

69.81.1

Инд. №
74846

ВЕСЦІ

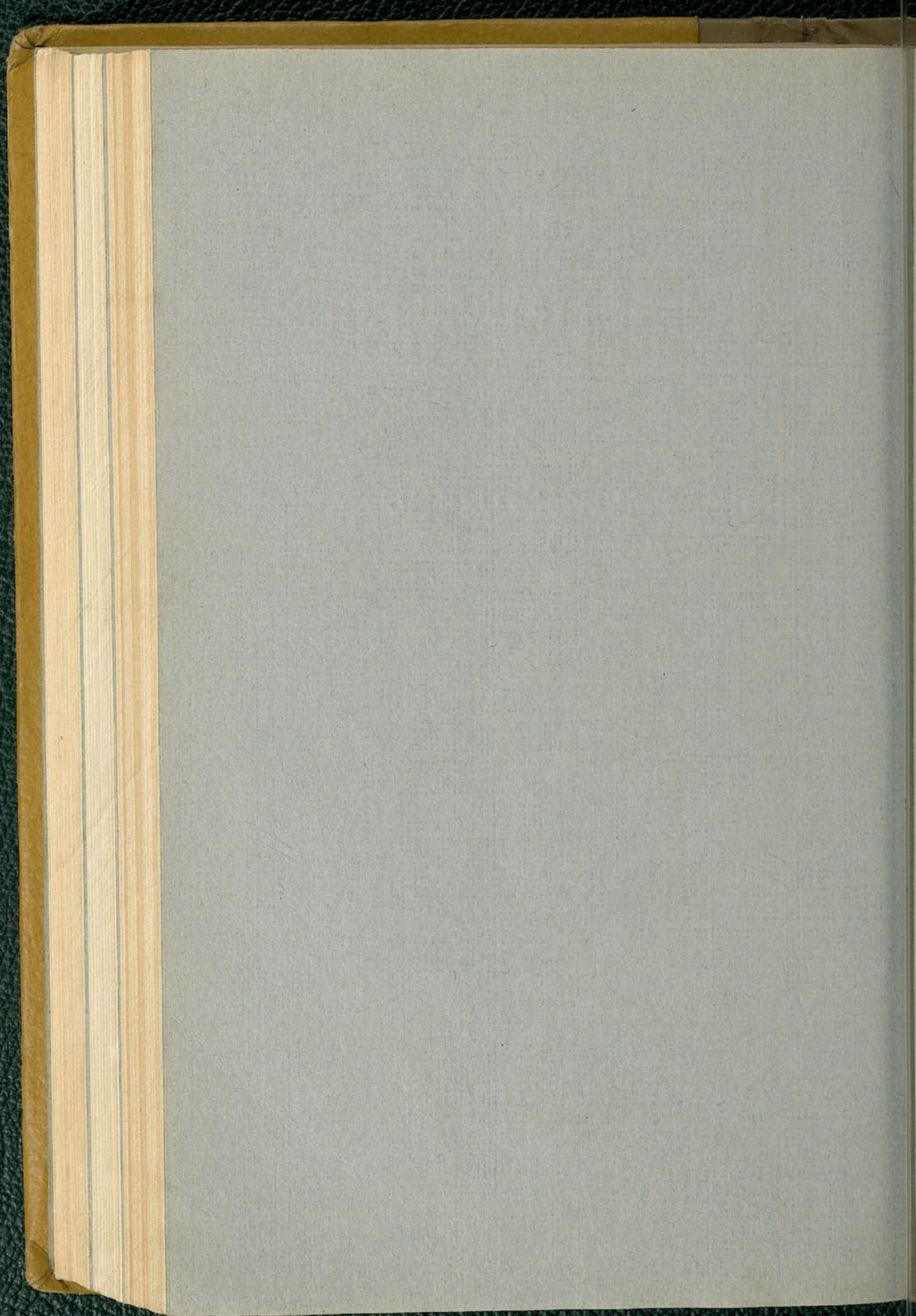
АКАДЭМІІ НАВУК БССР

СЕРЫЯ
ФІЗІКА-МАТЭМАТЫЧНЫХ
НАВУК

4

ВЫДАВЕЦТВА „НАВУКА І ТЭХНІКА“

МІНСК 1968





ИЗВЕСТИЯ

АКАДЕМИИ НАУК БССР

СЕРИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ
НАУК

№ 4

ИЗДАТЕЛЬСТВО „НАУКА И ТЕХНИКА“

МИНСК 1968

69.81.1

ВЕСЦІ

АКАДЭМІІ НАВУК БССР

СЕРЫЯ
ФІЗІКА-МАТЭМАТЫЧНЫХ
НАВУК

№ 4

Ба 3942

ВЫДАВЕЦТВА „НАВУКА І ТЭХНІКА“

МІНСК 1968



Рэдакцыйная калегія:

Ф. І. ФЕДАРАЎ (галоўны рэдактар),
Д. А. СУПРУНЕНКА (нам. галоўнага рэдактара),
М. М. АЛЯХНОВІЧ, Ф. Д. ГАХАЎ,
У. І. КРЫЛОЎ, М. М. СІРАТА,
У. Г. СПРЫНДЖУК, Я. І. ФІРСАЎ,
С. А. ЧУНІХІН.

В. Г. СПРИНДЖУК

УДК 511

ОЦЕНКИ ЛИНЕЙНЫХ ФОРМ С p -АДИЧЕСКИМИ ЛОГАРИФМАМИ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ЧИСЕЛ

Пусть \mathbb{Q} — поле рациональных чисел; p — рациональное простое число, \mathbb{Q}_p — p -адическое пополнение \mathbb{Q} , \mathbb{T}_p — p -адическое пополнение алгебраического замыкания \mathbb{Q}_p , $|\dots|_p$ — p -адическая норма в \mathbb{T}_p , подчиненная условию $|p|_p = p^{-1}$, $\log z$, $\exp z$ — логарифмическая и экспоненциальная функции в \mathbb{T}_p со значениями в \mathbb{T}_p [1, 2, 9].

Пусть $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ — алгебраические числа, отличные от 0, 1 (в дальнейшем они остаются фиксированными), β_1, \dots, β_n — произвольные алгебраические числа. В поле $\mathbb{K} = \mathbb{Q}(\alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta_1, \dots, \beta_n)$ определим p -адическое нормирование вложением $\mathbb{K} \rightarrow \mathbb{T}_p$, сохраняя при этом обозначение $|\dots|_p$ для чисел из \mathbb{K} (как обычно, мы отождествляем числа из \mathbb{K} с их образами в \mathbb{T}_p). Считаем, что

$$|\alpha_i - 1|_p < p^{-1/(p-1)} \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (1)$$

Наша задача состоит в том, чтобы дать нетривиальные оценки снизу для $|\beta_1 \log \alpha_1 + \dots + \beta_n \log \alpha_n|_p$ в предположении, что числа $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ фиксированы, а числа β_1, \dots, β_n могут изменяться, но так, чтобы их степени не превосходили заранее указанную границу d . Следующая ниже теорема 1 является p -адическим аналогом теоремы Бэйкера [6] о линейных формах с комплекснозначными логарифмами, а ее доказательство — прямым переизложением рассуждений Бэйкера на случай p -адических чисел. Теорема 2 дает лучшую оценку, чем теорема 1, но в предположении, что соответствующая линейная форма с q -адическими логарифмами (q — простое число $\neq p$) не мала в q -адической метрике.

Теорема 1. Пусть $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ мультипликативно независимы, $\kappa > n + 1$. Тогда для любых алгебраических чисел β_1, \dots, β_n степени не более d и в совокупности отличных от (0) имеем

$$|\beta_1 \log \alpha_1 + \dots + \beta_n \log \alpha_n|_p > p^{-(\ln H)^\kappa + c}, \quad (2)$$

где H — верхняя граница высот чисел β_1, \dots, β_n ; $c = c(\alpha_1, \dots, \alpha_n, d, \kappa)$ — эффективно определяемое число.

Очевидно, теорема 1 будет доказана, если будет опровергнута при достаточно большом H возможность неравенства вида

$$|\beta_1 \log \alpha_1 + \dots + \beta_{n-1} \log \alpha_{n-1} - \log \alpha_n|_p < p^{-(\ln H)^\kappa}, \quad (3)$$

где $|\beta_i|_p \leq 1$ ($i = 1, 2, \dots, n-1$), $\kappa > n + 1$ (см. соответствующие рассуждения Бэйкера [6]). Следующая теорема 2 позволяет иногда опровергнуть (3) при $\kappa > 2$ (в более слабой форме см. [3]).

Теорема 2. Пусть $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ — отличные от нуля алгебраические числа, $\beta_1, \dots, \beta_{n-1}$ — алгебраические числа степеней не более d , высот не

более H , q — рациональное простое, $q \neq p$, r — целое, κ , τ , τ_1 — вещественные числа $\tau_1 > \tau$, $\kappa > 2 + \left(2 + \frac{1}{4n}\right) \tau_1$,

$$0 < r < (\ln H)^{\kappa-2 - \left(2 + \frac{1}{4n}\right) \tau_1} \quad (4)$$

Пусть в поле $\mathbf{Q}(\alpha_1, \dots, \alpha_n; \beta_1, \dots, \beta_{n-1})$ определено q -адическое нормирование, ограничения которого на поля $\mathbf{Q}(\alpha_i)$ имеют индексы ветвления меньше $q-1$, при этом

$$|\alpha_i^r - 1|_q < 1 \quad (i=1, 2, \dots, n), \quad |\beta_i|_q \leq 1 \quad (i=1, 2, \dots, n-1), \quad (5)$$

$$|\beta_1 \log(\alpha_1^r) + \dots + \beta_{n-1} \log(\alpha_{n-1}^r) - \log(\alpha_n^r)|_q > q^{-(\ln H)^{\tau/2n}}. \quad (6)$$

Тогда для $H > H_0$ неравенство (3) невозможно; H_0 выражается в явном виде через $\alpha_1, \dots, \alpha_n, d, \kappa, \tau, \tau_1, p$.

Из теоремы 1 легко выводятся следующие утверждения.

Следствие 1. Если $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ — алгебраические над \mathbf{Q} , удовлетворяющие (1) и мультипликативно независимые, то p -адические логарифмы $\log \alpha_1, \dots, \log \alpha_n$ линейно независимы над алгебраическим замыканием \mathbf{Q} .

Следствие 2. Если $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ — как в следствии 1, β_1, \dots, β_n — алгебраические числа, хотя бы одно из которых иррационально, $|\beta_i|_p \leq 1$ ($i=1, 2, \dots, n$), то p -адическое число $\alpha_1^{\beta_1} \dots \alpha_n^{\beta_n}$ трансцендентно.

Следствие 3. Если $\alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta_1, \dots, \beta_n$ — алгебраические над \mathbf{Q} , α_i удовлетворяют (1), $|\beta_i|_p \leq 1$ ($i=1, 2, \dots, n$), β_1, \dots, β_n линейно независимы над \mathbf{Q} , то p -адическое число $\alpha_1^{\beta_1} \dots \alpha_n^{\beta_n}$ трансцендентно.

Следствия 1 и 3 являются аналогами соответствующих результатов Бэйкера [6]; в связи с приложением к теории полей классов следствие 1 недавно было доказано в специальной работе Брюмера [7]. Следствия 2 и 3 обобщают известную теорему Малера [10] о трансцендентности p -адических чисел α^β .

Доказательство теоремы 1. В дальнейшем через c_1, c_2, \dots обозначаем эффективно определяемые положительные величины, не зависящие от H . Для $\alpha, z \in \mathbf{T}_p$, $|\alpha - 1|_p < p^{-1/(p-1)}$, $|z|_p \leq 1$ полагаем $\alpha^z = \exp(z \log \alpha)$. Все необходимые свойства логарифмической и экспоненциальной функций можно найти в [9], а необходимые свойства интеграла Шнирельмана [4] изложены в [2, 5].

Для доказательства теоремы 1 мы установим, что (3) невозможно при достаточно большом H и при $\kappa > n + 1$. Вместо (3) нам удобнее рассмотреть равносильное неравенство

$$|\alpha_1^{\beta_1} \dots \alpha_{n-1}^{\beta_{n-1}} - \alpha_n|_p < p^{-(\ln H)^\kappa}. \quad (7)$$

Пусть $\kappa, \zeta, \varepsilon$ взяты так, что $1 < \zeta < \kappa - 1$, $\varepsilon = \left(1 - \frac{1}{\zeta}\right) \frac{1}{2n}$, $h = \lfloor \ln H \rfloor$, $m = \lfloor h^\zeta \rfloor$, $L = \lfloor m^{1-\varepsilon} \rfloor$.

Лемма 1. Существуют целые рациональные числа $p(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, не все равные нулю, с абсолютными величинами не более $p^{\varepsilon h^{1+\zeta}}$ и такие, что функция

$$\Phi(z_1, \dots, z_{n-1}) = \sum_{\lambda_1=0}^L \dots \sum_{\lambda_n=0}^L p(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \alpha_1^{\gamma_1 z_1} \dots \alpha_{n-1}^{\gamma_{n-1} z_{n-1}},$$

где $\gamma_i = \lambda_i + \beta_i \lambda_n$ ($i=1, 2, \dots, n-1$), удовлетворяет неравенствам

$$|\Phi_{m_1, \dots, m_{n-1}}(lp, \dots, lp)|_p < p^{-h^\kappa} \quad (8)$$

для всех целых l, m_i в пределах $0 \leq l < hm^{\frac{1}{2} \varepsilon}$, $0 \leq m_i \leq m$ ($i=1, 2, \dots, n-1$).

Здесь и в дальнейшем мы полагаем

$$\Phi_{m_1, \dots, m_{n-1}}(z_1, \dots, z_{n-1}) = \frac{\partial^{m_1 + \dots + m_{n-1}}}{\partial z_1^{m_1} \dots \partial z_{n-1}^{m_{n-1}}} \Phi(z_1, \dots, z_{n-1}).$$

Доказательство. Рассмотрим систему уравнений

$$\sum_{\lambda_1=0}^L \dots \sum_{\lambda_{n-1}=0}^L \rho(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \alpha_1^{\lambda_1 l p} \dots \alpha_n^{\lambda_n l p} \gamma_1^{m_1} \dots \gamma_{n-1}^{m_{n-1}} = 0 \quad (9)$$

относительно неизвестных чисел $\rho(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, где l, m_i изменяются в пределах, указанных в формулировке леммы. В силу рассуждений, описанных в статье Бэйкера [6] (см. доказательство леммы 2), существуют целые рациональные $\rho(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ с условием

$$0 \neq \max |\rho(\lambda_1, \dots, \lambda_n)| < p^{\varepsilon_1 h^{1+\zeta}}. \quad (10)$$

Выражение в левой части (8) получается из (9) умножением на $(\log \alpha_1)^{m_1} \dots (\log \alpha_{n-1})^{m_{n-1}}$ и заменой α_n на $\alpha_1^{\beta_1} \dots \alpha_{n-1}^{\beta_{n-1}}$. Так как в силу (1) $|\log \alpha_i|_p = |\alpha_i - 1|_p < 1$, то находим

$$\begin{aligned} & |(\alpha_1^{\lambda_1} \dots \alpha_n^{\lambda_n})^{lp} - (\alpha_1^{\beta_1} \dots \alpha_{n-1}^{\beta_{n-1}})^{lp}|_p = \\ & = |(\alpha_1^{\lambda_1} \dots \alpha_{n-1}^{\lambda_{n-1}})^{lp} (\alpha_n^{\lambda_n lp} - (\alpha_1^{\beta_1} \dots \alpha_{n-1}^{\beta_{n-1}})^{\lambda_n lp})|_p < \\ & < |\alpha_n - \alpha_1^{\beta_1} \dots \alpha_{n-1}^{\beta_{n-1}}|_p < p^{-h^\kappa}, \end{aligned}$$

последнее в силу (7). Очевидно, $|\gamma_i|_p \leq 1$ ($i=1, 2, \dots, n-1$) в силу $|\beta_i|_p \leq 1$, так что переход от (9) к величинам $\Phi_{m_1, \dots, m_{n-1}}(lp, \dots, lp)$ дает (8).

Лемма 2. Для любых целых m_i с условиями $0 \leq m_i \leq m$ ($i=1, 2, \dots, n-1$) и для любого $z \in \mathbb{T}_p$, $|z|_p \leq 1$, имеем

$$|\Phi_{m_1, \dots, m_{n-1}}(z, \dots, z)|_p \leq 1. \quad (11)$$

Далее, для любого целого l в пределах $0 \leq l < h^{\kappa - \tau + \frac{1}{2} \varepsilon}$ справедливо или (8), или

$$|\Phi_{m_1, \dots, m_{n-1}}(lp, \dots, lp)|_p > p^{-c_2(Ll + h^{1+\zeta})}. \quad (12)$$

Доказательство. Положим

$$\Phi_{m_1, \dots, m_{n-1}}(z, \dots, z) = P \sum_{\bar{\lambda}} \rho(\bar{\lambda}) q(\bar{\lambda}, z), \quad (13)$$

где $\bar{\lambda} = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, $P = (\log \alpha_1)^{m_1} \dots (\log \alpha_{n-1})^{m_{n-1}}$, $q(\bar{\lambda}, z) = \alpha_1^{\lambda_1 z} \dots \alpha_{n-1}^{\lambda_{n-1} z} \gamma_1^{m_1} \dots \gamma_{n-1}^{m_{n-1}}$. В силу (1) имеем $|\log \alpha_i|_p = |\alpha_i - 1|_p < 1$, $|\gamma_i|_p \leq 1$, $|\alpha_i^{\lambda_i z}|_p = |\exp \times (\lambda_i z \log \alpha_i)|_p = 1$. Поэтому верно (11).

Положим далее

$$R = P' \sum_{\bar{\lambda}} \rho(\bar{\lambda}) q'(\bar{\lambda}, l), \quad (14)$$

$$P' = (a_1 \dots a_n)^{Llp} b_1^{m_1} \dots b_{n-1}^{m_{n-1}}, \quad q'(\bar{\lambda}, l) = (\alpha_1^{\lambda_1} \dots \alpha_n^{\lambda_n})^{lp} \gamma_1^{m_1} \dots \gamma_{n-1}^{m_{n-1}},$$

где a_i, b_j — целые рациональные числа, для которых α_i, β_j — целые алгебраические. Тогда $P'q(\bar{\lambda}, l)$ — целые алгебраические и, следовательно, R — целое алгебраическое степени не более $D = d_0^n d^{n-1}$ над \mathbf{Q} , где d_0 — наибольшая из степеней α_i над \mathbf{Q} . Очевидно, верхней границей абсолютной величины R и всех сопряженных с R величин будет $p^{c_s(Ll+h^{1+\tau})}$. Поэтому $|\text{Nm}(R)| < p^{D c_s(Ll+h^{1+\tau})}$ и, следовательно, по «формуле произведения» [8] (или по теореме 2 [1], стр. 374)

$$|R|_p > p^{-c_s(Ll+h^{1+\tau})}, \quad (15)$$

если $R \neq 0$. В силу (7) находим

$$|q(\bar{\lambda}, l) - q'(\bar{\lambda}, l)|_p < p^{-h^x}$$

для любого целого l (см. выше доказательство леммы 1). Сравнивая (13), (14), находим теперь

$$|P^{-1} \Phi_{m_1, \dots, m_{n-1}}(lp, \dots, lp) - P'^{-1} R|_p < p^{-h^x}. \quad (16)$$

Если $R \neq 0$, то из (15) следует

$$|P^{-1} \Phi_{m_1, \dots, m_{n-1}}(lp, \dots, lp)|_p > p^{-c_s(Ll+h^{1+\tau})}$$

при условии, что l не превосходит границы, указанной в условиях леммы, и если H достаточно велико.

В силу (1) находим

$$|P|_p = |(\log a_1)^{m_1} \dots (\log a_{n-1})^{m_{n-1}}|_p = \prod_{i=1}^{n-1} |\alpha_i - 1|_p^{m_i} > p^{-c_s m}.$$

Следовательно, мы получаем (12).

Если $R=0$, то из (16) находим (8).

Лемма 3. Пусть $k_0 = \left\lfloor \frac{2(\kappa - 1 - \xi)}{\varepsilon \xi} \right\rfloor$. Тогда выполняется (8) для всех целых l, m_i в пределах $0 \leq l < l_{k_0}, 0 \leq m_i \leq m_2^{-k_0}$, где

$$l_k = \left\lfloor h m^{\frac{1}{2} \varepsilon k} \right\rfloor \quad (k=1, 2, \dots, k_0). \quad (17)$$

Доказательство. Положим $M_k = \lfloor m 2^{-k} \rfloor$ ($k=1, 2, \dots, k_0$). Будем доказывать по индукции, что неравенство (8) справедливо для всех целых l, m_i в пределах $0 \leq l < l_{k+1}, 0 \leq m_i \leq M_{k+1}$ ($i=1, 2, \dots, n-1$), $0 \leq k < k_0$ (при $k=0$ последнее утверждение справедливо в силу леммы 1). Итак, допустим, что (8) выполняется для всех целых l, m_i в пределах $0 \leq l < l_k, 0 \leq m_i \leq M_k$.

Пусть m_i — произвольные целые числа в пределах $0 \leq m_i \leq M_{k+1}$ ($i=1, 2, \dots, n-1$). Положим $f(z) = \Phi_{m_1, \dots, m_{n-1}}(z, \dots, z)$. Тогда

$$\begin{aligned} f^{(s)}(z) &= \left(\frac{\partial}{\partial z_1} + \dots + \frac{\partial}{\partial z_{n-1}} \right)^s \Phi_{m_1, \dots, m_{n-1}}(z_1, \dots, z_{n-1}) \Big|_{z_i=z} = \\ &= \sum_{s_1 + \dots + s_{n-1} = s} \frac{s!}{s_1! \dots s_{n-1}!} \Phi_{m_1+s_1, \dots, m_{n-1}+s_{n-1}}(z, \dots, z). \end{aligned}$$

Если $s \leq M_{k+1} \leq m2^{-k-1}$, то $\max_{(i)} (m_i + s_i) \leq m2^{-k}$, $m_i + s_i \leq M_k$. Следовательно, по индуктивному предположению,

$$|f^{(s)}(lp)_p \leq \max_{s_1+\dots+s_{n-1}=s} |\Phi_{m_1+s_1, \dots, m_{n-1}+s_{n-1}}(lp, \dots, lp)|_p < p^{-h^x} \quad (18)$$

для $0 \leq s \leq M_{k+1}$, $0 \leq l < l_k$. Докажем, что из этого вытекает

$$|f(lp)_p < p^{-h^x}, \quad 0 \leq l < l_{k+1}, \quad (19)$$

и тем самым докажем лемму.

Положим $F(z) = [z(z-p) \dots (z-(l_k-1)p)]^{M_{k+1}+1}$. Функция $f(z)$ регулярна в круге $|z|_p \leq 1$, поэтому для $|z|_p < 1$ справедливо интегральное представление

$$f(z) = \int_{0,1} \frac{F(z)}{F(\xi)} \frac{f(\xi)\xi}{\xi-z} d\xi - \sum_{s=0}^{M_{k+1}} \sum_{l=0}^{l_k-1} \frac{f^{(s)}(lp)}{s!} \int_{lp, \rho} \frac{F(z)}{F(\xi)} \frac{(\xi-lp)^{s+1}}{\xi-z} d\xi,$$

где $\rho \in T_p$, $(2pl_{k+1})^{-1} < |\rho|_p < (pl_{k+1})^{-1}$ (интегралы в смысле Шнирельмана [4]; доказательство этой формулы получается применением теории вычетов регулярных функций в T_p подобно доказательству аналогичной формулы в теории комплекснозначных регулярных функций). В силу (11) $|f(z)|_p \leq 1$ для $z = jp$ ($j = 0, 1, \dots$). Поэтому находим

$$\left| \int_{0,1} \frac{F(jp)}{F(\xi)} \frac{f(\xi)\xi}{\xi-jp} d\xi \right|_p \leq \leq \max_{|\xi|_p=1} \left(\frac{|F(jp)|_p}{|F(\xi)|_p} \frac{|f(\xi)\xi|_p}{|\xi-jp|_p} \right) < |F(jp)|_p \leq p^{-l_k(M_{k+1}+1)}, \quad (20)$$

так как в силу $|\xi|_p = 1$ имеем $|F(\xi)|_p = 1$, $|\xi - jp|_p = 1$. Аналогично

$$\left| \int_{lp, \rho} \frac{F(jp)}{F(\xi)} \frac{(\xi-lp)^{s+1}}{\xi-jp} d\xi \right|_p \leq \max_{|\xi|_p=1} \left(\frac{|F(jp)|_p}{|F(\xi)|_p} \frac{|\xi-lp|_p^{s+1}}{|\xi-jp|_p} \right). \quad (21)$$

По условию выбора ρ находим $|\xi - jp|_p \geq |\xi - lp|_p = |\rho|_p$ для $|\xi|_p = 1$ ($j = 0, 1, \dots$):

$$|\xi - jp|_p = \begin{cases} |\xi - lp|_p = |\rho|_p > (2pl_{k+1})^{-1}, & j = l, \\ |lp - jp|_p = p^{-1}|l - j|_p, & j \neq l. \end{cases}$$

Поэтому

$$\begin{aligned} & |F(\xi)|_p \quad |\rho|_p^{M_{k+1}+1} \left(\prod_{\substack{j=0 \\ j \neq l}}^{l_k-1} p^{-1}|l-j|_p \right)^{M_{k+1}+1} > \\ & > (2pl_{k+1})^{-(M_{k+1}+1)} p^{-l_k(M_{k+1}+1)} |l(l_k-l-1)!|_p^{M_{k+1}+1} > \\ & > (2pl_{k+1})^{-(M_{k+1}+1)} p^{-l_k(M_{k+1}+1)} \left(1 + \frac{1}{p-1}\right), \end{aligned}$$

так как $l(l_k-l-1)!$ делит $l_k!$, $|l_k!|_p > p^{-\frac{l_k}{p-1}}$. Таким образом, оценкой интеграла (21) будет величина

$$p^{-l_k(M_{k+1}+1)} (2\rho l_{k+1})^{M_{k+1}} p^{l_k(M_{k+1}+1)} \left(1 + \frac{1}{p-1}\right) |\rho|_p^{s+1} |\rho|_p^{-1} < \\ < (2l_{k+1})^{M_{k+1}} p^{(M_{k+1}+1) \frac{l_k}{p-1}} (p l_{k+1})^{-s}.$$

Следовательно, для j в пределах $0 \leq j < l_{k+1}$ находим в силу (18), (20)

$$|f(j\rho)|_p < \max(p^{-l_k(M_{k+1}+1)}, p^{-h^x} (2l_{k+1})^{M_{k+1}} p^{l_k(M_{k+1}+1)}),$$

так как

$$\sum_{s=0}^{M_{k+1}} \frac{(p l_{k+1})^{-s}}{|s!|_p} < \sum_{s=0}^{\infty} \left(p^{-\frac{1}{p-1}} l_{k+1}\right)^{-s} \leq p.$$

Таким образом, для $0 \leq j < l_{k+1}$ находим

$$|f(j\rho)|_p < \max(p^{-c_0 l_k^m}, p^{-h^x + c_1 l_k^m}).$$

В силу (17) и по определению k_0 имеем

$$l_k < hm^{\frac{1}{2} \varepsilon k} \leq h^{1 + \frac{1}{2} \varepsilon \zeta (k_0 - 1)} \leq h^{x - \zeta - \frac{1}{2} \varepsilon \zeta}, \quad (22)$$

так что при достаточно большом h

$$|f(j\rho)|_p < p^{-c_0 l_k^m}, \quad 0 \leq j < l_{k+1}. \quad (23)$$

Аналогично (22) находим $l_{k+1} < h^{x-\zeta}$, следовательно, можно применить лемму 2: справедливо или (19), или

$$|f(j\rho)|_p > p^{-c_2(Lj+h^{1+\zeta})}.$$

Пусть справедливо последнее. Тогда в силу (23) должно быть $Ll_{k+1} + h^{1+\zeta} > c_3 l_k^m$. Однако при достаточно большом h это невозможно, так как

при $h \rightarrow \infty$ $Ll_{k+1} \sim hm^{1 + \frac{1}{2} \varepsilon (k-2)}$, $l_k^m \sim hm^{1 + \frac{1}{2} \varepsilon k}$ $\sim h^{1+\zeta + \frac{1}{2} \varepsilon \zeta k}$. Следовательно, справедливо (19), что и доказывает лемму.

Положим для $|z|_p \leq 1$

$$\Psi_{m_1, \dots, m_{n-1}}(z) = \sum_{\lambda} p(\bar{\lambda}) (\alpha_1^{\lambda_1} \dots \alpha_n^{\lambda_n})^z \gamma_1^{m_1} \dots \gamma_{n-1}^{m_{n-1}}.$$

Оценивая разность между $\Psi_{m_1, \dots, m_{n-1}}(l\rho)$ и $P^{-1} \Phi_{m_1, \dots, m_{n-1}}(l\rho, \dots, l\rho)$ с учетом (7), мы получим

$$|\Psi_{m_1, \dots, m_{n-1}}(l\rho)|_p \leq \max(p^{-h^x}, |P^{-1} \Phi_{m_1, \dots, m_{n-1}}(l\rho, \dots, l\rho)|_p).$$

Если $0 \leq l < h^{x-\zeta - \frac{1}{2} \varepsilon \zeta}$ (считаем здесь и в дальнейшем $\kappa > \zeta \left(1 + \frac{1}{2} \varepsilon\right)$)

и $0 \leq m_i < m2^{-k_0}$ ($i = 1, 2, \dots, n-1$), то в силу леммы 3 находим

$$|\Psi_{m_1, \dots, m_{n-1}}(l\rho)|_p \leq \max(p^{-h^x}, p^{-h^x + c_3 m}) < p^{-\frac{1}{2} h^x}. \quad (24)$$

Далее рассуждаем, как в доказательстве леммы 2. Умножая $\Psi_{m_1, \dots, m_{n-1}}(l\rho)$ на $(a_1 \dots a_n)^{Ll\rho} b_1^{m_1} \dots b_{n-1}^{m_{n-1}}$, мы получим целое алгебраическое число R

степени не более D , все сопряженные которого по абсолютной величине не превосходят

$$p^{c_3(L+h^{1+\zeta})} < p^{c_0(h^{(1-\varepsilon)\zeta+x-\zeta-\frac{1}{2}\varepsilon\zeta})+c_3h^{1+\zeta}} < \\ < p^{c_0(h^{x-\frac{3}{2}\varepsilon\zeta})+c_3h^{1+\zeta}} < p^{\delta h^x},$$

где $\delta = \delta(h) \rightarrow 0$ при $h \rightarrow \infty$. Следовательно, в силу «формулы произведения» [8] и по (24) находим

$$p^{-\delta h^x D} < |R|_p < p^{-\frac{1}{12} h^x},$$

если h достаточно велико и $R \neq 0$. Значит, $R = 0$, и мы получаем систему уравнений

$$\sum_{\lambda_1=0}^L \dots \sum_{\lambda_n=0}^L p(\lambda_1, \dots, \lambda_n) (\alpha_1^{\lambda_1} \dots \alpha_n^{\lambda_n})^l \rho \gamma_1^{m_1} \dots \gamma_{n-1}^{m_{n-1}} = 0, \\ 0 \leq l < h^{x-\zeta-\frac{1}{2}\varepsilon\zeta}, \quad 0 \leq m_i < m 2^{-k_0} \quad (i=1, 2, \dots, n-1), \quad (25)$$

где k_0 определено в лемме 3 $\left(\kappa > \zeta \left(1 + \frac{1}{2} \varepsilon \right) \right)$.

В частности, из (25) при $\kappa > n + 1$ следует

$$\sum_{\lambda_1=0}^L \dots \sum_{\lambda_n=0}^L p(\lambda_1, \dots, \lambda_n) (\alpha_1^{\lambda_1} \dots \alpha_n^{\lambda_n})^l \rho = 0 \quad (26)$$

для $l = 0, 1, \dots, (L+1)^n - 1$, если h достаточно велико (берем ζ настолько близким к 1, что $\zeta(1-\varepsilon)n < \kappa - \zeta - \frac{1}{2}\varepsilon\zeta$; можно взять $\zeta = \kappa/(n+1)$).

Равенства (26) можно рассматривать как систему $(L+1)^n$ однородных уравнений относительно $(L+1)^n$ неизвестных $p(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ с определителем Вандермонда, построенным на числах $(\alpha_1^{\lambda_1} \dots \alpha_n^{\lambda_n})^l, 0 \leq \lambda_i \leq L (i=1, 2, \dots, n)$. Если $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ мультипликативно независимы, то этот определитель отличен от нуля, следовательно, все числа $p(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ равны нулю. Это противоречит выбору чисел $p(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ (лемма 1), так что теорема 1 доказана.

Доказательство теоремы 2. Проанализируем систему (25) в предположении, что $\kappa > 2 + \left(2 + \frac{1}{4n} \right) \tau_1$ (при больших n и малых τ_1 это более слабое требование по сравнению с предыдущим: $\kappa > n + 1$).

Выделим из системы уравнений (25) подсистему, выбирая лишь уравнения, в которых l делится на r , где r — число, определенное в условиях теоремы 2. Мы получим новую систему, в которой числа $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ заменены на $\theta_1 = \alpha_1^{pr}, \dots, \theta_n = \alpha_n^{pr}$ и l меняется в пределах $0 \leq l < h^\zeta$, если положить $\zeta = 1 + \tau_1$ и применить (4). Получаемые таким образом уравнения дают следующую систему:

$$\sum_{\lambda_1=0}^L \dots \sum_{\lambda_n=0}^L p(\lambda_1, \dots, \lambda_n) (\theta_1^{\lambda_1} \dots \theta_n^{\lambda_n} - 1)^l \gamma_1^{m_1} \dots \gamma_{n-1}^{m_{n-1}} = 0 \quad (27)$$

для любых целых l, m_i в пределах

$$0 \leq l < m, 0 \leq m_i < m2^{-k_0} \quad (i = 1, 2, \dots, n-1). \quad (28)$$

Заметим теперь, что q -адическое нормирование в $\mathbf{Q}(\alpha_i)$ индуцируется \mathbf{q}_i -адическим нормированием с некоторым простым идеалом \mathbf{q}_i поля $\mathbf{Q}(\alpha_i)$, делящим q . Неравенство $|\alpha_i^r - 1|_q < 1$ равносильно сравнению $\alpha_i^r \equiv 1 \pmod{\mathbf{q}_i}$, следовательно, оно равносильно неравенству $|\alpha_i^r - 1|_q \leq q^{-1/e_i}$, где e_i — индекс ветвления \mathbf{q}_i относительно q . По условию теоремы $e_i < q - 1$, так что

$$|\alpha_i^r - 1|_q < q^{-1/(q-1)} \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (29)$$

Кроме того, $e_i \leq e \leq d_0$, где d_0 — верхняя граница степеней чисел α_i , $e = \max e_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$). Поэтому

$$|\alpha_i^r - 1|_q \leq q^{-\sigma}, \quad \sigma = 1/e \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (30)$$

Из последних неравенств следует

$$|\theta_1^{\lambda_1} \dots \theta_n^{\lambda_n} - 1|_q \leq q^{-\sigma} \quad (31)$$

для любых целых $\lambda_1, \dots, \lambda_n$.

Пусть $\omega_0, \dots, \omega_{n-1}$ — произвольные числа из \mathbf{T}_q , $\max |\omega_i|_q \leq 1$ ($i = 0, 1, \dots, n-1$). Умножая (27) на

$$\binom{\omega_0}{l_1} \frac{(\omega_1 q^t)^{m_1}}{m_1!} \dots \frac{(\omega_{n-1} q^t)^{m_{n-1}}}{m_{n-1}!},$$

где $t = 2^{k_0+2}$, суммируя по l, m_i в пределах (28) и применяя разложения

$$\exp z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \quad z \in \mathbf{T}_q, |z|_q < q^{-\frac{1}{q-1}},$$

$$(1+z)^t = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{t}{n} z^n, \quad z, t \in \mathbf{T}_q, |z|_q < q^{-\frac{1}{q-1}}, |t|_q \leq 1,$$

находим

$$\left| \sum_{\lambda_1=0}^L \dots \sum_{\lambda_n=0}^L p(\bar{\lambda}) (\theta_1^{\lambda_1} \dots \theta_n^{\lambda_n})^{\omega_0} \prod_{i=1}^{n-1} \exp(\gamma_i \omega_i q^t) \right|_q \leq q^{-\sigma m + \frac{m}{q-1}}.$$

Следовательно,

$$\left| \sum_{\lambda_1=0}^L \dots \sum_{\lambda_n=0}^L p(\bar{\lambda}) \prod_{i=1}^n \exp(\lambda_i u_i) \right|_p \leq q^{-\sigma m + \frac{m}{q-1}}, \quad (32)$$

где обозначено

$$u_1 = \omega_0 \log \theta_1 + \omega_1 q^t,$$

$$\dots$$

$$u_{n-1} = \omega_0 \log \theta_{n-1} + \omega_{n-1} q^t, \quad (33)$$

$$u_n = \omega_0 \log \theta_n + \beta_1 \omega_1 q^t + \dots + \beta_{n-1} \omega_{n-1} q^t.$$

Относительно $\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_{n-1}$ имеем линейное преобразование с определителем Δ :

$$|\Delta|_q = q^{-t(n-1)} |\log \theta_n - \beta_1 \log \theta_1 - \dots - \beta_{n-1} \log \theta_{n-1}|_q.$$

$$|(\alpha_1^{\beta_1} \dots \alpha_{n-1}^{\beta_{n-1}} \alpha_n^{-1})^r - 1|_q > q^{-(\ln H)^{\tau/2n}}.$$

Если, в частности, β_i — рациональные числа, $\beta_i = -\frac{b_i}{b_n}$, b_i — целые, $(b_n, q) = 1$, то последнее неравенство означает

$$|(\alpha_1^{b_1} \dots \alpha_n^{b_n})^r - 1|_q > q^{-(\ln H)^{\tau/2n}}, \quad H = \max_{1 \leq i \leq n} |b_i|.$$

Таким образом, в тех случаях, когда можно найти простой идеал $\mathfrak{q} | q$, входящий в разность $\alpha_1^{b_1} \dots \alpha_n^{b_n} - 1$ в малой степени, можно утверждать, что справедлива более сильная оценка для соответствующей линейной формы с p -адическими логарифмами, чем та, которая следует из теоремы 1. Это замечание полезно для анализа некоторых диофантовых уравнений.

Литература

1. Борович З. И., Шафаревич И. Р. Теория чисел. М., 1964.
2. Ленской Д. Н. Функции в неархимедовски нормированных полях. Саратов, 1962.
3. Спринджук В. Г. ДАН БССР, 11, № 9, 1967.
4. Шнирельман Л. Г. Изв. АН СССР, сер. матем., № 5—6, 1938.
5. Adams W. Amer. J. Math., 88, № 2, 279, 1966.
6. Baker A. Mathematika, 13, № 2, 204, 1966.
7. Brumer A. Mathematika, 14, № 2, 121, 1967.
8. Lang S. Diophantine geometry. N. Y., 1962.
9. Hasse H. Zahlentheorie. Berlin, 1963.
10. Mahler K. Compositio Mathematica, 2, 259, 1935.

Институт математики
АН БССР

Поступило в редакцию
9.IV 1968

В. С. АЙЗЕНШТАТ, Д. Н. КРАВЧУК

**ОБ ЭКСТРЕМУМЕ ЛИНЕЙНОЙ ФОРМЫ НА МНОЖЕСТВЕ
 ВСЕХ ЦИКЛОВ ПРОИЗВОЛЬНОЙ ДЛИНЫ k ГРУППЫ S_n**

Пусть $f = \sum_{v=1}^n a_v x_v$ — вещественная линейная форма, а $b = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ — фиксированный n -мерный вещественный вектор. В статье рассматривается задача отыскания подстановок, доставляющих минимальное и максимальное значения функции $f_t(b) = \sum_{v=1}^n a_v b_{t(v)}$, где t пробегает множество всех циклов длины k симметрической группы S_n . Эта задача решается в следующих двух случаях упорядочения компонент вектора b :

$$b_1 \geq b_2 \geq \dots \geq b_n, \quad (1)$$

$$b_1 \leq b_2 \leq \dots \leq b_n. \quad (2)$$

Можно считать, что всегда $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n$.

Если выполняются неравенства (1), справедлива следующая

Теорема 1. Для отыскания подстановки, доставляющей минимальное значение линейной форме на множестве всех циклов длины k симметрической группы S_n , достаточно ограничиться рассмотрением такого его подмножества, подстановки которого действительно перемещают лишь k подряд расположенных в ряду 1, 2, ..., n символов.

Доказательство. Пусть минимум линейной форме на множестве всех циклов длины k доставляет подстановка

$$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k),$$

где $\min \alpha_i = \alpha_1$, $\max \alpha_i = \alpha_j$, $i = 1, 2, \dots, k$.

Предположим, что $\alpha_1 + k - 1 < \alpha_j$, и покажем, что существует подстановка α' , действительно перемещающая k подряд расположенных в ряду 1, 2, ..., n символов $\alpha_1, \alpha_1 + 1, \dots, \alpha_1 + k - 1$, значение формы на которой не превосходит ее значения на подстановке α .

Выберем в α все те старшие символы, начиная с α_j , которые заполняют без пропусков отрезок чисел натурального ряда. Пусть α_q — крайний справа в α из этих символов, а β — минимальный среди них. Уменьшим все выбранные символы на 1 и образуем подстановку

$$\alpha' = (\alpha_1, \dots, \alpha_{j-1}, \alpha_{j+1}, \dots, \alpha_q, \beta - 1, \alpha_{q+1}, \dots, \alpha_k).$$

Очевидно,

$$f_\alpha(b) - f_{\alpha'}(b) = (a_{\alpha_{j-1}} - a_{\alpha_j})(b_{\alpha_j} - b_{\alpha_{j+1}}) + (a_{\alpha_q} - a_{\beta-1})(b_{\alpha_{q+1}} - b_{\beta-1}).$$

Здесь $\alpha_q > \beta - 1 > \alpha_{q+1}$, следовательно,

$$f_\alpha(b) - f_{\alpha'}(b) \geq 0.$$

После конечного числа преобразований подстановки α придем к подстановке $\bar{\alpha}$, действительно перемещающей символы $\alpha_1, \alpha_1 + 1, \dots, \alpha_1 + k - 1$, и такой, что

$$f_{\bar{\alpha}}(b) \leq f_t(b).$$

Теорема доказана.

Как следует из [1], минимум форме среди циклов, действительно перемещающих символы $\alpha_1, \alpha_1 + 1, \dots, \alpha_1 + k - 1$, доставляет подстановка $(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k)$, где $\beta_1 < \beta_2 < \dots < \beta_j > \dots > \beta_k$, $\beta_1 = \alpha_1$, $\beta_j = \alpha_1 + k - 1$. Поэтому для отыскания в указанном подмножестве множества всех циклов длины k минимизирующей подстановки необходимо $n + 1 - k$ раз применить алгоритм, описанный в работе [2].

Если имеют место неравенства (2), справедлива

Теорема 2. *Задача отыскания минимума линейной формы на множестве всех циклов длины k симметрической группы S_n при четном k равносильна задаче минимизации линейной формы от k переменных на множестве всех полных циклов группы S_k , перемещающей символы $1, 2, \dots, k/2, n + 1 - k/2, \dots, n$.*

Доказательство. Пусть k — произвольное натуральное число, а подстановка $t = (t_1, t_2, \dots, t_k)$ минимизирует значение линейной формы на множестве всех циклов длины k при условиях (2). Покажем, что среди минимизирующих подстановок всегда есть подстановка, действительно перемещающая символы $1, n, 2, n - 1, \dots, [k/2], n + 1 - [k/2]$, где $[k/2]$ — целая часть числа $k/2$.

Пусть

$$t_{i_1} < t_{i_2} < \dots < t_{i_k}. \quad (3)$$

Будем обозначать первые $[k/2]$ символов в (3) через α_i , а последние $[k/2]$ символов — через β_i . Тогда можно считать [1], что подстановка t имеет вид

$$t = (\alpha_1, \beta_2, \alpha_3, \beta_4, \dots, \alpha_{k-1}, \beta_k),$$

причем при нечетном k между какими-то двумя символами α и β стоит символ $t_{\frac{i_{k+1}}{2}}$.

Предположим, что подстановка t действительно перемещает символы $1, n, \dots, r, n + 1 - r$ и оставляет неподвижным хотя бы один из символов $r + 1$ и $n - r$. Пусть $\alpha_p = \min_{\alpha_i > r} \alpha_i$, $\beta_q = \max_{\beta_j < n + 1 - r} \beta_j$. Возьмем подстановку

$$t' = (\alpha_1, \beta_2, \dots, \beta_{p-1}, \bar{\alpha}_p, \beta_{p+1}, \dots, \alpha_{q-1}, \bar{\beta}_q, \alpha_{q+1}, \dots),$$

где $\bar{\alpha}_p = r + 1$, $\bar{\beta}_q = n - r$, и покажем, что $f_{t'}(b) \leq f_t(b)$. Действительно,

$$\begin{aligned} f_t(b) - f_{t'}(b) &= a_{\beta_{p-1}}(b_{\alpha_p} - b_{\bar{\alpha}_p}) + a_{\alpha_p}(b_{\beta_{p+1}} - b_{\alpha_p}) + \\ &+ a_{\bar{\alpha}_p}(b_{\alpha_p} - b_{\beta_{p+1}}) + a_{\alpha_{q-1}}(b_{\beta_q} - b_{\bar{\beta}_q}) + \\ &+ a_{\beta_q}(b_{\alpha_{q+1}} - b_{\bar{\beta}_q}) + a_{\bar{\beta}_q}(b_{\bar{\beta}_q} - b_{\alpha_{q+1}}). \end{aligned}$$

Очевидно,

$$b_{\alpha_p} - b_{\bar{\alpha}_p} \geq 0, \quad b_{\beta_q} - b_{\bar{\beta}_q} \leq 0, \quad a_{\beta_{p-1}} \geq a_{\alpha_p}, \quad a_{\alpha_{q-1}} \leq a_{\beta_q}.$$

Следовательно,

$$f_t(b) - f_{t'}(b) \geq (a_{\alpha_p} - a_{\bar{\alpha}_p})(b_{\beta_{p+1}} - b_{\bar{\alpha}_p}) + (a_{\beta_q} - a_{\bar{\beta}_q})(b_{\alpha_{q+1}} - b_{\bar{\beta}_q}) \geq 0.$$

Легко видеть, что при нечетном k $f_{i'}(b) \leq f_i(b)$ и в том случае, когда один из символов $\beta_{p-1}, \beta_{p+1}, \alpha_{q-1}, \alpha_{q+1}$ окажется символом $t_{i \frac{k+1}{2}}$. Таким образом,

при любом натуральном k среди подстановок, минимизирующих значение линейной формы на множестве всех циклов длины k из S_n , содержится подстановка t_0 , действительно перемещающая $2 \lfloor k/2 \rfloor$ символов $1, 2, \dots, \lfloor k/2 \rfloor, n+1 - \lfloor k/2 \rfloor, \dots, n$. В частности, при четном k они полностью определяют множество действительно перемещаемых подстановкой t_0 символов.

