя равенство (2) для интерполяционного многочлена $T_n(z)$, построенного для функции $f(z)/\lambda_m(z)$, получим представление

$$f_{n,m}(z) = \frac{\lambda_m(z)}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{l_n(\xi) - l_n(z) \cos \frac{1}{2}(\xi - z)}{\lambda_m(\xi) l_n(\xi) \sin(\xi - z)} f(\xi) d\xi,$$

откуда остаточный член $r_{n,m}^\lambda(z)$ представим в виде

$$r_{n,m}^\lambda(z) = \frac{1}{4\pi i} \int_{\Gamma} f(\xi) \frac{\lambda_m(z) l_n(z)}{\lambda_m(\xi) l_n(\xi)} \frac{d\xi}{\sin \frac{1}{2}(\xi - z)}.$$

Для интерполяционных дробей соответствующие равенства получим после замены в них $\lambda_m(z)$ на $[Q_m(z)]^{-1}$, при этом в дальнейшем будем считать, что в разложении $Q_m(z) = c_m \prod_{\nu=1}^{2m} \sin \frac{1}{2}(z - \eta_\nu^m)$ коэффициент $c_m = 1$ для всех m .

Справедлива следующая

Теорема 3. Если потенциал $U(z)$ принимает соответственно на прямых $\text{Im} z = \pm d_0$ ($h \leq d_0 < d$) и $\text{Im} z = \pm d$ постоянные значения c_0 и $c < c_0$, то последовательность $T_{n,m}(z)$ при $n, m \rightarrow \infty$ и $n \sim m$ сходится равномерно в полосе $-d_0 \leq \text{Im} z \leq d_0$ к функции $f(z)$, какая бы ни была 2π -периодическая регулярная в этой полосе функция $f(z)$.

Доказательство. Пусть числа c_1 и c_2 ($c < c_2 < c_1 < c_0$) таковы, что линии уровня $U(z) = c_1$ и $U(\xi) = c_2$ принадлежат области регулярности функции $f(z)$. В остатке интерполирования

$$r_{n,m}(z) = \frac{1}{4\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\omega_{n,m}(z)}{\omega_{n,m}(\xi)} \frac{f(\xi) d\xi}{\sin \frac{1}{2}(\xi - z)}, \quad \omega_{n,m}(z) = \frac{l_n(z)}{Q_m(z)}$$

за контур интегрирования возьмем лежащую в полосе $0 \leq \text{Re} \xi \leq 2\pi$ часть линии уровня $U(\xi) = c_2$, а z будем считать произвольной точкой линии уровня $U(z) = c_1$.

Легко получить, что

$$\left| \frac{\omega_{n,m}(z)}{\omega_{n,m}(\xi)} \right| = e^{2m[U_{n,m}(\xi) - U_{n,m}(z)]} e^{[2(n-m)+1][u_n(\xi) - u_n(z)]}.$$

А так как n и m — величины одного порядка, то второй сомножитель справа остается ограниченным для всех z и ξ , принадлежащих соответственно линиям уровня, т. е.

$$\left| \frac{\omega_{n,m}(z)}{\omega_{n,m}(\xi)} \right| \leq A e^{2m[U_{n,m}(\xi) - U_{n,m}(z)]},$$

$$0 < A < \infty.$$

Применяя теорему Хелли о предельном переходе к последовательности интегралов $U_{n,m}(z)$ ($n, m = 1, 2, \dots$), получим для больших n и m неравенство

$$\left| \frac{\omega_{n,m}(z)}{\omega_{n,m}(\xi)} \right| \leq A e^{-2m(c_1 - c_2 - \varepsilon)},$$

$$0 < \varepsilon < c_1 - c_2,$$

из которого следует справедливость теоремы 3.

Поскольку тригонометрические дроби представляют собой удобный аппарат приближения периодических мероморфных функций, то полюса интерпо-

ляционных дробей $T_{n,m}(z)$ в каждом конкретном случае должны выбираться исходя из свойств интерполируемой мероморфной функции $f(z)$. Так, например, в качестве некоторых полюсов в матрице $\{\eta_{\nu}^m\}$ могут быть выбраны полюса приближаемых мероморфных функций, тогда узлы интерполирования выбираются такими, чтобы выполнялись условия этой теоремы.

Литература

1. Гливенко В. И. Интеграл Стильеса. ОНТИ, 1936.
2. Лоэв М. Теория вероятностей. ИЛ, 1962.
3. Дубровский В. М. Изв. АН СССР, сер. мат., 9, 311—320, 1945; 11, 101—104, 1947.
4. Крылов В. И., Янович Л. А. ДАН БССР, 7, № 10, 1963.
5. Крылов В. И., Янович Л. А. ДАН БССР, 8, № 3, 1964.
6. Смирнов В. И., Лебедев Н. А. Конструктивная теория функций комплексного переменного. 1964.
7. Voshneg S. Math. App., 108, 378—410, 1933.
8. Бохнер С. Лекции об интегралах Фурье, 1962, стр. 317—342.
9. Смирнов В. И. Курс высшей математики, 5, 1959.
10. Крылов В. И. Приближенное вычисление интегралов. 1959.
11. Salzer H. E. Math. Comput., 16, № 80, 486—491, 1962.

Институт математики
АН БССР

Поступило в редакцию 12.X 1966

А. Х. ТУРЕЦКИЙ, Г. Н. ТОРОПОВА

**ОЦЕНКА ПРИБЛИЖЕНИЯ ФУНКЦИЙ, УДОВЛЕТВОРЯЮЩИХ
 УСЛОВИЮ ЛИПШИЦА, ИНТЕРПОЛЯЦИОННОЙ
 ФОРМУЛОЙ ФЕЙЕРА—ЭРМИТА**

Обозначим через $H^{(\alpha)}$ ($0 < \alpha < 1$) класс функций $f(x)$, заданных на сегменте $[-1, 1]$ и удовлетворяющих условию Липшица степени α с константой единица, т. е. условию

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq |x_1 - x_2|^\alpha, \quad x_1, x_2 \in [-1, 1].$$

Произвольную функцию $f(x)$ будем приближать интерполяционными полиномами Фейера—Эрмита $H_{2n-1}(f, x)$, которые удовлетворяют условиям:

$$\left. \begin{aligned} H_{2n-1}(f, x_k) &= f(x_k) \\ H'_{2n-1}(f, x_k) &= 0 \end{aligned} \right\}, \quad (1)$$

где

$$x_k = \cos \frac{2k-1}{2n} \pi \quad (k=1, 2, \dots, n; n=1, 2, \dots)$$

— узлы Чебышева, и имеют вид

$$H_{2n-1}(f, x) = \sum_{k=1}^n A_k(x) f(x_k), \quad (2)$$

где

$$A_k(x) = \frac{T_n^2(x)}{n^2(x-x_k)^2} (1-xx_k); \quad \sum_{k=1}^n A_k(x) = 1;$$

$$T_n(x) = \cos n(\arccos x)$$

(см. [3], стр. 549—551).

Введем в рассмотрение величину

$$E_n(H^{(\alpha)}, x) = \sup_{f \in H^{(\alpha)}} |f(x) - H_{2n-1}(f, x)|. \quad (3)$$

В работе [1] найдено выражение для $E_n(H_\omega, x)$ для класса H_ω функций, модуль непрерывности которых не превосходит заданного модуля непрерывности $\omega(\delta)$. В частном случае $\omega(\delta) = \delta^\alpha$, $0 < \alpha \leq 1$, получены следующие результаты:

$$\alpha = 1 \quad E_n(H^\alpha, x) = \frac{2\sqrt{1-x^2}}{\pi n} T_n^2(x) \ln n + O\left(\frac{1}{n}\right), \quad (4)$$

$$0 < \alpha < 1 \quad E_n(H^{(\alpha)}, x) = O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right). \quad (5)$$

Из последнего соотношения видно, что для $0 < \alpha < 1$ получен лишь порядок величины верхней грани.

В настоящей работе находится асимптотически точная оценка для $E_n(H^{(\alpha)}, x)$, $0 < \alpha < 1$.

Теорема. Для любого $0 < \alpha < 1$ и $x \in [-1, 1]$ справедливо соотношение

$$E_n(H^{(\alpha)}, x) = \frac{T_n^2(x)}{\pi^{2-\alpha}} [\zeta(2-\alpha, \delta) + \zeta(2-\alpha, 1-\delta)] \left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{n}\right)^\alpha + o\left[\left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{n}\right)^\alpha\right] + \beta_n^{(\alpha)}(x) + O\left(\frac{1}{n}\right), \quad (6)$$

где

$$\beta_n^{(\alpha)}(x) = \begin{cases} O\left(\frac{|x|^\alpha}{n^{2\alpha}}\right), & \text{если } \alpha < \frac{1}{2}, \\ O\left(\frac{|x|^\alpha \ln n}{n}\right), & \text{если } \alpha = \frac{1}{2}, \\ O\left(\frac{|x|^\alpha}{n}\right), & \text{если } \alpha > \frac{1}{2}, \end{cases} \quad (7)$$

δ однозначно определяется значениями x и n , содержится на отрезке

$[0, 1)$, $\sin^2 \delta \pi = \cos^2 n \theta$, а $\zeta(n, q) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+q)^n}$ — дзета-функция Римана.

Доказательство. Пусть $R_n(f, x) = f(x) - H_{2n-1}(f, x)$. Тогда из (2) имеем

$$\begin{aligned} |R_n(f, x)| &= \left| \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n \frac{T_n^2(x)}{(x-x_k)^2} (1-xx_k) [f(x) - f(x_k)] \right| \leq \\ &\leq \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n \frac{T_n^2(x)}{(x-x_k)^2} (1-xx_k) |f(x) - f(x_k)| \leq \\ &\leq \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n \frac{T_n^2(x)}{(x-x_k)^2} (1-xx_k) |x-x_k|^\alpha, \end{aligned}$$

так как $f(x) \in Lip \alpha$.

Таким образом,

$$|R_n(f, x)| \leq \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n \frac{T_n^2(x)}{|x-x_k|^{2-\alpha}} (1-xx_k). \quad (8)$$

Это неравенство обращается в равенство для функции

$$f_x(t) = |x-t|^\alpha = \begin{cases} (x-t)^\alpha & \text{при } -1 \leq t \leq x \leq 1, \\ (t-x)^\alpha & \text{при } -1 \leq x \leq t \leq 1, \end{cases}$$

принадлежащей классу $H^{(\alpha)}$. Поэтому из (3) и (8) следует

$$E_n(H^{(\alpha)}, x) = F_n(x) = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n \frac{T_n^2(x)}{|x-x_k|^{2-\alpha}} (1-xx_k). \quad (9)$$

Положим $x = \cos \theta$, $x_k = \cos \theta_k$, $\theta_k = \frac{2k-1}{2n} \pi$ ($k = 1, 2, \dots, n$). Тогда

$$F_n(\cos \theta) = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n \frac{\cos^2 n \theta}{|\cos \theta - \cos \theta_k|^{2-\alpha}} (1 - \cos \theta \cos \theta_k). \quad (10)$$

Учитывая тождество

$$1 - \cos \theta \cos \theta_k = \sin^2 \theta_k - \cos \theta_k (\cos \theta - \cos \theta_k),$$

получаем

$$F_n(\cos \theta) = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n \frac{\cos^2 n \theta \sin^2 \theta_k}{|\cos \theta - \cos \theta_k|^{2-\alpha}} - \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n \frac{\cos^2 n \theta \cos \theta_k}{|\cos \theta - \cos \theta_k|^{2-\alpha}} (\cos \theta - \cos \theta_k).$$

Используя тождество

$$\frac{\sin(2n+1) \frac{\theta - \theta_k}{2}}{2 \sin \frac{\theta - \theta_k}{2}} + \frac{\sin(2+1) \frac{\theta + \theta_k}{2}}{2 \sin \frac{\theta + \theta_k}{2}} = \frac{(-1)^k \cos n \theta \sin \theta_k}{\cos \theta_k - \cos \theta}, \quad (11)$$

после простых преобразований получаем

$$F_n(\cos \theta) = \frac{1}{4n^2} \sum_{k=1}^n |\cos \theta - \cos \theta_k|^\alpha \frac{\sin^2(2n+1) \frac{\theta - \theta_k}{2}}{\sin^2 \frac{\theta - \theta_k}{2}} + \\ + \frac{1}{4n^2} \sum_{k=1}^n |\cos \theta - \cos \theta_k|^\alpha \frac{\sin^2(2n+1) \frac{\theta + \theta_k}{2}}{\sin^2 \frac{\theta + \theta_k}{2}} - \frac{1}{2n^2} \sum_{k=1}^n |\cos \theta - \cos \theta_k|^\alpha + \\ + \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n \frac{\cos \theta \cos(n+1)\theta}{\cos \theta - \cos \theta_k} |\cos \theta - \cos \theta_k|^\alpha - \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n \frac{\cos^2 n \theta \cos \theta_k}{\cos \theta - \cos \theta_k} \times \\ \times |\cos \theta - \cos \theta_k|^\alpha. \quad (12)$$

Покажем, что

$$S = -\frac{1}{2n^2} \sum_{k=1}^n |\cos \theta - \cos \theta_k|^\alpha + \\ + \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n \frac{\cos n \theta \cos(n+1)\theta}{\cos \theta - \cos \theta_k} |\cos \theta - \cos \theta_k|^\alpha - \\ - \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n \frac{\cos^2 n \theta \cos \theta_k}{\cos \theta - \cos \theta_k} |\cos \theta - \cos \theta_k|^\alpha = O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Для этого перепишем S в таком виде:

$$S = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n \frac{|\cos \theta - \cos \theta_k|^\alpha}{\cos \theta - \cos \theta_k} \left[-\frac{1}{2} (\cos \theta - \cos \theta_k) + \right. \\ \left. + \cos n \theta \cos (n+1) \theta - \cos^2 n \theta \cos \theta_k \right].$$

Выражение в квадратных скобках легко преобразовать к виду

$$\frac{1}{2} \cos 2n \theta (\cos \theta - \cos \theta_k) - \frac{1}{2} \sin 2n \theta \sin \theta.$$

Следовательно,

$$S = \frac{1}{2n^2} \cos 2n \theta \sum_{k=1}^n |\cos \theta - \cos \theta_k|^\alpha - \\ - \frac{1}{n^2} \cos n \theta \sin n \theta \sin \theta \sum_{k=1}^n \frac{|\cos \theta - \cos \theta_k|^\alpha}{\cos \theta - \cos \theta_k} = S_1 + S_2.$$

Оценим S_2 .

Имеем

$$|S_2| = \left| \frac{1}{n^2} \sin n \theta \cos n \theta \sin \theta \sum_{k=1}^n \frac{|\cos \theta - \cos \theta_k|^\alpha}{\cos \theta - \cos \theta_k} \right| \leq \\ \leq \frac{1}{n^2} |\cos n \theta \sin \theta| \sum_{k=1}^n \frac{1}{|\cos \theta - \cos \theta_k|^{1-\alpha}}.$$

Заметим теперь, что при любом k ($k = 1, 2, \dots, n$) верна оценка

$$\frac{1}{n^2} \frac{|\cos n \theta \sin \theta|}{|\cos \theta - \cos \theta_k|^{1-\alpha}} = \frac{\sin \theta}{n^2} \frac{|\cos n \theta - \cos n \theta_k|}{|\cos \theta - \cos \theta_k|^{1-\alpha}} = \\ = \frac{\sin \theta}{n^2} \frac{2^\alpha \left| \sin \frac{n(\theta - \theta_k)}{2} \right| \left| \sin \frac{n(\theta + \theta_k)}{2} \right|}{\left| \sin \frac{\theta - \theta_k}{2} \right|^{1-\alpha} \left| \sin \frac{\theta + \theta_k}{2} \right|^{1-\alpha}} \leq \\ \leq \frac{2^\alpha \sin \theta}{n^2} \left| \frac{\sin \frac{n(\theta - \theta_k)}{2}}{\sin \frac{\theta - \theta_k}{2}} \right|^{1-\alpha} \frac{1}{\left| \sin \frac{\theta + \theta_k}{2} \right|^{1-\alpha}} \leq \\ \leq \frac{2^\alpha n^{1-\alpha}}{n^2} \left| \frac{\sin \theta}{\sin \frac{\theta + \theta_k}{2}} \right|^{1-\alpha} \leq \frac{2^\alpha}{n^{1+\alpha}} \left| \frac{\sin \theta + \sin \theta_k}{\sin \frac{\theta + \theta_k}{2}} \right|^{1-\alpha} = \\ = \frac{2^\alpha}{n^{1+\alpha}} \left| 2 \cos \frac{\theta - \theta_k}{2} \right|^{1-\alpha} \leq \frac{2}{n^{1+\alpha}}.$$

Пусть $\theta_v \leq \theta < \theta_{v+1}$ ($v = 1, 2, \dots, n-1$), тогда

$$\frac{2v-1}{2n} \pi \leq \theta < \frac{2v+1}{2n} \pi \text{ или } \theta = \frac{2v-1+2\delta}{2n} \pi,$$

где $0 \leq \delta < 1$. И неравенство для $|S_2|$ можно записать в виде

$$|S_2| \leq \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{v-1} \frac{\sin \theta}{|\cos \theta - \cos \theta_k|^{1-\alpha}} + \frac{1}{n^2} \sum_{k=v+2}^n \frac{\sin \theta}{|\cos \theta - \cos \theta_k|^{1-\alpha}} + \\ + O\left(\frac{1}{n^{1+\alpha}}\right) = \sigma_1 + \sigma_2 + O\left(\frac{1}{n^{1+\alpha}}\right).$$

Заметим, что если $0 \leq \theta < \theta_1$, то в последнем неравенстве будет отсутствовать первая сумма, а если $\theta_n \leq \theta \leq \pi$, то в этом неравенстве будет отсутствовать вторая сумма, доказательство упростится, а результат не изменится. Так как σ_1 и σ_2 оцениваются одинаково, то ограничимся оценкой σ_1 .

Так как выполняется неравенство

$$\frac{\sin \theta}{|\cos \theta - \cos \theta_k|^{1-\alpha}} \leq \frac{\sin \theta + \sin \theta_k}{|\cos \theta - \cos \theta_k|^{1-\alpha}} = \\ = \frac{2\alpha \sin \frac{\theta + \theta_k}{2} \cos \frac{\theta - \theta_k}{2}}{\left| \sin \frac{\theta - \theta_k}{2} \right|^{1-\alpha} \left| \sin \frac{\theta + \theta_k}{2} \right|^{1-\alpha}} \leq \frac{2^\alpha}{\left| \sin \frac{\theta - \theta_k}{2} \right|^{1-\alpha}},$$

то

$$\sigma_1 \leq \frac{2^\alpha}{n^2} \sum_{k=1}^{v-1} \frac{1}{\left| \sin \frac{\theta - \theta_k}{2} \right|^{1-\alpha}}. \quad (13)$$

Но

$$\theta - \theta_k = \frac{2v-1+2\delta}{2n} \pi - \frac{2k-1}{2n} \pi = \frac{v-k+\delta}{n} \pi,$$

значит, сделав замену $v-k=l$, неравенство (13) можно переписать в виде

$$\sigma_1 = \frac{2^\alpha}{n^2} \sum_{l=1}^{v-1} \frac{1}{\left(\sin \frac{l+\delta}{2n} \pi \right)^{1-\alpha}} = \frac{2}{n^{1+\alpha} \pi^{1-\alpha}} \sum_{l=1}^{v-1} \frac{1}{(l+\delta)^{1-\alpha}} + O\left(\frac{1}{n}\right),$$

так как

$$\frac{1}{|\sin U|^{1-\alpha}} - \frac{1}{|U|^{1-\alpha}} = O(1), \quad |U| \leq \frac{\pi}{2},$$

или

$$\sigma_1 \leq \frac{2}{\pi^{1-\alpha} n^{1+\alpha}} \sum_{l=1}^{v-1} \frac{1}{l^{1-\alpha}} + O\left(\frac{1}{n}\right),$$

но

$$\sum_{l=1}^{v-1} \frac{1}{l^{1-\alpha}} < \sum_{l=1}^{n-1} \frac{1}{l^{1-\alpha}} < 1 + \int_1^n \frac{dx}{x^{1-\alpha}} = O(n^\alpha).$$

Следовательно, $\sigma_1 = O\left(\frac{1}{n}\right)$ и $S_2 = O\left(\frac{1}{n}\right)$.

Для S_1 имеем

$$|S_1| = \frac{1}{2n^2} |\cos 2n\theta| \sum_{k=1}^n |\cos \theta - \cos \theta_k|^\alpha = O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Таким образом, $S = O\left(\frac{1}{n}\right)$, что требовалось доказать.

Теперь равенство (12) можно записать

$$F_n(\cos \theta) = \frac{1}{4n^2} \sum_{k=1}^n |\cos \theta - \cos \theta_k|^\alpha \frac{\sin^2(2n+1) \frac{\theta - \theta_k}{2}}{\sin^2 \frac{\theta - \theta_k}{2}} +$$

$$+ \frac{1}{4n^2} \sum_{k=1}^n |\cos \theta - \cos \theta_k|^\alpha \frac{\sin^2(2n+1) \frac{\theta + \theta_k}{2}}{\sin^2 \frac{\theta + \theta_k}{2}} + O\left(\frac{1}{n}\right), \quad (14)$$

или

$$F_n(\cos \theta) = I_1 + I_2 + O\left(\frac{1}{n}\right), \quad (15)$$

где

$$I_1 = \frac{1}{4n^2} \sum_{k=1}^n |\cos \theta - \cos \theta_k|^\alpha \frac{\sin^2(2n+1) \frac{\theta - \theta_k}{2}}{\sin^2 \frac{\theta - \theta_k}{2}}$$

$$I_2 = \frac{1}{4n^2} \sum_{k=1}^n |\cos \theta - \cos \theta_k|^\alpha \frac{\sin^2(2n+1) \frac{\theta + \theta_k}{2}}{\sin^2 \frac{\theta + \theta_k}{2}} \quad (16)$$

Преобразуем сумму I_1 :

$$I_1 = \frac{1}{4n^2} \sum_{k=1}^n \left| 2 \sin \frac{\theta + \theta_k}{2} \sin \frac{\theta - \theta_k}{2} \right|^\alpha \frac{\sin^2(2n+1) \frac{\theta - \theta_k}{2}}{\sin^2 \frac{\theta - \theta_k}{2}} =$$

$$= \frac{2^{\alpha-2}}{n^2} \sum_{k=1}^n \left| \sin \frac{\theta + \theta_k}{2} \right|^\alpha \frac{\sin^2(2n+1) \frac{\theta - \theta_k}{2}}{\left| \sin \frac{\theta - \theta_k}{2} \right|^{2-\alpha}}.$$

Положим $\theta - \theta_k = \varphi_k$, тогда $-\pi \leq \varphi_k \leq \pi$, $\theta + \theta_k = 2\theta - \varphi_k$ и

$$I_1 = \frac{2^{\alpha-2}}{n^2} \sum_{k=1}^n \left| \sin \frac{1}{2} (2\theta - \varphi_k) \right|^\alpha \frac{\sin^2(2n+1) \frac{\varphi_k}{2}}{\left| \sin \frac{\varphi_k}{2} \right|^{2-\alpha}} =$$

$$= \frac{2^{\alpha-2}}{n^2} \sum_{k=1}^n \left| \sin \theta \cos \frac{\varphi_k}{2} - \cos \theta \sin \frac{\varphi_k}{2} \right|^\alpha \frac{\sin^2(2n+1) \frac{\varphi_k}{2}}{\left| \sin \frac{\varphi_k}{2} \right|^{2-\alpha}}.$$

Для вычисления асимптотического значения I_1 и I_2 применим метод А. Ф. Тимана [2].

Учитывая, что

$$|U \pm V|^\alpha = |U|^\alpha + \gamma |V|^\alpha, \quad -1 \leq \gamma \leq 1, \quad (17)$$

имеем

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{2^{\alpha-2}}{n^2} \sum_{k=1}^n (\sin \theta)^\alpha \left(\cos \frac{\varphi_k}{2} \right)^\alpha \frac{\sin^2(2n+1) \frac{\varphi_k}{2}}{\left| \sin \frac{\varphi_k}{2} \right|^{2-\alpha}} + \\ &+ \gamma \frac{2^{\alpha-2}}{n^2} \sum_{k=1}^n |\cos \theta|^\alpha \left| \sin \frac{\varphi_k}{2} \right|^\alpha \frac{\sin^2(2n+1) \frac{\varphi_k}{2}}{\left| \sin \frac{\varphi_k}{2} \right|^{2-\alpha}}. \end{aligned} \quad (18)$$

Положив $\theta + \theta_k = \psi_k$, тогда $0 \leq \psi_k \leq 2\pi$, аналогично получим:

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{2^{\alpha-2}}{n^2} \sum_{k=1}^n (\sin \theta)^\alpha \left| \cos \frac{\psi_k}{2} \right|^\alpha \frac{\sin^2(2n+1) \frac{\psi_k}{2}}{\left| \sin \frac{\psi_k}{2} \right|^{2-\alpha}} + \\ &+ \gamma' \frac{2^{\alpha-2}}{n^2} \sum_{k=1}^n |\cos \theta|^\alpha \left| \sin \frac{\psi_k}{2} \right|^\alpha \frac{\sin^2(2n+1) \frac{\psi_k}{2}}{\left| \sin \frac{\psi_k}{2} \right|^{2-\alpha}}, \end{aligned}$$

где $-1 \leq \gamma' \leq 1$.

Заметим, что можно считать, что $0 \leq \psi_k \leq \pi$, ибо если $\pi \leq \psi_k \leq 2\pi$, то, заменив в предыдущем равенстве ψ_k на $2\pi - \psi_k$, мы не изменим величины I_2 .

