

Б 05
арх
30к-4
58

ВЕСЦІ

АКАДЭМІІ НАВУК БССР

СЕРЫЯ
ФІЗІКА-МАТЭМАТЫЧНЫХ
НАВУК

28790 / 2090

3

ВЫДАВЕЦТВА „НАВУКА І ТЭХНІКА“

МІНСК 1967

Nov 29 1877



ИЗВЕСТИЯ

АКАДЕМИИ НАУК БССР

СЕРИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ
НАУК

№ 3

ИЗДАТЕЛЬСТВО „НАУКА И ТЕХНИКА“

МИНСК 1967

ВЕСЦІ

АКАДЭМІІ НАВУК БССР

30К-4
58

СЕРЫЯ
ФІЗІКА-МАТЭМАТЫЧНЫХ
НАВУК

№ 3

ВЫДАВЕЦТВА „НАВУКА І ТЭХНІКА“

МІНСК 1967

РЭДАКЦЫЙНАЯ КАЛЕГІЯ:

Ф. І. ФЕДАРАЎ (галоўны рэдактар),
Д. А. СУПРУНЕНКА (нам. галоўнага рэдактара),
М. М. АЛЯХНОВІЧ, У. І. КРЫЛОЎ,
М. М. СІРАТА, У. І. СПРЫНДЖУК,
Я. І. ФІРСАЎ, С. А. ЧУНІХІН

ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ В АН БССР

(к 50-летию Советской власти)

До Великой Октябрьской социалистической революции на территории Белоруссии не было ни одного высшего учебного заведения общеобразовательного или технического профиля, не говоря уже о научно-исследовательских учреждениях. Разумеется, при этих условиях не могло быть и речи о каких-либо исследованиях в области таких фундаментальных наук, как физика и математика. В 1921 г. в Минске по указанию В. И. Ленина был организован Белорусский государственный университет. На физико-математическом отделении педагогического факультета БГУ началась подготовка специалистов в области физики и математики и постепенно стала расширяться научная работа.

В Академии наук БССР, организованной в 1929 г., первым учреждением, где проводились научные исследования в области физики и математики, явился Физико-технический институт. Его директор академик АН БССР Ц. Л. Бурстин возглавлял исследования в области дифференциальной геометрии, механики и теории относительности. Им было опубликовано на белорусском языке руководство по дифференциальной геометрии. В числе сотрудников института был Я. Громмер (умер в 1933 г.) в прошлом сотрудник Альберта Эйнштейна. В институте велись также исследования по радиофизике (Е. В. Снятков, И. Г. Некрашевич), теоретической физике (Ф. И. Федоров), теории упругости (М. П. Шереметьев), рентгеноструктурному анализу (И. П. Шапиро) и в некоторых других направлениях. Физико-технический институт в своей деятельности был очень тесно связан с физико-математическим факультетом БГУ.

После Великой Отечественной войны в конце 1945 г. в составе Отделения технических наук АН БССР был организован физико-технический сектор, в котором начали развиваться исследования в области теории элементарных частиц (Ф. И. Федоров), радиофизики (И. Г. Некрашевич), теории дифференциальных уравнений (М. О. Минкевич) и в некоторых других направлениях. Через два года этот сектор был преобразован в Физико-технический институт, однако при этом физико-математические исследования в нем были прекращены.

В 1953 г. по инициативе академика АН БССР В. В. Попова при Физико-техническом институте снова был организован физико-математический сектор. Его возглавили вновь избранные академики АН БССР А. Н. Севченко и лауреат Государственной премии Б. И. Степанов, известные своими работами в области спектроскопии и люминесценции, воспитанники ленинградской оптической школы С. И. Вавилова. В 1955 г. этот сектор был преобразован в Институт физики и математики, директором которого стал А. Н. Севченко, а с 1957 г. — Б. И. Степанов.

В 1956 г. состав академиков и членов-корреспондентов АН БССР по физико-математическим наукам значительно расширился благодаря избранию в действительные члены В. И. Крылова и Н. Н. Сироты, лауреатов Государственных премий М. А. Ельяшевича, Н. П. Еругина и в

члены-корреспонденты Ф. И. Федорова и С. А. Чунихина. В 1959 г. был избран в члены-корреспонденты Д. А. Супруненко, известный своими трудами в области теории групп. Вокруг этих ученых начала группироваться и расти в научном отношении талантливая молодежь, в основном подготовленная в стенах БГУ им. Ленина. В результате в 1959 г. из Института физики и математики выделился самостоятельный Институт математики и вычислительной техники с вычислительным центром, оснащенным электронными счетными машинами (директор Н. П. Еругин). В том же 1959 г. под руководством Н. Н. Сироты был создан отдел физики и химии твердого тела и полупроводников. В 1963 г. этот отдел был реорганизован в Институт физики твердого тела и полупроводников, который возглавил Н. Н. Сирота.

Таким образом, за 10 лет в Академии наук Белорусской ССР возникли три научных института физико-математического профиля, оснащенные современным оборудованием. Объем и значение проводимых в них научных исследований значительно возросли, поэтому в 1963 г. было создано объединяющее их Отделение физико-математических наук, которое является сейчас одним из крупнейших в Академии наук БССР.

В настоящее время в составе Отделения физико-математических наук (ОФМН) числится одиннадцать академиков и два члена-корреспондента АН БССР. В трех институтах отделения (ИФ, ИМВТ, ИФТП) насчитывается около 800 сотрудников, из них 15 докторов наук и около 80 кандидатов наук. В институтах ведутся работы, имеющие большое теоретическое и практическое значение, результаты которых принесли белорусским физикам и математикам известность в нашей стране и за рубежом.

Институт физики имеет в основном оптический профиль и является в настоящее время одним из ведущих научных центров нашей страны в области спектроскопии, люминесценции и квантовой электроники. В институте проводятся теоретические и экспериментальные исследования в таких актуальных направлениях современной физики, как квантовые генераторы, физика плазмы, оптика и акустика кристаллов, атомная и молекулярная спектроскопия, фотохимия и люминесценция, квантовая теория поля и ядерная спектроскопия. Для работ института характерна глубокая и органическая связь теории и эксперимента, поскольку около одной трети из числа научных сотрудников института составляют теоретики.

В Институте математики и вычислительной техники разрабатываются проблемы теории обыкновенных дифференциальных уравнений, теории методов вычислительной математики, уравнений математической физики, теории абстрактных и линейных групп. Вычислительный центр института проводит большую счетную работу для научных учреждений Академии наук и других учреждений и предприятий республики, а также работу по математическому обеспечению электронных счетных машин.

В Институте физики твердого тела и полупроводников ведется углубленное изучение природы химической связи в твердых телах, разрабатываются научные основы создания и изыскания материалов с особыми физическими свойствами, в частности ферритов, ферромагнитных пленок, полупроводниковых соединений и их взаимных растворов. Проводятся обширные работы по выращиванию монокристаллов, изучается термодинамика и кинетика образования кристаллов в широком интервале температур и при высоких давлениях. Исследуются физические и физико-химические свойства твердых тел, в частности при низких температурах, в сильных электрических и магнитных полях.

Наряду с исследованиями принципиального научного характера во всех институтах Отделения физико-математических наук уделяется

большое внимание проблемам, имеющим прикладное значение. Тесная связь с практикой осуществляется через посредство хоздоговорных работ, выполняемых институтами для различных предприятий страны. О масштабах этой деятельности можно судить по тому, что ее объем (в финансовом выражении) составляет свыше одной трети от общего объема научных исследований, проводимых в институтах ОФМН.

В настоящее время целый ряд направлений исследований, развиваемых в институтах Отделения физико-математических наук, оформился в виде научных школ, получивших широкую известность и признание. В качестве примера можно привести возглавляемую академиком Н. П. Еругиным научную школу по качественной теории дифференциальных уравнений, школы академиков В. И. Крылова — по вычислительным методам математики, Д. А. Супруненко и С. А. Чунихина — по теории групп. Широко известны фундаментальные исследования академика Б. И. Степанова и его учеников, относящиеся к глубоким закономерностям взаимодействия света и вещества и к теории оптических квантовых генераторов. Коллектив, возглавляемый академиком М. А. Ельшаевичем, достиг существенных результатов в изучении свойств низкотемпературной плазмы. Академиком Ф. И. Федоровым и его учениками построена общая теория оптических и акустических свойств кристаллов всех типов. Идеи академика Н. Н. Сироты, относящиеся к исследованию природы химической связи и других свойств твердых тел на основе распределения электронной плотности, находят развитие в лабораториях руководимого им института. В лаборатории академика А. Н. Севченко расшифровываются сложные закономерности механизма фотохимического процесса. Член-корреспондент Н. А. Борисевич со своими сотрудниками разработал чрезвычайно тонкие методы исследования свойств возбужденных молекул.

На передовые научные рубежи вышел и второй эшелон ученых — те, кто в момент организации Института физики и математики были студентами, аспирантами или младшими научными сотрудниками.

Первым доктором физико-математических наук, выросшим в ОФМН, стал Б. Б. Бойко. Эту ученую степень он получил за глубоко оригинальную работу «Поляризационно-оптические исследования процессов вязкого течения», представленную в качестве кандидатской диссертации. Написанная им в соавторстве с С. И. Губкиным и С. И. Добровольским монография «Фотопластичность» выдержала два издания в СССР и дважды переиздана за рубежом. Молодой ученый В. Г. Спринджук решил известную математическую проблему Малера, поставленную еще в 1932 г. В научных кругах хорошо известны работы Г. П. Гуриновича, А. П. Иванова, А. М. Самсона, П. А. Апанасевича, А. Е. Иванова, А. И. Яблонского, Л. И. Киселевского, Н. М. Олехновича, А. А. Богуша и многих других научных сотрудников.

Об авторитете институтов ОФМН АН БССР свидетельствует то, что научные учреждения других союзных республик присылают своих молодых специалистов для прохождения подготовки под руководством наших ученых. Особенно значительную помощь братским республикам в этом отношении оказывает Институт физики, в стенах которого проходит или уже завершил подготовку целый ряд молодых ученых Таджикистана, Азербайджана, Армении.

Ведущая роль научных учреждений ОФМН АН БССР в ряде направлений физики и математики нашла свое признание в том факте, что решением Президиума АН СССР в 1964 г. Институту математики и вычислительной техники было поручено издание всесоюзного ежемесячного журнала «Дифференциальные уравнения» (редактор Н. П. Еругин).

Одновременно Институту физики было доверено издание всесоюзного ежемесячного «Журнала прикладной спектроскопии» (редактор Б. И. Степанов). С момента выхода в свет этих журналов оба они переводятся и издаются в США.

За период 1958—1967 гг. сотрудниками институтов ОФМН опубликовано в различных журналах и других изданиях около 2000 научных статей. За это же время вышло в свет около двух десятков оригинальных монографий, в том числе: Б. И. Степанов «Люминесценция сложных молекул» (1956) и «Основы спектроскопии отрицательных световых потоков» (1961); Б. И. Степанов и В. П. Грибковский «Введение в теорию люминесценции» (1963); Б. И. Степанов и др. «Методы расчета оптических квантовых генераторов, т. I» (1966); Ф. И. Федоров «Оптика анизотропных сред» (1958) и «Теория упругих волн в кристаллах» (1965); М. А. Ельяшевич «Атомная и молекулярная спектроскопия» (1962); С. И. Губкин, С. И. Добровольский и Б. Б. Бойко «Фотопластичность» (1957); А. П. Пришивалко «Отражение света от поглощающих сред» (1963); Р. Г. Жбанков «Инфракрасные спектры целлюлозы и ее производных» (1964); Н. П. Еругин «Линейные системы дифференциальных уравнений с периодическими и квазипериодическими коэффициентами» (1963); В. И. Крылов «Приближенное вычисление интегралов» (1959); Д. А. Супруненко «Разрешимые и нильпотентные линейные группы» (1958); Д. А. Супруненко и Р. И. Тышкевич «Перестановочные матрицы» (1966). Сверх того опубликовано большое число тематических сборников работ и различного рода таблиц. Монографии В. И. Крылова, Д. А. Супруненко и Ф. И. Федорова переведены и изданы в США.

Научные сотрудники институтов ОФМН принимают самое активное участие во всеююзных конференциях, совещаниях и симпозиумах, тематика которых связана с направлениями исследований, проводимых в институтах. Ведущие ученые участвуют также в основных зарубежных конференциях и симпозиумах, выступая на них с докладами и сообщениями. Наряду с этим институтами отделения организуются и проводятся в Минске многочисленные всеююзные совещания и конференции. В частности, было проведено три совещания по спектроскопии, два совещания по люминесценции, совещание по нелинейной оптике, четыре совещания по ферритам, ряд совещаний по проблемам химической связи в полупроводниках, по физике низких температур и др.

Установлены и поддерживаются обширные научные связи с учеными зарубежных стран.

За успехи в научной деятельности и подготовке высококвалифицированных научных кадров Институт физики АН БССР награжден в 1967 г. орденом Трудового Красного Знамени. Академик М. А. Ельяшевич удостоен звания лауреата Ленинской премии.

Ученые, работающие в области физико-математических наук, могут заслуженно гордиться теми достижениями, с которыми они встречают знаменательную дату — 50-летие Великой Октябрьской социалистической революции. В настоящее время эти науки занимают одно из важнейших мест во всей деятельности Академии наук БССР, а в дальнейшем намечаются еще более широкие перспективы их развития.

Д. А. СУПРУНЕНКО

К ТЕОРИИ КОММУТАТИВНЫХ МАТРИЧНЫХ АЛГЕБР НАД НЕСОВЕРШЕННЫМ ПОЛЕМ

В настоящей статье речь будет идти об особенностях, возникающих в теории коммутативных матричных алгебр в случае, когда основное поле предполагается несовершенным. Как легко видеть, при изучении максимальных коммутативных матричных алгебр над произвольным полем можно ограничиться неразложимыми алгебрами. Хорошо известно, что неразложимая коммутативная матричная алгебра над полем Δ обладает с точностью до эквивалентности единственным неприводимым представлением над Δ [2, 3].

Пусть A — неразложимая максимальная коммутативная подалгебра полной матричной алгебры Δ_n , а

$$\gamma_A : A \rightarrow \Omega \quad (1)$$

— ее неприводимое представление. Тогда поле $\Omega = \text{Im}(\gamma_A)$ является расширением поля Δ , степень которого $m = (\Omega : \Delta)$ есть делитель числа n , а $\text{Ker}(\gamma_A)$ совпадает с радикалом R алгебры A . Если Ω — сепарабельное расширение поля Δ , то алгебра A с точностью до сопряженности в Δ_n однозначно восстанавливается заданием $\text{Ker}(\gamma_A)$ и $\text{Im}(\gamma_A)$. В этом случае A можно трактовать как максимальную коммутативную подалгебру алгебры Ω_k , где $k = nm^{-1}$, а R — как максимальную коммутативную нильпотентную подалгебру Ω_k (см., например, [2], стр. 16). Мы можем даже считать, что

$$A = \Omega E_k \dot{+} R, \quad (2)$$

где E_k — единичная матрица, а R — максимальная коммутативная нильпотентная подалгебра Ω_k . Положение становится совсем другим при несепарабельном Ω . В этой ситуации A не обязательно приводится к виду (2) и не всегда задается кольцами $\text{Im}(\gamma_A)$ и $\text{Ker}(\gamma_A)$. Здесь возникают две следующие задачи:

а) для каких пар $\langle R, \Omega \rangle$, где R — коммутативная нильпотентная подалгебра Δ_n , а Ω — несепарабельное расширение поля Δ , степень которого делит число n , существует такая неразложимая максимальная коммутативная подалгебра A алгебры Δ_n , что

$$\text{Im}(\gamma_A) = \Omega, \quad \text{Ker}(\gamma_A) = R; \quad (3)$$

б) пусть $\langle R, \Omega \rangle$ — фиксированная пара задачи а); требуется построить класс $K(R, \Omega)$ всех неразложимых максимальных подалгебр A алгебры Δ_n , для которых

$$\text{Im}(\gamma_A) = \Omega, \quad \text{Ker}(\gamma_A) = R,$$

и указать условия сопряженности в Δ_n двух алгебр класса $K(R, \Omega)$.

Следует отметить, что при изучении класса алгебр $K(R, \Omega)$ существенным является случай, когда Ω — чисто несепарабельное расширение основ-

ного поля Δ . Действительно, согласно [1] (стр. 88), существует такое промежуточное поле $P (\Delta \subseteq P \subseteq \Omega)$, что P — сепарабельное расширение Δ , а Ω — чисто несепарабельное расширение поля P . Пусть теперь A — какая-либо алгебра класса $K(R, \Omega)$. Рассмотрим ее подалгебру $B = \gamma_A^{-1}(P)$. Очевидно, R содержится в B и является радикалом B . Ясно также, что $B/R \cong P$. Так как P — сепарабельное расширение основного поля Δ , то $B = P_1 \dot{+} R$, P_1 — расширение Δ , эквивалентное P . Следовательно, алгебра B сопряжена в Δ_n с алгеброй $PE_{n_1} \dot{+} R_1$, где $n_1 = nm_0^{-1}$, $m_0 = (P : \Delta)$, а R_1 — коммутативная нильпотентная подалгебра алгебры P_{n_1} . Так как $B \subseteq A$, то отсюда вытекает, что A сопряжена в Δ_n с некоторой подалгеброй A_1 алгебры P_{n_1} . A_1 обладает неприводимым над P представлением $\bar{\gamma}_{A_1}$, таким, что $\text{Im}(\bar{\gamma}_{A_1}) = \Omega$.

Ниже изучается класс алгебр $K(R, \Omega)$ для случая, когда Ω — простое несепарабельное расширение поля Δ , а R — максимальная нильпотентная коммутативная подалгебра Ω_k второго класса нильпотентности, где $k = nm^{-1}$, $m = (\Omega : \Delta)$. Доказывается, что $K(R, \Omega)$ содержит лишь конечное множество несопряженных в Δ_n алгебр.

§ 1. Оператор $D\omega$

Пусть поле Ω удовлетворяет следующим условиям:

$$\Delta_m \supseteq \Omega \supseteq \Delta E_m, \quad (\Omega : \Delta) = m, \quad \Omega = \Delta(\omega). \quad (4)$$

В дальнейшем мы будем пользоваться некоторыми свойствами отображения

$$D\omega : \Delta_m \rightarrow \Delta_m,$$

где $D\omega(x) = [\omega, x] = \omega x - x\omega$, для $x \in \Delta_m$. Так как Ω совпадает со своим централизатором в Δ_m , то в силу (4) $\text{Ker}(D\omega) = \Omega$. Следовательно,

$$(D\omega(\Delta_m) : \Delta) = m^2 - m. \quad (5)$$

Далее,

$$\Omega D\omega(\Delta_m) = D\omega(\Delta_m)\Omega = D\omega(\Delta_m). \quad (6)$$

Действительно, очевидно, $\Omega D\omega(\Delta_m) \supseteq D\omega(\Delta_m)$. С другой стороны, для $\sigma \in \Omega$, $d \in \Delta_m$ имеем $\sigma[\omega, d] = [\omega, \sigma d]$. Следовательно, $\Omega D\omega(\Delta_m) = D\omega(\Delta_m)$. Аналогично устанавливается и второе равенство из (6).

Лемма 1. Если $y \in \Delta_m - D\omega(\Delta_m)$, то

$$\Delta_m = y\Omega \dot{+} D\omega(\Delta_m) = \Omega y \dot{+} D\omega(\Delta_m).$$

Доказательство. Так как $(y\Omega : \Delta) = (\Omega y : \Delta) = m$, то в силу (5) достаточно показать, что $y\Omega \cap D\omega(\Delta_m) = \Omega y \cap D\omega(\Delta_m) = (0)$. Последнее следует из (6). Лемма доказана.

Пусть теперь $\sigma \in \Omega$. Рассмотрим отображение $D\sigma : \Delta_m \rightarrow \Delta_m$, где $D\sigma(x) = [\sigma, x]$.

Лемма 2. $D\sigma(\Delta_m) \subseteq D\omega(\Delta_m)$.

Доказательство. Пусть $[\sigma, d] \notin D\omega(\Delta_m)$, где $\sigma \in \Omega$, $d \in \Delta_m$. Тогда, согласно лемме 1, $\Delta_m = [\sigma, d]\Omega \dot{+} D\omega(\Delta_m)$. Следовательно, для любого x из Δ_m можно написать $x = [\sigma, d]\tau + [\omega, b]$, где $\tau \in \Omega$, $b \in \Delta_m$. Отсюда $x = [\sigma, d\tau] + [\omega, b]$, $tx = 0$. Последнее неверно. Лемма доказана.

Лемма 3. Если Ω — несепарабельное расширение поля Δ , то $\Omega \subseteq D\omega(\Delta_m)$.

Доказательство. Пусть $\sigma \in \Omega$, $\sigma \notin D\omega(\Delta_m)$. Тогда, согласно лемме 1, $\Delta_m = \sigma\Omega + D\omega(\Delta_m) = \Omega + D\omega(\Delta_m)$. Так как Ω — несепарабельное расширение Δ , то след любого элемента из Ω равен нулю (см. [1], стр. 114). Следовательно, $\text{tr}x = 0$ для любого $x \in \Delta_m$. Последнее неверно. Лемма доказана.

§ 2. Двублочные коммутативные матричные алгебры

Всюду ниже символом γ_A будем обозначать неприводимое представление неразложимой коммутативной матричной алгебры A .

Пусть теперь $K(\Omega)$ — класс всех таких неразложимых максимальных коммутативных подалгебр A алгебры Δ_n , для которых существует представление γ_A , обладающее свойствами

$$\text{Im}(\gamma_A) = \Omega, (\Omega : \Delta) = \frac{1}{2} n,$$

где Ω — фиксированное расширение поля Δ . Очевидно, каждая алгебра A из $K(\Omega)$ имеет два эквивалентных неприводимых блока.

Легко проверяются следующие свойства класса $K(\Omega)$:

(i) — если Ω и Ω' эквивалентные расширения поля Δ , то $K(\Omega) = K(\Omega')$;

(ii) — если $A \in K(\Omega)$, $t \in GL(n, \Delta)$, то $tAt^{-1} \in K(\Omega)$;

(iii) — радикал каждой алгебры из $K(\Omega)$ сопряжен в Δ_n с алгеброй R всех матриц вида

$$r = \begin{bmatrix} 0 & \sigma \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \text{ где } \sigma \in \Omega. \quad (7)$$

Класс $K(\Omega)$ содержит подкласс $K_1(\Omega)$, состоящий из алгебр A_1 , матрицы которых имеют вид

$$a_1 = \begin{bmatrix} \sigma(a_1) & c(a_1) \\ 0 & \sigma(a_1) \end{bmatrix}, \sigma(a_1) \in \Omega, c(a_1) \in \Delta_m.$$

Очевидно, каждая алгебра класса $K(\Omega)$ сопряжена в Δ_n с некоторой алгеброй подкласса $K_1(\Omega)$. Пусть теперь $\Omega = \Delta(\omega)$ — простое несепарабельное расширение поля Δ , а A — произвольная алгебра из $K_1(\Omega)$. Тогда в A есть матрица вида

$$u = \begin{bmatrix} \omega & W \\ 0 & \omega \end{bmatrix}, \quad (8)$$

где $W \in \Delta_m$. Радикал R алгебры A состоит из всех матриц вида (7). Следовательно, алгебру A можно записать в виде

$$A = [E_n, u, \dots, u^{m-1}] + R, \quad (9)$$

где $[E_n, u, \dots, u^{m-1}]$ — линейная Δ -оболочка матриц E_n, u, \dots, u^{m-1} . Таким образом, алгебра $A \in K_1(\Omega)$ однозначно задается матрицей W из Δ_m . В силу этого мы будем обозначать A символом A_W . Очевидно, каждой матрице $W \in \Delta_m$ соответствует алгебра A_W из $K_1(\Omega)$. Введем теперь отображение

$$\alpha : \Delta_m \rightarrow K_1(\Omega),$$

положив $\alpha(W) = A_W$. Очевидно, отображение α сюръективно.

Лемма 4. $(\alpha(W) = \alpha(V)) \leftrightarrow (V - W \in \Omega)$.

Действительно, если $V - W \in \Omega$, то из (8) и (9) следует равенство $\alpha(W) = \alpha(V)$. Пусть теперь $\alpha(W) = \alpha(V)$. Тогда

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \omega & W \\ 0 & \omega \end{bmatrix} &= \lambda_0 \begin{bmatrix} E_m & 0 \\ 0 & E_m \end{bmatrix} + \lambda_1 \begin{bmatrix} \omega & W \\ 0 & \omega \end{bmatrix} + \\ &+ \dots + \lambda_{m-1} \begin{bmatrix} \omega^{m-1} & W_{m-1} \\ 0 & \omega^{m-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \sigma \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

где $\sigma \in \Omega$, $\lambda_j \in \Delta$. Так как $1, \omega, \dots, \omega^{m-1}$ — базис Ω , то $\lambda_j = 0$ для $j \neq 1$, $\lambda_1 = 1$. Следовательно, $V = W + \sigma$, $\sigma \in \Omega$. Лемма доказана.

Лемма 5. Пусть для V и W из Δ_m существуют такие матрицы $\sigma_1, \sigma_2 \in \Omega^*$ и $b \in \Delta_m$, что

$$\sigma_1 W - V \sigma_2 = D \omega(b). \quad (10)$$

Тогда алгебра $\alpha(W)$ сопряжена в Δ_n с алгеброй $\alpha(V)$.

Доказательство. Пусть матрицы V и W связаны условием (10). Положим $u = \begin{bmatrix} \omega & W \\ 0 & \omega \end{bmatrix}$, $v = \begin{bmatrix} \omega & V \\ 0 & \omega \end{bmatrix}$, $t = \begin{bmatrix} \sigma_1 & b \\ 0 & \sigma_2 \end{bmatrix}$ и рассмотрим $tu - vt$:

$$tu - vt = \begin{bmatrix} 0 & \sigma_1 W + b \omega - \omega b - V \sigma_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

В силу (10) последняя матрица равна нулю. Следовательно, $tut^{-1} = v$. Легко проверяется, что $tRt^{-1} = R$. Отсюда $\alpha(V) = t\alpha(W)t^{-1}$. Лемма доказана.

Очевидно, условие (10) определяет некоторое отношение эквивалентности β на множестве Δ_m .

Лемма 6. Для любой матрицы W из Δ_m либо $W \beta O_m$, либо $W \beta l_{11}$, где O_m — нулевая матрица Δ_m , а

$$l_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}.$$

Действительно, согласно лемме 1, W можно представить в виде $W = l_{11}\sigma + D\omega(b)$, где $\sigma \in \Omega$. Если $\sigma = 0$, то $W \beta O_m$. Если же $\sigma \neq 0$, то $W \beta l_{11}$.

Лемма 7. Алгебры $\alpha(O_m)$ и $\alpha(l_{11})$ не сопряжены в Δ_n .

Доказательство. Пусть в $GL(n, \Delta)$ есть такая матрица g , что

$$g\alpha(l_{11})g^{-1} = \alpha(O_m). \quad (11)$$

Тогда $gRg^{-1} = R$ и, следовательно, $g = \begin{bmatrix} b & c \\ 0 & d \end{bmatrix}$, где $b, c, d \in \Delta_m$. Из (11) находим

$$\begin{bmatrix} b & c \\ 0 & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega & l_{11} \\ 0 & \omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma & \sigma_1 \\ 0 & \sigma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b & c \\ 0 & d \end{bmatrix}, \quad \sigma_1 \in \Omega, \sigma \in \Omega^*.$$

Отсюда

$$b\omega = \sigma b, \quad d\omega = \sigma d, \quad (12)$$

$$bl_{11} + c\omega = \sigma c + \sigma_1 d. \quad (13)$$

Из (12) получаем

$$b^{-1}d = \sigma_2 \in \Omega^*, \quad b^{-1}\sigma = \omega b^{-1}. \quad (14)$$

(13) перепишем так:

$$l_{11} = b^{-1} \sigma c - b^{-1} c \omega + b^{-1} \sigma_1 d.$$

Отсюда, используя (14), находим

$$\begin{aligned} l_{11} &= \omega b^{-1} c - b^{-1} c \omega + b^{-1} \sigma_1 b b^{-1} d = \\ &= D \omega (b^{-1} c) + b^{-1} \sigma_1 b \sigma_2 = D \omega (b^{-1} c) + \sigma_3, \end{aligned}$$

где $\sigma_3 \in \Omega$. Сравнивая следы правой и левой частей последнего равенства, получаем $1 = 0$. Последнее противоречие и доказывает лемму.

Теорема 1. Если Ω — простое несепарабельное расширение поля Δ , то каждая алгебра из $K(\Omega)$ сопряжена в Δ_n с одной из двух следующих алгебр: $\alpha(O_m)$, $\alpha(l_{11})$. Алгебры $\alpha(O_m)$ и $\alpha(l_{11})$ не сопряжены в Δ_n .

Теорема следует из лемм 5, 6, 7.

Таким образом, $K(\Omega)$ состоит из двух классов сопряженных в Δ_n неразложимых максимальных коммутативных подалгебр Δ_n .

Предложение. Пусть Ω — простое несепарабельное расширение поля Δ степени m . Тогда над полем Δ с точностью до изоморфизма имеется ровно две коммутативные алгебры с единицей размерности $2m$ с факторалгеброй, по радикалу изоморфной полю Ω .

Доказательство. Пусть B — алгебра, удовлетворяющая условиям предложения, а ρ — ее регулярное представление. Тогда $\text{Im}(\rho) \in K(\Omega)$. Очевидно, образы регулярных представлений двух алгебр тогда и только тогда сопряжены, когда алгебры изоморфны. Следовательно, из теоремы 1 и из включения $\text{Im}(\rho) \in K(\Omega)$ вытекает предложение.

§ 3. Леммы о централизаторе

Пусть поле Ω удовлетворяет следующим условиям:

$$\Delta_m \supset \Omega \supset \Delta E_m, (\Omega : \Delta) = m, km = n, \quad (15)$$

а R — подалгебра алгебры Δ_n , состоящая из всех матриц r вида

$$r = \begin{bmatrix} 0 & S \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (16)$$

где S — произвольная $(k-l) \times l$ -матрица над полем Ω . Очевидно, $(R : \Delta) = (k-l)lm$. S можно рассматривать как $(k-l)m \times lm$ -матрицу над полем Δ . В § 4 мы будем рассматривать алгебру, радикал которой состоит из всех матриц (16). В связи с этим мы здесь докажем две леммы о централизаторе алгебры R .

Пусть $N(k, \Delta_m)$ — алгебра всех матриц вида

$$\begin{bmatrix} 0 & a_{12} & \dots & a_{1k} \\ 0 & 0 & \dots & a_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{k-1k} \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix},$$

где a_{ij} — произвольная матрица из Δ_m . Очевидно, $N(k, \Delta_m)$ — нильпотентная подалгебра алгебры Δ_n . Пространство всех $\mu \times \nu$ -матриц над полем Δ обозначим $\Delta_{\mu, \nu}$.

Лемма 8. Центризатор $C(R)$ алгебры R в алгебре $N(k, \Delta_m)$ состоит из всех матриц z вида

$$z = \begin{bmatrix} 0 & W \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (17)$$

где W — произвольная матрица из $\Delta_{\mu, \nu}$, $\mu = (k-l)m$, $\nu = lm$.

Доказательство. Очевидно, матрицы вида (17) перестановочны с каждой матрицей (16). Следовательно, остается показать, что каждая матрица из $C(R)$ имеет вид (17). Произвольную матрицу x из $N(k, \Delta_m)$ можно записать в виде

$$x = \begin{bmatrix} X & W \\ 0 & Y \end{bmatrix}, \quad (18)$$

где $X \in N(k-l, \Delta_m)$, $Y \in N(l, \Delta_m)$. Пусть теперь $x \in C(R)$. Тогда для любой матрицы S из $\Omega_{k-l, l}$ выполняется равенство

$$XS = SY. \quad (19)$$

Покажем, что из (19) следуют равенства $x = 0$, $y = 0$. Положим $X = \|x_{ij}\|$, $Y = \|y_{ij}\|$, $x_{ij}, y_{ij} \in \Delta_m$ и будем рассматривать X как $(k-l) \times (k-l)$ -матрицу над Δ_m , а Y как $l \times l$ -матрицу над Δ_m . В силу (18) последняя строка матрицы X состоит из нулей. Следовательно, и последняя строка SY состоит из нулей. Пусть теперь последняя строка S имеет вид $[0, \dots, E_m, \dots, 0] = u$, E_m расположена на i -ом месте. Умножая u на j -й столбец матрицы Y , получим y_{ij} . Отсюда $y_{ij} = 0$, $Y = 0$. Тогда из (19) легко получить и равенство $X = 0$. Лемма доказана.

Лемма 9. Центризатор $C_{\Delta_n}(R)$ алгебры R в Δ_n совпадает с алгеброй

$$\Omega E_k \dot{+} C(R). \quad (20)$$

Доказательство. Очевидно, алгебра (20) содержится в $C_{\Delta_n}(R)$. Пусть теперь

$$c = \begin{bmatrix} X & W \\ X_1 & Y \end{bmatrix}, \quad (21)$$

где $X \in \Delta_{m(k-l)}$, $Y \in \Delta_{ml}$ принадлежат $C_{\Delta_n}(R)$. Тогда из условия $cr = rc$ получаем

$$XS = SY, Y_1 S = 0, SY_1 = 0, \quad (22)$$

где S — произвольная матрица из $\Omega_{k-l, l}$. Из (22) следует равенство $Y_1 = 0$.

Положим теперь $X = \|x_{\alpha\beta}\|$, $Y = \|y_{\alpha\beta}\|$, где $x_{\alpha\beta}, y_{\alpha\beta} \in \Delta_m$, и возьмем сперва в качестве S матрицу

$$\bar{E}_{j1} = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \\ E_m & \dots & 0 \\ \vdots & & \\ 0 & \dots & 0 \end{bmatrix},$$

где E_m расположена в j -й строке. На позиции $(i, 1)$ матрицы $X\bar{E}_{j1}$ помещается x_{ij} . Если $i \neq j$, то на той же позиции матрицы $\bar{E}_{j1}Y$ расположен нуль. Следовательно, в силу (22) X диагональна над Δ_m . Положим теперь $S = \bar{E}_{1i}$. На позиции $(1, j)$ матрицы $\bar{E}_{1i}Y$ помещается y_{ij} . Если $i \neq j$, то на той же позиции $X\bar{E}_{1i}$ лежит нуль. Значит, и матрица Y диагональна над Δ_m . Возможны два случая: 1) $k-l \leq l$; 2) $k-l > l$. В первом случае

положим $S = [\sigma E_{k-l} \ 0]$, где σ — произвольный элемент Ω . Тогда из (22) получим равенство

$$\begin{bmatrix} x_{11}\sigma & 0 & \dots & 0 \\ 0 & x_{22}\sigma & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & x_{k-l,k-l}\sigma & \dots & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma y_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma y_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 \dots \sigma y_{k-l,k-l} & \dots & 0 \end{bmatrix}.$$

Отсюда $x_{ii}\sigma = \sigma y_{ii}$ для $i = 1, \dots, k-l$, $\sigma \in \Omega$. Следовательно, $x_{ii} = y_{ii}$, $i = 1, \dots, k-l$. Так как σ — произвольный элемент поля Ω , то $x_{ii} \in \Omega$, $i = 1, \dots, k-l$. Покажем, что $X = \lambda E_{k-l}$, $Y = \lambda E_l$, где $\lambda \in \Omega$. Из (21) следует, что для любого $\lambda \in \Omega$ $c - \lambda E_k \in C_{\Delta_n}(R)$. Следовательно, $(X - \lambda E_{k-l})S = S(Y - \lambda E_l)$ для $S \in \Omega_{k-l,l}$, $\lambda \in \Omega$. Положим $\lambda = x_{11}$. Тогда первая строка $X - \lambda E_{k-l}$ состоит из нулей. Пользуясь свободным выбором S из $\Omega_{k-l,l}$, легко показать, что $Y - \lambda E_l = 0$. Следовательно, и $X - \lambda E_{k-l} = 0$. Следовательно, если $k-l \leq l$, то $c \in \Omega E_k + c(R)$. При $k-l > l$ можно прийти к рассмотренной ситуации, транспонируя обе части равенства $XS = SY$. Лемма доказана.

§ 4. k -блочные коммутативные алгебры специального вида

Пусть Ω — поле, удовлетворяющее условиям (15), а R — подалгебра Δ_n , состоящая из всех матриц вида (16). Обозначим символом $K(R, \Omega)$ класс всех неразложимых максимальных коммутативных подалгебр A алгебры Δ_n , обладающих неприводимым представлением γ_A , таким, что

$$\text{Im}(\gamma_A) = \Omega, \text{Ker}(\gamma_A) = R.$$

Лемма 10. Пусть A — произвольная алгебра из класса $K(R, \Omega)$. Тогда $A = [v_1, \dots, v_m] + R$, где $[v_1, \dots, v_m]$ — линейная Δ -оболочка матриц v_1, \dots, v_m , $v_j = \begin{bmatrix} \omega_j E_{k-l} & V_j \\ 0 & \omega_j E_l \end{bmatrix}$, $\omega_1, \dots, \omega_m$ — базис Ω , причем матрицы v_j попарно перестановочны.

Доказательство. В силу лемм 8 и 9 любой элемент a алгебры A имеет вид $a = \begin{bmatrix} \sigma E_{k-l} & W \\ 0 & \sigma E_l \end{bmatrix}$, где $\sigma \in \Omega$, $W \in \Delta_{(k-l)m, lm}$. Пусть теперь $\omega_1, \dots, \omega_m$ — базис поля Ω над Δ , а $v_j \in \gamma_A^{-1}(\omega_j)$, $j = 1, \dots, m$. Тогда для элемента a из A имеем $\gamma_A(a) = \sigma = \lambda_1 \omega_1 + \dots + \lambda_m \omega_m$. Следовательно, $\gamma_A(a - (\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_m v_m)) = 0$. Отсюда $a = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_m v_m + r$, где $r \in R$. Это и доказывает лемму.

Лемма 11. Пусть $\omega_1, \dots, \omega_m$ — базис Ω , $u_j = \begin{bmatrix} \omega_j E_{k-l} & W_j \\ 0 & \omega_j E_l \end{bmatrix}$, $j = 1, \dots, m$ — попарно перестановочные матрицы из $C_{\Delta_n}(R)$. Тогда пространство матриц $[u_1, \dots, u_m] + R = A$ является алгеброй из класса $K(R, \Omega)$.

Доказательство. Очевидно, матрицы из A попарно перестановочны. Пусть теперь матрица $b \in \Delta_n$ и перестановочна с каждой матрицей из A . Тогда, согласно лемме 9, $b = \begin{bmatrix} \sigma E_{k-l} & u \\ 0 & \sigma E_l \end{bmatrix}$, где $\sigma \in \Omega$, $u \in \Delta_{(k-l)m, lm}$. A содержит матрицу c вида $c = \begin{bmatrix} \sigma E_{k-l} & V \\ 0 & \sigma E_l \end{bmatrix}$. Ясно, что $b - c = \begin{bmatrix} 0 & W \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ тоже перестановочна с каждой матрицей пространства A . В частности,

$$[u_j, d] = 0, j = 1, \dots, m. [u_j, d] = [\omega_j E_k, d] = \begin{bmatrix} 0 & \omega_j E_{k-l} & W & -W \omega_j E_l \\ 0 & & 0 & \end{bmatrix}.$$

Следовательно, $W \in \Omega_{k-l, l}$, $d \in R$, $b \in A$. Таким образом, A — максимальное подмножество попарно перестановочных матриц. Отсюда вытекает, что A — максимальная коммутативная подалгебра алгебры Δ_n . Очевидно, всякая нильпотентная матрица алгебры A принадлежит R . Следовательно, R — радикал A . По построению A обладает единственным с точностью до эквивалентности неприводимым представлением γ_A , причем $\text{Im}(\gamma_A) = \Omega$. Отсюда и из максимальнойности A следует неразложимость A . Следовательно, $A \in K(R, \Omega)$.

§ 5. Случай, когда Ω — простое чисто несепарабельное расширение Δ

Продолжим изучение класса $K(R, \Omega)$, начатое в § 4. Будем предполагать, что Ω — простое чисто несепарабельное расширение поля Δ , $(\Omega : \Delta) = m$, $\Omega = \Delta(\omega)$. Согласно леммам 10 и 11, любая алгебра из $K(R, \Omega)$ имеет вид

$$A_W = [E_n, \omega, \dots, \omega^{m-1}] \dot{+} R, \quad (*)$$

где $\omega = \begin{bmatrix} \omega E_{k-l} & W \\ 0 & \omega E_l \end{bmatrix}$, $W \in \Delta_{(k-l)m, lm}$, и обратно: всякая алгебра вида (*) принадлежит классу $K(R, \Omega)$.

Следовательно, формула (*) определяет сюръективное отображение

$$\alpha : \Delta_{(k-l)m, lm} \rightarrow K(R, \Omega), \quad (**)$$

где $\alpha(W) = A_W$.

Лемма 12. Пусть V и W — матрицы из $L = \Delta_{(k-l)m, lm}$. Алгебры $\alpha(V)$ и $\alpha(W)$ тогда и только тогда сопряжены в Δ_n , когда существуют такие матрицы S_1, S_2, S_3, b , где $S_1 \in GL(k-l, \Omega)$, $S_2 \in GL(l, \Omega)$, $S_3 \in \Omega_{k-l, l}$, $b \in L$, что

$$S_1 W - V S_2 = \omega E_{k-l} b - b \omega E_l + S_3. \quad (23)$$

Доказательство. Пусть матрицы V и W связаны условием (23). Положим $v = \begin{bmatrix} \omega E_{k-l} & V \\ 0 & \omega E_l \end{bmatrix}$, $t = \begin{bmatrix} S_1 & b \\ 0 & S_2 \end{bmatrix}$, $S = S_3 S_2^{-1}$, $r = \begin{bmatrix} 0 & S \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. Тогда $t \in GL(n, \Delta)$, $t R t^{-1} = R$. С другой стороны, с помощью (23) легко проверяется равенство $t \omega = (v + r) t$. Следовательно, $t \omega t^{-1} = v + r \in \alpha(V)$. Отсюда $t \alpha(W) t^{-1} = \alpha(V)$. Достаточность условия (23) доказана.

Установим теперь необходимость условия (23). Пусть t — такая матрица $GL(n, \Delta)$, что

$$t \alpha(W) t^{-1} = \alpha(V). \quad (24)$$

Тогда $t R t^{-1} = R$. Отсюда после простых вычислений находим

$$t = \begin{bmatrix} t_1 & b \\ 0 & t_2 \end{bmatrix}, \quad (25)$$

где $t_1 \in GL((k-l)m, \Delta)$, $t_2 \in GL(lm, \Delta)$, $b \in L$. Если теперь $\omega = \begin{bmatrix} \omega E_{k-l} & W \\ 0 & \omega E_l \end{bmatrix}$, $v = \begin{bmatrix} \omega E_{k-l} & V \\ 0 & \omega E_l \end{bmatrix}$, то из (24) следует

$$t \omega t^{-1} = f(v) + r, \quad r \in R, \quad f(x) \in \Delta[x], \quad (26)$$

где степень $f(x) < m$. Из (25) и (26) получаем

$$t_1 \omega E_{k-l} t_1^{-1} = f(\omega) E_{k-l}, \quad t_2 \omega E_l t_2^{-1} = f(\omega) E_l. \quad (27)$$

Из (27) следует, что ω и $f(\omega)$ — корни одного и того же неприводимого полинома из $\Delta[x]$. Так как Ω — простое чисто несепарабельное расширение Δ , то $f(\omega) = \omega$. Степень $f(x) < m$. Следовательно, $f(x) = x$ и (26) принимает вид

$$t\omega t^{-1} = v + r. \quad (28)$$

Из равенства $f(x) = x$ и (27) получаем $t_1 = S_1 \in GL(k-l, \Omega)$, $t_2 = S_2 \in GL(l, \Omega)$. Полагая теперь в (28) $r = \begin{bmatrix} 0 & S \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $S \in \Omega_{k-l, l}$, получаем $\begin{bmatrix} S_1 & b \\ 0 & S_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega E_{k-l} & W \\ 0 & \omega E_l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega E_{k-l} & V + S \\ 0 & \omega E_l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_1 & b \\ 0 & S_2 \end{bmatrix}$. Отсюда $S_1 W + b\omega E_l = \omega E_{k-l} b + (V + S)S_2$, или $S_1 W - VS_2 = \omega E_{k-l} b - b\omega E_l + SS_2$. Полагая в последнем равенстве $S_3 = SS_2$, получаем (23).

Придадим теперь условию (23) несколько иной вид. Предварительно введем линейный оператор $\lambda: L \rightarrow L$, положив

$$\lambda(x) = \omega E_{k-l} x - x \omega E_l. \quad (29)$$

Если записать x в виде $x = \|x_{ij}\|$, где $x_{ij} \in \Delta_m$, то, очевидно,

$$\lambda(x) = \|D\omega(x_{ij})\|. \quad (30)$$

Лемма 13. Алгебры $\alpha(W)$ и $\alpha(V)$ из $K(R, \Omega)$ тогда и только тогда сопряжены в Δ_n , когда матрицы W и V связаны соотношением

$$W = TVU + \lambda(x), \quad (23a)$$

где $T \in GL(k-l, \Omega)$, $U \in GL(l, \Omega)$, $x \in L$.

Доказательство. Очевидно, надо лишь доказать, что из (23) вытекает (23a). Из (23) следует: $W = S_1^{-1}VS_2 + \lambda(S_1^{-1}b) + S_1^{-1}S_3$. $S_1^{-1}S_3 = \|\sigma_{ij}\|$, $\sigma_{ij} \in \Omega$. Согласно лемме 3, $\sigma_{ij} \in D\omega(\Delta_m)$. Из (30) получаем $\lambda(S_1^{-1}b) + S_1^{-1}S_3 = \lambda(S_1^{-1}b) + \lambda(y) = \lambda(x)$, где $x = S_1^{-1}b + y$. Отсюда и вытекает лемма.

Пусть теперь $\mu = \min\{k-l, l\}$. Введем $\mu+1$ матриц W_ρ из L , положив $W_\rho = \|\omega_{ij}\|$, $\omega_{ij} \in \Delta_m$, $\omega_{ij} = 0$, если $i \neq j$ или $i = j > \rho$, для $i \leq \rho$ $\omega_{ii} = l_{11}$, $\rho = 0, 1, \dots, \mu$ (см. лемму 6). На L зададим отношение эквивалентности B , положив WBV тогда и только тогда, когда матрицы W и V связаны соотношением (23a). Отрицание отношения B обозначим \bar{B} .

Лемма 14. Для любой матрицы W из L есть такое ρ , что WBW_ρ .

Доказательство. Так как $tr l_{11} = 1$, то $l_{11} \notin D\omega(\Delta_m)$. Согласно лемме 1, $\Delta_m = \Omega l_{11} + D\omega(\Delta_m)$. Отсюда и из (30) находим

$$L = \lambda(L) + M, \quad (31)$$

где M — пространство всех матриц Q вида

$$Q = \begin{bmatrix} \sigma_{11} l_{11} & \dots & \sigma_{1\mu} l_{11} \\ \vdots & & \vdots \\ \sigma_{k-l, 1} l_{11} & & \sigma_{k-l, \mu} l_{11} \end{bmatrix}, \quad \sigma_{ij} \in \Omega. \quad (32)$$

Из (31) следует, что для любой матрицы W из L есть такая матрица Q вида (32), что WBQ . Следовательно, лемму достаточно доказать для матриц Q вида (32). Мы покажем существование таких матриц T, U, b , что

$$TQU = W_\rho + \lambda(b), \quad (33)$$

$$T \in GL(k-l, \Omega), \quad U \in GL(l, \Omega), \quad b \in L, \quad 0 \leq \rho \leq \mu.$$

Действительно, матрицу Q будем рассматривать как $(k-l) \times l$ -матрицу над Δ_m . Умножением Q слева на матрицу из $GL(k-l, \Omega)$ можно получить следующие преобразования:

а) умножение слева любой строки Q на произвольный элемент Ω^* ;
 б) прибавление к одной строке матрицы Q другой строки. Умножая Q справа на матрицы из $GL(l, \Omega)$, можно добиться следующих операций над столбцами Q :

а₁) умножения справа любого столбца на произвольный элемент из Ω^* ;
 б₁) прибавления к одному столбцу другого столбца.

Легко видеть, что применение операций а, б, б₁ к матрице Q равносильно их применению к матрице

$$\Sigma(Q) = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \dots & \sigma_{1l} \\ \vdots & & \vdots \\ \sigma_{k-l,1} & & \sigma_{k-l,l} \end{bmatrix}. \quad (34)$$

Пусть теперь a_1 умножает j -й столбец Q справа на $\sigma \in \Omega^*$. $\sigma_{ij} l_{11} \rightarrow \sigma_{ij} l_{11} \sigma = \sigma \sigma_{ij} l_{11} + [\sigma_{ij} l_{11}, \sigma]$. Согласно лемме 2, $\sigma_{ij} l_{11} \sigma = \sigma \sigma_{ij} l_{11} + D \omega(b)$, где $b \in \Delta_m$. Следовательно, в силу (30)

$$a_1(Q) = a_2(Q) + \lambda(d), \quad (35)$$

где $d \in L$, а a_2 умножает j -й столбец Q на σ . Так как матрицу $\Sigma(Q)$ над Ω с помощью операции а, б, а₁, б₁ можно привести к виду $\begin{bmatrix} E_\rho & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$,

то из (35) вытекает (33). Лемма доказана.

Лемма 15. Если $i \neq \rho$, то $W_i B W_\rho$.

Доказательство. Пусть $i < \rho$ и $W_i B W_\rho$. Тогда (23а) запишем в виде $S W_i - W_\rho U = S \lambda(b)$, где $S \in GL(k-l, \Omega)$, $U \in GL(l, \Omega)$, $b \in L$. Далее, $S \lambda(b) = S \omega E_{k-l} b - S b \omega E_l = \lambda(Sb)$. Следовательно,

$$S W_i - W_\rho U = \|y_{\alpha\beta}\|, \quad y_{\alpha\beta} = D \omega(x_{\alpha\beta}), \quad x_{\alpha\beta} \in \Delta_m. \quad (36)$$

Полагая $U = \|\sigma_{\alpha\beta}\|$, $\sigma_{\alpha\beta} \in \Omega$, из (36) получим

$$\begin{bmatrix} * & \dots & * & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ * & \dots & * & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} * & \dots & * & l_{11} \sigma_{i+1} & \dots & l_{11} \sigma_{il} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ * & \dots & * & l_{11} \sigma_{\rho i+1} & \dots & l_{11} \sigma_{\rho l} \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} = \|D \omega(x_{\alpha\beta})\|.$$

Следовательно, $l_{11} \sigma_{\alpha\beta} \in D \omega(\Delta_m)$, если $\alpha = 1, \dots, \rho$, $\beta = i-1, \dots, l$. Из последнего включения в силу леммы 1 получаем $\sigma_{\alpha\beta} = 0$, когда $\alpha = 1, \dots, \rho$, $\beta = i+1, \dots, l$. Так как $i < \rho$, то $l-i+\rho > l$ и, следовательно, $\det U = 0$. Последнее невозможно, ибо $U \in GL(l, \Omega)$. Лемма доказана.

Из трех последних лемм вытекает

Теорема 2. Если Ω — простое чисто несепарабельное расширение поля Δ , а R — алгебра всех матриц вида (16), то каждая алгебра из

$K(R, \Omega)$ сопряжена в Δ_n с одной и только одной из следующих $\mu + 1$ алгебр:

$$\alpha(W_0), \alpha(W_1), \dots, \alpha(W_\mu),$$

где $\mu = \min\{k - l, l\}$.

Литература

1. Зарисский О., Самюэль П. Коммутативная алгебра, 1. ИЛ, 1963.
2. Супруненко Д. А., Тышкевич Р. И. Перестановочные матрицы. Изд. «Наука и техника», Минск, 1966.
3. Charles B. J. de Math., pur. et appl., 33, 2, 81—145, 1954.

Институт математики
АН БССР

Поступило в редакцию 13.III 1967

А. Х. ТУРЕЦКИЙ, И. И. КОРЗУН

НЕКОТОРЫЕ ТОЖДЕСТВА

Обозначим через $W_2^{(r)} M[a, b]$ класс функций $f(x)$, имеющих на сегменте $[a, b]$ производную порядка r с интегрируемым квадратом, для которой

$$\int_a^b [f^{(r)}(t)]^2 dt \leq M^2.$$

По узлам $a \leq x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n \leq b$, заданным на сегменте $[a, b]$, напишем интерполяционную формулу Лагранжа

$$L_{n-1}(x, f) = \sum_{k=1}^n f(x_k) l_k(x)$$

и поставим задачу — определить для данного фиксированного x из сегмента $[a, b]$ величину

$$\sup_{f \in W_2^{(r)} M[a, b]} |f(x) - L_{n-1}(x, f)|.$$

Нами эта задача решена для узлов Чебышева

$$x_k = \cos \frac{(2n - 2k + 1)\pi}{2n} \quad (k = 1, 2, \dots, n),$$

заданных на отрезке $[-1, 1]$. В этом случае справедлива

Теорема. Пусть $L_{n-1}(x, f) = \sum_{k=1}^n f(x_k) l_k(x)$ есть интерполяционная формула Лагранжа по узлам Чебышева, r — натуральное число, удовлетворяющее условию $2r \leq n$. Тогда для фиксированного x из интервала $x_i < x < x_{i+1}$, т. е. $x = -\cos \frac{(2i - 2\alpha + 1)\pi}{2n}$ ($0 < \alpha < 1$), имеет место следующее асимптотическое равенство:

$$\sup_{f \in W_2^{(r)} M[-1, 1]} |f(x) - L_{n-1}(x, f)| = \frac{M}{(r-1)!} I^{1/2},$$

$$\text{где } I = \frac{(2r-2)!!}{2^{2r-2} (2r-1)!!} \frac{|T_n(x)|}{n} (1-x^2)^{\frac{2r-1}{2}} \sin^{r-1} \frac{\alpha\pi}{n} \sin^{r-1} \frac{(1-\alpha)\pi}{n} \times$$

$\times \sum_{l=1}^{r-1} \frac{b_l}{[\alpha(1-\alpha)]^{l-1}} + O\left(\frac{\ln n}{n^{2r}}\right)$, $T_n(x) = \cos n \arccos x$, — полином Чебышева первого рода, а коэффициенты b_l определяются соотношениями

$$b_1 = 1, \quad b_l = \sum_{j=1}^{l-1} (-1)^{j+1} b_{l-j} C_{r-l+j}^{2j} \quad (l = 2, 3, \dots, r-1).$$

При доказательстве этой теоремы нам понадобились некоторые тождества, представляющие, на наш взгляд, самостоятельный интерес. Так как доказательство вспомогательных тождеств и теоремы занимает много места, нам кажется целесообразным разделить данную работу на две части, опубликовав в настоящей статье доказательства тождеств, а в следующей — доказательство теоремы.

$$1. \quad \sum_{j=0}^m \frac{2^{2j}}{(2j)! (m-j)! (p-j)!} = \frac{C_{2p+2m}^{2m}}{(p+m)!}, \quad (1)$$

p, m — натуральные числа.