Теорема доказана.

Рассмотрим теперь случай нечетного k . Пусть $p = \frac{k-1}{2}, q = n+1-p$.

При нечетном k , как следует из доказательства теоремы 2, существует минимизирующая подстановка, для которой известны $k-1$ символов $1, 2, \dots, p, q, \dots, n$ из общего числа k действительно перемещаемых ею символов. Оказывается, что k -м символом в этой подстановке в зависимости от коэффициентов формы и компонент вектора b может быть любой из $n+1-k$ оставшихся символов $t_i, p < t_i < q$. Из [1] следует, что минимизирующую

подстановку можно искать в множестве N_k , состоящем из $2 \cdot 3^{\frac{k-3}{2}}$ циклов определенной структуры, которые содержат в качестве γ один из этих символов t_i . Прежде чем воспользоваться описанным в [2] алгоритмом для отыскания минимизирующей подстановки, необходимо определить значение символа γ в каждом цикле множества N_k .

Пусть

$$\alpha = (1, \dots, \xi, \gamma, \eta, \dots)$$

какая-либо подстановка из N_k . Возьмем цикл длины $k-1$:

$$\alpha' = (1, \dots, \xi, \eta, \dots).$$

Легко видеть, что

$$f_\alpha(b) = f_{\alpha'}(b) + \pi_{\xi\eta}^y, \quad (4)$$

где

$$\pi_{\xi\eta}^y = (a_\xi - a_\eta)(b_\gamma - b_\eta).$$

Из (4) следует, что в подстановке α в качестве γ должен быть выбран такой из символов t_i , для которого

$$\pi_{\xi\eta}^y \leq \pi_{\xi\eta}^{t_i}, \quad p < t_i < q.$$

Из структуры подстановок множества N_k видно [1], что в подстановках этого множества символ γ расположен только между следующими символами ξ, η :

$$\begin{aligned} &1, q; 2, q; \dots; p, q; p, q+1; \dots; p, n; \\ &q, 1; q, 2; \dots; q, p; q+1, p; \dots; n, p. \end{aligned} \quad (5)$$

Общее число этих пар символов равно $2(k-2)$.

Теорема 3. Если выполняются неравенства (2), то подстановка, минимизирующая значение линейной формы на множестве всех циклов длины k симметрической группы S_n при нечетном k , находится при помощи алгоритма I.

Алгоритм I.

1. Вычислить величины

$$\pi_{\xi\eta}^y = \min_{p < t_i < q} \pi_{\xi\eta}^{t_i}$$

для каждой пары символов ξ , η из (5). Общее число величин $\pi_{\xi\eta}^y$ равно $2(k-2)$.

2. Вычислить величины

$$C_{is}^0 = (a_i - a_{n+2-s})(b_{s-1} - b_s); D_{si}^0 = (a_s - a_{s-1})(b_{n+2-s} - b_i),$$

$$s = q + 1, \dots, n; i = 1, \dots, n + 1 - s,$$

$$E_{is}^0 = (a_s - a_{s+1})(b_{n-s} - b_i); F_{si}^0 = (a_i - a_{n-s})(b_{s+1} - b_s),$$

$$s = 2, \dots, p - 1; i = n + 2 - s, \dots, n.$$

Общее число величин, рассчитываемых на втором шаге, равно $\frac{(k-3)^2}{2}$.

3. Выполнить следующие вычисления, полагая те величины C_{is}^0 , D_{si}^0 , E_{is}^0 и F_{si}^0 , у которых хотя бы один из индексов есть p или q , равными величинам $\pi_{\xi\eta}^y$ с такими же индексами:

$$(CF)^j = \min(C_{p-j, q+j}^j, F_{p-j, q+j+1}^j),$$

$$(DE)^j = \min(D_{q+j, p-j}^j, E_{q+j+1, p-j}^j), j = 0, \dots, p-2,$$

$$(CD)^j = \min(C_{p-j, q+j}^j, D_{q+j, p-j-1}^j),$$

$$(DC)^j = \min(D_{q+j, p-j}^j, C_{p-j-1, q+j}^j), j = 0, \dots, p-3,$$

$$C_{i, q+j+1}^{j+1} = \min[(DE)^j, C_{i, q+j}^j] + C_{i, q+j+1}^0,$$

$$D_{q+j+1, i}^{j+1} = \min[(CF)^j, D_{q+j, i}^j] + D_{q+j+1, i}^0,$$

$$j = 0, \dots, p-2, i = 1, \dots, p-j-1,$$

$$E_{i, p-j-1}^{j+1} = \min[(DC)^j, E_{i, p-j}^j] + E_{i, p-j-1}^0,$$

$$F_{p-j-1, i}^{j+1} = \min[(CD)^j, F_{p-j, i}^j] + F_{p-j-1, i}^0,$$

$$j = 0, \dots, p-3, i = q + 2 + j, \dots, n.$$

Общее число величин, рассчитываемых на третьем шаге, равно $\frac{(k-1)^2}{2} - 4$.

4. Представить величину $J = \min(C_{1n}^{p-1}, D_{n1}^{p-1})$ в виде суммы p слагаемых, рассчитываемых на первом и втором шагах алгоритма. Эти слагаемые надо расположить последовательно, начиная с C_{1n}^0 , если $C_{1n}^{p-1} \leq D_{n1}^{p-1}$, и с D_{n1}^0 — в противном случае. Последним (и единственным) в этом представлении будет слагаемое вида $\pi_{\xi\eta}^y$. Минимизирующая подстановка строится следующим образом: вначале подстановка $(1, n)(2, n-1) \dots (p, q)$ умножается справа на $p-1$ транспозиций, соответствующих первым $p-1$ слагаемым в представлении величины J . Эти транспозиции определяются по правилу: слагаемым C_{is}^0 , D_{si}^0 , E_{is}^0 и F_{si}^0 отвечают транспозиции $(s, s-1)$, $(i, n+2-s)$, $(i, n-s)$ и $(s, s+1)$. Затем в полученном таким образом цикле

$$(1, \alpha_2, \dots, \xi, \eta, \dots, \alpha_{k-1})$$

между символами ξ и η надо поместить символ γ .

Рассмотрим задачу отыскания подстановок, доставляющих максимальное значение линейной форме на множестве всех циклов длины k группы S_n при условиях (1) и (2). Справедливы следующие утверждения.

Теорема 1а. Для отыскания подстановки, доставляющей максимальное значение линейной форме на множестве всех циклов длины k группы S_n при условиях (2), достаточно ограничиться таким его подмножеством, подстановки которого действительно перемещают лишь k подряд расположенных в ряду $1, 2, \dots, n$ символов.

Теорема 2а. Если выполняются условия (1), то задача отыскания максимума линейной формы на множестве всех циклов длины k при четном k равносильна задаче максимизации линейной формы от k переменных на множестве всех полных циклов группы S_k .

Заменим везде в алгоритме I операцию нахождения минимума на операцию отыскания максимума величин и назовем полученную последовательность действий алгоритмом II.

Теорема 3а. Если выполняются условия (1), то подстановка, доставляющая максимальное значение линейной форме на множестве всех циклов длины k группы S_n при нечетном k , находится при помощи алгоритма II.

Литература

1. Айзенштат В. С., Кравчук Д. Н. ДАН БССР, № 2, 1968.
2. Айзенштат В. С., Кравчук Д. Н. ДАН БССР, № 5, 1968.

Институт математики
АН БССР

Поступило в редакцию
12.1 1968



Л. П. ПРИМАЧУК

**О ЧИСЛЕ РЕШЕНИЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ
 С СОПРЯЖЕНИЕМ И СДВИГОМ КАРЛЕМАНА**

1. Пусть Γ — единичный круг. Рассмотрим следующую задачу: найти две функции, аналитические соответственно внутри и вне круга, по условию на Γ

$$\varphi^+(t) = a(t)\varphi^-(t) + b(t)\overline{\varphi^-(\alpha(t))} + d(t), \quad \varphi^-(\infty) = 0, \quad (1)$$

где $a(t)$, $b(t)$ удовлетворяют условию Гельдера, $|a(t)| \neq 0$, $\alpha(t)$ — прямой сдвиг Карлемана для $n=2$, т. е. $\alpha(\alpha(t)) \equiv t$, $\alpha'(t) \neq 0$ и удовлетворяет условию Гельдера с $\lambda > \frac{1}{2}$.

Задача (1) рассматривалась в работах Г. С. Литвинчука. В [1] показано, что при выполнении условия

$$\left| \frac{b(t)\overline{X^-(\alpha(t))}}{a(t)X^-(t)} \sqrt{|\alpha'(t)|} \right| < 1 \quad (2)$$

число линейно независимых*) решений l - и p -условий разрешимости вычисляются по формуле

$$l = \max(0, 2\kappa), \quad p = \max(0, -2\kappa), \quad (3)$$

где

$$\kappa = \text{Ind } a(t).$$

В настоящей заметке мы получим оценки числа решений задачи (1), не предполагая условия (2). Сопряженная задача для (1) имеет вид

$$\psi^-(t) = a(t)\psi^+(t) + \overline{b(\alpha(t))t'^2(s)\alpha'(t)\psi^+(\alpha(t))}. \quad (4)$$

Если l' — число линейно независимых решений сопряженной задачи (4), то из теорем Нётера

$$l - l' = 2\kappa.$$

Будем пользоваться некоторыми результатами работы [3].

2. Для получения оценок числа решений задачи (1) мы будем сводить ее к некоторому интегральному уравнению, к которому применяется принцип сжатых отображений. Для этого нам понадобится следующее.

Обозначим

$$\begin{aligned} B_1(t) &= B(\alpha(t))t^\kappa, \\ T(t, \tau) &= \frac{1}{2\pi i} \left[\frac{1}{\tau-t} - \frac{\alpha'(\tau)}{\alpha(\tau) - \alpha(t)} \right] B_1(\tau), \\ B(t) &= \frac{b(t)\overline{X^-(\alpha(t))}}{a(t)X^-(t)}, \quad X^+(t) = t^{-\kappa} a(t) X^-(t). \end{aligned} \quad (5)$$

*) Линейная независимость понимается с вещественными коэффициентами.

Разложим функции $B_1(t)$ и $T(t, \tau)$ в ряды Фурье по системе $\{t^k\}$ ($k = 0, \pm 1, \dots$):

$$B_1(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} B_k t^k, \quad T(t, \tau) = \sum_{-\infty}^{+\infty} c_k(t) \tau^k. \quad (6)$$

Первый ряд сходится равномерно, второй сходится в среднем в $L_2(\Gamma)$ по τ равномерно относительно t , так как функция

$$\left[\frac{1}{\tau-t} - \frac{\alpha'(\tau)}{\alpha(\tau) - \alpha(t)} \right] \in L_2(\Gamma)$$

по обоим переменным [3].

Обозначим

$$M = \max_{\Gamma} \sqrt{|\alpha'(t)|}. \quad (7)$$

Возьмем два числа γ_1 и γ_2 , $\gamma_1 \geq 0$, $\gamma_2 \geq 0$, $\gamma_1 + \gamma_2 \leq 1$. Пусть $N_1(\gamma_1)$, $N_2(\gamma_2)$ — наименьшие числа, для которых

$$\left| B_1(t) - \sum_{-N_1}^{N_1} B_k t^k \right| < \frac{\gamma_1}{M}, \quad (8)$$

$$\int_{\Gamma} \int_{\Gamma} \left| T(t, \tau) - \sum_{-N_2}^{N_2} c_k(t) \tau^k \right|^2 d\sigma ds < \frac{\gamma_2^2}{M^2}.$$

Ввиду сходимости рядов (12) такие числа $N_1(\gamma_1)$ и $N_2(\gamma_2)$ всегда найдутся. Положим $n_1(\gamma_1) = N_1(\gamma_1)$, если $B_{-N_1} \neq 0$. Если же $B_{-N_1} = 0$, то обозначим тогда через $n_1(\gamma_1)$ число, для которого $B_{-n_1} \neq 0$, а $B_{-n_1-1} = \dots = B_{-N_1} = 0$. Аналогично определим число $n_2(\gamma_2)$. Тогда

$$n(\gamma_1, \gamma_2) = \max(n_1(\gamma_1), n_2(\gamma_2)).$$

Определим теперь число n следующим образом:

$$n = \min n(\gamma_1, \gamma_2) \text{ по всем } \gamma_1 \geq 0, \gamma_2 \geq 0, \gamma_1 + \gamma_2 \leq 1, \quad (9)$$

т.е. $n = \max(n_1^0(\gamma_1^0), n_2^0(\gamma_2^0))$, где пара (γ_1^0, γ_2^0) дает указанный (9) минимум.

Аналогичным способом определим число m . Для этого возьмем функции

$$B_1^1(t) = B^1(\alpha(t)) t^{-\kappa},$$

где

$$B^1(t) = \frac{b(\alpha(t)) t'^2(s) \alpha'(t) \overline{X_1^-(\alpha(t))}}{\alpha(t) X_1^-(t) t \alpha(t)},$$

$$X_1^+(t) = t'^{\kappa} \overline{\alpha(t)} X_1^-(t),$$

$$T(t, \tau)^1 = \frac{1}{2\pi i} \left[\frac{1}{\tau-t} - \frac{\alpha'(\tau)}{\alpha(\tau) - \alpha(t)} \right] B_1^1(\tau).$$

Теперь для определения числа m в (8) нужно подставить $B_1^1(t)$ вместо $B_1(t)$ и $T(t, \tau)^1$ вместо $T(t, \tau)$.

3. Оценка для числа решений (1) дает следующая

Теорема. Для числа l решений однородной задачи (1) имеют место следующие оценки:

1) $l = 0$, если $\kappa \leq -n + 1$;

2) $0 \leq l \leq 2(l_0 - 1)$, $-n + 1 < \kappa \leq 0$, где $l_0 = \min(m - \kappa, n + \kappa)$;

3) $l = 2\kappa$, если $\kappa \geq m - 1$;

4) $2\kappa \leq l \leq 2l'_0$, $0 \leq \kappa < m - 1$, где $l'_0 = \min(m - 1, n + 2\kappa - 1)$.

Доказательство будем проводить отдельно для $\kappa > 0$ и $\kappa \leq 0$. Пусть $\kappa \leq 0$. Умножив обе части (1) на $t^{-\kappa}$, однородную задачу (1) перепишем в виде

$$\Phi^+(t) = \Phi^-(t) + B(t) \overline{\Phi^-(\alpha(t))} \quad (10)$$

где

$$\Phi^+(t) = \frac{t^{-\kappa} \varphi^+(t)}{X^+(t)}, \quad \Phi^-(t) = \frac{\varphi^-(t)}{X^-(t)}, \quad B(t) = \frac{b(t) \overline{X^-(\alpha(t))}}{a(t) X^-(t)}.$$

Сведем задачу (10) к интегральному уравнению. Из условия аналитичной продолжимости $\Phi^\pm(t)$ и краевого условия (6) будем иметь

$$\frac{1}{2} \Phi^-(t) + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\Phi^-(\tau)}{\tau - t} d\tau = 0, \quad (11)$$

$$\frac{1}{2} [\Phi^-(t) + B(t) \overline{\Phi^-(\alpha(t))}] - \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\Phi^-(\tau) + B(\tau) \overline{\Phi^-(\alpha(\tau))}}{\tau - t} d\tau = 0.$$

Складывая уравнения (11), получим

$$\Phi^-(t) + \frac{B(t) \overline{\Phi^-(\alpha(t))}}{2} - \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{B(\tau) \overline{\Phi^-(\alpha(\tau))}}{\tau - t} d\tau = 0. \quad (12)$$

Каждое решение задачи (10) является решением уравнения (12) и наоборот, так как очевидно, что каждое решение уравнения (12) есть функция типа $\Phi^-(t)$. Делая в уравнении (9) замену t на $\alpha(t)$, прибавляя и вычитая

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{B(\alpha(\tau)) \overline{\Phi^-(\tau)}}{\tau - t} d\tau,$$

получим следующее уравнение, эквивалентное задаче (10):

$$\begin{aligned} \Phi^-(\alpha(t)) + \frac{B(\alpha(t)) \overline{\Phi^-(t)}}{2} - \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{B(\alpha(\tau)) \overline{\Phi^-(\tau)}}{\tau - t} d\tau + \\ + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \left[\frac{1}{\tau - t} - \frac{\alpha'(\tau)}{\alpha(\tau) - \alpha(t)} \right] B(\alpha(\tau)) \overline{\Phi^-(\tau)} d\tau = 0. \end{aligned} \quad (13)$$

С помощью функций (5) $B_1(t)$ и $T(t, \tau)$ уравнение (13) перепишется в виде

$$\begin{aligned} \Phi^-(\alpha(t)) + \frac{B_1(t) t^{-\kappa} \overline{\Phi^-(t)}}{2} - \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{B_1(\tau) \tau^{-\kappa} \overline{\Phi^-(\tau)}}{\tau - t} d\tau + \\ + \int_{\Gamma} T(t, \tau) \tau^{-\kappa} \overline{\Phi^-(\tau)} d\tau = 0. \end{aligned} \quad (14)$$

Докажем, что при $\kappa \leq -n + 1$, $l = 0$, а при $-n + 1 < \kappa \leq 0$, $0 \leq l \leq 2(\kappa + n - 1)$. Для этого воспользуемся определенным выше числом n и запишем уравнение (14) в виде

$$\Phi^-(\alpha(t)) + K[\Phi^-(t)] + \frac{T_1(t) t^{-\kappa} \overline{\Phi^-(t)}}{2} - \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{T_1(\tau) \tau^{-\kappa} \overline{\Phi^-(\tau)}}{\tau - t} d\tau + \int_{\Gamma} T_2(t, \tau) \tau^{-\kappa} \overline{\Phi^-(\tau)} d\tau = 0, \tag{15}$$

где

$$T_1(t) = \sum_{k=-n_1^0}^{N_1} B_k t^k, \quad T_2(t, \tau) = \sum_{k=-n_2^0}^{N_2} c_k(t) \tau^k,$$

$$K[\Phi^-(t)] = \frac{[B_1(t) - T_1(t)] t^{-\kappa} \overline{\Phi^-(t)}}{2} + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{[B_1(\tau) - T_1(\tau)] \tau^{-\kappa} \overline{\Phi^-(\tau)}}{\tau - t} + \int_{\Gamma} [T(t, \tau) - T_2(t, \tau)] \tau^{-\kappa} \overline{\Phi^-(\tau)} d\tau.$$

Так как норма в $L_2(\Gamma)$ оператора $S\varphi \equiv \frac{1}{\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t} d\tau$ для окружности равна единице, то из определения числа n заключаем, что в $L_2(\Gamma)$ норма оператора

$$\|K\|_{L_2(\Gamma)} < \frac{1}{M}. \tag{16}$$

Если $\kappa \leq -n + 1$, то функции $T_1(\tau) \tau^{-\kappa} \overline{\Phi^-(\tau)}$ $T_2(t, \tau) \tau^{-\kappa} \overline{\Phi^-(\tau)}$ являются по τ предельными значениями функций аналитических внутри круга, так как $n_1^0 \leq n$, $n_2^0 \leq n$. Поэтому три последних слагаемых в (15) тождественно равны нулю. И для определения $\Phi^-(t)$ из уравнения (15) остается

$$\Phi^-(\alpha(t)) + K[\Phi^-(t)] = 0. \tag{17}$$

Введем оператор $Q\psi \equiv \psi(\alpha(t))$. Легко видеть, что

$$\|Q\psi\|_{L_2(\Gamma)}^2 \leq \max_{\Gamma} |\alpha'(t)| \int_{\Gamma} |\psi(t)|^2 |dt| = \max_{\Gamma} |\alpha'(t)| \|\psi\|^2.$$

Подействуем оператором Q на обе части уравнения (17). Получим

$$\Phi^-(t) + QK[\Phi^-(t)] = 0, \tag{18}$$

$$\|QK\|_{L_2(\Gamma)} < 1.$$

Таким образом, уравнение (15) при $\kappa \leq -n + 1$ не имеет решений, т. е. $l = 0$. Для 1) теорема доказана.

Пусть $\kappa > -n + 1$. Ищем функцию $\Phi^-(t)$ в виде

$$\Phi^-(t) = \frac{q_1}{t} + \dots + \frac{q_{n+\kappa-1}}{t^{n+\kappa-1}} + \frac{\Phi_0^-(t)}{t^{n+\kappa-1}} \tag{19}$$

Подставляем это значение $\Phi^-(t)$ в уравнение (15), получим относительно функции $\Phi_1^-(t) = \Phi_0^-(t) t^{1-n-\kappa}$ уравнение

$$\Phi_1^-(\alpha(t)) + K[\Phi_1^-(t)] = F(t, q_1, \dots, q_{n+\kappa-1}). \quad (20)$$

Очевидно, что существует всего $2(\kappa + n - 1)$ линейно независимых решений уравнения (20). Но только те из них, которые имеют на бесконечности нуль порядка не ниже $n + \kappa - 1$, дадут по формуле (29) решение задачи (10), т. е. Φ_1^- должна удовлетворять условиям

$$\int_L \Phi_1^-(t) t^k dt = 0, \quad k = 0, 1, \dots, n + \kappa - 2.$$

Получим однородную систему $2(\kappa + n - 1)$ уравнений для $2(\kappa + n - 1)$ неизвестных. Если r — ранг этой системы, то число решений l_1 задачи (10) равно $2(\kappa + n - 1) - r$. Однако только та пара функций $(\Phi^+(t), \Phi^-(t))$ определяет решение исходной задачи (1), для которой $\Phi^+(t)$ имеет в начале координат нуль порядка $-\kappa$, т. е.

$$\int_L \Phi^+(t) t^{-k} dt = 0 \quad k = 1, \dots, -\kappa.$$

Получим систему $2|\kappa|$ уравнений с l_1 неизвестными. Если ρ — ранг этой системы, то

$$l = 2(\kappa + n - 1) - r - \rho.$$

Следовательно,

$$0 \leq l \leq 2(\kappa + n - 1).$$

Пусть теперь $\kappa > 0$. Решение однородной задачи (1) ищем в виде

$$\psi^+(z) = z^{-\kappa} [\varphi^+(z) - P_{\kappa-1}(z)],$$

где многочлен $P(z)$ подбирается так, чтобы $\psi^+(z)$ была аналитической в точке $z = 0$.

Поступая как и выше, можно доказать, что $2\kappa \leq l \leq 2(n + 2\kappa - 1)$. Однако неясно, когда число n определяется только индексом $a(t)$.

Так как $l - l' = 2\kappa$, то достаточно указать, когда число l' сопряженной задачи (5) равно нулю. Перепишем (4) в виде

$$\overline{\psi^-(t)} = \overline{a(t)} \overline{\psi^+(t)} + b(\alpha(t)) t'^2 \alpha'(t) \psi^+(\alpha(t)). \quad (4')$$

Введем две функции:

$$h^+(z) = \frac{1}{z} \overline{\psi^-\left(\frac{1}{z}\right)}, \quad h^-(z) = \frac{1}{z} \psi^+\left(\frac{1}{z}\right).$$

С помощью этих функций задача (4') переписывается так:

$$h^+(t) = \overline{a(t)} h^-(t) + \frac{b(\alpha(t)) t'^2 \alpha'(t)}{t \alpha(t)} \overline{h^-(\alpha(t))}. \quad (21)$$

Получили задачу (1) с отрицательным индексом. Из определения числа m заключаем, что

$$l' = 0 \quad \text{при} \quad -\kappa \leq -m + 1,$$

$$0 \leq l' \leq 2(m - \kappa - 1) \quad \text{при} \quad -\kappa > -m + 1.$$

Так как $l - l' = 2\kappa$, то $l = 2\kappa$ при $\kappa \geq m - 1$ и $2\kappa \leq l \leq 2(m - 1)$, $0 \leq \kappa < m - 1$. Сопоставляя неравенства

$$2\kappa \leq l \leq 2(n + 2\kappa - 1),$$

$$2\kappa \leq l \leq 2(m - 1),$$

получим теорему в случае 4).

С другой стороны, если $\kappa \leq 0$, то $-2\kappa \leq l' \leq 2(m - 2\kappa - 1)$, откуда $0 \leq l \leq 2(m - \kappa - 1)$.

Сопоставляя неравенства

$$0 \leq l \leq 2(m - \kappa - 1),$$

$$0 \leq l \leq 2(n + \kappa - 1),$$

получим теорему в случае 2).

Теорема доказана полностью.

Замечание 1. Теорему без труда можно распространить на задачу

$$a(t) \varphi^+(t) + b(t) \overline{\varphi^+(\alpha(t))} = c(t) \varphi^-(t) + d(t) \overline{\varphi^-(\alpha(t))}, \quad (22)$$

а также на соответствующее ей интегро-функциональное уравнение.

Замечание 2. Аналогичным методом можно изучить разрешимость следующей задачи:

$$\varphi^+(t) = a(t) \varphi^-(t) + b(t) \overline{\varphi^-(t)} + c(t) \overline{\varphi^-(\alpha(t))} + d(t). \quad (23)$$

Условия на коэффициенты и сдвиг $\alpha(t)$ такие же, как и для задачи (1).

Условие, аналогичное (2), имеет вид

$$\max_{t \in \Gamma} \left| \frac{b}{a} \right| + \max_{t \in \Gamma} \left| \frac{c(t) \overline{X^-(\alpha(t))}}{a(t) X^-(t)} \sqrt{|\alpha'(t)|} \right| < 1. \quad (24)$$

При выполнении (24) число решений l и условий разрешимости p задачи (23) вычисляются по формулам (3).

Если (24) не выполняется, то по предыдущей схеме можно получить аналог теоремы для задачи (23).

Приношу благодарность профессору Ф. Д. Гахову за руководство работой.

Литература

1. Литвинчук Г. С. ДАН УССР, сер. А, № 11, 1967.
2. Гахов Ф. Д. Краевые задачи. М., 1963.
3. Сабитов И. Х. Матем. сб. 64, (106) № 2, 1964.

Белорусский государственный университет им. В. И. Ленина

Поступило в редакцию
3.1.1968

ХОАНГ ДИНЬ ЗУНГ

УСТОЙЧИВОСТЬ ОБРАТНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ В СЛУЧАЕ МНОГОЛИСТНОСТИ РЕШЕНИЯ И НЕКОТОРЫЕ ОБОБЩЕНИЯ

1. В [1] нами была доказана устойчивость обратной краевой задачи при условии, что искомая аналитическая функция однолистка. Последнее ограничение вытекало из необходимости пользования теоремой Каратеодори. Однако, как известно, по виду заданных функций не легко заранее решить, будет ли решение однолистным. Здесь мы распространим это на случай многолистного решения. Метод будет заключаться в сведении к рассмотренному в [1] случаю.

Пусть функция $z = z(w)$, получаемая в результате решения обратной задачи, окажется неоднолистной, значит, искомая кривая L_z имеет самопересечение. Функция $w = w(z)$, обратная от функции $z = z(w)$, будет многозначной. Мы строим риманову поверхность функции $w = w(z)$. Для этого установим для функции $z = z(w)$ области однолиственности G . Как известно, таких областей может оказаться бесчисленное множество, и можно выбирать их — G_1, G_2, \dots, G_N (N — конечное или бесконечное число зависит от числа листов функции $z = z(w)$) — так, чтобы они, не налегая друг на друга, заполнили собой всю плоскость w . Каждая из этих областей преобразуется посредством функции $z = z(w)$ в область E плоскости z . Склеив [5] эти области E_i ($i = 1, 2, \dots, N$), мы получим риманову поверхность функции $w = w(z)$ (конечнолистная или бесконечнолистная поверхность). Когда w изменяется в одной из областей G на плоскости w , то z изменяется в одной соответствующей области E на римановой поверхности. Поэтому определяются соответственно различные однозначные ветви многозначной функции $w = w(z)$ в областях E : $w_1(z), w_2(z), \dots, w_N(z)$. Каждая $w_i(z)$ конформно и взаимно однозначно отображает область E_i римановой поверхности на область G_i плоскости w .

Теперь пусть в плоскости w кривая L_w находится на областях однолиственности G_j ($j = 1, 2, \dots, p \leq N$): L_w^j находится на G_j ; $L_w^1 + L_w^2 + \dots + L_w^p = L_w$. Тогда искомая кривая L_z находится соответственно на областях E_j ($j = 1, 2, \dots, p$): L_z^j находится на E_j ; $L_z^1 + L_z^2 + \dots + L_z^p = L_z$. При этом L_z^j соответствует L_w^j с помощью функции $w_j(z)$. Теперь мы дополним L_w^j соответственно в областях однолиственности плоскости z до простых замкнутых кривых L_w^j . Функции $w_j(z)$ соответственно отображают L_w^j на L_z^j , которые находятся соответственно на областях E_j римановой поверхности, при этом, очевидно, $L_w^j \supset L_z^j$ ($j = 1, 2, \dots, p$). Теперь в плоскости w возьмем любую допустимую деформацию кривой L_w , тогда соответственно получаются деформации кривых L_w^j . Затем рассмотрим последовательно обратные краевые задачи с искомыми кривыми L_z^j . По результату [1] эти задачи устойчивы, так как здесь отображающие функции $w_j(z)$ конформны и однолиственны. Отсюда легко следует, что обратная краевая задача с искомой кривой L_z тоже устойчива.

2. Поясним предыдущее на примере. Пусть заданные функции $u(s)$ и $v(s)$ имеют вид [2]

$$u(s) = a \cos \theta, v(s) = \sin \theta,$$

где $\theta = \theta(s)$ задается уравнением

$$\frac{d\theta}{ds} = \frac{1}{a} e^{-a \cos \theta} (\theta(0) = 0).$$

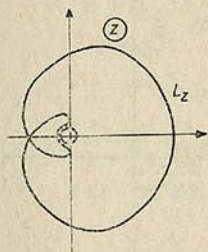


Рис. 1.

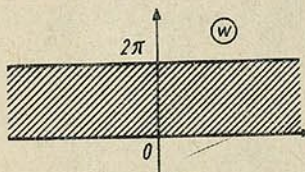


Рис. 2.

Отсюда функция, отображающая D_w на D_z , примет вид

$$z = e^w.$$

Подставляя в последнее выражение $w = a \cos \theta + ia \sin \theta$, получим параметрическое уравнение искомого контура L_z в декартовых координатах:

$$x = e^{a \cos \theta} \cos(a \sin \theta), y = e^{a \cos \theta} \sin(a \sin \theta), 0 \leq \theta \leq 2\pi.$$

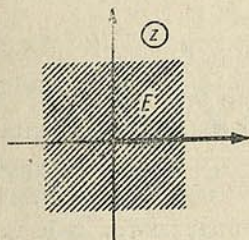


Рис. 3.

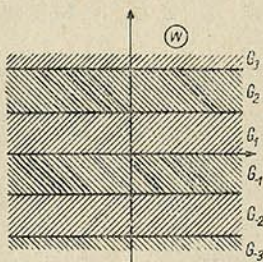


Рис. 4.

При $a > \pi$ отображение многолистно и L_z будет иметь самопересечение.

На рис. 1 изображен контур L_z для случая $a = \frac{3}{2}\pi$, т. е. когда контур L_w

есть окружность радиуса $a = \frac{3}{2}\pi$. Мы построим риманову поверхность мно-

гозначной функции $w = \ln z$. Область однолиственности обратной функции $z = e^w$ является полосой $G: 0 < I(w) < 2\pi$ (рис. 2). Когда точка w пробегает эту область плоскости w , соответствующая точка z описывает область E , представляющую собой плоскость с разрезом вдоль вещественной положительной оси (рис. 3). Можно выбирать области однолиственности $G_1, G_{-1}, G_2, G_{-2}, \dots$ (G_i — полоса ширины 2π со сторонами, параллельными действительной оси) так, чтобы они, не налегая друг на друга, заполнили собой всю плоскость w (рис. 4). Каждая G_i преобразуется посредством функции $z = e^w$ в одну область E_i плоскости z . Склеив области E_i ($i = 1, -1, 2, -2, \dots$), мы получим риманову поверхность функции $w = \ln z$. В областях E_i римановой

поверхности определяются различные ветви функции $\omega = \ln z: (\ln z)_1, (\ln z)_{-1}, (\ln z)_2, (\ln z)_{-2}, \dots$. Каждая $(\ln z)_i$ конформно и однолистно отображает область E_i римановой поверхности на область G_i плоскости w .

Теперь мы заметим, что окружность $L_w \left(|\omega| = \frac{3}{2} \pi \right)$ находится на областях G_1 и G_{-1} плоскости w (рис. 5), соответствующая искомая L_z находится на областях E_1, E_{-1} римановой поверхности (рис. 6). Пусть $L_w =$

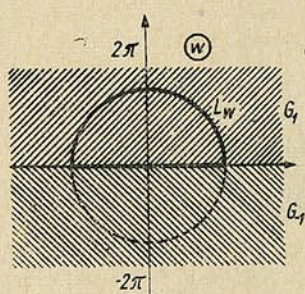


Рис. 5.

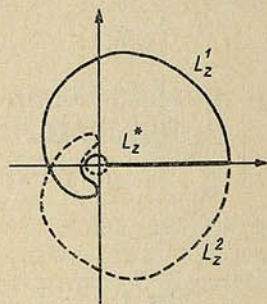


Рис. 6.

$= L_w^1 + L_w^2$, где L_w^1 находится на G_1 , L_w^2 на G_{-1} , тогда $L_z = L_z^1 + L_z^2$, где L_z^1 и L_z^2 последовательно соответствуют L_w^1 и L_w^2 , и L_z^1 находится на первом листе, L_z^2 на втором листе римановой поверхности. Теперь в плоскости w дополним L_w^1 и L_w^2 соответственно в областях G_1 и G_{-1} до простых замкнутых кривых $L_w^{\prime 1}$ и $L_w^{\prime 2}$, например $L_w^{\prime 1} = L_w^1 + L_w^*$, $L_w^{\prime 2} = L_w^2 + L_w^{**}$ (здесь $L_w^* = L_w^{**}$ — отрезок вещественной оси $-\frac{3}{2}\pi \leq u \leq \frac{3}{2}\pi$). Ветви $\omega_1 = (\ln z)_1$, $\omega_{-1} = (\ln z)_{-1}$ будут соответственно отображать $L_w^{\prime 1}$, $L_w^{\prime 2}$ на $L_z^{\prime 1}$, $L_z^{\prime 2}$, которые находятся на областях E_1, E_{-1} римановой поверхности, при этом $L_z^{\prime 1} = L_z^1 + L_z^*$, $L_z^{\prime 2} = L_z^2 + L_z^{**}$, где $L_z^* = L_z^{**}$ — тоже отрезок вещественной оси соответствует L_w^* . Теперь в плоскости w возьмем любую допустимую деформацию окружности L_w ; тогда соответственно получаются деформации кривых $L_w^{\prime 1}$ и $L_w^{\prime 2}$. Так как $\omega_1 = (\ln z)_1$ и $\omega_{-1} = (\ln z)_{-1}$ конформно и однолистно отображают соответственно области, ограниченные контурами $L_z^{\prime 1}$ и $L_z^{\prime 2}$, на области, ограниченные контурами $L_w^{\prime 1}$ и $L_w^{\prime 2}$, то по результату [1] обратные краевые задачи с искомыми кривыми $L_z^{\prime 1}$ и $L_z^{\prime 2}$ устойчивы. Отсюда легко следует, что обратная задача с искомой кривой L_z тоже устойчива.

Замечание. Доказательство было проведено нами для случая односторонних деформаций. Однако нетрудно показать, что это ограничение излишне. В самом деле, по определению ядра последовательности областей [8] можно заключить, что доказательства в предыдущем и в [1] верны не только для внешних и внутренних допустимых деформаций контура L_w , но и для любой допустимой деформации $\{L_w^n\}$.

3. Покажем, что если производные заданных функций $u'(s)$ и $v'(s)$ одновременно обращаются в нуль, то обратная краевая задача может оказаться неустойчивой. Мы рассмотрим один конкретный случай.

Предполагаем, что заданные функции в окрестности исследуемой точки разлагаются по формуле Тейлора. Пусть u, v заданы следующими разложениями:

$$u = (s - s_0)^p [u_0 + (s - s_0) \alpha(s)], v = (s - s_0)^p [v_0 + (s - s_0) \beta(s)], \quad (1)$$

где u_0, v_0 — постоянные, не обращающиеся одновременно в нуль; $\alpha(s), \beta(s)$ имеют производные, удовлетворяющие условию Гельдера.

Рассмотрим здесь случай, когда начало координат ($s = s_0$) есть обыкновенная точка [3] контура L_w (при этом p — нечетное). Пусть функция $w = w(\zeta)$ конформно отображает круг $|\zeta| < 1$ на область D_w , причем значению s_0 соответствует значение угла θ_0 ($\zeta = e^{i\theta_0}$). В окрестности ζ_0 функция $w(\zeta)$ представляется в виде

$$w(\zeta) = (\zeta - \zeta_0) \omega_0(\zeta), \omega_0(\zeta_0) \neq 0. \quad (2)$$

Учитывая (1), (2), из соотношения на контуре $|u(s) + iv(s)| = |w(e^{i\theta})|$ по лучим

$$|s - s_0|^p \varphi^*(s) = |\theta - \theta_0| \Psi^*(\theta), \varphi^*(s_0) > 0, \Psi^*(\theta_0) > 0.$$

Затем, применяя теорию неявных функций, можем получить [3] следующее соотношение:

$$\frac{ds}{d\theta} = |\theta - \theta_0|^{\frac{1}{p}-1} \Psi_0(\theta), \Psi_0(\theta_0) > 0,$$

где $\Psi_0(\theta)$ удовлетворяет условию Гельдера.

Отсюда

$$z = (\zeta - \zeta_0)^{\frac{1}{p}} F_0^*(\zeta). \quad (3)$$

Теперь возьмем такую деформацию $\{L_{w_n}\}$ кривой L_w , в которой L_{w_n} определится следующими равенствами:

$$u_n(s) = u(s) + (s - s_0) u_{e_n} \quad (4)$$

$$v_n(s) = v(s) + (s - s_0) v_{e_n}(s),$$

где $u_{e_n}(s_0) \neq 0, v_{e_n}(s_0) \neq 0$; $u_{e_n}(s)$ и $v_{e_n}(s)$ одновременно стремятся к нулю, когда n стремится к бесконечности, и имеют производные, удовлетворяющие условию Гельдера. Применяя результаты М. А. Лаврентьева об отображениях близких областей [6], и из (2) получим, что функции $\omega_n = \omega_n(\zeta)$, конформно отображающие круг $|\zeta| < 1$ на области D_{w_n} в окрестности ζ_0 , тоже имеют вид

$$\omega_n(\zeta) = (\zeta - \zeta_0) \omega_n^*(\zeta), \omega_n^*(\zeta) \neq 0 \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (5)$$

Из соотношения на контуре $|u_n(s) + iv_n(s)| = |\omega_n(e^{i\theta})|$, учитывая (4) и (5), получим

$$|s - s_0| \varphi_n^*(s) = |\theta - \theta_0| \Psi_n^*(\theta), \varphi_n^*(s_0) > 0, \Psi_n^*(\theta_0) > 0.$$

Отсюда аналогично предыдущему получим

$$z_n = (\zeta - \zeta_0) F_n^*(\zeta). \quad (6)$$

Из последнего вытекает, что $\theta = \theta_0$ есть обыкновенная точка всех кривых последовательности $\{L_{z_n}\}$. Но из (3) контур L_z при $\theta = \theta_0$ имеет угловую точку с углом, равным π/p . Поэтому даже при достаточно больших значениях n , если p большое, то при достаточно малом изменении начальных данных задачи решение может претерпевать существенное изменение. Значит, устойчивость задачи нарушается.

4. Можно обобщить функциональный характер задаваемых функций. Именно обратная краевая задача устойчива и в том случае, когда задаваемые функции $u(s)$ и $v(s)$ — лишь абсолютно непрерывные функции дуги s . (При этом постановка задачи в [2] остается в силе).

В самом деле, из [4] решение обратной краевой задачи в этом случае представляется в таком же виде, как указано в [1]. Поэтому, проводя рассуждения, как в [1], мы получаем, что последовательность функций $z_n = F_n(\xi)$ равномерно сходится к функции $z = F(\xi)$. Затем на основе аналога теоремы К. Каратеодори для отображений класса абсолютно непрерывных функций класса \overline{BL}_n [7] легко получим, что обратная краевая задача устойчива.

Автор выражает благодарность Ф. Д. Гахову за ценные советы и внимание к работе.

Литература

1. Хоанг Динь Зунг. Весті АН БССР, № 4, 1967.
2. Гахов Ф. Д. Краевые задачи. М., 1963.
3. Гахов Ф. Д., Мельник И. М. УМЖ, 11, № 1, 1959.
4. Гахов Ф. Д. ДАН СССР, 86, № 4, 1952.
5. Привалов И. И. Введение в теорию функций комплексного переменного. Физматгиз, 1960.
6. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного. Физматгиз, 1965.
7. Суворов Г. Д. Семейство плоских топологических отображений. Новосибирск, 1965.
8. Голузин Г. М. Геометрическая теория функций комплексного переменного. Гостехиздат, 1952.

*Белорусский государственный
университет им. В. И. Ленина*

*Поступило в редакцию
11.III 1968*

Б. М. АРХИПОВ, А. Я. ХОХРЯКОВ

**К ВОПРОСУ ОБ ОЦЕНКЕ МАТРИЦЫ ГРИНА
 ПЕРИОДИЧЕСКОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ**

В [1] приведена оценка матрицы (функции) Грина линейной краевой задачи для систем с постоянными коэффициентами. В первой части настоящей работы на основе идей [1] предлагаются аналогичные оценки для задачи

$$Lx \equiv \ddot{x} + A(t)x = f(t), \quad x(\alpha) = x(\beta), \quad \dot{x}(\alpha) = \dot{x}(\beta) \quad (1)$$

с переменной матрицей коэффициентов $A(t)$ и даются уточнения оценкам, установленным в [1]. Во второй части приводятся оценки функции Грина и ее производной по первому аргументу одномерной периодической краевой задачи для уравнения второго порядка.

Следуя [1], матрицу $Q(t, s)$ переменных $t, s \in [\alpha, \beta]$ ($\alpha < \beta$) будем называть матрицей краевых условий, если 1) $Q(t, s)$ имеет непрерывные производные по t первого и второго порядков при $t > s$ и $t < s$, а при $t = s$

$$Q'_t(s+0, s) - Q'_t(s-0, s) = E,$$

где E — единичная $n \times n$ -матрица; 2) $Q(\alpha, s) = Q(\beta, s)$, $Q'_t(\alpha, s) = Q'_t(\beta, s)$ при любом $s \in [\alpha, \beta]$.

Неравенства между матрицами (векторами) понимаются ниже как неравенства между соответствующими элементами (координатами) матриц (векторов).

1. Пусть существует решение $Y(t)$ матричной задачи

$$\dot{Y} + A(t)Y = \frac{1}{\omega} E, \quad Y(\alpha) = Y(\beta), \quad \dot{Y}(\alpha) = \dot{Y}(\beta), \quad \omega = \beta - \alpha. \quad (1.1)$$

Тогда $Q(t, s) = Y(t) + q(t, s) \cdot E$, где

$$q(t, s) = -\frac{(t-s)^2}{2\omega} + \frac{|t-s|}{2} + c, \quad c = \text{const},$$

будет матрицей краевых условий. Отсюда

$$LQ(t, s) = A(t) \cdot q(t, s), \quad t \neq s.$$

Рассмотрим систему интегральных уравнений

$$u(t) = -\int_{\alpha}^{\beta} LQ(t, s)u(s)ds + f(t), \quad (1.2)$$

однозначная разрешимость которой совпадает с однозначной разрешимостью системы

$$v(t) = -\int_{\alpha}^{\beta} L^*Q(s, t)v(s)ds + f(t), \quad (1.3)$$

где $L^*Q(s, t) = A^*(s) \cdot q(s, t)$, $A^*(s)$ — матрица, транспонированная к $A(s)$. Если матрица $A(t)$ и постоянная c такие, что

$$J^* = \max_t \int_a^b |A^*(s) q(s, t)| ds, \quad (1.4)$$

a — матрица [2], то системы (1.2) и (1.3) будут однозначно разрешимы одновременно. При этом задача (1) также будет однозначно разрешимой, и поэтому будет существовать матрица Грина $G(t, s)$ задачи (1).

Обозначим через $R(t, s)$ резольвенту ядра $LQ(t, s)$. Тогда из (1.2) следует $u(t) = f(t) + \int_a^b R(t, s) f(s) ds$. В соответствии с леммой работы [1] решение $x(t)$ задачи (1) выразится через матрицу краевых условий $Q(t, s)$ формулой

$$x(t) = \int_a^b Q(t, s) u(s) ds = \int_a^b \left[Q(t, s) + \int_a^b Q(t, \tau) R(\tau, s) d\tau \right] f(s) ds.$$

С другой стороны,

$$x(t) = \int_a^b G(t, s) f(s) ds.$$

Отсюда и из предыдущего представления $x(t)$ через $Q(t, s)$ имеем

$$G(t, s) = Q(t, s) + \int_a^b Q(t, \tau) R(\tau, s) d\tau. \quad (1.5)$$

Оценим сначала $\int_a^b |R(\tau, s)| d\tau$. Воспользуемся известным тождеством [3]

$$R(t, s) = - \int_a^b A(t) q(t, \tau) R(\tau, s) d\tau - A(t) q(t, s),$$

из которого следует неравенство

$$\int_a^b |R(t, s)| dt \leq \int_a^b \left[\int_a^b |A(t) q(t, \tau)| dt \right] \times \\ \times |R(\tau, s)| d\tau + \int_a^b |A(t) q(t, s)| dt. \quad (1.6)$$

Так как характеристические числа матрицы J^* и матрицы

$$J = \max_s \int_a^b |A(t) q(t, s)| dt$$

совпадают, то J будет a -матрицей, если такой является J^* . Пусть J удовлетворяет этому требованию. Из (7) придем к неравенству

$$\int_a^b |R(t, s)| dt \leq (E - J)^{-1} \cdot J. \quad (1.7)$$

Найдем теперь оценку для $\left| \int_{\alpha}^{\beta} G(t, s) ds \right|$. Умножив обе части равенства (1.5) на $A(s)$ справа и проинтегрировав затем результат по s с учетом тождества

$$\int_{\alpha}^{\beta} G(t, s) A(s) ds = E,$$

получим

$$E = Y(t) \int_{\alpha}^{\beta} A(s) ds + \int_{\alpha}^{\beta} q(t, s) A(s) ds + \\ + Y(t) \int_{\alpha}^{\beta} \int_{\alpha}^{\beta} R(\tau, s) A(s) d\tau ds + \int_{\alpha}^{\beta} \int_{\alpha}^{\beta} q(t, \tau) R(\tau, s) A(s) ds d\tau.$$

Отсюда и из условия $q(t, s) = q(s, t)$ вытекают неравенства

$$|Y(t)| \cdot C \leq E + J + \frac{3\omega}{32} \cdot (E - J)^{-1} \cdot J \cdot \int_{\alpha}^{\beta} |A(s)| ds, \quad (1.8)$$

$$\int_{\alpha}^{\beta} |Y(t)| dt \cdot C \leq \omega E + \frac{\omega^2}{32} \cdot (E - J)^{-1} \cdot \int_{\alpha}^{\beta} |A(s)| ds, \quad (1.9)$$

где

$$C = \left\{ \left| \int_{\alpha}^{\beta} A(s) ds \right| - (E - J)^{-1} \cdot J \cdot \int_{\alpha}^{\beta} |A(s)| ds \right\}.$$

Неравенства записаны для случая, когда в $q(t, s)$ положено $c = -\frac{3\omega}{32}$.

