

08.185.426

# ВЕСЦІ

АКАДЭМІІ НАВУК БССР

---

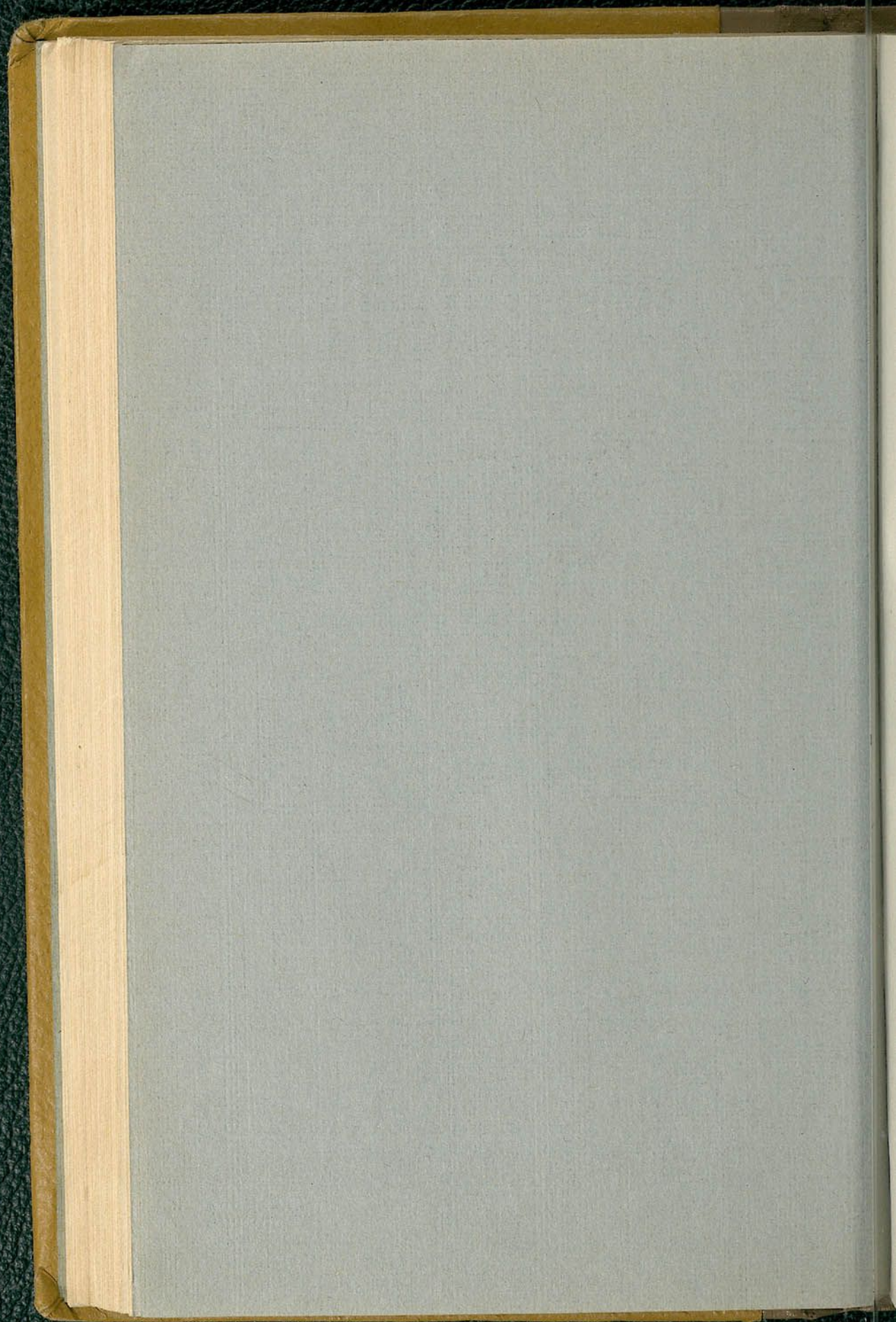
СЕРЫЯ  
ФІЗІКА-МАТЭМАТЫЧНЫХ  
НАВУК

2

ВЫДАВЕЦТВА „НАВУКА І ТЭХНІКА“

---

МІНСК 1968





# ИЗВЕСТИЯ

АКАДЕМИИ НАУК БССР

---

СЕРИЯ  
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ  
НАУК

№ 2

ИЗДАТЕЛЬСТВО „НАУКА И ТЕХНИКА“

---

МИНСК 1968

08.186.720

# ВЕСЦІ

АКАДЭМІІ НАВУК БССР

---

СЕРЫЯ  
ФІЗІКА-МАТЭМАТЫЧНЫХ  
НАВУК

№ 2

ВЫДАВЕЦТВА „НАВУКА І ТЭХНІКА“

---

МІНСК 1968

Ба 3942

Друкарня  
БССР  
Мінск

Рэдакцыйная калегія:

Ф. І. ФЕДАРАЎ (галоўны рэдактар),  
Д. А. СУПРУНЕНКА (нам. галоўнага рэдактара),  
М. М. АЛЯХНОВІЧ, У. І. КРЫЛОЎ, М. М. СІРАТА,  
У. Г. СПРЫНДЖУК, Я. І. ФІРСАЎ, С. А. ЧУНІХІН

УДК 517.512.6

А. Х. ТУРЕЦКИЙ, И. И. КОРЗУН

**ОЦЕНКА ПРИБЛИЖЕНИЯ  
 ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫМИ ПОЛИНОМАМИ ЛАГРАНЖА  
 С УЗЛАМИ ЧЕБЫШЕВА ДЛЯ КЛАССА ФУНКЦИЙ,  
 ИМЕЮЩИХ ОГРАНИЧЕННУЮ В СРЕДНЕМ  
 ПРОИЗВОДНУЮ ДАННОГО ПОРЯДКА**

Обозначим через  $W_2^{(r)}M[a, b]$  класс функций  $f(x)$ , имеющих на сегменте  $[a, b]$  производную порядка  $r$  с интегрируемым квадратом, для которой

$$\int_a^b [f^{(r)}(t)]^2 dt \leq M^2. \quad (1)$$

По узлам  $a \leq x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n \leq b$ , заданным на сегменте  $[a, b]$ , напишем интерполяционную формулу Лагранжа

$$L_{n-1}(x, f) = \sum_{k=1}^n f(x_k) l_k(x)$$

и поставим задачу — определить для данного фиксированного  $x$  из сегмента  $[a, b]$  величину

$$\sup_{f \in W_2^{(r)}M[a, b]} |f(x) - L_{n-1}(x, f)|.$$

Остаточный член интерполяционной формулы Лагранжа представим в виде [1]:

$$f(x) - L_{n-1}(x, f) = \frac{1}{(r-1)!} \int_a^b \left[ K_r(x-t) - \sum_{k=1}^n K_r(x_k-t) l_k(x) \right] f^{(r)}(t) dt,$$

или, обозначив

$$H_r(x, t) = K_r(x-t) - \sum_{k=1}^n K_r(x_k-t) l_k(x), \quad (2)$$

$$f(x) - L_{n-1}(x, f) = \frac{1}{(r-1)!} \int_a^b H_r(x, t) f^{(r)}(t) dt,$$

где

$$K_r(u) = \begin{cases} u^{r-1}, & \text{если } u \geq 0, \\ 0, & \text{если } u < 0. \end{cases} \quad (3)$$

Применяя неравенство Буняковского — Шварца, получаем

$$|f(x) - L_{n-1}(x, f)| \leq \frac{1}{(r-1)!} \int_a^b |H_r(x, t)| |f^{(r)}(t)| dt \leq \\ \leq \frac{1}{(r-1)!} \left\{ \int_a^b H_r^2(x, t) dt \right\}^{1/2} \left\{ \int_a^b [f^{(r)}(t)]^2 dt \right\}^{1/2}$$

или, учитывая (1),

$$|f(x) - L_{n-1}(x, f)| \leq \frac{M}{(r-1)!} \left\{ \int_a^b H_r^2(x, t) dt \right\}^{1/2}. \quad (4)$$

Для заданного фиксированного  $x$  из  $[a, b]$  точная верхняя грань достигается для функции  $f_x(t)$ , для которой

$$f_x^{(r)}(t) = \frac{MH_r(x, t)}{\left\{ \int_a^b H_r^2(x, t) dt \right\}^{1/2}},$$

и, значит,

$$\sup_{f \in W_2^{(r)} M[a, b]} |f(x) - L_{n-1}(x, f)| = \frac{M}{(r-1)!} I^{1/2},$$

где

$$I = \int_a^b H_r^2(x, t) dt.$$

Учитывая (2), имеем

$$I = \int_a^b K_r^2(x-t) dt - 2 \int_a^b K_r(x-t) \sum_{k=1}^n K_r(x_k-t) l_k(x) dt + \\ + \int_a^b \sum_{k=1}^n \sum_{v=1}^n K_r(x_k-t) K_r(x_v-t) l_k(x) l_v(x) dt = I_1 - 2I_2 + I_3. \quad (5)$$

Докажем следующую теорему.

**Теорема 1.** Пусть  $r$  — натуральное число и  $2r \leq n$ , а  $x_i \leq x \leq x_{i+1}$ , считая при этом, что  $x_0 = a$ , если  $a < x_1$ , и  $x_{n+1} = b$ , если  $x_n < b$ . Тогда

$$I = \frac{(-1)^r (2r-2)!!}{2^{2r-2} (2r-1)!!} \left[ -2 \sum_{k=1}^i l_k(x) (x-x_k)^{2r-1} + \right. \\ \left. + \sum_{k=1}^n \sum_{v=1}^k l_h(x) l_v(x) (x_k-x_v)^{2r-1} \right].$$

**Доказательство.** Преобразуем  $I_3$ . Имеем

$$I_3 = \sum_{k=1}^n \sum_{v=1}^k l_h(x) l_v(x) \int_a^b K_r(x_k-t) K_r(x_v-t) dt + \\ + \sum_{k=1}^n \sum_{v=k+1}^n l_k(x) l_v(x) \int_a^b K_r(x_k-t) K_r(x_v-t) dt.$$

Учитывая (3), имеем

$$\begin{aligned}
 I_3 &= \sum_{k=1}^n \sum_{v=1}^k l_k(x) l_v(x) \int_a^{x_v} (x_k - t)^{r-1} (x_v - t)^{r-1} dt + \\
 &+ \sum_{k=1}^n \sum_{v=k+1}^n l_k(x) l_v(x) \int_a^{x_k} (x_k - t)^{r-1} (x_v - t)^{r-1} dt = \\
 &= \sum_{k=1}^n \sum_{v=1}^k l_k(x) l_v(x) \int_a^{x_k} (x_k - t)^{r-1} (x_v - t)^{r-1} dt + \\
 &+ \sum_{k=1}^n \sum_{v=1}^k l_k(x) l_v(x) \int_{x_k}^{x_v} (x_k - t)^{r-1} (x_v - t)^{r-1} dt + \\
 &+ \sum_{k=1}^n \sum_{v=k+1}^n l_k(x) l_v(x) \int_a^{x_k} (x_k - t)^{r-1} (x_v - t)^{r-1} dt.
 \end{aligned}$$

Объединив первый и третий члены, получаем

$$\begin{aligned}
 I_3 &= \sum_{k=1}^n \sum_{v=1}^n l_k(x) l_v(x) \int_a^{x_k} (x_k - t)^{r-1} (x_v - t)^{r-1} dt + \\
 &+ \sum_{k=1}^n \sum_{v=1}^k l_k(x) l_v(x) \int_{x_k}^{x_v} (x_k - t)^{r-1} (x_v - t)^{r-1} dt = \\
 &= \sum_{k=1}^n l_k(x) \int_a^{x_k} (x_k - t)^{r-1} \sum_{v=1}^n l_v(x) (x_v - t)^{r-1} dt + \\
 &+ \sum_{k=1}^n \sum_{v=1}^k l_k(x) l_v(x) \int_{x_k}^{x_v} (x_k - t)^{r-1} (x_v - t)^{r-1} dt.
 \end{aligned}$$

Учтем, что для всякого полинома  $P(x)$  степени  $\leq n-1$  справедливо тождество

$$\sum_{k=1}^n P(x_k) l_k(x) = P(x). \quad (6)$$

В частности, отсюда следует

$$\sum_{v=1}^n (x_v - t)^{r-1} l_v(x) = (x - t)^{r-1}, \quad (6')$$

если только  $r \leq n$ .

Таким образом, получаем

$$\begin{aligned}
 I_3 &= \sum_{k=1}^n l_k(x) \int_a^{x_k} (x_k - t)^{r-1} (x - t)^{r-1} dt + \\
 &+ \sum_{k=1}^n \sum_{v=1}^k l_k(x) l_v(x) \int_{x_k}^{x_v} (x_k - t)^{r-1} (x_v - t)^{r-1} dt =
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=1}^n l_h(x) \int_a^x (x_h - t)^{r-1} (x - t)^{r-1} dt + \\
&+ \sum_{k=1}^n l_h(x) \int_x^{x_k} (x_h - t)^{r-1} (x - t)^{r-1} dt + \\
&+ \sum_{k=1}^n \sum_{v=1}^k l_h(x) l_v(x) \int_{x_k}^{x_v} (x_h - t)^{r-1} (x_v - t)^{r-1} dt.
\end{aligned}$$

Снова учитывая тождество (6'), имеем

$$\begin{aligned}
I_3 &= \int_a^x (x - t)^{2r-2} dt + \sum_{k=1}^n l_h(x) \int_x^{x_k} (x_h - t)^{r-1} (x - t)^{r-1} dt + \\
&+ \sum_{k=1}^n \sum_{v=1}^k l_h(x) l_v(x) \int_{x_k}^{x_v} (x_h - t)^{r-1} (x_v - t)^{r-1} dt. \quad (7)
\end{aligned}$$

Преобразуем теперь  $I_2$ . Пусть  $x_i \leq x \leq x_{i+1}$ .  
Имеем

$$I_2 = \sum_{k=1}^n l_h(x) \int_a^b K_r(x - t) K_r(x_h - t) dt,$$

или, учитывая (3),

$$\begin{aligned}
I_2 &= \sum_{k=1}^i l_h(x) \int_a^{x_k} (x - t)^{r-1} (x_h - t)^{r-1} dt + \\
&+ \sum_{k=i+1}^n l_h(x) \int_a^x (x - t)^{r-1} (x_h - t)^{r-1} dt = \\
&= \sum_{k=1}^i l_h(x) \int_a^x (x - t)^{r-1} (x_h - t)^{r-1} dt + \\
&+ \sum_{k=1}^i l_h(x) \int_x^{x_k} (x - t)^{r-1} (x_h - t)^{r-1} dt + \\
&+ \sum_{k=i+1}^n l_h(x) \int_a^x (x - t)^{r-1} (x_h - t)^{r-1} dt = \\
&= \sum_{k=1}^n l_h(x) \int_a^x (x - t)^{r-1} (x_h - t)^{r-1} dt + \\
&+ \sum_{k=1}^i l_h(x) \int_x^{x_k} (x - t)^{r-1} (x_h - t)^{r-1} dt,
\end{aligned}$$

или, по (6'),

$$I_2 = \int_a^x (x - t)^{2r-2} dt + \sum_{k=1}^i l_h(x) \int_x^{x_k} (x - t)^{r-1} (x_h - t)^{r-1} dt. \quad (8)$$

Наконец, в силу (3) имеем

$$I_1 = \int_a^x (x - t)^{2r-2} dt.$$

Учитывая (5), (7), (8) и последнее равенство, получаем

$$\begin{aligned}
 I = & -2 \sum_{k=1}^i l_k(x) \int_x^{x_k} (x-t)^{r-1} (x_k-t)^{r-1} dt + \\
 & + \sum_{k=1}^n l_k(x) \int_x^{x_k} (x-t)^{r-1} (x_k-t)^{r-1} dt + \\
 & + \sum_{k=1}^n \sum_{v=1}^k l_k(x) l_v(x) \int_{x_k}^{x_v} (x_k-t)^{r-1} (x_v-t)^{r-1} dt. \quad (9)
 \end{aligned}$$

Имеем

$$\int_x^{x_k} (x-t)^{r-1} (x_k-t)^{r-1} dt = \frac{(-1)^r 2(2r-2)!!}{(2r-1)!!} \left( \frac{x-x_k}{2} \right)^{2r-1}$$

и

$$\int_{x_k}^{x_v} (x_k-t)^{r-1} (x_v-t)^{r-1} dt = \frac{(-1)^r 2(2r-2)!!}{(2r-1)!!} \left( \frac{x_k-x_v}{2} \right)^{2r-1}.$$

Подставив значения этих интегралов в (9), получаем

$$\begin{aligned}
 I = & \frac{(-1)^r (2r-2)!!}{2^{2r-2} (2r-1)!!} \left[ -2 \sum_{k=1}^i l_k(x) (x-x_k)^{2r-1} + \right. \\
 & + \sum_{k=1}^n l_k(x) (x-x_k)^{2r-1} + \\
 & \left. + \sum_{k=1}^n \sum_{v=1}^k l_k(x) l_v(x) (x_k-x_v)^{2r-1} \right].
 \end{aligned}$$

Если  $2r < n$ , то на основании тождества (6) получаем

$$\sum_{k=1}^n l_k(x) (x-x_k)^{2r-1} = 0.$$

Таким образом,

$$\begin{aligned}
 I = & \frac{(-1)^r (2r-2)!!}{2^{2r-2} (2r-1)!!} \left[ -2 \sum_{k=1}^i l_k(x) (x-x_k)^{2r-1} + \right. \\
 & \left. + \sum_{k=1}^n \sum_{v=1}^k l_k(x) l_v(x) (x_k-x_v)^{2r-1} \right], \quad (10)
 \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

Задача определения для данного фиксированного  $x$  из сегмента  $[a, b]$  величины

$$\sup_{f \in W_2^{(r)} M[a, b]} |f(x) - L_{n-1}(x, f)|$$

нами решена для узлов Чебышева

$$x_k = \cos \frac{(2n-2k+1)\pi}{2n} \quad (k = 1, 2, \dots, n),$$

заданных на отрезке  $[-1, 1]$ . В этом случае справедлива

**Теорема 2.** Пусть  $L_{n-1}(x, f) = \sum_{k=1}^n f(x_k) l_k(x)$  есть интерполяционная формула Лагранжа по узлам Чебышева,  $r$  — натуральное число, удовлетворяющее условию  $2r \leq n$ . Тогда для фиксированного  $x$  из интервала  $x_i < x < x_{i+1}$ , т. е.  $x = -\cos \frac{(2i-2\alpha+1)\pi}{2n}$  ( $0 < \alpha < 1$ ), имеет место следующее асимптотическое равенство:

$$\sup_{f \in W_2^{(r)} M[-1,1]} |f(x) - L_{n-1}(x, f)| = \frac{M}{(r-1)!} I^{1/2},$$

$$\text{где } I = \frac{(2r-2)!!}{2^{2r-2} (2r-1)!!} \frac{|T_n(x)|}{n} (1-x^2)^{\frac{2r-1}{2}} \sin^{r-1} \frac{\alpha\pi}{n} \sin^{r-1} \frac{(1-\alpha)\pi}{n} \times$$

$\times \sum_{l=1}^{r-1} \frac{b_l}{[\alpha(1-\alpha)]^{l-1}} + O\left(\frac{\ln n}{n^{2r}}\right)$ ,  $T_n(x) = \cos n \arccos x$  — полином Чебышева первого рода, а коэффициенты  $b_l$  определяются соотношениями

$$b_1 = 1, \quad b_l = \sum_{j=1}^{l-1} (-1)^{j+1} b_{l-j} C_{r-l+j}^{2j} \quad (l = 2, 3, \dots, r-1).$$

**Доказательство.** Известно, что  $l_k(x) = \frac{\omega(x)}{(x-x_k)\omega'(x_k)}$ , где  $\omega(x) = c(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n)$  ( $c \neq 0$  — постоянное).

Для узлов Чебышева

$$x_k = \cos \frac{(2n-2k+1)\pi}{2n} \quad (k = 1, 2, \dots, n),$$

$$\omega(x) = \cos n \arccos x = T_n(x),$$

$$x_k = -\cos \theta_k, \quad \text{где } \theta_k = \frac{(2k-1)\pi}{2n}.$$

Имеем

$$\omega'(x) = \frac{n \sin n \arccos x}{1-x^2}, \quad \omega'(x_k) = \frac{(-1)^{n-k} n}{\sin \theta_k},$$

$$\frac{1}{\omega'(x_k)} = \frac{(-1)^{n-k} \sin \theta_k}{n}.$$

Обозначим

$$S_1 = \sum_{k=1}^i l_k(x) (x-x_k)^{2r-1}$$

и

$$S_2 = \sum_{k=1}^n \sum_{v=1}^k l_k(x) l_v(x) (x_k-x_v)^{2r-1}.$$

Сначала рассмотрим  $S_1$  и покажем, что

$$S_1 = (-1)^{r-1} \frac{|T_n(x)|}{2n} (1-x^2)^{\frac{2r-1}{2}} \sin^{r-1} \frac{\alpha\pi}{n} \sin^{r-1} \frac{(1-\alpha)\pi}{n} \times$$

$$\times \sum_{l=1}^{r-1} \frac{b_l}{[\alpha(1-\alpha)]^{l-1}} + O\left(\frac{1}{n^{2r}}\right), \quad (11)$$

где

$$b_1 = 1, \quad b_l = \sum_{j=1}^{l-1} (-1)^{j+1} b_{l-j} C_{r-l+j}^{2j} \quad (l = 2, 3, \dots, r-1).$$

Имеем

$$\begin{aligned} S_1 &= \sum_{k=1}^i l_k(x) (x-x_k) (x-x_k)^{2r-2} = \sum_{k=1}^i \frac{\omega(x)}{\omega'(x_k)} (x-x_k)^{2r-2} = \\ &= \frac{(-1)^n T_n(x)}{n} \sum_{k=1}^i (-1)^k \sin \theta_k (x + \cos \theta_k)^{2r-2} = \\ &= \frac{(-1)^n T_n(x)}{n} \sum_{k=1}^i (-1)^k \sin \theta_k \left[ \sum_{l=0}^{r-1} C_{2r-2}^{2l} x^{2r-2l-2} \cos^{2l} \theta_k + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{l=1}^{r-1} C_{2r-2}^{2l-1} x^{2r-2l-1} \cos^{2l-1} \theta_k \right]. \end{aligned}$$

Выражая степени косинуса через косинусы кратных дуг и просуммировав по  $k$ , найдем

$$\begin{aligned} S_1 &= \frac{(-1)^{n+i} T_n(x)}{2n} \left\{ \sum_{l=0}^{r-1} \sum_{j=0}^i \frac{C_{2r-2}^{2l}}{2^{2l}} (C_{2l}^j - C_{2l}^{j-1}) \times \right. \\ &\quad \times \frac{\sin \frac{i(2l-2j+1)\pi}{n}}{\cos \frac{(2l-2j+1)\pi}{2n}} x^{2r-2l-2} + \\ &\quad \left. + \sum_{l=1}^{r-1} \sum_{j=0}^{l-1} \frac{C_{2r-2}^{2l-1}}{2^{2l-1}} (C_{2l-1}^j - C_{2l-1}^{j-1}) \frac{\sin \frac{i(2l-2j)\pi}{n}}{\cos \frac{(2l-2j)\pi}{2n}} x^{2r-2l-1} \right\}. \end{aligned}$$

Учитывая, что

$$\begin{aligned} \sin(2n+1)x &= (-1)^n (2n+1) \sin x \times \\ &\times \sum_{k=0}^n (-1)^k 2^{2n-2k} \frac{(2n-k)!}{k!(2n-2k+1)!} \sin^{2n-2k} x \end{aligned}$$

и

$$\sin 2nx = (-1)^{n-1} \sin x \cos x \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k 2^{2n-2k-1} C_{2n-k-1}^k \sin^{2n-2k-2} x,$$

получаем

$$\begin{aligned}
 S_1 = & \frac{|T_n(x)| \sin \frac{i\pi}{n}}{2n} \left\{ \sum_{l=0}^{r-1} \sum_{j=0}^l \frac{(-1)^{l-j}}{2^{2l}} C_{2r-2}^{2l} (C_{2l}^j - C_{2l}^{j-1}) \times \right. \\
 & (2l-2j+1) \sum_{k=0}^{l-j} (-1)^k 2^{2l-2j-2k} \frac{(2l-2j-k)!}{k!(2l-2j-2k+1)!} \sin^{2l-2j-2k} \frac{i\pi}{n} \\
 & \times \frac{\cos \frac{(2l-2j+1)\pi}{2n}}{\cos \frac{(2l-2j)\pi}{2n}} \times \\
 & \times x^{2r-2l-2} + \sum_{l=1}^{r-1} \sum_{j=0}^{l-1} \frac{1}{2^{2l-1}} C_{2r-2}^{2l-1} (C_{2l-1}^j - C_{2l-1}^{j-1}) (-1)^{l-j-1} \cos \frac{i\pi}{n} \times \\
 & \left. \times \frac{\sum_{k=0}^{l-j-1} (-1)^k 2^{2l-2j-2k-1} C_{2l-2j-k-1}^k \sin^{2l-2j-2k-2} \frac{i\pi}{n}}{\cos \frac{(2l-2j)\pi}{2n}} x^{2r-2l-1} \right\}. \\
 \sin^{2n} x = & \sum_{m=0}^n (-1)^m C_n^m \cos^{2m} x, \text{ ПОЭТОМУ} \\
 S_1 = & \frac{|T_n(x)| \sin \frac{i\pi}{n}}{2n} \left\{ \sum_{l=0}^{r-1} \sum_{j=0}^l \frac{(-1)^{l-j}}{2^{2j}} C_{2r-2}^{2l} (C_{2l}^j - C_{2l}^{j-1}) x^{2r-2l-2} \times \right. \\
 & (2l-2j+1) \sum_{k=0}^{l-j} \sum_{m=0}^{l-j-k} \frac{(-1)^{k+m}}{2^{2k}} \frac{(2l-2j-k)!}{k!(2l-2j-2k+1)!} C_{l-j-k}^m \cos^{2m} \frac{i\pi}{n} \\
 & \times \frac{\cos \frac{(2l-2j+1)\pi}{2n}}{\cos \frac{(2l-2j)\pi}{2n}} + \\
 & + \sum_{l=1}^{r-1} \sum_{j=0}^{l-1} \frac{(-1)^{l-j-1}}{2^{2j}} C_{2r-2}^{2l-1} (C_{2l-1}^j - C_{2l-1}^{j-1}) x^{2r-2l-1} \times \\
 & \left. \times \frac{\sum_{k=0}^{l-j-1} \sum_{m=0}^{l-j-k-1} \frac{(-1)^{k+m}}{2^{2k}} C_{2l-2j-k-1}^k C_{l-j-k-1}^m \cos^{2m+1} \frac{i\pi}{n}}{\cos \frac{(2l-2j)\pi}{2n}} \right\}.
 \end{aligned}$$

При  $n \rightarrow \infty$

$$\frac{1}{\cos \frac{\pi}{2n}} = \sum_{\mu=0}^{r-1} \frac{|E_{2\mu}|}{(2\mu)!} \left( \frac{\pi}{2n} \right)^{2\mu} + O \left( \frac{1}{n^{2r}} \right), \quad (12)$$

$E_{2\mu}$  — число Эйлера.

Используя это выражение, получаем

$$S_1 = \frac{|T_n(x)| \sin \frac{i\pi}{n}}{2n} \left\{ \sum_{\mu=0}^{r-1} \frac{|E_{2\mu}|}{(2\mu)!} \left(\frac{\pi}{2n}\right)^{2\mu} \left[ \sum_{l=0}^{r-1} \sum_{j=0}^l \frac{(-1)^{l-j}}{2^{2j}} C_{2r-2}^{2l} \times \right. \right. \\ \times (C_{2l}^j - C_{2l}^{j-1}) x^{2r-2l-2} (2l-2j+1)^{2\mu+1} \times \\ \times \sum_{k=0}^{l-j} \sum_{m=0}^{l-j-k} \frac{(-1)^{k+m}}{2^{2k}} \frac{(2l-2j-k)!}{k!(2l-2j-2k+1)!} C_{l-j-k}^m \cos^{2m} \frac{i\pi}{n} + \\ \left. \left. + \sum_{l=0}^{r-2} \sum_{j=0}^l \frac{(-1)^{l-j}}{2^{2j}} C_{2r-2}^{2l+1} (C_{2l+1}^j - C_{2l+1}^{j-1}) x^{2r-2l-3} (2l-2j+2)^{2\mu} \times \right. \right. \\ \left. \left. \times \sum_{k=0}^{l-j} \sum_{m=0}^{l-j-k} \frac{(-1)^{k+m}}{2^{2k}} C_{2l-2j-k+1}^k C_{l-j-k}^m \cos^{2m+1} \frac{i\pi}{n} \right] + O\left(\frac{1}{n^{2r}}\right) \right\}.$$

Учтем теперь, что

$$x_j < x < x_{j+1}, \text{ или } x = -\cos \frac{(2i-2\alpha+1)\pi}{2n}, \text{ где } 0 < \alpha < 1, \text{ и что}$$

$$x + \cos \frac{i\pi}{n} = \sin \frac{i\pi}{n} \sin \frac{(1-2\alpha)\pi}{2n} + O\left(\frac{1}{n^{2r}}\right),$$

и покажем, что при любом натуральном  $r$

$$S_1 = \frac{|T_n(x)| \sin^{2r-1} \frac{i\pi}{n}}{2n} \times \\ \times \left[ \sum_{\mu=0}^{r-1} C_{2r-2}^{2\mu} E_{2\mu} \left(\frac{\pi^2}{4n^2}\right)^\mu \sin^{2r-2\mu-2} \frac{(1-2\alpha)\pi}{2n} + O\left(\frac{1}{n^{2r-1}}\right) \right].$$

Обозначим

$$\Phi_\mu(x) = \frac{1}{(2\mu)!} \left[ \sum_{l=0}^{r-1} \sum_{j=0}^l \frac{(-1)^{l-j}}{2^{2j}} \times \right. \\ \times C_{2r-2}^{2l} (C_{2l}^j - C_{2l}^{j-1}) (2l-2j+1)^{2\mu+1} x^{2r-2l-2} \times \\ \times \sum_{k=0}^{l-j} \sum_{m=0}^{l-j-k} \frac{(-1)^{k+m}}{2^{2k}} \frac{(2l-2j-k)!}{k!(2l-2j-2k+1)!} C_{l-j-k}^m \cos^{2m} \frac{i\pi}{n} + \\ \left. \left. + \sum_{l=0}^{r-2} \sum_{j=0}^l \frac{(-1)^{l-j}}{2^{2j}} C_{2r-2}^{2l+1} (C_{2l+1}^j - C_{2l+1}^{j-1}) (2l-2j+2)^{2\mu} x^{2r-2l-3} \times \right. \right. \\ \left. \left. \times \sum_{k=0}^{l-j} \sum_{m=0}^{l-j-k} \frac{(-1)^{k+m}}{2^{2k}} C_{2l-2j-k+1}^k C_{l-j-k}^m \cos^{2m+1} \frac{i\pi}{n} \right] .$$

$\Phi_\mu(x)$  — многочлен степени  $2r-2$  относительно  $x$ .

Тогда

$$S_1 = \frac{|T_n(x)| \sin \frac{i\pi}{n}}{2n} \left\{ \sum_{\mu=0}^{r-1} |E_{2\mu}| \left( \frac{\pi}{2n} \right)^{2\mu} \varphi_\mu(x) + O \left( \frac{1}{n^{2r}} \right) \right\}.$$

Для доказательства высказанного утверждения достаточно показать, что в разложении  $\varphi_\mu(x)$  по степеням  $x + \cos \frac{i\pi}{n}$  при данном  $\mu$  ( $\mu=0, 1, 2, \dots, r-1$ ) производные от нулевого до порядка  $2r-2\mu-3$  включительно от  $\varphi_\mu(x)$  при  $x = -\cos \frac{i\pi}{n}$  равны нулю, производная порядка  $2r-2\mu-2$  ( $\mu=0, 1, 2, \dots, r-1$ )

$$\varphi_\mu^{(2r-2\mu-2)} \left( -\cos \frac{i\pi}{n} \right) = \frac{(-1)^\mu}{(2\mu)!} (2r-2)! \sin^2 \mu \frac{i\pi}{n},$$

а производная порядка  $2r-2\mu-1$  ( $\mu=1, 2, \dots, r-1$ ) отлична от нуля, т. е.  $\varphi_0(x) = \left( x + \cos \frac{i\pi}{n} \right)^{2r-2}$

$$\begin{aligned} \text{и} \quad \varphi_\mu(x) &= \frac{\varphi_\mu^{(2r-2\mu-2)} \left( -\cos \frac{i\pi}{n} \right)}{(2r-2\mu-2)!} \times \\ &\times \left( x + \cos \frac{i\pi}{n} \right)^{2r-2\mu-2} + O \left( \frac{1}{n^{2r-2\mu-1}} \right) \\ &\quad (\mu=1, 2, \dots, r-1), \end{aligned}$$

$$\text{так как } x + \cos \frac{i\pi}{n} = \sin \frac{i\pi}{n} \sin \frac{(1-2\alpha)\pi}{2n} + O \left( \frac{1}{n^2} \right).$$

Нетрудно убедиться, что

$$\begin{aligned} \varphi_\mu^{(2r-2\nu-2)} \left( -\cos \frac{i\pi}{n} \right) &= \frac{1}{(2\mu)!} \times \\ &\times \left[ \sum_{l=0}^{\nu} \sum_{j=0}^l \frac{(-1)^{l-j}}{2^{2j}} (C_{2l}^j - C_{2l}^{j-1}) (2l-2j+1)^{2\mu+1} \times \right. \\ &\times \frac{(2r-2)!}{(2l)!(2\nu-2l)!} \cos^{2\nu-2l} \frac{i\pi}{n} \sum_{k=0}^{l-j} \sum_{m=0}^{l-j-k} \frac{(-1)^{k+m}}{2^{2k}} \times \\ &\times \frac{(2l-2j-k)!}{k!(2l-2j-2k+1)!} C_{l-j-k}^m \cos^{2m} \frac{i\pi}{n} - \\ &- \sum_{l=0}^{\nu-1} \sum_{j=0}^l \frac{(-1)^{l-j}}{2^{2j}} (C_{2l+1}^j - C_{2l+1}^{j-1}) (2l-2j+2)^{2\mu} \times \\ &\times \left. \frac{(2r-2)!}{(2l+1)!(2\nu-2l-1)!} \cos^{2\nu-2l} \frac{i\pi}{n} \right] \end{aligned}$$

$$\times \sum_{k=0}^{l-j} \sum_{m=0}^{l-j-k} \frac{(-1)^{k+m}}{2^{2k}} C_{2l-2j-k+1}^k C_{l-j-k}^m \cos^{2m} \frac{i\pi}{n} \Bigg]$$

$$(\nu = 0, 1, \dots, r-1; \mu = 0, 1, \dots, r-1)$$

И

$$\varphi_{\mu}^{(2r-2\nu-3)} \left( -\cos \frac{i\pi}{n} \right) =$$

$$= \frac{1}{(2\mu)!} \left[ - \sum_{l=0}^{\nu} \sum_{j=0}^l \frac{(-1)^{l-j}}{2^{2j}} (C_{2l}^j - C_{2l}^{j-1}) (2l-2j+1)^{2\mu+1} \times \right.$$

$$\times \frac{(2r-2)!}{(2l)!(2\nu-2l+1)!} \cos^{2\nu-2l+1} \frac{i\pi}{n} \sum_{k=0}^{l-j} \sum_{m=0}^{l-j-k} \frac{(-1)^{k+m}}{2^{2k}} \times$$

$$\times \frac{(2l-2j-k)!}{k!(2l-2j-2k+1)!} C_{l-j-k}^m \cos^{2m} \frac{i\pi}{n} +$$

$$+ \sum_{l=0}^{\nu} \sum_{j=0}^l \frac{(-1)^{l-j}}{2^{2j}} (C_{2l+1}^j - C_{2l+1}^{j-1}) (2l-2j+2)^{2\mu} \times$$

$$\times \frac{(2r-2)!}{(2l+1)!(2\nu-2l)!} \cos^{2\nu-2l+1} \frac{i\pi}{n} \times$$

$$\times \sum_{k=0}^{l-j} \sum_{m=0}^{l-j-k} \frac{(-1)^{k+m}}{2^{2k}} C_{2l-2j-k+1}^k C_{l-j-k}^m \cos^{2m} \frac{i\pi}{n} \Bigg]$$

$$(\nu = 0, 1, \dots, r-2; \mu = 1, 2, \dots, r-1).$$

Преобразуя  $\varphi_{\mu}^{(2r-2\nu-2)} \left( -\cos \frac{i\pi}{n} \right)$ , получим

$$\varphi_{\mu}^{(2r-2\nu-2)} \left( -\cos \frac{i\pi}{n} \right) = \frac{(-1)^{\nu} (2r-2)!}{(2\mu)!} \sum_{\gamma=0}^{\nu} (-1)^{\gamma} \cos^{2\gamma} \frac{i\pi}{n} \times$$

$$\times \left[ \sum_{\lambda=0}^{\gamma} \sum_{j=0}^{\nu-\gamma} \frac{(-1)^j}{2^{2j}} (C_{2\nu-2\lambda}^j - C_{2\nu-2\lambda}^{j-1}) \frac{(2\nu-2\lambda-2j+1)^{2\mu+1}}{(2\nu-2\lambda)!(2\lambda)!} \times \right.$$

$$\times \sum_{k=0}^{\nu-\gamma-j} \frac{(-1)^k}{2^{2k}} \frac{(2\nu-2\lambda-2j-k)!}{k!(2\nu-2\lambda-2j-2k+1)!} C_{\nu-\lambda-j-k}^{\gamma-\lambda} - \quad (13)$$

$$- \sum_{\lambda=1}^{\gamma} \sum_{j=0}^{\nu-\gamma} \frac{(-1)^j}{2^{2j}} (C_{2\nu-2\lambda+1}^j - C_{2\nu-2\lambda+1}^{j-1}) \frac{(2\nu-2\lambda-2j+2)^{2\mu}}{(2\nu-2\lambda+1)!(2\lambda-1)!} \times$$

$$\times \sum_{k=0}^{\nu-\gamma-j} \frac{(-1)^k}{2^{2k}} C_{2\nu-2\lambda-2j-k+1}^k C_{\nu-\lambda-j-k}^{\gamma-\lambda} \Bigg].$$

Аналогично получаем

$$\begin{aligned} \varphi_{\mu}^{(2r-2v-3)} \left( -\cos \frac{i\pi}{n} \right) &= \frac{(-1)^v (2r-2)!}{(2\mu)!} \sum_{\gamma=0}^v (-1)^{\gamma} \cos^{2\gamma} \frac{i\pi}{n} \times \\ &\times \left[ - \sum_{\lambda=0}^{\gamma} \sum_{j=0}^{v-\gamma} \frac{(-1)^j}{2^{2j}} (C_{2v-2\lambda}^j - C_{2v-2\lambda}^{j-1}) \frac{(2v-2\lambda-2j+1)^{2\mu+1}}{(2v-2\lambda)!(2\lambda+1)!} \times \right. \\ &\times \sum_{k=0}^{v-\gamma-j} \frac{(-1)^k}{2^{2k}} \frac{(2v-2\lambda-2j-k)!}{k!(2v-2\lambda-2j-2k+1)!} C_{v-\lambda-j-k}^{\gamma-\lambda} - \\ &- \sum_{\lambda=0}^{\gamma} \sum_{j=0}^{v-\gamma} \frac{(-1)^j}{2^{2j}} (C_{2v-2\lambda+1}^j - C_{2v-2\lambda+1}^{j-1}) \times \\ &\times \left. \frac{(2v-2\lambda-2j+2)^{2\mu}}{(2v-2\lambda+1)!(2\lambda)!} \sum_{k=0}^{v-\gamma-j} \frac{(-1)^k}{2^{2k}} C_{2v-2\lambda-2j-k+1}^k C_{v-\lambda-j-k}^{\gamma-\lambda} \right]. \end{aligned} \quad (14)$$

Итак, надо показать, что

$$\begin{aligned} \varphi_{\mu}^{(2r-2v-2)} \left( -\cos \frac{i\pi}{n} \right) &= \\ &= \begin{cases} 0, & \text{если } v = \mu + 1, \mu + 2, \dots, r-1 \quad (\mu = 0, 1, \dots, r-2), \\ (-1)^{\mu} \frac{(2r-2)!}{(2\mu)!} \sin^{2\mu} \frac{i\pi}{n}, & \text{если } v = \mu \quad (\mu = 0, 1, \dots, r-1), \end{cases} \end{aligned} \quad (15)$$

и

$$\begin{aligned} \varphi_{\mu}^{(2r-2v-3)} \left( -\cos \frac{i\pi}{n} \right) &= \\ &= \begin{cases} 0, & \text{если } v = \mu, \mu + 1, \dots, r-2 \quad (\mu = 0, 1, \dots, r-2), \\ \neq 0, & \text{если } v = \mu - 1 \quad (\mu = 1, 2, \dots, r-1). \end{cases} \end{aligned} \quad (16)$$

Из выражений (13) и (14) для  $\varphi_{\mu}^{(2r-2v-2)} \left( -\cos \frac{i\pi}{n} \right)$  и  $\varphi_{\mu}^{(2r-2v-3)} \left( -\cos \frac{i\pi}{n} \right)$  очевидно, что доказательство утверждений (15) и (16) равносильно доказательству следующих равенств:

$$\begin{aligned} &\sum_{\lambda=0}^{\gamma} \sum_{j=0}^{v-\gamma} \frac{(-1)^j}{2^{2j}} (C_{2v-2\lambda}^j - C_{2v-2\lambda}^{j-1}) \frac{(2v-2\lambda-2j+1)^{2\mu+1}}{(2\lambda)!(2v-2\lambda)!} \times \\ &\times \sum_{k=0}^{v-\gamma-j} \frac{(-1)^k}{2^{2k}} \frac{(2v-2\lambda-2j-k)!}{k!(2v-2\lambda-2j-2k+1)!} C_{v-\lambda-j-k}^{\gamma-\lambda} - \\ &- \sum_{\lambda=1}^{\gamma} \sum_{j=0}^{v-\gamma} \frac{(-1)^j}{2^{2j}} (C_{2v-2\lambda+1}^j - C_{2v-2\lambda+1}^{j-1}) \frac{(2v-2\lambda-2j+2)^{2\mu}}{(2v-2\lambda+1)!(2\lambda-1)!} \times \\ &\times \sum_{k=0}^{v-\gamma-j} \frac{(-1)^k}{2^{2k}} C_{2v-2\lambda-2j-k+1}^k C_{v-\lambda-j-k}^{\gamma-\lambda} = \end{aligned}$$

$$= \begin{cases} C_{\mu}^{\gamma}, & \text{если } \nu = \mu \ (\mu = 0, 1, \dots, r-1; \gamma = 0, 1, \dots, \mu), \\ 0, & \text{если } \nu = \mu + 1, \mu + 2, \dots, r-1 \ (\mu = 0, 1, \dots, r-2; \gamma = 0, 1, \dots, \nu), \end{cases} \quad (15')$$

и

$$\begin{aligned} & \sum_{\lambda=0}^{\gamma} \sum_{j=0}^{\nu-\gamma} \frac{(-1)^j}{2^{2j}} (C_{2\nu-2\lambda}^j - C_{2\nu-2\lambda}^{j-1}) \frac{(2\nu-2\lambda-2j+1)^{2\mu+1}}{(2\nu-2\lambda)!(2\lambda+1)!} \times \\ & \quad \times \sum_{k=0}^{\nu-\gamma-j} \frac{(-1)^k}{2^{2k}} \frac{(2\nu-2\lambda-2j-k)!}{k!(2\nu-2\lambda-2j-2k+1)!} C_{\nu-\lambda-j-k}^{\gamma-\lambda} = \\ & - \sum_{\lambda=0}^{\gamma} \sum_{j=0}^{\nu-\gamma} \frac{(-1)^j}{2^{2j}} (C_{2\nu-2\lambda+1}^j - C_{2\nu-2\lambda+1}^{j-1}) \frac{(2\nu-2\lambda-2j+2)^{2\mu}}{(2\nu-2\lambda+1)!(2\lambda)!} \times \\ & \quad \times \sum_{k=0}^{\nu-\gamma-j} \frac{(-1)^k}{2^{2k}} C_{2\nu-2\lambda-2j-k+1}^k C_{\nu-\lambda-j-k}^{\gamma-\lambda} = \\ & = \begin{cases} 0, & \text{если } \nu = \mu, \mu + 1, \dots, r-2 \ (\mu = 0, 1, \dots, r-2; \gamma = 0, 1, \dots, \nu), \\ \neq 0, & \text{если } \nu = \mu - 1 \ (\mu = 1, 2, \dots, r-1), \end{cases} \quad (16') \end{aligned}$$

хотя бы при каком-либо  $\gamma$  ( $\gamma = 0, 1, \dots, \mu - 1$ ), например при  $\gamma = 0$ .

Имеем

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^{\nu-\gamma-j} \frac{(-1)^k}{2^{2k}} \frac{(2\nu-2\lambda-2j-k)!}{k!(2\nu-2\lambda-2j-2k+1)!} C_{\nu-\lambda-j-k}^{\gamma-\lambda} = \\ & = \frac{1}{2\nu-2\lambda-2j+1} \frac{C_{\nu+\gamma-2\lambda-j}^{2\gamma-2\lambda}}{2^{2\nu-2\gamma-2j}} \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^{\nu-\gamma-j} \frac{(-1)^k}{2^{2k}} C_{2\nu-2\lambda-2j-k+1}^k C_{\nu-\lambda-j-k}^{\gamma-\lambda} = \\ & = \frac{C_{\nu+\gamma-2\lambda-j+1}^{2\gamma-2\lambda+1}}{2^{2\nu-2\gamma-2j}} \quad ([2], \text{ тождество } 2). \end{aligned}$$

Обозначив через  $A$  и  $B$  соответственно левые части (15') и (16') и учитывая последние тождества, получаем

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2^{2\rho}(2\nu+1)!} \left\{ \sum_{m=\rho}^{\nu} C_{2\nu+1}^{2\nu-2m} \times \right. \\ & \quad \times \sum_{j=0}^{\rho} (-1)^j C_{2m+1}^j C_{2m-\rho-j}^{2m-2\rho} (2m-2j+1)^{2\mu+1} - \\ & \quad \left. - \sum_{m=\rho}^{\nu} C_{2\nu+1}^{2\nu-2m-1} \sum_{j=0}^{\rho} (-1)^j C_{2m+2}^j C_{2m-\rho-j+1}^{2m-2\rho+1} (2m-2j+2)^{2\mu+1} \right\}, \\ B &= \frac{1}{2^{2\rho}(2\nu+2)!} \left\{ \sum_{m=\rho}^{\nu} C_{2\nu+2}^{2\nu-2m+1} \right\} \end{aligned}$$

$$\times \sum_{j=0}^p (-1)^j C_{2m+1}^j C_{2m-p-j}^{2m-2p} (2m-2j+1)^{2p+1} - \\ - \sum_{m=p}^v C_{2v+2}^{2v-2m} \sum_{j=0}^p (-1)^j C_{2m+2}^j C_{2m-p-j+1}^{2m-2p+1} (2m-2j+2)^{2p+1} \Big\}.$$

Учитывая тождества 3 [2], получаем

$$A = \begin{cases} C_{\mu}^v, & \text{если } v = \mu, \\ 0, & \text{если } v \geq \mu + 1 \quad (\mu = 0, 1, \dots), \end{cases}$$

$$B = \begin{cases} 0, & \text{если } v \geq \mu, \\ \neq 0, & \text{если } v = \mu - 1, \gamma = 0 \quad (\mu = 1, 2, \dots). \end{cases}$$

Значит, равенства (15') и (16'), а следовательно, и равенства (15) и (16) доказаны.

Таким образом, мы показали, что при любом натуральном  $r$

$$S_1 = \frac{|T_n(x)| \sin^{2r-1} \frac{i\pi}{n}}{2n} \left[ \sum_{\mu=0}^{r-1} C_{2r-2}^{2\mu} E_{2\mu} \times \right. \\ \left. \times \left( \frac{\pi^2}{4n^2} \right)^{\mu} \sin^{2r-2\mu-2} \frac{(1-2\alpha)\pi}{2n} + O\left( \frac{1}{n^{2r-1}} \right) \right]. \quad (17)$$

Теперь покажем, что сумма

$$\Sigma = \sum_{\mu=0}^{r-1} C_{2r-2}^{2\mu} E_{2\mu} \left( \frac{\pi^2}{4n^2} \right)^{\mu} \sin^{2r-2\mu-2} \frac{(1-2\alpha)\pi}{2n} \quad (18)$$

без остатка делится на

$$\frac{\pi^2}{4n^2} - \sin^2 \frac{(1-2\alpha)\pi}{2n}. \quad (19)$$

Действительно, (18) есть многочлен степени  $r-1$  относительно  $\frac{\pi^2}{4n^2}$ .

По теореме Безу остаток  $R$  от деления (18) на (19) равен

$$R = \sin^{2r-2} \frac{(1-2\alpha)\pi}{2n} \sum_{\mu=0}^{r-1} C_{2r-2}^{2\mu} E_{2\mu} = 0,$$

так как

$$\sum_{\mu=0}^{r-1} C_{2r-2}^{2\mu} E_{2\mu} = 0, \quad (20)$$

что очевидно, если воспользоваться известным равенством

$$(E+1)^{2r-2} + (E-1)^{2r-2} = 0$$

(символическая запись, см. [3], стр. 442).

Значит,  $S_1$  можно представить в виде

$$S_1 = \frac{|T_n(x)| \sin^{2r-1} \frac{i\pi}{n}}{2n} \left[ \frac{\pi^2}{4n^2} - \sin^2 \frac{(1-2\alpha)\pi}{2n} \right] \times \\ \times Q_{r-2} \left( \frac{\pi^2}{4n^2} \right) + O \left( \frac{1}{n^{2r}} \right), \quad (21)$$

где  $Q_{r-2} \left( \frac{\pi^2}{4n^2} \right)$  — частное от деления (18) на (19). Записав сумму  $\Sigma$  как

$$\Sigma = \sum_{\mu=0}^{r-1} a_{\mu} \left( \frac{\pi^2}{4n^2} \right)^{\mu},$$

где 
$$a_{\mu} = C_{2r-2}^{2\mu} E_{2\mu} \sin^{2r-2\mu-2} \frac{(1-2\alpha)\pi}{2n}, \quad (22)$$

находим частное

$$Q_{r-2} \left( \frac{\pi^2}{4n^2} \right) = \sum_{\mu=1}^{r-1} c_{\mu} \left( \frac{\pi^2}{4n^2} \right)^{\mu-1},$$

где коэффициенты  $c_{\mu}$  определяются по схеме Горнера, т. е.

$$c_{r-1} = a_{r-1}, \quad c_{\mu} = a_{\mu} + c_{\mu+1} \sin^2 \frac{(1-2\alpha)\pi}{2n} \quad (\mu = r-2, r-3, \dots, 1),$$

откуда, учитывая (22),

$$c_{r-1} = E_{2r-2},$$

$$c_{\mu} = \sin^{2r-2\mu-2} \frac{(1-2\alpha)\pi}{2n} \sum_{k=0}^{r-\mu-1} C_{2r-2}^{2\mu+2k} E_{2\mu+2k} \quad (\mu = r-2, r-3, \dots, 1)$$

и

$$Q_{r-2} \left( \frac{\pi^2}{4n^2} \right) = \sum_{\mu=1}^{r-1} \sum_{k=0}^{r-\mu-1} C_{2r-2}^{2\mu+2k} E_{2\mu+2k} \times \\ \times \left( \frac{\pi^2}{4n^2} \right)^{\mu-1} \sin^{2r-2\mu-2} \frac{(1-2\alpha)\pi}{2n}.$$

Обозначим

$$\sin^2 \frac{(1-2\alpha)\pi}{2n} = y, \quad \sum_{\mu=1}^{r-1} \sum_{k=0}^{r-\mu-1} C_{2r-2}^{2\mu+2k} E_{2\mu+2k} \times \\ \times \left( \frac{\pi^2}{4n^2} \right)^{\mu-1} \sin^{2r-2\mu-2} \frac{(1-2\alpha)\pi}{2n} = P_{r-2}(y)$$

и покажем, что

$$Q_{r-2} \left( \frac{\pi^2}{4n^2} \right) = (-1)^{r-1} \sum_{l=1}^{r-1} b_l \left( \frac{\pi^2}{n^2} \right)^{l-1} \left( \frac{\pi^2}{4n^2} - y \right)^{r-l-1}, \quad (23)$$

где

$$b_1 = 1, b_l = \sum_{j=1}^{l-1} (-1)^{j+1} b_{l-j} C_{r-l+j}^{2j} \quad (l = 2, 3, \dots, r-1).$$

Для этого разложим многочлен  $P_{r-2}(y)$  по степеням  $y - \frac{\pi^2}{4n^2}$ :

$$P_{r-2}(y) = \sum_{l=1}^{r-1} \frac{P_{r-2}^{(l-1)}\left(\frac{\pi^2}{4n^2}\right)}{(l-1)!} \left(y - \frac{\pi^2}{4n^2}\right)^{l-1},$$

или

$$P_{r-2}(y) = (-1)^{r-1} \sum_{l=1}^{r-1} b_l \left(\frac{\pi^2}{n^2}\right)^{l-1} \left(\frac{\pi^2}{4n^2} - y\right)^{r-l-1},$$

где

$$b_l = (-1)^l \frac{P_{r-2}^{(r-l-1)}\left(\frac{\pi^2}{4n^2}\right)}{(r-l-1)!} \left(\frac{n^2}{\pi^2}\right)^{l-1}. \quad (24)$$

Остается показать, что

$$b_1 = 1, b_l = \sum_{j=1}^{l-1} (-1)^{j+1} b_{l-j} C_{r-l+j}^{2j} \quad (l = 2, 3, \dots, r-1).$$

Преобразуем выражение (24) для  $b_l$ . Очевидно, что

$$P_{r-2}^{(r-l-1)}\left(\frac{\pi^2}{4n^2}\right) = \sum_{\mu=1}^l \sum_{k=0}^{r-\mu-1} C_{2r-2}^{2\mu+2k} E_{2\mu+2k} \times \\ \times \left(\frac{\pi^2}{4n^2}\right)^{l-1} \frac{(r-\mu-1)!}{(l-\mu)!}.$$

Тогда

$$b_l = (-1)^l \left(\frac{1}{4}\right)^{l-1} \frac{1}{(r-l-1)!} \times \\ \times \sum_{\mu=1}^l \sum_{k=0}^{r-\mu-1} C_{2r-2}^{2\mu+2k} E_{2\mu+2k} \frac{(r-\mu-1)!}{(l-\mu)!} = \\ = (-1)^l \left(\frac{1}{4}\right)^{l-1} \frac{1}{(r-l-1)!} \times \\ \times \sum_{\mu=1}^l \sum_{k=\mu}^{r-1} C_{2r-2}^{2k} E_{2k} \frac{(r-\mu-1)!}{(l-\mu)!} = \\ = (-1)^l \left(\frac{1}{4}\right)^{l-1} \frac{1}{(r-l-1)!} \sum_{\mu=1}^l \frac{(r-\mu-1)!}{(l-\mu)!} \times \\ \times \left( \sum_{k=0}^{r-1} C_{2r-2}^{2k} E_{2k} - \sum_{k=0}^{\mu-1} C_{2r-2}^{2k} E_{2k} \right).$$

В силу (20)

$$b_l = \left(-\frac{1}{4}\right)^{l-1} \frac{1}{(r-l-1)!} \sum_{\mu=1}^l \frac{(r-\mu-1)!}{(l-\mu)!} \sum_{k=0}^{\mu-1} C_{2r-2}^{2k} E_{2k}.$$

Изменив порядок суммирования, получим

$$b_l = \left(-\frac{1}{4}\right)^{l-1} \frac{1}{(r-l-1)!} \sum_{k=0}^{l-1} C_{2r-2}^{2k} E_{2k} \sum_{\mu=k+1}^l \frac{(r-\mu-1)!}{(l-\mu)!}.$$

Но

$$\sum_{\mu=k+1}^l \frac{(r-\mu-1)!}{(l-\mu)!} = \frac{1}{r-l} \frac{(r-k-1)!}{(l-k-1)!}.$$

Действительно,

$$\begin{aligned} \sum_{\mu=k+1}^l \frac{(r-\mu-1)!}{(l-\mu)!} &= \frac{1}{r-l} \sum_{\mu=k+1}^l [(r-\mu)(r-\mu-1) \dots \\ &\dots (l-\mu+1) - (r-\mu-1)(r-\mu-2) \dots (l-\mu+1)(l-\mu)] = \\ &= \frac{1}{r-l} (r-k-1)(r-k-2) \dots (l-k) = \frac{1}{r-l} \frac{(r-k-1)!}{(l-k-1)!}. \end{aligned}$$

Учитывая последнее равенство, получаем

$$b_l = \left(-\frac{1}{4}\right)^{l-1} \frac{1}{(r-l)!} \sum_{k=0}^{l-1} \frac{(r-k-1)!}{(l-k-1)!} C_{2r-2}^{2k} E_{2k}. \quad (25)$$

Отсюда очевидно, что  $b_1 = 1$ .