Доказательство. Обозначим: $S = \sum_{j=0}^m \frac{2^{2j}}{(2j)! (m-j)! (p-j)!}$.

Для вычисления этой суммы введем в рассмотрение функцию $\varphi(x) = \sum_{j=0}^m \frac{x^{2j}}{(2j)! (m-j)! (p-j)!}$. Очевидно, что $S = \varphi(2)$. Докажем прежде

всего, что $(p+m)! \varphi(x)$ равно коэффициенту при t^{2m} в разложении функции $(1+tx+t^2)^{p+m}$ по степеням t

$$(1+tx+t^2)^{p+m} = \sum_{l=0}^{2p+2m} A_l(x) t^l,$$

т. е. что $A_{2m}(x) = (p+m)! \varphi(x)$.

Действительно, $(1+tx+t^2)^{p+m} = \sum_{k=0}^{p+m} C_{p+m}^k \sum_{v=0}^{p+m-k} C_{p+m-k}^v x^v t^{v+2k}$. Пусть $v+2k=2m$. Коэффициент при t^{2m} равен

$$\begin{aligned} A_{2m}(x) &= \sum_{k=0}^m C_{p+m}^k C_{p+m-k}^{2m-2k} x^{2m-2k} = \sum_{j=0}^m C_{p+m}^{m-j} C_{p+j}^{2j} x^{2j} = \\ &= (p+m)! \sum_{j=0}^m \frac{x^{2j}}{(2j)! (m-j)! (p-j)!} = (p+m)! \varphi(x). \end{aligned}$$

Значит,

$$A_{2m}(2) = (p+m)! \varphi(2). \quad (2)$$

С другой стороны, при $x=2$

$$\begin{aligned} (1+2t+t^2)^{p+m} &= \sum_{l=0}^{2p+2m} A_l(2) t^l = (1+t)^{2p+2m} = \sum_{l=0}^{2p+2m} C_{2p+2m}^l t^l, \\ A_l(2) &= C_{2p+2m}^l, \\ A_{2m}(2) &= C_{2p+2m}^{2m}. \end{aligned} \quad (3)$$

Из (2) и (3) следует, что $S = \varphi(2) = \frac{C_{2p+2m}^{2m}}{(p+m)!}$, и тождество (1) доказано.

$$2. \sum_{k=0}^m \frac{(-1)^k}{2^{2k}} C_{2n-k+1}^k C_{n-k}^{n-m} = \frac{C_{2n-m+1}^m}{2^{2m}}, \quad (4)$$

$$\sum_{k=0}^m \frac{(-1)^k}{2^{2k}} \frac{(2n-k)!}{k!(2n-2k+1)!} C_{n-k}^{n-m} = \frac{1}{2n+1} \frac{C_{2n-m}^m}{2^{2m}}, \quad (5)$$

m, n — натуральные числа.

Доказательство. Рассмотрим многочлен

$$P_m(t) = \sum_{k=0}^m (-1)^k C_{2n-k+1}^k C_{n-k}^{n-m} t^k$$

и покажем, что $P_m\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{C_{2n-m+1}^m}{2^{2m}}$.

Введем функцию $S(x, t) = \sum_{m=0}^n P_m(t) x^m$. Имеем

$$\begin{aligned} S(x, t) &= \sum_{m=0}^n x^m \sum_{k=0}^m (-1)^k C_{2n-k+1}^k C_{n-k}^{n-m} t^k = \\ &= \sum_{k=0}^n (-1)^k C_{2n-k+1}^k t^k \sum_{m=k}^n C_{n-k}^{n-m} x^m = \\ &= \sum_{k=0}^n (-1)^k C_{2n-k+1}^k t^k \sum_{v=0}^{n-k} C_{n-k}^v x^{k+v} = (1+x)^n \times \\ &\quad \times \sum_{k=0}^n (-1)^k C_{2n-k+1}^k \left(\frac{tx}{1+x}\right)^k. \end{aligned}$$

Убедимся, что $S(x, 1/4)$ весьма просто выражается через полином Чебышева первого рода.

Возьмем полином Чебышева $T_{2n+2}(u)$ в виде [1]

$$T_{2n+2}(u) = \sum_{k=0}^{n+1} (-1)^k \frac{2n+2}{2n-k+2} C_{2n-k+2}^k 2^{2n-2k+1} u^{2n-2k+2}.$$

Тогда

$$T'_{2n+2}(u) = (2n+2)(2u)^{2n+1} \sum_{k=0}^n (-1)^k C_{2n-k+1}^k \left(\frac{1}{4u^2}\right)^k,$$

откуда

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k C_{2n-k+1}^k \left(\frac{1}{4u^2}\right)^k = \frac{1}{(2n+2)(2u)^{2n+1}} T'_{2n+2}(u).$$

Положим $u = \sqrt{\frac{1+x}{x}}$. Тогда $\sum_{k=0}^n (-1)^k C_{2n-k+1}^k \left(\frac{x}{4(1+x)}\right)^k =$
 $= \frac{x^{n+1/2}}{2^{2n+2}(n+1)(1+x)^{n+1/2}} T'_{2n+2} \sqrt{\frac{1+x}{x}},$
 $S\left(x, \frac{1}{4}\right) = \frac{x^{n+1/2}}{2^{2n+2}(n+1)\sqrt{1+x}} T'_{2n+2} \left(\sqrt{\frac{1+x}{x}}\right).$

Обозначим: $T'_{2n+2}(u) = T'_{2n+2} \left(\sqrt{\frac{1+x}{x}}\right) = v(x)$. Тогда

$$T''_{2n+2}(u) = v'(x) \frac{dx}{du},$$

$$T'''_{2n+2}(u) = v''(x) \left(\frac{dx}{du}\right)^2 + v'(x) \frac{d^2x}{du^2}. \quad (6)$$

Так как $u = \sqrt{\frac{1+x}{x}}$, то $x = \frac{1}{u^2-1}$, и

$$\frac{dx}{du} = -\frac{2u}{(u^2-1)^2}, \quad \frac{d^2x}{du^2} = 2 \frac{3u^2+1}{(u^2-1)^3}. \quad (7)$$

Полином $T_{2n+2}(u)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$(1-u^2)T''_{2n+2}(u) - uT'_{2n+2}(u) + (2n+2)^2 T_{2n+2}(u) = 0.$$

Продифференцировав это уравнение и подставив (6) и (7), получаем для функции $v(x)$ уравнение

$$4x^2(1+x)v''(x) + 2x^2v'(x) - (2n+1)(2n+3)v(x) = 0. \quad (8)$$

Положим $q(x) = x^{-n-1/2}(1+x)^{1/2}$ и $v(x) = 2^{2n+2}(n+1)q(x)Q_n(x)$, где

$$Q_n(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^{n-k}. \quad (9)$$

Продифференцировав дважды $v(x)$ и подставив в (8), получим

$$2x(1+x)Q''_n(x) - [2(2n+1) + (4n-1)x] \times \\ \times Q'_n(x) + n(2n+1)Q_n(x) = 0.$$

Подставив в последнее уравнение выражение $Q_n(x)$ и его производные из (9), получим следующее рекуррентное соотношение:

$$a_k = \frac{2(n+k+1)(n-k+1)}{k(2k+1)} a_{k-1} \quad (k=1, 2, \dots, n).$$

Пользуясь этим рекуррентным соотношением, получаем

$$a_k = \frac{2^{2k}}{n+1} C_{n+k+1}^{2k+1} a_0.$$

Найдем a_0 . Для этого заметим, что

$$S\left(x, \frac{1}{4}\right) = \sum_{m=0}^n P_m\left(\frac{1}{4}\right) x^m = Q_n(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^{n-k}.$$

Приравняв коэффициенты при x^n , имеем

$$a_0 = P_n\left(\frac{1}{4}\right) = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{2^{2k}} C_{2n-k+1}^k.$$

Но $\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{2^{2k}} C_{2n-k+1}^k = \frac{n+1}{2^{2n}}$, что следует из известного соотношения

$$\sin(2n+2)x = (-1)^n \sin x \cos x \sum_{k=0}^n (-1)^k 2^{2n-2k+1} C_{2n-k+1}^k \sin^{2n-2k} x$$

при $x \rightarrow \frac{\pi}{2}$, и, значит, $a_0 = \frac{n+1}{2^{2n}}$. Тогда

$$a_k = 2^{2k-2n} C_{n+k+1}^{2k+1},$$

откуда

$$a_{n-m} = \frac{C_{2n-m+1}^m}{2^{2m}}.$$

Так как $P_m\left(\frac{1}{4}\right) = a_{n-m}$, то $P_m\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{C_{2n-m+1}^m}{2^{2m}}$.

Но $P_m\left(\frac{1}{4}\right) = \sum_{k=0}^m \frac{(-1)^k}{2^{2k}} C_{2n-k+1}^k C_{n-k}^{n-m}$ и, следовательно, $\sum_{k=0}^m \frac{(-1)^k}{2^{2k}} \times$
 $\times C_{2n-k+1}^k C_{n-k}^{n-m} = \frac{C_{2n-m+1}^m}{2^{2m}}$, т. е. доказано тождество (4).

Для доказательства тождества (5) рассмотрим многочлен

$$A_m(t) = \sum_{k=0}^m (-1)^k \frac{(2n-k)!}{k!(2n-2k+1)!} C_{n-k}^{n-m} t^k.$$

Очевидно, что

$$\sum_{k=0}^m \frac{(-1)^k}{2^{2k}} \frac{(2n-k)!}{k!(2n-2k+1)!} C_{n-k}^{n-m} = A_m\left(\frac{1}{4}\right).$$

Покажем, что $A_m\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2n+1} \frac{C_{2n-m}^m}{2^{2m}}$, что равносильно доказательству тождества (5).

Вводим функцию

$$R(x, t) = \sum_{m=0}^n A_m(t) x^m.$$

Как и раньше, можно показать, что

$$R(x, t) = (1+x)^n \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{(2n-k)!}{k!(2n-2k+1)!} \left(\frac{tx}{1+x} \right)^k$$

и

$$R\left(x, \frac{1}{4}\right) = \frac{x^{n+1/2}}{2^{2n}(2n+1)\sqrt{1+x}} T_{2n+1}\left(\sqrt{\frac{1+x}{x}}\right).$$

Полагая

$$T_{2n+1}(u) = T_{2n+1}\left(\sqrt{\frac{1+x}{x}}\right) = W(x),$$

получаем для $W(x)$ уравнение

$$4x^2(1+x)W''(x) + 2x(3x+2)W'(x) - (2n+1)^2W(x) = 0.$$

Пусть $p(x) = x^{-n-1/2}(1+x)^{1/2}$ и $W(x) = 2^{2n}(2n+1)p(x)B_n(x)$, где

$$B_n(x) = \sum_{k=0}^n b_k x^{n-k}. \quad (10)$$

Легко показать, что $B_n(x)$ удовлетворяет уравнению

$$2x(1+x)B_n''(x) + (3x-4nx-4n)B_n'(x) + (2n^2-n)B_n(x) = 0.$$

Учитывая (10), получаем

$$b_k = \frac{2(n+k)(n-k+1)}{k(2k-1)} b_{k-1} \quad (k=1, 2, \dots, n),$$

откуда

$$b_k = 2^{2k} C_{n+k}^{2k} b_0.$$

Но

$$b_0 = A_n\left(\frac{1}{4}\right) = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{2^{2k}} \frac{(2n-k)!}{k!(2n-2k+1)!} = \frac{1}{(2n+1)2^{2n}},$$

что следует из соотношения

$$\begin{aligned} \sin(2n+1)x &= (-1)^n (2n+1) \sin x \times \\ &\times \sum_{k=0}^n (-1)^k 2^{2n-2k} \frac{(2n-k)!}{k!(2n-2k+1)!} \sin^{2n-2k} x \end{aligned}$$

при $x = \pi/2$.

$$\text{Следовательно, } b_k = \frac{1}{2n+1} 2^{2k-2n} C_{n+k}^{2k}.$$

$$\begin{aligned} \text{Так как } A_m\left(\frac{1}{4}\right) &= b_{n-m}, \text{ а } b_{n-m} = \frac{1}{2n+1} \frac{C_{2n-m}^m}{2^{2m}}, \text{ то } A_m\left(\frac{1}{4}\right) = \\ &= \frac{1}{2n+1} \frac{C_{2n-m}^m}{2^{2m}}, \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

$$3. \quad \sum_{m=p}^v C_{2v+1}^{2v-2m} \sum_{j=0}^p (-1)^j C_{2m+1}^j C_{2m-2p-j}^{2m-2p-j} (2m-2j+1)^{2\mu+1} -$$

$$\begin{aligned}
 & - \sum_{m=p}^{\nu} C_{2\nu+1}^{2\nu-2m-1} \sum_{j=0}^p (-1)^j C_{2m+2}^j C_{2m-p-j+1}^{2m-2p+1} (2m-2j+2)^{2\mu+1} = \\
 & = \begin{cases} 2^{2p} (2\mu+1)! C_{\mu}^p, & \text{если } \nu = \mu, \\ 0, & \text{если } \nu \geq \mu + 1, \end{cases} \quad (\mu = 0, 1, \dots); \quad (11)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \sum_{m=p}^{\nu} C_{2\nu+2}^{2\nu-2m+1} \sum_{j=0}^p (-1)^j C_{2m+1}^j C_{2m-p-j}^{2m-2p} (2m-2j+1)^{2\mu+1} - \\
 & - \sum_{m=p}^{\nu} C_{2\nu+2}^{2\nu-2m} \sum_{j=0}^p (-1)^j C_{2m+2}^j C_{2m-p-j+1}^{2m-2p+1} (2m-2j+2)^{2\mu+1} = \\
 & = \begin{cases} 0, & \text{если } \nu \geq \mu, \\ \neq 0, & \text{если } \nu = \mu - 1, p = \nu (\mu = 1, 2, \dots). \end{cases} \quad (12)
 \end{aligned}$$

Доказательство. Введем обозначения:

$$S_{p,m}^{(1)} = \sum_{j=0}^p (-1)^j C_{2m+1}^j C_{2m-p-j}^{2m-2p} (2m-2j+1)^{2\mu+1},$$

$$S_{p,m}^{(2)} = \sum_{j=0}^p (-1)^j C_{2m+2}^j C_{2m-p-j+1}^{2m-2p+1} (2m-2j+2)^{2\mu+1},$$

$$A = \sum_{m=p}^{\nu} C_{2\nu+1}^{2\nu-2m} S_{p,m}^{(1)}, \quad B = \sum_{m=p}^{\nu} C_{2\nu+1}^{2\nu-2m-1} S_{p,m}^{(2)}.$$

Пусть

$$P_{p,m}(x) = \sum_{j=0}^p (-1)^j C_{2m+1}^j C_{2m-p-j}^{2m-2p} \sin(2m-2j+1)x,$$

$$Q_{p,m}(x) = \sum_{j=0}^p (-1)^j C_{2m+2}^j C_{2m-p-j+1}^{2m-2p+1} \sin(2m-2j+2)x.$$

Очевидно, что

$$S_{p,m}^{(1)} = (-1)^{\mu} P_{p,m}^{(2\mu+1)}(0),$$

$$S_{p,m}^{(2)} = (-1)^{\mu} Q_{p,m}^{(2\mu+1)}(0).$$

Покажем, что

$$\begin{aligned}
 A - B &= (-1)^{\mu} \left\{ \sum_{m=p}^{\nu} C_{2\nu+1}^{2\nu-2m} P_{p,m}(x) - \right. \\
 & \left. - \sum_{m=p}^{\nu} C_{2\nu+1}^{2\nu-2m-1} Q_{p,m}(x) \right\}_0^{(2\mu+1)} = \\
 & = \begin{cases} 2^{2p} (2\mu+1)! C_{\mu}^p, & \text{если } \nu = \mu, \\ 0, & \text{если } \nu \geq \mu + 1. \end{cases}
 \end{aligned}$$

Введем в рассмотрение функцию

$$F_{p, m}(x, t) = \sum_{p=0}^m (-1)^p P_{p, m}(x) t^p.$$

Имеем

$$\begin{aligned} F_{p, m}(x, t) &= \sum_{p=0}^m (-1)^p t^p \sum_{j=0}^p (-1)^j C_{2m+1}^j C_{2m-p-j}^{2m-2p} \sin(2m-2j+1)x = \\ &= \sum_{j=0}^m (-1)^j C_{2m+1}^j \sin(2m-2j+1)x \sum_{p=j}^m (-1)^p C_{2m-p-j}^{2m-2p} t^p = \\ &= \sum_{j=0}^m C_{2m+1}^j t^j \sin(2m-2j+1)x \sum_{v=0}^{m-j} (-1)^v C_{2m-2j-v}^v t^v. \end{aligned}$$

Как и выше, легко убедиться, что функция $F_{p, m}(x, t)$ выражается через полином Чебышева

$$T_{2m-2j+1}(x) = \cos(2m-2j+1) \arccos x.$$

Действительно, имеем

$$\sum_{v=0}^{m-j} (-1)^v C_{2m-2j-v}^v t^v = \frac{t^{m-j}}{2m-2j+1} T'_{2m-2j+1} \left(\frac{1}{2\sqrt{t}} \right).$$

Значит,

$$\begin{aligned} F_{p, m}(x, t) &= t^m \sum_{j=0}^m C_{2m+1}^j \sin(2m-2j+1)x \times \\ &\times \frac{1}{2m-2j+1} T'_{2m-2j+1} \left(\frac{1}{2\sqrt{t}} \right), \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} F_{p, m}(x, t) &= \frac{2t^{m+1/2}}{\sqrt{4t-1}} \sum_{j=0}^m C_{2m+1}^j \sin(2m-2j+1)x \times \\ &\times \sin(2m-2j+1) \arccos \frac{1}{2\sqrt{t}}. \end{aligned}$$

Обозначим $\arccos \frac{1}{2\sqrt{t}} = \varphi$. Тогда

$$\begin{aligned} F_{p, m}(x, t) &= \frac{2t^{m+1/2}}{\sqrt{4t-1}} \sum_{j=0}^m C_{2m+1}^j \sin(2m-2j+1)x \times \\ &\times \sin(2m-2j+1)\varphi = \frac{t^{m+1/2}}{\sqrt{4t-1}} \sum_{j=0}^m C_{2m+1}^j \times \\ &\times [\cos(2m-2j+1)(x-\varphi) - \cos(2m-2j+1)(x+\varphi)]. \end{aligned}$$

Но

$$\sum_{j=0}^m C_{2m+1}^j \cos(2m - 2j + 1)u = 2^{2m} \cos^{2m+1} u,$$

откуда

$$F_{p, m}(x, t) = 2^{2m} \frac{t^{m+1/2}}{\sqrt{4t-1}} [\cos^{2m+1}(x-\varphi) - \cos^{2m+1}(x+\varphi)].$$

Так как

$$\begin{aligned} & \cos^{2m+1}(x-\varphi) - \cos^{2m+1}(x+\varphi) = \\ & = 2 \sum_{k=0}^m C_{2m+1}^{2k+1} \sin^{2k+1} x \sin^{2k+1} \varphi \cos^{2m-2k} x \cos^{2m-2k} \varphi, \end{aligned}$$

то

$$\begin{aligned} F_{p, m}(x, t) &= 2^{2m+1} \frac{t^{m+1/2}}{\sqrt{4t-1}} \times \\ & \times \sin \varphi \sum_{k=0}^m C_{2m+1}^{2k+1} \sin^{2k+1} x \cos^{2m-2k} x \sin^{2k} \varphi \cos^{2m-2k} \varphi. \end{aligned}$$

Учитывая, что $\cos \varphi = \frac{1}{2\sqrt{t}}$, получаем

$$F_{p, m}(x, t) = \sum_{k=0}^m C_{2m+1}^{2k+1} \sin^{2k+1} x \cos^{2m-2k} x (4t-1)^k,$$

или

$$\begin{aligned} F_{p, m}(x, t) &= \sum_{k=0}^m C_{2m+1}^{2k+1} \sin^{2k+1} x \cos^{2m-2k} x \times \\ & \times \sum_{p=0}^k C_k^p (-1)^{k-p} 4^p t^p = \\ & = \sum_{p=0}^m (-1)^p 4^p t^p \sum_{k=p}^m (-1)^k C_k^p C_{2m+1}^{2k+1} \sin^{2k+1} x \cos^{2m-2k} x = \\ & = \sum_{p=0}^m (-1)^p P_{p, m}(x) t^p. \end{aligned}$$

Отсюда

$$P_{p, m}(x) = 4^p \sum_{k=p}^m (-1)^k C_k^p C_{2m+1}^{2k+1} \sin^{2k+1} x \cos^{2m-2k} x.$$

Аналогично можно показать, что

$$Q_{p, m}(x) = 4^p \sum_{k=p}^m (-1)^k C_k^p C_{2m+2}^{2k+1} \sin^{2k+1} x \cos^{2m-2k+1} x.$$

Тогда

$$A - B = (-1)^n \left\{ \sum_{m=p}^v [C_{2v+1}^{2v-2m} P_{p, m}(x) - \right.$$

$$\begin{aligned}
& - C_{2\nu+1}^{2\nu-2m-1} Q_{p, m}(x) \Big|_0^{(2\mu+1)} = \\
& = (-1)^\mu 4^p \left\{ \sum_{m=p}^{\nu} \left[C_{2\nu+1}^{2\nu-2m} \sum_{k=p}^m (-1)^k C_k^p C_{2m+1}^{2k+1} \sin^{2k+1} x \cos^{2m-2k} x - \right. \right. \\
& \left. \left. - C_{2\nu+1}^{2\nu-2m-1} \sum_{k=p}^m (-1)^k C_k^p C_{2m+2}^{2k+1} \sin^{2k+1} x \cos^{2m-2k+1} x \right] \Big|_0^{(2\mu+1)} = \right. \\
& = (-1)^\mu 4^p \left\{ \sum_{k=p}^{\nu} (-1)^k C_k^p C_{2\nu+1}^{2k+1} \sin^{2k+1} x \times \right. \\
& \quad \times \left[\sum_{m=k}^{\nu} C_{2\nu-2k}^{2m-2k} \cos^{2m-2k} x - \right. \\
& \quad \left. \left. - \sum_{m=k}^{\nu} C_{2\nu-2k}^{2m-2k+1} \cos^{2m-2k+1} x \right] \Big|_0^{(2\mu+1)} = \right. \\
& = (-1)^\mu 4^p \left\{ \sum_{k=p}^{\nu} (-1)^k C_k^p C_{2\nu+1}^{2k+1} \sin^{2k+1} x \times \right. \\
& \quad \times \sum_{l=0}^{2\nu-2k} (-1)^l C_{2\nu-2k}^l \cos^l x \Big|_0^{(2\mu+1)} = \\
& = (-1)^\mu 4^p \left\{ \sum_{k=p}^{\nu} (-1)^k C_k^p C_{2\nu+1}^{2k+1} \sin^{2k+1} x (1 - \cos x)^{2\nu-2k} \Big|_0^{(2\mu+1)} \right\}.
\end{aligned}$$

В силу того что

$$(\sin^{2k+1} x)_0^{(l)} = 0, \text{ если } l < 2k + 1,$$

$$[(1 - \cos x)^{2\nu-2k}]_0^{(2\mu-l+1)} = 0, \text{ если } 2\mu - l + 1 < 2\nu - 2k,$$

т. е.

$$l > 2\mu + 1 - (2\nu - 2k),$$

имеем

$$\begin{aligned}
& [\sin^{2k+1} x (1 - \cos x)^{2\nu-2k}]_0^{(2\mu+1)} = \\
& = \sum_{l=2k+1}^{2\mu+1-(2\nu-2k)} C_{2\mu+1}^l (\sin^{2k+1} x)_0^{(l)} [(1 - \cos x)^{2\nu-2k}]_0^{(2\mu-l+1)}.
\end{aligned}$$

Очевидно, что если $2\mu + 1 - (2\nu - 2k) < 2k + 1$, т. е. $\nu > \mu$, или $\nu \geq \mu + 1$, то

$$[\sin^{2k+1} x (1 - \cos x)^{2\nu-2k}]_0^{(2\mu+1)} = 0 \text{ и } A - B = 0,$$

что и нужно было доказать.

Если $\nu = \mu$, то

$$\begin{aligned}
& [\sin^{2k+1} x (1 - \cos x)^{2\mu-2k}]_0^{(2\mu+1)} = \\
& = C_{2\mu+1}^{2k+1} (\sin^{2k+1} x)_0^{(2k+1)} [(1 - \cos x)^{2\mu-2k}]_0^{(2\mu-2k)},
\end{aligned}$$

и так как

$$[(1 - \cos x)^{2\mu-2k}]_0^{(2\mu-2k)} = \begin{cases} 1, & \text{если } k = \mu, \\ 0, & \text{если } k < \mu, \end{cases}$$

то

$$\begin{aligned} A - B &= (-1)^\mu 4^p \left\{ \sum_{k=p}^{\mu} (-1)^k C_k^p C_{2\mu+1}^{2k+1} \sin^{2k+1} x \times \right. \\ &\quad \left. \times (1 - \cos x)^{2\mu-2k} \right\}_0^{(2\mu+1)} = \\ &= (-1)^\mu 4^p (-1)^\mu C_\mu^p (\sin^{2\mu+1} x)_0^{(2\mu+1)} = 2^{2p} (2\mu + 1)! C_\mu^p. \end{aligned}$$

Тождество (11) доказано.

Доказательство тождества (12) аналогично.

Литература

1. Натансон И. П. Конструктивная теория функций. Гостехиздат, 1949, стр. 71.

Белорусский государственный университет
им. В. И. Ленина

Поступило в редакцию 25.11 1967

Н. П. КЕДА, Л. А. ЯНОВИЧ

**СХОДИМОСТЬ КВАДРАТУРНОГО ПРОЦЕССА
 ДЛЯ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ
 ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ**

Устанавливаются условия сходимости квадратурного процесса вида

$$\int_0^{2\pi} \rho(x) f(x) dx = \sum_{k=1}^N \sum_{j=0}^{m_k} A_{kj} f^{(j)}(x_k) + R_N(f), \quad (1)$$

$$(0 \leq m_k \leq m < \infty; \quad k = 1, 2, \dots, N; \quad N = 1, 2, 3, \dots)$$

(весовая функция $\rho(x)$ измерима и суммируема на $[0, 2\pi]$) в классе абсолютно непрерывных 2π -периодических функций, а также в классах 2π -периодических функций с абсолютно непрерывной m -ой производной и с m -ой производной, имеющей на $[0, 2\pi]$ конечное изменение.

Предварительно получим одно интегральное представление для 2π -периодических функций, используемое в дальнейшем.

Пусть 2π -периодическая функция $f(x)$ имеет абсолютно непрерывную на $[0, 2\pi]$ производную $f^{(v-1)}(x)$ ($v \geq 1$). Тогда

$$f(x) = \frac{1}{(n!)^2} L_{2n} f(0) + \sum_{k=1}^n (-1)^k \frac{2}{(n-k)! (n+k)!} [L_{2n+1}^k f'(0) \cos kx -$$

$$- k L_{2n+1}^k f(0) \sin kx] + \frac{2^{2n}}{(2n)!} \int_0^x \sin^{2n} \frac{1}{2} (x-t) L_{2n+1} f(t) dt$$

при $v = 2n + 1$ и

$$f(x) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \frac{2k}{(n-k)! (n+k)!} [L_{2n}^k f'(0) \sin kx + k L_{2n}^k f(0) \cos kx] +$$

$$+ \frac{2^{2n-1}}{(2n-1)!} \int_0^x \sin^{2n-1} \frac{1}{2} (x-t) \cos \frac{1}{2} (x-t) L_{2n} f(t) dt$$

для $v = 2n$, а входящие в эти равенства дифференциальные операторы, примененные к функции $f(t)$ и ее производной, имеют вид

$$L_{2n} = (D^2 + 1^2)(D^2 + 2^2) \dots (D^2 + n^2),$$

$$L_{2n}^k = (D^2 + 1^2) \dots (D^2 + (k-1)^2)(D^2 + (k+1)^2) \dots (D^2 + n^2),$$

$$L_{2n+1} = D L_{2n}, \quad L_{2n+1}^k = D L_{2n}^k, \quad D = \frac{d}{dt}.$$

Действительно, для интегральных членов этих равенств можем записать соотношения

$$\begin{aligned} \frac{2^{2n}}{(2n)!} \int_0^x \sin^{2n} \frac{1}{2} (x-t) L_{2n+1} f(t) dt &= -\frac{2^{2n}}{(2n)!} L_{2n-1} f'(0) \sin^{2n} \frac{1}{2} x - \\ &- \frac{2^{2n-1}}{(2n-1)!} L_{2n-1} f(0) \sin^{2n-1} \frac{1}{2} x \cos \frac{1}{2} x + \\ &+ \frac{2^{2n-2}}{(2n-2)!} \int_0^x \sin^{2n-2} \frac{1}{2} (x-t) L_{2n-1} f(t) dt, \\ \frac{2^{2n-1}}{(2n-1)!} \int_0^x \sin^{2n-1} \frac{1}{2} (x-t) \cos \frac{1}{2} (x-t) L_{2n} f(t) dt &= \\ &= -\frac{2^{2n-1}}{(2n-1)!} L_{2(n-1)} f'(0) \sin^{2n-1} \frac{1}{2} x \cos \frac{1}{2} x + \\ &+ \frac{2^{2n-1}}{(2n-1)!} L_{2(n-1)} f(0) \left[n \sin^{2n} \frac{1}{2} x - \frac{1}{2} (2n-1) \sin^{2n-2} \frac{1}{2} x \right] + \\ &+ \frac{2^{2n-3}}{(2n-3)!} \int_0^x \sin^{2n-3} \frac{1}{2} (x-t) \cos \frac{1}{2} (x-t) L_{2(n-1)} f(t) dt. \end{aligned}$$

Последовательно применяя эти рекуррентные формулы, получим

$$\frac{2^{2n}}{(2n)!} \int_0^x \sin^{2n} \frac{1}{2} (x-t) L_{2n+1} f(t) dt \equiv T_n(x) + f(x), \quad (4)$$

$$\frac{2^{2n-1}}{(2n-1)!} \int_0^x \sin^{2n-1} \frac{1}{2} (x-t) \cos \frac{1}{2} (x-t) L_{2n} f(t) dt \equiv Q_n(x) + f(x), \quad (5)$$

где $T_n(x)$ и $Q_n(x)$ — тригонометрические многочлены степени не выше n . Коэффициенты a_k и b_k этих многочленов, записанных в виде

$$a_0 + \sum_{k=1}^n a_k \cos kx + b_k \sin kx, \quad (6)$$

можно найти, заменив в (4) и (5) многочлены $T_n(x)$ и $Q_n(x)$ выражениями вида (6), применив операторы L_{2n} , L_{2n+1}^k и DL_{2n+1}^k к первому равенству, а L_{2n} , L_{2n}^k и DL_{2n}^k ($1 \leq k \leq n$) — ко второму и подставив потом значение $x=0$. После этого искомые коэффициенты легко найдутся и мы придем к формулам (2) и (3).

Перейдем сейчас к выяснению условий сходимости квадратурного процесса (1) в указанных выше классах функций.

I. Обозначим через $\tilde{A}_0[0, 2\pi]$ класс 2π -периодических абсолютно непрерывных функций и рассмотрим квадратурные формулы

$$\int_0^{2\pi} \rho(x) f(x) dx = \sum_{k=1}^N A_k f(x_k) + R_N(f), \quad (7)$$

$$(N = 1, 2, 3, \dots).$$

Для остатка $R_N(f)$, используя представление любой функции $f(x)$ из этого класса в виде

$$f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t) dt$$

и теорему Фубини о перемене порядка интегрирования, будем иметь равенство

$$R_N(f) = f(0) R_N(1) + \int_0^{2\pi} f'(t) K_N(t) dt = R_N(f(0)) + I_N(f),$$

где

$$K_N(t) = \int_t^{2\pi} \rho(x) dx - \sum_{k=1}^N A_k E_0(x_k - t);$$

$$E_0(x - t) = \begin{cases} 1 & \text{для } t \leq x \\ 0 & \text{для } t > x \end{cases}$$

$$(0 \leq t, x \leq 2\pi).$$

После введения на $\tilde{A}_0[0, 2\pi]$ нормы $\|f\| = \int_0^{2\pi} |f'(t) + a_0(f)| dt$, где

$$a_0(f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) dt, \text{ это множество функций станет линейным нормиро-$$

ванным пространством, которое, как нетрудно показать, является полным. Норма линейного функционала $I_N(f)$, заданного на этом пространстве, будет

$$\|I_N\| = \sup_{0 < t < 2\pi} |K_N(t) - a_0(K_N)|.$$

Сходимость $R_N(f)$ к нулю при $N \rightarrow \infty$ равносильна сходимости к нулю каждого из функционалов $R_N(f(0))$ и $I_N(f)$.

По теореме Банаха — Штейнхауса [1], последовательность $I_N(f) \rightarrow 0$ при $N \rightarrow \infty$ тогда и только тогда, когда имеет место сходимость к нулю на всюду плотном множестве, а нормы $\|I_N\|$ ограничены в совокупности.

В рассматриваемом случае условие ограниченности $\|I_N\|$ при $N = 1, 2, 3, \dots$ можно заменить условием ограниченности сумм

$$\left| \sum_{k=1}^N A_k E_0(x_k - t) - a_0 \left\{ \sum_{k=1}^N A_k E_0(x_k - t) \right\} \right|$$

$$(0 \leq t \leq 2\pi, N = 1, 2, 3, \dots),$$

а ограниченность последнего выражения равносильна неравенствам

$$\left| \sum_{k=1}^N A_k x_k - 2\pi \sum_{k=1}^{\nu} A_k \right| \leq M < \infty$$

$$(0 \leq x_k \leq 2\pi; \nu = 1, 2, \dots, N; N = 1, 2, 3, \dots).$$

Множество тригонометрических многочленов всюду плотно во введенном нами пространстве.

Итак, справедлива

Теорема 1. Для сходимости квадратурного процесса (7) в классе 2π -периодических абсолютно непрерывных функций необходимо и достаточно выполнения таких условий:

1. Процесс сходится для всякого тригонометрического многочлена.
2. Существует такое число $M < \infty$, что

$$\left| \sum_{k=1}^N A_k x_k - 2\pi \sum_{k=1}^{\nu} A_k \right| \leq M$$

для $\nu = 1, 2, \dots, N; N = 1, 2, 3, \dots$.

Отметим для полноты, что условия сходимости квадратурного процесса (7) в классе 2π -периодических непрерывных функций даются следующей теоремой.

Теорема 2. Для того чтобы квадратурный процесс (7) сходился в классе непрерывных 2π -периодических функций, необходимо и достаточно выполнения условий:

1. Процесс сходится для любого тригонометрического многочлена.
2. Суммы

$$\sum_{k=1}^N |A_k| \quad (N = 1, 2, 3, \dots)$$

ограничены в совокупности.

II. Пусть $\tilde{A}_m[0, 2\pi]$ — класс 2π -периодических функций с m -ой абсолютно непрерывной производной. Всякая функция $f(x)$ из этого класса представима в виде

$$f(x) = T_{\left[\frac{m+1}{2}\right]}(x) + \frac{2^m}{m!} \int_0^x \sin^m \frac{1}{2}(x-t) \cos \left\{ \frac{m}{2} - \left[\frac{m}{2} \right] \right\} (x-t) L_{m+1} f(t) dt,$$

где $[a]$ означает целую часть числа a , $T_{\left[\frac{m+1}{2}\right]}(x)$ — тригонометрический многочлен степени $\left[\frac{m+1}{2} \right]$, причем свободный коэффициент его при нечетном m равен нулю.

Тогда остаток $R_N(f)$ квадратурной формулы (1) представим в виде

$$R_N(f) = R_N \left(T_{\left[\frac{m+1}{2}\right]} \right) + \int_0^{2\pi} K_N(t) L_{m+1} f(t) dt,$$

где

$$K_N(t) = \frac{2^m}{m!} \left\{ \int_t^{2\pi} p(x) \sin^m \frac{1}{2}(x-t) \cos \left(\frac{m}{2} - \left[\frac{m}{2} \right] \right) (x-t) dx - \right. \\ \left. - \sum_{k=1}^N \sum_{j=0}^{m_k} A_{kj} E_m^{(j)}(x_k - t) \right\},$$

$$E_m(x-t) = \begin{cases} \sin^m \frac{1}{2}(x-t) \cos \left(\frac{m}{2} - \left[\frac{m}{2} \right] \right) (x-t) & \text{для } t \leq x \\ 0 & \text{для } t > x \end{cases}$$

$$(0 \leq t, x \leq 2\pi)$$

(здесь $E_m^{(j)}(x_k - t)$ означает j -ую производную по x в точке $x = x_k$).В классе $\tilde{A}_m[0, 2\pi]$ введем норму

$$\|f\| = \int_0^{2\pi} \left| L_{m+1}f(t) + S_{\left[\frac{m+1}{2}\right]}(f; t) - \left(\frac{m}{2} - \left[\frac{m}{2} \right] \right) a_0(f) \right| dt,$$

где $S_\nu(f; t)$ есть ν -ая частная сумма ряда Фурье функции $f(t)$. Тогда класс $\tilde{A}_m[0, 2\pi]$ будет линейным нормированным пространством.Докажем полноту пространства $\tilde{A}_m[0, 2\pi]$.Пусть дана сходящаяся в себе последовательность функций $\{f_p(t)\}$ из $\tilde{A}_m[0, 2\pi]$, т. е.

$$\|f_p(t) - f_q(t)\|_{\tilde{A}_m} = \int_0^{2\pi} |\varphi_p(t) - \varphi_q(t)| dt = \|\varphi_p(t) - \varphi_q(t)\|_{\tilde{L}} \rightarrow 0 \text{ при } p, q \rightarrow \infty,$$

где

$$\varphi_p(t) = L_{m+1}f_p(t) + S_{\left[\frac{m+1}{2}\right]}(f_p; t) - \left(\frac{m}{2} - \left[\frac{m}{2} \right] \right) a_0(f_p).$$

Из полноты пространства 2π -периодических суммируемых функций $\tilde{L}[0, 2\pi]$ следует существование 2π -периодической суммируемой на $[0, 2\pi]$ функции $\varphi(x)$, такой, что

$$\|\varphi_p(x) - \varphi(x)\|_{\tilde{L}} \rightarrow 0 \text{ при } p \rightarrow \infty.$$

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$L_{m+1}y(x) = \varphi(x) - S_{\left[\frac{m+1}{2}\right]}(\varphi; x) + \left(\frac{m}{2} - \left[\frac{m}{2} \right] \right) a_0(\varphi). \quad (8)$$

Нетрудно доказать, что существует 2π -периодическая функция $y(x)$ с абсолютно непрерывной m -ой производной, почти везде удовлетворяющая уравнению (8).Приведем доказательство этого факта лишь для четного m . Случай же нечетного m при соответствующих видоизменениях может быть доказан аналогично.Пусть $m = 2n$ ($n \geq 1$). Дифференциальное уравнение

$$L_{2n}y(x) = \int_0^x (\varphi(t) - S_n(\varphi; t)) dt,$$

правая часть которого является абсолютно непрерывной 2π -периодической функцией, имеет 2π -периодическое частное решение [2] вида

$$y_0(x) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_{n+k} \cos(n+k)x + B_{n+k} \sin(n+k)x.$$

Отсюда функция $Y_0(x) = y_0(x) - A_0$ почти всюду удовлетворяет уравнению (8) при $m = 2n$.

Положим

$$f_0(x) = Y_0(x) + S_n(\varphi; x) = Y_0(x) + S_n(f_0; x).$$

Тогда

$$L_{2n+1}f_0(x) + S_n(f_0; x) = \varphi(x),$$

а

$$\|\varphi_p(x) - \varphi(x)\|_{\tilde{L}} = \|f_p(x) - f_0(x)\|_{\tilde{A}_{2n}} \rightarrow 0$$

при $p \rightarrow \infty$, где $f_0(x)$ — функция из пространства $\tilde{A}_{2n}[0, 2\pi]$.

Ниже понадобится норма функционала вида

$$J(f) = \int_0^{2\pi} K(t) L_{m+1}f(t) dt,$$

где $K(t)$ — кусочно непрерывная функция, а $f(t) \in \tilde{A}_m[0, 2\pi]$.

Справедливо равенство

$$J(f) = \int_0^{2\pi} \varphi(t) \left\{ K(t) - S_{\left[\frac{m+1}{2}\right]}(K; t) + \left(\frac{m}{2} - \left[\frac{m}{2} \right] \right) a_0(K) \right\} dt = \int_0^{2\pi} \varphi(t) \Psi(t) dt,$$

где

$$\varphi(t) = L_{m+1}f(t) + S_{\left[\frac{m+1}{2}\right]}(f; t) - \left(\frac{m}{2} - \left[\frac{m}{2} \right] \right) a_0(f).$$

Отсюда

$$\|J\| \leq \sup_{0 < t < 2\pi} |\Psi(t)|.$$

Пусть $M = \sup_{0 < t < 2\pi} |\Psi(t)|$. На отрезке $[0, 2\pi]$ найдется интервал (α, β) , на котором $|\Psi(t)| > M - \varepsilon$ ($\varepsilon > 0$). Предположим для определенности, что $\Psi(t) > 0$ для $t \in (\alpha, \beta)$.

Возьмем на $[0, 2\pi]$ функцию

$$\theta(t) = \begin{cases} (t-\alpha)(\beta-t) & \text{для } t \in (\alpha, \beta) \\ 0 & \text{для } t \in [0, 2\pi] \setminus (\alpha, \beta) \end{cases}$$

и 2π -периодически продолжим ее.

Как отмечалось выше, существует функция $f_0(x) \in \tilde{A}_m[0, 2\pi]$, такая, что

$$L_{m+1}f_0(t) + S_{\left[\frac{m+1}{2}\right]}(f_0; t) - \left(\frac{m}{2} - \left[\frac{m}{2} \right] \right) a_0(f_0) = \theta(t).$$

Значит,

$$|J(f_0)| = \left| \int_{\alpha}^{\beta} (t-\alpha)(\beta-t) \Psi(t) dt \right| \geq (M - \varepsilon) \|f_0\|.$$

Следовательно,

$$\|J\| = \sup_{0 < t < 2\pi} \left| K(t) - S_{\left[\frac{m+1}{2}\right]}(K; t) + \left(\frac{m}{2} - \left[\frac{m}{2}\right]\right) a_0(K) \right|. \quad (9)$$

Теорема 3. Для того чтобы квадратурный процесс (1) сходиллся в классе функций $\tilde{A}_m[0, 2\pi]$, необходимо и достаточно выполнения условий:

1. Процесс сходится для всякого тригонометрического многочлена.
2. Существует такое число $M < \infty$, что

$$\left| \sum_{k=1}^N \sum_{j=0}^{m_k} A_{kj} \left\{ E_m^{(j)}(x_k - t) - S_{\left[\frac{m+1}{2}\right]}(E_m^{(j)}(x_k - t); t) \right\} \right| \leq M, \\ (0 \leq t \leq 2\pi, \quad N = 1, 2, 3, \dots).$$

Доказательство основано также на теореме Банаха — Штейнхауса.

Последовательность функционалов $R_N(f)$ будет стремиться к нулю на $\tilde{A}_m[0, 2\pi]$ при $N \rightarrow \infty$, если

$$R_N\left(T_{\left[\frac{m+1}{2}\right]}\right) \rightarrow 0 \quad \text{и} \quad J_N(f) = \int_0^{2\pi} K_N(t) L_{m+1} f(t) dt \rightarrow 0$$

при неограниченном возрастании N .

Сходимость к нулю функционалов $J_N(f)$ равносильна сходимости на множестве тригонометрических многочленов и равномерной ограниченности их норм.

Нормы функционалов $J_N(f)$, как видно из равенства (9) и выражения для $K_N(t)$, будут равномерно ограничены тогда и только тогда, когда будут ограничены для всех N величины

$$\sup_{0 < t < 2\pi} \left| \sum_{k=1}^N \sum_{j=0}^{m_k} A_{kj} \left\{ E_m^{(j)}(x_k - t) - S_{\left[\frac{m+1}{2}\right]}(E_m^{(j)}(x_k - t); t) + \right. \right. \\ \left. \left. + \left(\frac{m}{2} - \left[\frac{m}{2}\right]\right) a_0(E_m^{(j)}(x_k - t)) \right\} \right|. \quad (10)$$

При четном m третье слагаемое в фигурных скобках в написанном выше выражении обращается в нуль. Покажем, что ограниченность величин (10) для всех N будет иметь место и в случае нечетного $m = 2n - 1$, когда это слагаемое отсутствует, если только квадратурный процесс сходится для многочленов степени n .

Действительно,

$$a_0(E_{2n-1}^{(j)}(x_k - t)) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} E_{2n-1}^{(j)}(x_k - t) dt = \\ = (-1)^{j+1} \frac{1}{n\pi} \int_0^{x_k} \frac{\partial^{j+1}}{\partial t^{j+1}} \sin^{2n} \frac{1}{2}(x_k - t) dt = \frac{1}{n\pi} \left(\sin^{2n} \frac{1}{2} x \right)_{x=x_k}^{(j)}.$$

Тогда

$$\sum_{k=1}^N \sum_{j=0}^{m_k} A_{kj} a_0 (E_m^{(j)}(x_k - t)) = \frac{1}{n\pi} \sum_{k=1}^N \sum_{j=0}^{m_k} A_{kj} \left(\sin^{2n} \frac{1}{2} x \right)_{x=x_k}^{(j)} \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{1}{n\pi} \int_0^{2\pi} \rho(x) \sin^{2n} \frac{1}{2} x dx$$

при возрастании числа N и не зависит от него.

Отсюда и следует доказательство теоремы 3.

Отметим, что критерий сходимости квадратурного процесса в классе 2π -периодических функций с непрерывной m -ой производной получен в [3].

III. Обозначим через $\tilde{V}_m[0, 2\pi]$ класс 2π -периодических функций, m -ая производная которых имеет ограниченное изменение на $[0, 2\pi]$.

Для каждой функции $f(x)$ из этого класса справедливо равенство

$$f(x) = T_{\left[\frac{m}{2}\right]}(x) + \frac{2^m}{m!} \int_0^x \sin^m \frac{1}{2}(x-t) \cos \left(\frac{m}{2} - \left[\frac{m}{2} \right] \right) (x-t) d(L_m f(t)),$$

которое получается аналогично (2) и (3), при этом тригонометрический многочлен $T_{\left[\frac{m}{2}\right]}(x)$ степени $\left[\frac{m}{2} \right]$ не содержит свободного члена при нечетном m .

Остаточный член $R_N(f)$ квадратурной формулы (1) в этом случае будет иметь вид

$$R_N(f) = R_N(T_{\left[\frac{m}{2}\right]}) + \int_0^{2\pi} K_N(t) d(L_m f(t)) = R_N(T_{\left[\frac{m}{2}\right]}) + I_N(f).$$

Используя это равенство, легко доказать следующую теорему.

Теорема 4. Если процесс (1) сходится для тригонометрических многочленов степени $\left[\frac{m}{2} \right]$, величины

$$F_{Nm}(t) = \sum_{k=1}^N \sum_{j=0}^{m_k} A_{kj} E_m^{(j)}(x_k - t)$$

при $0 \leq t \leq 2\pi$ ограничены в совокупности и для всякого $t \in [0, 2\pi]$ справедливо соотношение

$$F_{Nm}(t) \rightarrow \int_t^{2\pi} \rho(x) \sin^m \frac{1}{2}(x-t) \cos \left(\frac{m}{2} - \left[\frac{m}{2} \right] \right) (x-t) dx$$

при $N \rightarrow \infty$, то квадратурный процесс (1), в котором $m_k \leq m-1$ ($m \geq 1$), сходится для любой функции $f(x)$ из класса $\tilde{V}_m[0, 2\pi]$.

Доказательство. При выполнении второго условия теоремы ядра $K_N(t)$ в функционалах $I_N(f)$ ($N = 1, 2, \dots$) будут ограничены некоторым числом B . Третье условие означает, что в каждой точке t из отрезка $[0, 2\pi]$ последовательность $\{K_N(t)\}$ при $N \rightarrow \infty$ стремится к нулю.

Так как функции $K_N(t)$ непрерывны на $[0, 2\pi]$ в случае $m_k \leq m-1$, то последовательность $\{K_N(t)\}$ слабо сходится к нулю в пространстве C ([1], стр. 256), т. е.

$$I_N(f) \rightarrow 0$$

при $N \rightarrow \infty$ для всякой функции $f(x)$ из $\tilde{V}_m[0, 2\pi]$. А ввиду сходимости $R_N(T[\frac{m}{2}])$ к нулю при $N \rightarrow \infty$ следует справедливость теоремы 4.

Отметим, что условия сходимости квадратурных процессов для таких классов непериодических функций получены в [4, 5].

Литература

1. Канторович Л. В., Акимов Г. П. Функциональный анализ в нормированных пространствах. Физматгиз, М., 1959.
2. Степанов В. В. Курс дифференциальных уравнений. Физматгиз, М., 1959.
3. Кеда Н. П., Янович Л. А. ДАН БССР, 11, № 4, 1967.
4. Крылов В. И. Приближенное вычисление интегралов. Физматгиз, М., 1959.
5. Крылов В. И., Арлюк Т. К. ДАН БССР, 7, № 11, 1963.

Институт математики
АН БССР

Поступило в редакцию
21.1 1967

Л. А. ЯНОВИЧ

**ПРИБЛИЖЕНИЕ ПЕРИОДИЧЕСКИХ
 АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ
 ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИМИ МНОГОЧЛЕНАМИ
 И РАЦИОНАЛЬНЫМИ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИМИ
 ФУНКЦИЯМИ. II**

Рассматриваются вопросы сходимости интерполирования периодических аналитических функций тригонометрическими рациональными функциями и тригонометрическими многочленами, а также асимптотика остатков интерполяционного процесса и некоторых других методов приближения функций.

I. Обозначим через $T_{n,m}(z)$ тригонометрическую дробь вида $T_{n,m}(z) = P_n(z)/Q_m(z)$ ($P_n(z)$ и $Q_m(z)$ — тригонометрические многочлены соответственно степени n и m), интерполирующую в точках z_k^n ($k = 0, 1, \dots, 2n$) регулярную в некоторой области 2π -периодическую функцию $f(z)$ по условиям

$$T_{n,m}^{(i)}(z_j^n) = f^{(i)}(z_j^n)$$

$$\left(i = 0, 1, \dots, \alpha_j - 1; j = 0, 1, \dots, p; \sum_{j=0}^p \alpha_j = 2n + 1 \right),$$

где α_j — кратность узла z_j^n . Будем считать, что в разложении $Q_m(z) = c_m \prod_{v=1}^{2m} \sin \frac{1}{2}(z - \eta_v^n)$ коэффициент $c_m = 1$ для всех m и что сам многочлен $Q_m(z)$ и его степень могут зависеть от числа n .

Пусть Ψ есть множество точек ξ комплексной плоскости, для которых $\left| \sin \frac{1}{2}(z - \eta) \right| < \left| \sin \frac{1}{2}(\xi - \eta) \right|$ при любых z и η соответственно из некоторых заданных замкнутых точечных множеств G и D . Дополнение множества Ψ до всей плоскости обозначим через Φ .

Теорема 1. Для произвольной матрицы узлов $\{z_k^n\}$ ($k = 0, 1, \dots, 2n$; $n = 1, 2, \dots$) из D и любых полюсов $\{\eta_v^m\}$ ($v = 1, 2, \dots, 2m$; $m = m(n)$) из внешности множества Φ , не имеющих предельных точек на границе Φ , последовательность интерполяционных дробей $T_{n,m}(z)$ для функции $f(z)$ сходится при $n \rightarrow \infty$ ($m = m(n) \leq c < \infty$) к $f(z)$ равномерно в G , какая бы ни была 2π -периодическая, регулярная в Φ функция $f(z)$. Множество регулярности Φ является наименьшим замкнутым множеством, обеспечивающим сходимость в G интерполирования такими дробями по произвольным узлам из D для всякой 2π -периодической функции, регулярной в нем.

Доказательство. Остаточный член интерполирования $r_{n,m}(z) = f(z) - T_{n,m}(z)$ в точке $z \in G$ представляется [1] в виде

$$r_{n,m}(z) = \frac{\omega_{n,m}(z)}{4\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\xi) d\xi}{\omega_{n,m}(\xi) \sin \frac{1}{2}(\xi - z)}, \quad (1)$$

где $\omega_{n,m}(z) = \prod_{k=0}^{2n} \sin \frac{1}{2}(z - z_k^n) / \prod_{v=1}^{2m} \sin \frac{1}{2}(z - \eta_v^m)$, а контур интегрирования Γ есть лежащая в полосе $0 \leq \operatorname{Re} \xi \leq 2\pi$ граница замкнутого множества Φ^* , которое содержит внутри себя Φ , но не содержит полюсов $\{\eta_v^m\}$ и их предельных точек и является множеством регулярности данной функции $f(z)$.

Оценим интеграл в равенстве (1). Обозначим через δ_0 наименьшее значение $\left| \sin \frac{1}{2}(\xi - z) \right|$ при $\xi \in \Gamma$ и $z \in G$, через M — максимальное значение $|f(z)|$ на Γ , а через l — длину контура Γ . Тогда

$$\begin{aligned} & |r_{n,m}(z)| \leq \\ & \leq \frac{lM}{4\pi\delta_0} \max_{\xi \in \Gamma} \prod_{v=1}^{2m} \left| \frac{\sin \frac{1}{2}(\xi - \eta_v^m)}{\sin \frac{1}{2}(z - \eta_v^m)} \right| \max_{\xi \in \Gamma} \prod_{k=0}^{2n} \left| \frac{\sin \frac{1}{2}(z - z_k^n)}{\sin \frac{1}{2}(\xi - z_k^n)} \right|. \end{aligned}$$

По условию теоремы произведение $\prod_{v=1}^{2m} \left| \frac{\sin \frac{1}{2}(\xi - \eta_v^m)}{\sin \frac{1}{2}(z - \eta_v^m)} \right|$ ограничено для $m = m(n) \leq c < \infty$, а второе произведение в предыдущей оценке не превосходит величины q^{2n+1} ($q < 1$). Отсюда из равенства

$$|r_{n,m}(z)| \leq c_1 q^{2n+1} (c_1 < \infty) \quad (2)$$

вытекает сходимость интерполяционного процесса.

Пусть η_2 — произвольная точка Φ . Тогда по определению множества Φ найдутся такие точки x и η соответственно из G и D , что $\left| \sin \frac{1}{2}(\eta_2 - \eta) \right| \leq \left| \sin \frac{1}{2}(x - \eta) \right|$.

Возьмем остаточный член

$$r_{n,m}(x) = \frac{\omega_{n,m}(x)}{\omega_{n,m}(\eta_2) \sin \frac{1}{2}(x - \eta_2)} \quad (3)$$

функции $f(z) = \operatorname{ctg} \frac{1}{2}(z - \eta_2)$ в данной точке x и будем интерполировать выбранную функцию по одному $(2n + 1)$ -кратному узлу в точке η .

