

68.186.744

# ВЕСЦІ

АКАДЭМІІ НАВУК БССР

---

СЕРЫЯ  
ФІЗІКА-МАТЭМАТЫЧНЫХ  
НАВУК

3

ВЫДАВЕЦТВА „НАВУКА І ТЭХНІКА“

---

МІНСК 1968

203/12

68.186.744



Да 2242

Литература  
Библиотека  
СССР  
Л. Ленинград

# ИЗВЕСТИЯ

АКАДЕМИИ НАУК БССР

---

СЕРИЯ  
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ  
НАУК

№ 3

ИЗДАТЕЛЬСТВО „НАУКА И ТЕХНИКА“

---

МИНСК 1968

# ВЕСЦІ

АКАДЭМІІ НАВУК БССР

---

---

СЕРЫЯ  
ФІЗІКА-МАТЭМАТЫЧНЫХ  
НАВУК

№ 3

ВЫДАВЕЦТВА „НАВУКА І ТЭХНІКА“

---

МІНСК 1968

Рэдакцыйная калегія:

Ф. І. ФЕДАРАЎ (галоўны рэдактар),  
Д. А. СУПРУНЕНКА (нам. галоўнага рэдактара),  
М. М. АЛЯХНОВІЧ, Ф. Д. ГАХАЎ, У. І. КРЫЛОУ,  
М. М. СІРАТА, У. Г. СПРЫНДЖУК, Я. І. ФІРСАЎ,  
С. А. ЧУНІХІН

А. Х. ТУРЕЦКИЙ

**ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ ПРИБЛИЖЕНИЯ ПЕРИОДИЧЕСКИХ  
 ФУНКЦИЙ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИМИ ПОЛИНОМАМИ**

1. Пусть  $f(x) \in C_{2\pi}$ , и натуральные числа  $m$  и  $n$  удовлетворяют неравенствам

$$m < n < 2m + 1. \quad (1)$$

Тогда тригонометрический полином порядка  $n$

$$T_n(x) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^n (\alpha_k \cos kx + \beta_k \sin kx), \quad (2)$$

удовлетворяющий условиям

$$T_n(x_\nu) = y_\nu, \quad x_\nu = \frac{2\nu\pi}{2m+1} \quad (\nu = 0, 1, \dots, 2m) \quad (3)$$

( $y_\nu$  — данные числа), для которого интеграл

$$I = \int_0^{2\pi} [f(x) - T_n(x)]^2 dx$$

имеет наименьшее значение, равен

$$T_n(x) = \frac{1}{2m+1} \sum_{r=0}^{2m} y_r \frac{\sin\left(m + \frac{1}{2}\right)(x - x_r) \cos(n - m)(x - x_r)}{\sin \frac{x - x_r}{2}} +$$

$$+ \frac{1}{\pi} \sin\left(m + \frac{1}{2}\right)x \int_0^{2\pi} f(t) \frac{\sin\left(m + \frac{1}{2}\right)t \sin(n - m)(x - t)}{\sin \frac{x - t}{2}} dt. \quad (4)$$

Для доказательства перепишем условия (3) в виде

$$\frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^n (\alpha_k \cos kx_r + \beta_k \sin kx_r) = y_r \quad (r = 0, 1, \dots, 2m). \quad (3')$$

Просуммируем (3') по  $r$  от 0 до  $2m$ . Учитывая тождества

$$\sum_{r=0}^{2m} \cos kx_r = \begin{cases} 0 & \text{при } k \neq l(2m+1), \\ 2m+1 & \text{при } k = l(2m+1), \quad l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \end{cases} \quad (5)$$

$$\sum_{r=0}^{2m} \sin kx_r = 0$$

при любом целом  $k$  и условия (1), найдем

$$\alpha_0 = \frac{2}{2m+1} \sum_{r=0}^{2m} y_r. \quad (6)$$

Умножим (3') на  $\cos px_r$  и просуммируем по  $r$  от 0 до  $2m$ . Тогда получим

$$\alpha_p = \frac{2}{2m+1} \sum_{r=0}^{2m} y_r \cos px_r \quad (p=1, 2, \dots, 2m-n) \quad (7)$$

и

$$\alpha_p + \alpha_{2m+1-p} = \frac{2}{2m+1} \sum_{r=0}^{2m} y_r \cos px_r \quad (p=2m-n+1, \dots, n).$$

Аналогично, умножив (3') на  $\sin px_r$  и просуммировав по  $r$  от 0 до  $2m$ , получим

$$\beta_p = \frac{2}{2m+1} \sum_{r=0}^{2m} y_r \sin px_r \quad (p=1, 2, \dots, 2m-n), \quad (8)$$

$$\beta_p - \beta_{2m+1-p} = \frac{2}{2m+1} \sum_{r=0}^{2m} y_r \sin px_r \quad (p=2m-n+1, \dots, n).$$

Равенства (6), (7) и (8) дают

$$\alpha_k = \frac{2}{2m+1} \sum_{r=0}^{2m} y_r \cos kx_r \quad (k=0, 1, \dots, 2m-n), \quad (9)$$

$$\alpha_k = \frac{2}{2m+1} \sum_{r=0}^{2m} y_r \cos kx_r - \alpha_{2m+1-k} \quad (k=2m-n+1, \dots, m),$$

$$\beta_k = \frac{2}{2m+1} \sum_{r=0}^{2m} y_r \sin kx_r \quad (k=1, 2, \dots, 2m-n), \quad (10)$$

$$\beta_k = \frac{2}{2m+1} \sum_{r=0}^{2m} y_r \sin kx_r + \beta_{2m+1-k} \quad (k=2m-n+1, \dots, m).$$

Подставив теперь значения  $\alpha_k$  и  $\beta_k$  из (9) и (10) в (2), найдем

$$T_n(x) = \frac{1}{2m+1} \sum_{r=0}^{2m} y_r \left[ 1 + 2 \sum_{k=1}^m \cos k(x-x_r) \right] + \\ + \sum_{k=m+1}^n \{ \alpha_k [\cos kx - \cos(2m+1-k)x] + \beta_k [\sin kx + \sin(2m+1-k)x] \}. \quad (11)$$

Обозначим

$$\varphi(x) = f(x) - \frac{1}{2m+1} \sum_{r=0}^{2m} y_r \left[ 1 + 2 \sum_{k=1}^m \cos(x-x_r) \right], \quad (12)$$

$$S(x) = \sum_{k=m+1}^n \{ \alpha_k [\cos kx - \cos (2m+1-k)x] + \beta_k [\sin kx + \sin (2m+1-k)x] \}$$

и пусть

$$\varphi(x) \sim \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (A_k \cos kx + B_k \sin kx). \quad (13)$$

Тогда имеем

$$I = \int_0^{2\pi} [f(x) - T_n(x)]^2 dx = \int_0^{2\pi} [\varphi(x) - S(x)]^2 dx.$$

Легко найти, что

$$\int_0^{2\pi} \varphi(x) S(x) dx = \pi \sum_{k=m+1}^n [\alpha_k (A_k - A_{2m+1-k}) + \beta_k (B_k + B_{2m+1-k})],$$

$$\int_0^{2\pi} S^2(x) dx = 2\pi \sum_{k=m+1}^n (\alpha_k^2 + \beta_k^2).$$

Таким образом, получаем

$$I = \int_0^{2\pi} \varphi^2(x) dx - 2\pi \sum_{k=m+1}^n [\alpha_k (A_k - A_{2m+1-k}) + \beta_k (B_k + B_{2m+1-k})] +$$

$$+ 2\pi \sum_{k=m+1}^n (\alpha_k^2 + \beta_k^2),$$

или

$$I = \int_0^{2\pi} \varphi^2(x) dx + 2\pi \sum_{k=m+1}^n \left\{ \left[ \alpha_k - \frac{1}{2} (A_k - A_{2m+1-k}) \right]^2 + \right.$$

$$+ \left[ \beta_k - \frac{1}{2} (B_k + B_{2m+1-k}) \right]^2 - \frac{1}{4} (A_k - A_{2m+1-k})^2 -$$

$$\left. - \frac{1}{4} (B_k + B_{2m+1-k})^2 \right\}.$$

Отсюда видно, что  $I$  достигает наименьшего значения при

$$\alpha_k = \frac{1}{2} (A_k - A_{2m+1-k}),$$

$$\beta_k = \frac{1}{2} (B_k + B_{2m+1-k}) \quad (k = m+1, \dots, n). \quad (14)$$

Пусть

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx).$$

Тогда, учитывая (12) и (13), имеем

$$A_k = a_k - \frac{2}{2m+1} \sum_{r=0}^{2m} y_r \cos kx_r \quad (k = 0, 1, \dots, m), \quad (15)$$

$$B_k = b_k - \frac{2}{2m+1} \sum_{r=0}^{2m} y_r \sin kx_r \quad (k = 1, \dots, m),$$

$$A_k = a_k, \quad B_k = b_k \quad (k = m+1, m+2, \dots). \quad (16)$$

Заметим теперь, что при  $m+1 \leq k \leq n$  имеем  $2m+1-n \leq 2m+1-k \leq n$ ; поэтому при  $k = m+1, \dots, n$  можно  $A_{2m+1-k}$  и  $B_{2m+1-k}$  определить по формулам (15):

$$A_{2m+1-k} = a_{2m+1-k} - \frac{2}{2m+1} \sum_{r=0}^{2m} y_r \cos (2m+1-k)x_r,$$

$$B_{2m+1-k} = b_{2m+1-k} - \frac{2}{2m+1} \sum_{r=0}^{2m} y_r \sin (2m+1-k)x_r \quad (k = m+1, \dots, n),$$

или

$$A_{2m+1-k} = a_{2m+1-k} - \frac{2}{2m+1} \sum_{r=0}^{2m} y_r \cos kx_r,$$

$$B_{2m+1-k} = b_{2m+1-k} + \frac{2}{2m+1} \sum_{r=0}^{2m} y_r \sin kx_r \quad (k = m+1, \dots, n).$$

Учитывая (14), (16) и последние равенства, находим

$$\alpha_k = \frac{1}{2} (a_k - a_{2m+1-k}) + \frac{1}{2m+1} \sum_{r=0}^{2m} y_r \cos kx_r,$$

$$\beta_k = \frac{1}{2} (b_k + b_{2m+1-k}) + \frac{1}{2m+1} \sum_{r=0}^{2m} y_r \sin kx_r \quad (k = m+1, \dots, n).$$

Подставив эти значения коэффициентов  $\alpha_k, \beta_k$  в (11), мы после простых преобразований найдем

$$T_n(x) = \frac{1}{2m+1} \sum_{r=0}^{2m} y_r \left[ 1 + 2 \sum_{k=1}^{2m-n} \cos k(x-x_r) + \sum_{k=2m-n+1}^n \cos k(x-x_r) \right] + \\ + \frac{1}{2} \sum_{k=2m-n+1}^n [(\alpha_k - \alpha_{2m+1-k}) \cos kx + (\beta_k + \beta_{2m+1-k}) \sin kx],$$

откуда легко следует (4).

2. Аналогично доказывается следующее предложение. Дана  $f(x) \in C_{2\pi}$  и пусть натуральные числа  $m$  и  $n$  удовлетворяют неравенствам

$$m \leq n < 2m.$$

Тогда тригонометрический полином порядка  $n$

$$T_n(x) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^n (\alpha_k \cos kx + \beta_k \sin kx),$$

удовлетворяющий условиям

$$T_n(x_v) = y_v, \quad x_v = \frac{v\pi}{m} \quad (v = 0, 1, \dots, 2m-1)$$

( $y_v$  — данные числа), для которого интеграл

$$I = \int_0^{2\pi} [f(x) - T_n(x)]^2 dx$$

имеет наименьшее значение, равен

$$\begin{aligned} T_n(x) = & \frac{1}{2m} \sum_{r=0}^{2m-1} y_r \frac{\sin m(x-x_r) \cos \left(n-m + \frac{1}{2}\right)(x-x_r)}{\sin \frac{x-x_r}{2}} + \\ & + \frac{1}{\pi} \sin mx \int_0^{2\pi} f(t) \frac{\sin mt \sin \left(n-m + \frac{1}{2}\right)(x-t)}{\sin \frac{x-t}{2}} dt. \end{aligned} \quad (17)$$

Обозначим теперь среднее арифметическое полиномов (17) через

$$\sigma_m(x) = \frac{1}{m} \sum_{n=m}^{2m-1} T_n(x).$$

Пользуясь формулами

$$\begin{aligned} \sum_{n=m}^{2m-1} \cos \left(n-m + \frac{1}{2}\right) \varphi &= \frac{\sin m\varphi}{2 \sin \frac{\varphi}{2}}, \\ \sum_{n=m}^{2m-1} \sin \left(n-m + \frac{1}{2}\right) \varphi &= \frac{\sin^2 \frac{m\varphi}{2}}{\sin \frac{\varphi}{2}}, \end{aligned} \quad (18)$$

находим

$$\begin{aligned} \sigma_m(x) = & \frac{1}{4m^2} \sum_{r=0}^{2m-1} y_r \frac{\sin^2 m(x-x_r)}{\sin^2 \frac{x-x_r}{2}} + \\ & + \frac{1}{\pi m} \sin mx \int_0^{2\pi} f(t) \sin mt \frac{\sin^2 m \frac{x-t}{2}}{\sin^2 \frac{x-t}{2}} dt. \end{aligned} \quad (19)$$

Обычным методом легко доказать, что если

$$y_r = f(x_r), \quad x_r = \frac{r\pi}{m} \quad (r = 0, 1, \dots, 2m-1)$$

и  $f(x) \in C_{2\pi}$ , то  $\sigma_m(x)$  сходится равномерно к  $f(x)$ , когда  $m \rightarrow \infty$ .  
Для этого заметим, что справедливо тождество

$$\frac{1}{4m^2} \sum_{r=0}^{2m-1} \frac{\sin^2 m(x-x_r)}{\sin^2 \frac{x-x_r}{2}} = 1,$$

которое легко проверяется, если воспользоваться первой из формул (18) и равенствами

$$\sum_{r=0}^{2m-1} \cos kx_r = \begin{cases} 0 & \text{при } k \neq 2lm, \\ 2m & \text{при } k = 2lm, \quad l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \end{cases}$$

$$\sum_{r=0}^{2m-1} \sin kx_r = 0 \quad \text{при любом целом } k.$$

Также очевидно, что

$$\int_0^{2\pi} \sin mt \frac{\sin^2 m \frac{x-t}{2}}{\sin^2 \frac{x-t}{2}} dt = 0,$$

ибо  $\frac{\sin^2 m \frac{x-t}{2}}{\sin^2 \frac{x-t}{2}}$  — тригонометрический полином порядка  $m-1$  относительно  $t$ .

Умножим теперь тождество

$$1 = \frac{1}{4m^2} \sum_{r=0}^{2m-1} \frac{\sin^2 m(x-x_r)}{\sin^2 \frac{x-x_r}{2}} + \\ + \frac{1}{\pi m} \sin mx \int_0^{2\pi} \sin mt \frac{\sin^2 m \frac{x-t}{2}}{\sin^2 \frac{x-t}{2}} dt$$

на  $f(x)$  и вычтем из равенства

$$\sigma_m(x, f) = \frac{1}{4m^2} \sum_{r=0}^{2m-1} f(x_r) \frac{\sin^2 m(x-x_r)}{\sin^2 \frac{x-x_r}{2}} + \\ + \frac{1}{\pi m} \sin mx \int_0^{2\pi} f(t) \sin mt \frac{\sin^2 m \frac{x-t}{2}}{\sin^2 \frac{x-t}{2}} dt,$$

получим

$$f(x) - \sigma_m(x, f) = \frac{1}{4m^2} \sum_{r=0}^{2m-1} [f(x) - f(x_r)] \frac{\sin^2 m \frac{x-x_r}{2}}{\sin^2 \frac{x-x_r}{2}} +$$

$$+ \frac{1}{\pi m} \sin mx \int_0^{2\pi} [f(x) - f(t)] \sin mt \frac{\sin^2 m \frac{x-t}{2}}{\sin^2 \frac{x-t}{2}} dt. \quad (20)$$

В силу того что  $f(x) \in C_{2\pi}$ , найдем для данного  $\varepsilon > 0$  такое  $\delta > 0$ , что из  $|x - y| < \delta$  следует  $|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{6}$ . Разбив теперь сумму, стоящую в правой части последнего равенства, на две:  $\Sigma_1 + \Sigma_2$ , где  $\Sigma_1$  распространена на те значения  $r$ , для которых  $|x - x_r| < \delta$ ,  $|x - x_r - 2\pi| < \delta$  и  $|x - x_r + 2\pi| < \delta$ , а  $\Sigma_2$  — на остальные значения  $r$ , найдем

$$|\Sigma_1| < \frac{\varepsilon}{6}, \quad |\Sigma_2| < \frac{M}{m \sin^2 \frac{\delta}{2}},$$

где  $M = \max_x |f(x)|$ .

Аналогично оценивается второе слагаемое правой части формулы (20), при этом используется равенство

$$\frac{1}{\pi m} \int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 m \frac{x-t}{2}}{\sin^2 \frac{x-t}{2}} dt = 2,$$

и мы получим, что, начиная с некоторого  $m$ ,

$$|f(x) - \sigma_m(x, f)| < \varepsilon.$$

Белорусский государственный университет  
им. В. И. Ленина

Поступило в редакцию  
30. XI 1967

И. М. КУНЦЕВИЧ

**К ВОПРОСУ МИНИМИЗАЦИИ ЗНАЧЕНИЯ ЛИНЕЙНОЙ ФОРМЫ  
 НА МНОЖЕСТВЕ ЦИКЛОВ ДЛИНЫ  $n$ . II**

В этом разделе рассматривается задача отыскания подстановки, минимизирующей значение линейной формы  $f$  на множестве циклов длины  $n$  из  $S_n$ , в предположении, что  $\tau_0$  имеет вид:

$$\tau_0 = \tau_1(l+1, l+2, \dots, l+p)\tau_2,$$

где  $\tau_1$  — произвольная подстановка символов  $1, 2, \dots, l$ , а  $\tau_2$  — символов  $l+p+1, l+p+2, \dots, n$ , а также для случаев а) — е), отмеченных в разделе I [4].

1. Пусть подстановка  $\tau_0$  имеет вид 2) из [4], т. е.

$$\tau_0 = \tau_1(l+1, l+2, \dots, l+p)\tau_2, \text{ тогда}$$

$$b_{j_k} \geq b_{l+2} \geq \dots \geq b_{l+p} \geq b_{l+1} \geq b_{j_s},$$

$$k = 1, 2, \dots, l; s = l+p+1, \dots, n. \quad (1)$$

Для простоты рассуждений положим, что в соотношениях (1) и (1) из [4] имеют место строгие неравенства.

Пусть подстановка  $t_0 \in H$  такая, что  $f_{t_0}(b) < f_l(b)$ , для любой подстановки  $t_0$ . Рассмотрим некоторые свойства минимизирующей подстановки  $t_0$  в предположении, что  $\tau_0$  имеет вид 2), предварительно разбив символы  $1, 2, \dots, n$  на три класса:

$$A = \{1, 2, \dots, l\}, B = \{l+1, \dots, l+p\} \text{ и } C = \{l+p+1, \dots, n\}.$$

Лемма 1. В минимизирующей подстановке  $t_0$  символы из классов  $A$  и  $C$  не стоят рядом.

Доказательство. Пусть

$$t = (1, \alpha_2, \dots, \alpha_{r-1}, \gamma_r, \dots, \gamma_{r+p}, \alpha_{r+p+1}, \dots, \alpha_{k-1}, \gamma_k, \dots, \gamma_{k+s}, \alpha_{k+s+1}, \dots, \alpha_n) —$$

произвольная подстановка из  $H$ , в которой группы символов  $\gamma_r, \dots, \gamma_{r+p}$  и  $\gamma_k, \dots, \gamma_{k+s}$  принадлежат классу  $C$  и заключены между символами из класса  $A$ . Тогда, если  $\alpha_{r-1} < \alpha_{k-1}$ , образуем подстановку

$$t_1 = (1, \alpha_2, \dots, \alpha_{r-1}, \alpha_{r+p+1}, \dots, \alpha_{k-1}, \gamma_r, \dots, \gamma_{r+p}, \gamma_k, \dots, \gamma_{k+s}, \dots, \alpha_n),$$

для которой

$$\begin{aligned} f_{t_1}(b) - f_t(b) &= (c_{\gamma_{r+p}} - c_{\alpha_{k-1}})(b_{\gamma_k} - b_{\alpha_{r+p+1}}) + \\ &+ (c_{\alpha_{k-1}} - c_{\alpha_{r-1}})(b_{\gamma_r} - b_{\alpha_{r+p+1}}) < 0, \end{aligned}$$

а если  $\alpha_{r-1} > \alpha_{k-1}$ , то подстановку

$$t_2 = (1, \alpha_2, \dots, \alpha_{k-1}, \gamma_k, \dots, \gamma_{k+s}, \gamma_r, \dots, \alpha_{k-1}, \alpha_{k+s+1}, \dots, \alpha_n),$$

для которой

$$\begin{aligned} f_{t_2}(b) - f_t(b) &= (c_{\gamma_{k+s}} - c_{\alpha_{r-1}})(b_{\gamma_r} - b_{\alpha_{k+s+1}}) + \\ &+ (c_{\alpha_{r-1}} - c_{\alpha_{k-1}})(b_{\gamma_k} - b_{\alpha_{k+s+1}}) < 0. \end{aligned}$$

Если в полученной подстановке еще имеются символы из класса  $C$ , заключенные между символами из класса  $A$ , то, проделав конечное число подобных преобразований, получим подстановку, в которой только одна группа символов из класса  $C$  ограничена символами из класса  $A$ , а остальные символы из класса  $C$  хотя бы с одной стороны граничат с символами из класса  $B$ .

В случаях, когда группы символов из класса  $C$  ограничены слева символами из  $B$ , а справа символами из  $A$  или наоборот, аналогичными преобразованиями легко получить подстановку, в которой будет по одной группе символов вида  $B_1C_1$  и  $C_2B_2$ , ограниченных слева и справа символами из класса  $A$ , где  $B_1, B_2$  и  $C_1, C_2$  — группы символов из классов  $B$  и  $C$  соответственно.

Пусть подстановка  $t'$  имеет вид

$$\begin{aligned} t' = &(1, \alpha_2, \dots, \alpha_s, \beta_{s+1}, \dots, \beta_{s+p}, \gamma_{s+p+1}, \dots, \gamma_{s+p+k}, \dots, \alpha_{r-1}, \beta_r, \dots \\ &\dots, \beta_{r+m}, \gamma_{r+m+1}, \dots, \gamma_{r+m+q}, \alpha_{r+m+q+1}, \dots), \text{ где } \alpha \in A, \beta \in B \text{ и } \gamma \in C. \end{aligned}$$

Образует из  $t'$  подстановку

$$\begin{aligned} t'_1 = &(1, \alpha_2, \dots, \alpha_s, \beta_{s+1}, \dots, \beta_{s+p}, \beta_r, \dots, \beta_{r+m}, \gamma_{r+m+1}, \dots \\ &\dots, \gamma_{r+m+q}, \gamma_{s+p+1}, \dots, \gamma_{s+p+k}, \alpha_{s+p+k+1}, \dots, \alpha_{r-1}, \alpha_{r+m+q+1}, \dots). \end{aligned}$$

Рассмотрим разность

$$\begin{aligned} f_{t'_1}(b) - f_{t'}(b) &= (c_{\gamma_{r+m+q}} - c_{\beta_{s+p}})(b_{\gamma_{s+p+1}} - b_{\alpha_{r+m+q+1}}) + \\ &+ (c_{\gamma_{r+m+q}} - c_{\alpha_{r-1}})(b_{\beta_r} - b_{\alpha_{r+m+q+1}}) < 0. \end{aligned}$$

Аналогично поступаем и в случае, когда между символами из класса заключены группы вида  $C_1B_1$  и  $C_2B_2$ . Конечным числом таких преобразований получим, что подстановка  $\bar{t}$  будет содержать лишь группы символов вида  $ACA, ABCA, ACBA$  и  $ABCBA$ .

Подобными же преобразованиями подстановку, содержащую группы первых трех видов, легко преобразуем в подстановку, объединяющую в одну группу вида  $ABCBA$ , при этом для полученной подстановки  $\bar{t}_1$  будем иметь  $f_{\bar{t}_1}(b) - f_{\bar{t}}(b) < 0$ .

Лемма доказана.

Лемма 2. В минимизирующей подстановке  $t_0$  символы из класса  $B$ , начиная с  $l+2$ , расположены подряд в возрастающем порядке, а символ  $l+1$  разделяет символы из классов  $C$  и  $A$ .

Доказательство. Из леммы 1 следует, что для нахождения подстановки  $t_0$  достаточно рассмотреть подстановки, в которых символы из классов  $A$  и  $C$  не стоят рядом. В подстановках такого вида может быть по несколько групп символов двух видов:

- 1)  $\alpha_s, \beta_{s+1}, \dots, \gamma_k, \dots, \beta_{r-1}, \alpha_r$ ;
- 2)  $\alpha_s, \beta_{s+1}, \dots, \beta_{s+p-1}, \alpha_{s+p}$ ,

т. е. между символами из класса  $A$  заключены символы из классов  $B$  и  $C$  или только из класса  $B$ . Однако они легко преобразовываются в подстановки, содержащие только одну группу символов вида 1), и такие, что значения формы  $f$  на них будет меньше, чем на исходных.

Пусть в подстановке  $t$  символы из классов  $A$  и  $C$  не стоят рядом  
 $t = (1, \alpha_2, \dots, \alpha_{s-1}, \beta_s, \dots, \gamma_k, \dots, \beta_r, \alpha_{r+1}, \dots, \alpha_{p-1}, \beta_p, \dots, \beta_{p+q}, \alpha_{p+q+1}, \dots)$ ,  
 где

$$\alpha \in A, \beta \in B \text{ и } \gamma \in C.$$

Образуюем из  $t$  либо подстановку

$$t_1 = (1, \alpha_2, \dots, \alpha_{s-1}, \beta_p, \dots, \beta_{p+q}, \beta_s, \dots, \gamma_k, \dots, \beta_r, \alpha_{r+1}, \dots, \alpha_{p-1}, \alpha_{p+q+1}, \dots),$$

если  $\alpha_{s-1} > \alpha_{p-1}$ , либо

$$t_2 = (1, \alpha_2, \dots, \alpha_{s-1}, \alpha_{r+1}, \dots, \alpha_{p-1}, \beta_s, \dots, \gamma_k, \dots, \beta_r, \beta_p, \dots, \beta_{p+q}, \dots),$$

если  $\alpha_{s-1} < \alpha_{p-1}$ .

Рассмотрим разности

$$f_{t_1}(b) - f_t(b) = c_{\alpha_{s-1}}(b_{\beta_p} - b_{\beta_s}) + c_{\beta_{p+q}}(b_{\beta_s} - b_{\alpha_{p+q+1}}) + c_{\alpha_{p-1}}(b_{\alpha_{p+q+1}} - b_{\beta_p}) < 0.$$

$$f_{t_2}(b) - f_t(b) = c_{\alpha_{s-1}}(b_{\alpha_{r+1}} - b_{\beta_s}) + c_{\alpha_{p-1}}(b_{\beta_s} - b_{\beta_p}) + c_{\beta_r}(b_{\beta_p} - b_{\alpha_{r+1}}) < 0.$$

Конечным числом таких преобразований мы получим подстановку  $t'$ , в которой символы из классов  $A$  и  $C$  не стоят рядом и все символы из класса  $C$  заключены между двумя символами из класса  $B$ , такую, что  $f_{t'}(b) - f_t(b) < 0$ .

Для завершения доказательства покажем, что в минимизирующей подстановке  $t_0$  символы из класса  $B$ , начиная с  $l+2$ , расположены подряд в возрастающем порядке, а символ  $l+1$  разделяет символы из классов  $C$  и  $A$ .

Пусть в подстановке

$$t' = (1, \alpha_2, \dots, \alpha_s, \beta_{l+1}, \dots, \beta_r, \gamma_{l+p+1}, \dots, \gamma_n, \beta_{r+1}, \dots, \beta_{l+p}, \alpha_{s+1}, \dots, \alpha_l) \quad (2)$$

символ  $\beta_{l+1} \neq l+2$ .

Покажем, что из  $t'$  нетрудно получить подстановку  $t_1$  вида

$$t_1 = (1, \alpha_2, \dots, \alpha_s, l+2, \beta_{l+1}, \dots, \beta_{l+p}, \alpha_{s+1}, \dots, \alpha_l), \quad (3)$$

такую, что

$$f_{t_1}(b) - f_{t'}(b) < 0. \quad (4)$$

Если в подстановке  $t'$  символ  $l+2$  стоит между символами  $\beta'_{r-1}$  и  $\beta'_{r+1}$ , которые одновременно равны или не равны соответственно символам  $l+1$  и  $\alpha_{s+1}$ , то из  $t'$  сразу получаем подстановку вида (3), помещая  $l+2$  между символами  $\alpha_s$  и  $\beta_{l+1}$ , для которой имеет место неравенство (4).

Действительно, в этом случае  $t_1$  имеет вид

$$t_1 = (1, \alpha_2, \dots, \alpha_s, l+2, \beta_{l+1}, \dots, \beta'_{r-1}, \beta'_{r+1}, \dots, \beta_{l+p}, \alpha_{s+1}, \dots, \alpha_l) \text{ и}$$

$$f_{t_1}(b) - f_{t'}(b) = \begin{cases} (c_{\beta'_{r-1}} - c_{l+2})(b_{\beta'_{r+1}} - b_{\beta_{l+1}}) + (c_{\beta'_{r-1}} - c_{\alpha_s})(b_{\beta'_{r+1}} - b_{l+2}) < 0, & \text{если } b_{\beta_{l+1}} - b_{\beta'_{r+1}} > 0; \\ (c_{\beta'_{r-1}} - c_{\alpha_s})(b_{\beta'_{r+1}} - b_{l+2}) + (c_{l+2} - c_{\alpha_s})(b_{\beta_{l+1}} - b_{\beta'_{r+1}}) < 0, & \text{если } b_{\beta_{l+1}} - b_{\beta'_{r+1}} < 0; \\ (c_{l+2} - c_{l+1})(b_{l+2} - b_{\alpha_{s+1}}) + (c_{l+2} - c_{\alpha_s})(b_{\beta_{l+1}} - b_{l+2}) < 0, & \text{если } \beta'_{r+1} = \alpha_{s+1}, \beta'_{r-1} = l+1. \end{cases}$$

Если  $\beta'_{r+1} = \alpha_{s+1}$ , имеет смысл рассмотреть два случая: 1) когда символ  $l+1$  стоит после символа  $\alpha_s$  и 2) когда  $l+1$  стоит между символами  $\beta'_{k-1}$  и  $\beta'_{k+1}$ , которые могут принадлежать как классу  $B$ , так и классу  $C$ . В первом случае образуем из  $t'$  подстановку  $t_1 = (1, \alpha_2, \dots, \alpha_s, l+2, \beta_{l+1}, \dots, \beta_{l+p}, l+1, \alpha_{s+1}, \dots, \alpha_l)$ , для которой имеет место соотношение (4). Во втором и в случае, когда символ  $\beta'_{r-1} = l+1$ ,  $\beta'_{r+1} \neq \alpha_{s+1}$ , вначале, из  $t'$  методами, в обоих вариантах одинаковыми, образуем подстановку вида

$$t_2 = (1, \alpha_2, \dots, \alpha_s, \beta_{l+1}, \dots, l+1, l+2, \alpha_{s+1}, \dots, \alpha_l),$$

для которой

$$f_{t_2}(b) - f_{t'}(b) < 0. \quad (5)$$

Покажем это для случая, когда

$$\beta'_{r-1} = l+1, \text{ а } \beta'_{r+1} \neq \alpha_{s+1}.$$

Пусть в подстановке  $t'$  символы  $l+1$  и  $l+2$  стоят подряд и левее символов из класса  $C$ , т. е.

$$t' = (1, \alpha_2, \dots, \alpha_s, \beta_{l+1}, \dots, \beta'_{r-1}, l+1, l+2, \beta'_{r+2}, \dots, \gamma_n, \beta_k, \dots, \beta_{l+p}, \alpha_{s+1}, \dots, \alpha_l).$$

Тогда из  $t'$  образуем подстановку

$$t_2 = (1, \alpha_2, \dots, \beta_{l+1}, \dots, \beta'_{r-1}, \beta_k, \dots, \beta_{l+p}, \beta'_{r+2}, \dots, \gamma_n, l+1, l+2, \alpha_{s+1}, \dots, \alpha_l),$$

для которой

$$f_{t_2}(b) - f_{t'}(b) = (c_{\gamma_n} - c_{\beta'_{r-1}})(b_{l+1} - b_{\beta_k}) + (c_{\beta_{l+p}} - c_{l+2})(b_{\beta'_{r+2}} - b_{\alpha_{s+1}}) < 0.$$

Если в подстановке  $t'$  символы  $l+1$ ,  $l+2$  стоят подряд и правее символов из класса  $C$ , т. е.

$$t' = (1, \alpha_2, \dots, \alpha_s, \beta_{l+1}, \dots, \beta_{k-1}, \gamma_{l+p+1}, \dots, \gamma_n, \beta_k, \dots, \beta'_{r-1}, l+1, l+2, \dots, \beta_{l+p}, \alpha_{s+1}, \dots, \alpha_l),$$

то, если  $\beta'_{r+2} < \beta_{l+1}$ , находим подстановку

$$t_2 = (1, \alpha_2, \dots, \alpha_s, \beta'_{r+2}, \dots, \beta_{l+p}, \beta_{l+1}, \dots, \gamma_n, \beta_k, \dots, \beta'_{r-1}, l+1, l+2, \alpha_{s+1}, \dots, \alpha_l),$$

если  $\beta_{l+p}$  больше одного из символов  $\beta_{l+1}, \dots, \beta_{k-1}, \beta_k, \dots, \beta'_{r-1}$ , например  $\beta_{q-1}$ , тогда из  $t_1$  образуем подстановку

$$t_2 = (1, \alpha_2, \dots, \alpha_s, \beta_{l+1}, \dots, \beta_{q-1}, \beta'_{r+2}, \dots, \beta_{l+p}, \beta_q, \dots, l+1, l+2, \alpha_{s+1}, \dots, \alpha_l).$$

Если же  $\beta'_{r+2} > \beta_{l+1}$  и  $\beta_{l+p}$  меньше любого из символов  $\beta_{l+1}, \dots, \beta_{k-1}, \beta_k, \dots, \beta'_{r-1}$ , то находим среди последних наименьший  $\beta_v$ , а из символов  $\beta'_{r+2}, \dots, \beta_{l+p}$  выбираем самый правый  $\beta_m$ , больший  $\beta_v$ , и образуем подстановку

$$t'_2 = (1, \alpha_2, \dots, \alpha_s, \beta_{l+1}, \dots, \beta_v, \beta'_{r+2}, \dots, \beta_m, \beta_{v+1}, \dots, \gamma_n, \beta_k, \dots, \beta'_{r-1}, l+1, l+2, \beta_{m+1}, \dots, \beta_{l+p}, \alpha_{s+1}, \dots, \alpha_l),$$

для которой имеет место неравенство  $f_{t'_2}(b) - f_{t'}(b) < 0$ . А так как символ  $\beta_{m+1} < \beta_{l+1}$ , то из  $t'_2$  образуем подстановку

$$t_2 = (1, \alpha_2, \dots, \alpha_s, \beta_{m+1}, \dots, \beta_{l+p}, \beta_{l+1}, \dots, \gamma_n, \beta_k, \dots, \beta_{r-1}, l+1, l+2, \alpha_{s+1}, \dots, \alpha_l).$$

Нетрудно проверить, что для этих подстановок выполняется неравенство (5). Таким образом имеем, что если подстановка  $t'$  имеет вид (2), то из нее легко получить подстановку  $t_1$  вида (3), для которой выполняется неравенство (4).

Пусть подстановка

$$t_1 = (1, \alpha_2, \dots, \alpha_s, \beta_{l+1}, \dots, \beta_{l+i}, \dots, \beta_r, \dots, \beta_k, \gamma_{l+p+1}, \dots, \gamma_n, \beta_{k+1}, \dots, \beta_{l+p}, \alpha_{s+1}, \dots, \alpha_l),$$

такая, что

$$\beta_{l+1} = l+2, \dots, \beta_{l+i-1} = l+i, \text{ а } \beta_{l+i} \neq l+i+1,$$

где  $2 \leq i \leq n-l-1$ , т. е.

$$t_1 = (1, \alpha_2, \dots, \alpha_s, l+2, \dots, l+i, \beta_{l+i}, \dots, \gamma_n, \beta_k, \dots, \beta_{l+p}, \alpha_{s+1}, \dots, \alpha_l).$$

Если символ  $\beta_r = l+i+1$ , а  $\beta'_{r-1} \neq l+1$ , то из  $t_1$  образовываем подстановку

$$t'_0 = (1, \alpha_2, \dots, \alpha_s, l+2, \dots, l+i, \beta_r, \beta_{l+i}, \dots, \beta'_{r-1}, \beta'_{r+1}, \dots, \beta_{l+p}, \alpha_{s+1}, \dots),$$

для которой

$$f_{t'_0}(b) - f_{t_1}(b) = \begin{cases} (c_{\beta'_{r-1}} - c_{l+i})(b_{\beta_{l+i}} - b_{l+i+1}) + \\ + c_{\beta'_{r+1}} - c_{l+i+1})(b_{\beta'_{r+1}} - b_{l+i+1}) < 0, \\ \text{если } b_{\beta_{l+i}} - b_{\beta'_{r+1}} > 0; \\ (c_{\beta'_{r-1}} - c_{l+i})(b_{\beta'_{r+1}} - b_{l+i+1}) + \\ + (c_{l+i+1} - c_{l+i})(b_{\beta_{l+i}} - b_{\beta'_{r+1}}) < 0, \\ \text{если } b_{\beta_{l+i}} - b_{\beta'_{r+1}} < 0. \end{cases}$$

Если же  $\beta'_{r-1} = l+1$ , то из  $t_1$  образовываем подстановку

$$t'_0 = (1, \alpha_2, \dots, \alpha_s, l+2, \dots, l+i, \beta_r, \beta'_{r+1}, \dots, \beta_{l+p}, \beta_{l+i}, \dots, \beta'_{r-1}, \alpha_{s+1}, \dots, \alpha_l),$$

для которой также имеет место неравенство

$$f_{t'_0}(b) - f_{t_1}(b) < 0.$$

После конечного числа подобных преобразований получим подстановку  $t_0$ , в которой символы из класса  $B$  расположены подряд в порядке возрастания, начиная с символа  $l+2$ , а символ  $l+1$  разделяет символы из классов  $A$  и  $C$ , такую, что

$$f_{t_0}(b) - f_t(b) < 0,$$

для любой подстановки  $t \in H$ .

Лемма доказана.

Таким образом, имеем, что если подстановка  $\tau_0$  имеет вид 2), то в множестве подстановок, удовлетворяющих условиям лемм 1 и 2, в предположении, что в соотношениях (1) и (2) из [4] имеют место строгие неравенства, есть подстановка, минимизирующая значение формы  $f$  на множестве всех циклов длины  $n$  из  $S_n$ . Нетрудно показать, что это множество содержит  $l!(n-l-p)!$  подстановок. Обозначим множество этих подстановок  $M_p$ .

В случае, когда коэффициенты формы и координаты вектора  $b$  удовлетворяют соотношениям (1) и (2) из [4], минимизирующая подстановка может быть не единственной и некоторые из них не принадлежат множеству  $M_p$ , но, очевидно, в  $M_p$  всегда есть подстановка, минимизирующая форму  $f$ .

Пусть подстановка  $\tau_0$  имеет вид в). В этом случае

$$b_1 \geq b_2 \geq \dots \geq b_l \geq b_{l+2} \geq \dots \geq b_{l+p} \geq b_{l+1} \geq b_{l+p+1} \geq \dots \geq b_n.$$

**Теорема 1.** Если подстановка  $\tau_0$  имеет вид  $\tau_0 = (l+1, l+2, \dots, l+p)^n$ , то в множестве  $2^{n-p-2}$  циклов вида

$$(1, \alpha_2, \dots, \alpha_s, l+2, \dots, l+p, \alpha_{l+p+1}, \dots, \alpha_n, l+1, \alpha_{s+1}, \dots, \alpha_l)$$

и таких, что

$$\alpha_2 < \dots < l+1 > \dots > \alpha_l, \alpha_{l+p+1} < \dots < n > \dots > \alpha_n,$$

есть подстановка, минимизирующая значение линейной формы  $f$  на множестве всех циклов длины  $n$  из  $S_n$ .

**Доказательство.** Так как подстановка  $\tau_0$  имеет вид в), то из лемм 1 и 2 следует, что в множестве  $M_p$  имеется подстановка, минимизирующая значение формы  $f$  на множестве всех циклов длины  $n$  из  $S_n$ .

Покажем, что она находится в множестве  $2^{n-p-2}$  подстановок вида (3), удовлетворяющих условиям

$$\alpha_2 < \dots < l+1 > \dots > \alpha_l, \alpha_{l+p+1} < \dots < n > \dots > \alpha_n. \quad (6)$$

Предположим, что минимизирующая подстановка имеет вид (3) из [4] и не удовлетворяет хотя бы одному из условий (6). Для определенности будем считать, что не выполняется условие

$$\alpha_{l+p+1} < \dots < n > \dots > \alpha_n,$$

т. е. в одной из последовательностей  $\alpha_{l+p+1}, \dots, \alpha_{l+p+k} = n$  или  $\alpha_n, \alpha_{n-1}, \dots, \alpha_{l+p+k}$  имеется хотя бы одна инверсия.

Пусть в последовательности

$$\alpha_{l+p+1}, \alpha_{l+p+2}, \dots, \alpha_{l+p+k}$$

некоторые символы составляют инверсии.

Если  $\alpha_{l+p+i}$  первый, а  $\beta_{l+p+r}$  наименьший из таких символов в этой последовательности, то

$$f_{t_1}(b) \leq f_i(b),$$

где

$$t_1 = (1, \alpha_2, \dots, \alpha_s, l+2, \dots, l+p, \alpha_{l+p+i-1}, \alpha_{l+p+r}, \alpha_{l+p+i}, \dots, \alpha_{l+p+r-1}, \alpha_{l+p+r+1}, \dots, \alpha_n, l+1, \alpha_{s+1}, \dots, \alpha_l).$$

Действительно,

$$f_i(b) - f_{t_1}(b) = \begin{cases} (c_{\alpha_{l+p+r-1}} - c_{\alpha_{l+p+r}})(b_{\alpha_{l+p+r+1}} - b_{\alpha_{l+p+i}}) + \\ + (c_{\alpha_{l+p+r-1}} - c_{\alpha_{l+p+i+1}})(b_{\alpha_{l+p+i}} - b_{\alpha_{l+p+r}}) \leq 0, \\ \text{если } b_{\alpha_{l+p+i}} - b_{\alpha_{l+p+r+1}} \geq 0; \\ (c_{\alpha_{l+p+r-1}} - c_{\alpha_{l+p+i-1}})(b_{\alpha_{l+p+i}} - b_{\alpha_{l+p+r}}) + \\ + (c_{\alpha_{l+p+r}} - c_{\alpha_{l+p+i-1}})(b_{\alpha_{l+p+i}} - b_{\alpha_{l+p+r+1}}) \leq 0, \\ \text{если } b_{\alpha_{l+p+i}} - b_{\alpha_{l+p+r+1}} \leq 0 \end{cases}$$

в силу предположений о символах  $a_{l+p+i}$  и  $a_{l+p+r}$  и условий

$$c_{a_{l+p+i-1}} \leq c_{a_{l+p+r}} \leq c_{a_{l+p+r-1}}, \quad b_{a_{l+p+r}} \geq b_{a_{l+p+i}}, \quad b_{a_{l+p+r+1}} \leq b_{a_{l+p+r}}.$$

Если в полученной подстановке имеются инверсии, то, проделав конечное число подобных преобразований по устранению их в последовательностях (6), преобразуем  $t$  в подстановку  $t_0$  (3) из [4] и такую, что

$$\hat{f}_{t_0}(b) \leq f_t(b).$$

Легко показать, что число подстановок вида (3) и удовлетворяющих условиям (6) равно  $2^{n-p-2}$ .

Теорема доказана.

Если подстановка  $\tau_0$  имеет вид г), тогда

$$b_l \geq b_{l-1} \geq \dots \geq b_1 \geq b_{l+2} \geq \dots \geq b_{l+p} \geq b_{l+1} \geq b_n \geq \dots \geq b_{l+p+1}. \quad (7)$$

Аналогично тому, как это сделано в работе [3], каждое из множеств  $M_1 = \{1, 2, \dots, l\}$  и  $M_2 = \{l+p+1, \dots, n\}$  разобьем соответственно на два класса:

$$M_1 \text{ на } A_1 + \{1, 2, \dots, \gamma_1\} \text{ и } A_2 = \{\gamma_1 + 1, \dots, l\},$$

$$M_2 \text{ на } B_1 = \{l+p+1, \dots, \gamma_2\} \text{ и } B_2 = \{\gamma_2 + 1, \dots, n\},$$

где

$$\gamma_1 = \left[ \frac{l+1}{2} \right], \quad \text{а} \quad \gamma_2 = \left[ \frac{n+p+l+1}{2} \right].$$

При  $l$  и  $n-p-l$  нечетных в классы  $A_1$  и  $B_1$  соответственно отнесем символы  $\{1, 2, \dots, \gamma_1-1\}$  и  $\{l+p+1, \dots, \gamma_2-1\}$ , а  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$  не будем относить ни к одному из классов.

Допустимыми к данному символу  $\beta_j \in A_2$  будем называть те символы  $\alpha_i \in A_1$ , для которых  $\alpha_i + \beta_j \leq l+1$ , а для  $\beta'_v \in B_2$  и  $\alpha'_\mu \in A_2$ , для которых

$$\alpha'_\mu + \beta'_v \leq n+p+l+1.$$

Рассмотрим множество подстановок, символы которых удовлетворяют условиям:

1. Символы  $l+2, \dots, l+p$  расположены подряд в порядке возрастания, а символ  $l+1$  разделяет символы из классов  $M_1$  и  $M_2$ .

2. Символы из классов  $A_1$  и  $A_2$ , а также из  $B_1$  и  $B_2$  чередуются.

3. Символы из классов  $A_1$  и  $B_1$  возрастают, а символы из классов  $A_2$  и  $B_2$  убывают слева и справа к  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$  соответственно.

4. Слева от  $\gamma_1$  перед каждым символом  $\beta \in A_2$ , а справа от  $\gamma_1$  после каждого символа  $\beta$  стоит такой допустимый символ  $\alpha \in A_1$ , что  $\alpha + \beta \leq l+1$ , а также слева от  $\gamma_2$  перед каждым  $\beta' \in B_2$ , а справа от  $\gamma_2$  после каждого  $\beta'$  стоит такой допустимый символ  $\alpha' \in B_1$ , что

$$\alpha' + \beta' \leq n+p+l+1.$$

Очевидно, что это множество является подмножеством множества  $M_p$  и состоит из подстановок следующих видов:

1.  $(1, \beta_2, \alpha_3, \dots, \alpha_s, l+2, \dots, l+p, \alpha'_{l+p+1}, \{\beta'_{l+p+2}, \dots, \alpha'_{n-1}, \beta'_n, l+1, \beta_{s+1}, \dots, \beta_l).$
2.  $(1, \beta_2, \alpha_3, \dots, \beta_s, l+2, \dots, l+p, \alpha'_{l+p+1}, \beta'_{l+p+2}, \dots, \alpha'_{n-1}, \beta'_n, l+1, \alpha_{s+1}, \dots, \beta_l).$

$$3. (1, \beta_2, \alpha_3, \dots, \alpha_s, l+2, \dots, l+p, \beta'_{l+p+1}, \alpha'_{l+p+2}, \dots, \beta'_{n-1}, \alpha'_n, l+1, \beta_{s+1}, \alpha_{s+2}, \dots, \beta_l).$$

$$4. (1, \beta_2, \alpha_3, \dots, \beta_s, l+2, \dots, l+p, \beta'_{l+p+1}, \alpha'_{l+p+2}, \dots, \beta'_{n-1}, \alpha'_n, l+1, \alpha_{s+1}, \dots, \beta_l).$$

Теорема 2. Если подстановка  $\tau_0$  имеет вид

$$(1, l(2, l-1) \dots (l+1, \dots, l+p)(l+p+1, n) (l+p+2, n) \dots,$$

то в множестве  $4 \cdot 3^{\lfloor \frac{l+1}{2} \rfloor + \lfloor \frac{n-l-p+1}{2} \rfloor - 4}$  подстановок вида

$$(1, \beta_2, \alpha_3, \dots, \beta_s, l+2, \dots, l+p, \beta'_{l+p+1}, \alpha'_{l+p+2}, \dots, \beta'_{n-1}, \alpha'_n, l+1, \alpha_{s+1}, \dots, \beta_l)$$

есть подстановка, минимизирующая значение формы  $f$  на множестве всех циклов длины  $n$  из  $S_n$ .

Доказательство. Так как подстановка  $\tau_0$  имеет вид 2), то из лемм 1 и 2 следует, что в множестве  $l!(n-p-l)!$  подстановок вида (3) из [4] есть подстановка, минимизирующая значение формы  $f$  на множестве всех циклических подстановок длины  $n$  из  $S_n$ .

Покажем, что такая подстановка имеется среди подстановок вида (3) из [4], удовлетворяющих условиям 2) — 4).

Аналогично, как это сделано в [2], проверим, что в минимизирующей подстановке имеет место свойство 2).

Предположим для определенности, что в циклической подстановке  $t$  длины  $n$  некоторые из символов класса  $B_1$  стоят рядом, а так как в классах  $B_1$  и  $B_2$  одинаковое количество символов, то в  $t$  будут стоять рядом и некоторые элементы из  $B_2$ :

$$t = (1, \beta_2, \alpha_3, \dots, \alpha_s, l+2, \dots, l+p, \beta'_{l+p+1}, \alpha'_{l+p+2}, \alpha'_{l+p+r}, \beta'_{l+p+r+1}, \dots, \alpha'_{k-1}, \beta'_k, \dots, \beta'_{k+q}, \alpha'_{k+q+1}, \dots, \alpha'_n, l+1, \beta_{s+1}, \dots, \beta_l).$$

Пусть среди символов  $\beta'_k, \dots, \beta'_{k+q}$  максимальным по величине является  $\beta'_{k+m}$ . Преобразуем  $t$  в подстановку  $t_1$ , помещая между любыми стоящими рядом в  $t$  символами из  $B_1$  символы из  $B_2$ , стоящие подряд слева или справа от  $\beta'_{k+m}$ .

Пусть

$$t_1 = (1, \beta_2, \alpha_3, \dots, \alpha_s, l+2, \dots, l+p, \beta'_{l+p+1}, \alpha'_{l+p+2}, \beta'_k, \dots, \beta'_{k+m-1}, \alpha'_{l+p+3}, \dots, \alpha'_{l+p+r}, \beta'_{l+p+r+1}, \dots, \alpha'_{k-1}, \beta'_{k+m}, \dots, \beta'_{k+q}, \alpha'_{k+q+1}, \dots, \alpha'_n, l+1, \beta_{s+1}, \dots, \beta_l).$$

Покажем, что

$$f_{t_1}(b) - f_t(b) \leq 0.$$

Действительно,

$$f_{t_1}(b) - f_t(b) = (c_{\beta_{k+m-1}} - c_{\alpha'_{k-1}})(b_{\beta'_k} - b_{\beta'_{k+m}}) + (c_{\beta'_{k+m-1}} - c_{\alpha'_{l+p+2}})(b_{\alpha'_{l+p+3}} - b_{\beta'_k}) \leq 0$$

в силу предположения и условий (7). Аналогично поступаем и в случае, когда имеются нарушения свойства 2) среди символов из классов  $A_1$  и  $A_2$ .

Проделав конечное число подобных преобразований, получим подстановку  $t'$ , в которой символы из классов  $A_1$  и  $A_2$ , а также  $B_1$  и  $B_2$  чередуются и верно неравенство  $f_{t'}(b) \leq f_t(b)$  для любой подстановки  $t$  вида (3) из [4].

Учитывая вид подстановки  $\tau_0$ , нетрудно показать, что в множестве подстановок вида (3) из [4], обладающих свойствами 3 и 4, есть подстановка, минимизирующая значение формы  $f$ , при этом эта подстановка находится среди подстановок вида

$$(1, \beta_2, \alpha_3, \dots, \beta_s, l+2, \dots, l+p, \beta'_{l+p+1}, \alpha'_{l+p+2}, \dots, \alpha'_n, l+1, \alpha_{s+1}, \dots, \beta_l).$$

Действительно, если

$$t_1 = (1, \beta_2, \alpha_3, \dots, \beta_{s-1}, l+2, \dots, l+p, \beta'_{l+p+1}, \alpha'_{l+p+2}, \dots, \alpha'_n, l+1, \alpha_s, \dots, \beta_l),$$

а

$$t_2 = (1, \beta_2, \alpha_2, \dots, \beta_{s-1}, \alpha_s, l+2, \dots, l+p, \alpha'_n, \beta'_{l+p+1}, \dots, \beta'_{n-1}, l+1, \beta_{s+1}, \dots, \beta_l),$$

то

$$f_{t_1}(b) - f_{t_2}(b) = (c_{l+1} - c_{\alpha_s})(b_{\alpha_s} - b_{\beta_{s+1}}) + (c_{\beta_{s-1}} - c_{\alpha_s})(b_{l+2} - b_{\alpha_s}) + (c_{\beta_{n-1}} - c_{\alpha'_n})(b_{\beta'_{l+p+1}} - b_{l+1}) + (c_{\beta'_{n-1}} - c_{l+p})(b_{\alpha'_n} - b_{\beta'_{l+p+1}}) \leq 0.$$

Если же

$$t_1 = (1, \beta_2, \alpha_3, \dots, \beta_{s-1}, l+2, \dots, l+p, \beta'_{l+p+1}, \alpha'_{l+p+2}, \dots, \alpha'_n, l+1, \alpha_s, \dots, \beta_l)$$

и

$$t_2 = (1, \beta_2, \alpha_3, \dots, \beta_{s+1}, l+2, \dots, l+p, \beta'_{l+p+1}, \alpha'_{l+p+2}, \dots, \alpha'_n, l+1, \alpha_{s+2}, \dots, \beta_l),$$

то имеем, что  $f_{t_1}(b) - f_{t_2}(b) \leq 0$ , если символы  $\beta_{s-1}$ ,  $\beta_{s+1}$  расположены левее  $\gamma_1$  и  $f_{t_1}(b) - f_{t_2}(b) \geq 0$ , если символы  $\beta_{s-1}$ ,  $\beta_{s+1}$  расположены правее  $\gamma_1$ . Аналогичное утверждение имеет место и для символов  $\beta' \in B_2$ .

Принимая во внимание этот факт, нетрудно показать, что число таких подстановок, в которых символы удовлетворяют условиям 1) — 4), будет равно

$$4 \cdot 3^{\lfloor \frac{l+1}{2} \rfloor + \lfloor \frac{n-l-p+1}{2} \rfloor - 4}.$$

Теорема доказана.

Если подстановка  $\tau_0$  имеет вид д), тогда

$$b_1 \geq b_2 \geq \dots \geq b_l \geq b_{l+2} \geq \dots \geq b_{l+p} \geq b_{l+1} \geq b_n \geq b_{n-1} \geq \dots \geq b_{l+p+1}.$$

Теорема 3. Если подстановка  $\tau_0$  имеет вид  $(l+1, l+2, \dots, l+p) \times (l+p+1, n)(l+p+2, n-1) \dots$ , то в множестве  $2^l \cdot 3^{\lfloor \frac{n-l-p+1}{2} \rfloor - 2}$  подстановок вида

$$(1, \alpha_2, \dots, \alpha_s, l+2, \dots, l+p, \beta'_{l+p+1}, \alpha'_{l+p+2}, \alpha'_n, l+1, \alpha_{s+1}, \dots, \alpha_l),$$

где  $\alpha_2 < \dots < l+1 > \dots > \alpha_l$ , а символы  $\alpha'_n$ ,  $\beta'_v \in M_2$  и удовлетворяют условиям 2) — 4), имеется подстановка, минимизирующая значение формы  $f$  на множестве всех циклов длины  $n$  из  $S_n$ .

Доказательство. Из лемм 1 и 2 следует, что подстановка, минимизирующая значение формы  $f$  на множестве  $H$  из  $S_n$ , есть среди  $l!(n-p-l)!$  подстановок вида (3) из [4].

Проводя рассуждения, как при доказательстве теорем 1 и 2, легко показать, что в множестве подстановок вида (3) из [4], в которых символы  $\alpha'_\mu$  и  $\beta'_\nu$  обладают свойствами 2) — 4), а символы  $1, 2, \dots, l+1$  удовлетворяют условию  $1 < \alpha_2 < \dots < l+1 > \dots > \alpha_l$ , есть подстановка, минимизирующая значение формы  $f$  на  $H$ .

Нетрудно установить, что число таких подстановок равно

$$2! \cdot 3!^{\left\lfloor \frac{n-l-p+1}{2} \right\rfloor - 2}.$$

Теорема доказана.

Если подстановка имеет вид е), тогда

$$b_l \geq b_{l-1} \geq \dots \geq b_1 \geq b_{l+2} \geq \dots \geq b_{l+p} \geq b_{l+1} \geq b_{l+p+1} \geq \dots \geq b_n.$$

Теорема 4. Если подстановка  $\tau_0$  имеет вид

$$(1, l)(2, l-1) \dots (l+1, l+2, \dots, l+p),$$

то в множестве  $2^{n-l-p} \cdot 3!^{\left\lfloor \frac{l+1}{2} \right\rfloor - 2}$  подстановок вида

$$(1, \beta_2, \alpha_3, \dots, \beta_s, l+2, \dots, l+p, \alpha'_{l+p+1}, \alpha'_{l+p+2}, \dots, \alpha'_n, l+1, \alpha_{s+1}, \dots, \beta_l),$$

где  $\alpha'_{l+p+1} < \dots < n > \dots > \alpha'_n$ , а символы  $\alpha_i, \beta_j \in M_2$  и удовлетворяют условиям 2) — 4), есть подстановка, минимизирующая значение линейной формы  $f$  на множестве всех циклов длины  $n$  из  $S_n$ .

Доказательство аналогично доказательству предыдущей теоремы.

Замечание 1. Если подстановка  $\tau_0$  имеет вид  $(l+1, \dots, l+p)$ , то множество подстановок, среди которых есть подстановка, минимизирующая значение формы  $f$  на  $H$ , состоит из подстановок вида

$$(1, \alpha_2, \dots, \alpha_s, l+2, \dots, l+p, \beta_{l+p+1}, \dots, \beta_k = n, \dots, \beta_n, l+1, \alpha_{s+1}, \dots, \alpha_l),$$

где

$$\alpha_2 < \dots < \alpha_s < l+2 < \dots < \beta_k > \dots > \beta_n > l+1 > \alpha_{s+1} > \dots > \alpha_l$$

и является подмножеством подстановок вида  $(1, \alpha_2, \dots, \alpha_h = n, \dots, \alpha_n)$ , где  $\alpha_2 < \dots < \alpha_h = n > \dots > \alpha_n$ , среди которых есть подстановка, минимизирующая значение формы  $f$  на  $H$ , если  $\tau_0 = e$ .

Автор выражает глубокую благодарность Д. А. Супруненко за постоянное внимание к работе.

### Литература

1. Харди Г. Г., Литтлвуд Д. Е., Полиа Г. Неравенства. ИЛ, 1948.
2. Кунцэвіч І. М., Весці АН БССР, сер. фіз.-матэм. навук, № 1, 1968.
3. Айзенштат В. С., Кравчук Д. Н. ДАН БССР, т. XII, № 2, 1968.
4. Кунцэвіч І. М. Весці АН БССР, сер. фіз.-матэм. навук, № 2, 1968.

Институт математики  
АН БССР

Поступило в редакцию  
22.IX 1967

М. А. ШЕШКО

**ОБ ОБЩЕЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ЛИНЕЙНОГО СОПРЯЖЕНИЯ  
 С ПРОИЗВОДНЫМИ ДЛЯ СИСТЕМЫ  $n$  ПАР ФУНКЦИЙ**

Пусть  $\Gamma = \Gamma_0 + \Gamma_1 + \dots + \Gamma_m$  — совокупность  $m + 1$  простых замкнутых непересекающихся контуров типа Ляпунова, ограничивающих некоторую конечную область  $D^+$ . Область, дополняющую  $D^+ + \Gamma$  до полной плоскости, обозначим через  $D^-$ . Положительным обходом контура  $\Gamma$  считается тот, который оставляет область  $D^+$  слева.

Рассматривается следующая краевая задача.