Теперь покажем, что для  $l = 2, 3, \dots, r-1$

$$b_l = \sum_{j=1}^{l-1} (-1)^{j+1} b_{l-j} C_{r-l+j}^{2j}, \quad (26)$$

или в силу (25)

$$\begin{aligned} &\left(-\frac{1}{4}\right)^{l-1} \frac{1}{(r-l)!} \sum_{k=0}^{l-1} \frac{(r-k-1)!}{(l-k-1)!} C_{2r-2}^{2k} E_{2k} - \\ &- \sum_{j=1}^{l-1} (-1)^{j+1} \left(-\frac{1}{4}\right)^{l-j-1} \frac{1}{(r-l+j)!} \times \\ &\times \sum_{k=0}^{l-j-1} \frac{(r-k-1)!}{(l-j-k-1)!} C_{2r-2}^{2k} E_{2k} C_{r-l+j}^{2j} = 0. \end{aligned} \quad (26')$$

Обозначим левую часть равенства (26') через  $D$  и убедимся, что  $D = 0$ .

В самом деле,

$$\begin{aligned}
 D &= \left(-\frac{1}{4}\right)^{l-1} \left[ \frac{1}{(r-l)!} \sum_{k=0}^{l-1} \frac{(r-k-1)!}{(l-k-1)!} C_{2r-2}^{2k} E_{2k} + \right. \\
 &\quad \left. + \sum_{k=0}^{l-2} \sum_{j=1}^{l-k-1} (r-k-1)! \times \right. \\
 &\quad \left. \times \frac{2^{2j}}{(2j)!(l-k-j-1)!(r-l-j)!} C_{2r-2}^{2k} E_{2k} \right] = \\
 &= \left(-\frac{1}{4}\right)^{l-1} \left[ \frac{1}{(r-l)!} \sum_{k=0}^{l-1} \frac{(r-k-1)!}{(l-k-1)!} C_{2r-2}^{2k} E_{2k} + \right. \\
 &\quad \left. + \sum_{k=0}^{l-1} (r-k-1)! C_{2r-2}^{2k} E_{2k} \times \right. \\
 &\quad \left. \times \left( \sum_{j=0}^{l-k-1} \frac{2^{2j}}{(2j)!(l-k-1-j)!(r-l-j)!} - \frac{1}{(l-k-1)!(r-l)!} \right) \right] = \\
 &= \left(-\frac{1}{4}\right)^{l-1} \sum_{k=0}^{l-1} (r-k-1)! C_{2r-2}^{2k} E_{2k} \times \\
 &\quad \times \sum_{j=0}^{l-k-1} \frac{2^{2j}}{(2j)!(l-k-1-j)!(r-l-j)!}.
 \end{aligned}$$

Но

$$\sum_{j=0}^m \frac{2^{2j}}{(2j)!(m-j)!(p-j)!} = \frac{C_{2p+2m}^{2m}}{(p+m)!}$$

([2], тождество 1), поэтому

$$\begin{aligned}
 D &= \left(-\frac{1}{4}\right)^{l-1} \sum_{k=0}^{l-1} C_{2r-2}^{2k} C_{2r-2k-2}^{2r-2l} E_{2k} = \\
 &= \left(-\frac{1}{4}\right)^{l-1} C_{2r-2}^{2l-2} \sum_{k=0}^{l-1} C_{2l-2}^{2k} E_{2k} = 0
 \end{aligned}$$

в силу (20), что и требовалось доказать.

Таким образом, равенство (23) доказано.

Подставив (23) в (21), получим

$$\begin{aligned}
 S_1 &= \frac{|T_n(x)| \sin^{2r-1} \frac{i\pi}{n}}{2n} \left[ \frac{\pi^2}{4n^2} - \sin^2 \frac{(1-2\alpha)\pi}{2n} \right] \times \\
 &\quad \times (-1)^{r-1} \sum_{l=1}^{r-1} b_l \left( \frac{\pi^2}{n^2} \right)^{l-1} \times \\
 &\quad \times \left[ \frac{\pi^2}{4n^2} - \sin^2 \frac{(1-2\alpha)\pi}{2n} \right]^{r-l-1} + O\left(\frac{1}{n^{2r}}\right).
 \end{aligned} \tag{21'}$$

Заметим, что

$$\sin \frac{i\pi}{n} = \sin \frac{(2i+1-2\alpha)\pi}{2n} \cos \frac{(2\alpha-1)\pi}{2n} + O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Но

$$\sin \frac{(2i+1-2\alpha)\pi}{2n} = \sqrt{1-x^2};$$

$$\cos \frac{(2\alpha-1)\pi}{2n} = 1 + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

и, значит,

$$\sin \frac{i\pi}{n} = \sqrt{1-x^2} + O\left(\frac{1}{n}\right). \quad (27)$$

$$\text{Далее имеем } \frac{\pi^2}{4n^2} = \sin^2 \frac{\pi}{2n} + O\left(\frac{1}{n^4}\right).$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \frac{\pi^2}{4n^2} - \sin^2 \frac{(1-2\alpha)\pi}{2n} &= \\ &= \sin \frac{\alpha\pi}{n} \sin \frac{(1-\alpha)\pi}{n} + O\left(\frac{1}{n^4}\right). \end{aligned} \quad (28)$$

И еще

$$\begin{aligned} \frac{\alpha\pi}{n} &= \sin \frac{\alpha\pi}{n} + O\left(\frac{1}{n^3}\right); \\ \frac{(1-\alpha)\pi}{n} &= \sin \frac{(1-\alpha)\pi}{n} + O\left(\frac{1}{n^3}\right); \\ \frac{\pi^2}{n^2} &= \frac{1}{\alpha(1-\alpha)} \sin \frac{\alpha\pi}{n} \sin \frac{(1-\alpha)\pi}{n} + O\left(\frac{1}{n^4}\right). \end{aligned} \quad (29)$$

Подставив (27), (28) и (29) в (21'), имеем

$$\begin{aligned} S_1 &= (-1)^{r-1} \frac{|T_n(x)|}{2n} (1-x^2)^{\frac{2r-1}{2}} \sin^{r-1} \frac{\alpha\pi}{n} \times \\ &\times \sin^{r-1} \frac{(1-\alpha)\pi}{n} \sum_{l=1}^{r-1} \frac{b_l}{[\alpha(1-\alpha)]^{l-1}} + O\left(\frac{1}{n^{2r}}\right). \end{aligned}$$

Равенство (11) доказано.  
Подобным образом получаем

$$S_2 = O\left(\frac{\ln n}{n^{2r}}\right). \quad (30)$$

Подставив в (10) выражения (11) и (30), получаем

$$I = \frac{(2r-2)!!}{2^{2r-2} (2r-1)!!} \frac{|T_n(x)|}{n} (1-x^2)^{\frac{2r-1}{2}} \sin^{r-1} \frac{\alpha\pi}{n} \times \\ \times \sin^{r-1} \frac{(1-\alpha)\pi}{n} \sum_{l=1}^{r-1} \frac{b_l}{[\alpha(1-\alpha)]^{l-1}} + O\left(\frac{\ln n}{n^{2r}}\right).$$

Теорема 2 доказана.

### Литература

1. Никольский С. М. Квадратурные формулы. Физматгиз, 1958.
2. Турецкий А. Х., Корзун И. И. Вестн АН БССР, сер. физ.-мат. наук, № 3, 1967.
3. Рыжик И. М., Градштейн И. С. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. Изд. 3-е, М.—Л., 1951.

Белорусский государственный университет  
им. В. И. Ленина

Поступило в редакцию  
16.V 1967

УДК 512.25/6+519.15

И. М. КУНЦЕВИЧ

**К ВОПРОСУ МИНИМИЗАЦИИ  
ЗНАЧЕНИЯ ЛИНЕЙНОЙ ФОРМЫ  
НА МНОЖЕСТВЕ ЦИКЛОВ ДЛИНЫ  $n$ . I**

1. Пусть  $f(x) = \sum_{i=1}^n c_i x_i$  — вещественная линейная форма,  $b = (b_1, \dots, b_n)$  — фиксированный  $n$ -мерный вектор с вещественными координатами, а  $t$  — некоторая подстановка из симметрической группы  $S_n$ .

Если  $t(i) = j_i$ , то, как и в [1], значением формы  $f$  на подстановке  $t$  при заданном векторе  $b$  будем считать величину

$$f_t(b) = \sum_{i=1}^n c_i b_{j_i}.$$

Пусть коэффициенты  $c_i$  из формы  $f$  занумерованы в порядке возрастания:

$$c_1 \leq c_2 \leq \dots \leq c_n. \quad (1)$$

Известно, что если координаты вектора  $b$  удовлетворяют неравенствам

$$b_{j_1} \geq b_{j_2} \geq \dots \geq b_{j_n},$$

то подстановка  $\tau_0$ , минимизирующая значение линейной формы  $f$  на симметрической группе  $S_n$ , имеет вид

$$\tau_0 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ j_1 & j_2 & \dots & j_n \end{pmatrix}.$$

В работах [1, 3] рассмотрена задача отыскания подстановки, минимизирующей значение линейной формы  $f$  на множестве циклов длины  $n$  из  $S_n$ , в предположении, что

$$\tau_0 = e, \quad \tau_0 = (1, n)(2, n-1) \dots, \quad \tau_0 = (1, 2, \dots, l), \\ \tau_0 = (1, 2, \dots, l)(l+1, n)(l+2, n-1) \dots$$

В настоящей статье эта задача решается для случаев, когда

$$1. \tau_0 = \tau_1(l+1, l+2, \dots, n), \quad 2. \tau_0 = \tau_1(l+1, l+2, \dots, l+p)\tau_2,$$

где  $\tau_1$  — произвольная подстановка символов  $1, 2, \dots, l$ , а  $\tau_2$  — символов  $l+p+1, l+p+2, \dots, n$ .

Результаты применены к частным случаям:

- а)  $\tau_0 = (l+1, l+2, \dots, n)$ ,
- б)  $\tau_0 = (1, l)(2, l-1) \dots (l+1, l+2, \dots, n)$ ,
- в)  $\tau_0 = (l+1, l+2, \dots, l+p)$ ,

$$\text{г) } \tau_0 = (1, l)(2, l-1) \dots (l+1, l+2, \dots, l+p) \times \\ \times (l+p+1, n)(l+p+2, n-1) \dots,$$

$$\text{д) } \tau_0 = (l+1, l+2, \dots, l+p)(l+p+1, n)(l+p+2, n-1) \dots,$$

$$\text{е) } \tau_0 = (1, l)(2, l-1) \dots (l+1, l+2, \dots, l+p).$$

Показано, что в случае 1 для отыскания подстановки  $t_0$ , минимизирующей значение формы  $f$  на множестве всех циклов длины  $n$  из  $S_n$ , достаточно ограничиться рассмотрением  $l!$  циклических подстановок степени  $n$  вида

$$t = (1, \alpha_2, \dots, \alpha_s, l+2, \dots, n, l+1, \alpha_{s+1}, \dots, \alpha_l), \quad (2)$$

а для случая 2 —  $l!(n-l-p)!$  циклических подстановок степени  $n$  вида

$$t = (1, \alpha_2, \dots, \alpha_s, l+2, \dots, l+p, \alpha_{l+p+1}, \dots, \alpha_n, l+1, l_{s+1}, \dots, \alpha_l). \quad (3)$$

Для каждого из частных случаев указаны число и вид подстановок, среди которых следует искать минимизирующую.

2. Пусть подстановка  $\tau_0 = \tau_1(l+1, l+2, \dots, n)$ , тогда

$$b_v \geq b_{l+2} \geq \dots \geq b_n \geq b_{l+1}, \quad v \leq l. \quad (4)$$

Разобьем символы  $1, 2, \dots, n$  на два класса:

$$A = \{1, 2, \dots, l\} \quad \text{и} \quad B = \{l+1, l+2, \dots, n\}.$$

*Лемма 1.* Если подстановка  $\tau_0$  имеет вид  $\tau_0 = \tau_1(l+1, \dots, n)$ , где  $\tau_1$  — произвольная подстановка символов  $1, 2, \dots, l$ , то среди  $l!$  подстановок вида  $(1, \alpha_2, \dots, \alpha_s, l+2, \dots, n, l+1, \alpha_{s+1}, \dots, \alpha_l)$  есть подстановка, минимизирующая значение линейной формы  $f$  на множестве всех циклов длины  $n$  из  $S_n$ .

*Доказательство.* Пусть  $t$  — произвольная подстановка из  $H$ , где  $H$  — множество всех циклов длины  $n$  из  $S_n$ , символы  $\beta_k, \dots, \beta_{k+q}, \beta_r, \dots, \beta_{r+s}$  принадлежат  $B$ , а символы  $\alpha_{k-1}, \alpha_{k+q+1}, \alpha_{r-1}, \alpha_{r+s+1} \in A$ .

Образум из  $t$  подстановку

$$t_1 = (1, \alpha_2, \dots, \alpha_{k-1}, \alpha_{k+q+1}, \dots, \alpha_{r-1}, \beta_k, \dots, \beta_{k+q}, \beta_r, \dots, \beta_{r+s}, \alpha_{r+s+1}, \dots),$$

если  $\alpha_{r-1} > \alpha_{k-1}$ ,  
и подстановку

$$t_2 = (1, \alpha_2, \dots, \alpha_{k-1}, \beta_r, \dots, \beta_{r+s}, \beta_k, \dots, \alpha_{r-1}, \alpha_{r+s+1}, \dots),$$

если  $\alpha_{r-1} < \alpha_{k-1}$ ,  
для которых разности

$$f_{t_1}(b) - f_t(b) \leq 0, \quad f_{t_2}(b) - f_t(b) \leq 0.$$

Действительно,

$$f_{t_1}(b) - f_t(b) = c_{\alpha_{k-1}}(b_{\alpha_{k+q+1}} - b_{\beta_k}) + c_{\alpha_{r-1}}(b_{\beta_k} - b_{\beta_r}) + \\ + c_{\beta_{k+q}}(b_{\beta_r} - b_{\alpha_{k+q+1}}) =$$

$$= \begin{cases} (c_{\beta_{k+q}} - c_{\alpha_{r-1}})(b_{\beta_r} - b_{\beta_k}) + (c_{\beta_{k+q}} - c_{\alpha_{k-1}})(b_{\beta_k} - b_{\alpha_{k+q+1}}) \leq 0, & \text{если } b_{\beta_k} - b_{\beta_r} \geq 0, \\ (c_{\beta_{k+q}} - c_{\alpha_{k-1}})(b_{\beta_r} - b_{\alpha_{k+q+1}}) + (c_{\alpha_{r-1}} - c_{\alpha_{k-1}})(b_{\beta_k} - b_{\beta_r}) \leq 0, & \text{если } b_{\beta_k} - b_{\beta_r} \leq 0 \end{cases}$$

в силу условий (1) и (4).

Аналогично можно показать, что  $f_{t_2}(b) - f_t(b) \leq 0$ .

Если в полученной из  $t$  подстановке будут еще группы символов из класса  $B$ , стоящие между символами из класса  $A$ , то, проделав конечное число подобных преобразований, мы образуем подстановку, в которой все символы из класса  $B$  стоят рядом и заключены между двумя символами из класса  $A$ .

Пусть подстановка  $\bar{t}$ , полученная из  $t$ , имеет вид

$$\bar{t} = (1, \alpha_2, \dots, \alpha_s, \beta_{l+1}, \dots, \beta_n, \alpha_{s+1}, \dots, \alpha_l), \quad (5)$$

где  $\{1, \alpha_2, \dots, \alpha_s, \alpha_{s+1}, \dots, \alpha_l\} \in A$ ,  $\{\beta_{l+1}, \dots, \beta_n\} \in B$ .

В этой подстановке для символа  $l+2$  возможно одно из трех положений: между символами  $\beta_{k-1}$ ,  $\beta_{k+1}$ , после символа  $\alpha_s$  и перед символом  $\alpha_{s+1}$ .

Пусть имеет место первый случай.

Тогда, если  $\beta_{k-1} \neq l+1$ ,  $\beta_{k+1} \neq \alpha_{s+1}$  или одновременно  $\beta_{k-1} = l+1$ ,  $\beta_{k+1} = \alpha_{s+1}$ , из подстановки  $\bar{t}$  образуем подстановку

$$\bar{t}_1 = (1, \alpha_2, \dots, \alpha_s, l+2, \beta_{l+1}, \dots, \beta_{k-1}, \beta_{k+1}, \dots, \beta_n, \alpha_{s+1}, \dots, \alpha_l), \quad (6)$$

для которой

$$f_{\bar{t}_1}(b) - f_{\bar{t}}(b) = \begin{cases} (c_{\beta_{k-1}} - c_{l+2})(b_{\beta_{k+1}} - b_{\beta_{l+1}}) + (c_{\beta_{k-1}} - c_{\alpha_s})(b_{\beta_{l+1}} - b_{l+2}) \leq 0, \\ \text{если } b_{\beta_{l+1}} - b_{\beta_{k+1}} \geq 0, \\ (c_{\beta_{k-1}} - c_{\alpha_s})(b_{\beta_{k+1}} - b_{l+2}) + (c_{l+2} - c_{\alpha_s})(b_{\beta_{l+1}} - b_{\beta_{k+1}}) \leq 0, \\ \text{если } b_{\beta_{l+1}} - b_{\beta_{k+1}} \leq 0, \\ (c_{l+2} - c_{\alpha_s})(b_{\beta_{l+1}} - b_{l+2}) + (c_{l+2} - c_{l+1})(b_{l+2} - b_{\alpha_{s+1}}) \leq 0, \\ \text{если } \beta_{k+1} = \alpha_{s+1}, \beta_{k-1} = l+1. \end{cases}$$

Если же  $\beta_{k+1} = \alpha_{s+1}$ , а  $\beta_{k-1} \neq l+1$  или  $\beta_{k-1} = l+1$ , а  $\beta_{k+1} \neq \alpha_{s+1}$ , то подстановка  $t$  может иметь один из следующих видов:

1.  $\bar{t} = (1, \alpha_2, \dots, \alpha_s, l+1, \beta_{l+2}, \dots, \beta_{n-1}, l+2, \alpha_{s+1}, \dots, \alpha_l)$ .
2.  $\bar{t} = (1, \alpha_2, \dots, \alpha_s, \beta_{l+1}, \dots, \beta_{r-1}, l+1, \beta_{r+1}, \dots, \beta_{n-1}, l+2, \alpha_{s+1}, \dots, \alpha_l)$
3.  $\bar{t} = (1, \alpha_2, \dots, \alpha_s, \beta_{l+1}, \dots, \beta_{r-1}, l+1, l+2, \beta_{r+2}, \dots, \beta_n, \alpha_{s+1}, \dots, \alpha_l)$ .

В случае 1 из  $\bar{t}$  сразу получаем подстановку

$$\bar{t}_1 = (1, \alpha_2, \dots, \alpha_s, l+2, \beta_{l+2}, \dots, \beta_{n-1}, l+1, \alpha_{s+1}, \dots, \alpha_l),$$

для которой

$$f_{\bar{t}_1}(b) - f_{\bar{t}}(b) \leq 0.$$

В случаях 2 и 3 подстановка  $\bar{t}$  преобразуется в подстановку  $\bar{t}_2$  вида

$$\bar{t}_2 = (1, \alpha_2, \dots, \beta_{l+1}, \dots, l+1, l+2, \alpha_{s+1}, \dots, \alpha_l).$$

Действительно, пусть в случае 2 в подстановке  $\bar{t}$  символ  $\beta_{n-1}$  больше хотя бы одного из символов  $\beta_{l+1}, \dots, \beta_{r-1}$ , например  $\beta_{k-1}$ , то из  $\bar{t}$  образуем подстановку

$$t_2 = (1, \alpha_2, \dots, \beta_{l+1}, \dots, \beta_{k-1}, \beta_{r+1}, \dots, \beta_{n-1}, \beta_k, \dots, \beta_{r-1}, \\ l+1, l+2, \alpha_{s+1}, \dots, \alpha_l).$$

для которой

$$f_{\bar{t}_2}(b) - f_{\bar{t}}(b) = \begin{cases} (c_{\beta_{n-1}} - c_{\beta_{k-1}})(b_{\beta_k} - b_{\beta_{r+1}}) + (c_{\beta_{n-1}} - c_{l+1})(b_{\beta_{r+1}} - b_{l+2}) \leq 0, \\ \text{если } b_{\beta_{r+1}} - b_{\beta_k} \geq 0, \\ (c_{\beta_{n-1}} - c_{l+1})(b_{\beta_{r+1}} - b_{l+2}) + (c_{\beta_{k-1}} - c_{l+1})(b_{\beta_{r+1}} - b_{\beta_k}) \leq 0, \\ \text{если } b_{\beta_{r+1}} - b_{\beta_k} \leq 0. \end{cases}$$

Если все символы  $\beta_{l+1}, \dots, \beta_{r-1}$  больше символа  $\beta_{n-1}$ , а  $\beta_{r+1} < \beta_{l+1}$ , то образуем подстановку

$$\bar{t}_2 = (1, \alpha_2, \dots, \alpha_s, \beta_{r+1}, \dots, \beta_{n-1}, \beta_{l+1}, \dots, \beta_{r-1}, l+1, l+2, \alpha_{s+1}, \dots, \alpha_l),$$

значение формы  $f$  на которой не превосходит значения формы на подстановке  $\bar{t}$ .

Если же  $\beta_{r+1} > \beta_{l+1}$ , то находим среди символов  $\beta_{l+1}, \dots, \beta_{r-1}$  минимальный  $\beta_q$ , а среди символов  $\beta_{r+1}, \dots, \beta_{n-1}$  символ  $\beta_m$ , самый правый больший  $\beta_q$ , и образуем подстановку

$$\bar{t}_3 = (1, \alpha_2, \dots, \alpha_s, \beta_{l+1}, \dots, \beta_q, \beta_{r+1}, \dots, \beta_m, \beta_{q+1}, \dots, \beta_{r-1}, l+1, \beta_{m+1}, \dots, \beta_{n-1}, l+2, \alpha_{s+1}, \dots, \alpha_l),$$

для которой

$$f_{\bar{t}_3}(b) - f_{\bar{t}}(b) = \begin{cases} (c_{\beta_m} - c_{\beta_q})(b_{\beta_{q+1}} - b_{\beta_{r+1}}) + (c_{\beta_m} - c_{l+1})(b_{\beta_{r+1}} - b_{\beta_{m+1}}) \leq 0, \\ \text{если } b_{\beta_{r+1}} - b_{\beta_{q+1}} \geq 0, \\ (c_{\beta_m} - c_{l+1})(b_{\beta_{r+1}} - b_{\beta_{m+1}}) + (c_{\beta_q} - c_{l+1})(b_{\beta_{r+1}} - b_{\beta_{q+1}}) \leq 0, \\ \text{если } b_{\beta_{r+1}} - b_{\beta_{q+1}} \leq 0, \end{cases}$$

но такую, в которой символ  $\beta_{m+1} < \beta_{l+1}$ .

Поэтому из нее сразу получаем подстановку

$$t_2 = (1, \alpha_2, \dots, \alpha_s, \beta_{m+1}, \dots, \beta_{n-1}, \beta_{l+1}, \dots, \beta_{r-1}, l+1, l+2, \alpha_{s+1}, \dots, \alpha_l).$$

Аналогично поступаем и в случае 3.

Отсюда имеем, что если в подстановке  $\bar{t}$  символ  $l+2$  стоит на любом месте, то указанными преобразованиями подстановка  $\bar{t}$  преобразуется в подстановку  $\bar{t}_1$  вида (6), при этом значение формы на подстановке  $\bar{t}_1$  не превосходит значения формы на  $\bar{t}$ .

В силу вышеизложенного можно считать, что подстановка имеет вид

$$\bar{t} = (1, \alpha_2, \dots, \alpha_s, \beta_{l+1}, \dots, \beta_{l+r}, \dots, \beta_{l+k}, \dots, \beta_n, \alpha_{s+1}, \dots, \alpha_l),$$

где символы  $1, \alpha_2, \dots, \alpha_s, \alpha_{s+1}, \dots, \alpha_l$  принадлежат классу  $A$ , а символы  $\beta_{l+1}, \dots, \beta_{l+r}, \dots, \beta_{l+k}, \dots, \beta_n$  — классу  $B$ , причем  $\beta_{l+1} = l+2, \dots, \beta_{l+k-2} = l+k-1$ , а  $\beta_{l+k-1} \neq l+k$  и  $\beta_{l+r} = l+k, k = 2, \dots, n-l+1$ . т. е.

$$\bar{t} = (1, \alpha_2, \dots, \alpha_s, l+2, \dots, l+k-1, \beta_{l+k-1}, \dots, \beta_r, \dots, \beta_{n-1}, \beta_n, \alpha_{s+1}, \dots, \alpha_l).$$

Образует из  $\bar{t}$  подстановку

$$\bar{t}_1 = (1, \alpha_2, \dots, \alpha_s, l+2, \dots, l+k-1, \beta_r, \beta_{l+k-1}, \dots, \beta_{r-1}, \beta_{r+1}, \dots, \beta_n, \alpha_{s+1}, \dots, \alpha_l),$$

если  $\beta_{r-1} \neq l+1$ ,  
и подстановку

$$\bar{t}_2 = (1, \alpha_2, \dots, \alpha_s, l+2, \dots, l+k-1, \beta_r, \beta_{r+1}, \dots, \beta_n, \beta_{l+k-1}, \dots, \beta_{r-1}, \alpha_{s+1}, \dots, \alpha_l),$$

если  $\beta_{r-1} = l+1$ ,  
для которых

$$f_{\bar{t}_1}(b) - f_{\bar{t}}(b) \leq 0, \quad f_{\bar{t}_2}(b) - f_{\bar{t}}(b) \leq 0.$$

Действительно,

$$f_{\bar{t}_1}(b) - f_{\bar{t}}(b) = \begin{cases} (c_{\beta_{r-1}} - c_{l+k}) (b_{\beta_{r+1}} - b_{\beta_{l+k-1}}) + (c_{\beta_{r-1}} - c_{l+k-1}) (b_{\beta_{l+k-1}} - b_{l+k}) \leq 0, \\ \text{если } b_{\beta_{l+k-1}} - b_{\beta_{r+1}} \geq 0, \\ (c_{\beta_{r-1}} - c_{l+k-1}) (b_{\beta_{l+k-1}} - b_{\beta_{r+1}}) + (c_{l+k} - c_{l+k-1}) (b_{\beta_{l+k-1}} - b_{\beta_{r+1}}) \leq 0, \\ \text{если } b_{\beta_{l+k-1}} - b_{\beta_{r+1}} \leq 0, \end{cases}$$

$$f_{\bar{t}_2}(b) - f_{\bar{t}}(b) = (c_{\beta_n} - c_{l+k-1}) (b_{\beta_{l+k-1}} - b_{l+k}) + (c_{\beta_n} - c_{l+1}) (b_{l+k} - b_{\alpha_{s+1}}) \leq 0$$

в силу (1) и (4).

Конечным числом подобных преобразований получим подстановку

$$t_0 = (1, \alpha_2, \dots, \alpha_s, l+2, \dots, n, l+1, \alpha_{s+1}, \dots, \alpha_l),$$

для которой  $f_{t_0}(b) - f_t(b) \leq 0$ . Число таких подстановок, очевидно, равно  $l!$ . Лемма доказана.

Пусть подстановка  $\tau_0$  имеет вид а), тогда

$$b_1 \geq b_2 \geq \dots \geq b_l \geq b_{l+2} \geq \dots \geq b_n \geq b_{l+1}.$$

**Теорема 1.** Если подстановка  $\tau_0$  имеет вид  $\tau_0 = (l+1, \dots, n)$ , то в множестве  $2^{l-1}$  подстановок вида  $(1, \alpha_2, \dots, \alpha_s, l+2, \dots, n, l+1, \alpha_{s+1}, \dots, \alpha_l)$ , где  $\alpha_2 < \dots < l+1 > \dots > \alpha_l$ , есть подстановка, минимизирующая значение формы  $f$  на множестве всех циклов длины  $n$  из  $S_n$ .

**Доказательство.** Из леммы 1 имеем, что подстановку, минимизирующую значение формы  $f$  на множестве всех циклов длины  $n$  из  $S_n$ , можно искать среди  $l!$  подстановок вида (2).

Тогда из теоремы 1 работы [3] вытекает, что в множестве  $2^{l-1}$  подстановок вида

$$(1, \alpha_2, \dots, \alpha_s, l+2, \dots, n, l+1, \alpha_{s+1}, \dots, \alpha_l),$$

у которых  $\alpha_2 < \dots < l+1 > \dots > \alpha_l$ , есть подстановка, минимизирующая значение формы  $f$  на множестве всех циклов длины  $n$  из  $S_n$ . Теорема доказана.

Пусть подстановка  $\tau_0$  имеет вид б), тогда

$$b_l \geq b_{l-1} \geq \dots \geq b_1 \geq b_{l+2} \geq \dots \geq b_n \geq b_{l+1}. \quad (7)$$

Как и в [3], символы  $1, 2, \dots, l$  разобьем при  $l$  четном на два класса:  $A = \{1, 2, \dots, \gamma\}$  и  $B = \{\gamma + 1, \dots, n\}$ , где  $\gamma = \left\lfloor \frac{l+1}{2} \right\rfloor$ . При  $l$  нечетном  $\gamma$  не будет относиться ни к одному из этих классов.

Допустимыми к данному символу  $\beta_j$  из класса  $B$  будем называть те символы  $\alpha_i$  из класса  $A$ , для которых  $\alpha_i + \beta_j \leq l + 1$ . Рассмотрим подстановки вида (2), в которых:

- 1) символы из классов  $A$  и  $B$  чередуются;
- 2) символы из класса  $A$  возрастают, а символы из класса  $B$  убывают слева и справа к  $\gamma$ ;
- 3) слева от  $\gamma$  перед каждым символом  $\beta \in B$ , а справа от  $\gamma$  после каждого символа  $\beta$  стоит такой допустимый символ  $\alpha \in A$ , что  $\alpha + \beta \leq l + 1$ . Это будут подстановки следующих видов:

$$(1, \beta_2, \alpha_3, \dots, \beta_s, l + 2, \dots, n, l + 1, \alpha_{s+1}, \dots, \beta_l), \quad (8)$$

$$(1, \beta_2, \alpha_3, \dots, \alpha_s, l + 2, \dots, n, l + 1, \beta_{s+1}, \dots, \beta_l). \quad (9)$$

Множество циклов длины  $n$  вида (8) обозначим  $M_l$ .

**Теорема 2.** Если подстановка  $\tau_0$  имеет вид  $\tau_0 = (1, l)(2, l-1) \dots (l+1, \dots, n)$ , то в множестве  $M_l$  есть подстановка, минимизирующая значение формы  $f$  на множестве всех циклов длины  $n$  из  $S_n$ .  $M_l$  содержит

$2 \cdot 3^{\left\lfloor \frac{l+1}{2} \right\rfloor - 2}$  подстановок.

**Доказательство.** Согласно лемме 1, имеем, что для отыскания подстановки, минимизирующей значение формы  $f$  на множестве циклических подстановок длины  $n$  из  $S_n$ , достаточно рассмотреть  $l!$  подстановок вида (2).

Учитывая вид подстановки  $\tau_0$ , рассуждениями, аналогичными тем, которые приведены при доказательстве теоремы 2 в [3], легко убедиться, что подстановка, минимизирующая значение формы  $f$  на множестве циклов длины  $n$ , принадлежит  $M_l$ . Нетрудно показать, что число таких подстановок равно  $2 \cdot 3^{\left\lfloor \frac{l+1}{2} \right\rfloor - 2}$ . Теорема доказана.

### Литература

1. Кунцевич И. М. Вестн АН БССР, сер. физ.-мат. наук, № 1, 1968.
2. Харди Г. Г., Литтлульд Д. Е., Поляк Г. Неравенства. ИЛ, 1948.
3. Айзенштат В. С., Кравчук Д. Н. ДАН БССР, XII, № 2, 1968.

Институт математики  
АН БССР

Поступило в редакцию  
10.VII 1967

Н. Н. ВЛАСОВЕЦ

О ПОРЯДКЕ ПРИБЛИЖЕНИЯ НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ  
НА КОНЕЧНОМ ОТРЕЗКЕ  
С ПОМОЩЬЮ  
НЕКОТОРЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ МНОГОЧЛЕНОВ

Известны оценки уклонений непрерывных  $2\pi$ -периодических функций от тригонометрических полиномов, получаемых суммированием их ряда Фурье тем или иным методом. Здесь мы перенесем некоторые из этих результатов на случай непрерывных непериодических функций с помощью подстановки  $\cos y = x$  и получим оценки уклонения функции  $f(x) \in C[a, b]$  от соответствующих алгебраических многочленов в зависимости от положения точки  $x$ , тем самым улучшая оценки на концах интервала.

Идея такого уточнения заимствована у А. Ф. Тимана, использовавшего ее при доказательстве уточнения теоремы Джексона ([1], стр. 269).

Мы начнем с рассмотрения обобщенных методов суммирования с множителями сходимости для периодических функций, соответственно «транспонировав» их на непериодический случай, если ядро  $K_n(t) = \frac{1}{2} +$

$+\sum_{k=1}^n \rho_k^{(n)} \cos kt$  неотрицательно. Проведя для конкретных методов непосредственные оценки, мы будем иметь возможность для некоторых из них сравнить порядок этих оценок.

Возьмем полином

$$U_n^*(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n \rho_k^{(n)} (a_k \cos kx + b_k \sin kx), \quad (1)$$

полученный из ряда Фурье  $2\pi$ -периодической функции с помощью множителей сходимости  $\rho_k^{(n)}$ . Если в (1) подставить значения коэффициентов Фурье функции  $a_0$ ,  $a_k$  и  $b_k$ , то получим

$$U_n^*(x) = U_n^*(f, x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \left\{ \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \rho_k^{(n)} \cos k(t-x) \right\} dt. \quad (1')$$

П. П. Коровкин доказал, что если для матрицы множителей  $\rho_k^{(n)}$  выполняется условие

$$\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \rho_k^{(n)} \cos kt \geq 0, \quad -\pi \leq t \leq \pi \quad (2)$$

и функция  $f(x) \in C_{2\pi}$ , то

$$|U_n^*(f, x) - f(x)| \leq \omega \left( \frac{1}{m} \right) \left( 1 + m \frac{\pi}{2} \sqrt{1 - \rho_1^{(n)}} \right),$$

где  $m$  — любое положительное число, а  $\omega(\delta)$  — модуль непрерывности функции  $f(x)$  ([4], стр. 71).

Применим оператор (1') для  $f(x) \in C[-1, 1]$  с модулем непрерывности  $\omega(\delta)$  при  $\cos y = x$ , сохраняя условие (2). Тогда

$$U_n(x) = U_n(f, y) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\cos t) \left\{ \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \rho_k^{(n)} \cos k(t-y) \right\} dt \quad (3)$$

есть алгебраический полином относительно  $x$  степени  $n$ . Проведя здесь подстановку  $t-y = u$ , а затем заменив переменную  $u$  снова через  $t$ , получим

$$\begin{aligned} U_n(f, y) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f[\cos(t+y)] \left\{ \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \rho_k^{(n)} \cos kt \right\} dt = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f[\cos(t+y)] K_n(t) dt, \end{aligned} \quad (3')$$

где

$$K_n(t) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \rho_k^{(n)} \cos kt. \quad (4)$$

Выразим уклонение  $U_n(x) - f(x)$ . Так как  $U_n(1, y) = 1$ , т. е.

$$1 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} K_n(t) dt, \quad (5)$$

то

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) K_n(t) dt$$

и

$$\begin{aligned} U_n(x) - f(x) &= U_n(f, y) - f(\cos y) = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \{f[\cos(t+y)] - f(\cos y)\} K_n(t) dt. \end{aligned} \quad (6)$$

Наша задача — оценить уклонение  $U_n(x) - f(x)$ , учитывая положение точки  $x$  на отрезке  $[-1, 1]$ . Для этого убедимся в том, что при условии (2) для операторов (3) справедлива следующая

**Теорема 1.** Если  $f(x) \in C[-1, 1]$  с модулем непрерывности  $\omega(\delta)$ , то

$$\begin{aligned} |U_n(x) - f(x)| &\leq \omega \left( \frac{\sqrt{1-x^2}}{m} \right) \left( 1 + m \sqrt{1 - \rho_1^{(n)}} \right) + \\ &+ \omega \left( \frac{|x|}{m^2} \right) [1 + m^2(1 - \rho_1^{(n)})], \end{aligned} \quad (7)$$

где  $m$  — любое положительное число.

Доказательство. Поскольку

$$\begin{aligned} & |f[\cos(t+y)] - f(\cos y)| \leq \omega(|\cos(t+y) - \cos y|) = \\ & = \omega\left(\left|2\sin\frac{t}{2}\sin\left(\frac{t}{2}+y\right)\right|\right) = \omega\left(\left|2\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}\sin y + \right.\right. \\ & \left.\left.+ 2\sin^2\frac{t}{2}\cos y\right|\right) \leq \omega(|\sin t \sin y|) + \omega\left(2\sin^2\frac{t}{2}|\cos y|\right) \end{aligned}$$

и  $K_n(t) \geq 0$  (условие (2)), то из (6) следует

$$\begin{aligned} & |U_n(x) - f(x)| \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f[\cos(t+y)] - f(\cos y)| K_n(t) dt \leq \\ & \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \omega(|\sin t \sin y|) K_n(t) dt + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \omega\left(2\sin^2\frac{t}{2}|\cos y|\right) K_n(t) dt = I_n. \end{aligned} \quad (8)$$

Так как

$$\omega(|\sin t \sin y|) = \omega\left(m|\sin t| \frac{|\sin y|}{m}\right) \leq (1+m|\sin t|) \omega\left(\frac{|\sin y|}{m}\right) \quad (9)$$

$$\text{и} \quad \omega\left(2\sin^2\frac{t}{2}|\cos y|\right) \leq \left(1+2m^2\sin^2\frac{t}{2}\right) \omega\left(\frac{|\cos y|}{m^2}\right),$$

то для первого интеграла в правой части (8) получаем

$$\begin{aligned} I_1 & = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \omega(|\sin t \sin y|) K_n(t) dt \leq \omega\left(\frac{|\sin y|}{m}\right) \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (1+m|\sin t|) K_n(t) dt = \\ & = \omega\left(\frac{|\sin y|}{m}\right) + \frac{m}{\pi} \omega\left(\frac{|\sin y|}{m}\right) \int_{-\pi}^{\pi} |\sin t| K_n(t) dt. \end{aligned}$$

Применяя к последнему интегралу неравенство Буняковского, получим

$$\begin{aligned} & \int_{-\pi}^{\pi} |\sin t| K_n(t) dt = \int_{-\pi}^{\pi} \left|\sin\frac{t}{2}\right| \sqrt{K_n(t)} \cdot \sqrt{2\cos\frac{t}{2}} \sqrt{K_n(t)} dt \leq \\ & \leq \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} 2\sin^2\frac{t}{2} K_n(t) dt \cdot \int_{-\pi}^{\pi} 2\cos^2\frac{t}{2} K_n(t) dt} = \\ & = \sqrt{\pi U_n(1-\cos t, 0) \cdot \pi U_n(1+\cos t, 0)} = \pi \sqrt{(1-\rho_1^{(n)})(1+\rho_1^{(n)})} = \\ & = \pi \sqrt{1-\rho_1^{(n)2}}. \end{aligned}$$

Отсюда

$$I_1 \leq \omega\left(\frac{|\sin y|}{m}\right) (1+m) \sqrt{1-\rho_1^{(n)2}}.$$

Второй же интеграл в правой части (8) оценим следующим образом:

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \omega \left( 2 \sin^2 \frac{t}{2} |\cos y| \right) K_n(t) dt \leq \\ &\leq \frac{1}{\pi} \omega \left( \frac{|\cos y|}{m^2} \right) \int_{-\pi}^{\pi} \left( 1 + 2m^2 \sin^2 \frac{t}{2} \right) K_n(t) dt = \omega \left( \frac{|\cos y|}{m^2} \right) + \\ &+ \frac{m^2}{\pi} \omega \left( \frac{|\cos y|}{m^2} \right) \int_{-\pi}^{\pi} 2 \sin^2 \frac{t}{2} K_n(t) dt = \omega \left( \frac{|\cos y|}{m^2} \right) [1 + m^2 (1 - \rho_1^{(n)})]. \end{aligned}$$

Учитывая (8) и оценки для  $I_1$  и  $I_2$ , имеем

$$\begin{aligned} I_n &= I_1 + I_2 \leq \omega \left( \frac{|\sin y|}{m} \right) (1 + m \sqrt{1 - \rho_1^{(n)}}) + \\ &+ \omega \left( \frac{|\cos y|}{m^2} \right) [1 + m^2 (1 - \rho_1^{(n)})], \end{aligned}$$

так что окончательно

$$\begin{aligned} |U_n(x) - f(x)| &\leq \omega \left( \frac{\sqrt{1-x^2}}{m} \right) (1 + m \sqrt{1 - \rho_1^{(n)}}) + \\ &+ \omega \left( \frac{|x|}{m^2} \right) [1 + m^2 (1 - \rho_1^{(n)})]. \end{aligned}$$

Теорема доказана полностью.

Как показал П. П. Коровкин, существуют положительные операторы, для которых  $\rho_1^{(n)} = \cos \frac{\pi}{n+2}$ . Положив в доказанной теореме  $\rho_1^{(n)} = \cos \frac{\pi}{n+2}$  и  $m = n$ , получим уточнение теоремы Джексона, данное впервые А. Ф. Тиманом ([1]), стр. 271):

$$E_n \leq (1 + \pi) \omega \left( \frac{\sqrt{1-x^2}}{n} \right) + \left( 1 + \frac{\pi^2}{2} \right) \omega \left( \frac{|x|}{n^2} \right).$$

Если теперь полученную оценку (7) применить к «транспонированному» оператору Валле-Пуссена, где  $\rho_k^{(n)} = \frac{(n!)^2}{(n-k)!(n+k)!}$ , и к оператору Фейера, где  $\rho_k^{(n)} = 1 - \frac{k}{n}$ , то при  $m = \sqrt{n}$  будем иметь общий для обоих операторов результат:

$$|U_n(x) - f(x)| \leq (1 + \sqrt{2}) \omega \left( \frac{\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{n}} \right) + 2\omega \left( \frac{|x|}{n} \right). \quad (10)$$

Для названных выше операторов проведем непосредственные более точные оценки.

Теорема 2. Пусть  $f(x) \in C[-1, 1]$ . Будем приближать ее на отрезке  $[-1, 1]$  алгебраическим полиномом  $P_n(x)$   $n$ -й степени, получаемым из интеграла Валле-Пуссена при  $\cos y = x$ :

$$P_n(x) = P_n(f, y) = \frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\cos t) \cos^{2n} \frac{t-y}{2} dt. \quad (11)$$

Тогда для всех  $x \in [-1, 1]$  справедливо неравенство

$$|f(x) - P_n(x)| \leq \left(1 + \frac{2}{\sqrt{\pi}}\right) \omega\left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{n}}\right) + 2\omega\left(\frac{|x|}{n}\right). \quad (12)$$

Доказательство. Используя тождество

$$1 = \frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos^{2n} \frac{t-y}{2} dt, \quad (13)$$

легко получить

$$\begin{aligned} f(x) - P_n(x) &= f(\cos y) - P_n(f, y) = \frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \times \\ &\times \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [f(\cos y) - f(\cos t)] \cos^{2n} \frac{t-y}{2} dt, \end{aligned} \quad (14)$$

и следовательно,

$$|f(x) - P_n(x)| \leq \frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(\cos y) - f(\cos t)| \cos^{2n} \frac{t-y}{2} dt.$$

А так как

$$|f(\cos y) - f(\cos t)| \leq \omega(|\cos y - \cos t|) = \omega\left(2 \left| \sin \frac{t+y}{2} \sin \frac{t-y}{2} \right| \right),$$

то

$$\begin{aligned} |f(x) - P_n(x)| &\leq \frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \omega\left(2 \left| \sin \frac{t+y}{2} \sin \frac{t-y}{2} \right| \right) \times \\ &\times \cos^{2n} \frac{t-y}{2} dt = I_n. \end{aligned} \quad (15)$$

Положив в последнем интеграле  $t-y = u$  и учитывая периодичность подынтегральной функции, получим

$$\begin{aligned} I_n &= \frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \omega\left(2 \left| \sin \frac{u+2y}{2} \sin \frac{u}{2} \right| \right) \cos^{2n} \frac{u}{2} du \leq \\ &\leq \frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \cdot \frac{1}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \omega(2|\sin(u+y) \sin u|) \cos^{2n} u du. \end{aligned} \quad (16)$$

Заметив, что по свойству модуля непрерывности

$$\omega(2|\sin(u+y) \sin u|) \leq \omega(2|\sin u \sin y|) + \omega(2\sin^2 u \cos y), \quad (17)$$

получим из (16)

$$\begin{aligned}
 I_n &\leq \frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \cdot \frac{1}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi} [\omega(2|\sin u \sin y) + \omega(2\sin^2 u |\cos y|)] \cos^{2n} u du = \\
 &= \frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \cdot \frac{2}{\pi} \left\{ \int_0^{\pi/2} \omega(2\sin u |\sin y|) \cos^{2n} u du + \right. \\
 &\quad \left. + \int_0^{\pi/2} \omega(2\sin^2 u |\cos y|) \cos^{2n} u du \right\}. \quad (18)
 \end{aligned}$$

Так как

$$\omega(2\sin u |\sin y|) = \omega\left(2\sqrt{n} \sin u \cdot \frac{|\sin y|}{\sqrt{n}}\right) \leq (2\sqrt{n} \sin u + 1) \omega\left(\frac{|\sin y|}{\sqrt{n}}\right),$$

то первый интеграл в правой части (18) будет

$$\begin{aligned}
 \int_0^{\pi/2} \omega(2\sin u |\sin y|) \cos^{2n} u du &\leq \omega\left(\frac{|\sin y|}{\sqrt{n}}\right) \int_0^{\pi/2} (2\sqrt{n} \sin u + 1) \cos^{2n} u du = \\
 &= \omega\left(\frac{|\sin y|}{\sqrt{n}}\right) \left[ 2\sqrt{n} \int_0^{\pi/2} \sin u \cos^{2n} u du + \int_0^{\pi/2} \cos^{2n} u du \right] = \\
 &= \omega\left(\frac{|\sin y|}{\sqrt{n}}\right) \left[ \frac{2\sqrt{n}}{2n+1} + \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{\pi}{2} \right], \quad (19)
 \end{aligned}$$

потому что

$$\int_0^{\pi/2} \cos^{2n} u du = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{\pi}{2}; \quad \int_0^{\pi/2} \cos^{2n} u \cdot \sin u du = \frac{1}{2n+1}. \quad (20)$$

В связи с тем что

$$\omega(2\sin^2 u |\cos y|) = \omega\left(2n \sin^2 u \cdot \frac{|\cos y|}{n}\right) \leq (2n \sin^2 u + 1) \omega\left(\frac{|\cos y|}{n}\right),$$

второй интеграл в правой части (18)

$$\begin{aligned}
 \int_0^{\pi/2} \omega(2\sin^2 u |\cos y|) \cos^{2n} u du &\leq \omega\left(\frac{|\cos y|}{n}\right) \int_0^{\pi/2} (2n \sin^2 u + 1) \cos^{2n} u du = \\
 &= \omega\left(\frac{|\cos y|}{n}\right) \int_0^{\pi/2} [2n + 1 - 2n \cos^2 u] \cos^{2n} u du = \omega\left(\frac{|\cos y|}{n}\right) \times \\
 &\quad \times \left\{ (2n+1) \int_0^{\pi/2} \cos^{2n} u du - 2n \int_0^{\pi/2} \cos^{2n+2} u du \right\} = \omega\left(\frac{|\cos y|}{n}\right) \times \\
 &\quad \times \left\{ \frac{(2n+1)!!}{(2n)!!} \frac{\pi}{2} - 2n \frac{(2n+1)!!}{(2n+2)!!} \frac{\pi}{2} \right\} = \omega\left(\frac{|\cos y|}{n}\right) \frac{(2n+1)!!}{(2n+2)!!} \pi. \quad (21)
 \end{aligned}$$

Учитывая оценки (19) и (21), получим из (18)

$$I_n \leq \frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \cdot \frac{2}{\pi} \left\{ \omega \left( \frac{|\sin y|}{\sqrt{n}} \right) \left[ \frac{2\sqrt{n}}{2n+1} + \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{\pi}{2} \right] + \right. \\ \left. + \omega \left( \frac{|\cos y|}{n} \right) \cdot \frac{(2n+1)!!}{(2n+2)!!} \pi \right\} = \left[ \frac{4}{\pi} \cdot \frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \cdot \frac{\sqrt{n}}{2n+1} + 1 \right] \times \\ \times \omega \left( \frac{|\sin y|}{\sqrt{n}} \right) + 2 \cdot \frac{2n+1}{2n+2} \omega \left( \frac{|\cos y|}{n} \right). \quad (22)$$

По формуле Валлиса,

$$\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} = \sqrt{2n + \theta_n} \sqrt{\frac{\pi}{2}}, \quad 0 < \theta_n < 1,$$

поэтому

$$\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \leq \sqrt{2n+1} \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

Кроме того,

$$\sqrt{n} < \sqrt{n + \frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{2n+1}{2}} \text{ и } \frac{2n+1}{2n+2} < 1,$$

и соотношение (22) дает

$$I_n \leq \left( 1 + \frac{2}{\pi} \right) \omega \left( \frac{|\sin y|}{\sqrt{n}} \right) + 2\omega \left( \frac{|\cos y|}{n} \right),$$

откуда

$$|f(x) - P_n(x)| \leq \left( 1 + \frac{2}{\pi} \right) \omega \left( \frac{\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{n}} \right) + 2\omega \left( \frac{|x|}{n} \right).$$

Как видим, последний результат хорошо согласуется с оценкой (10), которая следует из теоремы 1, уменьшен только постоянный множитель в первом слагаемом.

**Теорема 3.** Будем приближать функцию  $f(x) \in C[-1, 1]$  полиномом  $\sigma_n(x)$ , полученным из суммы Фейера  $n$ -го порядка при  $\cos y = x$ :

$$\sigma_n(x) = \sigma_n(f, y) = \frac{1}{2n\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\cos t) \left( \frac{\sin n \frac{t-y}{2}}{\sin \frac{t-y}{2}} \right)^2 dt. \quad (23)$$

Тогда

$$|\sigma_n(x) - f(x)| \leq K \omega \left( \frac{\sqrt{1-x^2} \ln n}{n} \right) + 2\omega \left( \frac{|x|}{n} \right), \quad (24)$$

где  $K$  — абсолютная постоянная.

**Доказательство.** После несложных преобразований получим

$$\sigma_n(f, y) = \frac{1}{n\pi} \int_0^{\pi/2} \{f[\cos(y+2t)] + f[\cos(y-2t)]\} \left( \frac{\sin nt}{\sin t} \right)^2 dt. \quad (25)$$

А так как

$$1 = \frac{1}{n\pi} \int_0^{\pi/2} 2 \left( \frac{\sin nt}{\sin t} \right)^2 dt,$$

то

$$\begin{aligned} \sigma_n(x) - f(x) &= \sigma_n(f, y) - f(\cos y) = \\ &= \frac{1}{n\pi} \int_0^{\pi/2} \{f[\cos(y+2t)] + f[\cos(y-2t)] - 2f(\cos y)\} \left(\frac{\sin nt}{\sin t}\right)^2 dt. \end{aligned}$$

Но

$$\begin{aligned} |f[\cos(y+2t)] + f[\cos(y-2t)] - 2f(\cos y)| &\leq |f[\cos(y+2t)] - f(\cos y)| + \\ &+ |f[\cos(y-2t)] - f(\cos y)| \leq \omega(\cos(y+2t) - \cos y) + \\ &+ \omega(\cos(y-2t) - \cos y) = \omega(2\sin t |\sin(y+t)|) + \omega(2\sin t |\sin(y-t)|) \leq \\ &\leq 2\omega(\sin 2t |\sin y|) + 2\omega(2\sin^2 t |\cos y|), \end{aligned} \quad (26)$$

поэтому

$$\begin{aligned} |\sigma_n(x) - f(x)| &\leq \frac{1}{n\pi} \int_0^{\pi/2} |f[\cos(y+2t)] + f[\cos(y-2t)] - \\ &- 2f(\cos y)| \left(\frac{\sin nt}{\sin t}\right)^2 dt \leq \frac{2}{n\pi} \int_0^{\pi/2} \omega(\sin 2t |\sin y|) \left(\frac{\sin nt}{\sin t}\right)^2 dt + \\ &+ \frac{2}{n\pi} \int_0^{\pi/2} \omega(2\sin^2 t |\cos y|) \left(\frac{\sin nt}{\sin t}\right)^2 dt = I_1 + I_2. \end{aligned} \quad (27)$$

Оценим интеграл  $I_1$ . Поскольку

$$\begin{aligned} \omega(\sin 2t |\sin y|) &\leq \omega(2\sin t |\sin y|) = \omega\left(\frac{2n \sin t}{\ln n} \cdot \frac{|\sin y| \ln n}{n}\right) \leq \\ &\leq \left(1 + \frac{2n \sin t}{\ln n}\right) \omega\left(\frac{|\sin y| \ln n}{n}\right), \end{aligned}$$

то

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{2}{n\pi} \int_0^{\pi/2} \omega(\sin 2t |\sin y|) \left(\frac{\sin nt}{\sin t}\right)^2 dt \leq \\ &\leq \frac{2}{n\pi} \omega\left(\frac{|\sin y| \ln n}{n}\right) \int_0^{\pi/2} \left(1 + \frac{2n \sin t}{\ln n}\right) \left(\frac{\sin nt}{\sin t}\right)^2 dt = \\ &= \omega\left(\frac{|\sin y| \ln n}{n}\right) \left[1 + \frac{4}{\pi \ln n} \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 nt}{\sin t} dt\right]. \end{aligned}$$

Но известно ([2], стр. 208), что

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 nt}{\sin t} dt < 1 + \frac{1}{2} \ln 2n.$$

Так что

$$I_1 \leq \left(1 + \frac{4 + 2 \ln 2n}{\pi \ln n}\right) \omega\left(\frac{|\sin y| \ln n}{n}\right).$$

Первый множитель в правой части здесь—величина ограниченная, и потому мы можем записать

$$I_1 \leq K \omega \left( \frac{|\sin y| \ln n}{n} \right), \quad K < 1 + \frac{4}{\pi} \quad (n \geq 15).$$

Для оценки второго интеграла в правой части (27) заметим, что

$$\omega(2\sin^2 t |\cos y|) = \omega \left( 2n \sin^2 t \cdot \frac{|\cos y|}{n} \right) \leq (1 + 2n \sin^2 t) \omega \left( \frac{|\cos y|}{n} \right).$$

Тогда

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{2}{n\pi} \int_0^{\pi/2} \omega(2\sin^2 t |\cos y|) \left( \frac{\sin nt}{\sin t} \right)^2 dt \leq \\ &\leq \frac{2}{n\pi} \omega \left( \frac{|\cos y|}{n} \right) \int_0^{\pi/2} (1 + 2n \sin^2 t) \left( \frac{\sin nt}{\sin t} \right)^2 dt = \\ &= \omega \left( \frac{|\cos y|}{n} \right) \left[ 1 + \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} (1 - \cos 2nt) dt \right] = 2\omega \left( \frac{|\cos y|}{n} \right). \end{aligned}$$

Таким образом,

$$|\sigma_n(x) - f(x)| \leq I_1 + I_2 \leq K \omega \left( \frac{|\sin y| \ln n}{n} \right) + 2\omega \left( \frac{|\cos y|}{n} \right),$$

что и завершает доказательство теоремы 3.