Так как $\left| \sin \frac{1}{2}(x - \eta) / \sin \frac{1}{2}(\eta_2 - \eta) \right| \geq 1$, а произведение $\prod_{v=1}^{2m} \left| \frac{\sin \frac{1}{2}(\eta_2 - \eta_v^m)}{\sin \frac{1}{2}(x - \eta_v^m)} \right|$ при $m \leq c < \infty$ и любых полюсах $\{\eta_v^m\}$ из внеш-

ности Φ ограничено снизу числом, отличным от нуля (полюса последовательности интерполяционных дробей не имеют предельных точек на границе Φ), то $|r_{n,m}(x)|$ не стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$, что и доказывает вторую часть теоремы 1.

В частном случае имеет место

Теорема 2. Последовательность интерполяционных дробей $T_{n,m}(z)$ при $n \rightarrow \infty$ ($m = m(n) \leq c < \infty$) сходится равномерно в полосе $|\operatorname{Im} z| \leq d$ по любым узлам $\{z_k^n\}$ из полосы $|\operatorname{Im} z| \leq h$ ($0 \leq h \leq d$) к $f(z)$, какая бы ни была 2π -периодическая, регулярная в полосе

$$|\operatorname{Im} z| \leq h + 2 \ln \left\{ \operatorname{ch} \frac{1}{2} (d + h) + \sqrt{\operatorname{ch}^2 \frac{1}{2} (d + h) + 1} \right\} \quad (4)$$

функция $f(z)$ и какие бы ни были полюса $\{\eta_v^m\}$ из внешности последней полосы, не имеющие предельных точек на ее границе.

Справедливость этой теоремы нетрудно проверить, показав, что множество Φ , когда G и D есть указанные в теореме полосы, будет полосой (4).

Эти теоремы обобщают аналогичные факты в задаче тригонометрического интерполирования [2, 3].

Теорема 3. Для произвольной матрицы действительных узлов $\{x_k^n\}$ и произвольной матрицы полюсов $\{\eta_v^n\}$ ($k = 0, 1, \dots, 2n; v = 1, 2, \dots, 2n; n = 1, 2, \dots$) из области $\operatorname{Im} \eta < -2 \ln(1 + \sqrt{2})$, не имеющих предельных точек на прямой $\operatorname{Im} \eta = -2 \ln(1 + \sqrt{2})$, последовательность интерполяционных дробей $T_{n,n}(x)$ при $n \rightarrow \infty$ сходится к $f(x)$ равномерно на действительной оси, какая бы ни была 2π -предельная функция $f(z)$, регулярная в полуплоскости $\operatorname{Im} z \geq -2 \ln(1 + \sqrt{2})$ и удовлетворяющая при $\operatorname{Im} z \rightarrow \infty$ условию $|f(z)| \leq A \exp\{(1 - \varepsilon) \operatorname{Im} z\}$, где $0 < A < \infty$, а ε — сколь угодно малое положительное число.

Доказательство. В остатке (1) за контур интегрирования Γ возьмем отрезки прямых $\operatorname{Im} \xi = N$ и $\operatorname{Im} \xi = -2 \ln(1 + \sqrt{2}) - \delta$ ($0 \leq \operatorname{Re} \xi \leq 2\pi$), где положительное число δ выбирается такое, чтобы данная функция $f(z)$ оставалась регулярной в полуплоскости $\operatorname{Im} \xi \geq -2 \ln(1 + \sqrt{2}) - \delta$, предельные точки полюсов не принадлежали этой полуплоскости, а N было произвольным положительным числом.

Представим (1) в виде двух интегралов по указанным отрезкам и обозначим соответственно их через $I_1(x)$ и $I_2(x)$.

Интеграл

$$I_1(x) = - \frac{1}{4\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{\omega_{n,n}(x)}{\omega_{n,n}(\xi_1 + iN)} \frac{f(\xi_1 + iN) d\xi_1}{\sin \frac{1}{2} (\xi_1 + iN - x)}$$

обращается в нуль ввиду 2π -периодичности подынтегрального выражения, регулярности в верхней полуплоскости функции $f(z)$ и оценки $|f(z)| \leq A \exp(1 - \varepsilon) \operatorname{Im} z$ для больших положительных $\operatorname{Im} z$.

Отсюда

$$r_{n,n}(x) = \frac{1}{4\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{\omega_{n,n}(x)}{\omega_{n,n}(\xi_1 + ih_1)} \frac{f(\xi_1 + ih_1) d\xi_1}{\sin \frac{1}{2} (\xi_1 + ih_1 - x)}, \quad (5)$$

где $h_1 = -2 \ln(1 + \sqrt{2}) - \delta$. Оценим этот интеграл. Для этого сделаем предварительную оценку дробей, входящих в $\omega_{n,n}(x)/\omega_{n,n}(\xi_1 + ih_1) = \omega_{n,n}(x)/\omega_{n,n}(\xi)$:

$$\left| \frac{\sin \frac{1}{2}(x - x_k^n) \sin \frac{1}{2}(\xi - \eta_k^n)}{\sin \frac{1}{2}(\xi - x_k^n) \sin \frac{1}{2}(x - \eta_k^n)} \right| \leq \frac{\operatorname{ch} \frac{1}{2}(h_1 - \operatorname{Im} \eta_k^n)}{\operatorname{sh} \frac{1}{2} h_1 \operatorname{sh} \frac{1}{2} \operatorname{Im} \eta_k^n}.$$

По условию, h_1 и $\operatorname{Im} \eta_k^n$ — отрицательные числа и $\operatorname{Im} \eta_k^n < h_1$. Неравенство

$$\frac{\operatorname{ch} \frac{1}{2}(\xi_2 - \eta_2)}{\operatorname{sh} \frac{1}{2} \xi_2 \operatorname{sh} \frac{1}{2} \eta_2} < 1 \quad (6)$$

для $\eta_2 \leq \xi_2 < 0$ преобразуем к виду

$$e^{\eta_2} < \frac{1 - 3e^{\xi_2}}{3 - e^{\xi_2}}.$$

А так как ξ_2 должно быть не меньше η_2 , то последнее неравенство должно выполняться и после замены в нем η_2 на ξ_2 . Тогда, решая это неравенство, получим, что $\xi_2 < -2 \ln(1 + \sqrt{2})$.

Таким образом, при $\xi_2 < -2 \ln(1 + \sqrt{2})$ и $\eta_2 \leq \xi_2 < 0$ неравенство (6) будет выполняться, а ввиду того что h_1 и $\operatorname{Im} \eta_k^n$ удовлетворяют условию

$$h_1 < -2 \ln(1 + \sqrt{2}), \quad \operatorname{Im} \eta_k^n < h_1 < 0,$$

будем иметь

$$\left| \frac{\sin \frac{1}{2}(x - x_k^n) \sin \frac{1}{2}(\xi - \eta_k^n)}{\sin \frac{1}{2}(\xi - x_k^n) \sin \frac{1}{2}(x - \eta_k^n)} \right| \leq q < 1 \quad (7)$$

для всех действительных x и x_k^n , а также для $\xi = \xi_1 + ih_1$ и полюсов $\{\eta_k^n\}$, лежащих ниже прямой $\operatorname{Im} \xi = -2 \ln(1 + \sqrt{2}) - \delta$.

Учитывая (7), получим из равенства (5) оценку

$$|r_{n,n}(x)| \leq Bq^{2n}, \\ (0 < B < \infty, \quad n = 1, 2, \dots),$$

из которой следует сходимость интерполяционного процесса.

Рассмотрим задачу о сходимости интерполирования, несколько отличную от той, которая дается первой и второй теоремами.

Пусть задана замкнутая полоса Φ_1 , ограниченная 2π -периодическими жордановыми кривыми, и некоторое замкнутое множество точек комплексной плоскости $G (G \subset \Phi_1)$. Указать такое наибольшее множество $D_0 (D_0 \subset \Phi_1)$, чтобы процесс интерполирования тригонометрическими дробями $T_{n,m}(z)$ с полюсами $\{\eta_\nu^m\}$ ($\nu = 1, 2, \dots, 2m; m = m(n) \leq c < \infty$), лежащими вне полосы Φ_1 и не имеющими своих предельных точек на ее границе, сходилась равномерно в G для всякой 2π -периодической регулярной в Φ_1 функции по любым узлам из множества D_0 .

Покажем, что D_0 есть совокупность точек η , для которых $\left| \sin \frac{1}{2} (\xi - \eta) \right| \geq \left| \sin \frac{1}{2} (z - \eta) \right|$, какие бы ни были точки z из G и $\xi \in \bar{\Psi}$, где Ψ — дополнение до всей плоскости множества Φ_1 ; при этом равенство допускается для тех точек ξ , которые принадлежат одновременно границе Φ_1 и Ψ .

Теорема 4. Последовательность тригонометрических интерполяционных дробей $T_{n,m}(z)$ ($n = 1, 2, \dots$; $m = m(n) \leq c < \infty$) для 2π -периодической, регулярной на Φ_1 функции $f(z)$ сходится равномерно на G к $f(z)$, какие бы ни были узлы интерполирования из построенного выше множества D_0 и какие бы ни были полюса $\{\eta_v^m\}$ из внешности полосы Φ_1 , не имеющие своих предельных точек на ее границе. Множество D_0 является наибольшим замкнутым множеством точек, обеспечивающим сходимость на G указанного интерполяционного процесса по любым узлам из него, для всякой 2π -периодической функции, регулярной в Φ_1 .

Доказательство. Естественно считать, что ни одно из множеств D_0 , G или Φ_1 не пусто.

Нетрудно проверить, что построенное нами множество D_0 замкнутое.

Пусть $f(z)$ — регулярная в Φ_1 с периодом 2π функция, а узлы интерполирования $\{z_k^n\}$ любые из D_0 . Как и при доказательстве теоремы 1, остаток интерполирования представим в виде (1), где Γ — лежащая в полосе $0 \leq \operatorname{Re} \xi \leq 2\pi$ граница множества регулярности Φ_1^* данной функции $f(z)$, содержащего внутри себя заданное множество Φ_1 .

Тогда по определению D_0 имеет место неравенство

$$\left| \sin \frac{1}{2} (z - \eta) \right| / \left| \sin \frac{1}{2} (\xi - \eta) \right| \leq q < 1$$

для всех $\eta \in D_0$, $z \in G$ и $\xi \in \Gamma$ и, следовательно, справедлива оценка (2), дающая равномерную сходимость к $f(z)$ на G последовательности интерполяционных дробей $T_{n,m}(z)$ при $n \rightarrow \infty$ ($m = m(n) \leq c < \infty$).

Если к множеству D_0 добавить хотя бы одну точку η_0 ($\eta_0 \notin D_0$), то интерполяционный процесс не будет сходящимся на G по любым узлам из множества $D_1 = D_0 + \eta_0$ для всякой 2π -периодической функции, регулярной в Φ_1 .

В самом деле, ввиду того что η_0 не принадлежит D_0 , найдутся такие точки $\xi_0 \in \Phi_1$ и $z_0 \in G$ ($\xi_0 \neq z_0 + 2\nu\pi$, $\nu = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$), что

$$\left| \sin \frac{1}{2} (z_0 - \eta_0) \right| / \left| \sin \frac{1}{2} (\xi_0 - \eta_0) \right| = 1 + \delta \quad (\delta \geq 0).$$

Возьмем в качестве матрицы узлов матрицу $\{z_k^n = \eta_0\}$ ($k = 0, 1, \dots, 2n$; $n = 1, 2, \dots$). Тогда для остаточного члена $r_{n,m}(z)$ регулярной в Φ_1 функции $f(z) = \operatorname{ctg} \frac{1}{2} (z - \xi_0)$ в точке $z_0 \in G$ имеет место равенство

$$|r_{n,m}(z_0)| = \left| \prod_{\nu=1}^{2m} \frac{\sin \frac{1}{2} (\xi_0 - \eta_\nu^m)}{\sin \frac{1}{2} (z_0 - \eta_\nu^m)} \right| \left| \sin \frac{1}{2} (z_0 - \xi_0) \right|^{-1} (1 + \delta)^{2n+1},$$

т. е. не имеет места сходимости интерполирования в G по любым узлам из D_1 и по произвольным полюсам $\{\eta_v^m\}$ из внешности Φ_1 . Значит, D_0 — наибольшее множество, обладающее этим свойством.

Теорема 5. Для всякой 2π -периодической, регулярной в полосе $|\operatorname{Im} z| \leq d$ функции $f(z)$ последовательность ее интерполяционных дробей $T_{n,m}(z)$ ($n = 1, 2, \dots$; $m = m(n) \leq c < \infty$) с произвольными полюсами $\{\eta_v^m\}$, лежащими вне этой полосы и не имеющими предельных точек на ее границе, сходится к $f(z)$ равномерно в полосе $|\operatorname{Im} z| \leq h$ ($0 \leq h \leq d$), каковы бы ни были узлы интерполирования из множества

$$|\operatorname{Im} z| \leq \frac{1}{2}(d-h) + \ln \operatorname{th} \frac{1}{4}(d+h).$$

Это множество узлов будет пустым, если $\operatorname{sh} \frac{1}{2}d < \operatorname{ch} \frac{1}{2}h$, а при $\operatorname{sh} \frac{1}{2}d \geq \operatorname{ch} \frac{1}{2}h$ оно является наибольшим множеством, обеспечивающим по любым узлам из него сходимости в полосе $|\operatorname{Im} z| \leq h$ указанного интерполяционного процесса для всякой 2π -периодической, регулярной в полосе $|\operatorname{Im} z| \leq d$ функции.

Последняя теорема является частным случаем предыдущей теоремы, где искомое множество D_0 , как легко заметить, состоит из точек η , определяемых условием $\operatorname{sh} \frac{1}{2}(d - |\operatorname{Im} \eta|) \geq \operatorname{ch} \frac{1}{2}(h + |\operatorname{Im} \eta|)$.

Пусть теперь задана полоса Φ_1 и некоторое замкнутое множество D ($D \subset \Phi_1$). Спрашивается, на каком наибольшем множестве G_0 ($G_0 \subset \Phi_1$) процесс интерполирования тригонометрическими дробями $T_{n,m}(z)$ с ограниченным числом полюсов (полюса по-прежнему лежат вне Φ_1 и не имеют предельных точек на границе Φ_1) при $n \rightarrow \infty$ сходится равномерно к приближаемой функции по любым узлам из D для всякой 2π -периодической, регулярной на Φ_1 функции.

Нетрудно проверить, что G_0 есть множество точек z , для которых $\left| \sin \frac{1}{2}(\xi - \eta) \right| \geq \left| \sin \frac{1}{2}(z - \eta) \right|$ при всех $\eta \in D$ и $\xi \in \bar{\Psi}$, при этом для внутренних точек ξ должно иметь место строгое неравенство.

Теорема 6. Какие бы ни были узлы интерполирования из D и 2π -периодическая, регулярная в Φ_1 функция $f(z)$, последовательность интерполяционных дробей $T_{n,m}(z)$ ($n = 1, 2, 3, \dots$; $m = m(n) \leq c < \infty$) для $f(z)$, полюса $\{\eta_v^m\}$ которых лежат вне Φ_1 и не имеют предельных точек на границе Φ_1 , сходится по этим узлам на множестве G_0 равномерно к функции $f(z)$. Множество G_0 — наибольшее замкнутое множество, на котором имеет место равномерная сходимость интерполирования тригонометрическими дробями $T_{n,m}(z)$ с произвольными полюсами $\{\eta_v^m\}$ по любым узлам из D для всякой 2π -периодической, регулярной в Φ_1 функции.

Доказательство этой теоремы в случае, когда G_0 — непустое множество, аналогично доказательству предыдущих теорем.

При доказательстве максимальности G_0 следует рассмотреть множество $G_1 = G_0 + z_0$, где $z_0 + 2\nu\pi \in G_0$. А из определения G_0 вытекает, что найдутся точки $\xi_0 \in \Phi_1$ и $\eta_0 \in D$ ($\xi_0 \neq z_0 + 2\nu\pi$), что

$$\left| \sin \frac{1}{2}(\xi_0 - \eta_0) \right| < \left| \sin \frac{1}{2}(z_0 - \eta_0) \right|$$

и, значит, остаток интерполирования (3) функции $f(z) = \operatorname{ctg} \frac{1}{2}(z - \xi_0)$

в точке z_0 с одним кратным узлом η_0 из множества D не стремится к нулю при возрастании n .

В частности, когда Φ_1 и D есть соответственно полосы $|\operatorname{Im} \xi| \leq d$ и $|\operatorname{Im} \eta| \leq h$ ($d \geq h$), тогда множество G_0 будет задаваться неравенством

$$\operatorname{sh} \frac{1}{2} (d - h) \geq \operatorname{ch} \frac{1}{2} (|\operatorname{Im} z| + h),$$

решая которое, придем к следующей теореме.

Теорема 7. *Какая бы ни была 2π -периодическая, регулярная в полосе $|\operatorname{Im} z| \leq d$ функция $f(z)$, последовательность интерполяционных дробей $T_{n,m}(z)$ ($n = 1, 2, \dots$; $m = m(n) \leq c < \infty$) с любыми полюсами, лежащими вне этой полосы и не имеющими предельных точек на ее границе, сходится равномерно на множестве*

$$|\operatorname{Im} z| \leq -h + 2 \ln \left\{ \operatorname{sh} \frac{1}{2} (d - h) + \sqrt{\operatorname{sh}^2 \frac{1}{2} (d - h) - 1} \right\} \quad (8)$$

по любым узлам из полосы $|\operatorname{Im} z| \leq h$ ($d \geq h \geq 0$). При $\operatorname{sh} \frac{1}{2} (d - h) < \operatorname{ch} \frac{1}{2} h$ множество сходимости (8) будет пустым, а для $\operatorname{sh} \frac{1}{2} (d - h) \geq \operatorname{ch} \frac{1}{2} h$ оно будет наибольшим множеством, в котором имеет место сходимость указанного интерполяционного процесса по произвольным узлам из полосы $|\operatorname{Im} z| \leq h$ в классе 2π -периодических функций, регулярных в полосе $|\operatorname{Im} z| \leq d$.

Замечание 1. Все эти теоремы остаются справедливыми и при интерполировании аналитических периодических функций тригонометрическими многочленами.

Замечание 2. В случае, когда два из множеств $\{\Phi, D, G\}$ есть, полосы, симметричные относительно действительной оси (третье множество тоже является полосой такого вида), сформулированные здесь теоремы также могут быть получены из одной теоремы о сходимости интерполирования рациональными функциями ([4], стр. 76).

II. Теперь рассмотрим асимптотику остатков приближений 2π -периодических функций, непрерывных в полосе $|\operatorname{Im} z| \leq d$ ($d \geq 0$) и регулярных в ее внутренних точках, тригонометрическими интерполяционными многочленами и некоторыми другими методами приближения функций.

Обозначим через $P_{2n}(z)$ тригонометрический интерполяционный многочлен определяемый условиями

$$P_{2n}(0) = f(0), \quad P_{2n}^{(i)}(x_j) = f^{(i)}(x_j),$$

$$\left(x_j = \frac{2j\pi}{2n+1}; \quad j = 1, 2, \dots, 2n; \quad i = 0, 1 \right).$$

Теорема 8. *Остаток интерполирования $r_{2n}^{(1)}(x) = f(x) - P_{2n}(x)$ в любой внутренней точке x полосы регулярности $|\operatorname{Im} z| \leq d$ представим в виде*

$$r_{2n}^{(1)}(x) = \frac{\sin^2 \left(n + \frac{1}{2} \right) x}{\sin \frac{1}{2} x} \sum_{\nu=1}^{\infty} c_{\nu n}(x) \nu \exp \{ -\nu(2n+1)d \}, \quad (9)$$

где коэффициенты $c_{\nu n}(x)$ стремятся к нулю, когда ν или n неограниченно возрастает.

Доказательство. Остаток интерполирования $r_{2n}^{(1)}(x)$, как нетрудно проверить непосредственным вычислением, представим в виде

$$r_{2n}^{(1)}(x) = \frac{\sin^2 \left(n + \frac{1}{2} \right) x}{4\pi i \sin \frac{1}{2} x} \int_{\Gamma} \frac{\sin \frac{1}{2} \xi f(\xi) d\xi}{\sin^2 \left(n + \frac{1}{2} \right) \xi \sin \frac{1}{2} (\xi - x)},$$

где Γ есть отрезки прямых ($0 \leq \operatorname{Re} \xi \leq 2\pi$, $\operatorname{Im} \xi = \pm d$). Используя выше-написанное представление остатка и разложение

$$\left[\sin^2 \left(n + \frac{1}{2} \right) (\xi_1 \pm id) \right]^{-1} = -4 \sum_{k=1}^{\infty} k \exp \{ -k(2n+1)(d \mp i \xi_1) \},$$

придем к равенству (9), где

$$c_{\nu n}(x) = \frac{1}{\pi i} \int_0^{2\pi} \left\{ \frac{\sin \frac{1}{2} (\xi_1 + id) f(\xi_1 + id)}{\sin \frac{1}{2} (\xi_1 + id - x)} \exp \{ i \nu (2n+1) \xi_1 \} - \frac{\sin \frac{1}{2} (\xi_1 - id) f(\xi_1 - id)}{\sin \frac{1}{2} (\xi_1 - id - x)} \exp \{ -i \nu (2n+1) \xi_1 \} \right\} d\xi_1.$$

Пусть $Q_n(x)$ — интерполяционный тригонометрический многочлен, удовлетворяющий условию $Q_n^{(i)}(x_0) = f^{(i)}(x_0)$, где x_0 — фиксированная точка интервала $[0, 2\pi]$, а $i = 0, 1, 2, \dots, 2n$. Тогда остаток интерполирования $R_n^{(0)}(x) = f(x) - Q_n(x)$ во внутренних точках x полосы $|\operatorname{Im} x| \leq d$ представляется контурным интегралом

$$R_n^{(0)}(x) = \frac{\sin^{2n+1} \frac{1}{2} (x - x_0)}{4\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\xi) d\xi}{\sin^{2n+1} \frac{1}{2} (\xi - x_0) \sin \frac{1}{2} (\xi - x)}.$$

Используя это представление и ряд

$$\left[\sin \frac{1}{2} (\xi_1 \pm id - x_0) \right]^{-(2n+1)} = \mp 2^{2n+1} (-1)^n i \exp \left\{ - \left(n + \frac{1}{2} \right) \times \right. \\ \left. \times (d \mp i (\xi_1 - x_0)) \right\} \frac{1}{(2n)!} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2n+k)!}{k!} \exp \{ -k(d \mp i (\xi_1 - x_0)) \},$$

придем к следующей теореме.

Теорема 9. Для остаточного члена $R_n^{(0)}(x) = f(x) - Q_n(x)$ во всякой точке x ($|\operatorname{Im} x| < d$) справедливо равенство

$$R_n^{(0)}(x) = \frac{(-1)^n 2^{2n+1} \sin^{2n+1} \frac{1}{2}(x-x_0)}{(2n)! \exp \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) d \right]} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2n+k)!}{k!} c_{kn}^{(0)}(x) \exp(-kd),$$

где

$$c_{kn}^{(0)}(x) = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \left\{ \frac{\exp \left[i \left(n + \frac{1}{2} + k \right) (\xi_1 - x_0) \right] f(\xi_1 + id)}{\sin \frac{1}{2} (\xi_1 + id - x)} + \right. \\ \left. + \frac{\exp \left[-i \left(n + \frac{1}{2} + k \right) (\xi_1 - x_0) \right] f(\xi_1 - id)}{\sin \frac{1}{2} (\xi_1 - id - x)} \right\} d\xi_1.$$

Заметим, что тригонометрический интерполяционный процесс с одним кратным узлом не является сходящимся в классе 2π -периодических функций с прямолинейной полосой регулярности.

Действительно, остаток интерполирования $R_n^{(0)}(x)$ функции $f(x) = \operatorname{ctg} \frac{1}{2}(x - \eta)$ представляется в виде

$$R_n^{(0)}(x) = \frac{\sin^{2n+1} \frac{1}{2}(x-x_0)}{\sin^{2n+1} \frac{1}{2}(\eta-x_0) \sin \frac{1}{2}(x-\eta)}, \quad (x = \eta + 2\nu\pi).$$

Модуль $R_n^{(0)}(x)$, например, в точке $x = x_0 + \pi + ix_2$ для этой функции при $\eta = x_0 + i\eta_2$ будет расти неограниченно, если только x_2 и η_2 удовлетворяют условию $\operatorname{sh}^2 \frac{1}{2}\eta_2 - \operatorname{sh}^2 \frac{1}{2}x_2 < 1$. Последнее неравенство всегда будет иметь место, если $|\eta_2|$ и $|x_2|$ достаточно близки к d , где $|\eta_2| > d$, а $|x_2| < d$.

В работе [5] получено разложение интеграла Джексона на сумму членов с возрастающими порядками малости. Используя это разложение, легко получить линейной комбинацией трех многочленов Джексона, при которой уничтожаются некоторые члены с низшими порядками малости, многочлены, приближающие данную функцию или ее вторую производную из указанного в этом пункте класса с достаточно высокой степенью точности.

Теорема 10. Для всякой 2π -периодической функции $f(x)$, регулярной внутри и непрерывной на границе полосы $|\operatorname{Im} x| \leq d$, в каждой внутренней точке x этой полосы имеет место

$$D_n(x) = f(x) - \frac{a_n^{(2)}(x)}{2ni} \exp \{ -n(d + ix) \} - \\ - \frac{b_n^{(2)}(x)}{2ni} \exp \{ -n(d - ix) \} + 0 \left\{ \frac{1}{n} \exp [-2n(d - |\operatorname{Im} x|)] \right\},$$

где

$$D_n(x) = \frac{1}{4n\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\cos n(t-x) - \cos 2n(t-x) \cos^2 \frac{1}{2}(t-x)}{\sin^2 \frac{1}{2}(t-x)} f(t) dt,$$

а коэффициенты $a_n^{(2)}(x)$ и $b_n^{(2)}(x)$ стремятся к нулю при возрастании n .

Приведенное в теореме соотношение легко установить, если воспользоваться разложением многочлена Джексона $D_n(x)$ для аналитических периодических функций [5] и тем, что

$$D_n(x) = a_1 D_{n-1}(x) + a_2 D_n(x) + a_3 D_{n+1}(x),$$

где

$$a_1 = \frac{1}{12n} (n-1)(2n^2 - 4n + 3), \quad a_2 = -\frac{1}{6} (2n^2 + 1),$$

$$a_3 = \frac{1}{12n} (n+1)(2n^2 + 4n + 3).$$

После преобразований получим требуемое равенство для $D_n(x)$ во внутренних точках полосы $|\operatorname{Im} z| \leq d$. Явное выражение коэффициентов $a_n^{(2)}(x)$ и $b_n^{(2)}(x)$ имеется в [5].

Аналогично, если в линейной комбинации

$$\tilde{D}_n(x) = b_1 D_{n-1}(x) + b_2 D_n(x) + b_3 D_{n+1}(x)$$

величины b_1 , b_2 и b_3 выбрать таким образом, чтобы в ней коэффициент при $f''(x)$ был равен единице, а коэффициенты при функции $f(x)$ и при членах со степенными порядками были нулями, приходим к следующей теореме.

Теорема 11. Для всякой 2π -периодической, регулярной внутри и непрерывной на границе полосы $|\operatorname{Im} z| \leq d$ функции $f(z)$ справедливо в точке x ($|\operatorname{Im} x| < d$) соотношение

$$\begin{aligned} \tilde{D}_n(x) = f''(x) + \frac{2n^2 + 1}{2i} a_n^{(2)}(x) \exp[-n(d + ix)] + \\ + \frac{2n^2 + 1}{2i} b_n^{(2)}(x) \exp[-n(d - ix)] + 0 \{ \exp[-n(d - |\operatorname{Im} x|)] \}. \end{aligned}$$

В этом случае коэффициенты b_i будут такими:

$$b_1 = -\frac{(n-1)(2n^2 - 4n + 3)(2n^2 + 2n + 1)}{12n}, \quad b_2 = \frac{1}{6} (2n^2 + 1)^2,$$

$$b_3 = -\frac{(n+1)(2n^2 + 4n + 3)(2n^2 - 2n + 1)}{12n},$$

а многочлен $\tilde{D}_n(x)$ имеет вид

$$\tilde{D}_n(x) = \frac{1}{4n\pi} \int_0^{2\pi} K_n(t-x) f(t) dt,$$

где

$$K_n(u) = \frac{1}{\sin^3 \frac{1}{2} u} \left\{ n \cos \frac{1}{2} u [2 \sin nu - \sin 2nu \cos u] - \right. \\ \left. - (2n^2 + 1) \sin \frac{1}{2} u \left[\cos nu - \cos 2nu \cos^2 \frac{1}{2} u \right] \right\}.$$

Литература

1. Янович Л. А. Изв. АН БССР, сер. физ.-мат., № 1, 1967.
2. Крылов В. И., Янович Л. А. ДАН БССР, 7, № 10, 1963.
3. Киш О. ДАН СССР, 102, № 3, 1955.
4. Смирнов В. И., Лебедев Н. А. Конструктивная теория функций комплексного переменного. Изд. «Наука», М., 1964.
5. Янович Л. А. Изв. АН БССР, сер. физ.-мат., № 1, 1966.

Институт математики
АН БССР

Поступило в редакцию
21.I 1967

УДК 512.25/26+519.3:330.115

Н. А. ЛЕПЕШИНСКИЙ

**ОДНА ЗАДАЧА ТЕОРИИ РАСПИСАНИЙ
 И МАКСИМУМ СУММЫ ЛИНЕЙНЫХ ФОРМ
 НА МНОЖЕСТВЕ ПОДСТАНОВОК**

1. Пусть для каждого $j = 1, 2, \dots, m$ дана вещественная линейная форма n неизвестных x_1, x_2, \dots, x_n $f^{(j)} = \sum_{i=1}^n e_{ij} x_i$. Построим форму

$$f = \sum_{j=1}^m f^{(j)} = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n e_{ij} x_i. \quad (1)$$

Пусть τ — подстановка из симметрической группы S_n и $\tau(i) = \tau_i$. Определим результат применения подстановки τ к f как форму

$$\tau(f) = f_\tau = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n e_{ij} x_{\tau_i}.$$

Если t — матрица, столбцы которой — фиксированные вещественные n -мерные векторы $t^{(j)} = (t_{1j}, t_{2j}, \dots, t_{nj})$ ($j = 1, 2, \dots, m$), то вычислим значение формы (1) для векторов из t на подстановке τ , т. е. величину

$$f_\tau(t) = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n e_{ij} t_{\tau_i j}. \quad (2)$$

Задача А. Найти такую подстановку $\tau^{(0)}$ из S_n , что для любого $\tau \in S_n$

$$f_\tau(t) \leq f_{\tau^{(0)}}(t).$$

Аналогичная задача рассматривается в [1]. Отметим, что в симметрической или в знакопеременной группе нетрудно найти подстановки, на которых линейная форма (случай $m = 1$ в (1)) принимает экстремальные значения [2]. Проблему выбора таких подстановок в произвольном множестве подстановок поставил Д. А. Супруненко. Простота и малая трудоемкость методов, построенных в [2], обуславливают интерес к созданию аналогичного алгоритма для решения задачи А.

Теорема 1. *Задача А сводится к задаче о максимальном назначении.*
 Доказательство. Для любого j выберем пару векторов:

$$e^{(j)} = (e_{1j}, e_{2j}, \dots, e_{nj}),$$

$$t^{(j)} = (t_{1j}, t_{2j}, \dots, t_{nj}).$$

Построим квадратную матрицу n -го порядка

$$N^{(i)} = \begin{pmatrix} e_{1j} t_{1j} & e_{1j} t_{2j} & \dots & e_{1j} t_{nj} \\ e_{2j} t_{1j} & e_{2j} t_{2j} & \dots & e_{2j} t_{nj} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ e_{nj} t_{1j} & e_{nj} t_{2j} & \dots & e_{nj} t_{nj} \end{pmatrix}. \quad (3)$$

Значение формы $f^{(i)}$ для вектора $t^{(i)}$ на произвольной подстановке $\tau \in S_n$ равно $f_{\tau}^{(i)} = \sum_{i=1}^n e_{ij} t_{\tau ij}$. Подстановка τ определяет в матрице $N^{(i)}$ n элементов (ровно по одному в каждой строке и каждом столбце), сумма которых также равна $\sum_{i=1}^n e_{ij} t_{\tau ij}$.

Исходные данные задачи A позволяют построить матрицы типа (3): $N^{(1)}, N^{(2)}, \dots, N^{(m)}$. Вычислим матрицу

$$N = \sum_{j=1}^m N^{(j)}. \quad (3a)$$

Очевидно, произвольная подстановка $\tau \in S_n$ определяет в матрице N n элементов, сумма которых равна $\sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n e_{ij} t_{\tau ij}$. Эта величина совпадает со значением формы (1) для векторов из t на подстановке τ (см. (2)). Таким образом, на подстановке, которая является решением задачи о максимальном назначении с матрицей N , форма f для векторов из t принимает максимальное значение. Теорема доказана.

Следовательно, задача A может быть решена известными, хотя и достаточно трудоемкими методами (см., например, стр. 641—652 из [3]).

Покажем, что задача A используется для решения одного типа задач теории расписаний.

2. На m станках по одному и тому же технологическому маршруту, заданному, например, последовательностью станков $(1, 2, \dots, m)$, должны быть обработаны n деталей. Предполагается, что ни одна деталь не может одновременно обрабатываться более чем одним станком и что ни один станок не может одновременно обрабатывать более чем одну деталь. Известно время обработки каждой детали на каждом станке — матрица $(t_{ij})_{n, m}$ с положительными рациональными элементами. Времена переноса деталей от станка к станку и переналадок станков не учитываются. Принято, что на каждом станке детали обрабатываются в одном и том же порядке.

Пусть μ_{ij} — момент начала обработки i -й детали на j -м станке. Тогда в силу последнего предположения векторы

$$(\mu_j, k) = (\mu_{k_1 j}, \mu_{k_2 j}, \dots, \mu_{k_n j}), \quad j = 1, 2, \dots, m$$

определяют расписание обработки деталей, где $\mu_{k_i j}$ подчиняются неравенству $\mu_{k_1 j} < \mu_{k_2 j} < \dots < \mu_{k_n j}$ для всех $j = 1, 2, \dots, m$ и таковы, что выполняются условия обработки, а $k = \{k_1, k_2, \dots, k_n\}$ — перестановка чисел $1, 2, \dots, n$. Будем рассматривать только тривиально неуплотняемые расписания, т. е. расписания, в которых для каждого j и всех $i = 1, 2, \dots, n-1$ число $\mu_{k_{i+1} j} > \mu_{k_i j}$ выбрано настолько близким к $\mu_{k_i j}$, насколько позволяют условия обработки.

Введем величину

$$T(\mu_j, k) = \mu_{k_n m} + t_{k_n m} - \mu_{k_1 1},$$

которая определяет общее время, затрачиваемое на обработку всех деталей при расписании k . Так как тривиально неуплотняемое расписание задается просто перестановкой $k = \{k_1, k_2, \dots, k_n\}$, можно записать

$$T(\mu_j, k) = T(k).$$

Задача Б. Для указанных условий обработки деталей в множестве K всех тривиально неуплотняемых расписаний найти такое расписание k^* , что для любого $k \in K$

$$T(k) \leq T(k^*).$$

Теорема 2. *Общее время обработки всех деталей для любого $k \in K$ в условиях задачи Б вычисляется по формуле*

$$T(k) = \max_{1 \leq u_1 < \dots < u_{m-1} < n} \left(\sum_{i=1}^{u_1} t_{k_i,1} + \sum_{i=u_1}^{u_2} t_{k_i,2} + \dots + \sum_{i=u_{m-1}}^n t_{k_i,m} \right), \quad (4)$$

где u_1, u_2, \dots, u_{m-1} принимают целочисленные значения.

Доказательство этого утверждения проведено в [4].

Нетрудно видеть, что число целочисленных значений u_1, u_2, \dots, u_{m-1} , удовлетворяющих условиям $1 \leq u_1 < \dots < u_{m-1} \leq n$, равно $\binom{m+n-2}{m-1}$.

Для фиксированного набора чисел $u_0 = 1, u_1, \dots, u_{m-1}, u_m = n$ и каждого j ($j = 1, 2, \dots, m$) введем вектор

$$e^{(j)} = (e_{1j}, e_{2j}, \dots, e_{nj}),$$

координаты $e_{u_{j-1}j}, \dots, e_{u_jj}$ которого равны единице, а остальные координаты равны нулю. Множество m таких векторов обозначим $e(u_0, u_1, \dots, u_{m-1}, u_m)$.

Формулу (4) для любого $k \in K$ запишем в виде

$$T(k) = \max_{1 \leq u_1 < \dots < u_{m-1} < n} \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n e_{ij} t_{k_{ij}}.$$

Перестановку $k = \{k_1, k_2, \dots, k_n\}$, определяющую расписание, можно задавать в виде подстановки из S_n вида $\begin{pmatrix} k_1, k_2, \dots, k_n \\ 1, 2, \dots, n \end{pmatrix}$, где всякое отображение $k_i \rightarrow i$ указывает, что деталь с номером k_i идет на обработку i -й. Наоборот, такая интерпретация отображений множества элементов верхней строки на множество элементов нижней строки в любой подстановке однозначно определяет расписание в виде перестановки. Поэтому для любого расписания, задаваемого подстановкой $\tau \in S_n$, общее время обработки всех деталей также вычисляется по формуле

$$T(\tau) = \max_{1 \leq u_1 < \dots < u_{m-1} < n} \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n e_{ij} t_{\tau_{ij}}.$$

Теперь задачу Б сформулируем в следующей форме: определить значение функционала

$$\max_{\tau \in S_n} \max_{1 \leq u_1 < \dots < u_{m-1} < n} \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n e_{ij} t_{\tau_{ij}} \quad (5)$$

и подстановку τ^* , на которой это значение достигается.

Для фиксированной подстановки $\tau \in S_n$ и набора чисел u_1, u_2, \dots, u_{m-1} функционал (5) принимает конкретное числовое значение. Всевозможные

такие значения образуют прямоугольную таблицу размера $\binom{m+n-2}{m-1} \times n!$.

Можно в каждом из $n!$ столбцов найти наибольшее число, а потом из них выбрать максимальное значение, которое и будет значением функционала (5). Это соответствует тому, что для фиксированной подстановки τ находится $\binom{m+n-2}{m-1}$ значений и из них выбирается наибольшее. Потом образовывается следующая подстановка и выбор наибольшего значения повторяется. Конечно, можно производить выбор наибольшего значения в каждой строке таблицы и среди этих значений найти максимальное. В этом случае сначала фиксируется набор u_1, u_2, \dots, u_{m-1} и для него находится наибольшее из $n!$ чисел, далее образовывается новый набор u_1, \dots, u_{m-1} и выбор наибольшего значения повторяется. Таким образом, выполняется Теорема 3.

$$\begin{aligned} \max_{\tau \in S_n} \max_{1 < u_1 < \dots < u_{m-1} < n} \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n e_{ij} t_{\tau ij} &= \\ = \max_{1 < u_1 < \dots < u_{m-1} < n} \max_{\tau \in S_n} \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n e_{ij} t_{\tau ij}. \end{aligned}$$

Очевидно, задача определения значения $\max_{\tau \in S_n} \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n e_{ij} t_{\tau ij}$, если множество векторов $e(u_0, u_1, \dots, u_{m-1}, u_m)$ задано, является задачей А.

Итак, для решения задачи Б предлагается следующий алгоритм, основанный на теоремах 2, 3, 1.

Образовывается набор чисел $u_0 = 1, u_1, \dots, u_{m-1}, u_m = n$, для которого строится множество векторов $e(u_0, u_1, \dots, u_{m-1}, u_m)$. По формулам (3) и (3а) вычисляется матрица N , на которой решается задача о максимальном значении. Подстановка, доставляющая максимальное назначение, и значение (2) на этой подстановке запоминаются. Далее строится новый набор u_1, \dots, u_{m-1} , и процесс повторяется. Как указано выше, требуется решить $\binom{m+n-2}{m-1}$ задач о назначении. Потом из всех решений выбирается решение с максимальным значением (2). Оно является значением функционала (5), а соответствующая подстановка τ^* задает искомое в задаче Б расписание.

Замечание. Для задач определения расписаний с наименьшим общим временем обработки всех деталей в условиях задачи Б утверждение, подобное теореме 3, не выполняется.

Автор благодарен Д. А. Супруненко за обсуждение и ценные советы.

Литература

1. Крушевский А. В., Примак М. Е. Сб. «Математическое моделирование и электрические цепи», вып. 2. Изд. АН УССР, 1964.
2. Кунцевич И. М., Супруненко Д. А. ДАН БССР, 10, № 3, 1966.
3. Юдин Д. Б., Гольштейн Е. Г. Задачи и методы линейного программирования. Изд. «Советское радио», 1964.
4. Jaeschke G. Elektronische Rechenanlagen, № 3, 1964.

Институт математики
АН БССР

Поступило в редакцию 4.III 1967

УДК 518:517/944/947

В. В. БОБКОВ, В. Н. АБРАШИН

**СХОДИМОСТЬ НЕКОТОРЫХ СХЕМ
 МЕТОДА ИНТЕГРАЛЬНЫХ СООТНОШЕНИЙ
 В СЛУЧАЕ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО
 УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА**

Рассматриваемая работа посвящена вопросу приближенного решения методом интегральных соотношений [1] следующей задачи Коши:

$$u_{xy} = a(x, y)u_x + b(x, y)u_y + c(x, y)u + f(x, y), \quad (1)$$

$$u[x, g(x)] = \varphi(x), \quad \frac{\partial u[x, g(x)]}{\partial y} = \psi(x), \quad -a \leq x \leq 0, \quad (2)$$

где кривая $y=g(x)$, несущая начальные значения, нигде не принимает характеристических направлений $x=\text{const}$, $y=\text{const}$.

В работе [2] для данной задачи была построена с использованием линейного интерполирования неизвестной функции двухслойная схема метода интегральных соотношений, сходящаяся со скоростью порядка h^2 (h — шаг решетки прямых, на которых ищется приближенное решение исходной задачи). В данной работе с использованием интерполирования Эрмита будут построены две двухслойные схемы метода интегральных соотношений, сходящиеся со скоростями h^3 и h^4 соответственно, а также будут исследованы многослойные схемы этого метода, построенные с использованием интерполирования по значениям функции любого фиксированного порядка. Здесь же будет указано на некоторые возможные обобщения основных результатов работы на другие задачи, а также на случай систем уравнений подобного типа, при этом не обязательно линейных.

1. Построим сначала двухслойные схемы метода интегральных соотношений, сходящиеся со скоростью порядка h^3 .

Разбив область D , ограниченную линией $y=g(x)$ ($g(0)=0$) и характеристиками $x=0$, $y=g(-a)=d$, на полосы прямыми $y=y_n=nh$, $n=1, 2, \dots, N$; $N=[d/h]$, интегрируем уравнение (1) поперек каждой полосы:

$$u'(x, y_{n+1}) - u'(x, l_n) + l'_n(x)u_y(x, y_{n+1}) - b(x, y_{n+1})u(x, y_{n+1}) + \\
 + b(x, l_n)u(x, l_n) = \int_{l_n}^{y_{n+1}} [a(x, y)u_x + c(x, y)u - \\
 - b_y(x, y)u + f(x, y)] dy, \quad (3)$$

$$x_{n+1} \leq x \leq 0, \quad n=0, 1, \dots, N-1.$$

Здесь x_{n+1} есть абсцисса точки пересечения прямой $y = y_{n+1}$ с кривой $y = g(x)$, а линия $y = l_n = l_n(x)$ совпадает с кривой $y = g(x)$ для $x_{n+1} \leq x \leq x_n$ и с прямой $y = y_n$ для $x_n \leq x \leq 0$. Штрихом здесь и всюду ниже обозначено дифференцирование по x .

Интерполировав функции u и u_x по их значениям на границах данной полосы и по значениям их производных по y на верхней границе этой полосы, получим для нахождения приближенного решения u_n задачи (1), (2) систему $2N$ уравнений (через $u_n = u_n(x)$, $u_{y_n} = u_{y_n}(x)$ обозначены приближенные значения функций $u(x, y)$, $u_y(x, y)$ на прямых $y = y_n$, $n = 1, 2, \dots, N$)

$$\begin{aligned} \alpha_{n+1} u'_{n+1} - \beta_n u'_{l_n} &= \xi_{n+1} u_{n+1} + \eta_n u_{l_n} + \tau_{n+1} u_{y_{n+1}} + f_{n+1}, \\ u_{n+1} - u_{l_n} &= \frac{h_n}{2} u_{y_{n+1}} + \frac{h_n}{2} u_{y_{l_n}}, \quad n = 0, 1, \dots, N-1, \\ x_{n+1} &\leq x \leq 0, \end{aligned} \quad (4)$$

при дополнительных условиях

$$u_{n+1}(x_{n+1}) = \varphi(x_{n+1}), \quad \frac{\partial u[x, g(x)]}{\partial y} = \psi(x), \quad -a \leq x \leq 0, \quad (5)$$

где

$$\begin{aligned} u_{l_n} = u_{l_n}(x) &= \begin{cases} \varphi(x), & x_{n+1} \leq x \leq x_n \\ u_n, & x_n < x \leq 0 \end{cases}, \\ u_{y_{l_n}} = u_{y_{l_n}}(x) &= \begin{cases} \psi(x), & x_{n+1} \leq x \leq x_n \\ u_{y_n}, & x_n < x \leq 0 \end{cases}, \\ h_n = h_n(x) &= y_{n+1} - l_n, \\ \alpha_{n+1} &= 1 - h_n \int_0^1 a(x, l_n + th_n) [2 - t - h_n(1-t)a(x, y_{n+1})] t dt, \\ \beta_n &= 1 + h_n \int_0^1 a(x, l_n + th_n) (1-t)^2 dt, \\ \xi_{n+1} &= b(x, y_{n+1}) + h_n \int_0^1 \left\{ (2-t) \left[c(x, l_n + th_n) - \frac{\partial b(x, l_n + th_n)}{\partial y} \right] - \right. \\ &\quad \left. - h_n(1-t)a(x, l_n + th_n)c(x, y_{n+1}) \right\} t dt, \\ \eta_n &= -b(x, l_n) + h_n \int_0^1 \left[c(x, l_n + th_n) - \frac{\partial b(x, l_n + th_n)}{\partial y} \right] (1-t)^2 dt, \\ \tau_{n+1} &= -h_n^2 \int_0^1 \left[c(x, l_n + th_n) - \frac{\partial b(x, l_n + th_n)}{\partial y} + \right. \\ &\quad \left. + a(x, l_n + th_n)b(x, y_{n+1}) \right] t(1-t) dt, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_{n+1} = h_n \int_0^1 [f(x, l_n + th_n) - h_n(1-t) \tau a(x, l_n + th_n) f(x, y_{n+1})] dt - \\ - \beta_n l'_n u_y(x, l_n). \end{aligned}$$

Для погрешности метода $\gamma_{n+1} = \gamma_{n+1}(x) = u(x, y_{n+1}) - u_{n+1}(x)$ соответственно получим

$$\begin{aligned} \alpha_{n+1} \gamma'_{n+1} - \beta_n \gamma'_{l_n} = \xi_{n+1} \gamma_{n+1} + \eta_n \gamma_{l_n} + \tau_{n+1} \gamma_{y_{n+1}} + r_{n+1}, \\ \gamma_{n+1} - \gamma_{l_n} = \frac{h_n}{2} \gamma_{y_{n+1}} + \frac{h_n}{2} \gamma_{y l_n} + r_{n+1}^*, \quad \gamma_{n+1}(x_{n+1}) \equiv 0, \end{aligned} \quad (6)$$

где

$$x_{n+1} \leq x \leq 0, \quad n = 0, 1, \dots, N-1,$$

$$\gamma_{y_{n+1}} = \gamma_{y_{n+1}}(x) = u_y(x, y_{n+1}) - u_{y_{n+1}},$$

$$\gamma_{l_n} = \gamma_{l_n}(x) = \begin{cases} 0, & x_{n+1} \leq x \leq x_n, \\ \gamma_n, & x_n < x \leq 0, \end{cases}$$

$$\gamma_{y l_n} = \gamma_{y l_n}(x) = \begin{cases} 0, & x_{n+1} \leq x \leq x_n, \\ \gamma_{y n}, & x_n < x \leq 0, \end{cases}$$

$$\begin{aligned} r_{n+1} = \frac{h_n^4}{3!} \int_0^1 \left\{ [c(x, l_n + th_n) - b_y(x, l_n + th_n)] \frac{\partial^3 u(x, \hat{y}_{n+1})}{\partial y^3} + \right. \\ \left. + a(x, l_n + th_n) \frac{\partial^4 u(x, \tilde{y}_{n+1})}{\partial x \partial y^3} \right\} t(1-t)^2 dt, \end{aligned}$$

$$r_{n+1}^* = \frac{h_n^3}{2!} \int_0^1 \frac{\partial^3 u(x, \tilde{y}_{n+1})}{\partial y^3} (t-1) t dt,$$

$$l_n < \tilde{y}_{n+1}, \quad \tilde{y}_{n+1}, \quad \tilde{y}_{n+1} < y_{n+1}.$$

Как задача (6), так и полученная ранее задача (4), (5) решаются последовательно начиная с $n=0$.

Покажем, что при $h \rightarrow 0$ $u_n(x)$ равномерно в области D сходится к $u(x, y_n)$, и дадим оценку погрешности метода.

Разобьем задачу (6) на $N-1$ последовательно решаемых задач Коши следующим образом:

$$P_n \Gamma'_n = Q_n \Gamma_n + V_n \Gamma_{y_n} + R_n, \quad L_n \Gamma_n = F_n \Gamma_{y_n} + \bar{R}_n, \quad (7)$$

$$\Gamma_n(x_{N-n}) = \Phi_n, \quad x_{N-n} \leq x \leq x_{N-n-1}, \quad n = 1, 2, \dots, N-1,$$

где

$$P_n = \begin{bmatrix} \alpha_{N-n+1} & 0 & 0 & \cdot & 0 & 0 \\ -\beta_{N-n+1} & \alpha_{N-n+2} & 0 & \cdot & 0 & 0 \\ 0 & -\beta_{N-n+2} & \alpha_{N-n+3} & \cdot & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & -\beta_{N-1} & \alpha_{N-1} \end{bmatrix}, \quad \Gamma_n = \begin{bmatrix} \gamma_{N-n+1} \\ \gamma_{N-n+2} \\ \gamma_{N-n+3} \\ \cdot \\ \gamma_N \end{bmatrix},$$

$$Q_n = \begin{bmatrix} \xi_{N-n+1} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \eta_{N-n+1} & \xi_{N-n+2} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \eta_{N-n+2} & \xi_{N-n+3} & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \eta_{N-1} & \xi_N \end{bmatrix}, \quad \Gamma_{yn} = \begin{bmatrix} \gamma_{yN-n+1} \\ \gamma_{yN-n+2} \\ \gamma_{yN-n+3} \\ \dots \\ \gamma_N \end{bmatrix},$$

$$L_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad F_n = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}h & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{1}{2}h & \frac{1}{2}h & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \frac{1}{2}h & \frac{1}{2}h & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{1}{2}h & \frac{1}{2}h \end{bmatrix},$$

$$R_n = \begin{bmatrix} r_{N-n+1} + \beta_{N-n} \gamma'_{N-n} + \eta_{N-n} \gamma_{N-n} \\ r_{N-n+2} \\ r_{N-n+3} \\ \dots \\ r_N \end{bmatrix}, \quad \Phi_n = \begin{bmatrix} \gamma_{N-n+1}(x_{N-n}) \\ \gamma_{N-n+2}(x_{N-n}) \\ \gamma_{N-n+3}(x_{N-n}) \\ \dots \\ \gamma_N(x_{N-n}) \end{bmatrix},$$

$$\bar{R}_n = \begin{bmatrix} r_{N-n+1}^* + \gamma_{N-n} + \frac{h_{N-n}}{2} \gamma_{yN-n} \\ r_{N-n+2}^* \\ \dots \\ r_{N-1}^* \\ r_N^* \end{bmatrix}, \quad V_n = \begin{bmatrix} \tau_{N-n+1} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \tau_{N-n+2} & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \tau_{N-1} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \tau_N \end{bmatrix}.$$

Выберем шаг h так, чтобы выполнялось условие

$$1 - \frac{1}{2}hA \left(1 + \frac{1}{3}hA \right) > 0,$$

т. е. чтобы α_{n+1} ($n=0, 1, 2, \dots, N-1$) было положительным (здесь $A = \max_D |a(x, y)|$). Тогда задача (7) может быть приведена к виду

$$\Gamma'_n = S_n \Gamma_n + T_n, \quad \Gamma_n(x_{N-n}) = \Phi_n, \quad (8)$$

$$x_{N-n} \leq x \leq x_{N-n-1}, \quad n = 1, 2, \dots, N-1,$$

где

$$S_n = P_n^{-1} (Q_n + V_n F_n^{-1} L_n), \quad T_n = P_n^{-1} (R_n - V_n F_n^{-1} \bar{R}_n).$$

Воспользовавшись известными результатами [3], оценим по норме (будем иметь в виду норму 1) решение задачи (8):

$$\| \Gamma_n \| \leq \| \Phi_n \| \exp \int_{x_{N-n}}^x \| S_n \| dv + \int_{x_{N-n}}^x \| T_n \| \exp \int_w^x \| S_n \| dv dw, \\ x_{N-n} \leq x \leq x_{N-n-1}, \quad n = 1, 2, \dots, N-1. \quad (9)$$

Прежде чем приступить к оценке норм матрицы S_n и вектора-столбца T_n , введем некоторые обозначения:

$$B_y = \max_D |b_y(x, y)|, \quad C = \max_D |c(x, y)|, \quad g'_{(n)} = \min_D |g'(x)|.$$

$$\xi = \max_{x_{n+1} < x < 0} \max_{0 < n < N-1} |\xi_{n+1}(x)|, \quad \eta = \max_{x_{n+1} < x < 0} \max_{0 < n < N-1} |\eta_n(x)|,$$

$$\Delta = \max_{x_{n+1} < x < 0} \max_{0 < n < N-1} \frac{1}{h} |\xi_{n+1} \beta_{n+1} + \alpha_{n+1} \eta_{n+1}|, \quad \lambda_{n+1} = \frac{\beta_{n+1}}{\alpha_{n+1}},$$

$$\beta = \max_{x_{n+1} < x < 0} \max_{0 < n < N-1} |\beta_{n+1}|,$$

$$\tau = \max_{x_{n+1} < x < 0} \max_{0 < n < N-1} \frac{1}{h^3} |\beta_{n+1} \tau_{n+1} - \alpha_{n+1} \tau_{n+2}|,$$

$$0 < \alpha = \min_{x_{n+1} < x < 0} \min_{0 < n < N-1} |\alpha_{n+1}|, \quad M_p^q = \max_D \left| \frac{\partial^{p+q} u}{\partial x^q \partial y^p} \right|,$$

$$\lambda_{(n)} = \max_{x_{n+1} < x < 0} \max_{0 < n < N-1} \left| \prod_{i=1}^{n+1} \lambda_i \right|,$$

$$\tau^* = \max_{x_{n+1} < x < 0} \max_{0 < n < N-1} \frac{1}{h^2} |\tau_{n+1}|,$$

$$\delta = \max_{x_{n+1} < x < 0} \max_{0 < n < N-1} |\gamma_{n+1}| \leq h^4 K_1,$$

$$\delta' = \max_{x_{n+1} < x < 0} \max_{0 < n < N-1} |\gamma'_{n+1}| \leq h^4 K_2,$$

$$\delta_y = \max_{x_{n+1} < x < 0} \max_{0 < n < N-1} |\gamma_{yn+1}| \leq h^2 K_3$$

(константы K_1, K_2, K_3 нетрудно получить, оценивая решение задачи (6) при $x_{n+1} \leq x \leq x_n$, $n = 0, 1, \dots, N-1$, с помощью неравенства (9)).