Найти кусочно-аналитический вектор  $\Phi(z) = (\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_n)$ , такой, чтобы почти всюду на  $\Gamma$  он имел граничные значения производных  $\frac{d^r \Phi^+(t)}{dt^r}$ ,  $\frac{d^s \Phi^-(t)}{dt^s}$ , принадлежащих  $L_2(\Gamma)$ , и удовлетворял условию

$$\begin{aligned} & \frac{d^r \Phi^+(t)}{dt^r} + B_s(t) \frac{d^s \Phi^-(t)}{dt^s} + C_s(t) \overline{\frac{d^s \Phi^-(t)}{dt^s}} = \\ & = \lambda \left\{ \sum_{k=0}^{r-1} \left[ A_k(t) \frac{d^k \Phi^+(t)}{dt^k} + D_k(t) \overline{\frac{d^k \Phi^+(t)}{dt^k}} \right] + \right. \\ & + \sum_{k=0}^{s-1} \left[ B_k(t) \frac{d^k \Phi^-(t)}{dt^k} + C_k(t) \overline{\frac{d^k \Phi^-(t)}{dt^k}} \right] + \sum_{k=0}^r \left[ \int_{\Gamma} M_k(t, \tau) \frac{d^k \Phi^+(\tau)}{d\tau^k} d\tau + \right. \\ & + \int_{\Gamma} \overline{M_k(t, \tau)} \frac{d^k \Phi^+(\tau)}{d\tau^k} d\tau \left. \right] + \sum_{k=0}^s \left[ \int_{\Gamma} N_k(t, \tau) \frac{d^k \Phi^-(\tau)}{d\tau^k} d\tau + \right. \\ & \left. + \int_{\Gamma} \overline{N_k(t, \tau)} \frac{d^k \Phi^-(\tau)}{d\tau^k} d\tau \right] \left. \right\} + F(t), \quad \Phi^-(\infty) = 0. \quad (1) \end{aligned}$$

Элементы матрицы  $B_s(t)$  предполагаются непрерывными функциями;  $C_s(t)$ ,  $A_k(t)$ ,  $D_k(t)$  ( $k = 0, 1, \dots, r-1$ ),  $B_k(t)$ ,  $C_k(t)$  ( $k = 0, 1, \dots, s-1$ ) — ограниченными и измеримыми;  $M_k(t, \tau)$ ,  $\overline{M_k(t, \tau)}$  ( $k = 0, 1, \dots, r$ ),  $N_k(t, \tau)$ ,  $\overline{N_k(t, \tau)}$  ( $k = 0, 1, \dots, s$ ) — фредгольмовы ядра из  $L_2(\Gamma)$ ;  $F(t) \in L_2(\Gamma)$ ;  $\lambda$  — вещественный параметр. Кроме того, будем предполагать, что  $\det B_s(t) \neq 0$ .

Задача (1) является обобщением задачи, рассмотренной Л. Г. Михайловым [1] в двух направлениях:

1. Ищется не одна, а  $n$  пар функций.
2. В граничное условие входят производные от функции  $\Phi^+(z)$ .

Прежде чем решать задачу, остановимся на одном вспомогательном предложении.

Ю. М. Крикуновым в [2] для односвязного контура типа Ляпунова доказана следующая теорема:

Если  $\Phi(z)$  есть функция,  $r$ -производная которой  $\frac{d^r \Phi(z)}{dz^r}$  непрерывно продолжима на контур, причем  $\frac{d^r \Phi(t)}{dz^r}$  удовлетворяет условию Гельдера,

а  $\Phi(t)$  — граничное значение на контуре, то

а) функция  $\Phi(t)$  имеет производные до  $r$  порядка включительно, причем  $\frac{d^k \Phi(t)}{dt^k} \in H$  (условие Гельдера);

б) производные от граничных значений совпадают с граничными значениями от производных

$$\frac{d^k \Phi(t)}{dt^k} = \frac{d^k \Phi(z)}{dz^k} \quad (k = 1, 2, \dots, r).$$

Нетрудно видеть, что эта теорема справедлива и для многосвязной области. Действительно, если  $\Phi(z)$  — функция аналитическая в  $D^+$  и непрерывно продолжимая на контур  $\Gamma = \Gamma_0 + \Gamma_1 + \dots + \Gamma_m$ , то

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\Phi^+(\tau)}{\tau - z} d\tau = \sum_{j=0}^m \Phi_j(z),$$

где

$$\Phi_j(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_j} \frac{\Phi^+(\tau)}{\tau - z} d\tau, \quad j = 0, 1, \dots, m.$$

Следовательно, функция  $\Phi(z)$  есть сумма функции  $\Phi_0(z)$ , аналитической в односвязной области, ограниченной контуром  $\Gamma_0$ , и функций  $\Phi_j(z)$  ( $j = 1, 2, \dots, m$ ), аналитических соответственно в бесконечных односвязных областях, ограниченных контурами  $\Gamma_j$ . Остается применить теорему к функциям  $\Phi_j(z)$  ( $j = 0, 1, \dots, m$ ).

Повторяя рассуждения Ю. М. Крикунова, можно обобщить эту теорему на случай, когда

$$\frac{d^n \Phi(t)}{dt^n} \in L_2(\Gamma).$$

Покажем, например, справедливость формулы (11) из [2], когда  $\varphi(t) \in L_2$ . Нужно доказать законность дифференцирования по параметру функции

$$F(s) = \int_0^{2\pi} \varphi(\tau) e^{i\sigma} \ln \sin^2 \frac{\sigma - s}{2} d\sigma,$$

когда  $\varphi(t) \in L_2$ , т. е.

$$F'(s) = - \int_0^{2\pi} \varphi(\tau) e^{i\sigma} \operatorname{ctg} \frac{\sigma - s}{2} d\sigma. \quad (2)$$

Возьмем последовательность функций  $\varphi_n(t)$ , удовлетворяющих условию Гельдера, сходящуюся в среднем к  $\varphi(t) \in L_2$ . Функции

$$F_n(s) = \int_0^{2\pi} \varphi_n(\tau) e^{i\sigma} \ln \sin^2 \frac{\sigma - s}{2} d\sigma$$

можно дифференцировать по параметру. Оператор (2) ограничен в  $L_2$ . Так как  $\varphi_n(t) \in L_2$ , то  $F'_n(s) \in L_2$ . Более того, при  $n \rightarrow \infty$   $F'_n(s)$  стремится в метрике пространства  $L_2$  к пределу, равному правой части формулы (2). По теореме о замкнутости оператора обобщенного дифференцирования [3] существует  $F'(s)$ , определяемая формулой (2).

Аналогичными рассуждениями можно доказать остальные формулы из [2].

Приступим к решению задачи (1). Воспользуемся интегральным представлением кусочно-аналитического вектора М. П. Ганина [4]. Исходя из формул

$$\frac{d^r \Phi^+(z)}{dz^r} = \sum_{j=1}^m \frac{1}{(z - z_j)^r} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_j} \frac{\mu(\tau)}{\tau - z} d\tau + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_0} \frac{\mu(\tau)}{\tau - z} d\tau,$$

$$\frac{z^{s+mr}}{\prod_{j=1}^m (z - z_j)^r} \frac{d^s \Phi^-(z)}{dz^s} = \sum_{j=1}^m \frac{1}{(z - z_j)^r} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_j} \frac{\mu(\tau)}{\tau - z} d\tau + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_0} \frac{\mu(\tau)}{\tau - z} d\tau,$$

где  $\mu(t)$  — неизвестный комплексный вектор из  $L_2$ , а  $z_j$  ( $j = 1, 2, \dots, m$ ) — некоторые фиксированные точки из областей  $D_j^-$ , путем  $r$  и  $s$ -кратного интегрирования соответственно получим следующие интегральные представления для  $\Phi^+(z)$  и  $\Phi^-(z)$ :

$$\Phi^+(z) = \frac{(-1)^r}{(r-1)!} \sum_{j=1}^m \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_j} \frac{\mu(\tau)}{(\tau - z_j)^r} (\tau - z)^{r-1} \ln \left( 1 - \frac{\tau - z_j}{z - z_j} \right) d\tau +$$

$$+ \frac{(-1)^r}{(r-1)!} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_0} \mu(\tau) (\tau - z)^{r-1} \ln \left( 1 - \frac{z}{\tau} \right) d\tau + \sum_{k=0}^{r-1} \alpha_k z^k; \quad (3)$$

постоянные  $\alpha_k$  вычисляются путем сравнения первых  $r$  членов разложения в степенной ряд в окрестности начала координат обеих сторон равенства (3).

$$\Phi^-(z) = \frac{(-1)^s}{(s-1)!} \sum_{j=1}^m \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_j} \mu(\tau) \frac{\prod_{k=1}^m (\tau - z_k)^r}{\tau^{s+mr}} (\tau - z)^{s-1} \ln \left( 1 - \frac{z - z_j}{\tau - z_j} \right) d\tau +$$

$$+ \frac{(-1)^s}{(s-1)!} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_0} \mu(\tau) \frac{\prod_{k=1}^m (\tau - z_k)^r}{\tau^{s+mr}} (\tau - z)^{s-1} \ln \left( 1 - \frac{z}{\tau} \right) d\tau +$$

$$+ \sum_{k=0}^{s-1} \beta_k z^k \ln z + \sum_{k=1}^{mr} \frac{\gamma_k}{z^k} + \sum_{k=0}^{s-1} \delta_{qk} z^k, \quad z \in D_q^-, \quad q = 1, 2, \dots, m; \quad (4)$$

$$\Phi^-(z) = \frac{(-1)^s}{(s-1)!} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \mu(\tau) \frac{\prod_{k=1}^m (\tau - z_k)^r}{\tau^{s+mr}} (\tau - z)^{s-1} \ln \left( 1 - \frac{\tau}{z} \right) d\tau +$$

$$+ \sum_{k=1}^m \frac{\gamma_k}{z^k} + \sum_{k=0}^{m-1} \delta_{0k} z^k, \quad z \in D_0^-. \quad (5)$$

Штрих у произведений означает, что для  $\tau \in \Gamma_j$  ( $j = 1, 2, \dots, m$ ) нужно пропустить множитель при  $k = j$ . Постоянные  $\beta_k$ ,  $\gamma_k$  выражаются определенным образом через функцию  $\mu(t)$ ;  $\delta_{qk}$  — постоянные, вычисляемые разложением обеих частей равенства (4) в окрестности точки  $z = z_q$  ( $q = 1, 2, \dots, m$ );  $\delta_{0k}$  определяются путем разложения обеих частей равенства (5) в ряд в окрестности  $z = \infty$ .

Найдем предельные значения  $\Phi^+(z)$ ,  $\Phi^-(z)$  и их производных порядка  $r$  и  $s$  соответственно и подставим в краевое условие (1). Получим следующую систему интегральных уравнений:

$$\frac{1}{2} \frac{1}{(t - z_k)^r} \mu(t) + \sum_{j=1}^m \frac{1}{(t - z_j)^r} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_j} \frac{\mu(\tau)}{\tau - t} d\tau + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_0} \frac{\mu(\tau)}{\tau - t} d\tau +$$

$$+ B_s(t) \frac{\prod_{j=1}^m (t - z_j)^r}{t^{s+mr}} \left[ -\frac{1}{2} \frac{1}{(t - z_k)^r} \mu(t) + \sum_{j=1}^m \frac{1}{(t - z_j)^r} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_j} \frac{\mu(\tau)}{\tau - t} d\tau + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_0} \frac{\mu(\tau)}{\tau - t} d\tau \right] + C_s(t) \frac{\prod_{j=1}^m (\bar{t} - \bar{z}_j)^r}{\bar{t}^{s+mr}} \left[ -\frac{1}{2} \frac{1}{(\bar{t} - \bar{z}_k)^r} \overline{\mu(t)} + \right.$$

$$\left. + \sum_{j=1}^m \frac{1}{(\bar{t} - \bar{z}_j)^r} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_j} \frac{\mu(\tau)}{\tau - t} d\tau + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_0} \frac{\mu(\tau)}{\tau - t} d\tau \right] =$$

$$= \lambda \left[ \int_{\Gamma} K_1(t, \tau) \mu(\tau) d\tau + \int_{\Gamma} K_2(t, \tau) \overline{\mu(\tau)} d\tau \right] + f(t) + F(t),$$

$$t \in \Gamma_k \quad (k = 1, 2, \dots, m); \quad (6)$$

$$\frac{1}{2} \mu(t) + \sum_{j=1}^m \frac{1}{(t - z_j)^r} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_j} \frac{\mu(\tau)}{\tau - t} d\tau + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_0} \frac{\mu(\tau)}{\tau - t} d\tau +$$

$$+ B_s(t) \frac{\prod_{j=1}^m (t - z_j)^r}{t^{s+mr}} \left[ -\frac{1}{2} \mu(t) + \sum_{j=1}^m \frac{1}{(t - z_j)^r} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_j} \frac{\mu(\tau)}{\tau - t} d\tau + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_0} \frac{\mu(\tau)}{\tau - t} d\tau \right] + C_s(t) \frac{\prod_{j=1}^m (\bar{t} - \bar{z}_j)^r}{\bar{t}^{s+mr}} \left[ -\frac{1}{2} \overline{\mu(t)} + \right.$$

$$+ \sum_{j=1}^m \frac{1}{(\bar{t} - \bar{z}_j)^r} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_j} \frac{\mu(\tau)}{\tau - t} d\tau + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_0} \frac{\mu(\tau)}{\tau - t} d\tau \Big] =$$

$$= \lambda \left[ \int_{\Gamma_0} \overbrace{K_1(t, \tau)} \mu(\tau) d\tau + \int_{\Gamma} \overbrace{K_2(t, \tau)} \overline{\mu(\tau)} d\tau \right] + f(t) + F(t), \quad t \in \Gamma_0, \quad (7)$$

где

$$f(t) = (f^{(1)}, f^{(2)}, \dots, f^{(n)}); \quad f^{(l)} = q_1^{(l)} \omega_1^{(l)}(t) + \dots + q_r^{(l)} \omega_r^{(l)}(t) +$$

$$+ \varepsilon_{1k}^{(l)} \omega_{1k}^{(l)}(t) + \varepsilon_{sk}^{(l)} \omega_{sk}^{(l)}(t), \quad t \in \Gamma_k \quad (k = 1, 2, \dots, m);$$

$$f^{(i)} = q_1^{(i)} \omega_1^{(i)}(t) + \dots + q_r^{(i)} \omega_r^{(i)}(t), \quad t \in \Gamma_0; \quad q_j^{(i)}, \varepsilon_{lk}^{(i)}$$

( $i = 1, 2, \dots, n, \quad j = 1, 2, \dots, r, \quad l = 1, 2, \dots, s$ ) — постоянные инте-

рирования;  $\omega_j(t), \omega_{lk}(t)$  — определенные функции;  $K_1(t, \tau), K_2(t, \tau), K_1(t, \tau),$

$K_2(t, \tau)$  — определенные фредгольмовы ядра.

Систему интегральных уравнений (6), (7) сведем к краевой задаче, не содержащей производных в граничном условии. Для этой цели введем вектор  $\varphi(z)$  по формуле

$$\varphi(z) = \sum_{j=1}^m \frac{1}{(z - z_j)^r} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_j} \frac{\mu(\tau)}{\tau - z} d\tau + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_0} \frac{\mu(\tau)}{\tau - z} d\tau.$$

Внося  $\varphi^+(t), \varphi^-(t)$  в систему (6), (7), придем к краевой задаче

$$\varphi^+(t) + B_s(t) \frac{\prod_{j=1}^m (t - z_j)^r}{t^{s+mr}} \varphi^-(t) + C_s(t) \frac{\prod_{j=1}^m (\bar{t} - \bar{z}_j)^r}{\bar{t}^{s+mr}} \overline{\varphi^-(t)} =$$

$$= \lambda T(\varphi^+, \varphi^-) + f(t) + F(t), \quad t \in \Gamma, \quad (8)$$

где  $T(\varphi^+, \varphi^-)$  — определенный вполне непрерывный оператор.

Будем предполагать сначала, что элементы матрицы  $B_s(t)$  удовлетворяют условию Гельдера.

Пусть  $X(z)$  — каноническая матрица решений задачи

$$\omega^+(t) = -B_s(t) \frac{\prod_{j=1}^m (t - z_j)^r}{t^{s+mr}} \omega^-(t). \quad (9)$$

Подставляя

$$-B_s(t) \frac{\prod_{j=1}^m (t - z_j)^r}{t^{s+mr}} = X^+(t) [X^-(t)]^{-1}$$

в (8) и вводя обозначения

$$[X(z)]^{-1} \varphi(z) = \psi(z),$$

$$-C_s(t) \frac{\prod_{j=1}^m (\bar{t} - \bar{z}_j)^r}{\bar{t}^{s+mr}} = \alpha(t),$$

$$[X^+(t)]^{-1} f(t) = \beta(t),$$

$$[X^+(t)]^{-1} F(t) = \gamma(t),$$

$$[X^+(t)]^{-1} T(\varphi^+, \varphi^-) = K(\psi^+, \psi^-),$$

краевое условие (8) приведем к виду

$$\begin{aligned} & \psi^+(t) - \psi^-(t) = \\ & = [X^+(t)]^{-1} \alpha(t) \overline{X^-(t)} \overline{\psi^-(t)} + \lambda K(\psi^+, \psi^-) + \beta(t) + \gamma(t). \end{aligned} \quad (10)$$

Будем искать решение задачи (10) в виде

$$\psi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{v(\tau)}{\tau - z} d\tau + P(z), \quad (11)$$

где  $v(t) = (v_1, v_2, \dots, v_n)$  — неизвестный вектор из  $L_2$ , а  $P(z) = (p_1, p_2, \dots, p_n)$  — пока произвольный вектор, компоненты которого являются многочленами.

Применив формулы Сохоцкого (11) и подставив  $\psi^+(t)$  и  $\psi^-(t)$  в (10), получим систему интегральных уравнений

$$\begin{aligned} v(t) = \frac{1}{2} [X^+(t)]^{-1} \alpha(t) \overline{X^-(t)} [-\overline{v(t)} + \overline{Sv}] + \lambda K^* v + \\ + \delta(t) + \beta(t) + \gamma(t), \end{aligned} \quad (12)$$

где  $K^* v$  — вполне непрерывный оператор, а  $\delta(t)$  линейно содержит коэффициенты многочлена  $P(t)$ ,

$$Sv = \frac{1}{\pi i} \int_{\Gamma} \frac{v(\tau)}{\tau - t} d\tau.$$

Запишем систему (12) так:

$$(E - U)^{-1} v = \lambda K^* v + \delta(t) + \beta(t) + \gamma(t), \quad (13)$$

где

$$Uv = \frac{1}{2} [X^+(t)]^{-1} \alpha(t) \overline{X^-(t)} [-\overline{v(t)} + \overline{Sv}],$$

$E$  — единичный оператор.

Условием сжатости оператора, стоящего в левой части (13), будет (см. [5])

$$\frac{(1+M)n}{2} \sup_{\substack{t \in \Gamma, \\ i, j=1, \dots, n}} |z_{ij}(t)| < 1, \quad (14)$$

где  $z_{ij}(t)$  — элементы матрицы  $Z(t) = \frac{1}{2} [X^+(t)] \alpha(t) \overline{X^-(t)}$ ,  $M$  — норма сингулярного интеграла.

К обеим частям (13) применим оператор  $(E - U)^{-1}$ .

Получим

$$v(t) = \lambda T^* v + \delta^*(t) + \beta^*(t) + \gamma^*(t), \quad (15)$$

где

$$T^* v = (E - U)^{-1} K^* v;$$

$$\delta^*(t) = (E - U)^{-1} \delta(t);$$

$$\beta^*(t) = (E - U)^{-1} \beta(t);$$

$$\gamma^*(t) = (E - U)^{-1} \gamma(t).$$

Оператор  $T^* \nu$  есть оператор вполне непрерывный, так как является композицией вполне непрерывного оператора с ограниченным, поэтому к уравнению (15) можем применить теорему Фредгольма.

Если  $\lambda \neq \lambda_j$ , где  $\lambda_j (j = 1, 2, \dots)$  — характеристическое значение уравнения (15), то уравнение (15) имеет единственное решение при любом фиксированном свободном члене.

Пусть теперь элементы матрицы  $B_s(t)$  непрерывны, тогда, приближая матрицу  $B_s(t)$  матрицей  $\overbrace{B_s(t)}$ , удовлетворяющей условию Гельдера, запишем краевую задачу (8) в виде

$$\begin{aligned} \varphi^+(t) + \overbrace{B_s(t)} \frac{\prod_{j=1}^m (t - z_j)^r}{t^{s+mr}} \varphi^-(t) + C_s(t) \frac{\prod_{j=1}^m (\bar{t} - \bar{z}_j)}{t^{s+mr}} \overline{\varphi^-(t)} + \\ + [B_s(t) - \overbrace{B_s(t)}] \frac{\prod_{j=1}^m (t - z_j)^r}{t^{s+mr}} \varphi^-(t) = \lambda T(\varphi^+, \varphi^-) + f(t) + F(t). \quad (8') \end{aligned}$$

Матрицу  $B_s(t)$  приблизим матрицей  $\overbrace{B_s(t)}$  так, чтобы выполнялось условие

$$\left\| [B_s(t) - \overbrace{B_s(t)}] \frac{\prod_{j=1}^m (t - z_j)^r}{t^{s+mr}} \right\|_{L_2} < 1 - \frac{2}{(1+M)n},$$

после чего к (8') применяем только что описанный метод.

Выпишем решение краевой задачи (8)

$$\varphi(z) = X(z) \left[ \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\nu(\tau)}{\tau - z} d\tau + P(z) \right]. \quad (16)$$

Нетрудно видеть, что для получения решения, исчезающего на бесконечности, нужно положить

$$P(z) = (p_{\kappa_1-1}, \dots, p_{\kappa_{m'}-1}, 0, \dots, 0),$$

где  $\kappa_1 \geq \kappa_2 \geq \dots \geq \kappa_{m'} \geq 0$  — частные индексы задачи (9),  $P_{\kappa_{j-1}}(z) (j = 1, 2, \dots, m')$  — произвольный многочлен степени  $\kappa_j - 1$ .

Подсчитаем число линейно независимых решений над полем вещественных чисел однородной задачи (1) ( $F(t) \equiv 0$ ). В уравнении (15) вектор  $\delta^*(t) + \beta^*(t)$  содержит  $2(\kappa_1 + \kappa_2 + \dots + \kappa_{m'} + nr + nsm)$  —  $\xi_0$  вещественных произвольных постоянных, где  $\xi_0$  — ранг алгебраической системы (17).

Подсчитаем число условий разрешимости неоднородной задачи. Нетрудно видеть, что число условий разрешимости определяет система

$$\int_{\Gamma} [c_1 v_{m'+1}^1(t) + c_2 v_{m'+1}^2(t) + \dots + c_R v_{m'+1}^R(t)] t^k dt = v_{m'+1}^0(t), \quad (17)$$

$$\int_{\Gamma} [c_1 v_n^1(t) + c_2 v_n^2(t) + \dots + c_R v_n^R(t)] t^k dt = v_n^0(t),$$

$$k = 0, 1, \dots, |\kappa_n| - 1,$$

где  $R = 2(\kappa_1 + \dots + \kappa_{m'} + nr + nsm)$ ;  $v_j^0(t)$  — частное решение неоднородного уравнения (15).

Пусть теперь  $\lambda = \lambda_j$  есть характеристическое значение кратности  $\rho$  уравнения (15). Тогда для разрешимости уравнения (15) потребуется  $\rho$  условий ортогональности свободного члена  $\delta^*(t) + \beta^*(t) + \gamma^*(t)$  к решениям транспонированной однородной системы. Это приводит к  $\rho$  уравнениям с  $2(\kappa_1 + \kappa_2 + \dots + \kappa_{m'} + nr + nsm) - \xi_0$  неизвестными. Если  $\xi_1$  — ранг системы, то число решений системы  $2(\kappa_1 + \kappa_2 + \dots + \kappa_{m'} + nr + nsm) - \xi_1 - \xi_0$ , а условий разрешимости  $\rho - \xi_1$ . Каждому из оставшихся произвольными постоянных, а также каждому решению однородного интегрального уравнения соответствует решение однородной краевой задачи, т. е. получаем

$$l = 2(\kappa_1 + \kappa_2 + \dots + \kappa_{m'} + nr + nsm) + \rho - \xi_1 - \xi_0.$$

Чтобы подсчитать число условий разрешимости  $\rho$  неоднородной задачи, нужно к условиям разрешимости интегрального уравнения (их всего  $\rho - \xi$ ) присоединить

$$- 2(\kappa_{m'+1} + \dots + \kappa_n) - \xi_0$$

условий разрешимости краевой задачи.

Итого

$$\rho = - 2(\kappa_{m'+1} + \dots + \kappa_n) + \rho - \xi_1 - \xi_0.$$

Таким образом, имеет место

**Теорема.** Пусть для задачи (I) выполнено условие (14) и  $\lambda_1, \lambda_2, \dots$  — характеристические значения интегрального уравнения (15). Тогда для всех  $\lambda \neq \lambda_j$

$$l = 2(\kappa_1 + \kappa_2 + \dots + \kappa_{m'} + nr + nsm) - \xi_0,$$

$$\rho = - 2(\kappa_{m'+1} + \dots + \kappa_n) - \xi_0,$$

где  $\kappa_1 \geq \kappa_2 \geq \dots \geq \kappa_{m'} \geq 0 > \kappa_{m'+1} \geq \dots \geq \kappa_n$  — частные индексы задачи (9),  $n$  — размерность искомого вектора  $\Phi(z)$ ;  $m+1$  — связность области,  $r$  — высший порядок производной от  $\Phi^+(z)$ ;  $s$  — высший порядок производной от  $\Phi^-(z)$ .

Если же  $\lambda = \lambda_j$  — характеристическое значение кратности  $\rho$  уравнения (15), то

$$l = 2(\kappa_1 + \kappa_2 + \dots + \kappa_{m'} + nr + nsm) + \rho - \xi_1 - \xi_0,$$

$$\rho = - 2(\kappa_{m'+1} + \dots + \kappa_n) + \rho - \xi_1 - \xi_0,$$

где  $\xi_0$  — ранг системы (17).

В заключение выражаю глубокую благодарность академику АН БССР Ф. Д. Гахову за руководство работой.

### Литература

1. Михайлов Л. Г. Сб. «Исследования по краевым задачам теории функций». АН ТаджССР, Душанбе, 1964.
2. Крикунов Ю. М. Сб. «Краевые задачи». Изд. Казанского ун-та, 1962.
3. Михлин С. Г. Многомерные сингулярные интегралы и интегральные уравнения. Физматгиз, 1962.
4. Ганин М. П. Об одной общей задаче для аналитических функций. Диссертация. Казань, 1952.
5. Шешко М. А. «Весті АН БССР», сер. фіз.-матем. наук, № 1, 1967.

Белорусский государственный университет  
им. В. И. Ленина

Поступило в редакцию  
27.XII 1967

Г. П. ЖАВРИД

МАКСИМАЛЬНЫЕ РАЗРЕШИМЫЕ ПОДГРУППЫ  $GL(4, P)$

В настоящей статье дается описание максимальных примитивных разрешимых подгрупп  $\Gamma$  полной линейной группы  $GL(4, P)$  для произвольного поля  $P$ . Предварительно приводится замечание, справедливое для матричных групп произвольной степени.

Сохраним обозначения [1]:  $F$  — максимальный абелев нормальный делитель группы  $\Gamma$ ,  $V$  — централизатор  $F$  в  $\Gamma$ ,  $A/F$  — максимальный абелев нормальный делитель  $\Gamma/F$ , содержащийся в  $V/F$ . Как известно [1, 2], в том частном случае, когда  $F$  совпадает с мультипликативной группой  $P^*$  основного поля  $PE_n$ , максимальная примитивная разрешимая группа  $\Gamma$  является расширением группы  $A$  с помощью разрешимой подгруппы симплектической группы, а группа  $A$  представима в виде

$$A = (a_{11}) (b_{11}) \dots (a_{1\alpha}) (b_{1\alpha}) \dots (a_{k1}) (b_{k1}) \dots (a_{k\gamma}) (b_{k\gamma}) P^*, \quad (1)$$

где  $n = q_1^\alpha \dots q_k^\gamma$  — каноническое разложение числа  $n$ ,

$$(a_{ij}, b_{ij}) = \eta_i, \eta_i^{q_i} = 1, \eta_i \neq 1, (a_{ij}, a_{\mu\lambda}) = (a_{ij}, b_{\mu\lambda}) = (b_{ij}, b_{\mu\lambda}) = 1$$

при  $(i - \mu)^2 + (j - \lambda)^2 \neq 0, a_{ij}^{q_i} = b_{ij}^{q_i} = \pm 1$ ;

группа  $A$  определяется однозначным образом (формулы, задающие элементы  $a_{ij}, b_{ij}$ , приведены в [1], стр. 43, 44).

§ 1. Выясним условия, при которых будут примитивны содержащиеся в  $GL(n, P)$  расширения группы  $A$  с помощью симплектической группы, при этом мы ограничиваемся случаем, когда группа  $F$  совпадает с мультипликативной группой основного поля.

Достаточно рассмотреть случай  $n = q^\alpha, q$  — простое число.

Под симплектической группой  $Sp(2\alpha, q)$  всегда будем понимать группу всех матриц  $S$  степени  $2\alpha$  над  $GF(q)$ , подчиненных условию  $S\Phi S' = \Phi$ , где  $\Phi = E_\alpha \times \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ .

Изучаются следующие расширения  $G \subset GL(q^\alpha, P)$  группы  $A$  с помощью подгруппы  $S$  симплектической группы  $Sp(2\alpha, q)$ :

$$g^{-1} a_i g = \lambda_i a_i^{t_i} b_i^{u_i} \dots a_i^{t_i \alpha} b_i^{u_i \alpha},$$

$$g^{-1} b_i g = \mu_i a_i^{v_i} b_i^{w_i} \dots a_i^{v_i \alpha} b_i^{w_i \alpha}, \quad i = 1, 2, \dots, \alpha, \quad (2)$$

где  $g \in G, t, u, v, w \in GF(q), \lambda_i, \mu_i \in P^*$ ,

$$s = \begin{pmatrix} t_{11} u_{11} & \dots & t_{1\alpha} u_{1\alpha} \\ v_{11} \omega_{11} & \dots & v_{1\alpha} \omega_{1\alpha} \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ t_{\alpha 1} u_{\alpha 1} & \dots & t_{\alpha\alpha} u_{\alpha\alpha} \\ v_{\alpha 1} \omega_{\alpha 1} & \dots & v_{\alpha\alpha} \omega_{\alpha\alpha} \end{pmatrix} \in S.$$

В [1] показано, что если  $G$  индуцирует неприводимую симплектическую подгруппу  $S$  группы  $Sp(2\alpha, q)$ , то  $G$  примитивна. Используя рассуждения ([1], стр. 32), выскажем более слабые достаточные условия для примитивности расширения  $G$ .

Будем говорить, что  $A_1$  — дополняемый в  $A$  нормальный делитель группы  $G$ , если  $P^* \subset A_1 \subset A$  и существует такой нормальный делитель  $A_2$  группы  $G$ ,  $P^* \subset A_2 \subset A$ , что  $A/P^*$  — прямое произведение  $A_1/P^*$  и  $A_2/P^*$ , а  $A_1$  и  $A_2$  поэлементно перестановочны. Если для  $A_1$ ,  $P^* \subset A_1 \subset A$ , не существует нормального делителя  $A_2$  группы  $G$ , удовлетворяющего приведенным выше условиям, то назовем  $A_1$  недополняемым в  $A$  нормальным делителем  $G$ .

**Теорема 1.** Пусть  $G \subset GL(n, P)$  — определяемое выражениями (2) расширение группы  $A$  с помощью подгруппы симплектической группы. Если  $G$  импримитивна, то  $G$  обладает недополняемым в  $A$  нормальным делителем группы  $G$ .

**Доказательство.** Пусть  $P^{(n)} = P_1 + \dots + P_\tau$  ( $\tau > 1$ ) — разложение  $P^{(n)}$  на системы импримитивности  $G$ . Каждый оператор  $g \in G$  осуществляет над подпространствами  $P_1, \dots, P_\tau$  некоторую подстановку  $s_g$  симметрической группы степени  $\tau$ . Гомоморфизм  $g \rightarrow s_g$  определяет гомоморфизм  $a \rightarrow s_a$ , где  $a \in A$ . Если  $G_0$  — ядро первого гомоморфизма, то  $A_0 = A \cap G_0$  — ядро второго. В [1] показано, что нормальный делитель  $A_0$  группы  $G$  содержит  $P^*$  в качестве истинной подгруппы, а линейная  $P$ -оболочка  $[A_0]$  группы  $A_0$  не является простой алгеброй.

Пусть  $A_0$  — абелева группа и  $a'_1$  — элемент  $A_0$ , не принадлежащий центру  $A_0$ . Тогда в  $A_0$  найдется элемент  $b'_1$  такой, что  $(a'_1, b'_1) \neq 1$ , и группа  $A_0$  представима в виде  $A_0 = (a'_1)(b'_1)B_1$ , где  $B_1$  — централизатор в  $A_0$  множества  $\{a'_1, b'_1\}$ . Обозначим через  $B_i$  централизатор в  $A_0$  множества  $\{a'_1, b'_1, \dots, a'_i, b'_i\}$ . Если  $B_1, \dots, B_{t-1}$  неабелевы, то, продолжая подобным образом, представим  $A_0$  в виде  $A_0 = (a'_1)(b'_1) \dots (a'_t)(b'_t)B_t$  и далее в случае, когда  $B_t$  — абелева группа, в виде  $A_0 = (a'_1)(b'_1) \dots (a'_t)(b'_t)(a'_{t+1})(a'_{t+2}) \dots (a'_{t+v})P^*$ .  $v > 0$ , так как в противном случае  $[A_0]$  была бы простой алгеброй [1, стр. 29].  $A/P^*$  — элементарная абелева группа, и ее базис может быть получен некоторым дополнением базиса  $A_0/P^* : a'_1P^*, b'_1P^*, \dots, a'_{t+v}P^*$ . Таким образом, для некоторого элемента  $a'_{t+\mu}$ , принадлежащего  $A_0$ ,  $0 < \mu \leq v$ , соответствующий ему элемент  $b'_{t+\mu}$  не принадлежит  $A_0$ , т. е.  $A_0$  — недополняемый в  $A$  нормальный делитель  $G$ . Теорема доказана.

Из доказательства теоремы непосредственно вытекает

**Следствие.** Пусть  $G \in GL(n, P)$  — расширение группы  $A$  с помощью подгруппы  $S$  симплектической группы  $Sp$ . Если  $P^*$  — максимальный абелев нормальный делитель группы  $G$ , то  $G$  — примитивная группа.

§ 2. Пусть  $\Gamma$  — максимальная примитивная разрешимая подгруппа  $GL(4, P)$ , максимальный абелев нормальный делитель  $F$  которой совпадает с мультипликативной группой основного поля  $P$ ,  $F = P^*$ . В этом случае группа  $\Gamma$

является расширением группы  $A = (a_1)(b_1)(a_2)(b_2)F$  с помощью разрешимой подгруппы  $S$  симплектической группы  $Sp(4, 2)$  (при  $n=4$  можно сказать: с помощью неприводимой разрешимой подгруппы  $S$ );  $Sp(4, 2)$ , как известно [4], изоморфна симметрической группе  $S_6$ .

В  $Sp(4, 2)$  с точностью до сопряженности в ней имеется две максимальные неприводимые разрешимые подгруппы: импримитивная группа

$$S' = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 & & \\ & 1 & 0 & \\ & & 0 & 1 \\ & & & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} & & & 1 & 0 \\ & & & 0 & 1 \\ & 1 & 0 & & \\ & 0 & 1 & & \end{pmatrix} \right\}$$

порядка 72, изоморфная максимальной транзитивной разрешимой подгруппе симметрической группы  $S_6$  с двумя системами импримитивности, и примитивная группа

$$S'' = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

порядка 20, изоморфная максимальной транзитивной разрешимой подгруппе симметрической группы  $S_5$ . Указанные подгруппы были построены Бухтом [3].

Матрицы  $g, h$  группы  $\Gamma, \Gamma = \{g, h, A\}$  определяются из равенств вида

$$g^{-1} a_i g = \lambda_i a_i^{t_{i1}} b_i^{u_{i1}} a_i^{t_{i2}} b_i^{u_{i2}}, \quad (2')$$

$$g^{-1} b_i g = \mu_i a_i^{v_{i1}} b_i^{w_{i1}} a_i^{v_{i2}} b_i^{w_{i2}}, \quad i = 1, 2.$$

Рассмотрим следующие случаи:

а)  $a_1^2 = b_1^2 = a_2^2 = b_2^2 = 1, \Gamma/A \cong S, S$  — подгруппа, сопряженная в  $Sp(4, 2)$  с некоторой подгруппой группы  $S'$ .

Так как  $a_i^2 = b_i^2 = 1$ , то из (2') получаем  $\lambda_i^2 = 1, \mu_i^2 = 1, i = 1, 2$  (что не предъявляет к полю  $P$  никаких требований), если выполняются условия

$$t_{i1} u_{i1} + t_{i2} u_{i2} = v_{i1} w_{i1} + v_{i2} w_{i2} = 0. \quad (3)$$

Совокупность всех матриц группы  $Sp(4, 2)$ , удовлетворяющих условию (3), образует группу  $S'_0$  порядка 72, сопряженную в  $Sp(4, 2)$  с группой  $S'$ .

Можно считать, что

$$S'_0 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Из

$$\begin{array}{ll} g^{-1} a_1 g = \lambda_1 a_1 b_2 & h^{-1} a_1 h = \lambda_3 a_1 a_2 \\ g^{-1} b_1 g = \mu_1 a_2 & h^{-1} b_1 h = \mu_3 b_1 \\ g^{-1} a_2 g = \lambda_2 a_1 & h^{-1} a_2 h = \lambda_4 a_2 \\ g^{-1} b_2 g = \mu_2 b_1 a_2 & h^{-1} b_2 h = \mu_4 b_1 b_2 \end{array} \quad \text{и} \quad (4)$$

следует

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad h = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Утверждение 1. В  $GL(4, P)$ ,  $P$  — произвольное поле характеристики  $\neq 2$ , содержится максимальная примитивная разрешимая подгруппа  $\Gamma_1$ , максимальный абелев нормальный делитель которой совпадает с мультипликативной группой основного поля  $P$ :

$$\Gamma_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} & 1 & 0 & \\ & 0 & 1 & \\ 1 & 0 & & \\ 0 & 1 & & \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & 1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}, \right. \\ \left. \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ 1 & 0 & & \\ & & 0 & 1 \\ & & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, P^* \right\} \quad (5)$$

б)  $a_1^2 = b_1^2 = a_2^2 = b_2^2 = 1$ ,  $\Gamma_2/A \cong S$ ,  $S$  — подгруппа, сопряженная в  $Sp(4, 2)$  с некоторой подгруппой  $S'$ .

Так как  $a_i^2 = b_i^2 = 1$ ,  $i = 1, 2$ , то из (2') получаем, как и в случае а):  $\lambda_j^2, \mu_j^2$ ,  $j = 1, 2, 3, 4$ , равны единице, если элементы  $t, u, v, w$ , принадлежащие  $GF(2)$ , подчиняются условию (3). Отсюда получаем: существование в  $GL(4, P)$  примитивной разрешимой подгруппы  $\Gamma$  с максимальным абелевым нормальным делителем  $P^*$  такой, что 5 делит порядок факторгруппы  $\Gamma/A$ , налагает на поле  $P$  требование — в поле  $P$  найдется элемент четвертого порядка.

Из

$$\begin{array}{ll} g^{-1} a_1 g = \lambda_1 b_1 & h^{-1} a_1 h = \lambda_3 a_1 b_1 a_2 \\ g^{-1} b_1 g = \mu_1 a_1 b_1 a_2 b_2 & h^{-1} b_1 h = \mu_3 b_1 \\ g^{-1} a_2 g = \lambda_2 a_2 b_2 & h^{-1} a_2 h = \lambda_1 b_1 b_2 \\ g^{-1} b_2 g = \mu_2 b_1 b_2 & h^{-1} b_2 h = \mu_4 a_2 \end{array} \quad \text{и}$$

следует

$$g = \begin{pmatrix} 1 & i & 1 & i \\ i & 1 & i & 1 \\ i & -1 & -i & 1 \\ 1 & -i & -1 & i \end{pmatrix}, \quad h = \begin{pmatrix} 1 & i & i & 1 \\ 1 & -i & i & -1 \\ i & 1 & 1 & i \\ i & -1 & 1 & -i \end{pmatrix}, \quad i^2 = -1.$$

Пусть 5 не делит порядок группы  $S$ . Тогда порядок группы  $S$  равен либо 4, либо 2. Отметим, что ни один элемент четвертого порядка группы  $S'$  не сопряжен в  $Sp(4, 2)$  ни с одним элементом группы  $S_0$ . В самом деле, все элементы четвертого порядка группы  $S'$  представляются в  $S_6$  циклами длины 4, а группа  $S_0$  представляется в  $S_6$  как группа с двумя системами импримитивности, в которой нет циклов длины 4.

Пусть, наконец,  $S$  — группа порядка 2. Все элементы второго порядка в  $S'$  сопряжены, так что группа  $S$  либо совпадает с группой  $\{(c^2)\}$ , либо сопряжена с ней,

$$c = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда имеем  $g^{-1} b_1 g = \lambda b_1$ , что противоречит максимальности абелевого нормального делителя  $P^*$ .

Утверждение 2. В  $GL(4, P)$  максимальные примитивные разрешимые подгруппы  $\Gamma_2$  имеются лишь в том случае, когда поле  $P$  характеристики  $\neq 2$  содержит элемент четвертого порядка,

$$\Gamma_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ & 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & 1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}, \right. \\ \left. \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ & 0 & 1 \\ & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & i & 1 & i \\ i & 1 & i & 1 \\ i & -1 & -i & 1 \\ 1 & -i & -1 & i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & i & i & 1 \\ 1 & -i & i & -1 \\ i & 1 & 1 & i \\ i & -1 & 1 & -i \end{pmatrix}, P^* \right\}, i^2 = -1. \quad (6)$$

в)  $a_1^2 = b_1^2 = a_2^2 = b_2^2 = -1$ ,  $\Gamma_2/A \cong S$ ,  $S$  — подгруппа, сопряженная в  $Sp(4, 2)$  с некоторой подгруппой  $S'$ .

В этом случае к полю  $P$  сразу же предъявляются требования: в поле  $P$  нет элемента четвертого порядка, элемент  $(-1)$  представим в виде суммы двух квадратов,  $-1 = \gamma^2 + \delta^2$  (\*).

Из (2') получаем

$$g = \begin{pmatrix} 1 - \delta\gamma & \delta^2 - \gamma & & \\ \delta - \gamma^2 & \delta + \delta\gamma + \gamma & & \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -\gamma & \delta - 1 \\ \delta + 1 & \gamma \end{pmatrix}, h = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Утверждение 3. В  $GL(4, P)$ , где  $P$  удовлетворяет условию (\*), содержится максимальная примитивная разрешимая подгруппа  $\Gamma_3$ ,

$$\Gamma_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \gamma & 0 & \delta & 0 \\ 0 & \gamma & 0 & \delta \\ \delta & 0 & -\gamma & 0 \\ 0 & \delta & 0 & -\gamma \end{pmatrix}, \right. \\ \left. \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \\ & 0 & -1 \\ & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \gamma & \delta \\ \delta & -\gamma \\ & \gamma & \delta \\ & \delta & -\gamma \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \right. \quad (7)$$

$$\left. \begin{pmatrix} 1 - \delta\gamma & \delta^2 - \gamma \\ \delta - \gamma^2 & \delta + \delta\gamma + \gamma \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -\gamma & \delta - 1 \\ \delta + 1 & \gamma \end{pmatrix}, P^* \right\}, \text{ где } \gamma^2 + \delta^2 = -1,$$

г)  $a_1^2 = b_1^2 = a_2^2 = b_2^2 = -1$ ,  $\Gamma_4/A \cong S$ ,  $S$  — подгруппа, сопряженная в  $Sp(4, 2)$  с некоторой подгруппой  $S''$ .

Как и в пункте в), получаем, что поле  $P$  должно удовлетворять условиям (\*).

Из (2') имеем  $g^{-1}a_i g = \lambda_i a_1^{t_{i1}} b_1^{u_{i1}} a_2^{t_{i2}} b_2^{u_{i2}}$  и после возведения в квадрат обеих частей равенства получаем

$$-1 = \lambda_i^2 (-1)^{t_{i1} + u_{i1} + t_{i2} + u_{i2} + t_{i1}u_{i1} + t_{i2}u_{i2}}$$

К противоречию с условием (\*) мы не приходим лишь в том случае, когда строки матрицы  $s \in S$  таковы: 1000, 0100, 0010, 0001, 1100, 0011. Совокупность всех матриц  $Sp(4, 2)$ , построенных с помощью этих строк, образует группу  $S'$ . Таким образом, 5 не делит порядок  $S$ . Также и  $S:(e) \neq 4$ , так как элементы четвертого порядка группы  $S''$  не сопряжены с элементами группы  $S'$ . Аналогично тому, как и в пункте б), заключаем, что  $S:(e) \neq 2$ .

Таким образом, в  $GL(4, P)$  нет примитивных разрешимых подгрупп с максимальным абелевым нормальным делителем  $P^*$ , удовлетворяющих условиям г).

Этим доказана следующая

**Теорема 2.** Если поле  $P$  характеристики  $\neq 2$  содержит элемент четвертого порядка, то в  $GL(4, P)$  с точностью до сопряженности в ней имеется две максимальные примитивные разрешимые подгруппы  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$  (формулы (5) и (6)), максимальный абелев нормальный делитель которых совпадает с  $P^*$ .

Если поле  $P$  характеристики  $\neq 2$  не содержит элементов четвертого порядка, но элемент  $(-1)$  представим в нем в виде суммы двух квадратов, то в  $GL(4, P)$  всякая максимальная примитивная разрешимая подгруппа, максимальный абелев нормальный делитель которой совпадает с  $P^*$ , сопряжена либо с  $\Gamma_1$ , либо с  $\Gamma_2$  (формулы (5) и (7)).

Если поле  $P$  характеристики  $\neq 2$  не содержит элементов четвертого порядка и элемент  $(-1)$  не представим в нем в виде суммы двух квадратов, то в  $GL(4, P)$  с точностью до сопряженности в ней имеется лишь одна максимальная примитивная разрешимая подгруппа  $\Gamma_1$ , максимальный абелев нормальный делитель которой совпадает с  $P^*$ .

§ 3. Пусть  $\Gamma$  максимальная примитивная разрешимая подгруппа  $GL(4, P)$ , максимальный абелев нормальный делитель  $F$  которой совпадает с мультипликативной группой некоторого квадратичного расширения поля  $P$ ,  $F = = P(\theta) \setminus 0$ , где  $\theta$  — корень неприводимого над  $P$  полинома второй степени.

В этом случае централизатор  $V$  нормального делителя  $F$  в  $\Gamma$  является расширением группы  $A = (a)(b)F$  с помощью подгруппы  $S$  симплектической группы  $Sp(2, 2)$ .

Допустимы два случая [2]:

а)  $a^2 = b^2 = 1, V/A \cong S, S \subseteq Sp(2, 2), \Gamma'_1 = (g)V;$

б)  $a^2 = b^2 = -1, V/A \cong S, S \subseteq Sp(2, 2), \Gamma'_2 = (g)V.$

Рассмотрим случай а). Как известно [1],  $a = \begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix} \times E_2, b = = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \times E_2$ . Из  $v^{-1}av = \lambda ab$  следует, что  $\lambda = i$ , т. е. к полю  $P(\theta)$  предъявляется требование — оно должно содержать элемент четвертого порядка.

Из

$$\begin{matrix} v_1^{-1}av_1 = \lambda ab & \text{и} & v_2^{-1}av_2 = b \\ v_1^{-1}bv_1 = a & & v_2^{-1}bv_2 = a \end{matrix}$$

находим

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} E_2 & E_2 \\ E_2 & -E_2 \end{pmatrix}.$$

Из условий  $g^{-1}\theta g = -\theta$  и  $g^{-1}Ag = A$  легко отыскивается и элемент

$$g = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & 1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}.$$

Никаких ограничений на поле  $P(\theta)$  не налагается лишь в случае  $S = (s)$ ,  $s = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ . Однако тогда приходим к противоречию с исходной посылкой: максимальный абелев нормальный делитель построенной группы содержит  $P(\theta) \setminus 0$  в качестве истинной подгруппы.

В случае а) имеем

$$\Gamma'_1 = \{g, v_1, v_2, a, b, P(\theta) \setminus 0\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & 1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}, \right. \\ \left. \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} E_2 & E_2 \\ E_2 & -E_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} E_2 & \\ & -E_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} E_2 \\ E_2 \end{pmatrix}, P(\theta) \setminus 0 \right\}. \quad (8)$$

Рассмотрим теперь случай б), условия б) требуют, чтобы  $P(\theta)$  не содержало элементов четвертого порядка, но элемент  $(-1)$  представлялся бы в нем в виде суммы двух квадратов.

Из

$$\begin{aligned} v_1^{-1}av_1 = b, & \quad v_2^{-1}av_2 = b, \\ v_1^{-1}bv_1 = a & \quad v_2^{-1}bv_2 = ab \end{aligned}$$

находим

$$v_1 = \begin{pmatrix} \gamma & \delta-1 \\ \delta+1 & -\gamma \end{pmatrix} \times E_2, \quad v_2 = \begin{pmatrix} \gamma^2-\delta & \gamma\delta-1 \\ \gamma\delta+\gamma+\delta & \delta^2-\gamma \end{pmatrix} \times E_2, \\ -1 = \gamma^2 + \delta^2,$$

$$\Gamma'_2 = \left\{ g = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & 1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}, v_1, v_2, a = \begin{pmatrix} & -E_2 \\ E_2 & \end{pmatrix}, \right. \\ \left. b = \begin{pmatrix} \gamma & \delta \\ \delta & -\gamma \end{pmatrix} \times E_2, P(\theta) \setminus 0 \right\}. \quad (9)$$

**Теорема 3.** Если в квадратичном расширении  $P(\theta)$  поля  $P$  содержится элемент четвертого порядка, то в  $GL(4, P)$  с точностью до сопряженности имеется лишь одна максимальная примитивная разрешимая подгруппа  $\Gamma'_1$  (формула (8)), максимальный абелев нормальный делитель которой совпадает с мультипликативной группой поля  $P(\theta)$ .

Если в квадратичном расширении  $P(\theta)$  поля  $P$  нет элементов четвертого порядка, но элемент  $(-1)$  представим в виде суммы двух квадратов из  $P(\theta)$ , то в  $GL(4, P)$  с точностью до сопряженности имеется одна максимальная примитивная разрешимая подгруппа  $\Gamma'_2$  (формула (9)), максимальный абелев нормальный делитель которой совпадает с мультипликативной группой поля  $P(\theta)$ .

Если в  $P(\theta)$  нет элементов четвертого порядка и элемент  $(-1)$  не представим в виде суммы двух квадратов из  $P(\theta)$ , то в  $GL(4, P)$  нет примитивных разрешимых групп с максимальным абелевым нормальным делителем  $P(\theta) \setminus 0$ .

**З а м е ч а н и е.** Если характеристика поля  $P$  равна 2, то в  $GL(4, P)$  нет примитивных разрешимых групп при  $m < 4$ ,  $m = P(\theta) : P$ .

### Литература

1. Супруненко Д. А. Разрешимые и нильпотентные линейные группы. Минск, 1958.
2. Жаврид Г. П. ДАН БССР, 1967, т. XI, № 10, 873—877.
3. Bucht G. Die umfassendsten primitiven metazyklischen Kongruenzgruppen mit drei oder vier Variablen. Ark. f. Mat., 11, 1916, 1—96.
4. Dickson L. E. Linear groups. Leipzig, 1901.

Институт математики  
АН БССР

Поступило в редакцию  
25.XII 1967

В. В. БОБКОВ

**ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ  
 ПРИБЛИЖЕННОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ГУРСА  
 ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА**

В данной заметке предпринимается попытка перенести основную идею способа построения одношаговых правил приближенного решения обыкновенных дифференциальных уравнений, предложенного в статье [1], на случай дифференциальных уравнений с частными производными. В частности, для гиперболического уравнения второго порядка, записанного во второй канонической форме, приводятся правила приближенного решения задачи Гурса, позволяющие найти ее решение с локальной погрешностью достаточно высокого порядка малости относительно малости шага сетки.

Рассмотрим в прямоугольнике  $D \{0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b\}$  следующую задачу Гурса:

$$u_{xy} = f(x, y, u, p, q), \quad (1)$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad u(0, y) = \psi(y), \quad \varphi(0) = \psi(0), \quad (2)$$

где  $p = u_x$ ,  $q = u_y$ , а  $f$ ,  $\varphi$  и  $\psi$  — известные достаточно гладкие функции.

Пусть решение поставленной задачи известно (или найдено приближенно) в точках  $(x, y)$ ,  $(x+h, y)$ ,  $(x, y+h)$ ,  $x, y \geq 0$ ,  $h > 0$ . Будем искать его в точке  $(x+h, y+h)$ .

Опираясь на очевидное равенство

$$\begin{aligned} I(u) &\equiv u(x+h, y+h) - u(x+h, y) - u(x, y+h) + u(x, y) = \\ &= \int_y^{y+h} \int_x^{x+h} u_{\xi\eta}(\xi, \eta) d\xi d\eta, \end{aligned} \quad (3)$$

решение задачи в указанной точке будем искать приближенно в виде

$$\begin{aligned} u(x+h, y+h) &\approx u(x+h, y) + u(x, y+h) - u(x, y) + \\ &+ h^2 \sum_{i=1}^k a_i u_{\xi\eta}(x + \alpha_i h, y + \beta_i h), \end{aligned} \quad (4)$$

где  $k \geq 1$  — фиксированное целое число, а параметры  $a_i$ ,  $\alpha_i$ ,  $\beta_i$  ( $i=1, 2, \dots, k$ ) надлежит выбрать так, чтобы последнее приближенное равенство было по возможности более точным (в смысле порядка малости его остаточного члена относительно малости шага  $h$ ). Уравнения для определения искомых параметров  $a_i$ ,  $\alpha_i$ ,  $\beta_i$  ( $i=1, 2, \dots, k$ ) можно получить из сравнения соответствующих коэффициентов в следующих очевидных разложениях:

$$\begin{aligned}
 I(u) &= \sum_{j=2}^{\infty} \frac{h^j}{j!} \left[ \left( \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \eta} \right)^j u - \frac{\partial^j u}{\partial \xi^j} - \frac{\partial^j u}{\partial \eta^j} \right], \\
 &h^2 \sum_{i=1}^k \alpha_i u_{\xi \eta} (x + \alpha_i h, y + \beta_i h) = \\
 &= h^2 \sum_{i=1}^k \alpha_i \sum_{j=0}^{\infty} \frac{h^j}{j!} \left( \alpha_i \frac{\partial}{\partial \xi} + \beta_i \frac{\partial}{\partial \eta} \right)^j u_{\xi \eta}.
 \end{aligned}$$

Выбрав подходящие значения параметров  $\alpha_i, \beta_i$  ( $i = 1, 2, \dots, k$ ), мы сможем записать (более подробно на задаче выбора этих параметров мы остановимся ниже, при построении конкретных схем):

$$\begin{aligned}
 u(x+h, y+h) &\approx u(x+h, y) + u(x, y+h) - u(x, y) + \\
 &+ h^2 \sum_{i=1}^k \alpha_i f[x + \alpha_i h, y + \beta_i h, u(x + \alpha_i h, y + \beta_i h), \\
 &p(x + \alpha_i h, y + \beta_i h), q(x + \alpha_i h, y + \beta_i h)].
 \end{aligned}$$

Чтобы последнее приближенное равенство могло быть принято в качестве расчетного правила для нахождения  $u(x+h, y+h)$  с локальной погрешностью некоторого порядка малости относительно малости шага сетки  $h$ , нужно указать правила для нахождения  $u(x + \alpha_i h, y + \beta_i h)$ ,  $p(x + \alpha_i h, y + \beta_i h)$ ,  $q(x + \alpha_i h, y + \beta_i h)$ ,  $i = 1, 2, \dots, k$ , при этом эти правила могут иметь локальную погрешность с порядком малости на две единицы ниже, чем у исходного правила. При построении таких правил для нахождения  $u(x + \alpha_i h, y + \beta_i h)$ ,  $i = 1, 2, \dots, k$ , можно по-прежнему исходить из равенств типа (4). При нахождении же  $p(x + \alpha_i h, y + \beta_i h)$  и  $q(x + \alpha_i h, y + \beta_i h)$ ,  $i = 1, 2, \dots, k$ , совершенно аналогично случаю обыкновенных дифференциальных уравнений (подробнее об этом см. в [1]), можно пользоваться расчетными правилами, построенными соответственно на основании следующих приближенных равенств:

$$\begin{aligned}
 p(x', y' + h') &\approx p(x', y') + h' \sum_{i=1}^{k'} \alpha'_i u_{xy}(x', y' + \beta'_i h'), \\
 q(x'' + h'', y'') &\approx q(x'', y'') + h'' \sum_{i=1}^{k''} \alpha''_i u_{xy}(x'' + \alpha''_i h'', y'').
 \end{aligned}$$

Если подобным образом поступать и далее, то, поскольку требования к точности строимых приближенных равенств каждый раз снижаются, можно будет после конечного числа этапов приближенно выразить, наконец, искомое значение  $u(x+h, y+h)$  через известные значения решения исходной задачи Гурса.

Очевидно, что шаг  $h$  можно, вообще говоря, изменять на каждом этапе вычислений, при этом он не обязательно должен быть одинаковым по обоим координатным направлениям. Заметим также, что основной подход в построении расчетных правил, изложенный выше для случая задачи Гурса (1), (2), может быть перенесен на задачу Коши для исходного уравнения (1), а также на некоторые другие задачи.

Приведем в качестве примеров несколько простейших правил, построенных по предлагаемому методу.

1. Для того чтобы расчетное правило имело локальную погрешность порядка  $h^3$ , достаточно на выбор параметров  $a_i, \alpha_i, \beta_i$  ( $i = 1, 2, \dots, k$ ) наложить лишь единственное ограничение:

$$\sum_{i=1}^k a_i = 1. \quad (5)$$

Такое правило, например, можно получить, если пренебречь остаточными членами в следующих равенствах:

$$\begin{aligned} u(x+h, y+h) &= u(x+h, y) + u(x, y+h) - u + \\ &\quad + h^2 f(x, y, u, p, q) + O(h^3), \\ p(x+h, y+h) &= p(x+h, y) + O(h), \\ q(x+h, y+h) &= q(x, y+h) + O(h). \end{aligned}$$

Здесь и всюду  $u = u(x, y)$ ,  $p = p(x, y)$ ,  $q = q(x, y)$ .

2. Для того чтобы поднять на единицу порядок локальной погрешности правила, на выбор параметров дополнительно к (5) нужно наложить еще требования

$$\sum_{i=1}^k a_i \alpha_i = \frac{1}{2}, \quad \sum_{i=1}^k a_i \beta_i = \frac{1}{2}. \quad (6)$$

При  $k=1$  значения  $a_1 = 1$ ,  $\alpha_1 = \beta_1 = \frac{1}{2}$  будут искомыми. При  $k=2$  можно взять, например,  $a_1 = a_2 = \frac{1}{2}$ ,  $\alpha_1 = \beta_1 = 0$ ,  $\alpha_2 = \beta_2 = 1$ . Тогда будем иметь (этот случай удобнее для счета):

$$\begin{aligned} u(x+h, y+h) &= u(x+h, y) + u(x, y+h) - u + \\ &\quad + \frac{h^2}{2} \{f(x, y, u, p, q) + f[x+h, y+h, u(x+h, y) + \\ &\quad + u(x, y+h) - u, p(x+h, y+h), q(x+h, y+h)]\} + O(h^4), \\ p(x+h, y+h) &= p(x+h, y) + hf(x, y, u, p, q) + O(h^2), \\ q(x+h, y+h) &= q(x, y+h) + hf(x, y, u, p, q) + O(h^2). \end{aligned}$$

В последних двух равенствах вместо  $f(x, y, u, p, q)$  можно также брать соответственно  $f[x+h, y, u(x+h, y), p(x+h, y), q(x+h, y)]$  и  $f[x, y+h, u(x, y+h), p(x, y+h), q(x, y+h)]$ .

Следует, пожалуй, отметить, что здесь, как и в случае правила, приведенного в первом пункте, расчетные формулы для нахождения  $p(x+h, y+h)$  и  $q(x+h, y+h)$  могут быть без существенных изменений использованы и для нахождения граничных значений  $p(0, y+h)$  и  $q(x+h, 0)$ .

Расчетное правило, близкое по типу к только что выписанному, было получено ранее в работе [2]. При том же порядке локальной погрешности предлагаемое там правило менее экономично при счете, так как требует на каждом этапе вычислений нахождения пяти значений функции  $f(x, y, u, p, q)$  вместо двух в случае правила, выписанного выше.

