ЗОК-3
58
68.64.1370

ВЕСЦІ

АКАДЭМІІ НАВУК БССР

СЕРЫЯ
ФІЗІКА-МАТЭМАТЫЧНЫХ
НАВУК

63942

1 – 5

ВЫДАВЕЦТВА „НАВУКА І ТЭХНІКА"

МІНСК 1968

30K 3
58

34



ИЗВЕСТИЯ

АКАДЕМИИ НАУК БССР

СЕРИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ
НАУК

№ 1

ИЗДАТЕЛЬСТВО „НАУКА И ТЕХНИКА“

МИНСК 1968

06.64.1370

ВЕСЦІ

АКАДЭМІІ НАВУК БССР

ЗОК-3
58

СЕРЫЯ
ФІЗІКА-МАТЭМАТЫЧНЫХ
НАВУК

№ 1

ВЫДАВЕЦТВА „НАВУКА І ТЭХНІКА“

МІНСК 1968

Рэдакцыйная калегія:

Ф. І. ФЁДАРАЎ (галоўны рэдактар),
Д. А. СУПРУНЕНКА (нам. галоўнага рэдактара),
М. М. АЛЯХНОВІЧ, У. І. КРЫЛОЎ,
М. М. СІРАТА, У. І. СПРЫНДЖУК,
Я. І. ФІРСАЎ, С. А. ЧУНІХІН

ВЕСЦІ АКАДЭМІІ НАВУК БЕЛАРУСКАЙ ССР № 1 1968
СЕРЫЯ ФІЗІКА-МАТЭМАТЫЧНЫХ НАВУК

УДК 519.44

С. А. ЧУНИХИН

ОБ ИНДЕКСИАЛАХ И НОРМАЛИЗАТОРАХ

§ 1. В ряде работ [1—7] нами для конечных групп исследовались вопросы существования и сопряженности подгрупп, порядки и индексы которых взаимно просты, а также условия вложения в них подгрупп меньших порядков.

Такого рода свойства конечных групп мы назвали силовскими [3] или π-силовскими [8], поскольку классическая теорема Силова соответствует тому их частному случаю, когда множество π простых делителей порядка исследуемой подгруппы сводится лишь к одному простому числу p.

Один из интересных примеров π-силовских свойств доставляют введенные нами в [1] p-разрешимые группы, нашедшие в дальнейшем применения в многих работах различных авторов (ограничимся здесь указанием лишь на [9]). Другим примером такого типа может служить найденная в [5, 7] универсальная факторизация конечных групп, которая для частного случая разрешимых групп превращается в классическую факторизацию Ф. Холла.

Если литература по подгруппам, порядки и индексы которых взаимно просты, стала в настоящее время достаточно обширной, то вопросам существования подгрупп любого порядка посвящено гораздо меньше исследований.

Некоторые критерии такого характера содержатся в [10]. К ним относятся и факторизационные теоремы работ [11].

Введенный нами в [12] метод индексиалов объединил большое число ранее известных критериев существования подгрупп, что позволяет обнаруживать также и подгруппы, порядок и индекс которых не обязательно взаимно просты.

Сущность метода индексиалов, представленная в самых общих чертах, состоит в том, что берутся определенные делители индексов некоторого ряда инвариантных подгрупп группы и затем составляется их произведение h, называемое индексиалом.

В работе [13] было показано, что всякий индексиал h конечной группы можно так «расширить», что получится новый, «правильный» индексиал вида ch, $c \geqslant 1$, которому уже соответствует «подходящая» подгруппа порядка ch, где натуральное число c таково, что множество его простых делителей входит в множество простых делителей числа h.

Эта теорема, таким образом, и служит средством для обнаружения подгрупп.

Зачатки метода индексиалов можно усмотреть в известной факторизационной теореме Шура [14], теореме 9 [4] и теореме $E1^*$ [15]. В настоящей работе методом индексиалов мы получаем еще несколько признаков существования подгрупп у конечных групп, примыкающих к результатам, полученным в [13].

При этом используются некоторые подгруппы нормализаторов факторов индексиала в фактор-группах исходного инвариантного ряда группы.

Краткое сообщение о результатах настоящей работы было опубликовано в [16].

§ 2. В дальнейшем мы будем использовать ряд определений, обозначений и утверждений работы [13]. Приведем их здесь для полноты изложения.

G — произвольная конечная группа, порядок которой обозначим через $|G| = g$; E — единичная подгруппа G; $\pi(n)$ — множество простых делителей натурального числа n; π-число — натуральное число n, для которого $\pi(n) \subseteq \subseteq \pi$, где π — некоторое пустое или непустое множество простых чисел; π-делитель натурального числа n — делитель n, являющийся π-числом.

Если N — некоторая подпоследовательность некоторой последовательности натуральных чисел M (в которой возможны повторения), то через $\overline{N}$ обозначим в случае не пустого N произведение всех членов N, а в случае N пустого положим $\overline{N} = 1$.

Обозначим через P_{f_i} множество членов последовательности $f_\beta, f_{\beta+1}, \ldots, f_\nu$, предшествующих ее члену f_i (исключая f_i). Пусть теперь

$$G = G_0 \supseteq G_1 \supseteq \ldots \supseteq G_\nu = E, \quad \nu \geqslant 1, \qquad (R)$$

— некоторый ряд нормальных делителей группы G, имеющий или не имеющий повторения, и с последовательностью индексов $h_1, h_2, \ldots, h_\nu$.

Определение индексиала. Пусть на последовательности натуральных чисел $W = \{\beta, \beta+1, \ldots, \nu\}$, $1 \leqslant \beta \leqslant \nu$, определена некоторая однозначная функция f, которая а) каждому $i \in W$ ставит в соответствие некоторую подгруппу F_i / G_i порядка $|F_i / G_i| = f_i$ группы G_{i-1}/G_i, причем б) все подгруппы из G_{i-1}/G_i, сопряженные с F_i/G_i в группе $G_{\beta-1}/G_i$, сопряжены с F_i/G_i уже в G_{i-1}/G_i.

Тогда произведение $|F_\beta / G_\beta| |F_{\beta+1} / G_{\beta+1}| \ldots |F_\nu / G_\nu| = f_\beta f_{\beta+1} \ldots f_\nu = h$ назовем индексиалом ряда (R) группы G или, более кратко, индексиалом группы G.

Символически индексиал, учитывая способ его получения, будем записывать через $(h)_{R,f}$ или, в тех случаях, когда вид функции f очевиден, — через $(h)_R$. Группы $F_\beta/G_\beta, F_{\beta+1}/G_{\beta+1}, \ldots, F_\nu/G_\nu$ назовем факторами индексиала $(h)_R$.

Индексиал $(h)_R$ назовем правильным, если группа G имеет, по крайней мере, одну подгруппу H порядка h, входящую в $G_{\beta-1}$, для которой при любом $i \in W$ выполняется условие $F_i = (H \cap G_{i-1}) G_i$.

Следствие теоремы 6 из [13]. Для всякого индексиала $(h)_R$ группы G существует правильный индексиал

$$(ch)_R = c_\beta f_\beta c_{\beta+1} f_{\beta+1} \ldots c_\nu f_\nu, \quad \pi(c_i) \subseteq \pi(\overline{P}_{f_i}), \quad i \in W,$$

у которого каждый его фактор C_i/G_i, $i \in W$ является расширением подгруппы F_i/G_i при помощи специальной (нильпотентной) группы порядка c_i. Следовательно, G имеет в этом случае по крайней мере одну подгруппу порядка $c_\beta f_\beta c_{\beta+1} f_{\beta+1} \ldots c_\nu f_\nu$ (заметим, что из $\pi(c_\beta) \subseteq \pi(\overline{P}_{f_\beta})$ следует, что $c_\beta = 1$).

Лемма [13]. *Пусть S и S_1 — некоторые подгруппы группы G и пусть для каждого $a \in G$ выполняется условие: $a^{-1} S_1 a = b^{-1} S_1 b$, где $b \in S$. Тогда $G = VS$, где V — нормализатор подгруппы S_1 в группе G.*

§ 3. Введем еще следующие новые обозначения и определения.

Пусть подгруппа N_i/G_i порядка $n_i f_i$, $i \in W$, при $i = \beta$ совпадает с F_β/G_β, а при $i > \beta$ — с нормализатором подгруппы F_i/G_i в группе G_{i-1}/G_i (отсюда следует, что $n_\beta = 1$).

Определение 1. Пусть для каждого $i \in W$ задана подгруппа M_i/G_i группы N_i/G_i, равная F_β/G_β при $i = \beta$ и такая, что все подгруппы группы

N_i/G_i, сопряженные с M_i/G_i в группе $G_{\beta-1}/G_i$, сопряжены с M_i/G_i уже в N_i/G_i.

Пусть M_i^*/G_i, $i \in W$, является нормализатором подгруппы M_i/G_i в группе N_i/G_i. Определим систему чисел m_i^*, $i \in W$, при помощи равенств $|M_i^* F_i/G_i| = m_i^* f_i$.

Тогда систему подгрупп M_i/G_i и систему чисел m_i^*, $i \in W$, назовем соответствующими друг другу системами дополнительных подгрупп и дополнительных множителей индексиала $(h)_R$.

Очевидно, что у данного индексиала может существовать несколько дополнительных систем подгрупп и, следовательно, множителей.

Из определения 1 следует, что $m_\beta^* = 1$.

Заметим, что в качестве M_i/G_i, $i > \beta$, можно взять, например, N_i/G_i или любую ее силовскую подгруппу.

Теорема 1. *Если группа G имеет индексиал $(h)_R$ с некоторой системой дополнительных множителей m_i^*, $i \in W$, то G содержит по крайней мере одну подгруппу порядка $m_\beta^* f_\beta m_{\beta+1}^* f_{\beta+1} \dots m_\nu^* f_\nu$.*

Доказательство. Допустим, что существуют группы, для которых теорема неверна. Пусть тогда среди таких групп G будет одной из групп наименьшего порядка g.

Это значит, что G имеет такой ряд нормальных делителей (R) и такой его индексиал $h = f_\beta f_{\beta+1} \dots f_\nu$ с заданной системой дополнительных подгрупп M_i/G_i, $i \in W$, что по отношению к ним утверждение теоремы не выполняется.

Очевидно, что при $G = E$ в качестве искомой подгруппы H можно было бы взять E. Поэтому $g > 1$.

Выберем тогда среди членов ряда (R), равных E, тот G_λ, у которого номер λ наименьший.

Отсюда, поскольку $g > 1$, вытекает, что подгруппа $G_{\lambda-1}$ существует и отлична от E.

В дальнейшем будем уже рассматривать ряд

$$G = G_0 \supseteq G_1 \supseteq \dots \supseteq G_{\lambda-1} \supset G_\lambda = E. \qquad (R')$$

Очевидно, что и ряд (R') будет как при $\lambda < \nu$, так и при $\lambda = \nu$ иметь индексиал

$$|F_\beta/G_\beta|\,|F_{\beta+1}/G_{\beta+1}| \dots |F_\lambda/G_\lambda| = f_\beta f_{\beta+1} \dots f_\lambda = h = (h)_{R'}.$$

Если бы для заданной в условиях теоремы системы дополнительных множителей в G существовала бы подгруппа H порядка $m_\beta^* f_\beta m_{\beta+1}^* f_{\beta+1} \dots m_\lambda^* f_\lambda$, то, учитывая очевидное равенство $m_{\lambda+1}^* f_{\lambda+1} \dots m_\nu^* f_\nu = 1$, получилось бы, что $|H| = m_\beta^* f_\beta m_{\beta+1}^* f_{\beta+1} \dots m_\nu^* f_\nu$, что, по предположению, невозможно.

Итак, подгрупп порядка $m_\beta^* f_\beta m_{\beta+1}^* f_{\beta+1} \dots m_\lambda^* f_\lambda$ в группе G не существует.

Допустим, что $\beta = \lambda$. Тогда $(h)_{R'} = |F_\lambda/G_\lambda|$. Так как $G_\lambda = E$, то тогда F_λ была бы подгруппой порядка f_λ. Но $\beta = \lambda$, поэтому $m_\lambda^* = 1$ и $m_\beta^* f_\beta = m_\lambda^* f_\lambda = f_\lambda$. Получили, очевидно, противоречие.

Поэтому $\beta < \lambda$.

Таким образом, мы можем в дальнейшем, как и при доказательстве теоремы 6 из [13], использовать существование последовательности $\beta, \beta+1, \dots, \lambda-1$, содержащей не менее одного числа.

Рассмотрим ряд $G_{\beta-1}/G_{\lambda-1} \supseteq G_\beta/G_{\lambda-1} \supseteq \dots \supseteq G_{\lambda-2}/G_{\lambda-1} \supseteq G_{\lambda-1}/G_{\lambda-1}\,(S)$ нормальных делителей группы $G_{\beta-1}/G_{\lambda-1}$.

Непосредственная проверка выполнимости условия сопряженности б) § 2 показывает, что если F_i/G_i, $i=\beta, \beta+1, \ldots, \lambda-1$, является фактором индексиала ряда (R'), то $F_i/G_{\lambda-1}/G_i/G_{\lambda-1}$ будет фактором индексиала ряда (S), и обратно. (1)

Такая же непосредственная проверка показывает, что если M_i/G_i и m_i^*, $i=\beta, \beta+1, \ldots, \lambda-1$ — дополнительные подгруппы и множители ряда (R'), то $M_i/G_{\lambda-1}/G_i/G_{\lambda-1}$ и m_i^* будут таковыми же для ряда (S) и обратно. (2)

Рассмотрим теперь отдельно следующие два возможных случая.

1. Подгруппа F_λ инвариантна в $G_{\beta-1}$.

Отсюда, ввиду $\beta<\lambda$, заключаем, что $N_\lambda=G_{\lambda-1}$. В этом случае заданное на основании определения 1 условие сопряженности для подгруппы M_λ приобретает, очевидно, вид:

всякая подгруппа из $G_{\lambda-1}$, сопряженная с M_λ в группе $G_{\beta-1}$, сопряжена с M_λ уже в $G_{\lambda-1}$. (3)

Обозначим через $V_{\beta-1}$ нормализатор подгруппы M_λ в группе $G_{\beta-1}$.

Используя тогда (3) и лемму § 2, заключаем, что как при $V_{\beta-1}\neq G_{\beta-1}$, так и при $V_{\beta-1}=G_{\beta-1}$, будет $G_{\beta-1}=V_{\beta-1}G_{\lambda-1}$. Тогда

$$G_{\beta-1}/G_{\lambda-1}\simeq V_{\beta-1}/V_{\beta-1}\cap G_{\lambda-1}. \tag{4}$$

Применяя теперь к $G_{\beta-1}/G_{\lambda-1}$ прямые из утверждений (1) и (2), видим, что $G_{\beta-1}/G_{\lambda-1}$ имеет индексиал $f_\beta f_{\beta+1}\cdots f_{\lambda-1}$ с системой дополнительных множителей m_i^*, $i=\beta, \beta+1, \ldots, \lambda-1$.

Так как $|G_{\lambda-1}|>1$, то $|G_{\beta-1}/G_{\lambda-1}|<|G_{\beta-1}|\leqslant|G|$.

Поэтому теорема для $G_{\beta-1}/G_{\lambda-1}$ верна, т. е. $G_{\beta-1}/G_{\lambda-1}$ имеет подгруппу порядка $m_\beta^* f_\beta m_{\beta+1}^* f_{\beta+1}\cdots m_{\lambda-1}^* f_{\lambda-1}$. Но тогда, как следует из (4), $V_{\beta-1}/V_{\beta-1}\cap G_{\lambda-1}$ имеет подгруппу $V/V_{\beta-1}\cap G_{\lambda-1}$ такого же порядка.

Так как $\beta<\lambda$ и F_λ инвариантна в $G_{\beta-1}$, то с учетом определения 1 нетрудно убедиться, что $V_{\beta-1}\cap G_{\lambda-1}=M_\lambda^*$. Отсюда также очевидно, что VF_λ — подгруппа $G_{\beta-1}$.

Найдем ее порядок $|VF_\lambda|$.

Из существования фактор-группы $V/V_{\beta-1}\cap G_{\lambda-1}$ и $V_{\beta-1}\cap G_{\lambda-1}=M_\lambda^*$ следует, что $M_\lambda^*\subseteq V$ и $M_\lambda^*\subseteq G_{\lambda-1}$, т. е. что $M_\lambda^*\subseteq V\cap G_{\lambda-1}$. С другой стороны, $V\cap G_{\lambda-1}\subseteq V_{\beta-1}\cap G_{\lambda-1}=M_\lambda^*$. Но тогда $M_\lambda^*=V\cap G_{\lambda-1}$.

Отсюда, ввиду $F_\lambda\subseteq G_{\lambda-1}$, заключаем, что $V\cap F_\lambda=M_\lambda^*\cap F_\lambda$.

Далее, из $V_{\beta-1}\cap G_{\lambda-1}=M_\lambda^*$ и $|V/V_{\beta-1}\cap G_{\lambda-1}|=m_\beta^* f_\beta m_{\beta+1}^* f_{\beta+1}\cdots m_{\lambda-1}^* f_{\lambda-1}$ вытекает, что $|V|=m_\beta^* f_\beta m_{\beta+1}^* f_{\beta+1}\cdots m_{\lambda-1}^* f_{\lambda-1}|M_\lambda^*|$. Тогда $|VF_\lambda|=m_\beta^* f_\beta\times m_{\beta+1}^* f_{\beta+1}\cdots m_{\lambda-1}^* f_{\lambda-1}|M_\lambda^*||F_\lambda|/|M_\lambda^*\cap F_\lambda|$.

На основании определения 1 и равенства $G_\lambda=E$ убеждаемся, что $|M_\lambda^*||F_\lambda|/|M_\lambda^*\cap F_\lambda|=m_\lambda^* f_\lambda$. В силу этого $|VF_\lambda|=m_\beta^* f_\beta m_{\beta+1}^* f_{\beta+1}\cdots m_\lambda^* f_\lambda$. Но тогда VF_λ будет подгруппой G требуемого теоремой порядка.

Получили противоречие.

2. Подгруппа F_λ из $G_{\lambda-1}$ не инвариантна в $G_{\beta-1}$.

Обозначим теперь через $V_{\beta-1}^*$ нормализатор подгруппы F_λ в группе $G_{\beta-1}$. Используя тогда условие сопряженности б) определения индексиала и лемму § 2, заключаем, что $G_{\beta-1}=V_{\beta-1}^* G_{\lambda-1}$. Следовательно,

$$G_{\beta-1}/G_{\lambda-1}\simeq V_{\beta-1}^*/V_{\beta-1}^*\cap G_{\lambda-1}. \tag{5}$$

Как и в случае 1, убеждаемся, что $G_{\beta-1}/G_{\lambda-1}$ имеет индексиал $f_\beta f_{\beta+1} \dots f_{\lambda-1}$ с системой дополнительных множителей m_i^*, $i = \beta, \beta+1, \dots, \lambda-1$. В силу изоморфизма (5) такой же индексиал и с той же системой дополнительных множителей имеет и группа $V_{\beta-1}^*/V_{\beta-1}^* \cap G_{\lambda-1}$. Но тогда в силу обратных из утверждений (1) и (2), примененных, конечно, не к $G_{\beta-1}/G_{\lambda-1}$, а уже к $V_{\beta-1}^*/V_{\beta-1}^* \cap G_{\lambda-1}$, заключаем, что и $V_{\beta-1}^*$ имеет индексиал $f_\beta f_{\beta+1} \dots f_{\lambda-1} f_\lambda$ ряда вида $V_{\beta-1}^* \supseteq \dots \supseteq V_{\beta-1}^* \cap G_{\lambda-1} \supseteq E$ с системой дополнительных множителей m_β^*, $m_{\beta+1}^*$, ..., $m_{\lambda-1}^*$, m_λ^*. Так как F_λ не инвариантна в данном случае в $G_{\beta-1}$, то $|V_{\beta-1}^*| < |G_{\beta-1}| \leqslant |G|$. Поэтому теорема для $V_{\beta-1}^*$ верна, т. е. $V_{\beta-1}^*$ (а, значит, и G) имеет подгруппу порядка $m_\beta^* \times \times f_\beta m_{\beta+1}^* f_{\beta+1} \dots m_\lambda^* f_\lambda$.

Получили противоречие.

Теорема доказана.

§ 4. Применяя теорему 1, можно получить еще следующие признаки существования подгрупп.

Теорема 2. *Если группа G имеет индексиал $(h)_R$, то она содержит по крайней мере одну подгруппу порядка $n_\beta f_\beta n_{\beta+1} f_{\beta+1} \dots n_\nu f_\nu$.*

Доказательство. Мы можем в условиях теоремы 1, очевидно, в частности, положить $M_i/G_i = N_i/G_i$, $i \in W$; тогда $M_i^*/G_i = N_i/G_i$, т. е. $m_i^* = n_i$, $i \in W$. Отсюда видно, что теорема 2 является частным случаем теоремы 1.

Теорема 3. *Если группа G имеет индексиал $(h)_R$ и каждая подгруппа F_i/G_i при $i > \beta$ совпадает со своим нормализатором в группе G_{i-1}/G_i, то индексиал $(h)_R$ является правильным и, следовательно, G содержит по крайней мере одну подгруппу порядка h.*

Доказательство. Замечая, что в данном случае $n_i = 1$, $i \in W$, и применяя теорему 2, получаем требуемое утверждение.

Лемма. *Пусть конечная группа A имеет подгруппы B и C, причем $B \supseteq C$. Пусть все подгруппы из B, сопряженные с C в A, сопряжены с C уже в B. Тогда и нормализатор C^* подгруппы C и B удовлетворяет такому же условию сопряженности.*

Доказательство. Пусть C^{**} — любая из подгрупп группы B, сопряженных с C^* в A. Это значит, что $C^{**} = a^{-1}C^*a$, где $a \in A$. Так как C^* — нормализатор C в B, то $C_1 = a^{-1}Ca$ войдет в $C^{**} = a^{-1}C^*a \subseteq B$ и будет в $C^{**} = a^{-1}C^*a$ инвариантной подгруппой.

С другой стороны, по условию, $C_1 = a^{-1}Ca = b^{-1}Cb$, где $b \in B$. Поэтому нормализатор C_1 в B будет равен $b^{-1}C^*b$.

В силу отмеченной выше инвариантности C_1 в C^{**} подгруппа C^{**} войдет в $b^{-1}C^*b$. Но очевидно, что $|C^{**}| = |b^{-1}C^*b|$. Тогда $C^{**} = b^{-1}C^*b$, что и требовалось доказать.

Определение 2. Пусть группа A имеет подгруппы B и $C = C^{(0)}$, причем $B \supseteq C$. Тогда ряд подгрупп $C^{(1)} \subseteq C^{(2)} \subseteq C^{(3)} \subseteq \dots$, где $C^{(i)}$ обозначает нормализатор подгруппы $C^{(i-1)}$ в подгруппе B, $i = 1, 2, \dots$, назовем нормализаторным рядом подгруппы C в подгруппе B.

Теорема 4. *Пусть группа G имеет индексиал $(h)_R$ и пусть для каждого $i \in W$ задана подгруппа M_i/G_i группы G_{i-1}/G_i, совпадающая при $i = \beta$ с F_β/G_β, а при $i > \beta$ удовлетворяющая следующим условиям:*

1) *M_i/G_i входит в некоторый член $F_i^{(j_i)}/G_i$ нормализаторного ряда подгруппы F_i/G_i в группе G_{i-1}/G_i;*

2) *Все подгруппы из $F_i^{(j_i)}/G_i$, сопряженные с M_i/G_i в $G_{\beta-1}/G_i$, сопряжены с M_i/G_i уже в $F_i^{(j_i)}/G_i$.*

Тогда G имеет по крайней мере одну подгруппу каждого порядка вида

$$|F_\beta/G_\beta|\,|M_{\beta+1}^{(k_{\beta+1})}F_{\beta+1}^{(j_{\beta+1}-1)}/G_{\beta+1}|\,\ldots\,|M_\nu^{(k_\nu)}F_\nu^{(j_\nu-1)}/G_\nu|,$$

где $M_i^{(k_i)}/G_i$, $i>\beta$, $i\in W$ — любой член нормализаторного ряда M_i/G_i в подгруппе $F_i^{(j_i)}/G_i$.

Доказательство. Пусть $i>\beta$—некоторый фиксированный элемент W. По условиям теоремы, $M_i^{(k_i)}/G_i$ является k_i-тым членом нормализаторного ряда M_i/G_i в подгруппе $F_i^{(j_i)}/G_i$. Так как M_i/G_i удовлетворяет в $F_i^{(j_i)}/G_i$ условию сопряженности определения 1, то, применяя последовательно лемму настоящего параграфа к членам нормализаторного ряда M_i/G_i в подгруппе $F_i^{(j_i)}/G_i$, убеждаемся, что и подгруппа $M_i^{(k_i-1)}/G_i$ тоже удовлетворяет этому условию. Положим тогда $\tilde{M}_i/G_i=M_i^{(k_i-1)}/G_i$, $i>\beta$, и $\tilde{M}_\beta/G_\beta=F_\beta/G_\beta$.

Применяя теперь последовательно лемму настоящего параграфа к членам нормализаторного ряда F_i/G_i в группе G_{i-1}/G_i, заключаем, что $F_i^{(j_i-1)}/G_i$ удовлетворяет условию б) определения индексиала. Положим тогда $\tilde{F}_i/G_i=F_i^{(j_i-1)}/G_i$. Кроме того, пусть еще $\tilde{F}_\beta/G_\beta=F_\beta/G_\beta$.

Учитывая теперь определение индексиала и определение 1, заключаем, что мы можем образовать индексиал

$$(\tilde{h})_R=|\tilde{F}_\beta/G_\beta|\,|\tilde{F}_{\beta+1}/G_{\beta+1}|\,\ldots\,|\tilde{F}_\nu/G_\nu|$$

с системой дополнительных подгрупп $\tilde{M}_i/G_i$ и множителей $\tilde{m}_i^*$, определяемых из равенств $|\tilde{M}_i^*\tilde{F}_i/G_i|=\tilde{m}_i^*\tilde{f}_i$, где $\tilde{f}_i=|\tilde{F}_i/G_i|$, $i\in W$ и $\tilde{M}_i^*/G_i$ определяется по отношению к $\tilde{M}_i/G_i$ на основании определения 1.

Исходя из значений $\tilde{M}_i/G_i$ и $\tilde{F}_i/G_i$, вычислим $\tilde{m}_i^*\tilde{f}_i$.

Очевидно, что $\tilde{m}_\beta^*\tilde{f}_\beta=|F_\beta/G_\beta|$. Далее при $i>\beta$ получаем: $\tilde{m}_i^*\tilde{f}_i=|\tilde{M}_i^*\tilde{F}_i/G_i|=|M_i^{(k_i)}F_i^{(j_i-1)}/G_i|$. Отсюда, применяя к индексиалу $(\tilde{h})_R$ теорему 1, заключаем, что G имеет по крайней мере одну подгруппу требуемого теоремой порядка.

Очевидно, что теорема 1 является частным случаем теоремы 4, когда все $j_i=k_i=1$.

Теорема 5. *Если группа G имеет индексиал $(h)_R$, то она имеет по крайней мере одну подгруппу каждого порядка вида $|F_\beta/G_\beta|\,|F_{\beta+1}^{(j_{\beta+1})}/G_{\beta+1}|\,\ldots\,|F_\nu^{(j_\nu)}/G_\nu|$, где все $j_i\geqslant 1$, $i\in W$, $i>\beta$.*

Доказательство. Очевидно, что в условиях теоремы 4 можно взять $M_i/G_i=F_i^{(j_i)}/G_i$ при $i>\beta$, $i\in W$. Так как $F_i^{(j_i-1)}\subseteq F_i^{(j_i)}$ при $i>\beta$ и так как $\tilde{M}_\beta/G_\beta=\tilde{F}_\beta/G_\beta$, то в таком случае на основании теоремы 4 делаем вывод о существовании по крайней мере одной подгруппы искомого порядка.

§ 5. Теорема 6. *Если группа G имеет индексиал $(h)_R$ и если h_i/n_i для каждого $i\in W$ делится на наибольший $\pi(\overline{P}_{f_i})$-делитель числа h_i, то индексиал $(h)_R$ является правильным и, следовательно, G содержит по крайней мере одну подгруппу порядка h.*

Доказательство. По приведенному в § 2 следствию теоремы 6 из [13], группа G имеет правильный индексиал $c_\beta f_\beta c_{\beta+1}f_{\beta+1}\ldots c_\nu f_\nu$, где $\pi(c_i)\subseteq\pi(\overline{P}_{f_i})$, $c_\beta=1$, причем каждый фактор его C_i/G_i $i=\beta+1,\ldots,\nu$, порядка c_if_i будет расширением подгруппы F_i/G_i при помощи специальной группы порядка c_i. Пусть для некоторого $i>\beta$ будет $c_i>1$. Тогда c_i делит n_i и $\pi(c_i)\subseteq\pi(\overline{P}_{f_i})$. Так как $h_i=n_i(h_i/n_i)$, где оба множителя — целые, то по-

лучается противоречие с предположением, что наибольший $\pi(\overline{P}_{f_i})$-делитель числа h_i делит уже h_i/n_i. Теорема 6 доказана.

Частным случаем теоремы 6 является теорема 8 из [13] о направленном индексиале.

Литература

1. Чунихин С. А. ДАН СССР, **55**, № 6, 481—484, 1947.
2. Чунихин С. А. ДАН СССР, **58**, № 7, 1295—1296, 1947; **59**, № 3, 443—445, 1948; **60**, № 5, 773—774, 1948; **66**, № 2, 165—168, 1949; **69**, № 6, 735—737, 1949; **77**, № 6, 973—975, 1951; **83**, № 5, 663—665, 1952; **86**, № 1, 27—30, 1952; **91**, № 3, 461—462, 1953; Матем. сб., **25**, (67), № 3, 321—346, 1949.
3. Чунихин С. А. ДАН СССР, **73**, № 1, 29—32, 1950.
4. Чунихин С. А. Матем. сб., 33 (75), № 1, 111—132, 1953.
5. Чунихин С. А. ДАН СССР, **97**, № 6, 977—980, 1954.
6. Чунихин С. А. ДАН СССР, **103**, № 3, 377—378, 1955.
7. Чунихин С. А. Матем. сб., **39** (81), № 4, 465—490, 1956.
8. Чунихин С. А. Подгруппы конечных групп. Минск, 1964.
9. Hall P. and Higman G. Proc. London Math. Soc., **(3) 6**, № 21, 1—42, 1956; Feit W., Thompson J. Pacific Journ. Math., **13**, № 3, 773—1029, 1963.
10. Чунихин С. А. Матем. сб., **40**, № 1, 39—41, 1933; **4** (46), № 3, 521—530, 1938; **62** (104), № 1, 76—103, 1963.
11. Чунихин С. А. ДАН СССР, **108**, № 3, 397—399, 1956; Матем. сб., **54** (96), № 2, 237—252, 1961.
12. Чунихин С. А. ДАН СССР, **121**, № 2, 243—245, 1958.
13. Чунихин С. А. Матем. сб., **55** (97), № 2, 101—124, 1961.
14. Lassenhaus H. Lehrbuch der Gruppentheorie, 1, 1937.
15. Hall P. Proc. London Math. Soc. (3) **6**, № 22, 286—304, 1956.
16. Чунихин С. А. ДАН СССР, **167**, № 3, 531—533, 1966.

Институт математики АН БССР
Гомельская лаборатория

Поступило в редакцию
31.VIII 1967

ВЕСЦІ АКАДЭМІІ НАВУК БЕЛАРУСКАЙ ССР № 1 1968
СЕРЫЯ ФІЗІКА-МАТЭМАТЫЧНЫХ НАВУК

УДК 512.25

И. М. КУНЦЕВИЧ

О МИНИМИЗАЦИИ ЗНАЧЕНИЯ ЛИНЕЙНОЙ ФОРМЫ НА МНОЖЕСТВЕ ВСЕХ ЦИКЛОВ ДЛИНЫ n

I. Пусть $f = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i$—вещественная линейная форма, $b=(b_1, \ldots, b_n)$—фиксированный n-мерный вектор с вещественными координатами, а t — некоторая подстановка из симметрической группы S_n, перемещающая символы $1, 2, \ldots, n$.

Если $t(i) = j_i$, то будем писать

$$f_t(b) = \sum_{i=1}^{n} c_i b_{j_i}.$$

Как и в [1], рассмотрим следующую задачу.

Пусть H — произвольное непустое множество группы S_n. Необходимо найти такую подстановку h_0 из H, что для любой подстановки $h \in H$

$$f_{h_0}(b) \leqslant f_h(b). \tag{1}$$

В дальнейшем будем говорить, что подстановка h_0, удовлетворяющая неравенству (1), минимизирует значение формы f на множестве H.

Не теряя общности, будем считать, что коэффициенты c_i формы f занумерованы в порядке возрастания:

$$c_1 \leqslant c_2 \leqslant \ldots \leqslant c_n.$$

Известно, что если коэффициенты c_i формы f занумерованы в порядке возрастания, а координаты вектора b удовлетворяют неравенствам

$$b_{j_1} \geqslant b_{j_2} \geqslant \ldots \geqslant b_{j_n},$$

то для подстановки

$$\tau_0 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ j_1 & j_2 & \ldots & j_n \end{pmatrix}$$

выполняется неравенство

$$f_{\tau_0}(b) \leqslant f_t(b),$$

где t — любая подстановка из S_n (см. [2]).

В работе [3] указанная проблема рассмотрена для случаев, когда H — множество всех циклов длины n, а τ_0 — либо единичная подстановка, либо имеет вид

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n-1 & n \\ n & n-1 & \ldots & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

В настоящей заметке эта задача решается для случая, когда подстановка τ_0 имеет вид

$$\tau_0 = (1, 2, \ldots, l)\,\tau, \tag{2}$$

где τ — произвольная подстановка символов $l+1, l+2, \ldots, n$.

Показано, что в этом случае для нахождения подстановки, минимизирующей значение линейной формы f на множестве H, достаточно ограничиться рассмотрением $(n-l)!$ циклов длины n вида

$$t=(1,\ 2,\ \ldots,\ l,\ \alpha_{l+1},\ \ldots,\ \alpha_n). \tag{3}$$

Отдельно рассмотрены два следующих частных случая:

$$\tau_0=(1,\ 2,\ \ldots,\ l), \tag{4}$$

$$\tau_0=(1,\ 2,\ \ldots,\ l)(l+1,\ n)(l+2,\ n-1)\ldots \tag{5}$$

Показано, что в первом случае для нахождения подстановки t_0, минимизирующей значение линейной формы f на множестве $(n-l)!$ циклических подстановок длины n из S_n, достаточно рассмотреть значение формы f на множестве 2^{n-l-1} подстановок специального вида.

Во втором случае для нахождения подстановки t_0 достаточно рассмотреть значение линейной формы f на множестве $2\cdot 3^{\left[\frac{n-l+1}{2}\right]-2}$ подстановок определенной структуры.

II. Пусть подстановка τ_0 имеет вид (2). В этом случае

$$b_2\geqslant b_3\geqslant\ldots\geqslant b_l\geqslant b_1\geqslant\ldots \tag{6}$$

Лемма 1. *Если подстановка* τ_0 *имеет вид* $\tau_0=(1,\ 2,\ \ldots,\ l)\ \tau$, *где* τ *— произвольная подстановка над символами* $l+1,\ l+2,\ \ldots,\ n$, *то в множестве* $(n-l)!$ *циклов* $(1,\ 2,\ \ldots,\ l,\ \alpha_{l+1},\ \ldots,\ \alpha_n)$ *есть подстановка, минимизирующая значение формы* f *на множестве всех полных циклов из* S_n.

Доказательство. Пусть $h=(1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_i,\ \ldots,\ \alpha_l,\ \ldots,\ \alpha_n)$ — произвольная циклическая подстановка длины n из S_n, в которой α_i, где $2\leqslant i\leqslant l$, — первый из символов, не равный i, т. е.

$$h=(1,\ 2,\ \ldots,\ i-1,\ \alpha_i,\ \ldots,\ \alpha_l,\ \ldots,\ \alpha_k,\ \ldots,\ \alpha_n).$$

Если $\alpha_k=i$, образуем из h подстановку

$$h_1=(1,\ 2,\ \ldots,\ i-1,\ \alpha_k,\ \alpha_i,\ \ldots,\ \alpha_{k-1},\ \alpha_{k+1},\ \ldots,\ \alpha_n).$$

Рассмотрим разность

$$f_{h_1}(b)-f_h(b)=c_{i-1}(b_{\alpha_k}-b_{\alpha_i})+c_{\alpha_k}(b_{\alpha_i}-b_{\alpha_{k+1}})+c_{\alpha_{k-1}}(b_{\alpha_{k+1}}-b_{\alpha_k}).$$

Прибавив к правой части этого равенства выражение $c_{\alpha_k}b_{\alpha_k}-c_{\alpha_k}b_{\alpha_k}$, получим

$$f_{h_1}(b)-f_h(b)=(c_{\alpha_k}-c_{i-1})(b_{\alpha_i}-b_{\alpha_k})+(c_{\alpha_{k-1}}-c_{\alpha_k})(b_{\alpha_{k+1}}-b_{\alpha_k})=$$

$$=(c_i-c_{i-1})(b_{\alpha_i}-b_i)+(c_{\alpha_{k-1}}-c_i)(b_{\alpha_{k+1}}-b_i)\leqslant 0,$$

так как

$$c_i-c_{i-1}\geqslant 0,\quad c_{\alpha_{k-1}}-c_i\geqslant 0,$$

$$b_{\alpha_i}-b_i\leqslant 0,\quad b_{\alpha_{k+1}}-b_i\leqslant 0$$

в силу условий (6).

Следовательно,

$$f_{h_1}(b)\leqslant f_h(b).$$

Проделав конечное число аналогичных преобразований, преобразуем h в подстановку t вида (3), такую, что

$$f_t(b) \leqslant f_h(b).$$

Легко показать, что число циклических подстановок из n символов вида (3) равно $(n-l)!$.

Лемма доказана.

III. Пусть подстановка τ_0 имеет вид (4). В этом случае, очевидно,

$$b_2 \geqslant b_3 \geqslant \ldots \geqslant b_l \geqslant b_1 \geqslant b_{l+1} \geqslant \ldots \geqslant b_n.$$

Теорема 1. *Если подстановка τ_0 имеет вид $(1, 2, \ldots, l)$, то в множестве 2^{n-l-1} циклов вида $(1, 2, \ldots, l, \nu_{l+1}, \ldots, \nu_n)$ и таких, что $\nu_{l+1} < \ldots < n > \ldots > \nu_n$, есть подстановка, минимизирующая значение формы f на множестве всех циклических подстановок длины n из S_n.*

Доказательство. Из леммы 1 следует, что для отыскания подстановки, минимизирующей значение линейной формы f на множестве всех циклических подстановок длины n из S_n, достаточно ограничиться рассмотрением $(n-l)!$ подстановок вида (3).

Нетрудно показать, что в нашем случае в множестве 2^{n-l-1} подстановок вида $(1, 2, \ldots l, \nu_{l+1}, \ldots, \nu_n)$, у которых $\nu_{l+1} < \ldots < n > \ldots > \nu_n$, есть подстановка, минимизирующая значение линейной формы f на множестве всех полных циклов из S_n.

Теорема доказана.

IV. Пусть подстановка τ_0 имеет вид (5). В этом случае, очевидно,

$$b_2 \geqslant b_3 \geqslant \ldots \geqslant b_l \geqslant b_1 \geqslant b_n \geqslant \ldots \qquad (7)$$

Как и в [3], символы $l+1, l+2, \ldots, n$ разобьем при $n-l$ четном на два класса:

$$A = \{l+1, l+2, \ldots, \gamma\} \text{ и } B = \{\gamma+1, \ldots, n-1, n\},$$

где

$$\gamma = \left[\frac{n+l+1}{2}\right].$$

При $n-l$ нечетном в класс A отнесем символы $l+1, \ldots, \gamma-1$, а символ γ не будем относить ни к одному из этих классов.

Допустимыми к данному символу β_j из класса B будем называть те символы α_i из класса A, для которых $\alpha_i + \beta_j \leqslant n+l+1$.

Рассмотрим множество циклических подстановок длины n, удовлетворяющих четырем условиям:

1. Символы от 1 до l расположены подряд в порядке возрастания.
2. Символы из классов A и B чередуются.
3. Символы из класса A возрастают, а символы из класса B убывают слева и справа к γ.
4. Слева от γ перед каждым символом β из класса B, а справа от γ после каждого символа β стоит такой символ α из класса A, что $\alpha + \beta \leqslant n+l+1$. Эти подстановки могут иметь вид

$$(1, 2, \ldots, l, \alpha_{l+1}, \beta_{l+2}, \alpha_{l+3}, \ldots, \gamma, \ldots, \alpha_{n-1}, \beta_n) \qquad (8)$$

либо

$$(1, 2, \ldots, l, \beta_{l+1}, \alpha_{l+2}, \ldots, \gamma, \ldots, \alpha_n). \qquad (9)$$

Обозначим множество всех циклических подстановок вида (9), удовлетворяющих вышеуказанным четырем условиям, через M_l.

Теорема 2. *Если подстановка* τ_0 *имеет вид* $(1, 2, \ldots, l)(l+1, n)(l+2, n-1)\ldots$, *то в множестве* M_l *есть подстановка, минимизирующая значение формы* f *на множестве всех полных циклов из* S_n, M_l *содержит* $2 \cdot 3^{\left[\frac{n-l+1}{2}\right]-2}$ *подстановок.*

Доказательство. В силу леммы 1 имеем, что для нахождения подстановки, минимизирующей значение формы f на множестве циклических подстановок длины n из S_n, достаточно ограничиться рассмотрением $(n-l)!$ подстановок вида (3).

Покажем, что среди циклических подстановок длины n, удовлетворяющих условиям 2—4, имеется подстановка, минимизирующая значение формы f.

Убедимся, например, что в нашем случае существует подстановка, минимизирующая значение формы f и обладающая свойством 2.

Предположим, что в циклической подстановке $\bar{t}$ длины n некоторые из символов из класса A стоят рядом. А так как в классах A и B одинаковое количество символов, то в $\bar{t}$ будут также стоять рядом и некоторые символы из B:

$$\bar{t} = (1, 2, \ldots, l, \alpha_k, \alpha_{k+1}, \ldots, \alpha_{k+s}, \beta_{k+s+1}, \ldots, \alpha_{p-1}, \beta_p, \ldots, \beta_{p+q}, \alpha_{p+q+1}, \ldots).$$

Пусть среди символов $\beta_p, \ldots, \beta_{p+q}$ максимальным по величине является символ β_{p+r}. Преобразуем $\bar{t}$ в подстановку t_1, помещая между любыми, рядом стоящими в $\bar{t}$, символами из A символы из B, стоящие подряд слева или справа от β_{p+r}.

Пусть для определенности

$$t_1 = (1, 2, \ldots, l, \alpha_k, \beta_p, \ldots, \beta_{p+r-1}, \alpha_{k+1}, \ldots, \alpha_{p-1}, \beta_{p+r}, \ldots).$$

Покажем, что

$$f_{\bar{t}}(b) - f_{t_1}(b) \geqslant 0.$$

Рассмотрим разность

$$f_{\bar{t}}(b) - f_{t_1}(b) = c_{\alpha_k}(b_{\alpha_{k+1}} - b_{\beta_p}) + c_{\alpha_{p-1}}(b_{\beta_p} - b_{\beta_{p+r}}) + c_{\beta_{p+r-1}}(b_{\beta_{p+r}} - b_{\alpha_{k+1}}).$$

Прибавив к правой части равенства выражение $c_{\beta_{p+r-1}} b_{\beta_p} - c_{\beta_{p+r-1}} b_{\beta_p}$, получим

$$f_{\bar{t}}(b) - f_{t_1}(b) = (c_{\beta_{p+r-1}} - c_{\alpha_{p-1}})(b_{\beta_{p+r}} - b_{\beta_p}) + (c_{\beta_{p+r-1}} - c_{\alpha_k})(b_{\beta_p} - b_{\alpha_{k+1}}) \geqslant 0,$$

так как

$$c_{\beta_{p+r-1}} - c_{\alpha_{p-1}} \geqslant 0, \quad c_{\beta_{p+r-1}} - c_{\alpha_k} \geqslant 0,$$

$$b_{\beta_{p+r}} - b_{\beta_p} \geqslant 0, \quad b_{\beta_p} - b_{\alpha_{k+1}} \geqslant 0$$

в силу неравенств (9) и того, что каждый символ из класса A меньше каждого символа из класса B.

Если в подстановке t_1 еще имеются рядом стоящие символы из класса A, то, проделав преобразование, аналогичное описанному выше над t_1, получим подстановку t_2, для которой имеет место неравенство

$$f_{t_1}(b) - f_{t_2}(b) \geqslant 0.$$

После конечного числа таких преобразований придем к подстановке t, в которой символы из классов A и B чередуются, и такой, что

$$f_t(b) \leqslant f_{\bar{t}}(b).$$

Учитывая, что l меньше любого символа из классов A и B и является допустимым символом к любому символу из B, нетрудно установить, что среди подстановок, обладающих свойствами 3 и 4, есть подстановка t, минимизирующая значение линейной формы f на множестве всех полных циклов.

Для доказательства того, что подстановку, минимизирующую значение формы f на множестве всех полных циклов из S_n, достаточно искать среди подстановок множества M_l, рассмотрим подстановки

$$t_1 = (1, 2, \ldots, l, \alpha_{l+1}, \beta_{l+2}, \ldots, \gamma, \ldots, \alpha_{n-1}, \beta_n)$$

и

$$t_2 = (1, 2, \ldots, l, \beta_{l+2}, \alpha_{l+3}, \ldots, \gamma, \ldots, \beta_n, \alpha_{l+1}).$$

Возьмем разность

$$f_{t_2}(b) - f_{t_1}(b) = c_l(b_{\beta_{l+2}} - b_{\alpha_{l+1}}) + c_{\beta_n}(b_{\alpha_{l+1}} - b_1) + c_{\alpha_{l+1}}(b_1 - b_{\beta_{l+2}}).$$

Прибавив к правой части равенства выражение $c_{\beta_n} b_{\beta_{l+2}} - c_{\beta_n} b_{\beta_{l+2}}$, получим

$$f_{t_2}(b) - f_{t_1}(b) = (c_{\beta_n} - c_{\alpha_{l+1}})(b_{\beta_{l+2}} - b_{\alpha_{l+1}}) + (c_{\beta_n} - c_l)(b_{\alpha_{l+1}} - b_{\beta_{l+2}}) \leqslant 0,$$

так как

$$c_{\beta_n} - c_{\alpha_{l+1}} \geqslant 0, \quad c_{\beta_n} - c_l \geqslant 0,$$

$$b_{\beta_{l+2}} - b_1 \leqslant 0, \quad b_{\alpha_{l+1}} - b_{\beta_{l+2}} \leqslant 0.$$

Таким образом,

$$f_{t_2}(b) \leqslant f_{t_1}(b).$$

Множество M_l содержит $2 \cdot 3^{\left[\frac{n-l+1}{2}\right]-2}$ подстановок, в чем нетрудно убедиться, воспользовавшись указанными выше условиями.

Теорема доказана.

В заключение автор выражает глубокую благодарность Д. А. Супруненко за постоянное внимание к работе.

Литература

1. Кунцевич И. М., Супруненко Д. А. ДАН БССР, 10, № 3, 1966.
2. Харди Г. Г., Литтльвуд Д. Е., Полиа Г. Неравенства. М., 1948.
3. Айзенштат В. С., Кравчук Д. Н. ДАН БССР, 12, № 2, 1968.

Институт математики
АН БССР

Поступило в редакцию
6.II 1967

ВЕСЦІ АКАДЭМІІ НАВУК БЕЛАРУСКАЙ ССР № 1 1968
СЕРЫЯ ФІЗІКА-МАТЭМАТЫЧНЫХ НАВУК

УДК 519.48

З. М. ДЫМЕНТ

О МАКСИМАЛЬНЫХ КОММУТАТИВНЫХ ПОДАЛГЕБРАХ ПОЛНОЙ МАТРИЧНОЙ АЛГЕБРЫ

Пусть P — бесконечное поле, P_n — алгебра всех $n \times n$ матриц над P, $U_{n,k}$ — множество всех максимальных коммутативных нильпотентных подалгебр P_n класса нильпотентности k, а $\overline{U}_{n,k}$ — множество классов сопряженных в P_n алгебр из $U_{n,k}$. В статье изучается вопрос, для каких пар (n, k) множество $\overline{U}_{n,k}$ конечно.

В [1] эта проблема сформулирована для того случая, когда P — поле комплексных чисел. Для этого случая известны следующие результаты (см. [1]):

1) множества $\overline{U}_{n,k}$ конечны для $n \leqslant 6$;

2) множества $\overline{U}_{n,2}$ конечны;

3) множества $\overline{U}_{n,n}$, $\overline{U}_{n,\,n-1}$, $\overline{U}_{n,\,n-2}$ конечны;

4) множество $\overline{U}_{n,3}$ при $n \geqslant 7$ бесконечно.

В настоящей статье доказана следующая теорема: пусть P — бесконечное поле $n \geqslant k+4$, $k \geqslant 3$. Тогда множество $\overline{U}_{n,\,k}$ бесконечно. Таким образом, проблема, сформулированная в [1], остается нерешенной только для пар вида $(n, n-3)$; $n \geqslant 7$. В случае, когда основное поле обладает одним специальным свойством, вопрос о конечности множеств $\overline{U}_{n,\,k}$ решен полностью.

1. Лемма 1. *Пусть $k \geqslant 3$, P — бесконечное поле, N_α — коммутативная нильпотентная алгебра класса k, базисные элементы которой a, $a^2, \ldots, a^{k-1}$, b_1, b_2, b_3, b_4 удовлетворяют соотношениям:*

$$\left.\begin{aligned} & ab_i = 0, \quad i = 1, 2, 3, 4, \\ & b_i b_j = 0, \; i \neq j; \quad i, j = 1, 2, 3, 4, \\ & b_1^2 = a^{k-1} + b_4, \\ & b_2^2 = a^{k-1} - b_4, \\ & b_3^2 = a^{k-1} + \alpha b_4, \\ & b_4^2 = 0, \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

$$\alpha \in P, \; \alpha^3 \neq \alpha.$$

Тогда для данного α существует не более 6 чисел β из поля P, таких, что $N_\alpha \cong N_\beta$.

Доказательство. Для $k = 3$ лемму доказал Д. А. Супруненко (см. [1] стр. 51). Поэтому мы проведем доказательство для $k > 3$.

Пусть $N_\alpha \cong N_\beta$. Тогда в N_α можно выбрать новый базис $c, c^2, \ldots, c^{k-1}$, d_1, d_2, d_3, d_4, такой, что

$$\left.\begin{aligned} &cd_i = 0, \quad i = 1, 2, 3, 4, \\ &d_i d_j = 0, \quad i \neq j, \quad i, j = 1, 2, 3, 4, \\ &d_1^2 = c^{k-1} + d_4, \\ &d_2^2 = c^{k-1} - d_4, \\ &d_3^2 = c^{k-1} + \beta d_4, \\ &d_4^2 = 0. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Пусть

$$\left.\begin{aligned} c &= \sum_{m=1}^{k-1} x_m a^m + \sum_{m=1}^{4} x_{k-1+m} b_m, \\ d_1 &= \sum_{m=1}^{k-1} y_m a^m + \sum_{m=1}^{4} y_{k-1+m} b_m, \\ d_2 &= \sum_{m=1}^{k-1} z_m a^m + \sum_{m=1}^{4} z_{k-1+m} b_m, \\ d_3 &= \sum_{m=1}^{k-1} t_m a^m + \sum_{m=1}^{4} t_{k-1+m} b_m, \\ d_4 &= u a^{k-1} + v b_4. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Тогда $c^{k-1} = x_1^{k-1} a^{k-1}$. Поэтому $x_1 \neq 0$. Имеем:

$$\begin{aligned} cd_1 = {} & x_1 y_1 a^2 + (x_1 y_2 + x_2 y_1) a^3 + \ldots + \\ & + (x_1 y_{k-3} + x_2 y_{k-4} + \ldots + x_{k-3} y_1) a^{k-2} + \\ & + (x_1 y_{k-2} + x_2 y_{k-3} + \ldots + x_{k-2} y_1) a_{k-1} + \\ & + \sum_{m=1}^{4} x_{k-1+m} y_{k-1+m} b_m^2 . \end{aligned} \tag{4}$$

Из условия $cd_1 = 0$, учитывая (4), получаем

$$y_1 = y_2 = \ldots = y_{k-3} = 0.$$

Таким же путем получаем:

$$z_1 = z_2 = \ldots = z_{k-3} = 0,$$

$$t_1 = t_2 = \ldots = t_{k-3} = 0.$$

Следовательно,

$$d_1 = y_{k-2} a^{k-2} + y_{k-1} a^{k-1} + \sum_{m=1}^{4} y_{k-1+m} b_m,$$

$$d_2 = z_{k-2}\ a^{k-2} + z_{k-1}\ a^{k-1} + \sum_{m=1}^{4} z_{k-1+m} b_m,$$

$$d_3 = t_{k-2}\ a^{k-2} + t_{k-1}\ a^{k-1} + \sum_{m=1}^{4} t_{k-1+m} b_m.$$

Из линейной независимости элементов $c,\ c^2,\ \ldots,\ c^{k-1},\ d_1,\ d_2,\ d_3,\ d_4$ следует:

$$\begin{vmatrix} y_k & y_{k+1} & y_{k+2} \\ z_k & z_{k+1} & z_{k+2} \\ t_k & t_{k+1} & t_{k+2} \end{vmatrix} \neq 0. \tag{5}$$

Используя далее соотношения $cd_i = 0,\ i = 1,\ 2,\ 3$, получаем:

$$\left.\begin{aligned} x_1 y_{k-2} + x_k y_k + x_{k+1} y_{k+1} + x_{k+2} y_{k+2} &= 0, \\ x_k y_k - x_{k+1} y_{k+1} + \alpha\, x_{k+2} y_{k+2} &= 0, \\ x_1 z_{k-2} + x_k z_k + x_{k+1} z_{k+1} + x_{k+2} z_{k+2} &= 0, \\ x_k z_k - x_{k+1} z_{k+1} + \alpha\, x_{k+2} z_{k+2} &= 0, \\ x_1 t_{k-2} + x_k t_k + x_{k+1} t_{k+1} + x_{k+2} t_{k+2} &= 0, \\ x_k t_k - x_{k+1} t_{k+1} + \alpha\, x_{k+2} t_{k+2} &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Используя второе, четвертое и шестое уравнения системы (6), находим, что вектор $(x_k, -x_{k+1}, \alpha\, x_{k+2})$ ортогонален каждому из векторов

$$(y_k,\ y_{k+1},\ y_{k+2}),$$
$$(z_k,\ z_{k+1},\ z_{k+2}),$$
$$(t_k,\ t_{k+1},\ t_{k+2}).$$

Учитывая (5) получаем, что $(x_k,\ -x_{k+1},\ \alpha\, x_{k+2})$ —нуль-вектор:

$$x_k = x_{k+1} = x_{k+2} = 0.$$

Далее из (6) следует, что $y_{k-2} = z_{k-2} = t_{k-2} = 0$. Используя соотношения $d_i d_j = 0,\ i \neq j,\ \ i,\ j = 1,\ 2,\ 3,\ 4$, получаем:

$$\left.\begin{aligned} y_k z_k + y_{k+1} z_{k+1} + y_{k+2} z_{k+2} &= 0, \\ y_k z_k - y_{k+1} z_{k+1} + \alpha\, y_{k+2} z_{k+2} &= 0, \\ y_k t_k + y_{k+1} t_{k+1} + y_{k+2} t_{k+2} &= 0, \\ y_k t_k - y_{k+1} t_{k+1} + \alpha\, y_{k+2} t_{k+2} &= 0, \\ z_k t_k + z_{k+1} t_{k+1} + z_{k+2} t_{k+2} &= 0, \\ z_k t_k - z_{k+1} t_{k+1} + \alpha\, z_{k+2} t_{k+2} &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Из (7) следует:

$$\left.\begin{aligned} 2 y_k z_k + (\alpha + 1)\, y_{k+2} z_{k+2} &= 0, \\ 2 y_k t_k + (\alpha + 1)\, y_{k+2} t_{k+2} &= 0, \\ 2 z_k t_k + (\alpha + 1)\, z_{k+2} t_{k+2} &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Пусть $y_k z_k t_k \neq 0$. Тогда, учитывая, что $\alpha \neq -1$, из (8) легко получить, что

$$\frac{y_{k+2}}{y_k} = \frac{z_{k+2}}{z_k} = \frac{t_{k+2}}{t_k}.$$

Но линейная зависимость векторов (y_k, z_k, t_k), $(y_{k+2}, z_{k+2}, t_{k+2})$ противоречит условию (5). Итак, система (7) не имеет такого решения, для которого $y_k z_k t_k \neq 0$ и выполняется требование (5). Пусть $y_k = 0$. Тогда из (7) получаем:

$$\left.\begin{aligned} y_{k+1}z_{k+1} &= 0,\\ y_{k+2}z_{k+2} &= 0,\\ y_{k+1}t_{k+1} &= 0,\\ y_{k+2}t_{k+2} &= 0,\\ z_k t_k + z_{k+1}t_{k+1} + z_{k+2}t_{k+2} &= 0,\\ z_k t_k - z_{k+1}t_{k+1} + \alpha z_{k+2}t_{k+2} &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Если $y_{k+1}y_{k+2} \neq 0$, то из (9) получаем

$$z_{k+1} = z_{k+2} = 0,\ t_{k+1} = t_{k+2} = 0,\ z_k t_k = 0.$$

Но тогда хотя бы один из векторов (z_k, z_{k+1}, z_{k+2}), (t_k, t_{k+1}, t_{k+2}) нулевой, и следовательно, не выполнено условие (5).