Теперь можно записать непосредственно оценки для норм матрицы S_n и вектора-столбца T_n :

$$\| S_n \| \leq (y_n - h) \lambda_{(n)} \frac{1}{\alpha^2} [\Delta + 2\alpha\tau^* + 4(y_n - h)\tau] = S_{(n)}, \quad (10)$$

$$\| T_n \| \leq \frac{h^3}{72} (y_n - h) \left\{ (C + B_y) M_3 + \alpha M_3^1 + \tau^* \lambda_{(n)} \frac{6}{\alpha} [M_3 + \right. \\ \left. + 3(y_n - h) M_4] \lambda_{(n)} \frac{1}{\alpha} + h^4 K_1 \left[2h\tau^* + (y_n - h) \lambda_{(n)} \frac{\tau}{\alpha^2} + \eta \lambda_{(n)} \right] + \right. \\ \left. + h^4 K_2 \beta + h^3 K_3 \left[2h\tau^* + (y_n - h) \lambda_{(n)} \frac{\tau}{\alpha^2} \right] \right\} = h^3 T_{(n)}. \quad (11)$$

Имея в виду (10), (11), из неравенства (9) получим следующую оценку для погрешности метода:

$$|Y_{n+1}(x)| \leq h^3 \left\{ h K_1 e^{S(n)(x-x_{n+1})} + \frac{T(n)}{S(n)} [e^{S(n)(x-x_{n+1})} - 1] \right\}, \quad (12)$$

$$x_{n+1} \leq x \leq 0, \quad n = 0, 1, \dots, N-1.$$

Из оценки (12) уже непосредственно следует, что при неограниченном уменьшении шага h приближенное решение исходной задачи равномерно в области D сходится к точному ее решению со скоростью порядка h^3 .

2. Рассмотрим далее двухслойную схему метода интегральных соотношений, сходящуюся со скоростью порядка h^4 .

Проведем из точек (x_{n+1}, y_{n+1}) , $n = 0, 1, \dots, N-1$, прямые, параллельные оси ординат. Приближенное решение задачи (1), (2) будем искать на прямых $y = y_{n+1}$ ($x_{n+1-i} \leq x \leq x_{n-i}$), $n = 0, 1, \dots, N-1$; $i = 0, 1, \dots, n$.

Проинтегрировав уравнение (1) при $y = y_{n+1}$ ($n = 0, 1, \dots, N-1$) поперек каждой полосы $[x_{n+1-i}, x]$ ($x_{n+1-i} \leq x \leq x_{n-i}$), $i = 0, 1, \dots, n$, и интерполировав функции u и u_y по значениям их и их производных по x на границах каждой полосы, получим

$$\begin{aligned} p_{n+1i}(x) u_y(x, y_{n+1}) = & \varepsilon_{n+1i}(x) u'(x, y_{n+1}) + l_{n+1i}(x) u(x, y_{n+1}) + \\ & + q_{n+1i}(x) u_y(x_{n+1-i}, y_{n+1}) + \zeta_{n+1i}(x) u(x_{n+1-i}, y_{n+1}) + \\ & + v_{n+1i}(x) u'(x_{n+1-i}, y_{n+1}) + W_{n+1i}(x) + r_{n+1i}^*(x), \end{aligned} \quad (13)$$

где $x_{n+1-i} \leq x \leq x_{n-i}$, $n = 0, 1, 2, \dots, N-1$; $i = 0, 1, \dots, n$,

$$p_{n+1i}(x) = 1 - \int_{x_{n+1-i}}^x b(\tau, y_{n+1}) \frac{(\tau - x_{n+1-i})^2}{(x - x_{n+1-i})^2} \left[\frac{3x - x_{n+1-i} - 2\tau}{x - x_{n+1-i}} - (x - \tau) b(x, y_{n+1}) \right] d\tau,$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{n+1i}(x) = & - \int_{x_{n+1-i}}^x \frac{(\tau - x_{n+1-i})^2 (x - \tau)}{(x - x_{n+1-i})^2} [c(\tau, y_{n+1}) - a_\tau(\tau, y_{n+1}) + \\ & + b(\tau, y_{n+1}) a(x, y_{n+1})] d\tau, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} l_{n+1i}(x) = & a(x, y_{n+1}) + \int_{x_{n+1-i}}^x \frac{(\tau - x_{n+1-i})^2}{(x - x_{n+1-i})^2} \left\{ \frac{3x - x_{n+1-i} - 2\tau}{x - x_{n+1-i}} [c(\tau, y_{n+1}) - \right. \\ & \left. - a_\tau(\tau, y_{n+1})] - (x - \tau) b(\tau, y_{n+1}) c(x, y_{n+1}) \right\} d\tau, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} q_{n+1i}(x) = & 1 + \int_{x_{n+1-i}}^x b(\tau, y_{n+1}) \frac{(x - \tau)^2}{(x - x_{n+1-i})^2} \left[\frac{2\tau + x - 3x_{n+1-i}}{x - x_{n+1-i}} + \right. \\ & \left. + (\tau - x_{n+1-i}) b(x_{n+1-i}, y_{n+1}) \right] d\tau, \end{aligned}$$

$$\zeta_{n+1i}(x) = -a(x_{n+1-i}, y_{n+1}) + \int_{x_{n+1-i}}^x \frac{(x-\tau)^2}{(x-x_{n+1-i})^2} \left\{ \frac{2\tau+x-3x_{n+1-i}}{x-x_{n+1-i}} \times \right. \\ \left. \times [c(\tau, y_{n+1}) - a_\tau(\tau, y_{n+1})] + (\tau-x_{n+1-i})b(\tau, y_{n+1})c(x_{n+1-i}, y_{n+1}) \right\} d\tau,$$

$$v_{n+1i}(x) = \int_{x_{n+1-i}}^x \frac{(x-\tau)^2(\tau-x_{n+1-i})}{(x-x_{n+1-i})^2} [c(x, y_{n+1}) - a_\tau(x, y_{n+1}) + \\ + b(\tau, y_{n+1})a(x_{n+1-i}, y_{n+1})] d\tau,$$

$$W_{n+1i}(x) = \int_{x_{n+1-i}}^x \left[f(\tau, y_{n+1}) + \frac{(\tau-x_{n+1-i})(x-\tau)^2}{(x-x_{n+1-i})^2} f(x_{n+1-i}, y_{n+1}) - \right. \\ \left. - \frac{(\tau-x_{n+1-i})^2(x-\tau)}{(x-x_{n+1-i})^2} f(x, y_{n+1}) \right] d\tau,$$

$$r_{n+1i}^*(x) = \frac{1}{24} \int_{x_{n+1-i}}^x \left\{ [c(\tau, y_{n+1}) - a_\tau(\tau, y_{n+1})] \frac{\partial^4 u(\tilde{\tau}_i, y_{n+1})}{\partial x^4} + \right. \\ \left. + b(\tau, y_{n+1}) \frac{\partial^5 u(\tilde{\tau}_i, y_{n+1})}{\partial x^4 \partial y} \right\} (\tau-x_{n+1-i})^2 (\tau-x) d\tau,$$

$$x_{n+1-i} < \tilde{\tau}_i, \tilde{\tau}_i < x \quad (x_{n+1-i} \leq x \leq x_{n-i}).$$

Если теперь в равенствах (3) интерполировать функции u и u_x по их значениям и значениям их производных по y на границах каждой полосы, то, имея в виду выражения (13), для нахождения приближенного решения задачи (1), (2) получим следующую систему уравнений:

$$\alpha_{n+1i} u'_{n+1} - \beta_{ni} u'_n = \xi_{n+1i} u_{n+1} + \eta_{ni} u_n + \\ + \rho_{n+1i} \frac{1}{\rho_{n+1i}(x)} [q_{n+1i}(x) u_{y_{n+1}}(x_{n+1-i}) + v_{n+1i}(x) u'_{n+1}(x_{n+1-i}) + \\ + \zeta_{n+1i}(x) u_{n+1}(x_{n+1-i})] + \rho_{ni}^* \frac{1}{\rho_{ni}(x)} [q_{ni}^{(x)}(x) u_{y_n}(x_{n+1-i}) + \\ + v_{ni}(x) u'_n(x_{n+1-i}) + \zeta_{ni}(x) u_n(x_{n+1-i})] + f_{n+1i}, \quad (14)$$

$$u_{y_{n+1}}(x_{n+1-i}) = \frac{1}{\rho_{n+1i+1}(x_{n+1-i})} [\varepsilon_{n+1i+1}(x_{n+1-i}) u'_{n+1}(x_{n+1-i}) + \\ + l_{n+1i+1}(x_{n+1-i}) u_{n+1}(x_{n+1-i}) + q_{n+1i+1}(x_{n+1-i}) u_{y_{n+1}}(x_{n+2-i}) + \\ + \zeta_{n+1i+1}(x_{n+1-i}) u_{n+1}(x_{n+2-i}) + W_{n+1i+1}(x_{n+1-i}) + \\ + v_{n+1i+1}(x_{n+1-i}) u'_{n+1}(x_{n+2-i})], \quad (15)$$

$$x_{n+1-i} \leq x \leq x_{n-i}, \quad n = 0, 1, \dots, N-1, \quad i = 0, 1, \dots, n,$$

при дополнительных условиях

$$u_{n+1}(x_{n+1}) = \varphi_{n+1}(x_{n+1}), \quad u_y[x, g(x)] = \psi(x), \quad x_{n+1-i} \leq x \leq x_{n-i}, \quad (16)$$

$$n = 0, 1, \dots, N-1, \quad i = 0, 1, \dots, n.$$

Здесь

$$\alpha_{n+1i} = 1 - h_n \int_0^1 \left\{ (3-2t) a(x_n, l_n + th_n) - h_n(1-t) a(x, l_n + th_n) a(x, y_{n+1}) - h_n(1-t) \frac{\varepsilon_{n+1i}(x)}{\rho_{n+1i}(x)} [c(x, l_n + th_n) - b_y(x, l_n + th_n) + a(x, l_n + th_n) b(x, y_{n+1})] \right\} t^2 dt,$$

$$\beta_{ni} = 1 + h_n \int_0^1 a(x, l_n + th_n) [2t + 1 + h_n t a(x, l_n)] (1-t)^2 dt +$$

$$+ h_n \frac{\varepsilon_{ni}(x)}{\rho_{ni}(x)} \int_0^1 [c(x, l_n + th_n) - b_y(x, l_n + th_n) + a(x, l_n + th_n) b(x, l_n)] t(1-t)^2 dt$$

(при $i = 0$ второй интеграл отсутствует),

$$\zeta_{n+1i} = b(x, y_{n+1}) + h_n \int_0^1 \left\{ [(3-2t) [c(x, l_n + th_n) - b_y(x, l_n + th_n)] - (1-t) h_n a(x, l_n + th_n) c(x, y_{n+1}) - h_n(1-t) \frac{l_{n+1i}(x)}{\rho_{n+1i}(x)} [c(x, l_n + th_n) - b_y(x, l_n + th_n) + a(x, l_n + th_n) b(x, y_{n+1})] \right\} t^2 dt,$$

$$\eta_{ni} = -b(x, l_n) + h_n \int_0^1 \left\{ (2t + 1) [c(x, l_n + th_n) - b_y(x, l_n + th_n)] + th_n a(x, l_n + th_n) c(x, l_n) \right\} (1-t)^2 dt + h_n^2 \frac{l_{ni}(x)}{\rho_{ni}(x)} \int_0^1 [c(x, l_n + th_n) - b_y(x, l_n + th_n) + a(x, l_n + th_n) b(x, l_n)] t(1-t)^2 dt$$

(при $i = 0$ второй интеграл отсутствует),

$$\rho_{n+1i} = -h_n^2 \int_0^1 [c(x, l_n + th_n) - b_y(x, l_n + th_n) + a(x, l_n + th_n) b(x, y_{n+1})] t^2 (1-t) dt,$$

$$\rho_{ni}^* = h_n^2 \int_0^1 [c(x, l_n + th_n) - b_y(x, l_n + th_n) + a(x, l_n + th_n) b(x, l_n)] \times$$

$$\times t^2 (1-t) dt \quad (\rho_{n0}^* \equiv 0),$$

$$\begin{aligned}
 f_{n+1i} = & h_n \int_0^1 f(x, l_n + th_n) dt - h_n^2 \int_0^1 \left\{ \frac{W_{n+1i}(x)}{P_{n+1i}(x)} [c(x, l_n + th_n) - \right. \\
 & \left. - b_y(x, l_n + th_n) + a(x, l_n + th_n) b(x, y_{n+1})] + a(x, l_n + th_n) f(x, y_{n+1}) \right\} \times \\
 & \times (1-t)^2 dt + h_n^2 \int_0^1 \left\{ \frac{W_{ni}(x)}{P_{ni}(x)} [c(x, l_n + th_n) - b_y(x, l_n + th_n) + a(x, l_n + \right. \\
 & \left. + th_n) b(x, l_n)] + a(x, l_n + th_n) f(x, l_n) \right\} t(1-t)^2 dt - l'_n \psi(x),
 \end{aligned}$$

при $n=0$ третий интеграл нужно заменить следующим выражением:

$$\begin{aligned}
 h_n \int_0^1 \{ [c(x, l_n + th_n) - b_y(x, l_n + th_n)] th_n - l'_n (2t+1) a(x, l_n + th_n) - \\
 - a(x, l_n + th_n) [a(x, l_n) l'_n - b(x, l_n)] th_n \} \psi(x) + a(x, l_n + th_n) [f(x, l_n) + \\
 + c(x, l_n) \varphi(x)] (1-t)^2 dt.
 \end{aligned}$$

Заметим, что и здесь h следует выбирать так, чтобы выполнялись условия $p_{n+1i} > 0$, $\alpha_{n+1i} > 0$, $n=0, 1, \dots, N-1$, $i=0, 1, \dots, n$.

Для погрешности метода по аналогии с п. 1 получим следующую оценку:

$$\begin{aligned}
 |\gamma_{n+1}(x)| \leq & \frac{h^4 (y_{n+1} - h) [(C + B_y) M_4 + AM_4^1 + \sigma_i] \lambda \alpha}{720 [\lambda \Delta (y_{n+1} - h) + \xi \alpha]} \times \\
 & \times \left[e^{\frac{\lambda \Delta (y_{n+1} - h) + \xi \alpha}{a^2} (x - x_{n+1})} - 1 \right], \quad (17)
 \end{aligned}$$

где $x_{n+1-i} \leq x \leq x_{n-i}$, $n=0, 1, \dots, N-1$; $i=0, 1, \dots, n$,

$$\sigma_i = h\mu + h\mu \frac{(\mu + h\mu)(1 - h^i \mu^i)}{1 - h\mu}, \quad \mu = \max\{\theta_1, \theta_2, \theta_3\},$$

$$\theta_1 \leq (C + B_y) M_4 + AM_4^1, \quad \theta_2 \leq \frac{1}{6} (y_{n+1} - h) F (C + B_y + AB),$$

$$\theta_3 \leq \frac{\lambda^* (y_{n+1} - h)}{6\rho (g')^5} [(C + A_x) M^4 + BM_4^1] \theta_1,$$

$$F = \lambda^* \lambda (y_{n+1} - h) \frac{1}{\rho^2} \left[e^{\theta_4} hL + \frac{\alpha V}{\theta_5} (e^{\theta_4} - 1) \right],$$

$$\theta_4 = \frac{\lambda \Delta (y_{n+1} - h) + \xi \alpha}{a^2} a, \quad \theta_5 = \frac{\theta_4}{a},$$

$$\rho = \min_{1 < n < N-1} \min_{\substack{0 < i < n \\ -n < x < 0}} |p_{n+1i}(x)|, \quad \lambda^* = \max_{\substack{0 < i < n \\ 1 < n < N-1}} \max_{-a < x < 0} \left| \prod_{j=1}^i \frac{q_{n+1j}(x)}{p_{n+1j}(x)} \right|,$$

$$L = \max_{\substack{0 < i < n \\ 1 < n < N-1}} \max_{-a < x < 0} \frac{1}{h} |q_{n+i}(x) l_{n+i+1}(x) + p_{n+i+1}(x) \zeta_{n+i}(x)|,$$

$$V = \max_{\substack{0 < i < n \\ 1 < n < N-1}} \max_{-a < x < 0} \frac{1}{h^2} |q_{n+i}(x) e_{n+i+1}(x) + p_{n+i+1}(x) v_{n+i}(x)|,$$

$$B = \max_D |b(x, y)|, \quad A_x = \max_D |a_x(x, y)|.$$

Из оценки (17) следует, что решение задачи (14) — (16) при $h \rightarrow 0$ равномерно в области D сходится к решению задачи (1), (2) со скоростью порядка h^4 .

3. Рассмотрим теперь многослойные схемы метода интегральных соотношений. Пусть на прямых $y = y_1, y = y_2, \dots, y = y_k$ и $y = y_m$ ($m = k+1, k+2, \dots, n, x_m \leq x \leq x_{m-k}, n = k+1, k+2, \dots, N$) как-то найдено решение задачи (1), (2) $u_1 = v_1, u_2 = v_2, \dots, u_k = v_k$ и $u_m = v_m$ ($m = k+1, k+2, \dots, n, x_m \leq x \leq x_{m-k}, n = k+1, k+2, \dots, N$) с соответствующими погрешностями $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_k$ и δ_m ($m = k+1, k+2, \dots, n; x_m \leq x \leq x_{m-k}, n = k+1, k+2, \dots, N$). Будем искать решение исходной задачи на прямых $y = y_n$ ($x_{n-k} \leq x \leq 0, n = k+1, k+2, \dots, N$).

Интерполировав функции u и u_x по их значениям на прямых $y = y_{n+1}, y = y_n, \dots, y = y_{n+1-k}$ ($x_{n+1-k} \leq x \leq 0, n = k, k+1, \dots, N-1$) и выполнив интегрирование в равенствах (3), получим для нахождения приближенного решения задачи (1), (2) следующую систему уравнений:

$$\alpha_{n+1} u'_{n+1} - \beta_n u'_n - \sum_{v=1}^{k-1} \tau_{n-v}^{(v)} u'_{n-v} = \xi_{n+1} u_{n+1} + \eta_n u_n +$$

$$+ \sum_{v=1}^{k-1} \theta_{n-v}^{(v)} u_{n-v} + f_{n+1}, \quad n = k, k+1, \dots, N-1, \quad x_{n+1-k} \leq x \leq 0, \quad (18)$$

при дополнительных условиях

$$u_{n+1}(x_{n+1-k}) = v_{n+1}(x_{n+1-k}) \quad (n = k, k+1, \dots, N-1),$$

$$u_\mu(x) = v_\mu(x) \quad (\mu = 1, 2, \dots, n+1-k), \quad n = k, k+1, \dots, N-1.$$

Здесь

$$\alpha_{n+1} = 1 - \frac{h}{k!} \int_{k-1}^k a(x, y_{n+1-k} + th) t(t-1) \dots (t-k+1) dt,$$

$$\beta_n = 1 - \frac{h}{(k-1)!} \int_{k-1}^k a(x, y_{n+1-k} + th) t(t-1) \dots (t-k+2)(t-k) dt,$$

$$\tau_{n-v}^{(v)} = \frac{h(-1)^{v+1}}{(k-v-1)!(v+1)!} \int_{k-1}^k a(x, y_{n+1-k} + th) \frac{t(t-1) \dots (t-k)}{t-k+v+1} dt,$$

$$\xi_{n+1} = b(x, y_{n+1}) + \frac{h}{k!} \int_{k-1}^k [c(x, y_{n+1-k} + th) - b_y(x, y_{n+1-k} + th)] t(t-1) \dots (t-k+1) dt,$$

$$\eta_n = -b(x, y_n) + \frac{h}{(k-1)!} \int_{k-1}^k [c(x, y_{n+1-k} + th) - b_y(x, y_{n+1-k} + th)] \frac{t(t-1)\dots(t-k)}{t-k+1} dt,$$

$$\theta_{n-\nu}^{(\nu)} = \frac{h(-1)^{\nu+1}}{(k-\nu-1)!(\nu+1)!} \int_{k-1}^k [c(x, y_{n+1-k} + th) - b_y(x, y_{n+1-k} + th)] \frac{t(t-1)\dots(t-k)}{t-k+\nu+1} dt,$$

$$f_{n+1} = h \int_{k-1}^k f(x, y_{n+1-k} + th) dt.$$

Как и прежде, шаг h будем выбирать так, чтобы выполнялись условия $\alpha_{n+1} > 0$ ($n = k, k+1, \dots, N-1$).

Для погрешности метода по аналогии с [2, 4] нетрудно получить следующую оценку:

$$|Y_{n+1}(x)| \leq \delta e^{\omega(x-x_{n+1-k})} + \frac{1}{\omega} \left\{ h^{k+1} y_{n+1} - kh \right\} [(C+B_y) M_{k+1} + AM'_{k+1}] |\zeta| + \\ + \delta' \beta + \delta \eta + h \sum_{i=0}^{k-2} \sum_{j=2}^{k-i} [(C+B_y) \delta + A \delta'] |\omega_j^{(k)}| \bar{\lambda} \alpha^{-1} [e^{\omega(x-x_{n+1-k})} - 1], \quad (19)$$

$$x_{n+1-k} \leq x \leq 0, \quad n = k, k+1, \dots, N-1,$$

где

$$\omega = \frac{\xi \alpha + (y_{n+1} - kh) \bar{\Delta} \bar{\lambda}}{\alpha^2}, \quad \xi = \frac{1}{(k+1)!} \int_{k-1}^k t(t-1)\dots(t-k+1)(k-t) dt,$$

$$\bar{\lambda} = \max_{x_{n+1-k} \leq x < 0} \max_{k \leq n < N-1} \prod_{j=k}^n \frac{|\beta_{j+1}| + \sum_{i=1}^{k-1} |\tau_{j+1}^{(i)}|}{|\alpha_{j+1}|},$$

$$\Delta = \max_{x_{n+1-k} \leq x < 0} \max_{k \leq n < N-1} \frac{1}{h} \left[|\beta_{n+1} \xi_{n+1} + \eta_{n+1} \alpha_{n+1}| + \right. \\ \left. + \sum_{i=1}^{k-1} |\tau_{n+1}^{(i)} \xi_{n+1} + \theta_{n+1}^{(i)} \alpha_{n+1}| \right],$$

$$\omega_j^{(k)} = \frac{1}{(k-j)! j!} \int_{k-1}^k \left| \frac{t(t-1)(t-2)\dots(t-k)}{t-k+j} \right| dt,$$

$$\delta = \max_{1 \leq i < n} \max_{-a < x < 0} |\delta_i|, \quad \delta' = \max_{1 \leq i < n} \max_{-a < x < 0} |\delta'_i|.$$

Из приведенной оценки (19) видно, какие требования нужно предъявить к нахождению начальных значений, чтобы предлагаемая схема (18) имела порядок сходимости до $k+1$ включительно.

Результаты, полученные выше, легко обобщаются на квазилинейные уравнения и на системы таких уравнений, а также на случай некоторых других задач для уравнения (1), рассмотренных в работе [5].

Литература

1. Дородницын А. А. Тр. III Всесоюзн. матем. съезда 1956 г., 3, 447—453. Изд. АН СССР, 1958.
2. Бобков В. В. ДАН БССР, 8, № 1, 1964.
3. Лозинский С. М. Изв. вузов, сер. матем., № 5, 1958.
4. Бобков В. В., Самусенко А. В. Весні АН БССР, сер. фіз.-мат. навук, 2, 1967.
5. Бобков В. В., Крылов В. И. ДУ, 1, № 2, 1965.

*Белорусский государственный университет
им. В. И. Ленина,
Институт математики АН БССР*

Поступило в редакцию 22.III 1967

П. Г. ЮРОВ

ИНТЕГРАЛЫ ТИПА КОШИ И УРАВНЕНИЯ В КОНЕЧНЫХ РАЗНОСТЯХ

В теории краевых задач аналитических функций [1, 2] важное значение имеют асимптотические представления интегралов типа Коши. В [3] асимптотические разложения некоторых таких интегралов определяются посредством рекуррентных соотношений, т. е. даются в неявной форме. Однако интересы приложений требуют получения явных асимптотических формул хотя бы для наиболее распространенных интегралов, что и является целью настоящей статьи. Для решения этой задачи применяются результаты и методы исчисления конечных разностей [4].

§ 1. Обсудим некоторые вспомогательные предложения.

Лемма 1. Если $h(z) \neq 0$ — целая функция степени $\sigma < 2\pi$, т. е.

$$\max_{|z|=r} |h(z)| \leq A e^{2\pi\theta r}, \quad r \rightarrow \infty, \quad 0 < A = \text{const}, \quad 0 \leq \theta < 1, \quad (1)$$

то общее решение разностного уравнения

$$F(z+1) - F(z) = h(z) \quad (2)$$

в классе целых функций степени $\sigma < 2\pi$ имеет вид

$$F(z) = F_0(z) + C,$$

где C — произвольная постоянная, а $F_0(z)$ — какое-нибудь частное решение уравнения (1) из названного класса.

Доказательство. Лемма вытекает из общих предложений, доказанных в [4], гл. V. В самом деле, линейный оператор $L[F] \equiv F(z+1) - F(z)$ нормален ([4], стр. 369), поскольку его характеристическая функция $e^z - 1$ есть целая. Уравнение $e^z - 1 = 0$ имеет в круге $|z| \leq R$, $0 < R < 2\pi$, только один простой корень $z = 0$. Далее, неоднородное уравнение (2) в соответствии с теоремами III и IV из [4] (стр. 383, 385) имеет частное решение $F_0(z)$, принадлежащее тому же классу, что и $h(z)$. Ссылка на линейность уравнения (2) и теорему I из [4] (стр. 370) завершает доказательство.

З а м е ч а н и е. Аналогичные рассуждения можно провести и тогда, когда $h(z)$ — целая функция произвольной конечной степени.

Введем следующие обозначения: L — простая гладкая конечная разомкнутая дуга \overline{ab} , направленная от a к b ; L_1 — простой и гладкий (вплоть до $z = \infty$) контур, проведенный от $z = b$ к $z = \infty$ так, что контур $L_0 = L + L_1$ также простой и гладкий; наконец, D_0 — плоскость с разрезом по L_0 . В окрестности точки a для $z \in L$ выберем произвольную непрерывную ветвь $\ln(z-a)$ и аналитически продолжим ее в область D_0 . Контурное значение $(2\pi i)^{-1} \ln(t-a)$ выбранной ветви $(2\pi i)^{-1} \ln(z-a)$ совпадает с граничным

значением ее на левом берегу разреза; тогда на правом берегу ее граничное значение будет $(2\pi i)^{-1} \ln(t-a) + 1$; $t \in L_0$, $t \neq a$, $t \neq \infty$.

Пусть теперь дано разностное уравнение

$$F(w+1) - F(w) = \varphi(a + e^{2\pi i w}) \equiv \varphi_0(w), \quad (3)$$

в котором $\varphi_0(w)$ — целая функция степени $\sigma < 2\pi$. Из леммы 1 вытекает

Лемма 2. Если $F(w)$ — любое решение уравнения (3) в классе целых функций степени $\sigma < 2\pi$, то

1) при всех $t \in L_0$, $t \neq a$, $t \neq \infty$, справедливо равенство

$$F[(2\pi i)^{-1} \ln(t-a) + 1] - F[(2\pi i)^{-1} \ln(t-a)] = \varphi(t); \quad (4)$$

2) всякое другое решение $\tilde{F}(w)$ уравнения (3) из этого же класса отличается от $F(w)$ разве лишь на постоянное слагаемое.

Остановимся подробнее на геометрических соображениях. Наряду с $F(w)$ далее часто фигурирует функция $F[(2\pi i)^{-1} \ln(z-a)]$. При отображении $w(z) = (2\pi i)^{-1} \ln(z-a)$ левый берег разреза L_0 на плоскости z переходит на плоскости w в гладкий простой бесконечный контур l_1 , определяемый уравнением $w(t) = (2\pi i)^{-1} \ln(t-a)$; правый берег — в контур $l_2 = \{w(t) + 1\}$, а область D_0 — в полосу G_0 , заключенную между l_1 и l_2 . Значения целой функции $F(w)$ в области G_0 совпадают со значениями в D_0 функции $F[(2\pi i)^{-1} \ln(z-a)]$, аналитической в D_0 и непрерывно продолжимой на L_0 слева и справа, исключая его концы. При этом для ее граничных значений на L_0 выполняется равенство (4), если $F(w)$ — решение уравнения (3).

Лемма 3. Если при соблюдении предположений относительно L , L_0 и выбора ветви $\ln(z-a)$

- 1) $\varphi(\tau)$ абсолютно интегрируема на $L = \bar{ab}$,
- 2) в окрестности $z = a$

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int_{ab} \frac{\varphi(\tau) d\tau}{\tau - z} \right| \leq A_1 |z - a|^{-\mu}, \quad 0 \leq \mu < 1, \quad 0 < A_1 = \text{const}, \quad (5)$$

- 3) $\varphi_0(w) \equiv \varphi(a + e^{2\pi i w})$ и $F(w)$ — целые функции степени $\sigma < 2\pi$,
- 4) $F(w)$ удовлетворяет уравнению

$$F(w+1) - F(w) = -\varphi(a + e^{2\pi i w}),$$

то вблизи $z = a$ допустимо представление

$$\Phi(z) \equiv \frac{1}{2\pi i} \int_{ab} \frac{\varphi(\tau) d\tau}{\tau - z} = F \left[\frac{\ln(z-a)}{2\pi i} \right] + Q(z), \quad z \in D_0, \quad (6)$$

где $Q(z)$ голоморфна в окрестности $z = a$.

Доказательство. В силу леммы 2

$$\begin{aligned} F[(2\pi i)^{-1} \ln(t-a) + 1] - F[(2\pi i)^{-1} \ln(t-a)] = \\ = -\varphi(t), \quad t \in L_0, \quad t \neq a, \quad t \neq \infty. \end{aligned}$$

Далее, так как $\varphi_0(w) \equiv \varphi(a + e^{2\pi i w})$ — целая функция, то $\varphi(t)$ дифференцируема при всех t , $t \in L_0$, $t \neq a$, $t \neq \infty$. Поэтому по формулам Сохоцкого ([1], стр. 43) для $t \in L$ ($t \neq a$, $t \neq b$) $\Phi^+(t) - \Phi^-(t) = \varphi(t)$. Неравенство (1) приводит при $z \rightarrow a$, $|z-a| < 1$, $z \in D_0$, к оценке

$$\begin{aligned} |F[(2\pi i)^{-1} \ln(z-a)]| &\leq A \exp(\theta |\ln(z-a)|) \leq \\ &\leq A_0 \exp(\theta |\ln|z-a||) = A_0 |z-a|^{-\theta} \end{aligned}$$

($0 \leq \theta < 1, 0 < A_0 = \text{const}$). Вводя функцию $Q(z) = \Phi(z) - F[(2\pi i)^{-1} \ln(z-a)]$ ($z \in D_0$), учитывая неравенство (5) и только что полученное, найдем, что вблизи $z = a$ для $z \in L$

$$|Q(z)| \leq A_2 |z-a|^{-\mu_1}, \quad 0 \leq \mu_1 < 1, \quad \mu_1 = \max(\mu, \theta), \quad 0 < A_2 = \text{const}.$$

В то же время при $z = t \in L$, ($t \neq a$, $t \neq b$), $Q^+(t) - Q^-(t) = 0$. Следовательно, $Q(z)$ голоморфна в окрестности $z = a$, если приписать ей надлежащие значения на L ([2], стр. 44). Лемма доказана.

В равенстве (6) предполагается, что $z \in L$. Если же $z = t \in L$, $t \neq a$, то по формуле Сохоцкого вблизи $t = a$

$$\begin{aligned} 2\Phi(t) &\equiv \frac{1}{\pi i} \int_{ab}^{\circ} \frac{\varphi(\tau) d\tau}{\tau - t} = F \left[\frac{\ln(t-a)}{2\pi i} + 1 \right] + \\ &+ F \left[\frac{\ln(t-a)}{2\pi i} \right] + 2Q(t) \end{aligned} \quad (7)$$

(интеграл понимается в смысле главного значения по Коши).

Замечание. Если $F(z) \equiv z$ и, значит, $\varphi \equiv -1$, то (6) превращается в хорошо известное представление ([1], стр. 73, (8.1)).

§ 2. Применим изложенные результаты к установлению асимптотических формул для некоторых интегралов, широко используемых в теории краевых задач.

Теорема 1. При сохранении предположений § 1 относительно L, L_0 и $\ln(z-a)$ вблизи $z = a$ справедливо представление

$$\begin{aligned} J_{n-1}(z) &\equiv \frac{1}{2\pi i} \int_{ab}^{\circ} \frac{\ln^{n-1}(\tau-a) d\tau}{\tau - z} = \\ &= -\frac{(2\pi i)^{n-1}}{n} \tilde{B}_n \left[\frac{\ln(z-a)}{2\pi i} \right] + Q_n(z), \end{aligned}$$

где n — натуральное число, $\tilde{B}_n(z) = B_n(z) - B_n(0)$, $B_n(z)$ — многочлен Бернулли, $B_n(0) = B_n$ — число Бернулли и $Q_n(z)$ — функция, аналитическая в окрестности $z = a$.

Доказательство. Здесь $\varphi(\tau) = \ln^{n-1}(\tau-a)$, так что $\varphi(a + e^{2\pi i w}) = (2\pi i w)^{n-1}$. Остается решить разностное уравнение

$$F_n(w+1) - F_n(w) = -(2\pi i)^{n-1} w^{n-1},$$

или, если положить $\tilde{F}_n(w) = -n(2\pi i)^{1-n} F_n(w)$,

$$\tilde{F}_n(w+1) - \tilde{F}_n(w) = n w^{n-1}.$$

Но это уравнение удовлетворяется многочленом Бернулли $B_n(w)$ ([4], стр. 268). Напомним, что многочлены Бернулли определяются равенством

$$B_n(w) = \sum_{k=0}^n C_n^k B_k w^{n-k},$$

в котором C_n^k — биномиальные коэффициенты, а B_k — числа Бернулли:

$$B_0 = 1, B_1 = -0,5, B_2 = 1/6, B_3 = 0, B_4 = -1/30, \dots$$

Ради удобства вводятся ([4], стр. 286) многочлены $\tilde{B}_n(\omega) = B_n(\omega) - B_n$, для которых $\tilde{B}_n(0) = 0$.

При достаточно малых $|z - a| > 0$ $|\ln^n(z - a)| \leq A_1 |z - a|^{-\varepsilon}$ ($0 < \varepsilon < 1$, $0 < A_1 = \text{const}$). Поэтому на основании предложения II из [2] (стр. 91) для $J_{n-1}(z)$ справедлива оценка (5) вблизи $z = a$. Ссылкой на лемму 2 завершается доказательство теоремы.

Так как по основному свойству многочленов Бернулли

$$B_n(\omega + 1) + B_n(\omega) = [B_n(\omega + 1) - B_n(\omega)] + 2B_n(\omega) = n\omega^{n-1} + 2B_n(\omega),$$

то из теоремы 1 и равенства (7) вытекает

Следствие. В предположениях теоремы 1 для $t \in \bar{ab}$, $t \neq a$, вблизи $t = a$

$$\frac{1}{\pi i} \int_{\bar{ab}} \frac{\ln^{n-1}(\tau - a) d\tau}{\tau - t} = -\ln^{n-1}(t - a) - \frac{2(2\pi i)^{n-1}}{n} \tilde{B}_n \left[\frac{\ln(t - a)}{2\pi i} \right] + 2Q_n(t).$$

§ 3. При исследовании интегралов типа Коши со степенно-логарифмической плотностью необходима

Лемма 4. Уравнению

$$F_n(\omega + \lambda) - F_n(\omega) = (\omega/\lambda)^n q^{\omega/\lambda} \quad (8)$$

удовлетворяет целая функция

$$F_n(\omega) = -q^{\omega/\lambda} \sum_{k=0}^n C_n^k H_k(q) (\omega/\lambda)^{n-k}; \quad (9)$$

здесь $q \neq 0$, $q \neq 1$ и $\lambda \neq 0$ — любые комплексные числа и n — натуральное число, $H_k(q)$ — множитель Эйлера;

$$H_0(q) = (1 - q)^{-1}, \quad H_k(q) = (1 - q)^{-k-1} \sum_{m=1}^k A_{k,m} q^{k+1-m}, \quad k = 1, 2, \dots,$$

и $A_{k,m}$ — числа Эйлера ([5], стр. 254).

Доказательство. Функцию $F_n(\omega)$, выражаемую формулой (9), удобно записывать с помощью символического бинома

$$F_n(\omega) = -q^{\omega/\lambda} (H + \omega/\lambda)^n,$$

в котором $H^k \equiv H_k \equiv H_k(q)$, $k = 0, 1, 2, \dots, n$. Подстановка $F_n(\omega)$ в уравнение (8) показывает, что $F_n(\omega)$ является его решением, если выполняется равенство

$$q(H + 1 + \omega/\lambda)^n - (H + \omega/\lambda)^n = -(\omega/\lambda)^n,$$

или, полагая по определению $(H + 1)^0 = (1 - q)^{-1}$,

$$\sum_{k=0}^{n-1} C_n^k [(H + 1)^{n-k} - q^{-1} H_{n-k}] (\omega/\lambda)^k \equiv 0.$$

Нетрудно проверить, что $(1 - q) H_k(q) = \tilde{H}_k(x)$, где $x = 1/q$, причем $\tilde{H}_0(x) \equiv 1$, $[\tilde{H}(x) + 1]^0 \equiv 1$. Поскольку в [5] (стр. 50) установлено, что при $n > 0$ $[\tilde{H}(x) + 1]^n = x \tilde{H}_n(x)$, то лемма доказана.

Напомним определение чисел Эйлера:

$$A_{0,0} = 1; A_{n,k} = kA_{n-1,k} + (n-k+1)A_{n-1,k-1};$$

$$A_{n,0} = 0 \text{ при } n > 0, A_{n,k} = 0 \text{ при } k > n.$$

Таблицу чисел Эйлера см. в [5], стр. 254 (термин «множитель Эйлера» вводится здесь впервые). Выпишем несколько первых множителей Эйлера:

$$H_0(q) = (1-q)^{-1}; H_1(q) = q(1-q)^{-2}; H_2(q) = (1-q)^{-3}(q^2+q);$$

$$H_3(q) = (1-q)^{-4}(q^3+4q^2+q);$$

$$H_4(q) = (1-q)^{-5}(q^4+11q^3+11q^2+q).$$

Замечание. Функцию $F_n(\omega)$, определяемую формулой (9), можно представить также в ином виде:

$$F_n(\omega) = q^{\omega/\lambda} (q-1)^{-1} \sum_{k=0}^n C_n^k P_k \left(\frac{q}{q-1} \right) (\omega/\lambda)^{n-k},$$

где $P_k(x)$ — многочлен Стирлинга степени k :

$$P_0(x) \equiv 1, P_k(x) = \sum_{m=1}^k (-1)^m m! S(k, m) x^m, k = 1, 2, \dots,$$

$S(k, m)$ — числа Стирлинга второго рода ([5], стр. 62).

Теорема 2. Пусть выполнены условия § 1, относящиеся к L, L_0 и $\ln(z-a)$, и пусть $\beta = \beta_0 + i\beta_1 \neq 0, 0 \leq \beta_0 < 1, n$ — натуральное число. Тогда вблизи $z = a$ для $z \in D_0$ допустимо асимптотическое представление

$$\Phi_n(z) \equiv \frac{1}{2\pi i} \int_{ab} \frac{\ln^n(\tau-a)}{(\tau-a)^\beta (\tau-z)} d\tau =$$

$$= (z-a)^{-\beta} \sum_{k=0}^n C_n^k H_k(e^{-2\beta\pi i}) (2\pi i)^k \ln^{n-k}(z-a) + Q_n(z),$$

в котором C_n^k и $H_k(q)$ — те же, что и в лемме (4), а $Q_n(z)$ — функция, аналитическая в окрестности $z = a$.

Доказательство. Предполагается, что $(z-a)^{-\beta} = e^{-\beta \ln(z-a)}$ (весь $\ln(z-a)$ уже выбрана) и $(\tau-a)^{-\beta} \ln^n(\tau-a)$ является граничным значением ветви $(z-a)^{-\beta} \ln^n(z-a)$ на левом берегу $L_0(t \neq a, t \neq \infty)$. Уравнение (3) в данном случае имеет вид

$$F_n(\omega+1) - F_n(\omega) = -(2\pi i)^n \omega^n \exp(-2\beta\pi i \omega),$$

являясь частным случаем уравнения (8) (при $\lambda = 1, q = \exp(-2\beta\pi i)$) и, следовательно,

$$F_n \left[\frac{\ln(z-a)}{2\pi i} \right] = (z-a)^{-\beta} \sum_{k=0}^n C_n^k H_k(e^{-2\beta\pi i}) (2\pi i)^k \ln^{n-k}(z-a).$$

Отсюда вытекает, что вблизи $z = a$ ($z \in D_0$)

$$|F_n[(2\pi i)^{-1} \ln(z-a)]| \leq M |z-a|^{-\nu}, \beta_0 < \nu < 1, M = \text{const.}$$

Аналогичному неравенству удовлетворяет и $\Phi_n(z)$, поскольку $0 \leq \beta_0 < 1$ ([2], стр. 91). Рассматривая разность $Q_n(z) = \Phi_n(z) - F_n[(2\pi i)^{-1} \ln(z-a)]$ и замечая, что $Q_n^+(t) = Q_n^-(t)$, $t \in L$, $t \neq a$, $t \neq b$, убеждаемся в справедливости теоремы.

Заметим, что ранее асимптотическое представление для $\Phi_n(z)$ было известно лишь в неявной форме (ср. [1], стр. 83, формула (8.34)).

§ 4. Рассмотрим вопрос о получении не асимптотических, а точных представлений интеграла типа Коши в простейшем случае.

Пусть $L = \bar{ab}$ означает то же, что и в § 1, и пусть

1. Функция $v(z) = (2\pi i)^{-1} \ln[(z-a)(z-b)^{-1}]$ голоморфна в плоскости с разрезом по L и равна нулю при $z = \infty$.

2. $u = u^{-1}(v)$ — функция, обратная для $v = v(u)$.

3. Функция $\varphi(\tau)$ абсолютно интегрируема на L .

4. Вблизи $z = c$, где $c = a$ или $c = b$, выполняется оценка (5).

Лемма 5. Если выполнены предположения 1—4 и $\varphi_0(v) \equiv \varphi[u^{-1}(v)]$ — целая функция степени $\sigma < 2\pi$, а $F(v)$ — любое решение разностного уравнения

$$F(v+1) - F(v) = -\varphi[u^{-1}(v)] \quad (10)$$

в классе целых функций степени $\sigma < 2\pi$, то при всех z , $z \notin L$,

$$\Phi(z) \equiv \frac{1}{2\pi i} \int_{\bar{ab}} \frac{\varphi(\tau) d\tau}{\tau - z} = F\left[\frac{1}{2\pi i} \ln \frac{z-a}{z-b}\right] - F(0).$$

Доказательство. Как обычно, в качестве контурного значения $v(z)$ на \bar{ab} (исключая концы) принимается ее граничное значение на левом берегу \bar{ab} . По условию $\varphi[u^{-1}(v)] \equiv \varphi_0(v)$ — целая функция, поэтому возможно применение формул Сохоцкого к функции $\Phi(z)$.

Пусть $F_1(v)$ — какое-нибудь решение уравнения (10) из указанного класса. Рассуждая так же, как и при доказательстве леммы 3, установим, что $Q(z) = \Phi(z) - F_1[(2\pi i)^{-1} \ln[(z-a)(z-b)^{-1}]$ — целая функция. Так как $\Phi(\infty) = 0$, то $Q(\infty) = -F_1(0)$. Следовательно, $Q(z) \equiv -F_1(0)$. Если $F_2(v)$ — любое другое решение уравнения (10) в данном классе, то, как легко видеть, $F_2(v) - F_2(0) = F_1(v) - F_1(0)$. Лемма доказана.

Замечание. Аналогично (7) для $t \in \bar{ab}$, $t \neq a$, $t \neq b$,

$$2\Phi(t) \equiv \frac{1}{\pi i} \int_{\bar{ab}} \frac{\varphi(\tau) d\tau}{\tau - t} = F\left(\frac{1}{2\pi i} \ln \frac{t-a}{t-b} + 1\right) + \\ + F\left(\frac{1}{2\pi i} \ln \frac{t-a}{t-b}\right) - 2F(0).$$

Простым следствием леммы 5 является

Теорема 3. При выполнении условий леммы относительно дуги \bar{ab} и $v(z)$ справедливы равенства (n — натуральное)

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\bar{ab}} \frac{\ln^{n-1}[(\tau-a)(\tau-b)^{-1}] d\tau}{\tau - z} = \\ = -\frac{(2\pi i)^{n-1}}{n} \tilde{B}_n\left(\frac{1}{2\pi i} \ln \frac{z-a}{z-b}\right), \quad z \in \bar{ab},$$

$$\frac{1}{\pi i} \int_{\bar{ab}} \frac{\ln^{n-1} [(\tau-a)(\tau-b)^{-1}]}{\tau-t} d\tau = -\ln^{n-1} \frac{t-a}{t-b} - \frac{2(2\pi i)^{n-1}}{n} \bar{B}_n \left(\frac{1}{2\pi i} \ln \frac{t-a}{t-b} \right),$$

$$(t \in \bar{ab}, t \neq a, t \neq b),$$

где $\bar{B}_n(x)$ — многочлен, определенный в § 2.

Область приложения подобного рода результатов — решение простейших сингулярных уравнений, возникающих, например, при обращении интегралов типа Коши. Так, используя формулы (87.16), (87.17) из [2], легко найти единственное ограниченное на обоих концах \bar{ab} решение $\varphi_n(t)$ сингулярного уравнения

$$\frac{1}{\pi i} \int_{\bar{ab}} \frac{\varphi_n(\tau) d\tau}{\tau-t} = \sqrt{(t-a)(t-b)} \ln^n \frac{t-a}{t-b} + C_n, \quad t \in \bar{ab},$$

именно

$$\varphi_n(t) = -\sqrt{(t-a)(t-b)} \left[\ln^n \frac{t-a}{t-b} + \frac{2(2\pi i)^n}{n+1} \bar{B}_{n+1} \left(\frac{1}{2\pi i} \ln \frac{t-a}{t-b} \right) \right]$$

при условии, что

$$C_n = \frac{1}{\pi i} \int_{\bar{ab}} \ln^n \frac{\tau-a}{\tau-b} d\tau.$$

§ 5. Переходя к аналитическим функциям, отличным от целых, ограничимся исследованием частного случая.

Назовем обобщенным многочленом Бернулли степени α ($\alpha > 0$) функцию

$$B_\alpha(z) = \sum_{k=0}^p C_\alpha^k B_k z^{\alpha-k},$$

где C_α^k — биномиальные коэффициенты, $p = [\alpha]$, B_k — числа Бернулли. Элементарное рассмотрение (с использованием уравнений, определяющих числа Бернулли) показывает, что при $|z| > 1$

$$B_\alpha(z+1) - B_\alpha(z) = \alpha z^{\alpha-1} + (1-\{\alpha\}) C_\alpha^{p+1} B_{p+1} z^{\alpha-p-2} +$$

$$+ \sum_{k=p+3}^{\infty} \left(\sum_{n=0}^p C_\alpha^n C_{\alpha-n}^{k-n} B_n \right) z^{\alpha-k}.$$

Пусть теперь дан интеграл типа Коши

$$\Phi_\alpha(z) \equiv \frac{1}{2\pi i} \int_a^b \frac{\ln^\alpha(x-a)}{x-z} dx, \quad z \in [a, b],$$

где $0 < b-a < \exp(-2\pi)$. Имеет место

Теорема 4. При $\alpha > -1$ вблизи $z = a$ допустимо представление

$$\Phi_\alpha(z) = -(2\pi i)^\alpha (\alpha+1)^{-1} B_{\alpha+1} [(2\pi i)^{-1} \ln(z-a)] + o(1), \quad z \in [a, b],$$

где ветвь $\ln(z-a)$ непрерывна в области $(|z-a| < 1) \cap (0 < \arg(z-a) < 2\pi)$ и $\ln(x-a)^{-1} > 0$, $\ln^{\alpha}(x-a)^{-1} > 0$ на левом берегу разреза $a < x < a+1$, $a(2\pi i)^{\alpha} = \exp\left[\alpha \ln 2\pi + \frac{1}{2} \alpha \pi i\right]$.

Теорема доказана в работе [6]. Здесь изменена лишь форма результата, применяемого для решения краевой задачи Римана с бесконечным индексом логарифмического типа.

Выражаю глубокую благодарность академику АН БССР Ф. Д. Гахову, руководившему настоящей работой.

Литература

1. Гахов Ф. Д. Краевые задачи. Физматгиз, 1963.
2. Мусхелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения. Физматгиз, 1962.
3. Мельник И. М. Тр. Тбилисск. матем. ин-та, **24**, 149—162, 1957.
4. Гельфонд А. О. Исчисление конечных разностей. Физматгиз, 1959.
5. Риордан Дж. Введение в комбинаторный анализ. ИЛ, 1963.
6. Юров П. Г. Изв. вузов, Математика, № 2 (51), 1966.

Белорусский государственный университет
им. В. И. Ленина

Поступило в редакцию 11.III 1967

В. А. ВЕДЕРНИКОВ, А. П. КОХНО

О ВЛИЯНИИ ЦЕПЕЙ ПОДГРУПП НА СВОЙСТВА КОНЕЧНЫХ ГРУПП

На свойства конечной группы G большое влияние оказывает насыщенность цепей максимальных подгрупп группы G подгруппами, достижимыми в G . Представление о такой насыщенности дает отношение длины цепи к числу подгрупп из нее, достижимых в группе G . Используя эти отношения, Дескинс в [1] ввел понятие вариантности $v(G)$ конечной группы G и установил, что если для группы G выполняется одно из следующих условий: 1) $v(G) < 4$; 2) $v(G) < 5$ и порядок G не делится на 3, то группа G разрешима.

Это понятие также использовалось в работах [2, 3], причем в [3] исследовались неразрешимые группы с $v(G) < 6$.

В отличие от [1] в работе [4] рассматриваются лишь цепи максимальных $2d$ -подгрупп и вводится понятие четной вариантности; при этом установлено, что если четная вариантность меньше четырех, то группа G разрешима. Как сообщил нам В. Д. Черток, им рассмотрены неразрешимые группы с четной вариантностью, равной четырем, а также независимо от нас доказана нижеследующая лемма 1.

В настоящей работе устанавливается связь между свойствами цепей максимальных pd -подгрупп конечной группы G и свойствами самой группы, при этом в отличие от предыдущих авторов вместо понятия достижимой подгруппы используется понятие квазидостижимой подгруппы, что дает возможность получить более общие результаты.

В работе приняты следующие обозначения и определения.

(G) — порядок группы G ; $[G : A]$ — индекс подгруппы A в группе G ; $\lambda(G)$ — сумма показателей канонического разложения (G) ; G_p — p -силовская подгруппа группы G ; $N(A)$ — нормализатор подгруппы A в группе G ; $C(A)$ — централизатор подгруппы A в группе G ; $\Phi(G)$ — подгруппа Фраттини группы G ; $\langle g \rangle$ — подгруппа, порожденная элементом g из группы G ; E — единичная подгруппа группы G .

Конечную группу, порядок которой делится на простое число p , назовем pd -группой [6].

Подгруппу H группы G назовем квазидостижимой в G , если для каждой p -силовской подгруппы G_p группы G , где p пробегает все простые делители порядка H , пересечение $H \cap G_p$ является p -силовской подгруппой H [7, 15].

Максимальной p -цепью группы G назовем такую цепь

$$(C) \quad G = G_0 \supset G_1 \supset \dots \supset G_n,$$

в которой G_i является максимальной подгруппой группы G_{i-1} ($i = 1, \dots, n$) и каждая неединичная подгруппа цепи является pd -группой. Число n назовем длиной максимальной p -цепи.

Обозначим через $S_p(C)$ число истинных подгрупп группы G из цепи (C) , квазидостижимых в G . Назовем $v_p(C) = n/S_p(C)$, если $S_p(C) > 0$ и $v_p(C) = n$, если $S_p(C) = 0$, p -квазивариантностью цепи (C) ;

p -квазивариантностью $v_p(G)$ группы G назовем $\max v_p(C)$ для всех максимальных p -цепей (C) группы G (ср. с [1] и [4]).

Все основные результаты настоящей работы связаны с наименьшим простым делителем q порядка группы G , и формулировки теорем содержат этот делитель q , хотя для неразрешимых групп по теореме Томпсона — Фейта [8] q можно считать равным двум.

В дальнейшем часто используются следующие утверждения из работы [7].

Теорема А. Если подгруппа R группы G содержит квазидостижимую в группе G подгруппу H , то H будет также квазидостижимой подгруппой в R .

Теорема В. Разрешимая квазидостижимая подгруппа группы G достижима в G .

Следует заметить, что остается открытым вопрос, является ли всякая неразрешимая квазидостижимая подгруппа группы G достижимой в G .

Лемма 1. Если G — разрешимая группа четного порядка, то в группе G существует максимальная 2-цепь с простыми индексами.

Доказательство. Допустим, что группа G — контрпример минимального порядка. Пусть 2^α — наивысшая степень, делящая (G) . Рассмотрим следующие два случая.

1) $\alpha > 1$. Так как группа G разрешима, то в G существует максимальная подгруппа H простого индекса. Тогда (H) делится на 2, и так как H — разрешимая группа и $(H) < (G)$, то лемма для H верна, а значит, верна и для группы G . Противоречие.

2) $\alpha = 1$. Тогда в группе G существует инвариантное 2-дополнение K .

Если K — минимальная инвариантная подгруппа в группе G , то $(K) = q^\beta$ и $(G) = 2q^\beta$. В этом случае группа G является группой типа A [5]; следовательно, из $q^\beta \equiv 1 \pmod{2}$, где β — наименьшее число, удовлетворяющее сравнению, заключаем, что $\beta = 1$, т. е. $(G) = 2q$. Значит, для группы G лемма верна. Противоречие.

Пусть R — максимальная инвариантная подгруппа группы G , заключенная в K . Тогда по предыдущему $(G/R) = 2q$. Следовательно, группа G содержит подгруппу H , такую, что $[G:H] = q$. Так как \bar{H} является $2d$ -группой и $(H) < (G)$, то по индукции лемма для \bar{H} верна, а значит, верна и для группы G . Противоречие.