Пусть, далее, матрица C положительно обратима, тогда из (1.8) и (1.9) следуют оценки

$$|Y(t)| \leq \left[E + J + \frac{3\omega}{32} (E - J)^{-1} \cdot J \cdot \int_{\alpha}^{\beta} |A(s)| ds \right] \cdot C^{-1}, \quad (1.10)$$

$$\int_{\alpha}^{\beta} |Y(t)| dt \leq \left[\omega E + \frac{\omega^2}{32} (E - J)^{-1} \int_{\alpha}^{\beta} |A(s)| ds \right] \cdot C^{-1}. \quad (1.11)$$

Соотношение (1.5) и неравенства (1.10), (1.11) приводят к оценкам

$$|G(t, s)| \leq \left(|Y(t)| + \frac{3\omega}{32} E \right) \cdot (E - J)^{-1}, \quad (1.12)$$

$$\int_{\alpha}^{\beta} |G(t, s)| dt \leq \left(\int_{\alpha}^{\beta} |Y(t)| dt + \frac{\omega^2}{32} E \right) \cdot (E - J)^{-1}. \quad (1.13)$$

Таким образом, установлена

Теорема 1. Пусть матрица $A(t)$ непрерывна на $[\alpha, \beta]$ и пусть: 1) существует решение $Y(t)$ задачи (2); 2) J — a -матрица; 3) матрица C

положительно обратима. Тогда существует матрица Грина $G(t, s)$ задачи (1) и справедливы неравенства (1.12) и (1.13).

Замечание 1. В случае постоянной матрицы коэффициентов A оценки (1.12) и (1.13) переходят в неравенства

$$|G(t, s)| \leq \left(\frac{1}{\omega} |A^{-1}| + \frac{3\omega}{32} E \right) \cdot \left(E - \frac{\omega^2}{32} |A| \right)^{-1},$$

$$\int_{\alpha}^{\beta} |G(t, s)| dt \leq \left(|A^{-1}| + \frac{\omega^2}{32} E \right) \cdot \left(E - \frac{\omega^2}{32} |A| \right)^{-1}.$$

Замечание 2. Для матрицы Грина задачи

$$\dot{x} + A(t)x = 0, \quad x(\alpha) = x(\beta) \quad (1.14)$$

справедливы оценки (1.12) и (1.13), в которых J и $q(t, s)$ заменены соответственно на $J_1 = \max_s \int_{\alpha}^{\beta} |A(t)q_1(t, s)| dt$ и $q_1(t, s) = \frac{\partial}{\partial t} q(t, s)$.

Замечание 3. Если в задаче (1.14) $A = \text{const}$, то имеют место оценки

$$|G_1(t, s)| \leq \left(\frac{1}{\omega} |A^{-1}| + \frac{1}{2} E \right) \cdot \left(E - \frac{\omega}{4} |A| \right)^{-1},$$

$$\int_{\alpha}^{\beta} |G_1(t, s)| dt \leq \left(|A^{-1}| + \frac{\omega}{4} E \right) \cdot \left(E - \frac{\omega}{4} |A| \right)^{-1},$$

уточняющие соответствующие оценки работы [1].

Замечание 4. При известных ограничениях имеет место неравенство для производной матрицы $G(t, s)$ задачи (1)

$$\left| \frac{\partial}{\partial t} G(t, s) \right| \leq (|Y'_t(t)| + \max_s |q_1(t, s)| \cdot E) \cdot (E - J)^{-1},$$

где

$$|Y'_t(t)| \leq [E + J + (E - J)^{-1} \cdot J \cdot \max_s |q_1(t, s)| \cdot \int_{\alpha}^{\beta} |A(s)| ds] \cdot C^{-1},$$

или, что то же,

$$\left| \frac{\partial}{\partial t} G(t, s) \right| \leq \left(\left[E + J + (E - J)^{-1} \cdot J \cdot \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} |A(s)| ds \right] C^{-1} + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} E \right) \cdot (E - J)^{-1}.$$

Иногда оценку матрицы Грина задачи (1) можно получить более простым способом, чем (1.12) и (1.13), если в качестве матрицы краевых условий $Q(t, s)$ взять матрицу Грина задачи (1) с постоянной матрицей A_0 . Тогда из равенства (1.5) и замечания 1 следуют неравенства

$$|G(t, s)| \leq \left(\frac{1}{\omega} |A_0^{-1}| + \frac{3\omega}{32} E \right) \left(E - \frac{\omega^2}{32} |A_0| \right)^{-1} \cdot (E - J)^{-1},$$

$$\int_{\alpha}^{\beta} |G(t, s)| ds \leq \left(|A_0^{-1}| + \frac{\omega^2}{32} E \right) \cdot \left(E - \frac{\omega^2}{32} |A_0| \right)^{-1} \cdot (E - J)^{-1},$$

где

$$J = \max_s \int_{\alpha}^{\beta} |[A_0 - A(t)] G_0(t, s)| dt,$$

в предположении, что матрицы $E - \frac{\omega^2}{32} |A_0|$ и $E - J$ положительно обратимы.

Особенно простыми по виду оценки получаются, если в качестве матрицы $Q(t, s)$ краевых условий в (1.5) взять

$$\frac{\omega}{2\pi} \sin \frac{\pi}{\omega} |t - s| \cdot E.$$

Действительно, положив, что

$$J = \max_s \frac{\omega}{2\pi} \int_{\alpha}^{\beta} \left| A(t) - \frac{\pi^2}{\omega^2} \cdot E \right| \cdot \sin \frac{\pi}{\omega} |t - s| dt$$

является a -матрицей, тождество (1.5) приводит к неравенствам

$$|G(t, s)| \leq \frac{\omega}{2\pi} \left\{ \sin \frac{\pi}{\omega} |t - s| \cdot E + \int_{\alpha}^{\beta} \sin \frac{\pi}{\omega} |t - \tau| \cdot |R(\tau, s)| d\tau \right\},$$

$$|G(t, s)| \leq \frac{\omega}{2\pi} (E - J)^{-1},$$

$$\int_{\alpha}^{\beta} |G(t, s)| ds \leq \frac{\omega^2}{2\pi} (E - J)^{-1}.$$

Аналогичные оценки можно получить, если

$$Q(t, s) = \exp \left[-\frac{(t-s)^2}{2\omega} + \frac{|t-s|}{2} \right] \cdot E.$$

2. Рассмотрим задачу

$$\ddot{x} + a(t)x = 0, \quad x(\alpha) = x(\beta), \quad \dot{x}(\alpha) = \dot{x}(\beta), \quad (2.1)$$

где $a(t)$ — непрерывная на промежутке $[\alpha, \beta]$ функция.

Пусть $a(t) = \lambda - \text{const}$, $\lambda > 0$. Тогда задача (2.1), как известно (см. [4], стр. 271), однозначно разрешима, если

$$\frac{2k\pi}{\sqrt{\lambda}} < \omega < \frac{2(k+1)\pi}{\sqrt{\lambda}} \quad (k = 0, 1, 2, \dots; \omega = \beta - \alpha),$$

причем функция Грина $\Gamma(t, s)$ задачи имеет вид

$$\Gamma(t, s) = \frac{1}{2\sqrt{\lambda}} \left\{ \text{ctg} \frac{\sqrt{\lambda}\omega}{2} \cos \sqrt{\lambda}(s-t) + \sin \sqrt{\lambda}|t-s| \right\}. \quad (2.2)$$

Довольно громоздкие подсчеты дают возможность получить следующие неравенства:

$$|\Gamma(t, s)| \leq \left(2\sqrt{\lambda} \left| \sin \frac{\sqrt{\lambda} \omega}{2} \right| \right)^{-1}; \quad (2.3)$$

$$\int_{\alpha}^{\beta} |\Gamma(t, s)| ds \leq \left(\lambda \left| \sin \frac{\sqrt{\lambda} \omega}{2} \right| \right)^{-1} \left[2k + (-1)^k \sin \frac{\sqrt{\lambda} \omega}{2} \right]$$

$$\text{при } \frac{2k\pi}{\sqrt{\lambda}} < \omega \leq \frac{(2k+1)\pi}{\sqrt{\lambda}},$$

$$\int_{\alpha}^{\beta} |\Gamma(t, s)| ds \leq \left(\lambda \left| \sin \frac{\sqrt{\lambda} \omega}{2} \right| \right)^{-1} \left[2(k+1) + (-1)^{k+1} \sin \frac{\sqrt{\lambda} \omega}{2} \right]$$

$$\text{при } \frac{(2k+1)\pi}{\sqrt{\lambda}} \leq \omega < \frac{2(k+1)\pi}{\sqrt{\lambda}}; \quad (2.4)$$

$$\left| \frac{\partial}{\partial t} \Gamma(t, s) \right| \leq \left(2 \left| \sin \frac{\sqrt{\lambda} \omega}{2} \right| \right)^{-1}$$

$$\text{при } \frac{2k\pi}{\sqrt{\lambda}} < \omega < \frac{2(k+1)\pi}{\sqrt{\lambda}}^*); \quad (2.5)$$

$$\int_{\alpha}^{\beta} \left| \frac{\partial}{\partial t} \Gamma(t, s) \right| ds \leq \left(\sqrt{\lambda} \left| \sin \frac{\sqrt{\lambda} \omega}{2} \right| \right)^{-1} \times$$

$$\times \left[(2k+1) + (-1)^{k+1} \cos \frac{\sqrt{\lambda} \omega}{2} \right]$$

$$\text{при } \frac{2k\pi}{\sqrt{\lambda}} < \omega < \frac{2(k+1)\pi}{\sqrt{\lambda}} \quad (2.6)$$

$$(k = 0, 1, 2, \dots; \omega = \beta - \alpha).$$

Если провести аналогичные пункту 1 рассуждения, беря в качестве функции краевых условий функцию Грина $\Gamma(t, s)$ и используя неравенства (2.3)—(2.6), получим для задачи (2.1) следующую теорему.

Теорема 2. Пусть $\lambda > 0$ таково, что

$$\frac{2k\pi}{\sqrt{\lambda}} < \omega < \frac{2(k+1)\pi}{\sqrt{\lambda}} \quad (k = 0, 1, 2, \dots; \omega = \beta - \alpha)$$

и

$$\int_{\alpha}^{\beta} |a(s) - \lambda| ds < 2\sqrt{\lambda} \left| \sin \frac{\sqrt{\lambda} \omega}{2} \right|. \quad (2.7)$$

Тогда: 1) существует функция Грина $G(t, s)$ задачи (2.1) при $t, s \in [\alpha, \beta]$; 2) имеют место оценки

*) На промежутке $\left(0, \frac{\pi}{\sqrt{\lambda}}\right] \left| \frac{\partial}{\partial t} \Gamma(t, s) \right| \leq \frac{1}{2}$.

$$|G(t, s)| \leq \left(2 \sqrt{\lambda} \left| \sin \frac{\sqrt{\lambda} \omega}{2} \right| \right)^{-1} + \\ + \max_s |a(s) - \lambda| \cdot \left(\lambda \left| \sin \frac{\sqrt{\lambda} \omega}{2} \right| \right)^{-1} \cdot P \cdot \Delta$$

$$\text{при } \frac{2k\pi}{\sqrt{\lambda}} < \omega \leq \frac{(2k+1)\pi}{\sqrt{\lambda}},$$

$$|G(t, s)| \leq \left(2 \sqrt{\lambda} \left| \sin \frac{\sqrt{\lambda} \omega}{2} \right| \right)^{-1} + \\ + \max_s |a(s) - \lambda| \cdot \left(\lambda \left| \sin \frac{\sqrt{\lambda} \omega}{2} \right| \right) \cdot Q \cdot \Delta$$

$$\text{при } \frac{(2k+1)\pi}{\sqrt{\lambda}} \leq \omega < \frac{2(k+1)\pi}{\sqrt{\lambda}};$$

$$\int_{\alpha}^{\beta} |G(t, s)| ds \leq 2 (\sqrt{\lambda})^{-1} \cdot P \cdot \Delta$$

$$\text{при } \frac{2k\pi}{\sqrt{\lambda}} < \omega \leq \frac{(2k+1)\pi}{\sqrt{\lambda}},$$

$$\int_{\alpha}^{\beta} |G(t, s)| ds \leq 2 (\sqrt{\lambda})^{-1} \cdot Q \cdot \Delta$$

$$\text{при } \frac{(2k+1)\pi}{\sqrt{\lambda}} \leq \omega < \frac{2(k+1)\pi}{\sqrt{\lambda}};$$

$$\int_{\alpha}^{\beta} \left| \frac{\partial}{\partial t} G(t, s) \right| ds \leq F +$$

$$+ \left(\sqrt{\lambda} \left| \sin \frac{\sqrt{\lambda} \omega}{2} \right| \right)^{-1} \cdot \int_{\alpha}^{\beta} |a(s) - \lambda| ds \cdot P \cdot \Delta$$

$$\text{при } \frac{2k\pi}{\sqrt{\lambda}} < \omega \leq \frac{(2k+1)\pi^*}{\sqrt{\lambda}},$$

$$\int_{\alpha}^{\beta} \left| \frac{\partial}{\partial t} G(t, s) \right| ds \leq F +$$

$$+ \left(\sqrt{\lambda} \left| \sin \frac{\sqrt{\lambda} \omega}{2} \right| \right)^{-1} \cdot \int_{\alpha}^{\beta} |a(s) - \lambda| ds \cdot Q \cdot \Delta$$

*) При $k=0$, т. е. при $0 < \omega \leq \frac{\pi}{\sqrt{\lambda}}$, эта оценка имеет вид

$$\int_{\alpha}^{\beta} \left| \frac{\partial}{\partial t} G(t, s) \right| ds \leq \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \operatorname{tg} \frac{\sqrt{\lambda} \omega}{4} + \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \sin \frac{\sqrt{\lambda} \omega}{2} \cdot \int_{\alpha}^{\beta} |a(s) - \lambda| ds \cdot \Delta$$

$$\text{при } \frac{(2k+1)\pi}{\sqrt{\lambda}} \leq \omega < \frac{2(k+1)\pi}{\sqrt{\lambda}},$$

где

$$P = \left[2k + (-1)^k \sin \frac{\sqrt{\lambda} \omega}{2} \right],$$

$$Q = \left[2(k+1) + (-1)^{k+1} \sin \frac{\sqrt{\lambda} \omega}{2} \right],$$

$$F = \left(\sqrt{\lambda} \left| \sin \frac{\sqrt{\lambda} \omega}{2} \right| \right)^{-1} \left[(2k+1) + (-1)^{k+1} \cos \frac{\sqrt{\lambda} \omega}{2} \right],$$

$$\Delta = \left(2 \sqrt{\lambda} \left| \sin \frac{\sqrt{\lambda} \omega}{2} \right| - \int_{\alpha}^{\beta} |a(s) - \lambda| ds \right)^{-1}$$

$$(k = 0, 1, 2, \dots; \omega = \beta - \alpha).$$

Замечание. Легко получить теорему, аналогичную теореме 2, в предположении, что $\lambda < 0$.

Если в качестве функции краевых условий взять

$$q(t, s) = \frac{\omega}{2k\pi} \sin \frac{k\pi}{\omega} |t - s|,$$

где $\omega = \beta - \alpha$, $k = 1, 3, 5, \dots$, то для задачи (2.1) имеет место Теорема 3. Пусть функция $a(t)$ такова, что

$$\frac{k(k-1)\pi^2}{\omega^2} < a(t) < \frac{k(k+1)\pi^2}{\omega^2} \quad (k = 1, 3, 5, \dots).$$

Тогда: 1) существует функция Грина $G(t, s)$ задачи (1.2); 2) справедливы оценки

$$|G(t, s)| \leq \frac{\omega}{2k\pi} [2 - k\Delta_1] \cdot [1 - k\Delta_1]^{-1},$$

$$\int_{\alpha}^{\beta} |G(t, s)| ds \leq \omega^2 [k\pi^2 - k^2\pi^2\Delta_1]^{-1},$$

где

$$\Delta_1 = \left| a(t) \frac{\omega^2}{k^2\pi^2} - 1 \right|.$$

Литература

1. Хохряков А. Я., Зубов В. М. ДАН БССР, № 12, 1968.
2. Перов А. И., Кибенко А. В. Изв. АН СССР, сер. матем., № 2, 1966.
3. Трикоми Ф. Интегральные уравнения. М., 1960.
4. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М., 1965.

Белорусский государственный
университет им. В. И. Ленина,
Могилевский машиностроительный
институт

Поступило в редакцию
27.III 1968

И. А. ПАВЛОВ

**КОММУТАТИВНЫЕ НИЛЬПОТЕНТНЫЕ АЛГЕБРЫ
 МАТРИЦ КЛАССА $n-3$. I**

Пусть P — алгебраически замкнутое поле нулевой характеристики, $U_{n,k}$ — множество всех максимальных коммутативных нильпотентных подалгебр класса k полной линейной алгебры P_n , а $\bar{U}_{n,k}$ — множество классов сопряженных в P_n алгебр из $U_{n,k}$. Д. А. Супруненко и Р. И. Тышкевич [1] сформулировали следующую проблему. Для каких пар (n, k) множество $\bar{U}_{n,k}$ конечно? Известно [4, 5], что для $n = 2, 3, 4, 5, 6$ множество $\bar{U}_{n,k}$ при любом возможном k конечно. В работах [2, 7] установлена конечность $\bar{U}_{n,2}, \bar{U}_{n,n-2}, \bar{U}_{n,n-1}, \bar{U}_{n,n}$. Д. А. Супруненко [3] доказал, что при $n > 6$ множество $\bar{U}_{n,3}$ бесконечно, а З. М. Дымент [6] установил бесконечность $\bar{U}_{n,k}$ для $3 \leq k \leq n-4$. Таким образом, для полного решения проблемы осталось выяснить, конечно или бесконечно $\bar{U}_{n,n-3}$ при $n > 6$. В настоящей работе мы доказываем конечность множеств $\bar{U}_{7,4}, \bar{U}_{8,5}$ и $\bar{U}_{n,n-3}$ при $n > 10$ и бесконечность $\bar{U}_{9,6}, \bar{U}_{10,7}$, а также классифицируем с точностью до сопряженности в P_n алгебры множеств $U_{7,4}, U_{8,5}$ и $U_{n,n-3}$ при $n > 10$.

В дальнейшем используются обозначения из [1]. Пусть N обозначает максимальную коммутативную нильпотентную подалгебру класса $n-3$ алгебры P_n , N' — алгебру, получающуюся из N транспонированием всех ее матриц. Будем предполагать, что $n > 6$, так как при $n = 5, 6$ алгебры N описаны [4, 5]. Согласно теореме Фробениуса (см., например, [1], стр. 9), в N содержится такая матрица a , что

$$a^{n-4} \neq 0, \quad a^{n-3} = 0. \quad (1)$$

Возможны три случая:

- а) в алгебре N есть матрица ранга $n-2$, удовлетворяющая условию (1);
- б) в алгебре N нет матрицы ранга $n-2$, удовлетворяющей условию (1), но есть матрица ранга $n-3$, удовлетворяющая условию (1);
- в) в алгебре N нет матриц рангов $n-2$ и $n-3$, удовлетворяющих условию (1).

В этой части работы исследуется случай а). Пусть матрица a ранга $n-2$ принадлежит N и удовлетворяет условию (1). Очевидно, $e_{21} + e_{32} + \dots + e_{n-3n-4} + e_{n-1n-2} + e_{nn-1}$ есть нормальная форма Жордана матрицы a . Если $b \in N$, то из условия $ab = ba$, согласно теореме 6 [1] (стр. 21), следует, что

$$b = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n-6} \alpha_{n-7} \alpha_{n-8} & \dots & \dots & 0 & \gamma_1 & 0 & 0 \\ \alpha_{n-5} \alpha_{n-6} \alpha_{n-7} & \dots & \dots & 0 & \gamma_2 & \gamma_1 & 0 \\ \alpha_{n-4} \alpha_{n-5} \alpha_{n-6} & \dots & \dots & 0 & \gamma_3 & \gamma_2 & \gamma_1 \\ \delta_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \delta_2 & \delta_1 & 0 & \dots & 0 & \beta_1 & 0 \\ \delta_3 & \delta_2 & \delta_1 & \dots & 0 & \beta_2 & \beta_1 \end{bmatrix}$$

Матрица

$$\begin{aligned}
 b_1 &= b - \alpha_1 a - \alpha_2 a^2 - \dots - \alpha_{n-4} a^{n-4} \in N, \\
 b_1 &= \gamma_1 (e_{n-5n-2} + e_{n-4n-1} + e_{n-3n}) + \gamma_2 (e_{n-4n-2} + e_{n-3n-1}) + \gamma_3 e_{n-3n-2} + \\
 &+ \delta_1 (e_{n-2n} + e_{n-1n} + e_{n3}) + \delta_2 (e_{n-11} + e_{n2}) + \\
 &+ \delta_3 e_{n1} + \beta_1 (e_{n-1n-2} + e_{nn-1}) + \beta_2 e_{nn-2}. \quad (2)
 \end{aligned}$$

Здесь имеются две возможности: $(a, \alpha) e_{nn-2} \in N$ и $(a, \beta) e_{nn-2} \notin N$.

(a, α) . Пусть $e_{nn-2} \in N$. Тогда из условия $e_{nn-2} b_1 = b_1 e_{nn-2}$ получим, что $\delta_1 = \gamma_1 = 0$.

Лемма 1. Если $e_{nn-2} \in N$, то в N есть базис

$$a, a^2, \dots, a^{n-4}, e_{n-3n-2}, e_{n1}, e_{nn-2}, c, \quad (3)$$

где

$$c = \gamma_2 (e_{n-4n-2} + e_{n-3n-1}) + \delta_2 (e_{n-11} + e_{n2}) + \beta_1 (e_{n-1n-2} + e_{nn-1}).$$

Доказательство аналогично доказательству леммы 1 [1] (стр. 71).

В этом случае мы получим трехпараметрическое семейство алгебр с базисом (3). Можно показать, что всякая алгебра вида $N_{\gamma, \delta, \beta}$ сопряжена в P_n с одной из попарно несопряженных алгебр $N_{1,0,0}$, $N_{0,0,1}$, $N_{1,1,0}$, $N_{1,1,1}$, $N_{0,1,1}$, $N_{0,1,0}$. Алгебры $N_{1,0,0}$, $N_{0,0,1}$, $N_{1,1,0}$, $N_{1,1,1}$, $N_{0,1,1}$, $N_{0,1,0}$ обозначим через N_1 , N_2 , N_3 , N_4 , N_5 , N_6 соответственно:

$$\begin{aligned}
 N_1 &= [a, a^2, \dots, a^{n-4}, e_{n-3n-2}, e_{n1}, e_{nn-2}, e_{n-4n-2} + e_{n-3n-1}], \\
 N_2 &= [a, a^2, \dots, a^{n-4}, e_{n-3n-2}, e_{n1}, e_{nn-2}, e_{n-1n-2} + e_{nn-1}], \\
 N_3 &= [a, a^2, \dots, a^{n-4}, e_{n-3n-2}, e_{n1}, e_{nn-2}, e_{n-4n-2} + e_{n-3n-1} + e_{n-11} + e_{n2}], \\
 N_4 &= [a, a^2, \dots, a^{n-4}, e_{n-3n-2}, e_{n1}, e_{nn-2}, \\
 &e_{n-4n-2} + e_{n-3n-1} + e_{n-11} + e_{n2} + e_{n-1n-2} + e_{nn-1}], \\
 N_5 &= [a, a^2, \dots, a^{n-4}, e_{n-3n-2}, e_{n1}, e_{nn-2}, e_{n-11} + e_{n2} + e_{n-1n-2} + e_{nn-1}], \\
 N_6 &= [a, a^2, \dots, a^{n-4}, e_{n-3n-2}, e_{n1}, e_{nn-2}, e_{n-11} + e_{n2}].
 \end{aligned}$$

(a, β) . Пусть $e_{nn-2} \notin N$. Тогда по крайней мере одно из чисел δ_1 и γ_1 в (2) отлично от нуля.

Лемма 2. Если $e_{nn-2} \notin N$, то в N есть базис

$$a, a^2, \dots, a^{n-4}, b_1, b_2, b_3, \quad (4)$$

где

$$\begin{aligned}
 b_2 &= ab_1 = \gamma_1 (e_{n-4n-2} + e_{n-3n-1}) + \gamma_2 e_{n-3n-2} + \delta_1 (e_{n-11} + e_{n2}) + \delta_2 e_{n1} + \beta_1 e_{nn-2}, \\
 b_3 &= a^2 b_1 = \gamma_1 e_{n-3n-2} + \delta_1 e_{n1}.
 \end{aligned}$$

Доказательство аналогично доказательству леммы 1 [1] (стр. 71).

Непосредственная проверка показывает, что базис (4) алгебры N удовлетворяет следующим соотношениям:

$$\begin{aligned}
 ab_1 &= b_2, \quad a^2 b_1 = b_3, \quad a^3 b_1 = 0, \\
 b_1^2 &= \begin{cases} \gamma_1 \delta_1 a^{n-6} + (\gamma_2 \delta_1 + \gamma_1 \delta_2) a^{n-5} + (\gamma_3 \delta_1 + \gamma_2 \delta_2 + \\ + \gamma_1 \delta_3) a^{n-4} + \beta_1 b_2 + \beta_2 b_3; \quad n > 8, \\ \gamma_1 \delta_1 a^2 + (\gamma_2 \delta_1 + \gamma_1 \delta_2) a^3 + (\gamma_3 \delta_1 + \gamma_2 \delta_2 + \gamma_1 \delta_3) a^4 + \\ + \beta_1 b_2 + \beta_2 b_3, \quad n = 8, \\ \gamma_1 \delta_1 a + (\gamma_2 \delta_1 + \gamma_1 \delta_2) a^2 + (\gamma_3 \delta_1 + \gamma_2 \delta_2 + \gamma_1 \delta_3) a^3 + \\ + \beta_1 b_2 + \beta_2 b_3, \quad n = 7, \end{cases} \quad (5)
 \end{aligned}$$

$$b_1 b_2 = \begin{cases} \gamma_1 \delta_1 a^{n-5} + (\gamma_2 \delta_1 + \gamma_1 \delta_2) a^{n-4} + \beta_1 b_3, & n > 7, \\ \gamma_2 \delta_1 a^2 + (\gamma_2 \delta_1 + \gamma_1 \delta_2) a^3 + \beta_1 b_3, & n = 7, \end{cases} \quad (5)$$

$$b_1 b_3 = b_2^2 = \gamma_1 \delta_1 a^{n-4}.$$

Однако при $n = 7$ $\gamma_1 \delta_1 = 0$, так как в противном случае класс нильпотентности алгебры N выше 4.

Имеют место

Лемма 3. Пусть c, d_1, d_2, d_3 — такие матрицы из N , что c^{n-4} и d_3 линейно независимы, а $cd_1 = d_2, cd_2 = d_3, cd_3 = 0$. Тогда $c, c^2, \dots, c^{n-4}, d_1, d_2, d_3$ — базис N .

Лемма 4. Пусть M — аннулятор алгебры N . Если $\gamma_1 \delta_1 \neq 0$, то $M = [a^{n-4}]$, если же $\gamma_1 \delta_1 = 0$, то $M = [a^{n-4}, b_3]$.

Лемма 5. (i) Если $\gamma_1 \delta_1 \neq 0$, то сигнатура N равна $(1, n-2, 1)$. (ii) Если $\gamma_1 \neq 0, \delta_1 = 0$, то сигнатура N равна $(2, n-3, 1)$. (iii) Если $\gamma_1 = 0, \delta_1 \neq 0$, то сигнатура N равна $(1, n-3, 2)$.

Доказательство лемм 3, 4, 5 аналогично доказательству лемм 2, 3, 4 [1] (стр. 72).

Итак, в этом случае возможны три типа алгебр N : (i), (ii), (iii). Заметим, что алгебры, принадлежащие различным типам, не сопряжены в P_n , так как различны их сигнатуры. В силу [1] (стр. 48) сопряженность каких-либо двух алгебр одного и того же типа следует из их изоморфизма.

Ниже классифицируются алгебры каждого из этих трех типов.

(i). Пусть $\gamma_1 \delta_1 \neq 0$.

Ввиду (6) этот случай возможен только при $n > 7$. Очевидно, можно считать $\delta_1 = 1$. Тогда $b_2 = \gamma_1 (e_{n-4n-2} + e_{n-3n-1}) + \gamma_2 e_{n-3n-2} + e_{n-11} + e_{n2} + \delta_2 e_{n1} + \beta_1 e_{nn-2}, b_3 = \gamma_1 e_{n-3n-2} + e_{n1}$. Вследствие этого мы можем в (4) считать, что $\delta_2 = \delta_3 = 0$. Если вместо b_1, b_2, b_3 взять соответственно

$$\frac{b_1}{\sqrt{\gamma_1}}, \frac{b_2}{\sqrt{\gamma_1}}, \frac{b_3}{\sqrt{\gamma_1}},$$

$$ab_1 = b_2, a^2 b_1 = b_3, a^3 b_1 = 0,$$

$$b_1^2 = a^{n-6} + \gamma_2 a^{n-5} + \gamma_3 a^{n-4} + \beta_1 b_2 + \beta_2 b_3,$$

$$b_1 b_2 = a^{n-5} + \gamma_2 a^{n-4} + \beta_1 b_3,$$

$$b_2^2 = b_1 b_3 = a^{n-4}.$$

Если теперь положить $a_1 = a + \gamma_3 (n-6)^{-1} a^3$, то в итоге получим трехпараметрическое семейство алгебр с базисом

$$a_1, a_1^2, \dots, a_1^{n-4}, b_1, b_2, b_3,$$

где

$$a_1 b_1 = b_2, a_1 b_2 = b_3, a_1 b_3 = 0,$$

$$b_1^2 = a_1^{n-6} + \gamma a_1^{n-5} + \beta b_2 + \mu b_3,$$

$$b_1 b_2 = a_1^{n-5} + \gamma a_1^{n-4} + \beta b_3, b_2^2 = b_1 b_3 = a_1^{n-4}.$$

Лемма 6. Если $n > 10, \beta \neq 0$, то $N_{\gamma, \beta, \mu} \cong N_{0,1,0}$.

Доказательство. Матрицы $c, c^2, \dots, c^{n-4}, d_1, d_2, d_3$, где

$$c = a_1 + \frac{\sqrt{\beta} - 1}{\beta} b_1 + \frac{\mu}{\beta^2} b_2,$$

$$d_1 = \frac{1 - \beta \sqrt{\beta}}{\beta \sqrt{\beta}} a_1^{n-7} + \frac{\beta \gamma - \mu}{\beta^2 \sqrt{\beta}} a_1^{n-6} - \frac{\mu \gamma}{\beta^2 \sqrt{\beta}} a_1^{n-5} + \frac{1}{\sqrt{\beta}} b_1,$$

$$d_2 = \frac{1-\beta}{\beta} a_1^{n-6} + \frac{\gamma}{\beta} a_1^{n-5} + b_2 + \frac{\mu}{\beta} b_3,$$

$$d_3 = \frac{\sqrt{\beta}-\beta}{\beta} a_1^{n-5} + \frac{\beta\gamma+\mu}{\beta\sqrt{\beta}} a_1^{n-4} + \sqrt{\beta} b_3,$$

образуют базис алгебры $N_{\gamma, \beta, \mu}$, так как выполняются условия леммы 3. Легко проверяется, что $d_1^2 = c^{n-6} + d_2$. Следовательно, $N_{\gamma, \beta, \mu} \cong N_{0, 1, 0}$. Лемма доказана.

Лемма 7. Если $n > 10$, $\mu \neq 0$, то $N_{\gamma, 0, \mu} \cong N_{0, 0, 1}$.

Доказательство. Выберем в качестве базиса $N_{\gamma, 0, \mu}$ матрицы $c, c^2, \dots, c^{n-4}, d_1, d_2, d_3$, где

$$c = \mu^{\frac{2}{10-n}} a_1 - \gamma \mu^{\frac{n-8}{10-n}} b_1,$$

$$d_1 = 3\gamma \mu^{\frac{2n-16}{10-n}} a_1^{n-7} + \gamma^2 \mu^{\frac{2n-16}{10-n}} a_1^{n-6} + \mu^{\frac{n-6}{10-n}} b_1,$$

$$d_2 = 2\gamma \mu^{\frac{2n-14}{10-n}} a_1^{n-6} + \mu^{\frac{n-4}{10-n}} b_2 - \gamma \mu^{\frac{n-4}{10-n}} b_3,$$

$$d_3 = \gamma \mu^{\frac{2n-12}{10-n}} a_1^{n-5} + \mu^{\frac{n-2}{10-n}} b_3.$$

Легко проверить, что $cd_1 = d_2$, $cd_2 = d_3$, $cd_3 = 0$, $d_1^2 = c^{n-6} + d_3$. Отсюда заключаем, что $N_{\gamma, 0, \mu} \cong N_{0, 0, 1}$. Лемма доказана.

Лемма 8. Если $n = 10$, $\mu_1 \neq \mu_2$, то $N_{\gamma_1, 0, \mu_1}$ неизоморфна $N_{\gamma_2, 0, \mu_2}$.

Доказательство. Предположим, что алгебры $N_{\gamma_1, 0, \mu_1} = [a, a^2, \dots, a^6, b_1, b_2, b_3]$, где $ab_1 = b_2$, $ab_2 = b_3$, $ab_3 = 0$, $b_1^2 = a^4 + \gamma_1 a^5 + \mu_1 b_3$, $b_1 b_2 = a^5 + \gamma_1 a^6$, $b_2^2 = b_1 b_3 = a^6$, и $N_{\gamma_2, 0, \mu_2} = [c, c^2, \dots, c^6, d_1, d_2, d_3]$, где $cd_1 = d_2$, $cd_2 = d_3$, $cd_3 = 0$, $d_1^2 = c^4 + \gamma_2 c^5 + \mu_2 d_3$, $d_1 d_2 = c^5 + \gamma_2 c^6$, $d_2^2 = d_1 d_3 = c^6$, изоморфны, и φ -изоморфизм $N_{\gamma_2, 0, \mu_2}$ на $N_{\gamma_1, 0, \mu_1}$. Обозначим φ -образы элементов c, d_1, d_2, d_3 через $\bar{c}, \bar{d}_1, \bar{d}_2, \bar{d}_3$ соответственно. Тогда

$$\bar{c} = \sum_{i=1}^6 x_i a^i + x_7 b_1 + x_8 b_2 + x_9 b_3,$$

$$\dots$$

$$\bar{c}^{-6} = x_1^6 a^6,$$

$$\bar{d}_1 = \sum_{i=1}^6 y_i a^i + y_7 b_1 + y_8 b_2 + y_9 b_3,$$

$$\bar{d}_2 = \sum_{i=1}^6 z_i a^i + z_7 b_1 + z_8 b_2 + z_9 b_3,$$

$$\bar{d}_3 = \sum_{i=1}^6 t_i a^i + t_7 b_1 + t_8 b_2 + t_9 b_3.$$

Так как $\bar{c}, \bar{c}^2, \dots, \bar{c}^6, \bar{d}_1, \bar{d}_2, \bar{d}_3$ образуют базис алгебры $N_{\gamma_1, 0, \mu_1}$, то

$$\Delta = \begin{vmatrix} x_1 & \dots & x_5 & x_6 & x_7 & x_8 & x_9 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & x_1^6 & 0 & 0 & 0 \\ y_1 & \dots & y_5 & y_6 & y_7 & y_8 & y_9 \\ z_1 & \dots & z_5 & z_6 & z_7 & z_8 & z_9 \\ t_1 & \dots & t_5 & t_6 & t_7 & t_8 & t_9 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Из условий $\bar{c}\bar{d}_1 = \bar{d}_2, \bar{c}\bar{d}_2 = \bar{d}_3, \bar{c}\bar{d}_3 = 0, \bar{d}_2^2 = \bar{d}_1\bar{d}_3 = \bar{c}^6, \bar{d}_1^2 = \bar{c}^4 + \gamma_2\bar{c}^5 + \mu_2\bar{d}_3, \bar{d}_1\bar{d}_2 = \bar{c}^5 + \gamma_2\bar{c}^6$ следует, что]

$$\begin{aligned} y_1 = y_2 = z_1 = z_2 = z_3 = z_7 = t_1 = t_2 = t_3 = t_4 = t_7 = t_8 = 0, \\ x_1 y_7 = z_8, \\ x_1 z_8 = t_9, \\ z_8^2 = x_1^6, \\ \mu_1 y_7^2 = \mu_2 t_9, \\ y_7^2 = x_1^4. \end{aligned} \tag{6}$$

Система (6) имеет только нулевые решения, следовательно, $\Delta = 0$, чего не может быть при изоморфизме $N_{\gamma_1, 0, \mu_1}$ и $N_{\gamma_2, 0, \mu_2}$. Лемма доказана.

Лемма 9. $N_{\gamma, 0, 0} \cong N_{0, 0, 0}$.

Доказательство. Выберем в качестве базиса $N_{\gamma, 0, 0}$ матрицы $c, c^2, \dots, c^{n-4}, d_1, d_2, d_3$, где

$$\begin{aligned} c &= a_1 + \frac{\gamma}{n-6} a_1^2 - \frac{\gamma^2(n-7)}{2(n-6)^2} a_1^3, \\ d_1 &= b_1, \quad d_2 = b_2 + \frac{\gamma}{n-6} b_3, \quad d_3 = b_3. \end{aligned}$$

Легко проверить, что $cd_1 = d_2, cd_2 = d_3, cd_3 = 0, d_1^2 = c^{n-6}$. Следовательно, $N_{\gamma, 0, 0} \cong N_{0, 0, 0}$. Лемма доказана.

Можно показать, что $N_{0, 0, 0}$ и $N_{0, 1, 0}, N_{0, 0, 0}$ и $N_{\gamma, 0, \mu}, N_{0, 1, 0}$ и $N_{\gamma, 0, \mu}$, где $\mu \neq 0$, неизоморфны. Алгебры $N_{0, 0, 0}, N_{0, 1, 0}, N_{0, 0, 1}$ обозначим через N_7, N_8, N_9 соответственно:

$$\begin{aligned} N_7 &= [a, a^2, \dots, a^{n-4}, e_{n-5n-2} + e_{n-4n-1} + e_{n-3n} + e_{n-21} + \\ &+ e_{n-12} + e_{n3}, e_{n-4n-2} + e_{n-3n-1} + e_{n-11} + e_{n2}, e_{n-3n-2} + e_{n1}]; \\ N_8 &= [a, a^2, \dots, a^{n-4}, e_{n-5n-2} + e_{n-4n-1} + e_{n-3n} + e_{n-21} + \\ &+ e_{n-12} + e_{n3} + e_{n-1n-2} + e_{nn-1}, \\ &e_{n-4n-2} + e_{n-3n-1} + e_{n-11} + e_{n2} + e_{nn-2}, e_{n-3n-2} + e_{n1}]; \\ N_9 &= [a, a^2, \dots, a^{n-4}, e_{n-5n-2} + e_{n-4n-1} + e_{n-3n} + e_{n-21} + \\ &+ e_{n-12} + e_{n3} + e_{nn-2}, e_{n-4n-2} + e_{n-3n-1} + e_{n-11} + e_{n2}, e_{n-3n-2} + e_{n1}]. \end{aligned}$$

Следствие. Множество $\bar{U}_{10, 7}$ бесконечно.

Таким образом, случай (i), когда $\gamma_1\delta_1 \neq 0$, полностью изучен.

(ii). Пусть $\gamma_1 \neq 0, \delta_1 = 0$.

Очевидно, можно считать $\gamma_1 = 1$. Тогда $b_3 = e_{n-3n-2}$. Вследствие этого мы можем в (4) считать, что $\gamma_2 = \gamma_3 = 0$ и $b_2 = e_{n-4n-2} + e_{n-3n-1} + \delta_2 e_{n1} + \beta_1 e_{nn-2}$. Таким образом, N обладает базисом $a, a^2, \dots, a^{n-4}, b_1, b_2, b_3$, где

$$\begin{aligned} ab_1 &= b_2, \quad ab_2 = b_3, \quad ab_3 = 0, \quad b_1 b_2 = \delta_2 a^{n-4} + \beta_1 b_3, \\ b_1^2 &= \begin{cases} \delta_2 a^{n-5} + \delta_3 a^{n-4} + \beta_1 b_2 + \beta_2 b_3, & n > 7, \\ \delta_2 a^2 + \delta_3 a^3 + \beta_1 b_2 + \beta_2 b_3, & n = 7. \end{cases} \end{aligned} \quad (7)$$

Лемма 10. Если $\beta_1 \neq 0$, то $N_{\delta_2, \delta_3, \beta_1, \beta_2} \cong N_{0,0,1,0}$.

Доказательство. Мы докажем здесь лемму в предположении, что $n > 8$, однако лемма справедлива и для $n = 7, 8$.

Матрицы $c, c^2, \dots, c^{n-4}, d_1, d_2, d_3$, где

$$\begin{aligned} c &= a, \quad d_1 = \frac{\delta_2}{\beta_1^2} a^{n-6} + \left(\frac{\delta_3}{\beta_1^2} - \frac{2\beta_2\delta_2}{\beta_1^3} \right) a^{n-5} + \frac{1}{\beta_1} b_1 - \frac{\beta_2}{\beta_1} b_2, \\ d_2 &= \frac{\delta_2}{\beta_1^2} a^{n-5} + \left(\frac{\delta_3}{\beta_1^2} - \frac{2\beta_2\delta_2}{\beta_1^3} \right) a^{n-4} + \frac{1}{\beta_1} b_2 - \frac{\beta_2}{\beta_1^2} b_3, \\ d_3 &= \frac{\delta_2}{\beta_1^2} a^{n-4} + \frac{1}{\beta_1} b_3, \end{aligned}$$

образуют базис алгебры $N_{\delta_2, \delta_3, \beta_1, \beta_2}$, так как выполняются условия леммы 3. Легко проверить, что $d_1^2 = d_2, d_1 d_2 = d_3$. Следовательно, $N_{\delta_2, \delta_3, \beta_1, \beta_2} \cong N_{0,0,1,0}$. Лемма доказана.

Алгебру $N_{0,0,1,0}$ обозначим через N_{10} :

$$\begin{aligned} N_{10} &= [a, a^2, \dots, a^{n-4}, e_{n-5n-2} + e_{n-4n-1} + e_{n-3n} + \\ &+ e_{n-1n-2} + e_{nn-1}, e_{n-4n-2} + e_{n-3n-1} + e_{nn-2}, e_{n-3n-2}]. \end{aligned}$$

Пусть $\beta_1 = 0$. В этом случае можно показать, что алгебры N с параметром $\delta_2 \neq 0$ и равным нулю неизоморфны.

Предположим, что $\delta_2 \neq 0$. Этот случай возможен только при $n > 6$.

Если вместо b_1, b_2, b_3 взять соответственно $\frac{b_1}{\sqrt{\delta_2}}, \frac{b_2}{\sqrt{\delta_2}}, \frac{b_3}{\sqrt{\delta_2}}$, то получим $\delta_2 = 1$. Тогда $b_1^2 = a^{n-5} + \delta_3 a^{n-4} + \beta_2 b_3, b_1 b_2 = a^{n-4}$. Полагая $a_1 = a + \delta_3(n-5)^{-1} a^2$, получим в итоге однопараметрическое семейство алгебр с базисом $a_1, a_1^2, \dots, a_1^{n-4}, b_1, b_2, b_3$, где $a_1 b_1 = b_2, a_1 b_2 = b_3, a_1 b_3 = 0, b_1^2 = a_1^{n-5} + \mu b_3, b_1 b_2 = a_1^{n-4}$.

Лемма 11. Если $n \neq 9, \delta_2 \neq 0, \mu \neq 0$, то $N_\mu \cong N_1$.

Доказательство. Согласно лемме 3, в качестве базиса алгебры N_μ могут быть выбраны матрицы $c, c^2, \dots, c^{n-4}, d_1, d_2, d_3$, где

$$c = \mu^{\frac{2}{9-n}} a_1, \quad d_1 = \mu^{\frac{n-5}{9-n}} b_1, \quad d_2 = \mu^{\frac{n-3}{9-n}} b_2, \quad d_3 = \mu^{\frac{n-1}{9-n}} b_3.$$

Легко проверить, что $d_1^2 = c^{n-5} + d_3$. Следовательно, $N_\mu \cong N_1$. Лемма доказана.

Лемма 12. Если $n = 9, \mu_1 \neq \mu_2$, то N_{μ_1} неизоморфна N_{μ_2} .

Доказательство аналогично доказательству леммы 8.

Можно показать, что N_0 неизоморфна N_μ , где $\mu \neq 0$. Алгебры N_0 , N_1 обозначим через N_{11} , N_{12} соответственно:

$$N_{11} = [a, a^2, \dots, a^{n-4}, e_{n-5n-2} + e_{n-4n-1} + e_{n-3n} + e_{n-11} + e_{n2}, \\ e_{n-4n-2} + e_{n-3n-1} + e_{n1}, e_{n-3n-2}];$$

$$N_{12} = [a, a^2, \dots, a^{n-4}, e_{n-5n-2} + e_{n-4n-1} + e_{n-3n} + e_{n-11} + e_{n2} + e_{nn-2}, \\ e_{n-4n-2} + e_{n-3n-1} + e_{n1}, e_{n-3n-2}].$$

Следствие. Множество $\bar{U}_{9,6}$ бесконечно.