Итак, из (5) и (7) следует, что из чисел y_k, y_{k+1}, y_{k+2} только одно должно быть отлично от нуля. Это же верно и для чисел z_k, z_{k+1}, z_{k+2}; t_k, t_{k+1}, t_{k+2}. Значит, условию (5) удовлетворяют только такие решения системы (7), для которых все отличные от нуля значения неизвестных суть y_{j_1}, z_{j_2}, t_{j_3}; где j_1, j_2, j_3—некоторая перестановка чисел k, $k+1$, $k+2$.

Используем теперь соотношения:

$$\begin{aligned} d_1^2 &= c^{k-1} + d_4,\\ d_2^2 &= c^{k-1} - d_4,\\ d_3^2 &= c^{k-1} + \beta d_4. \end{aligned}$$

Из этих соотношений получаем:

$$\left.\begin{aligned} y_k^2 + y_{k+1}^2 + y_{k+2}^2 &= x_1^{k-1} + u,\\ y_k^2 - y_{k+1}^2 + \alpha y_{k+2}^2 &= v,\\ z_k^2 + z_{k+1}^2 + z_{k+2}^2 &= x_1^{k-1} - u,\\ z_k^2 - z_{k+1}^2 + \alpha z_{k+2}^2 &= -v,\\ t_k^2 + t_{k+1}^2 + t_{k+2}^2 &= x_1^{k-1} + \beta u,\\ t_k^2 - t_{k+1}^2 + \alpha t_{k+2}^2 &= \beta v. \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

Так как из чисел y_k, y_{k+1}, y_{k+2} только $y_{j_1} \neq 0$, из чисел z_k, z_{k+1}, z_{k+2} только $z_{j_2} \neq 0$, из чисел t_k, t_{k+1}, t_{k+2} только t_{j_3} отлично от нуля, где j_1, j_2, j_3 — — некоторая перестановка чисел k, $k+1$, $k+2$, то из системы (10) находим:

$$\left.\begin{aligned} y_{j_1}^2 &= x_1^{k-1} + u, \\ \mathcal{C}_1 y_{j_1}^2 &= v, \\ z_{j_2}^2 &= x_1^{k-1} - u, \\ \mathcal{C}_2 z_{j_2}^2 &= -v, \\ t_{j_3}^2 &= x_1^{k-1} + \beta u, \\ \mathcal{C}_3 t_{j_3}^2 &= \beta v, \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

где $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$, $\mathcal{C}_3$ — некоторая перестановка чисел 1,—1, α. Исключая из (11) величины x_1, y_{j_1}, z_{j_2}, t_{j_3}, получаем

$$(\mathcal{C}_1 - \mathcal{C}_2)\mathcal{C}_3 = (\mathcal{C}_1\mathcal{C}_3 + \mathcal{C}_2\mathcal{C}_3 - 2\mathcal{C}_1\mathcal{C}_2)\beta. \tag{12}$$

Но $\mathcal{C}_1 \neq \mathcal{C}_2$. Поэтому для каждой фиксированной перестановки $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$, $\mathcal{C}_3$ чисел 1,—1, α уравнение (12) имеет не более одного решения. Следовательно, существует не более 6 значений β, для которых $N_\beta \cong N_\alpha$.

Итак, лемма доказана.

Лемма 2. *Пусть $r \geqslant k+3$, $k \geqslant 3$. Тогда множество всех неизоморфных нильпотентных алгебр класса k размерности r над бесконечным полем бесконечно.*

Доказательство. При $r = k+3$ лемма 2 следует из предыдущей леммы. Если же $r = k+3+m$, где $m \geqslant 1$, то построим прямую сумму алгебр N_α и M, где M — нулевая алгебра ранга m: $N_\alpha M = MN_\alpha = M^2 = (0)$ $N_\alpha + M = R_\alpha$. Легко видеть, что $R_\alpha \cong R_\beta$ тогда и только тогда, когда $N_\alpha \cong N_\beta$. Лемма 2 следует далее из предыдущей леммы.

Теорема 1. *Пусть P — бесконечное поле, P_n — алгебра всех $n \times n$ матриц над P, $U_{n,k}$ — множество всех максимальных коммутативных подалгебр P_n класса нильпотентности k, $\overline{U}_{n,k}$ — множество классов сопряженных в P_n алгебр из $U_{n,k}$. Пусть далее $n \geqslant k+4$, $k \geqslant 3$. Тогда множество $\overline{U}_{n,k}$ бесконечно.*

Доказательство. Строим для каждой алгебры R_α размерности $(n-1)$ ее точное регулярное представление степени n (см. [1], глава 2, § 7). Так как $n-1 \geqslant k+3$, то по лемме 2 множество всех неизоморфных алгебр R_α бесконечно. Но точное регулярное представление степени n коммутативной алгебры размерности $n-1$ над полем P является максимальной коммутативной подалгеброй полной линейной алгебры P_n (см. [1], глава 2, § 7). Следовательно, P_n содержит бесчисленное множество неизоморфных максимальных коммутативных нильпотентных подалгебр класса k. Тем более бесконечно множество $\overline{U}_{n,k}$, что и требовалось доказать.

2. Будем говорить, что поле P обладает свойством (E), если оно содержит бесчисленное множество элементов, таких, что произведение любых двух различных из них не есть квадрат в P. В частности, свойством (E) обладает любое конечное расширение поля рациональных чисел.

Лемма 3. *Пусть N_α — коммутативная нильпотентная алгебра класса k над полем P:*

$$N_\alpha = [a,\ a^2,\ \ldots,\ a^{k-1},\ b];$$

$$\left.\begin{aligned} ab &= 0, \\ b^2 &= \alpha a^{k-1}, \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

$\alpha \in P$, k — нечетное, $k \geqslant 3$.

Если $\beta \in P$, *но* $\alpha\beta$ *не есть квадрат в* P, *то алгебры* N_α *и* N_β *неизоморфны.*

Доказательство. Пусть $N_\alpha \cong N_\beta$. Тогда в N_α можно выбрать новый базис $c, c^2, \ldots, c^{k-1}, d$, такой, что

$$\left.\begin{aligned} cd &= 0, \\ d^2 &= \beta c^{k-1}. \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

Пусть

$$\left.\begin{aligned} c &= x_1 a + x_2 a^2 + \ldots + x_{k-1} a^{k-1} + x_k b, \\ d &= y_1 a + y_2 a^2 + \ldots + y_{k-1} a^{k-1} + y_k b. \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

При $k = 3$ имеем:

$$\left.\begin{aligned} x_1 y_1 + \alpha x_3 y_3 &= 0, \\ y_1^2 + \alpha\, y_3^2 &= \beta (x_1^2 + \alpha x_3^2). \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

Из линейной независимости элементов c, c^2, d следует:

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ 0 & x_1^2 + \alpha x_3^2 & 0 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} \neq 0,$$

$$(x_1^2 + \alpha x_3^2)(x_1 y_3 - x_3 y_1) \neq 0.$$

Если $x_3 = 0$, то $x_1 y_3 \neq 0$, $x_1 y_1 = 0$, $y_1 = 0$. $\alpha y_3^2 = \beta x_1^2$. Следовательно, $\alpha\beta$ — квадрат в P.

Пусть $x_3 \neq 0$. Тогда, исключая y_3 из (16), получаем $y_1^2 = \alpha\beta x_3^2$. Поэтому $\alpha\beta$ — квадрат в P.

Пусть теперь $k > 3$. Из (13) следует, что $b^3 = 0$. Поэтому любое произведение трех элементов алгебры N_α, отличное от a^3, равно нулю. Из (15) получаем $c^{k-1} = x_1^{k-1} a^{k-1}$. Так как $c^{k-1} \neq 0$, то $x_1 \neq 0$.

Используем далее первое равенство системы (14):

$$cd = \sum_{i=1}^{k-1} \sum_{j=1}^{k-1} x_i y_j a^{i+j} + \alpha x_k y_k a^{k-1}.$$

Так как $cd = 0$, то

$$y_1 = y_2 = \ldots = y_{k-2} = 0,$$

$$x_1 y_{k-2} + \alpha x_k y_k = 0.$$

Из второго соотношения системы (14) получаем $\alpha y_k^2 = \beta x_1^{k-1}$. Так как k нечетно, то из последнего равенства следует, что $\alpha\beta$ — квадрат.

Итак, лемма доказана.

Лемма 4. *Пусть* N_α — *коммутативная нильпотентная алгебра над* P *класса* k:

$$N_\alpha = [a, a^2, \ldots, a^{k-1}, b_1, b_2];$$

$$\left.\begin{aligned} ab_1 &= b_2, \\ a^2 b_1 &= 0, \\ b_1^2 &= \alpha a^{k-2}, \end{aligned}\right\}$$

k — *четное,* $k \geqslant 6$. *Если* $\beta \in P$, *но* $\alpha\beta$ *не есть квадрат в* P, *то алгебры* N_α *и* N_β *неизоморфны.*

Доказательство. Пусть $N_\alpha \cong N_\beta$. Тогда в N_α можно выбрать такой базис c, c^2, ..., d_1, d_2, что

$$\left.\begin{aligned} cd_1 &= d_2, \\ c^2d_1 &= 0, \\ d_1^2 &= \beta c^{k-2}. \end{aligned}\right\}$$

Пусть

$$c = x_1a + x_2a^2 + \ldots + x_{k-1}a^{k-1} + x_kb_1 + x_{k+1}b_2,$$

$$d_1 = y_1a + y_2a^2 + \ldots + y_{k-1}a^{k-1} + y_kb_1 + y_{k+1}b_2.$$

Имеем:

$$b_1^3 = 0,\ b_1b_2 = \alpha a^{k-1},\ \ b_2^2 = 0,\ ab_1^2 = \alpha a^{k-1}.$$

Поэтому произведение четырех элементов алгебры N_α, отличное от a^4, равно нулю. Следовательно, $c^{k-1} = x_1^{k-1}a^{k-1}$. Так как $c^{k-1} \neq 0$, то $x_1 \neq 0$. Из условия $c^2d_1 = 0$ находим, что $y_1 = y_2 = \ldots = y_{k-3} = 0$. Поэтому

$$c^2d_1 = (x_1^2y_{k-3} + \alpha x_{k+1})\, a^{k-1},$$

$$x_1^2y_{k-3} + \alpha x_{k+1} = 0.$$

Далее получаем:

$$d_1^2 = \alpha y_k^2a^{k-2} + 2\alpha y_ky_{k+1}a^{k-1}.$$

Используя равенство $d_1^2 = \beta c^{k-2}$, имеем $\alpha y_k^2 = \beta x_1^{k-2}$. Так как k — четно, то из последнего равенства получаем, что $\alpha\beta$ — квадрат в P.

Лемма 5. *Пусть N_α — коммутативная нильпотентная алгебра над P класса 4:*

$$N_\alpha = [a,\ a^2,\ a^3,\ b_1,\ b_2];$$

$$\left.\begin{aligned} ab_1 &= b_2, \\ a^2b_1 &= 0, \\ b_1^2 &= \alpha a^2. \end{aligned}\right\}$$

Пусть далее:

1) *характеристика поля P не равна двум*;

2) *если характеристика поля P не равна 3, то число — 3α — не квадрат в P.*

Тогда алгебры N_α и N_β неизоморфны, если $\alpha\beta$ не есть квадрат в P.

Доказательство. Пусть $N_\alpha \cong N_\beta$. Выберем в N_α новый базис c, c^2, c^3, d_1, d_2, такой, что

$$\left.\begin{aligned} cd_1 &= d_2, \\ c^2d_1 &= 0, \\ d_1^2 &= \beta c^2. \end{aligned}\right\} \qquad (17)$$

Пусть

$$\left.\begin{aligned} c &= x_1a + x_2a^2 + x_3a^3 + x_4b_1 + x_5b_2, \\ d_1 &= y_1a + y_2a^2 + y_3a^3 + y_4b_1 + y_5b_2. \end{aligned}\right\}$$

Из (17) следует, что $d_1^3 = 0$, но $d_1^3 = (y_1^3 + 3\alpha y_1y_4)\, a^3$, поэтому $y_1(y_1^2 + 3\alpha y_4^2) = 0$.

Если характеристика поля P равна трем, то $y_1 = 0$. Если же характеристика поля P отлична от трех, то, по условию леммы, — 3α не есть квадрат в P, поэтому $y_1^2 + 3\alpha y_4^2 \neq 0$. Следовательно, $y_1 = 0$.

Так как $c^3 = x_1(x_1^2 + 3\alpha x_4^2)a^3$, $c^3 \neq 0$, то $x_1 \neq 0$. Из условия $d_1^2 = \beta c^2$ получаем:

$$\left.\begin{aligned} y_1^2 + \alpha y_4^2 &= \beta(x_1^2 + \alpha x_4^2), \\ y_1 y_2 &= \beta x_1 x_4. \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

Из последнего равенства системы (18) следует, что $x_4 = 0$. Используя первое равенство системы (18), получаем: $\alpha y_4^2 = \beta x_1^2$. Отсюда следует, что $\alpha\beta$ — квадрат в P.

Заметим, что во всяком поле P, обладающем свойством (E), и характеристика которого не равна трем, существует бесконечное множество чисел α, таких, что каждое из чисел $\alpha_i\alpha_j$, $-3\alpha_i$ — не квадрат в P $(i \neq j)$. Действительно, в P есть бесконечное множество чисел α, таких, что $\alpha_i\alpha_j$ — не квадрат в P при $i \neq j$. Среди этих чисел α не может быть двух таких, что $-3\alpha_i$, $-3\alpha_j$ — квадрат в P $(i \neq j)$. Ибо в противном случае число $\alpha_i\alpha_j$ оказалось бы квадратом в P.

Лемма 6. *Пусть поле P обладает свойством (E). Тогда:*

1) Для любого нечетного k, $k \geqslant 3$ и любого r, $r \geqslant k$, множество всех неизоморфных нильпотентных алгебр класса k размерности r над полем P бесконечно.

2) Пусть k — любое четное число, $k \geqslant 4$. Пусть при $k = 4$ характеристика поля P не равна двум. Тогда для любого r, $r \geqslant k+1$ множество всех неизоморфных максимальных коммутативных нильпотентных алгебр класса k размерности r над P бесконечно.

Доказательство. Утверждение 1) для $r = k$ следует из леммы 3. Если же $k > r$, $k = r + s$, то строим прямую сумму $R_\alpha = N_\alpha + M$, где M — нулевая алгебра ранга s. $N_\alpha M = MN_\alpha = M^2 = (0)$. Легко видеть, что $R_\alpha \cong R_\beta$ тогда и только тогда, когда $N_\alpha \cong N_\beta$.

Лемма следует далее из леммы 3. Утверждение 2) доказывается аналогично.

Теорема 2. *Пусть поле P обладает свойством (E). Тогда:*

1) Для любого n, $n \geqslant 4$ и для всякого нечетного k, удовлетворяющего неравенствам $3 \leqslant k \leqslant n-1$, множество $\bar{U}_{n,k}$ бесконечно.

2) Для любого n, $n \geqslant 6$ и для любого четного k, удовлетворяющего неравенствам $4 \leqslant k \leqslant n-2$ множество $\bar{U}_{n,k}$ бесконечно. В случае $k = 4$ P — поле, характеристика которого не равна двум.

Доказательство. 1) Построив для каждой алгебры R_α (см. лемму 6) размерности $n-1$ ее регулярное представление степени n, мы получим бесчисленное множество неизоморфных максимальных коммутативных нильпотентных подалгебр алгебры P_n.

Пункт 2) доказывается аналогично.

Следствие. Пусть поле P обладает свойством (E). Тогда для всякого четного n, $n \geqslant 4$ каждое из множеств $\bar{U}_{n,k}$, $n-k \geqslant 1$, $k \geqslant 3$, бесконечно.

Если n нечетно, $n \geqslant 5$, то бесконечным является каждое из множеств $\bar{U}_{n,k}$; $n-k \geqslant 2$, $k \geqslant 3$. Для $k = 4$ при этом полагаем, что характеристика поля P не равна двум. Легко видеть, что для нечетного n множество $\bar{U}_{n,\,n-1}$ конечно для любого поля P.

Литература

1. Супруненко Д. А., Тышкевич Р. И. Перестановочные матрицы. Минск, «Наука и техника», 1966.

Брестский государственный педагогический институт им. А. С. Пушкина

Поступило в редакцию 2.I 1967

ВЕСЦІ АКАДЭМІІ НАВУК БЕЛАРУСКАЙ ССР № 1 1968
СЕРЫЯ ФІЗІКА-МАТЭМАТЫЧНЫХ НАВУК

УДК 517.94

В. П. ГРИБКОВА

ОБ УТОЧНЕНИИ ОЦЕНКИ ПОГРЕШНОСТИ РЕШЕНИЯ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ФРЕДГОЛЬМА МЕТОДОМ АСИМПТОТИЧЕСКИХ ПОЛИНОМОВ ВТОРОГО РОДА

В работах [1 — 3] предложен один новый приближенный способ для решения уравнений Фредгольма второго рода с неособенным λ:

$$\varphi(x) = \lambda \int_{-1}^{+1} K(x,\ y)\,\varphi(y)\,dy + f(x), \tag{1}$$

когда ядро $K(x,\ y)$ в квадрате $-1 \leqslant x \leqslant 1,\ -1 \leqslant y \leqslant 1$ удовлетворяет условию Дини — Липшица. Точное решение $\varphi(x)$ уравнения (1) заменяется асимптотическим полиномом второго рода:

$$R_n(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i, \tag{2}$$

(в отличие от асимптотических полиномов первого рода $Q_n^f[x]$ [1, 4], применяемых для равномерной аппроксимации $f(x) \in C_{[a,b]}$).

Коэффициенты полинома (2) находятся из системы $n+2$ алгебраических уравнений:

$$(-1)^k M_n + R_n(\eta_k^{(n)}) = \lambda \int_{-1}^{+1} K(\eta_k^{(n)},\ y)\,R_n(y)\,dy + f(\eta_k^{(n)}), \tag{3}$$

$$k = 0,\ 1,\ \ldots,\ n+1,$$

$$f(\eta_k^{(n)}) = f_k, \quad \eta_k^{(n)} = \cos\frac{k\pi}{n+1}, \tag{4}$$

M_n является параметром точности для полинома данной степени.

Для определения $R_n(x)$ справедливы соотношения [3]:

$$R_n(x) = \lambda \int_{-1}^{+1} Q_n^k((x),\ y)\,R_n(y)\,dy + Q_n^f(x) \tag{5}$$

и

$$M_n = \lambda \int_{-1}^{+1} L_n^k(y)\,R_n(y)\,dy + L_n^f, \tag{6}$$

где $Q_n^k((x),\ y)$ — асимптотический полином первого рода для ядра $K(x,\ y)$; $L_n^k(y)$ — его параметр точности; $Q_n^f(x)$ — асимптотический полином первого рода для функции $f(x)$; L_n^f — его параметр точности.

В работе [3] дана оценка погрешности этого метода в следующем виде:

$$|\varphi(x) - R_n(x)| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{|\lambda| \max\limits_x |R_n(x)| \max\limits_x \int\limits_{-1}^{+1} |K(x, y) - Q_n^k((x), y)|\, dy}{1 - |\lambda| \max\limits_x \int\limits_{-1}^{+1} |K(x, y)|\, dy} + \frac{\max\limits_x |F(x) - Q_n^f(x)|}{1 - |\lambda| \max\limits_x \int\limits_{-1}^{+1} |K(x, y)|\, dy}, \tag{7}$$

но, как отмечает сам автор, это выражение дает сильно завышенную оценку погрешности, к тому же в ней не используется введенный в (3) параметр точности M_n. В данной работе уточняется оценка (7) с введением в нее параметров точности.

Используя соотношение (5), можно $R_n(x)$ представить несколько иным, чем в (3), способом. Поскольку $Q_n^k((x), y)$ имеет вид

$$Q_n^k((x), y) = \sum_{i=0}^{n+1} K(\eta_i^{(n)}, y)\, \pi_i^{(n)}(x),$$

т. е. является вырожденным ядром, и $f(x)$ заменяется через

$$Q_n^f(x) = \sum_{i=0}^{n+1} f(\eta_i^{(n)})\, \pi_i^{(n)}(x),$$

где $\pi_i^{(n)}(x)$ определяются через полиномы Чебышева $T_n(x) = \cos n \arccos x$ [1], то можно полином $R_n(x)$ записать через функции $\pi_i^{(n)}(x)$:

$$R_n(x) = \sum_{i=0}^{n+1} B_i\, \pi_i^{(n)}(x) + \sum_{i=0}^{r} f(\eta_i^{(n)})\, \pi_i^{(n)}(x). \tag{8}$$

Тогда неизвестные коэффициенты $B_i\,(i = 0, 1, \ldots, n+1)$ можно найти из сравнения коэффициентов при $\pi_i^{(n)}(x)$ в выражении

$$\sum_{i=0}^{n+1} B_i\, \pi_i^{(n)}(x) = \lambda \int\limits_{-1}^{+1} \sum_{j=0}^{n+1} K(\eta_j^{(n)}, y)\, \pi_j^{(n)}(x) \sum_{i=0}^{n+1} B_i\, \pi_i^{(n)}(y) +$$

$$+ \lambda \int\limits_{-1}^{+1} \sum_{j=0}^{n+1} K(\eta_j^{(n)}, y)\, \pi_j^{(n)}(x)\, Q_n^f(y)\, dy. \tag{9}$$

Если ввести резольвенту

$$\gamma(x, y, \lambda) = \frac{\sum\limits_{i=0}^{n+1} \sum\limits_{k=0}^{n+1} \Delta_{ik} \pi_i^{(n)}(x)\, K(\eta_k^{(n)}, y)}{\Delta^{(n)}(\lambda)}, \tag{10}$$

где Δ_{ik} и $\Delta^{(n)}(\lambda)$ — определители Фредгольма для данного n, то

$$R_n(x) = \lambda \int\limits_{-1}^{+1} \gamma(x, y, \lambda)\, Q_n^f(y)\, dy + Q_n^f(x). \tag{11}$$

Такое представление $R_n(x)$ понадобится в дальнейшем.

Разность уравнений (1) и (5) можно записать:

$$\varphi(x) - R_n(x) = \lambda \int_{-1}^{+1} K(x, y)[\varphi(y) - R_n(y)]\,dy +$$

$$+ \lambda \int_{-1}^{+1} [K(x, y) - Q_n^k((x), y)]\,R_n(y)\,dy + f(x) - Q_n^f(x), \qquad (12)$$

при этом

$$K(x, y) - Q_n^k((x), y) = \sum_{s=n}^{\infty} L_s^k(y)\,\psi_{s+1}(x) = r_n^k(x, y), \qquad (13)$$

$$f(x) - Q_n^f(x) = \sum_{s=n}^{\infty} L_s^f\,\psi_{s+1}(x) = r_n^f. \qquad (14)$$

Функции $\psi_{s+1}(x)$ определяются через полиномы Чебышева $T_n(x)$ [4] и зависят только от n, но не от функций, для которых определяются разности вида (13) и (14). Если ввести

$$\varphi(x) - R_n(x) = \Phi(x) \qquad (15)$$

и

$$F(x) = \lambda \int_{-1}^{+1} r_n^k(x, y)\,R_n(y)\,dy + r_n^f(x), \qquad (16)$$

изменить порядок суммирования и интегрирования в (16)

$$F(x) = \sum_{s=n}^{\infty} \psi_{s+1}(x) \left[\lambda \int_{-1}^{+1} L_s^k(y)\,R_n(y)\,dy + L_s^f\right], \qquad (17)$$

а затем обозначить

$$M_s^{(n)} = \lambda \int_{-1}^{+1} L_s^k(y)\,R_n(y)\,dy + L_s^f,\ M_n^{(n)} = M_n \qquad (18)$$

и

$$F(x) = \sum_{s=n}^{\infty} \psi_{s+1}(x)\,M_s^{(n)}, \qquad (19)$$

можно получить

$$\Phi(x) = \lambda \int_{-1}^{+1} K(x, y)\,\Phi(y)\,dy + F(x). \qquad (20)$$

Для (20) применимо решение Неймана [5], тогда для любой точки $-1 \leqslant x \leqslant 1$ справедливо

$$\Phi(x) = F(x) + \lambda \int_{-1}^{+1} K(x, y)\,F(y)\,dy +$$

$$+ \lambda^2 \int_{-1}^{+1} K(x, y) \int_{-1}^{+1} K(y, z)\,F(z)\,dz + \ldots =$$

$$= \sum_{s=n}^{\infty} M_s^{(n)} \left[\psi_{s+1}(x) + \lambda \int_{-1}^{+1} K(x, y)\,\psi_{s+1}(y)\,dy + \ldots\right], \qquad (21)$$

а для всего промежутка при условии, что

$$|\lambda| < \frac{1}{\max\limits_{x} \int\limits_{-1}^{+1} |K(x, y)|\, dy}, \tag{22}$$

выполняется неравенство

$$|\Phi(x)| \leqslant \frac{\sum\limits_{s=n}^{\infty} |M_s^{(n)}| \max\limits_{x} |\psi_{s+1}(x)|}{1 - |\lambda| \max\limits_{x} \int\limits_{-1}^{+1} |K(x, y)|\, dy}. \tag{23}$$

Как известно из [4], функции $\psi_{s+1}(x)$ ограничены постоянными, которые нетрудно вычислить, M_n стремятся к нулю при $n \to \infty$, как следует из (6), поэтому правая часть (23) равномерно стремится к нулю.

Если для определения $\Phi(x)$ в (20) использовать решение Фредгольма, то можно при любом неособенном λ для $-1 \leqslant x \leqslant 1$ получить погрешность приближенного решения:

$$\Phi(x) = F(x) + \lambda \int\limits_{-1}^{+1} \Gamma(x, y, \lambda) F(y)\, dy =$$

$$= \sum_{s=n}^{\infty} M_s^{(n)} \left[\psi_{s+1}(x) + \lambda \int\limits_{-1}^{+1} \Gamma(x, y, \lambda)\, \psi_{s+1}(y)\, dy\right], \tag{24}$$

где $\Gamma(x, y, \lambda)$ — резольвента уравнения (1).

Используя оценку Акбергенова [6] для резольвенты

$$|\Gamma(x, y, \lambda)| \leqslant \frac{r_n^k + C(1 + |\lambda| \cdot 2 \cdot r_n^k)}{1 - |\lambda| \cdot 2l \cdot r_n^k}, \tag{25}$$

где $r_n^k = \max\limits_{xy} |r_n^k(x, y)|$; $-1 \leqslant \frac{x}{y} \leqslant 1$; $l = 1 + |\lambda| 2C$; $C = \max |\gamma(x, y, \lambda)|$; $-1 \leqslant \frac{x}{y} \leqslant 1$; $\gamma(x, y, \lambda)$ определено в (10), можно получить после некоторых преобразований оценку для всего промежутка $-1 \leqslant x \leqslant 1$

$$|\Phi(x)| \leqslant \sum_{s=n}^{\infty} |M_s^{(n)}| \max_{x} |\psi_{s+1}(x)| \cdot \frac{1 + 2C|\lambda|}{1 - 2|\lambda| r_n^k (1 + 2C|\lambda|)} \tag{26}$$

при условии, что

$$2|\lambda| r_n^k (1 + 2C|\lambda|) < 1. \tag{27}$$

Пример. Для уравнения, рассмотренного в [3],

$$\varphi(x) = \frac{1}{2} \int\limits_{-1}^{+1} \varphi(y) \sin xy\, dy + e^x + \frac{x \operatorname{sh} 1 \cos x - \operatorname{ch} 1 \sin x}{1 + x^2},$$

точное решение которого — $\varphi(x) = e^x$, для $R_4(x)$ $(n = 4)$ с коэффициентами

$$a_0 = 1{,}000\ 15; \quad a_1 = 0{,}997\ 32; \quad a_2 = 0{,}498\ 68;$$

$$a_3 = 0{,}177\ 37; \quad a_4 = 0{,}044\ 25$$

и параметром точности $M_4 = 0{,}000\ 530$, была получена оценка погрешности

$$|\varphi(x) - R_4(x)| < 0{,}003\ 32 \tag{28}$$

при действительной разности

$$\max_{-1 \leqslant x \leqslant 1} |\varphi(x) - R_4(x)| = 0{,}000\ 59.$$

Пользуясь выражением (23), поскольку справедливо (22), и вычислив $M_s^{(n)}$ и $\psi_{s+1}(x)$, при условии, что

$$L_n^f = \left[f(\eta_0) + (-1)^{n+1} f(\eta_{n+1}) + 2 \sum_{k=1}^{n} (-1)^k f(\eta_k) \right] \cdot \frac{1}{2(n+1)},$$

$$L_n^k(y) = \left[K(\eta_0, y) + (-1)^{n+1} K\left(\eta_{n+1}, y\right) + \right. \tag{29}$$

$$\left. + 2 \sum_{m=1}^{2} (-1)^m K(\eta_m, y) \right] \frac{1}{2(n+1)},$$

после округления получаем: $M_5^{(4)} \leqslant 0{,}000\ 046$, $M_6^{(4)} \leqslant 0{,}000\ 002\ 4$, $M_7^{(4)} \leqslant$ $\leqslant 0{,}000\ 000\ 1$.

Остальные параметры $M_s^{(4)}$ не учитываются ввиду их малости.

Функции ψ_{s+1} имеют вид:

$$\psi_5(x) = T_5(x),\ \psi_6(x) = T_6(x) - T_4(x),$$

$$\psi_7(x) = T_7(x) - T_3(x),\ \psi_8(x) = T_8(x) - T_2(x),$$

где $T_n(x) = \cos n \arccos x$, и $\max\limits_{-1 \leqslant x \leqslant 1} |T_n(x)| = 1$.

Тогда

$$\max_x |\psi_5(x)| = 1;\quad \max_x |\psi_6(x)| \leqslant 2;$$

$$\max_x |\psi_7(x)| \leqslant 2;\quad \max_x |\psi_8(x)| \leqslant 2.$$

Следовательно, разность точного и приближенного решений не превосходит

$$|\varphi(x) - R_4(x)| \leqslant \frac{1}{1 - \frac{1}{2}(1 - \cos 1) \cdot 2} \{0{,}000\ 530 \cdot 1 +$$

$$+ 0{,}000\ 046 \cdot 2 + 2 \cdot 0{,}000\ 002\ 4 + 2 \cdot 0{,}000\ 000\ 1\} \leqslant 1{,}16 \cdot 10^{-3},$$

т. е. последняя оценка значительно лучше, чем оценка (23). Необходимо также отметить, что все величины, входящие в оценки (23) и (27), легко вычисляются по указанным для них формулам и не требуют в каждой задаче ни индивидуального подхода, ни существования определенного числа производных у ядра и возмущения, как при использовании других методов приближенного решения интегральных уравнений. Дифференциальные свойства функций $K(x, y)$ и $f(x)$ сказываются только на быстроте стремления к нулю параметров $L_s^k(y)$ и L_s^f, а следовательно, и $M_s^{(n)}$. По величине M_n всегда можно судить о порядке погрешности, возникающей при замене точного решения асимптотическим полиномом второго рода.

Однако иногда при решении системы (3) или (9) под знаком интеграла могут возникнуть выражения вида

$$\int_{-1}^{+1} K(\eta_k^{(n)},\ y)\, y^i dy, \qquad i = 0,\ 1,\ \ldots,\ n,$$

которые «не интегрируемы», тогда удобно вместо $K(\eta_k^{(n)},\ y)$ под знаком интеграла использовать значения асимптотического агрегата первого рода: $Q_m(\eta_k^{(n)},\ (y))$, которые вычисляются по формуле

$$Q_m(x,\ (y)) = \sum_{j=0}^{n+1} K(x,\ \eta_j^{(n)})\, \pi_j^{(m)}(y). \tag{30}$$

Следовательно, если ядро аппроксимировать полиномом степени m по переменной y и степени n по переменной x, то возникает новое приближенное решение $G_{nm}(x)$, которое можно найти либо из системы алгебраических уравнений $(n+2)$-го порядка

$$(-1)^k N_{nm} + G_{nm}(\eta_k^{(n)}) = \lambda \int_{-1}^{+1} Q_m^k(\eta_k^{(n)}(y))\, G_{nm}(y)\, dy + f(\eta_k^{(n)}) \tag{31}$$

с параметром N_{nm}, для него справедливо

$$N_{nm} = \lambda \int_{-1}^{+1} L_n^{Q_m}(y)\, G_{nm}(y)\, dy + L_n^f, \tag{32}$$

либо, заменяя ядро $K(x,\ y) \approx Q_{nm}((x),\ (y)) = \sum_{i=0}^{n+1} \sum_{j=0}^{m+1} K(\eta_i^{(n)}\, \eta_j^{(n)} \pi_i^{(n)}(x)\, \pi_j^{(n)}(y)$ и сравнивая коэффициенты при $\pi_i^{(n)}(x)$ $(i = 0,\ \ldots,\ n+1)$.

Разность между точным и приближенным решениями будет:

$$\varphi(x) - G_{nm}(x) = \lambda \int_{-1}^{+1} K(x,\ y)\, \varphi(y)\, dy -$$

$$- \lambda \int_{-1}^{+1} [K(x,\ y) - Q_{mn}((x)\ (y))] \times$$

$$\times G_{nm}(y)\, dy + f(x) - Q_n^f(x) + \lambda \int_{-1}^{+1} K(x,\ y)\, G_{nm},\ (y)\, dy =$$

$$= \lambda \int_{-1}^{+1} K(x,\ y)\, [\varphi,\ (y) - G_{nm}(y)]\, dy + \lambda \int_{-1}^{+1} [K(x,\ y) -$$

$$- Q_{nm}((x),\ (y))]\, G_{nm}(y)\, dy + f(x) - Q_n^f(x) =$$

$$= \lambda \int_{-1}^{+1} K(x,\ y)\, [\varphi(y) - G_{nm}(y)]\, dy + f(x) - Q_n^f(x) +$$

$$+ \lambda \int_{-1}^{+1} [K(x,\ y) - Q_m^k(x,\ (y))] G_{nm}(y) dy + \lambda \int_{-1}^{+1} [Q_m^k(x,\ (y)) -$$

$$- Q_{nm}((x),\ (y))]\, G_{nm}(y)\, dy.$$

Можно также записать, используя (14) и (13):

$$\varphi(x) - G_{nm}(x) = \lambda \int_{-1}^{+1} K(x, y)\left[\varphi(y) - G_{nm}(y)\right] dy +$$

$$+ \lambda \int_{-1}^{+1} \sum_{r=m}^{\infty} L_r^k(x)\, \psi_{r+1}^{(m)}(y)\, G_{nm}(y)\, dy +$$

$$+ \lambda \int_{-1}^{+1} \sum_{r=n}^{\infty} L_r^{Q_m}(y)\, \psi_{r+1}^{(n)}(x)\, G_{nm}(y)\, dy +$$

$$+ \sum_{r=n}^{\infty} L_r^f\, \psi_{r+1}^{(n)}(x),$$

где

$$L_r^{Q_m}(y) = \frac{1}{2(r+1)} \left\{ Q_m^k(\eta_0^{(r)}, (y)) + (-1)^{r+1} Q_m^k(\eta_{r+1}^{(r)}, (y) + \right.$$

$$\left. + 2 \sum_{j=1}^{r} (-1)^j Q_m^k(\eta_j^{(r)}, (y)) \right\}, \tag{33}$$

$$L_r^k(x) = \frac{1}{2(r+1)} \left\{ K(x, \eta_0^{(r)}) + (-1)^{r+1} K(x, \eta_{r+1}^{(r)}) + \right.$$

$$\left. + 2 \sum_{j=1}^{r} (-1)^j K(x, \eta_j^{(r)}) \right\}. \tag{34}$$

После введения обозначений

$$N_{rm}^{(n)} = \lambda \int_{-1}^{+1} L_r^{Q_m}(y)\, G_{nm}(y)\, dy + L_r^f \tag{35}$$

и

$$S_{r+1} = \lambda \int_{-1}^{+1} \psi_{r+1}^{(m)}(y)\, G_{nm}(y)\, dy \tag{36}$$

можно записать:

$$\varphi(x) - G_{nm}(x) = \lambda \int_{-1}^{+1} K(x, y)\left[\varphi(y) - G_{nm}(y)\right] dy +$$

$$+ \sum_{r=m}^{\infty} L_r^k(x)\, S_{r+1} + \sum_{r=n}^{\infty} N_{rm}^{(n)}\, \psi_{r+1}^{(n)}(x).$$

Для всего промежутка будет справедливо

$$|\varphi(x) - G_{nm}(x)| \leqslant \frac{\sum_{r=m}^{\infty} |L_r^k(x)| \cdot |S_{r+1}| + \sum_{r=n}^{\infty} |N_{rm}^{(n)}|\, |\psi_{r+1}^{(n)}(x)|}{1 - |\lambda| \max_x \int_{-1}^{+1} |K(x, y)|\, dy}.$$

Но если $|K(x, y)|$ «не интегрируемо», для

$$|K(x, y)| \leqslant |Q_{nm}((x), (y))| + |K(x, y) - Q_{nm}((x), (y))| \leqslant$$

$$\leqslant |Q_{nm}((x), (y))| + \sum_{r=m}^{\infty} |L_r^k(x),| \cdot |\psi_{r+1}^{(m)}(y)| +$$

$$+ \sum_{r=n}^{\infty} |L_r^{Q_m}(y)| \cdot |\psi_{r+1}^{(n)}(x)| = |Q_{nm}((x), (y))| + \cdot |h_{nm}|, \tag{37}$$

$$|h_{nm}| = \sum_{r=m}^{\infty} |L_r^k(x)| \cdot |\psi_{r+1}^{(m)}(y)| + \sum_{r=n}^{\infty} |L_r^{Q_m}(y)| \cdot |\psi_{r+1}^{(n)}(x)|. \tag{38}$$

Окончательная оценка принимает вид

$$|\varphi(x) - G_{nm}(x)| \leqslant \frac{\sum_{r=m}^{\infty} |L_r^k(x)| \cdot |S_{r+1}| + \sum_{r=n}^{\infty} |N_{rm}^{(n)}| |\psi_{r+1}^{(n)}(x)|}{1 - |\lambda| \max \int_{-1}^{+1} \{|Q_{nm}((x), (y))| + |h_{nm}|\} dy} \tag{39}$$

при $|\lambda| \max \int_{-1}^{+1} \{|Q_{nm}((x), (y))| + |h_{nm}|\} dy < 1$.

Различные структурные характеристики ядра $K(x, y)$ по переменным x и y учитываются в этом выражении, так как от них зависит быстрота стремления к нулю параметров точности $L_r^k(x)$ и $L_r^{Q_m}(y)$. Если эти характеристики одинаковы, то можно брать $n = m$ и из (39) нетрудно получить оценку для такого частного случая. То, что при $K(x, y) = K(y, x)$ $Q_{nn}((x), (y))$ будет симметричным, является очевидным.

Пример. Пусть задано

$$\varphi(x) = 0{,}1 \int_{-1}^{+1} \frac{\varphi(y)\, dy}{\sqrt{1 - \frac{1}{4} \sin^2 \frac{\pi}{2}(x+1) \sin^2 \frac{\pi}{2}(y+1)}} + \cos \frac{x}{2}.$$

Заменяя

$$\frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{4} \sin^2 \frac{\pi}{2}(x+1) \sin^2 \frac{\pi}{2}(y+1)}} \approx Q_{22}((x), (y)) =$$

$$= \sum_{i=0}^{3} \sum_{j=0}^{3} K(\eta_i^{(2)}, \eta_j^{(2)}) \pi_i^{(2)}(x) \pi_j^{(2)}(y) = \pi_0^{(2)}(y) + \pi_3^{(2)}(y) + (\pi_1^{(2)}(y) +$$

$$+ \pi_2^{(2)}(y)) \left[\pi_0^{(2)}(x) + \pi_3^{(2)}(x) + (\pi_1^{(2)}(x) + \pi_2^{(2)}(x)) \frac{4}{\sqrt{15}}\right],$$

где

$$\pi_0^{(2)}(x) = \frac{1}{6}(4x^2 + 2x - 1); \qquad \pi_1^{(2)}(x) = \frac{1}{3}(-2x^2 + x + 2);$$

$$\pi_3^{(2)}(x) = \frac{1}{6}(4x^2 - 2x - 1); \qquad \pi_2^{(2)}(x) = \frac{1}{3}(-2x^2 - x + 2),$$

можно получить приближенное решение

$$G_{22}(x) = -0{,}291\ 0x^2 + 2{,}205\ 6.$$

Используя оценку (39) при следующих значениях, входящих в нее величин:

$$|L_3^k(x)| \leqslant 0{,}023\ 6, \quad |S_4| \leqslant 0{,}156\ 4,$$

$$|L_5^k(x)| \leqslant 0{,}004\ 91, \quad |S_6| \leqslant 0{,}432\ 3,$$

$$|N_{32}^{(2)}| \leqslant 0{,}004\ 19, \quad |\psi_4(x)| = |T_4(x) - T_2(x)| \leqslant 2,$$

$$|N_{52}^{(2)}| \leqslant 0{,}000\ 79, \quad |\psi_6(x)| = |T_6(x) - T_0(x)| \leqslant 2,$$

$$|N_{72}^{(2)}| \leqslant 0{,}000\ 28, \quad |\psi_8(x)| = |T_8(x) - T_2(x)| \leqslant 2,$$

вычисленных по формулам (33) — (36) и (37), (38), можно получить

$$\lambda \max \int_{-1}^{+1} [|Q_{22}((x), (y))| + |h_{22}|]\,dy =$$

$$= 0{,}1\,[4{,}5360 + 0{,}1229] = 0{,}4536.$$

Окончательная оценка будет иметь значение:

$$|\varphi(x) - G_{22}(x)| \leqslant \frac{0{,}016\ 3}{0{,}534} = 0{,}030\ 6 < 0{,}031.$$

В (33) — (36) и (38) отброшены члены, величина которых не превышает погрешности округления. Все параметры $L_{2m}^k(x)$ симметричного ядра $K(x, y)$ и L_{2m}^l четной функции $f(x)$ при $m = 1, 2, \ldots$ обращаются в нуль.

Литература

1. Этерман И. И. Аппроксимация полиномами и решение некоторых задач прикладной математики. Пенза, 1960.
2. Этерман И. И. Уч. зап. Пенз. политехн. ин-та, Вычисл. техн., в. 1. Пенза, 1964.
3. Этерман И. И. Изв. вузов, Математика, № 6, 1966.
4. Этерман И. И. Уч. зап. Пенз. политехн. ин-та, Матем. и мех., вып. 1. Пенза, 1963.
5. Гурса Е. Курс математического анализа, т. III, ч. 2. ГТТИ, 1934.
6. Акбергенов И. А. Матем. сб., 42, № 6, 679—697, 1935.
7. Канторович Л. В., Крылов В. И. Приближенные методы высшего анализа. ФМ, М.—Л., 1962.

Институт ядерной энергетики АН БССР

Поступило в редакцию 25.IV 1967

ВЕСЦІ АКАДЭМІІ НАВУК БЕЛАРУСКАЙ ССР № 1 1968
СЕРЫЯ ФІЗІКА-МАТЭМАТЫЧНЫХ НАВУК

УДК 519.95+519.45

В. А. ЛИСКОВЕЦ, В. З. ФЕЙНБЕРГ

АВТОМАТНЫЕ РАЗБИЕНИЯ И ПОДПОЛУГРУППЫ СВОБОДНОЙ ПОЛУГРУППЫ

Важное место в абстрактной теории автоматов занимают автоматные разбиения свободных полугрупп. Их свойства и применение изучались во многих работах (см. [3, 9]). В настоящей статье предлагается алгебраический подход к их описанию. Устанавливается тесная связь автоматных разбиений с определенным классом подполугрупп свободной полугруппы, имеющих ряд специфических свойств, подобных свойствам подгрупп свободной группы. Теорию автоматных разбиений удается построить аналогично известному методу Шрейера для свободных групп в изложении М. Холла [14, 2]. По существу метод Шрейера распространяется здесь на свободные полугруппы. Указываются причины и смысл этого в теории автоматов. Материал излагается в основном по аналогии с [2]. Получен также ряд других результатов, связанных с потребностями приложений. Дается удобная интерпретация метода на языке графов и решается несколько естественно возникающих комбинаторных задач.

Следует отметить, что в [15] дано распространение метода Шрейера на свободные произведения групп.

§ 1. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ЛЕММЫ

Пусть X — непустое множество, $F=F(X)$ — свободная полугруппа с единицей, порожденная X (см. [1], стр. 467). Как обычно, элементы F назовем словами, элементы X — буквами, а само X — алфавитом. Пустое слово (единицу F) обозначим через e, а длину слова p — через $|p|$. Алфавит X не предполагается, вообще говоря, конечным.

Подполугруппы F с единицей e будем обозначать большими буквами без штрихов, а соответствующие подполугруппы без единицы — теми же буквами со штрихом: $U'=U\setminus\{e\}$. Подполугруппу F с единицей, порожденную множеством $Q\subseteq F$, обозначим $[Q]$.

Если $q, r\in F$, назовем q начальным (левым) о т р е з к о м слова qr (собственным, если $r\neq e$), а r — его конечным (правым) отрезком. e — правый и левый отрезок любого слова.

Все определения в этом параграфе являются односторонними (левыми), допускающими двойственные понятия при помощи замены в определениях начал слов на концы, умножений слева на умножения справа и наоборот. Строящуюся здесь теорию можно назвать л е в о с т о р о н н е й. Можно построить теорию, двойственную ей, если заменить сразу все понятия на двойственные им. При этом особый интерес представляют двусторонние объекты (двойственные сами себе), однако их мы не будем касаться.

Определение 1. Множество $N \subseteq F$ назовем шрейеровской системой (по аналогии с таким же понятием в теории свободных групп (см. [2], стр. 112)), если с каждым словом в N входят и все его начальные отрезки.

Шрейеровские системы встречаются во многих работах по теории автоматов (см., например, [3, 4]). В [3] они называются множествами, удовлетворяющими условию полноты (таковыми являются области определения частичных автоматных отображений).

Определение 2. Шрейеровская система A называется цепью, если A представляет собой последовательность слов вида: $p_0 = e$, $p_i = p_{i-1}x_i$, где x_i — определенная буква X, $i = 1, 2, \ldots$

Определение 3. Множество $M \subset F$ назовем (левым) слоем, если ни один собственный начальный отрезок слов из M не входит в M. Главным слоем множества $Q \subseteq F$ назовем множество всех слов из $Q \setminus \{e\}$, никакой собственный начальный отрезок которых не содержится в $Q \setminus \{e\}$.

Понятие слоя является, очевидно, противоположным понятию шрейеровской системы. Такие множества иногда называются кодами со свойством префикса [4, 16] (это важное понятие теории кодирования).

Определение 4. Слой M называется полным*), если во всякой цепи есть слово из M.

Пример: слой X^k всех слов длины k является полным.

Определение 5 [5]. Правым частным N^p множества $\overline{N} \subseteq F$ по p назовем множество всех таких слов q, что $pq \in N$.

Если N — шрейеровская система, то N^p — также шрейеровская система. N^p — частное от деления N слева на p.

Пусть N — шрейеровская система. Введем множество $\overline{N} = NX \cup \{e\}$, являющееся шрейеровской системой, тогда $C(N) = \overline{N} \setminus N$ является слоем. Если $N \neq \varnothing$, то $C(N) = NX \setminus N$.

Пусть $C(N) = M$. Нетрудно доказать, что $N = F \setminus MF$ и обратно. Поэтому функция $C(N)$ является взаимно однозначным отображением множества всех шрейеровских систем на множество всех слоев. Множество $C^{-1}(M)$ назовем дополнением слоя M.

Выведем теперь ряд свойств этих объектов, необходимых для дальнейших рассуждений.

Лемма 1. *1) Всякий полный слой максимален, т. е. не вкладывается в больший слой. 2) Слой $C(N)$ является полным, если N — конечная шрейеровская система. 3) Всякий конечный слой вкладывается в полный.*

Эти утверждения легко проверяются непосредственно.

Интересно, что существуют неполные максимальные слои. Таков, например, бесконечный слой $[a_1]a_2$ в алфавите $X = \{a_1, a_2\}$.

Лемма 2. *Если алфавит X конечен, то всякая бесконечная шрейеровская система N содержит цепь.*

Доказательство вытекает из теоремы Кёнига (см. [6], стр. 24), если ввести конечные множества $A_i = N \cap X^i$ и частичное отношение порядка в F:

$p < q \Leftrightarrow p$ — собственный начальный отрезок слова q.

Следствие. В конечном алфавите всякий полный слой M конечен вместе со своим дополнением**).

Ясно, что дополнение неполного слоя бесконечно.

Лемма 3. *Пусть N — шрейеровская система.*

---

*) Полный код (со свойством префикса) [16].

**) При этом $C^{-1}(M)$ состоит лишь из собственных начальных отрезков слов из M. В общем случае $C^{-1}(M)$ содержит еще M_0F, где M_0 — такой минимальный слой, что $M_0 \cup M$ является полным слоем.

1) *Если* $N^{pr} = N^p$, $pr \in N$, $r \neq e$, *то* N *содержит цепь.*

2) *Если* $M = C(N)$, $p, q \in \overline{N}$, *то* $N^p = N^q$ *равносильно* $M^p = M^q$.

3) M*—полный слой тогда и только тогда, когда* M^x*—полный слой для всех* $x \in X$.

Доказательство. 1) Искомую цепь образует множество начальных отрезков слов p, pr, prr, $prrr$, ... 2) $N^p = N^q$, $p \in N$. Пусть $pr \in M$, т. е. $r \in M^p$, тогда $r = r_1 x$, $x \in X$, откуда $pr_1 \in N$. Значит, $qr_1 \in N$, но $qr_1 x \overline{\in} N$, так как $pr_1 x \overline{\in} N$. Но $qr_1 x \in N \cup M$, поэтому $r_1 x = r \in M^q$, что и требовалось доказать. Обратное доказывается аналогично. Утверждение 3 очевидно.

§ 2. ПОДПОЛУГРУППЫ СВОБОДНОЙ ПОЛУГРУППЫ

Определение 6. Множество $Q \subset F$ называется базисом (для $[Q]$) [7], если $q \overline{\in} [Q \setminus \{q\}]$ для всякого $q \in Q$. Если Q — базис, а M — главный слой Q, то назовем $[M]$ главной подполугруппой полугруппы $[Q]$. Если M — слой, то полугруппу $[M]$ назовем однослойной.

Очевидно, всякая полугруппа $U \subseteq F$ с единицей имеет единственный базис $Q = U' \setminus U'^2$ — множество неприводимых элементов U (см. [1], стр. 498), $e \overline{\in} Q$. Этот базис входит во всякую систему образующих U, его главный слой совпадает с главным слоем U. Базисом единичной полугруппы является пустое множество.

Предложение 1. 1) Всякий слой $M \neq \{e\}$ является базисом порождаемой им полугруппы $U = [M]$. Всякая однослойная полугруппа свободна. 2) Полугруппа $U \subseteq F$ однослойна тогда и только тогда, когда из $qp \in U$ $q \in U$ следует, что $p \in U$.

Доказательство. 1) Первое утверждение очевидно. Докажем, что U свободна. Пусть $p \in U$ и $p = q_1 \dots q_s = r_1 \dots r_t$, где q_i, $r_j \in M$. Так как M — слой, то $q_1 = r_1$, иначе одно из них является собственным начальным отрезком другого. Сократив равенство на q_1 и продолжая те же рассуждения, получим $s = t$, $q_i = r_i$, что и требовалось доказать.

2) Пусть U однослойна, $qp = r$, q, $r \in U$, $q = q_1 \dots q_s$, $r = r_1 \dots r_t$, где q_i, $r_j \in M$ — базис U. Рассуждая, как и в доказательстве пункта 1, получаем, что $s \leqslant t$, $q_i = r_i$, $i = 1, \dots, s$, откуда $p \in U$. Обратно, пусть Q — базис U и существуют r, $q \in Q$, $r = qp$, $p \neq e$. Тогда из $r \overline{\in} [Q \setminus \{r\}]$ вытекает, что $p \overline{\in} [Q \setminus \{qp\}]$. Но и r не может участвовать в порождении p ($q \neq e$), поэтому $p \overline{\in} [Q] = U$. Предложение доказано.

Следствие. Если U — однослойная полугруппа (и только в этом случае), то из q, $qp \in U$ следует $pq \in U$.

Таким образом, для однослойных полугрупп одно из двух симметричных условий известного критерия Шютценбергера — Шеврина свободы подполугруппы F (см. [7]) следует из другого. Разумеется, многие свободные подполугруппы F устроены гораздо сложнее, нежели однослойные. Это вытекает и из [8], где дан критерий свободы подполугруппы F на языке базиса.

Если определения 3 и 6 перенести в теорию свободных групп, то очевидно, что всякое множество, обладающее свойством Нильсена (см. [2], стр. 125), является двусторонним слоем. Поэтому в силу теоремы 7.3.2 [2] всякая (конечнопорожденная) подгруппа свободной группы (двусторонне) однослойна. Правда, подгруппы свободной группы имеют не единственный базис (и не обязательно слой).

Перейдем к изучению левых смежных классов F по подполугруппе U. Нас будут интересовать покрытия F такими классами, т. е. разложения $F = \bigcup_{p \in K} Up = UK$, где $K \subseteq F$ — множество представителей смежных классов.

Назовем такое покрытие и множество K неприводимыми, если не существует подмножества $K_1 \subset K$, что $F = UK_1$.

Теорема 1. *1) Единственным неприводимым множеством представителей покрытия F по подполугруппе U является дополнение $N = C^{-1}(M_0)$ главного слоя M_0 полугруппы U (и ее базиса). N входит в любое множество представителей покрытия F по U. 2) Неприводимое покрытие F по U (левыми классами) является разбиением (т. е. классы в нем не пересекаются) тогда и только тогда, когда полугруппа U однослойна.*

Доказательство. 1) Все слова из U' имеют начальные отрезки, входящие в M_0. Как отмечалось, слова из N не обладают этим свойством. Тогда если $p \in N$, $p \in Ur$, т. е. $p = qr$, $q \in U$, то $q = e$, $p = r$. Второе утверждение доказано. Если $p \overline{\in} N$, то $p = q_1 r_1$, $q_1 \in M_0$, так как $N\text{-}F \setminus M_0 F$. Проводя те же рассуждения для r_1, если $r_1 \overline{\in} N$, придем к представлению $p = qr$, где $q \in [M_0] \subseteq U$, $r \in N$, откуда $p \in Ur$ и $F = UN$.

2) Пусть M — слой, $U = [M]$. В силу пункта 1 теоремы $F = UN$, $N = F \setminus MF$. Тогда из $q_1 p_1 = q_2 p_2$, $p_i \in N$, $q_i \in U$ вытекает, как и в доказательстве предложения 1, что $q_1 = q_2$, откуда $p_1 = p_2$. Значит, классы не пересекаются. Обратно, если U не однослойна и U_0 — главная подполугруппа U с базисом M_0, то $F = UN = U_0 N$, $N = C^{-1}(M_0)$. Так как $U_0 \subset U$ и F — полугруппа с сокращением, то $F = UN$ не является разбиением.

Эта теорема выявляет особую роль однослойных полугрупп и показывает, что они имеют наибольшее сходство с подгруппами свободной группы.

Определение 7. Неприводимую систему представителей покрытия F левыми смежными классами по подполугруппе U назовем (левым) индексным множеством U (в F), а его мощность — индексом U.

По теореме 1 индексное множество существует, единственно, и оно однозначно определяется главной подполугруппой. Левый и правый индексы могут не совпадать.

Сформулируем ряд следствий из теоремы 1 и предыдущих результатов.