Используя (17) и равенство $\cos \frac{\varphi_k}{2} = 1 - 2\sin^2 \frac{\varphi_k}{4}$, получаем:

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{2^{\alpha-2}}{n^2} \sin^\alpha \theta \sum_{k=1}^n \frac{\sin^2(2n+1) \frac{\varphi_k}{2}}{\left| \sin \frac{\varphi_k}{2} \right|^{2-\alpha}} + \\ &+ \gamma_1 \frac{2^{\alpha-2}}{n^2} \sin^\alpha \theta \sum_{k=1}^n \left| \sin \frac{\varphi_k}{4} \right|^{2\alpha} \frac{\sin^2(2n+1) \frac{\varphi_k}{2}}{\left| \sin \frac{\varphi_k}{2} \right|^{2-\alpha}} + \end{aligned}$$

$$+ \gamma \frac{2^{\alpha-2}}{n^2} |\cos \theta|^\alpha \sum_{k=1}^n \frac{\sin^2(2n+1) \frac{\varphi_k}{2}}{\left| \sin \frac{\varphi_k}{2} \right|^{2-2\alpha}}, |\gamma_1| \leq 2^\alpha. \quad (19)$$

Аналогично

$$I_2 = \frac{2^{\alpha-2}}{n^2} \sin^\alpha \theta \sum_{k=1}^n \frac{\sin^2(2n+1) \frac{\psi_k}{2}}{\left| \sin \frac{\psi_k}{2} \right|^{2-\alpha}} +$$

$$+ \gamma_2 \frac{2^{\alpha-2}}{n^2} \sin^\alpha \theta \sum_{k=1}^n \left| \sin \frac{\psi_k}{4} \right|^{2\alpha} \frac{\sin^2(2n+1) \frac{\psi_k}{2}}{\left| \sin \frac{\psi_k}{2} \right|^{2-\alpha}} +$$

$$+ \gamma' \frac{2^{\alpha-2}}{n^2} |\cos \theta|^\alpha \sum_{k=1}^n \frac{\sin^2(2n+1) \frac{\psi_k}{2}}{\left| \sin \frac{\psi_k}{2} \right|^{2-2\alpha}}, |\gamma_2| \leq 2^\alpha. \quad (20)$$

Обозначим:

$$\left. \begin{aligned} \tau_1 &= \frac{2^{\alpha-2}}{n^2} \sin^\alpha \theta \sum_{k=1}^n \frac{\sin^2(2n+1) \frac{\varphi_k}{2}}{\left| \sin \frac{\varphi_k}{2} \right|^{2-\alpha}} \\ \tau_2 &= \frac{2^{\alpha-2}}{n^2} \sin^\alpha \theta \sum_{k=1}^n \frac{\sin^2(2n+1) \frac{\psi_k}{2}}{\left| \sin \frac{\psi_k}{2} \right|^{2-\alpha}} \end{aligned} \right\}. \quad (21)$$

Рассмотрим случай, когда $x_n \leq x < x_1$, и пусть $x_{v+1} < x \leq x_v$ или $\theta_v \leq \theta < \theta_{v+1}$ ($v=1, 2, \dots, n-1$). Положим

$$\theta = \frac{2v-1+2\delta}{2n} \pi, \quad 0 \leq \delta < 1.$$

Тогда

$$\varphi_k = \theta - \theta_k = \frac{v-k+\delta}{n} \pi, \quad \psi_k = \theta + \theta_k = \frac{v+k+\delta-1}{n} \pi$$

и можно записать

$$\left. \begin{aligned} \tau_1 &= \frac{2^{\alpha-2}}{n^2} \sin^\alpha \theta \sum_{k=1}^n \frac{\sin^2(2n+1) \frac{v-k+\delta}{2n} \pi}{\left| \sin \frac{v-k+\delta}{2n} \pi \right|^{2-\alpha}} \\ \tau_2 &= \frac{2^{\alpha-2}}{n^2} \sin^\alpha \theta \sum_{k=1}^n \frac{\sin^2(2n+1) \frac{v+k+\delta-1}{2n} \pi}{\left| \sin \frac{v+k+\delta-1}{2n} \pi \right|^{2-\alpha}} \end{aligned} \right\}. \quad (22)$$

Разобьем τ_1 на две суммы

$$\tau_1 = \frac{2^{\alpha-2}}{n^2} \sin^\alpha \theta \left\{ \sum_{k=1}^{\nu} \frac{\sin^2(2n+1) \frac{\nu-k+\delta}{2n} \pi}{\left| \sin \frac{\nu-k+\delta}{2n} \pi \right|^{2-\alpha}} + \right. \\ \left. + \sum_{k=\nu+1}^n \frac{\sin^2(2n+1) \frac{\nu-k+\delta}{2n} \pi}{\left| \sin \frac{\nu-k+\delta}{2n} \pi \right|^{2-\alpha}} \right\}.$$

В первой сумме положим $\nu - k = l$, тогда она будет равна

$$\sum_{l=0}^{\nu-1} \frac{\sin^2(2n+1) \frac{l+\delta}{2n} \pi}{\left| \sin \frac{l+\delta}{2n} \pi \right|^{2-\alpha}}.$$

Вторую сумму приведем к виду

$$\sum_{k=\nu+1}^n \frac{\sin^2(2n+1) \frac{2n+\nu-k+\delta}{2n}}{\left| \sin \frac{2n+\nu-k+\delta}{2n} \pi \right|^{2-\alpha}}$$

и положим $2n + \nu - k = l$, тогда она примет вид

$$\sum_{l=\nu+n}^{2n-1} \frac{\sin^2(2n+1) \frac{l+\delta}{2n} \pi}{\left| \sin \frac{l+\delta}{2n} \pi \right|^{2-\alpha}}.$$

Следовательно,

$$\tau_1 = \frac{2^{\alpha-2}}{n^2} \sin^\alpha \theta \left\{ \sum_{l=0}^{\nu-1} \frac{\sin^2(2n+1) \frac{l+\delta}{2n} \pi}{\left| \sin \frac{l+\delta}{2n} \pi \right|^{2-\alpha}} + \right. \\ \left. + \sum_{l=\nu+n}^{2n-1} \frac{\sin^2(2n+1) \frac{l+\delta}{2n} \pi}{\left| \sin \frac{l+\delta}{2n} \pi \right|^{2-\alpha}} \right\}.$$

В τ_2 положим $\nu + k - 1 = l$. Тогда получим:

$$\tau_2 = \frac{2^{\alpha-2}}{n^2} \sin^\alpha \theta \sum_{l=\nu}^{\nu+n-1} \frac{\sin^2(2n+1) \frac{l+\delta}{2n} \pi}{\left| \sin \frac{l+\delta}{2n} \pi \right|^{2-\alpha}}$$

и

$$\begin{aligned} \tau_1 + \tau_2 &= \frac{2^{\alpha-2}}{n^2} \sin^\alpha \theta \sum_{l=0}^{2n-1} \frac{\sin^2(2n+1) \frac{l+\delta}{2n} \pi}{\left| \sin \frac{l+\delta}{2n} \pi \right|^{2-\alpha}} = \\ &= \frac{2^{\alpha-2}}{n^2} \sin^\alpha \theta \left\{ \sum_{l=0}^{n-1} \frac{\sin^2(2n+1) \frac{l+\delta}{2n} \pi}{\left| \sin \frac{l+\delta}{2n} \pi \right|^{2-\alpha}} + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{l=n}^{2n-1} \frac{\sin^2(2n+1) \frac{l+\delta}{2n} \pi}{\left| \sin \frac{l+\delta}{2n} \pi \right|^{2-\alpha}} \right\} = \\ &= \frac{2^{\alpha-2}}{n^2} \sin^\alpha \theta \left\{ \sum_{l=0}^{n-1} \frac{\sin^2(2n+1) \frac{l+\delta}{2n} \pi}{\left| \sin \frac{l+\delta}{2n} \pi \right|^{2-\alpha}} + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{l=n}^{2n-1} \frac{\sin^2(2n+1) \frac{2n-l-\delta}{2n} \pi}{\left| \sin \frac{2n-l-\delta}{2n} \pi \right|^{2-\alpha}} \right\}. \end{aligned}$$

Положим во второй сумме $2n - l - 1 = k$, тогда

$$\begin{aligned} \tau_1 + \tau_2 &= \frac{2^{\alpha-2}}{n^2} \sin^\alpha \theta \left\{ \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\sin^2(2n+1) \frac{k+\delta}{2n} \pi}{\left(\sin \frac{k+\delta}{2n} \pi \right)^{2-\alpha}} + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\sin^2(2n+1) \frac{k+1-\delta}{2n} \pi}{\left(\sin \frac{k+1-\delta}{2n} \pi \right)^{2-\alpha}} \right\}. \end{aligned} \tag{23}$$

Из соотношения (23) видно, что достаточно оценить первую сумму и в полученной оценке заменить δ на $(1-\delta)$, чтобы получить оценку второй суммы. Обозначим первую сумму

$$\tau(\delta) = \frac{2^{\alpha-2}}{n^2} \sin^\alpha \theta \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\sin^2(2n+1) \frac{k+\delta}{2n} \pi}{\left(\sin \frac{k+\delta}{2n} \pi \right)^{2-\alpha}}. \tag{24}$$

Используя соотношение

$$\frac{1}{|\sin U|^{2-\alpha}} - \frac{1}{|U|^{2-\alpha}} = O(1), \quad |U| \leq \frac{\pi}{2}, \quad 0 < \alpha < 1,$$

имеем

$$\tau(\delta) = \frac{\sin^{\alpha} \theta}{\pi^{2-\alpha} n^{\alpha}} \left[\sum_{k=0}^{n-1} \frac{\sin^2(2n+1) \frac{k+\delta}{2n} \pi}{(k+\delta)^{2-\alpha}} + O\left(\frac{1}{n^{1-\alpha}}\right) \right],$$

или

$$\tau(\delta) = \frac{\sin^{\alpha} \theta}{\pi^{2-\alpha} n^{\alpha}} \left[\frac{\sin^2(2n+1) \frac{\delta\pi}{2n}}{\delta^{2-\alpha}} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\sin^2(2n+1) \frac{k+\delta}{2n} \pi}{(k+\delta)^{2-\alpha}} + O\left(\frac{1}{n^{1-\alpha}}\right) \right].$$

Так как

$$\begin{aligned} \frac{\sin(2n+1) \frac{\delta\pi}{2n}}{\delta} &= \frac{\sin\left(\delta\pi + \frac{\delta\pi}{2n}\right)}{\delta} = \frac{\sin \delta\pi}{\delta} \cos \frac{\delta\pi}{2n} + \\ &+ \cos \delta\pi \frac{\sin \frac{\delta\pi}{2n}}{\delta} = \frac{\sin \delta\pi}{\delta} + O\left(\frac{1}{n}\right), \end{aligned}$$

откуда

$$\frac{\sin^2(2n+1) \frac{\delta\pi}{2n}}{\delta^2} = \frac{\sin^2 \delta\pi}{\delta^2} + O\left(\frac{1}{n}\right),$$

и

$$\sin^2(2n+1) \frac{k+\delta}{2n} \pi = \sin^2 \delta\pi + O\left(\frac{k+\delta}{n}\right)$$

равномерно относительно k ($k=1, 2, \dots, n-1$), то

$$\begin{aligned} \tau(\delta) &= \frac{\sin^{\alpha} \theta}{\pi^{2-\alpha} n^{\alpha}} \left\{ \frac{\sin^2 \delta\pi}{\delta^{2-\alpha}} + \sin^2 \delta\pi \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{(k+\delta)^{2-\alpha}} + \right. \\ &+ \left. \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} O\left[\left(\frac{1}{k+\delta}\right)^{1-\alpha}\right] + O\left(\frac{1}{n^{1-\alpha}}\right) \right\} = \\ &= \frac{\sin^{\alpha} \theta}{\pi^{2-\alpha} n^{\alpha}} \left[\sum_{k=0}^{n-1} \frac{\sin^2 \delta\pi}{(k+\delta)^{2-\alpha}} + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} O\left(\frac{1}{(k+\delta)^{1-\alpha}}\right) + O\left(\frac{1}{n^{1-\alpha}}\right) \right]. \end{aligned}$$

Оценим сумму $\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{(k+\delta)^{1-\alpha}}$, $0 < \alpha < 1$.

Имеем

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{(k+\delta)^{1-\alpha}} < 1 + \sum_{k=2}^{n-1} \frac{1}{k^{1-\alpha}} < 1 + \int_1^n \frac{dt}{t^{1-\alpha}} = O(n^{\alpha}).$$

Следовательно,

$$\tau(\delta) = \frac{\sin^{\alpha} \theta \sin^2 \delta\pi}{\pi^{2-\alpha} n^{\alpha}} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(k+\delta)^{2-\alpha}} + O\left(\frac{\sin^{\alpha} \theta}{n}\right),$$

или

$$\tau(\delta) = \frac{\sin^\alpha \theta \sin^2 \delta \pi}{\pi^{2-\alpha} n^\alpha} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+\delta)^{2-\alpha}} + o\left[\left(\frac{\sin \theta}{n}\right)^\alpha\right]. \quad (25)$$

Мы заменили сумму $\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(k+\delta)^{2-\alpha}}$ суммой $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+\delta)^{2-\alpha}}$, так как

$$\sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{(k+\delta)^{2-\alpha}} = O(n^{\alpha-1})$$

и соотношение (25) справедливо.

Мы полагали выше $\theta = \frac{2\nu - 1 + 2\delta}{2n} \pi$. Отсюда

$$\delta\pi = n\theta - \nu\pi + \frac{\pi}{2}, \quad \nu = 1, 2, \dots, n-1,$$

и

$$\left. \begin{aligned} \sin^2 \delta\pi &= \cos^2 n\theta \\ \sin^2 (1-\delta)\pi &= \sin^2 \delta\pi = \cos^2 n\theta \end{aligned} \right\}. \quad (26)$$

Окончательно имеем из (23), (24), (25), (26):

$$\begin{aligned} \tau_1 + \tau_2 &= \frac{\sin^\alpha \theta \cos^2 n\theta}{\pi^{2-\alpha} n^\alpha} \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+\delta)^{2-\alpha}} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+1-\delta)^{2-\alpha}} \right\} + \\ &+ o\left[\left(\frac{\sin \theta}{n}\right)^\alpha\right], \end{aligned}$$

или

$$\tau_1 + \tau_2 = \frac{\cos^2 n\theta \sin^\alpha \theta}{\pi^{2-\alpha} n^\alpha} [\zeta(2-\alpha, \delta) + \zeta(2-\alpha, 1-\delta)] + o\left[\left(\frac{\sin \theta}{n}\right)^\alpha\right], \quad (27)$$

где $\zeta(n, q) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+q)^n}$ — дзета-функция Римана.

Оценим вторые члены в соотношениях (19) и (20). Обозначим

$$\begin{aligned} a_n^{(\alpha)}(\cos \theta) &= \frac{2^{\alpha-2} \sin^\alpha \theta}{n^2} \left\{ \sum_{k=1}^n \left| \sin \frac{\varphi_k}{4} \right|^{2\alpha} \frac{\sin^2(2n+1) \frac{\varphi_k}{2}}{\left| \sin \frac{\varphi_k}{2} \right|^{2-\alpha}} + \right. \\ &+ \left. \sum_{k=1}^n \left| \sin \frac{\psi_k}{4} \right|^{2\alpha} \frac{\sin^2(2n+1) \frac{\psi_k}{2}}{\left| \sin \frac{\psi_k}{2} \right|^{2-\alpha}} \right\}. \quad (28) \end{aligned}$$

Так как $|\varphi_k| \leq \pi$ и $|\psi_k| \leq \pi$, то

$$\left| \sin \frac{\varphi_k}{4} \right| \leq \left| \sin \frac{\varphi_k}{2} \right|, \quad \left| \sin \frac{\psi_k}{4} \right| \leq \left| \sin \frac{\psi_k}{2} \right|$$

и, значит, получаем

$$x_n^{(\alpha)}(\cos \theta) = \frac{2^{\alpha-2} \sin^\alpha \theta}{n^2} \left\{ \sum_{k=1}^n \frac{\sin^2(2n+1) \frac{\varphi_k}{2}}{\left| \sin \frac{\varphi_k}{2} \right|^{2-3\alpha}} + \right. \\ \left. + \sum_{k=1}^n \frac{\sin^2(2n+1) \frac{\psi_k}{2}}{\left| \sin \frac{\psi_k}{2} \right|^{2-3\alpha}} \right\}. \quad (29)$$

Если $2-3\alpha \leq 0$, т. е. $\alpha \geq \frac{2}{3}$, то, очевидно,

$$a_n^{(\alpha)}(\cos \theta) = O\left(\frac{\sin^\alpha \theta}{n}\right).$$

Если же $2-3\alpha > 1$, т. е. $\alpha < \frac{1}{3}$, то представим неравенство (29) в виде

$$a_n^{(\alpha)}(\cos \theta) \leq \frac{1}{2^{2\alpha} (\sin \theta)^{2\alpha}} \frac{2^{3\alpha-2} \sin^{3\alpha} \theta}{n^2} \times \\ \times \left\{ \sum_{k=1}^n \frac{\sin^2(2n+1) \frac{\varphi_k}{2}}{\left| \sin \frac{\varphi_k}{2} \right|^{2-3\alpha}} + \sum_{k=1}^n \frac{\sin^2(2n+1) \frac{\psi_k}{2}}{\left| \sin \frac{\psi_k}{2} \right|^{2-3\alpha}} \right\}.$$

Множитель при дроби $\frac{1}{2^{2\alpha} (\sin \theta)^{2\alpha}}$ в точности равен сумме, которая получается из $\tau_1 + \tau_2$ (где $0 < \alpha < 1$) (см. (21)) заменой α на 3α (у нас $0 < 3\alpha < 1$). Поэтому, согласно доказанному выше, в этом случае

$$a_n^{(\alpha)}(\cos \theta) \leq \frac{1}{2^{2\alpha} \sin^{2\alpha} \theta} O\left[\left(\frac{\sin \theta}{n}\right)^{3\alpha}\right],$$

или

$$a_n^{(\alpha)}(\cos \theta) = O\left(\frac{\sin^\alpha \theta}{n^{3\alpha}}\right).$$

Остается рассмотреть случай $\frac{1}{3} \leq \alpha < \frac{2}{3}$. Поступая как и выше, представим неравенство (29) в виде (см. (23)):

$$a_n^{(\alpha)}(\cos \theta) \leq \frac{2^{\alpha-2} \sin^\alpha \theta}{n^2} \left\{ \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\sin^2(2n+1) \frac{k+\delta}{2n} \pi}{\left(\sin \frac{k+\delta}{2n} \pi \right)^{2-3\alpha}} + \right. \\ \left. + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\sin^2(2n+1) \frac{k+1-\delta}{2n} \pi}{\left(\sin \frac{k+1-\delta}{2n} \pi \right)^{2-3\alpha}} \right\} = l_1 + l_2,$$

где

$$l_1 = \frac{2^{\alpha-2} \sin^{\alpha} \theta}{n^2} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\sin^2(2n+1) \frac{k+\delta}{2n} \pi}{\left(\sin \frac{k+\delta}{2n} \pi\right)^{2-3\alpha}}.$$

Как и выше, имеем

$$\begin{aligned} l_1 &= \frac{2^{\alpha-2} \sin^{\alpha} \theta}{n^2} \frac{2^{2-3\alpha} n^{2-3\alpha}}{\pi^{2-3\alpha}} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\sin^2(2n+1) \frac{k+\delta}{2n} \pi}{(k+\delta)^{2-3\alpha}} + O\left(\frac{\sin^{\alpha} \theta}{n}\right) = \\ &= \frac{\sin^{\alpha} \theta}{2^{2\alpha} n^{3\alpha} \pi^{2-3\alpha}} \left\{ \frac{\sin^2(2n+1) \frac{\delta\pi}{2n}}{\delta^2} \delta^{3\alpha} + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\sin^2(2n+1) \frac{k+\delta}{2n} \pi}{(k+\delta)^{2-3\alpha}} \right\} + \\ &+ O\left(\frac{\sin^{\alpha} \theta}{n}\right) = \frac{\sin^{\alpha} \theta}{2^{2\alpha} \pi^{2-3\alpha} n^{3\alpha}} \left\{ \frac{\sin^2 \delta\pi}{\delta^{2-3\alpha}} + O\left(\frac{1}{n}\right) + \right. \\ &\left. + \sin^2 \delta\pi \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{(k+\delta)^{2-3\alpha}} + O\left[\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{n(k+\delta)^{1-3\alpha}}\right] \right\} + O\left(\frac{\sin^{\alpha} \theta}{n}\right). \end{aligned}$$

Заметив, что при $\frac{1}{3} < \alpha < \frac{2}{3}$

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{(k+\delta)^{2-3\alpha}} < \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^{2-3\alpha}} < 1 + \int_1^n \frac{dt}{t^{2-3\alpha}} = O(n^{3\alpha-1}),$$

а при $\alpha = \frac{1}{3}$

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{(k+\delta)^{2-3\alpha}} = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+\delta} = O(\ln n)$$

и в обоих случаях

$$O\left[\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{n(k+\delta)^{1-3\alpha}}\right] = O(n^{3\alpha-1}),$$

имеем

$$l_1 = \begin{cases} O\left(\frac{\sin^{\alpha} \theta}{n}\right) & \text{при } \frac{1}{3} < \alpha < \frac{2}{3}, \\ O\left(\frac{\sin^{\alpha} \theta \ln n}{n}\right) & \text{при } \alpha = \frac{1}{3}. \end{cases}$$

Такую же оценку мы, очевидно, получаем для l_2 .

Итак,

$$a_n^{(\alpha)}(\cos \theta) = \begin{cases} O\left(\frac{\sin^{\alpha} \theta}{n^{3\alpha}}\right) & \text{при } \alpha < \frac{1}{3}, \\ O\left(\frac{\sin^{\alpha} \theta}{n} \ln n\right) & \text{при } \alpha = \frac{1}{3}, \\ O\left(\frac{\sin^{\alpha} \theta}{n}\right) & \text{при } \alpha > \frac{1}{3}. \end{cases}$$

или

$$a_n^{(\alpha)}(x) = \begin{cases} O\left(\frac{(V1-x^2)^\alpha}{n^{3\alpha}}\right) & \text{при } \alpha < \frac{1}{3}, \\ O\left(\frac{(V1-x^2)^\alpha}{n} \ln n\right) & \text{при } \alpha = \frac{1}{3}, \\ O\left(\frac{(V1-x^2)^\alpha}{n}\right) & \text{при } \alpha > \frac{1}{3}. \end{cases} \quad (30)$$

Таким образом, во всех случаях имеем

$$a_n^{(\alpha)}(x) = o\left[\left(\frac{V1-x^2}{n}\right)^\alpha\right]. \quad (30')$$

Оценим третьи слагаемые в отношениях (19) и (20). Обозначим:

$$\beta_n^{(\alpha)}(\cos \theta) = \frac{2^{\alpha-2} |\cos \theta|^\alpha}{n^2} \left\{ \sum_{k=1}^n \frac{\sin^2(2n+1) \frac{\Phi_k}{2}}{\left|\sin \frac{\Phi_k}{2}\right|^{2-2\alpha}} + \sum_{k=1}^n \frac{\sin^2(2n+1) \frac{\Psi_k}{2}}{\left|\sin \frac{\Psi_k}{2}\right|^{2-2\alpha}} \right\}. \quad (31)$$

Правая часть (31) отличается от правой части (29) только тем, что $\sin \theta$ заменен на $\cos \theta$ и в фигурных скобках заменено $2-3\alpha$ на $2-2\alpha$. Поэтому можно сразу написать:

$$\beta_n^{(\alpha)}(\cos \theta) = \beta_n^{(\alpha)}(x) = \begin{cases} O\left(\frac{|\cos \theta|^\alpha}{n^{2\alpha}}\right) = O\left(\frac{|x|^\alpha}{n^{2\alpha}}\right), & \text{если } \alpha < \frac{1}{2}, \\ O\left(\frac{|\cos \theta|^\alpha}{n} \ln n\right) = O\left(\frac{|x|^\alpha}{n} \ln n\right), & \text{если } \alpha = \frac{1}{2}, \\ O\left(\frac{|\cos \theta|^\alpha}{n}\right) = O\left(\frac{|x|^\alpha}{n}\right), & \text{если } \alpha > \frac{1}{2}. \end{cases} \quad (32)$$

Таким образом, из (9), (10), (15), (16), (19), (21), (27), (28), (30'), (31) и (32) получаем, что при $x_n \leq x < x_{n+1}$

$$F_n(\cos \theta) = \frac{\cos^2 n \theta \sin^\alpha \theta}{\pi^{2-\alpha} n^\alpha} [\zeta(2-\alpha, \delta) + \zeta(2-\alpha, 1-\delta)] + \\ + o\left[\left(\frac{\sin \theta}{n}\right)^\alpha\right] + \beta_n^{(\alpha)}(\cos \theta) + O\left(\frac{1}{n}\right), \\ F_n(x) = E_n(H^{(\alpha)}, x) = \frac{T_n^2(x)}{\pi^{2-\alpha}} \left(\frac{V1-x^2}{n}\right)^\alpha [\zeta(2-\alpha, \delta) + \zeta(2-\alpha, 1-\delta)] + \\ + o\left[\left(\frac{V1-x^2}{n}\right)^\alpha\right] + \beta_n^{(\alpha)} + O\left(\frac{1}{n}\right),$$

т. е. соотношение (6) доказано.

Остается вычислить $F_n(x) = F_n(\cos \theta)$ для значений θ из промежутков

$$\left. \begin{aligned} 0 \leq \theta < \theta_1 = \frac{\pi}{2n} \\ \frac{2n-1}{2n} \pi \leq \theta \leq \pi \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

Ограничимся рассмотрением первого случая, так как в обоих случаях результат и вычисления одинаковы.

При $0 \leq \theta < \frac{\pi}{2n}$ полагаем $\theta = \frac{\delta\pi}{2n}$, $0 \leq \delta < 1$. Тогда

$$\varphi_k = \theta_k - \theta = \frac{2k-1-\delta}{2n} \pi, \quad \psi_k = \theta_k + \theta = \frac{2k-1+\delta}{2n} \pi$$

и формулы (21) перепишутся в виде:

$$\left. \begin{aligned} \tau_1 &= \frac{2^{\alpha-2}}{n^2} \sin^\alpha \theta \sum_{k=1}^n \frac{\sin^2(2n+1) \frac{2k-1-\delta}{4n} \pi}{\left(\sin \frac{2k-1-\delta}{4n} \pi \right)^{2-\alpha}} \\ \tau_2 &= \frac{2^{\alpha-2}}{n^2} \sin^\alpha \theta \sum_{k=1}^n \frac{\sin^2(2n+1) \frac{2k-1+\delta}{4n} \pi}{\left(\sin \frac{2k-1+\delta}{4n} \pi \right)^{2-\alpha}} \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

Очевидно, что достаточно изучить τ_1 , ибо τ_2 получается из τ_1 заменой δ на $-\delta$. Проведя аналогичные преобразования для τ_1 , как и выше, получаем

$$\tau_1 = \frac{\sin^\alpha \theta}{\pi^{2-3\alpha} n^\alpha} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos^2 n \theta}{\left(k - \frac{1+\delta}{2} \right)^{2-\alpha}} + o\left(\frac{\sin^\alpha \theta}{n^\alpha} \right).$$

Тогда, обозначив $\frac{1+\delta}{2} = \delta_1$, имеем

$$\tau_1 = \frac{\sin^\alpha \theta \cos^2 n \theta}{\pi^{2-\alpha} n^\alpha} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k - \delta_1)^{2-\alpha}} + o\left(\frac{\sin^\alpha \theta}{n^\alpha} \right).$$

Аналогично, обозначив $\frac{1-\delta}{2} = \delta_2$, получаем

$$\tau_2 = \frac{\sin^\alpha \theta \cos^2 n \theta}{\pi^{2-\alpha} n^\alpha} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k + \delta_2)^{2-\alpha}} + o\left(\frac{\sin^\alpha \theta}{n^\alpha} \right).$$

Можно показать, что все оценки для $\alpha_n^{(\alpha)}(x)$, $\beta_n^{(\alpha)}(x)$ и S сохраняются. Таким образом,

$$F_n(\cos \theta) = F_n(x) = \frac{T_n^2(x)}{\pi^{2-\alpha}} \left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{n} \right)^\alpha \left[\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k - \delta_1)^{2-\alpha}} + \right.$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k - \delta_2)^{2-\alpha}} \Big] + o \left[\left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{n} \right)^\alpha \right] + \beta_n^{(\alpha)}(x) + O \left(\frac{1}{n} \right) \quad (35)$$

для $-1 \leq x < x_n$, $x_1 \leq x \leq \pi$, где

$$\delta_1 = \frac{1+\delta}{2}, \quad \frac{1}{2} \leq \delta_1 < 1; \quad \delta_2 = \frac{1-\delta}{2}, \quad 0 < \delta_2 \leq \frac{1}{2}.$$

Или, заметив, что $\delta_2 = 1 - \delta_1$,

$$\begin{aligned} F_n(x) &= \frac{T_n^2(x)}{\pi^{2-\alpha}} \left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{n} \right)^\alpha \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k + \delta_2)^{2-\alpha}} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k + \delta_1)^{2-\alpha}} \right] + \\ &+ o \left[\left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{n} \right)^\alpha \right] + \beta_n^{(\alpha)}(x) + O \left(\frac{1}{n} \right) = \\ &= \frac{T_n^2(x)}{\pi^{2-\alpha}} \left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{n} \right)^\alpha [\zeta(2-\alpha, \delta_1) + \zeta(2-\alpha, 1-\delta_1)] + \\ &+ o \left[\left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{n} \right)^\alpha \right] + \beta_n^{(\alpha)}(x) + O \left(\frac{1}{n} \right), \end{aligned}$$

и теорема полностью доказана.