Пусть теперь $\delta_2 = 0$. Тогда соотношения (7) примут вид

$$ab_1 = b_2, ab_2 = b_3, ab_3 = 0, b_1^2 = \delta_3 a^{n-4} + \beta_2 b_3, b_1 b_2 = 0. \quad (8)$$

Лемма 13. Если $n > 8$, $\beta_2 \neq 0$, то $N_{\delta_3, \beta_2} \cong N_{0,1}$.

Доказательство. Выберем в качестве базиса алгебры $N_{0,1}$ матрицы $c, c^2, \dots, c^{n-4}, d_1, d_2, d_3$, где

$$c = a, d_1 = -\frac{\delta_3}{\beta_2} a^{n-6} + \beta_2 b_1, d_2 = -\frac{\delta_3}{\beta_2} a^{n-5} + \beta_2 b_2, d_3 = cd_2.$$

Условия леммы 3 выполняются, и $d_1^2 = \delta_3 c^{n-4} + \beta_2 d_3$. Отсюда $N_{\delta_3, \beta_2} \cong N_{0,1}$.

Лемма доказана.

Лемма 14. Пусть $n = 8$. Если $\beta_2^2 + 4\delta_3 \neq 0$, то $N_{\delta_3, \beta_2} \cong N_{0,1}$.

Если же $\beta_2^2 + 4\delta_3 = 0$, то $N_{\delta_3, \beta_2} \cong N_{0,0}$.

Доказательство. При $\beta_2^2 + 4\delta_3 \neq 0$ положим

$$c = a, d_1 = \frac{\beta_2 - \sqrt{\beta_2^2 + 4\delta_3}}{2} a^2 + \sqrt{\beta_2^2 + 4\delta_3} b_1,$$

$$d_2 = \frac{\beta_2 - \sqrt{\beta_2^2 + 4\delta_3}}{2} a^3 + \sqrt{\beta_2^2 + 4\delta_3} b_2,$$

$$d_3 = \frac{\beta_2 - \sqrt{\beta_2^2 + 4\delta_3}}{2} a^4 + \sqrt{\beta_2^2 + 4\delta_3} b_3.$$

Тогда условия леммы 3 выполняются, и $d_1^2 = \delta_3 c^4 + \beta_2 d_3$. Следовательно, $N_{\delta_3, \beta_2} \cong N_{0,1}$. Пусть теперь $\beta_2^2 + 4\delta_3 = 0$. В силу леммы 3 матрицы $c, c^2, \dots, c^{n-4}, d_1, d_2, d_3$, где

$$c = a, d_1 = \frac{\beta_2}{2} a^2 + b_1, d_2 = \frac{\beta_2}{2} a^3 + b_2, d_3 = \frac{\beta_2}{2} a^4 + b_3,$$

образуют базис алгебры $N_{0,0}$, и $d_1^2 = \delta_3 c^4 + \beta_2 d_3$. Отсюда $N_{\delta_3, \beta_2} \cong N_{0,0}$.

Лемма доказана.

Лемма 15. Если $n = 7$, $\delta_3 \neq 0$, то $N_{\delta_3, \beta_2} \cong N_{1,0}$.

Доказательство. Очевидно, $N_{\delta_3, \beta_2} \cong N_{1,\rho}$, где $\rho = \frac{\beta_2}{\sqrt{\delta_3}}$. Выберем в качестве базиса $N_{1,\rho}$ матрицы $c, c^2, \dots, c^{n-4}, d_1, d_2, d_3$, где

$$c = a + \frac{\rho}{3} b_1, d_1 = b_1, d_2 = \frac{\rho}{3} a^3 + b_2 + \frac{\rho^2}{3} b_3, d_3 = b_3.$$

Легко проверить, что условия леммы 3 выполняются, и $d_1^2 = c^3$. Следовательно, $N_{1,0} \cong N_{1,0}$. Лемма доказана.

Лемма 16. Если $n = 7$, $\beta_2 \neq 0$, то $N_{0,\beta_2} \cong N_{0,1}$.

Доказательство. В силу леммы 3 матрицы $c, c^2, \dots, c^{n-4}, d_1, d_2, d_3$, где $c = \beta_2 a, d_1 = \beta_2 b_1, d_2 = \beta_2^2 b_2, d_3 = \beta_2^2 b_3$, образуют базис алгебры N_{0,β_2} , и $d_1^2 = d_3$. Следовательно, $N_{0,\beta_2} \cong N_{0,1}$. Лемма доказана. Можно показать, что алгебры $N_{0,0}, N_{1,0}, N_{0,1}$ попарно неизоморфны. Алгебры $N_{0,0}, N_{1,0}, N_{0,1}$ обозначим через N_{13}, N_{14}, N_{15} соответственно:

$$N_{13} = [a, a^2, \dots, a^{n-4}, e_{n-5n-2} + e_{n-4n-1} + e_{n-3n}, e_{n-4n-2} + e_{n-3n-1}, e_{n-3n-2}];$$

$$N_{14} = [a, a^2, \dots, a^{n-4}, e_{n-5n-2} + e_{n-4n-1} + e_{n-3n} + e_{n-1n-2} + e_{nn-1},$$

$$e_{n-4n-2} + e_{n-3n-1} + e_{nn-2}, e_{n-3n-2}];$$

$$N_{15} = [a, a^2, \dots, a^{n-4}, e_{n-5n-2} + e_{n-4n-1} + e_{n-3n} + e_{nn-2},$$

$$e_{n-4n-2} + e_{n-3n-1}, e_{n-3n-2}].$$

Итак, случай (ii), когда $\gamma_1 \neq 0, \delta_1 = 0$, полностью изучен.

Из лемм 10—16 и теоремы 10 [1] (стр. 43) вытекает

Следствие. При $n > 10$ всякая алгебра типа (iii) сопряжена в P_n с одной из шести попарно неизоморфных алгебр: $N'_{10} - N'_{15}$. При $n = 7$ алгебра типа (iii) сопряжена с одной из шести попарно неизоморфных алгебр: $N'_{10} - N'_{15}, N'_{10}$.

Обозначим

$$N'_{10} = N_{16}, N'_{11} = N_{17}, N'_{12} = N_{18}, N'_{13} = N_{19}, N'_{14} = N_{20},$$

$$N'_{15} = N_{21}.$$

Результаты лемм 1—16 объединяются в следующем утверждении.

Теорема 1. Всякая алгебра N , которая содержит матрицу ранга $n - 2$, удовлетворяющую условию (1), сопряжена в P_n при $n > 10$ с одной из 21 попарно несопряженных алгебр: $N_1 - N_{21}$, при $n = 7$ с одной из 14 попарно несопряженных алгебр: $N_1 - N_6, N_{10} - N_{18}, N_{19} - N_{21}$. При $n = 9, 10$ множество классов максимальных коммутативных нильпотентных подалгебр класса $n - 3$ алгебры P_n бесконечно.

Таким образом, рассмотрение случая а) полностью закончено.

Литература

1. Супруненко Д. А., Тышкевич Р. И. Перестановочные матрицы. Изд. «Наука и техника», Минск, 1966.
2. Супруненко Д. А. Весті АН БССР, сер. фіз.-тэхн. навук, № 3, 1956.
3. Супруненко Д. А. УМН, 11, в. 3 (69), 1956.
4. Charles B. J. de Math., pur. et appl., 33, 81, 1954.
5. Дымент З. М. Весті АН БССР, сер. фіз.-мат. навук, № 3, 1966.
6. Дымент З. М. Весті АН БССР, сер. фіз.-мат. навук, № 1, 1968.
7. Кравчук М. Ф. Сообщ. Харьковск. мат. о-ва, сер. 2, 14, № 4, 1914.

Институт математики
АН БССР

Поступило в редакцию
15.11 1968

А. К. ЛАПКОВСКИЙ

О ГИПЕРКВАДРИКАХ С ИЗОТРОПНЫМИ ЛИНИЯМИ КРИВИЗНЫ

§ 1. О СВОЙСТВАХ ГИПЕРКВАДРИК W_n , ОБЛАДАЮЩИХ ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫМИ НЕИЗОТРОПНЫМИ ГЛАВНЫМИ НАПРАВЛЕНИЯМИ

1. Рассматриваем голономную гиперповерхность W_n в $(n+1)$ -мерном псевдоевклидовом пространстве E_{n+1} . С каждой точкой \bar{A} гиперповерхности W_n связываем подвижный ортонормированный репер, векторы $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_{n+1}$ которого лежат в касательной плоскости W_n , а вектор \vec{e}_{n+1} нормален к ней. Уравнения инфинитезимального перемещения этого репера

$$d\bar{A} = \omega^I \vec{e}_I, \quad d\vec{e}_I = \omega_I^K \vec{e}_K \quad (I, K = 1, \dots, n+1)$$

порождают формы ω^I, ω_I^K , которые связаны уравнениями структуры

$$D\omega^I = [\omega^K \omega_K^I], \quad D\omega_I^K = [\omega_L^I \omega_L^K] \quad (L = 1, \dots, n+1) \quad (1)$$

и условиями

$$\omega_I^K = \varepsilon_I \varepsilon_K \omega_K^I \quad (\varepsilon_I = \vec{e}_I^2 = \pm 1).$$

Система дифференциальных уравнений, определяющая гиперповерхность, имеет вид

$$\omega^{n+1} = 0, \quad \omega^k \omega_k^{n+1} = 0 \quad (k = 1, \dots, n).$$

Продолжения этой системы приводят к следующим соотношениям:

$$\omega_i^{n+1} = \Lambda_{ij} \omega^j \quad (i, j = 1, \dots, n), \quad (2)$$

$$d\Lambda_{ij} - \Lambda_{ik} \omega^k_j - \Lambda_{jk} \omega^k_i = \Lambda_{ijk} \omega^k. \quad (3)$$

Компоненты $\Lambda_{ij}, \Lambda_{ijk}$ фундаментальных объектов симметричны относительно своих индексов [1]. Фундаментальный объект второго порядка Λ_{ij} называется вторым фундаментальным тензором гиперповерхности.

2. Для того чтобы гиперповерхность W_n была гиперквадрикой, необходимо и достаточно, чтобы так называемый тензор Дарбу $b_{ijk} = (n+2)\Lambda_{ijk} - \Lambda_{(ij} b_k)$ был равен нулю [1]. Здесь $b_k = X_k \ln(s)$, где X_k — оператор дифференцирования в направлении k -го координатного вектора, а $s = |\Lambda_{ij}|/|g_{ij}|$ (g_{ij} — метрический тензор гиперповерхности).

Для собственно евклидова пространства E_{n+1} основные свойства гиперквадрик охарактеризованы Л. Вербицким [2]. Можно показать, что полученные им результаты сохраняют силу и для того случая псевдоевклидова пространства E_{n+1} , когда характеристика Сегре тензора Λ_{ij} простого типа.

3. Пусть характеристика тензора Λ_{ij} содержит подхарактеристику простого типа с действительными и различными собственными значениями. Это

значит, что существуют действительные неизотропные главные направления тензора Λ_{ij} . Пусть число их m ($m > 1$). В касательной плоскости гиперквадрики можно выделить площадку 1E_m , натянутую на эти векторы. Докажем, что площадки 1E_m голономны и огибают нормальную подповерхность W_m , которая раслаивается вдоль линий кривизны поверхности W_n на семейства ортогональных к ним поверхностей. Подповерхность W_m является тогда нормальной; она несет на себе метрику регулярного риманова пространства.

Действительно, выбирая первые m векторов базисного ортонормированного репера по главным направлениям, приведем матрицу тензора Λ_{ij} к виду

$$\left\| \begin{array}{c} \varepsilon_1 \lambda_1 \\ \vdots \\ \varepsilon_m \lambda_m \\ \hline \Lambda_{pq} \end{array} \right\| \quad (p, q = m+1, \dots, n).$$

Тогда уравнения (3) для индексов i, j , равных

$$\alpha, p; \quad \alpha, \beta \quad (\alpha, \beta = 1, \dots, m; \alpha \neq \beta),$$

запишутся соответственно следующим образом:

$$-\omega_\alpha{}^q \Lambda_{pq} + \omega_{\alpha p} \lambda_\alpha = \Lambda_{\alpha p i} \omega^i, \quad (4)$$

$$\omega_{\beta \alpha} (\lambda_\alpha - \lambda_\beta) = \Lambda_{\alpha \beta i} \omega^i. \quad (5)$$

Из уравнений (4), (5) следует, что формы $\omega_\alpha{}^p$, $\omega_{\alpha \beta}$ принадлежат подкольцу главных форм:

$$\omega_\alpha{}^p = \gamma_\alpha{}^p{}_i \omega^i \quad \omega_{\alpha \beta} = \gamma_{\alpha \beta}{}^i \omega^i,$$

где величины $\gamma_\alpha{}^p{}_i$, $\gamma_{\alpha \beta}{}^i$ есть так называемые коэффициенты вращения Риччи.

Так как в случае вырождения гиперповерхности в гиперквадрику имеем $\Lambda_{\alpha p \beta} = \Lambda_{\alpha \beta \delta} = 0$ ($\delta = 1, \dots, m; \alpha, \beta, \delta \neq$), то из уравнений (4), (5) можно получить:

$$\gamma_\alpha{}^q{}_\beta (\Lambda_{pq} - \delta_{pq} \varepsilon_p \lambda_\alpha) = 0, \quad (6)$$

$$\gamma_{\alpha \beta \delta} (\lambda_\alpha - \lambda_\beta) = 0. \quad (7)$$

Если различные элементарные делители не имеют одинакового базиса, то из (6), (7) имеем:

$$\gamma_\alpha{}^p{}_\beta = 0, \quad \gamma_{\alpha \beta \delta} = 0.$$

Тогда, как легко проверить, в силу уравнений структуры (1) система Пфаффа $\omega^{m+1} = \dots = \omega^n = 0$ вполне интегрируема, что означает голономность площадок 1E_m . Формы кривизны подповерхности, огибаемой этими площадками, имеют следующий вид:

$$D \omega_\alpha{}^\beta - [\omega_\alpha{}^\gamma \omega_\gamma{}^\beta] = (\gamma_\alpha{}^p{}_\alpha \gamma_p{}^\beta{}_\beta - \varepsilon_\alpha \tau \lambda_\alpha \lambda_\beta) [\omega^\alpha \omega^\beta]$$

(по α, β нет суммирования), откуда видно, что риманово пространство, реализуемое на этой подповерхности, является регулярным [4].

Каждое из уравнений Пфаффа $\omega^\alpha = 0$ вполне интегрируемо, что означает нормальность подповерхности W_m .

§ 2. ГИПЕРКВАДРИКИ С ХАРАКТЕРИСТИКОЙ ТИПА [1, ..., 1, 2, ..., 2]

1. Рассмотрим гиперквадрику W_n в E_{n+1} с характеристикой Сегре второго фундаментального тензора типа [1, ..., 1, 2, ..., 2], т. е. с элементарными делителями не выше второго порядка.

Пусть $\lambda_\alpha, \lambda_a$ ($\alpha = 1, \dots, n-2m; a = n-2m+1, \dots, n-m$) — собственные значения тензора Λ_{ij} , не равные между собой:

$$\begin{aligned} \lambda_\alpha \neq \lambda_\beta, \quad \lambda_\alpha \neq \lambda_a, \quad \lambda_a \neq \lambda_b \quad (\beta = 1, \dots, n-2m; \\ b = n-2m+1, \dots, n-m), \end{aligned} \tag{8}$$

причем все λ_a соответствуют не простым элементарным делителям. Тогда существует такой канонический орторепер гиперповерхности, в котором матрицы $\|q_{ij}\|$ и $\|\Lambda_{ij}\|$ приводятся к виду

$$\begin{aligned} & \left\| \begin{array}{cccc} \varepsilon_\alpha & & & \\ & \ddots & & \\ & & \varepsilon_a & \\ & & & -\varepsilon_a \end{array} \right\| & \left\| \begin{array}{cccc} \varepsilon_\alpha \lambda_\alpha & & & \\ & \ddots & & \\ & & \varepsilon_\alpha (\lambda_a + 1) & \varepsilon_a \\ & & \varepsilon_a & -\varepsilon_a (\lambda_a + 1) \end{array} \right\|, \end{aligned}$$

где невыписанные элементы матриц равны нулю.

Если условиться в дальнейшем знаком «,» обозначать производную по направлению базисного вектора, то в соответствии с (3) для компонент Λ_{ijk} вследствие каноничности репера можно получить следующие выражения:

$$\begin{aligned} \Lambda_{\alpha\alpha i} &= \varepsilon_\alpha \lambda_{\alpha,i}, \quad \Lambda_{\alpha\beta i} = (\lambda_\alpha - \lambda_\beta) \gamma_{\alpha\beta i}, \\ \Lambda_{\alpha\rho_a i} &= (\lambda_\alpha - \lambda_a - 1) \gamma_{\alpha\rho_a i} + \gamma_{\alpha q_a i}, \\ (\rho_a &= n - 2m + 2a - 1, \quad q_a = \rho_a + 1), \\ \Lambda_{\alpha q_a i} &= -\gamma_{\alpha\rho_a i} + (\lambda_\alpha - \lambda_a + 1) \gamma_{\alpha q_a i}, \\ \Lambda_{\rho_a\rho_a i} &= \varepsilon_a \lambda_{a,i} + 2\gamma_{\rho_a q_a i}, \\ \Lambda_{\rho_a q_a i} &= 2\gamma_{\rho_a q_a i}, \quad \Lambda_{q_a q_a i} = -\varepsilon_a \lambda_{a,i} + 2\gamma_{\rho_a q_a i}, \\ \Lambda_{\rho_a\rho_b i} &= (\lambda_a - \lambda_b) \gamma_{\rho_a\rho_b i} + \gamma_{\rho_a q_a i} + \gamma_{\rho_b q_a i}, \\ \Lambda_{\rho_a q_b i} &= (\lambda_a - \lambda_b + 2) \gamma_{\rho_a q_b i} + \gamma_{\rho_b\rho_a i} + \gamma_{q_b q_a i}, \\ \Lambda_{q_a q_b i} &= (\lambda_a - \lambda_b) \gamma_{q_a q_b i} + \gamma_{\rho_a q_b i} + \gamma_{\rho_b q_a i}. \end{aligned}$$

Из условий симметрии для компонент Λ_{ijk} по всем индексам следуют соотношения:

$$\gamma_{\alpha\rho_a\rho_a} - \gamma_{\alpha q_a\rho_a} = \gamma_{\alpha\rho_a q_a} - \gamma_{\alpha q_a q_a}, \tag{9}$$

$$\gamma_{\alpha\rho_a q_a} = \gamma_{\alpha q_a\rho_a}, \tag{10}$$

$$\lambda_{a,\rho_a} = \lambda_{a,q_a}, \tag{11}$$

$$\varepsilon_a \lambda_{a,\rho_a} + 2\gamma_{\rho_a q_a\rho_b} = (\lambda_b - \lambda_a) \gamma_{\rho_b\rho_a\rho_a} - \gamma_{q_b\rho_a\rho_a} + \gamma_{\rho_b q_a\rho_a}, \tag{12}$$

$$\varepsilon_a \lambda_{a,q_b} + 2\gamma_{\rho_a q_a q_b} = \gamma_{\rho_b\rho_a\rho_a} + \gamma_{q_b q_a\rho_a} + (\lambda_b - \lambda_a - 2) \gamma_{q_b\rho_a\rho_a}, \tag{13}$$

$$2\gamma_{\rho_a q_a\rho_b} = (\lambda_b - \lambda_a) \gamma_{\rho_b\rho_a q_a} - \gamma_{q_b\rho_a q_a} + \gamma_{\rho_b q_a q_a} =$$

$$= \gamma_{p_b p_a p_a} + (\lambda_b - \lambda_a + 2) \gamma_{p_b q_a p_a} - \gamma_{q_b q_a p_a}, \quad (14)$$

$$\begin{aligned} 2\gamma_{p_a q_a q_b} &= \gamma_{p_b p_a q_a} + (\lambda_b - \lambda_a - 2) \gamma_{q_b p_a q_a} + \gamma_{q_b q_a q_a} = \\ &= (\lambda_b - \lambda_a) \gamma_{q_b q_a p_a} - \gamma_{q_b p_a p_a} + \gamma_{p_b q_a p_a}, \end{aligned} \quad (15)$$

$$- \varepsilon_a \lambda_{a, p_b} + 2\gamma_{p_a q_a p_b} = -\gamma_{p_b p_a q_a} + (\lambda_b - \lambda_a + 2) \gamma_{p_b q_a q_a} - \gamma_{q_b q_a q_a}, \quad (16)$$

$$- \varepsilon_a \lambda_{a, q_b} + 2\gamma_{p_a q_a q_b} = -\gamma_{q_b p_a q_a} + \gamma_{p_b p_a q_a} + (\lambda_b - \lambda_a) \gamma_{q_b q_a q_a}. \quad (17)$$

Из условий (10) в совокупности с соотношениями

$$\gamma_{\alpha\beta\hat{i}} = 0 \quad (\hat{i} \neq \alpha, \beta), \quad \gamma_{\alpha p_a \hat{j}} = \gamma_{\alpha q_a \hat{j}} = 0 \quad (\hat{j} \neq \alpha, p_a, q_a),$$

эквивалентными при условии (8) обращению в нуль компонент тензора Дарбу типа $b_{\alpha\beta\hat{i}}$, $b_{\alpha p_a \hat{j}}$, $b_{\alpha q_a \hat{j}}$, вытекает полная интегрируемость каждого из уравнений $\omega^\alpha = 0$. Это означает нормальность конгруэнций неизотропных линий кривизны.

Можно показать, что все коэффициенты вращения Риччи вида

$$\gamma_{p_a p_b \hat{k}}, \quad \gamma_{p_a q_a \hat{k}}, \quad \gamma_{q_a q_b \hat{k}} \quad (a \neq b, \quad \hat{k} \neq p_a, p_b, q_a, q_b)$$

равны нулю. Действительно, они удовлетворяют линейной однородной системе 4-го порядка:

$$\begin{aligned} (\lambda_a - \lambda_b) \gamma_{p_a p_b \hat{k}} + \gamma_{p_a q_b \hat{k}} + \gamma_{p_b q_a \hat{k}} &= 0, \\ -\gamma_{p_a p_b \hat{k}} + (\lambda_a - \lambda_b + 2) \gamma_{p_a q_b \hat{k}} - \gamma_{q_a q_b \hat{k}} &= 0, \\ \gamma_{p_a q_b \hat{k}} + \gamma_{p_b q_a \hat{k}} + (\lambda_a - \lambda_b) \gamma_{q_a q_b \hat{k}} &= 0, \\ \gamma_{p_a p_b \hat{k}} + (\lambda_b - \lambda_a + 2) \gamma_{p_b q_a \hat{k}} + \gamma_{q_a q_b \hat{k}} &= 0. \end{aligned}$$

Определитель этой системы с точностью до знака равен $(\lambda_b - \lambda_a)^4$ и отличен от нуля в силу предположения (8). Из условий гиперквадрики вида

$$b_{p_a \alpha \alpha} = b_{q_a \alpha \alpha} = b_{p_a p_b p_a} = b_{q_a q_b q_a} = b_{p_a q_a p_b} = b_{p_a q_a q_b} = 0$$

следуют соотношения:

$$X_{p_a} \ln \left| \frac{\lambda_a^{n+2}}{s} \right| = 0, \quad X_{q_a} \ln \left| \frac{\lambda_a^{n+2}}{s} \right| = 0, \quad (18)$$

$$X_{p_a} \ln \left| \frac{\lambda_b^{n+2}}{s} \right| = 0, \quad X_{q_a} \ln \left| \frac{\lambda_b^{n+2}}{s} \right| = 0. \quad (19)$$

Введя величины

$$v_{\alpha a} = \frac{\lambda_{\alpha, p_a}}{\lambda_\alpha} - \frac{\lambda_{\alpha, q_a}}{\lambda_\alpha}, \quad (20)$$

$$v_{b a} = \frac{\lambda_{b, p_a}}{\lambda_b} - \frac{\lambda_{b, q_a}}{\lambda_b} \quad (21)$$

и учитывая (11), будем иметь из (18), (19) линейную однородную систему относительно $v_{\alpha a}$, $v_{b a}$ (при фиксированном a):

$$\begin{aligned} (n+1)v_{1a} - v_{2a} - \dots - v_{n-2ma} - 2(v_{n-2m+1a} + \dots + \\ + v_{a-1a} + v_{a+1a} + \dots + v_{n-ma}) &= 0, \\ -v_{1a} - \dots - v_{n-2m-1a} + (n+1)v_{n-2ma} - \\ - 2(v_{n-2m+1a} + \dots + v_{a-1a} + v_{a+1a} + \dots + v_{n-ma}) &= 0, \end{aligned}$$

$$-v_{1a} - \dots - v_{n-2ma} - 2 \left(-\frac{n}{2} v_{n-2m+1a} + v_{n-2m+2a} + \dots + \right. \\ \left. + v_{a-1a} + v_{a+1a} + \dots + v_{n-ma} \right) = 0,$$

$$-v_{1a} - \dots - v_{n-2ma} - 2 \left(v_{n-2m+1a} + \dots + v_{n-1a} + \right. \\ \left. + v_{a+1a} + \dots + v_{n-m-1} - \frac{n}{2} v_{n-ma} \right) = 0.$$

Так как определитель этой системы всегда не равен нулю, то отсюда следует:

$$\lambda_{a,pa} = \lambda_{a,qa}, \quad \lambda_{b,pa} = \lambda_{b,qa} \quad (a, b \neq).$$

При этих соотношениях из (12) — (17) получаем:

$$\gamma_{pbpa} = \gamma_{qbpa}, \quad \gamma_{pbqa} = \gamma_{qbqa}, \\ \gamma_{pbqa} = \gamma_{qbqa}, \quad \gamma_{pbpa} = \gamma_{qbpa}, \\ \gamma_{pbqa} + \gamma_{pbpa} = \gamma_{qbqa} + \gamma_{qbpa}.$$

Совместно с полученными ранее условиями для коэффициентов вращения Риччи это дает полную интегрируемость каждого из уравнений

$$\omega^{pa} + \omega^{qa} = 0,$$

в силу чего гиперквадрик W_n расслаивается на однопараметрическое семейство изотропных подповерхностей W_{n-1} , ортогональных к изотропной линии кривизны, определяемой полем вектора $\vec{e}_{pa} - \vec{e}_{qa}$. Естественно, что этот вектор лежит в касательной площадке подповерхности W_{n-1} .

Будем называть гиперповерхность W_n нормальной, если она расслаивается вдоль линии кривизны на семейства ортогональных к ним $(n-1)$ -мерных подповерхностей. Если все линии кривизны неизотропные и действительные, то мы приходим к обычному понятию нормальности [3].

Итак, доказана нормальность рассматриваемой гиперквадрики.

Соотношения (18), (19) с учетом

$$X_\alpha \ln \left| \frac{\lambda_\beta^{n+2}}{s} \right| = 0, \quad X_\alpha \ln \left| \frac{\lambda_\alpha^{n+2}}{s} \right| = 0$$

означают, что подповерхности, ортогональные к линиям кривизны, являются поверхностями уровня скаляров

$$\left[\ln \left| \frac{\lambda_\alpha^{n+2}}{s} \right|, \quad \ln \left| \frac{\lambda_\alpha^{n+2}}{s} \right| \right],$$

а соответствующие главные направления — градиентами этих скаляров.

Покажем, что изотропные линии кривизны есть прямолинейные образующие квадрики.

Действительно, при смещении по изотропной линии кривизны, соответствующей главной кривизне λ_a , имеем

$$d\bar{A} = \omega^a (\vec{e}_{pa} - \vec{e}_{qa}),$$

где

$$\omega^a = \omega^{pa} = -\omega^{qa}, \quad \omega^a = \omega^{pb} = \omega^{qb} = 0 \quad (b \neq a).$$

Тогда

$$d(\vec{e}_{p_a} - \vec{e}_{q_a}) = \{(\gamma_{p_a}^{\hat{a}} \vec{e}_{p_a} - \gamma_{p_a}^{\hat{a}} \vec{e}_{q_a} + \gamma_{q_a}^{\hat{a}} \vec{e}_{q_a} - \gamma_{q_a}^{\hat{a}} \vec{e}_{p_a}) \vec{e}_{\hat{a}} + \\ + (\Lambda_{p_a p_a} - \Lambda_{q_a p_a} - \Lambda_{p_a q_a} + \Lambda_{q_a q_a}) \vec{e}_{n+1}\} \omega^a - \\ - \omega_{p_a}^{q_a} (\vec{e}_{p_a} - \vec{e}_{q_a}) \quad (\hat{a} \neq p_a, q_a).$$

Так как в последней сумме отличным от нуля может быть лишь вектор $-\omega_{p_a}^{q_a} (\vec{e}_{p_a} - \vec{e}_{q_a})$, то это и означает, что изотропные линии кривизны прямые.

Автор выражает искреннюю благодарность А. С. Феденко за полезное обсуждение работы.

Литература

1. Лаптев Г. Ф. Тр. Московск. мат. о-ва, № 2, 1953.
2. Вербицкий Л. Л. Тр. сем. по вект. и тенз. анализу, в. 8, 1949.
3. Эйзенхарт Л. П. Риманова геометрия. ИЛ, 1948.
4. Лапковский А. К. Автореф. канд. дисс. Минск, 1966.

Могилевский педагогический институт

Поступило в редакцию
28.II 1968

Н. Я. КОЗЛОВСКИЙ

**ОБ ОЦЕНКЕ ОСТАТОЧНОГО ЧЛЕНА
 ИНТЕРПОЛЯЦИОННО-КВАДРАТУРНЫХ ФОРМУЛ
 С УЗЛАМИ ЧЕБЫШЕВА ПЕРВОГО И ВТОРОГО РОДА**

С. М. Никольским [1] сформулирована следующая задача. Пусть задана квадратурная формула

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{k=0}^{m-1} p_k f(x_k) + R,$$

точная для всех полиномов степени $r-1$, задан класс K функций и требуется определить

$$\sup_{f \in K} \left| \int_a^b f(x) dx - \sum_{k=0}^{m-1} p_k f(x_k) \right|.$$

Эта задача решена для класса функций $W_{L_p}^{(r)}(M; a, b)$, имеющего на отрезке $[a, b]$ абсолютно непрерывную производную порядка $r-1$ и при $1 \leq p < \infty$ производную $f^{(r)}(x)$ порядка r , удовлетворяющую неравенству

$$\left(\int_a^b |f^{(r)}(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \leq M, \text{ а при } p = \infty \text{ — кусочно-непрерывную производную } f^{(r)}(x), \text{ удовлетворяющую неравенству } |f^{(r)}(x)| \leq M.$$

Получена формула ([1], стр. 27, 28)

$$\sup_{f \in W_{L_p}^{(r)}(M; a, b)} \left| \int_a^b f(x) dx - \sum_{k=0}^{m-1} p_k f(x_k) \right| = M c_r^{(q)}, \quad (1)$$

где

$$c_r^{(q)} = \left(\int_a^b |F_r(t)|^q dt \right)^{\frac{1}{q}},$$

$$F_r(t) = \frac{1}{(r-1)!} \left[\frac{(b-a)^r}{r} - \sum_{k=0}^{m-1} p_k K_r(x_k - t) \right],$$

$$K_r(u) = \begin{cases} u^{r-1}, & u \geq 0, \\ 0, & u < 0. \end{cases}$$

У С. М. Никольского приведены численные значения констант $c_r^{(1)}$ и $c_r^{(2)}$ для частных случаев квадратурных формул: прямоугольников, трапеций, Симпсона и формулы Котеса с четырьмя и пятью узлами.

В данной работе определяются значения $c_r^{(2)}$ для интерполяционной квадратурной формулы с узлами Чебышева первого и второго рода. Нами найдено точное асимптотическое значение $c_r^{(2)}$ для $r = 1$.

Лемма. Для любой интерполяционной квадратурной формулы справедлива формула

$$c_r^{(2)} = \left\{ (-1)^{r+1} \frac{1}{(2r+1)!} \left[(b-a)^{2r+1} + 2r(2r+1) \sum_{k=0}^{m-1} \sum_{v=0}^k p_k p_v (x_v - x_k)^{2r-1} \right] \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (2)$$

при условии $2r < m$.

Доказательство. Имеем

$$c_r^{(2)} = \left(\int_a^b |F_r(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}},$$

$$[c_r^{(2)}(r-1)!]^2 = \int_a^b \left[\frac{(b-t)^r}{r} - \sum_{k=0}^{m-1} p_k K_r(x_k - t) \right]^2 dt =$$

$$= \frac{1}{r^2} \int_a^b (b-t)^{2r} dt - \frac{2}{r} \int_a^b \sum_{k=0}^{m-1} p_k (b-t)^r K_r(x_k - t) dt +$$

$$+ \int_a^b \sum_{k=0}^{m-1} \sum_{v=0}^{m-1} p_k p_v K_r(x_k - t) K_r(x_v - t) dt.$$

Рассмотрим последний интеграл:

$$d_1 = \sum_{k=0}^{m-1} \sum_{v=0}^k \int_a^b p_k p_v K_r(x_k - t) K_r(x_v - t) dt +$$

$$+ \sum_{k=0}^{m-1} \sum_{v=k+1}^{m-1} \int_a^b p_k p_v K_r(x_k - t) K_r(x_v - t) dt;$$

так как

$$K_r(u) = \begin{cases} u^{r-1} & \text{для } u \geq 0, \\ 0 & \text{для } u < 0, \end{cases}$$

то

$$d_1 = \sum_{k=0}^{m-1} \sum_{v=0}^k \int_a^{x_v} p_k p_v K_r(x_k - t) K_r(x_v - t) dt +$$

$$+ \sum_{k=0}^{m-1} \sum_{v=k+1}^{m-1} \int_a^{x_k} p_k p_v K_r(x_k - t) K_r(x_v - t) dt =$$

$$= \sum_{k=0}^{m-1} \sum_{v=0}^k p_k p_v \int_a^{x_k} (x_k - t)^{r-1} (x_v - t)^{r-1} dt +$$

$$+ \sum_{k=0}^{m-1} \sum_{v=0}^k p_k p_v \int_{x_k}^{x_v} (x_k - t)^{r-1} (x_v - t)^{r-1} dt +$$

$$\begin{aligned}
 & + \sum_{k=0}^{m-1} \sum_{v=k+1}^{m-1} p_k p_v \int_a^{x_k} (x_k - t)^{r-1} (x_v - t)^{r-1} dt = \\
 & = \sum_{k=0}^{m-1} p_k \int_a^{x_k} (x_k - t)^{r-1} \left[\sum_{v=0}^{m-1} p_v (x_v - t)^{r-1} \right] dt + \\
 & + \sum_{k=0}^{m-1} \sum_{v=0}^k p_k p_v \int_{x_k}^{x_v} (x_k - t)^{r-1} (x_v - t)^{r-1} dt.
 \end{aligned}$$

Наша квадратурная формула является интерполяционной, значит

$$\begin{aligned}
 \sum_{v=0}^{m-1} p_v (x_v - t)^{r-1} & = \int_a^b (x - t)^{r-1} dx = \frac{(b - t)^r - (a - t)^r}{r}, \\
 d_1 & = \frac{1}{r} \sum_{k=0}^{m-1} p_k \left[\int_a^b (x_k - t)^{r-1} (b - t)^r dt + \right. \\
 & + \left. \int_b^{x_k} (x_k - t)^{r-1} (b - t)^r dt - \int_a^{x_k} (x_k - t)^{r-1} (a - t)^r dt \right] + \\
 & + \sum_{k=0}^{m-1} \sum_{v=0}^k p_k p_v \int_{x_k}^{x_v} (x_k - t)^{r-1} (x_v - t)^{r-1} dt = \\
 & = \frac{1}{r^2} \int_a^b (b - t)^{2r} dt - \frac{1}{r^2} \int_a^b (b - t)^r (a - t)^r dt + \\
 & + \frac{1}{r} \sum_{k=0}^{m-1} p_k \left[\int_b^{x_k} (x_k - t)^{r-1} (b - t)^r dt - \int_a^{x_k} (x_k - t)^{r-1} (a - t)^r dt \right] + \\
 & + \sum_{k=0}^{m-1} \sum_{v=0}^k p_k p_v \int_{x_k}^{x_v} (x_k - t)^{r-1} (x_v - t)^{r-1} dt.
 \end{aligned}$$

Аналогично получим

$$\begin{aligned}
 & \sum_{k=0}^{m-1} \int_a^b p_k (b - t)^r K_r(x_k - t) dt = \\
 & = \frac{1}{r} \int_a^b (b - t)^{2r} dt - \frac{1}{r} \int_a^b (b - t)^r (a - t)^r dt + \\
 & + \sum_{k=0}^{m-1} p_k \int_b^{x_k} (b - t)^r (x_k - t)^{r-1} dt.
 \end{aligned}$$

Следовательно,

$$[c_r^{(2)}(r - 1)!]^2 = \frac{1}{r^2} \int_a^b (b - t)^r (a - t)^r dt -$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{r} \sum_{k=0}^{m-1} p_k \int_b^{x_k} (x_k - t)^{r-1} (b - t)^r dt - \\
& -\frac{1}{r} \sum_{k=0}^{m-1} p_k \int_a^{x_k} (x_k - t)^{r-1} (a - t)^r dt + \\
& + \sum_{k=0}^{m-1} \sum_{v=0}^k p_k p_v \int_{x_k}^{x_v} (x_k - t)^{r-1} (x_v - t)^{r-1} dt.
\end{aligned}$$

Вычислим

$$\begin{aligned}
& \int_a^b (b - t)^r (a - t)^r dt = \int_0^1 (b - a)^{2r+1} (-1)^r u^r (1 - u)^r du = \\
& = (-1)^r (b - a)^{2r+1} B(r + 1, r + 1) = (-1)^r (b - a)^{2r+1} \frac{\Gamma^2(r + 1)}{\Gamma(2r + 2)}.
\end{aligned}$$

Остальные интегралы вычисляются аналогично:

$$\begin{aligned}
& [c_r^{(2)}(r - 1)!]^2 = (-1)^r (b - a)^{2r+1} \frac{\Gamma^2(r + 1)}{r^2 \Gamma(2r + 2)} - \\
& - (-1)^r \frac{\Gamma(r) \Gamma(r + 1)}{r \Gamma(2r + 1)} \times \\
& \times \sum_{k=0}^{m-1} p_k (x_k - b)^{2r} - (-1)^r \frac{\Gamma(r) \Gamma(r + 1)}{r \Gamma(2r + 1)} \sum_{k=0}^{m-1} p_k (x_k - a)^{2r} + \\
& + (-1)^{r-1} \frac{\Gamma(r) \Gamma(r)}{\Gamma(2r)} \sum_{k=0}^{m-1} \sum_{v=0}^k p_k p_v (x_v - x_k)^{2r-1}.
\end{aligned}$$

Так как

$$\sum_{k=0}^{m-1} p_k (x_k - a)^{2r} = \int_a^b (x - a)^{2r} dx = \frac{(b - a)^{2r+1}}{2r + 1},$$

$$\sum_{k=0}^{m-1} p_k (x_k - b)^{2r} = \frac{(b - a)^{2r+1}}{2r + 1},$$

то

$$\begin{aligned}
& [c_r^{(2)}(r - 1)!]^2 = (-1)^{r+1} \frac{\Gamma^2(r)}{\Gamma(2r + 2)} \left[(b - a)^{2r+1} + \right. \\
& \left. + 2r(2r + 1) \sum_{k=0}^{m-1} \sum_{v=0}^k p_k p_v (x_v - x_k)^{2r-1} \right].
\end{aligned}$$

Но $\Gamma(r) = (r - 1)!$. Значит,

$$\begin{aligned}
& [c_r^{(2)}]^2 = (-1)^{r+1} \frac{1}{(2r + 1)!} \left[(b - a)^{2r+1} + \right. \\
& \left. + 2r(2r + 1) \sum_{k=0}^{m-1} \sum_{v=0}^k p_k p_v (x_v - x_k)^{2r-1} \right].
\end{aligned}$$

Теорема. Для интерполяционной квадратурной формулы с узлами Чебышева первого рода справедливо следующее асимптотическое значение величины $c_1^{(2)}$ при $r = 1$:

$$c_1^{(2)} = \frac{\pi}{6n} + O\left(\frac{\ln n}{n^2}\right).$$

Доказательство. В качестве узлов возьмем корни полинома Чебышева первого рода $T_m(x) = \cos(m \arccos x)$:

$$x_k = \cos \frac{2k-1}{2m} \pi.$$

Коэффициенты квадратурной формулы по узлам полинома Чебышева имеют вид ([3], стр. 631)

$$p_k = \frac{2}{m} \left(1 - 2 \sum_{r=1}^{m-1} \frac{\cos 2r \theta_k}{4r^2 - 1} \right).$$

Пусть

$$u_n(\theta) = \sum_{r=n}^{\infty} \frac{\cos 2r \theta}{4r^2 - 1}; \quad x_k = \cos \theta_k;$$

$$\varphi_k = \frac{2m - 2k - 1}{2m} \pi; \quad x_k = -\cos \frac{2k + 1}{2m} \pi;$$

$$m = 2n, \quad \theta_k = \frac{2k + 1}{4n} \pi,$$

$$k = 0, 1, \dots, 2n - 1, \quad 0 < \theta_k < \pi.$$

Известно ([3], стр. 184), что

$$|\sin \theta| = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{\cos 2r \theta}{4r^2 - 1}.$$

Тогда

$$\sum_{r=1}^{n-1} \frac{\cos 2r \theta}{4r^2 - 1} = \frac{1}{2} - \frac{\pi}{4} |\sin \theta| - u_n(\theta),$$

$$p_k = \frac{2}{n} \left[\frac{\pi}{4} \sin \theta_k + u_n(\theta_k) \right]. \quad (3)$$

Полагая в (2) $r = 1$ и $m = 2n$, получаем

$$\begin{aligned} J &= \sum_{k=0}^{2n-1} \sum_{v=0}^k p_v p_k (x_v - x_k) = \\ &= \frac{4}{n^2} \sum_{k=0}^{2n-1} \sum_{v=0}^k \left[\frac{\pi^2}{16} \sin \theta_k \sin \theta_v + \right. \\ &\left. + \frac{\pi}{4} \left(\sin \theta_k u_n(\theta_v) + \sin \theta_v u_n(\theta_k) \right) \right] + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + u_n(\theta_k) u_n(\theta_\nu) \Big] (\cos \theta_k - \cos \theta_\nu), \\
 J &= \frac{4}{n^2} \left(\frac{\pi^2}{16} J_1 + \frac{\pi}{4} J_2 + J_3 \right), \\
 J_1 &= \sum_{k=0}^{2n-1} \sin \theta_k \sum_{\nu=0}^k \sin \theta_\nu (\cos \theta_k - \cos \theta_\nu) = \\
 &= \sum_{k=0}^{2n-1} \sin \theta_k \left[\cos \theta_k \sum_{\nu=0}^k \sin \theta_\nu - \frac{1}{2} \sum_{\nu=0}^k \sin 2\theta_\nu \right].
 \end{aligned}$$

Применяя формулы ([4], стр. 43, 1341)

$$\sum_{k=0}^{n-1} \sin(x + ky) = \frac{\sin\left(x + \frac{n-1}{2}y\right) \sin \frac{ny}{2}}{\sin \frac{y}{2}}, \quad (4)$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} \cos(x + ky) = \frac{\cos\left(x + \frac{n-1}{2}y\right) \sin \frac{ny}{2}}{\sin \frac{y}{2}},$$

получим

$$\begin{aligned}
 J_1 &= \sum_{k=0}^{2n-1} \sin \theta_k \left(\cos \theta_k \frac{\sin^2 \frac{k+1}{4n} \pi}{\sin \frac{\pi}{4n}} - \frac{1}{2} \frac{\sin^2 \frac{k+1}{2n} \pi}{\sin \frac{\pi}{2n}} \right) = \\
 &= -\frac{1}{8 \sin \frac{\pi}{4n}} \sum_{k=0}^{2n-1} \left[\sin \left(\frac{3k}{2n} + \frac{1}{2n} \right) \pi + \right. \\
 &\quad \left. + \sin \frac{k\pi}{2n} \right] - \frac{1}{8 \sin \frac{\pi}{2n}} \left\{ \frac{2}{\sin \frac{\pi}{4n}} - \right. \\
 &\quad \left. - \sum_{k=0}^{2n-1} \left[\sin \left(\frac{3k}{2n} + \frac{5}{4n} \right) \pi - \sin \left(\frac{k}{2n} + \frac{3}{4n} \right) \pi \right] \right\}.
 \end{aligned}$$

Применим (4):

$$\begin{aligned}
 J_1 &= -\frac{1}{8 \sin \frac{\pi}{4n}} \left(\frac{\cos \frac{\pi}{4n}}{\sin \frac{3\pi}{4n}} + \frac{\cos \frac{\pi}{4n}}{\sin \frac{\pi}{4n}} \right) - \\
 &- \frac{1}{8 \sin \frac{\pi}{2n}} \left(\frac{2}{\sin \frac{\pi}{4n}} - \frac{\cos \frac{\pi}{2n}}{\sin \frac{3\pi}{4n}} + \frac{\cos \frac{\pi}{2n}}{\sin \frac{\pi}{4n}} \right).
 \end{aligned}$$

J_1 приводим к весьма простому виду:

$$J_1 = -\operatorname{ctg} \frac{\pi}{4n} \cos^2 \frac{\pi}{4n} \frac{1}{\sin \frac{3\pi}{4n}}.$$

Применяя известные формулы

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sin x} &= \frac{1}{x} + \frac{x}{6} + O(x^3), \\ \operatorname{ctg} x &= \frac{1}{x} - \frac{x}{3} + O(x^3), \end{aligned} \tag{5}$$

$$\cos^2 x = 1 - x^2 + O(x^4),$$

получим

$$J_1 = -\frac{16n^2}{3\pi^2} - \frac{1}{18} + O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Преобразуем J_2 :

$$\begin{aligned} J_2 &= \sum_{k=0}^{2n-1} u_n(\theta_k) \sum_{v=0}^k \sin \theta_v (\cos \theta_k - \cos \theta_v) + \\ &+ \sum_{k=0}^{2n-1} \sin \theta_k \sum_{v=0}^k u_n(\theta_v) (\cos \theta_k - \cos \theta_v) = \\ &= \sum_{k=0}^{2n-1} u_n(\theta_k) \left[\sum_{v=0}^k \sin \theta_v (\cos \theta_k - \cos \theta_v) + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{v=k}^{2n-1} \sin \theta_v (\cos \theta_v - \cos \theta_k) \right] = \\ &= \sum_{k=0}^{2n-1} u_n(\theta_k) \left[\sum_{v=0}^{2n-1} \sin \theta_v (\cos \theta_v - \cos \theta_k) - \right. \\ &\quad \left. - \sum_{v=0}^{k-1} \sin \theta_v (\cos \theta_v - \cos \theta_k) - \sum_{v=0}^k \sin \theta_v (\cos \theta_v - \cos \theta_k) \right]. \end{aligned}$$