Следствие 1. Если M — слой, $U = [M]$, $N = C^{-1}(M)$, то U является главной подполугруппой всякой полугруппы, индексным множеством которой является N. Однослойная полугруппа однозначно определяется своим индексным множеством.

Следствие 2. Пусть алфавит X конечен. Подполугруппа U имеет в F конечный индекс тогда и только тогда, когда главный слой (базиса) U полон (см. § 1). Однослойная подполугруппа F конечного индекса конечно порождена.

Второе утверждение не допускает обращения и неверно для неоднослойных полугрупп.

Следствие 3. Пусть M — слой, $U = [M]$, $N = C^{-1}(M)$. Тогда: 1) для всякого $p \in F$ существует единственное $r \in N$, что $Up \subseteq Ur$; 2) если $Up_1 \cap Up_2 \neq \varnothing$, то $Up_1 \subseteq Up_2$ или $Up_2 \subseteq Up_1$, т. е. $p_1 = qp_2$ или $p_2 = qp_1$, $q \in U$.

В заключение параграфа отметим, что если E — свободная группа над тем же X, V — подгруппа E, то $U = V \cap F$ является (двусторонне) однослойной полугруппой.

§ 3. АВТОМАТНЫЕ РАЗБИЕНИЯ СВОБОДНОЙ ПОЛУГРУППЫ

1. Определение 8. Разбиение $F = \bigcup_{i \in I} U_i$ называется автоматным [3], если $U_i x$ целиком входит в некоторый класс U_j, $x \in X$, $i, j \in I$.

Значит, и для любого $p \in F$ здесь $U_i p \subseteq U_j$. Отождествим данное автоматное разбиение с соответствующим отношением эквивалентности ρ на F. В теории полугрупп такое отношение ρ называется стабильным справа (см. [1], стр. 60; [5]). Положим, $0 \in I$, в качестве U_0 будем брать всегда класс из F/ρ, содержащий e.

Как известно [3], каждому автоматному разбиению ρ естественным образом соответствует связный инициальный автомат A_ρ без выходов (с входным алфавитом X), определяемый с точностью до изоморфизма, и обратно. Каждый класс F/ρ представляется в нем соответствующим состоянием, причем класс $U_0 \ni e$ представляется начальным состоянием.

Теорема 2. *Если ρ — автоматное разбиение, то U_0 — однослойная (слева) полугруппа.*

Доказательство. Тот факт, что U_0 — полугруппа, очевиден. Пусть Q — базис U_0. Если Q не является слоем, то в нем есть слова q, qr, где $r \neq e$. Как и при доказательстве предложения 1, можно показать, что $r \in U_0$. Тогда $U_0 r$ не принадлежит U_0, но $U_0 r \cap U_0 \neq \varnothing$, что невозможно. Значит, Q — слой.

Следствие 1. Всякий класс автоматного разбиения является объединением некоторых левых смежных классов из разбиения F по U_0 (см. теорему 1). Разбиение F по U_0 является автоматным (и минимальным среди всех разбиений, содержащих класс U_0).

Это следствие аналогично по форме теореме Нероуда [9].

Следствие 2. Автоматное разбиение ρ однозначно определяется индуцированным им разбиением индексного множества N полугруппы U_0.

Именно, $F/\rho = \{U_0 u_i\}_{i \in I}$, где $\{u_i\}_{i \in I} = N/\rho$.

Обозначим через ρ_0 главное отношение эквивалентности [5], определяемое U_0, т. е. отношение

$$p \rho_0 q \Longleftrightarrow U_0^p = U_0^q, \quad p, q \in F. \tag{1}$$

ρ_0 является стабильным справа. Легко доказать, поскольку U_0 однослойна, что $U_0 \in F/\rho_0$. Как известно (ср. следствие теоремы Нероуда, данное в [9]), ρ_0 является наибольшим автоматным разбиением, содержащим событие U_0 в качестве класса (или даже в качестве объединения классов), т. е. всякое другое такое разбиение является подразбиением ρ_0. Это имеет очевидный смысл на языке автоматов. Но обычно подобные результаты формулируются для регулярных событий [3].

Теорема 3. *Если N — индексное множество U_0, то на N отношение ρ_0 (1) индуцирует отношение эквивалентности ρ_0', определяемое условиями:*

$$\left.\begin{array}{l} 1)\ e \rho_0' q \Longrightarrow q = e; \\ 2)\ p \rho_0' q \Longleftrightarrow N^p = N^q,\ p, q \in N \setminus \{e\}. \end{array}\right\}$$

Поэтому ρ_0 однозначно определяется отношением ρ_0'.

Доказательство. Условие 1 очевидно, ибо $(N \setminus \{e\}) \cap U_0 = \varnothing$. Пусть $M = C(N)$. Условие 2 вытекает из леммы 3 (пункт 2), поскольку, как легко видеть, для $p \in N \setminus \{e\}$ $U_0^p = M^p U_0$ (в то же время $U_0^e = U_0 = M^e U_0 \cup \{e\}$).

Следствие. Событие $S \subseteq F$ тогда и только тогда представляется одним состоянием некоторого (вообще говоря, бесконечного) связного инициального автомата, когда оно может быть представлено в виде $S = U_0 v$*), где U_0 — однослойная полугруппа, v — подкласс некоторого класса N/ρ_0' (N — индексное множество U_0), причем выполняется следующее условие:

$$vr \cap v \neq \varnothing \Longrightarrow vr \subseteq v,\ r \in F. \tag{2}$$

*) В этом случае можно потребовать, чтобы начальное состояние соответствующего автомата было представлено U_0.

Условие (2) является перефразированием критерия представимости события одним состоянием [10], который там применяется непосредственно к (регулярному) событию S (в следствии этому соответствует $U_0 = \{e\}$). Оно тривиально, когда v — слой.

Следствие доказывается аналогично [10] с учетом следствия 2 теоремы 2. Это следствие усиливает результат [10]. Оно описывает (в терминах U_0 и N) отдельные классы автоматных разбиений, содержащих класс U_0. Если S и U_0 регулярны (см. критерий регулярности U_0 в § 4), то представляющий автомат можно выбрать, как и в [10], конечным. Отметим, что U_0 определяется для S неоднозначно.

2. Дальнейшее изучение автоматных разбиений ведется аналогично (до известной степени) теории Шрейера для свободных групп в изложении М. Холла (см. [2], гл. 7), применяемой там для других целей.

Теорема 4. *Существует шрейеровская система представителей G классов автоматного разбиения ρ полугруппы F.*

Доказательство. Выберем в качестве представителей классов множество G *первых* слов классов в лексикографическом упорядочении F (X предполагается вполне упорядоченным). Пусть $px \in G$, $px \in U_j \in F/\rho$, $x \in X$. Докажем, что $p \in G$. Пусть $p \in U_i \in F/\rho$. $U_i x \subseteq U_j$, так как $px \in U_j$. Если бы существовало $q \in U_i$, $q < p$, то $qx < px$ и $qx \in U_j$, что невозможно. Поэтому p — наименьший элемент в U_j, что и требовалось доказать.

Эта теорема (вместе с доказательством) совершенно аналогична обобщенной лемме Шрейера из теории свободных групп (лемма 7.2.1 [2]). Как и там, выбор шрейеровской системы представителей, вообще говоря, неоднозначен. Уже в этом проявляется большая близость автоматных разбиений к разбиениям свободной группы на левые смежные классы по подгруппе, нежели разбиений свободной полугруппы по подполугруппе (однослойной).

Пусть $G \neq \varnothing$ — шрейеровская система, $M = C(G)$, $\overline{G} = G \cup M$. Введем на $\overline{G}$ отображение φ, удовлетворяющее условиям:*)

$$\left.\begin{array}{l} 1.\ \varphi(\overline{G}) = G; \\ 2.\ \varphi(p) = p, \quad p \in G. \end{array}\right\} \tag{3}$$

Затем введем, исходя из φ, отображение Φ: $F \to G$ следующим образом:

$$\left.\begin{array}{l} 1.\ \Phi(e) = \varphi(e) = e; \\ 2.\ \Phi(px) = \varphi(\Phi(p)\, x), \ x \in X. \end{array}\right\} \tag{4}$$

Это определение корректно, так как $\Phi(p) \in G$, т. е. $\Phi(p)\, x \in \overline{G}$ (доказывается индукцией по длине слов). Φ является продолжением φ на все F. Легко доказать, что $\Phi(qr) = \Phi(\Phi(q)\, r)$.

Обозначим $U_p = \Phi^{-1}(p)$, $p \in G$. Тогда имеет место следующее разбиение F:

$$F = \bigcup_{p \in G} U_p. \tag{5}$$

Теорема 5. *1) Разбиение* (5) *является автоматным, причем G служит шрейеровской системой представителей его классов. 2) Обратно, если ρ — автоматное разбиение, G — шрейеровская система его представителей, то ρ однозначно определяет на $\overline{G}$ отображение φ, удовлетворяющее* (3), *и такое, что ρ совпадает с разбиением* (5). *Таким образом, Φ отображает классы F/ρ на их представителей в G.*

Доказательство. 1) $\Phi(U_p x) = \varphi(\Phi(U_p)\, x) = \varphi(px)$, откуда следует, что $U_p x \subseteq U_{\varphi(px)}$.

*) В теории групп φ удовлетворяет еще одному условию, связанному с обратимостью элементов.

2) φ определяется на $\bar{G}$ следующим образом: $\varphi(p) = q$ тогда и только тогда, когда $q \in G$ и $p \rho q$. Значит, φ строится однозначно. Оно удовлетворяет (3), поэтому остается доказать справедливость последнего утверждения. Для этого достаточно установить, что если $\Phi(p) = q$, то $p \rho q$. Доказательство будем вести индукцией по длине слова p. Для $p = e$ это верно, так как $e \in G$. Предположим, что это верно для всех слов X^k, $k \geqslant 0$. Если $p_1 \in X^{k+1}$, то $p_1 = px$, $p \in X^k$, $x \in X$. Пусть $\Phi(p) = q$, по предположению индукции $p \rho q$. $\Phi(p_1) = \Phi(px) = \varphi(\Phi(p)\, x) = \varphi(qx) = q_1$, $q_1 \in G$. Так как ρ — автоматное разбиение, $px \rho qx$, $qx \in \bar{G}$. По построению φ $\varphi(qx) \rho qx$, откуда $px \rho \varphi(qx)$, т. е. $p_1 \rho q_1$. Теорема доказана.

Пункт 1 теоремы 5 аналогичен теореме 7.2.3 [2], но проще ее по доказательству, так как на φ здесь накладывается меньше условий*) . В силу теоремы 5 $\rho = \rho(G, \varphi)$. Такое задание автоматного разбиения назовем (следуя [2], стр. 119 и [14]) стандартным представлением ρ.

Если на отображение φ наложить дополнительное условие, чтобы $\varphi(p) \leqslant p$ в лексикографическом упорядочении F, то автоматные разбиения будут находиться во взаимно однозначном соответствии с парами (G, φ). Это замечание усиливает 2-й пункт теоремы 5 и соответствующей теоремы из [2].

Дадим автоматную интерпретацию теорем 4 и 5. Пусть $\rho = \rho(G, \varphi)$. G есть множество слов, при помощи которых автомат A_ρ может последовательно переходить из начального состояния в любое другое, причем в каждое состояние ведет ровно один путь, а начальные части путей сами являются такими путями. Такое последовательное функционирование автоматов и определяет значение шрейеровских систем в теории автоматов. Для однозначности задания A_ρ надо еще добавить функцию переходов (возвратов) φ на $C(G)$. Именно, если отождествить состояния A_ρ с соответствующими словами из G, то функция переходов автомата A_ρ будет следующей: $\delta(p, x) = \varphi(px)$.

Пусть $\rho = \rho(G, \varphi)$, $M = C(G)$. $F \setminus G$ есть множество слов, однозначно представимых в виде qr, $q \in M$, $r \in F$. Это позволяет ввести отображение ψ: $F \to F$ следующим образом:

$$\left.\begin{array}{l} 1.\ \psi(p) = \varphi(p) = p, \quad p \in G; \\ 2.\ \psi(pr) = \varphi(p)\, r, \quad p \in M,\ r \in F. \end{array}\right\} \tag{6}$$

Введем, кроме того, отображение ψ_1: $F \to F$:

$$\psi_1(pr) = \begin{cases} pr, & \text{когда } p \in M, \varphi(p) = e,\ r \neq e; \\ \psi(pr) & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \tag{7}$$

Отображение ψ обладает следующими свойствами:

а) если $\psi(pr) = p_1 r_1$, где p, $p_1 \in M$, то r_1 — собственный начальный отрезок r, а потому $|r_1| < |r|$;

б) если $q \bar{\in} G$, то $\psi(qr) = \psi(q)\, r$.

Теорема 6. *Примем за индексы классов F/ρ, $\rho = \rho(G, \varphi)$, слова из G, принадлежащие этим классам.*

1) *$q \in U_r$ для $r \in G$, $U_r \in G/\rho$ тогда и только тогда, когда при некотором натуральном k $\psi^k(q) = r$.*

2) *Базисом полугруппы $U_e \in F/\rho$ является множество M_0 всех таких слов $p \neq e$, что $\psi_1^k(p) = e$ при некотором натуральном k.*

*) Аналог пункта 2 теоремы 5 справедлив и для свободных групп.

Доказательство. 1) Как известно, $p \rho \varphi(p)$, $p \in \overline{G}$, откуда $pr \rho \varphi(p) r$, т. е. $q \rho \psi(q)$, $q = pr$. На G ψ тождественно. Поэтому остается доказать, что $\psi^k(q) \in G$ для некоторого k. Но это следует из свойства а) отображения ψ. Доказательство пункта 2 мы опустим, так как оно громоздко и не содержит новых идей.

Следствие 1. Пусть $M = C(G)$, M_0 — базис U_e. Тогда $U_e \cap M \subseteq M_0$. А если $U_e \cap M = \varnothing$, то $M_0 = \varnothing$ и $U_e = \{e\}$.

Следствие 2. Разбиение $\rho = \rho(G, \varphi)$ совпадает с разбиением F по полугруппе $U_0 \in F/\rho$ тогда и только тогда, когда $C(G) = M \subseteq U_0$, т. е. $\varphi(M) = e$, $U_0 = [M]$.

Здесь G для ρ находится однозначно: $G = C^{-1}(M)$.

Очевидно, аналогичное построение и теорема возможны и в свободных группах.

Отображение ψ позволяет построить алгоритм последовательного разбиения F по ρ. Оно дает возможность быстро распознать, какому классу принадлежит данное слово, благодаря тому, что в слове каждый раз выбирается наибольший начальный отрезок (при данном G), для которого эта принадлежность уже известна благодаря φ. Фактически этот способ равносилен своеобразному кодированию (словами из $C(G)=M$). Если множество состояний автомата A_ρ отождествить с G, то этот способ означает, что A_ρ теперь не последовательно буква за буквой перерабатывает слово, а преобразует каждый раз сразу его начальные отрезки, входящие в M (при этом существенно, что G — шрейеровская система), переходя от слова $p = qr$, $p \overline{\in} G$, $q \in M$, к слову $p_1 = \varphi(q) r = \varphi(q) q_1 r_1$, $\varphi(q) q_1 \in M$, причем $q_1 \neq e$, и т. д. В этом случае, кстати, не исключено $|\varphi(q) r| > |p|$, но $|r_1| < |r|$. Такой способ может иметь практические приложения. Его эффективность (число шагов, наименьшее $k = k(p)$, при котором $\psi^k(p) \in G$) зависит, однако, как от ρ, так и от выбора G. Она тем выше, чем длиннее такие слова r, что $\varphi(q) r \in M$, $q \in M$. В этом смысле лучше всего простейший случай, когда ρ совпадает с разбиением F по U_0, способ распознания тогда естествен.

Теорема 7. *Автоматные разбиения* $\rho = \rho(G, \varphi)$ *и* $\rho' = \rho'(G', \varphi')$ *совпадают тогда и только тогда, когда существует такое взаимно однозначное соответствие* α: $G \to G'$, *включая* $\alpha(e) = e$, *при котором* $\alpha(\varphi(px)) = \varphi'(\alpha(p) x)$ *для всех* $p \in G$, $x \in X$.

Доказательство. Если $\rho = \rho'$, то отображение $\alpha(p) = p'$, $p \in G$, $p' \in G'$, определяемое условием $p \rho p'$, будет, очевидно, взаимно однозначным, причем $\alpha(e) = e$. Поскольку $px \rho p'x$, то в силу условий (3) на φ и φ' как раз выполняется $\alpha(\varphi(px)) = \varphi'(p'x)$. Обратно, пусть условия теоремы выполнены. Рассмотрим Φ и Φ', определяемые соответственно для φ и φ' посредством (4). Пусть $\alpha(p) = p'$, $p \in G$. Докажем, что $\alpha(\Phi(pr)) = \Phi'(p'r)$, где $r \neq e$. Для $r = x \in X$ это верно, так как $\Phi(px) = \varphi(px)$ и выполняется условие теоремы. Далее доказательство будем вести индукцией по длине r. Пусть наше утверждение верно для $r \in X^k$, $k \geqslant 1$. $\alpha(\Phi(prx)) = \alpha[\varphi(\Phi(pr)x)] = \varphi'[\alpha(\Phi(pr))x] = \varphi'(\Phi'(p'r)x) = \Phi'(p'rx)$, т. е. это верно и для $rx \in X^{k+1}$, что и требовалось доказать. Если положим здесь $p = e$, то и $p' = e$, откуда

$$\alpha(\Phi(r)) = \Phi'(r). \tag{8}$$

Очевидно, это верно и для $r = e$, т. е. (8) верно для всех $r \in F$. Тогда $\Phi^{-1}(p) = \Phi'^{-1}(\alpha(p))$, $p \in G$. По теореме 5 это и означает, что $\rho = \rho'$. Теорема доказана.

Эта теорема аналогична теореме 7.2.5 [2].

Пусть $\rho = \rho(G, \varphi)$. Как и в [2] (см. стр. 120), введем отображения π_x: $G \to G$, $x \in X$, следующим образом:

$$\pi_x(p) = \varphi(px), \quad p \in G.$$

Все π_x однозначно определяют φ и ρ. Их смысл в теории автоматов раскрывается следующим предложением.

Предложение 2 [3]. Пусть $\rho = \rho(G, \varphi)$, A_ρ — соответствующий связный инициальный автомат с множеством состояний G. Тогда π_x — отображение множества состояний A_ρ в себя, индуцируемое входом x.

Отметим, что для теории автоматов справедлив также аналог теоремы 7.2.7 [2], если для полугрупп преобразований ввести определенное понятие, подобное транзитивности, но более слабое.

Попытаемся теперь указать причины установленного сходства автоматных разбиений и разложений свободной группы по подгруппе. Как мы видели, разбиение F по однослойной подполугруппе U_0 является автоматным, но не всякое автоматное разбиение, содержащее класс U_0, совпадает с разбиением F по U_0. Иное дело в свободных группах. Если разбиение свободной группы E, соответствующее стабильному справа отношению эквивалентности в E, также назвать автоматным, то, очевидно, благодаря обратимости множество автоматных разбиений E совпадает с множеством ее разложений на левые смежные классы по всевозможным подгруппам. Таким образом, автоматное разбиение свободной группы вполне определяется своим классом, содержащим пустое слово. Хотя для полугрупп дело обстоит значительно сложнее, все равно с алгебраической точки зрения аналогия между автоматными разбиениями свободной полугруппы и группы большая. В то же время метод Шрейера как раз и строится на основе таких разбиений свободной группы. Автоматным разбиениям свободной группы можно придать определенный смысл при изучении групповых автоматов [3], проведя естественное расширение алфавита буквами x^{-1}.

§ 4. ИНТЕРПРЕТАЦИЯ В ТЕОРИИ ГРАФОВ

Введем, как и в [11], операцию $V : F \to F$ сокращения буквы справа: $V(e) = e$, $V(px) = p$, $x \in X$, $p \in F$. Многие вопросы теории автоматов можно сформулировать в терминах изучения V (см. [11]). Вместо отображения V можно равносильно рассматривать отношение порядка в F, введенное в доказательстве леммы 2.

Если N — шрейеровская система и только в этом случае, $V(N) \subseteq N$, причем $V(N)$ — также шрейеровская система. Обозначим через V_N ограничение V на N. Отображению V_N соответствует граф $\Gamma_N = (N, V_N)$, являющийся ориентированным (вполне определенно) деревом с корнем e, если отбросить петлю в корне (см. [6], стр. 165). Γ_N является поддеревом $\Gamma = \Gamma_F = (F, V)$ с тем же корнем. Дерево $\Gamma_{N^p} = N^p$, V_{N^p}) можно рассматривать как поддерево Γ_N, имеющее корень в вершине p, всякая вершина q которого отождествляется с вершиной pq дерева Γ_N. Тогда отношение ρ_0' в теореме 3 можно определить следующими условиями (где равенство деревьев понимается с учетом обозначений вершин):

1) $e \rho_0' q = \to q = e$;

2) $p \rho_0' q \leftarrow = \rightarrow \Gamma_{N^p} = \Gamma_{N^q}$, $p, q \in N \setminus \{e\}$.

Это позволяет для конечнопорожденной однослойной полугруппы U_0 построить алгоритм нахождения максимального автоматного разбиения, содержащего U_0 в качестве класса. Это же дает критерий регулярности однослойной полугруппы U_0 как события: конечность числа различных Γ_{N^p}, $p \in F$, где N — индексное множество U_0. Здесь снова утверждение об U_0 формулируется в терминах N. Этот критерий аналогичен критерию регулярности событий, данному в [13], где приводится способ задания произвольного события деревом.

Пусть $\rho = \rho(G, \varphi)$, $M = \bar{C}(G)$, $\bar{G} = G \cup M$. Задание φ на $\bar{G}$ (см. (3)) равносильно операции «склеивания» (объединения) висячих вершин $\Gamma_{\bar{G}}$ (см. [6], стр. 165), т. е. элементов M, с соответствующими вершинами из G. В результате такого стягивания получится граф Γ_ρ с корнем, не являющийся деревом и вполне определяющий ρ. Легко убедиться, что Γ_ρ является графом функционирования автомата A_ρ [3], состояния которого обозначены словами из G, если только заменить в нем ориентацию дуг на противоположную. Поэтому Γ_ρ не зависит от выбора G для ρ. В этом заключается смысл теоремы 7. Дерево Γ_G является частичным графом (см. [6], стр. 12) графа Γ_ρ, причем его выделение равносильно нахождению шрейеровской системы представителей классов. Это дает возможность использовать графы для нахождения нужных шрейеровских систем, так как задача выделения частичных деревьев в графах хорошо изучена. Если все вершины из M склеить в $\Gamma_{\bar{G}}$ с корнем e, то полученный граф будет задавать разбиение F по U_0. Аналогичное построение возможно и в свободных группах.

§ 5. КОМБИНАТОРНЫЕ ЗАДАЧИ

Положим алфавит X конечным, состоящим из $r \geqslant 1$ букв x_i, $i = 1, \ldots, r$.

Предложение 3. Пусть N — шрейеровская система, состоящая из n слов, L — сумма длин всех слов из N, m — число слов в $C(N)$, K — сумма длин всех слов $C(N)$, тогда:

$$1)\ m = 1 + n(r-1);$$

$$2)\ K = (L+n)r - L.$$

Доказательство. 1) Для $N \neq \varnothing$ $M = NX \setminus N = NX \setminus (N \setminus \{e\})$, где $N \setminus \{e\} \subseteq NX$. В NX nr слов, тогда $m = nr - (n-1) = 1 + n(r-1)$.

2. Пусть $x \in X$. Сумма длин множества слов Nx равна $L + n$. Поэтому сумма длин слов NX равна $(L+n)r$. Сумма длин слов $N \setminus \{e\}$ равна L ($|e| = 0$), откуда $K = (L+n)r - L$ в силу доказательства предыдущего пункта.

Аналогичные результаты для определенных базисов подгрупп свободной группы были получены ранее М. Холлом [14] (см. теорему 7.2.8 [2]), только в формулу для K в них входит $2L$ вместо L.

Конечный автомат с n состояниями задается nr переходами. Если $\rho = \rho(N, \varphi)$, то эти переходы как раз определяются функцией φ, заданной на NX. При этом само N задает $n-1$ переход (φ тождественно на $N \setminus \{e\}$), а остальные $m = 1 + n(r-1)$ переходов осуществляются (без ограничений) отображением M в N. При $r = 2$ $m = 1 + n$, т. е. только на 2 перехода больше, чем определяется N. Вообще, это количественно оценивает роль N и φ в стандартном представлении ρ. Очевидно, если $\varphi_1 \neq \varphi_2$, то $\rho_1(N, \varphi_1) \neq \rho_2(N, \varphi_2)$. Отсюда вытекает

Следствие 1. Конечная шрейеровская система N, состоящая из n слов, может служить множеством представителей классов ровно для $n^{1+n(r-1)}$ автоматных разбиений F.

Справедливо также

Следствие 2. Если U — однослойная подполугруппа F конечного (левого) индекса n, то ее базис состоит из $1 + n(r-1)$ слов. Все однослойные подполугруппы одного и того же индекса изоморфны.

Аналогичный факт имеет место для подгрупп свободных групп. С другой стороны, для неоднослойных подполугрупп F (даже свободных) он неверен.

В связи со следствием 2 возникает вопрос о числе однослойных подполугрупп F индекса n. Обозначим это число через $p_{n,r} \cdot p_{n,r}$ — число различных шрейеровских систем, состоящих из n слов.

Теорема 8. $p_{n,r} = \dfrac{(nr)!}{n!\,[1+n(r-1)]!}$.

Доказательство. Пусть N — шрейеровская система, содержащая n слов. Обозначим через k_i число слов в N^{x_i}, $x_i \in X$, $i = 1, \ldots, r$. Тогда $n = 1 + k_1 + \ldots + k_r$ (1 здесь отвечает слову e), и каждому семейству $\{N^{x_i}\}_{x_i \in X}$ соответствует ровно одна N и обратно. При данном разбиении $n - 1 = \sum_{i=1}^{r} k_i$, $k_i \geqslant 0$ каждому x_i отвечает независимо $p_{k_i,r}$ различных N^{x_i}, а всему разбиению отвечает $\prod_{i=1}^{r} p_{k_i,r}$ шрейеровских систем из n слов. Поэтому

$$p_{n,r} = \sum_{(k_i)} \prod_{i=1}^{r} p_{k_i,r}, \tag{9}$$

где суммирование ведется по всем упорядоченным разбиениям $n-1$ в сумму r неотрицательных целых слагаемых k_i.

Положим далее $y = P_r(t) = 1 + p_{1,r}t + p_{2,r}t^2 + \ldots + p_{n,r}t^n + \ldots$ — производящая функция для $p_{n,r}$ ([12], стр. 29). Легко видеть, что (9) равносильно соотношению $P_r(t) = tP_r^r(t) + 1$, или $y = ty^r + 1$. Тем самым задается неявная функция y от t. Разлагая ее в степенной ряд по t (известный ряд Лагранжа) и приравнивая соответствующие коэффициенты обоих рядов для $y = P_r(t)$, получим ($P_r(0) = 1$) $p_{n,r} = \dfrac{d^n}{dy^n}[(y^r)^n]|_{y=1}$, откуда и следует теорема.

$p_{n,r}$ есть число всех полных слоев, содержащих $1 + n(r-1)$ слов, и поэтому представляет интерес в теории кодирования. Формула для $p_{n,2}$ была получена ранее в [16].

По-видимому, таким же путем можно подсчитать число шрейеровских систем в свободных группах. Число подгрупп индекса n свободной группы определяется совершенно иначе (теорема 7.2.9 [2]). Число автоматных разбиений свободной полугруппы можно было бы посчитать аналогично теореме 7.2.9 [2], обобщив метод ее доказательства, но мы не будем здесь на этом останавливаться.

В заключение авторы выражают глубокую благодарность Д. А. Супруненко за постоянное внимание к работе.

Литература

1. Ляпин Е. С. Полугруппы. М., Физматгиз, 1960.
2. Холл М. Теория групп. М., ИЛ, 1962.
3. Глушков В. М. УМН, **16**, в. 5(101), 3—62, 1961.
4. Schützenberger M. P. Publs. Lab. calcul. numér. Math. usage calcul., № 1, 1964.
5. Dubreil P. Mém. Acad. Sci. Inst. France, **63**, № 3, 1—52, 1941.
6. Берж К. Теория графов и ее применения. М., ИЛ, 1962.
7. Шеврин Л. Н. ДАН СССР, **133**, № 3, 537—539, 1960.
8. Blum E. K. Mich. Math. J., **12**, № 2, 179—182, 1965.
9. Рабин М. О., Скотт Д. Киб. сб., № 4, 58—91, 1962.
10. Боднарчук В. Г. Укр. матем. ж., **14**, № 2, 190—191, 1962.
11. Лисковец В. А., Фейнберг В. З. Изв. АН БССР, сер. физ.-мат. н., № 3, 55—63, 1965.
12. Риордан Дж. Введение в комбинаторный анализ. М., ИЛ, 1963.
13. Серебряный А. И. УМН, **20**, в. 2, 203—206, 1965.
14. Hall M. Canad. J. Math., **1**, № 2, 187—190, 1949.
15. Dey I. M. S. Proc. Glasgow Math. Assoc., **7**, № 2, 61—79, 1965.
16. Гилберт Э. Н., Мур Э. Ф. Киб. сб., № 3, 103—141, 1961.

Институт математики АН БССР

Поступило в редакцию 31.V 1967

ВЕСЦІ АКАДЭМІІ НАВУК БЕЛАРУСКАЙ ССР № 1 1968
СЕРЫЯ ФІЗІКА-МАТЭМАТЫЧНЫХ НАВУК

УДК 519.44

Э. М. ПАЛЬЧИК

О ГРУППАХ, ВСЕ *i*-Е МАКСИМАЛЬНЫЕ ПОДГРУППЫ КОТОРЫХ ПЕРЕСТАНОВОЧНЫ С СИЛОВСКОЙ ПОДГРУППОЙ. I

Известно (см. [1], лемма 8), что если силовская подгруппа G_p группы G перестановочна со всеми максимальными (в этом случае $i = 1$) подгруппами группы G, то G_p инвариантна в G. Результаты этой работы позволяют проследить за изменением свойств группы G по мере увеличения числа i. Удалось получить сравнительно полную информацию о группе для $i < 6$.

§ 1. Определения, обозначения и используемые результаты.

$|G|$ — порядок конечной группы G; $\tau(G)$ — число различных простых делителей числа $|G|$; $\lambda(n)$ — число всех простых делителей целого числа n; при $n = |G|$ $\lambda(n) = \lambda(G)$; π и π' — дополнительные друг к другу множества простых чисел; G_π — π-холловская подгруппа группы G; $M^g = g^{-1}Mg$; M_G — наибольший нормальный делитель группы G, заключенный в M; $N(M)$ — нормализатор подгруппы M в группе G; $\Phi(G)$ — подгруппа Фраттини группы G; если M и N — два множества подгрупп, то запись $MN = NM$ означает, что $AB = BA$ для любой пары подгрупп $A \in M$ и $B \in N$; $R_\pi(G)$ — наибольший π-разрешимый нормальный делитель группы G; группа называется π-разрешимой, если в ее композиционном ряду каждый индекс либо равен простому числу из π, либо π'-числу; $\Gamma_i(H)$ — множество всех i-х максимальных подгрупп группы H; если $H = G$, то $\Gamma_i(G) = \Gamma_i$; $\{\Gamma_i\}$ — порождение всех i-х максимальных подгрупп группы G.

Пусть в группе G имеется подгруппа G_π, такая, что каждая изоморфная с G_π подгруппа G_π' сопряжена с G_π в группе $\{G_\pi, G_\pi'\}$. Наличие этого условия в группе G будем обозначать для краткости символом K_π.

Если G_π — дисперсивная [4] группа, то будем писать соответственно K_π^s.

Приведем ряд используемых результатов.

(*i*). Пусть M — нормальный делитель группы G, H — такая подгруппа группы M, что все изоморфные с H подгруппы из M сопряжены в M. Тогда $G = M \cdot N(H)$ (см. [2], теорема (*vii*)).

(*ii*). Пусть $A \neq 1 \neq B$ — подгруппы группы G и $AB^g = B^gA$ для всех g из G, причем $AB \neq G$. Тогда G обладает собственным нормальным делителем, который содержит A или B [3].

(*iii*). Если подгруппа H группы G перестановочна с подгруппами A и B из G, то $H\{A, B\} = \{A, B\}H$ ([4], гл. 1).

(*iv*). Если все подгруппы из Γ_1 достижимы в неразрешимой группе G, то они даже инвариантны в ней и

1) $G \cong SL(2, 5)$;

2) $G \cong LF(2, p)$, $p = 5, 13$, при $p > 13$ $\lambda(p \pm 1) = 3$, $p \not\equiv \pm 1 \pmod 5$ (см. [5], теорема 17).

(*v*). Если все собственные подгруппы не π-разрешимой группы G π-разрешимы, то $G/\Phi(G)$—простая неабелева группа; если N инвариантна в G, то $N \subseteq \Phi(G)$ (см. [5], стр. 584).

Из доказательства леммы 3 работы [6] вытекает теорема

(*vi*). Если $K \subset M \subset G$, $KG_\pi = G_\pi K$ и $M_\pi = G_\pi \cap M$, то $KM_\pi = M_\pi K$.

(*vii*). Если $G \neq \{\Gamma_2\}$, то $\tau(G) \leqslant 2$; если $G \neq \{\Gamma_3\}$, то группа G разрешима (см. [7], теорема 12).

§ 2. В этом параграфе приводится несколько вспомогательных предложений.

Лемма 1. *Если группа G обладает разрешимой достижимой подгруппой H, то $H \subseteq R(G) \neq 1$, где $R(G) = R_\pi(G)$ для π, содержащего все простые делители числа $|G|$.*

Это утверждение доказывается индукцией, посредством рассмотрения композиционного ряда группы G.

Лемма 2. *Пусть H и F — подгруппы группы G. Если $HF^g = F^gH$ для всех g из G, то $H^xF^y = F^yH^x$ для всех x и y из G.*

Доказательство. Пусть h, h_1 из H, f, f_1 из F. Тогда по условию $hg^{-1}fg = g^{-1}f_1gh_1$. Пусть x, y из G. Полагаем $yx^{-1} = g$. Тогда $hxy^{-1}fyx^{-1} = xy^{-1}f_1yx^{-1}h_1$. Умножая слева на x^{-1}, а справа на x, получаем утверждение.

Лемма 3. *Пусть H — подгруппа группы G. Если $HH^g = H^gH$ для всех $g \in G$, то H достижима в группе G.*

Эта лемма доказывается индукцией с помощью теоремы (*ii*) и того факта, что две сопряженные подгруппы не могут быть перестановочны в их порождении [4].

Лемма 4. *Пусть в группе G имеет место K_π. Если $G_\pi\Gamma_1 = \Gamma_1G_\pi$, то G_π инвариантна в G.*

Доказательство. Пусть $G_\pi \subseteq M \in \Gamma_1$. По условию $G_\pi M^x = M^xG_\pi$ для всех $x \in G$. По лемме 7 из [1] $G_\pi \subseteq M_G$. Пусть D есть наименьший нормальный делитель группы G, содержащий G_π. Предположим, что $G_\pi \neq D$. По (*i*) тогда $G = D \cdot N(G_\pi)$. Пусть $N(G_\pi) \subseteq F \in \Gamma_1$. Тогда $G = D \cdot F$. Отсюда следует, что D не принадлежит F. Так как $G_\pi \subseteq F$, то, как и выше показывается, $G_\pi \subseteq F_G$. Таким образом, $G_\pi \subseteq D \cap F_G$, что противоречит выбору D. Итак, $D = G_\pi$. Лемма доказана.

§ 3. В этом параграфе доказываются основные результаты.

Теорема 1. *Пусть в группе G имеет место K_π. Если $G_\pi\Gamma_2 = \Gamma_2G_\pi$, то или G_π инвариантна в G, или G—группа Миллера—Морено (неабелева группа, все подгруппы которой абелевы).*

Доказательство. Пусть G_π неинвариантна в G. По лемме 4 в Γ_1 имеется подгруппа M, неперестановочная с G_π. По (*iii*) тогда $M \neq \{\Gamma_1(M)\}$, то есть M — циклическая p-группа. По теореме Херштейна [9], тогда G есть разрешимая группа и, очевидно, $\tau(G) \leqslant 2$. Если $\tau(G) < 2$, то $G_\pi = G$. Поэтому пусть $|G| = p^\alpha q^\beta$. Можно считать, что $M = G_\pi = G_p$ (если $M = G_q$, то $MG_\pi = G_\pi M$, вопреки предположению). Так как M неинвариантна в G, то $N(M) = M$ и, по теореме Бернсайда (см. [10], § 243), G_q инвариантна в G. Если $Q \neq 1$ — минимальный нормальный делитель группы G, заключенный в G_q, то из $G_\pi Q = G$ следует $Q = G_q$. Пусть $H \in \Gamma_1(G_p)$. По условию и лемме 2 $HG_p^{x_0} = G_p^xH$ для всех $x \in G$. Ввиду $H \subseteq \bigcap_x G_p^x$ для всех x из G следует, что H инвариантна в G, так как G_p неинвариантна в G. Пусть F — собственная непримарная подгруппа в группе G. Тогда $F = (F \cap H) \times (F \cap G_q)$. Отсюда следует абелевость F. Теорема доказана.

Теорема 2. *Пусть в группе G имеет место K_π^s. Если $G_\pi\Gamma_3 = \Gamma_3G_\pi$, то G есть π-разрешимая группа.*

Доказательство. Пусть $M \in \Gamma_1$. Если $M \neq \{\Gamma_2(M)\}$, то по (*vii*) M есть разрешимая группа. Если $M = \{\Gamma_2(M)\}$, то по (*iii*) $MG_\pi = G_\pi M$. Тогда в M существует π-холловская подгруппа $M_\pi = G_\pi \cap M$. Пусть $K \in \Gamma_2(M)$. По (*vi*) $M_\pi K = KM_\pi$. По теореме I следует π-разрешимость M ввиду произвольности K и разрешимости $M_\pi \subseteq G_\pi$. Итак, все собственные подгруппы группы G π-разрешимы.

Предположим, что группа G не π-разрешима. Рассмотрим следующие случаи:

а) $R_\pi(G) \neq 1$. Если бы множество $\Gamma_3(G/R_\pi(G))$ было пусто, то по [11] группа $G/R_\pi(G)$ была бы разрешимой, а отсюда группа G была бы π-разрешимой. Поэтому пусть $1 \neq H/R_\pi(G) \in \Gamma_3(G/R_\pi(G))$. Тогда $H \in \Gamma_3$. По условию $HG_\pi = G_\pi H$. Тогда и гомоморфные образы $H/R_\pi(G)$ и $G_\pi R_\pi(G)/R_\pi(G)$ перестановочны. Ввиду произвольности подгруппы $H/R_\pi(G)$ теорема верна для группы $G/R_\pi(G)$ по индукции. Очевидно, и группа G тогда π-разрешима.

б) $R_\pi(G) = 1$. Рассмотрим отдельно несколько возможностей.

б.1). $G_\pi \in \Gamma_1$. Если $\lambda(G_\pi) \geqslant 3$, то в G_π ввиду ее разрешимости имеется собственная подгруппа $H \neq 1$, такая, что $H \in \Gamma_3$. По условию $G_\pi H^g = H^g G_\pi$ для всех $g \in G$, причем $G_\pi H \neq G$. По (*ii*) в G имеется собственный нормальный делитель $N \neq 1$. Как и каждая подгруппа из G, N есть π-разрешимая группа. Это противоречит предположению, что $R_\pi(G) = 1$. Если $\lambda(G_\pi) < 3$, то $K^g G_\pi = G_\pi K^g \neq G$, где $K \in \Gamma_3$, для всех $g \in G$. По (*ii*) снова имеем, что $R_\pi(G) \neq 1$.

б.2). $G_\pi \in \Gamma_2$. Если $G_\pi = \{\Gamma_1(G_\pi)\}$, то по (*iii*) и условию теоремы $G_\pi G_\pi^g = G_\pi^g G_\pi$ для всех $g \in G$. По лемме 3 следует, что G_π достижима в группе G. По лемме 1, $R_\pi(G) \neq 1$. Если же $G_\pi \neq \{\Gamma_1(G_\pi)\}$, то G_π — циклическая p-группа. По теореме Виландта [12], группа G либо p-разрешима, либо только один индекс ее композиционного ряда делится на p. Если группа p-разрешима, то доказывать нечего, так как $\pi = p$. Второе возможно только в том случае, когда $|G_\pi| = p$ (в противном случае $1 \neq H \in \Gamma_1(G_\pi)$ и по условию $H^g G_\pi = G_\pi H^g$ для всех $g \in G$, причем $HG_\pi \neq G$ и $R_\pi(G) \neq 1$ по (*ii*)). Пусть $K \in \Gamma_3$ (Γ_3 не пусто по [11]). По условию $K^g G_\pi = G_\pi K^g$ для всех $g \in G$ и $G_\pi K \neq G$. Опять по (*ii*) $R_\pi(G) \neq 1$.

б.3). $G_\pi \in \Gamma_3$. По леммам 3 и 1 $R_\pi(G) \neq 1$.

б.4). $G_\pi \in \Gamma_i$, $i > 3$. Пусть $G_\pi \subseteq M \in \Gamma_3$. По условию $G_\pi M^g = M^g G_\pi$ для всех $g \in G$; так как $G_\pi M \neq G$, то снова по (*ii*) имеем противоречие с предположением $R_\pi(G) = 1$. Теорема доказана.

Теорема 3. *Пусть в группе G имеет место K_π^s. Если $\Gamma_4 G_\pi = G_\pi \Gamma_4$, то группа G или π-разрешима, или все ее четвертые максимальные подгруппы инвариантны.*

Доказательство. Пусть $M \in \Gamma_1$. Если $M \neq \{\Gamma_3(M)\}$, то группа M разрешима по (*vii*). Если же $M = \{\Gamma_3(M)\}$, то по (*iii*) $MG_\pi = G_\pi M$. Тогда в M существует π-холловская подгруппа $M_\pi = G_\pi \cap M$. По (*vi*) следует, что подгруппа M удовлетворяет условию теоремы 2 и, значит, π-разрешима. Ввиду произвольности M заключаем, что все собственные подгруппы группы G π-разрешимы. Предположим, что группа G не π-разрешима. Покажем сначала, что G непростая группа. В самом деле, пусть $1 \neq H \in \Gamma_4$ (если множество Γ_4 пусто, то утверждение следует по (*iv*)). Если $HG_\pi \neq G$, то непростота группы G следует по (*ii*). Если же $HG_\pi = G$, то так как $|G : H| \leqslant |G_\pi|$, то $\lambda(G_\pi) \geqslant 4$. Ввиду разрешимости группы G_π в ней имеется собственная неединичная подгруппа $K \in \Gamma_3(G_\pi)$. Поэтому, если $G_\pi \in \Gamma_i$, $i < 5$, то в G_π всегда найдется подгруппа $R \neq 1$, которая содержится в множестве Γ_4. По условию тогда $R^g G_\pi = G_\pi R^g$ для всех $g \in G$ и $G_\pi R \neq G$. Непростота группы G следует по (*ii*). Если же $G_\pi \in \Gamma_i$, $i \geqslant 5$, то $G_\pi \sqsubset M \in \Gamma_4$. Ввиду $G_\pi M^g =$

$= M^g G_\pi$ для всех $g \in G$ и $G_\pi M \neq G$ опять по (ii) следует непростота группы G. По теореме (v) следует $\Phi(G) \neq 1$. Так как по этой же теореме (v) группа $G/\Phi(G)$ простая, то точно такими же рассуждениями, как только что показали непростоту группы G, показывается, что множество $\Gamma_4(G/\Phi(G))$ должно быть пусто (при этом используется тот факт, что свойство перестановочности сохраняется при гомоморфизмах). Но тогда по (iv) $G/\Phi(G) \cong LF(2, p)$, $\lambda(p \pm 1) < 4$, $p \neq 7$. В силу теоремы 2 можно считать, что в $\Gamma_3(G/\Phi(G))$ найдется неединичная подгруппа $K/\Phi(G)$, неперестановочная с $G_\pi \Phi(G)/\Phi(G)$. Поэтому можно считать, что $KG_\pi \neq G_\pi K$ (иначе $K \cdot G_\pi \Phi(G) = G_\pi \Phi(G) \cdot K$ и имели бы перестановочность для соответствующих гомоморфных образов). В силу (iii) тогда $K \neq \{\Gamma_1(K)\}$ и K является циклической q-группой. Так как множество $\Gamma_4(G/\Phi(G))$ пусто, то $K/\Phi(G)$ не содержит максимальных неединичных подгрупп, то есть $|K/\Phi(G)| = q$. Из строения групп, которым изоморфна фактор-группа $G/\Phi(G)$, следует, что если $G/\Phi(G)$ неизоморфна $LF(2, 5)$, то подгруппа $K/\Phi(G)$ может быть выбрана порядка 2 и одновременно порядка q, $q > 2$. Поэтому $\Phi(G)$ должна быть одновременно 2-группой и q-группой, $q > 2$, ввиду $\Phi(G) \subset K$. Так как это невозможно, то пусть $G/\Phi(G) \cong LF(2, 5)$. В этом случае $|K/\Phi(G)| = 2$ и, следовательно, $|\Phi(G)| = 2^\alpha$, $\alpha \geqslant 1$. Предположим, что $\alpha > 1$. Тогда в $G/\Phi(G)$ имеется подгруппа $N/\Phi(G) \in \Gamma_1(G/\Phi(G))$ порядка $5 \cdot 2$. Значит, $|N| = 5 \cdot 2^{\alpha+1}$. Группа N сверхразрешима, как расширение циклической группы с помощью сверхразрешимой. Поэтому в N имеются подгруппы любых возможных порядков. В частности, в $\Gamma_3(N)$ имеется подгруппа L порядка $5 \cdot 2^{\alpha-2}$. По условию $L^g G_\pi = G_\pi L^g$ для всех $g \in G$. Если $LG_\pi \neq G$, то по (ii) и (v) либо $L \subseteq \Phi(G)$, либо $G_\pi \subseteq \Phi(G)$. Но оба эти включения невозможны, так как в первом случае $\Phi(G)$ оказалась бы не 2-группой, а во втором потому, что G_π — холловская подгруппа. Поэтому пусть $G = G_\pi L$. Но тогда, очевидно, $|G_\pi| = 2^{\alpha+2} \cdot 3$, так как $|G| = 2^{\alpha+2} \cdot 3 \cdot 5$. Но в Γ_4 содержится подгруппа L_1 порядка $3 \cdot 2^{\alpha-2}$. Ясно, что $L_1^g G_\pi = G_\pi L_1^g$ для всех $g \in G$ и $G_\pi L_1 \neq G$. Поэтому $L_1 \subseteq \Phi(G)$ (по (ii) и (v)). Противоречие с тем, что $\Phi(G)$ есть 2-группа. Итак, $\alpha = 1$. По теореме И. Шура [13], тогда $G \cong SL(2, 5)$ или $G \cong R \times LF(2, 5)$, где $|R| = 2$. Легко видеть, что вторая группа не может удовлетворять условию теоремы, так как в $LF(2, 5)$ имеется подгруппа D порядка 2, $D \in \Gamma_4$. По условию $D^g G_\pi = G_\pi D^g$ для всех $g \in G$. Если $DG_\pi = G$, то G имеет циклическую 2-силовскую подгруппу и разрешима по теоремам Бернсайда (см. [10], § 128) и Томпсона—Фэйта [14]. Поэтому по (ii) и (v) $D \subseteq \Phi(G)$, так как G_π не принадлежит $\Phi(G)$, как холловская подгруппа. Но это противоречит простоте группы $LF(2, 5)$. Теорема доказана.

Литература

1. Поляков Л. Я. Конечные группы. Минск, Изд. «Наука и техника», 1966.
2. Беркович Я. Г. Матем. сб. 64 (106) : 3, 357, 1964.
3. Kegel O. H. Archiv d. Math., XII, 90, 1961.
4. Ore O. Duke Math. J. 5, 431, 1939.
5. Беркович Я. Г., Изв. АН СССР, серия матем., 28, 3, 583, 1964.
6. Kegel O. H. Math. Z., 78, 205, 1962.
7. Беркович Я. Г. ДАН СССР, **169**, 3, 499, 1966.
8. Hall Ph. Proc. London Math. Soc., **(3) 6**, 22, 286, 1956.
9. Herstein I. N. Proc. Amer. Math. Soc., **9**, 2, 255, 1958.
10. Burnside W. E. Theory of groups of finite order, sec. ed. Cambridge, 1911.
11. Deskins W. E. Illinois J. Math. 5, 306, 1961.
12. Wielandt H. Abh. Math. semin. Univ. Hamburg, 22, 215, 1958.
13. Schur I. J. reine und angew. Math., 132, 85, 1907.
14. Thompson J., Feit W. Pacific J. Math., **13**, 3, 775, 1963.

Гомельский педагогический институт им. В. П. Чкалова

Поступило в редакцию 16.III 1967

ВЕСЦІ АКАДЭМІІ НАВУК БЕЛАРУСКАЙ ССР № 1 1968
СЕРЫЯ ФІЗІКА-МАТЭМАТЫЧНЫХ НАВУК

УДК 519.44

С. А. РУСАКОВ

О ГРУППАХ С МАКСИМАЛЬНЫМИ ПОДГРУППАМИ ДАННОГО ВИДА

§ 1. Изучение нормального строения самой группы в зависимости от наличия у нее тех или иных максимальных подгрупп, как известно, составляет одну из важных задач теории групп.

Значительное стимулирующее влияние в этом направлении оказала известная работа О. Ю. Шмидта [1], в которой показано, что ненильпотентная группа, все истинные максимальные подгруппы которой нильпотентны, разрешима, и дано полное описание таких групп (они названы С. А. Чунихиным [2] группами типа S). Отметим, что гораздо позже аналогичные результаты были получены также и Ивасава [5].

При исследовании поставленного вопроса иногда можно достичь положительных результатов путем наложения определенных требований не на все максимальные подгруппы, а только на их часть. Так, например, С. А. Чунихин в работе [3] исследовал группы, у которых применил нильпотентность лишь к истинным максимальным pd-подгруппам ненильпотентной группы и показал (см. теорему 1), что такая группа либо совпадает с группой типа S, либо представима в виде прямого произведения группы порядка p и группы типа S, порядок которой не делится на p (такая группа названа им группой типа S_p).

Изучению нормального строения группы в зависимости от структуры ее максимальных подгрупп посвящена и настоящая статья. При этом рассматриваются или только максимальные и неинвариантные p-разложимые (π-разложимые) подгруппы или только истинные максимальные pd-подгруппы, разложимые относительно лишь двух различных простых чисел p и q.

В теоремах 1 и 2 доказывается существование инвариантной силовской подгруппы в группе, все максимальные и неинвариантные подгруппы которой p-разложимы (π-разложимы), причем фактор-группа по этой силовской подгруппе также p-разложима (π-разложима).

Теорема 1 с учетом теоремы Фейта и Дж. Томпсона о разрешимости группы нечетного порядка [11] позволяет получить разрешимость группы, у которой все максимальные и неинвариантные подгруппы 2-разложимы.

Из теоремы 2 вытекает утверждение О. Ю. Шмидта [1] — Ивасава [5] о разрешимости группы типа S, а также следующий результат Дж. Розе [4]: группа, у которой все абнормальные подгруппы [6] нильпотентны, обладает инвариантной силовской подгруппой, фактор-группа по которой нильпотентна.

Кроме того, в теореме 3 доказывается совпадение q-неразложимой группы, все истинные максимальные pd-подгруппы которой разложимы относительно p и q, $p \neq q$, с группой типа S_p. Эта теорема усиливает теорему 1 С. А. Чунихина [3].

Используемые нами обозначения и определения взяты из работ С. А. Чунихина [3] и [7].

Будем рассматривать только конечные группы G порядка $|G|$.

§ 2. Изложим теперь полученные нами результаты.

Теорема 1. *Группа, все максимальные и неинвариантные подгруппы которой p-разложимы, обладает инвариантной силовской подгруппой, фактор-группа по которой p-разложима.*

Доказательство. Допустим, что теорема неверна. Тогда из всех групп, для которых теорема не выполняется, выберем группу G наименьшего порядка $|G| = g$. Если G — p-разложимая группа, то она содержит инвариантную силовскую подгруппу G_p, причем G/G_p будет p-разложимой группой. Получили противоречие. Следовательно, G должна быть p-неразложимой группой. Так как единичная группа E всегда p-разложима, то $|G| > 1$, т. е. $g = p^a n$, $(p, n) = 1$.

Пусть $\Gamma = I \cup \bar{I}$, где I — множество всех максимальных и инвариантных подгрупп группы G, а $\bar{I}$ — множество всех максимальных и неинвариантных подгрупп группы G. Тогда Γ, очевидно, есть множество всех максимальных подгрупп группы G. Если $\bar{I}$ пусто, то по известной теореме О. Ю. Шмидта [12] группа G нильпотентна. Снова получили противоречие. Поэтому $\bar{I}$ будет непустым подмножеством множества Γ.

Рассмотрим далее следующие возможные случаи.

1. I состоит только из p-подгрупп группы G.

Пусть q — произвольный элемент из $\pi(n)$. Покажем, что q — силовская подгруппа G_q инвариантна в G. Предположим противное. Тогда нормализатор $N(G_q)$, согласно нашему предположению, должен содержаться в максимальной подгруппе M из I. Но тогда, как известно (см. [8], стр. 347), M неинвариантна в G. Противоречие. Следовательно, G_q инвариантна в G.

Пусть теперь M_1/G_q — некоторая максимальная подгруппа фактор-группы G/G_q. Тогда, очевидно, порядок M_1 должен делиться, по крайней мере, на два различных простых числа, а следовательно, подгруппа M_1 должна принадлежать множеству I. Поэтому M_1/G_q инвариантна в G/G_q, т. е. любая максимальная подгруппа из G/G_q инвариантна в G/G_q. Отсюда следует, что G/G_q нильпотентна. Имеем противоречие.

2. $\bar{I}$ состоит только из p'-подгрупп группы G.

Предположим, что G_p неинвариантна в G. Тогда нормализатор $N(G_p)$ должен принадлежать максимальной подгруппе $M \in I$ и рассуждениями, аналогичными предыдущим, получаем, что M неинвариантна в G. Противоречие. Следовательно, G_p инвариантна в G и поэтому G/G_p будет p-разложимой группой. Снова получили противоречие.

3. $\bar{I}$ состоит только из p-подгрупп и p'-подгрупп группы G.

Пусть $\bar{I} = \bar{I}_1 \cup \bar{I}_2$, где $\bar{I}_1$ — множество всех p-подгрупп, а $\bar{I}_2$ — множество всех p'-подгрупп из $\bar{I}$ группы G. Согласно предыдущим случаям, подмножества $\bar{I}_1$ и $\bar{I}_2$ непусты.

Поскольку G — p-неразложимая группа, то на основании теоремы 1.12.1 С. А. Чунихина [10] группа G содержит тривиальную или нетривиальную pd-подгруппу L типа S. Если $L = G$, то G содержит инвариантную силовскую подгруппу, фактор-группа по которой p-разложима. Противоречие. Следовательно, $L \neq G$. Тогда ясно, что L принадлежит максимальной подгруппе $M \in I$. Поэтому индекс M в G есть простое число r, т. е. $[G:M] = r$.

Если $r = p$, то в силу инвариантности M любая подгруппа из $\bar{I}_2$ строго принадлежит M, чего быть не может, так как всякая подгруппа из $\bar{I}_2$ является максимальной подгруппой группы G.

Если же $r \neq p$, то по той же причине каждая подгруппа из $\bar{I}_1$ строго содержится в M, что также исключено. Следовательно, 4. $\bar{I}$ содержит по крайней мере одну подгруппу $R = R_p \times R_{p'}$, где $|R_p| > 1$ и $|R_{p'}| > 1$.

Тогда, согласно теореме 2 А. В. Романовского [7], группа G содержит инвариантную подгруппу K, такую, что либо $K = R_p$, либо $G_{p'}$, либо $R_{p'}$.

Рассмотрим отдельно каждый из этих случаев.

4.1. $K = R_p$, где $|R_p| = p^{\alpha_1}$, $\alpha_1 \leqslant \alpha$.

Очевидно, можем считать, что $\alpha_1 < \alpha$. Рассмотрим фактор-группу G/R_p, причем ясно, что $|G/R_p| = p^{\alpha-\alpha_1} n$. Легко показать, что всякая максимальная и неинвариантная подгруппа группы G/R_p будет p-разложимой. Поскольку $|G/R_p| < |G|$, то для G/R_p утверждение теоремы выполняется, т. е. G/R_p содержит инвариантную силовскую подгруппу G_1/R_p, такую, что $G/R_p/G_1/R_p \simeq G/G_1$ будет p-разложимой.

