ВЕСЦІ
АКАДЭМІІ НАВУК БССР

СЕРЫЯ
ФІЗІКА-МАТЭМАТЫЧНЫХ
НАВУК

2

ВЫДАВЕЦТВА „НАВУКА І ТЭХНІКА“

МІНСК 1967

НАВУКА
і
ТЭХНІКА

ИЗВЕСТИЯ
АКАДЕМИИ НАУК БССР

СЕРИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ
НАУК

№ 2

ИЗДАТЕЛЬСТВО „НАУКА И ТЕХНИКА"

МИНСК 1967

ВЕСЦІ

АКАДЭМІІ НАВУК БССР

СЕРЫЯ
ФІЗІКА-МАТЭМАТЫЧНЫХ
НАВУК

№ 2

ВЫДАВЕЦТВА „НАВУКА І ТЭХНІКА"

МІНСК 1967

ВЕСЦІ АКАДЭМІІ НАВУК БЕЛАРУСКАЙ ССР № 2 1967
СЕРЫЯ ФІЗІКА-МАТЭМАТЫЧНЫХ НАВУК

УДК 518:517.91/94

П. И. МОНАСТЫРНЫЙ

МЕТОД ОРТОГОНАЛЬНОЙ ПРОГОНКИ РЕШЕНИЯ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ С НЕРАЗДЕЛЕННЫМИ УСЛОВИЯМИ ДЛЯ СИСТЕМЫ ДВУХ УРАВНЕНИЙ

В [1, 2] С. К. Годуновым был предложен метод ортогонализации для решения системы разностных уравнений, заменяющих соответствующую краевую задачу системы линейных дифференциальных уравнений первого порядка. Одновременно А. А. Абрамов [3, 4] и несколько позже К. Моцинский [5] развили для решения подобных задач методы дифференциальной прогонки. В [6—9] рассматривались различные методы дифференциальной и ортогональной прогонки решения краевых и многоточечных задач с разделенными условиями для дифференциальных уравнений высших порядков и систем линейных дифференциальных уравнений первого порядка.

Настоящая работа служит продолжением [8] и посвящена распространению метода ортогональной прогонки на краевые задачи с неразделенными условиями для системы двух дифференциальных уравнений.

Пусть для $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$ нужно найти функции $y_1(t)$, $y_2(t)$ — решение системы уравнений

$$\begin{aligned} y_1'(t) &= p_{11}(t)\,y_1(t) + p_{12}(t)\,y_2(t) + f_1(t), \\ y_2'(t) &= p_{21}(t)y_1(t) + p_{22}(t)\,y_2(t) + f_2(t), \end{aligned} \tag{1}$$

удовлетворяющее граничным условиям такого вида:

$$a_{11}y_1(\alpha) + a_{12}y_2(\alpha) + b_{11}y_1(\beta) + b_{12}y_2(\beta) = A_1, \tag{2}$$

$$a_{21}y_1(\alpha) + a_{22}y_2(\alpha) + b_{21}y_1(\beta) + b_{22}y_2(\beta) = A_2. \tag{3}$$

Будем предполагать, что функции $p_{ij}(t)(i,\ j = 1,\ 2)$, $f_1(t)$, $f_2(t)$ непрерывны на $[\alpha,\ \beta]$, матрица $\begin{pmatrix} a_{11}a_{12} & b_{11}b_{12} \\ a_{21}a_{22} & b_{21}b_{22} \end{pmatrix}$ имеет ранг, равный двум, решение задачи (1) — (3) существует и единственно.

Рассматриваемый метод основан на построении вспомогательной системы дифференциальных уравнений (см. [5]) и применении к ней метода ортогональной прогонки, предложенного автором [8].

Введем замену

$$\begin{aligned} y_1(\alpha + \beta - t) &= y_3(t), \\ y_2(\alpha + \beta - t) &= y_4(t), \end{aligned} \tag{4}$$

где $y_1(t)$, $y_2(t)$ — искомое решение задачи (1) — (3).

Используя (1) и (4), можно для функций $y_3(t)$ и $y_4(t)$ записать следующую систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} y_3'(t) &= -p_{11}(\alpha+\beta-t)\,y_3(t) - p_{12}(\alpha+\beta-t)\,y_4(t) - f_1(\alpha+\beta-t), \\ y_4'(t) &= -p_{21}(\alpha+\beta-t)\,y_3(t) - p_{22}(\alpha+\beta-t)\,y_4(t) - f_2(\alpha+\beta-t). \end{aligned} \tag{5}$$

Обозначим:

$$\mathbf{y}(t) = \begin{Vmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \\ y_4(t) \end{Vmatrix},\quad P(t) = \begin{bmatrix} p_{11}(t) & p_{12}(t) & 0 & 0 \\ p_{21}(t) & p_{22}(t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_{33}(t) & p_{34}(t) \\ 0 & 0 & p_{43}(t) & p_{44}(t) \end{bmatrix},\quad \mathbf{f}(t) = \begin{Vmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ f_3(t) \\ f_4(t) \end{Vmatrix},$$

где

$$\begin{aligned} p_{2+i,\,2+j}(t) &= -p_{ij}(\alpha+\beta-t), \\ f_{2+i}(t) &= -f_i(\alpha+\beta-t) \quad (i,\ j = 1,\ 2). \end{aligned} \tag{6}$$

Тогда системы (1) и (5) можно записать одной формулой

$$\mathbf{y}'(t) = P(t)\,\mathbf{y}(t) + \mathbf{f}(t), \tag{7}$$

а граничные условия (2), (3) в виде

$$(\mathbf{a}_1,\ \mathbf{y}(\alpha)) = A_1, \tag{8}$$

$$(\mathbf{a}_2,\ \mathbf{y}(\alpha)) = A_2, \tag{9}$$

где

$$\mathbf{a}_i = (a_{i1},\ a_{i2},\ b_{i1},\ b_{i2}) \quad (i = 1,\ 2).$$

Для того чтобы решение системы дифференциальных уравнений (7) было определено, к условиям (8) и (9) надо еще присоединить следующие условия, вытекающие из соотношений (4):

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_1(\alpha) &= \mathbf{y}_2(\beta), \\ \mathbf{y}_1(\beta) &= \mathbf{y}_2(\alpha). \end{aligned} \tag{10}$$

Здесь

$$\mathbf{y}_1(t) = (y_1(t),\ y_2(t))', \quad \mathbf{y}_2(t) = (y_3(t),\ y_4(t))'.$$

Таким образом, мы получили граничную задачу (7) — (10), эквивалентную граничной задаче (1) — (3). Специальный вид граничных условий (8), (9) позволяет, используя ортогональные преобразования, привести систему (7) к частично диагональному виду. Ниже всюду обозначения и формулы будут такими же, как в работе [8].

Пусть

$$\mathbf{y}(t) = B(t)\,\mathbf{R}(t), \tag{11}$$

где

$$B(t) = \begin{pmatrix} \omega_1(t), & -\omega_2(t), & \omega_3(t), & -\omega_4(t) \\ \omega_2(t), & \omega_1(t), & \omega_4(t), & \omega_3(t) \\ \omega_3(t), & \omega_4(t), & -\omega_1(t), & -\omega_2(t) \\ \omega_4(t), & -\omega_3(t), & -\omega_2(t), & \omega_1(t) \end{pmatrix};$$

$$\omega_s(t) = \sin\alpha_s(t)\prod_{k=1}^{s-1}\cos\alpha_k(t);\quad \alpha_4(t) \equiv \frac{\pi}{2};\ s = 1,\ 2,\ 3,\ 4;$$

$$\mathbf{R}(t) = (r_1(t),\ r_2(t),\ r_3(t),\ r_4(t))';$$

$_k(t)$ — неизвестные вспомогательные функции, а $r_s(t)$ $(s=1, 2, 3, 4)$ — основные неизвестные функции. Для функций $r_s(t)$ на основе (7) и (11) можно записать систему уравнений

$$\mathbf{R}'(t)=\Psi(t)\mathbf{R}(t)+\vec{\psi}(t), \tag{12}$$

где

$$\Psi(t)=\left(\psi_{ij}(t)\right), \quad \psi_{ij}(t)=\sigma_{ij}(t)-\varphi'_{ij}(t), \quad \sigma_{ij}(t)=\left(\mathbf{t}_i(t), \vec{\rho}_j(t)\right);$$

$$\varphi'_{ij}(t)=\left(\vec{\rho}_i(t), \vec{\rho}'_j(t)\right), \quad \mathbf{t}_i(t)=\left(\tau_{i1}(t), \tau_{i2}(t), \tau_{i3}(t), \tau_{i4}(t)\right);$$

$$\tau_{ij}(t)=\left(\vec{\rho}_i(t), \mathbf{p}_j(t)\right), \quad \mathbf{p}_j(t)=\left(p_{ij}(t), p_{2j}(t), p_{3j}(t), p_{4j}(t)\right);$$

$\vec{\rho}_i(t)$ — вектор-строки матрицы, транспонированной к $B(t)$;

$$\vec{\psi}(t)=\left(\psi_1(t), \psi_2(t), \psi_3(t), \psi_4(t)\right)', \quad \psi_i(t)=\left(\vec{\rho}_i(t), \mathbf{f}(t)\right)$$
$$(i, j=1, 2, 3, 4).$$

Полученную систему четырех уравнений (12) можно свести к системе трех дифференциальных уравнений путем решения задачи Коши для системы уравнений

$$\begin{gathered}\varphi'_{12}(t)-\sigma_{12}(t)=0,\\ \varphi'_{13}(t)-\sigma_{13}(t)=0\end{gathered} \tag{13}$$

с начальными условиями для функций $\alpha_1(t)$, $\alpha_2(t)$, $\alpha_3(t)$, определяемыми из равенства

$$\vec{\rho}_1(\alpha)=\frac{\mathbf{a}_1}{|\mathbf{a}|}, \tag{14}$$

где

$$|\mathbf{a}_1|=\sqrt{(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_1)}.$$

Функция $r_1(t)$ находится как решение задачи Коши для уравнения

$$r'_1(t)=\psi_{11}(t)r_1(t)+\psi_1(t) \tag{15}$$

с начальным условием

$$r_1(\alpha)=\frac{A_1}{|\mathbf{a}_1|}. \tag{16}$$

Заметим, что граничное условие $(\mathbf{a}_1, \mathbf{y}(\alpha))=A_1$ выполняется при любых значениях $r_2(\alpha)$, $r_3(\alpha)$, $r_4(\alpha)$, если выполняются условия (14), (16). Действительно,

$$(\mathbf{a}_1, \mathbf{y}(\alpha))=(\mathbf{a}_1, B(\alpha)\mathbf{R}(\alpha))=\sum_{k=1}^{4}\left(\mathbf{a}_1, \vec{\rho}_k(\alpha)\right)r_k(\alpha)=$$

$$=\sum_{k=1}^{4}\left(\vec{\rho}_1(\alpha), \vec{\rho}_k(\alpha)\right)|\mathbf{a}_1|\,r_k(\alpha)=|\mathbf{a}_1|\,r_1(\alpha)=A_1,$$

так как матрица $B(t)$ ортогональна и

$$\left(\vec{\rho}_1(\alpha), \vec{\rho}_k(\alpha)\right)=\begin{cases}1 & \text{при} \quad k=1\\ 0 & \text{при} \quad k\neq 1\end{cases}.$$

После решения задач (13), (14) и (15), (16) для оставшихся функций $r_2(t)$, $r_3(t)$, $r_4(t)$ получим такую систему дифференциальных уравнений:

$$\mathbf{T}'(t) = \Omega(t)\,\mathbf{T}(t) + \mathbf{g}(t), \tag{17}$$

где

$$\mathbf{T}(t) = \left(r_2(t),\ r_3(t),\ r_4(t)\right)',\quad \Omega(t) = \left(\omega_{ij}(t)\right),$$

$$\omega_{ij}(t) = \psi_{i+1,\,j+1}(t),\quad \mathbf{g}(t) = \left(g_1(t),\ g_2(t),\ g_3(t)\right),$$

$$g_i(t) = \psi_{i+1}(t) - \psi_{i+1,\,1}(t)\,r_1(t)$$

$$(i,\ j = 1,\ 2,\ 3).$$

Граничное условие (3) после замены $\mathbf{y}(t) = B(t)\,\mathbf{R}(t)$ трансформируется в условие для функций $r_2(t)$, $r_3(t)$, $r_4(t)$:

$$\left(\mathbf{d},\ \mathbf{T}(\alpha)\right) = D, \tag{18}$$

где

$$\mathbf{d} = (d_1,\ d_2,\ d_3),\ d_k = \left(\mathbf{a}_2,\ \vec{\rho}_{k+1}(\alpha)\right) \quad (k = 1,\ 2,\ 3),$$

$$D = A_2 - \left(\mathbf{a}_2,\ \vec{\rho}_1(\alpha)\right) r_1(\alpha). \tag{19}$$

К системе (17) по аналогии с предыдущим применим ортогональное преобразование с матрицей $H(t)$

$$\mathbf{T}(t) = H(t)\,\mathbf{S}(t), \tag{20}$$

где

$$H(t) = \begin{pmatrix} \sin\eta_1(t), & \cos\eta_1(t), & 0 \\ \sin\eta_2(t)\cos\eta_1(t), & -\sin\eta_2(t)\sin\eta_1(t), & \cos\eta_2(t) \\ \cos\eta_2(t)\cos\eta_1(t), & -\sin\eta_1(t)\cos\eta_2(t), & -\sin\eta_2(t) \end{pmatrix},$$

$\mathbf{S}(t) = \left(s_1(t),\ s_2(t),\ s_3(t)\right)'$, $\eta_1(t)$, $\eta_2(t)$ — неизвестные вспомогательные функции, а $s_k(t)$ $(k = 1,\ 2,\ 3)$ — основные неизвестные функции.

Чтобы систему (17) привести к частично диагональному виду, надо решить задачу Коши для системы уравнений

$$\varphi_{12}'(t) - \sigma_{12}(t) = 0,$$

$$\varphi_{13}'(t) - \sigma_{13}(t) = 0 \tag{21}$$

с начальными условиями для функций $\eta_1(t)$ и $\eta_2(t)$, определяемыми из равенства

$$\vec{\rho}_1(\alpha) = \frac{\mathbf{d}}{|\mathbf{d}|}, \tag{22}$$

где

$$|\mathbf{d}| = \sqrt{(\mathbf{d},\ \mathbf{d})},\quad \varphi_{ij}'(t) = \left(\vec{\rho}_i(t),\ \vec{\rho}\,'(t)\right),\quad \sigma_{ij}(t) = \left(\mathbf{t}_i(t),\ \vec{\rho}_j(t)\right);$$

$$\mathbf{t}_j(t) = \left(\tau_{j1}(t),\ \tau_{j2}(t),\ \tau_{j3}(t)\right),\quad \tau_{ij}(t) = \left(\vec{\rho}_i(t),\ \vec{\omega}_j(t)\right);$$

$$\vec{\omega}_j(t) = \left(\omega_{1j}(t),\ \omega_{2j}(t),\ \omega_{3j}(t)\right);$$

$\vec{\rho}_i(t)$ — вектор-строки матрицы, транспонированной к $H(t)$ $(i,\ j = 1,\ 2,\ 3)$.

Функция $s_1(t)$ находится как решение задачи Коши для уравнения

$$s_1'(t) = e_{11}(t)\, s_1(t) + h_1(t) \tag{23}$$

с начальным условием

$$s_1(\alpha) = \frac{D}{|\mathbf{d}|}, \tag{24}$$

где

$$e_{11}(t) = \sigma_{11}(t) - \varphi_{11}'(t), \quad h_1(t) = \left(\vec{\rho}_1(t),\ \mathbf{g}(t)\right), \quad |\mathbf{d}| \neq 0$$

(в противном случае в силу (14) следовала бы линейная зависимость векторов $\mathbf{a}_1$ и $\mathbf{a}_2$, что противоречит предположению).

Начальные условия (22) и (24) получаются из соотношения (18) после подстановки в последнее замены $\mathbf{T}(\alpha) = H(\alpha)\,\mathbf{S}(\alpha)$ и выбора начальных значений для функций $\eta_1(\alpha)$, $\eta_2(\alpha)$, $s_1(\alpha)$ таким образом, чтобы (18) выполнялось при произвольных значениях $s_2(\alpha)$, $s_3(\alpha)$.

Для этих двух функций — $s_2(t)$ и $s_3(t)$ — имеет место следующая система уравнений:

$$\begin{aligned} s_2'(t) &= e_{22}(t)\, s_2(t) + e_{23}(t)\, s_3(t) + h_2(t), \\ s_3'(t) &= e_{32}(t)\, s_2(t) + e_{33}(t)\, s_3(t) + h_3(t), \end{aligned} \tag{25}$$

где

$$e_{ij}(t) = \sigma_{ij}(t) - \varphi_{ij}'(t), \quad h_i(t) = \left(\vec{\rho}_i(t),\ \mathbf{g}(t)\right) \quad (i,\ j = 2,\ 3).$$

Если бы нам удалось теперь указать начальные значения для функций $s_2(t)$, $s_3(t)$, то мы смогли бы найти на всем отрезке $[\alpha,\ \beta]$ эти функции как решение задачи Коши для системы (25). Это позволило бы найти и искомое решение краевой задачи (1) — (3) по следующей формуле:

$$\mathbf{y}(t) = G(t)\,\mathbf{U}(t), \tag{26}$$

где

$$G(t) = B(t)\,C(t), \quad C(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & H(t) \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{U}(t) = \left(r_1(t),\ s_1(t),\ s_2(t),\ s_3(t)\right)'.$$

Укажем способ нахождения начальных значений для функций $s_2(t)$, $s_3(t)$ в точке $t = \alpha$ или, что возможно, в точке $t = \beta$. Пусть

$$G(t) = \left(\begin{array}{cc|cc} g_{11}(t) & g_{12}(t) & g_{13}(t) & g_{14}(t) \\ g_{21}(t) & g_{22}(t) & g_{23}(t) & g_{24}(t) \\ \hline g_{31}(t) & g_{32}(t) & g_{33}(t) & g_{34}(t) \\ g_{41}(t) & g_{42}(t) & g_{43}(t) & g_{44}(t) \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} G_1(t) & G_2(t) \\ \hline G_3(t) & G_4(t) \end{array}\right)$$

и

$$\mathbf{U}(t) = \left\| \begin{matrix} \mathbf{U}_1(t) \\ \mathbf{U}_2(t) \end{matrix} \right\|, \quad \text{где } \mathbf{U}_1(t) = \left\| \begin{matrix} r_1(t) \\ s_1(t) \end{matrix} \right\|, \quad \mathbf{U}_2(t) = \left\| \begin{matrix} s_2(t) \\ s_3(t) \end{matrix} \right\|.$$

Из (26) получим

$$\left\| \begin{matrix} \mathbf{y}_1(t) \\ \mathbf{y}_2(t) \end{matrix} \right\| = \begin{pmatrix} G_1(t) & G_2(t) \\ G_3(t) & G_4(t) \end{pmatrix} \left\| \begin{matrix} \mathbf{U}_1(t) \\ \mathbf{U}_2(t) \end{matrix} \right\|$$

или

$$\mathbf{y}_1(t) = G_1(t)\,\mathbf{U}_1(t) + G_2(t)\,\mathbf{U}_2(t), \tag{27}$$

$$\mathbf{y}_2(t) = G_3(t)\,\mathbf{U}_1(t) + G_4(t)\,\mathbf{U}_2(t). \tag{28}$$

Используя условия (10), можно окончательно записать систему уравнений для определения векторов $\mathbf{U}_2(\alpha)$ и $\mathbf{U}_2(\beta)$:

$$\begin{gathered} G_2(\alpha)\,\mathbf{U}_2(\alpha) - G_4(\beta)\,\mathbf{U}_2(\beta) = \mathbf{V}_1, \\ -G_4(\alpha)\,\mathbf{U}_2(\alpha) + G_2(\beta)\,\mathbf{U}_2(\beta) = \mathbf{V}_2, \end{gathered} \tag{29}$$

где

$$\mathbf{V}_1 = G_3(\beta)\,\mathbf{U}_1(\beta) - G_1(\alpha)\,\mathbf{U}_1(\alpha),$$

$$\mathbf{V}_2 = -G_1(\beta)\,\mathbf{U}_1(\beta) + G_3(\alpha)\,\mathbf{U}_1(\alpha).$$

Пусть система (29) разрешима и мы нашли

$$\mathbf{U}_2(\alpha) = \mathbf{U}_{2\alpha}, \tag{30}$$

$$\mathbf{U}_2(\beta) = \mathbf{U}_{2\beta}. \tag{31}$$

Тогда функции $s_2(t)$ и $s_3(t)$ можно найти, решая задачу Коши для системы уравнений (25) в направлении от α к β с начальным условием (30) или в направлении от β к α с начальным условием (31).

Таким образом, краевая задача (1) — (3) решается по следующей схеме:

1. Первоначально решаем задачу (13), (14) и находим на $[\alpha, \beta]$ функции $\alpha_k(t)$ $(k=1, 2, 3)$; затем находим основную функцию $\eta_1(t)$ на $[\alpha, \beta]$ как решение задачи (15), (16).
2. Находим функции $\eta_1(t)$, $\eta_2(t)$ и $s_1(t)$ соответственно как решение задач (21), (22) и (23), (24). После этого вычисляем по формуле $G(t)=B(t)\,C(t)$ элементы матрицы $G(t)$ на $[\alpha, \beta]$ и решаем систему (29).
3. Решаем задачу Коши для системы (25) с начальным условием (30) или с начальным условием (31) и находим, таким образом, на $[\alpha, \beta]$ функции $s_2(t)$, $s_3(t)$.
4. Искомое решение задачи (1) — (3) вычисляем по формуле (27).

Заметим, что по формуле (28) можно вычислить значения вектора $\mathbf{y}_2(t)$ и воспользоваться ими для контроля правильности вычисления искомого вектора $\mathbf{y}_1(t)$, так как

$$\mathbf{y}_1(\alpha + \beta - t) = \mathbf{y}_2(t).$$

Достоинство предлагаемого метода состоит в том, что в процессе решения краевой задачи вычисляются основные функции $r_1(t)$, $s_1(t)$, $s_2(t)$, $s_3(t)$, которые являются величинами того же порядка малости, что и искомое решение задачи (1) — (3), ибо

$$\begin{gathered} (\mathbf{y}_1(t),\ \mathbf{y}_2(t)) \equiv (G(t)\,\mathbf{U}(t),\ G(t)\,\mathbf{U}(t)) \equiv \\ \equiv (G'(t)\,G(t)\,\mathbf{U}(t),\ \mathbf{U}(t)) \equiv (\mathbf{U}(t),\ \mathbf{U}(t)), \end{gathered} \tag{32}$$

где $G'(t)\ G(t) \equiv E$, так как $G(t)$ — ортогональная матрица. Это позволяет избежать потери значащих цифр, которая имеет место в случае, когда искомое решение краевой задачи разыскивается в виде линейной комбинации с произвольными постоянными коэффициентами из решений, составляющих фундаментальную систему, и частного решения неоднородной системы уравнений.

В силу соотношения (32) рассматриваемый здесь метод ортогональной прогонки устойчив по Абрамову (см. [4, 8]).

Литература

1. Годунов С. К. УМН, **16**, в. 3(99), 1961.
2. Годунов С. К. ЖВММФ, **2**, № 6, 1962.
3. Абрамов А. А. ЖВММФ, **1**, № 3, 1961.
4. Абрамов А. А. ЖВММФ, **1**, № 2, 1961.
5. Moszynski K. Algorytmy, 2, № 3, 1964.
6. Монастырный П. И. ДАН БССР, **8**, № 5, 1964.
7. Монастырный П. И. ЖВММФ, **5**, № 2, 1965.
8. Монастырный П. И. Весці АН БССР, сер. фіз.-мат. навук, № 2, 1966.
9. Монастырный П. И. ЖВММФ, **7**, № 2, 1967.

Белорусский государственный университет им. В. И. Ленина

Поступило в редакцию 20.I 1967

ВЕСЦІ АКАДЭМІІ НАВУК БЕЛАРУСКАЙ ССР № 2 1967
СЕРЫЯ ФІЗІКА-МАТЭМАТЫЧНЫХ НАВУК

УДК 517.948

М. А. ШЕШКО

ОБ ОБЩЕЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ЛИНЕЙНОГО СОПРЯЖЕНИЯ НА РИМАНОВОЙ ПОВЕРХНОСТИ С КРАЕМ

1. Рассматривается ориентируемая риманова поверхность S с краем. Пространственной моделью такой поверхности может служить сфера с $h \geqslant 0$ ручками и $m+1$ отверстиями, границами которых являются про-стые замкнутые дуги. Число h называется родом поверхности. Будем изучать одну смешанную краевую задачу теории аналитических функци на такой поверхности, используя метод Л. И. Чибриковой [1, 2]. Иде этого метода состоит в следующем. Плоской моделью римановой поверх-ности с краем является половина фундаментальной области некоторо фуксовой группы 2-го рода дробно-линейных преобразований, содержа-щаяся внутри главной окружности $|z|=1$. Краям поверхности соответ-ствуют дуги главной окружности с конгруентными концами. Дубль поверхности с краем в этой модели соответствует фундаментальная об-ласть группы, симметричная относительно главной окружности. При та-кой интерпретации вся теория аналитических функций на римановых по-верхностях переходит в теорию автоморфных функций на плоскости В частности, рациональным функциям на замкнутых римановых поверх-ностях соответствуют так называемые простые автоморфные функции [3]

Изучаемая нами задача на плоской модели может быть сформулиро-вана следующим образом.

Внутри нормального фундаментального многоугольника R, представляю-щего собой половину фундаментальной области некоторой фуксовой групп P второго рода, найти кусочно-аналитическую автоморфную функцию $F(z) = u+iv$ с линией скачков L_1, где $L_1 = l_{m+1} + l_{m+2} + \dots + l_{m+r}$ — совокуп-ность r простых замкнутых непересекающихся контуров типа Ляпунова гомологичных нулю, если на L_1 и на совокупности $L_0 = l_0 + l_1 + \dots + l_m$ свободных дуг главной окружности $|z|=1$ ее граничные значения удовлет-воряют условиям:

$$\left.\begin{aligned} F^+(t) = G_1(t)F^-(t) + G_2(t)\overline{F^-(t)} + g(t), \quad t \in L_1, \\ a(t)u(t) + b(t)v(t) = c(t), \quad t \in L_0. \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Здесь $G_1(t)$, $G_2(t)$, $g(t)$ — заданные на L_1 комплексные функции, причем $G_1(t) \neq 0$ и непрерывна, $G_2(t)$ ограничена и измерима, $g(t) \in L^p$, $p>1$; $a(t)$, $b(t)$, $c(t)$ — заданные на L_0 вещественные функции, удовлетворяющие усло-вию Гельдера и принимающие на концах каждой дуги l_j $(j=0, 1, \dots, m)$ одинаковые значения, причем $a^2+b^2 \neq 0$.

При $G_2(t) \equiv 0$ задача (1) рассмотрена Л. И. Чибриковой [4] в качестве иллюстрации общей идеи постановки краевых задач на римановых поверх-ностях.

Чтобы решить задачу (1), вводим кусочно-аналитическую автоморфную функцию

$$\Phi(z)=\begin{cases} F(z), & |z|<1,\\ \overline{F}\left(\dfrac{1}{z}\right), & |z|>1,\end{cases} \tag{2}$$

для которой, кроме линий L_0 и L_1, линией скачков будет еще линия L_1^*, являющаяся отражением L_1 относительно главной окружности $|z| = 1$. Используя свойство симметрии

$$\Phi(z)=\overline{\Phi}\left(\frac{1}{z}\right), \tag{3}$$

которым, очевидно, обладает функция (2), из краевых условий (1) без труда получаем:

$$\begin{gathered} \Phi^+(t)=G_1(t)\,\Phi^-(t)+G_2(t)\,\overline{\Phi^-(t)}+g(t),\quad t\in L_1,\\ \Phi^-(t)=\overline{G_1(t^*)}\,\Phi^+(t)+\overline{G_2(t^*)}\,\overline{\Phi^+(t)}+\\ +\overline{g(t^*)},\quad t\in L_1^*,\quad t^*=\frac{1}{\overline{t}},\\ \Phi^+(t)=-\frac{a+ib}{a-ib}\,\Phi^-(t)+\frac{2c}{a-ib},\quad t\in L_0. \end{gathered} \tag{4}$$

Задача (4) есть краевая задача для автоморфных функций, принадлежащих группе P. Для рассматриваемой группы род фундаментальной области $\rho = 2h + m \neq 0$. Нужно еще иметь в виду, что решениями задачи (1) будут те и только те решения задачи (4), которые удовлетворяют условию (3).

Предположим сначала, что $G_1(t)$ удовлетворяет условию Гельдера. Построим каноническую функцию $X(z)$ задачи (4), обладающую свойством симметрии (3), удовлетворяющую условиям

$$\begin{gathered} X^+(t)=-\frac{a+ib}{a-ib}X^-(t),\ t\in L_0,\\ X^+(t)=G_1(t)\,X^-(t),\quad t\in L_1,\\ X^-(t)=\overline{G_1(t^*)}\,X^+(t),\quad t\in L_1^*, \end{gathered} \tag{5}$$

у которой разность между числом нулей и полюсов в фундаментальной области равна индексу задачи.

Предварительно подсчитаем индекс задачи (4). Концы t_j, t_j' каждой дуги $l_j (j=0, 1, \ldots, m)$, являясь образами одной и той же точки соответствующей граничной кривой римановой поверхности S, между собой конгруэнтны, поэтому числа

$$\varkappa_j=\frac{1}{2\pi}\,[\arg(a+ib)]_{l_j},\quad j=0,1,\ldots,m,$$

будут целыми. Это индексы функции $a+ib$ относительно свободных дуг l_j. Индексы функции $G_1(t)$ относительно контуров $l_{m+1}, \ldots, l_{m+r}$ обозначим через $\varkappa_{m+1}, \ldots, \varkappa_{m+r}$ соответственно. Тогда, очевидно, индекс задачи равен $2\varkappa$, если

$$\varkappa = \varkappa_0 + \varkappa_1 + \ldots + \varkappa_{m+r},$$

и канонической функцией $X(z)$ (см. [5], стр. 204—205) будет произведение

$$X(z) = \chi(z)\,\overline{\chi}\left(\frac{1}{z}\right), \tag{6}$$

где

$$\chi(z) = e^{\Gamma(z)} \prod_{j=0}^{m+r} E^{\varkappa_j}(z, \theta_0, t_j) \prod_{k=1}^{\rho} E(z, \theta_k, \theta_0);$$

$$\Gamma(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \ln A(\tau) H(z, \tau) f_1'(\tau)\, d\tau, \quad L = L_0 + L_1;$$

$$A(t) = \begin{cases} i(a+ib), & t \in L_0, \\ G_1(t), & t \in L_1, \end{cases}$$

где $H(z, \tau) f_1'(\tau)$ — элементарная функция Вейерштрасса;

$$E(z, \theta, c) = \exp\left(\int_c^{\theta} H(z, \tau) f_1'(\tau)\, d\tau\right);$$

t_j — точки, принятые за начало обхода на контурах l_j; θ_0 — некоторая точка фундаментальной области, не лежащая на L. Точки θ_k должны быть найдены из решения проблемы Якоби. Обозначим различные среди точек θ_1, $\theta_2, \ldots, \theta_\rho$ через $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n$, а их кратности через $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$ соответственно.

Из (6) видно, что в фундаментальной области $X(z)$ в точках $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n$ и $1/\overline{\theta}_1, 1/\overline{\theta}_2, \ldots, 1/\overline{\theta}_n$ имеет нули порядков $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$ соответственно, в точках θ_0 и $1/\overline{\theta}_0$ нуль порядка $\varkappa - \rho$ при $\varkappa \geqslant \rho$ или полюс порядка $\rho - \varkappa$ при $\varkappa < \rho$.

На основании равенств (5) краевые условия (4) записываем в виде

$$\frac{\Phi^+(t)}{X^+(t)} - \frac{\Phi^-(t)}{X^-(t)} = \frac{G_2(t)}{G_1(t)} \times$$

$$\times \frac{\overline{X^-(t)}}{X^-(t)} \frac{\overline{\Phi^-(t)}}{\overline{X^-(t)}} + \frac{g(t)}{X^+(t)}, \quad t \in L_1,$$

$$\frac{\Phi^-(t)}{X^-(t)} - \frac{\Phi^+(t)}{X^+(t)} = \frac{\overline{G_2(t^*)}}{\overline{G_1(t^*)}} \frac{\overline{X^+(t)}}{X^+(t)} \times$$

$$\times \frac{\overline{\Phi^+(t)}}{\overline{X^+(t)}} + \frac{\overline{g(t^*)}}{X^-(t)}, \quad t \in L_1^*, \quad t^* = \frac{1}{\overline{t}},$$

$$\frac{\Phi^+(t)}{X^+(t)} - \frac{\Phi^-(t)}{X^-(t)} = \frac{2c}{X^+(a-ib)}, \quad t \in L_0,$$

или после введения обозначения $\dfrac{\Phi(z)}{X(z)} = \varphi(z)$

$$\varphi^+(t) - \varphi^-(t) = \frac{G_2(t)}{G_1(t)} \frac{\overline{X^-(t)}}{X^-(t)} \overline{\varphi^-(t)} + \frac{g(t)}{X^+(t)}, \quad t \in L_1,$$

$$\varphi^-(t)-\varphi^+(t)=\frac{\overline{G_2(t^*)}}{\overline{G_1(t^*)}}\,\frac{\overline{X^+(t)}}{X^+(t)}\,\overline{\varphi^+(t)}+\frac{\overline{g(t^*)}}{X^-(t)},\quad t\in L_1^*, \tag{7}$$

$$\varphi^+(t)-\varphi^-(t)=\frac{2c}{X^+(a-ib)},\quad t\in L_0.$$

Таким образом, мы пришли к задаче отыскания в фундаментальной области кусочно-аналитической автоморфной функции с полюсами в точках $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n, 1/\overline{\theta}_1, 1/\overline{\theta}_2, \ldots, 1/\overline{\theta}_n$ порядков $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$ соответственно, в точках θ_0, $1/\overline{\theta}_0$ порядка $\mu_0=\varkappa-\rho$ при $\varkappa\geqslant\rho$ по краевым условиям (7). Исходя из свойств автоморфных функций ([3], стр. 106, [4], гл. 3), будем искать решение задачи (7) при $\varkappa\geqslant\rho$ в виде

$$\varphi(z)=\omega(z)+\overline{\omega}\left(\frac{1}{z}\right)+$$

$$+\sum_{q=0}^{n}\left[C_{q,0}H_0(z,\theta_q)+\ldots+C_{q,\mu_q-1}H_{\mu_q-1}(z,\theta_q)+\right.$$

$$\left.+D_{q,0}H_0(z,1/\overline{\theta}_q)+\ldots+D_{q,\mu_q-1}H_{\mu_q-1}(z,1/\overline{\theta}_q)\right]+$$

$$+\sum_{k=1}^{\rho}B_kH(z,1/\overline{\theta}_k)+C, \tag{8}$$

где

$$\omega(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{L_0}\frac{c(\tau)}{X^+(\tau)(a-ib)}\times$$

$$\times H(z,\tau)f_1'(\tau)\,d\tau+\frac{1}{2\pi i}\int_{L_1}\mu(\tau)H(z,\tau)f_1'(\tau)\,d\tau;$$

$\mu(t)$ — неизвестная функция, принадлежащая пространству L^p, $p>1$; C, $C_{q,0}, \ldots, C_{q,\mu_q-1}, D_{q,0}, \ldots, D_{q,\mu_q-1}$ $(q=0,1,\ldots,n)$ — произвольные комплексные постоянные; B_k $(k=1,2,\ldots,\rho)$ — определенные постоянные. При $\varkappa<\rho$ суммирование начнется с $q=1$.

Применяя формулы Сохоцкого к $\varphi(z)$ и подставляя $\varphi^+(t)$, $\varphi^-(t)$ в (7), получим следующее интегральное уравнение:

$$\mu(t)=\frac{G_2(t)}{G_1(t)}\,\frac{\overline{X^-(t)}}{X^-(t)}\times$$

$$\times\overline{\left[-\frac{1}{2}\overline{\mu(t)}+\frac{1}{2\pi i}\int_{L_1}\mu(\tau)H(t,\tau)f_1'(\tau)\,d\tau+\right.}$$

$$\left.+\frac{1}{2\pi i}\int_{L_1}\mu(\tau)H\left(\frac{1}{\overline{t}},\tau\right)f_1'(\tau)\,d\tau\right]+$$

$$+\frac{G_2(t)}{G_1(t)}\,\frac{\overline{X^-(t)}}{X^-(t)}\times$$

$$\times \left[\overline{\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{L_0} \frac{c(\tau)}{X^+(\tau)(a-ib)} H(t, \tau) f_1'(\tau)\, d\tau} + \right.$$

$$\left. + \overline{\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{L_0} \frac{c(\tau)}{X^+(\tau)(a-ib)} H\left(\frac{1}{\bar{t}}, \tau\right) f_1'(\tau)\, d\tau} \right] +$$

$$+ \frac{G_2(t)}{G_1(t)} \frac{\overline{X^-(t)}}{X^-(t)} \left\{ \sum_{q=0}^{n} \left[\overline{C}_{q,0} \overline{H_0(z, \theta_q)} + \dots + \right.\right.$$

$$+ \overline{C}_{q, \mu_q - 1} \overline{H_{\mu_q - 1}(z, \theta_q)} + \overline{D}_{q,0} \overline{H_0(z, 1/\bar{\theta}_q)} + \dots +$$

$$\left. + \overline{D}_{q, \mu_q - 1} \overline{H_{\mu_q - 1}(z, 1/\bar{\theta}_q)} \right] +$$

$$\left. + \sum_{k=1}^{\rho} \overline{B}_k \overline{H(z, 1/\bar{a}_k)} + \overline{C} \right\} +$$

$$+ \frac{g(t)}{X^+(t)}, \quad t \in L_1. \tag{*}$$

Введем обозначение

$$T\mu = \frac{G_2(t)}{G_1(t)} \frac{\overline{X^-(t)}}{X^-(t)} \left[-\frac{1}{2} \overline{\mu(t)} + \right.$$

$$+ \overline{\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{L_1} \mu(\tau) H(t, \tau) f_1'(\tau)\, d\tau} +$$

$$\left. + \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{L_1} \mu(\tau) H\left(\frac{1}{\bar{t}}, \tau\right) f_1'(\tau)\, d\tau \right]$$

и оценим норму оператора $T\mu$ в пространстве L^p, $p > 1$.

Используя тот факт, что в окрестности точки τ

$$H(t, \tau) f_1'(\tau)\, d\tau = \frac{1}{\tau - t} + P(t, \tau),$$

где $P(t, \tau)$ — непрерывная функция по обеим переменным, и применяя неравенство Гельдера, получим

$$\|T\mu\| \leqslant \frac{1}{2} \sup_{t \in L_1} \left| \frac{G_2(t)}{G_1(t)} \right| \left\| -\overline{\mu(t)} + \overline{\frac{1}{\pi i} \int\limits_{L_1} \frac{\mu(\tau)}{\tau - t}\, d\tau} \right\| +$$

$$+ \left\| \frac{1}{\pi i} \int\limits_{L_1} \mu(\tau) P(t, \tau)\, d\tau + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\pi i} \int\limits_{L_1} \mu(\tau) H\left(\frac{1}{\bar{t}}, \tau\right) f_1'(\tau)\, d\tau \right\| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2} \sup_{t \in L_1} \left| \frac{G_2(t)}{G_1(t)} \right| (1 + S_p + M_p + N_p) \|\mu\|,$$

где S_p — норма сингулярного оператора;

$$M_p = \left\{ \frac{1}{\pi} \int_{L_1} \left[\left(\int_{L_1} |P(t, \tau)|^q \, |d\tau| \right)^{1/q} \right]^p ds \right\}^{1/p},$$

$$N_p = \left\{ \frac{1}{\pi} \int_{L_1} \left[\left(\int_{L_1} \left| H\left(\frac{1}{\overline{t}}, \tau\right) f_1'(\tau) \right|^q |d\tau| \right] \right)^p ds \right\}^{1/p},$$

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Следовательно,

$$\|T\| \leqslant \frac{1}{2} \sup_{t \in L_1} \left| \frac{G_2(t)}{G_1(t)} \right| (1 + S_p + M_p + N_p).$$

Если

$$\frac{1}{2} \sup_{t \in L_1} \left| \frac{G_2(t)}{G_1(t)} \right| (1 + S_p + M_p + N_p) < 1, \tag{9}$$

то уравнение (*), согласно принципу сжатых отображений, имеет единственное решение при любом фиксированном свободном члене.

Пусть теперь $G_1(t)$ непрерывна, тогда, равномерно аппроксимируя $G_1(t)$ функцией $\tilde{G}_1(t)$, удовлетворяющей условию Гельдера (например, многочленом), краевую задачу (4) запишем в виде

$$\Phi^+(t) = \tilde{G}_1(t)\,\Phi^-(t) + G_2(t)\,\overline{\Phi^-(t)} +$$
$$+ \left[G_1(t) - \tilde{G}_1(t)\right] \Phi^-(t) + g(t), \quad t \in L_1,$$

$$\Phi^-(t) = \overline{\tilde{G}_1(t^*)}\,\Phi^+(t) + \overline{G_2(t^*)}\,\overline{\Phi^+(t)} +$$
$$+ \left[\overline{G_1(t^*)} - \overline{\tilde{G}_1(t)}\right] \Phi^+(t) + \overline{g(t^*)}, \quad t \in \overset{*}{L_1},$$

$$\Phi^+(t) = -\frac{a+ib}{a-ib}\Phi^-(t) + \frac{2c}{a-ib}, \quad t \in L_0.$$

Функцию $G_1(t)$ приблизим $\tilde{G}_1(t)$ так, чтобы выполнялось условие

$$\max_{t \in L_1} |G_1(t) - \tilde{G}_1(t)| < 1 - \frac{2}{1 + S_p + M_p + N_p}.$$

После этого применяем только что описанный метод.

Полагая постоянные в уравнении (*) равными определенным значениям и применяя оператор обращения, найдем частное решение $\mu = \mu_0(t)$ через некоторый оператор над $c(t)$ и $g(t)$: $\mu_0 = Q\left[c(t), g(t)\right]$, по которому найдем частное решение краевой задачи. Затем, полагая $c(t) \equiv 0$, $g(t) \equiv 0$, получим решения уравнения (*), по которым однозначно найдем решения однородной краевой задачи.

Выпишем искомое решение

$$\Phi(z) = X(z) \left\{ \omega(z) + \overline{\omega}\left(\frac{1}{z}\right) + \right.$$

$$+ \sum_{q=0}^{n} \left[C_{q,0} H_0(z, \theta_q) + \ldots + C_{q,\mu_q - 1} H_{\mu_q - 1}(z, \theta_q) + \right.$$

$$+ D_{q,0} H_0(z,\ 1/\overline{\theta}_q) + \ldots + D_{q,\mu_q-1} H_{\mu_q-1}(z,\ 1/\overline{\theta_q})\big] +$$

$$+ \sum_{k=1}^{\rho} B_k H(z,\ 1/\overline{a}_k) + C \Big\},$$

где $a_k (k=1, 2, \ldots \rho)$—полюсы элементарной функции Вейерштрасса.

Применяя дальше обычные рассуждения теории краевых задач для автоморфных функций к $\Phi(z)$ (см., например, [5]), получаем следующую теорему.

Теорема. Если для *краевой задачи (1) выполнено условие (9), то при $\varkappa \geqslant \rho$ однородная и неоднородная задачи (1) безусловно разрешимы и имеют $2\varkappa - \rho + 1$ линейно независимых решений над полем вещественных чисел; при $\varkappa < 0$ однородная задача не имеет решений, а неоднородная разрешима тогда и только тогда, если функции $c(t)$ и $g(t)$ удовлетворяют $\rho - 2\varkappa + 1$ вещественным условиям разрешимости.*

При $0 \leqslant \varkappa < \rho$ разрешимость и число решений зависят от величины ранга ξ системы алгебраических уравнений, состоящей из $2\rho - 2\varkappa$ вещественных уравнений с $\rho + 1$ неизвестными, которая обеспечивает аналитичность функции $\Phi(z)$ в точке θ_0.

Если $\varkappa \neq 0$, однородная задача либо не имеет решений, либо имеет $\rho - \xi + 1$ линейно независимых решений, неоднородная разрешима лишь при выполнении $2\rho - 2\varkappa - \xi$ условий. Если $\varkappa = 0$, то ξ может принимать только два значения: ρ и $\rho + 1$; при $\xi = \rho$ однородная задача либо не имеет решений, либо имеет однопараметрическое семейство решений, неоднородная разрешима при выполнении ρ условий; при $\xi = \rho + 1$ однородная неразрешима, неоднородная имеет единственное решение при выполнении $\rho - 1$ условий разрешимости.

2. Рассмотрим случай, когда в задаче (1) на римановой поверхности S выполняется условие

$$|G_1| = |G_2|. \tag{10}$$

Но прежде, чем исследовать этот случай, изучим вспомогательную задачу [7]

$$\varphi^+(t) = G(t)\overline{\varphi^+(t)} + h(t). \tag{11}$$

Здесь функции $G(t)$ и $h(t)$ удовлетворяют условию Гельдера. Легко проверить, что необходимыми условиями разрешимости задачи (10) являются:

$$|G(t)|^2 = 1, \quad h(t) = G(t)\overline{h(t)} = 0. \tag{12}$$

Поэтому задачу (11) можно записать в виде

$$\varphi^+(t) = -\frac{h}{\overline{h}}\overline{\varphi^+(t)} + h(t). \tag{11'}$$

Это есть задача Гильберта. Если $h(t)$ имеет нули, то $\dfrac{h(t)}{\overline{h(t)}}$ может оказаться разрывной. Отсюда следует, что при решении задачи (11′) нужно прибегнуть к теории задачи Гильберта с разрывными коэффициентами.

Приступим к исследованию задачи (1) при условии (10). Тогда задача (1) распадается на две самостоятельные задачи для функций $F^+(t)$ и $F^-(t)$ в отдельности:

$$\left.\begin{aligned} F^+(t) &= G(t)\overline{F^+(t)} + h(t), \quad t \in L_1, \\ a(t)u(t) + b(t)v(t) &= c(t), \quad t \in L_0 \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

и

$$\overline{F^-(t)} = R(t)F^-(t) + q(t), \quad t \in L_1, \tag{14}$$

где

$$G(t) = \frac{G_2(t)}{\overline{G_1(t)}}; \quad h(t) = g(t) - G_2(t)\frac{\overline{g(t)}}{\overline{G_1(t)}};$$

$$R(t) = -\frac{G_1(t)}{G_2(t)}; \quad q(t) = \frac{F^+(t) - g(t)}{G_2(t)}.$$

Необходимые условия разрешимости задач (13) и (14) выполнены.

Задача (13) на плоской модели римановой поверхности может быть сформулирована следующим образом.

Найти автоморфную относительно некоторой группы P_1 функцию $F(z) = u + iv$, аналитическую внутри главной окружности, если на линии $L = L_0 + L_1 = l_0 + l_1 + \ldots + l_{m+1} + \ldots + l_{m+r}$ она удовлетворяет граничному условию (13). В данном случае линию L_1 можно рассматривать как границу некоторой римановой поверхности S_1, поэтому $l_{m+1}, \ldots, l_{m+r}$ будут лежать на главной окружности.

Для решения задачи (13), как обычно, вводим вспомогательную функцию

$$\Phi(z) = \begin{cases} F(z), & |z| < 1, \\ \overline{F}\left(\dfrac{1}{z}\right), & |z| > 1, \end{cases}$$

после чего из (13) получаем:

$$\begin{aligned} \Phi^+(t) &= G(t)\Phi^-(t) + h(t), \quad t \in L_1, \\ \Phi^-(t) &= -\frac{a+ib}{a-ib}\,\Phi^-(t) + \frac{2c}{a-ib}, \quad t \in L_0. \end{aligned} \tag{15}$$

Задача (15) есть обычная задача Римана с разрывными коэффициентами. Канонической функцией, удовлетворяющей условию симметрии, для нее будет

$$X(z) = \chi(z)\,\overline{\chi}\left(\frac{1}{z}\right),$$

где

$$\chi(z) = e^{\Gamma(z)}\prod_{j=0}^{m} E^{\varkappa_j}(z, \theta_0, t_j)\prod_{k=1}^{N} E^{\varkappa_k'}(z, \theta_0, c_k)\prod_{k=1}^{\rho} E(z, \theta_k, \theta_0);$$

$$\Gamma(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \ln A_1(\tau)H(z, \tau)f_1'(\tau)\,d\tau;$$

$$A_1(t) = \begin{cases} \sqrt{G(t)}, & t \in L_1, \\ i(a+ib), & t \in L_0; \end{cases}$$

θ_0 — некоторая фиксированная точка фундаментальной области; c_k ($k = 1, 2, \ldots, N$) — точки разрыва функции $G(t)$; $\varkappa_k$ ($k = 0, 1, \ldots, m$) — индексы функции

$i(a+ib)$ на $l_0, l_1, \ldots, l_m$; $\varkappa'_k$ — целые числа, подобранные так, чтобы выполнялись условия:

$$0 < \alpha_k + \varkappa'_k < 1, \quad k = 1, 2, \ldots, s,$$

$$-1 < \alpha_k + \varkappa'_k < 0, \quad k = s+1, \ldots, p,$$

$$\alpha_k + \varkappa'_k = 0, \quad k = p+1, \ldots, N,$$

если решения ищутся в классе $h(c_1, \ldots, c_s)$;

$$\alpha_k + i\beta_k = \frac{1}{4\pi i} \ln \frac{G(c_k-0)}{G(c_k+0)};$$

θ_k — точки, найденные из решения проблемы Якоби.

Для рассматриваемой группы P_1 род фундаментальной области $\rho = 2h + m + r - 1$.

После того как построена каноническая функция, задача (15), а с ней и (13) решаются обычным методом (см. [1, 2]).

Для нахождения $F^-(z)$ потребуется отдельно решать r задач с краевым условием (14). При решении любой из них необходимо ввести дубль поверхности и распространить $F^-(z)$ по формуле

$$\Phi^+(z) = \bar{F}^-\left(\frac{1}{z}\right), \quad |z| < 1,$$

после чего получим краевую задачу Римана. Так как мы рассматриваем контуры, гомологичные нулю, то дублем является сфера, а, следовательно, род такой римановой поверхности равен нулю. В этом случае группа полностью характеризуется одним инвариантом $f(z)$. Краевая задача Римана для групп с одним инвариантом изучена в работах [8, 9].

В заключение выражаю искреннюю благодарность профессору Ф. Д. Гахову за руководство работой.

Литература

1. Чибрикова Л. И. Изв. вузов, Математика, № 6, 1961.
2. Чибрикова Л. И. Изв. вузов, Математика, № 3, 1962.
3. Форд Л. Р. Автоморфные функции. ОНТИ, М.—Л., 1936.
4. Чибрикова Л. И. Сб. «Краевые задачи теории функций комплексных переменных». Изд. КГУ, 1962.
5. Чибрикова Л. И. Тр. семинара по обратным краевым задачам. Изд. КГУ, 1964.
6. Weierstrass K. Vorlesungen über die Theorie des Abelschen Transzendenten, 4. Berlin, 1902.
7. Михайлов Л. Г. Новый класс особых интегральных уравнений и его применение к дифференциальным уравнениям с сингулярными коэффициентами. Изд. АН ТаджССР, 1963.
8. Чибрикова Л. И. Уч. зап. Казанского ун-та, **116**, кн. 4, 1956.
9. Чибрикова Л. И. Уч. зап. Казанского ун-та, **117**, кн. 2, 1957.

Белорусский государственный университет им. В. И. Ленина

Поступило в редакцию 29.VI 1966

ВЕСЦІ АКАДЭМІІ НАВУК БЕЛАРУСКАЙ ССР № 2 1967
СЕРЫЯ ФІЗІКА-МАТЭМАТЫЧНЫХ НАВУК

УДК 530.12

А. П. РЯБУШКО

МЕТРИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ЦЕНТРАЛЬНО-СИММЕТРИЧЕСКИХ КОСМОЛОГИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ ЭЙНШТЕЙНА И СОСТОЯНИЕ МАТЕРИИ ПРИ ПОСТОЯННОМ ДАВЛЕНИИ

В работе [1] найдены точные решения уравнений тяготения Эйнштейна в случае центрально-симметрического распределения материи во всем пространстве при не равном нулю давлении. В настоящей работе рассматриваются метрические свойства соответствующих центрально-симметрических пространств и состояние материи при постоянном давлении. Будем придерживаться обозначений, принятых в работе [1].

Во всех рассмотренных в [1] случаях метрика риманова пространства — времени в сферических координатах и сопутствующей системе отсчета имеет вид

$$ds^2 = dt^2 - dl^2, \; dl^2 = \frac{r'^2}{1+f(R)}\, dR^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta \, d\varphi^2), \tag{1}$$

где функция $r=r(t, R)$ вполне определена найденными в [1] решениями, а произвольная функция интегрирования $f(R)$ удовлетворяет условию $1+f(R)>0$. Компоненты тензора кривизны Римана — Кристоффеля, вычисленные для трехмерного пространства с линейным элементом dl, все обращаются в нуль только при $f=0$ (см. [2], (1,6)). Следовательно, для того чтобы сопутствующее материи трехмерное пространство было искривленным, необходимо и достаточно, чтобы $f \neq 0$.

С помощью dl можно определять радиальные расстояния (θ, $\varphi = \mathrm{const}$)

$$dl_R = \frac{r'}{\sqrt{1+f}}\, dR \tag{2}$$

и расстояния вдоль окружности с центром в начале координат по формуле

$$dl_\varphi = r\, d\varphi, \tag{3}$$

так как в силу центральной симметрии пространства можно без ограничения общности считать $R=\mathrm{const}$, $\theta=\pi/2$. Наконец, элемент 3-объема определяется выражением

$$dV = \frac{r' r^2}{\sqrt{1+f}} \sin\theta \, dR\, d\theta\, d\varphi. \tag{4}$$

Первый интеграл (7) в [1] показывает, что при постоянном положительном давлении материи ($p=\mathrm{const}>0$) r не может расти неограниченно со временем. Тогда, согласно (3), расстояния вдоль окружностей с течением времени также не могут увеличиваться неограниченно. Но при $p=\mathrm{const}<0$ неограниченный рост r и dl_φ возможен. О закономерностях изменения со временем плотности материи ε и величин dl_R, dV в общем случае сказать что-либо определенное затруднительно. Можно только отметить, что в силу (8) из [1] всегда dV обращается в нуль а ε — в бесконечность при $r'r^2=0$ (если $F'\neq 0$).

Сделаем следующее замечание общего характера. Известно [3, 4], что для любого распределения любого вида материи всегда плотность и давление ее должны подчиняться условию $\varepsilon \geqslant 3p$. Правда, последнее время [5] высказывалось мнение, что это условие нужно отнести к категории предрассудков, ибо возможны особые состояния материи, когда $\varepsilon \to p$, и поэтому $\varepsilon \geqslant p$. При этом обычно считается, что $\varepsilon \geqslant 0$ и $p \geqslant 0$ [6], хотя существуют и другие мнения (см. [7—9]), согласно которым, допустимы отрицательные массы и давления. Например, Эйнштейн [10] рассматривал модель стационарной Вселенной с отрицательным давлением, интерпретируя его как давление какого-то суммарного поля. Поэтому на приводимые ниже графики, построенные на основе найденных в [1] решений и характеризующие состояния материи, можно смотреть как на имеющие или частично не имеющие физического смысла в зависимости от принятой точки зрения.

Перейдем к подробному рассмотрению поведения величин ε, dl_R, dV в конкретных случаях.

I. Исходя из решения (10) в [1]

$$r=\left(\frac{3F}{\alpha p}\right)^{1/3}\cos^{2/3}t_1,\quad t_1\equiv\frac{\sqrt{3\alpha p}}{2}(t-t_0),\quad \alpha\equiv\frac{8\pi k}{c^4}\tag{5}$$

($t_0=t_0(R)$ и $F=F(R)$ — произвольные функции интегрирования), полученного для $p=\mathrm{const}>0$ и $f(R)=0$, находим:

$$dl_R=\left(\frac{3}{\alpha p}\right)^{1/3}\left(\frac{1}{3}F^{-2/3}F'\cos^{2/3}t_1+\right.$$
$$\left.+\sqrt{\frac{\alpha p}{3}}F^{1/3}t_0'\cos^{-1/3}t_1\sin t_1\right)dR,\tag{6}$$

$$dV=F'\left(\frac{1}{\alpha p}\cos^2 t_1+\sqrt{\frac{3}{\alpha p}}\frac{A}{2}\sin 2t_1\right)\times$$
$$\sin\theta\, dR\, d\theta\, d\varphi,\quad A\equiv\frac{Ft_0'}{F'}.\tag{7}$$

При $t_1=\pm\frac{\pi}{2}$ элемент радиальной длины dl_R обращается в бесконечность, а r, dl_φ и dV обращаются в нуль. Существует еще $t_1=t_1^*$, при котором $r>0$, $dl_R=0$, $dV=0$. Значение t_1^* определяется равенством $\operatorname{ctg} t_1^*=-\sqrt{3\alpha p}\,A$. Соотношение (13) в [1]

$$\alpha(\varepsilon+p)=\left(\frac{1}{\alpha p}\cos^2 t_1+\sqrt{\frac{3}{\alpha p}}\frac{A}{2}\sin 2t_1\right)^{-1},\tag{8}$$

полученное на основе (5), определяет закономерность изменения плотности ε. Очевидно, что ε является периодической относительно t_1 функцией с периодом π. Достаточно поэтому изучить ее поведение, например, на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right]$. На концах, а также внутри этого отрезка при $t_1=t_1^*$ ε

обращается в бесконечность. Если $t_0(R) = \text{const}$, то $A \equiv 0$ и $\varepsilon = p\,\mathrm{tg}^2 t_1$. В этом случае получаем фридмановскую модель с $p = \text{const} > 0$ для $\lambda = 0$ (см. [3], (106,9)). Отметим, что A может равняться нулю и при отдельных значениях R. Общий ход графиков функции $\varepsilon = \varepsilon(t, R)$ при некотором фиксированном R изображен на рис. 1, *а*, *б*. Графику *а* соответствует $A > 0$; для *б* $A = 0$. График функции ε при $A < 0$ получается из *а* зеркальным отражением последнего относительно оси ε. Для сравнения на

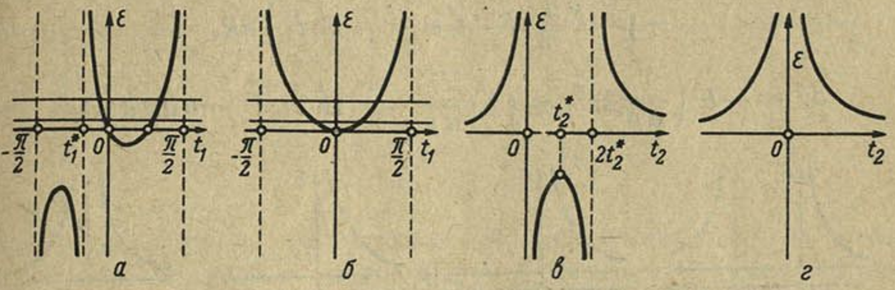


Рис. 1

рис. 1, *в*, *г* построены графики ε в случае $p = 0$ и $f = 0$ (см. [11] или [3], стр. 346), согласно формуле

$$\varepsilon = \frac{4}{3\alpha} \frac{1}{t_2^2 - 2At_2}, \quad t_2 \equiv t - t_0(R). \tag{9}$$

Величина r в этом случае определяется выражением $r = \left(\frac{9}{4} F t_2^2\right)^{1/3}$. Рис. 1, *в* построен для $A > 0$ ($t_2^* = A$), рис. 1, *г* — для $A = 0$. Чтобы получить график ε при $A < 0$, также следует зеркально отразить рис. 1, *в* относительно оси ε. Если должно быть $\varepsilon \geqslant 3p$ или $\varepsilon \geqslant p$, то следует считать имеющими физический смысл только части рис. 1, *а*, *б* над горизонтальными линиями $3p$ или p.