Используя формулы (4) и преобразовав выражение в квадратных скобках, получим

$$\begin{aligned} J_2 &= \sum_{k=0}^{2n-1} u_n(\theta_k) \left[\frac{\cos 2\theta_k}{2} \left(\operatorname{ctg} \frac{\pi}{2n} - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \operatorname{ctg} \frac{\pi}{4n} \right) - \frac{1}{2} \left(\operatorname{ctg} \frac{\pi}{4n} + \frac{1}{\sin \frac{\pi}{2n}} \right) \right]. \end{aligned}$$

Замечая, что

$$F_1 = \sum_{k=0}^{2n-1} \cos p\theta_k = \sum_{k=0}^{2n-1} \cos \left(p \frac{k}{2n} + \frac{p}{4n} \right) \pi = \begin{cases} 0, & p \neq 4nl, \\ (-1)^l \cdot 2n, & p = 4nl, \end{cases}$$

где

$$l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots,$$

получим

$$F_2 = \sum_{k=0}^{2n-1} u_n(\theta_k) = \sum_{r=n}^{\infty} \frac{1}{4r^2-1} \sum_{k=0}^{2n-1} \cos 2r \theta_k =$$

$$= \sum_{l=1}^{\infty} \frac{(-1)^l \cdot 2n}{16n^2 l^2 - 1} = \frac{1}{8n} \left(8n^2 - \frac{\pi}{2} \frac{4n}{\sin \frac{\pi}{4n}} \right) = n - \frac{\pi}{4 \sin \frac{\pi}{4n}}.$$

При этом мы использовали формулу ([4], стр. 54, 1, 445 (8))

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{\cos kx}{k^2 - \alpha^2} = \frac{1}{2\alpha^2} - \frac{\pi}{2} \frac{\cos [\alpha (2m\pi - x)]}{\alpha \sin \alpha \pi}, \quad (6)$$

где

$$(2m-1)\pi \leq x \leq (2m+1)\pi, \quad x \neq 0, \quad m = 0.$$

$$F_3 = \sum_{k=0}^{2n-1} u_n(\theta_k) \cos 2\theta_k =$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{r=n}^{\infty} \frac{1}{4r^2-1} \sum_{k=0}^{2n-1} [\cos (2r+2)\theta_k + \cos (2r-2)\theta_k] =$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{l=1}^{\infty} \left[\frac{(-1)^l \cdot 2n}{(4nl-3)(4nl-1)} + \frac{(-1)^l \cdot 2n}{(4nl+1)(4nl+3)} \right] =$$

$$= n \sum_{l=1}^{\infty} (-1)^l \left[\frac{3}{16n^2 l^2 - 9} - \frac{1}{16n^2 l^2 - 1} \right].$$

На основании формулы (6) получаем

$$F_3 = -\frac{n}{3} + \frac{\pi}{8 \sin \frac{\pi}{4n}} - \frac{\pi}{8 \sin \frac{3\pi}{4n}},$$

$$J_2 = \frac{1}{2} \left(\operatorname{ctg} \frac{\pi}{2n} - \operatorname{ctg} \frac{\pi}{4n} \right) \left(-\frac{n}{3} + \frac{\pi}{8 \sin \frac{\pi}{4n}} - \frac{\pi}{8 \sin \frac{3\pi}{4n}} \right) -$$

$$- \frac{1}{2} \left(\operatorname{ctg} \frac{\pi}{4n} + \frac{1}{\sin \frac{\pi}{2n}} \right) \left(n - \frac{\pi}{4 \sin \frac{\pi}{4n}} \right).$$

Вычисления дают следующее значение для J_2 на основании формулы (5):

$$J_2 = \frac{\pi}{24} + O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Так как

$$\cos 2r \theta = \frac{1}{2 \sin \theta} [\sin (2r+1)\theta - \sin (2r-1)\theta],$$

то имеем

$$u_n(\theta) = \sum_{r=n}^{\infty} \frac{\cos 2r \theta}{4r^2-1} = \frac{1}{2 \sin \theta} \times$$

$$\begin{aligned} & \times \left[\sum_{r=n}^{\infty} \frac{\sin(2r+1)\theta}{4r^2-1} - \sum_{r=n}^{\infty} \frac{\sin(2r-1)\theta}{4r^2-1} \right] = \\ & = \frac{1}{2\sin\theta} \left[-\frac{\sin(2n-1)\theta}{4n^2-1} + 4 \sum_{r=n}^{\infty} \frac{\sin(2r+1)\theta}{(2r+1)(2r+3)(2r-1)} \right] = \\ & = \frac{1}{\sin\theta} O\left(\frac{1}{n^2}\right). \end{aligned}$$

Имеем далее

$$J_3 = \sum_{k=0}^{2n-1} u_n(\theta_k) \sum_{v=0}^k u_n(\theta_v) (\cos\theta_k - \cos\theta_v).$$

Значит,

$$\begin{aligned} |J_3| & \leq \sum_{k=0}^{2n-1} |u_n(\theta_k)| \sum_{v=0}^k |u_n(\theta_v)| |\cos\theta_k - \cos\theta_v| \leq \\ & \leq 2 \sum_{k=0}^{2n-1} |u_n(\theta_k)| \sum_{v=0}^{2n-1} |u_n(\theta_v)| = 2 \left(\sum_{k=0}^{2n-1} |u_n(\theta_k)| \right)^2 \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} \sqrt{|J_3|} & = O\left(\frac{1}{n^2}\right) \sum_{k=0}^{2n-1} \frac{1}{\sin\theta_k} = \\ & = O\left(\frac{1}{n^2}\right) \left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\sin\theta_k} + \sum_{k=n}^{2n-1} \frac{1}{\sin\theta_k} \right) = O\left(\frac{1}{n^2}\right) \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\sin\theta_k}. \end{aligned}$$

Используя неравенство

$$\frac{1}{\sin x} \leq \frac{\pi}{2x} \quad \text{при } 0 < x \leq \frac{\pi}{2},$$

получаем

$$\begin{aligned} \sqrt{|J_3|} & = O\left(\frac{1}{n^2}\right) \sum_{k=0}^{n-1} \frac{n}{2k+1} = O\left(\frac{\ln n}{n}\right), \\ J_3 & = O\left(\frac{\ln^2 n}{n^2}\right). \end{aligned}$$

Таким образом, мы получили, что

$$\begin{aligned} J & = \frac{4}{n^2} \left(\frac{\pi^2}{16} J_1 + \frac{\pi}{4} J_2 + J_3 \right) = \\ & = -\frac{4}{3} + \frac{\pi^2}{36n^2} + O\left(\frac{\ln^2 n}{n^4}\right). \end{aligned}$$

На основании леммы при $r=1$ и $a=-1$, $b=1$ получаем

$$c_1^{(2)} = \left\{ \frac{1}{3!} \left[2^3 + 2 \cdot 3 \left(-\frac{4}{3} + \frac{\pi^2}{36n^2} + O\left(\frac{\ln^2 n}{n^4}\right) \right) \right] \right\}^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \left[\frac{\pi^2}{36n^2} + O\left(\frac{\ln^2 n}{n^4}\right) \right]^{\frac{1}{2}} = \frac{\pi}{6n} + O\left(\frac{\ln n}{n^2}\right).$$

Теорема доказана.

Аналогично доказывается и теорема: для интерполяционной квадратурной формулы с узлами Чебышева второго рода справедливо следующее асимптотическое значение величины $c_1^{(2)}$:

$$c_1^{(2)} = \frac{\pi}{6n} + O\left(\frac{1}{\sqrt{n^3}}\right).$$

Литература

1. Никольский С. М. Квадратурные формулы. М., 1958.
2. Крылов В. И. Приближенное вычисление интегралов. М., 1959.
3. Натансон И. П. Конструктивная теория функций. М.—Л., 1949.
4. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М., 1963.

*Белорусский государственный
университет им. В. И. Ленина*

*Поступило в редакцию
20.III 1968*

П. И. МОНАСТЫРНЫЙ, В. А. БАСИК

О МЕТОДЕ ПРОГОНКИ В СЛУЧАЕ МНОГОМЕРНЫХ РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ

В работе рассматривается метод разностной прогонки для трехмерного уравнения теплопроводности, заданного в прямоугольной области, исследуется корректность метода и выводится оценка накоплений вычислительных погрешностей. Сравнение известного метода разностной прогонки для одномерных уравнений (см. [2]) с другими прямыми методами решения систем линейных алгебраических уравнений показывает несомненные преимущества первого в смысле объема вычислительной работы. Можно ожидать, что это преимущество метода прогонки сохранится и при решении многомерных разностных уравнений, если направление прогонки выбрано правильно (его следует выбрать так, чтобы порядок матриц, подлежащих обращению в методе прогонки, был наименьшим).

Отметим, что теории метода разностной прогонки в случае одномерных уравнений посвящен ряд работ ([1] — [6]), в которых изучались вопросы осуществимости и устойчивости метода.

Пусть в области $D \{0 \leq x \leq a_1; 0 \leq y \leq a_2; 0 \leq z \leq a_3\}$ при $t \geq 0$ задано уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + f(x, y, z, t), \quad (1)$$

а на границе Γ области D — смешанные краевые условия

$$\left. \frac{\partial u}{\partial n} \right|_{\Gamma} = S(M, t) u(M, t) + g(M, t) \quad (2)$$

и начальные условия

$$u(x, y, z, 0) = \varphi(x, y, z), \quad (3)$$

где $\frac{\partial u}{\partial n}$ — производная по внешней нормали, $M \in \Gamma$. Будем решать задачу (1) — (3) по методу сеток. Выберем шаги по осям x, y, z, t так, чтобы величины

$$\frac{a_1}{h_x} = N_1, \quad \frac{a_2}{h_y} = N_2, \quad \frac{a_3}{h_z} = N_3$$

оказались целыми числами. Шаг l по оси t будем пока считать произвольным. В качестве расчетной сетки возьмем совокупность точек (x_i, y_j, z_m, t_k) , координаты которых суть числа

$$x_i = \left(i + \frac{1}{2}\right) h_x, \quad y_j = \left(j + \frac{1}{2}\right) h_y, \quad z_m = \left(m + \frac{1}{2}\right) h_z, \quad t_k = kl.$$

Такой выбор сетки позволит повысить порядок аппроксимации граничных условий (2).

Значение какой-либо функции $\psi(x, y, z, t)$ в точке (x_i, y_j, z_m, t_k) будем обозначать через $\psi_{i,j,m,k}$.

Заменим в каждой внутренней точке сеточной области дифференциальное уравнение (1) следующим разностным соотношением:

$$\begin{aligned} \frac{u_{i,j,m,k} - u_{i,j,m,k-1}}{l} &= \frac{\delta_x^2 u_{i,j,m,k}}{h_x^2} + \\ &+ \frac{\delta_y^2 u_{i,j,m,k}}{h_y^2} + \frac{\delta_z^2 u_{i,j,m,k}}{h_z^2} + f_{i,j,m,k}, \end{aligned} \quad (4)$$

которое выполняется при

$$i = 0, 1, 2, \dots, N_1 - 1, \quad m = 0, 1, 2, \dots, N_3 - 1,$$

$$j = 0, 1, 2, \dots, N_2 - 1, \quad k = 1, 2, \dots$$

Граничные условия (2) аппроксимируем системой разностных уравнений

$$\begin{aligned} \frac{u_{-1,j,m,k} - u_{0,j,m,k}}{h_x} &= S(0, y_j, z_m, t_k) \frac{u_{-1,j,m,k} + u_{0,j,m,k}}{2} + \\ &+ g(0, y_j, z_m, t_k), \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \frac{u_{N_1,j,m,k} - u_{N_1-1,j,m,k}}{h_x} &= S(a_1, y_j, z_m, t_k) \frac{u_{N_1,j,m,k} + u_{N_1-1,j,m,k}}{2} + \\ &+ g(a_1, y_j, z_m, t_k), \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \frac{u_{i,-1,m,k} - u_{i,0,m,k}}{h_y} &= S(x_i, 0, z_m, t_k) \frac{u_{i,-1,m,k} + u_{i,0,m,k}}{2} + \\ &+ g(x_i, 0, z_m, t_k), \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \frac{u_{i,N_2,m,k} - u_{i,N_2-1,m,k}}{h_y} &= S(x_i, a_2, z_m, t_k) \frac{u_{i,N_2,m,k} + u_{i,N_2-1,m,k}}{2} + \\ &+ g(x_i, a_2, z_m, t_k), \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \frac{u_{i,j,-1,k} - u_{i,j,0,k}}{h_z} &= S(x_i, y_j, 0, t_k) \frac{u_{i,j,-1,k} + u_{i,j,0,k}}{2} + \\ &+ g(x_i, y_j, 0, t_k), \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \frac{u_{i,j,N_3,k} - u_{i,j,N_3-1,k}}{h_z} &= S(x_i, y_j, a_3, t_k) \frac{u_{i,j,N_3,k} + u_{i,j,N_3-1,k}}{2} + \\ &+ g(x_i, y_j, a_3, t_k). \end{aligned} \quad (10)$$

Соотношения (5)–(10) выполняются на множестве граничных точек.

Наконец, используя начальное условие (3), получим

$$\begin{aligned} u_{i,j,m,0} &= \varphi_{i,j,m} \quad (i = 0, 1, \dots, N_1 - 1; \\ j &= 0, 1, \dots, N_2 - 1; \quad m = 0, 1, \dots, N_3 - 1). \end{aligned} \quad (11)$$

При избранном нами способе замены граничной задачи (1)–(3) системой разностных уравнений (4)–(11) погрешность аппроксимации будет иметь порядок $O(l + h^2)$, где $h = \max\{h_x, h_y, h_z\}$.

Таким образом, для нахождения приближенных значений функции $u_{i,j,m,k}$ при каждом фиксированном k мы получим систему линейных алгебраических уравнений (см. (4) — (10)), в которой число уравнений будет равно числу значений сеточной функции.

Вычисления будем вести последовательно, полагая сначала k равным единице, затем двум и т. д. При $k=1$ значения $u_{i,j,m,0}$, входящие в (4), вычисляем по формуле (11).

Ниже излагается схема метода разностной прогонки применительно к системе (4) — (10).

Используя соотношения (5) — (6), исключим из (4) крайние значения $u_{-1,j,m,k}$ и $u_{N_1,j,m,k}$.

Обозначим

$$U_{j,m,k} = (u_{0,j,m,k}, u_{1,j,m,k}, \dots, u_{N_1-1,j,m,k})^T, \quad \alpha = \frac{l}{h_x^2},$$

$$\beta = \frac{l}{h_y^2}, \quad \gamma = \frac{l}{h_z^2},$$

$$F_{j,m,k} = (lf_{0,j,m,k} + \alpha R_{0,j,m,k}, lf_{1,j,m,k}, \dots, lf_{N_1-1,j,m,k} + \alpha R_{\alpha,j,m,k})^T,$$

$$A_{j,m,k} = \begin{pmatrix} \delta - \alpha P_{0,j,m,k} & -\alpha & 0 & \dots & 0 & 0 \\ & -\alpha & \delta & -\alpha & \dots & 0 & 0 \\ & 0 & -\alpha & \delta & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ & 0 & 0 & 0 & \dots & \delta & -\alpha \\ & 0 & 0 & 0 & \dots & -\alpha & \delta - \alpha P_{\alpha,j,m,k} \end{pmatrix},$$

где $\delta = 1 + 2\alpha + 2\beta + 2\gamma$; T — знак транспонирования.

В этих обозначениях полученная система имеет вид

$$\beta U_{j-1,m,k} - A_{j,m,k} U_{j,m,k} + \beta U_{j+1,m,k} + \gamma U_{j,m-1,k} + \gamma U_{j,m+1,k} + U_{j,m,k-1} + F_{j,m,k} = 0. \quad (12)$$

Значения векторов $U_{-1,m,k}$ и $U_{N_2,m,k}$ можно найти по формулам (7) — (8). Имеем

$$U_{-1,m,k} = G_{0,m,k} U_{0,m,k} + H_{0,m,k} \quad (13)$$

и
$$U_{N_2,m,k} = G_{\alpha_2,m,k} U_{N_2-1,m,k} + H_{\alpha_2,m,k}, \quad (14)$$

где

$$G_{0,m,k} = \begin{pmatrix} \sigma_0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma_1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \sigma_{N_1-1} \end{pmatrix}; \quad \sigma_i = \frac{1 + \frac{h_y}{2} S(x_i, 0, z_m, t_k)}{1 - \frac{h_y}{2} S(x_i, 0, z_m, t_k)};$$

$$H_{0,m,k} = (\tau_0, \tau_1, \dots, \tau_{N_1-1})^T; \quad \tau_i = \frac{h_y g(x_i, 0, z_m, t_k)}{1 - \frac{h_y}{2} S(x_i, 0, z_m, t_k)}.$$

Матрица $G_{\alpha_2,m,k}$ и вектор $H_{\alpha_2,m,k}$ определяются аналогично.

Исключим из (12) с помощью формул (13) и (14) два крайних значения вектора $U_{j,m,k}$ ($j = -1, j = N_2$). Получим

$$\gamma V_{m-1,k} - \beta_{m,k} V_{m,k} + \gamma V_{m+1,k} + V_{m,k-1} + I_{m,k} = 0, \quad (15)$$

Вычисления по формулам (19) — (20) можно вести при условии, что нам известны начальные значения для матрицы и вектора: $X_{0,k}$ и $Y_{0,k}$. Сравнивая (16) и (18), получим

$$X_{0,k} = L_{0,k}, \quad (21)$$

$$Y_{0,k} = M_{0,k}. \quad (22)$$

Далее по формулам (19)—(20) можно найти значения

$$X_{1,k}, X_{2,k}, \dots, X_{N_3,k}$$

и

$$Y_{1,k}, Y_{2,k}, \dots, Y_{N_3,k}.$$

После этого можно по формуле (18) в обратном ходе вычислить все значения искомого вектора $V_{m,k}$. Крайнее значение вектора $V_{N_3,k}$ определим из системы уравнений

$$\begin{cases} V_{N_3-1,k} = X_{N_3,k} V_{N_3,k} + Y_{N_3,k}, \\ V_{N_3,k} = L_{a_3,k} V_{N_3-1,k} + M_{a_3,k}. \end{cases}$$

Если $\det(E - L_{a_3,k} X_{N_3,k}) \neq 0$, то

$$V_{N_3,k} = (E - L_{a_3,k} X_{N_3,k})^{-1} (L_{a_3,k} Y_{N_3,k} + M_{a_3,k}). \quad (23)$$

Таким образом, решение разностной задачи (4)—(11) можно осуществить в три приема:

1) первоначально по формулам (19)—(20) и (21)—(22) находим значения матриц: $X_{0,k}, X_{1,k}, \dots, X_{N_3,k}$ и значения векторов $Y_{0,k}, Y_{1,k}, \dots, Y_{N_3,k}$;

2) затем проверяем выполнимость условия $\det(E - L_{a_3,k} X_{N_3,k}) \neq 0$;

3) если условие выполнено, то по формуле (23) находим $V_{N_3,k}$, а по формуле (18)—другие значения искомого вектора:

$$V_{N_3-1,k}, V_{N_3-2,k}, \dots, V_{1,k}, V_{0,k}.$$

Основной объем вычислений падает в рассматриваемой схеме метода прогонки на вычисление обратных матриц по формуле (19). Поэтому направление прогонки надо выбирать так, чтобы размерность матрицы $X_{0,k}$ была наименьшей, т. е. наименьшим было число $N_1 N_2$, по сравнению с размерностями аналогичных матриц других направлений прогонки, когда размерность будет определяться числами $N_1 N_3$ и $N_2 N_3$. Таким образом, описанный вариант метода прогонки выгодно применять в том случае, когда $N_3 \gg N_1$ и $N_3 \gg N_2$.

Дадим обоснование корректности метода разностной прогонки (см. [1]) и оценим накопление погрешностей при решении уравнения теплопроводности по рассматриваемой схеме.

С целью упростить выкладки мы будем рассматривать ту же задачу (1)—(3), в которой условие (2) будем считать заданным в таком виде:

$$u(x, y, z, t)|_{\Gamma} = g(M, t).$$

где $g(x, y, z, t)$ — известная функция и $M \in \Gamma$.

Чтобы сохранить схему метода прогонки, нам необходимо изменить выбор сетки, а именно, будем считать, что

$$\frac{a_1}{h_x} = N_1, \quad \frac{a_2}{h_y} = N_2, \quad \frac{a_3}{h_z} = N_3 \text{ и } x_i = ih_x, y_j = jh_y,$$

$$z_m = mh_z, t_k = kl \text{ (} i = 0, 1, \dots, N_1; j = 0, 1, \dots, N_2;$$

$$m = 0, 1, \dots, N_3; k = 0, 1, \dots).$$

При рассматриваемом граничном условии изменятся начальные условия для $X_{m,k}$ и $Y_{m,k}$ и матрица $B_{m,k}$ не будет зависеть от индексов m и k . Корректность метода прогонки вытекает из неравенства $\|X_{m,k}\| \leq 1$ ($m=0, 1, \dots, N_3$), которое мы и докажем. Здесь и дальше будем рассматривать норму матрицы, согласованную с евклидовой нормой вектора.

Матрица B симметрична. Она обладает полной ортонормированной системой собственных векторов, и поэтому для любого вектора ρ верна оценка $\|B\rho\| \geq \min |\lambda_i| \|\rho\|$, где λ_i — собственные значения матрицы B . Оценим величины $|\lambda_i|$ снизу. Известно, что собственные значения матрицы $A = \{a_{r,s}\}$ удовлетворяют неравенству

$$|\lambda_i| \geq \min_r \left(|a_{r,r}| - \sum_{\substack{s=1 \\ s \neq r}}^n |a_{r,s}| \right). \quad (24)$$

Используя это неравенство и учитывая (24), получим

$$\|B\rho\| \geq (1+2\gamma) \|\rho\|. \quad (25)$$

Рассмотрим другой вспомогательный вектор ρ_1 , определяемый по формуле

$$\rho_1 = \frac{1}{\gamma} (B - \gamma X_{m,k}) \rho. \quad (26)$$

Из (26) в силу (19) имеем

$$\begin{aligned} \|\rho_1\| &= \frac{1}{\gamma} \|(B - \gamma X_{m,k}) \rho\| \geq \\ &\geq \frac{1}{\gamma} [(1+2\gamma) - \gamma \|X_{m,k}\|] \|\rho\|. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\|\rho\| = \|X_{m+1,k} \rho_1\| \leq \frac{\gamma}{1+2\gamma - \gamma \|X_{m,k}\|} \|\rho_1\|. \quad (27)$$

И так как $\|X_{1,k}\| = 0$, то из (27) следует оценка

$$\begin{aligned} \|X_{m+1,k}\| &\leq \frac{\sum_{l=0}^{m-1} C_{2m-1-l}^l \gamma^{l+1}}{\sum_{l=0}^m C_{2m+1-l}^l \gamma^l} \leq \\ &\leq \frac{\sum_{l=0}^m C_{2m+1-l}^l \gamma^{l+1}}{\sum_{l=0}^{m+1} C_{2m+3-l}^l \gamma^l} < \frac{\gamma}{1+\gamma}. \end{aligned}$$

Значит,

$$\max_{m,k} \|X_{m,k}\| \leq \frac{\gamma \sum_{l=0}^{N_2-1} C_{2N_2-1-l}^l \gamma^l}{\sum_{l=0}^{N_2} C_{2N_2+1-l}^l \gamma^l} < \frac{\gamma}{1+\gamma}.$$

Это и доказывает справедливость оценки $\|X_{m,k}\| \leq 1$, из которой следует корректность метода.

Заметим, что если рассматривается смешанное граничное условие (2), то для доказательства указанной оценки надо положить $S(x, y, z, t) \leq 0$.

Если $S(x, y, z, t) \leq M$ ($M > 0$), то из предположения $\frac{hM}{z} \delta < 1$ следуют неравенства

$$\|X_{0,k}\| \leq 1 + h_z \frac{M}{1 - h \frac{M}{2}}, \quad \|X_{m,k}\| \leq 1 \quad (m = 1, 2, 3, \dots, N_3),$$

из которых также вытекает корректность метода.

Рассмотрим вопрос о накоплении вычислительных погрешностей при решении уравнения теплопроводности по схеме метода прогонки. При вычислениях по формулам (18)–(20) допускаются округления, поэтому в действительности значения $X_{m,k}$, $Y_{m,k}$, $V_{m,k}$ удовлетворяют таким соотношениям:

$$X_{m+1,k} = \gamma (B - \gamma X_{m,k})^{-1} + \eta_{m+1,k}, \quad (28)$$

$$Y_{m+1,k} = \frac{1}{\gamma} X_{m+1,k} (\gamma Y_{m,k} + V_{m,k-1} + i_{m,k}) + r_{m+1,k}, \quad (29)$$

$$V_{m-1,k} = X_{m,k} V_{m,k} + Y_{m,k} + \varepsilon_{m-1,k}, \quad (30)$$

$$X_{1,k} = 0, \quad Y_{1,k} = M_{0,k}, \quad Y_{N_3,k} = M_{a_3,k},$$

где $\eta_{m+1,k}$, $r_{m+1,k}$, $\varepsilon_{m-1,k}$ — погрешности округлений.

Обозначим $V_{(m,k)}$ точное значение вектор-функции $V(z, t)$ в точке (z_m, t_k) . Для значений $X_{(m,k)}$, $Y_{(m,k)}$ и $V_{(m,k)}$ имеют место следующие соотношения:

$$X_{(m+1,k)} = \gamma (B - \gamma X_{(m,k)})^{-1}, \quad (31)$$

$$Y_{(m+1,k)} = \frac{1}{\gamma} X_{(m+1,k)} (\gamma Y_{(m,k)} + V_{(m,k-1)} + I_{(m,k)} + l \Psi_{(m,k)}), \quad (32)$$

$$V_{(m-1,k)} = X_{(m,k)} V_{(m,k)} + Y_{(m,k)}, \quad (33)$$

$$X_{(1,k)} = 0, \quad Y_{(1,k)} = M_{(0,k)}, \quad V_{(N_3,k)} = M_{(a_3,k)},$$

где $\Psi_{(m,k)}$ — вектор-функция погрешностей аппроксимации дифференциального уравнения (1) разностным уравнением (4).

Обозначим через $E_{m,k}$ погрешность в вычислении $V_{m,k}$, т. е.

$$E_{m,k} = V_{m,k} - V_{(m,k)}.$$

Для погрешности $E_{m,k}$ имеет место рекуррентное соотношение

$$E_{m-1,k} = X_{(m,k)} E_{m,k} + (X_{m,k} - X_{(m,k)}) V_{m,k} + (Y_{m,k} - Y_{(m,k)}) + \varepsilon_{m-1,k}.$$

Обозначим

$$X_{m,k} - X_{(m,k)} = \Gamma_{m,k}, \quad V_{m,k} - V_{(m,k)} = \Phi_{m,k}.$$

Тогда

$$E_{m-1,k} = X_{(m,k)} E_{m,k} + \Gamma_{m,k} V_{m,k} + \Phi_{m,k} + \varepsilon_{m-1,k} \quad (m = 1, 2, \dots, N_3). \quad (34)$$

Значит,

$$E_{m-1,k} = X_{(m,k)} X_{(m+1,k)} \dots X_{(N_3,k)} E_{N_3,k} + \Gamma_{m,k} V_{m,k} + \\ + X_{(m,k)} \Gamma_{m+1,k} V_{m+1,k} +$$

$$\begin{aligned}
 & + \dots + X_{(m,k)} \dots X_{(N_3-1,k)} \Gamma_{N_3,k} \mathbf{V}_{N_3,k} + (\underline{\Phi}_{m,k} + \underline{\varepsilon}_{m-1,k}) + \\
 & + X_{(m,k)} (\underline{\Phi}_{m+1,k} + \underline{\varepsilon}_{m,k}) + \dots + X_{(m,k)} \dots X_{(N_3-1,k)} (\underline{\Phi}_{N_3,k} + \underline{\varepsilon}_{N_3-1,k}). \quad (35)
 \end{aligned}$$

Пусть $\mathbf{E}_{N_3,k} = \mathbf{M}_{a_3,k} - \mathbf{M}_{(a_3,k)} = \underline{\varepsilon}_{N_3,k}$. Тогда из (35) непосредственно следует оценка

$$\begin{aligned}
 \|\mathbf{E}_{m-1,k}\| & \leq \frac{1 - \|X\|^{N_3-m}}{1 - \|X\|} \|\Gamma\| \cdot \|\mathbf{V}\| + \\
 & + \frac{1 - \|X\|^{N_3-m+1}}{1 - \|X\|} \cdot (\|\underline{\varepsilon}\| + \|\underline{\Phi}_k\|), \quad (36)
 \end{aligned}$$

где $\|X\| = \max_{m,k} \|X_{(m,k)}\|$; $\|\Gamma\| = \max_{m,k} \|\Gamma_{m,k}\|$;

$$\|\underline{\Phi}_k\| = \max_m \|\underline{\Phi}_{m,k}\|; \quad \|\underline{\varepsilon}\| = \max_{m,k} \|\underline{\varepsilon}_{m,k}\|.$$

Оценим теперь величину $\|\Gamma\|$, входящую в оценку (36). Имеем

$$\Gamma_{m,k} = X_{m,k} - X_{(m,k)}.$$

Значит,

$$\Gamma_{m,k} = (B - \gamma X_{m-1,k})^{-1} \Gamma_{m-1,k} X_{(m,k)} + \eta_{m,k}.$$

Если $\|\eta_{m,k}\| \leq \frac{1}{1 + \gamma}$, то, как легко показать, имеет место неравенство

$$\|(B - \gamma X_{m-1,k})^{-1}\| \leq \frac{1}{1 + \gamma}.$$

Учитывая, что $\|\Gamma_{1,k}\| = \|X_{1,k} - X_{(1,k)}\| = 0$, получим

$$\|\Gamma_{m,k}\| \leq \frac{1 - p^m}{1 - p} \|\eta\| \leq \frac{1}{1 - p} \|\eta\|,$$

где $p = \left(\frac{\gamma}{1 + \gamma} \right)^2$, $\|\eta\| = \max_{m,k} \|\eta_{m,k}\|$.

Осталось получить оценку для $\|\underline{\Phi}_k\|$. Для $\underline{\Phi}_{m,k}$ имеет место разностное уравнение

$$\begin{aligned}
 \underline{\Phi}_{m,k} & = X_{(m,k)} \underline{\Phi}_{m-1,k} + \frac{1}{\gamma} X_{(m,k)} \mathbf{E}_{m,k-1} + \\
 & + \frac{1}{\gamma} X_{m,k} (l \underline{\Phi}_{m,k} + \underline{\beta}_{m,k}) + \\
 & + \Gamma_{m,k} + \frac{1}{\gamma} \Gamma_{m,k} (\mathbf{V}_{m,k-1} + \mathbf{I}_{m,k} + \gamma \mathbf{Y}_{m-1,k}). \quad (37)
 \end{aligned}$$

Пусть

$$\|\underline{\Phi}_{1,k}\| = \|\mathbf{M}_{0,k} - \mathbf{M}_{(0,k)}\| = \|\Gamma_{1,k}\|,$$

тогда из (37) получим

$$\|\underline{\Phi}_{m,k}\| \leq \frac{1}{\gamma(1 - \|X\|)} [\|\mathbf{E}_{k-1}\| + l \|\Psi\| + \|\Gamma\| \cdot \|\Phi\| + \|\underline{\beta}\| + \|\Gamma\| \gamma],$$

где

$$\|\underline{\beta}\| = \max_{m,k} \|\underline{\beta}_{m,k}\| = \max_{m,k} \|\mathbf{I}_{m,k} - \mathbf{I}_{(m,k)}\|;$$

$$\|E_{k-1}\| = \max_m \|E_{m,k-1}\|; \quad \|\Psi\| = \max_{m,k} \|\Psi_{m,k}\|;$$

$$\|\varphi\| = \max_{m,k} \|V_{m,k-1} + I_{m,k} + \gamma Y_{m,k}\|.$$

Подставив оценки для $\|\Gamma_{m,k}\|$ и $\|\Phi_{m,k}\|$ в (36) и учитывая, что

$$\frac{1}{\gamma} \|X\| \frac{1}{(1 - \|X\|)^2} \leq 1, \quad (38)$$

получим окончательную оценку погрешности $\|E_k\|$:

$$\begin{aligned} \|E_k\| \leq & \|E_0\| + k\|\Psi\| + k\|\beta\| + \gamma\|r\| + (1 + \gamma)\|\varepsilon\| + \\ & + \frac{1}{1 - \rho} (\|\varphi\| + (1 + \gamma)\|V\|\|\eta\|). \end{aligned} \quad (39)$$

Литература

1. Годунов С. К., Рябенский В. С. Введение в теорию разностных схем. Изд. ФМ, М., 1962.
2. Гельфанд И. М., Локуцкий О. В. О методе «прогонки» для решения разностных уравнений. Дополнение к [1], стр. 283—310.
3. Русанов В. В. Вычислит. математика, **6**, 1960.
4. Годунов С. К. Успехи матем. наук, **16**, 3(99), 1961.
5. Софронов И. Д. ЖВММФ, **4**, № 2, 1964.
6. Огнева В. В. ЖВММФ, **7**, № 4, 1967.

Белорусский государственный университет
им. В. И. Ленина

Поступило в редакцию
30.XI 1967

В. А. КАЗУЩИК, В. И. ЛАДЕС

АВТОМАТИЧЕСКОЕ ПОСТРОЕНИЕ СХЕМ, СРАВНИВАЮЩИХ ЗНАЧЕНИЯ ЛИНЕЙНОЙ ФУНКЦИИ С ЗАДАНЫМИ КОНСТАНТАМИ

По методу, описанному в [1], синтез одноклапчатых логических устройств, сравнивающих значения линейной функции

$$U = A_1X + A_2Y + \dots + A_nZ \quad (1)$$

с постоянными, ограничивающими заданные интервалы числовой оси, где A_1, A_2, \dots, A_n — целочисленные коэффициенты, X, Y, \dots, Z — двоичные m -разрядные числа, производится в три этапа. На первом этапе по заданной функции поведения строится каноническая таблица [2], на втором этапе по канонической таблице находится структурная схема и на третьем этапе элементы структурной схемы заменяются принципиальными схемами логических элементов, реализующих булевы функции, соответствующие элементам структурной схемы. В результате получается принципиальная схема требуемого устройства.

Первый из указанных этапов требует наибольшего объема вычислений, вследствие чего построение канонических таблиц целесообразно производить с помощью ЭВМ.

Ниже описывается машинный алгоритм и блок-схема программы для «Минск-22».

В общем случае поведение логической схемы, сравнивающей значения функции (1) с константами L_j, M_j , ограничивающими j -й интервал значений U , описывается сложной функцией

$$\Phi(U) = \begin{cases} D_1, & \text{если } L_1 \leq U \leq M_1 \\ D_2, & \text{если } L_2 \leq U \leq M_2 \\ \dots & \dots \\ D_p, & \text{если } L_p \leq U \leq M_p, \end{cases}$$

где D_j — номер j -го выхода схемы ($j = 1, 2, \dots, p$), на котором сигнал возникает тогда и только тогда, когда значения U удовлетворяют условию

$$L_j \leq U \leq M_j.$$

Если границы соседних интервалов совпадают (рис. 1), то функция поведения принимает вид

$$\Phi(U) = \begin{cases} D_1, & \text{если } U < L_1, \\ \dots & \dots \\ C_j, & \text{если } U = L_j, \\ \dots & \dots \\ D_{j+1}, & \text{если } L_j < U < L_{j+1}, \\ \dots & \dots \\ D_{p+1}, & \text{если } L_p < U, \end{cases}$$

где C_j — номер выхода, сигнал на котором возникает при $U = L_j$.
Функцию U представляют через промежуточные аргументы

$$S_i = A_1 x_i + A_2 y_i + \dots + A_n z_i \quad (2)$$

в виде

$$U = 2^{m-1} S_1 + 2^{m-2} S_2 + \dots + 2 S_{m-1} + S_m \\ (i = 1, 2, \dots, m).$$

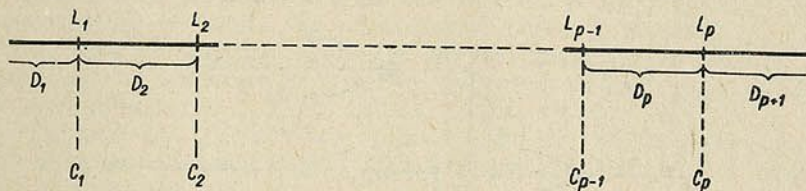


Рис. 1. Интервалы значений функции поведения $\Phi(U)$

Значения промежуточных аргументов $S_i = \{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_k\}$ вычисляются по формуле (2) на всех наборах значений двоичных переменных x_i, y_i, \dots, z_i и изображаются числовым кустом, верхнему отрезку которого приписывается минимальное значение $S_i = \sigma_1$, а нижнему — максимальное значение $S_i = \sigma_k$. Каноническая таблица строится, начиная со старшего разряда схемы, т. е. начиная с куста аргумента S_1 , для чего для каждой из вершин куста по формулам

$$\alpha_r = 2^{m-1} S_1 + \sigma_1 (2^{m-1} - 1),$$

$$\beta_r = 2^{m-1} S_1 + \sigma_k (2^{m-1} - 1)$$

находятся границы интервалов значений U , принадлежащих r -й вершине ($r = 1, 2, \dots, k$). Если выполняются условия

$$\alpha > L_{j-1} \quad \beta < L_j, \quad (3)$$

то r -й вершине приписывается номер j -го выхода схемы и куст значений аргумента S_2 к этой вершине не присоединяется. В остальных случаях к r -й вершине куста S_1 присоединяется куст значений S_2 .

На вершинах кустов i -го столбца значения α и β вычисляются по формулам

$$\alpha = 2^{m-1} S_1 + 2^{m-2} S_2 + \dots + 2^{m-i} S_i + \sigma_1 (2^{m-i} - 1), \quad (4)$$

$$\beta = 2^{m-1} S_1 + 2^{m-2} S_2 + \dots + 2^{m-i} S_i + \sigma_k (2^{m-i} - 1). \quad (5)$$

Кусты значений аргумента S_{i+1} присоединяются к вершинам кустов аргумента S_i , не обозначенным номерами выходов, причем если значение α на ω -й вершине i -го столбца канонической таблицы оказывается равным значению α на ν -й вершине того же столбца, то куст значений S_{i+1} присоединяется только к одной из этих вершин. Вершинам кустов аргумента S_m , на которых выполняется условие

$$\alpha = L_j, \quad (6)$$

приписывается номер выхода C_j .

Таким образом, в числовом дереве, представляющем каноническую таблицу, некоторые ветви могут обрываться, не доходя до конца таблицы. Ветви, на которых строится продолжение таблицы, определяются набором значений промежуточных аргументов $\sigma_{r_1}, \sigma_{r_2}, \dots, \sigma_{r_i}$, входящих в выражения (4) и (5). Для фиксации этих ветвей можно воспользоваться последова-

тельностью индексов при α , которая однозначно определяла бы любую ветвь дерева.

Каждому σ_r из набора $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_k$ поставим в соответствие значение его индекса $r = 1, 2, \dots, k$, а набору $\sigma_{r_1}, \sigma_{r_2}, \dots, \sigma_{r_i}$ — последовательность индексов r_1, r_2, \dots, r_i . Тогда вершина любой ветви, состоящей из отрезков кустов S_1, S_2, \dots, S_i , может быть задана последовательностью индексов r_1, r_2, \dots, r_i , а любой набор вершин в столбце канонической таблицы — табли-

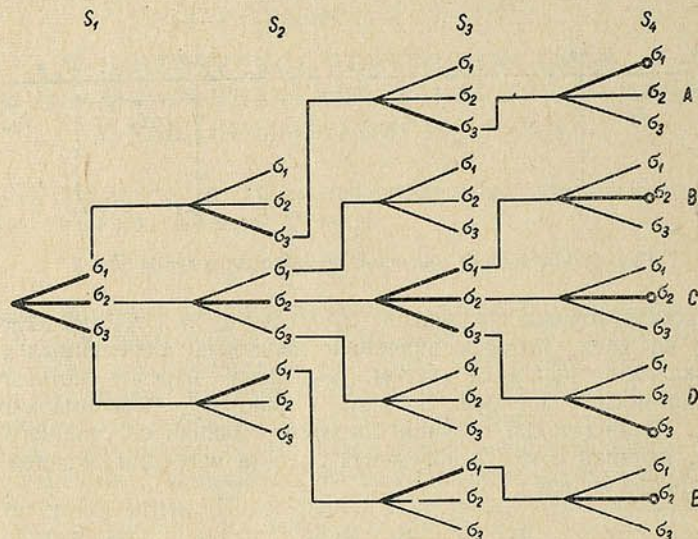


Рис. 2. Каноническая таблица

цей последовательностей индексов Tr , содержащей столько строк, сколько вершин в данном столбце необходимо выделить. Например, в канонической таблице (рис. 2) вершины A, B, C, D, E могут быть заданы таблицей (табл. 1). Зафиксированные этой таблицей ветви показаны на рисунке жирными линиями.

Таблица 1

Последовательности индексов Tr				Вершина
r_1	r_2	r_3	r_4	
1	3	3	1	A
2	2	1	2	B
2	2	2	2	C
2	2	3	3	D
3	1	1	2	E

При таком способе фиксации ветвей канонической таблицы выражения (4) и (5) могут быть представлены в удобном для реализации на ЭВМ виде

$$\alpha_{r_1, r_2, \dots, r_i} = \sum_{\gamma=1}^i 2^{m-\gamma} \sigma_{r_\gamma} + \sigma_1 (2^{m-i} - 1),$$

$$\beta_{r_1, r_2, \dots, r_i} = \sum_{\gamma=1}^i 2^{m-\gamma} \sigma_{r_\gamma} + \sigma_k (2^{m-i} - 1).$$

Обозначим для удобства элементы канонической таблицы следующим образом. В каждом столбце будем различать узлы и вершины кустов. Узлы обозначим буквой с двумя индексами $A_{i,q}$; индекс i соответствует номеру столбца, q — номеру вершины предыдущего столбца. Вершины, которые могут являться узлами кустов $i+1$ -го столбца, обозначим той же буквой с индексами $A_{i+1,\gamma}$. Тем вершинам, для которых значения α_w и α_v совпадают, припишем одинаковые обозначения. Вершинам, на которых выполняются условия (3), припишем обозначения D_1, D_2, \dots, D_{p+1} , а на последнем столбце при выполнении условия (6) — обозначения C_j .

Машинный алгоритм вычисления и построения канонической таблицы состоит из трех частей: 1) вычисление значений α и β для вершин i -го столбца; 2) проверка условий (3) и (6) с формированием обозначений элементов таблицы; 3) вывод накопленной информации в виде таблицы.

На рис. 3 в схеме наряду с общепринятыми обозначениями [3] операторы подготовки и конца циклов по параметру γ обозначены $ПЦ(\gamma)$ и $КЦ(\gamma)$ соответственно. Одновременно с проверкой на конец цикла оператор $КЦ(\gamma)$ производит необходимые наращивания констант переадресации.

Исходными данными для вычисления α и β на вершинах i -го столбца являются: а) таблица Trn последовательностей индексов r_1, r_2, \dots, r_{i-1} , строки которой соответствуют тем различающимся значениям α , вычисленным для $i-1$ -го столбца, которые не удовлетворяют условиям (3); б) длина этой таблицы t_{i-1} , определяемая числом строк в ней.

Таблица Trn для первого столбца содержит только одну нулевую строку. Вычисления для каждой ветви ведем в два этапа. На первом этапе вычисляем величины

$$\Sigma_1 = \sum_{\gamma=1}^{i-1} \Theta_{\gamma} + \sigma_1 (2^{m-i} - 1),$$

$$\Sigma_2 = \sum_{\gamma=1}^{i-1} \Theta_{\gamma} + \sigma_k (2^{m-i} - 1),$$

где

$$\Theta_{\gamma} = 2^{m-\gamma} \sigma_{r_{\gamma}}.$$

Для $\sum_{\gamma=1}^{i-1} \Theta_{\gamma}$ значения $\sigma_{r_{\gamma}}$ определены одной строкой таблицы Trn . Для того чтобы выбрать необходимое $\sigma_{r_{\gamma}}$ из строки индексов выделяем левый r_{γ} (блок 5), и если $r_{\gamma} \neq 0$, то из ряда $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_k$ выбираем $\sigma_{r_{\gamma}}$, вычисляем Θ_{γ} и прибавляем его к сумме предыдущих значений Θ_{γ} . Затем содержимое строки индексов сдвигаем влево на $x = \lceil \log_2 r \rceil$ разрядов (x — целое, ближайшее к $\log_2 r$) и переходим к выделению следующего r_{γ} . Одновременно со сдвигом строки сдвигается вправо «метка» — «1» в младшем разряде двоичного изображения r , которая определит позицию i -го индекса в строке. Вначале «метка» помещается в позиции первого индекса последовательности. Признаком того, что сумма всех $i-1$ значений Θ_{γ} вычислена, является нулевое значение очередного индекса r_{γ} . В конце вычисляем $\sigma_1 (2^{m-i} - 1)$, $\sigma_k (2^{m-i} - 1)$ и получаем значения Σ_1 и Σ_2 .