Если $|G_1/R_p| = p^{\alpha-\alpha_1}$, то G_1 — инвариантная p-силовская подгруппа группы G и, следовательно, G/G_1 будет p-разложимой группой. Противоречие. Поэтому будем считать, что $|G_1/R_p| = q^\beta$, где $q \in \pi(n)$. Тогда $|G_1| = p^{\alpha_1} q^\beta$. Так как $G/R_p/G_1/R_p \simeq G/G_1$, то фактор-группа G/G_1 порядка $p^{\alpha-\alpha_1} \dfrac{n}{q^\beta}$ также p-разложима, т. е. $G/G_1 = T_1/G_1 \times T_2/G_1$, где T_1/G_1 и T_2/G_1 — соответственно S_p и $S_{p'}$-подгруппы группы G/G_1, причем $|T_2/G_1| = \dfrac{n}{q^\beta}$. Отсюда вытекает, что $|T_2| = p^{\alpha_1} n$, причем ясно, что $R_p \subset T_2$. Но поскольку T_2 инвариантна в G и $|R_{p'}|$ делит n, то и $R_{p'} \subset T_2$. Следовательно, $R \subseteq T_2$.

Так как $\alpha_1 < \alpha$, то $T_2 \neq G$. Тогда, в силу максимальности R в G, заключаем, что $R = T_2$, чего быть не может, так как $R \in \bar{I}$.

4.2. $K = G_{p'}$.

Пусть индекс $[G : R] = s$ и $q \in \pi(s)$. Так как R_p неинвариантна в G, то $R_p = G_p$ и $p \neq q$. Пусть Q — q-силовская подгруппа группы G. Поскольку $G_{p'}$ инвариантна в G, то $Q \subseteq G_{p'}$ на основании леммы С. А. Чунихина (см. [9]) заключаем, что $G = N(Q) G_{p'}$, где $N(Q)$ — нормализатор Q в G.

Если Q инвариантна в G, то ясно, что $G = RQ$ и, следовательно, $G/Q = RQ/Q \simeq R/D$, где $D = Q \cap R$. Так как R/D является p-разложимой группой, то и G/Q также p-разложима. Имеем противоречие.

Поэтому будем считать Q неинвариантной подгруппой группы G. Тогда $N(Q) \subseteq M \in \bar{I}$, ибо в противном случае, как уже неоднократно показывалось, Q была бы инвариантной подгруппой группы G. Отсюда вытекает, что $N(Q)$ — p-разложимая подгруппа группы G, причем $|N(Q)|$ делится на p^α и $q^\beta = |Q|$. Следовательно, нормализатор $N(Q)$ содержит нильпотентную подгруппу $H = P \times Q$, где $|P| = p^\alpha$. Из теоремы Силова следует, что $P^x = R_p = G_p$, где $x \in G$. Тогда $H^x = R_p \times Q^x$, причем Q^x не содержится в R, так как q^β не делит $|R|$. Нормализатор $N(R_p)$ будет содержать как R, так и Q^x. Поскольку R — максимальная подгруппа группы G, то $N(R_p) = G$, т. е. R_p инвариантна в G. Но R_p — p-силовская подгруппа группы G. Поэтому G/R_p является p-разложимой группой. Получено противоречие.

4.3. $K = R_{p'}$, где $|R_{p'}| = n_1$, $\pi(n_1) \subseteq \pi(n)$ и $n_1 \neq n$.

Легко показать, что любая максимальная и неинвариантная подгруппа фактор-группы $G/R_{p'}$ будет p-разложимой. Поскольку $|G/R_{p'}| < |G|$, то в $G/R_{p'}$ существует инвариантная силовская подгруппа $G_1/R_{p'}$ такая, что $G/R_{p'}/G_1/R_{p'} \simeq G/G_1$ — p-разложимая группа.

Если $|G_1/R_{p'}| = p^\alpha$, то очевидно, что $R = G_1$, чего быть не может, так как $R \in \bar{I}$.

Пусть теперь $|G_1/R_{p'}| = q^\gamma$, $\gamma > 0$ и $q \in \pi\left(\frac{n}{n_1}\right)$. Тогда $|G_1| = n_1 q^\gamma$. Если $|G_1| = n$, то, по случаю 4.2, приходим к противоречию. Следовательно, $|G_1| = n_1 q^\gamma < n$. Так как $G/R_{p'}/G_1/R_{p'} \simeq G/G_1$, то и G/G_1 порядка $p^\alpha \frac{n}{n_1 q^\gamma}$ также p-разложима, т. е. $G/G_1 = V_1/G_1 \times V_2/G_1$, где V_1/G_1 и V_2/G_1 — соответственно S_p и $S_{p'}$-подгруппы группы G/G_1, где $|V_1/G_1| = p^\alpha$. Поэтому $|V_1| = p^\alpha n_1 q^\beta$, причем $R_{p'} \subset V_1$. Но, очевидно, и $R_p \subset V_1$. Следовательно, $R \subseteq V_1$. Так как R — максимальная подгруппа группы G и $V_1 \neq G$, то $R = V_1$ и R — инвариантная подгруппа группы G, а это противоречит тому, что $R \in \bar{I}$. Теорема доказана полностью.

С помощью теоремы 1 доказывается более общая

Теорема 2. *Группа, все максимальные и неинвариантные подгруппы которой π-разложимы, обладает инвариантной силовской подгруппой, фактор-группа по которой π-разложима.*

Доказательство. Пусть I и $\bar{I}$ — соответственно множество всех максимальных и инвариантных подгрупп и множество всех максимальных и неинвариантных подгрупп группы G порядка $g = mn$, где m — наибольший π-делитель g.

Согласно теореме 1, группа G будет π-разрешимой. Тогда на основании теоремы 1.9.1 С. А. Чунихина [10] всякая ее максимальная подгруппа имеет своим индексом в G или степень простого числа из π, или число n_1 такое, что $\pi(n_1) \subseteq \pi(n)$.

Рассмотрим следующие возможности.

1. По крайней мере одна подгруппа M из $\bar{I}$ имеет своим индексом в G число p^γ, $\gamma > 0$, $p \in \pi$.

Согласно предыдущей теореме, в G имеется такая инвариантная силовская подгруппа Q, что G/Q будет p-разложимой группой, т. е. $G/Q = G_1/Q \times G_2/Q$, где G_1/Q и G_2/Q — соответственно S_p- и $S_{p'}$-подгруппы G.

Если $|Q|$ делится на p, то очевидно, что $G = MQ$, т. е. $G/Q \simeq M/Q \cap M$ и G/Q будет π-разложимой группой.

Если же $|Q|$ не делится на p, то $Q \subseteq M$. Но G_2/Q инвариантна в G и $|G_2/Q| = |M/Q|_{p'}$. Поэтому $G_2/Q \subseteq M/Q$, и, следовательно, G_2/Q — π-разложимая группа. Значит, и G/Q также π-разложима.

2. Порядок каждой подгруппы из $\bar{I}$ делится на m.

Тогда из теоремы 1.8.2 С. А. Чунихина [10] следует, что G содержит подгруппу $G_{\pi'}$. Если $G_{\pi'}$ неинвариантна в G, то $N(G_{\pi'}) \subseteq M_1 \in I$. Но M_1 — π-разрешимая подгруппа. Поэтому по указанной выше теореме 1.8.2 все подгруппы порядка n из M_1 должны быть сопряжены в M_1. Следовательно, из известного утверждения (см. [8], стр. 347) заключаем, что $N(M_1) = M_1$. А это противоречит тому, что $M_1 \in I$. Поэтому $G_{\pi'}$ инвариантна в G.

Пусть $[G : M] = n_1$, где $M \in \bar{I}$, и пусть Q — q-силовская подгруппа группы G, где $q \in \pi(n_1)$.

Если подгруппа Q инвариантна в G, то фактор-группа $G/Q = MQ/Q \simeq M/M \cap Q$ будет π-разложимой. Поэтому будем считать, что Q неинвариантна в G. Поскольку $G_{\pi'}$ инвариантна в G и $q \in \pi(n_1) \subseteq \pi(n)$, то, очевидно, подгруппа $Q \subset G_{\pi'}$. Тогда на основании леммы С. А. Чунихина [9] заключаем, что $G = N(Q) G_{\pi'}$, причем $N(Q)$ принадлежит максимальной подгруппе из $\bar{I}$, так как в противном случае Q была бы инвариантной подгруппой группы G. Следовательно, $N(Q)$ является π-разложимой группой, порядок которой делится на m. Очевидно, что $M_\pi \subset x^{-1}[N(Q)]x = N(Q^x)$, где $x \in G$.

Пусть теперь P — произвольная силовская подгруппа M_π. Тогда нормализатор $N(P)$ должен содержать как M, так и $N(Q^x)$. Так как M — макси-

мальная подгруппа группы G и $q \in \pi(n_1)$, где n_1—индекс M в G, то $N(P)=G$, т. е. любая силовская подгруппа из M_π инвариантна в G. Поэтому группа G будет π-разложимой группой. Следовательно, в G существует инвариантная силовская подгруппа, фактор-группа по которой π-разложима. Теорема доказана.

Из этих теорем вытекают:

Следствие 1. Группа, у которой все максимальные и неинвариантные подгруппы 2-разложимы, разрешима.

Доказательство основано на теореме 1 и на теореме Томпсона и Фейта о разрешимости групп нечетного порядка [11].

Следствие 2 (Дж. Розе [4]). Если каждая абнормальная подгруппа конечной группы G нильпотентна, то G содержит инвариантную силовскую подгруппу, фактор-группа по которой нильпотентна. Это следствие вытекает из теоремы 2.

Следствие 3 (О. Ю. Шмидт [1] — Ивасава [5]). Всякая группа типа S разрешима.

Это утверждение теоремы 2, оно также получается и из следствия 1.

С помощью теоремы 2 без особого труда доказывается

Теорема 3. q-Неразложимая группа, у которой каждая истинная максимальная pd-подгруппа разложима относительно простых чисел p и q $(p \neq q)$ совпадает с группой типа S_p и обратно.

Ясно, что теорема 3 усиливает теорему 1 С. А. Чунихина [3].

Литература

1. Шмидт О. Ю. Матем. сб., **31**, № 3—4, 366—372, 1924.
2. Чунихин С. А. Матем. сб., **40**, № 1, 39—41, 1933.
3. Tchounikhin S. A. Матем. сб., **4** (46): 3, 521—530, 1938.
4. Rose J. Journal of the London Math. Soc., **40**, № 158, 348—361, 1965.
5. Iwasawa K. Proc. Phys. Soc. Japan, **23**, 1—4, 1941.
6. Carter R. Math. Zeitschr., **75**, 136—139, 1961.
7. Конечные группы. Минск, «Наука и техника», 1966.
8. Курош А. Г. Теория групп. М., ГИТТЛ, 1953.
9. Чунихин С. А. Матем. сб., **54**, № 2, 237—251, 1961.
10. Чунихин С. А. Подгруппы конечных групп. Минск, «Наука и техника», 1964.
11. Feit W. and Thompson J. G., Pacific J. Math., **13**, № 3, 775—1029, 1963.
12. Шмидт О. Ю. Матем. сб., **33**, 161—172, 1926.

Институт математики
АН БССР

Поступило в редакцию
4.IX 1967

ВЕСЦІ АКАДЭМІІ НАВУК БЕЛАРУСКАЙ ССР № 1 1968
СЕРЫЯ ФІЗІКА-МАТЭМАТЫЧНЫХ НАВУК

УДК 65.012:122

Э. Н. КАЗАНЦЕВ

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ГРАФИКА ВЫПУСКА ИЗДЕЛИЙ, УДОВЛЕТВОРЯЮЩЕГО ТРЕБОВАНИЮ КОМПЛЕКТАЦИИ СБОРКИ

Одним из важнейших элементов планирования на машиностроительном предприятии является построение плана-графика выпуска изделий, деталей, узлов и приборов [1]. Такой план-график необходимо строить как для завода в целом, так и для отдельных цехов. В настоящее время уже имеется ряд работ, посвященных решению этой задачи. Например, в [2] построен и реализован на ЭВМ алгоритм составления такого плана-графика.

Непосредственно план-график выпуска зависит от плана предприятия, от технологии и экономических факторов. Следует заметить, что, как правило, план-график выпуска не однозначно определяется планом предприятия и технологией, поэтому требуется находить оптимальные планы-графики выпуска, причем оптимальность определяется экономическими факторами.

Отличие данной работы от предыдущих заключается в том, что в ней дано более полное математическое описание основных понятий планирования, соотношений между ними и описание множества планов — графиков выпуска, определяемых планом предприятия и технологией. Автор не ставил перед собою задачи дать математическое описание в с е х понятий и соотношений, встречающихся в планировании, поэтому построенную математическую модель планирования нужно рассматривать как более или менее удачное приближение к реальной задаче.

Форма изложения работы состоит из определений, содержательных определений и утверждений. Под утверждением понимаются как леммы, так и теоремы.

Будем различать определения математические и содержательные. Содержательное определение просто указывает на содержательный смысл математического понятия. Будем обозначать утверждения, определения и содержательные определения символами: У1, У2, ...; О1, О2 ...; ОС1, ОС2, ...

Нумерация соотношений, утверждений, определений и содержательных определений сквозная.

1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

Пусть в ассортименте предприятия имеется n различных наименований. Мы поставим в соответствие некоторым образом каждому наименованию ассортимента число i из множества натуральных чисел 1, 2, ..., n, так, чтобы различным наименованиям соответствовали различные числа. Такое число i будем называть индексом соответствующего наименования ассортимента. В дальнейшем упоминаются только индексы наименований.

Задача рассматривается в дискретном времени. За единицу дискретного времени выбирается некоторый промежуток времени ν (это может быть час, день, неделя, месяц, год и т. д.). В дальнейшем буквой t будем обозначать непрерывное время, $0 \leqslant t < +\infty$, а буквой p — дискретное, $p = 1, 2, \ldots$

ОС1. Функцией работы предприятия называется вектор-функция $\overline{X}(p) = \{x_1(p), x_2(p), \ldots, x_n(p)\}$, определенная на множестве натуральных чисел, где $x_i(p)$ означает количество единиц i-го индекса, изготовленных предприятием за промежуток времени $(p-1)\nu < t \leqslant p\nu$. За начало отсчета времени, т. е. $t = 0$, берется начало планируемого периода. Функция работы предприятия это и есть план-график, о котором говорилось выше.

ОС2. Функцией начала называется вектор-функция $\overline{Y}(p) = \{y_1(p), y_2(p), \ldots, y_n(p)\}$, определенная на множестве натуральных чисел, где $y_i(p)$ означает количество единиц i-го индекса, которые начали изготовляться в течение промежутка времени $(p-1)\nu < t \leqslant p\nu$. Под началом изготовления изделия, прибора, узла подразумевается начало сборки.

ОС3. Сдвигом i-го индекса называется число $\lambda_i = [t_i/\nu]$, где t_i — время изготовления i-го индекса. Если индекс i сборочный, то t_i равно промежутку времени от начала сборки до полного изготовления.

В дальнейшем будем предполагать, что разность $t_i/\nu - [t_i/\nu]$ мала, поэтому с определенной степенью идеализации полагаем $t_i = \lambda_i \nu$.

ОС4. Заделом будем называть вектор-функцию $\overline{H}(p) = \{h_1(p), h_2(p), \ldots, h_n(p)\}$, определенную на множестве неотрицательных целых чисел, где $h_i(p)$ равно количеству единиц i-го индекса, имеющихся в готовом виде на предприятии в момент времени $t = p\nu$. Вектор $\overline{H}(0)$ называется начальным заделом, т. е. это количество готовой продукции, имеющейся на предприятии к началу планируемого периода.

ОС5. Начальным условием называется вектор-функция $\overline{Q}(p) = \{q_1(p), q_2(p), \ldots, q_n(p)\}$, определенная на множестве натуральных чисел, где $q_i(p) = 0$ при $p > \lambda_i$ и $q_i(p)$ при $p \leqslant \lambda_i$ равно количеству единиц i-го индекса, которые находятся в момент времени $t = 0$ в процессе изготовления и будут полностью изготовлены в промежуток времени $(p-1)\nu < t \leqslant p\nu$.

ОС6. Планом предприятия называется вектор-функция $\overline{B}(p) = \{b_1(p), b_2(p), \ldots, b_n(p)\}$, определенная на множестве натуральных чисел, где $b_i(p)$ равно количеству единиц i-го индекса, которое предприятие должно отправить за интервал времени $(p-1)\nu < t \leqslant p\nu$. В план включаются как номенклатурные изделия, так и запчасти. В отличие от реальных условий мы предполагаем задание плана на всем интервале времени $(0 < t < +\infty)$.

ОС7. Квадратную матрицу n-го порядка $A = \|a_{ij}\|$ назовем матрицей потребности, если a_{ij} означает, какое количество i-го индекса требуется для сборки единицы j-го индекса. Если такой потребности нет, то полагаем $a_{ij} = 0$. Кроме этого, полагаем $a_{ii} = 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Замечание. Таким образом, основными элементами построенной математической модели являются векторные функции $\overline{X}(p)$, $\overline{Y}(p)$, $\overline{H}(p)$, $\overline{Q}(p)$, $\overline{B}(p)$ и матрица A.

В дальнейшем мы будем под вектор-функциями типов $\overline{X}(p)$, $\overline{Y}(p)$, $\overline{H}(p)$, $\overline{Q}(p)$ и $\overline{B}(p)$ подразумевать произвольные n-мерные векторные функции, но содержательный смысл имеют из них только неотрицательные и целочисленные. Матрица A подразумевается заданной.

О1. Пусть A — произвольная неотрицательная квадратная матрица n-го порядка. Поставим ей в соответствие ориентированный граф $\{N, G\}$, определяемый следующим образом: $N = \{1, 2, \ldots, n\}$ — множество вершин графа;

G — множество пар вершин (множество дуг графа); пара вершин $(i, j) \in G$ тогда и только тогда, когда $a_{ij} > 0$.

О 2. Если A — матрица потребности, то $\{N, G\}$ не имеет контуров.

Из этого определения следует, что множество вершин (т. е. множество натуральных чисел N) можно разбить на непересекающиеся классы $N_1, N_2, \ldots, N_{\gamma(A)}$ следующим образом. Множество N_1 это множество тех вершин графа $\{N, G\}$, из которых не выходит ни одной дуги («максимальных» вершин, если рассматривать граф как некоторое отношение частичного порядка на множестве N).

Если множество $N_1' = N \setminus N_1$ не пустое, то в подграфе $\{N_1', G_1\}$ графа $\{N, G\}$ выбираем снова множество «максимальных» вершин, таким образом получается множество N_2, и т. д. Построенные множества, очевидно, обладают следующими свойствами:

а) если $i \in N_k$, а $j \in N_l$ и $a_{ij} > 0$, то $k > l$ (отсюда следует, что $k \neq l$, т. е., если $i_1 \in N_k$ и $i_2 \in N_k$, то $a_{i_1 i_2} = 0$).

б) для любого индекса $i \in N_k$, $k > 1$, найдется такой индекс $j \in N_{k-1}$, что $a_{ij} > 0$. Данное определение означает, что существует некоторая перестановка строк и столбцов матрицы, после которой матрица приводится к левой треугольной матрице. Не трудно заметить, как нужно переставить строки матрицы. Если строка $i \in N_k$, а $j \in N_l$ и $l > k$, то строка i должна быть поставлена впереди j. Если i и j принадлежат к одному множеству N_k, то их взаимное расположение может быть произвольным, так как оно не нарушает треугольности получающейся матрицы.

Число $\gamma(A)$, однозначно определяемое матрицей A, назовем глубиной матрицы A.

О 3. Матрицу $R_k = \| r_{ij}^k \|$ назовем характеристической матрицей множества N_k, если $r_{ij}^k = 0$ при $i \neq j$, $r_{ii}^k = 0$ при $i \notin N_k$ и $r_{ii}^k = 1$ при $i \in N_k$.

У 1. $R_k A R_l = 0$ при $k \leqslant l$.

У 2. $A^{\gamma(A)} = 0$.

О 4. $\overline{H}(p) = \overline{H}(p-1) + \overline{X}(p) - A\overline{Y}(p) - \overline{B}(p)$.

О 5. Определим операторы S и S^{-1}. Если $\overline{Z}(p)$ — произвольная вектор-функция, то $S\overline{Z}(p) = \sum_{l=1}^{p} \overline{Z}(l)$, а $S^{-1}\overline{Z}(p) = \overline{Z}(p) - \overline{Z}(p-1)$, $p > 1$, и $S^{-1}\overline{Z}(1) = \overline{Z}(1)$. Очевидно, что $S^{-1}S\overline{Z}(p) = SS^{-1}\overline{Z}(p) = \overline{Z}(p)$.

У 3. $\overline{H}(p) = \overline{H}(0) + S\overline{X}(p) - AS\overline{Y}(p) - S\overline{B}(p)$.

Это утверждение получается из О4, если применить оператор S к обеим частям тождества, имея в виду, что $S\overline{H}(p) - S\overline{H}(p-1) = \overline{H}(p)$ и $SA\overline{Y}(p) = AS\overline{Y}(p)$.

О 6. $\overline{Y}(p) = E\overline{X}(p)$. Здесь E — оператор сдвига, определяемый следующим образом: $y_i(p) = x_i(p + \lambda_i)$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Приложение: Доказательство линейности оператора E.

Пусть $\overline{V}(p)$ и $\overline{W}(p)$ — две произвольные векторные функции, где p принимает натуральные значения, значения функций — n-мерные вектора. Пусть $\overline{U}(p) = E\overline{V}(p)$, $\overline{Z}(p) = E\overline{W}(p)$, тогда по определению оператора E $u_i(p) = v_i(p + \lambda_i)$, $z_i(p) = w_i(p + \lambda_i)$, $i = 1, 2, \ldots, n$).

Рассмотрим вектор-функции $\overline{K}(p) = \alpha\overline{V}(p) + \beta\overline{W}(p)$, где α и β — произвольные действительные числа, и $\overline{M}(p) = E\overline{K}(p)$. Снова из определения оператора E следует, что $m_i(p) = k_i(p + \lambda_i)$, $i = 1, 2, \ldots, n$. С другой стороны, $k_i(p + \lambda_i) = \alpha v_i(p + \lambda_i) + \beta w_i(p + \lambda_i)$.

Таким образом, мы получили, что $m_i(p) = \alpha u_i(p) + \beta z_i(p)$, $i=1, 2, \ldots, n$, т. е. $\overline{M}(p) = \alpha \overline{U}(p) + \beta \overline{Z}(p)$ или $E\overline{K}(p) = \alpha E\overline{V}(p) + \beta E\overline{W}(p)$, что доказывает линейность оператора E.

О7. Вектор-функция $\overline{X}(p)$ называется решением задачи планирования при заданных $\overline{B}(p)$, $\overline{Q}(p)$ и $\overline{H}(p)$ тогда и только тогда, когда

а) $\overline{H}(p) \geqslant 0$,

б) $\overline{X}(p) \geqslant 0$ и принимает только целые значения,

в) $x_i(p) = q_i(p)$ при $p \leqslant \lambda_i$.

Условие а) является вполне естественным требованием, так как если при $p = p_0$, i-я координата вектора $\overline{H}(p_0)$ меньше 0, это означает, что нам не хватит некоторого количества i-го наименования для производства. Если функция $\overline{X}(p)$ удовлетворяет условию в), то мы будем говорить, что она удовлетворяет начальным условиям. Обозначим множество решений задачи планирования через

$$\langle \overline{Q}(p),\ \overline{H}(0),\ \overline{B}(p) \rangle .$$

У4. Для того чтобы $\overline{X}(p) \in \langle \overline{Q}(p),\ \overline{H}(0),\ \overline{B}(p) \rangle$, необходимо и достаточно, чтобы существовала такая целочисленная функция $\overline{V}(p)$, что

а) $S\overline{X}(p) - AES\overline{X}(p) = S\overline{B}(p) - \overline{H}(0) - AES\overline{Q}(0) + \overline{V}(p)$,

б) $\overline{V}(p) \geqslant 0$,

в) $\overline{X}(p) \geqslant 0$ и целочисленная,

г) $\overline{X}(p)$ удовлетворяет начальным условиям.

Здесь $ES\overline{Q}(0) = \{Sq_1(\lambda_1),\ Sq_2(\lambda_2),\ \ldots,\ Sq_n(\lambda_n)\}$, причем если $\lambda_i = 0$, то полагаем $Sq_i(\lambda_i) = 0$.

Доказательство. Очевидно, нужно только доказать эквивалентность пунктов а) и б) в У4 пункту а) в О7. Это нетрудно сделать, используя У3, а также тот факт, что $AS\overline{Y}(p) = AES\overline{X}(p)$, что следует из О6. $SE\overline{X}(p) = ES\overline{X}(p) - ES\overline{X}(0)$, здесь $ES\overline{X}(0) = \{Sx_1(\lambda_1),\ Sx_2(\lambda_2),\ \ldots,\ Sx_n(\lambda_n)\}$, но так как $\overline{X}(p)$ удовлетворяет начальным условиям, то $ES\overline{X}(0) = ES\overline{Q}(0)$. За функцию $\overline{V}(p)$, очевидно, нужно взять функцию $\overline{H}(p)$, т. е. $\overline{V}(p) = \overline{H}(p)$.

Условие а) У4 является уравнением относительно $S\overline{X}(p)$, причем его правая часть полностью определена, если мы зададим функцию задела $\overline{H}(p)$.

2. ИССЛЕДОВАНИЕ УРАВНЕНИЯ

$$\overline{Z}(p) - AE\overline{Z}(p) = \overline{D}(p) \qquad (1)$$

В этом разделе статьи исследуются вопросы существования и единственности решения уравнения (1), а также некоторые свойства этого решения.

У5. $(AE)^{\nu(A)} = 0$.

Замечание. Определенные выше операторы S, S^{-1} и E заданы на множестве векторных функций порядка n с натуральным аргументом. Не трудно показать, что они линейны на этом множестве. В данной работе матрицы A и R_i рассматриваются тоже как линейные операторы на том же множестве функций, причем выражение $\overline{V}(p) = A\overline{W}(p)$ можно понимать либо как то, что вектор-функция $\overline{V}(p)$ есть значение оператора A на вектор-функ-

ции $\overline{W}(p)$, либо как то, что вектор $\overline{V}(p)$ (т. е. значение вектор-функции $\overline{V}(p)$ в точке p) есть результат умножения вектора $\overline{W}(p)$ (значение вектор-функции в точке p) на матрицу A.

Как обычно, для линейных операторов рассматриваются суммы, разность и произведение определенных выше операторов. Например, пусть J — тождественный оператор. Через $(J - AE)^{-1}$ обозначим оператор обратный к $J - AE$. Следующее утверждение доказывает существование оператора $(J - AE)^{-1}$.

У 6. Уравнение (1) имеет одно и только одно решение, которое выражается формулой

$$\overline{Z}(p) = \sum_{l=0}^{\gamma(A)-1} (AE)^l \overline{D}(p) = (J - AE)^{-1} \overline{D}(p). \tag{2}$$

Здесь J — тождественный оператор.

Доказательство. Непосредственной подстановкой (2) в уравнение (1) убеждаемся, что $\overline{Z}(p)$ будет решением, при этом нужно учитывать У5. Для единственности достаточно показать, что уравнение $\overline{Z}(p) - AE\overline{Z}(p) = 0$ имеет единственное решение тождественно равное 0. Это непосредственно следует из У5.

У 8. Если $\overline{D}(p) \geqslant 0$, то и $(J - AE)^{-1} \overline{D}(p) \geqslant 0$.

У 9) Если $\overline{D}_1(p) \geqslant \overline{D}_2(p)$, то $(J - AE)^{-1} \overline{D}_1(p) \geqslant (J - AE)^{-1} \overline{D}_2(p)$.

У 10. Если $\overline{D}(p)$ — неубывающая вектор-функция, то $(J - AE)^{-1} \overline{D}(p)$ тоже неубывающая.

У 11. Если $\overline{D}(p)$ — целочисленная, вектор-функция, то $(J - AE)^{-1} \overline{D}(p)$ тоже целочисленная. (Напомним, что матрица A целочисленная). Из этого утверждения следует, что в У4 в пункте в) достаточно требовать только неотрицательности $\overline{X}(p)$.

У 12. Значения вектор-функции $\overline{Z}(p) = (J - AE)^{-1} \overline{D}(p)$ на отрезке $1 \leqslant p \leqslant T$ однозначно определяются значениями вектор-функции $\overline{D}(p)$ на конечном отрезке $1 \leqslant p \leqslant T + (\gamma(A) - 1) \max\limits_i \lambda_i$.

Соотношение (2) дает некоторый алгоритм для вычисления $\overline{Z}(p) = (J - AE)^{-1} \overline{D}(p)$. Следующее утверждение дает другой способ вычисления $\overline{Z}(p)$.

У 13.

$$R_i \overline{Z}(p) = R_i \overline{D}(p) + \sum_{l=1}^{i-1} R_i AE R_l \overline{Z}(p), \tag{3}$$

где $\overline{Z}(p) = (J - AE)^{-1} \overline{D}(p)$. Это соотношение дает рекуррентный способ вычисления $\overline{Z}(p)$.

Доказательство. Из уравнения (1) получаем

$$R_i \overline{Z}(p) = R_i AE \overline{Z}(p) + R_i \overline{D}(p) = R_i \overline{D}(p) +$$

$$+ R_i A \Big(\sum_{l=1}^{\gamma(A)} R_l \Big) E\overline{Z}(p) = R_i \overline{D}(p) + \sum_{l=1}^{\gamma(A)} R_i AER_l \overline{Z}(p) =$$

$$= R_i \overline{D}(p) + \sum_{l=1}^{i-1} R_i AER_l \overline{Z}(p).$$

На последнем шаге мы использовали У1 и тот факт, что $R_l E = ER_l$.

3. КРИТЕРИЙ НЕПУСТОТЫ МНОЖЕСТВА $\langle \overline{Q}(p), \overline{H}(0), \overline{B}(p) \rangle$. КРИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ

У 14. $\langle \overline{Q}(p), \overline{H}(0), \overline{B}(p) \rangle \supseteq \overline{X}_1(p) + \langle \overline{0}(p), \overline{0}, \overline{0}(p) \rangle$.

Здесь $\overline{0}(p)$ означает тождественно нулевую функцию. $\overline{X}_1(p)$ — некоторая вектор-функция, принадлежащая множеству $\langle \overline{Q}(p), \overline{H}(0), \overline{B}(p) \rangle$. Иначе У14 можно сформулировать следующим образом: если $\overline{X}_1(p) \in \langle \overline{Q}(p), \overline{H}(0), \overline{B}(p) \rangle$, а $\overline{X}_0(p) \in \langle \overline{0}(p), \overline{0}, \overline{0}(p) \rangle$, то $\overline{X}_1(p) + \overline{X}_0(p) \in \langle \overline{Q}(p), \overline{H}(0), \overline{B}(p) \rangle$.

Для доказательства нужно только заметить, что $S\overline{X}_0(p) - AES\overline{X}_0(p) = \overline{H}_0(p)$ и $\overline{X}_0(p)$ удовлетворяет нулевым начальным условиям. После этого не сложно показать, что $\overline{X}_1(p) + \overline{X}_0(p)$ удовлетворяет У4.

У 15. Если множество $\langle \overline{Q}(p), \overline{H}(0), \overline{B}(p) \rangle$ не пусто, то оно бесконечно.

Доказательство следует из У14, если показать, что множество $\langle \overline{0}(p), \overline{0}, \overline{0}(p) \rangle$ бесконечно, а это выводится из У12.

О 8. Определим бинарную операцию X над двумя произвольными вектор-функциями $\overline{W}(p)$ и $\overline{V}(p)$.

Для определения сначала построим следующую последовательность вектор-функций:

а) $\overline{V}_0(p) = \overline{V}(p)$,

б) $\overline{V}_{k+1}(p) = \overline{V}_k(p) + R_{k+1} \max \{0;\ \overline{W}(p) - (J - AE)^{-1} \overline{V}_k(p)\}$.

После этого полагаем по определению

$$\overline{W}(p) \times \overline{V}(p) = \overline{V}_{\gamma(A)}(p).$$

Здесь под максимумом от двух вектор-функций понимается вектор-функция, значения координат которой равны максимуму из значений соответствующих координат заданных вектор-функций.

У 16. Для любых вектор-функций $\overline{W}(p)$ и $\overline{V}(p)$

$$\overline{V}_{k+1}(p) \geqslant \overline{V}_k(p),\ k = 0,\ 1,\ \ldots,\ \gamma(A) - 1.$$

Здесь $\{\overline{V}_k(p)\}$ — последовательность вектор-функций, определенная в О8.

Доказательство непосредственно следует из О8, пункта б), если заметить, что $\overline{V}_{k+1}(p) - \overline{V}_k(p) \geqslant 0$.

У 17. $\overline{V}(p) \leqslant \overline{W}(p) \times \overline{V}(p)$ для любых $\overline{W}(p)$ и $\overline{V}(p)$.

Доказательство следует из У16.

У 18. Для любых вектор-функций $\overline{W}(p)$, $\overline{V}(p)$ и $\overline{V}^*(p)$ из неравенства $\overline{V}(p) \leqslant \overline{V}^*(p)$ следует неравенство

$$(J - AE)^{-1}\left[\overline{W}(p) \times \overline{V}(p)\right] \leqslant (J - AE)^{-1}\left[\overline{W}(p) \times \overline{V}^*(p)\right].$$

У 19. Для любых вектор-функций $\overline{W}(p)$ и $\overline{V}(p)$ справедливо неравенство $\overline{W}(p) \leqslant (J - AE)^{-1}[\overline{W}(p) \times \overline{V}(p)]$.

Доказательство У18 и У19 мы приводить не будем из-за громоздкости. Заметим только, что для их доказательства существенно используется соотношение (3).

У 20. Если $(J - AE)^{-1} \overline{V}(p) \geqslant \overline{W}(p)$, то $\overline{W}(p) \times \overline{V}(p) = \overline{V}(p)$.

У 21. Если $\overline{V}(p)$ и $\overline{W}(p)$ — неубывающие вектор-функции, то $(J - AE)^{-1} \times [\overline{W}(p) \times \overline{V}(p)]$ — тоже неубывающая вектор-функция.

У 22. Для того чтобы множество $\langle \overline{Q}(p), \overline{H}(0), \overline{B}(p) \rangle$ было не пусто, необходимо и достаточно, чтобы функция

$$\overline{X}_0(p) = S^{-1}(J - AE)^{-1}[S\overline{Q}(p) \times (S\overline{B}(p) - \overline{H}(0) - AES\overline{Q}(0))]$$

удовлетворяла начальным условиям.

Доказательство. Достаточность. Покажем, что $\overline{X}_0(p)$ принадлежит $\langle \overline{Q}(p), \overline{H}(0), \overline{B}(p) \rangle$. Для этого достаточно показать, что оно удовлетворяет пунктам а), б), в) и г) У4. Положим $\overline{V}(p) = S\overline{Q}(p) \times [S\overline{B}(p) - \overline{H}(0) - AESQ(0)] - (S\overline{B}(p) - \overline{H}(0) - AES\overline{Q}(0))$, тогда из определения $\overline{X}_0(p)$ следует, что она удовлетворяет пункту а) У4. Из У17 следует, что $\overline{V}(p) \geqslant 0$, т. е. выполняется пункт б). Так как $S\overline{B}(p)$ — неубывающая, а $\overline{H}(0)$ и $AES\overline{Q}(0)$—константы, то и $S\overline{B}(p) - \overline{H}(0) - AES\overline{Q}(0)$—неубывающая. $S\overline{Q}(p)$— также неубывающая. Тогда из У21 следует, что $S\overline{X}_0(p)$ —неубывающая, т. е. $\overline{X}_0(p)$ удовлетворяет в) У4. Пункту г) $\overline{X}_0(p)$ удовлетворяет по условию теоремы.

Необходимость. Пусть $\langle \overline{Q}(p), \overline{H}(0), B(p) \rangle$ не пусто, т. е. существует $\overline{X}_1(p) \in \langle \overline{Q}(p), \overline{H}(0), \overline{B}(p) \rangle$. Тогда из У4 следует, что $S\overline{X}_1(p) = (J - AE)^{-1} \times [S\overline{B}(p) - \overline{H}(0) - AES\overline{Q}(0) + \overline{V}_1(p)]$, причем $\overline{V}_1(p) \geqslant 0$ и $S\overline{X}_1(p) \geqslant S\overline{Q}(p)$. Из У20 и У18 следует, что $S\overline{X}_0(p) \leqslant S\overline{X}_1(p)$, а из У19 получаем $S\overline{Q}(p) \leqslant S\overline{X}_0(p)$, но так как $\overline{X}_1(p)$ удовлетворяет начальным условиям, то из неравенств следует, что и $\overline{X}_0(p)$ должна удовлетворять начальным условиям. Теорема доказана.

О 9. Вектор-функцию $\overline{X}_0(p) \in \langle \overline{Q}(p), \overline{H}(0), \overline{B}(p) \rangle$ назовем критической, если для любой вектор-функции $\overline{X}_1(p) \in \langle \overline{Q}(p), \overline{H}(0), \overline{B}(p) \rangle$ выполняется неравенство $S\overline{X}_0(p) \leqslant S\overline{X}_1(p)$.

У 23. Если $\langle \overline{Q}(p), \overline{H}(0), \overline{B}(p) \rangle$ не пусто, то вектор-функция $\overline{X}_0(p) = S^{-1}(J - AE)^{-1}[S\overline{Q}(p) \times (S\overline{B}(p) - \overline{H}(0) - AES\overline{Q}(0))]$ является критической.

Доказательство следует из доказательства необходимости У22.

Заключение. Предложенная работа является только начальным подходом к решению задачи планирования, но, по нашему мнению, она дает возможность рассматривать основные проблемы планирования (минимизацию задела, загрузку оборудования, выбор оптимальной партии и т. д.) на основе построенной математической модели, вводя добавочные ограничения на множестве решений и минимизируя некоторые функционалы на этом множестве.

Литература

1. Важоньи А. Научное программирование в промышленности и торговле. ИЛ, 1963.

2. Крулль Н., Лухт С., Муллари Р. Тр. ВЦ Тартусского ун-та, 1965, стр. 11—31.

ВЕСЦІ АКАДЭМІІ НАВУК БЕЛАРУСКАЙ ССР № 1 1968
СЕРЫЯ ФІЗІКА-МАТЭМАТЫЧНЫХ НАВУК

УДК 513

В. Т. ВОДНЕВ

О ПРОСТРАНСТВАХ Д. В. ВЕДЕНЯПИНА

Риманово пространство V_n называется k-кратно проективным V_n^k, или частично-проективным порядка k, если существует система координат, в которой k из $n-1$ конечных уравнений геодезических линий являются линейными относительно $x^1, x^2, \ldots, x^n$ [1]. Говорят также, что в этом случае геодезические линии лежат в $(n-k)$-мерных плоскостях.

Такие пространства интересны тем, что они представляют в теории римановых пространств естественное обобщение пространств постоянной кривизны, которые с рассматриваемой точки зрения являются пространствами V_n^{n-1}. Более того, всякое риманово пространство V_n^{n-1} является пространством постоянной кривизны.

Пространства V_n^{n-2} более разнообразны. Геодезические линии пространств V_n^{n-2} лежат в двумерных плоскостях, но не всякая двумерная плоскость заполнена геодезическими. Поэтому задача классификации пространств V_n^{n-2}, и тем более пространств V_n^k, трудна и далека от завершения.

В 1930 году В. Ф. Каган начал изучать субпроективные пространства — такие пространства V_n^{n-2}, у которых геодезические линии лежат в двумерных плоскостях, проходящих через фиксированную точку. Эти пространства подробно изучены в работах многих авторов. Первый пример пространства V_n^{n-2}, отличного от субпроективных пространств, привел в 1954 году Г. Врэнчану [2], а в 1955 году Д. В. Веденяпин [3] впервые построил целый класс пространств V_n^{n-2}, отличных от субпроективных. Однако обилие входящих в метрическую форму пространств Веденяпина произвольных постоянных не позволяло судить о произволе метрики этих пространств, а также изучить их детально. В работе ставится задача получения канонических форм пространств Веденяпина, выделения неприводимых пространств и изучения их геометрических свойств. Полученные результаты позволяют построить и некоторые новые пространства, обладающие интересными свойствами.

Некоторые из указанных ниже результатов приведены в работах [4, 5].

Условимся, чтобы не оговаривать каждый раз особо, что встречающиеся в работе индексы изменяются в следующих пределах:

$$i, j, k = 1, \ldots, m; \quad p, q, r = 1, \ldots, m-1; \quad \alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon = 1, \ldots, n;$$

$$a, b = 1, \ldots, m-\rho-1; \quad f, g = 1, \ldots, m-\rho;$$

$$h = m-\rho+1, \ldots, m; \quad \psi, \varphi = m-\rho+1, \ldots, n-1; \quad t, s = m+1, \ldots, n;$$

$$\sigma, \tau = m+1, \ldots, n-1; \quad \lambda, \mu = 2m-\rho, \ldots, n-1.$$

§ 1. ПРИВЕДЕНИЕ К КАНОНИЧЕСКОМУ ВИДУ

Линейный элемент пространств Веденяпина имеет вид

$$ds^2 = b_{\alpha\beta}\,dx^\alpha\,dx^\beta + 2b_{ij}c^i_{nn}f dx^i dx^n + fA_{\sigma\tau}\,dx^\sigma\,dx^\tau + \\ + 2b_{\sigma i}\,c^i_{nn}f dx^\sigma\,dx^n + (b_{ij}\,c^i_{nn}f + 2b_{nj})\,c^i_{nn}f dx^{n^2}, \tag{1}$$

где $f = f(x^n)$, а входящие сюда постоянные подчинены условиям

$$R\begin{Vmatrix} b_{11} & \dots & b_{1m} \\ \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & \dots & b_{mm} \end{Vmatrix} \leqslant m-2, \tag{2.а}$$

$$R\begin{Vmatrix} b_{11} & \dots & b_{1m} \\ \dots & \dots & \dots \\ b_{n-1\,1} & \dots & b_{n-1\,m} \end{Vmatrix} = m-1, \tag{2.б}$$

$$R\begin{Vmatrix} b_{11} & \dots & b_{1m} & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & \dots & b_{mm} & 0 \\ b_{m+1\,1} & \dots & b_{m+1\,m} & A_{m+1\sigma} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n-1\,1} & \dots & b_{n-1\,m} & A_{n-1\sigma} \\ b_{n1} & \dots & b_{nm} & 0 \end{Vmatrix} = m, \tag{2.в}$$

$$R\begin{Vmatrix} b_{11} & \dots & b_{1m} \\ \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & \dots & b_{nm} \end{Vmatrix} = m, \tag{2.г}$$

$$R\,\|A_{\sigma\tau}\| \geqslant 1, \tag{2.д}$$

$$|b_{\alpha\beta}| \neq 0, \tag{2.е}$$

где R означает ранг матрицы.

В этой системе координат отличные от нуля коэффициенты связности имеют вид

$$\Gamma^i_{\sigma\tau} = -\frac{1}{2}\,b^{in}A_{\sigma\tau}F, \quad \Gamma^i_{n\sigma} = \frac{1}{2}\,b^{i\tau}A_{\sigma\tau}F, \quad \Gamma^i_{nn} = c^i_{nn}F, \tag{3}$$

где $F = \dfrac{df}{dx^n}$, b^{it} — приведенные алгебраические дополнения элементов b_{it} матрицы $\|b_{\alpha\beta}\|$.

Сделаем преобразование координат:

$$x^i \to x^i - c^i_{nn}\int f dx^n\,. \tag{4}$$

При такой записи будем всегда подразумевать, что слева записаны старые переменные, справа — новые. В результате придем к метрике

$$ds^2 = b_{\alpha\beta}\,dx^\alpha\,dx^\beta + fA_{\sigma\tau}\,dx^\sigma\,dx^\tau\,. \tag{5}$$

Условия (2), выполнение которых необходимо, чтобы пространства (1) имели плоские геодезические, при этом не затрагиваются, так как в них c^i_{nn} не входят. При преобразовании (4) коэффициенты связности $\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}$ не изменяются,

за исключением Γ^i_{nn}, обращающихся в нуль. Называя допустимыми преобразования, сохраняющие вид $\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}$, мы и в дальнейшем будем делать только их.

Пусть теперь ранг матрицы $\|b_{ij}\|$ равен ρ, где $0 \leqslant \rho \leqslant m-2$. Условия (2) имеет смысл рассматривать только при $n \geqslant 2m-\rho$. Невырожденным линейным преобразованием переменных x^i приведем форму $b_{ij}dx^i dx^j$ к каноническому виду $\varepsilon_h dx^{h^2}$ ($\varepsilon_h = \pm 1$). Метрика (5) примет вид

$$ds^2 = \varepsilon_h dx^{h^2} + 2b_{il}dx^i dx^t + b_{ls}dx^t dx^s + fA_{\sigma\tau}dx^\sigma dx^\tau . \qquad (6)$$

Из условия (2.б) в этой системе координат

$$R\left\| \begin{array}{ccccccc} 0 & \ldots & 0 & \varepsilon_{m-\rho+1} & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & \varepsilon_m \\ b_{m+1\,1} & \ldots & b_{m+1\,m-\rho} & b_{m+1\,m-\rho+1} & \ldots & b_{m+1\,m} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b_{n-1\,1} & \ldots & b_{n-1\,m-\rho} & b_{n-1\,m-\rho+1} & \ldots & b_{n-1\,m} \end{array} \right\| = m-1$$

можно, не ограничивая общности, считать, что

$$\left| \begin{array}{ccc} b_{m+1\,1} & \ldots & b_{m+1\,m-\rho-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ b_{2m-\rho-1\,1} & \ldots & b_{2m-\rho-1\,m-\rho-1} \end{array} \right| \neq 0,$$

а так как любой определитель m-го порядка должен равняться нулю, то

$$\Delta_\lambda = \left| \begin{array}{ccc} b_{m+1\,1} & \ldots & b_{m+1\,m-\rho} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ b_{2m-\rho-1\,1} & \ldots & b_{2m-\rho-1\,m-\rho} \\ b_{\lambda\,1} & \ldots & b_{\lambda\,m-\rho} \end{array} \right| = 0 \qquad (7)$$

для любого фиксированного λ.

Тогда из условия (2.г) находим, что

$$\Delta_n = \left| \begin{array}{ccc} b_{m+1\,1} & \ldots & b_{m+1\,m-\rho} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ b_{2m-\rho-1\,1} & \ldots & b_{2m-\rho-1\,m-\rho} \\ b_{n\,1} & \ldots & b_{n\,m-\rho} \end{array} \right| \neq 0. \qquad (8)$$

Учитывая (8), можем сделать преобразование координат

$$b_{m+af}\, x^f \to x^a,$$
$$b_{nf}\, x^f \to x^{m-\rho}.$$

Получим

$$ds^2 = \varepsilon_h dx^{h^2} + 2\sum_a dx^a dx^{m+a} + 2dx^{m-\rho}dx^n + 2b_{f\lambda}dx^f dx^\lambda +$$
$$+ 2b_{h\sigma}dx^h dx^\sigma + fA_{\sigma\tau}dx^\sigma dx^\tau + b_{\sigma\tau}dx^\sigma dx^\tau + 2b_{\psi n}dx^\psi dx^n + b_{nn}dx^{n^2}, \qquad (9)$$

причем здесь все коэффициенты совпадают с коэффициентами метрики (6), кроме $b_{f\lambda}$, имеющих вид

$$b_{g\lambda}\, b_f^{m+g} \to b_{f\lambda}, \qquad (10)$$

где b_f^{m+g} есть алгебраические дополнения элементов $b_{m+f\,g}$ в определителе (8) и b_f^{m+g} для $f = m-\rho$ соответствует b_{ng}. В силу этого замечания ко-

эффициенты $b_{m-\rho\lambda}$ в системе координат (9) будут равны нулю, так как они представляют собою отношения $\frac{\Delta_\lambda}{\Delta_n}$, что следует из (7), (8), (10). Поэтому в (9) вместо $b_{f\lambda}dx^f dx^\lambda$ следует писать $b_{a\lambda}dx^a dx^\lambda$.

Так как теперь $dx^{m-\rho}$ в (9) входит только в слагаемое $2dx^{m-\rho}dx^n$, то преобразованием $x^{m-\rho} \to x^{m-\rho} - b_{\psi n}x^\psi - \frac{b_{nn}}{2}x^n$ можно убрать члены, содержащие dx^n, а преобразованием $x^h \to x^h - \varepsilon_h b_{h\sigma}x^\sigma$ убираются члены $b_{h\sigma}dx^h dx^\sigma$ (конечно, при этом меняются $b_{\sigma\tau}$).

В итоге придем к метрике вида

$$ds^2 = \varepsilon_h dx^{h^2} + 2\sum_a dx^a dx^{m+a} + 2dx^{m-\rho}dx^n + 2b_{a\lambda}dx^a dx^\lambda + \\ + fA_{\sigma\tau}dx^\sigma dx^\tau + b_{\sigma\tau}dx^\sigma dx^\tau. \qquad (11)$$

Условие (2.в) в этой системе координат имеет вид:

$$R\begin{Vmatrix} 0 & \dots & 0 & 0 & \varepsilon_{m-\rho+1} & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & \varepsilon_m & 0 \\ 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & A_{m+1\,\sigma} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & A_{2m-\rho-1\,\sigma} \\ b_{2m-\rho\,1} & \dots & b_{2m-\rho\,m-\rho-1} & 0 & 0 & \dots & 0 & A_{2m-\rho\,\sigma} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n-1\,1} & \dots & b_{n-1\,m-\rho-1} & 0 & 0 & \dots & 0 & A_{n-1\,\sigma} \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{Vmatrix} = m.$$

Так как любой определитель $m+1$-порядка должен равняться нулю, то

$$\begin{vmatrix} 0 & \dots & 0 & 0 & \varepsilon_{m-\rho+1} & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & \varepsilon_m & 0 \\ 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & A_{m+1\,\sigma} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & A_{2m-\rho-1\,\sigma} \\ b_{\lambda 1} & \dots & b_{\lambda\,m-\rho-1} & 0 & 0 & \dots & 0 & A_{\lambda\sigma} \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

откуда следует, что

$$\begin{vmatrix} 1 & \dots & 0 & A_{m+1\,\sigma} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 1 & A_{2m-\rho-1\,\sigma} \\ b_{\lambda 1} & \dots & b_{\lambda\,m-\rho-1} & A_{\lambda\sigma} \end{vmatrix} = 0,$$

или

$$A_{\lambda\sigma} = \sum_a A_{m+a\,\sigma}\, b_{a\lambda}. \qquad (12)$$

Рассмотрим преобразование $x^{m+a} \to x^{m+a} - b_{a\lambda} x^{\lambda}$. При этом пропадут члены $b_{a\lambda}\, dx^a\, dx^{\lambda}$. Изменятся, конечно, формы $A_{\sigma\tau}\, dx^{\sigma}\, dx^{\tau}$ и $b_{\sigma\tau}\, dx^{\sigma}\, dx^{\tau}$, однако вид ds^2 и $\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}$ сохранится. Посмотрим, как преобразуется форма $A_{\sigma\tau}\, dx^{\sigma}\, dx^{\tau}$:

$$A_{\sigma\tau}\, dx^{\sigma}\, dx^{\tau} \to A_{m+a\ m+b}\, dx^{m+a}\, dx^{m+b} - 2\Big[\sum_{b}(A_{m+b\ m+a}\, b_{b\lambda} - A_{\lambda\ m+a})\Big]\, dx^{m+a} dx^{\lambda} +$$

$$+\Big[\sum_{a,b}(A_{m+a\ m+b}\, b_{b\lambda} - A_{\lambda\ m+a})\, b_{a\mu} + A_{\lambda\mu} - \sum_{a} A_{\lambda\ m+a}\, b_{a\mu}\Big]\, dx^{\lambda}\, dx^{\mu}.$$

Однако из (12) следует, что все члены в скобках равны нулю, и метрика примет вид

$$ds^2 = \varepsilon_h\, dx^{h^2} + 2\sum_{a} dx^a\, dx^{m+a} + 2dx^{m-\rho}\, dx^n +$$

$$+ f A_{m+a\ m+b}\, dx^{m+a}\, dx^{m+b} + b_{\sigma\tau}\, dx^{\sigma}\, dx^{\tau}.$$

Теперь очевидно, что при преобразовании $x^a \to x^a - b_{m+a\ m+b}\, x^{m+b}$ в форме $b_{\sigma\tau}\, dx^{\sigma}\, dx^{\tau}$ пропадут члены, содержащие dx^{m+a}, и она перейдет в форму вида $b_{\lambda\mu}\, dx^{\lambda}\, dx^{\mu}$. Причем, чтобы выполнялось условие (2.е), должны требовать $|b_{\lambda\mu}| \neq 0$.

И, наконец, последний шаг: приводим формы $A_{m+a\ m+b}\, dx^{m+a}\, dx^{m+b}$ и $b_{\lambda\mu}\, dx^{\lambda}\, dx^{\mu}$ к каноническому виду соответственно преобразованием переменных x^{m+a} и x^{λ}. При этом, чтобы не изменилась форма $2\sum_{a} dx^a\, dx^{m+a}$ над x^a делаем линейное преобразование, матрица которого является обратной для матрицы преобразования переменных x^{m+a}. В итоге получим:

$$ds^2 = \varepsilon_h\, dx^{h^2} + 2\sum_{a} dx^a\, dx^{m+a} + 2dx^{m-\rho}\, dx^n + f\,\varepsilon_e\, dx^{m+e^2} + \varepsilon_{\lambda}\, dx^{\lambda^2}, \quad (13)$$

где $e = 1, \ldots, \nu$, $1 \leqslant \nu \leqslant m - \rho - 1$ в силу условия (2.д).

Меняя для удобства роль переменных x^n и $x^{2m-\rho}$ и затем x^g и x^{m+g}, запишем (13) в виде

$$ds^2 = \varepsilon_h\, dx^{h^2} + 2\sum_{g} dx^g\, dx^{m+g} + f(x^{m-\rho})\,\varepsilon_e\, dx^{m+e^2} + \varepsilon_{\omega}\, dx^{\omega^2}, \quad (14)$$

где $\omega = 2m - \rho + 1, \ldots, n$.

Из (14) сразу следует, что пространства Веденяпина являются заведомо приводимыми, если $\rho > 0$, или если $n > 2m - \rho$, или если $\nu < m - \rho - 1$. Поэтому фактически дело сводится лишь к изучению пространств:

$$ds^2 = 2\sum_{i} dx^i\, dx^{m+i} + f(x^m)\,\varepsilon_p\, dx^{p^2}, \quad (15)$$

которые неприводимы, как будет показано в следующем параграфе.

Заметим еще, что всегда можно предполагать, что функция $f(x^m)$ не содержит членов первой и нулевой степени.

В самом деле, пусть $f(x^m) = f^*(x^m) + ax^m + b$, где $f^*(x^m)$ обладает указанным свойством. Тогда, делая преобразование координат

$$x^{m+p} \to x^{m+p} - \frac{1}{2}\, b\,\varepsilon^p\, x^p - \frac{1}{2}\, ax^m\,\varepsilon^p\, x^p,$$

$$x^{2m} \to x^{2m} + \frac{1}{4}\, a\,\varepsilon_q\, x^{q^2},$$

получим:

$$ds^2 = 2\sum_i dx^i\, dx^{m+i} + f^*(x^m)\,\varepsilon_p\, dx^{p^2}.$$

§ 2. НЕПРИВОДИМЫЕ ПРОСТРАНСТВА ВЕДЕНЯПИНА И ИХ ОБОБЩЕНИЯ

Для доказательства неприводимости пространств (15) используем теорему П. А. Широкова [6], согласно которой для приводимости риманова пространства с метрическим тензором $g_{\alpha\beta}$ необходимо и достаточно, чтобы существовал симметрический тензор $c_{\alpha\beta}$, удовлетворяющий условиям:

а) $c_{\alpha\beta,\gamma} = 0$, где запятая означает ковариантное дифференцирование;

в) $c_{\alpha\gamma}\, c^{\gamma}_{\beta} = c_{\alpha\beta}$, где поднятие индекса осуществляется с помощью $g^{\alpha\beta}$;

с) $c_{\alpha\beta} \neq m g_{\alpha\beta}$ (m — const). Покажем, что для (15) такого тензора не существует.