Не исключая возможности существования состояний материи во Вселенной с отрицательным давлением [8 — 10], рассмотрим также поведение плотности материи ε и метрики пространства при $p < 0$.

II. Согласно (14) из [1],

$$\alpha(\varepsilon + p) = -\left(\frac{1}{\alpha p}\,\mathrm{sh}^2 t_3 + \sqrt{\frac{-3}{\alpha p}}\,\frac{A}{2}\,\mathrm{sh}\,2t_3\right)^{-1},$$
$$t_3 \equiv \frac{\sqrt{-3\alpha p}}{2}(t - t_0). \tag{10}$$

Поведение определяемой отсюда плотности ε как функции t_3 (при закрепленном значении R) представлено графиками на рис. 2, которые получаются соответственно при условиях: *а*) $\sqrt{-3\alpha p}\,A < 1$; *б*) $\sqrt{-3\alpha p}\;A > 1$; *в*) $\sqrt{-3\alpha p}\,A = 1$; *г*) $A = 0$. Кроме того, для *а*) $A > 0$. Если $t_0(R) = \text{const}$, то $A \equiv 0$ и $\varepsilon = -p\,\mathrm{cth}^2 t_3$. Мы приходим к плоской фридмановской модели с постоянным отрицательным давлением, но $\varepsilon \geqslant |p|$. Значение t_3^* на рис. 2, *а* определяется из уравнения $\mathrm{th}\,t_3^* = \sqrt{-3\alpha p}\,A$. Графики ε при $A < 0$ можно получить из приведенных на рис. 2 зеркальным отражением последних относительно оси ε.

Метрика для рассматриваемого случая определяется решением [1], (11)

$$r = -\left(\frac{3F}{\alpha p}\right)^{1/3} \operatorname{sh}^{2/3} t_3, \quad p = \mathrm{const} < 0, \quad F(R) > 0. \tag{11}$$

Тогда

$$dl_R = \left(\frac{-3}{\alpha p}\right)^{1/3} \left(\frac{1}{3} F^{-2/3} F' \operatorname{sh}^{2/3} t_3 - \right.$$

$$\left. - \sqrt{\frac{\alpha p}{-3}}\, F^{1/3} t_0' \operatorname{sh}^{-1/3} t_3 \operatorname{ch} t_3 \right) dR, \tag{12}$$

$$dV = -F'\left(\frac{1}{\alpha p} \operatorname{sh}^2 t_3 + \sqrt{\frac{-3}{\alpha p}}\, \frac{A}{2} \operatorname{sh} 2 t_3\right) \sin\theta \, dR \, d\theta \, d\varphi. \tag{13}$$

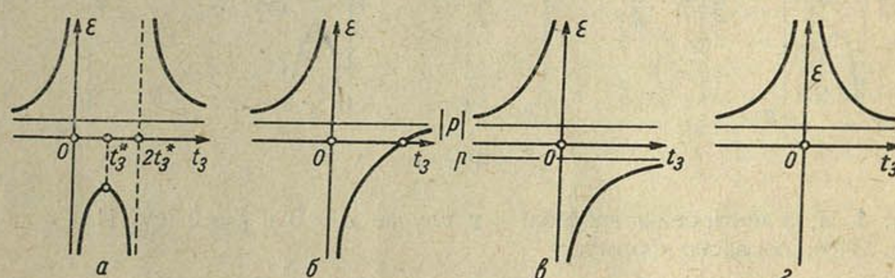


Рис. 2

Следовательно, при $t_3 \to 0$ величины r, dl_φ, dV стремятся к нулю, а dl_R стремится к бесконечности. Для $t_3 = t_3^*$ $r > 0$, $dl_R = 0$, $dV = 0$.

III. Наконец, исследуем поведение ε, пользуясь соотношением [1], (15):

$$\alpha(\varepsilon + p) = \left(\frac{1}{\alpha p} \operatorname{ch}^2 t_3 + \sqrt{\frac{-3}{\alpha p}}\, \frac{A}{2} \operatorname{sh} 2 t_3\right)^{-1}. \tag{14}$$

Графиками рис. 3 исчерпываются все возможные случаи поведения ε как функции t_3 (при $R = \mathrm{const}$). Значение $\tilde{t}_3$ на рис. 3,*а* определяется равенством $\operatorname{th} 2\tilde{t}_3 = \sqrt{-3\alpha p}\, A$, а t_3^0 на рис. 3,*б* определяется равенством $\operatorname{cth} t_3^0 = \sqrt{-3\alpha p}\, A$. Графику рис. 3, *а* соответствует условие $\sqrt{-3\alpha p} \times \times A < 1$, $A > 0$; рис. 3,*б* получен при условии $\sqrt{-3\alpha p}\, A > 1$, рис. 3, *в* — при условии $\sqrt{-3\alpha p}\, A = 1$. Наконец, при $A = 0$ находим из (14), что $\varepsilon = -p \operatorname{th}^2 t_3$. Этому случаю соответствует рис. 3,*г*. Как и в предыдущих случаях, при $t_0 = \mathrm{const}$ получаем $A \equiv 0$ и приходим к плоской фридмановской модели Вселенной с постоянным отрицательным давлением и $0 \leqslant \varepsilon \leqslant |p|$. В случае $A < 0$ графики для ε получаются из приведенных на рис. 3 также с помощью зеркального отражения относительно оси ε.

Как видим, только в случае *б* ε при $t_3 = t_3^0$ обращается в бесконечность. Соответственно этому элемент объема

$$dV = F'\left(\frac{1}{\alpha p} \operatorname{ch}^2 t_3 + \sqrt{\frac{-3}{\alpha p}}\, \frac{A}{2} \operatorname{sh} 2 t_3\right) \sin\theta \, dR \, d\theta \, d\varphi \tag{15}$$

при $t_3 = t_3^0$ обращается в нуль. Во всех остальных случаях $dV \neq 0$. Выражение (15) легко получить, воспользовавшись величинами r и r':

$$r = \left(\frac{3F}{\alpha p}\right)^{1/3} \operatorname{ch}^{2/3} t_3, \quad p < 0, \quad F(R) < 0; \tag{16}$$

$$r' = \left(\frac{\alpha p}{3F}\right)^{2/3} \operatorname{ch}^{-4/3} t_3 F' \left(\frac{1}{\alpha p} \operatorname{ch}^2 t_3 + \sqrt{\frac{-3}{\alpha p}} \cdot \frac{A}{2} \operatorname{sh} 2t_3\right). \quad (17)$$

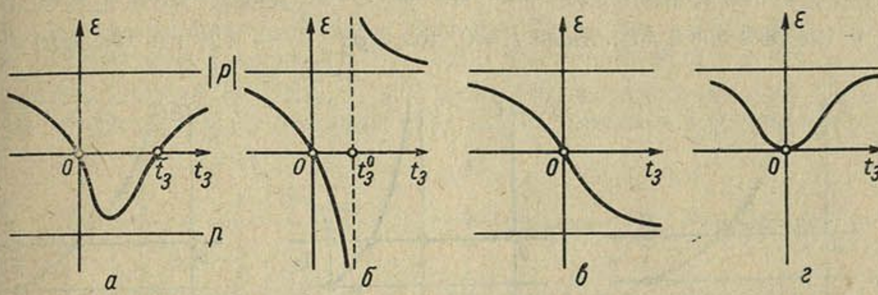


Рис. 3.

Отсюда видно, что r' и, следовательно, dl_R обращаются в нуль одновременно с dV. Величина r никогда в нуль не обращается. Если $\varepsilon = 0$ (при $t_3 = 0$), то r принимает минимальное значение.

IV. Из решения (19) в [1]

$$\pm t_2 = \frac{2}{\sqrt{\alpha p}}\left(\sqrt{3} \arcsin \sqrt{\frac{r}{2\beta}} - \arcsin \sqrt{\frac{3}{2} \frac{r}{r+\beta}}\right) \quad (18)$$

следует, что r обращается в нуль только при $t_2 \equiv t - t_0(R) = 0$ и что $0 \leqslant r \leqslant 2\beta$, где $\beta \equiv (3F/2\alpha p)^{1/3} > 0$, $p = \mathrm{const} > 0$, $F(R) > 0$. Кроме того, $|t_2| \leqslant a \equiv \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{\alpha p}} \pi$. Согласно (20) в [1],

$$r' = \frac{F'}{F}\left[\frac{r}{3} \mp A(r+\beta)\sqrt{\frac{\alpha p}{3} \frac{2\beta - r}{r}}\right]. \quad (19)$$

Поэтому

$$dl_R = \frac{1}{\sqrt{1+f}} \frac{F'}{F}\left[\frac{r}{3} \mp A(r+\beta)\sqrt{\frac{\alpha p}{3} \frac{2\beta - r}{r}}\right] dR, \quad (20)$$

$$dV = \frac{1}{\sqrt{1+f}} \frac{F'}{F}\left[\frac{r^3}{3} \mp A(r+\beta)\sqrt{\frac{\alpha p}{3}(2\beta - r) r^3}\right] \times$$
$$\times \sin\theta \, dR \, d\theta \, d\varphi. \quad (21)$$

Здесь, как и всюду, $A \equiv Ft_0'/F'$, а $f(R)$ связано с $F(R)$ соотношением $F^2/4 = f^3/9\alpha p$. Следовательно, $f > 0$. Если $\mp A > 0$, то r' в нуль не обращается. Если $\mp A < 0$, то существует такое значение $t_2 = t_2^*$, при котором $r' = 0$. Поэтому $r'r^2$ обращается в нуль в последнем случае дважды: при $t_2 = 0$ и при $t_2 = t_2^*$, $0 < t_2^* < a$. Итак, dl_R или никогда не обращается в нуль, или обращается в нуль только при $t_2 = t_2^*$; соответственно dV или обращается в нуль только при $t_2 = 0$, или при двух значениях t_2: $t_2 = 0$ и $t_2 = t_2^*$.

Плотность материи ε определяется по формуле (21) из [1]

$$\alpha(\varepsilon + p) = F\left[\frac{r^3}{3} \mp A(r+\beta)\sqrt{\frac{\alpha p}{3}(2\beta - r) r^3}\right]^{-1}. \quad (22)$$

Учитывая закономерности изменения $r'r^2$, нетрудно построить графики для ε как функции t_2 при некотором заданном R. На рис. 4 изображены графики ε, соответствующие знаку $+$ перед t_2 в (18) (тогда в (19) — (22) перед A берется знак —). Рис. 4,*а* построен для $A < 0$, а 4,*б* — для $A > 0$ (разрыв при $t_2 = \overset{*}{t_2}$). Если $t'_0 = 0$, то $\varepsilon = p\left(\frac{2}{\psi^3} - 1\right)$, где $0 \leqslant \psi(t) \leqslant 2$.

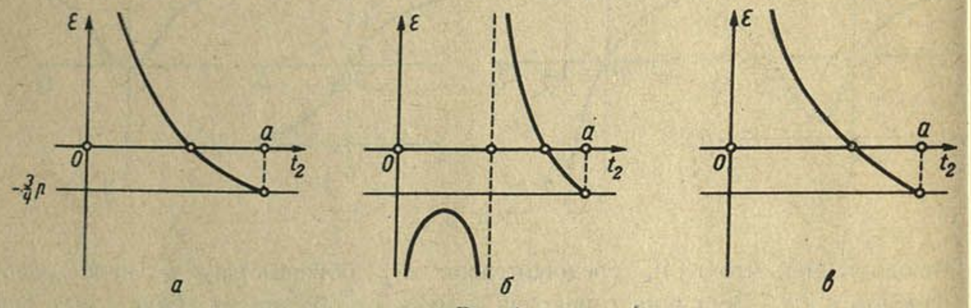


Рис. 4

Рис. 4,*в* представляет этот последний случай. Если $t'_0 \equiv 0$, т. е. $t_0 = \text{const}$, то получаем фридмановскую космологическую модель с отрицательной кривизной трехмерного сопутствующего пространства. Выбор знака — перед t_2 в решении (18) равносилен замене t_2 на $-t_2$. В этом случае графики для ε являются зеркальным отражением графиков рис. 4 в оси ε.

В работе [1] интеграл (9) был взят в предположении, что $F^2/4 = f^3/9\alpha p$ и $p > 0$. Оставляя связь между F и f прежней, примем, что $p = \text{const} < 0$ ($f < 0$). Тогда интеграл (9) можно переписать в виде

$$\pm t_2 = \sqrt{\frac{-3}{\alpha p}} \int \sqrt{\frac{r}{r - 2\beta}}\, \frac{dr}{r + \beta}. \tag{23}$$

Считая r неотрицательным, получим разные решения в зависимости от величины β:

$$1)\quad \pm t_2 = \frac{2}{\sqrt{-\alpha p}} \left(\sqrt{3}\, \operatorname{Ar\,ch} \sqrt{\frac{r}{2\beta}} - \operatorname{Ar\,ch} \sqrt{\frac{3}{2}\, \frac{r}{r + \beta}} \right),$$

$$\text{если } \beta > 0 \ (F < 0) \tag{24}$$

(для двузначных функций Arch в (24) нужно брать положительные или отрицательные значения одновременно. Условимся всегда брать положительные значения)

$$2)\quad \pm t_2 = \frac{2}{\sqrt{-\alpha p}} \left(\sqrt{3}\, \operatorname{Ar\,sh} \sqrt{\frac{-r}{2\beta}} - \operatorname{Ar\,sh} \sqrt{\frac{1}{2}\, \frac{r - 2\beta}{r + \beta}} \right),$$

$$\text{если } \beta < 0 \text{ и } r + \beta > 0, \tag{25}$$

$$3)\quad \pm t_2 = \frac{2}{\sqrt{-\alpha p}} \left(\sqrt{3}\, \operatorname{Ar\,sh} \sqrt{\frac{-r}{2\beta}} - \operatorname{Ar\,sh} \sqrt{\frac{3}{2}\, \frac{-r}{r + \beta}} \right),$$

$$\text{если } \beta < 0 \text{ и } r + \beta < 0. \tag{26}$$

V. Из решения (24) ясно, что $r \geqslant 2\beta$; $r = 2\beta$ при $t_2 = 0$. Также всегда $\pm t_2 \leqslant 0$. Получающиеся из (24) выражения для r', dl_R, dV и ε в точности совпадают с (19) — (22) соответственно. Нужно только помнить, что теперь $p<0$, $r\geqslant 2\beta$. Общие условия обращения в нуль r' и dl_R те же, что и в случае IV. Но теперь dV или вовсе в нуль не обращается ($r\geqslant 2\beta$), или обращается в нуль вместе с r'. На рис. 5 изображены графики функции ε при некотором фиксированном значении R для $+t_2$ в (24). Рис. 5, *а* соответствует случаю, когда $A>0$ (r' один раз обращается в нуль), а 5,*б* — случаю $A<0$ ($r'\neq 0$). Если $t_0'=0$, то из (19) следует, что $r=\psi_1(t)\beta$, где $\psi_1(t)$ определяется из формулы (24) после замены в ней r на $\psi_1\beta$, а из

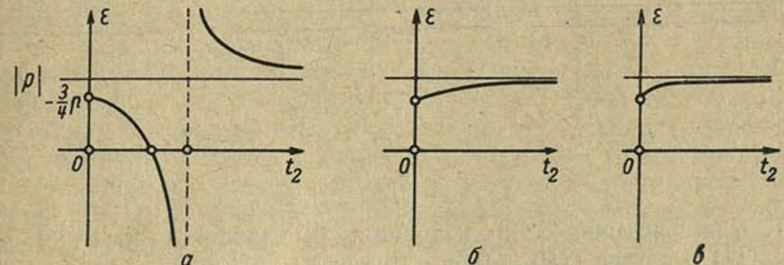


Рис. 5

(22) получаем $\varepsilon=p(2\psi_1^{-3}-1)$, где теперь $\psi_1\geqslant 2$. Если $t_0'\geqslant 0$, то опять получаем фридмановскую космологическую модель с положительной кривизной трехмерного пространства, в котором распределение плотности материи ε по сравнению со случаем, показанным на рис. 4, *в*, иное (рис. 5, *в*). Если в (24) взять $-t_2$, то для ε получим графики, являющиеся зеркальным отражением графиков рис. 5 относительно оси ε.

VI. Исследование решения (25) проводится аналогично. Теперь $-\beta<r<\infty$. Если $r\to-\beta$, то $\pm t_2\to-\infty$, а при $r\to\infty$ и $\pm t_2\to\infty$. Выражения для r', dl_R, dV и ε, как и в случае V, совпадают с (19) — (22) соответственно. На рис. 6 изображены возможные графики ε в случае выбора знака $+$ перед t_2 в (25). График 6,*а* соответствует случаю $A>0$, 6,*б* — случаю $A<0$, 6,*в* — случаю $A=0$. При $A=0$ для ε получается простая формула: $\varepsilon=p(2\psi_2^{-3}-1)$, где $\psi_2(t)$ есть функция, определяемая из (25) путем замены в (25) r на $\psi_2\beta$, $-\infty<\psi_2<-1$.

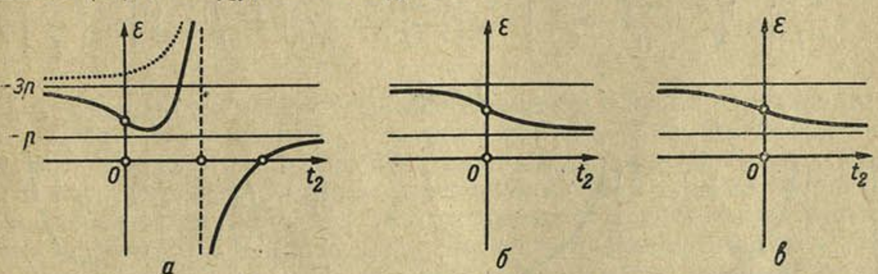


Рис. 6

VII. Наконец, исследование решения (26), проведенное совершенно аналогично исследованию случаев IV — VI, дает следующие результаты. Величины r и t_2 меняются в пределах $0\leqslant r<-\beta$, $0\geqslant\pm t_2>-\infty$. Выражения для r', dl_R, dV и ε опять-таки совпадают с (19) — (22). При выборе $+t_2$ в (26) r' не обращается в нуль ни при каких t_2, если $A>0$, и обращается в нуль один раз, если $A<0$ или $A=0$. В соответствии с этим получим графики для ε (при некотором $R=\mathrm{const}$), изображенные на рис. 7: *а* соответствует $A>0$; *б* соответствует $A<0$, *в* соответствует $A=0$. Если $A=0$, то $r=\psi_3(t)\beta$ и $\varepsilon=p(2\psi_3^{-3}-1)$, где функция $\psi_3(t)$ определяется из (26);

$0 \geqslant \psi_3 > -1$. При $t_0' \equiv 0$ опять получаем фридмановскую модель. Замена $+t_2$ на $-t_2$ в (26) приводит к зеркальному отражению графиков на рис. 7 относительно оси ε.

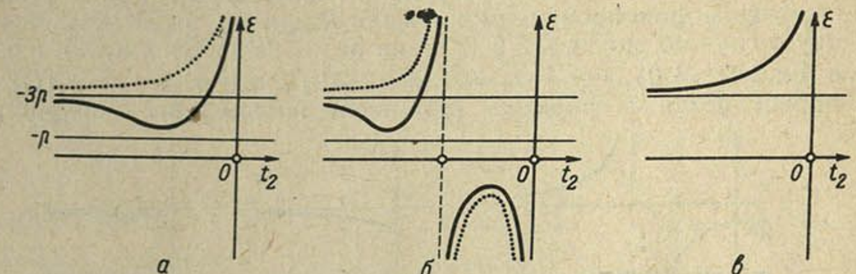


Рис. 7

VIII. Для сравнения с предыдущими решениями рассмотрим решения Толмана [11] в случае $f(R) \neq 0\,(p = 0)$:

$$\pm t_2 = f^{-1}\sqrt{fr^2 + Fr} - Ff^{-3/2}\,\mathrm{Ar\,sh}\sqrt{fF^{-1}r}, \text{ если } f(R) > 0; \qquad (27)$$

$$\pm t_2 = f^{-1}\sqrt{fr^2 + Fr} + F(-f)^{-3/2}\arcsin\sqrt{-fF^{-1}r}, \text{ если } f(R) < 0 \qquad (28)$$

(см. также [3], стр. 346). Нетрудно показать, что для решения (27) r и $\pm t_2$ монотонно изменяются в пределах $0 \leqslant r < \infty$, $0 \leqslant \pm t_2 < \infty$, а для (28) — в пределах $0 \leqslant r \leqslant -f^{-1}F$, $0 \leqslant \pm t_2 \leqslant a_0$, $a_0 \equiv \dfrac{\pi}{2}F/(-f)^{3/2}$. С помощью дифференцирования выражений (27) и (28) по R находим:

$$r' = \frac{F}{f}\left\{\pm\sqrt{\frac{F}{fr} + 1}\left[-t_0'\,\frac{f^{3/2}}{F} + t_2\left(\frac{f^{3/2}}{F}\right)'\right] - \left(\frac{f}{F}\right)' r\right\}, \quad f > 0; \qquad (29)$$

$$r' = \frac{F}{-f}\left\{\pm\sqrt{\frac{-F}{fr} - 1}\left[-t_0'\,\frac{(-f)^{3/2}}{F} + t_2\left(\frac{(-f)^{3/2}}{F}\right)'\right] + \left(\frac{f}{F}\right)' r\right\},$$
$$f < 0. \qquad (30)$$

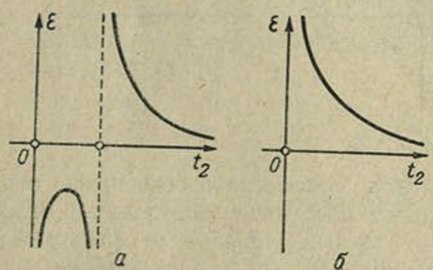


Рис. 8

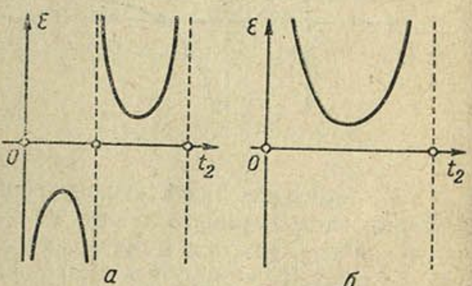


Рис. 9

Подставляя эти значения r' в (2) и (4), найдем dl_R и dV. В зависимости от выбора произвольных функций интегрирования $f(R)$, $F(R)$, $t_0(R)$ количество нулей у функций r' и $r'r^2$ может быть разным, что влияет на поведение dl_R, dV и ε. Для решения (27) некоторые возможные графики ε при $R=\text{const}$ изображены на рис. 8, а для решения (28) — на рис. 9.

IX. Метрические свойства пространств, определяемых решениями (25)—(27) в [1], выявляются без труда, ибо r явно выражено через t и R. Отметим только, что элементарные объемы dV могут обращаться в нуль один или два раза, в то время как плотность материи остается постоянной и положительной ($\varepsilon=-p$, $p=\text{const}<0$). По-видимому, такие решения физического смысла не имеют. Во всех предыдущих решениях ($F'\neq 0$) при обращении dV в нуль ε всегда обращается в бесконечность.

Сделаем некоторые обобщения, касающиеся свойств решений.

Метрика всех рассмотренных пространств обладает особенностями: при некоторых значениях разности $t-t_0(R)$ величины r или r' (или обе одновременно) обращаются в нуль, что приводит к вырождению метрики (определитель, составленный из компонент метрического тензора g_{ik}, обращается в нуль). Система координат, в которой записана метрика (1), является полугеодезической (по терминологии геометров [12, 13]), или, как ее называют физики [3], изохронной ($g_{00}=-1$, $g_{0\alpha}=0$). Как показано в [3], § 108, в такой системе метрика обязательно обладает особенностью, которая, однако, может исчезать при переходе к другой системе отсчета. Критерием неустранимости особенности любой метрики никаким преобразованием координат в пространстве — времени может служить наличие соответствующей особенности у скаляров этого пространства — времени. Одним из таких скаляров (инвариантов) риманова пространства является скалярный квадрат тензора кривизны Римана — Кристоффеля $Q\equiv R_{ijkl}R^{ijkl}$ (R_{ijkl} является тензором кривизны Римана—Кристоффеля, и по значкам i, j, k, $l=0$, 1, 2, 3 идет суммирование). Вычислим Q для метрики (1), воспользовавшись значениями компонент тензора R_{ijkl}, вычисленными в [2], и соотношениями (5) — (8) из [1], определяющими любое решение при постоянном давлении. После довольно утомительных выкладок находим

$$Q=4\left(\frac{F}{r^3}-\frac{1}{2}\,\frac{F'}{r'r^2}-\frac{\alpha p}{3}\right)^2+4\left(\frac{F}{r^3}-\frac{\alpha p}{3}\right)^2+$$
$$+2\left(\frac{F}{r^3}-\frac{F'}{r'r^2}+\frac{2\alpha p}{3}\right)^2+2\left(\frac{F}{r^3}+\frac{2\alpha p}{3}\right)^2. \tag{31}$$

Отсюда видно, что если $F\neq 0$, то при обращении в нуль $r'r^2$ инвариант Q обращается в бесконечность. Также если $F(R)\neq 0$, то $Q=\infty$ при $r=0$. Следовательно, эти особенности метрики являются истинными, т. е. не могут быть устранены никаким переходом к новой системе координат. Этим особенностям метрики в рассмотренных решениях всегда соответствует особенность в распределении плотности материи ε: именно ε обращается в бесконечность. Напомним, что при обсуждении решений во всех пунктах, кроме IX, предполагалось, что $F'\neq 0$. Выделим особый случай: пусть $F=\text{const}\neq 0$. Тогда $F'\equiv 0$ и из (8) в [1] немедленно вытекает, что $\varepsilon=-p=\text{const}$. Следовательно, любое решение, получаемое из (9) в [1], при этом условии имеет истинно вырожденную метрику там, где $r=0$ (ибо $Q=\infty$). Решения, рассмотренные в пунктах I, II, IV, VII, VIII, допускают значение $r=0$; это истинные особенности. Но для некоторых из этих же решений метрика вырождается не только при $r=0$, но и при $r'=0$, причем r' обращается в нуль не обязательно при тех же значениях t_1, t_2 или t_3, что и r. Особенности этого типа, по-видимому, можно устранить преобразованием координат. Если $r=0$, то всегда $dV=0$. Поэтому те решения, для которых r может обращаться в нуль и $F=\mathrm{const}$, вряд ли имеют физический смысл, ибо в сопутствующей материи системе отсчета dV обращается в нуль, а ε остается постоянным в любой точке пространства. Для решений, полученных в предположении $F\equiv 0$, инвариант Q вообще не меняется: $Q=24/9\ \alpha^2 p^2=\mathrm{const}$. Однако метрика решений (25) — (27) в [1] вырождается или при $r=0$, или при $r'=0$. Это вырождение обязано выбору изохронной системы координат.

Теперь рассмотрим вопрос о конечности и бесконечности пространства и времени, определяемых указанными решениями. В эти решения собственное время $\tau=t/c$ всегда входит только через разность $t_2\equiv t-t_0(R)$. При тех значениях t_2, когда ε обращается в бесконечность, мы имеем, как показано выше, истинные (физические) особенности. Вообще говоря, не имеет физического смысла переходить через эти особенности и интерпретировать метрику по обе стороны особенности как единый физический процесс *). Например, в решении Толмана при $f=0$ (рис. 1, *в*) можно пытаться физически истолковать решение на полуинтервалах $-\infty<t_2<0$ и $2t_2^*<t_2<\infty$; для решений, соответствующих рис. 2, *б*, *в*, *г*,— на полуинтервалах $-\infty<t_3<0$, $0<t_3<\infty$.

Все решения подобного рода будем называть полуограниченными во времени, потому что собственное время неособого существования любого конкретного элемента материи в пространстве, определяемого некоторым данным значением R, будет изменяться на соответствующем полуинтервале (есть начальное особое состояние материи, но нет конечного, или наоборот: например, как в открытой фридмановской модели). Если существуют две и более особые точки, то t_2 следует рассматривать в некотором интервале (например, для решения Толмана при $f<0$ имеем: $t_2^*<t_2<a_0$, $0<t_2<a_0$ (рис. 9); для решений, соответствующих рис. 1 *а*, *б*, имеем: $t_1^*<t_1<\pi/2$, $-\pi/2<t_1<\pi/2$). Эти решения будем называть ограниченными во времени, так как промежуток собственного времени между особыми состояниями материи в любом конкретном элементе объема будет конечным (есть начальное особое состояние материи и есть конечное, например, как в закрытой фридмановской модели). Среди рассмотренных решений имеется интересное решение (18), для которого $|t_2|\leqslant a$, причем $\varepsilon=\infty$ при $t_2=0$, а при $|t_2|=a$ $\varepsilon=-3/4\ p$, $p>0$, т. е. на конце a решение обрывается (точка прекращения) с конечным отрицательным значением ε. Решение (18) также относится к классу ограниченных во времени. Конечно, для разных элементов объема время существования материи между особыми состояниями будет разным. Особо отметим решение (16). Случаи, представленные рис. 3 *а*, *в*, *г*, следует назвать неограниченными во времени, так как для любых значений t_3 $\varepsilon\neq\infty$ $(Q\neq\infty)$**).

Расстояния и объемы в малом в полученных пространствах определяются с помощью линейного элемента dl, т. е. посредством формул (2) — (4). Чтобы находить конечные расстояния и объемы, следует интегрировать выражения (2) — (4). В случае произвольной системы отсчета интегрирование при постоянном t не имеет физического смысла, ибо в разных точках пространства одновременные события определяются разными значениями t. Но, пользуясь преимуществами изохронной си-

*) Общая теория относительности, как и всякая другая научная теория, имеет определенные границы применения (в малом и большом) к реальному миру. Поэтому если материя находится в особом состоянии ($dV\to 0$, $\varepsilon\to\infty$), то закономерности развития материи в этом состоянии и из этого состояния не могут быть объяснены в рамках общей теории относительности (нужна еще, например, квантовая теория).

**) Если же к особым состояниям материи присоединить состояния, когда нарушаются условия $\varepsilon\geqslant 3p$ или $\varepsilon\geqslant p$ и $\varepsilon\geqslant 0$, то все решения будут полуограниченными или ограниченными во времени.

стемы отсчета, интегрировать можно, считая $t = \text{const}$ *). Тогда радиальное расстояние от начала координат до любой точки $M(R, \theta, \varphi)$ в некоторый момент времени τ определится по формуле (если $f(R) = \text{const}$):

$$l_R = \int\limits_0^R \frac{r'}{\sqrt{1+f}} dR = \frac{r(t, R) - r(t, 0)}{\sqrt{1+f}}. \tag{32}$$

Длина окружности с центром в начале координат равна

$$l_\varphi = \int\limits_0^{2\pi} r\Big|_0^R d\varphi = 2\pi \left[r(t, R) - r(t, 0)\right] = 2\pi l_R \sqrt{1+f}. \tag{33}$$

Следовательно, отношение длины окружности l_φ к ее радиусу l_R равно $2\pi\sqrt{1+f}$, т. е. равно 2π при $f = 0$, больше 2π, если $f > 0$, и меньше 2π, если $f < 0$. Объем шара с центром в начале координат дается выражением

$$V = \int\limits_0^R \int\limits_0^\pi \int\limits_0^{2\pi} \frac{r' r^2}{\sqrt{1+f}} \sin\theta \, dR d\theta \, d\varphi = 4\pi \int\limits_0^R \frac{r' r^2}{\sqrt{1+f}} dR =$$

$$= \frac{4}{3} \frac{\pi}{\sqrt{1+f}} r^3 \Big|_0^R, \tag{34}$$

если $f = \text{const}$. Если же $f(R) \neq \text{const}$, то взять интегралы в выражениях для l_R и V в общем случае невозможно. Нужно делать конкретные предположения относительно вида функций f, F, t_0, входящих в r.

Все три величины l_R, l_φ, V для решения (5) являются периодическими и ограниченными при переменном t и постоянном R и вообще ограниченными, если ограничена функция $F(R)$. Аналогичное утверждение (за исключением периодичности) имеет место для решений (18), (26) и решения Толмана (28). Остальные решения обязательно приводят с течением времени к бесконечно большим расстояниям и объемам. Среди последних можно указать на решения (16) и (24), определяющие пространства, в которых не может быть расстояний и объемов, меньших некоторых не равных нулю величин (при условии $F(R) \neq 0$).

В заключение работы будет уместным сделать следующее замечание. В последнее время усиленно разрабатывается теория релятивистского гравитационного коллапса скоплений материи (звезд, сверхзвезд, галактик и т. д.). Необходимые сведения по этому вопросу можно найти в обзорных работах [14, 15]. Интересно, что для теории коллапса привлекаются, как правило, решения уравнений Эйнштейна, в которых давлением вещества пренебрегают [11, 16, 17]. Такой подход может отражать действительность только в самом грубом приближении. Следующим приближением явились бы теории, опирающиеся на решения с $p = \text{const} \neq 0$. Не исключено, что качественные результаты могут получиться иными. Этот важный вопрос предполагается обсудить в отдельной работе.

---

*) В изохронной системе отсчета синхронизация часов во всем пространстве возможна. Одновременным событиям в разных точках пространства соответствуют одинаковые значения $\tau = t/c$. Кроме того, промежуток собственного времени между любыми двумя событиями, происходящими в некоторой точке пространства, всегда равен промежутку времени между одновременными с ними событиями в другой точке пространства ([3], § 84).

Литература

1. Рябушко А. П. Весці АН БССР, сер. фіз.-мат. навук, № 1, 1967.
2. Рябушко А. П. Изв. вузов СССР, Физика, № 1, 1964.
3. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теория поля, 4-е изд. Физматгиз, М., 1962.
4. Уилер Дж. Сборник «Гравитация и относительность». Под ред. А. З. Петрова, гл. 10. Изд-во «Мир», 1965.
5. Зельдович Я. Б., Новиков И. Д. УФН, **84**, 377, 1964.
6. Мак-Витти Г. К. Общая теория относительности и космология. ИЛ, 1961.
7. Терлецкий Я. П. Проблемы гравитации. Тезисы докладов Второй советской гравитационной конференции. Тбилиси, 1965, стр. 238.
8. Mc. Crea W. H. Proc. Roy. Soc., A**206**, 562, 1951.
9. Whittaker J. M. Nature, **209**, № 5022, 491, 1966.
10. Эйнштейн А. Сущность теории относительности. ИЛ, 1955.
11. Tolman R. C. Proc. Nat. Acad. Sci., **20**, 169, 1934.
12. Эйзенхарт Л. П. Риманова геометрия. ГИИЛ, 1948.
13. Рашевский П. К. Риманова геометрия и тензорный анализ. Техгиз, 1953.
14. Зельдович Я. Б., Новиков И. Д. УФН, **84**, 377, 1964; **86**, 447, 1965.
15. Зельдович Я. Б., Новиков И. Д. Общая теория относительности и астрофизика. Эйнштейновский сборник, 1966.
16. Oppenheimer J. R., Snyder H. Phys. Rev., **56**, 455, 1939.
17. Гинзбург В. Л., Озерной Л. М. ЖЭТФ, **47**, 1030, 1964.

Белорусский государственный университет им. В. И. Ленина

Поступило в редакцию 24.XII 1966

ВЕСЦІ АКАДЭМІІ НАВУК БЕЛАРУСКАЙ ССР № 2 1967
СЕРЫЯ ФІЗІКА-МАТЭМАТЫЧНЫХ НАВУК

УДК 517.94

И. И. КОМЯК

ОБ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЯХ ТИПА СВЕРТКИ С СОПРЯЖЕНИЕМ

В настоящей работе рассматриваются интегральные уравнения типа свертки, которые вместе с неизвестной функцией $\varphi(x)$ содержат ее комплексное сопряжение $\overline{\varphi}(x)$. В дальнейшем такие уравнения будем называть интегральными уравнениями типа свертки с сопряжением. Простейшее уравнение такого типа имеет вид

$$\lambda_1\varphi(x) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} k_1(x-t)\,\varphi(t)\,dt + \lambda_2\overline{\varphi}(x) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} k_2(x-t)\,\overline{\varphi}(t)\,dt = f(x). \tag{1}$$

Преобразованием Фурье уравнение (1) сводится к линейной системе алгебраических уравнений относительно преобразованных функций:

$$\begin{aligned}[\lambda_1 + K_1(x)]\,\Phi(x) + [\lambda_2 + K_2(x)]\,\overline{\Phi}(-x) &= F(x),\\ [\lambda_2 + \overline{K}_2(-x)]\,\Phi(x) + [\lambda_1 + \overline{K}_1(-x)]\,\overline{\Phi}(-x) &= \overline{F}(-x).\end{aligned} \tag{2}$$

Следовательно, в нормальном случае (т. е. когда определитель системы (2) отличен от нуля на вещественной оси) решение уравнения (1) можно получить в замкнутой форме.

Мы будем рассматривать интегральные уравнения типа свертки с четырьмя ядрами с сопряжением

$$\lambda\varphi(x) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{+\infty} k_1(x-t)\,\varphi(t)\,dt + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{0} k_2(x-t)\,\varphi(t)\,dt + \mu\overline{\varphi}(x) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{+\infty} k_3(x-t)\,\overline{\varphi}(t)\,dt + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{0} k_4(x-t)\,\overline{\varphi}(t)\,dt +$$

$$+\int_{-\infty}^{+\infty} m(x, -t)\varphi(t)\,dt+\int_{-\infty}^{+\infty} n(x, t)\bar{\varphi}(t)\,dt=f(x), \tag{3}$$

$$-\infty<x<+\infty,$$

и парные уравнения типа свертки с сопряжением

$$\lambda_1\varphi(x)+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} k_1(x-t)\,\varphi(t)\,dt+\lambda_3\bar{\varphi}(x)+$$

$$+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} k_3(x-t)\,\bar{\varphi}(t)\,dt+\int_{-\infty}^{+\infty} m(x, -t)\,\varphi(t)\,dt+$$

$$+\int_{-\infty}^{+\infty} n(x, t)\,\bar{\varphi}(t)\,dt=f(x), \qquad x>0;$$

$$\lambda_2\varphi(x)+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} k_2(x-t)\,\varphi(t)\,dt+\lambda_4\bar{\varphi}(x)+$$

$$+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} k_4(x-t)\,\bar{\varphi}(t)\,dt+\int_{-\infty}^{+\infty} m(x, -t)\,\varphi(t)\,dt+$$

$$+\int_{-\infty}^{+\infty} n(x, t)\,\bar{\varphi}(t)\,dt=f(x), \qquad x<0, \tag{4}$$

где λ и μ — кусочно-постоянные функции. Для упрощения записи в дальнейшем будем предполагать их действительными

$$\lambda=\begin{cases}\lambda_1, & x>0,\\ \lambda_2, & x<0,\end{cases} \qquad \mu=\begin{cases}\lambda_3, & x>0,\\ \lambda_4, & x<0.\end{cases}$$

Уравнения (3) и (4) можно переписать соответственно в виде

$$\mu_1\varphi(x)+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} a_1(x-t)\,\varphi(t)\,dt+$$

$$+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} a_2(x-t)\,\varphi(t)\operatorname{sgn} t\,dt+\mu_2\operatorname{sgn} x\,\varphi(x)+$$

$$+\nu_1\bar{\varphi}(x)+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} b_1(x-t)\,\bar{\varphi}(t)\,dt+$$

$$+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} b_2(x-t)\,\bar{\varphi}(t)\operatorname{sgn} t\,dt+\nu_2\operatorname{sgn} x\,\bar{\varphi}(x)+$$

$$+\int_{-\infty}^{+\infty} m(x, -t)\varphi(t)\,dt + \int_{-\infty}^{+\infty} n(x, t)\overline{\varphi}(t)\,dt = f(x), \tag{5}$$

$$\mu_1\varphi(x) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} a_1(x-t)\,\varphi(t)\,dt +$$

$$+\frac{\operatorname{sgn} x}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} a_2(x-t)\,\varphi(t)\,dt + \mu_2 \operatorname{sgn} x\,\varphi(x) +$$

$$+\nu_1\overline{\varphi}(x) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} b_1(x-t)\,\overline{\varphi}(t)\,dt +$$

$$+\frac{\operatorname{sgn} x}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} b_2(x-t)\,\overline{\varphi}(t)\,dt + \nu_2 \operatorname{sgn} x\,\overline{\varphi}(x) +$$

$$+\int_{-\infty}^{+\infty} m(x, -t)\,\varphi(t)\,dt + \int_{-\infty}^{+\infty} n(x, t)\,\overline{\varphi}(t)\,dt = f(x). \tag{6}$$

Здесь введены обозначения

$$\mu_1 = \frac{\lambda_1+\lambda_2}{2}, \quad \mu_2 = \frac{\lambda_1-\lambda_2}{2}, \quad \nu_1 = \frac{\lambda_3+\lambda_4}{2}, \quad \nu_2 = \frac{\lambda_3-\lambda_4}{2},$$

$$a_1(x) = \frac{k_1(x)+k_2(x)}{2}, \quad a_2(x) = \frac{k_1(x)-k_2(x)}{2},$$

$$b_1(x) = \frac{k_3(x)+k_4(x)}{2}, \quad b_2(x) = \frac{k_3(x)-k_4(x)}{2}.$$

Искомая функция $\varphi(x)$ и свободный член $f(x)$ считаются принадлежащими $L_2(-\infty, +\infty)$, а разностные ядра — $L(-\infty, +\infty)$. Ядра $m(x, t)$ и $n(x, t)$ удовлетворяют условию

$$\iint_{-\infty}^{+\infty} |m(x, t)|^2 dx dt < \infty, \qquad \iint_{-\infty}^{+\infty} |n(x, t)|^2 dx dt < \infty, \tag{7}$$

т. е. являются вполне непрерывными операторами в пространстве $L_2(-\infty, +\infty)$.

§ 1. НЕКОТОРЫЕ ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ ПРЕДЛОЖЕНИЯ

1. Пусть $\varphi(x)$ принадлежит $L_2(-\infty, +\infty)$. Интегралом Фурье этой функции называется предел в среднем квадратичном

$$\Phi(x) \equiv \underset{\lambda_1,\,\lambda_2\to\infty}{\text{l.i.m.}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\lambda_1}^{\lambda_2} \varphi(t)\,e^{itx}\,dt. \tag{1.1}$$

Известно, что этот предел существует, причем $\Phi(x) \in L_2(-\infty, +\infty)$ ([3], стр. 93). Оператор, ставящий в соответствие функции $\varphi(x)$ функцию

$\Phi(x)$, будем называть преобразованием Фурье и обозначать буквой V. Оператор V имеет обратный V^{-1}:

$$\varphi(x)=V^{-1}\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\ \underset{\lambda_1,\ \lambda_2\to\infty}{\text{l.i.m.}}\int\limits_{-\lambda_1}^{\lambda_2}\Phi(t)\,e^{-itx}\,dt. \tag{1.2}$$

2. Имеют место следующие соотношения для $\varphi(x)\in L_2(-\infty,+\infty)$:

$$V([\overline{\varphi}(x)]=\overline{\Phi}(-x), \tag{1.3}$$

$$V[\varphi(x)\operatorname{sgn}x]=\frac{1}{\pi i}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{V[\varphi(t)]\,dt}{t-x}, \tag{1.4}$$

где интеграл понимается в смысле главного значения по Коши и определяет функцию из $L_2(-\infty,+\infty)$ ([3], гл. V).

3. Пусть $k(x)\in L(-\infty,+\infty)$, $\varphi(x)\in L_2(-\infty,+\infty)$. Тогда почти для всех x существует свертка этих функций $k*\varphi=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}k(x-t)\,\varphi(t)\,dt\in$ $\in L_2(-\infty,+\infty)$, при этом

$$V[k*\varphi]=K(x)\,\Phi(x). \tag{1.5}$$

4. Пусть $f_1(x)$ и $f_2(x)$ принадлежат $L_2(-\infty,+\infty)$. Тогда имеет место равенство Парсеваля ([3], стр. 94)

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f_1(t)\,f_2(-t)\,dt=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}F_1(t)\,F_2(t)\,dt. \tag{1.6}$$

5. Пусть ядра $m(x,t)$ и $n(x,t)$ удовлетворяют условию (7). Обозначим преобразования Фурье этих ядер по второму переменному соответственно через $M_1(x,t)$ и $N_1(x,t)$, а их преобразования Фурье по обеим переменным через $M(x,t)$ и $N(x,t)$. Тогда почти для всех x справедливы соотношения (равенства Парсеваля):

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}m(x,-t)\,\varphi(t)\,dt=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}M_1(x,t)\,\Phi(t)\,dt, \tag{1.7}$$

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}n(x,t)\,\overline{\varphi}(t)\,dt=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}N_1(x,t)\,\overline{\Phi}(t)\,dt, \tag{1.8}$$

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}M_1(t,x)\,\varphi(t)\,dt=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}M(t,x)\,\Phi(-t)\,dt, \tag{1.9}$$

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\overline{N}_1(t,x)\,\overline{\varphi}(t)\,dt=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\overline{N}(-t,x)\,\overline{\Phi}(t)\,dt. \tag{1.10}$$

6. Пусть $k(x)\in L(-\infty,+\infty)$. Известно, что $K(x)$ исчезает на бесконечности и непрерывна ([3], стр. 19). Для почти всех x имеет место формула обращения $k(x)=V^{-1}K(x)$, причем интеграл Фурье понимается в смысле суммируемости (C,α) $\alpha>0$ ([3], стр. 42—43). Полагая $K(\pm\infty)=$

$=0$, будем рассматривать $K(x)$ как непрерывную функцию на замкнутой вещественной оси, получающейся отождествлением ее концов.

Обозначим через R кольцо (см. [7]) всех функций вида $c + K(x) = c + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} k(t) e^{itx} dt$, где c — постоянная, а $k(t)$ — произвольная функция из $L(-\infty, +\infty)$. Через R_0 обозначим совокупность всех функций из R, для которых $c = 0$.

§ 2. ОБ ИНДЕКСЕ И НОРМАЛЬНОЙ РАЗРЕШИМОСТИ ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ (3)

Построим сначала уравнение, союзное уравнению (3). Применяя к уравнению (3) оператор V и учитывая (1.3), (1.4), (1.5), (1.7) и (1.8), получим в $L_2(-\infty, +\infty)$ сингулярное уравнение, эквивалентное данному:

$$[\mu_1 + A_1(x)]\,\Phi(x) + \frac{\mu_2 + A_2(x)}{\pi i} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\Phi(t)\,dt}{t - x} + [\nu_1 + B_1(x)]\,\overline{\Phi}(-x) +$$

$$+ \frac{\nu_2 + B_2(x)}{\pi i} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\overline{\Phi}(-t)\,dt}{t - x} + \int\limits_{-\infty}^{+\infty} M(x, t)\,\Phi(t)\,dt + \tag{2.1}$$

$$+ \int\limits_{-\infty}^{+\infty} N(x, -t)\,\overline{\Phi}(-t)\,dt = F(x).$$

Присоединим к уравнению (2.1) уравнение, полученное из него комплексным сопряжением и заменой x на $-x$, а t на $-t$, и введем обозначения $\Phi_1(x) = \Phi(x)$, $\Phi_2(x) = \overline{\Phi}(-x)$. Получим следующую систему двух сингулярных интегральных уравнений с ядром Коши:

$$P(x)\,\overset{*}{\Phi}(x) + \frac{Q(x)}{\pi i} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\overset{*}{\Phi}(t)\,dt}{t - x} + \int\limits_{-\infty}^{+\infty} K(x, t)\,\overset{*}{\Phi}(t)\,dt = \overset{*}{F}(x), \tag{2.2}$$

где

$$P(x) = \begin{bmatrix} \mu_1 + A_1(x) & \nu_1 + B_1(x) \\ \nu_1 + \overline{B}_1(-x) & \mu_1 + \overline{A}_1(-x) \end{bmatrix};$$

$$Q(x) = \begin{bmatrix} \mu_2 + A_2(x) & \nu_2 + B_2(x) \\ \nu_2 + \overline{B}_2(-x) & \mu_2 + \overline{A}_2(-x) \end{bmatrix};$$

$$K(x, t) = \begin{bmatrix} M(x, t) & N(x, -t) \\ \overline{N}(-x, t) & \overline{M}(-x, -t) \end{bmatrix};$$

$$\overset{*}{\Phi}(x) = [\Phi_1(x),\ \Phi_2(x)]; \quad \overset{*}{F}(x) = [F_1(x),\ F_2(x)].$$

Методом, указанным в ([2], стр. 452), можно доказать, что однородное уравнение (2.1) и однородная система (2.2) ($F(x) \equiv 0$) имеют одинаковое число линейно независимых решений в $L_2(-\infty, +\infty)$, если линейную независимость решений для уравнения (2.1) понимать в смысле комбинации с действительными коэффициентами, а для системы (2.2) — в смысле комбинации с комплексными коэффициентами. Мы не будем проводить это доказательство, а заметим, что если $\overset{(1)}{\Phi}(x), \overset{(2)}{\Phi}(x), \ldots, \overset{(k)}{\Phi}(x)$ — полная система линейно независимых решений однородного уравнения (2.1) в $L_2(-\infty, +\infty)$, то пары функций $[\Phi_1(x) = \overset{(j)}{\Phi}(x), \ \Phi_2(x) = \overline{\overset{(j)}{\Phi}}(-x)]$ $(j=1, 2, \ldots, k)$ будут линейно независимыми решениями системы (2.2). Из доказательства непосредственно следует, что если $\overset{(i)}{\Phi}(x) = [\overset{(i)}{\Phi}_1(x), \overset{(i)}{\Phi}_2(x)]$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$ — полная система линейно независимых решений однородной системы (2.2) в $L_2(-\infty, +\infty)$, то всегда с помощью линейной комбинации этих функций можно построить k линейно независимых решений однородного уравнения (2.2), а следовательно, и уравнения (3) в том же пространстве.

Система, союзная системе (2.2), имеет вид

$$P'(x)\overset{*}{\Psi}(x) - \frac{1}{\pi i}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{Q(t)\overset{*}{\Psi}(t)\,dt}{t-x} + \int\limits_{-\infty}^{+\infty}K'(t, x)\overset{*}{\Psi}(t)\,dt = 0, \tag{2.3}$$

где P', Q', K' означают матрицы, транспонированные данным, а $\overset{*}{\Psi}(x) = [\Psi_1(x), \Psi_2(x)]$.

Легко проверить, что если $[\Psi_1(x), \Psi_2(x)]$ является решением системы (2.3), то ее решением будет также $[\overline{\Psi}_2(-x), \overline{\Psi}_1(-x)]$.

Аналогично тому, как проводится доказательство эквивалентности для однородного уравнения (2.1) и однородной системы (2.2), устанавливается эквивалентность системы (2.3) и интегрального уравнения

$$[\mu_1 + A_1(x)]\Psi(-x) - \frac{1}{\pi i}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{[\mu_2 + A_2(t)]\Psi(-t)\,dt}{t-x} +$$

$$+ [\nu_1 + \overline{B}_1(-x)]\overline{\Psi}(x) - \frac{1}{\pi i}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{[\nu_2 + \overline{B}_2(-t)]\overline{\Psi}(t)\,dt}{t-x} +$$

$$+ \int\limits_{-\infty}^{+\infty}M(t, x)\Psi(-t)\,dt + \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\overline{N}(-t, x)\overline{\Psi}(t)\,dt = 0. \tag{2.4}$$

Уравнение (2.4) называется союзным уравнению (2.1).

Применим к уравнению (2.4) оператор V^{-1} и учтем равенства (1.9), (1.10). Заменяя в полученном уравнении x на $-x$, а t на $-t$, получим уравнения

$$\lambda_1\psi(x) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}k_1(t-x)\psi(t)\,dt + \lambda_3\overline{\psi}(x) +$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\overline{k}_3(t-x)\overline{\psi}(t)\,dt + \int\limits_{-\infty}^{+\infty}m(t, -x)\psi(t)\,dt + \tag{2.5}$$

$$+ \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\overline{n}(t, x)\overline{\psi}(t)\,dt = 0, \qquad x > 0,$$

$$\lambda_2\psi(x)+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}k_2(t-x)\psi(t)\,dt+\lambda_4\overline{\psi}(x)+$$

$$+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\overline{k}_4(t-x)\,\overline{\psi}(t)\,dt+\int\limits_{-\infty}^{+\infty}m(t,\,-x)\psi(t)\,dt+$$

$$+\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\overline{n}(t,\,x)\overline{\psi}(t)\,dt=0,\qquad x<0. \tag{2.5}$$

Полученное парное уравнение назовем союзным уравнению (3). Как непосредственно видно из (2.5), оно может быть получено из данного уравнения (4), если в последнем у разностных ядер $k_j(x)$ изменить знак переменных, а ядра m и n транспонировать и одновременно ядра в интегралах, содержащих $\overline{\varphi}(x)$, взять комплексно сопряженными.

Так как однородное уравнение (2.1), полученное из (3) преобразованием Фурье, эквивалентно однородной системе (2.2), то естественно индексом данного интегрального уравнения (3) назвать величину

$$\varkappa=\mathrm{Ind}\,\frac{\det\|P-Q\|}{\det\|P+Q\|}. \tag{2.6}$$

Введя обозначения

$$\Delta_1(x)=[\lambda_1+K_1(x)]\,[\lambda_1+\overline{K}_1(-x)]-[\lambda_3+K_3(x)]\,[\lambda_3+\overline{K}_3(-x)],$$

$$\Delta_2(x)=[\lambda_2+K_2(x)]\,[\lambda_2+\overline{K}_2(-x)]-[\lambda_4+K_4(x)]\,[\lambda_4+\overline{K}_4(-x)],$$

получим, что $\det\|P-Q\|=\Delta_2(x)$, $\det\|P+Q\|=\Delta_1(x)$.

Если выполняются условия $\Delta_1(x)\neq 0$, $\Delta_2(x)\neq 0$, то такой случай для уравнения (3) назовем нормальным.

Обозначим через k и k' числа линейно независимых решений в $L_2(-\infty,+\infty)$ соответственно однородных уравнений (3) и (2.5). Справедлива

Теорема 1. *Разность чисел линейно независимых решений однородных союзных уравнений (3) и (2.5) дается формулой*

$$k-k'=\mathrm{Ind}\,\frac{\Delta_2(x)}{\Delta_1(x)}. \tag{2.7}$$

Доказательство следует из того, что k и k' равны соответственно числам линейно независимых решений однородных систем (2.2) и (2.3).

Замечание. Если $k_j(x)=k_j(-x)$ $(j=1,\,2,\,3,\,4)$, то $\varkappa=0$, и поэтому для уравнения (3) справедлива альтернатива Фредгольма.

Рассмотрим теперь неоднородное уравнение (2.1). Покажем, что оно разрешимо тогда и только тогда, когда разрешима неоднородная система (2.2).

Пусть неоднородная система (2.2) имеет решение $[\Phi_1(x),\ \Phi_2(x)]$ из $L_2(-\infty,\ +\infty)$. Так как ее решением будет $[\overline{\Phi}_2(-x),\ \overline{\Phi}_1(-x)]$, то $\left\{\overset{*}{\Phi}_1(x)=\frac{1}{2}[\Phi_1(x)+\overline{\Phi}_2(-x)],\ \ \overset{*}{\Phi}_2(x)=\frac{1}{2}[\Phi_2(x)+\overline{\Phi}_1(-x)]\right\}$ также является решением неоднородной системы. Легко видеть, что если положить $\Phi(x)=\overset{*}{\Phi}_1(x)$, то $\Phi(x)$ является решением уравнения (2.1).

Так как для разрешимости системы (2.2) необходимо и достаточно выполнения k' условий ортогональности, то для разрешимости интегрального уравнения (2.1) необходимо и достаточно выполнения стольких же условий.