В простейшем случае уравнения  $u_{xy} = f(x, y, u)$  предлагаемое правило принимает особенно удобный вид:

$$u(x+h, y+h) = u(x+h, y) + u(x, y+h) - u + \frac{h^2}{2} \{f(x, y, u) + f[x+h, y+h, u(x+h, y) + u(x, y+h) - u]\} + O(h^4).$$

Предлагаемый здесь подход позволяет строить также неявные правила для решения поставленной задачи. В случае уравнения  $u_{xy} = f(x, y, u)$  такое правило, например, можно получить, если пренебречь остаточным членом в следующем равенстве:

$$u(x+h, y+h) = u(x+h, y) + u(x, y+h) - u + \frac{h^2}{2} \{f(x, y, u) + f[x+h, y+h, u(x+h, y+h)]\} + O(h^4).$$

Неизвестное значение  $u(x+h, y+h)$  находится из последнего уравнения, вообще говоря, итерационно. Наличие множителя  $h^2$  обычно гарантирует быструю сходимость итераций.

3. Для того чтобы расчетное правило имело локальную погрешность порядка  $h^5$ , на выбор параметров  $a_i, \alpha_i, \beta_i$  ( $i = 1, 2, \dots, k$ ) дополнительно к (5), (6) нужно наложить еще требования

$$\sum_{i=1}^k a_i \alpha_i^2 = \frac{1}{3}, \quad \sum_{i=1}^k a_i \beta_i^2 = \frac{1}{3}, \quad \sum_{i=1}^k a_i \alpha_i \beta_i = \frac{1}{4}. \quad (7)$$

Одним из решений полученной системы уравнений при  $k = 5$ , например, является следующий набор чисел:

$$a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = \frac{1}{12}, \quad a_5 = \frac{2}{3}, \quad \alpha_1 = \alpha_2 = \beta_1 = \beta_3 = 0,$$

$$\alpha_3 = \alpha_4 = \beta_2 = \beta_4 = 1, \quad \alpha_5 = \beta_5 = \frac{1}{2}.$$

Приведем пример расчетного правила, построенного по этим значениям параметров, при этом для упрощения записей будем использовать обозначения

$$f_{m+s, n+t} = f(x_m + sh, y_n + th, u_{m+s, n+t}, p_{m+s, n+t}, q_{m+s, n+t}),$$

где  $0 \leq s, t \leq 1$ ,  $z_{m+s, n+t} \approx z(x_m + sh, y_n + th)$ ,  $z \sim u, p, q$ ;  $x_m \sim x, y_n \sim y$ :

$$u_{m+1, n+1} = u_{m+1, n} + u_{m, n+1} - u_{m, n} + \frac{h^2}{12} [f_{m, n} + f_{m+1, n} + f_{m, n+1} + f_{m+1, n+1} + h^2 f_{m, n}, p_{m+1, n+1}, q_{m+1, n+1}] + \frac{2}{3} h^2 f_{m+\frac{1}{2}, n+\frac{1}{2}},$$

$$u_{m+\frac{1}{2}, n+\frac{1}{2}} = u_{m+\frac{1}{2}, n-\frac{1}{2}} + u_{m-\frac{1}{2}, n+\frac{1}{2}} - u_{m-\frac{1}{2}, n-\frac{1}{2}} + h^2 f_{m-\frac{1}{2}, n-\frac{1}{2}},$$

$$\begin{aligned}
 p_{m+1\ n+1} &= p_{m+1\ n} + \frac{h}{2} [f_{m+1\ n} + f(x_m + h, y_n + h, u_{m+1\ n} + u_{m\ n+1} - u_{mn}, \\
 &\quad p_{m+1\ n} + hf_{m+1\ n}, q_{m\ n+1} + hf_{m\ n+1})], \\
 q_{m+1\ n+1} &= q_{m\ n+1} + \frac{h}{2} [f_{m\ n+1} + f(x_m + h, y_n + h, u_{m+1\ n} + u_{m\ n+1} - u_{mn}, \\
 &\quad p_{m+1\ n} + hf_{m+1\ n}, q_{m\ n+1} + hf_{m\ n+1})], \\
 p_{m+\frac{1}{2}\ n+\frac{1}{2}} &= p_{m+\frac{1}{2}\ n-\frac{1}{2}} + \frac{h}{2} \left[ f_{m+\frac{1}{2}\ n-\frac{1}{2}} + \right. \\
 &\quad \left. + f\left(x_m + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}, u_{m+\frac{1}{2}\ n-\frac{1}{2}} + u_{m-\frac{1}{2}\ n+\frac{1}{2}} - u_{m-\frac{1}{2}\ n-\frac{1}{2}}, \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. p_{m+\frac{1}{2}\ n-\frac{1}{2}} + hf_{m+\frac{1}{2}\ n-\frac{1}{2}}, q_{m-\frac{1}{2}\ n+\frac{1}{2}} + hf_{m-\frac{1}{2}\ n+\frac{1}{2}} \right) \right], \\
 q_{m+\frac{1}{2}\ n+\frac{1}{2}} &= q_{m-\frac{1}{2}\ n+\frac{1}{2}} + \frac{h}{2} \left[ f_{m-\frac{1}{2}\ n+\frac{1}{2}} + f\left(x_m + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}, \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. u_{m+\frac{1}{2}\ n-\frac{1}{2}} + u_{m-\frac{1}{2}\ n+\frac{1}{2}} - u_{m-\frac{1}{2}\ n-\frac{1}{2}}, p_{m+\frac{1}{2}\ n-\frac{1}{2}} + \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + hf_{m+\frac{1}{2}\ n-\frac{1}{2}}, q_{m-\frac{1}{2}\ n+\frac{1}{2}} + hf_{m-\frac{1}{2}\ n+\frac{1}{2}} \right) \right].
 \end{aligned}$$

При использовании только что приведенного расчетного правила приходится вести с шагом  $h$  две сетки точек: основную и вспомогательную (с дробными индексами), при этом вспомогательная сетка может вестись независимо от основной. Вспомогательная сетка, помимо того, что она необходима для построения основной сетки, дает также с локальной погрешностью порядка  $h^3$  дополнительную информацию об искомом решении и его частных производных первого порядка в промежуточных точках.

Способ построения этого правила выгодно отличается своей простотой от способа построения известного [3] ранее аналога правила типа Рунге — Кутты, имеющего тот же порядок локальной погрешности решения (различны и сами правила).

Приведенное расчетное правило должно быть, конечно, дополнено формулами для нахождения граничных значений  $p_{0\ n+1}$  и  $q_{m+1\ 0}$  ( $m, n = 0, 1, \dots$ ) основной сетки, а также граничных значений  $u_{\frac{1}{2}\ n+\frac{1}{2}}$ ,  $u_{m+\frac{1}{2}\ \frac{1}{2}}$ ,  $p_{\frac{1}{2}\ n+\frac{1}{2}}$ ,  $p_{m+\frac{1}{2}\ \frac{1}{2}}$ ,  $q_{\frac{1}{2}\ n+\frac{1}{2}}$ ,  $q_{m+\frac{1}{2}\ \frac{1}{2}}$  ( $m, n = 0, 1, \dots$ ) вспомогательной сетки. Следуя изложенной выше методике построения расчетных правил, для разыскания с локальной погрешностью порядка  $h^3$  интересующих нас граничных значений можно указать, например, следующие формулы:

$$p_{0\ n+1} = p_{0\ n} + \frac{h}{2} [f_{0\ n} + f(0, y_n + h, u_{0\ n+1}, p_{0\ n} + hf_{0\ n}, q_{0\ n+1})],$$

$$q_{m+1\ 0} = q_{m\ 0} + \frac{h}{2} [f_{m\ 0} + f(x_m + h, 0, u_{m+1\ 0}, p_{m+1\ 0}, q_{m\ 0} + hf_{m\ 0})],$$

$$p_{0\ n+\frac{1}{2}} = p_{0\ n} + \frac{h}{4} \left[ f_{0\ n} + f\left(0, y_n + \frac{h}{2}, u_{0\ n+\frac{1}{2}}, p_{0\ n} + \frac{h}{2} f_{0\ n}, q_{0\ n+\frac{1}{2}} \right) \right],$$

$$q_{m+\frac{1}{2}0} = q_{m0} + \frac{h}{4} \left[ f_{m0} + f \left( x_m + \frac{h}{2}, 0, u_{m+\frac{1}{2}0}, p_{m+\frac{1}{2}0}, q_{m0} + \frac{h}{2} f_{m0} \right) \right],$$

$$u_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}} = u_{\frac{1}{2}0} + u_{0\frac{1}{2}} - u_{00} + \frac{h^2}{4} f_{00},$$

$$u_{\frac{1}{2}n+\frac{1}{2}} = u_{\frac{1}{2}n-\frac{1}{2}} + u_{0n+\frac{1}{2}} - u_{0n-\frac{1}{2}} + \frac{h^2}{2} f_{0n-\frac{1}{2}},$$

$$u_{m+\frac{1}{2}\frac{1}{2}} = u_{m+\frac{1}{2}0} + u_{m-\frac{1}{2}\frac{1}{2}} - u_{m-\frac{1}{2}0} + \frac{h^2}{2} f_{m-\frac{1}{2}0},$$

$$p_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}} = p_{\frac{1}{2}0} + \frac{h}{4} \left[ f_{\frac{1}{2}0} + f \left( \frac{h}{2}, \frac{h}{2}, u_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}, p_{\frac{1}{2}0} + \frac{h}{2} f_{\frac{1}{2}0}, q_{0\frac{1}{2}} + \frac{h}{2} f_{0\frac{1}{2}} \right) \right],$$

$$q_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}} = q_{0\frac{1}{2}} + \frac{h}{4} \left[ f_{0\frac{1}{2}} + f \left( \frac{h}{2}, \frac{h}{2}, u_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}, p_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}, q_{0\frac{1}{2}} + \frac{h}{2} f_{0\frac{1}{2}} \right) \right],$$

$$p_{m+\frac{1}{2}\frac{1}{2}} = p_{m+\frac{1}{2}0} + \frac{h}{4} \left[ f_{m+\frac{1}{2}0} + f \left( x_m + \frac{h}{2}, \frac{h}{2}, u_{m+\frac{1}{2}\frac{1}{2}}, p_{m+\frac{1}{2}0} + \frac{h}{2} f_{m+\frac{1}{2}0}, q_{m-\frac{1}{2}\frac{1}{2}} + h f_{m-\frac{1}{2}\frac{1}{2}} \right) \right],$$

$$q_{m+\frac{1}{2}\frac{1}{2}} = q_{m-\frac{1}{2}\frac{1}{2}} + \frac{h}{2} \left[ f_{m-\frac{1}{2}\frac{1}{2}} + f \left( x_m + \frac{h}{2}, \frac{h}{2}, u_{m+\frac{1}{2}\frac{1}{2}}, p_{m+\frac{1}{2}\frac{1}{2}}, q_{m-\frac{1}{2}\frac{1}{2}} + h f_{m-\frac{1}{2}\frac{1}{2}} \right) \right],$$

$$q_{\frac{1}{2}n+\frac{1}{2}} = q_{0n+\frac{1}{2}} + \frac{h}{4} \left[ f_{0n+\frac{1}{2}} + f \left( \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}, u_{\frac{1}{2}n+\frac{1}{2}}, p_{\frac{1}{2}n-\frac{1}{2}} + h f_{\frac{1}{2}n-\frac{1}{2}}, q_{0n+\frac{1}{2}} + \frac{h}{2} f_{0n+\frac{1}{2}} \right) \right],$$

$$p_{\frac{1}{2}n-\frac{1}{2}} + h f_{\frac{1}{2}n-\frac{1}{2}}, q_{0n+\frac{1}{2}} + \frac{h}{2} f_{0n+\frac{1}{2}} \right],$$

$$p_{\frac{1}{2}n+\frac{1}{2}} = p_{\frac{1}{2}n-\frac{1}{2}} + \frac{h}{2} \left[ f_{\frac{1}{2}n-\frac{1}{2}} + f \left( \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}, u_{\frac{1}{2}n+\frac{1}{2}}, p_{\frac{1}{2}n-\frac{1}{2}} + h f_{\frac{1}{2}n-\frac{1}{2}}, q_{\frac{1}{2}n+\frac{1}{2}} \right) \right].$$

$$p_{\frac{1}{2}n-\frac{1}{2}} + h f_{\frac{1}{2}n-\frac{1}{2}}, q_{\frac{1}{2}n+\frac{1}{2}} \right].$$

Заметим, что в случае уравнения  $u_{xy} = f(x, y, u)$  приведенное правило принимает особенно простой и удобный вид. Своей простотой оно выгодно отличается от полученного ранее [4] правила для случая этого простейшего уравнения.

4. Приведем в заключение пример расчетного правила, имеющего локальную погрешность порядка  $h^6$ . Одношаговые правила такого порядка точности нам ранее не были известны для случая рассматриваемого уравнения.

На выбор параметров  $a_i, \alpha_i, \beta_i$  ( $i=1, 2, \dots, k$ ) в этом случае в дополнение к условиям (5)–(7) мы должны наложить еще следующие требования:

$$\sum_{i=1}^k a_i \alpha_i^3 = \frac{1}{4}, \quad \sum_{i=1}^k a_i \beta_i^3 = \frac{1}{4},$$

$$\sum_{i=1}^k a_i \alpha_i^2 \beta_i = \frac{1}{6}, \quad \sum_{i=1}^k a_i \alpha_i \beta_i^2 = \frac{1}{6}.$$

Легко непосредственно проверить, что при  $k=5$  значения параметров, приведенные в предыдущем пункте, удовлетворяют и этим дополнительным требованиям. Это позволяет указать интересующее нас правило, например, в следующем виде:

$$u_{m+1, n+1} = u_{m+1, n} + u_{m, n+1} - u_{m, n} + \frac{h^2}{12} [f_{m, n} + f_{m+1, n} + f_{m, n+1} +$$

$$+ f(x_m + h, y_n + h, \bar{u}_{m+1, n+1}, \bar{p}_{m+1, n+1}, \bar{q}_{m+1, n+1})] +$$

$$+ \frac{2}{3} h^2 f_{m+\frac{1}{2}, n+\frac{1}{2}},$$

$$\bar{u}_{m+1, n+1} = u_{m+1, n} + u_{m, n+1} - u_{m, n} + \frac{h^2}{2} [f_{m, n} + f(x_m + h, y_n + h, u_{m+1, n} +$$

$$+ u_{m, n+1} - u_{m, n}, p_{m+1, n} + h f_{m+1, n}, q_{m, n+1} + h f_{m, n+1})],$$

$$u_{m+\frac{1}{2}, n+\frac{1}{2}} = u_{m+\frac{1}{2}, n} + u_{m, n+\frac{1}{2}} - u_{m, n} + \frac{h^2}{8} \left[ f_{m, n} + f\left(x_m + \frac{h}{2}, y_n + \right.$$

$$\left. + \frac{h}{2}, u_{m+\frac{1}{2}, n} + u_{m, n+\frac{1}{2}} - u_{m, n}, p_{m+\frac{1}{2}, n} + \frac{h}{2} f_{m+\frac{1}{2}, n}, \right.$$

$$\left. q_{m, n+\frac{1}{2}} + \frac{h}{2} f_{m, n+\frac{1}{2}} \right],$$

$$p_{m+1, n+1} = p_{m+1, n} + \frac{h}{6} \left[ f_{m+1, n} + 4f\left(x_m + h, y_n + \right.$$

$$\left. + \frac{h}{2}, u_{m+1, n+\frac{1}{2}}, p_{m+1, n+\frac{1}{2}}, q_{m+1, n+\frac{1}{2}} \right) + f(x_m + h, y_n + h,$$

$$\bar{u}_{m+1, n+1}, \bar{p}_{m+1, n+1}, \bar{q}_{m+1, n+1}) \left. \right],$$

$$q_{m+1, n+1} = q_{m, n+1} + \frac{h}{6} \left[ f_{m, n+1} + 4f\left(x_m + \frac{h}{2}, y_n + h, u_{m+\frac{1}{2}, n+1}, \right.$$

$$p_{m+\frac{1}{2}, n+1}, q_{m+\frac{1}{2}, n+1} \left. \right) + f(x_m + h, y_n + h, \bar{u}_{m+1, n+1}, \bar{p}_{m+1, n+1}, \bar{q}_{m+1, n+1}) \left. \right],$$

$$p_{m+\frac{1}{2}, n+\frac{1}{2}} = p_{m+\frac{1}{2}, n-\frac{1}{2}} + \frac{h}{6} \left[ f_{m+\frac{1}{2}, n-\frac{1}{2}} + 4f\left(x_m + \frac{h}{2}, y_n, \right.$$

$$\begin{aligned}
& u_{m+\frac{1}{2}n}, p_{m+\frac{1}{2}n}, q_{m+\frac{1}{2}n} \Big) + f \left( x_m + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}, \right. \\
& \left. u_{m+\frac{1}{2}n+\frac{1}{2}}, \bar{p}_{m+\frac{1}{2}n+\frac{1}{2}}, \bar{q}_{m+\frac{1}{2}n+\frac{1}{2}} \right) \Big], \\
& q_{m+\frac{1}{2}n+\frac{1}{2}} = q_{m-\frac{1}{2}n+\frac{1}{2}} + \frac{h}{6} \left[ f_{m-\frac{1}{2}n+\frac{1}{2}} + \right. \\
& \left. + 4f \left( x_m, y_n + \frac{h}{2}, u_{m+\frac{1}{2}n+\frac{1}{2}}, p_{m+\frac{1}{2}n+\frac{1}{2}}, q_{m+\frac{1}{2}n+\frac{1}{2}} \right) + \right. \\
& \left. + f \left( x_m + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}, u_{m+\frac{1}{2}n+\frac{1}{2}}, \bar{p}_{m+\frac{1}{2}n+\frac{1}{2}}, \bar{q}_{m+\frac{1}{2}n+\frac{1}{2}} \right) \right],
\end{aligned}$$

$$u_{m+1n+\frac{1}{2}} = u_{m+1n} + u_{m+\frac{1}{2}n+\frac{1}{2}} - u_{m+\frac{1}{2}n} + \frac{h^2}{4} f_{m+\frac{1}{2}n},$$

$$u_{m+\frac{1}{2}n+1} = u_{m+\frac{1}{2}n+\frac{1}{2}} + u_{m+1n} - u_{m+\frac{1}{2}n} + \frac{h^2}{4} f_{m+\frac{1}{2}n},$$

$$\begin{aligned}
\bar{p}_{m+1n+1} = p_{m+1n} + \frac{h}{2} [f_{m+1n} + f(x_m + h, y_n + h, \bar{u}_{m+1n+1}, p_{m+1n} + \\
+ hf_{m+1n}, q_{m+1n} + hf_{m+1n})],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bar{q}_{m+1n+1} = q_{m+1n} + \frac{h}{2} [f_{m+1n} + f(x_m + h, y_n + h, \bar{u}_{m+1n+1}, p_{m+1n} + \\
+ hf_{m+1n}, q_{m+1n} + hf_{m+1n})],
\end{aligned}$$

$$p_{m+1n+\frac{1}{2}} = p_{m+1n} + \frac{h}{4} \left[ f_{m+1n} + f \left( x_m + h, y_n + \frac{h}{2}, \right. \right.$$

$$\left. \left. u_{m+1n+\frac{1}{2}}, p_{m+1n} + \frac{h}{2} f_{m+1n}, q_{m+\frac{1}{2}n+\frac{1}{2}} + hf_{m+\frac{1}{2}n} \right) \right],$$

$$q_{m+1n+\frac{1}{2}} = q_{m+\frac{1}{2}n+\frac{1}{2}} + \frac{h}{2} \left[ f_{m+\frac{1}{2}n+\frac{1}{2}} + f \left( x_m + h, y_n + \frac{h}{2}, \right. \right.$$

$$\left. \left. u_{m+1n+\frac{1}{2}}, p_{m+1n} + \frac{h}{2} f_{m+1n}, q_{m+\frac{1}{2}n+\frac{1}{2}} + hf_{m+\frac{1}{2}n} \right) \right],$$

$$p_{m+\frac{1}{2}n+1} = p_{m+\frac{1}{2}n} + \frac{h}{2} \left[ f_{m+\frac{1}{2}n} + f \left( x_m + \frac{h}{2}, \right. \right.$$

$$\left. \left. y_n + h, u_{m+\frac{1}{2}n+1}, p_{m+\frac{1}{2}n} + \right. \right.$$

$$\left. \left. + hf_{m+\frac{1}{2}n}, q_{m+\frac{1}{2}n+1} + \frac{h}{2} f_{m+\frac{1}{2}n} \right) \right],$$

$$q_{m+\frac{1}{2}n+1} = q_{m+\frac{1}{2}n} + \frac{h}{4} \left[ f_{m+\frac{1}{2}n} + f \left( x_m + \frac{h}{2}, \right. \right.$$

$$\begin{aligned}
& y_n + h, u_{m+\frac{1}{2}n+1}, p_{m+\frac{1}{2}n} + \\
& + hf_{m+\frac{1}{2}n}, q_{mn+1} + \frac{h}{2}f_{mn+1} \Big] , \\
\bar{p}_{m+\frac{1}{2}n+\frac{1}{2}} &= p_{m+\frac{1}{2}n} + \frac{h}{4} \left[ f_{m+\frac{1}{2}n} + f \left( x_m + \frac{h}{2}, \right. \right. \\
& y_n + \frac{h}{2}, u_{m+\frac{1}{2}n+\frac{1}{2}}, p_{m+\frac{1}{2}n} + \\
& \left. \left. + \frac{h}{2}f_{m+\frac{1}{2}n}, q_{mn+\frac{1}{2}} + \frac{h}{2}f_{mn+\frac{1}{2}} \right) \right] , \\
\bar{q}_{m+\frac{1}{2}n+\frac{1}{2}} &= q_{mn+\frac{1}{2}} + \frac{h}{4} \left[ f_{mn+\frac{1}{2}} + f \left( x_m + \frac{h}{2}, \right. \right. \\
& y_n + \frac{h}{2}, u_{m+\frac{1}{2}n+\frac{1}{2}}, p_{m+\frac{1}{2}n} + \\
& \left. \left. + \frac{h}{2}f_{m+\frac{1}{2}n}, q_{mn+\frac{1}{2}} + \frac{h}{2}f_{mn+\frac{1}{2}} \right) \right] .
\end{aligned}$$

Для проведения вычислений по этому расчетному правилу необходимо, как и в предыдущем пункте, заготовить с локальной погрешностью порядка  $h^4$  граничные значения  $p_{\frac{1}{2}n+1}$ ,  $q_{\frac{m+1}{2}0}$ ,  $u_{\frac{1}{2}n+\frac{1}{2}}$ ,  $u_{\frac{m+1}{2}\frac{1}{2}}$ ,  $p_{\frac{1}{2}n+\frac{1}{2}}$ ,  $p_{\frac{m+1}{2}\frac{1}{2}}$ ,

$q_{\frac{1}{2}n+\frac{1}{2}}$ ,  $q_{\frac{m+1}{2}\frac{1}{2}}$  ( $m, n = 0, 1, 2, \dots$ ). Это можно сделать многими спосо-

бами. Тогда, выполняя дальнейшие вычисления согласно выписанному выше правилу, мы найдем в точках основной сетки (с целыми индексами) искомое решение с локальной погрешностью порядка  $h^6$  и его первые частные производные с локальной погрешностью по порядку, как всегда здесь, на две единицы ниже. Кроме того, в точках вспомогательной сетки (индексы дробные) мы получим с локальной погрешностью порядка  $h^4$  дополнительную информацию о решении и его первых частных производных, а в точках пересечения основной и вспомогательной сеток (индексы смешанные) — аналогичную информацию с локальной погрешностью порядка  $h^3$ .

На этом пути можно строить и более точные расчетные правила, но это, пожалуй, имеет смысл делать разве лишь для уравнений вида  $u_{xy} = f(x, y, u)$ , так как в случае общего уравнения (1) очень быстро возрастает громоздкость правил с повышением их точности.

### Литература

1. Бобков В. В. «Изв. АН БССР», сер. физ.-матем. наук, № 4, 1967.
2. Day J. T. Comput. J., 9, № 1, 81—83, 1966.
3. Moore R. H. Arch. Ration. Mech. and Analysis. 7, № 1, 37—63, 1961.
4. Day J. T. Math. Computation, 17, № 84, 438—441, 1963.

Белорусский государственный университет  
им. В. И. Ленина

Поступило в редакцию  
30.XI 1967

В. Н. АБРАШИН

**О РАВНОМЕРНОЙ СХОДИМОСТИ МЕТОДА ГИПЕРПЛОСКОСТЕЙ  
 ПРИ РЕШЕНИИ НЕКОТОРЫХ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ЗАДАЧ  
 С САМОСОПРЯЖЕННЫМ ОПЕРАТОРОМ**

В статье доказывается равномерная сходимость многослойных схем метода гиперплоскостей (многомерный аналог метода прямых) при применении его к решению некоторых нестационарных граничных задач.

В работах [1]—[3] были получены аналогичные результаты в пространстве  $L_2$ .

Пусть в цилиндре  $\bar{Q}_T = \bar{D}_p \times [0 \leq t \leq T]$ , основанием которого является область  $\bar{D}_p \{x = (x_1, x_2, \dots, x_p)\}$  с границей  $\Gamma$  (причем при  $p \geq 2$   $\Gamma$  достаточно гладкая), существует единственное решение задачи

$$\frac{\partial^k u}{\partial t^k} = L(u) + f(x, t) \quad (x \in D_p, 0 \leq t \leq T), \quad (1)$$

$$\frac{\partial^i u(x, 0)}{\partial t^i} = \varphi_i(x) \quad (x \in \bar{D}_p, i = 0, 1, 2, \dots, k-1), \quad (2)$$

$$V_j(u)|_{\Gamma} = \psi_j(x, t) \quad (0 \leq t \leq T, j = 1, 2, \dots, m),$$

где  $k \geq 1$ ,  $L(u)$  — самосопряженный эллиптический оператор пространственных переменных порядка  $r = 2m \left( r > \frac{p}{2} \right)$ ,  $V_j(u)$  — линейное выражение,

не зависящее от  $t$ , причем в гильбертовом пространстве  $L_2(D_p)$  оператор  $L^*$ , определенный операцией  $L(u)$  и граничными условиями  $V_j(u)|_{\Gamma} = 0$ , самосопряжен и ограничен сверху ( $L^*u, u \leq \lambda(u, u)$  ( $\lambda < \infty$  — верхняя граница спектра)). Не ограничивая общности, будем считать  $V_j(u)|_{\Gamma} = 0$  ( $j = 1, 2, \dots, m$ ), ибо этого всегда можно достигнуть простой заменой неизвестной функции. Пусть также решение задачи (1), (2) имеет в области  $\bar{Q}_T$  непрерывную производную  $\frac{\partial^{\mu+k+1} u}{\partial t^{\mu+k+1}}$ , где  $\mu$  есть целое число, определяемое ниже.

Разобьем отрезок  $[0, T]$  шагом  $h > 0$  на  $N$  частей  $t = t_n = nh$ ,  $n = 1, 2, \dots, N$ ;  $N = \left[ \frac{T}{h} \right]$ . На гиперплоскостях  $t = t_n$  исходную задачу (1), (2) заменим  $s+1$  — слойной дифференциально-разностной схемой

$$\sum_{i=0}^s A_i u_{n+i} = h^k \sum_{i=0}^s B_i [L(u_{n+i}) + f_{n+i}] \quad (x \in D_p),$$

$$u_\rho(x) = v_\rho(x) \quad (\rho = 1, 2, \dots, s-1), \quad u_0(x) = \varphi(x) \quad (x \in \bar{D}_p),$$

$$V_j(u_{n+s})|_{\Gamma} = 0 \quad (0 \leq t \leq T), \quad f_{n+i} = f(x, t_{n+i}),$$

$$j = 1, 2, \dots, m; \quad n = 0, 1, \dots, N-s; \quad (3)$$

причем  $A_s = 1$ ,  $B_s > 0$ ,  $|A_0| + |B_0| \neq 0$  и

$$\sum_{i=0}^s i^v A_i = \begin{cases} 0 & \text{при } 0 \leq v \leq k-1 \text{ (здесь положено } 0^0 = 1), \\ v! \sum_{i=0}^s i^{v-k} B_i / (v-k)!, & k \leq v \leq \mu, \end{cases}$$

$$(\mu+1)! \sum_{i=0}^s i^{\mu+1-k} B_i / (\mu+1-k)! \neq \sum_{i=0}^s i^{\mu+1} A_i,$$

$\mu$  называется степенью точности схемы (3).

В (3) через  $u_{n+i} = u_{n+i}(x)$  обозначено приближенное значение функции  $u(x, t)$  при  $t = t_{n+i}$ , найденное по схеме (3).

В силу линейности операторов  $L$  и  $V_j$  погрешности метода  $\gamma_n = \gamma_n(x) = u(x, t_n) - u_n(x)$  являются решением задачи

$$h^k \sum_{i=0}^s B_i L(\gamma_{n+i}) = \sum_{i=0}^s A_i \gamma_{n+i} - h^k r_n, \quad x \in D_\rho, \quad (4)$$

$$\gamma_\rho = \sigma_\rho(x) \quad (\rho = 0, 1, \dots, s-1), \quad V_j(\gamma_{n+s})|_\Gamma = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, m), \\ n = 0, 1, \dots, N-s,$$

где функции  $\sigma_\rho(x)$  предполагаются непрерывно дифференцируемыми до  $r$ -го порядка. Заметим, что достаточно было бы считать непрерывными те производные, которые входят в оператор  $L(\sigma_\rho(x))$ ,

$$r_n = -h^{\mu+1-k} \sum_{i=1}^s \int_0^i [B_i (i-\tau)^{\mu-k} / (\mu-k)! - \\ - A_i (i-\tau)^\mu / \mu!] \frac{\partial^{\mu+1} u(x, t_n + \tau h)}{\partial t^{\mu+1}} d\tau.$$

Известно (см. [4] гл. 111, § 8; [5] гл. 11, § 3), что спектр оператора  $L(u)$  при  $V_j(u)|_\Gamma = 0$  ( $j = 1, 2, \dots, m$ ) действителен и дискретен. Собственные функции можно считать ортонормированными

$$L(\varphi_e) = -\lambda_e \varphi_e; \quad e = 1, 2, \dots, \lambda_e \geq -\lambda, \\ (\varphi_e, \varphi_\nu) = \int_{D_\rho} \varphi_e(x) \varphi_\nu(x) dx = \delta_{e\nu}.$$

Построим ряд Фурье функции  $\gamma_n(x)$  по собственным функциям оператора  $L^*$

$$\gamma_n^*(x) = \sum_{e=1}^{\infty} \varphi_e(x) \alpha_{en}, \quad n \geq 0, \quad (5)$$

где

$$\alpha_{en} = (\varphi_e, \gamma_n) = \int_{D_\rho} \varphi_e(x) \gamma_n(x) dx.$$

Ниже покажем, что ряд (5) сходится равномерно в  $\bar{D}_\rho$ , следовательно,  $\gamma_n^*(x) = \gamma_n(x)$ , и дадим оценку сверху абсолютному значению суммы этого ряда.

Для коэффициентов Фурье  $\alpha_{en}$  из уравнения (4) получим следующее разностное уравнение:

$$\sum_{i=0}^s (A_i + h^k \lambda_e B_i) \alpha_{en+i} = h^k \beta_{en}, \quad (6)$$

$$n = 0, 1, \dots, N-s; e = 1, 2, \dots;$$

где  $\beta_{en} = (\varphi_e, r_n)$ .

Мы будем считать  $h$  настолько малым, чтобы было  $1 - h^k \lambda_e B_s > 0$ .

Перепишем уравнение (6) в виде

$$\sum_{i=0}^s C_{ie} \alpha_{en+i} = R_{ne}, \quad n = 0, 1, \dots, N-s; e = 1, 2, \dots \quad (7)$$

и удовлетворим начальным условиям:

$$\alpha_{ev} = \sigma_{ev}^* \quad (v = 0, 1, \dots, s-1), \quad (8)$$

где

$$C_{ie} = \frac{A_i + h^k \lambda_e B_i}{1 + h^k \lambda_e B_s}, \quad R_{ne} = \frac{h^k \beta_{en}}{1 + h^k \lambda_e B_s},$$

$$\sigma_{ev}^* = (\varphi_e, \sigma_v).$$

Решение задачи (7), (8) можно записать в виде

$$\alpha_{en+s} = \sum_{j=0}^{s-1} p_{je}(n+s) \sigma_{ej}^* + \sum_{v=0}^n g_e(n+s-v) R_{ve}, \quad (9)$$

$$n = 0, 1, \dots, N-s; e = 1, 2, \dots,$$

где разностные функции Грина  $p_{je}(n)$  ( $j = 0, 1, \dots, s-1; n \geq 0$ ) являются решениями однородного разностного уравнения

$$\sum_{i=0}^s C_{ie} p_{je}(n+i) = 0 \quad (n = 0, 1, \dots, N-s) \quad (10)$$

при начальных условиях

$$p_{je}(v) = \delta_{jv} \quad (v = 0, 1, \dots, s-1; j = 0, 1, \dots, s-1), \quad (11)$$

а функция Грина  $g_e(n)$  ( $n \geq 0$ ) — решением неоднородного уравнения

$$\sum_{i=0}^s C_{ie} g_e(n+i) = \delta_{0n} \quad (n \geq 0) \quad (12)$$

при нулевых начальных условиях

$$g_e(v) \equiv 0 \quad (v = 0, 1, \dots, s-1). \quad (13)$$

Пусть в уравнении (12)  $n = 0$ , тогда

$$\sum_{i=0}^s C_{ie} g_e(i) = 1,$$

откуда в силу того, что  $C_{se} = 1$  и  $g_e(v) \equiv 0$  ( $v = 0, 1, \dots, s-1$ ), получим  $g_e(s) = 1$ . Следовательно, задачу (12), (13) при  $n \geq 1$  можно записать в виде

$$\sum_{i=0}^s C_{ie} g_e(n+i) = 0, \quad n = 1, 2, \dots, N-s; \quad (14)$$

$$g_e(v) = \delta_{sv} \quad (v = 1, 2, \dots, s).$$

Заметим, что поведение решений задач (10), (11) и (14) будет определяться расположением корней характеристического уравнения

$$\sum_{i=0}^s C_{ie} z^i = 0. \quad (15)$$

Если корни уравнения (15) лежат внутри или на границе единичного круга, причем корни, лежащие на границе, не являются кратными, то решения задач (10), (11) и (14) будут ограничены. Если же корни кратности  $\xi$  лежат на границе единичного круга, то решение наших задач будет расти по степенному закону  $n^{\xi-1}$  при  $n \rightarrow \infty$ .

Дифференциально-разностную схему (3) будем называть «устойчивой», если существует  $Q_e > 0$  и целое число  $q$  ( $k \leq q \leq \mu$ ) такие, что решения разностных задач (10), (11) и (14) удовлетворяют неравенству

$$g_e^*(n) = Q_e n^{q-1},$$

где

$$g_e^*(n) = \max_{0 \leq i < n} \{ |g_e(i)|, p_e(i) \}, \quad (16)$$

$$p_e(i) = \max_{0 \leq j \leq s-1} |p_{je}(i)|.$$

Для этого необходимо и достаточно, чтобы корни характеристического уравнения (15) принадлежали кругу  $|z| \leq 1$ , причем корни с кратностью, большей  $q$ , принадлежали открытому кругу  $|z| < 1$ .

Заметим также, что если корни уравнения (15) с кратностью  $i \leq q$  «не существенно» выходят за единичный круг, т. е.  $|z| \leq 1 + ch$ , то неравенство (16), вообще говоря, сохраняется.

Покажем, что имеет место следующая

*Теорема. Пусть функции  $\frac{\partial^{\mu+1} f}{\partial t^{\mu+1}}$ ,  $\frac{\partial^{\mu+1+k} u}{\partial t^{\mu+1+k}}$  непрерывны в  $\bar{Q}_T$ . Тогда*

*ряд Фурье  $\sum_{e=1}^{\infty} \beta_{en}^* \varphi_e$ , где  $\beta_{en}^* = \frac{1}{h^{\mu+1-k}} \beta_{en}$ , сходится регулярно в  $\bar{D}_p$ .*

*Доказательство.* Если к обеим частям уравнения (1) применить операцию дифференцирования  $\frac{\partial^{\mu+1}}{\partial t^{\mu+1}}$ , а затем полученное выражение умножить на

$$-\frac{1}{h} \left[ B_i \left( i - \frac{t-t_n}{h} \right)^{\mu-k} / (\mu-k)! - A_i \left( i - \frac{t-t_n}{h} \right)^{\mu} / \mu! \right],$$

проинтегрировать от  $t_n$  до  $t_{n+i}$  ( $i = 1, 2, \dots, s$ ) и просуммировать от 1 до  $s$  (также следует преобразовать и граничные условия), то получим

$$L(r_n^*) = f_n^*(x) \quad (x \in D_p), \quad (17)$$

$$V_j(r_n^*)|_{\Gamma} = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, m), \quad n = 0, 1, \dots, N-s;$$

где

$$r_n^* = \frac{r_n}{h^{\mu+1-k}},$$

$$f_n^*(x) = - \sum_{i=1}^s \int_0^i [B_i (i-\tau)^{\mu-k} / (\mu-k)! - A_i (i-\tau)^{\mu} / \mu!] \times \\ \times \left[ \frac{\partial^{\mu+k+1} u(x, t_n + \tau h)}{\partial t^{\mu+k+1}} + \frac{\partial^{\mu+1} f(x, t_n + \tau h)}{\partial t^{\mu+1}} \right] d\tau.$$

Умножив уравнение (17) на соответствующую оператору  $L^*$  функцию Грина  $G(x, \xi)$  (см. [5], гл. 111) и интегрируя на области  $D_p$ , убеждаемся, что  $r_n^*$  истокорпредставимы через  $G(x, \xi)$  и, следовательно (см. [6] стр. 84; [5] гл. 111, § 5), разлагаются в регулярно сходящийся ряд по собственным функциям оператора  $L^*$ .

Теорема доказана.

Заметим, что если на гиперплоскостях  $t = t_v$  ( $v = 0, 1, \dots, s-1$ ),  $\gamma_v(x) = \sigma_v(x) = h^\mu \alpha_v^{**}(x)$ , то регулярная сходимость ряда  $\sum_{e=1}^{\infty} \Phi_e \alpha_{ev}^*$ , где  $\alpha_{ev}^* = \frac{1}{h^\mu} \sigma_{ev}^*$  ( $v = 0, 1, \dots, s-1$ ), следует из того, что функция  $\sigma_v^{**}(x)$  раз непрерывно дифференцируема по соответствующим пространственным переменным и удовлетворяет условию

$$V_j(\sigma_v^{**})|_{\Gamma} = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, m).$$

Теперь покажем, что ряд Фурье (15) сходится равномерно в  $\bar{D}_p$ :

$$\begin{aligned} |Y_{n+s}^*(x)| &= \left| \sum_{e=1}^{\infty} \Phi_e \alpha_{en+s}^* \right| = \left| \sum_{e=1}^{\infty} \left[ \sum_{j=0}^{s-1} p_{je} \sigma_{ej}^* \Phi_e + \right. \right. \\ &+ \left. \sum_{i=0}^n g_e(n+s-i) R_{ie} \Phi_e \right] \Big| \leq \sum_{e=1}^{\infty} \sum_{j=0}^{s-1} |p_{je}(n+s) \sigma_{ej}^* \Phi_e| + \\ &+ \sum_{e=1}^{\infty} \frac{h^k}{1+h^k \lambda_e B_s} \sum_{i=0}^n |g_e(n+s-i) \beta_{ei} \Phi_e| = \\ &= \sum_{j=0}^{s-1} \sum_{e=1}^{\infty} |p_{je}(n+s) \sigma_{ej}^* \Phi_e| + \sum_{i=0}^n \sum_{e=1}^{\infty} \frac{h^k}{1+h^k \lambda_e B_s} \times \\ &\times |g_e(n+s-i) \beta_{ei} \Phi_e| \leq h^\mu n^{q-1} Q \left[ \sum_{j=0}^{s-1} \bar{\sigma}_j + M \sum_{i=0}^n h \bar{\beta}_i \right], \end{aligned} \quad (18)$$

где

$$\bar{\sigma}_j = \sum_{e=1}^{\infty} |\Phi_e \alpha_{ej}^*| \quad (j = 0, 1, \dots, s-1), \quad \bar{\beta}_i = \sum_{e=1}^{\infty} |\Phi_e \beta_{ei}^*|, \quad (19)$$

$$M = \frac{1}{1-h^k \lambda B_s}, \quad Q = \sup_e Q_e.$$

Так как ряды (19) сходятся равномерно в  $\bar{D}_p$ , то из (18) непосредственно следует, что ряд Фурье (5) сходится равномерно в  $\bar{D}_p$  и, следовательно,  $Y_n^*(x) = Y_n(x)$ .

Из выше доказанной теоремы следует, что  $\gamma_n(x)$  удовлетворяет уравнению (4).

Итак, мы получили, что для погрешности метода имеет место следующая оценка:

$$|Y_{n+s}(x)| \leq h^{\mu+1-q} t_n^{q-1} Q \left( \sum_{v=0}^{s-1} \bar{\sigma}_v(x) + M t_{n+1} \bar{\beta}(x) \right) = O(h^{\mu+1-q}), \quad (20)$$

$$x \in \bar{D}_p; \quad n = 0, 1, \dots, N-s;$$

где

$$\begin{aligned}\bar{\sigma}_v(x) &= \sum_{e=1}^{\infty} |\varphi_e \alpha_{ev}^*| \leq G \sqrt{\int_{D_p} L^2(\sigma_v^{**}) dx}, \\ \bar{\beta}(x) &= \max_{0 < n < N-s} \sum_{e=1}^{\infty} |\varphi_e \beta_{en}^*| \leq G \max_{0 < n < N-s} \sqrt{\int_{D_p} f^{**}(x) dx}, \\ G &= \sqrt{\int_{D_p} G^2(x, \xi) d\xi} \leq C < +\infty.\end{aligned}$$

Из оценки (20) непосредственно следует, что при  $h \rightarrow 0$  приближенное решение  $u_{n+s}(x)$  ( $n = 0, 1, \dots, N-s$ ) сходится к точному  $u(x, t)$  равномерно со скоростью порядка  $h^{\mu+1-q}$ .

Замечание 1. Для равномерной сходимости метода, по-видимому, достаточно существования непрерывной производной  $\frac{\partial^{\mu+1}u}{\partial t^{\mu+1}}$ .

Например, рассмотрим следующую задачу:

$$\begin{aligned}L(u) &= (p(x)u_x)_x - g(x)u = u_t - f(x, t) \\ (0 < x < 1, \quad 0 \leq t \leq T),\end{aligned}\tag{21}$$

$$u(x, 0) = \varphi(x) \quad (0 \leq x \leq 1),$$

$$u(0, t) = \psi_1(t), \quad u(1, t) = \psi_2(t) \quad (0 \leq t \leq T),$$

где  $p(x) > 0$ ,  $g(x) \geq 0$ ,  $p, p', g \in C[0, 1]$ .

Исследуем сходимость схемы (3) метода прямых для задачи (21) при условии, что  $\frac{\partial^{\mu+1}u}{\partial t^{\mu+1}}$  непрерывна в  $\Pi$  ( $0 \leq x \leq 1, 0 \leq t \leq T$ ).

Из выражения (18) получим

$$\begin{aligned}|\gamma_{n+s}^*(x)| &\leq \sum_{j=0}^{s-1} \sum_{e=1}^{\infty} |p_{je}(n+s) \sigma_{ej}^* \varphi_e| + \sum_{i=0}^n \sum_{e=1}^{\infty} \frac{h}{1+h\lambda_e B_s} \times \\ &\times |g_e(n+s-i) \beta_{ei} \varphi_e| \leq n^{q-1} Q \left( h^{\mu} \sum_{j=1}^{s-1} \bar{\sigma}_j + \right. \\ &\left. + \varphi^2 h^{\mu} t_{n+1} M_{\mu+1} \sum_{e=1}^{\infty} \frac{1}{1+h\lambda_e B_s} \right),\end{aligned}\tag{22}$$

где (см. [6], стр. 562)

$$\varphi = \max_{1 \leq e < \infty} \max_{0 < x < 1} |\varphi_e(x)|,$$

$$\varphi_e(x) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt[4]{p(x)}} \sin \left[ e\pi \int_0^x \sqrt{\frac{1}{p(x)}} dx \right] + \frac{\tilde{r}_e(x)}{e}$$

$\tilde{r}_e(x)$  ограничена по абсолютной величине при всех  $e$  и всех  $x$  из  $[0, 1]$ ,

$$\lambda_e \geq e^2 \pi^2 p + q, \quad p = \min_{\Pi} p(x), \quad q = \min_{\Pi} g(x),$$

$$M_{\mu+1} = \max_{0 < n < N-s} \max_{0 < x < 1} |r_n^*|.$$

Теперь рассмотрим ряд

$$\sum_{e=1}^{\infty} \frac{h^{\frac{1}{2}}}{1+h\lambda_e B_s} \leq \sum_{e=1}^{\infty} \frac{h^{\frac{1}{2}}}{1+he^2\pi^2\rho}. \quad (23)$$

Нетрудно убедиться, что для ряда (23) имеет место следующая оценка:

$$\sum_{e=1}^{\infty} \frac{h^{\frac{1}{2}}}{1+he^2\pi^2\rho} \leq \frac{1}{2\rho^{\frac{1}{2}}} + \frac{h^{\frac{1}{2}}}{1+h\pi^2\rho} = \xi.$$

Таким образом, для погрешности метода получим

$$\begin{aligned} |\gamma_{n+s}(x)| &\leq h^{\mu+\frac{1}{2}-q} t_{n+1}^{q-1} Q \left( h^{\frac{1}{2}} \sum_{j=1}^{s-1} \bar{\sigma}_j + \right. \\ &\left. + \varphi^2 t_{n+1} M_{\mu+1} \xi \right) = O \left( h^{\mu+\frac{1}{2}-q} \right), \\ 0 &\leq x \leq 1, \quad n = 0, 1, \dots, N-s. \end{aligned} \quad (24)$$

Из оценки (24) также следует равномерная сходимость метода прямых, однако по сравнению с оценкой (20) порядок погрешности здесь на полпорядка ниже, правда, при этом мы требуем от функции ее меньшей гладкости.

Замечание 2. Теперь для задачи (21) рассмотрим схему Рунге

$$\begin{aligned} L(u_{n+1}) &= h^{-1}(u_{n+1} - u_n) - f(x, t_{n+1}) \quad (0 < x < 1), \\ u_0 &= \varphi(x) \quad (0 \leq x \leq 1), \end{aligned} \quad (25)$$

$$u_{n+1}(0) = \psi_1(t_{n+1}), \quad u_{n+1}(1) = \psi_2(t_{n+1}), \quad n = 0, 1, \dots, N-1.$$

Погрешности метода в этом случае являются решениями следующих задач:

$$\begin{aligned} \gamma_{n+1} - \gamma_n &= hL(\gamma_{n+1}) + hr_n \quad (0 < x < 1), \\ \gamma_0 &= 0 \quad (0 \leq x \leq 1) \end{aligned}$$

$$\gamma_{n+1}(0) = 0, \quad \gamma_{n+1}(1) = 0, \quad n = 0, 1, \dots, N-1,$$

где

$$r_n = h \int_0^1 \tau \frac{\partial^2 u(x, t_n + \tau h)}{\partial t^2} d\tau,$$

а разностная задача (7) будет иметь вид

$$\begin{aligned} \alpha_{en+1} &= \eta_e \alpha_{en} + h \eta_e \beta_{en}, \\ \alpha_{e0} &= 0, \quad n = 0, 1, \dots, N-1; \end{aligned} \quad (26)$$

где

$$\eta_e = \frac{1}{1+h\lambda_e}.$$

Решая задачу (26), получим

$$\alpha_{en+1} = h \sum_{i=0}^n \eta_e^{n-i+1} \beta_{ei}, \quad n = 0, 1, \dots, N-1.$$

Выражение (18) в данном случае будет иметь вид

$$|\gamma_{n+1}^*(x)| = \left| \sum_{e=1}^{\infty} \varphi_e \alpha_{en+1} \right| \leq h M_2 \varphi^2 \sum_{e=1}^{\infty} h \sum_{i=0}^n \eta_e^{n-i+1},$$

$$n = 0, 1, \dots, N-1,$$

где

$$M_2 = \max_{0 < n < N-1} \max_{0 < x < 1} \frac{1}{h} |r_n|.$$

Теперь рассмотрим ряд

$$h \sum_{i=0}^n \eta_e^{n-i+1} = h \left[ \frac{1}{1+h\lambda_e} + \frac{1}{(1+h\lambda_e)^2} + \dots + \right. \\ \left. + \frac{1}{(1+h\lambda_e)^{n+1}} \right] \leq h \frac{\frac{1}{1+h\lambda_e}}{1 - \frac{1}{1+h\lambda_e}} = \frac{1}{\lambda_e}.$$

Итак, сходимость схемы Рунге для задачи (21) будет следовать из сходимости ряда  $\sum_{e=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_e}$ .

Нетрудно проверить, что

$$\sum_{e=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_e} \leq \sum_{e=1}^{\infty} \frac{1}{e^2 \pi^2 \rho} = \frac{1}{6\rho}.$$

Таким образом, для погрешности схемы Рунге мы получаем следующую оценку:

$$|\gamma_{n+1}(x)| \leq h M_2 \varphi^2 \frac{1}{6\rho}, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad n = 0, 1, \dots, N-1;$$

отсюда следует равномерная сходимость схемы со скоростью порядка  $h$ .

Заметим, что равномерная сходимость схемы Рунге для задачи (21) рассматривалась в работе [7], однако там существенно использовалось то, что оператор  $L$  второго порядка. При нашем подходе оператор  $L$  может быть и более высокого порядка, при этом сходимость схемы Рунге будет следовать

непосредственно из сходимости ряда  $\sum_{e=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_e}$ .

Автор выражает благодарность В. И. Крылову за внимание к работе и ряд ценных замечаний.

### Литература

1. Крылов В. И., Лисковец О. А. ДАН БССР, 8, № 6, 1964.
2. Лисковец О. А. ЖВММФ, 5, № 2, 1965.
3. Лисковец О. А. ДУ, 1, № 2, 1965.
4. Морен К. Методы гильбертова пространства. Изд. «Мир», М., 1965.
5. Березанский Ю. М. Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов. Изд. «Наукова думка», Киев, 1965.
6. Смирнов В. И. Курс высшей математики, 4, Гостехиздат, М., 1957.
7. Костюкович Е. Х. Канд. дисс., БГУ, Минск, 1958.

А. А. БУРДУН

**О КРИВИЗНЕ НЕГОЛОНОМНОЙ  
 ПРОСТРАНСТВЕННОПОДОБНОЙ ГИПЕРПОВЕРХНОСТИ  
 В ПРОСТРАНСТВЕ МИНКОВСКОГО**

В пространстве Минковского с метрическим тензором

$$g_{ij} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1) \quad (i, j, k, \dots = 0, 1, 2, 3) \quad (1)$$

уравнения инфинитезимальных смещений репера имеют вид

$$d\bar{M} = \omega^i \bar{e}_i, \quad d\bar{e}_i = \omega^j_i \bar{e}_j \quad (2)$$

(суммирование по повторяющимся индексам), где  $\omega^i$ ,  $\omega^j_i$  — формы Пфаффа [1], удовлетворяющие условиям

$$\begin{aligned} \omega^\beta_\alpha + \omega^\alpha_\beta &= 0, \quad \omega^0_\alpha - \omega^\alpha_0 = 0, \\ \omega^0_0 = \omega^1_1 = \omega^2_2 = \omega^3_3 &= 0, \quad (\alpha, \beta \dots = 1, 2, 3) \end{aligned} \quad (3)$$

и уравнениям структуры

$$D \omega^i = [\omega^k \omega^i_k], \quad D \omega^j_i = [\omega^k \omega^j_k - \omega^k_i \omega^j_k] \quad (4)$$

Гиперповерхность, ортогональная временноподобному вектору  $\bar{e}_0$  репера (2), называется пространственноподобной. Ее уравнение

$$\omega^0 = 0. \quad (5)$$

Если уравнение (5) не вполне интегрируемое, то гиперповерхность называется неголономной.

Неподвижность точки  $M$  на гиперповерхности с закрепленным вектором нормали  $\bar{e}_0$  обеспечивается равенствами

$$\omega^1 = \omega^2 = \omega^3 = \omega^1_0 = \omega^2_0 = \omega^3_0 = 0, \quad (6)$$

следовательно, эти формы на гиперповерхности являются главными. Приняв  $\omega^\alpha$  за базисные формы, получим следующие зависимости

$$\omega^\alpha = \gamma^\alpha_{0\beta} \omega^\beta, \quad (\gamma^\alpha_{0\beta} = \gamma^\alpha_{\beta 0}). \quad (7)$$

Продифференцировав внешне уравнения (7) с учетом уравнений структуры (4), получим после использования леммы Картана [1]

$$\delta \gamma^\alpha_{0\beta} = \gamma^\alpha_{0\nu} \pi^\nu_\beta - \gamma^\mu_{0\beta} \pi^\alpha_\mu, \quad (8)$$

где  $\delta$  и  $\pi^\alpha_\beta$  — символ дифференцирования и дифференциальные формы, соответствующие вторичным параметрам.

Из системы (8) видно, что величины  $(\gamma^\alpha_{0\beta})$  образуют тензор [2].

Дифференцируя внешне главные формы  $\omega^\alpha$ ,  $\omega_0^\alpha$  с учетом уравнений структуры, находим их вариации при изменении вторичных форм

$$\delta\omega^\alpha = -\omega^\beta \pi_{\beta}^\alpha, \quad \delta\omega_0^\alpha = -\omega_0^\beta \pi_{\beta}^\alpha. \quad (9)$$

Отсюда видно, что системы форм  $\omega^\alpha$  и  $\omega_0^\alpha$  образуют своего рода одновалентные тензоры

$$\bar{\omega} = \{\omega^1, \omega^2, \omega^3\}, \quad \bar{\Omega} = \{\omega_0^1, \omega_0^2, \omega_0^3\}, \quad (10)$$

из которых образуются следующие инвариантные формы гиперповерхности:

$$F_1 = (\bar{\omega})^2 = (\omega^1)^2 + (\omega^2)^2 + (\omega^3)^2, \quad (11)$$

$$F_2 = (\bar{\omega}\bar{\Omega}) = \omega^\alpha \omega_0^\alpha, \quad (12)$$

$$F_3 = (\bar{\Omega})^2 = (\omega_0^1)^2 + (\omega_0^2)^2 + (\omega_0^3)^2, \quad (13)$$

$$F_4 = [\bar{\omega}\bar{\Omega}]^2 = (\omega_0^3\omega^2 - \omega_0^2\omega^3)^2 + (\omega_0^1\omega^3 - \omega_0^3\omega^1)^2 + (\omega_0^2\omega^1 - \omega_0^1\omega^2)^2. \quad (14)$$

Так как

$$[\bar{\omega}\bar{\Omega}]^2 = (\bar{\omega})^2 (\bar{\Omega})^2 - (\bar{\omega}\bar{\Omega})^2,$$

то инвариантные формы связаны соотношением

$$F_4 = F_1 F_3 - (F_2)^2. \quad (15)$$

Первая и вторая кривизны геодезической I рода (нормальные кривизны гиперповерхности) вычисляются по формулам [3]

$$k_1 = F_2/F_1, \quad (16)$$

$$k_2^2 = F_4/(F_1)^2. \quad (17)$$

Продифференцировав по  $\omega^\alpha$  равенство (16) с учетом значений форм (11), (12) и (7), получим следующую систему для определения стационарных значений кривизны  $k_1$ :

$$2(\gamma_{11}^0 - k_1)\omega^1 + \gamma_{(12)}^0\omega^2 + \gamma_{(13)}^0\omega^3 = 0,$$

$$\gamma_{(21)}^0\omega^1 + 2(\gamma_{22}^0 - k_1)\omega^2 + \gamma_{(23)}^0\omega^3 = 0, \quad (18)$$

$$\gamma_{(31)}^0\omega^1 + \gamma_{(32)}^0\omega^2 + 2(\gamma_{33}^0 - k_1)\omega^3 = 0.$$

Линии на неголономной гиперповерхности, вдоль которых нормальная кривизна принимает стационарные значения, называются линиями кривизны I рода. Исключив из системы (18)  $k_1$ , получим уравнения таких линий

$$\frac{\gamma_{(1\alpha)}^0 \omega^\alpha}{\omega^1} = \frac{\gamma_{(2\alpha)}^0 \omega^\alpha}{\omega^2} = \frac{\gamma_{(3\alpha)}^0 \omega^\alpha}{\omega^3}. \quad (19)$$

Если выполняются условия

$$\gamma_{(12)}^0 = \gamma_{21}^0 + \gamma_{12}^0 = 0, \quad \gamma_{(23)}^0 = \gamma_{32}^0 + \gamma_{23}^0 = 0, \quad (20)$$

$$\gamma_{(31)}^0 = \gamma_{13}^0 + \gamma_{31}^0 = 0, \quad \gamma_{11}^0 \neq \gamma_{22}^0 \neq \gamma_{33}^0,$$

то линии кривизны I рода совпадают с координатными линиями и репер становится каноническим [4], [5].

Из системы (18) легко получаются выражения для средней, смешанной и полной кривизн гиперповерхности соответственно [3], [4]:

$$H_1 = \gamma_{11}^0 + \gamma_{22}^0 + \gamma_{33}^0, \quad (21)$$

$$R_1 = \gamma_{11}^0 \gamma_{22}^0 + \gamma_{22}^0 \gamma_{33}^0 + \gamma_{33}^0 \gamma_{11}^0, \quad (22)$$

$$K_1 = \gamma_{11}^0 \gamma_{22}^0 \gamma_{33}^0. \quad (23)$$

При условиях (20) инварианты  $K_g$  (гауссова кривизна) и  $H_2^2$  (квадрат вектора кручения гиперповерхности) [3] равны

$$K_g = \gamma_{11}^0 \gamma_{22}^0 \gamma_{33}^0 + \gamma_{11}^0 (\gamma_{23}^0)^2 + \gamma_{22}^0 (\gamma_{13}^0)^2 + \gamma_{33}^0 (\gamma_{12}^0)^2, \quad (24)$$

$$H_2^2 = 4[(\gamma_{12}^0)^2 + (\gamma_{23}^0)^2 + (\gamma_{31}^0)^2]. \quad (25)$$

Линиями кривизны II рода неголономной гиперповерхности называются линии, вдоль которых нормали к гиперповерхности образуют развертывающиеся поверхности. Вдоль линий кривизны II рода вторая нормальная кривизна обращается в нуль; следовательно, их уравнения с учетом формул (17) и (14) имеют вид

$$\frac{\gamma_{1\alpha}^0 \omega^\alpha}{\omega^1} = \frac{\gamma_{2\alpha}^0 \omega^\alpha}{\omega^2} = \frac{\gamma_{3\alpha}^0 \omega^\alpha}{\omega^3}. \quad (26)$$

Линии кривизны I и II рода совпадают, если

$$\gamma_{21}^0 - \gamma_{12}^0 = 0, \quad \gamma_{31}^0 - \gamma_{13}^0 = 0, \quad \gamma_{23}^0 - \gamma_{32}^0 = 0, \quad (27)$$

а это условия голономности гиперповерхности (5).