Результат, родственный оценке (24), в другой форме был ранее получен в работе Б. Л. Динцен [6] для более узкого класса  $A \omega[-1, 1]$  всех заданных на  $[-1, 1]$  функций  $f(x)$ , для которых при любом  $n = 1, 2, 3, \dots$  существует алгебраический многочлен  $P_n(x)$  степени  $\leq n$  такой, что

$$|f(x) - P_n(x)| \leq \omega \left\{ \frac{1}{n} \left( \sqrt{1-x^2} + \frac{1}{n} \right) \right\}.$$

А именно для таких функций имеет место следующая

**Теорема 4** (Б. Л. Динцен). Если  $f(x) \in A \omega[-1, 1]$ , то для всех  $x \in [-1, 1]$  при любом  $n = 1, 2, 3, \dots$  справедливо неравенство

$$|f(x) - \sigma_n(x)| \leq \frac{C}{n} \sum_{k=1}^n \omega \left\{ \frac{1}{k} \left( \sqrt{1-x^2} + \frac{1}{k} \right) \right\}, \quad (28)$$

где  $C$  — некоторая константа, не зависящая от  $f$ ,  $x$  и  $n$ .

В отличие от результата теоремы 2 результат (24) теоремы 3 несомненно лучше оценки (10).

Хотя оценка (24) и точнее оценки (10), но для некоторых классов функций и она может быть улучшена. Это подтверждает работа И. М. Ганзбурга и А. Ф. Тимана ([5], стр. 781), в которой найдены асимптотически точные оценки приближения многочленами  $\sigma_n(x)$  функций  $f(x) \in C[-1, 1]$ , удовлетворяющих условию Липа ( $0 < \alpha \leq 1$ ).

К тому же кругу идей относится и следующий результат.

**Теорема 5.** Пусть  $f(x) \in C[-1, 1]$ . На этом отрезке будем приближать ее интегралом Пуассона при  $\cos y = x$ :

$$P_n(x) = P(r, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\cos t) \frac{1-r^2}{1-2r \cos(t-y) + r^2} dt \quad (r_0 < r < 1). \quad (29)$$

Тогда для всех  $x \in [-1, 1]$  верна оценка

$$|P_n(x) - f(x)| \leq K \omega \left[ (1-r) |\ln(1-r)|, \sqrt{1-x^2} \right] + 2\omega(1-r), \quad (30)$$

где постоянная  $K$  зависит лишь от  $r_0$ .

Для доказательства введем замену  $t - y = u$  в интеграле (29), затем, заменив  $u$  через  $2t$ , после простых преобразований получим

$$P(r, y) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi/2} \{f[\cos(y+2t)] + f[\cos(y-2t)]\} \times \\ \times \frac{1-r^2}{(1-r)^2 + 4r \sin^2 t} dt. \quad (31)$$

Кроме того, поскольку

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{1-r^2}{(1-r)^2 + 4r \sin^2 t} dt = 1, \quad (32)$$

мы можем записать

$$P(x) - f(x) = P(r, y) - f(\cos y) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi/2} \{f[\cos(y+2t)] + \\ + f[\cos(y-2t)] - 2f(\cos y)\} \frac{1-r^2}{(1-r)^2 + 4r \sin^2 t} dt. \quad (33)$$

Учитывая соотношение (26), из (33) получаем

$$|P(x) - f(x)| \leq \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \omega(\sin 2t |\sin y|) \frac{1-r^2}{(1-r)^2 + 4r \sin^2 t} dt + \\ + \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \omega(2 \sin^2 t |\cos y|) \frac{1-r^2}{(1-r)^2 + 4r \sin^2 t} dt = I_1 + I_2. \quad (34)$$

Так как

$$\omega(\sin 2t |\sin y|) = \omega \left[ \frac{\sin 2t}{(1-r) |\ln(1-r)|} \cdot |\sin y| \cdot (1-r) |\ln(1-r)| \right] \leq \\ \leq \left( 1 + \frac{\sin 2t}{(1-r) |\ln(1-r)|} \right) \omega \left[ (1-r) |\ln(1-r)| |\sin y| \right],$$

то

$$I_1 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \omega(\sin 2t |\sin y|) \frac{1-r^2}{(1-r)^2 + 4r \sin^2 t} dt \leq \\ \leq \frac{2}{\pi} \omega \left( |\sin y| \cdot (1-r) |\ln(1-r)| \right) \int_0^{\pi/2} \left[ 1 + \frac{\sin 2t}{(1-r) |\ln(1-r)|} \right] \times \\ \times \frac{1-r^2}{(1-r)^2 + 4r \sin^2 t} dt = \omega \left( |\sin y| (1-r) |\ln(1-r)| \right) \times$$

$$\begin{aligned} & \times \left[ 1 + \frac{4}{\pi(1-r)|\ln(1-r)|} \int_0^{\pi/2} \frac{(1-r^2) \sin t \cos t}{(1-r)^2 + 4r \sin^2 t} dt \right] = \\ & = \omega(|\sin y|(1-r)|\ln(1-r)|) \left[ 1 + \frac{2}{\pi} \frac{1-r^2}{4r(1-r)|\ln(1-r)|} \times \right. \\ & \times \left. \int_0^{\pi/2} \frac{2 \sin t \cos t}{\frac{(1-r)^2}{4r} + \sin^2 t} dt \right] = \omega(|\sin y|(1-r)|\ln(1-r)|) \times \\ & \times \left\{ 1 + \frac{1+r}{2\pi r |\ln(1-r)|} \ln \left[ \frac{(1-r)^2}{4r} + \sin^2 t \right]_0^{\pi/2} \right\} = \\ & = \omega(|\sin y|(1-r)|\ln(1-r)|) \left[ 1 + \frac{1+r}{\pi r |\ln(1-r)|} \ln \frac{1+r}{1-r} \right]. \end{aligned}$$

Но при  $r_0 \leq r < 1$

$$1 + \frac{1+r}{\pi r |\ln(1-r)|} \ln \frac{1+r}{1-r} \leq 1 + \frac{2 \ln 2}{\pi |r_0| |\ln(1-r_0)|} + \frac{2}{\pi r_0} = K.$$

Следовательно,

$$I_1 \leq K \omega[(1-r)|\ln(1-r)| |\sin y|],$$

где постоянная  $K$  зависит лишь от  $r_0$ . В частности, при  $r_0 = \frac{1}{2}$   $K =$

$$= 1 + \frac{8}{\pi}, \text{ а при } r_0 = \frac{3}{4} \quad K = 1 + \frac{4}{\pi}.$$

Обратимся ко второму интегралу в (34). Так как

$$\begin{aligned} \omega(2 \sin^2 t |\cos y|) & \leq \omega(2 \sin^2 t) = \omega \left[ \frac{2 \sin^2 t}{1-r} \cdot (1-r) \right] \leq \\ & \leq \left( 1 + \frac{2 \sin^2 t}{1-r} \right) \omega(1-r), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_2 & = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \omega(2 \sin^2 t |\cos y|) \frac{1-r^2}{(1-r)^2 + 4r \sin^2 t} dt \leq \\ & \leq \frac{2\omega(1-r)}{\pi} \int_0^{\pi/2} \left( 1 + \frac{2 \sin^2 t}{1-r} \right) \frac{1-r^2}{(1-r)^2 + 4r \sin^2 t} dt = \\ & = \omega(1-r) + \frac{4}{\pi} (1+r) \omega(1-r) \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 t}{(1-r)^2 + 4r \sin^2 t} dt = \\ & = \omega(1-r) + \frac{1+r}{\pi r} \omega(1-r) \int_0^{\pi/2} \frac{4r \sin^2 t + (1-r)^2 - (1-r)^2}{(1-r)^2 + 4r \sin^2 t} dt = \\ & = \omega(1-r) \left\{ 1 + \frac{1+r}{\pi r} \left[ \frac{\pi}{2} - \frac{(1-r)^2}{1-r^2} \frac{\pi}{2} \right] \right\} = 2\omega(1-r). \end{aligned}$$

Учитывая (34) и оценки для  $I_1$  и  $I_2$ , получим

$$|P(r, y) - \tilde{f}(\cos y)| \leq K \omega[(1-r) |\ln(1-r)| |\sin y|] + 2\omega(1-r),$$

или окончательно

$$|P(x) - \tilde{f}(x)| \leq K \omega[(1-r) |\ln(1-r)| \sqrt{1-x^2}] + 2\omega(1-r).$$

Оценку улучшить нельзя, потому что для  $f(x) = |x| \in \text{Lip } 1$

$$\begin{aligned} P(0) - f(0) &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{\sin 2t \cdot (1-r^2)}{(1-r)^2 + 4r \sin^2 t} dt = \frac{1-r^2}{\pi r} \ln \frac{1+r}{1-r} = \\ &= \frac{2}{\pi} (1-r) |\ln(1-r)| + O(1-r). \end{aligned}$$

В заключение хочу поблагодарить профессора А. Х. Турецкого за помощь и постоянное внимание к работе.

### Литература

1. Тиман А. Ф. Теория приближения функций действительного переменного. Физматгиз, 1960.
2. Натансон И. П. Конструктивная теория функций. Физматгиз, 1949.
3. Натансон И. П. ДАН СССР, 72, № 1, 1950.
4. Коровкин П. П. Линейные операторы и теория приближения функций. Физматгиз, 1962.
5. Ганзбург И. М., Тиман А. Ф. Изв. АН СССР, сер. матем., 22, № 6, 1958.
6. Динцен Б. Л. Об отклонении непрерывных функций от средних арифметических частных сумм их ряда П. Л. Чебышева. Исследования по современным проблемам конструктивной теории функций. Баку, 1965.

Белорусский государственный университет  
им. В. И. Ленина

Поступило в редакцию  
30.XI 1967

Л. Я. ПОЛЯКОВ

## О РАЗРЕШИМЫХ ГРУППАХ

I. Результаты этого параграфа связаны со следующей теоремой Ф. Холла ([1], теорема 10.5.7):

*Если в конечной группе  $G$  все максимальные подгруппы имеют своим индексом либо простое число, либо квадрат простого числа, то группа  $G$  разрешима.*

В работе [2] А. В. Романовский показывает, что эта теорема Ф. Холла остается справедливой, если ее условию удовлетворяют только те максимальные подгруппы группы  $G$ , которые надстроены над фиксированной  $q$ -силовой подгруппой группы  $G$ , где  $q$  — наибольший простой делитель порядка  $|G|$  группы  $G$ .

Нами была доказана более общая

**Теорема 1** [3]. *Пусть группа  $G$  удовлетворяет следующим условиям: 1)  $\text{psl}'$ ; 2)  $E_{\pi}^d$ ; 3) все максимальные подгруппы  $G$ , содержащие ее некоторую фиксированную дисперсивную (по Орэ)  $S'_{\pi}$ -подгруппу, имеют своим индексом либо простое число, либо квадрат простого числа. Тогда группа  $G$  разрешима.*

Заметим, что все встречающиеся здесь обозначения и определения можно найти в книге [4], а также в работе [5].

Из доказываемой ниже теоремы 2 следует, что в теореме Ф. Холла (а также А. В. Романовского) можно вообще ограничиться рассмотрением только ненильпотентных максимальных подгрупп, надстроженных над силовой подгруппой самой группы, относящейся к наибольшему простому делителю ее порядка.

**Теорема 2.** *Пусть  $q$  — наибольший простой делитель  $|G|$ . Если каждая ненильпотентная максимальная подгруппа группы  $G$ , надстроенная над ее  $q$ -силовой подгруппой  $Q$ , имеет своим индексом либо простое число, либо квадрат простого числа, то группа  $G$  разрешима.*

Доказательство проведем индукцией по порядку группы  $G$ . Пусть  $q$  — наибольшее простое число, делящее  $|G|$ , а  $Q$  —  $q$ -силовая подгруппа  $G$ . Допустим сначала, что  $Q$  инвариантна в  $G$ . В фактор-группе  $G/Q$  все ненильпотентные максимальные подгруппы (если они существуют) имеют своими индексами либо простые числа, либо квадраты простых чисел. Поэтому фактор-группа  $G/Q$  разрешима по индукции. Следовательно, если  $Q$  инвариантна в  $G$ , то получаем, что группа  $G$  разрешима. Пусть поэтому  $Q$  неинвариантна в  $G$ . Тогда  $N_G(Q) \neq G$ , где  $N_G(Q)$  — нормализатор подгруппы  $Q$  в группе  $G$ . Пусть  $M$  — максимальная подгруппа группы  $G$ , содержащая  $N_G(Q)$ . Поскольку  $N_G(Q)$  — нормализатор подгруппы  $Q$  как в  $G$ , так и в  $M$ , то по теореме Силова имеем

$$(G : N_G(Q)) = 1 + k_1q, \quad (M : N_G(Q)) = 1 + k_2q,$$

где  $k_1 > 0$  и  $k_2 > 0$  — целые числа. Из этих равенств вытекает следующее:  $(G : M) = 1 + kq$ ,  $k > 0$  — целое число. Если подгруппа  $M$  ненильпотентна,

то по условию теоремы  $(G : M) = p$  или  $p^2$ . Разрешимость группы  $G$  теперь получается дословным повторением заключительной части доказательства теоремы 10.5.7 Ф. Холла [1]. Предположим теперь, что подгруппа  $M$  нильпотентна. Возможны следующие два случая:

1.  $M_G \neq E$ . Рассмотрим фактор-группу  $G/M_G$ . Очевидно,  $G/M_G$  разрешима по индукции. Из разрешимости  $M_G$  и  $G/M_G$  следует разрешимость самой группы  $G$  в рассматриваемом случае.

2.  $M_G = E$ . Допустим, что  $M$  — силовская подгруппа группы  $G$ , т. е.  $M = Q$ . Очевидно, можно считать, что  $G$  не является 2-группой. Но тогда в силу выбора подгруппа  $Q$  имеет нечетный порядок, и группа  $G$  разрешима по теореме Дж. Томпсона [6]. Итак,  $M \neq Q$ . Поскольку  $M_G = E$ , то, используя нормализаторное свойство  $p$ -групп, нетрудно показать, что  $M$  — холловская подгруппа группы  $G$ . По лемме 9 Виландта [7] группа  $G$  имеет такой нормальный делитель  $H$ , что  $M \cap H = E$  и  $G = MH$ .

Пусть  $\omega = \pi(M) \cup r$ , где  $r$  — простой делитель  $|H|$ . Тогда  $G$  будет  $\omega$ -отделимой группой. По теореме С. А. Чунихина [4], (теорема 1.15.1)  $G$  содержит разрешимую  $S_\omega$ -подгруппу  $L$  и такую, что  $M \subset L \subseteq G$ . Так как  $M$  — максимальная подгруппа в  $G$ , то отсюда следует, что  $L = G$ , т. е.  $G$  разрешима. Теорема доказана.

Точно таким же методом, что и теорема 2, доказывается

Теорема 3. Пусть группа  $G$  удовлетворяет следующим условиям:

- 1)  $\pi \pi'$ ; 2)  $E_{\pi'}^d$ ; 3) все нильпотентные максимальные подгруппы группы  $G$ , содержащие ее некоторую фиксированную дисперсивную (по Орэ)  $S_{\pi'}$ -подгруппу, имеют своим индексом либо простое число, либо квадрат простого числа. Тогда группа  $G$  разрешима.

Нетрудно заметить, что теоремой 3 объединяются теоремы 1 и 2.

Теорема 4. Пусть группа  $G$  удовлетворяет следующим условиям:

- 1)  $\pi \pi'$ ; 2)  $E_{\pi'}^d$ ; 3) все максимальные подгруппы, содержащие ее какую-либо дисперсивную  $S_{\pi'}$ -подгруппу, имеют простой индекс.

Тогда группа  $G$  сильно  $\pi$ -разрешима.

Доказательство. Если  $|G|_{\pi} = 1$ , то теорема очевидна. Если  $|G|_{\pi'} = 1$ , то единственной  $S_{\pi'}$ -подгруппой группы  $G$  будет  $E$ . Тогда все максимальные подгруппы  $G$  имеют простой индекс и по теореме Б. Хупперта [8] она даже сильно разрешима. Итак, в дальнейшем  $|G|_{\pi} > 1$  и  $|G|_{\pi'} > 1$ . Проведем теперь доказательство индукцией по порядку группы  $G$ . По теореме 1 группа  $G$  разрешима. Пусть  $K$  — минимальный нормальный делитель группы  $G$  порядка  $q^a$ . Допустим, что  $q \in \pi'$ . Так как фактор-группа  $G/K$  по индукции сильно  $\pi$ -разрешима, то в этом случае и сама группа  $G$  сильно  $\pi$ -разрешима. Пусть поэтому  $q \in \pi$ . Рассмотрим отдельно две возможности:

1.  $\Phi(G) \neq E$ . Фактор-группа  $G/\Phi(G)$  сильно  $\pi$ -разрешима по индукции. Но тогда по лемме 7 работы [9] группа  $G$  сильно  $\pi$ -разрешима.

2.  $\Phi(G) = E$ . В этом случае минимальный нормальный делитель  $K$  входит не в каждую максимальную подгруппу группы  $G$ . Пусть  $M$  — одна из таких максимальных подгрупп. Тогда в силу абелевости  $K$  и максимальнойности  $M$  соответственно имеют место равенства

$$M \cap K = E, \quad MK = G. \quad (1)$$

По теореме Ф. Холла о разрешимых группах заключаем, что подгруппа  $M$  (ее порядок, очевидно, делится на  $|G|_{\pi'}$ ) содержит  $S_{\pi'}^d$ -подгруппу, которая будет  $S_{\pi'}^d$ -подгруппой группы  $G$ . Тогда по условию теоремы  $(G : M) = q$ . Но из равенств (1) теперь получаем, что порядок нормального делителя  $K$  равен  $q$ . Так как по индукции фактор-группы  $G/K$  сильно  $\pi$ -разрешима, то и  $G$  сильно  $\pi$ -разрешима, что и требовалось.

II. Доказываемая в этом параграфе теорема 5 относится к следующему вопросу: что можно сказать о сильной разрешимости группы  $G$ , допускающей факторизацию попарно перестановочными факторами?

Круг имеющихся результатов, отвечающих на данный вопрос, довольно ограничен. Здесь можно, например, указать на теорему Б. Хупперта, доказавшего сильную разрешимость группы  $G$ , факторизуемой попарно перестановочными циклическими подгруппами.

**Теорема 5.** Пусть  $G$  — разрешимая группа и  $G = G_1 G_2 \dots G_k$ , где  $G_1, G_2, \dots, G_k$  — попарно перестановочные сильно разрешимые группы, порядки которых попарно взаимно просты. Если каждая максимальная подгруппа из  $G_i$  перестановочна со всеми  $G_j$  ( $i, j = 1, 2, \dots, k$ ), то группа  $G$  сильно разрешима.

**Доказательство.** Если  $M$  — любая максимальная подгруппа группы  $G$ , то в силу разрешимости  $G$  имеем  $(G : M) = p^b$ . Из теоремы 2 работы [10] следует, что  $M = H_1 H_2 \dots H_k$ , где  $|H_i|$  делит  $|G_i|$  и все  $H_i, i = 1, 2, \dots, k$ , попарно перестановочны. По этой же теореме в группе  $G$  существует такая совокупность подгрупп  $G'_1, G'_2, \dots, G'_k$ , что:

$$1) H_1 \subseteq G'_1, H_2 \subseteq G'_2, \dots, H_k \subseteq G'_k,$$

$$2) |G_1| = |G'_1|, |G_2| = |G'_2|, \dots, |G_k| = |G'_k|,$$

3) все подгруппы указанной совокупности попарно перестановочны.

В силу леммы 2.2. из [11] имеем, что  $G_i = x^{-1} G'_i x$  для всех  $i$  и для некоторого элемента  $x \in G$ . Нетрудно убедиться в том, что условия доказываемой теоремы выполняются и для подгрупп  $G'_i$ . В самом деле, пусть  $M'_i$  — любая максимальная подгруппа группы  $G'_i$  и пусть  $i \neq j$ . Тогда

$$M'_i G'_j = M'_i (x G_j x^{-1}) = x (x^{-1} M'_i x) G_j x^{-1}. \quad (2)$$

Очевидно,  $x^{-1} M'_i x = M_i \subseteq G_i$  и  $M_i$  является максимальной подгруппой в  $G_i$ . Продолжим равенство (2):

$$\begin{aligned} x (x^{-1} M'_i x) G_j x^{-1} &= x M_i G_j x^{-1} = x G_j M_i x^{-1} = \\ &= x (x^{-1} G_j x) (x^{-1} M_i x) x^{-1} = G'_j M'_i, \end{aligned}$$

что и требовалось.

Так как условия теоремы выполняются для подгрупп  $G'_i$ , то без ограничения общности можно считать, что  $G'_i = G_i$  для всех  $i$ . Пусть для некоторого фиксированного  $j, 1 \leq j \leq k$ , выполняется включение  $H_j \subseteq K \subseteq G_j$ , причем  $(G_j : K) = p_j$  и  $K$  — максимальная подгруппа из  $G_j$ . Такая подгруппа  $K$  существует вследствие сильной разрешимости  $G_j$  по известной теореме Ивасава. Теперь, согласно условию теоремы, имеем, что  $L = G_1 G_2 \dots G_{j-1} K G_{j+1} \dots G_k$  является подгруппой группы  $G$  и к тому же  $(G : L) = p_j$ . Но  $M = H_1 H_2 \dots H_k \subseteq L \subseteq G$ .

А поскольку  $M$  — максимальная подгруппа группы  $G$ , то  $M = L$ . Но  $M$  — произвольная максимальная подгруппа группы  $G$ . Тем самым мы доказали, что все максимальные подгруппы группы  $G$  имеют простой индекс. По теореме Хупперта [8]  $G$  сильно разрешима.

Из теоремы 5 вытекает

**Теорема 6.** Пусть  $G = G_1 G_2 \dots G_k$ , где  $G_1, G_2, \dots, G_k$  — попарно перестановочные нильпотентные группы, порядки которых попарно взаимно просты.

Если каждая максимальная подгруппа из  $G_i$  перестановочна со всеми  $G_j$  ( $i, j = 1, 2, \dots, k$ ), то группа  $G$  сильно разрешима.

Доказательство немедленно получается из того, что группа  $G$  разрешима по теореме Виландта [7], и из последующего применения теоремы 5.

Следует заметить, что результат, подобный теореме 5, был ранее известен в случае, когда множители  $G_i$  являются силовскими подгруппами [12].

### Литература

1. Холл М. Теория групп. ИЛ, 1962.
2. Романовский А. В. ДАН СССР, 152, № 4, 1963.
3. Поляков Л. Я. Конечные группы. Изд. «Наука и техника», 1966, стр. 89.
4. Чунхин С. А. Подгруппы конечных групп. Изд. «Наука и техника», 1964.
5. Поляков Л. Я. ДАН СССР, 167, № 2, 1966.
6. Thompson J. G. Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 45, № 4, 578, 1959.
7. Wielandt H. Illinois J. Math., 2, № 48, 611, 1958.
8. Huppert B. Mat. Z., 60, 409, 1954.
9. Razderski G. Publ. Math, 9, № 3, 264, 1962.
10. Гольберг П. А. ДАН СССР, 127, № 3, 1959.
11. Гольберг П. А. Сибирск. матем. журн., 1, № 1, 1960.
12. Huppert B. Arch. Math., 12, № 3, 161, 1961.

Пединститут им. В. П. Чкалова,  
г. Гомель

Поступило в редакцию  
11.IX 1967

А. П. БУЛАНОВ

**ПРИБЛИЖЕНИЕ  $x^{1/3}$  РАЦИОНАЛЬНЫМИ ФУНКЦИЯМИ**

**ВВЕДЕНИЕ**

В работе [1] Ньюман доказал, что  $\sqrt{x}$  приближается рациональными функциями равномерно на  $[0, 1]$  со скоростью

$$R_n[\sqrt{x}] = O(e^{-\sqrt{n}}), \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

Там же он высказал предположение, что для любого рационального  $a$  справедливо

$$R_n[x^a] = O(e^{-\sqrt{n}}) \text{ на } [0, 1].$$

Результатом Ньюмана воспользовались П. Шош и П. Туран [6] при доказательстве следующей теоремы:

Если  $f \in \text{Lip } 1$  и выпукла кверху, то

$$R_n|f| = O\left(\frac{\ln^4 n}{n^2}\right).$$

На Международном математическом конгрессе в Москве (1966 г.) Е. П. Долженко сообщил о результате, полученном совместно с А. Абдугаппаровым, из которого, в частности, следует теорема:

Если  $f \in \text{Lip } \alpha$ ,  $\alpha > 0$  и имеет ограниченное изменение, то

$$R_n|f| = O\left(\frac{\ln^2 n}{n}\right).$$

Эта же теорема получена независимо венгерским математиком Г. Фройдом [7] в 1966 г.

В настоящей работе рассматривается равномерное приближение  $x^{1/3}$  на отрезке  $[0, 1]$  рациональными функциями, а также намечается один из методов доказательства утверждения

$$R_n[x^a] = O(e^{-C_a \sqrt{n}}),$$

где  $C_a > 0$  — постоянная, зависящая от  $a$ .

Введем обозначения:

1.  $\sigma_1 = x_1 + x_2 + \dots + x_n,$
- $\sigma_2 = x_1 x_2 + x_1 x_3 + \dots + x_{n-1} x_n,$
- .....
- $\sigma_n = x_1 x_2 \cdot \dots \cdot x_n.$

2. Если выражение

$$x_1^{k_1} x_2^{k_2} \cdot \dots \cdot x_n^{k_n} \tag{1}$$





Доказательство. В многочлене  $M_{n,0}(t)$  показатели степени  $t^{2n-s}$  и индексы  $s$  при коэффициентах  $A_s$  кратны трем. В многочлене  $M_{n,2}(t)$  показатели степени  $t^{2n-k}$  и индексы  $k$  при коэффициентах  $A_k$  сравнимы по модулю 3 соответственно с 2 и с 1. В целом, в многочлене, который стоит в левой части (12), коэффициенты при степенях  $t$  имеют такой же знак, как и коэффициенты полинома  $F_n(t)$ , что видно из (10). Справедливость леммы очевидна из сравнения коэффициентов полиномов (5) и (6) с коэффициентами (10).

Лемма 2.

$$M_{n,0}(t) > N_n(t) x_1^2 t^2 \text{ при } t \in [0, 1]. \quad (13)$$

Доказательство. Выпишем члены полинома  $M_{n,0}(t)$  и полинома  $N_n(t) x_1^2 t^2$  в следующем порядке, учитывая (4) и (8).

$$\begin{array}{ll} \text{Члены полинома } M_{n,0}(t) & \text{Члены полинома } N_n(t) x_1^2 t^2 \\ t^{2n}, & t^{2n+2} x_1^2, \end{array} \quad (14.1)$$

$$\begin{array}{ll} t^{2n-3} [S_n(x_1^2 x_2) + S_n(x_1 x_2 x_3)], & t^{2n-2} x_1^2 S_n(x_1^2), \\ & t^{2n-2} x_1^2 S_n(x_1^2 x_2^2), \end{array} \quad (14.2)$$

$$\begin{array}{ll} t^{2n-6} [S_n(x_1^2 x_2^2 x_3^2 + S_n(x_1^2 x_2^2 x_3 x_4) + \dots)], & t^{2n-4} x_1^2 S_n(x_1^2 x_3^2 x_3^2), \\ & t^{2n-6} x_1^2 S_n(x_1^2 x_2^2 x_3^2 x_4^2), \end{array} \quad (14.3)$$

$$t^{2n-9} [S_n(x_1^2 \dots x_4^2 x_5) + S_n(x_1^2 \dots x_3^2 x_4 x_5 x_6) + \dots], \quad t^{2n-8} x_1^2 S_n(x_1^2 \dots x_5^2), \quad (14.4)$$

$$\begin{array}{ll} t^{2n-12} [S_n(x_1^2 \dots x_6^2) + S_n(x_1^2 \dots x_5^2 x_6 x_7) + \dots], & t^{2n-10} x_1^2 S_n(x_1^2 \dots x_6^2), \\ & t^{2n-12} x_1^2 S_n(x_1^2 \dots x_8^2), \end{array} \quad (14.5)$$

$$\dots$$

$$t^{2n-2s} [S_n(x_1^2 \dots x_s^2) +$$

$$+ S_n(x_1^2 \dots x_{s-1}^2 x_s x_{s+1}) + \dots],$$

$$t^{2n-2-3} [S_n(x_1^2 \dots x_{s+1}^2 x_{s+2}) + \dots],$$

$$t^6 [S_n(x_1^2 \dots x_{n-3}^2) +$$

$$+ S_n(x_1^2 \dots x_{n-4}^2 x_{n-3} x_{n-2}) + \dots],$$

$$t^3 [S_n(x_1^2 \dots x_{n-2}^2 x_{n-1}) +$$

$$+ S_n(x_1^2 \dots x_{n-3}^2 x_{n-2} x_{n-1} x_n)],$$

$$S_n(x_1^2 \dots x_n^2) = x_1^2 x_2^2 \dots x_n^2,$$

$$\begin{array}{l} t^{2n+2-2s} x_1^2 S_n \times \\ \times (x_1^2 \dots x_s^2), \\ t^{2n-2s} x_1^2 S_n \times \\ \times (x_1^2 \dots x_{s+1}^2), \end{array} \quad \left( 14. \frac{2s}{3} + 1 \right)$$

$$\begin{array}{l} t^{2n-2s-2} x_1^2 S_n \times \\ \times (x_1^2 \dots x_{s+2}^2), \end{array} \quad \left( 14. \frac{2s}{3} + 2 \right)$$

$$\begin{array}{l} t^8 x_1^2 S_n \times \\ \times (x_1^2 \dots x_{n-3}^2), \\ (t^6 x_1^2 S_n \times \\ \times x_1^2 \dots x_{n-2}^2), \end{array} \quad \left( 14. \frac{2n}{3} - 1 \right)$$

$$\begin{array}{l} t^4 x_1^2 S_n \times \\ \times (x_1^2 \dots x_{n-1}^2), \end{array} \quad \left( 14. \frac{2n}{3} \right)$$

$$\begin{array}{l} t^2 x_1^2 S_n \times \\ \times (x_1^2 \dots x_n^2). \end{array} \quad \left( 14. \frac{2n}{3} + 1 \right)$$

В каждой отдельной строке одному члену полинома  $M_{n,0}(t)$  поставлен в соответствие один или два члена полинома  $N_n(t)x_1^2t^2$ . Лемма 2 будет доказана, если мы увидим, что в каждой строке будет выполняться неравенство: левая часть больше соответствующей правой части. Для первой (14.1) и последней  $\left(14. \frac{2n}{3} + 1\right)$  строк неравенство тривиально, ибо  $0 \leq t \leq 1$ ,  $0 < x_1 < 1$ . В строке (14.2) неравенство следует из того, что  $S_n(x_1^2x_2) > x_1^2S_n(x_1^2)$  и  $S_n(x_1x_2x_3) > x_1^2S_n(x_1^2x_2^2)$ . В (14.3) достаточно того, что

$$S_n(x_1^2x_2^2x_3^2) > x_1^2S_n(x_1^2x_2^2x_3^2) \text{ и } S_n(x_1^2x_2^2x_3x_4) > x_1^2S_n(x_1^2 \dots x_4^2).$$

В последующих строках из коэффициента  $A_{2s}$  с четным индексом  $2s$  берутся два первых моногенных полинома, один из которых больше, чем  $x_1^2B_{2s} = x_1^2S_n(x_1^2 \dots x_s^2)$ , другой больше, чем  $x_1^2S_n(x_1^2 \dots x_{s+1}^2)$ . Из коэффициента  $A_{2s+3}$  с нечетным индексом  $2s+3$  достаточно взять один моногенный полином  $S_n(x_1^2 \dots x_{s+1}^2x_{s+2})$ , который больше, чем  $x_1^2B_{2s+4} = x_1^2S_n(x_1^2 \dots x_{s+2}^2)$ . Таким образом, на каждый член из многочлена  $N_n(t)x_1^2t^2$  в многочлене  $M_{n,0}(t)$  находится такая часть, которая больше этого члена, что и доказывает лемму.

В введении, п. 4, мы положили, что  $n \equiv 0 \pmod{3}$ ,  $n > 3$ . На самом деле леммы 1 и 2 остаются в силе, если  $n \equiv 1 \pmod{3}$  или  $n \equiv 2 \pmod{3}$ . Докажем это.

Пусть  $n \equiv 1 \pmod{3}$ . Тогда:

$$M_{n,0}(t) = A_{2n} + A_{2n-3}t^3 + \dots + A_5t^{2n-5} + A_2t^{2n-2},$$

$$M_{n,2}(t) = A_{2n-2}t^2 + A_{2n-5}t^5 + \dots + A_3t^{2n-3} + A_0t^{2n},$$

$$F_n(t) = (\sigma_n + \sigma_{n-1}t - \sigma_{n-3}t^3 - \sigma_{n-4}t^4 + \sigma_{n-6}t^6 + \dots) \prod_{i=1}^n (x_i - t) =$$

$$= [E_0^2(-t) - E_1(-t)E_2(-t)] - [E_1^2(-t) - E_0(-t)E_2(-t)], \quad (15)$$

$$\text{где } E_j(-t) = \sum_{k \equiv j \pmod{3}} \sigma_{n-k}(-t)^k \quad (j = 0, 1, 2).$$

В первой квадратной скобке последней части равенства (15) содержатся только степени  $t$ , сравнимые с нулем по  $\text{mod } 3$ , во второй — сравнимые с 2 по  $\text{mod } 3$ . Таким образом, в полиноме  $F_n(t)$  нет степеней  $t$ , сравнимых с 1 по  $\text{mod } 3$ , что соответствует полиному  $M_{n,0}(t) - M_{n,2}(t)$ . Получив из (15) коэффициенты, мы находим, что они в точности равны коэффициентам полинома  $M_{n,0}(t) - M_{n,2}(t)$ , полученным из разложения (3).

При доказательстве второй леммы следует заметить, что (начиная с последних членов) для  $0 < t \leq 1$ :

$$t^{2n-2} [S_n(x_1^2) + S_n(x_1x_2)] + t^{2n-5} [S_n(x_1^2x_2^2x_3) + \dots] >$$

$$> t^{2n+2} x_1^2 + t^{2n} x_1^2 S_n(x_1^2) + t^{2n-2} x_1^2 S_n(x_1^2x_2^2) + t^{2n-4} x_1^2 S_n(x_1^2x_2^2x_3^2).$$

В следующем члене из  $M_{n,0}(t)$  находятся два моногенных полинома, которые больше двух членов из полинома  $N_n(t)t^2x_1^2$ , а именно:

$$t^{2n-8} [S_n(x_1^2 \dots x_4^2) + S_n(x_1^2x_2^2x_3^2x_4x_5) + \dots] >$$

$$> t^{2n-6} x_1^2 S_n(x_1^2 \dots x_4^2) + t^{2n-8} x_1^2 S_n(x_1^2 \dots x_5^2).$$

В следующем числе из  $M_{n,0}(t)$  достаточно взять один моногенный полином

(с множителем  $t^{2n-11}$ ), который будет больше, чем  $t^{2n-10} x_1^2 S_n(x_1^2 \dots x_6^2)$ . И так перебираем все члены в полиномах  $M_{n,0}(t)$  и  $N_n(t) x_1^2 t^2$ , как и для случая  $n \equiv 0 \pmod{3}$ .

При  $n \equiv 2 \pmod{3}$  лемма 1 доказывается так же, как и для случая  $n \equiv 1 \pmod{3}$ . При доказательстве второй леммы замечаем, что (опять начиная с последних членов в полиномах  $M_{n,0}(t)$  и  $t^2 x_1^2 N_n(t)$ )

$$\begin{aligned} & t^{2n-1} S_n(x_1) + t^{2n-4} [S_n(x_1^2 x_2^2) + S_n(x_1^2 x_2 x_3) + \dots] > \\ & > t^{2n+2} x_1^2 + t^{2n} x_1^2 S_n(x_1^2) + t^{2n-2} x_1^2 S_n(x_1^2 x_2^2) + t^{2n-4} x_1^2 S_n(x_1^2 x_2^2 x_3^2). \end{aligned}$$

В следующем члене из  $M_{n,0}(t)$  нужно для покрытия  $t^{2n-6} x_1^2 S_n(x_1^2 \dots x_4^2)$  взять только один моногенный полином. Затем процесс продолжается так же, как и при  $n \equiv 0 \pmod{3}$ .

В формулировке теоремы мы не оговорили, что  $n \geq 5$ , так как при  $n = 0, 1, 2, 3, 4$ :

$$\left| x^{\frac{1}{3}} - r_n(x) \right| \leq 1 < \frac{4}{\exp\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right)}.$$

На доказательстве этого утверждения мы останавливаться не будем.

## § 2. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ

Рассмотрим вначале рациональную функцию

$$\bar{r}_{2n}(t) = t \frac{M_{n,2}(t)}{M_{n,0}(t)} \quad (16)$$

и заметим, что показатели степеней  $t$  числителя и знаменателя кратны трем.

Оценим ее отклонение от  $t$  в промежутке  $\left[ e^{-\frac{\sqrt{n}}{2}}, 1 \right]$ , учитывая (7), (9), (12) и (13):

$$\begin{aligned} \left| t - t \frac{M_{n,2}(t)}{M_{n,0}(t)} \right| &= t \left| \frac{M_{n,0}(t) - M_{n,2}(t)}{M_{n,0}(t)} \right| = t \left| \frac{F_n(t)}{M_{n,0}(t)} \right| = \\ &= t \left| \frac{(\sigma_n + \sigma_{n-1}t - \sigma_{n-3}t^3 - \sigma_{n-4}t^4 + \dots) \prod_{i=1}^n (x_i - t)}{M_{0,n}(t)} \right| \leq \\ &\leq t \left| \frac{\prod_{i=1}^n (t^2 - x_i^2)}{N_n(t) x_1^2 t^2} \right| \leq \frac{e^{-\sqrt{n}}}{x_1^2 t}, \quad t \in \left[ e^{-\frac{\sqrt{n}}{2}}, 1 \right]. \quad (17) \end{aligned}$$

Примечание. Здесь мы применили вторую лемму Ньюмана в  $b$  [1], именно

$$\prod_{i=0}^n \left| \frac{x_i^2 - y}{x_i^2 + y} \right| \leq e^{-\sqrt{n}} \quad \text{при} \quad e^{-\sqrt{n}} \leq y \leq 1.$$

Позднее нам нужна будет оценка для  $\frac{M_{n,2}(t)}{M_{n,0}(t)}$ .

Из (17) следует, что

$$\frac{M_{n,2}(t)}{M_{n,0}(t)} \leq 1 + \frac{1}{x_1^2 t^2} e^{-\sqrt{n}} \leq 1 + \frac{1}{x_1^2} \text{ при } t \in \left[ e^{-\frac{\sqrt{n}}{2}}, 1 \right]. \quad (18)$$

Теперь рассмотрим рациональную функцию

$$r_{2n}(t) = t \frac{M_{n,2}(t)}{M_{n,0}(t) + e^{-\sqrt{n}} \frac{M_{n,2}(t)}{t^2}}. \quad (19)$$

В правой части показатели степеней  $t$  полиномов числителя и знаменателя кратны трем. Оценим отклонение  $r_{2n}(t)$  от  $t$  в промежутке  $[0, 1]$ :

$$\begin{aligned} \left| t - r_{2n}(t) \right| &= t \left| \frac{M_{n,0}(t) - M_{n,2}(t) + \frac{e^{-\sqrt{n}}}{t^2} M_{n,2}(t)}{M_{n,0}(t) + \frac{e^{-\sqrt{n}}}{t^2} M_{n,2}(t)} \right| \leq \\ &\leq t \left| \frac{M_{n,0}(t) - M_{n,2}(t)}{M_{n,0}(t) + \frac{e^{-\sqrt{n}}}{t^2} M_{n,2}(t)} \right| + \\ &+ t \left| \frac{M_{n,2}(t)}{M_{n,0}(t) + \frac{e^{-\sqrt{n}}}{t^2} M_{n,2}(t)} \right| \frac{e^{-\sqrt{n}}}{t^2}. \quad (20) \end{aligned}$$

Для оценки последних двух слагаемых в (20) рассмотрим три множества:

$$I_1 = \{t : M_{n,2}(t) > M_{n,0}(t)\}, \quad I_2 = \{t : M_{n,2}(t) \leq M_{n,0}(t)\},$$

$$I_3 = \left[ e^{-\frac{\sqrt{n}}{2}}, 1 \right],$$

причем  $I_1 + I_2 = \left[ 0, e^{-\frac{\sqrt{n}}{2}} \right]$ .

Оценим первое слагаемое на  $I_1$ :

$$\begin{aligned} t \left| \frac{M_{n,0}(t) - M_{n,2}(t)}{M_{n,0}(t) + \frac{e^{-\sqrt{n}}}{t^2} M_{n,2}(t)} \right| &\leq \\ &\leq t \left| \frac{M_{n,2}(t)}{M_{n,2}(t)} \right| \frac{t^2}{e^{-\sqrt{n}}} \leq e^{-\frac{\sqrt{n}}{2}}. \quad (21) \end{aligned}$$

Эта же величина оценивается на  $I_2$ :

$$\begin{aligned} t \left| \frac{M_{n,0}(t) - M_{n,2}(t)}{M_{n,0}(t) + \frac{e^{-\sqrt{n}}}{t^2} M_{n,2}(t)} \right| &\leq \\ &\leq t \left| \frac{M_{n,0}(t)}{M_{n,0}(t)} \right| \leq \exp\left(-\frac{\sqrt{n}}{2}\right), \quad (22) \end{aligned}$$

на  $I_3$ :

$$t \left| \frac{M_{n,0}(t) - M_{n,2}(t)}{M_{n,0}(t) + \frac{e^{-\sqrt{n}}}{t^2} M_{n,2}(t)} \right| \leq t \left| \frac{M_{n,0}(t) - M_{n,2}(t)}{M_{n,0}(t)} \right| \leq \leq t \frac{\exp(-\sqrt{n})}{x_1^2 - t^2} \leq \frac{\exp\left(-\frac{\sqrt{n}}{2}\right)}{x_1^2}. \quad (23)$$

Сравнивая (21), (22) и (23), заключаем, что первое слагаемое не превосходит величины  $\frac{1}{x_1^2} \exp\left(-\frac{\sqrt{n}}{2}\right)$  на всем промежутке  $[0, 1]$ .

Теперь оценим второе слагаемое (20) на  $\left[0, e^{-\frac{\sqrt{n}}{2}}\right]$ :

$$t \left| \frac{M_{n,2}(t)}{M_{n,0}(t) + \frac{e^{-\sqrt{n}}}{t^2} M_{n,2}(t)} \right| \frac{e^{-\sqrt{n}}}{t^2} \leq t \leq \exp\left(-\frac{\sqrt{n}}{2}\right).$$

Это же слагаемое на  $\left[e^{-\frac{\sqrt{n}}{2}}, 1\right]$ , при использовании (18), оценивается следующим образом:

$$t \left| \frac{M_{n,2}(t)}{M_{n,0}(t) + \frac{e^{-\sqrt{n}}}{t^2} M_{n,2}(t)} \right| \frac{e^{-\sqrt{n}}}{t^2} \leq \leq \frac{e^{-\sqrt{n}}}{t} \left| \frac{M_{n,2}(t)}{M_{n,0}(t)} \right| \leq \exp\left(-\frac{\sqrt{n}}{2}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{x_1^2}\right). \quad (24)$$

Из (20), (23) и (24) следует, что

$$\begin{aligned} \left| t - r_{2n}(t) \right| &\leq \left(1 + 2 \frac{1}{x^2}\right) \exp\left(-\frac{\sqrt{n}}{2}\right) = \\ &= \left[1 + 2 \exp\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right] \exp\left(-\frac{\sqrt{n}}{2}\right). \end{aligned}$$

Заменяя  $t$  на  $x^{\frac{1}{3}}$ , получаем

$$\left| x^{\frac{1}{3}} - r_N(x) \right| \leq \left[1 + 2 \exp\left(\sqrt{\frac{2}{3N}}\right)\right] \exp\left(-\frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{2}} \sqrt{N}\right).$$

При  $N \geq 5$  величина  $1 + 2 \exp\left(\sqrt{\frac{2}{3N}}\right) < 4$ . Обозначая  $N$  через  $n$ , получаем

$$\left| x^{\frac{1}{3}} - r_n(x) \right| \leq 4 \exp\left(-\sqrt{\frac{3}{8}} \cdot \sqrt{n}\right).$$

Теорема доказана.

§ 3. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Мы ввели в рассмотрение рациональную функцию

$$\bar{r}_{2n}(t) = t \frac{M_{n, 2}(t)}{M_{n, 0}(t)},$$

которая на отрезке  $\left[ e^{-\frac{\sqrt{n}}{2}}, 1 \right]$  приближает  $t$  со скоростью  $O(e^{-\sqrt{n}})$ .

На отрезке  $\left[ 0, e^{-\frac{\sqrt{n}}{2}} \right]$  эта функция приближает со скоростью не хуже  $O\left(e^{-\frac{\sqrt{n}}{2}}\right)$ ; но, чтобы упростить доказательство, мы изменили ее и ввели в рассмотрение функцию (19).

Чтобы обобщить теорему и найти рациональную функцию, которая приближала бы  $x^{\frac{1}{m}}$  со скоростью  $O(e^{-C_m \sqrt{n}})$ , где  $C_m$  — постоянная, зависящая от  $m$ , можно рассмотреть рациональную функцию

$$r_{(m-1)n}(t) = t \frac{M_{n, m-1}(t)}{M_{n, 0}(t)},$$

где

$$M_{n, m-1}(t) = A_{(m-1)n-(m-1)} t^{m-1} + A_{(m-1)n-(2m-1)} t^{2m-1} + \dots + A_{(m-1)n-(sm-1)} t^{sm-1} + \dots;$$

$$M_{n, 0}(t) = A_{(m-1)n} + A_{(m-1)n-m} t^m + A_{(m-1)n-2m} t^{2m} + \dots + A_{(m-1)n-sm} t^{sm} + \dots$$

Коэффициенты  $A_r$  определяются из соотношения

$$\begin{aligned} & [t^{m-1} + x_1 t^{m-2} + \dots + x_1^{m-2} t + x_1^{m-1}] \dots \\ & \dots [t^{m-1} + x_n t^{m-2} + \dots + x_n^{m-2} t + x_n^{m-1}] = \\ & = \prod_{i=1}^n [(t - \varepsilon x_i)(t - \varepsilon^2 x_i) \dots (t - \varepsilon^{m-1} x_i)] = \\ & = A_{(m-1)n} + A_{(m-1)n-1} t + \dots + A_{(m-1)n-k} t^k + \dots + t^{(m-1)n}, \end{aligned}$$

где числа  $x_1, x_2, \dots, x_n$  выбираются соответствующим образом, например

$$x_i = x^i = \exp\left(-\frac{i}{\sqrt{mn}}\right),$$

и где  $\varepsilon = \cos \frac{2\pi}{m} + i \sin \frac{2\pi}{m}$ .

Теорема доказывается на основании двух таких же лемм, как и (12) и (13), а также с помощью первой и второй лемм Ньюмана в [1], ибо разность

$$M_{n, 0}(t) - M_{n, m-1}(t) \tag{25}$$

представляется произведением

$$\left[ \prod_{i=1}^n (x_i - t) \right] F_{n, m-1}(t),$$

где  $F_{n, m-1}(t)$  полином от  $t$ , порядок которого на  $n$  меньше, чем порядок полинома (25).

### Литература

1. Newman D. I. Michigan Math. J. 11, № 1, 11—14, 1964.
2. Курош А. Г. Курс высшей алгебры. М., Госиздат, 1955.
3. Фадеев Д. К., Соминский И. С. Сборник задач по высшей алгебре. М., Госиздат, 1953.
4. Риордан Дж. Введение в комбинаторный анализ. М., ИЛ, 1963.
5. MacMahon P. A. Combinatory Analysis, v. 1. Cambridge, 1915.
6. Szűsz P., Turan P. On the constructive theory of functions, I, MTA, Mat. Kut. Int. Közl.
7. Freud G. Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricac, 17, 313—324, 1966.

Московский государственный университет  
им. М. В. Ломоносова

Поступило в редакцию  
19.IV 1967

УДК 518:517/944/947

В. Н. АБРАШИН, В. В. БОБКОВ

### ОБ ОДНОЙ МНОГОТОЧЕЧНОЙ РАЗНОСТНОЙ СХЕМЕ МЕТОДА ИНТЕГРАЛЬНЫХ СООТНОШЕНИЙ ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

В настоящей работе обобщаются результаты статьи [1] на случай  $k^2$ -точечного разностного уравнения, построенного при решении методом интегральных соотношений линейной задачи Гурса для канонического уравнения второго порядка. В предположении достаточно гладкого решения исходной задачи получены равномерные оценки погрешности приближенного решения. Указывается на возможность перенесения основных результатов на задачу Коши и некоторые другие задачи, а также на возможность обобщения этих результатов на случай простейшего квазилинейного уравнения и на системы уравнений такого рода.

Рассмотрим в прямоугольнике  $D \{0 \leq x \leq l', 0 \leq y \leq l''\}$  следующую задачу Гурса:

$$u_{xy} = a(x, y)u_x + b(x, y)u_y + c(x, y)u + f(x, y), \quad (1)$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), u(0, y) = \psi(y), \varphi(0) = \psi(0). \quad (2)$$

В данном прямоугольнике  $D$  по заданному шагу  $h > 0$  построим сетку характеристик  $x = x_i = ih$ ,  $y = y_j = jh$ ,  $i = 0, 1, \dots, N$ ;  $j = 0, 1, \dots, M$ ,  $x_N = Nh \leq l'$ ,  $y_M = Mh \leq l''$ .

Предположим, что в точках  $(x_i, y_j)$  при  $i = 1, 2, \dots, k-2$ ,  $j = 1, 2, \dots, M$  и при  $j = 1, 2, \dots, k-2$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$  как-то найдено приближенное решение  $u_{ij} = v_{ij}$  задачи (1), (2) с соответствующими погрешностями  $\delta_{ij}$  ( $i = 1, 2, \dots, k-2$ ,  $j = 1, 2, \dots, M$  и  $j = 1, 2, \dots, k-2$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$ ).

Исходную задачу Гурса приближенно заменим аппроксимирующей системой линейных алгебраических уравнений, для построения которой воспользуемся идеей метода интегральных соотношений [2].

Проинтегрировав уравнение (1) по  $y$  в полосе  $y_{j-1} \leq y \leq y_j$  ( $j = k-1, k, \dots, M$ ) и по  $x$  в полосе  $x_{i-1} \leq x \leq x_i$  ( $i = k-1, k, \dots, N$ ), получим следующую систему интегральных соотношений:

$$\begin{aligned} & u(x_i, y_j) - u(x_i, y_{j-1}) - u(x_{i-1}, y_j) + u(x_{i-1}, y_{j-1}) = \\ & = \int_{x_{i-1}}^{x_i} [b(x, y_j)u(x, y_j) - b(x, y_{j-1})u(x, y_{j-1})] dx + \\ & + \int_{y_{j-1}}^{y_j} [a(x_i, y)u(x_i, y) - a(x_{i-1}, y)u(x_{i-1}, y)] dy + \\ & + \int_{x_{i-1}}^{x_i} \int_{y_{j-1}}^{y_j} \{[c(x, y) - b_y(x, y) - a_x(x, y)]u + f(x, y)\} dy dx, \\ & i = k-1, k, \dots, N, j = k-1, k, \dots, M. \end{aligned}$$

Интерполировав искомую функцию  $u$  по ее значениям сначала на прямых  $y = y_{j-m}$  ( $m = 0, 1, \dots, k-1$ ), а затем на прямых  $x = x_{i-m}$  ( $m = 0, 1, \dots, k-1$ ) (вообще говоря, можно интерполировать и все подынтегральное выражение), получим для нахождения приближенного решения  $u_{ij}$  задачи (1), (2) в точке  $(x_i, y_j)$  систему линейных алгебраических уравнений

$$\begin{aligned} \alpha_{ij} u_{ij} - \beta_{ij-1} u_{ij-1} - \alpha_{i-1j}^* u_{i-1j} + \beta_{i-1j-1}^* u_{i-1j-1} &= \\ &= h \sum_{n=0}^1 \sum_{m=2}^{k-1} \eta_{i-nj-m}^{(n,m)} u_{i-nj-m} + \\ &+ h \sum_{n=2}^{k-1} \sum_{m=0}^{k-1} \xi_{i-nj-m}^{(n,m)} u_{i-nj-m} + f_{ij}, \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} u_{ij} &= v_{ij} \quad (l = 1, 2, \dots, k-2), \quad u_{il} = v_{il} \quad (l = 1, 2, \dots, k-2), \\ u_{nm} &= v_{nm} \quad (n, m = 1, 2, \dots, k-2), \quad u_{0l} = \psi(y_l) \quad (l = 0, 1, \dots, j), \\ &u_{l0} = \varphi(x_l) \quad (l = 0, 1, \dots, i), \\ &i = k-1, k, \dots, N; \quad j = k-1, k, \dots, M. \end{aligned}$$

Здесь

$$\begin{aligned} \alpha_{ij} &= 1 - \frac{h}{(k-1)!} \int_{k-2}^{k-1} b(x_{i-k+1} + th, y_j) \frac{t(t-1) \dots (t-k+1)}{t-k+1} dt - \\ &- \frac{h}{(k-1)!} \int_{k-2}^{k-1} a(x_i, y_{j-k+1} + zh) \frac{z(z-1) \dots (z-k+1)}{z-k+1} dz - \\ &- \frac{h^2}{[(k-1)!]^2} \int_{k-2}^{k-1} \int_{k-2}^{k-1} [c(x_{i-k+1} + th, y_{j-k+1} + zh) - b_y(x_{i-k+1} + th, y_{j-k+1} + zh) - \\ &- a_x(x_{i-k+1} + th, y_{j-k+1} + zh)] \times \\ &\times \frac{t(t-1) \dots (t-k+1) z(z-1) \dots (z-k+1)}{(t-k+1)(z-k+1)} dt dz, \\ \beta_{ij-1} &= 1 - \frac{h}{(k-1)!} \int_{k-2}^{k-1} b(x_{i-k+1} + th, y_{j-1}) \frac{t(t-1) \dots (t-k+1)}{t-k+1} dt - \\ &- \frac{h}{(k-2)!} \int_{k-2}^{k-1} a(x_i, y_{j-k+1} + zh) \frac{z(z-1) \dots (z-k+1)}{z-k+2} dz - \\ &- \frac{h^2}{(k-1)!(k-2)!} \int_{k-2}^{k-1} \int_{k-2}^{k-1} [c(x_{i-k+1} + th, y_{j-k+1} + zh) - b_y(x_{i-k+1} + \\ &+ th, y_{j-k+1} + zh) - a_x(x_{i-k+1} + th, y_{j-k+1} + zh)] \times \\ &\times \frac{t(t-1) \dots (t-k+1) z(z-1) \dots (z-k+1)}{(t-k+1)(z-k+2)} dt dz, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\alpha_{i-1j}^* &= 1 - \frac{h}{(k-2)!} \int_{k-2}^{k-1} b(x_{i-k+1} + th, y_j) \frac{t(t-1) \dots (t-k+1)}{t-k+2} dt - \\
&- \frac{h}{(k-1)!} \int_{k-2}^{k-1} a(x_{i-1}, y_{j-k+1} + zh) \frac{z(z-1) \dots (z-k+1)}{z-k+1} dz - \\
&- \frac{h^2}{(k-1)! (k-2)!} \int_{k-2}^{k-1} \int_{k-2}^{k-1} [c(x_{i-k+1} + th, y_{j-k+1} + zh) - b_y(x_{i-k+1} + \\
&+ th, y_{j-k+1} + zh) - a_x(x_{i-k+1} + th, y_{j-k+1} + zh)] \times \\
&\times \frac{t(t-1) \dots (t-k+1) z(z-1) \dots (z-k+1)}{(t-k+1)(z-k+2)} dt dz, \\
\beta_{i-1j-1}^* &= 1 - \frac{h}{(k-2)!} \int_{k-2}^{k-1} b(x_{i-k+1} + th, y_{j-1}) \frac{t(t-1) \dots (t-k+1)}{t-k+2} dt - \\
&- \frac{h}{(k-2)!} \int_{k-2}^{k-1} a(x_{i-1}, y_{j-k+1} + zh) \frac{z(z-1) \dots (z-k+1)}{z-k+2} dz - \\
&- \frac{h^2}{[(k-2)!]^2} \int_{k-2}^{k-1} \int_{k-2}^{k-1} [c(x_{i-k+1} + th, y_{j-k+1} + zh) - b_y(x_{i-k+1} + th, y_{j-k+1} + zh) - \\
&- a_x(x_{j-k+1} + th, y_{j-k+1} + zh)] \times \\
&\times \frac{t(t-1) \dots (t-k+1) z(z-1) \dots (z-k+1)}{(t-k+2)(z-k+2)} dt dz, \\
\eta_{i-nj-m}^{(n,m)} &= \frac{(-1)^{n+m}}{(k-m-1)! m!} \int_{k-2}^{k-1} a(x_{i-n}, y_{j-k+1} + zh) \frac{z(z-1) \dots (z-k+1)}{z-k+m+1} dz + \\
&+ \frac{h(-1)^{n+m}}{(k-1-n)! n! (k-1-m)! m!} \int_{k-2}^{k-1} \int_{k-2}^{k-1} [c(x_{i-k+1} + th, y_{j-k+1} + zh) - b_y(x_{i-k+1} + \\
&+ th, y_{j-k+1} + zh) - a_x(x_{i-k+1} + th, y_{j-k+1} + zh)] \times \\
&\times \frac{t(t-1) \dots (t-k+1) z(z-1) \dots (z-k+1)}{(t-k+n+1)(z-1+m+1)} dt dz \\
&(n=0, 1, m=2, 3, \dots, k-1), \\
\xi_{i-nj-m}^{(n,m)} &= \frac{(-1)^{n+m}}{(k-1-n)! n!} \int_{k-2}^{k-1} b(x_{i-k+1} + th, y_{j-m}) \frac{t(t-1) \dots (t-k+1)}{t-k+n+1} dt +
\end{aligned}$$

$$+ \frac{h(-1)^{n+m}}{(k-1-n)! n! (k-1-m)! m!} \int_{k-2}^{k-1} \int_{k-2}^{k-1} [c(x_{i-k+1} + th, y_{j-k+1} + zh) - b_y(x_{i-k+1} + th, y_{j-k+1} + zh) - a_x(x_{i-k+1} + th, y_{j-k+1} + zh)] \times \\ \times \frac{t(t-1) \dots (t-k+1) z(z-1) \dots (z-k+1)}{(t-k+n+1)(z-k+m+1)} dt dz \\ (m=0, 1, n=2, 3, \dots, k-1),$$

$$\xi_{i-n, j-m}^{(n,m)} = \frac{h(-1)^{n+m}}{(k-1-n)! n! (k-m-1)! m!} \int_{k-2}^{k-1} \int_{k-2}^{k-1} [c(x_{i-k+1} + th, y_{j-k+1} + zh) - b_y(x_{i-k+1} + th, y_{j-k+1} + zh) - a_x(x_{i-k+1} + th, y_{j-k+1} + zh)] \times \\ \times \frac{t(t-1) \dots (t-k+1) z(z-1) \dots (z-k+1)}{t-k+n+1 \quad z-k+m+1} dt dz \\ (n, m=2, 3, \dots, k-1),$$

$$f_{ij} = h^2 \int_{k-2}^{k-1} \int_{k-2}^{k-1} f(x_{i-k+1} + th, y_{j-k+1} + zh) dt dz.$$

Заметим, что шаг  $h > 0$  следует выбирать так, чтобы выполнялись условия  $\alpha_{ij} \neq 0$  (взяв достаточно малым  $h > 0$ , этого всегда можно достичь).