Литература

1. Амелькович В. Г. Научные записки Одесского политехнического института, 34, 1961, стр. 70-77.
2. Ганзбург И. М., Тиман А. Ф. Изв. АН СССР, сер. математ., 22, № 6, 1958.
3. Натансон И. П. Конструктивная теория функций. М.—Л., 1949.

Белорусский государственный университет
им. В. И. Ленина

Поступило в редакцию 22.XI 1966

Л. И. КОМАРОВ, Т. С. РОМАНОВА, Ф. И. ФЕДОРОВ

О ПОЛЯРИЗАЦИИ ВАКУУМА В КВАНТОВОЙ ЭЛЕКТРОДИНАМИКЕ

Одним из результатов квантовой электродинамики (см., например, [1—3]) является вывод о наличии у вакуума свойств физической среды, способной поляризоваться под действием внесенных в нее зарядов. Поле «голых» зарядов, помещенных в вакуум, порождает виртуальные электронно-позитронные пары, которые окружают эти заряды, приводя к изменению взаимодействий между ними. Расчет этих изменений с помощью теории возмущений приводит к бесконечным выражениям, из которых с помощью формальной процедуры перенормировки заряда удается выделить конечные члены, дающие вклад в наблюдаемые эффекты. Экспериментальные данные (измерение сдвига уровней атомных электронов) находятся в согласии с результатами перенормированной квантовой электродинамики, что позволяет считать квантовую электродинамику в известной мере законченной теорией, дающей метод для расчета всех наблюдаемых электромагнитных эффектов с любой степенью точности. В то же время остается удручающая неясность в вопросе о том, чему обязана квантовая электродинамика необходимостью процедуры перенормировки. В настоящей работе предлагается новый подход к описанию поляризации вакуума в квантовой электродинамике, который может оказаться полезным для выяснения возникающих в теории трудностей.

Изменение свойств вакуума под действием внесенных в него зарядов делает очевидной необходимость описывать его как физическую среду, которая является не только фоном, но и участником электромагнитных взаимодействий. Рассмотрение электромагнитных явлений в средах, способных поляризоваться, требует различения напряженностей поля, определяющих силы, действующие на заряды, и возбуждений среды, вызываемых зарядами [4]. Поэтому и в квантовой электродинамике надо с самого начала проводить такое различие. Описанию поляризации вакуума с указанной точки зрения и посвящена настоящая работа.

Электромагнитные силы, действующие на заряды, определяются напряженностями поля, составляющими антисимметричный тензор второго ранга $F_{\mu\nu} \sim (i\mathbf{E}; \mathbf{B})$, где \mathbf{E} и \mathbf{B} напряженности электрического и магнитного полей соответственно. Возбуждения среды также составляют антисимметричный тензор второго ранга $H_{\mu\nu} \sim (i\mathbf{D}; \mathbf{H})$, где \mathbf{D} и \mathbf{H} — векторы электрической и магнитной индукции. Эти тензоры подчиняются уравнениям ($\partial_\mu \equiv \partial/\partial x_\mu$):

$$\partial_\mu F_{\nu\sigma} + \partial_\nu F_{\sigma\mu} + \partial_\sigma F_{\mu\nu} = 0 \quad (1)$$

или

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} = - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (1a)$$

(первая пара уравнений Максвелла) и

$$\partial_\nu H_{\mu\nu} = j_\mu \quad (2)$$

или

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \rho, \quad \operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{j} \quad (2a)$$

(вторая пара уравнений Максвелла). Здесь j_μ — 4-вектор плотности тока. Уравнения (1) тождественно удовлетворяются, если положить

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu, \quad (3)$$

где A_μ — четырехмерный потенциал поля. Из определения $F_{\mu\nu}$ как величин, определяющих силы, действующие на заряды, вытекает, что плотность энергии взаимодействия между заряженными частицами и электромагнитным полем имеет вид

$$L_{ev} = -j_\mu(x) A_\mu(x). \quad (4)$$

Для замыкания системы уравнений (1) — (2) необходимо установить связь между тензорами $F_{\mu\nu}$ и $H_{\mu\nu}$. Эта связь определяется свойствами среды, в которой находятся заряды. При этом нужно учесть, что свободные «одетые» фотоны не поляризуют вакуума [5, 6] (это утверждение справедливо при пренебрежении нелинейными эффектами) и должны описываться уравнениями

$$\left. \begin{aligned} \partial_\mu F_{\nu\sigma} + \partial_\nu F_{\sigma\mu} + \partial_\sigma F_{\mu\nu} &= 0 \\ \partial_\mu F_{\mu\nu} &= 0 \end{aligned} \right\}, \quad (5)$$

т. е. в этом случае можно считать $F_{\mu\nu} = H_{\mu\nu}$. Требование выполнения уравнений (5) в случае $j_\mu(x) = 0$ и пренебрежение нелинейными эффектами приводят к предположению, что в общем случае связь между напряжениями и возбуждениями определяется уравнением

$$\frac{\partial F_{\mu\nu}(x)}{\partial x_\nu} = \int d^4x' K_R(x-x') \frac{\partial H_{\mu\nu}(x')}{\partial x'_\nu}, \quad (6)$$

где $K_R(x)$ — некоторая инвариантная функция. Представляется естественным считать, что она должна удовлетворять условию причинности

$$K_R(x) = 0 \quad \text{при } t < 0. \quad (7)$$

Уравнение (6) можно интерпретировать следующим образом: ток $j_\mu(x)$, помещенный в вакуум, индуцирует в нем ток $j'_\mu(x)$; в линейном приближении

$$j'_\mu(x) = \int d^4x' K_R(x-x') j_\mu(x'). \quad (6a)$$

Силы, действующие на пробные заряды, будут определяться индуцированным током

$$\partial_\nu F_{\mu\nu}(x) = j'_\mu(x). \quad (6b)$$

Таким образом, мы вводим интегральный оператор \hat{K}_R , описывающий поляризацию среды, в которую помещен реальный заряд. В результате напряженности электромагнитного поля создаются эффективным физическим зарядом, образованным источником и облаком виртуальных пар заряженных частиц. Очевидно, что в излагаемом подходе мы принимаем, что не существует ситуации, когда с источника снята «шуба» порожденных им виртуальных частиц, а следовательно, и нет необходимости различать «голый» и физический заряды. Не вводя в рассмотрение такой абстракции, как «голый» источник, мы можем считать перенормировку заряда в обычном смысле, придаваемом этому термину в квантовой элект-

тродинамике, уже выполненной. Этот вывод получит подтверждение далее при обсуждении поляризации вакуума с принятой точки зрения.

Рассмотрим подробнее свойства функции $K_R(x)$. В фурье-представлении:

$$j_\mu(x) = \int d^4p \exp(ipx) j_\mu(p), \quad (8)$$

$$K_R(x) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4p \exp(ipx) K_R(p) \quad (9)$$

уравнение (6а) записывается в виде

$$j'_\mu(p) = K_R(p) j_\mu(p). \quad (10)$$

Вследствие вещественности $K_R(x)$ функция $K_R(p)$ удовлетворяет условию

$$K_R^*(p) = K_R(-p) \quad (11)$$

(звездочка обозначает комплексное сопряжение), а вследствие (7) для $K_R(p)$ существуют дисперсионные соотношения:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} K_R(p, p_0) &= P \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp'_0}{p'_0 - p_0} \operatorname{Im} K_R(p, p'_0), \\ \operatorname{Im} K_R(p, p_0) &= -P \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp'_0}{p'_0 - p_0} \operatorname{Re} K_R(p, p'_0) \end{aligned} \quad (12)$$

(имеется в виду, что в случае, если условие $K_R(p) \rightarrow 0$ при $p_0 \rightarrow \infty$ не выполняется, потребуется произвести «вычитание» для сходимости интегралов).

Функция $K_R(p)$, описывающая (в линейном приближении) изменение свойств электронно-позитронного вакуума под действием внешних токов, является типичным адмиттансом [7]. Это обстоятельство позволяет получить уравнение для функции $K_R(p)$. Мнимая часть $K_R(p)$ должна быть связана с «диссипативными» свойствами системы (вакуума), подвергающейся воздействию, т. е. определять потери энергии внешних токов на «подогрев» вакуума — на реальное порождение электронно-позитронных пар. В самом деле, из уравнения баланса энергии [4] легко получить, что энергия, поглощаемая электронно-позитронным вакуумом, равна

$$\Delta W = - \int d^4x (\mathbf{E} \mathbf{j}) \quad (13)$$

или в фурье-представлении

$$\Delta W = (2\pi)^4 \int d^4pp_0 \frac{\operatorname{Im} K_R(p)}{p^2} j_\mu(p) j_\mu(-p). \quad (14)$$

В формулах (13) и (14) j_μ — внешний «классический» ток; вид формулы (14) не зависит от того, как рассматривается электромагнитное поле — классически или квантово [7].

Мы можем получить другое выражение для ΔW , подсчитав среднюю энергию, уносимую рождаемыми внешним полем $A_\mu^{(e)}$ электронно-позитронными парами, фотонами и другими частицами. Амплитуда вероятности перехода, вызванного внешним полем, из начального (вакуумного) состояния $|0\rangle$ в произвольное конечное состояние $|f\rangle$ может быть записана в виде

$$S_{f0} = \int d^4x \langle f | \hat{U}_\mu(x) | 0 \rangle A_\mu^{(e)}(x), \quad (15)$$

где оператор $\hat{U}_\mu(x)$ не зависит от $A_\mu^{(e)}(x)$. Ограничение линейностью по внешнему полю в (15) диктуется линейностью соотношения (6). Следует отметить, что при вычислении (15) (например, с помощью диаграмм Фейнмана) фотонную линию, соответствующую $A_\mu^{(e)}(x)$, нужно считать «жирной», так как эффект поляризации вакуума этим внешним полем учитывается отдельно оператором \hat{K}_R . Если далее взять $|S_{f0}|^2$, просуммировать по поляризациям родившихся частиц, умножить на сумму энергий этих частиц и на плотности конечных состояний и проинтегрировать по импульсам родившихся частиц, то в результате учета всех конечных состояний $|f\rangle$ получим следующее общее выражение для ΔW (приняв во внимание (2), (3) и (6)):

$$\Delta W = -(2\pi)^4 \int d^4 p p_0 \Theta(p_0) \Theta(-p^2) \sigma(p^2) \frac{|K_R(p)|^2}{p^2} j_\mu(p) j_\mu(-p), \quad (16)$$

где $\sigma(p^2) > 0$. Появление множителя $\Theta(-p^2)$ и выполнение условия $\sigma(p^2) > 0$ обосновывается так же, как и при рассмотрении общих свойств функции Грина (см., например, [1]).

Сравнивая (16) и (14) (и используя произвольность выбора внешнего тока), получаем, если учесть (11), что

$$\text{Im } K_R(p) = -\varepsilon(p) \Theta(-p^2) \sigma(p^2) |K_R(p)|^2, \quad (17)$$

где $\varepsilon(p) = p_0/|p_0|$. Таким образом, изложенные соображения позволяют получить уравнение для вакуумного адмиттанса без обращения к теории возмущений. Вид уравнения (17) не зависит от того, в каком приближении вычисляется $\sigma(p^2)$. Конкретные выражения для адмиттанса могут быть получены, если известна функция $\sigma(p^2)$. Если оставаться в рамках квантовой электродинамики и ограничиться исследованием асимптотического поведения фотонной функции Грина в области больших $|p^2|$, то, как будет ясно из сравнения получаемых далее результатов с известными результатами [8], можно ограничиться предположением, что внешнее поле, вызванное током $j_\mu(x)$, рождает всего одну электрон-позитронную пару, и пренебречь взаимодействием между электроном и позитроном, т. е. считать их волновыми функциями плоские волны. В этом случае уравнение (17) имеет вид

$$\begin{aligned} \text{Im } K_R(p) = & -\frac{\alpha}{3} \varepsilon(p) \Theta(-p^2 - 4m^2) \times \\ & \times \left(1 - \frac{2m^2}{p^2}\right) \sqrt{1 + \frac{4m^2}{p^2}} |K_R(p)|^2, \end{aligned} \quad (18)$$

где $\alpha = e^2/4\pi$. Используя (12), получаем

$$\begin{aligned} K_R(p, p_0) = & -\frac{\alpha}{3\pi} \int_{\sqrt{p^2+4m^2}}^{\infty} \frac{dp'_0}{p'_0 - p_0 - i0} \left(1 - \frac{2m^2}{p^2 - p_0'^2}\right) \times \\ & \times \sqrt{1 + \frac{4m^2}{p^2 - p_0'^2}} |K_R(p, p'_0)|^2 + \frac{\alpha}{3\pi} \int_{-\infty}^{-\sqrt{p^2+4m^2}} \frac{dp'_0}{p'_0 - p_0 - i0} \times \\ & \times \left(1 - \frac{2m^2}{p^2 - p_0'^2}\right) \sqrt{1 + \frac{4m^2}{p^2 - p_0'^2}} |K_R(p, p'_0)|^2. \end{aligned} \quad (19)$$

Выражение (19) показывает, что функция $K_R(p, p_0)$, рассматриваемая как функция комплексной переменной p_0 , является аналитической во всей комплексной плоскости p_0 , разрезанной вдоль действительной оси от $\sqrt{p^2 + 4m^2}$ до ∞ и от $-\sqrt{p^2 + 4m^2}$ до $-\infty$. Физические значения $K_R(p, p_0)$ получаются в пределе $p_0 \rightarrow \text{Re } p_0 + i0$, т. е. при $\text{Re } p_0 < -\sqrt{p^2 + 4m^2}$ и $\text{Re } p_0 > \sqrt{p^2 + 4m^2}$ берутся значения на верхних берегах левого и правого разрезов.

Для фурье-образа фотонной функции распространения получаем (рассуждая, например, аналогично [9, 10])

$$G^v(p) = \frac{1}{i} \frac{K(p)}{p^2 - i0}, \quad (20)$$

где функция $K(p)$ определяется соотношением

$$\begin{aligned} K(p, p_0) = & -\frac{\alpha}{3\pi} \int_{\sqrt{p^2+4m^2}}^{\infty} \frac{dp'_0}{p'_0 - p_0 - i0} \left(1 - \frac{2m^2}{p^2 - p_0'^2} \right) \times \\ & \times \sqrt{1 + \frac{4m^2}{p^2 - p_0'^2}} |K(p, p'_0)|^2 + \frac{\alpha}{3\pi} \int_{-\infty}^{-\sqrt{p^2+4m^2}} \frac{dp'_0}{p'_0 - p_0 + i0} \times \\ & \times \left(1 - \frac{2m^2}{p^2 - p_0'^2} \right) \sqrt{1 + \frac{4m^2}{p^2 - p_0'^2}} |K(p, p'_0)|^2, \quad (21) \end{aligned}$$

т. е. отличается, как обычно [1], от функции $K_R(p, p_0)$ тем, что при $p_0 < -\sqrt{p^2 + 4m^2}$ надо обходить особенности снизу. Вводя новую переменную $x = p_0^2 - p^2$, уравнение (21) можно переписать в виде

$$K(x) = -\frac{\alpha}{3\pi} \int_{4m^2}^{\infty} \frac{dx'}{x' - x - i0} \left(1 + \frac{2m^2}{x'} \right) \sqrt{1 - \frac{4m^2}{x'}} |K(x')|^2 \quad (22)$$

или

$$\text{Im } K(x) = -\frac{\alpha}{3} \Theta(x - 4m^2) \left(1 + \frac{2m^2}{x} \right) \sqrt{1 - \frac{4m^2}{x}} |K(x)|^2. \quad (23)$$

Выражение (23) показывает, что функция $K(x)$ при $x \rightarrow \infty$ ограничена постоянной. Поэтому интеграл в (22) может, вообще говоря, расходиться; чтобы устранить это обстоятельство, необходимо сделать «вычитание». Это не вносит новых параметров, так как мы считаем перенормировку заряда уже выполненной и вследствие этого потребуем, чтобы

$$K(0) = 1. \quad (24)$$

С учетом этого находим

$$\begin{aligned} K(x) = & 1 - \frac{\alpha x}{3\pi} \int_{4m^2}^{\infty} \frac{dx'}{x' - x - i0} \frac{1}{x'} \times \\ & \times \left(1 + \frac{2m^2}{x'} \right) \sqrt{1 - \frac{4m^2}{x'}} |K(x')|^2. \quad (25) \end{aligned}$$

Из (25) и (20) следует

$$G^V(p) = \frac{1}{i} \left\{ \frac{1}{p^2 - i0} + \frac{\alpha}{3\pi} \int_{4m^2}^{\infty} \frac{dM^2}{p^2 + M^2 - i0} \frac{1}{M^2} \times \right. \\ \left. \times \left(1 + \frac{2m^2}{M^2} \right) \sqrt{1 - \frac{4m^2}{M^2}} |K(M^2)|^2 \right\}. \quad (26)$$

Таким образом, для функции $G^V(p)$ получается представление Челлена — Лемана (см., например, [1—3]) с положительно определенной перенормированной спектральной плотностью

$$\rho(M^2) = \frac{\alpha}{3\pi} \Theta(M^2 - 4m^2) \frac{1}{M^2} \left(1 + \frac{2m^2}{M^2} \right) \sqrt{1 - \frac{4m^2}{M^2}} |K(M^2)|^2. \quad (27)$$

Обратимся теперь к решению уравнения (25). Отметим прежде всего, что если решать это уравнение с помощью теории возмущений, т. е. положить

$$K(x) = K^{(0)}(x) + \alpha K^{(1)}(x) + \dots, \quad (28)$$

то получим

$$K^{(0)}(x) = 1,$$

$$K^{(1)}(x) = -\frac{x}{3\pi} \int_{4m^2}^{\infty} \frac{dx'}{x' - x - i0} \frac{1}{x'} \left(1 + \frac{2m^2}{x'} \right) \sqrt{1 - \frac{4m^2}{x'}}. \quad (29)$$

Формула для $K^{(1)}(x)$ соответствует перенормированному выражению для оператора поляризации вакуума во втором порядке теории возмущений [3]. Можно указать [11] точное решение уравнения (25). Если ввести функцию

$$R(x) = \frac{1}{K(x)}, \quad (30)$$

то имеем

$$R(x) = 1 + \frac{\alpha x}{3\pi} \int_{4m^2}^{\infty} \frac{dx'}{x' - x - i0} \frac{1}{x'} \times \\ \times \left(1 + \frac{2m^2}{x'} \right) \sqrt{1 - \frac{4m^2}{x'}} + f(x), \quad (31)$$

причем

$$f(x) = Ax + \sum_n \frac{x f_n}{x_n(x_n - x)}, \quad \sum_n \frac{f_n}{x_n^2} < \infty, \quad (32)$$

где $A \geq 0$, $f_n \geq 0$, $x_n > 0$, т. е. к функции $R(x)$ можно прибавить произвольное число полюсов в точках $x_n > 0$. Если в качестве решения уравнения (25) выбрать, как это делают, например, Чу и Лоу [12], решение, соответствующее ряду теории возмущений (28), то в (31) надо опустить функцию $f(x)$, т. е.

$$K(x) = \left[1 + \frac{\alpha x}{3\pi} \int_{4m^2}^{\infty} \frac{dx'}{x' - x - i0} \frac{1}{x'} \left(1 + \frac{2m^2}{x'} \right) \sqrt{1 - \frac{4m^2}{x'}} \right]^{-1}. \quad (33)$$

Формула (20) после подстановки в нее (33) эквивалентна результату суммирования определенного класса членов перенормированного ряда теории возмущений ([2], рис. 1).

Напомним, что выражение (33) справедливо, вообще говоря, только при больших $|x|$.

Изложенный подход к рассмотрению поляризации вакуума не устраняет трудностей квантовой электродинамики в области больших энергий. Для перенормировочной постоянной Z_3 , определяемой соотношением [2]

$$Z_3^{-1} = \lim_{-p^2 \rightarrow \infty} i p^2 G_V(p), \quad (34)$$

получается известное неудовлетворительное выражение [13]. Кроме того, выражение для $G_V(p)$ обладает следующим свойством. Функция $G_V(p)$ имеет полюс в точке с «отрицательным квадратом массы», определяемой уравнением

$$1 - \frac{\alpha \mu^2}{3\pi} \int_{4m^2}^{\infty} \frac{dx}{x + \mu^2} \frac{1}{x} \left(1 + \frac{2m^2}{x} \right) \sqrt{1 - \frac{4m^2}{x}} = 0. \quad (35)$$

Если считать α малым, то

$$\mu^2 \approx m^2 \exp\left(\frac{3\pi}{\alpha}\right). \quad (36)$$

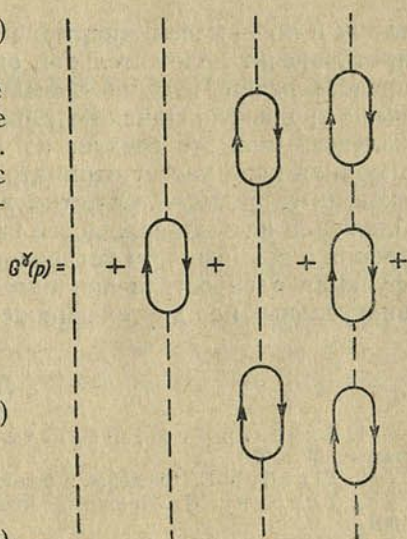


Рис. 1.

При учете этого обстоятельства выражение (26) должно записываться в виде

$$G_V(p) = \frac{1}{i} \left[\frac{g^2}{\mu^2(p^2 - \mu^2 - i0)} + \frac{1}{p^2 - i0} + \frac{\alpha}{3\pi} \int_{4m^2}^{\infty} \frac{dM^2}{p^2 + M^2 - i0} \frac{1}{M^2} \left(1 + \frac{2m^2}{M^2} \right) \sqrt{1 - \frac{4m^2}{M^2}} |K(M^2)|^2 \right], \quad (37)$$

где

$$\frac{1}{g^2} = \frac{\alpha}{3\pi} \int_{4m^2}^{\infty} \frac{dM^2}{(M^2 + \mu^2)^2} \left(1 + \frac{2m^2}{M^2} \right) \sqrt{1 - \frac{4m^2}{M^2}}, \quad (38)$$

а $K(M^2)$ определяется формулой (33). Этот полюс, по-видимому, не допускает какой-либо физической интерпретации и должен рассматриваться как указание на неудовлетворительность теории. Существенно отметить, что рассмотрение в качестве решения уравнения для $R(x)$ общего выражения (31) не изменяет ситуации. Для устранения этой трудности необходимо вводить обрезание в области больших $-p^2$, т. е. заменять входящую в (23) функцию $\left(1 - \frac{2m^2}{p^2} \right) \sqrt{1 + \frac{4m^2}{p^2}}$ функцией $\sigma(p^2)$, стремящейся-

ся к нулю при $-p^2 \rightarrow \infty$. Например, в работе [14] было предложено выбрать функцию $\sigma(p^2)$ в виде

$$\sigma(p^2) = \left(1 - \frac{2m^2}{p^2}\right) \sqrt{1 + \frac{4m^2}{p^2}} - \left(1 - \frac{2m_1^2}{p^2}\right) \sqrt{1 + \frac{4m_1^2}{p^2}}, \quad -p^2 > 4m_1^2, \quad (39)$$

где m и m_1 — массы электрона и мюона соответственно. Такой выбор не противоречит положительной определенности плотности в спектральном представлении Челлена—Лемана (26), (27) и устраняет отмеченные выше трудности. Однако отрицательный знак второго члена в (39) эквивалентен, как это следует из (16), предположению, что рождающаяся мюонная пара уносит отрицательную энергию, что не поддается физической интерпретации. Отметим в связи с этим, что в рассмотренном приближении не подтверждается имеющая место в литературе [14, 15] точка зрения о возможности устранения логарифмического полюса у фотонной функции распространения путем учета вклада в поляризацию вакуума виртуальных пар других заряженных частиц.

Литература

1. Ахизер А. И., Берестецкий В. Б. Квантовая электродинамика. Физматгиз, М., 1959.
2. Швебер С. Введение в релятивистскую квантовую теорию поля. ИЛ, М., 1963.
3. Тирринг В. Принципы квантовой электродинамики. «Высшая школа», М., 1964.
4. Зоммерфельд А. Электродинамика. ИЛ, М., 1958.
5. Pauli W., Villars F. Rev. Mod. Phys., **21**, 434, 1949.
6. Schwinger J. Phys. Rev., **82**, 664, 1951.
7. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Статистическая физика. «Наука», М., 1964.
8. Ландау Л. Д., Абрикосов А. А., Халатников И. М. ДАН СССР, **95**, 497, 773, 1177, 1954; **96**, 261, 1954.
9. Feynman R. P. Phys. Rev., **76**, 769, 1949.
10. Wick G. C. Phys. Rev., **96**, 1124, 1954.
11. Castillejo L., Dalitz R. H., Dyson F. J. Phys. Rev., **101**, 453, 1956.
12. Chew G. J., Low F. E. Phys. Rev., **101**, 1570, 1956.
13. Ландау Л. Д., Померанчук И. Я. ДАН СССР, **102**, 489, 1955.
14. Компанец А. С. ЖЭТФ, **49**, 1781, 1965.
15. Johnson K., Baker M., Willey R. Phys. Rev., **136**, 1111, 1964.