Пусть $[\overset{(j)}{\Psi}_1(x),\ \overset{(j)}{\Psi}_2(x)]$ образуют полную систему линейно независимых решений союзной системы (2.3). В качестве такой системы решений можно взять $[\Psi_j(-x),\ \overline{\Psi}_j(x)]$ $(j = 1,\ 2,\ \ldots,\ k')$, где $\Psi_j(x)$ — линейно независимые решения уравнения (2.4) в $L_2(-\infty,\ +\infty)$. Тогда условия разрешимости для неоднородной системы (2.1) запишутся в виде

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} [F(t)\Psi_j(t) + \overline{F}(-t)\overline{\Psi}_j(t)]\,dt = 0. \tag{2.8}$$

Учитывая равенства (1.6), их можно представить в форме

$$\operatorname{Re}\Big[\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\psi_j(t)\,dt\Big] = 0 \qquad (j = 1,\ 2,\ \ldots,\ k'). \tag{2.9}$$

Теорема 2. *Для того чтобы данное интегральное уравнение (3) было разрешимо, необходимо и достаточно выполнения условий (2.9), где $\psi_1(x)$, $\psi_2(x)$, ..., $\psi_{k'}(x)$ — полная система линейно независимых решений союзного уравнения (2.5).*

Отметим, что указанным путем можно получить аналогичные результаты об индексе и нормальной разрешимости систем интегральных уравнений типа свертки (3) или (4). Там нужно будет понимать под $k_j(x)$ $(j = 1,\ 2,\ 3,\ 4)$, $m(x,\ t)$, $n(x,\ t)$ квадратные матрицы, а под $f(x)$ и $\varphi(x)$ — соответственно заданный и искомый векторы.

§ 3. О ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОМ УРАВНЕНИИ

Уравнение (3) при $m(x,\ t) \equiv n(x,\ t) \equiv 0$ будем называть характеристическим интегральным уравнением типа свертки с сопряжением с четырьмя ядрами. При помощи односторонних функций

$$\varphi_+(x) = \begin{cases} \varphi(x), & x > 0, \\ 0, & x < 0, \end{cases} \qquad \varphi_-(x) = \begin{cases} 0, & x > 0, \\ -\varphi(x), & x < 0, \end{cases}$$

характеристическое уравнение можно записать в виде

$$\begin{aligned} &\lambda_1\varphi_+(x) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} k_1(x-t)\,\varphi_+(t)\,dt - \lambda_2\varphi_-(x) - \\ &- \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} k_2(x-t)\,\varphi_-(t)\,dt + \lambda_3\overline{\varphi}_+(x) + \\ &+ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} k_3(x-t)\,\overline{\varphi}_+(t)\,dt - \lambda_4\overline{\varphi}_-(x) - \\ &- \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} k_4(x-t)\,\overline{\varphi}_-(t)\,dt = f(x). \end{aligned} \tag{3.1}$$

Преобразуя последнее равенство по Фурье, получим краевую задачу

$$[\lambda_1 + K_1(x)]\,\Phi^+(x) - [\lambda_2 + K_2(x)]\,\Phi^-(x) + \\ + [\lambda_3 + K_3(x)]\,\overline{\Phi}^+(-x) - [\lambda_4 + K_4(x)]\,\overline{\Phi}^-(-x) = F(x), \tag{3.2}$$

где $\Phi^{\pm}(x) \in L_2(-\infty, +\infty)$ и являются предельными значениями кусочно-аналитической функции $\Phi(z)$ соответственно в верхней и нижней полуплоскости. Присоединяя к (3.2) равенство, полученное из него комплексным сопряжением и заменой x на $-x$, и исключая из них $\overline{\Phi}^+(-x)$, получим краевое условие в виде

$$\Delta_1(x)\,\Phi^+(x) = C(x)\,\Phi^-(x) + D(x)\,\overline{\Phi}^-(-x) + G(x), \tag{3.3}$$

где введены обозначения

$$C(x) = [\lambda_2 + K_2(x)]\,[\lambda_1 + \overline{K}_1(-x)] - [\lambda_3 + K_3(x)]\,[\lambda_4 + \overline{K}_4(-x)];$$

$$D(x) = [\lambda_1 + \overline{K}_1(-x)]\,[\lambda_4 + K_4(x)] - [\lambda_3 + K_3(x)]\,[\lambda_2 + \overline{K}_2(-x)];$$

$$G(x) = [\lambda_1 + \overline{K}_1(-x)]\,F(x) - [\lambda_3 + K_3(x)]\,\overline{F}(-x).$$

Функции $\Delta_1(x)$, $C(x)$ и $D(x)$ принадлежат кольцу R, а функция $G(x) \in L_2(-\infty, +\infty)$. Полученная краевая задача (3.3) и уравнение (3.1) эквивалентны в том смысле, что, найдя решения $\Phi^{\pm}(x) \in L_2(-\infty, +\infty)$ краевой задачи, решения уравнения получим по формуле

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} [\Phi^+(t) - \Phi^-(t)]\, e^{-itx}\, dt. \tag{3.4}$$

При этом линейно независимым (в смысле комбинации с действительными коэффициентами) решениям краевой задачи (3.3) отвечают линейно независимые решения уравнения (3.1) и наоборот.

Построим краевую задачу, к которой приводится уравнение, союзное характеристическому. Введем кусочно-аналитическую функцию

$$\Omega(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{[\mu_2 + A_2(t)]\,\Psi(-t) + [\nu_2 + \overline{B}_2(-t)]\,\overline{\Psi}(t)}{t - z}\, dt. \tag{3.5}$$

По формулам Сохоцкого [1, 2],

$$\Omega^+(x) - \Omega^-(x) = [\mu_2 + A_2(x)]\,\Psi(-x) + [\nu_2 + \overline{B}_2(-x)]\,\overline{\Psi}(x), \tag{3.6}$$

$$\Omega^+(x) + \Omega^-(x) = \\ = \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{[\mu_2 + A_2(t)]\,\Psi(-t) + [\nu_2 + \overline{B}_2(-t)]\,\overline{\Psi}(t)}{t - x}\, dt. \tag{3.7}$$

Тогда уравнение (2.4) перепишется в виде

$$[\mu_1 + A_1(x)]\,\Psi(-x) + [\nu_1 + \overline{B}_1(-x)]\,\overline{\Psi}(x) = \Omega^+(x) + \Omega^-(x). \tag{3.8}$$

Складывая и вычитая равенства (3.6) и (3.8), получим:

$$[\lambda_1 + K_1(x)]\,\Psi(-x) + [\lambda_3 + \overline{K}_3(-x)]\,\overline{\Psi}(x) = 2\Omega^+(x), \tag{3.9}$$

$$[\lambda_2 + K_2(x)]\,\Psi(-x) + [\lambda_4 + \overline{K}_4(-x)]\,\overline{\Psi}(x) = 2\Omega^-(x). \tag{3.10}$$

Присоединим к равенству (3.9) равенство, полученное из него комплексным сопряжением и заменой x на $-x$. Из полученных равенств найдем

$$\Psi(-x)=\frac{2\Omega^{+}(x)[\lambda_1+\overline{K}_1(-x)]-2\overline{\Omega}^{+}(-x)[\lambda_3+\overline{K}_3(-x)]}{\Delta_1(x)}. \quad (3.11)$$

Аналогичным образом из равенства (3.10) найдем

$$\Psi(-x)=\frac{2\Omega^{-}(x)[\lambda_2+\overline{K}_2(-x)]-2\overline{\Omega}^{-}(-x)[\lambda_4+\overline{K}_4(-x)]}{\Delta_2(x)}. \quad (3.12)$$

Сравнивая правые части (3.11) и (3.12), получим краевую задачу, к которой сводится уравнение, союзное характеристическому:

$$\frac{\lambda_1+\overline{K}_1(-x)}{\Delta_1(x)}\Omega^{+}(x)-\frac{\lambda_3+\overline{K}_3(-x)}{\Delta_1(x)}\overline{\Omega}^{+}(x)-$$
$$-\frac{\lambda_2+\overline{K}_2(-x)}{\Delta_2(x)}\Omega^{-}(x)+\frac{\lambda_4+\overline{K}_4(-x)}{\Delta_2(x)}\overline{\Omega}^{-}(-x)=0. \quad (3.13)$$

Аналогично тому, как из краевого условия (3.2) получили краевое условие (3.3), из (3.13) получим

$$\Omega^{+}(x)=\frac{\overline{C}(-x)}{\Delta_2(x)}\Omega^{-}(x)-\frac{\overline{D}(-x)}{\Delta_2(x)}\overline{\Omega}^{-}(-x). \quad (3.14)$$

Следовательно, уравнение, союзное характеристическому, приводится к эквивалентной краевой задаче (3.14).

Решение задач (3.3) и (3.14) в замкнутой форме в общем случае получить не удается. Дальнейшее исследование уравнения (3.1) проводится при некоторых дополнительных предположениях относительно ядер $k_j(x)$ $(j=1, 2, 3, 4)$. Выделим некоторые случаи, когда возможно качественное исследование уравнения (3.1), и случаи, когда его решение может быть получено в замкнутой форме.

§ 4. КАЧЕСТВЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ УРАВНЕНИЯ (3.1)

Пусть

$$C(x)=\overline{C}(-x)\neq 0, \quad |C(x)|>|D(x)|. \quad (4.1)$$

Тогда имеет место

Теорема 1. *Если* $\varkappa_1=\operatorname{Ind}\dfrac{C(x)}{\Delta_1(x)}\geqslant 0$, *то однородное уравнение (3.1) имеет* $k=2\varkappa_1$ *линейно независимых решений, а неоднородное безусловно разрешимо. Если* $\varkappa_1<0$, *то однородное уравнение имеет только нулевое решение* $(k=0)$, *а неоднородное разрешимо лишь при выполнении* $|\varkappa_1|$ *комплексных или* $k'=2|\varkappa_1|$ *вещественных условий разрешимости*

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{1}{t+i}\right)^{k}Q[f(t)]\,dt=0, \qquad k=1, 2, \ldots, |\varkappa_1|, \quad (4.2)$$

где Q — *линейный оператор.*

Доказательство теоремы основано на лемме.

Лемма. *Пусть выполнено первое условие* (4.1). *Тогда функция* $\frac{C(x)}{\Delta_1(x)}$ *представима в виде*

$$\frac{C(x)}{\Delta_1(x)} = X^+(x)\,[X^-(x)]^{-1}, \tag{4.3}$$

где $X(z)$ — *каноническая функция* [1, 2] *однородной краевой задачи* $\omega^+(x) = \frac{C(x)}{\Delta_1(x)}\omega^-(x)$, *исключительной точкой которой является* $z = -i$. *Предельные значения этой функции* $X^+(x)$ *и* $X^-(x)$ *принадлежат кольцу* R, *причем* $\overline{X}^-(-x) = X^-(x)$.

Доказательство. Согласно теореме Винера (см. [7]), наряду с функцией $\Delta_1(x)$ кольцу R принадлежит также функция $\frac{1}{\Delta_1(x)}$. Заметим, что $\frac{1}{\Delta_1(x)} = \frac{1}{\lambda_1^2 - \lambda_3^2} + T(x)$, где $T(x) \in R_0$. Тогда функцию $\frac{C(x)}{\Delta_1(x)}$ можно представить в виде

$$\frac{C(x)}{\Delta_1(x)} = \sigma + C_1(x),$$

где $\sigma = \frac{\lambda_1\lambda_2 - \lambda_3\overline{\lambda}_4}{\lambda_1^2 - \lambda_3^2}$; $C_1(x) \in R_0$. Не ограничивая общности, будем считать $\sigma = 1$. Этого всегда можно добиться, если ввести обозначение $\omega_1^-(x) = \sigma\omega^-(x)$.

Как следует из работы [8], функцию $\left(\frac{x-i}{x+i}\right)^{-\varkappa_1}\frac{C(x)}{\Delta_1(x)} \equiv 1 + C_2(x)$ (где $C_2(x) \in R_0$) можно представить в виде

$$\left(\frac{x-i}{x+i}\right)^{-\varkappa_1}\frac{C(x)}{\Delta_1(x)} = \frac{e^{\Gamma^+(x)}}{e^{\Gamma^-(x)}},$$

где

$$\Gamma^{\pm}(x) = \pm\frac{1}{2}\ln\left[\left(\frac{x-i}{x+i}\right)^{-\varkappa_1}\frac{C(x)}{\Delta_1(x)}\right] + \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\ln\left[\left(\frac{t-i}{t+i}\right)^{-\varkappa_1}\frac{C(t)}{\Delta_1(t)}\right]dt}{t-x}.$$

Так как обе функции, входящие в правую часть последнего равенства, принадлежат R_0 (см. [7], стр. 15; [8]), то $\Gamma^{\pm}(x) \in R_0$. Тогда, по теореме Винера — Леви (см. [7], стр. 15), $X^+(x) = e^{\Gamma^+(x)} \in R$ и $X^-(x) = \left(\frac{x-i}{x+i}\right)^{-\varkappa_1} \times e^{\Gamma^-(x)} \in R$. Так как $X^{\pm}(\pm\infty) = 1$, то $X^+(x)$ и $X^-(x)$ представимы в виде $X^+(x) = 1 + M^+(x)$, $X^-(x) = 1 + M^-(x)$, при этом $M^{\pm}(x) \in R_0$. Отсюда следует первое утверждение леммы.

Легко устанавливается второе утверждение. Так как $C(x) = \overline{C}(-x)$, $\Delta_1(x) = \overline{\Delta}_1(-x)$, то $\frac{X^+(x)}{\overline{X}^+(-x)} = \frac{X^-(x)}{\overline{X}^-(-x)}$. Пользуясь теоремой об аналитическом продолжении и тем, что $X^{\pm}(\pm\infty) = 1$, получаем доказательство.

Приступаем к доказательству теоремы. Так как функция $\frac{C(x)}{\Delta_1(x)}$ представима в виде (4.3), то краевое условие (3.3) можно переписать в виде

$$\frac{\Phi^+(x)}{X^+(x)} = \frac{\Phi^-(x)}{X^-(x)} + \frac{D(x)}{\Delta_1(x)} \frac{\overline{\Phi}^-(-x)}{X^+(x)} + \frac{G(x)}{\Delta_1(x) X^+(x)}. \qquad (4.4)$$

Введем обозначение $\frac{\Phi(z)}{X(z)} = \Psi(z)$. Так как $\Phi^\pm(x) \in L_2(-\infty, +\infty)$, а $X^\pm(x) \in R$, то $\Psi^\pm(x) \in L_2(-\infty, +\infty)$. При этом обозначении краевое условие (4.4) принимает вид

$$\Psi^+(x) = \Psi^-(x) + \frac{D(x)}{C(x)} \overline{\Psi}^-(-x) + \frac{G(x)}{\Delta_1(x) X^+(x)}. \qquad (4.5)$$

Решение краевой задачи (4.5) ищем в виде

$$\Psi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mu(\tau)\, d\tau}{\tau - z} + \frac{P_{\varkappa_1 - 1}(z)}{(z+i)^{\varkappa_1}},$$

где $P_{\varkappa_1-1}(z)$—произвольный многочлен степени не выше $\varkappa_1 - 1$ при $\varkappa_1 > 0$ и $P_{\varkappa_1-1}(z) \equiv 0$ при $\varkappa_1 \leqslant 0$, а $\mu(x) \in L_2(-\infty, +\infty)$.

Для определения $\mu(x)$ получаем следующее сингулярное уравнение:

$$\mu(x) = \frac{D(x)}{C(x)} \left[-\frac{1}{2} \overline{\mu}(-x) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\overline{\mu}(-t)\, dt}{t - x} \right] + \frac{D(x)}{C(x)} \frac{(-1)^{\varkappa_1} P_{\varkappa_1-1}(x)}{(x+i)^{\varkappa_1}} + \frac{G(x)}{\Delta_1(x) X^+(x)}. \qquad (4.6)$$

Будем рассматривать его как операторное. Нетрудно установить, что свободный член в (4.6) принадлежит $L_2(-\infty, +\infty)$. Учитывая условие (4.1) и замечая, что норма сингулярного оператора $S\mu = \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mu(t)\, dt}{t - x}$ равна единице в пространстве $L_2(-\infty, +\infty)$, получаем, что оператор в правой части будет оператором сближения в $L_2(-\infty, +\infty)$. По принципу сжатых отображений уравнение (4.6) при каждом фиксированном $P_{\varkappa_1-1}(x)$ имеет единственное решение $\mu(x) \in L_2(-\infty, +\infty)$.

Пусть $\varkappa_1 > 0$. Тогда

$$\mu(x) = Q_1 \left[\frac{D(x)}{C(x)} \frac{(-1)^{\varkappa_1} P_{\varkappa_1-1}(x)}{(x+i)^{\varkappa_1}} + \frac{G(x)}{\Delta_1(x) X^+(x)} \right],$$

где Q_1 — линейный оператор, обратный оператору уравнения (4.6), действующий в пространстве $L_2(-\infty, +\infty)$. После нахождения $\mu(x)$ найдем $\Phi(z)$:

$$\Phi(z) = X(z)\Psi(z) = X(z) \left[\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mu(t)\, dt}{t - z} + \frac{P_{\varkappa_1-1}(z)}{(z+i)^{\varkappa_1}} \right]. \qquad (4.7)$$

Нетрудно видеть, что предельные значения решения (4.7) принадлежат $L_2(-\infty, +\infty)$. Ввиду произвольности $P_{\varkappa_1-1}(z)$ получаем доказательство первой части теоремы.

Пусть теперь $\varkappa_1 \leqslant 0$. Тогда нужно положить $P_{\varkappa_1-1}(z) \equiv 0$. В этом случае $\mu(x) = Q_1\left[\dfrac{G(x)}{\Delta_1(x)X^+(x)}\right] \equiv Q[f(x)]$, а $\Phi^-(z)$ имеет полюс порядка $-\varkappa_1$ в точке $z = -i$. Для его аннулирования необходимо наложить дополнительные условия, чтобы функция $\Psi^-(z)$ имела при $z = -i$ нуль порядка $-\varkappa_1$, что приводит к условиям разрешимости (4.2).

Теорема доказана.

Теорема 2. *Пусть* $D(x) = \overline{D}(-x) \neq 0$, $|D(x)| > |C(x)|$. *Если* $\varkappa_2 = = \operatorname{Ind}\dfrac{D(x)}{\Delta_1(x)} \geqslant 0$, *то однородное уравнение (3.1) имеет* $k = 2\varkappa_2$ *линейно независимых решений, а неоднородное безусловно разрешимо. Если* $\varkappa_2 < 0$, *то однородное уравнение имеет только нулевое решение* ($k = 0$), *а неоднородное разрешимо лишь при выполнении* $k' = 2|\varkappa_2|$ *действительных условий разрешимости.*

Доказательство следует из предыдущей теоремы, если ввести обозначение $\Phi_1^-(x) = \overline{\Phi}^-(-x)$.

§ 5. СЛУЧАИ РАЗРЕШИМОСТИ УРАВНЕНИЯ (3.1) В ЗАМКНУТОЙ ФОРМЕ

1-й случай. Если

$$[\lambda_4 + K_4(x)][\lambda_1 + \overline{K}_1(-x)] = [\lambda_3 + K_3(x)][\lambda_2 + \overline{K}_2(-x)], \tag{5.1}$$

то для определения $\Phi^+(x)$ и $\Phi^-(x)$ получаем краевую задачу Римана

$$\Phi^+(x) = \frac{C(x)}{\Delta_1(x)}\Phi^-(x) + \frac{G(x)}{\Delta_1(x)}. \tag{5.2}$$

В этом случае

$$C(x) = \frac{\lambda_2 + K_2(x)}{\lambda_1 + K_1(x)}\Delta_1(x). \tag{5.3}$$

Покажем, что функцию $\dfrac{\lambda_2 + K_2(x)}{\lambda_1 + K_1(x)}$ можно доопределить так, чтобы она была непрерывной и отличной от нуля на замкнутой вещественной оси.

Действительно, пусть $\lambda_2 + K_2(x_0) = 0$. Тогда из (5.1) следует, что $\lambda_1 + K_1(x_0) = 0$. Если $\lambda_1 + \overline{K}_1(x_0) = 0$, то и $\lambda_2 + K_2(x_0) = 0$, причем обращение в нуль этих функций должно быть одинакового порядка. Поэтому, если в точках обращения в нуль функций $\lambda_j + K_j(x)$ $(j = 1, 2)$ значение функции $C(x)$ положить равным пределу, то получим доказательство утверждения. При таком доопределении $\dfrac{\lambda_2 + K_2(x)}{\lambda_1 + K_1(x)} \in R$.

Будем предполагать (не ограничивая общности), что в краевом условии (5.2) $\lambda_1 = \lambda_2$. Тогда

$$\frac{\lambda_2 + K_2(x)}{\lambda_1 + K_1(x)} = 1 + Q(x) \qquad (Q(x) \in R_0), \tag{5.4}$$

Выражая функции $K_2(x)$, $K_4(x)$ через $Q(x)$, $K_1(x)$, $K_3(x)$ и применяя оператор V^{-1}, получим соотношения, которые выполняются почти всюду:

$$k_2(x) = k_1(x) + \lambda_1 q(x) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} k_1(x-t)\,q(t)\,dt, \tag{5.5}$$

$$k_4(x) = k_3(x) + \lambda_3 \bar{q}(x) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} k_3(x-t)\, \bar{q}(t)\, dt, \tag{5.5}$$

где $q(x)$ — произвольная функция из $L(-\infty, +\infty)$.

Пусть $\varkappa_1 = \operatorname{Ind} \dfrac{C(x)}{\Delta_1(x)} \geqslant 0$. Тогда решение $\Phi(z)$ задачи (5.2) определяется формулой

$$\Phi(z) = X(z) \left[\Psi(z) + \frac{P_{\varkappa_1 - 1}(z)}{(z+i)^{\varkappa_1}} \right], \tag{5.6}$$

где $P_{\varkappa_1-1}(z)$ — произвольный многочлен степени $(\varkappa_1 - 1)$ с произвольными коэффициентами,

$$X(z) = \begin{cases} e^{\Gamma^+(z)}, & z \in D^+, \\ \left(\dfrac{z-i}{z+i}\right)^{-\varkappa_1} e^{\Gamma^-(z)}, & z \in D^-, \end{cases}$$

$$\Gamma(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \ln \left\{ \left(\frac{t-i}{t+i} \right)^{-\varkappa_1} [1 + Q(x)] \right\} \frac{dt}{t-z},$$

$$\Psi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{[\lambda_1 + \bar{K}_1(-t)]\, F(t) - [\lambda_3 + K_3(t)]\, \bar{F}(-t)}{\Delta_1(t)\, X^+(t)} \frac{dt}{t-z}.$$

По формулам Сохоцкого найдем $\Phi^{\pm}(x) \in L_2(-\infty, +\infty)$, а по формуле (3.4) получим решения уравнения (3.1).

Пусть $\varkappa_1 < 0$. Тогда функция $\Phi^-(z)$ имеет в точке $z = -i$ полюс порядка $-\varkappa_1$. Для его устранения нужно потребовать, чтобы выполнялись условия разрешимости

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{[\lambda_1 + \bar{K}_1(-t)]\, F(t) - [\lambda_3 + K_3(t)]\, \bar{F}(-t)}{\Delta_1(t)\, X^+(t)} \frac{dt}{(t+i)^k} = 0, \tag{5.7}$$

$$k = 1, \ldots, -\varkappa_1.$$

Теорема 1. *Если выполняются условия (5.1) или равносильные им (5.5), то при $\varkappa_1 \geqslant 0$ интегральное уравнение в $L_2(-\infty, +\infty)$ безусловно разрешимо и имеет $2\varkappa_1$ линейно независимых решений. Эти решения определяются формулами (3.4), (5.6). Если же $\varkappa_1 < 0$, то однородное уравнение не имеет решений, отличных от тривиального, а неоднородное разрешимо при выполнении $-\varkappa_1$ условий разрешимости (5.7). При выполнении этих условий неоднородное уравнение имеет единственное решение, определяемое формулами (3.4), (5.6) при $P_{\varkappa_1-1}(z) \equiv 0$.*

Союзная краевая задача (3.14) в этом случае приводится к виду

$$\Omega^+(x) = \frac{\lambda_1 + K_1(x)}{\lambda_2 + K_2(x)} \Omega^-(x). \tag{5.8}$$

Обозначим $\varkappa_1^* = \operatorname{Ind} \dfrac{\lambda_1 + K_1(x)}{\lambda_2 + K_2(x)} = -\varkappa_1$. Учитывая (5.1), легко показать, что $\varkappa_1 = \frac{1}{2}\varkappa$. Следовательно, если $\varkappa^*$ — индекс краевой задачи (3.14), то $\varkappa^* = 2\varkappa_1^* = -2\varkappa_1$. Легко убеждаемся, что в этом случае $k - k' = 2\varkappa_1 = \varkappa$, т. е. в справедливости теоремы 1 § 2.

2-й случай:

$$[\lambda_1 + \overline{K}_1(-x)][\lambda_2 + K_2(x)] = [\lambda_3 + K_3(x)][\lambda_4 + \overline{K}_4(-x)]. \tag{5.9}$$

В этом случае краевая задача Римана, соответствующая интегральному уравнению (3.1), имеет вид

$$\Phi^+(x) = \frac{\lambda_4 + K_4(x)}{\lambda_1 + K_1(x)} \Phi_1^-(x) + \frac{G(x)}{\Delta_1(x)}, \tag{5.10}$$

где $\Phi_1^-(x) = \overline{\Phi}^-(-x)$, и исследуется аналогично предыдущему случаю.

Замечание. Аналогичные результаты для уравнений (3) и (4) можно получить, если:

1) функции $\varphi(x)$, $f(x)$ и $k_j(x)$ $(j = 1, 2, 3, 4)$ принадлежат $L(-\infty, +\infty)$, а ядра $m(x, t)$ и $n(x, t)$ удовлетворяют условиям

$$\iint\limits_{-\infty}^{+\infty} |m(x, t)|\, dx\, dt < \infty, \qquad \iint\limits_{-\infty}^{+\infty} |n(x, t)|\, dx\, dt < \infty;$$

2) $\varphi(x,)$ $f(x)$ и $k_j(x)$ $(j = 1, 2, 3, 4)$ принадлежат $L_2(-\infty, +\infty)$, но с дополнительным условием, что $K_j(x)$ непрерывны по Гёльдеру, а регулярные ядра удовлетворяют условию (7).

Литература

1. Гахов Ф. Д. Краевые задачи. Физматгиз, М., 1963.
2. Мусхелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения. Физматгиз, М., 1962.
3. Титчмарш Е. Введение в теорию интегралов Фурье. ОГИЗ — Гостехиздат, 1948.
4. Черский Ю. И. Уч. зап. Казан. госуниверситета, **113**, кн. 10, 1953.
5. Михайлов Л. Г. Изв. АН СССР, серия математическая, **27**, № 5, 1963.
6. Литвинчук Г. С., Хасабов Э. Г. СМЖ, **5**, № 4, 1964.
7. Крейн М. Г. УМН, **13**, вып. 5 (83), 1958.
8. Банцури Р. Д., Джанашия Г. А. ДАН СССР, **155**, № 2, 1964.

Белорусский государственный университет им. В. И. Ленина

Поступило в редакцию 16.IX 1966

ВЕСЦІ АКАДЭМІІ НАВУК БЕЛАРУСКАЙ ССР № 2 1967
СЕРЫЯ ФІЗІКА-МАТЭМАТЫЧНЫХ НАВУК

УДК 517.9

В. А. КАКИЧЕВ

О СВЕРТКАХ ДЛЯ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

1. Для многих интегральных преобразований известны свертки этих преобразований (см., например, [1], где приведены свертки комплексного преобразования и косинус-преобразования Фурье, преобразований Лапласа и Меллина). Свертки применяются при решении задач математической физики [1], для суммирования рядов и вычисления интегралов. Они сами являются интегральными преобразованиями и как таковые являются объектом исследования [2]. В теории нормированных колец умножение элементов кольца часто вводится посредством операции свертывания [3]. Уравнения типа свертки нашли интересные приложения, и их исследованию посвящено много работ (отметим лишь монографию [4]).

Однако для целого ряда интегральных преобразований свертки еще не известны. В настоящей заметке даны два различных определения для операции свертывания с весом, которые позволили построить несколько сверток, наверное, публикуемых впервые. Здесь не исследуются алгебраические свойства полученных сверток и не оговариваются ограничения на классы функций, при которых эти свертки имеют смысл.

2. Пусть дан интегральный оператор K, действующий из пространства оригиналов $X(T)$ в пространство изображений $\tilde{X}(\Theta)$, имеющий обратный оператор K^{-1}, т. е.

$$\tilde{\varphi}(t) = K\varphi \equiv \int_T k(t, \tau)\varphi(\tau)\,d\tau \in \tilde{X}(\Theta)$$

и

$$\varphi(t) = K\tilde{\varphi} \equiv \int_\Theta k^{-1}(t, \tau)\tilde{\varphi}(\tau)\,d\tau \in X(T).$$

Например, если K — комплексное преобразование Фурье, то его ядра $k^{-1}(t,\tau) = e^{-it\tau}$ и $k(\tau,\theta) = e^{i\tau\theta}$, $-\infty < t,\ \tau,\ \theta < +\infty$, удовлетворяют очень простому функциональному соотношению

$$k^{-1}(t, \tau)\,k(\tau, \theta) = k^{-1}(t - \theta, \tau), \tag{1}$$

благодаря чему свертка оригиналов $\varphi(t) * \psi(t)$ и свертка изображений $\tilde{\varphi}(t) * \tilde{\psi}(t)$, где $\tilde{\varphi} = K\varphi$ и $\tilde{\psi} = K\psi$, имеют очень простую структуру [1]. К сожалению, ядра большинства известных интегральных преобразований не удовлетворяют столь простым соотношениям, как ядра Фурье. Посмотрим, как можно обобщить соотношение (1).

I тип свертки. Функцию $r(\tau)$ будем называть весом свертки в пространстве оригиналов, если имеет место равенство

$$r(\tau)\,k^{-1}(t, \tau)\,k(\tau, \theta) = \sum_{q=1}^{p} \int_{S_q} \alpha_q(t, \theta, s)\,k^{-1}[\beta_q(t, \theta, s), \tau]\,ds, \tag{2}$$

где α_k и β_k определены на $T\times\Theta\times S_k$. Через T_q обозначим такую часть T, что при $s\in S_q$, $t\in\Theta$ и $\theta\in T_q$ будем иметь $\beta_q\in\Theta$. Свертку I типа $\varphi(t)\overset{r(\tau)}{*}\psi(t)$ с весом $r(\tau)$ для функций $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ определим так:

$$\varphi(t)\overset{r(\tau)}{*}\psi(t)\equiv\sum_{q=1}^{p}\int\limits_{S_q}ds\int\limits_{T_q}\alpha_q(t,\ \theta,\ s)\varphi(\theta)\psi(\beta_q(t,\ \theta,\ s))\,d\,\theta=$$
$$=K^{-1}\left[\tilde{\varphi}(\tau)\,\tilde{\psi}(\tau)\,r(\tau)\right]. \tag{3}$$

Замечание 1. Нетрудно заметить, что соотношение (2) по существу является «теоремой умножения» для ядер $k^{-1}(t,\tau)$ и $k(\tau,\ \theta)$, что при некоторых ограничениях оно превращается в соотношение для характеров для гиперкомплексных систем или в соотношение для собственных функций, встречающихся в теории операторов обобщенного сдвига.

Замечание 2. Свертки с весом I типа встречались и ранее, например в [5], где дана свертка обобщенного преобразования Меллера — Фока с весом

$$r(\tau)=\frac{\pi}{\tau\operatorname{sh}\pi\tau}\left|\Gamma\left(p+i\tau+\frac{1}{2}\right)\right|^{-2}.$$

II тип свертки. Допустим, что вместо (2) существует интеграл

$$\int\limits_{\Theta}k^{-1}(t,\ \tau)\,k(\tau,\ \theta)\,k(\tau,\ s)\,r(\tau)\,d\,\tau=\varkappa(t,\ \theta,\ s), \tag{4}$$

тогда свертку II типа с весом $r(\tau)$ определим так:

$$\varphi(t)\overset{r(\tau)}{*}\psi(t)\equiv\int\limits_{T}\int\limits_{T}\varphi(\theta)\,\psi(s)\,\varkappa(t,\ \theta,\ s)\,ds\,d\,\theta=K^{-1}[\tilde{\varphi}(\tau)\,\tilde{\psi}(\tau)\,r(\tau)]. \tag{5}$$

Замечание 3. При $k^{-1}(t,\ \tau)=\overline{k(\tau,\ t)}$ свертки II типа исследованы в работе [6], где в качестве примера рассмотрено ядро $\dfrac{t\cos t\tau+h\sin t\tau}{\sqrt{t^2+\tau^2}}$, $h>0$.

Замечание 4. Свертки изображений $\tilde{\varphi}(t)\overset{\rho(\tau)}{*}\tilde{\psi}(t)$ I и II типа с весом $\rho(\tau)$ определяются аналогично (3) и (5). Заметим, что из (3) и (5) следует, что $K(\varphi(t)\overset{r(\tau)}{*}\psi(t))=\tilde{\varphi}(\tau)\,\tilde{\psi}(\tau)\,r(\tau)$. Аналогично $K^{-1}(\tilde{\varphi}(t)\overset{\rho(\tau)}{*}\tilde{\psi}(t))=\varphi(\tau)\times$ $\times\,\psi(\tau)\,\rho(\tau)$.

3. Приведем примеры сверток для конкретных интегральных преобразований.

Пример 1. Для интегрального преобразования Ханкеля [7]

$$\tilde{\varphi}(t)=\int\limits_{0}^{\infty}\tau J_\nu(t\,\tau)\,\varphi(\tau)\,d\,\tau\equiv K\varphi\ \text{ и }\ \varphi=K^{-1}\tilde{\varphi}\equiv K\tilde{\varphi},\ \nu>-\frac{1}{2},$$

используя равенство [8]

$$J_\nu(\alpha)\,J_\nu(\beta)=\frac{(\alpha\beta)^\nu}{2^\nu\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\nu+\dfrac{1}{2}\right)}\times$$
$$\times\int\limits_{0}^{\pi}\frac{J_\nu\left(\sqrt{\alpha^2+\beta^2-2\alpha\beta\cos s}\right)}{(\alpha^2+\beta^2-2\alpha\beta\cos s)^{\frac{\nu}{2}}}\sin^{2\nu}s\,ds$$

при $\alpha = t\tau$ и $\beta = \tau\theta$, имеем такую свертку I типа с весом $r(\tau) = \tau^{-\nu}$:

$$\varphi(t) \overset{r(\tau)}{*} \psi(t) = \frac{t^\nu}{2^\nu \sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\nu + \frac{1}{2}\right)} \times$$

$$\times \int_0^\pi \sin^{2\nu} s ds \int_0^\infty \frac{\theta^{\nu-1}\varphi(\theta)\,\psi(\sqrt{t^2+\theta^2-2t\,\theta\cos s})}{(t^2+\theta^2-2t\,\theta\cos s)^{\frac{\nu}{2}}}\, d\theta.$$

Аналогичный вид имеет свертка изображений с тем же весом.

Замечание 5. Если для преобразования Ханкеля строить свертку II типа с тем же весом $r(\tau) = \tau^{-\nu}$, используя интеграл (3) на стр. 451 в [8], то эта свертка совпадает с приведенной выше сверткой I типа. Вообще, если известны оба соотношения (2) и (4), то они, очевидно, должны приводить к сверткам (3) и (5), преобразуемым друг в друга.

Замечание 6. Свертку для преобразования Ханкеля, отправляясь от другой теоремы умножения и в другой форме, впервые получил Н. Я. Виленкин (см. § 6 в [9]).

Пример 2. Преобразованию Мейера [7]

$$\tilde{\varphi}(t) = \int_0^\infty \sqrt{t\tau}\, K_\nu(t\tau)\,\varphi(\tau)\, d\tau,$$

$$\varphi(t) = \frac{1}{\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \sqrt{t\tau}\, I_\nu(t\tau)\,\tilde{\varphi}(\tau)\, d\tau, \quad |\nu| < \frac{1}{2},$$

используя соотношение [8]

$$K_\nu(t\tau)\, I_\nu(\tau\theta) = \frac{(t\tau\theta)^\nu}{2^\nu \sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\nu + \frac{1}{2}\right)} \times$$

$$\times \int_0^\pi \frac{K_\nu(\tau\sqrt{t^2+\theta^2-2t\,\theta\cos s})}{(t^2+\theta^2-2t\,\theta\cos s)^{\frac{\nu}{2}}} \sin^{2\nu} s ds$$

и интеграл [5]

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} I_\nu(t\tau)\, K_\nu(\theta\tau)\, K_\nu(s\tau)\, \tau^{1-\nu}\, d\tau,$$

равный нулю при $\theta + s > t$ и

$$\sqrt{\frac{\pi}{2}}\; P_{-\frac{1}{2}+\nu}^{-\nu+\frac{1}{2}}\left(\frac{t^2-\theta^2-s^2}{2\theta s}\right) \times$$

$$\times \frac{[(t+\theta-s)(t-\theta+s)(t-\theta-s)(t+\theta+s)]^{\frac{\nu}{2}-\frac{1}{4}}}{2^{\frac{\nu}{2}-\frac{1}{4}}\, t^{\frac{\nu}{2}+\frac{1}{4}} \sqrt{\theta s}}$$

при $0 < \theta + s < t$, поставим в соответствие свертки с весом $r(\tau) = \tau^{-\nu - \frac{1}{2}}$:
для изображений I типа

$$\tilde{\varphi}(t) \overset{r(\tau)}{*} \tilde{\psi}(t) = \frac{t^{\nu + \frac{1}{2}}}{2^{\nu} \sqrt{\pi}\, \Gamma\left(\nu + \frac{1}{2}\right)} \frac{1}{\pi i} \int_0^{\pi} \sin^{2\nu} s ds \times$$

$$\times \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{\theta^{\nu + \frac{1}{2}} \tilde{\varphi}(\theta) \tilde{\psi}(\sqrt{t^2 + \theta^2 - 2t\theta \cos s})}{(t^2 + \theta^2 - 2t\theta \cos s)^{\frac{\nu}{2} + \frac{1}{4}}} d\theta;$$

для оригиналов II типа

$$\varphi(t) \overset{r(\tau)}{*} \psi(t) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{\frac{\nu}{2} - \frac{1}{2}}} t^{\frac{1}{4} - \frac{\nu}{2}} \int_0^t \varphi(\theta) d\theta \times$$

$$\times \int_0^{t-\theta} \psi(s) P_{-\frac{1}{2}+\nu}^{-\nu + \frac{1}{2}} \left(\frac{t^2 - \theta^2 - s^2)}{2\theta s} \right) \times$$

$$\times \left[(t + \theta - s)(t - \theta + s)(t - \theta - s)(t + \theta + s) \right]^{\frac{\nu}{2} - \frac{1}{4}} ds.$$

Пример 3. Преобразованию Канторовича — Лебедева [7]

$$\tilde{\varphi}(t) = \int_0^{\infty} K_{it}(\tau) \varphi(\tau) d\tau,$$

$$\varphi(t) = \frac{2}{\pi^2} \int_0^{\infty} \tau \operatorname{sh} \pi\tau\, K_{i\tau}(t) \tilde{\varphi}(\tau) d\tau, \quad t > 0$$

в силу того, что [8]

$$K_{i\tau}(t) K_{i\tau}(\theta) = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \exp\left[-\frac{s^2}{2} - \frac{t^2 + \theta^2}{2s} \right] K_{i\tau}\left(\frac{t\theta}{s} \right) \frac{ds}{s},$$

соответствует свертка оригиналов I типа с весом $r(\tau) = 1$

$$\varphi(t) * \psi(t) = \frac{1}{\pi^2} \int_0^{\infty} e^{-\frac{s^2}{2} - \frac{t^2}{2s}} \frac{ds}{s} \int_0^{\infty} e^{-\frac{\theta^2}{2s}} \varphi(\theta) \psi\left(\frac{t\theta}{s} \right) \frac{d\theta}{\theta}.$$

Свертка изображений нам не известна.

Пример 4. Свертка синус-преобразования Фурье [7]

$$\tilde{\varphi}(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \varphi(\tau) \sin t\tau\, d\tau \equiv K\varphi, \quad \varphi = K^{-1}\tilde{\varphi} \equiv K\varphi,$$

если взять в качестве веса $r(\tau)\sin\alpha\tau$, где $\alpha > 0$, и воспользоваться нечетностью оригинала, такова:

$$\varphi(t) \overset{r(\tau)}{*} \psi(t) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\alpha-\theta)\,\psi(t+\theta)\,d\theta +$$

$$+ \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\alpha \mp \theta)\,\psi(t \mp \theta)\,d\theta,$$

где верхние (нижние) знаки берутся при $\alpha > x$ $(0 < x < \alpha)$. Для изображений при $r(\tau) = \sin\alpha\tau$ свертка аналогична.

Пример 5. Формулы обращения Зоммерфельда [10] суть

$$\tilde{\varphi}(t) = \frac{1}{\pi i} \int_{\gamma} e^{-ikt\cos\tau}\,\varphi(\tau)\,d\tau,$$

$$\varphi(t) = \frac{ik\sin t}{2} \int_{0}^{\infty} e^{ik\tau\cos t}\,\tilde{\varphi}(\tau)\,d\tau.$$

Беря в качестве веса $r(\tau) = \dfrac{2}{ik\sin\tau}$, получим свертку для изображений в «классическом» виде

$$\tilde{\varphi}(t) \overset{r(\tau)}{*} \tilde{\psi}(t) = \int_{0}^{t} \tilde{\varphi}(\theta)\,\tilde{\psi}(t-\theta)\,d\theta.$$

Используя интегралы 7.47 и 8.55 из книги [11] при $\nu = 1$, найдем, что

$$\int_{0}^{\infty} e^{iut}\,e^{-\alpha t}\,dt = (\alpha^2 + u^2)^{-\frac{1}{2}}\,e^{i\,\mathrm{arctg}\,\frac{u}{\alpha}}.$$

Используя этот интеграл, построим свертку оригиналов II типа с весом $r(\tau) = e^{-\alpha\tau}$

$$\varphi(t) \overset{r(\tau)}{*} \psi(t) = \frac{k\sin t}{2\pi^2 i} \int_{\gamma}\int_{\gamma} \varphi(\theta)\,\psi(s) \times$$

$$\times \frac{\exp\left[i\,\mathrm{arctg}\,\dfrac{k}{\alpha}(\cos t - \cos\theta - \cos s)\right]}{\sqrt{\alpha^2 + (\cos t - \cos\theta - \cos s)^2}}\,d\theta\,ds.$$

Пример 6. Используя значение интегралов вида (см. 3.197.8 в [11]

$$\int_{0}^{1} x^{\nu-1}(1-x)^{\mu-1}(\beta+x)^{\lambda} = \beta^{\lambda}\,\mathrm{B}(\mu,\nu)\,F\left(-\nu,\ \nu;\ \mu+\nu;\ -\frac{1}{\beta}\right),$$

[н]етрудно найти свертки преобразований, родственных преобразованию Абеля. [С]амому преобразованию Абеля

$$\tilde{\varphi}(x) = \int_0^x \frac{\varphi(t)\,dt}{(x-t)^\alpha}, \quad \varphi(x) = \frac{\sin\alpha\pi}{\pi}\left\{\frac{\tilde{\varphi}(+0)}{x^{1-\alpha}} + \right.$$

$$\left. + \int_0^x \frac{\tilde{\varphi}'(t)\,dt}{(x-t)^{1-\alpha}}\right\}, \quad 0<\alpha<1,$$

[с]читая для простоты $\tilde{\varphi}(+0)=0$ при $r(\tau)=1$, соответствуют следующие [с]вертки:

$$\varphi(x) * \psi(x) = \mathrm{B}(\alpha,\ 1-\alpha)\,\frac{\sin\alpha\pi}{\pi} \times$$

$$\times \frac{d}{dx}\int_0^x d\tau \int_0^\tau [\varphi(\tau)\psi(\theta) + \varphi(\theta)\psi(\tau)] \times$$

$$\times F\left(\alpha,\ \alpha;\ 1;\ \frac{x-\tau}{x-\theta}\right)\frac{d\theta}{(x-\theta)^\alpha},$$

$$\tilde{\varphi}(x) * \tilde{\psi}(x) = \mathrm{B}(\alpha,\ 1-\alpha)\left(\frac{\sin\alpha\pi}{\pi}\right)^2 \times$$

$$\times \int_0^x d\tau \int_0^\tau [\tilde{\varphi}'(\tau)\tilde{\psi}'(\theta) + \tilde{\varphi}'(\theta)\tilde{\psi}'(\tau)] \times$$

$$\times F\left(1-\alpha,\ 1-\alpha;\ 1;\ \frac{x-\tau}{x-\theta}\right)\frac{d\theta}{(x-\theta)^{1-\alpha}}.$$

Преобразование Вейля, предполагая $\tilde{\varphi}(+\infty)=0$, можно записать так:

$$\tilde{\varphi}(x) = \int_x^\infty \frac{\varphi(t)\,dt}{(t-x)^\alpha}, \quad \varphi(x) = -\frac{\sin\alpha\pi}{\pi}\int_x^\infty \frac{\tilde{\varphi}'(t)\,dt}{(t-x)^{1-\alpha}}, \quad 0<\alpha<1.$$

Ему при $r(\tau)=1$ отвечают такие свертки:

$$\varphi(x) * \psi(x) = -\,\mathrm{B}(\alpha,\ 1-\alpha)\,\frac{\sin\alpha\pi}{\pi} \times$$

$$\times \frac{d}{dx}\int_x^\infty \frac{d\tau}{(\tau-x)^\alpha}\int_x^\tau [\varphi(\tau)\psi(\theta) + \varphi(\theta)\psi(\tau)] \times$$

$$\times F\left(\alpha,\ \alpha-1;\ 1;\ \frac{x-\theta}{x-\tau}\right)d\theta;$$

$$\tilde{\varphi}(x) * \tilde{\psi}(x) = \mathrm{B}(\alpha,\ 1-\alpha)\left(\frac{\sin\alpha\pi}{\pi}\right)^2 \times$$

$$\times \int_x^\infty \frac{d\tau}{(\tau-x)^{1-\alpha}}\int_x^\tau [\tilde{\varphi}'(\tau)\tilde{\psi}'(\theta) + \tilde{\varphi}'(\theta)\tilde{\psi}'(\tau)] \times$$

$$\times F\left(1-\alpha,\ 1-\alpha;\ 1;\ \frac{x-\theta}{x-\tau}\right)d\theta.$$

Рассмотрим еще преобразование Эйлера

$$\tilde{\varphi}(x) = \int_0^x (x-t)^\alpha \varphi(t)\,dt, \quad \varphi(x) = \frac{\sin \alpha\pi}{\alpha\pi} \times$$

$$\times \left[\frac{\tilde{\varphi}(+0)}{x^\alpha} - \frac{\alpha\tilde{\varphi}(+0)}{x^{1+\alpha}} + \int_0^x \frac{\tilde{\varphi}''(t)\,dt}{(x-t)^\alpha} \right],$$

где $0 < \alpha < 1$. При $\tilde{\varphi}'(+0) = \tilde{\varphi}(+0) = 0$ и $r(\tau) = 1$ оно имеет следующие свертки:

$$\varphi(x) * \psi(x) = B(1-\alpha,\ 1+\alpha)\, \frac{\sin\alpha\pi}{\alpha\pi} \times$$

$$\times \frac{d^2}{dx^2} \int_0^x (x-\tau)\,d\tau \int_0^\tau [\varphi(\tau)\psi(\theta) + \varphi(\theta)\psi(\tau)] \times$$

$$\times F\left(-\alpha,\ 1-\alpha;\ 2;\ \frac{x-\tau}{x-\theta}\right)(x-\theta)^\alpha\, d\theta,$$

$$\tilde{\varphi}(x) * \tilde{\psi}(x) = B(1-\alpha,\ 1+\alpha) \left(\frac{\sin\alpha\pi}{\alpha\pi}\right)^2 \times$$

$$\times \int_0^x (x-\tau)\,d\tau \int_0^\tau [\tilde{\varphi}''(\tau)\tilde{\psi}''(\theta) + \tilde{\varphi}''(\theta)\tilde{\psi}(\tau)] \times$$

$$\times F\left(\alpha,\ 1+\alpha;\ 2;\ \frac{x-\tau}{x+\theta}\right) \frac{d\theta}{(x-\theta)^\alpha}.$$

Замечание 7. При $\alpha = \frac{1}{2}$ из преобразования Абеля легко получить преобразование Шлемильха [8], свертки для которого получаются соответствующими преобразованиями из сверток для преобразования Абеля при $\alpha = \frac{1}{2}$.

Пример 7. Пусть $R_{ab}(z) = R_{ba}^{-1}(z) = \prod_{k=1}^{n} (z-a_k)^{\frac{1}{2}} (z-b_k)^{-\frac{1}{2}}$, $L = L_1 + \ldots + L_m$, $L_j = \overset{\frown}{a_j b_j}$, $j = 1, \ldots, n$ и $\tilde{\varphi}(t) = \frac{1}{\pi i} \int_L \frac{\varphi(\tau)\,d\tau}{\tau - t}$.

Отыскивая решение $\varphi(t)$ этого уравнения, ограниченное на концах a_k и неограниченное, но интегрируемое на концах b_k, при определенных условиях найдем, что [12]

$$\varphi(t) = -\frac{R_{ab}(t)}{\pi} \int_L R_{ba}(\tau)\, \frac{\tilde{\varphi}(\tau)\,d\tau}{\tau - t}.$$

Преобразованию Коши, определяемому двумя последними равенствами, используя формулу Пуанкаре — Бертрана о перестановке порядка интегрирования, можно поставить в соответствие такие свертки:

для оригиналов с весом $r(\tau)=1$

$$\varphi(t) * \psi(t) = \frac{1}{\pi i} \int\limits_L \Big[\varphi(t)\psi(\tau) + \varphi(\tau)\psi(t) - $$

$$ - \frac{R_{ab}(t)}{R_{ab}(\tau)} \varphi(\tau)\psi(\tau) \Big] \frac{d\tau}{\tau - t},$$

для изображений с весом $r(\tau) = R_{ba}(\tau)$

$$\tilde{\varphi}(t) \overset{r(\tau)}{*} \tilde{\psi}(t) = -\frac{1}{\pi} \int\limits_L R_{ba}(\tau) \, [\tilde{\varphi}(t)\tilde{\psi}(\tau) + \tilde{\varphi}(\tau)\tilde{\psi}(t) - $$

$$ - \tilde{\varphi}(\tau)\tilde{\psi}(\tau)] \frac{d\tau}{\tau - t}.$$

Замечание 8. Если контур L замкнут, то $R_{ba}(\tau)=1$ и свертка для изображений имеет вес $r(\tau)=1$ (см. [15]).

4. Рассматривая разложение функции в ряд по ортогональной системе как преобразование, переводящее последовательность коэффициентов Фурье (оригинал) в функцию (изображение), можно построить свертки с весом для таких конечных преобразований. Приведем один такой

Пример 8. Пусть

$$\varphi(t) = K\bar{\varphi} \equiv \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k C_k^{\nu}(\cos t), \quad 0 < t < \pi,$$

тогда

$$\{\varphi_n\}_{n=0}^{\infty} \equiv \bar{\varphi} = K^{-1}\varphi(t) =$$

$$= \left\{ \frac{2\pi\Gamma(2\nu+n)}{4^{\nu}\Gamma^2(\nu)\, n!\,(n+\nu)} \int\limits_0^{\pi} \varphi(t) \sin^{\nu+\frac{1}{2}} t\, C_n^{\nu}(\cos t)\, dt \right\}_{n=0}^{\infty},$$

где $C_n^{\nu}(t)$ — полиномы Гегенбауэра. Так как [14]

$$C_p^{\nu}(\cos t)\, C_q^{\nu}(\cos t) = \sum_{s=0}^{\min(p,q)} A_{p,q}^{s} C_{p+q-2s}^{\nu}(\cos t),$$

где

$$A_{p,q}^{s} =$$

$$= \frac{\Gamma(p+q-s+2\nu)\,\Gamma(p-s+\nu)\,\Gamma(q-s+\nu)\,\Gamma(s+\nu)\,\Gamma(p+q-s+1)}{\Gamma(p+q-2s+2\nu)\,\Gamma(p-s+1)\,\Gamma(q-s+1)\,\Gamma(s+1)\,\Gamma(p+q-s+\nu)\,\Gamma^2(\nu)},$$

и ([11] стр. 843)

$$\frac{2^{2\nu-1}\, n!\, \Gamma(\nu)}{\Gamma(\nu+n)} C_n^{\nu}(\cos t)\, C_n^{\nu}(\cos\tau) =$$

$$= \int\limits_0^{\pi} \sin^{\nu} t\, C_n^{\nu}(\cos t\cos\tau + \cos\theta\sin t\sin\tau)\, d\theta,$$

то свертка оригиналов с весом $r(\tau) = 1$ имеет вид

$$\overline{\varphi} \ast \overline{\psi} = \left\{ \sum_{p=0}^{\infty} \varphi_p \sum_{s=0}^{\min(p,n)} \psi_{p+n-2s} A_{p,p+n-2s}^{s} \right\}_{n=0}^{\infty} \equiv$$

$$\equiv \left\{ \frac{2\pi\Gamma(\nu+n)}{4^{\nu}\,\Gamma^2(\nu)\,n!\,(n+\nu)} \int_0^{\pi} \varphi(t)\,\psi(t) \sin^{\nu+\frac{1}{2}} t\, C_n^{\nu}(\cos t)\, dt \right\}_{n=0}^{\infty},$$

а свертка изображений с весом $\bar{r} = \left\{ \dfrac{(n!)^2 (n+\nu)}{\Gamma(2\nu+n)\,\Gamma(\nu+n)} \right\}_{n=0}^{\infty}$ такова:

$$\pi 2^{2-2\nu} \Gamma^{-4}(\nu)\, \varphi(t) \overset{\bar{r}}{\ast} \psi(t) =$$

$$= \int_0^{\pi} \sin^{\nu}\theta\, d\theta \int_0^{\pi} \sin^{\nu+\frac{1}{2}} \tau \varphi(\tau)\, \psi(\cos t \cos\tau + \cos\theta \sin t \sin\tau)\, d\tau \equiv$$

$$\equiv \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n \psi_n r_n C_n^{\nu}(\cos t).$$

Замечание 9. Аналогичные построения сверток с единичным весом систематически исследованы с различных точек зрения в работах Б. М. Левитана, С. Г. Крейна, Ю. М. Березанского и других [15—17]. Свертку для изображений при разложении по полиномам Лаггера см. в [7] на стр. 92. Точно так же, как и в примере 8, строятся свертки для оригиналов и изображений разложений в ряды Фурье — Бесселя, Фурье — Дини и свертки оригиналов для разложений по полиномам Эрмита и Лаггера.

Пусть операторы K и K^{-1} заданы следующим образом:

$$\tilde{\varphi}(t) = K\varphi \equiv \sum_{k=0}^{\infty} c_k(\varphi)\, l_k(t),$$

$$\tilde{\varphi}(t) = K^{-1}\varphi \equiv \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_k(\tilde{\varphi})\, \lambda_k(t),$$

где $c_k(\varphi)$ и $\gamma_k(\tilde{\varphi})$ — функционалы и $\{l_k(t)\}$ и $\{\lambda_k(t)\}$ — базисные системы. Определяя свертки функционалов соотношениями

$$(\varphi \overset{r}{\ast} \psi)_k = c_k(\varphi(t)\,\psi(t)\,r(t)) \text{ и } (\tilde{\varphi} \overset{\bar{r}}{\ast} \tilde{\psi})_k = \gamma_k(\tilde{\varphi}(t)\,\tilde{\psi}(t)\,\tilde{r}(t)),$$

автор получил несколько новых сверток, среди которых есть свертки, получающиеся при разложении функций по соответствующим системам функций.

5. Если K — матричный оператор, имеющий обратный, т. е.

$$\tilde{x}_n = Kx_n \equiv \sum_{p=-\infty}^{+\infty} k_{np} x_p,$$

$$x_n = K^{-1}\tilde{x}_n \equiv \sum_{q=-\infty}^{+\infty} k_{nq}^{-1} \tilde{x}_q, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots,$$

причем

$$r_q k_{nq}^{-1} k_{qp} = \sum_s \gamma_{n,p,s} k_{m(n,p,s),q}^{-1},$$

где $m(n, p, s)$ — целочисленная функция своих аргументов, то и в этом случае можно определить свертку оригиналов следующим образом:

$$x_n \overset{r_n}{*} y_n = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} x_p \sum_s \gamma_{n,p,s} y_{m(n,p,s)},$$

где $\tilde{y}_n = K y_n$.

Пример 9. Если операторы K и K^{-1} заданы так:

$$\tilde{x}_n = x_n - x_{n+p}, \quad x_n = \sum_{\nu=0}^{\infty} \tilde{x}_{n+\nu p}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2,$$

то

$$x_n * y_n = x_n (y_n - y_{n+p}) - \sum_{\nu=0}^{\infty} x_{n+\nu p} (y_{n+\nu p-p} - 2y_{n+\nu p} + y_{n+\nu p+p})$$

и

$$\tilde{x}_n * \tilde{y}_n = \tilde{x}_n \tilde{y}_n + \tilde{x}_n \sum_{\nu=1}^{\infty} \tilde{y}_{n+\nu p} + \tilde{y}_n \sum_{\nu=1}^{\infty} \tilde{x}_{n+\nu p}.$$

Литература

1. Снеддон И. Преобразования Фурье. ИЛ, 1955.
2. Хиршман И. И., Уиддер Д. В. Преобразования типа свертки. ИЛ, 1958.
3. Гельфанд И. М., Райков Д. А., Шилов Г. Е. Коммутативные нормированные кольца. Физматгиз, 1960.
4. Титчмарш Е. Введение в теорию интегралов Фурье. ГТТИ, 1948.
5. Виленкин Н. Я. ДАН СССР, **118**, № 2, 1958.
6. Левитан Б. М. Математ. сб., **17** (59), 2, 1945, стр. 163—192.
7. Диткин В. А., Прудников А. П. Интегральные преобразования и операционное исчисление. СБМ, Физматгиз, 1961.
8. Ватсон Г. И. Теория бесселевых функций, ч. I. ИЛ, 1949.
9. Виленкин Н. Я. УМН, **11**, № 3 (69), 1956.
10. Малюжинец Г. Ф. ДАН СССР, **119**, № 1, 1958.
11. Рыжик И. М., Градштейн П. С. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. Физматгиз, 1962.
12. Мусхелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения. Физматгиз, 1962.
13. Какичев В. А. Изв. вузов СССР, Математика, № 4 (23), 1961.
14. Виленкин Н. Я. Труды Моск. матем. об-ва, **12**, 1963, стр. 183—257.
15. Левитан Б. М. УМН, **4**, № 1 (29), 1949.
16. Березанский Ю. М., Крейн С. Г. ДАН СССР, **72**, № 1, 1950.
17. Березанский Ю. М. Укр. матем. журнал, **3**, № 4, 1951.