Если обе части соотношения (15) разделить на  $(F_1)^2$ , то с учетом формул (16) и (17) получим

$$k_1^2 + k_2^2 = F_2/F_1. \quad (28)$$

Величину  $\tau = k_1^2 + k_2^2$  назовем квадратичной нормальной кривизной гиперповерхности. Поступая так же, как и для первой нормальной кривизны, получим систему для определения стационарных значений кривизны  $\tau$

$$\begin{aligned} [(\bar{a}_1)^2 - \tau] \omega^1 + (\bar{a}_1 \bar{a}_2) \omega^2 + (\bar{a}_1 \bar{a}_3) \omega^3 &= 0, \\ (\bar{a}_2 \bar{a}_1) \omega^1 + [(\bar{a}_2)^2 - \tau] \omega^2 + (\bar{a}_2 \bar{a}_3) \omega^3 &= 0, \\ (\bar{a}_3 \bar{a}_1) \omega^1 + (\bar{a}_3 \bar{a}_2) \omega^2 + [(\bar{a}_3)^2 - \tau] \omega^3 &= 0, \end{aligned} \quad (29)$$

где

$$\begin{aligned} \bar{a}_1 &= \frac{d\bar{e}_0}{ds_1} \Big|_{\substack{\omega^2=\omega^3=0 \\ \omega^1=ds_1}} = \gamma_{01}^\alpha \bar{e}_\alpha, & \bar{a}_2 &= \frac{d\bar{e}_0}{ds_2} \Big|_{\substack{\omega^1=\omega^3=0 \\ \omega^2=ds_2}} = \gamma_{02}^\alpha \bar{e}_\alpha, \\ \bar{a}_3 &= \frac{d\bar{e}_0}{ds_3} \Big|_{\substack{\omega^1=\omega^2=0 \\ \omega^3=ds_3}} = \gamma_{03}^\alpha \bar{e}_\alpha. \end{aligned} \quad (30)$$

Исключив из системы (29)  $\omega^\alpha$ , получим кубическое уравнение для определения стационарных значений  $\tau$ :

$$\begin{aligned} \tau^3 - \tau^2 [(\bar{a}_1)^2 + (\bar{a}_2)^2 + (\bar{a}_3)^2] + \tau [(\bar{a}_1 \bar{a}_2)^2 + (\bar{a}_2 \bar{a}_3)^2 + \\ + (\bar{a}_3 \bar{a}_1)^2] - (\bar{a}_1 \bar{a}_2 \bar{a}_3)^2 = 0. \end{aligned} \quad (31)$$

Инварианты

$$H_3 = \tau_1 + \tau_2 + \tau_3 = (\bar{a}_1)^2 + (\bar{a}_2)^2 + (\bar{a}_3)^2, \quad (32)$$

$$R_3 = \tau_1\tau_2 + \tau_2\tau_3 + \tau_3\tau_1 = [\bar{a}_1\bar{a}_2]^2 + [\bar{a}_2\bar{a}_3]^2 + [\bar{a}_3\bar{a}_1]^2, \quad (33)$$

$$K_3 = \tau_1 \cdot \tau_2 \cdot \tau_3 = (\bar{a}_1\bar{a}_2\bar{a}_3)^2 \quad (34)$$

назовем соответственно средней, смешанной и полной квадратичными кривизнами неголономной гиперповерхности. Раскрывая выражения (32)—(34) с учетом равенств (30) и значений инвариантов (21)—(25), получим

$$H_3 = H_1^2 - 2R_1 + \frac{1}{2} H_2^2, \quad (35)$$

$$K_3 = K_g^2, \quad (36)$$

$$R_3 = \left( \frac{1}{4} H_2^2 \right)^2 + 2[(\gamma_{11}^0 \gamma_{23}^0)^2 + (\gamma_{22}^0 \gamma_{13}^0)^2 + (\gamma_{33}^0 \gamma_{12}^0)^2] + \\ + \gamma_{11}^0 \gamma_{22}^0 (\gamma_{12}^0)^2 + \gamma_{11}^0 \gamma_{33}^0 (\gamma_{13}^0)^2 + \gamma_{22}^0 \gamma_{33}^0 (\gamma_{23}^0)^2 + \\ + (\gamma_{11}^0 \gamma_{22}^0)^2 + (\gamma_{11}^0 \gamma_{33}^0)^2 + (\gamma_{22}^0 \gamma_{33}^0)^2. \quad (37)$$

Нетрудно проверить, что якобиан

$$\frac{\partial (H_1, R_1, K_1, H_2^2, K_g, R_3)}{\partial (\gamma_{11}^0, \gamma_{22}^0, \gamma_{33}^0, \gamma_{12}^0, \gamma_{23}^0, \gamma_{31}^0)} \neq 0,$$

следовательно, система инвариантов (21)—(25), (37) для гиперповерхности (5) является независимой. С помощью системы уравнений (8) легко показать, что эти инварианты являются абсолютными.

Если гиперповерхность голономная, то на инварианты накладываются следующие зависимости:

$$H_2^2 = 0, \quad K_g = K_1, \quad H_3 = H_1^2 - 2R_1, \quad K_3 = K_1^2, \\ R_3 = R_1^2 - 2K_1H_1. \quad (38)$$

Линии, вдоль которых кривизна  $\tau$  принимает стационарные значения, назовем линиями ( $\tau$ ).

Их уравнения имеют вид

$$\frac{(\bar{a}_1 \bar{a}_\alpha) \omega^\alpha}{\omega^1} = \frac{(\bar{a}_2 \bar{a}_\alpha) \omega^\alpha}{\omega^2} = \frac{(\bar{a}_3 \bar{a}_\alpha) \omega^\alpha}{\omega^3}. \quad (39)$$

Линии (39) не определены, если выполняются условия

$$(\bar{a}_1 \bar{a}_2) = (\bar{a}_2 \bar{a}_3) = (\bar{a}_3 \bar{a}_1) = 0, \quad (\bar{a}_1)^2 = (\bar{a}_2)^2 = (\bar{a}_3)^2. \quad (40)$$

Исследуем эти соотношения для гиперповерхности, отнесенной к линиям кривизны I рода (20). Раскрывая соотношения (20) с учетом значений векторов  $\bar{a}_\alpha$  (30), получим систему

$$\gamma_{21}^0 (\gamma_{22}^0 - \gamma_{11}^0) = \gamma_{13}^0 \gamma_{32}^0, \quad (\gamma_{11}^0)^2 - (\gamma_{22}^0)^2 = (\gamma_{33}^0)^2 - (\gamma_{13}^0)^2, \\ \gamma_{13}^0 (\gamma_{11}^0 - \gamma_{33}^0) = \gamma_{32}^0 \gamma_{21}^0, \quad (\gamma_{11}^0)^2 - (\gamma_{33}^0)^2 = (\gamma_{32}^0)^2 - (\gamma_{21}^0)^2, \\ \gamma_{32}^0 (\gamma_{33}^0 - \gamma_{22}^0) = \gamma_{21}^0 \gamma_{13}^0, \quad (\gamma_{22}^0)^2 - (\gamma_{33}^0)^2 = (\gamma_{13}^0)^2 - (\gamma_{21}^0)^2. \quad (41)$$

Выражая  $\gamma_{21}^0, \gamma_{13}^0, \gamma_{32}^0$  из первых трех уравнений и подставляя в остальные, получим

$$(\gamma_{11}^0 - \gamma_{22}^0)(\gamma_{11}^0 + \gamma_{22}^0 - \gamma_{33}^0) = 0,$$

$$(\gamma_{22}^0 - \gamma_{33}^0)(\gamma_{22}^0 + \gamma_{33}^0 - \gamma_{11}^0) = 0,$$

$$(\gamma_{11}^0 - \gamma_{33}^0)(\gamma_{11}^0 + \gamma_{33}^0 - \gamma_{22}^0) = 0,$$

Отсюда следуют условия

$$\gamma_{11}^0 = \gamma_{22}^0 = \gamma_{33}^0 \neq 0, \quad (42)$$

$$\gamma_{11}^0 = \gamma_{22}^0 = \gamma_{33}^0 = 0, \quad (43)$$

при которых из уравнений системы (41) получим

$$\gamma_{21}^0 = \gamma_{13}^0 = \gamma_{32}^0 = 0, \quad (44)$$

то есть условие голономности гиперповерхности.

Таким образом, доказана

**Теорема 1.** *Линии ( $\tau$ ) не определены на голономных гиперсферах и голономных гиперплоскостях.*

Гиперповерхность конформно наложима на свое сферическое отображение, если

$$F_3 = \lambda F_1, \quad (45)$$

где  $\lambda$  — функция точки. Раскрывая это соотношение с учетом форм  $F_3$  и  $F_1$ , получим соотношения (40), из которых при  $\lambda \neq 0$  следуют условия (42) и (44). Таким образом, справедлива следующая

**Теорема 2.** *Конформно наложимы на свое сферическое отображение в  ${}^1R_4$  только голономные гиперсферы. (В  $E_3$  конформно наложимы на свое сферическое отображение кроме сфер еще и минимальные поверхности [6]).*

Уравнение (5) в линейчато-геометрическом смысле определяет неголомную конгруэнцию (трехпараметрическое многообразие прямых).

Если

$$\bar{B} = \bar{M} + r \bar{e}_0 \quad (46)$$

граничная точка конгруэнции, то формула для определения абсциссы  $r$  в  ${}^1R_4$  имеет вид, аналогичный в  $E_3$  [7]

$$r = F_2/F_3. \quad (47)$$

Дифференцируя (47) по  $\omega^\alpha$ , получим

$$[2r(\bar{a}_1)^2 - 2\gamma_{11}^0] \omega^1 + [2r(\bar{a}_1 \bar{a}_2) - \gamma_{(12)}^0] \omega^2 + [2r(\bar{a}_1 \bar{a}_3) - \gamma_{(13)}^0] \omega^3 = 0,$$

$$[2r(\bar{a}_2 \bar{a}_1) - \gamma_{(21)}^0] \omega^1 + [2r(\bar{a}_2)^2 - 2\gamma_{22}^0] \omega^2 + [2r(\bar{a}_2 \bar{a}_3) - \gamma_{(23)}^0] \omega^3 = 0, \quad (48)$$

$$[2r(\bar{a}_3 \bar{a}_1) - \gamma_{(13)}^0] \omega^1 + [2r(\bar{a}_3 \bar{a}_2) - \gamma_{(23)}^0] \omega^2 + [2r(\bar{a}_3)^2 - 2\gamma_{33}^0] \omega^3 = 0.$$

Отсюда после исключения форм  $\omega^\alpha$  имеем с учетом значений инвариантов (21) — (25), (37)

$$8r^3 K_g^2 - 8r^2 \left[ K_g \left( \frac{1}{4} H_2^2 + R_1 \right) - \frac{1}{2} K_1 H_2^2 \right] +$$

$$+ 2r \left[ 2K_g H_1 - R_3 + \left( \frac{1}{4} H_2^2 + R_1 \right)^2 \right] - 8K_1 = 0. \quad (49)$$

Если

$$\bar{F} = \bar{M} + \bar{t}e_0 \quad (50)$$

— фокус конгруэнции, то должно выполняться равенство

$$d\bar{F} = \bar{\lambda}e_0. \quad (51)$$

После дифференцирования равенства (50) с учетом условия (51) получим систему уравнений для определения  $t$

$$\omega^1 + t\omega_0^1 = 0, \quad \omega^2 + t\omega_0^2 = 0, \quad \omega^3 + t\omega_0^3 = 0.$$

Исключив отсюда  $\omega^\alpha$ , имеем

$$t^3 K_g + t^2 \left( R_1 + \frac{1}{4} H_2^2 \right) + t H_1 + 1 = 0. \quad (52)$$

Из уравнений (49) и (52) видно, что аналог теорем Н. И. Кованцова [8], устанавливающих зависимость между расстоянием граничных точек и главными кривизнами первого рода и между фокусами и главными кривизнами второго рода неголономной базисной гиперповерхности, в  ${}^1R_4$  не имеет места.

Если гиперповерхность (5) голономна, то в силу условий на инварианты (38) из уравнений (49) и (52) следует, что граничные точки конгруэнции отстоят от ее базисной гиперповерхности на расстояниях, равных главным радиусам кривизны этой гиперповерхности, а фокусы отличаются от граничных точек знаком.

Конгруэнция называется изотропной [7], если главные поверхности не определены. Исключив  $r$  из системы уравнений (48) и приравняв нулю коэффициенты при  $\omega^\alpha \omega^\beta$  в полученных уравнениях главных поверхностей, имеем условия их неопределенности

$$\begin{aligned} \frac{(\bar{a}_1)^2}{\gamma_{11}^0} &= \frac{(\bar{a}_2)^2}{\gamma_{22}^0} = \frac{(\bar{a}_3)^2}{\gamma_{33}^0} = \frac{2(\bar{a}_1 \bar{a}_2)}{\gamma_{(12)}^0} = \\ &= \frac{2(\bar{a}_1 \bar{a}_3)}{\gamma_{(13)}^0} = \frac{2(\bar{a}_2 \bar{a}_3)}{\gamma_{(23)}^0} = \lambda, \end{aligned} \quad (53)$$

т. е. третья квадратичная форма  $F_3$  пропорциональна второй квадратичной форме  $F_2$ .

Сопоставляя уравнения линий кривизны I рода (18) с уравнениями линий ( $\tau$ ) (39), видим, что при условиях (53) они совпадают.

Исследуем систему соотношений (53) для конгруэнции, базисная гиперповерхность которой отнесена к линиям кривизны I рода.

Имеем

$$\begin{aligned} (\gamma_{11}^0)^2 + (\gamma_{21}^0)^2 + (\gamma_{13}^0)^2 &= \lambda \gamma_{11}^0, \quad \gamma_{21}^0 (\gamma_{22}^0 - \gamma_{11}^0) = \gamma_{13}^0 \gamma_{32}^0, \\ (\gamma_{21}^0)^2 + (\gamma_{22}^0)^2 + (\gamma_{23}^0)^2 &= \lambda \gamma_{22}^0, \quad \gamma_{13}^0 (\gamma_{11}^0 - \gamma_{33}^0) = \gamma_{32}^0 \gamma_{21}^0, \\ (\gamma_{13}^0)^2 + (\gamma_{23}^0)^2 + (\gamma_{33}^0)^2 &= \lambda \gamma_{33}^0, \quad \gamma_{32}^0 - \gamma_{33}^0 - \gamma_{22}^0 = \gamma_{21}^0 \gamma_{13}^0. \end{aligned} \quad (54)$$

Выразив  $\gamma_{21}^0$ ,  $\gamma_{13}^0$ ,  $\gamma_{32}^0$  из последних трех соотношений и подставив в соотношения, полученные из первых трех исключением  $\lambda$ , получим

$$(\gamma_{11}^0 - \gamma_{22}^0)(\gamma_{11}^0 + \gamma_{22}^0 - \gamma_{33}^0)^2 = 0,$$

$$(\gamma_{22}^0 - \gamma_{33}^0)(\gamma_{22}^0 + \gamma_{33}^0 - \gamma_{11}^0)^2 = 0, \quad (55)$$

$$(\gamma_{11}^0 - \gamma_{33}^0)(\gamma_{11}^0 + \gamma_{33}^0 - \gamma_{22}^0)^2 = 0.$$

Отсюда следуют соотношения (42) — (44).

Таким образом, нормальная конгруэнция изотропна, если ее базисная гиперповерхность голономная гиперсфера или голономная гиперплоскость.

С л е д с т в и е. На гиперповерхностях, на которых линии кривизны I рода определены, определены и линии ( $\tau$ ). В этом случае они не совпадают.

### Литература

1. Фиников С. П. Метод внешних форм Картана. ГИТТЛ, 1948.
2. Лаптев Г. Ф. Тр. Московского математ. общества, 2, 1953.
3. Бурдун А. А. Весті АН БССР, сер. фіз.-математ. навук, № 4, 1966.
4. Гейдельман Р. М. К метрической теории гиперповерхности в четырехмерном неевклидовом пространстве. Некоторые вопросы современной математики и ее приложений. Изд. «Высшая школа», 1966.
5. Тутаев Л. К. Материалы II Прибалтийской геометр. конференции в г. Тарту, 1965.
6. Фавар Ж. Курс локальной дифференциальной геометрии. ИЛ, 1960.
7. Фиников С. П. Теория конгруэнций, ГИТТЛ, 1950.
8. Кованцев Н. И. Усп. матем. наук, 19, № 1(68), 1955.

Белорусский государственный университет  
им. В. И. Ленина

Поступило в редакцию  
30.X 1967

И. И. КОМЯК

ОБ ИНТЕГРАЛЬНОМ УРАВНЕНИИ  
ТИПА СВЕРТКИ С  $N$  ЯДРАМИ

В настоящей работе исследуется интегральное уравнение типа свертки

$$\varphi(x) + \sum_{j=1}^N \int_{a_{j-1}}^{a_j} k_j(x-t) \varphi(t) dt = f(x), \quad -\infty < x < +\infty, \quad (1)$$

$$-\infty = a_0 < a_1 < \dots < a_{N-1} < a_N = +\infty$$

при следующих предположениях:  $k_j(x) \in L_1(-\infty, +\infty)$  ( $j = 1, 2, \dots, N$ ), а функции  $f(x)$  и  $\varphi(x)$  принадлежат на вещественной оси одному из пространств  $E(-\infty, +\infty): L_p, (p \geq 1), M, M^c, M^u, C, C^0$  [1, 2].

В случае, когда  $f(x)$  и  $\varphi(x)$  принадлежат пространству  $L_2(-\infty, +\infty)$  при предположении, что  $\frac{1+K_j(x)}{1+K_N(x)}$  ( $j = 2, \dots, N-1$ ) рациональны, а функция  $\frac{1+K_1(x)}{1+K_N(x)}$  удовлетворяет условию Гельдера, уравнение (1) исследовалось И. Б. Симоненко [3].

В предлагаемой работе доказывается, что однородное уравнение (1) во всех пространствах из  $E$  имеет одни и те же решения. Даются некоторые достаточные условия единственности решения и устанавливается связь данного уравнения, рассматриваемого в пространстве  $L_1(-\infty, +\infty)$ , с интегральным уравнением с ядром Коши, которое сводится к равносильной граничной задаче Римана для системы  $N-1$  пары функций. Выделяются случаи, когда решение интегрального уравнения (1) может быть получено в замкнутой форме (см. теоремы 4, 5).

§ 1. Уравнение (1) можно представить в виде

$$\varphi(x) + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{k_1(x-t) + k_N(x-t)}{2} \varphi(t) dt +$$

$$+ \sum_{j=1}^{N-1} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{k_{j+1}(x-t) - k_j(x-t)}{2} \varphi(t) \operatorname{sgn}(t - a_j) dt = f(x). \quad (1.1)$$

Левая часть уравнения (1.1) в каждом из пространств  $E$  определяет линейный ограниченный оператор  $I+A$ , где  $I$  — единичный оператор, а для нормы оператора  $A$  в каждом из пространств  $L_p (p \geq 1)$  и  $M$  справедлива оценка

$$\|A\| \leq \frac{1}{2} \|k_1(x) + k_N(x)\|_L + (N-1) \max_{j=1, \dots, N-1} \|k_{j+1}(x) - k_j(x)\|_L. \quad (1.2)$$

Представим оператор  $A$  в виде суммы двух операторов

$$B\varphi = \int_{-\infty}^0 k_1(x-t)\varphi(t) dt + \int_0^{\infty} k_N(x-t)\varphi(t) dt$$

и

$$T\varphi = \sum_{j=1}^{N-1} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{k_{j+1}(x-t) - k_j(x-t)}{2} \varphi(t) [\operatorname{sgn}(t-a_j) - \operatorname{sgn} t] dt.$$

Из [4,5] следует, что оператор  $I+B$  при условии  $1+K_j(x) \neq 0$  ( $j=1, N$ ) является Ф-оператором в любом из пространств  $E$  и в пересечении любых двух из этих пространств. Так как оператор  $T$  является вполне непрерывным в каждом из пространств  $E$  и в пересечении любых двух из этих пространств, то оператор  $I+B+T$  тоже обладает таким же свойством и для его индекса справедлива формула

$$\kappa = \frac{1}{2\pi} \operatorname{Arg} \frac{1+K_1(x)}{1+K_N(x)} \Big|_{-\infty}^{+\infty}.$$

Имеет место

**Теорема 1.** При выполнении условий  $1+K_j(x) \neq 0$  ( $j=1, N$ ) однородное уравнение (1) в каждом из пространств  $E(-\infty, +\infty)$  имеет одни и те же решения.

Доказательство теоремы для пространств  $L_p$  и  $C^0$  следует из леммы 1 работы [2].

Докажем, что всякое решение  $\varphi(x)$  однородного уравнения (1) из пространства  $M$  принадлежит также пространству  $M^u$ .

Так как интегральный оператор с суммируемым разностным ядром функцию из  $M$  переводит в функцию  $M^u$ , то из (1.1) следует, что всякое решение однородного уравнения (1) из пространства  $M$  принадлежит также пространству  $M^u$ .

Однородное уравнение (1) представим в виде

$$\varphi(x) + \int_{a_{N-1}}^{\infty} k_N(x-t)\varphi(t) dt = - \sum_{j=1}^{N-1} \int_{a_{j-1}}^{a_j} k_j(x-t)\varphi(t) dt. \quad (1.3)$$

Функция, стоящая в правой части уравнения (1.3), является непрерывной.

Из оценки

$$\begin{aligned} \left| \sum_{j=1}^{N-1} \int_{a_{j-1}}^{a_j} k_j(x-t)\varphi(t) dt \right| &\leq \max_{-\infty < x < +\infty} |\varphi(x)| \sum_{j=1}^{N-1} \int_{x-a_j}^{x-a_{j-1}} |k_j(y)| dy \leq \\ &\leq \operatorname{const} \sum_{j=1}^{N-1} \int_{x-a_j}^{x-a_{j-1}} |k_j(y)| dy \end{aligned}$$

следует, что она исчезает при  $x \rightarrow +\infty$ .

Известно [1], что тогда и решение уравнения Винера — Хопфа является непрерывным и исчезающим при  $x \rightarrow +\infty$ .

Аналогичные рассуждения проводятся и при  $x \rightarrow -\infty$ . Теорема доказана.

В дальнейшем всюду предполагаем, что для уравнения (1) выполняются условия нормальной разрешимости  $1+K_j(x) \neq 0$  ( $j=1, N$ ).

Теорема 2. Если  $\|k_1(x) + k_N(x)\|_L + (N-1) \max_{j=1, \dots, N-1} \|k_{j+1}(x) - k_j(x)\|_L < 2$ , то интегральное уравнение (1) в любом из пространств  $E$  безусловно и однозначно разрешимо.

Доказательство следует из того, что в этом случае оператор  $A$  является оператором сжатия в каждом из пространств  $E$ .

§ 2. Так как однородное уравнение (1) во всех пространствах из  $E$  имеет одни и те же решения, то в дальнейшем уравнение (1) будем рассматривать в пространстве  $L_1(-\infty, +\infty)$ .

Преобразуя (1.1) по Фурье, получим в кольце  $R$  следующее сингулярное уравнение с ядром Коши, равносильное исходному уравнению

$$\left[ 1 + \frac{K_1(x) + K_N(x)}{2} \right] \Phi(x) + \sum_{j=1}^{N-1} \frac{K_{j+1}(x) - K_j(x)}{2} \frac{e^{ia_j x}}{\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-ia_j t} \Phi(t)}{t-x} dt = F(x). \quad (2.1)$$

Введем  $N-1$  функций в виде интегралов типа Коши:

$$\Psi_j(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-ia_j t} \Phi(t)}{t-z} dt, \quad j = 1, 2, \dots, N-1.$$

Из формул Сохоцкого для функций из кольца  $\mathring{R}$  [6] получаем

$$\frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-ia_j t} \Phi(t)}{t-x} dt = 2\Psi_j^-(x) + e^{-ia_j x} \Phi(x), \quad (2.2)$$

$$\frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-ia_j t} \Phi(t)}{t-x} dt = 2\Psi_j^+(x) - e^{-ia_j x} \Phi(x). \quad (2.3)$$

Заменяя  $l$  первых интегралов в (2.1) по (2.2) и  $N-l-1$  остальных по (2.3) и учитывая, что  $\Phi(x) = e^{ia_{l+1}x} [\Psi_{l+1}^+(x) - \Psi_{l+1}^-(x)]$ , получим граничное условие в виде

$$\begin{aligned} & [1 + K_{l+2}(x)] \Psi_{l+1}^+(x) + \sum_{j=l+2}^{N-1} e^{i(a_j - a_{l+1})x} [K_{j+1}(x) - K_j(x)] \Psi_j^+(x) = \\ & = [1 + K_{l+1}(x)] \Psi_{l+1}^-(x) - \sum_{j=1}^l [K_{j+1}(x) - K_j(x)] e^{i(a_j - a_{l+1})x} \Psi_j^-(x) + \\ & + e^{-ia_{l+1}x} F(x), \quad 0 \leq l \leq N-2. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Присоединим к последнему граничному условию  $N-2$  условия, получающиеся из формул (2.2) и (2.3):

$$e^{ia_s x} [\Psi_s^+(x) - \Psi_s^-(x)] = e^{ia_{s+1}x} [\Psi_{s+1}^+(x) - \Psi_{s+1}^-(x)], \quad (2.5)$$

$$s = 1, 2, \dots, N-2.$$

Равенства (2.4) и (2.5) будем рассматривать как граничную задачу Римана для системы  $N-1$  пары функций  $\Psi_j^\pm(x) \in \mathring{R}^\pm$  ( $j = 1, 2, \dots, N-1$ ) [7-10].

Используя формулы Сохоцкого для интеграла типа Коши с плотностью из  $\mathring{R}$ , нетрудно доказать эквивалентность полученной граничной задачи (2.4), (2.5) и интегрального уравнения (2.1).

В векторно-матричной форме граничная задача (2.4), (2.5) принимает вид

$$\Psi^+(x) = G(x) \Psi^-(x) + F_1(x), \quad (2.6)$$

где элементы  $a_{pq}(x)$  матрицы  $G(x)$  определяются следующим образом:

$$a_{pq}(x) = \begin{cases} [K_q(x) - K_{q+1}(x)] [1 + K_N(x)]^{-1} e^{i(a_q - a_p)x}, & p \neq q, \\ 1 + [K_q(x) - K_{q+1}(x)] [1 + K_N(x)]^{-1}, & p = q; \quad p, q = 1, \dots, N-1. \end{cases}$$

Вектор-функция  $F_1(x) \in \mathring{R}_{(N-1 \times 1)}$  и имеет вид

$$F_1(x) = \left[ \frac{e^{-ia_1 x} F(x)}{1 + K_N(x)}, \frac{e^{-ia_2 x} F(x)}{1 + K_N(x)}, \dots, \frac{e^{-ia_{N-1} x} F(x)}{1 + K_N(x)} \right].$$

Имеет место

**Теорема 3.** Если  $(N-1) \max_{j=1, \dots, N-1} \|k_{j+1}(x) - k_j(x)\|_L < \frac{1}{2}$ , то од-

нородное уравнение (1) во всех пространствах из  $E$  имеет только тривиальное решение, а неоднородное безусловно и однозначно разрешимо.

**Доказательство.** Если ввести вектор-функцию  $\mu(x) \in \mathring{R}_{(N-1 \times 1)}$  равенством

$$\mu(x) = \Psi^+(x) - \Psi^-(x),$$

то граничная задача (2.6) сводится к следующей равносильной системе сингулярных уравнений:

$$\mu(x) = [G(x) - E] \left[ -\frac{1}{2} \mu(x) + \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mu(t) dt}{t-x} \right] + F_1(x). \quad (2.7)$$

Будем рассматривать полученную систему (2.7) как операторное уравнение в кольце  $R_{(N-1 \times 1)}$ .

Введем норму в кольце  $R_{(N-1 \times 1)}$  следующим образом:

$$\|\mu\|_{R_{(N-1 \times 1)}} = \sum_{j=1}^{N-1} \|\mu_j(x)\|_R,$$

где  $\mu_j(x)$  ( $j = 1, \dots, N-1$ ) — компоненты вектор-функции  $\mu(x)$ .

Норму матрицы  $G(x) - E$  определим равенством

$$\|G(x) - E\|_{R_{(N-1 \times N-1)}} = (N-1) \max_{p, q=1, \dots, N-1} \|b_{pq}(x)\|_R,$$

где

$$b_{pq}(x) = \begin{cases} a_{pq}(x), & p \neq q, \\ a_{pq}(x) - 1, & p = q; \quad p, q = 1, 2, \dots, N-1. \end{cases}$$

Заметим, что если  $\mu(x) \in R_{(N-1 \times 1)}$ , а  $G(x) - E \in R_{(N-1 \times N-1)}$ , то

$$\|[G(x) - E] \mu(x)\|_{R_{(N-1 \times 1)}} \leq \|G(x) - E\|_{R_{(N-1 \times N-1)}} \|\mu\|_{R_{(N-1 \times 1)}}.$$

Учитывая, что норма сингулярного оператора  $S\mu = \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mu(t) dt}{t-x}$

в кольце  $R_{(N-1 \times 1)}$  равна единице, получаем, что норма оператора, стоящего в правой части (2.7), не превосходит величины  $\|G(x) - E\|_{R_{(N-1 \times N-1)}}$ .

Используя теорему Винера [1], функцию  $b_{pq}(x) \in \overset{\circ}{R}$  представим в виде

$$b_{pq}(x) = [K_q(x) - K_{q+1}(x)] [1 + \tilde{K}_N(x)] e^{i(a_q - a_p)x},$$

где  $\tilde{K}_N \in \overset{\circ}{R}$ .

Тогда

$$\|b_{pq}(x)\|_R \leq \|k_q(x) - k_{q+1}(x)\|_L + \\ + \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \int_{-\infty}^{+\infty} [k_q(x - \tau) - k_{q+1}(x - \tau)] \tilde{k}_N[\tau - (q - a_p)] d\tau \right| dx.$$

Учитывая, что норма интегрального оператора с суммируемым ядром, зависящим от разности аргументов, не превосходит нормы ядра в метрике пространства  $L(-\infty, +\infty)$ , получаем, что в указанном случае оператор, стоящий в правой части уравнения (2.7), является оператором сжатия. Это и доказывает теорему.

§ 3. Выделим случай, когда решение уравнения (1) может быть получено в замкнутой форме.

В дальнейшем всюду будем считать, что для уравнения (1) выполняются дополнительные условия  $1 + K_j(x) \neq 0$  ( $j = 2, 3, \dots, N-1$ ).

1. Пусть выполняется хотя бы одно из  $N-1$  условий: функции  $\frac{1 + K_1(x)}{1 + K_N(x)}, \frac{1 + K_2(x)}{1 + K_3(x)}, \dots, \frac{1 + K_l(x)}{1 + K_{l+1}(x)} \in R^-$  и не имеют нулей в нижней полуплоскости, а функции  $\frac{1 + K_{l+2}(x)}{1 + K_{l+3}(x)}, \frac{1 + K_{l+3}(x)}{1 + K_{l+4}(x)}, \dots, \frac{1 + K_{N-1}(x)}{1 + K_N(x)} \in R^+$  и не имеют нулей в верхней полуплоскости;  $l = 0, 1, \dots, N-2$ .

Тогда справедлива

**Теорема 4.** При каждом из  $N-1$  вышеуказанных условий граничная задача в кольце  $R_{(N-1 \times 1)}$  (2.6) сводится к последовательному решению  $N-1$  граничных задач Римана в кольце  $R$ , первая из которых разрешима в зависимости от знака индекса  $\kappa$ , а  $N-2$  остальных безусловно разрешимы.

Если  $\kappa \geq 0$ , то интегральное уравнение (1) безусловно разрешимо и однородное имеет  $\kappa$  линейно независимых решений. При  $\kappa \leq 0$  однородное уравнение имеет только тривиальное решение, а для разрешимости неоднородного необходимо и достаточно выполнения  $|\kappa|$  условий разрешимости.

**Доказательство.** Матрицу  $G(x) \in R_{(N-1 \times N-1)}$  граничной задачи (2.6) представим в виде произведения двух треугольных матриц:

$$G(x) = [G_1(x)]^{-1} G_2(x).$$

Непосредственным подсчетом можно убедиться, что элементы  $c_{pq}(x)$  и  $d_{pq}(x)$  матриц  $G_1(x) \in R_{(N-1 \times N-1)}$  и  $G_2(x) \in R_{(N-1 \times N-1)}$  определяются формулами

$$c_{pq}(x) = \begin{cases} [K_{q+1}(x) - K_q(x)] [1 + K_{p+1}(x)]^{-1} e^{i(a_q - a_p)x}, & p < q, \\ 1, & p = q, \\ 0, & p > q, \end{cases}$$

$$d_{pq}(x) = \begin{cases} 0 & , p < q, \\ [1 + K_p(x)] [1 + K_{p+1}(x)]^{-1} & , p = q, \\ [K_q(x) - K_{q+1}(x)] [1 + K_{p+1}(x)]^{-1} e^{i(a_q - a_p)x} & , p > q. \end{cases}$$

Следовательно, граничную задачу (2.6) можно переписать в виде

$$G_1(x) \Psi^+(x) = G_2(x) \Psi^-(x) + F_2(x), \quad (3.1)$$

$$\text{где } F_2(x) = G_1(x) F_1(x) = \left[ \frac{e^{-ia_1 x} F(x)}{1 + K_2(x)}, \frac{e^{-ia_2 x} F(x)}{1 + K_3(x)}, \dots, \frac{e^{-ia_{N-1} x} F(x)}{1 + K_N(x)} \right].$$

Рассмотрение начнем с наиболее простого случая  $l = 0$ .

Покажем, что в этом случае задача (3.1) представляет собой задачу Римана в кольце  $R_{(N-1 \times 1)}$  с нижнетреугольной матрицей  $G_2(x)$ .

Для этого докажем, что верхнетреугольная матрица  $G_1(x)$  принадлежит  $R_{(N-1 \times N-1)}^+$ .

Так как функции  $\frac{1 + K_{p+1}(x)}{1 + K_q(x)}$  ( $2 \leq p + 1 < q$ ) представимы в виде

$$\frac{1 + K_{p+1}(x)}{1 + K_q(x)} = \frac{1 + K_{p+1}(x)}{1 + K_{p+2}(x)} \cdot \frac{1 + K_{p+2}(x)}{1 + K_{p+3}(x)} \dots \frac{1 + K_{q-1}(x)}{1 + K_q(x)},$$

то они не имеют нулей в верхней полуплоскости и принадлежат подкольцу

$R^+$ . Тогда и функции  $\frac{1 + K_q(x)}{1 + K_{p+1}(x)} \in R^+$ . Отсюда следует, что  $\frac{K_{q+1}(x) - K_q(x)}{1 + K_{p+1}(x)} =$

$= \frac{1 + K_{q+1}(x)}{1 + K_{p+1}(x)} - \frac{1 + K_q(x)}{1 + K_{p+1}(x)} \in R^+$  ( $2 \leq p + 1 < q$ ). Но при  $a > 0$  из принадлежности функции  $f(x)$  подкольцу  $R^+$  вытекает, что и функция  $f(x) e^{iax} \in R^+$ . Это и доказывает утверждение.

Введя вектор-функцию  $\Omega^+(x) = G_1(x) \Psi^+(x) \in R_{(N-1 \times 1)}^+$ , убеждаемся, что граничная задача (3.1) представляет собой граничную задачу Римана в кольце  $R_{(N-1 \times 1)}$  с нижнетреугольной матрицей  $G_2(x) \in R_{(N-1 \times N-1)}$ .

Отсюда при  $\kappa \geq 0$  граничная задача (3.1) безусловно разрешима и однородная имеет  $\kappa$  линейно независимых решений, а при  $\kappa < 0$  однородная задача имеет только тривиальное решение, а для разрешимости неоднородной необходимо и достаточно выполнения  $|\kappa|$  условий разрешимости. При выполнении этих условий неоднородная задача имеет единственное решение.

После определения вектор-функции  $\Omega^+(x) \in R_{(N-1 \times 1)}^+$  найдем  $\Psi^+(x) \in R_{(N-1 \times 1)}^+$  по формуле  $\Psi^+(x) = G_1^{-1}(x) \Omega^+(x)$ .

Решение интегрального уравнения (1) найдем из равенства

$$\Phi(x) = e^{ia_j x} [\Psi_j^+(x) - \Psi_j^-(x)] \quad (1 \leq j \leq N-2) \quad (3.2)$$

обратным преобразованием Фурье.

Аналогичным образом проводится решение граничной задачи (3.1) при  $l = N - 2$ . Умножая в этом случае обе части граничного условия (3.1) на диагональную матрицу

$$D(x) = \left\| \frac{1 + K_{p+1}(x)}{1 + K_p(x)} \delta_{pq} \right\|_{p,q=1}^{N-1},$$

где  $\delta_{pq}$  — символ Кронекера, убеждаемся, что  $D(x) G_2(x) \in R_{(N-1 \times N-1)}^-$  и является неособенной в нижней полуплоскости. Следовательно, в этом случае

получаем граничную задачу Римана в кольце  $R_{(N-1 \times 1)}$  с верхнетреугольной матрицей  $[G_1(x)]^{-1} D^{-1}(x)$ .

Несколько видоизменяя использованный выше метод, решение задачи (3.1) можно провести в случае, когда  $l$  отлично от нуля и от  $N-2$ . Из-за недостатка места мы его здесь не приводим. Теорема доказана.

Метод, использованный выше, с некоторыми видоизменениями распространяется на уравнение (1) при более общих, чем в предыдущем пункте, предположениях относительно ядер.

2. Пусть функции  $1 + K_j(x)$  представимы в виде

$$1 + K_j(x) = [1 + S(x)] \frac{1 + M_j^+(x)}{1 + T_j^+(x)}, \quad (*)$$

где  $S \in \overset{\circ}{R}$ ,  $M_j^+(x)$  и  $T_j^+(x)$  принадлежат  $\overset{\circ}{R}^+$ , а  $1 + T_j^+(x) \neq 0$  всюду на вещественной оси ( $j = 2, 3, \dots, N$ ).

Тогда имеет место

*Теорема 5. При выполнении вышеуказанных условий левая стандартная факторизация матрицы граничного условия (2.6) может быть построена эффективно при помощи конечного числа линейных преобразований.*

*Если  $\kappa_1 \geq \kappa_2 \geq \dots \geq \kappa_p > 0 \geq \kappa_{p+1} \geq \dots \geq \kappa_{N-1}$  — левые частные индексы этой матрицы, то однородное интегральное уравнение (1) имеет*

*$\sum_{j=1}^p \kappa_j$  линейно независимых решений, а для разрешимости неоднородного*

*необходимо и достаточно выполнения  $\left| \sum_{j=p+1}^{N-1} \kappa_j \right|$  условий разрешимости. При*

*выполнении этих условий неоднородное уравнение имеет  $\sum_{j=1}^p \kappa_j$  линейно независимых решений.*

*Доказательство.* Граничное условие (3.1) умножим на диагональную матрицу  $\tilde{D}(x)$  с диагональными элементами

$$d_{hk}(x) = \begin{cases} [1 + M_{k+1}^+(x)] \prod_{j=k+2}^N [1 + T_j^+(x)], & k = 1, 2, \dots, N-2, \\ 1, & k = N-1. \end{cases}$$

Известно, что левая стандартная факторизация неособенной треугольной матрицы может быть построена эффективно, т. е.  $\tilde{D}(x) G_2(x)$  представима в виде

$$\tilde{D}(x) G_2(x) = X_2^+(x) D_2(x) X_2^-(x),$$

где  $X_2^\pm(x) \in R_{(N-1 \times N-1)}^+$  и являются неособенными в соответствующих полуплоскостях;  $D_2(x) = \left\| \left( \frac{x-i}{x+i} \right)^{\kappa_{2j}} \delta_{jk} \right\|_{j,k=1}^{N-1}$ ,  $\delta_{jk}$  — символ Кронекера.

Граничное условие (3.1) представим в форме

$$[X_2^+(x)]^{-1} \tilde{D}(x) G_1(x) \Psi^+(x) = D_2(x) \Omega^-(x) + [X_2^+(x)]^{-1} \tilde{D}(x) F_2(x), \quad (3.3)$$

где  $\Omega^-(x) = X_2^-(x) \Psi^-(x) \in \overset{\circ}{R}_{(N-1 \times 1)}$ .

Так как по теореме Винера  $[X_2^+(x)]^{-1} \in R_{(N-1 \times N-1)}^+$ , то  $[X_2^+(x)]^{-1} \tilde{D}(x) G_1(x)$  тоже принадлежит  $R_{(N-1 \times N-1)}^+$ . Определитель последней матрицы обращается в нуль в нулях  $\det \tilde{D}(x)$ .

Покажем, что методом Ф. Д. Гахова [9] при помощи линейных преобразований матрицу  $[X_2^+(x)]^{-1} \tilde{D}(x) G_1(x)$  можно представить в виде

$$[X_2^+(x)]^{-1} \tilde{D}(x) G_1(x) = Q(x) \tilde{X}_2^+(x), \quad (3.4)$$

где  $Q(x)$  — рациональная матрица, определитель которой обращается в нуль в нулях  $\det \tilde{D}(x)$ , а  $\tilde{X}_2^+(x) \in R_{(N-1) \times (N-1)}^+$  и является неособенной в верхней полуплоскости.

Пусть  $z_0$  ( $\text{Im} z_0 > 0$ ) — точка, в которой определитель матрицы  $[X_2^+(z)]^{-1} \tilde{D}(z) G_1(z)$  имеет нуль некоторого порядка  $\alpha_0$ . Разложим элементы этой матрицы в ряд по степеням  $\frac{z-z_0}{z+i}$ . Такое разложение обусловлено тем, чтобы в результате элементарных преобразований получить матрицу, принадлежащую тому же пространству  $R_{(N-1) \times (N-1)}^+$ , что и исходная матрица.

Пусть  $T_0$  — полиномиальная от  $\frac{z-z_0}{z+i}$  матрица с постоянным определителем, умножение на которую слева равносильно приведению матрицы  $[X_2^+(z)]^{-1} \tilde{D}(z) G_1(z)$  к нормальной форме по строкам. Пусть  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{N-1}$  — порядки строк, полученные в результате этого приведения. Очевидно, что  $\alpha_j \geq 0$ , а  $\sum_{j=1}^{N-1} \alpha_j = \alpha_0$ .

Тогда матрицу  $T_0(x) [X_2^+(x)]^{-1} \tilde{D}(x) G_1(x)$  представим в виде

$$T_0 [X_2^+(x)]^{-1} \tilde{D}(x) G_1(x) = D_0(x) D_0^{-1}(x) T_0 [X_2^+(x)]^{-1} \tilde{D}(x) G_1(x),$$

где  $D_0(x) = \left\| \left( \frac{x-z_0}{x+i} \right)^{\alpha_j} \delta_{jk} \right\|_{j,k=1}^{N-1}$ , а  $D_0^{-1}(x) T_0 [X_2^+(x)]^{-1} \tilde{D}(x) G_1(x) \in R_{(N-1) \times (N-1)}^+$  и является неособенной в точке  $z_0$ .

Поступая аналогичным образом со всеми остальными нулями определителя матрицы  $[X_2^+(z)]^{-1} \tilde{D}(z) G_1(z)$ , мы получим представление (3.4).

Умножая обе части граничного условия (3.3) на  $Q^{-1}(x)$ , получим

$$\tilde{X}_2^+(x) \Psi^+(x) = W(x) \Omega^-(x) + \tilde{F}_2(x), \quad (3.5)$$

где  $\tilde{F}_2(x) = Q^{-1}(x) [X_2^+(x)]^{-1} \tilde{D}(x) F_2(x)$ , а  $W(x) = Q^{-1}(x) D_2(x)$  — матрица, элементы которой являются рациональными функциями, голоморфными всюду в нижней полуплоскости, за исключением, может быть, точки  $z = -i$ , в которой они могут иметь полюсы. Определитель матрицы  $W(x)$  равен  $\text{const} \left( \frac{x-i}{x+i} \right)^z$ .

Пусть  $M_0(x)$  — полиномиальная от  $\frac{x-i}{x+i}$  матрица с постоянным определителем, умножение на которую слева равносильно приведению матрицы  $W(x)$  к нормальной форме по строкам в точке  $z = -i$ . Очевидно, что  $M_0(x) \in R_{(N-1) \times (N-1)}^+$ .

Граничное условие (3.5) представим в виде

$$M_0(x) \tilde{X}_2^+(x) \Psi^+(x) = M_0(x) W(x) \Omega^-(x) + M_0(x) \tilde{F}_2(x). \quad (3.6)$$

Перестановкой строк в условии (3.6) можно добиться того, чтобы числа  $\beta_j$ , соответствующие порядкам строк матрицы  $M_0(x) W(x)$  в точке  $z = -i$ , удовлетворяли соотношению

$$\beta_1 \leq \beta_2 \leq \dots \leq \beta_p < 0 \leq \beta_{p+1} \leq \dots \leq \beta_{N-1}.$$

Матрицу  $M_0(x)W(x)$  представим в виде

$$M_0(x)W(x) = D(x)X^-(x),$$

где  $D(x) = \left\| \left( \frac{x-i}{x+i} \right)^{-\beta_j} \delta_{jk} \right\|_{j,k=1}^{N-1}$ . Нетрудно показать, что матрица  $X^-(x) \in R_{(N-1 \times N-1)}^-$  и является неособенной в нижней полуплоскости.

Таким образом, матрица  $G(x)$  представима в виде

$$G(x) = [M_0(x)\tilde{X}_2^+(x)]^{-1} D(x) X^-(x) X_2^-(x), \quad (3.7)$$

которое и дает левую стандартную факторизацию. Числа  $\kappa_j = -\beta_j$  ( $j=1, 2, \dots, N-1$ ) являются левыми частными индексами этой матрицы.

После построения левой стандартной факторизации (3.7) общее решение граничной задачи (3.1) в кольце  $R_{(N-1 \times 1)}$  производится по тем же формулам, что и в классическом случае.

Это и доказывает теорему.

Аналогично проводится решение граничной задачи (3.1) в случае, когда условия (\*) заменить условиями

$$1 + K_j(x) = [1 + S_1(x)] \frac{1 + M_j^-(x)}{1 + T_j^-(x)},$$

где  $S_1 \in \mathring{R}$ ,  $M_j^-(x)$  и  $T_j^-(x) \in \mathring{R}^-$ ,  $1 + T_j^-(x) \neq 0$ ;  $j=1, 2, \dots, N-2$ .

Предлагаемый метод исследования распространяется также и на  $N$ -кратное уравнение типа свертки

$$\varphi(x) + \int_{-\infty}^{+\infty} k_j(x-t)\varphi(t)dt = f(x), \quad a_{j-1} < x < a_j; \quad j=1, 2, \dots, N.$$

Выражаю глубокую признательность академику АН БССР Ф. Д. Гахову за руководство работой.

### Литература

1. Крейн М. Г. УМН, XIII, вып. 5(83), 1958.
2. Фельдман И. А. Изв. АН МССР, № 10(88), 1961.
3. Симоненко И. Б. Изв. вузов, математика, № 2, 213, 1959.
4. Гохберг И. Ц., Крейн М. Г. Теоретическая и прикладная математика, вып. 1, 58, 1958.
5. Гохберг И. Ц., Крейн М. Г. УМН, 12, вып. 2(74), 1957.
6. Банцури Р. Д., Джанашия Г. А. ДАН СССР, 155, № 2, 1964.
7. Мухелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения. Физматгиз, 1692.
8. Гахов Ф. Д. Краевые задачи. Физматгиз, 1963.
9. Гахов Ф. Д. УМН, VII, вып. 4(50), 1952.
10. Гохберг И. Ц., Крейн М. Г. УМН, XIII, вып. 2(80), 1958.

Белорусский государственный университет  
им. В. И. Ленина

Поступило в редакцию  
1.XI 1967

УДК 539.23+621.318.1

Н. Н. СИРОТА, С. В. СУХВАЛО

### РЕНТГЕНОГРАФИЧЕСКОЕ И РЕЗИСТОМЕТРИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ТОНКИХ ПЛЕНОК СПЛАВОВ СИСТЕМЫ ЖЕЛЕЗО—НИКЕЛЬ—КОБАЛЬТ

В настоящей работе сообщаем результаты исследования кристаллической структуры и определения удельного электросопротивления тонких пленок системы железо — никель — кобальт.

Несмотря на то что пленки данной системы сплавов являются важным в научном и прикладном отношении объектом исследования, их кристаллическая структура и период идентичности решетки систематически до сих пор не изучались. В литературе имеются отрывочные сведения о структурном и фазовом состоянии пленок системы Fe — Ni — Co лишь для некоторых немногочисленных составов [1—3]. Судя по литературным данным [4], структурный анализ массивных образцов сплавов данной системы, исключая бинарные граничные системы, также не проводился. В связи с этим представляло большой интерес установить концентрационные пределы существования твердых растворов и гетерогенных областей в исследуемой тройной системе пленок, а также определить их фазовый состав, кристаллическую структуру и параметры решетки.

Нами было исследовано 66 составов пленок системы Fe — Ni — Co. Составы равномерно распределялись по тройной системе и по бинарным граничным системам Fe — Ni, Fe — Co и Ni — Co. Все сплавы, предназначенные для напыления, были выплавлены в высоковакуумной индукционной печи в корундовых тиглях. Полученные образцы сплавов подвергались затем 72-часовой высоковакуумной гомогенизации при температуре 1150 °C в непрерывно откачиваемой печи.

Пленки сплавов изготавливались методом вакуумного напыления паров сплава на стеклянные подложки. При получении пленок были приняты следующие постоянные для всех составов условия: ориентирующее поле 90 э, температура подложки 300 °C, толщина пленки 2700 Å, скорость напыления 50 Å/сек. Давление в рабочем объеме в момент напыления пленок составляло  $10^{-5}$  мм рт. ст. Охлаждение осажденных пленок от температуры 300 °C до комнатной проводилось в высоком вакууме в присутствии ориентирующего поля. Скорость охлаждения поддерживалась постоянной и составляла 600 ° в час.

По каждому составу было проведено 3—4 серии напыления. Все исследованные пленки были подвергнуты химическому анализу по методике, описанной в работе [5].

Рентгенографический анализ пленок системы Fe — Ni — Co. Рентгеновская съемка производилась на аппарате УРС-50И в железном излучении, отфильтрованном марганцевым фильтром, как на неотожженных, так и на отожженных пленках при комнатной температуре. Отжиг пленок производился в вакууме при температуре 400 °C в

течение 5 час. Запись рентгенограмм — с помощью счетчика Гейгера — Мюллера на движущейся бумажной ленте потенциометра ЭПП-09. Чтобы обеспечить большую точность определения постоянной решетки, рентгенограммы снимались при скорости перемещения счетчика Гейгера — Мюллера  $0,5^\circ/\text{мин}$  и скорости перемещения диаграммной ленты  $1,2 \text{ м}/\text{час}$ . Значения угла отражения определялись по средней точке отрезка, проведенного параллельно оси абсцисс на половине высоты максимума кривой записи рефлекса.

В результате фазового рентгенографического анализа пленок сплавов системы Fe — Ni — Co показано существование в исследуемой си-

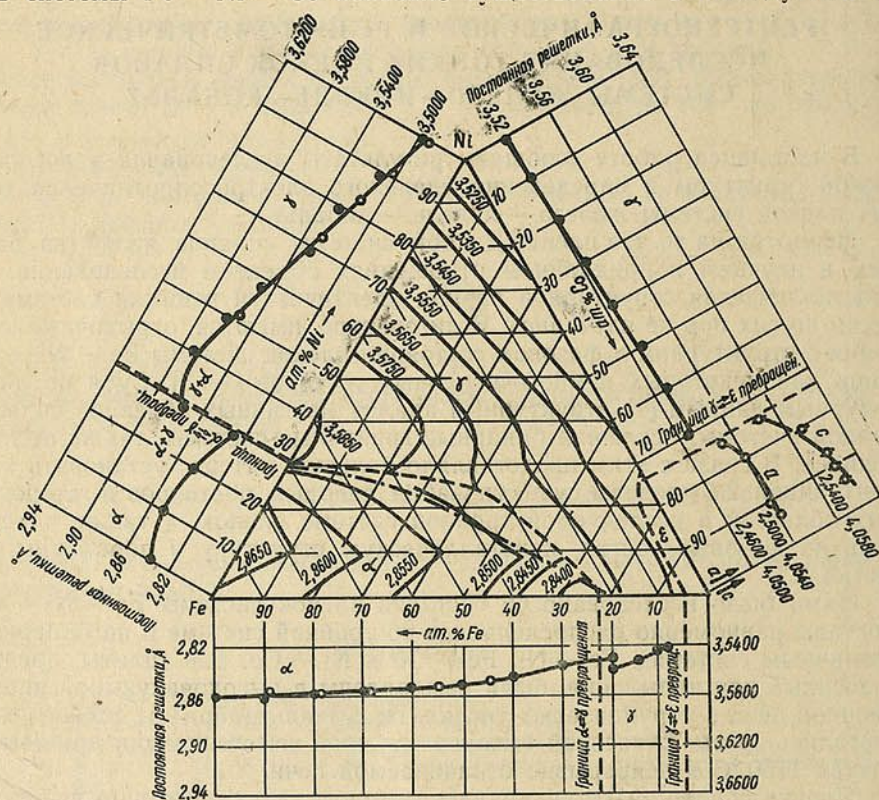


Рис. 1. Зависимость постоянной решетки ( $\text{\AA}$ ) от состава тонких пленок сплавов системы Fe—Ni—Co при комнатной температуре. Светлыми точками показаны значения постоянной решетки некоторых составов массивных образцов сплавов из системы Fe—Ni и Fe—Co, определенные в работе [6]

стеме трех фазовых областей твердых растворов:  $\alpha$ ,  $\gamma$  и  $\epsilon$ -фаз; установлены их границы. Нами очерчены также границы гетерогенного состояния (области  $\alpha+\gamma$  и  $\gamma+\epsilon$ -фаз) тонких пленок железо-никель-кобальтовых сплавов при комнатной температуре.

Концентрационная зависимость постоянной решетки пленок исследуемой тройной системы показана на рис. 1, на котором нанесены линии равных значений параметров решетки. Как следует из приведенного рисунка, постоянная решетки пленок в значительной области сплавов системы Fe — Ni — Co практически аддитивна изменениям концентрации железа и кобальта. В этих областях концентраций экспериментальные точки хорошо укладываются на вегардовские прямые линии. Вблизи  $\alpha \rightleftharpoons \gamma$  и  $\gamma \rightleftharpoons \epsilon$ -превращений, в области существования гетерогенной фазо-



Таблица  
Значения постоянной решетки и рентгеновской плотности некоторых составов, тонких пленок и массивных образцов сплавов системы Fe—Ni и Fe—Co

Химический состав (атомн. %)	Постоянная решетки, Å	Рентгеновская плотность (г/см <sup>3</sup> )
<i>Массивные образцы сплавов</i>		
90,63 Ni—9,37 Fe	3,5278	8,854
82,13 Ni—17,87 Fe	3,5378	8,728
73,03 Ni—26,97 Fe	3,5444	8,64
50,91 Ni—49,09 Fe	3,5779	8,308
41,5 Ni—58,5 Fe	3,5882	8,20
74,37 Fe—25,63 Co	2,8603	8,212
53,21 Fe—46,79 Co	2,8522	8,036
<i>Пленочные образцы</i>		
89,65 Ni—10,34 Fe	3,5294	8,843
80,1 Ni—19,9 Fe	3,541	8,720
67,3 Ni—32,9 Fe	3,5567	8,542
48,7 Ni—51,3 Fe	3,576	8,30
41,0 Ni—59,0 Fe	3,5878	8,195
72,9 Fe—27,1 Co	2,8590	8,200
51,32 Fe—48,68 Co	2,8516	8,025

р, плавно поднимается в направлении к железному углу тройной диаграммы. Наибольшие значения удельного сопротивления приходятся на железо-никелевые составы с высоким содержанием железа и железо-кобальтовые сплавы в диапазоне концентрации 80—30% Co.

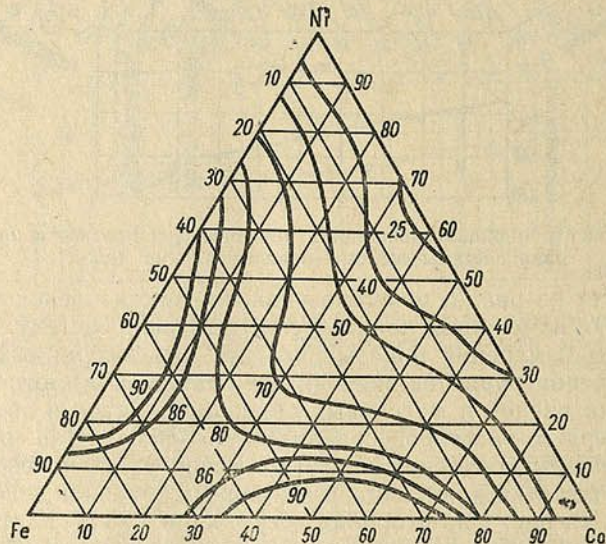


Рис. 3. Зависимость от состава удельного электро-сопротивления тонких пленок сплавов системы Fe—Ni—Co (мком · см)

Удельное сопротивление исследованных нами пленок по абсолютной величине почти вдвое превышает удельное сопротивление отожженных массивных образцов (рис. 4), что может быть обусловлено влиянием технологических условий, при которых происходила кристаллизация пленок.

Характер концентрационной зависимости удельного сопротивления пленок системы Fe—Ni—Co согласуется с фазовым составом пленок, определенным с помощью рентгенографического анализа.

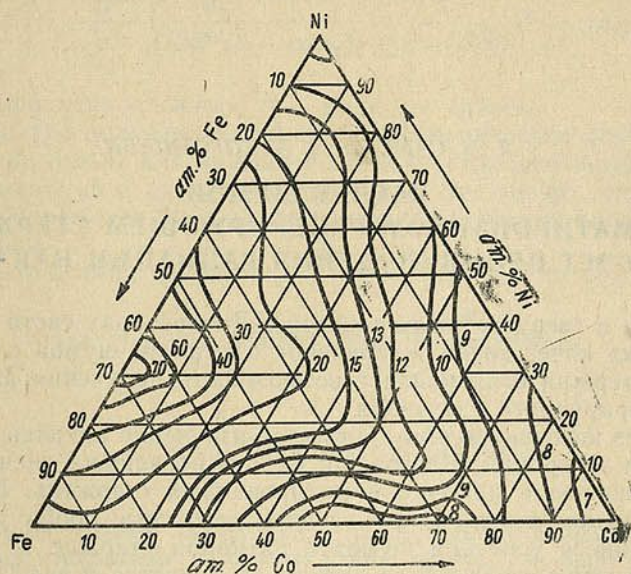


Рис. 4. Концентрационная зависимость удельного электросопротивления массивных образцов сплавов системы Fe—Ni—Co (мком·см)

### Выводы

Проведен рентгенографический анализ тонких пленок исследуемой системы. Впервые изучена зависимость постоянной кристаллической решетки и рентгеновской плотности пленок от состава для всей тройной системы. Установлены пределы существования твердых растворов  $\alpha$ - и  $\gamma$ -фаз в пленках системы Fe—Ni—Co. Установленные границы фазовых областей для тонких пленок в главных чертах совпадают с известными из литературы границами фазовых превращений в массивных образцах сплавов системы Fe—Ni—Co, определенными по данным магнитных и дилатометрических измерений.

Исследована зависимость удельного электросопротивления тонких пленок сплавов системы Fe—Ni—Co.

### Литература

1. Verderber R. R. J. Appl. Phys., 30, № 9, 1959.
2. Reimer L. Zs. für Phys., 149, 425, 1957.
3. Палатник Л. С., Равлик А. С., Стеценко А. Н. Физика металлов и металловедение, 18, в. 4, 1964.
4. Kase T. Sci Rep. Tôhoku Imp. Univ., 16, 491, 1927.
5. Ганопольский В. И., Езерская Т. В., Сухвало С. В. Весті АН БССР, сер. хім. навук, № 3, 1966.
6. Owen E. A., Gates E. L., Sully A. H. Proc. Phys. Soc., 49, 315, 1937.
7. Owen E. A., Lin Y. H. J. Iron Steel Inst., 163, 132, 1949.

Институт физики  
твёрдого тела и полупроводников  
АН БССР

Поступило в редакцию  
15.1. 1968

А. М. САМСОН, Л. А. КОТОМЦЕВА

### РАСЧЕТ ШУМОВ В МАТИРОВАННОМ ГЕНЕРИРУЮЩЕМ СТЕРЖНЕ ЗА СЧЕТ ПРОНИКНОВЕНИЯ РАДИАЦИИ НАКАЧКИ

1. Шумы в твердотельных квантовых генераторах света существенно ухудшают их качество [1]. Увеличение плотности шумов с увеличением размеров стержня ограничивает возможность получения высоких мощностей генерируемого излучения.

Одним из источников шума является излучение накачки в той же частоте, что и генерация. Настоящая работа посвящена оценке шумов за счет проникновения накачки в матированный стержень. Выполненный расчет позволяет вместе с тем изучить некоторые общие закономерности, касающиеся усиления шумов в активном стержне.

2. Рассмотрим стержень из активного вещества в виде прямого кругового цилиндра длины  $l$  и радиуса  $R$ , находящегося в режиме генерации. Предположим, что его боковая поверхность идеально матовая, т. е. что коэффициент отражения потока любого направления одинаков и индикатриса отраженного света сферическая. Ради упрощения расчетов допустим, что коэффициентом отражения от торцов стержня можно пренебречь.

Исследование стержня в режиме генерации позволяет допустить независимость коэффициента усиления  $k$  от накачки, радиации шумов и генерации ( $k = k^{\text{пот}} = (1/l) \ln 1/\sqrt{r_1 r_2} + \rho$ ). Это в свою очередь позволяет рассматривать шумовую накачку независимо от шумов за счет других источников (люминесценция, рассеяние).

