

30к.1
58

ВЕСЦІ

АКАДЭМІІ НАВУК БССР

СЕРЫЯ
ФІЗІКА-МАТЭМАТЫЧНЫХ
НАВУК

4

ВЫДАВЕЦТВА „НАВУКА І ТЭХНІКА“

МІНСК 1967





26786



ИЗВЕСТИЯ

АКАДЕМИИ НАУК БССР

СЕРИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ
НАУК

№ 4

ИЗДАТЕЛЬСТВО „НАУКА И ТЕХНИКА“

МИНСК 1967

ВЕСЦІ

30к1
58

АКАДЭМІІ НАВУК БССР

СЕРЫЯ
ФІЗІКА-МАТЭМАТЫЧНЫХ
НАВУК

№ 4

ВЫДАВЕЦТВА „НАВУКА І ТЭХНІКА“

МІНСК 1967

РЕДАКЦЫЙНАЯ КАЛЕГІЯ:

Ф. І. ФЕДАРАУ (галоўны рэдактар),
Д. А. СУПРУНЕНКА (нам. галоўнага рэдактара),
М. М. АЛЯХНОВІЧ, У. І. КРЫЛОУ,
М. М. СІРАТА, У. І. СПРЫНДЖУК,
Я. І. ФІРСАУ, С. А. ЧУНІХІН

М. С. ГАРАЩУК

ЛОКАЛЬНО КВАЗИНИЛЬПОТЕНТНЫЕ ЛИНЕЙНЫЕ ГРУППЫ

В работе [1] вводятся и изучаются квазинильпотентные группы. Пара H, F подгрупп группы G называется нильпотентной, если она удовлетворяет одному из следующих условий: а) $H \subseteq F$; б) $F \subseteq H$; в) $N_H(H \cap F) \neq H \cap F \neq N_F(H \cap F)$, где $N_H(D)$ — нормализатор подгруппы D в группе H . Группа G называется квазинильпотентной, если любые две ее подгруппы образуют нильпотентную пару. В указанной работе доказывается разрешимость всякой конечной квазинильпотентной группы и дается ее описание.

В настоящей заметке доказывается разрешимость всякой локально квазинильпотентной линейной группы, т. е. линейной группы, у которой любая подгруппа с конечным числом образующих является квазинильпотентной.

Предварительно приведем две леммы.

Лемма 1. Гомоморфный образ G' квазинильпотентной группы G является квазинильпотентной группой.

Пусть H' и F' — произвольные подгруппы группы G' . Известно, что при гомоморфизме G на G' между подгруппами группы G' и подгруппами группы G , содержащими ядро гомоморфизма, существует взаимно однозначное соответствие [2]. Обозначим через H и F прообразы H' и F' в группе G . По условию $N_H(H \cap F) \neq H \cap F \neq N_F(H \cap F)$. При гомоморфизме $N_H(H \cap F)$ переходит в $N_{H'}(H' \cap F')$. Отсюда и в силу указанного соответствия между подгруппами групп G и G' следует $N_{H'}(H' \cap F') \neq H' \cap F' \neq N_{F'}(H' \cap F')$. Лемма доказана.

Определение. Группа Γ называется предельной для последовательности групп $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots$, если существует такая последовательность гомоморфизмов $\Gamma \rightarrow \Gamma_1, \Gamma \rightarrow \Gamma_2, \dots$, при которой каждый неединичный элемент группы имеет неединичный образ во всех гомоморфизмах, начиная с некоторого из них [3].

Лемма 2. Линейная группа H , являющаяся предельной для последовательности конечных разрешимых групп H_1, H_2, \dots степени n , разрешима.

Доказательство. Пусть H является предельной для последовательности конечных групп H_1, H_2, \dots степени n . Длина ряда коммутантов разрешимой линейной группы степени n меньше некоторого числа $m = m(n)$, зависящего только от n . В частности, длина коммутантов любой группы H_i меньше m . Введем высшие коммутаторы K^1, K^2, \dots, K^t , где $K^1(a_1, a_2)$ — коммутатор элементов a_1 и a_2 ; $K^t = K^t(K^{t-1}(a_1, \dots, a_{2^{t-1}}), K^{t-1}(a_{2^{t-1}+1}, \dots, a_t))$. Как известно, группа D тогда и только тогда разрешима и длина ряда коммутантов не превышает m , когда высший коммутатор K^m равен единице для любых элементов из D . Рассмотрим $K^m(h_1, h_2, \dots, h_m) = K^m$ для любых элементов h_1, h_2, \dots, h_m , из H . Докажем, что $K^m = K^m(h_1, h_2, \dots$

... $h_{2m} = 1$. Действительно, если $K^m \neq 1$, то существует такое натуральное i , что образ коммутатора K^m в H_i отличен от единицы. Но образ коммутатора K^m в H_i есть $K^m(h'_1 h'_2 \dots h'_{2m}) \neq 1$, $h'_v \in H_i$. Последнее противоречит критерию разрешимости и замечанию о длине ряда коммутаторов линейной разрешимой группы. Следовательно, K^m тождественно равно единице для любых элементов из H , а поэтому H разрешима. Лемма доказана.

Теорема 1. *Всякая локально квазинильпотентная линейная группа разрешима.*

Доказательство. Пусть G — произвольная локально квазинильпотентная линейная группа, H — любая подгруппа G с конечным числом образующих. В [3] доказывается, что всякая линейная группа H с конечным числом образующих является пределом последовательности H_1, H_2, \dots конечных линейных групп степени n . Каждая H_i , будучи гомоморфным образом H , является конечной квазинильпотентной группой, а следовательно, разрешимой [1]. Из леммы следует разрешимость группы H . Отсюда, группа G — локально разрешима. Как известно, всякая локально разрешимая линейная группа разрешима. Теорема доказана.

Заметим, что квазинильпотентные группы являются естественным обобщением нильпотентных групп и групп типа Шмидта. Решая задачу дальнейшего ослабления условий, М. И. Кравчук вводит понятие Γ -квазинильпотентной группы [4]. Группа G называется Γ -квазинильпотентной, если любые две максимальные подгруппы G образуют нильпотентную пару. Доказывается разрешимость конечной Γ -квазинильпотентной группы. Так как гомоморфный образ Γ -квазинильпотентной группы является Γ -квазинильпотентной, то справедлива

Теорема 1'. *Всякая локально Γ -квазинильпотентная линейная группа разрешима.*

Литература

1. Беркович Я. Г. Сибирский матем. журн., 5, № 2, 1964.
2. Курош А. Г. Теория групп. М., 1953.
3. Мальцев А. И. Матем., сб., 8 (50), в. 3, 1940.
4. Беркович Я. Г., Кравчук М. И. Сибирский матем. журн., 6, № 3, 1965.

Белорусский государственный университет
им. В. И. Ленина

Поступило в редакцию 7.IX 1967

Р. Т. ВОЛЬВАЧЕВ

ЭЛЕМЕНТАРНАЯ ТЕОРИЯ МОДУЛЕЙ

В этой статье через R^n будем обозначать n -членный свободный унитарный модуль над ассоциативным кольцом R с единицей (определение см. в [1], т. 2, стр. 120).

Основными элементарно-кольцевыми отношениями называются отношения $S(\alpha, \beta, \gamma)$ и $P(\alpha, \beta, \gamma)$, равносильные соответственно равенствам $\alpha + \beta = \gamma$ и $\alpha\beta = \gamma$ [2]. Аналогично основными элементарно-модульными отношениями будем называть отношения $S(x, y, z)$ и $P(\alpha, x, y)$, равносильные соответственно $x + y = z$ и $\alpha x = y$, где $\alpha \in R, x, y, z \in R^n$.

Формула **A** узкого исчисления предикатов с равенством [3] называется элементарно-кольцевой, если **A** не содержит предикатных символов, отличных от S или P . Аналогично определяют элементарно-модульные формулы (имея при этом в виду, что $P(\alpha, x, y)$ является многоосновным предикатом [4]).

Элементарно-кольцевую формулу **A**, содержащую свободные предметные переменные, будем называть элементарно-кольцевым отношением. Если **A** свободных предметных переменных не содержит, то **A** будем называть элементарно-кольцевым предложением [2].

В настоящей заметке доказывается, что множество элементарно-модульных предложений, истинных на модуле R^n , рекурсивно эквивалентно множеству элементарно-кольцевых предложений, истинных на соответствующем кольце R (определение см. в [5]). Затем устанавливается, что векторные пространства R_1^n и R_2^n над телами R_1 и R_2 соответственно тогда и только тогда неразличимы по своим элементарным свойствам (или имеют один и тот же «арифметический тип» по другой терминологии), когда $n = m$ и тела R_1 и R_2 элементарно неразличимы. В заключение доказывается, что класс модулей $\{R^n/n = 1, 2, \dots\}$ имеет неразрешимую теорию (определение см. в [6]).

1. Пусть R^n — n -членный унитарный модуль над ассоциативным кольцом R с единицей.

Лемма 1. Для любого n -мерного модуля R^n существуют элементарно-модульные формулы $U(a)$, $D(x, a)$, $C(x, y, z)$, $T(x, y, z)$, обладающие следующим свойством: для любого элемента a из R^n , удовлетворяющего условию $U(a)$, совокупность Q всех элементов x , находящихся в отношении $D(x, a)$, образует кольцо, изоморфное R , относительно операций $\overset{*}{+}$, $\overset{*}{\times}$, определенных в Q формулами

$$x \overset{*}{+} y = z \stackrel{df}{=} C(x, y, z),$$

$$x \overset{*}{\times} y = z \stackrel{df}{=} T(x, y, z).$$

Доказательство. Полагаем $U(a) \stackrel{df}{=} a \neq 0 \wedge \wedge (\forall_R \alpha) (\alpha a = 0 \rightarrow \alpha = 0)$;
 $D(x, a) \stackrel{df}{=} (\exists_R \alpha) (x = \alpha a)$. Ставя каждому числу $a \in R$ в соответствие эле-

мент $x = aa$ из Q , получим взаимно однозначное отображение кольца R на совокупность Q элементов, находящихся в отношении $D(x, a)$.

Определим, наконец, формулы

$$C(x, y, z) \stackrel{df}{=} x + y = z,$$

$$T(x, y, z) \stackrel{df}{=} (\exists_R \alpha, \beta, \gamma)(x = a\alpha \wedge y = \beta a \wedge z = a\beta a).$$

Легко видеть теперь, что совокупность Q относительно $+$, \times является кольцом, изоморфным кольцу R . Лемма доказана.

Теорема 1. Для любого модуля R^n множество элементарно-модульных предложений, истинных на R^n , рекурсивно эквивалентно множеству элементарно-кольцевых предложений, истинных на кольце R .

Это означает [5], что существует алгоритм, перерабатывающий каждое элементарно-модульное предложение в элементарно-кольцевое предложение, причем предложения, истинные на модуле, перерабатываются в предложения, истинные на R , и обратно существует алгоритм, перерабатывающий элементарно-кольцевые формулы в элементарно-модульные формулы и при этом формулы, истинные на кольце R , перерабатывающий в формулы, истинные на модуле R^n .

В самом деле, пусть R^n — n -членный модуль и пусть имеется какое-либо элементарно-модульное предложение

$$W = (Q_1 \xi_1) \dots (Q_{r+t} \xi_{r+t}) G(x_1, \dots, x_r, \alpha_1, \dots, \alpha_t),$$

где

$$Q_i = \forall, \exists; \xi_i = x, \alpha; x \in R^n, \alpha \in R.$$

Истинность W на R^n , очевидно, равносильна истинности на R предложения W_R , получающегося из W следующим хорошо известным процессом.

А. В формуле $G(x_1, \dots, x_r, \alpha_1, \dots, \alpha_t)$ отношения вида $x_i = x_j$, $x_i = x_j + x_k$ и $x_i = a x_j$ заменяем соответственно формулами $\bigwedge_{\lambda} (\alpha_{i\lambda} = \alpha_{j\lambda})$,

$$\bigwedge_{\lambda} (\alpha_{i\lambda} = \alpha_{j\lambda} + \alpha_{k\lambda}) \text{ и } \bigwedge_{\lambda} (\alpha_{i\lambda} = a \alpha_{j\lambda}).$$

Б. Если формула $G_{i+1} = (Q_{i+1} \xi_{i+1}) \dots (Q_{r+t} \xi_{r+t}) G$ преобразовывается в формулу O_{i+1} , то формула $G_i = (Q_i x_i \in R^n) G_{i+1}$ преобразовывается в формулу

$$(Q_i \alpha_{i1}) (Q_i \alpha_{i2}) \dots (Q_i \alpha_{in}) O_{i+1}.$$

Формула $G_i = (Q_i \alpha_i \in R) G_{i+1}$ преобразовывается в формулу

$$(Q_i \alpha_i) O_{i+1}.$$

Таким образом, переход от элементарно-модульных формул к элементарно-кольцевым формулам, относящимся к кольцу R , совершенно прямой и не зависит от предыдущих рассмотрений. Обратный переход от формул, относящихся к кольцу R , к формулам, относящимся к модулю R^n , несколько сложнее и опирается на предыдущую лемму.

Итак, пусть задано какое-либо элементарно-кольцевое предложение

$$A = (Q_1 x_1) \dots (Q_t x_t) B(x_1, \dots, x_t)$$

и мы хотим знать, истинно ли оно на базисном кольце R модуля R^n . Рассмотрим формулы $U(a)$, $D(x, a)$, $C(x, y, z)$, $T(x, y, z)$, построенные в лемме 2 и относящиеся к модулю R^n . Заменяя в формуле $B(x_1, \dots, x_t)$ кольцевые отношения $x + y = z$ и $xy = x$ формульными отношениями $C(x, y, z)$ и $T(x, y, z)$ и произведя ограничение кванторов во всей формуле A на множество тех x , которые удовлетворяют отношению $D(x, a)$, получим в ре-

зультате элементарно-модульную формулу $A_B(a)$. Эта формула утверждает то же самое, что и формула A , но лишь для множества Q . Если a — свободный элемент из R^n , то множество Q с отношениями $C(x, y, z)$ и $T(x, y, z)$ будет кольцом, изоморфным кольцу R . Поэтому истинность формулы A на R равносильна истинности формулы

$$(\exists a)(U(a) \wedge A_B(a))$$

на модуле R^n , что и требовалось.

Следствие. Для любого модуля R^n совокупность элементарно-модульных предложений, истинных на модуле, является нерекурсивным множеством, если нерекурсивно соответствующее множество для кольца R .

Другими словами, если элементарная теория кольца R неразрешима, то неразрешима и элементарная теория модуля R^n . В частности, неразрешима элементарная теория n -мерного векторного пространства над полем рациональных чисел.

До конца этого параграфа будет предполагаться, что R — тело, а R^n — n -мерное векторное пространство над телом R . Легко видеть, что линейно независимые элементы u_1, \dots, u_n из R^n и только они удовлетворяют формуле

$$A_n(u_1, \dots, u_n) \stackrel{df}{=} (\forall \alpha_1, \dots, \alpha_n) (\forall \alpha_i \neq 0 \rightarrow \sum_{i=1}^n \alpha_i u_i \neq 0).$$

Следовательно, отношение «быть линейно независимыми элементами» в R^n является элементарно-модульным отношением.

С помощью этой формулы легко доказывается следующая

Лемма 2. Пусть R — тело. Для каждого $n \geq 1$ существует элементарно-модульная замкнутая формула B_n , истинная на векторном пространстве R^n и ложная на R^m при $n \neq m$. Вид формул B_n не зависит от свойств тела R .

Действительно, формула

$$B_n^* \stackrel{df}{=} (\exists_{R^n} u_1, \dots, u_n) A_n(u_1, \dots, u_n)$$

истинна в R^n . Но в R^m при $m < n$ эта формула не может быть истинной, так как в R^m имеется самое большое m линейно независимых элементов. Поэтому формула

$$B_n \stackrel{df}{=} B_n^* \wedge B_{n+1}^*$$

удовлетворяет требуемым в лемме свойствам.

Отметим еще, что формула

$$A_n(u_1, \dots, u_n) \wedge (\forall_{R^n} x) (\exists \alpha_1, \dots, \alpha_n) (x = \sum_{i=1}^n \alpha_i u_i)$$

истинна для тех и только тех элементов u_1, \dots, u_n из R^n , которые образуют базис векторного пространства. Следовательно, отношение «быть базисом» в R^n также является элементарно-модульным отношением.

Теорема 2. Пусть R_1 и R_2 — тела. Для того чтобы векторные пространства R_1^n и R_2^m имели один и тот же узкофункциональный (арифметический) тип, необходимо и достаточно, чтобы $m = n$ и чтобы один и тот же узкофункциональный тип имели тела R_1 и R_2 .

Достаточность. Каждое элементарно-модульное предложение W , относящееся к R_1^n и R_2^m , можно указанным выше способом преобразовать

в теоретико-кольцевую формулу W_R , относящуюся соответственно к телам R_1 и R_2 . Вид формулы W_R не зависит от тела R . Таким образом, истинность W на R_1^n равносильна истинности W_R на R_1 . Истинность W_R на R_1 равносильна истинности W_R на R_2 в силу одинаковости узкофункциональных типов R_1 и R_2 . Поэтому истинность W на R_1^n равносильна истинности W на R_2^n , и, следовательно, R_1^n и R_2^n имеют одинаковые узкофункциональные типы.

Необходимость. Условие $m = n$ вытекает из леммы 2. Необходимость совпадения узкофункциональных типов R_1 и R_2 вытекает из того, что каждое элементарно-кольцевое предложение A , относящееся к R_1 или R_2 , можно преобразовать в элементарно-модульное предложение A_B , относящееся соответственно к R_1^n и R_2^n и равносильное первоначальному. Так как вид предложения A_B одинаков для R_1^n и R_2^n и истинность A_B на R_1^n равносильна истинности A_B на R_2^n , то истинность A на R_1 равносильна истинности A на R_2 . Теорема доказана.

§ 2. Пусть опять R^n — n -членный свободный унитарный модуль над ассоциативным кольцом R с единицей.

В этом параграфе мы докажем, что класс модулей $\{R^n/n = 1, 2, \dots\}$ имеет неразрешимую теорию (определения см. в [6]).

Напомним одно определение (см. [7]). Пусть K_1 и K_2 — классы моделей сигнатуры $\sigma_1 = \langle P_1^{n_1}, \dots, P_k^{n_k} \rangle$ и σ_2 . Говорят, что класс моделей K_1 относительно элементарно определим в классе K_2 , если существуют такие формулы $A(x_1, \dots, x_n; y_1, \dots, y_m)$ (сокращенно $A(x, \bar{y})$), $B(x, \bar{y}^1, \bar{y}^2)$, $C_1(x, \bar{y}^1, \dots, \bar{y}^{n_1}), \dots, C_k(x, \bar{y}^1, \dots, \bar{y}^{n_k})$ сигнатуры σ_2 , что выполнено условие: для любой модели $\mathfrak{M} \in K_1$ существует модель $\mathfrak{N} \in K_2$ и элементы $a_1, \dots, a_n \in \mathfrak{N}$, такие, что

1) множество L m -ок $\langle b_1, \dots, b_m \rangle$, таких, что $A(\bar{a}, \bar{b})$ истинно в \mathfrak{N} , непусто;

2) формула $B(\bar{a}, \bar{y}^1, \bar{y}^2)$ определяет отношение конгруэнтности \sim на модели сигнатуры σ_1 , полученной из множества L определением предиката $P_i^{n_i}$ с помощью формулы $C_i(\bar{a}, \bar{y}^1, \dots, \bar{y}^{n_i})$;

3) модель $\langle L/\sim, P_1^{n_1}, \dots, P_k^{n_k} \rangle$, где L/\sim — множество классов эквивалентных m -ок из множества L , а предикаты $P_i^{n_i}$ индуцированы вышеопределенными предикатами на L , изоморфна модели \mathfrak{M} .

Приведем еще два известных предложения [7].

Предложение 1. Пусть класс моделей K_1 относительно элементарно определим в классе K_2 . Если множество тождественно истинных предложений сигнатуры σ_1 и множество предложений этой сигнатуры, опровержимых на моделях класса K_1 , эффективно неотделимы, то аналогичное утверждение справедливо для класса K_2 .

Пусть M — произвольное множество. Рассмотрим модель

$$\mathfrak{M}_M = \langle \bar{M}, \leq \rangle,$$

где \bar{M} состоит из всех отношений эквивалентности α на множестве M , а \leq — обычное отношение порядка

$$\beta \leq \alpha \leftrightarrow (\forall_M x, y)(x \beta y \rightarrow \alpha x y)$$

(β — подразбиение α). Модель \mathfrak{M}_M — полумодулярная структура с дополнениями [8].

Предложение 2. Множество тождественно истинных предложений сигнатуры $\sigma = \langle \leq \rangle$ и множество предложений этой сигнатуры, опровержимых на моделях класса $K = \{\mathfrak{M}_M/M \text{ — конечно}\}$, эффективно неотделимы.

Теорема 3. Пусть R^n — n -членный модуль над кольцом R , содержащим хотя бы два элемента. Множество тождественно истинных элементарно-модульных предложений и множество элементарно-модульных предложений, опровержимых на моделях класса $K = \{R^n, n \text{ — конечно}\}$, эффективно неотделимы.

Доказательство. Пусть R — бесконечное кольцо и пусть u_1, u_2, \dots, u_n — фиксированный базис модуля R^n . Введем в R^n отношение квази-порядка

$$a \times b \stackrel{df}{=} (\exists_R \alpha_1, \dots, \alpha_n) (\exists_R \beta_1, \dots, \beta_n) \\ \left(a = \sum_{i=1}^n \alpha_i u_i \wedge b = \sum_{i=1}^n \beta_i u_i \wedge \bigwedge_{ij} (\alpha_i \neq \alpha_j \rightarrow \beta_i \neq \beta_j) \right).$$

(Вектор a в известном смысле более гладкий, нежели b). Введем, далее, отношение эквивалентности в R^n , полагая

$$a \sim b \stackrel{df}{=} a \times b \wedge b \times a.$$

Отношение квазипорядка \times на R^n/\sim индуцирует отношение частичного порядка \leq , причем, как легко видеть, $\langle R^n/\sim, \leq \rangle$ изоморфна \mathfrak{M}_M , где $\overline{M} = n$ (ср. [2]).

Пусть теперь R — конечное кольцо, состоящее из r элементов, а n — произвольное натуральное число. Пусть, далее, k — такое натуральное число, что $r^k > n$. Рассмотрим N -мерный модуль R^N , где $N = rn$, и пусть $u_{11}, u_{12}, \dots, u_{1r}; u_{21}, u_{22}, \dots, u_{2r}; \dots; u_{n1}, u_{n2}, \dots, u_{nr}$ — базис R^N . Введем в R^N отношение квазипорядка

$$a \times b \stackrel{df}{=} (\exists_R \alpha_{11}, \dots, \alpha_{nr}) (\exists_R \beta_{11}, \dots, \beta_{nr}) \times \\ \times \left(a = \sum_{i,j} \alpha_{ij} u_{ij} \wedge b = \sum_{i,j} \beta_{ij} u_{ij} \wedge \bigwedge_{\nu, \mu} (\alpha_{\nu 1} \neq \alpha_{\mu 1} \vee \alpha_{\nu 2} \neq \alpha_{\mu 2} \vee \dots \vee \alpha_{\nu r} \neq \alpha_{\mu r} \rightarrow \right. \\ \left. \rightarrow \beta_{\nu 1} \neq \beta_{\mu 1} \vee \beta_{\nu 2} \neq \beta_{\mu 2} \vee \dots \vee \beta_{\nu r} \neq \beta_{\mu r}) \right).$$

Нетрудно установить, что отношение эквивалентности в R^N , определенное как $a \sim b \stackrel{df}{=} a \times b \wedge b \times a$, и индуцированный частичный порядок \leq таковы, что $\langle R^N/\sim, \leq \rangle$ изоморфна \mathfrak{M}_M , $\overline{M} = n$.

Для завершения доказательства теоремы достаточно воспользоваться приведенными предложениями, положив

$$A(x_1, \dots, x_n, y) \stackrel{df}{=} (y = y),$$

$$B(x_1, \dots, x_n, y_1, y_2) \stackrel{df}{=} y_1 \times y_2 \wedge y_2 \times y_1,$$

$$C(x_1, \dots, x_n, y_1, y_2) \stackrel{df}{=} y_1 \times y_2.$$

Следствие. Для любого кольца R , содержащего по крайней мере два элемента, класс модулей $\{R^n/n = 1, 2, \dots\}$ имеет неразрешимую теорию.

Замечание. Утверждение теоремы остается справедливым, если ограничиться классом $\{R^n, n \in I\}$, где I — произвольное бесконечное множество натуральных чисел, а R — бесконечное кольцо.

Литература

1. Ван дер Варден Б. Л. Современная алгебра, 1, 2. ОГИЗ, 1947.
2. Мальцев А. И. Об элементарных свойствах линейных групп. Некоторые проблемы математики и механики. Новосибирск, 1961, 110—132.
3. Новиков П. С. Элементы математической логики. Физматгиз, 1959.
4. Мальцев А. И. Изв. АН СССР, сер. матем., 23, № 3, 1959.
5. Мальцев А. И. УМН, 16, № 3, 1961.
6. Ершов Ю. Л., Лавров И. А., Тайманов А. Д., Тайцлин М. А. УМН, 20, в. 4 (124), 1965.
7. Ершов Ю. Л. Новые примеры неразрешимых теорий. Алгебра и логика. Семинар, 5, в. 5, 1966.
8. Биркгоф Г. Теория структур. ИЛ, 1953.

Белорусский государственный университет
им. В. И. Ленина

Поступило в редакцию 19.IV 1967

М. А. ШЕШКО

**ОБ ОБЩЕЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ЛИНЕЙНОГО СОПРЯЖЕНИЯ
 ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА ФУНКЦИЙ,
 ОПРЕДЕЛЕННЫХ НА ЗАМКНУТОЙ
 РИМАНОВОЙ ПОВЕРХНОСТИ**

1. Будем изучать общую краевую задачу линейного сопряжения для одного класса функций, определенных на замкнутой римановой поверхности, используя метод Л. И. Чибриковой [1, 2]. Идея этого метода состоит в следующем. Плоской моделью замкнутой римановой поверхности рода ρ является фундаментальная область (нормальный фундаментальный 4ρ -угольник) некоторой фуксовой группы 1-го рода дробно-линейных преобразований, содержащаяся внутри главной окружности этой группы $|z| \leq 1$, а поверхности с краем — половина фундаментальной области фуксовой группы 2-го рода дробно-линейных преобразований, содержащаяся внутри главной окружности. Краям поверхности соответствуют дуги главной окружности $|z|=1$ с конгруэнтными концами. Тогда вся теория аналитических функций на римановых поверхностях переходит в теорию автоморфных функций.

Изучаемая нами задача на плоской модели может быть сформулирована следующим образом.

Внутри нормального фундаментального многоугольника R некоторой фуксовой группы P 1-го рода найти кусочно-аналитическую автоморфную функцию $F(z)$ с линией скачков L_1 , где $L_1 = l_{4\rho+1} + \dots + l_{4\rho+r}$ — совокупность r простых замкнутых непересекающихся контуров типа Ляпунова, гомологичных нулю, если на L_1 и на совокупности $L_0 = l_1 + \dots + l_{4\rho}$ сторон многоугольника R ее граничные значения удовлетворяют условиям

$$\begin{aligned} F^+(t) &= G_1(t) F^-(t) + H(t) \overline{F^-(t)} + g_1(t), \quad t \in L_1, \\ F^+(t) &= G_2(t) F^+[a(t)] + g_2(t), \quad t \in L_0. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь $G_1(t)$, $H(t)$, $g_1(t)$ — заданные на L_1 функции, причем $G_1(t) \neq 0$ и непрерывна, $H(t)$ ограничена и измерима, $g_1(t) \in L^p$, $p > 1$; $G_2(t)$, $g_2(t)$ — функции, удовлетворяющие условию Гельдера всюду на L_0 , кроме вершин t_k многоугольника R , в которых они могут допускать разрывы первого рода.

Под $a(t)$ мы понимаем функцию, которая производит инволюционное преобразование линии L_0 самое в себя. Она определяется совокупностью порождающих и обратных к ним дробнолинейных преобразований

$$\sigma_k(z) = \frac{\alpha_k z + \beta_k}{\gamma_k z + \delta_k}, \quad \alpha_k \delta_k - \beta_k \gamma_k = 1, \quad k = 1, \dots, 4\rho$$

заданной группы P . Каждое преобразование $\sigma_k(z)$ переводит сторону l_k многоугольника R в противоположно ориентированную сторону l'_k . Таким

образом, функция $\alpha(t)$ обладает следующими свойствами: она совпадает на каждой стороне l_k с дробно-линейным преобразованием $\sigma_k(z)$, имеет в общем случае в вершинах l_k разрывы первого рода и для нее

$$\alpha[\alpha(t)] = t. \quad (2)$$

Если в краевых условиях (1) положить $G_2(t) \equiv 1$, $g_2(t) \equiv 0$, то получим задачу Римана для автоморфных функций, изученную в [1] и [2]. Второе краевое условие $F^+(t) = F^+[\alpha(t)]$ есть необходимое и достаточное условие того, чтобы $F(z)$ была автоморфной относительно рассматриваемой группы. При переходе на риманову поверхность это условие будет условием однозначности аналитической функции.

При $H(t) \equiv 0$ задача (1) другим методом была решена В. И. Показеевым [3].

Используя свойство (2) функции $\alpha(t)$, легко получить необходимые условия разрешимости задачи (1)

$$G_2(t)G_2[\alpha(t)] = 1, \quad (3)$$

$$g_2(t) + g_2[\alpha(t)]G_2(t) = 0.$$

Чтобы решить задачу (1), вводим кусочно аналитическую автоморфную функцию $\Phi(z)$, совпадающую внутри многогранника R с искомой функцией $F(z)$, а на остальную часть плоскости распространяем по закону автоморфности

$$\Phi(z) = F(z), \quad z \in R, \quad (4)$$

$$\Phi(z) = \Phi[\alpha(z)], \quad z \in R^*,$$

где R^* — дополнение R до полной плоскости.

В силу такого определения $\Phi(z)$ вдоль всей границы многоугольника R имеем:

$$\Phi^-(t) = \Phi^+[\alpha(t)] = F^+[\alpha(t)]. \quad (5)$$

Используя (5), из краевых условий (1) получим

$$\Phi^+(t) = G_1(t)\Phi^-(t) + H(t)\overline{\Phi^-(t)} + g_1(t), \quad t \in L_1, \quad (6)$$

$$\Phi^+(t) = G_2(t)\Phi^-(t) + g_2(t), \quad t \in L_0.$$

Второе краевое условие в (6) есть краевое условие задачи Римана для особого случая, когда линия L_0 содержит конгруэнтные участки. Такой особый случай изучен в [4]. Согласно изложенным там результатам, при решении задачи мы должны рассматривать краевое условие лишь на линии L_0^0 , отбросив вторую конгруэнтную половину L_0^1 . В силу того, что R — нормальный многоугольник,

$$L_0 = \sum_{k=1}^{2\rho} l_k + \sum_{k=1}^{2\rho} l'_k = L_0^0 + L_0^1,$$

где

$$L_0^0 = \sum_{k=1}^{2\rho} l_k, \quad L_0^1 = \sum_{k=1}^{2\rho} l'_k.$$

Предположим сначала, что $G_1(t)$ удовлетворяет условию Гельдера. Построим каноническую функцию $X(z)$ задачи (6), удовлетворяющую условиям

$$X^+(t) = G_1(t)X^-(t), \quad t \in L_1, \quad (7)$$

$$X^+(t) = G_2(t)X^-(t), \quad t \in L_0^0,$$

у которой разность между числом нулей и полюсов равна индексу задачи.

Поведение интеграла

$$\Gamma_1(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_1} \ln G_1(t) H(z, \tau) f_1'(\tau) d\tau$$

определяется формулой

$$\Gamma_1(z) = \kappa_j \ln(z - t_j) + \Gamma_1^*(z),$$

где $H(z, \tau) f_1'(\tau)$ — элементарная функция Вейерштрасса; $\kappa_j = \frac{1}{2\pi} \times [\arg G_1(t)]_{L_{4\rho+j}}; t_j$ — точки, принятые за начало обхода на $L_{4\rho+j}$ ($j = 1, 2, \dots, r$); $\Gamma_1^*(z)$ — функция, стремящаяся к вполне определенному пределу, если $z \rightarrow t_j$ изнутри или извне $L_{4\rho+j}$.

Оценим интеграл

$$\Gamma_2(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_0^0} \ln G_2(t) H(z, \tau) f_1'(\tau) d\tau$$

в окрестности вершины t_0 многоугольника R . В остальных точках, являющихся вершинами многоугольника R , $\Gamma_2(z)$ ведет себя точно так же в силу их конгруэнтности точке t_0 . Точка t_0 является точкой разрыва для $G_2(t)$ поэтому вблизи нее

$$\Gamma_2(z) = (\alpha + i\beta) \ln(z - t_0) + \Gamma_2^*(z),$$

где

$$\alpha + i\beta = \frac{1}{2\pi i} \ln \frac{G_2(t_0 - 0)}{G_2(t_0 + 0)};$$

$\Gamma_2^*(z)$ — функция, аналогичная функции $\Gamma_1^*(z)$.

Канонической функцией задачи (7) будет (см. [1, 2, 5])

$$X(z) = e^{\Gamma(z)} \prod_{j=1}^r E^{x_j}(z, \Theta_0, t_j) E^{x'_j}(z, \Theta_0, t_0) \times \times \prod_{i=1}^p E(z, \Theta_k, \Theta_0), \quad (8)$$

где Θ_0 — некоторая фиксированная точка из фундаментальной области;

$$E(z, \Theta_0, t_j) = \exp\left(\int_{t_j}^{\Theta_0} H(z, \tau) f_1'(\tau) d\tau\right),$$

$$\Gamma(z) = \Gamma_1(z) + \Gamma_2(z);$$

x' — целое число, подобранное так, чтобы выполнялось условие

$$0 < \alpha - x' < 1$$

или

$$-1 < \alpha - x' < 0$$

в зависимости от того, какое решение нас интересует: ограниченное при $z = t_0$ или обращающееся в бесконечность интегрируемого порядка; точки Θ_k должны быть найдены из решения проблемы Якоби. Обозначим различные среди точек $\Theta_1, \Theta_2, \dots, \Theta_p$ через $\Theta_1, \Theta_2, \dots, \Theta_n$, а их кратности через $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$.

Назовем сумму $\kappa = \kappa_1 + \kappa_2 + \dots + \kappa_r + \kappa'$ индексом задачи.

Каноническая функция $X(z)$ в фундаментальном многоугольнике R в точках $\Theta_1, \Theta_2, \dots, \Theta_n$ имеет нули порядков $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$ соответственно, а в точке Θ_0 нуль порядка $\kappa - \rho$ при $\kappa \geq \rho$ или полюс порядка $\rho - \kappa$ при $\kappa < \rho$.

На основании (7) краевые условия (6) записываем в виде

$$\frac{\Phi^+(t)}{X^+(t)} - \frac{\Phi^-(t)}{X^-(t)} = \frac{H(t)}{G_1(t)} \frac{\overline{X^-(t)}}{X^-(t)} \frac{\overline{\Phi^-(t)}}{\overline{X^-(t)}} + \frac{g_1(t)}{X^+(t)}, \quad t \in L_1,$$

$$\frac{\Phi^+(t)}{X^+(t)} - \frac{\Phi^-(t)}{X^-(t)} = \frac{g_2(t)}{X^+(t)}, \quad t \in L_0^0,$$

или после введения обозначения

$$\frac{\Phi(z)}{X(z)} = \varphi(z)$$

$$\varphi^+(t) - \varphi^-(t) = \frac{H(t)}{G_1(t)} \frac{\overline{X^-(t)}}{X^-(t)} \overline{\varphi^-(t)} + \frac{g_1(t)}{X^+(t)}, \quad t \in L_1,$$

$$\varphi^+(t) - \varphi^-(t) = \frac{g_2(t)}{X^+(t)}, \quad t \in L_0^0. \quad (9)$$

Таким образом, мы пришли к отысканию в фундаментальном многоугольнике R кусочно-аналитической автоморфной функции с полюсами в точках $\Theta_1, \Theta_2, \dots, \Theta_n$ порядков $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$ соответственно, в точке Θ_0 порядка $\mu_0 = \kappa - \rho$ при $\kappa \geq \rho$ по краевым условиям (9).

Исходя из свойств автоморфных функций ([6] стр. 106, [7], гл. 3), будем искать решение задачи (9) в виде

$$\varphi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_0^0} \frac{g_2(\tau)}{X^+(\tau)} H(z, \tau) f_1'(\tau) d\tau +$$

$$+ \frac{1}{2\pi i} \int_{L_1} \mu(\tau) H(z, \tau) f_1'(\tau) d\tau + \sum_{q=0}^n [C_{q,0} H_0(z, \Theta_q) +$$

$$+ \dots + C_{q > \mu_{q-1}} H_{\mu_{q-1}}(z, \Theta_q)] + C,$$

где $\mu(t)$ — неизвестная функция, принадлежащая пространству L^p , $p > 1$; $C, C_{q,0}, \dots, C_{q, \mu_{q-1}}$ ($q = 0, 1, \dots, n$) — произвольные комплексные постоянные. При $\kappa < \rho$ суммирование начнется с $q = 1$.

Применяя формулы Сохоцкого к $\varphi(z)$ и подставляя $\varphi^+(t), \varphi^-(t)$ в (9), получим следующее интегральное уравнение:

$$\mu(t) = \frac{H(t)}{G_1(t)} \frac{\overline{X^-(t)}}{X^-(t)} \left[-\frac{1}{2} \overline{\mu(t)} + \frac{1}{2\pi i} \int_{L_1} \mu(\tau) H(t, \tau) f_1'(\tau) d\tau \right] +$$

$$+ \frac{H(t)}{G_1(t)} \frac{\overline{X^-(t)}}{X^-(t)} \frac{1}{2\pi i} \int_{L_0^0} \frac{g_2(\tau)}{X^+(\tau)} H(t, \tau) f_1'(\tau) d\tau +$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{H(t)}{G_1(t)} \frac{\overline{X^-(t)}}{X^-(t)} \left\{ \sum_{q=0}^n \left[\overline{C_{q,0}} \overline{H_0(t, \Theta_q)} + \dots + \right. \right. \\
 & \left. \left. + \overline{C_{q, \nu_{q-1}}} \overline{H_{\nu_{q-1}}(t, \Theta_q)} \right] + \overline{C} \right\} + \\
 & + \frac{g_1(t)}{X^+(t)}, \quad t \in L_1.
 \end{aligned} \quad (*)$$

Введем обозначение

$$T\mu = \frac{H(t)}{G_1(t)} \frac{\overline{X^-(t)}}{X^-(t)} \left[-\frac{1}{2} \overline{\mu(t)} + \frac{1}{2\pi i} \int_{L_1} \mu(\tau) H(t, \tau) f_1'(\tau) d\tau \right]$$

и оценим норму оператора $T\mu$ в пространстве L^p , $p > 1$. Используя разложение $H(t, \tau) f_1'(\tau) = \frac{1}{\tau - t} + \rho(t, \tau)$ и применяя неравенство Гельдера, получим

$$\begin{aligned}
 \|T\mu\| & \leq \frac{1}{2} \sup_{t \in L_1} \left| \frac{H(t)}{G_1(t)} \right| \left\| -\overline{\mu(t)} + \frac{1}{\pi i} \int_{L_1} \frac{\mu(\tau)}{\tau - t} d\tau \right\| + \\
 & + \left\| \frac{1}{\pi i} \int_{L_1} \mu(\tau) \rho(t, \tau) d\tau \right\| \leq \frac{1}{2} \sup_{t \in L_1} \left| \frac{H(t)}{G_1(t)} \right| (1 + S_p + M_p),
 \end{aligned}$$

где S_p — норма сингулярного оператора;

$$M_p = \left\{ \frac{1}{\pi} \int_{L_1} \left[\left(\int_{L_1} |\rho(t, \tau)|^q d\tau \right)^{1/q} \right]^p ds \right\}^{1/p}, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Следовательно,

$$\|T\| \leq \frac{1}{2} \sup_{t \in L_1} \left| \frac{H(t)}{G_1(t)} \right| (1 + S_p + M_p).$$

Если

$$\frac{1}{2} \sup_{t \in L_1} \left| \frac{H(t)}{G_1(t)} \right| (1 + S_p + M_p) < 1, \quad (10)$$

то уравнение (*) согласно принципу сжатых отображений имеет единственное решение при любом фиксированном свободном члене.

Пусть теперь $G_1(t)$ непрерывна; тогда, равномерно аппроксимируя $G_1(t)$ функцией $\tilde{G}_1(t)$, удовлетворяющей условию Гельдера (например, многочленом), краевую задачу (6) запишем в виде

$$\Phi^+(t) = \tilde{G}_1(t) \Phi^-(t) + H(t) \overline{\Phi^-(t)} + [G_1(t) - \tilde{G}_1(t)] \Phi^-(t) + g_1(t), \quad t \in L_1,$$

$$\Phi^+(t) = G_2(t) \Phi^-(t) + g_2(t), \quad t \in L_0.$$

Функцию $G_1(t)$ приблизим $\tilde{G}_1(t)$ так, чтобы выполнялось условие

$$\max_{t \in L_1} |G_1(t) - \tilde{G}_1(t)| < 1 - \frac{2}{1 + S_p + M_p},$$

после чего применяем только что описанный метод.

Выпишем искомое решение:

$$\begin{aligned} \Phi(z) = X(z) & \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_{L_0^0} \frac{g_2(\tau)}{X^+(\tau)} H(z, \tau) f_1'(\tau) d\tau + \right. \\ & + \frac{1}{2\pi i} \int_{L_1} \mu(\tau) H(z, \tau) f_1'(\tau) d\tau + \sum_{q=0}^n [C_{q,0} H_0(z, \Theta_q) + \\ & \left. + \dots + C_{q, \mu_q-1} H_{\mu_q-1}(z, \Theta_q)] + C \right\}. \end{aligned} \quad (11)$$

Очевидно, что решениями нашей задачи будут лишь те функции, определяемые формулой (11), у которых вычеты во всех точках a_1, a_2, \dots, a_ρ равны нулю. Равенство нулю вычетов $\Phi(z)$ в точках a_1, a_2, \dots, a_ρ дает ρ линейных уравнений

$$\sum_{q=0}^n (C_{q,0} h_{k,0}^q = C_{q,1} h_{k,1}^q + \dots + C_{q, \mu_q-1} h_{k, \mu_q-1}^q) = r_k, \quad (12)$$

$$k = 1, 2, \dots, \rho,$$

где

$$r_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_0^0} \frac{g_2(\tau)}{X^+(\tau)} H_k(\tau) f_1'(\tau) d\tau + \frac{1}{2\pi i} \int_{L_1} \mu(\tau) H_k(\tau) f_1'(\tau) d\tau;$$

$h_{k,0}^q, \dots, h_{k, \mu_q-1}^q$ — вполне определенные постоянные.

Пусть $\kappa \geq \rho$. Тогда при $\kappa > 2\rho - 2$ ранг системы (12) равен ρ и система, а следовательно, и краевая задача (1) будут иметь $\kappa - \rho + 1$ решений. При $\rho \leq \kappa \leq 2\rho - 2$ ранг может быть и меньше ρ . Тогда при выполнении условий

$$\sum_{k=1}^{\rho} (r_k M_{kj}) = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, \rho - \xi),$$

где M_{kj} — полная система линейно независимых решений транспонированной системы, система (12) будет иметь $\kappa - \xi + 1$ решений.

При $\kappa < \rho$ формула (11) будет содержать одну произвольную постоянную. Последнюю постоянную при $\rho - \kappa = 1$ подбираем так, чтобы функция $\Phi(z)$ была аналитической в точке Θ_0 . В остальных случаях при $\kappa < \rho$ однородная задача нулевых решений иметь не будет.

Сформулируем окончательный результат.

Теорема. Пусть для граничной задачи (1) выполнено условие (10). Тогда при $\kappa > 2\rho - 2$ однородная задача имеет $2(\kappa - \rho + 1)$ линейно независимых решений над полем вещественных чисел, неоднородная безусловно разрешима; при $\rho \leq \kappa \leq 2\rho - 2$ однородная имеет $2(\kappa - \xi + 1)$ решений, неоднородная $2(\rho - \xi)$ условий разрешимости; при $\kappa = \rho - 1$ однородная задача имеет единственное решение, неоднородная $2(\rho - \kappa - 1)$ условий разрешимости; при $\kappa < \rho - 1$ однородная ненулевых решений не имеет, неоднородная разрешима при выполнении $2(\rho - \kappa - 1)$ условий разрешимости.

Замечание. Второе краевое условие в (1) можно обобщить, взяв его в виде

$$F^+(t) = G_2(t) F^+[a(t)] + H_1(t) \overline{F^+[a(t)]} + g_2(t). \quad (13)$$

Покажем, что неизвестную функцию с сопряжением можно исключить. Представим

$$G_2(t) = \frac{X^+(t)}{X^+[\alpha(t)]}.$$

Тогда

$$\frac{F^+(t)}{X^+(t)} - \frac{F^+[\alpha(t)]}{X^+[\alpha(t)]} = \frac{H_1(t)}{G_2(t)} \frac{\overline{X^+[\alpha(t)]}}{X^+[\alpha(t)]} \frac{F^+[\alpha(t)]}{X^+[\alpha(t)]} + \frac{g_2(t)}{X^+(t)}$$

или

$$\psi^+(t) - \psi^+[\alpha(t)] = \frac{H_1(t)}{G_2(t)} \frac{\overline{X^+[\alpha(t)]}}{X^+[\alpha(t)]} \overline{\psi^+[\alpha(t)]} + \frac{g_2(t)}{X^+(t)}, \quad (14)$$

где

$$\psi^+(z) = \frac{F^+(z)}{X^+(z)}.$$

Подставляя в (14) вместо t $\alpha(t)$ и используя (2), получим

$$\psi^+[\alpha(t)] - \psi^+(t) = \frac{H_1[\alpha(t)]}{G_2[\alpha(t)]} \frac{\overline{X^+(t)}}{X^+(t)} \overline{\psi^+(t)} + \frac{g_2[\alpha(t)]}{X^+[\alpha(t)]}. \quad (15)$$

Исключая из (14) и (15) $\psi^+[\alpha(t)]$, $\psi^+(t)$ и взяв сопряжение от обеих частей полученного равенства, будем иметь

$$\psi^+(t) = -\frac{\overline{G_2[\alpha(t)]}}{H_1[\alpha(t)]} \frac{\overline{H_1(t)}}{G_2(t)} \frac{X^+[\alpha(t)]}{X^+[\alpha(t)]} \psi^+[\alpha(t)] + \left\{ \frac{g_2[\alpha(t)]}{\overline{X^+[\alpha(t)]}} + \frac{g_2(t)}{X^+(t)} \right\} \frac{\overline{H_1[\alpha(t)]}}{G_2[\alpha(t)]}.$$

Легко проверить, что необходимые условия разрешимости вида (3) выполнены.

2. Рассмотрим случай, когда в задаче (1) на римановой поверхности выполняется условие

$$|G_1| = |H|. \quad (16)$$

Тогда задача (1) распадается на две задачи для функций $F^+(t)$ и $F^-(t)$ в отдельности:

$$F^+(t) = G(t) \overline{F^+(t)} + h(t), \quad t \in L_1, \quad (17)$$

$$F^+(t) = G_2(t) F^+[\alpha(t)] + g_2(t), \quad t \in L_0$$

и

$$\overline{F^-(t)} = M(t) F^-(t) + m(t), \quad t \in L_1, \quad (18)$$

где

$$G(t) = \frac{G_1(t)}{H(t)}, \quad h(t) = g_1(t) - G_1(t) \frac{\overline{g_1(t)}}{H(t)},$$

$$M(t) = -\frac{G_1(t)}{H(t)}, \quad m(t) = \frac{F^+(t) - g_1(t)}{H(t)}.$$

Здесь мы предполагаем, что функции $G_1(t)$, $H(t)$, $g_1(t)$ удовлетворяют условию Гельдера. Предположения относительно $G_2(t)$ и $g_2(t)$ те же, что и в пункте 1.

Задача (17) есть краевая задача Гильберта с разрывными коэффициентами на римановой поверхности с краем. На плоской модели она может быть сформулирована следующим образом.

Найти внутри половины фундаментального многоугольника R_1 некоторой фуксовой группы P_1 второго рода аналитическую функцию $F(z) = u +$



$+iv$, граничные значения которой на дугах $l_{4p+1}, \dots, l_{4p+r}$ главной окружности $|z|=1$ удовлетворяют краевому условию

$$F^+(t) = G(t) \overline{F^+(t)} + h(t), \quad t \in L_1 = l_{4p+1} + \dots + l_{4p+r},$$

а в конгруентных точках границы, лежащей внутри главной окружности, связаны граничным условием

$$F^+(t) = G_2(t) F^+[\alpha(t)] + g_2(t), \quad t \in L_0.$$

Покажем, что эта задача эквивалентна задаче Римана для автоморфных функций. Обозначим внутренность многоугольника R_1 через D^+ , а симметричную ей относительно главной окружности $|z|=1$ область через D^- . Очевидно, что $D^+ + L_1 + D^-$ будет фундаментальным многоугольником группы P_1 .

Введем кусочно аналитическую функцию

$$\Phi(z) = \begin{cases} F(z), & z \in D^+, \\ \overline{F\left(\frac{1}{z}\right)}, & z \in D^-, \end{cases}$$

которую распространяем на всю плоскость по закону автоморфности:

$$\Phi(z) = \Phi[\alpha(z)].$$

Очевидно, что в точках главной окружности

$$\Phi^-(t) = \overline{F^+\left(\frac{1}{t}\right)} = \overline{F^+(t)},$$

а в конгруентных точках границы

$$\Phi^-(t) = \Phi^+[\alpha(t)] = F^+[\alpha(t)].$$

На основании этих формул из (17) получаем

$$\Phi^+(t) = G(t) \Phi^-(t) + h(t), \quad t \in L_1, \tag{19}$$

$$\Phi^+(t) = G_2(t) \Phi^-(t) + g_2(t), \quad t \in L_0.$$

Краевая задача (19) есть задача Римана с разрывными коэффициентами $G(t)$ и $G_2(t)$ для особого случая, когда линия скачков содержит конгруентные участки. Пусть t_1, t_2, \dots, t_N — точки разрыва функции $G(t)$; t_1, t_2, \dots, t_{2p} — вершины многоугольника, в которых функция $G_2(t)$ на линии L_0^0 имеет разрывы. Все точки разрыва, расположенные в каком-либо порядке обозначим через $c_1, c_2, \dots, c_{N+2p}$. Будем отыскивать решения в классе $h(c_1, c_2, \dots, c_s)$.

При построении канонической функции из $2p$ вершин многоугольника следует принимать во внимание только одну, например C_{N+1} , так как все остальные будут ей конгруентны.

Канонической функцией задачи (19), удовлетворяющей условию симметрии, будет произведение

$$X(z) = \chi(z) \overline{\chi\left(\frac{1}{z}\right)},$$

где

$$\chi(z) = e^{\Gamma(z)} \prod_{j=1}^{N+1} E^{\gamma_j}(z, \Theta_0, c_j) \prod_{k=L}^p E(z, \Theta_k, \Theta_0);$$

$$\Gamma(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \ln A(\tau) H(z, \tau) f_1'(\tau) d\tau;$$

$$L = L_0^0 + L_1;$$

$$A(t) = \begin{cases} \sqrt{G(t)}, & t \in L_1; \\ \sqrt{G_2(t)}, & t \in L_0^0; \end{cases}$$

Θ_0 — некоторая фиксированная точка из фундаментальной области; κ_j — целые числа, подобранные так, чтобы выполнялись условия

$$0 < \alpha_j + \kappa_j < 1, \quad j = 1, 2, \dots, s,$$

$$-1 < \alpha_j + \kappa_j < 0, \quad j = s + 1, \dots, p,$$

$$\alpha_j + \kappa_j = 0, \quad j = p + 1, \dots, N + 2\rho,$$

$$\alpha_j + i\beta_j = \frac{1}{4\pi i} \ln \frac{A(c_j - 0)}{A(c_j + 0)};$$

Θ_k — точки, найденные из решения проблемы Якоби.

Для рассматриваемой группы P_1 род фундаментальной области $\rho = 2h + r - 1$, если h — число ручек римановой поверхности.

После того, как построена каноническая функция, задача решается обычным методом (см. [1, 2]).

Для нахождения функции $F^-(z)$ потребуется отдельно решать r задач с краевым условием (18). Для решения любой из них необходимо ввести дубль и распространить $F^-(z)$ по формуле $\Phi^+(z) = \overline{F^-\left(\frac{1}{z}\right)}$, после чего

получим краевую задачу Римана. Так как мы рассматриваем контуры, гомологичные нулю, то дублем является сфера, а, следовательно, род такой римановой поверхности равен нулю. В этом случае группа полностью характеризуется одним инвариантом $f(z)$. Краевая задача Римана для групп с одним инвариантом изучена в работах [8, 9].

В заключение выражаю глубокую благодарность профессору Ф. Д. Гахову за полезные советы при выполнении работы.

Литература

1. Чибрикова Л. И. Изв. вузов, Математика, № 6, 1961.
2. Чибрикова Л. И. Изв. вузов, Математика, № 3, 1962.
3. Показеев В. И. Сб. «Краевые задачи». Изд. Казанского госуниверситета, 1964.
4. Чибрикова Л. И. Сб. «Краевые задачи теории аналитических функций». Изд. Казанского госуниверситета, 1962.
5. Чибрикова Л. И. Тр. семинара по обратным краевым задачам. Изд. Казанского госуниверситета, 1964.
6. Форд Л. Р. Автоморфные функции. ОНТИ, 1936.
7. Weierstrass K. Vorlesungen über Theorie des Abelschen Transzendenten. Ges. math. Werke, 4, Berlin, 1902.
8. Чибрикова Л. И. Уч. зап. Казанского госуниверситета, 116, кн. 4, 1956.
9. Чибрикова Л. И. Уч. зап. Казанского госуниверситета, 117, кн. 2, 1957.

ХОАНГ ДИНЬ ЗУНГ

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ОБРАТНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ
 АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Как известно [1, 2], обратная краевая задача является задачей отыскания контура области по некоторым величинам, заданным на нем. Здесь речь идет об отыскании контура по заданным на нем краевым значениям аналитической функции. Она заключается в следующем [1]. Даны две функции параметра s ($0 \leq s \leq l$)

$$u = u(s), \quad v = v(s), \quad (1)$$

периодические с периодом l , имеющие первые производные, удовлетворяющие условию Гельдера и не обращающиеся одновременно в нуль, удовлетворяющие условию: при двух значениях параметра $s_1 \neq s_2$ $[u(s_1) - u(s_2)]^2 + [v(s_1) - v(s_2)]^2 \neq 0$.

Уравнения (1) определяют в плоскости комплексного переменного $w = u + iv$ простую замкнутую кривую Ляпунова, делящую плоскость на области: внутреннюю D_w^+ и внешнюю D_w^- .

«Внутренняя» задача: определить в плоскости z кривую L_z , ограничивающую конечную область D_z^+ (вообще говоря, многолистную) так, чтобы (считая параметр s длиной дуги кривой L_z) выражение $w(s) = u(s) + iv(s)$ было краевым значением аналитической функции, конформно отображающей область D_z^+ на область D_w^+ или D_w^- .

«Внешняя» задача. Если в предыдущей формулировке область D_z^+ заменить на область D_z^- , то получим постановку внешней обратной краевой задачи.

В связи с приложениями обратной задачи возникает интересный вопрос о том, как достаточно малые изменения начальных данных задачи влияют на ее решения, т. е. на вид искомой кривой. Будет ли задача «устойчива»? Здесь мы рассмотрим устойчивость обратной задачи по отношению к изменениям заданного контура L_w , или, что то же самое, по отношению к задаваемым контурным значениям аналитической функции (1).

Здесь мы только рассмотрим устойчивость внутренней задачи. Для внешней задачи заключение аналогично.