Разрешая уравнения (3) относительно  $u_{ij}$ , получим явную вычислительную схему, которая позволяет последовательно находить приближенное решение поставленной задачи по строкам либо по столбцам сетки, при этом на каждом этапе вычислений будет связано  $k^2$  соседних точек сетки.

Соответствующая система линейных алгебраических уравнений для погрешности метода  $\gamma_{ij} = u(x_i, y_j) - u_{ij}$  имеет аналогичный вид:

$$\alpha_{ij} \gamma_{ij} - \beta_{i, j-1} \gamma_{i, j-1} - \alpha_{i-1, j}^* \gamma_{i-1, j} + \beta_{i-1, j-1}^* \gamma_{i-1, j-1} = \\ = h \sum_{n=0}^1 \sum_{m=2}^{k-1} \eta_{i-n, j-m}^{(n,m)} \gamma_{i-n, j-m} + h \sum_{n=2}^{k-1} \sum_{m=0}^{k-1} \xi_{i-n, j-m}^{(n,m)} \gamma_{i-n, j-m} + r_{ij}, \quad (4)$$

$$\gamma_{ij} = \delta_{ij} \quad (l=1, 2, \dots, k-2), \quad \gamma_{il} = \gamma_{il} \quad (l=1, 2, \dots, k-2),$$

$$\gamma_{nm} = \delta_{nm} \quad (n, m=1, 2, \dots, k-2),$$

$$\gamma_{0l} \equiv 0 \quad (l=0, 1, \dots, j), \quad \gamma_{i0} \equiv 0 \quad (l=0, 1, \dots, i),$$

$$i = k-1, k, \dots, N, \quad j = k-1, k, \dots, M.$$

Здесь

$$r_{ij} = \frac{h^{k+1}}{k!} \int_{k-2}^{k-1} \left[ b(x_{i-k+1} + th, y_j) \frac{\partial^k u(\tilde{x}_i^{(1)}, y_j)}{\partial x^k} - \right. \\ \left. - b(x_{i-k+1} + th, y_{j-1}) \frac{\partial^k u(\tilde{x}_i^{(2)}, y_{j-1})}{\partial x^k} \right] t(t-1) \dots (t-k+1) dt + \\ + \frac{h^{k+1}}{k!} \int_{k-2}^{k-1} \left[ a(x_i, y_{j-k+1} + zh) \frac{\partial^k u(x_i, \tilde{y}_j^{(1)})}{\partial y^k} - a(x_{i-1}, y_{j-k+1} + zh) \right] \times$$

$$\begin{aligned} & \times \frac{\partial^k u(x_{i-1}, \tilde{y}_j^{(2)})}{\partial y^k} \Big] z(z-1) \dots (z-k+1) dz + \frac{h^{k+2}}{k!} \int_{k-2}^{k-1} \int_{k-2}^{k-1} \left[ c(x_{i-k+1} + \right. \\ & \quad \left. + th, y_{j-k+1} + zh) - b_y(x_{i-k+1} + th, y_{j-k+1} + zh) - a_x(x_{i-k+1} + \right. \\ & \quad \left. + th, y_{j-k+1} + zh) \right] \frac{\partial^k u(x_{i-k+1} + th, \tilde{y}_j^{(3)})}{\partial y^k} z(z-1) \dots (z-k+1) dz dt + \\ & + \sum_{m=0}^{k-1} \frac{h^{k+2}}{m! k! (k-m+1)!} \int_{k-2}^{k-1} \int_{k-2}^{k-1} [c(x_{i-k+1} + th, y_{j-m}) - b_y(x_{i-k+1} + th, y_{j-m}) - \\ & - a_x(x_{i-k+1} + th, y_{j-m})] \frac{\partial^k u(\tilde{x}_i^{(3)}, y_{j-m})}{\partial x^k} \frac{z(z-1) \dots (z-k+1)}{z-k+m+1} \times \\ & \quad \times t(t-1) \dots (t-k+1) dz dt, \\ & x_{i-1} < \tilde{x}_i^{(1)}, \tilde{x}_i^{(2)}, \tilde{x}_i^{(3)} < x_i, y_{j-1} < \tilde{y}_j^{(1)}, \tilde{y}_j^{(2)}, \tilde{y}_j^{(3)} < y_j. \end{aligned}$$

Запишем систему (4) в матричной форме

$$\begin{aligned} P_{ij} \Gamma_{ij} &= Q_{i-1j} \Gamma_{i-1j} + \sum_{n=1}^{k-1} F_{i-nj} \Gamma_{i-nj} + R_{ij}, \\ \Gamma_{nj} &= \Phi_{nj} \quad (n = 1, 2, \dots, k-2), \quad \Gamma_{0j} = 0, \\ i &= k-1, k, \dots, N, \quad j = k-1, k, \dots, M, \end{aligned} \tag{5}$$

ГДЕ

$$P_{ij} =$$

$$= \begin{bmatrix} \alpha_{ik-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\alpha_{ik-1}^* & \alpha_{ik} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -h\eta_{ik-1}^{(0,2)} & -\alpha_{ik}^* & \alpha_{ik+1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -h\eta_{ik-1}^{(0,k-1)} & -h\eta_{ik}^{(0,k-2)} & -h\eta_{ik+1}^{(0,k-3)} & \alpha_{i2k-2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -h\eta_{ik}^{(0,k-1)} & -h\eta_{ik+1}^{(0,k-2)} & -\alpha_{i2k-2}^* & \alpha_{i2k-1} & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -h\eta_{ij-k+1}^{(0,k-1)} & \alpha_{ij} \end{bmatrix},$$

$$Q_{i-1j} =$$

$$= \begin{bmatrix} \beta_{i-1k-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\beta_{i-1k-1}^* & \beta_{i-1k} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ h\eta_{i-1k-1}^{(1,2)} & -\beta_{i-1k}^* & \beta_{i-1k+1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ h\eta_{i-1k-1}^{(1,k-1)} & h\eta_{i-1k}^{(1,k-2)} & h\eta_{i-1k+1}^{(1,k-3)} & \beta_{i-12k-2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h\eta_{i-1k}^{(1,k-1)} & h\eta_{i-1k+1}^{(1,k-2)} & -\beta_{i-12k-2}^* & \beta_{i-12k-1} & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & h\eta_{i-1j-k+1} & \beta_{i-1j} \end{bmatrix},$$

$$F_{i-nj}^{(n)} = \begin{bmatrix} h \xi_{i-nk-1}^{(n,0)} & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ h \xi_{i-nk-1}^{(n,1)} & h \xi_{i-nk}^{(n,0)} & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ h \xi_{i-nk-1}^{(n,k-1)} & h \xi_{i-nk}^{(n,k-2)} & \dots & h \xi_{i-n2k-2}^{(n,0)} & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & h \xi_{i-nk}^{(n,k-1)} & \dots & h \xi_{i-n2k-2}^{(n,1)} & \dots & h \xi_{i-n2k-1}^{(n,0)} & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & h \xi_{i-nj-k+1}^{(n,k-1)} & \dots & h \xi_{i-nj}^{(n,0)} \end{bmatrix}$$

$$R_{ij} = \begin{bmatrix} r_{ik-1} + \alpha_{ik-2}^* \delta_{ik-2} + \beta_{i-1k-2}^* \delta_{i-1k-2} + A_1^* \\ r_{ik} + A_2^* \\ r_{ik+1} + A_3^* \\ \dots \\ r_{i2k-2} + A_{k-1}^* \\ r_{i2k-1} \\ \dots \\ r_{ij} \end{bmatrix},$$

где

$$A_1^* = h \sum_{n=0}^1 \sum_{m=2}^{2-} \eta_{i-nk-1-m}^{(n,m)} \delta_{i-nk-1-m} +$$

$$+ h \sum_{n=2}^{k-2} \sum_{m=2}^{k-2} \xi_{i-nk-1-m}^{(n,m)} \delta_{i-nk-1-m},$$

$$A_s^* = h \sum_{n=0}^1 \sum_{m=s}^{k-1} \eta_{i-nm-1}^{(n,m)} + h \sum_{n=2}^{k-2} \sum_{m=s}^{k-1} \xi_{i-nm-1}^{(n,m)} \delta_{i-nm-1}$$

$$(s = 2, 3, \dots, k-1),$$

$$\Gamma_{ij} = \begin{bmatrix} \gamma_{ik-1} \\ \gamma_{ik} \\ \gamma_{ik+1} \\ \dots \\ \gamma_{ij-1} \\ \gamma_{ij} \end{bmatrix}, \quad \Phi_{ij} = \begin{bmatrix} \delta_{nk-1} \\ \delta_{nk} \\ \delta_{nk+1} \\ \dots \\ \delta_{nj-1} \\ \delta_{nj} \end{bmatrix},$$

$$n = 1, 2, \dots, k-2.$$

Приведем систему (5) к виду

$$\Gamma_{ij} = P_{ij}^{-1} Q_{i-1j} \Gamma_{i-1j} + \sum_{n=2}^{k-1} P_{ij}^{-1} F_{i-nj}^{(n)} \Gamma_{i-nj} + P_{ij}^{-1} R_{ij},$$

$$\Gamma_{nj} = \Phi_{nj} \quad (n = 1, 2, \dots, k-2), \quad \Gamma_{0j} = 0,$$

$$i = k-1, k, \dots, N, \quad j = k-1, k, \dots, M, \quad (6)$$

где

$$\begin{aligned}
 P_{ij}^{-1} &= \{g_{mp}\}, \quad m, p = 1, 2, \dots, j-k+2; \\
 g_{mp} &\equiv 0 \quad (m < p); \quad g_{mm} = \frac{1}{\alpha_{im+k-2}}; \\
 g_{mm-1} &= \frac{\alpha_{im+k-3}^*}{\alpha_{im+k-3}} g_{mi}; \\
 g_{mm-2} &= \frac{\alpha_{im+k-4}^* g_{mm-1} + h \eta_{im+k-4}^{(0,2)} g_{mn}}{\alpha_{im+k-4}}; \\
 &\dots; \\
 g_{mm-k+1} &= \frac{\alpha_{im-1}^* g_{mm-k+2} + h \sum_{v=2}^{k-1} \eta_{im-1}^{(0,v)} g_{mm-k+v+1}}{\alpha_{im-1}}; \\
 g_{mm-k} &= \frac{\alpha_{im-2}^* g_{mm-k+1} + h \sum_{v=2}^{k-1} \eta_{im-2}^{(0,v)} g_{mm-k+v+1}}{\alpha_{im-2}}; \\
 &\dots; \\
 g_{m1} &= \frac{\alpha_{ik-1}^* g_{m2} + h \sum_{v=2}^{k-1} \eta_{ik-1}^{(0,v)} g_{mm+v+1}}{\alpha_{ik-1}}.
 \end{aligned}$$

Переходя в системе (6) к оценкам по норме (имеем в виду норму I), получим рекуррентные неравенства

$$\begin{aligned}
 V_{ij} &\leq \|P_{ij}^{-1} Q_{ij}\| V_{i-1j} + \sum_{n=2}^{k-1} \|P_{ij}^{-1} F_{i-nj}^{(n)}\| V_{i-nj} + \\
 &+ \|P_{ij}^{-1} R_{ij}\|, \quad \Gamma_{nj} = \Phi_{nj} \quad (n = 1, 2, \dots, k-2), \quad \Gamma_{0j} = 0, \quad (7) \\
 &i = k-1, k, \dots, N, \quad j = k-1, k, \dots, M,
 \end{aligned}$$

где

$$V_{ij} = \max_{k-1 < p < j} |y_{ip}| \quad (i = k-1, k, \dots, N).$$

Прежде чем приступить к оценке норм матриц  $P_{ij}^{-1} Q_{ij}$ ,  $P_{ij}^{-1} F_{i-nj}^{(n)}$  и вектора-столбца  $P_{ij}^{-1} R_{ij}$ , введем следующие обозначения:

$$\lambda_{ij} = \frac{|\alpha_{ij}^*| + h \sum_{v=2}^{k-1} |\eta_{ij}^{(0,v)}|}{\alpha_{ij}}, \quad \lambda_{(ij)} = \max_{k-1 < m < i} \prod_{p=k-1}^i \lambda_{mp},$$

$$\Theta_{ij}^{(1)} = \max_{m, p} \frac{1}{h} |\beta_{mp} - 1|, \quad k-1 \leq p \leq j, \quad k-1 \leq m \leq i,$$

$$\Theta_{ij}^{(2)} = \max_{m, p, v} \frac{1}{h} |\beta_{mp} \eta_{m+1p}^{(0,v)} + \alpha_{m+1p} \eta_{mp}^{(1,v)}| \quad (v = 2, 3, \dots, k-1).$$

$$\Theta_{ij}^{(3)} = \max_{m, p} \frac{1}{h^2} |\beta_{mp} \alpha_{m+1p}^* - \beta_{mp}^* \alpha_{m+1p}|,$$

$$\Theta_{ij}^{(4)} = \max_{m, p, v} |\xi_{mp}^{(v, 0)}|,$$

$$\Theta_{ij}^{(5)} = \max_{m, p, v} \frac{1}{h} |\xi_{m-vp}^{(0, v)} \alpha_{mp}^* + \xi_{m-vp} \alpha_{mp}|,$$

$$\Theta_{ij}^{(6)} = \max_{m, p, v, n} \frac{1}{h} |\xi_{m-vp}^{(n, v)} \alpha_{mp}^* + \xi_{m-vp}^{(n, v)} \alpha_{mp}|$$

$$(n = 2, 3, \dots, k-1),$$

$$r_{(ij)} = \max_{m, p} \frac{1}{h^{k+2}} |r_{mp}|,$$

$$\begin{aligned} \delta_{ij} = \max_{m, p, l} \frac{1}{h} & \left\{ |\beta_{mk-2} \delta_{mk-2} + \alpha_{m+1k-2}^* \delta_{m+1k-2}| + \right. \\ & + h \sum_{l=2}^{k-1} \left| \sum_{n=0}^{k-1} \sum_{v=l}^{k-1} \eta_{m-nl-1}^{(n, l)} \delta_{m-nl-1} \right| + \\ & \left. + h \sum_{l=2}^{k-1} \left| \sum_{n=2}^{k-1} \sum_{v=l}^{k-1} \xi_{m-nl-1}^{(n, l)} \delta_{m-nl-1} \right| \right\}, \end{aligned}$$

$$\bar{\delta}_{(ij)} = \max_{v, p} |\delta_{vp}| \quad (v = 1, 2, \dots, k-2),$$

$$\bar{\lambda}_{(ij)} = \frac{1 + h [\tau_{(ij)} + (k-2) \eta_{(ij)}]}{\alpha_{(ij)}},$$

$$0 < \alpha_{(ij)} = \min_{p, m} \alpha_{mp}, \quad \lambda_{(ij)}^* = \bar{\lambda}_{(ij)}^{i-k},$$

$$\tau_{(ij)} = \Theta_{ij}^{(1)} + (y_j - (k-1)h) \frac{\lambda_{(ij)}}{\alpha_{(ij)}} [\Theta_{ij}^{(3)} + (k-2) \Theta_{ij}^{(2)}],$$

$$\eta_{(ij)} = \Theta_{ij}^{(4)} + (y_j - (k-1)h) \frac{\lambda_{(ij)}}{\alpha_{(ij)}} [\Theta_{ij}^{(5)} + (k-2) \Theta_{ij}^{(6)}].$$

Теперь оценим по норме матрицы  $P_{ij}^{-1} Q_{i-1j}$ ,  $P_{ij}^{-1} F_{i-nj}^{(n)}$  и вектор-столбец  $P_{ij}^{-1} R_{ij}$ :

$$\|P_{ij}^{-1} Q_{ij}\| \leq \frac{1 + h \tau_{(ij)}}{\alpha_{(ij)}}, \quad \|P_{ij}^{-1} F_{i-nj}^{(n)}\| \leq h \frac{\eta_{(ij)}}{\alpha_{(ij)}},$$

$$\|P_{ij}^{-1} R_{ij}\| \leq (y_j - (k-1)h) \frac{\lambda_{(ij)}}{\alpha_{(ij)}} h^{k+1} r_{(ij)} + \delta_{(ij)} \lambda_{(ij)} \frac{h}{\alpha_{(ij)}} = r_{(ij)}^*.$$

Таким образом, рекуррентные неравенства (7) можно привести к виду

$$V_{ij} \leq \frac{1}{\alpha_{(ij)}} \left[ (1 + h \tau_{(ij)}) V_{i-1j} + h \eta_{(ij)} \sum_{n=2}^{k-1} V_{i-nj} \right] + r_{(ij)}^*.$$



З. И. БЕЛЬСКИЙ

### ТРИ-ТКАНИ С ЧЕБЫШЕВСКИМИ И ГЕОДЕЗИЧЕСКИМИ СЕТЯМИ ГЕССЕ

#### § 1. ЗАДАНИЕ ТРИ-ТКАНИ И ЕЕ СЕТИ ГЕССЕ

1. Пусть в  $V_2$  задана три-ткань полями трех различных псевдовекторов  $a, b, c$ , вообще говоря, комплексных. Пронормируем псевдовектор  $a$  так, чтобы он стал единичным. После этого можно пронормировать  $b$  и  $c$  так, что они выразятся через  $a$  и  $\tilde{a}^*$  следующим образом:

$$b = \beta a + \tilde{a}, \quad c = \gamma a + \tilde{a}. \quad (1.1)$$

Найдем для три-ткани  $(a, b, c)$  присоединенную к ней три-ткань  $(a', b', c')$ . Псевдовекторы  $a', b', c'$  однозначно определяются условиями

$$a', a \dot{\perp} b, c; \quad b', b \dot{\perp} c, a; \quad c', c \dot{\perp} a, b.$$

Легко заметить из (1.1), что  $b = (\beta - \gamma)a + c$ ; следовательно,  $b' = (\gamma - \beta)a + c = (2\gamma - \beta)a + \tilde{a}$  ([1], § 17). Аналогично получим  $c' = (\beta - \gamma)a + b = (2\beta - \gamma)a + \tilde{a}$ . Далее,  $a = \frac{b-c}{\beta-\gamma} \parallel b-c$ , следовательно,

$$a' \parallel b + c = (\beta + \gamma)a + 2\tilde{a}.$$

Итак, можно считать, что

$$a' = \frac{\beta + \gamma}{2} a + \tilde{a}, \quad b' = (2\gamma - \beta)a + \tilde{a}, \quad c' = (2\beta - \gamma)a + \tilde{a}. \quad (1.2)$$

2. Пусть направляющими векторами сети Гессе три-ткани  $(a, b, c)$  будут  $p = \mu a + \tilde{a}$  и  $q = \nu a + \tilde{a}$ . С проективной точки зрения, совокупность всех векторов вида  $\xi a + \tilde{a}$  есть форма первой степени, а число  $\xi$  есть проективная координата соответствующего вектора. Так как  $p$  и  $q$  — двойные элементы инволюции  $(bb')$   $(cc')$ , то их проективные координаты  $\mu$  и  $\nu$ , согласно [3] (§ 11, (46)), удовлетворяют системе уравнений

$$\beta(2\gamma - \beta) + \mu\nu = \gamma(\mu + \nu),$$

$$\gamma(2\beta - \gamma) + \mu\nu = \beta(\mu + \nu).$$

Отсюда  $\mu + \nu = \beta + \gamma$ ,  $\mu\nu = \beta^2 - \beta\gamma + \gamma^2$ ; значит,  $\mu$  и  $\nu$  являются корнями квадратного уравнения

$$\zeta^2 - (\beta + \gamma)\zeta + \beta^2 - \beta\gamma + \gamma^2 = 0.$$

\* )  $\tilde{a}$  — вектор, дополнительный к  $a$  ([2], стр. 23).

Итак,

$$\begin{aligned} p &= \left( \frac{\beta + \gamma}{2} + i \frac{\sqrt{3}(\beta - \gamma)}{2} \right) a + \tilde{a}, \\ q &= \left( \frac{\beta + \gamma}{2} - i \frac{\sqrt{3}(\beta - \gamma)}{2} \right) a + \tilde{a}, \end{aligned} \quad (1.3)$$

где  $i = \sqrt{-1}$ .

Легко проверить, что  $p$  и  $q$  из (1.3) действительно разделяют гармонически  $a$  и  $a'$ ,  $b$  и  $b'$ ,  $c$  и  $c'$ . Следовательно, всегда, т. е. при любом  $a$  (как действительном, так и комплексном), направляющие векторы  $p$  и  $q$  сети Гессе три-ткани ( $a, b, c$ ) выражаются формулами (1.3).

Если все три семейства линий три-ткани действительные, то ее присоединенная три-ткань также действительная, а сеть Гессе комплексно-сопряженная.

Если  $a$  — действительное, то  $p$  и  $q$  действительные тогда и только тогда, когда  $\beta + \gamma$  — действительное, а  $\beta - \gamma$  — чисто мнимое, что возможно тогда и только тогда, когда  $\beta$  и  $\gamma$  — комплексно-сопряженные. В этом и только в этом случае  $b$  и  $c$  — комплексно-сопряженные.

Легко проверить, что если  $a$  — комплексное, то  $b, c, b', c', p$  и  $q$  — непременно комплексные.

Таким образом, для того чтобы три-ткань имела действительную сеть Гессе, необходимо и достаточно, чтобы она состояла из одного действительного и двух комплексно-сопряженных семейств линий. Присоединенная три-ткань в этом и только в этом случае также имеет одно действительное и два комплексно-сопряженных семейства линий.

3. Примем  $\mu$  и  $\nu$  за новые независимые параметры. Согласно (1.3),

$$\begin{aligned} \beta &= \frac{\mu + \nu}{2} - i \frac{\mu - \nu}{2\sqrt{3}}, & \gamma &= \frac{\mu + \nu}{2} + i \frac{\mu - \nu}{2\sqrt{3}}, \\ a' &= \frac{\mu + \nu}{2} a + \tilde{a}, \end{aligned} \quad (1.4)$$

$$p_0 = \frac{1}{\sqrt{1 + \mu^2}} (\mu a + \tilde{a}), \quad q_0 = \frac{1}{\sqrt{1 + \nu^2}} (\nu a + \tilde{a}), \quad (1.5)$$

где  $p_0$  и  $q_0$  — единичные векторы направлений сети Гессе.

Итак, три-ткань вполне определяется заданием одного единичного векторного поля  $a$  и двух скалярных полей  $\mu$  и  $\nu$ , а ее сеть Гессе выражается через  $a, \mu, \nu$  формулами (1.5).

В дальнейшем будем считать, что  $a, \mu$  и  $\nu$  — действительные.

## § 2. ТРИ-ТКАНИ С ЧЕБЫШЕВСКИМИ СЕТЯМИ ГЕССЕ

1. Сеть Гессе ( $p, q$ ) три-ткани ( $a, \mu, \nu$ ) является чебышевской тогда и только тогда, когда  $p_{0i}^i q^k = 0$ ,  $q_{0i}^i p^k = 0$ , или в прямых обозначениях

$$p'_0 q = 0, \quad q'_0 p = 0. \quad (2.1)$$

Так как ([4], § 6)  $p'_0 q = k_p q \cdot \tilde{p}_0$ , где  $k_p$  — трансверсальный вектор единичного векторного поля  $p_0$ , то система уравнений (2.1) равносильна следующей:

$$k_p q = 0 \text{ и } k_l p = 0. \quad (2.2)$$

Из (1.5) следует, что  $\mu = \widehat{\text{ctg}} ap$ ,  $\nu = \widehat{\text{ctg}} aq$ . Следовательно ([2], § 52),

$$k_p = k_a - \nabla \text{arctg } \mu, \quad k_q = k_a - \nabla \text{arctg } \nu. \quad (2.3)$$

Подставив выражения векторов  $k_p$  и  $k_q$  в (2.2), в силу (6) и (71) из [4] получим

$$(\text{arctg } \mu)' (\nu a + \tilde{a}) - \nu \kappa_a - \kappa_{\tilde{a}} = 0, \quad (2.4)$$

$$(\text{arctg } \nu)' (\mu a + \tilde{a}) - \mu \kappa_a - \kappa_{\tilde{a}} = 0, \quad (2.5)$$

где  $\kappa_a$  и  $\kappa_{\tilde{a}}$  — геодезические кривизны линий тока векторов  $a$  и  $\tilde{a}$  соответственно.

Итак, для того чтобы три-кань  $(a, \mu, \nu)$  имела чебышевскую сеть Гессе, необходимо и достаточно, чтобы параметры  $\mu$  и  $\nu$  удовлетворяли системе дифференциальных уравнений (2.4), (2.5).

Очевидно, что полученная система равносильна следующей:

$$\nu [(\text{arctg } \mu)' a - \kappa_a] = \kappa_{\tilde{a}} - (\text{arctg } \mu)' \tilde{a}, \quad (2.6)$$

$$\mu [(\text{arctg } \nu)' a - \kappa_a] = \kappa_{\tilde{a}} - (\text{arctg } \nu)' \tilde{a}.$$

2. Возможны три случая.

Случай 1 (общий):

$$(\text{arctg } \mu)' a - \kappa_a \neq 0, \quad (\text{arctg } \nu)' a - \kappa_a \neq 0.$$

Из (2.6) получим

$$\mu = \frac{\kappa_{\tilde{a}} - (\text{arctg } \nu)' \tilde{a}}{(\text{arctg } \nu)' a - \kappa_a}, \quad \nu = \frac{\kappa_{\tilde{a}} - (\text{arctg } \mu)' \tilde{a}}{(\text{arctg } \mu)' a - \kappa_a}. \quad (2.7)$$

Исключив  $\mu$  или  $\nu$ , получим дифференциальное уравнение, которому должны удовлетворять как  $\mu$ , так и  $\nu$ :

$$\left( \text{arctg } \frac{(\text{arctg } \varphi)' \tilde{a} - \kappa_{\tilde{a}}}{(\text{arctg } \varphi)' a - \kappa_a} \right)' (\varphi a + \tilde{a}) + \varphi \kappa_a + \kappa_{\tilde{a}} = 0, \quad (2.8)$$

где  $\varphi$  — неизвестная функция.

Итак, в этом (общем) случае в качестве  $\mu$  можно взять любое решение дифференциального уравнения (2.8) и выразить  $\nu$  через  $\mu$  согласно второй формуле (2.7); можно проверить, что тогда и  $\nu$  будет решением дифференциального уравнения (2.8).

Случай 2:

$$(\text{arctg } \mu)' a - \kappa_a = 0, \quad (\text{arctg } \nu)' a - \kappa_a \neq 0, \quad (2.9')$$

или

$$(\text{arctg } \mu)' a - \kappa_a \neq 0, \quad (\text{arctg } \nu)' a - \kappa_a = 0. \quad (2.9'')$$

Не нарушая общности, допустим, что выполнены условия (2.9'). Тогда в силу первого уравнения (2.6) также  $\kappa_{\tilde{a}} - (\text{arctg } \mu)' \tilde{a} = 0$ . Итак, в этом случае функция  $\mu$  удовлетворяет системе двух дифференциальных уравнений:

$$(\text{arctg } \mu)' a = \kappa_a, \quad (\text{arctg } \mu)' \tilde{a} = \kappa_{\tilde{a}}.$$

Эта система двух скалярных уравнений равносильна одному векторному

$$\nabla \operatorname{arctg} \mu = \kappa_a \cdot a + \kappa_{\tilde{a}} \cdot \tilde{a} = k_a. \quad (2.10)$$

Как известно ([4], (82)),

$$\operatorname{rot} k_a = -K,$$

где  $K$  — гауссова кривизна поверхности. Отсюда и из (2.10) следует, что  $K = 0$ , т. е. рассматриваемый случай имеет место только на торах.

Введем на плоскости прямоугольную декартову систему координат  $x, y$  с базисом  $\{i, j\}$ . Пусть  $a = \{\cos \alpha, \sin \alpha\}$ , тогда векторное дифференциальное уравнение (2.10) будет равносильно следующему:

$$d \operatorname{arctg} \mu = d\alpha.$$

Отсюда имеем

$$\mu = \operatorname{tg}(\alpha + \alpha_0), \quad (2.11)$$

где  $\alpha_0$  — произвольная постоянная.

Подставляя выражение  $\mu$  из (2.11) во второе уравнение системы (2.6), получим

$$\operatorname{tg}(\alpha + \alpha_0) [(\operatorname{arctg} v)' a - \kappa_a] + (\operatorname{arctg} v)' \tilde{a} - \kappa_{\tilde{a}} = 0.$$

Обозначим  $\operatorname{arctg} v = \psi$ . Так как  $\psi' a = a \nabla \psi = \cos \alpha \partial_x \psi + \sin \alpha \partial_y \psi$  и  $\psi' \tilde{a} = \tilde{a} \nabla \psi = -\sin \alpha \partial_x \psi + \cos \alpha \partial_y \psi$ , то последнее уравнение после небольших упрощений запишется так:

$$\partial_x(\psi - \alpha) \sin \alpha_0 + \partial_y(\psi - \alpha) \cos \alpha_0 = 0.$$

Отсюда легко получим

$$\psi - \alpha = \eta(x - \operatorname{tg} \alpha_0 \cdot y),$$

где  $\eta$  — произвольная дифференцируемая функция. Заменяя в последнем равенстве функцию  $\psi$  ее выражением через  $v$ , получим окончательно

$$v = \operatorname{tg}[\alpha + \eta(x - \operatorname{tg} \alpha_0 \cdot y)]. \quad (2.12)$$

Точно так же из условий (2.9') получим

$$v = \operatorname{tg}(\alpha + \alpha_0), \quad \mu = \operatorname{tg}[\alpha + \eta(x - \operatorname{tg} \alpha_0 \cdot y)]. \quad (2.13)$$

Легко проверить, что функция  $v$  (2.12) удовлетворяет дифференциальному уравнению (2.8), а функция  $\mu$  (2.11) выражается через  $v$  по формуле (2.7). Значит, случай 2 есть частный случай более общего случая 1.

Функция (2.11) есть частный случай (2.12) при  $\eta \equiv \alpha_0$ . Так как

$$\widehat{ia} = \alpha, \quad \widehat{i\tilde{a}} = \alpha + \frac{\pi}{2}, \quad \widehat{p\tilde{a}} = \alpha + \alpha_0,$$

то

$$\widehat{ip} = \widehat{i\tilde{a}} - \widehat{p\tilde{a}} = \frac{\pi}{2} - \alpha_0 = \operatorname{const}.$$

Итак, вектор  $p$  образует постоянный угол с осью абсцисс; значит,  $p$ -линии — параллельные прямые, а чебышевская сеть Гессе  $(p, q)$  оказывается также полугеодезической.

Случай 3:

$$(\operatorname{arctg} \mu)' a - \kappa_a = 0, \quad (\operatorname{arctg} v)' a - \kappa_a \neq 0.$$

Аналогично предыдущему получим, что в этом случае параметры  $\mu$  и  $\nu$  удовлетворяют одному и тому же дифференциальному уравнению

$$\nabla \operatorname{arctg} \varphi = k_a,$$

и наоборот, всякие два различные решения этого дифференциального уравнения могут служить параметрами  $\mu$  и  $\nu$  три-ткани  $(a, \mu, \nu)$  с чебышевской сетью Гессе. Очевидно,

$$\mu = \operatorname{tg}(\alpha + \alpha_0), \quad \nu = \operatorname{tg}(\alpha + \alpha'_0); \quad \alpha_0 \neq \alpha'_0. \quad (2.14)$$

В этом (и только в этом) случае как  $p$ -линии, так и  $q$ -линии являются параллельными прямыми и сеть Гессе три-ткани  $(a, \mu, \nu)$  оказывается декартовой.

Очевидно, последнее выражение для  $\nu$  получается из (2.12) при  $\eta \equiv \alpha'_0$ .

Случай 3 можно считать предельным случаем общего случая.

Итак, три-ткань  $(a, \mu, \nu)$  имеет чебышевскую сеть Гессе тогда и только тогда, когда один из ее параметров, например  $\mu$ , является решением дифференциального уравнения (2.8), а другой параметр,  $\nu$  выражается через  $\mu$  формулой (2.7); тогда и  $\nu$  удовлетворяет дифференциальному уравнению (2.8).

Если на плоскости параметры  $\mu$  и  $\nu$  выражаются формулами (2.11), (2.12) или (2.13), то чебышевская сеть Гессе оказывается полугеодезической, а если формулами (2.14), то даже декартовой.

3. Выясним условия, когда  $\nu = -\mu$ . Этот случай замечателен тем, что векторы  $p$  и  $q$  симметричны относительно вектора  $\tilde{a}$ ; следовательно, ортогональная сеть  $(a, \tilde{a})$  есть биссекторная сеть сети Гессе, а потому  $a, \tilde{a} \perp p, q$  и  $\tilde{a} = a'$ . Кроме того, так как из  $\mu + \nu = 0$  следует  $\beta + \gamma = 0$  (см. п. 2), то в этом случае сеть  $(a, \tilde{a})$  оказывается также биссекторной сетью каждой из комплексно-сопряженных сетей  $(b, c)$  и  $(b', c')$ . Система уравнений (2.4), (2.5) после небольших преобразований принимает вид

$$(\operatorname{arctg} \mu)' \tilde{a} = -\mu \kappa_a, \quad (2.15)$$

$$(\operatorname{arctg} \mu)' a = -\frac{\kappa_{\tilde{a}}}{\mu}.$$

Система двух скалярных равенств (2.15) равносильна следующему векторному:

$$\nabla \operatorname{arctg} \mu = -\frac{\kappa_{\tilde{a}}}{\mu} \cdot a - \mu \kappa_a \cdot \tilde{a}. \quad (2.16)$$

Так как в левой части равенства мы имеем градиент, то условие интегрируемости векторного дифференциального уравнения (2.16) заключается в том, что ротация правой части должна равняться нулю.

Как известно,

$$\operatorname{rot} \lambda a = \lambda \operatorname{rot} a - \lambda' \tilde{a},$$

поэтому

$$\mu \kappa_a \kappa_{\tilde{a}} + (\mu \kappa_a)' a + \frac{\kappa_{\tilde{a}}}{\mu} \kappa_a - \left( \frac{\kappa_{\tilde{a}}}{\mu} \right)' \tilde{a} = 0.$$

Раскрыв скобки и применив (2.15), получим после небольших упрощений

$$\mu^2 (\kappa'_a a - \kappa_a \kappa_{\tilde{a}}) - (\kappa'_{\tilde{a}} \tilde{a} + \kappa_a \kappa_{\tilde{a}}) = 0. \quad (2.17)$$

Возможны четыре случая.

Случай 1:

$$\kappa'_a a - \kappa_a \kappa_{\tilde{a}} = 0, \quad \kappa'_{\tilde{a}} \tilde{a} + \kappa_a \kappa_{\tilde{a}} \neq 0.$$

Система (2.15) несовместна.

Случай 2:

$$\kappa'_a a - \kappa_a \kappa_{\tilde{a}} \neq 0, \quad \kappa'_{\tilde{a}} \tilde{a} + \kappa_a \kappa_{\tilde{a}} = 0.$$

Уравнение (2.17) допускает лишь одно решение:  $\mu = 0$ . При этом значении  $\mu$  второе уравнение (2.15) не имеет смысла при  $\kappa_{\tilde{a}} \neq 0$ , а в противном случае сеть Гессе вырождается.

Случай 3:

$$\kappa'_a a - \kappa_a \kappa_{\tilde{a}} \neq 0, \quad \kappa'_{\tilde{a}} \tilde{a} + \kappa_a \kappa_{\tilde{a}} \neq 0.$$

Из (2.17) получим

$$\mu = \pm \sqrt{\frac{\kappa'_{\tilde{a}} \tilde{a} + \kappa_a \kappa_{\tilde{a}}}{\kappa'_a a - \kappa_a \kappa_{\tilde{a}}}}. \quad (2.18)$$

Подставив это выражение в (2.16), получим

$$\begin{aligned} \nabla \arctg \sqrt{\frac{\kappa'_{\tilde{a}} \tilde{a} + \kappa_a \kappa_{\tilde{a}}}{\kappa'_a a - \kappa_a \kappa_{\tilde{a}}}} &= - \sqrt{\frac{\kappa'_a a - \kappa_a \kappa_{\tilde{a}}}{\kappa'_{\tilde{a}} \tilde{a} + \kappa_a \kappa_{\tilde{a}}}} \times \\ &\times \kappa'_{\tilde{a}} \tilde{a} - \sqrt{\frac{\kappa'_{\tilde{a}} \tilde{a} + \kappa_a \kappa_{\tilde{a}}}{\kappa'_a a - \kappa_a \kappa_{\tilde{a}}}} \kappa_a \tilde{a}. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Таким образом, если геодезические кривизны  $\kappa_a$  и  $\kappa_{\tilde{a}}$  удовлетворяют векторному дифференциальному уравнению (2.19) и параметр  $\mu$  выражается через них формулой (2.18), то сеть Гессе три-ткани  $(a, \mu, -\mu)$  чебышевская.

Случай 4:

$$\begin{cases} \kappa'_a a - \kappa_a \kappa_{\tilde{a}} = 0, \\ \kappa'_{\tilde{a}} \tilde{a} + \kappa_a \kappa_{\tilde{a}} = 0. \end{cases} \quad (2.20)$$

Равенство (2.17) обращается в тождество. Система уравнений (2.15) вполне интегрируема. В этом случае существует однопараметрическое семейство три-тканей  $(a, \mu, -\mu)$  с чебышевскими сетями Гессе, причем все сети Гессе имеют общую биссекторную сеть  $(a, \tilde{a})$ .

Легко заметить, что система (2.20) есть частный случай системы

$$\begin{aligned} \kappa'_a a &= - \frac{m+2}{m} \kappa_a \kappa_{\tilde{a}}, \\ \kappa'_{\tilde{a}} \tilde{a} &= \frac{m+2}{m} \kappa_a \kappa_{\tilde{a}} \end{aligned} \quad \text{при } m = -1. \quad (2.21)$$

Уравнениям (2.21) удовлетворяют геодезические кривизны  $\kappa_a$  и  $\kappa_{\tilde{a}}$  сетевых кривых любой сети  $L_m(a, \tilde{a})$  [8]. Следовательно, биссекторная сеть  $(a, \tilde{a})$

сети Гессе есть  $L_{-1}$ -сеть. Примем ее за координатную, тогда метрическая форма поверхности приведет к виду

$$ds^2 = [U(u) + V(v)]^{-1} (du^2 + dv^2). \quad (2.22)$$

Пусть  $a$ -линии будут  $u$ -линиями,  $\tilde{a}$ -линии будут  $v$ -линиями, тогда

$$a_i = \left\{ \frac{1}{\sqrt{U+V}}, 0 \right\}, \quad \tilde{a}_i = \left\{ 0, \frac{1}{\sqrt{U+V}} \right\};$$

$$\kappa_a = \frac{V'}{2\sqrt{U+V}}, \quad \kappa_{\tilde{a}} = -\frac{U'}{2\sqrt{U+V}},$$

и уравнение (2.16) приведет к следующей системе:

$$\partial_u \ln(1 + \mu^2) = \partial_u \ln(U + V), \quad \partial_v \ln \frac{\mu^2}{1 + \mu^2} = -\partial_v \ln(U + V). \quad (2.23)$$

В силу (2.20) эта система вполне интегрируема. Из первого уравнения получаем

$$1 + \mu^2 = \frac{U + V}{\psi(v)}; \quad \mu^2 = \frac{U + V - \psi(v)}{\psi(v)}.$$

Подставив полученные выражения во второе уравнение, будем иметь

$$\partial_v \ln \frac{U + V - \psi(v)}{U + V} = -\partial_v \ln(U + V),$$

или, что то же,  $\partial_v \ln[U + V - \psi(v)] = 0$ . Отсюда следует, что  $V - \psi(v) = -C$ . Итак, окончательно

$$\mu = \pm \sqrt{\frac{U - C}{V + C}}. \quad (2.24)$$

Этот результат мы получили, приняв  $a$ -линии за  $u$ -линии. Если же  $a$ -линии будут  $v$ -линиями, а  $\tilde{a}$ -линии будут  $u$ -линиями, то во всех выкладках  $a$  и  $\tilde{a}$ , а также  $u$  и  $v$  поменяются местами, и мы придем к такому результату:

$$\mu = \pm \sqrt{\frac{V + C}{U - C}}. \quad (2.25)$$

Сравнив (2.25) с (2.24), увидим, что значения  $\mu$ , полученные в первом и втором случаях, взаимно обратны. Нетрудно проверить, что три-ткань  $\left(\tilde{a}, \frac{1}{\mu}, -\frac{1}{\mu}\right)$  является присоединенной к три-ткани  $(a, \mu, -\mu)$ . Следовательно, во втором случае мы получаем три-ткань, присоединенную к первой, а сеть Гессе у них одна и та же.

Из аналога теоремы Я. С. Дубнова ([9], § 55) следует, что в этом случае сети Гессе являются также конформно-геодезическими.

Итак, на каждой поверхности (2.22) существует однопараметрическое семейство три-тканей вида  $(a, \mu, -\mu)$ , где  $a$  — орт касательной к  $u$ -линии, а  $\mu$  выражается формулой (2.24). Присоединенные три-ткани имеют вид  $\left(\tilde{a}, \frac{1}{\mu}, -\frac{1}{\mu}\right)$ . Все эти три-ткани имеют чебышевские сети Гессе; для всех сетей Гессе координатная сеть (сеть  $L_{-1}$ ) служит биссекторной сетью.

4. Применим полученные результаты к поверхности, изометричной поверхности вращения. На такой поверхности сеть меридианов и параллелей является сетью  $L_m$  для любого целого  $m$ . Отнеся сеть меридианов и параллелей к изотермическим параметрам, мы приведем метрическую форму поверхности к виду

$$ds^2 = e^{2\sigma(u)} (du^2 + dv^2), \quad (2.26)$$

где  $e^{\sigma(u)}$  — радиус параллели. Итак,  $V = 0$ ,  $U = e^{-2\sigma}$ . Пусть вектор  $a$  направлен по касательной к меридиану, тогда, согласно (2.24),

$$\mu = \pm \sqrt{c^2 e^{-2\sigma} - 1}, \quad c^2 = \frac{1}{C}.$$

Таким образом, всякая три-ткань  $(a, \pm \sqrt{c^2 e^{-2\sigma} - 1}, \mp \sqrt{c^2 e^{-2\sigma} - 1})$  и присоединенная к ней три-ткань  $(\tilde{a}, \pm \frac{1}{\sqrt{c^2 e^{-2\sigma} - 1}}, \mp \frac{1}{\sqrt{c^2 e^{-2\sigma} - 1}})$  имеют чебышевскую конформно-геодезическую сеть Гессе. Биссекторной сетью всех сетей Гессе служит сеть меридианов и параллелей. Так как эта сеть полугеодезическая, то ([6], § 8) в этом случае все сети Гессе также изогеодезические и полосатые.

5. Очевидно ([5], § 1), что на плоскости в этом случае сеть Гессе представляет собой совокупность всех окружностей фиксированного диаметра и проходящих через фиксированную точку.

### § 3. ТРИ-ТКАНИ С ГЕОДЕЗИЧЕСКИМИ СЕТЯМИ ГЕССЕ

1. Сеть Гессе  $(p, q)$  три-ткани  $(a, \mu, \nu)$  является геодезической тогда и только тогда, когда

$$p_{0i}^i p^k = 0, \quad q_{0i}^i q^k = 0 \quad (3.1)$$

или в прямых обозначениях

$$p'_0 p = 0, \quad q'_0 q = 0. \quad (3.2)$$

Первое уравнение (3.2) в силу (69) из [4] и (2.3) приведем к виду

$$\mu' (\mu a + \tilde{a}) - (1 + \mu^2) (\kappa_a \mu + \kappa_{\tilde{a}}) = 0. \quad (3.3')$$

Точно так же из второго уравнения (3.2) получим

$$\nu' (\nu a + \tilde{a}) - (1 + \nu^2) (\kappa_a \nu + \kappa_{\tilde{a}}) = 0. \quad (3.3'')$$

Итак,  $\mu$  и  $\nu$  являются решениями одного и того же дифференциального уравнения

$$(\operatorname{arctg} \varphi)' (\varphi a + \tilde{a}) - \kappa_a \varphi - \kappa_{\tilde{a}} = 0 \quad (3.3''')$$

( $\varphi$  — неизвестная функция), и, наоборот, всякие два различных решения этого дифференциального уравнения могут служить параметрами  $\mu$  и  $\nu$  три-ткани  $(a, \mu, \nu)$  с геодезической сетью Гессе.

2. Выясним условия, когда  $\nu = -\mu$ . Система уравнений (3.3'), (3.3'') после небольших упрощений принимает вид

$$\begin{aligned} (\operatorname{arctg} \mu)' a &= \frac{\kappa_{\tilde{a}}}{\mu}, \\ (\operatorname{arctg} \mu)' \tilde{a} &= \mu \kappa_a. \end{aligned} \quad (3.4')$$

Последняя система двух скалярных равенств равносильна следующему векторному:

$$\nabla \operatorname{arctg} \mu = \frac{\kappa'_a}{\mu} \cdot a + \mu \kappa_a \cdot \tilde{a}. \quad (3.4'')$$

Легко проверить, что условие интегрируемости уравнения (3.4'') имеет вид

$$\mu^2 (\kappa'_a a + 3\kappa_a \kappa_{\tilde{a}}) - (\kappa'_a \tilde{a} - 3\kappa_a \kappa_{\tilde{a}}) = 0. \quad (3.5)$$

Возможны четыре случая.

Случай 1:

$$\kappa'_a a + 3\kappa_a \kappa_{\tilde{a}} = 0, \quad \kappa'_a \tilde{a} - 3\kappa_a \kappa_{\tilde{a}} \neq 0.$$

Система (3.4'') несовместна.

Случай 2:

$$\kappa'_a a + 3\kappa_a \kappa_{\tilde{a}} \neq 0, \quad \kappa'_a \tilde{a} - 3\kappa_a \kappa_{\tilde{a}} = 0.$$

Уравнение (3.5) допускает лишь одно решение:  $\mu = 0$ . При этом значении  $\mu$  первое уравнение (3.4'') не имеет смысла при  $\kappa_{\tilde{a}} \neq 0$ , а в противном случае сеть Гессе вырождается.

Случай 3:

$$\kappa'_a a + 3\kappa_a \kappa_{\tilde{a}} \neq 0, \quad \kappa'_a \tilde{a} - 3\kappa_a \kappa_{\tilde{a}} \neq 0.$$

Тогда из (3.5) получим

$$\mu = \pm \sqrt{\frac{\kappa'_a \tilde{a} - 3\kappa_a \kappa_{\tilde{a}}}{\kappa'_a a + 3\kappa_a \kappa_{\tilde{a}}}}. \quad (3.6)$$

Подставив это выражение в (3.4''), получим

$$\begin{aligned} \nabla \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{\kappa'_a \tilde{a} - 3\kappa_a \kappa_{\tilde{a}}}{\kappa'_a a + 3\kappa_a \kappa_{\tilde{a}}}} &= \sqrt{\frac{\kappa'_a a + 3\kappa_a \kappa_{\tilde{a}}}{\kappa'_a \tilde{a} - 3\kappa_a \kappa_{\tilde{a}}}} \times \\ &\times \kappa_{\tilde{a}} \cdot a + \sqrt{\frac{\kappa'_a \tilde{a} - 3\kappa_a \kappa_{\tilde{a}}}{\kappa'_a a + 3\kappa_a \kappa_{\tilde{a}}}} \kappa_a \cdot \tilde{a}. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Таким образом, если геодезические кривизны  $\kappa_a$  и  $\kappa_{\tilde{a}}$  удовлетворяют векторному дифференциальному уравнению (3.7) и параметр  $\mu$  выражается через них формулой (3.6), то сеть Гессе три-ткани  $(a, \mu, -\mu)$  геодезическая.

Случай 4:

$$\begin{cases} \kappa'_a a + 3\kappa_a \kappa_{\tilde{a}} = 0, \\ \kappa'_a \tilde{a} - 3\kappa_a \kappa_{\tilde{a}} = 0. \end{cases} \quad (3.8)$$

Равенство (3.5) обращается в тождество. Система (3.4'') вполне интегрируема. В этом случае существует однопараметрическое семейство три-тканей  $(a, \mu, -\mu)$  с геодезическими сетями Гессе, причем все сети Гессе имеют общую биссекторную сеть  $(a, \tilde{a})$ .

Нетрудно заметить, что система (3.8) есть частный случай системы (2.21) при  $m = 1$ . Следовательно, биссекторная сеть  $(a, \tilde{a})$  сети Гессе есть  $L_1$ -сеть, т. е. сеть Лиувилля. Примем ее за координатную, тогда метрическая форма поверхности приведет к виду

$$ds^2 = [U(u) + V(v)](du^2 + dv^2). \quad (3.9)$$

Точно так, как в §2, п. 3, можно найти, что

$$\mu = \pm \sqrt{\frac{U-C}{V+C}}. \quad (3.10)$$

Из теоремы Я. С. Дубнова ([7], § 9) следует, что в этом случае сети Гессе являются также ромбическими и кодациевыми.

Итак, на каждой поверхности (3.9) существует однопараметрическое семейство три-тканей вида  $(a, \mu, -\mu)$ , где  $a$  — орт касательной к  $u$ -линии, а  $\mu$  выражается формулой (3.10). Присоединенные три-ткани имеют вид  $(\tilde{a}, \frac{1}{\mu}, -\frac{1}{\mu})$ . Все эти три-ткани имеют геодезические сети Гессе; для всех сетей Гессе координатная сеть (сеть Лиувилля) служит биссекторной сетью.

3. Точно так же, как в § 2, п. 4, применяя полученные результаты к поверхности, изометричной поверхности вращения, с метрической формой (2.26) будем иметь: всякая три-ткань  $(a, \pm \sqrt{c^2 e^{2\sigma} - 1}, \mp \sqrt{c^2 e^{2\sigma} - 1})$  и присоединенная к ней три-ткань  $(\tilde{a}, \pm \frac{1}{\sqrt{c^2 e^{2\sigma} - 1}}, \mp \frac{1}{\sqrt{c^2 e^{2\sigma} - 1}})$  имеют геодезическую ромбическую кодациеву сеть Гессе. Биссекторной сетью всех сетей Гессе служит сеть меридианов и параллелей. Так как эта сеть полугеодезическая, то ([6], § 8) в этом случае все сети Гессе также равнопутные и полосатые.

4. Легко видеть ([5], § 2), что на плоскости в этом случае сеть Гессе представляет собой совокупность всех касательных к фиксированной окружности.

### Литература

1. Норден А. П. Пространства аффинной связности. Гостехиздат, 1950.
2. Норден А. П. Теория поверхностей. Физматгиз, 1956.
3. Гуревич Г. Б. Проективная геометрия. Физматгиз, 1960.
4. Комиссарук А. М. Уч. зап. Минского пединститута им. А. М. Горького, 15—40, 1956.
5. Комиссарук А. М. Научно-теор. конференция Минского пединститута им. А. М. Горького, 9—13, 1966.
6. Комиссарук А. М. Уч. зап. Минского пединститута им. А. М. Горького, 35—64, 1958.
7. Дубнов Я. С. Тр. сем. по вект. и тенз. анализу, т. IX, 7—48, 1952.
8. Либбер А. Е. Тр. сем. по вект. и тенз. анализу, вып. VI, 1948.
9. Шуликовский В. И. Классическая дифференциальная геометрия. Физматгиз, 1963.

Минский педагогический институт  
им. А. М. Горького

Поступило в редакцию  
29.XI 1967

Э. А. РУДАК

### СПЕКТРЫ НИЖНИХ УРОВНЕЙ ЯДЕР $Cl^{38}$ И $K^{40}$

Известно, что остаточное взаимодействие  $V_{\text{ост}}^{np}$  между валентными протоном и нейтроном, находящимися на различных одночастичных орбитах, может быть представлено смесью потенциалов центральных обычных  $V_W$  и спиновообменных  $V_S$  сил и нецентральных тензорных  $V_T$  сил:

$$V_{\text{ост}}^{np} = V_W + V_S + V_T. \quad (1)$$

Детальное исследование остаточного взаимодействия  $V_{\text{ост}}^{np}$  на основании экспериментальных данных по нечетно-нечетным ядрам может быть полезным для определения формы и параметров потенциала взаимодействия пары нуклонов. Решение этой задачи, однако, сопряжено с двумя существенными трудностями. Главная из них связана с необходимостью выбора для описания исследуемых нечетно-нечетных ядер определенных моделей. Вторая трудность заключается в математической сложности расчетов матричных элементов остаточного взаимодействия типа (1) и некоторой неопределенности результатов из-за наличия нескольких параметров.

В настоящее время применение электронно-вычислительной техники позволяет в значительной степени преодолеть трудности, связанные со сложностью расчетов. Поэтому для вычисления формы и параметров потенциала  $V_{\text{ост}}^{np}$  следует в первую очередь использовать такие ядра, для описания которых пригодность той или иной модели не вызывает сомнений. Для этой цели наиболее подходящими, по-видимому, являются ядра  $Cl^{38}$  и  $K^{40}$ . Ядра  $Cl^{38}$  и  $K^{40}$  имеют один протон и одну протонную «дырку» в подоболочке  $1d_{3/2}$  соответственно и один нейтрон в состоянии  $1f_{7/2}$  сверх замкнутой оболочки 20. Оба ядра хорошо описываются моделью нечетных групп в предположении  $j-j$ -связи [1, 2]. Вследствие этого оказывается возможным не только получить из эксперимента достаточно точные значения матричных элементов  $E(j_p, j_n, I)$  и  $E(j_p^{-1}, j_n, I)$ , но и связать их соотношением

$$E(j_p, j_n, I) = \sum_{I'} (2I' + 1) \left\{ \begin{matrix} j_p & j_n & I' \\ j_n & j_p & I \end{matrix} \right\} \times E(j_p^{-1}, j_n, I'). \quad (2)$$

Здесь  $I$  и  $I'$  — результирующие моменты конфигураций  $(d_{3/2}, f_{7/2})$  и  $(d_{3/2}^{-1}, f_{7/2})$  соответственно.