Очевидно, что световое поле внутри стержня будет определено, если известна яркость боковых стенок стержня. Эта величина в свою очередь определяется как излучением, непосредственно прошедшим через границу раздела, так и отраженным излучением, приходящим в данную точку от других элементов боковой поверхности. Это значит, что яркость боковой поверхности должна описываться интегральным уравнением. В случае прямого кругового цилиндра с матированной боковой поверхностью это уравнение имеет вид

$$B(z) = r_{21} \int_0^l B(z') \Gamma(z - z') dz' + B_0 (1 - r_{12}). \quad (1)$$

Здесь  $B(z)$  — яркость боковой поверхности<sup>1</sup> в точке  $z$  ( $z$  — расстояние по оси цилиндра от нижнего торца);  $r_{21}$  и  $r_{12}$  — коэффициенты отражения диффузного света при его падении на боковую поверхность со-

<sup>1</sup> Под яркостью поверхности понимается количество излучения, испускаемое в единицу времени в единичном телесном угле элементом поверхности, проекция которой на плоскость, нормальную к направлению распространения, равна  $1 \text{ см}^2$ .

ответственно изнутри и снаружи стержня;  $B_0$  — яркость излучения накачки в частоте генерации на внешней поверхности стержня ( $B_0 = c u_0 / 4\pi$ ). Функция  $\Gamma(z - z')$  представляет ядро интегрального уравнения

$$\Gamma(z - z') = \frac{R^3}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{k \sqrt{2R^2(1 - \cos \varphi) + (z - z')^2}}}{[2R^2(1 - \cos \varphi) + (z - z')^2]^{3/2}} (1 - \cos \varphi)^2 d\varphi, \quad (2)$$

где  $k$  — коэффициент усиления;  $R$  — радиус стержня.

Уравнение (1) получено из общих светотехнических соображений и справедливо не только для положительных  $k$  (отрицательный коэффициент поглощения), но и для отрицательных  $k$ . Это значит, что уравнение (1) при  $k < 0$  описывает также проникновение радиации накачки в канале возбуждения.

Плотность излучения на высоте  $z$  и на расстоянии  $r$  от оси цилиндра

$$\begin{aligned} u(z, r) &= \frac{1}{v} \int_S B(S') \cos \theta' \frac{e^{kl_{S'M'}}}{l_{S'M'}^2} dS' \approx \\ &= \frac{1}{v} \int_0^l B(z') \varphi(|z - z'|, r) dz', \end{aligned} \quad (3)$$

где  $S'$  — точка на боковой поверхности;  $M'$  — точка с координатами  $z$  и  $r$ ;  $\theta'$  — угол между нормалью к поверхности в точке  $S'$  и направлением луча  $S'M'$ ;

$$\begin{aligned} \varphi(|z - z'|, r) &= \frac{1}{R} \int_0^{2\pi} \left( 1 - \frac{r}{R} \cos \varphi \right) \times \\ &\times \frac{e^{kR \sqrt{1 + \left(\frac{r}{R}\right)^2 - 2 \frac{r}{R} \cos \varphi + \left(\frac{z - z'}{R}\right)^2}}}{\left[ 1 + \left(\frac{r}{R}\right)^2 - 2 \frac{r}{R} \cos \varphi + \left(\frac{z - z'}{R}\right)^2 \right]^{3/2}} d\varphi. \end{aligned} \quad (4)$$

3. Прежде чем переходить к решению (1) и анализу (3), оценим коэффициенты отражения  $r_{12}$  и  $r_{21}$ . Согласно Гершуну [2], при падении диффузного света из менее плотной среды на полированную поверхность вещества с показателем преломления  $n$  коэффициент отражения  $r_{12}$  можно определить, проинтегрировав формулы Френеля

$$r_{12} = \frac{R_{\perp} + R_{\parallel}}{2}, \quad (5)$$

где

$$R_{\perp} = \frac{n^8 - 4n^7 - 8n^6 + 8n^5 + 6n^4 - 3n^3 + 1}{(n^4 - 1)^2} + \frac{16n^4(n^4 + 1)}{(n^4 - 1)^2(n^2 + 1)} \ln n -$$

$$- \frac{2n^2(n^2 - 1)}{(n^2 + 1)^3} \ln \frac{n + 1}{n - 1}, \quad (6)$$

$$R_{\parallel} = \frac{(n - 1)(3n + 1)}{3(n + 1)^2} \quad (7)$$

— коэффициенты отражения соответственно для двух поляризаций. В случае рубина с  $n = 1,76$   $r_{12} \sim 0,13$ , в случае стекла с  $n = 1,53$   $r_{12} \sim 0,10$ .

Если же диффузное излучение падает изнутри на полированную поверхность, то значительная часть излучения претерпевает полное внутреннее отражение и суммарный коэффициент отражения более высок. Как и в случае  $r_{12}$ , значение  $r_{21}$  можно определить, проинтегрировав формулы Френеля. Однако в соответствии с [2] можно найти  $r_{21}$  исходя из законов термодинамики, а именно

$$n^2(1 - r_{21}) = 1 - r_{12} \text{ или } r_{21} = 1 - \frac{1 - r_{12}}{n^2}. \quad (8)$$

В соответствии с (8) для рубина  $r_{21} \sim 0,71$ , для стекла  $r_{21} \sim 0,61$ . Интегрирование формул Френеля приводит к тем же результатам.

Приведенные оценки, по-видимому, справедливы для коэффициентов отражения диффузного света от матированной поверхности. Во всяком случае в дальнейших расчетах с учетом отражения света от матированной поверхности будем придерживаться этих оценок.

4. Анализ ядра интегрального уравнения (2) показывает, что оно представляет быстро убывающую, начиная от  $z - z' = 0$ , функцию  $z - z'$ , особенно при малых  $kR$ . Это значит, что на исследуемую площадку боковой поверхности попадают в основном лучи от точек поверхности, расположенных недалеко от исследуемой точки. Лишь при достаточно больших  $kR$  в яркость начинают вносить свой вклад лучи, исходящие от более удаленных точек боковой поверхности.

Быстрое убывание ядра  $\Gamma(z - z')$  с увеличением  $|z - z'|$  позволяет в случае длинного стержня значительно упростить расчеты. В этом случае для центральной части цилиндра (для точек  $z$  вблизи  $z = l/2$ ) уравнению (1) удовлетворяет значение  $B(z) = \text{const}$ . Падение  $B(z)$  будет наблюдаться только у торцов стержня.

Подставляя в (1) вместо  $B(z')$  постоянное значение, получим следующую оценку  $B(z)$  для точек вблизи  $z = l/2$ :

$$B(z) \approx \frac{B_0(1 - r_{12})}{1 - 2r_{21} \int_0^{l/2} \Gamma(z) dz}. \quad (9)$$

Соответственно плотность излучения

$$\begin{aligned} u(z, r) &= \frac{1}{v} \int_0^l B(z') \varphi(|z - z'|, r) dz' \approx \frac{2B}{v} \int_0^{l/2} \varphi(z, r) dz = \\ &= \frac{2B_0(1 - r_{12}) \int_0^{l/2} \varphi(z, r) dz}{v[1 - 2r_{21} \int_0^{l/2} \Gamma(z) dz]}. \end{aligned} \quad (10)$$

Из (10) следует, что распределение плотности излучения определяется функцией  $\int_0^{l/2} \varphi(z, r) dz$ , а абсолютное значение сильно зависит от коэффициента отражения  $r_{21}$  и интеграла от ядра  $\int_0^{l/2} \Gamma(z) dz$ .

Расчет показывает, что даже в неусиливающем слое ( $k = 0$ ) яркость боковой поверхности изнутри в  $\frac{1 - r_{12}}{1 - r_{21}}$  раз выше яркости внешнего потока

$B_0$ . Для рубина  $\frac{B}{B_0} \sim 3$ , для стекла  $\frac{B}{B_0} \sim 2,4$ .

Интеграл от  $\varphi(z, r)$  при  $k = 0$  равен постоянному значению (не зависит от  $r$ ), и, следовательно,

$$u(z, r) = \frac{4\pi B_0 (1 - r_{12})}{v(1 - r_{21})} = u_0 n \frac{1 - r_{12}}{1 - r_{21}}. \quad (11)$$

Таким образом, даже при  $k=0$  плотность излучения внутри цилиндра значительно выше наружной плотности радиации: в случае рубина — примерно в 5,3 раза, неодимового стекла — в 3,6 раза.

В работе [3] рассмотрено распределение излучения накачки в матированном стержне при обычных коэффициентах усиления ( $kR < 0$ ). В частности, показано, что плотность излучения минимальна на оси стержня. Расчет по приведенным здесь формулам для отрицательных  $kR$  дает те же результаты.

При положительных коэффициентах поглощения (отрицательных  $kR$ ) роль второго слагаемого в знаменателе (9) и (10) по мере возрастания  $|kR|$  становится все меньше, и поэтому плотность излучения слабо зависит от внутреннего коэффициента отражения  $r_{21}$ .

При положительных  $kR$  (отрицательном коэффициенте поглощения) плотность излучения максимальна в центре стержня и ввиду значительной величины  $\int_0^{l/2} \Gamma(z) dz$  (табл. 1) возрастает зависимость абсолютной ве-

Таблица 1

Значения  $\int_0^{l/2} \Gamma(z) dz$  при разных  $kR$

$l/R$	$k/R$						
	0,00	0,04	0,08	0,12	0,20	0,30	0,40
4	0,488	0,526	0,567	0,613	0,716	0,875	1,075
5	0,493	0,533	0,576	0,623	0,732	0,900	1,114
7	0,497	0,538	0,584	0,632	0,746	0,927	1,162
10	0,499	0,540	0,586	0,636	0,754	0,946	1,204
15	0,500	0,541	0,587	0,639	0,761	0,964	1,259
20	0,500	0,541	0,588	0,640	0,766	0,985	1,314

личины плотности излучения от коэффициента внутреннего отражения  $r_{21}$ . Об этом свидетельствуют и графики рис. 1—2, на которых приведены  $u(r, l/2)/u_0$  для нескольких  $kR$ ,  $l$  и  $r_{21}$  (рубин и неодимовое стекло).

Из рис. 1—2 видно, что плотность излучения с увеличением  $kR$  начинает быстро возрастать. Так, при  $l/R=20$  и  $r_{21}=0,71$  (рубин) плотность в центре изменяется при изменении  $kR$  от 0 до 0,04 в 1,33 раза. Изменение же  $kR$  от 0,12 до 0,16 приводит к увеличению  $u(r=0)$  в 5,9 раза.

Сравнение между собой рисунков, соответствующих одинаковому  $kR$  и  $r_{21}$ , но разным  $l$ , показывает, что увеличение  $l$  приводит сначала к незначительному увеличению плотности излучения. Однако при еще большем увеличении  $l$  плотность излучения начинает быстро расти.

Сравнение рис. 1 и 2, соответствующих разным  $r_{21}$  (рубин и неодимовое стекло), показывает, что рост плотности излучения с увеличением  $kR$  и  $l$  весьма чувствителен к коэффициенту внутреннего отражения  $r_{21}$ . Для рубина ( $r_{21} \sim 0,71$ ) быстрый рост наблюдается при значительно меньших  $kR$ , чем для неодимового стекла.

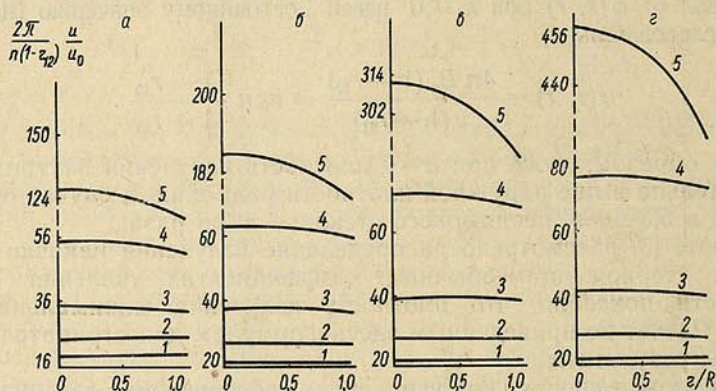


Рис. 1. Распределение относительной плотности излучения по радиусу стержня из рубина при разных  $kR$  и  $l$ :

$a-l/R=8$ ;  $б-10$ ;  $в-14$ ;  $г-20$ ;  $1-kR=0$ ;  $2-0,04$ ;  $3-0,08$ ;  $4-0,12$ ;  $5-0,16$

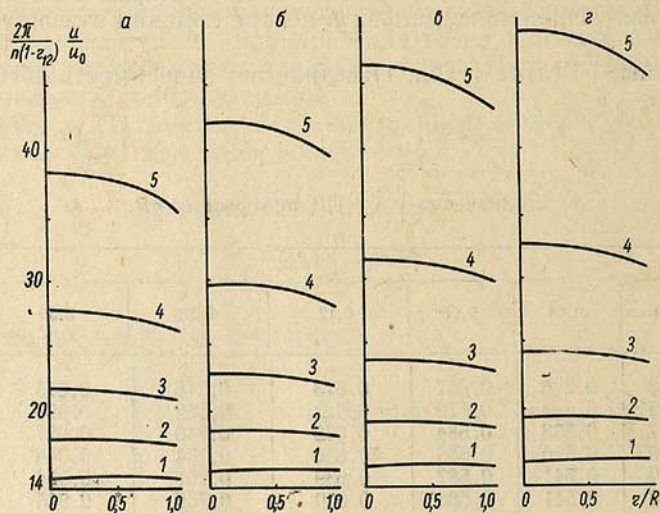


Рис. 2. Распределение относительной плотности излучения по радиусу стержня из неодимового стекла при разных  $kR$  и  $l$ :

1-5 (см. рис. 1)

5. Предположим, что спектр лампы накачки соответствует спектру абсолютного черного тела [4] и плотность излучения на поверхности стержня определяется формулой Планка

$$u_0 = \frac{8\pi h \nu^3}{c^3} \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}, \quad B_0 = \frac{cu_0}{4\pi}. \quad (12)$$

Подставляя (12) в (10), получим

$$u = \frac{4h\nu^3}{c^3} \frac{n}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} \frac{(1 - r_{12}) \int_0^{l/2} \varphi(z, r) dz}{1 - 2r_{21} \int_0^{l/2} \Gamma(z) dz} \quad (13)$$

Если нас интересует плотность излучения в терминах отношения вероятности вынужденного перехода к вероятности спонтанного перехода  $A_{ij}$ , то

$$\frac{B_{ij}u}{A_{ij}} = \frac{n}{2\pi} \frac{(1 - r_{12}) \int_0^{l/2} \varphi(z, r) dz}{1 - 2r_{21} \int_0^{l/2} \Gamma(z) dz} \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} \quad (14)$$

В табл. 2 и 3 приведены значения  $B_{ij}u/A_{ij}$  при разных  $T$ ,  $kR$  и при двух значениях  $r_{21}$  (рубин и неодимовое стекло).

Таблица 2  
Значения  $B_{21}u/A_{21}$  при  $r_{12}=0,13$ ,  $n=1,76$ ,  $r_{21}=0,71$  (рубин)

$T^\circ, K$	$l/R$							
	10				14			
	$kR$							
	0,00	0,04	0,08	0,12	0,16	0,00	0,04	0,08
7000	0,27	0,36	0,50	0,85	2,48	0,28	0,37	0,54
9000	0,56	0,72	1,02	1,75	5,05	0,57	0,76	1,11
11000	0,90	1,17	1,65	2,80	8,15	0,92	1,22	1,78
13000	1,27	1,66	2,35	3,99	11,58	1,31	1,73	2,54

$T^\circ, K$	$l/R$						
	14			20			
	$kR$						
	0,12	0,16	0,00	0,04	0,08	0,12	0,16
7000	0,96	4,15	0,29	0,38	0,56	1,03	6,10
9000	1,96	8,44	0,58	0,77	1,13	2,10	12,40
11000	3,17	13,62	0,94	1,24	1,83	3,39	20,01
13000	4,50	19,37	1,33	1,77	2,60	4,81	28,45

Из табл. 2 следует, что вероятность вынужденных переходов под действием радиации накачки одного порядка с вероятностью спонтанного перехода (от 0,27  $A_{21}$  при  $kR=0$ ,  $l/R=10$  и  $T=7000^\circ K$  до 28,4  $A_{21}$  при  $kR=0,16$ ). Это значит, что плотность шума в расчете на ширину линии люминесценции равна  $0,038 \div 3,98$  эрг/см<sup>3</sup>.

Аналогичные следствия вытекают и из табл. 3 для неодимового стекла. Так, если  $kR=0$ ,  $l/R=10$ , то  $B_{32}u$  изменится от 0,56  $A_{32}$  до 1,82  $A_{32}$ .

Таблица 3

Значения  $B_{32}u/A_{32}$  при  $r_{12}=0,1$ ,  $n=1,533$ ,  $r_{21}=0,605$  (неодимовое стекло)

T°, К	l/R									
	10					14				
	kR									
	0,00	0,04	0,08	0,12	0,16	0,20	0,25	0,00	0,04	0,08
7000	0,56	0,67	0,83	1,09	1,55	2,64	17,40	0,57	0,69	0,87
9000	0,95	1,14	1,42	1,85	2,64	4,48	29,58	0,97	1,18	1,49
11000	1,37	1,65	2,05	2,67	3,81	6,47	42,73	1,41	1,70	2,15
13000	1,82	2,18	2,71	3,54	5,04	8,56	56,52	1,86	2,25	2,84

T°, К	l/R									
	14			20						
	k/R									
	0,12	0,16	0,20	0,00	0,04	0,08	0,12	0,16	0,20	
7000	1,16	1,71	3,19	0,58	0,70	0,89	1,20	1,81	3,61	
9000	1,97	2,91	5,42	0,98	1,19	1,51	2,03	3,07	6,14	
11000	2,85	4,20	7,83	1,42	1,73	2,18	2,94	4,44	8,87	
13000	3,76	5,56	10,35	1,88	2,28	2,88	3,89	5,87	11,74	

т. е. в 3,25 раза при изменении  $T$  от 7000 до 13000 °К. Плотность излучения в канале накачки ( $v_{41} \sim 20000 \text{ см}^{-1}$ ) изменяется при этом в 7,4 раза. Это значит, что шумы за счет накачки в случае неодимового стержня не столь чувствительны к ней при изменении накачки в сравнительно небольших интервалах температур.

Следует отметить, что приведенные оценки для плотности шума находятся в удовлетворительном согласии с экспериментальными данными работы [5], где постоянная шума для одного конкретного случая определена равной  $1,85 \text{ эрг/см}^3$ .

6. Анализ формул (9) — (10) позволяет установить некоторые общие закономерности, касающиеся развития шумов в матированных образцах. Так, из (9) — (10) следует, что если знаменатель близок к нулю, т. е. при

$$\int_0^{l/2} \Gamma(z, kR) dz \sim \frac{i}{2r_{21}}, \quad (15)$$

плотность шумов очень быстро растет, и генерация, если она существовала, срывается. Следовательно, значения  $kR$  и  $l$ , при которых шумы становятся весьма большими, являются критическими. При дальнейшем увеличении  $R$  при заданном  $k$  и  $l$  или увеличении  $l$  при данном  $kR$  генерация вообще невозможна.

При строгом выполнении (15) шумы равны бесконечности, что физически не обосновано. Чтобы не возникало такого абсурдного результата, необходимо предположить, что коэффициент усиления шумов при выполнении (15) равен их коэффициенту потерь  $k_{\text{ш}}^{\text{пот}}$ . Таким образом, равенство (15) слугит уравнением для определения  $k_{\text{ш}}^{\text{пот}}$  при известных  $R$ ,  $l$  и  $r_{21}$ .

При выполнении (15) значение  $\int_0^{l/2} \Gamma(z, kR) dz$  в случае рубина равно

$\frac{1}{2r_{21}} = 0,704$ , в случае неодимового стекла — 0,826. Построив по данным

табл. 1 зависимость  $\int_0^{l/2} \Gamma(z, kR) dz$  от  $kR$  при постоянных  $l$ , можно затем найти такие  $kR$ , при которых значения интеграла равны указанным величинам. В результате можно получить связь между  $l$ ,  $R$  и  $k_{ш}^{пот}$  (табл. 4.)

Из табл. 4 видно, что при одних и тех же длинах  $l$  значения  $k_{ш}^{пот} R$  для стержня из неодимового стекла в среднем раза в полтора выше, чем для рубинового. Вместе с тем видно, что для реальных длин и радиусов  $k_{ш}^{пот}$  сравнимо с коэффициентом усиления. Например, если  $R = 2$  см,  $l = 15$  см, то для рубина  $k_{ш}^{пот} = 0,0825$  см<sup>-1</sup>. При одном глухом и одном полупрозрачном зеркале с  $r = 0,21$  и при коэффициенте внутренних потерь  $\rho = 0,03$  см<sup>-1</sup> значение коэффициента усиления  $k = \frac{1}{2l} \ln \frac{1}{r} + \rho = 0,0825$  см<sup>-1</sup>. Если

коэффициент отражения второго торца меньше  $r = 0,21$ , то генерация будет отсутствовать при любых накачках.

Обычно полагают, что сильное увеличение диаметра стержня нецелесообразно из-за ухудшающегося теплообмена [6] и из-за того, что радиация накачки не проникает внутрь стержня

[3]. Как видим, существует предел в увеличении  $R$  и из-за наличия шумов.

Авторы выражают глубокую благодарность Б. И. Степанову за внимание к работе.

### Литература

1. Степанов Б. И., Рубанов А. С. ЖПС, I, вып. 1, 35, 1964.
2. Гершун А. А. Избранные труды по фотометрии и светотехнике. Физматгиз, М., 1958.
3. Рутковский Ф. К., Грибковский В. П., Кравцов Л. А. Изв. АН СССР, сер. физ., 29, 1370, 1965.
4. Конюхов В. К., Кулевский Л. А., Прохоров А. М. ЖПС, I, вып. 1, 51, 1964.
5. Ванюков М. П., Исаенко В. И., Серебряков В. А., Степанов Б. И. ЖПС, I, № 2, 1964.
6. Хромов А. В. Вопросы радиоэлектроники, серия XII, общетехническая, вып. 10, 48, 1964.

Институт физики  
АН БССР

Поступило в редакцию  
8.IX 1967

Таблица 4

Значения  $k_{ш}^{пот} R$  при разных  $\frac{l}{R}$  и  $r_{21}$

$l/R$	$r_{21}=0,605$	$r_{21}=0,71$
4	0,275	0,189
5	0,259	0,180
7	0,247	0,172
10	0,241	0,167
15	0,236	0,165

П. Я. ГАНИЧ

**ПРОСТРАНСТВЕННАЯ СТРУКТУРА  
РАСSEЯННОГО «НАЗАД» ИЗЛУЧЕНИЯ,  
ВОЗНИКАЮЩЕГО ОТ ОСВЕЩЕНИЯ ВОДНОЙ СРЕДЫ  
КОЛЛИМИРОВАННЫМ ПУЧКОМ РАДИАЦИИ**

Входящий в воду параллельный пучок света частично рассеивается находящимися в ней взвесями. Радиацию, рассеянную под углами, близкими к  $180^\circ$  от направления распространения коллимированного пучка, называют световой дымкой. Последняя уменьшает дальность видимости в воде вследствие снижения контраста между объектом и фоном.

Для того чтобы иметь полное представление о структуре светового поля при освещении рассеивающей среды узким пучком света, необходимо знание пространственного тела яркости световой дымки. Кроме того, на практике либо из-за конкретных требований измерительных схем, либо вследствие неточности юстировки нередко приемник и источник располагаются таким образом, что ось визирования проходит в пространстве выше или ниже пучка радиации.

В настоящей работе изложены некоторые результаты экспериментальных измерений пространственного распределения интенсивности рассеянного водной средой излучения. Исследования проводились на модельных системах. Их оптические свойства выбирались таким образом, что полученные данные могут быть перенесены на естественные водоемы исходя из известного в теории переноса излучения принципа подобия.

Схема эксперимента. Пусть параллельный пучок света входит в рассеивающую среду таким образом, что его оптическая ось направлена по  $OX'$  (рис. 1). Яркоммер расположен в точке  $A$  на расстоянии  $OA=r$  от источника. Он может поворачиваться в двух взаимно перпендикулярных плоскостях.

Будем характеризовать рассеивающий объем в направлении  $AM$  азимутальным углом  $\Theta$  и полярным  $\gamma$ , где  $\Theta$  — угол между плоскостью  $XOY$  и плоскостью  $Q$ , в которой расположены  $AM$  и ось  $OY$ ;  $\gamma$  — угол между  $AM$  и линией  $AB$ , расположенной в  $Q$  и параллельной  $XOZ$ . Направление отсчета положительных углов  $\Theta$  и  $\gamma$  на рис. 1 показано стрелками. Оптическая база между приемником и источником  $\tau_r = \epsilon r$  ( $\epsilon$  — показатель ослабления среды) изменялась путем перемещения яркоммера вдоль оси  $OY$ . Таким образом, фотометрируемый объем рассеивающей среды в направлении  $AM$  в принятой нами системе обозначений описывается координатами  $\Theta, \gamma, \tau_r$ . Основные характеристики аппаратуры следующие: угловая расходимость пучка света и апертурный угол приема одинаковы и равны  $32'$ , оптический диаметр светового пучка  $\epsilon d_{изл} = 0,02$  ( $d_{изл}$  — его геометрический диаметр), оптический диаметр приемника  $\epsilon d_{пр} = 0,01$  ( $d_{пр}$  — диаметр объектива яркоммера). Опыты были поставлены в экспериментальном бассейне с зачерненными стенками, имевшем размеры

10×2×2 м. Значения показателя ослабления  $\epsilon$ , а также соотношение между поглощением и рассеянием среды варьировались добавлением в воду поглощающих (краситель нигрозин) и рассеивающих (молочная эмульсия) компонент. Измерения проводились в монохроматическом свете при длине волны 546 нм.

Методика измерений. Для корректного сопоставления экспериментальных значений яркости световой дымки необходимо провести нормировку полученных отсчетов к световому потоку, входящему в рассеивающую среду.

Если перед пучком света, падающим на водную толщу, расположить экран с известным коэффициентом отражения  $R$  и ламбертовским распределением, то сила света  $I_0$  экрана под углом наблюдения  $\varphi$  будет связана с величиной входящего потока  $F_{вх}$  следующим соотношением:

$$F_{вх} = \frac{\pi I_0}{R \cos \varphi}.$$

Приемник радиации даст на приборе отсчет  $\alpha_0$ , пропорциональный потоку  $\Delta F_0$ , принимаемому в телесном угле  $\Delta \omega_0$ , т. е.  $\alpha_0 = \mu \Delta F_0 = \mu I_0 \Delta \omega_0$  ( $\mu$  — коэффициент пропорциональности). Поэтому

$$F_{вх} = \frac{\pi \alpha_0}{\mu R \cos \varphi \Delta \omega_0}. \quad (1)$$

При измерении рассеянного средой света отсчет  $\alpha$  на приборе будет, очевидно,

$$\alpha = \mu B \Delta \omega S_{пр}, \quad (2)$$

где  $B$  — яркость выходящего из среды излучения;  $\Delta \omega$  — телесный угол, в котором оно принимается;  $S_{пр}$  — площадь объектива приемника<sup>1</sup>. Практически под  $B$  следует понимать не истинную яркость, а яркость рассеянного света, усредненную в пределах  $\Delta \omega$  и  $S_{пр}$ .

Из (1) и (2) следует, что

$$\frac{B}{F_{вх}} = \frac{R \alpha \cos \varphi \Delta \omega_0}{\pi \alpha_0 S_{пр} \Delta \omega}. \quad (3)$$

При проведении измерений яркости дымки с различными диаметрами снопа лучей в формулу (3) надо ввести соответствующую поправку. Очевидно, сигнал от эталона с увеличением  $d_{изл}^0$  (размеры эталона все время больше  $d_{изл}^0$ ) возрастает пропорционально увеличению квадрата диаметра светового пучка при неизменной яркости эталона.

Если отсчет  $\alpha_0$  получен при размерах излучателя  $d_{изл}^0$ , то при переходе к  $d_{изл}^*$  следует ввести поправочный множитель  $\left(\frac{d_{изл}^0}{d_{изл}^*}\right)^2$ .

<sup>1</sup> Если измерения  $F_{вх}$  и рассеянного средой излучения проводятся яркомером с одним и тем же апертурным углом приема, то  $\Delta \omega_0 = \Delta \omega$ .

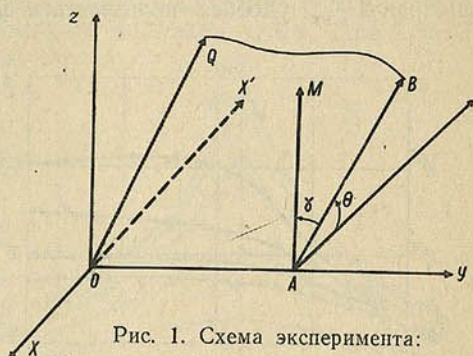


Рис. 1. Схема эксперимента:

$OA$  — расстояние между источником и приемником,  $\varphi$  — полярный и  $\theta$  — азимутальный углы

С учетом вышесказанного (3) принимает вид

$$\frac{B}{F_{\text{вх}}} = \frac{R \alpha \cos \varphi \Delta \omega_0}{\pi \alpha_0 S_{\text{пр}} \Delta \omega} \left( \frac{d_{\text{изл}}^{02}}{d_{\text{изл}}^*} \right)^2. \quad (3')$$

Для сравнения экспериментальных данных с теоретическими, полученными в приближении однократного рассеяния (см., например, [1]), вместо величины  $B/F_{\text{вх}}$  удобнее пользоваться функцией  $b = \frac{B}{E_0 \Lambda \varepsilon d_{\text{изл}}^*}$ , где  $E_0$  —

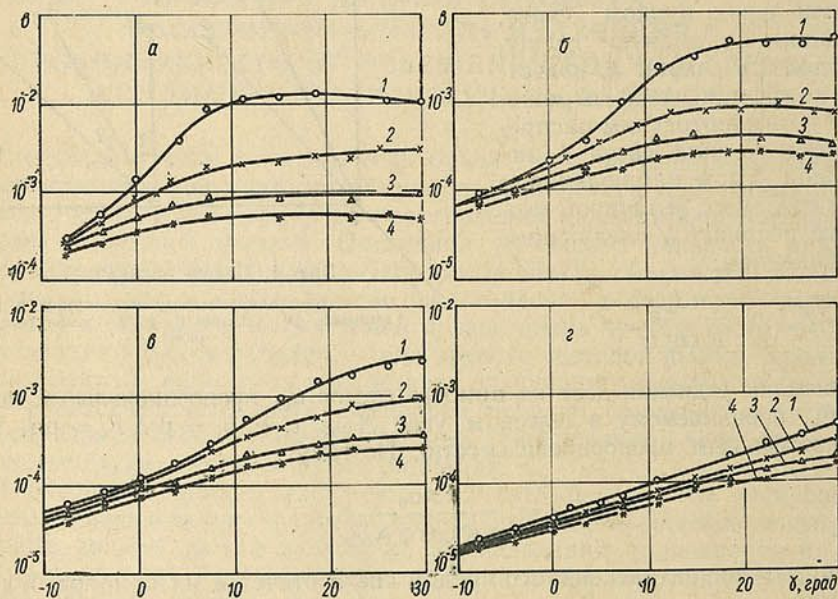


Рис. 2. Зависимость  $b$  от полярных углов  $\gamma$ :

$\Lambda=0,85$ ;  $\varepsilon=0,5 \text{ м}^{-1}$ ; а— $\tau_r=0,063$ ; б— $\tau_r=0,125$ ; в— $\tau_r=0,25$ ; г— $\tau_r=0,5$ . Цифры на кривых соответствуют различным азимутальным углам  $\Theta$ : 1— $0^\circ$ ; 2— $3^\circ 45'$ ; 3— $7^\circ 30'$ ; 4— $11^\circ 15'$

освещенность, создаваемая источником света у входа в рассеивающую водную среду;  $\Lambda = \sigma/\varepsilon$  — вероятность выживания фотона ( $\sigma$  — показатель рассеяния слоя единичной толщины).

Преобразуя (3'), получим для величины  $b$  выражение

$$b = \frac{R \alpha \cos \varphi d_{\text{изл}}^{02}}{\pi \alpha_0 \sigma d_{\text{пр}}^2 d_{\text{изл}}^*} \frac{\Delta \omega_0}{\Delta \omega}. \quad (4)$$

Обсуждение экспериментальных данных. Рассмотрим интенсивность рассеянной радиации, регистрируемой при различных полярных и азимутальных углах, оптических базах и вероятностях выживания фотона.

На рис. 2 приведены зависимости  $b$  в логарифмическом масштабе от полярных углов  $\gamma$  для различных азимутальных углов и оптических баз  $\tau_r$ .

В принятой нами схеме опытов азимутальная структура дымки симметрична относительно плоскости  $\Theta=0^\circ$ . Вследствие этого данные представлены для положительных углов  $\Theta$ .

Из рисунка видно, что с увеличением полярных углов вначале происходит резкое возрастание интенсивности рассеянного света, затем рост замедляется.

Максимальный перепад значений  $b$  в диапазоне  $\gamma = -10^\circ \div +30^\circ$  на малых  $\tau_r$  достигает двух порядков. С ростом оптической базы эти изменения происходят более плавно.

Следует отметить наличие участков линейной зависимости между  $b$  в логарифмическом масштабе и  $\gamma$  в области малых значений полярных углов, причем с увеличением расстояний между источником и приемником этот участок охватывает все больший диапазон углов. При  $\tau_r = 0,5$  отмеченное явление имеет место при всех рассмотренных значениях  $\gamma$  (рис. 2, *з*).

Ход кривых для различных азимутальных плоскостей во многом подобен. С ростом азимутальных углов абсолютные значения функции  $b = f(\gamma)$  уменьшаются.

Азимутальную структуру дымки удобно проследить на рис. 3, где приведена зависимость  $b$  от  $\Theta$  для разных  $\gamma$  на малой и большой базах. Из рисунка следует, что наиболее сильное влияние азимута на интенсивность рассеянной радиации наблюдается в тех же случаях, где отмечена резкая зависимость для полярных углов. С уменьшением  $\gamma$ , особенно в области  $\gamma < 0$ , когда ось яркомера направлена в сторону от светового пучка и приемник регистрирует лишь многократно рассеянное излучение, влияние  $\Theta$  уменьшается.

Рис. 2 и 3 дают представление об изменении пространственной структуры световой дымки с ростом  $\Theta$ ,  $\gamma$ ,  $\tau_r$ . Так, например, под углом  $\gamma = 15^\circ$  при повороте приемника на азимутальный угол от  $0^\circ$  до  $5^\circ$  на оптической базе  $\tau_r = 0,063$  величина  $b$  изменяется на порядок, а при  $\tau_r = 0,5$  — только в 1,3 раза.

До сих пор мы рассматривали яркость световой дымки при постоянном значении вероятности выживания фотона  $\Lambda = 0,85$ . Однако в реальных водоемах величина  $\Lambda$  не остается постоянной. Как известно, для различных озерных, морских и океанских вод она изменяется от 0,6 до 0,9. Интересно проследить зависимость  $b$  от вероятности выживания фотона. Характер этой зависимости иллюстрируется рис. 4, на котором приведены экспериментальные значения  $b$  при различных  $\Lambda$  для  $\Theta = 0^\circ$ . Обращает на себя внимание линейное возрастание функции  $b$  в логарифмическом масштабе с увеличением  $\Lambda$ .

Согласно формуле (4), изменения  $b$  при различных вероятностях выживания фотона вызываются изменением величин отсчетов  $a$  и показателя рассеяния  $\sigma$ . Исходя из [1], можно показать, что в случае однократного рассеяния значения  $b$  должны сохраняться постоянными при варь-

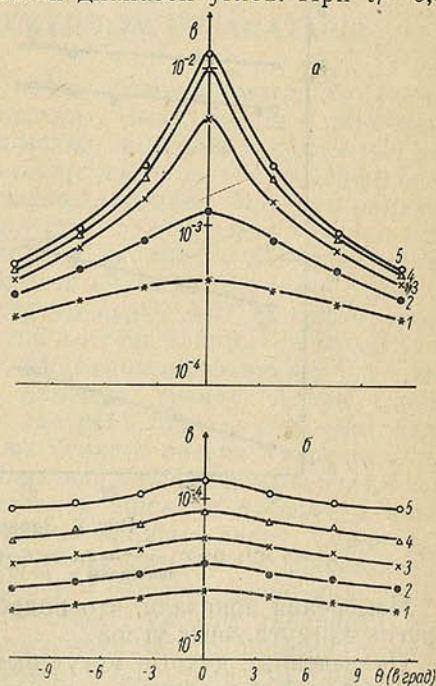


Рис. 3. Зависимость  $b$  от азимутальных углов  $\Theta$ :

$\Lambda = 0,85$ ;  $\epsilon = 0,5 \text{ м}^{-1}$ ;  $a - \tau_r = 0,063$ ;  $b - \tau_r = 0,5$ .  
Цифры на кривых соответствуют различным  $\Theta$ :  
1— $5^\circ$ ; 2— $0^\circ$ ; 3— $5^\circ$ ; 4— $10^\circ$ ; 5— $15^\circ$

ровании  $\Lambda$ . То обстоятельство, что на опыте наблюдалась зависимость величины  $b$  от вероятности выживания кванта света, свидетельствует о существенном влиянии многократно рассеянной радиации на световое поле в среде.

Как видно из рис. 4, особенно заметна роль  $\Lambda$  при малых полярных углах  $\gamma$  на больших оптических расстояниях  $\tau$ . Это объясняется тем, что в указанных случаях на объектив яркомера попадает рассеянное излучение из удаленных участков водной среды, в котором преобладает многократно рассеянный свет.

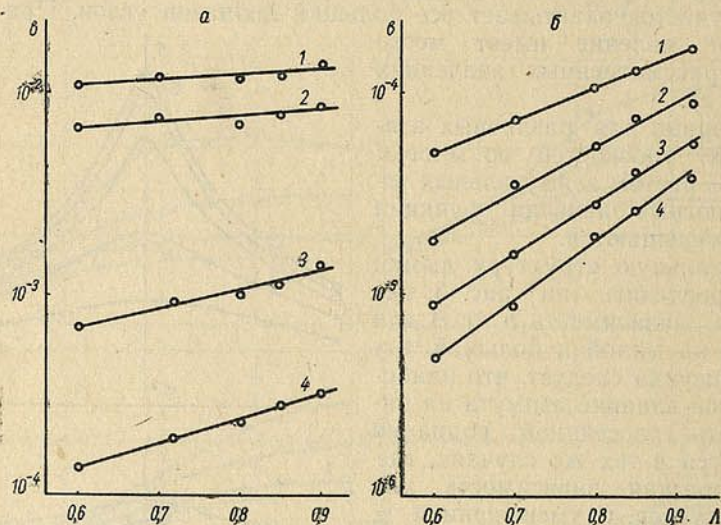


Рис. 4. Зависимость  $b$  от  $\Lambda$ :

$\varepsilon=0,5 \text{ л}^{-1}$ ;  $\Theta=0^\circ$ ;  $a-\tau_r=0,063$ ;  $b-\tau_r=0,5$ . Цифры соответствуют различным значениям  $\gamma$ : 1— $15^\circ$ ; 2— $7,5^\circ$ ; 3— $0^\circ$ ; 4— $7,5^\circ$ .

Измерения показали, что подобные зависимости имеют место и для других азимутальных углов.

Приведенные данные могут быть использованы при разработке гидрооптической аппаратуры, в частности, при выборе необходимой точности угловых перемещений приемников и источников радиации, предназначенных для работы в реальных водных бассейнах.

Выражаю глубокую благодарность А. П. Иванову за руководство и постоянный интерес к работе.

### Литература

1. Гершун А. А. Труды ГОИ, 11, в. 99, 1936.

Институт физики  
АН БССР

Поступило в редакцию  
4.XI 1967

А. П. ХАПАЛЮК, А. С. РУДНІЦКІ

### УМОВА ГЕНЕРАЦЫІ У ДВУХМЕРНЫМ РЭЗНАТАРЫ

Размеркаванне электрамагнітнага поля, генерыруемага аптычным кваітавым генератарам (АКГ), у прасторы вызначаецца ў асноўным уласцівасцямі яго рэзанатара. Лазеры маюць звычайна адкрыты тып рэзанатараў, у тэорыі якіх вырашаны да гэтага часу толькі прасцейшыя задачы, якія адпавядаюць вельмі ідэалізаваным умовам. Метадам самаўзгодненых палёў Фокса і Лі [3] даследуюцца рэзанансныя ўласцівасці рэзанатараў у выглядзе двух абмежаваных люстраў у лінейным аднародным дыяэлектрыку. Гэтыя ўмовы бліжэй за ўсё адпавядаюць умовам, што рэалізуюцца ў газавых АКГ. У цвёрдацельных АКГ на фарміраванне выпраменьвання істотны ўплыў могуць аказаць бакавыя паверхні ўзору. У рабоце [1] даецца аналіз дзеяння двухмернага рэзанатара ў выпадку поўнага ўнутранага адбіцця на бакавых гранях. Аднак тарцы разглядаюцца як ідэальна адбіваючыя паверхні. Акрамя таго, разглядаюцца пасіўныя рэзанатары. Асновай жа ўсякага лазера з'яўляецца, як вядома, актыўны ўзор і пры тым не з ідэальна адбіваючымі тарцамі.

Разнастайнасць у прыбліжаных метадах апісання дзеяння рэзанатараў АКГ звязана з цяжкасцямі рашэння краявых задач. Структуру поля лазера, а значыць, і многія іншыя характарыстыкі выпраменьвання ў прынцыпе можна атрымаць, знайшоўшы рашэнне ўраўненняў Максвела, якія адпавядаюць гранічным умовам і ўмовам генерацыі. На жаль, задача настолькі складаная матэматычна, што яе рашэнне ўдалося атрымаць толькі ў прасцейшым выпадку — для генерацыі ў аднамерным рэзанатары [2].

Разгледзім у лінейным прыбліжэнні стацыянарную генерацыю святла ў двухмерным рэзанатары, што нагадвае сабой бясконца доўгі прамавугольны цыліндр. Вось  $y$  дэкартавай сістэмы каардынат накіравана ўздоўж гэтай даўжыні. Дапусцім, што ўсе велічыні не залежаць ад гэтай каардынаты. Восі  $x, z$  паралельныя бакам прамавугольніка, а пачатак каардынат знаходзіцца ў яго цэнтры. Памеры рэзанатара абазначаны на рыс. 1. Велічыню  $2l$  назавем даўжынёй рэзанатара,  $2a$  — яго вышынёй, паверхні  $z=l, -a \leq x \leq a, z=-l, -a \leq x \leq a$  — тарцамі рэзанатара, а паверхні  $x=a, -l \leq z \leq l, x=-a, -l \leq z \leq l$  — бакавымі гранямі. Унутры рэзанатара актыўнае асяроддзе характарызуецца комплексным паказчыкам праламлення  $N=n-ik$  ( $k < 0$ ), па-за рэзанатарам — рэчыўным паказчыкам праламлення  $n_0$ . Мяркуюцца, што генерацыя святла адбываецца ўздоўж восі  $z$  і рэзультуючы паток энергіі, перпендыкулярны ёй, унутры рэзанатара адсутнічае. Задача ставіцца аб знаходжанні поля ўнутры рэзанатара, а поле па-за рэзанатарам — толькі для генерыруемых пучкоў. Іменна ў гэтых

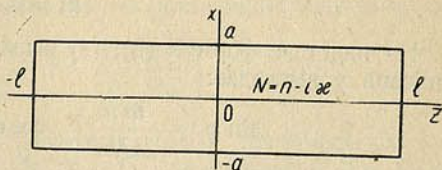


Рис. 1. Слячэнне рэзанатара

абласцях прасторы развіваюцца асноўныя працэсы з'яўлення генерацыі святла. Поле ў астатняй частцы прасторы разглядацца не будзе.

Поле ўнутры рэзанатара ў першым прыбліжэнні можна ўявіць у выглядзе суперпазіцыі плоскіх, у агульным выпадку неаднародных, хваль. Спачатку абмяжуемся палярызаванымі хвалямі, магнітны вектар якіх накіраван уздоўж восі  $y$ . Улічваючы сіметрыю адносна каардынат  $x$ ,  $z$ , магнітнае поле ўявім у выглядзе (часовы множнік  $e^{i\omega t}$  апускаецца)

$$\begin{aligned} H_y = & iNA \sin(kNx \sin \varphi) \sin(kNz \cos \varphi) + \\ & + iNA_1 \sin(kNx \sin \varphi) \cos(kNz \cos \varphi) + \\ & + iNA_2 \cos(kNx \sin \varphi) \sin(kNz \cos \varphi) + \\ & + iNA_3 \cos(kNx \sin \varphi) \cos(kNz \cos \varphi), \end{aligned} \quad (1)$$

у якім  $A_1, A_2, A_3, A, \varphi$  — пастаянныя велічыні,  $k$  — хвалева лік. Кампаненты электрычнага вектара лёгка знаходзяцца з ураўненняў Максвела. Кожнае з чатырох складаемых у (1) паасобку з'яўляецца выражэннем палёў сіметрычных (з косінусам) або антысіметрычных (з сінусам) адносна адпаведных каардынатных восей. Усе гэтыя палі могуць разглядацца незалежна адно ад аднаго. Спачатку разгледзім толькі трэцяе складаемае ( $A = A_1 = A_3 = 0, A_2 \neq 0$ ).

Улічваючы законы праламлення такіх хваль, у першым прыбліжэнні  $H_y$  у промні генерацыі ( $z \geq l$ ) можна запісаць у выглядзе

$$H_y^l = n_0 B \cos(kn_0 x \sin \psi) e^{-ikn_0 z \cos \psi}, \quad (2)$$

дзе  $B$  — пастаянны лік (амплітуда), а  $\psi$  — вугал праламлення, вызначаемы з суадносін Снеліуса:

$$N \sin \varphi = n_0 \sin \psi. \quad (3)$$

Поле промня генерацыі з процілеглага боку рэзанатара ( $z \leq -l$ ) запісваецца аналагічна і спецыяльнага разгляду не патрабуе. Яно будзе чыста перыядычным, калі дадаткова налажыць умову на вугал  $\varphi$ :  $\sin \varphi = \alpha N^*$ , дзе  $\alpha$  — сапраўдны лік, зорачка азначае комплекснае спалучэнне. Для адсутнасці пераносі энергіі ўздоўж восі  $x$  дадаткова палажыць роўнасць нулю адной з тангенцыяльных складаючых поля ( $H_y$  або  $E_z$ ) на бакавых гранях рэзанатара, што прыводзіць да роўнасці

$$\begin{aligned} 2kNa \sin \varphi &= m\pi, \\ m &= 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (4)$$

На падставе формул (3), (4) выраз для сінусаў і косінусаў вуглоў можна запісаць у выглядзе:

$$\begin{aligned} \sin \varphi &= \frac{m\pi}{2kNa}, \quad \cos \varphi = 1 - \frac{1}{2} \left( \frac{m\pi}{2kaN} \right)^2; \\ \sin \psi &= \frac{m\pi}{2kan_0}, \quad \cos \psi = 1 - \frac{1}{2} \left( \frac{m\pi}{2kan_0} \right)^2, \end{aligned} \quad (5)$$

дзе прынята пад увагу, што звычайна  $m^2 \pi^2 \ll (2kaN)^2$ . У разглядаемым прыватным рашэнні хвалі, якія падаюць на рэзанатар, адсутнічаюць. Запатрабаваўшы захавання бесперапыннасці электрычнага і магнітнага вектараў поля пры пераходзе граніцы двух асяроддзяў ( $z = l, z = -l$ ), прыдзем да звычайнай умовы стацыянарнай генерацыі

$$e^{i(kNl \cos \varphi)} = \left( \frac{N \cos \psi - n_0 \cos \varphi}{N \cos \psi + n_0 \cos \varphi} \right)^2 = R_s^2, \quad (6)$$

у якой каэфіцыент адлюстравання Фрэнеля для нармальнага падзення ў аднамерным выпадку натуральна замяніўся каэфіцыентам адлюстравання для нахільнага падзення. У нашым прыбліжэнні з дапамогай выразу (5) можна запісаць

$$R_s^2 = r \left[ 1 - \frac{2m^2 \pi^2}{(2ka)^2 n n_0} \right] e^{2i(\rho_1 + \rho_2)}, \quad (7)$$

дзе  $r$  — энергетычны каэфіцыент адбіцця для нармальнага падзення;  $\rho_1$  — зрух фазы пры нармальным падзенні;

$$\rho_2 = \frac{-\kappa m^2 \pi^2}{(2ka)^2 n^2 n_0}.$$

Прыраўноўваючы цяпер модулі і аргументы ў комплекснай роўнасці (6), атрымаем дзве сапраўдныя ўмовы генерацыі:

$$2kl\kappa = \ln \sqrt{r} - \frac{m^2 \pi^2}{(2ka)^2 n n_0} \left( 1 + \frac{n_0 \ln \sqrt{r}}{2n} \right), \quad (8)$$

$$2kln = (\rho_1 + \rho_2 + \pi S) \left( 1 + \frac{m^2 \pi^2}{2(2kan)^2} \right), \quad S = 0, 1, 2, \dots,$$

якія з'яўляюцца абагульненнем вядомых умоў генерацыі ў інтэрферометры Фабры — Перо [2, 3] на двухмерны выпадак. Уласныя частоты двухмернага рэзанатара лёгка вызначаюцца з (8) ( $\rho_1 \approx \rho_2 \approx 0$ ):

$$\nu_{s,m} = \frac{cS}{4ln} \left( 1 + \frac{1}{2} \frac{m^2 l^2}{S^2 a^2} \right) \quad (9)$$

і залежаць ад выбару двух цэлых лікаў  $S$  (падоўжнага) і  $m$  (папярочнага). Адлегласць па частаце паміж суседнімі папярочнымі тыпамі хістанняў пры фіксаваным ліку  $S$

$$\nu_{s,m+1} - \nu_{s,m} = \frac{(2m+1)cl}{8nSa^2}$$

лінейна залежыць ад парадку тыпу хістання і параметра  $l/a$  (адносіны даўжыні рэзанатара да яго вышыні). Паміж аксіяльным тыпам хістанняў і першай трансверсальнай модай яна мінімальная і пры  $l = 5$  см,  $n = 1,75$ ,  $S = 5 \cdot 10^5$ ,  $a = 0,5$  см,  $\nu_{s,1} - \nu_{s,0} \approx 85$  кгц. Адлегласць па частаце паміж суседнімі тыпамі хістанняў пры фіксаваным ліку  $m$  (для вялікіх значэнняў  $S$ )

$$\nu_{+1,m} - \nu_{s,m} = \frac{c}{4nl} \left( 1 - \frac{1}{2} \frac{m^2 l^2}{S^2 a^2} \right)$$

істотна залежыць ад аптычнай даўжыні рэзанатара ( $nl$ ) і практычна не залежыць ( $m \ll S$ ) ад парадкаў хістанняў ( $S, S+1$ ) і ад параметра  $l/a$ . Калі  $l = 5$  см,  $n = 1,75$ , то  $\Delta\nu \approx 10^9$  гц. Лік тыпаў хістанняў разглядаемага рашэння ў зададзеным інтэрвале частот вызначаецца формулай ( $\Delta\nu \ll \nu$ )

$$\Delta Q = \frac{8\pi n^2 al}{c^2} \nu \Delta\nu,$$

атрыманай на падставе частотных суадносін (9) і пры  $\nu = 4,3 \cdot 10^{15}$  гц;  $\Delta\nu = 33 \cdot 10^{10}$  гц;  $\Delta Q \approx 3 \cdot 10^8$ . Умовы стацыянарнай генерацыі для астатніх трох выражэнняў магнітнага поля (1) дакладна супадаюць з умовай генерацыі разгледжанага прыватнага рашэння. Такім чынам, маем чатыры прыватных рашэнні з адным і тым жа наборам лікаў  $S$  і  $m$  (пры

пэўных  $\kappa$ ,  $n$ ,  $a$ ,  $l$ ), г. зн. рашэнні выраджаны. Кожнае рашэнне адрозніваецца адно ад аднаго не толькі сіметрыяй размеркавання палёў адносна каардынатных восей  $x$ ,  $z$ , але таксама сіметрыяй патокаў энергіі. У прыватнасці, для разглядаемага рашэння шчыльнасць патоку электрамагнітнай энергіі (вектар Умава—Пойнціна), усярэдненая ў часе і хуткапераменных велічынях, у нашым прыбліжэнні запішацца

$$P_z = -\frac{nc}{16\pi} |A_2|^2 \left(1 - \frac{1}{2} \frac{m^2 l^2}{S^2 a^2}\right) \operatorname{sh} \left[ \frac{z\kappa}{\ln} \pi S \left(1 + \frac{m^2 l^2}{S^2 a^2}\right) \right] \times \cos^2 \left( \frac{m\pi}{2a} x \right). \quad (10)$$

З выразу (10) відаць, што электрамагнітная энергія ўнутры рэзанатара распаўсюджваецца ў слаях, паралельных восі  $z$ , якія на тарцах будуць відаць як палосы, якія свецяцца. З павелічэннем  $m$  колькасць палос павялічваецца. Да прыкладу, пры  $m=3$  энергія распаўсюджваецца ў трох слаях. Унутры слаёў змяненне шчыльнасці патоку энергіі ўздоўж восі  $z$  адбываецца па закону гіпербалічнага сінуса. Атрыманая структура патоку энергіі ўзгадняецца з пэўнымі эксперыментальнымі данымі. Размеркаванне інтэнсіўнасці стыммуляванага выпраменьвання на тарцы ў выглядзе палос выяўляецца пры генерацыі ва ўзорах, якія маюць папярочнае сячэнне ў форме прамавугольніка [4, 5], а таксама ў паўправадніковых лазерах [6].

Указанае вышэй выраджэнне рашэнняў сведчыць аб няўстойлівасці структуры поля лінейнага рэзанатара, а значыць, і карцін размеркавання патокаў энергіі і свячэння тарцоў лазера.

Аналагічныя чатыры рашэнні атрымліваем для другой палярызацыі, у якой электрычны вектар хвалі накіраван ўздоўж восі  $y$ , а магнітны ляжыць у плоскасці  $x$ ,  $z$ . Розніца ва ўмовах генерацыі ўласных частот абедзвюх палярызацый зводзіцца да розніцы ў каэфіцыентах адбіцця Фрэнеля пры нахільным падзенні. Для другой палярызацыі замест (7) неабходна ўзяць выраз

$$R_p^2 = \left( \frac{N \cos \varphi - n_0 \cos \psi}{N \cos \varphi + n_0 \cos \psi} \right)^2 = r \left[ 1 + \frac{2m^2 \pi^2}{(2ka)^2 n n_0} \right] e^{2i(\rho_1 - \rho_2)}, \quad (7')$$

што прыводзіць да крыху іншых формул для ўласных частот рэзанатара:

$$2kl\kappa = \ln \sqrt{r} + \frac{m^2 \pi^2}{(2ka)^2 n n_0} \left( 1 - \frac{n_0 \ln \sqrt{r}}{2n} \right), \quad (8')$$

$$2kln = (\pi S + \rho_1 - \rho_2) \left[ 1 + \frac{m^2 \pi^2}{2(2kan)^2} \right],$$

што супадаюць з (8) толькі для аксіяльных тыпаў хістання. Адсюль (8, 8') вынікае, што пры аднолькавым узмацненні ( $\kappa$ ) умовы генерацыі могуць выконвацца для хвалі абедзвюх палярызацый толькі ў тым выпадку, калі  $S$ ,  $m$  аднаго папярочнага ўласнага хістання адрозніваецца ад лікаў другога ўласнага хістання. Таму трэба лічыць, што трансверсальныя хістанні абедзвюх палярызацый, генерыруючыя на адной і той жа частаце, павінны адрознівацца, ва ўсякім разе, адным уласным лікам. Калі ўласныя лікі аднолькавыя, то розніца павінна быць у другіх параметрах рэзанатара ( $\kappa$ ,  $n$ ).

Поле па-за рэзанатарам ( $z \geq l$ ) можна вызначыць у першым прыбліжэнні як рэзультат праламлення хваль, што распаўсюджваюцца ўнутры рэзанатара (2). Гэтым прыбліжэннем карыстаюцца для высвятлення некаторых асаблівасцей структуры промня генерацыі. У рабоце [7] вылічана функцыя кагерэнтнасці лазернага выпраменьвання. Атрыманы рэзультат добра ўзгадняецца з эксперыментальнымі данымі. Напрамак распаўсюджвання хваль (2) прыбліжана вызначае напрамак выпраменьвання асобных мод. Але для ацэнкі расхадзімасці і высвятлення многіх іншых істотных асаблівасцей структуры промня генерацыі першага прыбліжэння недастаткова. Адна з асноўных прычын зводзіцца да ігнаравання дыфракцыйных з'яў, абумоўленых абмежаванасцю памераў пучка ўздоўж восі  $x$ .

Для ўліку ўплыву крайвых эфектаў поля па-за рэзанатарам будзем зыходзіць з прынцыпа Гюйгенса ў прыбліжэнні Кірхгофа, лічачы, што формулы (2) даюць магчымасць вызначэння поля толькі на тарцах рэзанатара. Прымяняючы прынцып Гюйгенса—Кірхгофа ў вектарным выглядзе для двухмернага выпадку, поле па-за рэзанатарам можна запісаць у выглядзе:

$$\begin{aligned}
 4\pi H_y^l(x, z) &= -\frac{\partial}{\partial z} \int_{-a}^a H_y^l(l, x') G(kn_0 \rho) dx' + \\
 &+ ikn_0^2 \int_{-a}^a E_x^l(l, x') G(kn_0 \rho) dx', \\
 4\pi E_x^l(z, x) &= -\frac{\partial}{\partial z} \int_{-a}^a E_x^l(x', l) G(kn_0 \rho) dx' + \\
 &+ \frac{1}{ikn_0^2} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \int_{-a}^a H_y^l(l, x') G(kn_0 \rho) dx', \\
 4\pi E_z^l(x, z) &= \frac{\partial}{\partial x} \int_{-a}^a E_x^l(x', l) G(kn_0 \rho) dx' - \\
 &- \frac{1}{ikn_0^2} \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} \int_{-a}^a H_y^l(l, x') G(kn_0 \rho) dx'.
 \end{aligned} \tag{11}$$

У якасці функцыі Грына ўзята функцыя Ганкеля першага роду нулявога парадку

$$G(kn_0 \rho) = i\pi H_0^{(1)}[kn_0 \sqrt{(x' - x)^2 + (l - z)^2}]. \tag{12}$$

Падстаўляючы значэнні палёў (2) у выраз (11), атрымаем:

$$\begin{aligned}
 4H_y^l &= -Bn_0 e^{-ikn_0 l \cos \psi} \left( i \frac{\partial F}{\partial z} + kn_0 \cos \psi \cdot F \right), \\
 4E_z^l &= B e^{-ikn_0 l \cos \psi} \left( i \cos \psi \frac{\partial F}{\partial x} - \frac{1}{kn_0} \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial z} \right), \\
 4E_x^l &= B e^{-ikn_0 l \cos \psi} \left( -i \cos \psi \frac{\partial F}{\partial z} + \frac{1}{kn_0} \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} \right),
 \end{aligned} \tag{13}$$

дзе функцыя  $F(x, z)$  вызначаецца выразам

$$F(x, z) = \int_{-a}^a \cos(kn_0 x' \sin \psi) H_0^{(1)}(kn_0 \rho) dx'. \quad (14)$$

Такім чынам, вылічэнне поля па-за рэзанатарам зводзіцца перш за ўсё да вылічэння інтэграла (14). Цікавачыся значэннямі інтэграла пры вялікіх значэннях аргумента функцыі Ганкеля (у дальняй зоне), можна яе замяніць асімптатычным прыбліжэннем

$$H_0^{(1)}(kn_0 \rho) = \sqrt{\frac{2}{\pi kn_0 \rho}} e^{i \left[ kn_0 \rho - \frac{\pi}{4} \right]}.$$

Акрамя таго, дапусцім  $z^2 \gg (x' - x)^2$ , г. зн. будзем знаходзіць поле паблізу восі  $z$ . Пры гэтым можна лічыць

$$\sqrt{(l-z)^2 + (x' - x)^2} = (l-z) + \frac{1}{2} \frac{(x' - x)^2}{(l-z)}.$$

У выніку атрымаем прыбліжаны выраз інтэграла (14)

$$F(x, z) = \sqrt{\frac{2}{\pi kn_0(l-z)}} e^{i \left[ kn_0(l-z) - \frac{\pi}{4} \right]} \times \\ \times \int_{-a}^a e^{i kn_0 \frac{(x' - x)^2}{2(l-z)}} \cos(kn_0 x' \sin \psi) dx',$$

справядлівы пры ўмове

$$\frac{|x - x'|^4}{|l - z|^3} kn_0 \ll 1. \quad (15)$$

Выражаючы апошні інтэграл праз інтэгралы Фрэнеля

$$\Phi \left( \frac{z}{\sqrt{i}} \right) = \sqrt{\frac{2}{i}} [C(z) + iS(z)] = \frac{2}{\sqrt{\pi i}} \int_0^z e^{it^2} dt,$$

пасля нескладаных пераўтварэнняў функцыю  $F(x, z)$  запішам у выглядзе:

$$F(x, z) = \frac{1}{2kn_0} e^{i kn_0(l-z) \cos \psi} (B_1 e^{i kn_0 x \sin \psi} + B_2 e^{-i kn_0 x \sin \psi}), \\ B_{1,2} = \Phi \left[ \sqrt{\frac{kn_0}{2i(l-z)}} (a - x \pm (l-z) \sin \psi) \right] + \\ + \Phi \left[ \sqrt{\frac{kn_0}{2i(l-z)}} (a + x \mp (l-z) \sin \psi) \right], \quad (14')$$

дзе для  $B_1$  бярэцца верхні знак, для  $B_2$  — ніжні.