Ростовский государственный университет

Поступило в редакцию I.IX 1966

ВЕСЦІ АКАДЭМІІ НАВУК БЕЛАРУСКАЙ ССР № 2 1967
СЕРЫЯ ФІЗІКА-МАТЭМАТЫЧНЫХ НАВУК

УДК 518 : 517.944/.947

В. В. БОБКОВ, А. В. САМУСЕНКО

МНОГОСЛОЙНЫЕ СХЕМЫ МЕТОДА ИНТЕГРАЛЬНЫХ СООТНОШЕНИЙ ПРИ РЕШЕНИИ ЗАДАЧИ ГУРСА

Рассмотрим в прямоугольнике $D\{0 \leqslant x \leqslant l',\ 0 \leqslant y \leqslant l''\}$ следующую задачу Гурса:

$$u_{xy} = a(x, y)\, u_x + b(x, y)\, u_y + c(x, y)\, u + f(x, y), \tag{1}$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad u(0, y) = \psi(y), \quad \varphi(0) = \psi(0). \tag{2}$$

Будем решать эту задачу приближенно методом интегральных соотношений [1], предполагая при этом, что функции a, b, c, f, φ, ψ и u являются достаточно гладкими в соответствующих областях.

Двухслойные схемы метода интегральных соотношений в случае рассматриваемой задачи были построены и исследованы на сходимость в [2]. В частном случае уравнения (1), когда $a(x, y) \equiv b(x, y) \equiv 0$, для приближенного решения соответствующей задачи Гурса в [3] были применены многослойные схемы метода. В данной заметке будут построены явные многослойные схемы метода интегральных соотношений в приложении к задаче (1), (2), а также получены априорные оценки погрешности, гарантирующие в прямоугольнике D равномерную сходимость метода с соответствующей скоростью. Здесь же будет указано на возможность перенесения основных результатов на случай систем уравнений подобного вида с некоторыми допустимыми нелинейностями.

Итак, разобьем область D по заданному шагу $h > 0$ на полосы прямыми $y = y_m = mh$ $(m = 0, 1, 2, \ldots, N;\ N = [l''/h])$ и будем искать приближенное решение $u_n = u_n(x) \approx u(x, y_n)$ поставленной задачи Гурса на прямой $y = y_n$ $(n = k, k+1, \ldots, N)$, считая при этом, что на $k-1$ первых прямых $y = y_1, \ldots, y = y_{k-1}$ решение $u_i = u_i(x) = v_i(x)$ $(i = 1, 2, \ldots, k-1)$ уже как-то найдено с соответствующими погрешностями $\delta_1(x), \delta_2(x), \ldots, \delta_{k-1}(x)$.

Интегрируем уравнение (1) поперек каждой полосы, начиная с прямой $y = y_{k-1}$:

$$u'(x, y_{m+1}) - u'(x, y_m) = b(x, y_{m+1})\, u(x, y_{m+1}) - b(x, y_m)\, u(x, y_m) + \int_{y_m}^{y_{m+1}} \left\{ a(x, y)\, \frac{\partial u}{\partial x} + \left[c(x, y) - \frac{\partial b(x, y)}{\partial y} \right] u + f(x, y) \right\} dy; \tag{3}$$

$$m = k-1, k, \ldots, n-1,$$

где штрихом обозначено дифференцирование по x.

Интерполировав подынтегральную функцию (вообще говоря, можно интерполировать и только неизвестную функцию) по $k+1$ значениям ее на прямых $y = y_{m+1}$, $y = y_m, \ldots, y = y_{m+1-k}$ и выполнив интегрирование в каждом из $n+1-k$ уравнений, получим для нахождения приближенного решения u_n задачи (1), (2) на прямой $y = y_n (k \leqslant n \leqslant N,\ 0 \leqslant x \leqslant l')$ следующую аппроксимирующую задачу Коши для системы $n+1-k$ линейных обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\alpha_{m+1} u'_{m+1} - \beta_m u'_m - \tau^{(2)}_{m-1} u'_{m-1} - \tau^{(3)}_{m-2} u'_{m-2} - \ldots - \tau^{(k)}_{m+1-k} u'_{m+1-k} =$$

$$= \xi_{m+1} u_{m+1} + \eta_m u_m + \theta^{(2)}_{m-1} u_{m-1} + \theta^{(3)}_{m-2} u_{m-2} +$$

$$+ \ldots + \theta^{(k)}_{m+1-k} u_{m+1-k} + f_{m+1}; \tag{4}$$

$$u_0(x) = \varphi(x), \quad u_p = v_p(x), \quad p = 1, 2, \ldots, k-1;$$

$$u_{m+1}(0) = \psi(y_{m+1}), \quad m = k-1, k, \ldots, n-1.$$

Здесь

$$\alpha_{m+1} = \alpha_{m+1}(x) = 1 - hl_0 a(x, y_{m+1}),$$

$$\beta_m = \beta_m(x) = 1 + hl_1 a(x, y_m),$$

$$\tau^{(2)}_{m-1} = \tau^{(2)}_{m-1}(x) = hl_2 a(x, y_{m-1}),$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$\tau^{(k)}_{m+1-k} = \tau^{(k)}_{m+1-k}(x) = hl_k a(x, y_{m+1-k}),$$

$$\xi_{m+1} = \xi_{m+1}(x) = hl_0 \left[c(x, y_{m+1}) - \frac{\partial b(x, y_{m+1})}{\partial y} \right] + b(x, y_{m+1}),$$

$$\eta_m = \eta_m(x) = hl_1 \left[c(x, y_m) - \frac{\partial b(x, y_m)}{\partial y} \right] - b(x, y_m),$$

$$\theta^{(2)}_{m-1} = \theta^{(2)}_{m-1}(x) = hl_2 \left[c(x, y_{m-1}) - \frac{\partial b(x, y_{m-1})}{\partial y} \right],$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$\theta^{(k)}_{m+1-k} = \theta^{(k)}_{m+1-k}(x) = hl_k \left[c(x, y_{m+1-k}) - \frac{\partial b(x, y_{m+1-k})}{\partial y} \right],$$

$$f_{m+1} = f_{m+1}(x) = \sum_{i=0}^{k} l_i f(x, y_{m+1-i}),$$

$$l_i = \frac{(-1)^i}{(k-i)!\, i!} \int\limits_{k-1}^{k} \frac{t(t-1)\ldots(t-k)}{(t-k+i)}\, dt,$$

$$i = 0, 1, 2, \ldots, k.$$

Для точного решения задачи (1), (2) на прямой $y = y_n$ будут выполняться соотношения

$$\alpha_{m+1} u'(x, y_{m+1}) - \beta_m u'(x, y_m) -$$

$$- \tau^{(2)}_{m-1} u'(x, y_{m-1}) - \ldots - \tau^{(k)}_{m+1-k} u'(x, y_{m+1-k}) =$$

$$= \xi_{m+1} u(x, y_{m+1}) + \eta_m u(x, y_m) + \theta^{(2)}_{m-1} u(x, y_{m-1}) +$$

$$+ \ldots + \theta^{(k)}_{m+1-k} u(x, y_{m+1-k}) + f_{m+1} + r_{m+1}; \tag{5}$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad u(x, y_p) = v_p(x) + \delta_p(x), \quad p = 1, 2, \ldots, k-1;$$

$$u(0, y_{m+1}) = \psi(y_{m+1}), \quad m = k-1, k, \ldots, n-1,$$

где

$$r_{m+1} = r_{m+1}(x) = \frac{h^{k+2}}{(k+1)!} \int_{k-1}^{k} \frac{\partial^{k+3} u(x, \tilde{y}_{m+1})}{\partial x\, \partial y^{k+2}}\, t(t-1)\dots(t-k)\, dt,$$

$$y_{m+1-k} < \tilde{y}_{m+1} < y_{m+1}, \quad 0 \leqslant x \leqslant l'.$$

Вычитая соответственно равенства (4) и (5), получим для погрешности метода $\gamma_n = \gamma_n(x) = u(x, y_n) - u_n$ следующую задачу Коши:

$$\alpha_{m+1}\gamma'_{m+1} - \beta_m\gamma'_m - \tau^{(2)}_{m-1}\gamma'_{m-1} - \tau^{(3)}_{m-2}\gamma'_{m-2} - \\ - \dots - \tau^{(k)}_{m+1-k}\gamma'_{m+1-k} = \\ = \xi_{m+1}\gamma_{m+1} + \eta_m\gamma_m + \theta^{(2)}_{m-1}\gamma_{m-1} + \theta^{(3)}_{m-2}\gamma_{m-2} + \\ + \dots + \theta^{(k)}_{m+1-k}\gamma_{m+1-k} + r_{m+1}, \tag{6}$$

$$\gamma_0 = 0, \quad \gamma_p = \delta_p(x), \quad p = 1, 2, \dots, k-1;$$

$$\gamma_{m+1}(0) = 0, \quad m = k-1, k, \dots, n-1. \tag{7}$$

Покажем, что при $h \to 0$ приближенное решение исходной задачи равномерно в прямоугольнике D сходится к ее точному решению (при известных требованиях к начальным погрешностям $\delta_i(x)$, $i = 1, 2, \dots, k-1$), и дадим соответствующую априорную оценку погрешности метода интегральных соотношений.

Запишем задачу (6), (7) в виде

$$P_n\Gamma'_n = Q_n\Gamma_n + R_n, \tag{8}$$

$$\Gamma_n(0) = 0, \tag{9}$$

где квадратные матрицы P_n и Q_n и векторы-столбцы Γ_n и R_n имеют следующий вид:

$$P_n = \begin{bmatrix} \alpha_k & & & & & & & \\ -\beta_k & \alpha_{k+1} & & & & & & \\ -\tau^{(2)}_k & -\beta_{k+1} & \alpha_{k+2} & & & & 0 & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & & & & \\ -\tau^{(k)}_k & -\tau^{(k-1)}_{k+1} & -\tau^{(k-2)}_{k+2} & \dots & -\beta_{2k-1} & \alpha_{2k} & & \\ & -\tau^{(k)}_{k+1} & -\tau^{(k-1)}_{k+2} & \dots & -\tau^{(2)}_{2k-1} & -\beta_{2k} & \alpha_{2k+1} & \\ & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \\ & 0 & & \dots & \dots & \dots & \dots & \\ & & & \dots & \dots & \dots & \dots & \\ & & & -\tau^{(k)}_{n-k} & -\tau^{(k-1)}_{n-k+1} & \dots & -\tau^{(2)}_{n-2} & -\beta_{n-2} \;\; \alpha_n \end{bmatrix},$$

$$
Q_n = \begin{bmatrix}
\xi_k & & & & & & & & \\
\eta_k & \xi_{k+1} & & & & & & 0 & \\
\theta_k^{(2)} & \eta_{k+1} & \xi_{k+2} & & & & & & \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & & & \\
\theta_k^{(k)} & \theta_{k+1}^{(k-1)} & \theta_{k+2}^{(k-2)} \ldots & \eta_{2k-1} & \xi_{2k} & & & & \\
 & \theta_{k+1}^{(k)} & \theta_{k+2}^{(k-1)} \ldots & \theta_{2k-1}^{(2)} & \eta_{2k} & \xi_{2k+1} & & & \\
 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \\
 & & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \\
 & 0 & & & & & & & \\
 & & & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
 & & & & & \theta_{n-k}^{(k)} & \theta_{n-k+1}^{(k-1)} \ldots & \eta_{n-1} & \xi_n
\end{bmatrix}.
$$

$$
R_n = \begin{bmatrix}
r_k + \beta_{k-1}\delta'_{k-1} + \sum\limits_{i=2}^{k-1} \tau_{k-i}^{(i)} \delta'_{k-i} + \eta_{k-1}\delta_{k-1} + \sum\limits_{i=2}^{k-1} \theta_{k-i}^{(i)} \delta_{k-i} \\
r_{k+1} + \sum\limits_{i=1}^{k-1} \tau_{k-i}^{(i+1)} \delta'_{k-i} + \sum\limits_{i=1}^{k-1} \theta_{k-i}^{(i+1)} \delta_{k-i} \\
r_{k+2} + \sum\limits_{i=1}^{k-2} \tau_{k-i}^{(i+2)} \delta'_{k-i} + \sum\limits_{i=1}^{k-2} \theta_{k-i}^{(i+2)} \delta_{k-i} \\
\cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \\
r_{2k-1} + \sum\limits_{i=1}^{1} \tau_{k-i}^{(k)} \delta'_{k-i} + \sum\limits_{i=1}^{1} \theta_{k-i}^{(k)} \delta_{k-i} \\
r_{2k} \\
r_{2k+1} \\
\cdot \\
\cdot \\
r_n
\end{bmatrix}, \quad
\Gamma_n = \begin{bmatrix}
\gamma_k \\
\gamma_{k+1} \\
\gamma_{k+2} \\
\cdot \\
\cdot \\
\cdot \\
\gamma_{2k-1} \\
\gamma_{2k} \\
\gamma_{2k+1} \\
\cdot \\
\cdot \\
\cdot \\
\gamma_n
\end{bmatrix}.
$$

Заметим, что матрица P_n будет неособенной при любых $h > 0$, если $a(x, y) \leqslant 0$ в прямоугольнике $D_n\{0 \leqslant x \leqslant l',\ 0 \leqslant y \leqslant y_n\}$, а в случае прочих $a(x, y)$ достаточно взять шаг $h < \frac{1}{lA_n}\left(A_n = \max\limits_{D_n} |a(x, y)|,\ l = \max\limits_{0<i<k} |l_i|\right)$, чтобы матрица P_n стала неособенной.

Умножая уравнение (8) слева на матрицу, обратную матрице P_n, приведем задачу (8), (9) к виду

$$\Gamma'_n = P_n^{-1} Q_n \Gamma_n + P_n^{-1} R_n, \tag{10}$$

$$\Gamma_n(0) = O. \tag{11}$$

Для элементов p'_{ij} матрицы P_n^{-1} непосредственно из определения обратной матрицы нетрудно получить следующие рекуррентные формулы:

$$p'_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{для } i < j, \\ \dfrac{1}{\alpha_i} & \text{для } i = j, \\ \dfrac{\beta_j}{\alpha_j}\, p'_{ij+1} + \dfrac{1}{\alpha_j} \sum\limits_{s=2}^{k} \tau_j^{(s)} p'_{ij+s} & \text{для } i > j, \end{cases}$$

$$i, j = k, k+1, \ldots, n.$$

Расписывая эти формулы для i-ой строки матрицы P_n^{-1} и принимая во внимание очевидные неравенства

$$|\alpha_i(x)| \geqslant \alpha_{(n)} = 1 - hl_0 A_n \geqslant 1 - hlA_n,$$

$$\frac{\beta_i}{\alpha_i} + (k-1)\, \frac{\max\limits_{2 \leqslant j \leqslant k} |\tau_i^{(j)}|}{\alpha_i} \leqslant \lambda_{(n)} = \frac{1 + hklA_n}{1 - hlA_n},$$

$$i = k, k+1, \ldots, n,$$

получим оценки

$$|p'_{ii}| \leqslant \frac{1}{\alpha_{(n)}}, \quad |p'_{ii-1}| \leqslant \lambda_{(n)} \frac{1}{\alpha_{(n)}}, \ \ldots, \ |p'_{ik}| \leqslant \lambda_{(n)}^{i-k} \frac{1}{\alpha_{(n)}},$$

$$i = k, k+1, \ldots, n,$$

допуская даже, что

$$|p'_{ii}| \leqslant |p'_{ii-1}| \leqslant \ldots \leqslant |p'_{ik}|.$$

Легко видеть, что

$$\sum_{j=k}^{i-1} |p'_{ij+1}| \leqslant \frac{\lambda_{(n)}^{i-k} - 1}{\alpha_{(n)}(\lambda_{(n)} - 1)} \leqslant \frac{\lambda_{(n)}^{n-k} - 1}{h(k+1)lA_n} = \frac{\lambda_n - 1}{h(k+1)lA_n},$$

$$i = k+1, \ldots, n. \tag{12}$$

Здесь

$$\lambda_n = \lambda_{(n)}^{n-k} = \left(\frac{1 + hklA_n}{1 - hlA_n}\right)^{n-k} \leqslant \exp\left[(k+1)(y_n - kh)\, lA_n\right].$$

Для элементов матрицы $P_n^{-1} Q_n = \{\sigma_{ij}\}$ непосредственным перемножением получаем следующие формулы:

$$\sigma_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{для } i < j, \\ \dfrac{\xi_i}{\alpha_i} & \text{для } i = j, \\ \dfrac{\beta_j \xi_j + \alpha_j \eta_j}{\alpha_j}\, p'_{ij+1} + \sum\limits_{s=2}^{k} \left(\dfrac{\tau_j^{(s)} \xi_j + \alpha_j \theta_s^{(s)}}{\alpha_j}\right) p'_{ij+s} & \text{для } i > j, \end{cases} \tag{13}$$

$$i, j = k, k+1, \ldots, n.$$

Если расписать числители выражений $\dfrac{\beta_j\xi_j + \alpha_j\eta_j}{\alpha_j}$ и $\dfrac{\tau_j^{(s)}\xi_j + \alpha_j\theta_j^{(s)}}{\alpha_j}$, то совершенно очевидными станут и следующие оценки:

$$\left|\frac{\beta_j\xi_j + \alpha_j\eta_j}{\alpha_j}\right| \leqslant 2h\,\frac{l(C_n + B'_n + A_nB_n)}{\alpha_{(n)}},$$
$$\left|\frac{\tau_j^{(s)}\xi_j + \alpha_j\theta_j^{(s)}}{\alpha_j}\right| \leqslant h\,\frac{l(C_n + B'_n + A_nB_n)}{\alpha_{(n)}}, \tag{14}$$

где $C_n = \max\limits_{D_n}|c(x, y)|$, $B_n = \max\limits_{D_n}|b(x, y)|$, $B'_n = \max\limits_{D_n}\left|\dfrac{\partial b(x, y)}{\partial y}\right|$. Теперь уже, учитывая равенства (13) и неравенства (12), (14), нетрудно получить оценку для $\|P_n^{-1}Q_n\|$ (будем иметь в виду норму I):

$$\|P_n^{-1}Q_n\| \leqslant \frac{B_n + hl_0(C_n + B'_n)}{1 - hl_0A_n} + \frac{C_n + B'_n + A_nB_n}{1 - hl_0A_n}\left(\frac{\lambda_n - 1}{A_n}\right). \tag{15}$$

И аналогично

$$\|P_n^{-1}R_n\| \leqslant h^{k+1}(\lambda_n\lambda_{(n)} - 1)M_n^{(1,k+2)}l_{k+1}/(k+1)lA_n + \Delta_n. \tag{16}$$

Здесь

$$M_n^{(1,k+2)} = \max_{D_n}\left|\frac{\partial^{k+3}u(x, y)}{\partial x\,\partial y^{k+2}}\right|, \quad l_{k+1} = \left|\frac{1}{(k+1)!}\int\limits_{k-1}^{k} t(t-1)\ldots(t-k)\,dt\right|,$$

$$\Delta_n = \frac{\lambda_n}{1 - hl_0A_n}\{(k-1)hl\,[A_n\delta' + (C_n + B'_n)\delta] +$$
$$+ (1 + hl_1A_n)\bar{\delta}'_{k-1} + [B_n + hl_1(C_n + B'_n)]\,\bar{\delta}_{k-1}\},$$
$$\delta' = \max_{0 < x < l'}\sum_{i=1}^{k-1}|\delta'_i(x)|, \quad \delta = \max_{0 < x < l'}\sum_{i=1}^{k-1}|\delta_i(x)|,$$
$$\bar{\delta}'_{k-1} = \max_{0 < x < l'}|\delta'_{k-1}(x)|, \quad \bar{\delta}_{k-1} = \max_{0 < x < l'}|\delta_{k-1}(x)|,$$

Для решения (10), (11), воспользовавшись известными результатами [4], можно записать следующую оценку:

$$\|\Gamma_n\| \leqslant \int\limits_0^x \|P_n^{-1}R_n\| \exp\int\limits_\xi^x \|P_n^{-1}Q_n\|\,d\eta\,d\xi. \tag{17}$$

Тогда, учитывая неравенства (15)—(17), интересующую нас оценку погрешности метода можно представить в виде

$$|\gamma_n(x)| \leqslant \|\Gamma_n\| \leqslant$$
$$\leqslant \frac{h^{k+1}(1 - hl_0A_n)(\lambda_n\lambda_{(n)} - 1)M_n^{(1,k+2)}l_{k+1}/(k+1)lA_n + (1 - hl_0A_n)\Delta_n}{B_n + hl_0(C_n + B'_n) + (C_n + B'_n + A_nB_n)(\lambda_n - 1)/A_n} \times$$
$$\times (\exp\{[B_n + hl_0(C_n + B'_n) + (C_n + B'_n + A_nB_n) \times$$
$$\times (\lambda_n - 1)/A_n]\,x/(1 - hl_0A_n)\} - 1),$$
$$0 \leqslant x \leqslant l', \quad n = k, k+1, \ldots, N.$$

Из этой оценки следует равномерная в прямоугольнике D сходимость метода интегральных соотношений со скоростью порядка h^{k+1} (при соответствующих требованиях к начальным погрешностям). Очевидно, что для каждого конкретного значения $x=x_0$, $0\leqslant x\leqslant l'$ полученная оценка может быть несколько уточнена, если входящие в нее экстремальные значения по x брать не на отрезке $[0, l']$, а на отрезке $[0, x_0]$.

Отметим, что исходные дифференциальные уравнения 2-го порядка не обязательно должны быть линейными. Для получения результатов, подобных изложенным выше, достаточно того, чтобы в правую часть уравнения линейно входила лишь одна из частных производных первого порядка от искомой функции.

Заметим также, что все основные результаты можно обобщить и на системы уравнений, например, следующего вида:

$$\frac{\partial^2 u_i}{\partial x\, \partial y} = a_i(x, y)\frac{\partial u_i}{\partial x} + \sum_{j=1}^{p}\left[b_{ij}(x, y)\frac{\partial u_j}{\partial y} + c_{ij}(x, y)u_j\right] + f_i(x, y),$$

$$i = 1, 2, \ldots, p,$$

при этом правые части могут и не быть линейными $\left(\text{линейно должны входить лишь производные } \frac{\partial u_i}{\partial x}\right)$.

Литература

1. Дородницын А.А. Тр. III Всес. матем. съезда 1956 г., 3, 447—453. Изд. АН СССР, 1958.
2. Крылов В. И., Бобков В. В. ДАН БССР, 7, № 7, 1963.
3. Бобков В. В. Весцi АН БССР, сер. фiз.-тэхн. навук, № 4, 1963.
4. Лозинский С. М. Изв. вузов, Математика, № 5, 1958.

Белорусский государственный университет им. В. И. Ленина

Поступило в редакцию 16.II 1967

ВЕСЦІ АКАДЭМІІ НАВУК БЕЛАРУСКАЙ ССР № 2 1967
СЕРЫЯ ФІЗІКА-МАТЭМАТЫЧНЫХ НАВУК

УДК 538.3 : 538.56

А. В. МОШИНСКИЙ

ДИФРАКЦИЯ ПОЛЯ ПРОДОЛЬНОГО ДИПОЛЬНОГО ИЗЛУЧАТЕЛЯ НА ДВУХ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ЦИЛИНДРАХ

2. МАГНИТНЫЙ ДИПОЛЬНЫЙ ИЗЛУЧАТЕЛЬ

В первой части данной работы [1] приведено решение задачи об излучении продольного электрического дипольного излучателя, расположенного вблизи двух параллельных идеально проводящих эллиптических цилиндров. Здесь рассматривается аналогичная задача для случая магнитного дипольного излучателя. Сохраняя обозначения и общность рассуждений, решение ее выполним по той же схеме, что и в [1].

По-прежнему будем считать, что образующие цилиндров параллельны оси Oz декартовой системы координат с центром в точке O, расположенной на середине прямой, соединяющей центры O_s $(s = \pm 1)$ эллипсов поперечного сечения. Большие оси эллипсов в секущей плоскости Oxy лежат на оси Ox, расстояние между цилиндрами равно $2l$. Поверхность любого из цилиндров в локальных эллиптических координатах ($x_s = d \operatorname{ch} \xi_s \cos \eta_s$, $y_s = d \operatorname{sh} \xi_s \sin \eta_s$) задается уравнением $\xi_s = \xi_0$ $(s = \pm 1)$, а положение диполя в пространстве определяется координатами ξ_s^0, η_s^0, z_0. Считаем, что магнитный дипольный момент $\mathbf{m}$ ориентирован параллельно оси Oz, т. е. $\mathbf{m} = \{0,\ 0,\ m\}$, где $m = \dfrac{I^* \, dz_0}{-i\omega}$, а I^* — магнитный ток диполя.

Поле в свободном пространстве, создаваемое магнитным диполем, определится через магнитный вектор Герца

$$\mathbf{\Pi}_1^* = \mathbf{m} \frac{\exp(ikR)}{R} \tag{1}$$

из соотношений

$$\mathbf{E}_1 = ik \operatorname{rot} \mathbf{\Pi}_1^*; \quad \mathbf{H}_1 = \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{\Pi}_1^*; \tag{2}$$

считаем, что здесь для полного поля $\mathbf{\Pi}^* = \mathbf{\Pi}_1^* + \mathbf{\Pi}_2^*$, причем $\mathbf{\Pi}^* = \{0, 0, \Pi^*\}$, а $\Pi^* = \Pi_1^* + \Pi_2^*$. При этом функция Π_2^* должна быть решением уравнения Гельмгольца

$$\Delta \Pi_2^* + k^2 \Pi_2^* = 0, \tag{3}$$

удовлетворять условию излучения на бесконечности и граничным условиям, которые в рассматриваемом случае запишутся:

$$\left(\frac{\partial \Pi_1^*}{\partial \xi_s} + \frac{\partial \Pi_2^*}{\partial \xi_s} \right) \Bigg|_{\xi_s = \xi_0} = 0 \quad (s = \pm 1). \tag{4}$$

Поскольку первичное поле задано, то задача заключается в отыскании функции Π_2^*, определяющей вторичное поле $\mathbf{E}_2$, $\mathbf{H}_2$.

1. Решение задачи. По аналогии с изложенным в [1, 3] решение задачи об излучении магнитного диполя (1) в присутствии двух эллиптических цилиндров ищется в виде разложения

$$\Pi_2^* = im \sum_{s=\pm 1} \sum_{n=0}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [X_n^{*(s)} \beta_n c_n^2 \mathrm{Ce}_n'(\xi_0, q) \mathrm{Me}_n^{(1)}(\xi_s, q) \mathrm{ce}_n(\eta_s, q) +$$

$$+ Y_n^{*(s)} \beta_n d_n^2 \mathrm{Se}_n(\xi_0, q) \mathrm{Ne}_n^{(1)}(\xi_s, q) \mathrm{se}_n(\eta_s, q)] \exp[ih(z-z_0)]\, dh, \qquad (5)$$

где $\beta_n = 1$ для $n = 0$ и $\beta_n = n$ для $n \neq 0$.

Для коэффициентов $X_n^{*(s)}$, $Y_n^{*(s)}$ получаются таким же путем, как и раньше, две бесконечные системы уравнений. Внешне эти системы не отличаются от систем (11), (12), приведенных в первой части данной работы.

В рассматриваемом нами случае ($\eta_{-s,s} = 0$ или π) $X_n^{*(s)}$, $Y_n^{*(s)}$ являются решениями систем:

$$X_n^{*(s)} = f_{n,s}^{*(1)} - \sum_{m=0}^{\infty} \lambda_{nm}^{*-s,s} X_m^{*(-s)}, \qquad (6)$$

$$Y_n^{*(s)} = f_{n,s}^{*(2)} - \sum_{m=0}^{\infty} \sigma_{nm}^{*-s,s} Y_m^{*(-s)}, \qquad (7)$$

где

$$f_{n,s}^{*(1)} = -\frac{\mathrm{ce}_n(\eta_s^0, q)\, \mathrm{Me}_n^{(1)}(\xi_s^0, q)}{\beta_n \mathrm{Me}_n^{(1)\prime}(\xi_0, q)}; \qquad (8)$$

$$f_{n,s}^{*(2)} = -\frac{\mathrm{se}_n(\eta_s^0, q)\, \mathrm{Ne}_n^{(1)}(\xi_s^0, q)}{\beta_n \mathrm{Ne}_n^{(1)\prime}(\xi_0, q)}; \qquad (9)$$

$$\lambda_{nm}^{*-s,s} = \frac{2\beta_m c_m \mathrm{Ce}_m'(\xi_0, q)}{c_n \beta_n \mathrm{Me}_n^{(1)\prime}(\xi_0, q)} \sum_{p=0}^{\infty} c_p a_p^{(m,n)} \mathrm{Me}_p^{(1)}(\xi_{-s,s}, q) \mathrm{ce}_p(\eta_{-s,s}, q); \qquad (10)$$

$$\sigma_{nm}^{*-s,s} = \frac{2\beta_m d_m \mathrm{Se}_m'(\xi_0, q)}{d_n \beta_n \mathrm{Ne}_n^{(1)\prime}(\xi_0, q)} \sum_{p=0}^{\infty} c_p c_p^{(m,n)} \mathrm{Me}_p^{(1)}(\xi_{-s,s}, q) \mathrm{ce}_p(\eta_{-s,s}, q). \qquad (11)$$

Наличие множителя β_n позволяет разрешить полученные системы методом усечения также для случая, когда диполь расположен на поверхности одного из цилиндров.

В приведенных выше выражениях штрих над функциями Матье означает дифференцирование по координате ξ_s.

В волновой зоне, для которой $h = k \cos\theta$, в сферических координатах с центром в точке O составляющая магнитного вектора Герца полного поля по аналогии с выражениями (24) и (26) из [1] может быть представлена:

$$\Pi^* = 2m \frac{\exp[ik(r - z_0 \cos\theta)]}{r} [T_1^*(\varphi, \theta) + T_2^*(\varphi, \theta)], \qquad (12)$$

где

$$T_1^*(\varphi, \theta) = \frac{1}{2} \exp\{-ikd \sqrt{\mathrm{ch}^2 \xi^0 - \sin^2 \eta^0} \cos[\varphi - \mathrm{arc\,tg}(\mathrm{th}\, \xi^0 \,\mathrm{tg}\, \eta^0)] \sin\theta\} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} c_n \mathrm{ce}_n(\varphi, q') \mathrm{Ce}_n(\eta^0, q') \mathrm{Ce}_n(\xi^0, q') +$$

$$+ d_n \mathrm{se}_n(\varphi, q') \mathrm{se}_n(\eta^0, q') \mathrm{Se}_n(\xi^0, q')]; \qquad (13)$$

$$T_2^*(\varphi,\theta)=\sum_{s=\pm1}\sum_{n=0}^{\infty}\exp-(iksl\cos\varphi\sin\theta)\left[X_n^{*(s)}\beta_n c_n\operatorname{Ce}_n'(\xi_0,q')\operatorname{ce}_n(\varphi,q')+\right.$$

$$\left.+Y_n^{*(s)}\beta_n d_n\operatorname{Se}_n'(\xi_0,q')\operatorname{se}_n(\varphi,q')\right]. \qquad (14)$$

В случае, когда $2lk\sin\theta\gg1$, коэффициенты $X_n^{*(s)}$, $Y_n^{*(s)}$ в (13) выражаются формулами (35) и (36) из [1], в которых вместо Q и $F^{(s)}$ необходимо подставить

$$Q^*=\sum_{n=0}^{\infty}a_n^{*(s)}b_n^{*(s)};\qquad F^{*(s)}=\sum_{n=0}^{\infty}a_n^{*(s)}f_{n,s}^{*(1)}, \qquad (15)$$

где

$$a_n^{*(s)}=\beta_n c_n\operatorname{Ce}_n'(\xi_0,q')\operatorname{ce}_n(\eta_{-s,s},q');\ b_n^{*(s)}=\frac{2\operatorname{ce}_n(\eta_{-s,s},q')}{\beta_n c_n\operatorname{Me}_n^{(1)\prime}(\xi_0,q')}. \qquad (16)$$

Затем, как и в случае электрического диполя, представив (14) в виде двух функций $\Psi_1^*(\varphi,\theta)$ и $\Psi_2^*(\varphi,\theta)$, получим:

$$\Psi_1^*(\varphi,\theta)=\sum_{s=\pm1}\sum_{n=0}^{\infty}\beta_n\exp(-iksl\cos\varphi\sin\theta)\left[f_{n,s}^{*(1)}c_n\operatorname{Ce}_n'(\xi_0,q')\operatorname{ce}_n(\varphi,q')+\right.$$

$$\left.+f_{n,s}^{*(2)}d_n\operatorname{Se}_n'(\xi_0,q')\operatorname{se}_n(\varphi,q')\right], \qquad (17)$$

$$\Psi_2^*(\varphi,\theta)=H\sum_{s=\pm1}\sum_{n=0}^{\infty}\left[\beta_n\exp(-iksl\cos\varphi\sin\theta)c_n b_n^{*(s)}\operatorname{Ce}_n'(\xi_0,q')\operatorname{ce}_n(\varphi,q')\times\right.$$

$$\left.\times\frac{HQ^*F^{*(s)}-F^{*(-s)}}{1-[HQ^*]^2}\right]. \qquad (18)$$

Поскольку нас интересует поле в дальней зоне, оказывается удобным, предварительно определив сферические составляющие вектора Герца полного поля, записать (2) в сферических координатах. Тогда, пренебрегая степенями r в знаменателе выше первой, в волновой зоне составляющим полного поля магнитного дипольного излучателя придадим вид

$$E_\varphi=H_\theta=2mk^2\sin\theta\,\frac{\exp[ik(r-z_0\cos\theta)]}{r}\,[T_1^*(\varphi,\theta)+T_2^*(\varphi,\theta)], \qquad (19)$$

где функции $T_1^*(\varphi,\theta)$ и $T_2^*(\varphi,\theta)$ определяются формулами (13) и (14).

2. Линейный магнитный излучатель и щелевая антенна на одном из цилиндров. В случае продольного магнитного излучателя с током $I^*(z_0)$, простирающегося от z_1 до z_2, поле в волновой зоне будет

$$E_\varphi=H_\theta=\frac{2k^2\sin\theta\exp(ikr)}{-i\omega r}[T_1^*(\varphi,\theta)+T_2^*(\varphi,\theta)]\int_{z_1}^{z_2}I^*(z_0)e^{-ikz_0\cos\theta}dz_0. \qquad (20)$$

Задавшись законом изменения магнитного тока $I^*(z_0)$, интеграл, входящий в (20), можно вычислить подобно тому, как это было сделано для линейного электрического тока [1].

Если теперь устремить нить магнитного тока $I^*(z_0)$ к поверхности одного из цилиндров ($\xi_s\to\xi_0$), например, s-го, где s равно либо $+1$, либо

— 1, то в пределе получим источник, эквивалентный узкой продольной щели с шириной $d\sqrt{\operatorname{ch}^2\xi_0 - \cos^2\eta^0}\, d\eta^0$. Тогда в координатной системе с началом в точке O_s ($\xi_s^0 = \xi^0 = \xi_0$, $\eta_s^0 = \eta^0$)

$$\Psi_1^*(\varphi, \theta) = -\sum_{n=0}^{\infty}\left[c_n \operatorname{ce}_n(\varphi, q')\operatorname{ce}_n(\eta^0, q')\frac{\operatorname{Ce}_n'(\xi_0, q')\operatorname{Me}_n^{(1)}(\xi_0, q')}{\operatorname{Me}_n^{(1)\prime}(\xi_0, q')} + \right.$$

$$\left. + d_n \operatorname{se}_n(\varphi, q')\operatorname{se}_n(\eta^0, q')\frac{\operatorname{Se}_n'(\xi_0, q')\operatorname{Ne}_n^{(1)}(\xi_0, q')}{\operatorname{Ne}_n^{(1)\prime}(\xi_0, q')}\right] - \tag{21}$$

$$-\exp(2ikl\cos\varphi\sin\theta)\sum_{n=0}^{\infty}\left[c_n \operatorname{ce}_n(\varphi, q')\operatorname{ce}_n(\eta_{-s}^0, q')\frac{\operatorname{Ce}_n'(\xi_0, q')\operatorname{Me}_n^{(1)}(\xi_{-s}^0, q')}{\operatorname{Me}_n^{(1)\prime}(\xi_0, q')} + \right.$$

$$\left. + d_n \operatorname{se}_n(\varphi, q')\operatorname{se}_n(\eta_{-s}^0, q')\frac{\operatorname{Se}_n'(\xi_0, q')\operatorname{Ne}_n^{(1)}(\xi_{-s}^0, q')}{\operatorname{Ne}_n^{(1)\prime}(\xi_0, q')}\right].$$

Упростим запись (21). Принимая во внимание, что расстояние между осями цилиндров достаточно велико по сравнению с длиной волны, воспользуемся асимптотическими выражениями для функций $\operatorname{Me}_p^{(1)}$, $\operatorname{Ne}_p^{(1)}$. Так как в этом случае

$$c_p \operatorname{Me}_p^{(1)}(\xi_{-s,s}, q') \approx d_p \operatorname{Ne}_p^{(1)}(\xi_{-s,s}, q') \approx H,$$

где

$$H = \sqrt{\frac{1}{\pi lk\sin\theta}}\exp\left[i\left(2kl\sin\theta - \frac{\pi}{4}\right)\right], \tag{22}$$

то, как следует из теоремы сложения [2],

$$c_n \operatorname{Me}_n^{(1)}(\xi_{-s}^0, q')\operatorname{ce}_n(\eta_{-s}^0, q') \approx H\operatorname{ce}_n(\eta_{-s,s}, q')\exp(ikd\operatorname{ch}\xi_0\cos\eta^0\cos\eta_{-s,s}),$$

$$d_n \operatorname{Ne}_n^{(1)}(\xi_{-s}^0, q')\operatorname{se}_n(\eta_{-s}^0, q') = 0 \quad (s = \pm 1). \tag{23}$$

Последние выражения позволяют несколько упростить запись (21):

$$\Psi_1^*(\varphi, \theta) = -\sum_{n=0}^{\infty}\left[c_n \operatorname{ce}_n(\varphi, q')\operatorname{ce}_n(\eta^0, q')\frac{\operatorname{Ce}_n'(\xi_0, q')\operatorname{Me}_n^{(1)}(\xi_0, q')}{\operatorname{Me}_n^{(1)\prime}(\xi_0, q')} + \right.$$

$$\left. + d_n \operatorname{se}_n(\varphi, q')\operatorname{se}_n(\eta^0, q')\frac{\operatorname{Se}_n'(\xi_0, q')\operatorname{Ne}_n^{(1)}(\xi_0, q')}{\operatorname{Ne}_n^{(1)\prime}(\xi_0, q')}\right] -$$

$$- H\exp(2ikl\cos\varphi\sin\theta)\exp(ikd\operatorname{ch}\xi_0\cos\eta^0\cos\eta_{-s,s}) \times$$

$$\times \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\operatorname{ce}_n(\varphi, q')\operatorname{ce}_n(\eta_{-s,s}, q')\operatorname{Ce}_n(\xi_0, q')}{\operatorname{Me}_n^{(1)\prime}(\xi_0, q')}. \tag{24}$$

Так как $\eta_{-1,1} = 0$, а $\eta_{+1,-1} = \pi$, то $\operatorname{ce}_n(\eta_{1,-1}) = (-1)^n \operatorname{ce}_n(\eta_{-1,1})$. Следовательно, $b_n^{*(-s)} = (-1)^n b_n^{*(s)}$. Таким образом, в системе s-го цилиндра функция $\Psi_2^*(\varphi, \theta)$ может быть представлена

$$\Psi_2^*(\varphi, \theta) = \frac{H}{1 - [HQ^*]^2}\{[HQ^*F^{*(-s)} - F^{*(s)}]D +$$

$$+ [HQ^* F^{*(s)} - F^{*(-s)}] P \exp(2ikl \cos\varphi \sin\theta)\}, \tag{25}$$

где

$$D = \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n c_n b_n^{*(s)} \operatorname{Ce}'_n(\xi_0, q') \operatorname{ce}_n(\varphi, q'); \tag{26}$$

$$P = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \beta_n c_n b_n^{*(s)} \operatorname{Ce}'_n(\xi_0, q') \operatorname{ce}_n(\varphi, q'). \tag{27}$$

Применение теоремы сложения к выражению $F^{*(-s)} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n^{*(-s)} f_{n,-s}^{*(1)}$ позволит записать его в виде

$$F^{*(-s)} = H \exp(ikd \operatorname{ch}\xi_0 \cos\eta^0 \cos\eta_{-s,s}) \times$$

$$\times \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\operatorname{Ce}_n(\xi_0) [\operatorname{ce}_n(\eta_{-s,s})]^2}{\operatorname{Me}_n^{(1)'}(\xi_0)}. \tag{28}$$

В волновой зоне в координатах s-го цилиндра

$$T_1^*(\varphi, \theta) = \frac{1}{2} \exp\{-ikd\sqrt{\operatorname{ch}^2\xi_0 - \sin^2\eta^0} \cos[\varphi - \operatorname{arctg}(\operatorname{th}\xi_0 \operatorname{tg}\eta^0) \sin\theta\} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} [c_n \operatorname{ce}_n(\varphi, q') \operatorname{ce}_n(\eta^0, q') \operatorname{Ce}_n(\xi_0, q') + \tag{29}$$

$$+ d_n \operatorname{se}_n(\varphi, q') \operatorname{se}_n(\eta^0, q') \operatorname{Se}_n(\xi_0, q').$$

Подстановка в (20) выражений (24), (25) и (29) определит составляющую E_φ полного поля, возникающего в результате дифракции поля узкой излучающей щели шириною $d\sqrt{\operatorname{ch}^2\xi_0 - \cos^2\eta^0}$, простирающейся от z_1 до z_2 и расположенной на s-ом цилиндре.

Заменив в (20) распределение магнитного тока $I^*(z_0)$ распределением напряжения, сделаем обобщение на случай прямоугольной узкой щели конечной ширины, размещенной на s-ом цилиндре ($s = +1$ или $s = -1$) между $z = z_1$ и $z = z_2$.

Предположив, что в пределах щели радиус кривизны и напряженность поля не зависят от η^0, можно записать

$$E_\varphi = H_\theta = \frac{2k^2 \sin\theta \exp(ikr)}{-i\omega r} d\sqrt{\operatorname{ch}^2\xi_0 - \cos^2\eta_0} \times$$

$$\times \int_{z_1}^{z_2} E_\varphi(\xi_0, \eta_0, z_0) e^{-ikz_0\cos\theta} dz_0 \int_{\eta_1}^{\eta_2} T^*(\varphi, \theta) d\eta^0, \tag{30}$$

где $E_\varphi(\xi_0, \eta_0, z_0)$ — напряженность поля в середине щели, а

$$\eta_0 = \frac{\eta_1 + \eta_2}{2}.$$

Примем

$$V(z_0) = E_\varphi(\xi_0, \eta_0, z_0) d\sqrt{\operatorname{ch}^2\xi_0 - \cos^2\eta_0} (\eta_2 - \eta_1),$$

где $V(z_0)$ — напряжение, приложенное поперек щели.

После интегрирования (30) по η^0 получим

$$E_\varphi = H_\theta = -\frac{2k^2 \sin\theta \exp(ikr)}{i\omega r(\eta_2 - \eta_1)} M(\varphi, \theta) \int_{z_1}^{z_2} V(z_0) \exp(-ikz_0 \cos\theta)\, dz_0. \quad (31)$$

Если щель длиной $2L$ возбуждается в центре синусоидальной э.д.с., то можно принять, что

$$V(z_0) = V_m \frac{\sin k(L - |z|)}{\sin kL}. \quad (32)$$

После выполнения интегрирования получается

$$E_\varphi = H_\theta = -\frac{4V_m k e^{ikr}}{i\omega r(\eta_2 - \eta_1)} \left\{\frac{\cos(kL\cos\theta) - \cos kL}{\sin kL \sin\theta}\right\} M(\varphi, \theta), \quad (33)$$

где

$$M(\varphi, \theta) = -\sum_{n=0}^{\infty}\left[c_n \operatorname{ce}_n(\varphi, q')\, \alpha_n^{(1)} \frac{\operatorname{Ce}_n'(\xi_0, q')\operatorname{Me}_n^{(1)}(\xi_0, q')}{\operatorname{Me}_n^{(1)\prime}(\xi_0, q)} + \right.$$

$$\left. + d_n \operatorname{se}_n(\varphi, q')\, \alpha_n^{(2)} \frac{\operatorname{Se}_n'(\xi_0, q')\operatorname{Ne}_n^{(1)}(\xi_0, q')}{\operatorname{Ne}_n^{(1)\prime}(\xi_0, q')}\right] - H\gamma\, G e^{2ikl\cos\varphi\sin\theta} +$$

$$+ \sum_{n=0}^{\infty}[c_n \operatorname{ce}_n(\varphi, q']\, \alpha_n^{(1)} \operatorname{Ce}_n(\xi_0, q') + d_n \operatorname{se}_n(\varphi, q')\, \alpha_n^{(2)} \operatorname{Se}_n(\xi_0, q')] +$$

$$+ \frac{H}{1 - [HQ^*]^2}\{[HQ^* R^{*(s)} - R^{*(-s)}]D + [HQ^* R^{*-(s)} - R^{*(s)}]Pe^{2ikl\cos\varphi\sin\theta}\}. \quad (34)$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$\alpha_n^{(1)} = \int_{\eta_1}^{\eta_2} \operatorname{ce}_n(\eta^0, q')\, d\eta^0; \quad (35)$$

$$\alpha_n^{(2)} = \int_{\eta_1}^{\eta_2} \operatorname{se}_n(\eta^0, q')\, d\eta^0; \quad (36)$$

$$\gamma = \int_{\eta_1}^{\eta_2} \exp(ikd \operatorname{ch}\xi_0 \cos\eta^0 \cos\eta_{-s,s})\, d\eta^0; \quad (37)$$

$$G = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\operatorname{ce}_n(\varphi, q')\operatorname{ce}_n(\eta_{-s,s}, q')\operatorname{Ce}_n'(\xi_0, q')}{\operatorname{Me}_n^{(1)\prime}(\xi_0, q')}; \quad (38)$$

$$R^{*(s)} = \int_{\eta_1}^{\eta_2} F^{*(s)}\, d\eta^0 = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n \alpha_n^{(1)} \operatorname{Ce}_n'(\xi_0, q')\operatorname{Me}_n^{(1)}(\xi_0, q')\operatorname{ce}_n(\eta_{-s,s}, q')}{\operatorname{Me}_n^{(1)\prime}(\xi_0, q')}; \quad (39)$$

$$R^{*(-s)} = \int_{\eta_1}^{\eta_2} F^{*(-s)}\, d\eta^0 = H\gamma \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1} \frac{\operatorname{Ce}_n'(\xi_0, q')[\operatorname{ce}_n(\eta_{-s,s}, q')]^2}{\operatorname{Me}_n^{(1)\prime}(\xi_0, q')}. \quad (40)$$

Использовав выражения для вронскианов

$$\Delta\left[\mathrm{Ce}_n(\xi_0), \mathrm{Me}_n^{(1)}(\xi_0)\right] = \frac{2i}{\pi c_n^2}; \quad \Delta\left[\mathrm{Se}_n(\xi_0), \mathrm{Ne}_n^{(1)}(\xi_0)\right] = \frac{2i}{\pi d_n^2}, \tag{41}$$

окончательно запишем (34) в следующем виде:

$$M(\varphi, \theta) = \frac{2iK}{\pi} + \frac{HD\left[HQ^* R^{*(s)} - R^{*(-s)}\right]}{1-[HQ^*]^2} + \\ + H\left\{\frac{P\left[HQ^* R^{*(-s)} - R^{*(s)}\right]}{1-[HQ^*]^2} - \gamma G\right\} e^{2ikl\cos\varphi\sin\theta}, \tag{42}$$

где

$$K = \sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{\mathrm{ce}_n(\varphi, q')\,\alpha_n^{(1)}}{\mathrm{ce}\,\mathrm{Me}_n^{(1)'}(\xi_0, q')} + \frac{\mathrm{se}_n(\varphi, q')\,\alpha_n^{(2)}}{d_n\,\mathrm{Ne}_n^{(1)'}(\xi_0, q')}\right]. \tag{43}$$

З а к л ю ч е н и е. Применяемый метод решения задачи о дифракции продольного дипольного излучателя на двух параллельных эллиптических цилиндрах может быть использован для численного счета. Хотя вычисленный процесс, связанный с решением данной задачи, достаточно сложен, при наличии соответствующих таблиц функций Матье он практически осуществим.

Автор благодарит Е. А. Иванова за постоянное внимание к работе.

Литература

1. М о ш и н с к и й А. В. Весці АН БССР, сер. фіз.-мат. навук, № 4, 1966.
2. И в а н о в Е. А. ДАН БССР, 3, № 10, 1959.
3. И в а н о в Е. А. Изв. вузов СССР, Радиофизика, **9**, № 3, 1966.

Минский радиотехнический институт

Поступило в редакцию 5.VII 1966

УДК 517.944

Г. А. ШЕБЕКО

ДИФРАКЦИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ ЭЛЕМЕНТАРНОГО ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ДИПОЛЯ НА ДВУХ СФЕРАХ

В настоящее время известен ряд теоретических работ, в которых рассматривается задача дифракции плоской электромагнитной волны на двух или более сферах (например, [1—4]), а также задача дифракции поля диполя на двух сферах в частном случае, когда диполь расположен на общей для сфер оси вращения и обладает моментом, направленным вдоль этой оси [5].

В данной работе дается строгое решение задачи дифракции поля элементарного электрического диполя на двух идеально проводящих сферах в случае, когда момент диполя параллелен общей для сфер оси вращения, а сам диполь расположен в произвольной точке пространства вне сфер. В отличие от других работ *) здесь формулируется векторная краевая задача, для решения которой используется аппарат шаровых векторных волновых функций.

1. Постановка задачи. В однородном и изотропном неограниченном пространстве ($\varepsilon=\mu=1$, $\sigma=0$, где ε, μ — диэлектрическая и магнитная проницаемости, σ — проводимость пространства) расположены на расстоянии r_{12} друг от друга две идеально проводящие сферы Σ_s радиусов R_s с центрами в точках $O_s (s=1, 2)$ и вне сфер в точке O — элементарный электрический диполь с моментом $\mathbf{p}=\mathbf{p}_0\exp(-i\omega t)$, направленным параллельно прямой, проходящей через центры сфер (множитель $\exp(-i\omega t)$ в дальнейшем всюду опускается). Сферы не пересекаются и не касаются друг друга. Обозначим векторы электрической и магнитной напряженности первичного поля (поля диполя в свободном пространстве) через $\mathbf{E}^0$ и $\mathbf{H}^0$, векторы вторичного поля — $\mathbf{E}^*$ и $\mathbf{H}^*$, где $\mathbf{E}^*=\mathbf{E}^{(1)}+\mathbf{E}^{(2)}$; $\mathbf{H}^*=\mathbf{H}^{(1)}+\mathbf{H}^{(2)}$, а $\mathbf{E}^{(s)}$ и $\mathbf{H}^{(s)}$ — векторы поля, рассеянного s-ой сферой (здесь и далее $s=1,2$); векторы полного поля обозначим через $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ ($\mathbf{E}=\mathbf{E}^0+\mathbf{E}^*$; $\mathbf{H}=\mathbf{H}^0+\mathbf{H}^*$).

Решаем следующую краевую задачу [6]: найти вектор-функцию $\mathbf{E}^*$ в пространстве вне сфер Σ_s, удовлетворяющую уравнению

$$\Delta\mathbf{E}^* + k^2\mathbf{E}^* = 0 \quad \left(k=\frac{\omega}{c}\right), \tag{1}$$

граничным условиям

$$[\mathbf{n}, \mathbf{E}]|_{\Sigma_s} = 0 \tag{2}$$

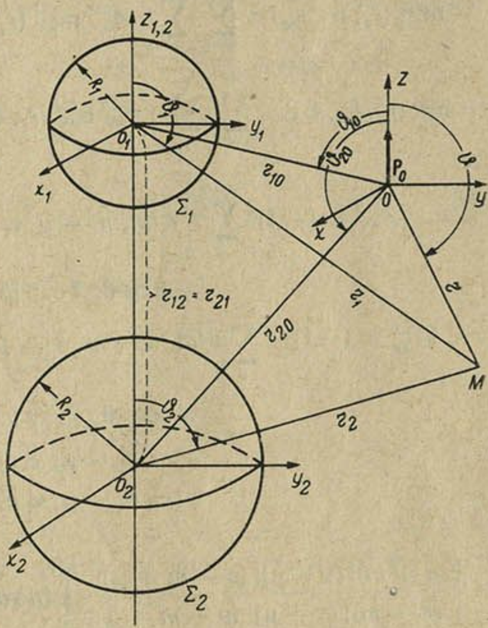
(n — единичная внешняя нормаль к Σ_s), а также условиям излучения на бесконечности.

*) Е. А. Ивановым с помощью потенциалов Дебая решена задача дифракции электромагнитного поля на нескольких соосных сферах при произвольной ориентации дипольного момента (Международный конгресс математиков, Москва, 1966. Тезисы кратких научных сообщений, секция 12).

2. Решение задачи. Введем три системы декартовых прямоугольных координат с началами в O и O_s с параллельными и одинаково направленными соответствующими осями, а также три системы сферических координат, связанных с декартовыми по формулам

$$\begin{gathered} x = r\sin\vartheta\cos\varphi, \quad y = r\sin\vartheta\sin\varphi, \quad z = r\cos\vartheta; \\ x_s = r_s\sin\vartheta_s\cos\varphi_s, \quad y_s = r_s\sin\vartheta_s\sin\varphi_s, \quad z_s = r_s\cos\vartheta_s. \end{gathered} \tag{3}$$

Ось Oz направим вдоль $\mathbf{p}_0$, а ось Ox направим так, чтобы $\varphi_{s0} = 0$ (через r_{s0}, ϑ_{s0}, φ_{s0} обозначим координаты точек O_s в системе $r\vartheta\varphi$, см. рисунок), и введем в рассмотрение шаровые векторные волновые функции [7], записанные в виде



$$\mathbf{m}_{mn}^{(l)}(r, \vartheta, \varphi) = \frac{im}{\sin\vartheta} \times z_n^{(l)}(kr) P_n^m(\cos\vartheta)\exp(im\varphi)\,\mathbf{i}_\vartheta - z_n^{(l)}(kr)\frac{d}{d\vartheta} \times P_n^m(\cos\vartheta)\exp(im\varphi)\,\mathbf{i}_\varphi, \tag{4}$$

$$\mathbf{n}_{mn}^{(l)}(r, \vartheta, \varphi) = \frac{n(n+1)}{kr} \times z_n^{(l)}(kr) P_n^m(\cos\vartheta)\exp(im\varphi)\,\mathbf{i}_r + \frac{1}{kr}\frac{d}{dr}[rz_n^{(l)}(kr)] \times \frac{d}{d\vartheta}P_n^m(\cos\vartheta)\exp(im\varphi)\,\mathbf{i}_\vartheta + \frac{im}{kr\sin\vartheta}\frac{d}{dr} \times [rz_n^{(l)}(kr)]\,P_n^m(\cos\vartheta)\exp(im\varphi)\,\mathbf{i}_\varphi. \tag{5}$$

Здесь $l = 1, 3$; $z_n^{(1)}(kr) = j_n(kr)$; $z_n^{(3)}(kr) = h_n^{(1)}(kr)$; $j_n(kr)$, $h_n^{(1)}(kr)$ — сферические функции Бесселя и Ханкеля [8];

$$P_n^m(x) = (1 - x^2)^{\frac{m}{2}}\frac{d^m}{dx^m}P_n(x) \quad (x = \cos\vartheta), \tag{6}$$

где $P_n(\cos\vartheta)$ — обычные полиномы Лежандра [15].