Цель настоящей работы — выяснить роль тензорных сил в остаточном взаимодействии  $V_{\text{ост}}^{np}$  в ядрах  $Cl^{38}$  и  $K^{40}$ . Дело в том, что потенциал остаточного взаимодействия без учета тензорных сил с успехом используется для объяснения большинства наблюдаемых спинов основных состояний сферических нечетно-нечетных ядер [3]. В этом приближении удается также удов-

летворительно описать спектры уровней ядер с простыми конфигурациями протонов и нейтронов. Из этого, однако, не следует, что тензорными силами можно пренебрегать в расчетах. Просто вклад тензорных сил может учитываться в некоторой степени при выборе параметров в  $V_W$  и  $V_S$ . Исследование остаточного взаимодействия  $V_{\text{ост}}^{np}$  в ядрах  $\text{Cl}^{38}$  и  $\text{K}^{40}$  может быть полезным для выяснения этого обстоятельства.

1. Оценка интегралов Слетера  $F_k$  центральных сил по данным эксперимента. Данный метод был применен Пандия для определения параметра смеси обычных и спиновообменных сил в остаточном взаимодействии в ядре  $\text{Nb}^{92}$  [4]. Этот метод можно применить и для ядер  $\text{Cl}^{38}$  и  $\text{K}^{40}$ , поскольку интегралы Слетера  $F_k$ , через которые выражаются матричные элементы остаточного взаимодействия, практически одинаковы для обоих ядер. Матричные элементы  $E(j_p, j_n, I)$  выражаются через  $F_k$  следующим образом:

$$\begin{aligned}
 E(3/2, 7/2, 2) &= F_0 + \frac{1}{7} F_2 + \\
 &+ \alpha \left[ \frac{27}{35} F_0 + \frac{159}{1225} F_2 + \frac{72}{1225} F_4 \right], \\
 E(3/2, 7/2, 3) &= F_0 + \frac{1}{21} F_2 + \\
 &+ \alpha \left[ \frac{3}{7} F_0 + \frac{3}{245} F_2 - \frac{24}{245} F_4 \right], \\
 E(3/2, 7/2, 4) &= F_0 - \frac{13}{105} F_2 + \\
 &+ \alpha \left[ -\frac{1}{35} F_0 + \frac{17}{735} F_2 + \frac{72}{1225} F_4 \right], \\
 E(3/2, 7/2, 5) &= F_0 + \frac{1}{15} F_2 + \\
 &+ \alpha \left[ -\frac{3}{5} F_0 - \frac{3}{35} F_2 - \frac{24}{1925} F_4 \right].
 \end{aligned} \tag{3}$$

Здесь  $\alpha$  — параметр смеси обычных и спиновообменных сил. Матричные элементы  $E(3/2, 7/2, I)$  отличаются только обратным знаком интегралов  $F_0$  и  $F_2$  обычных сил.

Используя экспериментальные значения для разностей энергий уровней  $\text{Cl}^{38}$  и  $\text{K}^{40}$ , находим:

$$\begin{aligned}
 F_0 &= -1,25(0,257/\alpha - 0,420) \text{ Мэв}, \\
 F_2 &= -4,00 \text{ Мэв}, \\
 F_4 &= -3,952(F_0 - 1,400) \text{ Мэв}.
 \end{aligned}$$

Параметр  $\alpha$  по величине порядка 0,1. Для данного значения  $\alpha$  интегралы  $F_0$  и  $F_4$  равны  $-2,68$  и  $16,12$  Мэв соответственно. Весьма удивительными являются большая абсолютная величина интеграла  $F_4$  и его положительный знак. Поскольку интегралы Слетера центральных сил притяжения должны иметь отрицательный знак, полученный здесь результат свидетель-

ствует, по-видимому, о недостаточности аппроксимации остаточного взаимодействия  $V_{\text{ост}}^{np}$  в ядрах  $\text{Cl}^{38}$  и  $\text{K}^{40}$  только с помощью центральных обычных и спиновообменных сил.

2. Расчет спектров уровней  $\text{Cl}^{38}$  и  $\text{K}^{40}$  с помощью потенциала  $V_{\text{ост}}^{np}$  гауссовского типа. Непосредственный расчет спектров уровней конфигураций  $(d_{3/2}, f_{7/2})$  и  $(d_{3/2}^{-1}, f_{7/2}^{-1})$  с помощью потенциала остаточного взаимодействия гауссовского типа позволяет оценить глубину потенциальной ямы и радиус взаимодействия:

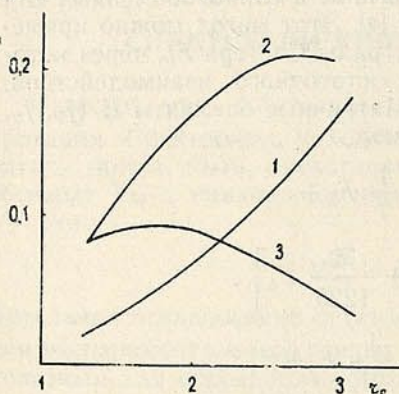


Рис. 1. Графики функций  $F_k/V_0$  в зависимости от радиуса взаимодействия  $r_0$ :

1 —  $F_0/V_0$ ; 2 —  $F_2/V_0$ ; 3 —  $F_4/V_0$

$$V_{\text{ост}}^{np} = V_0 (1 + \alpha \sigma_p \sigma_n) \exp(-r^2/r_0^2). \quad (4)$$

Здесь  $V_0$  — глубина потенциальной ямы;  $r_0$  — радиус взаимодействия;  $\alpha$  — параметр смеси обычных и спиновообменных сил;  $\sigma_p$  и  $\sigma_n$  — операторы спинов протона и нейтрона. Задача практически сводится к вычислению интегралов Слетера  $F_0$ ,  $F_2$  и  $F_4$ . Для их вычисления использовался метод Форда и Конопинского [5]. Графики функций  $F_k/V_0$  в зависимости от радиуса действия  $r_0$  приведены на рис. 1. Наилучшее согласие рассчитанных спектров уровней  $\text{Cl}^{38}$  и  $\text{K}^{40}$  с экспериментальными получено при  $\alpha=0,1$ ,  $r_0=2,7$  ферми и  $V_0$ , равной 16,5 и 17,5 Мэв соответственно (рис. 2). Согласие теории с экспериментом достаточно хорошее.

Но следует отметить, что близкие к экспериментальным значения матричных элементов  $E(3/2, 7/2, 1)$   $E(3/2^{-1}, 7/2^{-1}, 1)$  удалось получить с помощью центральных сил только при очень большом радиусе взаимодействия. Точно же воспроизвести спектры уровней  $\text{Cl}^{38}$  и  $\text{K}^{40}$  с помощью остаточного взаимодействия (4), очевидно, нельзя.

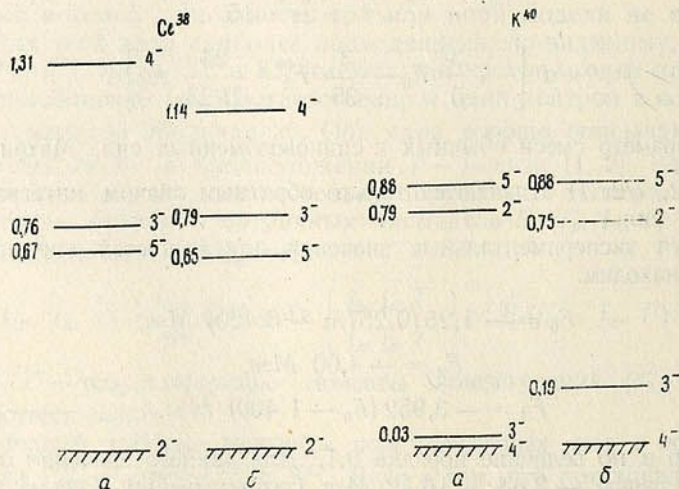


Рис. 2. Сравнение рассчитанных спектров уровней  $\text{Cl}^{38}$  и  $\text{K}^{40}$  с экспериментальными:

а — эксперимент; б — теория

3. Расчет спектров уровней  $\text{Cl}^{38}$  и  $\text{K}^{40}$  с помощью функции приведенного углового взаимодействия. Для оценки матричных элементов остаточного взаимодействия необходимо в принципе знать только относительные значения интегралов Слетера, поскольку абсолютная их величина определяется параметром глубины потенциальной ямы  $V_0$ . Приближенный метод оценки относительных значений интегралов Слетера в зависимости от радиуса взаимодействия приведен в работе [3]. Матричный элемент остаточного взаимодействия

$$E(j_p, j_n, I) = 1/2 \int_{-1}^{+1} a^I (\cos \omega_{np}) \Omega_0 (\cos \omega_{np}) d \cos \omega_{np} + \\ + \alpha/2 \int_{-1}^{+1} b^I (\cos \omega_{np}) \Omega_0 (\cos \omega_{np}) d \cos \omega_{np}. \quad (5)$$

Здесь  $a^I (\cos \omega_{np})$  и  $b^I (\cos \omega_{np})$  — функции, определяющие вероятность угла  $\omega_{np}$  между радиусами-векторами протона и нейтрона;  $\alpha$  — параметр смеси обычных и спиновообменных сил;  $\Omega_0 (\cos \omega_{np})$  — функция приведенного углового взаимодействия. Функция  $\Omega_0 (\cos \omega_{np})$  довольно слабо зависит от конкретных волновых функций валентных протона и нейтрона и может быть аппроксимирована функцией  $V_0 \cos^{2n} \omega_{np}$ . Значения коэффициентов разложения функций  $a^I (\cos \omega_{np})$  и  $b^I (\cos \omega_{np})$  по полиномам Лежандра приведены в табл. 1, 2. Величины  $[E(3) - E(2)]/[E(4) - E(2)]$  и  $[E(5) - E(2)]/[E(4) - E(2)]$  зависят только от параметров  $\alpha$  и  $n$  ( $n$  характеризует радиус взаимодействия). В случае  $\text{Cl}^{38}$  и  $\text{K}^{40}$  ни при каких значениях  $\alpha$  и  $n$  нельзя получить правильные значения отношений разностей матричных элементов.

Таблица 1

Коэффициенты  $\gamma_k$  в разложении  $a^I = \sum_k \gamma_k P_k$

$I$	$P_0$	$P_2$
2	1	5/7
3	1	-5/21
4	1	-13/21
5	1	1/3

Таблица 2

Коэффициенты  $\gamma'_k$  в разложении  $b^I = \sum_k \gamma'_k P_k$

$I$	$P_0$	$P_2$	$P_4$
2	27/35	159/245	72/245
3	3/7	3/49	-24/49
4	-1/35	17/147	72/245
5	-3/5	-3/7	-24/385

На основании проведенных расчетов можно сделать вывод о необходимости учета тензорных сил в остаточном взаимодействии  $V_{\text{ост}}^{np}$  в ядрах  $\text{Cl}^{38}$  и  $\text{K}^{40}$ .

### Литература

1. Goldstein S., Talmi I. Phys. Rev., **102**, 589, 1956.
2. Pandya S. P. Phys. Rev., **103**, 956, 1956.
3. De Shalif A., Walecka J. D. Nucl. Phys., **22**, 184, 1961.
4. Pandya S. P. Phys. Letters, **10**, 178, 1964.
5. Ford K. W., Konopinski E. J. Nucl. Phys., **9**, 218, 1958.

А. С. РУБАНАУ, А. В. ЧАЛЕИ

### УПЛУУ НАГРЭВУ НА РАБОТУ РУБІНАВАГА АКГ

Эфектыўнае пераўтварэнне часткі паглынутай энергіі радыяцыі напампавання ў цяпло прыводзіць да нагрэву рабочага рэчыва цвёрдацельных аштычных квантавых генератараў. Як правіла, нагрэў рабочага рэчыва пагаршае параметры АКГ. Характар уплыву нагрэву на работу цвёрдацельных генератараў залежыць ад рада фактараў. Так, для рубінавага АКГ істотную ролю адыгрывае памяншэнне квантавага выхаду люмінесценцыі і расшырэнне  $R$ -лініі пры павелічэнні тэмпературы. У выніку гэтага пагаршаюцца параметры сістэмы, павялічваецца парог, памяншаецца каэфіцыент карыснага дзеяння генератара. Нераўнамерны нагрэў рабочага рэчыва, звязаны з эфектам цеплаправоднасці і нераўнамернасцю размеркавання радыяцыі напампавання, выклікае градыент паказчыка праламлення, які скажае форму рэзанатара. Узнікаючае тэмпературнае напружанне таксама пагаршае аднароднасць крышталю, выклікаючы ў радзе выпадкаў яго разбурэнне.

У гэтай рабоце разглядаецца ўплыў нагрэву на работу рубінавага АКГ, вызначаемы тэмпературнай залежнасцю квантавага выхаду люмінесценцыі  $\eta$  і шырынёй  $R$ -лініі люмінесценцыі.

У інтэрвале тэмператур 300—400 °К квантавы выхад люмінесценцыі памяншаецца з тэмпературай прыкладна па лінейнаму закону [1]

$$\eta = \eta_0 - \beta(T - 300^\circ \text{K}), \quad (1)$$

дзе  $\eta_0$  — квантавы выхад люмінесценцыі  $R$ -лініі пры тэмпературы  $T = 300^\circ \text{K}$ ;  $\beta = 0,0043 \text{ град}^{-1}$ . Адначасова адбываецца рсшырэнне  $R$ -лініі [2], якое прыводзіць да памяншэння гранічнага каэфіцыента ўзмацнення  $\kappa$ . Тэмпературная залежнасць гранічнага каэфіцыента ўзмацнення таксама можа быць прадстаўлена лінейнай залежнасцю

$$\kappa = \kappa_0 - \alpha(T - 300^\circ \text{K}). \quad (2)$$

Тут  $\kappa_0$  — гранічны каэфіцыент узмацнення пры тэмпературы  $T = 300^\circ \text{K}$ ; каэфіцыент  $\alpha$  пры канцэнтрацыі іонаў хрому 0,050% роўны  $0,0027 \text{ см}^{-1} \cdot \text{град}^{-1}$ .

Генерацыя ў сістэме магчыма пры выкананні ўмовы

$$u > u_{\text{пар}} = \frac{p_{21}}{B \eta(T)} \frac{\kappa(T) + k^{\text{стр}}}{\kappa(T) - k^{\text{стр}}}, \quad (3)$$

дзе  $Bu$  — верагоднасць паглынання радыяцыі напампавання;  $p_{21}$  — верагоднасць спантаннага пераходу ў канале генерацыі;  $k^{\text{стр}}$  — каэфіцыент страт. У працэсе работы рубінавага генератара адбываецца бесперапыннае ўзрастанне парогавай шчыльнасці  $u_{\text{пар}}$ , якое абумоўлена тэмпературнымі залежнасцямі  $\eta$  і  $\kappa$ , што пры працяглай рабоце сістэмы прыводзіць да памяншэння энергіі генерацыі або нават да зрыву генерацыі.

Нагрэў рубіна ў агульным выпадку можна запісаць наступным чынам:

$$\Delta T = a Bu, \quad (4)$$

дзе каэфіцыент  $a$  залежыць ад адносін  $Q/Bu$ , тэрмічных характарыстык рубіна (каэфіцыента цеплаправоднасці і цеплаёмкасці), каэфіцыента цеплаабмену з навакольным асяроддзем, геаметрыі і велічыні рабочага ўзору, рэжыму і часу работы сістэмы. З улікам (1), (2) і (4) умову (3) можна запісаць у наступным выглядзе:

$$a^2 [\alpha \beta (Bu)^2] - a [(Bu)^2 (\beta (\chi_0 - k^{CTP}) + \alpha \eta_0) - \alpha p_{21} Bu] + B(u - u_{\text{пар}}^{(0)}) \eta_0 (\chi_0 - k^{CTP}) > 0. \quad (5)$$

У выразе (5)  $u_{\text{пар}}^{(0)}$  адпавядае паровавай шчыльнасці напампавання пры  $\Delta T = T - 300^\circ \text{K} = 0$ .

З выразу (5) можна вызначыць гранічнае значэнне параметра  $a_{\text{гран}}$ , якое адпавядае зрыву генерацыі, абумоўленаму награваннем рубіна:

$$a_{\text{гран}} = \left\{ \beta (1 - \delta_0) + \frac{\alpha}{\chi_0} \left( \eta_0 - \frac{p_{21}}{Bu} \right) - \sqrt{\left[ \beta (1 - \delta_0) - \frac{\alpha}{\chi_0} \left( \eta_0 - \frac{p_{21}}{Bu} \right) \right]^2 + 8\beta \delta_0 \frac{\alpha p_{21}}{\chi_0 Bu}} \right\} \left\{ 2 \frac{\alpha}{\chi_0} \beta (Bu) \right\}^{-1}. \quad (6)$$

Як вынікае з (6), гранічнае значэнне  $a_{\text{гран}}$  вызначаецца велічыняй шчыльнасці радыяцыі напампавання, параметрамі  $\alpha$ ,  $\beta$  і адносінамі  $\delta_0 = k^{CTP}/\chi_0$ . Залежнасць  $a_{\text{гран}}$  ад шчыльнасці напампавання  $u$  ілюструецца на рысунку (суцэльныя лініі). Значэнні  $a_{\text{гран}}$  разлічаны пры розных  $\delta_0$ . Максимум  $a_{\text{гран}}(Bu)$  дае аптымальнае значэнне напампавання  $Bu_0$ . Пры  $Bu < Bu_0$  зрыў генерацыі настае з-за малага перавышэння напампавання над паровавым значэннем. Пры  $Bu > Bu_0$  генерацыя зрываецца з прычыны адносна вялікага цеплавядучэння.

Разгледзім пасобны ўплыў тэмпературнай залежнасці  $\eta$  і  $\chi$  на значэнне  $a_{\text{гран}}$ . Мяркуючы змяненне з тэмпературай толькі  $\chi$  або толькі  $\eta$ , атрымаем наступныя выразы для гранічнага значэння  $a$ :

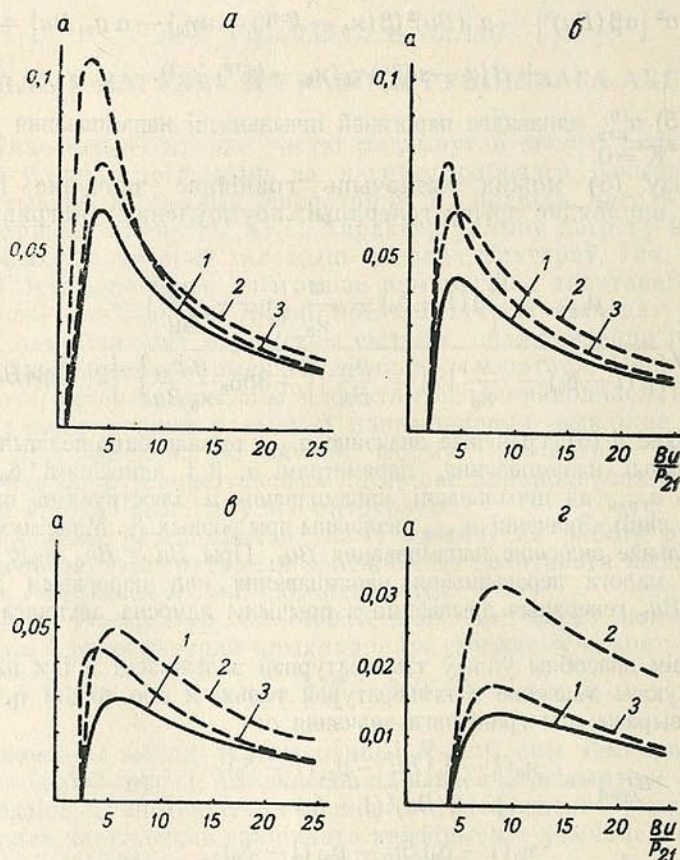
$$a'_{\text{гран}} = \frac{\eta_0 (1 - \delta_0) Bu - p_{21} (1 - \delta_0)}{\beta (Bu)^2 (1 - \delta_0)} \quad (\alpha = 0), \quad (7)$$

$$a''_{\text{гран}} = \frac{\eta_0 (1 - \delta_0) Bu - p_{21} (1 - \delta_0)}{\frac{\alpha}{\chi_0} Bu (\eta_0 Bu - p_{21})} \quad (\beta = 0). \quad (8)$$

Залежнасць гранічных значэнняў (7), (8) ад шчыльнасці радыяцыі напампавання прыведзена на рысунку (пункцірныя лініі). З рысунка вынікае, што пры малых напампаваннях неабходна ўлічваць тэмпературную залежнасць як  $\eta$ , так і  $\chi$ . З павелічэннем напампавання вызначальную ролю пачынае адыгрываць памяншэнне з тэмпературай гранічнага каэфіцыента ўзмацнення. Пры напампаванні  $Bu > 15p_{21}$  гранічнае значэнне  $a_{\text{гран}}$  з дастатковай ступенню дакладнасці апісваецца выразам (8). Гэта звязана з тым, што пры вялікіх напампаваннях дасягаецца найбольш інтэнсіўны нагрэў, які прыводзіць да адносна вялікіх значэнняў  $\delta$ . Зрыў генерацыі настае пры далейшым нязначным расшырэнні  $R$ -лініі. Такім чынам, пры напампаваннях  $Bu > 15p_{21}$  разлік гранічных значэнняў  $a_{\text{гран}}$  можна праводзіць па больш простае формуле (8).

Вызначэнне  $a$  для канкрэтных сістэм праводзіцца шляхам рашэння ўраўнення цеплаправоднасці, якое апісвае тэмпературны рэжым рабочага рэчыва генератара. Ведаючы часавую залежнасць  $a(t) = \Delta T(t)/V\mu$  для канкрэтнай сістэмы, можна вызначыць працягласць работы рубінавага АКГ, калі прыраўняць  $a(t)$  і  $a_{\text{гран}}$  пры дадзенай магутнасці напампавання.

Для прыкладу разгледзім рубінавы АКГ цыліндрычнай формы, што працуе ў рэжыме паўтарэння імпульсаў генерацыі з перыядам  $\theta_1 + \theta_2$



Залежнасць  $a_{\text{гран}}$  ( $1 - a_{\text{гран}}$ ;  $2 - a'_{\text{гран}}$ ;  $3 - a''_{\text{гран}}$ ) ад інтэнсіўнасці напампавання пры розных значэннях параметра  $\delta$ :  
 $a - \delta = 0,1$ ;  $б - 0,2$ ;  $в - 0,3$ ;  $г - 0,5$

пры паветраным ахаладжэнні. Тэмпература  $T_j$  у канцы  $j$ -га перыяду генерацыі пры пастаяннай магутнасці выдзялення цяпла вызначаецца наступным выразам [3]:

$$T_j = T_0 + \frac{Q\theta_1}{C_v} \frac{1 - e^{-zj}}{1 - e^{-z}}, \quad (9)$$

дзе  $C_v$  — цеплаёмістасць адзінкі аб'ёму рубіна, роўная пры пакаёвай тэмпературы  $0,74 \text{ кал/см}^3$ ;  $T_0$  — пачатковая тэмпература крышталю;

$$= \frac{2\gamma\theta_2}{C_v R}; \quad (10)$$

$\gamma$  — каэфіцыент цеплаабмену;  $R$  — радыус рабочага ўзору. Часавая залежнасць параметра  $a$  будзе вызначана выразам  $1 - e^{-zi}$ .

Гэты метада дае нам магчымасць вызначыць у кожным канкрэтным выпадку (для сістэм з пэўным значэннем  $z$ ) максімальны лік імпульсаў генерацыі рубінавага АКГ у залежнасці ад пачатковых умоў і інтэнсіўнасці напампавання:

$$j_{\max} = \frac{1}{z} \left| \ln \left[ 1 - \frac{a_{\text{гран}}}{Q\theta_1} C_p B u (1 - e^{-z}) \right] \right|. \quad (11)$$

Вынікі разліку максімальнага ліку імпульсаў (11) у залежнасці ад інтэнсіўнасці напампавання і велічыня параметра  $z$  прыведзены ў табл. 1 ( $\delta_0 = 0,2$ ;  $Q\theta_1/C_p B u = 3 \cdot 10^{-4}$ ).

Табліца 1

Гранічныя лікі імпульсаў генерацыі рубінавых АКГ пры павягнутым ахаладжэнні сістэмы, разлічаныя па (11)

$z$	Значэнні $j_{\max}$ пры $Bu$ , роўных						
	$3\rho_{21}$	$5\rho_{21}$	$8\rho_{21}$	$12\rho_{21}$	$16\rho_{21}$	$20\rho_{21}$	$25\rho_{21}$
$10^{-4}$	121	147	119	90	70	58	48
$10^{-3}$	128	157	125	93	73	60	48
$5 \cdot 10^{-3}$	218	250	172	114	88	67	53

Пры значэннях параметра  $z$ , што задавальняюць умове

$$z \geq z_0 = \left| \ln \left( 1 - \frac{Q\theta_1}{a_{\text{гран}} C_p B u} \right) \right|, \quad (12)$$

магчымы ўсталяваны рэжым работы сістэмы ( $j \rightarrow \infty$ ).

Разгледзім далей стацыянарны рэжым работы рубінавага АКГ у выпадку вадзянога ахаладжэння. У стацыянарным рэжыме размеркаванне тэмпературы па радыусу ў цыліндрычным шпяні пры раўнамерным па аб'ёму і пастаянным па часу вылучэнні цяпла апісваецца наступным выразам [4]:

$$\Delta T(r) = \frac{QR^2}{4\lambda} \left[ \frac{2\lambda}{\gamma R} + \frac{R^2 - r^2}{R^2} \right]. \quad (13)$$

У формуле (13)  $\lambda$  — каэфіцыент цеплаправоднасці рубіна, роўны пры пакаёвай тэмпературы  $0,1 \text{ кал/см} \cdot \text{сек} \cdot \text{град}$ . Паколькі тэмпература рубінавага шпяня змяняецца па радыусу, то ў агульным выпадку генеруе толькі частка тарца. Пры зададзенай шчыльнасці радыяцыі напампавання стацыянарная генерацыя адбываецца з тарца для  $r$ , якія задавальняюць умове

$$r_0 < r \leq R,$$

$$r_0 = \sqrt{R^2 \left[ \frac{2\lambda}{\gamma a} + 1 \right] - 4\lambda \frac{a_{\text{гран}}}{Q} B u}. \quad (14)$$

Цыліндрычныя шпяні радыусам

$$R < R_0 = \frac{-\lambda + \sqrt{\lambda^2 + 4\lambda\gamma^2 \frac{a_{\text{гран}}}{Q} B u}}{\gamma} \quad (15)$$

генерыруюць з усяго тарца. Стацыянарная генерацыя ў рубінавым шпяні радыуса  $R$  не ажыццяўляецца для цыліндрычных узораў радыуса

$$R \geq R_{\text{гран}} = 2\gamma \frac{a_{\text{гран}}}{Q} Bu. \quad (16)$$

Як відаць з выразу (16),  $R_{\text{гран}}$  не залежыць ад каэфіцыента цеплаправоднасці  $\lambda$ . У табл. 2 прыведзены значэнні дыяметра цыліндра  $D_0$ , якія разлічаны па формуле (15) для розных значэнняў шчыльнасці напампавання і розных канцэнтрацый іонаў хрому. Пры разліках каэфіцыент поўных страт выпраменьвання, якое генерывалася, прымаўся роўным  $0,03 \text{ см}^{-1}$ , каэфіцыент цеплаабмену рубіна з вадой  $\gamma = 0,5 \text{ кал/см}^2 \cdot \text{сек} \cdot \text{град}$ .

Табліца 2

Дыяметры рубінавых шпянёў, якія генерыруюць з усяго тарца, разлічаныя па формуле (15)

$\delta_0$	Значэнні $D_0$ пры $Bu$ , роўных						
	$4\rho_{21}$	$6\rho_{21}$	$8\rho_{21}$	$12\rho_{21}$	$16\rho_{21}$	$20\rho_{21}$	$25\rho_{21}$
0,2	0,30	0,28	0,24	0,20	0,16	0,14	0,11
0,5	—	0,21	0,23	0,22	0,20	0,17	0,15
0,7	—	—	—	0,11	0,12	0,12	0,11

Плошча тарца, што генерывуе,

$$S = 4\pi\lambda \frac{a_{\text{гран}}}{Q} Bu - 2\pi R \frac{\lambda}{\gamma} \quad (17)$$

пры канчатковых значэннях  $\gamma$  памяншаецца з ростам радыуса рубінавага шпяня. Пры  $\gamma \rightarrow \infty$  залежнасць  $S$  ад радыуса знікае.

Магутнасць генерацыі ў бесперапынным рэжыме з адзінкі даўжыні рубінавага шпяня вызначаецца наступным выразам:

$$W_{\text{г}} = \frac{nh\nu_{\text{г}}}{4} \left\{ \pi(R^2 - r_0^2) \left[ \eta_0 Bu - \rho_{21} - \beta \frac{QR}{2\gamma} Bu - \beta \frac{QR^2}{4\lambda} Bu - \delta_0 \frac{\kappa_0}{\alpha} \beta Bu \right] + \pi\beta \frac{Q}{4\lambda} Bu (R^4 - r_0^4) - \pi \frac{4\lambda}{Q} \frac{\kappa_0}{\alpha} \delta_0 (\eta_0 Bu + \right. \\ \left. + \rho_{21} - \beta \frac{\kappa_0}{\alpha} Bu) \ln \frac{1 - \frac{QR}{2\gamma} \frac{\alpha}{\kappa_0}}{1 - \frac{QR}{2\gamma} \frac{\alpha}{\kappa_0} - \frac{Q}{4\lambda} \frac{\alpha}{\kappa_0} (R^2 - r_0^2)} \right\}, \quad (18)$$

дзе  $r_0$  вызначаецца выразам (14), калі генерывуе толькі частка тарца, і роўная нулю, калі генерацыя ажыццяўляецца з усяго тарца;  $\nu_{\text{г}}$  — частата выпраменьвання, якое генерывуе.

У табл. 3 прыведзены значэнні магутнасці генерацыі, разлічаныя па формуле (18) пры розных значэннях параметра  $\delta$  і магутнасці напампавання  $Bu$ ; каэфіцыент поўных страт прымаецца роўным 0,03. Як відаць з табліцы, існуе аптымальнае значэнне радыуса, пры якім для зададзеных напампаванняў дасягаецца максімальная магутнасць генерацыі.

Табліца 3

Магутнасць генерацыі, што здымаецца з адзінкі даўжыні рубінавага шпяня, разлічаная па (18)

$\delta_0$	Вн	Значэнні $W^r$ (вт) пры велічынях $R$					
		0,08	0,10	0,12	0,14	0,16	0,18
0,2	4 $\rho_{21}$	1,423	1,751	1,799	1,391	0,563	0,144 0,048
	6 $\rho_{21}$	2,822	3,358	3,198	1,919	0,599	
	8 $\rho_{21}$	3,701	3,893	2,606	0,631		
	12 $\rho_{21}$	3,741	0,495				
0,5	6 $\rho_{21}$	0,166	0,089	0,006			
	8 $\rho_{21}$	0,547	0,544	0,265	0,054		
	12 $\rho_{21}$	1,053	0,953	0,374	0,006		

## Літаратура

1. Burns G., Nathan M. J. Appl. Phys., 34, 703, 1963.
2. Schawlow A. Advances in Quantum Electronics. N. Y.—London, 1961.
3. Степанов Б. И., Рубанов А. С., Кабашников В. П., Чалей А. В. ЖПС, 4, № 5, 1966.
4. Карслоу Х. С. Теория теплопроводности. ГИТТЛ, 1947.

А. Г. МАХАНЕК, В. С. КОРОЛЬКОВ

**ЗАДАЧА ОБ ЭКРАНИРОВАНИИ И АНТИЭКРАНИРОВАНИИ  
 КРИСТАЛЛИЧЕСКОГО ПОЛЯ  
 ДЛЯ 4f-ОБОЛОЧЕК РЕДКОЗЕМЕЛЬНЫХ ИОНОВ**

Ионы группы редких земель (р. з.) в кристаллических и жидких состояниях обладают рядом специфических особенностей. Они имеют весьма характерные (по сравнению, например, с ионами группы железа) спектры с ярко выраженной дискретной структурой. Теоретические и экспериментальные величины магнитной восприимчивости свободных ионов р. з. очень близки к значениям восприимчивости в растворах и кристаллах [1].

Обычно принято считать, что сходство в свойствах р. з. ионов, находящихся в газовой и кристаллической фазах, обусловлено тем, что внутренние 4f-электроны хорошо защищены и экранированы от внешних полей электронами замкнутой 5s<sup>2</sup>р<sup>6</sup>-оболочки. Экранированием также объясняют обычно применяемое при расчетах штарковского расщепления уровней ионов р. з. приближение «слабого поля», т. е.

$$V_{кр} \ll \zeta_f(\hat{L}\hat{S}) \ll V_{кул} \quad (1)$$

$V_{кр}$  — энергия 4f-оболочки иона в кристаллическом поле, которую можно разложить по сферическим гармоникам:

$$V_{кр} = \sum_{t,p} A_{t,p} D_p^t, \quad (2)$$

где

$$D_p^t = \sum_i r_i^t Y_p^t(\theta_i, \varphi_i). \quad (3)$$

Суммирование в (3) выполняется по всем электронам f-оболочки иона р. з. Коэффициенты  $A_{t,p}$  зависят от структуры кристаллической решетки и могут быть вычислены по формуле

$$A_{t,p} = \sum_j \left( \frac{4\pi}{2t+1} \right) \frac{Z_j e^2}{R_j^{t+1}} Y_p^{t*}(\theta_j, \varphi_j), \quad (4)$$

где  $Z_j e$  — заряд иона, сферические координаты которого  $R_j, \theta_j, \varphi_j$ ;  $V_{кул}$  — энергия взаимодействия между электронами;  $\zeta_f(\hat{L}\hat{S})$  — энергия спин-орбитальной связи.

В одной из работ [2] утверждалось, что перечисленные выше характерные свойства ионов р. з. вызваны прямыми причинами, никак не связанными с экранированием, а именно, размеры ионов лантанидов больше размеров ионов группы железа. Это приводит к тому, что расстояния  $R$  между ионами р. з. и ионами лигандов больше соответствующих расстояний для ионов группы железа. Размеры же самих f-оболочек

меньше размеров  $d$ -оболочек, и, следовательно,  $f$ -электроны больше удалены от окружающих ионов лигандов и, кроме того, имеют большую величину постоянной  $\zeta_f$  спин-орбитальной связи за счет близости  $f$ -оболочки к ядру, т. е.

$$A_p^t(d) : A_p^t(f) \approx 3 \div 10; \langle r^t \rangle_d : \langle r^t \rangle_f \approx 2; \zeta_f : \zeta_d \approx 2. \quad (5)$$

Что же касается эффектов экранирования, то, как отмечено в [2], они малы ( $<10\%$ ) и их учет несуществен по сравнению с общими неточностями и приближениями, использованными в современной квантово-механической теории кристаллического поля\*). Ясно, что факторы (5) играют очень существенную роль. Однако утверждение автора о малости эффектов экранирования связано с тем, что в работе [2] допущена ошибка, которая привела к сильно заниженным результатам. Тот факт, что учет эффектов экранирования очень существен и им нельзя пренебрегать (особенно когда речь идет об экранировании потенциалов низкой мультипольности), подтверждается результатами расчетов, проведенных в ряде работ [3—5], а также экспериментальными данными [6—9].

В настоящем разделе мы приведем общие замкнутые выражения для поправочных функций и констант экранирования, полученные в результате решения возмущенного уравнения Шредингера. Затем на основе этих выражений вычислим постоянные экранирования  $\eta_i(nl \rightarrow l')$  кристаллического поля для  $4f^x$ -оболочек редкоземельных ионов с использованием слэтеровских и водородоподобных волновых функций. В своей большей части эти расчеты основаны на тех же принципах и методах, которые были применены нами в [10, 11].

Как и в случае ядерного электрического экранирования, смысл параметров  $\eta_i$  довольно прост и состоит в том, что под влиянием энергии взаимодействия кристаллического поля с электронами рассматриваемого примесного иона (2) замкнутые оболочки искажаются. Эти деформированные оболочки, уже не будучи сферически симметричными, вносят дополнительный вклад  $V_p^{(1)}$  в энергию взаимодействия кристаллического поля с  $4f^x$ -оболочкой, что можно записать в виде

$$\langle V_{кр} \rangle_{4f} = \sum_{t,p} \langle (V_p^{t(0)} + V_p^{t(1)})_{4f} \rangle = \sum_{t,p} \langle V_p^{t(0)} \rangle_{4f} (1 - \eta_t), \quad (6)$$

$$\eta_t = \sum_{n,l} \eta_t(nl \rightarrow l'). \quad (7)$$

В (6) мы взяли знак минус при  $\eta_t$ , поскольку энергия взаимодействия  $4f^x$ -электронов с положительными ионами лигандов будет противоположна по знаку энергии взаимодействия  $4f^x$ -оболочки с деформированной  $5s^2p^6$ -оболочкой. Ясно, что для отрицательных ионов окружения знак минус может быть сохранен, если при вычислениях оставить прежние знаки в возмущенном уравнении Шредингера. Оговоримся, что в дальнейшем мы будем рассматривать лишь эффекты экранирования, обусловленные  $5s^2p^6$ -оболочкой. Эффектами же экранирования других замкнутых оболочек можно пренебречь. Малость влияния других оболочек

\*) Обратим внимание, что понятие экранирования, которым мы пользуемся в тексте, связано с эффектами искажения сферически симметричной  $5s^2p^6$ -оболочки. Прямые эффекты (5) тоже можно было бы назвать эффектами экранирования. Но они не являются электростатическим экранированием, а обусловлены просто тем, что по причине больших размеров внешней  $5s^2p^6$ -оболочки окружающие ионы лигандов оттеснены, если так можно сказать, механически от внутренних  $4f$ -электронов.

чек видна из простых физических соображений, поскольку остальные оболочки являются более внутренними по отношению к  $4f^2$ -оболочке, и, кроме того, подтверждается прямыми расчетами.

Запишем уравнение Шредингера для поправочной функции первого приближения с оператором возмущения (2). Выберем в качестве возмущения отдельное слагаемое в (2), например энергию взаимодействия, описываемую потенциалом  $V_0$ . Этот выбор не ограничивает общности рассмотрения.

Тогда имеем

$$[H^{(0)} - E^{(0)}] \bar{u}_{bnl \rightarrow l'}^{(1)} = -[V_0^l - E^{(1)}] \bar{u}_{nlm}^{(0)}, \quad (8)$$

где  $\bar{u}_{nlm}^{(0)} = u_{nl}^0(r) Y_m^l(\theta, \varphi)$  — невозмущенная волновая функция  $5p$ - либо  $5s$ -электрона.

Подставляя в (8) величины

$$V_0^l = -2A_0^l r^l Y_0^{l*}, \quad (9)$$

$$E^{(1)} = \langle \bar{u}_{nlm}^{(0)} | V_0^l | \bar{u}_{nlm}^{(0)} \rangle = \\ = -2A_0^l (-1)^m \sqrt{\frac{(2l+1)^2 (2l+1)}{4\pi}} \begin{pmatrix} l & l & l \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l & l & l \\ 0 & m & -m \end{pmatrix}, \quad (10)$$

где два последних множителя —  $3j$ -символы Вигнера, найдем, что

$$\bar{u}_{bnl \rightarrow l'}^{(1)} = 2A_0^l \sum_{m'} \sqrt{\frac{(2l+1)(2l+1)(2l'+1)}{4\pi}} \times \\ \times \begin{pmatrix} l & l & l' \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l & l & l' \\ 0 & m & m' \end{pmatrix} Y_{m'}^{l'*}(\theta, \varphi) u_{bnl \rightarrow l'}^1(r) \quad (11)$$

удовлетворяет уравнению (8), если  $u_{bnl \rightarrow l'}^1(r)$  является решением уравнений

$$\left[ -\frac{d^2}{dr^2} + \frac{l'(l'+1)}{r^2} + V^{(0)} - E^{(0)} \right] u_{bnl \rightarrow l'}^1(r) = \\ = u_{nl}^0(r) [r^l - \langle r^l \rangle_{nl}] \delta_{ll'}. \quad (12)$$

Тогда дополнительный вклад в энергию взаимодействия  $4f$ -электрона с искаженной  $nl$ -оболочкой может быть представлен в виде

$$\langle \sum_{l', p'} V_{p'}^{l'} \rangle_{4f} = 2 \sum_{l', p'} \int_{\tau_f} \int_{\tau_{nl}} \Delta \rho(nl \rightarrow l') \rho_{4f}^0 \frac{r_{>}^{l'}}{r_{>}^{l'+1}} \times \\ \times \frac{4\pi}{2l'+1} Y_{p'}^{l'*}(\theta, \varphi) Y_{p'}^{l'}(\theta_f, \varphi_f) d\tau_f d\tau_{nl}, \quad (13)$$

где

$$\rho_{4f}^0 = u_{4f}^{02}(r) Y_m^{l'*}(\theta_f, \varphi_f) Y_m^l(\theta_f, \varphi_f), \quad (14)$$

$$\Delta \rho(nl \rightarrow l') = 4 \sum_m \bar{u}_{nlm}^{(0)*} \bar{u}_{bnl \rightarrow l'}^{(1)}. \quad (15)$$

Суммирование в (15) проводится по квантовым магнитным числам  $m$ , а удвоенное значение для  $\Delta \rho$  взято с целью учета двух возможных ориента-

\* Множитель 2 (2) появится, если энергию выражать в ридбергах.

ций спина для каждого значения. Функция  $\bar{u}_{bnl \rightarrow l'}^{(1)}$  определяется выражением (11).

Проведя в (13) необходимые простые вычисления с учетом того, что

$$\langle Y_p^{l*} | Y_m^l | Y_{m'}^{l'} \rangle = \sqrt{\frac{(2t+1)(2l+1)(2l'+1)}{4\pi}} \times \\ \times \begin{pmatrix} t & l & l' \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t & l & l' \\ p & m & m' \end{pmatrix}, \quad (16)$$

$$\sum_{m, m'} \begin{pmatrix} t & l & l' \\ p & m & m' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t' & l & l' \\ p' & m & m' \end{pmatrix} = \frac{1}{2t+1} \delta_{ll'} \delta_{pp'}, \quad (17)$$

и прибавляя затем к полученному результату энергию взаимодействия  $4f$ -электрона с потенциалом  $V_0^t$  (9), находим следующее выражение для энергии взаимодействия при наличии эффекта экранирования:

$$\langle V_0^{t'} \rangle_{4f} = \langle V_0^t \rangle_{4f} [1 - \eta_t(nl \rightarrow l')], \quad (18)$$

где

$$\eta_t(nl \rightarrow l') = \frac{8(2l+1)(2l'+1)}{2t+1} \begin{pmatrix} t & l & l' \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^2 \times \\ \times \left\{ \int_0^\infty \rho_{4f}^0(r) \left[ \frac{1}{r^{t+1}} \int_0^r u_{nl}^0 u_{bnl \rightarrow l'}^1 r'^t dr' + \right. \right. \\ \left. \left. + r^t \int_r^\infty \frac{u_{nl}^0 u_{bnl \rightarrow l'}^1}{r'^{t+1}} dr' \right] dr \right\} \frac{1}{\langle r^t \rangle_{4f}}, \quad (19)$$

$$\rho_{4f}^0 = u_{4f}^{02}(r).$$

Как и в случае ядерного экранирования [11], удобно отдельно рассмотреть радиальный тип возбуждения ( $nl \rightarrow l$ ) и угловой ( $nl \rightarrow l'$ ,  $l' \neq l$ ).

Радиальный тип возбуждения. Из результатов [11] видно, что для радиального типа возбуждения уравнение (12) просто решается в квадратурах для произвольного модельного гамильтониана, т. е. для гамильтониана с произвольным видом невозмущенной потенциальной энергии. В этом случае постоянные  $\eta_t(nl \rightarrow l)$  выражаются через электронные плотности невозмущенных электронных оболочек  $\rho_{nl}^0$ , которые и содержат в себе все сведения о невозмущенном потенциале.

Решая уравнение (12) и подставляя полученную радиальную поправочную функцию в (19), получаем

$$\eta_t(nl \rightarrow l) = \frac{8(2l+1)^2}{2t+1} \begin{pmatrix} t & l & l \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^2 \times \\ \times \left\{ \int_0^\infty \rho_{4f}^0 r^t \left[ \int_r^\infty \frac{\rho_{nl}^0}{r'^{t+1}} (a - \chi') dr' \right] dr + \right. \\ \left. + \int_0^\infty \frac{\rho_{4f}^0}{r^{t+1}} \left[ \int_0^r \rho_{nl}^0 (a - \chi') r'^t dr' \right] dr \right\} \frac{1}{\langle r^t \rangle_{4f}}, \quad (20)$$

где

$$\chi' = \int \frac{\int \rho_{nl}^0(r'^t - \langle r'^t \rangle) dr'}{\rho_{nl}^0},$$

$$a = \int_0^\infty \rho_{nl}^0 \left| \int \frac{\int \rho_{nl}^0(r^t - \langle r^t \rangle) dr}{\rho_{nl}^0} dr \right| dr,$$

$$\langle r^t \rangle_{4f} = \int_0^\infty \rho_{4f}^0 r^t dr.$$

В качестве аналитических функций проще всего выбрать функции типа слэтеровских, а именно:

$$u_{4f}^2(r) = \rho_{4f}^0 = \left[ \frac{Z_f^9}{2 \cdot 8!} \right] \exp \left( -\frac{Z_f}{2} r \right), \quad (21)$$

$$u_{5p}^2(r) = \rho_{5p}^0 = \left[ \frac{Z_p^9}{2 \cdot 8!} \right] \exp \left[ -\frac{Z_p}{2} r \right].$$

Подставляя (21) в (20) и проводя необходимые вычисления, находим

$$\eta_2(5p \rightarrow p) = \frac{96}{25} \frac{\sigma^{11}}{Z_p} \left\{ \frac{40680}{\sigma^6} \left( \frac{5!}{10!} \right) - \right.$$

$$- \frac{229}{168} \left( \frac{1}{10!} \right) \frac{1}{(1+\sigma)^{11}} \left( \sum_{i=0}^5 \frac{(i+10)!}{i!(1+\sigma)^i} \right) -$$

$$- \frac{452}{8!} \frac{1}{(1+\sigma)^6} \left( \sum_{i=0}^{10} \frac{(i+5)!}{i!(1+\sigma)^7} \right) -$$

$$\left. - \frac{25}{24} \left( \frac{16!}{10! 6!} \right) \frac{1}{(1+\sigma)^{17}} - \frac{5}{3} \left( \frac{17!}{10! 8!} \right) \frac{1}{(1+\sigma)^8} \right\}, \quad (22)$$

где

$$\sigma = Z_f/Z_p.$$

Полагая в (22)  $\sigma = 2$ ,  $Z_p = 12$  (что примерно соответствует слэтеровскому полуэмпирическому правилу), имеем

$$\eta_2(5p \rightarrow p) = -0,230. \quad (23)$$

Если же воспользоваться водородоподобными радиальными плотностями, то вместо (22) получим

$$\eta_2(5p \rightarrow p) = \frac{24}{15} \left( \frac{5!}{10!} \right) \frac{\beta^5}{Z_p} \left[ \sum_{k=4}^{13} A_k (k+2)! \right] -$$

$$- \frac{24}{15} \left( \frac{1}{10!} \right) \frac{\beta''}{Z_p (1+\beta)^6} \left\{ \sum_{k=4}^{13} A_k (k+2)! \times \right.$$

$$\left. \times \left[ \sum_{i=0}^{k+2} \frac{(i+5)!}{i!(1+\beta)^i} \right] \right\} + \frac{24}{15} \left( \frac{1}{10!} \right) \frac{\beta^{11}}{Z_p (1+\beta)^{11}} \times$$

$$\times \left\{ \sum_{k=4}^{13} A_k (k-3)! \left[ \sum_{i=0}^{k-3} \frac{(i+10)!}{i! (1+\beta)^i} \right] \right\}, \quad (24)$$

где  $\beta = \frac{5Z_f}{4Z_p}$ , а значения  $A_k$  даны в табл. 1. Если в качестве  $\beta$  и  $Z_p$  по-прежнему взять значения 2 и 12, то найдем, что

$$\eta_2(5p \rightarrow p) = -0,253. \quad (25)$$

Численные значения  $A_{k+1}$  и  $B_k$ 

Таблица 1

$k$	$A_{k+1}$	$B_k$	$k$	$A_{k+1}$	$B_k$
0	-1000	$+\frac{55}{2}$	5	$-\frac{27}{80}$	$+\frac{55}{672}$
1	+1500	$-\frac{715}{14}$	6	$+\frac{151}{720}$	$-\frac{1573}{60480}$
2	$-\frac{1677}{2}$	$+\frac{3359}{168}$	7	$-\frac{1}{120}$	$+\frac{4}{945}$
3	$+\frac{637}{3}$	$-\frac{643}{504}$	8	$-\frac{1}{2400}$	$-\frac{17}{48384}$
4	$-\frac{433}{20}$	$-\frac{503}{2016}$	9	$+\frac{1}{43200}$	$+\frac{7}{80640}$

Таким образом, вклад в величину  $\eta_2$  для квадрупольного потенциала, обусловленный радиальным типом возмущения, имеет отрицательный знак. Следовательно, этот вид искажения приводит не к уменьшению, а к увеличению градиента поля, т. е. к эффекту антиэкранирования. Из формулы (20) видно, что все вклады  $nl \rightarrow l$ -типа за счет деформации  $5s$  и  $5p$ -электронов в другие мультипольные потенциалы равны нулю, а именно:

$$\eta_t = 0 \text{ для } t \neq 2. \quad (26)$$

Прежде чем рассмотреть угловой тип возбуждения, мы коротко остановимся на вопросе выбора значений эффективных зарядов, которыми мы воспользуемся в дальнейшем. Ясно, что при расчетах с водородоподобными радиальными волновыми функциями использование слэтеровских значений эффективных зарядов ядер может привести к значительным неточностям, что вполне естественно, поскольку слэтеровские и водородоподобные функции имеют лишь отдаленное сходство. Само собой разумеется, что не большее сходство они имеют также с функциями Хартри и Хартри—Фока.

Как указывалось нами ранее в работе [12], при расчетах ядерного экранирования с водородоподобными функциями лучше использовать величины эффективных зарядов, вычисленных из энергий ионизации атомов. На это также обращалось внимание в работе [13], где было отмечено, что применение для энергии выражения водородоподобного типа и использование величин энергий  $4f$ - и  $5f$ -электронов из функций Хартри приводит для  $\text{Pr}^{3+}$  к величине  $\frac{Z_{4f}}{Z_{5p}} = 0,67$ . Это сильно отличается от отношения эффективных зарядов, получаемого из полуэмпирических слэтеровских правил.

Принимая во внимание вышесказанное, а также на основании сравнения некоторых численных и аналитических расчетов можно приблизительно указать значения  $\beta$ ,  $Z_f$ ,  $Z_{5p,5s}$ , которыми следует пользоваться

для оценки величин постоянных экранирования при применении водородоподобных волновых функций:

1. При расчете постоянных экранирования с учетом проникновения  $5s$ -, и  $5p$ -электронов в  $4f$ -оболочку, т. е. принимая во внимание эффекты перекрывания  $5s$ -,  $5p$ - и  $4f$ -функций, следует выбирать следующие величины:

$$\beta = 0,5 \div 0,8; Z_{5p, 5s} = 3 \div 5.$$

2. При упрощенном расчете постоянных  $\eta_i(nl \rightarrow l')$  без учета перекрывания \*)  $5s$ -,  $5p$ - и  $4f$ -функций, как будет видно дальше, вполне достаточно ограничиться выбором слэтеровского значения для  $Z_p$  и  $Z_s$ .

Таблица 2

Расчет постоянных экранирования

$\eta_2$	Метод		
	водородоподобные функции $Z_{5s, 5p} = 12$	$\chi$ -Ф $Pg^{3+}$ [4]	$\chi$ -Ф $Tm^{3+}$ [4]
$\eta_2(5s \rightarrow d)$	0,28	0,2895	0,2737
$\eta_2(5s \rightarrow f)$	0,46	0,5759	0,5001
$\eta_2(5p \rightarrow p)$	-0,25	-0,1873	-0,2401
$\Sigma \eta_2$	0,49	0,6781	0,5337

Отметим, что результаты расчетов постоянных экранирования, ряд величин которых был приведен нами в [3] с указанным выбором эффективных зарядов, оказались впоследствии в хорошем согласии с результатами расчетов величин  $\eta_i$  с помощью функций самосогласованного поля [4] для ионов  $Tm^{3+}$  и  $Pg^{3+}$ , а также с опытными данными [6—9]. Несмотря на то что исключительно хорошее согласие (табл. 2) в значительной степени является случайностью (с учетом того, что для расчетов были использованы водородоподобные волновые функции), тем не менее для правильной оценки величин эффекта экранирования вполне могут быть использованы простые аналитические решения.

Кроме того, следует обратить внимание на то обстоятельство, что использование волновых функций Хартри и Хартри — Фока также в ряде случаев не обеспечивает нужной точности и может привести к значительным ошибкам. Это связано с тем, что (как отмечалось нами в работе [12] и видно из формулы (18) [10] для ядерного экранирования в простейшем случае отсутствия проникновения) основной вклад в величину эффекта экранирования дает первое слагаемое, которое представляет собой произведение двух величин. При этом первый множитель ( $\langle r^{-3} \rangle$ ) сильно зависит от значения волновой функции у самого ядра (внутреннего края), а второй — от значения при больших  $r$  (внешнего края волновой функции). Поэтому при вычислениях с функциями Хартри — Фока, и особенно Хартри, могут иметь место сильные расхождения с опытными данными.

**Угловой тип возбуждения.** Проведем прежде всего расчет величин экранирования в предположении отсутствия взаимного проникновения  $5s$ -,  $5p$ -электронов с электронами  $4f$ -оболочки. В этом случае ясно, что величины  $\eta_i(nl \rightarrow l')$  будут тождественно равны постоянным ядерного экранирования  $\gamma_i(nl \rightarrow l')$ , приведенным нами в [11], т. е.

$$\eta_2(5s \rightarrow d) = \frac{10}{3Z_{5s}}, \quad \eta_2(5p \rightarrow f) = \frac{138}{25Z_{5p}}, \quad \eta_4(5s \rightarrow g) = \frac{1}{Z_{5s}},$$

$$\eta_4(5p \rightarrow h) = \frac{41}{27Z_{5p}}, \quad \eta_6(5s \rightarrow i) = \frac{10}{21Z_{5s}}, \quad \eta_6(5p \rightarrow j) = \frac{118}{169Z_{5p}}. \quad (27)$$

\*) Как показывают оценочные расчеты, эффекты перекрывания для углового типа возбуждения, действительно, оказываются незначительными.