Рассмотрим условия интегрируемости системы а):

$$R^{\delta}_{\alpha\beta,\gamma}\, c_{\delta\varepsilon} + R^{\delta}_{\alpha\beta,\varepsilon}\, c_{\delta\gamma} = 0. \tag{16}$$

В рассматриваемом случае отличные от нуля компоненты тензора кривизны есть

$$R^{m+p}_{mp,m} = \frac{1}{2}\,\varepsilon_p\,\frac{d^2f}{dx^{m^2}}, \quad R^{2m}_{mp,p} = -\frac{1}{2}\,\varepsilon_p\,\frac{d^2f}{dx^{m^2}},$$

а условия (16) принимают вид:

$$\begin{gathered} R^{2m}_{mp,p}\, c_{2m\,m+j} = 0, \quad R^{m+p}_{mp,m}\, c_{m+p\,m+j} = 0, \\ R^{2m}_{mp,p}\, c_{2m\,p} = 0, \quad R^{m+p}_{mp,m}\, c_{m+p\,m} = 0, \\ R^{m+p}_{mp,m}\, c_{m+p\,q} = 0, \quad R^{2m}_{mp,p}\, c_{2m\,m} + R^{m+p}_{mp,m}\, c_{m+p\,p} = 0. \\ (p \neq q). \end{gathered} \tag{17}$$

Считая

$$\frac{d^2f}{dx^{m^2}} \neq 0, \tag{18}$$

и тем самым исключая евклидов случай, из (17) получим, что

$$c_{m+i\,m+j} = 0 \quad (i,\ j \text{ — любые}), \quad c_{m+i\,j} = c_{i\,m+j} = 0 \quad (i \neq j)$$

$$c_{m+i\,i} = c.$$

Таким образом, матрица $\|c_{\alpha\beta}\|$ должна иметь вид

$$\begin{Vmatrix} M & cE \\ cE & O \end{Vmatrix},$$

где M — некоторая симметрическая матрица порядка m, E — единичная матрица порядка m.

Рассмотрим теперь условия в) в начале координат. Обозначим $f(0) = k$. Тогда, если $k = 0$, эти условия будут

$$\begin{Vmatrix} M & cE \\ cE & O \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} O & E \\ E & O \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} M & cE \\ cE & O \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} M & cE \\ cE & O \end{Vmatrix}$$

или

$$\begin{Vmatrix} 2cM & c^2E \\ c^2E & O \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} M & cE \\ cE & O \end{Vmatrix}.$$

Отсюда следует, что $c = 0$ или $c = 1$, $M = O$. В первом случае получим $c_{\alpha\beta} = 0$, во втором — $c_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta}$. Так как оба тензора удовлетворяют одним и тем же дифференциальным уравнениям и совпадают в начале координат, то это будет и во всем пространстве.

Если $k \neq 0$, то преобразованием $x^{m+p} \to x^{m+p} - \frac{1}{2} k \varepsilon^p x^p$ придем к метрике такого же вида $ds^2 = 2\sum_i dx^i dx^{m+i} + \varphi(x^m)\varepsilon_p dx^{p^2}$, где $\varphi(x^m) = f(x^m) - k$. Теперь $\varphi(0) = 0$ и мы находимся в условиях предыдущего случая. Таким образом, неприводимость пространств (15) доказана.

Вид метрики (15) неприводимых пространств Веденяпина позволяет довольно просто выявить их некоторые интересные свойства.

Рассмотрим линейные многообразия этих пространств $x^{m+p} = c^{m+p} =$ $=$ const. Как следует из (15), на этих многообразиях индуцируется метрика $ds^2 = 2dx^m dx^{2m} + f(x^m)\varepsilon_p dx^{p^2}$, т. е. метрика субпроективных пространств исключительного случая. Далее, линейные многообразия $x^i = c^i$ являются нулевыми многообразиями максимального порядка. В гиперплоскости $x^m =$ $=$ const индуцируется евклидова метрика.

В связи с этим представляют интерес пространства, обладающие аналогичными свойствами, но несущими в многообразиях $x^{m+p} = c^{m+p}$ метрику субпроективных пространств основного случая, т. е. пространства, линейный элемент которых можно привести к виду

$$ds^2 = 2\sum_p dx^p dx^{m+p} + dx^{m^2} + f(x^m) ds_1^2(x^1, \ldots, x^{m-1}), \qquad (19)$$

где ds_1^2 — метрика пространства V_{m-1} постоянной кривизны. Эти пространства также неприводимы, но их геодезические линии лежат уже в трехмерных плоскостях.

В предложенной координатной системе легко найти и группу движений пространств Веденяпина.

§ 3. ИЗУЧЕНИЕ ГРУППЫ ДВИЖЕНИЙ

Уравнения Киллинга

$$Lg_{\alpha\beta} \equiv \xi^\gamma \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\gamma} + g_{\alpha\gamma}\frac{\partial \xi^\gamma}{\partial x^\beta} + g_{\beta\gamma}\frac{\partial \xi^\gamma}{\partial x^\alpha} = 0,$$

где $Lg_{\alpha\beta}$ означает производную Ли метрического тензора $g_{\alpha\beta}$ по отношению к вектору ξ^α, для пространств (15) будут:

$$\delta_{pq}\varepsilon_p \frac{df}{dx^m}\xi^m + f\left(\varepsilon^p \frac{\partial \xi^p}{\partial x^q} + \varepsilon^q \frac{\partial \xi^q}{\partial x^p}\right) + \frac{\partial \xi^{m+p}}{\partial x^q} + \frac{\partial \xi^{m+q}}{\partial x^p} = 0, \qquad (20.а)$$

$$\varepsilon^p f \frac{\partial \xi^p}{\partial x^m} + \frac{\partial \xi^{m+p}}{\partial x^m} + \frac{\partial \xi^{2m}}{\partial x^p} = 0, \qquad (20.б)$$

$$\varepsilon^p f \frac{\partial \xi^p}{\partial x^{m+i}} + \frac{\partial \xi^{m+p}}{\partial x^{m+i}} + \frac{\partial \xi^i}{\partial x^p} = 0, \qquad (20.в)$$

$$\frac{\partial \xi^{2m}}{\partial x^{m+i}} + \frac{\partial \xi^i}{\partial x^m} = 0, \qquad (20.г)$$

$$\frac{\partial \xi^{2m}}{\partial x^m} = 0, \qquad (20.д)$$

$$\frac{\partial \xi^i}{\partial x^{m+j}} + \frac{\partial \xi^j}{\partial x^{m+i}} = 0. \tag{20.е}$$

Из (20.е) следует, что

$$\xi^i = \varphi^i_j(x^1, \ldots, x^m)\, x^{m+j} + \varphi^i(x^1, \ldots, x^m) \tag{21}$$

с условием

$$\varphi^i_j(x^1, \ldots, x^m) = -\varphi^j_i(x^1, \ldots, x^m), \tag{22}$$

а из (20.д)

$$\xi^{2m} = (x^1, \ldots, x^{m-1}, x^{m+1}, \ldots, x^n). \tag{23}$$

Дифференцируя уравнения (20.г) по x^m и учитывая (20.д) и (21), получим

$$\frac{\partial^2 \varphi^i_j}{\partial x^{m^2}} x^{m+j} + \frac{\partial^2 \varphi^i}{\partial x^{m^2}} = 0,$$

откуда следует, что

$$\frac{\partial^2 \varphi^i_j}{\partial x^{m^2}} = 0, \qquad \frac{\partial^2 \varphi^i}{\partial x^{m^2}} = 0.$$

Таким образом, функции φ^i_j и φ^i должны иметь вид:

$$\begin{aligned} \varphi^i_j(x^1, \ldots, x^m) &= \psi^i_j(x^1, \ldots, x^{m-1})\, x^m + \chi^i_j(x^1, \ldots, x^{m-1}), \\ \varphi^i(x^1, \ldots, x^m) &= \psi^i(x^1, \ldots, x^{m-1})\, x^m + \chi^i(x^1, \ldots, x^{m-1}). \end{aligned} \tag{24}$$

Рассмотрим теперь уравнения (20.г) с учетом (24):

$$\frac{\partial \xi^{2m}}{\partial x^{m+i}} = -\frac{\partial \xi^i}{\partial x^m} = -\psi^i_j\, x^{m+j} - \psi^i. \tag{25}$$

Дифференцируя эти соотношения по x^{m+j} $(j \neq i)$ и учитывая, что $\frac{\partial^2 \xi^{2m}}{\partial x^{m+i} \partial x^{m+j}} = \frac{\partial^2 \xi^{2m}}{\partial x^{m+j} \partial x^{m+i}}$, получим

$$\psi^i_j = \psi^j_i. \tag{26}$$

Но, принимая во внимание (22) и (24), заключаем, что

$$\psi^i_j = 0. \tag{27}$$

Учитывая (27) и интегрируя (25), получим

$$\begin{aligned} \xi^i &= \chi^i_j(x^1, \ldots, x^{m-1})\, x^{m+j} + \psi^i(x^1, \ldots, x^{m-1})\, x^m + \chi^i(x^1, \ldots, x^{m-1}), \\ \xi^{2m} &= -\sum_k \psi^k(x^1, \ldots, x^{m-1})\, x^{m+k} + \varphi^{2m}(x^1, \ldots, x^{m-1}). \end{aligned} \tag{28}$$

Аналогично из (20.в) можно показать, что $\chi^i_j(x^1, \ldots, x^{m-1}) = c^i_j$ — const и выразить ξ^{m+p} в следующем виде:

$$\xi^{m+p} = -\sum_k \left(\varepsilon^p c^p_k f + \frac{\partial \psi^k}{\partial x^p} x^m + \frac{\partial \chi^k}{\partial x^p} \right) x^{m+k} + \varphi^{m+p}(x^1, \ldots, x^m).$$

Рассмотрим уравнения (20.б), используя полученные выше выражения для ξ^α. Получим:

$$\varepsilon^p f \psi^p - \varepsilon^p c^p_k \frac{df}{dx^m} x^{m+k} - 2 \sum_k \frac{\partial \psi^k}{\partial x^p} x^{m+k} + \frac{\partial \varphi^{m+p}}{\partial x^m} + \frac{\partial \varphi^{2m}}{\partial x^p} = 0. \tag{29}$$

Продифференцируем эти соотношения по x^{m+k}:

$$\varepsilon^p c_k^p \frac{df}{dx^m} + 2\frac{\partial \psi^k}{\partial x^p} = 0, \tag{30}$$

а затем по x^m: $\varepsilon^p c_k^p \frac{d^2 f}{dx^{m^2}} = 0$.

Учитывая (18), получим $c_k^p = 0$, а в силу косой симметрии c_j^i заключаем, что и $c_p^m = 0$. Из (30) следует также, что $\psi^k = c^k = \text{const}$. Теперь из (29) легко находятся φ^{m+p}:

$$\varphi^{m+p} = -\varepsilon^p c^p \int f(x^m)\, dx^m - \frac{\partial \varphi^{2m}}{\partial x^p} x^m + \psi^{m+p}(x^1, \ldots, x^{m-1}).$$

Таким образом, перед использованием уравнений (20.а) имеем

$$\xi^i = c^i x^m + \chi^i(x^1, \ldots, x^{m-1}),$$

$$\xi^{2m} = -\sum_k c^k x^{m+k} + \varphi^{2m}(x^1, \ldots, x^{m-1}), \tag{31}$$

$$\xi^{m+p} = -\sum_k \frac{\partial \chi^k}{\partial x^p} x^{m+k} - \varepsilon^p c^p \int f(x^m)\, dx^m - \frac{\partial \varphi^{2m}}{\partial x^p} x^m + \psi^{m+p}(x^1, \ldots, x^{m-1}).$$

Подставим эти соотношения в уравнения (20.а), записав их отдельно для случая $p = q$ и $p \neq q$. (Тем самым мы исключаем пока случай $m = 2$, когда уравнения (20.а) сводятся к одному при $p = q = 1$):

$$\frac{df}{dx^m}(c^m x^m + \chi^m) + 2f\frac{\partial \chi^p}{\partial x^p} - 2\varepsilon^p \sum_k \frac{\partial^2 \chi^k}{\partial x^{p^2}} x^{m+k} -$$

$$- 2\varepsilon^p \frac{\partial^2 \varphi^{2m}}{\partial x^{p^2}} x^m + 2\varepsilon^p \frac{\partial \psi^{m+p}}{\partial x^p} = 0, \tag{32.а}$$

$$f\left(\varepsilon^p \frac{\partial \chi^p}{\partial x^q} + \varepsilon^q \frac{\partial \chi^q}{\partial x^p}\right) - 2\sum_k \frac{\partial^2 \chi^k}{\partial x^p \partial x^q} x^{m+k} - 2\frac{\partial^2 \varphi^{2m}}{\partial x^p \partial x^q} x^m +$$

$$+ \frac{\partial \psi^{m+p}}{\partial x^q} + \frac{\partial \psi^{m+q}}{\partial x^p} = 0, \quad (p \neq q). \tag{32.б}$$

Из этих соотношений сразу очевидно, что $\frac{\partial^2 \chi^k}{\partial x^p \partial x^q} = 0$ для любых p, q, т. е.

$$\chi^k(x^1, \ldots, x^{m-1}) = \alpha_p^k x^p + \alpha^k. \tag{33}$$

Учитывая (33) и то, что $f(x^m)$ не содержит членов первой степени, из (32.б) получим:

$$\varepsilon^p \alpha_q^p + \varepsilon^q \alpha_p^q = 0, \quad (p \neq q); \tag{34}$$

$$\frac{\partial^2 \varphi^{2m}}{\partial x^p \partial x^q} = 0, \quad (p \neq q); \tag{35}$$

$$\frac{\partial \psi^{m+p}}{\partial x^q} + \frac{\partial \psi^{m+q}}{\partial x^p} = 0, \quad (p \neq q). \tag{36}$$

Из (35) следует, что

$$\varphi^{2m}(x^1, \ldots, x^{m-1}) = \sum_p t^p(x^p), \tag{37}$$

где функции t^p зависят только от соответствующих x^p.

Принимая во внимание последние соотношения и дифференцируя соотношения (30.а) по x^q и затем по x^m, найдем, что

$$\alpha_q^m = 0, \quad \frac{\partial^2 \psi^{m+p}}{\partial x^p \partial x^q} = 0, \quad (p \neq q). \tag{38}$$

Дифференцируя же (30.а) по x^p и x^m, получим:

$$\frac{\partial^2 \psi^{m+p}}{\partial x^{p^2}} = 0, \tag{39}$$

$$\frac{d^3 t^p}{dx^{p^3}} = 0. \tag{40}$$

Из (40) следует:

$$t^p(x^p) = \mu^p x^{p^2} + \nu^p x^p + \rho^p. \tag{41}$$

Из рассмотрения условий (36), (38), (39) на функции ψ^{m+p} заключаем, что они должны быть вида

$$\psi^{m+p}(x^1, \ldots, x^{m-1}) = a^{m+p} x^p + a_q^{m+p} x^q + b^{m+p}, \quad (q \neq p), \tag{42}$$

с условием

$$a_q^{m+p} = -a_p^{m+q}. \tag{43}$$

Условия (32.а) примут вид

$$\frac{df}{dx^m}(c^m x^m + \alpha^m) + 2f(x^m)\alpha_p^p - 4\varepsilon^p \mu^p x^m + 2\varepsilon^p a^{m+p} = 0. \tag{44}$$

Напишем это соотношение для $q \neq p$ и возьмем их разность. Получим

$$2f(x^m)(\alpha_p^p - \alpha_q^q) + 4x^m(\varepsilon^q \mu^q - \varepsilon^p \mu^p) + 2(\varepsilon^p a^{m+p} - \varepsilon^q a^{m+q}) = 0.$$

Отсюда следует, что

$$\alpha_p^p = \alpha_q^q = A, \quad \varepsilon^p a^{m+p} = \varepsilon^q a^{m+q} = B, \quad \varepsilon^p \mu^p = \varepsilon^q \mu^q = C,$$

и вместо (44) имеем соотношение

$$\frac{df}{dx^m}(c^m x^m + \alpha^m) + 2Af(x^m) - 4Cx^m + 2B = 0. \tag{45}$$

Принимая во внимание все предыдущие соотношения, для ξ^α получим выражения:

$$\xi^p = c^p x^m + Ax^p + \alpha_q^p x^q + \alpha^p, \quad (q \neq p);$$

$$\xi^m = c^m x^m + \alpha^m,$$

$$\xi^{m+p} = -Ax^{m+p} - \sum_q \alpha_p^q x^{m+q} - \varepsilon^p c^p \int f(x^m)\,dx^m - 2\varepsilon^p C x^p x^m - \tag{46}$$

$$- \nu^p x^m + \varepsilon^p B x^p + a_q^{m+p} x^q + b^{m+p}, \quad (q \neq p);$$

$$\xi^{2m} = -\sum_k c^k x^{m+k} + \sum_p (C\varepsilon^p x^{p^2} + \nu^p x^p) + d, \quad \left(d = \sum_p \rho^p\right).$$

Для произвольной функции $f(x^m)$ из (45) следует, что $c^m = a^m = A = B = C = 0$ и, таким образом, всегда будем иметь $m^2 + m - 1$ существенных постоянных c^p, a_q^p, α^p, ν^p, a_q^{m+p}, b^{m+p}, d $(q \neq p)$. Следовательно, при $f(x^m)$ — произвольной функции группа движений пространств (15) зависит от $m^2 + m - 1$ параметров. В общем случае группа не является транзитивной.

Исследование уравнения (45) позволяет нам судить о максимально возможном порядке группы движений, который может допускаться пространствами (15). Для сокращения записи перепишем его в виде

$$f'(x)(Px + Q) + Rf(x) + Sx + T = 0. \tag{45'}$$

Предполагая $f(x)$ аналитической функцией, и полагая первоначально $f(0) \neq 0$, разложим $f(x)$ в окрестности $x = 0$ в ряд

$$f(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3 + \ldots$$

Тогда (45′) примет вид

$$(\alpha_1 + 2\alpha_2 x + 3\alpha_3 x^2 + \ldots)(Px + Q) + (\alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3 + \ldots) R + Sx + T = 0.$$

Это соотношение должно выполняться тождественно относительно x. Приводя подобные и приравнивая нулю коэффициенты при степенях x, получим:

$$\begin{aligned}
\alpha_1 Q + \alpha_0 R + T &= 0,\\
\alpha_1 P + 2\alpha_2 Q + \alpha_1 R + S &= 0,\\
2\alpha_2 P + 3\alpha_3 Q + \alpha_2 R &= 0,\\
3\alpha_3 P + 4\alpha_4 Q + \alpha_3 R &= 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\\
k\alpha_k P + (k+1)\alpha_{k+1} Q + \alpha_k R &= 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned} \tag{47}$$

Матрица коэффициентов относительно неизвестных P, Q, R, S, T

$$\left\| \begin{array}{ccccc}
0 & \alpha_1 & \alpha_0 & 0 & 1\\
\alpha_1 & 2\alpha_2 & \alpha_1 & 1 & 0\\
2\alpha_2 & 3\alpha_3 & \alpha_2 & 0 & 0\\
3\alpha_3 & 4\alpha_4 & \alpha_3 & 0 & 0\\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\
k\alpha_k & (k+1)\alpha_{k+1} & \alpha_k & 0 & 0\\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots
\end{array} \right\| \tag{48}$$

имеет ранг не более пяти и, как видно из строения ее двух первых строк, не меньше двух. Рассмотрим возможные случаи.

Если ранг $r = 2$, то из (48) следует, что $\alpha_2 = \alpha_3 = \ldots = 0$. Тогда $f(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x$, и мы получим евклидово пространство.

Рассмотрим $r = 3$. В этом случае любой определитель второго порядка, составленный из элементов третьей, четвертой и т. д. строк, должен равняться нулю. Из рассмотрения третьей и четвертой строк следует $\alpha_3 = 0$, $\alpha_2\alpha_4 = 0$, $\alpha_2\alpha_3 = 0$. Если бы $\alpha_4 \neq 0$, то из строения матрицы (48) следовало бы, что ее ранг по крайней мере не меньше четырех, что противоречит

предположению. Таким образом, $\alpha_4 = 0$. Аналогично $\alpha_5 = \alpha_6 = \ldots = 0$. Заключаем, что необходимо $\alpha_2 \neq 0$. В этом случае $f(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2$, а из системы (47) получим две независимые постоянные.

Если $r = 4$, то получим одну независимую постоянную, если $r = 5$, то система (47) имеет только нулевое решение.

Мы предполагали $f(0) \neq 0$. Однако все предыдущие рассуждения проходят, если разложить $f(x)$ по степеням $x - x_0$ ($f(x_0) \neq 0$) и привести подобные относительно $(x - x_0)^k$, ($k = 0, 1, 2, \ldots$).

Вычисляя для пространств Веденяпина ковариантные производные тензора кривизны, получим

$$R^{m+p}_{mp,\,m;\,m} = \frac{1}{2}\,\varepsilon^p \frac{d^3 f}{dx^{m^3}}, \quad R^{2m}_{mp,\,p;\,m} = -\frac{1}{2}\,\varepsilon^p \frac{d^3 f}{dx^{m^3}}.$$

Отсюда следует, что симметрические пространства получаются при $f(x^m) = ax^{m^2} + bx^m + c$. Но, как уже отмечалось, члены $bx^m + c$ за счет подходящего выбора системы координат можно убрать. a является несущественной постоянной и ее можно положить равной единице. Таким образом, имеем:

$$ds^2 = 2\sum_i dx^i\, dx^{m+i} + x^{m^2}\,\varepsilon_p\, dx^{p^2}. \tag{49}$$

В итоге предыдущих рассмотрений получаем утверждение: максимальный порядок группы движений пространств Веденяпина равен $r = m^2 + m + 1$ и достигается симметрическими пространствами Веденяпина.

Из условия (45) при $f = x^{m^2}$ получим: $c^m + A = 0$, $\alpha^m - 2C = 0$, $B = 0$.

Запишем соответствующие операторы инфинитезимальных преобразований:

$$\begin{gathered}
X_q = p_q, \quad X_{m+i} = p_{m+i}, \\
X_m = p_m + \frac{1}{2}\,\varepsilon_p\, x^{p^2} p_{2m} - x^m\,\varepsilon_q\, x^q p_{m+q}, \\
X_{rq} = x^q p_r - \varepsilon^r x^r\,\varepsilon_q\, p_q + \varepsilon^q x^{m+q}\,\varepsilon_r\, p_{m+r} - x^{m+r} p_{m+q}, \quad (r \neq q), \\
Y_q = x^m p_q - x^{m+q} p_{2m} - \frac{1}{3}\,\varepsilon_q\, x^{m^3} p_{m+q}, \\
Y_m = x^m p_m - x^q p_q - x^{2m} p_{2m} + x^{m+q} p_{m+q}, \\
Z_q = x^q p_{2m} - x^m p_{m+q}, \quad Z_{rq} = x^q p_{m+r} - x^r p_{m+q}, \quad (r \neq q).
\end{gathered} \tag{50}$$

Группа транзитивная. Исследуем ее структуру.

$$\begin{gathered}
[X_p X_m] = \varepsilon_p Z_p, \quad [X_p X_{rq}] = \delta_{pq} X_r - \varepsilon_r \varepsilon_q\, \delta_{pr} X_q, \\
[X_p Y_m] = -X_p, \quad [X_p Z_q] = \delta_{pq} X_{2m}, \quad [X_p Z_{pq}] = \delta_{pq} X_{m+r} - \delta_{pr} X_{m+q}, \\
[X_p X_q] = 0, \quad [X_p X_{m+i}] = 0, \quad [X_p Y_q] = 0, \\
[X_m X_{m+i}] = 0, \quad [X_m X_{pq}] = 0, \quad [X_m Z_{pq}] = 0, \quad [X_m Y_m] = X_m, \\
[X_m Y_p] = X_p, \quad [X_m Z_p] = -X_{m+p}, \quad [X_{m+p} X_{m+q}] = 0, \quad [X_{m+p} Y_q] = -\delta_{pq} X_{2m}, \\
[X_{m+p} Y_m] = X_{m+p}, \quad [X_{m+p} X_{rq}] = \varepsilon_r \varepsilon_q\, \delta_{pq} X_{m+r} - \delta_{pr} X_{m+q}, \\
[X_{m+p} Z_q] = 0, \quad [X_{m+p} Z_{rq}] = 0, \quad [X_{2m} X_{m+p}] = 0, \quad [X_{2m} X_{pq}] = 0, \\
[X_{2m} Y_p] = 0, \quad [X_{2m} Y_m] = -X_{2m}, \quad [X_{2m} Z_p] = 0, \quad [X_{2m} Z_{pq}] = 0,
\end{gathered}$$

$$[X_{pq}Y_r] = \delta_{pr}\varepsilon_p\varepsilon_q Y_q - \delta_{qr}Y_p, \quad [X_{pq}Z_r] = \delta_{pr}Z_q - \varepsilon_p\varepsilon_q\delta_{qr}Z_p,$$

$$[X_{pq}X_{rs}] = \delta_{ps}X_{rq} - \delta_{qr}X_{ps} + \varepsilon_p\varepsilon_q\delta_{pr}X_{qs} - \varepsilon_p\varepsilon_q\delta_{qs}X_{rp},$$

$$[X_{pq}Z_{rs}] = \delta_{ps}Z_{rq} + \delta_{pr}Z_{qs} + \varepsilon_p\varepsilon_q\delta_{sq}Z_{pr} + \varepsilon_p\varepsilon_q\delta_{qr}Z_{sp},$$

$$[X_{pq}Y_m] = 0, \quad [Y_qY_p] = 0, \quad [Y_pY_m] = -2Y_p, \quad [Y_pZ_q] = 0,$$

$$[Y_mZ_q] = 0, \quad [Y_mZ_{pq}] = -2Z_{pq}, \quad [Y_pZ_{rq}] = \delta_{pr}Z_q - \delta_{pq}Z_r,$$

$$[Z_pZ_{rq}] = 0, \quad [Z_{pq}Z_{rs}] = 0.$$

Как видно из приведенных формул, первый коммутант содержит все операторы группы, кроме Y_m. Во второй коммутант не войдет еще X_m, однако третий и последующие для $m > 3$ будут совпадать. Следовательно, для $m > 3$ группа неразрешима. Легко проверить, что для $m = 3$ группа разрешима. Из приведенных формул следует также, что операторы X_{pq} есть операторы простой группы, изоморфной группе псевдоортогональных матриц, а остальные операторы соответствуют максимальному разрешимому нормальному делителю.

В случае $m = 2$ для $f = x^{m^2}$ получим G_8. Этот пример разобран Веденяпиным.

Полагая $f = e^{x^m}$, получим пример пространства, обладающего группой движений порядка $r = m^2 + m$ (верно и для $m = 2$).

Литература

1. Каган В. Ф. Субпроективные пространства. М., 1961.
2. Vrănceanu G. Studii şi cerc. mat., V, № 1—2, 173—223, 1954.
3. Веденяпин Д. В. О некоторых (n-2) — кратно проективных пространствах. Кандидатская диссертация, МГУ, 1955.
4. Vodnev V. Studii şi cerc. mat., XV, № 5, 621—634, 1964.
5. Vodnev V. Studii şi cerc. mat., XV, № 7, 927—933, 1964.
6. Воднев В. Т., Феденко А. С. Труды I Белорусской математической конференции. 1965, 277—282.

Белорусский государственный университет им. В. И. Ленина

Поступило в редакцию 17.X 1967

ВЕСЦІ АКАДЭМІІ НАВУК БЕЛАРУСКАЙ ССР № 1 1968
СЕРЫЯ ФІЗІКА-МАТЭМАТЫЧНЫХ НАВУК

УДК 539.12

А. А. БОГУШ, Б. В. КРЫЛОВ, Ф. И. ФЕДОРОВ

О МАТРИЦАХ УРАВНЕНИЙ ДЛЯ ЧАСТИЦ СО СПИНОМ 2

В [1] был изложен подход, который позволяет осуществлять переход от системы тензорных дифференциальных уравнений первого порядка, описывающих частицы с целым спином, к матричным уравнениям в стандартной форме. При этом матрицы уравнений выражаются через элементы матричной алгебры в пространстве волновых функций. В настоящей работе описанный метод применяется к уравнениям для частиц со спином 2.

Согласно [2—4], уравнения первого порядка для частицы со спином 2 имеют вид:

$$\partial_\mu \psi_\mu = -\varkappa_1 \sqrt{2}\,\psi_0,\quad \partial_\mu \psi_0 - \frac{2}{\sqrt{3}}\,\partial_\lambda \psi_{(\lambda\mu)} = -\varkappa_2 \sqrt{2}\,\psi_\mu,$$

$$\partial_\lambda \psi_{\mu[\lambda\nu]} + \partial_\lambda \psi_{\nu[\lambda\mu]} - \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\partial_\mu \psi_\nu + \partial_\nu \psi_\mu - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{2}\,\delta_{\mu\nu}\partial_\lambda \psi_\lambda\right) = \varkappa_1 \sqrt{2}\;\psi_{(\mu\nu)}, \qquad (1)$$

$$-\partial_\lambda \psi_{(\mu\nu)} + \partial_\nu \psi_{(\mu\lambda)} + \frac{1}{3}[(\delta_{\mu\lambda}\,\partial_\sigma \psi_{(\sigma\nu)} - \delta_{\mu\nu}\,\partial_\sigma \psi_{(\sigma\lambda)}) = \varkappa_2 \sqrt{2}\;\psi_{\mu[\nu\lambda]},$$

причем

$$\varkappa_1 = \varkappa_2 = \varkappa = \frac{m_0 c}{\hbar} \text{ для } m_0 \neq 0, \qquad (2)$$

$$\varkappa_1 = 0,\ \varkappa_2 = 1 \text{ для } m_0 = 0. \qquad (3)$$

Компоненты тензоров, реализующих используемые неприводимые представления группы Лоренца, связаны следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} &\psi_{(\mu\nu)} = \psi_{(\nu\mu)},\quad \psi_{(\mu\mu)} = 0,\\ &\psi_{\mu[\nu\lambda]} = -\psi_{\mu[\lambda\nu]},\quad \psi_{\mu[\mu\lambda]} = 0,\\ &\psi^x_{\mu[\mu\lambda]} = \frac{1}{2}\,\varepsilon_{\mu\lambda\rho\sigma}\,\psi_{\mu[\rho\sigma]} = 0, \end{aligned} \qquad (4)$$

причем последнее равносильно уравнению

$$\psi_{\mu[\nu\lambda]} + \psi_{\nu[\lambda\mu]} + \psi_{\lambda[\mu\nu]} = 0.$$

Здесь использовано обозначение

$$\psi^x_{\mu[\nu\lambda]} = \frac{1}{2}\,\varepsilon_{\nu\lambda\rho\sigma}\,\psi_{\mu[\rho\sigma]}, \qquad (5)$$

Удовлетворяющие этим условиям величины $\psi_{(\mu\nu)}$ и $\psi_{\mu[\nu\lambda]}$ могут быть выражены через компоненты общих тензоров второго $\psi_{\rho\sigma}$ и третьего $\psi_{\rho\sigma\varkappa}$ рангов с помощью соответствующих обобщенных символов Кронекера (см. [1]) следующим образом:

$$\psi_{(\mu\nu)} = \delta_{(\mu\nu),(\rho\sigma)}\,\psi_{\rho\sigma}, \quad \psi_{\mu[\nu\lambda]} = \delta_{\mu[\nu\lambda],\rho[\sigma\varkappa]}\,\psi_{\rho\sigma\varkappa}, \tag{6}$$

где

$$\delta_{(\mu\nu),(\rho\sigma)} = \frac{1}{2}\left(\delta_{\mu\rho}\delta_{\nu\sigma} + \delta_{\mu\sigma}\delta_{\nu\rho} - \frac{1}{2}\,\delta_{\mu\nu}\delta_{\rho\sigma}\right), \tag{7}$$

$$\delta_{\mu[\nu\lambda],\rho[\sigma\varkappa]} = \frac{1}{6}\,(2\delta_{[\rho\mu],[\tau\eta]} + \delta_{\rho\mu}\delta_{\tau\eta})\,\varepsilon_{\alpha\tau\nu\lambda}\,\varepsilon_{\alpha\eta\sigma\varkappa} =$$

$$= \frac{1}{6}\left(\begin{vmatrix} 3\delta_{\mu\rho} & \delta_{\rho\sigma} & \delta_{\rho\varkappa} \\ \delta_{\mu\nu} & \delta_{\nu\sigma} & \delta_{\nu\varkappa} \\ \delta_{\mu\lambda} & \delta_{\lambda\sigma} & \delta_{\lambda\varkappa} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \delta_{\mu\rho} & \delta_{\mu\sigma} & \delta_{\mu\varkappa} \\ \delta_{\nu\rho} & \delta_{\nu\sigma} & \delta_{\nu\varkappa} \\ \delta_{\lambda\rho} & \delta_{\lambda\sigma} & \delta_{\lambda\varkappa} \end{vmatrix}\right) =$$

$$= \frac{1}{3}\,(2\,\delta_{\mu\rho}\delta_{[\nu\lambda],[\sigma\varkappa]} - \delta_{\mu\nu}\delta_{[\rho\lambda],[\sigma\varkappa]} + \delta_{\mu\lambda}\delta_{[\rho\nu],[\sigma\varkappa]} + \delta_{\nu\rho}\delta_{[\mu\lambda],[\sigma\varkappa]} - \delta_{\lambda\rho}\delta_{[\mu\nu],[\sigma\varkappa]}), \tag{8}$$

причем

$$\delta_{[\mu\nu][\sigma\varkappa]} = \frac{1}{2}\,(\delta_{\mu\sigma}\delta_{\nu\varkappa} - \delta_{\mu\varkappa}\delta_{\nu\sigma}). \tag{8'}$$

Используя (6) — (8), уравнения (1) можно записать в более компактной форме:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\,\partial_\mu\,\psi_\mu = -\,\varkappa_1\,\psi_0, \quad \frac{1}{\sqrt{2}}\,\partial_\mu\,\psi_0 - \sqrt{\frac{2}{3}}\,\partial_\lambda\,\psi_{(\lambda\mu)} = -\,\varkappa_2\psi_\mu,$$

$$-\sqrt{2}\delta_{(\mu\nu)(\rho\sigma)}\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\,\partial_\lambda\,\psi_{\rho[\lambda\sigma]} - \frac{1}{\sqrt{6}}\,\partial_\rho\,\psi_\sigma\right] = -\,\varkappa_1\psi_{(\mu\nu)}, \tag{9}$$

$$\delta_{\mu[\nu\lambda],\rho[\sigma\varkappa]}\,\sqrt{2}\,\partial_\varkappa\,\psi_{(\rho\sigma)} = -\,\varkappa_2\psi_{\mu[\nu\lambda]}.$$

Введем многокомпонентную функцию

$$\psi = \{\psi_A\} = \begin{Bmatrix} \psi_0 \\ \psi_\mu \\ \psi_{(\mu\nu)} \\ \psi_{\mu[\nu\lambda]} \end{Bmatrix}, \quad (A = \{0,\ \mu,\ (\mu\nu),\ \mu[\nu\lambda]\}). \tag{10}$$

Полное число компонент этой функции будет равно 85 ($\psi_0 \sim 1$, $\psi_\mu \sim 4$, $\psi_{(\mu\nu)} \sim 16$, $\psi_{\mu[\nu\lambda]} \sim 64$). Если же учитывать только независимые компоненты, то размерности подпространств будут $\delta_{00} = 1$, $\delta_{\mu,\mu} = 4$, $\delta_{(\mu\nu),(\mu\nu)} = 9$, $\delta_{\mu[\nu\lambda],\mu[\nu\lambda]} = 16$, т. е. функция ψ (10) будет иметь 30 компонент [2]. Поступая теперь аналогично случаю векторного поля [1], т. е. вводя собирательные индексы для компонент функции ψ_B (10) ($B = \{0,\ \mu,\ (\mu\nu),\ \mu[\nu\lambda]\}$) и такую же нумерацию для строчек-уравнений (A), с помощью обобщенных δ-символов Кронекера систему (9) можно представить в виде одного уравнения:

$$\partial_\mu\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}\delta_{0,A}\,\delta_{\mu,B} + \delta_{\mu,A}\,\delta_{0,B}\right) - \sqrt{\frac{2}{3}}\,(\delta_{\nu,A}\,\delta_{(\mu\nu),B} - \delta_{(\mu\nu),A}\ \ \delta_{\nu,B}) -$$

$$-\sqrt{2}\,(\delta_{(\nu\lambda),A}\,\delta_{\lambda[\mu\nu],B}+\delta_{\lambda[\mu\nu],A}\,\delta_{(\nu\lambda),B})\Big\}\psi_B- \tag{11}$$

$$-\{\varkappa_1(\delta_{0,A}\,\delta_{0,B}+\delta_{(\mu\nu),A}\,\delta_{(\mu\nu),B})+\varkappa_2(\delta_{\mu,A}\,\delta_{\mu,B}+\delta_{\mu[\nu\lambda],A}\,\delta_{\mu[\nu\lambda],B})\}\psi_B=0.$$

Введем теперь в пространстве функций (10) обобщенные элементы матричной алгебры e^{AB} (см. [1]), определяемые соотношениями

$$(e^{AB})_{CD}=\delta_{AC}\,\delta_{BD},\quad e^{AB}\,e^{CD}=\delta_{BC}\,e^{AD}. \tag{12}$$

В соответствии с этим имеем

$$\delta_{0,A}\,\delta_{\mu,B}=(e^{0\mu})_{AB},\quad \delta_{(\nu\lambda),A}\,\delta_{\lambda[\mu\nu],B}=(e^{(\nu\lambda),\lambda[\mu\nu]})_{AB}\ \text{и т. д.;}$$

кроме того,

$$e^{\mu,(\nu\lambda)}\,e^{(\rho\sigma),\tau}=\delta_{(\nu\lambda),(\rho\sigma)}\,e^{\mu\tau},$$

$$e^{\mu,\nu[\lambda\tau]}\,e^{\nu'[\lambda'\tau'],\mu'}=\delta_{\nu[\lambda\tau],\nu'[\lambda'\tau']}\,e^{\mu,\mu'},\ \ldots.$$

При этом очевидно, что свойства симметрии индексов обобщенных символов Кронекера (4) в соответствии с (12) автоматически переносятся на индексы элементов матричной алгебры, например:

$$e^{\nu,(\mu\nu)}=e^{\nu,(\nu\mu)},\ e^{(\rho\sigma),\lambda[\mu\nu]}=e^{(\sigma\rho),\lambda[\mu\nu]}=-e^{(\rho\sigma),\lambda[\nu\mu]},\ e^{\nu,(\mu\mu)}=0\ \text{и т. д.}$$

В результате из (11) получим

$$\partial_\mu\Big\{\frac{1}{\sqrt{2}}(e^{0,\mu}+e^{\mu,0})-\sqrt{\frac{2}{3}}(e^{\nu,(\mu\nu)}-e^{(\mu\nu),\nu})-$$

$$-\sqrt{2}\,(e^{(\nu\lambda),\lambda[\mu\nu]}+e^{\lambda[\mu\nu],[\nu\lambda]})\Big\}_{AB}\psi_B+\{\varkappa_1(e^{0,0}+$$

$$+e^{(\mu\nu),(\mu\nu)})+\varkappa_2(e^{\mu,\mu}+e^{\mu[\nu\lambda],\mu[\nu\lambda]})\}_{AB}\psi_B=0 \tag{13}$$

или

$$(\partial_\mu\gamma_\mu+\varkappa_1 P+\varkappa_2\overline{P})\,\psi=0, \tag{14}$$

где

$$\gamma_\mu=\frac{1}{\sqrt{2}}(e^{0,\mu}+e^{\mu,0})-\sqrt{\frac{2}{3}}(e^{\nu,(\mu\nu)}-e^{(\mu\nu),\nu})-$$

$$-\sqrt{2}\,(e^{(\nu\lambda),\lambda[\mu\nu]}+e^{\lambda[\mu\nu],(\nu\lambda)}), \tag{15}$$

$$P=e^{0,0}+e^{(\mu\nu),(\mu\nu)},\quad \overline{P}=e^{\mu,\mu}+e^{\mu[\nu\lambda],\mu[\nu\lambda]}. \tag{16}$$

Используя (12), (7) и (8), нетрудно проверить, что операторы P и $\overline{P}$ удовлетворяют условиям

$$PP=P,\quad \overline{P}\,\overline{P}=\overline{P},\quad P\overline{P}=\overline{P}P=0,\quad P+\overline{P}=I, \tag{17}$$

т. е. представляют собой проективные операторы, выделяющие соответственно инвариантные подпространства: P—скаляров ψ_0 и тензоров второго ранга $\psi_{(\mu\nu)}$, $\overline{P}$—векторов ψ_μ и тензоров третьего ранга $\psi_{\mu[\nu\lambda]}$. Из (2), (14), (17) получаем уравнение для частицы со спином 2 и ненулевой массой покоя в стандартной матричной форме

$$(\gamma_\mu\partial_\mu+\varkappa)\,\psi=0, \tag{18}$$

где основные матрицы γ_μ определяются формулой (15). Заметим, что приведенное в [3] представление этих матриц через матрицы-диады типа

$|0><\mu|$, составленные из базисных ортов в пространстве волновых функций, по существу эквивалентно приведенному выше, если учесть принятые там условия нормировки. Полагая $\varkappa_1 = 0$, $\varkappa_2 = 1$ (3), получим обобщенное релятивистское волновое уравнение (см. [5]) для частицы со спином 2 и нулевой массой покоя (гравитон):

$$(\gamma_\mu \partial_\mu + \gamma_0)\psi = 0, \quad \gamma_0 = \overline{P}. \tag{19}$$

Легко проверить, что для P, $\overline{P}$ и γ_μ справедливы те же соотношения, которые были получены в [6, 7] для алгебры матриц Даффина—Кеммера (векторное и скалярное поля):

$$\begin{gathered}\gamma_\mu = P\gamma_\mu\overline{P} + \overline{P}\gamma_\mu P = \gamma_\mu P + P\gamma_\mu = \gamma_\mu\overline{P} + \overline{P}\gamma_\mu, \\ P\gamma_\mu P = \overline{P}\gamma_\mu\overline{P} = 0, \\ \gamma_\mu P - \overline{P}\gamma_\mu = \gamma_\mu\overline{P} - P\gamma_\mu = 0, \\ P\gamma_\mu\gamma_\nu - \gamma_\mu\gamma_\nu P = \overline{P}\gamma_\mu\gamma_\nu - \gamma_\mu\gamma_\nu\overline{P} = 0, \\ P\gamma_\mu\gamma_\nu\overline{P} = \overline{P}\gamma_\mu\gamma_\nu P = 0.\end{gathered} \tag{20}$$

Соответственно имеем (ср. [7]):

$$P\gamma_{\mu_1}\gamma_{\mu_2}\cdots\gamma_{\mu_n}P = \overline{P}\gamma_{\mu_1}\gamma_{\mu_2}\cdots\gamma_{\mu_n}\overline{P} = 0, \quad (n = 2k+1), \tag{21}$$

$$P\gamma_{\mu_1}\gamma_{\mu_2}\cdots\gamma_{\mu_n}\overline{P} = \overline{P}\gamma_{\mu_1}\gamma_{\mu_2}\cdots\gamma_{\mu_n}P = 0, \quad (n = 2k, \ k = 0, 1, 2, \ldots), \tag{22}$$

откуда следует, что

$$\gamma_{\mu_1}\gamma_{\mu_2}\cdots\gamma_{\mu_n} = P\gamma_{\mu_1}\gamma_{\mu_2}\cdots\gamma_{\mu_n}P + \overline{P}\gamma_{\mu_1}\gamma_{\mu_2}\cdots\gamma_{\mu_n}\overline{P}, \quad (n = 2k), \tag{23}$$

$$\gamma_{\mu_1}\gamma_{\mu_2}\cdots\gamma_{\mu_n} = P\gamma_{\mu_1}\gamma_{\mu_2}\cdots\gamma_{\mu_n}\overline{P} + \overline{P}\gamma_{\mu_1}\gamma_{\mu_2}\cdots\gamma_{\mu_n}P, \quad (n = 2k+1). \tag{24}$$

Отсюда легко получается тот известный результат, что след от произведения нечетного числа матриц γ_μ всегда равен нулю. Для произведения четного числа матриц γ_μ по аналогии с [7] можно написать

$$\begin{aligned}Sp\{\gamma_{\mu_1}\gamma_{\mu_2}\cdots\gamma_{\mu_n}\} &= Sp\{\gamma_{\mu_1}\gamma_{\mu_2}\cdots\gamma_{\mu_n}P\} + Sp\{\gamma_{\mu_1}\gamma_{\mu_2}\cdots\gamma_{\mu_n}\overline{P}\} = \\ &= Sp\{(P\gamma_{\mu_1}\gamma_{\mu_2}P)(P\gamma_{\mu_3}\gamma_{\mu_4}P)\cdots(P\gamma_{\mu_{n-1}}\gamma_{\mu_n}P)\} + \\ &+ Sp\{(\overline{P}\gamma_{\mu_1}\gamma_{\mu_2}\overline{P})(\overline{P}\gamma_{\mu_3}\gamma_{\mu_4}\overline{P})\cdots(\overline{P}_{\gamma\mu_{n-1}}\gamma_{\mu_n}\overline{P})\}.\end{aligned} \tag{25}$$

Учитывая, что след не зависит от циклической перестановки матриц, и используя соотношения

$$\gamma_\mu P = \overline{P}\gamma_\mu, \ \gamma_\mu\overline{P} = P\gamma_\mu, \tag{20'}$$

будем иметь

$$Sp\{\gamma_{\mu_1}\gamma_{\mu_2}\gamma_{\mu_3}\cdots\gamma_{\mu_n}P\} = Sp\{\gamma_{\mu_n}\gamma_{\mu_1}\gamma_{\mu_2}\cdots\gamma_{\mu_{n-2}}\gamma_{\mu_{n-1}}\overline{P}\}, \tag{26}$$

$$Sp\{\gamma_{\mu_1}\gamma_{\mu_2}\gamma_{\mu_3}\cdots\gamma_{\mu_n}\overline{P}\} = Sp\{\gamma_{\mu_n}\gamma_{\mu_1}\gamma_{\mu_2}\cdots\gamma_{\mu_{n-2}}\gamma_{\mu_{n-1}}P\}. \tag{27}$$

Поэтому, как и в случае матриц Даффина — Кеммера (см. [7, 8]), след (25) можно выразить через однотипные комбинации $(P\gamma_\mu\gamma_\nu P)$ или $(\overline{P}\gamma_\mu\gamma_\nu\overline{P})$. Например,

$$\begin{aligned}&Sp\{\gamma_{\mu_1}\gamma_{\mu_2}\gamma_{\mu_3}\cdots\gamma_{\mu_{n-1}}\gamma_{\mu_n}\} = \\ &= Sp\{(P\gamma_{\mu_1}\gamma_{\mu_2}P)(P\gamma_{\mu_3}\gamma_{\mu_4}P)\cdots(P\gamma_{\mu_{n-1}}\gamma_{\mu_n}P)\} + \\ &+ Sp\{(P\gamma_{\mu_n}\gamma_{\mu_1}P)(P\gamma_{\mu_2}\gamma_{\mu_3}P)\cdots(P\gamma_{\mu_{n-2}}\gamma_{\mu_{n-1}}P)\}.\end{aligned} \tag{28}$$

Очевидно, нет необходимости вычислять оба слагаемых в (28), поскольку каждое из них можно получить из другого циклической перестановкой индексов.

Используя представление (15), получим

$$\gamma_\mu\gamma_\nu = \frac{1}{2}\delta_{\mu\nu}P_1 + \frac{1}{3}(2e^{\mu,\nu} - e^{\nu,\mu}) - \frac{1}{3}\delta_{\mu\nu}P_2 +$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{3}}(e^{(\mu\nu),0} - e^{0,(\mu\nu)}) - (e^{(\alpha\mu),(\alpha\nu)} + e^{(\alpha\nu),(\alpha\mu)}) +$$

$$+ \delta_{\mu\nu}P_3 + e^{\alpha[\mu\beta],\alpha[\nu\beta]} + e^{\beta[\mu\alpha],\alpha[\nu\beta]} +$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{3}}(e^{\alpha,\mu[\nu\alpha]} + e^{\alpha,\nu[\mu\alpha]} - e^{\alpha[\mu\nu],\alpha} - e^{\nu[\mu\alpha],\alpha}). \qquad (29)$$

Здесь $P_1 = e^{0,0}$, $P_2 = e^{\mu,\mu}$, $P_3 = e^{(\rho\sigma),(\rho\sigma)}$, $P_4 = e^{\mu[\nu\lambda],\mu[\nu\lambda]}$. Отсюда находим ($P = P_1 + P_3$, $\overline{P} = P_2 + P_4$):

$$P\gamma_\mu\gamma_\nu P = \frac{1}{2}\delta_{\mu\nu}P_1 + \frac{1}{\sqrt{3}}(e^{(\mu\nu),0} - e^{0,(\mu\nu)}) -$$

$$- (e^{(\alpha\mu),(\alpha\nu)} + e^{(\alpha\nu),(\alpha\mu)}) + \delta_{\mu\nu}P_3, \qquad (30)$$

$$\overline{P}\gamma_\mu\gamma_\nu\overline{P} = \frac{1}{3}(2e^{\mu,\nu} - e^{\nu,\mu}) - \frac{1}{3}\delta_{\mu\nu}P_2 + e^{\alpha[\mu\beta],\alpha[\nu\beta]} +$$

$$+ e^{\beta[\mu\alpha],\alpha[\nu\beta]} + \frac{1}{\sqrt{3}}(e^{\alpha,\mu[\nu\alpha]} + e^{\alpha,\nu[\mu\alpha]} - e^{\alpha[\mu\nu],\alpha} - e^{\nu[\mu\alpha],\alpha}). \qquad (31)$$

Используя свойство $Spe^{AB} = \delta_{AB}$, из (30), (31) находим

$$Sp(P\gamma_\mu\gamma_\nu P) = \frac{1}{2}\delta_{\mu\nu} - \delta_{(\alpha\mu),(\alpha\nu)} - \delta_{(\alpha\nu),(\alpha\mu)} + \delta_{\mu\nu}\delta_{(\alpha\beta),(\alpha\beta)} = 5\delta_{\mu\nu},$$

$$Sp(\overline{P}\gamma_\mu\gamma_\nu\overline{P}) = \frac{2}{3}\delta_{\mu\nu} - \frac{1}{3}\delta_{\mu\nu} - \frac{1}{3}\delta_{\mu\nu}\delta_{\alpha,\alpha} +$$

$$+ \delta_{\alpha[\mu\beta],\alpha[\nu\beta]} + \delta_{\beta[\mu\alpha],\alpha[\nu\beta]} = 5\delta_{\mu\nu}.$$

Здесь учтено, что

$$SpP_1 = \delta_{0,0} = 1, \quad SpP_2 = \delta_{\mu\mu} = 4, \quad SpP_3 = \delta_{(\alpha\beta),(\alpha\beta)} = 9,$$

$$SpP_4 = \delta_{\mu[\nu\lambda],\mu[\nu\lambda]} = 16.$$

Подставляя выражение (30) в (28), мы можем в принципе получить общую формулу для следов от произведения любого четного числа матриц γ_μ. Приведем вычисленные таким образом формулы для простейших случаев:

$$Sp(\gamma_\mu\gamma_\nu P) = 5\delta_{\mu\nu}, \quad Sp(\gamma_\mu\gamma_\nu\overline{P}) = Sp(\gamma_\nu\gamma_\mu P) = 5\delta_{\mu\nu},$$

$$Sp(\gamma_\mu\gamma_\nu) = Sp(\gamma_\mu\gamma_\nu P) + Sp(\gamma_\mu\gamma_\nu\overline{P}) = 10\delta_{\mu\nu};$$

$$Sp(\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\rho\gamma_\sigma P) = \frac{5}{3}(\delta_{\mu\nu}\delta_{\rho\sigma} + \delta_{\mu\sigma}\delta_{\nu\rho} + \delta_{\mu\rho}\delta_{\nu\sigma}),$$

$$Sp(\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\rho\gamma_\sigma\overline{P}) = Sp(\gamma_\sigma\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\rho P) = Sp(\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\rho\gamma_\sigma P),$$

$$Sp(\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\rho\gamma_\sigma) = \frac{10}{3}(\delta_{\mu\nu}\delta_{\rho\sigma} + \delta_{\mu\sigma}\delta_{\nu\rho} + \delta_{\mu\rho}\delta_{\nu\sigma});$$

$$Sp(\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\rho\gamma_\sigma\gamma_\varkappa\gamma_\lambda P) = \frac{5}{6}(\delta_{\mu\varkappa}\delta_{\rho\sigma}\delta_{\nu\lambda} + \delta_{\mu\lambda}\delta_{\nu\varkappa}\delta_{\rho\sigma} +$$

$$+ \delta_{\mu\nu}\delta_{\rho\lambda}\delta_{\sigma\varkappa} + \delta_{\mu\nu}\delta_{\rho\varkappa}\delta_{\sigma\lambda} + \delta_{\mu\sigma}\delta_{\nu\rho}\delta_{\varkappa\lambda} + \delta_{\mu\rho}\delta_{\nu\sigma}\delta_{\varkappa\lambda}),$$

$$Sp(\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\rho\gamma_\sigma\gamma_\varkappa\gamma_\lambda \overline{P}) = Sp(\gamma_\lambda\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\rho\gamma_\sigma\gamma_\varkappa P) =$$

$$= \frac{5}{6}(\delta_{\nu\lambda}\delta_{\sigma\varkappa}\delta_{\mu\rho} + \delta_{\mu\nu}\delta_{\rho\lambda}\delta_{\sigma\varkappa} + \delta_{\nu\rho}\delta_{\mu\sigma}\delta_{\varkappa\lambda} + \delta_{\nu\rho}\delta_{\sigma\lambda}\delta_{\mu\varkappa} +$$

$$+ \delta_{\nu\varkappa}\delta_{\rho\sigma}\delta_{\mu\lambda} + \delta_{\nu\sigma}\delta_{\rho\varkappa}\delta_{\mu\lambda}),$$

$$Sp(\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\rho\gamma_\sigma\gamma_\varkappa\gamma_\lambda) = \frac{5}{3}(\delta_{\mu\nu}\delta_{\rho\lambda}\delta_{\sigma\varkappa} + \delta_{\mu\sigma}\delta_{\nu\rho}\delta_{\varkappa\lambda} + \delta_{\mu\lambda}\delta_{\nu\varkappa}\delta_{\rho\sigma}) +$$

$$+ \frac{5}{6}(\delta_{\mu\nu}\delta_{\rho\varkappa}\delta_{\sigma\lambda} + \delta_{\mu\rho}\delta_{\nu\sigma}\delta_{\varkappa\lambda} + \delta_{\mu\rho}\delta_{\sigma\varkappa}\delta_{\rho\lambda} + \delta_{\mu\varkappa}\delta_{\rho\sigma}\delta_{\nu\lambda} +$$

$$+ \delta_{\mu\varkappa}\delta_{\nu\rho}\delta_{\sigma\lambda} + \delta_{\mu\lambda}\delta_{\nu\sigma}\delta_{\rho\varkappa}). \qquad (32)$$

Заметим, что общая формула для следа от произведения шести матриц γ_μ, содержащая 9 членов, оказывается более простой, чем в случае алгебры Дирака, когда она насчитывает 15 членов [9].

Как и в случае алгебры Даффина—Кеммера, можно получить выражения для проективных операторов P и $\overline{P}$ через квадраты матриц $\gamma^2 = \sum_{\mu=1}^{4} \gamma_\mu^2$. В соответствии с (29) имеем

$$\gamma^2 = 2(P_1 + P_3) - P_2 + P_4 + e^{\mu[\nu\lambda],\lambda[\nu\mu]}. \qquad (33)$$

Но, как можно показать, используя свойства симметрии тензорных индексов $\mu[\nu\lambda]$,

$$e^{\mu[\nu\lambda],\lambda[\nu\mu]} = \frac{1}{2}e^{\mu[\nu\lambda],\mu[\nu\lambda]} = \frac{1}{2}P_4.$$

Следовательно, матрица γ^2 в соответствии с ее инвариантностью относительно преобразований представлений группы Лоренца и леммой Шура является диагональной матрицей:

$$\gamma^2 = 2(P_1 + P_3) - P_2 + \frac{3}{2}P_4 = 2P - P_2 + \frac{3}{2}P_4. \qquad (34)$$

Используя дополнительные уравнения

$$P + P_2 + P_4 = I, \quad (\gamma^2)^2 = 4P + P_2 + \frac{9}{4}P_4, \qquad (35)$$

легко находим

$$P = P_1 + P_3 = \frac{1}{9}[2(\gamma^2)^2 + \gamma^2 - 1] = \frac{2}{9}\left(\gamma^2 - \frac{1}{2}\right)(\gamma^2 + 1), \qquad (36)$$

$$\overline{P} = P_2 + P_4 = -\frac{1}{9}[2(\gamma^2)^2 + \gamma^2 - 10] = -\frac{2}{9}\left(\gamma^2 + \frac{5}{2}\right)(\gamma^2 - 2). \qquad (37)$$

Отсюда следует, что минимальное уравнение для матрицы γ^2 имеет вид

$$\left(\gamma^2 - \frac{1}{2}\right)(\gamma^2 + 1)(\gamma^2 - 2)\left(\gamma^2 + \frac{5}{2}\right) = 0. \tag{38}$$

Из минимального полинома для матрицы $\hat{p} = p_\mu \gamma_\mu$

$$\hat{p}^3 (\hat{p}^2 - p^2) = 0 \tag{39}$$

следует, что общие перестановочные соотношения для матриц γ_μ должны иметь вид:

$$\sum_P \gamma_{\mu_1}\gamma_{\mu_2}\gamma_{\mu_3}\gamma_{\mu_4}\gamma_{\mu_5} = \sum_P \delta_{\mu_1\mu_2}\gamma_{\mu_3}\gamma_{\mu_4}\gamma_{\mu_5}, \tag{40}$$

где суммирование производится по всем $5! = 120$ перестановкам из пяти индексов. Впрочем, если учесть, что среди пяти индексов $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_5$ имеется не больше четырех различных, т. е. по крайней мере два индекса будут совпадать, максимальное число членов в левой части составит $5!/2! = 60$.