Падставім функцыю  $F(x, z)$  у формулы (13). У выніку для складаючых электрамагнітнага поля промня лазера атрымаем выразы:

$$H_y^l = D n_0 e^{-i kn_0 z \cos \psi} (B_1 e^{i kn_0 x \sin \psi} + B_2 e^{-i kn_0 x \sin \psi}), \\ E_x^l = D \cos \psi e^{-i kn_0 z \cos \psi} (B_1 e^{i kn_0 x \sin \psi} + B_2 e^{-i kn_0 x \sin \psi}), \\ E_z^l = D \sin \psi e^{-i kn_0 z \cos \psi} (B_1 e^{i kn_0 x \sin \psi} - B_2 e^{-i kn_0 x \sin \psi}) + \\ + 0 \left( \frac{1}{\sqrt{k}} \right), \quad D = -\frac{1}{4} B \cos \psi. \quad (16)$$

Усярэдненую ў часе шчыльнасць патоку энергіі ў промні генерацыі, згодна з выразамі (16), запішам:

$$P_z^l = \frac{cn_0}{128\pi} |B|^2 \cos^2 \psi \{ |B_1|^2 + |B_2|^2 + 2(\operatorname{Re} B_1 \operatorname{Re} B_2 + \operatorname{Im} B_1 \operatorname{Im} B_2) \cos(2kn_0 x \sin \psi) - 2(\operatorname{Re} B_2 \operatorname{Im} B_1 - \operatorname{Re} B_1 \operatorname{Im} B_2) \sin(2kn_0 x \sin \psi) \}. \quad (17)$$

У прыбліжэнні знешняга поля можна лічыць  $P_z^l \approx P^l$ .

З умовы  $\left(\frac{\partial P^l}{\partial x}\right)_{m=0} = 0$  знойдзем рад экстрэмальных пунктаў

$$\begin{aligned} axk &= (z' - l) p \pi, \\ p &= 0, \pm 1, \pm 2, \dots \end{aligned} \quad (18)$$

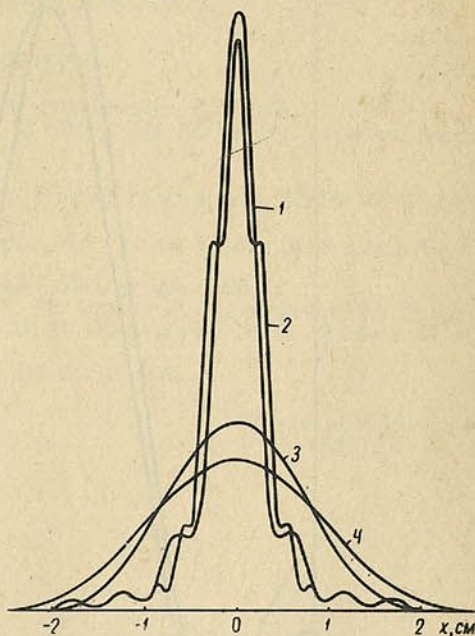
размеркавання патоку энергіі аксіяльнага тыпу хістання пры  $z = z'$ . З параўнання (18) з графікамі рыс. 2 устанавілі, што пры  $p = 0$  размеркаванне мае галоўны максімум, пры  $p = \pm 1, \pm 2, \dots$  — першыя, другія і г. д. мінімумы. Пункты, у якіх мае размеркаванне мінімум  $p$ -га парадку пры розных значэннях  $z'$ , ляжаць на прамой  $x = \frac{\pi p}{ak} (z - l)$ . Вуглом нахілу гэтай прамой да восі  $z$  можна характарызаваць расхадзімасць  $p$ -га мінімуму

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{\lambda}{2a} p. \quad (19)$$

Аналіз размеркавання патокаў энергіі папярочных мод ускладняецца інтэрферэнцыйнымі членамі. На рыс. 3 прыведзены для параўнання размеркаванне, апісваемае выразам (17), і размеркаванне, апісваемае прыбліжаным выразам

$$P^l \approx \frac{cn_0}{128\pi} |B|^2 (|B_1|^2 + |B_2|^2), \quad (20)$$

якое атрымліваецца з (17), калі не ўлічваць інтэрферэнцыйныя члены. Як відаць з параўнання, экстрэмальныя пункты аднаго размеркавання зрушаны адносна экстрэмальных пунктаў другога размеркавання. Значыць, пры імкненні да больш дакладнага вызначэння расхадзімасці выпраменьвання інтэрферэнцыйныя члены трэба ўлічваць. Аднак мае цікавае выраз (20), паколькі ён дазваляе знайсці прыбліжанае аналітычнае апісанне накіраванасці выпраменьвання папярочных мод. Аналітычны папярэдні, аналітычны разгляд выразу (20) прыводзіць да на-



Рыс. 2. Размеркаванне патоку энергіі аксіяльнай моды  $S=5 \cdot 10^5$  у плоскасці  $z=z'$  ( $2l=10$  см;  $2a=1$  см;  $n_0=1$ ):  
 $1 - z'_1 = 3,5 \cdot 10^3$  см;  $2 - z'_2 = 7 \cdot 10^3$ ;  $3 - z'_3 = 28 \cdot 10^3$ ;  $4 - z'_4 = 35 \cdot 10^3$  см

ступнай формулы для накіраванняў экстрэмальных значэнняў у размеркаваннях патокаў энергіі трансверсальных мод:

$$\operatorname{tg} \delta = \pm \frac{\lambda}{4a} (m+2p), \quad p=0, 1, 2, \dots, \quad (21)$$

у якой  $\delta$  — вугал паміж воссю  $z$  і прамой, што праходзіць праз сярэдзіну тарца і экстрэмальны пункт. Аднаведнасць характару экстрэмальных пунктаў значэнням  $p$  такая ж, як і раней устаноўленая для аксіяльных

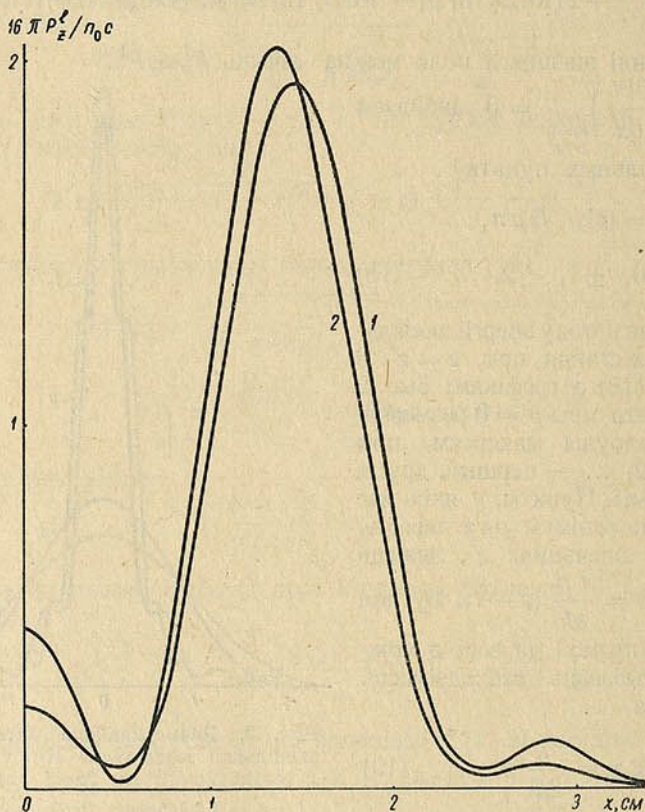


Рис. 3. Размеркаванне патоку энергіі папярочнага хістання  $S=5 \cdot 10^6$ ,  $m=3$  пры  $z'=14 \cdot 10^3$  см:

1 — згодна з (17); 2 — згодна з (20)

тыпаў хістанняў (выраз (18) з'яўляецца прыватным выпадкам выразу (21) ( $m=0$ )). У размеркаваннях патокаў энергіі ў плоскасці  $z=z'$  застаюцца нявызначаныя пункты дадатковых максімумаў. Знаходжанне іх звязана з рашэннем даволі складаных трансцэндэнтных ураўненняў.

У сферычных рэзанатарах карціна размеркавання палёў асобных мод на тарцы і экране застаецца аднолькавай незалежна ад становішча экрана адносна лазера, змяняецца толькі яе маштаб [8] (што дазваляе параўнальна проста вызначыць расхадзімасць промяня). Для двухмернага рэзанатара ў разгледжаным прыбліжэнні гэта не назіраецца. Розным карцінам свячэння тарца, характэрным для папярочных мод рознага парадку, адпавядаюць пры даволі вялікіх значэннях  $z$  размеркаванні інтэнсіўнасці на экране з двума галоўнымі максімумамі, г. зн. энергія распаўсюджваецца ў асноўным у двух напрамках. Як відаць з рис. 2, у размеркаванні патоку энергіі аксіяльнай моды з памяншэннем  $z'$  адбы-

ваецца рост максімумаў больш высокага парадку і змяншэнне асноўнага максімуму. Таму карціны размеркавання энергіі пры розных значэннях  $z'$  немагчыма прывесці да супадзення маштабнымі змяненнямі.

У рабоце разглядалася структура палёў і патокаў энергіі асобных тыпаў хістанняў. Звычайна ўмовы генерацыі выконваюцца для многіх тыпаў хістанняў адначасова. Калі ўзаемадзеянне паміж модамі слабае, то палі пры многамодавай генерацыі будуць вызначацца прыбліжана складаннем палёў асобных мод (1) і (2). Зыходзячы з выразу для поля, выбарам інтэнсіўнасці выпраменьвання асобных мод можна, ва ўсякім разе, якасна, растлумачыць атрымліваемыя пры многамодавай генерацыі больш складаныя структуры патокаў энергіі.

### Літаратура

1. Ораевский А. Н., Шеглов В. А. Радиофизика, 8, 1, 1965.
2. Ханалюк А. П., Степанов Б. И. Весті АН БССР, сер. фіз.-тэхн. навук, № 4, 1961.
3. Сб. «Лазеры». ИЛ, 1963.
4. Ванюков Н. П., Исаенко В. И., Серебряков В. А. ЖЭТФ, 44, 5, 1963; 46, 12, 1964.
5. Ванюков Н. П., Исаенко В. И., Луизова А. А., Шорохов О. А. ЖЭТФ, 48, 1, 1965.
6. Сб. «Оптические квантовые генераторы». Изд. «Мир», 1966.
7. Сотский Б. А., Гончаренко А. М. Оптика и спектроскопия, 19, 5, 1965.
8. Зейгер С. Г., Колитеевский Н. И., Фрадкин Э. Е., Чайка М. П. Опт. и спектр., 19, 2, 1965.
9. Таблицы интегралов Френеля. Изд. АН СССР, 1953.

*Белорусский государственный университет  
им. В. И. Ленина*

*Поступило в редакцию  
15.V 1967*

В. К. КОНОНЕНКО, В. П. ГРИБКОВСКИЙ

### ВЛИЯНИЕ ЛЕГИРОВАНИЯ НА ПОРОГОВЫЙ ТОК В ИНЖЕКЦИОННОМ ЛАЗЕРЕ

К основным задачам теории инжекционного лазера относятся определение влияния легирования на пороговый ток и установление оптимальных условий генерации при заданной температуре. Пороговый ток, необходимый для генерации излучения в полупроводниковых диодах [1, 2], вычислялся во многих работах, например [3—9].

Для инжекционных лазеров характерно многообразие возможных механизмов рекомбинации. Электронные переходы могут совершаться между зонами, а также с участием примесных атомов. Лазерные полупроводники обладают сложной энергетической структурой [10]. При сильном легировании образуются примесные зоны, появляются хвосты в распределении плотности состояний [11].

Простейшим механизмом рекомбинации в полупроводниковом лазере является излучательная межзонная рекомбинация, при изучении которой чаще всего используется модель параболических зон. Обычно рассматриваются два крайних случая: наличие [5] и полное отсутствие правила отбора по волновому вектору [6].

В [12, 13] стимулированная рекомбинация посредством прямых переходов рассматривалась для полупроводника с равными эффективными массами электрона и дырки. Показано, что при легировании такого полупроводника порог генерации может существенно понизиться. Влияние градиента концентрации примесей в  $p-n$ -переходе на пороговый ток определялось в [7], где установлено также, что пороговый ток сильно растет с температурой в области высоких ее значений. Экспериментально [14—16] обнаружена линейная зависимость плотности порогового тока от обратной длины резонатора, с которой известным соотношением связан коэффициент потерь.

В настоящей работе рассматривается стационарная генерация излучения на прямых переходах в примесном полупроводнике с разными эффективными массами электрона и дырки. Исследуется влияние степени легирования, уровня возбуждения и температуры на частоту генерации и положение максимума спектра люминесценции. Приведено соотношение между током через лазерный диод и скоростью рекомбинации в активной области. Рассчитывается зависимость порогового тока от коэффициента потерь и исследуется влияние легирования на эту зависимость. Показано, что случай равных эффективных масс существенно отличается от случая, когда массы электрона и дырки различаются в несколько раз. Численные оценки проводятся для GaAs, определяются параметры [9, 14] инжекционного лазера.

Результаты могут быть использованы при рассмотрении эффекта насыщения [17, 18], применены к полупроводниковым лазерам с оптическим и электронным возбуждением.

Рассмотрим лазерный диод, действующий в стационарном режиме. В активной области шириной  $d$  инжектированные из пассивных областей при прохождении тока в прямом направлении электроны и дырки рекомбинируют друг с другом посредством оптических и неоптических переходов. Из уравнения непрерывности для электрического тока и заряда и кинетических уравнений баланса для носителей вытекает соотношение

$$\frac{1}{e} \operatorname{div} \mathbf{J}_e = R_{\text{ген}} + R_{\text{люм}} + R_{\text{ш}} + Q, \quad (1)$$

где  $\mathbf{J}_e$  — плотность электронного тока;  $R_{\text{ген}}$ ,  $R_{\text{люм}}$  и  $Q$  — скорости стимулированной, спонтанной и безызлучательной рекомбинации в единице объема активной области;  $R_{\text{ш}}$  — скорость вынужденной рекомбинации, вызванной радиационным шумом, одной из причин которой является усиление люминесценции;  $e$  — элементарный заряд.

Интегрируя (1) по объему активной области  $V$  и вводя инжекционную эффективность  $\eta'$ , получим

$$\frac{\eta'}{ed} j = \frac{1}{V} \int_V (R_{\text{ген}} + R_{\text{люм}} + R_{\text{ш}} + Q) dV, \quad (2)$$

где  $j$  — плотность полного тока через диод. Величина  $\eta'$  равна отношению разности числа электронов, входящих в активную область, и числа электронов, уходящих из нее за единицу времени, к потоку носителей заряда через  $p$  —  $n$  — переход.

Из условия  $R_{\text{ген}} = 0$  находим пороговое значение плотности тока

$$j_{\text{пор}} = \frac{ed}{\eta'} \cdot \frac{1}{V} \int_V (R_{\text{люм}} + R_{\text{ш}} + Q) dV. \quad (3)$$

Далее рассмотрим однородный полупроводник, в котором оптические переходы между простыми зонами со сферическими изоэнергетическими поверхностями в  $\mathbf{k}$ -пространстве происходят с сохранением волнового вектора  $\mathbf{k}$ . В этом случае, как следует из квантовой теории поглощения и испускания света в полупроводниках [19], число спонтанных переходов в единице объема с испусканием фотонов с энергией  $E$  в единичном энергетическом интервале за единицу времени равно

$$r_{\text{сп}}(E) = \frac{4e^2 n E |\mathbf{M}|^2}{\pi^2 m^2 h^2 c^3} k^2 \left[ \frac{d(E_c - E_v)}{dk} \right]^{-1} f_e(E_c) f_h(E_v), \quad (4)$$

где  $m$  — масса электрона;  $h$  — постоянная Планка, деленная на  $2\pi$ ;  $c$  — скорость света;  $n$  — показатель преломления;  $|\mathbf{M}|^2$  — квадрат матричного элемента дипольного перехода, усредненный по поляризациям и направлениям распространения излучения;  $f_e(E_c)$  и  $f_h(E_v)$  — вероятности заполнения электроном и дыркой состояний в зоне проводимости с энергией  $E_c$  и в валентной зоне с энергией  $E_v$  соответственно, причем  $E_c(\mathbf{k}) - E_v(\mathbf{k}) = E$ .

В каждой зоне имеет место статистическое равновесие и распределение носителей по состояниям определяется квазиуровнями Ферми  $F_c$  для электронов в зоне проводимости и  $F_h$  для дырок в валентной зоне и температурой  $T$ , которая принимается равной температуре решетки. Функции распределения имеют вид

$$f_e(E_c) = \left( 1 + \exp \frac{E_c - F_c}{kT} \right)^{-1}, \quad f_h(E_v) = \left( 1 + \exp \frac{F_h - E_v}{kT} \right)^{-1}. \quad (5)$$

Здесь  $k$  — постоянная Больцмана.

Коэффициент усиления света, равный коэффициенту поглощения [19] с обратным знаком, может быть записан как

$$k(E) = \frac{4he^2 |M|^2}{cm^2 nE} k^2 \left[ \frac{d(E_c - E_v)}{dk} \right]^{-1} f_e(E_c) f_h(E_v) \times \left( 1 - \exp \frac{E - \Delta F}{kT} \right), \quad (6)$$

где разность между квазиуровнями Ферми

$$\Delta F = F_e - F_h \quad (7)$$

определяет степень возбуждения полупроводника.

В примесном полупроводнике в общем случае концентрации доноров и акцепторов различны и условие нейтральности имеет вид

$$n + N_a^- - N_d^+ = p, \quad (8)$$

где  $n$ ,  $p$ ,  $N_a^-$  и  $N_d^+$  — концентрации электронов, дырок, ионизованных акцепторов и доноров. Если ввести эффективные массы электрона  $m_c$  и дырки  $m_v$  и положить

$$E_c(k) = E_{c0} + \frac{\hbar^2 k^2}{2m_c}, \quad E_v(k) = E_{v0} - \frac{\hbar^2 k^2}{2m_v}, \quad (9)$$

то

$$n = 2 \left( \frac{m_c kT}{2\pi \hbar^2} \right)^{3/2} F_{1/2} \left( \frac{F_e - E_{c0}}{kT} \right), \quad p = 2 \left( \frac{m_v kT}{2\pi \hbar^2} \right)^{3/2} F_{1/2} \left( \frac{E_{v0} - F_h}{kT} \right), \quad (10)$$

где  $E_{c0}$  и  $E_{v0}$  — энергии дна зоны проводимости и потолка валентной зоны; интеграл Ферми индекса 1/2

$$F_{1/2}(\zeta) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \frac{\sqrt{x} dx}{1 + \exp(x - \zeta)}.$$

Подставляя (5) и (9) в (4) и (6) и используя закон сохранения энергии, для числа спонтанных переходов и коэффициента усиления получим

$$r_{\text{сп}}(E) = \frac{2\sqrt{2}e^2 nE |M|^2}{\pi^2 \sqrt{m} c^3 \hbar^5} \left( \frac{m_r}{m} \right)^{3/2} \sqrt{E - E_g} \times \frac{\exp \frac{\Delta F - E}{2kT}}{\text{ch} \left( \frac{\Delta F - E}{2kT} \right) + \text{ch} \left( \frac{\frac{m_v - m_c}{m_v + m_c} (E - E_g) + E_{c0} - F_e + E_{v0} - F_h}{2kT} \right)}, \quad (11)$$

$$k(E) = \frac{4\sqrt{2}e^2 |M|^2}{\sqrt{m} c \hbar^2 nE} \left( \frac{m_r}{m} \right)^{3/2} \sqrt{E - E_g} \times \frac{\text{sh} \frac{\Delta F - E}{2kT}}{\text{ch} \left( \frac{\Delta F - E}{2kT} \right) + \text{ch} \left( \frac{\frac{m_v - m_c}{m_v + m_c} (E - E_g) + E_{c0} - F_e + E_{v0} - F_h}{2kT} \right)}, \quad (12)$$

где приведенная масса  $m_r = m_c m_v / (m_v + m_c)$ ; ширина запрещенной зоны в примесном полупроводнике  $E_g = E_{c0} - E_{v0}$ . Удобно пользоваться безразмерными величинами

$$\zeta_e = \frac{F_e - E_{c0}}{kT}, \quad \zeta_h = \frac{E_{v0} - F_h}{kT}, \quad \varepsilon = \frac{E - E_g}{kT}.$$

Зная связь между квазиуровнями Ферми и задавая  $\Delta F$ , можно проследить изменение спектра спонтанного испускания и коэффициента по-

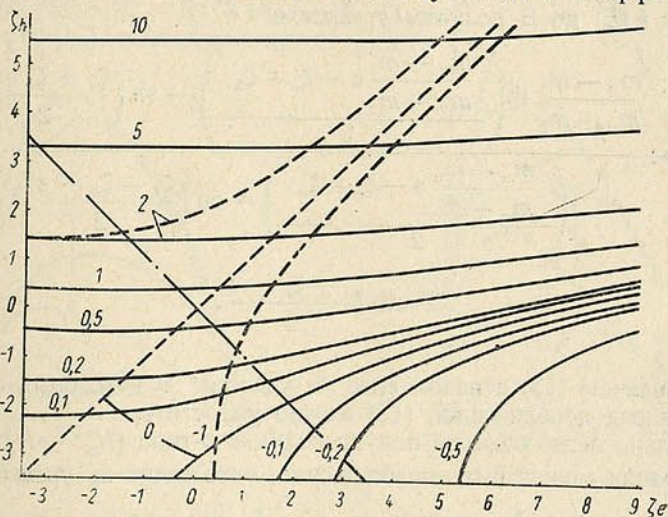


Рис. 1. Номограмма для нахождения решения уравнения нейтральности (8):

цифры на кривых — значения  $(N_a^- - N_d^+) / N_v$ ; сплошные линии — для  $m_v = 7m_c$ ; пунктир —  $m_v = m_c$ ; штрих-пунктирная прямая соответствует уравнению  $\zeta_h = -\zeta_e$ .

глощения (усиления) света при увеличении возбуждения полупроводника. Значения  $F_e$  и  $F_h$  находятся из условия нейтральности.

Если полупроводник компенсированный ( $N_a^- = N_d^+$ ) и  $m_v = m_c$ , то при любом уровне возбуждения  $F_e - E_{c0} = E_{v0} - F_h$ . Обычно масса дырок имеет большее значение, чем эффективная масса электрона [10]. На рис. 1 приведена номограмма для нахождения численного решения уравнения (8) с учетом (10) при различных концентрациях ионизованных акцепторов и доноров и отношении масс  $m_v/m_c = 7^*$ . Пунктирной линией показано решение для полупроводника с равными массами электрона и дырки. Эффективная плотность состояний в валентной зоне

$$N_v = 2 \left( \frac{m_v kT}{2\pi \hbar^2} \right)^{3/2}.$$

Видно, что в полупроводнике  $p$ -типа ( $N_a^- > N_d^+$ ) величина  $\zeta_h$  становится при некотором уровне возбуждения меньше  $\zeta_e$ , если  $m_v > m_c$ , а в случае, когда  $m_v = m_c$ , всегда выполняется неравенство  $\zeta_h > \zeta_e$ . В собственном полупроводнике ( $N_a = N_d = 0$ ) и полупроводнике  $n$ -типа ( $N_d^+ > N_a^-$ ) значение  $\zeta_e$  больше  $\zeta_h$ .

\* В [18] приводится номограмма для нахождения решения уравнения нейтральности для собственного полупроводника при десяти значениях  $m_v/m_c$  от 1 до 10.

При термодинамическом равновесии  $\Delta F = 0$ . Когда величина  $\Delta F$  больше ширины запрещенной зоны, коэффициент поглощения в интервале энергий  $E_g \div \Delta F$  отрицательный. С увеличением  $\Delta F$  коэффициент усиления растет. При генерации усиление света в активной области компенсирует потери внутри кристалла и потери, связанные с выходом излучения из резонатора.

Если коэффициент потерь  $k_{\text{пот}}$  слабо зависит от частоты излучения, то генерация начнется на частоте, коэффициент усиления на которой имеет максимум. Используя безразмерные величины, из условия равенства нулю производной от  $k(E)$  по  $E$  получим уравнение

$$\frac{1}{\varepsilon} = \frac{\frac{m_v - m_c}{m_v + m_c} \operatorname{sh} \left( \frac{m_v - m_c}{m_v + m_c} \frac{\varepsilon - \zeta_e + \zeta_h}{2} \right) - \operatorname{sh} \left( \frac{\zeta_e + \zeta_h - \varepsilon}{2} \right)}{\operatorname{ch} \left( \frac{m_v - m_c}{m_v + m_c} \frac{\varepsilon - \zeta_e + \zeta_h}{2} \right) + \operatorname{ch} \left( \frac{\zeta_e + \zeta_h - \varepsilon}{2} \right)} + \operatorname{cth} \frac{\zeta_e + \zeta_h - \varepsilon}{2}. \quad (13)$$

Решить уравнение (13) в явном виде не удастся. В некоторых случаях, однако, делая ряд приближений, (13) можно упростить.

Для сильно легированного полупроводника  $p$ -типа ( $N_a^- - N_d^+ \gg N_v$ ) частота генерации может быть приближенно определена из уравнения

$$\frac{1}{\varepsilon} - \frac{m_v - m_c}{m_v + m_c} = \operatorname{cth} \frac{\zeta_e + \zeta_h - \varepsilon}{2}$$

и удовлетворяет неравенству  $3\varepsilon_0 < \zeta_e + \zeta_h$ , а для  $n$ -типа ( $N_d^+ - N_a^- \gg N_v$ ) — из уравнения

$$\frac{1}{\varepsilon} + \frac{m_v - m_c}{m_v + m_c} = \operatorname{cth} \frac{\zeta_e + \zeta_h - \varepsilon}{2}.$$

С увеличением  $\zeta_e + \zeta_h$  значение  $\varepsilon_0$  для сильно легированного полупроводника  $p$ -типа приближается к  $m_c/2m_r$ , а для  $n$ -типа — к значению  $m_v/2m_r$ .

В частном случае равных эффективных масс электрона и дырки при заданных  $T$  и  $\Delta F - E_g$  наибольший коэффициент усиления получается в собственном полупроводнике, величина  $\varepsilon_0$  для которого может быть найдена из уравнения

$$\varepsilon = \operatorname{sh} \frac{\zeta_e + \zeta_h - \varepsilon}{2}$$

и удовлетворяет неравенству  $3\varepsilon_0 > \zeta_e + \zeta_h$ . При введении примеси максимум коэффициента усиления смещается в сторону меньших значений  $\varepsilon$ . В другом частном случае, когда  $m_v \gg m_c$ , с переходом от полупроводника  $p$ -типа к  $n$ -типу частота генерации смещается в сторону больших значений  $\varepsilon$ .

На рис. 2, а показан коэффициент усиления при различных концентрациях доноров и акцепторов в случае, когда  $m_v = 7m_c$ . Видно, что энергия фотона в максимуме коэффициента усиления  $E_0$  может удовлетворять неравенству  $E_0 < E_g + (\Delta F - E_g)/3$ . С увеличением  $\Delta F$  частота генерации смещается в сторону больших энергий.

При постоянной концентрации электронов в полупроводнике  $p$ -типа квазиуровень Ферми  $F_e$  с увеличением температуры понижается, а квазиуровень  $F_h$  повышается. Интервал частот, в котором коэффициент поглощения отрицательный, сужается; величина  $\zeta_e + \zeta_h$  может стать отрицательной. То же самое получается при постоянной концентрации дырок в полупроводнике  $n$ -типа.

При высоких температурах и несильном возбуждении ( $0 < \zeta_e + \zeta_h \ll 1$ ) энергия фотона в максимуме коэффициента усиления приблизительно равна  $E_0 = E_g + (\Delta F - E_g)/3$ . Это следует из (13), если использовать пред-

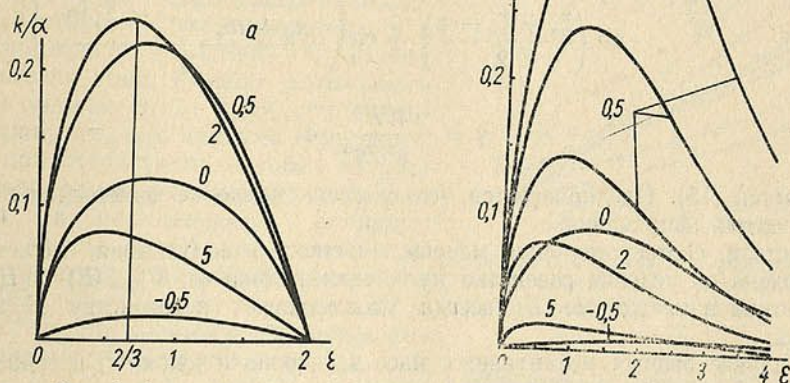


Рис. 2. Спектр усиления (а) и спектр спонтанного испускания (б):

цифры на кривых — значения  $(N_a^- - N_d^+)/N_d$ ; а —  $\Delta F - E_g = 2kT$ , вертикальная прямая соответствует  $\epsilon = (\zeta_e + \zeta_h)/3$ ; б —  $\zeta_e + \zeta_h$  равно 2 — для верхней кривой, 1 — для следующей кривой и 0 — для всех остальных кривых

ставление гиперболических функций в виде ряда и учесть только первые члены разложения. Аналогичное выражение для частоты генерации в этом случае получено в [17]. В рассматриваемом приближении для коэффициента усиления находим

$$\frac{k}{\alpha} = \frac{\sqrt{\epsilon}}{2} \cdot \frac{\zeta_e + \zeta_h - \epsilon}{1 + \text{ch } \zeta_e} \quad (14)$$

Предполагается, как обычно, что

$$\alpha = \frac{4 \sqrt{2} e^2 |M|^2}{\sqrt{m} \text{ch}^2 n E} \left( \frac{m_r}{m} \right)^{3/2} \sqrt{kT} \quad (15)$$

существенно не изменяется в интервале энергий  $E_g \div \Delta F$  и слабо зависит от легирования. При заданных  $T$  и  $\Delta F - E_g$  наибольший коэффициент усиления получается, когда  $\zeta_e \approx 0$ . Это соответствует промежуточно легированному полупроводнику  $p$ -типа, если  $m_v > m_c$ . Соотношение между величиной  $\epsilon_0$  и коэффициентом усиления в максимуме, равным  $k_{\text{пот}}$ , имеет вид

$$\epsilon_0 = \left[ (1 + \text{ch } \zeta_e) \frac{k_{\text{пот}}}{\alpha} \right]^{2/3} \quad (16)$$

Как видно на рис. 1, значение  $\zeta_e$ , удовлетворяющее условию  $0 < \zeta_e + \zeta_h \ll 1$ , с переходом от полупроводника  $n$ -типа к сильно легированному  $p$ -типу уменьшается, проходя через нуль. При заданном коэффициенте потерь величина  $\epsilon_0$  имеет наименьшее значение для промежуточно легирован-

ного полупроводника  $p$ -типа ( $\xi_e \approx 0$ ), когда  $m_v > m_c$ , и увеличивается с переходом к сильно легированному полупроводнику  $p$ - или  $n$ -типа. Из условия  $\epsilon_0 \ll 1$  вытекает, что соотношение (16) справедливо при малых значениях коэффициента потерь.

Спектр спонтанного испускания определяется (11). При  $E_g \gg kT$  и  $\Delta F \gg kT$  люминесценция практически эквивалентна спонтанному испусканию. Из (11) для суммарной по углам и поляризациям мощности люминесценции  $W_{\text{люм}}(E)$  в безразмерных величинах получим

$$\frac{W_{\text{люм}}}{\gamma E} = \frac{\sqrt{\epsilon}}{2} \cdot \frac{\exp \frac{\xi_e + \xi_h - \epsilon}{2}}{\text{ch} \left( \frac{\xi_e + \xi_h - \epsilon}{2} \right) + \text{ch} \left( \frac{\frac{m_v - m_c}{m_v + m_c} \epsilon - \xi_e + \xi_h}{2} \right)}, \quad (17)$$

где

$$\gamma = \frac{n^2 E^2}{\pi^2 c^2 h^3} \alpha, \quad (18)$$

$\alpha$  задается (15). Предполагается, что  $\gamma$  существенно не изменяется в пределах спектра испускания.

Частота, соответствующая максимуму спектра испускания, может быть определена из условия равенства нулю производной от  $W_{\text{люм}}(E)$  по  $E$ . Энергия фотона в максимуме  $E_{\text{п}}$  всегда удовлетворяет неравенству  $E_{\text{п}} > E_g + kT/2$ .

В случае равных эффективных масс электрона и дырки при заданных  $T$  и  $\Delta F - E_g$  наиболее интенсивный спектр испускания получается для собственного полупроводника. При введении примеси значение  $\epsilon_{\text{п}}$  приближается к 1; максимум спектра люминесценции смещается в сторону больших значений  $\epsilon$ , если  $\xi_e + \xi_h < 1$ , и в сторону меньших значений  $\epsilon$ , если  $\xi_e + \xi_h > 1$ . В другом частном случае, когда  $m_v \gg m_c$ , с переходом от сильно легированного полупроводника  $p$ -типа, для которого величина  $\epsilon_{\text{п}}$  близка к  $1/2$ , к  $n$ -типу максимум смещается в сторону больших значений  $\epsilon$ .

На рис. 2, б показан спектр спонтанного испускания в случае, когда  $m_v = 7m_c$ , при различных концентрациях доноров и акцепторов. С увеличением  $\Delta F$  максимум смещается в сторону больших энергий, спектр расширяется. Особенно эффективно возрастает коротковолновой край спектра испускания.

При некотором уровне возбуждения энергия фотона в максимуме  $E_{\text{п}}$  становится меньше разности между квазиуровнями Ферми. При  $\Delta F > E_g$  энергия фотона  $E_0$ , соответствующая максимуму коэффициента усиления, всегда меньше величины  $E_{\text{п}}$ .

Степень возбуждения полупроводника в пороге генерации определяется пороговым значением  $\Delta F$ . При варьировании коэффициента потерь путем изменения конфигурации резонатора, нанесения на торцы отражающих покрытий генерация будет начинаться при разных  $\Delta F$  и, следовательно, заданному  $k_{\text{пот}}$  будет соответствовать определенная пороговая скорость рекомбинации.

Пороговый ток через диод определяется соотношением (3). Введем квантовую эффективность  $\eta$ , равную отношению числа испускаемых фотонов к числу электронных переходов в единице объема за единицу времени. Не учитывая для простоты  $R_{\text{п}}$  и вынося за интеграл в (3) среднее значение  $R_{\text{люм}}$ , получим

$$j_{\text{пор}} = \frac{ed}{\eta \eta'} R_{\text{люм}}. \quad (19)$$

На рис. 3 показана зависимость скорости спонтанной рекомбинации в пороге генерации, рассчитанной на единицу объема активной области, от максимума коэффициента усиления, равного коэффициенту потерь  $k_{пот}$ . Значение  $R_{люм}$  вычисляется интегрированием  $r_{сп}(E)$  из (11) по всем энергиям фотона;  $\alpha$  и  $\gamma$  задаются (15) и (18), где  $E/h$  — частота генерации. Семейство кривых для различных концентраций ионизованных примесей и температур относится к случаю, когда  $m_v = 7m_c$ .

Зависимость порогового тока от коэффициента потерь в большом интервале средних значений отношения  $k_{пот}/\alpha$  является линейной. В области больших  $k_{пот}/\alpha$  наблюдается отклонение в сторону увеличения тока, а в области малых значений — в сторону уменьшения тока. Кривые начинаются на оси ординат выше нуля. Это следовало ожидать, так как для генерации, даже при отсутствии потерь излучения, необходимо развести квазиуровни Ферми на определенную величину  $\Delta F > 0$ , чтобы коэффициент поглощения на некоторой частоте стал равным нулю [9].

Достаточно хорошим приближением является зависимость

$$j_{пор} = j_0 + \beta^{-1} k_{пот}, \quad (20)$$

где  $j_0$  — плотность минимального тока, при котором коэффициент поглощения на некоторой частоте становится равным нулю;  $\beta^{-1}$  — тангенс угла наклона прямой  $j_{пор}(k_{пот})$ .

Параметры  $j_0$  и  $\beta$  существенно зависят от температуры диода и степени легирования активной области. На рис. 3 приведены значения  $j_0$  и  $\beta$ , полученные согласно аппроксимации (20), для различных концентраций ионизованных доноров и акцепторов. Величины

$$j_0^k = 0,316\gamma kT \cdot \frac{ed}{\eta\eta'}, \quad \beta_k = 0,213 \cdot \frac{\alpha}{\gamma kT} \cdot \frac{\eta\eta'}{ed}$$

относятся к диоду с компенсированной активной областью.

При заданной температуре наибольшее значение  $j_0$  получается для промежуточного легированного полупроводника  $p$ -типа. В этом случае, как видно на рис. 2, б, интегральная по частоте мощность люминесценции наибольшая. С переходом к полупроводнику  $n$ -типа и сильнее легированному  $p$ -типу  $j_0$  уменьшается. Для диода с компенсированной активной областью  $j_0 \sim T^{3/2}$ . При заданной разности концентраций доноров и акцепторов  $N_d^+ - N_a^- > 0$  величина  $j_0$  растет с температурой быстрее  $T^{3/2}$ . В полупроводнике  $p$ -типа характер зависимости тот же, однако по достижении определенной температуры, которая тем выше, чем больше значение  $N_a^- - N_d^+$ ,  $j_0$  растет слабее  $T^{3/2}$ . Охлаждение диода способствует уменьшению  $j_0$ .

Параметр  $\beta$  с переходом от полупроводника  $n$ -типа к  $p$ -типу увеличивается. Для диода с компенсированной активной областью  $\beta^{-1} \sim T$ . При заданной разности  $N_a^- - N_d^+$  величина  $\beta^{-1}$  растет с температурой слабее  $T$

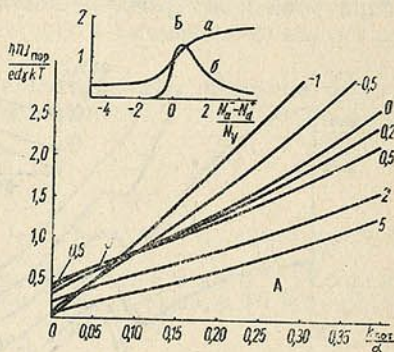


Рис. 3. Зависимость плотности порогового тока  $j_{пор}$  от коэффициента потерь  $k_{пот}$  (А) и параметров  $j_0$  и  $\beta$  от  $(N_a^- - N_d^+)/N_v$  (Б):

цифры на кривых — значения  $(N_a^- - N_d^+)/N_v$ ; кривая а — для  $\beta/\beta_k$ ; б —  $j_0/j_0^k$ ; величины  $\beta_k = 0,213\alpha\eta\eta'/ed\gamma kT$  и  $j_0^k = 0,067\alpha/\beta_k$  относятся к лазерному диоду с компенсированной активной областью

для полупроводника  $n$ -типа, а для  $p$ -типа сильнее  $T$ . Охлаждение диода способствует увеличению  $\beta$ .

Из семейства кривых на рис. 3 можно определить зависимость порогового тока от температуры. Для диода с компенсированной активной областью достаточно использовать кривую при  $N_a^- = N_d^+$ . При заданном коэффициенте потерь  $j_{\text{пор}} \sim T^n$ ,  $n \ll 2$ .

Изменения ширины активной области  $d$  [5, 7] и величины  $\eta\eta'$  с температурой и легированием будут влиять на значения  $j_0$  и  $\beta$ . С ростом

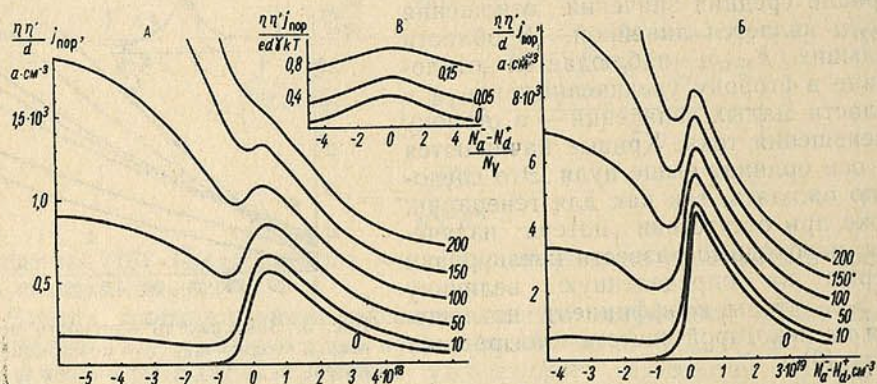


Рис. 4. Плотность порогового тока  $j_{\text{пор}}$  в  $a \cdot \text{см}^{-2}$  ( $d$  в  $\mu\text{м}$ ), рассчитанная для GaAs инжекционного лазера, как функция  $N_a^- - N_d^+$  при  $T = 78^\circ\text{К}$  — А и  $293^\circ\text{К}$  — Б (цифры на кривых — значения  $k_{\text{пот}}/\alpha$  в  $\text{см}^{-1}$ ); В — влияние легирования на порог генерации в случае, когда  $m_v = m_c$  (цифры на кривых — значения  $k_{\text{пот}}/\alpha$ )

температуры квантовая эффективность может значительно уменьшиться за счет неоптических переходов [20]. Поэтому зависимость  $j_{\text{пор}}(T)$  будет при высоких температурах более сильной, чем получено, и лучше соответствовать эксперименту [21].

Полученные закономерности должны сильнее проявляться для полупроводников с большим отношением эффективных масс  $m_v/m_c$ . В случае, когда  $m_v = m_c$ , семейство кривых, аналогичное семейству на рис. 3, для примесного полупроводника расположено ниже кривой для собственного полупроводника. При любом значении коэффициента потерь легирование приводит к уменьшению порога генерации в согласии с приближенным рассмотрением в [13].

Наиболее полно изучены инжекционные лазеры на GaAs. Для него эффективные массы электрона и тяжелых дырок равны  $m_c = 0,071 m$  и  $m_v = 0,5 m$  [10]. Для численных оценок используем данные при температуре жидкого азота:  $E = 1,47 \text{ эв}$ ;  $n = 3,6 [6]$ ;  $|M|^2 \approx m^2 E / 6 m_c = 5 \cdot 10^{-39} \text{ см}^2 \cdot \text{э}^2 \text{ сек}^{-2}$  [19];  $d = 3 \text{ мкм}$ ;  $\eta\eta' = 0,7$  [22];  $kT = 6,73 \text{ мэв}$ ;  $N_v = 6,8 \cdot 10^{16} (kT)^{3/2} = 1,2 \cdot 10^{18} \text{ см}^{-3}$ . Находим:  $a = 473 \sqrt{kT} = 1227 \text{ см}^{-1}$ ;  $\gamma = 5,24 \cdot 10^{27} \sqrt{kT} = 1,36 \cdot 10^{28} \text{ см}^{-3} \cdot \text{сек}^{-1} \cdot \text{эв}^{-1}$ ;  $\beta_k = 1,20 \eta\eta' / dkT = 4,16 \cdot 10^{-2} \text{ см} \cdot a^{-1}$ ;  $j_0^k = 26,5 (kT)^{3/2} d / \eta\eta' = 2,0 \cdot 10^3 a \cdot \text{см}^{-2}$ . С введением в активную область большого числа акцепторов параметр  $\beta$  может быть увеличен в несколько раз. Оценим значение  $j_0$  и  $\beta$  в случае, когда  $N_a^- - N_d^+ = 0,5 N_v$ . При  $T = 78^\circ\text{К}$  получим  $\beta = 5,14 \cdot 10^{-2} \text{ см} \cdot a^{-1}$ ;  $j_0 = 2,6 \cdot 10^3 a \cdot \text{см}^{-2}$ , а при  $T = 293^\circ\text{К}$  —  $\beta = 1,37 \cdot 10^{-2} \text{ см} \cdot a^{-1}$ ;  $j_0 = 1,9 \cdot 10^4 a \cdot \text{см}^{-2}$ . При сильном легировании активной области примесями одного типа параметр  $j_0$  может быть уменьшен на порядок.

На рис. 4 приведены результаты численного расчета при температурах 78° и 293°К. Теория дает значения порогового тока и параметров GaAs инжекционного лазера, близкие к экспериментальным [1, 2, 14—16, 21]. Легирование активной области в зависимости от величины коэффициента потерь по-разному влияет на пороговый ток. В случае значительного коэффициента потерь пороговый ток при сильном легировании донорами, несмотря на уменьшение  $j_0$ , увеличивается из-за уменьшения  $\beta$ , а при малых потерях возможно уменьшение порога генерации. Сильное легирование акцепторами всегда приводит к уменьшению порога генерации.

Таким образом, лучшие параметры должны иметь лазерные диоды, в активной области которых концентрация акцепторов значительно больше, чем доноров.

### Литература

1. Hall R. N., Fenner G. E., Kingsley J. D., Soltys T. J., Carlson R. O. *Phys. Rev. Letters*, **9**, 366, 1962.
2. Багаев В. С., Басов Н. Г., Вул Б. М., Копыловский Б. Д., Крохин О. Н., Маркин Е. П., Попов Ю. М., Хвощев А. Н., Шотов А. П. *ДАН СССР*, **150**, 275, 1963.
3. Lasher G. J. *IBM J. Res. Develop.*, **7**, 58, 1963.
4. McWhorter A. L., Zeiger H. J., Lax V. *J. Appl. Phys.*, **34**, 235, 1963.
5. Hall R. N. *Solid-State Electron.*, **6**, 405, 1963.
6. Lasher G., Stern F. *Phys. Rev.*, **133**, A553, 1964.
7. Пикус Г. Е. *ФТТ*, **7**, 3536, 1965.
8. Stern F. *Phys. Rev.*, **148**, 186, 1966.
9. Грибковский В. П. *ЖПС*, **6**, 669, 1967.
10. Маделунг О. *Физика полупроводниковых соединений элементов III и V групп*. Изд. «Мир», М., 1967.
11. Бонч-Бруевич В. Л. *Итоги науки, ФТТ*, Сб. статей, 127, 1965.
12. Винецкий В. Л., Машкевич В. С., Томчук П. М. *ФТТ*, **6**, 2037, 1964.
13. Буряковский Г. Ю., Винецкий В. Л., Машкевич В. С. *ФТТ*, **7**, 1028, 1965.
14. Pilkuhn M., Rupprecht H. *Proc. IEEE*, **51**, 1243, 1963.
15. Pilkuhn M., Rupprecht H., Woodall J. *IEEE J. Quant. Electron.*, QE-1, 184, 1965.
16. Басов Н. Г., Елисеев П. Г., Захаров С. Д., Захаров Ю. П., Ораевский И. Н., Пинскер И. З., Страхов В. П. *ФТТ*, **8**, 2616, 1966.
17. Крохин О. Н. *ФТТ*, **7**, 2612, 1965.
18. Грибкоўскі В. П. *Весті АН БССР, сер. фіз-матэмац. навук*, № 4, 95, 1966.
19. Stern F. *Solid State Physics*, **15**, 299, 1963.
20. Вул Б. М., Вавилов В. С., Галкин Г. Н., Боброва Е. А. *ФТТ*, **8**, 908, 1966.
21. Dousmanis G., Nelson H., Staebler D. *Appl. Phys. Letters*, **5**, 174, 1964.
22. Dumke W. P. *Proc. Symp. on Optical Masers*, New York, p. 461, 1963.

Институт физики  
АН БССР

Поступило в редакцию  
14.XI 1967

Б. Б. ДАВЫДОВ, Е. А. КОСТЮКЕВИЧ

### ИССЛЕДОВАНИЕ УСКОРИТЕЛЯ ПЛАЗМЫ РЕЛЬСОВОГО ТИПА

В связи с рядом практических применений движущейся плазмы исследование физических процессов, протекающих в различных типах ускорителей и источников плазмы, приобретает все большее значение. В последнее время появилось значительное количество работ, посвященных исследованию ускорителей плазмы рельсового типа (см., например, [1—6]). Во всех этих работах исследования проводились с целью изучения механизма ускорения плазменных сгустков и определения их свойств при низких давлениях ( $10^{-2} \div 10^{-5}$  мм рт. ст.). В большинстве из них описаны ускорители, использующие в качестве рабочего тела газ. Особый интерес представляют ускорители с рабочим телом в твердом состоянии [7, 8]. Физика рабочего процесса таких ускорителей мало изучена.

Представлялось целесообразным провести исследования процессов образования и ускорения плазменных сгустков в ускорителе рельсового типа с твердым рабочим телом в основном при атмосферном давлении. Схема рельсового ускорителя приведена на рис. 1. В качестве электродов-рельсов взяты плоские медные пластины с хорошей чистой обработки размером  $30 \times 6 \times 2$  мм. Расстояние между ними 10 мм. Эксперимент проводился как с параллельными, так и с расходящимися электродами. Угол

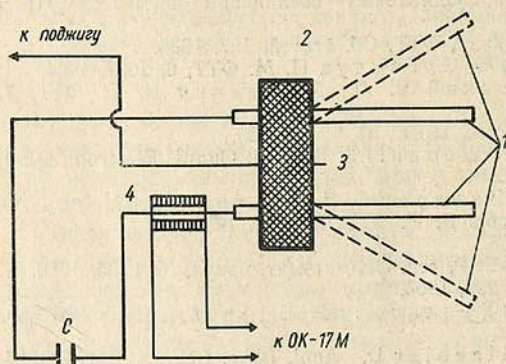


Рис. 1. Схема рельсового ускорителя:

1 — электроды; 2 — фторопластовая вставка; 3 — поджигающий электрод; 4 — пояс Роговского

между электродом и нормалью к фторопластовой вставке в последнем случае составлял  $45^\circ$ .

Основные электрические параметры разрядной цепи следующие:  
 общая индуктивность разрядной цепи  $1,35 \cdot 10^{-5}$  гн;  
 емкость конденсаторов  $15 \cdot 10^{-5}$  ф;  
 ток разряда в первом полупериоде при  $U = 3 \cdot 10^3$  в  $31,5 \cdot 10^3$  а;  
 длительность полупериода тока  $45 \cdot 10^{-6}$  сек;  
 крутизна тока при  $U = 3 \cdot 10^3$  в  $10^9$  а/сек;  
 рабочее напряжение  $1 \div 4 \cdot 10^3$  в.

Ток разряда измерялся с помощью пояса Роговского, сигнал с которого через интегрирующую *rc*-ячейку подавался к осциллографу ОК-17М. Изменение напряжения на электродах снималось с помощью емкостного делителя. Типичные осциллограммы тока и напряжения разряда при-

ведены на рис. 2, а, б. Была также получена вольтамперная характеристика разряда (рис. 2, в). В этом случае напряжение подавалось непосредственно на горизонтально отклоняющие пластины осциллографа, а сигнал тока через усилитель осциллографа на вертикально отклоняющие пластины. При этом напряжение развертки на горизонтальной пластине отключалось. Из осциллограмм тока и напряжения или вольтамперных характеристик можно было оценить энергию, вкладываемую в разряд. Она составляет около 60% запасенной энергии в конденсаторной батарее. Структура и движение плазменных сгустков исследовались фоторегистрирующими приборами ЖФР-2, ЖФР-1, СФР-2М на ускорителе

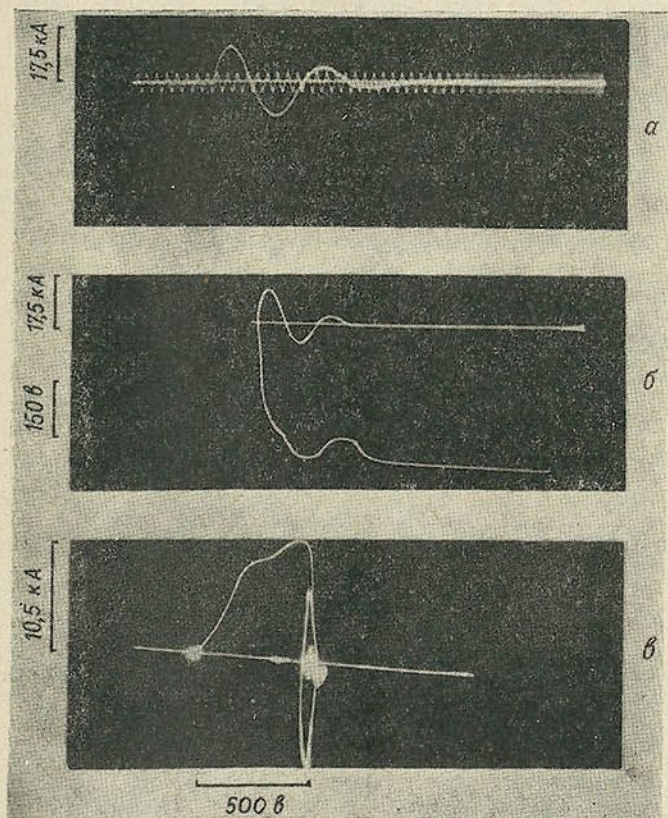


Рис. 2. Осциллограмма разряда ( $U=1$  кв;  $C=150$  мкф):

а — разрядный ток с калибровочным сигналом  $f=10^3$  гц; б — ток и напряжение; в — вольтамперная характеристика

как с параллельными, так и с расходящимися электродами. Скорость развертки ЖФР-2 составляла 400 м/сек.

Щель прибора ориентировалась параллельно и перпендикулярно движению плазмы. При продольной ориентации щели фотографировались участки межэлектродного пространства, прилегающие к катоду и к аноду, и промежуток между электродами. Ускоритель в этом случае устанавливался таким образом, чтобы фотографируемый электрод был параллелен щели фоторегистратора. При поперечной ориентации щель вырезала узкие области вблизи основания электродов, на середине их и у торцов.

Как показывают фоторазвертки (рис. 3, *a*), разряд начинается у основания электродов. Образующийся головной плазменный сгусток (форсгусток) движется вдоль электродов, расширяясь в стороны и окутывая электроды. Этот сгусток сгребает находящийся в разрядном промежут-

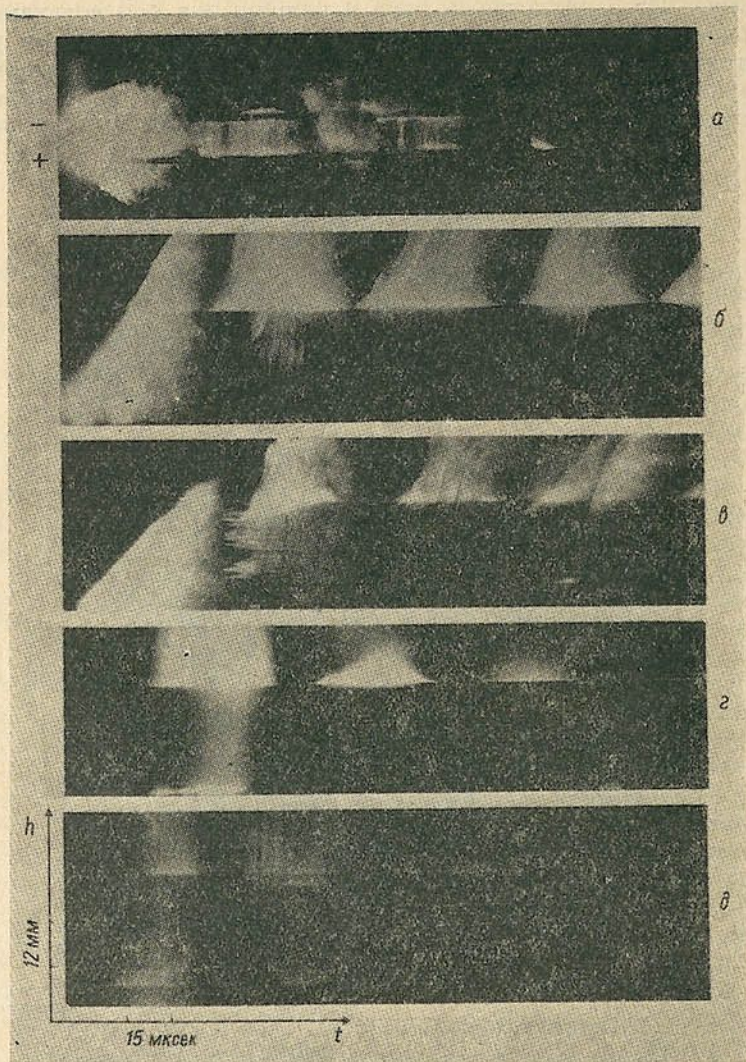


Рис. 3. Фоторазвертки разряда:

*a* — поперечная фоторазвертка ( $U=4$  кВ;  $C=150$  мкФ); *б* — продольная фоторазвертка прикатодной области ( $U=3,5$  кВ;  $C=150$  мкФ); *в* — продольная фоторазвертка прианодной области в случае расходящихся электродов ( $U=3$  кВ;  $C=150$  мкФ); *г* — продольная фоторазвертка прикатодной области ( $U=3$  кВ;  $C=150$  мкФ;  $r \approx 10^{-2}$  мм рт. ст.); *д* — продольная фоторазвертка прианодной области ( $U=3$  кВ;  $C=150$  мкФ;  $r \approx 10^{-1}$  мм рт. ст.)

ке газ, и образующиеся вслед за ним сгустки (слои) в остальных полупериодах тока движутся как бы в разреженном пространстве. Поэтому слои обладают большими скоростями по сравнению с головным сгустком. По своему происхождению они являются эрозийными, т. е. образуются за счет разрушения диэлектрической вставки и электродов.

Были измерены скорости движения головного плазменного сгустка по переднему фронту свечения вблизи электродов и в промежутке между ними. Скорости в пределах ошибки измерения во всех трех областях одинаковы. В ускорителе с параллельными электродами скорость (рис. 4) выше по сравнению с расходящимися электродами при одинаковых напряжениях.

За время, меньшее полупериода разряда, плазменный сгусток достигает торцов электродов и разряд переносится в основном на торцы (рис. 3, а, б, в, г). Во все последующие полупериоды из торцов электродов выбрасываются эрозионные плазменные факелы, которые имеют прерывистую структуру, обусловленную дискретным характером поступления вещества электродов вследствие электрической эрозии. На фоторазвертках плазменных факелов наблюдается так называемое темное пространство, связанное со сверхзвуковым истечением паров электродов в условиях недорасширения (рис. 3, б). Эти явления аналогичны наблюдаемым в случае импульсного разряда с разделенными факелами и подробно рассмотрены в работе [9].

Из фоторазверток (особенно поперечных), (рис. 3, а) видно, что разряд между электродами не полностью прекращается. Он продолжает существовать в отдельных пятнах. Электродные пятна являются опорными точками токовых слоев (светлые перетяжки на поперечных фоторазвертках), существование которых поддерживается за счет поступления вещества вследствие эрозии электродов в этих пятнах. На поступление вещества указывают отдельные сгустки, наблюдаемые в приэлектродных областях (особенно прикатодных) на поперечных фоторазвертках, а также горизонтальные слегка расширяющиеся светлые полосы на продольных фоторазвертках (рис. 3, в). Светлые полосы наблюдаются только при отрицательной полярности фотографируемого электрода, как и в случае работы ускорителя в вакууме [3, 5]. В случае положительной полярности светлых полос в наших экспериментах не наблюдалось. По-видимому, это связано с тем, что анодные пятна всегда сопровождают быстро движущиеся токовые слои, в то время как катодные пятна увлекаются ими лишь при очень больших плотностях тока [10]. Из фоторазверток следует, что катодные пятна во все время своего существования остаются неподвижными.

На фоторазвертках, полученных при регистрации центра межэлектродного промежутка, светлые горизонтальные полосы не наблюдались. Это обстоятельство подтверждает правильность предположения, что полосы появляются именно в результате выброса вещества с электродов.

На продольных фоторазвертках (рис. 3, б, в) токовые слои регистрируются в виде полосатой структуры в основном во втором полупериоде разрядного тока. Полосатая структура существует и в первом полупериоде. Однако из-за яркого свечения плазмы она плохо заметна. Характерно, что ширина токовых слоев зависит от полярности электродов. Когда фотографируемый электрод имел отрицательную полярность, ширина слоя колебалась в пределах 1—1,5 мм. В случае положительной полярности токовые слои сужались до размеров 0,3—0,5 мм. В течение

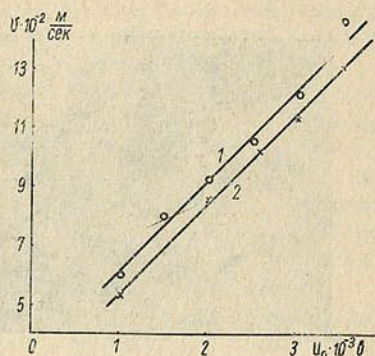


Рис. 4. График зависимости скорости переднего фронта свечения от напряжения на конденсаторной батарее:

1 — параллельные электроды; 2 — расходящиеся электроды

своего существования токовые слои остаются параллельными друг другу и перпендикулярными к электродам (рис. 3, а).