Решение внутренней задачи дается формулой

$$z = F(\zeta) = e^{i\alpha} \int e^{x(\zeta)} d\zeta + C, \quad (2)$$

где α — произвольная вещественная постоянная; C — произвольная комплексная постоянная;

$$\chi(\zeta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln \omega'(\Theta) \frac{e^{i\Theta} + \zeta}{e^{i\Theta} - \zeta} d\Theta; \quad (3)$$

$s = \omega(\theta)$ — функция полярного угла θ определится из следующего равенства:

$$u(s) + iv(s) = \omega(e^{i\theta});$$

$w(\zeta)$ есть аналитическая функция, конформно отображающая единичный круг плоскости ζ на область D_w .

Приступим к определению понятия устойчивости.

Задаваемый формулами (1) контур L_w будем аппроксимировать последовательностью контуров $\{L_{w_n}\}$, сходящейся к L_w в том смысле, что последовательность областей $\{D_{w_n}\}$, ограниченных этими контурами, сходится к области D_w , как к своему ядру. Такую последовательность контуров будем называть деформацией контура L_w . Условимся деформацию $\{L_{w_n}\}$ называть внутренней, если все L_{w_n} содержатся в области D_w^+ , и внешней, если все L_{w_n} расположены в D_w^- .

Кривые L_{w_n} будем подчинять некоторым специальным условиям. Деформации из таких кривых будем называть допустимыми. Конкретно будем считать допустимой такую деформацию, все кривые которой независимо от номера n удовлетворяют условиям Варшавского [3].

Возьмем какую-нибудь внутреннюю допустимую деформацию $\{L_{w_n}\}$ кривой L_w . Пусть L_{w_n} определяются соответственно функциями

$$u_n = u_n(s), \quad v_n = v_n(s) \quad (0 \leq s \leq l_n, \quad n = 1, 2, \dots). \quad (4)$$

Решив задачи (4), мы получим искомые кривые L_{z_n} .

Обратную краевую задачу (1) будем называть устойчивой, если последовательность кривых $\{L_{z_n}\}$ сходится к решению задачи (1) L_z в том смысле, что последовательность областей $\{D_{z_n}\}$, ограниченных этими кривыми, сходится к области D_z , как к своему ядру, не зависит от выбора внутренней и внешней допустимых деформаций $\{L_{w_n}\}$ в плоскости w .

Перейдем теперь к установлению устойчивости внутренней обратной задачи. Учитывая (2), (3), рассмотрим прежде всего сходимость последовательности интегралов Шварца:

$$f_n(\zeta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi_n(\sigma) \frac{e^{i\sigma} + \zeta}{e^{i\sigma} - \zeta} d\sigma \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (5)$$

Лемма. Если последовательность функций $\{\varphi_n(\theta)\}$ ($0 \leq \theta \leq 2\pi$) равномерно сходится к функции $\varphi(\theta)$, то последовательность функций $\{f_n(\zeta)\}$ тоже равномерно сходится внутри единичного круга E к $f(\zeta)$:

$$f(\zeta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(\sigma) \frac{e^{i\sigma} + \zeta}{e^{i\sigma} - \zeta} d\sigma.$$

Доказательство. Рассмотрим разность

$$f_n(\zeta) - f(\zeta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [\varphi_n(\sigma) - \varphi(\sigma)] \frac{e^{i\sigma} + \zeta}{e^{i\sigma} - \zeta} d\sigma.$$

В силу формулы связи между интегралом Шварца и интегралом типа Коши имеем

$$f_n(\zeta) - f(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{2[\varphi_n(\sigma) - \varphi(\sigma)]}{\tau - \zeta} d\tau - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [\varphi_n(\sigma) - \varphi(\sigma)] d\sigma, \quad (6)$$

где $\tau = e^{i\sigma}$, $\zeta \in E$, C — единичная окружность.

На $[0, 2\pi]$ последовательность $\varphi_n(\theta)$ равномерно сходится к $\varphi(\theta)$, следовательно, для любого малого заданного $\varepsilon > 0$ существует $N > 0$, такое, что при $n > N$ на $[0, 2\pi]$ будет $|\varphi_n(\theta) - \varphi(\theta)| < \varepsilon$. Поэтому при $n > N$ из (6)

$$|f_n(\zeta) - f(\zeta)| < \frac{1}{2\pi} \cdot 2\varepsilon \left| \int_C \frac{d\tau}{\tau - \zeta} \right| + \frac{1}{2\pi} \varepsilon \cdot 2\pi. \quad (7)$$

Чтобы доказать равномерную сходимости последовательности внутри E , должно доказать, что она имеет место на каждом замкнутом множестве, принадлежащем E .

Возьмем любое замкнутое множество $K \subset E$ и затем какой-либо замкнутый круг B , лежащий в K . Тогда для любого $\zeta \in B$ из (7)

$$|f_n(\zeta) - f(\zeta)| < \frac{1}{\delta} \cdot 2\varepsilon + \varepsilon = \varepsilon \left(1 + \frac{2}{\delta} \right), \quad (8)$$

где $\delta = \min |\tau - \zeta|$, $\tau \in C$, $\zeta \in B$.

Неравенство (8) показывает, что последовательность $f_n(\zeta)$ равномерно сходится в B к $f(\zeta)$.

Мы знаем, что каждое замкнутое множество $K \subset E$ можно покрыть конечным числом кругов, целиком лежащих в E вместе с границами (теорема Гейне — Бореля). Пусть эти круги будут B_m ($m = 1, \dots, q$). Тогда, по доказанному, для $\varepsilon > 0$ существует $N_m > 0$, такое, что при $n > N_m$ и $\zeta \in B_m$ будет $|f_n(\zeta) - f(\zeta)| < \varepsilon$. Если N есть самое большое из чисел N_m , то при $n > N$ неравенство $|f_n(\zeta) - f(\zeta)| < \varepsilon$ для всех $\zeta \in K$, т. е. последовательность $f_n(\zeta)$ равномерно сходится на любом замкнутом множестве $K \subset E$ к $f(\zeta)$. Этим лемма доказана. Отсюда имеет место следующая теорема.

Теорема. Если функции $u(s)$ и $v(s)$ удовлетворяют условиям, упомянутым в постановке обратной задачи, и условию однолиственности решения этой задачи, то внутренняя обратная задача (1) устойчива.

Доказательство. По (2), (3), искомые кривые L_{z_n} ($n = 1, 2, \dots$) выражаются следующими:

$$z_n = F_n(\zeta) = e^{i\alpha} \int e^{z_n(\zeta)} d\zeta + C, \quad (9)$$

$$\chi_n(\zeta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln \omega'_n(\theta) \frac{e^{i\theta} + \zeta}{e^{i\theta} - \zeta} d\theta. \quad (10)$$

Постоянные α и C выберем общими для всех L_{z_n} . Они влияют только на положение этих кривых.

Рассмотрим разность

$$\omega'_n(\theta) - \omega'(\theta) = \frac{ds_n}{d\theta} - \frac{ds}{d\theta} \left(= \left| \frac{dz_n}{d\zeta} \right| - \left| \frac{dz}{d\zeta} \right| \right). \quad (11)$$

Пусть $w = W_n(z)$ — аналитические функции, конформно отображающие соответственно области $D_{z_n}^+$ на области D_w^+ . Рассматривая соответствие между длинами элементов дуг $d\sigma_n$ и ds_n контуров L_{w_n} и L_{z_n} , имеем соотношение

$$d\sigma_n = \sqrt{u_n'^2(s_n) + v_n'^2(s_n)} ds_n \quad (n = 1, 2, \dots),$$

отсюда

$$\left| \frac{dW_n}{dz_n} \right| = \frac{d\sigma_n}{ds_n} = \sqrt{u_n'^2(s_n) + v_n'^2(s_n)},$$

и равенство $\sigma_n = \int_0^{s_n} \sqrt{u_n'^2(s_n) + v_n'^2(s_n)} ds_n$ определит σ_n как монотонно возрастающую функцию от s_n :

$$\sigma_n = \sigma_n(s_n).$$

Путем обращения последнего получим $s_n = s_n(\sigma_n)$, теперь можно переписать (11) в виде

$$\begin{aligned} \omega_n'(\Theta) - \omega'(\Theta) &= \frac{ds_n}{d\sigma_n} \frac{d\sigma_n}{d\Theta} - \frac{ds}{d\sigma} \frac{d\sigma}{d\Theta} = \\ &= \frac{ds_n}{d\sigma_n} \left(\frac{d\sigma_n}{d\Theta} - \frac{d\sigma}{d\Theta} \right) + \frac{d\sigma}{d\Theta} \left(\frac{ds_n}{d\sigma_n} - \frac{ds}{d\sigma} \right). \end{aligned}$$

Поэтому

$$|\omega_n'(\Theta) - \omega'(\Theta)| \leq \frac{ds_n}{d\sigma_n} \left| \frac{d\sigma_n}{d\Theta} - \frac{d\sigma}{d\Theta} \right| + \frac{d\sigma}{d\Theta} \left| \frac{ds_n}{d\sigma_n} - \frac{ds}{d\sigma} \right|. \quad (12)$$

Так как $\omega = \omega_n(\zeta)$ ($n = 1, 2, \dots$) и $\omega = \omega(\zeta)$ — функции, конформно отображающие единичный круг $|\zeta| < 1$ соответственно на области $D_{\omega_n}^+$ и D_{ω}^+ (можно подобрать отображения так, чтобы $\omega_n(0) = \omega(0) = \omega^*$, где ω^* — некоторая точка, принадлежащая всем областям $D_{\omega_n}^+$ и D_{ω}^+ , и $\omega_n'(0) > 0$, $\omega'(0) > 0$), а кроме этого, $\{L_{\omega_n}\}$ — допустимая деформация контура L_{ω} , то, по [3], последовательность функций $\{\omega_n(\zeta)\}$ и последовательность их производных $\{\omega_n'(\zeta)\}$ равномерно сходятся в замкнутом круге

$|\zeta| \leq 1$ соответственно к $\omega(\zeta)$ и $\omega'(\zeta)$. Отсюда, так как $\left| \frac{d\omega_n(\zeta)}{d\zeta} \right| = \frac{d\sigma_n}{d\Theta}$

($n = 1, 2, \dots$), последовательность $\frac{d\sigma_n}{d\Theta}$ равномерно сходится на $[0, 2\pi]$

к $\frac{d\sigma}{d\Theta}$, т. е. для сколь угодно малого заданного $\varepsilon_1 > 0$ существует $N_1 > 0$, такое, что при $n > N_1$ на $[0, 2\pi]$ будет

$$\left| \frac{d\sigma_n}{d\Theta} - \frac{d\sigma}{d\Theta} \right| < \varepsilon_1. \quad (13)$$

Аналогично следует, что последовательность $\frac{d\sigma_n}{ds_n}$ равномерно сходится

к $\frac{d\sigma}{ds}$, следовательно, последовательность $\frac{ds_n}{d\sigma_n}$ тоже равномерно сходится

к $\frac{ds}{d\sigma}$, [так как $\zeta'(W) = \frac{1}{W'(z)}$], т. е. для сколь угодно малого заданного $\varepsilon_2 > 0$ существует $N_2 > 0$, такое, что при $n > N_2$ будет

$$\left| \frac{ds_n}{d\sigma_n} - \frac{ds}{d\sigma} \right| < \varepsilon_2. \quad (14)$$

Теперь из (12) — (14) следует, что

$$|\omega_n'(\Theta) - \omega'(\Theta)| < A\varepsilon_1 + B\varepsilon_2 = \varepsilon,$$

где $A = \max_n \frac{ds_n}{d\sigma_n}$, $\frac{d\sigma}{d\Theta} \leq B$, A и B — ограниченные величины. Это значит, при любом сколь угодно малом положительном $\varepsilon > 0$ существует $N =$

$= \max(N_1, N_2)$, такое, что при $n > N$ на $[0, 2\pi]$ будет $|\omega'_n(\Theta) - \omega'(\Theta)| < \varepsilon$, т. е. последовательность $\omega'_n(\Theta)$ равномерно сходится к $\omega'(\Theta)$. Отсюда из (2), (3), (9), (10) и леммы следует, что последовательность функций $z_n = F_n(\zeta)$ равномерно сходится к функции $z = F(\zeta)$. Функции $z_n = F_n(\zeta)$ и $z = F(\zeta)$ конформно отображают круг $|\zeta| < 1$ соответственно на области $D_{z_n}^+$ и D_z^+ и тоже удовлетворяют условиям $z_n(0) = z(0) = z^*$ (z^* — некоторая точка, принадлежащая всем областям $D_{z_n}^+$ и D_z^+), $z'_n(0) > 0$, $z'(0) > 0$; кроме того, они, по предположению, однолистные функции. Поэтому по известной теореме об отображении областей с переменными границами [4] последовательность областей $D_{z_n}^+$ сходится к ядру D_z^+ , что и требовалось доказать.

Аналогично обстоит дело для внешней деформации.

Для условия однолистности решения, упомянутого в теореме, создано много признаков. Здесь приведен для иллюстрации один простой признак, данный в [5].

Для однолистности решения (предполагалось, что заданная область D_w^+ есть круг) достаточно, чтобы краевое значение

$$\ln \left| \frac{dz}{dw} \right| = P(\Theta) = \ln \frac{1}{u'^2(s) + v'^2(s)}$$

удовлетворяло условию Липшица с постоянной $\frac{\pi}{4 \ln 2}$:

$$|P(\Theta_1) - P(\Theta_2)| < \frac{\pi}{4 \ln 2} |\Theta_1 - \Theta_2|.$$

Литература

1. Гахов Ф. Д. Краевые задачи. М., 1963.
2. Тумашев Г. Г., Нужин М. Т. Обратные краевые задачи и их приложения. Казань, 1965.
3. Чикин Л. А. Уч. зап. Ростовского ун-та, 43, в. 6, 1959.
4. Голузин Г. М. Геометрическая теория функций комплексного переменного. Гостехиздат, 1952.
5. Красновидова И. С., Рогожин В. С. УМН, 8, в. 1, 1953.

Белорусский государственный университет
им. В. И. Ленина

Поступило в редакцию 5.VII 1967

УДК 518:517.91/94

В. В. БОБКОВ

ОБ ОДНОМ СПОСОБЕ
ПОСТРОЕНИЯ ОДНОШАГОВЫХ ПРАВИЛ
ПРИБЛИЖЕННОГО РЕШЕНИЯ
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

В работе предлагается способ построения одношаговых правил приближенного решения дифференциальных уравнений, основанный на многократном использовании квадратурных формул понижающейся алгебраической степени точности. Здесь в случае задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка доказываемся принципиальная возможность построения по предлагаемому способу одношаговых правил любого порядка точности, даются конкретные примеры подобных правил, а также проводится исследование предлагаемых правил на сходимость.

Рассмотрим на отрезке $[x_0, X]$ следующую задачу Коши:

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0. \quad (1)$$

Будем считать функцию $f(x, y)$ достаточно гладкой и станем искать решение поставленной задачи на следующей сетке (не обязательно равноотстоящих) точек x_i ($i=0, 1, \dots, N$):

$$x_0 < x_1 < \dots < x_N \leq X.$$

Пусть вычисления доведены до точки x_n ($0 \leq n < N$). В следующей точке $x_{n+1} = x_n + h_n$ решение задачи (1) станем искать в виде

$$\begin{aligned} y(x_n + h_n) &= y(x_n) + \int_{x_n}^{x_{n+1}} y'(x) dx = y(x_n) + h_n \int_0^1 y'(x_n + \alpha h_n) d\alpha = \\ &= y(x_n) + h_n \int_0^1 z_n(\alpha) d\alpha = y(x_n) + h_n \sum_{i=1}^q a_i^{(q)} z_n(\alpha_i^{(q)}) + r_{n+1}^{(q)} = \\ &= y(x_n) + h_n \sum_{i=1}^q a_i^{(q)} y'(x_n + \alpha_i^{(q)} h_n) + r_{n+1}^{(q)} = \\ &= y(x_n) + h_n \sum_{i=1}^q a_i^{(q)} f[x_n + \alpha_i^{(q)} h_n, y(x_n + \alpha_i^{(q)} h_n)] + r_{n+1}^{(q)}. \quad (2) \end{aligned}$$

В дальнейшем с целью упрощения записей мы позволим себе на некоторых этапах рассуждений опускать часть из второстепенных в данный момент индексов, например, писать h вместо h_n , a_i вместо $a_i^{(q)}$ и т. п.

Потребовав, чтобы квадратурное правило

$$\int_0^1 z_n(\alpha) d\alpha \approx \sum_{i=1}^q a_i z_n(\alpha_i)$$

имело наивысшую алгебраическую степень точности $2q - 1$, мы получим для определения параметров a_i и α_i ($i = 1, 2, \dots, q$) следующую систему $2q$ уравнений:

$$\sum_{i=1}^q a_i \alpha_i^{j-1} = \frac{1}{j}, \quad j = 1, 2, \dots, 2q. \quad (3)$$

Как известно [1], такое квадратурное правило может быть построено при любом $q \geq 1$, при этом числа α_i ($i = 1, 2, \dots, q$) должны быть корнями многочлена $P_q(\alpha)$ степени q , ортогонального на отрезке $[0, 1]$ по постоянному весу ко всевозможным многочленам меньшей степени, т. е. все α_i ($i = 1, 2, \dots, q$) действительны, различны и лежат внутри отрезка $[0, 1]$, а коэффициенты a_i ($i = 1, 2, \dots, q$) положительны. Очевидно, что числа α_i и a_i ($i = 1, 2, \dots, q$) по простым формулам пересчета

$$\alpha_i = \frac{\gamma_i + 1}{2}, \quad a_i = \frac{1}{2} A_i, \quad i = 1, 2, \dots, q$$

могут быть получены из узлов γ_i и коэффициентов A_i квадратурной формулы Гаусса

$$\int_{-1}^1 f(\gamma) d\gamma \approx \sum_{i=1}^q A_i f(\gamma_i),$$

для которых составлены достаточно хорошие таблицы (см., например, [2]). Для остаточного члена r_{n+1} в равенствах (2) теперь уже также можно дать, опираясь на известные [1] результаты из теории гауссовых квадратур, следующее представление:

$$\begin{aligned} r_{n+1} &= h \frac{z_n^{(2q)}(\xi)}{(2q)!} \int_0^1 (\alpha - \alpha_1)^2 (\alpha - \alpha_2)^2 \dots (\alpha - \alpha_q)^2 d\alpha = \\ &= h^{2q+1} \frac{y^{(2q+1)}(x_n + \xi h)}{(2q)!} \int_0^1 \omega^2(\alpha) d\alpha, \quad 0 \leq \xi \leq 1. \end{aligned} \quad (4)$$

Выбирая значения параметров a_i и α_i ($i = 1, 2, \dots, q$) удовлетворяющими системе (3) и пренебрегая в равенствах (2) остаточным членом $r_{n+1}^{(q)} = O(h^{2q+1})$, для приближенного решения $y_{n+1} \approx y(x_{n+1})$ исходной задачи (1) получим

$$y_{n+1} = y_n + h \sum_{i=1}^q a_i f(x_n + \alpha_i h, y_{n+\alpha_i}),$$

где

$$y_{n+\alpha_i} \approx y(x_n + \alpha_i h).$$

Для величин $y_{n+\alpha_i}$, $i = 1, 2, \dots, q$, можно записать подобные же равенства с погрешностями аппроксимации $\tilde{r}_{n+\alpha_i}^{(q)} = O(h^{2q})$, если воспользоваться при этом квадратурным правилом

$$\int_0^1 z_n(\alpha) d\alpha \approx \sum_{j=1}^q \tilde{\alpha}_j^{(q)} z_n(\tilde{\alpha}_j^{(q)}),$$

имеющим алгебраическую степень точности $2q - 2$:

$$y_{n+\alpha_i} = y_n + \alpha_i h \sum_{j=1}^q \tilde{\alpha}_j f(x_n + \alpha_i \tilde{\alpha}_j h, y_{n+\alpha_i} \tilde{\alpha}_j).$$

Здесь $\tilde{\alpha}_j$ и $\tilde{\alpha}_j$ ($j = 1, 2, \dots, q$) являются одним из решений системы уравнений

$$\sum_{j=1}^q \tilde{\alpha}_j \tilde{\alpha}_j^{k-1} = \frac{1}{k}, \quad k = 1, 2, \dots, 2q - 1, \quad (5)$$

которая заведомо разрешима, так как разрешима система (3), а для остатков $\tilde{r}_{n+\alpha_i}^{(q)}$ ($i = 1, 2, \dots, q$) можно дать, например, следующие представления:

$$\tilde{r}_{n+\alpha_i} = \frac{h^{2q} \alpha_i^{2q}}{(2q)!} \left[y^{(2q)}(x_n + \theta \alpha_i h) - 2q \sum_{j=1}^q \tilde{\alpha}_j \tilde{\alpha}_j^{2q-1} y^{(2q)}(x_n + \theta_j \alpha_i \tilde{\alpha}_j h) \right], \quad (6)$$

$$0 < \theta, \theta_j < 1, \quad i, j = 1, 2, \dots, q,$$

если воспользоваться разложениями по Тейлору обеих частей приближенных равенств

$$y(x_n + \alpha_i h) - y(x_n) \approx \alpha_i h \sum_{j=1}^q \tilde{\alpha}_j y'(x_n + \alpha_i \tilde{\alpha}_j h), \quad i = 1, 2, \dots, q.$$

Кстати, эти же разложения также приводят нас к системе (5) или к системе (3), если в последнем случае дополнительно потребовать совпадения их до членов с h^{2q} включительно.

Для величин $y_{n+\alpha_i^{(q)}} \tilde{\alpha}_j^{(q)}$ ($i, j = 1, 2, \dots, q$) подобным же образом с погрешностью аппроксимации порядка h^{2q-1} можно записать:

$$y_{n+\alpha_i^{(q)}} \tilde{\alpha}_j^{(q)} = y_n + \alpha_i^{(q)} \tilde{\alpha}_j^{(q)} h \sum_{k=1}^{q-1} \alpha_k^{(q-1)} f(x_n + \alpha_i^{(q)} \tilde{\alpha}_j^{(q)} \alpha_k^{(q-1)} h, y_{n+\alpha_i^{(q)}} \tilde{\alpha}_j^{(q)} \alpha_k^{(q-1)}).$$

Поступая аналогично и далее, мы придем, наконец, к формулам

$$y_{n+\alpha_i^{(q)}} \tilde{\alpha}_j^{(q)} \alpha_k^{(q-1)} \tilde{\alpha}_l^{(q-1)} \dots \tilde{\alpha}_m^{(2)} \alpha_1^{(1)} = y_n + \alpha_i^{(q)} \tilde{\alpha}_j^{(q)} \dots \tilde{\alpha}_m^{(2)} \alpha_1^{(1)} h f(x_n, y_n),$$

которые имеют погрешность аппроксимации порядка h^2 и позволяют построить (если идти сейчас в обратном направлении) расчетные правила, дающие с локальной погрешностью порядка h^{2q+1} интересное

нас следующее значение y_{n+1} приближенного решения задачи (1) через предшествующее значение y_n . При этом по ходу вычислений мы получаем также и некоторую дополнительную информацию о приближенном решении в промежуточных точках.

Заметим, что в качестве $\tilde{a}_j^{(r)}$ и $\tilde{\alpha}_j^{(r)}$ ($j = 1, 2, \dots, r; r = 2, 3, \dots, q$) можно брать, конечно, и значения $a_j^{(r)}$ и $\alpha_j^{(r)}$ соответственно. Более же разумно, однако, распорядиться выбором одного свободного параметра специально, например, взять $\tilde{\alpha}_1^{(r)} = 0$ ($r = 2, 3, \dots, q$). Это открывает возможности для построения более экономичных вариантов правил. Различные варианты правил, имеющих один и тот же порядок локальной погрешности, можно также строить, если приступать к построению таких правил, имея несколько свободных параметров.

Рассмотрим, наконец, несколько конкретных примеров одношаговых правил, построенных по предлагаемому способу. При построении этих правил мы будем для достижения требуемого порядка локальной погрешности часто брать q не обязательно минимальным, т. е. будем иметь возможность специальным образом выбирать произвольные параметры.

Правила с локальной погрешностью порядка h^2 определяются единственным требованием

$$\sum_{i=1}^q a_i = 1.$$

При $q = 1$ получаем, например, широко известный [3] метод Эйлера

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n), \quad n = 0, 1, \dots, N-1.$$

Правила с локальной погрешностью порядка h^3 определяются следующими требованиями:

$$\sum_{i=1}^q a_i = 1,$$

$$\sum_{i=1}^q a_i \alpha_i = \frac{1}{2}.$$

При $q = 1$ получаем, например, правило, которое эквивалентно одному из известных [3] правил вида Рунге — Кутты:

$$y_{n+1} = y_n + hf \left(x_n + \frac{h}{2}, y_{n+\frac{1}{2}} \right),$$

$$y_{n+\frac{1}{2}} = y_n + \frac{h}{2} f(x_n, y_n), \quad n = 0, 1, \dots, N-1. \quad (7)$$

При $q = 2$ соответствующих правил можно построить много. В частности, могут быть получены здесь следующие правила, эквивалентные соответствующим известным [3] правилам вида Рунге — Кутты:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2} [f(x_n, y_n) + f(x_n + h, \bar{y}_{n+1})],$$

$$\bar{y}_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n), \quad n = 0, 1, \dots, N-1;$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{4} \left\{ f(x_n, y_n) + 3f \left[x_n + \frac{2}{3}h, y_n + \frac{2}{3}hf(x_n, y_n) \right] \right\},$$

$$n = 0, 1, \dots, N-1,$$

а также известный [4] метод трапеций

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2} [f(x_n, y_n) + f(x_n + h, y_{n+1})], \quad n = 0, 1, \dots, N-1,$$

требующий на каждом этапе вычислений решения численного уравнения относительно y_{n+1} .

Правила с локальной погрешностью порядка h^4 определяются следующими требованиями:

$$\sum_{i=1}^q a_i \alpha_i^{j-1} = \frac{1}{j}, \quad j = 1, 2, 3.$$

Среди таких правил можно также указать, например, на правило, эквивалентное известному [3] правилу вида Рунге — Кутты,

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{4} \left[f(x_n, y_n) + 3f\left(x_n + \frac{2}{3}h, y_{n+\frac{2}{3}}\right) \right],$$

$$y_{n+\frac{2}{3}} = y_n + \frac{2}{3}hf\left(x_n + \frac{1}{3}h, y_{n+\frac{1}{3}}\right),$$

$$y_{n+\frac{1}{3}} = y_n + \frac{1}{3}hf(x_n, y_n), \quad n = 0, 1, \dots, N-1,$$

получаемое здесь при $q = 2$.

Кроме того, укажем еще на два правила, получаемые при $q = 3$:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6} \left[f(x_n, y_n) + 4f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_{n+\frac{1}{2}}\right) + f(x_n + h, \bar{y}_{n+1}) \right],$$

$$\bar{y}_{n+1} = y_n + hf\left(x_n + \frac{h}{2}, y_{n+\frac{1}{2}}\right),$$

$$y_{n+\frac{1}{2}} = y_n + \frac{h}{4} \left[f(x_n, y_n) + f\left(x_n + \frac{h}{2}, \bar{y}_{n+\frac{1}{2}}\right) \right],$$

$$\bar{y}_{n+\frac{1}{2}} = y_n + \frac{h}{2} f(x_n, y_n), \quad n = 0, 1, \dots, N-1; \quad (8)$$

$$y_{n+\frac{1}{2}} = y_n + \frac{h}{4} \left[f(x_n, y_n) + f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_{n+\frac{1}{2}}\right) \right],$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6} \left[f(x_n, y_n) + 4f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_{n+\frac{1}{2}}\right) + f(x_n + h, y_{n+1}) \right],$$

$$n = 0, 1, \dots, N-1.$$

Последнее из этих правил требует при переходе к следующей точке решения двух численных уравнений, что удобнее всего сделать итерационно, так как выбором h всегда можно обеспечить быструю сходимость соответствующего итерационного процесса.

Правила с локальной погрешностью порядка h^5 определяются требованиями

$$\sum_{i=1}^q a_i \alpha_i^{j-1} = \frac{1}{j}, \quad j = 1, 2, 3, 4.$$

Приведем три примера таких правил:

для $q = 2$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2} \left[f \left(x_n + \frac{3 - \sqrt{3}}{6} h, y_{n + \frac{3 - \sqrt{3}}{6}} \right) + \right. \\ \left. + f \left(x_n + \frac{3 + \sqrt{3}}{6} h, y_{n + \frac{3 + \sqrt{3}}{6}} \right) \right],$$

$$y_{n + \frac{3 \pm \sqrt{3}}{6}} = y_n + \frac{3 \pm \sqrt{3}}{24} h \left[f(x_n, y_n) + \right. \\ \left. + 3f \left(x_n + \frac{3 \pm \sqrt{3}}{9} h, y_{n + \frac{3 \pm \sqrt{3}}{9}} \right) \right],$$

$$y_{n + \frac{3 \pm \sqrt{3}}{9}} = y_n + \frac{3 \pm \sqrt{3}}{9} hf \left(x_n + \frac{3 \pm \sqrt{3}}{18} h, y_{n + \frac{3 \pm \sqrt{3}}{18}} \right),$$

$$y_{n + \frac{3 \pm \sqrt{3}}{18}} = y_n + \frac{3 \pm \sqrt{3}}{18} hf(x_n, y_n), \quad n = 0, 1, \dots, N-1;$$

для $q = 3$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6} \left[f(x_n, y_n) + 4f \left(x_n + \frac{h}{2}, y_{n + \frac{1}{2}} \right) + f(x_n + h, \bar{y}_{n+1}) \right],$$

$$y_{n + \frac{1}{2}} = y_n + \frac{h}{24} \left[5f(x_n, y_n) + 8f \left(x_n + \frac{h}{2}, \bar{y}_{n + \frac{1}{2}} \right) - \right. \\ \left. - f(x_n + h, \bar{y}_{n+1}) \right],$$

$$\bar{y}_{n+1} = y_n + \frac{h}{6} \left[f(x_n, y_n) + 4f \left(x_n + \frac{h}{2}, \bar{y}_{n + \frac{1}{2}} \right) + \right. \\ \left. + f(x_n + h, \bar{y}_{n+1}) \right],$$

$$\bar{y}_{n+1} = y_n + hf \left(x_n + \frac{h}{2}, \bar{y}_{n + \frac{1}{2}} \right),$$

$$\bar{y}_{n + \frac{1}{2}} = y_n + \frac{h}{4} \left[f(x_n, y_n) + f \left(x_n + \frac{h}{2}, \bar{y}_{n + \frac{1}{2}} \right) \right],$$

$$\bar{y}_{n + \frac{1}{2}} = y_n + \frac{h}{2} f(x_n, y_n), \quad n = 0, 1, \dots, N-1;$$

для $q = 3$

$$y_{n + \frac{1}{4}} = y_n + \frac{h}{8} \left[f(x_n, y_n) + f \left(x_n + \frac{h}{4}, y_{n + \frac{1}{4}} \right) \right],$$

$$y_{n + \frac{1}{2}} = y_n + \frac{h}{12} \left[f(x_n, y_n) + 4f \left(x_n + \frac{h}{4}, y_{n + \frac{1}{4}} \right) + \right. \\ \left. + f \left(x_n + \frac{h}{2}, y_{n + \frac{1}{2}} \right) \right],$$

$$\begin{aligned}
 & + f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_{n+\frac{1}{2}}\right), \\
 y_{n+1} = & y_n + \frac{h}{6} \left[f(x_n, y_n) + 4f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_{n+\frac{1}{2}}\right) + \right. \\
 & \left. + f(x_n + h, y_{n+1}) \right], \quad n = 0, 1, \dots, N-1.
 \end{aligned}$$

Перечень подобных правил можно продолжить неограниченно. Например, при $q=3$ для построения одношаговых правил с локальной погрешностью порядка h^6 можно исходить из следующего набора параметров:

$$\begin{aligned}
 \tilde{a}_1^{(3)} = \frac{1}{9}, \quad \tilde{a}_2^{(3)} = \frac{8\sqrt{6}+3}{18\sqrt{6}}, \quad \tilde{a}_3^{(3)} = \frac{8\sqrt{6}-3}{18\sqrt{6}}, \\
 \tilde{\alpha}_1^{(3)} = 0, \quad \tilde{\alpha}_2^{(3)} = \frac{6-\sqrt{6}}{10}, \quad \tilde{\alpha}_3^{(3)} = \frac{6+\sqrt{6}}{10};
 \end{aligned}$$

при построении правил с локальной погрешностью порядка h^7 можно исходить либо из минимального набора параметров, полученного простым пересчетом узлов и коэффициентов квадратурной формулы Гаусса с тремя узлами, либо воспользоваться, к примеру, следующим набором параметров, полученным при $q=4$:

$$\begin{aligned}
 a_1 = a_4 = \frac{1}{12}, \quad a_2 = a_3 = \frac{5}{12}, \quad \alpha_1 = 0, \\
 a_2 = \frac{5-\sqrt{5}}{10}, \quad a_3 = \frac{5+\sqrt{5}}{10}, \quad \alpha_4 = 1;
 \end{aligned}$$

и т. д.

Заметим, что предлагаемый здесь способ построения одношаговых правил очевидным образом переносится и на случай задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка нормального вида, т. е. приложим и к уравнениям высших порядков (в случае уравнений высших порядков можно предложить и специальные вычислительные схемы подобного типа). Кроме того, следует отметить также возможность перенесения рассматриваемого здесь подхода на случай дифференциальных уравнений в частных производных.

Остановимся сейчас на исследовании сходимости одношаговых правил, получаемых по предлагаемому здесь способу.

Будем иметь в виду для простоты изложения правило (7) и с той же целью будем считать, что $h_n = h$ на каждом этапе вычислений, т. е. что

$$x_n = x_0 + nh, \quad n = 0, 1, \dots, N, \quad N = \left[\frac{X - x_0}{h} \right].$$

Если в нашем случае записать равенства для точных значений

$$y(x_n + h) = y(x_n) + hf\left[x_n + \frac{h}{2}, y\left(x_n + \frac{h}{2}\right)\right] + r_{n+1}^{(1)},$$

$$y\left(x_n + \frac{h}{2}\right) = y(x_n) + \frac{h}{2} f[x_n, y(x_n)] + \tilde{r}_{n+\frac{1}{2}}^{(1)},$$

где, согласно (4) и (6),

$$r_{n+1}^{(1)} = \frac{h^3}{24} y'''(x_n + \xi h),$$

$$\tilde{r}_{n+\frac{1}{2}}^{(1)} = \frac{h^2}{8} y'' \left(x_n + \theta \frac{h}{2} \right),$$

и вычесть из них соответственно равенства (7), воспользовавшись при этом теоремой Лагранжа о конечном приращении по аргументу y , то для погрешности правила $\varepsilon_i = y(x_i) - y_i$ будем иметь:

$$\varepsilon_{n+1} = \varepsilon_n + hf_y \left(x_n + \frac{h}{2}, y_{n+\frac{1}{2}} + \theta_{n+\frac{1}{2}} \varepsilon_{n+\frac{1}{2}} \right) \varepsilon_{n+\frac{1}{2}} + r_{n+1}^{(1)}, \quad 0 < \theta_{n+\frac{1}{2}} < 1,$$

$$\varepsilon_{n+\frac{1}{2}} = \varepsilon_n \left[1 + \frac{h}{2} f_y(x_n, y_n + \theta_n^* \varepsilon_n) \right] + \tilde{r}_{n+\frac{1}{2}}^{(1)}, \quad 0 < \theta_n^* < 1,$$

т. е.

$$\varepsilon_{n+1} = \varepsilon_n [1 + h\varphi_n(h)] + R_n, \quad n = 0, 1, \dots, N-1,$$

где

$$\varphi_n(h) = f_y \left(x_n + \frac{h}{2}, y_{n+\frac{1}{2}} + \theta_{n+\frac{1}{2}} \varepsilon_{n+\frac{1}{2}} \right) \cdot \left[1 + \frac{h}{2} f_y(x_n, y_n + \theta_n^* \varepsilon_n) \right],$$

$$R_n = r_{n+1}^{(1)} + hf_y \left(x_n + \frac{h}{2}, y_{n+\frac{1}{2}} + \theta_{n+\frac{1}{2}} \varepsilon_{n+\frac{1}{2}} \right) \tilde{r}_{n+\frac{1}{2}}^{(1)}.$$

Если теперь ввести обозначения

$$F' = \max_{x_0 < x < X} |f_y(x, y)|, \quad \varphi(h) = F' \left(1 + \frac{h}{2} F' \right), \quad M_i = \max_{x_0 < x < X} |y^{(i)}(x)|,$$

$$R = h^3 r, \quad r = \frac{1}{24} M_3 + \frac{1}{8} M_2 F',$$

то совершенно очевидными станут следующие рекуррентные неравенства:

$$|\varepsilon_{n+1}| \leq |\varepsilon_n| [1 + h\varphi(h)] + R = |\varepsilon_n| Q + R, \quad n = 0, 1, \dots, N-1.$$

Учитывая, что $\varepsilon_0 = 0$, из этих неравенств последовательно находим

$$|\varepsilon_1| \leq R, \quad |\varepsilon_2| \leq |\varepsilon_1| Q + R \leq (1 + Q)R, \quad |\varepsilon_3| \leq R(1 + Q + Q^2), \\ \dots, \quad |\varepsilon_n| \leq R(1 + Q + Q^2 + \dots + Q^{n-1}).$$

Если $f_y(x, y) \neq 0$, то теперь можно записать следующую оценку погрешности правила (7):

$$|\varepsilon_n| \leq R \frac{Q^n - 1}{Q - 1} = h^2 \frac{r}{\varphi(h)} ([1 + h\varphi(h)]^n - 1), \quad n = 1, 2, \dots, N$$

(в тривиальном случае $f_y(x, y) \equiv 0$ интересующая нас оценка может быть записана в виде $|\varepsilon_n| \leq nR = h^2(x_n - x_0) r$, $n = 1, 2, \dots, N$). Принимая во внимание очевидные неравенства

$$1 + u \leq e^u, \quad e^u - 1 \leq ue^u,$$

полученную априорную оценку погрешности можно привести к виду

$$|\varepsilon_n| \leq h^2 \frac{r}{\varphi(h)} [e^{(x_n - x_0)\varphi(h)} - 1], \quad n = 1, 2, \dots, N$$

или к виду

$$|\varepsilon_n| \leq h^2 (x_n - x_0) r e^{(x_n - x_0)\varphi(h)}, \quad n = 1, 2, \dots, N$$

(последняя справедлива и в случае $f_y(x, y) \equiv 0$).

Если учесть, что

$$\lim_{h \rightarrow 0} \varphi(h) = F', \quad x_n - x_0 \leq X - x_0,$$

то из последней оценки погрешности одношагового метода (7) непосредственно следует его равномерная сходимость на отрезке $[x_0, X]$ со скоростью порядка h^2 .

Без принципиальных затруднений подобным же образом в случае любого одношагового правила (в том числе и для неявных правил типа (8)), построенного предлагаемым выше способом и имеющего погрешность аппроксимации порядка h^{k+1} , можно доказать равномерную на отрезке $[x_0, X]$ сходимость метода со скоростью порядка h^k .

Литература

1. Крылов В. И. Приближенное вычисление интегралов. М., 1959.
2. Кронрод А. С. Узлы и веса квадратурных формул. М., 1964.
3. Березин И. С., Жидков Н. П. Методы вычислений, 2. М., 1959.
4. Михлин С. Г., Смолицкий Х. Л. Приближенные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений. М., 1965.

Белорусский государственный университет
им. В. И. Ленина

Поступило в редакцию 29.III 1967

А. С. МОТКИН

СИНГУЛЯРНЫЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПО БЕСКОНЕЧНОМУ КОНТУРУ

Теория краевой задачи Римана и интегрального уравнения с ядром Коши построена [1, 2, 6] для случая конечного контура. В [2, 6] рассматривается также краевая задача Римана для вещественной прямой, а в [7] — для контура, уходящего в бесконечность с одним асимптотическим направлением. В последней работе содержится погрешность при исследовании особого интегрального уравнения; о ней будет подробнее сказано ниже.

Здесь мы рассматриваем краевую задачу Римана и особое интегральное уравнение для бесконечного контура с произвольными асимптотическими направлениями. Мы даем определение угла в бесконечно удаленной точке контура, отличное от принятого [5], и выводим формулы для предельных значений интеграла типа Коши.

Пусть задано на бесконечном контуре интегральное уравнение

$$a(t)\varphi(t) + \frac{b(t)}{\pi i} \int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t} d\tau = f(t). \quad (1)$$

С помощью функции $\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - z} d\tau$, как и в известной теории для конечного контура, оно сводится к задаче Римана

$$\Phi^+(t) = G(t)\Phi^-(t) + g(t). \quad (2)$$

Характерным для строящейся у нас теории уравнения для бесконечного контура является то, что в противоположность случаю конечного контура уравнение (1), вообще говоря, не равносильно задаче (2). Это обстоятельство не позволяет переносить без дополнительных исследований построенную для конечного контура теорию интегрального уравнения на наш случай. К чему может привести такой, основанный на аналогии перенос, показывает пример упомянутой выше работы [7].

1. При выводе формул Шварца — Кристоффеля угол между двумя прямыми с вершиной в бесконечно удаленной точке определяется как угол в конечной точке их пересечения, взятый со знаком минус [5]. При таком определении угла в бесконечности установленная для ограниченного многоугольника формула Шварца — Кристоффеля сохраняет свой вид и для неограниченного многоугольника. Однако при этом теряется свойство инвариантности углов при дробно-линейном преобразовании. Приводимый на рис. 1 пример отображения функций $w = 1/z$ показывает это. Углы с вершинами в точках $z = \infty$ и $z = 0$ переходят соответственно в углы в точках $w = 0$, $w = \infty$. При этом знаки углов меняются на противоположные.

Рассмотрим еще один пример. Пусть в $\Delta A_1 A_2 A_3$ (рис. 2) $A_3 = \infty$, $\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{3}{4}\pi$. Примем для простоты, что точки A_1, A_2 лежат на окружности $|z| = 1$, а стороны $A_1 A_3, A_2 A_3$ — на прямых, проходящих через начало координат.

Из определения угла в бесконечности, принятого в формулах Шварца—Кристоффеля, следует, что $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = \pi$. При отображении $w = 1/z$ $\Delta A_1 A_2 A_3$ перейдет в $\Delta A'_1 A'_2 A'_3$, одна из сторон которого — дуга окружности.

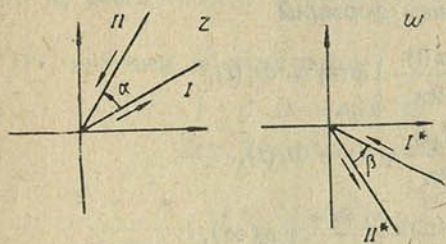


Рис. 1

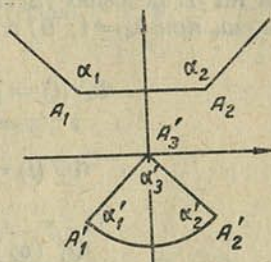


Рис. 2

Преобразование $w = 1/z$ сохраняет углы в конечной плоскости. Поэтому $\alpha'_1 = \alpha_1, \alpha'_2 = \alpha_2$. Следовательно, $\alpha'_1 + \alpha'_2 + \alpha'_3 > \pi$ и $\alpha'_3 \neq \alpha_3$.

Мы положим в основу определения угла на бесконечности принцип инвариантности угла при дробно-линейном отображении.

Обозначим через $\alpha(t)$ угол, отсчитанный в положительном направлении от положительного направления правой касательной в точке t к кривой L до отрицательного направления левой касательной в той же точке (здесь под положительным направлением касательной мы понимаем то, которое совпадает с положительным направлением обхода по L).

Чтобы ввести понятие угла в бесконечности, можно, очевидно, ограничиться определением угла на контуре L_0 , образованном двумя прямыми.

Определение. Углом в точке $t = \infty$ на L_0 называется угол во второй (конечной) точке пересечения прямых.

При нашем определении угла в $t = \infty$ стереографическая проекция и дробно-линейные отображения сохраняют углы в полной z плоскости. В формуле Шварца—Кристоффеля множитель, соответствующий a_n — образу бесконечно удаленной точки, примет вид $(z - a_n)^{-\alpha_k - 1}$; для многоугольников, одна из вершин которых лежит в бесконечности, формула суммы углов $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = (n - 2)\pi$ не останется в силе. Этот вывод уже можно сделать из рассмотрения примера, иллюстрированного рис. 2.

2. Пусть L — простая замкнутая кусочно-гладкая кривая, простирающаяся в бесконечность. В дальнейшем для исследования мы будем использовать,

кроме интеграла типа Коши $\Phi_1(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(\tau) d\tau}{\tau - z}$, также и отличающийся

от него на постоянное слагаемое интеграл $\Phi_2(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{(z - z_0)\varphi(\tau) d\tau}{(\tau - z_0)(\tau - z)}$,

где $z_0 \in D^-$ (значения интегралов при $z \in L$ будем обозначать $\Phi_1(t), \Phi_2(t)$). Свойства функций $\Phi_1(z), \Phi_2(z)$ можно изучить, отобразив с помощью дробно-линейной функции контур L на конечный и воспользовавшись тео-

рий из [1, 2, 6]. Так как соответствующие рассуждения весьма просты, ограничимся, не приводя доказательств, формулировкой результатов. Класс функций, удовлетворяющих на L условию Гельдера* $|\varphi(t_1) - \varphi(t_2)| < A \left| \frac{1}{t_1 - z_0} - \frac{1}{t_2 - z_0} \right|^\lambda$, где $A > 0$, $0 < \lambda \leq 1$, обозначим H_λ .

Теорема 1. Пусть $\varphi(\tau) \in H_\lambda$, $\Phi_i^+(t)$, $\Phi_i^-(t)$ ($i=1,2$) — граничные значения функций $\Phi_i(z)$ соответственно слева и справа по отношению к выбранному положительному обходу вдоль L . Тогда а) $\Phi_i^+(t)$, $\Phi_i^-(t)$ удовлетворяют на L условию H_λ при $\lambda < 1$ и условию $H_{\lambda-\varepsilon}$, где $\varepsilon > 0$ сколь угодно мало, при $\lambda = 1$; б) справедливы формулы

$$\Phi_i^+(t) = \left(1 - \frac{\alpha(t)}{2\pi}\right) \varphi(t) + \Phi_i(t), \quad (3)$$

$$\Phi_i^-(t) = -\frac{\alpha(t)}{2\pi} \varphi(t) + \Phi_i(t), \quad (4)$$

$$\Phi_i^+(\infty) = \left(1 - \frac{\alpha(\infty)}{2\pi}\right) \varphi(\infty), \quad (3')$$

$$\Phi_i^-(\infty) = -\frac{\alpha(\infty)}{2\pi} \varphi(\infty), \quad (4')$$

$$\Phi_2^\pm(\infty) = \Phi_1^\pm(\infty) - \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - z_0} d\tau. \quad (5)$$

Из (4) получаем $\Phi_i(t) = \Phi_i^-(t) + \frac{\alpha(t)}{2\pi} \varphi(t)$. $\Phi_i(t)$ непрерывны на L , а $\alpha(t)$ имеет в угловых точках устранимый разрыв.

Следствие. Функции $\Phi_i(t)$ ($i=1,2$) непрерывны в точках гладкости контура и терпят разрыв в тех угловых точках, в которых $\varphi(t) \neq 0$.

Мы предполагали, что L состоит из одной простой кривой. Полученные результаты можно распространить на случай, когда L состоит из конечного числа кривых, разделенных или имеющих точки пересечения. Исследование предельных значений в точке пересечения конечных кривых проведено в [4, 9]. Предельное значение в точке пересечения $t = \infty$ возьмем по аналогии с [4] как сумму предельных значений по каждой из составляющих кривых.

Пусть $z \rightarrow \infty$ по пути γ_k . Предположим, что внешность окружности достаточно большого радиуса разбивается на несколько секторов простыми составляющими контура и γ_k принадлежит только одному сектору. Тогда

$$\Phi_1^{\gamma_k}(\infty) = \left[k - \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^n d_s(\infty) \right] \varphi(\infty),$$

где $\Phi_1^{\gamma_k}(\infty)$ — предельное значение по пути γ_k функции $\Phi_1(z)$; n — число простых контуров, проходящих через $z = \infty$; k — число контуров, по отношению к которым путь γ_k расположен справа.

3. Пусть L — конечная замкнутая кусочно-гладкая кривая. Тогда, согласно формуле Коши, если $\varphi(z)$ — функция аналитическая в D^+ и непрерывная в $D^+ + L$,

* Для конечного контура это условие равносильно следующему: $|\varphi(t_1) - \varphi(t_2)| < A_1 |t_1 - t_2|^\lambda$, где $A_1 > 0$.

$$\frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - z} d\tau = \begin{cases} \varphi(z), & z \in D^+, \\ 0, & z \in D^-, \end{cases} \quad (6)$$

если $\varphi(z)$ аналитична в D^- и непрерывна в $D^- + L$,

$$\frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - z} d\tau = \begin{cases} \varphi(\infty), & z \in D^+, \\ -\varphi(z) + \varphi(\infty), & z \in D^-. \end{cases} \quad (7)$$

Вычтя из обеих частей формул (6) и (7) интеграл $\frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - z_0} d\tau$, где $z_0 \in D^-$, получим соответственно

$$\frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{(z - z_0)\varphi(\tau)}{(\tau - z_0)(\tau - z)} d\tau = \begin{cases} \varphi(z), & z \in D^+, \\ 0, & z \in D^-, \end{cases} \quad (6')$$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{(z - z_0)\varphi(\tau)}{(\tau - z_0)(\tau - z)} d\tau = \begin{cases} \varphi(z_0), & z \in D^+, \\ -\varphi(z) + \varphi(z_0), & z \in D^-. \end{cases} \quad (7')$$

В случае контура, простирающегося в бесконечность, формулы (6) и (7), вообще говоря, несправедливы — в правых частях их может появиться дополнительное постоянное слагаемое. Формулы же (6'), (7') будут справедливы также и для бесконечного контура.

4. Рассмотрим задачу Римана на бесконечном контуре

$$\Phi^+(t) = G(t)\Phi^-(t) + g(t). \quad (8)$$

Для решения задачи на конечном контуре обычно используют интеграл типа Коши ([2], гл. 2). И здесь можно было поступить так. Однако встретились бы трудности при использовании решения задачи Римана для получения решения сингулярного интегрального уравнения с ядром Коши. Используем для решения задачи (8) введенную в предыдущем пункте функцию $\Phi_2(z)$.

Ввиду полной аналогии с рассуждениями для случая конечного контура ограничимся формулировкой результатов. Пусть κ — индекс задачи (8). При $\Phi^-(z_0) = 0$ и $\kappa \geq 0$ общее решение дается формулой

$$\Phi(z) = X(z) \left[\Psi(z) + P_{\kappa-1} \left(\frac{z - z_1}{z - z_0} \right) \right],$$

где

$$\Psi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{g(\tau)(z - z_0) d\tau}{X^+(\tau)(\tau - z_0)(\tau - z)};$$

$$X^+(z) = e^{\Gamma^+(z)}; \quad X^-(z) = \left(\frac{z - z_1}{z - z_0} \right)^{-\kappa} e^{\Gamma^-(z)};$$

$$\Gamma(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{(z - z_0) \ln \left[\left(\frac{\tau - z_1}{\tau - z_0} \right)^{-\kappa} G(\tau) \right] d\tau}{(\tau - z_0)(\tau - z)};$$

$P_{\kappa-1}$ — полином степени $\kappa - 1$ с произвольными коэффициентами. При $\kappa < 0$ для разрешимости задачи (8) должны выполняться условия

$$\int_L \left(\frac{\tau - z_1}{\tau - z_0} \right)^{k-1} \frac{g(\tau) d\tau}{X^+(\tau)(\tau - z_0)^2} \quad (k = 1, 2, \dots, -\kappa). \quad (9)$$

Теорема 2. При $\kappa > 0$ однородная и неоднородная задачи Римана разрешимы, решение их зависит линейно от κ постоянных. При $\kappa \leq 0$ однородная задача неразрешима. Если $\kappa = 0$, то неоднородная задача разрешима и имеет единственное решение. При $\kappa \leq 0$ неоднородная задача разрешима при соблюдении $-\kappa$ условий (9). Если эти условия выполняются, то решение единственно. При $\kappa \leq 0$ $P_{\kappa-1} \left(\frac{z - z_1}{z - z_0} \right) \equiv 0$.

5. Пусть в уравнении

$$a(t)\varphi(t) + \frac{b(t)}{\pi i} \int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t} d\tau = f(t) \quad (1)$$

$f(t), a(t), b(t) \in H, a^2(t) - b^2(t) \neq 0$. Имея в виду выразить наиболее отчетливо отличие рассматриваемого случая от известной теории для конечного контура, будем считать вначале, что контур L гладкий. Используя формулы Сохоцкого (3), (4), можно свести уравнение (1) к задаче Римана (8). Однако в отличие от случая конечного контура задача (8) и уравнение (1), вообще говоря, не равносильны. Равносильность имеет место, если справедливы обе формулы:

$$\varphi(t) = \Phi^+(t) - \Phi^-(t), \quad (10)$$

$$\frac{1}{\pi i} \int_L \frac{\Phi^+(\tau) - \Phi^-(\tau)}{\tau - t} d\tau = \Phi^+(t) + \Phi^-(t). \quad (11)$$

Введем функцию

$$\tilde{\Phi}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\Phi^+(\tau) - \Phi^-(\tau)}{\tau - z} d\tau \quad (12)$$

на основании формул Сохоцкого

$$\frac{1}{\pi i} \int_L \frac{\Phi^+(\tau) - \Phi^-(\tau)}{\tau - t} d\tau = \tilde{\Phi}^+(t) + \tilde{\Phi}^-(t). \quad (13)$$

Преобразовав правую часть (12), выразим $\tilde{\Phi}^\pm(t)$ через $\Phi^\pm(t)$:

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\Phi^+(\tau) - \Phi^-(\tau)}{\tau - z} d\tau - \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\Phi^+(\tau) - \Phi^-(\tau)}{\tau - z_0} d\tau + \\ &+ \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\Phi^+(\tau) - \Phi^-(\tau)}{\tau - z_0} d\tau = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{(z - z_0)\Phi^+(\tau)}{(\tau - z_0)(\tau - z)} d\tau - \\ &- \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{(z - z_0)\Phi^-(\tau)}{(\tau - z_0)(\tau - z)} d\tau + \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\Phi^+(\tau) - \Phi^-(\tau)}{\tau - z_0} d\tau. \end{aligned} \quad (14)$$

Применив к (14) формулы Коши (6'), (7'), получаем

$$\tilde{\Phi}^+(z) = \Phi^+(z) - \Phi^-(z_0) + \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\Phi^+(\tau) - \Phi^-(\tau)}{\tau - z_0} d\tau, \quad (15)$$

$$\tilde{\Phi}^-(z) = \Phi^-(z) - \Phi^-(z_0) + \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\Phi^+(\tau) - \Phi^-(\tau)}{\tau - z_0} d\tau. \quad (16)$$

Перейдем в формулах (15), (16) к пределу при $z \rightarrow t \in L$:

$$\tilde{\Phi}^+(t) = \Phi^+(t) - \Phi^-(z_0) + \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\Phi^+(\tau) - \Phi^-(\tau)}{\tau - z_0} d\tau, \quad (17)$$

$$\tilde{\Phi}^-(t) = \Phi^-(t) - \Phi^-(z_0) + \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\Phi^+(\tau) - \Phi^-(\tau)}{\tau - z_0} d\tau. \quad (18)$$

Подставляя (17) и (18) в (13), будем иметь

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi i} \int_L \frac{\Phi^+(\tau) - \Phi^-(\tau)}{\tau - t} d\tau &= \Phi^+(t) + \Phi^-(t) - \\ &- 2 \left[\Phi^-(z_0) - \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\Phi^+(\tau) - \Phi^-(\tau)}{\tau - z_0} d\tau \right]. \end{aligned}$$

Для того чтобы оказалась справедливой формула (11), должно выполняться равенство

$$\Phi^-(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\Phi^+(\tau) - \Phi^-(\tau)}{\tau - z_0} d\tau. \quad (19)$$

Итак, выполнение условия (19) является необходимым и достаточным для равносильности интегрального уравнения (1) и краевой задачи (8).