Согласно сказанному выше, при упрощенном расчете постоянных экранирования без учета перекрытия волновых функций в качестве эффективного заряда ядра можно взять слэтеровское значение, т. е.  $Z_{5s,5p} \approx 12$ . Подставляя это значение  $Z$  в (27), находим для квадрупольного потенциала величины постоянных экранирования, приведенные в табл. 2 совместно с результатами расчета при использовании волновых функций Хартри—Фока для ионов  $\text{Pr}^{3+}$  и  $\text{Tm}^{3+}$ . В табл. 2 также приведено значение  $\eta_2$  для радиального типа возмущения, вычисленное в предыдущем разделе. Таким образом, квадрупольный потенциал кристаллического поля экранируется примерно на 50%, что находится в хорошем согласии с экспериментом [6—9]. Соответственно для потенциалов более высокой мультипольности на основании (27) получаем

$$\begin{aligned} \eta_4(5s \rightarrow g) &= 0,083, \quad \eta_4(5p \rightarrow h) = 0,13, \\ \eta_6(5s \rightarrow i) &= 0,040, \quad \eta_6(5p \rightarrow j) = 0,058. \end{aligned} \quad (28)$$

Если же учесть эффекты проникновения, то на основании (12)\* и (19) легко убедиться в том, что

$$\begin{aligned} \eta_t(5l \rightarrow l') &= \frac{8(2l+1)(2l'+1)}{2t+1} \begin{pmatrix} t & l & l' \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^2 \times \\ &\times \left[ \frac{(5-l-1)!}{10 \cdot \{(5+l)!\}^3} \right] \frac{\beta^{t+9}}{(t+8)!} \left( \frac{5}{2Z_{5l}} \right) \times \\ &\times \left[ \sum_{i=0}^{9+t-l-l'} \left\{ \sum_{m=0}^{5+t-l'-4-l} \sum_{k=0} \{a_m b_5^t(k)\}_{m+k=i} \right\} \times \right. \\ &\times \left( \sum_{j=0}^{i+t+l+l'+1} \frac{(i+t+l+l'+2)!}{j!} \frac{(j+7-t)!}{(1+\beta)^{j+8-t}} - \right. \\ &- \sum_{j=0}^{i+t+l'-t} \frac{(i+l+l'-t+1)!}{j!} \frac{(j'+t+8)!}{(1+\beta)^{j'+9}} - \\ &\left. \left. \left. \frac{(i+t+l+l'+2)!(7-t)!}{\beta^{8-t}} \right) \right] \right]. \end{aligned} \quad (29)$$

Полагая  $\beta = \frac{5Z_{4f}}{4Z_5} = 0,5$  и  $Z_5 = 3$  из (29) находим

$$\eta_6(5s \rightarrow i) = 0,014; \quad \eta_6(5p \rightarrow h) = 0,033; \quad \eta_4(5p \rightarrow h) = 0,13. \quad (30)$$

Эти величины констант экранирования порядка, полученных в (28).

Отметим, что формальное общее выражение (29) в ряде случаев очень неудобно для расчетов. Поэтому, прежде чем проводить вычисления, его следует по возможности упростить для конкретных значений  $t, l, l'$ . Так, например, для величины  $\eta_6(5s \rightarrow i)$ , когда  $t=6$ , легко видеть, что первая сумма в (29) есть арифметико-геометрическая прогрессия, которая легко суммируется. Тогда выражение для постоянной экранирования принимает простой вид

$$\begin{aligned} \eta_6(5s \rightarrow i) &= \frac{8}{13} \cdot \frac{\beta^{15}}{Z_{5s}} \left\{ \sum_{k=0}^9 B_k \left[ \sum_{m=0}^k \binom{m+14}{m} \times \right. \right. \\ &\times \left. \left. \frac{(k+1)!}{(1+\beta)^{m+15}} + \frac{(k+14)!(k+15)!\beta}{14! \beta^2 (1+\beta)^{k+15}} \right] \right\}, \end{aligned} \quad (31)$$

\* Решение уравнения (12) приведено в [11] (40).

где  $B_k$  — численные постоянные, приведенные в табл. 1;  $\binom{m+14}{m}$  — номинальные коэффициенты.

В итоге можно приблизительно оценить порядок величин экранирования для параметров кристаллического поля различной мультипольности, а именно: параметр  $A_2 \langle r^2 \rangle$  экранируется примерно на 50%,  $A_4 \langle r^4 \rangle$  на 10—20%,  $A_6 \langle r^6 \rangle$  на 5—10%. Характерно, что простой модельный расчет постоянных экранирования для градиентов полей кристаллического поля, создаваемых в месте расположения ядра атома водорода (1s-электрон), приводит к результату

$$\gamma_t(1s \rightarrow t) = \frac{2}{Z(t+1)t}, \quad (32)$$

который не только подтверждает факт уменьшения величин экранирования с увеличением  $t$ , но и дает величины постоянных ядерного экранирования, близкие по порядку к величинам экранирования для  $4f^6$ -оболочек. Со значением  $Z = 1$  из (32) получаем

$$\begin{aligned} \gamma_1(1s) = 1; \quad \gamma_2(1s) = \frac{1}{3}, \quad \gamma_3(1s) = \frac{1}{6}, \\ \gamma_4(1s) = \frac{1}{10}, \quad \gamma_6(1s) = \frac{1}{21}, \end{aligned} \quad (33)$$

т. е. дипольный параметр  $A_1 \langle r \rangle$  экранируется полностью (на 100%), квадрупольный на 33% и т. д. Таким образом, при вычислениях наиболее существенно учитывать эффекты экранирования для дипольного и квадрупольного потенциалов. Учет сильного экранирования нечетного параметра  $A_1 \langle r \rangle$  необходим при расчетах вероятностей запрещенных переходов.

### Литература

1. Ельяшевич М. А. Спектры редких земель. ГИТЛ, 1953.
2. G. Burns. Phys. Rev., 128, 2121, 1962.
3. Маханёк А. Г., Корольков В. С. Тезисы II Всесоюзного совещания по применению физических методов к исследованию комплексных соединений. Кишинев, 1965.
4. Sternheimer R. M. Phys. Rev., 146, 140, 1966.
5. Watson R. E., Freeman A. J. Phys. Rev., 133, A 1571, 1964; 139, A 1606, 1965.
6. Barnes K. G., Mössbauer R. L., Kankeleit E., Poindexter J. M. Phys. Rev. Letters, 11, 253, 1963; 136, A 175, 1964.
7. Edmonds D. Phys. Rev. Letters, 10, 129, 1963.
8. Block I., Shirilly D. A. J. Chem. Phys., 39, 1128, 1963; 143, 278, 1966.
9. Nickman H. H., Nowik I. Phys. Rev., 142, 115, 1966.
10. Маханёк А. Г., Корольков В. С. Вестн АН БССР, сер. физ.-мат. наук, № 4, 1967.
11. Маханёк А. Г., Корольков В. С. Вестн АН БССР, сер. физ.-мат. наук, № 1, 1968.
12. Маханёк А. Г. ДАН БССР, 6, 427, 1962.
13. Ghatikar M. N., Raychaudhuri A. K., Ray D. K. Proc. Phys. Soc. London, 84, 297, 1964.

Институт физики АН БССР,  
Радиотехнический институт,  
г. Минск

Поступило в редакцию  
19.V 1967

Б. Ю. ХАНОХ

**ФОРМУЛЫ ДЛЯ РАЗЛІКУ СВЕТАВОГА ПАТОКУ,  
 АДЫТАГА ТЭТРАЭДРЫЧНАЙ ПРЫЗМАЙ**

Эфектыўнасць прымянення тэтраэдрычных прызмавых адбівальнікаў светлавога патоку, якія прызначаны для работы на вялікіх адлегласцях, недастаткова асветлена ў літаратуры. Работы, прысвечаныя пытанням разліку ходу прамяняў у самой прызме [1—3], не даюць магчымасці вылічыць асветленасць, створаную на ўваходнай зрэнцы прыймальнай сістэмы светлавым патокам, адбітым прызмай. Не існуе, наколькі нам вядома, і методыкі разліку допускаяў на дакладнасць вырабу такіх прызмаў. У гэтым артыкуле выведзены формулы для разліку светлавога патоку, адлюстраванага прызмай, які прымаецца прыймальнай сістэмай; на падставе гэтых формул выказваюцца меркаванні аб аптымальных параметрах тэтраэдрычных прызмаў, якія выкарыстоўваюцца ў якасці адбівальнікаў.

Калі на франтальную грань прызмы падае пучок паралельных прамяняў, то у выніку паслядоўнага адбіцця прамяняў ад трох граней, двухгранныя вуглы паміж якімі мала адрозніваюцца ад прамога, утвараецца шэсць адбітых пучкоў, амаль паралельных напрамку падаючага пучка. Адхіленне ад паралельнасці абумоўлена адхіленнем двухгранных вуглоў паміж адбіваючымі гранямі прызмы ад прамога. Метад разліку ходу прамяняў у прызме, апісаны ў [1], даў магчымасць рашыць задачу па вызначэнню велічынь вуглоў адхілення адбітых прамяняў  $\delta_{123}$ ,  $\delta_{213}$ ,  $\delta_{231}$  ад напрамку праменя, які падае паралельна восі сіметрыі прызмы:

$$\begin{aligned} \sin \delta_{123} = \sin \delta_{321} &= 2n \sqrt{\frac{2(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) + 2(\beta\gamma - \alpha\gamma + \alpha\beta)}{3}}; \\ \sin \delta_{213} = \sin \delta_{312} &= 2n \sqrt{\frac{2(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) + 2(\beta\gamma + \alpha\gamma - \alpha\beta)}{3}}; \\ \sin \delta_{231} = \sin \delta_{132} &= 2n \sqrt{\frac{2(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) + 2(-\beta\gamma + \alpha\gamma + \alpha\beta)}{3}}. \end{aligned} \quad (1)$$

Тут  $n$  — паказчык праламлення шкла прызмы;  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  — адхіленні двухгранных вуглоў паміж адбіваючымі гранямі прызмы ад прамога; індэксамі 1, 2, 3 абазначана паслядоўнасць адбіцця ад граней прызмы з нумарамі 1, 2, 3 адпаведна.

Адносна цэнтра апертуры прызмы адбіты прамень выходзіць з апертуры ў пункце, які дыяметральна супрацьлеглы пункту яго ўваходу ў яе. Такім чынам, шэсць адбітых пучкоў сіметрычна па тры размяшчаюцца адносна напрамку падаючага праменя [2]. Гэтыя пучкі маюць адволькавую інтэнсіўнасць, і таму ў кожным з адбітых пучкоў змяшчаець

ца адна шостая частка агульнай энергіі, адбітай праз поўную апертуру прызмы. Калі  $E$  — асветленасць уваходнай апертуры прызмы,  $S_{\text{пр}}$  — яе плошча, а  $k$  — каэфіцыент страт праменнай энергіі ў прызме, то велічыня адбітага светлавога патоку ў кожным пучку

$$\Phi = \frac{kES_{\text{пр}}}{6}.$$

На рис. 1, а ў пункце  $O$  паказана рабочая апертура прызмы, якая ўтварае такую правільную форму адбітых пучкоў. З рысунка відаць,

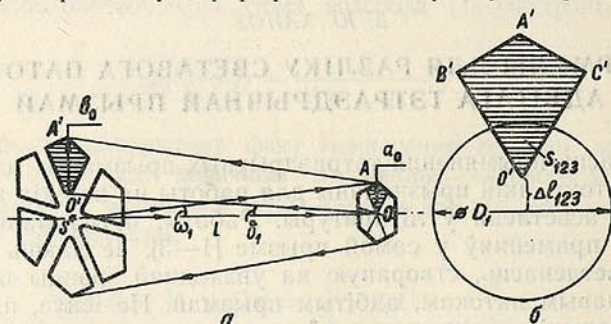


Рис. 1. Сячэнні адбітых прызмай пучкоў плоскасцю, перпендыкулярнай восі прызмы, у пункце размяшчэння крыніцы выпраменьвання  $S$  (а) і аднаго пучка ў плоскасці ўваходнай зрэнкі прыёмальнай сістэмы (б)

што кожны з шасці адбітых пучкоў размяшчаецца ўнутры цялеснага вугла, якому ў сячэнні  $AOA'O'$  адпавядае лінейны вугал  $\omega_1 = a_0/L$ . Калі лічыць сілу святла ўнутры гэтага цялеснага вугла пастаяннай, то асветленасць плошчы  $S_0$  сячэння адбітага пучка будзе

$$E_0 = \frac{kEa_0^2}{b_0^2}. \quad (2)$$

Значэнні велічынь  $a_0$  і  $b_0$  відаць на рис. 1, а.

Далей дапусцім, што вось аб'ектыву прыёмальнай сістэмы і вось прызмы супадаюць і што прыёмальная сістэма знаходзіцца на адлегласці  $L$  ад прызмы. Для таго каб адбіты прызмай светлавы паток падаў на ўваходную зрэнку прыёмальнай сістэмы, дыяметр уваходнай зрэнкі  $D_1$  павінен быць большым, чым адхіленне пучкоў ад восі  $\Delta l_{k'l'm'}$  (рис. 1, б):

$$D_1 > \delta_{k'l'm'} L = \Delta l_{k'l'm'}.$$

На рис. 1, б плошчы ўваходнай зрэнкі і сячэння аднаго светлавога пучка, якія перакрываюцца, абазначаны праз  $S_{123}$ . Паколькі трыкутнік  $B'C'O'$  правільны, то

$$S_{123} \approx \frac{\sqrt{3}}{3} \left( \frac{D_1}{2} - \Delta l_{123} \right)^2, \quad S_{213} \approx \frac{\sqrt{3}}{3} \left( \frac{D_1}{2} - \Delta l_{213} \right)^2, \\ S_{231} \approx \frac{\sqrt{3}}{3} \left( \frac{D_1}{2} - \Delta l_{231} \right)^2$$

і поўны светлавы паток, які прымаецца,

$$\Phi_{\text{пр}} = 2E_0 (S_{123} + S_{213} + S_{231}) = \frac{2\sqrt{3}Eka_0^2}{3b_0} \left\{ \left( \frac{D_1}{2} - \Delta l_{123} \right)^2 + \left( \frac{D_1}{2} - \Delta l_{213} \right)^2 + \left( \frac{D_1}{2} - \Delta l_{231} \right)^2 \right\}. \quad (3)$$

Формула (3) атрымана для прызмы з плоскімі гранямі.

Разгледзім цяпер выпадак, калі тры адбіваючыя грані прызмы маюць сферычную крывізну.

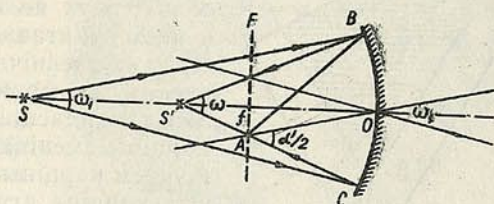
Калі дыяметр увагнутага люстра значна меншы фокуснай адлегласці ( $D_0 \ll f$ ), то з рыс. 2 лёгка ўстанавіць наступную сувязь паміж вуглом разыходжання падаючага пучка  $\omega_1$  і вуглом разыходжання адбітага пучка  $\omega$ :

$$\omega = \alpha' - \omega_1,$$

дзе  $\alpha'$  — вугал, пад якім відаць люстра  $BC$  з фокуса.

Калі аналагічны разгляд правесці для люстра выпуклага і для пучкоў, якія сыходзяцца, то можна прыйсці да наступнага агульнага правіла, якое вызначае вугал разыходжання адбітага пучка па вуглу разыходжання падаючага і параметрах люстра (пры ўмове  $D_0 \ll f$ ):

$$\omega = \omega_1 + \alpha'. \quad (4)$$



Рыс. 2. Ход праменьняў ад пунктавай крыніцы  $S$  пры адбіцці ад увагнутага люстра  $BC$

Формула (4) запісана ў алгебраічнай форме з наступнымі правіламі знакаў велічынь  $\omega_1$ ,  $\omega$  і  $\alpha'$ :

1. Калі падаючы або адбіты пучкі разыходзяцца, то  $\omega_1 > 0$  і  $\omega > 0$ ; калі яны сыходзяцца, то  $\omega_1 < 0$  і  $\omega < 0$ .

2. Калі люстра выпуклае, то  $\alpha' > 0$ ; калі ж люстра ўвагнутае, то  $\alpha' < 0$ .

Дапунсім, што радыусы крывізны граней прызмы будуць  $R_1, R_2, R_3$  і памер адбіваючай грані, адпавядаючы сячэнню  $AOA'O'$  на рыс. 1,  $a$ , роўны  $D$ . Тады вугал разыходжання кожнага адбітага пучка

$$\omega = \omega_1 + (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) n,$$

дзе  $\omega_1 = \frac{a_0}{L} \ll 1$ ,  $\alpha_1 = \frac{D}{f_1}$ ,  $\alpha_2 = \frac{D}{f_2}$ ,  $\alpha_3 = \frac{D}{f_3}$ . Правіла знакаў для

$\omega_1, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  застаецца ранейшым.

З рыс. 1,  $a$  таксама відаць, што пры плоскіх гранях  $b_0 = \omega_1 L + a_0 = 2a_0$ . Для граней, якія маюць сферычную крывізну, велічыня  $b_0$  будзе роўнай

$$b' = \omega L + a_0 = \omega_1 L + (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) nL + a_0 = 2a_0 + \alpha_0 L.$$

Франтальная грань прызмы пры гэтым лічыцца плоскай.

Адхіленне адбітага прызмай восевага праменя пучка, які падае нармальна на пярэднюю грань прызмы, ад восі прызмы адбываецца ў выніку адхілення двухгранных вуглоў прызмы ад прамога, а таксама ў выніку крывізны граней. Адхіленне, абумоўленае крывізной граней, вызначаецца велічы-

нёй  $\frac{1}{2} |\alpha_0| \eta_{k'l'm'}$ , дзе  $\eta_{k'l'm'}$  — каэфіцыент, што ўлічвае асіметрыю ў ра-

зыходжанні адбітага пучка. Вось пучка, што падае нахільна на грань прызмы, ужо не з'яўляецца воссю адбітага пучка, і адносна гэтай восі адбіты пучок асіметрычны. Сумарнае адхіленне адбітага прызмай восевага праменя пучка ад восі прызмы

$$\begin{aligned} \Delta l_{123} &= \left( \delta_{123} - \frac{1}{2} \alpha_0 \eta_{123} \right) L, \quad \Delta l_{213} = \left( \delta_{213} - \frac{1}{2} \alpha_0 \eta_{213} \right) L, \\ \Delta l_{231} &= \left( \delta_{231} - \frac{1}{2} \alpha_0 \eta_{231} \right) L. \end{aligned} \quad (5)$$

Разгледжаная вышэй карціна адбітых пучкоў адносіцца да пунктавай крыніцы выпраменьвання. Для рэальных крыніц канечных памераў карціна адбітых пучкоў будзе размытай, бо яна з'яўляецца накладаннем зрушаных адносна адна адной карцін ад кожнага пункту крыніцы, які свеціцца.

Велічыню і характар размыцця можна ацаніць, разглядаючы карціну пучкоў ад дзвюх пунктавых крыніц, адна з якіх зрушана з восі на невялікую адлегласць  $r$ . Пры невялікіх вуглавых адхіленнях пунктавай

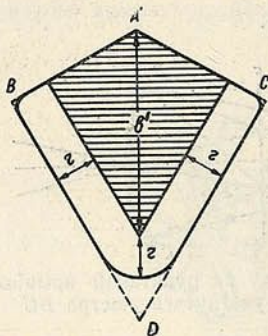


Рис. 3. Размыццё аднаго з адбітых пучкоў пры асветленні прызмы крыніцай выпраменьвання канечных памераў

крыніцы ад восі прызмы можна меркаваць, што карціна пучкоў не скажаецца, а адбываецца толькі зрух яе на велічыню  $r$  адносна карціны пучкоў пунктавай крыніцы, размешчанай на восі. Прызма дзейнічае на праменні, якія падаюць пад вуглом да фронтальнай грані, як плоская паралельная пласцінка, таму папярэчны памер усёй карціны зменіцца нязначна ў параўнанні са скажэннем карціны асобных пучкоў. З рис. 3 відаць, што карціна атрымліваецца амаль падобнай да ранейшай, толькі вуглы некалькі акруглены. З мэтай спрашчэння разліку дапоўнім гэтыя вуглы да вострых так, каб атрымалася геаметрычна падобная фігура  $ABCD$ . Пры гэтым дапушчэнні

$$b = 2a_0 + a_0L + 2r.$$

Пры накладанні карцін пучкоў ад пунктавых крыніц адну на адну асветленасць у сячэнні асобнага пучка не будзе ўжо раўнамернай, а будзе плаўна змяншацца ад сярэдзіны да краёў пучка. Такім чынам, вызначаць яе, як раней, — адносінамі светлагага патоку да плошчы сячэння пучка — строга кажучы, нельга. Вызначаная такім чынам асветленасць ёсць нейкая сярэдняя асветленасць, якая менш эфектыўнай асветленасці, вызначаемай на ўзроўню 0,5. Аднак пры дапушчэнні  $b = 2a_0 + a_0L + 2r$  плошча  $S_{k'l'm'}$  казваецца крыху больш рэальнай, таму памылка ў вызначэнні патоку выпраменьвання  $\Phi_{пр}$ , які трапляе ў прыёмальны аб'ект пры дастаткова малым  $r$ , будзе невялікай, і формула для прымаемага светлагага патоку замест (3) набывае выгляд

$$\Phi_{пр} = \frac{2\sqrt{3}kEa_0^2}{3(2a_0 + a_0L + D_2)^2} \left\{ \left( \frac{D_1}{2} - \delta_{123}L + \frac{1}{2}a_0\eta_{123} + D_2 \right)^2 + \left( \frac{D_1}{2} - \delta_{213}L + \frac{1}{2}a_0\eta_{213} + D_2 \right)^2 + \left( \frac{D_1}{2} - \delta_{231}L + \frac{1}{2}a_0\eta_{231} + D_2 \right)^2 \right\}, \quad (6)$$

дзе  $D_2$  — дыяметр выхадной зрэнкі аб'ектыва пражэктара.

Ва ўмовах дрэннай бачнасці або пры рабоце з прызмай на вялікіх адлегласцях у (6) неабходна ўвесці множнік, які ўлічвае аслабленне святла ў атмасферы.

Калі памер уваходнай апертуры прызмы малы, а адлегласць вялікая, то памер сячэння адбітага светлага пучка з-за дыфракцыі можа значна перавышаць велічыню  $b$ , атрыманую з простых геаметрычных меркаванняў. У гэтым выпадку памер  $b$  стане роўным

$$b'' = 2a_0 + a_0L + 2r + \frac{1,22\lambda}{a_0}L,$$

дзе  $\lambda$  — даўжыня хвалі патоку выпраменьвання.

Здымак на рис. 4 зроблен з карціны ў натуральную велічыню, атрыманай у зацяжнёным памяшканні дыяфрагмаваннем пражэктарнага праменя лістом фотапаперы з адтулінай дыяметрам 5 мм; адчувальны слой фотапаперы быў звернуты ў бок адбітых прызмай пучкоў. Фатаграфіі дазваляюць праверыць геаметрыю адбітых пучкоў і вызначыць каэфіцыент  $\eta_{k'l'm'}$ .

Фатаграфіі пры дыяметры адтуліны на фотапаперы 20, 30, 40 і 50 мм пацвердзілі выказанья вышэй меркаванні аб характары размыцця пучкоў.

Выкладзены метады разліку светлавога патоку дазваляе ацаніць межы прымянімасці формулы (6), вызначаемыя канструкцыйнымі параметрамі прызмы.

I. Выпадак, калі  $\alpha_0 > 0$ , а  $\delta_{\min} > \frac{1}{2} \alpha_0 \eta_{\max}$ .

Тут формула (6) справядліва для адлегласцей  $L$ :

$$1000D_2 < L < \frac{D_2}{\delta_{\min} - \frac{1}{2} \alpha_0 \eta_{\max}}$$

На адлегласці

$$L \geq \frac{D_2}{\delta_{\min} - \frac{1}{2} \alpha_0 \eta_{\max}}$$

пучкі разыйдуцца настолькі, што ні адзін з іх не будзе асвятляць уваходную зэрнку прыёмальнай сістэмы.

II. Выпадак  $\alpha_0 > 0$ ,  $\delta_{\max} \leq \frac{1}{2} \alpha_0 \eta_{\min}$ . У гэтым выпадку ўваходная зэрнка на адлегласці  $L > 1000D_2$  будзе накрывацца кожным пучком, таму

$$\Phi_{\text{пр}} = \frac{kES_{\text{пр}} \pi D_1^2}{6S_{A'BCD} \cdot 4} = \frac{3\pi kEa_0^2 D_1^2}{2(2\alpha_0 + \alpha_0 L + D_2)^2} \quad (7)$$

III. Выпадак  $\alpha_0 < 0$ ,  $\delta_{\max} < |\alpha_0| \left(1 - \frac{1}{2} \eta_{\max}\right)$ . Пры  $\alpha_0 < 0$  на адлегласці  $L_0 = \frac{2\alpha_0}{|\alpha_0|}$  адбываецца факусіроўка кожнага пучка ад пунктавай крыніцы выпраменьвання ( $b_2 = 2\alpha_0 - |\alpha_0|L_0 = 0$ ). На адлегласцях  $1000D_2 < L < \frac{2\alpha_0}{|\alpha_0|}$   $\Phi_{\text{пр}}$  разлічваецца па (6). Пасля факусіроўкі пучкі будуць

зноў разыходзіцца, і на адлегласці  $L_2 = \frac{2\alpha_0}{|\alpha_0| \left(1 - \frac{1}{2} \eta_{\max}\right) - \delta_{\max}}$  яны

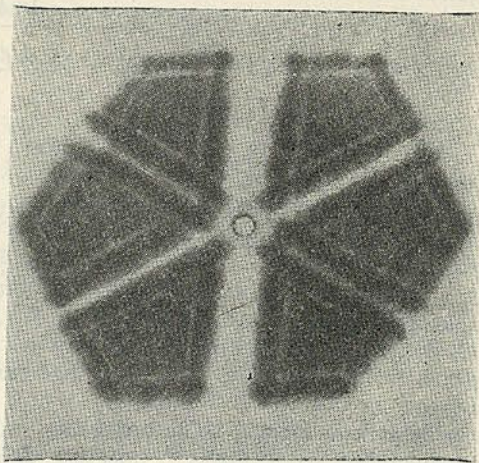


Рис. 4. Фотаздымак карціны адбітых пучкоў у плоскасці крыніцы выпраменьвання дыяметрам 5 мм, размешчанай на адлегласці 67,5 м ад прызмы

пачынаюць скрыжоўвацца на ўваходнай зрэньцы прыймальнай сістэмы; пры  $L > L_2$  уваходная зрэнка прыймальнай сістэмы поўнасьцю накрываецца кожным пучком і  $\Phi_{\text{пр}}$  прымае выгляд

$$\Phi_{\text{пр}} = \frac{3\pi k E a_0^2 D_1^2}{2 \left[ -2a_0 + |\alpha_0| L + D_2 \left( 1 + \frac{\sqrt{3}}{3} \right) \right]^2}. \quad (8)$$

IV. Выпадак  $\alpha_0 < 0$ ,  $\delta_{\text{min}} \geq |\alpha_0| \left( 1 - \frac{1}{2} \eta_{\text{min}} \right)$ . Тут на адлегласці  $1000D_2 < L < \frac{2a_0}{|\alpha_0|}$  справядліва формула (6). Пры  $L > \frac{2a_0}{|\alpha_0|}$  пучкі, якія разыходзяцца, ужо не будуць скрыжоўвацца паміж сабой, а разыходзячыся пасля факусіроўкі, яны ўтвораць блізка ля восі сіметрыі карціны цёмную зону з дыяметрам больш чым  $2a_0$ , якая будзе павялічвацца.

Звычайна ў адбівальніках светлага патоку прымяняюць не адну прызму, а набор прызмаў. Калі восі адбівальніка і пражэктара супадаюць і выконваецца ўмова  $L > 1000(D_2 + D_3)$ , дзе  $D_3$  — дыяметр адбівальніка, то прыведзеныя вышэй формулы для прымаемага светлага патоку будуць справядлівы і для кожнай прызмы адбівальніка; таму поўны светлавы патак, што прымаецца прыймальнай часткай актыўнай сістэмы ад такога адбівальніка, роўны суме светлавых патокаў ад кожнай прызмы:

$$\Phi_{\text{пр}} = \sum_i^{n'} \Phi_{\text{пр}}^i,$$

дзе  $n'$  — колькасць прызмаў у камплекце адбівальніка.

На аснове формул, атрыманых для прымаемага светлага патоку, можна зрабіць некаторыя вывады аб тым, якія прызмы выгадней прымяняць у адбівальніках светлага патоку на далёкіх, сярэдніх і блізкіх адлегласцях. На вялікіх адлегласцях найбольш прыгоднымі з'яўляюцца прызмы, разгледжаныя ў II і III выпадках, г. зн. прызмы, у якіх  $\alpha_0 > 0$ ,  $\delta_{\text{max}} \leq \frac{1}{2} \alpha_0 \eta_{\text{min}}$  або  $\alpha_0 < 0$ ,  $\delta_{\text{max}} < |\alpha_0| \left( 1 - \frac{1}{2} \eta_{\text{max}} \right)$ .

Параўнанне велічынь прымаемага светлага патоку  $\Phi_{\text{пр}}$ , вылічаных па формулах (7) і (8) для аднаго і таго ж  $L$ , гаворыць аб тым, што пры  $D_2 < 4\sqrt{3}a_0$  найлепшай з'яўляецца прызма з увагнутымі гранямі, а пры  $D_2 > 4\sqrt{3}a_0$  — прызма з выпуклымі гранямі.

Зрабіць прызму, у якой велічыня  $|\alpha_0|$  была б вельмі малой (што энергетычна выгадна), нельга, бо павінны выконвацца ўмовы

$$|\alpha_0| \geq \frac{2\delta_{\text{max}}}{\eta_{\text{min}}} \quad \text{або} \quad |\alpha_0| > \frac{\delta_{\text{max}}}{1 - 0,5\eta_{\text{max}}}.$$

Значыць, мінімальная велічыня  $|\alpha_0|$  для прызмаў, якія працуюць на вялікіх адлегласцях, абмежавана магчымымі памылкамі вырабу двухгранных вуглоў прызмы. У вельмі добрых узораў трохгранных прызмаў  $\delta$  і  $|\alpha_0|$  павінны быць дастаткова малымі велічынямі.

Зрабіць прызму з такой малой велічынёй  $|\alpha_0|$  значна лягчэй, калі грані прызмы рабіць не аднаго знака крывізны, а розных, але так, каб выконвалася ўмова

$$\left( \frac{D}{f_2} + \frac{D}{f_2} + \frac{D}{f_3} \right) n = \alpha_0.$$

Патрабаванні да дакладнасці вырабу адбіваючых прызмаў, прызначаных для работы на сярэдніх адлегласцях, могуць быць зніжаны, г. зн.  $\delta$  і  $|\alpha_0|$  могуць быць большымі. Суадносіны паміж  $\delta$  і  $|\alpha_0|$  больш мэтазгодна захоўваць (выпадкі II і III), пры гэтым для меншых адлегласцей лепш, каб  $2\delta_{\max} \leq \leq \alpha_0 \eta_{\min}$  (II выпадак), для большых адлегласцей —  $\delta_{\max} < |\alpha_0| \left( 1 - \frac{1}{2} \eta_{\max} \right)$  (III выпадак).

Пры рабоце актыўнай сістэмы на блізкіх адлегласцях  $\delta$  і  $\alpha_0$  могуць быць яшчэ большымі. Гэта тым больш неабходна для тых сістэм, у якіх восі перадаючага і прыёмальнага аб'ектываў не сумешчаны. Такія сістэмы на блізкіх адлегласцях павінны працаваць у пучках, якія шырока разыходзяцца, а для гэтага неабходна нават знарок рабіць  $\delta$  і  $\alpha_0$  дастаткова вялікімі. З гэтага пункту погляду II выпадак з'яўляецца найбольш выгадным. Для сістэм з супадаючымі восьмі перадатчыка і прыёмніка з поспехам могуць выкарыстоўвацца на блізкіх адлегласцях прызмы I і IV выпадкаў.

Разгледжаны вышэй метады разліку дазваляе вызначыць найлепшыя канструкцыйныя параметры прызмы для любога канкрэтнага практычнага выпадку, рабіць габарытны энергетычны разлік актыўнай фотаэлектрычнай сістэмы, што адкрывае магчымасці для змяншэння габарытаў аптыкі актыўнай сістэмы ці камплекта адбівальніка.

### Літаратура

1. Chandler K. N. JOSA, 50, № 3, 203, 1960.
2. Тудоровский А. И. Тр. ГОИ, 14, в. 112—120, 1941.
3. Yoder P. R. JOSA, 48, № 7, 497, 1958.

Белорусский государственный университет  
им. В. И. Ленина

Поступило в редакцию  
9.X 1967

УДК 530.12 : 531.18 + 538.3

В. И. СТРАЖЕВ, Л. М. ТОМИЛЬЧИК

## К ВОПРОСУ О ДУАЛЬНО-ИНВАРИАНТНОЙ ЭЛЕКТРОДИНАМИКЕ

1. Электродинамика с дуально-инвариантными величинами. Как было впервые отмечено в [1], тензор энергии-импульса свободного электромагнитного поля инвариантен относительно некоторой однопараметрической группы «дуальных» преобразований над компонентами поля, что приводит к неопределенности в выборе полевых величин [1—4]. С другой стороны, для случая уравнений Максвелла, описывающих частицу, обладающую одновременно двумя зарядами  $e$  и  $g$ , существует неопределенность в выборе зарядов [5—7]. Аналогичная ситуация имеет место для уравнений Максвелла, включающих как электрический, так и магнитный токи. Это обусловлено инвариантностью полевых уравнений относительно обобщенных дуальных преобразований следующего вида \*):

$$\mathbf{e} \rightarrow \mathbf{e}' \cos \alpha \pm \mathbf{h}' \sin \alpha, \quad (1)$$

$$\mathbf{h} \rightarrow \mp \mathbf{e}' \sin \alpha + \mathbf{h}' \cos \alpha; \quad (2)$$

$$e \rightarrow e' \cos \alpha \pm g' \sin \alpha, \quad (3)$$

$$g \rightarrow \mp e' \sin \alpha + g' \cos \alpha; \quad (4)$$

$$\mathbf{j} \rightarrow \mathbf{j}' \cos \alpha \pm \mathbf{g}' \sin \alpha, \quad (5)$$

$$g \rightarrow \mp \mathbf{j}' \sin \alpha + \mathbf{g}' \cos \alpha.$$

Введем дуально-ковариантные величины  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{H}$ ,  $q$ ,  $p$ .  
 Согласно определению,

$$\mathbf{E} = \mathbf{e} \cos k\Theta + \mathbf{h} \sin k\Theta, \quad (6)$$

$$\mathbf{H} = -\mathbf{e} \sin k\Theta + \mathbf{h} \cos k\Theta, \quad (7)$$

$$q = e \cos k\Theta + g \sin k\Theta,$$

$$p = -e \sin k\Theta + g \cos k\Theta, \quad (8)$$

где  $k$  принимает значение  $\pm 1$ . Очевидно, эти величины можно рассматривать как «векторы» в некотором двумерном дуальном пространстве, а преобразования (1), (2)—как вращение координатных осей этого пространства.

Будем считать, что наблюдаемыми величинами являются инварианты дуальных преобразований. В частности, таким инвариантом является тензор энергии-импульса электромагнитного поля  $T_{\mu\nu}(\mathbf{E}, \mathbf{H}) \equiv T_{\mu\nu}(\mathbf{e}, \mathbf{h})$ . Предположим далее, что экспериментально наблюдаемым является только один дуаль-

\*) Как нетрудно видеть, обычные дуальные преобразования  $\mathbf{e} \rightarrow \pm \mathbf{h}$ ,  $\mathbf{h} \rightarrow \mp \mathbf{e}$ ,  $e \rightarrow \pm g$ ,  $g \rightarrow \mp e$  соответствуют  $\alpha = \pi/2$ .

но-инвариантный заряд (для определенности положим  $p=0$ ), что приводит к условию

$$\Theta = \pm \arctg \frac{g}{e}. \quad (6)$$

Поскольку в рамках классической теории величины  $e$  и  $g$  не фиксированы\*, на угол  $\Theta$  фактически не налагается никаких ограничений. Отметим, что переход (4), (5) к величинам  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{H}$ ,  $q$ ,  $p$  обычно рассматривается как возможность дуального поворота либо в электродинамике без зарядов [2—4], либо в электродинамике с частицами, несущими два типа заряда  $e$  и  $g$  [5—7]. Принятое нами определение (4), (5) имеет существенно иной смысл, поскольку величины  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{H}$ ,  $q$ ,  $p$ , согласно определению, ковариантны относительно группы дуальных поворотов. Дуально-инвариантные уравнения Максвелла при наличии одного заряда имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \partial_\nu \tilde{\mathcal{F}}_{\mu\nu} &= \frac{4\pi}{c} q I_\mu, \\ \partial_\nu \mathcal{F}_{\mu\nu} &= 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Здесь  $\mathbf{E}_i = i\mathcal{F}_{i4}$ ,  $\mathbf{H}_i = \varepsilon_{ijk} \mathcal{F}_{jk}$ ,  $\tilde{\mathcal{F}}_{\mu\nu} = -\frac{1}{2} \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \mathcal{F}_{\rho\sigma}$ ,  $\varepsilon_{1234} = i$ ,  $\mathcal{F}_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ . Легко видеть, используя (4), что между потенциалами  $A_\mu$  и  $B_\mu$ , определяющими обычное поле  $F_{\mu\nu} = \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu$ , существует простое соотношение

$$A_\mu = B_\mu \cos k\Theta + \frac{1}{2} \varepsilon_{\nu\mu\rho\sigma} \int \partial_\rho B_\sigma dx_\nu \sin k\Theta, \quad (8)$$

причем преобразованию (1) соответствует следующее преобразование для потенциала  $B_\mu$ :

$$B_\mu \rightarrow B'_\mu \cos \alpha \pm \frac{1}{2} \varepsilon_{\nu\mu\rho\sigma} \int \partial_\rho B'_\sigma dx_\nu \sin \alpha. \quad (9)$$

Можно показать, что  $A_\mu$  не является дуально-ковариантной величиной, в то время как вид условия Лоренца при таких преобразованиях сохраняется. Уравнения Максвелла для свободного дуально-ковариантного поля можно получить из лагранжиана

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{16\pi} \mathcal{F}_{\mu\nu}^2, \quad (10)$$

в котором недопустим дуально-неинвариантный массовый член типа  $-\frac{1}{2} m^2 A_\mu^2$ , что соответствует равенству нулю массы фотона. Это обстоятельство представляется удовлетворительным в связи с тем, что, как показано в [8, 9], обычная калибровочная инвариантность не обеспечивает этого равенства.

2. Дуальная инвариантность и два типа фотона. Очевидно, дуальные преобразования можно рассматривать как некоторое калибровочное преобразование, инвариантность относительно которого однозначно приводит, на основании теоремы Нетер, к введению некоторой сохраняю-

\* Отметим, что это фактически следует из результатов анализа, проведенного в работе [5], где показано, что в рамках классической электродинамики экспериментально наблюдаемыми являются некоторые эффективные заряд и поле.

щейся величины типа заряда. Определим выражение для этой величины в явном виде, используя инвариантность лагранжиана  $\mathcal{L} = -\frac{1}{8\pi} (\mathbf{E}^2 - \mathbf{H}^2)$  относительно бесконечно малых дуальных преобразований. На основании (2) и обычного определения полевых величин через потенциалы находим:

$$\begin{aligned} \nabla \delta \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \delta \mathbf{A} &= k \delta \Theta [\nabla, \mathbf{A}], \\ [\nabla, \delta \mathbf{A}] &= k \delta \Theta \cdot \nabla \varphi + k \delta \Theta \cdot \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \end{aligned} \quad (11)$$

где  $\delta \mathbf{A} = \mathbf{A}(\Theta + \delta \Theta) - \mathbf{A}(\Theta)$ ,  $\delta \varphi = \varphi(\Theta + \delta \Theta) - \varphi(\Theta)$ ,  $A_\sigma = \{\mathbf{A}, i\varphi\}$ .

Выбирая кулоновскую калибровку, запишем выражение для  $\delta \mathbf{A}$  в виде

$$\delta \mathbf{A} = -\delta \Theta c [\nabla, \mathbf{F}], \quad (12)$$

где  $\mathbf{F}$  удовлетворяет уравнениям

$$\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial t} = \frac{1}{c} \mathbf{A} \tau, \quad \left( \nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \mathbf{F} = 0. \quad (13)$$

Для наших целей достаточно ограничиться случаем монохроматических решений, что позволяет положить  $\mathbf{F} = a \mathbf{E}$ , где  $a$  — некоторый числовой параметр. После несложных преобразований, выражая  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{H}$  через потенциалы, получаем

$$\mathcal{L}(\mathbf{E}(\Theta + \delta \Theta), \mathbf{H}(\Theta + \delta \Theta)) = \mathcal{L}(\mathbf{E}(\Theta), \mathbf{H}(\Theta)) + \frac{\partial}{\partial t} \delta \Omega_0 + \nabla \cdot \delta \Omega, \quad (14)$$

где

$$\delta \Omega_0 = \frac{k \delta \Theta}{4\pi c} \mathbf{A} \mathbf{H}, \quad \delta \Omega = \frac{k \delta \Theta}{4\pi} ([\mathbf{E}, \mathbf{A}] + \varphi \mathbf{H}), \quad (15)$$

т. е. с точностью до дивергенции новый лагранжиан идентичен исходному, что по теореме Нетер [10] соответствует следующему закону сохранения<sup>\*)</sup>

$$\frac{d}{dt} \left[ \int d^3x \left( \frac{dL}{dA} \delta \mathbf{A} + \delta \Omega_0 \right) \right]. \quad (16)$$

Подставляя значения  $\delta \mathbf{A}$  и  $\delta \Omega_0$  из (15), получаем

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{k \delta \Theta}{4\pi c} \int d^3x \left( \frac{d\mathbf{E}}{dt} \mathbf{H} - \mathbf{E} \frac{d\mathbf{H}}{dt} \right) \right] = 0, \quad (17)$$

т. е. сохраняющаяся величина

$$\rho = k \left( \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \mathbf{H} - \mathbf{E} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \right). \quad (18)$$

может быть интерпретирована как плотность некоторого заряда. Впервые сохранение такой величины обсуждалось в работе [13], где было отмечено отсутствие какой-либо физической интерпретации<sup>\*\*)</sup>.

Введем понятие фотонного заряда. Поскольку два знака соответствуют существованию двух типов дуально-ковариантных полей, то в обыч-

<sup>\*)</sup> В работе [11] аналогичное выражение получено на основании инвариантности уравнений Максвелла для свободного электромагнитного поля относительно преобразований (1).

<sup>\*\*)</sup> Интересно отметить, что такого рода «обобщенные» законы сохранения имеют место и для вторично квантованных свободных заряженных полей [12].

ных терминах наличие сохраняющейся величины (18) следует интерпретировать как введение двух различных типов фотонов. Впервые такая возможность была отмечена в работе [14] в связи с необходимостью интерпретации решений с отрицательной энергией для уравнений Максвелла в спинорной форме и обсуждена в [15], где для фотона было введено понятие «киральности», что позволило ограничиться решениями с положительной энергией. Различие между двумя типами фотонов, следуя [15], можно иллюстрировать геометрически, на примере плоской линейно поляризованной волны, для которой  $|\mathbf{e}| = |\mathbf{h}|, \mathbf{e} \perp \mathbf{h}$ .

В этом случае, переход к дуально-инвариантным полям можно рассматривать как поворот направления поляризации на угол  $\Theta$  вокруг направления распространения этой волны. Для  $k = \pm 1$  плоские линейно поляризованные волны соответственно получаются из двух пар круговых волн (см. рисунок), представляющих собой два топологически различных варианта. Два знака  $k$  в нашем формализме фактически соответствуют двум различным значениям «киральности» в [15]. Подчеркнем однако, что наш вывод базируется на существенно иных посылках по сравнению с использованными в работах [14, 15] и, по нашему мнению, является более предпочтительным, поскольку введение двух типов фотонов возникает в качестве прямого следствия дуальной инвариантности и не приводит к трудностям с отрицательной энергией поля. Очевидно, что наряду с двумя типами фотонов в развитом формализме естественно возникает два типа дуально-инвариантных источников  $q$ .

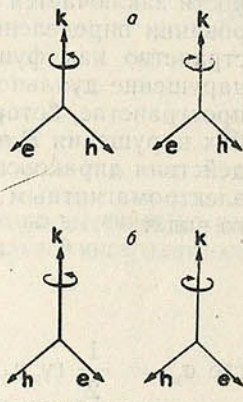
3. Дуальная инвариантность и дискретные преобразования. Рассмотрим вопрос о преобразовании дуально-ковариантных величин относительно операций пространственной инверсии  $P$ , обращения времени  $T$ , зарядового сопряжения  $C_e$  по заряду  $e$ . Здесь существует две возможности. Если обобщить операции  $P, T, C_e$ , следующим образом:

$$\begin{aligned} P &\rightarrow P' = PC_g, \\ T &\rightarrow T' = TC_g, \\ C_e &\rightarrow C' = C_e C_g, \end{aligned} \tag{19}$$

где  $C_g$  — сопряжение по заряду  $g$ , то трансформационные свойства величин  $E, \mathbf{H}$  и  $q^*$  относительно  $P', T', C'$  были бы соответственно аналогичны свойствам  $e, \mathbf{h}, e$  относительно  $P, T, C_e$ . В этом случае  $C_e P T C_g$ -теорему следовало бы обобщить путем добавления операции  $C_g (C_e P T C_g)$ , подобно тому, как это было предложено в [16] для теории, включающей физические монополи. Если же  $g$  считать скаляром, то операции  $P', T'$  соответствовали бы переходу в полевых уравнениях к источникам другого типа. Можно выбрать и иной путь. Именно, определить операции отражения по параметрам  $k, P_h$  и  $\Theta, P_\Theta$  и соответственно обобщить операции  $P, T, C, M$  ( $M$  — операция «магнитного» сопряжения), предполагая здесь наличие магнитных зарядов, следующим образом:

$$\begin{aligned} P &\rightarrow P' = PP_\Theta, \quad C \rightarrow C' = CP_h, \\ T &\rightarrow T' = TP_\Theta, \quad M \rightarrow M' = MP_h, \end{aligned} \tag{20}$$

\* Предполагаем, что  $g$  — псевдоскаляр.



Топологическая связь между векторами  $e, h, k$  ( $k$  — волновой вектор):  
 $a - k = +1, b - k = -1.$

Нетрудно видеть, что операции  $M$  или  $P_\Theta$ ,  $P_k$  соответствуют переходу в полевых уравнениях ко второму типу дуально-ковариантных величин, но наличие дуальной инвариантности означает физическую неразличимость двух возможных типов электродинамических величин.

4. Нарушение дуальной инвариантности в электромагнитных взаимодействиях. Представляет интерес обсудить некоторые следствия возможного нарушения дуальной инвариантности в электромагнитных взаимодействиях. Нарушение дуальной инвариантности заключается в снятии вырождения по параметру  $\Theta$ , т. е. в фиксировании определенного значения  $\Theta$ . Если рассматривать дуальное пространство как функциональное пространство полевых переменных, то нарушение дуальной инвариантности есть нарушение симметрии в этом пространстве, которое может быть описано, как увидим далее, в терминах нарушения  $P$  и  $T$ -четности. Рассмотрим простейший случай взаимодействия дираковской частицы с зарядом  $q$  с дуально-инвариантным электромагнитным полем, характеризуемым гамильтонианом следующего вида:

$$H = \frac{q\hbar}{mc} \left\{ 2iA_\nu \frac{\partial}{\partial x_\nu} + \frac{i}{2} \sigma_{\mu\nu} \mathcal{F}_{\mu\nu} \right\}, \quad (21)$$

где  $\sigma_{\mu\nu} = \frac{1}{2} (\gamma_\mu \gamma_\nu - \gamma_\nu \gamma_\mu)$ ;  $\gamma_\mu$  — матрицы Дирака;  $A_\mu$  — потенциал внешнего дуально-ковариантного поля  $\mathcal{F}_{\mu\nu}$ . Предполагая нарушение дуальной инвариантности малым ( $\xi = \sin \Theta \sim \Theta \ll 1$ ), ограничимся нерелятивистским приближением в (21) и членами, линейными по  $\xi$ .

Производя в (21) переход

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{\mu\nu} &\rightarrow F_{\mu\nu} \pm \xi \tilde{F}_{\mu\nu}, \\ q &\rightarrow e \pm \xi g, \end{aligned} \quad (22)$$

получим гамильтониан взаимодействия следующего вида:

$$\begin{aligned} \frac{eq\hbar}{2mc} \sigma_{\mu\nu} \mathcal{F}_{\mu\nu} &\rightarrow -\frac{e\hbar}{mc} [\sigma \mathbf{h} - i\alpha \mathbf{e}] \pm \frac{e\hbar\xi}{mc} [\sigma \mathbf{e} + i\alpha \mathbf{h}] \rightarrow \\ &\xrightarrow{\frac{v}{c} \ll 1} \frac{e\hbar}{2mc} \left[ \sigma \mathbf{h} - \sigma \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{e} \right] \mp \frac{e\hbar\xi}{2mc} \left[ \sigma \mathbf{e} + \sigma \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{h} \right], \end{aligned} \quad (23)$$

и

$$\begin{aligned} \frac{q\hbar}{mc} 2iA_\nu \frac{\partial}{\partial x_\nu} &= \frac{q\hbar}{mc} \mathbf{H} (i\mathbf{r} \times \nabla) \rightarrow \frac{e\hbar}{mc} \mathbf{h} (i\mathbf{r} \times \nabla) \pm \\ &\pm \frac{e\hbar\xi}{mc} \mathbf{e} (i\mathbf{r} \times \nabla) \xrightarrow{\frac{v}{c} \ll 1} \frac{e\hbar}{2mc} \mathbf{h} (i\mathbf{r} \times \nabla) \mp \frac{e\hbar\xi}{2mc} \mathbf{e} (i\mathbf{r} \times \nabla) = \\ &= \mu_0 \mathbf{hL} \pm \mu_0 \xi \mathbf{eL}, \end{aligned} \quad (24)$$

где  $\mu_0 = \frac{e\hbar}{2mc}$  — магнетон Бора. Выражение (24) получено в предположении о постоянстве внешнего электрического и магнитного полей.

Как видим, части выражений (23), (24), пропорциональные  $\xi$ , описывают взаимодействие дираковской частицы, эффективно нарушающее  $P$  и  $T$ -четности в электромагнитном взаимодействии. Наличие знаков  $\pm$  в (23), (24) связано с возможностью существования двух типов фотона.

Если бы удалось наблюдать нарушение  $P$  и  $T$  на опыте, то в зависимости от знака поправки можно было бы судить о том, с каким типом фотона происходит взаимодействие. Как видно, нарушение дуальной инвариантности в разобранном случае не дает возможности различить два допустимых типа электрического заряда. В работах [17, 18] были получены выражения, аналогичные (23), (24), путем прямого введения в лагранжиан взаимодействия псевдовекторного потенциала  $C_\nu$ , так что

$$L_{\text{int}} = \frac{e}{c} (B_\nu + C_\nu) \dot{x}_\nu, \quad (25)$$

и выбирались выражения для  $C_\nu$  в виде

$$C_\nu = \frac{1}{2} \xi \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \int \partial_\rho B_\sigma dx_\nu. \quad (26)$$

Нетрудно видеть, что запись  $\mathcal{L}_{\text{int}}$  (25) непосредственно вытекает из развитого формализма. Действительно, при нарушении дуальной инвариантности

$\mathcal{L}_{\text{int}} = \frac{q}{c} A_\nu \dot{x}_\nu$  переходит в  $\mathcal{L}_{\text{int}}$  (25) при

$$q \rightarrow e \pm \xi g, \\ A_\mu \rightarrow B_\mu \pm \frac{1}{2} \xi \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \int \partial_\rho B_\sigma dx_\nu \quad (27)$$

необходимо учесть (6) и возможность двух знаков  $\pm$ ).

В [17, 18] были обсуждены возможности экспериментального обнаружения нарушения  $P$ -,  $T$ -четностей в применении к электрону, исходя из значения  $\xi \sim 10^{-13}$ , которое было получено из предположения о том, что возможное нарушение законов сохранения в электродинамике происходит на расстояниях меньших  $10^{-13}$  см.

Следует подчеркнуть, что оценки такого рода в рамках классического рассмотрения могут носить лишь чисто иллюстративный и спекулятивный характер. Получение сколько-нибудь определенных предсказаний относительно возможности экспериментального наблюдения следствий нарушения дуальной инвариантности требует проведения самосогласованной процедуры квантования дуально-инвариантных полей и источников. По-видимому, механическое перенесение на этот случай стандартной процедуры, связанной с использованием обычных перестановочных соотношений для максвелловского и спинорного полей, не является корректным. Дело в том, что в сущности до сих пор остается открытым основной вопрос—вопрос о возможности проведения в рамках дуально-инвариантной электродинамики измерительной процедуры типа процедуры Бора — Розенфельда [19, 20]. Очевидно, такой анализ необходим прежде всего для решения вопроса о возможности экспериментального обнаружения двух видов заряда вообще и магнитного монополя в частности. Как отмечалось в [21, 22], для четкой постановки экспериментов по обнаружению монополя по существу отсутствуют сколько-нибудь определенные теоретические предпосылки. В связи с этой проблемой мы хотим обратить внимание на следующее обстоятельство. Анализ Харрисона и др. [5] показывает, что в рамках чисто классического рассмотрения наблюдаемым является только эффективный заряд  $q^2 = e^2 + g^2$ , с другой стороны, соотношение типа Дирака—Швингера  $eg \sim \hbar c$  [23, 24] представляет собой типичное квантовое условие, выяснение физического смысла

которого требует анализа того, в рамках какой измерительной процедуры оно может быть реализовано.

Авторы выражают благодарность Ф. И. Федорову за интерес и внимание к работе, а также А. С. Потупе за стимулирующие дискуссии.

### Литература

1. Rainich G. Y. Trans. Am. Math. Soc., 27, 106, 1925.
2. Misner C., Wheeler I. A. Ann. of Phys., 2, 604, 1957; «Гравитация. Нейтринно. Вселенная». ИЛ, 1962.
3. Penney R. J. Math. Phys., 5, 1431, 1964.
4. Takabayasi I. Compt. Rend., 248, 70, 1959.
5. Harrison H. et al. Am. J. Phys., 33, 958, 1963.
6. Тевикий П. В. ЖЭТФ, 50, 311, 1966; 51, 791, 1966.
7. Katz E. Am. J. Phys., 33, 306, 1965.
8. Schwinger I. Phys. Rev., 125, 397, 1962; Сб. «Элементарные частицы и компенсирующие поля», 1964.
9. Ogievetski, Polubarinov I. W. Nuovo Cim., 23, 173, 1962.
10. Hille L. Rev. Mod. Phys., 23, 253, 1951.
11. Calkin M. G. Am. J. Phys., 33, 958, 1965.
12. O'Connell R. F., Tompkins D. R. Nuovo Cim., 39, 391, 1965.
13. Lipkin D. M. I. Math. Phys., 5, 696, 1965.
14. Good R. H. Phys. Rev., 105, 1914, 1957.
15. Bakri M. M. Nucl. Phys., 87, 289, 1966.
16. Ramsey N. F. Phys. Rev., 109, 225, 1958.
17. Sachs M. Ann. of Phys., 6, 209, 1959.
18. Sachs M., Schwebel P. L. Ann. of Phys., 8, 475, 1959.
19. Bohr N., Rosenfeld L. Kgl. Danske. Videnskab. Selskab. Biol. Medd. 12, 8, 1933.
20. Тирринг В. Принципы квантовой электродинамики. ВШ, 1964.
21. Rohrlich F. Phys. Rev., 150, 1104, 1966.
22. Томильчик Л. М. ДАН БССР, 8, 379, 1964.
23. Dirac P. A. M. Proc. Roy. Soc., A133, 60, 1931. Phys. Rev., 74, 817, 1948.
24. Schwinger J. Phys. Rev., 144, 1087, 1966.