Институт физики
АН БССР

Поступило в редакцию 10.XI 1966

Белорусский государственный университет
им. В. И. Ленина

Ф. И. ФЕДОРОВ, Е. Е. ТХАРЕВ

О КОНЕЧНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЯХ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ ГРУППЫ ВРАЩЕНИЙ

В работах [1, 2] были найдены выражения для операторов конечных вращений в виде полиномов от инфинитезимальных операторов неприводимого представления. Ниже выводится простое рекуррентное соотношение для этих операторов, с помощью которого легко получаются общие выражения для целого и полуцелого спинов.

Вместо обычно применяемых углов Эйлера удобно параметризовать ортогональную матрицу в трехмерном пространстве с помощью вектора c [3, 4], направление которого задает ось вращения, а длина равна тангенсу половинного угла поворота φ .

Таким образом,

$$c = c c_1, \quad c \doteq \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}, \quad c_1^2 = 1. \quad (1)$$

Пусть $T(c)$ — матрица некоторого представления группы вращений, отвечающая вектор-параметру c . Тогда (см. [4])

$$T(c') T(c) = T \left(\frac{c' + c + [c' c]}{1 - c c'} \right). \quad (2)$$

Бесконечно малое преобразование ($c \ll 1$) может быть записано в виде $T(c) = 1 + 2\hat{c}$, $\hat{c} = iIc$, где I — матричный вектор, компоненты которого I_1, I_2, I_3 являются инфинитезимальными операторами представления группы вращений. Антиэрмитов оператор $\hat{c}_1 = -\hat{c}_1^+$ в случае неприводимого представления группы вращений веса l удовлетворяет следующему минимальному (оно же и характеристическое) уравнению степени $2l + 1$:

$$Q^{(l)}(\hat{c}_1) = \hat{c}_1 [\hat{c}_1^2 + l^2] [\hat{c}_1^2 + (l-1)^2] \dots \left[\hat{c}_1^2 + \left(\frac{1+r}{2} \right)^2 \right] = 0, \quad (3)$$

где $r = 1$ ($r = 0$), если l целое (полуцелое). Полагая $c' = c' c_1$, $c = c c_1$, из (2) получим

$$T(c') T(c) = T \left(\frac{c' + c}{1 - c' c} c_1 \right). \quad (4)$$

Дифференцируя это функциональное уравнение по c' и полагая $c' = 0$, получаем дифференциальное уравнение

$$(1 + c^2) \frac{dT(c)}{dc} = 2\hat{c}_1 T(c), \quad (5)$$

решение которого имеет вид

$$T(c) = e^{2\hat{c}_1 \arctg c}. \quad (6)$$

Значение функции от матрицы определяется интерполяционным полиномом Лагранжа — Сильвестра [5], который в данном случае имеет вид

$$T_l(c) = \sum_{s=-l}^l \frac{Q_s^{(l)}(\hat{c}_1)}{Q_s^{(l)}(is)} e^{2is \arctg c}, \quad (7)$$

причем $Q_s^{(l)}(\hat{c}_1)$ определяется следующим соотношением:

$$Q^{(l)}(\hat{c}_1) \equiv (\hat{c}_1 - is) Q_s^{(l)}(\hat{c}_1). \quad (8)$$

Поскольку $e^{2is \arctg c} = (1 + ic)^s (1 - ic)^{-s}$, то

$$T_l(c) = \frac{1}{(1 + c^2)^l} \sum_{s=-l}^l \frac{Q_s^{(l)}(\hat{c}_1)}{Q_s^{(l)}(is)} (1 + ic)^{l+s} (1 - ic)^{l-s}. \quad (9)$$

Как легко видеть, выражение, стоящее под знаком суммы в (9), является полиномом от \hat{c}_1 степени $2l$, коэффициенты которого в свою очередь есть полиномы от c степени не выше $2l$ (так как $l \pm s$ являются целыми числами). Ввиду сказанного соотношение (9) переписывается следующим образом:

$$T_l(c) = \frac{P_l(c, \hat{c}_1)}{(1 + c^2)^l}, \quad (10)$$

где

$$P_l(c, \hat{c}_1) = \sum_{x,k=0}^{2l} b_{x,k}^{(l)} c^x \hat{c}_1^k. \quad (11)$$

Обозначим

$$R(c) = T_l(c) - T_{l-1}(c). \quad (12)$$

Тогда, очевидно, $R(c)$ будет полиномом от \hat{c}_1 , который обращается в нуль при замене $\hat{c}_1 \rightarrow is$, где $-l + 1 \leq s \leq l - 1$, что непосредственно следует из общего определения функции от матрицы (см. (6), (7)). Отсюда вытекает, что $R(c)$ должен быть пропорционален полиному $Q^{(l-1)}(\hat{c}_1)$ степени $2l - 1$, имеющему те же корни. Поскольку степень $R(c)$ (как и $T_l(c)$) относительно \hat{c}_1 равна $2l$, то

$$R(c) = (\alpha \hat{c}_1 + \beta) Q^{(l-1)}(\hat{c}_1). \quad (13)$$

Для того чтобы найти коэффициенты α и β , достаточно определить коэффициенты при старших степенях \hat{c}_1^{2l} и \hat{c}_1^{2l-1} в $T_l(c)$, так как в $T_{l-1}(c)$ они не входят, а в $R(c)$, согласно (13) и (3), имеют вид $(\alpha \hat{c}_1 + \beta) \hat{c}_1^{2l-1}$. Таким образом,

$$\alpha = \frac{\sum_{x=0}^{2l} b_{x,2l}^{(l)} c^x}{(1 + c^2)^l}, \quad \beta = \frac{\sum_{x=0}^{2l} b_{x,2l-1}^{(l)} c^x}{(1 + c^2)^l}. \quad (14)$$

Подставляя (10) в (5), получаем

$$2(\hat{c}_1 + lc) P_l(c, \hat{c}_1) = (1 + c^2) \frac{dP_l(c, \hat{c}_1)}{dc}. \quad (15)$$

Взяв производную n -го порядка по c от (15) и полагая $c = 0$, имеем

$$P_l^{(n+1)}(0, \hat{c}_1) = 2\hat{c}_1 P_l^{(n)}(0, \hat{c}_1) + n(2l - n + 1) P_l^{(n-1)}(0, \hat{c}_1). \quad (16)$$

Давая n значения 1, 2, 3 и используя (10) и (15), легко убеждаемся методом индукции, что $P_l^{(n)}(0, \hat{c}_1)$ является полиномом от \hat{c}_1 со старшим членом $(2\hat{c}_1)^n$. Кроме того, из (16) ясно, что $P_l^{(n)}(0, \hat{c}_1)$ содержит лишь степени $\hat{c}_1^n, \hat{c}_1^{n-2}, \hat{c}_1^{n-4}, \dots$. С другой стороны, согласно (11),

$$P_l^{(n)}(0, \hat{c}_1) = n! \sum_{k=0}^{2l} b_{n,k}^{(l)} \hat{c}_1^k. \quad (17)$$

Отсюда следует, что $b_{n,k}^{(l)} = 0$ при $k > n$, а также если k и n разной четности. Кроме того,

$$b_{n,n}^{(l)} = \frac{2^n}{n!}. \quad (18)$$

Таким образом, для коэффициентов α и β получаем выражения

$$\alpha = \frac{2^{2l} c^{2l}}{(2l)! (1 + c^2)^l}, \quad \beta = \frac{2^{2l-1} c^{2l-1}}{(2l-1)! (1 + c^2)^l}. \quad (19)$$

Обозначив $c^{2l-1} Q^{(l-1)}(\hat{c}_1) = Q^{(l-1)}(\hat{c}) = \hat{c}^l [\hat{c}^2 + l^2 c^2] \dots$, окончательно получаем рекуррентную формулу

$$T_l(c) = T_{l-1}(c) + \frac{2^{2l} (\hat{c} + l)}{(2l)! (1 + c^2)^l} Q^{(l-1)}(\hat{c}). \quad (20)$$

В случае целого спина $Q^{(0)}(\hat{c}) = \hat{c}$ и $T_0(c) = 1$, поэтому последовательное применение (20) приводит к общей формуле ($l \geq 1$)

$$T_l(c) = 1 + \sum_{k=1}^l \frac{2^{2k} (\hat{c} + k)}{(2k)! (1 + c^2)^k} Q^{(k-1)}(\hat{c}). \quad (21)$$

В случае полуцелого спина $Q^{(-\frac{1}{2})}(\hat{c}) = 1$, $T_{-\frac{1}{2}}(c) = 0$ и формула (20)

дает

$$T_l(c) = \sum_{k=0}^{l-1/2} \frac{2^{2k+1} (\hat{c} + k + 1/2)}{(2k+1)! (1 + c^2)^{k+1/2}} Q^{(k-\frac{1}{2})}(\hat{c}). \quad (22)$$

Заметим, что формулы (21), (22) будут справедливы и для конечных приводимых представлений, если они распадаются на прямую сумму неприводимых представлений только с целыми (или полуцелыми) весами. В этом случае в формулах (21) и (22) под l следует понимать максимальный вес неприводимого представления, входящего в приводимое.

Литература

1. Wageningen R. Nucl. Phys., **60**, 250, 1964.
2. Weber T., Williams S. Journ. Math. Phys., **6**, 1980, 1965.
3. Маделунг Э. Математический аппарат физики. Физматгиз, 1960.
4. Федоров Ф. И. ДАН БССР, **2**, 408, 1958.
5. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. ГИИТЛ, 1953.

Белорусский государственный университет
им. В. И. Ленина

Поступило в редакцию 26.XII 1966

Т. Г. БЫСТРОВА, Ф. И. ФЕДОРОВ

РАСЧЕТ ТЕМПЕРАТУРЫ ДЕБАЯ ДЛЯ КРИСТАЛЛОВ ПРОИЗВОЛЬНОЙ СИММЕТРИИ

В [1—3] изложен метод расчета температур Дебая для кристаллов различных сингоний, основанный на сравнении их с ближайшей в среднем по упругим свойствам изотропной и поперечно-изотропной средой. В настоящей работе этот метод применяется к кристаллам низших сингоний — триклинным и моноклинным.

Усредненная по всем направлениям волновой нормали сумма обратных кубов фазовых скоростей упругих волн

$$I = \left\langle \frac{1}{v_0^3} + \frac{1}{v_1^3} + \frac{1}{v_2^3} \right\rangle \quad (1)$$

представляется в виде

$$I = I^h + \Delta I, \quad (2)$$

где I^h — величина I , вычисленная по формулам [2] для ближайшей к рассматриваемому кристаллу поперечно-изотропной среды, характеризующейся тензором

$$\Lambda^h = (g_1 + g_2 n_3^2) + g_3 \mathbf{n} \cdot \mathbf{n} + (g_2 + g_4 n_3^2) \mathbf{e} \cdot \mathbf{e} + g_5 [\mathbf{ne}]^2 \text{ с. с.} \quad (3)$$

Здесь \mathbf{n} — единичный вектор волновой нормали, $\mathbf{c} = [\mathbf{en}]/|\mathbf{en}|$. В качестве \mathbf{e} для триклинных кристаллов выбирается одна из продольных нормалей. Поскольку рассматриваемое направление является не единственным, то следует выбирать такое, для которого отношение $|v_1^2 - v_2^2|/(v_1^2 + v_2^2)$ является наименьшим. Будем считать, что для каждого триклинного кристалла оно совпадает с осью $x^{(3)}$, а для тех кристаллов, для которых оно соответствует оси $x^{(2)}$ или $x^{(1)}$, следует произвести перестановку индексов в упругих постоянных $2 \rightarrow 3 \rightarrow 1 \rightarrow 2$ или $1 \rightarrow 3 \rightarrow 2 \rightarrow 1$ соответственно. Для моноклинных кристаллов в качестве \mathbf{e} выбирается единственное выделенное направление — ось симметрии второго порядка $L^2 || x^{(3)}$ или нормаль к плоскости симметрии.

Параметры g тензора (3), рассчитанные по формулам [1, § 34], одинаково выражаются как для триклинных, так и для моноклинных кристаллов:

$$\left. \begin{aligned} g_1 &= \frac{1}{8} (3m_1 + 2m_2 - 4m_3 - 4m_4), \\ g_2 &= \frac{1}{8} (-3m_1 - 2m_2 + 8m_3 + 4m_4), \\ g_3 &= \frac{1}{2} (m_3 + m_4), \quad g_4 = \frac{1}{8} (3m_1 + 2m_2 - 16m_3 - 8m_4 + 8\lambda_{33}), \\ g_5 &= \frac{1}{4} (-m_1 + 2m_3 + 2m_4 - 2\lambda_{12}), \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

где $m_1 = \lambda_{11} + \lambda_{22}; m_2 = \lambda_{12} + 2\lambda_{66}; m_3 = \lambda_{44} + \lambda_{55}; m_4 = \lambda_{13} + \lambda_{23}$. (5)

В первом приближении величина I^n рассчитывается по формулам, полученным в [2]. Поправку ΔI можно определить по формулам, аналогичным приведенным в [5]:

$$\begin{aligned} \Delta I = & 1,5 (\varphi_1 - \psi_1 - 2\psi_2 + \psi_3) (r'_1 a^{-3/2} - r'_2 c^{-3/2}) + \\ & + \frac{5}{16} c^{-3/2} [6r_2'^2 (\varphi_2 + 2\psi_2) - 7r_2'^3 (\psi_1 - \psi_2)] + \\ & + \frac{5}{16} a^{-3/2} [6r_1'^2 (\varphi_3 - \varphi_2 - 2\varphi_1 + 2\psi_1 + 2\psi_2 - 2\psi_3) - \\ & - 7r_1'^3 (2\psi_1 + \psi_2 + \psi_4)], \end{aligned} \quad (6)$$

где

$$r'_1 = b/a; \quad r'_2 = b/c; \quad c = a + b;$$

$$a = g_1 + \frac{2}{3} g_2 + \frac{1}{15} g_4 + \frac{1}{3} g_5; \quad b = g_3 + \frac{2}{15} g_4 - \frac{1}{3} g_5; \quad (7)$$

$$\varphi_1 = \frac{1}{b^2} \langle n \Lambda'' n - (n \Lambda'' n)^2 \rangle; \quad \varphi_2 = \frac{1}{b^2} \langle (n \Lambda'' n)^2 \rangle;$$

$$\varphi_3 = \frac{1}{b^2} \langle (\Lambda'')_c \rangle;$$

$$\psi_1 = \frac{1}{b^3} \langle n \Lambda'' n \cdot n \Lambda'' n \rangle; \quad \psi_2 = \frac{1}{b^3} \langle n \Lambda'' n \cdot n \Lambda'' n - (n \Lambda'' n)^3 \rangle; \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \psi_3 = & \frac{1}{b^3} \langle n \Lambda'' n \rangle = \frac{1}{b^3} \langle \Lambda''_c n \Lambda'' n - \frac{1}{2} (\Lambda''_c)^2 n \Lambda'' n + \\ & + \frac{1}{3} (\Lambda''_c)_c + \frac{1}{2} (\Lambda''_c)_c n \Lambda'' n - \frac{1}{2} \Lambda''_c (\Lambda''_c)_c + \frac{1}{6} (\Lambda''_c)^3 \rangle; \end{aligned}$$

$$\psi_4 = -3\psi_3 + \frac{1}{b^3} \langle (\Lambda''_c)^3 \rangle.$$

Усреднение входящих в (8) величин производится по формулам, полученным в [4].

Для моноклинных кристаллов тензор Λ имеет компоненты [1]:

$$\left. \begin{aligned} \Lambda_{11} &= \lambda_{11} n_1^2 + \lambda_{66} n_2^2 + \lambda_{55} n_3^2 + 2\lambda_{16} n_1 n_2, \\ \Lambda_{22} &= \lambda_{66} n_1^2 + \lambda_{22} n_2^2 + \lambda_{44} n_3^2 + 2\lambda_{26} n_1 n_2, \\ \Lambda_{33} &= \lambda_{55} n_1^2 + \lambda_{44} n_2^2 + \lambda_{33} n_3^2, \\ \Lambda_{23} &= (\lambda_{23} + \lambda_{44}) n_2 n_3 + \lambda_{36} n_1 n_3, \\ \Lambda_{31} &= (\lambda_{13} + \lambda_{55}) n_3 n_1 + \lambda_{36} n_2 n_3, \\ \Lambda_{12} &= (\lambda_{12} + \lambda_{66}) n_1 n_2 + \lambda_{16} n_1^2 + \lambda_{26} n_2^2. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Тензор Λ для триклинных кристаллов может быть записан в виде

$$\Lambda = \Lambda^{\text{мон}} + \Lambda^1, \quad (10)$$

где

$$\begin{aligned} \Lambda_{11}^1 &= 2(\lambda_{56}n_2n_3 + \lambda_{15}n_1n_3); \\ \Lambda_{22}^1 &= 2(\lambda_{24}n_2n_3 + \lambda_{46}n_1n_3); \quad \Lambda_{33}^1 = 0; \\ \Lambda_{23}^1 &= \lambda_{56}n_1^2 + \lambda_{24}n_2^2 + (\lambda_{25} + \lambda_{46})n_1n_2; \\ \Lambda_{31}^1 &= \lambda_{15}n_1^2 + \lambda_{46}n_2^2 + (\lambda_{14} + \lambda_{56})n_1n_2; \\ \Lambda_{12}^1 &= (\lambda_{25} + \lambda_{46})n_2n_3 + (\lambda_{14} + \lambda_{56})n_1n_3. \end{aligned} \quad (11)$$

Сравнивая выражения (9)—(11) с видом тензора Λ^h (3), легко получить выражения для компонент λ''_{iklm} тензора $\lambda''_{iklm}n_i n_j n_k n_l = \Lambda_{kl}^h - \Lambda_{ki}^h$, характеризующего отличие триклинного или моноклинного кристалла от ближайшего по упругим свойствам гексагонального кристалла. Для триклинного кристалла получим:

$$\begin{aligned} \lambda''_{11} &= \lambda_{11} - g_1 - g_3, & \lambda''_{14} &= \lambda_{14}, & \lambda''_{24} &= \lambda_{24}, \\ \lambda''_{22} &= \lambda_{22} - g_1 - g_3, & \lambda''_{15} &= \lambda_{15}, & \lambda''_{25} &= \lambda_{25}, \\ \lambda''_{44} &= \lambda_{44} - g_1 - g_2, & \lambda''_{16} &= \lambda_{16}, & \lambda''_{36} &= \lambda_{36}, \\ \lambda''_{66} &= \lambda_{66} - g_1 - g_5, & \lambda''_{26} &= \lambda_{26}, & \lambda''_{46} &= \lambda_{46}, \\ \lambda''_{13} &= \lambda_{13} + g_1 + g_2 - g_3, & \lambda''_{56} &= \lambda_{56}, \end{aligned} \quad (12)$$

$$\lambda''_{55} = -\lambda''_{44}, \quad \lambda''_{23} = -\lambda''_{13}, \quad \lambda''_{12} = \lambda''_{66} = -\frac{1}{2}(\lambda''_{11} + \lambda''_{22}). \quad (13)$$

Кроме того, в кристаллах триклинной сингонии (см. [1]) всегда можно так выбрать систему координат, что

$$\lambda''_{45} = \lambda''_{34} = \lambda''_{35} = 0. \quad (14)$$

Для моноклинных кристаллов λ''_{iklm} выражается также формулами (12), (13) с тем упрощением, что для них

$$\lambda_{14} = \lambda_{15} = \lambda_{24} = \lambda_{25} = \lambda_{46} = \lambda_{56} = 0 \quad (15)$$

и

$$\lambda''_{14} = \lambda''_{15} = \lambda''_{24} = \lambda''_{25} = \lambda''_{46} = \lambda''_{56} = 0. \quad (16)$$

С помощью соотношений (2), (6)—(8), а также формул, полученных в [2, 4], можно вычислить величину I в самом общем случае, т. е. для триклинных кристаллов. Однако ввиду отсутствия до сих пор данных об упругих константах триклинных кристаллов соответствующие формулы не могут быть в настоящее время использованы для конкретных расчетов. Кроме того, они отличаются значительной громоздкостью¹. Ввиду этого мы ограничимся применением указанных выше соотношений к случаю моноклинных кристаллов, из которого как частные случаи могут быть получены формулы для всех других кристаллов (кроме, разумеется, триклинных). Для этого достаточно лишь учесть, какие упругие постоян-

¹ Интересующиеся наиболее общими соотношениями для триклинных кристаллов могут найти их в работе: Т. Г. Быстрова. Диссертация. Минск, 1967.

ные для кристаллов данной сингонии отличны от нуля. Для моноклинных кристаллов, учитывая (15), (16), имеем:

$$\Delta I = 1,5(\varphi_1 - \psi_1 - 2\psi_2 + \psi_3)(r'_1 a^{-3/2} - r'_2 c^{-3/2}) + \\ + \frac{5}{16} c^{-3/2} [6r_2'^2 (\varphi_2 + 2\psi_2) - 7r_2'^2 (\psi_1 - \psi_2)] + \\ + \frac{15}{96} a^{-3/2} [12r_1'^2 (\varphi_3 + 2\psi_1 + 2\psi_2 - 2\psi_3) - 7r_1'^2 (4\psi_1 + 2\psi_2 + 3\psi_4)], \quad (17)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \varphi_1 &= \frac{2}{945 b^2} (M_{11}^2 + M_{12}^2 + 5R); \\ \varphi_2 &= \frac{8}{945 b^2} (2M_{11}^2 + 2M_{12}^2 + R); \\ \varphi_3 &= \frac{2}{945 b^2} [63(\mu_{11}^2 + \mu_{12}^2) - 10(M_{11}^2 + M_{12}^2) + 7R + \\ &\quad + 42(\lambda_{13}''^2 + \lambda_{36}''^2 + \lambda_{44}''^2 + 2\lambda_{44}'' \lambda_{13}'')]; \\ R &= 3(\lambda_{11}''^2 + \lambda_{22}''^2 + 6\lambda_{66}''^2) + 12(\lambda_{16}''^2 + \lambda_{26}''^2) + 4(\lambda_{13}''^2 + \lambda_{26}''^2) + \\ &\quad + 16\lambda_{44}''(\lambda_{44}'' - \lambda_{13}''); \end{aligned} \right\} (18)$$

$$\left. \begin{aligned} \psi_1 &= \frac{8}{10395 b^3} (N_1 + K_1); \\ \psi_2 &= \frac{8}{135135 b^3} [N_1 + 36(M_{11} K_2 + 2M_{12} K_3) + 5K_1]; \\ \psi_3 &= \frac{2}{945 b^3} [18(K_4 + 2K_5) + 216K_6 + 44K_7 + 36\lambda_{66}''(\lambda_{36}''^2 - \lambda_{13}''^2) - \\ &\quad - 92\lambda_{66}'' \lambda_{44}''^2 + 9(\mu_{11} K_2 + 2\mu_{12} K_3) - N_2]; \\ \psi_4 &= \frac{4}{945 b^3} (N_2 - 6K_4 - 72K_6 - 8K_7 + 56\lambda_{66}'' \lambda_{44}''^2); \\ N_1 &= 15(M_{11} K_2 + 2M_{12} K_3) + 12\lambda_{66}''(M_{12}^2 - M_{11}^2) + \\ &\quad + 12M_{11} M_{12} (\lambda_{16}'' - \lambda_{26}''); \\ N_2 &= 60\lambda_{66}''(\mu_{12}^2 - \mu_{11}^2) + 60\mu_{11} \mu_{12} (\lambda_{16}'' - \lambda_{26}'') - \\ &\quad - 4(M_{11} K_2 + 2M_{12} K_3) - 32\lambda_{66}''(\mu_{12} M_{12} - \mu_{11} M_{11}) - \\ &\quad - 16(\lambda_{16}'' - \lambda_{26}'')(\mu_{11} M_{12} + \mu_{12} M_{11}); \\ K_1 &= 27K_4 + 36(9K_6 + 2K_7 + K_5) + 36\lambda_{66}''(\lambda_{36}''^2 - \lambda_{13}''^2 - 4\lambda_{44}''^2); \\ K_2 &= \lambda_{11}''^2 - \lambda_{22}''^2 + 2(\lambda_{16}''^2 - \lambda_{26}''^2); \\ K_3 &= 3\lambda_{66}''(\lambda_{16}'' + \lambda_{26}'') + \lambda_{11}'' \lambda_{16}'' + \lambda_{26}'' \lambda_{22}''; \end{aligned} \right\} (19)$$

$$\begin{aligned}
 K_4 &= \lambda''_{11} (\lambda''_{11} + 6\lambda''_{16}) + \lambda''_{22} (\lambda''_{22} + 6\lambda''_{26}) + 2\lambda''_{66}; \\
 K_5 &= \lambda''_{13} \lambda''_{36} (\lambda''_{16} - \lambda''_{26}); \\
 K_6 &= \lambda''_{66} (\lambda''_{16} + \lambda''_{26} + \lambda''_{16} \lambda''_{26}); \\
 K_7 &= \lambda''_{44} (\lambda''_{26} \lambda''_{36} - \lambda''_{16} \lambda''_{36} + 2\lambda''_{66} \lambda''_{13}); \\
 M_{11} &= 2\mu_{11} + \mu'_{11}; \quad M_{12} = 2\mu_{12} + \mu'_{12}; \\
 \mu_{11} &= \lambda''_{11} - \lambda''_{44} + \lambda''_{66}; \quad \mu'_{11} = \lambda''_{11} + \lambda''_{66} + \lambda''_{13}; \\
 \mu_{12} &= \lambda''_{16} + \lambda''_{26}; \quad \mu'_{12} = \lambda''_{16} + \lambda''_{26} + \lambda''_{36}.
 \end{aligned} \tag{19}$$