В [7] уравнение

$$\frac{1}{\pi i} \int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t} d\tau = f(t),$$

где $f(t) \in H$, L — гладкий контур, простирающийся в бесконечность, решается аналогично случаю конечного контура. Решение дается формулой

$$\varphi(\tau) = \frac{1}{\pi i} \int_L \frac{f(t)}{t - \tau} dt. \quad (20)$$

Легко убедиться, что формула (20) не справедлива при $f(t) \equiv 1$. В рассматриваемом примере не выполняется условие (19).

Таким образом, для уравнения (1) на бесконечном контуре формулы решения, выведенные в случае конечного контура, вообще говоря, неверны.

В [3] дается формула обращения интеграла $\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(\tau)}{\tau - x} d\tau = f(x)$

в одном классе обобщенных функций. В п. 8 мы решаем уравнение (1) при условии, что $(t - z_0)f(t) \in H$, и в сопряженном пространстве.

6. Интегральное уравнение

$$a(t)\varphi(t) + \frac{b(t)}{\pi i} \int_L \frac{(t - z_0)\varphi(\tau)}{(\tau - z_0)(\tau - t)} d\tau = f(t) \quad (21)$$

с помощью кусочно-аналитической функции

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{(z-z_0)\varphi(\tau)}{(\tau-z_0)(\tau-z)} d\tau$$

сводится к задаче (8). Уравнение (21) и задача (8) при условии, что ее решение удовлетворяет условию $\Phi^-(z_0) = 0$, равносильны. Исследования этого вопроса не приводим, так как аналогичные рассуждения изложены выше. Если индекс уравнения (21) $\kappa \geq 0$, то решение его дается формулой

$$\begin{aligned} \varphi(t) = a(t)f(t) - \frac{b(t)Z(t)}{\pi i} \int_L \frac{(t-z_0)f(\tau)d\tau}{(\tau-z_0)(\tau-t)Z(\tau)} + \\ + b(t)Z(t)P_{\kappa-1}\left(\frac{t-z_1}{t-z_0}\right), \end{aligned} \quad (22)$$

где

$$\begin{aligned} Z(t) &= \left(\frac{t-z_1}{t-z_0}\right)^{-\frac{\kappa}{2}} e^{r(t)}, \\ \Gamma(t) &= \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{(t-z_0) \ln \left[\left(\frac{\tau-z_1}{\tau-z_0}\right)^{-\kappa} G(\tau) \right] d\tau}{(\tau-z_0)(\tau-t)}. \end{aligned}$$

Те же формулы дают решение и при $\kappa < 0$, если положить в них $P_{\kappa-1}\left(\frac{t-z_1}{t-z_0}\right) \equiv 0$ и считать, что свободный член $f(t)$ удовлетворяет необходимым и достаточным условиям:

$$\int_L f(t)\psi_k(t)dt = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, -\kappa),$$

где

$$\psi_k(t) = \left(\frac{t-z_1}{t-z_0}\right)^{k-1} \frac{[a(t)+b(t)]^{-1}}{X^+(t)(t-z_0)^2}.$$

Если в уравнении (21) $a(t), b(t), f(t) \in H$, то и решение $\varphi(t) \in H$.

Будем считать, что в (21) $a(t) \equiv 0, b(t) \equiv 1$. Справедлива формула обращения

$$\frac{1}{\pi i} \int_L \frac{(t-z_0)f(\tau)}{(\tau-z_0)(\tau-t)} d\tau = \varphi(t). \quad (23)$$

Метод решения и зависимость числа решений уравнения (21) от индекса те же, что и для характеристического уравнения на конечном контуре. Эти обстоятельства позволяют считать уравнение (21) на бесконечном контуре характеристическим. Решая уравнение (21) и задачу (8), мы нигде не использовали условия бесконечности контура. Контур L можно считать как бесконечным, так и конечным.

7. Рассмотрим вопрос о влиянии угловых точек контура на характер решений задачи Римана и интегрального уравнения с ядром Коши. Из формул Сохоцкого (3) и (4) получим пару равносильных им формул:

$$\varphi(t) = \Phi^+(t) - \Phi^-(t), \quad (24)$$

$$\frac{1}{\pi i} \int_L \frac{(t-z_0)\varphi(\tau)}{(\tau-z_0)(\tau-t)} d\tau = \frac{\alpha(t)}{\pi} \Phi^+(t) + \left[2 - \frac{\alpha(t)}{\pi}\right] \Phi^-(t). \quad (25)$$

В решении краевой задачи Римана используется лишь формула (24). Эта формула имеет для угловой точки тот же вид, что и для точки гладкости контура. Отсюда следует, что решение задачи Римана от наличия на контуре угловых точек не изменяется.

Воспользовавшись методом из [2], исследуем интегральное уравнение (21) на контуре с конечным числом угловых точек. Угловая точка t_0 для интеграла $\frac{1}{\pi i} \int_L \frac{(t-z_0)\varphi(\tau)}{(\tau-z_0)(\tau-t)} d\tau$ будет точкой устранимого разрыва (см. п. 2).

Если допустить, что $b(t_0)\varphi(t_0) \neq 0$ и $\varphi(t_0)$ непрерывна, то получим, что в уравнении один член будет разрывным, а остальные непрерывны. Отсюда следует, что уравнение (21), вообще говоря, не может в угловой точке t_0 иметь непрерывное решение. Будем искать решения в виде

$$\varphi(t) = \varphi_1(t) + \xi(t), \quad (26)$$

где $\varphi_1(t) \in H$, $\xi(t)$ равна нулю всюду, кроме угловых точек. Вставляя (26) в уравнение, получим

$$a(t)\varphi_1(t) + \frac{b(t)}{\pi i} \int_L \frac{(t-z_0)\varphi_1(\tau)}{(\tau-z_0)(\tau-t)} d\tau = f(t) - a(t)\xi(t). \quad (27)$$

Вводя интеграл $\Phi_2(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{(z-z_0)\varphi_1(\tau)}{(\tau-z_0)(\tau-z)} d\tau$, сведем уравнение (27) к задаче Римана

$$\begin{aligned} & \left[a(t) + \frac{\alpha(t)}{\pi} b(t) \right] \Phi^+(t) - \\ & - \left[a(t) - \left(2 - \frac{\alpha(t)}{\pi}\right) b(t) \right] \Phi^-(t) = f(t) - a(t)\xi(t). \end{aligned} \quad (28)$$

Для точек гладкости краевое условие будет иметь вид

$$[a(t) + b(t)] \Phi^+(t) + [a(t) - b(t)] \Phi^-(t) = f(t). \quad (29)$$

Все члены в этом равенстве — непрерывные функции (см. теорему 1). Поэтому, выполняясь почти всюду, оно выполняется всюду. Решение уравнения (21) в точках гладкости получим из решения задачи (29) по формуле (24). Исключая из (28) при помощи (29) $f(t)$, получим для $\xi(t)$ следующее выражение:

$$\xi(t) = \frac{b(t)}{a(t)} \left[1 - \frac{\alpha(t)}{\pi} \right] [\Phi^+(t) - \Phi^-(t)]. \quad (30)$$

При этом предполагается, что в угловой точке $a(t) \neq 0$. Решение уравнения для всего контура может быть записано в форме

$$\varphi(t) = \varphi_1(t) + \xi(t) = \left\{ 1 + \frac{b(t)}{a(t)} \left[1 - \frac{\alpha(t)}{\pi} \right] \right\} [\Phi^+(t) - \Phi^-(t)], \quad (31)$$

где $\Phi^\pm(t)$ — решения краевой задачи (29).

Формула (31), а также метод решения уравнения (21) остаются справедливыми и для контура L , имеющего в каждой точке правую и левую касательные, непрерывные соответственно справа и слева. Рассматриваемые контуры могут иметь счетное множество угловых точек [1].

8. Результаты п. 5 позволяют рассмотреть интегральное уравнение (1) в одном классе обобщенных функций (о. ф.).

Через $H(-1)$ обозначим пространство основных функций, удовлетворяющих на гладком контуре L условию $(t - z_0)\varphi(t) \in H$, с нормой

$$\|\varphi(t)\| = \max_{t \in L} |(t - z_0)\varphi(t)| + \sup_{t_1, t_2 \in L} \frac{|(t_1 - z_0)\varphi(t_1) - (t_2 - z_0)\varphi(t_2)|}{\left| \frac{1}{t_1 - z_0} - \frac{1}{t_2 - z_0} \right|^\lambda}. \quad (32)$$

Функции из $H(-1)$ удовлетворяют на L условию Гельдера и имеют на бесконечности нуль порядка не ниже первого. Обозначим $H(1)$ пространство о. ф. над $H(-1)$.

Если $f(t) \in H(-1)$, то зависимость числа решений и условий разрешимости уравнения (1) в $H(-1)$ от индекса такие же, как уравнения (21) в H при $f(t) \in H$. Путем замены $\varphi_0(t) = (t - z_0)\varphi(t)$ уравнение (1) можно преобразовать к виду

$$a(t)\varphi_0(t) + \frac{b(t)}{\pi i} \int_L \frac{(t - z_0)\varphi_0(\tau)}{(\tau - z_0)(\tau - t)} d\tau = (t - z_0)f(t) = f_0(t). \quad (21')$$

Из результатов п. 6 следует, что $\varphi_0(t) \in H$, если $f_0(t) \in H$. Если $a(+)$, $b(+)$ $\in H$, $\varphi(+)$ $\in H(-1)$, $f(+)$ $\in H(-1)$. Для этого достаточно показать, что

$$(t - z_0) \int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t} d\tau \in H, \text{ если } \varphi(\tau) \in H(-1).$$

Умножив и разделив подынтегральную функцию на $\tau - z_0$ и обозначив $(\tau - z_0)\varphi(\tau) = \varphi_0(\tau)$, получим

$$(t - z_0) \int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t} d\tau = \int_L \frac{(t - z_0)\varphi_0(\tau)}{(\tau - z_0)(\tau - t)} d\tau = 2\pi i \Phi_2(t),$$

где $\varphi_0(\tau) \in H$. Следовательно, $\Phi_2(t) \in H$ (см. п. 2). Итак, утверждение доказано.

При сделанных нами предположениях решение уравнения (1) можно получить по формуле $\varphi(t) = \frac{\varphi_0(t)}{t - z_0}$, где $\varphi_0(t)$ — решение уравнения (21').

Рассмотрим интегральное уравнение

$$a(t)\psi + \frac{b(t)}{\pi i} \int_L \frac{\psi}{\tau - t} d\tau = g, \quad (33)$$

где $a(t)$, $b(t) \in H$, $a^2(t) - b^2(t) \neq 0$, $b(\infty) \neq 0$, ψ и g — соответственно искомый и данный функционалы, принадлежащие $H(1)$; L — простирающийся в бесконечность гладкий контур. Выражение $\int_L \frac{\psi}{\tau - t} d\tau$ определим равенством

СТВОМ

$$\int_L \frac{\psi}{\tau - t} d\tau = \left(\psi, - \int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t} d\tau \right).$$

Рассмотрим в $H(-1)$ союзное с (33) уравнение

$$a(t)\varphi(t) - \frac{1}{\pi i} \int_L \frac{b(\tau)\varphi(\tau)}{\tau-t} d\tau = f(t). \quad (34)$$

Путем подстановки $\varphi_1(\tau) = b(\tau)\varphi(\tau)$ оно сводится к виду

$$a(t)\varphi_1(t) - \frac{b(t)}{\pi i} \int_L \frac{\varphi_1(\tau)}{\tau-t} d\tau = f_1(t). \quad (34')$$

Обозначим через $\tilde{H}(-1)$ множество функций из $H(-1)$, представимых в виде (34), где $\varphi(\tau) \in H(-1)$.

Пусть индекс уравнения (33) $\kappa = 0$. Тогда индекс уравнения (34') $\kappa' = -\kappa = 0$ и любая функция $f(t) \in H(-1)$ однозначно представима в виде (34'), где $\varphi_1(\tau) \in H(-1)$. Следовательно, $\tilde{H}(-1) = H(-1)$. Решение уравнения (33) определяется равенством

$$\begin{aligned} (\psi, f(t)) &= \left(\psi, a(t)\varphi(t) - \frac{1}{\pi i} \int_L \frac{b(\tau)\varphi(\tau)}{\tau-t} d\tau \right) = \\ &= \left(a(t)\psi + \frac{b(t)}{\pi i} \int_L \frac{\psi}{\tau-t} d\tau, \varphi(t) \right) = (g, \varphi(t)). \end{aligned} \quad (35)$$

Если $\kappa > 0$, то $\kappa' = -\kappa < 0$. Функция $f(t)$ принадлежит $\tilde{H}(-1)$, если она удовлетворяет κ условиям $\int_L (t-z_0)b(t)\psi_k(t)f(t)dt = 0$ (см. п. 5 и (34')). Соотношение (35) определяет функционал ψ на $\tilde{H}(-1) \neq H(-1)$. Воспользовавшись теоремой из [8], построим продолжение функционала на все пространство $H(-1)$ по формуле

$$(\psi, f(t)) = (\psi, \tilde{f}(t)) + \sum_{k=1}^{\kappa} c_k \int_L (t-z_0)b(t)\psi_k(t)f(t)dt,$$

где $\tilde{f}(t) \in \tilde{H}(-1)$.

При $\kappa < 0$ представление (34) неоднозначно. По заданной функции $f(t)$ функция $\varphi(t)$ определяется соотношением

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= a(t)f(t) + \frac{1}{\pi i} \int_L \frac{\tilde{f}(\tau)b(\tau)Z(\tau)}{\tau-t} d\tau + \\ &+ [Z(t)(t-z_0)]^{-1} P_{\kappa'-1} \left(\frac{t-z_1}{t-z_0} \right) \end{aligned}$$

$Z(t)$ см. в формуле (22)).

Равенство (35) определяет о. ф. $\psi \in H(1)$, если выполняются условия непрерывности функционала ψ :

$$\left(g, [Z(t)(t-z_0)]^{-1} \left(\frac{t-z_1}{t-z_0} \right)^{k-1} \right) = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, \kappa').$$

Таким образом, зависимость числа решений и условий разрешимости уравнения (33) от индекса в пространстве о. ф. $H(1)$ та же, что и для уравнения (21) в H .

Искренне благодарен академику Ф. Д. Гахову за тему и внимательное руководство работой.

Литература

1. Алексеев А. Д. ДАН СССР, 136, 3, 1961.
2. Гахов Ф. Д. Краевые задачи. Физматгиз, 1963.
3. Гельфанд И. М., Шилов Г. Е. Обобщенные функции, в. 2. Физматгиз, 1958.
4. Квеселава Д. А. Тр. Тбилисс. матем. ин-та. Изд. АН ГрузССР, 17, 1949.
5. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного. Изд. «Наука», 1965.
6. Мухелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения. Физматгиз, 1962.
7. Przeworska-Rolewicz D. Ann. Polon. Math., 8, 1960.
8. Рогожин В. С. ДАН СССР, 164, 2, 1965.
9. Trjizinski W. Trans. Amer. Math. Soc., 60, 2, 1946.

Белорусский государственный университет
им. В. И. Ленина

Поступило в редакцию 22.VI 1967

Е. А. ИВАНОВ, Г. М. КОБЛОВА

**К ЧИСЛЕННОМУ РЕШЕНИЮ ЗАДАЧИ
 О ДИФРАКЦИИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН
 НА ДВУХ ЦИЛИНДРАХ**

В рамках строгой теории дифракции известны различные подходы к строгому решению задачи о дифракции электромагнитных волн (плоской либо цилиндрической) на двух параллельных бесконечно длинных идеально проводящих круговых цилиндрах. Например, в [1, 2] она решается методом возмущений (методом многократного рассеяния волн), в [3—5] — на основе интегральной формы представления решения уравнения Гельмгольца (формулы Грина), в [6] — классическим методом разделения переменных в цилиндрических координатах. Вместе с тем, несмотря на сравнительно большое число теоретических работ, посвященных проблеме взаимодействия двух (или нескольких) дифрагирующих цилиндров, вопросы численного решения таких задач в литературе освещены недостаточно полно. Данная статья посвящена обсуждению некоторых из них. В частности, сравнивается эффективность использования для численных расчетов на ЭВМ формул, дающих решение дифракционной задачи, полученных на основе метода возмущений и классического метода разделения переменных.

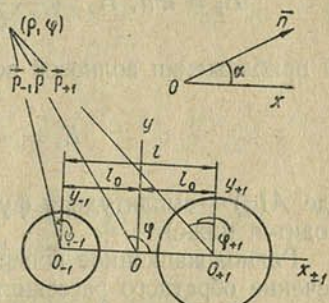


Рис. 1. Геометрия задачи в плоскости Oxy

Сначала дается постановка задачи и приводятся расчетные формулы, а затем рассматриваются вопросы, связанные с применением их для численного счета на ЭВМ.

Постановка задачи. Рассматривается случай плоской волны, например ТМ типа ($E^0 \parallel Oz$), заданной уравнением

$$E^0 = \{0, 0, E^0\}, E^0 = e^{ik(n\vec{r})} \quad (1)$$

(множитель $\exp(-i\omega t)$ всюду опускается; амплитуда волны считается равной единице), распространяющейся в направлении единичного вектора \vec{n} под углом $\pi/2$ к образующим цилиндров и под углом α к оси Ox , совпадающей с линией центров нормального сечения цилиндров плоскостью Oxy (геометрию задачи см. на рис. 1). Расстояние между осями цилиндров равно l , окружающая их среда — бесконечное однородное и изотропное пространство с электрической и магнитной проницаемостями ϵ, μ и с проводимостью $\sigma=0$. Радиусы цилиндров равны a_{-1} и a_{+1} .

Задача состоит в отыскании вторичного электромагнитного поля E^1, H^1 вне цилиндров (или результирующего поля $E = E^0 + E^1, H = H^0 + H^1$).

Эта задача в цилиндрической системе координат ρ, φ сводится, как известно, к скалярной краевой задаче относительно потенциала Герца u^1 вторичного поля, удовлетворяющего уравнению Гельмгольца

$$\Delta u^1 + k^2 u^1 = 0, \quad k = \frac{\omega}{c} \sqrt{\epsilon \mu}, \quad (2)$$

на поверхности цилиндров — граничному условию Дирихле

$$(u^0 + u^1) = 0, \quad \rho_s = a_s (s = \pm 1) \quad (3)$$

и условию излучения на бесконечности. Здесь u^0 — потенциал первичного поля, связанный с (1) соотношением

$$u^0 = \frac{1}{k^2} e^{ik(n\vec{r})}. \quad (4)$$

Через потенциал Герца полного поля $u = u^0 + u^1$ составляющие электромагнитного поля могут быть найдены затем по формулам

$$E_\rho = E_\varphi = H_z = 0, \quad (5)$$

$$E_z = k^2 u, \quad H_\rho = -\frac{ik_0 \epsilon}{\rho} \frac{\partial u}{\partial \varphi}, \quad H_\varphi = ik_0 \epsilon \frac{\partial u}{\partial \rho}, \quad k_0 = \frac{\omega}{c}.$$

В приближении волновой зоны

$$E_z = -\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} H_\varphi = \frac{e^{ik\rho}}{\sqrt{\rho}} A(\varphi), \quad (6)$$

где $A(\varphi)$ — амплитудная функция рассеянного поля (явный вид $A(\varphi)$ приводится ниже).

Радиолокационное поперечное сечение для двух цилиндров (поперечное сечение обратного рассеяния) вычисляется по формуле

$$\sigma = \lim_{\rho \rightarrow \infty} 2\pi\rho \left| \frac{E^1}{E^0} \right|^2$$

или на основании (1), (6):

$$\sigma = 2\pi |A(\varphi)|^2, \quad \varphi = \pi + \alpha. \quad (7)$$

Закон распределения плотности поверхностных токов \mathbf{j} , наведенных на каждом из цилиндров, задается формулой

$$j_\rho^s = j_\varphi^s = 0, \quad j_z^s = \frac{i\omega\epsilon}{4\pi} \frac{\partial u}{\partial \rho_s}, \quad \rho_s = a_s (s = -1 \text{ или } s = +1). \quad (8)$$

Решение задачи. Для решения задачи вводятся локальные полярные системы координат $\rho_s, \varphi_s (s = \pm 1)$, начала которых совпадают с центрами соответствующих кругов сечения цилиндров, а полярные оси направлены вдоль Ox (см. рис. 1). В этих координатах функция (4) представима в виде

$$u^0 = \frac{e^{iskl_0 \cos \alpha}}{k^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n J_n(k\rho_s) e^{in(\varphi_s - \alpha)}, \quad (9)$$

где $l_0 = l/2, s = \pm 1$.

На основе метода возмущений искомым потенциал u^1 получается в виде ряда [1]

$$u^1 = \frac{1}{k^2} \sum_{s=\pm 1} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\sum_{m=1}^{\infty} {}^s A_n^m \right) H_n^{(1)}(k \rho_s) e^{in\varphi_s}, \quad (10)$$

где ${}^s A_n^m$ находятся из рекуррентного соотношения

$${}^s A_n^m = -\frac{J_n(ka_s)}{H_n^{(1)}(ka_s)} \sum_{p=-\infty}^{\infty} {}^{-s} A_p^{m-1} H_{p-n}^{(1)}(kl) e^{i(p-n)\varphi_{-s,s}} \quad (11)$$

$$(m \geq 2; \varphi_{-1,+1} = 0, \varphi_{+1,-1} = \pi)$$

$${}^s A_n^1 = -\frac{i^n J_n(ka_s)}{H_n^{(1)}(ka_s)} e^{iskl_0 \cos \alpha - ina} \quad (12)$$

$$(s = \pm 1).$$

Коэффициенты ${}^s A_n^m$ называются коэффициентами рассеяния m -го порядка. Ими определяется потенциал ${}^s u^m$ вторичного поля m -го порядка рассеяния, обусловленного s -м цилиндром, взаимодействующим с $-s$ -м цилиндром ($s = +1$ или $s = -1$):

$${}^s u^m = \sum_{n=-\infty}^{\infty} {}^s A_n^m H_n^{(1)}(k \rho_s) e^{in\varphi_s} \quad (13)$$

$$(u^1 = \sum_{s=\pm 1} \sum_{m=1}^{\infty} {}^s u^m).$$

В данном случае

$$A(\varphi) = \sqrt{\frac{2}{\pi k}} e^{-i\pi/4} \sum_{s=\pm 1} e^{-iskl_0 \cos \varphi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\sum_{m=1}^{\infty} {}^s A_n^m \right) (-i)^n e^{in\varphi}. \quad (14)$$

Амплитуда рассеянной волны m -го порядка рассеяния равна

$$A^m(\varphi) = \sqrt{\frac{2}{\pi k}} e^{-i\pi/4} \sum_{s=\pm 1} e^{-iskl_0 \cos \varphi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} {}^s A_n^m (-i)^n e^{in\varphi} \quad (15)$$

$$(m = 1, 2, \dots).$$

На основе классического метода разделения переменных решение задачи дается формулами [6]

$$u^1 = \frac{1}{k^2} \sum_{s=\pm 1} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n^s J_n(ka_s) H_n^{(1)}(k \rho_s) e^{in\varphi_s}, \quad (16)$$

где x_n^s находятся из бесконечной системы линейных уравнений

$$x_n^s + \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_{nm}^{-s,s} x_m^{-s} = f_n^s, \quad (n=0, \pm 1, \dots, s = \pm 1) \quad (17)$$

с комплексными матричными элементами

$$a_{nm}^{-s,s} = \frac{J_m(ka_{-s})}{H_n^{(1)}(ka_s)} H_{m-n}^{(1)}(kl) e^{i(m-n)\varphi_{-s,s}} \quad (18)$$

и со свободными комплексными членами

$$j_n^s = -\frac{j^n e^{iskl_0 \cos \alpha - i n \alpha}}{H_n^{(1)}(ka_s)} \quad (19)$$

Система (17) единственным образом разрешима методом редукции; ее решение удовлетворяет условию $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x_n^s|^2 < \infty$ [6].

Замечание. Система, подобная (17), получается и в том случае, когда для отыскания u^1 применяется интегральная формула Грина [3—5]. Заметим также, что если к системе (17) применить (формально) метод последовательных приближений, взяв в качестве нулевого приближения значения $x_n^s = 0$, то в итоге x_n^s представится в виде суммы

$$x_n^s = \frac{\sum_{m=1}^{\infty} {}^s A_n^m}{J_n(ka_s)}, \quad (20)$$

где ${}^s A_n^m$ определены формулами (11), (12).

В данном случае

$$A(\varphi) = \sqrt{\frac{2}{\pi k}} e^{-i\pi/4} \sum_{s=\pm 1} e^{-iskl_0 \cos \varphi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-i)^n J_n(ka_s) x_n^s e^{in\varphi}. \quad (21)$$

При отыскании j_z по формуле (8) следует воспользоваться обобщенной теоремой сложения для цилиндрических волновых функций

$$H_n^{(1)}(k\rho_s) e^{in\varphi_s} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} J_m(k\rho_{-s}) H_{n-m}^{(1)}(kl) e^{i(n-m)\varphi_{-s,s} + im\varphi_{-s}} \quad (22)$$

(эта же формула используется при определении ${}^s A_n^m$ и x_n^s из граничного условия на поверхности s -го цилиндра, $s = \pm 1$) и значением определителя Вронского для бesselевых функций

$$J_n(x) H_n^{(1)'}(x) - J_n'(x) H_n^{(1)}(x) = \frac{2i}{\pi x}.$$

Тогда в первом случае

$$j_z^s = -\frac{\omega \varepsilon}{2\pi^2 a_s} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\sum_{m=1}^{\infty} {}^s A_n^m \right) \frac{e^{in\varphi_s}}{J_n(ka_s)}, \quad (23)$$

а во втором

$$j_z^s = -\frac{\omega \varepsilon}{2\pi^2 a_s} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n^s e^{in\varphi_s}, \quad s = \pm 1. \quad (24)$$

О численном решении задачи. Ниже даны некоторые результаты численного решения задачи на ЭВМ «Минск-2» для случая $ka_{-1} = ka_{+1} = ka$ по приведенным выше формулам, в которых область изменения индексов суммирования ограничивалась числом $N = [2ka] + 1$ ($[x]$ — целая часть x). Вычислялись функции $F_1 = \left| \sqrt{\frac{\pi k}{2}} A(\varphi) \right|$, $F_2^m = \left| \sqrt{\frac{\pi k}{2}} A^m(\varphi) \right|$,

Таблица 1

Значения дифракционных коэффициентов для различных порядков
усечения системы (17) и $ka = 3$, $kl = 15$, $\alpha = 0$.

Верхняя строка — вещественная, нижняя — мнимая часть $x_{n,N}^{\pm 1}$

$$x_{n,N}^{+1} = x_{-n,N}^{+1} = x_{n,N} \cdot 10^p$$

| n | $N=5$ | p | $N=6$ | p | $N=7$ | p | $N=8$ | p | $N=9$ | p |
|-----|------------|-----|------------|-----|------------|-----|------------|-----|------------|-----|
| 9 | | | | | | | | | + .8877346 | -4 |
| | | | | | | | | | - .2851397 | -2 |
| 8 | | | | | | | - .1276242 | -1 | - .1276245 | -1 |
| | | | | | | | + .1103120 | -2 | + .1103009 | -2 |
| 7 | | | | | + .8015451 | -2 | + .8017136 | -2 | + .8017179 | -2 |
| | | | | | + .4766178 | -1 | + .4766130 | -1 | + .4766147 | -1 |
| 6 | | | + .1417945 | 0 | + .1418071 | 0 | + .1418045 | 0 | + .1418044 | 0 |
| | | | - .3457359 | -1 | - .3455310 | -1 | - .3455261 | -1 | - .3455285 | -1 |
| 5 | - .9505103 | -1 | - .9601088 | -1 | - .9606621 | -1 | - .9606306 | -1 | - .9606295 | -1 |
| | - .3016830 | 0 | - .3016594 | 0 | - .3017006 | 0 | - .3017015 | 0 | - .3017013 | 0 |
| 4 | - .4035011 | 0 | - .4023567 | 0 | - .4022835 | 0 | - .4022885 | 0 | - .4022888 | 0 |
| | + .1638093 | 0 | + .1648406 | 0 | + .1649780 | 0 | + .1649802 | 0 | + .1649799 | 0 |
| 3 | + .1699122 | 0 | + .1698872 | 0 | + .1698837 | 0 | + .1698895 | 0 | + .1698899 | 0 |
| | + .3436247 | 0 | + .3425272 | 0 | + .3423528 | 0 | + .3423529 | 0 | + .3423533 | 0 |
| 2 | + .3260161 | 0 | + .3258199 | 0 | + .3258263 | 0 | + .3258259 | 0 | + .3258256 | 0 |
| | - .1675667 | 0 | - .1679215 | 0 | - .1678096 | 0 | - .1678114 | 0 | - .1678118 | 0 |
| 1 | - .4407840 | 0 | - .4413912 | 0 | - .4414721 | 0 | - .4414782 | 0 | - .4414781 | 0 |
| | - .2200976 | 0 | - .2185739 | 0 | - .2186446 | 0 | - .2186453 | 0 | - .2186452 | 0 |
| 0 | + .4186355 | 0 | + .4197081 | 0 | + .4198284 | 0 | + .4198371 | 0 | + .4198369 | 0 |
| | + .3722323 | 0 | + .3703537 | 0 | + .3704178 | 0 | + .3704203 | 0 | + .3704203 | 0 |

$$x_{n,N}^{-1} = x_{-n,N}^{-1} = x_{n,N} \cdot 10^p$$

| n | $N=5$ | p | $N=6$ | p | $N=7$ | p | $N=8$ | p | $N=9$ | p |
|-----|------------|-----|------------|-----|------------|-----|------------|-----|------------|-----|
| 0 | - .1433175 | +1 | - .1433725 | +1 | - .1433605 | +1 | - .1433612 | +1 | - .1433612 | +1 |
| | + .1880906 | +1 | + .1882786 | +1 | + .1882883 | +1 | + .1882880 | +1 | + .1882880 | +1 |
| 1 | + .1016559 | +1 | + .1016393 | +1 | + .1016478 | +1 | + .1016474 | +1 | + .1016473 | +1 |
| | - .1666915 | +1 | - .1665364 | +1 | - .1665271 | +1 | - .1665272 | +1 | - .1665272 | +1 |
| 2 | - .4313145 | -1 | - .4264459 | -1 | - .4263149 | -1 | - .4262924 | -1 | - .4262948 | -1 |
| | + .2122902 | +1 | + .2123385 | +1 | + .2123495 | +1 | + .2123498 | +1 | + .2123497 | +1 |
| 3 | - .1077853 | +1 | - .1077599 | +1 | - .1077603 | +1 | - .1077594 | +1 | - .1077595 | +1 |
| | - .1001608 | +1 | - .1002460 | +1 | - .1002307 | +1 | - .1002306 | +1 | - .1002307 | +1 |
| 4 | + .1074303 | +1 | + .1073521 | +1 | + .1073573 | +1 | + .1073580 | +1 | + .1073580 | +1 |
| | - .4414894 | 0 | - .4423948 | 0 | - .4422702 | 0 | - .4422723 | 0 | - .4422726 | 0 |
| 5 | + .1898396 | 0 | + .1890882 | 0 | + .1891310 | 0 | + .1891350 | 0 | + .1891350 | 0 |
| | + .4659249 | 0 | + .4658830 | 0 | + .4659230 | 0 | + .4659223 | 0 | + .4659219 | 0 |
| 6 | | | - .1796199 | 0 | - .1796128 | 0 | - .1796096 | 0 | - .1796096 | 0 |
| | | | + .3758306 | -1 | + .3760190 | -1 | + .3760185 | -1 | + .3760154 | -1 |
| 7 | | | | | - .1789760 | -1 | - .1789550 | -1 | - .1789549 | -1 |
| | | | | | - .5038497 | -1 | - .5038515 | -1 | - .5038536 | -1 |
| 8 | | | | | | | + .1008399 | -1 | + .1008400 | -1 |
| | | | | | | | - .3067882 | -2 | - .3068021 | -2 |
| 9 | | | | | | | | | + .5110769 | -3 |
| | | | | | | | | | + .2293796 | -2 |

$F_3 = \left| \sqrt{\frac{\pi k}{2}} \sum_m A^m(\varphi) \right|$ и $k\sigma/4$, рассматриваемые как функции полярного угла φ для различных значений параметров ka , kl и α . Результаты вычислений частично представлены в виде графиков на рис. 2, 3 (диаграммы направленности). Кроме того, приведены табл. 1 численных значений величин $x_{n,N}^s$, аппроксимирующих точные значения коэффициентов x_n^s дифракционных рядов (14), найденных путем решения систем

$$x_{n,N}^s + \sum_{m=-N}^N \alpha_{nm}^{-s,s} x_{m,N}^{-s} = f_n^s \quad (25)$$

($n=0, \pm 1, \dots, \pm N; s = \pm 1$)

для различных последовательно возрастающих значений N -порядка усечения системы (17), и табл. 2 значений функции F_1 , вычисленной через $x_{n,N}^s$ (при соответствующем N) для некоторых φ . Так как метод редукции для системы (17) сходится [6] (в бесконечно мерном евклидовом пространстве числовых последовательностей \mathbb{I}^2), т. е.

$$\lim_{N \rightarrow \infty} x_{n,N}^s = x_n^s$$

(по норме в \mathbb{I}^2), то очевидно, что табл. 1, 2 характеризуют скорость сходимости вычислительного процесса и позволяют судить о точности вычисления.

Таблица 2

Значения функции $F_1(\varphi)$ при различных порядках усечения системы (17)
и $ka=3$, $kl=15$, $\alpha=0$, $F_1(\varphi) = F_1^N(\varphi) \cdot 10^{pT}$

| N | $F_1^N(0^\circ)$ | p | $F_1^N(45^\circ)$ | p | $F_1^N(90^\circ)$ | p | $F_1^N(135^\circ)$ | p | $F_1^N(180^\circ)$ | p |
|-----|------------------|-----|-------------------|-----|-------------------|-----|--------------------|-----|--------------------|-----|
| 3 | .4755724 | 1 | .9541952 | 0 | .1479034 | 1 | .1927497 | 1 | .1190423 | 1 |
| 4 | .4983550 | 1 | .1198494 | 1 | .1440365 | 1 | .1608175 | 1 | .1539182 | 1 |
| 5 | .5030671 | 1 | .1216967 | 1 | .1433385 | 1 | .1618337 | 1 | .1483014 | 1 |
| 6 | .5035749 | 1 | .1216122 | 1 | .1433272 | 1 | .1618081 | 1 | .1488775 | 1 |
| 7 | .5036171 | 1 | .1216072 | 1 | .1433478 | 1 | .1617952 | 1 | .1488313 | 1 |
| 8 | .5036188 | 1 | .1216069 | 1 | .1433478 | 1 | .1617957 | 1 | .1488332 | 1 |
| 9 | .5036189 | 1 | .1216069 | 1 | .1433476 | 1 | .1617957 | 1 | .1488331 | 1 |

Наглядное представление о характере изменения амплитуд вторичных волн различных порядков рассеяния с изменением l — расстояния между цилиндрами дают графики функций F_2^m (рис. 2). Из рис. 2, на котором представлен случай $ka=1$ и $l/a=5, 10, 50$ ($\alpha=90^\circ$ и $\alpha=0^\circ$), видно, что и при $l/a=5$, когда расстояние между цилиндрами сравнительно невелико (в сравнении с радиусами цилиндра), график функции F_2^1 , описывающей волну первого порядка рассеяния (она не учитывает взаимодействие цилиндров), вполне удовлетворительно (особенно вне окрестности $\varphi=0^\circ$ и $\varphi=180^\circ$) повторяет график функции F_3 — суммы вторичных волн первых четырех (пяти) порядков рассеяния. Совпадение графиков улучшается с возрастанием отношения l/a и с количественной

точки зрения (см., например, рис. 2, *d*, *e*). Удовлетворительное графическое совпадение функций F_2^s и F_3 наблюдается и при значении $ka=3$, $l/a=5$ (рис. 3). В этом случае (равно как и в предыдущем) основной вклад в дифракционный эффект дают вторичные волны только первого и второго порядков рассеяния.

Пунктирной линией *b* на рис. 3 изображен график функции F_1 , вычисленной по формулам (16)–(21) при значениях индексов суммирования $n, m=0, \pm 1, \dots, \pm N = \pm 7$. Как видно из табл. 1, 2, этому значению N отвечает точность вычисления до четвертого десятичного знака. График функции F_1 не совпадает несколько с графиком функции F_3 (теоретически $F_1 \equiv F_3$ при $N \rightarrow \infty$, когда F_3 суммирует волны всех последовательных порядков рассеяния). Это объясняется тем, что при заданном N вычисление вторичного поля методом возмущений приводит к большей потере точности вычисления, чем потеря, даваемая при использовании формул (16)–(21), из-за большего объема вычислений. Например, наблюдения показали, что при вычислении F_3 для случая $ka=1$, $\varphi=0^\circ(1^\circ)360^\circ$, $N=3$, $l/a=5$ (или любое другое l/a при данном N) уходило до 10 час машинного времени на ЭВМ «Минск-2», в то время как этот же вариант рассчитывался при помощи формул (16)–(21) за 4 мин (система (25) предварительно преобразовывалась к более удобному виду, о чем будет сказано ниже). В случае $ka=3$, $\varphi=0^\circ(1^\circ)360^\circ$, $N=7$ и $l/a=5$ (или любого другого l/a при данном N) для вычисления F_3 требовалось около 32 час машинного времени, в то время как использование формул (16)–(21) сокращало его до 10 мин.

Для заданного N система (25) является системой $4N+2$ уравнений с $4N+2$ неизвестными $x_{n,N}^s$ ($s=\pm 1$; $n=0, \pm 1, \dots, \pm N$). Ясно, что для получения численных результатов с достаточно высокой точностью нужно брать большое N (в зависимости от значения параметра ka). При большом ka это приведет к решению системы большого числа уравнений, что будет требовать большого объема оперативной памяти ЭВМ. При $ka_{-1}=ka_{+1}=ka$ можно уменьшить число уравнений в решаемых системах (без изменения N) и соответственно число неизвестных, если учесть, что в этом случае

$$\alpha_{nm} = \alpha_{nm}^{(-1, +1)} = (-1)^{n+m} \alpha_{nm}^{(+1, -1)}. \quad (26)$$

На основании (26) путем почленного сложения и вычитания двух равенств, получаемых из (25) для $s=+1$ и $s=-1$, отыскание коэффициентов $x_{n,N}^s$ сведется к решению двух независимых систем уравнений:

$$z_n + \sum_{m=-N}^N \alpha_{nm} z_m (-1)^m = F_n, \quad (27)$$

$$u_n - \sum_{m=-N}^N (-1)^m \alpha_{nm} u_m = \Phi_n \quad (28)$$

$$(n=0, \pm 1, \dots, \pm N),$$

в которых

$$z_n = x_{n,N}^{+1} + (-1)^n x_{n,N}^{-1}, \quad F_n = f_n^{+1} + (-1)^n f_n^{-1}, \quad (29)$$

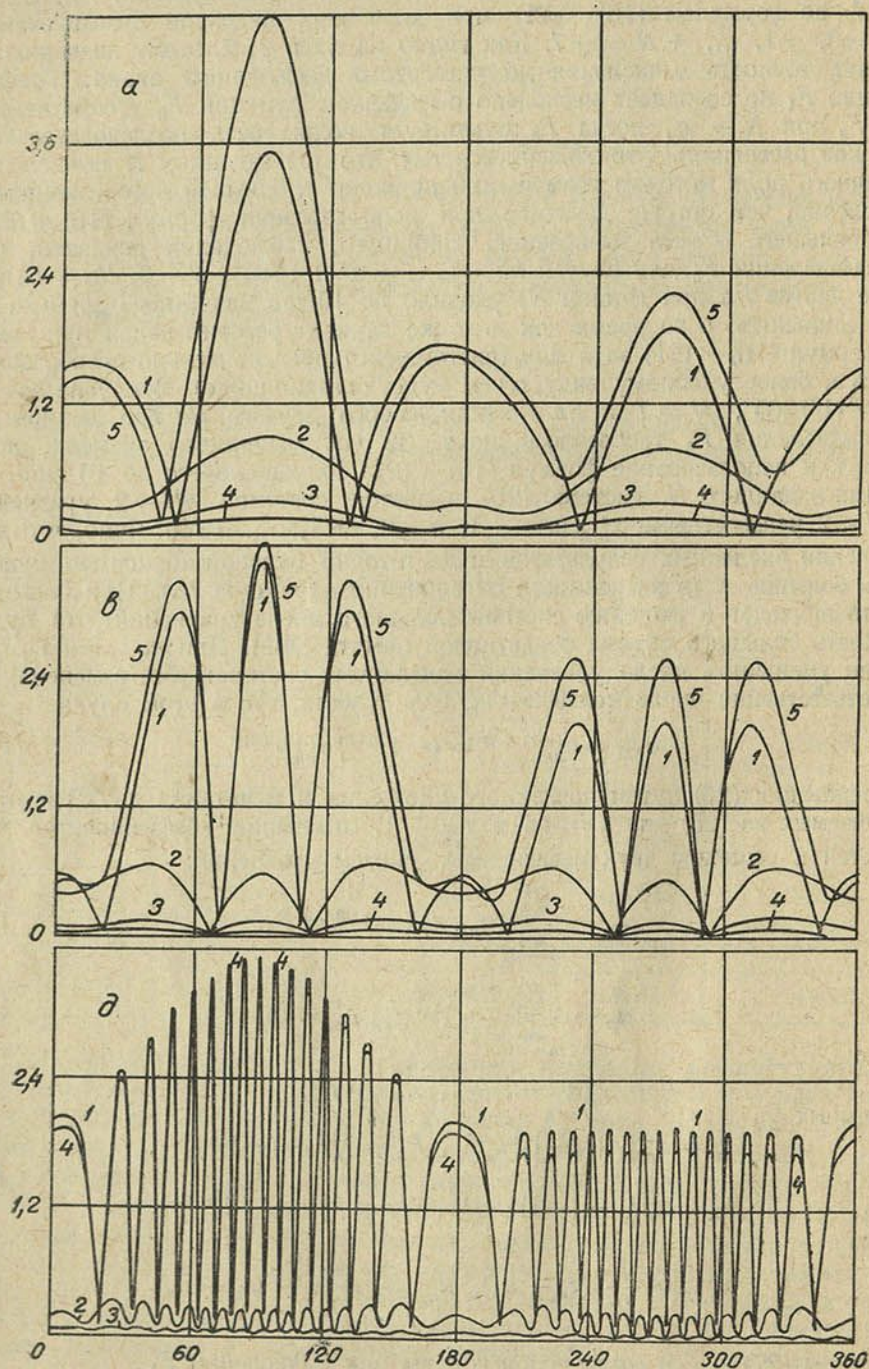
$$u_n = x_{n,N}^{+1} - (-1)^n x_{n,N}^{-1}, \quad \Phi_n = f_n^{+1} - (-1)^n f_n^{-1}.$$

Тогда

$$x_{n,N}^{+1} = \frac{1}{2} (z_n + u_n), \quad x_{n,N}^{-1} = \frac{(-1)^n}{2} (z_n - u_n). \quad (30)$$

Формулы (27)–(30) были использованы при вычислении F_1 .

Переход от системы (25) к системам (27), (28) позволяет при одном и том же объеме оперативной памяти ЭВМ производить вычисления для более широкого диапазона изменения параметра ka (следовательно, и при большем N), так как каждая из систем (27), (28) содержит уже $2N + 1$ уравнений с $2N + 1$ неизвестными и обе они имеют сходные структуры матричных элементов и свободных членов.



Еще большие возможности представляются в том случае, если во всех формулах (16) — (21) перейти только к суммированию по положительным значениям индексов, т. е. если представить, например, (16) в виде

$$u^1 = \frac{1}{k^2} \sum_{s=\pm 1} \sum_{n=0}^{\infty} \{ X_n^s \cos n \varphi_s + Y_n^s \sin n \varphi_s \} J_n(ka_s) H_n^{(1)}(k \rho_s), \quad (31)$$

где X_n^s и Y_n^s связаны с x_n^s , y_n^s формулами

$$X_n^s = x_n^s + \delta_n x_{-n}^s, \quad Y_n^s = i(x_n^s - \delta_n x_{-n}^s); \quad \delta_0 = 0, \quad \delta_n = 1, \quad n \neq 0. \quad (32)$$

В этом случае для отыскания коэффициентов X_n^s и Y_n^s получаются (при $ka_{-1} = ka_{+1} = ka$) четыре независимо решаемые системы $N + 1$ уравнений с $N + 1$ неизвестными каждая, а именно:

$$z_n + \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m a_{nm} z_m = F_n$$

$$u_n - \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m a_{nm} u_m = \Phi_n \quad (33)$$

$$(n = 0, 1, \dots),$$

где

$$a_{nm} = \frac{J_m(ka_{-s})}{H_n^{(1)}(ka_s)} [H_{m-n}^{(1)}(kl) \cos(m - n) \varphi_{-s,s} +$$

$$+ (-1)^n \delta_n H_{m+n}^{(1)}(kl) \cos(m + n) \varphi_{-s,s}],$$

$$z_n = X_n^{+1} + (-1)^n X_n^{-1},$$

$$F_n = F_n^{+1} + (-1)^n F_n^{-1},$$

$$u_n = X_n^{+1} - (-1)^n X_n^{-1},$$

$$\Phi_n = F_n^{+1} - (-1)^n F_n^{-1},$$

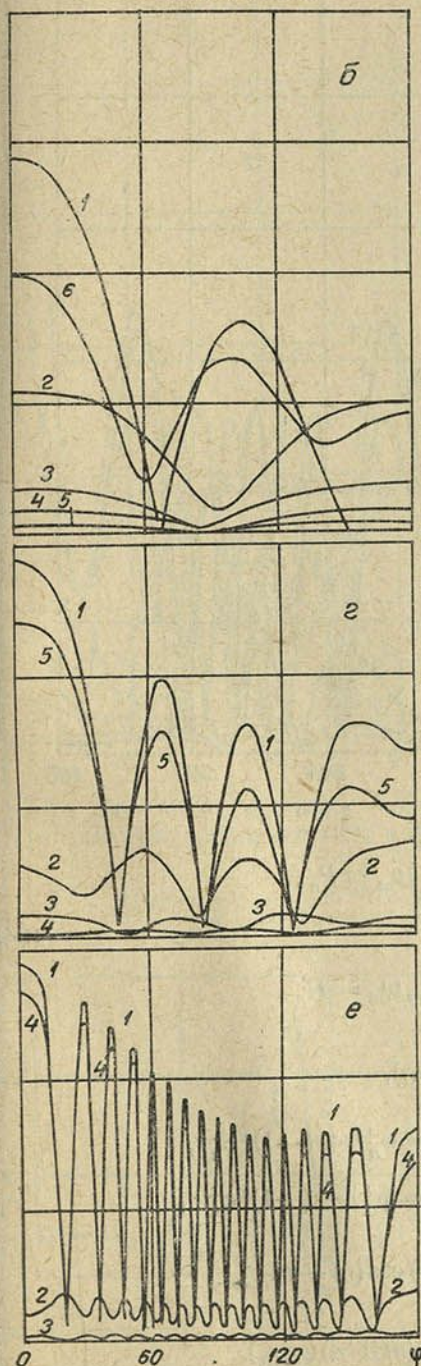
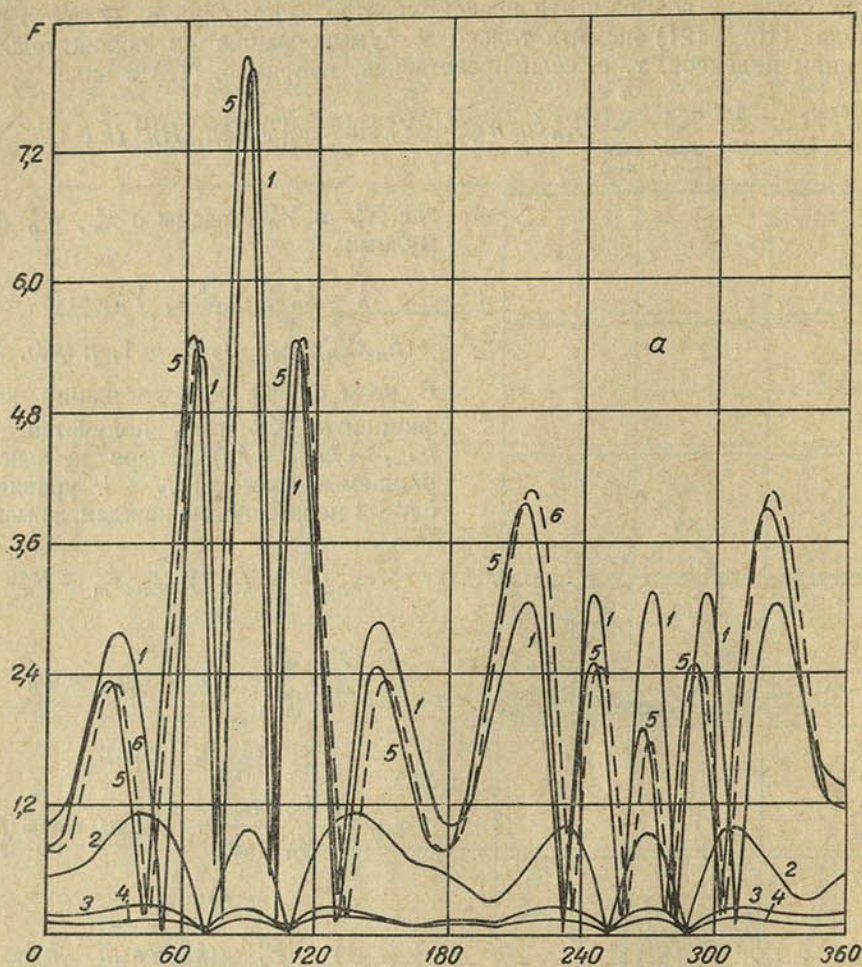


Рис. 2. Графики функций $F_2^m(\varphi)$ и $F_3(\varphi)$ при $ka_{-1} = ka_{+1} = ka = 1$:

α — при $kl=5$, $\alpha=90^\circ$ (1-4 — для $F_2^1 - F_2^4$ соответственно, 5- F_3); б — $kl=5$, $\alpha=0$ (1-5 — для $F_2^1 - F_2^5$ соответственно, 6- F_3); в и г — $kl=10$, $\alpha=90^\circ$ и 0 соответственно (обозначения, как на рис. а); д и е — $kl=50$, $\alpha=90^\circ$ и 0 соответственно (1-3 — для $F_2^1 - F_2^3$ соответственно, 4- F_3)



и

$$v_n + \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \beta_{nm} v_m = P_n,$$

$$\omega_n - \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \beta_{nm} \omega_m = R_n$$

$$(n = 0, 1, \dots),$$

где

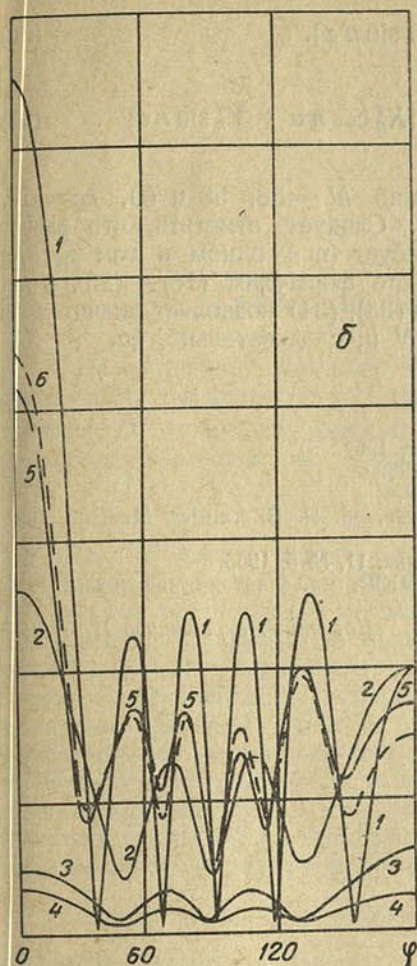
$$v_n = Y_n^{+1} + (-1)^n Y_n^{-1}, \quad P_n = \varphi_n^{+1} + (-1)^n \varphi_n^{-1},$$

$$\omega_n = Y_n^{+1} - (-1)^n Y_n^{-1}, \quad R_n = \varphi_n^{+1} - (-1)^n \varphi_n^{-1},$$

$$\beta_{nm} = \frac{J_m(ka_{-s})}{H_n^{(1)}(ka_s)} [H_{m-n}^{(1)}(kl) \cos(m-n)\varphi_{-s,s} -$$

$$- (-1)^n \delta_n H_{m+n}^{(1)}(kl) \cos(m+n)\varphi_{-s,s}],$$

(34)



$$F_n^s = - \frac{\varepsilon_n i^n e^{iskl_0 \cos \alpha} \cos n \alpha}{H_n^{(1)}(ka_s)},$$

$$\Phi_n^s = - \frac{\varepsilon_n i^n e^{iskl_0 \cos \alpha} \sin n \alpha}{H_n^{(1)}(ka_s)}.$$

$$\varepsilon_0 = 1, \delta_0 = 0, \varepsilon_n = 2, \delta_n = 1,$$

когда $n \geq 1$.

Отсюда

$$\begin{aligned} X_n^{+1} &= \frac{1}{2} (z_n + u_n), \quad X_n^{-1} = \\ &= \frac{(-1)^n}{2} (z_n - u_n), \end{aligned} \quad (35)$$

$$\begin{aligned} Y_n^{+1} &= \frac{1}{2} (v_n + w_n), \quad Y_n^{-1} = \\ &= \frac{(-1)^n}{2} (v_n - w_n). \end{aligned}$$

После подстановки (35) в (32) находим x_n^s , x_{-n}^s и y_n^s , y_{-n}^s .

Рис. 3. Графики функций $F_1(\varphi)$, $F_2^n(\varphi)$ и $F_3(\varphi)$ при $ka_{-1} = ka_{+1} = ka = 3$:

a и b — при $kl = 15$, $\alpha = 90$ и 0 соответственно;
1 — 4 — для $F_2^1 - F_2^4$; 5 — F_3 ; 6 — F_1

При вычислении функции $k\sigma/4$ (рис. 4) были использованы формулы (31) — (35). На основании (31) в формуле (7)

$$A(\varphi) = \sqrt{\frac{2}{\pi k}} e^{-i\pi/4} \sum_{s=\pm 1} e^{-iskl_0 \cos \varphi} \sum_{n=0}^{\infty} (-i)^n J_n(ka_s) \times$$

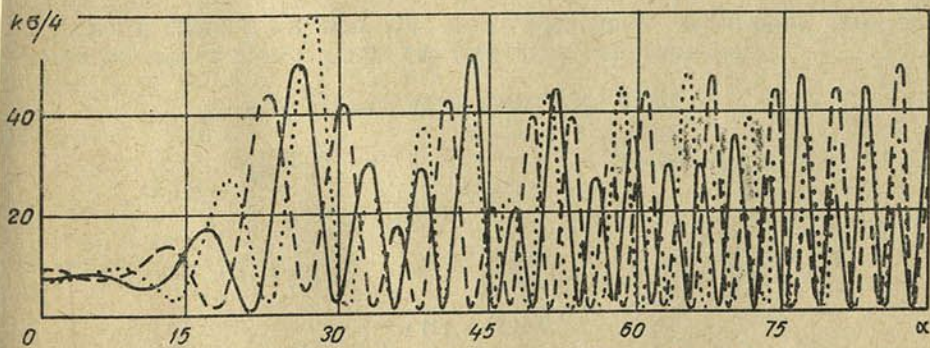


Рис. 4. Графики функции $k\sigma/4$ ($\alpha = \varphi - \pi$) для значений $ka = 10$ и $kl = 56$ (точечная линия), 58 (пунктирная) и 60 (сплошная)

$$\times [X_n^s \cos n\varphi + Y_n^s \sin n\varphi]. \quad (36)$$

Поэтому

$$\sigma = \frac{4}{k} \left| \sum_{s=\pm 1} e^{iskl_0 \cos \alpha} \sum_{n=0}^{\infty} i^n J_n(ka_s) [X_n^s \cos n\alpha + Y_n^s \sin n\alpha] \right|^2. \quad (37)$$

Расчет $k\sigma/4$ производился для значений $kl = 56, 58$ и 60 , $ka = 10$, $N = 20$, $ka_s = ka$, $s = \pm 1$, $\alpha = 0^\circ (1^\circ) 90^\circ$. Следует отметить, что расчет поля по формулам (31)–(37) на ЭВМ требует (при одном и том же N) большей затраты машинного времени, чем по формулам (16)–(25), в несколько раз. Однако использование систем (33), (34) позволяет значительно расширить диапазон изменения параметра N и, следовательно, ka .