Лемма доказана.

Лемма 2. Если H — неквазидостижимая максимальная pd -подгруппа группы G , то $v_p(H) < v_p(G)$.

Доказательство. Пусть (C') — некоторая максимальная p -цепь группы H длины n . Присоединив к ней группу G , получим соответствующую p -цепь (C) для группы G . Тогда по теореме А каждая подгруппа из цепи (C) , квазидостижимая в группе G , квазидостижима в группе H , т. е. $S_p(C') \geq S_p(C)$. При $S_p(C) > 0$ имеем $v_p(C') = n/S_p(C') \leq n/S_p(C) < n + 1/S_p(C) = v_p(C)$, а при $S_p(C) = 0$ имеем $v_p(C') \leq n < n + 1 = v_p(C)$. Отсюда $v_p(H) < v_p(G)$. Лемма доказана.

Лемма 3. Если H — разрешимая неквазидостижимая максимальная $2d$ -подгруппа группы G и H не содержит истинных $2d$ -подгрупп, квазидостижимых в G , то $\lambda(H) \leq v_2(G) - 1$.

Доказательство. По лемме 1 для группы H существует максимальная 2-цепь (C') с простыми индексами длины $\lambda(H)$. Присоединяя к цепи (C') группу G , получим максимальную 2-цепь (C) группы G . Тогда $v_2(G) \geq v_2(C) \geq \lambda(H) + 1$. Отсюда $\lambda(H) \leq v_2(G) - 1$. Лемма доказана.

Лемма 4. Если H — инвариантная подгруппа группы G и G/H является pd -группой, то $v_p(G/H) \leq v_p(G)$.

Доказательство. Пусть $v_p(G/H) = r$. Тогда фактор-группа G/H содержит максимальную p -цепь

$$(C') \quad G/H = G_0/H \supset G_1/H \supset \dots \supset G_n/H,$$

такую, что $v_p(C') = r$. А значит, группа G содержит максимальную p -цепь

$$(C) \quad G = G_0 \supset G_1 \supset \dots \supset G_n,$$

причем по лемме 9 из [7] $v_p(C) = r$. Отсюда $v_p(G) \geq v_p(C) = v_p(G/H)$. Лемма доказана.

Лемма 5. Если H — инвариантная pd -подгруппа группы G , то $v_t(G/H) \leq v_p(G)$ для любого простого делителя t порядка G/H .

Доказательство. Справедливость леммы непосредственно вытекает из определения p -квазиинвариантности группы G и леммы 9 из [7].

Теорема 1. Пусть q — наименьшее простое число, делящее порядок группы G . Если $v_q(G) < 4$, то группа G разрешима.

Доказательство. Пусть группа G — контрпример минимального порядка.

Предположим, что G содержит максимальную разрешимую инвариантную подгруппу $R \neq E$. Если G/R является qd -группой, то по лемме 4 и по индукции фактор-группа G/R разрешима, а значит, разрешима и группа G . Если (G/R) не делится на q , то по лемме 5 имеем $v_r(G/R) \leq v_q(G) < 4$, где r — наименьший простой делитель (G/R) . Тогда по индукции фактор-группа G/R разрешима, а следовательно, разрешима и группа G . Получили противоречие. Значит, $R = E$.

Так как G_q неинвариантна в группе G , то существует в G максимальная подгруппа H , содержащая $N(G_q)$.

Подгруппа H неквазидостижима в группе G , ибо в противном случае H содержала бы все q -силовские подгруппы группы G и, значит, $[H : N(G_q)] = [G : N(G_q)]$, что невозможно.

Тогда по лемме 2 и по индукции H — разрешимая группа.

Допустим, что H содержит нетривиальную подгруппу квазидостижимую и, следовательно, по теореме В достижимую в группе G . Максимальная подгруппа из H , достижимая в группе G , является инвариантной в G по лемме 1 из [1]. Противоречие.

Следовательно, H не содержит нетривиальных подгрупп, квазидостижимых в группе G .

Если $\lambda(G_q) \geq 2$, то, учитывая, что $v_q(G) < 4$, заключаем: $H = G_q$ и $\lambda(G_q) = 2$. Тогда по теореме 1 из [1] группа G разрешима.

Пусть $(G_q) = q$. Учитывая порядок группы автоморфизмов подгруппы G_q , по теореме 14.3.1 из [18] получаем, что в H существует инвариантное q -дополнение K . Так как $v_q(G) < 4$, то H_q максимальна в H и, значит, K — минимальная инвариантная подгруппа группы H , т. е. $(H) = qs^\delta$, где s — простое число, $\delta > 0$ и $K = H_s$ — элементарная абелева группа. Теперь по теореме 1 из [9] следует разрешимость группы G . Противоречие. Теорема доказана.

Следствие. Пусть q — наименьший простой делитель порядка группы G . Если все третьи максимальные qd -подгруппы инвариантны в G , то группа G разрешима.

Доказательство. Допустим, что G — контрпример минимального порядка. Если множество всех третьих максимальных qd -подгрупп пусто, то $v_q(G) < 4$ и, значит, по теореме 1 группа G разрешима. Следовательно, в группе G существует третья максимальная qd -подгруппа T , которая ин-

вариантна в G . Рассмотрим фактор-группу G/T . Так как все третьи максимальные подгруппы группы G/T инвариантны в G/T и $(G/T) < (G)$, то по индукции группа G/T разрешима. Пусть K — вторая максимальная qd -подгруппа группы G , содержащая T . Очевидно, все максимальные qd -подгруппы группы K инвариантны в G . Допустим, что K_q неинвариантна в K . Тогда в K существовала бы максимальная qd -подгруппа U , такая, что $U \supseteq N(K_q) \cap K$, причем по теореме 4.2.4 из [18] U самонормализуема в K . Противоречие. Следовательно, K_q инвариантна в группе K и по следствию 10.3.4 из [18] фактор-группа K/K_q нильпотентна. Отсюда следует разрешимость T . Так как фактор-группа G/T разрешима, то разрешима и группа G . Получили противоречие. Следствие доказано.

Теорема 2. Пусть q — наименьшее простое число, делящее порядок группы G . Для неразрешимой группы G тогда и только тогда $v_q(G) < 5$, когда G изоморфна одной из следующих групп: $SL(2, p)$ и $PSL(2, p)$, где или $p = 5, 13$, или $\lambda(p \pm 1) = 3$, и $p \not\equiv \pm 1 \pmod{10}$; $PSL(2, 3^n)$, где $n > 2$ — простое число и $\lambda(3^n \pm 1) \leq 3$.

Доказательство. Пусть $v_q(G) < 5$ и группа G — контрпример минимального порядка.

Предположим, что группа G содержит максимальную разрешимую инвариантную подгруппу $R \neq E$. По теореме Томпсона — Фейта из [8] наименьший простой делитель (G/R) равен 2. Тогда по лемме 4 $v_2(G/R) \leq v_2(G) < 5$. Так как $(G/R) < (G)$, то по индукции для группы G/R теорема верна, т. е. G/R изоморфна одной из простых групп, указанных в формулировке теоремы. Из строения этих групп [13] следует, что все истинные подгруппы группы G/R разрешимы и в группе G/R имеется третья максимальная $2d$ -подгруппа F/R , причем $(F/R) = 2$. По теореме В группа G/R не содержит истинной $2d$ -подгруппы, квазидостижимой в G/R . Так как $v_2(G) < 5$, то каждая максимальная $2d$ -подгруппа из группы F квазидостижима, а значит, по теореме В и достижима в группе G . Поскольку подгруппа F недостижима в группе G , то по теореме 8.6.2 из [18] F содержит лишь одну максимальную $2d$ -подгруппу. Допустим, что группа F непримарная. Тогда 2-силовская подгруппа F_2 инвариантна в F , и фактор-группа F/F_2 — примарная циклическая группа. Значит, $(F) = 2^a t^b$, причем t -силовская подгруппа F_t максимальна в F и является циклической группой, а F_2 является минимальной инвариантной подгруппой группы F . Так как $(F/R) = 2$, то $a = 1$ и $(R) = t^b$. Учитывая теперь, что подгруппа F_2 достижима в группе G и $F = F_2 R$, по теореме 8.6.2 из [18] подгруппа F достижима в группе G . Получили противоречие.

Следовательно, F — циклическая 2-группа.

Пусть $G/R \cong PSL(2, 5)$. Так как в качестве подгруппы F/R можно взять любую инволюцию группы G/R , то каждое расширение группы R при помощи группы порядка 2 является циклической группой. Пусть \bar{F} — произвольная максимальная подгруппа группы G_2 . Если $\bar{F} \neq F$, то $\bar{F}F = G_2$, причем $[F : \bar{F} \cap F] = 2$, т. е. $\bar{F} \cap F = R$. Так как \bar{F} является расширением R при помощи группы порядка 2, то \bar{F} — циклическая группа. Следовательно, все максимальные подгруппы группы G_2 являются циклическими группами, содержащими R . Тогда по теореме 12.5.2 из [18] G_2 — либо циклическая группа, либо обобщенная группа кватернионов. Если G_2 — циклическая группа, то по теореме 14.3.1 из [18] в группе G , а значит, и в группе G/R существует инвариантное 2-дополнение, что невозможно. Пусть G_2 — обобщенная группа кватернионов. Так как все максимальные подгруппы из G_2 циклические, то G_2 является обычной группой кватернионов, т. е. $(G_2) = 8$, а значит, $(R) = 2$. Учитывая, что $v_2(G) < 5$, по теоре-

ме из [14] $G \cong SL(2, 5)$. Противоречие.

Пусть теперь группа $G/R \cong PSL(2, p)$, где $PSL(2, p)$ — одна из групп заключения теоремы, исключая $PSL(2, 5)$. Из строения этих групп следует, что в группе G/R имеется третья максимальная подгруппа K/R простого нечетного порядка. Так как R — циклическая 2-группа, то K — нильпотентная группа, а следовательно, $(R) = 2$. Теперь, применяя теорему из [14] и учитывая, что $v_2(G) < 5$, имеем $G \cong SL(2, p)$ из заключения теоремы. Получили противоречие. Ввиду того что $v_2(G) < 5$, группа G/R не может быть изоморфной $PSL(2, 3^n)$ из заключения теоремы. Следовательно, $R = E$.

Пусть G — непростая группа. Тогда G содержит неабелеву минимальную инвариантную подгруппу M . По теореме из [8] (M) — четное число. Так как $\lambda(M_2) \geq 2$, то по теореме 14.3.1 из [18] $\lambda(N(M_2) \cap M) \geq 3$. По лемме 2.2.1 из [6] имеем $G = MN(M_2)$. Отсюда M не содержит $N(M_2)$ и, значит, $\lambda(N(M_2)) > 3$.

Пусть H — максимальная подгруппа группы G , содержащая $N(M_2)$. Тогда $\lambda(H) > 3$.

Допустим, что H неквазидостижима в группе G . Тогда по лемме 2 получим $v_2(H) < v_2(G) < 5$. Если $4 \leq v_2(H) < 5$ и H — неразрешимая группа, то по индукции подгруппа H изоморфна одной из групп заключения теоремы. Но это противоречит тому, что $v_2(G) < 5$. Применяя теорему 1, заключаем: H — разрешимая группа.

Предположим, что H содержит нетривиальную подгруппу квазидостижимую и, следовательно, по теореме В достижимую в группе G . Тогда по лемме 1 из [1] группа G содержит нетривиальную разрешимую инвариантную подгруппу, что невозможно. Так как $\lambda(H) > 3$, то по лемме 1 в группе G существует максимальная 2-цепь, проходящая через H , длиной не менее 5. Но это противоречит тому, что $v_2(G) < 5$.

Следовательно, подгруппа H квазидостижима в группе G . Тогда по лемме 12 из [7] подгруппа $U = H \cap M$ квазидостижима в M . Так как $U \supseteq N(M_2) \cap M$, то U содержит все 2-силовские подгруппы группы M . Тогда $[M : M \cap N(M_2)] = [U : M \cap N(M_2)]$, что невозможно. Получили противоречие.

Пусть G — неабелева простая группа. По теореме из [8] группа G четного порядка.

Каждая подгруппа, содержащая G_2 , неквазидостижима в G , так как в противном случае она содержала бы все 2-силовские подгруппы из G , а следовательно, и их порождение, что противоречит простоте группы G . Учитывая, что $v_2(G) < 5$, получим $\lambda(G_2) \leq 3$. Пусть $\lambda(G_2) = 3$. Тогда G_2 максимальна в группе G и по теореме 1 из [1] G разрешима. Следовательно, $(G_2) = 4$. Пусть T — максимальная подгруппа в группе G , содержащая $N(G_2)$. Ввиду неквазидостижимости T в группе G по лемме 2 имеем $v_2(T) < 5$.

Как выше уже показывалось, T должна быть разрешимой группой. Так как G — простая группа, то по лемме 3 имеем $\lambda(N(G_2)) \leq \lambda(T) \leq v_2(G) - 1 < 4$. Допустим, что $C(G_2) \supset G_2$. Тогда по теореме 14.3.1 из [18] следует $N(G_2) \supset C(G_2)$ и, значит, $\lambda(N(G_2)) \geq 4$. Получили противоречие.

Следовательно, $C(G_2) = G_2$. Тогда по следствию теоремы из [10] группа $G \cong PSL(2, p^n)$ и $p^n \equiv \pm 3 \pmod{8}$. Но при $n > 1$ группы $PSL(2, p^n)$ с $p^n \equiv -3 \pmod{8}$ условию теоремы не удовлетворяют, так как $p^n - 1 =$

$$= 4r \text{ и } \lambda\left(\frac{p^n(p^n - 1)}{2}\right) \geq 4. \text{ Все подгруппы групп } PSL(2, p^n) \text{ известны}$$

[13], поэтому нетрудно выделить те, которые удовлетворяют условию теоремы.

Итак, если $v_q(G) < 5$, то группа G изоморфна одной из групп заключения теоремы.

Обратное утверждение легко проверяется. Теорема доказана.

Замечание. Нетрудно заметить, что теорема 2 усиливает указанные во введении результаты из [1, 2, 4].

Теорема 3. Пусть q — наименьший простой делитель порядка неабелевой простой группы G . Если длина максимальных q -цепей группы G не превосходит пяти, то G изоморфна $PSL(2, p^n)$ для подходящих p и n .

Доказательство. Допустим, что группа G — контрпример минимального порядка. По теореме из [8] о разрешимости групп нечетного порядка имеем $G_2 \neq E$. Следовательно, $q = 2$.

Как и в работе [11], покажем, что G_2 не является максимальной подгруппой в группе G . Допустим, что G_2 максимальна в группе G . Тогда по теореме 1 из [1] порядок подгруппы G_2 равен 16 и ее класс нильпотентности равен 3. Следовательно, G_2 может быть диэдральной, обобщенной группой кватернионов или $G_2 = \langle x, y \mid x^8 = y^2 = 1, y^{-1}xy = x^3 \rangle$. По теореме из [16] G_2 не может быть обобщенной группой кватернионов. Допустим, что G_2 — диэдральная группа. Тогда централизатор центральной инволюции из G_2 совпадает с G_2 и, значит, по основной теореме из [10] группа $G \cong PSL(2, p^n)$. Противоречие. Остается принять, что $G_2 = \langle x, y \mid x^8 = y^2 = 1, y^{-1}xy = x^3 \rangle$. Пусть \bar{G}_2 — подгруппа из G_2 , порожденная всеми элементами вида $a^{-1}b$, где a и b — элементы из G_2 , сопряженные в группе G . Все элементы порядка 4 из G_2 не могут быть сопряжены в G . Действительно, если бы $g^{-1}x^2g = yx$ для $g \in G$, то $g^{-1}x^4g = x^4$ и $g \in G_2$. Но x^2 и yx не сопряжены в G_2 .

Пусть x^4 и y не сопряжены в G , тогда $\bar{G}_2 = \langle x^2 \rangle$. Если же x^4 и y сопряжены в G , то $\bar{G}_2 = \langle x^2 \rangle \langle y \rangle$. В обоих случаях \bar{G}_2 является собственной подгруппой из G_2 , и, значит, по теореме 8 из [17] группа G непростая. Получили противоречие. Следовательно, подгруппа G_2 не является максимальной в группе G , и поэтому $(G_2) \leq 8$.

Пусть $(G_2) = 8$ и G_2 — неабелева группа. Применяя [16], заключаем: G_2 — диэдральная группа. Пусть τ — центральная инволюция из G_2 ; по [10] централизатор $C(\tau)$ имеет инвариантное 2-дополнение U , причем подгруппа U циклическая. Следовательно, по основной теореме из [10] группа $G \cong PSL(2, p^n)$. Получили противоречие.

Значит, G_2 — абелева группа. Пусть τ_1 — произвольная инволюция из G_2 . Покажем, что $C(\tau_1)$ разрешим. Очевидно, нужно рассмотреть лишь случай, когда G_2 — элементарная абелева группа порядка 4. Так как фактор-группа $C(\tau_1)/\langle \tau_1 \rangle$ имеет 2-силовскую подгруппу порядка 2, то по теореме 14.3.1 из [18] $C(\tau_1)$ содержит инвариантное 2-дополнение K . Следовательно, по теореме из [8] $C(\tau_1)$ разрешим. Тогда по теореме 2 из [12] группа $G \cong PSL(2, p^n)$. Получили противоречие. Теорема доказана.

Теорема 2 усиливает теорему из [11].

В заключение выражаем благодарность В. И. Сергиенко за внимание к работе и полезные советы.

Литература

1. Deskins W. E. Illinois J. Math., 5, № 2, 306, 1961.
2. Беркович Я. Г. Изв. АН СССР, 28, № 3, 1964.
3. Беркович Я. Г. ДАН СССР, 169, № 3, 1966.
4. Черток В. Д. Тезисы VII Всесоюз. colloквиума по общей алгебре. Кишинев, 1965.
5. Чунихин С. А. Тр. семинара по теории групп. ГОНТИ, 1938, 106.
6. Чунихин С. А. Подгруппы конечных групп. Минск, 1964.
7. Keigel O. Math. Z., 78, № 3, 205, 1962.

8. Feit W., Thompson J. G. *Pacif. J. Math.*, **13**, № 3, 775, 1963.
9. Русаков С. А. Сб. «Конечные группы». Минск, 1966.
10. Gorenstein D., Walter J. H. *Illinois J. Math.*, **6**, № 4, 553, 1962.
11. Janko Z. *Math. Z.*, **84**, № 4, 428, 1964.
12. Gorenstein D. *Canad. J. Math.*, **17**, № 6, 860, 1965.
13. Dickson L. E. *Linear Groups*. Leipzig, 1901.
14. Schur I. *J. reine angew. Math.*, **132**, 85, 1907.
15. Поляков Л. Я. Сб. «Конечные группы». Минск, 1966.
16. Brauer R., Suzuki M. *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, **45**, № 12, 1757, 1959.
17. Brauer R. *Annals of Math.*, **57**, 357, 1953.
18. Холл М. Теория групп. ИЛ, 1962.

Институт математики
АН БССР

Поступило в редакцию 22.IV 1967

В. С. ТАНАЕВ, Г. М. ЛЕВИН

ОБ ОПТИМАЛЬНОМ ПОВЕДЕНИИ СИСТЕМ С ЧАСТИЧНО ОГРАНИЧЕННОЙ ПАМЯТЬЮ

Во многих практических ситуациях приходится сталкиваться с системами, функционирование которых (при определенной идеализации) может быть описано следующим образом. Для каждой такой системы оказывается возможным указать конечное число качественно различных состояний, в которых в процессе функционирования может находиться эта система: α и β — соответственно начальное и конечное состояния, $N = \{1, 2, \dots, n\}$ — множество промежуточных состояний. Поведение системы определяется последовательностью $(i_0 = \alpha, i_1, \dots, i_l, i_{l+1} = \beta)$ состояний, проходимых ею в процессе перехода из начального состояния в конечное, причем в каждом состоянии система может находиться не более одного раза.

Целесообразность поведения системы при прохождении первых $k = 0, 1, \dots, l + 1$ состояний можно охарактеризовать некоторой величиной F_k^s . Предполагается, что

$$F_k^s = F_k^s(F_{k-1}^s; \{Q\}, \sigma_l), F_0^s = \text{const}, \quad (1)$$

где при $k \leq s$ $Q = \emptyset$, $\sigma_l = (i_1, i_2, \dots, i_k)$; при $k > s$ Q — множество состояний $\{i_1, \dots, i_{k-s}\}$, $\sigma_l = (i_{k-s+1}, \dots, i_k)$.

Подобные системы естественно называть системами с частично ограниченной памятью, поскольку при прохождении первых k состояний целесообразность поведения системы определяется целесообразностью ее поведения при прохождении первых $k - 1$ состояний, множеством всех пройденных состояний и последовательностью нескольких ($s - 1$) состояний, непосредственно предшествующих k -му состоянию.

Иными словами, в процессе своего функционирования система «помнит» все пройденные состояния, «забывая» при этом, в какой последовательности они были пройдены, за исключением нескольких «недавно» пройденных состояний, что и определяет целесообразность ее дальнейшего поведения. Величина s характеризует качество «памяти» системы.

Оптимальным поведением системы называется такое поведение, определяемое некоторой последовательностью состояний вида $(\alpha, i_1, i_2, \dots, i_l, \beta)$, при котором значение F_{l+1}^s достигает наименьшей величины.

Пример 1. Требуется найти кратчайший гамильтонов путь из начальной вершины α некоторого графа (X, U) в конечную β при известных длинах дуг l_{ij} [1] и заданных ограничениях на порядок прохождения вершин графа. Нетрудно видеть, что здесь мы имеем дело по существу с системой с частично ограниченной памятью ($s=2$). Действительно, рассматривая вершины графа как возможные состояния системы, необходимо найти оптимальное поведение системы при условии, что целесообразность ее поведения определяется формулой

$$F_k^2 = F_k^2(F_{k-1}^2; \{Q\}, (i_{k-1}, i_k)) = \begin{cases} F_{k-1}^2 + l_{i_{k-1}i_k}, & \text{если } M_{i_k} \subseteq \{Q, i_{k-1}\}, \\ \infty & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Здесь M_{i_k} — множество вершин графа, которые по условию должны предшествовать вершине i_k , $M_{i_k} = \{i_1, \dots, i_n\}$. При этом предполагается, что $F_0^2 = 0$ и $l_{ij} = \infty$, если $(i, j) \notin U$.

Пример 2. Процесс обработки объекта в технологической многопозиционной машине параллельно-последовательного действия можно представить как последовательное прохождение объектом некоторого фиксированного множества n операций. Возможная последовательность выполнения операций регламентируется рядом технологических факторов. Длительность обработки объекта в каждой позиции зависит, вообще говоря, от того, какие операции были выполнены в предыдущих позициях. Цикл работы такой машины определяется лимитирующей операцией, т. е. операцией, имеющей максимальную длительность [2].

В данном случае имеем систему с частично ограниченной памятью ($s=1$), целесообразность поведения которой определяется следующим образом:

$$F_k^1 = F_k^1(F_{k-1}^1; \{Q\}, i_k) = \begin{cases} \max[F_{k-1}^1, t_{i_k}(Q)], & \text{если } M_{i_k} \subseteq \{Q\}, \\ \infty & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Здесь, как и в примере 1, $F_0^1 = 0$, а M_{i_k} означает множество операций, предшествование которых данной операции диктуется технологическими факторами, в частности $M_{i_k} = \{i_1, i_2, \dots, i_n\}$. Величина $t_{i_k}(Q)$ — длительность выполнения операции t_k при условии, что ей предшествуют операции множества Q ; $t_k(Q) = 0$.

Пример 3. Надежность (вероятность безотказной работы) устройства, состоящего из n узлов, при условии, что выход последних из строя не зависит друг от друга и выход каждого влечет выход из строя всего устройства, определяется величиной $p = \prod_{i=1}^n p_i$, где p_i — надежность i -го узла

[3]. Для повышения надежности i -го узла можно воспользоваться одним из заданных объемов средств $v_1^i, v_2^i, \dots, v_{m_i}^i$, каждый из которых повышает надежность узла до величины P_i^j , $j=1, 2, \dots, m_i$. Рассматривая каждое v_i^j как некоторое i -состояние системы и введя фиктивные состояния $\alpha = 0^i$ и $\beta = (n+1)^i$, задачу распределения заданного объема средств v для обеспечения максимальной надежности устройства в целом можно представить как задачу выбора оптимального поведения системы с частично ограниченной памятью ($s=1$) при условии, что

$$F_k^1 = F_k^1(F_{k-1}^1; \{Q\}, i) = \begin{cases} F_{k-1}^1 \cdot P_i^j, & \text{если } i = k, \sum_{i' \in \{Q, k'\}} v_{i'}^j \leq v, \\ \infty & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

При этом предполагается, что $F_0^1 = -1$, $P_{n+1}^1 = 1$, $v_0^1 = v_{n+1}^1 = 0$.

Мы рассмотрим задачу определения оптимального поведения систем с частично ограниченной памятью, функции целесообразности поведения

которых $F_k^s(F_{k-1}^s; \{Q\}, \sigma_t)$ являются монотонно возрастающими по F_{k-1}^s , т. е. из условия $\bar{F}_{k-1}^s \geq \bar{F}_{k-1}^s$ при любых Q и σ_t следует $F_k^s(\bar{F}_{k-1}^s; \{Q\}, \sigma_t) \geq F_k^s(\bar{F}_{k-1}^s; \{Q\}, \sigma_t)$. Этим свойством, очевидно, обладают системы, рассмотренные в примерах 1 и 2, в то время как функция F_k^1 , рассмотренная в примере 3, вообще говоря, не является монотонной по F_{k-1}^1 .

Для определения оптимального поведения систем, обладающих указанным свойством, воспользуемся методом динамического программирования [4].

Пусть $L \subset N$ и $\sigma_t = (j_1, j_2, \dots, j_l)$, где $j_l \in N \setminus L$, $l = 1, \dots, t-1$, $j_t \in \{N, \beta\} \setminus L$. Обозначим через $\bar{F}_k(\{L\}, \sigma_t)$ наименьшее из значений количественных характеристик целесообразности поведений системы, определяемых последовательностями вида (α, π, σ_t) , где π — произвольная перестановка элементов множества L , $k = |L| + t$.

Покажем, что для последовательных значений функции \bar{F}_k при $t = s-1$ и $|L| \geq 1$ выполняется рекуррентное соотношение

$$\begin{aligned} \bar{F}_k(\{L\}, (\sigma_{s-2}, r)) &= \\ &= \min_{l \in L} F_k^s[\bar{F}_{k-1}(\{L \setminus l\}, (l, \sigma_{s-2})); \{L \setminus l\}, (l, \sigma_{s-2}, r)], \end{aligned} \quad (2)$$

где $r \in \{N, \beta\} \setminus L$.

Поскольку функция F_k^s монотонно возрастающая по F_{k-1}^s , полагая $t = s$, имеем

$$\begin{aligned} \bar{F}_k(\{L \setminus l\}, (l, \sigma_{s-2}, r)) &= \\ &= F_k^s[\bar{F}_{k-1}(\{L \setminus l\}, (l, \sigma_{s-2})); \{L \setminus l\}, (l, \sigma_{s-2}, r)]. \end{aligned} \quad (3)$$

С другой стороны, по определению

$$\bar{F}_k(\{L\}, (\sigma_{s-2}, r)) = \min_{l \in L} \bar{F}_k(\{L \setminus l\}, (l, \sigma_{s-2}, r)). \quad (4)$$

Из (3) и (4) следует (2).

При $s = 1$ соотношение (2) записывается в виде

$$\bar{F}_k(\{L\}) = \min_{l \in L} F_k^1[\bar{F}_{k-1}(\{L \setminus l\}); \{L \setminus l\}, l]. \quad (5)$$

Аналогично при $s = 2$ имеем

$$\bar{F}_k(\{L\}, r) = \min_{l \in L} F_k^2[\bar{F}_{k-1}(\{L \setminus l\}, l); \{L \setminus l\}, (l, r)]. \quad (6)$$

Соотношение (2) позволяет предложить следующий алгоритм определения оптимального поведения системы с частично ограниченной памятью:

1. Вычислить значения функций F_k^s и F_{k+1}^s при $k \leq s-1$ для всех перестановок σ_k из k элементов множества N и перестановок вида (σ_k, β) соответственно.

Выбрать наименьшее из $F_{k+1}^s = F^*$.

2. Если $n \leq s-1$, то оптимальное поведение системы определяется последовательностью вида (σ_k, β) , которой соответствует значение $F_{k+1}^s = F^*$. В данном случае необходимо перебрать все возможные варианты поведения.

3. Если $n \geq s$, то, вычислив значения $F_{s-1}^s = \bar{F}_{s-1}$ для всех последовательностей σ_{s-1} из $s-1$ элементов множества N и используя соотношение (2), получаем в результате значения функций $\bar{F}_k(\{L\}, (\sigma_{s-2}, \beta))$ при $k \geq s$ для всех множеств $L \subset N$ и всех перестановок σ_{s-2} из $s-2$ элемен-

тов множества $N \setminus L$. В данном случае оптимальное поведение системы определяется в результате сравнения полученных значений \tilde{F}_k, F^* и выбором соответствующей последовательности.

Применение метода динамического программирования для определения оптимального поведения систем с частично ограниченной памятью с $s=1,2$ в некоторых частных случаях описано в [5, 6].

Пример 4. Рассмотрим простейшую задачу выбора оптимальной последовательности выполнения операций в технологической машине последовательного действия [2]. Исходное и конечное состояния обрабатываемого объекта показаны на рис. 1.

Приводим перечень операций, осуществляющих требуемый технологический объем обработки:

i	Содержание операции	M_i
1	Обточить $\varnothing 100 C_4$ до $\varnothing 101$ предварительно	
2	Обточить $\varnothing 100 C_4$ окончательно	1, 3, 5
3	Обточить конус в размер 15×20	5
4	Подрезать торец в размер 40	$1 \vee 5$
5	Расточить отверстие $\varnothing 50 A_4$ до $\varnothing 49$ предварительно	
6	Расточить отверстие $\varnothing 50 A_4$ окончательно	1, 4, 6

Справа для каждой операции указаны операции, которые должны ей предшествовать по технологическим соображениям. Так, операции 1, 4, 5 должны предшествовать операции 6, а операции 1 или 5 (или 1 и 5) — операции 4.

Время выполнения каждой операции состоит из основного и вспомогательного, причем, вообще говоря, основное время операции зависит от множества ранее выполненных операций, а вспомогательное — как от множества ранее выполненных операций, так и от последовательности их выполнения. В зависимости от требуемой точности решения задачи и характера операций при оценке вспомогательного времени на каждую операцию достаточно учесть влияние множества всех ранее выполненных операций и последовательность выполнения $s-1$ операций, непосредственно предшествующих данной.

Рассматривая операции как состояния некоторой системы, задачу выбора оптимальной последовательности выполнения операций, обеспечивающей минимальное время реализации заданного объема обработки, можно интерпретировать как задачу определения оптимального поведения системы с частично ограниченной памятью.

Все последовательности, определяющие допустимые варианты поведения системы, показаны на рис. 2.

Применяя описанный метод для нахождения оптимального поведения систем с частично ограниченной памятью, мы, по существу, заменяем задачу поиска пути из α в β , обладающего тем или иным свойством, в графе рис. 2 задачей поиска пути, обладающего аналогичным свойством, в некотором новом графе, получаемом из первого в результате стягивания вершин. Вершины графа рис. 2 стягиваются в одну вершину нового графа, если пути, ведущие из α в данные вершины, проходят через вершины с одинаковыми номерами, причем номера $s-1$ последних вершин одинаково упорядочены.

Рис. 3 и 4 иллюстрируют процесс стягивания вершин графа рис. 2 при $s=1$ и $s=2$ соответственно.

С увеличением s размер графов, получаемых в результате стягивания вершин, существенно возрастает, что значительно увеличивает необ-

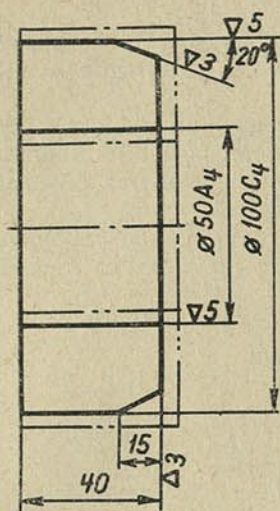


Рис. 1

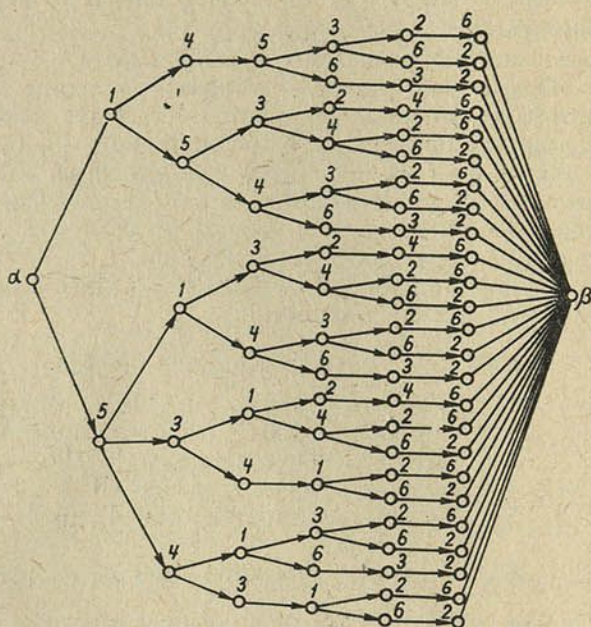


Рис. 2

ходимый объем вычислений. При $s=n$ процесс стягивания вершин неосуществим, что приводит, вообще говоря, к необходимости рассматривать все возможные варианты поведения системы.

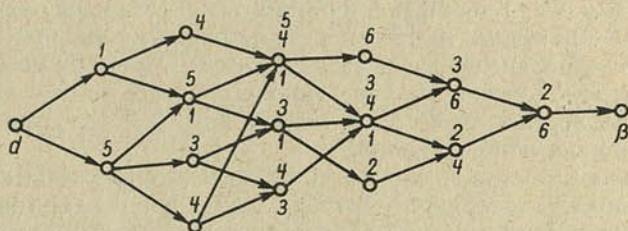


Рис. 3

Для определения оптимального поведения системы с частично ограниченной памятью описанным методом, вообще говоря, необходимо вычислить $R_F = \sum_{k=1}^n \frac{c_k + 1}{c_k!} A_n^k$ значений функций F_k^s и произвести $R_{cp} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{(c_k - 1)!} A_n^k - 1$ их сравнений. При этом требуется всего запомнить $R_3 = \sum_{k=1}^n \frac{1}{c_k!} A_n^k + n$ промежуточных значений функций F_k^s , помня одновременно не более $R_n = 2A_n^{\lfloor \frac{n+s}{2} \rfloor} / \left[\frac{n-s+2}{2} \right]!$ значений. Здесь $c_k =$

$= \max(k - s, 0) + 1$, A_n^m — число размещений из n элементов по m , $[q]$ — целая часть числа q .

В таблице приведены приближенные значения указанных величин при некоторых значениях n и s . Для сравнения приведены значения соответствующих величин R^* в случае нахождения оптимального поведения системы непосредственным перебором возможных вариантов.

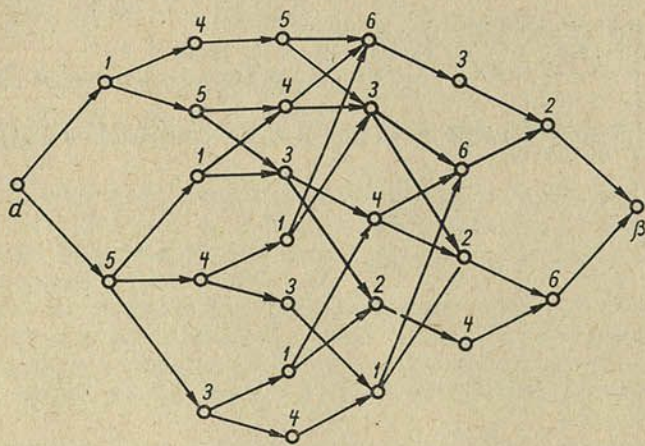


Рис. 4

Выше предполагалось, что функция $F_k^s(F_{k-1}^s; \{Q\}, \sigma_t)$ является монотонно возрастающей по F_{k-1}^s , т. е. из соотношения $\bar{F}_{k-1}^s \geq \bar{F}_{k-1}^s$ следует соотношение $F_k^s(\bar{F}_{k-1}^s; \{Q\}, \sigma_t) \geq F_k^s(\bar{F}_{k-1}^s; \{Q\}, \sigma_t)$.

Таблица

Характеристики объема вычислений

n	s	R_F	R_F^*	R_{cp}	R_{cp}^*	R_s	R_n
10	1	$6,1 \cdot 10^3$	$1,2 \cdot 10^7$	$5,1 \cdot 10^3$	$6,2 \cdot 10^6$	$1,0 \cdot 10^3$	$5,0 \cdot 10^2$
	2	$2,8 \cdot 10^4$		$2,3 \cdot 10^4$		$5,1 \cdot 10^3$	$2,5 \cdot 10^3$
	3	$1,2 \cdot 10^5$		$9,2 \cdot 10^4$		$2,3 \cdot 10^4$	$1,3 \cdot 10^4$
5		$2,4 \cdot 10^2$	$7,5 \cdot 10^2$	$1,6 \cdot 10^2$	$3,2 \cdot 10^2$	$8,5 \cdot 10^1$	$6,0 \cdot 10^1$
15	2	$1,9 \cdot 10^6$	$7,7 \cdot 10^{12}$	$1,7 \cdot 10^6$	$3,9 \cdot 10^{12}$	$2,4 \cdot 10^5$	$1,0 \cdot 10^5$
20		$1,1 \cdot 10^8$	$1,1 \cdot 10^{19}$	$9,9 \cdot 10^7$	$5,4 \cdot 10^{18}$	$1,0 \cdot 10^7$	$3,7 \cdot 10^6$

Для широкого класса систем с частично ограниченной памятью, представляющих значительный практический интерес, функции F_k^s обладают следующим свойством: существует достаточно большое число P , что $F_k^s(P; \{Q\}, \sigma_t) \geq P$ для всех Q и σ_t . Это дает возможность значительно сократить объем вычислений, поскольку нет необходимости вычислять, сравнивать и запоминать значения F_k^s в указанном случае. Тем самым, по существу, используется общеизвестный метод «ветвей и границ» [7].

Если при любых Q и σ_t $F_k^s \geq F_{k-1}^s$, то совместное применение метода динамического программирования и метода «ветвей и границ» становится более эффективным.

Литература

1. Берж К. Теория графов и ее применения. ИЛ, 1962.
2. Чарнко Д. В. Основы выбора технологического процесса механической обработки. Машгиз, 1963.
3. Маликов И. М., Половко А. М., Романов Н. А., Чукарев П. А. Основы теории и расчета надежности. Судпромгиз, 1960.
4. Беллман Р., Дрейфус С. Прикладные задачи динамического программирования. ИЛ, 1965.
5. Беллман Р. Киберн. сб., № 9, 1964.
6. Хелд М., Карп Р. М. Киберн. сб., № 9, 1964.
7. Литл Дж., Мурти К., Суини Д., Кэрел К. Экономика и матем. методы, 1, № 1, 1965.

*Институт технической кибернетики
АН БССР*

Поступило в редакцию 3.XII 1966

УДК 539.293+539.294+539.2

М. М. КОРАНЬ, М. М. СІРАТА

ДЫФУЗІЯ ЦЫНКУ З ПАРАВОЙ ФАЗЫ Ў СУРМУ

У гэтай рабоце вивучалася дыфузія цынку з паравой фазы ў сурму. Выявілася, што дыфузія мае рэакцыйны характар — суправаджаецца ўтварэннем на паверхні сурмы слоя хімічнага злучэння ZnSb, якое мае паўправадніковыя ўласцівасці.

Даследаванне рэакцыйнай дыфузіі цынку праводзілася на монакрышталах сурмы, вырашчаных зоннай перакрышталізацыяй [1]. Чыстата выкарыстаных матэрыялаў — сурмы і цынку была не менш 99,99%. Плоскі ўзор сурмы размерам $10 \times 8 \times 5$ мм змяшчаўся ў шкляную ампулу.

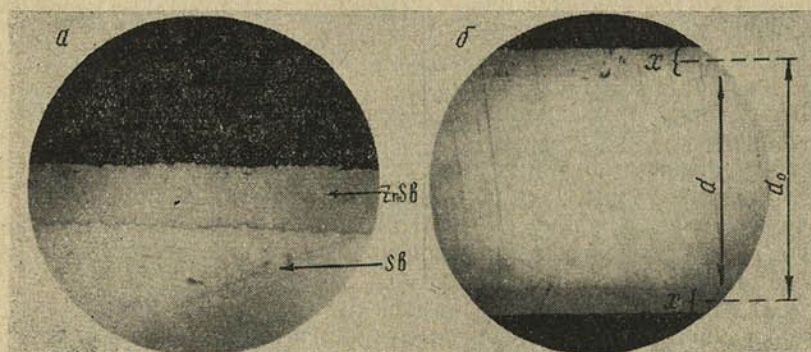


Рис. 1. Мікрафатаграфіі дыфузійных слаёў, што ўтварыліся на сурме на працягу 12 гадз:

а — пры тэмпературы 480°C (таўшчыня слоя 120 мк); б — пры тэмпературы 450°C (таўшчыня слоя 66 мк)

У гэтай жа ампуле на некаторай адлегласці ад адзначанага ўзору знаходзіўся кавалачак цынку. Ампула адкачвалася да ціску 10^{-4} мм рт. сл., запайвалася і змяшчалася ў электрычную печ, якая была нагрэта да заданай тэмпературы. Дыфузійны адпал узораў сурмы ў пары цынку праводзіўся ў інтэрвале тэмператур $320\text{—}520^\circ\text{C}$ пры парцыяльным ціску пары цынку $4\text{—}8 \cdot 10^{-3}$ мм рт. сл. Максімальны час дыфузійнага адпалу складаў 36 гадз.

Для фазавага аналізу дыфузійных слаёў прымянялі металаграфічны і рэнтгенаграфічны метады, а таксама вымяралі мікрацвёрдасць. Металаграфічныя даследаванні шліфаў на мікраскопе МІМ-8М паказалі, што пры ўзаемадзеянні сурмы з парай цынку на яе паверхні ўтвараецца аднафазны слой, які шчыльна прылягае да сурмы (рис. 1, а).

Выразная мяжа паміж злучэннем і сурмой захоўваецца і пры больш тоўстых слаях (звыш 0,3 мм), пры гэтым адслойвання ад металу не назіраецца. Як правіла, дыфузійныя слаі складаюцца з буйных крышталаў (2—4 мк), якія выцягнуты перпендыкулярна паверхні ўзору. Вымярэнне

мікрацвёрдасці, якое было праведзена на апарате ПМТ-3 з нагруккай 20 г на нетраўленых мікрашліфах, паказала, што мікрацвёрдасць дыфузійнага слоя ў сярэднім складае 410 кг/мм². Гэта значэнне мікрацвёрдасці супадае з літаратурнымі данымі для паўправадніковага злучэння ZnSb [2].

Рэнтгенаструктурны аналіз дыфузійных слаёў праводзілі на рэнтгенаўскай іанізацыйнай устаноўцы УРС-50И на $\text{Cu-K}\alpha$ -выпраменьванні з нікелевым фільтрам. Дыфракцыйныя лініі супадаюць з лініямі ад полікрысталічнага паўправадніковага злучэння ZnSb (35 ваг. % Zn), крысталічная структура якога вызначалася ў [3]. Іншых злучэнняў з вялікай колькасцю цынку, якія існуюць у двойной сістэме цынк — сурма [4], у паверхневых дыфузійных сляях мы не назіралі.

Для вывучэння кінетыкі росту дыфузійных слаёў рыхтавалася некалькі ўзораў, якія выразаны з аднаго монакрышталічнага злітка сурмы. Узоры падвяргаліся дыфузійнаму адпалу пры вызначанай тэмпературы на працягу рознага часу. Потым пад мікраскопам вызначалася ў пяці — сямі месцах таўшчыня дыфузійнага слоя на кожным узору. Для падлікаў бралі сярэдняе значэнне.

Результаты вымярэнняў наносілі на графік час — квадрат таўшчыні слоя. На рыс. 2 паказаны некаторыя з графікаў кінетычных вымярэнняў у сістэме цынк — сурма.

Як відаць з рыс. 2, ва ўсіх выпадках назіраецца лінейная залежнасць квадрата таўшчыні слоя ад часу дыфузійнага адпалу, г. зн. захоўваецца парабалічны закон. Аналагічны характар мае залежнасць квадрата таўшчыні слоя ад часу ў сістэме кадмій — сурма [5, 6].

Даследаванне змянення ў часе таўшчыні чыстага ўзору сурмы прыводзіць да вываду, што дыфузійны слой расце як у глыб чыстага ўзору, так і вонкі. Гэта сведчыць аб тым, што ў нарошчванні гэтага слоя прымаюць удзел абодва кампаненты, якія дыфундзіруюць праз слой утвараючага злучэння ў процілеглых напрамках.

Ацэнку парцыяльных каэфіцыентаў рэакцыйнай дыфузіі цынку і сурмы ў злучэнні, што ўтвараецца, праводзілі па формулах, узятых з работы Б. Я. Пінеса [7]:

$$D_{1(2)} = \frac{xx_{1(2)}}{4t}, \quad x = x_1 + x_2. \quad (1)$$

У формуле (1) праз x абазначана агульная таўшчыня дыфузійнага слоя; t — час узаемадзеяння; x_1, x_2 — таўшчыні слаёў, якія ўтварыліся за кошт дыфузіі адпаведна кампанентаў цынку і сурмы. Падлік таўшчыні гэтых слаёў праводзіўся на аснове наступных даных. Перад дыфузійным адпалам вымяралася таўшчыня ўзору сурмы d_0 (рыс. 1, б). Затым пасля пэўнага прамежку часу зноў вымяралася таўшчыня ўзору сурмы d , а таксама таўшчыня дыфузійнага слоя x . Трэба адзначыць, што таўшчыня злучэння ZnSb на розных гранях монакрыштала практычна пастаянная

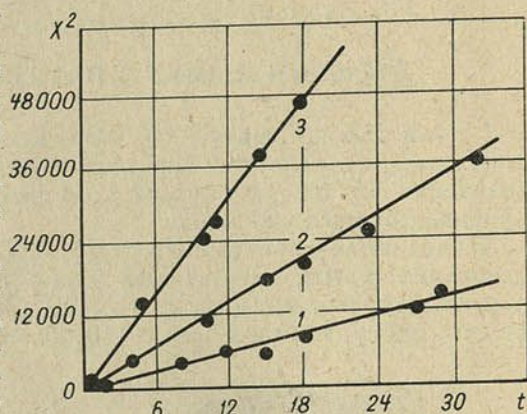


Рис. 2. Залежнасць паміж квадратам таўшчыні дыфузійнага слоя x , μm^2 і часам узаемадзеяння t , гадз пры тэмпературах 420°C (1), 480 (2) і 520 (3)

і залежыць толькі ад часу ўзаемадзеяння і тэмпературы. У табл. 1 прыведзены рэзультаты вызначэнняў таўшчынь дыфузійных слаёў x_1 і x_2 пры розных тэмпературах і розным часе дыфузійнага адпалу.

Табліца 1

Залежнасць таўшчыні слаёў у ZnSb ад тэмпературы і часу дыфузійнага адпалу

Тэмпература, °С	Час, гадз	Таўшчыня слаёў			Тэмпература, °С	Час, гадз	Таўшчыня слаёў		
		x	x_1	x_2			x	x_1	x_2
520	13	166	100	66	450	12	66	40	26
520	25	250	150	100	450	4	40	24	16
520	5	120	72	48	420	12	80	48	32
520	10	150	90	60	420	15	82	49	33
520	18	215	129	86	420	27	110	66	44
490	10	100	60	40	420	29	120	72	48
480	1	60	36	24	420	18	90	54	36
480	12	120	72	47	420	2	30	18	12
480	15	130	78	52	400	3	30	18	12
480	18	140	84	53	380	22	66	40	26
480	32	190	114	76	355	13	50	30	20
480	23	160	96	64	340	24	40	24	16
480	35	200	120	80	300	24	32	18	14
450	1	20	12	8	300	12	22	14	8
450	3	34	20	14					

Як вядома [8], тэмпературную залежнасць каэфіцыентаў дыфузіі можна апісаць экспаненцыяльнымі суадносінамі

$$D = D_0 \exp(-Q/RT), \quad (2)$$

дзе D_0 — пастаянная, размернасць якой супадае з размернасцю D ; Q — энергія актывацыі; R — пастаянная; T — абсалютная тэмпература. Пры дапушчэнні, што гэтыя суадносіны таксама маюць месца і ў выпадку рэакцыйнай дыфузіі [9], будаваўся графік у каардынатах $\ln D - 1/T$, з якога вызначаліся значэнні энергіі актывацыі і перадэкспаненцыяльнага множніка.

Такім чынам, тэмпературная залежнасць каэфіцыентаў дыфузіі цынку і сурмы ў ZnSb апісваецца наступнымі ўраўненнямі:

$$D_{Zn} = 8,5 \cdot 10^{-5} \exp\left(-\frac{17500 \pm 1500}{RT}\right) \text{ см}^2/\text{сек}, \quad (3)$$

$$D_{Sb} = 5,2 \cdot 10^{-5} \exp\left(-\frac{18000 \pm 1500}{RT}\right) \text{ см}^2/\text{сек}.$$

Энергія актывацыі дыфузіі выражана ў кал/моль.

Цікава параўнаць каэфіцыенты рэакцыйнай дыфузіі з каэфіцыентамі самадыфузіі. На жаль, у літаратуры адсутнічаюць надзейныя даныя па даследаванню самадыфузіі ў вывучаным намі паўправадніковым злучэнні. Ёсць толькі адна работа [10], у якой вывучалася самадыфузія сурмы ў паўправадніковым злучэнні ZnSb метадам радыеактыўных ізатопаў. У інтэрвале тэмператур 300—500°С для буйнакрышталічных зліткаў каэфіцыент дыфузіі сурмы ў ZnSb апісваецца сумай двух экспаненцыяльных членаў. Аднак гэтыя даныя, відаць, патрабуюць удакладнення.

У табл. 2 прыводзяцца каэфіцыенты рэакцыйнай дыфузіі і каэфіцыенты самадыфузіі, якія ўзяты з работы [10] для ZnSb пры трох тэмпературах.

Як відаць з табл. 2, пры гэтых тэмпературах каэфіцыенты рэакцыйнай дыфузіі і самадыфузіі з'яўляюцца велічынямі аднаго парадку. Блізасць гэтых велічынь, атрыманых двума рознымі метадамі, дае магчымасць лічыць, што працэс утварэння хімічнага злучэння на паверхні сурмы пры ўзаемадзеянні з парай цынку лімітуецца дыфузіяй цынку і сурмы праз злучэнне, што ўтвараецца.

Табліца 2
Каэфіцыенты рэакцыйнай дыфузіі і самадыфузіі для ZnSb

Тэмпература, °C	Каэфіцыенты самадыфузіі [10], $\text{см}^2/\text{сек}$	Каэфіцыенты рэакцыйнай дыфузіі, $\text{см}^2/\text{сек}$
300	$2 \cdot 10^{-12}$	$7,8 \cdot 10^{-12}$
400	$2,4 \cdot 10^{-12}$	$8,1 \cdot 10^{-11}$
500	$6,9 \cdot 10^{-11}$	$4,5 \cdot 10^{-10}$

Літаратура

1. Корень Н. Н., Сирота Н. Н. ДАН БССР, 7, № 10, 1963.
2. Угай Я. А. Журн. неорг. химии, 3, в. 3, 1958.
3. Almin K. E. Acta Chemica Scandinavica, 2, 400, 1948.
4. Хансен М., Андерко К. Структуры двойных сплавов, 2, 1961.
5. Корень Н. Н., Сирота Н. Н. ДАН БССР, 8, № 11, 1964.
6. Корень Н. Н. Канд. дисс. Минск, 1963.
7. Пинес Б. Я. ФТТ, 1, в. 3, 482, 1959.
8. Зайт В. Диффузия в металлах. ИЛ, 1958.
9. Бугаков В. З. Диффузия в металлах и сплавах. Гостехиздат, 1949.
10. Болтакс Б. И. Диффузия в полупроводниках. Физматгиз, 1961, 380.

Институт физики твердого тела
и полупроводников АН БССР

Поступило в редакцию 27.III 1967

УДК 535.37:537.312.5

М. В. БОРТНІК, В. Д. ТКАЧОУ, А. В. ЮХНЕВІЧ

АБ УПЛЫВЕ ПРЫМЕСІ КІСЛАРОДУ НА ВЫПРАМЕНЬВАЮЧУЮ РЭКАМБІНАЦЫЮ У КРЭМНІІ

У спектрах рэкамбінацыйнага выпраменьвання монакрышталяў крэмнію, што змяшчаюць устойлівыя радыяцыйныя парушэнні структуры, назіраецца рад палос выпраменьвання ў прымеснай вобласці [1]. Электронныя пераходы, якія прыводзяць да з'яўлення палос прымеснага выпраменьвання, адбываюцца пры захопе нераўнаважных носьбітаў парушэннямі, якія з'яўляюцца асацыяцыямі простых дэфектаў (вакансій і міжвузельных атамаў) і астаткавых хімічных прымесей крышталю [2]. Паколькі ва ўтварэнні некаторых радыяцыйных комплексаў прымаюць удзел прымесныя атамы, можна чакаць, што будзе назірацца залежнасць спектра прымеснага выпраменьвання ад колькаснага і якаснага саставу прымесных атамаў зыходнага матэрыялу.

Вядома, што монакрышталі крэмнію змяшчаюць атамы кіслароду, які пранікае ў монакрышталю у працэсе вырошчвання. У крышталю, што вырашчаны шляхам выцягвання з расплаву ў кварцавых тыглях, змяшчаецца каля 10^{18} см^{-3} атамаў кіслароду. Пры вырошчванні крышталю бястыгельнай зоннай плаўкай у вакууме канцэнтрацыю кіслароду можна зменшыць да 10^{15} см^{-3} . Пэўнай залежнасці рухомасці або часу жыцця неасноўных носьбітаў ад канцэнтрацыі прымесі кіслароду ў монакрышталю выяўлена не было [3]. Аднак даныя вымярэнняў фотаправоднасці, інфрачырвонага паглынання, ЭПР у крэмніі, які змяшчае радыяцыйныя дэфекты структуры, паказваюць розніцу ў спектрах для монакрышталяў, што вырашчаны двума метадамі, прычым у крэмніі з павышанай канцэнтрацыяй кіслароду энергетычная карціна радыяцыйных парушэнняў больш складаная [4].

Мэта дадзенай работы — выяўленне ўплыву атамаў астаткавага кіслароду на прымеснае рэкамбінацыйнае выпраменьванне ў крэмніі, які змяшчае радыяцыйныя дэфекты структуры.