Упругие константы

Кристалл	Химическая формула	$\frac{\partial \mu}{\partial \lambda''}$	$\frac{\partial \mu}{\partial \lambda''}$	$\frac{\partial \mu}{\partial \lambda''}$	$\frac{\partial \mu}{\partial \lambda''}$	$\frac{\partial \mu}{\partial \lambda''}$
		$C_{11} 10^{11}, \text{CM}^2$	$C_{22} 10^{11}, \text{CM}^2$	$C_{33} 10^{11}, \text{CM}^2$	$C_{44} 10^{11}, \text{CM}^2$	$C_{55} 10^{11}, \text{CM}^2$
1		3	4	5	6	7
Винная кислота	$C_4H_6O_6$	5,30	6,58	1,93	1,12	0,749
Калий виннокислый	$K_2C_4H_4O_6 \cdot \frac{1}{2} H_2O$	7,41	4,94	3,70	0,824	0,954
Литий сульфат моногидрат	$LiSO_4 \cdot H_2O$	5,81	5,07	7,05	2,75	1,34
Натрий тиосульфат	$Na_2S_2O_3$	3,54	4,35	3,02	0,855	0,315
L-рамноза моногидрат	$C_6H_{12}O_5 \cdot H_2O$	2,01	3,81	2,91	0,912	0,536
Этилендиамин тартрат	$C_6H_{14}N_2O_6$	5,57	14,1	3,84	0,581	0,539
Дибензил	$C_6H_5CH_2CH_2C_6H_5$	0,594	1,25	0,680	0,201	0,369
Стильбен	$C_6H_5CH=CHC_6H_5$	1,08	1,29	0,920	0,221	0,349
Толан	$(NH_2C_6H_3CH_3)_2$	0,688	0,781	0,855	0,184	0,291

Характеристические температуры Дебая

Кристалл	$\frac{g_1}{\text{CM}^2 \cdot \text{CEK}^2}$	$\frac{g_2}{\text{CM}^2 \cdot \text{CEK}^2}$	$\frac{g_3}{\text{CM}^2 \cdot \text{CEK}^2}$	$\frac{g_4}{\text{CM}^2 \cdot \text{CEK}^2}$	$\frac{g_5}{\text{CM}^2 \cdot \text{CEK}^2}$	$\frac{a_0}{\text{CM}^2 \cdot \text{CEK}^2}$	$\frac{b_0}{\text{CM}^2 \cdot \text{CEK}^2}$
	2	3	4	5	6	7	8
1							
Винная кислота	2,22	-1,69	1,51	0,749	-1,52	0,631	2,12
Калий виннокислый	1,82	-1,37	1,19	1,60	-1,15	0,660	1,75
Литий сульфат моногидрат	0,803	0,191	2,05	0,190	0,354	1,02	2,00
Натрий тиосульфат	0,978	-0,627	1,40	0,684	-0,330	0,442	1,66
L-рамноза моногидрат	0,593	-0,101	1,34	0,249	-0,212	0,525	1,39
Этилендиамин тартрат	4,19	-3,83	2,22	3,74	-3,54	0,863	3,74
Дибензил	0,186	0,0719	0,589	-0,303	0,0238	0,218	0,545
Стильбен	0,276	-0,0302	0,700	-0,123	0,0410	0,229	0,702
Толан	0,222	-0,0111	0,521	0,0377	0,153	0,216	0,527

Результаты расчета величины I и характеристической температуры Дебая

$$\theta = 135,78 (IV_a)^{-1/3}, \tag{20}$$

где $V_a = A/\rho Ns$ (A — молекулярный вес, ρ — плотность, N — число Авогадро, s — число структурных узлов кристаллической решетки, приходящихся на одну молекулу), по формулам (2), (6), (7), (17) — (20) для моноклинных кристаллов представлены в табл. 1, 2. В табл. 1 приведены использованные для расчетов упругие константы, пересчитанные из данных работ [6, 7] с учетом условия для $x^{(3)}$. В столбце 15 табл. 1 приведены также значения углов, образуемых осью $x^{(1)}$ с кристаллическим направлением, задаваемым в таблицах. Вдоль этих направлений распространяются чисто продольные волны (см. [1, 8]). В табл. 2 даны упругие константы ближайших изотропных (10—12-й столбцы) и поперечно-изотропных (2—9-й столбцы) сред и вычисленные из них значения I и Θ (17, 18-й столбцы). В 16-м столбце приведено число структурных узлов s , приходящихся на одну молекулу. Для тех кристаллов, для которых s неизвестно, приведены лишь значения I . В 14 и 13-м столбцах даются значе-

Таблица 1

моноклинных кристаллов

$\frac{\partial n}{\partial \lambda^2}$ $C_{16} 10^{11},$ CM^2	$\frac{\partial n}{\partial \lambda^2}$ $C_{12} 10^{11},$ CM^2	$\frac{\partial n}{\partial \lambda^2}$ $C_{13} 10^{11},$ CM^2	$\frac{\partial n}{\partial \lambda^2}$ $C_{23} 10^{11},$ CM^2	$\frac{\partial n}{\partial \lambda^2}$ $C_{16} 10^{11},$ CM^2	$\frac{\partial n}{\partial \lambda^2}$ $C_{26} 10^{11},$ CM^2	$\frac{\partial n}{\partial \lambda^2}$ $C_{26} 10^{11},$ CM^2	ϕ
8	9	10	11	12	13	14	15
1,86	4,71	1,80	1,63	-0,921	-1,63	-0,501	-23°55'
1,12	3,13	1,27	1,67	-0,295	-0,442	0,405	19°24'
2,82	1,54	2,33	2,01	-0,395	0,390	1,63	11°3'
1,10	1,83	2,79	0,721	0,144	-0,797	0,133	43°25'
0,493	1,65	0,876	1,61	-0,156	-0,0980	0,0796	-3°21'
1,04	7,89	2,39	3,31	0,410	0,992	0,291	-8°37'
0,164	0,324	0,280	0,450	-0,0492	0,0642	0,00478	36°20'
0,317	0,347	0,462	0,593	0,270	-0,266	0,00196	25°41'
0,525	0,0954	0,397	0,303	0,138	-0,00744	0,246	5°24'

Таблица 2

моноклинных кристаллов

$\frac{CM^2}{CGK^2}$ $c_9 10^{11},$ CGK^2	$\frac{CM^2}{CGK^2}$ $a 10^{11},$ CGK^2	$\frac{CM^2}{CGK^2}$ $b 10^{11},$ CGK^2	$\frac{CM^2}{CGK^2}$ $c 10^{11},$ CGK^2	Δ_t	Δ_m	$\rho, \frac{g}{CM^3}$	s	I	Θ
9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
2,75	0,638	2,11	2,75	0,32	0,46	1,760	1	5,65	146
2,41	0,626	1,78	2,41	0,18	0,29	1,988	—	5,30	—
3,02	1,06	1,95	3,02	0,17	0,18	2,06	—	2,28	—
2,10	0,495	1,60	2,10	0,22	0,26	1,667	—	8,86	—
1,91	0,472	1,44	1,91	0,23	0,24	1,471	1	7,34	118
4,61	0,710	3,90	4,61	0,34	0,49	1,538	—	6,08	—
0,762	0,222	0,540	0,762	0,24	0,25	1,104	1	23,6	72,8
0,932	0,261	0,670	0,932	0,24	0,26	1,160	1	22,0	56,1
0,743	0,268	0,475	0,743	0,22	0,24	1,128	1	19,4	74,5

ния средней анизотропии Δ_m [1, § 26] и средней поперечной анизотропии Δ_t [1, § 34], характеризующих отличие данного кристалла от ближайшей к нему изотропной и поперечно-изотропной сред соответственно. Эти данные могут быть полезны для других расчетов, связанных с упругими волнами.

Литература

1. Федоров Ф. И. Теория упругих волн в кристаллах. Изд. «Наука», 1965.
2. Федоров Ф. И. Весті АН БССР, сер. фіз.-мат. навук, № 1, 91, 1966.
3. Федоров Ф. И. ДАН СССР, 164, 804, 1965.
4. Федоров Ф. И. ДАН БССР, 10, 636, 1966.
5. Быстрова Т. Г. Весті АН БССР, сер. фіз.-мат. навук, № 4, 78, 1966.
6. Александров К. С., Рыжова Т. В. Кристаллография, 6, 289, 1961.
7. Александров К. С., Рыжова Т. В. Кристаллография, 1, 718, 1957; 3, 623, 1958.
8. Хаткевич А. Г. Кристаллография, 6, 700, 1961.

*Институт физики
АН БССР*

Поступило в редакцию 24.XI 1966

Л. А. БАРЫСАГЛЕБСКІ, В. Ф. ТРУСАЎ

ДА ТЭОРЫ ВУГЛАВОЙ КАРЭЛЯЦЫ
 ПРЫ УНУТРАНАЙ КАНВЕРСІІ
 НА ВЫШЭЙШЫХ АБАЛОНКАХ АТАМА

Можна абагульніць вуглавую карэляцыйную функцыю $e-\gamma$, атрыманую з улікам дынамічнага эфекту канечных памераў ядра для K -, L - і M -падабалонак атама ў артыкуле Банд і Лісценгартэна [1], на выпадак любых абалонак атама зыходзячы з агульнага выразу для гэтай функцыі [2]

$$W_{e\gamma} = \langle |\sum_{\mu_1} H_e H_\gamma|^2 \rangle, \quad (1)$$

дзе H_e, H_γ — матрычныя элементы канверсійных і радыяцыйнага ядзерных пераходаў; μ_1 — праекцыя спіна прамежкавага стану ядра. Дзеля гэтага матрычныя элементы для канверсійных ML - і EL -пераходаў з улікам электроннай пранікальнасці, згодна з работамі [3, 4], запішам адпаведна ў выглядзе:

$$H_e(L, M; m) = \frac{-4\pi ik}{\sqrt{L(L+1)}} \left[\int_0^\infty d\tau_n j_n A_{LM}^{(m)*} \int_0^\infty d\tau j \cdot \frac{\mathbf{r}}{r} \times \nabla h_L^{(1)}(kr) \times \right. \\
 \left. \times Y_L^M(\vartheta, \varphi) \right] + \frac{4\pi ik}{\sqrt{L(L+1)}} \int_0^\infty d\tau_n j_n A_{LM}^{(m)*}(kr_n) \times \\
 \times \left\{ \int_0^{\tau_n} d\tau j \cdot \frac{\mathbf{r}}{r} \times \nabla h_L^{(1)}(kr) Y_L^M(\vartheta, \varphi) - \right. \\
 \left. - \frac{h_L^{(1)}(kr_n)}{j_L(kr_n)} \int_0^{\tau_n} d\tau j \cdot \frac{\mathbf{r}}{r} \times \nabla j_L(kr) Y_L^M(\vartheta, \varphi) \right\}; \quad (2)$$

$$H_e(L, M; e) = \frac{-4\pi i}{\sqrt{L(L+1)}} \int_0^\infty d\tau_n j_n A_{LM}^{(e)*}(kr_n) \int_0^\infty d\tau \left[j k^2 \frac{\mathbf{r}}{r} + \rho ik \frac{d}{dr} \right] \times \\
 \times r h_L^{(1)}(kr) Y_L^M(\vartheta, \varphi) + \frac{4\pi i}{\sqrt{L(L+1)}} \times \\
 \times \left\{ \int_0^\infty d\tau_n j_n A_{LM}^{(e)*}(kr_n) \int_0^{\tau_n} d\tau \left[j k^2 \frac{\mathbf{r}}{r} + \rho ik \frac{d}{dr} \right] \times \right.$$

$$\begin{aligned} & \times rh_L^{(1)}(kr) Y_L^M(\theta, \varphi) - \int_0^\infty d\tau_n j_n \mathbf{B}_{LM}^{(e)*}(kr_n) \int_0^{r_n} d\tau \times \\ & \times \left[j k^2 \frac{r}{r} + \rho ik \frac{d}{dr} \right] \times r j_L(kr) Y_L^M(\theta, \varphi) \Big\}, \end{aligned} \quad (3)$$

дзе першыя складаемыя ў сумах (2), (3) даюць асноўны ўклад у вуглавую карэляцыю, а ўлік астатніх прыводзіць да паправак на дынамічны эффект канечных памераў ядра. Тут \mathbf{A}_{LM} , \mathbf{B}_{LM} — вектарныя патэнцыялы, ρ і j — шчыльнасці зарадаў і токаў пераходу; $Y_L^M(\theta, \varphi)$ — шаравая функцыя; $j_L(kr)$, $h_L^{(1)}(kr)$ — сферычныя функцыі Беселя і Ханкеля 1-га роду; k — энергія пераходу; індэкс n адносіцца да нуклона, велічыні без індэкса адносяцца да электрона. Падставіўшы ў (1) H_ν , узятая з агляду Далгінава [2], і H_e , задаваемыя (2), (3), пасля інтэгравання па каардынатах электрона, усераднення і падсумоўвання па значэннях усіх велічынь, якія не вывучаюцца на доследзе, атрымаем формулу для $W_{e\nu}$, па выглядзе такую ж, як у аглядзе Даўгінава (гл. [2], формулы 6.246—6.248), але з некаторымі змяненнямі велічынь $M_{J\lambda L}^{J_0\lambda_0}$ і $E_{J\lambda L}^{J_0\lambda_0}$. Апошнія можна прадставіць у выглядзе:

$$M_{J\lambda L}^{J_0\lambda_0} = \sqrt{\frac{(2L+1)\beta_{x,x_0}}{2\pi\alpha k |\kappa|}} \exp [i \arg(\kappa + \kappa_0) (R_{x,x_0}^{(1)}(m) + R_{x,x_0}^{(2)}(m))], \quad (4)$$

$$E_{J\lambda L}^{J_0\lambda_0} = \sqrt{\frac{(2L+1)(L+1)\alpha_{x,x_0}}{2\pi\alpha kL |\kappa|}} \exp [i \arg(R_{x,x_0}^{(1)}(e) + R_{x,x_0}^{(2)}(e))]. \quad (5)$$

Тут β_{x,x_0} , α_{x,x_0} — парцыяльныя КВК (у абазначэннях работы [5]), якія адпавядаюць канечным $\left(\kappa = 2\lambda \left(J + \frac{1}{2}\right)\right)$ і пачатковаму $\left(\kappa_0 = 2\lambda_0 \times \left(J_0 + \frac{1}{2}\right)\right)$ станам канверсійнага электрона; $R_{x,x_0}^{(1)}$ — асноўны радыяльны інтэграл у выразе для КВК; $R_{x,x_0}^{(2)}$ — структурныя дабаўкі, якія ўлічваюць дынамічны эффект канечных памераў ядра. α_{x,x_0} , β_{x,x_0} выражаюцца праз велічыні $|R_{x,x_0}^{(1)} + R_{x,x_0}^{(2)}|^2$ (гл. (5)). Пры $R_{x,x_0}^{(2)} = 0$ велічыні $M_{J\lambda L}^{J_0\lambda_0}$ і $E_{J\lambda L}^{J_0\lambda_0}$ могуць быць прыведзены да такога ж выгляду, як у рабоце [2].

У якасці прыкладу прыменім формулу Далгінава [2] для $W_{e\nu}$ з улікам (4) і (5) для разліку параметраў карэляцыі $b_2(M1)$, $b_2(M2)$, $b_2(E1)$ і $b_2(E2)$ у выпадку $Z = 81$, M_{Π} -падабаламки і энергіі пераходу $k = 0,1; 0,2; 0,5; 1$ і 2 . Рэзультаты гэтага разліку, атрыманыя толькі з улікам статычнага ефекту канечных памераў ядра ($R_{x,x_0}^{(2)}(m)$ і $R_{x,x_0}^{(2)}(e)$ браліся роўнымі 0) прыведзены ў тэблiцы. Вылічэнне асноўных радыяльных інтэгралаў $R_{x,x_0}^{(1)}(m)$ і $R_{x,x_0}^{(1)}(e)$ рабілася на электроннай вылічальнай машыне БЭСМ-2М з дапамогай рэлятывісцкіх радыяльных функцый электрона ў полі сферычнага ядра радыуса

$$R = (1,123A^{1/3} + 2,352A^{-1/3} - 2,070A^{-1}) 10^{-13} \text{ см} \quad (6)$$

з раўнамерным размеркаваннем зарада па аб'ёму. Пры вызначэнні радыяльных функцый шляхам лікавага інтэгравання сістэмы дыферэнцыяльных ураўненняў Дзірака і зрухаў фаз δ_x ўлічвалася экранаванне метадам Томаса—Фермі—Дзірака [7, 8].

Параметры карэляцыі

k	0,1	0,2	0,5	1	2
Без уліку структурных паправак					
$b_{2, M_{II}}(M1)$	-0,272	-0,273	0,257	0,283	0,449
$b_{2, M_{II}}(M2)$	1,48	1,49	1,50	1,51	1,52
$b_{2, M_{II}}(E1)$	-1,04	-1,06	-1,15	-1,22	-1,63
$b_{2, M_{II}}(E2)$	1,35	1,27	1,67	1,74	1,77
З улікам структурных паправак па Сліву					
$b_{2, M_{II}}(M1)$	-0,270	-0,271	0,252	0,275	0,434
$b_{2, M_{II}}(M2)$	1,45	1,46	1,46	1,47	1,48

У табліцы прыводзяцца таксама значэнні $b_2(M1)$ і $b_2(M2)$, вылічаныя з улікам дынамічнага эфекту канечных памераў ядра па Сліву (г. зн. у меркаванні паверхневых токаў пераходу). Для разліку $R_{\lambda, \lambda_0}^{(2)}(m)$ выкарыстоўваліся адпаведныя прыбліжаныя аналітычныя выразы з работы [5].

Параўнанне значэнняў $b_2(M1)$ і $b_2(M2)$ з улікам і без уліку структурных паправак паказвае, што дынамічны эфект канечных памераў ядра для M_{II} -падаблонкі такі ж па парадку велічыні, як і для K -абалонкі.

Літаратура

1. Банд И. М., Листенгартен М. А. Изв. АН СССР, сер. физ., 29, 268, 1965.
2. Долгинов А. З. Гамма-лучи, гл. 6, под ред. Л. А. Слива. Изд. АН СССР, М.—Л., 1961.
3. Church E. L., Wenner J. Ann. Rev. Nucl. Sci., 10, 193, 1960.
4. Kramer J., Nilsson S. J. Nucl. Phys., 35, 273, 1962.
5. Борисоглебский Л. А. ЖЭТФ, 46, 1664, 1964.
6. Элтон Л. Размеры ядер. ИЛ, М., 1962.
7. Metropolis M., Reitz J. J. Chem. Phys., 19, 555, 1951.
8. Thomas L. J. Chem. Phys., 22, 1758, 1954.

Резюме

Угловая корреляционная функция $e - \gamma$ с учетом эффекта конечных размеров ядра обобщена на случай любых оболочек атома. Приведены численные значения параметров корреляции $b_2(M1)$, $b_2(M2)$, $b_2(E1)$ и $b_2(E2)$ для $Z=81$ и энергий перехода $k=0,1; 0,2; 0,5; 1; 2$ при внутренней конверсии на M_{II} -подоболочке атома. Основные радиальные интегралы конверсии и сдвиги фаз радиальных функций электрона в поле ядра вычислялись с учетом экранирования по методу Томаса—Ферми—Дирака на электронной вычислительной машине БЭСМ-2М.

Белорусский государственный университет
им. В. И. Ленина

Поступило в редакцию 6.III 1966

Л. Ф. ІЛЬЮШЭНКА, Л. П. КАСЦЮК-КУЛЬГАУЧУК

**ДАСЛЕДАВАННЕ МАГЧЫМАСЦІ ЗНІЖЭННЯ
КАЭРЦЫТЫЎНАЙ СІЛЫ І ПАВЫШЭННЯ КАЭФІЦЫЕНТА
ПРАМАВУГОЛЬНАСЦІ ПЯТЛІ ГІСТЭРЭЗІСУ
ЭЛЕКТРААСАДЖАНых ЖАЛЕЗА-НІКЕЛЕВЫХ ПЛЭНАК. I**

Раней намі былі атрыманы з сернакіслых электралітаў на меднай падложцы пермалоевыя плёнкі з каэрцытыўнай сілай 4—5 эрст і каэфіцыентам прамавугольнасці пятлі гістэрэзісу каля 0,8 [1]. У гэтай рабоце прыводзяцца рэзультаты даследавання ўплыву дабаўляемых у электраліт арганічных рэчываў, якія змяшчаюць серу, на магнітныя ўласцівасці жалеза-нікелевых плёнак, праведзенага намі з мэтай высвятлення магчымасці атрымання электраасаджаных магнітных плёнак з больш нізкай каэрцытыўнай сілай і больш высокім каэфіцыентам прамавугольнасці пятлі гістэрэзісу.

Пры электrolізе шырока выкарыстоўваюцца розныя дабаўкі, прысутнасць якіх у электраліце прыводзіць да змянення ўласцівасцей электралітычных асадкаў. У выпадку электраасаджэння ферамагнітных матэрыялаў гэта стварае магчымасць з дапамогай выбару адпаведнай дабаўкі і яе канцэнтрацыі ў электраліце рабіць уплыў на фарміраванне магнітных уласцівасцей асадкаў, што можа быць выкарыстана пры атрымнанні ферамагнітных плёнак для прылад аўтаматыкі і вылічальнай тэхнікі.

У літаратуры ёсць даныя па даследаванні характару ўплыву розных дабавак на ўласцівасці электраасаджаных металаў, указаны некаторыя дабаўкі, якія паляпшаюць рэжым электrolізу, садзейнічаюць больш раўнамернаму асаджэнню металу і робяць уплыў на структуру асадкаў.

Вядома, што ўвядзенне ў электраліт арганічных рэчываў, якія змяшчаюць серу, прыводзіць да змянення магнітных уласцівасцей ферамагнітных асадкаў. Так, у рабоце [2] было дасягнута зніжэнне каэрцытыўнай сілы асадкаў нікелю пры ўнясенні ў электраліт дабавак 2,6—2,7 дысульфанафталінавай кіслаты, тыямачавіны, алілтыямачавіны і іншых. Даследаванню працэсу электракрышталізацыі нікелю ў прысутнасці арганічных серузмяшчаючых рэчываў і механізму іх уплыву на ўласцівасці асадкаў прысвечана работа [3]. Пазней у работах [4, 5] пры атрымнанні электраасаджаных пермалоевых плёнак была прыменена тыямачавіна, што выклікала значныя змяненні магнітных уласцівасцей плёнак і іх структуры. У рабоце [6] для памяншэння каэрцытыўнай сілы электраасаджаных пермалоевых плёнак у электраліт дабаўляўся сахарын. Даследаванне ўплыву сахарыну на структуру і магнітныя ўласцівасці жалеза-нікелевых плёнак было праведзена ў рабоце [7]. У [8] таксама дасягнута памяншэнне каэрцытыўнай сілы пермалоевых плёнак, якія атрымліваюцца з сернакіслых і сульфатных электралітаў пры ўвядзенні ў іх сахарыну.

У гэтай рабоце ў якасці дабавак пры асаджэнні жалеза-нікелевых плёнак былі даследаваны серузмяшчаючыя арганічныя рэчывы: каптакс, γ -кіслата, каліевая соль H -кіслаты, салянакіслы тысямікарбазід, нафтыёнавая і сульфасаліцылавая кіслоты, амінабензолсульфакіслы і дыбензолсульфакіслы натрый, растваральны стрэптацыд і інш. Памянёныя дабаўкі ў рознай канцэнтрацыі ўносіліся ў сернакіслы электраліт, які змяшчаў у грамах на літр: $\text{NiSO}_4 \cdot 7\text{H}_2\text{O}$ —280; $\text{FeSO}_4 \cdot 7\text{H}_2\text{O}$ —10; H_3BO_3 —30. Плёнкі асаджаліся на электрапаліраваную медную фальгу таўшчынёй 0,15 мм пры хатняй тэмпературы без перамешвання электраліту. Асаджэнне вялося ў пастаянным магнітным полі напружанасцю 500 эрст. Плёнкі таўшчынёй 1000 і 2000 Å былі атрыманы донным асаджэннем (катод з'яўляўся дном ванны), пры катоднай шчыльнасці току, роўнай $1\text{а}/\text{дм}^2$; pH —3,7. Анодам служыла пласцінка з электралітычнага нікелу. Размеры плямы, пакрытай плёнкай, складалі $2,25\text{ см}^2$.

Магнітныя характарыстыкі плёнак вызначаліся па петлях гістэрэзісу, якія атрымліваліся на асцылаграфічнай устаноўцы на частаце 1 кГц. Таўшчыня плёнак вымяралася на інтэрферэнцыйным мікраскопе МІІ-4 па метаду назірання ліній роўнага храматычнага парадку, а таксама ацэньвалася з дапамогай параметраў працэсу асаджэння.

Табліца 1

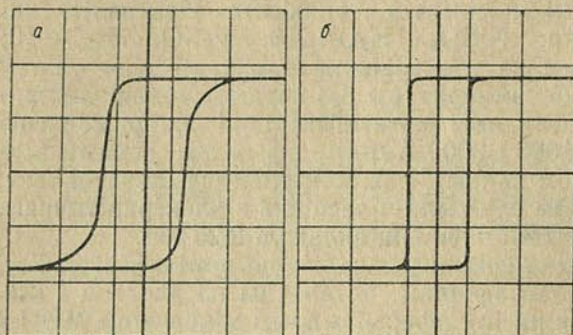
Уплыў дабавак у электраліт на магнітныя характарыстыкі плёнак $\text{Fe} - \text{Ni}$ таўшчынёй 1000 Å

№ плёнак	Назва дабаўкі	Колькасць дабаўкі, г/л	Каэрцытыўная сіла H_c , эрст	Каэфіцыент прамавугольнасці пятлі гістэрэзісу ($\alpha = B_r/B_m$)
523	Без дабавак	—	4,5	0,77
545	Амінабензолсульфакіслы натрый	1,00	3,4	0,78
556	Тысямікарбазід салянакіслы	0,05	2,2	0,78
560	Каптакс	0,05	3,9	0,87
565	Растваральны стрэптацыд	1,00	4,5	0,90
530	Оксіметансульфакіслы натрый	0,20	3,8	0,90
583	Тысямікарбазід (HCl) і растваральны стрэптацыд	0,05 0,05	2,6	0,85
587	Тысямікарбазід (HCl) і оксіметансульфакіслы натрый	0,05 0,20	2,4	0,87
622	Тысямікарбазід салянакіслы і каптакс	0,05 0,05	3,6	0,98
623	Амінабензолсульфакіслы натрый і каптакс	1,00 0,05	4,2	0,90

Даныя, якія характарызуюць уплыў некаторых з даследаваных намі дабавак на велічыню каэрцытыўнай сілы і прамавугольнасць пятлі гістэрэзісу плёнак таўшчынёй 1000 Å, прыведзены ў табл. 1, з якой відаць, што найбольш значнае зніжэнне каэрцытыўнай сілы плёнак адбываецца пры ўнясенні ў электраліт салянакіслага тысямікарбазіду. Пры канцэнтрацыі гэтай дабаўкі ў электраліце 0,05 г/л каэрцытыўная сіла плёнак памяншаецца прыкладна ў два разы ў параўнанні з каэрцытыўнай сілай плёнак, атрымліваемых з электраліту, які не змяшчае дабавак.