На втором этапе для каждого σ_r вычисляем величины $2^{m-i} \sigma_r$. Суммируя эти величины с Σ_1 и Σ_2 , получаем все значения

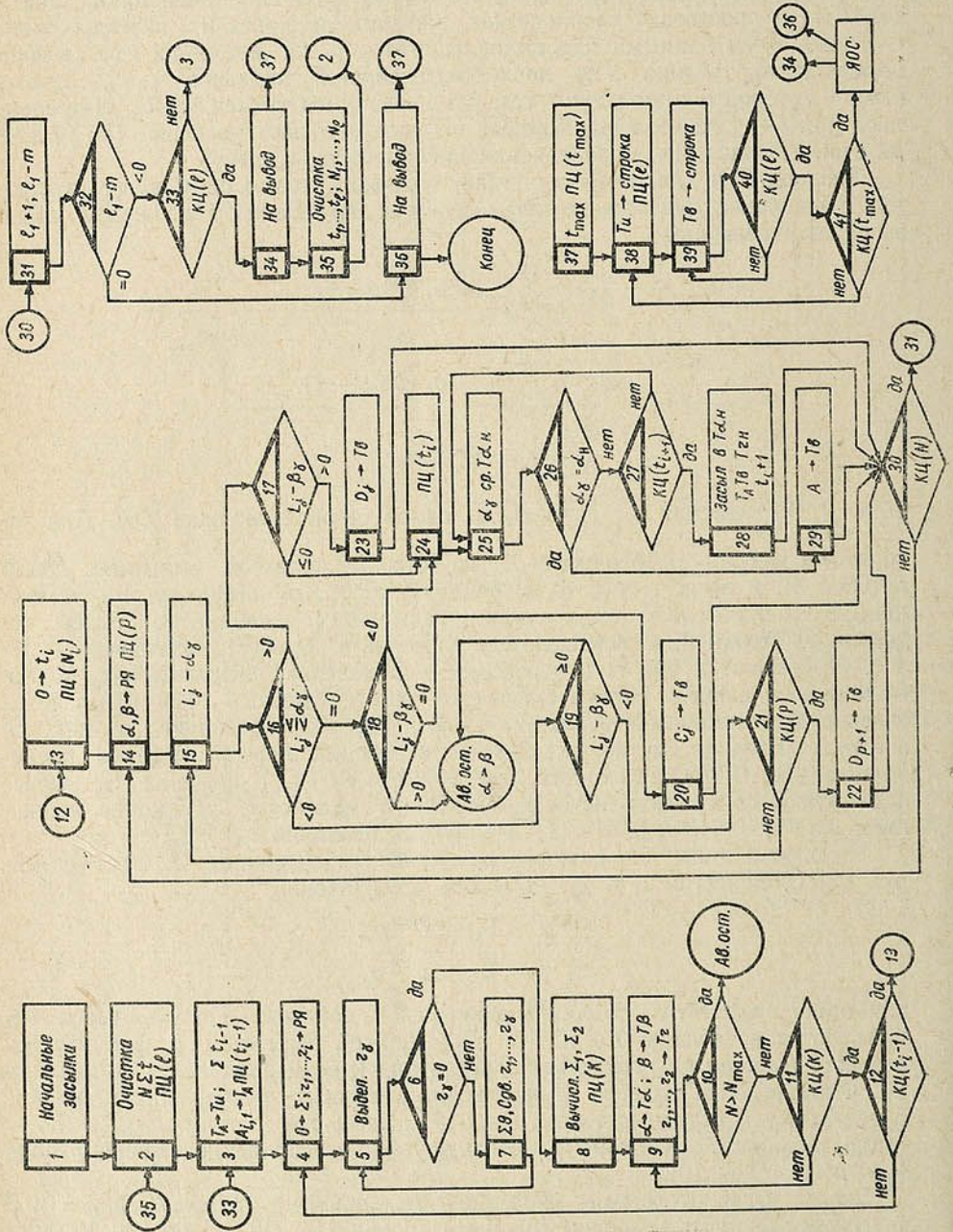
$$\alpha = \Sigma_1 + 2^{m-i} \sigma_r,$$

$$\beta = \Sigma_2 + 2^{m-i} \sigma_r$$

для одного куста i -го столбца канонической таблицы. Полученные α и β засылаются в таблицы $T\alpha$ и $T\beta$. Для каждой пары α и β формируется соответствующая ей последовательность индексов и засылается в таблицу Tr . Формирование индекса r_i производится простым прибавлением «метки» к предыдущей строке индексов (блок 9). Здесь же подсчитывается N_i — длина таблицы Tr (блок 9) и контролируется переполнение рабочего поля $N_i < N_{\max}$ (блок 10).

Вторая часть программы запоминает N_i , анализирует все N_i пар α и β на соответствие их условиям (3) и (6) (блоки 16—19). Блок 21 производит переадресацию для перехода к границе следующего интервала $L_{\gamma+1}$. При выполнении одного из условий (3) или (6) блоки 20, 22, 23 выбирают

Рис. 3. Блок-схема программы.



соответствующие обозначения обрывающихся ветвей D_j , C_j и заносят их в массив таблиц обозначений вершин T_v . Если для пары α и β условия (3) или (6) не выполняются (выходы ≤ 0 блока 17 и < 0 блока 18), то необходимо проверить, не встречалось ли среди уже просмотренных пар α , равное данному. С этой целью формируем таблицу T_{an} неповторяющихся значений α для данного столбца. С каждой строкой T_{an} сравниваем данное α_j (блок 25). Если α_j не совпадает ни с одной строкой таблицы T_{an} , то (блок 28) а) в нее добавляется строка со значением α_j ; б) заранее заготовленное обозначение вершины куста $A_{i+1,q}$ отсылается в массив таблиц T_v и в таблицу T_A обозначений узлов следующего столбца; в) из таблицы Tr строка, соответствующая данному α , а следовательно, и данной ветви числового дерева, пересылается в таблицу Trn . Здесь же подсчитывается t_i — длина таблицы Trn и заготавливается следующее $A_{i+1,q+1}$.

Если α совпало с одной из строк таблицы T_{an} , то обозначение вершины, засылаемое в T_v , берется из соответствующей строки таблицы T_A (блок 29).

В результате анализа всех пар α и β из таблиц T_α и T_β получаем таблицу Trn и ее длину t_i , используемые при расчетах следующего столбца, таблицу T_A , которая впоследствии пересылается в массив таблиц обозначений узлов T_u , и пополняем таблицей обозначений вершин данного столбца массив T_v . В этой же части программы ведется счет числа просчитанных столбцов l_1 (блок 31), контролируется заполнение страницы для вывода (блок 33) и проверяется отношение $l_1 = m$. Если страница не заполнена и $l_1 < m$, то T_A пересылается в T_u , запоминается t_i , определяется

$\sum_{i=1}^l t_i$ — константа переадресации для начального адреса T_A следующего

столбца в массиве T_u , заготавливается обозначение первой вершины следующего столбца $A_{i+1,1}$ и подготавливается цикл для просчета следующего столбца (блок 3). Если страница заполнена или просчитан последний столбец канонической таблицы $l_1 = m$, то переходим к программе вывода (блоки 34, 36).

Результаты расчета l столбцов, помещенных на одну страницу, представлены а) массивом таблиц обозначений вершин кустов T_v , в котором таблицы, соответствующие отдельным столбцам, расположены вплотную друг к другу (длина таблиц задана набором N_1, N_2, \dots, N_l); б) таким же массивом таблиц обозначений узлов T_u и набором t_1, t_2, \dots, t_l .

Страница печатается построчно: 1-я строка формируется из таблиц массивов T_u и T_v , 2-я, 3-я, k -я строки — из массива T_v , $k+1$ -я строка формируется снова из T_u и T_v и т. д. После того как содержимое таблицы обозначений какого-либо столбца на данной странице исчерпано, команда занесения в строку обозначений данного столбца обходится. Цикл продолжается до тех пор, пока не будет исчерпана самая длинная таблица.

Программа вывода состоит из трех блоков: 1) определение t_{\max} из набора t_1, t_2, \dots, t_l (блок 37); 2) формирование и рассылка по рабочим ячейкам констант переадресации, которые обеспечивают пересылку нужного обозначения из массива в строку и определяют момент окончания таблицы (блок 37); 3) засылка обозначений из массивов T_u и T_v в строку, изменение константы переадресации для формирования следующей строки (блоки 38—41).

Последняя страница может быть заполнена не целиком. В этом случае часть параметров $t_1, t_2, \dots, t_l, N_1, N_2, \dots, N_l$ будет равна нулю.

После вывода страницы очищаются ячейки хранения $t_1, t_2, \dots, t_l, N_1, N_2, \dots, N_l$ (блок 35), очищаются рабочие ячейки, в которых накапливаются

Таблица 2

Каноническая таблица функции $U = X + Y - 2Z$

A 01,01	A 02,01	A 03,01	D 1	A 04,01	D 1	A 05,01	D 1	A 06,01	D 1
A 02,02	D 1	A 03,02	D 1	A 04,02	D 1	A 05,02	D 1	A 06,02	D 1
A 02,03	D 1	A 03,03	A 04,01	A 04,03	A 05,01	A 06,01	A 06,01		D 1
A 02,04	D 1	A 03,04	A 04,02	A 04,04	A 05,02	A 06,02	A 06,02		C 1
D 2	A 03,01		A 04,02	A 04,04	A 05,01				D 2
	A 02,02	A 03,02	D 1	A 04,02	D 1	A 05,02	D 1	A 06,02	D 1
	D 1	D 1	A 04,01		D 1		A 06,01		C 1
	A 03,01	A 03,01	A 04,02		A 05,01	A 06,02	A 06,02		D 2
	A 03,02	A 03,02	A 04,03		A 05,02				D 2
	A 03,03	A 03,03	A 04,04		A 05,04				D 2
	A 02,03	A 03,01	A 04,02	A 04,03	A 05,01	A 06,02			
	A 03,02	A 03,02	A 04,03		A 05,02				
	A 03,03	A 03,03	A 04,04		A 05,04				
	A 02,04	A 03,03	D 2						
	A 03,04	A 03,04	D 2						
	A 02,04	A 03,03	A 04,04	A 04,04	A 05,03				
	A 03,04	A 03,04	D 2		A 05,02				
	D 2	D 2	D 2		A 05,03				
	D 2	D 2	D 2		D 2				
	D 2	D 2	D 2		D 2				
	D 2	D 2	D 2		D 2				
	A 02,04	A 03,04	A 04,04	A 04,04	A 05,03				
	A 03,04	A 03,04	D 2		D 2				
	D 2	D 2	D 2		D 2				
	D 2	D 2	D 2		D 2				
	D 2	D 2	D 2		D 2				

$N_i, \sum t_i$, константа переадресации для T_v и подготавливается цикл по l (блок 2).

Программа для ЭВМ «Минск-22» составлена для построения таблиц со следующими параметрами: $m = 18, k = 15, p = 20, t_{\max} = 63$. Для массивов T_u и T_v отведены рабочие поля величиной в 400_8 и 6000_8 ячеек соответственно. В качестве исходных данных задаются наборы $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_k, L_1, L_2, \dots, L_p$ и величины $m, k, p, \sigma_1, \sigma_k$. В качестве примера приведена построенная на ЭВМ каноническая таблица (табл. 2) для функции

$$\Phi(U) = \begin{cases} D_1, & \text{если } U < -13, \\ C_1, & \text{если } U = -13, \\ D_2, & \text{если } U > -13, \end{cases} \quad (7)$$

где $U = X + Y - 2Z$ и числа X, Y, Z представлены 6-разрядными двоичными кодами. Промежуточный аргумент

$$S_i = x_i + y_i - 2z_i \quad (8)$$

принимает $k = 5$ значений:

$$S_i = \{-2, -1, 0, 1, 2\}. \quad (9)$$

Как следует из (7), (8) и (9), для работы программы были заданы величины

$$\sigma_1 = -2, \quad L_1 = -13, \quad m = 6, \quad \sigma_1 = -2,$$

$$\sigma_2 = -1, \quad k = 5, \quad \sigma_k = 2.$$

$$\sigma_3 = 0, \quad p = 1.$$

$$\sigma_4 = 1,$$

$$\sigma_5 = 2,$$

Переход от полученных описанным выше способом канонических таблиц к структурным схемам производится по правилам, изложенным в [1].

Литература

1. Блох А. Ш., Ладес В. И. Весті АН БССР, сер. фіз.-тэхн. навук, № 3, 1963.
2. Блох А. Ш. Синтез переключательных схем. Изд. «Наука и техника», Минск, 1966.
3. Мак-Кракен Д. Д. Программирование для цифровых вычислительных машин. ИЛ, 1960.

Институт математики АН БССР,
Институт технической кибернетики
АН БССР

Поступило в редакцию
29.III 1968

Н. Н. СИРОТА, В. Б. ШИПИЛО

ВЛИЯНИЕ ВЫСОКИХ ДАВЛЕНИЙ НА ЭЛЕКТРОПРОВОДНОСТЬ И КОЭФФИЦИЕНТ ХОЛЛА МОНОКРИСТАЛЛОВ АНТИМОНИДА ГАЛЛИЯ *n*- И *p*-ТИПОВ ПРИ РАЗЛИЧНЫХ ТЕМПЕРАТУРАХ

Антимонид галлия по своим полупроводниковым свойствам близок к германию. Наличие сложной структуры зон GaSb обуславливает сложный спектр эффективных масс электронов и дырок. Исследование изменения электропроводности и коэффициента Холла в зависимости от давления при различных температурах позволяет внести известную ясность в вопрос о структуре зон. Вместе с тем изучение влияния давления на электрические свойства антимонида галлия может представлять и практический интерес.

Целью настоящей работы являлось изучение изменения удельной электропроводности и коэффициента Холла антимонида галлия *n*- и *p*-типов в зависимости от давления от 0 до 25 кбар в изотермических условиях при температурах от комнатной до 773 °К.

Методика эксперимента. Измерения удельной электропроводности σ и коэффициента Холла R образцов GaSb осуществлялись в камере высокого давления, описанной в [1]. Образец, к контактным лапкам которого были присоединены платиновые проволоки (\varnothing 0,05 мм), помещался в миниатюрной печи с бифилярно намотанной немагнитной спиралью между полюсами электромагнита. Достаточно длинная плотная намотка плоской спирали обеспечивала хорошую однородность температуры по длине образца (6 мм). Кроме того, высокая теплопроводность GaSb способствовала однородному распределению температуры по объему образца. Спай хромель-алюмелевой термопары (\varnothing 0,20 мм) касался боковой стенки образца в середине слитка. Открытые отверстия печи закрывались теплоизолятором после того, как образец и термопара были отцентрированы по отношению к полюсам электромагнита.

При вычислении удельной электропроводности и коэффициента Холла принималось во внимание уменьшение напряженности магнитного поля (на 8% при 25 кбар) и линейных размеров образца (на 1,5% при 25 кбар) с ростом давления.

В остальном методика измерения электрических свойств антимонида галлия в зависимости от давления при различных температурах была та же, что и в [1, 2].

Ошибка измерений абсолютной величины удельной электропроводности и коэффициента Холла под высоким давлением, по нашим оценкам, составляет $\pm(7-9\%)$ и $\pm(13-15\%)$ соответственно, а относительная ошибка изменения σ и R равна $\pm(2-3\%)$ и $\pm(3-5\%)$.

Экспериментальные результаты и их обсуждение. Объектами исследования служили легированный теллуром промышленный монокристалл антимонида галлия *n*-типа с концентрацией носителей тока $N_n = 8,5 \cdot 10^{17} \text{ см}^{-3}$ и нелегированный монокристалл

p-типа с концентрацией носителей $N_p = 5,7 \cdot 10^{16} \text{ см}^{-3}$ (при комнатной температуре). Результаты исследования приведены на рис. 1. Следует отметить хорошую воспроизводимость кривых при нагреве и охлаждении, за исключением примесной области, в которой наблюдается некоторый гистерезис.

С повышением давления выше 2 кбар коэффициент Холла образцов GaSb *n*-типа снижается, проходя через минимум при давлении 17—18 кбар. При комнатной температуре при давлении 1,5—2 кбар

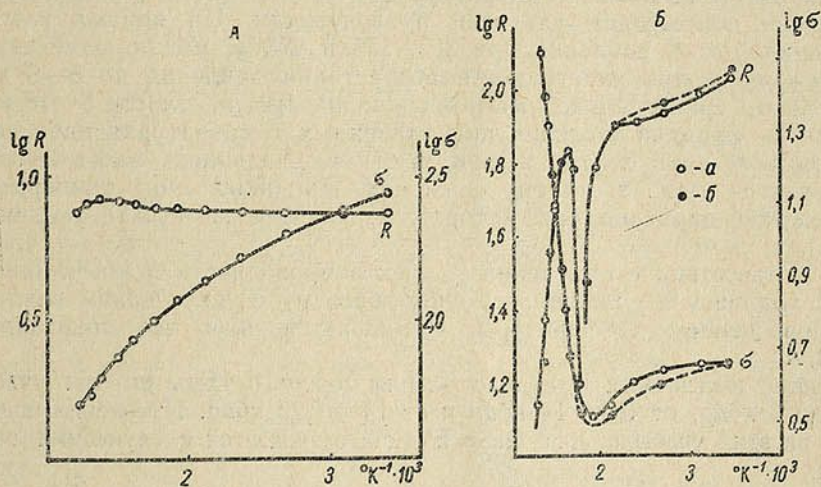


Рис. 1. Зависимость логарифмов коэффициента Холла и удельной электропроводности GaSb *n*-типа (А) и *p*-типа (Б) от обратной температуры:

a — точки сняты при возрастании температуры; *b* — при снижении

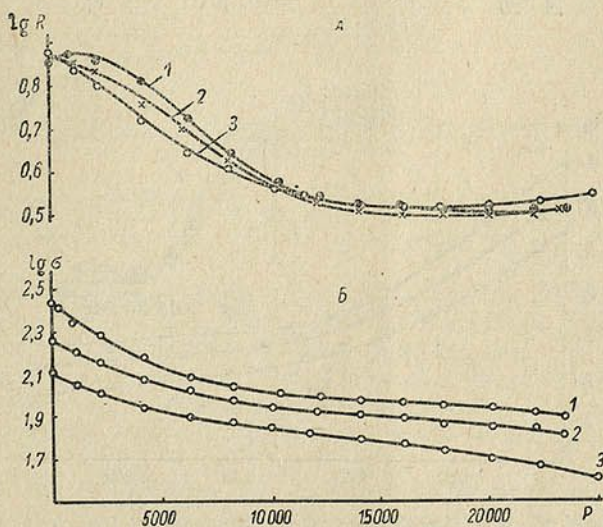


Рис. 2. Зависимость логарифма коэффициента Холла (А) и логарифма удельной электропроводности (Б) GaSb *n*-типа от давления *P*, бар:

1 — при 297 °К; 2—373; 3—473 °К

кривые $\lg R$ проходят через максимум, который при повышении температуры исчезает (рис. 2, А). Ранее отмечалось существование этого максимума, величина и положение которого связывались с чистотой образца [3, 4]. Повышение температуры до 473 °К сопровождается понижением $\lg R$ при давлениях до 9,5 кбар. При более высоких давлениях наблюдается инверсия: изотермы $\lg R$ в функции давления пересекаются.

Удельная электропроводность с повышением давления снижается (рис. 2, Б). Повышение температуры от комнатной до 473 °К сопровождается понижением удельной проводимости. На кривых изотерм изменения $\lg \sigma$ от давления при 297, 373 и 473 °К можно отметить по крайней мере три участка: при возрастании давления до 5—6 кбар имеет место сравнительно быстрое снижение $\lg \sigma$, в области 6—18 кбар кривые в функции давления при указанных температурах идут почти параллельно друг другу, а при высоких давлениях, выше 18 кбар, наблюдается изгиб в сторону снижения. При повышении температуры уменьшается давление, при котором становится заметным указанный изгиб.

В соответствии с изменениями электропроводности и коэффициента Холла холловская подвижность электронов μ_n с увеличением давления и с повышением температуры уменьшается, как это показано на рис. 3, А.

Кривые зависимости $\lg \mu_n$ от давления можно разбить на три участка: от 0 до 6 кбар, от 6 до 14 кбар и от 14 до 23 кбар. Изменение подвижности на этих участках для GaSb *n*-типа выражается следующими значениями:

Интервал давлений, кбар	Уменьшение подвижности, %		
	при 297 °К	373 °К	473 °К
0—6	68	64	61
6—14	17	18	17
14—23	2	3	5

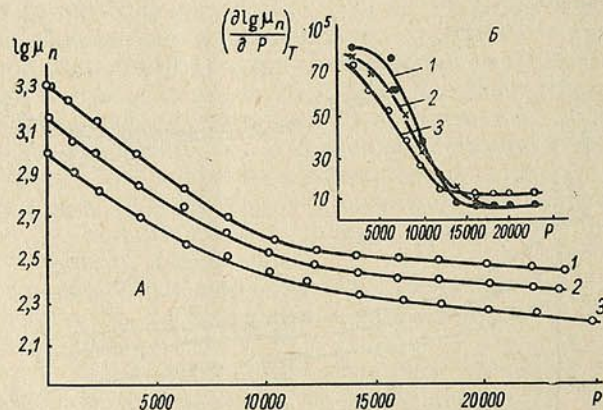


Рис. 3. Зависимость логарифма подвижности $\lg \mu_n$ (А) и коэффициента давления логарифма подвижности $\left(\frac{\partial \lg \mu_n}{\partial P}\right)_T$, бар⁻¹ (Б) GaSb *n*-типа от давления P , бар при различных температурах:

1—297 °К; 2—373; 3—473

Таким образом, наибольшее изменение подвижности происходит в интервале давлений 0 — 6 кбар, а при последующем увеличении давления выше 14 кбар подвижность меняется незначительно.

Обращает на себя внимание влияние температуры на изменение хода кривых логарифма подвижности от давления. Скорость изменения $\lg \mu_n$ с давлением $\left(\frac{\partial \lg \mu_n}{\partial P}\right)_T$ при различных температурах показана на рис. 3, Б.

До давлений 10 кбар с ростом температуры величина $\frac{\partial \lg \mu_n}{\partial P}$ уменьшается, а после 10 кбар — увеличивается.

До настоящего времени в литературе отсутствовали сведения об изменении электрических свойств антимолида галлия *p*-типа в зависимости от давления при различных температурах. В [5] указывается лишь на независимость сопротивления GaSb *p*-типа до давления 20 кбар при комнатной температуре.

Как видно из рис. 4, тангенс угла наклона прямых $\lg \sigma - 1/T$ в области собственной проводимости при различных давлениях (вплоть

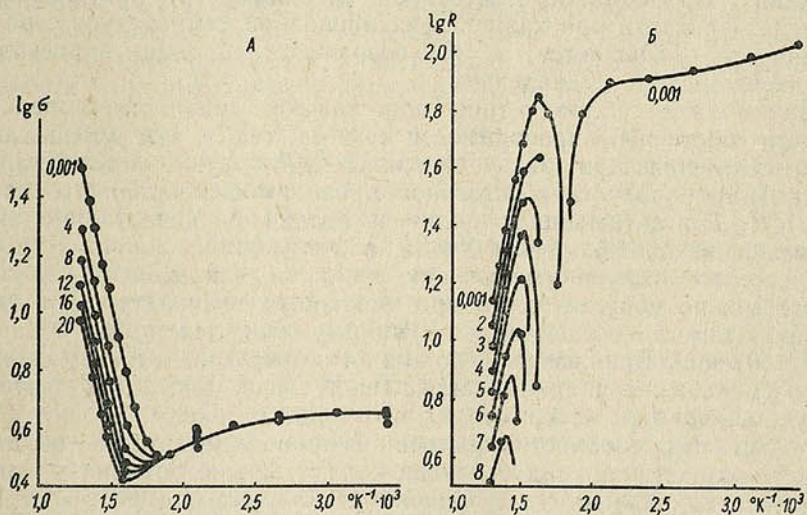


Рис. 4. Зависимость логарифма удельной электропроводности (А) и логарифма коэффициента Холла (Б) GaSb *p*-типа от обратной температуры при различных давлениях (цифры на кривых соответствуют величине *P* в кбар)

до 20 кбар) практически не изменяется. В примесной области проводимости изменения величины $\lg \sigma$ также не наблюдалось. Наклоны прямых $\lg R - 1/T$ при небольших давлениях так же, как и в зависимости $\lg \sigma - 1/T$, практически одни и те же. Однако с увеличением давления переход от примесной к собственной проводимости имеет место при более высоких температурах и происходит в более широком интервале температур.

Примесная ветвь изменения $\lg R$ в зависимости от температуры при этом оказывается общей для всех изобар, поскольку при каждой данной температуре величина $\lg R$ в примесной области остается практически неизменной при всех давлениях.

Независимость $\lg \sigma$ и $\lg R$ от давления в области примесной проводимости GaSb *p*-типа указывает на то, что подвижность дырок не зависит от давления.

Наши результаты по изучению влияния давления на удельную электропроводность и коэффициент Холла GaSb n -типа при сравнительно небольших давлениях при комнатной температуре в основном согласуются с данными [3,4]. Наблюдавшиеся нами изменения $\lg \sigma$, $\lg R$ и $\lg \mu_n$, возможно, сопоставимы с зонной структурой антимонида галлия и могут быть разъяснены при предположении, что в области давлений до 10 кбар, в которой наиболее сильно уменьшаются величины $\lg \sigma$, $\lg R$ и $\lg \mu_n$, в проводимости участвуют электроны наименьшего минимума (000), а после 10 кбар — электроны минимума (111), имеющие более низкую подвижность и более низкий коэффициент давления логарифма подвижности $\left(\frac{\partial \lg \mu_n}{\partial P}\right)_T$. Проявление

минимума (100) сказывается, по-видимому, при давлении 25 кбар и температуре 473°К, когда $\lg R$ начинает возрастать, а $\lg \sigma$ падать с ростом давления. Заметим также, что с ростом температуры уменьшается давление, при котором в проводимости участвуют электроны минимума (100).

Ранее [6] нами было установлено, что в антимониде индия ($N_p = 3.7 \cdot 10^{13} \text{ см}^{-3}$) имеют место прямолинейные зависимости $\lg \sigma$ и $\lg R$ в функции $1/T$ (в области собственной проводимости) при различных давлениях. При этом при каждой фиксированной температуре с ростом давления $\lg \sigma$ уменьшается, а $\lg R$ возрастает (ширина запрещенной зоны увеличивается с давлением).

В антимониде галлия p -типа при каждой заданной температуре в области собственной проводимости как $\lg \sigma$, так и $\lg R$ уменьшаются с ростом давления. При сравнении кривых $\lg R$ в функции давления для GaSb и InSb в области собственной проводимости видно, что наклон линий $\lg R - P$ в антимонидах индия и галлия различается по знаку.

Уменьшение коэффициента Холла в антимониде галлия с ростом давления соответствует уменьшению ширины запрещенной зоны E_g . Поэтому можно допустить, что при указанных температурах и давлениях (100) зоны Бриллюэна — по аналогии с кремнием и германием [7]. Однако уменьшение ширины запрещенной зоны GaSb незначительно (в пределах ошибки эксперимента), что видно из рис. 4.

Снижение $\lg \sigma$ в области собственной проводимости с ростом давления (а не возрастание ввиду уменьшения E_g) можно объяснить тем, что уменьшение подвижности электронов превалирует над ростом их концентрации.

С этой точки зрения также можно объяснить увеличение температуры перехода от примесной к собственной проводимости (рис. 4) с ростом давления тем, что уже при сравнительно небольших давлениях низкие энергетические состояния наименьших минимумов будут заняты электронами. Поэтому требуется большая энергия для переброса электрона из валентной зоны на более высокие уровни зоны проводимости GaSb.

Литература

1. Сирота Н. Н., Шипило В. Б. Вестн АН БССР, сер. физ.-мат. наук, № 3, 1967.
2. Сирота Н. Н., Шипило В. Б. ДАН БССР, 11, 677, 1967.
3. Sagar A. Phys. Rev., 117, 93, 1960.
4. Sagar A., Miller R. C. J. Appl. Phys., 32, 2073, 1961.
5. Paul W. J. Appl. Phys., 32, 2082, 1961.
6. Sirota N. N., Shipilo V. B. Phys. Stat. Sol., 25, K27, 1968.
7. Сб. «Твердые тела под высоким давлением». Под ред. В. Пола и Д. Варшауэра. Изд. «Мир», 1963.

Институт физики твердого тела
и полупроводников АН БССР

Поступило в редакцию
4.IV 1968

О. С. ИВАНИЦКАЯ

**О СВОЙСТВАХ ПАРАМЕТРОВ
 БЕСКОНЕЧНО МАЛЫХ ЛОРЕНЦЕВЫХ
 ПРЕОБРАЗОВАНИЙ В ГРАВИТАЦИОННОМ ПОЛЕ**

1. Определение и трансформационные свойства б. м. лоренцевых преобразований в поле тяготения. В релятивистской теории гравитации (общей теории относительности, сокращенно ОТО) локальная справедливость специальной теории относительности (СТО) сочетается с неевклидовостью геометрии пространства — времени. Это сочетание может быть выражено введением б. м. лоренцевых преобразований, зависящих от специальных коэффициентов связности — коэффициентов вращения Риччи *):

$$\delta\omega_{kn} = \gamma_{kn\lambda} dx^\lambda; \quad \delta\omega_{kn} = -\delta\omega_{nk}. \quad (1.1)$$

Коэффициенты вращения, входящие в (1.1), образуют тензор кривизны Римана—Кристоффеля, отличный от нуля, и удовлетворяют гравитационному уравнению Эйнштейна в его тетрадной форме [1].

Лоренцево преобразование (1.1) переводит орторепер неголономной псевдодекартовой координатной системы, принадлежащий данной точке, в орторепер, снесенный в данную точку из точек бесконечно близких, где введены другие локальные неголономные псевдодекартовы системы [2]. Эти локальные системы привязаны к глобальной голономной системе, но неоднозначно. Изменение привязки может быть осуществлено или непосредственно конечным лоренцевым преобразованием, применяемым к неголономным псевдодекартовым системам (локальным, обобщенным лоренцевым преобразованием), или изменением 6 калибровочных условий, накладываемых на обобщенные коэффициенты Ламэ h_μ^k (коротко тетрады). Обобщенное лоренцево преобразование в силу его зависимости от координат ∞ -параметрическое. В каждой данной точке, т. е. при фиксированных координатах, оно, вообще говоря, 6-параметрическое.

Параметрами б. м. лоренцева преобразования (1.1) могут быть приняты шесть его коэффициентов $\delta\omega_{kn}$. В каждом частном случае они находятся в результате решения тетрадного уравнения Эйнштейна или из 10 уравнений

$$g_{\mu\nu} = h_\mu^k h_\nu^n \eta_{kn}, \quad \eta_{kn} = \text{diag}(1, 1, 1, -1), \quad (1.2)$$

с заданными $g_{\mu\nu}$ и из 6 калибровочных условий. Изменение калибровочных условий эквивалентно преобразованию коэффициентов вращения Риччи применением к ним локального лоренцева преобразования, зависящего от координат. Поскольку коэффициенты связности преобразу-

* Греческие и латинские индексы начала алфавита, соответственно до κ и k , пробегают значения 1, 2, 3, начиная с κ и $k = 1, 2, 3, 4$. Численные значения латинских индексов заключены в скобки. Греческие индексы относятся к глобальной голономной, латинские — к локальной неголономной системам координат.

зуются не по тензорному закону, преобразованные параметры б. м. лоренцева преобразования (1.1) имеют вид

$$\delta\omega_{k'n'} = \gamma_{k'n'\lambda} dx^\lambda = L_{k'}^r L_{n'}^s \delta\omega_{rs} + L_{k'p} \delta L_{n'}^p; \quad \delta L_{n'}^p = \partial_\sigma L_{n'}^p dx^\sigma. \quad (1.3)$$

Следовательно, относительно преобразования локальных неголономных псевдодекартовых систем параметры лоренцева преобразования (1.1) являются геометрическими объектами, более сложными, чем антисимметричный тензор 2 ранга. Однако в рамках данной калибровки тетрад коэффициенты $\delta\omega_{kn}$ обладают свойствами бивектора. Эти свойства зависят от характера бивектора, который может быть задан с помощью свертков его с самим собою или с бивектором, ему дуальным.

Изменение в СТО числа параметров лоренцева преобразования достигается переходом к другой глобальной голономной псевдодекартовой координатной системе, например таким переходом, чтобы вектор скорости был направлен по одной из координатных осей. Аналогично в данном гравитационном поле изменение числа параметров $\delta\omega_{kn}$ осуществляется переходом к другой локальной, неголономной псевдодекартовой системе, т. е. переходом к другой калибровке тетрад.

Интересно выяснить характер параметров $\delta\omega_{kn}$ при различных известных калибровках тетрад, а также выявить калибровки, допускающие новые, «векторные» параметризации б. м. лоренцева преобразования. Изучение свойств параметров $\delta\omega_{kn}$ представляет интерес и для разыскания способов упрощения тетрадного уравнения Эйнштейна и для развития интерпретации систем отсчета, находящихся в гравитационном поле, введенной в [3, 4].

2. Простые и непростые параметры б. м. лоренцева преобразования в гравитационном поле. Введем следующие свертки параметров преобразования (1.1):

$$\delta J_1 \stackrel{\text{def}}{=} \delta\omega_{kn}^D \delta\omega^{kn} = \frac{1}{2} \eta^{knrs} \delta\omega_{kn} \delta\omega_{rs} =$$

$$= (\gamma_{(1)(2)\lambda} \gamma_{(3)(4)\mu} + \gamma_{(3)(1)\lambda} \gamma_{(2)(4)\mu} + \gamma_{(2)(3)\lambda} \gamma_{(1)(4)\mu}) dx^\lambda dx^\mu, \quad (2.1)$$

$$\delta J_2 \stackrel{\text{def}}{=} \delta\omega_{kn} \delta\omega^{kn} = -(\gamma_{(1)(4)\lambda} dx^\lambda)^2 - (\gamma_{(2)(4)\lambda} dx^\lambda)^2 -$$

$$- (\gamma_{(3)(4)\lambda} dx^\lambda)^2 + (\gamma_{(1)(2)\lambda} dx^\lambda)^2 + (\gamma_{(3)(1)\lambda} dx^\lambda)^2 + (\gamma_{(2)(3)\lambda} dx^\lambda)^2, \quad (2.2)$$

η^{knrs} — тензор Леви — Чивита. Возможны 2 вида параметров: непростые параметры $\delta J_1 \neq 0$ и простые $\delta J_1 = 0$. В частности, в каждом из этих случаев возможно $\delta J_2 = 0$. Такие параметры лоренцева преобразования $\delta\omega_{kn}$, когда $\delta J_1 = \delta J_2 = 0$, назовем нулевыми.

Очевидно, в частности, параметры будут простыми, если

$$\gamma_{ab\lambda} = 0 \quad (2.3)$$

или

$$\gamma_{a(4)\lambda} = 0, \quad (2.4)$$

хотя эти условия не являются необходимыми условиями простоты.

Совершим переход к другой калибровке тетрад. Это во всех точках изменит локальные неголономные координатные системы. При этом свертки параметров в силу (1.3), вообще говоря, не останутся инвариантными. Действительно,

$$\delta J_1' = \delta\omega_{k'n'}^D \delta\omega^{k'n'} = \frac{1}{2} \eta^{k'n'r's'} \delta\omega_{k'n'} \delta\omega_{r's'} = \delta J_1 + \Delta J_1,$$

$$\delta J_1 = \delta\omega_{kn}^D \delta\omega^{kn},$$

$$\Delta J_1 = \delta L_{r'n} \left(2^D \delta \omega^{np} L_p^{r'} - \frac{1}{2} \eta^{knm'r'} \delta L_{m'k} \right); \quad (2.5)$$

$$\delta J_2' = \delta \omega_{k'n'} \delta \omega^{k'n'} = \delta J_2 + \Delta J_2,$$

$$\delta J_2 = \delta \omega_{kn} \delta \omega^{kn},$$

$$\Delta J_2 = \delta L_m^{n'} (\delta L_n^m + \delta \omega_k^m L_n^k). \quad (2.6)$$

Очевидно,

$$\delta \omega_{kn}' = \gamma_{kn\lambda} dx^{\lambda'} = \delta \omega_{kn} = \text{inv}. \quad (2.7)$$

Таким образом, изменением калибровки, т. е. локальным лоренцевым преобразованием неголомомной локальной системы координат, можно, вообще говоря, изменить и число отличных от нуля параметров $\delta \omega_{kn}$ и преобразовать их в простые или нулевые параметры, если первоначально они были параметрами непростыми. Так, лоренцево преобразование, переводящее непростые параметры в нулевые, может быть найдено из уравнений

$$\delta L_m^{n'} (\delta L_n^m + \delta \omega_k^m L_n^k) = -\delta J_2, \quad (2.8)$$

$$\delta L_{r'm} \left(2^D \delta \omega^{np} L_p^{r'} - \frac{1}{2} \eta^{knm'r'} \delta L_{m'k} \right) = -\delta J_1, \quad (2.9)$$

в которых величины δJ_1 , δJ_2 , $\delta \omega_{km}$ заданы, если эти 2 уравнения совместны и разрешимы относительно $L_m^{n'}$.

Параметры $\delta \omega_{kn}$ подбором калибровки могут быть сведены к каноническому виду. Так, простые параметры могут быть сведены к двум, например $\delta \omega_{(1)(2)}$ и $\delta \omega_{(2)(4)}$:

$$\delta \omega_{kn} = \begin{pmatrix} \cdot & \delta \omega_{(1)(2)} & \cdot & \cdot \\ \delta \omega_{(2)(1)} & \cdot & \cdot & \delta \omega_{(2)(4)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \delta \omega_{(4)(2)} & \cdot & \cdot \end{pmatrix}; \quad \delta \omega_{(1)(2)} = \pm \delta \omega_{(2)(4)}. \quad (2.10)$$

Непростые параметры — также к двум:

$$\delta \omega_{kn} = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \delta \omega_{(1)(4)} \\ \cdot & \cdot & \delta \omega_{(2)(3)} & \cdot \\ \cdot & \delta \omega_{(3)(2)} & \cdot & \cdot \\ \delta \omega_{(4)(1)} & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}. \quad (2.11)$$

Переход к таким, каноническим параметрам лоренцева преобразования упрощает тетрадное уравнение Эйнштейна. Действительно, в каждом из случаев (2.11) и (2.12) тензор Римана — Кристоффеля содержит во всех точках только члены с производными:

$$R_{h\mu\nu} = \partial_\mu \gamma_{h\nu} - \partial_\nu \gamma_{h\mu} \quad (2.12)$$

(аналогично чисто тензориальным компонентам $R_{\mu\nu\lambda\sigma}$ в полюсе локально-геодезической системы координат). В силу (2.12) тетрадное уравнение Эйнштейна также упрощается и принимает вид

$$h^{\nu\alpha} \partial_\mu \gamma_{h\nu} - h^{\lambda\alpha} \partial_\lambda \gamma_{h\nu} + h_{\mu h} h^{\sigma s} h^{\lambda r} \partial_\lambda \gamma_{sr} = \kappa T_{\mu h}. \quad (2.13)$$

3. Параметры б. м. лоренцева преобразования в шварцшильдовом поле при различных калибровках тетрад. Пусть в уравнения (1.2) подставлен метрический тензор шварцшильдова поля тяготения. Тогда

$$h_{\mu}^k h_{\nu}^n \eta_{kn} = \text{diag} \left(a^2, r^2, r^2 \sin^2 \vartheta, -\frac{1}{a^2} \right), \quad (3.1)$$

$$a = \left(1 - \frac{2m\kappa}{rc^2} \right)^{-\frac{1}{2}},$$

Дополнив эти 10 уравнений 6 наиболее распространенными калибровочными уравнениями вида (нормальная калибровка тетрад)

$$h_1^{(4)} = h_2^{(4)} = h_2^{(1)} = h_3^{(4)} = h_3^{(1)} = h_3^{(2)} = 0, \quad (3.2)$$

как показано в [4], найдем

$$\begin{aligned} \delta\omega_{(1)(2)} &= \frac{1}{ar} d\vartheta, & \delta\omega_{(1)(3)} &= \frac{1}{ar} d\varphi, \\ \delta\omega_{(2)(3)} &= -\frac{\text{ctg}\vartheta}{r} d\varphi, & \delta\omega_{(4)(1)} &= \frac{2\kappa am}{cr^2} dt. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Подставляя (3.3) в (2.1), (2.2), получим

$$\delta J_1 = \frac{4\kappa am \text{ctg}\vartheta}{cr^3} d\varphi dt; \quad \delta J_2 \neq 0. \quad (3.4)$$

Поскольку в $\delta\omega_{kn}$ содержится произвольное перемещение dx^k , то оба свертка, вообще говоря, отличны от нуля. Следовательно, при нормальной калибровке тетрад преобразование (1.1) четырехпараметрическое, параметры его непросты, и оно содержит как круговое, так и гиперболическое вращение. При этом и гиперболическое вращение и непростота параметров — следствие присутствия гравитирующей массы. В пределе имеем

$$\lim_{m \rightarrow 0} \delta J_1 = 0, \quad \lim_{m \rightarrow 0} \delta\omega_{(4)(1)} = 0,$$

тогда как компоненты $\delta\omega_{ab}$ в пределе остаются отличными от нуля и описывают вращение орторепера, касательного к 3-мерной сферической системе координат.

Заменив (3.2) 6 калибровочными условиями вида

$$\gamma_{km4} = 0 \quad (3.5)$$

(«кулонова» калибровка тетрад) и пользуясь результатами, полученными в [4], найдем, что в этом случае отличны от нуля 5 из параметров $\delta\omega_{km}$ (только $\delta\omega_{(3)(1)} = 0$), они также непросты и зависят от времени.

Перейдем к калибровке тетрад, при которой параметры $\delta\omega_{kn}$ просты. Так, приняв 6 условий

$$h_4^a = h_a^{(4)} = 0, \quad (3.6)$$

согласно [4], придем к 6-параметрическому преобразованию

$$\delta\omega_{(4)(1)} = \frac{ma}{r^2} \sin\vartheta \cos\varphi cdt, \quad \delta\omega_{(4)(2)} = \frac{ma}{r^2} \sin\vartheta \sin\varphi cdt,$$

$$\begin{aligned} \delta\omega_{(4)(3)} &= \frac{ma}{r^2} \cos \vartheta \, cdt, \\ \delta\omega_{(1)(2)} &= \sin \vartheta \frac{a-1}{ar} (\cos \varphi \, d\vartheta - \sin \varphi \, dr), \\ \delta\omega_{(3)(1)} &= \frac{a-1}{ar} (\cos \vartheta \, dr - \sin \vartheta \cos \varphi \, d\varphi), \\ \delta\omega_{(2)(3)} &= \frac{a-1}{ar} (\sin \vartheta \sin \varphi \, d\varphi - \cos \vartheta \, dr). \end{aligned} \quad (3.7)$$

В пределе

$$\lim_{m \rightarrow 0} \delta\omega_{kn} = 0, \quad (3.8)$$

т. е. в пределе орторепер касателен к голономной глобальной псевдодекартовой системе координат.

Подставляя (3.7) в (2.1), (2.2), находим, что при произвольном dx^λ , входящем в $\delta\omega_{kn}$,

$$\delta J_1 = 0, \quad \delta J_2 \neq 0, \quad (3.9)$$

следовательно, параметры (3.7) просты. Легко убедиться, что переход от непростых параметров (3.3) к простым (3.7) достигается выполнением обобщенного лоренцева преобразования вида

$$L_k^n = \begin{pmatrix} \sin \vartheta \cos \varphi & \cos \vartheta \cos \varphi & -\sin \varphi & \cdot \\ \sin \vartheta \sin \varphi & \cos \vartheta \sin \varphi & \cos \varphi & \cdot \\ \cos \vartheta & -\sin \vartheta & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.10)$$

4. Примеры простых и нулевых параметров лоренцева преобразования для других полей. Подставим в (1.2) метрический тензор Тауба [5]:

$$g_{\mu\nu} = \text{diag}(t^{2\sigma_1}, t^{2\sigma_2}, t^{2\sigma_3}, -1); \quad \sigma_i = \text{const}. \quad (4.1)$$

Дополняя при этом 10 уравнений (1.2) 6 условиями (3.2), приходим к трехпараметрическому преобразованию лишь гиперболического вращения

$$\delta\omega_{(1)(4)} = \frac{\sigma_1}{t} dx^1; \quad \delta\omega_{(2)(4)} = \frac{\sigma_2}{t} dx^2; \quad \delta\omega_{(3)(4)} = \frac{\sigma_3}{t} dx^3. \quad (4.2)$$

Из (4.2) и (2.1) — (2.3) следует, что

$$\delta J_1 = 0, \quad \delta J_2 \neq 0,$$

т. е. параметры (4.2) просты.

Подставив в (1.2) метрический тензор Уимена [6]

$$g_{\mu\nu} = \text{diag} \left((x)^4, (x)^4, (x)^4, -\frac{1}{(x)^2} \right) \quad (4.3)$$

и приняв (3.2), также приходим к простым параметрам

$$\delta\omega_{(4)(1)} = \frac{cdt}{(x)^3}, \quad \delta\omega_{(2)(1)} = \frac{2}{(x)^3} dx^2, \quad \delta\omega_{(3)(1)} = \frac{2}{(x)^3} dx^3, \quad (4.4)$$

$$\delta J_1 = 0, \quad \delta J_2 \neq 0. \quad (4.5)$$

Известно [7], что в случае (4.1) и (4.3) гравитационное излучение в смысле критерия Пирани отсутствует.

Перейдем к примерам нулевых параметров. Рассмотрим случай [8]:

$$g_{\mu\nu} = \text{diag} (1, \text{sh}^2(x-t), \text{sin}^2(x-t), -1). \quad (4.6)$$

Тогда при условии (3.2) имеем

$$\delta\omega_{(2)(4)} = \delta\omega_{(1)(2)} = -\text{cth}(x-t) dx^2, \quad (4.7)$$

$$\delta\omega_{(3)(4)} = -\delta\omega_{(3)(1)} = -\text{ctg}(x-t) dx^3.$$

Из (4.7) и (2.1), (2.2) следует, что это нулевые параметры, а из (2.10)— что они образуют совокупности канонических параметров.

Рассмотрим далее метрический тензор Переса [9]:

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 + 2f & \cdot & \cdot & 2f \\ \cdot & 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1 & \cdot \\ 2f & \cdot & \cdot & -(1 - 2f) \end{pmatrix}, \quad f = f(t + x, y, z). \quad (4.8)$$

Для описания с его помощью плоских гравитационных волн Перес привлекает тетрады вида

$$h_{\mu}^k = \begin{pmatrix} 1 + f & \cdot & \cdot & -f \\ \cdot & 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1 & \cdot \\ f & \cdot & \cdot & 1 - f \end{pmatrix}. \quad (4.9)$$

Тогда

$$\delta\omega_{(2)(4)} = -\delta\omega_{(1)(2)} = -\partial_2 f (dx^1 + dx^4), \quad (4.10)$$

$$\delta\omega_{(3)(4)} = \delta\omega_{(3)(1)} = -\partial_3 f (dx^1 + dx^4).$$

С помощью (2.1), (2.2) и (2.10) легко убедиться, что это также нулевые и канонические параметры.

5. Переход к «векторной» параметризации б. м. лоренцева преобразования в гравитационном поле. В СТО параметризация б. м. лоренцева преобразования является тензорной. С переходом к ОТО, как видно из (1.3), параметры $\delta\omega_{kn}$ могут рассматриваться как тензоры лишь в рамках любой, но фиксированной калибровки тетрад. Тогда возможно наряду с «тензорной» введение и другой, «векторной» параметризации. Во-первых, следуя [10, 11] и диадной формулировке ОТО [12], можно перейти к 3-мерным «вектор-параметрам»

$$\delta\omega_{a(4)} = \delta a_a, \quad \delta\omega_{ab} = \eta_{abc} \delta b^c, \quad (5.1)$$

где «вектор-параметры» δa_c и δb_c относятся соответственно к гиперболическому и круговому вращению.