Вывучаліся монакрышталі крэмнію n -тыпу з удзельным супраціўленнем 5, 25 і $100 \text{ ом} \cdot \text{см}$, вырашчаныя ў кварцавым тыглі, і монакрышталі, атрыманыя бястыгельнай зоннай плаўкай, з удзельным супраціўленнем $7 \text{ ом} \cdot \text{см}$ (канцэнтрацыя атамаў кіслароду парадку 10^{16} см^{-3}). Радыяцыйныя парушэнні структуры ствараліся абпраменьваннем узораў γ -квантамі ад крыніцы Co^{60} . Нераўнаважныя носьбіты ствараліся трыма метадамі: электрычнай ін'екцыяй праз $p-n$ -пераход, бамбардзіроўкай электронамі 50 кв і аптычным узбуджэннем ад лампы ДКСШ-1000. Рэкамбінацыйнае выпраменьванне аналізавалася монахраматарам ІКС-12. Сігнал дэтэктара (ахалоджанае фотасупраціўленне PbS) узмацняўся вузкапалосным узмацняльнікам і рэгістраваўся самапісцам.

Абпраменьванне γ -квантамі прыводзіць да з'яўлення ў прымеснай вобласці спектра групы палос. Назіраецца розніца ў спектрах рэкамбінацыйнага выпраменьвання монакрышталяў, якія вырашчаны двума

метадамі. У спектрах «бескіслароднага» матэрыялу не выяўляюцца палосы D , E , I_2 [1]. Інтэнсіўнасць C -паласы змяншаецца з павелічэннем удзельнага супраціўлення матэрыялу, што паказвае сувязь цэнтраў, якія выпраменьваюць дадзеную паласу, з дробнай легіруючай прымессю матэрыялу.

У спектры рэкамбінацыйнага выпраменьвання ўсіх узораў выяўляецца паласа A . Энергетычнае становішча [5] і тэмпература адпалу (паласа A знікае пасля адпалу пры 300°C) дазваляюць сцвярджаць, што яна ўзнікае пры выпраменьваючым захопе нераўнаважных носбітаў

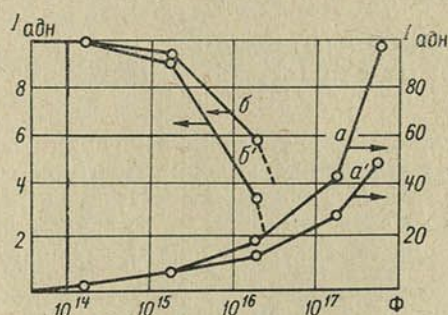


Рис. 1. Залежнасць адноснай інтэнсіўнасці рэкамбінацыйнага выпраменьвання $I_{\text{адн}}$ ад дозы абпраменьвання γ -квантамі Φ , см^{-2} :

a і a' — паласа A адпаведна ў крэмніі, што вырашчаны ў кварцавых тыглях і атрыман бястыгельнай зонай плаўкай; b і b' — уласнае выпраменьванне адпаведна ў крэмніі, што атрыман бястыгельнай зонай плаўкай і вырашчаны ў кварцавых тыглях

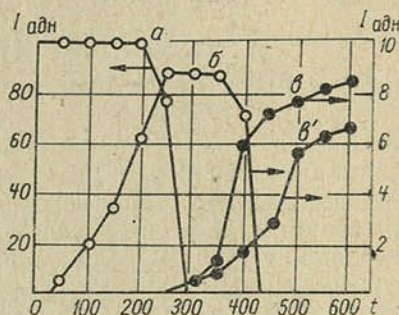


Рис. 2. Ізахронны 20-мінутны адпал палос рэкамбінацыйнага выпраменьвання крэмнію (t , $^\circ\text{C}$). Узоры абпраменьваліся γ -квантамі Co^{60} дозай 10^{16} см^{-2} :

a — паласа A ; b — паласа C ; b' і a' — уласнае выпраменьванне адпаведна ў крэмніі, што атрыман бястыгельнай зонай плаўкай і вырашчаны ў кварцавых тыглях

A -цэнтрам — дамінаруючым радыяцыйным дэфектам монакрыстала крэмнію. A -цэнтр з'яўляецца асацыяцыяй вакансіі з атамам кіслароду, якая ўтвараецца ў выніку захопу першаснага радыяцыйнага дэфекту — вакансіі міжвузельным электрычна неактыўным атамам кіслароду ў рашотцы крэмнію [6]. Значыць, для ефектыўнага ўтварэння гэтага дэфекту патрабуецца значная канцэнтрацыя кіслароду ў рашотцы крэмнію. Было знойдзена, што інтэнсіўнасць A -паласы расце з дозай абпраменьвання (пры максімальных патоках абпраменьвання менш $5 \cdot 10^{17} \text{ кв} \cdot \text{см}^{-2}$) і пры абпраменьванні патокам γ -квантаў $5 \cdot 10^{17} \text{ кв} \cdot \text{см}^{-2}$ інтэнсіўнасць A -паласы ў матэрыялах, якія вырашчаны двума спосабамі, адрозніваецца не больш чым у два разы (рис. 1, крывыя a і a'). Ва ўзорах з аднолькавай колькасцю кіслароду, але з розным удзельным супраціўленнем назіраецца павелічэнне інтэнсіўнасці A -паласы з ростам удзельнага супраціўлення матэрыялу.

Адначасова праводзіліся вымярэнні інтэнсіўнасці выпраменьвання, абумоўленага ўласнымі міжзоннымі выпраменьваючымі пераходамі. Інтэнсіўнасць паласы выпраменьваючых міжзонных пераходаў характарызуе канцэнтрацыю нераўнаважных носбітаў у зонах. Гэта канцэнтрацыя пры аднолькавых умовах узбуджэння вызначаецца часам жыцця нераўнаважных носбітаў, які ў сваю чаргу залежыць ад колькасці рэкамбінацыйных цэнтраў і, значыць, будзе функцыяй патока радыяцыі, таму што абпраменьванне γ -квантамі прыводзіць да ўтварэння ефектыўных цэнтраў захопу і рэкамбінацыі нераўнаважных носбітаў. Назіраемая залежнасць інтэнсіўнасці міжзонных выпраменьваючых пераходаў ад дозы абпраменьвання γ -квантамі паказана на рис. 1 (крывыя b і b').

Ва ўзорах з большай колькасцю кіслароду спад інтэнсіўнасці паласы адбываецца хутчэй, што звязана, відаць, з большай колькасцю рэкамбінацыйных цэнтраў, якія ўводзяцца абпраменьваннем.

Павелічэнне тэмпературы ўзораў прыводзіць да адпалу радыяцыйных дэфектаў і «ўзнаўлення» паласы ўласнага выпраменьвання. Асноўныя прымесныя паласы рэкамбінацыйнага выпраменьвання (*A* і *C*) для двух тыпаў матэрыялаў знікаюць і з'яўляюцца ў працэсе адпалу ў адным інтэрвале тэмператур (рыс. 2, крывыя *a* і *b*). Рэзкае павелічэнне інтэнсіўнасці паласы міжзонных выпраменьваючых пераходаў адбываецца для «бескіслароднага» крэмнію ў інтэрвале 300—400° С, а для крэмнію, які вырашчан у кварцавым тыглі, у інтэрвале 400—500° С (рыс. 2, крывыя *v* і *v'*); відаць, яно не звязана са з'яўленнем і знікненнем у працэсе адпалу палос прымеснага выпраменьвання.

Атрыманыя рэзультаты сведчаць аб тым, што прыmesь кіслароду актыўна ўдзельнічае ва ўтварэнні безвыпраменьваючых і выпраменьваючых цэнтраў рэкамбінацыі нераўнаважных носбітаў. Рэзультаты па дозавай залежнасці і па адпалу ўласнага выпраменьвання ў даследаваных узорах дазваляюць сцвярджаць, што кісларод з'яўляецца састаўной часткай радыяцыйных дэфектаў, якія змяняюць час жыцця нераўнаважных носбітаў, і што скорасць увядзення гэтых радыяцыйных парушэнняў расце з павелічэннем канцэнтрацыі кіслароду.

Прысутнасць кіслароду ў монакрышталі крэмнію прыводзіць да з'яўлення ў спектры прымеснага выпраменьвання палос *A*, *D*, *E*, *I*₂. Інтэнсіўнасць палос залежыць ад канцэнтрацыі кіслароду ў монакрышталі. Палосы *D*, *E*, *I*₂ не выяўляюцца ў спектрах бескіслароднага матэрыялу. У той жа час не назіраецца моцнай залежнасці паміж інтэнсіўнасцю *A*-паласы і канцэнтрацыяй кіслароду. Ва ўзорах з канцэнтрацыяй кіслароду 10^{16} см^{-3} інтэнсіўнасць *A*-паласы толькі ў некалькі разоў меншая інтэнсіўнасці ва ўзорах з канцэнтрацыяй 10^{18} см^{-3} . Гэта ўзгадняецца з выяўленай залежнасцю скорасці увядзення *A*-цэнтра ад дозы абпраменьвання для монакрышталяў з рознай колькасцю кіслароду [7]. Акрамя таго, залежнасць інтэнсіўнасці ўласнага выпраменьвання ад дозы абпраменьвання паказвае больш хуткае змяншэнне часу жыцця нераўнаважных носбітаў у монакрышталях з большай канцэнтрацыяй кіслароду, што можа прыводзіць да дадатковага змяншэння інтэнсіўнасці *A*-паласы.

Рост інтэнсіўнасці *A*-паласы з павелічэннем удзельнага супраціўлення матэрыялу звязан, відавочна, з тым, што колькасць *A*-цэнтраў пры невялікіх патоках абпраменьвання большая ў матэрыяле з высокім удзельным супраціўленнем, дзе існуе большая магчымасць утварэння комплексу кісларод — вакансія.

Трэба адзначыць, што ў даследуемых узорах у працэсе адпалу знікненне *A*-паласы не прыводзіла да росту інтэнсіўнасці паласы ўласных міжзонных выпраменьваючых пераходаў, як трэба было б чакаць. Гэта прымушае думаць, што ў даследаваных узорах пры патоках абпраменьвання γ -квантамі $5 \cdot 10^{17} \text{ кв} \cdot \text{см}^{-2}$ *A*-цэнтр не вызначае часу жыцця нераўнаважных носбітаў або зменні інтэнсіўнасці ўласнага выпраменьвання нязначныя і адбываюцца ніжэй парогу адчувальнасці рэгіструючай сістэмы.

Даныя эксперымента паказваюць, што цэнтры, ад якіх залежыць з'яўленне палос прымеснага выпраменьвання *D*, *I*, *I*₂, не ўплываюць на час жыцця нераўнаважных носбітаў.

Відаць, пры такіх канцэнтрацыях астаткавых хімічных прымесей і дозах абпраменьвання рэкамбінацыя нераўнаважных носбітаў адбываецца ў асноўным безвыпраменьваючым шляхам.

Інтэнсіўнасць і характэрная форма палос (існаванне ў спектры вузкіх ліній з паўшырынёй менш kT пры тэмпературы доследу) дазваляюць не толькі прымяняць спектраскапічныя метады для вывучэння глыбокіх прымесных станаў у паўправадніку, але і спадзявацца на выяўленне рэзанансных эфектаў у крэмніі.

У сувязі з гэтым мае цікавасць пытанне аб павелічэнні квантавага выхаду прымеснага выпраменьвання монакрышталяў крэмнію, якія змяшчаюць радыяцыйныя дэфекты структуры. Прымесь кіслароду прыводзіць да ўтварэння як выпраменьваючых, так і безвыпраменьваючых цэнтраў рэкамбінацыі нераўнаважных носбітаў. Безвыпраменьваючыя цэнтры, у састаў якіх уваходзяць атамы кіслароду, уплываюць на час жыцця і, значыць, могуць прыводзіць да затухання рэкамбінацыйнага выпраменьвання. Павышэнне чыстаты матэрыялу і выбар крытычнай канцэнтрацыі кіслароду павінны садзейнічаць павелічэнню інтэнсіўнасці назіраемых палос.

Літаратура

1. Юхневич А. В., Ткачев В. Д. ФТТ, 8, 1264, 1966.
2. Ткачев В. Д., Плотников А. Ф., Вавилов В. С. ФТТ, 5, 3188, 1963.
3. Kaiser W. Phys. Rev., 105, 1751, 1957.
4. Вавилов В. С. Действие излучений на полупроводники. Физматгиз, 1963.
5. Юхневич А. В. ФТТ, 7, 322, 1965.
6. Bemski G. J. Appl. Phys., 30, 1195, 1959.
7. Юхневич А. В., Ткачев В. Д., Бортник М. В. ФТТ, 8, 3213, 1966.

Белорусский государственный университет
им. Ленина

Поступило в редакцию 24.III 1967

УДК 530.12 : 531.5

А. В. МІНКЕВІЧ

АБ УЗАЕМАДЗЕЙННІ ГРАВІТАЦЫЙНАГА ПОЛЯ З КВАНТАВАНЫМ ЭЛЕКТРАМАГНІТНЫМ І ДЗІРАКАУСКІМ ПАЛЯМІ

§ 1. Уводзіны. Цяпер у літаратуры існуюць розныя спосабы атрымання аднаго з трох вядомых эфектаў агульнай тэорыі адноснасці (АТА) — эфекту гравітацыйнага зрушэння частаты [1—5]. Нягледзячы на тое што ўсе гэтыя разгляды прыводзяць да аднаго і таго ж значэння для гравітацыйнага зрушэння частаты, прынамсі ў першым рэлятывісцкім прыбліжэнні, з дакладнасцю да φ/c_2 (φ — ньютанаўскі гравітацыйны патэнцыял), прырода ўзнікнення гэтага эфекту ў розных разглядах аказваецца істотна рознай. Як вядома, у АТА эфект гравітацыйнага зрушэння частаты з'яўляецца непасрэдным праяўленнем адхілення метрыкі фізічнай прасторы — часу ў полі прыцягнення ад метрыкі свету Мінкоўскага — вынікам гравітацыйнага эфекту змянення ходу часу.

З другога боку, гравітацыйнае зрушэнне частаты можна атрымаць ужо ў рамках ньютанаўскай тэорыі як рэзультат работы фатона ў полі прыцягнення [1—4]. Пры гэтым фатон разглядаецца як некаторая карпускула, энергія якой у полі прыцягнення ўяўляецца ў выглядзе сумы дзвюх частак — кінетычнай і патэнцыяльнай. Эфект гравітацыйнага зрушэння частаты поўнасьцю вызначаецца змяненнем кінетычнай энергіі фатона $h\nu$ па меры распаўсюджвання ў полі прыцягнення.

Несумеснасць другога спосабу атрымання эфекту гравітацыйнага зрушэння частаты з АТА відавочная, калі ўлічыць, што ў статычным полі прыцягнення часавая шкала ў рамках ньютанаўскай тэорыі па сваёму фізічнаму сэнсу адпавядае шкале сусветнага часу АТА. На самай справе ў разглядаемым выпадку ў абедзвюх шкалах два прамежкі часу ў двух розных прасторах пунктах, якія маюць аднолькавыя лічбавыя значэнні, з'яўляюцца сінхронна-эквівалентнымі, г. зн. калі пачатковыя моманты гэтых прамежкаў часу былі адначасовымі, то і канчатковыя моманты будуць таксама адначасовыя. Паколькі ў АТА частата святла пры распаўсюджанні ў полі прыцягнення застаецца нязменнай у шкале сусветнага часу t і эфект гравітацыйнага зрушэння частаты вызначаецца залежнасцю частаты выпраменьвання атама (ядра), што знаходзіцца ў полі прыцягнення, ад гравітацыйнага патэнцыялу, а ў другім спосабе разгляду частата фатона па меры распаўсюджвання ў полі прыцягнення змяняецца і частата выпраменьвання лічыцца не залежачай ад гравітацыйнага патэнцыялу, — несумненна, што мы маем два розныя па сваёй прыродзе спосабы атрымання эфекту гравітацыйнага зрушэння частаты. Гэта розніца, у прыватнасці, праяўляецца ў тым, што згодна з другім спосабам разгляду ніякага змянення ходу атамнага гадзінніка ў полі прыцягнення не павінна быць. Трэба адзначыць, што атрыманне эфекту гравітацыйнага зрушэння частаты ў ньютанаўскай тэорыі

на аснове гіпотэзы працуючага фатона мае прынцыпальныя недахопы і таму наўрад ці можа прымацца ўсур'ёз: паняцце патэнцыяльнай энергіі нерэлятывісцкай ньютанаўскай тэорыі прымяняецца да такога ультрарэлятывісцкага аб'екта, як фатон, не ўлічваецца магчымы ўплыў поля прыцягнення на частату выпраменьваемага фатона і інш.

Узнікае пытанне: да якіх фізічных вынікаў прывядзе выкарыстанне гіпотэзы працуючага фатона ў рамках рэлятывісцкага разгляду? § 2 і 3 гэтай работы прысвечаны высвятленню гэтага пытання. Паколькі гіпотэза працуючага фатона па сваёй сутнасці несумяшчальная з класічнай тэорыяй (ніякае класічнае хвалевае ўраўненне не можа прывесці да змянення частаты), тэорыя, якая выкарыстоўвае гэту гіпотэзу, павінна быць другасна-квантаванай у адносінах да электрамагнітнага поля.

Гравітацыйнае поле ў гэтай рабоце разглядаецца ў лінейным прыбліжэнні на аснове тэарэтыка-палявога падыходу да поля прыцягнення [6]. Пры гэтым для сіметрычнага тэнзарнага гравітацыйнага патэнцыялу $h_{\mu\nu}$ прымаюцца наступныя ўраўненні:

$$\square h_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \delta_{\mu\nu} \square h = -\alpha T_{\mu\nu}, \quad (1)$$

дзе $\alpha = 16\pi\gamma/c^4$; γ — гравітацыйная ньютанаўская пастаянная; $h = h_{\mu\mu}$; $T_{\mu\nu}$ — тэнзар энергіі-імппульсу ўсіх палёў, за выключэннем гравітацыйнага. $h_{\mu\nu}$ з'яўляецца тэнзарам у плоскай прасторы Мінкоўскага з метрыкай $\delta_{\mu\nu}$, што адпавядае выбару чацвёртай каардынаты ўяўнай $x_4 = ict$. Ураўненні (1) могуць быць атрыманы з дапамогай варыяцыйнага прынцыпу, калі зыходзіць з лагранжыяна L_0 гравітацыйнага поля і лагранжыяна L' узаемадзеяння гравітацыйнага поля з матэрыяй:

$$L_0 = -\frac{c^4}{64\pi\gamma} \left[(\nabla_\lambda h_{\mu\nu})^2 - \frac{1}{2} (\nabla_\lambda h)^2 \right], \quad (2)$$

$$L' = \frac{1}{2} h_{\mu\nu} T_{\mu\nu}. \quad (3)$$

Выкарыстоўваючы дадзены від L' , можна атрымаць ураўненні руху для адвольных вядомых фізічных палёў, якія ўзаемадзейнічаюць з гравітацыйным, у лінейным прыбліжэнні па $h_{\mu\nu}$. Так, калі лагранжыян некаторага свабоднага поля A ёсць L_A , то функцыя Лагранжа для атрымання ўраўненняў поля A , якое ўзаемадзейнічае з гравітацыйным,

$$L = L_A + \frac{1}{2} h_{\mu\nu} T_{\mu\nu}^{(A)}, \quad (4)$$

дзе $T_{\mu\nu}^{(A)}$ — тэнзар энергіі-імппульсу, які адпавядае лагранжыяну L_A . У далейшым будзе выкарыстоўвацца агульнае рашэнне ўраўненняў (1) для статычнага гравітацыйнага поля, што нараджаецца пылападобнай матэрыяй, тэнзар энергіі-імппульсу якой $T_{\mu\nu} = \rho u_\mu u_\nu$, дзе ρ — інварыянтная шчыльнасць масы, $u_\mu = \frac{dx_\mu}{d\tau}$ ($d\tau$ — інтэрвал уласнага часу):

$$h_{\mu\nu} = \frac{2\varphi}{c^2} \varepsilon_{\mu\nu}, \quad \varepsilon_{ii} = 1 \quad (i = 1, 2, 3), \quad (5)$$

$$\varepsilon_{44} = -1, \quad \varepsilon_{\mu\nu} = 0 \quad (\mu \neq \nu).$$

§ 2. Узаемадзеянне гравітацыйнага поля з квантаваным электрамагнітным полем. Тэорыя будзе на аснове лагранжыана (4), дзе

$$L_A = - \frac{1}{8\pi} (\nabla_\nu A_\mu)^2,$$

$$T_{\mu\nu}^{(A)} = \frac{1}{4\pi} \left[\nabla_\mu A_\rho \nabla_\nu A_\rho - \frac{1}{2} \delta_{\mu\nu} (\nabla_\sigma A_\rho)^2 \right].$$

У выпадку статычнага гравітацыйнага поля (5) ураўненні для гейзенбергаўскага апэратара 4-патэнцыялу электрамагнітнага поля A_μ маюць наступны выгляд:

$$\Delta A_\mu - \left(1 + \frac{4\varphi}{c^2} \right) \frac{\partial^2 A_\mu}{\partial x_0^2} = 0 \quad (x_0 = ct). \quad (6)$$

Паколькі кананічна спалучаная велічыня, якая адпавядае A_μ , $\Pi_\mu = \frac{\partial L}{\partial (\nabla_0 A_\mu)} = \frac{1}{4\pi} \left(1 + \frac{4\varphi}{c^2} \right) \nabla_0 A_\mu$, кананічныя перастановачныя суадносіны маюць выгляд:

$$[A_\mu(\mathbf{x}, t), \nabla_0 A_\nu(\mathbf{x}', t)] = 4\pi i \hbar c \delta_{\mu\nu} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \frac{1}{1 + 4\varphi(\mathbf{x}')/c^2}. \quad (7)$$

Узаемадзеянне электрамагнітнага поля са статычным гравітацыйным полем улічваецца пры дапамозе ўраўненняў руху (6) і перастановачных суадносін (7). Гамільтаніан электрамагнітнага поля пры ўліку ўзаемадзеяння з гравітацыйным полем

$$H = - \frac{1}{4\pi} \int d^3x \left[\left(1 + \frac{2\varphi}{c^2} \right) (\nabla_4 A_\rho)^2 - \frac{1}{2} (\nabla_\sigma A_\rho)^2 \right]. \quad (8)$$

Лёгка правесці, што суадносіны (6)–(8) сумесныя, таму што ўраўненні руху (6) можна разглядаць як ураўненні для гейзенбергаўскага апэратара Π_μ , якія вынікаюць з зусім агульных меркаванняў.

Узаемадзеянне фатонаў са слабым статычным гравітацыйным полем ($\varphi/c^2 \ll 1$) будзем разглядаць, прадстаўляючы $A_\mu(x)$ у выглядзе

$$A_\mu(x) = A_\mu^{(0)}(x) + A_\mu^{(1)}(x), \quad (9)$$

дзе $A_\mu^{(0)}(x)$ — нулявое прыбліжэнне, якое супадае з выглядам апэратара свабоднага поля,

$$A_\mu^{(0)}(x) = \frac{\sqrt{2\pi} \hbar c}{(2\pi)^{3/2}} \int d\mathbf{k} e_\mu^{(\lambda)} \frac{1}{\sqrt{k_0}} [e^{i\mathbf{k}x} c_\lambda(\mathbf{k}) + e^{-i\mathbf{k}x} c_\lambda^+(\mathbf{k})], \quad (10)$$

а $A_\mu^{(1)}(x)$ задавальняе ўраўненню

$$\square A_\mu^{(1)} = \frac{4\varphi}{c^2} \frac{\partial^2 A_\mu^{(0)}}{\partial x_0^2}$$

і роўны

$$A_\mu^{(1)}(x) = \int dx' D_R(x-x') \frac{4\varphi(x')}{c^2} \frac{\partial^2 A_\mu^{(0)}(x')}{\partial x_0'^2}, \quad (11)$$

дзе

$$D_R(x) = \begin{cases} \frac{1}{(2\pi)^3} \int d\mathbf{k} e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}} \frac{\sin k_0 x_0}{k_0}, & x_0 > 0, \\ 0, & x_0 < 0, \end{cases}$$

— спазняючаяся функцыя Грына хвалевага ўраўнення. Карыстаючыся (10) і інтэгруючы ў (11) па x_0 , атрымаем

$$\begin{aligned} A_p^{(1)}(x) = & - \frac{\sqrt{2\pi c\hbar}}{(2\pi)^{3/2} (2\pi)^3} \int d\mathbf{k} e_p^{(\lambda)} \frac{1}{V k_0} \times \\ & \times \int d\mathbf{x}' \frac{4\varphi(\mathbf{x}')}{c^2} \int d\mathbf{k}' \frac{k_0^2}{k_0^2 - k_0'^2} \times \\ & \times \{ \exp[i\mathbf{k}'(\mathbf{x} - \mathbf{x}') + i(\mathbf{k}\mathbf{x}' - k_0 x_0)] c_\lambda(\mathbf{k}) + \\ & + \exp[-i\mathbf{k}'(\mathbf{x} - \mathbf{x}') - i(\mathbf{k}\mathbf{x} - k_0 x_0)] c_\lambda^+(\mathbf{k}) \}. \end{aligned} \quad (11')$$

Перастанавачныя суадносіны для апэратараў $c_\lambda(\mathbf{k})$, $c_\lambda^+(\mathbf{k})$ можна атрымаць, карыстаючыся (7), (9), (10), (11'), калі ўлічыць, што пры адсутнасці ўзаемадзеяння яны павінны пераходзіць у звычайныя квантаваэлектрадынамічныя перастанавачныя суадносіны. Мяркуючы

$$\begin{aligned} [c_\lambda(\mathbf{k}), c_\lambda(\mathbf{k}')] &= 0, \quad [c_\lambda^+(\mathbf{k}), c_\lambda^+(\mathbf{k}')] = 0, \\ [c_\lambda(\mathbf{k}), c_\lambda^+(\mathbf{k}')] &= \delta_{\lambda\lambda'} \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \{1 + F(\mathbf{k}, \mathbf{k}')\}, \end{aligned} \quad (12)$$

атрымаем для функцыі $F(\mathbf{k}, \mathbf{k}')$ інтэгральныя суадносіны

$$\begin{aligned} \frac{1}{(2\pi)^3} \int F(\mathbf{k}, \mathbf{k}') \cos \mathbf{k}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') d\mathbf{k} &= - \frac{4\varphi(\mathbf{x}')}{c^2} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') + \\ + \frac{1}{(2\pi)^6} \operatorname{Re} \int d\mathbf{k} d\mathbf{k}' \int d\mathbf{x}'' \frac{4\varphi(\mathbf{x}'')}{c^2} \frac{k_0^2}{k_0^2 - k_0''^2} e^{i(\mathbf{k}'' - \mathbf{k})\mathbf{x}''} \times \\ &\times [\exp i(\mathbf{k}\mathbf{x} - \mathbf{k}'\mathbf{x}') + \exp i(\mathbf{k}\mathbf{x}' - \mathbf{k}'\mathbf{x})]. \end{aligned} \quad (13)$$

Маючы перастанавачныя суадносіны (12) і выкарыстоўваючы ўмовы нарміроўкі для не залежачых ад часу вектараў вакууму $|0\rangle$ і адначастковага стану $|1\rangle$: $\langle 0|0\rangle = 1$, $\langle 1|1\rangle = 1$, можна вызначыць дзеянне апэратараў $c(\mathbf{k})$ і $c^+(\mathbf{k})$ на $|0\rangle$ і $|1\rangle$:

$$\begin{aligned} c(\mathbf{k})|0\rangle &= 0, \\ c(\mathbf{k})|1\rangle &= (1 + \omega(\mathbf{k}))|0\rangle, \quad c^+(\mathbf{k})|0\rangle = (1 + \omega^*(\mathbf{k}))|1\rangle, \end{aligned}$$

прычым $\omega(\mathbf{k}) + \omega^*(\mathbf{k}') \approx F(\mathbf{k}, \mathbf{k}')$. Адзначым, што для хвалевага пакета, размешчанага на бесканечнасці ($\varphi \approx 0$), апэратарамі нараджэння і знішчэння з'яўляюцца апэратары

$$c^{(0)}(\mathbf{k}) = \frac{c(\mathbf{k})}{1 + \omega(\mathbf{k})}, \quad c^{(0)+}(\mathbf{k}) = \frac{c^+(\mathbf{k})}{1 + \omega^*(\mathbf{k})},$$

якія задавальняюць звычайным квантаваэлектрадынамічным перастанавачным суадносінам.

Адрозненне перастановачных суадносін (12) ад звычайных квантаваэлектрадынамічных суадносін, як будзе відаць з далейшага, не прыводзіць да істотных вынікаў пры знаходжанні сярэдніх значэнняў, што назіраюцца для фатона.

Маючы выражэнне для аператара O некаторай фізічнай велічыні фатонаў праз A_μ , можна на аснове выкладзенага вышэй разлічыць змяненне сярэдняга значэння гэтай велічыні з часам $\langle i|O|i \rangle$, дзе $|i \rangle$ — не залежачы ад часу вектар i -фатоннага стану, які задавальняе ўмове $\langle j|i \rangle = \delta_{ij}$.

Выражаючы поўны гамільтаніан (8) праз A_ρ , Π_ρ і іх прасторавыя вытворныя, пададзім (8) у выглядзе сумы гамільтаніяна ўласна фатона H_Φ і гамільтаніяна ўзаемадзеяння фатона з гравітацыйным полем H_{y_3} :

$$H = H_\Phi + H_{y_3},$$

$$H_\Phi = \frac{1}{8\pi} \int d^3x \{ (4\pi\Pi_\rho)^2 + (\nabla_i A_\rho)^2 \} \quad (i=1, 2, 3), \quad (14a)$$

$$H_{y_3} = - \frac{1}{8\pi} \int d^3x \frac{4\Phi}{c^2} (4\pi\Pi_\rho)^2. \quad (14b)$$

Разлічым змяненне сярэдняга значэння гамільтаніяна фатона па меры яго распаўсюджвання ў гравітацыйным полі $\langle 1|H_\Phi|1 \rangle$. Карыстаючыся (9) і запісаўшы (14a) у выглядзе

$$H_\Phi = H_\Phi^{(0)} + H_\Phi^{(1)} + H_\Phi^{(2)} + H_\Phi^{(3)},$$

дзе

$$H_\Phi^{(0)} = - \frac{1}{4\pi} \int d^3x \left[(\nabla_4 A_\rho^{(0)})^2 - \frac{1}{2} (\nabla_\sigma A_\rho^{(0)})^2 \right],$$

$$H_\Phi^{(1)} = - \frac{1}{\pi} \int d^3x \frac{\Phi}{c^2} (\nabla_4 A_\rho^{(0)})^2,$$

$$H_\Phi^{(2)} = - \frac{1}{8\pi} \int d^3x [\nabla_4 A_\rho^{(0)} \nabla_4 A_\rho^{(1)} + \nabla_4 A_\rho^{(1)} \nabla_4 A_\rho^{(0)}], \quad (15)$$

$$H_\Phi^{(3)} = \frac{1}{8\pi} \int d^3x [\nabla_i A_\rho^{(0)} \nabla_i A_\rho^{(1)} + \nabla_i A_\rho^{(1)} \nabla_i A_\rho^{(0)}], \quad (i=1, 2, 3),$$

атрымаем

$$H_\Phi^{(0)} = \frac{c\hbar}{2} \int d\mathbf{k} k_0 [c_\lambda(\mathbf{k}) c_\lambda^\dagger(\mathbf{k}) + c_\lambda^\dagger(\mathbf{k}) c_\lambda(\mathbf{k})],$$

$$H_\Phi^{(1)} = \frac{2c\hbar}{(2\pi)^3} \iint d\mathbf{k} d\mathbf{k}' e_\rho^{(\lambda)} e_\rho^{(\lambda')} V_{k_0 k'_0} \int d\mathbf{x}' \frac{\Phi(\mathbf{x}')}{c^2} \times \quad (15')$$

$$\times \exp [i(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \mathbf{x}' - i(k_0 - k'_0) x_0] \times \\ \times [c_\lambda(\mathbf{k}) c_\lambda^\dagger(\mathbf{k}') + c_\lambda^\dagger(\mathbf{k}') c_\lambda(\mathbf{k})],$$

$$H_\Phi^{(2)} = - \frac{1}{2} H_\Phi^{(1)}, \quad H_\Phi^{(3)} = 0.$$

Пры вылічэнні (15') выкарыстоўваліся суадносіны $e_\mu^{(\lambda)} e_\nu^{(\lambda')} = \delta_{\lambda\lambda'}$, а члены, у якія ўваходзіць здабытак аператараў $c_\lambda(\mathbf{k}) c_\lambda(\mathbf{k}')$ і $c_\lambda^\dagger(\mathbf{k}) c_\lambda^\dagger(\mathbf{k}')$, адкідваліся, паколькі яны не ўносяць укладу ў сярэдняе значэнне гамільтаніяна ў выніку дзеяння на $|1 \rangle$ і $\langle 1|$. Калі хвалевы пакет у момант

часу t лакалізаван у малым наваколлі пункту x , то пры інтэграванні па трохмернай прасторы ў $H_{\Phi}^{(1)}$ уклад вызначаецца ў асноўным значэннем падынтэгральнага выражэння ў гэтым пункце. Не звяртаючы ўвагі на змяненне φ у наваколлі пункту x , атрымаем для $H_{\Phi}^{(1)}$ наступнае выражэнне:

$$H_{\Phi}^{(1)} = \frac{c\hbar}{2} \frac{4\varphi(x)}{c^2} \int d\mathbf{k} k_0 [c_{\lambda}(k) c_{\lambda}^+(k) + c_{\lambda}^+(k) c_{\lambda}(k)] = \frac{4\varphi(x)}{c^2} H_{\Phi}^{(0)}.$$

Такім чынам, энергія фатона E_{Φ} у пункце x роўная

$$E_{\Phi} = \langle 1 | H_{\Phi} | 1 \rangle = \left(1 + \frac{2\varphi(x)}{c^2} \right) E_0, \quad (16)$$

прычым $E_0 = \langle 1 | H_{\Phi}^{(0)} | 1 \rangle$ — энергія фатона на бесканечнасці, дзе $\varphi = 0$. Адсюль на аснове гіпотэзы працуючага фатона для змянення частаты фатона атрымаем формулу ($E = h\nu$)

$$\nu = \left(1 + \frac{2\varphi}{c^2} \right) \nu_0. \quad (16')$$

Такім чынам, змяненне частаты фатона па меры распаўсюджвання ў полі прыцягнення ў два разы пераважае адпаведны рэзультат ньютанаўскай тэорыі. Адзначым, што выражэнне для энергіі фатона можна атрымаць больш простым шляхам, калі ўлічыць, што поўны гамільтаніан (8) захоўваецца, а пры вылічэнні гамільтаніана ўзаемадзеяння (14 б) можна карыстацца нулявым прыбліжэннем для патэнцыялу $A_{\mu}^{(0)}$. Для атрымання эфекту гравітацыйнага зрушэння частаты нам неабходна вызначыць уплыў гравітацыйнага поля на энергетычныя ўзроўні выпраменьваючай сістэмы, якая знаходзіцца ў полі прыцягнення. Для гэтага належыць атрымаць абагуленае ўраўненне Дзірака, якое ўлічвае прысутнасць гравітацыйнага поля.

Адзначым, што ўраўненне (6) забяспечвае скрыўленне светавых прамянёў у полі Сонца ў рамках класічнай тэорыі, хаця строгі разгляд і гэтага эфекту павінен быць другасна квантаваны.

§ 3. Абагуленае ўраўненне Дзірака. Атам вадароду ў гравітацыйным полі. Разгляд, які прыводзіцца ў гэтым параграфе, блізкі да разгляду Машынскага [8], хаця і ёсць некаторыя адрозненні. Лагранжыян дзіракаўскага поля ψ , якое ўзаемадзеічае з гравітацыйным, мае выгляд

$$L = L_{\psi} + \frac{1}{2} h_{\mu\nu} T_{\mu\nu}^{(\psi)}, \quad (17)$$

дзе

$$L_{\psi} = -\frac{\hbar c}{2} (\bar{\psi} \gamma_{\mu} \nabla_{\mu} \psi - \nabla_{\mu} \bar{\psi} \gamma_{\mu} \psi) - mc^2 \bar{\psi} \psi,$$

$$T_{\mu\nu}^{(\psi)} = L_{\psi} \delta_{\mu\nu} + \frac{\hbar c}{2} (\bar{\psi} \gamma_{\nu} \nabla_{\mu} \psi - \nabla_{\mu} \bar{\psi} \gamma_{\nu} \psi).$$

Ураўненне Эйлера, што адпавядае лагранжыяну (17):

$$\gamma_{\mu} \nabla_{\mu} \psi + \kappa \psi - \frac{1}{4 \left(1 + \frac{h_{\alpha\alpha}}{2} \right)} [\nabla_{\mu} (h_{\mu\nu} \gamma_{\nu} \psi) + h_{\mu\nu} \gamma_{\nu} \nabla_{\mu} \psi - \nabla_{\mu} h_{\alpha\alpha} \gamma_{\mu} \psi] = 0, \quad (18)$$

$$\begin{aligned} \nabla_{\mu} \bar{\psi} \gamma_{\mu} - \kappa \psi - \frac{1}{4 \left(1 + \frac{h_{\alpha\alpha}}{2}\right)} [\nabla_{\mu} (h_{\mu\nu} \bar{\psi} \gamma_{\nu}) + \\ + h_{\mu\nu} \nabla_{\mu} \bar{\psi} \gamma_{\nu} - \bar{\psi} \gamma_{\mu} \nabla_{\mu} h_{\alpha\alpha}] = 0, \end{aligned} \quad (18)$$

$$\left(\kappa = \frac{mc}{\hbar}\right).$$

З ураўненняў (18) вынікае захаванне 4-тока:

$$\nabla_{\mu} j_{\mu} = 0, \quad j_{\mu} = ie \left[\left(1 + \frac{h_{\alpha\alpha}}{2}\right) \bar{\psi} \gamma_{\mu} \psi - \frac{h_{\mu\nu}}{2} \bar{\psi} \gamma_{\nu} \psi \right]. \quad (19)$$

Уключэнне ўзаемадзеяння ψ -поля з электрамагнітным полем ажыццяўляецца шляхам дабаўлення да лагранжыяна (17) велічыні

$$L_{(jA)} = A_{\mu} j_{\mu},$$

дзе j_{μ} — ток, што захоўваецца (19). Ураўненне для ψ -поля пры гэтым выглядае так:

$$\begin{aligned} \gamma_{\mu} \left(\nabla_{\mu} - \frac{ie}{\hbar c} A_{\mu} \right) \psi + \kappa \psi - \\ - \frac{1}{4 \left(1 + \frac{h_{\alpha\alpha}}{2}\right)} \left[\left(\nabla_{\mu} - \frac{ie}{\hbar c} A_{\mu} \right) (h_{\mu\nu} \gamma_{\nu} \psi) + \right. \\ \left. + h_{\mu\nu} \gamma_{\nu} \left(\nabla_{\mu} - \frac{ie}{\hbar c} A_{\mu} \right) \psi - (\nabla_{\mu} h_{\alpha\alpha}) \gamma_{\mu} \psi \right] = 0. \end{aligned} \quad (20)$$

У выпадку статычнага гравітацыйнага поля (5) ураўненне (20) прымае выгляд

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{\Phi}{c^2}\right) \gamma_4 \left(\nabla_4 - \frac{ie}{\hbar c} A_4 \right) \psi + \left(1 - \frac{\Phi}{c^2}\right) \times \\ \times \gamma_i \left(\nabla_i - \frac{ie}{\hbar c} A_i \right) \psi + \kappa \psi + \frac{1}{2} \nabla_i \frac{\Phi}{c^2} \gamma_i \psi = 0. \end{aligned} \quad (21)$$

Прыменім ураўненне (21) для вызначэння залежнасці энергетычных узроўняў атама вадароду ад гравітацыйнага патэнцыялу. Лічачы гравітацыйны патэнцыял пастаянным у граніцах атама, не звяртаючы ўвагі на апошні член у (21), мяркуючы $A_i = 0$, $A_4 = i\Phi$, памнажаючы ўраўненне (21) на $i\gamma_4$ і абазначаючы $i\gamma_4 \gamma_i \equiv \alpha_i$, $\gamma_4 \equiv \rho_3$, напішам ураўненне для стацыянарных станаў:

$$(E - e\Phi) \psi + i\hbar \left(1 - \frac{2\Phi}{c^2}\right) \alpha_i \nabla_i \psi - \rho_3 mc^2 \left(1 - \frac{\Phi}{c^2}\right) \psi = 0. \quad (22)$$

Праводзячы пераход да прыбліжанай формы ўраўнення (22) з двух-кампанентнай хвалевай функцыяй звычайным шляхам (гл., напрыклад, [7], стар. 329) і адначасова вылучаючы з E энергію спакою электрона і ньютанаўскую патэнцыяльную энергію, якія прыводзяць толькі да нестотнага адытыўнага зруху ўзроўняў

$$E \rightarrow E + mc^2 - m\Phi,$$

можна атрымаць наступнае выражэнне для гамільтаніана з улікам рэ-
лятывісцкіх гравітацыйных паправак:

$$\hat{H} = \left(1 - \frac{3\Phi}{c^2}\right) \frac{\hat{p}^2}{2m} + e\Phi. \quad (23)$$

Выражэнне для кулонаўскага патэнцыялу ядра ў полі прыцягнення
можна вызначыць з дапамогай абагуленых ураўненняў Максвела пры
наяўнасці крыніц электрамагнітнага поля, якія атрымаем, выкарыстоў-
ваючы калібравачна-інварыянтныя лагранжыян і тэнзар энергіі-ім-
пульсу электрамагнітнага поля. Гэтыя ўраўненні маюць выгляд ураў-
ненняў Максвела з $\varepsilon \approx \mu = 1 + 2\Phi/c^2$, з якіх вынікае захаванне 4-вектара
шчыльнасці току [9]. Электростатычны патэнцыял Φ зараду e , што зна-
ходзіцца ў полі прыцягнення ў вобласці, дзе можна не звяртаць увагі
на змяненне Φ , роўны $\Phi = e/r(1 + 2\Phi/c^2)$. Ураўненне Шрэдінгера з га-
мільтаніанам (23) прыводзіць да наступных энергетычных узроўняў:

$$E'_i = E_i(1 - \Phi/c^2) \quad (24)$$

(E_i — энергетычныя ўзроўні свабоднага атама вадароду). Пры пе-
раходзе атама вадароду з аднаго энергетычнага стану ў другое выдзя-
ляецца энергія $\Delta E'$, якая згодна з законам захавання энергіі роўна суме
энергіі ўласна фатона і энергіі ўзаемадзеяння фатона з гравітацыйным
полем, г. зн.

$$\Delta E' = \Delta E \left(1 - \frac{\Phi}{c^2}\right) = E_\Phi \left(1 - \frac{2\Phi}{c^2}\right).$$

Адсюль вынікае, што энергія і частата выпраменьваемага фатона роўны

$$E_\Phi = \Delta E \left(1 + \frac{\Phi}{c^2}\right), \quad \nu = \nu_0 \left(1 + \frac{\Phi}{c^2}\right). \quad (25)$$

Маючы формулы (16) і (25), можна вызначыць эффект гравітацыйнага
зрушэння частаты. Няхай у некаторым пункце з патэнцыялам Φ_1 выпра-
меньваецца фатон энергіі $E_{\Phi_1} = (1 + \Phi_1/c^2)E_0$ і распаўсюджваецца ў пункт
з патэнцыялам Φ_2 , пры гэтым яго энергія згодна з (16) становіцца роўнай
 $E'_{\Phi_1} = E_0(1 + 2\Phi_2/c^2 - \Phi_1/c^2)$. Энергія фатона, што выпраменьваецца падоб-
най сістэмай у пункце Φ_2 , $E_{\Phi_2} = E_0(1 + \Phi_2/c^2)$. Рознасць энергіі фатонаў
 $E'_{\Phi_1} - E_{\Phi_2} = E_0(\Phi_2 - \Phi_1)/c^2$ вызначае эффект гравітацыйнага зрушэння. Кары-
стаючыся формулай $E = h\nu$, атрымаем для рознасці частот суадносіны,
якія супадаюць з формулай АТА:

$$\Delta\nu = \nu_0 \frac{\Delta\Phi}{c^2}. \quad (26)$$

Вывады

Такім чынам, з прыведзенага вышэй разгляду ўзаемадзеяння граві-
тацыйнага поля з квантаваным электрамагнітным і дзіракаўскім палямі
вынікае, што выкарыстанне гіпотэзы працуючага фатона прыводзіць
да істотных адрозненняў у паводзінах фатона ў полі прыцягнення і ў
залежнасці частаты выпраменьвання атама, які знаходзіцца ў полі пры-
цягнення, ад гравітацыйнага патэнцыялу ў параўнанні з АТА (формулы
(16), (25)).

Гэтыя вывады могуць быць правераны эксперыментальна. Згодна
з (25), ход атамнага гадзінніка вызначаецца формулай

$$d\tau^* = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2} + \frac{2\Phi}{c^2}} dt, \quad (27)$$

дзе ўлічана рэлятывісцкае скарачэнне часу (адпаведная формула АТА

$$d\tau = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2} - \frac{2\varphi}{c^2}} dt$$

). Адзначым, што ў формуле (27) $d\tau^*$ не ёсць уласны час у звычайным сэнсе (паколькі $g_{00}=1$), а залежнасць $d\tau^*$ ад гравітацыйнага патэнцыялу трэба разглядаць як рэзультат сілавога ўплыву поля прыцягнення на выпраменьваючую сістэму. Параўноўваючы паказанні двух ідэнтычных атамных гадзіннікаў, адзін з якіх знаходзіцца на штучным спадарожніку Зямлі, а другі — на Зямлі, можна праверыць, ці выпяўняецца формула (27) або адпаведная формула АТА. Эксперымент з запускам штучнага спадарожніка Зямлі з устаноўленым на ім атамным гадзіннікам мае надзвычай вялікае прынцыповае значэнне для тэорыі гравітацыі. Гэта, бадай, адзіны эксперымент, у якім цяпер можна непасрэдна праверыць вывад АТА аб адхіленні метрыкі фізічнай прасторы — часу ад плоскай метрыкі — гравітацыйны эффект змянення ходу часу. Звычайна лічыцца, што гэты эффект правяраецца ў эксперыментах па вызначэнню гравітацыйнага зрушэння частаты. Але да таго часу пакуль эксперыментальна не ўстаноўлена, як паводзіць сябе фатон у полі прыцягнення, падобную думку трэба прызнаць неабгрунтаванай. У гэтай рабоце для гравітацыйнага зрушэння частаты атрыманы звычайны рэзультат, тым не менш ход атамнага гадзінніка не адпавядае АТА (у сувязі з гэтым адзначым дыскусію [4—5]). Трэба сказаць, што ход атамнага гадзінніка фактычна не адпавядае АТА ва ўсіх тэорыях прыцягнення, у якіх частата фатона пры распаўсюджанні ў гравітацыйным полі змяняецца і для гравітацыйнага зрушэння частаты атрымліваецца звычайнае значэнне (гл., напрыклад, [10]).

Што, уласна кажучы, правяраецца ў доследах Паунда і Рэбка [11]; як паводзіць сябе фатон у полі прыцягнення; якім з'яўляецца фізічны прасторава-часавы кантынуум — светам Мінкоўскага ці «скрыўленым» светам?

Вось тыя пытанні, на якія дасць пэўны адказ прапануемы эксперымент.

Аўтар выказвае глыбокую падзяку прафесару Ф. І. Фёдараву за пастаянную ўвагу да работы і карысныя абмеркаванні.

Літаратура

1. Birkhoff G. D. Proc. Nat. Acad. Sci. (USA), 29, 231, 1943; 30, 324, 1944.
2. O'Leary A. Amer. J. Phys., 32, 52, 1964.
3. Петров А. З. Сб. «Гравитация и теория относительности». Изд. Казанского ун-та, 1963, стр. 122.
4. Смородинский Я. А. УФН, 79, 589, 1963.
5. Гинзбург В. Л. УФН, 81, 739, 1963.
6. Gupta S. Proc. Phys. Soc., A65, 161, 609, 1952 (перевод в сб. «Новейшие проблемы гравитации». М., 1961).
7. Соколов А. А., Лоскутов Ю. М., Тернов И. М. Квантовая механика. М., 1962.
8. Moshinsky M. Phys. Rev., 80, 514, 1950.
9. Thirring W. E. Ann. of Phys., 16, 96, 1961.
10. Rongved L. Nuovo Cimento, 44, 355, 1966.
11. Pound R., Rebka G. Phys. Rev. Lett., 4, 377, 1960 (перевод в сб. «Новейшие проблемы гравитации». М., 1961).

К. Г. ПРЕДКО, А. П. ИВАНОВ

О ФУНКЦИИ РАССЕЯНИЯ ЛИНИИ МЕЛКОДИСПЕРСНЫХ ЛЮМИНЕСЦИРУЮЩИХ ЭКРАНОВ

Особенности передачи изображения различными воспроизводящими системами (оптическим прибором, фотослоем, телеэкраном и т. д.) удобно описывать [1—3] с помощью различных функций: функций рассеяния точки $a(x, y)$, линии $a(x)$, светлой полосы ширины $b — E(x, b)$, полуплоскости $J(x)$, нормированных к единице. Они характеризуют размытие ограниченных пучков радиации разнообразной формы и связаны друг с другом простыми соотношениями.

Теоретическое нахождение точного вида указанных функций для рассеивающих люминесцирующих экранов до настоящего времени не сделано ввиду трудностей решения уравнения переноса радиации. Поэтому пользуются различными приближенными эмпирическими формулами. Так, для конкретных рассеивающих экранов, фотографических слоев часто применяют функцию рассеяния линии $a(x)$, записанную в экспоненциальном [4] виде

$$a(x) = \frac{1}{t_1} e^{-\frac{2|x|}{t_1}} \quad (1)$$

или в квадратно-гиперболическом [5] виде

$$a(x) = \frac{t_2}{\pi(t_2^2 + x^2)} \quad (2)$$

В [6, 7] утверждается, что экспериментальные данные хорошо согласуются в случае фотослоев и люминесцирующих экранов с гауссовым видом $a(x)$:

$$a(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi} t_3} e^{-\frac{x^2}{t_3^2}} \quad (3)$$

В (1) — (3) коэффициенты t_1, t_2, t_3 , постоянные для каждого конкретного экрана, — параметры размытия. Чем больше параметр размытия, тем шире функция рассеяния линии, тем хуже характеристики качества воспроизведения экрана. Физический смысл t_1, t_2 и t_3 легко выяснить из (1) — (3). Так, например, параметр t_1 численно равен ширине $a(x)$ на уровне $1/e$ от ее максимального значения $a(0)$.

В данной работе рассматривается вопрос о том, какая из зависимостей (1) — (3) лучше всего описывает функцию рассеяния линии мелкодисперсных люминесцирующих экранов.

С этой целью для анализа качества воспроизведения экраном изображения введем функцию контрастности светлой полосы $C(b)^*$. Она выражает зависимость отношения светимости центра изображения данным экраном светлой полосы ширины b к светимости изображения бесконечно широкой ($b = \infty$) полосы $C(b) = \frac{E(x=0, b)}{E(x=0, b=\infty)}$. Используя приведенные выше выражения для функции рассеяния линии, можно легко найти, что экспоненциальному виду $a(x)$ соответствует $C(b)$, выражаемая формулой

$$C(b) = 1 - e^{-\frac{b}{t_1}}, \quad (4)$$

квадратно-гиперболическому —

$$C(b) = \frac{2}{\pi} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{b}{t_2}, \quad (5)$$

гауссовому —

$$C(b) = \operatorname{erf} \left(\frac{b}{2t_3} \right), \quad (6)$$

где $\operatorname{erf} y = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^y e^{-x^2} dx$ — табличный интеграл вероятности [9].

Экспериментальное определение функции контрастности светлой полосы и запись кривой размытия производились на установке, схематически изображенной на рис. 1.

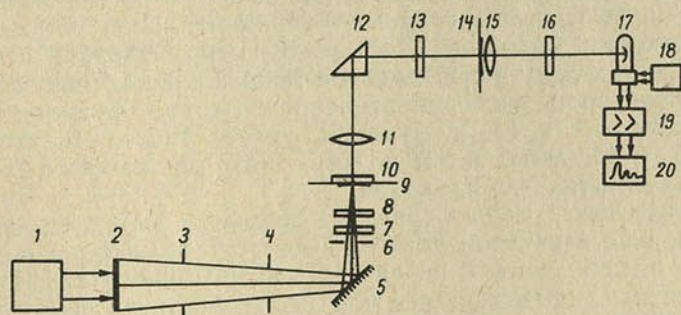


Рис. 1. Схема измерительной установки:

1 — блок питания; 2 — источник света; 3, 4, 6 — диафрагмы; 5 — алюминированное зеркало; 7, 13 — цветные светофильтры; 8 — нейтральный светофильтр; 9, 14 — регулируемые щели; 10 — образец; 11 — объектив; 12 — поворотная призма; 15 — линза; 16 — круговой ослабитель; 17 — фотомножитель; 18 — блок питания ФЭУ; 19 — усилитель У1-2; 20 — самописец

Излучение от источника света — ртутной лампы ПРК-4 — ограничивалось диафрагмами 3, 4, 6 и при помощи алюминированного зеркала направлялось на микрометрическую щель 9, которая позволяла менять ширину пучка в пределах от 0 до 400 мкм через 1 мкм. Сходимость падающего излучения составляла 1°. Непосредственно за щелью 9 поме-

*) Эта функция в некоторой степени соответствует вводимой [8] для характеристики ореолов рассеяния и отражения фотослоев функции контрастности $-\lg \frac{E}{E_0}(b)$, которая представляет зависимость обратного логарифма контраста $\frac{E}{E_0}$ изображения ряда черных полосок от их ширины b .

щался исследуемый образец*). Изучались экраны, приготовленные из частиц люминофоров $ZnS \cdot Ag$ и $Al_2O_3 \cdot Ce$ с размерами от 0,5 до 5 мкм.

Вся последующая часть установки служила для регистрации распределения светимости по поверхности исследуемого образца. Она базировалась на основе регистрирующего микрофотометра МФ-4. Щель 9 с экраном укреплялась на подвижном столике МФ-4. Оптическая система, состоящая из объектива, призмы и линзы, принимала в апертурном угле 35° и проецировала на фотокатод ФЭУ-19М изображение небольшого участка ($2,5 \times 1400$ мкм²) светящейся поверхности исследуемого объекта. Сигнал от фотоумножителя усиливался, а при необходимости мог быть автоматически записан с помощью ЭПП-09М2. Один сантиметр записи на диаграммной ленте самописца соответствовал участку 2,9 мкм на поверхности телеэкрана. Проверочные испытания установки показали линейность ее отсчетной части, отсутствие влияния на результаты посторонних причин (паразитных засветок, ореольных эффектов, связанных с наличием подложки экрана, оптики микрофотометра, размера фотометрируемого участка и др.). Погрешности измерений не превышали 5%.