Адны з даследаваных арганічных серузмяшчаючых рэчываў садзейнічаюць памяншэнню каэрцытыўнай сілы, другія — павышаюць каэфіцыент прамавугольнасці пятлі гістэрэзісу плёнак. Так, увядзенне ў элект-

раліт каптаксу, растваральнага стрэптацыду і інш. прыводзіць да значнага павышэння каэфіцыента прамавугольнасці пятлі гістэрэзісу плёнак, пры гэтым каэрцытыўная сіла змяняецца нязначна. Адначасовае ўнясенне ў электраліт такіх дабавак прыводзіць да зніжэння каэрцытыўнай сілы і павышэння каэфіцыента прамавугольнасці пятлі гістэрэзісу

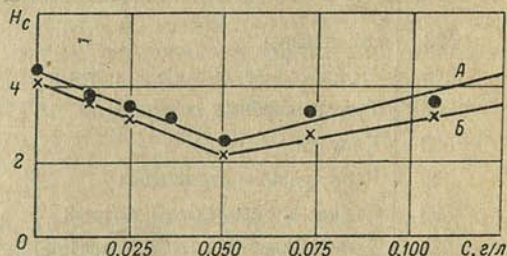


Рыс. 1. Петлі гістэрэзісу плёнак, атрыманых без дабаўкі (а) і з дабаўкай (б) 0,05 г/л тысямікарбазіду

атрымліваемых плёнак. Напрыклад, сумеснае дзеянне саянакіслага тыясмікарбазіду і оксіметансульфакіслага натрыю дае магчымаць атрымаць плёнкі з каэрцытыўнай сілай 2,4 эрст і каэфіцыентам прамавугольнасці пятлі гістэрэзісу каля 0,9.

На рыс. 1 прыведзены петлі гістэрэзісу плёнак, атрыманых з электраліту, які не змяшчае дабавак (а) і змяшчае тыясмікарбазід і каптакс (б).

Эфект, абумоўлены дзеяннем дабаўкі, залежыць ад яе канцэнтрацыі ў электраліце. Намі была даследавана залежнасць H_c і α плёнак ад канцэнтрацыі дабаўкі для ўсіх дабавак, якія вивучаліся. Аднак у далейшым больш падрабязна былі вивучаны дабаўкі, дзеянне якіх з'яўляецца найбольш эфектыўным. Так, намі была даследавана залежнасць каэрцытыўнай сілы плёнак таўшчынёй 1000 і 2000 Å ад канцэнтрацыі ў электраліце тыясмікарбазіду саянакіслага. Рэзультаты даследавання паказаны на рыс. 2, з якога можна бачыць, што пры ўмовах, прынятых у дадзеным даследаванні, плёнкі з найбольш нізкай каэрцытыўнай сілай атрымліваюцца пры канцэнтрацыі тыясмікарбазіду ў электраліце, роўнай 0,05 г/л.



Рыс. 2. Залежнасць каэрцытыўнай сілы плёнак ад канцэнтрацыі тыясмікарбазіду для плёнак таўшчынёй 1000 Å (А) і 2000 Å (Б)

Здольнасць тыясмікарбазіду (НСІ) зніжаць каэрцытыўную сілу электраасаджаных жалеза-нікелевых плёнак была правярана намі на сернакіслым электраліце (таго ж саставу і канцэнтрацыі, як і раней выкарыстаны электраліт), які змяшчае хларысты амоній у колькасці 6 г/л. Уплыў канцэнтрацыі дабаўкі на каэрцытыўную сілу атрыманых з гэтага

Табліца 2

Залежнасць H_c ад канцэнтрацыі тыясмікарбазіду саянакіслага

Канцэнтрацыя тыясмікарбазіду, г/л	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6
Каэрцытыўная сіла, эрст	5,0	3,7	2,2	2,0	2,2	2,5	5,2

электраліту плёнак таўшчынёй 3000 Å відаць з табл. 2. Асаджэнне праводзілася пры катоднай шчыльнасці току $D_k = 0,7$ а/дм², рН = 2,7 у магнітным полі 200 эрст.

Мы бачым, што і ў дадзеным выпадку ўнясенне тысямікарбазіду ў электраліт прыводзіць да паніжэння каэрцытыўнай сілы асаджаемых плёнак. Аднак найбольш нізкія значэнні каэрцытыўнай сілы атрымліваюцца пры большых канцэнтрацыях дабаўкі (каля 0,3 г/л) у параўнанні з сернакіслым электралітам, які не змяшчае хлорыстага амонію. Пры канцэнтрацыі тысямікарбазіду (НСІ) вышэй за 0,6 г/л пермалоевыя плёнкі цягнуць, трацяць бляск і адслойваюцца ад падложкі.

Дзеянне дабаўкі на магнітныя характарыстыкі плёнак у радзе работ [8, 9] звязваюць са змяненнем характару і размеркавання ўнутраных аэстаткавых напружанняў у плёнцы. Фізічная прырода ўнутраных напружанняў не высветлена; можна ўказаць толькі некаторыя крыніцы іх з'яўлення. Крыніцай унутраных напружанняў у плёнцы могуць быць недасканаласці структуры электраасаджанага металу. Можна меркаваць, напрыклад, што ў час электролізу ў рашотку металу ўкараняецца вада-род, а пасля заканчэння працэсу — выдзяляецца, пакідаючы яе ў скажоным стане. Гэта прыводзіць да з'яўлення ў плёнцы расцягваючых напружанняў. Пры ўкараненні пабочных матэрыялаў у крышталічную структуру асадкаў у ім могуць з'яўляцца сціскаючыя напружання. Увадзенне ў электраліт арганічных дабавак можа прывесці да змянення параметраў крышталічнай рашоткі асаджаемых металаў, змянення размераў асобных крышталёў і адлегласцей паміж крышталітамі. Арганічныя рэчывы могуць укараняцца ў рашотку і паміж крышталітамі. Памянёныя змяненні ў структуры асадкаў выклікаюць змяненні ў характары і размеркаванні ўнутраных напружанняў, што ў сваю чаргу абумоўлівае змяненне іх магнітных уласцівасцей і ў прыватнасці каэрцытыўнай сілы. Напружання ў плёнцы могуць быць вельмі лакалізаваны. Вымярэнне велічыні лакальных напружанняў з'яўляецца вельмі цяжкай задачай, таму звычайна вымяраюцца сярэднія велічыні напружанняў. Пры гэтым лічыцца, што наяўнасць вялікіх градыентаў напружанняў, аднародных па сваёй прыродзе, абумоўлівае і найбольшую велічыню сярэдніх напружанняў, якую мы і вымяраем.

Намі былі вымераны велічыні ўнутраных напружанняў у плёнках, якія атрымліваліся з сернакіслых электралітаў з рознай канцэнтрацыяй тысямікарбазіду (НСІ). Велічыня ўнутраных напружанняў вызначалася па выгібу катода ў працэсе асаджэння на яго плёнкі. Разлік праводзіўся па формуле Стоні [10], узятай для выпадку, калі таўшчыня плёнкі значна меншая за таўшчыню падложкі (катода):

$$\sigma = \frac{1}{3} \frac{E' d_k^2 z}{d_{ac} l^2},$$

дзе E' — модуль пругкасці падложкі; d_k — таўшчыня падложкі; d_{ac} — таўшчыня асадку (плёнкі); z — страла прагібу катода; l — даўжыня часткі катода, пакрытае плёнкай.

Паколькі ўнутраныя напружання вельмі залежаць ад шчыльнасці току, прымяняемай пры асаджэнні, і ад кіслотнасці электраліту, усе вымярэнні праводзіліся пры пастаянных значэннях D_k і рН (у дадзеным выпадку $D_k = 1$ а/дм² і рН = 3,7).

Рэзультаты вымярэння ўнутраных напружанняў плёнак таўшчыняй 1000 і 2000 Å, атрыманыя ў памянёных вышэй умовах з электралітаў з дабаўкамі тысямікарбазіду ад 0,05 да 0,5 г/л, прыведзены ў табл. 3.

Ва ўмовах дадзенага даследавання ўсе плёнкі праяўлялі расцягваючыя напружання. Як відаць з табл. 3, з павелічэннем канцэнтрацыі тысямікарбазіду (НСІ) напружання ў плёнцы спачатку памяншаюцца (да канцэнтрацыі 0,05 г/л), а затым павялічваюцца. Раскід велічынь пры вымярэнні σ складаў каля 200 кГ/см².

Табліца 3

Залежнасць сярэдніх велічынь унутраных напружанняў у плёнках ад канцэнтрацыі тысямікарбазіду (НСІ) у электраліце

№ плёнак	Канцэнтрацыя тысямікарбазіду (НСІ), г/л	Таўшчыня плёнкі, Å	Велічыня ўнутраных напружанняў σ , кг/см ²
1	—	1000	11800
2	0,05	1000	4300
3	0,10	1000	6800
4	0,50	1000	7700
5	—	2000	11900
6	0,05	2000	5200
7	0,10	2000	7600
8	0,50	2000	8100

Характар змянення ўнутраных напружанняў у залежнасці ад канцэнтрацыі тысямікарбазіду аналагічны характару змянення каэрцытыўнай сілы ў залежнасці ад таго ж параметру. Гэта сведчыць аб наяўнасці сувязі паміж каэрцытыўнай сілай і ўнутранымі напружаннямі ў плёнках.

Як было адзначана раней, пры электраасаджэнні тонкіх ферамагнітных плёнак у якасці дабаўкі, якая садзейнічае зніжэнню каэрцытыўнай сілы, выкарыстоўваецца сахарын (напрыклад, у рабоце [6]). У сувязі з гэтым быў сэнс параўнаць дзеянне даследаванай намі дабаўкі (саянакіслага тысямікарбазіду) з дзеяннем сахарыну. Праведзенае намі параўнанне паказала, што найменшую велічыню каэрцытыўнай сілы (2,1 эрст) маюць плёнкі, атрыманыя пры дабаўленні ў электраліт тысямікарбазіду 0,05 г/л. Пры дабаўленні сахарыну не ўдалося атрымаць плёнкі з каэрцытыўнай сілай ніжэй (2,9 эрст пры 0,6 г/л сахарыну), чым у выпадку дабаўлення саянакіслага тысямікарбазіду.

ВЫВАДЫ

1. Устаноўлена, што дабаўленне ў электраліт саянакіслага тысямікарбазіду ад 0,01 да 0,05 г/л прыводзіць да значнага зніжэння каэрцытыўнай сілы плёнак H_c , а дабаўленне каптаксу (не больш 0,05 г/л), растваральнага стрэптацыду (не больш 1 г/л) і оксіметансульфакіслага натрыю (не больш 1 г/л) — да павелічэння каэфіцыента прамавугольнасці пятлі гістэрэзісу жалеза-нікелевых плёнак.

2. Сумеснае выкарыстанне памянёных дабавак дае магчымасць атрымаваць пермалоевыя плёнкі з каэфіцыентам прамавугольнасці пятлі гістэрэзісу, блізкім да 1, але з каэрцытыўнай сілай некалькі больш высокай (каля 3,5 эрст), чым пры выкарыстанні толькі аднаго саянакіслага тысямікарбазіду.

3. Праведзенае ў рабоце параўнанне дзеяння сахарыну, які найбольш часта прымяняецца пры электраасаджэнні плёнак, з дзеяннем тысямікарбазіду паказала мэтазгоднасць выкарыстання тысямікарбазіду пры электраасаджэнні магнітных плёнак на медную падложку.

Літаратура

1. Касцюк-Кульгаўчук Л. П., Ільющэнка Л. Ф. Сб. «Вычислительная техника», 1965, стар. 191—193.
2. Полукаров Ю. М. ЖФХ, 32, № 5, 1958.
3. Сутягина А. А., Горбунова К. М. ЖФХ, 35, № 11, 1961.

4. T su I. Hating, 47, № 6, 1960.
5. Politycki A., Gottgart H. Z. fur. Ang. Phys., 14, Heft 6, 1962.
6. Smith R. S., Godicki L. E. and Lloyd J. C. Journ. of the Electrochem. Society, 108, № 10, 1961.
7. Wolf J. W. Journ. of Appl. Phys. Suppl., 33, March, 1962.
8. Патент Англіі № 859725 от 25.I 1961 г., кл. 41.
9. Fisher R. D. Journ. of the Electrochem. Soc., 109, № 6, 1962.
10. Ваграмян А. Т. Методы исследования электроосаждения металлов. М., изд. АН СССР, 1960.

Резюме

В настоящей работе приведены результаты исследования влияния вносимых в электролит органических добавок, содержащих серу, на коэрцитивную силу и коэффициент прямоугольности петли гистерезиса пермаллоевых пленок толщиной 1000 и 2000 Å, получаемых из электролита, содержащего в г/л: $\text{NiSO}_4 \cdot 7\text{H}_2\text{O}$ —280, $\text{FeSO}_4 \cdot 7\text{H}_2\text{O}$ —10, H_3BO_3 —30.

Установлено, что добавление в электролит солянокислого тиосемикарбазида от 0,01 до 0,05 г/л приводит к значительному снижению коэрцитивной силы пленок, а добавление каптакса (не более 0,05 г/л), растворимого стрептоцида (не более 1 г/л) и оксиметансульфонокислого натрия (не более 1 г/л) — к увеличению коэффициента прямоугольности петли гистерезиса железоникелевых пленок.

При совместном введении в электролит солянокислого тиосемикарбазида (0,05 г/л), и каптакса (0,05 г/л) получены пленки с коэффициентом прямоугольности петли гистерезиса, близким к единице, и коэрцитивной силой около 3,5 эрст.

Исследована зависимость величины внутренних напряжений от концентрации солянокислого тиосемикарбазида в электролите. При введении в электролит указанной добавки до 0,05 г/л величина внутренних остаточных напряжений уменьшается от 11900 кГ/см^2 до 5200 кГ/см^2 для пленок толщиной 2000 Å. Характер изменения внутренних напряжений аналогичен характеру изменения коэрцитивной силы. Это свидетельствует о наличии связи между коэрцитивной силой и внутренними напряжениями в электроосажденных железо-никелевых пленках.

Приведенные данные могут иметь значение при получении магнитных пленок для вычислительной техники.

Поступило в редакцию 24.V 1966

Институт физики твердого тела
и полупроводников
АН БССР

В. Д. ТКАЧОУ, П. Ф. ЛУГАКОУ

ЦЭНТРЫ ПРЫЛІПАННЯ І АПТЫЧНАЕ ГАШЭННЕ ФОТАПРАВАДЗІМАСЦІ У КРЭМНІІ, ЯКІ МАЕ ПАРУШЭННІ СТРУКТУРЫ

Вядома, што пры абпраменьванні крэмнію часцінкамі высокіх энергій у ім узнікае даволі вялікая колькасць устойлівых парушэнняў структуры. Значную ролю пры гэтым адыгрываюць працэсы «праяўлення» электрычнай актыўнасці астаткавых хімічных прымесных атамаў, якія прысутнічаюць у зыходным матэрыяле. К сучаснаму перыяду можна лічыць устаноўленым, што разнастайнасць назіраемых устойлівых радыяцыйных парушэнняў у першую чаргу вызначаецца прымесным саставам матэрыялу, а не відам абпраменьвання, якое прыводзіць да стварэння радыяцыйных пашкоджанняў [1—4].

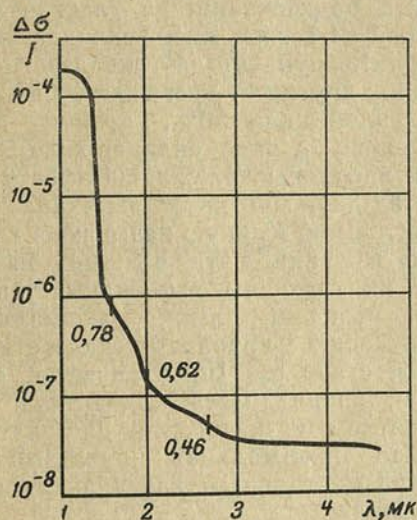
У гэтай рабоце мы паставілі мэту вывучыць умовы ўтварэння цэнтраў прыліпання ў монакрышталях крэмнію з рознай колькасцю хімічных прымесей пры абпраменьванні хуткімі электронамі і нейтронамі. У якасці метаду даследавання мы спыніліся на вывучэнні фотаэлектрычных уласцівасцей абпрамененых крышталяў, паколькі гэты метады з'яўляецца найбольш адчувальным пры вывучэнні цэнтраў, якія маюць глыбокія энергетычныя ўзроўні [5].

Метадыка эксперымента. Узоры ўяўлялі сабой пласцінкі памерам $15 \times 2 \times 0,8$ мм, на тарцы якіх электралітычна наносіліся цынкавыя або паладыевыя кантакты. Для выключэння паверхневых эфектаў крысталі шліфаваліся і травіліся да і пасля абпраменьвання, якое прыводзілася электронамі з энергіяй 1 Мэв на электростатычным генератары лабараторыі фізікі паўправаднікоў Фізічнага інстытута імя П. Н. Лебедзева або хуткімі нейтронамі ў рэактары АН БССР. Спектры фотаправадзімасці здымаліся пры ўзбуджэнні пастаянным і мадуляваным светлавым патокам, частата мадуляцыі якога складала 20,5 гц. Прыкладаемае да ўзораў электрычнае поле было дастаткова слабым, так што генеруемая святлом носьбіты знікалі галоўным чынам за кошт рэкамбінацыі і захопу цэнтрамі прыліпання, а не за кошт дрэйфу да электродаў. Для ўзбуджэння ў інфрачырвонай вобласці спектра выкарыстоўваўся монахраматар ИКС-12. Дадатковае падсвечанне ва ўласнай і прымеснай вобласці здзяйснялася пры дапамозе другога такога ж монахраматара. Амаль усе вымярэнні выкананы пры тэмпературы 80° К. Каб пазбегнуць рознага роду засвечвання ўзораў, яны змяшчаліся ў ахалоджаны экран і выкарыстоўваліся тоўстыя крэмніевыя і германіевыя фільтры.

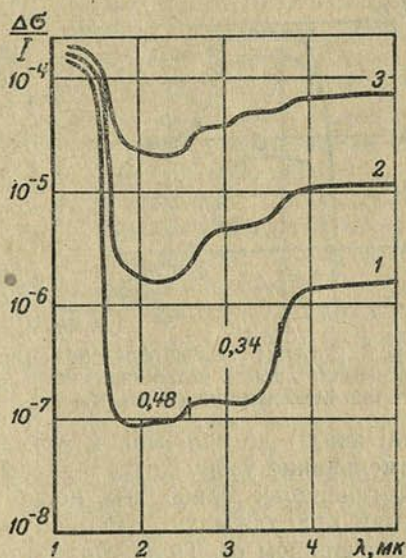
Рэзультаты эксперымента і іх абмеркаванне. Наўнасць цэнтраў прыліпання павінна прыводзіць да павелічэння часу нарастання і затухання фотаправадзімасці [6, 7]. У сувязі з гэтым эксперыментальна назіраемы час затухання фотатоку (пасля спынення ўзбуджэння) робіцца большы за час жыцця неасноўных носьбітаў. Адrozenне паміж назіраемым часам затухання і часам жыцця неасноўных

носьбітаў вызначаецца суадносінамі канцэнтрацыі свабодных носьбітаў і носьбітаў, захопленых цэнтрамі прыліпання.

Захоп нераўнаважных неасноўных носьбітаў (фотадзірак) назіраўся намі ў монакрышталах крэмнію n -тыпу, вырашчаных у кварцавых тыглях і абпрамененых рознымі патокамі хуткіх электронаў або нейтронаў. Найбольш выразна працэсы прыліпання праяўляюцца пры нізкіх тэмпературах. Так, пры тэмпературы 80°K прыліпання назіралася практычна ва ўсіх абпрамененых крышталах з зыходным удзельным супраціўлен-



Рыс. 1. Спектр фотаправадзімасці крэмнію n -тыпу ($\rho=110\text{ ом}\cdot\text{см}$; $\Phi=2\cdot 10^{17}\text{ э/см}^2$; $E_f=E_c-0,24\text{ эв}$)



Рыс. 2. Спектральныя залежнасці поўнай фотаправадзімасці:

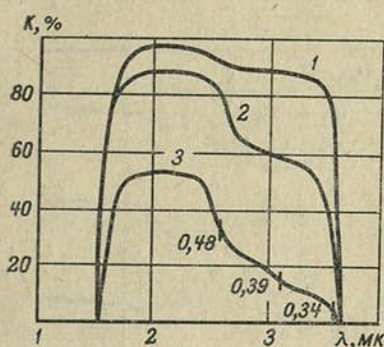
1 — $I_1=1\%$; 2 — $I_2=30\%$; 3 — $I_3=50\%$

нем ад 3 да $150\text{ ом}\cdot\text{см}$, якія змяшчаюць кісларод у канцэнтрацыі $3\div 7\cdot 10^{17}\text{ см}^{-3}$. Да абпраменьвання працэсы прыліпання праяўляюцца настолькі нязначна, што вымярэнні надзвычай цяжкія. Эфект прыліпання адсутнічаў ва ўзорах, вырабленых з высакаамага крэмнію ($\rho=300\div 1100\text{ ом}\cdot\text{см}$), атрыманага метадам зоннай плаўкі ў вакууме і змяшчаючага кісларод у канцэнтрацыі не больш 10^{15} см^{-3} . Нават пры абпраменьванні такіх крышталаў патокам нейтронаў да 10^{19} см^{-2} нам не ўдалося выявіць наяўнасць даўгахвалевай кампаненты на крывых спаду сігналу фотаправадзімасці.

Вызначэнне энергетычнага становішча цэнтраў прыліпання праводзілася па змяненню фотаправадзімасці, звязанай з паглынанням інфрачырвонага выпраменьвання. На рыс. 1 прадстаўлена спектральная залежнасць змянення фотаправадзімасці $\Delta\sigma/I$ (I — інтэнсіўнасць падаючай радыяцыі) для ўзору n -тыпу з зыходным удзельным супраціўленнем $110\text{ ом}\cdot\text{см}$ і абпрамененага патокам электронаў $2\cdot 10^{17}\text{ см}^{-2}$. Узор быў прыгатаваны з крыштала крэмнію, вырашчанага ў кварцавым тыглі. Пастаяннае знешняе падсвечванне ва ўласнай вобласці адсутнічала. Узровень Фермі размяшчаўся на $0,24\text{ эв}$ ніжэй дна зоны правадзімасці. Да вымярэння ўзор доўгі час (каля адной гадзіны) вытрымліваўся ў поўнай цемнаце і быў закрыты медным экранам, які меў тэмпературу, блізкую да тэмпературы ўзору, г. зн. 80°K . Наяўныя на крывой уздымы фотаправадзімасці ў вобласці $2,7$ і $1,6\text{ мк}$ можна звязаць з узбуджэннем

электронаў з запоўненых энергетычных узроўняў $E_c - 0,46$ эв, $E_c - 0,62$ эв і $E_c - 0,78$ эв у зону правадзімасці [8].

На рыс. 2 прыведзены спектральныя залежнасці фотаправадзімасці для гэтага ж узору, але пры адначасовым узбуджэнні святлом пастаяннага падсвечвання рознай інтэнсіўнасці ($I_1 < I_2 < I_3$) ва ўласнай вобласці і ўзбуджэнні ад дадатковай інфрачырвонай крыніцы (I). З крывых відаць, што пры наяўнасці пастаяннай энергіі ва ўласнай паласе ўзбуджэння назіраецца вельмі выражаны эффект аптычнага даўгахвалевага гашэння фотаправадзімасці ў інтэрвале 3,6—



Рыс. 3. Спектры гашэння фотаправадзімасці пры падсвечваннях рознай інтэнсіўнасці ($I_1 < I_2 < I_3$)

1,6 мк. Першая кривая атрымана пры пастаянным падсвечванні ва ўласнай вобласці I_1 ($\lambda = 1,1$ мк), якое складае каля 1% ад інтэнсіўнасці даўгахвалевага ўзбуджэння; другая — пры падсвечванні I_2 , якое складае каля 30%, і трэцяя — пры падсвечванні I_3 , якое складае каля 50%. Для пабудовы залежнасці эффекту гашэння ад даўжыні хвалі звычайна ўводзіць велічыню K , якую называюць «працэнтам» гашэння. Гэта велічыня вызначаецца як адносіны, выражаныя ў працэнтах, рознасці паміж максімальнай правадзімасцю і правадзімасцю ў стацыянарным стане $\sigma_{ст}$ (пры дадзенай даўжыні хвалі) да велічыні максімальнай правадзімасці. Аднак калі абпраменьванне ўзору даўгахвалевым святлом не прыводзіць да дадатковай генерацыі свабодных носбітаў, то максімальная правадзімасць роўная правадзімасці, якая абумоўлена пастаянным караткахвалевым падсвечваннем σ_n . Тады «працэнт» гашэння

$$K = \frac{\sigma_n - \sigma_{ст}}{\sigma_n} 100\% . \quad (1)$$

Атрыманыя такім чынам спектры гашэння фотаправадзімасці прыведзены на рыс. 3. Даўгахвалевая мяжа гашэння размешчана ў вобласці 3,6 мк і звязана з узбуджэннем электронаў з валентнай зоны на ўзроўні $E_v + 0,34$ эв, якія захапілі фотадзіркі, што генеруюцца пастаянным караткахвалевым падсвечваннем. Павелічэнне гашэння ў вобласці 2,6 мк, якое асабліва моцна праяўляецца пры магутным падсвечванні, можна звязаць з узбуджэннем электронаў з валентнай зоны на ўзроўні $E_v + 0,48$ эв, якія таксама захапілі фотадзіркі. Пры магутным падсвечванні прыкметна павялічваецца гашэнне і ў вобласці 3,2 мк, што абумоўлена ўзбуджэннем электронаў з валентнай зоны на цэнтры прыліпання для дірак $E_v + 0,39$ эв (крывая 3).