Ввиду громоздкости общего соотношения рассмотрим случай, когда среди пяти матриц, входящих в левую часть равенства (40), имеется лишь две различных. Такой случай может реализоваться в двух вариантах: $5 = 1 + 4$ и $5 = 2 + 3$.

В первом случае расчет, основанный на формуле (15), приводит к соотношению

$$\begin{aligned}\sum_P \gamma_\mu (\gamma_\nu)^4 &= \gamma_\mu (\gamma_\nu)^4 + \gamma_\nu\gamma_\mu (\gamma_\nu)^3 + (\gamma_\nu)^2 \gamma_\mu (\gamma_\nu)^2 + (\gamma_\nu)^3 \gamma_\mu\gamma_\nu + \\ &+ (\gamma_\nu)^4 \gamma_\mu = \delta_{\mu\nu} (\gamma_\nu)^3 + \delta_{\mu\nu} (\gamma_\nu)^3 + \delta_{\nu\nu} \gamma_\mu(\gamma_\nu)^2 + \delta_{\nu\nu} \gamma_\nu\gamma_\mu\gamma_\nu + \\ &+ \delta_{\nu\nu} (\gamma_\nu)^2 \gamma_\mu = \gamma_\mu (\gamma_\nu)^2 + \gamma_\nu\gamma_\mu\gamma_\nu + (\gamma_\nu)^2 \gamma_\mu.\end{aligned} \tag{41}$$

Во втором случае ($5 = 2 + 3$) имеем

$$\begin{aligned}\sum_P (\gamma_\mu)^2 (\gamma_\nu)^3 &= (\gamma_\mu)^2 (\gamma_\nu)^3 + \gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\mu (\gamma_\nu)^2 + \gamma_\mu (\gamma_\nu)^2 \gamma_\mu\gamma_\nu + \\ &+ \gamma_\mu (\gamma_\nu)^3 \gamma_\mu + \gamma_\nu (\gamma_\mu)^2 (\gamma_\nu)^2 + \gamma_\nu\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\mu\gamma_\nu + \gamma_\nu\gamma_\mu (\gamma_\nu)^2 \gamma_\mu + \\ &+ (\gamma_\nu)^2 (\gamma_\mu)^2 \gamma_\nu + (\gamma_\nu)^2 \gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\mu + (\gamma_\nu)^3 (\gamma_\mu)^2 = \\ &= (\gamma_\nu)^3 + (\gamma_\mu)^2 \gamma_\nu + \gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\mu + \gamma_\nu (\gamma_\mu)^2.\end{aligned} \tag{42}$$

В данных простейших частных случаях обе части содержат все возможные перестановки индексов, соответствующие формуле (40). Напомним, что в случае спинов 0 и 1 из минимального полинома третьей степени $\hat{p}(\hat{p}^2 - p^2) = 0$ следует возможность алгебры $\sum_P \gamma_{\mu_1}\gamma_{\mu_2}\gamma_{\mu_3} = \sum_P \delta_{\mu_1\mu_2}\gamma_{\mu_3}$, содержащей в левой части 6 слагаемых. Фактически же соответствующая этому случаю алгебра Даффина — Кеммера имеет вид $\gamma_{\mu_1}\gamma_{\mu_2}\gamma_{\mu_3} + \gamma_{\mu_3}\gamma_{\mu_2}\gamma_{\mu_1} = \delta_{\mu_1\mu_2}\gamma_{\mu_3} + \delta_{\mu_3\mu_2}\gamma_{\mu_1}$, т. е. она значительно проще общей алгебры, вытекающей из минимального полинома. Для случая двух разных матриц общая алгебра приводит к соотношению $(\gamma_\mu)^2 \gamma_\nu + \gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\mu + \gamma_\nu (\gamma_\mu)^2 = \gamma_\nu$, а фактически для матриц скалярного поля $\gamma_\mu = e^{0,\mu} + e^{\mu,0}$ имеем $(\gamma_\mu)^2 \gamma_\nu + \gamma_\nu (\gamma_\mu)^2 = \gamma_\nu$, т. е. упрощение имеет место и в этом частном случае. В противоположность этому формулы (41) и (42), рассчитанные с помощью

выражений (15) для матриц γ_μ (для частного случая двух различных матриц), не упрощаются по сравнению с формулами (40). Это дает основание думать, что и в общем случае алгебра матриц (15) по сравнению с общим соотношением (40) не упрощается.

Литература

1. Богуш А. А., Федоров Ф. И. ДАН БССР, **12**, № 1, 21, 1968.
2. Федоров Ф. И. Уч. зап. БГУ, сер. физ.-мат. наук, вып. 12, 156, 1951.
3. Regge T. Nuovo Cimento, **5**, 325, 1957.
4. Крылов Б. В., Федоров Ф. И. ДАН БССР, **11**, № 8, 1967.
5. Федоров Ф. И. ДАН СССР, **82**, 7, 1952.
6. Федоров Ф. И. ЖЭТФ, **31**, 140, 1956.
7. Богуш А. А., Федоров Ф. И. ДАН БССР, **6**, 81, 1962.
8. Мороз Л. Г. Диссертация. Минск, 1961.
9. Ахиезер А. И., Берестецкий В. Б. Квантовая электродинамика. Физматгиз, 1959.

Институт физики
АН БССР

Поступило в редакцию
8.IX 1967

ВЕСЦІ АКАДЭМІІ НАВУК БЕЛАРУСКАЙ ССР № 1 1968
СЕРЫЯ ФІЗІКА-МАТЭМАТЫЧНЫХ НАВУК

УДК 530.145.7

А. Г. МАХАНЕК, В. С. КОРОЛЬКОВ, Н. Н. ЛОНГ

ЗАДАЧА ОБ ЭКРАНИРОВАНИИ И АНТИЭКРАНИРОВАНИИ ЯДЕРНЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ МОМЕНТОВ

Для определения ядерных квадрупольных и более высоких мультипольных моментов из экспериментальных данных возникает необходимость теоретического вычисления градиентов полей. При расчете градиентов полей, создаваемых внешними зарядами в месте расположения ядер, следует учитывать влияние эффектов экранирования и антиэкранирования, т. е. вычислять добавочные градиенты полей, которые вызваны поляризацией замкнутых электронных оболочек внешними зарядами. Такая искаженная оболочка, не будучи сферически симметричной, вносит дополнительный вклад в градиент поля, который пропорционален величине внешнего поля. Этот дополнительный индуцированный градиент поля может как ослаблять внешнее поле (эффект экранирования), так и усиливать его (эффект антиэкранирования).

Впервые на необходимость учета эффекта деформации заполненных оболочек указал Штернхеймер в работе [1]. В дальнейшем эти эффекты явились предметом исследования многих работ. Постоянные экранирования и антиэкранирования вычислялись как при помощи волновых функций, полученных путем численного решения возмущенного уравнения Шредингера [2], так и вариационными методами [3]. В [4—10] были также приведены отдельные случаи аналитического решения возмущенного уравнения.

В настоящей работе мы детально рассмотрим все случаи получения замкнутого и простого решения этой задачи и приведем общие выражения и вычисленные на их основе значения для величин экранирования и антиэкранирования потенциалов произвольной мультипольности.

ЭКРАНИРОВАНИЕ И АНТИЭКРАНИРОВАНИЕ КВАДРУПОЛЬНЫХ ЯДЕРНЫХ МОМЕНТОВ

Пусть ион с квадрупольным моментом ядра Q помещен в поле единичного внешнего заряда $+e$ на расстоянии R. В этом случае для квадрупольной части взаимодействия уравнение Шредингера в первом приближении теории возмущений можно записать в виде

$$\left[H^{(0)} + V_a^{(2)} + V_b^{(2)}\right]\left[\bar{u}_{nlm}^{(0)} + \bar{u}_a^{(1)} + \bar{u}_b^{(1)}\right] = \left[E^{(0)} + E_a^{(1)} + E_b^{(1)}\right]\left[\bar{u}_{nlm}^{(0)} + \bar{u}_a^{(1)} + \bar{u}_b^{(1)}\right], \quad (1)$$

где (в ридбергах)

$$V_a^{(2)} = -Q\,\frac{(3\cos^2\theta - 1)}{r^3} = -\frac{2Q}{r^3}\sqrt{\frac{4\pi}{5}}\,Y_0^2(\theta, \varphi), \quad (1.а)$$

$$V_b^{(2)} = -\frac{r^2(3\cos^2\theta - 1)}{R^3} = -\frac{2r^2}{R^3}\sqrt{\frac{4\pi}{5}}\,Y_0^2(\theta, \varphi). \quad (1.б)$$

$\bar{u}^{(0)}_{nlm} = u^{(0)}_{nl} Y^l_m(\theta, \varphi)$ — невозмущенная волновая функция некоторого nlm-электрона, нормированная, согласно $\int_0^\infty u^{02}_{nl}(r)\,dr = 1$,

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} |Y^l_m(\theta, \varphi)|^2 \sin\theta\, d\theta d\varphi = 1.$$

$\bar{u}^{(1)}_a$, $\bar{u}^{(1)}_b$ — поправки первого приближения, обусловленные V_a и V_b соответственно. R и r — в единицах радиуса Бора a_0.

Разделив в уравнении (1) члены первого порядка с V_a и V_b, получим

$$[H^{(0)} - E^{(0)}]\,\bar{u}^{(1)}_a = -\left[V^{(2)}_a - E^{(1)}_a\right]\bar{u}^{(0)}_{nlm}; \qquad (2)$$

$$[H^{(0)} - E^{(0)}]\,\bar{u}^{(1)}_b = -\left[V^{(2)}_b - E^{(1)}_b\right]\bar{u}^{(0)}_{nlm}. \qquad (3)$$

Нас интересует энергия взаимодействия E_a квадрупольного момента ядра с градиентом поля, т. е. два перекрестных члена второго порядка малости, пропорциональных $\frac{Q}{R^3}$. Как было показано нами в [11], эту энергию можно найти двумя эквивалентными подходами, решая или только уравнение (2), или (3).

Рассмотрим уравнение (3). Подставив в (3) значения $\bar{u}^{(0)}_{nlm}$, $V^{(2)}_b$ и поправку к энергии первого приближения, равную

$$E^{(1)}_b = \langle \bar{u}^{(0)}_{nlm} | V^{(2)}_b | \bar{u}^{(0)}_{nlm} \rangle =$$

$$= -\frac{2}{R^3}\left(\frac{4\pi}{5}\right)^{1/2} \langle u^0_{nl}(r)|r^2|u^0_{nl}(r)\rangle \langle Y^l_m | Y^2_0 | Y^l_m\rangle = \qquad (4)$$

$$= -\frac{2}{R^3}\langle r^2\rangle_{nl}(2l+1)\begin{pmatrix} 2l\,l \\ 000\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2\;l\;\;l \\ 0m{-}m\end{pmatrix}(-1)^m,$$

где величины в круглых скобках обозначают 3-j символы Вигнера*), получим

$$[H^{(0)} - E^{(0)}]\,\bar{u}^{(1)}_b = \frac{2}{R^3}\left(\frac{4\pi}{5}\right)^{1/2} r^2 Y^2_0 Y^l_m u^0_{nl}(r) -$$

$$-\frac{2}{R^3}\langle r^2\rangle_{nl}(2l+1)\begin{pmatrix} 2l\,l \\ 000\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0\;l\;\;l \\ 0m{-}m\end{pmatrix}(-1)^m Y^l_m u^0_{nl}(r). \qquad (5)$$

В первом слагаемом правой части уравнения (5) содержится произведение сферических гармоник $Y^2_0 Y^l_m$. Если учесть общее свойство разложения сферических гармоник

$$Y^t_p Y^l_m = \sum_{l'm'} \sqrt{\frac{(2t+1)(2l+1)(2l'+1)}{4\pi}}\begin{pmatrix} t\;l\;l' \\ 0\,0\,0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} t\,l\,l' \\ pmm'\end{pmatrix} Y^{l'*}_{m'}, \qquad (6)$$

то легко видеть, что решение для поправочной функции $\bar{u}^{(1)}_b$ с некоторым значением l' следует искать в виде

$$u^{(1)}_b = \frac{2}{R^3}\left[(2l+1)(2l'+1)\right]^{1/2} u^1_{b\,nl\to l'}(r) \times$$

$$\times \sum_{m'}\begin{pmatrix} 2\,l\,l' \\ 000\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2\;l\;\;l' \\ 0mm'\end{pmatrix} Y^{l'*}_{m'}. \qquad (7)$$

*) Таблицы значений 3—j-символов приведены в [12].

Это решение будет удовлетворять уравнению (5), если радиальная волновая функция $u^1_{b\,nl\to l'}(r)$ является решением уравнения

$$\left[-\frac{d^2}{dr^2}+\frac{l'(l'+1)}{r^2}+V^{(0)}-E^{(0)}\right] u^1_{b\,nl\to l'}(r)= \\ =u^0_{nl}(r)\,[r^2-<r^2>_{nl}\delta_{ll'}]. \tag{8}$$

Тогда выражение для дополнительного градиента поля, создаваемого деформированной оболочкой, может быть записано следующим образом:

$$\Delta q(nl\to l')=4\sum_{m,m'}<\bar{u}^{(0)}_{nlm}\left|\frac{Y^2_0}{r^3}\left(\frac{16\pi}{5}\right)^{1/2}\right|\bar{u}^{(1)}_b>= \\ =\frac{16}{R^3}\,\frac{(2l+1)(2l'+1)}{5}\begin{pmatrix}2\,l\,l'\\000\end{pmatrix}^2\int_0^\infty\frac{u^0_{nl}(r)\,u^1_{b\,nl\to l'}}{r^3}\,dr. \tag{9}$$

При вычислении (9) учтено, что

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}Y^t_pY^l_mY^{l'}_{m'}\sin\theta\,d\theta\,d\varphi= \\ =\sqrt{\frac{(2t+1)(2l+1)(2l'+1)}{4\pi}}\begin{pmatrix}t\,l\,l'\\000\end{pmatrix}\begin{pmatrix}t\,l\,l'\\pmm'\end{pmatrix}, \tag{10}$$

и приняты во внимание свойства ортогональности коэффициентов Вигнера, т. е.

$$\sum_{mm'}\begin{pmatrix}t\,l\,l'\\pmm'\end{pmatrix}\begin{pmatrix}t'\,l\,l'\\p'mm'\end{pmatrix}=\frac{1}{2t+1}\,\delta_{tt'}\,\delta_{pp'}. \tag{11}$$

Поделив (9) на внешний градиент поля $\frac{2}{R^3}$, для константы экранирования получаем выражение

$$\gamma_2(nl\to l')=\frac{8(2l+1)(2l'+1)}{5}\begin{pmatrix}2\,l\,l'\\000\end{pmatrix}^2\times \\ \times\int_0^\infty\frac{u^0_{nl}(r)\,u^1_{b\,nl\to l'}}{r^3}\,dr. \tag{12}$$

Если же воспользоваться решением уравнения (2), то нетрудно увидеть, что ввиду одинаковости угловых частей операторов V_a и V_b решение до приведенного выше момента будет полностью аналогичным. В этом случае мы получим

$$\gamma_2(nl\to l')=\frac{8(2l+1)(2l'+1)}{5}\begin{pmatrix}2\,l\,l'\\000\end{pmatrix}^2\times \\ \times\int_0^\infty u^0_{nl}\,u^1_{a\,nl\to l'}\,r^2dr, \tag{13}$$

где волновая функция $u^1_{a\,nl\to l'}$ удовлетворяет уравнению

$$\left[-\frac{d^2}{dr^2}+\frac{l'(l'+1)}{r^2}+V^{(0)}-E^{(0)}\right]u^1_{a\,nl\to l'}(r)=$$

$$=u^0_{nl}(r)\left[\frac{1}{r^3}-<\frac{1}{r^3}>_{nl}\delta_{ll'}\right]. \qquad (14)$$

Таким образом, задача сводится к решению уравнений (8) или (14) для радиальных функций.

Прежде всего рассмотрим случай радиального возмущения $nl\to l$, когда $l'=l$, которое приводит к эффекту антиэкранирования.

а) Константы антиэкранирования $\gamma_2(nl\to l)$. Уравнение (8) для $l'=l$ имеет вид

$$\left[-\frac{d^2}{dr^2}+\frac{l(l+1)}{r^2}+V^{(0)}-E^{(0)}\right]u^1_{b\,nl\to l}(r)=u^0_{nl}[r^2-<r^2>_{nl}]. \qquad (15)$$

Как показано в [4, 5], это уравнение просто решается в квадратурах, в итоге чего для поправочной функции и постоянной экранирования получаются следующие выражения:

$$u^1_{b\,nl\to l'}=\sqrt{\rho}\left[c-\int\frac{\int(r^2-<r^2>)\rho dr}{\rho}\,dr\right], \qquad (16)$$

$$c=\int_0^\infty\rho\left[\int\frac{\int(r^2-<r^2>)\,\rho\,dr}{\rho}\,dr\right]dr, \qquad (17)$$

$$\gamma_2(nl\to l)=\frac{8(2l+1)^2}{5}\begin{pmatrix}2\,l\,l\\0\,0\,0\end{pmatrix}^2\times$$

$$\times\left\{\left(\int_0^\infty\frac{\rho}{r^3}\,dr\right)\int_0^\infty\rho\left[\int\frac{\int\rho(r^2-<r^2>)\,dr}{\rho}\,dr\right]dr-\right. \qquad (18)$$

$$\left.-\int_0^\infty\frac{\rho}{r^3}\left[\int\frac{\int\rho(r^2-<r^2>dr}{\rho}\,dr\right]dr\right\},$$

где $\rho=u^{02}_{nl}(r)$ — радиальная плотность невозмущенной волновой функции nl-оболочки.

Решение (16) верно для любого модельного гамильтониана, т. е. для гамильтониана с произвольным видом невозмущенной потенциальной энергией $V^{(0)}$. Ясно, что в этом случае для расчета эффекта экранирования можно воспользоваться любой подходящей аналитической или численной аппроксимацией невозмущенной электронной плотности. Выражение постоянных антиэкранирования через электронные плотности невозмущенных электронных оболочек особенно полезно как при использовании полуэмпирических методов расчета, так и при использовании аналитических представлений радиальных электронных функций. Так, например, в [5] постоянные $\gamma_2(nl\to l)$ вычислялись на основе использования вычисленных нами полуэмпирических значений параметров $<r^{-3}>$

(см. [13]) и экспериментальных значений дипольной поляризуемости ионов. Постоянные антиэкранирования вычислялись также с использованием в качестве ρ радиальных водородоподобных плотностей. Результаты этих вычислений, приведенные нами в [4], были несколько позже получены также в работе [9]. Рассмотрение задачи с точки зрения первого подхода, описанного выше, приводит к результату

$$\gamma_2(nl \to l) = \frac{8(2l+1)^2}{5} \begin{pmatrix} 2\,l\,l \\ 000 \end{pmatrix}^2 \left\{ \left(\int_0^\infty \rho\, r^2 dr \right) \times \right.$$

$$\times \int_0^\infty \rho \left[\int \frac{\int \rho (r^{-3} - \langle r^{-3} \rangle dr}{\rho}\, dr \right] dr - \tag{19}$$

$$\left. - \int_0^\infty \rho\, r^2 \left[\int \frac{\int \rho (r^{-3} - \langle r^{-3} \rangle dr}{\rho}\, dr \right] dr \right\},$$

который нетрудно получить из (13) и (14).

Общие выражения для постоянных квадрупольного антиэкранирования в случае проникновения внешнего заряда в замкнутые оболочки (например, в случае поляризации замкнутых оболочек валентными электронами) были проведены нами в [6].

б) Константы экранирования $\gamma_2(nl \to l')$. Рассмотрим теперь ту часть возбуждения, которая связана с изменением как радиального, так и углового сомножителя у поправочной волновой функции, т. е. угловой тип возмущения $nl \to l'$, когда $l \neq l'$. В случае углового типа возбуждения для произвольного вида потенциала $V^{(0)}(r)$ нельзя получить решения в замкнутом виде ни для уравнения (14), которое соответствует первому подходу в теории возмущения (см. (2)), ни для уравнения (8), которое соответствует второму подходу (см. (3)). Тем не менее для водородоподобного потенциала, когда уравнения (14) и (8) соответственно принимают вид

$$\left[-\frac{d^2}{dr^2} + \frac{l'(l'+1)}{r^2} - \frac{2z}{r} + \frac{z^2}{n^2} \right] u^1_{a\, nl \to l'} = \frac{u^0_{nl}}{r^3}, \tag{20}$$

$$\left[-\frac{d^2}{dr^2} + \frac{l'(l'+1)}{r^2} - \frac{2z}{r} + \frac{z^2}{n^2} \right] u^1_{b\, nl \to l'} = r^2 u^0_{nl}, \tag{21}$$

может быть найдено достаточно простое аналитическое решение. Собственно говоря, уравнения (20) и (21) верны лишь для $l' \geqslant n$, когда следует применить теорию возмущения при отсутствии вырождения. Решения для этого случая мы приведем ниже для потенциалов произвольной мультипольности. При $l' < n$ уровни с различными значениями l и l' для водородоподобного потенциала вырождены и в качестве правильных функций нулевого приближения следует выбирать определенные линейные комбинации невозмущенных функций, принадлежащих вырожденному уровню, что значительно усложняет решение.

Как отмечено нами в [11], авторам работы [9] удалось получить решение уравнения (21) лишь в одном простейшем случае $3s \to d$ возмущения. Никаких трудностей не возникает, если воспользоваться решением не уравнения (21), а уравнения (20), т. е. первым, описанным ранее, подходом в теории возмущения. Преимущество первого подхода обусловле-

но тем, что оператор возмущения $V_a^{(2)}$ не перемешивает волновых функций, относящихся к вырожденному уровню, поскольку недиагональные матричные элементы этого оператора равны нулю. При этом обратим внимание на тот факт, что недиагональные матричные элементы оператора $V_a^{(2)}$ равны нулю по причине равенства нулю радиального интеграла, входящего в матричный элемент, т. е.

$$\int_0^\infty \frac{u_{nl}^0 u_{nl'}^0}{r^3}\, dr = 0, \tag{22}$$

где $l' = l \pm 2$, а не углового, как это обычно встречается в практике расчетов. Благодаря этому обстоятельству уравнение (20) остается справедливым для каждой отдельной nl-орбитали даже при наличии вырождения. Уравнение (20) разрешимо в простых квадратурах, подобно тому, какое мы имели для случая радиального возмущения. Действительно, если искать решение для поправочной функции $u^1_{anl\to l'}(r)$ в виде $u^0_{nl'} f(r)$ и учесть, что $u^0_{nl'}$ удовлетворяет уравнению

$$\left[-\frac{d^2}{dr^2} + \frac{l'(l'+1)}{r^2} - \frac{2z}{r} + \frac{z^2}{n^2}\right] u^0_{nl'} = 0, \tag{23}$$

для $f(r)$ получим

$$f'' + 2(\ln u^0_{nl'})' f' + \frac{u^0_{nl}}{r^3 u^0_{nl'}} = 0. \tag{24}$$

Полагая $f'(r) = \varphi(r)$, имеем

$$\varphi' + 2(\ln u^0_{nl'})\varphi + \frac{u^0_{nl}}{r^3 u^0_{nl'}} = 0, \tag{25}$$

т. е. линейное дифференциальное уравнение первого порядка. Проинтегрировав дважды (25), получим значение $f(r)$, а следовательно, и выражение для поправочной функции вида

$$u^1_{a\, nl\to l'} = u^0_{nl'}\left(c_2 + \int \frac{c_1 - \int u^0_{nl} u^0_{nl'} r^{-3} dr}{u^{02}_{nl'}}\, dr\right), \tag{26}$$

где из условия на бесконечности $\left[u^0_{nl'}(\infty) = 0\right]$ следует, что $c_1 = 0$, а c_2 определяется из условия ортогональности $u^0_{nl'}$ и $u^1_{a\, nl\to l'}$, т. е.

$$c_2 = \int_0^\infty u^{02}_{nl'}\left[\int \frac{u^0_{nl} u^0_{nl'} r^{-3} dr}{u^{02}_{nl'}}\, dr\right] dr. \tag{27}$$

На основании (13), (26) и (27) получаем для постоянной экранирования следующее выражение:

$$\gamma_2(nl \to l') = \frac{8(2l+1)(2l'+1)}{5}\begin{pmatrix} 2\, l\, l' \\ 000 \end{pmatrix}^2 \times$$

$$\times \left\{\left(\int_0^\infty \sqrt{\rho_{nl}\rho_{nl'}}\, r^2 dr\right) \int_0^\infty \rho_{nl'}\left[\int \frac{\int \sqrt{\rho_{nl}\rho_{nl'}}\, r^{-3} dr}{\rho_{nl'}}\, dr\right] dr -\right.$$

$$-\int_0^\infty \sqrt{\rho_{nl}\rho_{nl'}}\, r^2 \left[\int \frac{\int \sqrt{\rho_{nl}\rho_{nl'}}\, r^{-3} dr}{\rho_{nl'}}\, dr\right] dr\Big\}, \tag{28}$$

где ρ_{nl}, $\rho_{nl'}$ — радиальные плотности невозмущенных nl и nl' оболочек.

Приведенное общее выражение для постоянных экранирования квадрупольных потенциалов вместе с аналогичными выражениями для постоянных экранирования потенциалов произвольной мультипольности (см. дальше), а также ряд вычисленных на их основе значений величин постоянных экранирования были даны нами в [6, 7]. Для квадрупольного потенциала аналогичное решение задачи при наличии вырождения было получено также и Штернхеймером [10] с тем лишь отличием, что решение уравнения (20) приведено не в квадратурах, а в виде ряда.

Вычисленные на основе (28) значения постоянных экранирования мы приведем ниже совместно с результатами расчета констант мультипольного экранирования.

ЭКРАНИРОВАНИЕ И АНТИЭКРАНИРОВАНИЕ МУЛЬТИПОЛЬНЫХ ЯДЕРНЫХ МОМЕНТОВ

Рассмотренные ранее задачи о возмущении замкнутой электронной оболочки квадрупольным потенциалом легко могут быть распространены на случай потенциала произвольной мультипольности. В частности, такими мультипольными потенциалами являются потенциалы кристаллического поля

$$V_{\text{кр}} = \sum_{t,p} A_{tp} D_p^t. \tag{29}$$

В этом случае уравнения для возмущенной радиальной волновой функции (8) и (14) соответственно заменяются на

$$\left[-\frac{d^2}{dr^2} + \frac{l'(l'+1)}{r^2} + V^{(0)} - E^{(0)}\right] u^1_{b\, nl\to l'} = $$

$$= u^0_{nl}\left[r^t - \langle r^t\rangle_{nl}\,\delta_{ll'}\right] \tag{30}$$

и

$$\left[-\frac{d^2}{dr^2} + \frac{l'(l'+1)}{r^2} + V^{(0)} - E^{(0)}\right] u^1_{a\, nl\to l'} =$$

$$= u^0_{nl}\left[\frac{1}{r^{t+1}} - \left\langle\frac{1}{r^{t+1}}\right\rangle_{nl}\delta_{ll'}\right], \tag{31}$$

а равенства (12) и (13) — на следующие выражения:

$$\gamma_t(nl\to l') = \frac{8(2l+1)(2l'+1)}{(2t+1)}\begin{pmatrix} t & l & l' \\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}^2 \times \int_0^\infty \frac{u^0_{nl}\, u^1_{b\, nl\to l'}}{r^{t+1}}\, dr; \tag{32}$$

$$\gamma_t(nl\to l') = \frac{8(2l+1)(2l'+1)}{2t+1}\begin{pmatrix} t & l & l' \\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}^2 \times \int_0^\infty u^0_{nl}\, u^1_{a\, nl\to l'}\, r^t dr. \tag{33}$$

Расчёт величин γ_t на основе выражений (30) и (32) либо (31) и (33) соответствует описанным ранее двум способам вычисления перекрестных ионов второго порядка малости в теории возмущения (см. [11]). При $l = l'$

уравнения (30), (31) по-прежнему легко решаются в квадратурах для произвольного вида $V^{(0)}$. В итоге из (30) и (32) для постоянных антиэкранирования потенциалов кристаллического поля находим

$$<V_p^t>' = <V_p^t>(1-\gamma_t),\ \gamma_t = \sum_{nl} \gamma_t(nl \to l),$$

$$\gamma_t(nl \to l) = \frac{8(2l+1)^2}{2t+1} \begin{pmatrix} t & l & l \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^2 \left\{ \left(\int_0^\infty \frac{\rho}{r^{t+1}}\, dr \right) \times \right.$$

$$\times \int_0^\infty \rho \left[\int \frac{\int \rho (r^t - <r^t>\, dr}{\rho}\, dr \right] dr -$$

$$\left. - \int_0^\infty \frac{\rho}{r^{t+1}} \left[\int \frac{\int (\rho (r^t - <r^t>\, dr}{\rho}\, dr \right] dr \right\}, \qquad (34)$$

$$\rho = u_{nl}^{02}.$$

При $l \neq l'$ и $l' \geqslant n$ (случай отсутствия вырождения) для водородоподобного потенциала решение уравнений (30), (31) может быть легко найдено с помощью преобразования Лапласа*).

Подставляя в уравнение (30)

$$u^1_{0\, nl \to l'} = -\exp\left(-\frac{Zr}{n}\right) r^{-l'} f(r), \qquad (35)$$

$$r^t u^0_{nl} = \exp\left(-\frac{Zr}{n}\right) r^{l'} \varphi(r), \qquad (36)$$

$$V^{(0)} = -\frac{2Z}{r},\ E^{(0)} = -\frac{Z^2}{n^2} \qquad (37)$$

и применяя преобразование Лапласа, приходим к уравнению

$$\left[M(p)\frac{d}{dp} + N(p) \right] F(p) = \Phi(p), \qquad (38)$$

где

$$F(p) = \int_0^\infty \exp(-pr) f(r)\, dr,\ \Phi(p) = \int_0^\infty \exp(-pr)\, r^{2l'+1} \varphi(r),$$

$$M(p) = \left(\frac{2Z}{n} - p\right) p,\ N(p) = -2(l'+1)p + \frac{2Z}{n}(n + l' + 1).$$

Решая (38), находим

$$F(p) = \frac{\left(\frac{2Z}{n} - p\right)^{n-l'-1}}{p^{n+l'+1}} \int_{\frac{2Z}{n}}^{p} p^{n+l'} \left(\frac{2Z}{n} - p\right)^{l'-n} \Phi(p)\, dp. \qquad (39)$$

*) Подобный метод был применен в [14] для расчета поправок части лэмбовского сдвига (см. также [15]).

Этот выбор нижнего предела обеспечивает правильное поведение поправочной функции на бесконечности и устраняет особенность $F(p)$ при $p=\frac{2Z}{n}$. Таким образом, формула обращения сводится к нахождению вычета в точке $p=0$, т. е.

$$f(r)=\mathrm{Res}_{p=0}\left[\exp(pr)\,F(p)\right]. \tag{40}$$

Во многих случаях удобнее решать не уравнение (30), а уравнение (31), поскольку в этом случае не приходится прибегать к вычислению оригинала, что намного упрощает расчеты.

Рассмотрим конкретный пример

$$\gamma_2(3d\to g)=\frac{144}{35}\int_0^\infty r^2 u^0_{3d}\,u^1_{3d\to g}\,dr. \tag{41}$$

Если в (41) подставить $u^1_{3d\to g}=-\exp\left(-\frac{Zr}{3}\right)r^{-4}f(r)$ и $u^0_{3d}=\frac{4Z^{7/2}}{81\sqrt{30}}\times$ $\times\, r^3\exp\left(-\frac{Zr}{3}\right)$, а также учесть вытекающий из (38) факт, что

$$\frac{2Z}{n}(n-l'-1)F\left(\frac{2Z}{n}\right)=\Phi\left(\frac{2Z}{n}\right), \tag{42}$$

а соответствующая производная $\varkappa$-го порядка определяется рекуррентной формулой

$$\frac{2Z}{n}(n-\varkappa-l'-1)F^{(\varkappa)}\left(\frac{2Z}{n}\right)=\varkappa(2l'+\varkappa+1)F^{(\varkappa-1)}\left(\frac{2Z}{n}\right)+\Phi^{(\varkappa)}\left(\frac{2Z}{n}\right), \tag{43}$$

то получим

$$\gamma_2(3d\to g)=-\frac{144}{35}\left(\frac{4Z^{7/2}}{81\sqrt{30}}\right)\int_0^\infty r\exp\left(-\frac{2Z}{3}r\right)f(r)\,dr=$$

$$=\frac{144}{35}\left(\frac{4Z^{7/2}}{81\sqrt{30}}\right)\frac{dF(p)}{dp}\bigg|_{p=\frac{2Z}{3}}=$$

$$=\frac{144}{35}\left(\frac{4Z^{7/2}}{81\sqrt{30}}\right)\left[\frac{15\Phi\left(\frac{2Z}{3}\right)}{4Z^2}-\frac{\Phi^{(1)}\left(\frac{2Z}{3}\right)}{2Z}\right]=\frac{132}{35Z}, \tag{44}$$

где учтено, что $\Phi(p)=\left(\frac{4Z^{7/2}}{81\sqrt{30}}\right)\frac{5!}{p^6}$.

Когда $l\neq l'$ и $l,\ l'<n$ для водородоподобного потенциала $V^{(0)}$, т. е. при наличии вырождения, следует поступить так же, как и в случае квадрупольного ядерного экранирования, и решать не уравнение (30), а уравнение (31), поскольку в нем оператор возмущения не перемешивает в нулевом приближении волновых функций вырожденного уровня и уравнение остается справедливым для каждой отдельной nl-орбитали. Решая уравнение (31), с помощью (33) находим

$$\gamma_t(nl\to l')=\frac{8(2l+1)(2l'+1)}{2t+1}\begin{pmatrix} t & l & l' \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^2\times$$

$$\times\left\{\left(\int_0^\infty \sqrt{\rho_{nl}\rho_{nl'}}\, r^t dr\right)\int_0^\infty \rho_{nl'}\left(\int \frac{\int \sqrt{\rho_{nl}\rho_{nl'}}\, r^{-t-1}dr}{\rho_{nl'}}\, dr\right)dr - \right. \tag{45}$$

$$\left. -\int_0^\infty \sqrt{\rho_{nl}\rho_{nl'}}\, r^t\left(\int \frac{\int \sqrt{\rho_{nl}\rho_{nl'}}\, r^{-t-1}dr}{\rho_{nl'}}\, dr\right)dr\right\},$$

где $\rho_{nl} = u_{nl}^{02}$, $\rho_{nl'} = u_{nl'}^{02}$.

Из расчетов с помощью водородоподобных волновых функций на основании полученных выражений легко убедиться в том, что константа экранирования линейно зависит от главного квантового числа и может быть представлена в очень простой форме

$$\gamma_t(nl \to l') = \frac{\alpha_l^t n + \beta_l^t}{Z}, \tag{46}$$

где α_l^t, β_l^t — численные постоянные, приведенные в таблице для $l' = l + t$.

Таблица

l \ t	2		4		6	
	α_l^t	β_l^t	α_l^t	β_l^t	α_l^t	β_l^t
s	$\frac{2}{3}$	0	$\frac{1}{5}$	0	$\frac{2}{21}$	0
p	$\frac{6}{5}$	$-\frac{12}{25}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{4}{27}$	$\frac{2}{13}$	$-\frac{12}{169}$
d	$\frac{12}{7}$	$-\frac{48}{35}$	$\frac{5}{11}$	$-\frac{40}{99}$	$\frac{8}{39}$	$-\frac{32}{169}$

Приведем также выражения для квадрупольного экранирования, когда $l' = l - t$:

$$\left.\begin{aligned}\gamma_2(nd \to s) &= -\frac{2}{3Z}n + \frac{4}{5Z}\\ \gamma_2(nf \to p) &= -\frac{6}{5Z}n - \frac{48}{25Z}\end{aligned}\right\}. \tag{47}$$

Очевидно также, что с ростом мультипольности потенциала константа экранирования уменьшается, т. е. потенциалы более высокой мультипольности экранируются меньше. Напротив, константы антиэкранирования увеличиваются для потенциалов более высокого порядка, в чем легко убедиться, проведя расчеты на основании формулы (34).

Литература

1. Sternheimer R. M. Phys. Rev., **80**, 102, 1950.
2. Sternheimer R. M. Phys. Rev., **95**, 736, 1954; **105**, 158, 1957; **115**, 1198, 1959; **130**, 1423, 1963; **132**, 1637, 1963; Sternheimer R. M., Foley H. M. Phys. Rev., **102**, 731, 1956; Watson R. E., Freeman A. J. Phys. Rev., **131**, 250, 1963; A **135**, 1209, 1964; Freeman A. J., Watson R. E. Phys. Rev., **131**, 2566, 1963; **132**, 706, 1963.
3. Das T. P., Bersohn R. Phys. Rev., **102**, 733, 1956; Wikner E. G., Das T. P. Phys. Rev., **109**, 360, 1958; Burns G. Phys. Rev., **115**, 357, 1959; **124**, 524, 1961; Burns G. Chem. Phys., **31**, 1253, 1953; Burns G., Wikner E. G. Phys. Rev., **121**, 155, 1961.

4. Маханёк А. Г. ДАН БССР, 6, 427, 1962.
5. Маханёк А. Г. Опт. и спектр., 14, 449, 1963.
6. Маханёк А. Г., Корольков В. С. Опт. и спектр., 21, 313, 1966.
7. Маханёк А. Г., Корольков В. С. Тезисы II Всесоюзного совещания по применению физических методов к исслед. копл. соед. Кишинев, 1965.
8. Sternheimer R. M., Foley H., Tycko D. Phys. Rev., 93, 734, 1954.
9. Ghatikar M. N., Raychaudhuri A. K., Ray D. K. Proc. Phys. Soc. (London), 84, 297, 1964.
10. Sternheimer R. M. Phys. Rev., 146, 140, 1966.
11. Маханёк А. Г., Корольков В. С. Весці АН БССР, сер. фіз.-мат. навук, № 4, 100—105, 1967.
12. Rotenberg M., Bivins R., Metropolis N., Wooten J. The 3-*j* and 6-j simbols. Cambridge, Massachusetts, 1959.
13. Корольков В. С., Маханёк А. Г. Опт. и спектр., 12, 163, 1962.
14. Schwartz C. Ann. of Physics, 2, 178—187, 1959.
15. Адамов М. Н., Каган В. К. Вестник ЛГУ, 2, № 10, 1964.

Институт физики АН БССР,
Минский радиотехнический институт

Поступило в редакцию
19.V 1967

ВЕСЦІ АКАДЭМІІ НАВУК БЕЛАРУСКАЙ ССР № 1 1968
СЕРЫЯ ФІЗІКА-МАТЭМАТЫЧНЫХ НАВУК

УДК 621.382.2

І. І. ПЯТРОЎСКІ, С. А. РЭКУН

УЗНІКНЕННЕ АДМОЎНАГА СУПРАЦІЎЛЕННЯ Ў ГЕРМАНІЕВЫХ І КРЭМНІЕВЫХ ДЫЁДАХ ЗАВОДСКАГА ВЫРАБУ

Вядома, што вольт-амперныя характарыстыкі некаторых пунктавых паўправадніковых дыёдаў $V=V(i)$ (V — напружанне, паданае на дыёд, i — ток праз дыёд) у радзе выпадкаў маюць так званыя падаючыя ўчасткі, якім адпавядае адмоўнае дыферэнцыяльнае супраціўленне дыёда $r=\frac{dV}{di}$ [1—6]. Аднак лічылася, што далёка не ўсе паўправадніковыя крышталі ў пары з праводзячым вастрыём могуць мець адмоўнае супраціўленне, паколькі для яго ўзнікнення ў многіх выпадках патрабуецца стварэнне пэўных спецыяльных умоў, якія істотна адрозніваюцца ад звычайных [7—9]. Даследчыкі дадзенай з'явы выказвалі розныя меркаванні аб сутнасці электронных працэсаў, што яе абумоўліваюць. Уласна, да гэтага часу няма адзінага, усебакова абгрунтаванага пункту погляду на прыроду адмоўнага супраціўлення паўправадніковых дыёдаў. У дадзенай рабоце даследаваліся серыйныя германіевыя і крэмніевыя дыёды розных тыпаў, вырабляемыя нашай прамысловасцю, з мэтай выяўлення на іх вольт-амперных характарыстыках падаючых участкаў. Спачатку даследаваліся пунктавыя дыёды, а затем плоскасныя.

Вольт-амперныя характарыстыкі даследаваных дыёдаў спачатку будаваліся на падставе паказанняў вымяральных прыбораў. На дыёд ад крыніцы пастаяннага току падавалася рэгулюемае напружанне, вымяраемае вольтметрам. Ток, што праходзіў пры гэтым праз дыёд, вымяраўся з дапамогай міліамперметра.

Аказалася, што характарыстыкі дыёдаў, атрыманыя такім шляхам пры пакаёвай тэмпературы, не мелі падаючых участкаў як пры прамым, так і пры адваротным напрамках току, хаця велічыня адваротнага напружання, якое падавалася на дыёды, дасягала 150 *в* і больш (гл. рыс. 2, крывая *1*).

Як відаць, ва ўмовах пакаёвай тэмпературы паданыя на дыёды напружанні і токі, якія праходзілі праз іх, былі недастаткова вялікімі для таго, каб выклікаць павышэнне канцэнтрацыі носьбітаў току, а значыць, і павышэнне электраправоднасці прыкантактнай вобласці крышталяў да неабходнай велічыні, пры якой у дыёдаў узнікае адмоўнае супраціўленне.

Затым характарыстыкі тых жа дыёдаў былі атрыманы шляхам калібраванай іх развёркі на экране электроннага асцылографа пры сілкаванні рэгулюемым пераменным токам.

Рэзультаты эксперымента паказваюць, што на адваротных галінах характарыстык усіх без выключэння дыёдаў пры належным падборы рэжыму іх сілкавання пераменным токам, а іменна пры пэўнай амплітудзе прамога току, назіраюцца падаючыя ўчасткі, якім адпавядае адмоўнае дыферэнцыяльнае супраціўленне. Пры адпаведных вымярэннях на пастаянным току названыя характарыстыкі падаючых участкаў не мелі.

На рыс. 1 прыводзяцца характарыстыкі аднаго з германіевых дыёдаў (тыпу Д2В), атрыманыя асцылаграфічным метадам. Усе яны на адваротных сваіх галінах маюць падаючыя ўчасткі, хаця пры падвядзенні да гэтага ж дыёда пастаяннага адваротнага напружання значна большай велічыні адмоўнае супраціўленне ў яго не ўзнікала.

Калі пры нязменнай велічыні супраціўлення r_i, напружанне з якога падасцца на гарызантальна адхіляючыя пласціны асцылографа, павялічваць амплітуду ўваходнага напружання V_0, то максімальныя напру-

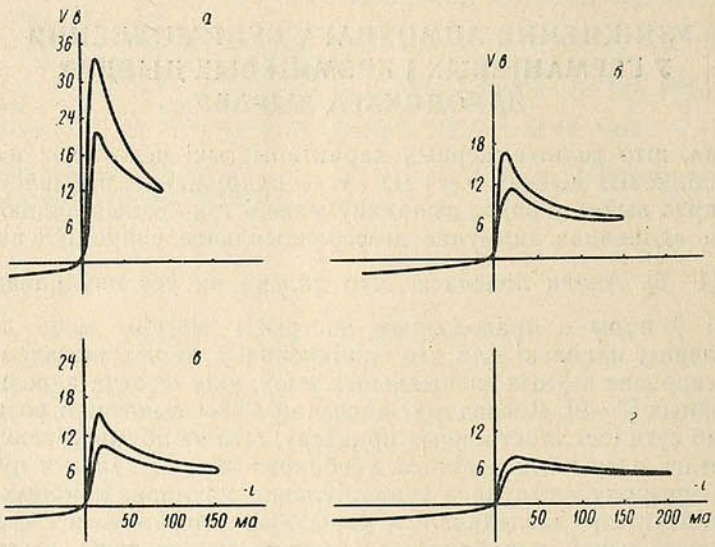


Рис. 1

жанні на адваротных галінах характарыстык дыёдаў паніжаюцца. Аднак адпаведныя ім токі застаюцца пры гэтым нязменнымі. Калі падтрымліваць нязменнай амплітуду V_0 уваходнага пераменнага напружання, але памяншаць супраціўленне r_i, то максімумы вольт-амперных характарыстык дыёдаў таксама паніжаюцца. Аднак у абодвух выпадках адпавядаючыя ім токі застаюцца нязменнымі. Гэта ілюструецца рыс. 1, дзе крывым *а, б, в* і *г* адпавядаюць умовы: *а)* $V_0=70$ *в*, $r_i=375$ *ом*; *б)* $V_0=140$ *в*, $r_i=375$ *ом*; *в)* $V_0=70$ *в*, $r_i=200$ *ом*; *г)* $V_0=140$ *в*; $r_i=200$ *ом*.

Характэрным для ўсіх даследаваных дыёдаў з'яўляецца таксама наяўнасць гістэрэзіса на адваротных галінах іх вольт-амперных характарыстык, у сувязі з чым крывая $V=V(i)$ пры спаданні адваротнага току праз дыёд на ўсёй сваёй працягласці ідзе ніжэй за аналагічную крывую, што адпавядае ўзрастанню адваротнага току.

Атрыманыя рэзультаты лёгка растлумачыць. Разгледзім гэта на наступным прыкладзе, калі ток, што сілкуе дыёд, перыядычна змяняе свой напрамак. На працягу аднаго паўперыяду, калі гэты напрамак будзе праводзячым, амплітуда току аказваецца настолькі вялікай, што выкліканае ім павышэнне тэмпературы прыкантактнай вобласці дыёда прыводзіць да моцнага ўзрастання канцэнтрацыі носьбітаў току. На працягу другога паўперыяду ток праз дыёд праходзіць у запіраючым напрамку. Пры гэтым тэмпература прыкантактнай вобласці за параўнальна невялікі адрэзак часу (пры змяненні адваротнага напружання ад нуля да велічыні, што адпавядае максімуму адваротнай галіны характарыстыкі дыёда) не паспявае значна змяніцца і застаецца даволі высокай. У выніку застаецца высокай і канцэнтрацыя носьбітаў току ў вобласці кантакта,

што ў сваю чаргу пры дастатковай велічыні адваротнага напружання прыводзіць да ўтварэння на вольт-амперной характарыстыцы дыёда падаючага ўчастка.

Значыць, чым большае ўваходнае напружанне V_0 і меншае супраціўленне r_i у ланцугу дыёда, тым большай будзе амплітуда току, што праходзіць праз дыёд у прамым напрамку, і вышэйшай будзе тэмпература кантакта. У апошняга ў выніку гэтага ўзрастае электраправоднасць, што змяншае падзенне напружання на дыёдзе пры дадзеным току. Адзначаныя гістэрэзісныя з'явы таксама тлумачацца астаткавым награваннем кантакта (нагрэтага папярэднім вялікім токам) пры спадзенні току. А гэта прыводзіць да захавання астаткавай павышанай электраправоднасці кантакта і, значыць, да змяншэння напружання на дыёдзе, што адпавядае дадзенаму току пры яго змяншэнні, у адносінах да велічыні напружання, адпаведнага таму ж току пры яго ўзрастанні.

Важная роля тэмпературы кантакта ў працэсе ўзнікнення адмоўнага супраціўлення паўправадніковых дыёдаў пацвярджаецца таксама радам іншых эксперыментальных даных.

Так, калі праз паўправадніковы дыёд, адваротная галіна статычнай характарыстыкі якога пры пакаёвай тэмпературы не мела падаючага ўчастка, папярэдне прапусціць даволі вялікі прамы ток (што прывядзе да неабходнага разагравання кантакта), а затым хутка змяніць яго напрамак на запіраючы, то на адваротнай галіне статычнай характарыстыкі дыёда заўсёды з'яўляецца падаючы ўчастак. Пры ўказаных выпрабаваннях дыёдаў прамы ток, што разагравае кантакт, меў велічыню парадку 150 *ма* і працягласць парадку 120 *сек.*

Рэзультаты гэтага эксперымента ілюструюцца рыс. 2, на якім крывая *1* — адваротная галіна статычнай характарыстыкі аднаго з германіевых дыёдаў (тып Д2В), атрыманай да прапускання папярэдняга прамога току, якая не мае падаючага ўчастка, а крывая *2*—характарыстыка таго ж дыёда пры адваротным напрамку току пасля імпульсу прамога току ўказанай велічыні і працягласці, якая відавочна з'яўляецца падаючай. Падобныя рэзультаты былі атрыманы і пры выпрабаванні ўсіх астатніх дыёдаў.

Для вывучэння залежнасці віду статычных вольт-амперных характарыстык дыёдаў ад тэмпературы дыёды змяшчалі ў тэрмастат, а затым пры розных стабілізаваных тэмпературах атрымлівалі іх характарыстыкі.

Рэзультаты ілюструюцца рыс. 3, дзе прыведзены характарыстыкі аднаго і таго ж дыёда (тыпу Д2В), атрыманыя пры розных тэмпературах (*1* — пры пакаёвай, *2* — пры 70 °С, *3* — пры 100 °С). Эксперыментальныя даныя сведчаць аб тым, што пры даволі нізкай тэмпературы (да 60 °С) вольт-амперныя характарыстыкі дыёдаў падаючых участкаў не маюць. Але пры даволі высокіх тэмпературах, што перавышаюць 60—80 °С, на адваротных галінах характарыстык гэтых жа дыёдаў з'яўляюцца падаючыя ўчасткі ў тым жа інтэрвале змяненняў адваротнага напружання, паданага на дыёды. Пры гэтым аказваецца, што велічыня адваротнага напружання, адпаведнага максімуму характарыстыкі дыёда, змяншаецца з павышэннем тэмпературы. Аднак ток, які адпавядае максімуму напружання на дадзеным дыёдзе, пры розных тэмпературах застаецца нязменным.

Падаючыя ўчасткі на статычных вольт-амперных характарыстыках усіх даследаваных дыёдаў могуць быць атрыманы і пры пакаёвай тэмпературы, але для гэтага неабходна павысіць велічыню падводзімага да дыёда адваротнага напружання. Максімумы напружання на характарыстыках пры пакаёвай тэмпературы мелі велічыню парадку 250—350 *в.*

Чым ніжэй тэмпература, тым большай аказваецца велічыня напружання, неабходная для ўзнікнення ў дыёда адмоўнага супраціўлення, г. зн. большай павінна быць напружанасць паданага электрычнага поля ў вобласці кантакта.

Трэба ўказаць, што ў некаторых выпадках у працэсе зняцця статычных характарыстык дыёдаў назіраўся так званы рэлейны эфект: пры дасягненні пэўнага рэжыму сілкавання дыёда токам адбывалася рэзкае, вельмі хуткае памяншэнне падведзенага да дыёда напружання, якое суправаджалася такім жа рэзкім узрастаннем току, што, відавочна, абумоўлена нестацыянарнасцю стану паўправадніковага крышталю, у сваю чаргу абумоўленай вельмі хуткім узрастаннем канцэнтрацыі носьбітаў току ў вобласці кантакта. Аднак гэта з'ява можа быць ліквідавана шляхам падключэння паслядоўна да даследуемага дыёда пастаяннага амічнага супраціўлення дастатковай велічыні. Затым улічваючы велічыню напружання, падаючага на гэтым супраціўленні пры той або іншай велічыні току, можна атрымаць даныя, што характарызуюць непасрэдна дыёд.

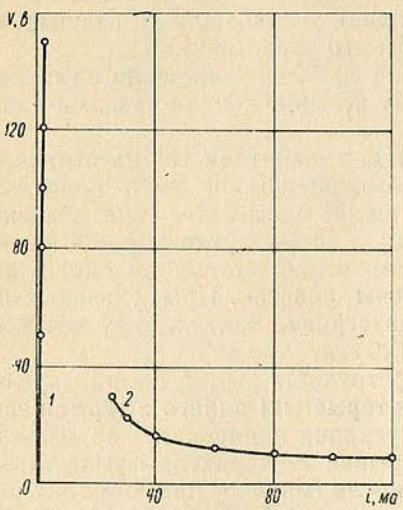


Рис. 2

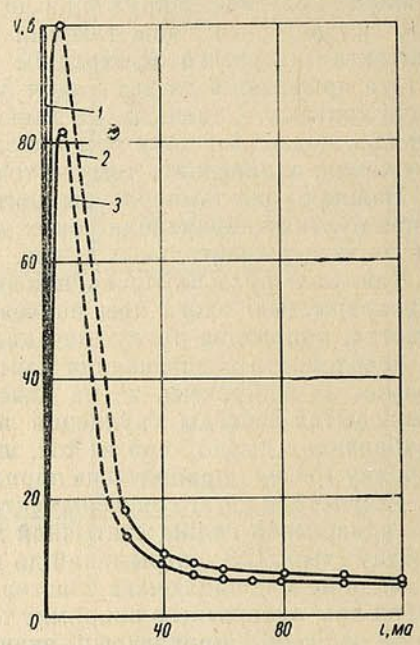


Рис. 3

Выкладзеныя рэзультаты адносяцца да пунктавых германіевых дыёдаў (Д2Б, Д2В, Д2Г, Д2Д, ДГЦ-4, ДГЦ-5, ДГЦ-12, ДГЦ-14 і інш.).

Аналагічныя даныя былі атрыманы і пры даследаванні крэмніевых дыёдаў (Д-101, Д-102, Д-103, Д-105 і інш.). Аднак мінімальная тэмпература і мінімальны прамы ток, пры якіх узнікалі падаючыя ўчасткі на адваротных галінах статычных вольт-амперных характарыстык крэмніевых дыёдаў, мелі крыху большую велічыню, чым для германіевых дыёдаў (адпаведна 230—250 °С і 250—270 *ма*). Максімумы напружання на характарыстыках крэмніевых дыёдаў, што знаходзіліся ў аднолькавых умовах з германіевымі дыёдамі, таксама аказаліся крыху больш высокімі. Гэта розніца, відаць, выклікаецца некаторымі несупадзеннямі ў структурах энергетычных зон германію і крэмнію (у прыватнасці, розніцай шырыні забароненых зон, велічыні тэрмадынамічнай работы выхаду, вышыні ўзроўню Фермі і інш.).

У працэсе даследавання плоскасных дыёдаў (Д7В, Д7Г, Д7Б, Д7Е, Д7Ж, Д-226 і інш.) таксама ўдалося атрымаць на адваротных галінах іх статычных характарыстык падаючыя ўчасткі пры пакаёвай тэмпературы. Але максімальныя напружанні ў гэтых выпадках мелі значна большую велічыню, чым у характарыстык пунктавых дыёдаў пры такіх жа ўмовах (550—950 *в*). Відавочна, што тут гэта выклікана меншай неаднароднасцю дастасаванага поля ў вобласці плоскаснага кантакта, чым пры пунктавым кантакце паўправадніка з металам, дзе градыент патэнцыялу падведзенага поля вельмі вялікі.

Выкладзеныя рэзультаты даследавання дазваляюць заключыць, што адным з рашаючых фактараў, што прыводзіць да ўзнікнення ў паўправадніковых дыёдах адмоўнага дыферэнцыяльнага супраціўлення, з'яўляецца тэмпература кантакта. Пры дастаткова высокай тэмпературы ў прыкантактнай вобласці паўправадніка адбываецца вельмі інтэнсіўнае ўзбуджэнне носьбітаў току з узроўняў энергіі, якія не адыгрывалі істотнай ролі пры больш нізкіх тэмпературах, што прыводзіць да рэзкага ўзрастання электраправоднасці гэтай вобласці, а ў канчатковым выніку — да змяншэння падзення напружання на кантакце.