Институт физики  
АН БССР

Поступило в редакцию  
28.IX 1967

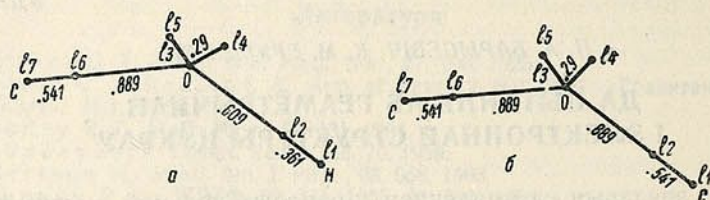
Н. А. БАРЫСЕВІЧ, К. М. ГРУШЭЦКІ

## ДА ПЫТАННЯ АБ ГЕАМЕТРЫЧНАЙ І ЭЛЕКТРОННАЙ СТРУКТУРЫ ЦУКРАУ

Ізамеры, звязаныя са змяненнем піранавых кольцаў, маюць вялікае значэнне пры вызначэнні ўласцівасцей і рэакцый цукраў. Адным з фактараў, якія вызначаюць геаметрыю піранавага кольца, з'яўляецца  $\Delta 2$ -эфект, устаноўлены Рыўсам [1] на падставе аналізу вялікага эксперыментальнага матэрыялу па цукрах і іх вытворных. Цукры з аксіяльным гідракіслам у  $C_2$ ,  $CO$ -сувязь якога дзеліць папалам вугал, утвораны дзбюма сувязямі ў першага вугляроднага атама, маюць  $\Delta 2$ -эфект. З аднаго боку, па адносінах да іншых фактараў нестабільнасці цукраў і іх вытворных  $\Delta 2$ -эфекту прыпісваецца 2,5 умоўныя адзінкі. Тлумачэнне такога моцнага ўплыву на стабільнасць той або іншай канфармацыі знаходзяць у тым, што існуе вялікае дыполь-дыпольнае ўзаемадзеянне палярных груп, звязаных з атамамі  $C_1$  і  $C_2$ . З другога боку, з разлікаў канфармацый палімерных ланцугоў [2] і з пастаянства вышынні патэнцыяльнага бар'ера ўнутранага вярчэння ў этане пры замене атама вадароду на атам фтору [3] вынікае, што энергія электростатычнага ўзаемадзеяння палярных груп атамаў у малекулах адыгрывае не першаступенную ролю пры канфармацыйных пераходах. Значыць, здаецца сумніцельнай такая важная роля (2,5 умоўныя адзінкі) дыполь-дыпольнага ўзаемадзеяння ў параўнанні са стэрычным ўзаемадзеяннем хімічна не звязаных атамаў (0,5 умоўныя адзінкі) пры канфармацыйных пераходах у цукрах. Для рашэння гэтага пытання мэтазгодна разлічыць энергію дыполь-дыпольнага ўзаемадзеяння групы атамаў, звязаных з  $C_1$  і  $C_2$ , для канфармацыі, калі ў малекуле рэалізуецца  $\Delta 2$ -эфект і калі ён адсутнічае. Энергію электростатычнага ўзаемадзеяння паміж палярнымі групамі атамаў разлічваюць [4], не звяртаючы ўвагі на памеры дыполей у параўнанні з адлегласцямі паміж імі. Такі разлік з'яўляецца грубым, паколькі ў палярных групоўках атамаў дыпольны момант іх [5] абумоўлены не толькі звязваючай электроннай парай, але і не звязваючымі электронамі такіх атамаў, як кісларод, азот, фтор, хлор. Палярныя групы атамаў у малекулах размешчаны, як правіла, на малых адлегласцях ( $\sim 2,5 \text{ \AA}$ ), і не браць пад увагу памеры дыполей нельга. Значыць, лагічна ўлічваць электростатычнае ўзаемадзеянне паміж ядрамі і звязваючымі і незвязваючымі электронамі. У выніку задача зводзіцца да разліку энергіі электростатычнага ўзаемадзеяння групы  $C_1O_1H_1$  са звязваючымі і незвязваючымі электронамі і пратонамі іншых палярных груп для выпадку канфармацыі малекулы цукру, дзе рэалізуецца  $\Delta 2$ -эфект, і для выпадку канфармацыі той жа малекулы, дзе  $\Delta 2$ -эфект адсутнічае. Для рашэння гэтай задачы трэба ведаць размеркаванне зарадаў звязваючых і незвязваючых электронаў і пратонаў атамаў у групоўках, прыведзеных на рыс. 1, і ўдакладненую геаметрыю піранавага кольца. Гэтым пытаннем і прысвечана дадзеная работа.

З літаратуры вядома, што гідракіслыя групы, далучаныя да піранавага кольца, могуць утвараць некалькі тыпаў вадародных сувязей,

якія адрозніваюцца як па месцу лакалізацыі, так і па велічыні энергіі [6]. Ведаючы геаметрыю малекулы, патэнцыялы стэрычнага ўзаемадзеяння паміж хімічна не звязанымі атамамі і патэнцыялы вадародных сувязей розных тыпаў, можна было б колькасна вызначыць найбольш выгадных



Рыс. 1. Папунктавае размеркаванне зарадаў у групах атамаў СОН (а) і СОС (б) для малекул цукраў (адлегласці на рысунку выражаны ў А)

ў энергетычных адносінах канфармацыі цукраў, звязаныя як з ізамерызацыяй піранавага кольца, так і са змяненнем прасторавага размяшчэння гідраксільных груп. Выкарыстаць вядомыя ў літаратуры [7, 8] патэнцыялы вадароднай сувязі немагчыма, паколькі яны апісваюць або лінейную вадародную сувязь [7], або залежаць ад некалькіх параметраў [8]. З гэтай прычыны мэтазгодна пры канфармацыйных пераходах у цукрах для прыблізнага ўліку энергіі вадароднай сувязі скарыстаць электростатычную мадэль. Акрамя таго, вядома, што папунктавая мадэль вадароднай сувязі здавальняюча апісвае энергію [9, 10] і добра тлумачыць [5] яе накіраваныя ўласцівасці. Вядома, што атам кіслароду ў звязаным стане мае дзве звязваючыя арбіталі ( $b_1, b_2$ ) і дзве незвязваючыя арбіталі ( $l_1, l_2$ ) у абзначэннях работы [11]. Вызначым цэнтры электронаў звязваючых арбіталей, накіраваных уздоўж сувязей С—О і О—Н. Цэнтры электронаў незвязваючых арбіталей вызначаны ў рабоце [5] у меркаванні тэтраэдраўных вуглоў паміж арбіталямі. Скарыстаем асноўнае палажэнне валентна-аптычнай схемы, менавіта, сувязям С—О і О—Н прыпішам значэнні дыпольных момантаў [12], знойдзеныя з спектраскапічных даных, або, іншымі словамі, уявім дыпольныя моманты як складаючыя дыпольнага моманту групоўкі па напрамках гэтых хімічных сувязей. Дыпольныя моманты сувязей С—Н і С—С малыя [12], і з гэтай прычыны іх у разліках улічваць не будзем. Расклаўшы дыпольныя моманты незвязваючых арбіталей атама кіслароду па напрамках хімічных сувязей С—О і О—Н, выбярэм цэнтры зарадаў на гэтых сувязях так, каб дыпольныя моманты іх былі роўныя 1,12 D і 1,58 D адпаведна. На самой справе, уявім дыпольны момант групоўкі ў выглядзе

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}_b + \mathbf{M}_l + \mathbf{M}_p, \quad (1)$$

дзе  $\mathbf{M}_b, \mathbf{M}_l, \mathbf{M}_p$  — вектарныя сумы дыпольных момантаў звязваючых, незвязваючых арбіталей і пратонаў адпаведна. У раскладанні агульнага дыпольнага моманту якой-небудзь групоўкі па напрамках сувязей С—О і О—Н будуць удзельнічаць толькі дыпольныя моманты незвязваючых арбіталей атама кіслароду. Элементарныя вылічэнні даюць папунктавае размеркаванне зарадаў у групах атамаў  $C_1O_1H_1, C_1O_1C_5$ , якое прыведзена на рыс. 1, а велічыня зараду прыведзена ніжэй, у адзінках зараду электрона:

$$l_1 = 1; l_2 = -2; l_3 = 6; l_4 = -2; l_5 = -2; l_6 = -2; l_7 = 1.$$

Удакладненне геаметрыі піранавага кольца неабходна пры вывучэнні вадароднай сувязі, канфармацыйных пераходаў, спектраскапічнага праўлення прасторавага размяшчэння некаторых груп атамаў, далучаных да піранавага кольца. Вядома, што піранавае кольца фармальна можна атрымаць з цыклагексанавага, замяніўшы адзін з атамаў вугляроду на атам кіслароду і ўкараціўшы адпаведныя хімічныя сувязі C—C (1,54 Å)

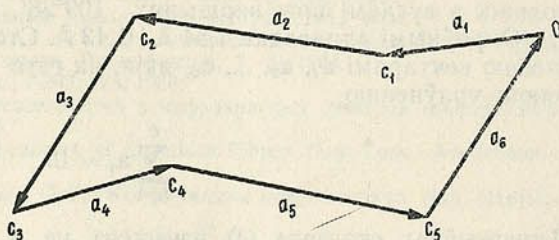


Рис. 2. Геаметрыя малекулы піранавага кольца

да велічыні 1,43 Å. Валентныя вуглы піранавага, як і цыклагексанавага кольца, з'яўляюцца тэтраэдрычнымі [13]. Таму пераход ад цыклагексанавага кольца да піранавага з захаваннем тэтраэдрычных валентных вуглоў магчымы толькі за кошт змянення вуглоў унутранага вярчэння вакол хімічных сувязей. З пункту гледжання тэорыі затарожанага ўнутранага вярчэння [14] на пераход цыклагексанавага кольца ў піранавае з захаваннем валентных вуглоў тэтраэдрычнымі патрабуецца нязначная энергія, паколькі змяненне вуглоў унутранага вярчэння на некалькі градусаў мала зменіць патэнцыяльную функцыю ўнутранага вярчэння.

Вызначым вуглы вярчэння хімічных сувязей  $C_1-O_1$ ,  $C_1-C_2$ ,  $C_2-C_3$  у піранавага кольца, геаметрыя якога і абазначэнні атамаў прыведзены на рис. 2. Вярчэнне вакол хімічных сувязей другой палавіны піранавага кольца (сіметрыя піранавага кольца  $C_2$ ) разглядаць не будзем, паколькі кольца сіметрычнае адносна плоскасці, якая праходзіць праз бісектрысы вуглоў  $C_2-C_3-C_4$  і  $C_1-O-C_5$ .

Вярчэнне вакол хімічнай сувязі  $C_2-C_3$  можна вызначыць з формулы

$$x_1 = 1,6764 - 0,8383 \cos \varphi_1, \quad (2)$$

дзе  $x_1$  — адлегласць ад атама  $C_1$  да плоскасці сіметрыі піранавага кольца;  $\varphi_1$  — вугал вярчэння вакол хімічнай сувязі  $C_2-C_3$ , які адлічваецца ад плоскасці, што праходзіць праз атамы  $C_2$ ,  $C_3$ ,  $C_4$  па гадзіннікавай стрэлцы. Падставіўшы ў (2)  $x_1 = 1,1676$  для піранавага кольца, знойдзем  $\varphi_1 = -52^\circ 38'$ , у той час як для цыклагексанавага кольца гэты вугал роўны  $60^\circ$ . Значыць, пры пераходзе ад цыклагексанавага кольца да піранавага адбываецца вярчэнне ўсёй групы атамаў, звязанай з  $C_2$ , вакол хімічнай сувязі  $C_2-C_3$  на вугал  $\Delta\varphi_1 = 7^\circ 22'$  супроць гадзіннікавай стрэлкі, калі паглядзець з боку атама  $C_2$ . Вярчэнне вакол хімічнай сувязі  $C_1-C_2$  вызначым па формуле

$$x_2 = 1,1411 - 1,3460 \cos \varphi_2, \quad (3)$$

дзе  $x_2$  — адлегласць атама O кольца да плоскасці сіметрыі;  $\varphi_2$  — вугал вярчэння вакол хімічнай сувязі  $C_1-C_2$ . Падставіўшы ў (3)  $x_2 = 0,0853$  для піранавага кольца, атрымаем  $\Delta\varphi_2 = 6^\circ 19'$ . Значыць, пры пераходзе ад цыклагексанавага кольца да піранавага адбываецца вярчэнне ўсёй групы атамаў, звязанай  $C_1$ , вакол хімічнай сувязі  $C_1-C_2$  на вугал  $\Delta\varphi_2$  (па гадзіннікавай стрэлцы, калі глядзець з боку атама  $C_1$  уздоўж восі

вярчэння). Для праверкі правільнасці атрыманых значэнняў вуглоў  $\Delta\varphi_1$ ,  $\Delta\varphi_2$  у прамавугольнай сістэме каардынат, пачатак якой знаходзіцца ў  $C_5$ , вызначаліся каардынаты ломанай лініі  $C_5C_4C_3C_2C_1O$  і каардынаты атама кіслароду. Крытэрыем правільнасці атрыманых значэнняў  $\Delta\varphi_1$ ,  $\Delta\varphi_2$  было супадзенне каардынат атама кіслароду, вылічаных непасрэдна ў сістэме каардынат, звязанай з  $C_5$ , з каардынатамі ломанай  $C_5C_4C_3C_2C_1O$ . Для вызначэння вярчэння вакол хімічнай сувязі  $O-C_1$  разгледзім шасцівугольнік з вугламі пры вяршынях  $109^\circ 28'$ , даўжынямі сувязей  $C-C$  і  $C-O$ , роўнымі адпаведна  $1,54 \text{ \AA}$  і  $1,43 \text{ \AA}$ . Стораны шасцівугольніка ўявім шасцю вектарамі  $a_1, a_2, \dots, a_6$ , якія, як гэта відаць з рыс. 2, задавальняюць ураўненню

$$\sum_{i=1}^6 a_i = 0. \quad (4)$$

Памножыўшы скалярна (4) пачаргова на  $a_1, a_2, \dots, a_6$ , атрымаем сістэму ўраўненняў

$$\sum_{i=1}^6 S_{ij} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, 6, \quad (5)$$

дзе  $S_{ij} = (a_i, a_j)$ ;  $a_i = l_i e_i$ ;  $l_i$  — даўжыня  $i$ -й сувязі;  $e_i$  — адзінкавы вектар  $i$ -й сувязі;  $S_{ij} = 1/3$ , калі індэксы  $i$  і  $j$  адпавядаюць суседнім вектарам, паколькі вуглы тэтраэдрычныя. У сістэме ўраўненняў (5) маем дзевяць невядомых  $S_{ij}$ , паколькі  $S_{ij} = S_{ji}$  і  $S_{ii} = (a_i, a_i) = l_i^2$ , у той час як колькасць ураўненняў (5) роўная шасці, прычым частка з іх з'яўляецца лінейна залежнай. Зыходзячы з таго, што піранавае кольца мае плоскасць сіметрыі, знойдзем  $S_{13} = S_{46}$ ,  $S_{24} = S_{35}$ ,  $S_{15} = S_{26}$ ,  $S_{14} = S_{36}$ . Тады з сістэмы ўраўненняў (5), адкінуўшы лінейна залежныя, атрымаем

$$\begin{aligned} 1,54 \alpha_{13} + 1,54 \alpha'_{14} + 1,54 \alpha'_{15} + a &= 0, \\ 1,43 \alpha'_{15} + 1,54 \alpha'_{25} + 1,54 \alpha'_{24} + b &= 0, \\ 1,43 \alpha'_{14} + 1,54 \alpha'_{24} + 1,43 \alpha'_{13} + c &= 0, \end{aligned} \quad (5')$$

дзе  $\alpha_{ij} = (e_i, e_j)$ ;  $a = 2,420$ ;  $b = c = 2,530$ . З першага і трэцяга ўраўненняў (5') знойдзем

$$\alpha'_{15} = 1,0769 \alpha'_{24} + 0,198. \quad (6)$$

Паколькі каэфіцыент  $\alpha'_{24}$  вызначаны вышэй па формуле (2), то лёгка знайсці  $\alpha'_{15}$ , г. зн. вярчэнне вакол хімічнай сувязі  $C_5-O_1$  пры пераходзе ад цыклагексанавага кольца да піранавага. Элементарныя вылічэнні паказваюць, што гэты вугал  $\Delta\varphi_3 = 5^\circ 05'$ . Адлік вугла робіцца па гадзіннікавай стрэлцы, калі глядзець уздоўж хімічнай сувязі  $O_1-C_5$  з боку атама  $O_1$ .

На падставе папунктавага размеркавання зарадаў у групах атамаў, якія ўваходзяць як састаўныя элементы ў малекулы цукраў, у наступнай рабоце будзе разлічана энергія электростатычнага ўзаемадзеяння групы  $C_1O_1H$  з усімі іншымі палярнымі групамі атамаў пры пераходзе малекул цукраў з адной канфармацыі ў іншую, у прыватнасці пры канфармацыйным пераходзе крэсла  $\rightarrow$  ванна.

Аўтары лічаць прыемным абавязкам падзякаваць Н. Д. Сакалова за рад каштоўных заўваг.

Літаратура

1. Reeves R. E. J. Am. Chem. Soc., 72, 1499, 1950.
2. Готлиб Ю. Я., Даринский А. А. Высокомолек. соед., 7, 10, 1965.
3. Wilson E. B. Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 43, 816, 1957.
4. Fujiyama T., Shimanouchi T. J. Chem. Phys., 39, 4, 1963.
5. Schneider W. G. J. Chem. Phys., 23, 1, 26, 1955.
6. Конкин А. А., Шигорин Д. Н., Новикова Л. И. ЖФХ, 32, 894, 1958.
7. Lippincott R., Schroeder R. J. Chem. Phys., 23, 1099, 1955.
8. Соколов Н. Д. «Водородная связь». Изд. «Наука», М., 1964.
9. Пиментел Д. ж., Мак-Клеллан О. Водородная связь. Изд. Мир», М., 1964.
10. Викторова А. А. Изв. вузов, Радиофизика, 7, 3, 1964.
11. Porle I. Q. Proc. Roy. Soc., A202, 323, 1950.
12. Грибов Л. А. Теория интенсивностей в инфракрасных спектрах многоатомных молекул. Изд. АН СССР, М., 1963.
13. Hermans. Physics and Chemistry of Cellulose Fibres. New York—Amsterdam—London—Brussel, 1949.
14. Бирштейн Т. М., Птицын О. Б. Конформации макромолекул. Изд. «Наука», М., 1964.

Институт физики  
АН БССР

Поступило в редакцию  
4.VII 1967

В. И. ГАНОПОЛЬСКИЙ, Т. В. ЕЗЕРСКАЯ

### О ТОЧНОСТИ ФОТОМЕТРИЧЕСКИХ ИЗМЕРЕНИЙ. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ ПРОВЕРКА ТОЧНОСТИ ИЗМЕРЕНИЙ НА ФИЛЬТРОФОТОМЕТРЕ ПО МЕТОДУ НЕПОСРЕДСТВЕННОЙ ФОТОМЕТРИИ

Экспериментальной проверке точности измерений на спектрофотометрах и фильтрофотометрах (фотоэлектроколориметрах) посвящена работа [1]. К сожалению, в этой работе определялась «общая относительная погрешность», включающая как инструментальную  $\sigma_{\tau_{II}}$ , так и кюветную ошибку  $\sigma_{\tau_{гк}}$ . При этом, как и в ряде других работ [2, 3], воспроизводимость показаний прибора определялась измерениями при неоднократной смене растворов в кюветах. При такой постановке эксперимента величина кюветной ошибки не выявляется, между тем влияние ее, а также величины граничного показания шкалы  $T_{гp}$  весьма велико [4, 5]. Поскольку в нашем в предыдущем сообщении [5] подробно рассмотрены общие вопросы точности фотометрических измерений, связанные с наличием зависимости ошибки в показании прибора по шкале пропусканий  $\Delta T$  или  $\sigma_{\tau}$  от самого пропускания, мы остановимся лишь на некоторых конкретных вопросах измерений на фильтрофотометре и приведем методику экспериментального определения  $\sigma_{\tau_{II}}$ ,  $\sigma_{\tau_{гк}}$  и  $T_{гp}$ , разработанную Г. С. Терешиним [4].

При рассмотрении кюветной ошибки в случае измерений на фильтрофотометре необходимо учитывать то обстоятельство, что фотометрические измерения на однолучевом спектрофотометре выполняются с двумя кюветами, а на двухлучевом фильтрофотометре — с тремя. По этой причине, если  $\sigma_{\tau_{к}}$  — среднее квадратичное отклонение пропускания кювет относительно друг друга при смене растворов, то в случае измерений по схеме трех кювет необходимо учитывать две независимые величины  $\sigma_{\tau_{к(1)}}$  — среднее квадратичное отклонение пропускания 2-й кюветы относительно 1-й и  $\sigma_{\tau_{к(II)}}$  — то же для 3-й кюветы относительно 1-й. Так как величины  $\sigma_{\tau_{к(1)}}$  и  $\sigma_{\tau_{к(II)}}$  являются независимыми, то суммарное среднее квадратичное отклонение пропускания кювет относительно друг друга при смене растворов может быть выражено формулой

$$\sigma_{\tau_{к(сум)}} = \sqrt{\sigma_{\tau_{к(1)}}^2 + \sigma_{\tau_{к(II)}}^2}.$$

Если принять, что

$$\sigma_{\tau_{к(1)}} = \sigma_{\tau_{к(II)}}, \text{ то } \sigma_{\tau_{к(сум)}} = \sigma_{\tau_{к}} \sqrt{2}.$$

Это значит, что суммарная величина  $\sigma_{\tau_{к}}$  при работе по схеме трех кювет на фильтрофотометре примерно в 1,4 раза больше, чем  $\sigma_{\tau_{к}}$  при работе с двумя кюветами на спектрофотометре. Во столько же раз будет больше и кювет-

ная ошибка  $\sigma_{T_{гк}}$ , а так как  $T_{гp} = \sigma_{T_{п}}/\sigma_{T_{к}}$ , то величина  $T_{гp}$  будет примерно в 1,4 раза меньше, т. е. можно ожидать, что  $T_{гp} = 1/4 \div 1/7$  для спектрофотометра [4] уменьшится до  $1/6 \div 1/10$  для фильтрофотометра.

Методика вычисления и определения  $\sigma_{T_{п}}$ ,  $\sigma_{T_{и}}$  и  $T_{гp}$ . Согласно Г. С. Терешину [4], формула ошибок измерения показания прибора с учетом зависимости  $dT$  от  $T$  имеет вид

$$\frac{\sigma_D}{D} = \frac{0,434 \cdot \sigma_{T_{п}}}{D \cdot 10^{-D}} \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{T}{T_{гp}}\right)^2}. \quad (1)$$

Построение теоретической кривой ошибок для данных конкретных условий требует знания величины инструментальной ошибки  $\sigma_{T_{п}}$  и граничного показания шкалы пропусканий  $T_{гp}$ . Поскольку  $T_{гp} = \sigma_{T_{п}}/\sigma_{T_{к}}$ , а  $\sigma_{T_{к}} = \sigma_{гк}/T$ , то задача состоит в определении величин

$$\sigma_{T_{п}}, \sigma_{T_{гк}}, \sigma_{T_{к}} \text{ и } T_{гp}.$$

Методика определения этих величин состоит в приготовлении серии растворов какого-либо светопоглощающего вещества с набором концентраций и в измерении пропусканий этих растворов по следующей схеме. Каждый из растворов заливают в рабочую кювету несколько раз (число смен  $m$ ), одновременно в кюветах сравнения меняют раствор сравнения. После каждой смены раствора все кюветы обрабатываются с целью их отмывки по какому-либо одному определенному рецепту [1, 4, 6, 7]. Для исключения влияния возможного изменения режима прибора во времени фотометрирование растворов проводят по методу симметричных наблюдений, т. е. последовательность измерений следующая: I, II, III, IV, ..., IX, X (если, например, растворов 10); X, IX, ..., III, II, I и т. д. Всего  $m$  смен каждого раствора. После обработки кювет и заполнения их растворами выполняют  $n$  единичных отсчетов  $T_j$  (в практике обычно принято брать  $n=3$ ). Перед каждым единичным отсчетом настройку прибора выполняют заново. Полученные данные подвергают дисперсионному анализу по схеме, описанной Г. С. Терешиним [4].

Экспериментальная часть. Работа была проведена на фотоэлектроколориметре ФЭК-М. В качестве исследуемых систем были выбраны растворы бихромата калия (серия растворов с концентрациями от 0 до  $5 \cdot 10^{-3}$  г-экв/л) с интервалом  $\Delta c = 0,5 \cdot 10^{-3}$  г-экв/л) и перманганата калия (серия растворов с концентрациями от 0 до  $5 \cdot 10^{-3}$  г-экв/л с интервалом  $\Delta c = 1 \cdot 10^{-3}$  г-экв/л). В случае растворов  $K_2Cr_2O_7$  измерения выполнялись для одной и той же серии растворов в кюветах разной длины ( $l_1=1$  см и  $l_2=3$  см). В случае растворов  $KMnO_4$  для одной и той же серии растворов выполнялись измерения в кюветах  $l=1$  см, но для двух светофильтров (зеленого и сине-зеленого). Во всех случаях число смен растворов  $m=3$ , а число единичных отсчетов  $n=3$ . Методика обработки кювет включала промывку дистиллированной водой и ополаскивание ацетоном. Оптические (рабочие) грани протирались батистовой салфеткой.

Обсуждение результатов. Результаты измерений, подвергнутые дисперсионному анализу, позволили рассчитать средние квадратичные ошибки: инструментальные ошибки  $\sigma_{T_{п}}$ , среднее квадратичное отклонение пропускания кювет относительно друг друга  $\sigma_{T_{к}}$ , а также граничное показание шкалы пропусканий  $T_{гp}$  (таблица). Как видно из таблицы, во всех случаях  $T_{гp}$  составляет примерно 0,1, что подтверждает высказанные выше соображения.

Таблица  
 Результаты вычислений средних квадратичных значений  $\sigma_{T_{\Gamma}}$ ,  $\sigma_{T_{K}}$  и  $T_{\Gamma P}$

Фотометрируемая система	Условия измерений	$\sum_1^{p=6} \sigma_{T_{\Gamma}}^2$	$\sigma_{T_{\Gamma}}$ , % отн.	$\sum \sigma_{T_{K}}^2$	$\sigma_{T_{K}}$ , % отн.	$T_{\Gamma P}$
$K_2Cr_2O_7$	$l_1=1$ см; синий светофильтр	1,16	0,044	$\sum_1^{p=4} \sigma_{T_{K}}^2 = 80$	0,45	$\sim 0,1$
$K_2Cr_2O_7$	$l_2=3$ см; синий светофильтр	1,0	0,041	$\sum_1^{p=6} \sigma_{T_{K}}^2 = 107$	0,42	$\sim 0,1$
$KMnO_4$	$l=1$ см; зеленый светофильтр	3,7	0,061	$\sum_1^{p=10} \sigma_{T_{K}}^2 = 398$	0,63	$\sim 0,1$
$KMnO_4$	$l=1$ см; синне-зеленый светофильтр	2,7	0,052	$\sum_1^{p=8} \sigma_{T_{K}}^2 = 258$	0,57	$\sim 0,1$

Одновременно с измерениями по шкале пропусканий фиксировались соответствующие измеренным пропусканиям оптические плотности. Полученные

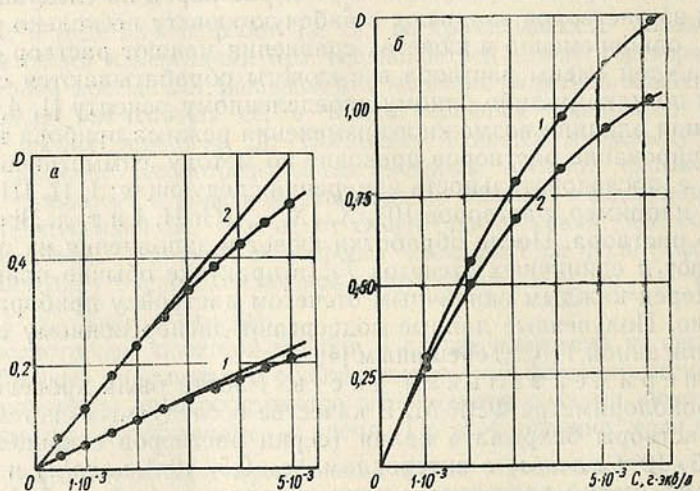


Рис. 1. Калибровочные кривые:

*a* — для водных растворов  $K_2Cr_2O_7$ , синий светофильтр ( $l=1$  см; 2—3 см; прямые линии — продолжение прямолинейных участков калибровочных прямых), *b* — для водных растворов  $KMnO_4$  при  $l=1$  см (1 — для синне-зеленого светофильтра; 2 — для зеленого)

величины были использованы для вычисления средних показаний по шкале оптических плотностей

$$D = \frac{\sum_i^m \bar{D}_i}{m} \quad (2)$$

и построения калибровочных кривых (рис. 1, *a* и *b*). Кроме того, были определены дисперсии средних показаний:

$$s_D^2 = \frac{\sum_1^{m-3} (\bar{D} - D)^2}{m-1} \quad (3)$$

Поскольку  $\sigma_D^2 \approx s_D^2$ , вероятная случайная ошибка измерения показания при малом числе этих измерений ( $m = 3$ ) может быть вычислена по формуле

$$\Delta = \frac{\sigma_D^1 \cdot t_\alpha}{\sqrt{m}} \quad (4)$$

(где  $\sigma_D^1 = \frac{\sigma_D}{D}$ ,  $t_\alpha = 4,30$  при коэффициенте надежности  $\alpha = 0,95$  и числе статистических степеней свободы  $k = m - 1 = 2$ ).

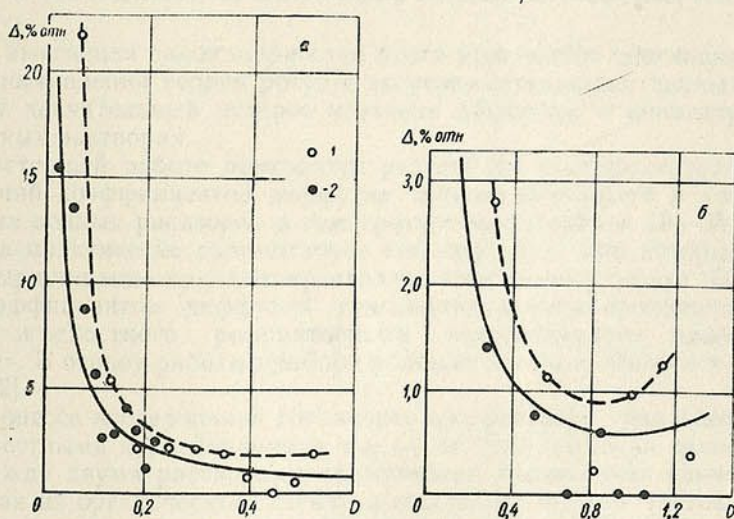


Рис. 2. Кривые ошибок измерения оптической плотности: а — для растворов  $K_2Cr_2O_7$  (1 —  $l=3$  см, 2 — 1 см); б — для растворов  $KMnO_4$  (1 — измерение с сине-зеленым светофильтром, 2 — с зеленым). Сплошные линии — теоретические кривые точности, рассчитанные по (1) при  $\sigma_{гр} = 0,1$  и  $T_{гр} = 0,1$ ; пунктирной линией соединены точки, соответствующие максимальным значениям вероятных случайных ошибок измерений

Как видно из рис. 2, теоретические кривые точности достаточно хорошо определяют область вероятных случайных ошибок измерения оптической плотности.

### Выводы

Экспериментальная проверка точности фотометрических измерений, выполненная для фильтрофотометра ФЭК-М с отдельным выявлением инструментальной и кюветной ошибок, а также с определением граничного показания по шкале пропусканий, подтвердила теоретические и экспериментальные результаты исследования Г. С. Тершина, полученные для приборов с электрической компенсацией (спектрофотометров). По нашим данным, значения  $T_{гр}$  для фильтрофотометров будут в общем случае ниже значений  $T_{гр}$  для спектрофотометров, и, следовательно, ошибки измерений должны быть выше. Экспериментально найденные значения вероятных случайных ошибок измерения оптической плотности по характеру распределения и величине хорошо согласуются с теоретической кривой ошибок.

## Литература

1. Кромарь Н. П., Самойлов В. П. ЖАХ, 18, 1284, 1963.
2. Hiskey C. F. *Analyt. Chem.*, 21, 1440, 1949.
3. Bastian R. *Analyt. Chem.*, 23, 580, 1951.
4. Терешин Г. С. ЖАХ, 14, 388, 516, 1952.
5. Ганопольский В. И. *Вестн АН БССР, сер. физ.-мат. наук*, № 1, 1967.
6. Joung I. G., Hiskey C. F. *Analyt. Chem.*, 23, 506, 1951.
7. Neal W. T. L. *Analyst*, 79, 403, 1954.

*Институт физики твердого тела  
и полупроводников АН БССР*

*Поступило в редакцию  
3.IV 1967*

В. М. ВАРИКАШ, З. ШОЛЬЦ, И. МЫЛ

### ДИФFUЗИЯ ТРИГЛИЦИНСУЛЬФАТА В КОНЦЕНТРИРОВАННЫХ ВОДНЫХ РАСТВОРАХ

Для выяснения закономерностей роста кристаллов триглицинсульфата и сопоставления теорий роста с экспериментальными данными представляет значительный интерес изучение диффузии в концентрированных водных растворах.

В настоящей работе приводятся результаты экспериментальных исследований коэффициентов диффузии триглицинсульфата в концентрированных водных растворах в температурном интервале 18—35 °С. Этот интервал практически соответствует температурам, при которых проводится выращивание крупных кристаллов триглицинсульфата. Определение коэффициентов диффузии триглицинсульфата проводилось с помощью жидкостного рефрактографа чехословацкого производства «Меорпа». В основу работы прибора положен принцип Фильпота—Свенсона [1, 2].

В процессе исследований готовились два раствора триглицинсульфата с известными концентрациями  $c$  и  $c + \Delta c$ . Для создания границы раздела между двумя растворами применялась специальная кювета, изготовленная из органического стекла и состоящая из трех частей, хорошо шлифованных друг к другу. Она имела два хорошо отполированных канала, соединяющихся между собой в нижней части. Кювета заполнялась растворами известной концентрации таким образом, что снизу находился более концентрированный, а сверху — менее концентрированный раствор. Различные положения кюветы при ее заполнении показаны на рис. 1.

В обоих каналах кюветы наблюдалась граница раздела между растворами триглицинсульфата различных концентраций. Распределение

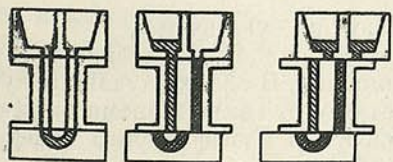


Рис. 1. Различные положения частей кюветы при заполнении раствором

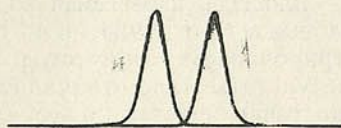


Рис. 2. Градиентные кривые

концентрации в кювете исследовалось оптическим методом. Оптическая схема рефрактографа позволяет непосредственно получать градиентные кривые концентраций. Общий вид градиентных кривых, полученных с помощью жидкостного рефрактографа, показан на рис. 2. Полученные кривые соответствуют двум границам раздела растворов с различными концентрациями в кювете. Наличие двух максимумов позволяет из одно-

го опыта получить два значения коэффициентов диффузии, которые хотя и близки между собой, но в пределах ошибок эксперимента могут несколько отличаться друг от друга. Кроме того, наличие двух границ раздела позволяет контролировать качество эксперимента, так как при недостаточно тщательном заполнении раствором кюветы максимальная высота градиентных кривых будет различной или же один из максимумов может быть совсем размыт.

Уравнение градиентной кривой, полученное из второго закона Фика, имеет следующий вид:

$$y = \frac{\partial c(x)}{\partial x} = \frac{\Delta c^0}{2\sqrt{\pi Dt}} \exp\left(-\frac{x^2}{4Dt}\right),$$

где  $D$  — коэффициент диффузии,  $\Delta c^0$  — разность концентраций между исследуемыми растворами, численно равная площади, ограниченной градиентной кривой

$$P = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial c}{\partial x} dx = \int_{c_1}^{c_2} dc = \Delta c^0.$$

Анализ уравнения градиентной кривой дает возможность определить коэффициент диффузии. Существует много методов вычисления коэффициентов диффузии по градиентной кривой. В настоящей работе мы проводили вычисление коэффициентов диффузии по площади, ограничиваемой градиентной кривой, и максимальной высоте кривой.

Максимальная высота будет в точке с координатой  $x=0$ :

$$y_{\max} = \frac{P}{2\sqrt{\pi Dt}} \exp(0) = \frac{P}{2\sqrt{\pi Dt}},$$

откуда

$$D = \frac{P^2}{y_{\max}^2 4\pi t}.$$

Так как в расчетах используются величины  $y_{\max}$  и  $P$ , полученные из увеличенных градиентных кривых, отпечатанных на фотобумагу, то с учетом увеличения формула для коэффициента диффузии имеет вид

$$D = \frac{S^2}{y_{\max}^2 z^2 \cdot 4\pi t},$$

где  $S$  — площадь, измеряемая на фотобумаге;  $z$  — увеличение.

Площадь  $S$ , ограниченную градиентной кривой, определяли как планиметрированием, так и методом взвешивания. В обоих случаях полученные результаты мало отличались друг от друга. Так как время диффузии обычно точно неизвестно, то для определения коэффициента диффузии всегда строили графическую зависимость

$$\frac{S^2}{z^2 y_{\max}^2} = f(t).$$

График указанной зависимости для концентрации 24 г/100 мл  $H_2O$  при 18 °С приведен на рис. 3. Тангенс угла наклона полученной прямой равен  $4\pi D$ . Значения коэффициентов диффузии из полученных таким образом прямых вычисляли аналитически по методу наименьших квадратов.

Как видно из приведенной таблицы, с увеличением температуры коэффициенты диффузии возрастают. По приведенным в таблице значе-

ниям построены графики зависимостей логарифмов коэффициентов диффузии от обратной температуры (рис. 4). Как видно из рисунка, экспериментальные точки удовлетворительно ложатся на прямые линии. Различия в наклонах прямых для различных концентраций находятся в пределах точности эксперимента. Из графиков следует, что температур-

Таблица  
Значения коэффициентов диффузии

Концентрация, г/100 г H <sub>2</sub> O	Температура, °C	D · 10 <sup>6</sup> , см <sup>2</sup> · сек <sup>-1</sup>
15	18	7,0
	25	9,7
	30	11,8
	35	14,8
24	18	6,3
	25	8,9
	30	10,6
	35	13,2

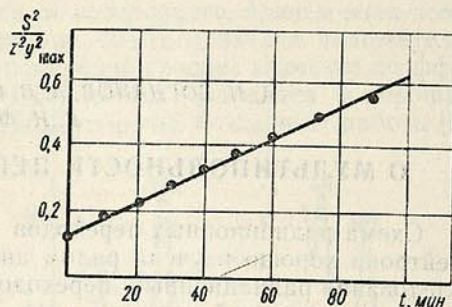


Рис. 3. Скорость размытия градиентной кривой

ные изменения коэффициентов диффузии триглицинсульфата удовлетворительно могут быть выражены простой экспоненциальной зависимостью

$$D = D_0 e^{-U/RT},$$

где  $D_0$  — некоторая постоянная,  $U$  — энергия активации.

Величина энергии активации была определена из рисунка по формуле  $U = -R \frac{d \ln W}{d \left( \frac{1}{T} \right)}$ .

Найденное таким образом численное значение равно 4,4 ккал/г · моль. Оно близко к значению энергии активации воды [3] и практически совпадает со значениями энергий активаций при диффузии других органических веществ в водных растворах [4]. Приведенные результаты подтверждают вывод, полученный в других работах [5—8], что коэффициенты диффузии мало чувствительны к особенностям растворенного вещества и определяются главным образом свойствами растворителя.

Авторы выражают благодарность академику АН БССР Н. Н. Сироте за обсуждение полученных результатов.

### Литература

1. J. Höger, Z. Solc. Jemna mechanika a optika, № 7, 1966.
2. Иоффе Б. В. Рефрактометрические методы химии. Госхимиздат, 1960.
3. Андреев Г. А. ЖФХ, 37, № 2, 1963.
4. Маринин В. А. Вестник Ленинградского университета, № 16, вып. 3, 1957.
5. Манжелей В. Г. ЖФХ, 34, № 8, 1960.
6. Маринин В. А. ЖФХ, 32, № 5, 1958.
7. Маринин В. А. ЖФХ, 33, № 6, 1959.
8. Андреев Г. А. ЖФХ, 36, № 7, 1962.

Институт физики твердого тела  
и полупроводников АН БССР,  
Химико-технологический институт,  
Пардубице, ЧССР

Поступило в редакцию  
16.XI 1967

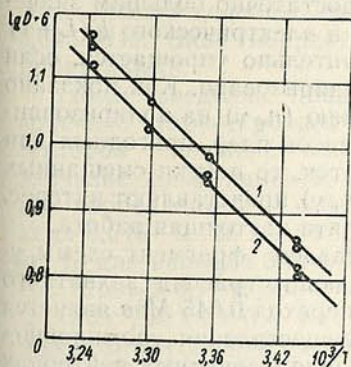


Рис. 4. Температурная зависимость коэффициентов диффузии триглицинсульфата:  
1 — 15 г/100 г H<sub>2</sub>O; 2 — 24 г/100 г H<sub>2</sub>O

А. П. БОГДАНОВ, А. В. СОРОКА, В. Н. ТАДЭУШ,  
 Е. И. ФИРСОВ

**О МУЛЬТИПОЛЬНОСТИ ПЕРЕХОДА 0,645 Мэв В ЯДРЕ V<sup>52</sup>**

Схема радиационных переходов в ядре V<sup>52</sup> после захвата теплового нейтрона хорошо изучена рядом авторов [1—4]. Поэтому подробное исследование радиационных переходов в реакции V<sup>51</sup>(n, γ)V<sup>52</sup> не входит в задачи настоящей работы.

Как было показано в работе [5], опыты по измерению угловых γ—γ-корреляций можно использовать для решения вопроса о несохранении временной четности в электромагнитных и сильных взаимодействиях. Необходимым условием при постановке таких экспериментов является наличие в исследуемом каскаде γ-перехода с достаточно большим значением параметра смеси (δ~1) магнитного ML и электрического E(L+1) излучений. Интерпретация результатов значительно упрощается, если исходное состояние исследуемого каскада поляризовано. Как показано в [6], для этой цели можно использовать реакцию (n, γ) на поляризованных нейтронах. Так как в настоящее время список ядер, пригодных для проведения таких экспериментов, весьма короток, то поиски смешанных переходов в реакции (n, γ) представляют интерес. С этой целью предпринята настоящая работа.

На рис. 1 представлен фрагмент схемы γ-переходов, сопровождающих распад захватного состояния V<sup>52</sup>. Если γ-переход 0,645 Мэв является смешанным, то для осуществления упоминавшегося выше опыта на поляризованных нейтронах можно использовать каскад 0,645—0,125 Мэв. Благоприятно также то обстоятельство, что образующие данный каскад переходы наиболее интенсивны. Для определения мультипольности перехода 0,645 Мэв можно использовать также каскад 6,51—0,645 Мэв. Причем для этой цели последний удобнее, так как переход 6,51 Мэв заведомо чистый.

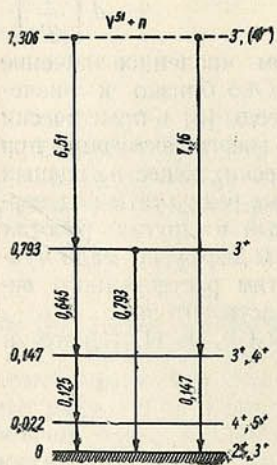


Рис. 1. Фрагмент схемы γ-переходов в ядре V<sup>52</sup>

Измерения проводились с помощью сцинтиляционного спектрометра совпадений с кристаллами NaJ(Tl) Ø70×50 мм и разрешающим временем совпадений 5·10<sup>-8</sup> сек. Плотность потока тепловых нейтронов на мишени составляет 4×10<sup>6</sup> нейтронов/см<sup>2</sup>·сек. Подробное описание методики эксперимента приведено в [7].

В настоящей работе использовалась мишень из металлического ванадия, изготовленная в виде таблетки диаметром 6 мм и толщиной 1,5 мм. Вес мишени 0,55 г. Измерения производились под углами 90 и 180° попеременно с экспозицией 60 мин в каждом положении подвижного детектора. Полученные результаты исправлены на конечное угловое разре-

шение детекторов. Поправка на конечность размеров мишени не вводилась ввиду их малости.

1. Каскад  $0,645-0,125 \text{ Мэв}$ . Окном одноканального анализатора выделялась линия  $0,125 \text{ Мэв}$ . Спектр совпадений регистрировался на многоканальном анализаторе. Было обнаружено, что угловое распределение  $\gamma$ -квантов  $0,645 \text{ Мэв}$  отличается от изотропного, причем знак асимметрии углового распределения в нашем опыте оказался положительным. Вычисленное на основе наших измерений среднее значение коэффициента  $a_2$  функции корреляции  $a_2 = 0,036 \pm 0,015$  находится в хорошем согласии с данными работы [8]. С другой стороны, по данным работы [9] коэффициент  $a_2$  имеет противоположный знак:  $-0,07 < a_2 < 0$ .

2. Каскад  $6,51-0,645 \text{ Мэв}$ . Окном одноканального анализатора выделялся интервал спектра со средней энергией  $6,5 \text{ Мэв}$ . На рис. 2 приведены спектры совпадений, снятые при углах между осями детекторов  $90^\circ$  и  $180^\circ$ . Для этого каскада наблюдается четко выраженная асимметрия углового распределения  $\gamma$ -квантов  $0,645 \text{ Мэв}$ . Знак корреляции отрицательный.

После введения поправок на конечное угловое разрешение детекторов получено следующее значение коэффициента  $a_2$  функции корреляции:  $a_2 = -0,14 \pm 0,03$ . Интересно отметить, что если для каскада  $0,645-0,125 \text{ Мэв}$  наши данные расходятся с данными [9] уже в знаке, то для каскада  $6,51-0,645 \text{ Мэв}$  наблюдается очень хорошее согласие:  $-0,10 > a_2 > 0,17$  [9].

Обсуждение результатов. Интерпретация полученных данных в значительной степени затруднена тем обстоятельством, что существует неопределенность сведений о спинах уровней  $V^{52}$ .

Так как спин основного состояния  $V^{51}$  равен  $7/2^-$ , то захватное состояние в реакции  $V^{51}(n, \gamma)V^{52}$  на тепловых нейтронах может иметь спин  $3^-$  или  $4^-$  или быть смесью этих состояний. Авторы работы [8], ссылаясь на частное сообщение Маршака, измерявшего сечения захвата поляризованных нейтронов ориентированными ядрами  $V^{51}$ , указывают, что захват идет в основном в состояние  $3^-$ .

В литературе нет единого мнения также и о величине спина основного состояния  $V^{52}$ . Из данных по распаду  $V^{52} \rightarrow Cr^{52}$  следует, что спин основного состояния  $V^{52}$  может быть  $2^+$  или  $3^+$ . Попытки сделать выбор между этими значениями [10—12] приводят к различным результатам.

Измерения степени циркулярной поляризации [13]  $\gamma$ -квантов для перехода из захватного состояния в основное приводят к значению спина основного состояния  $V^{52}$   $2^+$ . Анализ величин  $(2J+1)S$ , полученных из реакции  $V^{51}(d, p)V^{52}$  [14], также приводит к значению  $2^+$ .

В зависимости от значения спина основного состояния меняются и спиновые характеристики возбужденных состояний. Поэтому при анализе экспериментальных данных необходимо было рассмотреть обе возможности. Были вычислены и построены графики  $a_2(\delta)$  для всех возможных комбинаций спинов, участвующих в каскаде  $6,51-0,645 \text{ Мэв}$  уровней. Анализ показывает, что варианты  $4^-3^+4^+$  и  $4^-3^+3^+$  можно исключить, так как

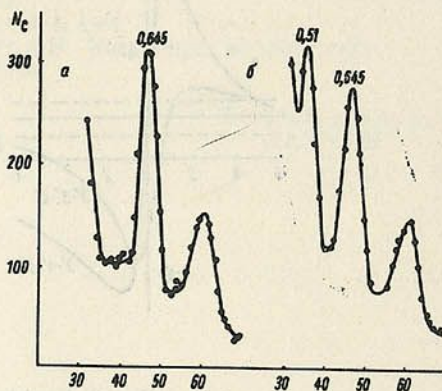


Рис. 2. Спектры совпадений с  $\gamma$ -лучами в интервале  $6,2-6,8 \text{ Мэв}$ :

$a-\theta=90^\circ$ .  $b-180^\circ$ ; по горизонтали—номер канала

ни при каких значениях  $\delta$  коэффициент  $a_2$  не достигает даже предельного экспериментального значения  $-0,11$ . По этой же причине исключается значение спина  $2^+$  для уровня  $0,793$  Мэв.

Обратимся теперь к каскаду  $0,645-0,125$  Мэв. Если спин основного состояния  $V^{52}$  равен  $3^+$ , то наиболее вероятной последовательностью спинов для этого каскада будет  $3^+-4^+-5^+$ , если же  $2^+$ , то  $3^+-3^+-4^+$ . Если это соответствует действительности, то для каскада  $6,51-0,645$  Мэв также остаются только два возможных варианта:  $3^--3^+-4^+$  и  $3^--3^+-3^+$ .

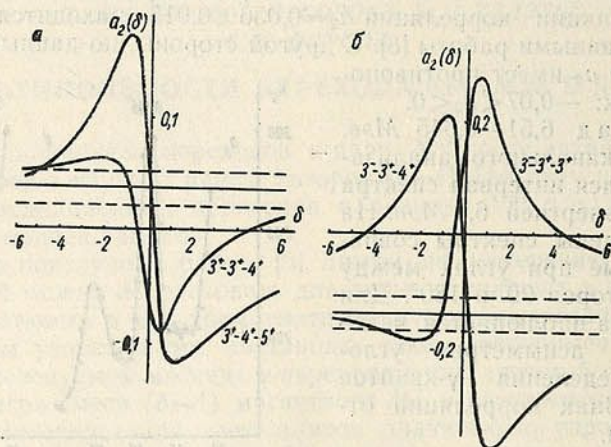


Рис. 3. Коэффициенты  $a_2(\delta)$ :

а — каскад  $0,645-0,125$  Мэв, б —  $6,51-0,645$  Мэв

На рис. 3, б приведены теоретические кривые  $a_2(\delta)$  для оставшихся двух вариантов каскада  $6,51-0,645$  Мэв:

$$3^--3^+-4^+ a_2 = (-0,062 - 0,625\delta - 0,134\delta^2)/(1 + \delta^2)$$

$$3^--3^+-3^+ a_2 = (0,18 + 0,375\delta - 0,098\delta^2)/(1 + \delta^2).$$

Как видно из рисунка, в первом случае примесь излучения  $E2$  не может превышать несколько процентов, тогда как во втором случае интенсивности излучений типа  $M1$  и  $E2$  могут быть сравнимы:

$$-0,8 > \delta > -1,4.$$

На рис. 3, а приведены аналогичные кривые для каскада  $0,645-0,125$  Мэв в предположении, что переход  $0,125$  Мэв чистый. Как видно из рисунка, для случая  $3^+-4^+-5^+$  переход  $0,645$  Мэв практически чистый  $M1$ , для случая же  $3^+-3^+-4^+$  параметр смеси  $\delta$  может иметь значения в интервале

$$-0,6 > \delta > -1,1.$$

Таким образом, экспериментальные данные для обоих каскадов находятся в очень хорошем согласии.

Резюмируя вышеизложенное, можно сделать вывод, что переход  $0,645$  Мэв практически чистый, если спин основного состояния  $V^{52}$  равен  $3^+$ . Если же спин основного состояния равен  $2^+$ , то этот переход смешанный с параметром смеси  $|\delta| \sim 1$ .

Для окончательного решения вопроса о спине основного состояния  $V^{52}$  и о мультипольности перехода  $0,645$  Мэв, на наш взгляд, необходимо измерить коэффициент внутренней конверсии для этого перехода, а также провести измерения  $\gamma-\gamma$  совпадений в распаде  $V^{52} \rightarrow Cr^{52}$ .

## Литература

1. Bartholomew G. A., Kinsey V. V. Phys. Rev., **89**, 1080, 1953.
2. Грошев Л. В. и др. Атомная энергия, **8**, 127, 1958.
3. Schwäger J. E. Phys. Rev., **121**, 562, 1961.
4. Van Assche P. Nucl. Phys., **79**, 565, 1966.
5. Jacobsohn V. A., Henley E. M. Phys. Rev., **113**, 234, 1959.
6. Крупчицкий П. А. Ядерная физика, **3**, 974, 1966.
7. Богданов А. П., Фирсов Е. И. Весті АН БССР, сер. фіз.-мат. навук, № 2, 1966.
8. White D. H. et al. Nucl. Phys., **72**, 241, 1965.
9. Carlos P., Samama R., Audias A. Nucl., Phys., A **93**, 631, 1967.
10. Malmkog S. Nucl. Phys., **49**, 239, 1963.
11. Eckert H. G. Z. Phys., **181**, 401, 1964.
12. Сергеев А. Г. и др. Ядерная физика, **6**, 6, 1967.
13. Koresky J., Kajlosz J., Chalupa V. Nucl. Phys., **68**, 449, 1965.
14. Catala J. et al. Nucl. Phys., **74**, 1, 1965.

Институт физики АН БССР

Поступило в редакцию  
3.XI 1967

А. С. ПОТУПА, В. И. СТРАЖЕВ, Л. М. ТОМИЛЬЧИК

**К ПРОБЛЕМЕ ВТОРОГО ЗАРЯДА  
 В ДУАЛЬНО-ИНВАРИАНТНОЙ ЭЛЕКТРОДИНАМИКЕ**

В работе [1] предложен метод построения моделей осцилляторного типа для квантования операторных метрических инвариантов фазового пространства. В данной работе дается обобщение этой модели и рассматривается ее применение к простейшему случаю дуально-инвариантной электродинамики.

1. Определим в  $2n$ -мерном вещественном евклидовом пространстве инвариантную метрическую форму

$$S = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (x_i^2 + y_i^2). \quad (1)$$

Налагая на специально разделенные обозначениями координаты  $x$ ,  $y$  перестановочные соотношения

$$[x_i, y_k]_- = i \delta_{ik}, \quad [x_i, x_k]_- = [y_i, y_k]_- = 0, \quad (2)$$

будем считать в дальнейшем (1) и (2) определением операторной метрической формы (ОМФ). Очевидно, эквивалентным образом можно определить ОМФ как эрмитову форму в комплексном  $n$ -мерном евклидовом пространстве с координатами

$$D_{\pm}(k) = \frac{1}{\sqrt{2}} (\pm iy_k + x_k), \quad (3)$$

подчиняющимися перестановочным соотношениям

$$[D_+(k), D_-(j)]_- = \delta_{kj}, \quad [D_+(k), D_+(j)]_- = [D_-(k), D_-(j)]_- = 0. \quad (4)$$

Факторизация формы (1) с помощью операторов (3) позволяет построить генераторы  $A_k^l$  группы  $U(n)$

$$A_k^l = D_+(k) D_-(l), \quad (5)$$

удовлетворяющие перестановочным соотношениям Вейля

$$[A_k^l, A_{k'}^{l'}]_- = \delta_k^{l'} A_{k'}^l - \delta_{k'}^l A_k^{l'} \quad (6)$$

и действующие в пространстве-носителе ОМФ.

Путем введения соответствующего набора коэффициентов Ламе (диагональных элементов метрического тензора) группа может быть редуцирована в цепочки прямых произведений

$$U(n) \rightarrow U(j_1) \times \dots \times U(j_n), \quad \sum_{k=1}^n j_k = n, \quad (7)$$

причем в случае  $j_k = 1$  для всех  $k$  получаем предельно редуцированную группу.

2. Обратимся к анализу физического смысла калибровочной группы  $U(1)$ , возникающей в качестве предельно редуцированного элемента цепочки (7), в электродинамике. Как показано в [2] в рамках классической электродинамики существует возможность введения обобщенной дуальной инвариантности в симметричной по полям, зарядам и токам форме, причем группа дуальной симметрии локально изоморфна  $U(1)$ . Рассматривая энергию электромагнитного поля как дуальный инвариант, нетрудно убедиться, что переход к ОМФ эффективно эквивалентен обычной процедуре квантования\*), т. е.

$$W = \int \frac{\mathbf{E}^2 + \mathbf{H}^2}{8\pi} dV = \sum_{\omega} h \omega \left( n + \frac{1}{2} \right), \quad (8)$$

где  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  — дуально-ковариантные величины.

Отметим, что использованные нами канонические перестановочные соотношения с учетом замечания (1) находятся в соответствии с измерительной процедурой Бора — Розенфельда [3, 4].

Перейдем к вопросу о квантовании заряда. Как следует из анализа, проделанного в [5], экспериментально наблюдаемым зарядом в рамках классической электродинамики является величина

$$q^2 = e^2 + g^2, \quad (9)$$

представляющая, согласно [2], дуальный инвариант.