Литература

1. Twersky V. J. Appl. Phys., 23, № 4, 407, 1952.
2. Twersky V. J. Acoust. Soc. Am., 24, 42, 1952.
3. Row R. V. J. Appl. Phys., 26, № 6, 666, 1955.
4. Twersky V. Сб. «Electromagnetic Waves», ed. R. E. Langer. Madison, 1962, 361–389.
5. Иванов Е. А. Радиотехника и электроника, 11, № 5, 1966.
6. Иванов Е. А., Родов А. М. Весті АН БССР, сер. фіз.-тэхн. навук, № 2, 1960.

Институт математики
АН БССР

Поступило в редакцию 17.VII 1967

Л. П. ПРИМАЧУК

О КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ С СОПРЯЖЕНИЕМ

1. На единичной окружности L рассматривается следующая краевая задача: найти две функции $\varphi^+(z)$ и $\varphi^-(z)$, аналитические соответственно в областях D^+ и D^- , на которые L разбивает плоскость, представимые интегралами типа Коши, по краевому условию на L :

$$\varphi^+(t) = a(t)\varphi^-(t) + b(t)\overline{\varphi^-(t)} + c(t); \quad \varphi^-(\infty) = 0, \quad (1)$$

где $a(t)$, $b(t)$ удовлетворяют на L условию Гельдера, $|a(t)| > 0$.

Краевая задача (1) впервые была сформулирована А. И. Маркушевичем [1]. Важные результаты о ее разрешимости для случаев $|a(t)| > |b(t)|$ (эллиптический), $|a(t)| \equiv |b(t)|$ (параболический) были получены Б. В. Боярским [2] и Л. Г. Михайловым [3]. И. Х. Сабитов [4], используя аппроксимацию коэффициента $b(t)$ отрезком ряда Фурье, исследовал характер разрешимости задачи (1) в общем случае, когда условия эллиптичности или параболичности не выполняются.

В настоящей заметке, используя один результат работы [4], а также связь между задачей (1) и задачей Римана для двух пар функций, уточняем результаты И. Х. Сабитова. Этот же метод позволит нам исследовать качественную картину разрешимости более общей задачи

$$a(t)\varphi^+(t) + b(t)\overline{\varphi^+(t)} = c(t)\varphi^-(t) + d(t)\overline{\varphi^-(t)} + f(t), \quad (2)$$

определять границы изменения частных индексов задачи Римана для одного класса эрмитовых матриц и даст один достаточный критерий устойчивости системы частных индексов.

2. Вводя две аналитические функции по правилу

$$\varphi_2^+(z) = \varphi^-\left(\frac{1}{z}\right), \quad \varphi_2^-(z) = \varphi^+\left(\frac{1}{z}\right)$$

и переходя в краевом условии (1) к сопряженным значениям, получим следующую задачу Римана для системы двух пар функций:

$$\Phi^+(t) = G_1(t)G_2(t)\Phi^-(t) + C(t), \quad (3)$$

где

$$G_1(t) = \begin{vmatrix} \overline{a^{-1}(t)} & 0 \\ 0 & a^{-1}(t) \end{vmatrix}, \quad G_2(t) = \begin{vmatrix} |a|^2 - |b|^2 & b \\ -\bar{b} & 1 \end{vmatrix},$$

$$\Phi^\pm(t) = \{\varphi_1^\pm(t), \varphi_2^\pm(t)\}, \quad C(t) = \{[\overline{a(t)}c(t) - b(t)\overline{c(t)}]\overline{a^{-1}(t)}, \\ -\overline{c(t)}\overline{a^{-1}(t)}\}.$$

Каждому решению $\varphi(z) = \{\varphi^+(z), \varphi^-(z)\}$, $\varphi^-(\infty) = 0$ задачи (1) соответствует решение

$$\Phi_1(z) = \{\varphi^+(z), \varphi^-(z)\}, \quad \Phi_2(z) = \left\{ \overline{\varphi^-\left(\frac{1}{z}\right)}, \overline{\varphi^+\left(\frac{1}{z}\right)} \right\}$$

задачи (3). Обратное, если $\{\Phi_1(z), \Phi_2(z)\}$ — любое ограниченное на бесконечности решение задачи (3), то функции

$$\varphi^+(z) = \Phi_1^+(z) + \Phi_2^-\left(\frac{1}{z}\right), \quad \varphi^-(z) = \Phi_1^-(z) + \Phi_2^+\left(\frac{1}{z}\right)$$

при условии

$$\Phi_1^-(\infty) + \overline{\Phi_2^+(0)} = 0 \quad (4)$$

дают исчезающие на бесконечности решения задачи (1).

Обозначим $\kappa = \text{Ind } a(t)$. Тогда суммарный индекс задачи (3) равен 2κ . Пусть (κ_1, κ_2) — частные индексы задачи (3). Очевидно, что $\kappa_1 = \kappa + k$, $\kappa_2 = \kappa - k$, где $\pm k$ — частные индексы задачи Римана с матрицей $G_2(t)$.

Пусть l — число линейно независимых решений (линейная комбинация понимается с вещественными постоянными), p — число условий разрешимости задачи (1).

Обозначим: $\sum_{-\infty}^{+\infty} b_k t^k$ — ряд Фурье функции $b(t)$, а N — наименьший номер, для которого выполняется условие

$$\left| b(t) - \sum_{-N}^N b_k t^k \right| < |a(t)|, \quad (5)$$

и пусть в этом неравенстве $-n$ — наименьшее из чисел $-1, -2, \dots, -N$, для которого b_{-n} отлично от нуля. Тогда для задачи (1) справедлив следующий результат И. Х. Сабитова [4]: $l = 2\kappa$, если $\kappa \geq n - 1$.

Воспользуемся этим результатом для доказательства следующей леммы.

Лемма. Частные индексы задачи Римана с матрицей $G_2(t)$ лежат в промежутке $[-n + 1, n - 1]$.

Доказательство. Рассмотрим задачу

$$\varphi^+(t) = t^{n-1-\kappa} a(t) \varphi^-(t) + b(t) \overline{\varphi^-(t)}, \quad (6)$$

где $\kappa = \text{Ind } a(t)$, а n удовлетворяет условию (5). Из приведенного результата И. Х. Сабитова следует, что для задачи (6) $l = 2(n - 1)$. Но, с другой стороны, задача (6) сводится к задаче Римана с матрицей $G(t) = G_1'(t) G_2'(t)$:

$$G_1'(t) = \begin{vmatrix} \frac{1}{t^{x+1-n}} a(t) & 0 \\ 0 & \frac{1}{t^{x+1-n}} a(t) \end{vmatrix}, \quad G_2'(t) = G_2(t).$$

Частные индексы будут равны $n - 1 + k$, $n - 1 - k$. Так как для задачи (6) $l = 2(n - 1)$, то, учитывая условие (4), заключаем, что $n - 1 + k \geq 0$, $n - 1 - k \geq 0$, т. е. $k \leq n - 1$.

Из леммы и условия (4) немедленно получаем следующие границы для числа решений и условий разрешимости задачи (1).

Теорема 1. Если $|a(t)| > 0$, то*

$$l = \max(0, 2\kappa), \quad p = \max(0, -2\kappa), \quad |\kappa| \geq n - 1,$$

*) В работе [4] $2\kappa < l < \kappa + n$ при $0 < \kappa < n - 1$ и $\kappa - n$ четном; $2\kappa \leq l < \kappa + n - 1$ при $0 \leq \kappa < n - 1$ и $\kappa - n$ нечетном. Аналогично при $-n + 1 < \kappa < 0$. Таким образом, четность или нечетность $\kappa - n$ не играет роли.

$$2\kappa \leq l \leq \kappa + n - 1, \quad p = -2\kappa + l, \quad 0 \leq \kappa < n - 1,$$

$$0 \leq l \leq \kappa + n - 1, \quad p = 2\kappa + l, \quad -n + 1 < \kappa \leq 0.$$

Замечание 1. Отметим, что если $n = 1$ или все $b_k = 0$ ($k = -N, \dots, -1$), то частные индексы задачи Римана с матрицей $G_2(t)$ равны 0, т. е. образуют устойчивую комбинацию [6].

3. Теорему 1 без труда можно распространить на задачу (2). Переходя в краевом условии (2) к сопряженным значениям и исключая $\varphi^+(t)$, получим задачу

$$(|a|^2 - |b|^2)\varphi^+(t) = (\bar{c}\bar{a} - \bar{d}b)\varphi^-(t) + (\bar{a}d - \bar{b}c)\overline{\varphi^-(t)} + f_1(t). \quad (7)$$

Задача (2) будет нормально разрешимой, если

$$\bar{c}\bar{a} - \bar{d}b \neq 0 \quad (8)$$

на L . В дальнейшем предполагаем это условие выполненным.

Обозначим $\kappa = \text{Ind}(\bar{c}\bar{a} - \bar{d}b)$. Назовем κ индексом задачи (2).

Пусть выполнено условие $|a|^2 - |b|^2 \neq 0$. (9)

Тогда условия

$$\left| \frac{\bar{c}\bar{a} - \bar{d}b}{|a|^2 - |b|^2} \right| > \left| \frac{\bar{a}d - \bar{b}c}{|a|^2 - |b|^2} \right|, \quad \left| \frac{\bar{c}\bar{a} - \bar{d}b}{|a|^2 - |b|^2} \right| \equiv \left| \frac{\bar{a}d - \bar{b}c}{|a|^2 - |b|^2} \right| \quad (10)$$

являются соответственно условиями эллиптичности и параболичности для задачи (7). Если они не выполнены, то пусть

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} c_k t^k \quad (11)$$

— ряд Фурье для функции $\frac{\bar{a}d - \bar{b}c}{|a|^2 - |b|^2}$, а N — наименьший номер, для которого выполнено условие

$$\left| \frac{\bar{a}d - \bar{b}c}{|a|^2 - |b|^2} - \sum_{-N}^N c_k t^k \right| < \left| \frac{\bar{c}\bar{a} - \bar{d}b}{|a|^2 - |b|^2} \right|, \quad (12)$$

и $-n$ — наименьший из $-1, \dots, -N$, для которого b_{-n} отлично от нуля.

Тогда для задачи (2) справедлива

Теорема 2. Если выполнено условие (9), то

$$l = \max(0, 2\kappa), \quad p = \max(0, -2\kappa), \quad |\kappa| \geq n - 1,$$

$$2\kappa \leq l \leq \kappa + n - 1, \quad p = -2\kappa + l, \quad 0 \leq \kappa < n - 1,$$

$$0 \leq l \leq \kappa + n - 1, \quad p = 2\kappa + l, \quad -n + 1 < \kappa \leq 0,$$

где n определяется условием (12).

Замечание 2. Аналогичная теорема имеет место, если

$$|d|^2 - |c|^2 \neq 0.$$

Замечание 3. Для задачи (2) условие [3]

$$(|a|^2 - |b|^2)(|c|^2 - |d|^2) < 0 \quad (13)$$

является условием гиперболичности. Таким образом, теорема 2 дает границы для решений задачи (2) в этом случае. Она дает границы и для более общего случая, когда один из множителей в (13) имеет нули. В общем случае, когда на L имеют нули оба множителя, характер разрешимости (2) остается невыясненным.

4. Полученные результаты позволяют установить границы частных индексов задачи Римана для некоторых эрмитовых матриц. Пусть на единичной окружности рассматривается задача

$$\varphi^+(t) = A(t)\varphi^-(t), \quad (14)$$

где $A(t)$ — эрмитова матрица порядка $2n$ имеет квазидиагональный вид

$$A(t) = \begin{vmatrix} J_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J_n \end{vmatrix}, \quad J_j = \begin{vmatrix} a_j(t) & b_j(t) \\ \overline{b_j(t)} & 1 \end{vmatrix} \quad j = 1; 2; \dots n.$$

Пусть $|b_j|^2 - a_j > 0$ для всех j . Обозначим: $-n_j$ — наименьший из $-1, \dots, -N$, для которого

$$\left| b_j - \sum_{-n_j}^N b_k^j t^k \right| < \sqrt{|b_j|^2 - a_j}.$$

Пусть $\bar{n} = \max n_j$. Справедлива

Теорема 3. Частные индексы задачи Римана (14) расположены в промежутке $[-\bar{n} + 1, \bar{n} - 1]$.

Следствие. Если $\bar{n} = 1$ или все $b_k^j = 0$ ($k = -1, \dots, -N$), то частные индексы равны нулю, т. е. образуют устойчивую комбинацию.

Отметим, что теорема 3 справедлива и для матриц вида $A(t) =$

$$= \begin{vmatrix} J_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ * & & J_n \end{vmatrix}. \quad \text{Именно к задаче определения частных индексов таких}$$

матриц мы приходим, если в задаче (1) $a(t)$, $b(t)$ предполагать нижнетреугольными матрицами n -го порядка.

Литература

1. Маркушевич А. И. Уч. зап. Московского ун-та, 1, 100, 1946.
2. Боярский Б. В. Сообщения АН ГрузССР, 25, № 4, 1960.
3. Михайлов Л. Г. Новый класс особых интегральных уравнений и его применение к дифференциальным уравнениям с сингулярными коэффициентами. Изд. АН ТаджССР, Душанбе, 1963.
4. Сабитов И. Х. Сибирск. матем. журнал, 5, № 1, 1964.
5. Гахов Ф. Д. Краевые задачи. М., 1963.
6. Гохберг И. Ц., Крейн М. Г. ДАН СССР, 119, № 5, 1958.

Белорусский государственный университет
им. В. И. Ленина

Поступило в редакцию 17.V 1967

В. И. КОМЛИК

ОБ ОДНОЙ МНОГОПРОДУКТОВОЙ ЗАДАЧЕ
 РАЗМЕЩЕНИЯ

В [1] предложен метод решения однопродуктовой задачи размещения. Целью настоящей работы является обобщение указанного метода и применение его к решению многопродуктовой задачи размещения, которая может быть сформулирована следующим образом.

Пусть задано m пунктов производства r видов продуктов. Каждый i -й пункт производства характеризуется множеством вариантов специализации

$$\gamma_i = \{A_{i1}, A_{i2}, \dots, A_{is_i}\}, \quad i = 1, 2, \dots, m,$$

а k -й вариант специализации i -го пункта A_{ik} задается r -мерным вектором $A_{ik} = (a_{ik}^1, a_{ik}^2, \dots, a_{ik}^r)^*$, компоненты a_{ik}^l ($l = 1, 2, \dots, r$) которого являются объемами производства l -го продукта в i -м пункте. Для каждого варианта специализации A_{ik} заданы производственные затраты $\varphi_i(A_{ik})$, связанные с реализацией этого варианта в i -м пункте.

Пусть, кроме того, известны n пунктов потребления. Потребность j -го пункта задается вектором $B_j = (b_j^1, b_j^2, \dots, b_j^r)^*$ ($j = 1, 2, \dots, n$), где b_j^l — потребность j -го пункта в l -м продукте. Известны затраты c_{ij}^l на перевозку единицы l -го продукта из i -го пункта производства в j -й пункт потребления.

Задача состоит в определении для каждого i -го пункта ($i = 1, 2, \dots, m$) такого варианта специализации $X_i = (x_i^1, x_i^2, \dots, x_i^r)$ из заданного набора γ_i и такого плана перевозок x_{ij}^l ($i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n; l = 1, 2, \dots, r$), чтобы суммарные производственно-транспортные затраты

$$\sum_{i=1}^m \varphi_i(X_i) + \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \sum_{l=1}^r c_{ij}^l x_{ij}^l \quad (1)$$

были минимальными и удовлетворялся спрос b_j^l ($j = 1, 2, \dots, n; l = 1, 2, \dots, r$) каждого потребителя. Таким образом, требуется минимизировать функционал (1) при ограничениях

$$\sum_{j=1}^n x_{ij}^l = x_i^l, \quad i = 1, 2, \dots, m; \quad l = 1, 2, \dots, r; \quad (2)$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ij}^l = b_j^l, \quad j = 1, 2, \dots, n; \quad l = 1, 2, \dots, r; \quad (3)$$

$$X_i = (x_i^1, x_i^2, \dots, x_i^r) \in \gamma_i, \quad i = 1, 2, \dots, m; \quad (4)$$

* Аналогично [1] компоненты вектора предполагаются целыми числами.

$$x_{ij}^l \geq 0, \quad i=1, 2, \dots, m; \quad j=1, 2, \dots, n; \quad l=1, 2, \dots, r. \quad (5)$$

Прежде чем перейти к изложению метода решения задачи (1) — (5), рассмотрим задачу минимизации функционала

$$P(X_1, X_2, \dots, X_m) = \sum_{i=1}^m g_i(X_i) \quad (6)$$

при условиях

$$\sum_{i=1}^m X_i = B, \quad (7)$$

$$X_i \in \gamma_i, \quad i=1, 2, \dots, m. \quad (8)$$

Здесь $B = \sum_{j=1}^n B_j$, а $g_i(X_i) = \varphi_i(X_i) + t_i(X_i)$, $X_i \in \gamma_i$, где

$$t_i(X_i) = \min \sum_{j=1}^n \sum_{l=1}^r c_{ij}^l x_{ij}^l \quad (9)$$

при условиях

$$\sum_{j=1}^n x_{ij}^l = x_i^l, \quad l=1, 2, \dots, r; \quad (10)$$

$$x_{ij}^l \leq b_j^l, \quad j=1, 2, \dots, n; \quad l=1, 2, \dots, r; \quad (11)$$

$$x_{ij}^l \geq 0, \quad j=1, 2, \dots, n; \quad l=1, 2, \dots, r. \quad (12)$$

Очевидно, что между планами задач (6) — (8) и (1) — (5) существует взаимно однозначное соответствие. Если известен план $\{X_1, X_2, \dots, X_m\}$ задачи (6) — (8), то, решив соответствующую транспортную задачу, получим план задачи (1) — (5). Это очевидное замечание в дальнейшем существенно используется при конструировании алгоритма решения задачи (1) — (5).

Будем предполагать, что задача (6) — (8) имеет решение, т. е. существуют такие векторы $X_i \in \gamma_i$, $i=1, 2, \dots, m$, что $\sum_{i=1}^m X_i = B$. Обозначим

через $F(X_1, X_2, \dots, X_m)$ сумму $\sum_{i=1}^m \varphi_i(X_i) + T(X_1, X_2, \dots, X_m)$, где

$$T(X_1, X_2, \dots, X_m) = \min \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \sum_{l=1}^r c_{ij}^l x_i^l \quad (13)$$

при условиях (2), (3), (5).

Решение задачи (6) — (8) можно получить, используя правило отбора вариантов в дискретных схемах динамического программирования, которое для данной задачи может быть сформулировано в следующем виде.

Если X_i , $i=1, 2, \dots, k$, и \bar{X}_i , $i=1, 2, \dots, k$ ($X_i, \bar{X}_i \in \gamma_i$, $i=1, 2, \dots, k$) — две последовательности, такие, что $\sum_{i=1}^k X_i = \sum_{i=1}^k \bar{X}_i = B'$, ($B' \leq B$)*)

*) Соотношения между векторами $A' = (a'_1, a'_2, \dots, a'_n)$ и $A'' = (a''_1, a''_2, \dots, a''_n)$ определим следующим образом:

$$A' \geq A'', \quad \text{если } a'_i \geq a''_i \text{ при } i=1, 2, \dots, n,$$

$$A' \gg A'', \quad \text{если } A' \geq A'' \text{ и } A' \neq A'',$$

$$A' > A'', \quad \text{если } a'_i > a''_i \text{ при } i=1, 2, \dots, n.$$

и $\sum_{i=1}^k g_i(X_i) \leq \sum_{i=1}^k g_i(\bar{X}_i)$, то последовательность $\bar{X}_i \in \gamma_i$, $i = 1, 2, \dots, k$ можно отбросить как бесперспективную и продолжать конструирование оптимального плана задачи, используя векторы X_i , $i = 1, 2, \dots, k$. Основное функциональное уравнение для отбора вариантов в задаче (6) — (8) можно записать в виде

$$f_{k+1}(X) = \min_{X_{k+1} \in \gamma_{k+1}} [g_{k+1}(X_{k+1}) + f_k(X - X_{k+1})], \quad k = 1, 2, \dots, m-1, \quad (14)$$

причем $f_1(X) = g_1(X)$.

При решении дискретных задач с помощью уравнения (14) существенное значение приобретает выбор точек решетки [2]. Ниже приводятся условия, которым должны удовлетворять точки решетки, и описывается алгоритм их построения.

Определение. О векторе D будем говорить, что он нормален относительно вектора B и множества наборов $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_m$, если существуют такие векторы $A_{i\lambda_i} \in \gamma_i$, $i = 1, 2, \dots, m$, и число k , что $\sum_{i=1}^k A_{i\lambda_i} = D$, $D +$

$+\sum_{i=k+1}^m A_{i\lambda_i} = B$. В зависимости от величины числа k будем различать нормальные векторы первого, второго, ..., $(m-1)$ -го рода. Нулевой вектор и вектор B будем считать нормальными векторами соответственно нулевого и m -го рода.

Множество всех нормальных векторов обозначим через N . Существует связь между нормальными векторами и точками решетки, которая может быть сформулирована в виде следующей теоремы.

Теорема 1. Если в качестве точек решетки взять все нормальные векторы, то использование уравнения (14) позволяет найти решение задачи (6) — (8).

Доказательство. Пусть $\gamma = \{A_{1t_1}, A_{2t_2}, \dots, A_{mt_m}\}$ — оптимальный план задачи (6) — (8). Для того чтобы прийти к такому плану при помощи функционального уравнения (14), необходимо, очевидно, чтобы векторы

$A_p = \sum_{i=1}^p A_{it_i}$, $p = 1, 2, \dots, m$, являлись точками решетки. Следовательно,

для доказательства теоремы достаточно показать, что векторы A_p , $p = 1, 2, \dots, m$, являются нормальными векторами.

Так как $\gamma = \{A_{1t_1}, A_{2t_2}, \dots, A_{mt_m}\}$ — план задачи (6) — (8), то имеет место равенство $\sum_{i=1}^m A_{it_i} = B$, т. е. $A_p + \sum_{i=p+1}^m A_{it_i} = B$, $p = 1, 2, \dots, m-1$.

Из последнего соотношения следует, что векторы A_p , $p = 1, 2, \dots, m-1$, нормальные. Вектор $A_m = B$ нормален по определению. Теорема доказана.

Приступим к изложению способа построения нормальных векторов.

Пусть $\beta = \{C_1, C_2, \dots, C_p\}$ — произвольная последовательность r -мерных векторов, а $R_*, R_1, R_2, \dots, R_s$ — произвольные r -мерные векторы. Рассмотрим следующее преобразование последовательности β .

При $0 \leq C_p \leq R_*$ последовательность β заменяем s последовательностями:

$$\{C_1, C_2, \dots, C_p, C_p - R_1\}, \{C_1, C_2, \dots, C_p, C_p - R_2\}, \dots, \\ \{C_1, C_2, \dots, C_p, C_p - R_s\}.$$

При $C_p = 0$ последовательность β [оставляем без изменения. Во всех остальных случаях последовательность β вычеркиваем. Такое преобразова-

ние будем называть R -преобразованием последовательности β с помощью векторов $R_*, R_1, R_2, \dots, R_s$.

Опишем алгоритм α , состоящий из $m+1$ шага.

k -й шаг алгоритма ($k=1, 2, \dots, m$) состоит в R -преобразовании каждой последовательности, построенной к началу k -го шага с помощью векторов

$$A_{m-k+1,*}, A_{m-k+1,1}, \dots, A_{m-k+1,s}, \dots, A_{m-k+1,m-k+1}, \text{ где } A_{m-k+1,*} = \sum_{i=1}^{m-k} A_{i*}, \quad A_{i*} = (a_{i*}^1, a_{i*}^2, \dots, a_{i*}^r), \quad a_{i*}^s = \max_i a_{ii}^s, \quad s=1, 2, \dots, r.$$

К началу первого шага имеется одна последовательность, состоящая из вектора B .

$(m+1)$ -й шаг состоит в том, что из последовательностей, построенных после m шагов, выбираются такие последовательности

$$\beta_1 = \{C_1^1, C_1^2, \dots, C_1^{t_1}\}, \quad \beta_2 = \{C_2^1, C_2^2, \dots, C_2^{t_2}\}, \dots, \beta_p = \{C_p^1, C_p^2, \dots, C_p^{t_p}\},$$

у которых $C_1^{t_1} = C_2^{t_2} = \dots = C_p^{t_p} = 0$ и $\{1, 2, \dots, m-t_s+1\} \in \varepsilon, s=1, 2, \dots, p$.

Здесь ε — множество индексов наборов, содержащих нулевой вектор, т. е. $0 \in \gamma_i$ при $i \in \varepsilon$. Очевидно, что если множество ε пусто, то выбранные последовательности будут содержать по $m+1$ членов. Обозначим через N' множество векторов всех оставшихся последовательностей.

Лемма 1. Множество N' состоит из нормальных векторов.

Доказательство. Возьмем произвольный вектор $C_s^l \in N'$, принадлежащий последовательности β_s и стоящий на l -м месте. Следовательно, найдутся такие $A_{i\lambda_i} \in \gamma_i, i=m-t_s+2, \dots, m-l+1$, что

$$C_s^l - \sum_{i=m-t_s+2}^{m-l+1} A_{i\lambda_i} = C_s^{t_s} = 0 \text{ и } \{1, 2, \dots, m-t_s+1\} \in \varepsilon,$$

т. е. $0 \in \gamma_i, i=1, 2, \dots, m-t_s+1$.

Значит,

$$C_s^l = \sum_{i=1}^{m-l+1} A_{i\lambda_i}.$$

Но по построению

$$C_s^l = B - \sum_{i=m-l+2}^m A_{i\lambda_i}.$$

Следовательно, вектор C_s^l нормальный, что и доказывает лемму.

Теорема 2. Множество векторов N' совпадает с множеством N нормальных векторов.

Доказательство. Возьмем произвольный вектор $A \in N$. По определению нормального вектора существуют такие $A_{i\lambda_i} \in \gamma_i, i=1, 2, \dots, m$ и число k , что

$$A = \sum_{i=1}^k A_{i\lambda_i}, \quad A + \sum_{i=k+1}^m A_{i\lambda_i} = B.$$

Построим последовательность

$$\left\{ B, B - A_{m\lambda_m}, \dots, B - \sum_{i=k+1}^m A_{i\lambda_i}, \dots, B - \sum_{i=1}^m A_{i\lambda_i} \right\}.$$

Эта последовательность содержит вектор A . Вместе с тем эта последовательность содержится в множестве последовательностей $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_p$, так

как $B - \sum_{i=1}^m A_{i\lambda_i} = 0$. Следовательно, $A \in N'$ и в силу леммы 1 теорема доказана.

Определение. План $\gamma = \{A_{1\mu_1}, A_{2\mu_2}, \dots, A_{m\mu_m}\}$ задачи (6) — (8) будем называть h -оптимальным, если

$$P(\gamma) = P(A_{1\mu_1}, A_{2\mu_2}, \dots, A_{m\mu_m}) = \sum_{i=h+1}^m g_i(A_{i\mu_i}) + f_h \left(B - \sum_{i=h+1}^m A_{i\mu_i} \right),$$

и будем обозначать его

$$\gamma_{\mu_{h+1}, \dots, \mu_m} = (*, *, \dots, *, A_{h+1\mu_{h+1}}, \dots, A_{m\mu_m}).$$

Непосредственно из этого определения вытекает справедливость следующих лемм.

Лемма 2. $P(\gamma_{\mu_{h+1}, \dots, \mu_m}) = \min_{\gamma \in M(\gamma_{\mu_{h+1}, \dots, \mu_m})} P(\gamma)$, где $M(\gamma_{\mu_{h+1}, \dots, \mu_m})$ —

множество всех планов, у которых $X_i = A_{i\mu_i}$, $i = h+1, h+2, \dots, m$.

Лемма 3. Множество планов $M(\gamma_{\mu_1, \dots, \mu_m})$ не пусто тогда и только тогда, если найдутся такие $A_{i\lambda_i} \in \gamma_i$, $i = 1, 2, \dots, l-1$, что $\sum_{i=1}^{l-1} A_{i\lambda_i} =$

$$= B - \sum_{i=l}^m A_{i\mu_i}.$$

Введем обозначение

$$\bar{M}(\gamma_{\mu_{h+1}, \dots, \mu_m}) = M(\gamma_{\mu_{h+1}, \dots, \mu_m}) \setminus M(\gamma_{\mu_h, \dots, \mu_m}). \quad (15)$$

Здесь μ_h такое, что $A_{h\mu_h}$ — компонента h -оптимального плана, стоящая на h -м месте.

Отсюда

$$\begin{aligned} M(\gamma_{\mu_{h+1}, \dots, \mu_m}) &= \bar{M}(\gamma_{\mu_{h+1}, \dots, \mu_m}) \cup M(\gamma_{\mu_h, \dots, \mu_m}) = \\ &= \bar{M}(\gamma_{\mu_{h+1}, \dots, \mu_m}) \cup \bar{M}(\gamma_{\mu_{h+1}, \dots, \mu_m}) \cup M(\gamma_{\mu_{h-1}, \dots, \mu_m}) = \\ &= \dots = \bar{M}(\gamma_{\mu_{h+1}, \dots, \mu_m}) \cup \bar{M}(\gamma_{\mu_h, \dots, \mu_m}) \cup \dots \\ &\dots \cup \bar{M}(\gamma_{\mu_2, \dots, \mu_m}) \cup \bar{M}(\gamma_{\mu_2, \dots, \mu_m}) \cup M(\gamma_{\mu_1, \dots, \mu_m}). \end{aligned}$$

Из леммы 3 и (16) следует, что $\bar{M}(\gamma_{\mu_2, \dots, \mu_m}) = \emptyset$, и так как $M(\gamma_{\mu_1, \dots, \mu_m}) = \gamma_{\mu_1, \dots, \mu_m}$, то справедлива

$$\text{Лемма 4. } M(\gamma_{\mu_{h+1}, \dots, \mu_m}) \setminus \gamma_{\mu_1, \dots, \mu_m} = \bigcup_{l=2}^{h+1} M(\gamma_{\mu_l, \dots, \mu_m}).$$

Приступим к описанию алгоритма ψ поиска оптимального плана задачи (1) — (5).

На предварительном этапе работы алгоритма строятся функции $g_i(X_i)$ и все нормальные векторы (с помощью алгоритма α).

Первый шаг. Среди векторов $A_{m1}, A_{m2}, \dots, A_{ms_m}$ находим такие $A_{m\mu_1}, A_{m\mu_2}, \dots, A_{m\mu_u}$, что $(B - A_{m\mu_k}) \in N$, $k = 1, 2, \dots, u$. Затем среди множества $\omega_1(m-1)$ -оптимальных планов $\gamma_{\mu_k} = (*, *, \dots, *, A_{m\mu_k})$, $k = 1, 2, \dots, u$,

задачи (6) — (8) при $B = \sum_{j=1}^n B_j$ находим такой план $\bar{\gamma}_1 = (*, *, \dots, *,$

$A_{m\mu_1}$), что $P(\bar{\gamma}_1) = \min_{\gamma \in \omega_1} P(\gamma)$, и вычисляем величину $L_1 = F(\bar{\gamma}_1)$.

k -й шаг ($k = 2, 3, \dots$). Множество ω_{k-1} преобразуем во множество ω_k по следующему правилу. Оставляем без изменения все планы, кроме плана $\bar{\gamma}_{k-1} = (*, *, \dots, *, A_{p\mu_p^{k-1}}, \dots, A_{m\mu_m^{k-1}})$, который заменяем системой планов $(*, *, \dots, *, A_{l-1\nu_{l-1}}, A_{l\mu_l^{k-1}}, \dots, A_{m\mu_m^{k-1}})$, где $B = \sum_{i=l}^m A_{i\mu_i^{k-1}} - A_{l-1\nu_{l-1}}$ — нормальный вектор $(l-2)$ -го рода, $l = 2, 3, \dots, p$, $\nu_{l-1} = 1, 2, \dots, s_{l-1} (\nu_{l-1} \neq \mu_{l-1})$. Находим план $\gamma_k = (*, *, \dots, * A_{l\mu_l^k}, \dots, A_{m\mu_m^k})$ такой, что $P(\gamma_k) = \min_{\gamma \in \omega_k} P(\gamma)$, и сравниваем $P(\bar{\gamma}_k)$ и L_{k-1} . Если $P(\bar{\gamma}_k) \geq L_{k-1}$, то работа алгоритма заканчивается и выписывается план задачи (1) — (5), соответствующий величине L_{k-1} . Если $P(\bar{\gamma}_k) < L_{k-1}$, то вычисляем величину $F(\bar{\gamma}_k)$ и сравниваем L_{k-1} и $F(\bar{\gamma}_k)$. Если $L_{k-1} \leq F(\bar{\gamma}_k)$, полагаем $L_k = L_{k-1}$ и переходим к $(k+1)$ -му шагу. Если $L_{k-1} > F(\bar{\gamma}_k)$, то полагаем $L_k = F(\bar{\gamma}_k)$ и переходим к $(k+1)$ -му шагу.

Для обоснования метода решения необходимо показать, что если работа алгоритма закончилась на k -м шаге, то L_{k-1} — оптимальное значение функционала (1). Доказательство будем проводить в несколько этапов.

Лемма 5. Для любого плана $\gamma = \{X_1, X_2, \dots, X_m\}$ задачи (6) — (8) справедливо неравенство $F(\gamma) \geq P(\gamma)$.

Доказательство. Пусть $(x_{11}^1, x_{12}^1, \dots, x_{mn}^1, \dots, x_{m1}^r, x_{m2}^r, \dots, x_{mn}^r)$ — оптимальное решение задачи (13), (2), (3), (5), соответствующее плану γ , а $(\bar{x}_{i1}^1, \bar{x}_{i2}^1, \dots, \bar{x}_{in}^1, \dots, \bar{x}_{i1}^r, \bar{x}_{i2}^r, \dots, \bar{x}_{in}^r)$ — решения задачи (9) — (12) при $i = 1, 2, \dots, m$.

Очевидно, что $\sum_{j=1}^n \sum_{l=1}^r c_{ij}^l x_{ij}^l \geq \sum_{j=1}^n \sum_{l=1}^r c_{ij}^l \bar{x}_{ij}^l$, $i = 1, 2, \dots, m$. Следовательно,

$$F(\gamma) - P(\gamma) = \sum_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^n \sum_{l=1}^r c_{ij}^l x_{ij}^l - \sum_{j=1}^n \sum_{l=1}^r c_{ij}^l \bar{x}_{ij}^l \right) \geq 0, \text{ что и доказывает лемму.}$$

Введем обозначение $M_k = \bigcup_{\bar{\gamma} \in \omega_k} M(\bar{\gamma})$, т. е. M_k — множество планов задачи (6) — (8), определяемое элементами множества ω_k . Справедлива

Лемма 6. $M_k = M_{k-1} \setminus \bar{\gamma}_{k-1}$, $k = 2, 3, \dots$

Доказательство. Множество ω_k отличается от ω_{k-1} тем, что план $\bar{\gamma}_{k-1} = (*, *, \dots, *, A_{p\mu_p^{k-1}}, \dots, A_{m\mu_m^{k-1}})$ заменяется множеством ω_k планов $(*, *, \dots, *, A_{l-1\nu_{l-1}}, A_{l\mu_l^{k-1}}, \dots, A_{m\mu_m^{k-1}})$, $l = 2, 3, \dots, p$, $\nu_{l-1} = 1, 2, \dots, s_{l-1} (\nu_{l-1} \neq \mu_{l-1}^k)$.

Но

$$\begin{aligned} M_k &= \bigcup_{\bar{\gamma} \in \omega_k} M(\bar{\gamma}) = \left\{ \bigcup_{\substack{\bar{\gamma} \in \omega_{k-1} \\ \bar{\gamma} \neq \bar{\gamma}_{k-1}}} M(\bar{\gamma}) \right\} \cup \left\{ \bigcup_{\bar{\gamma} \in \omega_k} M(\bar{\gamma}) \right\} = \\ &= \left\{ \bigcup_{\substack{\bar{\gamma} \in \omega_{k-1} \\ \bar{\gamma} \neq \bar{\gamma}_{k-1}}} M(\bar{\gamma}) \right\} \cup \{M(\bar{\gamma}_{k-1}) \setminus \bar{\gamma}_{k-1}\} = M_{k-1} \setminus \bar{\gamma}_{k-1}, \end{aligned}$$

так как в силу леммы 4 $M(\bar{\gamma}_{k-1}) \setminus \bar{\gamma}_{k-1} = \bigcup_{\bar{\gamma} \in \omega_k} M(\bar{\gamma})$. Лемма 6 доказана.

Непосредственно из леммы 6 вытекает

Следствие. $M_k \cup \bar{\gamma}_1 \cup \bar{\gamma}_2 \cup \dots \cup \bar{\gamma}_{k-1} = M_1$.

Лемма 7. $P(\bar{\gamma}_k) = \min_{\bar{\gamma} \in M_k} P(\bar{\gamma})$, $k = 1, 2, \dots$

Доказательство. Из работы алгоритма следует, что $P(\bar{\gamma}_k) = \min_{\gamma \in \omega_k} P(\gamma)$.

Но по лемме 2 $P(\gamma) = \min_{\bar{\gamma} \in M(\gamma)} P(\bar{\gamma})$ для $\gamma \in \omega_k$.

Следовательно,

$$P(\bar{\gamma}_k) = \min_{\gamma \in \omega_k} P(\gamma) = \min_{\gamma \in \omega_k} \min_{\bar{\gamma} \in M(\gamma)} P(\bar{\gamma}) = \min_{\bar{\gamma} \in M_k} P(\bar{\gamma}),$$

что и доказывает лемму.

Так как M_1 — множество всех планов задачи (6) — (8), то справедливо

Следствие. План $\bar{\gamma}_1$ является оптимальным планом задачи (6) — (8).

Теорема 3. План, полученный в результате работы алгоритма ψ является оптимальным планом задачи (1) — (5).

Доказательство. Для доказательства теоремы необходимо показать, что если работа алгоритма закончилась на k -м шаге, то

$$L_{k-1} = \min_{\gamma \in M_1} F(\gamma). \quad (16)$$

Действительно, в силу лемм 5 и 6 имеем $P(\bar{\gamma}_k) \leq \min_{\gamma \in M_k} F(\gamma)$. Так как алгоритм заканчивает работу в том случае, если $P(\bar{\gamma}_k) \geq L_{k-1}$, то $L_{k-1} \leq \min_{\gamma \in M_k} F(\gamma)$. Но $L_{k-1} = \min_{\{\bar{\gamma}_1, \bar{\gamma}_2, \dots, \bar{\gamma}_{k-1}\}} F(\gamma)$. Следовательно, $L_{k-1} = \min_{\{\bar{\gamma}_1, \bar{\gamma}_2, \dots, \bar{\gamma}_{k-1}\}} F(\gamma) \leq \min_{\gamma \in M_k} F(\gamma)$ и в силу следствия из леммы 6 верно (16), что и доказывает теорему.

Обоснование метода полностью закончено.

В заключение отметим, что метод позволяет на каждом i -м шаге оценивать сверху отклонение лучшего из полученных вариантов со значением функционала L_i от оптимального со значением функционала L_{k-1} , так как выполняется неравенство $L_i - L_{k-1} < L_i - P(\bar{\gamma}_i)$, $i < k$. Это неравенство вытекает из того факта, что $P(\bar{\gamma}_i) < L_{k-1}$.

Кроме того, на каждом шаге это отклонение уменьшается, т. е. $L_i - P(\bar{\gamma}_i) \leq L_{i-1} - P(\bar{\gamma}_{i-1})$, $i = 2, 3, \dots, k-1$, так как $L_i \leq L_{i-1}$, а $P(\bar{\gamma}_i) \geq P(\bar{\gamma}_{i-1})$, $i = 1, 2, \dots, k$.

Составлена программа, реализующая данный метод на ЭВМ «Минск-22» для случая $r=1$. Проведенные расчеты показали эффективность данного метода для решения задач размещения. В качестве примера приведем расчет размещения чугунолитейных заводов межотраслевого назначения в УССР.

Были заданы потребности в чугунном литье в территориальном разрезе ($n=62$) с суммарной потребностью в 600 тыс. тонн.

Намечены ($m=24$) пункты возможного размещения заводов. Задан ряд типовых мощностей (0, 60, 90, 120, 150, 180, 210, 240 тыс. т) и приведенные затраты, соответствующие этим мощностям. Известны также транспортные затраты по доставке 1 т литья от пунктов производства к пунктам потребления. Необходимо определить пункты размещения, мощности заводов и объемы транспортных перевозок, чтобы удовлетворить потребность в литье при минимуме суммарных затрат.

Нахождение оптимального плана этой задачи потребовало 23 мин машинного времени.

В заключение автор считает приятным долгом выразить благодарность В. А. Емеличеву за внимание к работе.

Литература

1. Емеличев В. А., Комлик В. И. ДАН БССР, № 10, 1966.
2. Беллман Р., Дрейфус С. Прикладные задачи динамического программирования. М., 1965.

ЦНИИТУ,
г. Минск

Поступило в редакцию 1.IV 1967

Н. Н. СИРОТА, А. В. МАЗОВКО, С. В. СУХВАЛО

МАГНИТОСТРИКЦИЯ ЖЕЛЕЗО-НИКЕЛЬ-КОБАЛЬТОВЫХ СПЛАВОВ

Среди ферромагнитных сплавов особый интерес представляют сплавы основных ферромагнитных переходных элементов — железа, никеля и кобальта.

Как известно [1], эти три элемента образуют между собой широкие области твердых растворов.

Несмотря на очевидную важность в научном и практическом отношении, исследование магнитострикции сплавов этой системы проведено лишь в ограниченном диапазоне составов [2—5]. Значительно лучше исследовано явление магнитострикции в граничных двойных системах Fe—Ni, Fe—Co, Ni—Co [6—10]. Однако изучение магнитострикции указанных двойных граничных систем также не отличается полнотой.

Нами предпринято систематическое изучение магнитострикции сплавов тройной системы Fe—Ni—Co во всем концентрационном треугольнике. Составы сплавов брались через 10 атомных процентов. Всего было исследовано 56 составов сплавов. Сплавы были выплавлены в высокочастотной вакуумной печи в атмосфере аргона. Образцы были получены в виде цилиндрических палочек путем насасывания распла-

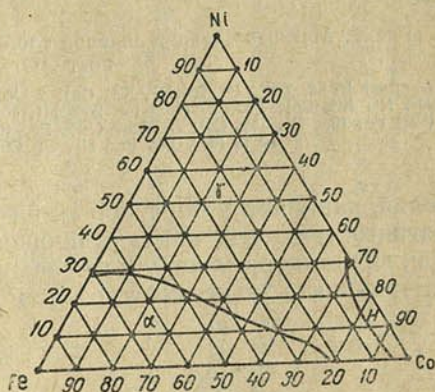


Рис. 1. Составы исследуемых сплавов

ва в кварцевые трубки диаметром 4—5 мм. Перед измерениями образцы отжигались в вакууме 10^{-4} мм рт. ст. при температуре 1050°C в течение 72 час, а затем торцевались до необходимых размеров, после чего образцы подвергались отжигу для снятия напряжений при 600°C в течение 3 час в вакууме 10^{-4} мм рт. ст. с последующим охлаждением с печью.

Составы исследуемых сплавов указаны точками на рис. 1.

Измерение продольной магнитострикции в зависимости от напряженности магнитного поля до 1000 э осуществлялось с помощью стандартных тензодатчиков с базой 25 мм, сопротивлением 200 ом на проволочном электронном тензомере типа ПЭТ-ЗВ-М.

Предварительная градуировка тензомера производилась по упругой деформации изгиба стального стержня. Магнитное поле создавалось в соленоиде с охлаждающей рубашкой. Температура внутри соленоида поддерживалась постоянной 16°C с помощью внешнего термостата.

Максимальное отклонение температуры при больших полях не превышало $\pm 0,5^{\circ}\text{C}$. Измерение величины изотермической магнитострикции

проводилось с учетом времени, необходимого для установления стационарного состояния образца.

На рис. 2 приведены некоторые типичные кривые изменения магнитострикции исследованных сплавов тройной системы в функции напряженности магнитного поля. При полях выше 500—600 э у большинства исследованных сплавов достигается магнитное насыщение. Линейное увеличение константы магнитострикции при более высоких магнитных

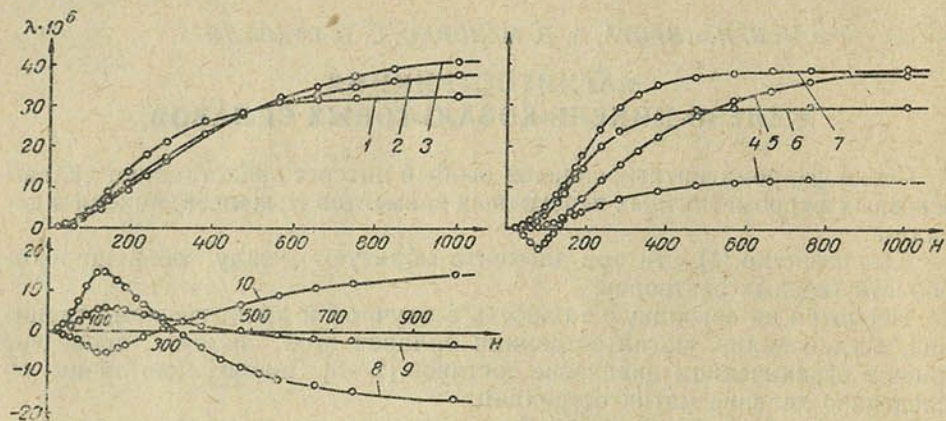


Рис. 2. Магнитострикция сплавов тройной системы Fe—Ni—Co в функции напряженности магнитного поля H , э:

1—сплав № 52 (70% Fe, 20% Ni, 10% Co); 2—№ 53 (60% Fe, 20% Ni, 20% Co); 3—№ 54 (50% Fe, 20% Ni, 30% Co); 4—№ 57 (20% Fe, 20% Ni, 60% Co); 5—№ 58 (10% Fe, 20% Ni, 70% Co); 6—№ 59 (80% Fe, 10% Ni, 10% Co); 7—№ 60 (70% Fe, 10% Ni, 20% Co); 8—№ 64 (30% Fe, 10% Ni, 60% Co); 9—№ 65 (20% Fe, 10% Ni, 70% Co); 10—№ 66 (10% Fe, 10% Ni, 80% Co)

полях, например у образцов № 52—54, может быть связано с объемной магнитострикцией, накладывающейся на линейную магнитострикцию. Как видно из рисунка, у некоторых сплавов на кривых изменения магнитострикции в зависимости от напряженности внешнего магнитного поля

наблюдается инверсия знака магнитострикции (например, сплавы № 64—66).

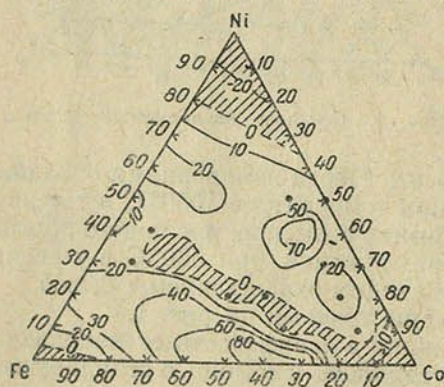


Рис. 3. Магнитострикция насыщения тройной системы Fe—Ni—Co в функции состава сплавов

На рис. 3 приведен концентрационный треугольник Гиббса исследуемой системы, на котором указаны области составов сплавов, обладающие инверсионным типом кривых магнитострикции в зависимости от намагничивающего поля, а также приведены горизонталы изменения значений магнитострикции насыщения в зависимости от состава и указаны области составов сплавов с различными знаками магнитострикции насыщения. Области с отрицательной магнитострикцией насыщения заштрихованы.

Представляет значительный интерес характер размещения концентрационных областей сплавов, обладающих отрицательной магнитострикцией. Отрицательной магнитострикцией обладают компоненты Fe, Ni, Co, сплавы, составы которых лежат вдоль линии, разделяющей γ - и

α -фазовые области в тройной системе, и сплавы, расположенные в вершинах концентрационного треугольника.

Результаты измерений магнитострикции различных сплавов сведены в таблице.

Таблица

Значения продольной магнитострикции λ сплавов тройной системы Fe — Ni — Co при $H = 1000$ э

| № сплава | Составы сплавов, атом. % (расчет) | | | $\lambda \cdot 10^6$ | № сплава | Составы сплавов, атом. % (расчет) | | | $\lambda \cdot 10^6$ |
|----------|-----------------------------------|-----|-----|----------------------|----------|-----------------------------------|----|----|----------------------|
| | Fe | Ni | Co | | | Fe | Ni | Co | |
| 1 | 10 | 90 | 0 | -15,8 | 37 | 40 | 50 | 10 | 17,1 |
| 4 | 40 | 60 | 0 | 27,4 | 38 | 30 | 50 | 20 | 25,8 |
| 5 | 50 | 50 | 0 | 7,0 | 40 | 10 | 50 | 40 | 10,8 |
| 7 | 70 | 30 | 0 | 13,3 | 41 | 50 | 40 | 10 | 19,5 |
| 8 | 80 | 20 | 0 | 33,8 | 42 | 40 | 40 | 20 | 14,3 |
| 9 | 90 | 10 | 0 | 24,6 | 44 | 20 | 40 | 40 | 59,0 |
| 10 | 0 | 100 | 0 | -40,0 | 45 | 10 | 40 | 50 | 102 |
| 11 | 0 | 90 | 10 | -31,7 | 46 | 60 | 30 | 10 | 15,2 |
| 12 | 0 | 80 | 20 | -19,3 | 47 | 50 | 30 | 20 | -62,5 |
| 13 | 0 | 70 | 30 | -8,7 | 48 | 40 | 30 | 30 | 3,8 |
| 15 | 0 | 50 | 50 | 15,8 | 49 | 30 | 30 | 40 | 10 |
| 17 | 0 | 30 | 70 | 12,6 | 50 | 20 | 30 | 50 | 57,6 |
| 19 | 0 | 10 | 90 | -11,7 | 51 | 10 | 30 | 60 | 20 |
| 20 | 0 | 0 | 100 | -15,0 | 52 | 70 | 20 | 10 | 32,1 |
| 21 | 100 | 0 | 0 | -7,8 | 53 | 60 | 20 | 20 | 37,4 |
| 22 | 10 | 0 | 90 | -9,0 | 54 | 50 | 20 | 30 | 40,7 |
| 23 | 20 | 0 | 80 | -17,6 | 55 | 40 | 20 | 40 | -7,9 |
| 24 | 30 | 0 | 70 | 92 | 56 | 30 | 20 | 50 | -5,4 |
| 25 | 40 | 0 | 60 | 104 | 57 | 20 | 20 | 60 | 12,4 |
| 26 | 50 | 0 | 50 | 64,4 | 58 | 10 | 20 | 70 | 39 |
| 27 | 60 | 0 | 40 | 64,1 | 59 | 80 | 10 | 10 | 30,6 |
| 28 | 70 | 0 | 30 | 35,2 | 60 | 70 | 10 | 20 | 39,5 |
| 29 | 80 | 0 | 20 | 20,9 | 61 | 60 | 10 | 30 | 58,3 |
| 30 | 90 | 0 | 10 | -10,1 | 62 | 50 | 10 | 40 | 60 |
| 31 | 10 | 80 | 10 | -9,3 | 63 | 40 | 10 | 50 | 61 |
| 32 | 20 | 70 | 10 | 8,7 | 64 | 30 | 10 | 60 | 16,7 |
| 35 | 20 | 60 | 20 | 13,2 | 65 | 20 | 10 | 70 | -3,1 |
| 36 | 10 | 60 | 30 | 15,2 | 66 | 10 | 10 | 80 | -13,9 |

Обращает на себя внимание наличие областей составов с большими положительными и отрицательными значениями продольной магнитострикции.

Литература

1. Kase T. Sci. Rep. Tôhoku Imp. Univ. 16, 491, 1927.
2. Ide I. M. Proc. Inst. Radio Eng., 22, 177, 1934.
3. Белов К. П. ЖЭТФ, 20, 54, 1950.
4. Белов К. П. Упругие, тепловые и электрические явления в ферромагнетиках. ГИТТЛ, 1957.
5. Воскобойников С. И. ФММ, 6, 1011, 1958.
6. Masiyama J. Sci. Rep. Tôhoku Univ., 26, 65, 1937; 20, 574, 1937.
7. Schulze A. Z. techn. Phys., 8, 495, 1927.
8. Williams S. R. Rev. Sci. Instr., 3, 675, 1932.
9. Волков Д. И., Чечерников В. И., Цейтлин В. Б. Вестник МГУ, № 2, 1956.
10. Дьяков Г. П. Изв. АН СССР, сер. физ., 22, 1254, 1958.

Институт физики
твёрдого тела и полупроводников
АН БССР

Поступило в редакцию 3.VIII 1967

Л. Н. БЫСТРОВ, Э. А. РУДАК, Е. И. ФИРСОВ

**СПЕКТРЫ γ -ЛУЧЕЙ ИЗ РЕАКЦИЙ $\text{Cu}^{63} (n, \gamma) \text{Cu}^{64}$
 И $\text{Cu}^{65} (n, \gamma) \text{Cu}^{66}$ НА ТЕПЛОВЫХ НЕЙТРОНАХ**

Основные сведения о γ -лучах изотопов меди из реакции (n, γ) получены в экспериментах с использованием образцов с естественной смесью изотопов [1—5]. Циркулярная поляризация γ -лучей от захвата поляризованных тепловых нейтронов ядром Cu^{63} исследовалась в [6—9]. Наиболее полно энергии уровней Cu^{64} и Cu^{66} исследовались в реакции (d, p) [10]. Спектры γ -лучей из реакции (n, γ) на изотопах меди очень сложны, что затрудняет выделение и идентификацию многих γ -линий в измерениях с образцами с естественной смесью изотопов. Целью настоящей работы является исследование реакции (n, γ) на образцах из разделенных изотопов меди.

Спектры γ -лучей из реакций $\text{Cu}^{63} (n, \gamma) \text{Cu}^{64}$ и $\text{Cu}^{65} (n, \gamma) \text{Cu}^{66}$ исследовались с помощью магнитного комптоновского γ -спектрометра с разрешением 2% и нижней границей энергии измеряемых γ -лучей 0,3 Мэв, установленного на реакторе ИРТ АН БССР [14]. В качестве образцов использовались 100 г окиси меди с естественной смесью изотопов и 35 г меди, обогащенной изотопом Cu^{65} . Изотопный состав образцов и вклад отдельных изотопов в общее сечение реакции (n, γ) приведены в табл. 1.