Свойства шаровых векторных функций даны, например, в [8] и [16]. В частности, для функций $\mathbf{m}_{mn}^{(l)}$ и $\mathbf{n}_{mn}^{(l)}$ имеют место соотношения ортогональности

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\mathbf{m}_{mn_1}^{(l_1)}\,\overline{\mathbf{m}}_{mn_2}^{(l_2)}\sin\vartheta\,d\vartheta\,d\varphi = \begin{cases} 0 \quad \text{при } n_1 \neq n_2 \ (l_1, l_2 = 1, 3) \\ \dfrac{4\pi(n+m)!\,n(n+1)}{(2n+1)(n-m)!}z_n^{(l_1)}(kr)\,z_n^{(l_2)}(kr) \quad \text{при } n_1 = n_2 = n \end{cases}; \tag{7}$$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \mathbf{n}_{mn_1}^{(l_1)} \overline{\mathbf{n}}_{mn_2}^{(l_2)} \sin\vartheta\, d\vartheta d\varphi =$$

$$= \begin{cases} 0 \text{ при } n_1 \neq n_2 \\ \dfrac{4\pi (n+m)!\, n(n+1)}{(2n+1)^2 (n-m)!} \left[(n+1) z_{n-1}^{(l_1)} z_{n-1}^{(l_2)} + n z_{n+1}^{(l_1)} z_{n+1}^{(l_2)}\right] \text{ при } n_1 = n_2 = n \end{cases}. \quad (8)$$

Кроме того, нами будет использована теорема сложения [7]

$$\mathbf{m}_{mn}^{(3)}(r_q, \vartheta_q, \varphi_q) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{\mu=-\nu}^{\nu} \left[A_{\mu\nu}^{mn} \mathbf{m}_{\mu\nu}^{(1)}(r_s, \vartheta_s, \varphi_s) + B_{\mu\nu}^{mn} \mathbf{n}_{\mu\nu}^{(1)}(r_s, \vartheta_s, \varphi_s)\right], \quad (9)$$

$$\mathbf{n}_{mn}^{(3)}(r_q, \vartheta_q, \varphi_q) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{\mu=-\nu}^{\nu} \left[A_{\mu\nu}^{mn} \mathbf{n}_{\mu\nu}^{(1)}(r_s, \vartheta_s, \varphi_s) + B_{\mu\nu}^{mn} \mathbf{m}_{\mu\nu}^{(1)}(r_s, \vartheta_s, \varphi_s)\right], \quad (10)$$

где

$$A_{\mu\nu}^{mn} = (-1)^{\mu} \sum_{p=|\nu-n|}^{\nu+n} a(m, n|-\mu, \nu|p)\, a(n, \nu, p)\, h_p^{(1)}(kr_{sq})\, P_p^{m-\mu} \times$$

$$\times (\cos\vartheta_{sq}) \exp[i(m-\mu)\varphi_{sq}];$$

$$B_{\mu\nu}^{mn} = (-1)^{\mu+1} \sum_p a(m, n|-\mu, \nu|p, p-1)\, b(n, \nu, p)\, h_p^{(1)}(kr_{sq})\, P_p^{m-\mu} \times$$

$$\times (\cos\vartheta_{sq}) \exp[i(m-\mu)\varphi_{sq}]; \quad (11)$$

$$\left.\begin{matrix} a(m, n|-\mu, \nu|p) \\ a(m, n|-\mu, \nu|p, p-1) \end{matrix}\right\} =$$

$$= \left[\frac{(n+m)!\,(\nu-\mu)!\,(p-m+\mu)!}{(n-m)!\,(\nu+\mu)!\,(p+m-\mu)!}\right]^{\frac{1}{2}} (n\nu m, -\mu|p, m-\mu) \begin{cases} (n\nu 00|p0) \\ (n\nu 00|p-1, 0) \end{cases}; \quad (12)$$

$$a(n, \nu, p) = i^{\nu+p-n} \frac{1}{2\nu(\nu+1)} [2\nu(\nu+1)(2\nu+1) + (\nu+1)(n-\nu+p+$$

$$+1)(n+\nu-p) - \nu(\nu-n+p+1)(n+\nu+p+2)];$$

$$b(n, \nu, p) = i^{\nu+p-n} \frac{(2\nu+1)}{2\nu(\nu+1)} [(n+\nu+p+1)(\nu-n+p) \times \quad (13)$$

$$\times (n-\nu+p)(n+\nu-p+1)]^{\frac{1}{2}}$$

(r_{sq}, ϑ_{sq}, φ_{sq} — координаты начала O_s в системе координат с началом в O_q; $s, q = 1, 2$; $s \neq q$ $(n\nu m\mu|p, m+\mu)$ — коэффициенты Клебша — Гордана, явный вид которых приведен, например, в [11] и [10]).

Будем искать решение задачи в виде рядов по функциям (4), (5), полагая

$$\mathbf{E}^{(s)} = ik^3 |\mathbf{p}_0| \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^{n} j_n(kR_s) \left[\frac{(n-m)!}{(n+m)!}\right]^{\frac{1}{2}} [x_{mn}^{(s)} \mathbf{n}_{mn}^{(3)}(r_s, \vartheta_s, \varphi_s) +$$

$$+ y_{mn}^{(s)} \mathbf{m}_{mn}^{(3)}(r_s, \vartheta_s, \varphi_s)], \quad (14)$$

где $x_{mn}^{(s)}$, $y_{mn}^{(s)}$ — коэффициенты, подлежащие определению. (Введение в (14) множителя $[(n-m)!/(n+m)!]^{\frac{1}{2}}$ избавляет в дальнейшем от необходимости исследования бесконечной системы уравнений в отдельности для положительных и отрицательных значений m).

Чтобы применить к

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}^0 + \mathbf{E}^{(s)} + \mathbf{E}^{(q)} \tag{15}$$

условия (2), разложим $\mathbf{E}^0$ по векторным функциям (4), (5), отнесенным к системе координат с началом в O_s, и переразложим затем функции, отнесенные к системе координат с началом в O_q, по функциям, отнесенным к системе O_s.

В системе координат $r\vartheta\varphi$ вектор $\mathbf{E}^0$ записывается следующим образом [9]:

$$\mathbf{E}^0 = 2\cos\vartheta\,|\mathbf{p}_0|\left(\frac{1}{r^2} - \frac{ik}{r}\right)\frac{\exp(ikr)}{r}\,\mathbf{i}_r + \\ + \sin\vartheta\,|\mathbf{p}_0|\left(\frac{1}{r^2} - \frac{ik}{r} - k^2\right)\frac{\exp(ikr)}{r}\,\mathbf{i}_\vartheta. \tag{16}$$

При $m = 0$, $n = 1$ из (5) после преобразований имеем

$$\mathbf{n}_{01}^{(3)}(r, \vartheta, \varphi) = \frac{2\cos\vartheta}{ik^3}\left(\frac{1}{r^2} - \frac{ik}{r}\right)\frac{\exp(ikr)}{r}\,\mathbf{i}_r + \\ + \frac{\sin\vartheta}{ik^3}\left(\frac{1}{r^2} - \frac{ik}{r} - k^2\right)\frac{\exp(ikr)}{r}\,\mathbf{i}_\vartheta,$$

и тогда

$$\mathbf{E}^0 = ik^3\,|\mathbf{p}_0|\,\mathbf{n}_{01}^{(3)}(r, \vartheta, \varphi). \tag{17}$$

Чтобы получить искомое разложение, достаточно применить к $\mathbf{n}_{01}^{(3)}(r, \vartheta, \varphi)$ из (17) теорему сложения (10). В результате имеем

$$\mathbf{E}^0 = ik^3\,|\mathbf{p}_0| \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n} [A_{mn}^{01}(r_{s0}, \vartheta_{s0}, 0)\,\mathbf{n}_{mn}^{(1)}(r_s, \vartheta_s, \varphi_s) + \\ + B_{mn}^{01}(r_{s0}, \vartheta_{s0}, 0)\,\mathbf{m}_{mn}^{(1)}(r_s, \vartheta_s, \varphi_s)] \quad (r_s < r_{s0}). \tag{18}$$

В разложении

$$\mathbf{E}^{(q)} = ik^3\,|\mathbf{p}_0| \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n} j_n(kR_q)\left[\frac{(n-m)!}{(n+m)!}\right]^{\frac{1}{2}} [x_{mn}^{(q)}\,\mathbf{n}_{mn}^{(3)}(r_q, \vartheta_q, \varphi_q) + \\ + y_{mn}^{(q)}\,\mathbf{m}_{mn}^{(3)}(r_q, \vartheta_q, \varphi_q)] \tag{19}$$

применим к $\mathbf{n}_{mn}^{(3)}$ и $\mathbf{m}_{mn}^{(3)}$ теоремы сложения (9), (10). Тогда, учитывая, что $\vartheta_{sq} = 0, \pi$, получим

$$\mathbf{E}^{(q)} = ik^3\,|\mathbf{p}_0| \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n}\sum_{\nu=1}^{\infty} j_n(kR_q)\left[\frac{(n-m)!}{(n+m)!}\right]^{\frac{1}{2}} \{x_{mn}^{(q)}[A_{m\nu}^{mn}(r_{sq}, \vartheta_{sq})\,\mathbf{n}_{m\nu}^{(1)}(r_s, \vartheta_s, \varphi_s) + \\ + B_{m\nu}^{mn}(r_{sq}, \vartheta_{sq})\,\mathbf{m}_{m\nu}^{(1)}(r_s, \vartheta_s, \varphi_s)] + y_{mn}^{(q)}[A_{m\nu}^{mn}(r_{sq}, \vartheta_{sq})\,\mathbf{m}_{m\nu}^{(1)}(r_s, \vartheta_s, \varphi_s) + \\ + B_{m\nu}^{mn}(r_{sq}, \vartheta_{sq})\,\mathbf{n}_{m\nu}^{(1)}(r_s, \vartheta_s, \varphi_s)]\}. \tag{20}$$

Применяя (2) к (15), где $\mathbf{E}^0$, $\mathbf{E}^{(s)}$ и $\mathbf{E}^{(q)}$ имеют вид (18), (14) и (20) соответственно, и используя свойство ортогональности функций $\mathbf{m}_{mn}^{(l)}$ и $\mathbf{n}_{mn}^{(l)}$, получаем (предварительно поменяв порядок суммирования в кратных рядах, допустимость чего будет обоснована ниже) бесконечные системы уравнений относительно $x_{mn}^{(s)}$, $y_{mn}^{(s)}$

$$\left.\begin{aligned} x_{mn}^{(s)} + \sum_{\nu=|m|}^{\infty} [\alpha_{mn}^{m\nu}(1)\, x_{m\nu}^{(q)} + \beta_{mn}^{m\nu}(1)\, y_{m\nu}^{(q)}] &= \tilde{\alpha}_{mn}^{01}(1), \\ y_{mn}^{(s)} + \sum_{\nu=|m|}^{\infty} [\alpha_{mn}^{m\nu}(0)\, y_{m\nu}^{(q)} + \beta_{mn}^{m\nu}(0)\, x_{m\nu}^{(q)}] &= \tilde{\beta}_{mn}^{01}(0) \end{aligned}\right\} \tag{21}$$

$$\begin{pmatrix} n = 1, 2, \ldots \\ -n \leqslant m \leqslant n \end{pmatrix},$$

где

$$\left.\begin{aligned} \alpha_{mn}^{m\nu}(j) &= A_{mn}^{m\nu}(r_{sq}, \vartheta_{sq}) \\ \beta_{mn}^{m\nu}(j) &= B_{mn}^{m\nu}(r_{sq}, \vartheta_{sq}) \end{aligned}\right\} \left[\frac{(\nu-m)!\,(n+m)!}{(\nu+m)!\,(n-m)!}\right]^{\frac{1}{2}} \frac{j_\nu(kR_q)\,[R_s j_n(kR_s)]^{(j)}}{j_n(kR_s)\,[R_s h_n^{(1)}(kR_s)]^{(j)}}; \tag{22}$$

$$\left.\begin{aligned} \tilde{\alpha}_{mn}^{01}(j) &= -A_{mn}^{01}(r_{s0}, \vartheta_{s0}, 0) \\ \tilde{\beta}_{mn}^{01}(j) &= -B_{mn}^{01}(r_{s0}, \vartheta_{s0}, 0) \end{aligned}\right\} \left[\frac{(n+m)!}{(n-m)!}\right]^{\frac{1}{2}} \frac{[R_s j_n(kR_s)]^{(j)}}{j_n(kR_s)\,[R_s h_n^{(1)}(kR_s)]^{(j)}}. \tag{23}$$

Здесь

$$j = 0,\ 1;\ [R_s z_n^{(l)}(kR_s)]^{(j)} = \frac{d^{(j)}}{dr^{(j)}}\,[r z_n^{(l)}(kr)]\big|_{r=R_s}.$$

Системы (21) для каждого $m\ (|m| \leqslant n)$ представляют собой одну бесконечную систему канонического вида [12].

Покажем, что к (21) применима альтернатива Гильберта [12] о разрешимости бесконечных систем. Для этого докажем сходимость рядов

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\nu=1}^{\infty} [\gamma_{mn}^{m\nu}(j)]^2 \quad (\gamma_{mn}^{m\nu}(j) = \alpha_{mn}^{m\nu}(j),\ \beta_{mn}^{m\nu}(j)), \tag{24}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} [\tilde{\gamma}_{mn}^{01}(j)]^2 \quad (\tilde{\gamma}_{mn}^{01}(j) = \tilde{\alpha}_{mn}^{01}(j),\ \tilde{\beta}_{mn}^{01}(j)). \tag{25}$$

Оценим общие члены рядов (24) и (25), используя асимптотические представления [8]

$$j_n(kr) \sim \frac{n!\,2^n\,(kr)^n}{(2n+1)!}, \quad h_n^{(1)}(kr) \sim \frac{-i\,(2n)!}{n!\,2^n\,(kr)^{n+1}} \quad (n \gg kr) \tag{26}$$

и оценку

$$|P_n^m(\cos\vartheta)| \leqslant \left[\frac{(n+m)!}{(n-m)!}\right]^{\frac{1}{2}}. \tag{27}$$

Для этого прежде всего оценим по модулю $A_{mn}^{m\nu}(r_{sq}, \vartheta_{sq})$ $(\vartheta_{sq} = 0, \pi)$. Пользуясь явным выражением для $a(n, \nu, p)$ из (13), непосредственно можно доказать, что $|a(n, \nu, p)| \leqslant (n+\nu)^2$. Поскольку для $p \gg kr_{sq}$

$$|h_p^{(1)}(kr_{sq})| \leqslant C_1 \frac{(2p)!}{p!\,2^p\,(kr_{sq})^{p+1}}, \tag{28}$$

где C_1 — некоторая постоянная, а kr_{sq} — величина ограниченная, то

$$|A_{mn}^{m\nu}| \leqslant C_2 (n+\nu)^2 \sum_p |a(m, \nu| -m, n|p)| \times$$

$$\times \frac{(2p)!}{p!\, 2^p (kr_{sq})^{p+1}} = C_2 (n+\nu)^2 \sum_p a_p. \tag{29}$$

Используя рекуррентные соотношения для коэффициентов Клебша — Гордана [11], можно показать, что $a_{p-1} \leqslant a_{p+1}$, и тогда

$$|A_{mn}^{m\nu}(r_{sq}, \vartheta_{sq})| \leqslant C_3 \frac{(n+\nu)^3 (n+\nu)!\,(2n)!\,(2\nu)!}{(\nu-m)!\,(n+m)!\,\nu!\,n!\,2^{n+\nu}(kr_{sq})^{n+\nu+1}}. \tag{30}$$

Такая же оценка получена и для $|B_{mn}^{m\nu}(r_{sq}, \vartheta_{sq})|$. Используя (26), находим, что

$$\frac{|j_\nu(kR_q)\,[R_s j_n(kR_s)]^{(j)}|}{|j_n(kR_s)\,[R_s h_n^{(1)}(kR_s)]^{(j)}|} \sim \frac{\nu!\,n!\,2^{n+\nu}(kR_s)^{n+1}(kR_q)^\nu}{(2n)!\,(2\nu+1)!}, \tag{31}$$

и тогда

$$|\gamma_{mn}^{m\nu}(j)| \leqslant C_4 (n+\nu)^3 \frac{(n+\nu)!}{n!\,\nu!} d_q^\nu d_s^{n+1}, \tag{32}$$

$$[\gamma_{mn}^{m\nu}(j)]^2 \leqslant C (n+\nu)^6 \frac{(n+\nu)!}{n!\,\nu!} d_q^\nu d_s^n, \tag{33}$$

где

$$d_q = \frac{R_q}{r_{sq}} < 1,\ d_s = \frac{R_s}{r_{sq}} < 1;\quad d_q + d_s < 1;\quad C_4,\ C - \text{const}$$

$$\left(\frac{(n+\nu)!}{n!\,\nu!} d_q^\nu d_s^{n+1} < 1,\ \text{поэтому}\ \left[\frac{(n+\nu)!}{n!\,\nu!} d_q^\nu d_s^{n+1}\right]^2 \leqslant \frac{(n+\nu)!}{n!\,\nu!} d_q^\nu d_s^n\right).$$

Ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\nu=1}^{\infty} C (n+\nu)^6 \frac{(n+\nu)!}{\nu!\,n!} d_q^\nu d_s^n \tag{34}$$

является, очевидно, сходящимся и мажорантным для ряда (24). Поэтому сходится и ряд (24). Ряд (25) также сходящийся, и к системе (21) применима альтернатива Гильберта [12], из которой следует, что либо система (21) имеет единственное решение, удовлетворяющее условию $\sum_{n=1}^{\infty} [x_{mn}^{(s)}]^2$, $\sum_{n=1}^{\infty} [y_{mn}^{(s)}]^2 < +\infty$, $|m| \leqslant n$, либо имеет нетривиальное решение однородная система, соответствующая (21).

Используя результаты работы [13], можно показать, что поставленная нами краевая задача (1), (2) разрешима единственным образом. Тогда единственность решения системы (21) будет вытекать из единственности решения краевой задачи (1), (2). Ее решение может быть найдено методом редукции [14].

Докажем теперь равномерную сходимость ряда (14). Пользуясь (27) и рекуррентными формулами [8]

$$\frac{d}{d\vartheta} P_n^m(\cos\vartheta) = \frac{1}{2}\left[P_n^{m+1}(\cos\vartheta) - (n+m)(n-m+1)P_n^{m-1}(\cos\vartheta)\right], \quad (35)$$

$$\frac{m}{\sin\vartheta} P_n^m(\cos\vartheta) = m\sin\vartheta\, P_n^m(\cos\vartheta) -$$

$$-\frac{1}{2}\cos\vartheta\left[P_n^{m+1}(\cos\vartheta) + (n+m)(n-m+1)P_n^{m-1}(\cos\vartheta)\right], \quad (36)$$

получаем

$$\left|\frac{d}{d\vartheta} P_n^m(\cos\vartheta)\right|, \quad \left|\frac{m}{\sin\vartheta} P_n^m(\cos\vartheta)\right| \leqslant D_1 n\left[\frac{(n+m)!}{(n-m)!}\right]^{\frac{1}{2}}, \ D_1 - \text{const},$$

и тогда из (4) и (5)

$$\left.\begin{matrix}|\mathbf{m}_{mn}^{(l)}(r,\vartheta,\varphi)|\\ |\mathbf{n}_{mn}^{(l)}(r,\vartheta,\varphi)|\end{matrix}\right\} \leqslant D_2 n^2 |z_n^{(l)}(kr)|\left[\frac{(n+m)!}{(n-m)!}\right]^{\frac{1}{2}}, \quad D_2 - \text{const}. \quad (37)$$

Оценим $|x_{mn}^{(s)}|$ и $|y_{mn}^{(s)}|$, используя (21). Так как система (21) имеет единственное решение, удовлетворяющее условию

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[x_{mn}^{(s)}\right]^2 < +\infty, \quad \sum_{n=1}^{\infty}\left[y_{mn}^{(s)}\right]^2 < +\infty,$$

то

$$|x_{m\nu}^{(q)}|, \ |y_{m\nu}^{(q)}| \leqslant K = \text{const}.$$

Для $|\tilde{\alpha}_{mn}^{01}(1)|$ и $|\tilde{\beta}_{mn}^{01}(0)|$ из (23) получена оценка

$$|\tilde{\alpha}_{mn}^{01}(1)|, \ |\tilde{\beta}_{mn}^{01}(0)| \leqslant D_3 n^4 \rho_s^{n+1} \quad \left(\rho_s = \frac{R_s}{r_{s0}} < 1\right). \quad (38)$$

На основании (21) получаем

$$|x_{mn}^{(s)}|, \ |y_{mn}^{(s)}| \leqslant D\left[\sum_{\nu=|m|}^{\infty}\frac{(n+\nu)^3(n+\nu)!}{n!\,\nu!} d_q^{\nu} d_s^{n+1} + n^4\rho_s^{n+1}\right]. \quad (39)$$

Обозначим общий член ряда (14) через $a_n^{\nu}(r_s)$ и оценим $|a_n^{\nu}(r_s)|$:

$$|a_n^{\nu}(r_s)| \leqslant \sum_{m=-n}^{n} |j_n(kR_s)|\left[\frac{(n-m)!}{(n+m)!}\right]^{\frac{1}{2}}\left\{|x_{mn}^{(s)}\mathbf{n}_{mn}^{(3)}| + |y_{mn}^{(s)}\mathbf{m}_{mn}^{(3)}|\right\} \leqslant$$

$$\leqslant D^* n^2\left[\sum_{\nu=|m|}^{\infty}(n+\nu)^3\frac{(n+\nu)!}{n!\,\nu!} d_q^{\nu} d_s^{n+1}\left(\frac{R_s}{r_s}\right)^{n+1} +\right.$$

$$\left. + n^4\rho_s^{n+1}\left(\frac{R_s}{r_s}\right)^{n+1}\right] = \tilde{a}_n^{\nu}(r_s). \quad (40)$$

Возьмем теперь фиксированное $r_s = r_s^* < R_s$, такое, что выполняются условия

$$\frac{R_s^2}{r_{s0} r_s^*} < 1, \quad \frac{R_s^2}{r_{sq} r_s^*} = d_s^* < 1, \quad d_q + d_s^* < 1 \tag{41}$$

(это возможно, так как сферы не пересекаются и не имеют точек касания). Ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \tilde{a}_n^{\nu} (r_s^*) \tag{42}$$

будет мажорантным для ряда (14). Поскольку ряд (42) сходится (при выполнении условия (41)), то ряд (14) будет равномерно сходящимся. Ряды (14), (18) и (20) при $r_s = R_s$ являются также абсолютно сходящимися, что обосновывает допустимость перемены порядка суммирования в этих рядах.

Таким образом, формально полученное решение обосновано, и математическое рассмотрение поставленной задачи на этом заканчивается.

Литература

1. Иванов Е. А. Дифференциальные уравнения, **2**, № 6, 1966.
2. Trinks W. Ann. der Phys., **22**, 561—590, 1935.
3. Гермогенова О. А. Изв. АН СССР, сер. геофиз., № 4, 1963.
4. Mével J. Annales de Phys., **5**, № 3—4, 265—320, 1960.
5. Иванов Е. А. Изв. вузов, Радиофизика, **6**, № 6, 1963.
6. Хёнл Х., Мауэ А., Вестпфаль К. Теория дифракции. Изд. «Мир», М., 1964.
7. Cruzan O. R. Quart. Appl. Math., **20**, № 1, 33—40, 1962.
8. Стрэттон Дж. А. Теория электромагнетизма. Гостехиздат, М., 1948.
9. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. Гостехиздат, М., 1953.
10. Виленкин Н. Я. Специальные функции и теория представлений групп. Изд. «Наука», М., 1965.
11. Любарский Г. Я. Теория групп и ее применение в физике. Физматгиз, М., 1958.
12. Канторович Л. В., Крылов В. И. Приближенные методы высшего анализа. Физматгиз, М., 1962.
13. Авазашвили Д. З. Тр. Груз. политехн. ин-та, Теорет. и прикл. матем., № 1 (81), 1962.
14. Грибанов Ю. И. Изв. вузов, Математика, № 1 (26), Казань, 1962.
15. Анго А. Математика для электро- и радиоинженеров. Изд. «Наука», М., 1965.
16. Bouix M. Ann. telecommuns, **16**, № 5—6, 125—132, 1961.

Белорусский государственный университет им. В. И. Ленина

Поступило в редакцию 25.XI 1966

ВЕСЦІ АКАДЭМІІ НАВУК БЕЛАРУСКАЙ ССР № 2 1967
СЕРЫЯ ФІЗІКА-МАТЭМАТЫЧНЫХ НАВУК

УДК 519.44

В. Д. ЧЕРТОК

ПОРОЖДЕНИЕ КОНЕЧНОЙ ГРУППЫ СИСТЕМАМИ НЕДОСТИЖИМЫХ ПОДГРУПП

§ 1. В настоящей заметке исследуются группы, которые не порождаются своими i-ми ($i = 2, 3$) максимальными недостижимыми подгруппами.

Так как группы, в которых все i-тые ($i = 2, 3$) максимальные подгруппы инвариантны, не содержат i-тых ($i = 2, 3$) максимальных недостижимых подгрупп, то частными случаями теорем 1 и 2 являются теоремы 23 и 24 Хупперта [1], теорема 2 обобщает теорему 12 работы [2].

§ 2. Приведем используемые в работе обозначения, определения и важнейшие результаты других авторов, которые мы используем в основном тексте работы: G обозначает конечную группу порядка (G); E — единичная подгруппа из G; $N_G(H)$ — нормализатор подгруппы H в G; $C_G(H)$ — централизатор подгруппы H в G; p, q, r — различные простые числа; $\overline{\Gamma}_i(G)$, $i > 0$ — множество всех i-тых максимальных недостижимых подгрупп группы G; $\{\overline{\Gamma}_i(G)\}$, $i > 0$ — подгруппа, порожденная множеством всех i-тых максимальных недостижимых подгрупп группы G.

Напомним введенное С. А. Чунихиным понятие p-разрешимой группы, которое посредством теоремы Виландта о группе с циклической силовской p-подгруппой нашло приложение в доказательстве теоремы 2.

Группа G называется p-разрешимой, если она обладает композиционным рядом, каждый индекс которого либо не делится на p, либо равен простому числу p (см. [3]).

Элемент порядка 2 из группы G называем инволюцией.

Теорема А. *Если конечная группа G имеет один и только один класс ненильпотентных сопряженных максимальных подгрупп, то она одного из следующих типов:*

1) $G = P \leftthreetimes Q$, где P — циклическая p-группа, Q — инвариантная q-подгруппа;

2) $G = (P \leftthreetimes Q) \times R$, где P, R — циклические p-группы, а $P \leftthreetimes Q$ — группа типа S (ср. [4]*).*

О свойствах групп типа S см. [5, 6].

Согласно исследованиям В. А. Белоногова, группа $G = P \leftthreetimes Q$ имеет либо два, либо три класса сопряженных максимальных подгрупп, а $G = PQR$ имеет точно три класса сопряженных максимальных подгрупп, и если группа G содержит три класса максимальных подгрупп, то среди этих классов имеется только один класс неинвариантных подгрупп, причем они нильпотентны.

Теорема В. *Если 2-силовская подгруппа группы G является обычной или обобщенной группой кватернионов, то G непроста* [7].

Теорема С. *Если 2-силовская подгруппа в простой группе является диэдральной, τ — центральная инволюция из 2-силовской подгруппы и $C_G(\tau)$ имеет абелево 2-дополнение, то либо $G \cong LF(2, p^n)$, $p > 0$, либо $G \cong A_7$ (ср.* [8]).

О свойствах дробно-линейных групп $LF(2, p^n)$ см. [9] или [10].

Лемма. *Если p — нечетное простое число и $p^n - 1 = 2^m$, то либо $n=1$, либо $p^n = 9$* [11].

Мы рассматриваем только конечные группы.

§ 3. Перейдем теперь к изложению полученных результатов.

Лемма. *Конечная группа нильпотентна тогда и только тогда, когда она не порождается своими максимальными недостижимыми подгруппами.*

Достаточность следует из того факта, что всякая ненильпотентная группа имеет по меньшей мере одну максимальную недостижимую подгруппу. Необходимость условия очевидна.

Частным случаем леммы является

Следствие. Пусть G — конечная группа и пусть $\Gamma_1(G)$ — множество всех максимальных подгрупп из G. Если $\{\overline{\Gamma}_1(G)\} \neq G$, то G — циклическая p-группа.

Доказательство. Так как $\{\Gamma_1(G)\} \neq G$, то G содержит единственную максимальную подгруппу H. Если простое число p делит индекс H в G, то в G найдется такой p-элемент x, который не содержится в H. Тогда $\{x\} = G$.

Теорема 1. *Если $\{\overline{\Gamma}_2(G)\} \neq G$, то G разрешима. Если G — ненильпотентная группа, то она может быть двух типов:*

1) $G = P \leftthreetimes Q$, где P — циклическая p-группа, а Q — минимальный нормальный делитель группы G;

2) $G = (P \leftthreetimes Q) \times R$, где P и R — циклические подгруппы, а $P \leftthreetimes Q$ — группа типа S, причем Q — минимальный нормальный делитель группы G.

Доказательство. Если $\{\overline{\Gamma}_1(G)\} \neq G$, то G — нильпотентная группа согласно лемме. Будем считать, что $\{\overline{\Gamma}_1(G)\} = G$.

Предположим, что все вторые максимальные подгруппы группы G достижимы. Так как максимальные подгруппы из G нильпотентны, то, по теореме О. Ю. Шмидта [5], $G = PQ$. Если Q — не минимальный нормальный делитель в G, то найдется подгруппа PQ_1', которая является второй максимальной недостижимой подгруппой группы G, что противоречит допущению. Значит Q — минимальный нормальный делитель группы G.

Далее будем считать, что $\overline{\Gamma}_2(G)$ непусто.

Так как $F = \{\overline{\Gamma}_2(G)\} \neq G$ содержит полный класс сопряженных подгрупп любой второй максимальной недостижимой подгруппы из G, то F является инвариантной ненильпотентной (в противном случае все вторые максимальные подгруппы группы G были бы достижимыми) подгруппой группы G.

Допустим вначале, что F — немаксимальная подгруппа в G. Тогда она содержится в некоторой максимальной подгруппе из G, которая, согласно лемме, будет нильпотентной, что невозможно. Таким образом, F — максимальная подгруппа в G. Предположим, что группа G содержит максимальную ненильпотентную подгруппу H, отличную от F. Тогда H имеет максимальную недостижимую подгруппу, которая является второй максимальной недостижимой подгруппой из G и которая со всеми своими сопряженными порождает H. Теперь имеем $\{\overline{\Gamma}_2(G)\} = \{\overline{\Gamma}_2(G), \overline{\Gamma}_1(H)\} = FH = G$. Получили противоречие. Значит, группа G содержит единственный класс максимальных ненильпотентных подгрупп. По теореме Белоногова [4], либо $G = P \leftthreetimes Q$, либо $G = (P \leftthreetimes Q) \times R$.

Разрешимость группы G очевидна. Нам остается показать, что в любом случае Q — минимальный нормальный делитель группы G.

Пусть вначале $G = P \leftthreetimes Q$ и пусть:

а) G содержит два класса максимальных подгрупп; $F = P_1 \times Q$ и $H = P \times Q'$.

Достаточно рассмотреть случай, когда F инвариантна в G. Допустим, что $Q' \neq E$. Тогда подгруппа $L = P \times Q_1'$ является второй максимальной недостижимой подгруппой из G и порождает со всеми своими сопряженными группу G. Получили противоречие. Значит, $Q' = E$.

б) G содержит три класса максимальных подгрупп: $F = P \times Q''$, $H = P_1 \times Q$, $M = P \times Q'$.

Если $Q' \neq E$, то подгруппа $L = P \times Q_1'$, являясь второй максимальной недостижимой подгруппой в G, со своими сопряженными порождает G. Пришли к случаю, когда G содержит два класса максимальных подгрупп.

Теперь пусть $G = (P \times Q) \times R$ и $F = (P \times Q) \times R_1$, $H = P_1 \times Q \times R$, $M = P \times Q' \times R$ — максимальные подгруппы из G.

И в этом случае Q — минимальный нормальный делитель группы G. В противном случае вторая максимальная недостижимая подгруппа $L = P \times Q' \times R$ из G порождала бы со своими сопряженными группу G. Теорема полностью доказана.

Теорема 2. *Если* $\{\overline{\Gamma}_3(G)\} \neq G$, *то* G *разрешима.*

Доказательство. Можно считать, что $\{\overline{\Gamma}_2(G)\} = G$. Среди максимальных подгрупп из G найдется такая подгруппа H, что $H \cap \{\overline{\Gamma}_3(G)\} \neq H$, т. е. $\{\overline{\Gamma}_2(H)\} \neq H$, но тогда строение H дается теоремой 1.

Предположим, что теорема неверна. Выберем тогда среди групп, для которых теорема не выполняется, группу G наименьшего порядка. Всякий нетривиальный гомоморфный образ группы G разрешим. Отсюда следует, что G не содержит разрешимых нормальных делителей, отличных от E.

Если все третьи максимальные подгруппы группы G достижимы, то, по теореме 24 из [16], группа G разрешима. Получили противоречие. Значит, $\overline{\Gamma}_3(G)$ непусто. $F = \{\overline{\Gamma}_3(G)\} \neq G$ — инвариантная подгруппа группы G. Если F не максимальна в G, то она содержится в некоторой максимальной подгруппе H, которая не порождается множеством всех своих вторых максимальных недостижимых подгрупп и потому, по теореме 1, разрешима, что невозможно. Значит, F — максимальная подгруппа группы G. Обозначим через M минимальный нормальный делитель из G.

Пусть L — любая максимальная подгруппа из G, содержащая M. Из неразрешимости L следует $\{\overline{\Gamma}_2(L)\} = L$. Другой такой подгруппы L_1, как подгруппа L, в G не существует, в противном случае имели бы, что $\{\overline{\Gamma}_3(G)\} \supseteq \{\overline{\Gamma}_2(L), \overline{\Gamma}_2(L_1)\} = \{L, L_1\} = G$.

Согласно следствию, фактор-группа G/M — циклическая p-группа. Положим $(G/M) = p^\alpha$.

Пусть H — максимальная подгруппа из G, надстроенная над силовской (G/F)-подгруппой, и пусть $(H) = p^\alpha q^\beta r^\gamma$. Из подгруппы H выберем максимальную подгруппу H_1, надстроенную над PQ, а затем из H_1 — максимальную подгруппу H_2, надстроенную над P. Так как G неразрешима, то H_2 является третьей максимальной недостижимой подгруппой из G. Нетрудно видеть, что $K = \{\overline{\Gamma}_2(H)\}$ не содержится в F и $K \neq G$. Имеем $\{\overline{\Gamma}_3(G)\} = \{\overline{\Gamma}_3(G), \overline{\Gamma}_2(H)\} = FK = G$, что невозможно. Значит, $(H) = p^\alpha q^\beta$.

Рассмотрим следующие две возможности:

1) p не делит порядок M.

Пусть Q есть силовская q-подгруппа из M. По условию, $q \neq p$. Согласно лемме 2.21 из [12], $M N_G(Q) = G$. Пусть H — та максимальная подгруппа из G, которая содержит $N_G(Q)$. Тогда $G = MH$. Так как H не содержит M, то $\{\overline{\Gamma}_2(H)\} \neq H$, т. е. строение H дается теоремой 2. По условию, подгруппа H не p-группа и, кроме того, H содержит нормальный делитель индекса p^α. Тогда $H \cap M = Q$, т. е. $N_G(Q) \cap M = Q$. По теореме Бернсайда 14.31 из [13], M имеет инвариантное q-дополнение, а это противоречит простоте группы M.

2) p делит порядок M.

Пусть P есть силовская p-подгруппа группы G, а H — та максимальная подгруппа из G, которая содержит P. Так как P не содержится в M, то H не содержит M (в противном случае $H \supseteq MP = G$, что невозможно). Поэтому $\{\overline{\Gamma}_2(H)\} \neq H$. Допустим вначале, что $H \neq P$. Тогда из теоремы 1 следует, что подгруппа P — циклическая (в самом деле, H содержит нормальный делитель индекса p^α). По теореме Виландта [14] о группе с циклической силовской подгруппой, группа G, а потому и M, является p-разрешимой, а это невозможно. Итак, $H = P$, т. е. p-группа P максимальна в G. По теореме Томпсона [15], $p = 2$.

Так как вторые максимальные подгруппы из P недостижимы в G и так как $\{\overline{\Gamma}_2(P)\} \neq P$, то, согласно следствию, P содержит циклическую подгруппу индекса 2. Подгруппы группы P хорошо известны ([13] гл. 12). Они либо абелевы, либо обобщенные группы кватернионов, либо диэдральные.

Пусть G/M имеет порядок, больший 2. Тогда $M \cap P$ инвариантна в P и имеет в P индекс, больший 2. Поэтому подгруппа $M \cap P$ циклическая, но тогда M по теореме 14.3.1 из [13] имеет инвариантное 2-дополнение, что невозможно, так как M — прямое произведение изоморфных простых групп. Итак, индекс M в G равен 2.

Положим $P_1 = P \cap M$. Так как P максимальна в G, а P_1 — в P, то из $N(P_1) \supseteq P$ следует, что $N(P_1) \cap M = P_1$. По теореме Бернсайда 14.3.1 [13], подгруппа P_1 неабелева.

Согласно [7], подгруппа P_1 диэдральная. Пусть τ — центральная инволюция из P_1. Так как подгруппа $\{\tau\}$ характеристична в P_1, то она инвариантна в P. Пусть $C_G(\tau)$ — централизатор τ в G. Имеем $G \neq C_G(\tau) \supseteq P$, т. е. $C_G(\tau) = P$. Поэтому $C_G(\tau) \cap M = M$. По теореме Уолтера—Горенштейна [8], либо $M \cong LF(2, p^n)$, где p — некоторое нечетное простое число, либо $M \cong A_7$.

Пусть $M \cong LF(2, p^n)$. Так как P_1 максимальна в M, то порядок P_1 равен одному из чисел $p^n + 1$, $p^n - 1$. По лемме Томпсона [11], либо $n = 1$, либо $p^n = 9$.

Допустим вначале, что $p^n = 9$. Тогда порядок P равен 16 и P — диэдральная группа, ибо $G \cong S_6$ — симметрической группе шести символов. P содержит те максимальные подгруппы, среди которых одна циклическая, а две диэдральные (одна из них P_1 лежит в M, а другая P_2 в M не лежит, так как $\{P_1, P_2\} = P$, а P не содержится в M). В P_2 имеется группа четвертого порядка P_3, которая не лежит в M (так как P_2 содержит две четверные группы, которые ее порождают). Но тогда P_3 не содержится в $M = \{\overline{\Gamma}_3(G)\}$, что невозможно.

Если $n = 1$, т. е. $p > 7$ — простое число Ферма или Мерсена, то аналогичные рассуждения покажут, что $\{\overline{\Gamma}_3(G)\} = G$. Это, однако, противоречит условию. Отсюда следует разрешимость группы G.

Теорема полностью доказана.

Литература

1. Huppert B. Math. Zs., **60**, 409—434, 1954.
2. Беркович Я. Г. ДАН СССР, **169**, № 3, 499—502, 1966.
3. Чунихин С. А. ДАН СССР, **55**, № 6, 481—484, 1947.
4. Белоногов В. А. Сиб. матем. журнал, **5**, № 5, 987—995, 1964.

5. Шмидт О. Ю. Матем. сб., **31**, 1924, стр. 366—372.
6. Чунихин С. А. Труды семинара по теории групп. М.—Л., ГОНТИ, 1938, стр. 106—125.
7. Brauer R., Suzuki M. Proc. Nat. Acad. Sci U. S. A., **45**, № 12, 1757—1759, 1959.
8. Gorenstein D., Walter J. Illinois J. Math., **6**, № 4, 553—593, 1962.
9. Burnside W. Theory of groups of finite order. Cambridge, 1911.
10. Dickson L. E. Linear groups with on exposition of the Galois field theory. Leipzig, 1901.
11. Thompson J. Math. Zs., **72**, 458—462, 1960.
12. Чунихин С. А. Подгруппы конечных групп. Минск, 1964.
13. Холл М. Теория групп. М., ИЛ, 1962.
14. Wielandt H. Abh. Math. Semin. Univ. Hamburg, **22**, 215—228, 1958.
15. Thompson J. Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A., **45**, № 4, 578—581, 1959.
16. Поляков Л. Я. Конечные группы с перестановочными подгруппами. Конечные группы. Минск, «Наука и техника», 1966, стр. 75—88.

Институт математики АН БССР

Поступило в редакцию 12.VII 1966

ВЕСЦІ АКАДЭМІІ НАВУК БЕЛАРУСКАЙ ССР № 2 1967
СЕРЫЯ ФІЗІКА-МАТЭМАТЫЧНЫХ НАВУК

УДК 539.126

Ф. И. ФЕДОРОВ

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ИНВЕРСИИ И МАТРИЦА ЛОРЕНЦ-ИНВАРИАНТНОЙ БИЛИНЕЙНОЙ ФОРМЫ

Теория релятивистски инвариантных волновых уравнений, описывающих элементарные частицы, базируется на теории представлений группы Лоренца, которые в свою очередь самым тесным образом связаны с представлениями группы вращений. Как будет видно из дальнейшего, наиболее удобной является ковариантная параметризация группы вращений с помощью трехмерного вектор-параметра $\mathbf{n}$ [1], все компоненты которого принимают значения от $-\infty$ до $+\infty$. При перемножении двух преобразований — $T(\mathbf{n})$ и $T(\mathbf{n}')$ — представления группы вращений в соответствии с формулой композиции параметров [1] мы получаем

$$T(\mathbf{n})\,T(\mathbf{n}') = T\left(\frac{\mathbf{n}+\mathbf{n}'+[\mathbf{n}\mathbf{n}']}{1-\mathbf{n}\mathbf{n}'}\right). \tag{1}$$

Как показано в [2—4], любое собственное ортохронное преобразование Лоренца может быть написано в виде

$$L[\mathbf{q},\ \mathbf{q}^*] = \frac{(1+\mathbf{q}_+)(1+\mathbf{q}_-^*)}{|1+\mathbf{q}^2|}, \tag{2}$$

где $\mathbf{q}_\pm$ — четырехмерные антисимметричные матрицы, построенные из компонент комплексного трехмерного вектора $\mathbf{q}=\mathbf{a}+i\mathbf{b}$ следующим образом:

$$\mathbf{q}_\pm = \begin{pmatrix} \mathbf{q}^\times & \pm\mathbf{q} \\ \mp\mathbf{q} & 0 \end{pmatrix},\quad \mathbf{q}^\times_{ab} = \varepsilon_{acb}\,q_c \quad (a,\ b,\ c=1,\ 2,\ 3). \tag{3}$$

При этом формула композиции для комплексного вектор-параметра $\mathbf{q}$ совпадает с формулой композиции вещественного вектор-параметра группы вращений:

$$(\mathbf{q},\ \mathbf{q}') = \frac{\mathbf{q}+\mathbf{q}'+[\mathbf{q}\mathbf{q}']}{1-\mathbf{q}\mathbf{q}'}, \tag{4}$$

так что

$$L[\mathbf{q},\ \mathbf{q}^*]\,L[\mathbf{q}',\ \mathbf{q}'^*] = L[(\mathbf{q},\ \mathbf{q}'),\ (\mathbf{q}^*,\ \mathbf{q}'^*)] = L[(\mathbf{q},\ \mathbf{q}'),\ (\mathbf{q},\ \mathbf{q}')^*]. \tag{5}$$

Рассмотрим прямое (кронекеровское) произведение матриц двух преобразований неприводимых представлений группы вращений

$$T_{ll'}[\mathbf{q},\ \mathbf{q}^*] = T_l(\mathbf{q}) \times T_{l'}(\mathbf{q}^*), \tag{6}$$

в которых вещественный вектор-параметр $\mathbf{n}$ заменен комплексным $\mathbf{q}\,(\mathbf{q}^*)$. Поскольку прямые произведения перемножаются по правилу $(A\times B)\,(A'\times$

$\times B') = AA' \times BB'$, то из (1), (5), (6) сразу следует, что $T_{ll'}$ является представлением группы Лоренца. При $l,\ l' = 0,\ \frac{1}{2},\ 1,\ \frac{3}{2},\ \ldots$ соотношение (6) дает общее явное выражение для **всех неприводимых конечномерных представлений группы Лоренца**. Отсюда ясно, что свойства последних полностью определяются свойствами представлений группы вращений.

Для бесконечно малых преобразований $\left(|\mathbf{q}| = \sqrt{\mathbf{q}\mathbf{q}^*} \ll 1\right)$ имеем

$$T_{ll'}[\mathbf{q},\ \mathbf{q}^*] = (1 + \mathbf{q}\mathbf{I})_l \times (1 + \mathbf{q}^*\mathbf{I})_{l'} = 1 + \mathbf{q}\mathbf{J} + \mathbf{q}^*\mathbf{K}, \tag{7}$$

где

$$\mathbf{J} = \mathbf{I}^l \times 1_{l'},\ \mathbf{K} = 1_l \times \mathbf{I}^{l'}, \tag{8}$$

$\mathbf{I}^l$, $\mathbf{I}^{l'}$ являются инфинитезимальными преобразованиями группы вращений, 1_l, $1_{l'}$ — единичные матрицы размерностей $2l + 1$ и $2l' + 1$ соответственно $(1_l \times 1_{l'} = 1)$. Из (8) сразу ясно, что все J_a коммутируют со всеми K_b, а для разных J_a, так же как и для K_b, справедливы известные перестановочные соотношения группы вращений

$$[I_a I_b] = \varepsilon_{abc} I_c. \tag{9}$$

Поскольку представления группы вращений унитарны, то

$$T_l^+(\mathbf{n}) = T_l^{-1}(\mathbf{n}) = T_l(-\mathbf{n}),\quad \mathbf{I}^{l+} = -\mathbf{I}^l. \tag{10}$$

Поэтому также

$$\mathbf{J}^+ = -\mathbf{J},\quad \mathbf{K}^+ = -\mathbf{K}. \tag{11}$$

Из формул (7), (8) ясно, чем вызвана неунитарность конечномерных представлений группы Лоренца — она целиком обусловлена комплексностью вектор-параметра $\mathbf{q}$.

Как показано в [3, 4], преобразование пространственной инверсии P обладает свойствами:

$$P^2 = 1,\ P\mathbf{q}_{\pm} = \mathbf{q}_{\mp}P,\ PL[\mathbf{q},\ \mathbf{q}^*]P = L[\mathbf{q}^*,\ \mathbf{q}]. \tag{12}$$

Следовательно, соответствующее P преобразование Π представления полной группы Лоренца должно быть равносильно перестановке $\mathbf{q}$ и $\mathbf{q}^*$. Отсюда следует, что пространство представлений полной группы Лоренца наряду с векторами, преобразующимися по $T_{ll'}[\mathbf{q},\ \mathbf{q}^*]$, должно содержать векторы, преобразующиеся с помощью матрицы

$$T_{ll'}[\mathbf{q}^*,\ \mathbf{q}] = T_l(\mathbf{q}^*) \times T_{l'}(\mathbf{q}). \tag{13}$$

Матрица $A \times B$ эквивалентна $B \times A$. Проще всего это можно установить таким образом. Пусть $A = (A_{\alpha\beta})$, тогда по определению

$$A \times B = (A_{\alpha\beta}B) = \begin{pmatrix} A_{11}B & A_{12}B & \ldots & A_{1k}B \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ A_{k1}B & A_{k2}B & \ldots & A_{kk}B \end{pmatrix}. \tag{14}$$

Пусть $\psi = (\psi_\rho)$ — вектор в пространстве размерности k, где действует матрица A, соответственно $\varphi = (\varphi_\sigma)$ — вектор в пространстве размерности s, где действует B. Произведению (14) соответствует произведение

$$\psi \times \varphi = (\psi_\rho\, \varphi) = \begin{pmatrix} \psi_1\varphi \\ \psi_2\varphi \\ \vdots \\ \psi_k\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_1 \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \vdots \\ \varphi_s \end{pmatrix} \\ \vdots \\ \psi_k \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \vdots \\ \varphi_s \end{pmatrix} \end{pmatrix}, \tag{15}$$

так что

$$(A \times B)(\psi \times \varphi) = A\psi \times B\varphi. \tag{16}$$

Прямому произведению матриц в другом порядке $B \times A = (B_{\xi\eta} A)$ соответствует $\varphi \times \psi = (\varphi_\sigma \psi)$. Ясно, что $\varphi \times \psi$ содержит все те компоненты, что и $\psi \times \varphi$, только расположенные в ином порядке. Поэтому $\varphi \times \psi = C(\psi \times \varphi)$, где матрица C осуществляет лишь перестановку компонент в результирующем пространстве размерности ks. Но такая матрица вещественна и ортогональна: $\tilde{C} = C^{-1}$, так как сумма квадратов компонент $\psi_\rho \varphi_\sigma$ не меняется.

Итак, перестановка сомножителей в прямом произведении матриц равносильна ортогональному преобразованию базиса пространства, поэтому

$$B \times A = C(A \times B) C^{-1} = C(A \times B)\tilde{C}. \tag{17}$$

Очевидно, матрица C в каждой строке и столбце будет содержать лишь одну единицу, а остальные элементы будут равны нулю. Кроме того, ясно, что вид матрицы C зависит лишь от размерностей A и B. Отсюда следует, что если A и B имеют одинаковые размерности, то C должно быть симметричной матрицей. Действительно, поскольку вид C зависит лишь от размерностей A и B, а они одинаковы, то переход от $B \times A$ к $A \times B$ должен совершаться по той же формуле (17), т. е. $A \times B = C(B \times A)\tilde{C}$. Но, с другой стороны, находя $A \times B$ из (17), получим $A \times B = \tilde{C}(B \times A) C$. Поэтому в данном случае $C = \tilde{C} = C^{-1}$, т. е. $C^2 = 1$. Нетрудно убедиться, что при одинаковых размерностях A и B равенство $A \times B = B \times A$ возможно лишь, если $B = cA$.

Таким образом, согласно (13) и (17),

$$T_{ll'}[\mathbf{q}^*, \mathbf{q}] = T_l(\mathbf{q}^*) \times T_{l'}(\mathbf{q}) = C\left(T_{l'}(\mathbf{q}) \times T_l(\mathbf{q}^*)\right)\tilde{C} = CT_{l'l}[\mathbf{q}, \mathbf{q}^*]\tilde{C}. \tag{18}$$

В соответствии с (12) преобразование Π представления полной группы Лоренца должно обладать свойствами

$$\Pi T[\mathbf{q}, \mathbf{q}^*]\Pi = T[\mathbf{q}^*, \mathbf{q}], \quad \Pi^2 = 1. \tag{19}$$

Если $l = l'$, то, согласно (18), матрицы $T_{ll}[\mathbf{q}, \mathbf{q}^*]$ и $T_{ll}[\mathbf{q}^*, \mathbf{q}]$ эквивалентны между собой:

$$CT_{ll}[\mathbf{q}, \mathbf{q}^*]C = C\left(T_l(\mathbf{q}) \times T_l(\mathbf{q}^*)\right)C = T_{ll}[\mathbf{q}^*, \mathbf{q}], \quad C^2 = 1, \tag{20}$$

поэтому $T_{ll}[\mathbf{q}, \mathbf{q}^*]$ есть преобразование представления полной группы Лоренца, а преобразование, соответствующее инверсии, есть

$$\Pi = C = \tilde{C} = C^{-1} = C^*. \tag{21}$$

Если же $l \neq l'$, то матрицы $T_{ll'}[\mathbf{q}, \mathbf{q}^*]$ и $T_{ll'}[\mathbf{q}^*, \mathbf{q}]$ неэквивалентны между собой. Поэтому, чтобы при $l \neq l'$ получить неприводимое представление

$T[\mathbf{q}, \mathbf{q}^*]$ полной группы Лоренца, необходимо взять прямую сумму представлений $T_{ll'}[\mathbf{q}, \mathbf{q}^*]$ и $T_{l'l}[\mathbf{q}, \mathbf{q}^*]$ собственной группы Лоренца:

$$T[\mathbf{q}, \mathbf{q}^*] = T_{ll'}[\mathbf{q}, \mathbf{q}^*] \dotplus T_{l'l}[\mathbf{q}, \mathbf{q}^*] = \begin{pmatrix} T_{ll'}[\mathbf{q}, \mathbf{q}^*] & 0 \\ 0 & T_{l'l}[\mathbf{q}, \mathbf{q}^*] \end{pmatrix}. \tag{22}$$

Условие (19) с учетом (18) принимает теперь вид

$$\Pi T[\mathbf{q}, \mathbf{q}^*]\Pi = T[\mathbf{q}^*, \mathbf{q}] = \begin{pmatrix} T_{ll'}[\mathbf{q}^*, \mathbf{q}] & 0 \\ 0 & T_{l'l}[\mathbf{q}^*, \mathbf{q}] \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} CT_{l'l}[\mathbf{q}, \mathbf{q}^*]\tilde{C} & 0 \\ 0 & \tilde{C}T_{ll'}[\mathbf{q}, \mathbf{q}^*]C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & C \\ \tilde{C} & 0 \end{pmatrix} T[\mathbf{q}, \mathbf{q}^*] \begin{pmatrix} 0 & C \\ \tilde{C} & 0 \end{pmatrix}.$$

Таким образом,

$$\Pi = \begin{pmatrix} 0 & C \\ \tilde{C} & 0 \end{pmatrix} = \tilde{\Pi} = \Pi^{-1}, \quad C\tilde{C} = 1, \quad \Pi^2 = 1. \tag{23}$$

Обратимся теперь к вопросу о существовании билинейной инвариантной эрмитовской (невырожденной) формы

$$F = \psi^*\eta\psi = \psi_\alpha^*\eta_{\alpha\beta}\psi_\beta. \tag{24}$$

Для возможности построения такой формы, очевидно, прежде всего необходимо, чтобы наряду с вектором ψ рассматриваемое представление содержало и комплексно сопряженный вектор ψ^*. В случае группы вращений дело обстоит просто. Если ψ преобразуется посредством $T_l(\mathbf{n})$, то ψ^* — посредством $T_l^*(\mathbf{n})$. Из равенства, комплексно сопряженного к (1), ясно, что $T_l^*(\mathbf{n})$ будет представлением и притом, очевидно, неприводимым. Так как для группы вращений все неприводимые представления одной и той же размерности эквивалентны, то

$$T_l^*(\mathbf{n}) = ST_l(\mathbf{n})S^{-1}. \tag{25}$$

Следовательно, $T_l(\mathbf{n})$ и $T_l^*(\mathbf{n})$, по существу, дают одно и то же представление, поэтому в случае группы вращений первое основное условие для существования формы (1) всегда выполняется для любого представления. Иначе обстоит дело с группой Лоренца. И в этом случае, очевидно, $(T_{ll'}[\mathbf{q}, \mathbf{q}^*])^*$ наряду с $T_{ll'}[\mathbf{q}, \mathbf{q}^*]$ будет представлением и притом неприводимым. Но, согласно (6),

$$(T_{ll'}[\mathbf{q}, \mathbf{q}^*])^* = T_{ll'}^*[\mathbf{q}^*, \mathbf{q}] = (T_l(\mathbf{q}))^* \times (T_{l'}(\mathbf{q}^*))^* = T_l^*(\mathbf{q}^*) \times T_{l'}^*(\mathbf{q}). \tag{26}$$

Здесь мы раздельно рассматриваем комплексное сопряжение матрицы T и ее аргументов. Это связано с тем, что матрица $T_l(\mathbf{q})$ получается простой заменой в матрице представления группы вращений $T_l(\mathbf{n})$ вещественного вектора $\mathbf{n}$ на комплексный вектор $\mathbf{q}$. Поэтому из (25) следует, поскольку это равенство является тождеством относительно вектора $\mathbf{n}$,

$$T_l^*(\mathbf{q}) = ST_l(\mathbf{q})S^{-1}, \quad T_l^*(\mathbf{q}^*) = ST_l(\mathbf{q}^*)S^{-1}. \tag{27}$$

В то же время $(T_l(\mathbf{q}))^* = T_l^*(\mathbf{q}^*) \neq ST_l(\mathbf{q})S^{-1}$. С помощью (27), (18) получаем из (26)

$$\begin{aligned}(T_{ll'}[\mathbf{q}, \mathbf{q}^*])^* &= ST_l(\mathbf{q}^*)S^{-1} \times S'T_{l'}(\mathbf{q})S'^{-1} = \\ &= (S \times S')(T_l(\mathbf{q}^*) \times T_{l'}(\mathbf{q}))(S \times S')^{-1} = \\ &= ((S \times S')C)\, T_{l'l}[\mathbf{q}, \mathbf{q}^*]\,((S \times S')C)^{-1}.\end{aligned} \tag{28}$$

Таким образом, комплексно сопряженное представление $(T_{ll'})^*$ эквивалентно $T_{l'l}$, т. е. имеет место ситуация, аналогичная случаю полной группы Лоренца — для построения формы (24) необходимо, чтобы либо $T = T_{ll}$, либо $T = T_{ll'} \dot{+} T_{l'l}$. Иными словами, для конечномерных представлений полной группы Лоренца условие наличия наряду с ψ также ψ^* всегда выполняется.

Инвариантность формы (24) по отношению к преобразованию $\psi = T_{ll'}\psi'$ выражается условием $(T_{ll'}\psi')^* \eta T_{ll'}\psi' = \psi'^* T_{ll'}^{+} \eta T_{ll'}\psi' = \psi'^* \eta \psi'$, откуда следует

$$(T_{ll'}[\mathbf{q}, \mathbf{q}^*])^+ \eta T_{ll'}[\mathbf{q}, \mathbf{q}^*] \equiv \eta. \tag{29}$$

Здесь подразумевается тождество относительно всевозможных значений $\mathbf{q}$. Вследствие унитарности представлений группы вращения и соответственно тождественной относительно $\mathbf{n}$ справедливости соотношения (10) можем написать

$$T_l^+(\mathbf{q}) = T_l^{-1}(\mathbf{q}), \quad T_{l'}^+(\mathbf{q}^*) = T_{l'}^{-1}(\mathbf{q}^*). \tag{30}$$

Здесь аналогично (26) следует различать $T_l^+(\mathbf{q}) = \tilde{T}_l^+(\mathbf{q})$ и

$$(T_l(\mathbf{q}))^+ = (\tilde{T}_l(\mathbf{q}))^* = T_l^+(\mathbf{q}^*) = T_l^{-1}(\mathbf{q}^*) = T_l(-\mathbf{q}^*). \tag{31}$$

Мы имеем, таким образом (см. (6)),

$$(T_{ll'}[\mathbf{q}, \mathbf{q}^*])^+ = (T_l(\mathbf{q}))^+ \times (T_{l'}(\mathbf{q}^*))^+ =$$
$$= T_l^+(\mathbf{q}^*) \times T_{l'}^+(\mathbf{q}) = T_l^{-1}(\mathbf{q}^*) \times T_{l'}^{-1}(\mathbf{q}) = (T_{ll'}[\mathbf{q}^*, \mathbf{q}])^{-1}. \tag{32}$$

Поэтому соотношение (29) можно написать в виде

$$\eta T_{ll'}[\mathbf{q}, \mathbf{q}^*] = T_{ll'}[\mathbf{q}^*, \mathbf{q}]\eta. \tag{33}$$

Сравнивая это с равенством (19), умноженным справа на Π, убеждаемся, что всегда можно положить

$$\eta = a\Pi, \tag{34}$$

где число a должно быть вещественным, так как $\eta^+ = \eta$. Мы доказали таким образом, что для любого неприводимого конечномерного представления полной группы Лоренца матрица билинейной инвариантной формы с точностью до вещественного числового множителя совпадает с матрицей преобразования представления, отвечающего пространственной инверсии. Поскольку для матрицы Π найдены общие выражения (21), (23), то тем самым матрица билинейной формы η для неприводимого представления определяется в самом общем случае.