Рассматривая (9) как случай ОМФ, приходим к следующему условию квантования эффективного заряда  $q$ :

$$q^2 = \alpha_0 \left( n + \frac{1}{2} \right) hc, \quad (10)$$

где  $\alpha_0$  — безразмерная константа, определяемая из опыта. Соотношение типа Дирака — Швингера между величинами электрического и магнитного зарядов возникает здесь как соотношение неопределенностей следующего вида:

$$\overline{e^2} \overline{g^2} \geq \frac{(hc)^2}{4}, \quad (11)$$

т. е. электрический и магнитный заряды являются дополнительными величинами в смысле Бора. Нетрудно видеть, что проведенное рассмотрение можно обобщить на теорию векторных мезонов, рассматривая наличие массы у полей Янга—Миллса как динамическую реализацию нарушения дуальной инвариантности\*\*).

Аналогично нарушение дуальной инвариантности в электродинамике ведет к появлению массы у фотона.

### Выводы

1. Метод ОМФ позволяет провести самосогласованную процедуру квантования полей и заряда в дуально-инвариантной электродинамике, приводящую в частности к обязательному равенству по модулю электрического заряда всех заряженных стабильных частиц.

\*) Разумеется, при этом следует учесть функциональную структуру полевых переменных и предварительно усреднить ОМФ по обычному  $x$ -пространству.

\*\*) Подчеркнем, что, согласно [6, 7], обычная калибровочная инвариантность не обеспечивает равенства нулю массы векторных мезонов.

2. В данной схеме удается связать в духе идей Вигнера [8, 9] симметричный и динамический аспекты заряда, рассматривая заряд в качестве унитарного инварианта группы минимальной размерности («оператора Казимира» группы  $U(1)$ ).

3. Дуальная инвариантность запрещает существование двух типов заряда (в частности магнитного монополя) в электродинамике, причем наиболее вероятной формой запрета является соотношение (11).

4. Благодаря универсальности  $a_0$  в (10) запрещаются дробные заряды в электродинамике.

5. Законы сохранения заряда и энергии связаны здесь непосредственно (впервые на эту возможность указал Вигнер [8]).

Авторы выражают признательность академику АН БССР Ф. И. Федорову за интерес и внимание к работе, а также участникам семинара лаборатории теоретической физики ИФ АН БССР за плодотворные дискуссии.

### Литература

1. Потупа А. С., Томильчик Л. М. Весті АН БССР, сер. фіз.-математ. навук, № 1, 1968.
2. Стражев В. И., Томильчик Л. М. Этот журнал, стр. 102—108.
3. Bohr N., Rosenfeld L. Kgl. Danske Videnskab. Seleskab. Biol. Medd., 12, 8, 1933.
4. Тирринг В. Принципы квантовой электродинамики. М., 1964.
5. Harrison H. et al. Am. Journ. Phys., 33, 958, 1965.
6. Ogiewetski W. L., Polubarinov I. W. Nuovo Cim., 23, 173, 1962.
7. Schwinger J. Phys. Rev., 125, 397, 1962; Сб. «Элементарные частицы и компенсующие поля». Изд. «Мир», 1964.
8. Wigner E. P. Proc. Amer. Phil. Soc., 93, 521, 1949.
9. Wigner E. P. Proc. Natl. Acad. Sci. V. S., 38, 449, 1952.

Институт физики АН БССР

Поступило в редакцию  
9.X 1967

А. Е. ЗАЛЕССКИЙ

ЗАМЕЧАНИЕ О ТРЕУГОЛЬНОЙ ЛИНЕЙНОЙ ГРУППЕ

Конечно ли число классов сопряженных унитарных элементов в полупростой алгебраической линейной группе? Эту проблему Бореля — Стейнберга при  $p > 2$ ,  $p$  — характеристика основного поля, недавно положительно решил В. П. Платонов\*, высказавший предположение, что в группе Бореля число классов сопряженных унитарных элементов, вообще говоря, бесконечно. Это последнее подтверждается в настоящей заметке для простых групп типов  $A_n$ ,  $n \geq 5$ ,  $B_n$ ,  $C_n$ ,  $D_n$ ,  $n \geq 6$ , и  $E_n$ ,  $n = 6, 7, 8$ , для поля любой характеристики. Впрочем, в случае характеристики 2 для некоторых типов групп это было известно ранее.

Прежде всего мы показываем на примере, что в треугольной линейной группе  $\Gamma_n$  степени  $n$  уже при  $n = 6$  упомянутое число бесконечно. Отсюда непосредственно следует сформулированный выше результат. Мы отмечаем также, что если  $\Gamma_n^k$  —  $k$ -й коммутант группы  $\Gamma_n$ , то число классов элементов группы  $\Gamma_n^k$ , сопряженных в  $\Gamma_n$ , бесконечно при  $n \geq 3 \cdot 2^k$ .

Обозначим через  $\Delta_n$  подгруппу унитарных матриц группы  $\Gamma_n$ ; через  $M$  — множество матриц с нулями на всех позициях, кроме (5,6), (4,6), (3,4), (2,5), (1,3), (1,2).

Лемма 1. Если  $Am_1 = m_2A$ ,  $A \in \Delta_6$ ,  $m_1, m_2 \in M$ , то  $m_1 = m_2$ .

Доказательство. Пусть  $m_1 = (t_{ij})$ ,  $m_2 = (x_{ij})$ ,  $A = (a_{ij})$ . В справедливости леммы убеждаемся, сравнивая элементы матриц  $Am_1$  и  $m_2A$  на позициях:

$$(1,2): t_{12} = x_{12}; \quad (2,4): a_{23}t_{31} = 0 \rightarrow a_{23} = 0;$$

$$(3,4): t_{31} = x_{31}; \quad (1,3): t_{13} = x_{12}a_{23} + x_{13} \rightarrow t_{13} = x_{13};$$

$$(5,6): t_{56} = x_{56}; \quad (3,5): 0 = x_{34}a_{45} \rightarrow a_{45} = 0;$$

$$(2,5): t_{25} = x_{25}; \quad (4,6): t_{46} + a_{45}t_{56} = x_{46} \rightarrow t_{46} = x_{46}.$$

Лемма 2. Пусть  $D = (d_{ij})$  — диагональная матрица,  $d_{ij} \neq 0$ , и пусть при обозначениях леммы 1  $t_{ij} = x_{ij} = 1$  при  $(i, j) \neq (1, 2)$ . Тогда, если  $Dm_1 = m_2D$ , то  $t_{12} = x_{12}$ .

Доказательство получаем в результате сравнения элементов матриц  $Dm_1$  и  $m_2D$  на позициях (1,2), (1,3), (2,5), (3,4), (4,6), (5,6).

Предложение 1. Унитарные элементы группы  $\Gamma_n$ ,  $n \geq 6$ , разбиваются в бесконечное число классов сопряженных.

Доказательство. Всякая матрица из  $\Gamma_n$  представима в виде  $AD$ , где  $A \in \Delta_n$ ,  $D$  диагональна,  $D \in \Gamma_n$ . При  $n = 6$  в обозначениях леммы 1, если  $A(Dm_1D^{-1}) = m_2A$ , то по лемме 1  $Dm_1D^{-1} = m_2$  и по лемме 2  $t_{12} = x_{12}$ . Таким образом, множество элементов вида  $E + m$ ,  $m \in M$ ,  $E$  — матричная

\* Примечание при корректуре. Автору стало известно, что при  $p > 5$  проблему Бореля — Стейнберга решил Р. У. Рихардсон [4].

единица, разбивается в бесконечное число классов элементов, сопряженных относительно  $\Gamma_6$ . Так как  $E + t \in \Delta_6$  при  $t \in M$ , то предложение 1 при  $n = 6$  доказано. При вложении  $\Gamma_6$  в  $\Gamma_n$  вида  $\begin{bmatrix} \Gamma_6 & * \\ 0 & \Gamma_{n-6} \end{bmatrix}$  элементы  $\begin{bmatrix} \gamma_1 & 0 \\ 0 & E \end{bmatrix}$  и  $\begin{bmatrix} \gamma_2 & 0 \\ 0 & E \end{bmatrix}$  сопряжены в  $\Gamma_n$  тогда и только тогда, когда они сопряжены в  $\Gamma_6$ . Отсюда следует предложение.

Следствие. Число классов сопряженных унитарных элементов в группах Бореля простых алгебраических групп типа  $A_n$ ,  $n \geq 5$ ,  $B_n$ ,  $C_n$ ,  $D_n$  (при  $n \geq 6$ ) или  $E_n$  бесконечно.

Доказательство. Так как схемы перечисленных групп содержат схему группы  $A_5$  и для группы  $A_5$  следствие доказано выше (предложение 1), то достаточно доказать следующее утверждение.

Пусть  $E_0$  — подмножество множества  $E$  фундаментальных корней простой алгебраической группы  $G$ ,  $G_0$  — подгруппа  $G$ , порожденная корневыми подгруппами  $P_\alpha$ ,  $\alpha$  пробегает корни, являющиеся линейными комбинациями корней из  $E_0$ ; пусть  $B_0 \subset B$  — подгруппы Бореля групп  $G_0$ ,  $G$  соответственно,  $x, y$  — унитарные элементы группы  $B_0$ . Тогда если  $x, y$  сопряжены в группе  $B$ , то они сопряжены также в группе  $B_0$ .

Пусть  $B_0'' \subset B''$  — унитарные подгруппы Бореля групп  $G_0, G$  соответственно. Докажем наше утверждение сначала для групп  $B_0''$  и  $B''$ . В силу классификационной теоремы из [1] простые алгебраические линейные группы сводятся к перечисленным в [2]. Введем на группе  $P_r$ , порожденной фундаментальными корнями, упорядочение, исходя из того что корни из  $E \setminus E_0$  больше корней из  $E_0$  и  $\sum \alpha_i p_i > 0$ , если  $p_k > 0$  и  $p_{k+1} = p_{k+2} = \dots = 0$  [см. 2]. Пусть  $B_1$  — подгруппа  $B''$ , порожденная корневыми подгруппами  $P_\alpha$ ,  $\alpha$  пробегает положительные корни, не являющиеся линейными комбинациями корней из  $E_0$ . Тогда формула закона умножения в группе  $B''$  [см. 2, формула (4) из § 3] показывает, что  $B_1''$  — нормальный делитель группы  $B''$  и  $B'' = B_1'' B_0''$ . Если теперь  $x = byb^{-1}$ ,  $b \in B''$ ,  $b = b_0 b_1$ ,  $b_0 \in B_0''$ ,  $b_1 \in B_1''$ , то  $B_0'' \ni b_0^{-1} x b_0 = b_1 y b_1^{-1} = y (y^{-1} b_1 y b_1^{-1})$ , откуда  $y^{-1} b_1 y b_1^{-1} \in B_0''$ , что возможно лишь при условии  $y b_1 = b_1 y$ . Следовательно,  $x = b_0 y b_0^{-1}$ , что и требовалось. Далее, пусть  $T_0 \subset T$  — максимальный тор группы  $B_0 \subset B$  соответственно. Пусть  $T'$  — централизатор  $B_0$  в  $T$ . Тогда  $T = T_0 T'$ . Это следует из [1, ехр. 17, лемма 2]. Наше утверждение теперь легко следует из того факта, что  $B = T B''$ .

Предложение 2. Пусть  $\Gamma_n^k$  —  $k$ -й коммутант группы  $\Gamma_n$ . Тогда при  $n \geq 6 \cdot 2^{k-1}$  число классов элементов  $\Gamma_n^k$ , сопряженных в  $\Gamma_n$ , бесконечно.

Доказательство. Заметим прежде всего, что  $\Gamma_n^1 = \Delta_n$ . Пусть сначала  $u = 6 \cdot 2^{k-1}$ . Матрицы из  $\Gamma_n$  можно рассматривать как блочные, число блоков  $6 \times 6$ , размер блоков  $2^{k-1}$ . Обозначим через  $M_k$  множество блочных матриц с нулевыми блоками на всех позициях, кроме (5,6), (4,6), (3,4), (2,5), (1,3), (1,2), а на этих позициях блоки пробегают скалярные матрицы размера  $2^{k-1}$ . Легко видеть, что  $E + t \in \Gamma_n^k$  при  $t \in M_k$ . Покажем, что элементы вида  $E + t$  содержат бесконечное множество попарно несопряженных в  $\Gamma_n$  элементов. Для этого включим  $\Gamma_n$  в более широкую группу  $\bar{\Gamma}_n$  блочно-треугольных матриц размера  $6 \cdot 2^{k-1}$  (она отличается от  $\Gamma_n$  тем, что диагональные блоки уже не треугольные, а любые обратимые матрицы размера  $2^{k-1}$ ). Легко проверить, что доказательства лемм 1 и 2 из предложения 1 проходят без всяких изменений, если заменить  $\Gamma_6$  на  $\bar{\Gamma}_n$ ,  $n = 6 \cdot 2^{k-1}$ ,  $M$  на  $M_k$ . Таким образом, в  $\bar{\Gamma}_n$ , а значит, и в  $\Gamma_n$  элементы множества  $M_k$  разбиваются в бесконечное число классов сопряженных. Предложение до-

казано для  $n = 6 \cdot 2^{k-1}$ . Общий случай вытекает из соображения, приведенного в конце доказательства предложения 1.

Примечание. С незначительными изменениями доказательства предложения 1 и 2 проходят для весьма широкого класса ассоциативных колец с единицей. Более того, представляется весьма вероятным, что они справедливы для любого бесконечного кольца с 1.

В заключение отметим, что классами сопряженных элементов в группе  $\Delta_n$  занимался Поляк [3], однако рассмотренные здесь вопросы в его статье [3] не ставились.

### Литература

1. Classification des groupes de Lie algebriques. Seminar C. Chevalley, 1956—1958. Paris, 1958.
2. Шевалле К. Математика, 2: 1, 3—53, 1958; Русский перевод C. Chevalley. Tôhoku Math. J., 7, 14—66, 1955.
3. Поляк С. С. Укр. матем. журнал, т. XVI, № 4, 1964.
4. Richardson R. W. Jr. Ann. Math., 86, № 1, 1—15, 1967.

Институт математики  
АН БССР

Поступило в редакцию  
2.X 1967

А. В. РОМАНОВСКИЙ

### СВОЙСТВА КОНЕЧНОЙ ГРУППЫ, СВЯЗАННЫЕ С НАИБОЛЬШИМ ПРОСТЫМ ДЕЛИТЕЛЕМ ЕЕ ПОРЯДКА

Хорошо известна следующая теорема Хупперта [1].

Группа  $G$  сильно разрешима тогда и только тогда, когда все ее максимальные подгруппы простого индекса.

В настоящей статье изучаются свойства конечной группы, у которой не все максимальные подгруппы простого индекса.

Используются следующие обозначения и определения:  $(G)$  — порядок группы  $G$ ;  $E$  — единичная подгруппа;  $\Phi(G)$  — подгруппа Фраттини группы  $G$ ;  $\pi$  — некоторое множество простых делителей  $(G)$ ;  $\pi'$  — множество всех простых делителей  $(G)$ , не входящих в  $\pi$ ;  $[G : M]$  — индекс подгруппы  $M$  в  $G$ .

Группа  $G$  порядка  $p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$  называется дисперсивной (по Орэ), если в ней существует ряд нормальных делителей с индексами  $p_k^{\alpha_k}, p_k^{\alpha_k-1} p_k^{\alpha_k}, \dots, p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$ , где  $p_1 > p_2 > \dots > p_k$ .

Группу  $G$  условимся называть группой типа  $(p)$ , если она является расширением  $p$ -силовой элементарной абелевой подгруппы с помощью сильно разрешимой  $p'$ -подгруппы, являющейся максимальной в  $G$ .

Определения  $S_\pi$ -подгруппы, сильно  $\pi$ -разрешимой подгруппы,  $pd$ -подгруппы и другие можно найти в книге [3] С. А. Чунихина и в книге [5].

**Лемма 1.** Пусть  $P$  является  $p$ -силовой подгруппой группы  $G$ , где  $p$  есть наибольший простой делитель  $(G)$ . Если все максимальные подгруппы  $G$ , надстроенные над  $P$ , имеют своим индексом простое число, то тогда  $P$  инвариантна в  $G$ .

**Доказательство.** Пусть  $N$  — нормализатор  $P$  в  $G$ . Допустим, что  $N \neq G$ . Выберем в  $G$  максимальную подгруппу  $M$ , содержащую  $N$ . По теореме Силова  $[G : N] = 1 + k_1 p$  и  $[M : N] = 1 + k_2 p$ , где  $k_1$  и  $k_2$  — целые числа. Следовательно,  $[G : M] = 1 + kp$ , где, очевидно,  $k$  — целое число. Но по условию теоремы, так как  $M$  содержит  $P$ ,  $[G : M] = q$ , где  $q$  — простое число, меньшее  $p$ . Получается противоречие. Следовательно,  $N = G$ . Лемма доказана.

**Лемма 2.** Пусть некоторая  $q$ -силовая подгруппа  $Q$  группы  $G$  является инвариантной в  $G$ . Если индекс любой максимальной  $qd$ -подгруппы  $G$  есть простое число, то тогда либо  $G$  сильно разрешима, либо типа  $(q)$ .

**Доказательство.** Пусть  $N$  — минимальный нормальный делитель, содержащийся в  $Q$ .

Допустим, что  $Q \neq N$ . Если подгруппа  $M$  не  $qd$ -подгруппа, то она не может быть максимальной в  $G$ , так как  $MN \neq G$ . Это означает, что любая максимальная подгруппа  $G$  является  $qd$ -подгруппой, т. е. все максимальные подгруппы  $G$  простого индекса и группа  $G$  по теореме 9 работы [1] Хупперта сильно разрешима.

Пусть теперь  $Q = N$ . Тогда  $Q$  (учитывая предыдущее) — элементарная абелева. В силу инвариантности  $Q$ , очевидно, существует максимальная под-

группа  $M$ , не содержащая  $Q$ . Если  $M \cap Q = D \neq E$ , то  $D$  инвариантна в  $G$ , что противоречит минимальности  $N$ . Следовательно,  $M \cap Q = E$ , т. е.  $M$  —  $p'$ -подгруппа. Так как по условию любая максимальная подгруппа  $G$ , содержащая  $Q$ , имеет в  $G$  простой индекс, то все максимальные подгруппы  $G/Q \cong \cong M$  простого индекса, т. е.  $M$  по теореме 9 работы [1] Хупперта сильно разрешима.

**Теорема 1.** Пусть  $P$  — силовская  $p$ -подгруппа группы  $G$  для наибольшего простого делителя  $p$  порядка  $G$ . Группа  $G$  тогда и только тогда сильно  $p'$ -разрешима, когда все максимальные подгруппы  $G$ , надстроенные над  $P$ , имеют простой индекс.

Эта теорема следует из леммы 1 с помощью теоремы 9 работы [1] Хупперта.

Заметим, что справедлива более общая теорема, доказываемая аналогично:

Пусть  $\pi$  и  $\pi'$  такие, что для любых  $p \in \pi$  и  $q \in \pi'$  всегда  $p > q$ , и пусть группа  $G$  имеет дисперсивную  $S_\pi$ -подгруппу  $H$ . Группа  $G$  тогда и только тогда сильно  $\pi'$ -разрешима, когда все максимальные подгруппы  $G$ , надстроенные над  $H$ , имеют простой индекс.

Из лемм 1 и 2 вытекает следующая

**Теорема 2.** Пусть  $p$  — наибольший простой делитель порядка группы  $G$ . Если любая максимальная  $p$ -подгруппа  $G$  имеет простой индекс, то тогда либо  $G$  сильно разрешима, либо типа  $(p)$ .

**Теорема 3.** Пусть  $P$  есть  $p$ -силовская, а  $Q$  —  $q$ -силовская подгруппы группы  $G$ , где  $p$  — наибольший простой делитель  $(G)$ , а  $q$  — любой, отличный от  $p$ . Если все максимальные подгруппы  $G$ , содержащие или  $P$  или  $Q$ , имеют простой индекс, то  $G$  сильно разрешима.

**Доказательство.** По теореме 10 работы [4] группа  $G$  разрешима, поэтому любая максимальная подгруппа  $G$  содержит либо  $P$ , либо  $Q$ , т. е. имеет в  $G$  простой индекс. Тогда  $G$  сильно разрешима по теореме 9 работы [1] Хупперта.

Заметим, что если  $q$  — любой простой делитель порядка группы  $G$ , то в  $G$  всегда существует максимальная подгруппа, не содержащая некоторую  $q$ -силовскую подгруппу  $G$ . Действительно, если  $q$ -силовская подгруппа инвариантна в  $G$ , то это справедливо в силу существования по теореме Щура дополнительной к ней подгруппы, а если не инвариантна в  $G$ , то такой максимальной подгруппой будет, например, любая максимальная подгруппа  $G$ , содержащая нормализатор одной из  $q$ -силовских подгрупп.

**Теорема 4.** Пусть  $q$  — наибольший простой делитель  $(G)$ . Если любая максимальная подгруппа  $G$ , не содержащая хотя бы одной  $q$ -силовской подгруппы  $G$ , имеет в  $G$  простой индекс, то тогда  $G$  является сильно  $q$ -разрешимой (с инвариантной  $q$ -силовской подгруппой).

**Доказательство.** Допустим, что существуют группы, для которых теорема неверна. Выберем тогда среди них группу  $G$ , имеющую наименьший порядок.

Рассмотрим два случая:

1) Допустим, что силовская  $q$ -подгруппа  $Q$  группы  $G$  не инвариантна в  $G$ . Пусть  $N$  — нормализатор  $Q$  в  $G$ . Выберем в  $G$  максимальную подгруппу  $M$ , содержащую  $N$ . Как и в доказательстве леммы 1, устанавливаем, что  $[G : M] = 1 + kq$ , где  $k$  — целое число. Так как  $M$  не содержит некоторой  $q$ -силовской подгруппы  $G$ , то по условию теоремы  $[G : M] = r$ , где  $r$  — простое число, меньше  $q$ . Противоречие.

2) Пусть теперь  $Q$  инвариантна в  $G$ .

Обозначим через  $L$  минимальный нормальный делитель группы  $G$ , содержащийся в  $Q$ .

$(L) \neq q$ , ибо в противном случае  $G$  была бы сильно  $q$ -разрешима.

Пусть  $M$  — любая максимальная подгруппа  $G$ . Если  $M$  не содержит  $L$ , то  $M \cap L = D \neq E$ , ибо ввиду  $G = ML$  и  $M \not\cong Q$  было бы  $(L) = q$ . Но, с другой стороны, инвариантность  $D$  в  $G$  противоречит минимальности  $L$ .

Следовательно, любая максимальная подгруппа  $G$  содержит  $L$ , т. е.  $\Phi(G) \neq E$ .

Так как для  $G/\Phi(G)$  условие теоремы выполняется, то  $G/\Phi(G)$  сильно  $q$ -разрешима и тогда по лемме 7 работы [2] Паздерского  $G$  сильно  $q$ -разрешима. Противоречие. Теорема доказана.

### Литература

1. Huppert B. Math Zeitsch, **60**, 409—434, 1954.
2. Pazderski G. Pubs. math., **9**, № 3, 4, 264—269, 1962.
3. Чунихин С. А. Подгруппы конечных групп. Минск, 1964.
4. Романовский А. В. ДАН СССР, **152**, № 4, 1963.
5. Конечные группы. Минск, 1966.

Педагогический институт  
им. В. П. Чкалова,  
г. Гомель

Поступило в редакцию  
26.IX 1967

## ЗМЕСТ

### МАТЭМАТЫКА

А. Х. Турецкий, И. И. Корзун. Оценка приближения интерполяционными полиномами Лагранжа с узлами Чебышева для класса функций, имеющих ограниченную в среднем производную данного порядка	5
И. М. Кунцевич. К вопросу минимизации значения линейной формы на множестве циклов длины $n$ . I	25
Н. Н. Власовец. О порядке приближения непрерывных функций на конечном отрезке с помощью некоторых алгебраических многочленов	31
Л. Я. Поляков. О разрешимых группах	43
А. П. Буланов. Приближение $x^{1/3}$ рациональными функциями	47
В. Н. Абрашин, В. В. Бобков. Об одной многоточечной разностной схеме метода интегральных соотношений для гиперболического уравнения	57
З. И. Бельский. Три-ткани с чебышевскими и геодезическими сетями Гессе	66

### ФІЗІКА

Э. А. Рудак. Спектры нижних уровней ядер $C1^{38}$ и $K^{40}$	76
А. С. Рубанаў, А. В. Чалей. Уплыў нагрэву на работу рубінавага АКГ	80
А. Г. Маханёк, В. С. Корольков. Задача об экранировании и антиэкранировании кристаллического поля для $4f^2$ -оболочек редкоземельных ионов	86
Б. Ю. Ханох. Формулы для разлику светавога патоку, адбітага тэтраэдрэчнай прызмай	95
В. И. Стражев, Л. М. Томильчик. К вопросу о дуально-инвариантной электродинамике	102
Н. А. Барысевіч, К. М. Грушэцкі. Да пытання аб геаметрычнай і электроннай структуры цукраў	109
В. И. Ганопольский, Т. В. Езерская. О точности фотометрических измерений. Экспериментальная проверка точности измерений на фильтрофотометре по методу непосредственной фотометрии	114
В. М. Варикаш, З. Шольц, И. Мыл. Диффузия триглицинсульфата в концентрированных водных растворах	119

### КАРОТКІЯ ПАВЕДАМЛЕННІ

А. П. Богданов, А. В. Сорока, В. Н. Тадэуш, Е. И. Фирсов. О мультипольности перехода $0,645 \text{ Мэв}$ в ядре $V^{52}$	122
А. С. Потупа, В. И. Стражев, Л. М. Томильчик. К проблеме второго заряда в дуально-инвариантной электродинамике	126
А. Е. Залесский. Замечания о треугольной линейной группе	129
А. В. Романовский. Свойства конечной группы, связанные с наибольшим простым делителем ее порядка	132

## СОДЕРЖАНИЕ

### МАТЕМАТИКА

А. Х. Турецкий, И. И. Корзун. Оценка приближения интерполяционными полиномами Лагранжа с узлами Чебышева для класса функций, имеющих ограниченную в среднем производную данного порядка	5
И. М. Кунцевич. К вопросу минимизации значения линейной формы на множестве циклов длины $n$ . I	25
Н. Н. Власовец. О порядке приближения непрерывных функций на конечном отрезке с помощью некоторых алгебраических многочленов	31
Л. Я. Поляков. О разрешимых группах	43
А. П. Буланов. Приближение $x^{1/3}$ рациональными функциями	47
В. Н. Абрашин, В. В. Бобков. Об одной многоточечной разностной схеме метода интегральных соотношений для гиперболического уравнения	57
З. И. Бельский. Три-ткани с чебышевскими и геодезическими сетями Гессе	66

### ФИЗИКА

Э. А. Рудак. Спектры нижних уровней ядер $Cl^{38}$ и $K^{40}$	76
А. С. Рубанов, А. В. Чадей. Влияние нагревания на работу рубинового ОКГ	80
А. Г. Маханёк, В. С. Корольков. Задача об экранировании и антиэкранировании кристаллического поля для $4f^x$ -оболочек редкоземельных ионов	86
Б. Ю. Ханох. Формулы для расчета светового потока, отраженного тетраэдрической призмой	95
В. И. Стражев, Л. М. Томильчик. К вопросу о дуально-инвариантной электродинамике	102
Н. А. Борисевич, К. М. Грушецкий. К вопросу о геометрической и электронной структуре сахаров	109
В. И. Ганопольский, Т. В. Езерская. О точности фотометрических измерений. Экспериментальная проверка точности измерений на фильтрофотометре по методу непосредственной фотометрии	114
В. М. Варикаш, З. Шольц, И. Мыл. Диффузия триглицинульфата в концентрированных водных растворах	119

### КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

А. П. Богданов, А. В. Сорока, В. Н. Тадэуш, Е. И. Фирсов. О мультипольности перехода $0,645 \text{ Мэв}$ в ядре $V^{52}$	122
А. С. Потупа, В. И. Стражев, Л. М. Томильчик. К проблеме второго заряда в дуально-инвариантной электродинамике	126
А. Е. Залесский. Замечания о треугольной линейной группе	129
А. В. Романовский. Свойства конечной группы, связанные с наибольшим простым делителем ее порядка	132

РЕФЕРАТЫ

УДК 517.512.6

Оценка приближения интерполяционными полиномами Лагранжа с узлами Чебышева для класса функций, имеющих ограниченную в среднем производную данного порядка. Турецкий А. Х., Корзун И. И. «Весті Акадэміі навук БССР», серыя фізика-матэматычных навук. 1968 г., № 2, 5—24.

Рассматривается  $W_2^{(r)} M[a, b]$  — класс функций  $f(x)$ , имеющих на сегменте  $[a, b]$  производную порядка  $r$  с интегрируемым квадратом, для которой

$$\int_a^b [f^{(r)}(t)]^2 dt \leq M^2,$$

и ставится задача: для данного фиксированного  $x$  из сегмента  $[a, b]$  определить величину

$$\sup_{f \in W_2^{(r)} M[a, b]} |f(x) - L_{n-1}(x, f)|,$$

где  $L_{n-1}(x, f) = \sum_{k=1}^n (f(x_k) l_k(x))$  — интерполяционная формула Лагранжа, построенная по узлам  $a \leq x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n \leq b$ , заданным на сегменте  $[a, b]$ . Основной результат:

Теорема 2. Пусть  $L_{n-1}(x, f) = \sum_{k=1}^n f(x_k) l_k(x)$  есть интерполяционная формула Лагранжа по узлам Чебышева  $x_k = \cos \frac{(2n - 2k + 1)\pi}{2n}$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ), заданным на отрезке  $[-1, 1]$ ;  $r$  — натуральное число, удовлетворяющее условию  $2r \leq n$ . Тогда для фиксированного  $x$  из интервала  $x_i < x < x_{i+1}$ , т. е.  $x = -\cos \frac{(2i - 2\alpha + 1)\pi}{2n}$  ( $0 < \alpha < 1$ ), имеет место следующее асимптотическое равенство:

$$\sup_{f \in W_2^{(r)} M[-1, 1]} |f(x) - L_{n-1}(x, f)| = \frac{M}{(r-1)!} l^{1/2},$$

где

$$l = \frac{(2r-2)!!}{2^{2r-2} (2r-1)!!} \frac{|T_n(x)|}{n} (1-x^2)^{\frac{2r-1}{2}} \times \\ \times \sin^{r-1} \frac{\alpha\pi}{n} \sin^{r-1} \frac{(1-\alpha)\pi}{n} \sum_{l=1}^{r-1} \frac{b_l}{[\alpha(1-\alpha)]^{l-1}} + O\left(\frac{\ln n}{n^{2r}}\right),$$

$T_n(x) = \cos n \arccos x$  — полином Чебышева первого рода, а коэффициенты  $b_l$  определяются соотношениями

$$b_1 = 1, \quad b_l = \sum_{j=1}^{l-1} (-1)^{j+1} b_{l-j} C_{r-l+j}^{2j} \quad (l = 2, 3, \dots, r-1).$$

Библиографий 3.

УДК 512.25/6+519.15

**К вопросу минимизации значения линейной формы на множестве циклов длины  $n$ .** И. Кунцевич И. М. «Весті Академії наук БССР», серия фізика-математичних наук. 1968 г., № 2, 25—30.

Пусть  $H$ —множество всех циклов длины  $n$  из  $S_n$ , а подстановка  $\tau_0$ , минимизирующая значение линейной формы  $f$  на всей симметрической группе  $S_n$ , когда переменные формы  $x_i$  принимают значения из множества  $\{b_1, b_2, \dots, b_n\}$ , имеет вид  $\tau_0 = \tau_1(l+1, l+2, \dots, n)$ , где  $\tau_1$ —произвольная подстановка символов  $1, 2, \dots, l$ .

Показано, что в этом случае для отыскания подстановки  $t_0$ , минимизирующей значение формы  $f$  на множестве всех циклов длины  $n$  из  $S_n$ , достаточно ограничиться рассмотрением  $l!$  циклических подстановок степени  $n$  вида

$$t = (1, \alpha_2, \dots, \alpha_s, l+2, \dots, n, l+1, \alpha_{s+1}, \dots, \alpha_l).$$

Кроме того, рассмотрены  $\tau_0$  видов:

1)  $\tau_0 = (l+1, l+2, \dots, n)$  и 2)  $\tau_0 = (1, l)(2, l-1) \dots (l+1, l+2, \dots, n)$ . Для каждого из случаев 1), 2) указаны число и вид подстановок, среди которых следует искать минимизирующую.

Библиографий 3.

УДК 517.512.6

**О порядке приближения непрерывных функций на конечном отрезке с помощью некоторых алгебраических многочленов.** Власовец Н. Н. «Весті Академії наук БССР», серия фізика-математичних наук. 1968 г., № 2, 31—42.

Оценивается приближение для  $f(x) \in C[-1, 1]$  с помощью алгебраических многочленов

$$U_n(x) = U_n(f, y) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\cos t) \left\{ \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \rho_k^{(n)} \cos k(t-y) \right\} dt,$$

где  $\cos y = x$ , а  $\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \rho_k^{(n)} \cos kt \geq 0$  ( $-\pi \leq t \leq \pi$ ).

Оценка зависит от положения точки  $x$  и существенно уточняется вблизи концов отрезка  $[-1, 1]$  с сохранением порядка приближения на всем отрезке в целом. Получено другим методом следующее уточнение теоремы Джексона:

$$E_n(f) \leq (1 + \pi) \omega \left( \frac{\sqrt{1-x^2}}{n} \right) + \left( 1 + \frac{\pi^2}{2} \right) \omega \left( \frac{|x|}{n^2} \right),$$

где  $\omega(\delta)$ —модуль непрерывности функции  $f(x)$ , ранее полученное А. Ф. Тиманом.

Аналогично уточняется оценка приближения таких функций с помощью интеграла Пуассона.

Библиографий 6.

УДК 519.44

**О разрешимых группах.** Поляков Л. Я. «Весті Академії наук БССР», серия фізика-математичних наук. 1968 г., № 2, 43—46.

Основные результаты заметки примыкают к теореме Ф. Холла (Холл М., Теория групп. ИЛ, 1962, теорема 10.5.7). Приведем одну из доказанных автором теорем. Пусть  $q$ —наибольшее простое число, делящее порядок конечной группы  $G$ . Если все ленильпотентные максимальные подгруппы группы  $G$ , содержащие  $q$ -силовскую подгруппу  $Q$  из  $G$ , имеют своим индексом либо простое число, либо квадрат простого числа, то группа  $G$  разрешима.

Тем самым показано, что в упомянутой выше теореме Ф. Холла можно ограничиться рассмотрением лишь ненильпотентных максимальных подгрупп группы  $G$  и притом таких, которые надстроены над силовой подгруппой группы  $G$ , относящейся к наибольшему простому делителю порядка группы.

Библиографий 12.

УДК 517.512.6

Приближение  $x^{1/3}$  рациональными функциями. Буланов А. П. «Весті Академії наук БССР», серия фізико-математичних наук. 1968 г., № 2, 47—56.

Д. Ньюман в 1963 г. получил результат: наименьшие отклонения  $R_n[\sqrt{x}]$  в метрике  $C[0,1]$  функции  $\sqrt{x}$  от рациональных функций порядка  $\leq n$  не превосходят  $3 \exp(-\sqrt{n})$ , ( $n=0, 1, 2, \dots$ ). Обобщить полученный результат на функцию  $\sqrt[3]{x}$  и функцию  $x^a$ , где  $a$ —рациональное число, до сих пор не удавалось.

В работе доказывается  
Теорема. Существует рациональная функция  $r_n(x)$  любого порядка  $n$ , такая, что

$$|\sqrt[3]{x} - r_n(x)| \leq 4 \exp\left(-\sqrt{\frac{3}{8}n}\right) \text{ для } x \in [0,1].$$

Рациональная функция  $r_n(x)$  строится из двух полиномов, члены которых выбираются из разложения произведения

$$\prod_{i=1}^n \left[ \left(x^{\frac{1}{3}} - \varepsilon x_i\right) \left(x^{\frac{1}{3}} - \varepsilon^2 x_i\right) \right], \quad (1)$$

где

$$\varepsilon = \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3}, \quad x_i = \exp\left(-\frac{i}{2\sqrt{n}}\right).$$

Для полинома знаменателя  $Q_n(x)$  выбираются из (1) те члены, которые имеют целые степени  $x$ ; полином числителя  $x^{\frac{1}{3}} P_n(x^{\frac{1}{3}})$  выбирается так, что в  $P_n(x^{\frac{1}{3}})$  степени  $x$  равны  $s - \frac{1}{3}$ , где  $s$ —натуральное число. Тогда

$$r_n(x) = x^{\frac{1}{3}} \frac{P_n(x^{\frac{1}{3}})}{Q_n(x)} = \frac{\bar{P}_n(x)}{Q_n(x)}.$$

Метод доказательства обобщается на случай  $a = \frac{1}{m}$ , где  $m$ —натуральное число. В таком общем случае вместо (1) необходимо брать за исходное произведение выражение

$$\prod_{i=1}^n \left[ \left(x^{\frac{1}{m}} - \varepsilon x_i\right) \left(x^{\frac{1}{m}} - \varepsilon^2 x_i\right) \dots \left(x^{\frac{1}{m}} - \varepsilon^{m-1} x_i\right) \right],$$

где

$$\varepsilon = \cos \frac{2\pi}{m} + i \sin \frac{2\pi}{m}, \quad x_i = \exp\left(-\frac{i}{\sqrt{mn}}\right).$$

Полиномы знаменателя и числителя строятся аналогично (в числителе будет полином  $x^{\frac{1}{m}} P_n(x^{\frac{1}{m}})$ , где в полиноме  $P_n(x^{\frac{1}{m}})$  только те степени  $x$ , которые выражаются числом  $s - \frac{1}{m}$ , где  $s$ —натурально).

Библиографий 7.

УДК 518:517/944:947

Об одной многоточечной разностной схеме метода интегральных соотношений для гиперболического уравнения. А б р а ш и н В. Н., Б о б к о в В. В. «Весті Академії наук БССР», серия фізика-математичних наук. 1968 г., № 2, 57—65.

Исследуется  $k^2$ -точечное разностное уравнение, полученное при решении методом интегральных соотношений следующей задачи Гурса:

$$\begin{aligned} u_{xy} &= a(x, y) u_x + b(x, y) u_y + c(x, y) u + f(x, y), \\ u(x, 0) &= \varphi(x), \quad u(0, y) = \psi(y), \quad \varphi(0) = \psi(0), \\ 0 &\leq x \leq l', \quad 0 \leq y \leq l''. \end{aligned}$$

Получены оценки погрешности метода, гарантирующие  $k$ -й порядок сходимости при неограниченном уменьшении шага сетки. Указывается также на возможность перенести эти результаты на задачу Коши и на некоторые другие задачи; при этом основные результаты могут быть обобщены и на случай систем уравнений вида

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_i}{\partial x \partial y} &= a_i(x, y) \frac{\partial u_i}{\partial x} + \sum_{j=1}^p b_{ij}(x, y) \frac{\partial u_j}{\partial y} + \\ &+ f_i(x, y, u_1, \dots, u_p), \\ i &= 1, 2, \dots, p. \end{aligned}$$

Библиографий 4.

УДК 513

Три-ткани с чебышевскими и геодезическими сетями Гессе. Б е л ь с к и й З. И. «Весті Академії наук БССР», серия фізика-математичних наук. 1968 г., № 2, 66—75.

Для того чтобы три-ткань  $(a, b, c)$  имела действительную сеть Гессе  $(p, q)$ , необходимо и достаточно, чтобы она состояла из одного действительного и двух комплексно сопряженных семейств линий. Если это условие выполнено, то три-ткань определяется одним векторным полем  $a$  (орт касательной к линиям действительного семейства) и двумя скалярными полями  $\mu$  и  $\nu$  ( $\mu = \text{ctg } ap$ ,  $\nu = \text{ctg } aq$ ), где  $a$ ,  $\mu$  и  $\nu$  — действительные.

Для того чтобы три-ткань  $(a, \mu, \nu)$  имела чебышевскую сеть Гессе, необходимо и достаточно, чтобы параметр  $\mu$  был решением определенного дифференциального уравнения, а параметр  $\nu$  выражался через  $\mu$  определенным образом, тогда и  $\nu$  будет решением того же уравнения.

Рассмотрен специальный случай, возможный только на торах. В этом случае чебышевская сеть Гессе оказывается также полугеодезической или даже декартовой.

Наконец, исследован случай, когда действительное семейство линий ( $a$ -линии) три-ткани и его ортогональные траектории ( $\tilde{a}$ -линии) образуют биссекторную сеть сети Гессе, следовательно, ортогональные траектории совпадают с действительным семейством присоединенной три-ткани. Для того чтобы три-ткань обладала указанным свойством, достаточно, чтобы геодезические кривизны  $a$ -линий и  $\tilde{a}$ -линий удовлетворяли определенному векторному дифференциальному уравнению и чтобы  $\mu$  определенным образом выражалось через них ( $\nu = -\mu$ ). Если же на поверхности существует сеть  $L_{-1}$ , то на этой поверхности имеется  $\infty^1$  три-тканей указанного вида. Их сети Гессе — чебышевские и конформно-геодезические и имеют общую биссекторную сеть  $L_{-1}$ . Если, кроме того, поверхность изометрична поверхности вращения, то сети Гессе также полосатые, а сеть  $L_{-1}$  совпадает с сетью меридианов и параллелей.

Точно так же исследованы условия существования три-ткани  $(a, \mu, \nu)$  с геодезической сетью Гессе. Получены аналогичные результаты.

Библиографий 9.

УДК 539.142

**Спектры нижних уровней ядер  $Cl^{38}$  и  $K^{40}$ .** Рудак Э. А. «Весті Академії наук БССР», серия фізика-математичних наук. 1968 г., № 2, 76—79.

Спектры нижних уровней  $Cl^{38}$  и  $K^{40}$  рассчитывались в предположении центрального обычного и спиновообменного остаточного взаимодействия между валентными протоном и нейтроном. Показано, что остаточное взаимодействие нельзя аппроксимировать только центральными силами, при более точных расчетах необходимо учитывать и тензорные силы.

Таблиц 2. Иллюстраций 2. Библиографий 5.

УДК 621.378.325

**Влияние нагревания на работу рубинового ОКГ.** Рубанов А. С., Чалей А. В. «Весті Академії наук БССР», серия фізика-математичних наук. 1968 г., № 2, 80—85.

Рассматривается влияние лучистого нагрева активного элемента рубинового ОКГ на генерацию с учетом изменения квантового выхода и ширины  $R$ -линии люминесценции рубина. Исследован характер температурной зависимости порога генерации, что позволило определить длительность работы системы при заданном значении интенсивности накачки. В качестве примера рассмотрен рубиновый ОКГ с воздушным охлаждением. Определена также мощность генерации, снимаемая с единицы длины активного стержня в непрерывном режиме генерации системы.

Таблиц 3. Иллюстраций 1. Библиографий 4.

УДК 530.145.7

**Задача об экранировании и антиэкранировании кристаллического поля для  $4f^2$ -оболочек редкоземельных ионов.** Маханёк А. Г., Корольков В. С. «Весті Академії наук БССР», серия фізика-математичних наук. 1968 г., № 2, 86—94.

Применены аналитические методы расчета для решения важной с точки зрения физической интерпретации спектроскопических данных и выяснения природы химической связи задачи об экранировании кристаллического поля для  $4f^2$ -оболочек ионов редкоземельных элементов. Получены замкнутые выражения для поправочных функций и констант экранирования. На этой основе даны численные расчеты постоянных экранирования для конкретных элементов на основе использования слэтеровских и водородоподобных функций. В статье приведены приближенные оценки величин экранирования для потенциалов различной мультипольности.

Таблиц 2. Библиографий 13.

УДК 535.31

**Формулы для расчета светового потока, отраженного тетраэдрической призмой.** Ханюх Б. Ю. «Весті Академії наук БССР», серия фізика-математичних наук. 1968 г., № 2, 95—101.

Выведены расчетные формулы для светового потока, отраженного тетраэдрической призмой в сторону источника излучения и принимаемого приемной системой. Расчет делается на основе геометрического представления картины отраженных пучков от призмы, у которой двугранные углы между отражающими гранями призмы не равны точно прямому, а поверхности отражающих граней имеют сферическую кривизну. На основе полученных формул сделаны выводы о наилучших параметрах призм, работающих в качестве отражателей лучистого потока на различных расстояниях.

Иллюстраций 4. Библиографий 3.

УДК 530.12:531.18+538.3

К вопросу о дуально-инвариантной электродинамике. Стражев В. И., Томильчик Л. М. «Весті Академії наук БССР», серия фізика-математичних наук. 1968 г., № 2, 102—108.

Построена классическая электродинамика с полевыми величинами и зарядами, инвариантными относительно однопараметрической группы обобщенных дуальных преобразований, в которой возможны два типа фотонов и зарядов. Показано, что условие дуальной инвариантности приводит к равенству нулю массы фотона. С возможностью существования двух типов фотонов связывается новый закон сохранения. Дано обобщение дискретных операций  $P, T, C, M$ . Обсуждены возможные следствия нарушения дуальной инвариантности.

Иллюстраций 1. Библиографий 24.

УДК 541.636

К вопросу о геометрической и электронной структуре сахаров. Борисевич Н. А., Грушецкий К. М. «Весті Академії наук БССР», серия фізика-математичних наук. 1968 г., № 2, 109—113.

Расчислено положение электронных пар связывающих орбиталей в группах атомов СОН и СОС, которые входят в пирановое кольцо. Проводится анализ роли факторов нестабильности сахаров при конформационных переходах кресло—ванна. На основе теории заторможенного внутреннего вращения уточнена геометрия пиранового кольца. Установлено, что в пирановом кольце по сравнению с циклогексановым произведено вращение вокруг химической связи  $C_5-O_1$  на  $\Delta\varphi_3=5^\circ 05'$ , где отсчет угла производится по часовой стрелке, если смотреть со стороны атома  $O_1$  вдоль связи  $O_1-C_5$ , на  $\Delta\varphi_2=0^\circ 31'$ , если смотреть вдоль связи  $C_1-C_2$  со стороны атома  $C_1$ , на  $\Delta\varphi_1=7^\circ 22'$ , если смотреть вдоль химической связи  $C_2-C_3$  со стороны атома  $C_2$ . Вращение вокруг химической связи  $C_5-O_1$  устанавливается на основе условия цикличности для пиранового кольца.

Иллюстраций 2. Библиографий 14.

УДК 535.242.2:621.3.088.3

О точности фотометрических измерений. Экспериментальная проверка точности измерений на фильтрофотометре по методу непосредственной фотометрии. Ганопольский В. И., Езерская Т. В. «Весті Академії наук БССР», серия фізика-математичних наук. 1968 г., № 2, 114—118.

Экспериментальная проверка точности фотометрических измерений на фильтрофотометре по методу непосредственной фотометрии была выполнена по методике Г. С. Терешина и включала определение инструментальной ошибки  $\sigma_{Tп}$ , кюветной ошибки  $\sigma_{Tк}$ , а также граничного показания по шкале

пропусканий  $T_{гр} = \frac{\sigma_{Tп}}{\sigma_{Tк}}$  (где  $\sigma_{Tк}$  — среднее квадратичное отклонение пропу-

скания кювет относительно друг друга). Этих данных достаточно для построения теоретической кривой ошибок измерения, т. е. зависимости  $\sigma_D/D = f(D)$ , с учетом зависимости  $\sigma_T = f(T)$ .

В качестве исследуемых систем были выбраны растворы бихромата калия и перманганата калия. В первом случае измерения серии растворов выполнялись на одном (синем) светофильтре, но в кюветах разной длины ( $l_1 = 1$  см и  $l_2 = 3$  см). Во втором случае все измерения были выполнены в кюветах  $l = 1$  см, но на двух светофильтрах — синем и сине-зеленом. Результаты измерений, подвергнутые дисперсионному анализу, позволили определить значе-

ния дисперсий  $\sigma_{T_{II}}$ ,  $\sigma_{T_{ГК}}$ ,  $\sigma_{T_{К}}$  и вычислить значение  $T_{ГР}$ . Экспериментальная проверка точности измерений на приборе с оптической компенсацией (фотоэлектроколориметре ФЭК-М) подтвердила теоретические и экспериментальные результаты исследования Г. С. Терешина, полученные для приборов с электрической компенсацией (спектрофотометров).

Высказанное в статье предположение об уменьшении в общем случае значения  $T_{ГР}$  для фильтрофотометров по сравнению со спектрофотометрами получило экспериментальное подтверждение. Экспериментально найденные значения вероятных случайных ошибок измерения оптической плотности по характеру распределения и величине хорошо согласуются с теоретической кривой ошибок.

Таблиц 1. Иллюстраций 2. Библиографий 7.

УДК 532

**Диффузия триглицинсульфата в концентрированных водных растворах.** В арикаш В. М., Шольц З., Мыл И. «Весці Акадэміі навук БССР», серыя фізіка-матэматычных навук. 1968 г., № 2, 119—121.

Оптическим методом в интервале температур 18—35 °С определены коэффициенты диффузии триглицинсульфата в водном растворе. Измерения проводились на рефрактографе для жидкостей, который позволял непосредственно получать градиентные кривые концентрации. Коэффициенты диффузии рассчитывались по площадям и максимальной высоте градиентных кривых. Вычислена энергия активации диффузии триглицинсульфата.

Таблиц 1. Иллюстраций 4. Библиографий 8.

УДК 539.172.4

**О мультипольности перехода 0,645 Мэв в ядре  $V^{52}$ .** Богданов А. П., Сорока А. В., Тадэуш В. Н., Фирсов Е. И. «Весці Акадэміі навук БССР», серыя фізіка-матэматычных навук. 1968 г., № 2, 122—125.

С помощью люминесцентного  $\gamma$ -спектрометра совпадений измерены угловые  $\gamma$ - $\gamma$ -корреляции для каскадных переходов 6,51—0,645 Мэв и 0,645—0,125 Мэв в ядре  $V^{52}$  после захвата теплового нейтрона ядром  $V^{51}$ . Получены следующие значения коэффициентов  $a_2$  функции корреляции:  $-0,14 \pm 0,03$  и  $+0,036 \pm 0,015$  для каскадов 6,51—0,645 Мэв и 0,645—0,125 Мэв соответственно. Анализ экспериментальных результатов позволяет сделать вывод, что переход 0,645 Мэв практически чистый  $M1$ , если спин основного состояния  $V^{52}$  равен  $3^+$ . Если же спин основного состояния  $V^{52}$   $2^+$ , то переход 0,645 Мэв является смесью  $M1$ - и  $E2$ -излучений с параметром смеси  $|\delta| \sim 1$ .

Иллюстраций 3. Библиографий 14.

УДК 5383:530145

**К проблеме второго заряда в дуально-инвариантной электродинамике.** Потупа А. С., Стражев В. И., Томильчик Л. М. «Весці Акадэміі навук БССР», серыя фізіка-матэматычных навук. 1968 г., № 2, 126—128.

На основе модели операторных метрических форм сделана попытка построения схемы самосогласованного квантования полей и зарядов в дуально-инвариантной электродинамике. Удаётся ввести квантованность заряда и получить равенство по модулю электрических зарядов всех заряженных стабильных частиц. При этом соотношение типа Дирака—Швингера между величинами электрического и магнитного зарядов возникает в качестве соотношения неопределенностей, что фактически означает запрет на обнаружение монополя. Благодаря универсальности константы связи запрещаются также дробные заряды.

Библиографий 9.

УДК 519.48

Замечание о треугольной линейной группе. Залесский А. Е.  
«Весті Академії наук БССР», серия фізика-матэматычных  
наук. 1968 г., № 2, 129—131.

Указывается, что число классов сопряженных унитарных элементов в группе Бореля простой алгебраической линейной группы типа  $A_n$ ,  $n > 4$ ,  $B_n$ ,  $C_n$ ,  $D_n$ ,  $n > 5$ ,  $E_n$ ,  $n = 6, 7, 8$ , бесконечно.  
Библиографий 3.

УДК 519.44

Свойства конечной группы, связанные с наибольшим простым делителем ее порядка. Романовский А. В. «Весті Академії наук БССР», серия фізика-матэматычных наук. 1968 г., № 2, 132—134.

Изучаются свойства конечной группы, у которой не все максимальные подгруппы простого индекса.

Пусть  $p$  — наибольший простой делитель порядка группы  $G$ .

Доказываются следующие теоремы:

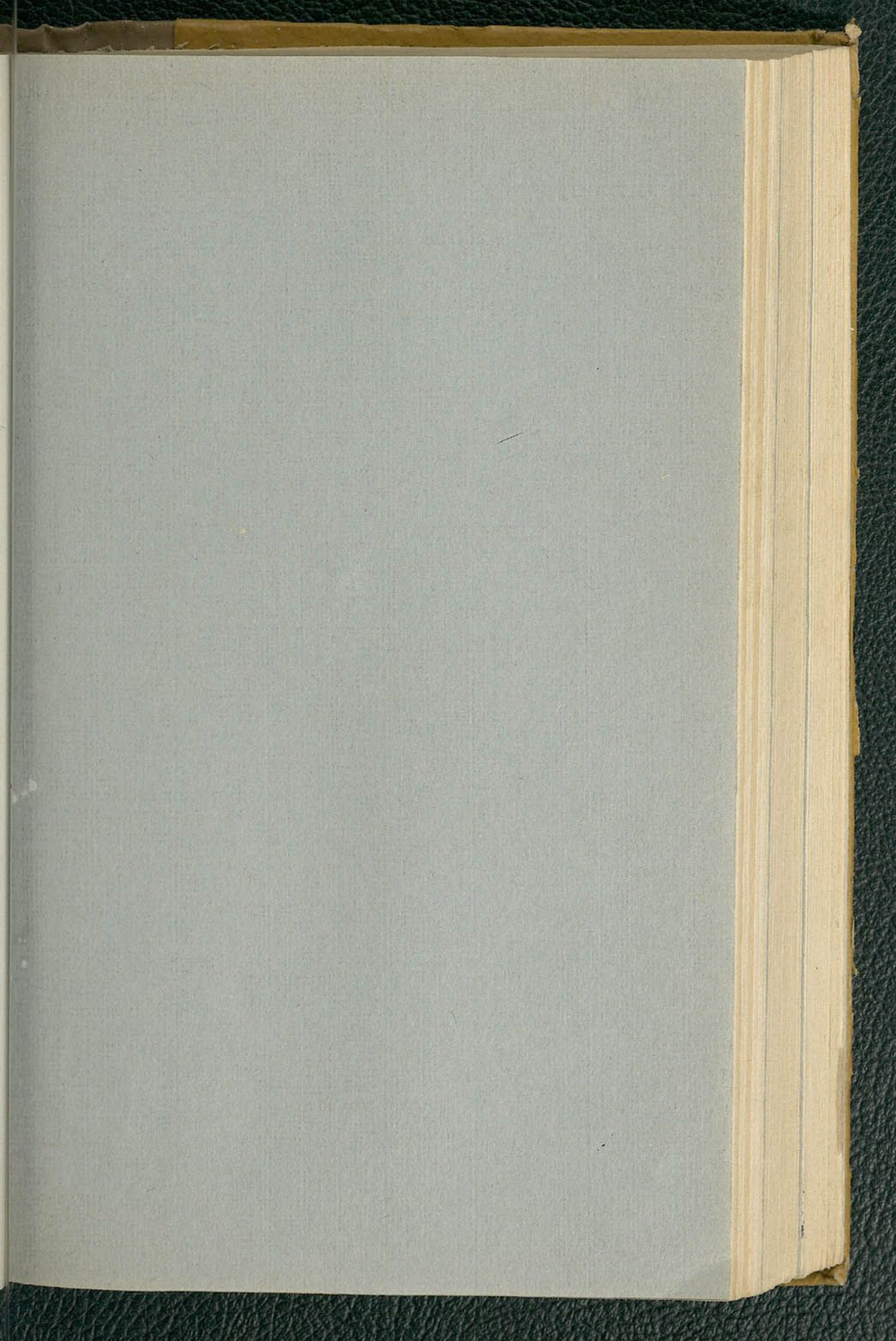
1. Пусть  $P$  — силовская  $p$ -подгруппа  $G$ . Группа  $G$  тогда и только тогда сильно  $p'$ -разрешима, когда все максимальные подгруппы  $G$ , надстроенные над  $P$ , имеют простой индекс.

2. Если любая максимальная подгруппа  $G$ , не содержащая хотя бы одной  $p$ -силовской подгруппы  $G$ , имеет в  $G$  простой индекс, то тогда  $G$  является сильно  $p$ -разрешимой.

3. Если любая максимальная  $pd$ -подгруппа  $G$  имеет простой индекс, то тогда либо  $G$  сильно разрешима, либо является расширением  $p$ -силовской элементарной абелевой подгруппы с помощью сильно разрешимой  $p'$ -подгруппы, являющейся максимальной в  $G$ .

Библиографий 5.





60 к.

Индекс  
74846