Таблица 1

Основные характеристики образцов

| Образец | Химическое соединение | Сечение реакции (n, γ) , барн [15] | Энергия связи, Мэв | Вес, г | Содержание изотопов, % | | Вклад в реакцию, % | |
|------------------|-----------------------|---|--------------------|--------|------------------------|------------------|--------------------|------------------|
| | | | | | Cu^{63} | Cu^{65} | Cu^{63} | Cu^{65} |
| Cu^{63} | CuO | 4,55 | 7,91 | 100 | 69,1 | 30,9 | 79,5 | 20,5 |
| Cu^{65} | Cu | 2,64 | 7,0 | 34,9 | 10,0 | 90,0 | 16,1 | 83,9 |

Спектры γ -лучей из исследованных реакций приведены на рис. 1 и 2. Сравнительно точные данные по сечениям реакции (n, γ) и содержанию изотопов в образцах позволили идентифицировать большинство интенсивных γ -линий. Результаты обработки спектров приведены в табл. 2. Схемы γ -переходов ядер Cu^{64} и Cu^{66} , составленные на основании полученных данных, приведены на рис. 3 и 4 соответственно. Энергии и спины возбужденных уровней взяты из работ [8—13]. Кроме переходов, которым соответствуют γ -линии, обнаруженные в настоящем эксперименте, в схему переходов Cu^{64} включен переход из исходного состояния на уровень 0,66 Мэв. Соответствующая ему γ -линия была обнаружена в [2]. В спектрах γ -лучей распада ядер Cu^{64} и Cu^{66} обнаружено большое количество γ -

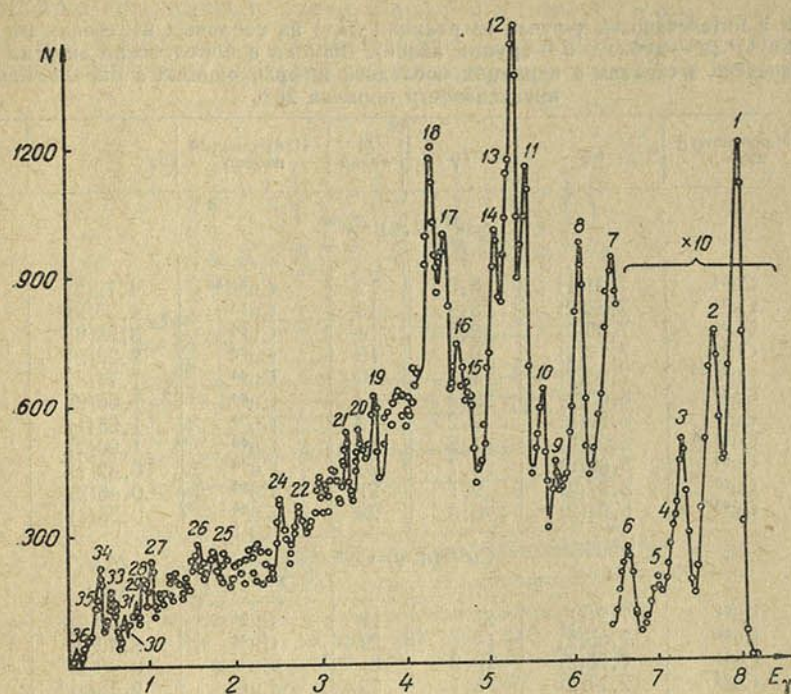


Рис. 1. Аппаратурный спектр γ -лучей из реакции $\text{Cu}^{63}(n, \gamma)\text{Cu}^{64}$ (N — число совпадений за 10 мин; E_γ в Мэв)

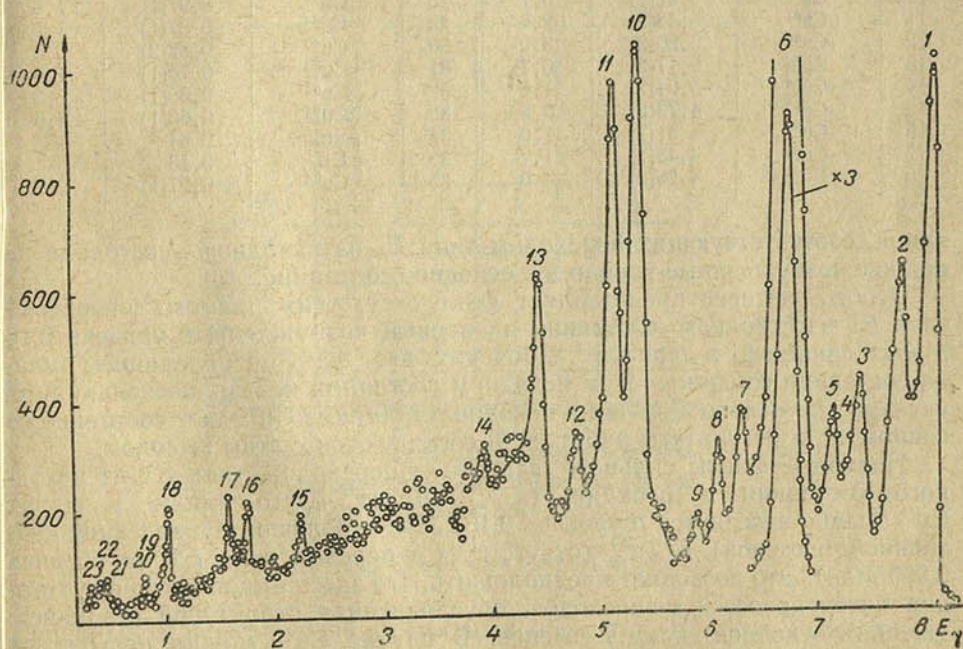


Рис. 2. Аппаратурный спектр γ -лучей из реакции $\text{Cu}^{65}(n, \gamma)\text{Cu}^{66}$ (N — число совпадений за 10 мин; E_γ в Мэв)

Таблица 2

Энергии и интенсивности γ -лучей из реакции (n, γ) на тепловых нейтронах на ядрах $\text{Cu}^{63,65}$ (а — дублет, б — группа линий). Ошибка в определении энергии приведена в скобках в единицах последней цифры, ошибка в определении интенсивности порядка 20%

| № линии | Излучающий изотоп | E_γ | I_γ | № линии | Излучающий изотоп | E_γ | I_γ |
|---|---------------------|----------------------|------------|---------|----------------------------------|----------------------|------------|
| $\text{Cu}^{65} (n, \gamma) \text{Cu}^{66}$ | | | | | | | |
| 1 | Cu^{64} | 7,91(1) | 5,0 | 12 | $\text{Cu}^{64,66}$ | 4,72(2) | 1,7 |
| 2 | Cu^{64} | 7,64(2) | 3,9 | 13 | Cu^{66} | 4,35(2) | 4,8 |
| 3 | Cu^{64} | 7,29(2) | 2,2 | 14 | Cu^{66} | 3,88(2) ^a | 3,5 |
| 4 | Cu^{64} | 7,17(2) | 0,9 | 15 | Cu^{66} | 2,23(2) | 2,2 |
| 5 | $\text{Cu}^{64,66}$ | 7,06(2) ^a | 1,8 | 16 | Cu^{66} | 1,74(2) | 2,4 |
| 6 | Cu^{66} | 6,63(2) ^a | 22,4 | 17 | Cu^{66} | 1,56(2) | 2,6 |
| 7 | Cu^{66} | 6,25(2) | 2,2 | 18 | Cu^{66} | 1,05(1) | 5,7 |
| 8 | $\text{Cu}^{64,66}$ | 6,03(2) | 1,5 | 19 | Cu^{66} | 1,00(2) | 2,3 |
| 9 | Cu^{66} | 5,86(2) | 0,7 | 20 | Cu^{66} | 0,82(1) | 3,4 |
| 10 | Cu^{66} | 5,27(2) ^a | 9,1 | 21 | Cu^{66} | 0,45(2) | 9,4 |
| 11 | Cu^{66} | 5,04(2) | 6,3 | 22 | Cu^{66} | 0,38(1) | 9,6 |
| $\text{Cu}^{63} (n, \gamma) \text{Cu}^{64}$ | | | | | | | |
| 1 | Cu^{64} | 7,91(1) | 21 | 19 | Cu^{64} | 3,60(2) ^a | 1,0 |
| 2 | Cu^{64} | 7,63(2) | 14 | 20 | Cu^{64} | 3,40(2) | 0,5 |
| 3 | Cu^{64} | 7,28(2) | 9,2 | 21 | Cu^{64} | 3,29(2) | 0,5 |
| 4 | Cu^{64} | 7,17(2) | 3,1 | 22 | Cu^{64} | 2,75(2) ^b | 0,8 |
| 5 | Cu^{64} | 7,00(2) | 2,2 | 23 | Cu^{64} | 2,59(2) | 0,2 |
| 6 | Cu^{66} | 6,63(2) ^a | 6,7 | 24 | Cu^{64} | 2,52(2) | 0,5 |
| 7 | Cu^{64} | 6,39(2) ^a | 1,6 | 25 | Cu^{66} | 1,74(2) | 0,5 |
| 8 | $\text{Cu}^{64,66}$ | 6,03(2) ^a | 2,2 | 26 | Cu^{66} | 1,56(2) | 0,6 |
| 9 | Cu^{64} | 5,76(2) | 0,4 | 27 | $\text{Zn}^{66}, \text{Cu}^{66}$ | 1,05(2) ^a | 2,0 |
| 10 | Cu^{64} | 5,61(2) | 0,7 | 28 | Cu^{64} | 0,97(1) | 1,6 |
| 11 | Cu^{64} | 5,42(2) | 2,0 | 29 | Cu^{64} | 0,87(1) | 1,8 |
| 12 | Cu^{66} | 5,26(2) ^a | 3,0 | 30 | Cu^{66} | 0,82(2) | 0,8 |
| 13 | Cu^{64} | 5,17(2) | 0,7 | 31 | Cu^{64} | 0,76(1) | 1,6 |
| 14 | Cu^{66} | 5,04(2) | 1,6 | 32 | Cu^{64} | 0,65(1) | 3,8 |
| 15 | $\text{Cu}^{64,66}$ | 4,73(2) | 0,9 | 33 | Cu^{64} | 0,60(1) | 4,6 |
| 16 | Cu^{64} | 4,61(2) | 1,0 | 34 | Анниг. | 0,51 | — |
| 17 | Cu^{64} | 4,45(2) | 1,7 | 35 | Li^7 | 0,48 | — |
| 18 | $\text{Cu}^{64,66}$ | 4,28(2) ^a | 4,0 | 36 | Cu^{64} | 0,27(1) | 2,7 |

линий, соответствующих переходам типа E_1 из исходного состояния на нижние возбужденные уровни и в основное состояние.

Особый интерес представляет факт отсутствия прямого γ -перехода типа E_1 из исходного состояния на первый возбужденный уровень 0,16 Мэв со спином 0^+ в ядре Cu^{64} . Объяснить этот факт преобладанием вклада состояния со спином 2^- в исходном состоянии нельзя, поскольку в [6] указано, что основной вклад в исходное состояние Cu^{64} дает состояние со спином 1^- , а результаты работ [8, 9] согласуются с этим выводом.

Подобные факты сильного запрета γ -переходов типа E_1 из исходного состояния в реакции (n, γ) имеют место также в ядрах Cu^{63} (слабо заселяется p -уровень 0,165 Мэв с большой приведенной нейтронной шириной) и Zn^{65} (отсутствует γ -переход типа E_1 на уровень 0,060 Мэв). Это позволяет предположить, что здесь имеет место флуктуация интенсивностей γ -переходов, обусловленная структурой резонанса, дающего основной вклад в сечение. В случае Cu^{64} можно попытаться объяснить отсутствие γ -перехода типа E_1 из исходного состояния с точки зрения структуры исходного состояния и нижних уровней. Нижние

уровни Cu^{64} со спином 0^+ могут быть получены в предположении о возможных конфигурациях протона и нейтрона типа $p_{3/2}^1$ и $p_{3/2}^{-1}$. Если предположить, что исходное состояние не носит «дырочный» характер, то переходы типа $E1$ из исходного состояния на уровни со спином 0^+ связаны с

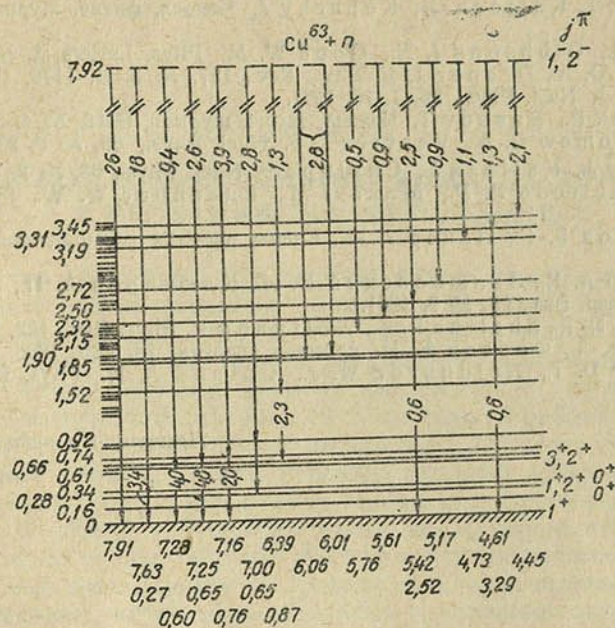


Рис. 3. Схема γ -переходов Cu^{64} из исходного состояния

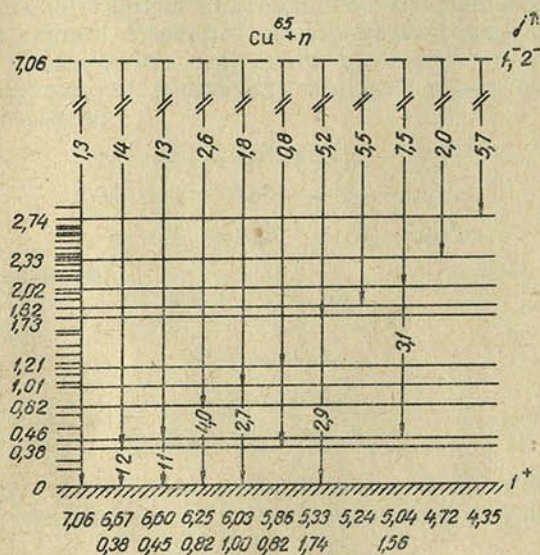


Рис. 4. Схема γ -переходов Cu^{66} из исходного состояния

существенной перестройкой нейтронной оболочки. Поэтому более вероятными будут переходы на уровни с конфигурациями валентных протона и нейтрона других типов, например ($p_{3/2}$, $f_{7/2}$) и ($p_{3/2}$, $p_{1/2}$).

Литература

1. Грошев Л. В., Луценко В. Н., Демидов А. М., Пелехов В. И. Атлас спектров γ -лучей радиационного захвата тепловых нейтронов. Госатомиздат, 1958.
2. Rudolph W., Gersch H. U. Nucl. Phys., 71, 221, 1965.
3. Urbanec I., Kajfosz J., Kopecký J. Чехосл. физич. журнал, В 10, № 4, 275, 1960.
4. Bird I. R., Gibbons I. H., Good W. M. Phys. Letters, 1, № 7, 262, 1962.
5. Wasson O. A., Draper I. E. Phys. Rev., 137, № 5, В, 1175, 1965.
6. Vervier I. Nucl. Phys., 26, 1, 16, 1961.
7. Michalek R., Ruskov T. Чехосл. физич. журнал, В 12, № 4, 325, 1962.
8. Bartholomew G. A., Vervier I. F. Nucl. Phys., 50, № 2, 209, 1964.
9. Kopecký J., Kajfosz J., Chalupa V. Nucl. Phys., 68, № 2, 449, 1965.
10. De Figueiredo R. P., Mazari M., Buechner W. W. Phys. Rev., 112, № 3, 875, 1958.
11. Дзелепов Б. С., Пекер Л. К. Схемы распада радиоактивных ядер. Изд. «Наука», 1967.
12. Вальтер А. К., Залюбовский И. И., Ключарев А. П., Луцик В. А. Изв. АН СССР, сер. физ., 25, № 9, 1961.
13. Jonston N. R., Sheline R. K., Wolfgang R. Phys. Rev., 102, № 3, 831, 1956.
14. Рудак Э. А., Фирсов Е. И. Атомная энергия, 18, 285, 1965.
15. Veating D. T., Neidhardz W. J., Goland A. N. Phys. Rev., 111, № 1, 261, 1958.

Институт физики
АН БССР

Поступило в редакцию 17.V 1967

Л. Г. МОРОЗ

АМПЛИТУДЫ ДЕЙТРОННОГО КОМПТОН-ЭФФЕКТА В РЕЛЯТИВИСТСКОМ ПОДХОДЕ

Как известно (например, [1]), дейтрон можно рассматривать как частицу со спином 1. Это позволяет применить теоретико-полевые методы при описании процессов с его участием, что в свою очередь дает возможность учесть связанные состояния дейтрона на основе дисперсионных соотношений. Такой подход к дейтрону уже успешно применялся при изучении фотодезинтеграции дейтрона [2]. В настоящей работе в рамках этого подхода находятся независимые амплитуды дейтронного комптон-эффекта на основе релятивистских волновых функций дейтрона, подчиняющихся уравнению Прока. Уравнение Прока и его решения задаются в формализме Даффина — Кеммера. Описание дейтронного комптон-эффекта с помощью таким образом найденных релятивистских амплитуд открывает новые возможности по сравнению с так называемым импульсным приближением, которое не находится в хорошем согласии с экспериментальными данными [3, 4].

Чтобы построить амплитуду дейтронного комптон-эффекта, мы будем исходить из общих принципов инвариантности: инвариантности по отношению к полной группе Лоренца, калибровочной инвариантности и инвариантности по отношению к отражению времени.

Из общих соображений амплитуда процесса может быть выражена с помощью трех скаляров:

$$\begin{aligned} s &= -(p_1 + k_1)^2 = -(p_2 + k_2)^2, \\ t &= -(k_1 - k_2)^2 = -(p_2 - p_1)^2, \\ u &= -(k_1 - p_2)^2 = -(k_2 - p_1)^2, \end{aligned} \quad (1)$$

связанных соотношением*

$$s + t + u = 2m^2, \quad (2)$$

и трех 4-векторов:

$$\begin{aligned} P &= p_1 + p_2, \\ K &= k_1 + k_2, \\ Q &= k_1 - k_2 = p_2 - p_1, \end{aligned} \quad (3)$$

где p_1, p_2 и k_1, k_2 — 4-импульсы начального и конечного дейтрона (с массой m) и фотона соответственно, связанные законом сохранения

$$p_1 + k_1 = p_2 + k_2.$$

С помощью (3) можно ввести полный набор ортогональных векторов в 4-мерном пространстве:

$$Q, N, \Pi, K;$$

* Метрика $ab = ab + a_4b_4 = ab - a_0b_0$.

$$\Pi = P - \frac{PK}{K^2} K, \quad N_\mu = i \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} P_\nu K_\rho Q_\sigma. \quad (4)$$

В системе центра масс ($\mathbf{p}_1 + \mathbf{k}_1 = \mathbf{p}_2 + \mathbf{k}_2 = 0$)

$$s = m^2 + 2 \sqrt{k_0^2(k_0^2 + m^2)} + 2k_0^2,$$

$$t = 2(k_1 k_2 - k_0^2),$$

$$u = m^2 - 2 \sqrt{k_0^2(k_0^2 + m^2)} - 2k_1 k_2,$$

$$P = \left\{ -(k_1 + k_2), 2i \sqrt{k_0^2 + m^2} \right\}, \quad (5)$$

$$K = (k_1 + k_2, 2ik_0), \quad Q = (k_1 - k_2, 0),$$

$$N = 4 \left(k_0 + \sqrt{k_0^2 + m^2} \right) \cdot ([k_1 k_2], 0),$$

$$\Pi = -2 \frac{k_0 + \sqrt{k_0^2 + m^2}}{k_0^2 - k_1 k_2} \cdot \{ k_0(k_1 + k_2), i(k_0^2 + k_1 k_2) \}.$$

Здесь $k_1 k_2 = k_0^2 \cos \vartheta$; k_0 и ϑ — величина импульса в системе центра масс и угол рассеяния соответственно.

Как обычно, если исходить из S -матрицы

$$S = 1 + iT,$$

где

$$T = \frac{(2\pi)^4 i}{V 16 \rho_{10} \rho_{20} k_{10} k_{20}} \delta(p_1 + k_1 - p_2 - k_2) F,$$

мы получаем амплитуду процесса, которая билинейна по векторам поляризации начального и конечного фотона e_1 и e_2 :

$$\langle \gamma_2 D_2 | F | \gamma_1 D_1 \rangle = 2 \bar{\psi}(p_2) \bar{e}_{2\mu} M_{\mu\nu} e_{1\nu} \psi(p_1). \quad (6)$$

Здесь $\bar{e} = (e^*, ie_0)$; 2 — нормировочный коэффициент; $\psi(p_1)$ и $\bar{\psi}(p_2) = \psi^*(p_2)(2\beta_4^2 - 1)$ — функции дейтрона в импульсном пространстве, подчиняющиеся уравнениям

$$(i\hat{p}_1 + m)\psi(p_1) = 0, \quad \bar{\psi}(p_2)(i\hat{p}_2 + m) = 0, \quad (7)$$

где $\hat{p} = p_\mu \beta_\mu$, β_μ — 10×10 -матрицы Даффина — Кеммера со свойствами

$$\beta_\mu \beta_\nu \beta_\rho + \beta_\rho \beta_\nu \beta_\mu = \delta_{\mu\nu} \beta_\rho + \delta_{\rho\nu} \beta_\mu, \quad (8)$$

и $M_{\mu\nu}$ — 10×10 -матрица, ведущая себя относительно индексов μ и ν как тензор второго ранга в 4-мерном пространстве.

Для определения структуры матрицы $M_{\mu\nu}$ используем полный набор базисных элементов даффин-кеммеровской алгебры в 10-мерном пространстве, который может быть выражен через матрицы β_μ [5]:

$$\varepsilon^{\mu\nu} = (\delta_{\mu\nu} - \beta_\nu \beta_\mu) \mathfrak{F},$$

$$\varepsilon^{\nu[\rho\mu]} = (\beta_\mu \beta_\nu \beta_\rho - \delta_{\mu\nu} \beta_\rho) \bar{\mathfrak{F}},$$

$$\varepsilon^{[\mu\rho] \nu} = (\delta_{\mu\nu} \beta_\rho - \beta_\rho \beta_\nu \beta_\mu) \mathfrak{F}, \quad (9)$$

$$\varepsilon^{[\mu\rho][\nu\sigma]} = (\delta_{\rho\nu} \beta_\mu \beta_\sigma - \beta_\mu \beta_\nu \beta_\rho \beta_\sigma) \bar{\mathfrak{F}}.$$

Здесь \mathfrak{F} и $\bar{\mathfrak{F}}$ — проективные операторы, связанные с 4-мерным и 6-мерным подпространствами 10-мерного пространства матриц β_μ , так что в нем $\mathfrak{F} + \bar{\mathfrak{F}} = 1$.

Правила перемножения матриц $\varepsilon^{AA'}$ ($A, A' = \mu, [\sigma\nu]$) вытекают из их определения [5]

$$(\varepsilon^{AA'})_{BB'} = \delta_{AB} \delta_{A'B'}, \quad (10)$$

где

$$\delta_{[\rho\alpha][\lambda\sigma]} = \delta_{\rho\lambda} \delta_{\alpha\sigma} - \delta_{\rho\sigma} \delta_{\alpha\lambda}, \quad (11)$$

$$\delta_{[\rho\alpha]\mu} = \delta_{\nu[\lambda\sigma]} = 0.$$

С другой стороны, матрицы β_μ и функции $\psi(p_1)$, $\bar{\psi}(p_2)$ могут быть выражены через матрицы $\varepsilon^{AA'}$ [5, 6]:

$$\beta_\mu = \varepsilon^{\nu[\mu\nu]} + \varepsilon^{[\mu\nu]\nu},$$

$$\psi^{(r_1)}(p_1) = \frac{1}{m\sqrt{2}} (i\hat{p}_1 + m) \varepsilon^{\mu 1} a_\mu^{r_1}, \quad (12)$$

$$\bar{\psi}^{(r_2)}(p_2) = \frac{1}{m\sqrt{2}} \bar{a}_\nu^{r_2} \varepsilon^{1\mu} (i\hat{p}_2 + m).$$

Здесь a^{r_1} и a^{r_2} — псевдовекторы поляризации дейтрона, $\bar{a} = \{a^*, ia_0\}$.

Дейтрон представляет собой псевдовекторную частицу вследствие того, что эта система двух нуклонов в S - и D -состояниях. Функции состояния дейтрона $\psi(x)$ преобразуются при пространственном отражении следующим образом:

$$\psi(x, x_0) \rightarrow \psi'(x, x_0) = -(2\beta_4^2 - 1) \psi(-x, x_0).$$

Согласно градиентной инвариантности, $M_{\mu\nu}$ в самом общем случае может быть сведено к четырем тензорам [7]:

$$\Pi_\mu \Pi_\nu, \quad N_\mu N_\nu, \quad \Pi_\mu N_\nu \pm N_\mu \Pi_\nu, \quad (13)$$

умноженным на 10×10 -матрицы. Из требования сохранения четности матрицы первых двух тензоров в (13) в обкладках $\bar{\psi}(p_2)$ и $\psi(p_1)$ должны быть скалярами, а двух последних — псевдоскалярами.

Поэтому все независимые (псевдо)скаляры могут быть получены сверткой полного набора элементов алгебры Даффина — Кеммера (9) с набором ортогональных векторов (4). Все возможные свертки этого сорта содержатся в следующих выражениях:

$$M = R_\mu^i R_\nu^k \varepsilon^{\mu\nu},$$

$$R_\nu^i R_\rho^k R_\mu^l \varepsilon^{\nu[\rho\mu]},$$

$$R_\nu^i R_\rho^k R_\mu^l \varepsilon^{[\rho\mu]\nu},$$

$$R_\mu^i R_\rho^k R_\sigma^l R_\nu^m \varepsilon^{[\mu\rho][\sigma\nu]};$$

$$R^{i,k,l,m} = (Q, N, \Pi, K).$$

Эти выражения благодаря уравнениям (7) и соотношениям (3), (8) — (12), будучи подставлены в обкладки между $\bar{\psi}(p_2)$ и $\psi(p_1)$, сводятся к следующим независимым матрицам:

$$M(\hat{K}) = \mathfrak{F}, \quad \bar{\mathfrak{F}}, \quad i\hat{K} \bar{\mathfrak{F}}, \quad \hat{K}^2 \mathfrak{F}, \quad (14)$$

$$M(\hat{K}, \hat{N}) = i\hat{N} \mathfrak{F}, \quad i\hat{N} \bar{\mathfrak{F}}, \quad \hat{K}\hat{N} \mathfrak{F}, \quad \hat{N}\hat{K} \mathfrak{F}, \quad (15)$$

причем $M(\hat{K})$ — скаляры, а $M(\hat{K}, \hat{N})$ — псевдоскаляры.

Операцию отражения времени можно задать следующим образом:

$$\begin{aligned} & \bar{\psi}(p_2) M(K, N, e_1, \bar{e}_2) \psi(p_1) \rightarrow \\ & \rightarrow \bar{\psi}(p_2) (2\beta_4^2 - 1) \bar{M}(K', N', \bar{e}_2', e_1') (2\beta_4^2 - 1) \psi(p_1), \end{aligned} \quad (16)$$

где

$$\begin{aligned} \bar{e}_2' &= \{-e_2^*, ie_{20}\}, \quad e_1' = \{-e_1, ie_{10}\}, \\ K' &= \{-K, iK_0\}, \quad N' = \{-N, iN_0\}, \quad \Pi' = \{-\Pi, i\Pi_0\}. \end{aligned}$$

Это преобразование оставляет инвариантными следующие комбинации из (14), (15) и (13) с \bar{e}_2, e_1 :

$$\bar{e}_{2\mu} \Pi_\mu \Pi_\nu e_{1\nu}, \quad \bar{e}_{2\mu} N_\mu N_\nu e_{1\nu}, \quad \bar{e}_{2\mu} (\Pi_\mu N_\nu + N_\mu \Pi_\nu) e_{1\nu}, \quad (17)$$

$$\mathfrak{F}, \quad \bar{\mathfrak{F}}, \quad i\hat{K}, \quad \hat{K}^2, \quad i\hat{N}, \quad (\hat{K}\hat{N} + \hat{N}\hat{K}) \mathfrak{F},$$

в то время как комбинации

$$\begin{aligned} & \bar{e}_{2\mu} (\Pi_\mu N_\nu - N_\mu \Pi_\nu) e_{1\nu}, \\ & i\hat{K} (\mathfrak{F} - \bar{\mathfrak{F}}), \quad i\hat{N} (\mathfrak{F} - \bar{\mathfrak{F}}), \quad (\hat{K}\hat{N} - \hat{N}\hat{K}) \mathfrak{F}, \end{aligned} \quad (18)$$

меняют знак при этом преобразовании.

Теперь из требования инвариантности полного матричного элемента (6) по отношению к отражению пространства и времени одновременно мы получаем, комбинируя (17) и (18), только 12 независимых структур. Полный матричный элемент может быть получен с их помощью в следующем виде:

$$\begin{aligned} & \langle \gamma_2 D_2 | F | \gamma_1 D_1 \rangle = \\ & = \bar{e}_{2\mu} \frac{\Pi_\mu \Pi_\nu}{\Pi^2} e_{1\nu} \cdot 2\bar{\psi}(p_2) [A_1 \mathfrak{F} + A_3 \bar{\mathfrak{F}} + A_5 \cdot i\hat{K} + A_7 \hat{K}^2 \mathfrak{F}] \psi(p_1) + \\ & + \bar{e}_{2\mu} \frac{N_\mu N_\nu}{N^2} e_{1\nu} \cdot 2\bar{\psi}(p_2) [A_2 \mathfrak{F} + A_4 \bar{\mathfrak{F}} + A_6 i\hat{K} + A_8 \hat{K}^2 \mathfrak{F}] \psi(p_1) + \quad (19) \\ & + \bar{e}_{2\mu} \frac{\Pi_\mu N_\nu - N_\mu \Pi_\nu}{\sqrt{\Pi^2 N^2}} e_{1\nu} \cdot 2\bar{\psi}(p_2) [A_9 (\hat{K}\hat{N} - \hat{N}\hat{K}) \mathfrak{F} + A_{10} i\hat{N} (\mathfrak{F} - \bar{\mathfrak{F}})] \psi(p_1) + \\ & + \bar{e}_{2\mu} \frac{\Pi_\mu N_\nu + N_\mu \Pi_\nu}{\sqrt{\Pi^2 N^2}} e_{1\nu} \cdot 2\bar{\psi}(p_2) [A_{11} i\hat{N} + A_{12} (\hat{K}\hat{N} + \hat{N}\hat{K}) \mathfrak{F}] \psi(p_1). \end{aligned}$$

Здесь A_i ($i = 1, \dots, 12$) являются скалярными функциями s и t . С помощью (9) — (12) легко показать, что наши амплитуды A_i отличаются от соответствующих амплитуд [8], для которых мы введем обозначения A'_i , лишь кинематическими коэффициентами, за исключением амплитуд A_1 и A_2 , которые выражаются через A'_i следующим образом:

$$A_{1,2} = A'_{1,2} - \frac{P^2 - Q^2}{4} A_{3,4} + K^2 A'_{5,6} + PK A'_{7,8}. \quad (20)$$

Литература

1. Nishijima K. Phys. Rev., 111, 995, 1958.
2. Bellac M. et al. Nuovo Cim., 33, 594; 34, 450, 1964.
3. Tenore A., Vergenelakis A. Nuovo Cim., 35, 261, 1965.
4. Третьяков В. Н. Вестні АН БССР, сер. фіз.-мат. навук, № 4, 1966.
5. Богуш А. А., Болсун А. И. Вестні АН БССР, сер. фіз.-мат. навук, № 4, 1966.
6. Богуш А. А., Болсун А. И. ДАН БССР, 155, 1046, 1964.
7. Prange R. E. Phys. Rev., 110, 240, 1958.
8. Pokorski S. Bull. l'Acad. Polon. des Science, 14, 171, 1966.

Институт физики
АН БССР

Поступило в редакцию 15.VI 1967

Г. С. РОМАНОВ, В. К. ПУСТОВАЛОВ

РАЗЛЕТ ВЕЩЕСТВА ОТ ИНТЕНСИВНО ИСПАРЯЮЩЕЙСЯ ПОВЕРХНОСТИ МЕТАЛЛА

В последнее время появилось большое количество работ, посвященных изучению процессов, сопровождающих быстрый разогрев поверхности металла до температур порядка 10^3 — 10^4 °К [1—4] *). Полученные теоретические и экспериментальные результаты дают достаточно четкую картину явлений, происходящих при этом в конденсированной фазе металла. Относительно процессов, происходящих в испаренном веществе, этого сказать нельзя. Так, в [4] при рассмотрении адиабатического разлета образующегося у нагретой поверхности металлического пара принята модель расширения его по адиабате Пуассона, хотя принципиальный вопрос о нахождении граничных условий для газодинамической задачи, которыми, очевидно, определяется выбор той или иной модели течения, остался невыясненным.

В настоящей работе газодинамическая задача о разлете вещества от испаряющейся поверхности металла рассматривается с учетом указанного обстоятельства. Газодинамические граничные условия определяются из решения кинетической задачи о процессах установления течения пара в переходной зоне вблизи поверхности, характерным масштабом толщины которой является длина свободного пробега частиц пара. В этой зоне пар приобретает скорость, величина которой определяется последующими условиями течения в газодинамической области, и соответствующие этой скорости значения плотности и температуры. Затем строится одномерное нестационарное течение расширения в вакуум, отвечающее стационарным граничным условиям, соответствующим постоянному значению температуры поверхности T_0 . При этом в зависимости от величины T_0 и времени от начала разлета t реализуется один из следующих двух режимов течения: 1) при достаточно малых значениях T_0 и t и низкой плотности пара процесс конденсации в расширяющемся паре замораживается сразу же у поверхности, и во всей области течения автомодельно и расширение следует адиабате Пуассона, т. е. соответствует модели, принятой в [4]; 2) при достаточно высоких значениях T_0 и t все течение распадается на две области — область, в которой расширение автомодельно и происходит по адиабате двухфазной равновесной системы, состоящей из насыщенного пара и частиц конденсированной фазы, и область, в которой в результате уменьшения плотности и температуры в потоке равновесие между паром и конденсатом нарушается, конденсация замораживается и расширение начинает происходить по адиабате Пуассона. Различие между этими двумя режимами течения влечет за собой и различия в граничных условиях для них. Для определения последних вначале будет рассмотрена упрощенная модель, в которой пренебрегается процессом воз-

*) Дальнейшие ссылки на литературу см. в этих работах.

вращения на поверхность (переконденсацией) части испаренных частиц. Последующий учет этого процесса покажет, что результаты, даваемые упрощенной моделью, позволяют качественно правильно описать интересные нас эффекты и могут годиться для численных оценок, так как незначительно отличаются от более точного решения.

§ 1. КАЧЕСТВЕННОЕ ОПИСАНИЕ ПРОЦЕССОВ У ПОВЕРХНОСТИ. ПРИБЛИЖЕННОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ГАЗОДИНАМИЧЕСКИХ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ

1. Рассмотрим процессы, происходящие при испарении вещества с третьей плоской поверхности металла и расширении его в свободное пространство. Как известно [5], поверхность, имеющая температуру T_0 , испускает частицы с максвелловским распределением скоростей. Вводя систему координат, связанную с поверхностью, и направляя ось x по течению, имеем

$$f^+(v, 0) = \beta n_0 \left(\frac{m}{2k\pi T_0} \right)^{3/2} \exp \left[-\frac{mv^2}{2kT_0} \right], \quad v_x \geq 0. \quad (1.1)$$

Здесь $f^+(v, x)$ — функция распределения частиц пара, скорость которых $v_x \geq 0$; n_0 — плотность частиц насыщенного пара, соответствующая температуре T_0 ; m — масса отдельной частицы; β — коэффициент испарения (для большинства металлов $\beta \approx 1$ [5, 6]).

В результате соударений часть испаренных частиц вблизи поверхности (на расстоянии порядка одной-двух длин свободного пробега) приобретает скорости $v_x \leq 0$. Соответствующая этим частицам часть функции распределения есть $f^-(v, x)$. Значение ее при $x=0$ $f^-(v, 0)$ необходимо для нахождения результирующих потоков массы, импульса и энергии через единицу поверхности тела. Строгое определение ее возможно только на основании решения уравнения Больцмана в переходной зоне L , где эффект столкновений частиц вызывает изменение функции распределения до тех пор, пока установившееся распределение по скоростям не станет локально-максвелловским, соответствующим наложенной извне массовой скорости \bar{u} отвода газа от поверхности. Ниже будет показано, что характерный размер этой зоны по порядку величины составляет $L \sim (2-3) l$, где l — длина свободного пробега частиц, $l \sim 1/n\sigma$ (n — плотность пара; σ — газокинетическое сечение, $\sigma \sim 10^{-16} \div 10^{-15} \text{ см}^2$); там же будет рассмотрен один из возможных способов определения $f^-(v, 0)$. Пока отметим, что учет этой части функции распределения для случая $\bar{u} \sim \bar{c}$, который в дальнейшем будет представлять для нас интерес (\bar{c} — местная скорость звука в потоке, имеющем скорость \bar{u}), приводит к сравнительно небольшим поправкам в величинах, характеризующих установившееся течение, — плотности, температуре и скорости пара, поэтому вначале для простоты положим $f^-(v, 0) = 0$. Определим теперь, используя для $f(v, 0)$ выражение (1.1), параметры газа в равновесной области — на внешней границе зоны L (формально в газокинетическом смысле при $x \rightarrow \infty$), где в результате соударений распределение частиц стало максвелловским, соответствующим массовой скорости \bar{u} :

$$f(v, \infty) = \bar{n} \left(\frac{m}{2\pi k\bar{T}} \right)^{3/2} \exp \left\{ -\frac{m}{2k\bar{T}} [(v_x - \bar{u})^2 + v_y^2 + v_z^2] \right\}. \quad (1.2)$$

В (1.2) \bar{n} , \bar{T} — плотность и температура установившегося потока. Имеем в общем случае для плотностей потоков числа частиц j_n , импульса j_p и энергии j_ε соответственно:

$$j_m = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} v_x f(\mathbf{v}, 0) dv = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} v_x f(\mathbf{v}, \infty) dv = \bar{n} \bar{u}, \quad (1.3)$$

$$j_p = m \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} v_x^2 f(\mathbf{v}, 0) dv = m \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} v_x^2 f(\mathbf{v}, \infty) dv = \bar{n} \left(k\bar{T} + \frac{m\bar{u}^2}{2} \right), \quad (1.4)$$

$$j_\varepsilon = \frac{m}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} v_x (v_x^2 + v_y^2 + v_z^2) f(\mathbf{v}, 0) dv = \frac{m}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} v_x (v_x^2 + v_y^2 + v_z^2) f(\mathbf{v}, \infty) dv = \\ = j_m \left(\frac{5}{2} k\bar{T} + \frac{m\bar{u}^2}{2} \right), \quad (1.5)$$

откуда при $f(\mathbf{v}, 0) = f^+(\mathbf{v}, 0)$ находим:

$$j_m = n_0 \left(\frac{kT_0}{2\pi m} \right)^{1/2}, \quad (1.6)$$

$$j_p = \frac{1}{2} n_0 kT_0, \quad (1.7)$$

$$j_\varepsilon = 2kT_0 j_m. \quad (1.8)$$

При заданном значении \bar{u} система (1.6—1.8) является переопределенной. Сравнение с более точными результатами показывает, что для нахождения \bar{n} и \bar{T} следует использовать уравнения (1.6), (1.8). Вводя число $M = \bar{u}/\bar{c}$, где \bar{c} — адиабатическая скорость звука для идеального газа, подчиняющегося адиабате Пуассона, $p = \rho^\gamma$, $\bar{c} = \left(\frac{dp}{d\rho} \right)_s^{1/2} = \left(\gamma \frac{k\bar{T}}{m} \right)^{1/2}$, получаем:

$$\bar{\tau} = \bar{T}/T_0 = \frac{4}{5 + \gamma M^2}, \quad (1.9)$$

$$\bar{x} = \bar{n}/n_0 = \left(\frac{5 + \gamma M^2}{8\pi\gamma M^2} \right)^{1/2}. \quad (1.10)$$

Для одноатомного идеального газа ($\gamma = 5/3$) при $M = 1$ найдем:

$$\bar{u} = \bar{c}, \quad \bar{c} = \left(\frac{5k\bar{T}}{3m} \right)^{1/2}, \quad (1.11)$$

$$\bar{\tau} = \bar{T}/T_0 = 0,60, \quad \bar{x} = \bar{n}/n_0 = 0,40. \quad (1.12)$$

Как отмечалось, начальная скорость для газодинамической задачи определяется условиями расширения; для рассматриваемого ниже автомодельного течения эта скорость должна быть равна местной скорости звука. Таким образом, если в газодинамической области показатель адиабаты пара сохраняет значение $\gamma = 5/3$ (т. е. не возникает никаких кинетических процессов, изменяющих значение эффективного показателя адиабаты), найденные условия (1.11), (1.12) могут служить приближенными граничными условиями для последующего течения.

2. Отметим теперь следующее обстоятельство. Решение (1.11) в широком интервале значений температуры поверхности T_0 отвечает резко перенасыщенному состоянию пара. Действительно, для того чтобы пар

на внешней границе зоны L не перенасыщался при плотности его \bar{n}_0 , охлаждение должно быть очень незначительным. Принимая для адиабаты насыщенного пара выражение, соответствующее эйнштейновской модели кристалла [7], имеем для $n_0 = n_0(T_0)$:

$$n_0 = \left(\frac{mk \theta_0^2}{2\pi \hbar^2 T_0} \right)^{3/2} \exp \left[-\frac{\lambda_1}{kT_0} - 1 \right], \quad (1.13)$$

где θ_0 — дебаевская температура; λ_1 — энергия связи отдельной частицы при 0°K , и аналогичное выражение для $\bar{n} = \bar{n}(\bar{T}_s)$, где \bar{T}_s — температура насыщения пара, плотность которого равна \bar{n} . Для отношения \bar{n}/n_0 находим

$$\bar{n}/n_0 = 0,40 = \left(\frac{T_0}{\bar{T}_s} \right)^{3/2} \exp \left[\frac{\lambda_1}{kT_0} - \frac{\lambda_1}{k\bar{T}_s} \right].$$

Введем удобную для дальнейшего переменную $y = \lambda_1/kT$. Тогда условие того, что пар с параметрами \bar{n} , \bar{T} является перенасыщенным (это условие сводится к неравенству $\bar{T}_s \geq \bar{T}$), примет вид $y_0 \geq 3$. Согласно существующим оценкам [8], значение $y_{\text{кр}}$ для критической температуры $T_{\text{кр}}$ металлов есть $y_{\text{кр}} \sim 3 \div 5$; при температуре поверхности $T_0 \geq T_{\text{кр}}$ фазовый переход конденсированная фаза—пар отсутствует, т. е. все процессы в этой области носят существенно иной характер. Ограничимся здесь поэтому областью $T_0 < T_{\text{кр}}$, т. е. $y_0 > 3 \div 5$. Таким образом, в рассматриваемых условиях всегда имеем $\bar{T}_s > \bar{T}$, причем степень перенасыщения тем выше, чем меньше начальная температура поверхности T_0 . Это должно повлечь за собой конденсацию пара в расширяющемся газе почти сразу у поверхности, что и должно быть учтено при рассмотрении газодинамической задачи о разлете пара. Заранее очевидно, с другой стороны, что при достаточно низкой температуре поверхности T_0 и низком значении плотности газа конденсация станет настолько медленным процессом, что не окажет влияния на характеристики течения; расширение при этом будет совершаться по адиабате Пуассона с граничными условиями (1.11), (1.12). В дальнейшем поступим следующим образом: рассмотрим задачу о равновесной конденсации в потоке, а затем из ее решения найдем условия, при которых конденсация замораживается сразу же у поверхности (первый режим течения) или на некотором расстоянии от поверхности при достаточном для этого расширении (второй режим течения).

3. Перейдем к определению граничных условий для газодинамической задачи с равновесной конденсацией. Поскольку перенасыщение пара в широком интервале условий весьма значительно и, как показывают оценки, обычно намного больше критического [7], существует зона L_1 , примыкающая к зоне L , в которой должен произойти переход пара из резко неустойчивого в термодинамическом отношении состояния в устойчивое. Пройдя ее, пар частично сконденсируется, температура его за счет выделения теплоты перехода λ_1 повысится, и состояние его приблизится к состоянию равновесия — насыщению. Ясно, что зона L_1 существует отдельно от зоны L , поскольку для образования комплекса хотя бы из двух частиц требуется время, не меньшее времени тройного соударения частиц, которое есть $\tau_3 \sim 1/n^2 \sigma u V_0$, где V_0 — объем, занимаемый соударяющимися частицами, $V_0 \sim 1/\bar{n}_0$ (\bar{n}_0 — плотность частиц в конденсированной фазе). Отсюда характерный масштаб для L_1 есть $L_1 \sim \tau_3 u \sim L \bar{n}_0/n$, т. е. он приближается к масштабу L только при плотности пара $n \sim n_0$, когда $y \sim y_{\text{кр}}$. В газо-

динамическом отношении зона L_1 , очевидно, является разрывом, что следует из приведенной оценки ее толщины.

Таким образом, переход от резко перенасыщенного состояния пара на внешней границе зоны L к состоянию, близкому к насыщению на внешней границе зоны L_1 , в газодинамическом смысле совершается скачком*). Рассмотрим подробнее условия на этом скачке. На внешней границе зоны L_1 и далее вниз по потоку имеем течение равновесной двухфазной системы насыщенный пар — частицы конденсата. При адиабатическом расширении течение это является автомодельным с граничным условием $u(x)|_{x=0} = c$ (здесь равенство $x=0$ следует понимать, конечно, в газодинамическом смысле). На внешней границе слоя L_1 имеем, следовательно, для этого случая условие равенства скорости газа u_s местной скорости звука c_s , определяемой адиабатой равновесной двухфазной системы насыщенный пар — частицы конденсата:

$$u_s = c_s, \quad (1.14)$$

которым заменяется граничное условие (1.11), справедливое в случае расширения пара с замороженной конденсацией, когда во всей области течения $\gamma=5/3$. Для получения замкнутой системы уравнений, связывающей термодинамические параметры системы до и после скачка, к (1.3) — (1.5), (1.14) (или при приближенном подсчете к (1.9), (1.10), (1.14)) следует присоединить соотношения, выражающие собой законы сохранения числа частиц, импульса и энергии по обе стороны разрыва:

$$j_m = \bar{n}\bar{u} = n_s u_s, \quad (1.15)$$

$$j_p = \bar{p} + m\bar{n}\bar{u}^2 = p_s + mn_s u_s^2, \quad (1.16)$$

$$j_e = j_m \left(\lambda_1 + 2,5k\bar{T} + \frac{m}{2}\bar{u}^2 \right) = j_m [(1 - \alpha_s)(\lambda_1 + 3kT_s) + 3,5\alpha_s kT_s], \quad (1.17)$$

где n_s , u_s , p_s , T_s , α_s — плотность, скорость, давление, температура и степень конденсации в двухфазной системе непосредственно за скачком. Последняя определена по формуле

$$\alpha = n_{\text{ж}}/n; \quad n = n_{\text{ж}} + n_{\text{п}}, \quad (1.18)$$

где $n_{\text{ж}}$, $n_{\text{п}}$ — числа атомов в единице объема системы, приходящихся на конденсированную фазу и пар соответственно. В (1.17) учтено, что внутренняя энергия единицы массы двухфазной системы есть (с учетом потенциальной энергии связи λ_1 на частицу)

$$\varepsilon = [(c_V^n + \lambda_1)n_{\text{п}} + c_V^{\text{ж}}n_{\text{ж}}]V = (1,5kT + \lambda_1)\frac{1-\alpha}{m} + 3kT\frac{\alpha}{m}, \quad (1.19)$$

где $c_V^n = 1,5k$, $c_V^{\text{ж}} = 3k$ — удельные теплоемкости в расчете на атом для пара и конденсированной фазы. Имеем, кроме того, для адиабаты насыщенного пара и уравнения состояния пара:

$$n_{\text{п}} = \left(\frac{mk\theta_0^2}{2\pi\hbar^2 T} \right)^{3/2} \exp \left[-\frac{\lambda_1}{kT} - 1 \right], \quad (1.20)$$

$$p = n_{\text{п}}kT = (1 - \alpha)nkT. \quad (1.21)$$

*) Этот скачок отличается от обычно рассматриваемого конденсационного скачка [9] только тем, что состояние пара до скачка и двухфазной системы за скачком в нашем случае описывается разными адиабатами, а также условием, налагаемым на скорость за скачком режимом течения (см. ниже).

Принимая, что состояние системы за скачком равновесно, имеем для скорости газа u_s , равной скорости звука c_s , выражение

$$u_s^2 = c_s^2 = \left(\frac{dp}{d\rho} \right)_s = \frac{\lambda_1}{m y_s} (1 - \alpha_s) \left[1 + \frac{1}{y_s} + \frac{1}{y_s - 0,5} - \frac{3}{y_s (y_s - 0,5) (1 - \alpha_s)} \right], \quad (1.22)$$

при получении которого использовано условие адиабатичности

$$d\varepsilon + p dV = 0; \quad V = 1/nm. \quad (1.23)$$

Анализ показывает, что для рассматриваемого течения всегда $\alpha_s \ll 1$, поэтому в (1.15), (1.16) можно положить $\alpha_s = 0$; в случае, если значение α_s представляет интерес, его можно определить после нахождения остальных параметров из (1.17).

Для приближенного нахождения граничных условий используем (1.9), (1.10), (1.15), (1.20). Тогда

$$\tau_s = T_s/T_0 = y_0/y_s = [1 + y_0^{-1} \ln \sqrt{2\pi} - (\ln \tau_s)/y_0]^{-1} \simeq 1 - 0,90/y_0, \quad (1.24)$$

$$x_s = n_s/n_0 = (2\pi\tau_s)^{-1/2} \simeq 0,4(1 + 0,46/y_0). \quad (1.25)$$

Ниже выяснится, что (1.24) практически совпадает с точным результатом, а (1.25) дает систематическое завышение порядка 30%.

§ 2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ГАЗОДИНАМИЧЕСКИХ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ С УЧЕТОМ ОБРАТНОГО ПОТОКА ЧАСТИЦ ПАРА, КОНДЕНСИРУЮЩИХСЯ НА ПОВЕРХНОСТИ

Как уже отмечалось, для описания течения пара в зоне L методы теории сплошной среды неприменимы. Задача эта является задачей молекулярно-кинетической теории газов и должна рассматриваться с помощью кинетического уравнения Больцмана. Ввиду очевидных трудностей ограничимся приближенным ее решением. Поступим следующим образом. Рассмотрим кинетическое уравнение со столкновительным членом в релаксационной форме [10]; решение его даст возможность выбрать пробную функцию распределения $f^-(v, 0)$ для частиц, возвращающихся на поверхность; последнюю используем для решения задачи об определении параметров газа непосредственно у поверхности и на бесконечности (в газокинетическом смысле) с помощью уравнений для первых четырех моментов полной функции распределения*). Совместно с условием (1.11) или условиями (1.14) — (1.17) полученная таким образом система уравнений определит искомые граничные условия соответственно для первого или второго режимов течения.

При одномерном стационарном разлете пара от поверхности кинетическое уравнение для функции распределения частиц по скоростям со столкновительным интегралом в релаксационном виде имеет вид [10]

$$v_x \frac{df}{dx} = (f_0 - f) \tau^{-1}; \quad f_0 = n \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} \exp \left\{ -\frac{m}{2kT} [(v_x - u)^2 + v_y^2 + v_z^2] \right\}. \quad (2.1)$$

*) Эти уравнения дадут одновременно возможность определить параметры пробной функции $f^-(v, 0)$; отметим в этой связи работы [11, 12], где функция $f^-(v, 0)$ полагалась равной функции распределения частиц с $v_x \leq 0$ при $x \rightarrow \infty$, $f_0^-(v, \infty)$.

Здесь f_0 — локально максвелловская функция распределения; n , T , u — локальные плотность, температура и скорость газа; τ — время релаксации, определенное с точностью до численного множителя, $\tau \sim l/\bar{v}$; \bar{v} — средняя тепловая скорость частиц. Граничные условия для (2.1):

$$f(v, 0)|_{v_x > 0} = f^+(v, 0) \equiv f_{00}, \quad (2.2)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(v, x) = \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} \bar{n} \exp \left\{ -\frac{m}{2kT} [(v_x - \bar{u})^2 + v_y^2 + v_z^2] \right\}, \quad (2.3)$$

где \bar{n} , \bar{T} , \bar{u} — значения плотности, температуры и скорости газа вдали от поверхности, где в результате соударений частиц их распределение по скоростям стало равновесным — максвелловским.

Решение (2.1), удовлетворяющее условиям (2.2), (2.3):

$$f^+ = f_{00} \exp \left(-\frac{x}{\tau v_x} \right) + \frac{1}{\tau v_x} \int_0^x dx' f_0^+(x') \exp \left(\frac{x' - x}{\tau v_x} \right), \quad (2.4)$$

$$f^- = -\frac{1}{\tau v_x} \int_x^\infty dx' f_0^-(x') \exp \left(\frac{x' - x}{\tau v_x} \right),$$

где f^\pm означает соответственно части функции распределения частиц для $v_x \geq 0$ и для $v_x \leq 0$. Из (2.4) видно, в частности, что характерный масштаб зоны L , на протяжении которой поток релаксирует к равновесному состоянию, составляет несколько ($\sim 2-3$) длин свободного пробега частиц газа. (2.4) получено в предположении $\tau = \text{const}$; обобщение решения на случай переменного τ ничего не меняет в последующем изложении.

Решение (2.4) содержит в качестве параметров функции $n(x)$, $T(x)$ и $u(x)$; пользуясь их определением через функцию распределения, можно, как это сделано в [13], получить систему нелинейных интегральных уравнений, из которой определяются профили этих величин, удовлетворяющие заданным условиям при $x=0$, $x=\infty$. Нас, однако, интересует связь между значениями этих параметров при $x=0$, $x=\infty$ и параметрами поверхности T_0 и n_0 . Воспользуемся для этой цели интегральной записью законов сохранения числа частиц, импульса и энергии через моменты функции распределения для контрольных поверхностей $x=0$ и $x=\infty$. Имеем

$$\rho_{000} = n, \quad \rho_{100} = nu, \quad \rho_{100} = \bar{\rho}_{100}, \quad \rho_{200} = \bar{\rho}_{200}, \quad (2.5)$$

$$\rho_{300} + \rho_{120} + \rho_{102} = \bar{\rho}_{300} + \bar{\rho}_{120} + \bar{\rho}_{102},$$

где обозначено

$$\rho_{nlm}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} v_x^n v_y^l v_z^m f(v, x) dv_x dv_y dv_z; \quad (2.6)$$

ρ_{nlm} , n , u вычисляются при $x=0$, $\bar{\rho}_{nlm}$ — при $x=\infty$; последние три уравнения из (2.5) эквивалентны (1.3)–(1.5). Для части функции распределения $f^-(v, 0)$ возьмем ее приближенное (согласно (2.4), максимальное) значение:

$$f^-(v, 0) = \bar{f}_0^-(v, 0), \quad (2.7)$$

Выбор $f^-(v, 0)$ в виде (2.7) соответствует, очевидно, завышению обратного потока частиц, конденсирующихся на поверхности, по сравнению с его

реальным значением. При подсчете потоков (2.7) следует умножить на коэффициент прилипания β' , обычно принимаемый равным коэффициенту испарения β ; для металлов $\beta' \approx 1$ [5,6].

Подставляя в (2.5) (2.6), (2.7), (2.2), найдем, выполняя необходимые интегрирования:

$$n_0 = n(1 + \Phi); \quad j_m = nu = \bar{n}\bar{u} = \frac{n_0}{2\sqrt{\pi}\alpha_0} - \frac{n}{2\sqrt{\pi}\alpha} [e^{-a^2} - \sqrt{\pi}a(1-\Phi)], \tag{2.8}$$

$$\frac{2}{m} j_p = \frac{\bar{n}}{a} (1 + 2\bar{a}^2) = \frac{n_0}{2\alpha_0} + \frac{n}{2\alpha_1} \left[(1 + 2a^2)(1 - \Phi) - \frac{2a}{\sqrt{\pi}} e^{-a^2} \right],$$

$$\frac{2\sqrt{\pi}}{m} j_e = \frac{\sqrt{\pi}}{\bar{a}} j_m (2,5 + \bar{a}^2) = \frac{n_0}{\alpha_0\sqrt{\alpha_0}} + \frac{n}{2\alpha_1\sqrt{\alpha_1}} \times \\ \times [a\sqrt{\pi}(2,5 + a^2)(1 - \Phi) - (2 + a^2)e^{-a^2}],$$

где

$$\Phi = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^a e^{-\xi^2} d\xi; \quad a = u\sqrt{\alpha_1}; \quad \bar{a} = \bar{u}\sqrt{\alpha_1}; \quad \alpha_0 = \frac{m}{2kT_0};$$

$$\alpha_1 = \frac{m}{2kT}; \quad \bar{\alpha} = \frac{m}{2k\bar{T}}.$$

Система уравнений (2.8) является искомой. Результаты численного решения ее совместно с (1.11) (течение без конденсации) и с (1.14) — (1.17) (течение с конденсацией) приведены в таблице. В последней колонке дано отношение результирующего потока частиц пара от поверхности j_m к максимальному $j_{m, \max}$ (получающемуся при $f^-(v, 0) = 0$).