Как известно, матрица η играет самую фундаментальную роль в теории волновых уравнений, описывающих элементарные частицы. С ее помощью выражаются основные физические величины, характеризующие частицу: энергия, импульс, заряд, ток, момент. Она входит также в выражения для лагранжиана и матричных элементов переходов, определяющих вероятности всевозможных процессов. Поэтому рассмотрением ее свойств занимались многие авторы (см., например, [5—7]). Тем не менее общее соотношение (34) оставалось до сих пор, по-видимому, незамеченным. Изложенный выше простой путь его получения свидетельствует об эффективности комплексно-векторной параметризации группы Лоренца и, в частности, соотношения (6). Заметим, что простейший пример соотношения (34) доставляет само основное представление, для которого $\psi=(\mathbf{x}, ix_0)$, а инвариантная форма имеет вид $F=x_0^2-\mathbf{x}^2=\psi^*\eta\psi$, причем

$$\eta=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=P. \tag{35}$$

Следует иметь в виду, что при преобразовании базиса с помощью матрицы $A(\psi'=A\psi)$ матрицы $\Pi(T)$ и η преобразуются по-разному, а именно:

$$\Pi'=A\Pi A^{-1},\quad T'=ATA^{-1},\quad \eta'=A^{+^{-1}}\eta A^{-1}. \tag{36}$$

Поэтому равенство (34) справедливо не в любом базисе. Однако если матрица A унитарна, $A^+=A^{-1}$, то $\eta'=A\eta A^{-1}$ и соотношение (34) остается в силе. Существенно то, что в с е г д а можно так выбрать базис представления, что (34) будет верно. Это справедливо также и для любого конечномерного п р и в о д и м о г о представления группы Лоренца, поскольку последнее распадается на прямую сумму неприводимых представлений. При этом η представляется в виде прямой суммы:

$$\eta=a_1\Pi_1\dot{+}a_2\Pi_2\dot{+}\ldots\dot{+}a_r\Pi_r,\quad \eta\Pi=\Pi\eta,$$
$$\Pi_k^2=1,\ \tilde{\Pi}_k=\Pi_k,\ \Pi_k\Pi_l=\delta_{kl}, \tag{37}$$

где Π_k относятся к отдельным неприводимым представлениям п о л н о й группы Лоренца. Путем надлежащей нормировки базиса каждого неприводимого представления вещественные числа a_k всегда могут быть сделаны равными ± 1. Действительно, согласно (36), (37), для этого достаточно выбрать $A=A_1\dot{+}A_2\dot{+}\ldots\dot{+}A_r$, причем матрицы A_k скалярны и равны $A_k=\sqrt{|a_k|}$. При этом матрица отражения

$$\Pi=\Pi_1\dot{+}\Pi_2\dot{+}\ldots\dot{+}\Pi_r=\begin{pmatrix}\Pi_1 & 0 & \ldots & 0\\ 0 & \Pi_2 & \ldots & 0\\ . & . & . & .\\ 0 & 0 & \ldots & \Pi_r\end{pmatrix} \tag{38}$$

не изменится. В результате η всегда может быть приведена к виду

$$\eta=(\pm\Pi_1)\dot{+}(\pm\Pi_2)\dot{+}\ldots\dot{+}(\pm\Pi_r)=\begin{pmatrix}\pm\Pi_1 & 0 & \ldots & 0\\ 0 & \pm\Pi_2 & \ldots & 0\\ . & . & . & .\\ 0 & 0 & \ldots & \pm\Pi_r\end{pmatrix}, \tag{39}$$

когда она обладает свойствами

$$\eta=\eta^*=\tilde{\eta}=\eta^+=\eta^{-1}. \tag{40}$$

Как известно, конечномерные релятивистские волновые уравнения первого порядка не могут быть построены с помощью одного неприводимого представления группы Лоренца, а лишь на основе приводимого представления, в которое наряду с каждым представлением (l, l') должно входить одно или несколько представлений $(l \pm {}^1/_2, l' \pm {}^1/_2)$. Условие инвариантности уравнения

$$(\gamma^k \nabla_k + m)\psi = 0 \tag{41}$$

относительно собственной группы Лоренца имеет вид

$$T^{-1}\gamma^k T = L_{kl}\gamma^l, \tag{42}$$

где $L = \tilde{L}^{-1}$ — матрица преобразования Лоренца, T — соответствующее преобразование представления. Аналогично (42) условие инвариантности уравнения (41) относительно преобразования пространственной инверсии имеет вид

$$\Pi^{-1}\gamma^k\Pi = \Pi\gamma^k\Pi = P_{kl}\gamma^l \tag{43}$$

или (см. (35))

$$\Pi\gamma^4 = \gamma^4\Pi, \; \Pi\gamma^a = -\gamma^a\Pi \quad (a = 1, 2, 3), \tag{44}$$

Уравнение (41) может быть получено из инвариантной вещественной функции Лагранжа

$$L_0 = -\frac{1}{2}[\bar{\psi}\gamma^k\nabla_k\psi - (\nabla^k\bar{\psi})\gamma^k\psi] - m\bar{\psi}\psi, \tag{45}$$

где

$$\bar{\psi} = \psi^*\eta. \tag{46}$$

Путем вариации по $\bar{\psi}$ из (45) получаем (41), а в результате варьирования по ψ — уравнение

$$\nabla_k\bar{\psi}\gamma^k - m\bar{\psi} = 0. \tag{47}$$

Наряду с (41) должно быть справедливо уравнение, получающееся из него путем комплексного сопряжения. Последнее, очевидно, должно быть эквивалентно (47). Взяв комплексное сопряжение от (41) и умножив справа на η, получим после сравнения с (47)

$$\eta\gamma^{4+} = \gamma^4\eta, \; \eta\gamma^{a+} = -\gamma^a\eta. \tag{48}$$

Учитывая (40), эти соотношения можно написать также в следующих двух формах:

$$\begin{gathered}(\gamma^4\eta)^+ = \gamma^4\eta, \; (\gamma^a\eta)^+ = -\gamma^a\eta, \\ (\eta\gamma^4)^+ = \eta\gamma^4, \; (\eta\gamma^a)^+ = -\eta\gamma^a.\end{gathered} \tag{49}$$

Полной системой уравнений является совокупность (41) и (47). Если эта система инвариантна относительно полной группы Лоренца, то должно выполняться (44), а если она может быть получена из вариационного принципа, то должно выполняться (48). В случае выполнения обоих этих условий соотношения (44) и (48) должны быть справедливы одновременно. Если мы теперь положим $\eta = \Pi$, что не противоречит (38), (39), то из (44), (48), следует

$$\gamma^{4+} = \gamma^4, \; \gamma^{a+} = -\gamma^a. \tag{50}$$

Таким образом, если для уравнения, инвариантного относительно полной группы Лоренца и получаемого из вариационного принципа, имеет место равенство $\eta = \Pi$, то матрица γ^4 должна быть э р м и т о в с к о й. Но, как известно (см., например, [5]), в этом случае энергия будет дефинитна лишь для уравнений Даффина—Кеммера (частицы со спином 0 и 1), а заряд — лишь для уравнений Дирака (спин 1/2). Следовательно, лишь в этих случаях матрица пространственной инверсии Π и метрическая матрица η могут совпадать или быть пропорциональными. Во всех остальных случаях матрицы η и Π обязательно должны отличаться одна от другой за счет знаков в выражении (39).

Блочная форма матриц Π (38) и η (39) справедлива в том случае, если волновая функция ψ записана в виде прямой суммы неприводимых представлений п о л н о й группы Лоренца

$$\psi = \psi_1 \dot{+} \psi_2 \dot{+} \ldots \dot{+} \psi_r = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \psi_r \end{pmatrix}. \quad (51)$$

Очевидно, мы можем произвольно распоряжаться порядком расположения представлений в ряду (51). Разобьем (51) на две части:

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_{\text{I}} \\ \psi_{\text{II}} \end{pmatrix}, \; \psi_{\text{I}} = \psi_1 \dot{+} \ldots \dot{+} \psi_{r'}, \; \psi_{\text{II}} = \psi_{r'+1} \dot{+} \ldots \dot{+} \psi_r. \quad (52)$$

Тогда соответственно получим

$$\Pi = \begin{pmatrix} \Pi_{\text{I}} & 0 \\ 0 & \Pi_{\text{II}} \end{pmatrix}, \; \Pi_{\text{I}} = \Pi_1 \dot{+} \ldots \dot{+} \Pi_{r'}, \; \Pi_{\text{II}} = \Pi_{r'+1} \dot{+} \ldots \dot{+} \Pi_r,$$

$$\eta = \begin{pmatrix} \eta_{\text{I}} & 0 \\ 0 & \eta_{\text{II}} \end{pmatrix}, \; \eta_{\text{I}} = (\pm \Pi_1) \dot{+} \ldots \dot{+} (\pm \Pi_{r'}),$$

$$\eta_{\text{II}} = (\pm \Pi_{r'+1}) \dot{+} \ldots \dot{+} (\pm \Pi_r). \quad (53)$$

Удобно выбрать это разбиение таким образом, чтобы $\eta_{\text{I}} = \Pi_{\text{I}}$, $\eta_{\text{II}} = -\Pi_{\text{II}}$, что, очевидно, всегда возможно. Итак, мы приходим к выводу, что в самом общем случае можно так расположить представления ψ_k, что матрицы η и Π будут иметь вид

$$\Pi = \begin{pmatrix} \Pi_{\text{I}} & 0 \\ 0 & \Pi_{\text{II}} \end{pmatrix}, \; \eta = \begin{pmatrix} \Pi_{\text{I}} & 0 \\ 0 & -\Pi_{\text{II}} \end{pmatrix}. \quad (54)$$

Однако можно располагать представления и по-иному. Как известно (см. [8]), все возможные неприводимые представления собственной группы Лоренца (l, l') разбиваются на четыре класса: $+1\,(l,\, l'$ — целые), $-1\,(l,\, l'$ — полуцелые), $+\varepsilon\,(l$ — целое, l' — полуцелое), $-\varepsilon\,(l$ — полуцелое, l' — целое). При этом уравнения (41) для частиц с целым спином включают представления классов ± 1, а для частиц с полуцелым спином — представления классов $\pm\varepsilon$. Будем обозначать через ψ' волновые функции для случая целого (полуцелого) спина, относящиеся к классу $+1\,(+\varepsilon)$. Соответственно ψ'' для целого (полуцелого) спина относится к классу $-1\,(-\varepsilon)$. Таким образом,

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi' \\ \psi'' \end{pmatrix}, \; \psi' = \psi_1' \dot{+} \ldots \dot{+} \psi_{r'}', \; \psi'' = \psi_1'' \dot{+} \ldots \dot{+} \psi_{r''}'', \; r' + r'' = r. \quad (55)$$

При этом матрицы γ^k как для целого, так и для полуцелого спина должны иметь следующую структуру:

$$\gamma^k = \begin{pmatrix} 0 & \alpha^k \\ \beta^k & 0 \end{pmatrix}. \tag{56}$$

Легко видеть, что в случае целого спина представления $T_{II'}$ и $T_{I'I}$ относятся к одному и тому же классу. Поэтому для целого спина будем иметь в соответствии с (55)

$$\Pi = \begin{pmatrix} \Pi' & 0 \\ 0 & \Pi'' \end{pmatrix}, \quad \eta = \begin{pmatrix} \eta' & 0 \\ 0 & \eta'' \end{pmatrix}, \tag{57}$$

причем аналогично (54)

$$\Pi' = \begin{pmatrix} \Pi_I' & 0 \\ 0 & \Pi_{II}' \end{pmatrix}, \quad \eta' = \begin{pmatrix} \Pi_I' & 0 \\ 0 & -\Pi_{II}' \end{pmatrix}, \tag{58}$$

$$\Pi'' = \begin{pmatrix} \Pi_I'' & 0 \\ 0 & \Pi_{II}'' \end{pmatrix}, \quad \eta'' = \begin{pmatrix} \Pi_I'' & 0 \\ 0 & -\Pi_{II}'' \end{pmatrix}. \tag{59}$$

В случае полуцелого спина представления $T_{II'}$ и $T_{I'I}$ обязательно относятся к разным классам. Поэтому в (55) $r' = r''$ и размерности подпространств ψ' и ψ'' будут одинаковы, причем они будут четными. Следовательно, размерность полного пространства представлений для частиц с полуцелым спином всегда кратна четырем. Аналогично (23) мы можем написать в данном случае

$$\Pi = \begin{pmatrix} 0 & \Pi_0 \\ \tilde{\Pi}_0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \eta = \begin{pmatrix} 0 & \eta_0 \\ \tilde{\eta}_0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{60}$$

Здесь матрицы Π_0 и η_0 будут квадратными матрицами четной размерности со следующей структурой:

$$\Pi_0 = \begin{pmatrix} \Pi_I & 0 \\ 0 & \Pi_{II} \end{pmatrix}, \quad \eta_0 = \begin{pmatrix} \Pi_I & 0 \\ 0 & -\Pi_{II} \end{pmatrix}. \tag{61}$$

Таким образом, случай полуцелого спина отличается от случая целого спина общей структурой матриц Π и η (ср. (57) и (60)). Кроме того, следует иметь в виду, что в формулах (55) для случая целого спина ψ_k' и ψ_k'' относятся к неприводимым представлениям полной группы Лоренца, в то время как для полуцелого спина эти же величины относятся к неприводимым представлениям собственной группы Лоренца.

Полученные выше соотношения устанавливают структуру матрицы пространственной инверсии Π и метрической матрицы η для любых релятивистски инвариантных уравнений, описывающих элементарные частицы.

Литература

1. Федоров Ф. И. ДАН БССР, 2, 408, 1958.
2. Федоров Ф. И. ДАН БССР, 5, 101, 1961.
3. Федоров Ф. И. ДАН БССР, 5, 194, 1961.
4. Федоров Ф. И. ДАН СССР, 143, 56, 1962.
5. Гельфанд И. М., Минлос Р. А., Шапиро З. Я. Представления группы вращений и группы Лоренца. Физматгиз, 1958.
6. Наймарк М. А. Линейные представления группы Лоренца. Физматгиз, 1958.
7. Шелепин Л. А. Тр. ФИАН им. Лебедева, 30, 253, 1964.
8. Паули В. Релятивистская теория элементарных частиц. ИЛ, 1947.

Институт физики
АН БССР

Поступило в редакцию
28.III 1967

ВЕСЦІ АКАДЭМІІ НАВУК БЕЛАРУСКАЙ ССР № 2 1967
СЕРЫЯ ФІЗІКА-МАТЭМАТЫЧНЫХ НАВУК

УДК 530.145

Т. С. РОМАНОВА

УРАВНЕНИЯ КВАНТОВОЙ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ С «ДИПОЛЬНЫМИ ДУХАМИ»

Наиболее естественным в математическом отношении методом устранения расходимостей в квантовой теории полей является, по-видимому, регуляризация Паули—Вилларса, эквивалентная, как известно, введению высших производных в уравнения поля и использованию индефинитной метрики в гильбертовом пространстве амплитуд состояний. Полное гильбертово пространство H разбивается при этом на подпространство физических (HI) и «нефизических» (HII) амплитуд состояний, и соответственно полное поле $\chi(x)$ может быть представлено в виде

$$\chi(x) = \psi_0(x) + \sum_i c_i(\varkappa_i)\,\psi_{\varkappa_i}(x), \tag{1}$$

где $\psi_0(x)$ — физическое поле массы $\varkappa_0$; $\psi_{\varkappa_i}(x)$ — «нефизическое» поле массы $\varkappa_i$. Существует два метода введения индефинитной метрики: в первом случае подпространство физических амплитуд ортогонально подпространству «нефизических» амплитуд состояний, в другом случае физическое и «нефизическое» подпространства не ортогональны друг другу. Подробный анализ физических следствий теории, использующей первый метод введения индефинитной метрики, содержится в работах [1—3]. Возможность введения индефинитной метрики в теорию, существенно использующую неортогональность физического и «нефизического» подпространств полного гильбертова пространства, впервые была предложена Гейзенбергом [4, 5] в нелинейной теории элементарных частиц.

Для изучения возможности устранения расходимостей в линейной релятивистски-инвариантной теории с помощью способа использования индефинитной метрики, введенного Гейзенбергом, в работе [6] было предложено заменить уравнения Максвелла уравнениями 6-го порядка

$$\left(1 - \frac{1}{\varkappa^2}\Box\right)^2 \Box A_\mu(x) = -j_\mu(x) \tag{2}$$

и были рассмотрены некоторые классические следствия этих уравнений. В настоящей работе производится квантование поля, описываемого уравнениями (1), и изучается возможность физической интерпретации теории.

Из вида уравнений (2) следует, что поле $A_\mu(x)$, кроме обычных фотонов с $k^2=0$, содержит амплитуды состояний с ненулевой массой покоя ($k^2=-\varkappa^2$), включающие амплитуды с необычной зависимостью от координат. Общее решение уравнений (1) для свободного поля ($j_\mu(x)=0$) может быть представлено в виде

$$A_\mu(x) = \frac{1}{L^{3/2}} \sum_{k,\lambda} \frac{e_\mu^{(\lambda)}}{\sqrt{2\omega}} \left(a_{k\lambda}\, e^{ikx} + \bar{a}_{k\lambda}\, e^{-ikx}\right) +$$

$$+\frac{1}{2L^{3/2}}\sum_{\mathbf{q},\lambda}\frac{e_\mu^{(\lambda)}}{\sqrt{\varepsilon}}\left(b'_{\mathbf{q}\lambda}e^{iqx}+\overline{b}'_{\mathbf{q}\lambda}e^{-iqx}\right)+$$
$$+\frac{1}{2L^{3/2}}\sum_{\mathbf{q},\lambda}\frac{e_\mu^{(\lambda)}}{\sqrt{\varepsilon}}\left(c'_{\mathbf{q}\lambda}e^{iqx}-\overline{c}'_{\mathbf{q}\lambda}e^{-iqx}\right). \quad (3)$$

Здесь L^3 — нормировочный объем; $kx=\mathbf{kr}-\omega t$; $\omega=|\mathbf{k}|$; $qx=\mathbf{qr}-\varepsilon t$; $\varepsilon=\sqrt{\mathbf{q}^2+\varkappa^2}$; $a_{\mathbf{k}\lambda}$, $b'_{\mathbf{q}\lambda}$, $c'_{\mathbf{q}\lambda}$ — амплитуды «волн» и $e_\mu^{(\lambda)}$ — единичные векторы поляризации. Амплитуды $\overline{a}_{\mathbf{k}\lambda}$, $\overline{b}'_{\mathbf{q}\lambda}$, $\overline{c}'_{\mathbf{q}\lambda}$ связаны с $a_{\mathbf{k}\lambda}$, $b'_{\mathbf{q}\lambda}$, $c'_{\mathbf{q}\lambda}$ обычными условиями комплексного сопряжения, вытекающими из условия вещественности поля. Кроме того, выполняются условия

$$\sum_\lambda q_\mu e_\mu^{(\lambda)} b'_{\mathbf{q}\lambda}=0,\quad \sum_\lambda q_\mu e_\mu^{(\lambda)} c'_{\mathbf{q}\lambda}=0. \quad (4)$$

Гамильтониан свободного поля можно записать в виде

$$H=\frac{1}{2}\sum_{\mathbf{k}\lambda}\omega\left(a_{\mathbf{k}\lambda}\overline{a}_{\mathbf{k}\lambda}+\overline{a}_{\mathbf{k}\lambda}a_{\mathbf{k}\lambda}\right)+$$
$$+\frac{1}{2}\sum_{\mathbf{q},j=1,2,3}\varepsilon\left(b_{\mathbf{q}j}\overline{c}_{\mathbf{q}j}+\overline{c}_{\mathbf{q}j}b_{\mathbf{q}j}+c_{\mathbf{q}j}\overline{b}_{\mathbf{q}j}+\overline{b}_{\mathbf{q}j}c_{\mathbf{q}j}+\overline{c}_{\mathbf{q}j}c_{\mathbf{q}j}+c_{\mathbf{q}j}\overline{c}_{\mathbf{q}j}\right). \quad (5)$$

В формуле (5) амплитуды $b_{\mathbf{q}j}$ и $c_{\mathbf{q}j}$ вследствие (4) определяются амплитудами $b'_{\mathbf{q}j}$ и $c'_{\mathbf{q}j}$ с помощью соотношений

$$b_{\mathbf{q}j}=b'_{\mathbf{q}j}\ (j=1,\ 2),\qquad b_{\mathbf{q}3}=\frac{\varkappa}{\varepsilon}b'_{\mathbf{q}3};$$
$$c_{\mathbf{q}j}=c'_{\mathbf{q}j}\ (j=1,\ 2),\qquad c_{\mathbf{q}3}=\frac{\varkappa}{\varepsilon}c'_{\mathbf{q}3}. \quad (6)$$

Выполняя обычным образом каноническое квантование, находим перестановочные соотношения для амплитуд

$$[a_{\mathbf{k}0},\ \overline{a}_{\mathbf{k}'0}]=-\delta_{\mathbf{kk}'},\quad [a_{\mathbf{k}j},\ \overline{a}_{\mathbf{k}'j'}]=\delta_{\mathbf{kk}'}\,\delta_{jj'},$$
$$[b_{\mathbf{q}j},\ \overline{c}_{\mathbf{q}'j'}]=\delta_{\mathbf{qq}'}\,\delta_{jj'}, \quad (7)$$
$$[c_{\mathbf{q}j},\ \overline{b}_{\mathbf{q}'j'}]=\delta_{\mathbf{qq}'}\,\delta_{jj'}$$

(остальные коммутаторы равны нулю). С помощью (7) легко найти перестановочные соотношения для операторов поля:

$$[A_\mu(x),\ A_\nu(x')]=-i\,\delta_{\mu\nu}D(x-x'),$$
$$D(x)=\frac{\varkappa^2}{8\pi}\varepsilon(x)\,\theta(-x^2)\,DJ_2(\varkappa\sqrt{-x^2}), \quad (8)$$

где $J_2(z)$ — функция Бесселя; $\varepsilon(x)=x_0/|x_0|$; $\theta(x)=\begin{cases}1, & x>0\\ 0, & x<0\end{cases}$. Из (8) видно, что перестановочная функция не имеет δ-образной сингулярности на световом конусе и даже стремится к нулю при $-x^2\to 0$.

Гильбертово пространство векторов состояний мы будем считать линейным пространством с определенным скалярным произведением, для которого мы не будем, однако, требовать выполнения условия

$$(\varphi, \varphi) > 0, \text{ если } \varphi \neq 0. \tag{9}$$

Обратимся теперь к соотношениям (7) (рассмотрим только свойства операторов b_{qj} и c_{qj}, так как свойства операторов $a_{k\lambda}$ при использовании индефинитной метрики хорошо известны [7]). Определим самосопряженный оператор

$$\hat{M} \equiv \hat{M}_{qj} = b_{qj}\bar{c}_{qj} + c_{qj}\bar{b}_{qj} + c_{qj}\bar{c}_{qj} \tag{10}$$

(для сокращения записи в дальнейшем будем опускать индексы у операторов). Обозначим собственный вектор этого оператора, принадлежащий собственному значению μ, через $|\mu\rangle$, т. е.

$$\hat{M}|\mu\rangle = \mu|\mu\rangle. \tag{11}$$

Из соотношений коммутации (7) следует, что имеют место уравнения

$$\begin{gathered} \hat{M}c|\mu\rangle = (\mu-1)c|\mu\rangle, \quad \hat{M}\bar{c}|\mu\rangle = (\mu+1)\bar{c}|\mu\rangle, \\ \hat{M}b|\mu\rangle = (\mu-1)b|\mu\rangle - c|\mu\rangle, \quad \hat{M}\bar{b}|\mu\rangle = (\mu+1)\bar{b}|\mu\rangle + \bar{c}|\mu\rangle. \end{gathered} \tag{12}$$

Соотношения (12) показывают, что, если μ есть собственные значения оператора $\hat{M}$, числа $\mu \pm 1$, $\mu \pm 2$, ... также будут, вообще говоря, собственными значениями этих операторов. Вследствие того, что условие (9) не выполняется, никаких других сведений о собственных значениях оператора $\hat{M}$ из перестановочных соотношений мы получить не можем. Если потребовать положительной определенности собственных значений энергии, то легко видеть, что добиться этого можно, наложив на собственные состояния оператора дополнительные условия. Потребуем, чтобы существовало состояние, удовлетворяющее условиям

$$c|0\rangle = 0, \quad b|0\rangle = 0, \quad \langle 0|0\rangle = 1. \tag{13}$$

Назовем его состоянием вакуума. Из соотношений (12) и условий (13) легко получить, что собственными значениями оператора M будут целые положительные числа и нуль. Из этого следует, что квантовые условия (7) при дополнительных условиях (13) приводят к правильной корпускулярной картине для поля.

Собственные состояния оператора $\hat{M}$ можно теперь записать в виде

$$\hat{M}|m\rangle = m|m\rangle, \quad |m\rangle = \alpha\bar{c}^{m}|0\rangle, \quad m = 1, 2, 3, \ldots \tag{14}$$

(α — постоянная). Вследствие того что операторы c и $\bar{c}$ коммутируют, получаем, что

$$c|m\rangle = 0 \tag{15}$$

и, кроме того, нормы этих состояний равны нулю, т. е.

$$\langle m|m\rangle = 0 \text{ (при } m \neq 0). \tag{16}$$

Из (15) и (12) вытекает, что операторами рождения частиц будут операторы $\bar{c}$, а соответствующими операторами уничтожения — операторы b.

Однако состояния (14) не исчерпывают полного набора состояний. Состояниями, линейно независимыми от состояний (14), будут

$$|n=\rangle\, \bar{c}^{m}\bar{b}^{n}|0\rangle, \quad m = 0, 1, 2, \ldots; \; n = 1, 2, 3, \ldots \tag{17}$$

Они, вообще говоря, не ортогональны состояниям (14). Так, например, вследствие (7) имеем

$$\langle m|n\rangle = \langle 0|c^m \bar{b}^n|0\rangle = \delta_{mn} n! \tag{18}$$

Состояния (17) не являются собственными состояниями оператора Гамильтона, а удовлетворяют уравнениям

$$H\bar{b}^n|0\rangle = \varepsilon n\bar{b}^n|0\rangle + \varepsilon n\bar{c}\bar{b}^{n-1}|0\rangle \tag{19}$$

(из оператора Гамильтона вычтена нулевая энергия). Следуя терминологии Гейзенберга, назовем состояния (14) и (17) соответственно «призрачными» и дипольными «призрачными» состояниями.

Переходя к представлению Шредингера, получим, например, зависимость от времени φ и $\varphi^{\text{дип}}$, соответствующих $\bar{c}|0\rangle$ и $\bar{b}|0\rangle$, в виде

$$\varphi(t) = \varphi(0)e^{-i\varepsilon t}; \quad \varphi^{\text{дип}}(t) = \varphi^{\text{дип}}(0)e^{-i\varepsilon t} - i\varepsilon t\varphi(t). \tag{20}$$

Необычная зависимость от времени дипольных «призрачных» состояний вызывает сомнения в возможности физической интерпретации таких состояний. Кроме того, при построении S-матрицы, определяемой соотношениями

$$|\text{out}], \varphi\rangle = S|\text{in}, \psi\rangle \tag{21}$$

и удовлетворяющей условию унитарности [5]

$$S\bar{S} = \bar{S}S = 1, \tag{22}$$

придется столкнуться с возможностью появления в конечных состояниях вклада состояний (17), если даже начальные состояния выбирать в виде линейной комбинации состояний (14); при этом вследствие индефинитности метрики переходы в такие состояния могут происходить с «отрицательными вероятностями» [5].

Для дальнейшего удобно ввести ортонормированный базис в гильбертовом пространстве «призрачных» и дипольных «призрачных» состояний (мы опять будем рассматривать только нефотонную часть поля и будем опускать для краткости индексы). Отметим, что n-частичному состоянию будут соответствовать линейные комбинации $n+1$ амплитуд $\bar{c}^n|0\rangle$, $\bar{c}^{n-1}\bar{b}|0\rangle$, ..., $\bar{c}\bar{b}^{n-1}|0\rangle$, $\bar{b}^n|0\rangle$, так, например:

	вакуум	*норма*
	$\|0\rangle$	$\langle 0\|0\rangle = 1$
«одночастичные» состояния	$\|\varphi_1^{(1)}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(\bar{c}+\bar{b})\|0\rangle$	$\langle\varphi_1^{(1)}\|\varphi_1^{(1)}\rangle = 1$
	$\|\varphi_2^{(1)}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(\bar{c}-\bar{b})\|0\rangle$	$\langle\varphi_2^{(1)}\|\varphi_2^{(1)}\rangle = -1$
	$\langle\varphi_1^{(2)}\|\varphi_2^{(2)}\rangle = 0$	(23)
«двухчастичные» состояния	$\|\varphi_1^{(2)}\rangle = \frac{1}{2}(\bar{c}^2+\bar{b}^2)\|0\rangle$	$\langle\varphi_1^{(2)}\|\varphi_1^{(2)}\rangle = 1$
	$\|\varphi_2^{(2)}\rangle = \bar{c}\bar{b}\|0\rangle$	$\langle\varphi_2^{(2)}\|\varphi_2^{(2)}\rangle = 1$
	$\|\varphi_3^{(2)}\rangle = \frac{1}{2}(\bar{c}^2-\bar{b}^2)\|0\rangle$	$\langle\varphi_3^{(2)}\|\varphi_3^{(2)}\rangle = -1$

$$\langle\varphi_1^{(2)}|\varphi_1^{(2)}\rangle = \langle\varphi_2^{(2)}|\varphi_2^{(2)}\rangle = \langle\varphi_3^{(2)}|\varphi_3^{(2)}\rangle = 0$$

и т. д. Тогда любое начальное состояние может быть представлено в виде

$$|\mathrm{in}, \psi\rangle = \langle \mathrm{out}, 0|\mathrm{in}, \psi\rangle\,|\mathrm{out}, 0\rangle + \langle \mathrm{out}, \varphi_1^{(1)}|\mathrm{in}, \psi\rangle\,|\mathrm{out}, \varphi_1^{(1)}\rangle - \\ - \langle \mathrm{out}, \varphi_2^{(1)}|\mathrm{in}, \psi\rangle\,|\mathrm{out}, \varphi_2^{(1)}\rangle + \ldots \qquad (24)$$

Используя далее (21), находим

$$\langle \mathrm{in}, \psi|\mathrm{in}, \psi\rangle = \langle \mathrm{out}, \varphi|S\bar{S}|\mathrm{out}, \varphi\rangle = \langle \mathrm{out}, \varphi|\mathrm{out}, \varphi\rangle \qquad (25)$$

и

$$\langle \mathrm{in}, \psi|\mathrm{in}, \psi\rangle = |\langle \mathrm{out}, 0|\,\mathrm{in}, \psi\rangle|^2 + |\langle \mathrm{out}, \varphi_1^{(1)}|\mathrm{in}, \psi\rangle|^2 - \\ - |\langle \mathrm{out}, \varphi_2^{(1)}|\mathrm{in}, \psi\rangle|^2 + \ldots \qquad (26)$$

Отсюда вытекает, что если, например, переходы $|\mathrm{in}, \psi\rangle \to |\mathrm{out}, 0\rangle$ и $|\mathrm{in}, \psi\rangle \to |\mathrm{out}, \varphi_1^{(1)}\rangle$ происходят с положительными вероятностями, то переход $|\mathrm{in}, \psi\rangle \to |\mathrm{out}, \varphi_2^{(1)}\rangle$ происходит с «отрицательной вероятностью».

Изложенное выше делает очевидным, что требуются дополнительные исследования возможности устранения этих нефизических результатов. Гейзенбергом [5] и Фруассаром [8] было высказано предположение, что можно добиться запрещения дипольных «призрачных» состояний, если к начальному состоянию добавить некоторую суперпозицию векторов

$$\sum_{\substack{m,n\\ m>n}} \alpha_{mn}\, \bar{c}^{m}\, \bar{b}^{n}|0\rangle \quad (m+n=N), \qquad (27)$$

которые удовлетворяют следующим условиям:

1) все они имеют нулевую норму и ортогональны друг другу,

2) векторы (27) образуют инвариантное подпространство H_1 относительно оператора Гамильтона в гильбертовом пространстве «призрачных» и дипольных «призрачных» состояний HII.

Остальные векторы образуют нефизическое пространство H_2. Вследствие таких свойств векторов (27) они не должны давать вкладов в наблюдаемые средние значения энергии и импульса системы. Затем можно подобрать коэффициенты α_{mn} таким образом, чтобы добиться запрещения появления дипольных «призраков», принадлежащих H_2. Такая процедура легко осуществляется для случая нечетного числа частиц, которому соответствует комбинация четного $N+1$ числа амплитуд состояний. Легко показать, что в случае четного числа частиц нельзя подобрать $\frac{N}{2}+1$ линейно независимых векторов с определенными выше свойствами, образующих H_1, и, следовательно, не удается осуществить запрет $\frac{N}{2}$ «нефизических» векторов, образующих H_2. Рассмотрим в качестве иллюстрации второго метода запрета дипольных «призраков» простой пример, допускающий точное решение: поле, порождаемое классическим внешним током $j_\mu(x)$. В качестве начального состояния выберем вакуум. Решение уравнений (1) может быть получено, как обычно, с помощью запаздывающей или опережающей функций Грина:

$$A_\mu(x) = A_\mu^{\mathrm{in}}(x) + \int d^4x' G_R(x-x')\,j_\mu(x') = \\ = A_\mu^{\mathrm{out}}(x) + \int d^4x' G_A(x-x')\,j_\mu(x'), \qquad (28)$$

где

$$G_R(x) = \frac{\varkappa^2}{8\pi}\theta(t)\theta(-x^2)J_2(\varkappa\sqrt{-x^2});$$
$$G_A(x) = \frac{\varkappa^2}{8\pi}\theta(-t)\theta(-x^2)J_2(\varkappa\sqrt{-x^2}). \tag{29}$$

Из уравнений (28) находим связь между out- и in-операторами:

$$A_\mu^{\text{out}}(x) = A_\mu^{\text{in}}(x) + \int d^4x' \left[G_R(x-x') - G_A(x-x')\right] j_\mu(x'),$$

или, если использовать (3),

$$a_{\text{out}} = a_{\text{in}} + \frac{ie_\mu^{(\lambda)} j_\mu(\mathbf{k}, \omega)}{\sqrt{2\omega L^3}}, \quad \bar{a}_{\text{out}} = \bar{a}_{\text{in}} - \frac{ie_\mu^{(\lambda)} \bar{j}_\mu(\mathbf{k}, \omega)}{\sqrt{2\omega L^3}}; \tag{30}$$

$$b_{\text{out}} = b_{\text{in}} + \frac{ie_\mu^{(\lambda)} q_\nu \dfrac{\partial j_\mu(\mathbf{q}, \varepsilon)}{\partial q_\nu}}{2\sqrt{\varepsilon L^3}}, \quad \bar{b}_{\text{out}} = \bar{b}_{\text{in}} - \frac{ie_\mu^{(\lambda)} q_\nu \dfrac{\partial \bar{j}_\mu(\mathbf{q}, \varepsilon)}{\partial q_\nu}}{2\sqrt{\varepsilon L^3}}; \tag{31}$$

$$c_{\text{out}} = c_{\text{in}} + \frac{ie_\mu^{(\lambda)} j_\mu(\mathbf{q}, \varepsilon)}{2\sqrt{\varepsilon L^3}}, \quad \bar{c}_{\text{out}} = \bar{c}_{\text{in}} - \frac{ie_\mu^{(\lambda)} \bar{j}_\mu(\mathbf{q}, \varepsilon)}{2\sqrt{\varepsilon L^3}}.$$

Здесь

$$j_\mu(p) = \int d^4x' e^{-ipx} j_\mu(x). \tag{32}$$

Введем обозначения

$$\chi_a = \frac{ie_\mu^{(\lambda)} j_\mu(\mathbf{k}, \omega)}{\sqrt{2\omega L^3}}, \quad \chi_b = \frac{ie_\mu^{(\lambda)} q_\nu \dfrac{\partial j_\mu(\mathbf{q}, \varepsilon)}{\partial q_\nu}}{2\sqrt{\varepsilon L^3}},$$
$$\chi_c = \frac{ie_\mu^{(\lambda)} j_\mu(\mathbf{q}, \varepsilon)}{2\sqrt{\varepsilon L^3}}. \tag{33}$$

Начальное вакуумное состояние можно разложить в ряд по ортонормированному базису

$$|\text{in}, 0\rangle = \langle \text{out}, 0|\text{in}, 0\rangle \Big\{ \Big|\text{out}, 0\rangle + \frac{1}{2}(\chi_c + \chi_b)(\bar{c}_{\text{out}} + \bar{b}_{\text{out}})\Big|\text{out}, 0\rangle -$$
$$- \frac{1}{2}(\chi_c - \chi_b)(\bar{c}_{\text{out}} - \bar{b}_{\text{out}})\Big|\text{out}, 0\rangle + \frac{1}{4}(\chi_c^2 + \chi_b^2)(\bar{c}_{\text{out}}^2 + \bar{b}_{\text{out}}^2)\Big|\text{out}, 0\rangle +$$
$$+ \chi_c\chi_b\bar{c}_{\text{out}}\bar{b}_{\text{out}}\Big|\text{out}, 0\rangle - \frac{1}{4}(\chi_c^2 - \chi_b^2)(\bar{c}_{\text{out}}^2 - \bar{b}_{\text{out}}^2)\Big|\text{out}, 0\rangle + \ldots\Big\}. \tag{34}$$

Легко видеть, что необходимым и достаточным условием непоявления b-квантов в конечных состояниях и запрета переходов с «отрицательными вероятностями» было бы

$$c_{\text{out}} = c_{\text{in}}. \tag{35}$$

Легко показать, что условие (35) выполняется, если соответствующим образом изменить запаздывающую и опережающую функции Грина и переопределить граничные условия, а именно запрет появления «нефизических» волн можно, как и в классической электродинамике, осуществить, заменяя в $G_R(x)$ запаздывающий обход полюса второго порядка на полусумму запаздывающего и опережающего обходов, такому же изменению соответственно подвергается $G_A(x)$. Таким образом, вместо (29) имеем [6]:

$$\tilde{G}_R(x) = \frac{\varkappa^2}{8\pi}\theta(t)\theta(-x^2)J_2(\varkappa\sqrt{-x^2}) + \frac{\varkappa^2}{16\pi}\theta(t)\theta(-x^2)J_0(\varkappa\sqrt{-x^2}) - \frac{\varkappa^2}{16\pi}\theta(-t)\theta(-x^2)J_0(\varkappa\sqrt{-x^2}),$$

$$\tilde{G}_A(x) = \frac{\varkappa^2}{8\pi}\theta(-t)\theta(-x^2)J_2(\varkappa\sqrt{-x^2}) + \frac{\varkappa^2}{16\pi}\theta(-t)\theta(-x^2)J_0(\varkappa\sqrt{-x^2}) - \frac{\varkappa^2}{16\pi}\theta(t)\theta(-x^2)J_0(\varkappa\sqrt{-x^2}). \tag{36}$$

С помощью функций (36) решение уравнений (1) можно записать в виде

$$A_\mu(x) = A_\mu^{\underline{\mathrm{in}}}(x) + \int d^4x'\tilde{G}_R(x-x')j_\mu(x') = A_\mu^{\underline{\mathrm{out}}}(x) + \int d^4x'\tilde{G}_A(x-x')j_\mu(x'). \tag{37}$$

где $\underline{\mathrm{in}}$- и $\underline{\mathrm{out}}$-поля удовлетворяют уравнениям свободного поля, а in- и out-поля определяются, как обычно, экстраполяцией взаимодействующих полей при $t \to \pm\infty$

$$A_\mu^{\mathrm{out}}(x) = \lim_{t\to+\infty} A_\mu(x), \quad A_\mu^{\mathrm{in}}(x) = \lim_{t\to-\infty} A_\mu(x). \tag{38}$$

Из (37) следует, что связь между out- и in-операторами совпадает с (31), а связь между $\underline{\mathrm{out}}$- и $\underline{\mathrm{in}}$-операторами осуществляется в виде

$$a_{\underline{\mathrm{out}}} = a_{\underline{\mathrm{in}}} + \chi_a, \quad b_{\underline{\mathrm{out}}} = b_{\underline{\mathrm{in}}} - 2\chi_c, \quad c_{\underline{\mathrm{out}}} = c_{\underline{\mathrm{in}}}, \tag{39}$$

т. е. так, как требуется условием (35). Итак, запрет порождения b-квантов в конечных состояниях и переходов с «отрицательными вероятностями» осуществляется заменой функций Грина $G_R \to \tilde{G}_R$, $G_A \to \tilde{G}_A$ и переопределением граничных условий $|\mathrm{out}, \psi\rangle \to |\underline{\mathrm{out}}, \psi\rangle$, $|\mathrm{in}, \varphi\rangle \to |\underline{\mathrm{in}}, \varphi\rangle$.

Безусловно существенное значение имеет вопрос о возможности построения макропричинной теории, использующей индефинитную метрику. Некоторые предварительные заключения по этому вопросу можно составить, рассматривая поле излучения классического внешнего тока. Пусть ток $j_\mu^{(1)}(x)$ отличен от нуля в интервале $t' < t < t_1$, ток $j_\mu^{(2)}(x)$ отличен от нуля в интервале $t_2 < t < t''$. Поле $A_\mu(x)$ в интервале времен $t_1 < t < t_2$ с помощью функций (36) может быть записано в виде

$$A_\mu(x) = A_\mu^{\mathrm{in}}(x) + \int d^4x'\tilde{G}_R(x-x')J_\mu(x') = A_\mu^{\mathrm{out}}(x) + \int d^4x'\tilde{G}_A(x-x')J_\mu(x'), \tag{40}$$

где

$$J_\mu(x) = j_\mu^{(1)}(x) + j_\mu^{(2)}(x). \tag{41}$$

Из (40) имеем

$$A_\lambda^{\text{in}}(x)+\frac{1}{(2\pi)^4}\int d^4x'\int\limits_{C_R} d^4k e^{ik(x-x')}\left[\frac{1}{k^2}-\frac{1}{k^2+\varkappa^2}-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{2(k^2+\varkappa^2)^2}\right]j_\mu^{(1)}(x')-\frac{\varkappa^2}{2(2\pi)^4}\int d^4x'\int\limits_{C_A} d^4k e^{ik(x-x')}\frac{j_\mu^{(2)}(x')}{(k^2+\varkappa^2)^2}=$$

$$=A_\mu^{\text{out}}(x)+\frac{1}{(2\pi)^4}\int d^4x'\int\limits_{C_A} d^4k e^{ik(x-x')}\left[\frac{1}{k^2}-\frac{1}{k^2+\varkappa^2}-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{(k^2+\varkappa^2)^2\,2}\right]j_\mu^{(2)}(x')-\frac{\varkappa^2}{2(2\pi)^4}\int d^4x'\int\limits_{C_R} d^4k e^{ik(x-x')}\frac{j_\mu^{(1)}(x')}{(k^2+\varkappa^2)^2},\qquad(42)$$

откуда следует

$$A_\mu(x)=A_\mu^{\text{in}}(x)+\int d^4x' G_R^{\text{Б. П.}}(x-x')\,j_\mu^{(1)}(x')=$$
$$=A_\mu^{\text{out}}(x)+\int d^4x' G_A^{\text{Б. П.}}(x-x')\,j_\mu^{(2)}(x'),\qquad(43)$$

где

$$G^{\text{Б. П.}}(x)=\frac{1}{(2\pi)^4}\int d^4k e^{ikx}\left[\frac{1}{k^2}-\frac{1}{k^2+\varkappa^2}\right].\qquad(44)$$

Таким образом, поле $A_\mu(x)$ в интервале $t_1<t<t_2$ имеет такой же вид, как если бы исходными были не уравнения 6-го порядка (1), а уравнения Боппа — Подольского, и при этом запаздывающая и опережающая функции Грина определяются обычным образом. Резюмируя, можно сказать, что теория, использующая индефинитную метрику с дипольными «призрачными» состояниями, может быть макропричинной за счет частичного снятия регуляризации, которое, однако, не нарушит сходимости интегралов. Подробнее эти вопросы будут обсуждены в следующей статье.

В заключение выражаю глубокую благодарность Ф. И. Федорову за постоянное внимание к работе.

Литература

1. Pais A., Uhlenbeck G. E. Phys. Rev., **79**, 145, 1950.
2. Боголюбов Н. Н., Медведев Б. В., Поливанов М. К. Научн. докл. высшей школы, сер. ф.-м., № 2, 137, 1958.
3. Славнов Д. А., Суханов А. Д. ЖЭТФ, **36**, 1472, 1959.
4. Heisenberg W. Nucl. Phys., **4**, 532, 1957.
5. Heisenberg W. Zs. f. Phys., **144**, 1, 1956.
6. Романова Т. С., Федоров Ф. И. Весці АН БССР, сер. ф.-м., № 2, 47, 1965.
7. Ахиезер А. И., Берестецкий В. Б. Квантовая электродинамика. Госиздат, М., 1959.
8. Froissart M. Nuovo Cim. Suppl., **14**, 197, 1959.

Институт физики АН БССР

Поступило в редакцию 24.II 1967

ВЕСЦІ АКАДЭМІІ НАВУК БЕЛАРУСКАЙ ССР № 2 1967
СЕРЫЯ ФІЗІКА-МАТЭМАТЫЧНЫХ НАВУК

УДК 539.166

Л. А. БАРЫСАГЛЕБСКІ, С. В. ПАЗОЙСКІ

АБ ВЫЗНАЧЭННІ ЯДЗЕРНЫХ ПАРАМЕТРАЎ З ЭКСПЕРЫМЕНТАЛЬНЫХ КАЭФІЦЫЕНТАЎ УНУТРАНАЙ КАНВЕРСІІ (КУК) ПРЫ *М*1-ПЕРАХОДАХ ЯДРАЎ

Пытанне аб вызначэнні ядзерных параметраў з эксперыментальных КУК пры моцна забароненых пераходах у апошні час набывае значную цікавасць, паколькі параўнанне эксперыментальных значэнняў гэтых параметраў з іх тэарэтычнымі ацэнкамі дазваляе зрабіць вывад аб прыдатнасці розных ядзерных мадэляў да таго ці іншага канкрэтнага ядра.

У агульнае выражэнне для КУК ядзерныя параметры ўваходзяць заўсёды з пэўнымі вагавымі множнікамі, якія называюцца электроннымі фактарамі [1] або параметрамі [2]. Дакладнасць вызначэння ядзерных параметраў з эксперыментальных КУК, такім чынам, абумоўліваецца дакладнасцю разліку электронных фактараў. Паколькі апошнія вызначаюцца хвалевымі функцыямі электрона ўнутры ядра, то яны павінны прыкметна залежаць ад памераў, формы і размеркавання зараду ядра*).

Гэта залежнасць і даследуецца ў дадзенай рабоце для *М*1-пераходаў і $Z=20$, 64, 81, 92. Для выпадку $Z=81$ зроблена параўнанне эксперыментальных і тэарэтычных значэнняў вядучага ядзернага параметра для канкрэтнага моцна затарможанага пераходу Tl^{203} з энергіяй 279 *кэв*.

Агульная формула для магнітных дыпольных КУК без уліку структурных папраўак у парцыяльных КУК з бо́льшым $|\varkappa|$**) у рэлятывісцкай сістэме адзінак мае выгляд [1]

$$\beta^{(1)}_{K,L_{\mathrm{I}},\ldots} = \frac{2\pi\alpha k}{3}\left\{2\left|R^{(1)}_{-1,-1}(m) + i\sum_{\nu} q^{+}_{\nu}(m)\,u^{+}_{\nu}(m)\right|^{2} + |R^{(1)}_{2,-1}(m)|^{2}\right\}. \quad (1)$$

Тут α — пастаянная тонкай структуры; k — энергія пераходу; $R^{(1)}_{-1,-1}(m)$, $R^{(1)}_{2,-1}(m)$ — асноўныя радыяльныя інтэгралы, якія вызначаюцца паводзінамі хвалевых функцый электрона на ўсёй працягласці атама і таму слаба залежаць ад формы ядра і ад таго ці іншага размеркавання ядзернага зараду (мы іх будзем лічыць зададзенымі). Для канечнага сферычнага ядра з радыусам

$$R = 1{,}20 \cdot A^{1/3} \cdot 10^{-13}\ \textit{см} \quad (2)$$

і пастаяннай аб'ёмнай шчыльнасцю зараду $R^{(1)}_{-1,-1}(m)$ і $R^{(1)}_{2,-1}(m)$ пратабуліраваны Слівам і Бандам [4], а для кропкавага ядра — Роузам [5]. Велічыні $u^{+}_{\nu}(m)$ — прыведзеныя ядзерныя параметры:

---

*) У гэтых адносінах паводзіны электронных фактараў аналагічныя паводзінам прыведзенай імавернасці *EO*-канверсіі [3].

**) $\varkappa$ — рэлятывісцкі квантавы лік, які вызначае канчатковы стан канверсійнага электрона.

$$u^{+}_{\nu=2\mu+1}(m)=\frac{\int\limits_0^R d\tau_n\,\mathbf{j}_n[\mathbf{r}_n\vec{\nabla}_n]\,Y_1^0(\vartheta_n,\ \varphi_n)(r_n/R)^{2\mu+3}}{\int\limits_0^R d\tau_n\,\mathbf{j}_n[\mathbf{r}_n\vec{\nabla}_n]\,Y_1^0(\vartheta_n,\ \varphi_n)(r_n/R)},\quad \mu=0,1,\ldots,\tag{3}$$

j_n — шчыльнасць току пераходу; R — эквівалентны радыус ядра; $Y_1^0(\vartheta_n,\ \varphi_n)$ — шаравая функцыя; індэкс n адносіцца да нуклона*); $q_\nu^+(m)$ — электронныя фактары.

Ядзерныя параметры могуць вызначацца па-іншаму, а іменна:

$$u^{+*}_{\nu=2\mu+1}(m)=\frac{\int\limits_0^R d\tau_n\,\mathbf{j}_n[\mathbf{r}_n\vec{\nabla}_n]\,Y_1^0(\vartheta_n,\ \varphi_n)\,r_n^{2\mu+3}}{\int\limits_0^R d\tau_n\,\mathbf{j}_n[\mathbf{r}_n\vec{\nabla}_n]\,Y_1^0(\vartheta_n,\ \varphi_n)\,r_n},\tag{3'}$$

так што

$$u^{+*}_{\nu=2\mu+1}(m)=u_\nu^+(m)\,R^{2\mu+2}.\tag{4}$$

Гэта непрыведзеныя ядзерныя параметры.

Адпаведна зменяцца і электронныя фактары:

$$q^{+*}_{\nu=2\mu+1}(m)=q_\nu^+(m)/R^{2\mu+2}.\tag{4'}$$

Здабытак жа $q_\nu^+(m)\,u_\nu^+(m)$ застаецца нязменным.

У гэтай рабоце мы будзем прытрымлівацца галоўным чынам вызначэння ядзерных параметраў паводле (3), і вось па якой прычыне.

З (3) і (3′) відаць, што ядзерныя параметры пры двух розных іх вызначэннях залежаць ад эквівалентнага радыуса ядра R, аднак пры вызначэнні $u_\nu^+(m)$ па формуле (3) яны залежаць ад R значна слабей, чым пры вызначэнні па формуле (3′). Для грубай жа адначастковай мадэлі ядра**) $u_\nu^+(m)$ і зусім не залежаць ад R. Так, напрыклад, $u_1^+(m)=5/7$ $\left(\text{у той час як } u_1^{+*}(m)=\frac{5}{7}R^2\right)$. Такім чынам, вызначэнне (3) ядзерных параметраў варта лічыць больш мэтазгодным, чым (3′), паколькі ў першым выпадку ўплыў эквівалентных памераў ядра будзе выяўляцца значна слабей на ядзерных параметрах, але значна мацней на электронных фактарах.

Электронныя фактары $q_\nu^+(m)$ у [1] прадстаўлены ў выглядзе

$$q_\nu^+(m)=a_{-1}(\varepsilon)\,a_{-1}(E)\,b_\nu^+,\tag{5}$$

дзе множнікі $a_\varkappa$ і $a_{\varkappa_0}$ задаюцца прыбліжанымі, правільнымі пры выкананні ўмоў $\alpha ZR\ll 1$, $k\ll 50$ аналітычнымі выразамі, а b_ν^+ — дакладнымі. Сувязь $q_\nu^+(m)$ з электроннымі параметрамі $C_{\nu,-1}$, уведзенымі ў [2], простая:

$$C_{\nu,-1}=2q_\nu^+(m)\sqrt{\frac{\pi\alpha k}{3}}.\tag{5'}$$

---

*) Такое ж вызначэнне ядзерных параметраў $u_\nu^+(m)$ даецца ў рабоце Грына і Роуза [11].

**) Калі радыяльныя часткі хвалевых функцый ядра Ψ_f і Ψ_i аднолькавыя, пастаянныя ў межах ад 0 да R і знікаюць па-за гэтымі межамі [12].

Даследаванне ўплыву неаднароднасці зараду і дэфармацыі ядра на электронныя фактары $q_\nu^+(m)$ з выкарыстаннем аналітычных выразаў для $a_\varkappa$, $a_{\varkappa_0}$, b_ν^+ з [1] праводзім аналагічна таму, як гэта рабілася ў [3]. У табл. 1 прыведзены адносіны колькасных значэнняў электронных фактараў $q_\nu^+(m)$, разлічаных як на аснове эквівалентнага аднароднага аб'ёмнага размеркавання зараду ядра з радыусам

$$R' = lA^{1/3}\left[1 + \frac{5}{2}\sigma - \frac{21}{8}\sigma^2 + \ldots + \right.$$

$$\left. + \frac{5}{8\pi}\beta^2\left(1 - \frac{13}{2}\sigma + \frac{173}{10}\sigma^2 - \ldots\right)\right]^{*)}, \tag{6}$$

так і на аснове эквівалентнага неаднароднага размеркавання са шчыльнасцю зараду [6]

$$\rho(r) = \frac{21}{16\pi R''^3}\left[1 - \left(\frac{r}{R''}\right)^4\right], \tag{7}$$

да адпаведных колькасных значэнняў электронных фактараў, атрыманых з дапамогаю звычайна выкарыстоўваемага эквівалентнага аднароднага размеркавання зараду ядра з радыусам, які задаецца (2). Гэтыя адносіны абазначаны ў табл. 1 праз w_ν.

Размеркаванне зараду, якое задаецца (7), згодна [6], лепш апраксіміруе эксперыментальныя крывыя размеркавання зараду, чым аднароднае. Розныя велічыні, што ўваходзяць у (6) і (7), абазначаюць [3]:

$$\sigma = \frac{1}{3}\left(\frac{\pi a}{lA^{1/3}}\right)^2; \quad \frac{a}{l} = \frac{2{,}49}{1{,}123\ln 3}; \quad l = 1{,}123\cdot 10^{-13}\ \text{см}; \tag{8}$$

$$R'' = \frac{3}{\sqrt{7}}R'; \tag{9}$$

β — параметр несферычнасці пры дапушчэнні квадрупольнай дэфармацыі ядра.

У табл. 1 таксама прыведзены вынікі даследавання ўплыву неаднароднасці размеркавання зараду і дэфармацыі ядра на велічыні $R^{(2)}_{-1,-1}(m, 1) = i\sum\limits_\nu q_\nu^+(m)$, г. зн. на структурныя папраўкі ў КУК (гл. (1)) пры значэннях $u_\nu^+(m) = 1$**).

З табл. 1 відаць, што неаднароднасць размеркавання зараду (згодна (7)) моцна ўплывае на электронныя фактары (асабліва пры $\nu > 1$), што вядзе да значнага змянення эксперыментальных значэнняў ядзерных параметраў, якія вызначаюцца з эксперыментальных КУК. Даследаванні паказалі, што гэты вывад справядлівы для любых значэнняў энергіі пераходу (напрыклад, памяншэнне k у 3—4 разы для выпадку $Z = 64$ прыводзіць да змянення w_ν на 1 %) і для $L_{\text{I}-\text{II}}$-падабалонак (w_ν, падлічанае для $Z = 81$, мяняецца тут менш чым на 1 % у параўнанні з w_ν для K-абалонкі).

У заключэнне параўнаем эксперыментальнае і тэарэтычнае значэнні ядзернага параметра $u_1^+(m)$ для канкрэтнага $(M1 + E2)$-пераходу Tl^{203} з энергіяй 279 *кэв* і з забароненай кампанентай $M1$.

---

*) Формула (6) з'яўляецца абагульненнем вядомай формулы Элтона [9] на выпадак несферычных ядраў.

**) Пры аднародным размеркаванні ядзернага зараду гэтыя структурныя папраўкі звычайна называюць папраўкамі па Сліву [8].

Табліца 1

Адносіны электронных фактараў пры ядзерных параметрах, якія вызначаюцца суадносінамі (3)

Z	β	k*)	Размеркаванне зараду ядра: Эквівалентнае аднароднае, $w_\nu = \frac{\overset{+}{q}_\nu(R')}{\overset{+}{q}_\nu(R)}$, $\nu=1$	$\nu=3$	$\nu=5$	$w = \frac{R^{(2)\prime}_{-1,\,-1}(m;\,1)}{R^{(2)}_{-1,\,-1}(m;\,1)}$	Эквівалентнае неаднароднае, $w_\nu = \frac{\overset{+}{q}_\nu(R'')}{\overset{+}{q}_\nu(R)}$, $\nu=1$	$\nu=3$	$\nu=5$	$w = \frac{R^{(2)\prime\prime}_{-1,\,-1}(m;\,1)}{R^{(2)}_{-1,\,-1}(m;\,1)}$
20	0	1,01	1,07	1,07	1,08	1,07,	1,45	2,15	2,96	1,38
64	0,46	1,12	1,03	1,03	1,03	1,04	1,36	2,07	2,85	1,46
81	0,186	0,546	1,00	1,00	1,00	1,00	1,33	1,90	2,68	1,22
92	0	1,26	1,00	0,98	0,97	1,01	1,36	1,89	2,67	1,30

*) k — энергія пераходу ядра ў адзінках $m_0 c^2$, дзе m_0 — маса спакою электрона; c — хуткасць святла.