Имелась возможность проводить опыты как в свете люминесценции, так и в рассеянном свете. В первом случае с помощью светофильтра 7 для возбуждения свечения слоя выделялось ультрафиолетовое излучение ртутной лампы. Свет люминесценции проходил через светофильтр 13, скрещенный с 7. Во втором случае экран освещался видимым излучением с длиной волны $\lambda = 436$ нм, близким по спектральному составу к свету люминесценции объекта. При этом люминесценция образца отсутствовала и телеэкран действовал как обычный рассеивающий слой.

Таким образом, на описанной экспериментальной установке можно было исследовать размытие телеэкраном параллельного пучка радиации, имеющего форму узкой длинной полоски различной ширины. Это давало возможность экспериментально измерить функцию размытия светлой полоски $E(x, b)$ и функцию контрастности светлой полоски $C(b)$. Зная $C(b)$, легко затем по (4) — (6) для каждого b найти три параметра размытия t_1, t_2, t_3 экрана.

Из физического смысла параметра размытия вытекает, что он является постоянной величиной для одного и того же экрана и не зависит от ширины b изображаемой экраном полоски. Следовательно, критерием применимости на практике того или иного аналитического вида $C(b)$ (см. (4) — (6)) является независимость t от b , найденная экспериментальным способом, описанным выше.

На рис. 2 приведена часть полученных с помощью измерения $C(b)$ функций $t(b)$ для различных экранов в рассеянном свете и в свете люминесценции**. Некоторый разброс точек при небольших b объясняется малой точностью нахождения t в этом случае.

Из анализа рис. 2 следует, что практическое постоянство параметра t наблюдается в том случае, когда для описания $C(b)$ экранов берется аналитическая зависимость типа $C(b) = 1 - e^{-b/t_1}$ (формула (4)). Поскольку

*) Объекты приготавливались в производственных условиях во Всесоюзном научно-исследовательском институте электроннолучевых приборов. Несколько экранов имели на поверхности слоя алюминиевую пленку.

***) Следует отметить, что нахождение t для экранов с удельной навеской m люминофора меньше $0,6$ мг/см² трудно проводить из-за крутого хода $C(b)$ в этом случае. Кроме того, для таких тонких слоев при используемой малой величине сканирующей площадки ($2,5 \times 1400$ мкм²) начинает сказываться зернистая структура экрана. Она приводит к тому, что светимость, а значит, и $C(b)$ оказываются неодинаковыми в разных участках слоя. Этот эффект особенно заметен в рассеянном свете.

этому виду $C(b)$ соответствует функция рассеяния линии $a(x) = \frac{1}{t_1} e^{-2|x|/t_1}$, то, очевидно, и $a(x)$ рассматриваемых телеэкранов лучше всего выражается формулой (1). Поэтому в дальнейшем при рассмотрении размытия экраном изображения будем употреблять указанную экспоненциальную зависимость $a(x)$.

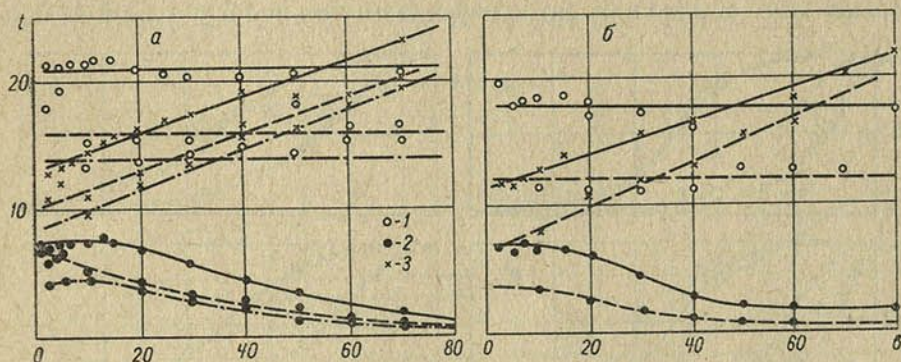


Рис. 2. Зависимость параметров размытия экранов из ZnS·Ag, соответствующих 3 типам функций $C(b)$:

a — в свете люминесценции при ее возбуждении длиной волны $\lambda_{\text{возб}} = 365$ нм; b — в рассеянном свете при $\lambda = 436$ нм; 1 — по формуле (4), 2 — (5); 3 — (6); сплошные линии — для экранов с удельной навеской 2,6 мг/см²; штриховые — 1,3 мг/см², штрих-пунктирные — 0,6 мг/см². t и b в мкм

Исходя из этого, если воспользоваться формулой (1), легко найти соответствующие выражения для пограничной кривой $J(x)$ и функции размытия светлой полоски $E(x, b)$. Можно показать, что

$$J(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} (2 - e^{-\frac{2|x|}{t_1}}) & \text{при } x \leq 0 \\ \frac{1}{2} e^{-\frac{2x}{t_1}} & \text{при } x \geq 0 \end{cases}, \quad (7)$$

$$E(x, b) = \begin{cases} \frac{1}{2} [2 - e^{-\frac{b}{t_1}} (e^{\frac{|2x|}{t_1}} + e^{-\frac{2|x|}{t_1}})] & \text{при } |x| \leq \frac{b}{2} \\ \frac{1}{2} e^{-\frac{2|x|}{t_1}} (e^{\frac{b}{t_1}} - e^{-\frac{b}{t_1}}) & \text{при } |x| \geq \frac{b}{2} \end{cases}. \quad (8)$$

Начало отсчета координаты x при выводе (7) выбрано на границе свет — тень, при выводе (8) — в середине светящейся полоски.

На рис. 3 сделано сопоставление снятых с ленты самописца записей функций $E(x, b)$ экранов и кривых $E(x, b)$, рассчитанных по (8). (Ввиду симметрии $E(x, b)$ показана лишь ее правая половина). Соответствующие параметры размытия t_1 , необходимые для расчета, брались по данным рис. 2. Приведенные графики показывают достаточно хорошее совпадение экспериментальных и расчетных $E(x, b)$.

Аналогичные выводы были получены и при сравнении результатов опыта и расчета относительно вида $J(x)$.

Следует подчеркнуть, что найденные аналитические выражения для характеристик качества люминесцирующих рассеивающих экранов яв-

ляются приближенными. Ясно, что в общем случае $a(x)$, $C(b)$, $E(x, b)$, $J(x)$ не могут полностью характеризоваться одним лишь параметром размытия, так как они зависят от разнообразных свойств экрана, условий освещения и наблюдения.

На практике часто для характеристики свойств той или иной воспроизводящей системы предпринимают эксперименты, ставящие своей целью нахождение вида функции рассеяния линии и пограничной кривой. Для этого обычно находят кривую размытия полоски малой (для по-

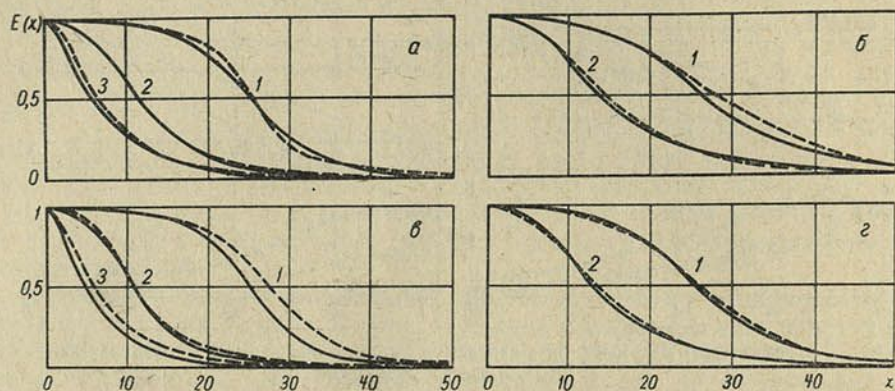


Рис. 3. Экспериментальные (штриховые) и теоретические (сплошные) кривые $E(x, b)$ для экранов из $ZnS \cdot Ag$:

1 — для $b=50$ мкм; 2—20; 3—4; а — при $t=0,6$ мекс/см² и $\lambda_{\text{возб}}=365$ нм; б — 2,6 мекс/см² и 365 нм; в — 1,3 и 436; г — 2,6 и 436; x в мкм

лучения $a(x)$) и большой (для получения $J(x)$) ширины. Рассмотрим некоторые методические вопросы, связанные с измерениями такого рода.

Из физических соображений ясно, что при некоторой малой величине ширины полоски функция $E(x, b)$ будет достаточно близка к $a(x)$. Оценим значение b_{max} полоски, при котором $E(x, b)$ мало отличается по форме от $a(x)$. Найдем величину разности Δx полуширины $E(x, b)$ от полуширины $a(x)$ для данного значения параметра размытия t_1 на уровне, равном половине максимального значения $E(x, b)$ и $a(x)$. Из (1) и (8) следует, что

$$\Delta x = \frac{t_1}{2} \ln \frac{1 + e^{\frac{b}{t_1}}}{2}. \quad (9)$$

Тогда, зная Δx (ее можно положить равной, например, погрешности опыта), из (9) легко получить значение b_{max} , при котором отличие $E(x, b)$ от $a(x)$ на уровне 0,5 $[E(x, b)]_{\text{max}}$ не превышает при данном t_1 значения $\Delta(x)$:

$$b_{\text{max}} = t_1 \ln (2e^{\frac{2\Delta x}{t_1}} - 1). \quad (10)$$

Применив правило Лопиталья, найдем, что при предельно малом значении параметра размытия экрана b_{max} близко к $2\Delta x$, а при $t_1 \rightarrow \infty$ $b_{\text{max}} \rightarrow 4\Delta x$. Для иллюстрации на рис. 4, а приведен график зависимости b_{max} от t_1 при различных Δx .

Аналогичным образом можно найти значение b_{min} , при котором функция $E(x, b)$ при $x > \frac{b}{2}$ будет мало отличаться от пограничной кривой

$J(x)$ при $x > 0$. Сделав, исходя из (7) и (8), простые математические выкладки, получим, что величина b_{\min} , при которой отличие $E(x, b)$ от $J(x)$ на уровне $0,5 [E(x, b)]_{\max}$ не превышает при данном t_1 значения Δx , выражается формулой

$$b_{\min} = -t_1 \ln(e^{\frac{2\Delta x}{t_1}} - 1). \quad (11)$$

Из (11) видно, что при $t_1 \leq \frac{2}{\ln 2} \Delta x$ форма $E(x, b)$ даже при предельно

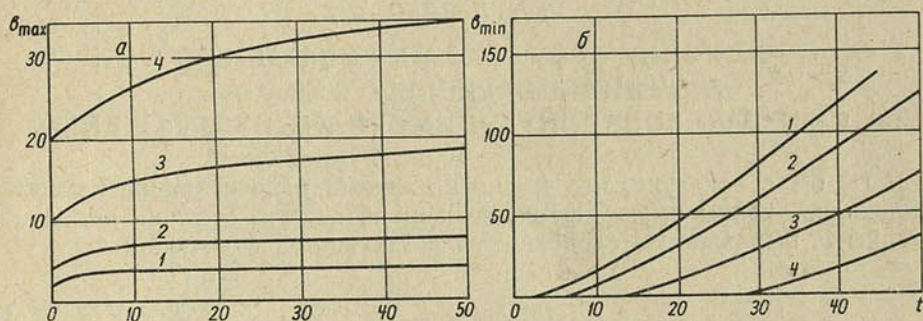


Рис. 4. Зависимость b_{\max} (а) и b_{\min} (б) от параметра размытия t_1 при различных погрешностях Δx измерения функции размытия экрана:

1 — $\Delta x = 1$ мкм; 2 — 2; 3 — 5; 4 — 10; t в мкм

малых b будет с точностью до Δx повторять ход пограничной кривой. Для наглядности на рис. 4, б изображены вычисленные по (11) кривые зависимости b_{\min} от t_1 при различных Δx .

Следует отметить, что точно те же формулы для b_{\max} и b_{\min} получаются и при любом другом уровне, меньшем $0,5 [E(x, b)]_{\max}$.

Литература

1. Марешаль А., Франсон М. Структура оптического изображения. Изд. «Мир», 1964.
2. Сб. «Современное развитие фотографических процессов». Изд. «Искусство», 1960.
3. Сб. «Оценка качества оптического изображения». Геодезиздат, 1959.
4. Прусс П. Х. Ж. научн. и прикл. фотогр. и кинематогр., 8, 216, 1963.
5. Jones R. C. Phot. Sci. Eng., 2, 57; 191; 198; 1958.
6. Shade O. H. R. C. A. Rev., 9, 5; 245; 490; 653; 1948.
7. Эккарт Ф. Электронно-оптические преобразователи изображения и усилители рентгеновского изображения. Госэнергоиздат, 1961.
8. Истомин Г. А. ТКТ, 2, 1, 1961; 2, 1, 1965.
9. Сегал Б. И., Семендеев К. А. Пятизначные математические таблицы. Физматгиз, 1959.

Институт физики
АН БССР

Поступило в редакцию 10.III 1967

К. Г. ПРЕДКО

ВЛИЯНИЕ СВОЙСТВ РАССЕИВАЮЩЕГО ЛЮМИНЕСЦИРУЮЩЕГО ЭКРАНА НА КАЧЕСТВО ВОСПРОИЗВОДИМОГО ИМ ИЗОБРАЖЕНИЯ

В [1] было показано, что мелкодисперсные рассеивающие люминесцирующие экраны имеют функцию контрастности светлой полосы*) ширины b , выражаемую следующей приближенной формулой:

$$C(b) = 1 - e^{-\frac{b}{t}}, \quad (1)$$

где t — некоторый параметр размытия, постоянный для данного экрана. Чем больше величина t , тем более полого идет график $C(b)$. Это соответствует ухудшению качества воспроизведения экраном изображения. В [1] также подробно описаны исследуемые образцы и экспериментальная установка, с помощью которой можно измерить $C(b)$ и t .

В данной работе изучено влияние основных параметров телеэкрана: толщины слоя, наличия алюминиевой пленки, сорта люминофора, поглощательной способности — на функцию контрастности светлой полосы $C(b)$, характеризующую качество воспроизведения изображения. Кроме того, рассмотрена возможность нахождения параметров качества телеэкрана с помощью измерения $C(b)$.

Зависимость функции контрастности светлой полосы от свойств экрана

Влияние толщины слоя. Будем характеризовать толщину экрана удельной навеской m люминофора. На рис. 1, *a* приведены кривые $C(b)$ для слоев люминофора $ZnS \cdot Ag$ различной толщины в свете люминесценции, возбуждаемой ультрафиолетовой радиацией с длиной волны $\lambda_{\text{возб}} = 365$ нм. Аналогичные зависимости показаны на рис. 1, *б* в рассеянном свете. В этом случае освещение слоя производится светом с $\lambda = 436$ нм, близким по спектральному составу к свету люминесценции экрана.

Из рис. 1 видно, что слои с большой оптической толщиной сильно размывают воспроизводимое ими изображение. Сравнение рис. 1, *a* и 1, *б* показывает, что качество обычных рассеивающих экранов выше, чем люминесцирующих, особенно при их малой толщине.

Влияние алюминирования экрана. Рис. 2, *a* иллюстрирует влияние на $C(b)$ тонкой алюминиевой пленки, покрывающей поверхность слоя. Алюминирование телеэкранов обычно применяют для

*) Она определяется как зависимость отношения светимости центра изображения данным экраном светлой полосы ширины b к светимости изображения бесконечно широкой светящейся полосы ($b = \infty$) от b .

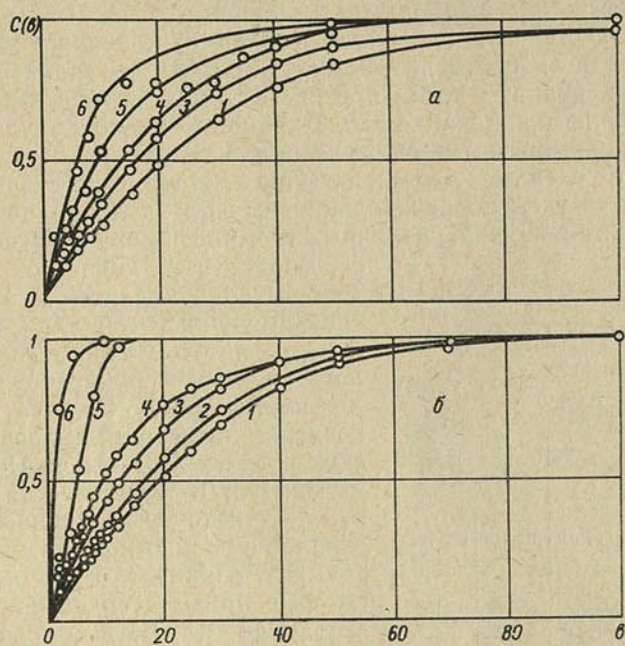


Рис. 1. Зависимость $C(b)$ от толщины экранов из $ZnS \cdot Ag$:

a — в свете люминесценции при ее возбуждении длиной волны $\lambda_{\text{возб}} = 365 \text{ нм}$; b — в рассеянном свете при $\lambda = 436 \text{ нм}$; 1 — при удельной навеске люминофора $4,5 \text{ мг/см}^2$; 2—3,5; 3 — 2,6; 4—1,3; 5—0,6; 6—0,2; b в мкм

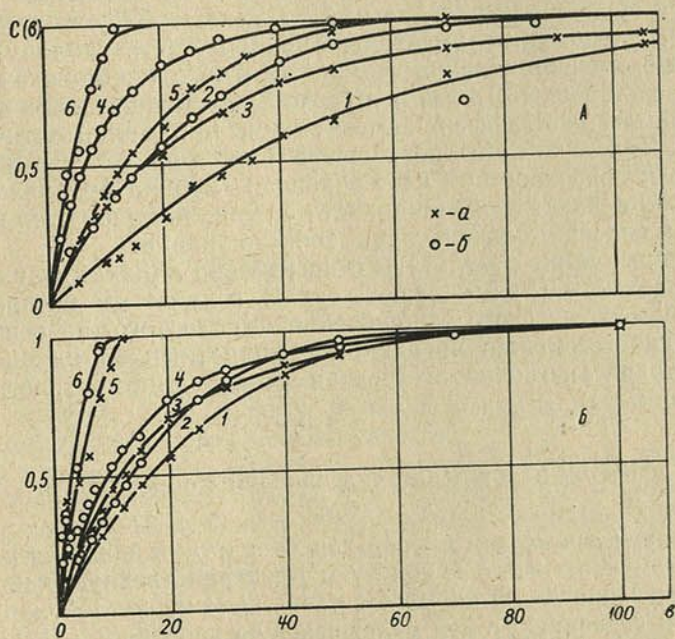


Рис. 2. Зависимость $C(b)$ от наличия алюминиевой пленки (А) и от сорта люминофора (Б):

a — для $Al_2O_3 \cdot Se$; b — для $ZnS \cdot Ag$; 1, 2 — при удельной навеске люминофора $2,6 \text{ мг/см}^2$; 3, 4—1,3; 5, 6—2,6; b в мкм

повышения контраста изображения даваемого всей электроннолучевой трубкой. Из рисунка 2, а видно, что наличие пленки на экране из $ZnS \cdot Ag$ приводит к более плавному ходу $C(b)$ по сравнению с $C(b)$ для неалюминированных слоев при освещении светом с $\lambda = 436$ нм. Это означает, что алюминирование телеэкранов сильно ухудшает качество воспроизводимого оптического изображения.

Влияние сорта люминофора. На рис. 2, б даны функции контрастности светлой полосы одинаковых по удельной навеске слоев, образованных из порошка различных люминофоров, в рассеянном свете.

Таблица
Зависимость $C(b)$ телеэкранов от
длины волны возбуждающей
радиации

b, мкм	Значения C			
	при $m=0,6$ мг/см ²		при $m=4,0$ мг/см ²	
	$\lambda_{\text{возб}} = 313$ нм	365 нм	313 нм	365 нм
10	0,65	0,53	0,28	0,28
20	0,80	0,72	0,54	0,52
30	0,88	0,83	0,67	0,69
40	0,92	0,89	0,79	0,78
50	0,94	0,93	0,87	0,87
100	0,99	0,99	0,95	0,94

Видно, что качество оптического изображения экранов из $ZnS \cdot Ag$ несколько лучше, чем для экранов из $Al_2O_3 \cdot Ce$. Это можно объяснить большим значением показателя рассеяния для частиц $Al_2O_3 \cdot Ce$, что было установлено нами при измерении оптических свойств $ZnS \cdot Ag$ и $Al_2O_3 \cdot Ce$.

Следует отметить достаточно близкий друг к другу ход кривых $C(b)$ для экранов с разными сортами люминофоров. Это означает, что зависимости, которые приводятся обычно для $ZnS \cdot Ag$, подобны соответствующим зависимостям для экранов из $Al_2O_3 \cdot Ce$.

Влияние длины волны возбуждающей радиации. Возбуждение свечения слоев из $ZnS \cdot Ag$ можно было производить двумя

длинами волн — 313 и 365 нм. При этом за счет различия показателя поглощения экрана для указанных $\lambda_{\text{возб}}$ кривые $C(b)$ могут различаться. Действительно, экспериментальные данные (см. таблицу) показали, что качество воспроизведения люминесцентного изображения, возбуждаемого длиной волны 313 нм, лучше, чем при использовании радиации с $\lambda_{\text{возб}} = 365$ нм. Этот эффект заметен лишь при малой оптической толщине слоя. Дело в том, что поглощение радиации с $\lambda_{\text{возб}} = 313$ и 365 нм происходит в поверхностном слое экрана и глубина проникновения возбуждающей радиации заметно влияет на величину размытия изображаемой светлой полосы только в случае тонкого экрана.

Изложенные выше результаты относительно влияния основных параметров экрана на $C(b)$ позволяют судить о качестве воспроизведения этим экраном оптического изображения. Более того, на основании полученных данных можно предложить конкретный метод оценки качества телеэкрана с помощью измерения его функции контрастности светлой полосы $C(b)$.

Метод нахождения разрешающей способности

В настоящее время для полной характеристики качества воспроизводящих систем чаще всего используют пространственную частотную характеристику (иногда ее называют частотно-контрастной характеристикой) $T(\nu)$ и связанную с ней разрешающую способность R [2]. Последняя равна предельной пространственной частоте $\nu_{\text{пред}}$ синусоидальной миры, штрихи которой еще могут быть разрешены наблюдателем или каким-нибудь считывающим устройством.

Так как для рассматриваемых мелкодисперсных люминесцирующих слоев функция рассеяния линии $a(x)$ достаточно хорошо описывается экспоненциальной зависимостью типа $a(x) = \frac{1}{t} e^{-2|x|/t}$ [1], то можно найти аналитический вид $T(v)$ телеэкранов. Легко получить, что пространственная частотная характеристика $T(v)$, являющаяся преобразованием Фурье от $a(x)$, выражается формулой

$$T(v) = \frac{1}{1 + \pi^2 t^2 v^2} \quad (2)$$

Зададимся теперь некоторым значением порогового контраста $K_{пор}$ считывающего устройства. Оно определяется параметрами устройства и вычисляется по формуле

$$K = \frac{E_{max} - E_{min}}{E_{max} + E_{min}},$$

где E_{max} и E_{min} — максимальное и минимальное значение светимости изображения штрихов мери. Если принять, что $[T(v)]_{пор} = K_{пор}$, то из (2) легко найти разрешающую способность телеэкрана

$$R = \frac{1}{\pi t} \sqrt{\frac{1}{K_{пор}} - 1} \quad (3)$$

Для иллюстрации на рис. 3 приведена рассчитанная по (3) зависимость $R(t)$ для нескольких значений $K_{пор}$.

Таким образом, определив с помощью измеренной функции контрастности светлой полосы параметр размытия t , можно по (2) и (3) рассчитать пространственную частотную характеристику $T(v)$ и R рассеивающего люминесцирующего экрана.

Разрешающую способность можно находить и без промежуточного определения параметра t . Действительно, из (1) и (3) следует, что

$$R = -\frac{1}{\pi b} \ln[1 - C(b)] \sqrt{\frac{1}{K_{пор}} - 1} \quad (4)$$

Следовательно, R экрана легко получить, измерив только светимость люминесценции в центре размытого изображения падающего пучка возбуждающей радиации некоторой малой (5—40 мкм) и большой (более 100 мкм) ширины b . С целью упрощения процесса нахождения R формула (4) может быть протабулирована.

Оценка погрешностей нахождения R . Из формулы (3) для R можно сделать вывод, что относительная погрешность получения R равна относительной погрешности измерения параметра размытия t . Так как практически R лучше всего определять с помощью измерения $C(b)$, то из (4) получим

$$\frac{\Delta R}{R} = -\frac{\Delta C(b)}{[1 - C(b)] \ln[1 - C(b)]} \quad (5)$$

Из этой формулы следует, что максимум функции $\Delta R/R = f[C(b)]$ имеет место при $C(b) = 1 - 1/e$. Оптимальная область значений $C(b)$, для кото-

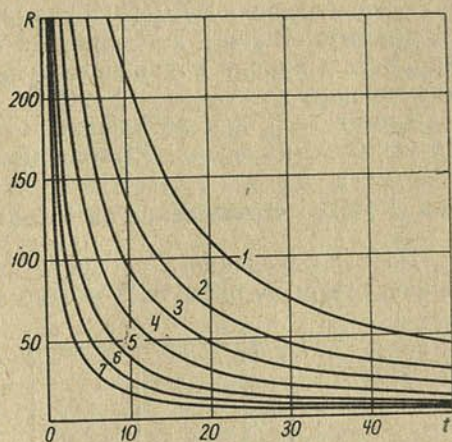


Рис. 3. Зависимость R , mm^{-1} телеэкрана при фотовозбуждении от t , mm при различных значениях порогового контраста $K_{пор}$:

1—0,02; 2—0,05; 3—0,1; 4—0,2; 5—0,4; 6—0,6; 7—0,8

рых $\Delta R/R$ мало отличается от минимального $\Delta R/R$, заключена между 0,4 и 0,8.

Из (5) следует, что при относительной погрешности измерений $C(b)$ в пределах от 1 до 5% значение $\Delta R/R$ изменяется от 2 до 9%. Следовательно, точность нахождения R меньше точности измерения $C(b)$. В то же время такое $\Delta R/R$ меньше погрешности при прямом измерении R [3, 4].

Для рассмотрения вопроса об оптимальной ширине светлой полосы подставим (1) в (5). Тогда

$$\frac{\Delta R}{R} = \frac{t}{b} e^{\frac{b}{t}} \Delta C(b). \quad (6)$$

При исследовании $\Delta R/R(b)$ оказывается, что при $b=t$ эта функция имеет минимум. Значит, погрешности определения R минимальны в том случае, когда ширина падающего пучка радиации равна параметру размытия экрана.

Кроме того, для небольших отклонений b от t , особенно при $b < t$, погрешность измерения R увеличивается незначительно.

Нахождение оптимальных параметров экрана

Из вышесказанного следует, что, используя данные, аналогичные приведенным на рис. 1 и 2, можно найти зависимость разрешающей спо-

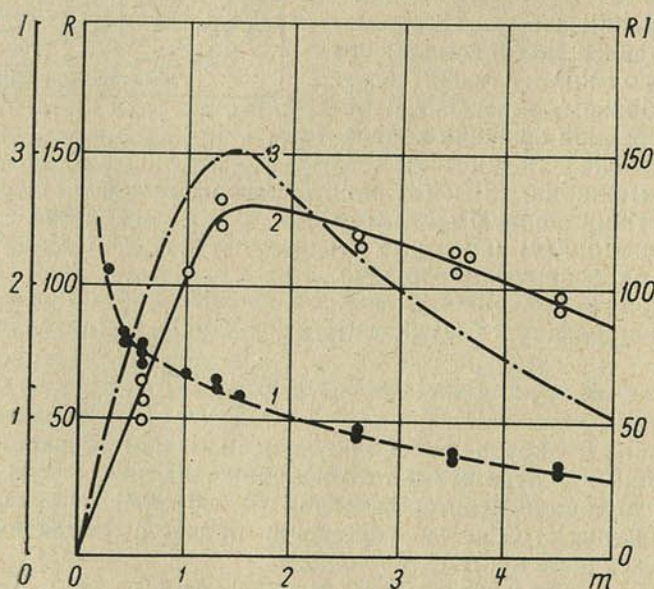


Рис. 4. К определению оптимальной толщины телеэкрана из $ZnS \cdot Ag$ при $\lambda_{\text{возб}} = 365 \text{ нм}$:

1 — зависимость $R(m)$; 2 — зависимость $I(m)$; 3 — зависимость $R(m)I(m)$; R в мм^{-1} ; I и RI в отн. ед.; m в $\text{мг}/\text{см}^2$

собности и других характеристик качества воспроизведения изображения от свойств исследуемого экрана. Для примера на рис. 4 изображена найденная таким образом зависимость $R(m)$. Видно, что наиболее резкое увеличение R достигается в особо тонких экранах.

Принципиального ограничения для предельной разрешающей способности, как видно из рис. 4, нет. Это означает, что за счет все большего уменьшения размера, относительного показателя преломления частиц экрана, его толщины можно получать слои со все большей R . Практически, однако, технологические трудности получения мелкодисперсного порошка люминофора, нанесения тонких слоев с максимальной упаковкой частиц, а также наличие гранулярности накладывают ограничения на величину R .

С другой стороны, при уменьшении толщины и размера частиц экранов обычно происходит падение их светимости [5]. Поэтому нахождение оптимальных параметров люминесцентных слоев требует одновременно учета как их светимости I , так и разрешающей способности R . Критерий выбора оптимального параметра определяется целями использования экрана в каждом конкретном случае. Например, при воспроизведении крупных деталей изображения требования к R невелики. Наоборот, при передаче изображения с тонкой структурой в деталях основное внимание обращается на R , иногда в ущерб светимости экрана.

Для определенности мы выберем один из возможных критериев, часто используемый [6] для оценки люминесцирующих экранов. Он заключается в требовании максимальной производительности рассматриваемых слоев. Исходя из этого требования, решим, в качестве примера, вопрос об оптимальной толщине исследуемых экранов из $ZnS \cdot Ag$. На рис. 4 показана зависимость их светимости и RI от m . Видно, что оптимальная толщина экрана, приготовленного из частиц $ZnS \cdot Ag$, соответствует при фотовозбуждении удельной навеске люминофора, равной примерно $1,5 \text{ мг/см}^2$. Ясно, что она относится к экранам определенного типа и будет, вообще говоря, зависеть от способа приготовления телеэкрана, свойств люминофора, вида возбуждения люминесценции.

В заключение автор рад выразить глубокую признательность А. П. Иванову за руководство и постоянный интерес к работе.

Литература

1. Иванов А. П., Предко К. Г. Вестн. АН БССР, сер. физ.-матем. наук, № 3, 1967.
2. Перрен Ф. УФН, 78, 307, 1962.
3. Миллер В. А., Куракин Л. А. Приемные электроннолучевые трубки. Изд. «Энергия», 1964.
4. Почтарев Б. И., Расплетин К. К. Изв. АН СССР, сер. физич., 23, 462, 1959.
5. Иванов А. П. Опт. и спектр., 4, 225, 236, 1958.
6. Сб. «Каскадные электронно-оптические преобразователи и их применение». Изд. «Мир», 1965.

Институт физики
АН БССР

Поступило в редакцию 10.III 1967

Ф. В. ЧУМАКОВ

ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ С ЛОГАРИФИЧЕСКИМ ЯДРОМ

Рассмотрим на отрезке $[a, \beta]$ плоскости комплексного переменного интегральное уравнение

$$\int_a^x a(t) \varphi(t) dt + \frac{1}{\pi} \int_a^\beta b(t) \ln \frac{|t-x|}{t-a} \varphi(t) dt = f(x). \quad (1)$$

Приведем решение этого уравнения в замкнутой форме, основанное на сведении (1) к равносильному особому уравнению с ядром Коши, которое в свою очередь сводится к краевой задаче Римана. Мы рассмотрим нормальный (не исключительный) случай задачи Римана, когда коэффициент ее не обращается в нуль или бесконечность, что соответствует для исходного уравнения условию $a^2(x) + b^2(x) \neq 0$.

Для упрощения формул будем считать, что коэффициенты уравнения удовлетворяют равенству

$$a^2(x) + b^2(x) \equiv 1.$$

Последнее не влияет на общность задачи. Подставляя в (1) $x=a$, будем иметь $f(a)=0$. Это условие является необходимым для разрешимости исходного уравнения.

Решение (1) ищем в классе функций

$$\varphi(x) = \frac{\varphi^*(x)}{(x-a)^{1-\varepsilon_1} (\beta-x)^{1-\varepsilon_2}}, \quad (2)$$

где $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ — некоторые положительные числа, $\varphi^*(x) \in H$.

Будем предполагать также, что вещественные функции $a(x), b(x), f'(x)$ удовлетворяют на $[a, \beta]$ условию Гельдера.

Учитывая равенство

$$\int_a^x \frac{d\tau}{\tau-t} = \ln \frac{|t-x|}{t-a}, \quad (3)$$

справедливое для $x \in [a, \beta]$ (его можно установить непосредственно), перепишем (1) в форме

$$\int_a^x a(t) \varphi(t) dt + \frac{1}{\pi} \int_a^\beta b(t) \varphi(t) dt \int_a^x \frac{d\tau}{\tau-t} = f(x). \quad (1')$$

Осуществляя перестановку порядка интегрирования в двойном интеграле, получим

$$\int_a^x \left[a(t) \varphi(t) + \frac{1}{\pi} \int_a^\beta \frac{b(\tau) \varphi(\tau) d\tau}{t-\tau} \right] dt = f(x). \quad (4)$$

Дифференцируя (4), будем иметь

$$a(x)\varphi(x) - \frac{1}{\pi i} \int_a^{\beta} \frac{ib(t)\varphi(t)dt}{t-x} = f'(x). \quad (5)$$

Легко видеть, что полученное характеристическое уравнение с ядром Коши (5) равносильно (1).

Вводя аналитическую функцию

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_a^{\beta} \frac{b(t)\varphi(t)dt}{t-z} \quad (6)$$

и поступая, как обычно, придем к краевой задаче Римана

$$\Phi^+(x) = \frac{a(x) + b(x)i}{a(x) - b(x)i} \Phi^-(x) + \frac{b(x)f'(x)}{a(x) - b(x)i}. \quad (7)$$

Индекс задачи (7) в искомом классе ($\Phi^-(\infty) = 0$)

$$\kappa = \text{Ind } G(x) = \text{Ind} \frac{a(x) + b(x)i}{a(x) - b(x)i}$$

назовем индексом характеристического уравнения с логарифмическим ядром (1).

Решение уравнения (1) дается формулой

$$\varphi(x) = a(x)f'(x) + \frac{Z(x)}{\pi} \int_a^{\beta} \frac{b(t)f'(t)}{Z(t)} \frac{dt}{t-x} + Z(x)P_{\kappa-1}(x), \quad Z(x) = X^+(x)[a(x) - b(x)i], \quad (8)$$

где

$$\tilde{\varphi}(x) = a(x)f'(x) + \frac{Z(x)}{\pi} \int_a^{\beta} \frac{b(t)f'(t)}{Z(t)} \frac{dt}{t-x} \quad (9)$$

— частное решение неоднородного уравнения (1);

$$\varphi_k(x) = Z(x)x^{k-1} \quad (k = 1, 2, \dots, \kappa) \quad (10)$$

— полная система линейно независимых решений однородного уравнения.

В случае отрицательного индекса ($\kappa < 0$) возникают условия разрешимости (1):

$$\int_a^{\beta} \frac{b(t)f'(t)}{Z(t)} t^{k-1} dt = 0, \quad k = 1, 2, \dots, |\kappa|. \quad (11)$$

При выполнении их неоднородное уравнение (1) имеет единственное решение. Оно получается по формуле (8) при $c_k = 0$.

Сформулируем результат.

Пусть $a(x), b(x), f'(x) \in H$, $f(a) = 0$, $a^2(x) + b^2(x) \equiv 1$.

Тогда:

1. Если $\kappa > 0$, то однородное уравнение (1) имеет κ линейно независимых решений в искомом классе.

2. Если $\kappa \leq 0$, то однородное уравнение неразрешимо.
3. Если $\kappa \geq 0$, то неоднородное уравнение безусловно разрешимо в искомом классе и его решение зависит от κ произвольных постоянных.
4. Если $\kappa < 0$, то неоднородное уравнение разрешимо лишь при выполнении $|\kappa|$ условий разрешимости.

В заключение приношу благодарность академику Ф. Д. Гахову за внимание к работе.

Литература

1. Гахов Ф. Д. Краевые задачи. Физматгиз, М., 1963.
2. Чумаков Ф. В. Дифференциальные уравнения, 2, № 4, 1966.

*Белорусский государственный
университет имени В. И. Ленина*

*Поступило в редакцию
22.XII 1966*

В. М. МАДОРСКИЙ

ОБ ОДНОМ ВАРИАНТЕ МЕТОДА СПУСКА ДЛЯ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Рассматривается метод приближенного решения операторного уравнения

$$u = Tu, \quad (1)$$

где T — нелинейный ограниченный оператор, действующий в вещественном гильбертовом пространстве H , удовлетворяет условию Липшица с константой $q_T < 1$, $u \in H$.

Введем функционал

$$f(u) = (Tu - u, Tu - u). \quad (2)$$

Градиентом функционала $f(u)$ в H называется оператор $F(u)$, определяемый формулой

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(u + th) - f(u)}{t} = (F(u), h), \quad h \in H.$$

Полагаем, что функционал $f(u)$ имеет градиент $F(u)$, область определения которого совпадает с H , и существует $F'(u)$, причем выполняется условие

$$(F'(u)h, h) \geq m(h, h); \quad m > 0; \quad u, h \in H. \quad (3)$$

При перечисленных условиях, как показано в работе [1], уравнение $F(u) = 0$ имеет в H единственное решение u^* , которое является единственной точкой минимума функционала $f(u)$. Для нахождения u^* , доставляющего минимум функционалу $f(u)$, рассмотрим последовательность

$$f(u_{n-1} + \alpha_n z) = (T(u_{n-1} + \alpha_n z) - (u_{n-1} + \alpha_n z), T(u_{n-1} + \alpha_n z) - (u_{n-1} + \alpha_n z)), \quad (4)$$

в которой u_n ($n \geq 1$) определяется по формуле

$$u_n = T(u_{n-1} + \alpha_n z) \quad (5)$$

(z — произвольный фиксированный элемент, проще всего брать элемент с единичной нормой, u_0 — произвольный элемент из некоторой сферы).

Имеет место

Теорема. Вещественная функция вещественного переменного

$$\psi_{n-1}(\alpha) = f(u_{n-1} + \alpha z) \quad (6)$$

имеет единственный минимум при каждом n в точке α_n , удовлетворяющей неравенству

$$0 < \alpha_n \leq -\frac{(F(u_{n-1}), z)}{m} \quad \left(\text{или} \quad 0 > \alpha_n \geq -\frac{(F(u_{n-1}), z)}{m} \right),$$

и какова бы ни была последовательность положительных (отрицательных) чисел γ_n ($n = 1, 2, \dots$), удовлетворяющих при $\varepsilon > 0$ неравенствам $\varepsilon \leq \gamma_n \leq \alpha_n$ ($\alpha_n \leq \gamma_n \leq \varepsilon$), итерационный процесс (5), начинающийся с $u_0 \in S\left(u^*, \sqrt{\frac{2}{m} f(u_0)}\right)$, сходится к u^* , причем

$$f(u_n) \searrow f(u^*), \quad (7)$$

$$f(u_n) < q_T^{2n} f(u_0), \quad (8)$$

$$\|u^* - u_n\| \leq q_T^n \sqrt{\frac{2}{m} f(u_0)}. \quad (9)$$

Доказательство. Имеем

$$\psi'_0(\alpha) = (F(u_0 + \alpha z), z),$$

$$\psi'_0(0) = (F(u_0), z),$$

$$\psi''_0(\alpha) = (F'(u_0 + \alpha z)z, z) \geq m(z, z) > 0.$$

В силу последнего неравенства функция $\psi_0(\alpha)$ имеет единственный минимум в некоторой точке α_1 .

Пусть $(F(u_0), z) < 0$. Тогда $\psi_0(\alpha)$ убывает в промежутке $[0, \alpha_1]$, $\alpha_1 > 0$. Поскольку в точке α_1 достигается минимум $\psi_0(\alpha)$, то

$$0 = (F(u_0 + \alpha_1 z), z),$$

$$0 = (F(u_0), z) + \alpha_1 (F'(u_0 + \Theta \alpha_1 z)z, z), \quad (10)$$

$$(0 < \Theta < 1).$$

Таким образом, из формулы (10) находим

$$\alpha_1 = - \frac{(F(u_0), z)}{(F'(u_0 + \Theta \alpha_1 z)z, z)}. \quad (11)$$

Учитывая соотношение (3), имеем

$$0 < \alpha_1 \leq - \frac{(F(u_0), z)}{m}. \quad (12)$$

Так как $0 < \gamma_1 < \alpha_1$ ($\gamma_1 = \Theta \alpha_1$) и функция $\psi_0(\alpha)$ убывает в промежутке $[0, \alpha_1]$, то

$$f(u_0 + \gamma_1 z) < f(u_0). \quad (13)$$

Положим $y_0 = u_0 + \gamma_1 z$, тогда, следуя [1], можно представить $f(y_0)$ в виде

$$\begin{aligned} f(y_0) &= f(u^*) + (F(u^*), y_0 - u^*) + \\ &+ \frac{1}{2} (F'[u^* + \Theta_1(y_0 - u^*)](y_0 - u^*), y_0 - u^*) \end{aligned} \quad (14)$$

$$(0 < \Theta_1 < 1).$$

Если u^* — точка минимума функционала $f(u)$, то

$$f(u^*) = 0, \quad F(u^*) = 0. \quad (15)$$

Тогда равенство (14), учитывая соотношение (15), можно представить в виде

$$f(y) = \frac{1}{2} (F' [u^* + \Theta_1(y_0 - u^*)](y_0 - u^*), y_0 - u^*) \geq \\ \geq \frac{1}{2} m \|y_0 - u^*\|^2, \quad (16)$$

$$\|y_0 - u^*\| \leq \sqrt{\frac{2}{m} f(y_0)} < \sqrt{\frac{2}{m} f(u_0)}, \quad (17)$$

т. е.

$$y_0 \in S\left(u^*, \sqrt{\frac{2}{m} f(u_0)}\right).$$

Для u_1 , определяемого по формуле (5), имеем

$$f(u_1) = (Tu_1 - u_1, Tu_1 - u_1) = \|Tu_1 - u_1\|^2 = \\ = \|T^2(u_0 + \alpha_1 z) - T(u_0 + \alpha_1 z)\|^2 < q_T^2 \|T(u_0 + \gamma_1 z) - (u_0 + \gamma_1 z)\|^2 = \\ = q_T^2 f(u_0 + \gamma_1 z) < q_T^2 f(u_0). \quad (18)$$

Случай, когда $(F(u_0), z) > 0$, рассматривается аналогично.

Выполняя индукцию, нетрудно показать, что

$$0 < \alpha_{n+1} \leq -\frac{(F(u_n), z)}{m} \quad \left(0 > \alpha_{n+1} \geq -\frac{(F(u_n), z)}{m}\right), \quad (19) \\ f(u_n) < q_T^{2n} f(u_0)$$

$$\text{и все } y_n \in S\left(u^*, \sqrt{\frac{2}{m} f(u_0)}\right).$$

Сравнивая формулы (8), (9) и (18), (19), получаем утверждение теоремы.

При удачном выборе $\gamma_n = \Theta_n \alpha_n$ ($0 < \Theta_n < 1$) можно надеяться, что сходимость будет более быстрая, чем это позволяет утверждать теорема. Предложим один из возможных алгоритмов.

Пусть $0 < \lambda < 1$. Рассмотрим последовательность функционалов

$$P_{n-1}(\gamma) = (F(u_{n-1} + \gamma z), z).$$

Если $(F(u_0), z) < 0$, то $\gamma_1 > 0$ и для построения u_1 по начальному приближению u_0 поступаем следующим образом. Берем некоторое $\overset{0}{\gamma}$ из $\left(0, -\frac{(F(u_0), z)}{m}\right)$ и вычисляем $P_0(\overset{0}{\gamma})$. Если $P_0(\overset{0}{\gamma}) < 0$, то вычисляем $P_0(\overset{0}{\gamma}\lambda^{-1})$, $P_0(\overset{0}{\gamma}\lambda^{-2})$ и так далее до тех пор, пока не будет $P_0(\overset{0}{\gamma}\lambda^{-k_0}) > 0$, и полагаем $\gamma_1 = \overset{0}{\gamma}\lambda^{-k_0+1}$. Если же $P_0(\overset{0}{\gamma}) > 0$, то вычисляем $P_0(\overset{0}{\gamma}\lambda)$, $P_0(\overset{0}{\gamma}\lambda^2)$ и так далее до тех пор, пока будет $P_0(\overset{0}{\gamma}\lambda^{k_0}) < 0$, и берем $\gamma_1 = \overset{0}{\gamma}\lambda^{k_0}$. Вполне аналогично поступаем и в том случае, когда $(F(u_0), z) > 0$, с той лишь разницей, что берем $\overset{0}{\gamma} < 0$. Подобную процедуру выполняем на каждом шаге вычислительного процесса.

Замечание. Возможны некоторые упрощения, если после первого шага несколько видоизменим алгоритм. Пусть $\gamma_2 > 0$. В функционал $P_1(\gamma)$

подставляем γ_1 . Если $P_1(\gamma_1) < 0$, то берем $\gamma_2 = \gamma_1$, если $P_1(\gamma_1) > 0$, то ищем $P_1(\gamma_1\lambda)$, $P_1(\gamma_1\lambda^2)$, и так далее до тех пор, пока не станет $P_1(\gamma_1\lambda^{k_1}) < 0$, и берем $\gamma_2 = \gamma_1\lambda^{k_1}$. Аналогично находим γ_n ($n \geq 2$).

Нами рассмотрена одна из разновидностей метода спуска. Эффективность метода определяется тем, насколько близки γ_n к α_n . Если γ_n определяется из уравнения

$$\gamma_n = PT(u_{n-1} + \gamma_n) - Pu_{n-1},$$

где P — проектор, то мы имеем метод осреднения функциональных поправок [2, 3]. Если γ_n определяем по формуле $\gamma_n = P(Tu_{n-1} - u_{n-1})$, то имеем процесс, описанный в [4, 5].

В заключение хочу выразить искреннюю благодарность О. А. Лисковцу за замечания и внимание к работе.

Литература

1. Яковлев М. Н. Тр. Матем. ин-та им. В. А. Стеклова, **34**, 1965.
2. Соколов Ю. Д. УМЖ, **9**, № 1, 1957.
3. Соколов Ю. Д. УМЖ, **17**, № 3, 1965.
4. Мадорский В. М. Весті АН БССР, сер. фіз.-мат. навук, № 3, 1965.
5. Мадорский В. М. Весті АН БССР, сер. фіз.-мат. навук, № 3, 1966.

Брестский педагогический институт
им. А. С. Пушкина

Поступило в редакцию 6.V 1967

УДК 621.382 : 537.311.33

Н. Н. СИРОТА, В. Б. ШИПИЛО

ИЗМЕРЕНИЯ ЭФФЕКТА ХОЛЛА И ЭЛЕКТРОПРОВОДНОСТИ ПОЛУПРОВОДНИКОВ ПРИ ВЫСОКИХ ДАВЛЕНИЯХ И ТЕМПЕРАТУРАХ

Исследование изменения постоянной Холла и электропроводности полупроводников в зависимости от температуры при высоких давлениях представляет существенный интерес для физики полупроводниковых кристаллов. Совместные измерения электропроводности и эффекта Холла при различных температурах и давлениях позволяют получить достаточно надежную информацию об изменении подвижностей носителей тока, ширины запрещенной зоны в зависимости от давления, а также высказать определенные суждения о некоторых особенностях зонной структуры исследуемых полупроводников.

До настоящего времени измерениям постоянной Холла при высоких давлениях препятствовали трудности создания внутри камеры высокого давления регулируемой достаточно высокой напряженности магнитного поля при высокой температуре. Все известные в литературе исследования эффекта Холла производились либо в магнитном поле, создаваемом вне камеры высокого давления, либо внутри камеры (с твердой, передающей давление средой), поршни которой одновременно служили полюсами магнита [1—5]. Это обстоятельство обуславливает выбор немагнитного конструктивного материала для камер давления, а в таких камерах получить достаточно высокие давления трудно. Лишь в работе [6] была сделана попытка измерения эффекта Холла на переменном токе до давления 15 кбар при невысоких температурах в устройстве, помещенном внутри камеры. Однако в методическом и в конструктивном отношении вопрос об измерениях постоянной Холла в поле, создаваемом внутри камеры, не был разработан в необходимой мере.

В настоящей работе показана возможность создания компактной и устойчиво работающей установки по исследованию эффекта Холла и удельной электропроводности полупроводниковых кристаллов при температурах от комнатной до 800° К в магнитном поле, создаваемом внутри камеры высокого давления, при давлении до 30 кбар в жидкой фазе (рис. 1).

Внутри канала камеры, состоящей из конуса 2 и поддержек 3, помещается электромагнит с ферромагнитными сердечниками 9, 13 и трубчатым внешним панцирем 10, изготовленными из железа армко. В панцире проделаны отверстия 11 для свободного прохода жидкости во внутрь магнита. Намагничивание электромагнита создавалось катушкой 12, питаемой, как правило, постоянным током, величина которого поддерживалась постоянной и измерялась амперметром М104.

Между полюсами электромагнита помещалась плоская печь сопротивления АВ с нагревателем из немагнитной хромелевой ленты 22 с бифилярной обмоткой. Печь сопротивления в двух сечениях показана на правой стороне рис. 1. Нагревательная лента изолировалась от медного

экрана 21 слоем слюды, а от остальных частей магнита тепловым изолятором 17. Изоляция образца 20 от экрана осуществлялась также слюдой 18, 19. Печь сопротивления питалась стабилизированным переменным током, регулировка которого производилась при помощи латров.

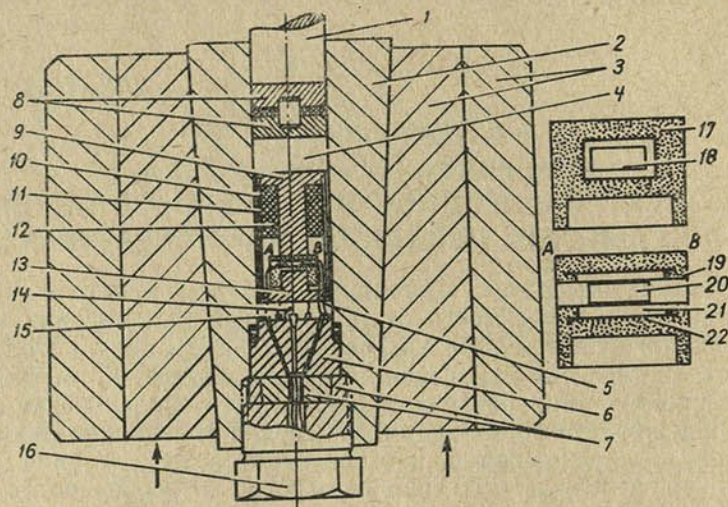
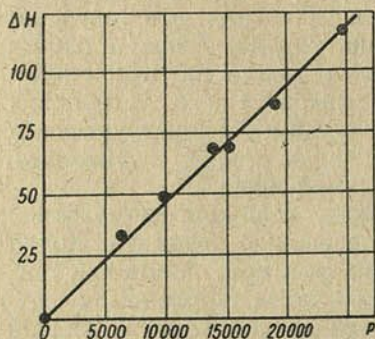


Рис. 1. Установка высокого давления для изучения коэффициента Холла и электропроводности полупроводников

Все выводы из внутренней части электромагнита производились через изолированные отверстия нижнего сердечника 13.

Важной особенностью описываемой установки является непрерывный вывод термопары 5, а также конструкция нижней заглушки 6 с одинадцатью надежно изолированными от корпуса электропроводами 15. Заглушка 6 упирается в упорный пятак 7, который поджимается опорной гайкой 16.



Давление в камере создавалось путем передвижения поршня высокого давления 1 с уплотняющим грибом 8. В качестве жидкой фазы 4, обеспечивающей гидростатическое давление в камере, использо-

Рис. 2. Зависимость изменения напряженности магнитного поля ΔH , э электромагнита от давления P , бар

вался авиационный бензин, который предварительно откачивался под вакуумом и тем самым освобождался от воздушных пузырьков.

Измерение давления осуществлялось манганиновым манометром 14 с точностью 200—300 бар. Температура измерялась хромель-алюмелевой термопарой, холодные концы которой находились в дьюаровском сосуде со льдом. Точность измерения температуры составляла $\pm 2^\circ \text{C}$. Изменение термоэдс термопары с давлением не принималось во внимание.

Напряженность магнитного поля электромагнита измерялась с помощью баллистического гальванометра. Надежная воспроизводимость результатов градуировки электромагнита достигалась лишь после двух

циклов обжатия до давления 25 кбар. На рис. 2 приведена градуировочная прямая изменения (уменьшения) напряженности магнитного поля в зазоре электромагнита при протекании тока в 300 ма. При зазоре между полюсами в 2,5 мм начальное поле H_0 при нормальном давлении составляло 1375 э.

Из рисунка видно, что при давлении 25 кбар напряженность магнитного поля снижалась на 115 э. Измерения, проведенные при фиксированных давлениях, но при различных температурах, показали, что напряженность магнитного поля в зазоре между полюсами электромагнита не изменялась с изменением температуры образца.

Для измерения эффекта Холла и электропроводности при атмосферном давлении и в вакууме использовался термостат, показанный на рис. 3.

Через штуцер 9 производилась откачка воздуха из внутреннего отверстия термостата, в котором находился описанный выше электромагнит 1 с печью. Система вакуумных кранов позволяла также заполнять внутреннее отверстие очищенным газом гелия. После измерений при обычных давлениях электромагнит с заглушкой переносился в камеру высокого давления без каких-либо изменений положения образца и без нарушения контактов. Образец с контактными лапками размером $6 \times 1,7 \times 0,3$ мм вырезался на ультразвуковой установке с помощью специального шаблона. Измерения эффекта Холла и электропроводности производились соответственно высокоомным и низкоомным потенциометрами Р307 и Р330.

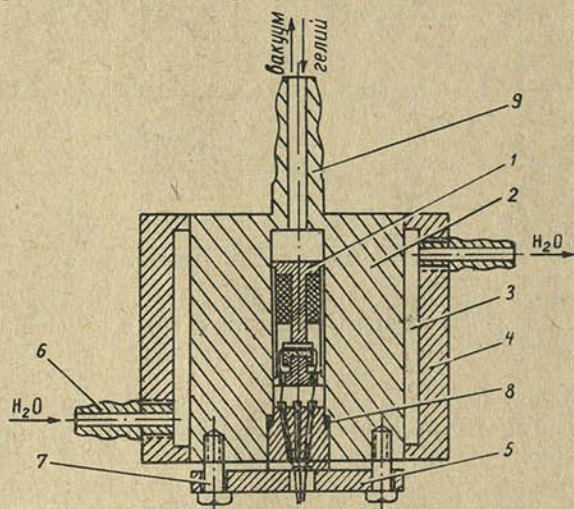


Рис. 3. Термостат:

1 — электромагнит; 2, 4 — корпус и кожух термостата; 3, 6 — полость для воды и подводящий штуцер; 5, 7 — поджимная пластина с болтом; 8 — асбестовое уплотнение

Согласно экспериментальным данным, приведенным на рис. 4, а, полученным на монокристаллическом образце InSb *n*-типа с концентрацией носителей тока $1,7 \cdot 10^{14}$ см⁻³ при нормальном давлении и температуре 77° К, логарифм постоянной Холла в широком интервале давлений практически линейно возрастает с увеличением давления. Наблюдаемое отклонение от линейности при комнатных температурах и при 373° К в области высоких давлений связано, по-видимому, с влиянием примесей. При повышенных температурах, например при 523° К, вплоть до 19 кбар отклонения от линейности не наблюдается.