Аднак несумненна і тое, што вельмі важную ролю ў дадзеным працэсе адыгрывае і велічыня падведзенага да дыёда напружання, асноўная частка якога прыпадае на прыкантактную вобласць дыёда, у сувязі з чым у дадзенай вобласці напружанасць падведзенага электрычнага поля аказваецца вельмі вялікай.

Акрамя таго, вопыт паказвае, што паўправадніковыя дыёды пры належным іх уключэнні ў ланцуг току поўнасцю захоўваюць свае электрычныя ўласцівасці і пасля прапускання праз іх адваротнага току да 200—250 *ма*, а гэта дазваляе ў некалькі дзесяткаў разоў расшырыць вобласць адваротных токаў, дапушчальную для іх практычнага прымянення, пры ўмове выкарыстання рэжыму адмоўнага супраціўлення.

Літаратура

1. Лосев О. В. ТиТБП, 14, 1922.
2. Петровский И. И. Диссертация. Минск, 1955.
3. Лебедев А. А., Стафеев В. И., Тучкевич В. М. ЖТФ, **26**, 10, 1956.
4. Петровский И. И. ИФЖ, **2**, 11, 1959.
5. Сендерихин И. М., Шаравский П. В. ФТТ, **2**, 7, 1960.
6. Андронов Ю. В., Анупыльд А. Ю., Губанов В. Н., Ястребцева Т. Н. Вестн. МГУ, **3**, 3, 1965.
7. Авакьянц Г. М., Мурыгин В. И., Сандлер А. С., Тешабаев А., Юровский А. В. Радиотехника и электроника, **8**, 11, 1963.
8. Каракушан Э. И., Стафеев В. И. Радиотехника и электроника, **9**, 11, 1964.
9. Сендерихин И. М. Изв. вузов, Физика, 3, 1965.

Белорусский государственный университет им. В. И. Ленина

Поступило в редакцию 26.IV 1967

УДК 535.242.2 : 621.3.088.3

У. І. ГАНАПОЛЬСКІ

АБ ДАКЛАДНАСЦІ ФОТАМЕТРЫЧНЫХ ВЫМЯРЭННЯЎ. АСНОЎНЫЯ КРЫНІЦЫ ПАМЫЛАК. I

Пры вызначэнні рэчываў спектрафотаметрычным метадам маюць месца памылкі трох тыпаў:

I. Памылкі агульнааналітычныя, што выклікаюцца хібнасцямі пры выкананні вагавых і аб'ёмных аперацый, якія папярэднічаюць фотаметрычнаму вымярэнню.

II. Памылкі, спецыфічныя для светапаглынаючых рэчываў, звязаныя з аднаўленнем і ўстойлівасцю светапаглынання даследуемай сістэмы.

III. Памылкі, звязаныя з выкананнем фотаметрычных вымярэнняў, пабудовай калібровачных крывых і апрацоўкай рэзультатаў вымярэнняў.

Памылкі першых двух тыпаў падрабязна разглядаюцца ў адпаведных кіраўніцтвах па колькаснаму хімічнаму і спектрафотаметрычнаму аналізу. У дадзеным паведамленні ў агульным выглядзе разглядаюцца памылкі трэцяга тыпу, якія пры іншых роўных умовах лімітуюць дакладнасць спектрафотаметрычнага аналізу. Апошняя тым вышэйшая, чым меншыя памылкі ў вызначэнні канцэнтрацыі аналізуемага рэчыва ў выпрабоўваемым (фотаметрыруемым) растворы. Узровень гэтых памылак залежыць перш за ўсё:

1) ад дакладнасці вымярэння паказання прыбора;

2) ад характару калібровачнай крывой, г. зн. характару залежнасці аптычнай шчыльнасці сістэмы ад канцэнтрацыі светапаглынальнага рэчыва; гэта залежнасць будзе ў далейшым запісвацца як $D=f(c)$;

3) ад дакладнасці пабудовы калібровачнай крывой і спосабу апрацоўкі рэзультатаў вымярэнняў.

Такім чынам, ёсць ва ўсякім разе тры асноўныя крыніцы памылак спектрафотаметрычнага аналізу, звязаных з вымярэннямі. Дакладнасць фотаметрычных вымярэнняў на працягу многіх год з'яўляецца прадметам пільнай увагі даследчыкаў. Пытанні дакладнасці вымярэнняў з рознай ступенню паўнаты разгледжаны ў радзе публікацый [1—11]. У дадзеным паведамленні, што папярэднічае рэзультатам эксперыментальнай праверкі дакладнасці вымярэнняў на фільтрафатометрах, зроблена спроба абагульніць найбольш істотныя вывады, атрыманыя ва ўказаных публікацыях.

Ф о р м у л ы п а м ы л а к п р ы $\sigma_T = \mathrm{const}$. З часу апублікавання працы Туаймена і Лаціяна [1] агульнапрынятым выразам для вылічэння памылак фотаметрычных вымярэнняў, выконваемых па метаду непасрэднай фотаметрыі (аптычная шчыльнасць раствору параўнання $D_0 \simeq 0$), з'яўляецца формула

$$\frac{\Delta c}{c} = \frac{\Delta D}{D} = \frac{0{,}434 \cdot \Delta T}{D \cdot 10^{-D}}, \qquad (1)$$

дзе $\Delta c/c$ — адносная памылка вызначэння канцэнтрацыі аналізуемага рэчыва ў фотаметрыруемым растворы; $\Delta D/D$ — адносная памылка вымярэння паказання прыбора па шкале аптычных шчыльнасцей; ΔT — памылка вымярэння паказання прыбора па шкале прапусканняў (Туаймен і Лаціян разглядалі гэту велічыню як найменшае змяненне прапускання, што паддаецца вымярэнню).

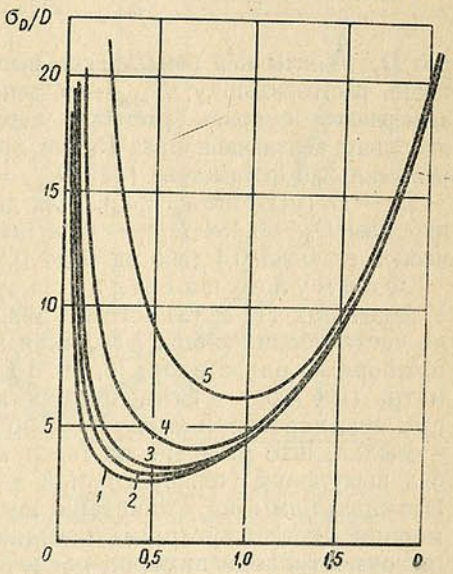
Пры вывадзе формулы (1) былі прыняты некаторыя дапушчэнні, якія трэба мець на ўвазе пры вылічэнні крывой памылак і пры яе выкарыстанні для вызначэння аптымальнага інтэрвалу аптычных шчыльнасцей (інтэрвалу з зададзенымі мінімальнымі памылкамі вымярэння): фотаметрыруемая сістэма падпарадкоўваецца закону светапаглынання ва ўсім інтэрвале вымяраемых аптычных шчыльнасцей; памылка вымярэння паказання прыбора па шкале прапусканняў (dT або ΔT) не залежыць ад самога паказання T; хібнасці пры пабудове каліброванай крывой не маюць месца.

Калі першая з гэтых умоў не выконваецца, г. зн. каліброванная крывая мае адхіленне ад прамалінейнасці, то

$$\frac{\Delta c}{c} \neq \frac{\Delta D}{D}.$$

У гэтым выпадку справядлівым застаецца толькі выраз

$$\frac{\Delta D}{D} = \frac{0{,}434 \cdot \Delta T}{D \cdot 10^{-D}}. \qquad (1.а)$$



Рыс. 1. Крывыя памылак вымярэння аптычнай шчыльнасці па метаду непасрэднай фотаметрыі ($D_0=0$) пры $\sigma_T = 1\%$ і розных значэннях $T_{гр}$:
1—10; *2*—1,0; *3*—0,5; *4*—0,25; *5*—0,1

Суадносіны паміж $\Delta c/c$ і $\Delta D/D$ (або, як мы будзем у далейшым абазначаць іх, паміж σ_c/c і σ_D/D), якія маюць месца пры розным характары адхілення фотаметрыруемай сістэмы ад закону светапаглынання, будуць разгледжаны ніжэй.

Калі другая ўмова не з'яўляецца справядлівай, г. зн. $\Delta T \neq \text{const}$, то неабходна разгледзець характар залежнасці dT ад T. У далейшым будзем абазначаць гэту залежнасць у выглядзе функцыі $\sigma_T = f(T)$.

Што датычыць трэцяй умовы, то справядлівасць яе можна разглядаць толькі тэарэтычна, таму што практычна ні адна каліброванная крывая не можа быць пабудавана абсалютна дакладна.

Такім чынам, формула памылак вымярэння аптычнай шчыльнасці ў тым выглядзе, у якім яна была выведзена Туайменам і Лаціянам [1], з'яўляецца толькі першым прыбліжэннем, — прыбліжэннем, якое справядліва для ідэальнай фотаметрыруемай сістэмы, вымяраемай з дапамогай ідэальнага прыбора (рэальным прызнаецца толькі факт існавання некаторай памылкі адліку па шкале прапусканняў ΔT).

Пры выкарыстанні формулы (1) для вылічэння памылак фотаметрычнага вымярэння атрымліваюць крывую памылак (крывая Туайменa — Лаціяна, рыс. 1). Аптымальную велічыню вымяраемай аптычнай шчыльнасці ($D_{опт}$), што адпавядае мінімальнай памылцы вымярэння,

знаходзяць дыферэнцыраваннем выразу (1). Гэта велічыня $D_{апт}=0{,}434$ або $T_{апт}=0{,}368$ (36,8% прапускання). Аптымальным інтэрвалам аптычных шчыльнасцей прынята лічыць ад 0,2 да 0,7 (пры гэтым $\sigma_D/D \leqslant \leqslant 25\%$ адн.) або ад 0,1 да 1,2 (пры гэтым $\sigma_D/D \leqslant 2(\sigma_D/D)_{мін}$).

Аналагічная выразу (1) формула памылак для дыферэнцыяльна-фотаметрычных вымярэнняў выведзена Хіскі [5] і мае выгляд

$$\frac{\sigma_c}{c}=\frac{\sigma_D}{D}=\frac{0{,}434\cdot\Delta T}{D_{уз}\cdot 10^{-D_{адн}}}, \qquad (2)$$

дзе $D_{уз}$ — аптычная шчыльнасць выпрабоўваемага раствору, вымеранага супраць растваральніку; $D_{адн}$ — аптычная шчыльнасць даследуемага раствору, вымеранага супраць раствору параўнання. Калі аптычная шчыльнасць апошняга абазначана праз D_0, то пры вымярэннях па метаду поўнай дыферэнцыяльнай фотаметрыі [12] $D_{адн}=D_{уз}-D_0$ (у галіне $c_x>c_0$) і $D_{адн}=D_0-D$ (у галіне $c_x<c_0$). Для дыферэнцыяльна-фотаметрычных вымярэнняў пры $D_0 \geqslant 0{,}434$ $D_{апт}=0$, а інтэрвал аптымальных аптычных шчыльнасцей ад 0 да 0,1 (або ад 0 да 0,2).

Формула памылак з улікам залежнасці $\sigma_T=f(T)$. У формулах (1) и (2) істотна важнай велічынёй з'яўляецца σ_T (або, як яе часта абазначаюць, ΔT), якая характарызуе ўзнаўленне паказанняў прыбора. У радзе работ [5, 10, 13] узнаўленне паказанняў спектрафатометра (а ў [10] — і фотаэлектракаларыметра) вызначалася вымярэннямі пры неаднаразовай змене растворaў у кюветах. Пры гэтым вылічвалася памылка, што ўключае як інструментальную, так і кюветную памылкі, без выяўлення ўплыву кожнай з іх на ўзровень хібнасці вымярэнняў. Паколькі памылка ў паказанні шкалы прымалася (і да гэтага часу прымаецца многімі аўтарамі) пастаяннай ($\Delta T=\text{const}$), то гэта пастаянства інструментальнай памылкі распаўсюджвалася без доказаў, як адзначае Г. С. Цярошын [9] і Кроуфард [8], і на кюветную памылку.

У працах Кана [7], Кроуфарда [8] і асабліва у Г. С. Цярошына [9] было паказана, што памылка ў вымярэнні паказання па шкале прапусканняў (dT, або ΔT, або σ_T) залежыць ад самога паказання T, прычым Цярошын, разгледзеўшы ўплыў кюветнай памылкі, выявіў гэту залежнасць для прыбораў з электрычнай кампенсацыяй (спектрафатометраў).

Хібнасці вымярэння паказання прыбора (як адна з трох асноўных крыніц разглядаемай у дадзеным паведамленні трэцяй групы памылак спектрафотаметрычнага аналізу) звязаны ў сваю чаргу з дзвюма крыніцамі магчымых памылак:

а) з неўзнаўленнем паказання прыбора пры фотаметрыраванні аднаго і таго ж аб'екта (напрыклад, кюветы з растворам) у адным і тым жа становішчы — гэта крыніца стварае інструментальную памылку $\sigma_{T_п}$;

б) з неўзнаўленнем стану і становішча кювет пры паўторных напаўненнях іх растворам (кюветная памылка $\sigma_{T_{гк}}$).

У выніку падрабязнага разгляду ўсіх кампанентаў, з якіх складаецца інструментальная памылка, Цярошын паказаў, што пры пастаяннай адчувальнасці спектрафатометра $\sigma_{T_п}=\text{const}$ (больш дакладна, можа быць прынята пастаяннай пры магчымым адхіленні не больш чым на 10—13 %). Разгляд памылкі ў паказанні шкалы прапускання, выкліканай неўзнаўленнем стану і становішча кювет, дазволіла наступным чынам паказаць залежнасць $\sigma_T=f(T)$:

$$\sigma_T=\sigma_{T_п}\sqrt{1+\left(\frac{T}{T_{гр}}\right)^2}, \qquad (3)$$

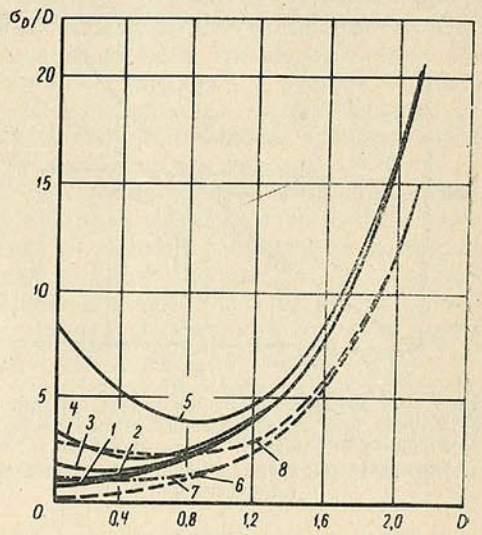
дзе $T_{гр}$ — гранічнае паказанне шкалы прапусканняў, пры якім складаючыя памылкі ($\sigma_{T_п}$ і $\sigma_{T_{гк}}$) роўныя.

$$T_{гр} = \sigma_{T_п}/\sigma_{T_к},$$

дзе $\sigma_{T_к}$ — сярэдняе квадратычнае адхіленне прапускання кювет адносна адна адной пры змене растваруў.

Падстаноўка выразу (3) у формулы (1) і (2) прыводзіць да атрымання формул памылак фотаметрычных вымярэнняў з улікам залежнасці dT ад T.

Велічыня $T_{гр}$ тым больш важная для ацэнкі дакладнасці фотаметрычных вымярэнняў у канкрэтных умовах аналізу, што ў многіх выпадках (і вопыт гэта пацвярджае) $\sigma_{T_к} > \sigma_{T_п}$, значэнне $T_{гр}$ пры гэтым малое, і становішча крывых памылак з улікам $T_{гр}$ значна адрозніваецца ад становішча крывой Туаймена — Лаціяна (рыс. 1) і крывых Хіскі (рыс. 2). Аптымальныя інтэрвалы аптычных шчыльнасцей таксама значна адрозніваюцца ад агульнапрынятых інтэрвалаў, і з павелічэннем $T_{гр}$ яны перамяшчаюцца ў вобласць больш высокіх аптычных шчыльнасцей (рыс. 1 і 2 добра ілюструюць гэта становішча). Эксперыментальнае вызначэнне $T_{гр}$ з'яўляецца, такім чынам, важным этапам у выкананні даследаванняў па дакладнасці фотаметрычных вымярэнняў.



Рыс. 2. Крывыя памылак вымярэння аптычнай шчыльнасці па метаду дыферэнцыяльнай фотаметрыі (для *1—5* D_0=0,5; для *6—8* D_0=1,5) пры σ_T = 1% і пры розных значэннях $T_{гр}$:

1—10; *2*—1,0; *3*—0,5; *4*—0,25; *5*—0,1; *6*—10; *7*—0,25; *8*—0,1

Уплыў характару залежнасці $D = f(c)$ на дакладнасць вызначэння канцэнтрацыі даследуемага раствору па вымеранай аптычнай шчыльнасці. Пры падпарадкаванні фотаметрыруемай сістэмы закону светапаглынання $D = \varepsilon lc$ (дзе ε — малярны каэфіцыент пагашэння, а канцэнтрацыя выражана ў *моль/л*) або $D = alc$ (дзе a — каэфіцыент пагашэння пры канцэнтрацыі, выражанай у якіх-небудзь зручных адзінках, напрыклад, у *мг/мл*). Для дадзенай канкрэтнай сістэмы каэфіцыент пагашэння a і таўшчыня паглынаючага слоя l могуць быць пастаяннымі, а іх здабытак $al = u$ паказвае вуглавы каэфіцыент каліброванага графіка. Дыферэнцыраваннем выражэння $D = uc$ лёгка паказаць, што для сістэмы, што падпарадкоўваецца закону светапаглынання, $\frac{\sigma_D}{D} = \frac{\sigma_c}{c}$. Для фотаметрыруемых сістэм, што адхіляюцца ад закону светапаглынання, магчымы два выпадкі (рыс. 3):

а) сістэма характарызуецца «адмоўным» адхіленнем ад закону светапаглынання, г. зн.

$$D = uc - A,$$

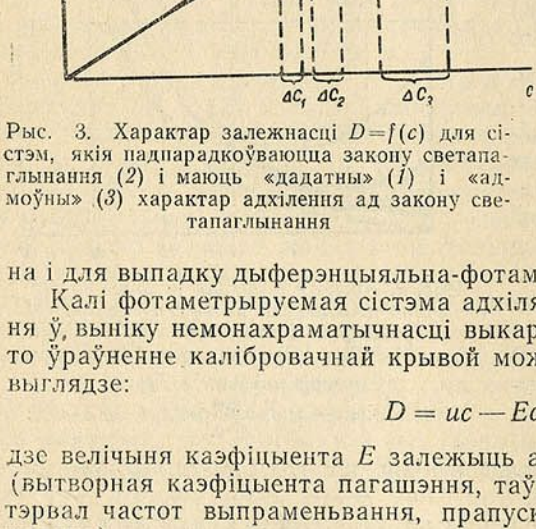
у гэтым выпадку $\frac{\sigma_c}{c} > \frac{\sigma_D}{D}$;

б) сістэма характарызуецца «дадатным» адхіленнем ад закону светапаглынання, г. зн.

$$D = uc + A,$$

у гэтым выпадку $\frac{\sigma_c}{c} < \frac{\sigma_D}{D}$.

Другі выпадак сустракаецца ў практыцы значна радзей, чым першы, таму спынімся больш падрабязна на разглядзе сістэмы з «адмоўным» адхіленнем ад закону светапаглынання.



Рыс. 3. Характар залежнасці $D=f(c)$ для сістэм, якія падпарадкоўваюцца закону светапаглынання (*2*) і маюць «дадатны» (*1*) і «адмоўны» (*3*) характар адхілення ад закону светапаглынання

Хіскі [11] разгледзеў гэты выпадак і прапанаваў формулу памылак вызначэння канцэнтрацыі ў наступным выглядзе:

$$\frac{\sigma_c}{c} = \frac{0{,}434 \cdot \sigma_T}{D \cdot 10^{-D}} \frac{a}{a'}, \qquad (4)$$

дзе a — каэфіцыент пагашэння дадзенага светапаглынання рэчыва, a'—уяўны каэфіцыент пагашэння або тангенс вугла нахілу датычнай да крывой $D=f(c)$ у пункце, што адпавядае дадзенай канцэнтрацыі c. Аналагічная формула атрымана і для выпадку дыферэнцыяльна-фотаметрычных вымярэнняў [11].

Калі фотаметрыруемая сістэма адхіляецца ад закону светапаглынання ў, выніку немонахраматычнасці выкарыстоўваемага выпраменьвання, то ўраўненне каліброванай крывой можа быць паказана ў наступным выглядзе:

$$D = uc - Ec^2, \qquad (5)$$

дзе велічыня каэфіцыента E залежыць ад раду пераменных велічынь (вытворная каэфіцыента пагашэння, таўшчыня паглынальнага слоя, інтэрвал частот выпраменьвання, прапускаемы праз шчыліну монахраматара).

Пасля ўзяцця вытворнай ад выразу (5), пераходу ад дыферэнцыялаў да канчатковых прырошчванняў, дзялення абедзвюх частак ураўнення на D і перастаноўкі атрымаем

$$\frac{\Delta c}{c} = \frac{\Delta D}{D} \frac{u - Ec}{u - 2Ec} \qquad (6)$$

або

$$\frac{\sigma_c}{c} = \frac{\sigma_D}{D} \frac{u - Ec}{u - 2Ec}, \qquad (7)$$

дзе $\frac{\sigma_D}{D} = \frac{0{,}434 \cdot \sigma_T}{D \cdot 10^{-D}}$ (прычым $\sigma_T = \sigma_{T_n} \sqrt{1 - \left(\frac{T}{T_{гр}}\right)^2}$).

Аналагічнае ўраўненне можа быць атрымана і для выпадку дыферэнцыяльна-фотаметрычных вымярэнняў.

Паколькі з павелічэннем канцэнтрацыі даследуемага раствору назоўнік у выразе (7) памяншаецца хутчэй, чым лічнік, памылка ў вызначэнні канцэнтрацыі (σ_c/c) будзе ў агульным выпадку ўзрастаць у параўнанні з памылкай вымярэння аптычнай шчыльнасці (σ_D/D). У пры-

ватным выпадку, калі $E=0$ (напрыклад, інтэрвал прапускаемых частот $\Delta\nu \simeq 0$), фотаметрыруемая сістэма падпарадкоўваецца закону светапаглынання, і выраз (1) з'яўляецца справядлівым.

Памылкі пры пабудове калібровачнай крывой. Свегла, Пал і Эрдэі [14] паказалі, што для вылічэння памылак фотаметрычных вымярэнняў недастаткова ўлічваць толькі памылкі паказання прыбора—неабходна таксама ўлічваць памылкі, што ўзнікаюць за кошт няпэўнасці адрэзкаў, адсякаемых калібровачным графікам на восі аптычных шчыльнасцей, а таксама памылкі, звязаныя з розным нахілам калібровачных крывых. Апошнія былі разгледжаны вышэй. Што ж датычыць памылак, звязаных з недакладнасцю пабудовы калібровачнай крывой і няпэўнасцю адрэзкаў, адсякаемых на восях каардынат, то гэтыя пытанні з'яўляюцца агульнымі пытаннямі метралогіі і статыстыкі, яны характэрныя для ўсіх метадаў вымярэнняў, што патрабуюць папярэдняй каліброўкі прыбораў, а метад апрацоўкі рэзультатаў вымярэнняў, прапанаваны аўтарамі, — метад найменшых квадратаў — вельмі часта выкарыстоўваецца для рашэння падобных задач. Аўтарамі работы [14] падрабязна разгледжаны ўсе кампаненты сумарнай памылкі вымярэння і прапанаваны ўраўненні (для абодвух метадаў вымярэння — непасрэднага і дыферэнцыяльнага) максімальнай памылкі фотаметрычных вымярэнняў, у якіх аб'яднаны ўсе пералічаныя вышэй крыніцы памылак. Гэтыя ўраўненні дазваляюць ацаніць агульны ўзровень хібнасцей, чакаемы пры дадзеных канкрэтных умовах выканання фотаметрычных вымярэнняў.

Вывады

Падводзячы вынікі разгляду асноўных крыніц памылак спектрафотаметрычнага аналізу, звязаных з выкананнем фотаметрычных вымярэнняў, неабходна зрабіць наступныя асноўныя вывады.

1. Памылка вымярэння паказання прыбора па шкале аптычных шчыльнасцей прапарцыянальная памылцы вымярэння паказання па шкале прапусканняў, але паколькі апошняя залежыць ад самога прапускання, то пры эксперыментальнай праверцы дакладнасці фотаметрычных вымярэнняў неабходна атрымліваць гэту залежнасць шляхам паасобнага вызначэння інструментальнай і кюветнай памылак. Веданне велічынь $\sigma_{T_п}$, $\sigma_{T_{гк}}$ і $\sigma_{T_к}$ дазваляе вызначыць граніцнае паказанне па шкале прапусканняў і на гэтай падставе пабудаваць тэарэтычныя крывыя памылак для даных канкрэтных умоў аналізу. Паколькі эксперыментатар адначасова з вымярэннем паказанняў па шкале прапусканняў атрымлівае і значэнні аптычных шчыльнасцей, апошнія могуць быць апрацаваны па статыстыцы малых выбарак, і размеркаванне імаверных выпадковых памылак вымярэння можна супаставіць з характарам тэарэтычнай крывой памылак.

2. Пры пераходзе да памылак вызначэння канцэнтрацыі аналізуемага рэчыва па рэзультатах вымярэння аптычнай шчыльнасці даследуемых растворaў неабходна ўлічваць магчымае змяненне суадносін паміж σ_c/c і σ_D/D у залежнасці ад характару калібровачнай крывой. Пры эксперыментальным вызначэнні велічынь σ_c/c трэба, відаць, распаўсюдзіць дысперсійны аналіз не толькі на $\sigma_{T_п}$ і $\sigma_{T_{гк}}$, але і на σ_c.

3. Прымяненне метаду найменшых квадратаў да апрацоўкі рэзультатаў фотаметрыравання стандартных растворaў пры пабудове калібровачнай крывой дазволіць таксама ацаніць узровень хібнасцей, звязаных з гэтай пабудовай і з выкарыстаннем калібровачнай крывой для вызначэння канцэнтрацый даследуемых растворaў.

4. Паколькі ў літаратуры ёсць вельмі мала даных па дакладнасці фотаметрычных вымярэнняў на фільтрафатометрах, эксперыментальная праверка гэтай дакладнасці для вымярэнняў па метаду непасрэднай фотаметрыі і дыферэнцыяльнаму метаду мае несумненную цікавасць.

Літаратура

1. Twyman F., Lothian G. F. Proc. Phys. Soc., **45**, 642, 1933.
2. Ringbom A. Z. anal. Chem., **115**, 332, 1939.
3. Савостьянова М. В. Изв. АН СССР, серия физ., **11**, 424, 1947.
4. Ayres G. H. Analyt. Chem., **21**, 652, 1949.
5. Hiskey C. F. Analyt. Chem., **21**, 1440, 1949.
6. Gridgeman N. M. Analyt. Chem., **24**, 445, 1952.
7. Lee Kahn, J. Opt. Soc. Am., **45**, 953, 1955.
8. Crawford C. M. Analyt. Chem., **31**, 343, 1959.
9. Терешин Г. С. ЖАХ, **14**, 388, 516, 1959.
10. Комарь Н. П., Самойлов В. П. ЖАХ, **18**, 1284, 1963.
11. Hiskey C. F., Rabinowitz J., Ioung I. G. Analyt. Chem., **22**, 2464, 1950.
12. Ганопольский В. И., Барковский В. Ф., Ганопольская Т. А. Заводская лаборатория, **30**, 267, 1964.
13. Bastian R. Analyt. Chem,. **23**, 580, 1951.
14. Svehla G. S., Pall A., Erdey L. Talanta, **10**, 719, 1963.

Институт физики твердого тела и полупроводников АН БССР

Поступило в редакцию 30.IV 1967

ВЕСЦІ АКАДЭМІІ НАВУК БЕЛАРУСКАЙ ССР № 1 1968
СЕРЫЯ ФІЗІКА-МАТЭМАТЫЧНЫХ НАВУК

УДК 530.12

А. П. РЯБУШКО

МЕТРИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ЦЕНТРАЛЬНО-СИММЕТРИЧЕСКИХ КОСМОЛОГИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ ЭЙНШТЕЙНА И СОСТОЯНИЕ МАТЕРИИ В СЛУЧАЕ ЗАВИСИМОСТИ ДАВЛЕНИЯ ОТ ВРЕМЕНИ

В настоящей работе продолжено исследование свойств решений, полученных в работе [1] для случая зависимости давления материи от времени: $p=p(t)$. В предыдущей работе [2] был исследован случай постоянного давления. В нужной мере будем использовать результаты и обозначения работ [1, 2].

1. Рассмотрим решение (29) из [1], полученное в предположении, что $f(R)=0$, $p=\frac{a}{t^2}$, $a=\text{const}>0$, $3\alpha a>1$:

$$r=r_0|t|^{1/3}\cos^{2/3}\left[\frac{\sigma}{2}\ln(t_0|t|)\right]. \qquad (1)$$

Здесь и всюду в дальнейшем $r_0=r_0(R)$ и $t_0=t_0(R)$—неотрицательные произвольные функции интегрирования, $\sigma\equiv\sqrt{3\alpha a-1}$, $\alpha\equiv\frac{8\pi k}{c^4}$, k— ньютонова постоянная, c — скорость света. График r как функции t при некотором фиксированном R изображен на рис. 1, *а*. Для $t<0$ график симметричен относительно оси r. Начало координат является предельной точкой нулей функции r. В этих точках $r'=\infty$ и они являются особыми точками возврата 1-го рода. Выражение для плотности материи ε, согласно (32) из [1], можно переписать в виде

$$\varepsilon=\frac{p}{3\alpha a}\left[(1-\sigma\,\mathrm{tg}\,\tau_0)^2-\frac{\sigma^2}{\cos^2\tau_0}\cdot\frac{1-\sigma\,\mathrm{tg}\,\tau_0}{B-\sigma\,\mathrm{tg}\,\tau_0}\right], \qquad (2)$$

где $\tau_0\equiv\frac{\sigma}{2}\ln(t_0|t|)$, $B\equiv 3r_0't_0/r_0t_0'$. Поведение ε как функции t при некотором $R=\text{const}$ зависит от значения B. Общий вид графика ε для $t>0$ изображен при $B=\pm\infty$ ($t_0'=0$) на рис. 1, *б*; при $B=0$ ($r_0'=0$) и $B=1$ — на рис. 1, *в*; при $-\infty<B<0$ и $0<B<1$—на рис. 1, *г*; при $1<B<\infty$ — на рис. 1, *д*. Для получения графиков ε при $t<0$ следует зеркально отразить изображенные графики относительно оси ε. Как и для r, нули и разрывы ε сгущаются к началу координат. В случае $t_0=\text{const}$ получаем фридмановскую модель Вселенной с плоским пространством. Поведение ε описывается графиком 1, *б*.

2. Рассмотрим теперь решение (30) из [1], полученное при условии $3\alpha a<1$ (остальные предположения совпадают с таковыми для (1)):

$$r=r_0|t|^{1/3}\,\mathrm{ch}^{2/3}\left[\frac{\sigma^*}{2}\ln(t_0|t|)\right], \qquad (3)$$

где $\sigma^* \equiv \sqrt{1-3\alpha a}$. Если r рассматривать как функцию t, то ее график симметричен относительно оси ординат. На рис. 2, *а* изображена часть графика r при $t>0$. Выражение для ε, согласно (33) из [1], такое:

$$\varepsilon = \frac{p}{3\alpha a}\left[(1+\sigma^* \operatorname{th}\tau^*)^2 + \frac{\sigma^{*2}}{\operatorname{ch}^2\tau^*}\,\frac{1+\sigma^*\operatorname{th}\tau^*}{B+\sigma^*\operatorname{th}\tau^*}\right], \qquad (4)$$

где $\tau^* \equiv \frac{\sigma^*}{2}\ln(t_0|t|)$. График ε как функции t симметричен относительно

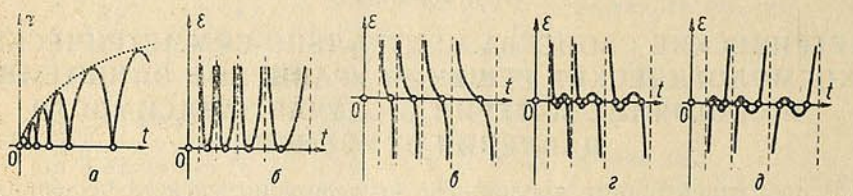


Рис. 1

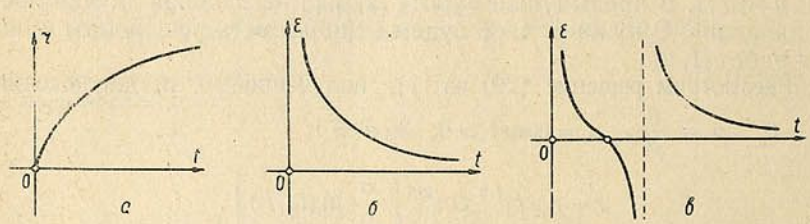


Рис. 2

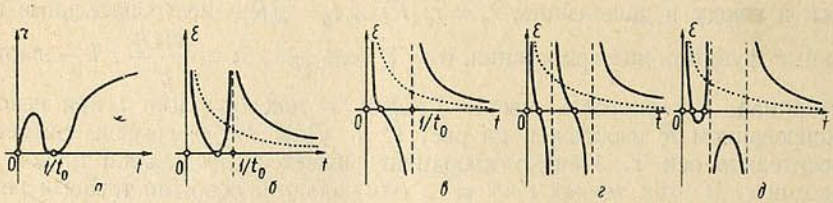


Рис. 3

оси ε и существенно зависит от значений B. При $-\infty \leqslant B \leqslant -\sigma^*$ и $\sigma^* \leqslant B \leqslant \infty$ общий ход графика ε изображен на рис. 2, *б*, а при $-\sigma^* < B < \sigma^*$ — на рис. 2, *в*.

3. Наконец, при $3\alpha a = 1$ и тех же прочих условиях имеем решение

$$r = r_0 |t|^{1/3} \ln^{2/3}(t_0|t|). \qquad (5)$$

График r как функции t изображен на рис. 3, *а*. Выражение для ε (34) из [1] можно переписать в виде

$$\varepsilon = p\left\{\left[1+\frac{4}{\ln(t_0|t|)}\right]^2 - \frac{4}{\ln^2(t_0|t|)}\,\frac{2+\ln(t_0|t|)}{2+B\ln(t_0|t|)}\right\}. \qquad (6)$$

В зависимости от значений B получаем разные графики ε: при $B = \pm\infty$ ($t_0' = 0$) график изображен на рис. 3, *б*; при $B=0$ ($r_0' = 0$) и $B=\pm 1$ — на рис. 3, *в*; при $-1<B<0$ и $0<B<1$ — на рис. 3, *г*; при $-\infty<B<-1$ и $1<B<\infty$ — на рис. 3, *д*. В случае отрицательных t графики для r и ε симметричны изображенным относительно осей ординат.

4. Переходим к решению (39) из [1], которое найдено при $f = 0$ и $p = a/t^{4/3}$, $a = \text{const} > 0$:

$$r = r_0 \left[\cos(\gamma + t_0) + \gamma \sin(\gamma + t_0)\right]^{2/3}, \tag{7}$$

где $\gamma \equiv \frac{3}{2}\sqrt{3\alpha a}\, t^{1/3}$. В зависимости от значений t_0 графики r как функции t разные. При $t_0 = \pi n$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ график r изображен на рис. 4, *а*;

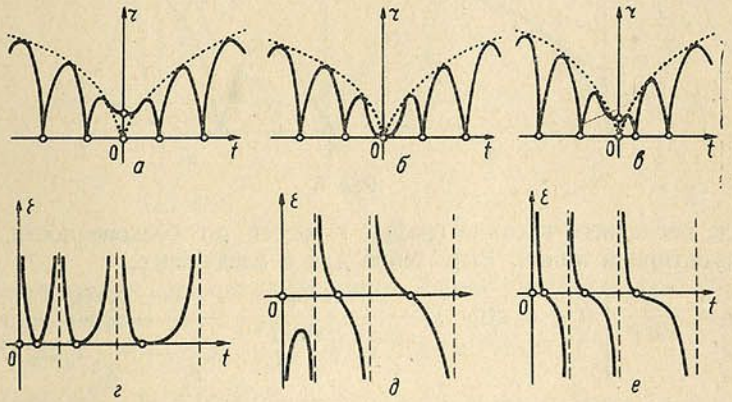


Рис. 4

при $t_0 = (2n + 1)\frac{\pi}{2}$ — на рис. 4 *б*; при остальных значениях t_0 график несколько деформируется (см. рис. 4, *в*). Там, где $r = 0$, имеем особые точки возврата 1-го рода. Выражение для ε в этом случае имеет вид

$$\varepsilon = \frac{27}{4}\frac{\alpha a^2}{t^{2/3}} \times$$

$$\times \left[3r_0' \cos^2(\gamma + t_0) - r_0 t_0' \sin 2(\gamma + t_0)\right] \Big\{ 3r_0' \left[\cos(\gamma + t_0) + \right.$$

$$\left. + \gamma \sin(\gamma + t_0)\right]^2 + 2r_0 t_0' \left[\frac{1}{2}(\gamma^2 - 1)\sin 2(\gamma + t_0) + \right.$$

$$\left. \left. + \gamma \cos 2(\gamma + t_0)\right]\right\}^{-1}. \tag{8}$$

При $t_0' = 0$ (но $r_0' \neq 0$) это выражение упрощается, и мы получаем для ε график, изображенный на рис. 4, *г*. При $r_0' = 0$ (но $t_0' \neq 0$) выражение для ε также упрощается. В этом случае при $t_0 = \pi n$ или $t_0 = (2n + 1)\frac{\pi}{2}$ получаем график, изображенный на рис. 4, *д*; при остальных значениях t_0 получаем график 4, *е*. При увеличении $|t|$ промежутки между разрывами у всех графиков ε растягиваются. При $t < 0$ графики симметричны изображенным относительно оси ε. В общем случае (8) поведение функции ε усложняется.

5. Среди решений уравнений Эйнштейна, найденных в [1], имеется решение (43)

$$r = r_0 (t^2 + 1)^{1/3} \sin^{2/3}(t_0 + a_0 \operatorname{arc\,tg} t), \quad a_0 \equiv \sqrt{1 + \frac{3}{4}\alpha a} > 1, \tag{9}$$

интересное тем, что оно получено для давления $p = a/(t^2+1)^2$, $f = 0$, которое никогда не обращается в бесконечность. График r при $t_0 = 0$ симметричен относительно оси ординат и для $t > 0$ изображен на рис. 5, *а*, если $a_0 \leqslant 2$; на рис. 5, *б*, если $2 < a_0 \leqslant 4$. Пунктиром изображен график функции $(t^2+1)^{1/3}$. И вообще, если $2n < a_0 \leqslant 2(n+1)$, $n = 1, 2, \ldots$, то на графике r количество арок, касающихся пунктирной линии, совпадает со значением

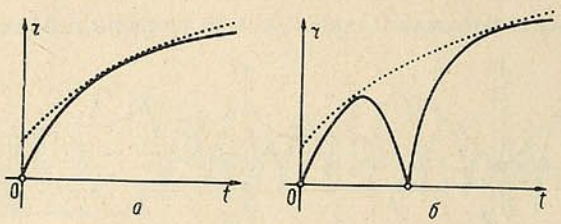


Рис. 5.

n. После последнего касания график r растет до бесконечности, оставаясь ниже пунктирной линии. Выражение для ε следующее:

$$\varepsilon = \frac{4p}{3\alpha a}\left[(t + a_0 \operatorname{ctg} t^*)^2 - \frac{2}{3}\,\frac{a_0 t_0'}{\sin^2 t^*}\,\frac{t + a_0 \operatorname{ctg} t^*}{\dfrac{r_0'}{r_0} + \dfrac{2}{3}\,t_0' \operatorname{ctg} t^*}\right], \qquad (10)$$

где $t^* \equiv t_0 + a_0 \operatorname{arc\,tg} t$. Графики для ε существенно зависят от значений величин a_0, t_0, t_0', r_0, r_0'. Если при некотором фиксированном R $t_0 = t_0' = 0$, то получаем график ε, симметричная правая половина которого имеет вид, похожий на график рис. 2, *б*, если $1 < a_0 \leqslant 2$, и на график рис. 3, *б*, если $2 < a_0 \leqslant 4$. И вообще, если $2n < a_0 \leqslant 2(n+1)$, $n = 1, 2, \ldots$, то на графике количество впадин с достижением нуля между бесконечными разрывами у ε совпадает со значением n, что находится в соответствии с поведением r. Если $t_0 \neq 0$, но $t_0' = 0$, то происходит сдвиг графиков вдоль оси t с их деформацией, но число нулей и бесконечностей у r и ε сохраняется. В случае $r_0' = 0$ из выражения для ε видно, что число нулей и бесконечностей у ε увеличивается, причем будут переходы к отрицательным бесконечностям (подобно графикам на рис. 4, *д*, *е*). В самом общем случае (10) поведение функции ε усложняется.

6. Наконец, укажем еще одно новое решение уравнения (5) из [1] в предположении, что $f(R) = 0$ и $p = \dfrac{a(t^2+1) - 3}{3\alpha(t^2+1)^2}$, $a = \text{const} < 1$.

Тогда

$$r = r_0 (t^2+1)^{1/6} (C_1 \operatorname{ch} T + C_2 \operatorname{sh} T)^{2/3}. \qquad (11)$$

Здесь $r_0(R)$, $C_1(R)$ и $C_2(R)$—произвольные функции интегрирования, $T \equiv \dfrac{1}{2} \times$ $\times \sqrt{1-a}\,\ln\left(t + \sqrt{t^2+1}\right)$. Это решение замечательно тем, что p нигде не обращается в бесконечность, а r ни при каких t не обращается в нуль, если $C_1(R)$ и $C_2(R)$ подчинить условию $C_1 \geqslant C_2$. Это в свою очередь приводит к тому, что ε никогда не обращается в бесконечность. Действительно, ε определяется соотношением (6) из [1] $\alpha r^2 r' \varepsilon = (r\dot{r}^2)'$. Но в нашем случае, как легко проверить, $r^2 r'$ никогда в нуль не обращается. Нетрудно построить график для ε как функции t. Если выбрать $C_2 = 0$, то

$$\varepsilon = \frac{1}{3\alpha(t^2+1)}\left(\frac{t}{\sqrt{t^2+1}} + \sqrt{1-a}\,\operatorname{th} T\right)^2 \qquad (12)$$

и имеет график, изображенный на рис. 6, *а*.

Если $C_1 = C_2$, то

$$\varepsilon = \frac{1}{3\alpha(t^2+1)}\left(\frac{t}{\sqrt{t^2+1}} + \sqrt{1-a}\right)^2 \tag{13}$$

и имеет график, изображенный на рис. 6, *б*. Чтобы исследовать поведение

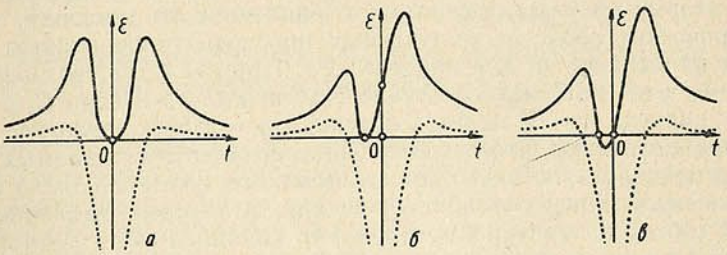


Рис. 6

ε в более общих случаях, перепишем выражение для r в более удобном для этой цели виде

$$r = r_1(t^2+1)^{1/6}(t_1 \operatorname{ch} T + \operatorname{sh} T)^{2/3}, \tag{14}$$

где $r_1 \equiv r_0 C_2^{2/3}$, $t_1 \equiv C_1/C_2 > 1$.

Рассмотрим два основных случая: при некотором заданном R 1) $t_1' = 0$, но $r_1' \neq 0$ и 2) $r_1' = 0$, но $t_1' \neq 0$. В первом случае

$$\varepsilon = \frac{1}{3\alpha(t^2+1)}\left(\frac{t}{\sqrt{t^2+1}} + \sqrt{1-a}\,\frac{1+t_1 \operatorname{th} T}{t_1 + \operatorname{th} T}\right)^2 \tag{15}$$

и поведение ε качественно описывается, как и в случае (13), графиком 6, *б*. Во втором случае

$$\varepsilon = \frac{1}{3\alpha(t^2+1)}\left(\frac{t}{\sqrt{t^2+1}} + \sqrt{1-a}\,\frac{1+t_1 \operatorname{th} T}{t_1 + \operatorname{th} T}\right) \times \left(\frac{t}{\sqrt{t^2+1}} + \sqrt{1-a}\operatorname{th} T\right) \tag{16}$$

и график имеет вид, представленный на рис. 6, *в*. В этом последнем случае есть область, где $\varepsilon < 0$. Поведение r легко усматривается из его выражения (11). Во всех случаях $\varepsilon > 3p$.

Сделаем несколько заключительных замечаний. Все рассмотренные в этой работе решения определяют пространства-времена с плоским трехмерным пространством, так как $f \equiv 0$ [2]. Если же t_0 или t_1 являются константами, приходим к плоской фридмановской модели ($\lambda = 0$, [3], гл. 12). Действительно, в этих случаях r равно произведению $\Phi(t)\cdot\rho(R)$, и поэтому метрику

$$ds^2 = dt^2 - r'^2\,dR^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2)$$

можно переписать в виде

$$ds^2 = dt^2 - \Phi^2[d\rho^2 + \rho^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2)].$$

Далее отметим, что космологические решения, рассмотренные в работах [1, 2] и здесь, не для всех значений t можно интерпретировать физически, так как есть области, где не выполняются условия $\varepsilon \geqslant p$ и $\varepsilon \geqslant 0$. Например, на рис. 2 пунктирные линии представляют график для p и

хорошо видно, где выполнены эти условия, а где нет. Характерно, что ε может не обращаться в бесконечность только для тех решений, для которых p всюду или частично принимает отрицательные значения. Если возможны состояния материи с отрицательным давлением, то подобные решения заслуживают внимательного изучения, ибо они показывают, что гравитационный коллапс материи при отрицательных давлениях вовсе не обязателен. Подобный вывод согласуется с мнением других авторов [4—7], которые обсуждали гипотезу отрицательного давления.

Метрические свойства полученных пространств очевидным образом следуют из выражений для найденных r. При $r \to 0$ все трехмерные объемы $V \to 0$, а $\varepsilon \to \infty$. Только в случае (11) всегда $r > 0$ (при $C_1 \geqslant C_2$), и поэтому V никогда не обращается в нуль, а ε — в бесконечность.

Наконец, отметим, что использование свойств обсуждаемых решений в проблеме релятивистского гравитационного коллапса было бы более правильным, чем использование решений, в которых давлением пренебрегают (обзор литературы по проблеме коллапса см. в работе [8]).

Литература

1. Рябушко А. П. Весці АН БССР, сер. фіз.-мат. навук, № 1, 1967.
2. Рябушко А. П. Весці АН БССР, сер. фіз.-мат. навук, № 2, 1967.
3. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теория поля. Физматгиз, изд. 5-е, 1967.
4. Mc Crea W. H. Proc. Roy. Soc., **A206**, 562, 1951.
5. Широков М. Ф. Труды 6-го совещ. по вопр. космогонии. Изд. АН СССР, 1960, стр. 175.
6. Широков М. Ф. Проблемы гравитации. Тезисы докл. Второй советской гравитационной конференции. Тбилиси, 1965, стр. 230.
7. Whittaker J. M. Nature, **209**, № 5022, 491, 1966.
8. Зельдович Я. Б., Новиков И. Д. Эйнштейновский сборник, 1966, стр. 18.

Белорусский государственный университет им. В. И. Ленина

Поступило в редакцию 5.VI 1967

ВЕСЦІ АКАДЭМІІ НАВУК БЕЛАРУСКАЙ ССР № 1 1968
СЕРЫЯ ФІЗІКА-МАТЭМАТЫЧНЫХ НАВУК

КАРОТКІЯ ПАВЕДАМЛЕННІ

УДК 548—73

Н. Н. СИРОТА, Н. М. ОЛЕХНОВИЧ

ИЗОГНУТЫЙ ГЕРМАНИЕВЫЙ МОНОХРОМАТОР ДЛЯ РЕНТГЕНОВСКОГО ИЗЛУЧЕНИЯ

Современные рентгенографические дифракционные исследования, связанные с прецизионными измерениями интенсивности, требуют применения монохроматизированного излучения с большой интенсивностью. Используемые обычно в качестве монохроматора кристаллы кварца дают малую интенсивность, и в монохроматизированном излучении наряду с лучами длиной волны λ присутствуют лучи с длиной волны $\lambda/2$. Указанные обстоятельства побуждают к поискам новых кристалл-монохроматоров. В этой связи нами были проведены исследования монохроматора с изогнутым кристаллом германия.

Из монокристалла германия в плоскости (III) вырезалась плоскопараллельная пластинка размером $40\times20\times0{,}15$ *мм*. Рабочая поверхность пластинки полировалась. Упругий изгиб кристалл-монохроматора осуществлялся путем зажатия пластинки между двумя цилиндрическими поверхностями. Радиус изгиба составлял примерно 320 *мм*.

Исследования отражательной способности изогнутого монохроматора проводились на Cu — K_α излучении. Монохроматор устанавливался на первичном пучке. Держатель кристалл-монохроматора был жестко связан с рентгеновской трубкой. Конструкция держателя позволяла независимо проводить юстировку монохроматора и гониометра. Юстировка монохроматора производилась по Иоганну [1]. Проведенные нами измерения показали, что интенсивность отражения от изогнутого кристалл-монохроматора почти на порядок выше, чем от плоского.

Для сопоставления с монохроматорами других типов приводим экспериментальные оценочные значения относительной интенсивности отражения от кристаллов германия, втористого лития и кварца:

	Ge	LiF	SiO_2
Отражение от плоского кристалла	100	110	33
Отражение от изогнутого кристалла	850	—	—

Таким образом, изогнутый германиевый монохроматор обладает рядом преимуществ: во-первых, интенсивность отражения от кристалла германия, срезанного по плоскости (III), в несколько раз выше отражения кварца; во-вторых, отраженный пучок не содержит излучения с длиной волны $\lambda/2$; в-третьих, несмотря на свою хрупкость, германий при тонких срезах (0,15—0,20 *мм*) легко поддается упругому изгибу и вместе с тем обладает высокой коррозионной стойкостью, не гигроскопичен.

Литература

1. Johann H. H. Z. f. Phys., 69, № 3/4, 185, 1931.

Институт физики твердого тела и полупроводников АН БССР

Поступило в редакцию 30.X 1967

ВЕСЦІ АКАДЭМІІ НАВУК БЕЛАРУСКАЙ ССР № 1 1968
СЕРЫЯ ФІЗІКА-МАТЭМАТЫЧНЫХ НАВУК

УДК 530.1

А. И. БЕДРИЦКИЙ

ЛИНЕЙНЫЕ НЕПРИВОДИМЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ПЯТИМЕРНОЙ ОДНОРОДНОЙ СОБСТВЕННОЙ ГРУППЫ ЛОРЕНЦА

По аналогии с обычными однородными преобразованиями Лоренца можно ввести пятимерные однородные преобразования Лоренца вида:

$$x'_i = \sum_{k=1}^{5} \alpha_{ik} x_k, \quad i = 1, 2, 3, 4, 5, \tag{1}$$

где $x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = z$, $x_4 = ct$, x_5 относятся к одной из инерциальных систем (неподвижной), а $x'_1 = x'$, $x'_2 = y'$, $x'_3 = z'$, $x'_4 = ct'$, x'_5 — к другой (движущейся), α_{ik} — вещественны.

Оставляя в стороне физический смысл пятой координаты, исследуем указанные преобразования в математическом плане. По аналогии с четырехмерным случаем (см., например, [1—3]) легко видеть, что условия инвариантности квадратичной формы $s^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2 + x_5^2$ относительно преобразований (1) сводятся к соотношению:

$$\sum_{i=1}^{3} \alpha_{ik}\alpha_{is} - \alpha_{4k}\alpha_{4s} + \alpha_{5k}\alpha_{5s} = \begin{cases} 0 \text{ при } k \neq s, \\ 1 \text{ при } k = s = 1, 2, 3, 5, \\ -1 \text{ при } k = s = 4. \end{cases} \tag{2}$$

Соотношение (2) означает, что детерминант преобразований $|\alpha| = \pm 1$.

Назовем по аналогии с четырехмерным случаем собственными пятимерными преобразованиями Лоренца преобразования (1) с $|\alpha| = 1$ и $\alpha_{44} \geqslant 1$. Последнее условие означает, как легко видеть, что преобразования (1) переводят всякий положительный пятимерный времениподобный вектор ($x_4 = c(t_2 - t_1) > 0$) в другой также положительный времениподобный вектор.

Совершенно очевидно на основании (1), (2), что указанные однородные собственные пятимерные преобразования Лоренца образуют группу преобразований (именуемую в дальнейшем для краткости как группу $T_\alpha(5)$). Преобразования этой группы можно осуществить с помощью последовательного выполнения десяти преобразований специального вида — преобразований в гиперплоскостях (x_1, x_2), (x_1, x_3), (x_2, x_3), (x_1, x_4), (x_2, x_4), (x_3, x_4), (x_1, x_5), (x_2, x_5), (x_3, x_5), (x_4, x_5).

Эти 10 преобразований задаются с помощью соответствующих матриц $a_3(\varphi)$, $a_2(\varphi)$, $a_1(\varphi)$, $b_1(\varphi)$, $b_2(\varphi)$, $b_3(\varphi)$, $d_1(\varphi)$, $d_2(\varphi)$, $d_3(\varphi)$, $d_4(\varphi)$. Первые шесть из них аналогичны (см., например, [3]) матрицам для обычной группы Лоренца (именуемой в дальнейшем как $T_\alpha(4)$), остальные четыре матрицы имеют вид:

$$d_1 = \begin{Vmatrix} \cos\varphi & 0 & 0 & 0 & -\sin\varphi \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \sin\varphi & 0 & 0 & 0 & \cos\varphi \end{Vmatrix}, \quad d_2 = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & 0 & 0 & -\sin\varphi \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \sin\varphi & 0 & 0 & \cos\varphi \end{Vmatrix},$$

$$d_3 = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\varphi & 0 & -\sin\varphi \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sin\varphi & 0 & \cos\varphi \end{Vmatrix}, \quad d_4 = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \operatorname{ch}\varphi & \operatorname{sh}\varphi \\ 0 & 0 & 0 & \operatorname{sh}\varphi & \operatorname{ch}\varphi \end{Vmatrix}$$

Однопараметрическим матрицам $a_i(\varphi)$, $b_i(\varphi)$, $d_i(\varphi)$ соответствуют инфинитезимальные матрицы a_i, b_i, d_i. Инфинитезимальным матрицам отвечают инфинитезимальные операторы представления в соответствии:

$$a_1 \to I_{23}, \quad a_2 \to I_{31}, \quad a_3 \to I_{12},$$
$$b_1 \to I_{41}, \quad b_2 \to I_{42}, \quad b_3 \to I_{43},$$
$$d_1 \to I_{15}, \quad d_2 \to I_{25}, \quad d_3 \to I_{35}, \quad d_4 \to I_{45}.$$

Для I_{ik} справедливо соотношение, аналогичное четырехмерному случаю:

$$[I_{ik}, I_{js}] = g_{is}I_{kj} + g_{kj}I_{is} - g_{ij}I_{ks} - g_{ks}I_{ij}, \tag{3}$$
$$-g_{11} = -g_{22} = -g_{33} = -g_{55} = g_{44} = 1,$$
$$i, k, j, s = 1, 2, 3, 4, 5.$$

Формула (3) содержит 45 условий коммутации для $I_{ik} = -I_{ki}$, десять из которых (при $i, k, j, s = 1, 2, 3, 4$) совпадают с условиями коммутации для группы $T_\alpha(4)$. В дальнейшем удобно ввести в рассмотрение вместо десяти операторов I_{ik} следующие десять комбинаций из них:

$$H_+ = iI_{23} + I_{13}, \quad H_- = iI_{23} - I_{13}, \quad H_3 = iI_{12},$$
$$F_+ = iI_{41} + I_{24}, \quad F_- = iI_{41} - I_{24}, \quad F_3 = iI_{43}, \tag{4}$$
$$G_+ = iI_{51} + I_{25}, \quad G_- = iI_{51} - I_{25}, \quad G_3 = iI_{35}, \quad G_4 = I_{45}.$$

Задача по нахождению линейных неприводимых представлений группы $T_\alpha(5)$ сводится, таким образом, к определению операторов H, F и G. Операторы H_+, H_-, H_3, F_+, F_-, F_3 известны (см., например, [1—3]). Они дают линейные неприводимые представления группы $T_\alpha(4)$ и в каноническом базисе (базисе из собственных векторов оператора H_3) в случае конечномерных представлений имеют вид:

$$H_3\xi^{pn}_{lm} = m\xi^{pn}_{lm}, \quad H_+\xi^{pn}_{lm} = \sqrt{(l+m+1)(l-m)}\,\xi^{pn}_{l,m+1},$$
$$H_-\xi^{pn}_{lm} = \sqrt{(l+m)(l-m+1)}\,\xi^{pn}_{l,m-1},$$
$$F_3\xi^{pn}_{lm} = C^{pn}_l\sqrt{l^2-m^2}\,\xi^{pn}_{l-1,m} - A^{pn}_l\, m\,\xi^{pn}_{lm} -$$
$$-C^{pn}_{l+1}\sqrt{(l+1)^2-m^2}\,\xi^{pn}_{l+1,m}, \tag{5}$$
$$F_+\xi^{pn}_{lm} = C^{pn}_l\sqrt{(l-m)(l-m-1)}\,\xi^{pn}_{l-1,m+1} -$$

$$-A_l^{pn}\sqrt{(l-m)(l+m+1)}\,\xi_{l,m+1}^{pn}+C_{l+1}\sqrt{(l+m+1)(l+m+2)}\,\xi_{l+1,m+1}^{pn},$$

$$F_-\xi_{lm}^{pn}=-C_l^{pn}\sqrt{(l+m)(l+m-1)}\,\xi_{l-1,m-1}^{pn}-$$

$$-A_l^{pn}\sqrt{(l+m)(l-m+1)}\,\xi_{l,m-1}^{pn}-$$

$$-C_{l+1}^{pn}\sqrt{(l-m+1)(l-m+2)}\,\xi_{l+1,m-1}^{pn}; \tag{5}$$

$$A_l^{pn}=\frac{inp}{l(l+1)},\quad C_l^{pn}=\frac{i}{l}\sqrt{\frac{(l^2-n^2)(l^2-p^2)}{4l^2-1}};$$

$$m=-l,\ -(l-1),\ \ldots(l-1),\ l;$$

$$l=|n|,\ |n|+1,\ \ldots|p|-1. \tag{6}$$

n и p — одновременно целые или полуцелые числа, задающие неприводимое представление, ξ_{lm}^{pn} — базисные векторы в пространстве представлений, соответствующие паре чисел $\tau\sim(n,\ p)$.