Табліца 2

Адносіны электронных фактараў пры ядзерных параметрах, якія вызначаюцца суадносінамі (3′)

Z	β	k	Размеркаванне зараду ядра: Эквівалентнае аднароднае, $w_\nu = \frac{\overset{+}{q}_\nu(R')}{\overset{+}{q}_\nu(R)}$, $\nu=1$	$\nu=3$	$\nu=5$	$w = \frac{R^{(2)\prime}_{-1,\,-1}(m;\,1)}{R^{(2)}_{-1,\,-1}(m;\,1)}$	Эквівалентнае неаднароднае тыпу (9), $w_\nu = \frac{\overset{+}{q}_\nu(R'')}{\overset{+}{q}_\nu(R)}$, $\nu=1$	$\nu=3$	$\nu=5$	$w = \frac{R^{(2)\prime\prime}_{-1,\,-1}(m;\,1)}{R^{(2)}_{-1,\,-1}(m;\,1)}$
20	0	1,01	0,90	0,76	0,64	0,88	0,95	0,92	0,83	0,93
64	0,46	1,12	0,96	0,89	0,83	0,92	0,98	1,08	1,14	1,00
81	0,186	0,546	1,00	1,00	1,00	1,00	1,04	1,16	1,28	1,06
92	0	1,26	1,03	1,04	1,06	1,04	1,09	1,21	1,37	1,11

Герлендэр і Грэхем [7] прыводяць у якасці найбольш верагоднага эксперыментальнага значэння $u_1^+(m) = 7$. Гэты лік атрыманы імі шляхам параўнання эксперыментальных КУК з тэарэтычнымі. Тэарэтычная ж ацэнка $u_1^+(m)$ зроблена ў [6] на аснове абалончатай мадэлі ядра без уліку змешвання канфігурацый. Атрыман лік 12, які, як мы бачым, даволі моцна адрозніваецца ад эксперыментальнага.

Можна атрымаць яшчэ адну тэарэтычную ацэнку $u_1^+(m)$, зыходзячы з вынікаў даследаванняў унутранай канверсіі пры пераходзе Tl^{203} (279 *кэв*), выкананых Кіслінгерам [10].

Пры разліку ядзерных параметраў Кіслінгер выкарыстоўвае абалончатую мадэль ядра з улікам міжканфігурацыйнага ўзаемадзеяння. У якасці аператара ўзбуджэння ўзята ўзаемадзеянне паміж нуклонамі тыпу

$$V_{ik} = \frac{1}{4r_i r_k}\left[V_s\left(1 - \vec{\sigma}_i \vec{\sigma}_k\right) + V_t\left(3 + \vec{\sigma}_i \vec{\sigma}_k\right)\right] \delta(r_i - r_k)\,\delta\left(\frac{\mathbf{r}_i \mathbf{r}_k}{r_i r_k} - 1\right). \quad (10)$$

Тут канстанты

$$V_s = -\frac{1}{A}\frac{\pi^{1/2}}{\nu^{3/2}} \cdot 250 \text{ Мэв}; \quad V_t = 1{,}5 V_s; \quad (11)$$

$\vec{\sigma}_i$, $\vec{\sigma}_k$, $\mathbf{r}_i$, $\mathbf{r}_k$ — спінавыя аператары і радыус-вектары i-га і k-га нуклонаў. Радыяльны параметр вызначаецца ўмовай нарміравання ядзерных хвалевых функцый

$$\int d\tau \Psi_f^* r^2 \Psi_i = \frac{3}{5} R^2, \quad (12)$$

дзе R задаецца суадносінамі (2).

У якасці хвалевых функцый асобных нуклонаў бяруцца функцыі гарманічнага асцылятара. У выніку разлікаў Кіслінгер [10] выявіў залежнасць адносін $\beta_K^{(1)}(u_\nu^+(m))/\beta_K^{(1)}(u_\nu^+(m) = 1)$ ад розных магчымых значэнняў ліку νR^2. Найбольш блізкае да эксперыментальных значэнняў ($\beta_{K\,\text{эксп}}^{(1)}/\beta_K^{(1)}(u_\nu^+(m) = 1) = 0{,}79 \div 0{,}76$ [7]) будзе $\beta_K^{(1)}(u_\nu^+(m))/\beta_K^{(1)}(u_\nu^+(m) = 1)$ у тым выпадку, калі $\nu R^2 = 7$ ($\beta_K^{(1)}(u_\nu^+(m))/\beta_K^{(1)}(u_\nu^+(m) = 1) = 0{,}81$). Першы ядзерны параметр будзе тады роўны $u_1^+(m) = 6{,}26$, г. зн. будзе даволі блізкім да эксперыментальнага ($u_1^+(m)_{\text{эксп}} = 7$). Калі вылічваць электронныя фактары пры ядзерных параметрах шляхам выкарыстання размеркавання ядзернага зараду тыпу (7), то эксперыментальнае значэнне $u_1^+(m)$ будзе роўнае 5,3, тэарэтычнае — 4, 9, а $\beta_K^{(1)}(u_\nu^+(m))/\beta_K^{(1)}(u_\nu^+(m) = 1) = 0{,}80$ і разыходжанне паміж тэорыяй і эксперыментам яшчэ некалькі паменшыцца. Можна чакаць, што пры яшчэ больш дакладным вызначэнні электронных фактараў адносіны $\beta_K^{(1)}(u_\nu^+(m))/\beta_K^{(1)}(u_\nu^+(m) = 1)$ пападуць у вобласць магчымых эксперыментальных значэнняў гэтых адносін (нават пры нязменных значэннях ядзерных параметраў $u_\nu^+(m)$).

Вядома, для больш дакладнага параўнання тэорыі з эксперыментам неабходна мець больш пэўныя значэнні параметра νR^2, чым прыведзеныя ў [10].

Калі вызначыць ядзерныя параметры згодна (3′), то ўплыў памераў, дэфармацыі і неаднароднасці размеркавання зараду ядра на электронныя фактары будзе значна меншы, што ілюструецца табл. 2. Але затое ў гэтым выпадку эквівалентныя памеры ядра будуць адбівацца значна мацней на ядзерных параметрах (гл. стар. 123).

Литература

1. Борисоглебский Л. А. ЖЭТФ, **46**, 1664, 1964.
2. Листенгартен М. А., Фересин А. П. Изв. АН СССР, сер. физ., **29**, 67, 1965.
3. Борисоглебский Л. А. ЖЭТФ, **47**, 1575, 1964.
4. Банд И. М., Листенгартен М. А., Слив Л. А. Изв. АН СССР, сер. физ., **29**, № 1, 1965.
5. Rose M. E. Intern. Conversion Coefficients. N.—H. Publ. Co., Amsterdam, 1958.
6. Church E. L., Weneser J. Ann. Rev. Nucl. Sci., **10**, 193, 1960.
7. Herrlander C. I., Graham R. L. Nucl. Phys., **58**, 544, 1964.
8. Слив Л. А., Банд И. М. Гамма-лучи. Под ред. Л. А. Слива. Изд. АН СССР, М., 1961.
9. Элтон Л. Размеры ядер. ИЛ, 1962.
10. Kisslinger L. S. Phys. Rev., **114**, 292, 1959.
11. Green T., Rose M. E. Phys. Rev., **110**, 105, 1958.
12. Блатт Дж., Вайскопф В. Теоретическая ядерная физика. ИЛ, 1954.

*Белорусский государственный университет
им. В. И. Ленина*

*Поступило в редакцию
2.XII 1966*

ВЕСЦІ АКАДЭМІІ НАВУК БЕЛАРУСКАЙ ССР № 2 1967
СЕРЫЯ ФІЗІКА-МАТЭМАТЫЧНЫХ НАВУК

УДК 535.361

А. П. ІВАНОЎ, І. Д. ШЭРБАФ, П. Б. БОЙКА

ВЫВУЧЭННЕ СТУПЕНІ ПАЛЯРЫЗАЦЫІ СВЯТЛА Ў ВОБЛАСЦІ МАЛЫХ ВУГЛОЎ РАССЕЯННЯ

Пры распаўсюджванні паралельнага палярызаванага пучка святла ў мутным асяроддзі памяншаецца не толькі інтэнсіўнасць выпраменьвання, але і яго ступень палярызацыі. Апошняе звязана з тым, што па меры павелічэння шляху, які праходзіць выпраменьванне, уклад шматкратна рассеянага дэпалярызаванага святла ў агульным энергетычным балансе ўзрастае.

Цікавым з'яўляецца ўстанаўленне ўзаемасувязі паміж аслабленнем інтэнсіўнасці святла і яго палярызацыяй як у напрамку распаўсюджвання прамой радыяцыі, так і ў вобласці малых вуглоў рассеяння. Разгляд гэтай задачы можа ў пэўнай ступені даць адказ адносна магчымасці прымянення палярызацыйных вымярэнняў да рашэння пытання аб празрыстасці асяроддзя, аб месцазнаходжанні ў прасторы крыніцы выпраменьвання, аб умовах, пры якіх прамое святло практычна адсутнічае *).

Даследаванні ўказанага тыпу праведзены намі эксперыментальна. У якасці рассейваючага асяроддзя выбрана эмульсія малака. Апісанымі раней спосабамі [1—3] існавала магчымасць вымяраць і кантраляваць індыкатрысу рассеяння элементарнага аб'ёму $x(\gamma)$ (яе выгляд можна знайсці ў [4]), аптычную тоўшчу асяроддзя $\tau=\varepsilon l$ (ε — паказчык экстынкцыі, l — геаметрычная таўшчыня) і верагоднасць выжывання фатона $\Lambda=\sigma/\varepsilon$ (σ — паказчык рассеяння). Апошняя характарыстыка ва ўсіх доследах заставалася пастаяннай і блізкай да адзінкі.

Схема ўстаноўкі, на якой праводзіліся вымярэнні, дадзена на рыс. 1. Адлюстраванне крыніцы святла *1* з дапамогай лінзы *2* ствараецца ў плоскасці дыяфрагмы *3*. Дыяфрагма з усяго адлюстравання выразае невялікі ўчастак парадку доляў міліметра. Даўгафокусны высакаякасны каліматар *4*, што знаходзіцца на фокуснай адлегласці ад дыяфрагмы *3*, стварае пучок святла, які слаба разыходзіцца. Такі пучок святла праходзіць праз кювету *5* з даследуемай эмульсіяй. За кюветай размешчаны таксама даўгафокусны ($f=1$ *м*) высакаякасны каліматар *6*, які збірае паралельныя праменні ў плоскасці адлюстравання, дзе размешчана дыяфрагма *7*, што прапускае праз сябе праменні ў апертурным вугле $2\gamma_{пр}$. За дыяфрагмай *7* размешчаны фотапамнажальнік *8* з узмацняльнай схемай, які рэгіструе праходзячы паток святла.

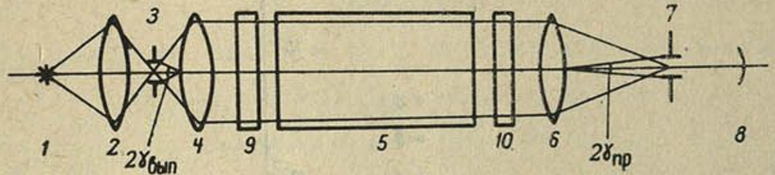
Калі другая дыяфрагма знаходзіцца на восі пучка, то прыёмнік рэгіструе прамое святло, калі ж яе вывесці за межы адлюстравання дыяфрагмы *3*, то на фотапамнажальнік падае святло, рассеянае ў кювеце.

Уваходная адтуліна прыёмнай сістэмы вызначалася рабочым дыяметрам лінзы *6* і была такая, што ўсё рассеянае асяроддзем святло ў

*) Пад прамым святлом разумеецца тая доля электрамагнітнага выпраменьвання, якая не ўзаемадзейнічала з цэнтрамі рассеяння.

разглядаемым апертурным вугле прыёмніка $2\gamma_{\text{пр}}$ поўнасцю пападала на фотапамнажальнік.

У разглядаемым доследзе расхадзімасць падаючага на кювету выпраменьвання, што вызначаецца апертурным вуглом $2\gamma_{\text{вып}}$, роўна $24'$. Прыёмнае прыстасаванне пры малых аптычных тоўшчах рэгістравала святло ў вугле $2\gamma_{\text{пр}}=25''$, а пры вялікіх τ — у вугле $2\gamma_{\text{пр}}=4'$. Такім чынам, ва ўсіх выпадках вуглавое вырашчэнне прыёмніка было дастаткова высокім у параўнанні з расхадзімасцю першаснага выпраменьвання.



Рыс. 1. Схема ўстаноўкі да вывучэння ступені палярызацыі святла ў вобласці малых вуглоў рассеяння:

1 — крыніца святла; *2, 4, 6* — лінзы; *3, 7* — дыяфрагмы; *5* — кювета; *8* — фотапамнажальнік; *9, 10* — паляроіды

Для правядзення доследаў у палярызаваным святле ў выпраменьвальным і прыёмным прыстасаваннях устаноўлены паляроіды *9* і *10*. Святло, палярызаванае ў гарызантальнай плоскасці, падала на асяроддзе. Вымяраючы адлікі на I_p і I_s на гальванометры пры дзвюх узаемна перпендыкулярных плоскасцях аналізатара, атрымліваем выразы для ступені палярызацыі

$$P=\frac{I_p-I_s}{I_p+I_s}$$

і інтэнсіўнасці святла

$$I=I_p+I_s{}^{*)}.$$

Пяройдзем да разгляду атрыманых даных. На рыс. 2 паказана залежнасць ступені палярызацыі і каэфіцыента прапускання святла ад аптычнай тоўшчы пры вугле рассеяння $\gamma=0$.

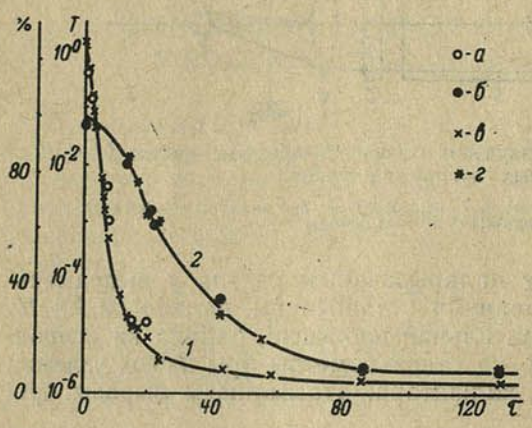
Пад каэфіцыентам прапускання T разумеюцца адносіны патокаў, якія прайшлі праз замутненае і незамутненае асяроддзе ў цялесным вугле, што характарызуецца апертурным вуглом прыёмніка $2\gamma_{\text{пр}}$. З рысунка відаць, што пры малых τ ступень палярызацыі павольна памяншаецца з ростам τ, затым наглядаецца хуткае зніжэнне P, і нарэшце, калі $\tau\to\infty$, выпраменьванне поўнасцю дэпалярызуецца. З параўнання з крывой, $T=f(\tau)$, паказанай на гэтым рысунку, вынікае, што пакуль роля нерассеянага святла вялікая, выпраменьванне застаецца палярызаваным. Такая з'ява захоўваецца для дастаткова замутненага асяроддзя, дзе інтэнсіўнасць прамога святла падае на 5 парадкаў. Затым наглядаецца рост уплыву шматразова рассеянага святла ў агульным балансе радыяцыі, і ў выніку ступень палярызацыі выпраменьвання хутка памяншаецца. Калі ж настае так званы таўшчынны рэжым, дзе святло гранічна рассеянае, то ў нулявым напрамку выпраменьванне, натуральна, дэпалярызавана. Варта зазначыць, што палярызацыя практычна не залежыць ад вугла прыёму радыяцыі, аб чым сведчаць даныя на рыс. 2, прыведзеныя для $2\gamma_{\text{пр}}$, роўных $25''$ і $4'$**). З рысунка таксама вынікае, што P не можа

*) Папярэднімі даследаваннямі было паказана, што не наглядаецца залежнасці адчувальнасці прыёмніка ад палярызацыі выпраменьвання.

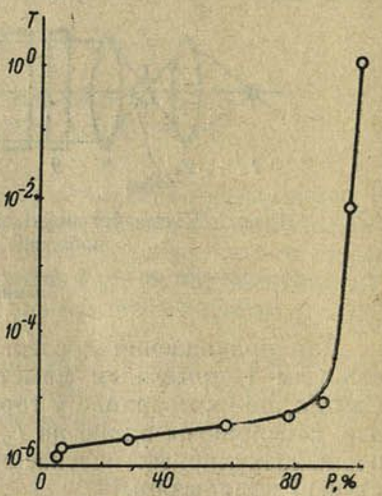
**) Гэты вывад, натуральна, мае пэўныя межы прымянімасці.

быць зручнай характарыстыкай празрыстасці асяроддзя, паколькі яна з'яўляецца малаадчувальнай функцыяй інтэнсіўнасці святла. Гэта асабліва наглядна відаць на рыс. 3, дзе паказана ўзаемасувязь T і P, рэалізаваная пры рознай замутненасці асяроддзя.

Характар вуглавога размеркавання ступені палярызацыі выпраменьвання прадстаўлены на рыс. 4. Тут па восі ардынат нанесена ступень палярызацыі ў працэнтах, а па восі абсцыс — вугал рассеяння ў градусах. Розныя крывыя адпавядаюць розным аптычным тоўшчам асяроддзя.

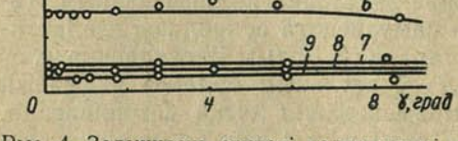


Рыс. 2. Залежнасць каэфіцыента прапускання T (*1*) і ступені палярызацыі P (*2*) ад τ (*а*, *б* — для $2\gamma_{пр}=25''$; *в*, *г* — $4'$)



Рыс. 3. Узаемасувязь прапускання прама прайшоўшага святла T і ступені яго палярызацыі P

Добра відаць адсутнасць залежнасці ступені палярызацыі ад вугла рассеяння ў межах 9°. Пры розных γ ступень палярызацыі памяншаецца з ростам τ па закону, графічна апісанаму на рыс. 2 крывой *2*, якая адпавядае $\gamma=0$. Адсюль адразу вынікае вывад, што для ацэнкі інтэнсіўнасці прамога святла і месцаразмяшчэння крыніцы святла палярызацыйны метад непрыгодны.



Рыс. 4. Залежнасць ступені палярызацыі P ад вугла рассеяння γ для розных τ: *1* — $\tau=0$; *2*—5; *3*—14; *4*—18; *5*—28; *6*—46; *7*—110; *8*—138; *9*—212

Наглядаемая з'ява можа быць вытлумачана наступным чынам.

Калі на рассейваючыя часцінкі ў напрамку γ падае паралельны палярызаваны пучок святла, то святло, рассеянае імі ў гэтым жа напрамку, поўнасцю палярызаванае. Больш таго, ступень палярызацыі аднаразова рассеянага святла захоўваецца нязменнай і пры малых вуглах рассеяння. Калі гэта святло выклікае другаснае рассеянне, то яно таксама будзе мець $P\approx 100\%$ пры адхіленнях ад γ і г. д. Вось чаму ступень палярызацыі практычна не залежыць ад вугла рассеяння. Памяншэнне P з павелічэннем τ абумоўлена ростам укладу, дадзенага касымі праменнямі n-кратнасці ў напрамку, блізкім да γ. Гэтыя праменні з прычыны іх сіметрычнага размеркавання адносна напрамку даюць у гэтым напрамку рэзультуючае дэпалярызаванае выпраменьванне.

Даныя па палярызацыйных характарыстыках атрыманы намі для слабапаглынаючага асяроддзя. Варта адзначыць, што ў паглынаючых сістэмах дэпалярызацыя з павелічэннем τ або γ расце павольней, чым у разгледжаным выпадку.

Літаратура

1. Иванов А. П., Шербаф И. Д. Весці АН БССР, сер. фіз.-тэхн. навук, № 2, 1962.
2. Левин И. М., Иванов А. П. Опт. и спектр., 18, 920, 1965.
3. Иванов А. П., Ильич Г. К. ЖПС, 2, вып. 4, 1965.
4. Иванов А. И., Хайруллина А. Я. Изв. АН СССР, сер. физ. атмосферы и океана, № 7, 1966.

Институт физики АН БССР

Поступило в редакцию 29.XII 1966

ВЕСЦІ АКАДЭМІІ НАВУК БЕЛАРУСКАЙ ССР № 2 1967
СЕРЫЯ ФІЗІКА-МАТЭМАТЫЧНЫХ НАВУК

КАРОТКІЯ ПАВЕДАМЛЕННІ

УДК 512.8

В. Н. ЛАПТИНСКИЙ

ЗАМЕЧАНИЕ К ТЕОРЕМЕ ЛАПЛАСА

Пусть даны квадратные $n \times n$ матрицы $\mathrm{A} = [a_{ij}]_1^n$, $\mathrm{B} = [b_{ij}]_1^n$. Будем рассматривать определители этих матриц, обозначая их соответственно $\det \mathrm{A} = |a_{ij}|_1^n = A$, $\det \mathrm{B} = |b_{ij}|_1^n = B$. Известна теорема Лапласа ([1], стр. 51) о разложении определителя по нескольким строкам или столбцам. Эта теорема, как известно, обобщает результат о разложении определителя по строке или столбцу. Ниже приводится теорема, являющаяся обобщением теоремы Лапласа.

Определение 1. В определителе A порядка n выбираем произвольные k строк, $1 \leqslant k \leqslant n-1$. Блок, состоящий из элементов указанных строк, будем называть квази-минором M k-го порядка определителя A.

Определение 2. Блок, образованный элементами оставшихся $n-k$ строк, назовем алгебраическим квази-дополнением M' квази-минора M.

Теорема. *Пусть в определителях A и B порядка n произвольно выбраны k строк, $1 \leqslant k \leqslant n-1$. Тогда произведение AB этих определителей можно представить следующими формулами:*

$$\sum_{m=1}^{r} A_{im} B_{mi} = AB, \quad i = 1,\ 2,\ \dots,\ r; \quad r = C_n^k,$$

где A_{pq} есть определитель, полученный из A заменой его квази-минора с номерами строк $p_1, p_2, \dots, p_k$ квази-минором с номерами строк $q_1, q_2, \dots, q_k$ определителя B; остальные $n-k$ строк есть алгебраическое квази-дополнение определителя A, соответствующее квази-минору с номерами строк $p_1, p_2, \dots, p_k$ этого определителя. Определители B_{hs} определяются по аналогичной схеме.

Доказательство. Рассмотрим квадратную матрицу порядка $r = C_n^k$

$$D = A_\alpha B_\gamma B_\alpha A_\gamma . \tag{1}$$

Здесь A_α, B_α есть матрицы порядка $r = C_n^k$, составленные из алгебраических дополнений миноров k-го порядка соответственно определителей A, B и затем транспонированные, т. е. аналогичные присоединенной матрице в [1] (стр. 96). A_γ, B_γ суть матрицы порядка $r = C_n^k$, составленные из миноров k-го порядка соответственно определителей A, B. Элементы в A_γ, B_γ располагаем соответственно расположению элементов в A_α, B_α. С одной стороны, из (1) имеем

$$D = (A_\alpha (B_\gamma B_\alpha) A_\gamma) = E_{AB}, \tag{2}$$

так как, по теореме Лапласа, $B_\gamma B_\alpha = E_B$, $A_\alpha A_\gamma = E_A$. Здесь E_H есть диагональная матрица с элементами H по главной диагонали.

С другой стороны, из (1) получим

$$D = (A_\alpha B_\gamma)(B_\alpha A_\gamma) = \sum_{m=1}^{r} A_{im} B_{mj}, \tag{3}$$

$$i, j = 1, 2, \ldots, r.$$

Из (2) и (3) получим

$$\sum_{m=1}^{r} A_{im} B_{mj} = \begin{cases} AB, & i = j. \\ 0, & i \neq j \end{cases} \tag{4}$$

Теорема доказана. Полагая

$$A = |a_{ik}|_1^n, \quad B = |b_{ik}|_1^n, \quad b_{ik} = \begin{cases} 1, & i = k, \\ 0, & i \neq k \end{cases}$$

получим из (4) теорему Лапласа

$$\sum_{m=1}^{r} A_{im} B_{mj} = \begin{cases} A, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}.$$

Следствие. Полагая $A = |a_{ik}|_1^n$, $B = A'$, где A' получен транспонированием A, получим из (4) следующее тождество:

$$\sum_{m=1}^{r} A_{im}^{(1)} B_{mj}^{(1)} = \begin{cases} A^2, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}.$$

Здесь в $A_{im}^{(1)}$, $B_{sk}^{(1)}$ присутствуют лишь элементы определителя A.

Замечание. Теорема Лапласа (обобщенная) справедлива, если во всех выше приведенных рассуждениях оперировать столбцами. Эта теорема имеет приложения, например, при исследовании приближенных интегральных матриц линейных дифференциальных систем [2].

Литература

1. Курош А. Г. Курс высшей алгебры. Изд. «Наука», М., 1965.
2. Лаптинский В. Н. ДАН БССР, 10, № 11, 1966.

Поступило в редакцию 12.I 1967

Белорусский государственный университет им. В. И. Ленина

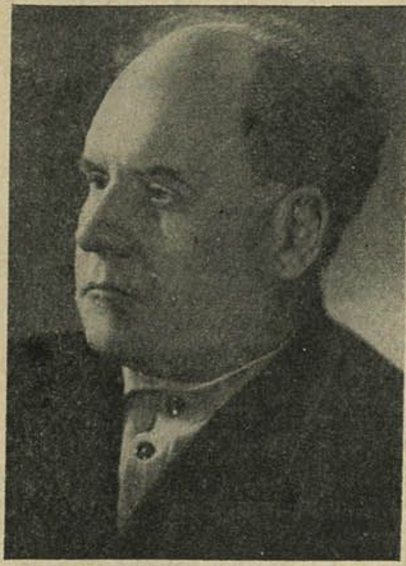
ЛЮДЗІ САВЕЦКАЙ НАВУКІ

НИКОЛАЙ ПАВЛОВИЧ ЕРУГИН

(К 60-летию со дня рождения)

14 мая 1967 г. исполнилось 60 лет со дня рождения известного советского математика академика АН БССР Николая Павловича Еругина.

В 1932 г. Н. П. Еругин закончил физико-математический факультет Ленинградского университета и был оставлен в аспирантуре, которую проходил под руководством академика В. И. Смирнова.



Научно-педагогическую деятельность Николай Павлович начал еще в студенческие годы. С 1931 по 1934 г. он работал ассистентом кафедры высшей математики Ленинградского политехнического института, а с 1934 г.— в Ленинградском университете. В 1937 г. Н. П. Еругин решил проблему Пуанкаре, эту свою работу он защитил в качестве кандидатской диссертации.

С 1939 г. Николай Павлович работает старшим научным сотрудником Математического института Академии наук СССР и продолжает педагогическую работу в Ленинградском университете.

В начале Великой Отечественной войны доцент Н. П. Еругин добровольцем ушел в армию и с сентября 1941 по февраль 1942 г. сражался на Ленинградском фронте на переднем крае обороны. На фронте он был принят в члены КПСС. Н. П. Еругин имеет ряд правительственных наград. Об этом периоде он рассказал впоследствии в своей книге «О тех, кто выстоял».

В феврале 1942 г. Н. П. Еругин получил тяжелое ранение и больше полугода находился в госпитале, а затем по состоянию здоровья был демобилизован.

Еще в госпитале Николай Павлович возвратился к научной работе, здесь он подготовил докторскую диссертацию, которую защитил в 1943 г. в Ленинградском университете. В этом же году ему было присвоено звание профессора.

С 1943 по 1957 г. Николай Павлович возглавляет кафедру дифференциальных уравнений Ленинградского университета, с 1953 по 1957 г. он — заместитель директора Математического института им. В. А. Стеклова АН СССР по Ленинградскому отделению.

В 1951 г. Н. П. Еругину за работы по качественной теории дифференциальных уравнений и теории устойчивости была присуждена Государственная премия. В 1956 г. Николай Павлович избирается академиком АН БССР и вскоре переезжает в Минск. Здесь он возглавляет кафедру дифференциальных уравнений в Белорусском университете и организует лабораторию дифференциальных уравнений в Институте физики и математики АН БССР.

В 1959 г. на базе математических лабораторий Института физики и математики был создан Институт математики АН БССР, Н. П. Еругин — директор этого института.

Большим признанием научных заслуг Николая Павловича является создание в Минске всесоюзного журнала «Дифференциальные уравнения», главным редактором которого стал Н. П. Еругин. Этот журнал приобрел широкую известность как в СССР, так и за рубежом.

Перу Н. П. Еругина принадлежит свыше 60 научных работ (из них четыре монографии [8, 34, 35, 59]), под его руководством защищено более 30 кандидатских и 6 докторских диссертаций.

Научные интересы академика АН БССР Н. П. Еругина весьма разнообразны; основное их направление — теория обыкновенных дифференциальных уравнений и исследования по аналитической и качественной теории линейных и нелинейных систем, теории устойчивости и общей теории.

Первые работы Николая Павловича посвящены аналитической теории линейных дифференциальных уравнений и продолжают знаменитые исследования И. А. Лаппо-Данилевского. Здесь в первую очередь следует отметить решение проблемы Пуанкаре о генеральном представлении показательной подстановки через параметры дифференциальных подстановок в случае иррегулярной особой точки.

Докторская диссертация Николая Павловича посвящена приводимым системам, в ней построена общая теория приводимых систем, а именно выяснена подробно структура решений этих систем, даны условия приводимости систем и решен ряд других проблем, связанных с теорией линейных систем. Следует отметить, что в своих работах Н. П. Еругин весьма эффективно соединил идеи Ляпунова с мощным математическим аппаратом, разработанным Лаппо-Данилевским.

В послевоенное время Николай Павлович занимается исследованиями нелинейных уравнений, неоднократно возвращается и к теории линейных систем. В частности, он уделяет много внимания разработке теории линейных систем с периодическими и квазипериодическими коэффициентами, применяя здесь идеи и методы И. А. Лаппо-Данилевского, А. М. Ляпунова, Н. Н. Боголюбова, И. З. Штокало и других, предлагая и развивая новые идеи и методы. По этим вопросам Н. П. Еругиным написано большое число журнальных статей, две монографии [35, 59]. Последняя монография наиболее полно освещает вопросы теории линейных систем с периодическими и квазипериодическими коэффициентами, многие вопросы в ней решаются впервые.

Большой вклад внес Николай Павлович в аналитическую теорию нелинейных дифференциальных уравнений, особенно по исследованию характера и конфигурации подвижных особых точек. Здесь Николай Павлович предложил ряд новых задач и дал методы их решения. В первую очередь следует отметить постановку задачи о выделении классов систем дифференциальных уравнений без подвижных существенных особых точек. Н. П. Еругин указал довольно широкий класс систем, удовлетворяющих этому свойству, а также дал новый метод исследования асимптотического характера подвижных особенностей названного класса систем.

Большой цикл работ Н. П. Еругина посвящен созданию и разработке теории устойчивости «в целом» и качественной теории. Работами

Н. П. Еругина положено начало систематической разработке теории качественного поведения решений дифференциальных уравнений во всем фазовом пространстве. Он высказал ряд общих теорем и дал многие методы исследования, которые позволили как самому автору, так и его последователям решать различные теории колебаний, автоматического управления и др. Следует отметить, что именно за работы «О некоторых вопросах устойчивости и качественной теории дифференциальных уравнений в целом» [16], «Качественное исследование интегральных кривых систем дифференциальных уравнений» [17] Николай Павлович Еругин был удостоен Государственной премии.

В ряде других работ развиты вопросы продолжимости решений, даны методы построения систем с заданным решением, исследованы характеристики границ различных топологических областей, поставлен и во многих случаях решен ряд новых задач по теории канонических систем, особенно по теории устойчивости их решений.

Оригинальный цикл работ выполнен Н. П. Еругиным и по теории уравнений с частными производными, в частности по теории функционально-инвариантных решений волновых уравнений.

Ему принадлежат также интересные работы по теории неявных функций, теории матриц, алгебраических уравнений и по другим отраслям математики, связанным с дифференциальными уравнениями.

Н. П. Еругин написал ряд обзоров по теории устойчивости, аналитической и качественной теории дифференциальных уравнений, где поставил ряд новых проблем.

Активная научно-педагогическая и большая административная работа Николая Павловича свидетельствует о его неиссякаемых творческих возможностях и большой энергии.

В день 60-летия мы желаем юбиляру многих лет доброго здоровья и больших творческих успехов.

В. И. КРЫЛОВ, А. И. ЯБЛОНСКИЙ,
Ю. С. БОГДАНОВ

СПИСОК ПЕЧАТНЫХ РАБОТ Н. П. ЕРУГИНА

1. Sur la substitution exposante pour quelques systemes irreguliers. Матем. сб., **42**, № 6, 1935, 745—753.
2. Показательная подстановка иррегулярной системы линейных дифференциальных уравнений. ДАН СССР, **17**, № 5, 1937, 235—236.
3. О показательной подстановке системы линейных дифференциальных уравнений (проблема Пуанкаре). Матем. сб., **3(45)**, 1938, 509—526.
4. О проблеме Римана для системы Гаусса. Уч. зап. Ленинградского пед. ин-та, **28**, 1939, 293—304.
5. Замечание к статье Л. М. Шифнера. Изв. АН СССР, сер. матем., **5**, 1941, 377—380.
6. О функционально-инвариантных решениях. ДАН СССР, **42**, № 9, 1944, 385—386.
7. Приводимые системы. Научн. бюлл. ЛГУ, **2**, 1945, 5—6.
8. Приводимые системы. Монография. Тр. Матем. ин-та им. В. А. Стеклова, **13**, 1946.
9. Об асимптотической устойчивости решения некоторой системы дифференциальных уравнений. ПММ, **12**, № 2, 1948, 157—164.
10. Обобщение одной теоремы Ляпунова. ПММ, **12**, № 5, 1948, 633—638.
11. О функционально-инвариантных решениях. Уч. зап. ЛГУ, сер. матем. наук, в. 15, № 96, 1948, 101—134.
12. Функциональчо-инвариантные решения уравнений второго порядка с двумя независимыми переменными. Уч. зап. ЛГУ, сер. матем. наук, в. 16, № 111, 1949, 142—166.
13. Приближенное интегрирование некоторых колеблющихся функций. ПММ, **14**, № 2, 1950, 193—196 (совм. с С. Л. Соболевым).
14. Замкнутое решение параболической граничной неоднородной задачи. ПММ, **14**, № 2, 1950, 215—217.
15. Замечание об интегрировании системы двух уравнений в конечном виде. ПММ, **14**, № 3, 1950, 315.

16. О некоторых вопросах устойчивости движения и качественной теории дифференциальных уравнений в целом. ПММ, **14**, № 5, 1950, 459—512.
17. Качественное исследование интегральных кривых системы дифференциальных уравнений. ПММ, **14**, № 6, 1950, 659—664.
18. О продолжении решений дифференциальных уравнений. ПММ, **15**, в. I, 1951, 55—58.
19. Некоторые общие вопросы теории устойчивости движения. ПММ, **15**, в. 2, 1951, 227—236.
20. К теории дифференциальных уравнений (обыкновенных и в частных производных). ПММ, **15**, в. 3, 1951, 355—366.
21. Теоремы о неустойчивости. ПММ, **16**, в. 3, 1952, 355—361.
22. Аналитическая теория нелинейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений. ПММ, **16**, в. 4, 1952, 465—486.
23. Об одной задаче теории устойчивости систем автоматического регулирования. ПММ, **16**, в. 5, 1952, 620—628.
24. Построение всего множества систем дифференциальных уравнений, имеющих заданную интегральную кривую. ПММ, **16**, в. 6, 1952, 659—670.
25. Обзор работ советских математиков по теории устойчивости движения в кн. «А. М. Ляпунов». Библиография, составила А. М. Лукомская под ред. акад. В. И. Смирнова. Изд. АН СССР, М.—Л., 1953, 89—96.
26. Метод А. М. Ляпунова и вопросы устойчивости движения в целом (доклад на Ленингр. общегор. матем. семинаре). ПММ, **17**, в. 4, 1953, 389—400.
27. Рецензия на книгу И. Г. Малкина «Теория устойчивости движения». Вестник ЛГУ, № 5, 1953, 123—127.
28. Ляпунов Александр Михайлович. БСЭ, **25**, 1954, 586—587.
29. Методы решения вопросов устойчивости в большом. Тр. 2-го Всесоюзн. совещ. по теории автом. регулирования, 1. Изд. АН СССР, 1955, 133—141.
30. К теории неявных функций (доклад на Ленингр. общегор. матем. семинаре). УМН, **10**, в. 4, 1955, 198—200.
31. Некоторые общие проблемы качественной и аналитической теории линейных систем дифференциальных уравнений. ПММ, **19**, в. 2, 1955, 211—221.
32. Качественные методы в теории устойчивости. ПММ, **19**, в. 5, 1955, 599—616.
33. Замечание к работе Н. П. Еругина «О продолжимости решений дифференциальных уравнений» (ПММ, **15**, в. 1, 1951). ПММ, **19**, в. 6, 1955, 764.
34. Неявные функции. Изд. ЛГУ, 1956.
35. Метод Лаппо-Данилевского в теории линейных дифференциальных уравнений. Изд. ЛГУ, 1956.
36. К аналитической теории нелинейных дифференциальных уравнений. Вестник ЛГУ, № 7, 1956, 60—70.
37. О периодических решениях дифференциальных уравнений. ПММ, **20**, в. 1, 1956, 148—152.
38. Аналитическая теория нелинейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Тр. Ин-та физики и математики АН БССР, в. 2, 1957, 235—248.
39. К теории первого уравнения Пенлеве. ДАН БССР, **2**, № 1, 1958, 3—6.
40. О второй трансцендентной Пенлеве. ДАН БССР, **2**, № 4, 1958, 139—142.
41. Об интегралах систем обыкновенных дифференциальных уравнений. ДАН БССР, **2**, № 4, 1958, 143—146.
42. К теории уравнения Риккати. ИФЖ, т. I, № 4, 1958, 76—80; ДАН БССР, **2**, № 9, 359—362.
43. О структуре решений инвариантной линейной системы дифференциальных уравнений. ДАН БССР, **3**, № 2, 1959, 33—37.
44. Об устойчивости решений системы линейных однородных дифференциальных уравнений с периодическими (и другими) коэффициентами. ПММ, **23**, в. 5, 1959, 818—825.
45. Разложение в ряд по параметру функции от матриц. ДАН БССР, **3**, № 7, 1959, 292—293.
46. Работы советских математиков по аналитической теории дифференциальных уравнений. Тр. Ин-та физики и математики АН БССР, **3**, 1959, 62—71.
47. Методы исследования вопроса устойчивости решений линейных систем дифференциальных уравнений с непериодическими коэффициентами, содержащими малый параметр. ИФЖ, **3**, № 2, 1960, 115—127.
48. Разложение в ряд по параметру иррегулярного значения функции от матрицы. ДАН БССР, **4**, № 8, 1960, 323—324.
49. Необходимые и достаточные условия существования корней уравнения (I), расположенных на единичной окружности. ДАН БССР, **5**, № 11, 1961, 483—485.
50. К теории приводимых систем обыкновенных линейных дифференциальных уравнений. ДАН БССР, **5**, № 12, 1961, 533—534.
51. Решение вопросов существования ограниченных решений системы линейных однородных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами на основе интегральной подстановки. Часть 1. Необходимые и достаточные признаки существова-

ния корней полиномов на единичной окружности, когда коэффициенты полиномов суть вещественные функции параметра. Весці АН БССР, сер. фіз.-тэхн., № 4, 1961, 24—29.

52. Решение вопросов существования ограниченных решений системы линейных однородных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами. Часть 2. Построение условий существования ограниченных решений системы линейных однородных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами на основе интегральной подстановки. Весці АН БССР, № 1, 1962, 5—12.

53. О периодических решениях линейной однородной системы дифференциальных уравнений. ДАН БССР, 6, № 7, 1962, 407—410.

54. О новых исследованиях в теории линейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами. Віснік Київськ. ун-ту, сер. матем. та мех., вип. I, № 5, 1962, 3—6 (укр., рез. русск.).

55. К теории неявных функций. ДАН БССР, 7, № 1, 1963, 5—8.

56. О радиусе сходимости рядов, представляющих периодическое решение линейной системы дифференциальных уравнений как функций от параметров. ДАН БССР, 7, № 2, 1963, 73—75.

57. О периодических и ограниченных решениях уравнения $\ddot{x}+P(t)x=0, P(t+1)=P(t)$. Весці АН БССР, сер. фіз.-тэхн. навук, № 1, 1963, 5—13.

58. Задача А. М. Летова. ДАН БССР, 7, № 9, 1963, 577—579.

59. Линейные системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Изд. АН БССР, Минск, 1963.

60. К теории канонических систем. Дифференциальные уравнения, 2, № 10, 1966, 1317—1332.

61. Первый метод Ляпунова. Дифференциальные уравнения, 3, № 4, 1967, 531—578.

ВЕСЦІ АКАДЭМІІ НАВУК БЕЛАРУСКАЙ ССР № 2 1967
СЕРЫЯ ФІЗІКА-МАТЭМАТЫЧНЫХ НАВУК

ПИСЬМО В РЕДАКЦИЮ

УДК 539.126

Ф. И. ФЕДОРОВ

ЕЩЕ РАЗ ОБ ОШИБКАХ Н. С. АКУЛОВА

В нашей совместной с А. А. Богушем и Л. Г. Морозом заметке [4] были подвергнуты критике многочисленные научные ошибки, содержащиеся в статьях [2, 3] Н. С. Акулова по теории элементарных частиц. В письме [1] Н. С. Акулов пытается возразить на нашу критику. Это письмо он начинает с того, что в довольно энергичных выражениях дает высокую оценку **пяти** своим собственным работам по теории частиц, хотя мы касались только двух из них. Без лишней скромности Н. С. Акулов пишет в [1], что ему «удалось развить новое направление», что им «найден метод... значительно более точный, чем методы, развитые в предыдущих работах Гейзенберга, де-Бройля» и т. д. Мы должны признаться, что впервые встречаемся с такой формой ведения дискуссии, когда автор начинает полемическую статью с восхваления своих работ, в том числе не являющихся объектом обсуждения (!). Окончательный вывод, к которому приходит Н. С. Акулов в заключение своего письма, гласит, что наша критика его статей является «элементарно ошибочной, не свойственной науке и людям подлинной науки».

Обратимся, однако, к основному содержанию письма Н. С. Акулова и выясним, насколько обосновано цитированное выше заключение, к которому он приходит. Поскольку Н. С. Акулов перенумеровал свои возражения, мы в данном ответе также будем следовать этой нумерации.

1. В первом пункте Н. С. Акулов пишет: «От поисковых работ... нельзя требовать,... чтобы все было ясно и последовательно изложено. Это понимает каждый творчески работающий ученый».

С поразительной откровенностью Н. С. Акулов излагает здесь свое научное кредо. До сих пор считалось само собой разумеющимся, что. хотя каждая научная работа неизбежно является в какой-то мере поисковой, тем не менее ясность и последовательность изложения всегда были абсолютно необходимыми требованиями, которые безусловно предъявляет подлинный ученый ко всякой своей публикуемой работе. Однако Н. С. Акулов, как видим, придерживается противоположного мнения. Изложенная им концепция только подтверждает наше утверждение (см. [4], стр. 131), что «он подгоняет свою «теорию» под желаемые следствия,... нарушая элементарные правила логики и последовательности рассуждений». Мысли, высказанные в п. 1 письма [1], очевидно, служат для него оправданием подобного подхода, который не имеет ничего общего с наукой и, как мы увидим ниже, отнюдь не является случайным для Н. С. Акулова.

2. В ответ на критику введенного им в [2] «алгоритма построения барионов» Н. С. Акулов обвиняет нас в том, что мы «критикуем свой собственный алгоритм», нарушая основное условие его алгоритма, согласно которому, «странность может быть возбуждена у любого (—)-реона». Такого условия в работе [2] нет. Мы вынуждены напомнить Н. С. Аку-

лову, что, согласно табл. 1 статьи [2] и специальному замечанию (там же, стр. 155), «(+)-реон не может иметь странного возбуждения». Но до сих пор в физике античастицы не отличались от соответствующих частиц ничем, кроме знаков зарядов (барионного, электрического, странности и др.). Если встать на эту единственно правильную и общепринятую точку зрения, то запрещение «возбуждения» странности у (+)-реона, хочет того Н. С. Акулов или нет, неизбежно влечет за собой и запрещение «возбуждения» странности у соответствующего антиреона. Мы можем лишь посочувствовать Н. С. Акулову, что ему не легко согласиться с этим общеизвестным положением, поскольку оно обрекает на гибель его «алгоритм». По поводу же его замечания о том, что (—)-реон будто бы «не помнит» того, что он является античастицей по отношению к (+)-реону (см. [1], п. 2), мы можем только сказать, что считаем неэтичным со стороны Н. С. Акулова сваливать вину за свои ошибки на «непомнящий себя» беззащитный (—)-реон.

3. В п. 3 письма [1] Н. С. Акулов признает, что его формула $-1 \leqslant Q - S \leqslant 1 + B$, которую мы критиковали, неверна. Он подправляет эту формулу, вводя дополнительный член, пропущенный якобы «по недосмотру». Следовательно, наша критика справедлива, и с точки зрения общепринятой научной этики мы заслужили благодарность за указание ошибки, признанной впоследствии самим автором *). Но не таков Н. С. Акулов! Используя тот предлог, что вследствие описки или опечатки в тексте [4] оба знака неравенства заменены на обратные ($\geqslant$), он приписывает нам сознательную, злонамеренную фальсификацию своей формулы ради того, чтобы затем ее критиковать. Однако легко убедиться, что наши замечания, приведенные в [4], справедливы как раз при том знаке неравенства ($\leqslant$), который стоит в статье Н. С. Акулова [2]. Следовательно, для того чтобы критиковать, нам незачем было искажать формулу путем замены знака неравенства. Если Н. С. Акулов этого не видит, тогда это — некомпетентность, т. е. именно те нелады с элементарной математикой, о которых мы упоминали в [4]. Если же он это понимает, тогда все содержание п. 3 письма Н. С. Акулова является ярким свидетельством его научной недобросовестности.

4. Согласно Н. С. Акулову, «силы связи между реонами и антиреонами» есть «следствие уменьшения массы гравитона, возникающего при соединении частицы с античастицей» ([3], стр. 456). Это утверждение попросту физически бессмысленно, потому что силы связи, как известно, обусловливаются уменьшением массы системы по сравнению с суммой масс образующих ее частиц, а вовсе не изменением массы возникающей частицы. Если же попытаться приписать этой фразе единственно возможный физический смысл, предположив, что Н. С. Акулов имел в виду уменьшение массы системы за счет вылета гравитона, то мы неизбежно придем к выводу о том, что устойчивость нуклонов обусловлена гравитационными силами, что и было отмечено в [4]. Здесь ярко проявляется удивительное свойство откровений Н. С. Акулова, содержащихся в [2] и [3],— они не только сами по себе не имеют смысла, но приводят к нелепости даже при любой попытке придать им какое-то физическое содержание. Далее мы встретимся еще с аналогичными примерами. Здесь же отметим только, что, судя по п. 4 письма Н. С. Акулова, он либо не понял, несмотря на наши замечания, своей грубейшей ошибки, либо попытался увернуться от ответа с помощью не относящихся к делу высказываний.

---

*) Отметим, что Н. С. Акулов почему-то счел нужным исправить этот «недосмотр» лишь в ответном письме [1], но не в какой-либо из трех своих следующих за [2] статей, сданных в печать до опубликования нашего письма [4].

Таким образом, Н. С. Акулов снова ставит нас перед выбором между его некомпетентностью либо недобросовестностью.

5. Такой же характер, видимо, единственно доступный для Н. С. Акулова, имеет его отписка, приведенная в п. 5 письма [1]. В [4] мы отметили то противоречие, что, по Н. С. Акулову (см. [2]), лептон является системой керн+частица, а в другом месте той же статьи у него тот же лептон рассматривается как частица, вращающаяся вокруг керна. Вместо ответа на это замечание Н. С. Акулов небрежно отсылает нас к работе Штернгласса [5], хотя у последнего, как у настоящего ученого, и в помине нет подобных противоречий. Нам представляется в высшей степени недостойной подобная попытка спрятаться вместе со своими ошибками за авторитет другого ученого.

6. В статье [2] Н. С. Акулов предлагает плоские (!) модели частиц. Что же заставило Н. С. Акулова прибегнуть к такой модели? Оказывается, он рассчитывал с ее помощью получить отношение магнитных моментов нейтрона и протона. Соответствующие рассуждения на стр. 153—154 статьи [2] (см. формулы (1) — (4) и рисунок) трудно охарактеризовать иначе, как беспримерное надругательство над основными положениями физики. Достаточно сказать, что Н. С. Акулов без каких бы то ни было оговорок или попыток обоснования рассуждает здесь так, будто при частичном перекрытии круговых орбит зарядов разных знаков величина магнитного момента определяется длиной неперекрывающихся участков траекторий («активных», по Н. С. Акулову)!! Этот ранее неведомый «закон сложения магнитных моментов по Акулову» находится в самом вопиющем противоречии с известными из физики свойствами магнитных моментов и является, по-видимому, «венцом достижений» Н. С. Акулова. Что же ответил Н. С. Акулов на наше замечание по этому поводу? Он не смог изобрести ничего лучшего, как обвинить нас же в неучете искажения траекторий частиц, которого он сам не учитывает!! Ведь общеизвестно, что если орбиты зарядов заданы, то тем самым определены и магнитные моменты, порождаемые их движением, но складываются эти моменты совсем не «по Акулову». А о том, что Н. С. Акулов задал именно круговые орбиты, прямо говорит рисунок на стр. 154 статьи [2] и все приведенные там «рассуждения». От этого факта Н. С. Акулову никуда не уйти, несмотря ни на какие ухищрения. Таким образом, мы исходили в точности из предпосылок самого Н. С. Акулова и показали абсурдность его выводов. Поскольку здесь невозможно что-либо возразить по существу, Н. С. Акулов решил прибегнуть к подмене одного вопроса другим: вопроса о сложении моментов при заданных орбитах вопросом об искажении орбит при взаимодействии, которого ни он, ни мы не касались. Читатель сам по достоинству сумеет оценить маневры, к которым прибегает Н. С. Акулов.

Пытаясь запутать предельно ясный вопрос о допущенных им ошибках, недопустимых для любого студента-физика, Н. С. Акулов приводит в п. 6 своего письма множество не относящихся к делу рассуждений. Он находит возможным делать здесь даже заявления рекламного характера о якобы достигнутом им в [3] «прогрессе в развитии теории», о «решении задачи устранения трудностей» и т. д. и т. п. Обсуждение этих утверждений Н. С. Акулова завело бы нас слишком далеко, однако мы можем со всей ответственностью заявить, что они ни в малейшей мере не соответствуют истине.

7. В теории элементарных частиц существует твердо установленный закон сохранения барионного заряда. Возможность возбуждения барионного заряда у лептона, которую утверждает

Н. С. Акулов в [2], противоречит этому физическому закону, поскольку обычный лептон, как известно, не обладает барионным зарядом, а при возбуждении, согласно Н. С. Акулову, такой заряд появляется. Именно это мы имели в виду, когда писали в [4] о том, что такое «возбуждение» противоречит хорошо известным свойствам элементарных частиц. Однако напрасно было бы искать в п. 7 письма Н. С. Акулова ответ на это наше замечание. С ученым видом Н. С. Акулов отсылает нас к работе Катаяма и Такетани [6]. Но у них, как и других авторов, развивающих гипотезу Нагойской группы, барионный заряд вовсе не возбуждается, не возникает из ничего — он всегда связан с некоторыми носителями, вместе с ними присутствует в системе, и поэтому закон его сохранения не нарушается. Способен ли Н. С. Акулов постичь это принципиальное различие — мы не знаем. Одно несомненно, вместо того, чтобы отсылать нас к работе [6], ему самому следовало обратиться хотя бы к популярной книге К. Форда [7], которую он цитирует в [3], но, видимо, не освоил. На стр. 116 он смог бы прочесть о том, что закон сохранения барионного заряда, который нарушается в его работе [2], является абсолютно строгим.

8. Что касается формулы Н. С. Акулова $\pi^+ \to e^+\nu_e D \to e^+\nu_e\tilde{\nu}_\mu + \nu_\mu$ ([3], (5)), то следует подчеркнуть, что она отличается от общепринятых в теории элементарных частиц соотношений. В нее входят, с одной стороны, обозначения вида $e^+\nu_e\tilde{\nu}_\mu$, обычно характеризующие структуру частицы, и, с другой стороны, знак суммирования, который используется при указании схемы распада. Однако в научной литературе по теории элементарных частиц не применяются смешанные формулы типа [3], (5) (без каких-либо дополнительных обозначений), что, разумеется, не случайно *). Уже из содержания статьи [3] (см., например, формулу (11)) можно было заключить, что Н. С. Акулов в отличие от всех не делает никакого различия между формулами одного и другого типа. В п. 8 своего письма [1] он уже говорит об этом совершенно прямо. Между тем всякому, работающему в области теории элементарных частиц, хорошо известно, что нельзя отождествлять структурную формулу частицы с ее схемой распада. В противном случае, например, из явления β-распада следовало бы, что в структуру ядра входят электроны, а эта точка зрения давно отвергнута наукой. По этой причине прямой перенос символики химических обозначений в теорию элементарных частиц, как это делает Н. С. Акулов в своем письме и особо подчеркивает в конце статьи [3], недопустим.

Мы уже привыкли к тому, что утверждения или соотношения Н. С. Акулова не соответствуют общеизвестным физическим представлениям и об их смысле приходится гадать, делая те или иные предположения. Мы еще не раз встретимся с этим и ниже. Поскольку соотношение [3], (5), как только что было отмечено, также отличается от общепринятых, то возник вопрос относительно его трактовки. Мы готовы допустить, что в данном случае наша попытка интерпретировать возможный ход мыслей Н. С. Акулова не оказалась удачной. Но мы должны со всей определенностью подчеркнуть два обстоятельства. Первое: нарушение законов сохранения материи и заряда не явилось препятствием для нашего предположения, что Н. С. Акулов мог рассуждать таким образом, поскольку все содержимое его статей [2, 3] показывает, что многие основные законы физики для него не писаны. Ведь нарушает же Н. С. Акулов без стеснения (см. п. 7) строгий закон сохранения барионного заряда!

---

*) См., например, [14], где содержится около тысячи формул, описывающих всевозможные реакции и структуру элементарных частиц, но нет ни одной формулы типа формулы Н. С. Акулова [3], (5).

И вторoе: во всех случаях соотношение [3], (5) (или любой его вариант) несостоятельно как по причинам, указанным выше, так и потому, что вообще статьи [2, 3] Н. С. Акулова целиком основаны на ложных, ошибочных положениях.

Итак, мы ответили на все пункты письма [1]. Однако, как справедливо отметил в своем письме [1] сам Н. С. Акулов, мы действительно несколько обошли вниманием вторую его статью [3]. Объясняется это, во-первых, тем, что общая картина и без того была полностью ясна и, во-вторых, тем, что разбираться подробно во всех ее нелепостях — столь же неприятная, сколь и неблагодарная работа. Поскольку, однако, Н. С. Акулов, как можно заключить из его ответа [1], преисполнен уверенности в том, что совершил вклад в науку, то придется остановиться еще на некоторых утверждениях его статьи [3].

Мы уже отмечали в [4], что Н. С. Акулов говорит в [3] об «обращении в нуль гравитонов» (стр. 458). Подобное утверждение с точки зрения современной физики начисто лишено какого-либо смысла, так как оно означает ничем не компенсированное исчезновение материи.

В [4] и п. 2 настоящего письма мы уже говорили о непригодности «алгоритма» Н. С. Акулова, описанного в [2]. Хотя в письме [1] Н. С. Акулов и встает на его защиту, но в статье [3], видимо, чувствуя несостоятельность своих построений, он пытается «незаметно» подправить этот «алгоритм». Не задумываясь о последствиях, вместо пяти исходных реонов (0), $(\dot{0})$ $(-)$, $(\dot{-})$, $(+)$ с барионным зарядом $B=+1$ (см. [2], табл. 1) Н. С. Акулов в [3] вводит четыре реона $(+)$, $(\underset{\cdot}{+})$, (0), $(\underset{\cdot}{0})$ ([3], стр. 459). Однако при этом, например, система $(\dot{0}\dot{-}\dot{0})$, отождествляемая им с Ω^--гипероном ([3], стр. 457), строится теперь только из антиреонов $(\dot{0})=(\underset{\cdot}{\tilde{0}})$ и $(\dot{-})=(\underset{\cdot}{\tilde{+}})$ с $B=-1$, поэтому она становится антибарионом с неслыханным до сих пор барионным зарядом $B=-3$ (!!). Мало того, допустив существование странного $(+)$-реона, Н. С. Акулов тем самым без всяких оговорок ликвидировал в [3] столь необходимое для его «алгоритма» ограничение, связанное с невозможностью возбуждения странности у $(+)$-реона, с помощью которого он пытался в [2] получить декуплет барионов со спином 3/2.

Таким образом, сам того не ведая, Н. С. Акулов собственными руками окончательно доконал свой «алгоритм», который он с таким рвением пытается защитить в письме [1].

На стр. 457 статьи [3] мы читаем: «Поскольку диполь D обладает массой, а все его квантовые числа равны нулю, он является своего рода (?—Ф. Ф.) гравитоном». Но ведь хорошо известно, что гравитон имеет массу, равную нулю, а его спиновое квантовое число может принимать лишь два значения: ± 2. Об этом пишется даже в популярных книжках, например, у того же К. Форда ([7], стр. 28). Следовательно, это утверждение Н. С. Акулова прямо противоположно тому, что известно в физике о гравитоне. Таким образом, Н. С. Акулов по своему усмотрению расправляется с установившимися в физике понятиями.