Т а б л и ц а

Параметры течения

| Режим течения | y_0 | $M = \bar{u}/\bar{c}$ | $\bar{x} = \bar{n}/n_0$ | $\bar{\tau} = \bar{T}/T_0$ | $x_s = n_s/n_0$ | $\tau_s = T_s/T_0$ | $z = j_m/j_{m, \max}$ |
|-----------------|-------|-----------------------|-------------------------|----------------------------|-----------------|--------------------|-----------------------|
| Без конденсации | | 1 | 0,31 | 0,65 | | | 0,82 |
| С конденсацией | 160 | 0,49 | 0,50 | 0,81 | 0,29 | 0,99 | 0,73 |
| | 11 | 0,55 | 0,47 | 0,79 | 0,32 | 0,89 | 0,77 |
| | 5,2 | 0,60 | 0,45 | 0,76 | 0,34 | 0,82 | 0,79 |

В представляющем интерес интервале температур поверхности T_0 ($y_0 \sim 5 \div 15$) доля частиц, возвращающихся на поверхность, как видно из таблицы, не превышает $\sim 20 \div 25\%$ от полного количества испаренных частиц, чем и объясняется сравнительно небольшое различие между приведенными выше приближенными и полученными здесь более точными результатами. Вследствие слабой зависимости всех параметров от y_0 для расчетов при течении с конденсацией практически всегда можно пользоваться данными третьей строки таблицы.

§ 3. ГАЗОДИНАМИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА О РАЗЛЕТЕ ВЕЩЕСТВА ОТ ПОВЕРХНОСТИ

1. Рассмотрим одномерное адиабатическое нестационарное течение расширения равновесной двухфазной системы. Пар будем предполагать идеальным невязким и нетеплопроводным газом, температуру испаряющейся поверхности — постоянной, равной T_0 , возникшей на поверхности

в момент времени $t=0$. Процессами установления течения в кинетической области у поверхности, связанными с процессом нарастания температуры T_0 и установлением стационарного испарения, пренебрежем^{*}. Параметрами задачи являются значения давления, плотности, температуры и начальной степени конденсации у границы $x=0$, из которых нельзя составить комбинаций с размерностью длины или времени. Такое течение, как известно [9], зависит от координаты x и времени t через их отношение $\xi=x/t$ и называется автомодельным. Уравнения, описывающие течение, после введения автомодельной переменной имеют вид [9]

$$(u - \xi) \frac{d\rho}{d\xi} + \rho \frac{du}{d\xi} = 0, \quad (3.1)$$

$$(u - \xi) \frac{du}{d\xi} + \frac{1}{\rho} \frac{dp}{d\xi} = 0. \quad (3.2)$$

Здесь u , ρ , p — скорость, плотность, давление. К (3.1), (3.2) следует при соединить условие адиабатичности (1.23) совместно с выражениями для параметров системы (1.18)—(1.21). Из (1.23), (1.18)—(1.21) найдем дифференциальное уравнение для T и α , которым описывается адиабатический процесс в системе:

$$y(y - 0,5) d\alpha + [3 + y(\alpha - 1)] dy = 0; \quad y = \lambda_1/kT. \quad (3.3)$$

Решение его представляет собой адиабату системы при заданных начальных условиях, которые выберем в виде^{**})

$$\alpha_s(y_s) = 0. \quad (3.4)$$

Интегрируя (3.3) с (3.4), найдем

$$\alpha = 1 - \frac{y_s - 0,5 - 3 \ln(y_s/y)}{y - 0,5}. \quad (3.5)$$

Теперь из (3.1), (3.2) можно исключить одну из функций ρ или u и получить решение задачи.

Из (3.1), (3.2) имеем, как обычно [9]:

$$u = u_s + \int_{\rho}^{\rho_s} d\rho (dp/d\rho)^{1/2} \rho^{-1}, \quad (3.6)$$

$$u = \xi + (dp/d\rho)^{1/2}, \quad (3.7)$$

где при определении постоянной интегрирования положено $\rho = \rho_s$ при $u = u_s$, а при выборе знака учтено, что газ при движении ускоряется. Из (3.7) следует, что при $x=0$ ($\xi=0$) $u = u_s = (dp/d\rho)_{x=0}^{1/2} = c_s$, т. е. начальная скорость разлета должна быть равна местной скорости звука; то же относится и к течению без конденсации.

^{*}) Характерное время установления течения τ' по порядку величины есть $\tau' \sim L_1/u \sim \Gamma n_0/n_i \sim n_0/n^2 \sigma u$ и в обычных условиях мало; так при $n \sim 10^{20} \text{ см}^{-3}$ $\tau' \sim 10^{-7} \text{ сек}$. Для поддержания стационарного испарения энергетические затраты должны компенсироваться подводом энергии к поверхности тела извне согласно уравнению баланса $q = j_m (2,5 kT + 0,5 m \bar{u}^2)$, где q — плотность потока энергии, подводимой к телу. Отсюда следует связь T_0 и параметров пара с величиной q .

^{**}) Для простоты вычислений рассмотрим только это приближение; обобщение решения на случай $\alpha_s \neq 0$ принципиальных трудностей не представляет.

Ограничимся далее для наглядности приближенными результатами при $y, y_s \gg 1$, $y - y_s \ll y, y_s$. Для α из (3.5) тогда получим

$$\alpha \approx 1 - y_s/y \quad (3.8)$$

и аналогично для давления, плотности и скорости звука из (1.20)–(1.22)

$$p \approx \lambda_1 n y_s / y^2; \quad n \approx \left(\frac{mk^2 \theta_0^2}{2\pi \hbar^2 \lambda_1} \right)^{3/2} \frac{y^{5/2}}{y_s} e^{-y}; \quad c^2 = \frac{dp}{d\rho} \approx \frac{p}{\rho} (1 + 2/y). \quad (3.9)$$

Подставляя полученные выражения в (3.6), (3.7), найдем

$$u/u_s \approx 1 + y_s \ln(y/y_s), \\ u \approx \xi + u_s y_s / y, \quad (3.10)$$

откуда следует связь между температурой и автомодельной переменной:

$$y \approx y_s \exp(\xi/y_s u_s). \quad (3.11)$$

Соотношения (3.10), (3.11) совместно с (3.9) дают искомое решение задачи в области, где расширение потока сопровождается равновесной конденсацией.

2. Найдем условия, ограничивающие область справедливости полученного решения. Уравнение кинетики роста частиц конденсата в паре при стандартных предположениях [14, 15]:

$$\frac{dg}{dt} = 4\pi d^2 g^{2/3} \bar{v} n_n (1 - e^{-\theta}), \quad (3.12)$$

где $g = \frac{4}{3} \pi r_k^3 \bar{n}_0$; r_k — радиус частицы; \bar{v} — средняя тепловая скорость частиц пара, $\bar{v} = \left(\frac{kT}{2\pi m} \right)^{1/2}$; $\theta = \frac{T_p - T}{T_p}$ — переохлаждение в паре с температурой T , плотности n_n которого соответствует температура насыщения T_p , $d = (3/4\pi \bar{n}_0)^{1/3}$. При начальном переохлаждении θ , гораздо большем критического значения $\theta_{кр}$ [7], что, как легко показать, реализуется в рассматриваемых условиях, все центры конденсации (обычно это ионы) оказываются устойчивыми и растут. Возникновение их практически ограничено зоной конденсационного скачка, так как интенсивность этого процесса зависит от θ экспоненциально [7]. Положим далее число центров конденсации равным начальному количеству ионов, тогда $g = \alpha/\beta_{i0}$, где β_{i0} — начальная степень ионизации.

При течении, близком к равновесному, разность скоростей прямого и обратного процессов в правой части (3.12) гораздо меньше самих скоростей. Сильное отклонение от равновесия вследствие запаздывания одного из этих процессов приводит к тому, что результирующая скорость процесса dg/dt возрастает до величины скоростей его составляющих. Условие замерзания конденсации имеет, таким образом, вид

$$\frac{dg}{dt} \lesssim 4\pi d^2 g^{2/3} \bar{v} n_n, \quad (3.13)$$

где при вычислении входящие величины можно считать приближенно равными своим равновесным значениям, как это сделано, например, в [15] при расчете нарушения ионизационного равновесия.

Подставляя в (3.13) $g = \alpha/\beta_{i0}$ с β_{i0} , определяемым формулой Саха [15]

$$\beta_{i0} \approx 7 \cdot 10^7 (g_+/g_a)^{1/2} T_s^{3/4} n_s^{-1/2} \exp(-\delta y_s/2), \quad \delta = J/\lambda_1,$$

(g_+/g_a — отношение статистических весов иона и атома, для водородоподобного атома равное $g_+/g_a \approx 2$, а J — потенциал ионизации), используя (3.8) — (3.11) и выражение полной производной по времени через автомодельную переменную $td/dt = cd/d\xi$, найдем окончательно

$$t \gtrsim 1,5 \cdot 10^{-13} \lambda_0^{1/2} y_s^{3/2} A^{-3/4} y^{-3} \exp [y + y_s (\delta - 1)/6], \quad (3.14)$$

где A — атомный вес, $\lambda_0 = 10^{12} \lambda_1$.

Уравнение (3.14) совместно с (3.11) представляет собой уравнение движения фронта замораживания процесса конденсации; между поверхностью тела и этим фронтом конденсация «следит» за условиями в потоке, и степень ее α можно считать равновесной; в области фронта замораживания течение неравновесно и должно описываться уравнениями газодинамики совместно с уравнением кинетики (3.12); перед фронтом замораживания конденсация в потоке прекращается, и дальнейшее расширение происходит по адиабате Пуассона. Начальные условия для этого последнего течения определяются условиями на фронте замораживания; само оно может быть построено из известного общего решения для нестационарного одномерного течения идеального газа с заданными граничными условиями [9]. Отметим также, что (3.14) определяет при заданной температуре поверхности T_0 промежуток времени t , в течение которого конденсация отсутствует во всем течении, т. е. реализуется режим течения с условием (1.11), названный выше первым. Течение при этом автомодельно, зависимости всех параметров от ξ соответствуют приведенным в [4], граничные условия даются первой строкой таблицы.

Рассмотрим численный пример для Fe ($\delta = 1,8$; $\lambda_1 = 6,88 \cdot 10^{-12}$ эрг) при $y_s = 10$ ($u_s \approx 10^5$ см/сек; $T_0 \approx 5500^\circ$ К; $q \sim 10^7$ вт/см²). При не очень больших ξ из (3.11) имеем $y \approx y_s + \xi/u_s$; тогда из (3.14) находим для фронта замораживания $\xi^* \sim u_s (22 + \ln t)$; вследствие логарифмической зависимости ξ^* от t замороженное течение перед фронтом можно считать приближенно автомодельным. Температура на фронте $y^* \approx y_s + \xi^*/u_s$, скорость из (3.10) $u^* \approx u_s + \xi^* y_s$, откуда, например, при $t = 10^{-8}$, 10^{-7} сек $y^* = 13,4$, 16 ($T^* = 3700$; 3200° К), а $u^* \approx 4 \cdot 10^5$, $6 \cdot 10^5$ см/сек. Если $t < 3 \cdot 10^{-10}$ сек, фронт замерзания расположен на поверхности тела и течение заморожено по конденсации во всей области.

3. Рассмотрим в заключение вопрос об устойчивости по отношению к высокочастотным звуковым возмущениям течения в конденсационном скачке, задающем граничные условия для газодинамической задачи. Высокочастотные возмущения, проникая из звуковой (по низкочастотному звуку, см. ниже) области за скачком в дозвуковую область в скачке и перед ним, могут привести к нестационарности течения в этой области, если характерный размер ее меньше длины затухания возмущений. Покажем, что обычно реализуется противоположная ситуация, т. е. течение устойчиво.

Рассмотрим систему гидродинамических уравнений для малых возмущений с учетом уравнения кинетики (3.12), разлагая, как в [16], все параметры в окрестности точки равновесия: $p = p_0 + p'$, $\rho = \rho_0 + \rho'$, $\alpha = \alpha_0 + \alpha'$ и т. д., где p' , ρ' , α' и т. д. $\sim \exp [i(ax - \omega t)]$; $a = \omega/c + i\kappa$; $c = c(\omega)$ — скорость распространения, $\kappa = \kappa(\omega)$ — коэффициент поглощения звукового возмущения с частотой ω и волновым числом a . Имеем, как обычно [9], после подстановки всех величин в гидродинамические и кинетические уравнения однородную алгебраическую систему уравнений для амплитуд p' , ρ' , α' и т. д. Из условия равенства нулю ее определителя находим с точностью до величин $\sim 1/y$ в области непосредственно за конденсационным скачком дисперсионное уравнение для $a = a(\omega)$:

$$a^2(0,6 - i\gamma) = \omega^2(1 - i\gamma) 3my_0/5\lambda_1; \quad \gamma = 3\omega/2y_s F_0;$$

$$F_0 = 4\pi a^2 n_s \beta_{i0}^{1/3} \left(\frac{\lambda_1 y_s}{2\pi m} \right)^{1/2}$$

Отсюда при $\omega \rightarrow 0$ и $\omega \rightarrow \infty$ соответственно для равновесного (s) и замороженного (f) звука следует:

$$c_s = (kT_s/m)^{1/2}; \quad \kappa_s = \omega^2/2 \sqrt{\pi} y_s F_0 c_s; \quad (3.15)$$

$$c_f = (5kT_s/3m)^{1/2}; \quad \kappa_f = 2y_s F_0/15c_f. \quad (3.16)$$

Таким образом, высокочастотные возмущения из области за скачком не сносятся потоком (скорость которого $u_s = c_s$) и могут проникать в дозвуковую область; масштаб их затухания есть $l_f = 1/\kappa_f$. Сравнивая l_f с характерным размером конденсационного скачка L_1 , убеждаемся, что практически всегда $L_1 \gg l_f^*$, т. е. рассмотренное течение устойчиво. Численно условие устойчивости сводится к оценке (при $y_s \sim 10$, $\bar{n}_0 \sim 5 \cdot 10^{22} \text{ см}^{-3}$, $\sigma \sim 10^{-16} \text{ см}^2$)

$$10^{24} (\beta_{i0})^{1/3} \gg n_s.$$

Авторы пользуются возможностью поблагодарить М. А. Ельяшевича и Л. И. Комарова за обсуждение результатов работы, И. В. Немчинова за стимулирующую дискуссию по ряду затронутых вопросов.

Литература

1. Ready J. F. J. Appl. Phys., 36, 462, 1965.
2. Анисимов С. И., Бонч-Бруевич А. М., Ельяшевич М. А., Мася А., Павленко Н. А., Романов Г. С. ЖТФ, 34, 1273, 1966.
3. Уляков П. И. ЖЭТФ, 52, 820, 1967.
4. Афанасьев Ю. В., Крохин О. Н. ЖЭТФ, 52, 966, 1967.
5. Кнаке О., Странский И. Н. УФН, 68, 261, 1959.
6. Пол В. A.R.S.J. (русск. перевод), 32, № 9, 3, 1962.
7. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Статистическая физика. Физматгиз, 1964.
8. Задумкин Н. С. ИФЖ, 3, № 10, 63, 1960.
9. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика сплошных сред. ГИТТЛ, 1954.
10. Коган М. Н. Динамика разреженного газа. Изд. «Наука», 1967.
11. Кучеров Р. Я., Рикенглаз Л. Э. ЖЭТФ, 37, 125, 1959.
12. Кучеров Р. Я., Рикенглаз Л. Э. ЖЭТФ, 37, 1821, 1959.
13. Любарский Г. Я. ЖЭТФ, 40, 1050, 1961.
14. Райзер Ю. П. ЖЭТФ, 37, 1741, 1959.
15. Зельдович Я. Б., Райзер Ю. П. Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений. Физматгиз, 1966.
16. Черных Е. М. ПМТФ, № 1, 95, 1965.

Институт физики
АН БССР

Поступило в редакцию 14.VIII 1967

* Во избежание недоразумений отметим, что уравнение кинетики (3.12) описывает процесс конденсации на более поздней стадии его, когда центры конденсации приобретают макроскопические размеры, поэтому оценка масштаба L_1 не следует из (3.12).

Э. В. ПАТНІКАЎ

АСІМЕТРЫЯ ТОКУ ПРЫ КАРОННЫМ РАЗРАДЗЕ З ЭЛЕКТРОДА, ЯКІ ПАДАГРАЕЦА

Вывучэнне вольт-амперных характарыстык кароннага разраду з вострага краю, што падаграецца, ажыццяўлялася наступным чынам (рыс. 1). Высокае напружанне падводзілася да цыліндра дыяметрам 100 мм, па восі якога размяшчаўся заземлены караніруючы электрод, што быў уключаны ў ланцуг напалу. Таўшчыня гэтага электрода 0,04 мм, шырыня 1,5 мм і даўжыня 50 мм. Ён размяшчаўся над экрануючым электродам, які знаходзіўся пад патэнцыялам, роўным патэнцыялу караніруючага электрода. У выніку разрад мог працякаць толькі ў напрамку краю, процілеглага экрануючаму электроду. Такая асіметрыя разраду дазваляла назіраць механічныя эфекты, што ўзнікаюць пры караніраванні.

Супраціўленне разраду можна вызначыць як суадносіны прыкладзенага да разрадлага прамежку напружання U і току разраду I . У адпаведнасці з вынікамі па кароннаму разраду [1—3] супраціўленне R галоўным чынам прыпадае на прыэлектродны караніруючы слой, памеры якога дастаткова малыя, каб можна было яго тэмпературу лічыць роўнай тэмпературы караніруючага электрода. Залежнасці $\ln R$ ад $1/T$ (рыс. 2) маюць выгляд прамых, вугал нахілу якіх змяншаецца ў сувязі з павелічэннем напружання U , што падаецца да разрадлага прамежку.

Такім чынам, пры фіксаваным значэнні U залежнасці набываюць экспаненцыяльны характар:

$$R = \frac{1}{A} \exp\left(\frac{B}{T}\right), \quad (1)$$

дзе A і B — пастаянныя.

З другога боку,

$$R = c' \frac{1}{en_i \mu}. \quad (2)$$

Тут e — зарад электрона; μ — рухомасць носьбітаў зараду; n_i — канцэнтрацыя носьбітаў зарадаў; c' — пастаянная для дадзенай геаметрыі разрадлага прамежку.

Выкарыстаем выраз для цеплага ўзбуджэння паўправадніка з уласнай праводнасцю, калі з'яўленне кожнага электрона праводнасці суправаджаецца ўзнікненнем дзіркі [4]:

$$n_i = n_T \exp\left(-\frac{\varepsilon^*}{2kT}\right), \quad (3)$$

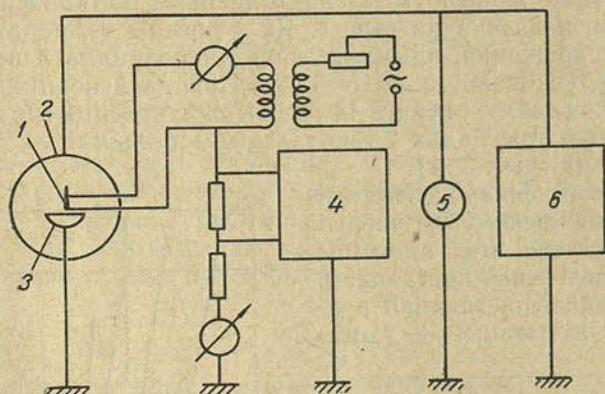
дзе ε^* — эфектыўная энергія актывацыі іанізацыі, якая залежыць ад прыкладзенага напружання; k — пастаянная Больцмана; $n_T = p/kT$ — шчыльнасць газу пры дадзенай тэмпературы T ; p — ціск.

Такім чынам, выраз (2) можа быць запісан так:

$$R = c' \frac{kT}{e\mu} \exp\left(\frac{\varepsilon^*}{2kT}\right). \quad (4)$$

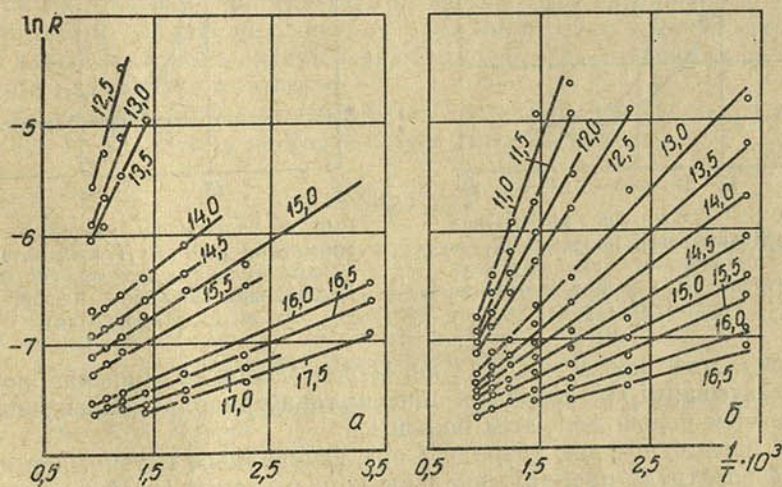
Паколькі пры $U = \text{const}$ $\mu \sim T/p$ [5], пераэкспаненцыяльны множнік будзе велічынёй пастаяннай і выраз (4) прымае выгляд

$$R = c \exp\left(\frac{\varepsilon^*}{2kT}\right). \quad (5)$$



Рыс. 1. Схема ўстаноўкі:

1, 2, 3 — адпаведна караніруючы, некараніруючы і экрануючы электроды; 4 — электронны патэнцыяметр ЭПП-09; 5 — кілавольтметр; 6 — высакавольтыны выпрамаінік



Рыс. 2. Залежнасць $\ln R$ ад $1/T$ пры змяненні патэнцыялу караніруючага электроду пры адмоўнай (а) і дадатнай (б) каронах. Лічбы на крывых — значэнні U , кВ

Формула (5) для супраціўлення разраду адпавядае эксперыментальнай залежнасці (1). Тады з тангенса вуглоў нахілу прамых (рыс. 2) можна вылічыць эфектыўную энергію актывацыі іанізацыі для любога значэння напружання, прыкладзенага да разрадлага прамежку.

Характэрна, што на рис. 3 да $U=14$ кв крывыя, што выражаюць залежнасць ε^* ад U , паступова збліжаюцца, а пры далейшым павышэнні патэнцыялу крывыя ідуць паралельна, прычым значэнні энергіі актывацыі для дадатнай кароны пры адпаведных патэнцыялах караніруючага электрода большыя, чым для адмоўнай. Такая асіметрыя эфектыўнай энергіі актывацыі іанізацыі, відаць, звязана са змяненнем эфектыўнай геаметрыі разрадлага прамежку. У выпадку дадатнай кароны караніруючы электрод абкружан прасторавым дадатным зарадам. Гэта можна разглядаць як павелічэнне эфектыўнага радыуса караніруючага электрода, што павінна прыводзіць да змены карцін поля ў разрадным прамежку.

Асіметрыя току, якая абумоўлена змяненнем палярнасці караніруючага электрода, паказана на рис. 4. Як з ростам тэмпературы, так і з павышэннем напружання, прыкладзенага да разрадлага прамежку, адносіны $\beta = I_{(-)}/I_{(+)}$ зніжаюцца да $U=14$ кв. Пры дасягненні караніруючым электродом патэнцыялу, роўнага 14 кв і вышэй, каэфіцыент выпраўлення β робіцца роўным прыкладна 2 і не залежыць больш ні ад тэмпературы, ні ад напружання (рис. 3, 4).

Параўнанне графікаў асіметрыі току і асіметрыі эфектыўнай энергіі актывацыі паказвае, што адносіны токаў будуць велічынёй пастаяннай, як толькі робіцца пастаяннай рознасць энергіі актывацыі $\Delta\varepsilon^*$, што

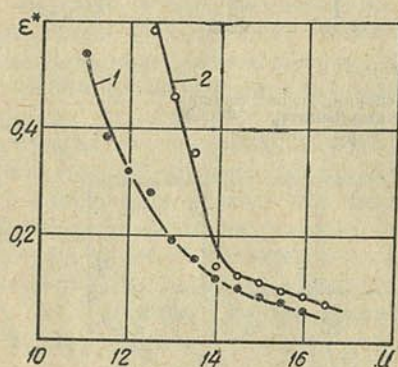


Рис. 3. Залежнасць эфектыўнай энергіі актывацыі іанізацыі ε^* , эВ ад патэнцыялу караніруючага электрода U , кв пры адмоўнай (1) і дадатнай (2) каронах

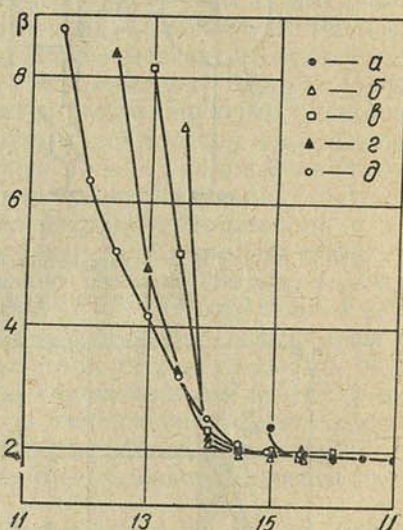


Рис. 4. Залежнасць каэфіцыента выпраўлення $\beta = I_{(-)}/I_{(+)}$ ад патэнцыялу караніруючага электрода U , кв пры $T=293, 690, 820, 950$ і 1080 К (а, б, в, г, д адпаведна)

мае месца, пачынаючы з $U=14$ кв. Перад $U=14$ кв змяненне рознасці энергіі актывацыі як і велічыня адносін токаў разраду, залежыць ад U , прычым чым больш $\Delta\varepsilon^*$, тым больш і β .

Калі лічыць, што ток разраду I пры фіксаваным патэнцыяле караніруючага электрода прапарцыянальны канцэнтрацыі іонаў у караніруючым слоі, адносіны токаў β у адпаведнасці з выразам (3) можна паказаць у выглядзе

$$\beta = \exp \left[\frac{1}{2kT} (\varepsilon_{(+)}^* - \varepsilon_{(-)}^*) \right] \quad (6)$$

або

$$\Delta\varepsilon^* = 2kT \ln \beta. \quad (7)$$

Табліца

Значэнні $\Delta \epsilon^*$ і адпаведныя ім значэнні $\ln \beta$ пры розных T

| $U, \text{кв}$ | $2kT \ln \beta, \text{эв пры } T, \text{ }^\circ\text{К}$ | | | | | $\Delta \epsilon^*, \text{эв}$ |
|----------------|---|-------|-------|-------|-------|--------------------------------|
| | 293 | 690 | 820 | 980 | 1080 | |
| 12,5 | — | — | 0,304 | 0,262 | 0,299 | 0,296 |
| 13,0 | — | — | 0,278 | 0,254 | 0,275 | 0,268 |
| 13,5 | — | 0,230 | 0,246 | 0,211 | 0,210 | 0,200 |
| 14,0 | 0,023 | — | — | — | — | 0,021 |
| 14,5 | 0,028 | — | — | — | — | 0,027 |
| 15,0 | 0,033 | — | — | — | — | 0,028 |
| 15,5 | 0,019 | — | — | — | — | 0,021 |
| 16,0 | 0,023 | — | — | — | — | 0,030 |

З табліцы відаць, што суадносіны (7) выконваюцца здавальняючым чынам у вобласці тэмпературнай залежнасці β ад T . А ў вобласці, дзе β не залежыць ад тэмпературы, выраз (7) таксама справядлівы, калі меркаваць $T=293^\circ \text{К}$. Такім чынам, асіметрыю токаў пры каронным разрадзе можна растлумачыць асіметрыяй эфектыўнай энергіі актывацыі іанізацыі.

Вывады

1. Асіметрыя току пры змяненні размернасці караніруючага электрода абумоўлена асіметрыяй эфектыўнай энергіі актывацыі іанізацыі.

2. Пры фіксаваным патэнцыяле караніруючага электрода эфектыўная энергія актывацыі іанізацыі мае большыя значэнні для дадатнай кароны ў параўнанні з адмоўнай. Розніцу ў значэннях эфектыўнай энергіі актывацыі іанізацыі можна растлумачыць эфектыўным павелічэннем радыуса караніруючага электрода ў выніку ўтварэння прасторавага дадатнага зараду вакол дадатнага вастрыя, які прыводзіць да змянення эфектыўнай геаметрыі разрадлага прамежку.

У заключэнне аўтар карыстаецца выпадкам выказаць удзячнасць прафесару Н. Ф. Куніну за пастаянную ўвагу да работы.

Літаратура

1. Капцов Н. А. Коронный разряд и его применение в электрофильтрах. Гостехиздат, 1947.
2. Леб Л. Основные процессы электрических зарядов в газах. ГИТТЛ, 1950.
3. Мик Дж., Крэгс Дж. Электрический пробой в газах. ИЛ, 1960.
4. Киттель Ч. Введение в физику твердого тела. ГИФМЛ, 1963.
5. Энгель А. Ионизованные газы. Физматгиз, 1959.

Белорусский государственный университет
им. В. И. Ленина

Поступило в редакцию 6.VII 1967

А. Г. МАХАНЕК, В. С. КОРОЛЬКОВ

**О ПРИМЕНЕНИИ АНАЛИТИЧЕСКИХ МЕТОДОВ
В ТЕОРИИ ВОЗМУЩЕНИЯ ШРЕДИНГЕРА
ДЛЯ РАСЧЕТА НЕКОТОРЫХ СПЕКТРОСКОПИЧЕСКИХ
ПАРАМЕТРОВ ВЕЩЕСТВ**

Получение численных значений поправочных функций в теории возмущения и расчет с их помощью величин энергий и различных параметров связаны с большой вычислительной работой. Поэтому в практике широкое распространение нашли аналитические методы. Небольшая точность таких расчетов в значительной степени восполняется большой простотой, удобством и общностью получаемых результатов. Аналитические результаты позволяют, как правило, проследивать закономерности, присущие целому ряду атомов или ионов, в то время как численные методы всякий раз применимы лишь к отдельному атому (иону). Кроме того, получение явного вида функций, зависящих от небольшого числа параметров, помогает правильному выбору исходных функций при численных расчетах, а также пробных функций для вариационных вычислений. Поэтому очень важен тот класс задач в теории возмущений, решения для которого могут быть найдены в замкнутом и достаточно простом виде.

В настоящей работе, а также в последующих мы рассмотрим ряд задач в теории возмущения, разрешаемых простыми аналитическими методами, для атомов (ионов), помещенных в электростатические поля других атомов (ионов). Подобного сорта задачи приходится решать при исследовании свойств примесных центров в ионных кристаллах (например, при учете влияния кристаллического окружения на энергетические уровни примеси и на снятие запрета по четности для электрических дипольных переходов). Аналогичная задача возникает при получении значений градиентов электрических полей, создаваемых в месте расположения мультипольных моментов ядер, т. е. при вычислениях постоянных сверхтонкой структуры в атомах, молекулах и кристаллах.

Более подробно мы остановимся на тех случаях, когда

1) уравнение Шредингера в первом приближении теории возмущения может быть решено в квадратурах для произвольного модельного гамильтониана, т. е. гамильтониана с произвольным видом невозмущенной потенциальной энергии, а не только водородоподобной;

2) ввиду специфических свойств функций Лягерра возмущенное уравнение Шредингера с водородоподобным потенциалом решается в чрезвычайно простых квадратурах не только для основного, но и для любого другого состояния с вырожденным уровнем.

Для большей ясности дальнейшего изложения мы коротко остановимся на некоторых отдельных вопросах теории возмущения.

О двух основных направлениях в стационарной теории возмущений. Известно, что практическое использование решения возмущенного уравнения Шредингера в матричном виде (см.,

например, [1]) сильно ограничено и усложнено из-за необходимости вычисления суммы бесконечного ряда интегралов (матричных элементов). Подобных сумм, разумеется, не приходится вычислять, когда речь идет о получении первой поправки $E^{(1)}$ к энергии. Матричный подход также оправдывает себя при решении ряда задач в теории возмущения для такой системы, как гармонический осциллятор, у которого наряду с точными волновыми функциями и величинами энергии нулевого приближения имеется только несколько отличных от нуля матричных элементов операторов x^n и p^n . Бесконечное суммирование в этом случае сводится к нахождению суммы нескольких слагаемых.

В последнее время ряд авторов использовал для решения задач теории возмущений очень эффективный путь прямого решения возмущенного уравнения Шредингера. Этот метод заключается в том, что выписывается цепочка возмущенных уравнений для волновых функций и энергий соответствующего порядка малости в виде

$$[H^{(0)} - E_n^{(0)}] u_n^{(0)} = 0, \quad (1)$$

$$[H^{(0)} - E_n^{(0)}] u_n^{(1)} + [V - E_n^{(1)}] u_n^{(0)} = 0, \quad (2)$$

$$[H^{(0)} - E_n^{(0)}] u_n^{(2)} + [V - E_n^{(1)}] u_n^{(1)} - E_n^{(2)} u_n^{(0)} = 0, \quad (3)$$

$$[H^{(0)} - E_n^{(0)}] u_n^{(3)} + [V - E_n^{(1)}] u_n^{(2)} - E_n^{(2)} u_n^{(1)} - E_n^{(3)} u_n^{(0)} = 0, \dots, \text{ т. е.} \quad (4)$$

$$[H^{(0)} - E_n^{(0)}] u_n^{(m)} + [V - E_n^{(1)}] u_n^{(m-1)} = \sum_{l=2}^{\infty} E_n^{(l)} u_n^{(m-l)} \quad (m = 0, 1, 2, 3 \dots), \quad (5)$$

$$E_n^{(1)} = \langle u_n^{(0)} | V | u_n^{(0)} \rangle, \quad E_n^{(2)} = \langle u_n^{(0)} | V - E_n^{(1)} | u_n^{(1)} \rangle, \quad (6)$$

$$E_n^{(3)} = \langle u_n^{(1)} | V - E_n^{(1)} | u_n^{(1)} \rangle,$$

а затем прямым путем ищут решение дифференциального уравнения (например, (2) для определения поправочной функции в первом приближении), учитывая ортогональность и нормировку волновых функций для соответствующего приближения, т. е.

$$\sum_{l=0}^m \langle u_n^{(l)} | u_n^{(m-l)} \rangle = \delta_{nn'} \delta_{m0}, \quad (7)$$

с точностью до $(m+1)$ -го приближения.

Следует отметить, что для решения очень многих задач с большой точностью вполне достаточно найти поправочную волновую функцию лишь в первом приближении, поскольку знание такой волновой функции позволяет рассчитать поправки к энергии второго и третьего порядка малости, т. е. $E^{(2)}$ и $E^{(3)}$. Возможность выражения $2m$ -ой и $(2m+1)$ -ой поправок к энергии через поправки к волновой функции порядка не выше m -го была доказана в работе [2] для точных волновых функций, а в [3] показано, что подобными свойствами обладают возмущенные самосогласованные волновые функции.

Случай действия двух независимых операторов возмущения. В некоторых из задач, которые будут рассмотрены нами, действуют два оператора возмущения V_a и V_b . В этом случае уравне-

ние Шредингера в первом приближении теории возмущения принимает вид

$$\begin{aligned} [H^{(0)} + V_a + V_b] (u^{(0)} + u_a^{(1)} + u_b^{(1)}) = \\ = [E^{(0)} + E_a^{(1)} + E_b^{(1)}] (u^{(0)} + u_a^{(1)} + u_b^{(1)}), \end{aligned} \quad (8)$$

где $u_a^{(1)}$ и $u_b^{(1)}$ — поправки первого приближения к волновой функции $u^{(0)}$, обусловленные соответственно V_a и V_b .

Разделяя в (8) члены с V_a и V_b , получим

$$[H^{(0)} - E^{(0)}] u_a^{(1)} = -[V_a - E_a^{(1)}] u^{(0)}, \quad (9)$$

$$[H^{(0)} - E^{(0)}] u_b^{(1)} = -[V_b - E_b^{(1)}] u^{(0)}. \quad (10)$$

Тогда поправки к энергии можно записать в виде *)

$$E^{(1)} = E_a^{(1)} + E_b^{(1)}, \quad (11)$$

$$E^{(2)} = E_{a,b}^{(2)} + E_{a,b}^{(2)}, \quad (12)$$

где

$$E_a^{(1)} = \langle u^{(0)} | V_a | u^{(0)} \rangle, \quad (13)$$

$$E_b^{(1)} = \langle u^{(0)} | V_b | u^{(0)} \rangle, \quad (14)$$

$$E_a^{(1)} = \langle u_a^{(1)} | V_a | u^{(0)} \rangle, \quad (15)$$

$$E_b^{(2)} = \langle u_b^{(1)} | V_b | u^{(0)} \rangle, \quad (16)$$

$$E_{a,b}^{(2)} = \langle u^{(0)} | V_a | u_b^{(1)} \rangle + \langle u^{(0)} | V_b | u_a^{(1)} \rangle. \quad (17)$$

Поправку $E_{a,b}^{(2)}$, обуславливающую неаддитивность поправки второго приближения, можно вычислять в принципе двумя путями: либо только с помощью $u_a^{(1)}$, получив решение уравнения (9), либо с помощью $u_b^{(1)}$ из (10), поскольку два слагаемых в (17) равны. Действительно, если взять уравнения (9) и (10) совместно с комплексно сопряженными и затем, умножив правые и левые части полученных уравнений соответственно на $u_b^{(1)*}$, $u_a^{(1)*}$ и $u_a^{(1)}$, $u_b^{(1)}$, провести интегрирование, то получим

$$\langle u_b^{(1)} | H^{(0)} - E^{(0)} | u_a^{(1)} \rangle = -\langle u_b^{(1)} | V_a - E_a^{(1)} | u^{(0)} \rangle, \quad (18)$$

$$\langle u_a^{(1)} | H^{(0)} - E^{(0)} | u_b^{(1)} \rangle = -\langle u_a^{(1)} | V_b - E_b^{(1)} | u^{(0)} \rangle, \quad (19)$$

$$\langle u_a^{(1)} | H^{(0)} - E^{(0)} | u_b^{(1)} \rangle = -\langle u^{(0)} | V_a - E_a^{(1)} | u_b^{(1)} \rangle, \quad (20)$$

$$\langle u_b^{(1)} | H^{(0)} - E^{(0)} | u_a^{(1)} \rangle = -\langle u^{(0)} | V_b - E_b^{(1)} | u_a^{(1)} \rangle. \quad (21)$$

При записи (20) и (21) учтена эрмитовость операторов. Из (18) — (21) следует

$$\begin{aligned} \langle u^{(0)} | V_a - E_a^{(1)} | u_b^{(1)} \rangle + \langle u_b^{(1)} | V_a - E_a^{(1)} | u^{(0)} \rangle = \\ = \langle u^{(0)} | V_b - E_b^{(1)} | u_a^{(1)} \rangle + \langle u_a^{(1)} | V_b - E_b^{(1)} | u^{(0)} \rangle. \end{aligned} \quad (22)$$

Приняв во внимание условие ортогональности возмущенных и нулевых функций, а также действительных матричных элементов, имеем

$$\langle u^{(0)} | V_a | u_b^{(1)} \rangle = \langle u^{(0)} | V_b | u_a^{(1)} \rangle, \quad (23)$$

*) В (11) — (17) имеется в виду, что матричные элементы действительны.

и, следовательно, выражение (20) может быть записано так:

$$E_{a,b}^{(2)} = 2 \langle u^{(0)} | V_a | u_b^{(1)} \rangle = 2 \langle u^{(0)} | V_b | u_a^{(1)} \rangle. \quad (24)$$

Таким образом, при вычислении $E_{a,b}^{(2)}$ мы можем ограничиться решением лишь одного из уравнений (9) или (10). Однако эта эквивалентность носит сугубо формальный характер, и при практических расчетах далеко не все равно, начинать ли вычисления с решения уравнения (9) или (10). Особенно выпукло видна разница на примере решения возмущенного уравнения Шредингера с водородоподобным потенциалом $V^{(0)}$, когда невозмущенное состояние вырождено.

Дело в том, что часто один из операторов возмущения может иметь такую структуру, что он не перемешивает волновых функций, относящихся к вырожденному уровню, по причине равенства нулю недиагональных матричных элементов, в то время как другой оператор возмущения не обладает этим свойством. Естественно, что в этом случае следует искать решение уравнения с неперемешивающим оператором, что позволяет намного упростить вычисления. В теории спектроскопии тонкой и сверхтонкой структуры часто встречаются задачи, когда один из операторов возмущения пропорционален величинам $\frac{1}{r^2}, \frac{1}{r^3}, \dots, \frac{1}{r^{l'-l+1}}$. Для водородоподобных же радиальных функций имеет место тот факт, что *)

$$\int_0^\infty \frac{u_{nl}^0 u_{n'l'}^0}{r^k} dr = 0 \quad (25)$$

для $k = 2, 3, \dots, l' - l + 1$, где $l' > l$, и, следовательно, оператор возмущения не перемешивает в нулевом приближении волновых функций вырожденного уровня с различными значениями l и l' , когда $l' < n$. Тогда возмущенное уравнение остается справедливым для каждой отдельной nl -орбитали и может быть решено в простых квадратурах. Равенство (25) легко проверить прямым интегрированием, если для вычисления воспользоваться производящей функцией $\varphi_p(\rho, s)$ полиномов Лагерра L_q^p , подобно тому, как это делалось Шредингером [4].

Так, в силу соотношений

$$\varphi_p(\rho, s) = \sum_{q=p}^\infty \frac{L_q^p(\rho)}{q!} s^q = (-s)^p \frac{\exp\left(-\rho \frac{s}{1-s}\right)}{(1-s)^{p+1}}, \quad (26)$$

$$p = 2l + 1, \quad q = n + l, \quad (27)$$

$$u_{nl}^{(0)} = N_{nl} l^{-\rho/2} \rho^{l+1} L_{n-l-1}^{2l+1} \quad (28)$$

имеем

$$\sum_{n=l+1}^\infty \sum_{n=l'+1}^\infty \left(\int_0^\infty \frac{u_{nl}^0 u_{n'l'}^0}{\rho^k} \right) \frac{s^{n-l-1} l^{n-l-1}}{(n+l)!(n+l')! N_{n'l'} N_{nl}} =$$

*) Отметим, что водородоподобные функции сами по себе удовлетворяют следующему условию ортогональности: $\int_0^\infty u_{nl}^0 u_{n'l'}^0 dr = \delta_{nn'}$.

$$= \int_0^{\infty} \frac{\exp\left(-\rho \frac{s}{1-s}\right)}{(1-s)^{2l+2}} \frac{\exp\left(-\rho \frac{t}{1-t}\right)}{(1-t)^{2l'+2}} \exp(-\rho) \rho^{l+l'+2-k} d\rho =$$

$$= (1-s)^{l'-l+1-k} (1-t)^{l-l'+1-k} (1-st)^{k-l-l'-3} (l+l'+2-k)! \quad (29)$$

Интересующий нас интеграл может быть определен путем приравнивания коэффициентов при соответствующих степенях $s^\alpha t^\beta$, причем $\alpha - \beta = l' - l$. Положим для определенности, что $l' > l$. При $k > l' - l + 1$ показатели степеней при $(1-s)$ и $(1-t)$ отрицательны. Этот случай не представляет интереса, поскольку $(1-s)^{l'-l+1-k}$ и $(1-t)^{l-l'+1-k}$ разлагаются в бесконечные ряды, в каждом из которых представлены всевозможные степени s и t .

При $k \leq l' - l + 1$ ряд $(1-s)^{l'-l+1-k}$ конечный, и в данном случае для $k = l' - l + 1, l' - l, \dots, 2$ соответствующие члены равны нулю. Первый отличный от нуля член $(s^{l'-l} t^0)$ появится лишь при $k = 1$, т. е. когда в ряду $(1-s)^{l'-l+1-k}$ максимальная степень s будет $l' - l$, а минимальная степень t в ряду $(1-t)^{l-l'+1-k}$ будет равна нулю. Аналогичные рассуждения можно провести и для $l' < l$.

В качестве наглядного примера можно обратиться к работе [5], авторами которой была рассмотрена задача о ядерном квадрупольном экранировании в случае наличия вырождения, когда оператор возмущения $V_a \sim r^2$, а $V_b \sim \frac{1}{r^3}$. Авторами этой работы, начавшими с решения уравнения

(9), было получено громоздкое решение в виде ряда возмущенного уравнения Шредингера только для одного простейшего случая $3s \rightarrow d$ возмущения. Во всех остальных случаях указано на возникающие трудности и решения не было получено вовсе. Если же решать уравнение (10), то с учетом (25) легко получить общее решение уравнения в квадратурах, простой явный вид поправочных функций и вычисленных с их помощью констант экранирования. Это решение для квадрупольного экранирования было приведено нами в [6], а для потенциалов более высокой мультипольности дано в [7].

В последующих статьях мы детально рассмотрим случаи аналитических решений задач о мультипольном ядерном экранировании, об экранировании красталлического поля для $4f^N$ -оболочек редкоземельных ионов. Некоторые из решений этих задач были даны нами ранее [6—8], но окончательные результаты, как правило, приводились без сколько-нибудь достаточного обсуждения.

Само собой разумеется, что аналитические методы решения возмущенного уравнения Шредингера, которые будут рассмотрены нами в последующих статьях, и полученные в итоге поправочные функции могут быть успешно применены для решения целого ряда других задач, например для расчета поляризуемостей атомов и ионов, различного рода задач в теории магнитной тонкой и сверхтонкой структуры. В работе [9] был приведен пример расчета относительной нерелятивистской поправки второго приближения к величине расщепления, обусловленной взаимодействием магнитного момента ядра с полем электронов в $1s$ и $2s$ состояниях атома водорода. Эта поправка связана с действием операторов

$$H' = \frac{2}{3} \mu_0 g_I (\vec{\sigma} \cdot \mathbf{l}) \left[\frac{\delta(r)}{r^2} \right] \quad (30)$$

и

$$H'' = 2\mu_0 g_I \left(\nabla \cdot \frac{\mathbf{l}r}{r^3} \right) (1-s), \quad (31)$$

(последний примешивает к $s_{1/2}$ состояние $d_{3/2}$).

В этом случае поправочные функции для возмущенного уравнения Шредингера в первом приближении легко вычисляются, и относительная поправка для уравнения с оператором H'' может быть записана в виде

$$R_{2s \rightarrow d} = \frac{8 \Delta v_{2s \rightarrow d}^{(2)} - \Delta v_{1s \rightarrow d}^{(2)}}{\Delta v_{1s}^{(1)}} = \\ = -\alpha^2 \frac{m}{M} g_I \frac{1}{8} \left(\frac{17}{16} - \frac{5}{3} \ln 2 \right), \quad (32)$$

где m — масса электрона; M — масса протона; α — постоянная тонкой структуры; $g_I = 5.58$.

Ясно, что при рассмотрении уравнения Шредингера с оператором возмущения (31) для $3s$ -состояния следует применить теорию возмущения при наличии вырождения, что, казалось бы, должно усложнить решение. Однако, если учесть, что оператор H'' не перемешивает в нулевом приближении волновых функций, относящихся к вырожденному уровню, легко получить простое выражение для поправочной функции $u_{3s \rightarrow d}^{(1)}$ в квадратурах. Уравнение для радиальной волновой функции и его решение в рассматриваемом случае полностью совпадают с приведенным нами в [6] (см. формулу (15)). Если воспользоваться этим решением, то нетрудно получить для относительной поправки

$$R_{3s \rightarrow d} = \frac{27 \Delta v_{3s \rightarrow d}^{(2)} - \Delta v_{1s \rightarrow d}^{(2)}}{\Delta v_{1s}^{(1)}} = -\alpha^2 \frac{m}{M} g_I \frac{1}{8} \left(\frac{17}{18} - \frac{5}{3} \ln 3 \right). \quad (33)$$

Литература

1. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Квантовая механика. ГИФМЛ, 1963.
2. Dalgarno A., Stewart A. L. Proc. Roy. Soc., A. 238, 269, 1956.
3. Ребане Г. К. Опт. и спектр., 19, 313, 1965.
4. Schrödinger. Ann. d. Phys., 80, 485, 1926.
5. Ghatikar M. N., Raychaudhuri A. K., Ray D. K. Proc. Phys. Soc. London, 84, 297, 1964.
6. Маханёк А. Г., Корольков В. С. Опт. и спектр., 21, 313, 1966.
7. Маханёк А. Г., Корольков В. С. Тезисы II Всесоюзного совещания по применению физических методов к исследованию комплексных соединений. Кишинев, 1965.
8. Маханёк А. Г. Опт. и спектр., 14, 449, 1963.
9. Schwartz C. Ann. of Phys., 2, 156—169, 1959.

Институт физики
АН БССР

Поступило в редакцию 19.V 1967

Э. І. ВІТКІН

АБ АДНОЙ МАДЭЛІ РЭЗНАТАРА ДЛЯ АКГ. 1

Разліку рэзанатараў для АКГ прысвечана вялікая колькасць работ. У якасці самай грубай мадэлі многія аўтары разглядаюць рэзанатар, які складаецца з пары неабмежаваных плоскіх люстраў. Такая мадэль дае магчымасць разлічыць некаторыя энергетычныя характарыстыкі АКГ, аднак у прынцыпе не можа ўлічыць дыфракцыйныя эфекты і даць інфармацыю аб структуры папярочных мод. Не ўлічваюцца дыфракцыйныя эфекты і пры разліку рэзанатараў з канцавымі люстрамі метадамі геаметрычнай оптыкі.

Значна больш блізкай да рэальнасці з'яўляецца вядомая мадэль адкрытага рэзанатара [1—4], якая патрабуе рашэння некаторай краёвай задачы для ўраўненняў Максвела. Л. А. Вайнштэйну [1] належыць асімптатычны метада разліку адкрытых рэзанатараў. З другога боку, Фокс і Лі [2, 3], выкарыстаўшы прынцып Гюйгенса — Фрэнеля, звялі задачу аб папярочных модах адкрытага рэзанатара да рашэння сістэмы інтэгральных ураўненняў. У рабоце В. С. Булдырава і Э. Е. Фрадкіна [4] было паказана, што такая сістэма пры некаторых дастаткова агульных умовах можа быць атрымана з сістэмы ўраўненняў Максвела.

У большасці работ, прысвечаных разліку адкрытых рэзанатараў, разглядаюцца «пустыя» рэзанатары, г. зн. не бярэцца пад увагу ўплыў асяроддзя, або лічыцца, што рэзанатар запоўнены аднародным асяроддзем. У рабоце [5] ўлічваюцца дробныя неаднароднасці ў паказчыку праламлення шпяня цвёрдацельнага АКГ, што прыводзіць да з'яўлення «малых» мод. Спроба ўлічыць неаднароднасць узмацнення зроблена ў [6, 7].

У дадзенай рабоце прапануецца мадэль рэзанатара для АКГ, якая ўлічвае папярочнае змяненне каэфіцыента паглынання. У рамках гэтай мадэлі ўдаецца знайсці размеркаванне поля і вылічыць страты на праходжанне для рэзанатараў рознай геаметрычнай формы, а таксама ўлічыць дадатковыя страты, што ўзнікаюць з прычыны расфакусіроўкі люстраў. Пры гэтым, аднак, у рабоце не ўлічваюцца нелінейныя эфекты, што не дазваляе разлічыць поўнасю энергетычныя характарыстыкі рэзанатара.

1. П а с т а н о ў к а з а д а ч ы. Будзем разглядаць сістэмы, якія складаюцца з дзвюх канцавых люстраў з каэфіцыентам прапускання A , разнесеныя на адлегласць d , прастора паміж якімі запоўнена рэчывам, што мае для электрамагнітнага выпраменьвання з даўжынёй хвалі λ паказчык праламлення $n(\lambda)$ і (адмоўны) каэфіцыент паглынання $\beta(\lambda)$. Дапусцім далей, што размеркаванне паказчыка праламлення і каэфіцыента ўзмацнення мае сіметрыю адносна восі рэзанатара. Тады, абазначыўшы праз z адлегласць ад восі, можна напісаць з дакладнасцю да членаў парадку z^4 для хвалевага вектара ўнутры рэзанатара выраз

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} n_0(1 + C_1 z^2) - i \beta_0(1 + C_2 z^2), \quad (1)$$

дзе C_1 і C_2 — канстанты.

Залежнасць паказчыка праламлення ад адлегласці ад восі ў цвёрдацельных АКГ выклікаецца, напрыклад, неаднародным нагрэвам шпяня, прычым $|C_1|/a^2 \ll 1^*$. У газавых лазерах неаднароднасць паказчыка праламлення па z можна ў першым прыбліжэнні не ўлічваць ($C_1=0$).

Папярочная неаднароднасць узмацнення (паглынання) залежыць у цвёрдацельных АКГ ад спосабу напампоўвання і апрацоўкі паверхняў шпяня [8], а ў газавых лазерах абумоўліваецца ўплывам сценак трубка. У апошнім выпадку

$$C_2 = -\frac{1}{a^{*2}}, \quad (2)$$

прычым a^* блізкае да радыуса трубка (гл. [9]).

Карыстаючыся метадам работы [4] і ўлічваючы, што маштаб змянення хвалевага вектара $k(z)$ значна большы даўжыні хвалі, можна атрымаць сістэму інтэгральных ураўненняў для функцый размеркавання поля паблізу люстраў $U_1(\mathbf{r}_1)$ і $U_2(\mathbf{r}_2)$ у стацыянарным рэжыме работы генератара

$$\begin{aligned} A \gamma_1 U_1(\mathbf{r}_1) &= \iint_{S_2} K_{21}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) U_2(\mathbf{r}_2) dS_2, \\ A \gamma_2 U_2(\mathbf{r}_2) &= \iint_{S_1} K_{12}(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1) U_1(\mathbf{r}_1) dS_1. \end{aligned} \quad (3)$$

Тут \mathbf{r}_1 і \mathbf{r}_2 — каардынаты пункта на першым і другім люстрах адпаведна; S_1 і S_2 — паверхні люстраў; выгляд ядраў K_{12} і K_{21} залежыць ад геаметрыі рэзанатара. Велічыня $\gamma_1 \gamma_2$ з'яўляецца ўласным значэннем сістэмы інтэгральных ураўненняў (3) і вызначае страты (узмацненне) за адзін праход, роўныя

$$\kappa = 1 - |A|^2 |\gamma_1 \gamma_2|, \quad (4)$$

і зрух фазы

$$\Delta\varphi = \arg(\gamma_1 \gamma_2)^{1/2},$$

які дазваляе знайсці частоты падоўжных мод.

Размеркаванне палёў на люстрах U_1 і U_2 дазваляе вылічыць поле ўнутры рэзанатара. Вуглавое размеркаванне выпраменьвання можа быць разлічана пры дапамозе пераўтварэння Фур'е функцыі U_i (гл. [10]). Такім чынам, задача даследавання апісанай мадэлі рэзанатара зводзіцца да рашэння сістэмы інтэгральных ураўненняў (3). Распрацаваныя да гэтай пары прыбліжаныя метады рашэння ўраўненняў такога тыпу патрабуюць грувацкіх колькасных разлікаў, прычым кожны тып геаметрыі рэзанатара павінен разлічвацца асобна. Улік неаднароднасці ўзмацнення і паказчыка праламлення значна павялічвае цяжкасці падобных вылічэнняў.

Для таго каб атрымаць аналітычнае рашэнне пастаўленай задачы, прымаем наступныя дапушчэнні. Па-першае, будзем лічыць, што для разглядаемых рэзанатараў выконваюцца суадносіны (2), прычым a^* не перавышае паўшырыні люстраў. Як ужо зазначалася, гэта ўмова асабліва добра выконваецца для газавых АКГ. Па-другое, заменім фармальна інтэграванне па паверхнях люстраў у (3) інтэгрваннем у бясконцых граніцах. Тым самым мы як бы не бярэм пад увагу дыфракцыю на краях люстра. Аднак з-за спецыфічнай залежнасці паглынання ад папя-

*) Лакальныя неаднароднасці ў гэтай рабоце не разглядаюцца.