Пространство, в котором действует представление группы $T_\alpha(s)$, представим в виде прямой суммы подпространств, в каждом из которых действует неприводимое представление группы $T_\alpha(4)$, определяемое парой $\tau\sim$ $\sim(n,\ p)$. В каждом из подпространств выбран канонический базис $\xi_{lm}^{pn}=$ $=\xi_{lm}^{\tau}$. Операторы H_+, H_-, H_3, F_+, F_-, F_3 действуют в этом базисе по формулам (5), (6). Задача сводится к нахождению операторов G_+, G_-, G_3, G_4.

Матрицу оператора G_4 можно составить из пар $\tau\sim(n,\ p)$ и $\tau'\sim(n',\ p')$ в виде $\|g_{lml'm'}^{pnp'n'}\|$.

Так как она коммутирует с H_+, H_- и H_3, то $g_{lml'm'}^{pnp'n'}=g_l^{pnp'n'}\delta_{ll'}\delta_{mm'}$ (см. [1]).

Подставляя это значение в формулу

$$[[F_3,\ G_4],\ F_3]=G_4, \tag{7}$$

которую получаем из (3) и (4), приходим по аналогии с [1] к выводу о том, что $g_l^{pnp'n'}$ может быть отлично от нуля только в следующих двух случаях:

$$1)\ n'=n\pm1,\quad p'=p;$$
$$2)\ n'=n,\quad p'=p\pm1.$$

При этом $g_l^{pnp'n'}$ имеют следующий вид:

$$1)\ \text{при } n'=n+1,\quad p'=p\quad g_l^{pnp'n'}=g^{pnp'n'}\sqrt{(l+n+1)(l-n)};$$

$$2)\ \text{при } n'=n-1,\quad p'=p\quad g_l^{pnp'n'}=b^{pnp'n'}\sqrt{(l-n+1)(l+n)}; \tag{8}$$

$$3)\ \text{при } n'=n,\quad p'=p+1\quad g_l^{pnp'n'}=g^{pnp'n'}\sqrt{(l+p+1)(l-p)};$$

$$4)\ \text{при } n'=n,\quad p'=p-1\quad g_l^{pnp'n'}=b^{pnp'n'}\sqrt{(l-p+1)(l+p)}.$$

$g^{pnp'n'}$ и $b^{pnp'n'}$ — произвольные комплексные числа.

Матрицы операторов G_+, G_- и G_3 можно выразить через матрицу $\|g\|$ по формулам:

$$G_+=[F_+,\ G_4],\quad G_-=[F_-,\ G_4],\ G_3=[G_4,\ F_3], \tag{9}$$

получаемым из (3) и (4).

В силу произвольности $g^{pnp'n}$ и $b^{pnp'n'}$ можно произвести нормировку базиса ξ^{pn}_{lm}, растянув одинаково в каждом из подпространств $\tau \sim (n, p)$ все векторы ξ^{pn}_{lm}, т. е. положить $\xi'^{pn}_{lm} = h_1(p) \cdot h_2(n) \xi^{pn}_{lm}$, где $h_1(p)$ и $h_2(n)$ — некоторые числа. При этом вид операторов (5) в новом базисе не изменится, а $g^{pnp'n'}$ и $b^{pnp'n'}$ перейдут в $g'^{pnp'n'}$ и $b'^{pnp'n'}$. Можно показать, что при нормировке

$$g'^{p,n-1,p,n}\, b'^{p,n,p,n-1} = g^{p,n-1,p,n}\, b^{p,n,p,n-1},$$
$$g'^{p-1,n,p,n}\, b'^{p,n,p-1,n} = g^{p-1,n,p,n} b^{p,n,p-1,n}, \tag{10}$$

т. е. сохраняется произведение gb.

Соответствующим выбором $h_1(p)$ и $h_2(n)$ можно сделать $g^{\cdots}$ и $b^{\cdots}$ равными:

$$g^{p,n-1,p,n} = b^{p,n,p,n-1} = \gamma_{pn},$$
$$g^{p-1,n,p,n} = b^{p,n,p-1,n} = \beta_{pn}. \tag{11}$$

После этого оператор G_4 на основании (11) и (8) принимает вид:

$$G_4 \xi^{pn}_{lm} = \gamma_{p,n+1} \sqrt{(l+n+1)(l-n)}\, \xi^{p,n+1}_{lm} +$$
$$+ \gamma_{pn} \sqrt{(l+n)(l-n+1)}\, \xi^{p,n-1}_{lm} +$$
$$+ \beta_{p+1,n} \sqrt{(l+p+1)(l-p)}\, \xi^{p+1,n}_{lm} + \beta_{pn} \sqrt{(l+p)(l-p+1)}\, \xi^{p-1,n}_{lm}. \tag{12}$$

Операторы G_+, G_- и G_3 могут быть получены по формулам (9), так что задача сводится к определению γ_{pn} и β_{pn}. На основании соотношения $F_3 = [G_4, G_3]$, получаемого из (3) и (4), мы приходим к следующей системе равенств для γ_{pn} и β_{pn}:

$$\gamma_{pn} \beta_{p,n-1} (p-n+1) = \gamma_{p-1,n} \beta_{pn} (p-n-1),$$
$$\gamma_{p+1,n} \beta_{p+1,n} (p+n+1) = \gamma_{pn} \beta_{p+1,n-1} (p+n-1),$$
$$\gamma_{p,n+1} \beta_{p,n+1} (p+n+1) = \gamma_{p-1,n+1} \beta_{pn} (p+n-1),$$
$$\gamma_{p,n+1} \beta_{p+1,n+1} (p-n-1) = \gamma_{p+1,n+1} \beta_{p+1,n} (p-n+1), \tag{13}$$
$$2(n+1)\gamma^2_{p,n+1} + 2(1-n)\gamma^2_{pn} + 2(p+1)\beta^2_{p+1,n} + 2(1-p)\beta^2_{pn} = 1,$$
$$p(\gamma^2_{pn} - \gamma^2_{p,n+1}) = n(\beta^2_{p+1,n} - \beta^2_{pn}).$$

Решение системы (13) приводит к

$$\gamma_{pn} = \pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{(n+n_0)(n-n_0-1)(n+p_0+1)(n-p_0-2)}{(p^2-n^2)[p^2-(n-1)^2]}},$$
$$\beta_{pn} = \pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{(p+n_0)(p-n_0-1)(p+p_0+1)(p-p_0-2)}{(p^2-n^2)[(p-1)^2-n^2]}}, \tag{14}$$

где n_0 и p_0 — произвольные комплексные или действительные числа.

Соотношения $F_+ = [G_+, G_4]$ и $F_- = [G_-, G_4]$ приводят к той же системе (13).

При найденных γ_{pn} и β_{pn} выполняются все соотношения коммутации (3).

Выбор $h_1(p)$ и $h_2(n)$, обеспечивающий равенство (11), можно осуществить, если n_0 и p_0 одновременно с n и p целые или полуцелые числа (n_0, $p_0 \geqslant 0$).

Таким образом, линейные конечномерные неприводимые представления группы $T_\alpha(5)$ задаются парой чисел (n_0, p_0) и выражаются формулами (5), (6), (12), (14) и (9).

При этом n и p принимают одновременно с n_0 и p_0 целые или полуцелые значения и независимо друг от друга изменяются в пределах: $n = -n_0, -(n_0-1), \ldots (n_0-1), n_0$; $p = (n_0+1), (n_0+2), \ldots (p_0+1)$. Каждой паре $\tau \sim (n, p)$ соответствуют значения l и m, лежащие в пределах (6).

Размерность представлений определяется формулой:

$$N = \frac{1}{6}(2n_0+1)(2p_0+3)\left[(p_0+1)(p_0+2) - n_0(n_0+1)\right].$$

Условия унитарности представлений группы $T_\alpha(5)$ сводятся к существованию положительно определенной билинейной эрмитовой формы относительно операторов представления:

$$(T_\alpha(5)f,\ T_\alpha(5)h) = (f,\ h), \tag{15}$$

где f и h — любые два вектора.

Для операторов H_3 и F_3 группы $T_\alpha(5)$ условия унитарности остаются такими же, как и для группы $T_\alpha(4)$ (см., например, [1]):

$$\begin{aligned}(H_3f,\ h) &= (f,\ H_3h),\\ (F_3f,\ h) &= (f,\ F_3h).\end{aligned} \tag{16}$$

Для оператора G_4 можно получить:

$$(G_4f,\ h) = -(f,\ G_4h). \tag{17}$$

Соотношения (16) и (17) означают, что существует единственное одномерное унитарное представление группы $T_\alpha(5)$, задаваемое $n_0 = p_0 = 0$ ($n = l = m = 0$, $p = 1$).

Неприводимым представлениям группы $T_\alpha(5)$ (как группы де Ситтера) посвящены работы [4] и [5]. В работе [4] установлены представления с точностью до произвольного постоянного множителя, т. е. не раскрыты комплексные числа $g^{p,n,p',n'}$ и $b^{p,n,p',n'}$ (см. формулы (8)).

В работе [5] методом, предложенным одним из авторов (см. [6]) и основанным на произведении подпространств, получены унитарные неприводимые представления группы путем канонического разложения в пространстве произведения подпространств.

Литература

1. Гельфанд И. М., Минлос Р. А., Шапиро З. Я. Представления группы вращений и группы Лоренца. М., 1958.
2. Наймарк М. А. Линейные представления группы Лоренца. М., 1958.
3. Наймарк М. А. УМН, т. IX, в. 4 (62), 19—93, 1954.
4. Фущич В. І. Укр. фіз. ж., т. II, в. 8, 907—908, 1966.
5. Kiheberg A., Ström S. Arkiv fys., **31**, b. 6, 491—508, 1966.
6. Kiheberg A. Arkiv fys., **30**, b. 2, 121—140, 1965.

Витебский педагогический институт им. С. М. Кирова

Поступило в редакцию 22.VI 1967

ВЕСЦІ АКАДЭМІІ НАВУК БЕЛАРУСКАЙ ССР № 1 1968
СЕРЫЯ ФІЗІКА-МАТЭМАТЫЧНЫХ НАВУК

УДК 530.145

А. С. ПОТУПА, Л. М. ТОМИЛЬЧИК

К ВОПРОСУ О КВАНТОВАНИИ ПРОСТРАНСТВА В РАМКАХ ОСЦИЛЛЯТОРНОЙ МОДЕЛИ

Как известно, в рамках существующих моделей квантования пространства-времени возникают трудности с физической интерпретацией и экспериментальной проверкой предсказаний (см., например, [1—3]). Возможно, что источником таких трудностей является отсутствие в этих моделях аналога измерительной процедуры типа процедуры Бора—Розенфельда [4, 5], в силу чего нельзя установить последовательной связи с физикой реальных взаимодействий.

Целью настоящей работы является проведение процедуры, эффективно эквивалентной квантованию фазового пространства и, по-видимому, позволяющей в известной мере устранить указанные трудности.

Рассмотрим $6n$-мерное фазовое пространство n-частичной осцилляторной модели с определенной в нем инвариантной квадратичной формой обычного вида:

$$S = \frac{1}{2} \sum_k (p_k^2 + x_k^2) \qquad k = 1, 2, \ldots, 3n. \tag{1}$$

Перейдем к системе координат $\{D_+(k), D_-(l)\}$, где

$$D_\pm(k) = \frac{1}{\sqrt{2}} (\pm i p_k + x_k), \tag{2}$$

что соответствует повороту на угол $\frac{\pi}{4}$ в каждой координатной плоскости.

Наложим на $D_\pm(k)$ стандартные перестановочные соотношения:

$$\left.\begin{aligned} [D_+(k),\ D_-(l)]_- &= \delta_{kl} \\ [D_+(k),\ D_+(l)]_- &= [D_-(k),\ D_-(l)]_- = 0 \end{aligned}\right\}. \tag{3}$$

Очевидно, эта процедура соответствует квантованию метрического инварианта фазового пространства, совпадающего в общем случае с линейным оператором Казимира группы $U(n)$. Последняя путем соответствующего выбора метрических коэффициентов может быть редуцирована в цепочки произведений вида

$$U(3n) \to U(k) \times \ldots \times U(l),\ k + \ldots + l = 3n^*).$$

В рамках осцилляторной модели естественным образом возникает характеристический параметр l_0 размерности длины, определяемый условием

$$l_0 = \sqrt{2}\ (\overline{\Delta x})_{\min}, \tag{4}$$

*) Отметим, что случай двухчастичного фазового пространства фактически рассмотрен в работе [6].

где $(\overline{\Delta x})_{min}$ — минимальное среднеквадратичное отклонение координаты. Подчеркнем, что отличие параметра l_0 от 0 гарантируется существенной положительной определенностью среднего значения инвариантной метрической формы (1) в силу соотношения неопределенностей.

Таким образом, в рамках осцилляторной модели можно связать понятие «фундаментальной длины» с понятием минимального размера, совместимого с возможностью проведения измерительной процедуры.

Нетрудно видеть, что устремление антиэрмитовых частей $D_{\pm}(k)$ к 0 формально приводит к коммутационным соотношениям

$$[x_k,\ x_l]_- = l_0^2 \delta_{kl}, \tag{5}$$

соответствующим квантованию пространства по методу Снайдера [1].

Однако такой переход фактически означает исключение измерительной процедуры через соотношение неопределенности. Рассмотренная модель может быть без труда релятивизирована путем перехода к $8n$-мерному псевдоевклидову «фазовому» пространству, что открывает возможность построения некомпактных групп, генераторы которых представляют собой билинейные комбинации факторизующих операторов уравнений Борновской теории взаимности [7, 8].

Отметим, что постулирование инвариантности формы (1) эквивалентно гипотезе взаимности в нерелятивистском случае. Если отождествить метрический инвариант с гамильтонианом *), то ее содержание сводится к требованию сохранения энергии в перелятивистской квантовой механике.

Таким образом, в осцилляторной модели обычная схема квантования может быть рассмотрена на языке квантования некоторого метрического инварианта, что приводит к естественному, с точки зрения экспериментальной процедуры, определению «фундаментальной длины» и однозначно связывает эту схему с генерацией групп $U(3n)$, которые, по-видимому, являются наиболее перспективными с точки зрения их использования для динамического обоснования унитарной симметрии.

Литература

1. Snyder H. S. Phys. Rew., **71**, 38, 1947.
2. Кадышевский В. Г. ЖЭТФ, **41**, 1885, 1961.
3. Мир-Касимов Р. М. ЖЭТФ, **52**, 533, 1967.
4. Тирринг В. Е. Введение в квантовую электродинамику ВМ, 1964.
5. Bohr N., Rosenfeld L. Kgl. Danske Videnskab. Selskab. Biol. Medd., **12**, 8, 1933.
6. Манько В. И. ЯФ, **2**, 512, 1965.
7. Born M. Proc. Roy. Soc., **165**, 291, 1938.
8. Born M. Rew. Mod. Phys., **21**, 463, 1949 (см. также А. Соколов, Д. Иваненко. Квантовая теория поля. ГИТТЛ, М., 1952).
9. Томильчик Л. М. Весці АН БССР, сер. фіз.-мат. навук, № 4, 127, 1967.

Институт физики
АН БССР

Поступило в редакцию
13.IX 1967

*) Относительно возможности иной трактовки оператора S см. [6, 9].

ВЕСЦІ АКАДЭМІІ НАВУК БЕЛАРУСКАЙ ССР № 1 1968
СЕРЫЯ ФІЗІКА-МАТЭМАТЫЧНЫХ НАВУК

УДК 621.396.6

Ю. М. ВЫСОЦКИЙ, А. П. ФЕДОРОВ

ПРИСТАВКА К АИ-100 ДЛЯ СНЯТИЯ СПЕКТРОВ МЕССБАУЭРА ВО ВРЕМЕННОМ РЕЖИМЕ

При изучении эффекта Мессбауэра источник движется относительно поглотителя с некоторой скоростью. В зависимости от скорости движения источника число импульсов, прошедших через поглотитель, меняется.

По способу регистрации импульсов, которые проходят через поглотитель, электродинамические спектрографы с переменной скоростью можно разбить на две группы.

В первой группе спектрографов скорость движения источника меняется по заданному закону и по этому же закону модулируются сигналы от детектора. Промодулированные сигналы подаются на вход многоканального анализатора и регистрируются. Экспериментальная кривая обычно формируется путем деления отсчетов в каналах при наличии резонансного поглощения на число отсчетов в каналах без резонансного поглощения [1, 2]. Однако такой способ обработки приводит к увеличению статистической ошибки.

Во второй группе спектрографов амплитудный анализатор работает во временном режиме [2, 3]. Под временным режимом понимается такой режим работы анализатора, когда каждому каналу соответствует определенный интервал изменения скорости движения источника. При отсутствии резонансного поглощения спектр будет представлять прямую линию. Этот режим работы является более точным, так как в этом случае входной блок анализатора не используется и нет необходимости модулировать сигналы от детектора. Ошибки, связанные с работой этих узлов, отсутствуют. Мертвое время для всех каналов одинаково, и поэтому на вход анализатора можно подавать большое число импульсов.

В настоящей работе описывается простая приставка, которая позволяет снимать спектры на амплитудном анализаторе АИ-100 во временном режиме без переделки блоков анализатора.

Принципиальная схема приставки дана на рис. 1. Мультивибратор, собранный на лампе $Л_5$ [4], синхронизируется напряжением, которое приводит в движение источник. В нашей работе это напряжение было синусоидальным. Прямоугольные импульсы, которые снимаются с левой половины лампы $Л_5$, управляют двумя импульсными пропускателями, собранными на лампах $Л_4$, $Л_6$. Задний фронт этого импульса сбрасывает в нулевое состояние распределительное устройство. Через импульсный пропускатель $Л_4$ от генератора поступает серия импульсов, которые должны последовательно переключать каналы распределительного устройства. Каждый импульс серии запускает мультивибратор $Л_1$. Продифференцированный импульс с катода лампы $Л_1$ через диод $Д_2$ подается на переключение каналов и сброс в ноль арифметического устройства. Во время переключения каналов вход анализатора блокируется. Блокировка осуществляется импульсом, который снимается с правой половины лампы

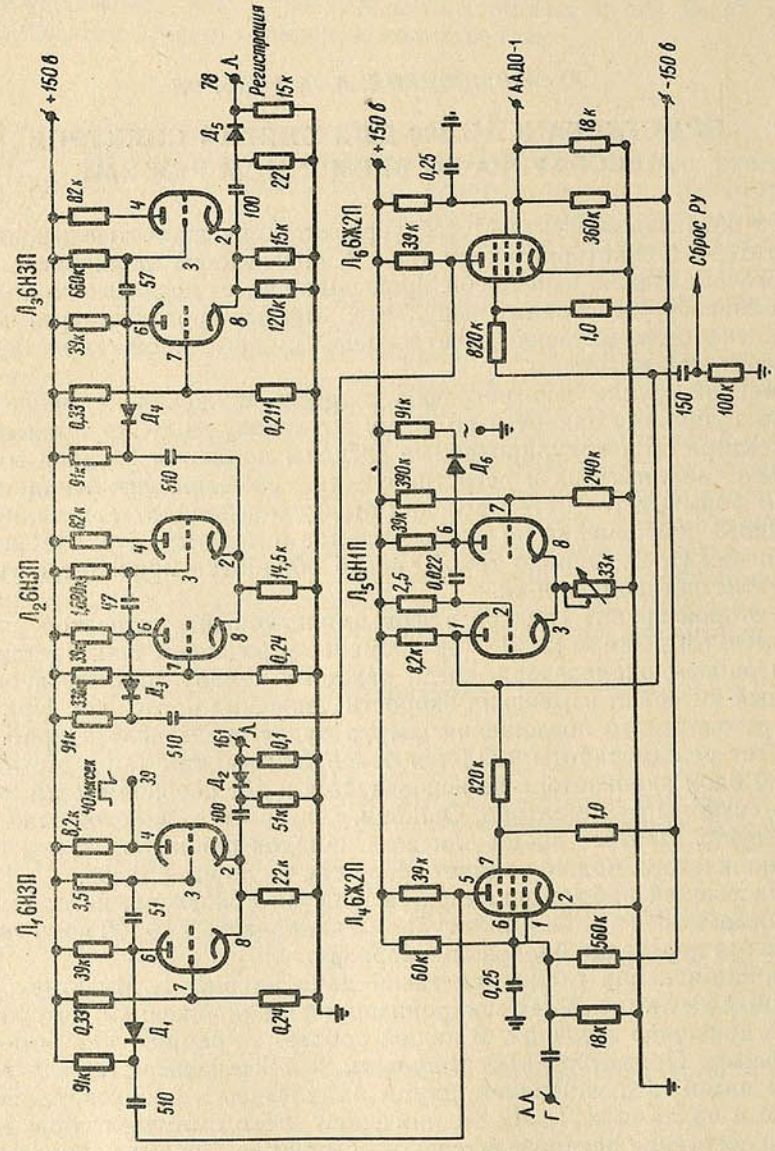


Рис. 1. Принципиальная схема приставки

$Л_1$. Импульс блокировки подается на позицию 39 АИ-100, его длительность 40 *мксек*.

Регистрируемые импульсы с одноканального анализатора ААДО-1 поступают на импульсный пропускатель $Л_6$ и запускают мультивибратор $Л_2$, который блокирует вход анализатора на время обработки импульса ($\tau=30$ *мксек*) и запускает формирующий мультивибратор $Л_3$. С катода

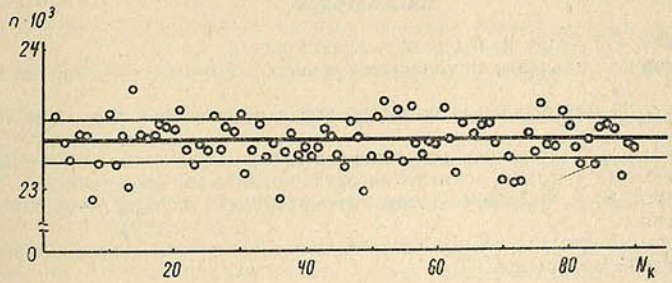


Рис. 2. Спектр при отсутствии резонансного поглощения

$Л_3$ продифференцированный импульс через диод $Д_5$ подается на регистрацию в распределительный блок АИ-100 (сетка лампы 78 АИ-100).

Параметры мультивибратора $Л_5$ можно выбрать так, что на управляющем импульсе, который снимается с левой половины лампы $Л_5$, уложится две полуволны синусоидального напряжения, передвигающего источник, или одна. В первом случае спектр резонансного поглощения будет сдвоенным.

На рис. 2 приведен спектр при отсутствии резонансного поглощения. Если считать, что число импульсов, зарегистрированных в каналах, подчиняется нормальному закону распределения случайных величин, то из формулы [5]

$$P(|x-a|<\sigma t)=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^t e^{-\frac{t^2}{2}}dt$$

следует, что 32% точек могут находиться вне полосы $\pm\sigma$, где σ есть среднее квадратическое отклонение от среднего значения. На рис. 2 сплошная линия означает среднее число импульсов, зарегистрированных в канале. Ширина между пунктирными линиями равна 2σ. Число каналов, в которых проводилась регистрация, равно 90. Из рис. 2 видно, что согласие хорошее.

Литература

1. Вертхейм Г. Эффект Мессбауэра. М., 1966, стр. 26.
2. Конкелайт. Приборы для научных исследований, 2, 50, 1964.
3. Корытко Л. А., Суздалев И. П., Труханов В. А. Заводская лаборатория, 12, 1519, 1965.
4. Санин А. А. Электронные приборы ядерной физики. 1964, стр. 491.
5. Гнеденко Б. В. Курс теории вероятностей. М., 1961, стр. 129.

Институт физики твердого тела и полупроводников АН БССР

Поступило в редакцию 13.IX 1967

ЗМЕСТ

МАТЭМАТЫКА

С. А. Чунихин. Об индексиалах и нормализаторах 5
И. М. Кунцевич. О минимизации значения линейной формы на множество всех циклов длины n 12
З. М. Дымент. О максимальных коммутативных подалгебрах полной матричной алгебры 17
В. П. Грибкова. Об уточнении оценки погрешности решения интегральных уравнений Фредгольма методом асимптотических полиномов второго рода . . 25
В. А. Лисковец, В. З. Фейнберг. Автоматные разбиения и подполугруппы свободной полугруппы 34
Э. М. Пальчик. О группах, все i-е максимальные подгруппы которых перестановочны с силовской подгруппой. I 45
С. А. Русаков. О группах с максимальными подгруппами данного вида . . 49
Э. Н. Казанцев. Математическая модель графика выпуска изделий, удовлетворяющего требованию комплектации сборки 54
В. Т. Воднев. О пространствах Д. В. Веденяпина 61

ФІЗІКА

А. А. Богуш, Б. В. Крылов, Ф. И. Федоров. О матрицах уравнений для частиц со спином 2 74
А. Г. Маханёк, В. С. Корольков, Н. Н. Лонг. Задача об экранировании и антиэкранировании ядерных электрических моментов 82
І. І. Пятроўскі, С. А. Рэкун. Узнікненне адмоўнага супраціўлення ў германіевых і крэмніевых дыёдах заводскага вырабу 93
У. І. Ганапольскі. Аб дакладнасці фотаметрычных вымярэнняў. Асноўныя крыніцы памылак. I 98
А. П. Рябушко. Метрические свойства центрально-симметрических космологических решений уравнений Эйнштейна и состояние материи в случае зависимости давления от времени 105

КАРОТКІЯ ПАВЕДАМЛЕННІ

Н. Н. Сирота, Н. М. Олехнович. Изогнутый германиевый монохроматор для рентгеновского излучения 111
А. И. Бедрицкий. Линейные неприводимые представления пятимерной однородной собственной группы Лоренца 112
А. С. Потупа, Л. М. Томильчик. К вопросу о квантовании пространства в рамках осцилляторной модели 117
Ю. М. Высоцкий, А. П. Федоров. Приставка к АИ-100 для снятия спектров Мессбауэра во временном режиме 119

СОДЕРЖАНИЕ

МАТЕМАТИКА

С. А. Чунихин. Об индексиалах и нормализаторах 5
И. М. Кунцевич. О минимизации значения линейной формы на множество всех циклов длины n 12
З. М. Дымент. О максимальных коммутативных подалгебрах полной матричной алгебры 17
В. П. Грибкова. Об уточнении оценки погрешности решения интегральных уравнений Фредгольма методом асимптотических полиномов второго рода . . 25
В. А. Лисковец, В. З. Фейнберг. Автоматные разбиения и подполугруппы свободной полугруппы 34
Э. М. Пальчик. О группах, все i-е максимальные подгруппы которых перестановочны с силовской подгруппой. I 45
С. А. Русаков. О группах с максимальными подгруппами данного вида . . 49
Э. Н. Казанцев. Математическая модель графика выпуска изделий, удовлетворяющего требованию комплектации сборки 54
В. Т. Воднев. О пространствах Д. В. Веденяпина 61

ФИЗИКА

А. А. Богуш, Б. В. Крылов, Ф. И. Федоров. О матрицах уравнений для частиц со спином 2 74
А. Г. Маханёк, В. С. Корольков, Н. Н. Лонг. Задача об экранировании и антиэкранировании ядерных электрических моментов 82
И. И. Петровский, С. А. Рекун. Возникновение отрицательного сопротивления в германиевых и кремниевых диодах заводского изготовления 93
В. И. Ганопольский. О точности фотометрических измерений. Основные источники ошибок. I 98
А. П. Рябушко. Метрические свойства центрально-симметрических космологических решений уравнений Эйнштейна и состояние материи в случае зависимости давления от времени 105

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

Н. Н. Сирота, Н. М. Олехнович. Изогнутый германиевый монохроматор для рентгеновского излучения 111
А. И. Бедрицкий. Линейные неприводимые представления пятимерной однородной собственной группы Лоренца 112
А. С. Потупа, Л. М. Томильчик. К вопросу о квантовании пространства в рамках осцилляторной модели 117
Ю. М. Высоцкий, А. П. Федоров. Приставка к АИ-100 для снятия спектров Мессбауэра во временном режиме 119

АТ 15102. Здадзена ў набор 6/II-68 г. Падпісана да друку 25/III-68 г. Фармат 70×108 1/16. Друк. арк. 8,25. Ум. друк. арк. 11,6. Уч.-выд. арк. 11,9. Выд. зак. 629 Друк. зак. 133. Цана 60 кап.

Друкарня імя Францыска (Георгія) Скарыны выдавецтва «Навука і тэхніка» АН БССР і Дзяржкамітэта СМ БССР па друку. Мінск, Ленінскі праспект, 68

В ИЗДАТЕЛЬСТВЕ „НАУКА И ТЕХНИКА“

Готовится к печати

Богуш А. А., Мороз Л. Г.

ВВЕДЕНИЕ В ТЕОРИЮ КЛАССИЧЕСКИХ ПОЛЕЙ

16 л. На русском языке. Цена 1 руб. 27 коп.

В книге излагаются основы классической теории волновых полей частиц с различными спинами. Эти вопросы составляют неотъемлемую часть современной теории элементарных частиц и, как правило, включаются в качестве вводных разделов в большинство монографий, посвященных теории квантовых полей. Однако за последние десятилетия теория элементарных частиц настолько далеко ушла вперед и получила столь широкое и многостороннее развитие, что лежащие у ее истоков вопросы классической теории поля все чаще отходили на задний план и в отечественной новейшей специальной литературе не нашли по существу должного освещения.

Предлагаемая книга представляет собой попытку дать достаточно полное и систематическое, но вместе с тем краткое и компактное изложение основных вопросов классической теории полей, ознакомление с которыми представляется необходимым при последовательном изучении современной теоретической физики.

Книга рассчитана на преподавателей и студентов физических специальностей университетов, педагогических и других вузов. Она будет полезной не только для лиц, специализирующихся в области теоретической физики, но и для широкого круга читателей, интересы которых связаны с физикой элементарных частиц и ядерной физикой, а также со всеми другими разделами современной физики, где все шире используются идеи и математический аппарат классической и квантовой теории полей.

Книгу можно заказать предварительно во всех магазинах книготорга и потребительской кооперации республики, а также в магазинах «Академкнига».

Для получения книги почтой заказы направлять по адресу г. Минск, Железнодорожная улица, 27, Республиканский магазин «Книга—почтой» или г. Москва, К-12, Б. Черкасский переулок, 2/10, контора «Академкнига», отдел «Книга—почтой».

Книготоргующие организации направляют заказы Управлению книжной торговли Государственного комитета Совета Министров БССР по печати.

ВЕСЦІ АКАДЭМІІ НАВУК БЕЛАРУСКАЙ ССР № 1 1968
СЕРЫЯ ФІЗІКА-МАТЭМАТЫЧНЫХ НАВУК

РЕФЕРАТЫ

УДК 519.44

Об индексиалах и нормализаторах. Чунихин С. А. «Весці Акадэміі навук БССР», серыя фізіка-матэматычных навук. 1968 г., № 1, 5—11.

В настоящей работе приводятся доказательства результатов работ автора, кратко опубликованных в «Докладах АН СССР», **167**, № 3, 531—533, 1966.

Библиографий 16.

УДК 512.25

О минимизации значения линейной формы на множестве всех циклов длины *n*. Кунцевич И. М. «Весці Акадэміі навук БССР», серыя фізіка-матэматычных навук. 1968 г., № 1, 12—16.

Если подстановка t из симметрической группы S_n такова, что $t(i) = j_i$, то значением линейной формы $f_t = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i$ на t при фиксированном вещественном векторе $b = (b_1, \ldots, b_n)$ называется величина $f_t(b) = \sum_{i=1}^{n} c_i b_{j_i}$.

Пусть H — множество всех циклов длины n, а τ_0 — подстановка, минимизирующая значение линейной формы f_t на S_n, т. е.

$$f_{\tau_0}(b) \leqslant f_t(b)$$

для любой подстановки t из S_n.

Показано, что для нахождения подстановки, минимизирующей значение линейной формы f_t на H при $\tau_0 = (1, 2, \ldots, l)\tau$, где τ — произвольная подстановка символов $l+1, l+2, \ldots, n$, достаточно ограничиться рассмотрением множества $(n-l)!$ циклических подстановок длины n из S_n.

Рассмотрены случаи, когда $\tau_0 = (1, 2, \ldots, l)$ и $\tau_0 = (1, 2, \ldots, l) \times (l+1, n)(l+2, n-1) \ldots$

Библиографий 3.

УДК 519.48

О максимальных коммутативных подалгебрах полной матричной алгебры. Дымент З. М. «Весці Акадэміі навук БССР», серыя фізіка-матэматычных навук. 1968 г., № 1, 17—24.

Пусть P_n — алгебра всех $n \times n$ матриц над бесконечным полем P, $U_{n,k}$ — множество всех максимальных коммутативных нильпотентных подалгебр P_n класса нильпотентности k, а $\overline{U}_{n,k}$ — множество классов сопряженных в P_n алгебр из $U_{n,k}$.

Д. А. Супруненко доказал, что при $n > 6$ множество $\overline{U}_{n,3}$ бесконечно.

Автор получил следующий результат: пусть $n \geqslant k + 4$; $k \geqslant 3$. Тогда множество $\overline{U}_{n,k}$ бесконечно. Для доказательства этой теоремы построена бесконечная серия неизоморфных коммутативных нильпотентных алгебр класса k размерности $k + 3$ над полем P, где $k \geqslant 3$.

Остается открытым вопрос о конечности множества $\overline{U}_{n,n-3}$; $n > 7$.

Выделен некоторый класс полей, для которых вопрос о конечности множеств $\overline{U}_{n,k}$ решен полностью.

Пусть поле P обладает следующим свойством: в P существует бесчисленное множество таких элементов, что произведение любых двух из них не есть квадрат в P. Тогда множество $\overline{U}_{n,k}$ бесконечно, если $3 \leqslant k \leqslant n - 1$. (Множества $\overline{U}_{n,2}$ и $\overline{U}_{n,k}$, как известно, конечны).

Библиографий 1.

УДК 517.94

Об уточнении оценки погрешности решения интегральных уравнений Фредгольма методом асимптотических полиномов второго рода. Грибкова В. П. «Весці Акадэміі навук БССР», серыя фізіка-матэматычных навук. 1968 г., № 1, 25—33.

В статье рассмотрен более точный, чем указанный в работе [3], способ оценки погрешности решения неоднородных интегральных уравнений Фредгольма с неособенным λ с помощью асимптотических полиномов второго рода. Оценка основана на разложении в ряд по параметрам точности $M_r^{(n)}$, которые нетрудно вычислить по известным формулам. Рассмотрено видоизменение способа для случая, когда выражения вида $\int_{-1}^{+1} K(\eta_m^{(n)}, y)\, y^m dy$ «не интегрируемы», приведена оценка погрешности.

Библиографий 7.

УДК 519.95+519.45

Автоматные разбиения и подполугруппы свободной полугруппы. Лисковец В. А., Фейнберг В. З. «Весці Акадэміі навук БССР», серыя фізіка-матэматычных навук. 1968 г., № 1, 34—44.

Метод Шрейера из теории свободных групп в изложении М. Холла (РЖМат, 1963, 3А168К) распространяется на полугруппы для описания автоматных разбиений. Пусть F — свободная полугруппа с единицей e в алфавите X. $N \subseteq F$ называется шрейеровской системой, если из $p \in N$, $p = qr$ следует, что $q \in N$. Если же $M \subset F$ обладает свойством префикса, т. е. из $p = qr \in M$ следует, что $q \in M$, то M называется слоем. Пусть ρ — автоматное разбиение F (т. е. соответствующее отношение эквивалентности стабильно справа). Если $e \in U$, $U \in \rho$, то U — свободная подполугруппа F, порожденная некоторым слоем M. Для таких и только таких подполугрупп F существует разбиение $F = UN$ на (непересекающиеся) смежные классы по U, причем $N = F \setminus MF$ — шрейеровская система. Если N содержит n слов, то M содержит $1 + n(r-1)$ слов, где r — число букв в X. Классы ρ являются объединениями некоторых Up, $p \in N$. Как и для разбиений свободных групп по подгруппам, существуют шрейеровская система G представителей классов ρ и представление $\rho = \rho(G, \varphi)$, где φ: $GX \cup \{e\} \to G$ и φ тождественно на G. При этом ρ совпадает с разбиением F на классы $\Phi^{-1}(p)$, $p \in G$, где $\Phi: F \to G$ определяется индуктивно: $\Phi(e) = e$, $\Phi(qx) = \varphi(\Phi(q)\, x)$, $x \in X$. Дается необходимое и достаточное условие для того, чтобы $\rho(G, \varphi) = \rho'(G', \varphi')$. Обсуждаются причины применимости и особенности применения здесь метода Шрейера. Усиливается критерий

В. Г. Боднарчука (РЖМат, 1962, 12В244) представимости события одним состоянием автомата. Приводится следующий способ нахождения класса $\rho(G, \varphi)$, содержащего данное слово q. Пусть ψ — такое отображение F в себя, что $\psi(p) = p$, $p \in G$; $\psi(pr) = \varphi(p)r$, где p принадлежит слою $GX \setminus G$. Тогда q и $\psi^k(q)$ лежат в одном и том же классе ρ, причем $\psi^k(q) \in G$ для некоторого натурального k. Дается интерпретация результатов на языке графов (с помощью деревьев). Решается несколько комбинаторных задач. В частности, доказывается, что в F существует ровно $\frac{(rn)!}{n![1+n(r-1)]!}$ шрейеровских систем, содержащих n слов. Это число имеет определенный смысл для теории кодирования.

Библиографий 16.

УДК 519.44

О группах, все *i-е* максимальные подгруппы которых перестановочны с силовской подгруппой. I. Пальчик Э. М. «Весці Акадэміі навук БССР», серыя фізіка-матэматычных навук. 1968 г., № 1, 45—48.

Рассматриваются только конечные группы. Группа порядка $p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_k^{\alpha_k}$ называется дисперсивной, если имеется нормальный делитель в ней порядка $p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_i^{\alpha_i}$ для каждого $i = 1, 2, \ldots, k-1$. Γ_i — множество всех i-х максимальных подгрупп группы G. В статье доказан ряд результатов, из которых вытекает следующее утверждение.

Пусть G_π — дисперсивная холловская подгруппа группы G. Если G_π перестановочна с каждой подгруппой из Γ_i, то

а) при $i = 1$ G_π инвариантна в G;

б) при $i = 2$ или G_π инвариантна в G, или G — минимальная неабелева группа (Миллера — Морено);

в) при $i = 3$ группа G π-разрешима;

г) при $i = 4$ группа G или π-разрешима, или является неразрешимой группой, все четвертые максимальные подгруппы которой инвариантны.

Неразрешимые конечные группы с инвариантными четвертыми максимальными подгруппами описаны в РЖМат, 1964, 9А, 152.

Библиографий 14.

УДК 519.44

О группах с максимальными подгруппами данного вида. Русаков С. А. «Весці Акадэміі навук БССР», серыя фізіка-матэматычных навук. 1968 г., № 1, 49—53.

В настоящей статье исследуется вопрос о существовании инвариантной силовской подгруппы в группе, все максимальные и неинвариантные подгруппы которой p-разложимы (π-разложимы), причем фактор-группа по этой силовской подгруппе p-разложима (p-разложима) (см. теоремы 1—2).

Из этих теорем, как частный случай, вытекает утверждение О. Ю. Шмидта—Ивасава о разрешимости группы типа S, а также следующий результат Дж. Розе.

Группа, у которой все абнормальные подгруппы нильпотентны, обладает инвариантной силовской подгруппой, фактор-группа по которой нильпотентна. Кроме того, с учетом теоремы Фейта и Дж. Томпсона о разрешимости группы нечетного порядка следует разрешимость группы, у которой все максимальные и неинвариантные подгруппы 2-разложимы.

Доказывается еще (теорема 3) совпадение q-неразложимой группы, все истинные максимальные pd-подгруппы которой разложимы относительно различных простых чисел p и q с группой типа S_p, т. е. такой группой, которая либо совпадает с группой типа S, либо представляется в виде прямого произведения группы порядка p и группы типа S, порядок которой не делится на p.

Эта теорема является усилением следующего результата С. А. Чунихина: ненильпотентная группа, все нетривиальные максимальные *pd*-подгруппы которой нильпотентны, совпадает с группой типа S_p.

Библиографий 12.

УДК 65.012.122

Математическая модель графика выпуска изделий, удовлетворяющего требованию комплектации сборки. Казанцев Э. Н. «Весці Акадэміі навук БССР», серыя фізіка-матэматычных навук. 1968 г., № 1, 54—60.

Рассматриваются необходимые и достаточные условия, которым должен удовлетворять график выпуска изделий на машиностроительном предприятии, чтобы полностью удовлетворить потребности сборки изделий.

Исходными данными являются: государственный план, начальный задел, незавершенное производство и потребности в изделиях для сборки (спецификации).

Указан алгоритм нахождения графика выпуска при заданном заделе, а также сформулированы необходимые и достаточные условия, которым должны удовлетворять исходные данные, чтобы существовал хотя бы один график выпуска.

Библиографий 2.

УДК 513

О пространствах Д. В. Веденяпина. Воднев В. Т. «Весці Акадэміі навук БССР», серыя фізіка-матэматычных навук. 1968 г., № 1, 61—73.

В 1955 году в кандидатской диссертации Д. В. Веденяпин построил класс римановых частично-проективных пространств с плоскими геодезическими, отличных от субпроективных пространств В. Ф. Кагана. Однако обилие входящих в метрическую форму произвольных постоянных не позволяло судить о произволе метрики этих пространств, а также изучить их геометрические свойства. В работе получена простая каноническая форма метрики пространств Веденяпина, выделены неприводимые пространства, изучены группы движений, а также построены некоторые обобщения указанных пространств.

Библиографий 6.

УДК 539.12

О матрицах уравнений для частиц со спином 2. Богуш А. А., Крылов Б. В., Федоров Ф. И. «Весці Акадэміі навук БССР», серыя фізіка-матэматычных навук. 1968 г., № 1, 74—81.

С помощью обобщенных δ-символов Кронекера δ_{AB} ($A, B = \{0, \mu, (\mu\nu), \lambda[\mu\nu]\}$) осуществлен переход от системы тензорных уравнений первого порядка для частиц со спином 2 (как с ненулевой, так и с нулевой массой покоя) к стандартной форме волновых матричных уравнений $(\gamma_\mu \partial_\mu + \varkappa)\psi(x) = 0$ $(\varkappa \neq 0)$ и $(\gamma_\mu \partial_\mu + \overline{P})\psi(x) = 0$ $(\varkappa = 0)$. При этом основные матрицы γ_μ уравнений и проективные операторы $\overline{P}$ и $P = I - \overline{P}$ инвариантных подпространств автоматически выражаются через элементы матричной алгебры e^{AB} $((e^{AB})_{CD} = \delta_{AC}\delta_{BD})$ в пространстве волновых функций $\psi(x)$. Найдены выражения для следов от произведений γ_μ, P, $\overline{P}$. Рассмотрен вопрос о возможности упрощения общих перестановочных соотношений, определяющих алгебру матриц γ_μ.

Библиографий 9.

УДК 530.145.7

Задача об экранировании и антиэкранировании ядерных электрических моментов. Маханёк А. Г., Корольков В. С., Лонг Н. Н. «Весці Акадэміі навук БССР», серыя фізіка-матэматычных навук. 1968 г., № 1, 82—92.

Аналитические методы в теории возмущения Шредингера применены для решения в общем виде задачи об экранировании и антиэкранировании ядерных моментов. Получены общие выражения для постоянных экранирования и антиэкранирования как для квадрупольных потенциалов, так и потенциалов произвольной мультипольности. Установлена зависимость констант экранирования от главного квантового числа при произвольной мультипольности потенциала.

Библиографий 15.

УДК 621.382.2

Возникновение отрицательного сопротивления в германиевых и кремниевых диодах заводского изготовления. Петровский И. И., Рекун С. А. «Весці Акадэміі навук БССР», серыя фізіка-матэматычных навук. 1968 г., № 1, 93—97.

Описываются эксперименты, проводившиеся с целью изучения условий, при которых у германиевых и кремниевых диодов различных типов, точечных и плоскостных, изготавливаемых отечественной промышленностью, возникает отрицательное дифференциальное сопротивление.

Установлено, что если при комнатной температуре на обратных ветвях статических вольтамперных характеристик диодов участки, соответствующие отрицательному сопротивлению, не возникали при изменении обратного напряжения от 0 до 150 *в*, то они всегда появлялись в том же интервале обратных напряжений с повышением температуры на несколько десятков градусов. Отрицательное сопротивление возникало и при комнатной температуре; если через диод предварительно пропускался достаточно большой прямой ток, а затем его направление быстро изменялось; если обратное напряжение, подводимое к диоду, значительно превышало указанную выше величину; если характеристики диодов получались осциллографическим методом на переменном токе достаточно большой величины.

На основании изучения полученных экспериментальных результатов делается вывод, что решающими факторами в процессе возникновения отрицательного сопротивления полупроводниковых диодов являются как достаточно высокая температура контакта, так и сильное электрическое поле, приложенное к контакту от источника напряжения, что приводит к резкому возрастанию концентрации носителей тока в области контакта и, следовательно, к уменьшению напряжения, падающего на сопротивление диода.

Иллюстраций 3. Библиографий 9.

УДК 535.242.2:621.3.088.3

О точности фотометрических измерений. Основные источники ошибок. I. Гапонольский В. И. «Весці Акадэміі навук БССР», серыя фізіка-матэматычных навук. 1968 г., № 1, 98—104.

Обсуждение общих вопросов точности спектрофотометрического анализа, данное в статье, показало, что при прочих равных условиях эта точность лимитируется ошибками, связанными с выполнением фотометрических измерений, построением калибровочных кривых и характером зависимости $D=f(c)$.

В статье подробно рассмотрены вопросы точности измерения показания прибора. Формула ошибок измерения оптической плотности

$$\frac{\sigma_D}{D} = \frac{0{,}434\sigma_{T_п}}{D \cdot 10^{-D}} \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{T}{T_{гр}}\right)^2},$$

выведенная Г. С. Терёшиным и учитывающая зависимость $\sigma_T = f(T)$, значительно полнее и точнее определяет зависимость $\sigma_D/D = f(D)$, чем формула Туаймена — Лотиана

$$\frac{\sigma_D}{D} = \frac{0{,}434\,\sigma_T}{D \cdot 10^{-D}},$$

которая получена при условии, что $\sigma_T = \text{const}$. Аналогичные выводы сделаны и относительно формул ошибок измерения оптической плотности по методу дифференциальной спектрофотометрии.

Подробно обсуждено влияние характера зависимости $D = f(c)$ на точность определения концентрации испытуемого раствора по измеренной оптической плотности. Выведены формулы, позволяющие оценить влияние тех или иных факторов (толщина поглощающего слоя, концентрация испытуемого раствора) на соотношение между ошибками в определении концентрации (σ_c/c) и ошибками в измерении оптической плотности (σ_D/D).

Кратко рассмотрена необходимость учета ошибок, возникающих за счет неопределенности отрезков, отсекаемых на осях координат D—c калибровочными графиками.

Иллюстраций 3. Библиографий 15.

УДК 530.12

Метрические свойства центрально-симметрических космологических решений уравнений Эйнштейна и состояние материи в случае зависимости давления от времени. Рябушко А. П. «Весці Акадэміі навук БССР», серыя фізіка-матэматычных навук. 1968 г., № 1, 105—110.

Обсуждаются свойства точных центрально-симметрических космологических решений уравнений Эйнштейна. Эти решения получены автором в одной из предыдущих работ (Известия АН БССР, серия физико-математических наук, № 1, 30, 1967) и в настоящей работе. Полученные решения позволяют изучить специфические свойства некоторых центрально-симметрических моделей Вселенной. В этих решениях как частные случаи содержатся фридмановские космологические модели с определенными уравнениями состояния материи. Обсуждаемые решения также могут быть использованы в проблеме релятивистского гравитационного коллапса.

Иллюстраций 6. Библиографий 8.

УДК 548—73

Изогнутый германиевый монохроматор для рентгеновского излучения. Сирота Н. Н., Олехнович Н. М. «Весці Акадэміі навук БССР», серыя фізіка-матэматычных навук. 1968 г., № 1, 111.

Описывается способ изготовления изогнутого германиевого монохроматора для рентгеновского излучения и проводятся сопоставления интенсивности отражения его с другими монохроматорами. Отмечается ряд преимуществ описываемого монохроматора.

Библиографий 1.

УДК 530.1

Линейные неприводимые представления пятимерной однородной собственной группы Лоренца. Бедрицкий А. И. «Весці Акадэміі навук БССР», серыя фізіка-матэматычных навук. 1968 г., № 1, 112—116.

Используя прямую сумму подпространств, в каждом из которых действует неприводимое представление однородной собственной группы Лоренца, получены конечномерные неприводимые представления пятимерной однородной собственной группы Лоренца, т. е. группы линейных вещественных однородных преобразований координат $x_l = \sum_{k=1}^{5} a_{ik} x_k$, с $a_{44} \geqslant 1$ и детерминантом преобразования, равным 1, оставляющих инвариантной квадратичную форму $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2$.

Инфинитезимальные операторы для указанной группы определяются формулами:

$$I_{12}\xi_{lm}^{pn} = -im\,\xi_{lm}^{pn},$$

$$I_{23}\xi_{lm}^{pn} = -\frac{i}{2}\sqrt{(l+m+1)(l-m)}\;\xi_{l,m+1}^{pn} -$$

$$-\frac{i}{2}\sqrt{(l+m)(l-m+1)}\;\xi_{l,m-1}^{pn},$$

$$I_{34}\xi_{lm}^{pn} = iC_l^{pn}\sqrt{l^2-m^2}\;\xi_{l-1,m}^{pn} -$$

$$-iA_l^{pn}\,m\,\xi_{lm}^{pn} - iC_{l+1}^{pn}\sqrt{(l+1)^2-m^2}\;\xi_{l+1,m}^{pn},$$

$$I_{45}\,\xi_{lm}^{pn} = \gamma_{p,n+1}\sqrt{(l+n+1)(l-n)}\;\xi_{lm}^{p,n+1} +$$

$$+\gamma_{pn}\sqrt{(l+n)(l-n+1)}\;\xi_{lm}^{p,n-1} + \beta_{p+1,n}\sqrt{(l+p+1)(l-p)}\;\xi_{lm}^{p+1,n} +$$

$$+\beta_{pn}\sqrt{(l+p)(l-p+1)}\;\xi_{lm}^{p-1,n}.$$

Здесь ξ_{lm}^{pn} — базисные векторы в пространстве представлений, коэффициенты A_l^{pn}, C_l^{pn}, γ_{pn}, β_{pn} имеют вид:

$$A_l^{pn} = \frac{inp}{l(l+1)}, \quad C_l^{pn} = \frac{i}{l}\sqrt{\frac{(l^2-n^2)(l^2-p^2)}{4l^2-1}},$$

$$\gamma_{pn} = \pm\frac{1}{2}\sqrt{\frac{(n+n_0)(n-n_0-1)(n+p_0+1)(n-p_0-2)}{(p^2-n^2)[p^2-(n-1)^2]}},$$

$$\beta_{pn} = \pm\frac{1}{2}\sqrt{\frac{(p+n_0)(p-n_0-1)(p+p_0+1)(p-p_0-2)}{(p^2-n^2)[(p-1)^2-n^2]}}.$$

Представления задаются парой чисел n_0 и p_0 ($n_0,\ p_0 \geqslant 0$), числа n, p, l и m принимают одновременно с n_0 и p_0 целые или полуцелые значения, $-n_0 \leqslant n \leqslant n_0$, $n_0 + 1 \leqslant p \leqslant p_0 + 1$.

Библиографий 6.

УДК 530.145

К вопросу о квантовании пространства в рамках осцилляторной модели. Потупа А. С., Томильчик Л. М. «Весці Акадэміі навук БССР», серыя фізіка-матэматычных навук. 1968 г., № 1, 117—118.

В рамках осцилляторной модели проведено квантование фазового пространства нерелятивистской квантовой механики. Получено естественное определение характеристического («фундаментального») размера. Указана возможность обобщения модели на релятивистский случай и рассмотрения Борновской теории взаимности в рамках группового подхода.

Библиографий 9.

УДК 621.396.6

Приставка к АИ-100 для снятия спектров Мессбауэра во временном режиме. Высоцкий Ю. М., Федоров А. П. «Весці Акадэміі навук БССР», серыя фізіка-матэматычных навук. 1968 г., № 1, 119—121.

Описана приставка к амплитудному анализатору АИ-100, позволяющая снимать спектры Мессбауэра во временном режиме.

Иллюстраций 2. Библиографий 5.

60 к.

Индекс
74846

ВНИМАНИЮ АВТОРОВ

Статьи, присылаемые авторами в наш журнал, будут приниматься редакцией к печати только при наличии двух экземпляров автореферата, удовлетворяющего указанным ниже требованиям.

Требования, предъявляемые к реферату

1. В реферате кратко излагается основное содержание статьи. Реферат должен дать читателю представление о характере освещаемой работы, оригинальности постановки вопроса, методике проведения исследования и его основных результатах.

2. Реферату должно предшествовать библиографическое описание в следующем виде: название статьи, фамилия и инициалы автора, название журнала, где помещается статья. Текст реферата начинается непосредственно с изложения существа работы без повторения заголовка. Форма изложения материала не обязательно должна повторять форму изложения оригинальной статьи.

3. Если оригинал содержит большое количество цифровых данных, их следует обобщить и систематизировать.

4. Средний объем реферата 0,5—1 страница машинописного текста, отпечатанного через два интервала на белой писчей бумаге обычного формата (30×21) в двух экземплярах с полем 4 *см* с левой стороны.

5. Таблицы, схемы, графики и пр. могут быть включены в том случае, если они отражают основное содержание работы или сокращают текст реферата. Сообщение о наличии в реферируемой работе таблиц, схем, графиков, фотографий, карт, рисунков необходимо давать в конце реферата. Например: Таблиц 2. Иллюстраций 10.

6. Формулы приводятся только в том случае, если они необходимы для понимания статьи. Громоздкие математические выражения помещать не следует. Формулы следует вписывать четко, не изменяя принятых в оригинале обозначений величин. Формулы и буквенные обозначения вписываются черными чернилами во второй экземпляр. Вписывание формул и буквенных обозначений, а также исправление замеченных опечаток в первом экземпляре не делается.