Трэба адзначыць, што ў сапраўднасці выгляд крывых, прыведзеных на рыс. 2 і 3, вызначаецца не аднымі працэсамі гашэння, г. зн. захопам цэнтрамі прыліпання генеруемых караткахвалевым падсвечваннем фотадзірак з іх наступным вызваленнем даўгахвалевым выпраменьваннем. Абпраменьванне крышталю святлом у вобласці 3,6—1,6 мк прыводзіць як да гашэння фотаправадзімасці, абумоўленага рэкамбінацыяй вызваленых з узроўняў прыліпання фотадзірак з генетычна звязанымі з імі электронамі ў зоне правадзімасці, так і да павелічэння фотаправадзімасці, выклікаемага ўзбуджэннем носбітаў з узроўняў радыяцыйных парушэнняў, размешчаных у верхняй палавіне забароненай зоны, у зону правадзімасці. Калі энергія квантаў пераўзыходзіць энергетычную ад-

легласць ад цэнтра прыліпання да дна зоны правадзімасці, то можа мець месца і біпалярнае ўзбуджэнне носьбітаў праз дадзены цэнтр прыліпання. Змяншэнне ефекту гашэння ў вобласці 1,6 мк звязана, як відаць, з тым, што святло пры такіх даўжынях хваляў выклікае настолькі магутнае ўзбуджэнне фотаправадзімасці, што яно «маскіруе» эффект гашэння. Важна адзначыць, што караткахвалевае мяжа на крывых, паказаных на рыс. 3, супадае па спектральнаму становішчу з магутным уздымам фотаправадзімасці на крывой рыс. 1 у вобласці 1,5—1,6 мк, які звязан з узбуджэннем электронаў з запоўненых узроўняў $E_c - 0,78$ эв у зону правадзімасці. Сума $0,78$ эв + $0,34$ эв = $1,12$ эв добра адпавядае значэнню шырыні забароненай зоны крэмнію пры 80° К ($1,13$ эв). Гэта дазваляе выказаць меркаванне, што эффект гашэння ў вобласці 1,6 мк маскіруецца магутным узбуджэннем электронаў з узроўняў прыліпання $E_v + 0,34$ эв ($E_c - 0,79$ эв) у зону правадзімасці, г. зн. мае месца біпалярнае ўзбуджэнне свабодных носьбітаў праз дадзены цэнтр прыліпання¹.

Назіраемае на крывых рыс. 3 змяншэнне гашэння з павелічэннем інтэнсіўнасці караткахвалевага падсвечвання звязана з павелічэннем фонавай правадзімасці, якая выклікаецца падсвечваннем. Для дадзенага ўзору інтэнсіўнасць падсвечвання ў 10% ад магутнасці даўгахвалевага ўзбуджэння стварае канцэнтрацыю свабодных носьбітаў у зонах, якая перавышае канцэнтрацыю ўсіх узроўняў прыліпання. Калі ў выніку караткахвалевага падсвечвання ўсе цэнтры прыліпання насычаюцца фотаадзіркамі, то змяненне фотаправадзімасці пры абпраменьванні квантамі святла з энергіяй, роўнай адлегласці ад верху валентнай зоны да цэнтра прыліпання, можна звязаць з канцэнтрацыяй дадзеных цэнтраў прыліпання. Сапраўды, памяншэнне фотаправадзімасці пры даўгахвалевым узбуджэнні вызначаецца рэкамбінацыяй электронаў зоны правадзімасці і дабавачных дзірак валентнай зоны, якія ўзнікаюць за кошт пераходаў электронаў з валентнай зоны на цэнтры прыліпання, г. зн. даўгахвалевае ўзбуджэнне нібыта пераводзіць электроны з зоны правадзімасці на цэнтры прыліпання праз «нармальныя» ўзроўні рэкамбінацыі і валентную зону. Калі падабраць адпаведным чынам інтэнсіўнасці караткахвалевага падсвечвання $I_{\text{кп}}$ і даўгахвалевага ўзбуджэння $I_{\text{ду}}$ ($I_{\text{кп}} \approx I_{\text{ду}} \gg N$, дзе N — канцэнтрацыя цэнтраў прыліпання), то памяншэнне канцэнтрацыі электронаў у зоне правадзімасці Δn непасрэдна дае канцэнтрацыю цэнтраў прыліпання ($\Delta n = N$). Велічыня стацыянарнага змянення канцэнтрацыі электронаў у зоне правадзімасці вылічаецца са змянення правадзімасці

$$\Delta \sigma = \Delta n e \mu_n, \quad (2)$$

дзе μ_n — рухомасць электронаў.

На рыс. 4 прыведзены тры крывыя, якія даюць спектральныя залежнасці памяншэння стацыянарнай канцэнтрацыі электронаў у зоне правадзімасці пры ўзбуджэнні даўгахвалевым святлом. Крывая 1 знята пры караткахвалевым падсвечванні $I_1 = 1\%$, крывая 2 — $I_2 = 30\%$ і крывая 3 — $I_3 = 50\%$ ад інтэнсіўнасці даўгахвалевага ўзбуджэння, якая была пастаяннай пры зняцці ўсіх трох крывых. З крывых відаць, што пры падсвечванні I_1 практычна ўсе цэнтры прыліпання $E_v + 0,34$ эв запаўняюцца фотаадзіркамі. Для поўнага запаўнення фотаадзіркамі цэнтраў прыліпання $E_v + 0,48$ эв патрэбна больш інтэнсіўнае падсвечванне (каля 30%). Узор, на якім былі атрыманы гэтыя рэзультаты, быў абпраменьены патокам электронаў $5 \cdot 10^{16}$ см⁻².

¹ Непасрэдны доказ таго, што караткахвалевае мяжа на спектрах гашэння фотаправадзімасці абумоўлена біпалярным узбуджэннем у выніку двайных аптычных пераходаў праз цэнтр $E_v + 0,34$ эв, будзе дадзен у нашай наступнай рабоце.

Разлікі паказваюць, што канцэнтрацыя цэнтраў прыліпання $E_v+0,34$ эв складае $1,5 \cdot 10^{10} \text{ см}^{-3}$, а канцэнтрацыя цэнтраў прыліпання $E_v+0,48$ эв — прыблізна 10^{11} см^{-3} .

Вывучэнне залежнасці велічыні гашэння ад дозы абпраменьвання хуткімі электронамі і нейтронамі паказвае, што для крышталю крэмнію існуе верхняя мяжа велічыні гашэння. Так, на рыс. 5 прадстаўлен рад спектраў гашэння фотаправадзімасці, атрыманых на ўзорах крэмнію з зыходным удзельным супраціўленнем каля $100 \text{ ом} \cdot \text{см}$ і абпраменьеных

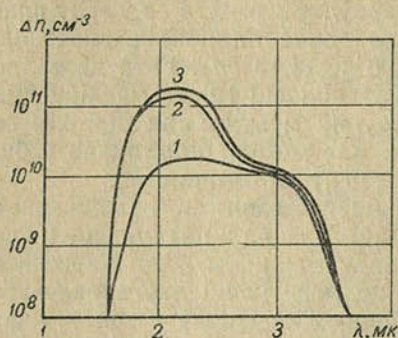


Рис. 4. Спектральная залежнасць канцэнтрацыі электронаў у зоне правадзімасці пры розных падсвечваннях

рознымі патокамі электронаў (аналагічныя рэзультаты атрыманы і пры абпраменьванні рознымі патокамі нейтронаў). Крывая 1 атрымана на ўзоры, абпраменьеным патокам электронаў $4 \cdot 10^{15} \text{ см}^{-2}$; крывая 2— $3 \cdot 10^{16} \text{ см}^{-2}$; крывая 3— $3 \cdot 10^{17} \text{ см}^{-2}$ і крывая 4— $7 \cdot 10^{17} \text{ см}^{-2}$. Павелічэнне дозы абпраменьвання вышэй 10^{18} э/см^2 не прыводзіла для дадзеных крышталю да далейшага павелічэння гашэння. Караткахвалевае падсвечванне было аднолькавым па інтэнсіўнасці пры зняцці ўсіх крывых і забяспечвала поўнае запайненне цэнтраў прыліпання неасноўнымі носбітамі. Мы схільныя лічыць, што гэтыя рэзультаты дазваляюць зра-

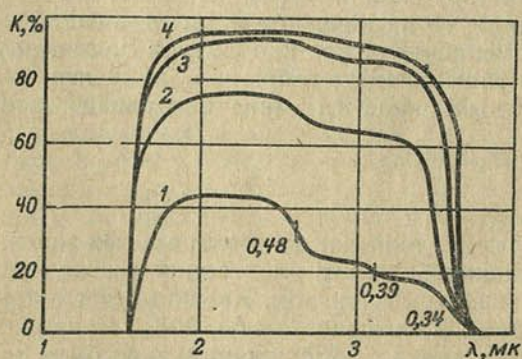


Рис. 5. Залежнасць велічыні гашэння ад дозы абпраменьвання (η -тып; $\rho=100 \text{ ом} \cdot \text{см}$);
1— $\Phi=4 \cdot 10^{15} \text{ э/см}^2$; 2— $3 \cdot 10^{16} \text{ э/см}^2$; 3— $3 \cdot 10^{17} \text{ э/см}^2$;
4— $7 \cdot 10^{17} \text{ э/см}^2$

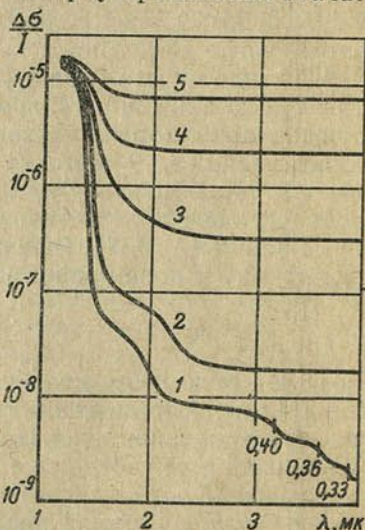


Рис. 6. Спектры фотаправадзімасці для зоннага крыштала ($\rho=700 \text{ ом} \cdot \text{см}$);
1—без падсвечвання; 2— $I_2=1\%$; 3— $I_2=10\%$; 4— $I_2=30\%$; 5— $I_2=50\%$

раў прыліпання $E_v+0,34$ эв складае $8 \cdot 10^{10} \text{ см}^{-3}$, а цэнтраў $E_v+0,48$ эв— $5 \cdot 10^{11} \text{ см}^{-3}$. Для крышталю з зыходным удзельным супраціўленнем $7 \text{ ом} \cdot \text{см}$ былі атрыманы адпаведна значэнні $2 \cdot 10^{11} \text{ см}^{-3}$ і $9 \cdot 10^{11} \text{ см}^{-3}$.

Вышэй адзначалася, што эффект гашэння адсутнічаў у абпраменьеных крышталю крэмнію, якія атрыманы метадам бястыгельнай зоннай плаўкі

ў вакууме і змяшчаюць не больш 10^{15} атамаў кіслароду ў адным кубічным сантыметры. На рыс. 6 прадстаўлен рад спектральных залежнасцей фотаправадзімасці для такіх узораў, абпраменьеных патокам электронаў $2 \cdot 10^{17} \text{ см}^{-2}$. Зыходнае ўдзельнае супраціўленне ўзору складала каля $700 \text{ ом} \cdot \text{см}$. Крывая 1 атрымана без караткахвалевага падсвечвання. Уздымы фотаправадзімасці ў вобласці 3,8; 3,4; 3,1 мк адпавядаюць пераходу электронаў з цэнтраў $E_c - 0,33 \text{ эв}$, $E_c - 0,36 \text{ эв}$ і $E_c - 0,40 \text{ эв}$ у зону правадзімасці [8]. Крывыя 2, 3, 4 і 5 атрыманы пры караткахвалевым падсвечванні ўзрастаючай інтэнсіўнасці ($I_2 < I_3 < I_4 < I_5$). Відаць, што эффект даўгахвалевага аптычнага гашэння поўнасьцю адсутнічае.

Прыведзеныя рэзультаты эксперыменту дазваляюць лічыць, што цэнтры прылипания ўтвараюцца ў выніку абпраменьвання з большай эфектыўнасцю і ў большых канцэнтрацыях у монакрышталях крэмнію, якія змяшчаюць значныя канцэнтрацыі астаткавых хімічных прымесей. У рабоце [6] паказана, што такімі крышталямі з'яўляюцца крышталі, атрыманыя метадам вырошчвання ў кварцавых тыглях. Канцэнтрацыя астаткавых прымесей, якія даюць глыбокія энергетычныя ўзроўні ў гэтых крышталях, складае $10^{11} - 10^{12} \text{ см}^{-3}$, а кіслароду — $5 \div 7 \cdot 10^{17} \text{ см}^{-3}$. Адсутнасць ефекту гашэння ў зонных крышталях, якія змяшчаюць нязначныя канцэнтрацыі астаткавых прымесей, пацвярджаюць гэта меркаванні.

Такім чынам, прыведзены вышэй аналіз працэсаў захопу неасноўных носбітаў і даўгахвалевага аптычнага гашэння фотаправадзімасці ўказвае на наяўнасць рада дыскрэтных цэнтраў прылипания ($E_v + 0,34 \text{ эв}$, $E_v + 0,39 \text{ эв}$ і $E_v + 0,48 \text{ эв}$). Утварэнне гэтых цэнтраў, якія праяўляюць устойлівасць да тэмператур $250 - 300^\circ \text{C}$, звязана з наяўнасцю астаткавых хімічных прымесей і ў першую чаргу кіслароду. Далейшы крок у высьвятленні прыроды назіраемых цэнтраў прылипания складаецца ў даследаванні зонных крышталяў крэмнію, спецыяльна легіраваных прымесямі, якія даюць глыбокія энергетычныя ўзроўні ў забароненай зоне.

Літаратура

1. Вавилов В. С., Плотников А. Ф. ФТТ, 3, 2455, 1961.
2. Вавилов В. С., Плотников А. Ф., Ткачев В. Д. ФТТ, 4, 3446, 1962.
3. Ткачев В. Д., Плотников А. Ф., Вавилов В. С. ФТТ, 5, 3188, 1963.
4. Crawford I. H. IEEE Trans. Nucl. Sci., 10, № 5, 1, 1955.
5. Плотников А. Ф., Вавилов В. С., Копыловский Б. Д. ПТЭ, № 3, 1962.
6. Hornbeck I. A., Hauns I. R. Phys. Rev., 97, 311, 1955.
7. Hauns I. R., Hornbeck I. A. Phys. Rev., 100, 606, 1955.
8. Ткачев В. Д., Плотников А. Ф., Вавилов В. С. ФТТ, 5, 1826, 1963.
9. Плотников А. Ф., Ткачев В. Д., Вавилов В. С. ФТТ, 4, 3575, 1962.

Резюме

В работе методом исследования примесной фотопроводимости изучается захват неосновных носителей центрами прилипания в монокристаллах кремния *n*-типа, облученных различными интегральными потоками быстрых электронов или быстрых нейтронов. Исследовался кремний, полученный в кварцевых тиглях и методом бестигельной зонной плавки в вакууме. Исходное удельное сопротивление материала составляло от 7 до $1100 \text{ ом} \cdot \text{см}$. В кристаллах кремния, содержащих кислород в концентрации $10^{16} - 10^{18} \text{ см}^{-3}$, обнаружено длинноволновое оптическое гашение фотопроводимости, обусловленное вводимыми как при нейтронном, так и при электронном облучении центрами прилипания для дырок.

Исследование процессов гашения в кристаллах с различным исходным сопротивлением показывает, что эффективность образования центров прилипания $E_v + 0,34 \text{ эв}$, $E_v + 0,39 \text{ эв}$ и $E_v + 0,48 \text{ эв}$ сильно зависит от концентрации остаточных химических примесей, имеющих глубокие энергетические уровни в запрещенной зоне.

Длинноволновая граница на спектрах гашения фотопроводимости расположена в области $3,6 \text{ мк}$ и связана с рекомбинацией дырок, освобождаемых из центров прилипания $E_0 + 0,34 \text{ эв}$, с электронами зоны проводимости. Коротковолновая граница расположена в области $1,6 \text{ мк}$ и обусловлена, очевидно, биполярным возбуждением путем двойных оптических переходов через центр прилипания $E_0 + 0,34 \text{ эв}$. Применение постоянных коротковолновых подсветок различной интенсивности позволило определить концентрацию вводимых центров прилипания, которая зависит от содержания остаточных примесей. Так, для образцов с $\rho = 100 \text{ ом} \cdot \text{см}$ концентрация центров $E_0 + 0,34 \text{ эв}$ равна $8 \cdot 10^{10} \text{ см}^{-3}$, а центров $E_0 + 0,48 \text{ эв}$ — $5 \cdot 10^{11} \text{ см}^{-3}$. Измерена зависимость эффективности образования центров прилипания от дозы облучения. С увеличением дозы концентрация центров прилипания увеличивается, достигая постоянного значения.

В высокоомных кристаллах, полученных методом бестигельной зонной плавки, эффекты гашения не наблюдались, что подтверждает предположение о том, что образование центров прилипания связано с наличием остаточных примесей.

Белорусский государственный университет
им. В. И. Ленина

* Поступило в редакцию 24.11 1966

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

Ф. И. ФЕДОРОВ

**РЕКУРРЕНТНАЯ ФОРМУЛА ДЛЯ ПРОИЗВЕДЕНИЙ
 МАТРИЦ ДИРАКА**

Будем обозначать греческими индексами α, β пять матриц Дирака: γ_α ($\alpha = 1, 2, 3, 4, 5$), $\gamma_5 = \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 \gamma_4$

$$\gamma_\alpha \gamma_\beta + \gamma_\beta \gamma_\alpha = 2\delta_{\alpha\beta}. \quad (1)$$

Нетрудно убедиться в справедливости общего соотношения

$$\gamma_\alpha \gamma_\beta \gamma_\sigma = \delta_{\alpha\beta} \gamma_\sigma - \delta_{\alpha\sigma} \gamma_\beta + \delta_{\beta\sigma} \gamma_\alpha - \frac{1}{2} \varepsilon_{\alpha\beta\sigma\mu\nu} \gamma_\mu \gamma_\nu, \quad (2)$$

где $\varepsilon_{\alpha\beta\sigma\mu\nu}$ — пятимерный символ Леви — Чивита. Заметим, что аналогичного соотношения не существует для четырех матриц γ_k ($k = 1, 2, 3, 4$). Умножая (2) на γ_ρ и применяя к последнему члену эту же формулу, получим

$$\begin{aligned} \gamma_\alpha \gamma_\beta \gamma_\sigma \gamma_\rho = & \varepsilon_{\alpha\beta\sigma\rho\nu} \gamma_\nu + \delta_{\alpha\beta} \gamma_\sigma \gamma_\rho - \delta_{\alpha\sigma} \gamma_\beta \gamma_\rho + \\ & + \delta_{\alpha\rho} (\delta_{\beta\sigma} + \gamma_\beta \gamma_\sigma) + \delta_{\beta\rho} (\delta_{\sigma\alpha} + \gamma_\sigma \gamma_\alpha) + \delta_{\sigma\rho} (\delta_{\alpha\beta} + \gamma_\alpha \gamma_\beta). \end{aligned} \quad (3)$$

При этом мы использовали (1) и соотношение

$$\varepsilon_{\alpha\beta\sigma\mu\nu} \varepsilon_{\rho\kappa\tau\mu\nu} = 2 \begin{vmatrix} \delta_{\alpha\rho} & \delta_{\alpha\kappa} & \delta_{\alpha\tau} \\ \delta_{\beta\rho} & \delta_{\beta\kappa} & \delta_{\beta\tau} \\ \delta_{\sigma\rho} & \delta_{\sigma\kappa} & \delta_{\sigma\tau} \end{vmatrix}. \quad (4)$$

Ясно, что формула (2) имеет рекуррентный характер и с ее помощью можно выразить произведение любого числа матриц Дирака через $\delta_{\alpha\beta}$, γ_α и $\gamma_\alpha \gamma_\beta$.

Формула (2) удобна также для вычисления следов от произведений матриц Дирака [1—3]. Введем обозначение

$$\text{Sp}(\gamma_{a_1} \gamma_{a_2} \dots \gamma_{a_n}) = 4T_{a_1 a_2 \dots a_n}. \quad (5)$$

Умножая (2) справа на любое число матриц γ_α и взяв след, получим рекуррентную формулу

$$\begin{aligned} T_{a_1 a_2 a_3 \dots a_n} = & \delta_{a_1 a_2} T_{a_2 a_4 a_5 \dots a_n} - \delta_{a_1 a_3} T_{a_2 a_4 a_5 \dots a_n} + \\ & + \delta_{a_2 a_3} T_{a_1 a_4 a_5 \dots a_n} - \frac{1}{2} \varepsilon_{a_1 a_2 a_3 \sigma\tau} T_{\sigma\tau a_4 a_5 \dots a_n}. \end{aligned} \quad (6)$$

С ее помощью след от произведения n матриц выражается через следы от произведений $n-1$ и $n-2$ матриц.

Согласно (1), $T_{a_1} = 0$, $T_{a_1 a_2} = \delta_{a_1 a_2}$. Формула (6) дает теперь $T_{a_1 a_2 a_3} = 0$ и

$$T_{a_1 a_2 a_3 a_4} = \delta_{a_1 a_2} \delta_{a_3 a_4} - \delta_{a_1 a_3} \delta_{a_2 a_4} + \delta_{a_2 a_3} \delta_{a_1 a_4}. \quad (7)$$

Эти результаты совпадают с соответствующими формулами для произведений четырех матриц γ_k ($k = 1, 2, 3, 4$) (см., например, [3]). Однако для следа от произведения пяти матриц получим

$$T_{a_1 a_2 a_3 a_4 a_5} = -\frac{1}{2} \varepsilon_{a_1 a_2 a_3 \tau} T_{\sigma \tau a_4 a_5} = \varepsilon_{a_1 a_2 a_3 a_4 a_5}. \quad (8)$$

Для шести матриц имеем

$$\begin{aligned} T_{a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6} &= \delta_{a_1 a_2} T_{a_3 a_4 a_5 a_6} - \delta_{a_1 a_3} T_{a_2 a_4 a_5 a_6} + \\ &+ \delta_{a_2 a_3} T_{a_1 a_4 a_5 a_6} - \frac{1}{2} \varepsilon_{a_1 a_2 a_3 \tau} \varepsilon_{\sigma \tau a_4 a_5 a_6}. \end{aligned} \quad (9)$$

С учетом (4), (7) формула (9) принимает тот же вид, что и соответствующая формула для матриц γ_k ($k = 1, 2, 3, 4$) [3].

Отметим, что соотношение (2) может оказаться полезным и для других расчетов с матрицами Дирака.

Литература

1. Ciaianello E., Fubini R. Nuovo Cim., 9, 1218, 1952.
2. Половин Р. ЖЭТФ, 31, 449, 1956.
3. Ахиезер А. И., Берестецкий В. Б. Квантовая электродинамика. Физматгиз, 1959.

Институт физики
АН БССР

Поступило в редакцию 10.XI 1966

А. И. САКСОНОВ

ОТВЕТ НА ОДИН ВОПРОС Р. БРАУЭРА

Пусть G — конечная группа. Таблицей (обыкновенных) характеров группы G называется квадратная матрица $X = (\chi_\rho(i))$, $1 \leq \rho, i \leq k$, где $\chi_\rho(i)$ есть значение ρ -го неприводимого комплексного характера группы G на i -ом классе сопряженных элементов. Две таблицы характеров X и \tilde{X} называются изоморфными, если одна из них получается из другой перенумерацией строк и столбцов, т. е. если $\tilde{X} = PXQ$, где P и Q — некоторые матрицы-подстановки. Определенная с точностью до изоморфизма таблица характеров является важным инвариантом конечной группы, содержащим некоторую информацию о группе. Ряд вопросов, сформулированных Р. Брауэром в лекции [2], преследует цель выяснить объем этой информации. В частности, отмечая трудности, связанные с получением по таблице характеров информации о строении нормальных делителей группы G , Р. Брауэр ставит следующий вопрос ([2], вопрос 10). Дана таблица характеров группы G и множество классов сопряженных элементов группы G , которые составляют нормальный делитель N группы G . Можно ли решить, абелев или неабелев нормальный делитель N ?

В настоящей заметке мы даем отрицательный ответ на этот вопрос. Автоморфизмом таблицы характеров X группы G называется такая одновременная перестановка строк и столбцов матрицы X , которая не меняет X . Группа T автоморфизмов таблицы характеров изоморфна подгруппе (ее мы тоже будем обозначать через T) тех автоморфизмов кольца характеров группы G , которые индуцируют подстановки на множестве неприводимых характеров. Из результатов работы [4] следует, что T имеет индекс ≤ 2 в группе всех автоморфизмов кольца характеров и, если группа G не содержит центральных инволюций, то T совпадает с группой всех автоморфизмов кольца характеров группы G .

Любой автоморфизм таблицы характеров группы G естественным образом индуцирует подстановку на множестве нормальных делителей группы G , и легко видеть, что эта подстановка является сохраняющим индексы автоморфизмом структуры нормальных делителей группы G . При этом отображение f группы T в группу A всех сохраняющих индексы автоморфизмов структуры нормальных делителей группы G является гомоморфизмом.

Если $N \triangleleft G$, то через N^α обозначим образ N при автоморфизме $\alpha \in A$. Два нормальных делителя N_1 и N_2 группы G мы будем называть T -автоморфными, если существует такой $\tau \in T$, что $N_2 = N_1^{\tau(\nu)}$. Ответ на вопрос Р. Брауэра дает следующее

Предложение. Существует конечная группа G , содержащая два таких T -автоморфных нормальных делителя, что один из них абелев, а другой — неабелев.

Для произвольной конечной группы G обозначим через T_1 (соответственно через T_2) множество автоморфизмов таблицы характеров, ин-

дуцируемых автоморфизмами группы G (соответственно автоморфизмами поля характеров группы G над полем рациональных чисел). Очевидно, T_1 и T_2 — группы и $T \supseteq T_1 T_2$. Кроме того, T_2 лежит в центре группы $T_1 T_2$. Это вытекает из того, что T_2 абелева и элементы группы T_2 индуцируют отображение группы G на себя вида $x \rightarrow x^r$, где $x \in G$ и $(r, |G|) = 1$. Но такое отображение коммутирует со всяким автоморфизмом группы G .

Далее, как легко убедиться, $f(T_2)$ — единичная подгруппа группы A , т. е. любые два T_2 -автоморфных нормальных делителя группы G просто совпадают. Любые же два T_1 -автоморфных нормальных делителя группы G , разумеется, изоморфны. Поэтому, если мы хотим найти группу G с парой неизоморфных T -автоморфных нормальных делителей, то мы должны рассматривать группы, для которых имеет место собственное включение: $T \supsetneq T_1 T_2$. Отметим, что вопрос о существовании таких групп ставился (на другом языке) С. Д. Берманом [1, стр. 416]. Сейчас мы укажем серию групп довольно простого строения, удовлетворяющих требованию сформулированного выше предложения.

Экстраспециальной p -группой в смысле Ф. Холла — Г. Хигмэна [3] называется конечная p -группа, у которой центр, коммутант и подгруппа Фраттини совпадают и имеют простой порядок. Рассмотрим экстраспециальную p -группу $G_{p,n}$ порядка p^{2n+1} и экспоненты p ($p > 2$). Как известно, для каждой пары p, n существует, с точностью до изоморфизма, только одна такая группа. Она имеет p^{2n} линейных характеров, являющихся характерами факторгруппы по центру, и $p-1$ характеров степени p^n , алгебраически сопряженных относительно поля рациональных чисел и обращающихся в нуль на нецентральных классах группы $G_{p,n}$.