Начальная скорость движения слоев порядка  $3 \div 5 \cdot 10^3$  м/сек и почти не изменяется с напряжением. На продольных фоторазвертках видны слои, изгибающиеся вверх, что указывает на их ускоренное движение под действием электродинамических сил. Грубые оценки дают величину ускорения порядка  $8 \div 9 \cdot 10^3$  м/сек<sup>2</sup>. Первые слои отличаются от последующих по ширине и по скорости; их ширина несколько больше,

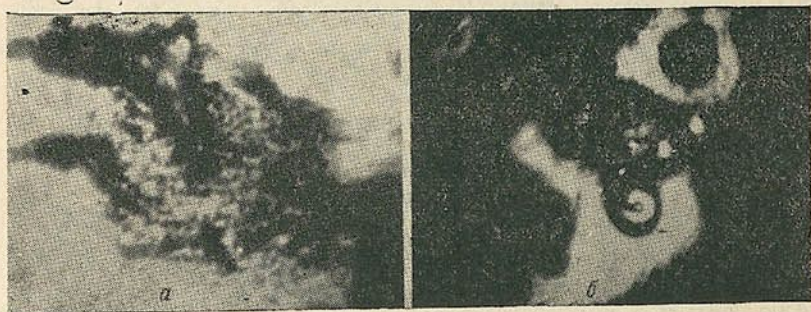


Рис. 5. Микрофотография катодного (а) и анодного (б) пятен ( $U=3$  кв;  $C=150$  мкф). Увеличение  $168\times$

а скорость меньше, чем у остальных, что согласуется с выводами работы [2]. Следует отметить, что токовые слои возникают иногда у основания электродов, а иногда и выше (рис. 4, б, в). Строгой закономерности в местоположении их не наблюдается. Что касается природы образования токовых слоев, то, вероятно, они обусловлены повторными пробоями, на что указывают многие авторы [7, 10, 11].

При работе ускорителя в условиях пониженного давления ( $\sim 10^{-3}$  мм рт. ст.) головной густок отсутствует и образование токовых слоев хорошо видно в первом полупериоде (рис. 3, з, д). При этом наблюдается более строгая закономерность в местоположении их образования. Как и при атмосферном давлении, наблюдается эффект вывода разряда на торцы электродов и резко выраженный структурный характер истечения образующихся эрозионных плазменных струй из торцов электродов (рис. 3, з).

Для выяснения структуры катодных и анодных пятен была произведена микросъемка поверхности электродов. При этом электроды тщательно полировались и использовался аperiодический разряд ( $I=8,5$  кА). После каждого единичного разряда пораженные места электродов фотографировались металлографическим микроскопом МИМ-6. Уже при малых увеличениях наблюдается различие между анодными и катодными пятнами: пятна на катоде имеют вид длинных бороздок, анодные пятна представляют собой кратеры почти круглой формы. На фотографиях с относительно большим увеличением, как видно из рис. 5, а, б, анодные и катодные пятна состоят из большого количества микропятен с площадью  $2 \div 5 \cdot 10^{-3}$  см<sup>2</sup>.

Качественный анализ интегральных во времени спектров испускания образующейся плазмы показывает, что она состоит из газоразрядной плазмы (NI, OI, NII, OII, NIII) и плазмы эрозионного типа (CuI, CaI, FI, CuII, CaII), обусловленной эрозией электродов и диэлектрической вставки. Плазма по своему составу как в приэлектродных областях, так и в промежутке между ними одинакова.

Полученные спектры были использованы для определения температуры и концентрации заряженных частиц. Температура измерялась по методу относительных интенсивностей. Для диагностики были выбраны пары линий NII: 5535 Å и 5496 Å; 5496 Å и 4621 Å. Значения вероятностей переходов для этих линий были взяты из работы [12]. Измерения показали, что вблизи электродов и в промежутке между ними температура оставалась в пределах погрешностей постоянной и составляла в среднем  $38\,000 \pm 6000$  °К.

Для измерения концентрации заряженных частиц были выбраны линии CII 4267 Å и NII 3995 Å, уширение которых обусловлено в основном квадратичным эффектом Штарка.

Теоретический расчет уширения для линии азота заимствован у Грима [13], а для линии углерода — из работы [14]. Значения концентраций, найденные по этим линиям, равны соответственно  $10^{18}$  см<sup>-3</sup> и  $10^{17}$  см<sup>-3</sup>.

Была произведена оценка температуры и концентрации заряженных частиц при пониженном давлении ( $\sim 10^{-3}$  мм рт. ст.). Поскольку свечение плазменной струи было недостаточным для получения спектров, пригодных для измерений, емкость батареи конденсаторов пришлось увеличить до 1950 мкф.

Изучение полученных спектров показало, что в плазме преобладают атомы и ионы Си, Са, С; кроме того, появились молекулярные полосы С<sub>2</sub>.

Температура, измеренная по относительным интенсивностям линий CII 4326 Å и 4267 Å, оказалась равной  $31\,000 \pm 5000$  °К. Значения вероятностей для этих линий были рассчитаны на основании данных работы [15]. Концентрация заряженных частиц, вычисленная по уширению линии CII 4267 Å, оказалась равной  $10^{17}$  см<sup>-3</sup>.

Авторы выражают искреннюю благодарность Л. Я. Минько за постоянный интерес к работе и за обсуждение ее результатов.

### Литература

1. Григорьев В. Н. ПМТФ, № 2, 1965.
2. Григорьев В. Н. ПМТФ, № 4, 1965.
3. Башаров Р., Гавриловская Е. Н., Малкин О. А., Трехов Е. С. ЖТФ, XXXV, 10, 1853, 1965.
4. Балагуров А. Я., Ершов А. Г., Левтов В. Л., Лесков Л. В., Петров Л. М., Савичев В. В. и Чивилев В. А. ЖТФ, XXXVII, 27, 274, 1967.
5. Sobra K., Kalivoda L., Hanitz F. Czech. J. Phys. B15, № 7, 1965.
6. Sobra K., Kalivoda L., Rosenkranz J. Czech. J. Phys. B17, № 1, 1967.
7. Кварцхава И. Ф., Меладзе Р. Д., Суладзе К. В. ЖТФ, 289, 1960.
8. Rosebrock T. L., Clingman D. L., Cubbins D. G. AJAA, 2, № 2, 1964.
9. Гречихин Л. И., Давыдов Б. Б., Минько Л. Я. ТВТ, 5, № 5, 1968.
10. Кварцхава И. Ф., Матвеев Ю. В., Меладзе Р. Д., Хаутиев Э. Ю., Жуков Н. Н. ЖТФ, XXXVI, 4, 755, 1966.
11. Ковалев А. М. Сб. «Физика плазмы и пробл. управл. термояд. синтеза», в. 4, 231, 1963.
12. Суходрев Н. К. Труды физического института им. П. Н. Лебедева, т. XV, 123, 1961.
13. Griem H. R. Plasma Spectroscopy. New York, 1964.
14. Гречихин Л. И., Минько Л. Я., Нагорная Н. И. ЖТФ, XXXVI, в. 6, 1207, 1966.
15. Allen C. W. Astrophysical Quantities. Secorol Ed, Univ. of London, 1963.

Институт физики  
АН БССР

Поступило в редакцию  
1.XII 1967

Л. А. БАРЫСАГЛЕБСКІ, В. Ф. ТРУСАУ

### ДА ТЭОРЫ УНУТРАНАЙ КАНВЕРСІІ НА М-АБАЛОНЦЫ АТАМА

У многіх выпадках, напрыклад пры даследаваннях эфектаў пранікальнасці электрона ў тэоры ўнутранай канверсіі [1], вуглавых карэляцый і двухквантавых працэсаў тыпу  $e-e$  [2, 3], веданне асноўных радыяльных інтэгралаў канверсіі з'яўляецца неабходным.

Табліцы такіх інтэгралаў для выпадку канверсіі на  $K$ - і  $L$ -абалонках атама ўжо выдаваліся [4, 5]. Паколькі ў апошні час цікавасць да ўнутранай канверсіі на  $M$ -абалонцы значна павысілася, можна чакаць, што і публікацыя табліц асноўных радыяльных інтэгралаў канверсіі на  $M$ -абалонцы будзе карыснай.

Агульны выраз для магнітных і электрычных каэфіцыентаў унутранай канверсіі (у далейшым КУК) можна запісаць у выглядзе

$$\beta_{\kappa_0}^{(L)} = \frac{2\pi a k}{L(L+1)(2L+1)} \sum_x B_x^2 |R_x^{(L)}(m) + R_x'^{(L)}(m)|^2, \quad (1)$$

$$\alpha_{\kappa_0}^{(L)} = \frac{2\pi a k}{L(L+1)(2L+1)} \sum_x \bar{B}_x^2 |R_x^{(L)}(e) + R_x'^{(L)}(e)|^2. \quad (2)$$

Тут  $\kappa_0, \kappa$  — рэлятывісцкія квантавыя лікі, якія вызначаюць пачатковы звязаны і канечны свабодны стан электрона канверсіі;  $R_x^{(L)}(m)$  і  $R_x^{(L)}(e)$  — асноўныя радыяльныя інтэгралы;  $R_x'^{(L)}(m)$  і  $R_x'^{(L)}(e)$  — дадатковыя радыяльныя інтэгралы, якія ўлічваюць унутрыядзерную канверсію і залежаць звычайна ад структуры ядра;  $L$  вызначае мультыпольнасць пераходу;  $\alpha$  — пастаянная тонкай структуры.

Велічыні  $B_x$  выражаюцца праз каэфіцыенты Клебша — Гордана і каэфіцыенты Рака  $W\left( JJ_0 l_0; \frac{1}{2} L \right)$  наступнай формулай:

$$B_x = \frac{C_{l_0 0 l_0}^{L_0} W\left( JJ_0 l_0; \frac{1}{2} L \right)}{\sqrt{(2J_0+1)(2l_0+1)(2J+1)(2l+1)}}, \quad (3)$$

дзе  $l_0, l$  і  $J_0, J$  — пачатковыя і канечныя арбітальныя і поўныя моманты колькасці руху электрона. Велічыні  $\bar{B}_x$  атрымліваюцца з  $B_x$  шляхам замены  $l \rightarrow \bar{l} = l - \frac{\kappa}{|\kappa|}$ .

Інтэгралы  $R_x^{(L)}(m)$  і  $R_x^{(L)}(e)$  разбіваюцца на больш простыя інтэгралы  $(R_{1-6})_x$  згодна з формуламі

$$R_x(m) = (R_1)_x + (R_2)_x, \quad (4)$$

$$R_x(e) = (\kappa_0 - \kappa)(R_5 + R_6)_x + L(R_6 - R_5 + R_3 + R_4)_x. \quad (5)$$

Гэтыя ж інтэгралы роўныя

$$(R_1)_x = \int_0^\infty h_L^{(1)}(kr) f_\kappa g_{\kappa_0} r^2 dr, \quad (R_2)_x = \int_0^\infty h_L^{(1)}(kr) g_\kappa f_{\kappa_0} r^2 dr, \quad (6)$$

$$(R_3)_x = \int_0^\infty f_\kappa f_{\kappa_0} h_L^{(1)}(kr) r^2 dr, \quad (R_4)_x = \int_0^\infty g_\kappa g_{\kappa_0} h_L^{(1)}(kr) r^2 dr, \quad (7)$$

$$(R_5)_x = \int_0^\infty f_\kappa g_{\kappa_0} h_{L-1}^{(1)}(kr) r^2 dr, \quad (R_6)_x = \int_0^\infty g_\kappa f_{\kappa_0} h_{L-1}^{(1)}(kr) r^2 dr, \quad (8)$$

дзе  $f_\kappa, f_{\kappa_0}, g_\kappa, g_{\kappa_0}$  — радыяльныя функцыі рэлятывіскага электрона;  $h_L^{(1)}(kr)$  — сферычная функцыя Ганкеля 1-га роду.

У табл. 1, 2 прыведзены лікавыя значэнні асноўных радыяльных інтэгралаў, атрыманых для выпадку канверсіі на  $M$ -абалонцы атама пры  $M1$ -,  $M2$ -,  $E1$ - і  $E2$ -пераходах ядраў з атамным нумарам  $Z = 80$ . Інтэграванне ў (6) — (8) выконвалася па частках. Унутрыядзерныя часткі  $R_x^{(L)}(m)$  і  $R_x^{(L)}(e)$  вылічаліся па формулах, якія выведзены на аснове работы [6]. Гэтыя формулы ў абазначэннях [6] маюць выгляд

$$\begin{aligned} [R_x^{(L)}(m)]_0^R &= [(R_1 + R_2)_x]_0^R = \\ &= a_\kappa a_{\kappa_0} \left\{ \frac{k^L}{2(2L-1)!!} R^{|\kappa| + |\kappa_0| + L + 1 + \delta^\pm} \times \right. \\ &\times \sum_{\mu=0}^\infty \frac{R^{2\mu}}{|\kappa| + |\kappa_0| + L + 1 + 2\mu - \delta^\pm} \times \\ &\times \sum_{\nu=0}^\mu \left(\frac{ik}{2}\right)^{2(\mu-\nu)} \frac{b_{2\nu+\delta^\pm}}{(\mu-\nu)! \left(L + \frac{1}{2}\right)_{\mu-\nu+1}} - \\ &- \frac{i(2L+1)!!}{k^{L+1}} R^{|\kappa| + |\kappa_0| - L + \delta^\pm} \sum_{\mu=0}^\infty \frac{R^{2\mu}}{|\kappa| + |\kappa_0| - L + 2\mu + \delta^\pm} \times \\ &\times \sum_{\nu=0}^\mu \left(\frac{ik}{2}\right)^{2(\mu-\nu)} \frac{b_{2\nu+\delta^\pm}}{(\mu-\nu)! \left(-L + \frac{1}{2}\right)_{\mu-\nu}} \Bigg\}; \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} [R_x^{(L)}(e)]_0^R &= [(\kappa_0 - \kappa)(R_5 + R_6)_x + L(R_6 - R_5 + R_3 + R_4)_x]_0^R = \\ &= a_\kappa a_{\kappa_0} \left\{ \frac{k^L R^{|\kappa| + |\kappa_0| + L + 2 - \delta^\pm}}{2(2L-1)!!} \times \right. \end{aligned}$$

Спраўдныя і ўяўныя часткі радыяльных інтэгралаў  $R_k^{(L)}(\tau)$  для канверсіі на  $M_l$ ,  
 $k$ —энергія ў адзінках  $m_0c^2$ ; квантавы лік  $\chi = (l - J)(2J + 1)$

$k$	$M_1$				$M_2$			
	Re	Im	Re	Im	Re	Im	Re	Im
<b><math>M_I</math>-падабэлонка</b>								
	$\chi=-1$		$\chi=2$		$\chi=2$		$\chi=3$	
0,1	1,73(-3)	2,35( 1)	1,20(-3)	-2,05(-1)	-3,69(-3)	1,46( 2)	5,87(-5)	7,63(-1)
0,2	2,39(-3)	6,06( 0)	-1,16(-3)	-2,12(-1)	-3,87(-3)	2,36( 1)	-1,02(-4)	-2,03(-1)
0,5	3,77(-3)	1,04( 0)	-1,03(-3)	-1,04(-1)	-3,41(-3)	2,54( 0)	-1,78(-4)	-1,58(-1)
1,0	4,11(-3)	2,83(-1)	-1,77(-3)	-5,05(-2)	-1,93(-2)	5,54(-1)	-6,06(-4)	-7,29(-2)
2,0	4,16(-3)	8,19(-2)	-2,31(-3)	-2,22(-2)	-2,42(-4)	1,39(-1)	-1,09(-3)	-3,03(-2)
<b><math>M_{II}</math>-падабэлонка</b>								
	$\chi=1$		$\chi=-2$		$\chi=2$		$\chi=-3$	
0,1	5,12(-4)	7,78( 0)	1,46(-3)	1,11( 0)	-5,36(-4)	4,45( 1)	2,76(-3)	4,98( 0)
0,2	2,09(-3)	2,01( 0)	2,89(-3)	2,90(-1)	-6,09(-4)	8,32( 0)	2,49(-3)	9,44(-1)
0,5	4,82(-4)	3,45(-1)	9,47(-4)	5,18(-2)	-2,66(-4)	9,88(-1)	1,66(-3)	1,16(-1)
1,0	5,75(-4)	9,27(-2)	6,07(-4)	1,50(-2)	9,63(-6)	2,13(-1)	1,07(-3)	2,70(-2)
2,0	5,68(-4)	2,51(-2)	4,45(-4)	4,63(-3)	1,52(-4)	4,95(-2)	6,01(-4)	7,23(-3)
<b><math>M_{III}</math>-падабэлонка</b>								
	$\chi=1$		$\chi=-2$		$\chi=-1$		$\chi=2$	
0,1	-3,72(-3)	7,85(-1)	-2,94(-3)	-1,31( 0)	1,33(-3)	-9,37( 1)	8,58(-4)	1,35( 1)
0,2	-1,53(-3)	1,63(-1)	-5,24(-4)	-4,43(-1)	1,27(-3)	-1,19( 1)	4,04(-4)	2,28( 0)
0,5	-2,25(-3)	1,81(-2)	-1,82(-3)	-7,11(-2)	1,40(-3)	-7,84(-1)	-1,36(-4)	2,12(-1)
1,0	-1,82(-3)	2,37(-3)	-1,77(-3)	-1,80(-2)	1,20(-3)	-1,02(-1)	-3,94(-4)	3,35(-2)
2,0	-1,24(-3)	7,73(-5)	-1,30(-3)	-4,71(-3)	9,22(-4)	-1,32(-2)	-5,09(-4)	4,61(-3)
	$\chi=3$		$\chi=-3$		$\chi=-3$		$\chi=4$	
0,1	1,17(-3)	4,65(-1)			9,21(-3)	-8,87( 0)	8,14(-5)	1,41( 0)
0,2	5,19(-6)	1,74(-1)			2,31(-3)	-1,61( 0)	1,57(-4)	4,62(-1)
0,5	1,11(-3)	4,05(-2)			6,15(-4)	-1,83(-1)	5,43(-4)	8,44(-2)
1,0	1,17(-3)	1,27(-2)			-2,23(-4)	-3,23(-2)	6,76(-4)	2,24(-2)
2,0	9,39(-4)	4,01(-3)			-5,83(-4)	-8,73(-3)	6,66(-4)	6,13(-3)
<b><math>M_{IV}</math>-падабэлонка</b>								
	$\chi=-1$		$\chi=2$		$\chi=1$		$\chi=-2$	
0,1	1,83(-3)	-3,43(-2)	-1,48(-3)	-5,41(-1)	-7,99(-5)	-1,11( 1)	-1,69(-4)	-4,05( 0)
0,2	-6,22(-5)	-1,03(-2)	3,96(-4)	-1,09(-1)	1,91(-6)	-1,35( 0)	-1,08(-4)	-4,96(-1)
0,5	-1,61(-5)	-1,52(-3)	-1,75(-4)	-1,25(-2)	5,74(-5)	-8,50(-2)	-2,73(-5)	-3,21(-2)
1,0	2,45(-5)	-2,96(-4)	-1,43(-4)	-2,39(-3)	3,58(-5)	-1,06(-2)	-1,66(-5)	-4,25(-3)
2,0	1,79(-5)	-5,04(-5)	-7,81(-5)	-4,59(-4)	2,27(-3)	-1,33(-3)	-5,10(-6)	-5,82(-4)
	$\chi=-3$		$\chi=3$		$\chi=3$		$\chi=-4$	
0,1	-1,84(-3)	-8,89(-2)			7,90(-4)	-3,37( 0)	-6,94(-4)	-4,09(-1)
0,2	9,69(-5)	-1,86(-2)			2,73(-4)	-5,03(-1)	-3,30(-4)	-6,29(-2)
0,5	-1,06(-5)	-2,39(-3)			-1,72(-6)	-4,08(-2)	-1,28(-4)	-5,63(-3)
1,0	-2,45(-5)	-5,34(-4)			-4,65(-5)	-6,36(-3)	-4,80(-5)	-1,02(-3)
2,0	-1,69(-5)	-1,29(-4)			-4,50(-5)	-1,05(-3)	-1,83(-4)	-2,16(-4)
<b><math>M_V</math>-падабэлонка</b>								
	$\chi=-1$		$\chi=2$		$\chi=1$		$\chi=-2$	
0,1	-2,00(-3)	5,21(-3)	-1,16(-3)	-5,03(-2)	-2,15(-4)	-9,31(-1)	-1,190(-4)	2,12( 0)
0,2	-1,06(-3)	2,29(-3)	4,97(-4)	-9,23(-3)	-3,12(-4)	-9,89(-2)	-3,45(-4)	2,40(-1)
0,5	-5,27(-4)	2,51(-4)	2,81(-4)	-2,63(-4)	-1,91(-4)	-4,71(-3)	-2,03(-4)	1,24(-2)
1,0	-3,00(-4)	2,16(-5)	1,70(-4)	1,53(-4)	-1,37(-4)	-4,65(-4)	-1,43(-4)	1,12(-3)
2,0	-1,40(-4)	1,07(-5)	1,02(-4)	8,67(-5)	-3,74(-5)	-4,61(-5)	-9,35(-5)	4,19(-5)
	$\chi=-3$		$\chi=4$		$\chi=3$		$\chi=-4$	
0,1	-1,70(-3)	8,20(-1)	1,39(-3)	-1,77(-1)	-1,33(-4)	-1,04( 0)	-1,40(-3)	1,53( 0)
0,2	2,31(-4)	6,43(-2)	-1,94(-4)	-4,27(-2)	-6,09(-6)	-1,40(-1)	-4,47(-4)	2,30(-1)
0,5	4,17(-4)	7,59(-3)	-2,87(-4)	-6,07(-3)	5,23(-5)	-8,47(-3)	1,12(-5)	1,95(-2)
1,0	2,57(-4)	1,56(-3)	-1,88(-4)	-1,40(-3)	7,16(-5)	-7,63(-4)	1,09(-4)	3,23(-3)
2,0	1,42(-4)	3,47(-4)	-1,12(-4)	-3,47(-4)	6,36(-5)	9,02(-6)	1,00(-4)	5,99(-4)
	$\chi=5$							
					6,56(-5)	-6,91(-1)		
					-1,52(-4)	-1,30(-1)		
					-1,73(-4)	-1,36(-2)		
					-1,41(-4)	-2,55(-3)		
					-9,69(-5)	-5,30(-4)		

Табліца 1

$M_I, M_{II}, M_{IV}, M_V$  - падабалонкавых ( $Z = 80$ ;  $L$  - мультыплетнасць выпраменьвання;  $\nu$  - вызначае свабодны стан электрона)

Im	E1				E2			
	Re	Im	Re	Im	Re	Im	Re	Im
<b><math>M_I</math> - падабалонка</b>								
$\nu=1$		$\kappa=-2$		$\kappa=2$		$\kappa=-3$		
-1,30(-1)	-3,59( 0)	-1,46(-1)	-4,31( 0)	-4,68(-2)	2,78( 1)	-3,70(-2)	-7,60( 0)	
-2,63(-1)	-9,49(-1)	-9,22(-2)	-1,45( 0)	-4,48(-2)	3,79( 0)	-4,70(-2)	-4,44( 0)	
-1,58(-1)	-1,06(-1)	-3,96(-2)	-3,36(-1)	-3,49(-2)	5,47(-1)	-3,53(-2)	-1,04( 0)	
-7,29(-2)	-4,58(-4)	-1,91(-2)	-1,14(-1)	-1,90(-2)	2,20(-1)	-2,21(-2)	-3,17(-1)	
-3,03(-2)	6,56(-3)	1,11(-2)	-9,05(-3)	-4,06(-2)	-5,84(-3)	9,45(-2)	-1,21(-2)	-1,02(-1)
<b><math>M_{II}</math> - падабалонка</b>								
$\kappa=-1$		$\kappa=2$		$\kappa=-2$		$\kappa=3$		
4,58(-2)	1,15( 0)	1,28(-1)	3,81( 0)	-2,06(-2)	1,93( 2)	8,00(-2)	2,28( 1)	
2,73(-2)	3,13(-1)	5,67(-2)	9,74(-1)	-9,82(-3)	2,67( 1)	5,96(-2)	4,95( 2)	
1,61(-1)	9,95(-3)	5,30(-2)	1,84(-2)	1,56(-1)	-5,51(-3)	2,19( 0)	2,64(-2)	
7,70(-2)	4,69(-3)	1,40(-2)	7,02(-3)	4,10(-2)	-1,63(-3)	3,74(-1)	1,20(-2)	
2,23(-3)	2,34(-3)	3,84(-3)	2,53(-3)	1,16(-2)	9,22(-5)	7,35(-2)	4,86(-3)	
<b><math>M_{III}</math> - падабалонка</b>								
$\kappa=-1$		$\kappa=2$		$\kappa=1$		$\kappa=-2$		
5,28(-2)	1,32( 0)	7,45(-2)	2,12( 0)	-3,85(-3)	1,47( 2)	-1,24(-2)	1,29( 2)	
3,21(-2)	3,4(-1)	2,11(-2)	3,45(-1)	-4,52(-3)	1,78( 1)	-7,48(-3)	1,65( 1)	
1,19(-2)	5,36(-2)	-4,32(-4)	1,2(-5)	4,2(-3)	1,10( 0)	-9,75(-4)	1,16( 0)	
5,56(-3)	1,23(-2)	-4,13(-3)	-1,30(-2)	4,62(-3)	1,37(-1)	5,65(-4)	1,64(-1)	
2,62(-3)	2,67(-3)	-3,9(-3)	-7,05(-2)	3,48(-3)	1,82(-2)	6,58(-4)	2,48(-2)	
$\kappa=-3$		$\kappa=3$		$\kappa=-4$		$\kappa=4$		
0,22(-2)	2,9( 0)			6,49(-2)	1,48( 1)	6,97(-2)	1,96( 1)	
3,61(-2)	7,12(-1)			4,48(-2)	2,30( 0)	4,05(-2)	3,92( 0)	
1,04(-3)	1,05(-1)			1,20(-2)	8,24(-2)	1,54(-2)	4,32(-1)	
3,77(-3)	2,56(-2)			1,48(-3)	-2,06(-2)	6,33(-3)	8,66(-2)	
1,55(-3)	6,62(-3)			-2,03(-3)	-1,36(-2)	2,67(-3)	1,95(-2)	
<b><math>M_{IV}</math> - падабалонка</b>								
$\kappa=1$		$\kappa=-2$		$\kappa=-1$		$\kappa=2$		
-2,25(-2)	-3,61(-1)	-1,66(-2)	-2,22(-1)	1,34(-2)	7,41( 0)	-2,34(-5)	-1,20( 2)	
-6,42(-3)	-7,49(-2)	-3,26(-3)	-4,33(-2)	1,33(-3)	9,01(-1)	1,54(-3)	-1,90( 0)	
-1,70(-3)	-8,81(-3)	-8,80(-4)	-5,1(-3)	1,15(-3)	6,06(-2)	-2,31(-4)	-1,24(-1)	
-6,44(-4)	-1,68(-3)	-3,62(-4)	-1,15(-3)	5,89(-4)	8,34(-3)	-2,71(-4)	-1,72(-2)	
-2,28(-4)	-3,03(-4)	-1,57(-4)	-2,87(-4)	2,45(-4)	1,18(-3)	-1,62(-4)	-2,56(-3)	
$\kappa=3$		$\kappa=-3$		$\kappa=4$		$\kappa=4$		
-2,16(-2)	-1,01( 0)			1,64(-3)	-1,19( 1)	-3,95(-2)	-8,07( 0)	
-8,43(-3)	-1,70(-1)			4,29(-3)	-1,31( 0)	-1,40(-2)	-1,04( 0)	
-1,53(-3)	-1,59(-2)			3,27(-4)	-7,70(-2)	-3,13(-3)	-6,78(-2)	
-3,51(-4)	-1,24(-6)			-9,96(-5)	-1,02(-2)	-8,44(-4)	-9,43(-2)	
-8,49(-5)	-5,16(-4)			-1,14(-4)	-1,59(-3)	-2,00(-4)	-1,52(-3)	
<b><math>M_V</math> - падабалонка</b>								
$\kappa=1$		$\kappa=-2$		$\kappa=-1$		$\kappa=2$		
-2,42(-2)	-1,35(-1)	-1,78(-2)	-2,39(-1)	4,12(-3)	-1,50( 0)	1,28(-2)	-9,02( 0)	
-7,78(-3)	-2,64(-2)	-3,87(-3)	-4,58(-2)	1,94(-3)	-2,20(-1)	-9,39(-4)	-8,41(-1)	
-2,58(-3)	-3,18(-3)	-1,12(-3)	-5,16(-3)	1,46(-3)	-1,30(-2)	-8,82(-4)	-3,48(-2)	
-1,21(-3)	-6,90(-4)	-4,67(-4)	-1,05(-3)	6,72(-4)	-1,19(-3)	-6,43(-4)	-3,70(-3)	
-5,66(-4)	-1,12(-4)	-1,98(-4)	-2,33(-4)	3,08(-4)	-1,07(-4)	-4,39(-4)	-6,47(-4)	
$\kappa=3$		$\kappa=-4$		$\kappa=-3$		$\kappa=4$		
-1,15(-2)	-5,85(-1)	-1,85(-2)	-9,31(-1)	7,11(-3)	-1,04( 1)	-4,30(-2)	-5,68( 0)	
-2,86(-3)	-5,20(-2)	-7,41(-3)	-1,57(-1)	1,46(-3)	-1,09( 0)	-1,13(-2)	-5,29(-1)	
9,12(-4)	5,14(-3)	-1,37(-3)	-1,50(-2)	-6,46(-5)	-5,56(-2)	-1,12(-3)	-3,92(-3)	
9,42(-4)	2,96(-3)	-3,94(-4)	-2,71(-3)	-1,28(-4)	-6,15(-3)	3,73(-4)	4,53(-3)	
6,20(-4)	1,09(-3)	-1,52(-4)	5,40(-4)	-7,61(-5)	-7,23(-4)	5,23(-4)	1,78(-3)	
$\kappa=5$		$\kappa=5$		$\kappa=5$		$\kappa=5$		
				-2,81(-2)	-7,56( 0)			
				-1,11(-2)	-9,73(-1)			
				-2,55(-3)	-6,58(-2)			
				-7,70(-4)	-9,60(-3)			
				-2,84(-4)	-1,64(-3)			

$$\begin{aligned}
& \times \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{R^{2\mu}}{|\kappa| + |\kappa_0| + L + 2 + 2\mu - \delta^{\pm}} \times \\
& \times \sum_{\nu=0}^{\mu} \left(\frac{ik}{2}\right)^{2(\mu-\nu)} \frac{[kb'_{2\nu-\delta^{\pm}} - (2\mu - 2\nu - L)b''_{2\nu+1-\delta^{\pm}}]}{(\mu - \nu)! \left(L + \frac{1}{2}\right)_{\mu-\nu}} \times \\
& \times \frac{i(2L - 1)!! R^{|\kappa| + |\kappa_0| - L + 1 - \delta^{\pm}}}{k^{L+1}} \times \\
& \times \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{R^{2\mu}}{|\kappa| + |\kappa_0| - L + 1 + 2\mu - \delta^{\pm}} \times \\
& \times \sum_{\nu=0}^{\mu} \left(\frac{ik}{2}\right)^{2(\mu-\nu)} \frac{[kb'_{2\mu-\delta^{\pm}} - (2\mu - 2\nu - L)b''_{2\nu+1-\delta^{\pm}}]}{(\mu - \nu)! \left(L + \frac{1}{2}\right)_{\mu-\nu}}.
\end{aligned} \tag{10}$$

Пры выводзенні (9), (10) меркавалася, што функцыі  $f_{\kappa}$ ,  $g_{\kappa}$  і  $f_{\kappa_0}$ ,  $g_{\kappa_0}$  задаюцца ў выглядзе ступенных радоў тыпу

$$f_{\kappa} = a_{\kappa} r^{|\kappa| - 1} \sum_{\nu=0}^{\infty} c_{\nu} r^{\nu}; \quad g_{\kappa} = a_{\kappa} r^{|\kappa| - 1} \sum_{\nu=0}^{\infty} d_{\nu} r^{\nu}, \tag{11}$$

якія задавальняюць сістэме дыферэнцыяльных ураўненняў Дзірака для электрона, які знаходзіцца ў полі раўнамерна зараджанага ядра-сферы. Каэфіцыенты  $b_{2\nu+\delta^{\pm}}$ ,  $b'_{2\nu-\delta^{\pm}}$  і  $b''_{2\nu+1-\delta^{\pm}}$  у (9) — (10) выражаюцца праз  $c_{\nu}$  і  $d_{\nu}$  [6].

Паверхневы пласт ядра пры разліках  $R_{\kappa}^{(L)}(m)$  і  $R_{\kappa}^{(L)}(e)$  улічваецца ў выбары крыху іншага, чым звычайна, эквівалентнага радыуса ядра (па Элтану [7])

$$R = \left\{ 1,123 A^{\frac{1}{3}} + 2,352 A^{-\frac{1}{3}} - 2,070 A^{-1} \right\} \cdot 10^{-13} \text{ см.} \tag{12}$$

Разлік пазаядзерных частак асноўных радыяльных інтэгралаў рабіўся з дапамогай радыяльных функцый электрона, атрыманых лікавым інтэграваннем сістэмы дыферэнцыяльных ураўненняў Дзірака з улікам экранавання па Хартры ( $Z = 80$  [8]). Зыходныя значэнні радыяльных функцый бяруцца ў выглядзе (11) пры  $a_{\kappa} = a_{\kappa_0} = 1$ ,  $r = R$ ,  $c_0 = 1$ ,  $d_0 = 0$  пры  $\kappa$ ,  $\kappa_0 > 0$  і  $d_0 = 1$ ,  $c_0 = 0$  пры  $\kappa$ ,  $\kappa_0 < 0$ . Каэфіцыенты  $a_{\kappa}$  і  $a_{\kappa_0}$  у гэтым выпадку будуць нарміровачнымі множнікамі.

Разлік асноўных радыяльных інтэгралаў выканан з дакладнасцю да 1—3%. З табл. 1 відаць, што ўяўныя часткі іх па абсалютнай велічыні значна большыя за рэчыўныя. Для магнітных КУК характэрнай асаблівасцю з'яўляецца тое, што радыяльныя інтэгралы з найменшым  $|\kappa|$  значна большыя за астатнія (па абсалютнаму значэнню).

Асноўныя радыяльныя інтэгралы  $R_{\kappa}^{(L)}(m)$  і  $R_{\kappa}^{(L)}(e)$  выкарыстоўваліся для разлікаў КУК на  $M$ -абалонцы ў [9, 10]. Праверка гэтых разлікаў паказала, што некаторыя з прыведзеных там колькасных значэнняў памылковыя (гл. табл. 2). Устаноўлена таксама, што памылковымі з'яўляюцца наступныя КУК па Роузу (для  $Z = 80$ ):  $\beta_{\mu_1}^{(2)}(k = 0,5)$ ,  $\beta_{\mu_2}^{(2)}(k = 0,2)$ . Даследаванні па-

Табліца 2

Удакладненне значэнняў КУК, прыведзенных у [10, 11]

$Z$	$k$	Падабалонка	Пераход	КУК па [10,11]	Павінна быць
80	0,1	$M_{III}$	$M_2$	3,14(+1)	2,86(+1)
	2	$M_V$	$E_2$	7,40(-8)	2,46(-7)
	2	$M_V$	$E_1$	3,47(-8)	4,69(-8)
81	0,5	$M_I$	$E_1$	1,06(-3)	9,28(-4)
	2	$M_V$	$E_2$	7,84(-8)	2,58(-7)
	2	$M_V$	$E_1$	4,04(-8)	5,42(-8)

казалі, што адносіны  $M_I : M_{II} : M_{III}$ , а таксама  $M_{IV} : M_V$  пры  $M_1$ -,  $M_2$ -,  $E_1$ - і  $E_2$ -пераходах, вылічаныя па табліцах Роуза і па табл. 1, адрозніваюцца адзін ад аднаго на 5—30%. Адсюль можна зрабіць заключэнне аб параўнальнай прыгоднасці роузаўскіх адносных КУК на  $M$ -абалонцы атама для параўнання з эксперыментам.

### Літаратура

1. Green T., Rose M. E. Phys. Rev., 110, 105, 1958.
2. Долгинов А. З. Сб. «Гамма-лучи». Под ред. Л. А. Слива. Изд. АН СССР, 1961.
3. Гречучин Д. П. Ядерная физика, 4, 497, 1966.
4. Rose M. E. Internal Conversion Coefficients. N.-H. Publ. Co. Amsterdam, 1958.
5. Alpha-, Beta- and Gamma-Ray Spectroscopy. Ed. by K. Siegbahn. N.-H. Publ. Co. Amsterdam, 1965.
6. Борисоглебский Л. А. ЖЭТФ, 46, 1664, 1964.
7. Элтон Л. Размеры ядер. ИЛ, 1962.
8. Hartree D. R., Hartree W. Proc. Roy. Soc., A149, 210, 1935.
9. Борисоглебский Л. А. ЖЭТФ, 48, 1347, 1965.
10. Борисоглебский Л. А. Ядерная физика, 5, 379, 1967.

Белорусский государственный университет  
им. В. И. Ленина  
Латвийский государственный университет  
им. П. Стручки

Поступило в редакцию  
23.X 1967

М. М. МАЖУЛЬ, С. М. ВАЙТОВІЧ

### УПЛЫУ УЛЬТРАГУКАВЫХ КАВІТАЦЫЙ НА СКОРАСЦЬ РОСТУ ЦВЕРДАЙ ФАЗЫ З РАСПЛАВУ БЕТОЛУ

Даследаванню ўплыву ультрагуку на працэс крышталізацыі расплаваў прысвечана значная колькасць работ [1—4, 6—14, 16, 18—23]. Аднак пытанне аб уплыве ультрагукавых кавітацый на скорасць росту цвёрдай фазы з расплаву вывучана пакуль што недастаткова.

У гэтым паведамленні прыведзены эксперыментальныя даследаванні ўплыву ультрагукавых кавітацый на скорасць росту цвёрдай фазы з пераахладжанага расплаву бетолу ў шырокім інтэрвале тэмператур.

Выбар бетолу ў якасці аб'екта даследаванняў тлумачыцца тым, што ён валодае радам уласцівасцей, якія аблягчаюць правядзенне даследаванняў і атрыманне надзейных рэзультатаў (нізкая тэмпература плаўлення, малая скорасць крышталізацыі, хімічная ўстойлівасць і інш.). Удзельная вага бетолу ў цвёрдым стане пры 18 °С роўная 1,3, у вадкім стане пры тэмпературы плаўлення 1,25 г/см<sup>3</sup>. Тэмпература плаўлення яго 95 °С, тэмпература максімальнага росту цвёрдай фазы з расплаву 65 °С, максімальная лінейная скорасць крышталізацыі 0,9 мм/мін.

Апаратура і метадыка даследавання. Для прыгатавання прэпаратаў бетолу былі выкарыстаны шклянныя прабіркі дыяметрам 6,5, вышынёй 180 мм з плоскім дном і ў верхняй частцы з саском для надзявання вакуумнай гумы.

Расплаўлены бетол заліваўся ў прабіркі, якія папярэдне былі прамыты вадой і этылаваным спіртамі, прасушаны пры 100 °С да палавіны іх вышыні. Памянёны дыяметр трубак быў выбраны для таго, каб у вадкі расплаў бетолу маглі пранікаць ультрагукавыя хістанні дастаткова вялікай інтэнсіўнасці [8] і каб выключыць уплыў вібрацыі сценак [3]. Аднак выкарыстанне такіх прабірак выклікае і цяжкасці, якія звязаны з узнікненнем тэмпературнага градыента ў расплаве з прычыны малой цеплаправоднасці даследуемага рэчыва.

Аб тэмпературным рэжыме ўнутры прабірак з бетолам у час даследаў мы арыентаваліся па [8].

Х. С. Багдасараў [3], які карыстаўся прабіркамі прыкладна такога ж дыяметра, прымяняў ультрагук інтэнсіўнасцю 0,4 Вт/см<sup>2</sup> пры частаце 717 кГц. Ён адзначаў, што пры такой інтэнсіўнасці эфект раздрабнення пры крышталізацыі вельмі ўстойлівы. Мы прымянілі ультрагукавыя хістанні інтэнсіўнасцю 0,6 Вт/см<sup>2</sup> пры частаце 880 ± 15 кГц ад УТП-1. Магутнасць ультрагуку кантралявалі вымяральнікам, які прыдаецца да УТП-1.

Таўшчыня прабірак была 1,4 мм. Ціск у іх ствараўся пры дапамозе форвакуумнай помпы. Каб падтрымаць патрэбны ціск, быў прыстасаваны ігольчасты кран. Прабіркі з прэпаратам бетолу ўтрымліваліся спецыяльным трымальнікам з прэпаратавадзіцелем для мікраскопа СТ-5,

яго можна было перамяшчаць з дакладнасцю да 0,1 мм. Прабірка змяшчалася ў тэрмастат, тэмпература дыстыляванай вады ў якой з дапамогай награвальніка з кантактным тэрмометрам і рэле, а таксама мяшалкі падтрымлівалася з дакладнасцю да 0,1 °С. Кантроль тэмпературы ажыццяўляўся медзьканстантавай тэрмапарай. Назіранне за фронтам крышталізацыі вялося праз глядзельную трубу, паміж аб'ектывам якой і прэпаратам змяшчаўся візір у выглядзе дроціка.

Ультрагукавы паток накіроўваўся ўздоўж грані раздзелу цвёрдай і вадкай фаз у прабірцы перпендыкулярна яе восі. Насупраць ультрагукавой галоўкі быў устаноўлен адбівальнік ультрагуку — металічная скрынка з пярэдняй сценкай з меднай фальгі таўшчынёй 0,1 мм так, каб прабірка з прэпаратам знаходзілася паміж ультрагукавой галоўкай і адбівальнікам, адлегласць паміж якімі складала 45 мм. Гэтым знішчаўся недахоп, звязаны з тым, што пры дзеянні ўльтрагуку на расплаў на ўнутранай сценцы прабіркі з боку, супрацьлеглага таму, на які падаў ультрагук, назіралася вялікая колькасць цэнтраў крышталізацыі, якая перашкаджала сачыць за перамяшчэннем граніцы цвёрдай фазы ў прабірцы. Пляўленне прэпаратаў бетолу праводзілася ў паветраным асяроддзі ў спецыяльна зробленым

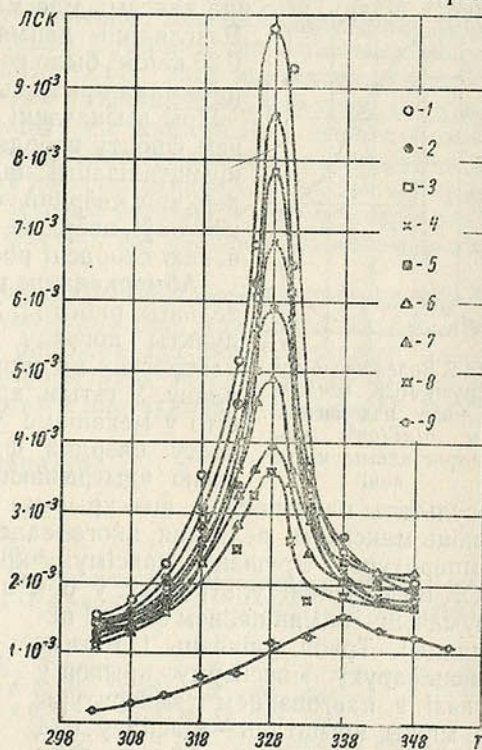


Рис. 1. Залежнасць ЛСК (см/сек), усярэднянай для прэпаратаў № 12, 14, 15, ад тэмпературы  $T$  (°К) пры ўздзеянні ультрагукам:

(1 — пры ціску 1 кг/см<sup>2</sup>; 2—2; 3—2,5; 4—3; 5—4; 6—0,75; 7—0,5; 8—0,25) і без яго (9)

тэрмастаце пры 100 °С. Прэпараты пасля запаўнення прабірак пераплаўляліся да таго часу, пакуль пры хатняй тэмпературы ўжо не з'яўляліся цэнтры крышталізацыі.

Звычайна такіх пераплавак было парадка дзесяці.

Каб у прэпараце бетолу, падрыхтаванага для назіранняў, цвёрдая фаза зараджалася ў доннай частцы, прабірка ставілася дном на лёд, які раставаў. Пасля гэтага яна замацоўвалася ў спецыяльным трымальніку ў тэрмастаце і вяліся назіранні да закрышталізацыі ўсяго расплаву бетолу.

Крывыя залежнасці лінейнай скорасці крышталізацыі (ЛСК) ад тэмпературы без ультрагуку (кантрольныя) і пры яго дзеянні будаваліся пры ціску 0,25, 0,5, 0,75, 1, 2, 2,5, 3 і 4 кг/см<sup>2</sup>.

Результаты даследаванняў. Для прэпаратаў № 12, 14, 15 былі пабудаваны 24 крывыя залежнасці ЛСК ад тэмпературы без дзеяння ультрагуку і 24 пры яго дзеянні пры розным ціску. Для кожнага ціску пры пэўных тэмпературах пераахладжання расплаву было праведзена ўсярэдненне ЛСК, у выніку чаго была атрымана адна кантрольная крывая і 8 крывых для рознай ступені ультрагукавых кавітацый (рыс. 1).

Як відаць з рис. 1, максімумы ЛСК пры дзеянні ультрагуку ў шмат разоў больш максімуму на кантрольнай крывой, прычым яны ссунуты ўлева ў параўнанні з апошняй на  $10^\circ$  (адпаведна  $328$  і  $338$  °К).

Кривая залежнасці максімуму ЛСК ад ціску (рис. 2) таксама мае максімум, які адпавядае атмасфернаму ціску. Для прэпаратаў № 7, 10, 11 і 12 былі таксама пабудаваны крывыя ў залежнасці максімуму ўсярэдненых 4—5 велічынь ЛСК для кожнага ціску пры  $328$  °К пры дзеянні ультрагуку ад ціску над расплавам. Выгляд гэтых крывых падобны да крывой рис. 2. Кривая для прэпарата № 7 прадстаўлена на рис. 3, з якога відаць, што яна таксама мае максімум пры атмасферным ціску.

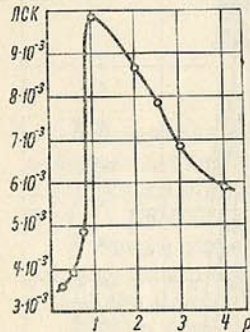


Рис. 2. Залежнасць максімуму ЛСК (см/сек) ад ціску над расплавам  $p$  (кг/см<sup>2</sup>) пры ультрагукавым уздзеянні

Разглядаць даныя пры цісках вышэй 4 і ніжэй  $0,25$  кг/см<sup>2</sup> было неэтазгодна, паколькі кривая ўжо пачынала прымаць пакаты выгляд. Пры вызначэнні ЛСК мы сачылі за перамяшчэннем фронту цвёрдай фазы ў расплаве бетолу. Пры крышталізацы пад дзеяннем ультрагуку над паверхняй цвёрдай фазы ў расплаве ўзнікала шмат цэнтраў цвёрдай фазы, якія садзейнічалі павелічэнню скорасці росту фронту цвёрдай фазы. Абмеркаванне рэзультатаў. У радзе эксперыментальных работ [2, 3, 6, 10, 13, 21] выказаны розныя пункты погляду ў адносінах механізма ўплыву ультрагуку на скорасць росту цвёрдай фазы з расплаву. У гэтым артыкуле мы прыйшлі да вываду, што ў механізме ўплыву ультрагуку на скорасць росту цвёрдай фазы з расплаву немалаважную ролю адыгрываюць кавітацыі. Прыведзеныя намі рэзультаты паказваюць, што крывыя залежнасці ЛСК ад тэмпературы маюць максімум, велічыня якога залежыць ад ціску і не залежыць ад тэмпературы. Зрушэнне максімуму крывой тэмпературнай залежнасці ЛСК пры дзеянні ультрагуку ў бок нізкіх тэмператур Ф. К. Горскі [6] тлумачыць памяншэннем энергіі актывацыі. Трэба ўлічваць і магчымасць зруху максімуму крывой у сувязі з павышэннем тэмпературы на мяжы крышталі — расплаў пад дзеяннем ультрагуку. Аднак гэты эфект не можа быць вялікім [10].

А. П. Капусцін [13] звязвае механізм уплыву ультрагуку на скорасць росту цвёрдай фазы з ціскам, што ўзнікае ва ультрагукавой хвалі, якая на мяжы фаз робіць неаднолькавую дэфармацыю, дзякуючы чаму найдрабнейшыя крышталікі становяцца новымі цэнтрамі крышталізацыі.

В. І. Данілаў і Г. Х. Чаджэмаў [10], улічваючы тлумачэнне А. П. Капусціна, указваюць на тое, што ультрагук адрывае часцінкі крышталікаў ад мяжы раздзелу крышталі — расплаў і адкідае іх на некаторую адлегласць ад мяжы, адначасова працягваючы дыспергіраванне. Часцінкі крышталікаў пры гэтым увесь час растуць. Калі адкіданне адбываецца на невялікую адлегласць і адкідаемыя часцінкі невялікія, а іх колькасць вялікая, то гэта ўспрымаецца як павелічэнне скорасці прасоўвання фронту крышталізацыі. Аднак гэтыя аўтары адзначаюць, што калі б уздзеянне ультрагуку зводзілася толькі да дыспергіравання, то эфект ультра-

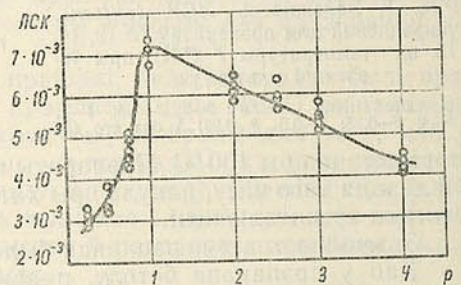


Рис. 3. Залежнасць максімуму ЛСК (см/сек) для прэпарата № 7 ад ціску над расплавам  $p$  (кг/см<sup>2</sup>) пры уздзеянні ультрагукам

гуку можна было б назіраць толькі пры наяўнасці ў даследуемай пераахалоджанай вадкасці гатовых крышталікаў цвёрдай фазы. Работы [10, 14, 22] сведчаць аб тым, што пад дзеяннем ультрагуку ў пераахалоджанай вадкасці ўзнікаюць цэнтры крышталізацыі без затраўкі.

Розная велічыня максімумаў крывых залежнасці ЛСК ад тэмпературы пры дзеянні ультрагуку пры розных цісках указвае на важную ролю ступені кавітацый. Знешні ціск, які мы бралі ў сваіх даследаваннях, без дзеяння ультрагуку не аказвае прыкметнага ўплыву на змяненне ЛСК.

Што датычыцца механізма ўплыву кавітацый на ЛСК, то яго магчыма аднесці за кошт таго, што самі кавітацыі могуць садзейнічаць узнікненню новых цэнтраў крышталізацыі [1]. Акрамя таго, магчыма моцнае механічнае разбурэнне гатовых крышталяў, якое выклікаецца ўдарамі вадкасці, абумоўленымі скарачэннем кавітацыйных пузыркоў [5]. Стварэнне новых цэнтраў крышталізацыі на кавітацыях, дыспергіруючае дзеянне кавітацыі пры іх захлопванні, дыспергіраванне растуцых крышталікаў і перанясенне іх у расплаў за кошт стацыянарных хістанняў кавітацыйных пузыркоў — усё гэта істотна ўплывае на працэс крышталізацыі і праяўляецца таксама як фактар, які выклікае павелічэнне скорасці росту цвёрдай фазы.

У заключэнне адзначым, што, працягваючы накапленне эксперыментальнага матэрыялу па ўплыву ультрагукавых кавітацый на скорасць росту цвёрдай фазы з расплаву і раствору для іншых рэчываў, можна будзе ў далейшым перайсці да тэарэтычнага абгрунтавання разглядаемага пытання з улікам тых задач, якія пастаўлены ў аглядзе М. М. Сіраты [24].

### Літаратура

1. Берлага Р. Я. ЖЭТФ, 9, в. 11, 1939.
2. Берлага Р. Я. ЖЭТФ, 16, в. 7, 1946.
3. Багдасаров Х. С. Канд. дисс., 1958.
4. Багдасаров Х. С. Применение ультразвука в промышленности. Машгиз, 1959.
5. Бебчук А. С., Макаров Л. С., Розенберг Л. Д. Акустический журнал, 2, 113, 1956.
6. Горский Ф. К. Весті АН БССР, 6, 1950.
7. Данилов В. И., Плужник Е. Е., Теверовский Б. М. ЖЭТФ, 9, 66, 1939.
8. Данилов В. И., Теверовский Б. М. ЖЭТФ, 10, 1305, 1940.
9. Данилов В. И., Казочковский О. Д. ЖЭТФ, 11, 346, 1941.
10. Данилов В. И., Чеджемов Г. Х. Проблемы металловедения и физики металлов, № 4, 1955.
11. Капустин А. П. ЖЭТФ, 22, в. 5, 1952.
12. Капустин А. П. ЖЭТФ, 20, в. 10, 1950.
13. Капустин А. П. Изв. АН СССР, сер. физ., 14, № 3, 1950.
14. Мажуль М. М. Уч. зап. БГУ, сер. физ.-мат., в. 32, 211, 1957.
15. Noltingk В. E., Neppigas E. A. Proc. Phys. Soc., 64B, 1032, 1951.
16. Полоцкий И. Г. Тр. Ин-та черн. мет. АН УССР, 2, 1949.
17. Полоцкий И. Г., Левин Г. И. Вопросы физики металлов и металловедения. Изд. АН УССР, 1960.
18. Полоцкий И. Г., Бениева Т. Я. Вопросы физики металлов и металловедения. Изд. АН УССР, 8, 163, 1957.
19. Полоцкий И. Г., Левин Г. И. Вопросы физики металлов и металловедения. Изд. АН УССР, 9, 160, 1960.
20. Полоцкий И. Г., Левин Г. И. Кристаллизация, 4, 372, 1962.
21. Полоцкий И. Г., Левин Г. И. Сб. «Кристаллизация и фазовые переходы». Изд. АН БССР, 1962, 372.
22. Sokoloff S. Acta Physicochim URSS, 3, № 6, 1935.
23. Соколов И. П. МТФ, 8, в. 10, 1938.
24. Сирота Н. Н. Сб. «Кристаллизация и фазовые переходы». Изд. АН БССР, 1962, 11.

УДК 530.12 : 531.18 + 538.3

А. С. ПОТУПА, В. И. СТРАЖЕВ, Л. М. ТОМИЛЬЧИК

## ДУАЛЬНАЯ ИНВАРИАНТНОСТЬ В ЭЛЕКТРОДИНАМИКЕ КАК УНИТАРНАЯ СИММЕТРИЯ

Дуальная инвариантность в электродинамике относится к числу наименее изученных свойств симметрии электромагнитных взаимодействий. В отличие от калибровочной инвариантности I и II рода, систематическому исследованию которой посвящена обширная литература, вопросы дуальной симметрии затрагивались лишь эпизодически, причем ее физическое содержание остается по существу невыясненным до сих пор.

Наиболее распространенным определением дуальных преобразований является следующее:

$$\mathbf{E} \rightarrow \pm \mathbf{H}, \quad \mathbf{H} \rightarrow \mp \mathbf{E} \quad (1)$$

или в четырехмерной форме

$$F_{\mu\nu} \rightarrow \pm \tilde{F}_{\mu\nu} = -\frac{1}{2} \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} F_{\rho\sigma}, \quad (2)$$

где  $F_{\mu\nu}$  — тензор электромагнитного поля,  $\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$  ( $\varepsilon_{1234} = i$ ) — тензор Леви-Чивита, тильда означает дуальное сопряжение. Очевидно, что электродинамика в общепринятой форме инвариантна относительно преобразований (1) или (2) лишь в случае отсутствия источников (свободное поле). Кроме того, внешне дискретный вид этих преобразований сужает возможности использования группового подхода. Дуальные преобразования непрерывного типа впервые встречаются в [1, 2], где рассмотрены «повороты» следующего вида:

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &\Rightarrow \mathbf{E}' \cos \varphi \pm \mathbf{H}' \sin \varphi, \\ \mathbf{H} &\Rightarrow \mp \mathbf{E}' \sin \varphi + \mathbf{H}' \cos \varphi. \end{aligned} \quad (3)$$

В работе [3] преобразования, аналогичные (3), были введены для плотностей зарядов и токов двух типов источников:

$$\begin{aligned} \rho_E &\Rightarrow \rho'_E \cos \varphi \pm \rho'_M \sin \varphi, \\ \rho_M &\Rightarrow -\rho'_E \sin \varphi \mp \rho'_M \cos \varphi, \\ I_E &\Rightarrow I'_E \cos \varphi \pm I'_M \sin \varphi, \\ I_M &\Rightarrow -I'_E \sin \varphi \mp I'_M \cos \varphi. \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь индексы  $E$  и  $M$  относятся к плотностям электрических и магнитных величин соответственно. Включение токов и зарядов в число величин, подвергающихся дуальным преобразованиям, является существенно необходимым шагом для анализа структуры членов, описывающих взаимодействия. Такой анализ был проведен в рамках классиче-

ской электродинамики в работе [4], где корректно сформулирована измерительная процедура и проанализирован вопрос о наблюдаемых в электродинамике с двумя зарядами. Ввиду принципиального характера этой работы остановимся на ней более подробно.

Пусть элементарные частицы (для определенности электроны) несут, помимо электрического заряда  $e$ , также некоторый «магнитный» заряд  $g$  и описываются уравнениями классической электродинамики Максвелла — Лоренца. Возникает вопрос о возможности измерения зарядов  $e$  и  $g$ .

Поскольку наличие поля устанавливается по его действию на пробную заряженную частицу, которая в свою очередь идентифицируется посредством поля, наблюдаемыми являются только эффекты взаимодействия, выражающиеся в изменении энергии частиц, но не сами поля и заряды. Это означает, что не существует возможности экспериментального различения между результатами расчета этих эффектов, проводимых на основании следующих двух систем уравнений:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} &= -\frac{4\pi}{c} g \mathbf{I}, \\ \operatorname{div} \mathbf{E} &= 4\pi e \rho, \\ \operatorname{rot} \mathbf{H} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} &= \frac{4\pi}{c} e \mathbf{I}, \\ \operatorname{div} \mathbf{H} &= 4\pi g \rho, \end{aligned} \quad (5)$$

$$\mathbf{F} = e \mathbf{E} + g \mathbf{H} + \frac{\mathbf{V}}{c} (e \mathbf{H} - g \mathbf{E}),$$

где  $\rho$  — плотность электронов,  $\mathbf{I}$  — плотность потока электронов,  $e$ ,  $g$  — соответственно электрический и магнитный заряды электрона,  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  — напряженности электрического и магнитного полей, и

$$\operatorname{rot} \check{\mathbf{E}} + \frac{1}{c} \frac{\partial \check{\mathbf{H}}}{\partial t} = 0, \quad \operatorname{div} \check{\mathbf{H}} = 0, \quad (6)$$

$$\operatorname{rot} \check{\mathbf{H}} - \frac{1}{c} \frac{\partial \check{\mathbf{E}}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} q \mathbf{I}, \quad \operatorname{div} \check{\mathbf{E}} = 4\pi q \rho,$$

где

$$q \check{\mathbf{E}} = e \mathbf{E} + g \mathbf{H}, \quad (7)$$

$$q \check{\mathbf{H}} = e \mathbf{H} - g \mathbf{E},$$

$$q^2 = e^2 + g^2. \quad (8)$$

На основании этого авторы [4] приходят к выводу, что в действительности измеряемой величиной является некоторый эффективный заряд  $q$  (8).

Этот результат представляется весьма важным для последовательного введения в электродинамику групповых свойств дуальных преобразований. Подчеркнем, что фактически «заряды»  $e$ ,  $g$  являются существенно вспомогательными величинами, заменяющими некоторый групповой параметр. Наиболее просто это можно показать в статическом случае, записав закон Кулона для частицы, обладающей двумя зарядами  $e$  и  $g$ :

$$\mathbf{f} = \mathbf{f}_e + \mathbf{f}_g = \alpha \frac{e^2}{r^3} \mathbf{r} + \alpha \frac{g^2}{r^3} \mathbf{r} = \alpha \frac{q^2}{r^3} \mathbf{r}, \quad (9)$$

где  $q^2 = e^2 + g^2$ . В самом деле, отсюда сразу следует, что  $e$ ,  $g$  и  $q$  можно связать между собой, вводя непрерывный параметр  $\theta$  на основе любого из следующих двух соотношений:

$$\theta = \pm \operatorname{arctg} \frac{g}{e}. \quad (10)$$

$$\theta = \mp \operatorname{arcctg} \frac{g}{e}. \quad (11)$$

Мы будем рассматривать результаты работы [4] как свидетельство о наличии в классической электродинамике «скрытой» симметрии\*, характеризующей группой дуальных преобразований  $U(1)$ .