Однако если подбором калибровки тетрад возможен переход к простым параметрам $\delta\omega_{kn}$, то в рамках такой калибровки параметры обладают свойствами простого бивектора, т. е. могут быть представлены в виде антисимметричного произведения двух 4-мерных векторов-делителей

$$\delta\omega_{kn} = \delta p_{[k} f_{n]}. \quad (5.2)$$

Очевидно, в 4-вектор δp_k входит перемещение dx^λ , явно указанное в (1.1). По определению «вектора» делители удовлетворяют условиям [13]

$$\begin{aligned}\delta\omega_{[kn]} \delta p_m] &= \gamma_{[kn|\lambda]} \delta p_m] dx^\lambda = 0, \\ \gamma_{[kn|\lambda]} \dot{f}_m] dx^\lambda &= 0,\end{aligned}\tag{5.3}$$

из которых при известных $\gamma_{kn\lambda}$ и могут быть найдены. Если из 8 компонент двух делителей 2 окажутся зависимыми, то остальные 6 могут быть выбраны параметрами преобразования. Так, например, выбирая для швальцшильдова поля «временную» калибровку тетрад и вводя таким образом простые параметры, получаем возможность перехода к «векторной» параметризации. Это аналогично случаю, когда в СТО тензор-параметр лоренцева преобразования является простым бивектором, а его делители связаны между собою некоторыми двумя уравнениями, например, являются единичными векторами [14].

Исследование делителей б. м. лоренцева преобразования в гравитационном поле представляет самостоятельный интерес. Вопрос о совместности (2.10), (2.11) с другими условиями, дополняющими уравнение Эйнштейна, также требует специального рассмотрения.

Литература

1. Pirani F. A. E. Phys. Rev., 105, 1089, 1957.
2. Sciamia D. W. J. Math. Phys., 2, 472, 1961.
3. Treder H. J. Entstehung, Entwicklung und Perspektiven der Einsteinschen Gravitationstheorie. Berlin, 1966.
4. Иваницкая О. С. Сб. «Гравитация и теория относительности», в. 4—5. Казань, 1968, стр. 202.
5. Taub A. H. Ann. Math. Princeton, 53, 472, 1951.
6. Wumen M. Phys. Rev., 66, 267, 1944.
7. Joseph V. Proc. Cambr. Phys. Soc., 53, 836, 1957.
8. Петров А. З. Новые методы в ОТО. М., 1966.
9. Peres A. Phys. Rev., 118, 1105, 1960; Phys. Rev. Lett., 3, № 12, 1959.
10. Федоров Ф. И. ДАН СССР, 5, 194, 1961.
11. Иваницкая О. С. Сб. «Гравитация и теория относительности», в. 3, 1967.
12. Estabrook F. V., Wahlquist H. D. J. Math. Phys., 5, 1629, 1964.
13. Схоутен Я. А. Тензорный анализ для физиков. М., 1965.
14. Wuk C. V. Nuovo Cimento, 10, 854, 1958.

А. А. КАВАЛЕУ, У. А. ПІЛІПОВІЧ, Ю. В. РАЗВІН

**ЗАЛЕЖНАСЦЬ НЕКАТОРЫХ ПАРАМЕТРАЎ
МОНАІМПУЛЬСАЎ РУБІНАВЫХ АКГ
АД ПАЧАТКОВАГА ПРАПУСКАННЯ ПАСІЎНЫХ ЗАТВОРАЎ**

Для атрымання «гіганцкіх» імпульсаў выпраменьвання АКГ шырока ўжываюцца пасіўныя затворы. Прастата выкарыстання і высокія параметры манаімпульсаў, якія атрымліваюцца з іх дапамогай, неаднаразова падкрэсліваліся ў радзе работ [1—7].

У гэтай рабоце прыводзяцца рэзультаты даследавання залежнасці некаторых параметраў рубінавага АКГ ад пачатковага прапускання затвора.

У [8, 9] праведзен тэарэтычны аналіз работы АКГ з фотатропным затворам. Выкарыстоўваючы колькаснае рашэнне на ЭЦВМ, а таксама прыбліжанае аналітычнае рашэнне скорасных ураўненняў для актыўнага матэрыялу і рэчыва фільтра, аўтары атрымалі асноўныя суадносіны, якія апісваюць дынаміку свячэння АКГ з пасіўным затворам. Для ацэнкі агульнай энергіі манаімпульсу прыводзіцца прыбліжаны выраз у выглядзе рознасці энергіі, якая выдзелілася ў рабочым рэчыве, і энергіі, паглынутай у фільтры. Пры гэтым улічваецца толькі энергія, затрачаная на пераход часцінкі ва ўзбуджаны стан. Аўтары мяркуюць, што паглыннанне пры паўторным пераходзе часцінкі знізу ўверх кампенсуецца вымушаным выпраменьваннем, таму формула ўлічвае толькі аднаразовыя пераходы.

Для затвораў, якія прымяняюцца на практыцы, гэта меркаванне можа не выконвацца, паколькі фільтры, што прасвятляюцца, маюць, як правіла, дастаткова шырокія палосы паглынання і высокія магчымасці перамеркавання часцінак па хістальных падузроўнях ва ўзбуджаным стане. Гэтыя абставіны, а таксама наяўнасць неаптычных пераходаў значна зніжаюць колькасць вымушаных пераходаў у асноўны стан.

Энергія манаімпульсу, які выходзіць з АКГ, з улікам сказанага можа быць запісана ў наступным выглядзе:

$$S_{\text{вых}} = \frac{h\nu}{2} V n_0 \left[(y_0 - y_{\text{min}}) - \frac{l_{\Phi} n_{\Phi}}{l n_0} \frac{\Delta t}{\tau} \right] \frac{k_{\text{стр}}^{\text{кар}}}{k_{\text{стр}}^0}, \quad (1)$$

дзе $h\nu$ — велічыня кванта святла, якое генеруецца; V — аб'ём рабочай часткі актыўнага элемента; n_0 , n_{Φ} — канцэнтрацыя актыўных часцінак у рабочым рэчыве і рэчыве фільтра; y_0 , y_{min} — пачатковая і канечная інверсія ў рабочым рэчыве; Δt — працягласць манаімпульсу; τ — час жыцця ўзбуджанага стану; l — даўжыня рубіна; l_{Φ} — даўжыня фільтра. Множнік $k_{\text{стр}}^{\text{кар}}/k_{\text{стр}}^0$ выражае долю выпраменьвання, якое выходзіць з рэзанатара. Формула (1) адрозніваецца ад аналагічнага выразу, прыведзенага ў [9], другім складаным, якое ўлічвае долю паглынутай у фільтры энергіі. Для фтала-

цыянінаў, у якіх каэфіцыент Эйнштэйна $B_{\Phi} \sim 10^6$, другі член у (1) можна не ўлічваць, паколькі для прапускання фільтраў $T_{\Phi} \sim 0,5 \div 0,01$, якія прымяняюцца на практыцы, пры $l_{\Phi} = 2$ см, гэта велічыня дастаткова малая $\left(\frac{l_{\Phi} n_{\Phi}}{\ln_0} \frac{\Delta t}{\tau} \sim 10^{-3} \div 10^{-2}, \Delta t \approx 20 \text{ нсек}, \tau \sim 10^{-9} \text{ [10, 11]} \right)$. Першы член звычайна змяняецца ў межах 0,1—0,5. Значыць,

$$S_{\text{вых}} = \frac{V n_0}{2} h \nu (y_0 - y_{\min}) \frac{k_{\text{стр}}^{\text{кар}}}{k_{\text{стр}}^0}. \quad (2)$$

У выніку для энергіі монаімпульсу атрымліваецца выраз, характэрны для імгненнага ўключэння дабротнасці [12—14]. На самай справе, уключэнне дабротнасці рэзанатара ў АКГ з пасіўным затворам адбываецца за час, які параўноўваецца з працягласцю монаімпульсу $\Delta t \sim 30$ нсек, у той жа час у [15, 16] паказана, што змяненне часу ўключэння дабротнасці ў межах да 100 нсек не ўплывае на параметры монаімпульсу (энергію, працягласць, магутнасць), г. зн. у гэтых межах выконваюцца ўмовы імгненнага ўключэння. Таму для ацэнкі граніц змянення y_{\min} можна выкарыстаць графік залежнасці паміж y_0/y_{\max} і y_{\min}/y_0 , прыведзены ў [12] для выпадку імгненнага ўключэння. Акрамя таго, у радзе работ [17, 18, 11 і інш.] указваецца, што пры тых шчыльнасцях выпраменьвання, якія характэрны для атрыманых монаімпульсаў ($\sim 1 \text{ Мом}$), адбываецца практычна поўнае прасвятленне фталацыянінавых фільтраў або прынамсі з павелічэннем шчыльнасці святла, якое абпраменьвае фільтр, яго прапусканне расце нязначна. Таму можна лічыць, што значэнне інверсіі ў максімуме монаімпульсу вызначаецца ў асноўным толькі велічынёй страт пры прасветленым фільтры і практычна не залежыць ад пачатковай шчыльнасці выкарыстоўваемага затвора. Пры каэфіцыентах адбіцця люстраў 0,98 і 0,5 і каэфіцыенте шкідных страт у рубіне $\rho = 0,02$ для y_{\max} у гэтым выпадку будзем мець значэнне $\sim 0,09$. Прапусканне фільтра звычайна мяняецца ў межах 0,5—0,1, што адпавядае змяненню пачатковых страт у АКГ у межах 0,07—0,2 (рыс. 3) і адпаведна пачатковай інверсіі ад 0,2 да 0,5. Згодна [12], y_{\min} мяняецца ў межах ад 0,04 да 0. Падзенне y_{\min} да нуля з ростам шчыльнасці фільтра вельмі хуткае. Так, ужо пры $T_{\Phi} = 0,4$ для y_{\min} атрымліваем $\sim 0,02$, а для $T_{\Phi} = 0,3$ $y_{\min} \approx 0$.

Паколькі $k_{\text{стр}}^{\text{кар}}$ — страты на люстрах, а $k_{\text{стр}}^0$ — страты ў АКГ з прасветленым фільтрам, то, згодна з прыведзенымі вышэй меркаваннямі, множнік $k_{\text{стр}}^{\text{кар}}/k_{\text{стр}}^0$ змяняецца нязначна пры змяненні шчыльнасці прасвятляючага фільтра. Такім чынам, з дастатковай ступенню дакладнасці энергія монаімпульсу пры выкарыстанні фталацыянінавых фільтраў лінейна залежыць ад y_0 , а паколькі $y_0 = k_{\text{стр}}/\kappa$, то і ад велічыні страт, якія вызначаюцца паглынанням у непрасветленым фільтры (κ тут — гранічны каэфіцыент узмацнення, для рубіна $\kappa = 0,4$). Пры гэтым мяркуецца, што фільтр да пачатку генерацыі не прасвятляецца.

У [19] прыведзена залежнасьць энергіі монаімпульсу ад шчыльнасці прасвятляючага фільтра, якая адрозніваецца ад лінейнай. Паводле прыведзеных даных, энергія монаімпульсу расце не лінейна з ростам велічыні $\frac{k_{\Phi} l_{\Phi}}{l} = \frac{1}{l} \ln \frac{1}{T_{\Phi}}$, а больш марудна, насычаючыся ў вобласці $T_{\Phi} \approx 0,15$.

Такі ход залежнасці аўтары звязваюць з павелічэннем страт на прасвятленне, а таксама з паглынанням святла малекуламі фталацыяніну ва ўзбуджаным стане. Ніжэй будзе паказана, што такі ход крывой залежнасці энергіі монаімпульсу ад шчыльнасці фільтра звязан з уплывам тарцоў на велічыню страт у АКГ з непрасветленым фільтрам.

У тым выпадку, калі можна не ўлічваць уплыў тарцоў рубіна (у АКГ на рубіне з тарцамі, зрэзанымі пад вуглом Брустэра і выстаўленай пад вуглом Брустэра кюветай з прасвятляючымся фільтрам), страты вызначаюцца па формуле

$$k_{\text{стр}} = \frac{1}{l} \ln \frac{1}{\sqrt{r_1 r_2}} + \frac{1}{l} \ln \frac{1}{T} + \rho + \frac{\rho_{\Phi} l_{\Phi}}{l}, \quad (3)$$

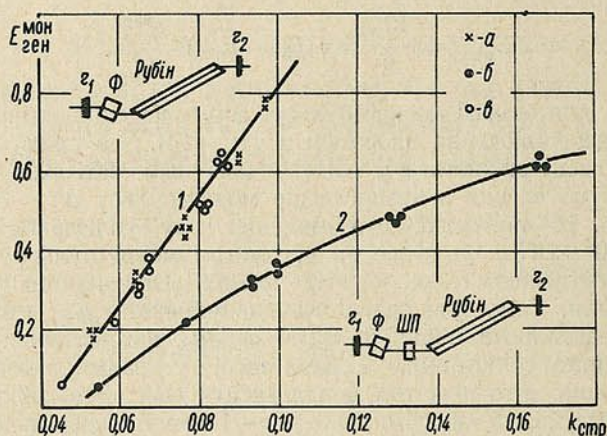


Рис. 1. Залежнасць энергіі монаімпульсу $E_{\text{ген}}^{\text{мон}}$, Дж ад пачатковых страт $k_{\text{стр}}$, см^{-1} у АКГ на рубіне з тарцамі, зрэзанымі пад вуглом Брустэра (r_1 і r_2 — люстэркі рэзанатара, Φ — прасвятляючыся фільтр, ШП — шкляная падложка):

1 і а — без падложкі; 2 і б — з падложкай, без уліку дадатковых адбiciaў; в — з улікам адбiciaў ад падложкі (кропкі крывой 2 зрушваюцца на крывую 1)

дзе $\frac{1}{l} \ln \frac{1}{\sqrt{r_1 r_2}}$ — страты на люстрах; $\frac{1}{l} \ln \frac{1}{T}$ — страты на адзінку даўжыні за кошт паглынання ў фільтры; ρ і $\frac{\rho_{\Phi} l_{\Phi}}{l}$ — страты на рассеянне ў рубіне і фільтры.

У гэтым выпадку страты і, значыць, энергія монаімпульсу лінейна залежаць ад велічыні $k_{\Phi} l_{\Phi}$ (крывая 1 на рис. 1). Ва ўстаноўцы выкарыстоўваўся рубін з вугламі Брустэра $\varnothing 16$ мм і $l=120$ мм, кювета ставілася пад вуглом Брустэра паміж глухім люстрам і рубінам. Таўшчыня паглынаючага слоя была роўнай 2 см. На выхадзе ставілася люстра з дыэлектрычным пакрыццём $r_2=0,55$. Уся сістэма юстыравалася з дапамогай газавога лазера. Рубін ахалоджваўся вадой. Стабілізацыя тэмпературы вады рабілася з дапамогай тэрмастата. У якасці фільтра выкарыстоўваўся раствор фталацыяніну хларыстага галію ў хлорбензоле. Як відаць з графіка, у гэтым выпадку добра праяўляецца лінейны характар залежнасці энергіі монаімпульсу ад шчыльнасці фільтра.

Аналагічныя вымярэнні праведзены на рубіне з нармальнымі тарцамі $\varnothing=16$ мм і $l=120$ мм. Калі цяпер па восі абсцыс пры пабудове графічнай залежнасці адкладаць страты без уліку адбiciaў ад тарцоў, то, як і ў [19], залежнасць энергіі монаімпульсу ад велічыні страт выразіцца крывой з насычэннем у вобласці, адпаведнай $T_{\Phi}=0,1$ (рис. 2, крывая 2).

Гэта звязана з тым, што рэальныя страты ў АКГ з прасвятляючымся фільтрам у выніку адбiciaў на тарцах растуць значна марудней

з ростам шчыльнасці фільтра [20, 26], чым гэта дае формула (3). Графікі рыс. 3 пабудаваны ў выніку параўнання парогавых энергій напампавання для АКГ з фільтрам і без яго. Рост страт у АКГ на рубіне з нармальнымі тарцамі абмежаван велічынёй страт на выхадным люстры і тарцы (0,1068). Далейшае павелічэнне шчыльнасці фільтра не прыводзіць да павелічэння страт і адпаведна парогавай энергіі напампавання.

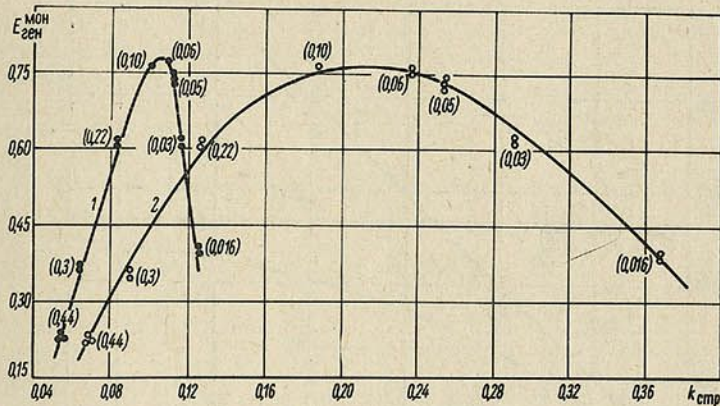


Рис. 2. Залежнась энергіі монаімпульсу $E_{ген}^{мон}$, Дж ад пачатковых страт у АКГ на рубіне з нармальнымі тарцамі:

1 і 2 — адпаведна з улікам і без улікам адбіццяў ад тарцоў рубіна. У дужках указана прасвятляючыяся фільтра

У [20] было паказана, што пры наяўнасці адбіццяў на тарцах рубіна для разліку страт у АКГ з фільтрам, які прасвятляецца, трэба карыстацца формуламі, якія ўлічваюць інтэрферэнцыю шматразова адбіваючыхся пучкоў і даюць максімальныя каэфіцыенты адбіцця [21]. Пры разліку страт указаным спосабам эксперыментальныя пункты добра ўкладваюцца на прамую аж да $T_{\phi}=0,1$, пацвярджаючы тым самым і ў гэтым выпадку лінейны характар залежнасці энергіі монаімпульсу ад $k_{стр}$ (рыс. 2, крывая 1).

Для пацвярджэння ўплыву тарцоў рубіна на характар залежнасці $E_{мон}$ ад шчыльнасці фільтра былі праведзены вымярэнні на рубіне з вугламі Брустэра, калі паміж фільтрам і рубінам змяшчалася юстыраваная шкляная падложка, якая імітуе тарэц рубіна і мае каэфіцыент адбіцця 0,08 (каэфіцыент фрэнелеўскага адбіцця на тарцы рубіна складае 0,076). Для аднаго і таго ж фільтра назіралася рэзкае падзенне энергіі ў параўнанні з энергіяй, атрыманай без дадатковай падложкі (крывая 2 на рыс. 1). Аднак пры разліку страт з улікам адбіццяў ад падложкі эксперыментальныя пункты добра ўзгадняліся з лінейнай залежнасцю энергіі ад $k_{стр}$, атрыманай раней без падложкі.

Такім чынам, у выпадку рубіна з нармальнымі тарцамі адхіленне залежнасці $E_{мон}=f(k_{стр})$ ад лінейнай звязана з уплывам тарцоў на велічыню страт у АКГ. Лінейны характар залежнасці энергіі ад шчыльнасці фільтра захоўваецца аж да $T_{\phi}=0,08$. Пасля $T_{\phi}=0,08$ назіраецца рэзкае падзенне энергіі. Гэта звязана з тым, што пры такіх шчыльнасцях фільтра генерацыя пачынаецца на тарцы і паўпразрыстым люстры і далейшае павелічэнне шчыльнасці фільтра не прыводзіць да павелічэння пачатковых страт і адпаведна пачатковай інверсіі ў рубіне.

Парогавая энергія напампавання пры дасягненні шчыльнасці фільтра, адпавядаючай прапусканню 0,08, застаецца пастаяннай (рыс. 4,

крывая 3). Гэта сведчыць аб тым, што пры $T_{\Phi}=0,08$ генерацыя пачынаецца на тарцы і паўпразрыстым люстры. Такім чынам, у вобласці $T_{\Phi} \approx 0,5 \div 0,08$ і ў вобласці $T_{\Phi} \approx 0,08 \div 0,01$ АКГ працуе ў розных рэжымах.

У вобласці $T_{\Phi}=0,5 \div 0,08$ монаімпульс фарміруецца на абодвух люстрах пры адначасовым прасвятленні фільтра (у літаратуры гэта часам называецца мяккім рэжымам [22]), у той час як у вобласці

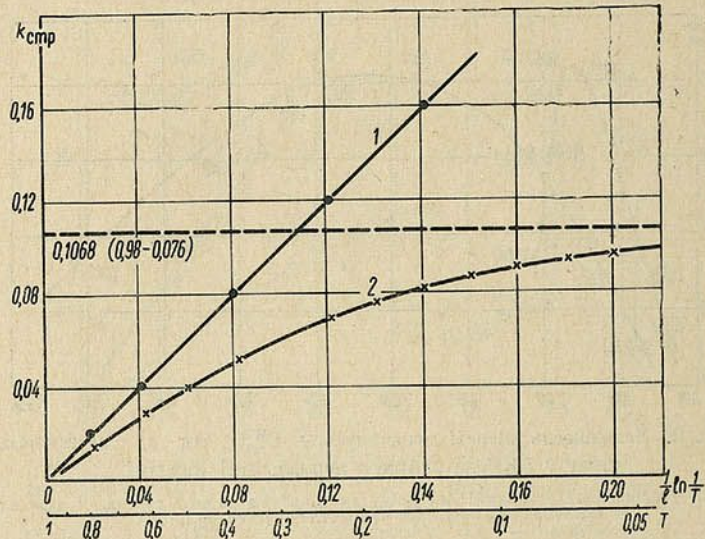


Рис. 3. Залежнасць пачатковых страт у АКГ з паглынальнікам у рэзанатары для рубіна з тарцамі, зрэзанымі пад вуглом Брустэра (1), і нармальнымі тарцамі (2) ад пачатковага прапускання фільтра ($r_1=r_2=0,98$)

$T_{\Phi} \approx 0,08 \div 0,01$ генерацыя спачатку ўзнікае ў выглядзе пічка свабоднай генерацыі, які часткова прасвятляе фільтр. У далейшым пры часткова прасветленым фільтры генерацыя развіваецца ўжо на абодвух люстрах. Гэта прыводзіць да інтэнсіўнага прасвятлення фільтра і ўзнікнення гіганцкага імпульсу (так званы жорсткі рэжым).

Прыведзеныя вынікі былі атрыманы пры тэмпературы рубіна 8°C . На рыс. 4 прыведзены таксама аналагічныя залежнасці, атрыманыя пры тэмпературы 14°C . Вядома, што пры павышэнні тэмпературы адбываецца пашырэнне R_1 -лініі люмінесценцыі рубіна, якое прыводзіць да зніжэння каэфіцыента ўзмацнення [23].

Паколькі

$$k_{узм} = \kappa y = \frac{B_{21}(\nu_r) h \nu_r n_0}{\nu} y,$$

$$B_{21}(\nu_r) = \frac{B_{21}}{\Delta\nu},$$

то

$$k_{узм} = \frac{1}{\Delta\nu} \frac{B_{21} h \nu n_0}{\nu} y, \quad (4)$$

дзе B_{21} — інтэгральны каэфіцыент Эйнштэйна; $B_{21}(\nu_r)$ — каэфіцыент Эйнштэйна на частаце генерацыі; $\Delta\nu$ — шырыня лініі люмінесценцыі рубіна. З (4) вынікае, што з павелічэннем $\Delta\nu$ значэнне каэфіцыента

ўзмацнення падае, значыць, парог генерацыі на тарцы рубіна і на паў-празрыстым люстры ўзрастае. У тым выпадку, калі можна не прымаць пад увагу змяненне каэфіцыента страт у рэзанатары пры змяненні тэмпературы, пачатку генерацыі павінна адпавядаць большае значэнне пачатковай інверснай заселенасці

$$y_0 = \frac{k_{\text{стр}}}{\kappa} = \frac{k_{\text{стр}} \nu}{B_{21} h \nu_r n_0} \Delta \nu,$$

таму максімальнае значэнне энергіі монаімпульсу з павышэннем тэмпературы ўзрастае. З графіка на рыс. 4 відаць, што пры павышэнні тэмпературы з 8 да 14 °С парогавая энергія напампавання ўзрастае з 2700 да 3100 Дж і адпаведна максімальнае значэнне энергіі монаімпульсу павялічылася ад 0,85 да 1,15 Дж.

З прыведзеных графікаў відаць, што пасля максімуму $E_{\text{мон}}$ назіраецца хуткае падзенне энергіі з ростам шчыльнасці фільтра. Гэта тлумачыцца тым, што ў гэтай вобласці (у той час як страты, а значыць, і пачатковая інверсія y_0 застаюцца пастаяннымі) $y_{\text{мін}}$ ўзрастае за лік зніжэння ступені прасвятлення. Пры далейшым змяншэнні энергіі ступень прасвятлення зніжаецца яшчэ больш. Акрамя таго, становіцца ўжо прыкметным уплыў паглынутай фільтрам энергіі монаімпульсу.

Можна было б уявіць, што за максімумам крывой адбываецца звужэнне вобласці генерацыі, аднак фатаграфаванне тарца рубіна пры генерацыі з рознымі фільтрамі не пацвердзіла гэтага. Рубін генеруе амаль з усяго тарца, плошча плямы генерацыі прыблізна застаецца пастаяннай.

Для параўнання аналагічных вымярэнні былі праведзены з крыптацыянінам, разведзеным у этылавым спірце. З літаратуры [10, 11] вядома, што крыптацыянін прасвятляецца горш, чым фталацыянін, паколькі ў яго вышэйшая імавернасць рэлаксацыйных пераходаў у асноўны стан p_{21} (час жыцця ўзбуджанага стану $\tau = 1/p_{21}$ у крыптацыяніну роўны $1,4 \cdot 10^{-10}$ сек, а ў фталацыяніну $\sim 10^{-9}$). Таму, хаця значэнні B_{ϕ} у фталацыяніну хлорыстага галію і крыптацыяніну адрозніваюцца нязначна ($4,6 \cdot 10^6$ у GaCl-фталацыяніну і $4,9 \cdot 10^6$ у крыптацыяніну), энергія монаімпульсу ў крыптацыяніне меншая. З рыс. 4 відаць, што адрозненне

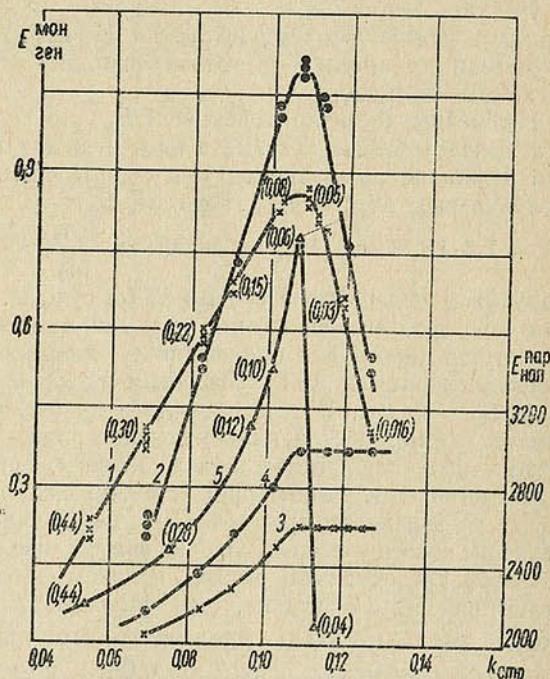


Рис. 4. Залежнась энергіі монаімпульсу $E_{\text{ген}}^{\text{мон}}$, Дж (1, 2, 5) і парогавай энергіі напампавання $E_{\text{нап}}^{\text{пар}}$, Дж, (3, 4) ад пачатковых страт у рэзанатары АКГ для розных тэмператур (1, 3—8 °С, 2, 4—14 °С). У якасці прасвятляючага фільтра ўжываўся фталацыянін хлорыстага галію ў хлорбензоле (1—4) і крыптацыянін у спірце (5). У дужках укажана прапусканне прасвятляючага фільтра

залежнасці энергіі монаімпульсу ад шчыльнасці фільтра для крыптацыяніну ад лінейнай звязана з няпоўным прасвятленнем крыптацыяніну. У гэтым выпадку велічыня y_{\min} , якая вызначаецца стратамі на люстрах і стратамі ў поўнасцю прасветленым фільтры, змяняецца ў шырокіх межах. Спачатку рост энергіі параўнаўча марудны, аднак, далей, калі шчыльнасць энергіі ў монаімпульсе ўзрастае, ступень прасвятлення павялічваецца і адпаведна павялічваецца скорасць росту энергіі. Як відаць з рысунка, пасля дасягнення максімуму энергія падае практычна да нуля. Гэта азначае, што ў жорсткім рэжыме монаімпульс наогул не ўзнікае. Адрозна ж пасля максімуму назіраюцца пікі свабоднай генерацыі. Відавочна, прасвятлення фільтра, якое выклікаецца пічком свабоднай генерацыі, у гэтым выпадку недастаткова, каб развіўся «гіганцкі» імпульс.

Нелінейны характар залежнасці $E_{\text{мон}}$ ад T_{Φ} у пачатку крывой для гэтага выпадку звязан таксама з тым, што для крыптацыяніну ў выразе (1) ужо нельга не прымаць пад увагу другі член, які па велічыні становіцца параўнальным з $(y_0 - y_{\min})$. Паколькі $B_{\Phi} \sim 10^6$, $n_{\Phi} \sim 10^{15}$, $\Delta t \sim 20 \cdot 10^{-9}$ сек, а $\tau \sim 1,4 \cdot 10^{-10}$ сек [11], то велічыня $\frac{l_{\Phi} n_{\Phi} \Delta t}{l n_0 \tau} \sim (10^{-1} \div 10^{-2})$, што па па-

радку ўжо аднолькава з велічынёй $(y_0 - y_{\min})$. Для пацвярджэння выказанага былі зроблены вымярэнні ступені прасвятлення, а таксама велічыні паглынутай энергіі для фталацыяніну хлорыстага галію і крыптацыяніну. Выпраменьванне ад АКГ з пасіўным затворам з хлорыстага галію (монаімпульс $S \sim 0,2$ дж, $W \sim 20$ Мвт/см²) накіроўвалася на кювету з даследуемым растворам. Частка выпраменьвання, якая адводзілася шклянымі пласцінкамі, што стаялі перад і пасля кюветы, пасылалася на ФЭУ1 і ФЭУ2. З дапамогай электрычнай лініі затрымкі сігналы, якія здымалі з ФЭУ1 і ФЭУ2, на экране асцылографа С1-7 раздзяляліся. Пры запоўненай растваральнікам кювецце сігналы ўраўноўваліся, пасля чаго кювета запаўнялася растворам даследуемага рэчыва. Шляхам параўнання асцылаграм многіх вымярэнняў было атрымана, што фталацыянін хлорыстага галію прасвятляецца амаль поўнасцю (пры пачатковым прапусканні фільтра $T_{\Phi}^0 = 0,06$ назіралася прасвятленне да $T_{\Phi} = 0,96$ і пры $T_{\Phi}^0 = 0,20$ да $T_{\Phi} = 0,97$), у той час як у крыптацыяніну такога прасвятлення не назіралася (пры $T_{\Phi}^0 = 0,06$ прапусканне павялічвалася да $T_{\Phi} = 0,48$ і пры $T_{\Phi}^0 = 0,15$ да $T_{\Phi} = 0,75$). Адначасова са змяненнем прапускання балометрам фіксавалася доля паглынутай энергіі. Пры замене ў кювецце растваральніка растворам фталацыяніну хлорыстага галію прыкметнага змяншэння энергіі не назіралася, у той час як у крыптацыяніну гэта змяншэнне было значным. Фільтр з крыптацыянінам і з пачатковым прапусканнем $T_{\Phi}^0 = 0,15$ паглынае каля 50% энергіі абпраменьваючага монаімпульсу, а фільтр з $T_{\Phi}^0 = 0,06$ — больш як 60%, што адпавядае даным, прыведзеным у [24].

Такім чынам, няпоўнае прасвятленне крыптацыяніну, а таксама вялікая доля паглынаемай энергіі монаімпульсу прыводзяць да таго, што залежнасць энергіі ад шчыльнасці фільтра ў крыптацыяніну істотна адрозніваецца ад падобнай залежнасці ў фталацыяніну хлорыстага галію.

Разам з даследаваннямі залежнасці энергіі монаімпульсу ад шчыльнасці прасвятляючага фільтра вызначалася аналагічная залежнасць працягласці монаімпульсу Δt . Паводле [12, 13], з ростам шчыльнасці фільтра Δt скарачаецца. Для ілюстрацыі намі былі зроблены вымярэнні працягласці монаімпульсу з выкарыстаннем у якасці прасвятляючага фільтра AlCl-фталацыяніну ў пірыдыне пры розных значэннях пачатковага прапускання. Вымярэнні праводзіліся на рубіне $l = 120$ мм, $\Phi = 16$ мм. У табліцы, акрамя працягласці монаімпульсаў, прыведзены

парогавыя энергіі напампавання і велічыня пікавай магутнасці W у адносных адзінках.

З табліцы відаць, што ў месцы малых прапусканняў фільтра ($T_{\Phi} < 0,4$) працягласць монаімпульсаў мяняецца параўнаўча мала, набліжаючыся да мінімальнага значэння (~ 18 нсек). Значнае павелічэнне паўшырыні монаімпульсу назіраецца ў вобласці вялікіх прапусканняў фільтраў. Пры $T_{\Phi} \sim 0,8 \div 0,9$ працягласць монаімпульсу параўнальная ўжо з працягласцю пічка свабоднай генерацыі.

Табліца

Залежнась параметраў монаімпульсаў ад пачатковага прапускання фільтра і каэфіцыентаў адбіцця люстраў

r_1	r_2	$\frac{1}{l} \ln \frac{1}{\sqrt{r_1 r_2}}$	T_{Φ}^0	$E_{\text{нап}}^{\text{пар}}$ дж	Δt , нсек	W
0,98	0,52	0,0152	0,17	2450	24	1100
0,98	0,52	0,0152	0,48	2300	34—36	200
0,98	0,52	0,0152	0,66	1900	45	100
0,98	0,52	0,0152	0,80	1760	90	16
0,08	0,08	0,1090	0,17	3800	18	100
0,08	0,08	0,1090	0,48	3400	27	35
0,08	0,08	0,1090	0,66	3000	45	16
0,08	0,08	0,1090	0,80	2769	90	2,7
0,98	0,52	0,0152	1,00	2350	300—500	1

Для параўнання эксперыментальных даных з тэорыяй зручна выкарыстаць работу [12], дзе зроблен разлік параметраў монаімпульсу для выпадку імгненнага ўключэння дабротнасці. Такое параўнанне тэорыі і эксперымента выканана ў [25] для АКГ з фотатропным затворам на неадыме. Выкананне аналагічнай работы для АКГ з фотатропным затворам на рубіне звязана з цяжкасцямі з-за высокай неаднароднасці рубіна ў параўнанні з неадымам. Наяўнасць у рубіне неаднароднасцей упывае на велічыню адносін y_0/y_{min} , якія вызначаюць, як гэта паказана ў [12], працягласць монаімпульсу, а таксама на велічыню часу жыцця фатона ў рэзанатары. У гэтай рабоце для вызначэння адносін y_0/y_{min} выкарыстоўваецца тая акалічнасць, што ў пачатку і ў максімуме генерацыі $dU/dt = 0$ і, значыць,

$$k_{\text{узм}} = k_{\text{стр}} \quad (5)$$

дзе ў $k_{\text{стр}}$ уключаюцца не толькі страты на люстрах і ў фільтры, але і страты, якія ўзнікаюць за лік рассеяння на неаднароднасцях рубіна. Такім чынам, для y_0 і y_{min} маем

$$\begin{aligned} x y_0 &= k_{\text{стр}}^{\Phi} + \rho, \\ x y_{\text{max}} &= k_{\text{стр}}^0 + \rho, \end{aligned} \quad (6)$$

дзе ρ — каэфіцыент шкодных страт у рабочым рэчыве. Значэнні $k_{\text{стр}}^{\Phi}$ і $k_{\text{стр}}^0$ разлічваюцца з улікам адбіццяў ад тарцоў рубіна па формулах, якія ўлічваюць інтэрферэнцыю шматрадова адбіваючыхся пучкоў святла [20, 21]. Пры гэтым, як і вышэй, лічыцца, што ў максімуме генерацыі фільтр прасвятляецца поўнасцю, і таму пры вылічэнні $k_{\text{стр}}^0$ трэба $T_{\Phi} = 1$. Паколькі фільтр з'яўляецца дастаткова аднароднай вадкасцю, то можна лічыць, што каэфіцыент шкодных страт у фільтры ρ_{Φ} абумоўлен толькі рэлееўскім рассеяннем на флуктуацыях шчыльнасці, і, значыць, велічыню $\rho_{\Phi} \frac{l_{\Phi}}{l}$ можна не браць пад увагу ў параўнанні з $k_{\text{стр}}^0$. З (6) для y_0/y_{max} атрымліваем

$$\frac{y_0}{y_{\text{max}}} = \frac{k_{\text{стр}}^{\Phi} + \rho}{k_{\text{стр}}^0 + \rho} \quad (7)$$

Пры разліку часу жыцця фатона ў рэзанатары T з улікам каэфіцыента шкодных страт ρ можна выкарыстаць тое, што павелічэнне страт за кошт ρ эквівалентна павелічэнню празрыстасці люстраў рэзанатара. Тады эфектыўны каэфіцыент адбіцця вызначаецца з роўнасці

$$k_{\text{стр}}^0 + \rho = \frac{1}{l} \ln \frac{1}{V R_1^{\text{эф}} R_2^{\text{эф}}} \quad (8)$$

Час жыцця фатона ў рэзанатары, утвораным плоскімі люстрамі з каэфіцыентамі адбіцця r_1, r_2 , можна паказаць у выглядзе

$$T = \frac{T_1}{-\frac{1}{2} \ln r_1 r_2} \quad (9)$$

Расклаўшы назоўнік у рад і паставіўшы з (8) значэнні $R_1^{\text{эф}}$ і $R_2^{\text{эф}}$, для T атрымаем выраз

$$T = t_1 \frac{(1 + R_1^{\text{эф}})(1 + R_2^{\text{эф}})}{2(1 - R_1^{\text{эф}} R_2^{\text{эф}})}, \quad (10)$$

дзе $t_1 = \frac{L + ln}{c}$ — час аднаго праходжання

фатона ў рэзанатары (тут L — даўжыня паветранага прамежку паміж люстэрамі, l — даўжыня рубіна, n — паказчык праламлення, c — скорасць святла).

На рыс. 5 даецца параўнанне тэарэтычнай залежнасці працягласці монаімпульсаў і залежнасці, якая назіраецца пры эксперыменце. Па восі абсцыс адкладзены значэнні $\ln \frac{y_0}{y_{\text{max}}}$, вылічаныя па (7), па восі ардынат — працягласць монаімпульсаў у адзінках часу жыцця фатона ў рэзанатары. Пры

Рыс. 5. Залежнасць працягласці монаімпульсаў ад адносін y_0/y_{max} : а — пры $r_1=0,98, r_2=0,52$; б — $r_1=r_2=0,08$. Суцэльная крывая — тэарэтычны разлік

разліку бралася значэнне $\rho = 0,02$, якое вызначалася эксперыментальна. Суцэльнай крывой прыведзена тэарэтычная залежнасць, пабудаваная згодна з таблічнымі данымі [12].

Як відаць з рысунка, існуе адпаведнасць тэарэтычнай і эксперыментальнай залежнасці. Невялікае разыходжанне назіралася толькі ў тым выпадку, калі выкарыстоўваліся люстры з каэфіцыентамі адбіцця $r_1 = 0,98, r_2 = 0,52$. Завышэнне эксперыментальных значэнняў працягласці ў гэтым выпадку, відаць, звязана з папярочным развіццём генерацыі.

Літаратура

1. Kafalas P., Masters J. I., Murray E. M. E. J. Appl. Phys., 35, 2349, 1964.
2. Sorokin P. P., Luzzi J. J., Laukard J. K., Pettit G. D. IBMJ., 8, 182, 1964.
3. Гаврилов В. Н., Грязнов Ю. М., Лебедев О. Л., Частов А. А. ЖЭТФ, 48, 2, 1965.
4. Soifer B. H., Hoskins R. H. Nature, 204, 4955, 1964.
5. Röss D. Z. Naturforschung, 20a, 696, 1965.
6. Bret G., Gires F. Appl. Phys. Letters, 4, 175, 1964.
7. Schäfer Fritz P., Schmidt Werner. Z. Naturforschung, 19a, 1019, 1964.

8. Szabo A., Stein R. A. J. Appl. Phys., **36**, 1562, 1965.
9. Самсон А. М., Драбович К. Н., Савва В. А. ЖПС, **5**, 442, 1966.
10. Armstrong J. A. J. Appl. Phys., **36**, 2, 1965.
11. Arechi F. T., Degiorgio V., Sona A. Nuovo Cimento, **38**, 1096, 1965.
12. Wagner W. G., Lenguel B. A. J. Appl. Phys., **34**, 2040, 1963.
13. Самсон А. М., Савва В. А. ДАН БССР, **9**, 22, 1965.
14. Самсон А. М. Весті АН БССР, сер. фіз.-мат. навук, **4**, 33, 1965.
15. Балашов И. Ф., Березин Б. Г., Ермаков Б. А., Конышев В. В. ЖПС, **7**, № 3, 1967.
16. Самсон А. М., Савва В. А. ДАН БССР, **9**, 22, 1965.
17. Довгер Л. С., Ермаков Б. А., Луконин А. В., Шкловер Л. П. Опт. и спектр., **20**, 903, 1966.
18. Degiorgio N., Potenza G. Nuovo Cimento, **41**, 254, 1966.
19. Грязнов Ю. М., Лебедев О. Л., Частов А. А. Опт. и спектр., **20**, 503, 1966.
20. Ковалев А. А., Пилипович В. А., Развин Ю. В. ЖПС, **7**, 940, 1967.
21. Петров Н. С., Бойко Б. Б. ЖПС, **2**, 84, 1965.
22. Борович Б. Л., Зуев В. С., Щеглов Б. А. ЖЭТФ, **49**, 1031, 1965.
23. Методы расчета оптических квантовых генераторов. Под ред. Б. И. Степанова. Изд. «Наука и техника», Минск, 1966.
24. Ведута А. П., Леонтович А. М., Попова М. И. ЖПС, **6**, 401, 1967.
25. Малышев В. И., Маркин А. Л. ЖЭТФ, **50**, 1458, 1966.
26. Бойко Б. Б., Петров Н. С., Валявко В. В., Вашкевич И. М. ЖПС, **6**, 36, 1967.

*Институт физики
АН БССР*

*Поступило в редакцию
8.1 1968*

И. Л. КАЦЕВ, А. П. ИВАНОВ

ОТРАЖЕНИЕ СВЕТОГО ИМПУЛЬСА ОТ ПРЕДМЕТА В РАССЕИВАЮЩЕЙ СРЕДЕ

Вопросы дальности видимости и световой локации в атмосфере и море являются крайне актуальными. До последнего времени они решались с использованием естественных или искусственных источников света непрерывного действия. С появлением импульсных источников радиации, имеющих малую световую «дымку назад», возможности наблюдения предметов на больших расстояниях резко возросли.

С математической точки зрения поставленная задача сводится к решению нестационарного уравнения переноса в рассеивающей среде, содержащей посторонний предмет. Решение уравнения переноса в таком случае крайне затруднительно. Однако в ряде ситуаций, когда среда не является сильно мутной, можно ограничиться рассмотрением только однократного рассеяния.

В данной работе в приближении однократного рассеяния для достаточно общей геометрической схемы изучается вопрос о видимости удаленных объектов при использовании импульсного источника света.

Схема расчета. Пусть источник света, расположенный в точке O (рис. 1), освещает однородную рассеивающую среду в пределах секторного объема, характеризуемого углами $2\Delta\alpha$ и $2\Delta\theta$ (угол $\Delta\theta$ на рисунке не показан), и имеет постоянную в пределах угла излучения яркость $B_0(u)$. Угол $\Delta\theta$ (в плоскости, перпендикулярной плоскости рисунка) невелик, так что $\sin \Delta\theta \approx \Delta\theta$; безразмерное время $u = \epsilon ct$ (ϵ — показатель ослабления, c — скорость света в среде, t — время). В точке A , на оптическом расстоянии τ_r от источника, находится приемник, поле зрения которого определяется углами $2\Delta\beta$ и $2\Delta\theta$. Углы между перпендикуляром к линии OA и оптическими осями источника и приемника равны соответственно α_0 и β_0 .

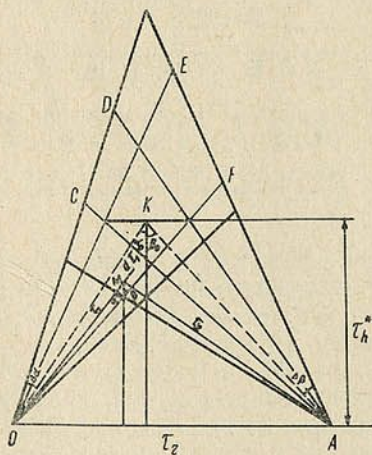


Рис. 1. Геометрическая схема

Рассмотрим в однократном приближении освещенность на приемнике A , создаваемую излучением, рассеянным средой.

Поток, исходящий из источника под некоторым углом α в пределах $d\alpha d\theta$, равен

$$\Delta S B_0(u) \cos(\alpha - \alpha_0) d\alpha d\theta,$$

а рассеянный элементарным объемом, находящимся в точке M на расстоянии τ_1 от источника, будет

$$\Delta SB_0 (u - \tau_1) \cos(\alpha - \alpha_0) d\alpha d\Theta e^{-\tau_1} \Lambda d\tau_1. \quad (1)$$

Здесь ΔS — площадь источника, Λ — вероятность выживания фотона. Очевидно, из всего этого рассеянного света на единичную площадку приемника A упадет поток

$$\begin{aligned} &\varepsilon^2 \Delta SB_0 (u - \tau_1 - \tau_2) \cos(\alpha - \alpha_0) d\alpha d\Theta e^{-\tau_1} \Lambda d\tau_1 \times \\ &\times \frac{x(\pi - \alpha - \beta)}{4\pi} \frac{e^{-\tau_2}}{\tau_2^2} \cos(\beta - \beta_0), \end{aligned} \quad (2)$$

где $x(\pi - \alpha - \beta)$ — индикатриса рассеяния элементарного объема.