На той же стр. 457 мы встречаем формулу (11) $D\to\gamma$, которую также придется отнести к числу уникальнейших «достижений» Н. С. Акулова, ибо физика ничего подобного до сих пор не знала. Согласно этому соотношению, одна отдельно взятая элементарная частица («акуловский гравитон» D) ни с того ни с сего, без всяких взаимодействий превращается в другую единственную элементарную частицу — фотон. Мало того, что уже сам факт превращения одной частицы в одну же частицу другого типа грубо противоречит и теории и всему полувековому опыту физики элементарных частиц. Соотношение $D\to\gamma$ бессмысленно еще и потому, что если D — обычный гравитон, то его спин равен 2, а спин фотона равен 1. Если же считать D «акуловским гравитоном», у которого, согласно вышеприведенному определению его изобретателя, все квантовые числа, а значит и спин, равны нулю, то снова нарушается равенство спинов. Таким образом, соотношение $D \rightarrow \gamma$ бессмысленно с любой точки зрения и по целому ряду причин. Приведенный пример еще раз с особой яркостью показывает, какой редкостной концентрации нелепостей сумел достичь Н. С. Акулов.

Разумеется, мы далеко не исчерпали того изобилия всевозможных ошибок, которое содержится в статьях Н. С. Акулова [2, 3]. Однако не довольно ли! Нам представляется, что нет никакого смысла продолжать дальнейшее рассмотрение этих «работ». Ответ Н. С. Акулова [1], весь пущенный им в ход арсенал различных маневров и уверток, недостойных ученого, не только не опровергает, но лишь подтверждает и усиливает основной вывод, сформулированный в нашей заметке [4]: «теория» Н. С. Акулова, изложенная в [2] и [3], целиком и полностью лежит за пределами того, что можно назвать научным исследованием и представляет собой нагромождение нелепостей. Вообще, в приложении к статьям [2, 3] Н. С. Акулова неуместно даже употребление слова наука.

Возникает естественный вопрос — как могло случиться такое?! Ответ на него мы получим, если совершим самый краткий обзор некоторых основных результатов деятельности Н. С. Акулова на ниве науки.

В 1940 г. вышла книга Н. С. Акулова «Основы химической динамики» [8], посвященная теории автогенезиса. В рецензии на эту книгу Д. А. Франк-Каменецкого [9] мы можем прочесть, что подход, использованный Н. С. Акуловым, «не имеет ничего общего с общепринятыми методами научного анализа», что «развиваемые Н. С. Акуловым представления никак не могут быть согласованы ни с опытными данными, ни... со всей современной физикой и химией». В заключение говорится (стр. 581): «Книга является чрезвычайно вредной... Выпуск этой книги — большая ошибка Московского Государственного университета и Ученых Записок МГУ».

В 1951 г. вышла новая монография Н. С. Акулова «Теория цепных процессов» [10], в которой он еще раз попытался построить теорию автогенезиса на иной основе. Однако в работе В. И. Скобелкина [11] эта книга (а вместе с ней еще раз монография Н. С. Акулова [8]) подверглась уничтожающей критике. Третий параграф статьи [11] так и озаглавлен: «3. Ошибочность вывода (Н. С. Акуловым—Ф. Ф.) уравнения автогенезиса и бессодержательность представлений об активных молекулах конечного продукта». Кончается этот параграф словами: «Таким образом, теория Н. С. Акулова более далека от объяснения природы индукции, чем классическая теория действующих масс». Окончательный вывод автора рецензии таков (стр. 509): «...метод, при помощи которого Н. С. Акулов получает свое уравнение автогенезиса, опирается на недопустимые математические ошибки... Физико-химические представления об активных молекулах конечного продукта, которые, по Акулову, должны объяснить период индукции и скачок скорости реакции, также являются ошибочными и приводят к результатам, находящимся в противоречии с опытом».

Наконец, в 1961 г. в издании АН БССР вышла книга Н. С. Акулова «Дислокация и пластичность» [12]. В рецензии академика АН СССР Ю. Н. Работнова и А. Н. Орлова [13] говорится: «Приведенные в монографии рассуждения никак не могут являться количественным описанием дислокационных явлений», «...автор дает неверное определение плотности дислокаций», «по-видимому, автору остались неизвестными многочисленные работы по этому предмету» и т. д. Окончательный вывод гласит (стр. 455): «Монография отнюдь не способствует более глубокому физическому пониманию процессов пластической деформации и содержит ряд очевидных ошибок... поэтому остается только сожалеть, что издательство Академии наук БССР выпустило в свет монографию Акулова».

Таковы оценки, которые получили на страницах ведущих наших научных журналов все три монографии Н. С. Акулова, опубликованные им за период с 1940 г. Характерно, что во всех трех случаях речь идет не об отдельных ошибках, а о «трудах», порочных в самой своей основе. Этого не смог оспаривать и сам Н. С. Акулов, не опубликовавший никаких возражений на процитированные выше рецензии. Присоединим сюда отмеченный выше (см. п. 6) «закон сложения магнитных моментов по Акулову» (относящийся к теории магнетизма!) и мы убедимся, что круг замкнулся. Обозревая этот итог, испытываешь чувство невольного изумления перед самоотверженными усилиями Н. С. Акулова, направленными на внесение отрицательного вклада в науку.

На фоне всего вышеизложенного самореклама, содержащаяся в письме [1] Н. С. Акулова, откровенное причисление себя к «творчески работающим ученым» (см. п. 1) и претензии на суждение о том, что свойственно, а что не свойственно «науке и людям подлинной науки» могут вызвать только улыбку.

Как ни была тяжела и неприятна задача разбираться в писаниях Н. С. Акулова, мы считали, что ученые не могут, не имеют права проходить мимо той профанации науки, которая заполняет страницы рассматриваемых его статей. Вместе с тем очевидно, что попытки выяснения научной истины в «трудах», в которых, по признанию самого автора, не являются обязательными ясность и последовательность изложения, становятся беспредметными. Все содержание и характер рассматриваемых статей Н. С. Акулова, так же как и его ответного письма, говорят о том, что дальнейшее продолжение дискуссии с ним является бессмысленным.

Литература

1. Акулов Н. С. Весцi АН БССР, сер. фiз.-техн. навук, 1, 139, 1967.
2. Акулов Н. С. ДАН БССР, 10, 151, 1966.
3. Акулов Н. С. ДАН БССР, 10, 456, 1966.
4. Богуш А. А., Мороз Л. Г., Федоров Ф. И. Весцi АН БССР, сер. фiз.-мат. навук, 4, 130, 1966.
5. Sternglass E. I. Nuovo Cimento, 35, 227, 1965; Phys. Rev., 123, № 1, 391, 1961.
6. Katayama Y., Taketani M. Progr. Theor. Phys., 33, № 6, 114, 1965.
7. Форд К. Мир элементарных частиц. М., 1965.
8. Акулов Н. С. Основы химической динамики. Изд. МГУ, 1940.
9. Франк-Каменецкий Д. А. ЖЭТФ, 11, 579, 1941.
10. Акулов Н. С. Теория цепных процессов. ГИТТЛ, 1951.
11. Скобелкин В. И. ЖЭТФ, 27, 501, 1954.
12. Акулов Н. С. Дислокация и пластичность. Изд. АН БССР, 1961.
13. Орлов А. Н., Работнов Ю. Н. Физика металлов и металловедение, 14, 451, 1962.
14. Сб. «Вопросы физики элементарных частиц». Изд. АН АрмССР, 1966.

От редакции. Редакция присоединяется к высказанному в заключении письма Ф. И. Федорова выводу относительно нецелесообразности дальнейшего продолжения дискуссии по поводу статей Н. С. Акулова об элементарных частицах на страницах нашего журнала.

ХРОНІКА

ГАДАВЫ АГУЛЬНЫ СХОД АН БССР

24—28 лютага 1967 г. адбыўся Гадавы агульны сход Акадэміі навук БССР.

24—25 лютага на агульных сходах аддзяленняў былі заслуханы і абмеркаваны даклады акадэмікаў-сакратароў аддзяленняў аб важнейшых выніках работы за 1966 г. Вучоныя падзяліліся сваім вопытам навукова-даследчай работы, расказалі аб праблемах, якія ўжо распрацаваны і на якіх трэба яшчэ больш сканцэнтраваць сілы.

27 лютага Гадавы агульны сход АН БССР адкрыў прэзідэнт акадэмік АН БССР, член-карэспандэнт АН СССР В. Ф. Купрэвіч. Ва ўступным слове ён адзначыў, што за апошнія гады Беларуская акадэмія навук стала буйной навуковай установай. Значна выраслі навуковыя кадры. Поспехі, дасягнутыя Акадэміяй, сталі магчымы дзякуючы пастаянным клопатам партыі і ўрада аб развіцці матэрыяльнай базы навукі, аб выхаванні навуковых кадраў.

Прэзідэнт В. Ф. Купрэвіч спыніўся на некаторых выніках дзейнасці Акадэміі навук за мінулы год. Ён падкрэсліў, што амаль ва ўсіх галінах навукі былі дасягнуты значныя поспехі. Многія інстытуты і лабараторыі АН БССР па важных навуковых напрамках занялі вядучае месца ў Савецкім Саюзе.

У Інстытуце фізікі паспяхова праводзяцца работы па аптычных квантавых генератарах і па праблеме «Ядзерная фізіка». Значныя поспехі дасягнуты Інстытутам матэматыкі ў галіне дыферэнцыяльных ураўненняў. Інстытут фізікі цвёрдага цела і паўправаднікоў мае значныя дасягненні па фізіцы нізкіх тэмператур і квантавай электроніцы. Інстытутам цепла- і масаабмену атрыманы значныя поспехі ў прымяненні агульнай тэорыі і метадаў рашэння спалучаных задач да даследавання звышгукавых цячэнняў. Распрацаван метад тэрмічнай апрацоўкі бетону ў пераменным электрамагнітным полі. У Інстытуце тэхнічнай кібернетыкі выканана шмат цікавых работ па канструяванню. Асаблівую ўвагу звяртаюць на сябе работы па мове «Алгол-60». Інстытутам ядзернай энергетыкі праводзяцца работы па атрыманню мадыфікаваных валокнаў на аснове лаўсану, па атрыманню негаручых узораў драўніны і г. д. Фізіка-тэхнічным інстытутам, як і раней, найбольш цікавыя вынікі атрыманы па пытаннях пластычнай дэфармацыі. Лабараторыя электронікі вялікую ўвагу ўдзяляе стварэнню электронных прыстасаванняў для даследавання біялагічных аб'ектаў і электравакуумных прыбораў.

Інстытуты хімічнага профілю паспяхова праводзілі работы па каталізу і адсарбентах, а таксама па іншых пытаннях. Значныя поспехі атрыманы Лабараторыяй геахімічных праблем у галіне геахіміі гіпергенезу.

Добрых вынікаў дабіліся інстытуты біялагічнага профілю па праблемах біягеацэнозу, цыталогіі, гетэрозісу і поліплаідыі. Работы маюць практычны характар і будуць мець вялікую каштоўнасць у недалёкім будучым. Цікавыя работы праводзяцца па фасфарасцэнцыі бялкоў і па генезісу хларафілу.

Інстытуты Аддзялення грамадскіх навук таксама праводзілі вялікую навуковадаследчую работу. У сістэму Акадэміі навук увайшоў Інстытут мастацтвазнаўства, этнаграфіі і фальклору. Ствараецца спецыяльная ўстанова па выданню Беларускай энцыклапедыі, на чале якой стаіць акадэмік АН БССР П. У. Броўка.

Акадэмік АН БССР В. Ф. Купрэвіч падкрэсліў, што за справаздачны перыяд значна павялічылася колькасць гаспадарча-дагаворных работ.

Закранаючы пытанне інфармацыі, В. Ф. Купрэвіч адзначыў, што неабходна стварыць сістэму інфармацыі, з дапамогай якой даведкі аб новых дасягненнях навукі і тэхнікі даводзіліся б да прадпрыемстваў хутка і дакладна.

Затым прэзідэнт В. Ф. Купрэвіч спыніўся на асноўных праблемах, якія стаяць перад савецкай навукай.

Вельмі важнымі і надзённымі з'яўляюцца праблемы энергетыкі і аўтаматызацыі ўсіх вытворчых працэсаў, уключаючы сельскую гаспадарку. Выключна важнай праблемай лічыцца таксама і праблема рэсурсаў. Праблема вады ў ёй займае адно з першых месц. Абавязак вучоных — распрацаваць лепшыя рэжымы, перспектыўныя планы выкарыстання вод.

Вялікая ўвага ўдзяляецца праблеме прадуктаў харчавання. Задача на бліжэйшыя гады — знаходжанне прамысловых спосабаў сінтэзу арганічнага рэчыва, багатага энергіяй, мінаючы фотасінтэз. Рашыць гэтыя і іншыя праблемы можна толькі шляхам сумесных намаганняў вучоных розных спецыяльнасцей.

У заключэнне В. Ф. Купрэвіч выказаў пэўненасць, што вучоныя прыкладуць усе лы і веды, каб узровень навуковых даслеаванняў у поўнай меры адпавядаў узрослым задачам, якія стаяць перад нашай наукай на сучасным этапе.

Прысутныя на Агульным сходзе ўшаавалі памяць памёршага ў 1967 г. членаарэспандэнта АН БССР, прафесара І. В. утарава.

З дакладам «Аб навуковай дзейнасці кадэміі навук Беларускай ССР за 1966 од» выступіў Галоўны вучоны сакратар рэзідыума АН БССР акадэмік АН БССР . П. Вінакураў.

Дакладчык падрабязна асвятліў галоўыя пытанні, якія абмяркоўваліся на Гадаым агульным сходзе Акадэміі навук СССР, пыніўся на задачах, пастаўленых перад саецкай навукай Дырэктывамі XXIII з'езда ПСС па пяцігадоваму плану развіцця народнай гаспадаркі СССР за 1966—1970 гг. рашэннямі майскага і снежаньскага Пленумаў ЦК КПСС (1966 г.). Гаворачы аб здыме эканомікі, развіцці прадукцыйных іл, паскарэнні навукова-тэхнічнага прагрэу, Ф. П. Вінакураў адзначыў, што вучоыымі Беларускай акадэміі навук распрацоўалася 261 тэма, 43 з якіх былі ўключаны ў лан развіцця народнай гаспадаркі СССР і 37 — у план развіцця народнай гаспадаркі ССР.

У дакладзе былі асветлены вынікі даледаванняў, выкананых вучонымі АН БССР 1966 г. Ф. П. Вінакураў асобна падкрэсліў начэнне развіцця грамадскіх навук, якія аксама вызначаюць прагрэс нашага граадства.

Інстытут эканомікі распрацаваў і вызсціў тыпавое палажэнне аб унутрызаводкім гаспадарчым разліку ў новых умовах ланавання і эканамічнага стымулявання, аспрацаваў і ўнёс рад прапаноў па ўдаканаленню прэміравання рабочых з прыытку, па ўдасканаленню методыкі ўстанаўення цэн на прадметы ўжытку і сродкі ытворчасці.

Інстытутам мовазнаўства імя Я. Колаа падрыхтавана двухтомная манаграфія, якой разглядаецца працэс развіцця белаускай літаратурнай мовы ад старажытнаускай эпохі да нашага часу. Завершаны аботы па тэмах: «Даныя лінгвістычнай еаграфіі і групоўка беларускіх гаворак», Паходжанне славянскага кансанантызму» «Семантычныя пытанні сінтаксісу ўсходеславянскіх моў».

У Інстытуце філасофіі і права заверланы тэмы: «Крытыка тэорыі адзінага індустрыяльнага грамадства», «Гнасеалагічная сутнасць фармалізацыі», «Развіццё беларускай дзяржаўнасці» і інш.

У Інстытуце гісторыі выканана тэма Нарысы старажытнай гісторыі БССР». Упершыню напісана гістарыяграфія Беларусі дасавецкага перыяду, у якой падвозяцца вынікі гістарычнай навукі ў Беларусі з старажытных часоў да нашых дзён. Работы Інстытута гісторыі шырока каменціраваны ў справаздачы Акадэміі навук СССР.

У Інстытуце літаратуры імя Я. Купалы завершаны тэмы: «Праблема традыцый і наватарства ў сучаснай беларускай літаратуры», «Гуманізм у Беларусі XVI ст. і Г. Скарына». Падрыхтавана манаграфія, у якой упершыню ў беларускім літаратуразнаўстве даследуюцца шляхі развіцця беларускай савецкай літаратуры для дзяцей.

У Інстытуце матэматыкі паспяхова вядуцца даследаванні і атрыманы важныя рэзультаты ў галіне дыферэнцыяльных ураўненняў, тэорыі тапалагічных і лінейных груп. Створан транслятар з алгарытмічнай мовы «Алгол-60» для ЭВМ «Мінск-2».

У Інстытуце фізікі атрыманы новыя даныя па раздзелу «Квантавая электроніка». Асабліва цікавай прадстаўляецца генерацыя на новым аб'екце — растворы фталацыяніну магнію ў хіналіне з накачкай выпраменьваннем рубінавага лазера. Упершыню атрымана генерацыя сумарнай частаты выпраменьванняў розных палярызацый неадзімавага і рубінавага лазераў на крышталі КДР (калійдэгідрафасфат). Створан новы метад разліку развіцця электроннай лавіны ў высакародных газах у фокусе лазернага промня. Атрыманы таксама значныя рэзультаты па праблемах «Люмінесцэнцыя і спектраскапія», «Фотасінтэз».

У Інстытуце фізікі цвёрдага цела і паўправаднікоў атрыманы звышправодзячыя сплавы двайной сістэмы ванадый — ніобій і трайной сістэмы ванадый — ніобій — рэній. Распрацаван метад атрымання паўправадніковых гетэрапераходаў селенід цынку — тэлурыд цынку. Атрыман бесперапынны рад цвёрдых раствораў у сістэме фасфід індыю — арсенід галію і знойдзены саставы, якія маюць высокія тэрмаэлектрычныя параметры.

У Інстытуце ядзернай энергетыкі шырока распрацоўваецца тэорыя працэсаў у дысацыіруючых газах, устаноўкі на новых цепланосьбітах, вывучаецца радыяцыйная мадыфікацыя валокнаў і іншыя пытанні радыяцыйнай хіміі.

У Інстытуце цепла- і масаабмену атрыманы рашэнні рада спалучальных задач цеплаабмену пры звышгукавых скорасцях цячэння для ламінарных і турбулентных патокаў. Даследаваны тэарэтычна і эксперыментальна прапанаваныя інстытутам новыя метады сушкі рада матэрыялаў (губчатых вырабаў, фармпрэпаратаў, кармавых траў, грануляваных дысперсных матэрыялаў і інш.).

У Інстытуце тэхнічнай кібернетыкі на базе мовы «Алгол-60» пабудавана праблемна арыентаваная мова для аўтаматызацыі машынабудаўнічага праектавання. Распрацаван і выраблен доследны ўзор чарцёжнаграфічнага аўтамата з лічбавым праграмным кіраваннем і доследная серыя шматканальнага аўтамата счытвання крывых МАСК. Распрацавана шматканальная сістэма аўтаматычнай рэгістрацыі працэсаў АРП-10.

У Фізіка-тэхнічным інстытуце працягваліся работы па вывучэнню пластычнай дэфармацыі. Тэарэтычна распрацаван метад разліку напружанага стану пры апрацоўцы металаў ціскам у пераходных зонах з улікам рэалагічных уласцівасцей матэрыялаў. Спраектаваны і выраблены гідраўлічныя прыстасаванні для драблення стружкі. Распрацаван новы спосаб сушкі ліцейных шпянёў у электрычным полі высокай частаты ў адпаведнасці з масавай аўтаматызаванай вытворчасцю.

У Аддзеле фізікі неразбураючага кантролю праводзілася распрацоўка прыбораў для імпульснага намагнічвання зоны зварнога шва труб малога памеру. Створан новы прыбор для аўтаматычнага дыстанцыйнага вымярэння мікраструктуры металаў на аснове вымярэння мікрацвёрдасці. Распрацаван прыбор для кантролю цвёрдасці турбінных лапатак.

У Аддзеле механікі палімераў выканаы даследаванні, у выніку якіх устаноўлена магчымасць прымянення палімераў у вузлах трэння сельскагаспадарчых машын. Створаны зусім новыя канструкцыі дэталей. Распрацавана методыка паскоранага выпрабавання палімерных матэрыялаў на атмасфераўстойлівасць.

У Лабараторыі электронікі распрацаваны і створаны дзеючыя ўзоры фотаэлектроннага прыбора; створана паказальная канструкцыя складанага камбінаванага электроннага прыбора. Вырашан рад задач па мадэліраванню электрычнага поля для СКБ аналітычнага прыборабудавання АН СССР.

Інстытутам фізіка-арганічнай хіміі прапанаван магнійалюмініевы шпінельны носьбіт для каталізатараў дэгідрацыклізацыі парафінавых вуглевадародаў. Выяўлена змяненне селектыўнасці каталізатараў на вокісу алюмінію пад уздзеяннем радыяцыі. Распрацаваны спосабы атрымання асветленай экстракцыённай каніфолі і новых цыклічных манамераў.

У Інстытуце агульнай і неарганічнай хіміі вызначан рэжым сінтэзу ітрыевага гранату ў атмасферы аргону і ў вакууме, які дазваляе знізіць тэмпературу сінтэзу на 100—150° С. Сінтэзаваны жалезазамешчаныя цэаліты тыпу Х. Распрацаван метад тэрмадынамічнага апісання іонаабменных працэсаў з адвольнай колькасцю абменьваючыхся іонаў. Атрымана шкло для шкловалакна, устойлівасць якога ў 5—7 разоў перавышае ўстойлівасць стандартнага шкла.

У Лабараторыі геахімічных праблем закончана вывучэнне правінцый, звязаных з покрыўнымі пародамі і ландшафтамі тэрыторыі БССР. Распрацаваны геахімічныя крытэрыі, якія дазваляюць ахарактарызаваць спецыфіку лёсавых парод розных кліматычных зон. Выяўлены прасторавыя і ўзроставыя палеагеахімічныя адрозненні глiністых парод БССР.

Інстытутам торфу атрымана доследная партыя кармавых дражджэй. Распрацаван састаў і даследаваны асобныя тэхналагічныя працэсы прыгатавання канцэнтраваных торфамінеральных грануляваных угнаенняў. Распрацавана тэхналагічная схема здабычы азёрных сапрапелей для сельскагаспадарчага і прамысловага выкарыстання.

У Інстытуце эксперыментальнай батанікі атрыманы новыя даныя па вывучэнню біягеацэнатычных адносін дрэвавых парод у вобласці спалучэння арэалаў дубу, елкі і грабу. Распрацаваны фотаэлектрычны метад вызначэння монацукраў у раслінах, класіфікацыя балотных лясоў і рэкамендацыі па таксацыі балотных лясоў і балот БССР.

У Інстытуце фізіялогіі працягваліся даследаванні па праблеме кбрціка-вісцэральных узаемаадносін. Праведзены эксперыментальныя даследаванні ўплыву бабруйскай мінеральнай вады на некаторыя бакі водна-салявога і пігментнага абмену. Атрыманы даныя аб стымулюючым уплыве лабірынта на тонус скурнай мускулатуры.

У Інстытуце генетыкі пры вывучэнні імунагенетыкі пухлін атрыманы факты, якія ўказваюць на прычыны ракавых анергій. Атрыманы значэнні каэфіцыента адноснай біялагічнай эфектыўнасці на некаторых генетычных тэстах у дразафілы і мышэй. Выведзены два трыплоідныя гібрыды цукровых буракоў.

У Цэнтральным батанічным садзе падведзены вынікі шматгадовай працы саду па інтрадукцыі дрэвавых раслін, руж, бэзу 12 новых сартоў вяргіні рэкамендаваны для азеляненння сярэдняй зоны СССР.

Аддзелам заалогіі і паразіталогіі перададзены Аддзелу сігналізацыі і прагнозаў з'яўлення шкоднікаў і хвароб сельскагаспадарчых раслін МСГ БССР матэрыялы па відавому саставу жукоў-даўганосікаў, біялогіі і дынаміцы іх колькасці. Распрацаваны мерапрыемствы па біятэхніцы вырошчвання радужнай фарэлі ў фарэлевых гаспадарках БССР, а таксама па вядзенню вугровай гаспадаркі Беларусі.

Аддзелам фізіялогіі і сістэматыкі ніжэйшых раслін падрыхтавана і выйшла з друку манаграфія «Глебавая энзімалогія». Гэтай працай пакладзен пачатак новаму напрамку ў даследаванні біяхімічных уласцівасцей глебы. У манаграфіі сістэматызаваны і абагульнены найбольш важныя работы па глебавых ферментах, выкананыя ў Савецкім Саюзе і за мяжой. Упершыню дадзен агляд глебавых ферментаў з улікам патрабаванняў, прад'яўленых Міжнароднай камісіяй па класіфікацыі наменклатуры ферментаў.

Аддзелам мікрабіялогіі падабраны штамы дражджэй — актыўных прадуцэнтаў бялкоў, ліпідаў і караціноідаў пры культываванні іх на мясцовай сыравіне. Распрацоўваліся метады падбору малочнакіслых бактэрый для сыраварства. Выяўлены тры актыўныя штамы клубеньчыкавых бактэрый гароху.

Лабараторыяй біяфізікі і ізатопаў выяўлена існаванне ў зелянеючых і зялёных лісцях рэакцыйных цэнтраў метабалізму хларафілу. Атрыманы новыя пацверджанні

арысць раней зробленага вываду аб уз-
янні ўключэння бялкоў у прыжыццёвыя
тачныя структуры на энергетыку рэшт-
трыптафану.
Сектарам геранталогіі атрыманы новыя
ыя аб рухомасці нервовых працэсаў у
хавым аналізатары ў асоб ва ўзросце
—115 год, а таксама аб біяэлектрычнай
йнасці мышцаў твару і канечнасцей. Гэ-
я даныя пашыраюць нашы ўяўленні аб
неннях, што адбываюцца ў арганізме
авека ў працэсе старэння.
Рад навуковых даследаванняў, якія
водзіліся ў інстытутах, мае непасрэдную
язь з вытворчасцю. Адной з форм рэа-
ацыі вынікаў закончаных работ з'яўля-
ца гаспадарчыя дагаворы. Інстытуты ад-
ленняў фізіка-тэхнічных і фізіка-матэма-
ных навук маюць сувязь з сотнямі прад-
емстваў і заводаў Савецкага Саюза,
ўкараняюцца вынікі гаспадарчадагавор-
х работ. За справаздачны год гаспадар-
агаворныя работы склалі ў цэлым па
адэміі 21,4% ад усіх затрат на навуку:
Аддзяленню біялагічных навук —4%, хі-
ных —12, фізіка-матэматычных —24 і фі-
а-тэхнічных —37,4%.
Рэдакцыйна-выдавецкая дзейнасць. У
66 г. навуковымі ўстановамі АН БССР
ублікавана больш 1200 навуковых работ,
род якіх 49 манаграфій і 18 зборнікаў.
давецтва выпусціла 2167 учотна-выда-
цкіх аркушаў, з іх 75% для Акадэміі
вук.
Каардынацыя навуковай дзейнасці. Ка-
дынацыйная работа праводзілася Саве-
м па каардынацыі навуковай дзейнасці,
дзяленнямі праз навуковыя саветы па
жнейшых праблемах прыродазнаўчых і
амадскіх навук.
У 1966 г. у Акадэміі навук БССР функ-
яніравала 27 навуковых саветаў, 2 з якіх
галаўныя каардынавалі агульнасаюзную
матыку.
У адпаведнасці з рашэннямі майскага
ленума ЦК КПСС (1966 г.) быў створан
вет па праблеме «Комплекснае выкары-
анне прыродных рэсурсаў і развіццё пра-
кцыйных сіл Палескай нізіны». Работа
вета аказалася плённай і выклікала вялі-
ю цікавасць у навукова-інжынернай гра-
дскасці і ўстаноў рэспублікі.
Усе навуковыя саветы ў справаздачным
дзе значна пашырылі сваю работу. Для
дзелу ў рабоце праблемных саветаў, іх
кцый і навуковых саветаў устаноў пры-
гваліся буйныя спецыялісты. Навуковыя
веты ажыццяўлялі кантроль за выканан-
м навукова-даследчых работ па прабле-
ах, удакладнялі і канкрэтызавалі планы
бот, заслухоўвалі паведамленні па раду
танняў навукова-даследчых работ. Вялі-
ю работу прарабілі навуковыя саветы па
авядзенню ўсесаюзных каардынацыйных
рад і канферэнцый.
Падрыхтоўка навуковых кадраў. На
студзеня 1967 г. ва ўстановах Акадэміі
вук працавала 5496 чалавек, з іх у на-
ковых установах — 4699 чалавек. Наву-
вых супрацоўнікаў было 2282 (на 388 ча-
лавек больш, чым у 1965 г.), сярод іх 72
дактары навук і 591 кандыдат навук. Лік
дактароў навук павялічыўся на 13 чалавек,
кандыдатаў — на 119 чалавек. У складзе
Акадэміі 59 акадэмікаў, 34 члены-карэспан-
дэнты, на штатных пасадах працуюць у
Акадэміі 31 акадэмік і 15 членаў-карэспан-
дэнтаў. У ліку кіраўнікоў лабараторый,
аддзелаў і сектараў 21 акадэмік, 9 членаў-
карэспандэнтаў, 51 доктар навук, 69 канды-
датаў навук.

На 1 студзеня 1967 г. у АН БССР на-
вучалася 664 аспіранты, з іх 257 без адрыву
ад вытворчасці. Скончылі аспірантуру 174
чалавекі, з іх 50 без адрыву ад вытворчасці.
Абаронены 22 дысертацыі ў тэрмін і прад-
стаўлены да абароны 60 дысертацый. Што-
год прыём у аспірантуру складае 180 чала-
век. Па Акадэміі абаронена 122 кандыдац-
кія і 3 доктарскія дысертацыі.

План капітальнага будаўніцтва выка-
нан на 83,6, а па будаўнічаму мантажу —
на 72,4%, па жыллёваму будаўніцтву пера-
выканан. План уводу ў эксплуатацыю вы-
творчых плошчаў не выканан, уведзена 11
тыс. кв. м. Не закончана будаўніцтва біблі-
ятэкі.

Акадэмік АН БССР Ф. П. Вінакураў
закрануў у сваім дакладзе пытанні фінан-
савання, матэрыяльна-тэхнічнага забеспя-
чэння навуковых даследаванняў, работы
эксперыментальнага завода і г. д. Было ад-
значана таксама, што матэрыяльнае забес-
пячэнне інстытутаў з кожным годам паляп-
шаецца.

**Міжнародныя навуковыя сувязі АН
БССР** былі накіраваны на вывучэнне вынi-
каў навуковых даследаванняў зарубежных
краін. У справаздачным годзе ў навуковыя
камандзіроўкі за мяжу выязджалі 46 наву-
ковых супрацоўнікаў АН БССР. Па плану
навуковага супрацоўніцтва АН СССР на
ўмовах эквівалентнага абмену ў сацыялі-
стычныя краіны ў 1966 г. выязджалі 8 на-
вуковых супрацоўнікаў АН БССР, з іх 5 на
5—6 месяцаў. У капіталістычныя краіны
выязджалі 9 супрацоўнікаў АН БССР. Для
ўдзелу ў рабоце міжнародных і нацыяналь-
ных кангрэсаў, канферэнцый за мяжу вы-
язджаў 21 навуковы супрацоўнік.

У 1966 г. навуковыя ўстановы АН
БССР наведалі 53 спецыялісты з сацыялі-
стычных краін і 6 з капіталістычных. Вучо-
ныя зарубежных краін пазнаёміліся з да-
следаваннямі інстытутаў цепла- і масаабме-
ну, гісторыі, тэхнічнай кібернетыкі, фізія-
логіі, эканомікі, ядзернай энергетыкі, Лаба-
раторыі біяфізікі і ізатопаў. Вучоныя АН
БССР ажыццяўляюць навуковае кіраўніцт-
ва аспірантамі сацыялістычных краін. Аб-
мен друкаванымі работамі з зарубежнымі
вучонымі вядуць многія навуковыя ўста-
новы АН БССР.

У заключэнне акадэмік АН БССР
Ф. П. Вінакураў адзначыў, што за спра-
ваздачны перыяд у Акадэміі навук прароб-
лена значная навукова-арганізацыйная ра-
бота. Пашыран, умацаван і паглыблен ма-
штаб навукова-даследчых работ. Яшчэ
больш умацніліся сувязі з народнай гаспа-

даркай. Уклад Акадэміі ў навуку ў цэлым значна павялічыўся. Асобныя інстытуты набываюць усё большае прызнанне ў нас і за мяжой.

Ф. П. Вінакураў выказаў упэўненасць у тым, што вучоныя Акадэміі прыкладуць усе сілы і веды і ўнясуць дастойны ўклад ва ўсенародную справу пабудовы камунізма ў нашай краіне.

У абмеркаванні справаздачы аб навуковай дзейнасці Акадэміі навук БССР за 1966 г. прынялі ўдзел акадэмікі АН БССР У. І. Крылоў, Ф. І. Фёдараў, М. Ф. Ярмоленка, А. К. Красін, В. А. Сярбента, М. В. Турбін, М. М. Сірата, П. П. Рагавой, член-карэспандэнт АН БССР Н. В. Каменская, кандыдат тэхнічных навук В. І. Ягораў.

Гадавы агульны сход прыняў пастанову, у якой адобрыў справаздачу аб навуковай дзейнасці Акадэміі навук БССР за 1966 г. і зрабіў рад рэкамендацый.

28 лютага на Агульным сходзе былі выбраны акадэмікі і члены-карэспандэнты АН БССР. Акадэмікам АН БССР выбран П. Ф. Ракіцкі — па спецыяльнасці генетыка і цыталогія.

Членамі-карэспандэнтамі выбраны В. І. Сцяпанаў — па спецыяльнасці філасофія, Б. М. Смольскі — па спецыяльнасці цепла- і масаабмен, С. А. Самцэвіч — па спецыяльнасці глебавая мікрабіялогія.

Агульны сход зацвердзіў змяненне пункта 6 «Палажэння аб выбарах у Акадэмію навук БССР».

У канцы сесіі быў заслухан даклад акадэміка АН БССР У. І. Крылова аб рабоце вылічальных цэнтраў Беларусі.

В. Ф. ЧЭРНІКАВА

ЗМЕСТ

СОДЕРЖАНИЕ

АТ 16406. Здана ў набор 5/IV-67 г. Падпісана да друку 28/VI-67 г. Фармат 70×108[1]/16. Фіз. друк. арк. 8,75. Ум. друк. арк. 12,25. Уч.-выд. арк. 12,0. Выд. зак. 366. Друк. зак. 454. Цана 60 кап.

Друкарня выдавецтва «Навука і тэхніка» АН БССР і Дзяржаўнага Камітэта Савета Міністраў БССР па друку. Мінск, Ленінскі праспект, 68

РЕФЕРАТЫ

УДК 518 : 517.91/94

МЕТОД ОРТОГОНАЛЬНОЙ ПРОГОНКИ РЕШЕНИЯ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ С НЕРАЗДЕЛЕННЫМИ УСЛОВИЯМИ ДЛЯ СИСТЕМЫ ДВУХ УРАВНЕНИЙ. Монастырный П. И. «Весці Акадэміі навук БССР», серыя фізіка-матэматычных навук, 1967 г., № 2, 5—11.

Рассматривается новый метод сведения краевой задачи для системы уравнений

$$y_1'(t) = p_{11}(t)\, y_1(t) + p_{12}(t)\, y_2(t) + f_1(t),$$

$$y_2'(t) = p_{21}(t)\, y_1(t) + p_{22}(t)\, y_2(t) + f_2(t) \tag{1}$$

с условиями вида

$$a_{i1}\, y_1(\alpha) + a_{i2}\, y_2(\alpha) + b_{i1}\, y_1(\beta) + b_{i2}\, y_2(\beta) = A_i \quad (i = 1,2), \tag{2}$$

где $p_{ij}(t)$, $f_i(t)$ — функции, непрерывные на отрезке $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$; a_{ij}, b_{ij}, A_i—постоянные величины к задачам Коши.

Предлагаемый метод не имеет исключительных случаев и применим к решению задач вида (1), (2) при общих предположениях относительно коэффициентов и величин, определяющих эту задачу.

Достоинство метода ортогональной прогонки состоит в том, что в процессе вычислений находятся функции, имеющие тот же порядок малости, что и искомое решение краевой задачи (1), (2). Это исключает потерю значащих цифр, которая имеет место в часто применяемом методе редукции к задачам Коши.

Библиографий 9.

УДК 517.948.3

ОБ ОБЩЕЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ЛИНЕЙНОГО СОПРЯЖЕНИЯ НА РИМАНОВОЙ ПОВЕРХНОСТИ С КРАЕМ. Шешко М. А. «Весці Акадэміі навук БССР», серыя фізіка-матэматычных навук, 1967 г., № 2, 12—20.

Дается исследование краевой задачи об отыскании аналитической функции, когда на краю римановой поверхности задается условие задачи Гильберта

$$au + bv = c,$$

а на контуре L_1, лежащем внутри поверхности, условие

$$F^+(t) = G_1(t)\, F^-(t) + G_2(t)\, \overline{F^-(t)} + g(t).$$

Используя метод Л. И. Чибриковой по решению краевых задач для автоморфных функций, автор сводит эту задачу к интегральному уравнению. При выполнении условия

$$\frac{1}{2} \sup_{t \in L_1} \left| \frac{G_2(t)}{G_1(t)} \right| (1 + M) < 1,$$

где M — определенная константа, удается исследовать интегральное уравнение и на основании этого исследования сделать вывод о числе решений и числе условий разрешимости этой смешанной задачи.

При выполнении условия

$$|G_1| = |G_2|$$

задача распадается на две самостоятельные задачи Гильберта, решаемые в замкнутом виде.

Библиографий 9.

УДК 530.12

МЕТРИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ЦЕНТРАЛЬНО-СИММЕТРИЧЕСКИХ КОСМОЛОГИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ ЭЙНШТЕЙНА И СОСТОЯНИЕ МАТЕРИИ ПРИ ПОСТОЯННОМ ДАВЛЕНИИ. Рябушко А. П. «Весці Акадэміі навук БССР», серыя фізіка-матэматычных навук, 1967 г., № 2, 21—32.

Рассматриваются метрические свойства центрально-симметрических пространств и состояние материи при постоянном давлении в этих пространствах, которые получены автором как новые космологические решения уравнений Эйнштейна в предыдущей работе (Весці АН БССР, сер. фіз.-мат., № 1, 1967). Полученные решения позволяют изучить специфические свойства центрально-симметрических моделей Вселенной. Также отмечается, что применение этих решений в проблеме релятивистского гравитационного коллапса было бы более правильным, чем применение решений, в которых давлением материи пренебрегают.

Иллюстраций 9. Библиографий 17.

УДК 517.94

ОБ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЯХ ТИПА СВЕРТКИ С СОПРЯЖЕНИЕМ. Комяк И. И. «Весці Акадэміі навук БССР», серыя фізіка-матэматычных навук, 1967 г., № 2, 33—47.

Рассматриваются интегральные уравнения типа свертки, которые вместе с неизвестной функцией $\varphi(x)$ содержат ее комплексное сопряжение $\overline{\varphi}(x)$. Такие уравнения называются уравнениями типа свертки с сопряжением. Полное уравнение с четырьмя ядрами такого типа имеет вид

$$\lambda\varphi(x)+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{0}^{+\infty}k_1(x-t)\,\varphi(t)\,dt+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{0}k_2(x-t)\,\varphi(t)\,dt+\mu\overline{\varphi}(x)+$$

$$+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{0}^{+\infty}k_3(x-t)\,\overline{\varphi}(t)\,dt+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{0}k_4(x-t)\overline{\varphi}(t)\,dt+\int\limits_{-\infty}^{+\infty}m(x,-t)\,\overline{\varphi}(t)\,dt+$$

$$+\int\limits_{-\infty}^{+\infty}n(x,t)\,\overline{\varphi}(t)\,dt=f(x). \qquad (1)$$

Предполагается, что $\varphi(x)$ и $f(x)$ принадлежат $L_2(-\infty,+\infty)$, а разностные ядра — $L(-\infty,+\infty)$. Ядра $m(x,t)$ и $n(x,t)$ удовлетворяют условию

$$\iint\limits_{-\infty}^{+\infty}|m(x,t)|^2\,dx\,dt<\infty,\qquad \iint\limits_{-\infty}^{+\infty}|n(x,t)|^2\,dx\,dt<\infty.$$

λ и μ — кусочно-постоянные функции.

Устанавливается равносильность уравнения (1) и некоторой системы интегральных уравнений с ядром Коши.

Показывается, что союзным уравнению (1) является парное уравнение

$$\lambda_1\varphi(x)+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}k_1(x-t)\,\varphi(t)\,dt+\lambda_3\overline{\varphi}(x)+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}k_3(x-t)\,\overline{\varphi}(t)\,dt+$$

$$+\int\limits_{-\infty}^{+\infty}m(x,-t)\,\varphi(t)\,dt+\int\limits_{-\infty}^{+\infty}n(x,t)\,\overline{\varphi}(t)\,dt=f(x),\qquad x>0, \qquad (2)$$

$$\lambda_2 \varphi (x) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} k_2 (x - t) \varphi (t) \, dt + \lambda_4 \overline{\varphi} (x) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} k_4 (x - t) \overline{\varphi} (t) \, dt +$$

$$+ \int\limits_{-\infty}^{+\infty} m (x, -t) \varphi (t) \, dt + \int\limits_{-\infty}^{+\infty} n (x, t) \overline{\varphi} (t) \, dt = f (x), \; x < 0, \tag{2}$$

если в последнем у разностных ядер изменить знак переменной, ядра m и n транспонировать и одновременно ядра в интегралах, содержащих $\overline{\varphi} (x)$, взять комплексно сопряженными.

Определяются индекс и условия разрешимости уравнения (1).

Изучается характеристическое уравнение (1) $(m (x, t) \equiv n (x, t) \equiv 0)$. Оно равносильно краевой задаче

$$\Delta_1 (x) \Phi^+ (x) = C (x) \Phi^- (x) + D (x) \overline{\Phi}^- (-x) + G (x),$$

где $\Phi^\pm (x) \in L_2 (-\infty, +\infty)$ — предельные значения интеграла типа Коши, а $\Delta_1 (x) \neq 0$, $C (x)$, $D (x)$ представимы в виде суммы const и функции, являющейся преобразованием Фурье функции из $L (-\infty, +\infty)$, $G (x) \in L_2 (-\infty, +\infty)$.

В случаях, когда $C (x) = \overline{C} (-x) \neq 0$, $|C (x)| > |D (x)|$ или $D (x) = \overline{D} (-x) \neq 0$, $|D (x)| > |C (x)|$, принципом сжатых отображений получено качественное исследование уравнения (1). Когда $C (x) \equiv 0$ или $D (x) \equiv 0$, его решение получено в замкнутой форме.

Библиографий 8.

УДК 517.94

О СВЕРТКАХ ДЛЯ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ.

Какичев В. А. «Весці Акадэміі навук БССР», серыя фізіка-матэматычных навук, 1967 г., № 2, 48—57.

Пусть для определенности дан интегральный оператор K, действующий из пространства оригиналов $X (T)$ в пространство изображений $\tilde{X} (\Theta)$, имеющий обратный оператор K^{-1}, т. е.

$$\tilde{\varphi} (t) = K \varphi \equiv \int\limits_T k (t, \tau) \varphi (\tau) \, d \tau \in \tilde{X} (\Theta)$$

и

$$\varphi (t) = K^{-1} \tilde{\varphi} \equiv \int\limits_\Theta k^{-1} (t, \tau) \tilde{\varphi} (\tau) \, d \tau \in X (T).$$

Функцию $r (\tau)$ будем называть весом свертки оригиналов первого (второго) типа, если имеет место равенство

$$r (\tau) k^{-1} (t, \tau) k (\tau, \theta) = \sum_{q=1}^{p} \int\limits_{S_q} \alpha_q (t, \theta, s) k^{-1} (\beta_q (t, \theta, s), \tau) \, ds,$$

$$\int\limits_\Theta k^{-1} (t, \tau) k (\tau, \theta) k (\tau, s) r (\tau) \, d \tau = \varkappa (t, \theta, s).$$

Свертку оригиналов первого (второго) типа с весом $r (\tau)$ определим так:

$$\varphi (t) \overset{r(t)}{\ast} \psi (t) \equiv \sum_{q=1}^{p} \int\limits_{S_q} ds \int\limits_{T_q} \alpha_q (t, \theta, s) \varphi (\theta) \psi (\beta_q (t, \theta, s)) \, d \theta,$$

$$\varphi (t) \overset{r(\tau)}{\ast} \psi (t) \equiv \int\limits_T \int\limits_T \varphi (\theta) \psi (s) \varkappa (t, \theta, s) \, ds d \theta,$$

где T_q—такая часть T, что при $(t, \theta, s) \in \Theta \times T_q \times S_q$ функция $\beta_q \in \Theta$. Из определения свертки следует, что $K^{-1} (\varphi \overset{r}{\ast} \psi) = \tilde{\varphi} \tilde{\psi} \, r$. Свертки изображений определяются аналогично.

Даны примеры сверток с весом для оригиналов и изображений преобразований: Ханкеля, Мейера, синус-преобразования Фурье, Коши, Абеля, Вейля, Зоммерфельда и для оригиналов преобразования Конторовича—Лебедева.

Точно так же определяются свертки для матричных операторов и разложений по базисным системам функций. В качестве примеров приведены свертки оригиналов и изображений для разложений по полиномам Гегенбауэра и для одного матричного преобразования.

Алгебраические свойства сверток и классы функций, при которых они имеют место, не рассматриваются.

Библиографий 17.

УДК 518 : 517.944/.947

МНОГОСЛОЙНЫЕ СХЕМЫ МЕТОДА ИНТЕГРАЛЬНЫХ СООТНОШЕНИЙ ПРИ РЕШЕНИИ ЗАДАЧИ ГУРСА. Бобков В. В., Самусенко А. В. «Весці Акадэміі навук БССР», серыя фізіка-матэматычных навук, 1967 г., № 2, 58—64.

Заметка является обобщением статей В. И. Крылова и В. И. Бобкова [2, 3].

Для задачи Гурса

$$u_{xy} = a(x, y)\, u_x + b(x, y)\, u_y + c(x, y)\, u + f(x, y),$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad u(0, y) = \psi(y), \quad \varphi(0) = \psi(0),$$

$$0 \leqslant x \leqslant l', \quad 0 \leqslant y \leqslant l'',$$

построены явные многослойные схемы метода интегральных соотношений и получены априорные оценки погрешности, гарантирующие в прямоугольнике $\{0 \leqslant x \leqslant l', \ 0 \leqslant y \leqslant l''\}$ равномерную сходимость метода с соответствующей скоростью. Утверждается, что основные результаты можно обобщить и на системы уравнений, например, следующего вида

$$\frac{\partial^2 u_i}{\partial x \partial y} = a_i(x, y) \frac{\partial u_i}{\partial x} + \sum_{j=1}^{p} \left[b_{ij}(x, y) \frac{\partial u_j}{\partial y} + c_{ij}(x, y)\, u_j \right] + f_i(x, y),$$

$$i = 1, 2, \ldots, p,$$

при этом правые части могут и не быть линейными (линейно должны входить лишь производные $\left.\frac{\partial u_i}{\partial x}\right)$.

Библиографий 4.

УДК 538.3 : 538.56

ДИФРАКЦИЯ ПОЛЯ ПРОДОЛЬНОГО ДИПОЛЬНОГО ИЗЛУЧАТЕЛЯ НА ДВУХ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ЦИЛИНДРАХ. 2. МАГНИТНЫЙ ДИПОЛЬНЫЙ ИЗЛУЧАТЕЛЬ. Мошинский А. В. «Весці Акадэміі навук БССР», серыя фізіка-матэматычных навук, 1967 г., № 2, 65—71.

Дается решение задачи об излучении продольного магнитного диполя, расположенного в произвольной точке возле двух параллельных идеально проводящих эллиптических цилиндров. Решения для составляющих поля ищутся в виде рядов по собственным функциям эллиптического цилиндра. Неизвестные коэффициенты разложения определяются из решения бесконечных систем линейных уравнений. Решение для дипольного магнитного излучателя обобщается на случай продольной щели конечной ширины, расположенной на одном из цилиндров.

Библиографий 3.

УДК 517.944

ДИФРАКЦИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ ЭЛЕМЕНТАРНОГО ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ДИПОЛЯ НА ДВУХ СФЕРАХ. Шебеко Г. А. «Весцi Акадэмii навук БССР», серыя фiзiка-матэматычных навук, 1967 г., № 2, 72—79.

Дается строгое решение задачи о дифракции электромагнитного поля электрического диполя на двух идеально проводящих сферах для случая, когда диполь расположен в пространстве вне сфер и момент диполя параллелен общей для сфер оси вращения. Отыскание вектора электрической напряженности вторичного поля сводится к решению векторной краевой задачи, для решения которой используется аппарат шаровых векторных волновых функций. Решение получено в виде разложения по шаровым векторным функциям. Коэффициенты разложения определяются из бесконечных систем линейных уравнений, разрешимых методом редукции.

Библиографий 16.

УДК 519.44

ПОРОЖДЕНИЕ КОНЕЧНОЙ ГРУППЫ СИСТЕМАМИ НЕДОСТИЖИМЫХ ПОДГРУПП. Черток В. Д. «Весцi Акадэмii навук БССР», серыя фiзiка-матэматычных навук, 1967 г., № 2, 80—84.

Обозначения: G — конечная группа; $\{\overline{\Gamma_i}(G)\}$; $i > 0$ — подгруппа, порожденная множеством всех i-х максимальных недостижимых подгрупп группы G. Приводится доказательство следующих результатов: 1. Если $\{\overline{\Gamma_2}(G)\} \neq G$, то G разрешима. Если G — ненильпотентная группа, то она может быть двух типов: а) $G = P \leftthreetimes Q$, где P — циклическая p-подгруппа, а Q — минимальный нормальный делитель группы G; б) $G = (P \leftthreetimes Q) \times R$, где P и R — циклические подгруппы, а $P \times Q$ — группа Шмидта, причем Q — минимальный нормальный делитель группы G. 2. Если $\{\overline{\Gamma_3}(G)\} \neq G$, то G разрешима.

Библиографий 16.

УДК 539.126

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ИНВЕРСИИ И МАТРИЦА ЛОРЕНЦ-ИНВАРИАНТНОЙ БИЛИНЕЙНОЙ ФОРМЫ. Федоров Ф. И. «Весцi Акадэмii навук БССР», серыя фiзiка-матэматычных навук, 1967 г., № 2, 85—93.

На основе комплексной векторной параметризации группы Лоренца показано, что для любого конечномерного неприводимого представления полной группы Лоренца матрица пространственной инверсии Π всегда может быть взята ортогональной, вещественной и симметричной: $\Pi = \Pi^* = \tilde{\Pi} = \Pi^{-1}$. Матрица инвариантной билинейной эрмитовской формы η для того же представления может быть взята в виде $\eta = a\Pi$, где a — вещественное число. Для приводимого представления $\Pi = \Pi_1 \dotplus \Pi_2 \dotplus \ldots \dotplus \Pi_r$, а η соответственно может быть выбрана в виде $\eta = (\pm \Pi_1) \dotplus \ldots \dotplus (\pm \Pi_r)$, где Π_k относятся к различным неприводимым представлениям полной группы Лоренца. Показано, что для частиц с полуцелым спином размерность полного пространства представления кратна четырем.

Библиографий 8.

УДК 530.145

УРАВНЕНИЯ КВАНТОВОЙ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ С «ДИПОЛЬНЫМИ ДУХАМИ». Романова Т. С. «Весцi Акадэмii навук БССР», серыя фiзiка-матэматычных навук, 1967 г., № 2, 94—101.

Рассматривается возможность физической интерпретации квантованного электромагнитного поля, описываемого уравнениями 6-го порядка. Полное гильбертово пространство содержит кроме физического пространства неортогональные подпространства «призрачных» и дипольных «призрачных» состояний. Исследованы методы запрета появления «нефизических» амплитуд и «отрицательных вероятностей» для случая поля, порождаемого классическим током. Показано, что требованию макропричинности можно удовлетворить за счет частичного снятия регуляризации.

Библиографий 8.

УДК 539.166

ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ ЯДЕРНЫХ ПАРАМЕТРОВ ИЗ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ КОЭФФИЦИЕНТОВ ВНУТРЕННЕЙ КОНВЕРСИИ (КВК) ПРИ $M1$-ПЕРЕХОДАХ ЯДЕР. Борисоглебский Л. А., Позойский С. В. «Весці Акадэміі навук БССР», серыя фізіка-матэматычных навук, 1967 г., № 2, 102—107.

Исследованы изменения электронных факторов в теории структурных КВК на К-оболочке при $M1$-переходах ядер для $Z=20$, 64, 81, 92 в зависимости от изменений размеров, формы и распределения статического заряда ядра. Показано, что эта зависимость заметна для электронного фактора при первом ведущем ядерном параметре и значительна для электронных факторов при остальных ядерных параметрах.

Поскольку в структурных поправках в КВК входят суммы произведений электронных факторов на ядерные параметры, изменения электронных факторов ведут к изменениям ядерных параметров, определяемых из экспериментальных КВК. Это утверждение иллюстрируется на примере сильно заторможенного перехода Tl^{203} (279 *кэв*).

Таблиц 2. Библиографий 12.

ИЗУЧЕНИЕ СТЕПЕНИ ПОЛЯРИЗАЦИИ СВЕТА В ОБЛАСТИ МАЛЫХ УГЛОВ РАССЕЯНИЯ. Иванов А. Г., Шербаф И. Д., Бойко П. Б. «Весці Акадэміі навук БССР», серыя фізіка-матэматычных навук, 1967 г., № 2, 108—111.

Рассмотрена зависимость величины степени поляризации Р параллельного пучка света, проходящего через замутненную слабопоглощающую среду, от оптической толщи среды τ. Исследования проведены в интервале углов рассеяния γ от 0 (зона действия прямого пучка) до 9°, при разном угловом разрешении приемника $2\gamma_{\text{пр}}$. Описана установка для изучения величины P.

Показано, что при различных оптических глубинах практически отсутствует зависимость степени поляризации от угла наблюдения (в интервале от 0 до 9°). Вследствие этого не сказывается влияние величины $2\gamma_{\text{пр}}$ на измеряемые поляризационные характеристики. С ростом τ степень поляризации излучения убывает медленно. Достаточно сказать, что при изменении интенсивности света в нулевом направлении на 3 порядка P уменьшается лишь на 40%.

Сделан вывод о непригодности поляризационного метода для оценки прозрачности среды и местоположения источника.

Иллюстраций 4. Библиографий 4.

УДК 512.8

ЗАМЕЧАНИЕ К ТЕОРЕМЕ ЛАПЛАСА. Лаптинский В. Н. «Весці Акадэміі навук БССР», серыя фізіка-матэматычных навук, 1967 г., № 2, 112—113.

Рассматриваются определители $A=|a_{ij}|_1^n$, $B=|b_{ij}|_1^n$. Приводится теорема, являющаяся более общей формой теоремы Лапласа. Теорема. *Пусть в определителях A и B порядка n произвольно выбраны k строк (столбцов), $1\leqslant k\leqslant n-1$. Тогда произведение AB этих определителей можно представить следующими формулами:*

$$AB=\sum_{m=1}^{r} A_{im}B_{mi}, \quad i=1, 2, \ldots, r; \quad r=C_n^k,$$

где A_{pq}, B_{hs} есть определители порядка n, составленные из элементов определителей A и B по определенному правилу.

При

$$A = |a_{ij}|_1^n, \quad B = |b_{ij}|_1^n, \quad b_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

получается теорема Лапласа.

Библиографий 2.

УДК 539.126

Еще раз об ошибках Н. С. Акулова. Федоров Ф. И. «Весці Акадэміі навук БССР», серыя фізіка-матэматычных навук. 1967 г., № 2, 119—125.

Опровергаются возражения Н. С. Акулова, приведенные в «Изв. АН БССР», сер. физ.-техн. наук, № 1, 139, 1967, на критику его статей (ДАН БССР, 10, 151, 456, 1966), содержащуюся в заметке А. А. Богуша, Л. Г. Мороза и Ф. И. Федорова в «Изв. АН БССР», сер. физ.-мат. наук, № 4, 130, 1966.

Библиографий 14.

26785-2 об

60 к.

ВНИМАНИЮ АВТОРОВ

Статьи, присылаемые авторами в наш журнал, будут приниматься редакцией к печати только при наличии трех экземпляров автореферата, удовлетворяющего указанным ниже требованиям.

Требования, предъявляемые к реферату

1. В реферате кратко излагается основное содержание статьи. Реферат должен дать читателю представление о характере освещаемой работы, оригинальности постановки вопроса, методике проведения исследования и его основных результатах.

2. Реферату должно предшествовать библиографическое описание в следующем виде: название статьи, фамилия и инициалы автора, название журнала, где помещается статья. Текст реферата начинается непосредственно с изложения существа работы без повторения заголовка. Форма изложения материала не обязательно должна повторять форму изложения оригинальной статьи.

3. Если оригинал содержит большое количество цифровых данных, их следует обобщить и систематизировать.

4. Средний объем реферата 0,5—2 страницы машинописного текста, отпечатанного через два интервала на белой писчей бумаге обычного формата (30×21) в трех экземплярах с полем 4 *см* с левой стороны.

5. Таблицы, схемы, графики и пр. могут быть включены в том случае, если они отражают основное содержание работы или сокращают текст реферата. Сообщение о наличии в реферируемой работе таблиц, схем, графиков, фотографий, карт, рисунков необходимо давать в конце реферата. Например, табл. 2, ил. 10.

6. Формулы приводятся только в том случае, если они необходимы для понимания статьи. Громоздкие математические выражения помещать не следует. Формулы следует вписывать четко, не изменяя принятых в оригинале обозначений величин. Формулы и буквенные обозначения вписываются черными чернилами во все экземпляры.

7. В конце реферата в квадратных скобках указывается название учреждения или предприятия, в которых автор реферируемой работы (если эти данные приводятся в статье) провел работу. Подпись автора и дату написания реферата следует ставить в левом нижнем углу на обоих экземплярах реферата.