Такое предположение позволяет ввести дуально-ковариантные поля  $(\mathbf{E}, \mathbf{H})$  и заряды  $(q, p)$  в следующей форме [5]\*\*:

$$\check{\mathbf{E}} = \mathbf{E} \cos k\theta + \mathbf{H} \sin k\theta, \quad (12)$$

$$\check{\mathbf{H}} = -\mathbf{E} \sin k\theta + \mathbf{H} \cos k\theta$$

$$(k = \pm 1),$$

$$q = e \cos k\theta + g \sin k\theta, \quad (13)$$

$$p = -e \sin k\theta + g \cos k\theta.$$

Очевидно, такие величины, как плотность эффективного заряда  $h$ , плотность энергии  $W$  и выражение для силы Лоренца, являются инвариантами дуальных преобразований, т. е.

$$h^2 = e^2 + g^2 = q^2 + p^2, \quad (14)$$

$$W = \frac{1}{8\pi} (\mathbf{E}^2 + \mathbf{H}^2) = \frac{1}{8\pi} (\check{\mathbf{E}}^2 + \check{\mathbf{H}}^2), \quad (15)$$

$$\mathbf{F} = e\mathbf{E} + g\mathbf{H} + \frac{\mathbf{V}}{c} (e\mathbf{H} - g\mathbf{E}) = q\check{\mathbf{E}} - p\check{\mathbf{H}} + \frac{\mathbf{V}}{c} (p\check{\mathbf{E}} - q\check{\mathbf{H}}). \quad (16)$$

Ввиду наличия скрытой симметрии  $U(1)$  вопрос о возможности введения в электродинамику частиц с двумя наблюдаемыми зарядами решается автоматически, поскольку фиксирование двух зарядов означает снятие вырождения по параметру  $\theta$ , в то время как это вырождение предполагается самим понятием симметрии. С другой стороны, выбор между двумя возможными способами задания параметра  $\theta$  (10) и (11) не есть жесткая фиксация одного из «зарядов» ( $p$  или  $q$ ), как это может показаться на первый взгляд, а сводится лишь к переопределению полевых компонент  $\check{\mathbf{E}}$  и  $\check{\mathbf{H}}$ . В частности, если мы хотим сохранить за эффективным дуально инвариантным зарядом  $h$  исторически сложившееся название «электрический», можно поступить двояко. Либо воспользоваться заданием параметра  $\theta$  в форме (10) (условие  $p=0$ ), а поля  $\check{\mathbf{E}}$  и  $\check{\mathbf{H}}$  в (12) определить соответственно как электрическое и магнитное, либо из-

\* Под термином «скрытая» симметрия мы подразумеваем в данном случае утверждение о том, что уравнения электродинамики инвариантны относительно группы преобразований более широкой, чем группа Лоренца.

\*\* Отметим, что, полагая параметр  $\theta$  чисто мнимым, можно рассматривать (12) и (13) как определение дуально-ковариантных величин, соответствующих дуальным преобразованиям  $\mathbf{E} \rightarrow \pm i\mathbf{H}$ ,  $\mathbf{H} \rightarrow \mp i\mathbf{E}$ , используемым обычно в квантовой механике фотона [6].

брать альтернативную возможность, т. е. определить параметр  $\theta$  посредством соотношения (11) (условие  $q=0$ ), а электрическим и магнитным полем назвать в (12) соответственно величины  $\mathbf{H}$  и  $\mathbf{E}$ . Разумеется, оба эти способа совершенно эквивалентны. Подчеркнем, что, строго говоря, использование условий  $p=0$  или  $q=0$  не является необходимым, что совершенно очевидным образом следует из определения эффективного заряда (14). Таким образом, введение дуальной симметрии, характеризующей группой  $U(1)$ , приводит к представлению о существовании в электродинамике эффективного заряда (одного!), который интерпретируется как электрический или магнитный лишь посредством соответствующей идентификации полевых компонент.

Используемый подход позволяет естественно разрешить известную проблему несоответствия между числом независимых компонент тензора энергии — импульса  $T_{\mu\nu}$  и полевого тензора  $F_{\mu\nu}$  электромагнитного поля [1, 3].

Известно, что наблюдаемые в классической электродинамике можно получить как исходя из пяти компонент  $T_{\mu\nu}$ , так и из уравнений Максвелла — Лоренца для шести независимых полевых переменных. В то же время благодаря различию в числе используемых компонент не существует однозначного соответствия между  $T_{\mu\nu}$  и уравнениями Максвелла — Лоренца. Исходя из уравнений поля, можно однозначно восстановить  $T_{\mu\nu}$ , тогда как обратное, вообще говоря, неверно. В связи с этим укажем, что еще в 1928 г. Зоммерфельд [7] отмечал, что квадратичные компоненты тензора энергии — импульса являются более реальными, чем полевые величины, и более фундаментальными, чем уравнения Максвелла (см. также [3]).

Нетрудно видеть, что неоднозначность будет иметь место, пока параметр  $\theta$  остается неопределенным, поскольку компоненты  $T_{\mu\nu}$  инвариантны относительно преобразований (3) при любом способе задания параметра  $\varphi$ , и при соответствующем его выборе можно обратиться в нуль любую из полевых компонент. Очевидно, что для возможности равноправного использования шести полевых компонент необходимо какое-то дополнительное условие, отсутствующее до сих пор в явном виде в классической электродинамике. Это условие заключается в утверждении о наблюдаемости именно эффективного заряда, что дополнительно учитывает связь полевых компонент с зарядовыми компонентами посредством параметра  $\theta$  (см. соотношения (10), (11)). Эта связь обусловлена выбором определенной системы уравнений Максвелла — Лоренца. При этом произвольный выбор параметра  $\varphi$  дополнительно ограничивается требованием сохранения условия  $p=0$  (либо  $q=0$ ). Поэтому после фиксации определения параметра  $\theta$  (например, условием (10)), что эквивалентно постулированию наблюдаемости эффективного заряда, мы можем трактовать все шесть полевых компонент на равных правах. Таким образом, указанная неоднозначность в рамках группового подхода получает в классической электродинамике естественное разрешение посредством постулата о наблюдаемости только дуальных инвариантов. Окончательное решение этой проблемы достигается лишь в рамках квантовой теории.

Возможность обобщения дуальной инвариантности на базе группового подхода, по-видимому, позволяет получить ряд нетривиальных физических результатов. Укажем некоторые из них. Наряду с естественным запрещением наблюдаемости двух зарядов в электродинамике получает теоретическое обоснование минимальность электромагнитного взаимодействия [8]. В сочетании с исходным естественным обобщением метода канонического квантования (метод ОМФ [9]) наличие скрытой симметрии обеспечивает равенство по модулю зарядов всех стабильных частиц

и невозможность появления дробных зарядов в электродинамике, а также позволяет установить связь между симметричным и динамическим аспектами заряда в духе идей Вигнера [10].

Возможность получения этих результатов, хорошо согласующихся с современной экспериментальной ситуацией, дает основание утверждать, что интерпретация дуальной инвариантности как «скрытой» электродинамической симметрии  $U(1)$  имеет определенную эвристическую ценность. С другой стороны, чрезвычайно привлекательной представляется возможность трактовки этой симметрии как возникающей в результате сужения некоторой более широкой группы.

В этой связи отметим, что соотношения (7) инвариантны относительно совокупности преобразований следующего вида:

$$\begin{aligned} e &\rightarrow \pm E, & E &\rightarrow \pm e, \\ g &\rightarrow \mp H, & H &\rightarrow \mp g \end{aligned} \quad (17)$$

и

$$\begin{aligned} e &\rightarrow \pm H, & E &\rightarrow \pm g, \\ g &\rightarrow \pm E, & H &\rightarrow \pm e. \end{aligned} \quad (18)$$

Очевидно, (17) и (18) можно рассматривать как частный случай более общих преобразований:

$$\begin{aligned} e &\rightarrow E \cos \psi \pm H \sin \psi, \\ g &\rightarrow \mp E \sin \psi + H \cos \psi, \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} E &\rightarrow e \cos \psi \pm g \sin \psi, \\ H &\rightarrow \mp e \sin \psi + g \cos \psi. \end{aligned} \quad (20)$$

При этом квадрат эффективного заряда и энергия поля, рассматриваемые как дуальные инварианты группы  $U(1)$ , переходят друг в друга. По-видимому, наличие таких преобразований указывает на существование в электродинамике группы «скрытой» симметрии более широкой, чем  $U(1)$ .

Авторы благодарны Ф. И. Федорову за интерес к работе и ценные замечания и сотрудникам лаборатории теоретической физики за полезные дискуссии.

### Литература

1. Rainich G. Y. Trans. Am. Soc., 27, 106, 1925.
2. Rainich G. Y. Proc. Nat. Acad. Sci. (USA), 10, 124, 1924.
3. Katz E. Am. Journ. Phys., 33, 306, 1965.
4. Harrisson et al. Am. Journ. Phys., 31, 249, 1963.
5. Стражев В. И., Томильчик Л. М. Весті АН БССР, серия фізика-матем. наук, № 2, 1968.
6. Ахиезер А. И., Берестецкий В. Б. Квантовая электродинамика. М., 1959.
7. Sommerfeld A. Wellenmechanischer Ergaenzungsband, Atombau und Spektrellinien (F. Braunschweig, 1928), p. 100.
8. Потупа А. С., Стражев В. И., Томильчик Л. М. ДАН БССР, № 8, 1968.
9. Потупа А. С., Томильчик Л. М. Весті АН БССР, серия фізика-матем. наук, № 1, 1968.
10. Потупа А. С., Стражев В. И., Томильчик Л. М. Весті АН БССР, серия фізика-матем. наук, № 2, 1968.

Институт физики  
АН БССР

Поступило в редакцию  
27.XII 1967 г.

## КАРОТКІЯ ПАВЕДАМЛЕННІ

УДК 530.145

Ф. И. ФЕДОРОВ

### К РАСЧЕТУ АТОМНЫХ УРОВНЕЙ

Уравнение Шредингера для уровней энергии  $n$ -электронного атома с зарядом ядра  $Z$  в атомных единицах имеет вид

$$H \Psi = (H^0 + H') \Psi = E \Psi, \quad (1)$$

$$H^0 = \sum_{k=1}^n H_k^0, \quad H_k^0 = -\frac{1}{2} \Delta_k - \frac{Z}{r_k}, \quad H' = \sum_{l>k=1}^n r_{kl}^{-1}.$$

Для приближенного решения этого уравнения используется ряд методов, в частности метод Хартри — Фока, вариационный метод Ритца, теория возмущений и т. д.

При использовании теории возмущений обычно невозмущенный гамильтониан принимается равным  $H^0 = \sum H_k^0$ , а энергия взаимодействия электронов  $H' = \sum r_{kl}^{-1}$  рассматривается как возмущение. В результате невозмущенная задача распадается на  $n$  одноэлектронных задач для водородоподобного атома с зарядом ядра  $Z$ . Соответственно волновая функция в нулевом приближении представляется в виде произведения водородоподобных волновых функций. Таким образом, на этом этапе взаимодействие электронов никак не учитывается. Однако оператор энергии (1) можно разбить на невозмущенный гамильтониан  $H_0$  и возмущение  $H_1$  иным путем. При этом, как и прежде,  $H_0 = \sum H_k$ , где  $H_k$  — одноэлектронный центрально-симметричный гамильтониан:  $H_k = H(r_k)$ , но выбранный так, чтобы учесть в известной степени взаимодействие электронов. Мы будем искать  $H_k$  в виде

$$H_k = -\frac{1}{2} \Delta_k - \frac{Z}{r_k} + f(r_k) = H_k^0 + f_k, \quad (2)$$

причем на функцию  $f(r_k)$  наложим условие

$$I = \int \left[ H' - \sum_{k=1}^n f(r_k) \right]^2 \rho(r_1, r_2, \dots, r_n) dV_1 dV_2 \dots dV_n = \min. \quad (3)$$

Смысл этого условия ясен: мы выбираем добавки  $f(r_k)$  к отдельным водородоподобным гамильтонианам  $H_k^0$  таким образом, чтобы их сумма наименее отличалась от энергии взаимодействия  $H'$ . Критерием малости различия служит величина интеграла по всему конфигурационному пространству  $I$  (3), в котором  $\rho(r_1, r_2, \dots, r_n)$  означает некоторую весовую функцию, необходимую для устранения расходимости. Отыскание

вида  $f(r)$  из условия (3) представляет собой вариационную задачу. Весовую функцию  $\rho$  мы возьмем в виде

$$\rho = e^{-2\alpha(r_1+r_2+\dots+r_n)}, \quad (4)$$

где положительный параметр  $\alpha$  является пока неопределенным. Используя обычный для вариационного исчисления подход, заменяем  $f(r)$  на  $f(r) + \gamma\eta(r)$ , после чего интеграл (3) принимает вид

$$I(\gamma) = \int [H' - \sum f(r_k) - \gamma \sum \eta(r_k)]^2 e^{-2\alpha \sum r_k} dV_1 \dots dV_n = \min. \quad (5)$$

Условие экстремума гласит

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} \frac{dI}{d\gamma} \Big|_{\gamma=0} &= \int [H' - \sum_k f(r_k)] \sum_l \eta(r_l) e^{-2\alpha \sum_m r_m} dV_1 \dots dV_n = \\ &= \sum_l \int e^{-2\alpha r_l} \eta(r_l) dV_l \int [H' - \sum_k f(r_k)] \times \\ &\times e^{-2\alpha(r_1+\dots+r_{l-1}+r_{l+1}+\dots+r_n)} dV_1 \dots dV_{l-1} dV_{l+1} \dots dV_n = \\ &= n \int e^{-2\alpha r} \eta(r) dV \int [H' - \sum_{k=1}^n f(r_k)] \times \\ &\times e^{-2\alpha \sum_{m=1}^{n-1} r_m} dV_1 \dots dV_{n-1} = 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Выполненное выше преобразование интеграла возможно благодаря тому, что подынтегральное выражение  $H' - \sum f(r_k)$  симметрично относительно любых перестановок электронов. Поскольку условие (6) должно выполняться при любой функции  $\eta(r)$ , то мы получаем

$$\begin{aligned} &\int H' e^{-2\alpha \sum_{m=1}^{n-1} r_m} dV_1 \dots dV_{n-1} = \\ &= \sum_{k=1}^n \int f(r_k) e^{-2\alpha \sum_{m=1}^{n-1} r_m} dV_1 \dots dV_{n-1} = \\ &= (n-1) \left( \int e^{-2\alpha r} dV \right)^{n-2} \int f(r) e^{-2\alpha r} dV + \left( \int e^{-2\alpha r} dV \right)^{n-1} f(r_n). \end{aligned} \quad (7)$$

Обозначая через  $N$  нормировочный интеграл

$$N = \int e^{-2\alpha r} dV, \quad (8)$$

имеем, согласно (7),

$$\begin{aligned} f(r_n) &= \frac{1}{N^{n-1}} \int H' e^{-2\alpha \sum_{m=1}^{n-1} r_m} dV_1 \dots dV_{n-1} - \\ &- \frac{n-1}{N} \int f(r) e^{-2\alpha r} dV. \end{aligned} \quad (9)$$

Взяв от обеих частей интеграл  $\int \dots e^{-2\alpha r_n} dV_n$ , получим

$$\int f(r) e^{-2\alpha r} dV = \frac{1}{nN^{n-1}} \int H' e^{-2\alpha \sum_{m=1}^n r_m} dV_1 \dots dV_n,$$

после чего из (9) находим

$$f(r_n) = \frac{1}{N^{n-1}} \int H' e^{-2\alpha \sum_{m=1}^{n-1} r_m} dV_1 \dots dV_{n-1} - \\ - \frac{n-1}{nN^n} \int H' e^{-2\alpha \sum_{m=1}^n r_m} dV_1 \dots dV_n. \quad (10)$$

Выполняя интегрирование, имеем окончательно

$$f(r) = (n-1) \left[ \frac{1}{r} - \left( \frac{1}{r} + \alpha \right) e^{-2\alpha r} - \frac{5}{16} \alpha \right]. \quad (11)$$

Очевидно,  $f(r)$  можно рассматривать как некоторый эффективный центрально симметричный потенциал, частично учитывающий взаимодействие электронов.

Итак, мы можем представить оператор уравнения (1) в виде

$$H = H_0 + H_1, \quad (12)$$

где

$$H_0 = \sum_{k=1}^n \left( -\frac{1}{2} \Delta_k - \frac{Z}{r_k} + f(r_k) \right), \\ H_1 = \sum_{l>k=1}^n r_{kl}^{-1} - \sum_{k=1}^n f(r_k). \quad (13)$$

При этом  $H_0$  представляет собой оператор, равный сумме  $n$  одноэлектронных центрально-симметричных некулоновых гамильтонианов, **ближайший** в смысле условия (3) к полному оператору энергии атома. Естественно принять его за гамильтониан невозмущенной задачи и искать решение уравнения

$$H_0 \psi = \lambda \psi. \quad (14)$$

Это уравнение распадается на  $n$  одноэлектронных уравнений вида (см. (11))

$$\left[ -\frac{1}{2} \Delta_k - \frac{Z+1-n}{r_k} - \left( \frac{1}{r_k} + \alpha \right) e^{-2\alpha r_k} \right] \psi^{(k)} = \lambda'_k \psi^{(k)}, \quad (15)$$

причем

$$\lambda'_k = \lambda_k + \frac{5}{16} (n-1) \alpha, \quad \lambda = \sum_{k=1}^n \lambda'_k, \quad \psi = \prod_{k=1}^n \psi^{(k)}. \quad (16)$$

Уравнение (15) не может быть решено точно, однако с помощью теории возмущений его приближенное решение можно получить в виде квадратур. Для этого удобно представить оператор  $H_0$  в виде  $H_0^0 + H_0^1$ , где  $H_0^0$  есть оператор, соответствующий кулоновскому полю с некоторым эффективным зарядом ядра. Мы его возьмем в виде (см. (15))

$$H_0^0 = -\frac{1}{2} \Delta - \frac{\zeta}{r}, \quad \zeta = Z + 1 - n - \sigma; \quad (17)$$

соответственно

$$H'_0 = -\frac{\sigma}{r} - \left(\frac{1}{r} + \alpha\right) e^{-2\alpha r}. \quad (18)$$

Постоянной  $\sigma$  можно распорядиться так, чтобы возмущение  $H'_0$  было в некотором смысле наименьшим. В нулевом приближении имеем уравнение

$$H_0^0 \psi_0^0 = E_0^0 \psi_0^0, \quad (19)$$

где  $\psi_0^0$  — волновая функция водородного типа, соответствующая заряду ядра, равному  $\zeta$ . Потребуем, чтобы среднее значение  $H_0'^2$  в состоянии  $\psi_0^0$  было минимально по сравнению со средним значением  $H_0^{02}$  в том же состоянии. Это приводит к условию

$$\frac{(\psi_0^0, H_0'^2 \psi_0^0)}{(\psi_0^0, H_0^{02} \psi_0^0)} = \frac{(\psi_0^0, H_0'^2 \psi_0^0)}{E_0^{02} (\psi_0^0, \psi_0^0)} = \min, \quad (20)$$

из которого и находится  $\sigma$ .

В дальнейшем, для определенности, ограничимся случаем  $n=2$  (гелиеподобные ионы), хотя, разумеется, ход решения уравнения (15) не зависит от значения  $n$ . Кроме того, положим для упрощения  $\alpha = \zeta$ . Уравнение теории возмущений для поправки первого приближения  $\Psi_0$  к функции  $\Psi_0^0$  имеет, как известно, вид

$$(H_0^0 - E_0^0) \psi_0' = - (H_0' - E_0') \psi_0^0, \quad E_0' = (\psi_0^0, H_0' \psi_0^0). \quad (21)$$

Полагая  $\psi_0' = \psi_0^0 \chi$ , где  $\psi_0^0 = \frac{\zeta^{3/2}}{\sqrt{\pi}} e^{-\zeta r}$  — нормированная функция основного состояния, и интегрируя это уравнение, получим

$$\psi_0' = \psi_0^0 \left( a_1 + a_2 r - \frac{1}{4\zeta} e^{-2\zeta r} + \frac{3}{16\zeta^2} \frac{1 - e^{-2\zeta r}}{r} - \frac{3}{8\zeta} \int \frac{1 - e^{-2\zeta r}}{r} dr \right), \quad (22)$$

где

$$a_1 = -\frac{1}{\zeta} \left[ \frac{3}{2\zeta} E_0' + \frac{3}{8} (c + \ln \zeta) - \frac{7}{32} \right], \quad a_2 = \frac{1}{\zeta} E_0' \quad (23)$$

и  $c = 0,577216$  — постоянная Эйлера. Соответственно функция первого приближения  $\psi_1 = \psi_0^0 + \psi_0'$  равна

$$\psi_1 = \frac{\zeta^{3/2}}{\sqrt{\pi}} e^{-\zeta r} \left( 1 + a_1 + a_2 r - \frac{1}{4\zeta} e^{-2\zeta r} + \frac{3}{16\zeta^2} K - \frac{3}{8\zeta} K' \right), \quad (24)$$

где введены обозначения

$$K = K(\zeta, r) = \frac{1 - e^{-2\zeta r}}{r}, \quad K' = K'(\zeta, r) = \int_0^r K(\zeta, r') dr'. \quad (25)$$

Таким образом,  $\psi_1$  представляет собой линейную комбинацию пяти функций

$$\psi_1 = \sum_{k=1}^5 b_k \varphi_k(r), \quad (26)$$

причем

$$\varphi_1 = e^{-\zeta r}, \quad \varphi_2 = e^{-3\zeta r}, \quad \varphi_3 = re^{-\zeta r}, \quad \varphi_4 = Ke^{-\zeta r}, \quad \varphi_5 = K'e^{-\zeta r}. \quad (27)$$

Решение уравнения (14) в первом приближении имеет вид

$$\begin{aligned} \psi(r_1, r_2) &= \psi_1(r_1) \psi_1(r_2) = \sum_{i,k=1}^5 b_i b_k \varphi_i(r_1) \varphi_k(r_2) = \\ &= \sum_{i,k=1}^5 \frac{b_i b_k}{2} [\varphi_i(r_1) \varphi_k(r_2) + \varphi_k(r_1) \varphi_i(r_2)]. \end{aligned} \quad (28)$$

Разумеется, это выражение для  $\psi$  не может привести к высокой точности значения энергии основного состояния двухэлектронных атомов. Это ясно из того, что оператор  $H_0$  (13) не является точным оператором уравнения (1) и, сверх того, его собственная функция (28) также найдена приближенно. Тем не менее выражение (28) представляет существенный интерес в связи с тем, что оно определяет в известной мере характер зависимости волновой функции основного состояния двухэлектронного атома от  $r_1$  и  $r_2$ , хотя и не учитывает полностью корреляцию между электронами. Если заменить  $1/2 b_i b_k$  на  $C_{ik} = C_{ki}$  и рассматривать эти последние коэффициенты как вариационные параметры, то выражение (28) приводит к 15-членной функции, которая может быть использована как пробная функция в вариационном методе Ритца. Наряду с этим параметр  $\zeta$  в выражениях для функций (27) также можно рассматривать как вариационный. Наконец, не представляет труда видоизменить или дополнить совокупность функций (28), (27) так, чтобы полнее учесть корреляцию электронов.

Отметим, что эффективный потенциал (10), полученный из условия минимума функционала (3), соответствует первому приближению метода самосогласованного поля Хартри.

Расчеты некоторых атомов, основанные на предложенном подходе, будут изложены в последующих публикациях.

Автор благодарен В. И. Крылову за ценные замечания.

Институт физики  
АН БССР

Поступило в редакцию  
26.IV 1968

А. Б. ГУРЕВИЧ

**К ТЕОРЕМЕ О ПРЕДСТАВИМОСТИ  
 ПРОИЗВОЛЬНОЙ ФУНКЦИИ СУММОЙ ДВУХ D-НЕПРЕРЫВНЫХ**

Обозначим через  $D$  множество функций на  $I=[0,1]$ , обладающих свойством Дарбу. Как обычно,  $B_\alpha$  означает бэровский класс  $\alpha$ .

А. Линденбаумом была высказана, а В. Серпинским доказана [1] теорема о том, что всякая действительная функция  $f$  на  $I$  представима в виде  $f=f_1+f_2$ , где  $f_1, f_2 \in D$ . Здесь будет дано некоторое усиление этой теоремы (для случая действительного переменного; теорема была установлена В. Серпинским для сепарабельных связанных метрических пространств): мы покажем, что одну из функций-слагаемых можно выбрать измеримой. Приведем используемые в доказательстве обозначения и факты; все они содержатся в [2].  $P$  и  $Q$  — непересекающиеся  $F_0$ -множества меры 0;  $g$  и  $g^*$  — измеримые по Борелю функции, отображающие любую порцию множеств соответственно  $P$  и  $Q$  на всю действительную ось;  $F, F^*, f_1, f_2$  определяются для любой  $f$  следующим образом:

$$F = \begin{cases} g, & x \in P \\ f, & x \notin P \end{cases} \quad F^* = \begin{cases} g^*, & x \in Q \\ f, & x \notin Q \end{cases} \quad (1)$$

$$f_1 = \begin{cases} \frac{g}{2}, & x \in P \\ f - \frac{g^*}{2}, & x \in Q \\ \frac{f}{2}, & x \notin P \cup Q \end{cases} \quad f_2 = \begin{cases} f - \frac{g}{2}, & x \in P \\ \frac{g^*}{2}, & x \in Q \\ \frac{f}{2}, & x \notin P \cup Q. \end{cases} \quad (2)$$

Очевидно, что все эти четыре функции обладают свойством Дарбу и  $f = f_1 + f_2$  (что уже доказывает теорему Линденбаума — Серпинского); кроме того,  $F \sim F^* \sim f$ , т. е.  $F$  и  $F^*$  отличаются от  $f$  лишь на множестве меры 0. Теперь легко доказывается

**Теорема 1.** *Всякая действительная функция  $h$  на  $I$  представима в виде  $h = h_1 + h_2$ , где  $h_1, h_2 \in D$  и  $h_2$  измерима.*

**Доказательство.** Пусть задана  $h$ . Построим для нее функции  $H$  и  $H^*$ , аналогичные  $F$  и  $F^*$  из (1). Тогда  $h = H + (h - H) = H + f$ , причем  $H \in D$ ,  $f \sim 0$  (но, вообще говоря,  $f \notin D$ ). Представив  $f$  суммой двух функций типа (2), имеем  $f = f_1 + f_2$ ,  $h = (H + f_1) + f_2 = h_1 + h_2$ , где

$$h_1 = \begin{cases} \frac{3}{2}g, & x \in P \\ f + h - \frac{g^*}{2}, & x \in Q \\ \frac{f}{2} + h, & x \notin P \cup Q \end{cases} \quad h_2 = \begin{cases} f - \frac{g}{2}, & x \in P \\ \frac{g^*}{2}, & x \in Q \\ \frac{f}{2}, & x \notin P \cup Q. \end{cases}$$

Из построения следует, что  $h_1 + h_2 = h$  и  $h_1, h_2 \in D$ ; так как  $h_2 \sim 0$ , то она измерима, что и требовалось доказать.

Из теоремы 1 непосредственно вытекает один результат П. Эрдеша [3].

**Замечание.** Нетрудно показать, что  $h_2$  можно выбрать так, что она будет иметь любую наперед заданную функцию распределения.

Покажем теперь, что в утверждении теоремы 1 нельзя заменить  $L$ -измеримость  $B$ -измеримостью.

**Лемма 1.** Если  $f \in B_\alpha$ , то  $f$  представима в виде  $f = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n$ , где  $f_n \in B_{\alpha-1} D$ .

Доказательство этого утверждения дано в [2].

Обозначим теперь через  $N$  множество функций  $f$  таких, что 1)  $f \in B$  и 2) на некотором интервале  $\delta \subset I$  множество значений  $f$  неплотно.

**Лемма 2.** Пусть  $f \in N$  и  $f = f_1 + f_2$ , где  $f_1 \in D$ ,  $f_2 \in B_\alpha D$ . Тогда существует функция  $\tilde{f} \in N$  такая, что  $\tilde{f} = \tilde{f}_1 + \tilde{f}_2$ , где  $\tilde{f}_1 \in D$ ,  $\tilde{f}_2 \in B_{\alpha-1} D$ .

**Доказательство.** Пусть условия леммы выполнены; очевидно, что  $f_1 \in B$ . По лемме 1  $f_2$  представима в виде  $f_2 = \lim_{n \rightarrow \infty} f_2^{(n)}$ , где  $f_2^{(n)} \in B_{\alpha-1} D$ .

Если найдутся такие  $n$  и  $\delta$ , что множество значений функции  $f_1 + f_2^{(n)}$ , рассматриваемой на  $\delta$ , будет неплотным, то ее и можно взять в качестве искомой. Если же для всех  $n$  суммы  $f_1 + f_2^{(n)} \in N$ , то поступаем по следующей схеме: для какого-нибудь фиксированного  $n$  введем функцию  $F(x)$ , определяемую равенствами:

$$F(x) = \begin{cases} f_1(3x) + f_2^{(n)}(3x), & 0 \leq x < \frac{1}{3} \\ 0, & \frac{1}{3} \leq x < \frac{1}{2} \\ 1, & \frac{1}{2} \leq x < \frac{2}{3} \\ f_1(3-3x) + f_2^{(n)}(3-3x), & \frac{2}{3} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Очевидно, что  $F(x) \in N$ . На крайних промежутках искомое представление возможно в силу построения функции  $F$ , так как  $f_1 \in D$ , а  $f_2^{(n)} \in B_{\alpha-1} D$ ; для промежутка же  $[1/3, 2/3]$  нужное представление (функциями 1 класса) строится элементарно. Рассматривая «склеенную» функцию, получаем требуемое. Теперь уже легко получается

**Теорема 2.** Если  $f \in N$ , то ее нельзя представить в виде суммы двух функций, обладающих свойством Дарбу, из которых одна  $B$ -измерима.

**Доказательство.** Допустив противное и используя лемму 2, найдем функцию  $\tilde{f} \in N$ , разложение которой возможно с помощью функции класса на единицу меньшего. Применяя трансфинитную индукцию, заключаем, что в множестве  $N$  существует функция, представимая суммой непрерывной функции и функции Дарбу, что невозможно [4]. Этим теорема доказана.

#### Литература

1. Sierpiński W. *Matematyczne*, Catania, VIII, № 2, 43—48, 1953.
2. Гуревич А. Б. *ДАН БССР*, 10, № 8, 539—541, 1966.
3. Erdős P. *Rev. roum. math. pures et appl.*, IX, № 9, 803—804, 1964.
4. Radaković T. *Monatsh. Math. Phys.*, 38, 117—122, 1931.

## ЗМЕСТ

### МАТЭМАТЫКА

А. Х. Турецкий. Об одном методе приближения периодических функций тригонометрическими полиномами	5
И. М. Кунцевич. К вопросу минимизации значения линейной формы на множестве циклов длины $n$ . II	12
М. А. Шешко. Об общей краевой задаче линейного сопряжения с производными для системы $n$ пар функций	22
Г. П. Жаврид. Максимальные разрешимые подгруппы $GL(4, P)$	31
В. В. Бобков. Об одном методе приближенного решения задачи Гурса для гиперболического уравнения второго порядка	38
В. Н. Абрашин. О равномерной сходимости метода гиперплоскостей при решении некоторых нестационарных задач с самосопряженным оператором	47
А. А. Бурдун. О кривизне неголомомной пространственноподобной гиперповерхности в пространстве Минковского	55
И. И. Комяк. Об интегральном уравнении типа свертки с $N$ ядрами	62

### ФІЗІКА

Н. Н. Сирота, С. В. Сухвало. Рентгенографическое и резистометрическое исследование тонких пленок сплавов системы железо—никель—кобальт	71
А. М. Самсон, Л. А. Котомцева. Расчет шумов в матированном генерирующем стержне за счет проникновения радиации накачки	76
П. Я. Ганич. Пространственная структура рассеянного «назад» излучения, возникающего от освещения водной среды коллимированным пучком радиации	84
А. П. Халалюк, А. С. Рудніцкі. Умова генерацыі ў двухмерным рэзанатары	89
В. К. Кононенко, В. П. Грибковский. Влияние легирования на пороговый ток в инжекционном лазере	98
Б. Б. Давыдов, Е. А. Костюкевич. Исследование ускорителя плазмы рельсового типа	108
Л. А. Барысаглебскі, В. Ф. Трусаў. Да тэоры ўнутранай канверсіі на $M$ -абалонцы атама	114
М. М. Мажуль, С. М. Вайтовіч. Уплыў ультрагукавых кавітацый на скорасць росту цвёрдай фазы з расплаву бетолу	120
А. С. Потупа, В. И. Стражев, Л. М. Томильчик. Дуальная инвариантность в электродинамике как унитарная симметрия	124

### КАРОТКІЯ ПАВЕДАМЛЕННІ

Ф. И. Федоров. К расчету атомных уровней	129
А. Б. Гуревич. К теореме о представимости произвольной функции суммой двух $D$ -непрерывных	134

## СОДЕРЖАНИЕ

### МАТЕМАТИКА

А. Х. Турецкий. Об одном методе приближения периодических функций тригонометрическими полиномами	5
И. М. Кунцевич. К вопросу минимизации значения линейной формы на множестве циклов длины $n$ . II	12
М. А. Шешко. Об общей краевой задаче линейного сопряжения с производными для системы $n$ пар функций	22
Г. П. Жаврид. Максимальные разрешимые подгруппы $GL(4, P)$	31
В. В. Бобков. Об одном методе приближенного решения задачи Гурса для гиперболического уравнения второго порядка	38
В. Н. Абрашин. О равномерной сходимости метода гиперплоскостей при решении некоторых нестационарных задач с самосопряженным оператором	47
А. А. Бурдун. О кривизне неголономной пространственноподобной гиперповерхности в пространстве Минковского	55
И. И. Комяк. Об интегральном уравнении типа свертки с $N$ ядрами	62

### ФИЗИКА

Н. Н. Сирота, С. В. Сухвало. Рентгенографическое и резистометрическое исследование тонких пленок сплавов системы железо—никель—кобальт	71
А. М. Самсон, Л. А. Котомцева. Расчет шумов в матированном генерирующем стержне за счет проникновения радиации накачки	76
П. Я. Ганич. Пространственная структура рассеянного «назад» излучения, возникающего от освещения водной среды коллимированным пучком радиации	84
А. П. Хапалюк, А. С. Рудницкий. Условие генерации в двумерном резонаторе	89
В. К. Кононенко, В. П. Грибковский. Влияние легирования на пороговый ток в инжекционном лазере	98
Б. Б. Давыдов, Е. А. Костюкевич. Исследование ускорителя плазмы рельсового типа	108
Л. А. Борисоглебский, В. Ф. Трусов. К теории внутренней конверсии на $M$ -оболочке атома	114
М. М. Мажуль, С. М. Войтович. Влияние ультразвуковых кавитаций на скорость роста твердой фазы из расплава бестола	120
А. С. Потупа, В. И. Стражев, Л. М. Томильчик. Дуальная инвариантность в электродинамике как унитарная симметрия	124

### КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

Ф. И. Федоров. К расчету атомных уровней	129
А. Б. Гуревич. К теореме о представимости произвольной функции суммой двух $D$ -непрерывных	134

АТ 15299. Здадзена ў набор 28/VI-68 г. Падпісана да друку 3.IX-68 г. Фармат  $70 \times 108^{1/16}$ .  
 Друк. арк. 9. Ум. друк. арк. 12,6. Уч.-выд. арк. 12,5. Выд. зак. 676. Друк. зак. 529.  
 Цана 60 кап.

Друкарня імя Францыска (Георгія) Скарыны выдавецтва «Навука і тэхніка» ЛН  
 БССР і Дзяржкамтэта СМ БССР па друку. Мінск, Ленінскі праспект, 68.

РЕФЕРАТЫ

УДК 517.512.6

Об одном методе приближения периодических функций тригонометрическими полиномами. Турецкий А. Х. «Весті Акадэміі навук БССР», серыя фізіка-матэматычных навук. 1968 г., № 3, 5—11.

Доказывается следующее предложение. Пусть  $f(x) \in C_{2\pi}$  и натуральные числа  $m$  и  $n$  удовлетворяют неравенствам  $m < n < 2m + 1$ . Тогда тригонометрический полином порядка  $n$   $T_n(x)$ , удовлетворяющий условиям  $T_n(x_\nu) = y_\nu$ ,

$x_\nu = \frac{2\nu\pi}{2m+1}$  ( $\nu=0, 1, \dots, 2m$ ) ( $y_\nu$  — данные числа), для которого интеграл  $\int_0^{2\pi} [f(x) - T_n(x)]^2 dx$  имеет наименьшее значение, равен

$$T_n(x) = \frac{1}{2m+1} \sum_{\nu=0}^{2m} y_\nu \frac{\sin\left(m + \frac{1}{2}\right)(x-x_\nu) \cos(n-m)(x-x_\nu)}{\sin \frac{x-x_\nu}{2}} +$$

$$+ \frac{1}{\pi} \sin\left(m + \frac{1}{2}\right)x \times$$

$$\times \int_0^{2\pi} f(t) \frac{\sin\left(m + \frac{1}{2}\right)t \sin(n-m)(x-t)}{\sin \frac{x-t}{2}} dt.$$

Аналогичное предложение доказывается для случая, когда  $x_\nu = \frac{\nu\pi}{m}$  ( $\nu=0, 1, \dots, 2m-1$ ). Рассматриваются также средние арифметические полиномов  $T_n(x)$  и доказывается их равномерная сходимость к  $f(x) \in C_{2\pi}$ , если  $y_\nu = f(x_\nu)$  ( $\nu=0, 1, \dots, 2m-1$ ).

УДК 512.25/6+519.15

К вопросу минимизации значения линейной формы на множестве циклов длины  $n$ . П. Кунцевич И. М. «Весті Акадэміі навук БССР», серыя фізіка-матэматычных навук. 1968 г., № 3, 12—21.

В этом разделе статьи рассматривается случай, когда  $H$  — множество всех циклов длины  $n$  из  $S_n$ , а подстановка  $\tau_0$ , минимизирующая значение линейной формы  $f$  на всей симметрической группе  $S_n$ , если переменные формы  $x_i$  принимают значения из множества  $\{b_1, b_2, \dots, b_n\}$ , имеет вид  $\tau_0 = \tau_1(l+1, l+2, \dots, l+p) \tau_2$ , где  $\tau_1$  — произвольная подстановка символов  $1, 2, \dots, l$ , а  $\tau_2$  — символов  $l+p+1, \dots, n$ .

Показано, что в этом случае для отыскания подстановки  $t_0$ , минимизирующей значение формы  $f$  на множестве всех циклов длины  $n$  из  $S_n$ , достаточно ограничиться рассмотрением  $l!(n-l-p)!$  циклических подстановок степени  $n$  вида

$$t = (1, \alpha_2, \dots, \alpha_s, l+2, \dots, l+p, \alpha_{l+p+1}, \dots, \alpha_n, l+1, \alpha_{s+1}, \dots, \alpha_l).$$

Кроме того, рассмотрены  $\tau_0$  следующих видов:

$$1) \tau_0 = (l+1, l+2, \dots, l+p),$$

$$2) \tau_0 = (1, l)(2, l-1) \dots (l+1, l+2, \dots, l+p)(l+p+1, n)(l+p+2, n-1) \dots,$$

$$3) \tau_0 = (l+1, l+2, \dots, l+p)(l+p+1, n)(l+p+2, n-1) \dots,$$

$$4) \tau_0 = (1, l)(2, l-1) \dots (l+1, l+2, \dots, l+p).$$

Для каждого из случаев  $l=4$  указаны число и вид подстановок, среди которых следует искать минимизирующую.

Библиографий 4.

УДК 517.948.3

Об общей краевой задаче линейного сопряжения с производными для системы  $n$  пар функций. Шешко М. А. «Весті Академії наук БССР», серия фізика-математичних наук. 1968 г., № 3, 22—29.

Изучается краевая задача о нахождении кусочно-аналитического вектора  $\Phi(z) = (\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_n)$  по граничному условию

$$\frac{d^r \Phi^+(t)}{dt^r} + B(t) \frac{d^s \Phi^-(t)}{dt^s} + C(t) \frac{\overline{d^s \Phi^-(t)}}{dt^s} = \lambda T \Phi + F(t),$$

где  $T\Phi$  — интегро-дифференциальный оператор, содержащий, кроме неизвестных функций, производные порядка ниже  $r$  и  $s$ , комплексно сопряженные значения искомого вектора и их производных, интегральные члены.

С помощью интегрального представления кусочно-аналитического вектора для многосвязной области рассматриваемая задача приводится к системе сингулярных интегральных уравнений вида

$$(E - U) \nu = \lambda K \nu + f(t), \quad (*)$$

где

$$U \nu = Q(t) [-\overline{\nu(t)} + S \nu];$$

$$S \nu = \frac{1}{\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\nu(\tau)}{\tau - t} d\tau;$$

$Q(t)$  — определенная матрица;  $K$  — определенный вполне непрерывный оператор;  $f(t)$  — свободный член, содержащий произвольные постоянные;  $E$  — единичный оператор.

При выполнении условия  $\|U\|_{L_2} < 1$  действием оператора  $(E - U)^{-1}$  системы (\*) сводится к системе интегральных уравнений типа Фредгольма. Применяя к последней теорию уравнений Фредгольма, делаются заключения о числе линейно независимых решений однородной задачи и числе условий разрешимости неоднородной. Библиографий 5.

УДК 512.86

Максимальные разрешимые подгруппы  $GL(4, P)$ . Жаврид Г. П. «Весті Академії наук БССР», серия фізика-математичних наук. 1968 г., № 3, 30—37.

Дается полное описание максимальных примитивных разрешимых подгрупп полной линейной группы четвертой степени над произвольным полем.

Библиографий 4.

УДК 518:517.914/947

Об одном методе приближенного решения задачи Гурса для гиперболического уравнения второго порядка. Бобков В. В. «Весті Академії наук БССР», серия фізика-матэматычных навук. 1968 г., № 3, 38—46.

В работе предлагается способ построения одношаговых правил приближенного решения дифференциальных уравнений в частных производных, основанный на многократном использовании кубатурных формул понижающейся алгебраической степени точности. В частности, для гиперболического уравнения второго порядка, записанного во второй канонической форме, приводятся правила приближенного решения задачи Гурса, позволяющие найти ее решение с локальной погрешностью до шестого включительно порядка малости относительно малости шага сетки. Указывается на возможность перенесения полученных результатов на задачу Коши и на некоторые другие задачи.

Библиографий 4.

УДК 518:517(944)947

О равномерной сходимости метода гиперплоскостей при решении некоторых нестационарных задач с самосопряженным оператором. Абрашин В. Н. «Весті Академії наук БССР», серия фізика-матэматычных навук. 1968 г., № 3, 47—54.

Дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial^k u}{\partial t^k} = L(u) + f(x, t),$$

в цилиндре  $\bar{Q}_T = \bar{D}_p \times [0 \leq t \leq T]$ , основанием которого является область  $D_p \{x = (x_1, x_2, \dots, x_p)\}$  с соответствующими граничными условиями, аппроксимируется  $s+1$ -слойной дифференциально-разностной схемой

$$h^{-k} \sum_{i=0}^s A_i u_{n+i} = \sum_{i=0}^s B_i [L(u_{n+i}) + f_{n+i}],$$

относительно функций  $u_{n+i}$  на гиперплоскостях  $t = t_{n+i} = (n+i)h$ ,  $h > 0$ .

При некоторых требованиях от искомого решения доказывается равномерная сходимость метода и даются оценки погрешности.

Библиографий 7.

УДК 513.73

О кривизне неголомомной пространственноподобной гиперповерхности в пространстве Минковского. Бурдун А. А. «Весті Академії наук БССР», серия фізика-матэматычных навук. 1968 г., № 3, 55—61.

В работе находится полная система инвариантов первой дифференциальной окрестности гиперповерхности, доказывается, что в  ${}^1R_4$  конформно наложимы на свое сферическое отображение только голономные гиперсферы. Для неголомомной конгруэнции нормалей показано отсутствие аналога теорем Н. И. Кованцова, устанавливающих зависимость между расстоянием граничных точек и главными кривизнами первого рода и между фокусами и главными кривизнами второго рода неголомомной базисной гиперповерхности.

Библиографий 8.

УДК 517.94

Об интегральном уравнении типа свертки с  $N$  ядрами. Ко-  
мьяк И. И. «Весті Академії наук БССР», серия фізика-матэ-  
матычных навук. 1968 г., № 3, 62—70.

Исследуется интегральное уравнение типа свертки

$$\varphi(x) + \sum_{j=1}^N \int_{a_{j-1}}^{a_j} k_j(x-t) \varphi(t) dt = f(x), \quad -\infty < x < +\infty, \quad (1)$$

$$-\infty = a_0 < a_1 < \dots < a_{N-1} < a_N = +\infty,$$

при следующих предположениях:  $k_j(x) \in L_1(-\infty, +\infty)$  ( $j=1, 2, \dots, N$ ), а  $f(x)$  и  $\varphi(x)$  принадлежат одному из пространств  $E(-\infty, +\infty)$ :  $L_p$  ( $p \geq 1$ ),  $M$ ,  $M^c$ ,  $M^u$ ,  $C$ ,  $C^0$ .

Используя представление уравнения (1) в виде

$$\varphi(x) + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{k_1(x-t) + k_N(x-t)}{2} \varphi(t) dt +$$

$$+ \sum_{j=1}^{N-1} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{k_{j+1}(x-t) - k_j(x-t)}{2} \varphi(t) \operatorname{sgn}(t - a_j) dt = f(x),$$

доказывается, что однородное уравнение (1) во всех пространствах из  $E$  имеет одни и те же решения.

Устанавливается связь данного уравнения, рассматриваемого в пространстве  $L_1(-\infty, +\infty)$ , с интегральным уравнением с ядром Коши, равносильным граничной задаче Римана для системы  $N-1$  пары функций.

Доказывается, что при выполнении хотя бы одного из  $N-1$  условий:

функции  $\frac{1+K_1(x)}{1+K_2(x)}$ ,  $\frac{1+K_2(x)}{1+K_3(x)}$ , ...,  $\frac{1+K_l(x)}{1+K_{l+1}(x)} \in R^-$  и не имеют ну-  
лей в нижней полуплоскости, а  $\frac{1+K_{l+2}(x)}{1+K_{l+3}(x)}$ ,  $\frac{1+K_{l+3}(x)}{1+K_{l+4}(x)}$ , ...,  $\frac{1+K_{N-1}(x)}{1+K_N(x)} \in R^+$  и не имеют нулей в верхней полуплоскости ( $l=0, 1, \dots, N-2$ ) — полученная граничная задача Римана для системы сводится к последовательному решению  $N-1$  граничных задач Римана в кольце  $R$ , первая из которых разрешима в зависимости от знака индекса уравнения (1), а  $N-2$  остальных безусловно разрешимы.

Далее дается решение полученной задачи в случае, когда функции  $\frac{1+K_p(x)}{1+K_q(x)}$  ( $1 < p, q \leq N$ ) имеют мероморфный характер в верхней полуплоскости. Показывается, что в этом случае левая стандартная факторизация матрицы граничного условия может быть построена эффективно с помощью конечного числа линейных преобразований.

Библиографий 10.

УДК 539.23+621.318.1

Рентгенографическое и резистометрическое исследование тонких пленок сплавов системы железо—никель—кобальт. Сирота Н. Н., Сухвало С. В. «Весті Академії навук БССР», серия фізика-матэматычных навук. 1968 г., № 3, 71—75.

В работе изучены фазовый состав, структура, параметры решетки и рентгеновская плотность тонких пленок сплавов системы Fe—Ni—Co. Установлены пределы существования твердых растворов и гетерогенных областей в указанной системе сплавов. Исследована концентрационная зависимость величины удельного электросопротивления пленок сплавов системы Fe—Ni—Co.

Таблиц 1. Иллюстраций 4. Библиографий 7.

УДК 621.375.8

**Расчет шумов в матированном генерирующем стержне за счет проникновения радиации накачки.** Самсон А. М., Котомцева Л. А. «Весті Академії наук БССР», серия фізика-математичних наук. 1968 г., № 3, 76—83.

В работе выполнен расчет шумов за счет проникновения радиации накачки в генерирующий стержень цилиндрической формы с идеально матовой боковой поверхностью. В предположении постоянства коэффициента усиления по объему и при пренебрежении отражением от торцов получено распределение светового поля вдоль радиуса стержня при разных значениях длины, радиуса и коэффициента усиления активной среды. Проведено сравнение вероятности вынужденного накачкой излучения с вероятностью спонтанного перехода той же частоты при аппроксимации спектра лампы накачки спектром абсолютно черного тела. Выполнен анализ полученных выражений, позволивший сделать заключение о существовании предела в увеличении размеров генерирующего стержня из-за наличия шумов, обусловленных радиацией накачки.

Таблиц 4. Иллюстраций 2. Библиографий 6.

УДК 535.361

**Пространственная структура рассеянного «назад» излучения, возникающего от освещения водной среды коллимированным пучком радиации.** Ганич П. Я. «Весті Академії наук БССР», серия фізика-математичних наук. 1968 г., № 3, 84—88.

Экспериментально исследовано пространственное распределение яркости световой дымки, создаваемой излучением, рассеянным водной средой «назад» по отношению к направлению падающего коллимированного пучка света. Измерения выполнены на системах, оптические свойства которых моделировали соответствующие параметры естественных водоемов. Световые характеристики поля рассеянного излучения определены для различных углов наблюдения при вариации оптических расстояний между излучателем и приемником от 0,063 до 0,5, вероятности выживания фотона от 0,6 до 0,9. Показано, что в рассмотренных случаях многократно рассеянный свет вносит заметный вклад в величину яркости дымки.

Иллюстраций 4. Библиографий 1.

УДК 621.378.3

**Условие генерации в двумерном резонаторе.** Халпалюк А. П., Рудницкий А. С. «Весті Академії наук БССР», серия фізика-математичних наук. 1968 г., № 3, 89—97.

Теоретически рассмотрена в линейном приближении стационарная генерация света лазером, резонатор которого обладает двумя измерениями (брусоч бесконечной длины). Получено условие генерации, явившееся обобщением условия генерации одномерного резонатора, изучена структура полей и потоков энергии различных мод внутри резонатора в предположении о представимости светового поля в виде суммы плоских волн. Поле в луче генератора найдено с помощью векторного варианта интегральных дифракционных формул Кирхгофа. Исследованы распределения интенсивностей излучений отдельных типов колебаний, получаемые на основании выражений для поля луча резонатора.

Иллюстраций 3. Библиографий 9.

УДК 621.375.9

**Влияние легирования на пороговый ток в инжекционном лазере.** Кононенко В. К., Грибковский В. П. «Весті Академії наук БССР», серия фізика-математичних наук. 1968 г., № 3, 98—107.

Рассматривается стационарная генерация излучения на прямых межзонных переходах в примесном полупроводнике: Квазиуровни Ферми, опре-

деляющие распределение носителей тока по состояниям в зонах, вычисляются из уравнения нейтральности. Исследуется влияние степени легирования, уровня возбуждения и температуры на частоту генерации и положение максимума спектра люминесценции. Рассчитывается зависимость плотности порогового тока  $J_{\text{пор}}$  от коэффициента потерь  $k_{\text{пот}}$  в инжекционном лазере и исследуется влияние легирования на эту зависимость.

Показано, что  $J_{\text{пор}}$  является практически линейной функцией  $k_{\text{пот}}$ , причем при уменьшении  $k_{\text{пот}}$  значение  $J_{\text{пор}}$  приближается к величине  $J_0$  — плотности минимального тока через диод, при котором коэффициент поглощения света становится на некоторой частоте равным нулю. С введением в активную область доноров в большем числе, чем акцепторов, при малых  $k_{\text{пот}}$  значение  $J_{\text{пор}}$  может уменьшиться, а при больших  $k_{\text{пот}}$  величина  $J_{\text{пор}}$  увеличивается. Сильное легирование акцепторами всегда приводит к понижению порога генерации.

Численные оценки проводятся для GaAs. Параметры инжекционного лазера получаются близкими к экспериментальным значениям. Делается вывод, что лучшие параметры будут иметь лазерные диоды, в активной области которых концентрация акцепторов значительно больше, чем доноров.

Иллюстраций 6. Библиографий 22.

УДК 629.194.364

**Исследование ускорителя плазмы рельсового типа.** Давыдов Б. Б., Костюкевич Е. А. «Весті Академії наук БССР», серия фізика-математичних наук. 1968 г., № 3, 108—113.

Проведено экспериментальное исследование рабочего процесса рельсового ускорителя плазмы эрозионного типа. Изучена структура плазменного сгустка и электродных пятен. Обнаружено существование токовых слоев при атмосферном давлении и произведена оценка их ускорения. Наблюдается сверхзвуковое истечение эрозионных плазменных факелов с торцов электродов. Факелы имеют прерывистую структуру. Определены температура и концентрация заряженных частиц.

Иллюстраций 5. Библиографий 15.

УДК 539.166

**К теории внутренней конверсии на  $M$ -оболочке атома.** Борисоглебский Л. А., Трусов В. Ф. «Весті Академії наук БССР», серия фізика-математичних наук. 1968 г., № 3, 114—119.

Приведены таблицы основных радиальных интегралов внутренней конверсии на  $M$ -оболочке атома при  $M1$ -,  $M2$ -,  $E1$ - и  $E2$ -переходах ядер. Интегралы вычислены с помощью электронных радиальных функций, полученных численным интегрированием системы дифференциальных уравнений Дирака с учетом конечных размеров ядра и экранирования по Хартри ( $Z=80$ ).

Таблиц 2. Библиографий 11.

УДК 532.528

**Влияние ультразвуковых кавитаций на скорость роста твердой фазы из расплава бестола.** Мажуль М. М., Войтович С. М. «Весті Академії наук БССР», серия фізика-математичних наук. 1968 г., № 3, 120—123.

Приведены экспериментальные исследования по выяснению роли ультразвуковых кавитаций на скорость роста органического вещества бестола. Из экспериментальных данных вытекает, что ультразвуковые кавитации играют важную роль в увеличении линейной скорости кристаллизации из расплава. Закономерности, которые наблюдаются при кристаллизации органических веществ, могут быть перенесены на кристаллизацию расплава металла, что может иметь практическое значение.

Иллюстраций 3. Библиографий 24.

УДК 530.12:531.18+538.3

**Дуальная инвариантность в электродинамике как унитарная симметрия.** Потупа А. С., Стражев В. И., Томильчик Л. М. «Весті Академії наук БССР», серия фізика-математических наук. 1968 г., № 3, 124—128.

Показано, что электродинамика Максвелла — Лоренца допускает существование в качестве группы симметрии однопараметрической группы обобщенных дуальных преобразований, локально изоморфной  $U(1)$ . Заряд, плотность энергии поля и сила Лоренца являются инвариантами этой группы. Наличие такой группы запрещает существование двух наблюдаемых зарядов (электрического и магнитного), а также позволяет естественно разрешить известную проблему несоответствия между числом независимых полевых составляющих и количеством компонент тензора энергии-импульса электромагнитного поля. Указано на возможность существования в электродинамике группы скрытой симметрии, более широкой, чем  $U(1)$ .

Библиографий 10.

УДК 530.145

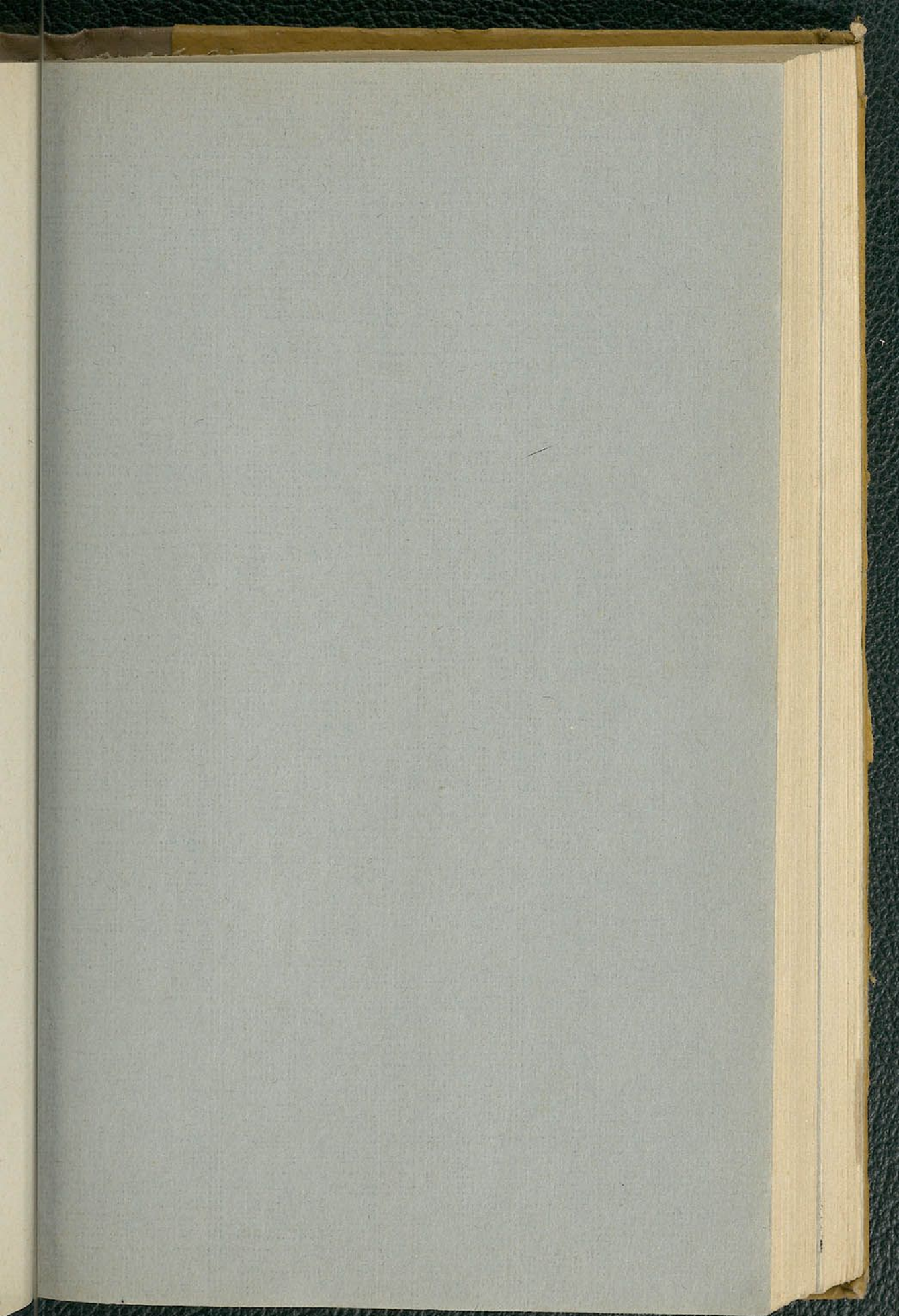
**К расчету атомных уровней.** Федоров Ф. И. «Весті Академії наук БССР», серия фізика-математических наук. 1968 г., № 3, 129—133.

Гамильтониан уравнения Шрёдингера для атома приближенно заменяется суммой одноэлектронных центрально-симметричных (некулоновских) гамильтонианов. Последние выбираются так, чтобы их сумма наименее отличалась от исходного гамильтониана. Критерием отличия служит величина интеграла по всему конфигурационному пространству от квадрата разности энергии взаимодействия электронов и суммы искоемых эффективных потенциалов  $f(r_k)$  с экспоненциальной весовой функцией. С найденным  $f(r_k)$  одноэлектронная задача решается по теории возмущений в первом приближении. Из полученных одноэлектронных волновых функций, учитывающих радиальную корреляцию, конструируется пробная волновая функция для расчета по вариационному методу.

УДК 517.51

**К теореме о представимости произвольной функции суммой двух  $D$ -непрерывных.** Гуревич А. Б. «Весті Академії наук БССР», серия фізика-математических наук. 1968 г., № 3, 134—135.

Известно, что всякая действительная функция действительного переменного представима в виде суммы двух функций, обладающих свойством Дарбу. Показано, что одно из слагаемых можно выбрать  $L$ -измеримым, а выбор  $B$ -измеримого возможен не всегда (ср. РЖМат, 1957,7108; 1965, 1961). Библиографий 4.



60 к.

Индокс  
74846