Из рис. 4, б видно, что удельная электропроводность того же образца InSb с увеличением давления при всех измеренных температурах снижается. При комнатной температуре и при 373° К при высоких давлениях наблюдается отклонение от линейности изменения логарифма проводимости от давления, связанное с наличием примесей. При 523° К в обследованном интервале давлений до 20 кбар отклонения от линейности не наблюдается. Заметим, что с повышением температуры уменьшается тангенс угла наклона кривых $\lg \sigma(P)$.

Полученные экспериментальные результаты свидетельствуют о том, что с увеличением давления подвижности носителей тока уменьшаются. Например, при комнатной температуре при 21 кбар холловская подвижность электронов понижается более чем на 50% по сравнению с наблюдаемой в исследованном образце при нормальном давлении.

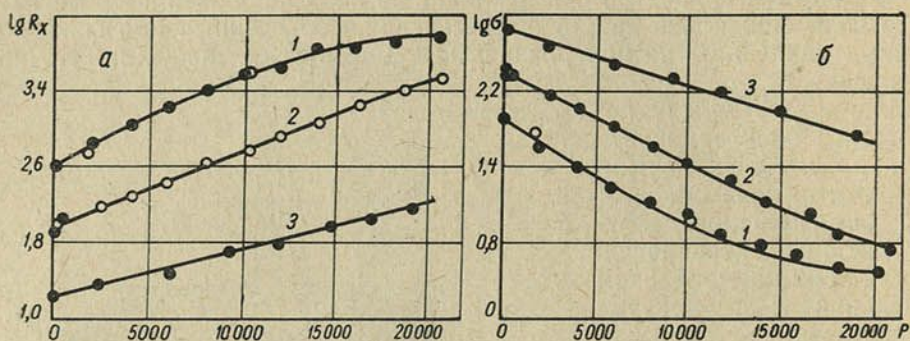


Рис. 4. Зависимость логарифма коэффициента Холла R_H (а) и логарифма удельной электропроводности σ (б) образца InSb от давления P , бар:

1 — при 295° К; 2—373; 3—523

Изменения удельной электропроводности и постоянной Холла в зависимости от давления характеризуют вместе с тем особенности зонной структуры антимонида индия.

Литература

1. Gielessen J., Klitzing K. H. Z. für Phys., 145, 151, 1956.
2. Paul W., Benedek G. B., Warschauer D. M. Rev. Sci. Instr., 30, 874, 1959.
3. Верещагин Л. В., Лихтер А. И. ДАН СССР, 103, № 5, 1955.
4. Лихтер А. И. ПТЭ, № 2, 1960.
5. Лихтер А. И. ПТЭ, № 1, 1960.
6. Аверкин А. А., Богомолов В. Н. ФТТ, 3, № 2, 1961.

Институт физики твердого тела
и полупроводников АН БССР

Поступило в редакцию 28.III 1967

УДК 536.421.4+536.421.1

В. М. ВАРИКАШ, З. ШОЛЬЦ, И. МЫЛ

ИНТЕРФЕРОМЕТРИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ РОСТА КРИСТАЛЛОВ СЕГНЕТОВОЙ СОЛИ ИЗ РАСТВОРА

При выращивании кристаллов из растворов основными процессами, определяющими скорость их роста, являются подвод вещества к растущим граням и закрепление атомов или ионов на них. Современные теории предполагают, что подошедшие к грани кристалла атомы или ионы почти мгновенно закрепляются на них. В этом случае лимитирующим процессом, определяющим рост кристаллов из раствора, является подвод вещества. Скорость поступления вещества к растущему кристаллу в первую очередь определяется распределением концентрации около его грани. В связи с этим исследование концентрации около грани кристалла имеет большое практическое значение.

В общем случае концентрация раствора около кристалла является функцией многих переменных $c=f(x, y, z, T, t, c)$, в том числе исходной концентрации раствора, пространственных координат, температуры и времени. В стационарных условиях можно считать, что распределение концентрации не зависит от времени. Зависимость концентрации от температуры является сложной, особенно если учесть выделение кристаллизационной теплоты. Однако при росте кристаллов из растворов кристаллизационная теплота невелика и отводится от кристалла самим растворителем. В первом приближении ее влиянием на процесс роста можно пренебречь. Таким образом, задача сводится к нахождению функции $c=f(x, y, z, T)$. В общем случае нахождение этой функции является сложной экспериментальной задачей. При изучении распределения концентрации около растущего кристалла в трехмерном случае значительное влияние будут оказывать конвекционные потоки, возникающие в растворе. Кроме того, все существующие методики не позволяют достаточно точно определить концентрацию или разность концентраций между двумя любыми точками, расположенными внутри раствора. Поэтому в настоящее время обычно проводят изучение роста кристаллика в тонких препаратах, ограничиваясь плоским случаем [1—3].

Исследование распределения концентрации около растущего кристалла сегнетовой соли проводилось оптическим методом с помощью интерференционного микроскопа. Преимущество этого метода по сравнению с другими методами состоит в том, что само измерение не вносит никаких изменений в распределение концентрации около растущего кристалла.

Установка (рис. 1) состоит из микроскопа 1 с фотонасадкой 2, интерференционного клина 3, помещенного в специальном держателе, и источника монохроматического света 4 с конденсатором для создания параллельного пучка света.

Основной измерительной частью установки являются две одинаковые стеклянные пластинки, которые с одной стороны напылением в вакууме покрыты тонким полупрозрачным слоем золота. Пластинки устанавливаются в специальном термостатированном держателе и с одной стороны зажимом прижимаются вплотную друг к другу. С другой стороны для создания зазора между пластинками помещается узкая полоска из покровного стекла. В результате этого возникает воздушный клин. При освещении этого клина пучком параллельных монохроматических лучей возникают интерференционные полосы равной толщины, параллельные ребру клина (рис. 2, а).

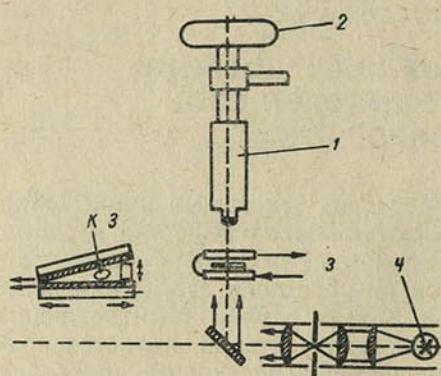


Рис. 1. Схема оптической установки

При исследовании распределения концентрации около растущего кристалла в пространство между пластинами клина вносится специально выращенный микроскопический кристаллик с хорошо выраженными гранями. К кристаллику подводится несколько капель перегретого раствора известной концентрации. Термостатированием держателя интерференционного клина в капле раствора можно создать любое желаемое перенасыщение и наблюдать рост кристаллика.

Для лучшего контроля за температурным режимом кристаллик фотографировался через определенные промежутки времени. Если затем построить график зависимости размеров кристаллика от времени, то получим кривые, приведенные на рис. 3.

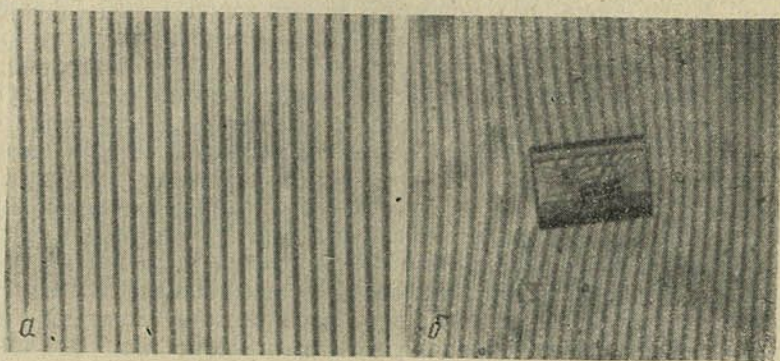


Рис. 2. Общий вид интерференционных линий (увеличение 65):
а — при отсутствии кристаллика; б — при наличии кристаллика

В начальной стадии роста перенасыщение в капле сохраняется постоянным и размеры кристаллика возрастают пропорционально времени. Спустя некоторое время капля обедняется веществом, перенасыщение уменьшается и скорость роста кристаллика замедляется. Для исследования использовались лишь фотоснимки, соответствующие постоянной скорости роста кристалла.

Отложение вещества на кристалле вызывает изменение концентрации раствора непосредственно у его граней. Изменение концентрации влечет за собой появление дополнительной оптической разности

хода для проходящего оптического луча, которая изменяется от точки к точке раствора. Вследствие этого происходит искривление интерференционных линий вблизи растущего кристалла (рис. 2, б). Как показано в работе [4], по отклонению интерференционных кривых от прямых линий можно определить показатель преломления раствора:

$$n = n_{\infty} \frac{d}{d+b},$$

где n_{∞} — показатель преломления раствора на бесконечном расстоянии от кристаллика, численно равный показателю преломления раствора исходной концентрации; d — расстояние от места расположения кристаллика до ребра клина, образуемого полупрозрачными стеклянными пластинками; b — отклонение интерференционной линии в данной точке от прямой линии.

Для определения показателя преломления раствора в различных точках около кристалла необходимо с большой точностью знать величину b . Измерение этой величины проводилось на компараторе с точностью до четвертого знака после запятой.

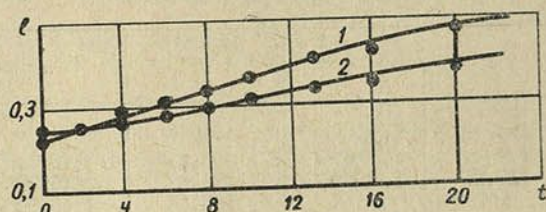


Рис. 3. Зависимость размеров кристаллика сегнетовой соли l , мм от времени роста t , мин при $T=27^{\circ}\text{C}$, $\Delta T=3^{\circ}\text{C}$:

1 — грань (001); 2 — грань призмы

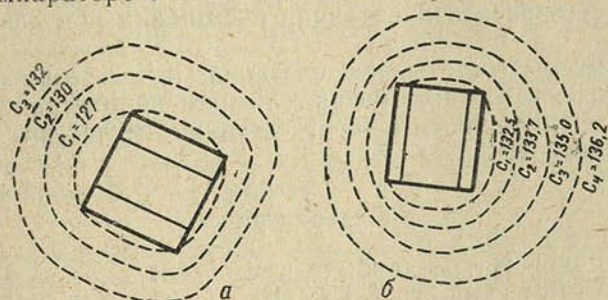


Рис. 4. Изоконцентрационные линии около кристаллика сегнетовой соли при $\Delta T=4^{\circ}\text{C}$ (а) и 3°C (б)

Чтобы перейти от значений показателя преломления к концентрациям, необходимо первоначально установить зависимость показателя преломления раствора от концентрации. Измерение этой зависимости проводилось с помощью интерферометра для жидкостей фирмы Цейсса с точностью до шестого знака после запятой. В таблице представлены результаты измерений для различных концентраций сегнетовой соли.

В пределах экспериментальных ошибок измерений в интервале исследуемых концентраций зависимость показателя преломления от концентрации линейная. Полученное по методу наименьших квадратов уравнение прямой имеет вид

$$n = 0,00049 C + 1,34406.$$

Таким образом, для каждого значения показателя преломления по приведенному уравнению можно найти значение концентрации раствора в любой точке около растущего кристаллика, построить карту распределения концентраций и по ней провести изоконцентрационные линии (рис. 4).

При малых перенасыщениях изоконцентрационные линии следуют границе кристалла, при больших перенасыщениях эти линии все более приближаются по форме к вытянутым эллипсам. Значения концентрации выражены в граммах соли на 100 г воды.

Приведенные результаты исследований показывают, что в условиях роста, определяемых диффузией раствора, концентрация растворенного

Таблица
Зависимость показателя преломления
от концентрации раствора сегнетовой соли
при 30° С

<i>c</i>	<i>n</i>	<i>c</i>	<i>n</i>
121,73	1,39870	130,23	1,402532
124,44	1,399986	133,33	1,403795
127,27	1,401237	136,05	1,405308
		140,00	1,406895

вещества непостоянна вдоль растущей грани. Наибольшее значение концентрации принимает у ребер кристалла и наименьшее у середины растущей грани. Разность концентрации между максимальным значением у края грани и минимальным значением у центра грани возрастает с увеличением перенасыщения. Кроме того, значение концентрации раствора непосредственно у растущей грани всегда меньше значения концентрации исходного раствора. Следовательно, перенасыщение на грани кристалла всегда меньше перенасыщения в остальных частях раствора. Эта разность перенасыщений зависит от скорости роста кристалла, температуры и целого ряда других параметров. При определенных условиях концентрация раствора на грани растущего кристалла может стать даже равной концентрации насыщения при данной температуре.

Приведенные результаты исследований качественно совпадают с экспериментально изученным распределением концентрации около других кристаллов, полученным в [5—7], а также согласуются с результатами исследований [8].

Литература

1. Berg W. F. Proc. Roy. Soc., A 164, 79, 1938.
2. Bunn C. W. Disc. Farad. Soc., 5, 132, 1949.
3. Krueger G. C., Miller C. W. J. Chem. Phys., 21, 2018, 1953.
4. Humphreys-Owen P. F. Proc. Roy. Soc., A 197, 218, 1949.
5. Šolc Z., Čermak K. Icmna mechanika a optika, 7, 203, 1962.
6. Šolc Z. Sbornik referatu IV konference o monokrystalech v Turnove 1961. Turnov, 1962.
7. Šolc Z. Sbornik referatu semináře o monokrystalech. Turnov, 1963.
8. Humphreys-Owen P. F. Acta Crystallogr., 8, 112, 1955.

Институт физики твердого тела
и полупроводников АН БССР,
ЧССР, Пардубице, Химико-
технологический институт

Поступило в редакцию 25.IV 1967

З М Е С Т

Физико-математические науки в АН БССР (к 50-летию Советской власти)	5
МАТЭМАТЫКА	
Д. А. Супруненко. К теории коммутативных матричных алгебр над несовершенным полем	9
А. Х. Турецкий, И. И. Корзун. Некоторые тождества	20
Н. П. Кеда, Л. А. Янович. Сходимость квадратурного процесса для некоторых классов периодических функций	31
Л. А. Янович. Приближение периодических аналитических функций тригонометрическими многочленами и рациональными тригонометрическими функциями. II	40
Н. А. Лепешинский. Одна задача теории расписаний и максимум суммы линейных форм на множестве подстановок	51
В. В. Бобков, В. Н. Абрашин. Сходимость некоторых схем метода интегральных соотношений в случае задачи Коши для гиперболического уравнения второго порядка	55
П. Г. Юров. Интегралы типа Коши и уравнения в конечных разностях	67
В. А. Ведерников, А. П. Кохно. О влиянии цепей подгрупп на свойства конечных групп	75
В. С. Танаев, Г. М. Левин. Об оптимальном поведении систем с частично ограниченной памятью	82
ФІЗІКА	
М. М. Корань, М. М. Сирата. Дифузія цинку з паравої фази у сурму	89
М. В. Бортнік, В. Д. Ткачоў, А. В. Юхневіч. Аб уплыве прымесі кіслароду на выпраменьваючую рэкамбінацыю ў крэмніі	93
А. В. Мінкевіч. Аб узаемадзеянні гравітацыйнага поля з квантаваным электрамагнітным і дзіракаўскім полямі	97
К. Г. Предко, А. П. Иванов. О функции рассеяния линии мелкодисперсных люминесцирующих экранов	106
К. Г. Предко. Влияние свойств рассеивающего люминесцирующего экрана на качество воспроизводимого им изображения	112
КАРОТКІЯ ПАВЕДАМЛЕННІ	
В. Ф. Чумаков. Характеристическое уравнение с логарифмическим ядром	118
В. М. Мадорский. Об одном варианте метода спуска для решения нелинейных функциональных уравнений	121
Н. Н. Сирота, В. Б. Шипило. Измерения эффекта Холла и электропроводности полупроводников при высоких давлениях и температурах	125
В. М. Варикаш, З. Шольц, И. Мыл. Интерферометрическое исследование роста кристаллов сегнетовой соли из раствора	129

СОДЕРЖАНИЕ

Физико-математические науки в АН БССР (к 50-летию Советской власти) . . .	5
МАТЕМАТИКА	
Д. А. Супруненко. К теории коммутативных матричных алгебр над несовершенным полем	9
А. Х. Турецкий, И. И. Корзун. Некоторые тождества	20
Н. П. Кеда, Л. А. Янович. Сходимость квадратурного процесса для некоторых классов периодических функций	31
Л. А. Янович. Приближение периодических аналитических функций тригонометрическими многочленами и рациональными тригонометрическими функциями. II	40
Н. А. Лепешинский. Одна задача теории расписаний и максимум суммы линейных форм на множестве подстановок	51
В. В. Бобков, В. Н. Абрашин. Сходимость некоторых схем метода интегральных соотношений в случае задачи Коши для гиперболического уравнения второго порядка	55
П. Г. Юров. Интегралы типа Коши и уравнения в конечных разностях	67
В. А. Ведерников, А. П. Кохно. О влиянии цепей подгрупп на свойства конечных групп	75
В. С. Танаев, Г. М. Левин. Об оптимальном поведении систем с частично ограниченной памятью	82
ФИЗИКА	
Н. Н. Корень, Н. Н. Сирота. Диффузия цинка из паровой фазы в сурьму	89
М. В. Бортник, В. Д. Ткачев, А. В. Юхневич. О влиянии примеси кислорода на излучательную рекомбинацию в кремнии	93
А. В. Минкевич. О взаимодействии гравитационного поля с квантованным электромагнитным и дираковским полями	97
К. Г. Предко, А. П. Иванов. О функции рассеяния линии мелкодисперсных люминесцирующих экранов	106
К. Г. Предко. Влияние свойств рассеивающего люминесцирующего экрана на качество воспроизводимого им изображения	112
КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ	
В. Ф. Чумаков. Характеристическое уравнение с логарифмическим ядром	118
В. М. Мадорский. Об одном варианте метода спуска для решения нелинейных функциональных уравнений	121
Н. Н. Сирота, В. Б. Шипило. Измерения эффекта Холла и электропроводности полупроводников при высоких давлениях и температурах	125
В. М. Варикаш, З. Шольц, И. Мыл. Интерферометрическое исследование роста кристаллов сегнетовой соли из раствора	129

АТ 76486. Здана ў набор 19/VII-67 г. Падпісана да друку 19/IX-67 г. ФармаТ 70×108^{1/16}. Фіз. друк. арк. 9,0. Ум. друк. арк. 12,6. Уч.-выд. арк. 12,5. Выд. заказ 410. Друк заказ 738. Цана 60 кап.

Друкарня імя Францыска (Георгія) Скарыны выдавецтва «Навука і тэхніка» АН БССР і Дзяржкамітэта Савета Міністраў БССР па друку. Мінск, Ленінскі праспект, 68.

РЕФЕРАТЫ

УДК 519.48

**К ТЕОРИИ КОММУТАТИВНЫХ МАТРИЧНЫХ АЛГЕБР НАД
 НЕСОВЕРШЕННЫМ ПОЛЕМ.** Супруненко Д. А. «Весці
 Акадэміі навук БССР», серыя фізіка-матэматычных навук.
 1967 г., № 3, 9—19

Пусть Ω — простое несепарабельное расширение степени m поля Δ , такое, что $\Delta_m \supset \Omega$, а $K(\Omega)$ — класс всех неразложимых максимальных коммутативных подалгебр A алгебры Δ_n , где $n = 2m$, обладающих неприводимым представлением γ_A с $\text{Im}(\gamma_A) = \Omega$. Тогда $K(\Omega)$ разбивается на 2 класса сопряженных в Δ_n подалгебр. Представители этих двух классов строятся.

Пусть R — подалгебра Δ_n всех матриц вида $\begin{bmatrix} 0 & S \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, где $n = mk$, S — произвольная $(k-l) \times l$ -матрица над полем Ω , а $\Omega \subset \Delta_m$, $(\Omega : \Delta) = m$. Обозначим символом $K(R, \Omega)$ класс всех неразложимых максимальных коммутативных подалгебр A алгебры Δ_n , обладающих таким неприводимым над Ω представлением γ_A , что $\text{Im}(\gamma_A) = \Omega$, а $\text{Ker}(\gamma_A) = R$. Положим $\mu = \min\{k-l, l\}$. Если Ω — простое чисто несепарабельное расширение поля Δ , то в классе $K(R, \Omega)$ имеется $\mu + 1$ попарно несопряженных в Δ_n алгебр $\alpha(W_0), \dots, \alpha(W_\mu)$, таких, что каждая алгебра класса $K(R, \Omega)$ сопряжена в Δ_n с одной из алгебр $\alpha(W_j)$, $0 \leq j \leq \mu$.

Библиографий 3.

УДК 517.511

НЕКОТОРЫЕ ТОЖДЕСТВА. Турецкий А. Х., Корзун И. И. «Весці Акадэміі навук БССР», серыя фізіка-матэматычных навук. 1967 г., № 3, 20—30

Формулируется задача: для данного фиксированного $x \in [a, b]$ определить величину $\sup_{f \in W_2^{(r)} M[a, b]} |f(x) - L_{n-1}(x, f)|$, где $W_2^{(r)} M[a, b]$ — класс функций $f(x)$, имеющих на сегменте $[a, b]$ производную порядка r с интегрируемым квадратом, для которой $\int_a^b [f^{(r)}(t)]^2 dt \leq M^2$, $L_{n-1}(x, f)$ — интерполяционный полином Лагранжа с заданными узлами $a \leq x_1 < x_2 < \dots < x_n \leq b$.

При решении этой задачи авторам понадобились некоторые тождества, представляющие самостоятельный интерес. В работе приводятся доказательства этих тождеств. Решение интерполяционной задачи будет опубликовано в следующей статье. Приведем эти тождества:

$$1. \sum_{j=0}^m \frac{2^{2j}}{(2j)! (m-j)! (p-j)!} = \binom{2p+2m}{2m} / (p+m)!$$

$$2. \sum_{k=0}^m \frac{(-1)^k}{2^{2k}} \binom{2n-k+1}{k} \binom{n-k}{m-k} = \binom{2n-m+1}{m} / 2^{2m},$$

$$\sum_{k=0}^m \frac{(-1)^k}{2^{2k}} \frac{(2n-k)!}{k! (2n-2k+1)!} \binom{n-k}{m-k} = \binom{2n-m}{m} / (2n+1) 2^{2m},$$

$$\begin{aligned}
3. \quad & \sum_{m=p}^{\nu} \binom{2\nu+1}{2\nu-2m} \sum_{j=0}^p (-1)^j \binom{2m+1}{j} \binom{2m-p-j}{2m-2p} (2m-2j+1)^{2\mu+1} - \\
& - \sum_{m=p}^{\nu} \binom{2\nu+1}{2\nu-2m-1} \sum_{j=0}^p (-1)^j \binom{2m+2}{j} \binom{2m-p-j+1}{2m-2p+1} (2m-2j+2)^{2\mu+1} = \\
& = \begin{cases} 2^{2p} (2\mu+1)! \binom{\mu}{p}, & \text{если } \nu = \mu, \\ 0, & \text{если } \nu > \mu + 1 \quad (\mu = 0, 1, 2, \dots), \end{cases}
\end{aligned}$$

и еще одно тождество, подобное последнему.

Библиографий 1.

УДК 517.392

СХОДИМОСТЬ КВАДРАТУРНОГО ПРОЦЕССА ДЛЯ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ. К е-да Н. П., Янович Л. А. «Весті Академії наук БССР», серия фізика-математичних наук. 1967 г., № 3, 31—39

Выясняются условия сходимости квадратурного процесса вида

$$\int_0^{2\pi} p(x) f(x) dx = \sum_{k=1}^N \sum_{j=0}^{m_k} A_{kj} f^{(j)}(x_k) + R_N(f)$$

($0 \leq m_k \leq m < \infty$, $N = 1, 2, 3, \dots$)

в классе абсолютно непрерывных 2π -периодических функций ($m=0$), а также в классах 2π -периодических функций с абсолютно непрерывной m -ой производной и с $m+1$ -ой производной, имеющей на $[0, 2\pi]$ конечное изменение. Так, например, в классе абсолютно непрерывных функций квадратурный процесс сходится тогда и только тогда, когда имеет место сходимость на множестве тригонометрических многочленов, а суммы

$$S_{N,\nu} = \sum_{k=1}^N A_k x_k - 2\pi \sum_{k=1}^{\nu} A_k; \quad \nu = 1, 2, \dots, N; \quad N = 1, 2, 3, \dots$$

ограничены в совокупности.

Библиографий 5.

УДК 512.52

ПРИБЛИЖЕНИЕ ПЕРИОДИЧЕСКИХ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИМИ МНОГОЧЛЕНАМИ И РАЦИОНАЛЬНЫМИ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИМИ ФУНКЦИЯМИ. П. Янович Л. А. «Весті Академії наук БССР», серия фізика-математичних наук. 1967 г., № 3, 40—50

В классе 2π -периодических аналитических функций выясняется сходимость интерполирования тригонометрическими дробями и тригонометрическими многочленами, а также асимптотика остатков тригонометрического интерполирования и некоторых интегральных операторов. Полоса интерполяционных дробей лежат вне полосы регулярности рассматриваемых классов функций, и число их в большинстве случаев остается ограниченным при неограниченном возрастании узлов интерполирования. Для заданного класса регулярных периодических функций и заданного одного из множеств (множество сходимости или множество расположения узлов) дается построение наибольшего другого из них, такого, что интерполяционный процесс для всякой функции из этого класса является сходящимся на одном множестве по любым узлам из другого множества. Дается обобщение на тригонометрические дроби одной теоремы о наибольшей области регулярности, полученной ранее В. И. Крыловым и автором

(РЖМат, 1964, 6Б115) в задаче тригонометрического интерполирования. Остатки эрмитового интерполирования по равноотстоящим узлам на $[0, 2\pi]$ и с одним кратным узлом разложены на сумму членов с возрастающими порядками малости. С использованием разложения интеграла Джексона во внутренних точках полосы регулярности $|\operatorname{Im} z| \leq d$ (РЖМат, 1966, 9Б122) получены интегральные операторы, приближающие функцию и ее вторую производную с достаточно высокой точностью.

Библиографий 5.

УДК 512.25/26+519.3:330.115

ОДНА ЗАДАЧА ТЕОРИИ РАСПИСАНИЙ И МАКСИМУМ СУММЫ ЛИНЕЙНЫХ ФОРМ НА МНОЖЕСТВЕ ПОДСТАНОВОК.

Лепешинский Н. А. «Весті Академії наук БССР», серия фізика-математичних наук. 1967 г., № 3, 51—54

Рассматривается задача А выбора в симметрической группе S_n подстановки, на которой сумма линейных форм принимает максимальное значение. Для известной $(n \times m)$ -задачи теории расписаний в предположении, что на каждом станке детали обрабатываются в одинаковом порядке, определяется тривиально неуплотняемое расписание с максимальным общим временем обработки всех n деталей. Для этого требуется решить $\binom{m+n-2}{m-1}$ задач А или столько же задач о максимальном назначении с матрицами порядка n .

Библиографий 4.

УДК 518 : 517/944/947

СХОДИМОСТЬ НЕКОТОРЫХ СХЕМ МЕТОДА ИНТЕГРАЛЬНЫХ СООТНОШЕНИЙ В СЛУЧАЕ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА.

Бобков В. В., Абрашин В. Н. «Весті Академії наук БССР», серия фізика-математичних наук. 1967 г., № 3, 55—66

Рассматриваемая работа посвящена вопросу приближенного решения методом интегральных соотношений следующей задачи Коши:

$$u_{xy} = a(x, y)u_x + b(x, y)u_y + c(x, y)u + f(x, y),$$

$$u[x, g(y)] = \varphi(x), \quad \frac{\partial u[x, g(x)]}{\partial y} = \psi(x), \quad -a \leq x \leq 0,$$

где кривая $y=g(x)$, несущая начальные значения, нигде не принимает характеристических направлений $x=\text{const}$, $y=\text{const}$.

В работе (РЖМат, 1964, 8Б568) для данной задачи была построена с использованием линейного интерполирования неизвестной функции двухслойная схема метода интегральных соотношений, сходящаяся со скоростью порядка h^2 (h — шаг решетки прямых, на которых ищется приближенное решение исходной задачи). В данной работе с использованием интерполирования Эрмита построены две двухслойные схемы метода интегральных соотношений, сходящиеся со скоростями h^3 и h^4 соответственно, а также исследованы многослойные схемы этого метода, построенные с использованием интерполирования по значениям функции любого фиксированного порядка. Здесь же указано на некоторые возможные обобщения основных результатов работы на другие задачи, а также на случай систем уравнений подобного типа, при этом не обязательно линейных.

Библиографий 5.

УДК 517.544

ИНТЕГРАЛЫ ТИПА КОШИ И УРАВНЕНИЯ В КОНЕЧНЫХ РАЗНОСТЯХ.

Юров П. Г. «Весті Академії наук БССР», серия фізика-математичних наук. 1967 г., № 3, 67—74

Исследуется поведение интеграла типа Коши в точках контура интегрирования, где плотность имеет особенность степенного или степенно-логарифмического характера. Используется метод конечных разностей. Предварительно исследуется решение в различных классах функций разностного уравнения

$$F(u + \lambda) - F(w) = h(w) \quad (\lambda = \text{const}).$$

На основе полученных здесь результатов дается представление главной части исследуемого интеграла типа Коши в явной форме через посредство многочленов Бернулли и Эйлера.

Библиографий 6.

УДК 519.4

О ВЛИЯНИИ ЦЕПЕЙ ПОДГРУПП НА СВОЙСТВА КОНЕЧНЫХ ГРУПП. Ведерников В. А., Кохно А. П. «Весті Академії наук БССР», серия фізика-математичних наук. 1967 г., № 3, 75—81

Под максимальной p -цепью конечной группы G понимается такая цепь (C) $G = G_0 \supset \supset G_1 \supset \dots \supset G_n$, в которой G_i является максимальной подгруппой группы G_{i-1} ($i = 1, \dots, n$) и каждая неединичная подгруппа цепи является pd -группой. Число n называется длиной максимальной p -цепи (C) .

Пусть $S_p(C)$ — число истинных подгрупп группы G из цепи (C) , квазидостижимых в G . Тогда $v_p(C) = n/S_p(C)$, если $S_p(C) > 0$, и $v_p(C) = n$, если $S_p(C) = 0$, называется p -квазивариантностью цепи (C) ; p -квазивариантностью $v_p(G)$ группы G называется $\max v_p(C)$ для всех максимальных p -цепей (C) группы G .

Среди полученных результатов имеются следующие:

1. Пусть q — наименьшее простое число, делящее порядок группы G . Если $v_q(G) < 4$, то группа G разрешима.

2. Пусть q — наименьшее простое число, делящее порядок группы G . Для неразрешимой группы G тогда и только тогда $v_q(G) < 5$, когда G изоморфна одной из следующих групп: $SL(2, p)$ и $PSL(2, p)$, где или $p = 5, 13$, или $\lambda(p \pm 1) = 3$, и $p \not\equiv \pm 1 \pmod{10}$; $PSL(2, 3^n)$, где $n > 2$ — простое число и $\lambda(3^n \pm 1) \leq 3$.

3. Пусть q — наименьший простой делитель порядка неабелевой простой группы G . Если длина максимальных q -цепей группы G не превосходит пяти, то G изоморфна $PSL(2, p^n)$ для подходящих p и n .

Библиографий 18.

УДК 519.8

ОБ ОПТИМАЛЬНОМ ПОВЕДЕНИИ СИСТЕМ С ЧАСТИЧНО ОГРАНИЧЕННОЙ ПАМЯТЬЮ. Танаев В. С., Левин Г. М. «Весті Академії наук БССР», серия фізика-математичних наук. 1967 г., № 3, 82—88

Под системой с частично ограниченной памятью понимается система, функционирование которой заключается в последовательном однократном прохождении некоторых состояний из данного конечного множества состояний. При этом целесообразность поведения системы при прохождении $k=1, 2, \dots, n$ состояний определяется целесообразностью ее поведения при прохождении первых $k-1$ состояний множеством k пройденных состояний и последовательностью s последних состояний. Для нахождения оптимального поведения таких систем используется метод динамического программирования.

Таблиц 1. Иллюстраций 4. Библиографий 7.

УДК 539.293+539.294+539.2

ДИФФУЗИЯ ЦИНКА ИЗ ПАРОВОЙ ФАЗЫ В СУРЬМУ. Корень Н. Н., Сирота Н. Н. «Весті Академії наук БССР», серия фізика-математичних наук. 1967 г., № 3, 89—92

Изучалась реакционная диффузия цинка из паровой фазы в сурьму в интервале температур 320—520° С. Рентгеноструктурный анализ и измерения микротвердости образцов показали, что на поверхности сурьмы образуется соединение $ZnSb$. Толщина слоя в исследованном интервале температур увеличивается со временем взаимодействия по параболическому закону. Экспериментально установлено, что рост слоя $ZnSb$ обусловлен взаимной диффузией цинка и сурьмы в этом соединении. Температурная зависимость парциальных коэффициентов диффузии цинка и сурьмы в $ZnSb$ описывается следующими уравнениями:

$$D_{Zn} = 8,5 \cdot 10^{-5} \exp\left(-\frac{17500 \pm 1500}{RT}\right) \frac{\text{см}^2}{\text{сек}},$$

$$D_{Sb} = 5,2 \cdot 10^{-5} \exp\left(-\frac{18000 \pm 1500}{RT}\right) \frac{\text{см}^2}{\text{сек}}.$$

Энергия активации выражена в кал/моль.

Таблиц 2. Иллюстраций 2. Библиографий 10.

УДК 535.37:537.312.5

О ВЛИЯНИИ ПРИМЕСИ КИСЛОРОДА НА ИЗЛУЧАТЕЛЬНУЮ РЕКОМБИНАЦИЮ В КРЕМНИИ. Бортник М. В., Ткачев В. Д., Юхневич А. В. «Весті Академії наук БССР», серия фізика-математичних наук. 1967 г., № 3, 93—96

Исследовалось влияние примеси кислорода на излучательную рекомбинацию в кремнии, содержащем радиационные дефекты структуры при облучении γ -квантами от Co^{60} . Присутствие кислорода в монокристалле приводит к появлению в примесной области спектра группы полос. Интенсивность полос зависит от концентрации кислорода и концентрации мелкой примеси в монокристалле. Результаты эксперимента позволяют утверждать, что центры, от которых зависит появление полос примесного излучения, не определяют время жизни неравновесных носителей в материале. Результаты измерений зависимости интенсивности собственного излучения от дозы облучения и восстановления собственного излучения в процессе отжига для материалов с разной концентрацией кислорода указывают на участие примесных атомов кислорода в образовании безызлучательных центров рекомбинации, влияющих на время жизни неравновесных носителей.

Иллюстраций 2. Библиографий 7.

УДК 530.12:531.5

О ВЗАИМОДЕЙСТВИИ ГРАВИТАЦИОННОГО ПОЛЯ С КВАНТОВАННЫМ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫМ И ДИРАКОВСКИМ ПОЛЯМИ. Минкевич А. В. «Весті Академії наук БССР», серия фізика-математичних наук. 1967 г., № 3, 97—105

Природа возникновения гравитационного смещения частоты в общей теории относительности (ОТО) и на основе элементарного рассмотрения в рамках ньютоновской теории тяготения с использованием гипотезы работающего фотона оказывается существенно различной. В работе рассматривается вопрос о том, к каким физическим следствиям приведет использование гипотезы работающего фотона в рамках релятивистского рассмотрения. В связи с этим на основе теоретико-полевого подхода проведено рассмотрение взаимодействия поля тяготения с квантованным электромагнитным и дираковским полями в линейном приближении по гравитационному потенциалу. Показано, что использование гипотезы работающего фотона приводит к отличиям по сравнению с ОТО: в поведении фотона в статическом поле тяготения, а также в зависимости частоты излучения атома водорода от гравитационного потенциала. Хотя для гравитационного смещения частоты при этом получается обычный результат, ход атомных часов, однако, не соответствует ОТО. Обсуждается эксперимент по проверке полученных результатов.

Библиографий 11.

УДК 535.371.07

О ФУНКЦИИ РАССЕЯНИЯ ЛИНИИ МЕЛКОДИСПЕРСНЫХ ЛЮМИНЕСЦИРУЮЩИХ ЭКРАНОВ. Предко К. Г., Иванов А. П. «Весті Академії наук БССР», серия фізика-математичних наук. 1967 г., № 3, 106—111

Для характеристики качества воспроизводимого экраном изображения введена функция контрастности $C(b)$ светлой полосы ширины b . Она характеризует изменение светимости в центре изображения светлой полосы при изменении ширины этой полосы и связана с параметрами качества экрана. Экспериментальное нахождение $C(b)$ производилось на установке, собранной на базе усовершенствованного регистрирующего микрофотометра МФ-4. Сходимость падающего на экран со стороны слоя излучения

составляла 1° . Угол приема равен 35° , величина сканирующей площадки — $2,5 \times 1400$ мкм². Измерения проводились как в свете люминесценции (при возбуждении свечения ультрафиолетовой радиацией с длиной волны 313 нм или 365 нм), так и в рассеянном свете (освещение длиной волны 436 нм). Использовались телеэкраны типа ZnS·Ag и Al₂O₃·Ce (размер частиц 0,5—5 мкм). Путем сравнения экспериментальных $C(b)$ и аналитического вида $C(b)$ найдено, что функция рассеяния линии $a(x)$ как обычных рассеивающих, так и люминесцирующих экранов имеет экспоненциальный вид, а не гауссов или квадратногиперболический. Показано, что функция размытия светлой полосы и пограничная кривая экрана, найденные для экспоненциального вида $a(x)$, хорошо согласуются с экспериментом. Оценены возможности и точность экспериментального нахождения функции рассеяния линии и пограничной кривой мелкодисперсных люминесцирующих экранов.

Иллюстраций 4. Библиографий 9.

УДК 535.371.07

ВЛИЯНИЕ СВОЙСТВ РАССЕИВАЮЩЕГО ЛЮМИНЕСЦИРУЮЩЕГО ЭКРАНА НА КАЧЕСТВО ВОСПРОИЗВОДИМОГО ИМ ИЗОБРАЖЕНИЯ. Предко К. Г. «Весті Академії наук БССР», серия фізика-математичних наук. 1967 г., № 3, 112—117

С помощью измерения функции контрастности $C(b)$ светлой полосы ширины b проанализировано влияние на качество изображения толщины экрана, характеризуемой удельной навеской люминофора, типа применяемого люминофора, наличия алюминиевой пленки, длины волны возбуждающей ультрафиолетовой радиации. Показано, что качество воспроизведения люминесцирующего экрана, особенно при его малой толщине, хуже, чем у обычного рассеивающего с такими же параметрами. Экраны из ZnS·Ag лучше воспроизводят изображение, чем экраны из Al₂O₃·Ce за счет меньшего показателя рассеяния люминофора типа ZnS·Ag. Алюминирование экранов значительно ухудшает качество оптического изображения. Для тонких экранов из ZnS·Ag при возбуждении их радиацией с длиной волны $\lambda_{\text{возб}}=313$ нм качество изображения вследствие разницы показателей поглощения для $\lambda_{\text{возб}}=313$ и 365 нм лучше, чем при $\lambda_{\text{возб}}=365$ нм. Предложен метод нахождения разрешающей способности R экранов с помощью измерения их $C(b)$. При обычных ошибках измерения $C(b)$ от 1 до 5% точность определения R 2—9%. Проанализирована методика измерений. С помощью нахождения R описанным методом и определения светимости I слоя найдено, что оптимальная толщина экранов из ZnS·Ag при возбуждении с $\lambda_{\text{возб}}=365$ нм достигается при удельной навеске m люминофора около 1,5 мг/см². Она соответствует максимуму кривой $R(m)$ $I(m)$.

Таблиц 1. Иллюстраций 4. Библиографий 6.

УДК 517.948.32

ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ С ЛОГАРИФМИЧЕСКИМ ЯДРОМ. Чумаков Ф. В. «Весті Академії наук БССР», серия фізика-математичних наук. 1967 г., № 3, 118—120

Рассматривается интегральное уравнение

$$\int_a^x a(t) \varphi(t) dt + \frac{1}{\pi} \int_a^{\beta} b(t) \ln \frac{|t-x|}{t-a} \varphi(t) dt = f(x), \quad (1)$$

заданное на вещественном отрезке плоскости z . С помощью формулы

$$\int_a^x \frac{d\tau}{\tau-t} = \ln \frac{|t-x|}{t-a}, \quad t, x \in [a, \beta], \quad (2)$$

выражающей логарифмическое ядро через интеграл типа Коши, оно сводится к уравнению с ядром Коши

$$a(x)\varphi(x) - \frac{1}{\pi} \int_a^b \frac{b(t)\varphi(t)dt}{t-x} = f'(x). \quad (3)$$

Характеристическое уравнение с ядром Коши (3) равносильно исходному (1) при $f(\alpha) = 0$ (необходимое условие разрешимости (1)). Решение (1) зависит от индекса κ краевой задачи Римана

$$\Phi^+(x) = \frac{a(x) + b(x)i}{a(x) - b(x)i} \Phi^-(x) + \frac{b(x)f'(x)}{a(x) - b(x)i}, \quad (4)$$

к которой сводится уравнение (3), и принадлежит классу функций

$$\varphi(x) = \frac{\varphi^*(x)}{(x-\alpha)^{1-\varepsilon_1}(\beta-x)^{1-\varepsilon_2}}, \quad \varphi^*(x) \in H, \quad \varepsilon_1 > 0, \quad \varepsilon_2 > 0, \quad (5)$$

если вещественные функции $a(x)$, $b(x)$, $f'(x) \in H$, $a^2(x) + b^2(x) \neq 0$.

В случае отрицательного индекса возникает $|\kappa|$ условий разрешимости приведенного уравнения с логарифмическим ядром.

Библиографий 2.

УДК 518.517.948

ОБ ОДНОМ ВАРИАНТЕ МЕТОДА СПУСКА ДЛЯ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ. Мадорский В. М. «Весті Академії наук БССР», серия фізико-математичних наук. 1967 г., № 3, 121—124

Рассматривается вариант метода спуска для решения уравнения

$$u = Tu,$$

где T — нелинейный ограниченный оператор, действующий в вещественном гильбертовом пространстве H и удовлетворяющий условию Липшица с константой $q_T < 1$.

Для нахождения единственного минимума функционала

$$f(u) = (Tu - u, Tu - u)$$

рассматривается последовательность

$$f(u_{n-1} + \alpha_n z) = [T(u_{n-1} + \alpha_n z) - (u_{n-1} + \alpha_n z), T(u_{n-1} + \alpha_n z) - (u_{n-1} + \alpha_n z)],$$

где u_n определяется формулой

$$u_n = T(u_{n-1} + \alpha_n z)$$

(z — элемент с единичной нормой, u_0 — произвольный фиксированный элемент пространства), а $\alpha_n \in \left(0, -\frac{F(u_{n-1}), z}{m}\right)$, причем $F(u)$ — градиент функционала $f(u)$ — удовлетворяет условию

$$(F'(u)h, h) \geq m(h, h), \quad m > 0, \quad h \in H.$$

Описанный процесс дает возможность находить единственную точку u^* минимума функционала $f(u)$, которая является неподвижной точкой оператора T .

Библиографий 5.

УДК 621.382.2:537.311.33

ИЗМЕРЕНИЯ ЭФФЕКТА ХОЛЛА И ЭЛЕКТРОПРОВОДНОСТИ ПОЛУПРОВОДНИКОВ ПРИ ВЫСОКИХ ДАВЛЕНИЯХ И ТЕМПЕРАТУРАХ. Сирота Н. Н., Шипило В. Б. «Весті Академії наук БССР», серия фізико-математичних наук. 1967 г., № 3, 125—128

Описана установка по исследованию эффекта Холла и удельной электропроводности полупроводниковых кристаллов при температурах от комнатной до 750° К в магнит-

ном поле, создаваемом внутри камеры высокого давления, при давлении до 30 кбар в жидкой фазе.

Исследована зависимость удельной электропроводности и эффекта Холла монокристаллического антимонида индия *n*-типа от давления и температуры.

Иллюстраций 4. Библиографий 6.

УДК 536.421.4+536.421.1

ИНТЕРФЕРОМЕТРИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ РОСТА КРИСТАЛЛОВ СЕГНЕТОВОЙ СОЛИ ИЗ РАСТВОРА.

Варикаш В. М., Шольц Э., Мыл И. «Весті Академії наук БССР», серия фізика-математичних наук. 1967 г., № 3, 129—132

С помощью интерференционного микроскопа проведено исследование распределения концентрации около растущих кристалликов сегнетовой соли. Показано, что концентрация раствора у растущей грани кристалла всегда меньше исходной концентрации. Концентрация раствора не постоянна вдоль грани кристалла. Наибольшее значение она имеет у ребер кристалла и наименьшее у центра грани. Изучена зависимость показателя преломления раствора сегнетовой соли от концентрации.

Таблиц 1. Иллюстраций 4. Библиографий 8.

В ИЗДАТЕЛЬСТВЕ „НАУКА И ТЕХНИКА“

ГОТОВИТСЯ К ПЕЧАТИ

Крылов В. И., Кругликова Л. Г.

СПРАВОЧНАЯ КНИГА ПО ЧИСЛЕННОМУ ГАРМОНИЧЕСКОМУ АНАЛИЗУ

15 л. На русском языке. Цена 1 руб. 5 коп. (ориентировочно).

Цель данной книги — дать практическое изложение современного состояния численного гармонического анализа и собрать все необходимые сведения по теории, а также правила вычислений и вспомогательные таблицы, которые могут потребоваться при расчетах. В книге изложены правила вычисления коэффициента Фурье для классов функций, наиболее часто встречающихся в приложениях. Большая ее часть посвящена более трудной задаче вычисления интегралов Фурье. Кроме того, даны вспомогательные математические таблицы, облегчающие эти вычисления.

Книга предназначена для работников научных и инженерно-технических институтов. Она будет также полезным пособием для работников вычислительных центров и конструкторских бюро.

КНИГУ МОЖНО ЗАКАЗАТЬ ВО ВСЕХ МАГАЗИНАХ КНИГОТОРГА И ПОТРЕБИТЕЛЬСКОЙ КООПЕРАЦИИ РЕСПУБЛИКИ, А ТАКЖЕ В МАГАЗИНАХ «АКАДЕМКНИГА».

Для получения книги почтой заказы направлять по адресу:
г. Минск, Железнодорожная улица, 27, Республиканский магазин «Книга—почтой» или г. Москва, К-12, Б. Черкасский переулок, 2/10, контора «Академкнига», отдел «Книга — почтой».

КНИГОТОРГУЮЩИЕ И ДРУГИЕ ОРГАНИЗАЦИИ НАПРАВЛЯЮТ ЗАКАЗЫ УПРАВЛЕНИЮ КНИЖНОЙ ТОРГОВЛИ ГОСУДАРСТВЕННОГО КОМИТЕТА СОВЕТА МИНИСТРОВ БССР ПО ПЕЧАТИ.

В издательстве
„НАУКА И ТЕХНИКА“

ГОТОВИТСЯ К ПЕЧАТИ

ИВАНОВ Е. А.

**ДИФРАКЦИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН
НА ДВУХ ТЕЛАХ**

30 л. На русском языке. Цена 1 р. 95 к. (ориентировочно).

Книга состоит из двух частей

В первой части кратко описываются основные уравнения электромагнитного поля и рассматриваются вопросы, связанные с разделением уравнений системы Максвелла в различных ортогональных криволинейных координатных системах и сведением векторных электродинамических краевых задач к скалярным задачам относительно вспомогательных потенциалов. Дается изложение основных свойств специальных волновых функций, приводятся формулы разложения первичных полей в ряды по волновым функциям и теоремы сложения для волновых функций в цилиндрической, эллиптической, сферической и сфероидальной системах координат.

Вторая часть книги содержит решения ряда задач дифракции электромагнитных волн на круговых и эллиптических цилиндрах, сферах, сфероидах (дисках), полученные на основе классического метода разделения переменных, обобщенного на случай двух тел.

Исследуются вопросы численного решения бесконечных систем линейных уравнений для коэффициентов разложения искомым функций по собственным волновым функциям соответствующего тела.

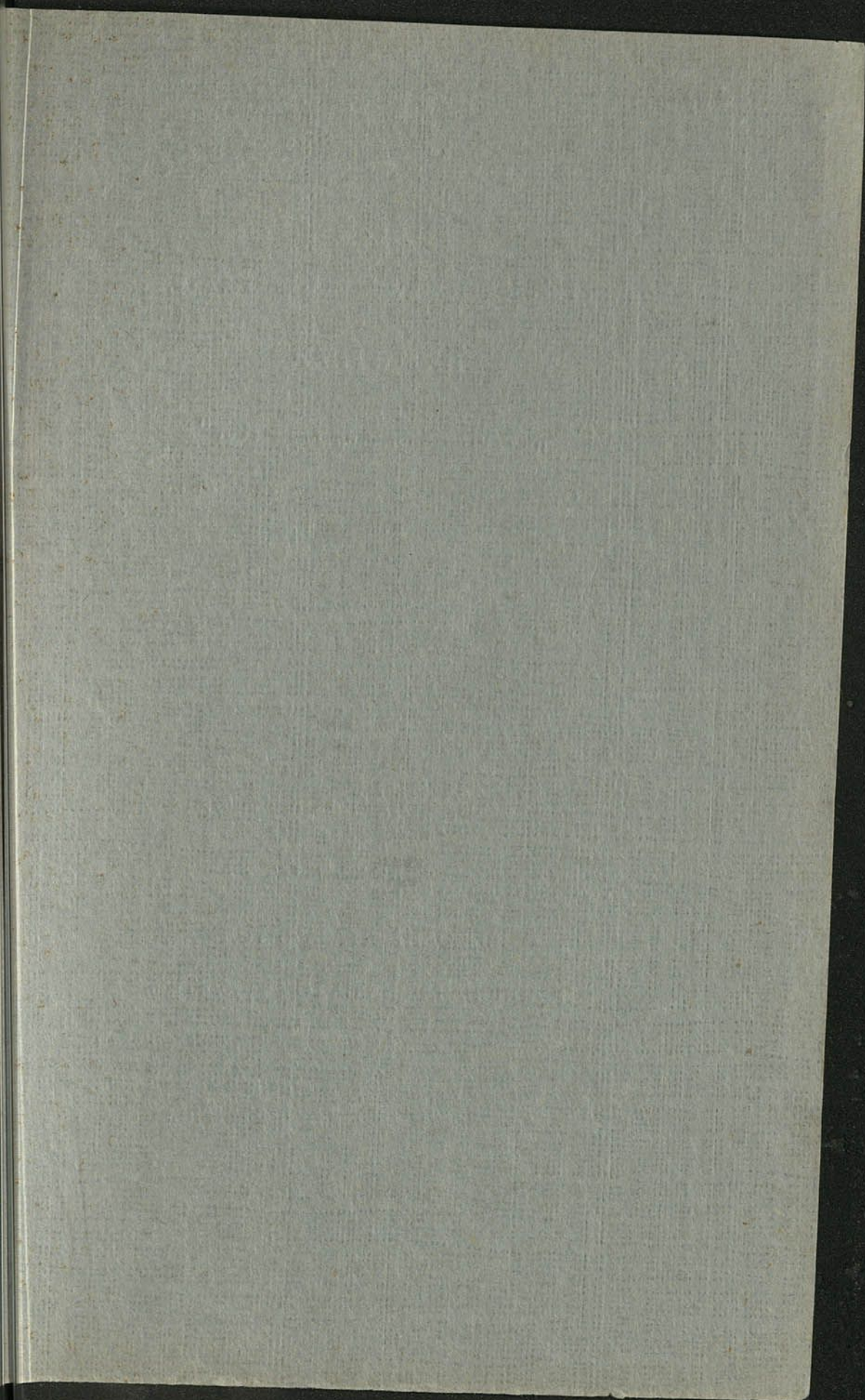
Книга рассчитана на студентов, инженеров и других лиц, занимающихся вопросами теории дифракции электромагнитных волн и ее приложениями.

**КНИГУ МОЖНО ЗАКАЗАТЬ ПРЕДВАРИТЕЛЬНО ВО ВСЕХ МАГАЗИНАХ
КНИГОТОРГА И ПОТРЕБИТЕЛЬСКОЙ КООПЕРАЦИИ РЕСПУБЛИКИ, А
ТАКЖЕ В МАГАЗИНАХ «АКАДЕМКНИГА»**

Для получения книги почтой заказы направлять по адресу:

Г. МИНСК, ЖЕЛЕЗНОДОРОЖНАЯ УЛИЦА, 27, РЕСПУБЛИКАНСКИЙ МАГАЗИН
«КНИГА—ПОЧТОЙ» ИЛИ Г. МОСКВА, К-12, Б. ЧЕРКАССКИЙ ПЕРЕУЛОК, 2/10,
КОНТОРА «АКАДЕМКНИГА», ОТДЕЛ «КНИГА—ПОЧТОЙ».

*Книготоргующие и другие организации направляют заказы Управлению
книжной торговли Государственного Комитета Совета Министров БССР по
печати.*



26785-305



8000000 1289420

ПРОИЗВОДИТСЯ ПОДПИСКА НА 1968 ГОД

НА ЖУРНАЛ

„ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК БССР“

серия физико-математических наук

Журнал освещает общие принципиальные вопросы развития советской науки, публикует материалы научных исследований и итоги работ институтов Академии наук БССР и других научно-исследовательских учреждений БССР в области математики (методы вычислительной математики, уравнения математической физики, алгебра и теория групп и др.), общей и теоретической физики (оптика, физика твердого тела и полупроводников, теория полей и элементарных частиц и др.), печатает обзоры по важнейшим разделам физико-математических наук, рецензии на выходящие в СССР научные издания, а также хронику научной жизни.

Журнал рассчитан на научных работников научно-исследовательских учреждений, преподавателей высших учебных заведений, аспирантов и студентов старших курсов вузов физико-математического профиля.

Журнал печатается на белорусском языке. В конце журнала публикуются рефераты статей на русском языке. Отдельные статьи печатаются на русском языке.

ВЫХОДИТ 4 РАЗА В ГОД

ПОДПИСНАЯ ЦЕНА НА ГОД 2 руб. 40 коп.

Подписка принимается всеми конторами, отделениями связи, отделами «Союзпечати», почтальонами, а также общественными распространителями печати на промышленных предприятиях, в учебных заведениях и учреждениях.