рочнай каардынаты z поле ў абласцях, аддаленых ад восі на адлегласць, большую паўшырыні люстра, моцна затухае і аказваецца, такім чынам, сканцэнтраваным на паласе канечнай шырыні. Гэта эквівалентна «зразанню» поля па-за рэзанатарам з прычыны канечнай велічыні люстра, паколькі для прынятага размеркавання каэфіцыента ўзмацнення інтэ-

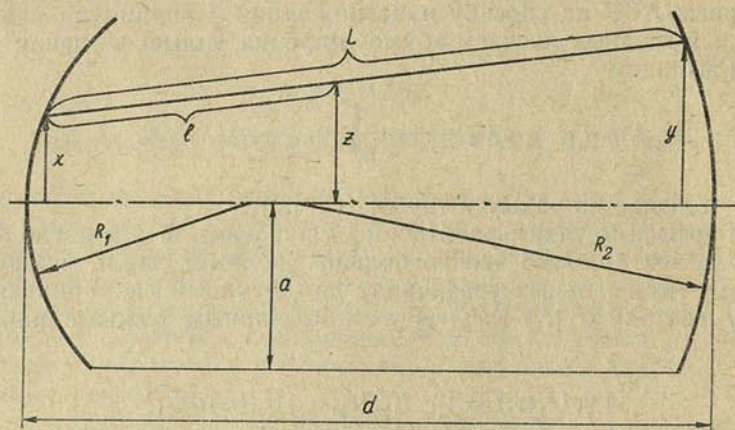


Рис. 1

рал па вобласці $(S_\infty - S_i)$ у (3) можна не ўлічваць. Тады замест (3) задача зводзіцца да рашэння сістэмы інтэгральных ураўненняў

$$\begin{aligned} A \gamma_1 U_1(\mathbf{r}_1) &= \iint_{S_\infty} K_{21}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) U_2(\mathbf{r}_2) dS_2, \\ A \gamma_2 U_2(\mathbf{r}_2) &= \iint_{S_\infty} K_{12}(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1) U_1(\mathbf{r}_1) dS_1. \end{aligned} \quad (5)$$

Зробленае дапушчэнне выконваецца тым лепш, чым больш каэфіцыент узмацнення на восі β_0 . Сістэма (5) пераходзіць ва ўраўненні для «пустога» рэзанатара пры $\beta_0 = C_1 = 0$.

2. Цэнтраваныя люстры. Калі абодва люстры рэзанатара маюць прамавугольную форму (рис. 1) і іх паўшырыні значна меншыя радыусаў крывізны R і адлегласці паміж люстрамі d , у (3) пераменныя раздзяляюцца, і дастаткова рашыць задачу для рэзанатара з люстрамі ў выглядзе бясконцых палос.

У гэтым выпадку, выкарыстаўшы «геаметрычнае» прыбліжэнне для прынцыпу Гюйгенса ў неаднародным асяроддзі [11], атрымаем для ядраў у (3) выраз

$$K(x, y) = \sqrt{\frac{k_0}{2\pi d}} \exp \left\{ -i \int_0^{L(x, y)} k(z) dz \right\}, \quad (6)$$

дзе $L(x, y)$ — адлегласць паміж пунктамі x і y на першым і другім люстрах. Улічваючы суадносіны

$$\frac{z - y}{x - y} = \frac{l}{L},$$

якія лёгка можна атрымаць, разглядаючы рис. 1, і выканаўшы інтэграванне ў (6), атрымаем, адкінуўшы малыя члены,

$$K(x, y) = \sqrt{\frac{n_0}{\lambda d}} \exp\left(\alpha - i \frac{2\pi d}{\lambda} n_0\right) \exp\left\{-i \frac{\pi n_0}{\lambda d} \left[\delta_1 x^2 + \delta_2 y^2 - 2xy\right] - i \left(\frac{2\pi d}{3\lambda} n_0 C_1 - \frac{i\alpha}{3a^{*2}}\right)(x^2 + xy + y^2)\right\}. \quad (7)$$

Тут $\delta_1 = 1 - d/R_1$, $\delta_2 = 1 - d/R_2$ — параметры крывізны люстраў: $\alpha = \beta_0 d$ — узмацненне за праходжанне ўздоўж восі рэзанатара. Пры вывадзе (7) ўлічана, што $\frac{C_1}{a^2} \ll 1$ і $\frac{\beta_0 a^2}{d} \ll 1$. Увёўшы новыя пераменныя

$$\xi = \sqrt{\frac{\pi n_0}{\lambda d}} (1 - \rho)x, \quad \eta = \sqrt{\frac{\pi n_0}{\lambda d}} (1 - \rho)y,$$

атрымаем замест (5)

$$\begin{aligned} \sqrt{\pi} \bar{\gamma}_1 U_1(\xi) &= \int_{-\infty}^{\infty} \exp\{-i[\delta_1^* \xi^2 + \delta_2^* \eta^2 - 2\xi\eta]\} U_2(\eta) d\eta, \\ \sqrt{\pi} \bar{\gamma}_2 U_2(\eta) &= \int_{-\infty}^{\infty} \exp\{-i[\delta_1^* \xi^2 + \delta_2^* \eta^2 - 2\xi\eta]\} U_1(\xi) d\xi, \end{aligned} \quad (8)$$

дзе

$$\rho = \frac{1}{3} \left(d^2 C_1 - i \frac{\lambda d \alpha}{2\pi n_0 a^{*2}} \right); \quad \delta_1^* = \frac{\delta_1 - 2\rho}{1 + \rho}; \quad \delta_2^* = \frac{\delta_2 - 2\rho}{1 + \rho};$$

$$A \bar{\gamma} = \frac{\gamma}{\sqrt{1 - \rho}} \exp\left[-\left(\alpha - i \frac{2\pi d}{\lambda} n_0\right)\right].$$

Разгледзім спачатку рэзанатар, састаўлены з аднолькавых люстраў, г. зн. $\delta_1 = \delta_2$. У гэтым выпадку $U_1 = U_2 = U$ і $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma$, а сістэма (8) зводзіцца да аднаго інтэгральнага ўраўнення

$$\sqrt{\pi} \bar{\gamma} U(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp\{-i[\delta^*(\xi^2 + \eta^2) - 2\xi\eta]\} U(\eta) d\eta. \quad (9)$$

Можна атрымаць дакладнае рашэнне гэтага ўраўнення. Уласныя функцыі можна запісаць у выглядзе

$$U_m(\xi) = \exp\{-\xi^2 \sqrt{1 - \delta^{*2}}\} H_m[\sqrt{2}(1 - \delta^{*2})^{1/4} \xi], \quad (10)$$

дзе H_m — паліномы Эрміта; ім адпавядае

$$\bar{\gamma}_m = i^m [\sqrt{1 - \delta^{*2}} - i\delta^*]^{m+1/2}. \quad (11)$$

Ведаючы рашэнне (10), (11), лёгка атрымаць умову генерацыі m -ай моды. Сапраўды, для таго каб даная мода генерывалася, павінна выконвацца ўмова

$$1 - |\gamma|^2 < 0,$$

г. зн.

$$A^2 e^{2\alpha} |1 - \rho| |\bar{\gamma}_m|^2 > 1. \quad (12)$$

Звычайна $\rho \ll 1$ і $\delta^* \approx \delta' - i\Delta_2$, дзе $\delta' = \delta - \Delta_1$; $\Delta_1 = \frac{2 + \delta}{3} d^2 C_1$ і $\Delta_2 = \frac{\alpha d \lambda (2 + \delta)}{6\pi n_0 a^{*2}}$. Тады пры $\delta' < 1$ умова (12) прыбліжана запісваецца ў выглядзе

$$A^2 \left(1 - \frac{\Delta_1}{2 + \delta} \right) \left[1 - \frac{2(m + 1/2)\Delta_2}{V 1 - \delta'^2} \right] > e^{-2\alpha}, \quad (12)$$

а пры $\delta' > 1$

$$A^2 \left(1 - \frac{\Delta_1}{2 + \delta} \right) (\delta' - \sqrt{\delta'^2 - 1})^{2m+1} > e^{-2\alpha}. \quad (12')$$

Такім чынам, як і належала чакаць, роля змянення паказчыка праламлення эфектыўна зводзіцца да змянення параметра крывізны δ (тоўстая лінза). Страты павялічваюцца, калі паказчык праламлення памяншаецца ад восі да краю, што асабліва прыкметна ў выпадку плоскіх люстраў.

Памяншэнне ўзмацнення пры аддаленні ад цэнтра таксама прыводзіць да зніжэння ўзмацнення за праходжанне. Як паказваюць ацэнкі, страты з-за гэтага эфекту практычна заўсёды большыя, чым чыста ды-фракцыйныя страты.

Вяртаючыся да сістэмы інтэгральных ураўненняў (8), будзем шукаць яе рашэнне ў выглядзе

$$U_1 = (\delta_2^*)^{-1/4} U_0, \quad U_2 = (\delta_1^*)^{-1/4} U_0.$$

Пасля замены пераменных

$\xi_1 = (\delta_1^*/\delta_2^*)^{1/4} \xi$, $\eta_1 = (\delta_2^*/\delta_1^*)^{1/4} \eta$ сістэма (8) зводзіцца да інтэгральнага ўраўнення

$$\sqrt{\pi} \bar{\gamma}_0 U_0(\xi_1) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp \{-i [\delta_0^* (\xi_1^2 + \eta_1^2) - 2\xi_1 \eta_1]\} U_0(\eta_1) d\eta_1, \quad (13)$$

у якім $\delta_0^* = \sqrt{\delta_1^* \delta_2^*}$, г. зн. да ўжо вывучанага выпадку з двюма аднолькавымі люстрамі.

3. Раз'юстыраваны рэзанатар. Да гэтай пары разглядаўся цэнтраваны рэзанатар, г. зн. рэзанатар, фокусы люстраў якога ляжаць на адной прамой (восі). Няхай першае люстра адхілена на вугал ψ_1 , а другое — на ψ_2 (рыс. 2).

Тады сістэма інтэгральных ураўненняў для размеркавання поля на люстрах (пасля пераўтварэнняў, аналагічных праведзеным вышэй пры атрымнанні сістэмы ўраўненняў (8)), запісваецца ў выглядзе

$$\begin{aligned} \sqrt{\pi} \bar{\gamma}_1 V_1(\xi) &= \int_{-\infty}^{\infty} \exp \{-i [\delta_1^* \xi^2 + \delta_2^* \eta^2 - 2\xi\eta + \varepsilon_1 \xi + \varepsilon_2 \eta]\} V_2(\eta) d\eta, \\ \sqrt{\pi} \bar{\gamma}_2 V_2(\eta) &= \int_{-\infty}^{\infty} \exp \{-i [\delta_1^* \xi^2 + \delta_2^* \eta^2 - 2\xi\eta + \varepsilon_1 \xi + \varepsilon_2 \eta]\} V_1(\xi) d\xi, \end{aligned} \quad (14)$$

дзе

$$\varepsilon = 2 \sqrt{\frac{\pi d n_0}{\lambda (1 - \rho)}} \psi.$$

Шляхам замены пераменных $\xi_2 = \xi - h_1$ і $\eta_2 = \eta - h_2$ можна выключыць складаныя, што змяшчаюць ξ і η у першай ступені, з паказчыка экспаненты ў ядрах (14): Для гэтага h_1 і h_2 павінны вызначацца з умоў

$$2\delta_1^* h_1 - 2h_2 + \varepsilon_1 = 0, \quad 2\delta_2^* h_2 - 2h_1 + \varepsilon_2 = 0, \quad (15)$$

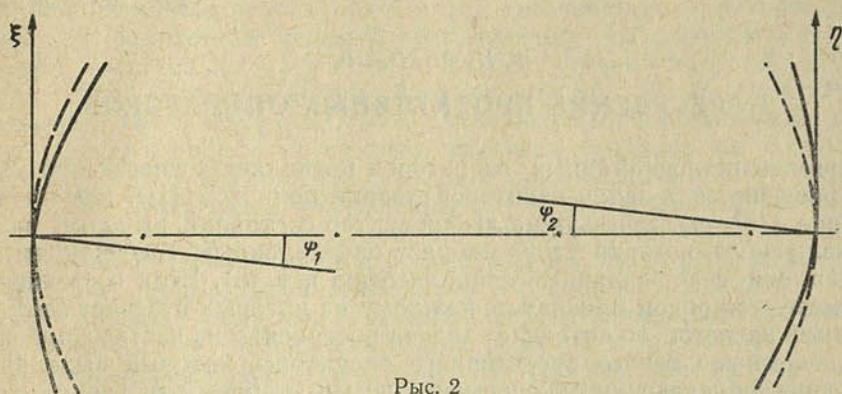
якія даюць

$$h_1 = \frac{\varepsilon_2 + \delta_2^* \varepsilon_1}{2(1 - \delta_1^* \delta_2^*)}, \quad h_2 = \frac{\varepsilon_1 + \delta_1^* \varepsilon_2}{2(1 - \delta_1^* \delta_2^*)}.$$

Пераўтварыўшы такім чынам (14), атрымаем сістэму інтэгральных ураўненняў тыпу (8), у якой ролю γ_m цяпер адыгрывае велічыня

$$\bar{\gamma}_m = \bar{\gamma}_m(\delta_0^*) \exp \left\{ -i \frac{\delta_1^* \varepsilon_2^2 + \delta_2^* \varepsilon_1^2 + 2\varepsilon_1 \varepsilon_2}{4(1 - \delta_1^* \delta_2^*)} \right\},$$

што вызначае страты і зрух фазы за адно праходжанне.



Рыс. 2

Для ацэнак разгледзім рэзанатар, састаўлены з двух аднолькавых люстраў ($\delta_1 = \delta_2 = \delta$), адхіленых на аднолькавы вугал ($\psi_1 = \psi_2 = \psi$). Змяненні паказчыка праламлення ўлічваць не будзем. Тады атрымліваем

$$\delta^* = \delta - i \Delta_2, \quad \varepsilon = 2\psi \sqrt{\frac{\pi dn_0}{\lambda}} \left(1 - i \frac{\lambda da}{12\pi n_0 a^{*2}} \right).$$

Пры $\delta < 1$ дадатковыя страты, выкліканыя расфакусіроўкай, прыбліжана роўныя

$$\Delta \kappa \approx 1 - \exp \left(- \frac{2d^2}{(1 - \delta)^2 a^{*2}} \psi^2 \right).$$

У заключэнне адзначым, што прапанаваная мадэль дазваляе рашыць задачу і для люстраў з круглай апертурай, а таксама разгледзець састаўныя рэзанатары. Аднавідныя разлікі будуць прыведзены ў асобным артыкуле.

Аўтар удзячны С. І. Анісімаву за ўвагу да работы.

Літаратура

1. Вайнштэйн Л. А. ЖЭТФ, 44, 1050, 1963.
2. Fox A., Li T. В. S. T. J., 40, № 2, 1961.
3. Boyd G., Gordon J. P. В. S. T. J., 40, № 2, 1961.
4. Булдырев В. С., Фрадкин Э. Е. Опт. и спектр., 17, № 4, 1964.
5. Киселев В. И. ЖПС, 4, № 1, 1966.
6. Кузнецова Т. И. ЖТФ, 34, № 3, 1964.
7. Кузнецова Т. И. ЖТФ, 36, № 2, 1966.
8. Рутковский Ф. К. Оптическая накачка квантовых генераторов на твердом теле. Дисс. Минск, 1965.
9. Басов И. Г. и др. Сб. «Квантовая радиофизика». Изд. «Наука», М., 1965.
10. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теория поля. Физматгиз, М., 1959.
11. Альперт Я. Л., Гинзбург В. Л., Фейнберг Е. Л. Распространение радиоволн. ТТИ, 1961.

Институт физики
АН БССР

Поступило в редакцию 25.XI 1966

Ф. И. ФЕДОРОВ

ПЕРЕСЕЧЕНИЕ ПРОЕКТИВНЫХ ОПЕРАТОРОВ

Применение проективных операторов позволяет существенно упростить решение ряда задач квантовой теории поля (см. [1]). Проективная матрица α ($\alpha^2 = \alpha$), действуя на любой вектор состояния, выделяет из него составляющую, которая удовлетворяет определенным требованиям (на пример, описывает заданный спин, энергию и т. п.). Если состояние характеризуется рядом признаков, каждому из которых отвечает свой проективный оператор, то возникает задача построения из частных проективных операторов такого проективного оператора, который выделял бы состояния, обладающие одновременно всеми требуемыми характеристиками. Если проективные операторы, отвечающие отдельным признакам коммутируют между собой, то вопрос решается весьма просто — искомым проективный оператор будет равен произведению проективных операторов для отдельных характеристик состояния [1]. Если же частные проективные операторы не коммутируют, то задача усложняется. Настоящая заметка посвящена рассмотрению этого вопроса в общем случае.

Пусть α , β — две проективные матрицы, действующие в некотором линейном n -мерном пространстве R , ψ — вектор этого пространства. Тогда по определению

$$\alpha(\alpha - 1) = \beta(\beta - 1) = 0. \quad (1)$$

Матрица α проектирует любой вектор на некоторое подпространство R_α , соответственно β — на R_β . Задача заключается в нахождении проективной матрицы γ ($\gamma^2 = \gamma$), которая проектировала бы любой вектор на подпространство R_1 , являющееся пересечением подпространств R_α и R_β ; $R_1 = R_\alpha \cap R_\beta$. Мы будем называть такую проективную матрицу γ -матрицей пересечения α и β . Обобщение задачи на случай, когда имеется более чем два проективных оператора, очевидно.

Для всякого вектора $\psi_\alpha \in R_\alpha$ должно быть $\alpha\psi_\alpha = \psi_\alpha$, соответственно для $\psi_\beta \in R_\beta$ имеем $\beta\psi_\beta = \psi_\beta$. Для любого вектора $\psi \in R_1$ должны одновременно выполняться условия

$$(\alpha - 1)\psi = (\beta - 1)\psi = 0. \quad (2)$$

Таким образом, проективная матрица γ должна выделять в пространстве R все векторы, являющиеся одновременно собственными векторами операторов α и β , отвечающими собственному значению, равному единице. Введем дополнительные проективные операторы

$$\alpha' = 1 - \alpha, \quad \beta' = 1 - \beta, \quad \alpha'(\alpha' - 1) = \beta'(\beta' - 1) = 0 \quad (3)$$

и прямоугольную матрицу

$$\rho = \begin{pmatrix} \alpha' \\ \beta' \end{pmatrix}, \quad (4)$$

имеющую n столбцов и $2n$ строк. Тогда условия (2) запишутся в виде

$$\rho\psi = 0. \quad (5)$$

В такой постановке задача становится частным случаем проблемы определения вектора ψ из уравнения $A\psi=0$, где A — любая прямоугольная матрица с числом столбцов, равным числу компонент ψ . Для решения этой задачи можно использовать метод проективных операторов [1]. Умножая на эрмитовски сопряженную матрицу A^+ , получим $C\psi=0$, где $C=A^+A$ является квадратной ($n \times n$) эрмитовской неотрицательно определенной матрицей. Легко показать, что уравнения $A\psi=0$ и $C\psi=A^+A\psi=0$ эквивалентны. Действительно, из первого следует второе, а из второго, умножая скалярно на ψ , получаем $(\psi, A^+A\psi) = (A\psi, A\psi) = 0$. Но скалярное произведение вектора на самого себя равно нулю, лишь когда вектор равен нулю, т. е. $A\psi=0$. Следовательно, первое уравнение следует из второго. Таким образом, все решения уравнения $C\psi=0$ с квадратной матрицей C будут решениями уравнения $A\psi=0$ с прямоугольной матрицей A и наоборот. Поскольку C — эрмитова матрица, то ее минимальный полином не содержит кратных корней. Если $|C| \neq 0$, то нетривиальных решений нет. Если же $|C| = 0$, то минимальное уравнение для C имеет вид (см. аналогичные рассуждения в [2]) $P(C) = C P_0(C) = 0$, причем $P_0(0) \neq 0$. Поэтому проективный оператор, выделяющий все решения уравнения $A\psi=0$, равен (см. [1]) $P_0(C)/P_0(0)$. Подчеркнем, что такой подход целесообразно применять и в том случае, когда A — квадратная матрица, неприводимая к диагональному виду, что затрудняет непосредственное применение метода проективных операторов (ср. [2]).

Применяя эти результаты к матрице ρ (4), следует учесть, что обычно α, β являются эрмитовскими матрицами. В таком случае $\tau = \rho^+\rho = \alpha'^+ + \beta'^+ = \alpha' + \beta'$. Нетрудно видеть, что если вместо двух проективных операторов ищется пересечение любого числа k таких операторов $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$, то соответствующая матрица τ будет равна сумме дополнительных к ним проективных операторов

$$\tau = \alpha'_1 + \alpha'_2 + \dots + \alpha'_k = k - (\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_k). \quad (6)$$

Итак, справедливо утверждение: пространство, являющееся пересечением пространств проектирования эрмитовских проективных матриц α_s ($s = 1, 2, \dots, k$), состоит из векторов ψ , удовлетворяющих условию $\tau\psi = 0$, где τ — сумма дополнительных к α_s проективных матриц.

Если $P(\tau) = \tau P_0(\tau) = 0$ — минимальное уравнение для τ , то соответствующий проективный оператор пресечения

$$\sigma = \frac{P_0(\tau)}{P_0(0)}. \quad (7)$$

Для иллюстрации рассмотрим случай двух коммутирующих проективных операторов α и β ($\alpha\beta = \beta\alpha$). Согласно (6), при этом $\tau = 2 - (\alpha + \beta)$. Ищем минимальный полином

$$(\tau - 2)^2 = (\alpha + \beta)^2 = \alpha + \beta + 2\alpha\beta = -(\tau - 2) + 2\alpha\beta,$$

$$P(\tau) = \tau P_0(\tau) = \tau(\tau - 1)(\tau - 2) = 2\alpha\beta\tau = 2\alpha\beta(2 - \alpha - \beta) = 0.$$

Таким образом, проективный оператор пересечения в этом случае

$$\sigma = \frac{P_0(\tau)}{P_0(0)} = \frac{(\tau-1)(\tau-2)}{2} = \alpha\beta,$$

как и должно быть.

Литература

1. Федоров Ф. И. ЖЭТФ, 33, 493, 1958.
2. Федоров Ф. И. ДАН СССР, 174, 334, 1967.

Институт физики
АН БССР

Поступило в редакцию 28.VIII 1967

УДК 530.12:531.18

А. В. МИНКЕВИЧ, А. А. СОКОЛЬСКИИ

К РЕЛЯТИВИСТСКОЙ ДИНАМИКЕ ЧАСТИЦЫ

1. Как было указано в [1], в случае произвольной функции Лагранжа уравнения Лагранжа — Эйлера в 4-мерной форме [2—4]

$$\frac{\partial L}{\partial x^\mu} - \frac{d}{d\tau} \left(\frac{\partial L}{\partial u^\mu} \right) = 0 \quad (\mu = 0, 1, 2, 3) \quad (1)$$

(τ — собственное время частицы, $u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau}$) не являются уравнениями релятивистской динамики частицы. Это связано с тем обстоятельством, что соотношения (1) дают решение вариационной задачи

$$\delta S = \delta \int L(x^\mu, u^\mu) d\tau = 0 \quad (2)$$

в предположении, что τ является независимым параметром, т. е. в (2) не производится варьирования $d\tau$ и используется формула $\delta \frac{dx^\mu}{d\tau} = \frac{d}{d\tau} \delta x^\mu$.

Однако в связи с тем что собственное время частицы является функцией движения

$$d\tau = \sqrt{1 - v^2} dt, \quad d\tau^2 = -g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (c = 1), \quad (3)$$

подобное допущение несправедливо. Тем не менее, согласно теории Вейерштрасса [5], уравнение (1) является уравнением экстремали (2) в случае функции Лагранжа L , однородной степени 1 по «скоростям». В случае произвольной функции L требуемой однородности можно достичь, переходя к произвольному параметру p

$$L\left(x^\mu, \frac{dx^\mu}{d\tau}\right) d\tau = L\left(x^\mu, \frac{\frac{dx^\mu}{dp}}{\sqrt{-g_{\lambda\nu} \frac{dx^\lambda}{dp} \frac{dx^\nu}{dp}}}\right) \times \\ \times \sqrt{-g_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{dp} \frac{dx^\beta}{dp}} dp$$

(переход к произвольному параметру p вовсе не означает вопреки распространенному мнению отсутствия для p соотношения связи типа (3), однако благодаря однородности L подобная связь оказывается несущественной).

В [2—4] уравнение (1) используется при лагранжианах, не являющихся однородными степени 1 функциями. В классической электродинамике

при этом получают правильные уравнения движения за счет выбора некорректного действия для свободной частицы

$$\frac{m}{2} \int u_\mu u^\mu d\tau.$$

2. Впервые корректные лоренц-ковариантные лагранжевы уравнения для движущейся частицы были найдены В. Бурсианом [6] в 1927 г. Однако его работа, по-видимому, осталась незамеченной. Спустя 30 лет эти же уравнения получил Л. Инфельд [7].

Существуют два метода нахождения лагранжевых уравнений релятивистской динамики частицы: 1) метод неопределенных множителей Лагранжа для определения условного экстремума (2) с учетом соотношения (3); 2) метод непосредственного варьирования $d\tau$. Используя второй метод, найдем выражение для обобщенного 4-импульса частицы в пространстве Минковского с метрикой $g_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$. Учитывая, что

$$\delta d\tau = -g_{\mu\nu} u^\nu \delta dx^\mu, \quad \delta u^\mu = \frac{\delta dx^\mu}{d\tau} - \frac{u^\mu}{d\tau} \delta d\tau,$$

получим

$$\begin{aligned} \delta S &= \int_a^b (\delta L d\tau + L \delta d\tau) = \int_a^b \left\{ \frac{\partial L}{\partial x^\mu} \delta x^\mu d\tau + \right. \\ &\quad \left. + \left[\frac{\partial L}{\partial u^\mu} + \left(\frac{\partial L}{\partial u^\nu} u^\nu - L \right) u_\mu \right] d\delta x^\mu \right\} = \\ &= \int_a^b \left\{ \frac{\partial L}{\partial x^\mu} - \frac{d}{d\tau} \left[\frac{\partial L}{\partial u^\mu} + \left(\frac{\partial L}{\partial u^\nu} u^\nu - L \right) u_\mu \right] \right\} \delta x^\mu d\tau + \\ &\quad + \left[\frac{\partial L}{\partial u^\mu} + \left(\frac{\partial L}{\partial u^\nu} u^\nu - L \right) u_\mu \right] \delta x^\mu \Big|_a^b. \end{aligned}$$

Следовательно, обобщенный 4-импульс равен

$$P_\mu = \frac{\partial S}{\partial x^\mu} = \frac{\partial L}{\partial u^\mu} + \left(\frac{\partial L}{\partial u^\nu} u^\nu - L \right) u_\mu, \quad (4)$$

а уравнения движения примут вид

$$\frac{\partial L}{\partial x^\mu} = \frac{dP_\mu}{d\tau} \quad (\mu = 0, 1, 2, 3). \quad (5)$$

Можно показать, что общековариантные уравнения движения (см. [8]) выглядят так:

$$\frac{\partial L}{\partial \psi^A} \nabla_\mu \psi^A = \frac{DP_\mu}{d\tau},$$

где ∇_μ — ковариантная производная; D — абсолютный дифференциал; ψ^A — полевые переменные.

Отметим, что уравнение (5) с $\mu = 0$ является следствием остальных трех в силу условия $u_\mu u^\mu = -1$ в отличие от уравнений (1), которые, вообще говоря, не совместимы с этим условием.

Сворачивая (4) с u^μ , запишем релятивистское соотношение Гамильтона

$$H \equiv P_\mu u^\mu - L \equiv 0. \quad (6)$$

Исходя из (6), легко видеть, что

$$P^0 = -P_0 = P_i v^i - L \sqrt{1 - v^2} \quad (i = 1, 2, 3)$$

есть полная энергия частицы в поле, а P_i — 3-мерный обобщенный импульс. Если (4) можно разрешить относительно u^μ , то, подставляя в (6) $u^\mu = u^\mu(x^\alpha, P_\alpha)$ и заменяя P_μ на $\frac{\partial S}{\partial x^\mu}$, получим релятивистское уравнение Гамильтона — Якоби.

3. Рассмотрим движение частицы в некоторых полях.

а) Скалярное поле Φ :

$$L = -m + k\Phi,$$

$$P_\mu = (m - k\Phi) u_\mu, \quad \frac{d}{d\tau} [(m - k\Phi) u_\mu] = k \frac{\partial \Phi}{\partial x^\mu},$$

$$g^{\mu\nu} \frac{\partial S}{\partial x^\mu} \frac{\partial S}{\partial x^\nu} = -(m - k\Phi)^2.$$

б) Симметричное тензорное поле $h_{\mu\nu} = h_{\nu\mu}$ [1]:

$$L = -m + \kappa h_{\mu\nu} u^\mu u^\nu.$$

Обобщенный 4-импульс

$$P_\mu = (m + \kappa h_{\sigma\rho} u^\sigma u^\rho) u_\mu + 2\kappa h_{\mu\sigma} u^\sigma.$$

Уравнения движения:

$$\frac{d}{d\tau} [(m + \kappa h_{\sigma\rho} u^\sigma u^\rho) u_\mu + 2\kappa h_{\mu\sigma} u^\sigma] = \kappa \frac{\partial h_{\sigma\rho}}{\partial x^\mu} u^\sigma u^\rho.$$

Литература

1. Минкевич А. В. ДАН БССР, 11, № 9, 1967.
2. Голдстейн Г. Классическая механика. М., 1957, 230.
3. Thirring W. E. App. of Phys., 16, 96, 1961; Принципы квантовой электродинамики. М., 1964, 37.
4. Джексон Дж. Классическая электродинамика. М., 1965, 467.
5. Гурса Э. Курс математического анализа, 3, ч. 2. ГТТИ, 1934, 272.
6. Бурсиан В. ЖРФХО, ч. физ., 59, 175, 1927.
7. Infeld L. Bull. Acad. Pol., 5, 491, 1957.
8. Trautman A. Bull. Acad. Pol., 5, 721, 1957.

Белорусский государственный университет
им. В. И. Ленина

Поступило в редакцию 3.VII 1967

А. И. МАКАРЕВИЧ, Л. Ю. РАЙНЕС

КОНЦЕНТРАЦИЯ И ПОДВИЖНОСТЬ НОСИТЕЛЕЙ ТОКА В ЧИСТОМ КРЕМНИИ

В практике исследований физических свойств полупроводниковых материалов возникает необходимость в определении концентраций электронов и дырок, а также их подвижностей в образцах смешанной проводимости.

Существует ряд методов определения этих параметров в полупроводниках [1—3]. Наиболее удобным оказался метод, при котором концентрации электронов и дырок, а также их подвижности определяются из измерений постоянной Холла и проводимости. Как известно, постоянную Холла и проводимость можно выразить следующими соотношениями:

$$R = \frac{3\pi}{8} \frac{(nb^2 - p)}{(nb + p)^2}, \quad (1)$$

$$\sigma = e(nb + p)\mu_h, \quad (2)$$

$$b = \frac{\mu_n}{\mu_h},$$

где R — постоянная Холла, σ — проводимость, n — концентрация электронов, p — концентрация дырок, μ_h — подвижность дырок, μ_n — подвижность электронов.

Отсутствие вырождения в чистом кремнии позволяет получить дополнительное соотношение:

$$np = n_i^2, \quad (3)$$

где n_i — концентрация носителей тока в собственном полупроводнике.

Необходимо отметить, что для кремния имеются достаточно надежные результаты по определению n_i .

Таким образом, имеются три уравнения с четырьмя неизвестными параметрами n , p , b и μ_h .

Методы решения этой системы из трех уравнений состоят обычно в сведении ее к трем уравнениям с тремя неизвестными путем независимого определения одного из параметров. Обычно делается допущение, что b постоянно в широком интервале температур. Однако установлено, что для кремния это допущение не выполняется.

Поэтому как наиболее приемлемый для чистого кремния мы предлагаем метод, при котором независимо от других параметров определяется подвижность дырок. Как известно, холловская подвижность μ_H в условиях смешанной проводимости определяется следующим выражением:

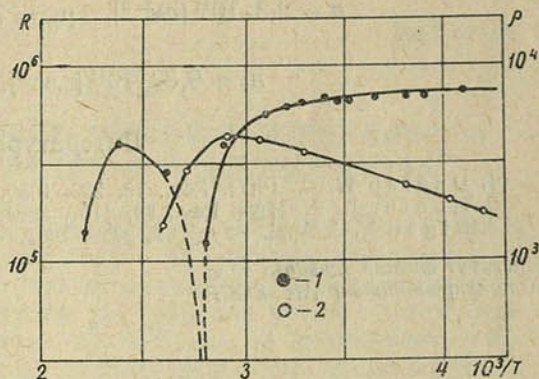
$$\mu_H = R\sigma = \mu_h \frac{nb^2 - p}{nb + p}. \quad (4)$$

Как нетрудно увидеть из приведенного выражения (4), при $n \ll p$, что имеет место в p -кремнии при низких температурах,

$$R\sigma = \mu_h. \quad (5)$$

Как видно из рис. 1, постоянная Холла не изменяется в интервале температур от азотных вплоть до комнатных.

Таким образом, из выражения (5) следует, что изменение проводимости в этом интервале температур определяется только изменением подвижности дырок. Определив температурную зависимость μ_h при низких температурах, мы сможем затем определить также подвижность дырок в области смешанной проводимости путем экстраполяции в эту область температурной зависимости μ_h . Примем $\mu_h = KT^{-s}$, где K — константа материала. Тогда для двух значений температур можно составить следующие уравнения:



Зависимость постоянной Холла R , $\text{см}^2/\text{к}$ (1) и удельного сопротивления $\rho = 1/\sigma$, $\text{ом}\cdot\text{см}$ (2) от обратной температуры T , $^\circ\text{K}^{-1}$ для чистого кремния

$$\mu_{h_1} = KT_1^{-s}, \quad (6)$$

$$\mu_{h_2} = KT_2^{-s}.$$

Посредством несложных преобразований системы (6) получим

$$s = \lg \frac{\mu_{h_1}}{\mu_{h_2}} / \lg \frac{T_2}{T_1}. \quad (7)$$

Вычисленное по формуле (7) значение s для четырех образцов чистого кремния оказалось равным 3,2. Из системы уравнений (6) получаем также, что $\mu_{h_2} = \mu_{h_1} (T_2/T_1)^{-s}$, из которого определяется подвижность дырок в области смешанной проводимости.

Таким образом, мы можем составить систему из трех уравнений с тремя неизвестными параметрами n , p и b . Решение системы уравнений является наиболее простым при температуре, когда $R = 0$. При этом условии получаем:

$$nb^2 - p = 0,$$

$$e(nb + p)\mu_h = \sigma, \quad (8)$$

$$np = n_i^2.$$

Несложные преобразования приводят к следующим выражениям для искомых параметров:

$$p = \frac{\sigma}{e\mu_h} - n_i, \quad \mu_n = b\mu_h,$$

$$b = \frac{p}{n_i}, \quad n = \frac{n_i^2}{p}.$$

По полученным формулам были вычислены значения параметров образца (рис. 1) при температуре 372° К, которые оказались следующими:

$$p = 4,2 \cdot 10^{12} [\text{см}^{-3}], \quad \mu_h = 1,82 \cdot 10^2 \left[\frac{\text{см}^2}{\text{в} \cdot \text{сек}} \right],$$

$$n = 2,3 \cdot 10^{11} [\text{см}^{-3}], \quad \mu_n = 7,64 \cdot 10^2 \left[\frac{\text{см}^2}{\text{в} \cdot \text{сек}} \right],$$

$$n_i = 9,83 \cdot 10^{11} [\text{см}^{-3}], \quad b = 4,2.$$

Литература

1. Dunlap W. C. Phys. Rev., 79, 286, 1950.
2. Hunter L. P. Phys. Rev., 94, 1157, 1954.
3. Pigan K. J. Appl. Phys., 32, 2369, 1961.

Институт физики твердого тела
и полупроводников АН БССР

Поступило в редакцию 31.III 1967

Э. А. РУДАК

**ПРИВЕДЕННОЕ УГЛОВОЕ ПРОТОН-НЕЙТРОННОЕ
 ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ В НЕЧЕТНО-НЕЧЕТНЫХ ЯДРАХ**

Исследование спектров возбужденных уровней нечетно-нечетных ядер может дать определенные сведения о характере остаточного протон-нейтронного взаимодействия. Анализ экспериментальных данных относительно спинов и энергетического расщепления уровней нечетно-нечетных ядер позволяет утверждать, что остаточное протон-нейтронное взаимодействие достаточно хорошо аппроксимируется смесью необменных вигнеровских и спин-обменных сил:

$$V_{np} = V(r_p, r_n, \cos \omega) (1 + \alpha \sigma_p \sigma_n),$$

где $\alpha \sim 0,1$ — параметр смеси; σ_p и σ_n — операторы спина протона и нейтрона; ω — угол между радиус-векторами протона r_p и нейтрона r_n . Расчет энергий уровней конфигурации $(l_p j_p, l_n j_n)$ сводится к оценке матричных элементов

$$E_I = \langle I j_p j_n | V_{np} | I j_p j_n \rangle,$$

где I — спин уровня. Оценка матричных элементов E_I в конечном итоге сводится к вычислению интегралов Слетера четного порядка

$$F_k = \frac{2k+1}{2} \int P_k(\cos \omega) V_{np}(r_p r_n \cos \omega) R_p^2 R_n^2 dr_p dr_n d \cos \omega.$$

Здесь $P_k(\cos \omega)$ — полиномы Лежандра, R_p и R_n — одночастичные волновые функции протона и нейтрона, нормированные на $\int R^2 dr = 1$. Матричные элементы E_I через интегралы Слетера F_k выражаются следующим образом:

$$E_I = \sum_k [\chi_I^k / (2k+1) + \xi_I^k / (2k+1)] F_k.$$

Коэффициенты χ_I^k и ξ_I^k зависят только от l_p, j_p, l_n, j_n и I . Для характеристики энергетического расщепления уровней конфигурации $(l_p j_p, l_n j_n)$ в принципе важным является только знание относительных величин F_k , так как в интегралы Слетера в качестве фактора входит глубина потенциальной ямы нейтрон-протонного взаимодействия. В работе [1] для характеристики относительных величин F_k вводится функция приведенного углового протон-нейтронного взаимодействия

$$\Omega(\cos \omega) = \int V(r_p r_n \cos \omega) R_p^2 R_n^2 dr_p dr_n.$$

Матричный элемент E_I через эту функцию выражается следующим образом:

$$E_I = 1/2 \int_{-1}^1 a^I (j_p j_n) \Omega(\cos \omega) d \cos \omega + a/2 \int_{-1}^1 b^I (l_p j_p l_n j_n) \Omega(\cos \omega) d \cos \omega,$$

где

$$a^l = \sum_k^{-1} \chi_j^k P_k(\cos \omega) \quad \text{и} \quad b^l = \sum_k \xi_j^k P_k(\cos \omega).$$

Функция $\Omega(\cos \omega)$ не зависит от r_p и r_n и определяет относительные величины F_k .

В работе [1] делается предположение, что функция $\Omega(\cos \omega)$ не зависит существенно от волновых функций валентных протона и нейтрона и может быть аппроксимирована функцией $V \cos \omega^{2n}$, где V — константа. Имеет в виду тождество

$$\cos \omega^{2n} = 1/(2n+1)P_0 + \sum_k (2k+1)2n \dots (2n-2k)/(2n+1) \dots (2n+2k+1)P_{2k},$$

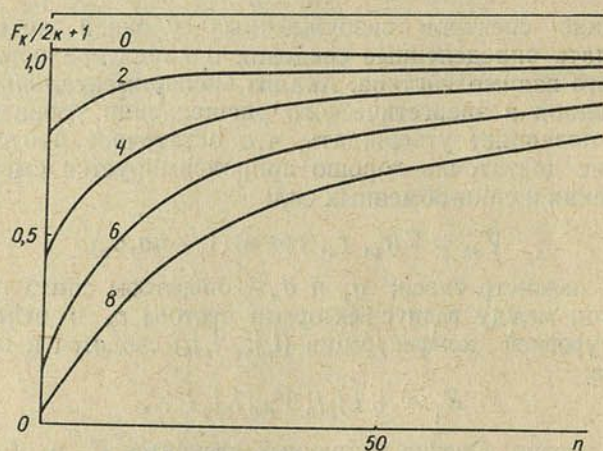


Рис. 1. График зависимости $F_k/(2k+1)$ от радиуса действия остаточного протон-нейтронного взаимодействия (цифры на кривых — значения k)

находим, что относительные величины интегралов Слетера определяются коэффициентами при соответствующих полиномах Лежандра и зависят от параметра n , характеризующего радиус действия остаточного протон-нейтронного взаимодействия. При $n \rightarrow \infty$ имеем δ -взаимодействие, а интегралы Слетера связаны соотношением $F_0:F_k=1:(2k+1)$. При $n \rightarrow 0$ остаточное протон-нейтронное взаимодействие характеризуется очень большим радиусом, причем все уровни конфигурации ($l_p j_p, l_n j_n$) оказываются вырожденными по энергии.

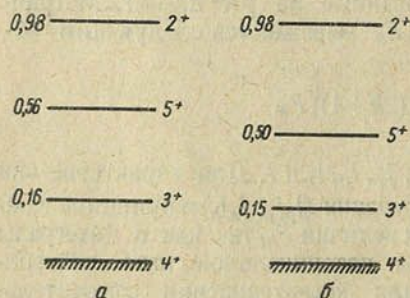


Рис. 2. Сравнение экспериментального (а) и рассчитанного (б) спектров уровней ядра Co^{56}

На рис. 1 интегралы Слетера даны в относительных единицах, причем F_0 принят равным 1. Наиболее характерной особенностью является обстоятельство, что отношение $F_0:F_2$ близко к 5 в очень широком интервале изменения n . Естественно поэтому предположить, что остаточное протон-нейтронное взаимодействие, зависящее только от интегралов Слетера F_0 и F_2 , должно хорошо аппроксимироваться δ -взаимодействием. Подходящий случай имеет место в ядре Co^{56} ,

в очень широком интервале изменения n . Естественно поэтому предположить, что остаточное протон-нейтронное взаимодействие, зависящее только от интегралов Слетера F_0 и F_2 , должно хорошо аппроксимироваться δ -взаимодействием. Подходящий случай имеет место в ядре Co^{56} ,

соответствующем конфигурации $(3, 7/2^{-1}; 1, 3/2)$. Матричные элементы E_1 для ядра Co^{56} имеют вид:

$$E_2 = -F_0 - 1/7 F_2 + \alpha(9/7 F_0 - 39/175 F_2),$$

$$E_3 = -F_0 + 1/21 F_2 + \alpha(-5/7 F_0 + 31/105 F_2),$$

$$E_4 = -F_0 + 13/105 F_2 + \alpha(1/21 F_0 - 59/315 F_2),$$

$$E_5 = -F_0 - 1/15 F_2 + \alpha(F_0 + 1/15 F_2).$$

При расчете энергетического расщепления уровней ядра Co^{56} для случая остаточного δ -взаимодействия положим $F_2=5F_0$, параметр смеси $\alpha=0,1$. Абсолютная величина интеграла F_0 определялась из сравнения $(E_2 - E_4)_{\text{эксп}}$ с $(E_2 - E_4)_{\text{теор}}$. Сравнение рассчитанного спектра уровней ядра Co^{56} с экспериментальным (рис. 2) показывает очень хорошее согласие между ними.

По-видимому, ядро Co^{56} хорошо описывается моделью «остов+валентные протон и нейтрон» с остаточным протон-нейтронным взаимодействием малого радиуса действия.

Литература

1. De Shalit A., Walecka J. D. Nucl. Phys., 22, 184, 1961.

Институт физики
АН БССР

Поступило в редакцию 27.IV 1967

Л. Н. БЫСТРОВ, Э. А. РУДАК, Е. И. ФИРСОВ

СПЕКТР γ -ЛУЧЕЙ ИЗ РЕАКЦИИ (n, γ) НА Ag^{40}

Реакция (n, γ) на аргоне исследована довольно слабо вследствие технических трудностей, связанных с приготовлением образцов. Наиболее полные данные получены с помощью парного люминесцентного γ -спектрометра [1]. В настоящей работе сделана попытка обойти указанные выше технические трудности путем использования для изучения спектра γ -лучей из реакции $Ag^{40}(n, \gamma) Ag^{41}$ магнитного комптоновского γ -спектрометра с разрешением 2%, установленного на продленном касательном канале реактора ИРТ АН БССР [2].

Очень хорошие фоновые условия в указанной выше установке позволяют проводить исследования реакции (n, γ) со сравнительно небольшими образцами — с эквивалентом порядка 50 г *барн*. Это позволило использовать в качестве образца технически чистый аргон, помещенный в алюминиевый баллон диаметром 146 мм и длиной 1700 мм под давлением 40 атм. Толщина стенок баллона 4 мм. Большая длина баллона позволила вынести торцовые стенки за пределы активной зоны, вследствие чего фон γ -лучей от захвата тепловых нейтронов в алюминии баллона был очень мал и практически не влиял на фоновые условия эксперимента.

Изотопный состав естественной смеси аргона и вклад отдельных изотопов в общее сечение реакции (n, γ) таковы:

| Изотоп | Ag^{36} | Ag^{38} | Ag^{40} |
|---|-----------|-----------|-----------|
| Содержание изотопа в % | 0,34 | 0,063 | 99,60 |
| Сечение реакции (n, γ) | 6 | 0,8 | 0,53 |
| Вклад изотопа в сечение реакции (n, γ) в % | 4 | 0,1 | 95 |

Спектр γ -лучей от захвата тепловых нейтронов ядрами аргона приведен на рис. 1. γ -Линии с энергией, превышающей энергию связи нейтрона в Ag^{41} (6,10 Мэв), и γ -линия с энергией 5,26 Мэв (№ 5) отнесены излучающему изотопу Ag^{37} . Все остальные γ -линии отнесены излучающему изотопу Ag^{41} .

Результаты настоящего эксперимента в сравнении с результатами работы [1] приведены в таблице.

Схема γ -переходов ядра Ag^{41} , составленная на основании данных настоящего эксперимента, приведена на рис. 2. Энергии и квантовые характеристики уровней взяты из [3—6]. Распад ядра Ag^{41} из захватного состояния характеризуется наличием интенсивных γ -переходов типа $E1$ на нижние p -уровни. Переходы типа $E1$ наблюдаются практически на все известные из реакции (d, p) p -уровни (исключение составляют p -уровни 3,29, 3,44 и 3,81 Мэв, обладающие малыми приведенными ширинами).

В литературе имеется расхождение относительно спина уровня 1,35 Мэв. Этот p -уровень может иметь спин 1/2 или 3/2. В настоящей работе

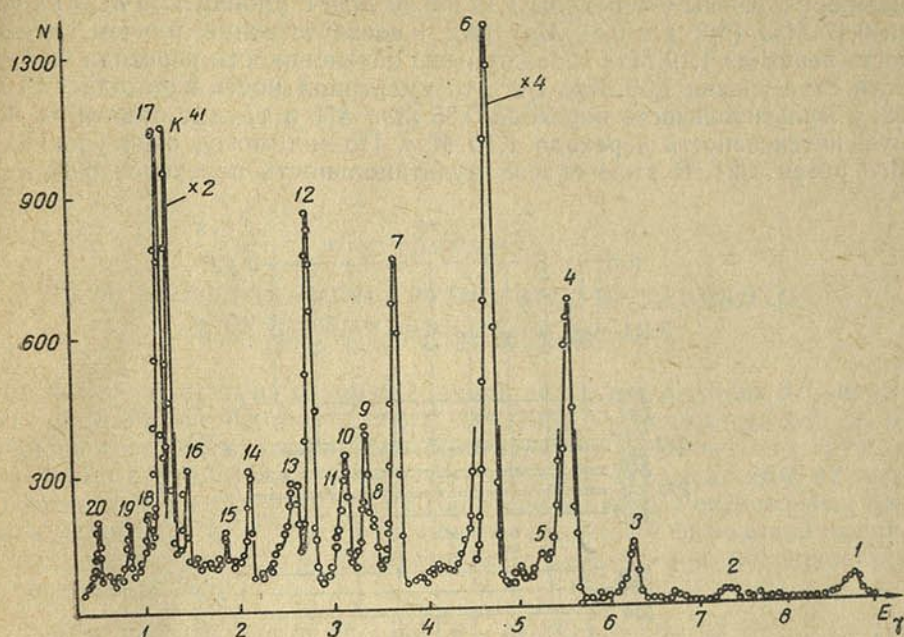


Рис. 1. Аппаратурный спектр γ -лучей из реакции (n, γ) на аргоне (N — число совпадений за 10 мин; E_γ в Мэв)

Таблица

Энергии и интенсивности γ -лучей из реакции (n, γ) на тепловых нейтронах на аргоне, полученные в данной работе и в [1] (а—дублет, б—группа линий). Ошибка в определении энергии приведена в скобках в единицах последней цифры, ошибка в определении интенсивности порядка 20%

| № линии | Излучающий изотоп | По результатам данной работы | | По результатам [1] | |
|---------|-------------------|------------------------------|------------|--------------------|------------|
| | | E_γ | I_γ | E_γ | I_γ |
| 1 | Ar^{37} | 8,80(2) | 0,3 | 8,8 | 0,3 |
| 2 | Ar^{37} | 7,40(2) | 0,2 | — | — |
| 3 | Ar^{37} | 6,30(2) | 0,8 | 6,3 | 1,4 |
| 4 | Ar^{41} | 5,58(1) | 9,3 | 5,59 | 18 |
| 5 | Ar^{37} | 5,26(2) | 0,4 | 5,25 ^a | 0,3 |
| 6 | Ar^{41} | 4,74(1) | 40 | 4,74 | 100 |
| — | — | — | — | 4,3 ^b | 4 |
| 7 | Ar^{41} | 3,69(2) | 6,5 | 3,69 | 16 |
| 8 | Ar^{41} | 3,43(2) | 1,3 | — | — |
| 9 | Ar^{41} | 3,35(2) | 3,1 | 3,39 ^a | 7 |
| 10 | Ar^{41} | 3,14(2) | 2,5 | 3,13 | 4 |
| 11 | Ar^{41} | 3,08(2) | 1,0 | — | — |
| 12 | Ar^{41} | 2,77(1) | 10 | 2,78 | 29 |
| 13 | Ar^{41} | 2,57(2) ^a | 6,0 | 2,58 | 6 |
| — | — | — | — | 2,25 | 2 |
| 14 | Ar^{41} | 2,13(2) | 3,0 | 2,13 | 9 |
| 15 | Ar^{41} | 1,88(2) | 2,0 | 1,88 | 5 |
| 16 | Ar^{41} | 1,47(1) | 4,3 | — | — |
| 17 | Ar^{41} | 1,19(1) | 30 | — | — |
| 18 | Ar^{41} | 1,05(1) | 4,9 | — | — |
| 19 | Ar^{41} | 0,85(1) | 6,8 | — | — |
| 20 | Ar^{41} | 0,52(1) | 18 | — | — |

были обнаружены γ -переходы 1,19 и 0,85 Мэв с уровня 1,35 Мэв на уровни 0,17 Мэв ($5/2^-$) и 0,52 Мэв ($3/2^-$) соответственно, причем интенсивность перехода 1,19 Мэв гораздо выше интенсивности перехода 0,85 Мэв. Если спин уровня 1,35 Мэв $1/2^-$, то мультипольность перехода 1,19 Мэв $E2$, а мультипольность перехода 0,85 Мэв $M1$ и трудно объяснить большую интенсивность перехода 1,19 Мэв. По-видимому, спин уровня 1,35 Мэв равен $3/2^-$. В этом случае мультипольность переходов 0,85 и 1,19

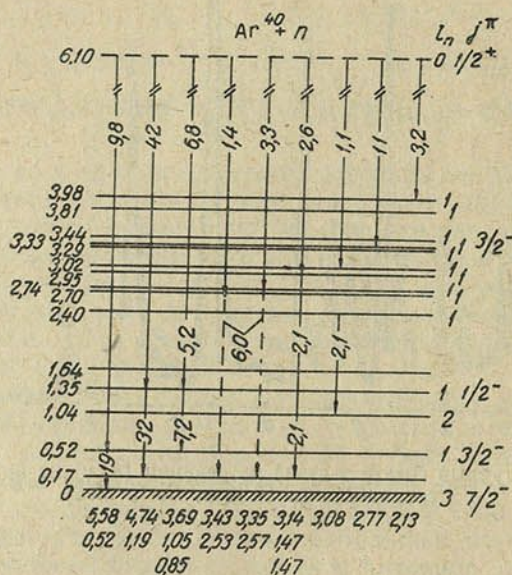


Рис. 2. Схема γ -переходов Ar^{41} из захватного состояния

Мэв $M1$ и, согласно одночастичной оценке, интенсивность перехода 1,19 Мэв должна быть примерно в три раза выше интенсивности перехода 0,85 Мэв. Экспериментальный результат $I_{1,19}/I_{0,85}=4$ довольно хорошо согласуется с этой оценкой.

Литература

1. Hardell B. R., Amell S. E., Blichert-Toft P. Ark. fys., 30, 32, 500, 1965.
2. Рудак Э. А., Фирсов Е. И. Атомная энергия, 18, 285, 1965.
3. Джелепов Б. С., Пекар Л. К. Схемы распада радиоактивных ядер. Изд. «Наука», 1966.
4. Fossan D. B., Poletti A. R. Phys. Rev., 152, № 3, 984, 1966.
5. Holbrow C. H., Hewka P. V., Wiza J., Middleton R. Nucl. Phys., 79, № 3, 505, 1966.
6. Allen I. P., Howard A. I., Bromley D. A. Bull. Am. Phys. Soc., 11, 81, 1966.

Институт физики
АН БССР

Поступило в редакцию 26.V 1967

Л. М. ТОМИЛЬЧИК

**ОБ ИСПОЛЬЗОВАНИИ ГРУППОВЫХ ИНВАРИАНТОВ
 В ОСЦИЛЛЯТОРНЫХ МОДЕЛЯХ**

Как известно, один из важных приемов применения теории непрерывных групп в физике состоит в отождествлении элементов центров обертывающих алгебр Ли (операторов Казимира) соответствующих групп с операторами определенных физических величин. В рамках этой идеологии рассмотрим некоторые простые соотношения между операторами Казимира групп $U(n)$ и $SU(n)$ и обсудим их возможный физический смысл.

Генераторы группы $U(n)$ удовлетворяют известным коммутационным соотношениям [1, 2]

$$[A_\mu^\nu, A_\nu^{\nu'}] = \delta_\mu^{\nu'} A_\mu^\nu - \delta_\mu^\nu A_\nu^{\nu'}, \quad \mu, \nu = 1, 2, \dots, n. \quad (1)$$

Нетрудно видеть, что соотношения (1) допускают выбор величин A_μ^ν в следующем виде:

$$A_\mu^\nu = D_+(\mu) D_-(\nu) - \frac{\delta_\mu^\nu}{n}, \quad (2)$$

$$D_{\pm(\mu)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\pm \frac{\partial}{\partial \xi_\mu} + \xi_\mu \right) \quad (3)$$

ξ_μ — безразмерные непрерывные параметры), где операторы $D_{\pm}(\mu)$ удовлетворяют следующим перестановочным соотношениям:

$$[D_+(\mu), D_-(\nu)] = \delta_\mu^\nu, \quad (4)$$

$$[D_+(\mu), D_+(\nu)] = [D_-(\mu), D_-(\nu)] = 0.$$

Переход к группе $SU(n)$ осуществляется путем введения генераторов B_μ^ν следующего вида:

$$B_\mu^\nu = A_\mu^\nu - \frac{\delta_\mu^\nu}{n} Sp A_\mu^\nu, \quad (5)$$

удовлетворяющих условию $Sp B_\mu^\nu = 0$.