Из строения таблицы характеров группы $G_{p,n}$ вытекает, что группа T автоморфизмов таблицы характеров (которая в данном случае совпадает с группой всех автоморфизмов кольца характеров) имеет вид $T \cong GL(2n, p) \times Z_{p-1}$, где Z_{p-1} обозначает циклическую группу порядка $p-1$. Так как группа $GL(2n, p)$ действует транзитивно на множестве m -мерных линейных подпространств ($1 \leq m \leq 2n$), то группа $f(T)$ сохраняющих индексы автоморфизмов структуры нормальных делителей группы $G_{p,n}$ действует транзитивно на множестве изоордных нормальных делителей порядка p^{m+1} . Учитывая, что центр группы $G_{p,n}$ и единица группы образуют тривиальные области транзитивности, можно сказать, что любые два изоордных нормальных делителя группы $G_{p,n}$ T -автоморфны. Но при $n \geq 2$ уже среди нормальных делителей порядка p^3 имеются как абелевы, так и неабелевы. Более общо для любого l найдутся такие n и m , что группа $G_{p,n}$ будет содержать l попарно неизоморфных, но попарно T -автоморфных, т. е. равноправных с точки зрения таблицы характеров, нормальных делителей порядка p^m .

В заключение заметим, что построенный пример не исключает, вообще говоря, возможности того, что таблица характеров конечной группы содержит какую-то информацию о строении специальных нормальных делителей, например, членов производного ряда группы.

Литература

1. Берман С. Д. Матем. сборник (нов. серия), 44(86), 4, 409—456, 1958.
2. Вгауег R. Lectures on Modern Mathematics, 1, New York—London, 1963, 133—175.
3. Hall Ph. and Higman G. On the p -length of p -soluble groups, Proc. Lond. Math. Soc., 6, N 21, 1—42, 1956.
4. Саксонов А. И. Вестн АН БССР, сер. физ.-мат. наук, № 3, 1966.

Н. Н. СИРОТА, Э. А. ОВСЕИЧУК

СВЕРХПРОВОДЯЩИЕ СВОЙСТВА СПЛАВОВ ВАНАДИЯ И НИОБИЯ

В настоящей работе нами было исследовано изменение критических сверхпроводящих параметров твердых растворов ванадия и ниобия. Для исследования были выплавлены в дуговой электропечи сплавы ванадия и ниобия, составы которых брались через 10 ат. %. Металлографические исследования, измерение микротвердости и удельного электросопротивления показали, что ванадий и ниобий образуют непрерывный ряд твердых растворов. Исследованиями при низких температурах установлено, что все исследуемые сплавы являются сверхпроводниками. В таблице приведены значения критической температуры перехода в сверхпроводящее состояние сплавов ванадия и ниобия в зависимости от состава.

ат. %	V	10	20	30	40	50	60	70	80	90	Nb
T, °K	5,3	4,5	4,1	3,83	3,87	4,04	4,5	5,22	6	7	9,2

Ранее были исследованы лишь некоторые сплавы ванадия с ниобием [1].

Литература

1. Hulm J. K. and Blaughner R. D. Phys. Rev., 123, 1569, 1961.

И. П. ШАПИРО, Н. И. МАРЕНКО

ВЛИЯНИЕ ПРИМЕСЕЙ TlBr НА ПРОВОДИМОСТЬ И ФОТОПРОВОДИМОСТЬ СЕЛЕНА

Селен обычно имеет слишком высокое удельное сопротивление, чтобы использовать его для изготовления выпрямителей и фотоэлементов без добавления различных примесей. Большое количество исследований было проведено для определения зависимости электрических свойств селена от примесей галоида. Рентгеновский структурный анализ показал, что атомы галоида располагаются так, чтобы ограничить длину цепочек атомов селена [1].

Установлено, что небольшое процентное содержание различных примесей в селене имеет резко выраженное влияние на скорость кристаллизации. Опыты показывают, что примеси брома и хлора ускоряют процесс кристаллизации и, следовательно, влияют на величину образования монокристаллов [2].

В работе [3] было показано, что при малых концентрациях атомов таллия и хлористого таллия в селене резко уменьшается электропроводность и увеличивается фотопроводимость. При этом высказано предположение, что на электрические свойства селена влияет в основном катион таллия, подвижность которого при данных условиях опыта намного больше подвижности аниона хлора.

В данной работе приводятся результаты исследования по влиянию примеси бромистого таллия на электрические и фотоэлектрические свойства селена. Измерения проводились в чистом селене и в селене с примесями TlBr. Объектами для измерения фототока служили порошки, полученные после раздробления сплава селена с TlBr с последующей их кристаллизацией.

Фотопроводимость селена с примесью TlBr. Внутренний фотоэффект в селене и в селене с примесью бромистого таллия измерялся методом конденсатора [4]. При помощи установки, состоящей из кварцевого монохроматора, модулятора света, узкополосного усилителя с синхронным детектором [5], можно было измерить величину и знак заряда носителей в исследуемых образцах. Источником освещения служила кинолампа мощностью 500 вт. Распределение энергии в спектре лампы определялось при помощи бандлампы с цветовой температурой 2850°. Фотоэффект измерялся в порошке селена, который предварительно был переведен из аморфного в кристаллическое состояние. Составлены порошки селена с концентрациями в 0,04; 1 и 3 мол. %. От этих порошков были сняты кривые спектральной чувствительности. Результаты измерения приведены на рис. 1. Из кривых видно, что максимальное значение величины фототока меняется с концентрацией TlBr в селене. Величина фототока в максимуме растет с увеличением концентрации, достигая наибольшего значения при 1 мол. % TlBr. Аналогичные явления были обнаружены для концентрации TlCl в селене [3].

Проводимость селена с примесью ТlBr. Проводимость чистого селена и селена с примесью ТlBr определялась методом четырех-контактного измерения удельного электросопротивления с отсчетом падения напряжения между зондами электрометром СГ-2 М. Установка предусматривает возможность измерения проводимости в вакууме (10^{-5} мм рт. ст.) при разных температурах. Проводимость измерялась в селене с примесью ТlBr в цилиндрических образцах, которые предварительно были переведены из аморфного в кристаллическое состояние.

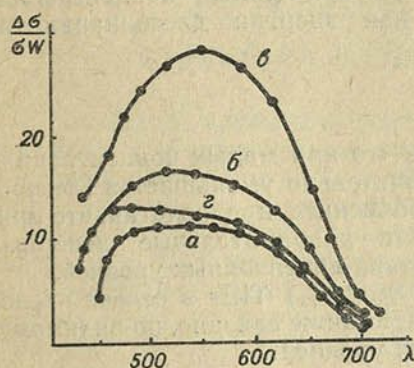


Рис. 1. Кривые спектральной чувствительности величины фототока для образцов селена с различной концентрацией ТlBr:

а — чистый селен; б — 0,04% ТlBr в селене; в — 1% ТlBr в селене; г — 3% ТlBr в селене

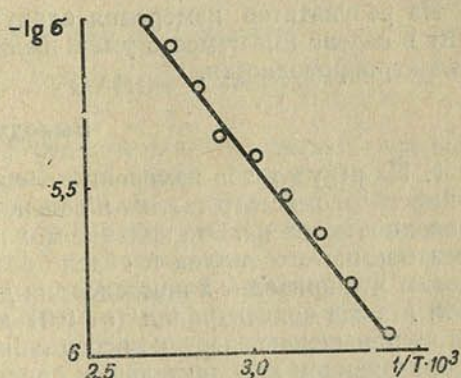


Рис. 2. Зависимость электропроводности кристаллического селена от температуры в координатах $\ln \sigma$ и $1/T$

Составлены образцы селена с концентрациями 0,01; 0,05; 0,5; 1; 3 и 5 мол. %. Результаты измерения сведены в таблицу.

Из данных опытов следует, что проводимость меняется с концентрацией ТlBr в селене. При сравнительно малых концентрациях примеси ТlBr (от 0,01 до 1%) наблюдается уменьшение электропроводности селена, а при дальнейшем увеличении концентрации — увеличение электро-

Проводимость и энергия диссоциации селена в зависимости от концентрации ТlBr

Содержание ТlBr в Se, %	0	0,01	0,05	0,5	1	3	5
σ , (ом·см) ⁻¹	$0,9 \cdot 10^6$	$15,7 \cdot 10^6$	$29,5 \cdot 10^6$	$60,9 \cdot 10^6$	$196,6 \cdot 10^6$	$98,3 \cdot 10^6$	$47,6 \cdot 10^6$
Энергия диссоциации, эв	0,50	0,26	0,26	0,26	0,20	0,33	—

проводности. Примесь ТlBr к селену изменяет характер проводимости селена так же, как и примесь ТlCl. Таким образом, можно утверждать, что на характер проводимости селена имеют влияние в основном катионы таллия, подвижность которых намного больше подвижностей анионов Br и Cl. Исследование по определению температурной зависимости электропроводности σ чистого селена и селена с примесью бромистого таллия характеризуется следующими опытными данными: для чистого селена σ подчиняется, как и следовало ожидать, закону Вант-Гоффа $\sigma = A \exp\left(-\frac{\Delta E}{2kT}\right)$, где A — константа; k — постоянная Больцмана; T — абсолютная температура; E — энергия диссоциации (рис. 2). Из прямой

$\ln \sigma = f\left(\frac{1}{T}\right)$ была определена энергия диссоциации, которая оказалась равной 0,5 эв для чистого селена. В интервале температур от 20 до 100° С была получена зависимость $\ln \sigma = f\left(\frac{1}{T}\right)$ для образцов с концентрацией 0,01; 0,05; 0,5; 1; 3% ТlBr в селене. По данным опыта были определены средние значения энергии диссоциации. Результаты вычисления сведены в таблицу.

Из результатов измерения следует, что при малых концентрациях ТlBr в селене имеет место уменьшение как энергии диссоциации, так и электропроводности.

Выводы

1. Из результатов измерений следует, что при малых концентрациях примесей бромистого таллия в селене значительно уменьшается электропроводность селена. Это явление можно объяснить, предполагая, что примеси бромистого таллия в селене создают дополнительные донорные уровни, что приводит к компенсации действия акцепторных уровней.

2. Малые концентрации (от 0,01 до 1 мол. %) ТlBr в селене приводят к уменьшению энергии диссоциации, что также связано, по-видимому, с образованием дополнительных донорных уровней.

3. Примесь бромистого таллия к селену изменяет характер проводимости селена так же, как и примесь хлористого таллия. По-видимому, на характер проводимости селена имеют влияние в основном катионы таллия, подвижность которых намного больше подвижности анионов брома и хлора.

4. При малых концентрациях бромистого таллия в селене (от 0,01 до 1 мол. %) имеет место увеличение фотопроводимости селена. Дальнейшее же увеличение его концентрации приводит к уменьшению фотопроводимости селена.

Литература

1. Clark Peach. Trans. Am. Electrochem. Soc., 79, 355, 1941.
2. Anonymous JIOA Report, 56, 76, 1946.
3. Шапиро И. П. Физика твердого тела, 1, вып. 2, 1959.
4. Пуцейко Е. К. Изв. АН СССР, сер. физ., т. XVI, 1, 1952.
5. Ным У. Х., Уйбо Л. Я. Труды Ин-та физики и астрономии АН ЭССР, № 4, 1956.

Белорусский государственный университет
им. В. И. Ленина

Поступило в редакцию 21.I 1966

В. И. БЕЛОУСОВА, Э. А. РУДАК, Е. И. ФИРСОВ

СТРУКТУРА НИЖНИХ УРОВНЕЙ ЯДРА Cd¹¹⁵

В последнее время для описания свойств нижних уровней сферических ядер с нечетным массовым числом A часто используется модель, в которой рассматривается движение валентного нуклона в потенциальном поле, создаваемом нуклонами четно-четного остова. При этом четно-четный остов может находиться как в основном, так и в возбужденных состояниях. В общем виде теория этой модели рассмотрена Де-Шалитом в работе [1]. Взаимодействие между валентным нуклоном и четно-четным остовом предполагается скалярным и имеет вид произведения тензоров ранга k :

$$H_{вз} = \sum_k T_o^{(k)} \times T_n^{(k)},$$

где $T_o^{(k)}$ и $T_n^{(k)}$ — операторы, действующие на переменные остова и валентного нуклона соответственно. Характер возбужденных состояний четно-четного остова при таком рассмотрении не уточняется. Более определенный характер носит модель, в которой возбужденные состояния четно-четного остова предполагаются квадрупольными вибрационными. Вид оператора взаимодействия валентного нуклона с поверхностью ядра в этом случае хорошо известен [2]. Матричные элементы этого оператора легко вычисляются и зависят только от одного параметра ξ , определяющего величину связи валентного нуклона с поверхностью ядра.

В настоящей работе данная модель применяется для описания свойств нижних уровней ядра Cd¹¹⁵. Соответствующие расчеты проводились в приближении промежуточной связи с учетом вибрационных состояний остова с числом фононов N до 3 включительно [3].

Гамильтониан ядра можно представить в виде

$$H = H_o + H_n + H_{вз},$$

где H_o — гамильтониан, описывающий возбуждение вибрационных состояний остова; H_n — гамильтониан, описывающий движение валентного нейтрона, и $H_{вз}$ — оператор взаимодействия валентного нейтрона с поверхностью ядра. Волновые функции данного гамильтониана можно выразить через базисные волновые функции гамильтониана $H^0 = H_o + H_n$:

$$\psi(I) = \sum C_{jNR} |j; NR; IM\rangle,$$

где j — одночастичный момент валентного нейтрона; N — число фононов; R — угловой момент остова; I — полный момент ядра и M — его проекция. В настоящем случае учитывались одночастичные $s_{1/2}$ - и $d_{3/2}$ -состояния валентного нейтрона.

В результате разложения можно получить систему однородных уравнений

$$(Nh\omega + E_j - E) + \sum C_{j'N'R'} \langle j; NR; IM | H_{вз} | j'; N'R'; IM \rangle = 0.$$

З М Е С Т

Василий Феофилович Купревич (К 70-летию со дня рождения) 5

МАТЭМАТЫКА

А. Г. Горелик. О геометрической интерпретации одной трехзначной алгебры	9
Н. А. Лепешинский. О классификации $2 \times n$ задач Джонсона — Беллмана	18
А. К. Лапковский. О строении гиперповерхности псевдоевклидова пространства	22
А. П. Рябушко. Некоторые центрально-симметрические космологические решения уравнений Эйнштейна	30
М. А. Шешко. Об общей краевой задаче линейного сопряжения для системы n пар функций	37
С. Ф. Ильюкевич. Дифракция наклонно падающей плоской электромагнитной волны на двух непроводящих круговых цилиндрах	47
А. А. Пальцев. Квадратурные правила с наперед заданными узлами для вычисления интеграла $\int_0^1 x^\alpha \lg \frac{e}{x} f(x) dx$	57

Л. А. Янович. Приближение периодических аналитических функций тригонометрическими многочленами и рациональными тригонометрическими функциями. I	64
А. Х. Турецкий, Г. Н. Торопова. Оценка приближения функций, удовлетворяющих условию Липшица, интерполяционной формулой Фейера — Эрмита	76

ФІЗІКА

Л. И. Комаров, Т. С. Романова, Ф. И. Федоров. О поляризации вакуума в квантовой электродинамике	93
Ф. И. Федоров, Е. Е. Тхарев. О конечных преобразованиях представлений группы вращений	101
Т. Г. Быстрова, Ф. И. Федоров. Расчет температуры Дебая для кристаллов произвольной симметрии	104
Л. А. Барысаглебскі, В. Ф. Трусаў. Да тэорыі вуглавой карэляцыі пры ўнутранай канверсіі на вышэйшых абалонках атама	111
Л. Ф. Ільющэнка, Л. П. Касцюк-Кульгаўчук. Даследаванне магчымасці зніжэння каэфіцыента прамавугольнасці пятлі гістэрэзісу электраасаджаных жалеза-нікелевых плёнак. I	114
В. Д. Ткачоў, П. Ф. Лугакоў. Цэнтры прыліпання і аптычнае гашэнне фотаправадзімасці ў крэмніі, які мае парушэнні структуры	120

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

Ф. И. Федоров. Рекуррентная формула для произведений матриц Дирака	127
А. И. Саксонов. Ответ на один вопрос Р. Брауэра	129
Н. Н. Сирота, Э. А. Овсейчук. Сверхпроводящие свойства сплавов ванадия и ниобия	131
И. П. Шапиро, Н. И. Маренко. Влияние примесей TlVg на проводимость и фотопроводимость селена	132
В. И. Белоусова, Э. А. Рудак, Е. И. Фирсов. Структура нижних уровней ядра Cd^{115}	135

СОДЕРЖАНИЕ

Василий Феофилович Купревич (К 70-летию со дня рождения)	5
МАТЕМАТИКА	
А. Г. Горелик. О геометрической интерпретации одной трехзначной алгебры . . .	9
Н. А. Лепешинский. О классификации $2 \times n$ задач Джонсона—Беллмана . . .	18
А. К. Лапковский. О строении гиперповерхности псевдоевклидова пространства	22
А. П. Рябушко. Некоторые центрально-симметрические космологические ре- шения уравнений Эйнштейна	30
М. А. Шешко. Об общей краевой задаче линейного сопряжения для системы n пар функций	37
С. Ф. Ильюкевич. Дифракция наклонно падающей плоской электромагнитной волны на двух непроводящих круговых цилиндрах	47
А. А. Пальцев. Квадратурные правила с наперед заданными узлами для вычисления интеграла $\int_0^1 x^a \lg \frac{e}{x} f(x) dx$	57
Л. А. Янович. Приближение периодических аналитических функций тригоно- метрическими многочленами и рациональными тригонометрическими функциями. I	64
А. Х. Турецкий, Г. Н. Торопова. Оценка приближения функций, удовлетворяю- щих условию Липшица, интерполяционной формулой Фейера—Эрмита	76
ФИЗИКА	
Л. И. Комаров, Т. С. Романова, Ф. И. Федоров. О поляризации вакуума в квантовой электродинамике	93
Ф. И. Федоров, Е. Е. Тхарев. О конечных преобразованиях представлений группы вращений	101
Т. Г. Быстрова, Ф. И. Федоров. Расчет температуры Дебая для кристаллов произвольной симметрии	104
Л. А. Борисоглебский, В. Ф. Трусов. К теории угловой корреляции при внут- ренней конверсии на высших оболочках атома	111
Л. Ф. Ильюшенко, Л. П. Костюк-Кульгавчук. Исследование возможности сни- жения коэрцитивной силы и повышения коэффициента прямоугольности петли ги- стерезиса электроосажденных железо-никелевых пленок. I	114
В. Д. Ткачев, П. Ф. Лугаков. Центры прилипания и оптическое гашение фо- топроводимости в кремнии, содержащем нарушения структуры	120
КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ	
Ф. И. Федоров. Рекуррентная формула для произведений матриц Дирака . . .	127
А. И. Саксонов. Ответ на один вопрос Р. Брауэра	129
Н. Н. Сирота, Э. А. Овсейчук. Сверхпроводящие свойства сплавов ванадия и ниобия	131
И. П. Шапиро, Н. И. Маренко. Влияние примесей TiVg на проводимость и фотопроводимость селена	132
В. И. Белорусова, Э. А. Рудак, Е. И. Фирсов. Структура нижних уровней ядра Cd^{115}	135

АТ 16053. Здана ў набор 12/1-67 г. Падпісана да друку 22/11-67 г. Фармац 70×108^{1/16}.
Фіз. друк. арк. 8,75. Ум. друк. арк. 12,25. Уч.-выд. арк. 12,0. Выд. заказ 282.
Друк. заказ 95. Цана 60 к.

Друкарня выдавецтва «Навука і тэхніка» АН БССР і Камітэта па Друку пры Савеце
Міністраў БССР. Мінск, Ленінскі праспект, 68.

В ИЗДАТЕЛЬСТВЕ „ НАУКА И ТЕХНИКА“

Готовится к печати

КРЫЛОВ В. И., СКОБЛЯ Н. С.

**СПРАВОЧНАЯ КНИГА ПО ЧИСЛЕННОМУ ОБРАЩЕНИЮ
ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛАПЛАСА**

20 л. На русском языке. 3000 экз. Цена 1 р. 35 к.

Применение преобразования Лапласа к решению научных и технических задач часто затрудняется большим объемом и сложностью расчетов, которые необходимо проделать для обращения этого преобразования и для доведения результатов до численных значений.

В книге дается изложение большинства методов вычислений, которые были предложены за последние десятилетия. В ней содержится достаточно полный перечень необходимых формул и изложены правила расчетов. Кроме того, даны все необходимые для расчетов вспомогательные численные таблицы.

Книга предназначена для работников научных и инженерно-технических институтов. Она будет также полезным пособием для работников вычислительных центров и конструкторских бюро.

Книгу можно заказать предварительно во всех магазинах Книготорга и потребительской кооперации республики, а также в магазинах «Академкнига».

Для получения книги почтой заказы направлять по адресу: г. Минск, Железнодорожная улица, 27, Республиканский магазин «Книга—почтой» или г. Москва, К-12, Б. Черкасский переулок, 2/10, контора «Академкнига», отдел «Книга—почтой».

Книготоргующие и другие организации направляют заказы Управлению книжной торговли Комитета по печати при Совете Министров БССР.

В ИЗДАТЕЛЬСТВЕ „НАУКА И ТЕХНИКА“

Готовится к печати

БОРИСЕВИЧ Н. А.

**СПЕКТРОСКОПИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ
ВОЗБУЖДЕННЫХ СОСТОЯНИЙ
МНОГОАТОМНЫХ МОЛЕКУЛ В ГАЗОВОЙ ФАЗЕ**

20 л. На русском языке. 2000 экз. Цена 1 р. 35 к.

В монографии изложены результаты теоретических и экспериментальных исследований по изучению свойств возбужденных электронных состояний многоатомных молекул, а также по изучению устойчивости этих состояний в зависимости от запаса колебательной энергии и по отношению к столкновениям с другими молекулами. Основное внимание обращено на исследования спектрально-люминесцентных характеристик в газовой фазе, позволяющих получить более богатую информацию о свойствах возбужденных молекул.

Подробно описывается методика спектрально-люминесцентных исследований молекул в газовой фазе.

Книга представляет интерес для физиков и химиков, занимающихся спектроскопией молекул и механизмом термических и фотохимических реакций в парах и газах.

Книгу можно заказать предварительно во всех магазинах Книготорга и потребительской кооперации республики, а также в магазинах «Академкнига».

Для получения книги почтой заказы направлять по адресу: г. Минск, Железнодорожная улица, 27, Республиканский магазин «Книга—почтой» или г. Москва, К-12, Б. Черкасский переулок, 2/10, контора «Академкнига», отдел «Книга—почтой».

Книготоргующие и другие организации направляют заказы Управлению книжной торговли Комитета по печати при Совете Министров БССР.

ВНИМАНИЮ АВТОРОВ

Статьи, присылаемые авторами в наш журнал, будут приниматься редакцией к печати только при наличии трех экземпляров автореферата, удовлетворяющего указанным ниже требованиям.

ИНСТРУКЦИЯ

по составлению рефератов для авторов
отечественных периодических изданий

Постановлением Совета Министров СССР от 18/IV 1959 г. № 418 и последующим решением Государственного комитета по координации научно-исследовательских работ СССР и Президиума Академии наук СССР редакции научных и научно-технических журналов обязаны представлять в ВИНТИ рефераты публикуемых материалов.

В настоящей инструкции сформулированы требования к содержанию и оформлению рефератов, которыми и следует руководствоваться.

Требования, предъявляемые к реферату

1. В реферате кратко излагается основное содержание статьи. Реферат должен дать читателю представление о характере освещаемой работы, оригинальности постановки вопроса, методике проведения исследования и его основных результатах.

2. Реферату должно предшествовать библиографическое описание в следующем виде: название статьи, фамилия и инициалы автора, название журнала, где помещается статья. Текст реферата начинается непосредственно с изложения существа работы без повторения заголовка. Форма изложения материала не обязательно должна повторять форму изложения оригинальной статьи.

3. Если оригинал содержит большое количество цифровых данных, их следует обобщить и систематизировать.

4. Средний объем реферата 0,5—2 страницы машинописного текста, отпечатанного через два интервала на белой писчей бумаге обычного формата (30×21) в двух экземплярах с полем 4 см с левой стороны.

5. Таблицы, схемы, графики и пр. могут быть включены в том случае, если они отражают основное содержание работы или сокращают текст реферата. Сообщение о наличии в реферируемой работе таблиц, схем, графиков, фотографий, карт, рисунков необходимо давать в конце реферата. Например, табл. 2, илл. 10.

6. Формулы приводятся только в том случае, если они необходимы для понимания статьи. Громоздкие математические выражения помещать не следует. Формулы следует вписывать четко, не изменяя принятых в оригинале обозначений величин. Формулы и буквенные обозначения вписываются черными чернилами во все экземпляры.

7. В конце реферата в квадратных скобках указывается название учреждения или предприятия, в которых автор реферируемой работы (если эти данные приводятся в статье) провел работу. Подпись автора и дату написания реферата следует ставить в левом нижнем углу на обоих экземплярах реферата.

26785-105

60 к.



В издательстве

„НАУКА И ТЕХНИКА“

ГОТОВИТСЯ К ПЕЧАТИ

КРЫЛОВ В. И., КРУГЛИКОВА Л. Г.
**СПРАВОЧНАЯ КНИГА
ПО ЧИСЛЕННОМУ ГАРМОНИЧЕСКОМУ АНАЛИЗУ**

15 л. На русском языке. 3000 экз. Цена 1 р. 5 к.

Цель данной книги — дать практическое изложение современного состояния численного гармонического анализа и собрать все необходимые сведения по теории, а также правила вычислений и вспомогательные таблицы, которые могут потребоваться при расчетах. В книге изложены правила вычисления коэффициента Фурье для классов функций, наиболее часто встречающихся в приложениях. Большая ее часть посвящена более трудной задаче вычисления интегралов Фурье. Кроме того, даны вспомогательные математические таблицы, облегчающие эти вычисления.

Книга предназначена для работников научных и инженерно-технических институтов. Она будет также полезным пособием для работников вычислительных центров и конструкторских бюро.

КНИГУ МОЖНО ЗАКАЗАТЬ ПРЕДВАРИТЕЛЬНО ВО ВСЕХ МАГАЗИНАХ КНИГОТОРГА И ПОТРЕБИТЕЛЬСКОЙ КООПЕРАЦИИ РЕСПУБЛИКИ, А ТАКЖЕ В МАГАЗИНАХ «АКАДЕМКНИГА».

ДЛЯ ПОЛУЧЕНИЯ КНИГИ ПОЧТОЙ ЗАКАЗЫ НАПРАВЛЯТЬ
ПО АДРЕСУ:

г. Минск, Железнодорожная улица, 27, Республиканский магазин «Книга — почтой» или г. Москва, К-12, Б. Черкасский переулок, 2/10, контора «Академкнига», отдел «Книга — почтой».

Книготоргующие и другие организации направляют заказы
Управлению книжной торговли Комитета по печати
при Совете Министров БССР