Используя обычное определение операторов Казимира (например, [3,4]), находим линейный оператор для группы $U(n)$ *)

$$S = Sp A_\mu^\nu = \frac{1}{2} \left(-\frac{\partial^2}{\partial \xi_\mu^2} + \xi_\mu^2 \right) \quad (6)$$

*) Очевидно, оператор S формально совпадает с гамильтонианом n -мерного вырожденного осциллятора, записанным в безразмерных переменных.

(здесь и далее по повторяющимся индексам подразумевается суммирование), а также квадратичный оператор для группы $SU(n)$

$$J^2 = \frac{1}{2} B_\mu^\nu B_\nu^\mu = \frac{1}{2} \left\{ \left(1 - \frac{1}{n} \right) S^2 - \frac{n(n-1)}{4} \right\}. \quad (7)$$

Собственные значения оператора S , как известно, задаются следующим выражением:

$$S_N = N + \frac{n}{2}, \quad (8)$$

где N — любое неотрицательное целое число. Нетрудно видеть, что при $n = 2$ для собственных значений операторов J^2 и $J_3 = B_3^2$ получаем соответственно выражения

$$J^2 = j(j+1), \quad (9)$$

$$j_3 = m_j,$$

где $J = \frac{n_1 + n_2}{2}$, $m_j = \frac{n_2 - n_1}{2}$, $-j \leq m_j \leq j$, $n_1 + n_2 = N$.

Таким образом, как и следовало ожидать, мы получаем группу трехмерных вращений, локально изоморфную группе $SU(2)$. Интересно отметить, что при нашем выборе базиса алгебры Ли неприводимые представления как с целым, так и с полуцелым весом реализуются на непрерывных функциях следующего вида:

$$\Psi_{n_1 n_2} = e^{-\frac{\xi_1^2 + \xi_2^2}{2}} H_{n_1}(\xi_1) H_{n_2}(\xi_2), \quad (10)$$

где $H_{n_k}(\xi_k)$ — полиномы Эрмита порядка n_k ($k = 1, 2$). Если отождествить оператор J^2 с квадратом момента количества движения и соответственно J_3 — с его третьей проекцией, то естественно интерпретировать оператор S как оператор действия, разности собственных значений которого совпадают с экспериментально наблюдаемыми изменениями действия. Существенно, что такая интерпретация возможна в случае любого n , поскольку свойство эквидистантности спектра оператора S не зависит от n . Представляет интерес обсудить следствия этой гипотезы для групп $U(3)$ и $U(6)$, перспективных с точки зрения динамического обоснования унитарной симметрии.

Выражаю благодарность Ф. И. Федорову за интерес и внимание к работе, а также А. С. Потупа за плодотворные обсуждения проблемы.

Литература

1. Гельфанд И. М., Цетлин М. Л. ДАН СССР, 71, 825, 1950.
2. Baird G. E., Biedenharn L. C. J. Math. Phys., 4, 1449, 1963.
3. Желобенко Д. П. Лекции по теории групп Ли. Дубна, 1965.
4. Hwa R. C., Nuyts J. Phys. Rev., 145, 1188, 1966.

Институт физики
АН БССР

Поступило в редакцию 7.IX 1967

УДК 539.12

А. С. ПОТУПА

К ВОПРОСУ О ПОВЕДЕНИИ ЭФФЕКТИВНЫХ РАЗМЕРОВ ОБЛАСТИ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ПРИ ВЫСОКИХ ЭНЕРГИЯХ

В [1] рассмотрена интересная с физической точки зрения возможность поведения эффективных размеров области взаимодействия (ЭРОВ) при высоких энергиях, а именно

$$\begin{aligned} R_{\text{эфф}} &\sim \omega^\alpha, \\ T_{\text{эфф}} &\sim \omega^\alpha \end{aligned} \quad (\alpha > 0). \quad (1)$$

Не обосновывая эту зависимость теоретической аргументацией, авторы [1] предложили опыт по определению величины α .

В данной работе делается попытка обосновать линейный рост ЭРОВ с энергией.

Определим, следуя [1], ЭРОВ как размеры области, дающей основной вклад в амплитуду πN -рассеяния [2]:

$$\begin{aligned} R(pk, p'k') = i \int d^4x e^{i(k+k')\frac{x}{2}} \theta(x) \langle p' | \left[j\left(\frac{x}{2}\right), j\left(-\frac{x}{2}\right) \right] + \\ + \delta(t) \left[j\left(\frac{x}{2}\right), \partial_0 \Phi\left(-\frac{x}{2}\right) \right] | p \rangle, \end{aligned} \quad (2)$$

где $pk, p'k'$ — начальные и конечные импульсы нуклона и мезона соответственно, $j(x)$ — мезонный ток.

Переходя в брейтовскую систему и рассматривая рассеяние вперед ($\vec{\Delta} = \vec{p} - \vec{p}' = 0$), можно представить экспоненту в (2) в виде

$$\exp i \{ \omega(t-x) - [(\omega^2 - \mu^2)^{1/2} - \omega]x \} \quad (3)$$

(импульс мезона направлен по оси x). Для линейного роста амплитуды (постоянства сечения) необходимо

$$t-x \sim \frac{1}{\omega}. \quad (4)$$

Рассмотрим преобразование ЭРОВ в систему мезона [3]:

$$t = \frac{t' + vx'}{\sqrt{1-v^2}}, \quad x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1-v^2}}, \quad (5)$$

где v — скорость мезона относительно центра масс начального и конечного нуклонов, причем

$$k = \frac{\mu v}{\sqrt{1-v^2}}.$$

С другой стороны, находим

$$\frac{1}{\sqrt{1-v^2}} = \frac{\omega}{\mu}; \quad |v| = \sqrt{1 - \frac{\mu^2}{\omega^2}}. \quad (6)$$

В указанной системе выражение (3) примет следующий вид:

$$\exp i \mu t' \quad (7)$$

и основной вклад при той же асимптотике (2) даст область

$$t' \sim \frac{1}{\mu}.$$

Отсюда и из формул (5), (6) возникают следующие асимптотические оценки ЭРОВ:

$$t - x \sim \frac{1}{\omega}, \quad (8)$$

$$t \sim \frac{\omega}{\mu^2}, \quad (9)$$

$$x \sim \frac{\omega}{\mu^2}. \quad (10)$$

Нетрудно видеть, что только рост типа (10) сохраняет зависимость от μ в пространственной части экспоненты (3) при $\vec{\Delta} \neq 0$, что согласуется с требованием [1].

Таким образом, рост ЭРОВ возникает как релятивистский эффект при высоких энергиях. В свете этого эксперимент по определению величины α становится крайне актуальным.

Интересно отметить, что оценки (9) и (10) не позволяют, по-видимому, корректно определить в формализме S -матрицы in- и out-состояния при произвольно высоких энергиях, что связано с невозможностью установить регистрирующий прибор вне области взаимодействия.

В заключение выражаю благодарность Ф. И. Федорову за внимание к работе, Л. Г. Морозу и В. Я. Файнбергу за стимулирующие дискуссии, Л. М. Томильчику за плодотворное обсуждение результатов.

Литература

1. Грибов В. Н., Иоффе Б. Л., Померанчук И. Я. Ядерная физика, 2, 4, 1965.
2. Швебер С. Введение в релятивистскую квантовую теорию поля. ИЛ, 1963.
3. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теория поля. ФМ, 1962.

Институт физики
АН БССР

Поступило в редакцию 7.IX 1967

ХРОНІКА

ЮБІЛЕЙНАЯ СЕСІЯ АКАДЭМІІ НАВУК БССР

Савецкі народ, прагрэсіўнае чалавецтва ўсяго свету ўрачыста адзначаюць 50-годдзе Вялікай Кастрычніцкай сацыялістычнай рэвалюцыі.

Гэтай знамянальнай падзеі была прысвечана юбілейная навуковая сесія АН БССР, якая адбылася 30—31 кастрычніка 1967 г. У першы дзень работы сесіі было заслухана 4 даклады.

Прэзідэнт АН БССР член-карэспандэнт АН СССР акадэмік АН БССР В. Ф. Курчэвіч зрабіў даклад на тэму «Навука БССР за гады Савецкай улады».

Член-карэспандэнт АН БССР В. І. Сцяпанану выступіў з дакладам «Перамога Вялікай Кастрычніцкай сацыялістычнай рэвалюцыі і яе сусветна-гістарычнае значэнне».

«Перамога Вялікай Кастрычніцкай сацыялістычнай рэвалюцыі і гістарычны лёс беларускага народа» — тэма даклада члена-карэспандэнта АН БССР Н. В. Каменскай.

Старшыня Дзяржплана БССР Ф. Л. Кохану выступіў з дакладам «Народная гаспадарка БССР да 50-годдзя Кастрычніка і перспектывы яе развіцця».

На другі дзень сесіі былі заслуханы два даклады: «Вялікая Кастрычніцкая сацыялістычная рэвалюцыя і пераўтварэнне эканамічнай структуры БССР» — дакладчык член-карэспандэнт АН БССР Ф. С. Марцінкевіч; «Вялікая Кастрычніцкая сацыялістычная рэвалюцыя і грамадскі прагрэс» — дакладчык доктар філасофскіх навук К. П. Буслаў. У дакладах быў паказан ўплыў ідэй Кастрычніка на ход гісторыі чалавечага грамадства, адлюстраваны эканамічныя, палітычныя і культурныя дасягненні Савецкай дзяржавы, у тым ліку і Беларускай ССР, за 50 год, адзначаны вялікія поспехі развіцця навукі ў БССР.

Акрамя агульнаакадэмічнай юбілейнай сесіі, былі праведзены сесіі аддзяленняў АН БССР.

Юбілейная навуковая сесія Аддзялення фізіка-матэматычных навук АН БССР, прысвечаная 50-годдзю Вялікай Кастрычніцкай

сацыялістычнай рэвалюцыі, адбылася 26—27 кастрычніка 1967 г. Сесію адкрыў акадэмік-сакратар Аддзялення фізіка-матэматычных навук АН БССР акадэмік Ф. І. Фёдараў.

Даклад на тэму «Перамога Вялікай Кастрычніцкай сацыялістычнай рэвалюцыі і поспехі беларускага народа за 50 год Савецкай улады» зрабіў намеснік дырэктара Інстытута гісторыі кандыдат гістарычных навук І. Е. Марчанка.

Аб развіцці фізіка-матэматычных даследаванняў у БССР за 50 год Савецкай улады расказаў акадэмік АН БССР Ф. І. Фёдараў.

Дырэктар Інстытута фізікі АН БССР акадэмік АН БССР Б. І. Сцяпанану ў дакладзе «Люмінесцэнцыя і аптычныя квантавыя генератары» падвёў вынікі 12-гадовай навуковай дзейнасці Інстытута.

Першы дзень юбілейнай сесіі завяршыўся дакладам дырэктара Інстытута фізікі цвёрдага цела і паўправаднікоў АН БССР акадэміка АН БССР М. М. Сіраты «Хімічная сувязь і фізічныя ўласцівасці крышталей».

Другі дзень сесіі адкрыўся дакладам акадэміка АН БССР лаўрэата Ленінскай прэміі М. А. Ельшэвіча на тэму «Спектраскапія нізкатэмпературнай плазмы».

Затым акадэмік АН БССР Я. А. Барбашын зрабіў паведамленне аб даследаванні сістэм стабілізацыі з пераменнай структурай.

Даклад акадэміка АН БССР А. Н. Сеўчанкі і кандыдата фізіка-матэматычных навук Г. П. Гурыновіча быў прысвечан даследаванню элементарных працэсаў у біялагічна актыўных рэчывах.

Аб выкарыстанні тэарэтыка-групавых метадаў у вырашэнні некаторых вытворчых задач расказаў акадэмік АН БССР Д. А. Супруненька ў дакладзе «Аб мінімуме формы на мностве падстановак».

Юбілейная навуковая сесія закончылася дакладам акадэміка АН БССР Ф. І. Фёдарава на тэму «Коварыянтныя метады ў тэорыі элементарных часцінак».

ПЕРАЛІК АРТЫКУЛАУ,
 ЗМЕШЧАНых У ЧАСОПІСЕ «ВЕСЦІ АКАДЭМІІ НАВУК БССР»,
 СЕРЫЯ ФІЗІКА-МАТЭМАТЫЧНЫХ НАВУК,
 ЗА 1967 ГОД

| | | |
|--|---|-----|
| Барысаглебскі Л. А., Пазойскі С. В. Аб вызначэнні ядзерных параметраў з эксперыментальных каэфіцыентаў унутранай канверсіі (КУК) пры М1-пераходах ядраў | 2 | 102 |
| Барысаглебскі Л. А., Грусаў В. Ф. Да тэорыі вуглавой карэляцыі пры ўнутранай канверсіі на вышэйшых абалонках атама | 1 | 111 |
| Белоусова В. И., Рудак Э. А., Фирсов Е. И. Структура нижних уровней ядра Cd^{115} | 1 | 135 |
| Бобков В. В. Об одном способе построения одношаговых правил приближенного решения дифференциальных уравнений | 4 | 27 |
| Бобков В. В., Абрашин В. Н. Сходимость некоторых схем метода интегральных соотношений в случае задачи Коши для гиперболического уравнения второго порядка | 3 | 55 |
| Бобков В. В., Самусенко А. В. Многослойные схемы метода интегральных соотношений при решении задачи Гурса | 2 | 58 |
| Бортнік М. В., Ткачоў В. Д., Юхневіч А. В. Аб уплыве прымесі кіслароду на выпраменьваючую рэкамбінацыю ў крэмніі | 3 | 93 |
| Быстров Л. Н., Рудак Э. А., Фирсов Е. И. Спектр γ -лучей из реакции (n, γ) на Ag^{40} | 4 | 124 |
| Быстров Л. Н., Рудак Э. А., Фирсов Е. И. Спектры γ -лучей из реакций $Cu^{63}(n, \gamma)Cu^{64}$ и $Cu^{65}(n, \gamma)Cu^{66}$ на тепловых нейтронах | 4 | 74 |
| Быстрова Г. Г., Федоров Ф. И. Расчет температуры Дебая для кристаллов произвольной симметрии | 1 | 104 |
| Варикаш В. М., Шольц З., Мыл И. Интерферометрическое исследование роста кристаллов сегнетовой соли из раствора | 3 | 129 |
| Василий Феофилович Купревич (К 70-летию со дня рождения) | 1 | 5 |
| Ведерников В. А., Кохно А. П. О влиянии цепей подгрупп на свойства конечных групп | 3 | 75 |
| Віткін Э. І. Аб адной мадэлі рэзанатара для АКГ. I | 4 | 106 |
| Вольвачев Р. Т. Элементарная теория модулей | 4 | 7 |
| Гаращук М. С. Локально квазинильпотентные линейные группы | 4 | 5 |
| Горелик А. Г. О геометрической интерпретации одной трехзначной алгебры | 1 | 9 |
| Іваноў А. П., Шэрбаф І. Д., Бойка П. Б. Вывучэнне ступені палярызаванай святла ў вобласці малых вуглоў рассеяння | 2 | 108 |
| Иванов Е. А., Коблова Г. М. К численному решению задачи о дифракции электромагнитных волн на двух цилиндрах | 4 | 47 |
| Ильюкевич С. Ф. Дифракция наклонно подающей плоской электромагнитной волны на двух непроводящих круговых цилиндрах | 1 | 47 |
| Ільющэнка Л. Ф., Касцюк-Кульгаўчук Л. П. Даследаванне магчымасці зніжэння каэрцытыўнай сілы і павышэння каэфіцыента прамавугольнасці пятлі гістэрэзісу электраасаджаных жалеза-нікелевых плёнак. I | 1 | 114 |
| Какичев В. А. О свертках для интегральных преобразований | 2 | 48 |
| Кеда Н. П., Янович Л. А. Сходимость квадратурного процесса для некоторых классов периодических функций | 3 | 31 |
| Комаров Л. И., Романова Т. С., Федоров Ф. И. О поляризации вакуума в квантовой электродинамике | 1 | 93 |
| Комлик В. И. Об одной многопродуктовой задаче размещения | 4 | 63 |
| Комяк И. И. Об интегральных уравнениях типа свертки с сопряжением | 2 | 33 |
| Корень М. М., Сірата М. М. Дыфузія цынку з паравой фазы ў сурму | 3 | 89 |
| Крылов В. И., Яблонский А. И., Богданов Ю. С. Николай Павлович Еругин (К 60-летию со дня рождения) | 2 | 114 |

| | | |
|--|---|-----|
| Лапковский А. К. О строении гиперповерхности псевдоевклидова пространства | 1 | 22 |
| Лаптинский В. Н. Замечание к теореме Лапласа | 2 | 112 |
| Лепешинский Н. А. Одна задача теории расписаний и максимум суммы линейных форм на множестве подстановок | 3 | 51 |
| Лепешинский Н. А. О классификации $2 \times n$ задач Джонсона—Беллмана | 1 | 18 |
| Мадорский В. М. Об одном варианте метода спуска для решения нелинейных функциональных уравнений | 3 | 121 |
| Макаревич А. И., Райнес Л. Ю. Концентрация и подвижность носителей тока в чистом кремнии | 4 | 118 |
| Маханёк А. Г., Корольков В. С. О применении аналитических методов в теории возмущений Шредингера для расчета некоторых спектроскопических параметров веществ | 4 | 100 |
| Минкевич А. В. Аб узамадзеяні гравітацыйнага поля з квантаваным электрамагнітным і дзіракаўскім палямі | 3 | 97 |
| Минкевич А. В., Сокольский А. А. К релятивистской динамике частицы | 4 | 115 |
| Монастырский П. И. Метод ортогональной прогонки решения краевой задачи с неразделенными условиями для системы двух уравнений | 2 | 5 |
| Мороз Л. Г. Амплитуды дейтронного комптон-эффекта в релятивистском подходе | 4 | 79 |
| Моткин А. С. Сингулярные интегральные уравнения по бесконечному контуру | 4 | 36 |
| Мошинский А. В. Дифракция поля продольного дипольного излучателя на двух параллельных эллиптических цилиндрах. 2. Магнитный дипольный излучатель | 2 | 65 |
| Пальцев А. А. Квадратные правила с наперед заданными узлами для вычисления интеграла | 1 | 57 |
| Потупа А. С. К вопросу о поведении эффективных размеров области взаимодействия при высоких энергиях | 4 | 129 |
| Предко К. Г. Влияние свойств рассеивающего люминесцирующего экрана на качество воспроизводимого им изображения | 3 | 112 |
| Предко К. Г., Иванов А. П. О функции рассеяния линии мелкодисперсных люминесцирующих экранов | 3 | 106 |
| Примачук Л. П. О краевой задаче с сопряжением | 4 | 59 |
| Ратнікаў Э. В. Асіметрыя току пры каронным разрадзе з электрода, які падаграецца | 4 | 96 |
| Романов Г. С., Пустовалов В. К. Разлет вещества от интенсивно испаряющейся поверхности металла | 4 | 84 |
| Романова Т. С. Уравнения квантовой электродинамики с «дипольными духами» | 2 | 94 |
| Рудак Э. А. Приведенное угловое протон-нейтронное взаимодействие в нечетно-нечетных ядрах | 4 | 121 |
| Рябушко А. П. Метрические свойства центрально-симметрических космологических решений уравнений Эйнштейна и состояние материи при постоянном давлении | 2 | 21 |
| Рябушко А. П. Некоторые центрально-симметрические космологические решения уравнений Эйнштейна | 1 | 30 |
| Саксонов А. И. Ответ на один вопрос Р. Брауэра | 1 | 129 |
| Сирота Н. Н., Мазовко А. В., Сухвало С. В. Магнитострикция железоникель-кобальтовых сплавов | 4 | 71 |
| Сирота Н. Н., Овсейчук Э. А. Сверхпроводящие свойства сплавов ванадия и ниобия | 1 | 131 |
| Сирота Н. Н., Шипило В. Б. Измерения эффекта Холла и электропроводности полупроводников при высоких давлениях и температурах | 3 | 125 |
| Супруненко Д. А. К теории коммутативных матричных алгебр над несовершенным полем | 3 | 9 |
| Танаев В. С., Левин Г. М. Об оптимальном поведении систем с частично ограниченной памятью | 3 | 82 |
| Ткачоў В. Д., Лугакоў П. Ф. Цэнтры прыліпання і аптычнае гашэнне фотаправадзімасці ў крэмніі, які мае парушэнні структуры | 1 | 120 |
| Томильчик Л. М. Об использовании групповых инвариантов в осцилляторных моделях | 4 | 127 |
| Турецкий А. Х., Корзун И. И. Некоторые тождества | 3 | 20 |
| Турецкий А. Х., Торопова Г. Н. Оценка приближения функций, удовлетворяющих условию Липшица, интерполяционной формулой Фейера—Эрмита | 1 | 76 |
| Федоров Ф. И. Еще раз об ошибках Н. С. Акулова | 2 | 119 |
| Федоров Ф. И. Пересечение проективных операторов | 4 | 112 |

| | | |
|---|---|-----|
| Федоров Ф. И. Преобразование пространственной инверсии и матрица лоренц-инвариантной билинейной формы | 2 | 85 |
| Федоров Ф. И. Рекуррентная формула для произведений матриц Дирака | 1 | 127 |
| Федоров Ф. И., Тхарев Е. Е. О конечных преобразованиях представлений группы вращений | 1 | 101 |
| Физико-математические науки в АН БССР (к 50-летию Советской власти) | 3 | 5 |
| Хоанг Динь Зунг. Об устойчивости обратной краевой задачи аналитических функций | 4 | 22 |
| Черток В. Д. Порождение конечной группы системами недостижимых подгрупп | 2 | 80 |
| Чумаков В. Ф. Характеристическое уравнение с логарифмическим ядром | 3 | 118 |
| Чернікава В. Ф. Гадавы агульны сход АН БССР | 2 | 126 |
| Шапиро И. П., Маренко Н. И. Влияние примесей ТlBr на проводимость и фотопроводимость селена | 1 | 132 |
| Шебеко Г. А. Дифракция электромагнитного поля элементарного электрического диполя на двух сферах | 2 | 72 |
| Шешко М. А. Об общей краевой задаче линейного сопряжения для системы n пар функций | 1 | 37 |
| Шешко М. А. Об общей краевой задаче линейного сопряжения на римановой поверхности с краем | 2 | 12 |
| Шешко М. А. Об общей краевой задаче линейного сопряжения для одного класса функций, определенных на замкнутой римановой поверхности | 4 | 13 |
| Юров П. Г. Интегралы типа Коши и уравнения в конечных разностях | 3 | 67 |
| Янович Л. А. Приближение периодических аналитических функций тригонометрическими многочленами и рациональными тригонометрическими функциями. I | 1 | 64 |
| Янович Л. А. Приближение периодических аналитических функций тригонометрическими многочленами и рациональными тригонометрическими функциями. II | 3 | 40 |

З М Е С Т

МАТЭМАТЫКА

| | |
|--|----|
| М. С. Гаращук. Локально квазинильпотентные линейные группы | 5 |
| Р. Т. Вольвачев. Элементарная теория модулей | 7 |
| М. А. Шешко. Об общей краевой задаче линейного сопряжения для одного класса функций, определенных на замкнутой римановой поверхности | 13 |
| Хоанг Динь Зунг. Об устойчивости обратной краевой задачи аналитических функций | 22 |
| В. В. Бобков. Об одном способе построения одношаговых правил приближенного решения дифференциальных уравнений | 27 |
| А. С. Моткин. Сингулярные интегральные уравнения по бесконечному контуру | 36 |
| Е. А. Иванов, Г. М. Коблова. К численному решению задачи о дифракции электромагнитных волн на двух цилиндрах | 47 |
| Л. П. Примачук. О краевой задаче с сопряжением | 59 |
| В. И. Комлик. Об одной многопродуктовой задаче размещения | 63 |

ФІЗІКА

| | |
|--|-----|
| Н. Н. Сирота, А. В. Мазовко, С. В. Сухвало. Магнестрикция железо-никель-кобальтовых сплавов | 71 |
| Л. Н. Быстров, Э. А. Рудак, Е. И. Фирсов. Спектры γ -лучей из реакций $\text{Cu}^{63}(n, \gamma)\text{Cu}^{64}$ и $\text{Cu}^{65}(n, \gamma)\text{Cu}^{66}$ на тепловых нейтронах | 74 |
| Л. Г. Мороз. Амплитуды дейтронного комптон-эффекта в релятивистском подходе | 79 |
| Г. С. Романов, В. К. Пустовалов. Разлет вещества от интенсивно испаряющейся поверхности металла | 84 |
| Э. В. Ратнікаў. Асіметрыя току пры каронным разрадзе з электрода, які падаграецца | 96 |
| А. Г. Маханёк, В. С. Корольков. О применении аналитических методов в теории возмущений Шредингера для расчета некоторых спектроскопических параметров веществ | 100 |
| Э. І. Віткін. Аб адной мадэлі рэзанатара для АКГ. I. | 106 |

КАРОТКІЯ ПАВЕДАМЛЕННІ

| | |
|---|-----|
| Ф. И. Федоров. Пересечение проективных операторов | 112 |
| А. В. Минкевич, А. А. Сокольский. К релятивистской динамике частицы | 115 |
| А. И. Макаревич, Л. Ю. Райнес. Концентрация и подвижность носителей тока в чистом кремнии | 118 |
| Э. А. Рудак. Приведенное угловое протон-нейтронное взаимодействие в нечетно-нечетных ядрах | 121 |
| Л. Н. Быстров, Э. А. Рудак, Е. И. Фирсов. Спектр γ -лучей из реакции (n, γ) на Ag^{40} | 124 |
| Л. М. Томильчик. Об использовании групповых инвариантов в осцилляторных моделях | 127 |
| А. С. Потупа. К вопросу о поведении эффективных размеров области взаимодействия при высоких энергиях | 129 |

ХРОНІКА

| | |
|---|-----|
| Юбилейная сесія АН БССР | 131 |
| Пералік артыкулаў, змешчаных у часопісе «Весці Акадэміі навук БССР», серыя фізіка-матэматычных навук, за 1967 год | 132 |

СОДЕРЖАНИЕ

МАТЕМАТИКА

| | |
|--|----|
| М. С. Гарашук. Локально квазинильпотентные линейные группы | 5 |
| Р. Т. Вольвачев. Элементарная теория модулей | 13 |
| М. А. Шешко. Об общей краевой задаче линейного сопряжения для одного класса функций, определенных на замкнутой римановой поверхности функций | 22 |
| Хоанг Динь Зунг. Об устойчивости обратной краевой задачи аналитических функций | 27 |
| В. В. Бобков. Об одном способе построения одношаговых правил приближенного решения дифференциальных уравнений | 36 |
| А. С. Моткин. Сингулярные интегральные уравнения по бесконечному контуру | 47 |
| Е. А. Иванов, Г. М. Коблова. К численному решению задачи о дифракции электромагнитных волн на двух цилиндрах | 59 |
| Л. П. Примачук. О краевой задаче с сопряжением | 63 |
| В. И. Комлик. Об одной многопродуктовой задаче размещения | |

ФИЗИКА

| | |
|--|-----|
| Н. Н. Сирота, А. В. Мазовко, С. В. Сухвало. Магнитострикция железо-никель-кобальтовых сплавов | 71 |
| Л. Н. Быстров, Э. А. Рудак, Е. И. Фирсов. Спектры γ -лучей из реакций $\text{Cu}^{63}(n, \gamma)\text{Cu}^{64}$ и $\text{Cu}^{65}(n, \gamma)\text{Cu}^{66}$ на тепловых нейтронах | 74 |
| Л. Г. Мороз. Амплитуды дейтронного комптон-эффекта в релятивистском подходе | 79 |
| Г. С. Романов, В. К. Пустовалов. Разлет вещества от интенсивно испаряющейся поверхности металла | 84 |
| Э. В. Ратников. Асимметрия тока при коронном разряде с подогреваемого электрода | 96 |
| А. Г. Маханёк, В. С. Корольков. О применении аналитических методов в теории возмущений Шредингера для расчета некоторых спектроскопических параметров веществ | 100 |
| Э. И. Виткин. Об одной модели резонатора для ОКГ. 1. | 106 |

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

| | |
|--|-----|
| Ф. И. Федоров. Пересечение проективных операторов | 112 |
| А. В. Минкевич, А. А. Сокольский. К релятивистской динамике частицы | 115 |
| А. И. Макаревич, Л. Ю. Райнес. Концентрация и подвижность носителей тока в чистом кремнии | 118 |
| Э. А. Рудак. Приведенное угловое протон-нейтронное взаимодействие в нечетно-нечетных ядрах | 121 |
| Л. Н. Быстров, Э. А. Рудак, Е. И. Фирсов. Спектры γ -лучей из реакции (n, γ) на Ag^{40} | 124 |
| Л. М. Томильчик. Об использовании групповых инвариантов в осцилляторных моделях | 127 |
| А. С. Потупа. К вопросу о поведении эффективных размеров области взаимодействия при высоких энергиях | 129 |

ХРОНИКА

| | |
|---|-----|
| Юбилейная сессия АН БССР | 131 |
| Перечень статей, опубликованных в журнале «Известия Академии наук БССР», серия физико-математических наук, за 1967 г. | 132 |

AT 15002. Здадзен ў набор 6/XI-67 г. Падысана да друку 4/1-68 г. Фармат $70 \times 108^{1/16}$. Фіз. друк. арк. 9. Ум. друк. арк. 12,6. Уч.-выд. арк. 12,8. Выд. заказ 520. Друк. заказ 988. Цана 60 кап.

Друкарня імя Францыска (Георгія) Скарыны выдавецтва «Навука і тэхніка» АН БССР
 1 Дзяржкамітэта Савета Міністраў БССР па друку. Мінск, Ленінскі праспект, 68.

В ИЗДАТЕЛЬСТВЕ «НАУКА И ТЕХНИКА»

готовится к печати

Богуш А. А., Мороз Л. Г.

ВВЕДЕНИЕ В ТЕОРИЮ КЛАССИЧЕСКИХ ПОЛЕЙ

На русском языке. 12 л. Цена 87 коп. (ориентировочно).

В книге излагаются основы классической теории волновых полей частиц с различными спинами. Эти вопросы составляют неотъемлемую часть современной теории элементарных частиц и, как правило, включаются в качестве вводных разделов в большинство монографий, посвященных теории квантованных полей. Однако за последние десятилетия теория элементарных частиц настолько далеко ушла вперед и получила столь широкое и многостороннее развитие, что лежащие у ее истоков вопросы классической теории поля все чаще отходили на задний план и в отечественной новейшей специальной литературе не нашли по существу должного освещения.

Предлагаемая книга представляет собой попытку дать достаточно полное и систематическое, но вместе с тем краткое и компактное изложение основных вопросов классической теории полей, ознакомление с которыми представляется необходимым при последовательном изучении современной теоретической физики.

Книга рассчитана на преподавателей и студентов физических специальностей университетов, педагогических и других вузов. Она будет полезной не только для лиц, специализирующихся в области теоретической физики, но и для широкого круга читателей, интересы которых связаны с физикой элементарных частиц и ядерной физикой, а также со всеми другими разделами современной физики, где все шире используются идеи и математический аппарат классической и квантовой теории полей.

Книгу можно заказать предварительно во всех магазинах Книготорга и потребительской кооперации республики, а также в магазинах «Академкнига».

Для получения книги почтой заказы направлять по адресу: г. Минск, Железнодорожная улица, 27, Республиканский магазин «Книга — почтой» или г. Москва, К-12, Б. Черкасский переулок, 2/10, контора «Академкнига», отдел «Книга — почтой».

Книготоргующие и другие организации направляют заказы Управлению книжной торговли Государственного комитета Совета Министров БССР по печати.

РЕФЕРАТЫ

УДК 51945/46

ЛОКАЛЬНО КВАЗИНИЛЬПОТЕНТНЫЕ ЛИНЕЙНЫЕ ГРУППЫ. Гарашук М. С. «Весці Акадэміі навук БССР», серыя фізіка-матэматычных навук. 1967 г., № 4, 5—6.

Пара H, F подгрупп группы G называется нильпотентной, если она удовлетворяет одному из следующих условий: а) $H \subseteq F$; б) $F \subseteq H$; в) $N_H(H \cap F) \neq H \cap F \neq N_F(H \cap F)$; где $N_H(D)$ — нормализатор подгруппы D в группе H . Группа называется квазинильпотентной, если любые две ее подгруппы образуют нильпотентную пару.

Доказывается разрешимость всякой локально квазинильпотентной линейной группы, то есть линейной группы, у которой любая подгруппа с конечным числом образующих является квазинильпотентной.

Библиографий 4.

УДК 519.48

ЭЛЕМЕНТАРНАЯ ТЕОРИЯ МОДУЛЕЙ. Вольвачев Р. Т. «Весці Акадэміі навук БССР», серыя фізіка-матэматычных навук. 1967 г., № 4, 7—12.

Пусть R^n — n -членный свободный унитарный модуль над ассоциативным кольцом R с единицей. Доказано, что множество элементарно-модульных предложений, истинных на модуле R^n , рекурсивно эквивалентно множеству элементарно-кольцевых предложений, истинных на соответствующем кольце R . Затем устанавливается, что векторные пространства R_1^n и R_2^m над телами R_1 и R_2 соответственно тогда и только тогда неразличимы по своим элементарным свойствам, когда $n = m$ и тела R_1 и R_2 элементарно неразличимы. Доказано, что класс модулей $\{R^n/n = 1, 2, \dots\}$ имеет неразрешимую теорию.

Библиографий 8.

УДК 517.948.3

ОБ ОБЩЕЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ЛИНЕЙНОГО СОПРЯЖЕНИЯ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА ФУНКЦИЙ, ОПРЕДЕЛЕННЫХ НА ЗАМКНУТОЙ РИМАНОВОЙ ПОВЕРХНОСТИ. Шешко М. А. «Весці Акадэміі навук БССР», серыя фізіка-матэматычных навук. 1967 г., № 4, 13—21.

Дается исследование краевой задачи для кусочно-аналитической функции, определенной на замкнутой римановой поверхности, когда на канонических сечениях поверхности задается условие

$$F^+(t) = G_2(t) F^+[a(t)] + g_2(t),$$

а на некотором контуре L_1 , лежащем внутри поверхности, условие

$$F^+(t) = G_1(t) F^-(t) + H(t) \overline{F^-(t)} + g_1(t).$$

Используя метод Л. И. Чириковой по решению краевых задач для автоморфных функций, автор сводит эту задачу к интегральному уравнению. При выполнении условия

$$\frac{1}{2} \sup_{t \in L_1} \left| \frac{H(t)}{G_1(t)} \right| (1 + M) < 1,$$

где M —определенная константа, удается исследовать интегральное уравнение и краевую задачу.

Если же $|G_1| = |H|$, то задача распадается на две самостоятельные задачи, решаемые в замкнутой форме.

Библиографий 9.

УДК 517.544

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ОБРАТНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ. Хоанг Динь Зунг. «Весті Академії наук БССР», серия фізика-математичних наук. 1967 г., № 4, 22—26.

Работа посвящена вопросу об устойчивости обратной краевой задачи. Постановка обратной краевой задачи приведена в книге Ф. В. Гахова «Краевые задачи». Мы рассматриваем устойчивость этой задачи по отношению к изменениям задаваемых контурных значений аналитической функции. Сначала выводится одно вспомогательное предложение (лемма) относительно сходимости последовательности интегралов Шварца. На основе этого предложения и общей теории конформных отображений последовательности областей выводится заключение об устойчивости обратной краевой задачи: эта задача устойчива, если задаваемые контурные значения удовлетворяют условиям, упомянутым в постановке этой задачи, и условию однолиственности ее решения.

Библиографий 5.

УДК 518 : 517.91/94

ОБ ОДНОМ СПОСОБЕ ПОСТРОЕНИЯ ОДНОШАГОВЫХ ПРАВИЛ ПРИБЛИЖЕННОГО РЕШЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ. Бобков В. В. «Весті Академії наук БССР», серия фізика-математичних наук. 1967 г., № 4, 27—35.

Предлагается способ построения одношаговых правил приближенного решения дифференциальных уравнений, основанный на многократном использовании квадратных формул понижающейся алгебраической степени точности. Здесь в случае задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка доказывается принципиальная возможность построения по предлагаемому способу одношаговых правил любого порядка точности, даются конкретные примеры подобных правил, а также проводится исследование предлагаемых правил на сходимость. В работе указывается на возможность перенесения основной идеи способа на случай систем уравнений первого порядка, на уравнения высших порядков, а также на уравнения в частных производных.

Библиографий 4.

УДК 517.948.32

СИНГУЛЯРНЫЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ НА БЕСКОНЕЧНОМ КОНТУРЕ. Моткин А. С. «Весті АН БССР», серия фізика-математичних наук. 1967 г., № 4, 36—46.

Решается интегральное уравнение

$$a(t) \varphi(t) + \frac{b(t)}{\pi i} \int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t} d\tau = f(t)$$

в случае, когда L — контур, простирающийся в бесконечность. Показано, что в рассматриваемом случае, вообще говоря, неверны формулы решения уравнения, выведенные для конечного контура. Указывается условие равносильности уравнения (1) краевой задаче Римана

$$\Phi^+(t) = G(t) \Phi^-(t) + g(t). \quad (2)$$

Дается слабое решение уравнения (1) в пространстве, сопряженном пространству функций, удовлетворяющих условию Гельдера и имеющих на бесконечности нуль порядка не ниже первого. Норма в основном пространстве вводится равенством

$$\|\varphi(t)\| = \max_{t \in L} |(t - z_0)\varphi(t)| + \sup_{t_1, t_2 \in L} \frac{|(t_1 - z_0)\varphi(t_1) - (t_2 - z_0)\varphi(t_2)|}{\left| \frac{1}{t_1 - z_0} - \frac{1}{t_2 - z_0} \right|^\lambda}$$

Иллюстраций 2. Библиографий 9.

УДК 517.9:535.4

К ЧИСЛЕННОМУ РЕШЕНИЮ ЗАДАЧИ О ДИФРАКЦИИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН НА ДВУХ ЦИЛИНДРАХ.

Иванов Е. А., Коблова Г. М. «Весті Академії наук БССР», серия фізика-математичних наук. 1967 г., № 4, 47—58.

Рассматриваются некоторые из вопросов численного решения задачи о дифракции плоской электромагнитной волны на двух параллельных идеально проводящих бесконечно длинных круговых цилиндрах, находящихся на некотором расстоянии друг от друга, при помощи ЭВМ и использования формул строгой теории. В частности, сравнивается эффективность использования для численных расчетов на ЭВМ формул, полученных на основе метода многократного рассеяния волн (метода возмущений) и классическим методом разделения переменных в цилиндрических координатах.

Приведены таблицы, характеризующие скорость и точность вычислительного процесса, и диаграммы направленности, построенные для рассеянного на цилиндрах поля. Кроме того, приведены в качестве иллюстраций графики радиолокационного поперечного сечения для двух цилиндров равных радиусов.

Таблиц 2. Иллюстраций 4. Библиографий 6.

УДК 517.948.32

О КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ С СОПРЯЖЕНИЕМ. Примачук Л. П. «Весті Академії наук БССР», серия фізика-математичних наук. 1967 г., № 4, 59—62.

На единичной окружности L рассматривается краевая задача

$$\varphi^+(t) = a(t)\varphi^-(t) + b(t)\overline{\varphi^-(t)} + c(t). \quad (1)$$

Функции $a(t)$, $b(t)$ удовлетворяют условию Гельдера $|a(t)| > 0$.

Используя один результат И. Х. Сабитова (РЖ Мат., 1964, 9Б299) и связь задачи (1) с задачей Римана для системы двух пар функций, доказываем следующую теорему.

Теорема. Если $|a(t)| > 0$, то

$$l = \max(0, 2\kappa), \quad p = \max(0, -2\kappa), \quad |\kappa| \geq n - 1,$$

$$2\kappa \leq l \leq \kappa + n - 1, \quad p = -2\kappa + l, \quad 0 \leq \kappa < n - 1,$$

$$0 \leq l \leq \kappa + n - 1, \quad p = 2\kappa + l, \quad -n + 1 < \kappa \leq 0,$$

где l — число линейно независимых решений, p — число условий разрешимости задачи (1), $\kappa = \text{Ind } a(t)$, а n определяется из условия

$$\left| b(t) - \sum_{-N}^N b_k t^k \right| < |a(t)|, \quad (5)$$

n — наименьшее из чисел $-1, \dots, -N$, для которого $b_{-n} \neq 0$.

Теорема уточняет результат цитированной работы И. Х. Сабитова для $\kappa - n$ четного. Полученные результаты позволяют установить границы изменения частных индексов задачи Римана для некоторых эрмитовых матриц, а также дают один достаточный признак устойчивости частных индексов таких матриц.

Библиографий 6.

УДК 518

ОБ ОДНОЙ МНОГОПРОДУКТОВОЙ ЗАДАЧЕ РАЗМЕЩЕ-**НИЯ.** Комлик В. И. «Весті Акадэміі навук БССР», серия фізіка-матэматычных навук. 1967 г., № 4, 63—70.

Рассматривается многопродуктовая задача размещения в вариантной постановке. Сущность предлагаемого метода решения коротко состоит в следующем. Сначала решается задача размещения без учета транспортных затрат и выписываются планы \bar{y}_i , $i=1, 2, \dots$ этой задачи в порядке возрастания функционала $P(\bar{y}_i)$, т. е. $P(\bar{y}_1) \leq P(\bar{y}_2) \leq \dots$. Для этих планов находятся суммарные производственно-транспортные расходы $F(\bar{y}_i)$. Работа алгоритма заканчивается на k -м шаге, если $P(\bar{y}_k) > L_{k-1}$, где $L_{k-1} = \min \{F(\bar{y}_1), F(\bar{y}_2), \dots, F(\bar{y}_{k-1})\}$. План, соответствующий величине L_{k-1} , является оптимальным планом задачи.

Для частного случая (однопродуктовой задачи размещения) приводятся результаты счета по программе, составленной на ЭВМ «Минск-22».

Библиографий 2.

УДК 538.245

МАГНИТОСТРИКЦИЯ ЖЕЛЕЗО-НИКЕЛЬ-КОБАЛЬТОВЫХ**СПЛАВОВ.** Сирота Н. Н., Мазовко А. В., Сухвалло С. В. «Весті Акадэміі навук БССР», серия фізіка-матэматычных навук. 1967 г., № 4, 71—73.

Исследована продольная магнитострикция железо-никель-кобальтовых сплавов в функции напряженности магнитного поля с помощью стандартных тензодатчиков на проволочном электронном тензомере типа ПЭТ-ЭВ-М при комнатной температуре. Определена величина магнитострикции насыщения указанных сплавов, составы которых равномерно через 10 атомных процентов размещены во всем концентрационном треугольнике сплавов. Указаны концентрационные области сплавов, обладающих положительной и отрицательной магнитострикцией.

Таблиц 1. Иллюстраций 3. Библиографий 10.

УДК 539.172.4

СПЕКТРЫ γ -ЛУЧЕЙ ИЗ РЕАКЦИЙ $\text{Cu}^{63}(n, \gamma)\text{Cu}^{64}$ И $\text{Cu}^{65}(n, \gamma)\text{Cu}^{66}$ НА ТЕПЛОВЫХ НЕЙТРОНАХ. Быстров Л. Н., Рудак Э. А., Фирсов Е. И. «Весті Акадэміі навук БССР», серия фізіка-матэматычных навук. 1967 г., № 4, 74—78

Спектры γ -лучей из реакций $\text{Cu}^{63}(n, \gamma)\text{Cu}^{64}$ и $\text{Cu}^{65}(n, \gamma)\text{Cu}^{66}$ исследовались с помощью магнитного комптоновского γ -спектрометра с разрешением 2% в интервале энергий от 0,3 Мэв до энергии связи нейтрона на реакторе ИРТ АН БССР. Измерены энергии и интенсивности 27 γ -линий излучающего изотопа Cu^{64} и 18 γ -линий изотопа Cu^{66} . На основании полученных данных предлагаются схемы γ -переходов ядер Cu^{64} и Cu^{66} .

Таблиц 2. Иллюстраций 4. Библиографий 15.

УДК 539.12

АМПЛИТУДЫ ДЕЙТРОННОГО КОМПТОН-ЭФФЕКТА**В РЕЛЯТИВИСТСКОМ ПОДХОДЕ.** Мороз Л. Г. «Весті Акадэміі навук БССР», серия фізіка-матэматычных навук. 1967 г., № 4, 79—83.

Найдены независимые амплитуды дейтронного комптон-эффекта на основе требований инвариантности относительно полной группы Лоренца, калибровочной инвариантности и инвариантности по отношению к отражению времени. Дейтрон, рассматриваемый как частица со спином 1, описывается уравнением Прока в формализме Даффина—Кеммера. Особенность работы заключается в том, что требования инвариантности для матричных элементов перехода дейтрона из одного состояния в другое формулируются в той же форме, как и для матричных элементов перехода нуклонов.

Библиографий 8.

УДК 621.375.8.1 : 533/533.5 + 536.423.1

РАЗЛЕТ ВЕЩЕСТВА ОТ ИНТЕНСИВНО ИСПАРЯЮЩЕЙСЯ ПОВЕРХНОСТИ МЕТАЛЛА. Романов Г. С., Пустановалов В. К. «Весті Академії наук БССР», серия фізика-математичних наук. 1967 г., № 4, 84—95.

Рассматривается одномерный нестационарный разлет вещества в вакуум от испаряющейся поверхности металла, имеющей температуру $T_0 < T_{кр}$ ($T_{кр}$ — критическая температура металла). Показано, что в зависимости от значения величин T_0 и времени от начала разлета t реализуется один из двух режимов течения: 1) при малых T_0 и t процесс конденсации в расширяющемся паре замораживается сразу же у поверхности, и во всей области течение автомодельно и расширение происходит по адиабате Пуассона; 2) при больших T_0 и t все течение распадается на две области — область, в которой расширение автомодельно и происходит по адиабате двухфазной равновесной системы, состоящей из насыщенного пара и частиц конденсированной фазы, и область, в которой конденсация замораживается, и расширение происходит по адиабате Пуассона. Из рассмотрения кинетических процессов в переходной зоне у поверхности тела определяются соответствующие указанным режимам течения газодинамические граничные условия, которые используются при построении картины течения. Таблиц 1. Библиографий 16.

УДК 537.525

АСИММЕТРИЯ ТОКА ПРИ КОРОННОМ РАЗРЯДЕ С ПОДОГРЕВАЕМОГО ЭЛЕКТРОДА. Ратников Э. В. «Весті Академії наук БССР», серия фізика-математичних наук. 1967 г., № 4, 96—99.

Рассматривается асимметрия тока при разряде с подогреваемого острого края. Разряд проводился в области напряжений от 8 до 18 кВ. Температура коронирующего электрода T изменялась от комнатной до 1080°К, такое же изменение температуры предполагалось в коронирующем слое. До $U = 14$ кВ коэффициент выпрямления β зависит и от U и от T . С 14 кВ он не чувствителен ни к U , ни к T . Показано, что сопротивление разряда R при $U = \text{const}$ зависит от T по экспоненциальному закону. Найдены значения эффективной энергии активации ионизации E^* для различных U . Зависимость разности значений E^* при изменении полярности коронирующего электрода ΔE^* от U аналогична зависимости β от U .

Приводится формула, связывающая ΔE^* с β , которая согласуется с экспериментальными данными. Делается вывод, что асимметрия тока разряда обусловлена асимметрией E^* . Последняя объясняется изменением эффективной геометрии разрядного промежутка при изменении полярности коронирующего электрода.

Таблиц 1. Иллюстраций 4. Библиографий 5.

УДК 530.145.7

О ПРИМЕНЕНИИ АНАЛИТИЧЕСКИХ МЕТОДОВ В ТЕОРИИ ВОЗМУЩЕНИЯ ШРЕДИНГЕРА ДЛЯ РАСЧЕТА НЕКОТОРЫХ СПЕКТРОСКОПИЧЕСКИХ ПАРАМЕТРОВ ВЕЩЕСТВ. Маханёк А. Г., Корольков В. С. «Весті Академії наук БССР», серия фізика-математичних наук. 1967 г., № 4, 100—105.

Дан критический анализ некоторых отдельных вопросов теории возмущения и отмечены весьма важные обстоятельства, которые позволяют не только существенно упростить такого рода аналитические расчеты, но и значительно расширить круг задач, решения для которых могут быть получены в виде простых квадратур. Показано, что ввиду возможности двоякого расчета неаддитивных поправок энергии второго порядка малости часто представляется случай выбрать такой способ расчета, который позволяет устранить трудности, связанные со смешиванием функций при наличии вырождения. В качестве примера приведен расчет относительной нерелятивистской поправки второго приближения в теории магнитной сверхтонкой структуры, когда имеется вырождение.

Библиографий 9.

УДК 621.378.325

ОБ ОДНОЙ МОДЕЛИ РЕЗОНАТОРА ДЛЯ ОКГ. И. Виткин Э. И. «Весті Академії наук БССР», серия фізика-математических наук. 1967 г., № 4, 106—111.

Предлагается модель резонатора для ОКГ, учитывающая изменения показателя преломления и коэффициента усиления в направлении, перпендикулярном оси резонатора. В рамках этой модели получены условия генерации различных мод резонаторов с прямоугольными зеркалами произвольной кривизны. Определяются дополнительные потери, вызываемые расфокусировкой зеркал.

Иллюстраций 2. Библиографий 11.

УДК 539.126.01 : 539.126

ПЕРЕСЕЧЕНИЕ ПРОЕКТИВНЫХ ОПЕРАТОРОВ. Федоров Ф. И. «Весті Академії наук БССР», серия фізика-математических наук. 1967 г., № 4, 112—114.

Излагается общий метод отыскания проективного оператора, проектирующего на подпространство, являющееся пересечением подпространств проектирования нескольких проективных операторов α_k ($k = 1, 2, \dots, s$). Показано, что это подпространство состоит из векторов ψ , являющихся решениями уравнения $\tau\psi = 0$, где τ — оператор, равный сумме s проективных операторов $\alpha_k = 1 - \alpha_k$, дополнительных к α_k . Соответствующий проективный оператор равен $P_0(\tau)/P_0(0)$, где $P_0(\tau)$ определяется из минимального уравнения для τ : $P(\tau) = \tau P_0(\tau) = 0$.

Библиографий 2.

УДК 530.12 : 531.18

К РЕЛЯТИВИСТСКОЙ ДИНАМИКЕ ЧАСТИЦЫ. Минкевич А. В., Сокольский А. А. «Весті Академії наук БССР», серия фізика-математических наук. 1967 г., № 4, 115—117.

Критикуется применение уравнений Лагранжа — Эйлера в 4-мерной форме $\frac{\partial L}{\partial x^\mu} = \frac{d}{d\tau} \left(\frac{\partial L}{\partial u^\mu} \right)$ (τ — собственное время частицы, $u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau}$) к функциям Лагранжа, не однородным степени 1 по «скоростям». Корректные лагранжевы уравнения релятивистской динамики частицы впервые были получены В. Бурсианом. Найдено выражение для обобщенного 4-импульса частицы, а также релятивистское уравнение Гамильтона — Якоби.

Библиографий 8.

УДК 537.226 + 537.311.33 : [537 + 535]

КОНЦЕНТРАЦИЯ И ПОДВИЖНОСТЬ НОСИТЕЛЕЙ ТОКА В ЧИСТОМ КРЕМНИИ. Макаревич А. И., Райнес Л. Ю. «Весті Академії наук БССР», серия фізика-математических наук. 1967 г., № 4, 118—120.

На основе измерений температурной зависимости постоянной Холла и электропроводности предлагается метод определения концентрации и подвижности носителей тока в чистом кремнии.

Метод основан на определении температурной зависимости подвижности дырок

при низкой температуре и экстраполяции этой зависимости в область температур, при которых образец обладает примесной проводимостью. По полученным формулам были вычислены параметры образца из чистого кремния при температуре 372° К.

Иллюстраций 1. Библиографий 3.

УДК 539.141

ПРИВЕДЕННОЕ УГЛОВОЕ ПРОТОН-НЕЙТРОННОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ В НЕЧЕТНО-НЕЧЕТНЫХ ЯДРАХ. Рудак Э. А. «Весті Академії наук БССР», серия фізика-математических наук. 1967 г., № 4, 121—123.

Свойства остаточного протон-нейтронного взаимодействия в нечетно-нечетных ядрах рассматриваются с помощью функции приведенного углового взаимодействия, предложенной А. де Шалитом. В тех случаях, когда остаточное взаимодействие выражается только через интегралы Слетера F_0 и F_2 , оно может, по-видимому, хорошо аппроксимироваться δ -взаимодействием. В качестве примера приводится рассчитанный спектр уровней Co^{56} . Наблюдается хорошее согласие рассчитанного спектра с экспериментальным.

Иллюстраций 2. Библиографий 1.

УДК 539.172.4

СПЕКТР γ -ЛУЧЕЙ ИЗ РЕАКЦИИ (n, γ) НА Ag^{40} . Быстров Л. Н., Рудак Э. А., Фирсов Е. И. «Весті Академії наук БССР», серия фізика-математических наук. 1967 г., № 4, 124—126.

На исследовательском реакторе АН БССР с помощью магнитного комптоновского γ -спектрометра с разрешением 2% исследовался спектр γ -лучей из реакции (n, γ) на естественной смеси изотопов аргона. На основании полученных данных предлагается схема γ -переходов ядра Ag^{41} из захватного состояния, обсуждается значение спина уровня 1,35 Мэв.

Таблиц 1. Иллюстраций 2. Библиографий 6.

УДК 539.12

ОБ ИСПОЛЬЗОВАНИИ ГРУППОВЫХ ИНВАРИАНТОВ В ОСЦИЛЛЯТОРНЫХ МОДЕЛЯХ. Томильчик Л. М. «Весті Академії наук БССР», серия фізика-математических наук. 1967 г., № 4, 127—128.

На основе задания генераторов группы $U(n)$ в виде $A_{\mu}^{\nu} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial \xi_{\mu}} + \xi_{\mu} \right) \times \left(-\frac{\partial}{\partial \xi_{\nu}} + \xi_{\nu} \right) - \frac{\delta_{\mu\nu}}{n}$ получены соотношения между линейным оператором Казимира унитарной группы и квадратичным оператором Казимира группы $SU(n)$, на основе анализа котс-ров области взаимодействия при высоких энергиях. Ставится вопрос о корректности определения in- и out-состояний при $\omega \rightarrow \infty$, в рамках измерительной процедуры.

Библиографий 4.

УДК 539.12

К ВОПРОСУ ОБ ЭФФЕКТИВНЫХ РАЗМЕРАХ ОБЛАСТИ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ПРИ ВЫСОКИХ ЭНЕРГИЯХ. Потупа А. С. «Весті Академії наук БССР», серия фізика-математических наук. 1967 г., № 4, 129—130.

Приводятся аргументы, основанные на интерпретации преобразований Лоренца, параметрически зависящих от энергии, в пользу линейного роста эффективных размеров области взаимодействия при высоких энергиях. Ставится вопрос о корректности определения in- и out-состояний при $\omega \rightarrow \infty$, в рамках измерительной процедуры.

Библиографий 3.



ПРОДОЛЖАЕТСЯ ПОДПИСКА НА 1968 ГОД

**НА ЖУРНАЛ
„ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК БССР“**

Серия физико-математических наук

Журнал освещает общие принципиальные вопросы развития советской науки, публикует материалы научных исследований и итоги работ институтов Академии наук БССР и других научно-исследовательских учреждений БССР в области математики (методы вычислительной математики, уравнения математической физики, алгебра и теория групп и др.), общей и теоретической физики (оптика, физика твердого тела и полупроводников, теория полей и элементарных частиц и др.), печатает обзоры по важнейшим разделам физико-математических наук, рецензии на выходящие в СССР научные издания, а также хронику научной жизни.

Журнал рассчитан на научных работников научно-исследовательских учреждений, преподавателей высших учебных заведений, аспирантов и студентов старших курсов вузов физико-математического профиля.

Журнал печатается на белорусском языке. Отдельные статьи печатаются на русском языке. В конце журнала помещаются рефераты статей.

ЖУРНАЛ ВЫХОДИТ 4 РАЗА В ГОД

ПОДПИСНАЯ ЦЕНА НА ГОД 2 руб. 40 коп.

Подписка принимается всеми городскими, районными отделами «Союзпечати», конторами и отделениями связи и общественными уполномоченными по подписке на предприятиях, в учебных заведениях и учреждениях.