Из простых геометрических соображений находим

$$\tau_1 = \frac{\tau_r \cos \beta}{\sin(\alpha + \beta)}, \quad \tau_2 = \frac{\tau_r \cos \alpha}{\sin(\alpha + \beta)}. \quad (3)$$

Отсюда следует, что

$$d\tau_1 = -\frac{\tau_r \cos \alpha}{\sin^2(\alpha + \beta)} d\beta.$$

Чтобы найти полный поток, регистрируемый приемником A единичной площади, проинтегрируем выражение (2) по всем углам излучения и приема

$$\begin{aligned} E_A(u) = &\frac{\varepsilon^2 \Delta S \Lambda \Delta \Theta}{2\pi} \int_{(2\Delta\alpha)} \cos(\alpha - \alpha_0) d\alpha \int_{(2\Delta\beta)} \frac{x(\pi - \alpha - \beta)}{\tau_r \cos \alpha} \times \\ &\times e^{-\tau_r \frac{\cos \alpha + \cos \beta}{\sin(\alpha + \beta)}} \cos(\beta - \beta_0) B_0 \left(u - \tau_r \frac{\cos \alpha + \cos \beta}{\sin(\alpha + \beta)} \right) d\beta. \end{aligned} \quad (4)$$

Если в формуле (4) положить $\alpha_0 = \beta_0 = 0$ (оси источника и приемника параллельны), $\Delta\alpha = \Delta\beta$ и $\sin \Delta\alpha \approx \Delta\alpha$, то она переходит в соответствующее выражение, полученное в [1, 2].

Пусть на оптическом расстоянии τ_h^* от линии OA расположен предмет K прямоугольной формы со сторонами d (в плоскости рисунка) и a (в перпендикулярной плоскости), отражающий по закону Ламберта с коэффициентом отражения R .

Найдем отраженный от объекта поток, регистрируемый приемником A . Поскольку освещенность предмета равна

$$\frac{\varepsilon^2 \Delta SB_0 \left(u - \frac{\tau_h^*}{\cos \alpha} \right) \cos(\alpha - \alpha_0)}{(\tau_h^*)^2} e^{-\frac{\tau_h^*}{\cos \alpha}} \cos^3 \alpha, \quad (5)$$

то, очевидно, его яркость будет

$$B = \frac{\varepsilon^2 \Delta SB_0 \left(u - \frac{\tau_h^*}{\cos \alpha} \right) \cos(\alpha - \alpha_0)}{\pi (\tau_h^*)^2} e^{-\frac{\tau_h^*}{\cos \alpha}} R \cos^3 \alpha. \quad (6)$$

На основании (6) получим для искомой освещенности $E_A^{np}(u)$, создаваемой в точке A отраженным от предмета излучением, следующее выражение:

$$E_A^{np}(u) = \frac{\varepsilon^2 \Delta SR}{\pi (\tau_h^*)^2} \int_{(\theta)} d\Theta \int_{(\beta)} \cos(\alpha - \alpha_0) \cos(\beta - \beta_0) \cos^3 \alpha \times \\ \times e^{-\tau_h^* \left(\frac{1}{\cos \alpha} + \frac{1}{\cos \beta} \right)} B_0 \left[u - \tau_h^* \left(\frac{1}{\cos \alpha} + \frac{1}{\cos \beta} \right) \right] d\beta. \quad (7)$$

Здесь углы α и β связаны между собой равенством

$$\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta = \frac{\tau_r}{\tau_h^*},$$

а пределы интегрирования определяются соотношением размеров предмета и апертурных углов излучателя и приемника.

При наличии объекта следует также несколько изменить выражение (4). Действительно, из рис. 1 видно, что часть рассеивающего объема в секторе EOF , расположенная за предметом, не освещается источником, а из части объема в секторе CAD рассеянное излучение не попадает на приемник.

Рассмотрим один из практически важных случаев, когда $\sin \alpha = \sin \beta = \sin \Theta \approx \alpha = \beta = \Theta$, т. е. апертурные углы излучателя и приемника одинаковы и малы, и $\tau_r \ll \tau_h^*$. Кроме того, для простоты считаем, что предмет имеет форму квадрата ($d = a$) и расположен симметрично относительно излучателя и приемника ($\alpha_0 = \beta_0$, оси источника и приемника проходят через центр предмета). Тогда, очевидно, $x(\pi - \alpha - \beta) \approx x(\pi)$ и выражение для суммарной освещенности на приемнике имеет вид

$$E_A(u) = \frac{\varepsilon^2 \Delta S \Lambda \Delta \Theta}{2\pi} x(\pi) \int_{\alpha_0 - \Delta\alpha}^{\alpha_0 + \Delta\alpha} d\alpha \int_{\alpha_0 - \Delta\alpha}^{\alpha_0 + \Delta\alpha} f_1 d\beta - \\ - \frac{\varepsilon^2 \Delta S \Lambda \Delta \Theta}{2\pi} x(\pi) \eta \left[2 \int_{\alpha_0 - \Delta\alpha}^{\zeta_1} d\alpha \int_{\zeta_1}^{\zeta_2} f_1 d\beta + \sigma(u) \int_{\zeta_1}^{\zeta_2} d\alpha \int_{\zeta_1}^{\zeta_2} f_1 d\beta \right] + \\ + \frac{\varepsilon^2 \Delta S}{(\tau_h^*)^2} \cdot 4 R \eta^2 e^{-2\tau_h^*} B_0(u - 2\tau_h^*), \quad (8)$$

где

$$f_1 = \frac{e^{-\frac{2\tau_r}{\alpha + \beta}}}{\tau_r} B_0 \left(u - \frac{2\tau_r}{\alpha + \beta} \right); \\ \eta = \min \left\{ \Delta\Theta; \frac{\varepsilon d}{2\tau_h^*} \right\}; \quad \zeta_1 = \max \left\{ \alpha_0 - \Delta\alpha; \alpha_0 - \frac{\varepsilon d}{2\tau_h^*} \right\}; \\ \zeta_2 = \min \left\{ \alpha_0 + \Delta\alpha; \alpha_0 + \frac{\varepsilon d}{2\tau_h^*} \right\}; \quad \sigma(u) = \begin{cases} 0 & \text{при } u < 2\tau_h^* \\ 1 & \text{при } u \geq 2\tau_h^* \end{cases}.$$

В формуле (8) первый член соответствует выражению (4), второй учитывает экранировку части рассеивающего объема предметом, а третий описывает вклад излучения, отраженного объектом.

При заданных параметрах среды и геометрии опыта формула (8) может быть использована для численных расчетов.

Обсуждение результатов. На рис. 2 в качестве иллюстрации показана форма принимаемого сигнала $E_A(u)$. В данном случае угол $\Delta\alpha = \Delta\beta = \Delta\theta = 10'$ (примерная расходимость лазерного луча), $\tau_H^* = 3,3$, $\tau_r = 0,013$, $\epsilon d = 0,006$, диффузный коэффициент отражения предмета $R = 0,5$. Исходный импульс задавался в виде $B_0(u) = ue^{-\gamma u}$, где параметр γ определяет его длительность. При взятом на рис. 2, а значении $\gamma = 20$ длительность сигнала на уровне 0,5 от амплитуды $\Delta u_0 \approx 0,13$ (для атмосферной дымки с показателем ослабления $\epsilon = 0,003 \text{ м}^{-1}$, это

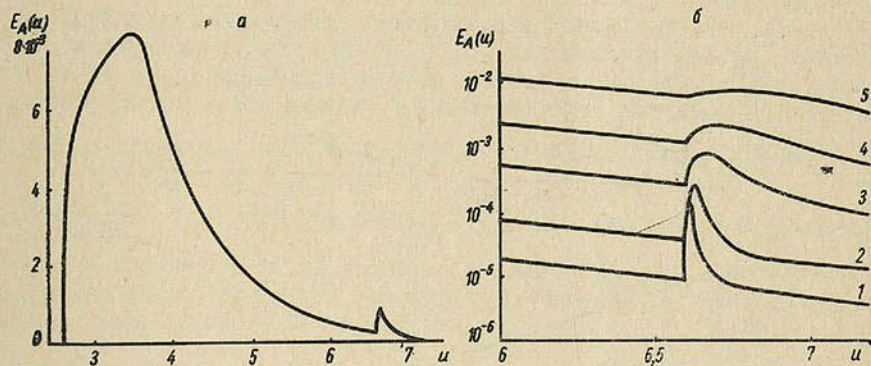


Рис. 2. Зависимость освещенности, регистрируемой приемником в точке А, от времени u при $\Delta\alpha = \Delta\beta = \Delta\theta = 0,003$, $\tau_r = 0,013$, $\tau_H^* = 3,3$, $\epsilon d = 0,006$, $R = 0,5$:

а — $\gamma = 20$; б — $\gamma = 100$ (1), 50 (2), 20 (3), 10 (4), 5 (5)

соответствует $\Delta t \approx 144 \text{ нсек}$, для воды с $\epsilon = 0,2 \text{ м}^{-1}$ $\Delta t \approx 3 \text{ нсек}$). Аналогичные зависимости при различных значениях γ даны на рис. 2, б. Первый максимум (на рис. 2, б не показан) обусловлен диффузным отражением импульса от среды. Его положение, амплитуда и длительность «всплеска» определяются геометрией опыта и исходным импульсом. Можно показать, что при увеличении базы τ_r или длительности импульса Δu_0 максимум диффузно отраженного света смещается в сторону больших значений u , а полуширина «всплеска» увеличивается. Амплитуда максимума в первом случае убывает, а во втором возрастает. Второй «всплеск» обусловлен отражением от предмета, и его полуширина практически полностью определяется длительностью исходного импульса Δu_0 .

Очевидно, что чем больше величина «всплеска», обусловленного отражением от предмета, по сравнению с фоном, создаваемым рассеянным средой излучением, тем легче и надежнее может быть обнаружен предмет. Поэтому для оценки видимости объекта введем в рассмотрение величину N отношения сигнал/шум, под которой будем понимать отношение $E_A(u)$ во втором максимуме к минимальному значению $E_A(u)$ вблизи этого максимума (рис. 2).

Различные приемные устройства характеризуются разными минимальными значениями N , при которых еще может быть зафиксировано наличие объекта, и, следовательно, обладают разной предельной глубиной обнаружения. В связи с этим важно изучить влияние длительности импульса и геометрии опыта на величину отношения сигнал/шум.

На рис. 3, а представлена зависимость N от параметра γ . Из рисунка видно, что в большом диапазоне изменения γ зависимость $N(\gamma)$ линейная.

Так как длительность исходного импульса Δu_0 приблизительно $\sim \frac{1}{\gamma}$, то

можно считать, что отношение сигнал/шум $N \sim \frac{1}{\Delta u_0}$. Только при большой длительности сигнала Δu_0 (γ мало) характер этой зависимости изменяется.

Проанализируем показанную на рис. 3, б зависимость отношения сигнал/шум от расстояния τ_r между источником и приемником. Обычно считается, что увеличение базы τ_r является одним из способов существенного улучшения условий наблюдения удаленных объектов в рассеи-

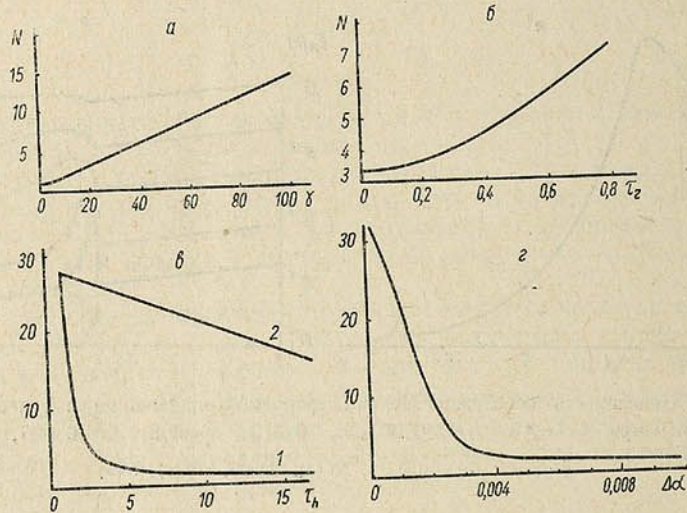


Рис. 3. Зависимость отношения сигнал/шум от параметров геометрической схемы и длительности импульса:

$a - \Delta\alpha = 0,003$, $\tau_h^* = 3,3$, $\tau_r = 0,013$, $\varepsilon d = 0,006$; $б - \Delta\alpha = 0,003$, $\tau_h^* = 3,3$, $\varepsilon d = 0,006$, $\gamma = 20$; $в - \Delta\alpha = 0,003$, $\tau_r = 0,013$, $\gamma = 20$, $\varepsilon d = 0,006$ (1) и ∞ (2); $г - \tau_h^* = 3,3$, $\tau_r = 0,013$, $\varepsilon d = 0,006$, $\gamma = 20$

вающей среде. Однако, как видно из рисунка, при достаточно короткой длительности импульса значительное возрастание N при удалении приемника от источника имеет место только при сравнительно больших базах τ_r . Если же $\tau_r \ll \tau_h^*$, то эта зависимость слабая и рост базы не приводит к заметному улучшению видимости объекта.

Естественно ожидать, что при увеличении размеров предмета отношение сигнал/шум будет расти. Расчет по формуле (8) показывает, что такая зависимость действительно имеет место, причем оказывается, что величина $N-1$ прямо пропорциональна квадрату отношения видимого углового размера предмета $\varepsilon d / \tau_h^*$ к постоянному углу излучателя $2\Delta\alpha = 2\Delta\beta$. Это означает, что до тех пор, пока весь предмет освещается источником света, т. е. $\varepsilon d / \tau_h^* \leq 2\Delta\alpha$, величина $N-1$ прямо пропорциональна отношению площади объекта к площади поперечного сечения пучка.

Рис. 3, в иллюстрирует падение отношения сигнал/шум при увеличении расстояния τ_h^* до предмета. Кривая 1 соответствует случаю, когда предмет имеет небольшие размеры и перекрывает весь пучок только при $\tau_h^* \leq 1$. Как видно из рисунка, при такой геометрии опыта зависимость $N(\tau_h^*)$ весьма резкая. Можно показать, что она обусловлена в основном уменьшением видимого углового размера предмета. Кривая 2 относится к случаю, когда предмет имеет достаточно большие размеры и при всех рассматриваемых значениях τ_h^* перекрывает весь пучок. В этом варианте зависимость $N(\tau_h^*)$

значительно более слабая. Этот факт согласуется с результатом, полученным в [3], где на основании рассмотрения одномерной модели было показано, что в довольно большом диапазоне изменения τ_h^* , когда роль многократного рассеяния сравнительно невелика, отношение сигнал/шум практически не зависит от удаленности объекта.

На рис. 3, *г* представлена зависимость величины N от угла $\Delta\alpha = \Delta\beta$. При увеличении $\Delta\alpha$ отношение сигнал/шум падает. При этом наряду с уменьшением доли пучка, перекрываемой предметом, влияние которого показано на рис. 3, *в*, сказывается также дополнительное увеличение рассеивающего объема, повышающее уровень шума.

В заключение остановимся на одном любопытном явлении, которое может иметь место при определенных параметрах геометрической схемы. Оно заключается в возникновении дополнительного максимума освещенности $E_A(u)$ на приемнике. Пусть предмет имеет форму прямоугольника и $\frac{\varepsilon a}{2\tau_h^*} > \Delta\alpha > \frac{\varepsilon d}{2\tau_h^*}$. Если при этом $\Delta\alpha < 3 \frac{\varepsilon d}{2\tau_h^*}$, то имеется слой рассеивающей среды за предметом, который вообще не вносит вклад в поток, регистрируемый приемником. Нетрудно показать, что оптические глубины τ_h для указанного слоя удовлетворяют условию

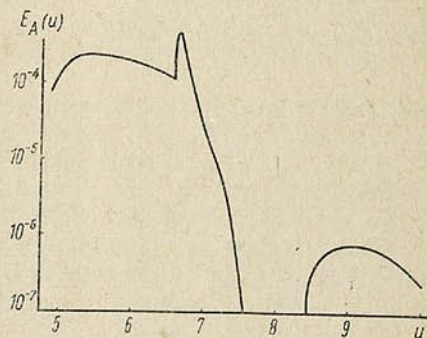
$$\alpha_0 - \frac{\varepsilon d}{2\tau_h^*} + \frac{\tau_r}{3(\varepsilon d/2\tau_h^*) - \Delta\alpha} \leq \tau_h \leq \frac{\tau_r}{\alpha_0 - \frac{\varepsilon d}{2\tau_h^*}}$$

Из рассеивающего объема, где

$$\frac{\tau_r}{\alpha_0 - \frac{\varepsilon d}{2\tau_h^*}} \leq \tau_h \leq \frac{\tau_r}{\alpha_0 - \Delta\alpha}$$

излучение снова может попасть на приемник. При длине цуга исходного импульса, меньшей размеров упомянутого выше слоя, на кривой зависимости $E_A(u)$ будет провал, после которого появится дополнительный максимум. График $E_A(u)$ для подобного случая показан на рис. 4, где по оси ординат использован логарифмический масштаб, так как величина дополнительного максимума много меньше основного.

Рис. 4. Зависимость $E_A(u)$ при наличии объекта прямоугольной формы $a > d$ ($\Delta\alpha = 0,03$, $\tau_r = 0,05$, $\tau_h^* = 3,3$, $\varepsilon d = 0,01$, $R = 0,1$, $\gamma = 20$)



При $7,45 < u < 8,32$ значения $E_A(u) < 10^{-7}$ не показаны. Если коэффициент отражения предмета очень мал, то «всплеск» от него будет незаметен и дополнительный максимум может быть приписан ложному объекту. Следует еще раз подчеркнуть, что подобное явление может иметь место только при условии $a > d$. Поэтому наличие дополнительного максимума дает некоторую информацию о форме обнаруживаемого объекта.

Авторы выражают благодарность Т. К. Гурьяновой и Л. И. Загорской за проделанные расчеты.

Литература

1. Козлов В. П. Сб. работ СНО ЛИТМО, в. 35. Ленинград, 1958.
2. Козлов В. П., Федорова Е. О. Оптико-механич. промышленность, № 1, 1967.
3. Кацев И. Л., Иванов А. П. Изв. АН СССР, Физика атмосферы и океана, 4, № 7, 1968.

*Институт физики
АН БССР*

*Поступило в редакцию
17.IV 1968*

В. Н. ТРЕТЬЯКОВ

КОМПТОНОВСКОЕ РАССЕЯНИЕ НА ДЕЙТРОНЕ *)

Будем ставить своей целью получение численных результатов для сечений упругого рассеяния γ -квантов на дейтронах. Поскольку квантово-механическая задача трех тел в общем случае не решается, приходится прибегать к упрощающим предположениям.

Простейшее заключается в том, что рассеяние на каждом из нуклонов происходит независимо, когда энергия γ -кванта значительно превышает энергию связи дейтрона:

$$d\sigma_{\gamma d} = d\sigma_{\gamma p} + d\sigma_{\gamma n}.$$

Однако такое предположение сводит на нет всю задачу, поскольку оно означает пренебрежение упругим рассеянием (в конечном состоянии диссоциированный дейтрон). Поэтому в задаче упругого рассеяния интерференционными эффектами пренебрегать нельзя [1].

Откажемся от аддитивности рассеяния и сделаем более слабые предположения, не исключающие интерференции.

Будем считать, что следующие два процесса происходят независимо: 1) падающий γ -квант передает одному из нуклонов импульс q ; 2) дейтрон в результате рассеяния остается в основном состоянии.

Это означает, что вероятность упругого рассеяния есть произведение вероятностей первого и второго событий.

Приведенное утверждение вместе с предположением о том, что дейтронная амплитуда является линейной суперпозицией амплитуд рассеяния на свободных протоне и нейтроне, имеющих то же самое распределение импульсов, что и в дейтроне, составляет содержание метода импульсного приближения (ИП) в применении к дейтронному комптон-эффекту [2—6].

Дейтрон представляет собой наиболее подходящий объект для применения ИП, так как, во-первых, энергия связи его (2,23 Мэв) достаточно мала по сравнению с используемыми для изучения комптон-эффекта энергиями γ -квантов, среднее расстояние между нуклонами достаточно велико по сравнению с длинами волн падающих фотонов, время взаимодействия значительно меньше периода дейтронной волновой функции основного состояния (эти три положения не независимы), а во-вторых, дейтрон—простейшее из составных ядер, волновая функция которого хорошо известна.

Амплитуда упругого рассеяния фотона на дейтроне в ИП имеет вид [6]

$$\begin{aligned} & \langle f | F_d | i \rangle = \\ & = \int d\mathbf{r} \exp \left(\frac{i}{2} \mathbf{q} \mathbf{r} \right) [{}^3\chi_{\Phi_d}(\mathbf{r}) (F_p + F_n) {}^3\chi_{\Phi_d}(\mathbf{r})]. \end{aligned} \quad (1)$$

*) Работа докладывалась на Международной конференции по электромагнитным взаимодействиям. Дубна, февраль, 1967 г.

Здесь $\mathbf{r} = \mathbf{r}_p - \mathbf{r}_n$, $F_{p,n}$ — амплитуды рассеяния на протоне и нейтроне, φ_d и ${}^3\chi$ — пространственная и спиновая части волновой функции дейтрона, $|i\rangle$ и $|f\rangle$ — начальное и конечное состояния системы фотон — дейтрон.

Так как [7]

$$F_p = L_p + \frac{1}{2} \underline{\sigma}_p \mathbf{K}_p, \quad (2)$$

$$F_n = L_n + \frac{1}{2} \underline{\sigma}_n \mathbf{K}_n,$$

то в пренебрежении вкладом D -состояния в волновую функцию дейтрона ${}^3\chi\varphi_d$ и зависимостью амплитуд $F_{p,n}$ от относительного импульса нуклонов получим

$$\langle f | F_d | i \rangle = {}^3\chi (L + \mathbf{KD}) {}^3\chi F(q), \quad (3)$$

где обозначено

$$L = L_p + L_n, \quad \mathbf{K} = \mathbf{K}_p + \mathbf{K}_n, \quad \mathbf{D} = \frac{1}{2} (\underline{\sigma}_p + \underline{\sigma}_n),$$

$$F(q) = \int dr \exp\left(iq \frac{\mathbf{r}}{2}\right) \varphi_d^2(r)$$

(\mathbf{K} и L — зависящие и не зависящие от спина дейтрона \mathbf{D} части дейтронной амплитуды; $F(q)$ — формфактор дейтрона).

Найдем выражение для полностью неполяризованного сечения γd -рассеяния. С точностью до кинематического множителя (равного $\left(\frac{1 + \delta_n}{1 + 2\delta_n}\right)^{1/2}$, где $\delta_n = \frac{k_n}{M}$, M — масса нуклона)

$$\begin{aligned} & 2(2D + 1) \frac{d\sigma_{\gamma d}}{d\Omega}(\Delta, y) = \\ & = \sum_{e, e', i, f} |\langle f | F_d | i \rangle|^2 = S(q) \sum_{e, e', i, f} |\chi_f(L + \mathbf{KD}) \chi_i|^2. \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь

$$\Delta = \delta_n (1 + \delta_n)^{-1/2}, \quad y = \frac{x - v}{1 - vx} \quad (5)$$

($x = \cos \vartheta$ в с. ц. и. фотон — нуклон, $v = \frac{\delta_n}{2 + 3\delta_n}$ — скорость преобразования от с. ц. и. фотон — нуклон к с. ц. и. фотон — дейтрон),

$$q = \Delta \sqrt{2(1 - y)}, \quad (5')$$

e и e' — векторы поляризации начального и конечного фотонов, а $S(q)$ — так называемый коэффициент связанности, характеризующий вероятность того, что дейтрон останется связанным после рассеяния, получив импульс q .

Выберем ось $z \uparrow \mathbf{K}$ (это не сужает общности, так как усреднение не зависит от выбора оси квантования). Тогда так как

$$\mathbf{KD} = |\mathbf{K}| D_z,$$

то

$$\mathbf{K}^* \mathbf{D} = (\mathbf{KD})^+ = |\mathbf{K}| D_z,$$

и мы получим

$$\begin{aligned} & \sum_{e, e', i, f} (\tilde{\chi}_f(L + \mathbf{K}\mathbf{D}) \chi_i) (\tilde{\chi}_i(L^* + \mathbf{K}^*\mathbf{D}) \chi_f) = \\ & = \sum_{e, e'} [(11) \cdot (11) + (22) \cdot (22) + (33) \cdot (33) + \\ & + (12) \cdot (21) + (13) \cdot (31) + (23) \cdot (32) + \\ & + (21) \cdot (12) + (31) \cdot (13) + (32) \cdot (23)], \end{aligned}$$

где введены обозначения

$$(ik) \cdot (ki) = \tilde{\chi}_i(L + |\mathbf{K}| D_z) \chi_k \tilde{\chi}_k(L^* + |\mathbf{K}| D_z) \chi_i.$$

Учтем, что

$$\tilde{\chi}_i \chi_k = \delta_{ik}, \quad D_z \chi_k = \begin{cases} \chi_k, & k = 1, \\ 0, & k = 2, \\ -\chi_k, & k = 3. \end{cases}$$

Тогда

$$\begin{aligned} (11) \cdot (11) &= \tilde{\chi}_1(L + |\mathbf{K}| D_z) \chi_1 \tilde{\chi}_1(L^* + |\mathbf{K}| D_z) \chi_1 = \\ &= |L|^2 + |\mathbf{K}|^2 + (L + L^*) |\mathbf{K}|, \\ (22) \cdot (22) &= |L|^2, \\ (33) \cdot (33) &= |L|^2 + |\mathbf{K}|^2 - (L + L^*) |\mathbf{K}|. \end{aligned}$$

В силу условия ортогональности члены типа $(ik) \cdot (ki)$, $i \neq k$, равны нулю. Поэтому

$$\sum_{e, e', i, f} |\chi_f(L + \mathbf{K}\mathbf{D}) \chi_i|^2 = \sum_{e, e', i} (ii) \cdot (ii) = \sum_{e', e} (3|L|^2 + 2|\mathbf{K}|^2), \quad (6)$$

т. е. в с. ц. и. фотон — дейтрон

$$\frac{d\sigma_{\gamma d}}{d\Omega} = \frac{1}{2} \left(\frac{1 + \delta_n}{1 + 2\delta_n} \right)^{1/2} S(q) \sum_{e, e'} \left(|L|^2 + \frac{2}{3} |\mathbf{K}|^2 \right). \quad (7)$$

Подобная формула была получена другим способом Чу-Льюисом [8] при рассмотрении упругого рассеяния π^0 на d и применялась (без вывода) Каппсом [3] к рассматриваемому процессу.

Коэффициент связанности $S(q)$ может быть определен двумя способами [1—3, 5].

Первый способ:

$$S^{1/2} = S_H^{1/2}(q) \equiv F_H(q) = \int d\mathbf{r} \exp\left(\frac{i}{2} \mathbf{q}\mathbf{r}\right) \Phi_H(r), \quad (8)$$

где

$$\Phi_H(r) = \left[\frac{ab(b+a)}{2\pi(b-a)^2} \right]^{1/2} \frac{e^{-ar} - e^{-br}}{r} \quad (9)$$

— волновая функция Хюльтена [9], описывающая дейтрон в основном состоянии ($a = 0,2317 f^{-1}$, $b = 1,506 f^{-1}$).

Второй способ связан с тем, что $F(q)$, по определению, формфактор нуклонной структуры дейтрона и потому может быть представлен в виде

$$S \equiv S_{ed}(q) = F_{ed}^2(q) = F_d^2(q) F_p^{-2}(q), \quad (10)$$

где F_d и F_p — формфакторы дейтрона и протона, определяемые из экспериментов по рассеянию электронов на дейтронах и протонах.

Мы будем пользоваться в дальнейшем обоими определениями. Приведем теперь искомое сечение (7) к более удобному для расчетов виду:

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma_{\gamma d}}{d\Omega} &= \frac{1}{2} S(q) \sum_{e, e'} \left(|L_p + L_n|^2 + \frac{2}{3} |K_p + K_n|^2 \right) = \\ &= \frac{1}{2} S(q) \sum_{e, e'} \left\{ |L_p|^2 + |L_n|^2 + 2\text{Re} L_p^* L_n + \right. \\ &\quad \left. + \frac{2}{3} [|K_p|^2 + |K_n|^2 + 2\text{Re} K_p^* K_n] \right\}. \end{aligned} \quad (11)$$

Учтем, что

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sum_{e, e'} (|L_p|^2 + |K_p|^2) &= \frac{d\sigma_{\gamma p}}{d\Omega}, \\ \frac{1}{2} \sum_{e, e'} (|L_n|^2 + |K_n|^2) &= \frac{d\sigma_{\gamma n}}{d\Omega}. \end{aligned} \quad (12)$$

Тогда (в с. ц. и. фотон — нуклон)

$$\frac{d\sigma_{\gamma d}}{d\Omega} = S \left(\frac{d\sigma_{\gamma n}}{d\Omega} + \frac{d\sigma_{\gamma p}}{d\Omega} + \frac{d\sigma_{int}}{d\Omega} \right), \quad (13)$$

последний член в (13) может быть представлен в форме

$$\frac{d\sigma_{int}}{d\Omega} = \frac{1}{2} \sum_{e, e'} \left[\text{Re} L_p^* L_n - \frac{1}{3} |K_p - K_n|^2 + \frac{2}{3} \text{Re} K_p^* K_n \right]. \quad (14)$$

Так как [7]

$$\begin{aligned} L_{n,p} &= \Phi_1^{n,p} e e' + \Phi_2^{n,p} e n' e' n, \\ K_{n,p} &= \Phi_3^{n,p} i [n' n] e' e + \Phi_4^{n,p} i [n' n] e' n e n' + \\ &\quad + \Phi_5^{n,p} i [e' e] + \Phi_6^{n,p} i [[e' n'] [e n]], \end{aligned} \quad (15)$$

то

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma_{int}}{d\Omega} &= (1+x^2) \Xi_{11} + \frac{1}{3} \text{Re} (\Phi_{55} + \Phi_{66}) + \\ &\quad + \frac{2}{3} x \text{Re} \Phi_{56} - \frac{1}{3} |\Phi_{5p} - \Phi_{5n}|^2 - \frac{1}{3} |\Phi_{6p} - \Phi_{6n}|^2 + \\ &\quad + \frac{2}{3} (\Psi_{56} - \Xi_{56}) + \frac{(1-x^2)}{6} \{ 3(1-x^2) \Xi_{22} - 6x \text{Re} \Phi_{12} + \\ &\quad + (1+x^2) \text{Re} \Phi_{33} + (1-x^2)^2 \text{Re} \Phi_{44} + \text{Re} \Phi_{55} + \\ &\quad + \text{Re} \Phi_{66} - 2x(1-x^2) \text{Re} \Phi_{31} + 2x \text{Re} \Phi_{35} + \\ &\quad + 2\text{Re} \Phi_{36} - 2(1-x^2) \text{Re} \Phi_{45} - (1+x^2) |\Phi_{3p} - \Phi_{3n}|^2 - \\ &\quad - (1-x^2)^2 |\Phi_{4p} - \Phi_{4n}|^2 - |\Phi_{5p} - \Phi_{5n}|^2 - \\ &\quad - |\Phi_{6p} - \Phi_{6n}|^2 + x(\Psi_{34} - \Xi_{34}) - x(\Psi_{35} - \Xi_{35}) - \\ &\quad - (\Psi_{36} - \Xi_{36}) + (1-x^2)(\Psi_{45} - \Xi_{45}) \}, \end{aligned} \quad (16)$$

где обозначено:

$$\Phi_{ik} \equiv \Phi_{ip}^* \Phi_{kn} + \Phi_{kp}^* \Phi_{in},$$

$$\psi_{ik} \equiv \Phi_{ip}^* \Phi_{kp} + \Phi_{in}^* \Phi_{kn},$$

$$\Xi_{ik} \equiv \Phi_{ip}^* \Phi_{kn} + \Phi_{in}^* \Phi_{kp}.$$

В [10] показано, что сечение γp -рассеяния, рассчитанное с помощью амплитуд Φ_{ip} в квадратичном по энергии фотона приближении, хорошо согласуется с имеющимися экспериментальными данными в области энергии до 300 Мэв (полученными до 1961 г. включительно). Более поздние экспериментальные результаты [11, 12] (1963—1965 гг.) не противоречат этому выводу. Амплитуды Φ_{ip} вместе с нейтронными амплитудами Φ_{in} , найденными в [14] при тех же упрощающих предположениях (одномезонная унитарность, резонансная модель фоторождения, квадратичность по энергии), позволяют по формулам (13) и (16) определить $d\sigma_{\gamma d}/d\Omega$.

Если состояние дейтрона описывается волновой функцией Хюльтена φ_H , то коэффициент связности $S = S_H(q)$ вычисляется в явном виде:

$$S_H^{1/2}(q) = \frac{4ab(a+b)}{(a-b)^2 q} \times \left[\operatorname{arctg} \frac{q}{4a} + \operatorname{arctg} \frac{q}{4b} - 2 \operatorname{arctg} \frac{q}{2(a+b)} \right]. \quad (17)$$

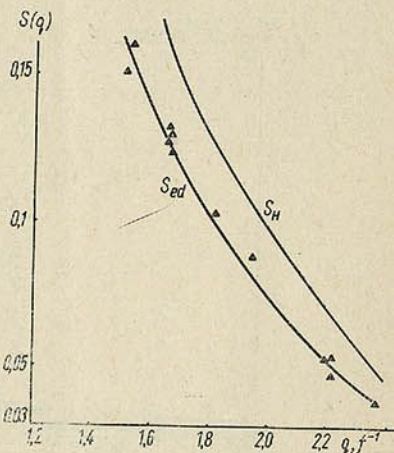


Рис. 1. Расчетный (S_H) и опытный (S_{ed}) коэффициенты связности дейтрона

На рис. 1 сопоставлены графики зависимостей расчетного (S_H) и опытного (S_{ed}) коэффициентов связности от импульса передачи q в той области энергий и углов, в которой проводились эксперименты [5, 15].

Чтобы не рисовать расчетные кривые дважды (для S_H и S_{ed}), будем, следуя [5, 6], откладывать по оси ординат не $d\sigma/d\Omega$, а $d\sigma/d\Omega S$; при этом каждая экспериментальная точка раздвоится.

Результаты расчета нормализованных на S сечений на рис. 2—5 сопоставляются с имеющимися экспериментальными данными [5, 15, 16] и расчетными кривыми Теноре — Верганелакиса [6]. Чтобы сравнение расчетных результатов было более оправданным, мы учитываем поправки к ИП на обменные силы (рис. 2 и 3) (см. рис. 2 и 5 в [6]):

Для 90° , с. п. и.

Δ	0,052	0,101	0,148	0,193	0,237
поправка, $10^{-32} \text{ см}^2/\text{стер}$	0,33	0,33	0,65	3,11	0,90

Для 140° , с. п. и.

Δ	0,052	0,101	0,148	0,193	0,237
поправка, $10^{-32} \text{ см}^2/\text{стер}$	0,19	0,65	-1,03	-0,32	-2,07

Сравнение теоретических и экспериментальных результатов позволяет сделать следующие выводы:

1. В пределе малых энергий (~ 60 Мэв) кривые 1 и 2 на рис. 2 и 3 настолько близко подходят друг к другу, что становятся графически неразличимыми.

2. Наша расчетная кривая 2 на рис. 2 для 90° идет всюду выше соответствующей кривой [6]. Ввиду этого, поскольку в области энергий и углов, изучаемой в [5, 15], $S_H(q) > S_{ed}(q)$, наши расчетные кривые 2 и 2' ближе подходят к экспериментальным точкам из [5, 15], нормализованным на S_{ed} , тогда как кривая 1 из [6] лучше согласуется с $d\sigma_{\gamma d}^{эксп}/d\Omega S_H$. (Неприятным

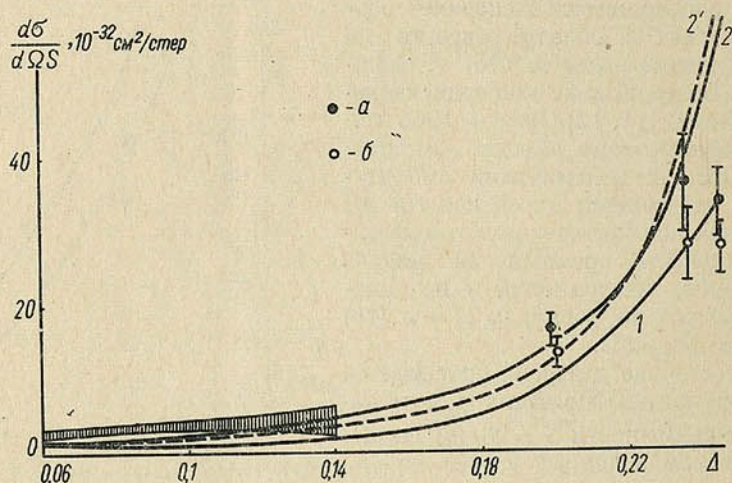


Рис. 2. Нормализованные на $S(q)$ теоретические и экспериментальные сечения упругого γd -рассеяния на близкие к 90° углы:

a и b —экспериментальные точки из [5, 15] при $S=S_{ed}$ и $S=S_H$ (88 и 110° в с. ц. и.) соответственно; заштрихованная область—экспериментальные данные из [16] при $S=S_H$ (90° в л. с.); 1—расчет [6] для 90° в с. ц. и.; 2 и 2'—наш расчет для 90° и 110° в с. ц. и.

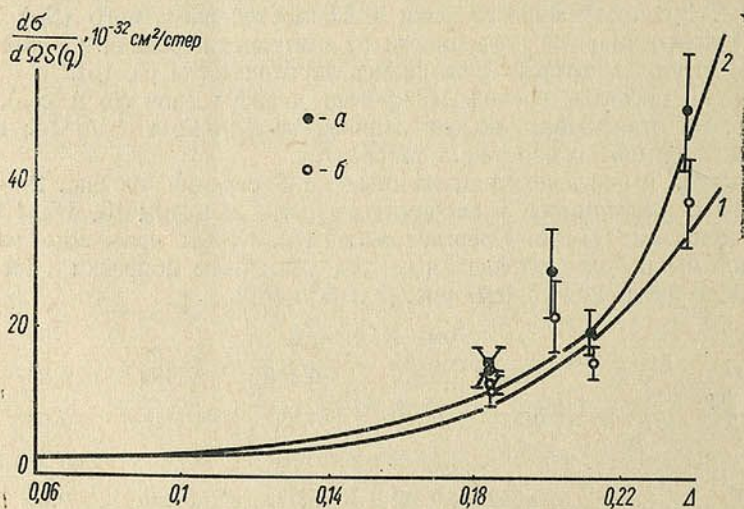


Рис. 3. Нормализованные сечения γd -рассеяния (137 — 140° в с. ц. и.):

a и b —экспериментальные точки из [5, 15] при $S=S_{ed}$ и $S=S_H$; 1—расчет [6]; 2—наш расчет для 140° в с. ц. и.

исключением является точка $k_d = 261 \text{ Мэв}$, 88° с. ц. и. [15], однако она фактически выходит за верхнюю границу импульсного приближения, указанную Каппсом [3], — 200 Мэв . Можно утверждать, что этот факт говорит в пользу нашего расчета, так как экспериментальные S_{ed} эффективно лучше учитывают структуру дейтрона, чем S_H , рассчитываемые в модельном предположении.

3. Как видно из рис. 3, расчетные кривые 1 и 2 для 140° в с. ц. и. очень близки при низких энергиях и расходятся при больших. Как и для рассеяния на 90° , можно утверждать, что кривая 1 лучше согласуется с нормализованными на S_H экспериментальными данными [5, 15], а кривая 2 — с нормализацией на S_{ed} . Единственным исключением является точка 217 Мэв , 137° с. ц. и. [15], которая не согласуется ни с кривой 1, ни с кривой 2 ни при каком выборе S . Однако сама точка вызывает сомнение, поскольку она заметно нарушает тенденцию монотонного роста сечения; кроме того, она выходит за рамки применимости ИП.

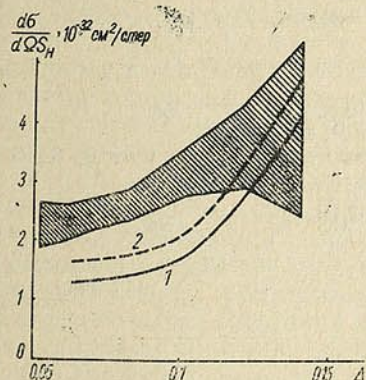


Рис. 4. Нормализованные на S_H экспериментальные [16] (заштрихованная область) и расчетные сечения γd -рассеяния на 90° в л. с.:

1 — без учета; 2 — с учетом поправок на обменные силы

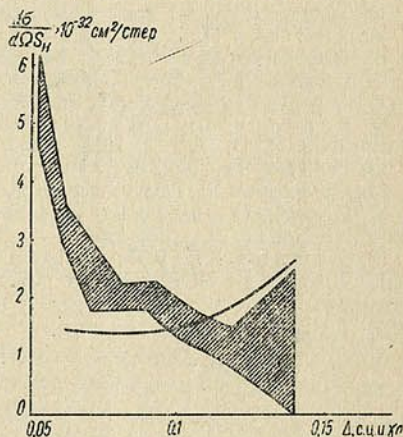


Рис. 5. Экспериментальные и теоретические сечения γd -рассеяния на 50° в л. с. (нормализация на S_H)

4. На рис. 4 и 5 изображены данные [16] для сечения рассеяния γ -квантов на углы 50° и 90° в л. с. вместе с нашим расчетом для близких к этим углам $\theta_{с.ц.л.}$. Как видно, в этом случае можно говорить лишь о качественном согласии теоретических и экспериментальных данных. Расхождение сильнее для 50° и слабее для 90° , но в обоих случаях достаточно велико. Однако имеется несколько причин, по которым соответствие, если бы оно и существовало, носило бы характер случайного совпадения. Первая связана с тем, что применение ИП для $\Delta < 0,1$ (100 Мэв) не обосновано [3]. Вторая причина обусловлена тем, что расчетные кривые рис. 4 и 5 не учитывают фотодезинтеграции дейтрона, которая в рассматриваемой области энергий ($50\text{--}150 \text{ Мэв}$) еще существенна [17]. И, наконец, третья причина — ненадежность экспериментальных данных [16], полученных уже довольно давно (1959 г.). Экспериментальная техника не позволяла тогда уверенно отделять упругое рассеяние $\gamma + d \rightarrow \gamma' + d'$ от неупругого $\gamma + d \rightarrow \gamma' + p + n$. К тому же сама работа [16] имела заявочный характер.

Итак, амплитуды Φ_p и Φ_n , рассчитанные в [10, 14] с использованием экспериментальных данных по фоторождению мезонов на протонах

и (π^-/π^+)-отношению, подтверждаются не только протонным, но и дейтронным рассеянием γ -квантов. Таким образом, амплитуды $F_{n,p}$ позволяют установить связь и выяснить самосогласованность между тремя указанными группами экспериментальных данных.

Автор благодарен Л. Г. Морозу за интерес к работе и полезные обсуждения.

Литература

1. Chew G. F. Phys. Rev., **74**, 809, 1948; **84**, 710, 1951.
2. Chew G. F. Phys. Rev., **80**, 196, 1950.
3. Capps R. H. Phys. Rev., **106**, 1031, 1957; **108**, 1032, 1957.
4. Schult R. L., Capps R. H. Phys. Rev., **119**, 377, 1960.
5. Jones R. S., Gerber H. J., Hanson A. O., Wattenberg A. Phys. Rev., **128**, 1357, 1962.
6. Tenore A., Vergenelakis A. Nuovo Cimento, **35**, 261, 1965.
7. Третьяков В. Н. Вестн АН БССР, сер. физ.-матем. наук, № 4, 1966.
8. Chew G. F., Lewis H. W. Phys. Rev., **84**, 779, 1951.
9. Хюльтен Л., Сугавара М. Сб. «Строение атомного ядра». М., 1959.
10. Федянин В. К. ЖЭТФ, **44**, 633, 1963.
11. Deutsch M. Proc. Cambr. Conf., p. IV-20, 1963; Stiening P. F., Loh E., Deutsch M. Phys. Rev. Lett., **10**, 536, 1963.
12. Баранов П. С., Кузнецова В. А., Словохотов Л. И., Сокол Г. А., Штарков Л. Н. ЯФ, **3**, 1083, 1966.
13. McIntyre J. A., Burleson G. R. Phys. Rev., **112**, 2077, 1958.
14. Мороз Л. Г., Третьяков В. Н. ДАН БССР, **8**, 575, 1964.
15. Fox J., Griegee L., Gerber H. J., Hanson A. O., Jones R. S. Bull. Am. Phys. Soc., **9**, № 1, 69, 1964.
16. Human L., Ely R., Frisch D., Wahlig H. Phys. Rev. Lett., **3**, 93, 1959.
17. Лapidус Л. И., Чжоу Гуан-чжао. ЖЭТФ, **39**, 1286, 1960.

Институт физики
АН БССР

Поступило в редакцию
11.1 1968

Л. Ф. КОРЗУН

АБ РАДЫЯЦЫЙНЫМ ВЫМЯРЭННІ ТЭМПЕРАТУРЫ ПАВЕРХНІ ЦЕЛА, ЯКОЕ ЗНАХОДЗІЦЦА У ЗАМКНУТАЙ ПОЛАСЦІ

Вымярэнне тэмпературы ўчастка паверхні цела, якое знаходзіцца ў замкнутай поласці, у прынцыпе можа быць ажыццёўлена з дапамогай радыяцыйнага пірометра, калі ў гэтай поласці зроблена адпаведная адтуліна, праз якую вядуцца назіранні. Асноўная перашкода, якая ўзнікае пры гэтых вымярэннях, заключаецца ў тым, што невядома загадзя велічыня той папраўкі, якую неабходна ўнесці ў паказанні пірометра на непаўнату выпраменьвання. У большасці работ [2—5] разглядаецца выпраменьванне з замкнутай поласці пры ўмове, што тэмпература абалонкі і цел, якія знаходзяцца ўнутры яе, аднародная. Наадварот, у даследаваннях, прысвечаных выпраменьванню поласці з нераўнамерна нагрэтымі сценкамі [6], мяркуецца, што аднародныя выпраменьвальныя ўласцівасці матэрыялу абалонкі і цел, якія знаходзяцца ўнутры яе. Між тым у практыцы піраметрычных вымярэнняў нярэдка даводзіцца назіраць паток выпраменьвання ад цела, у якога выпраменьвальныя ўласцівасці паверхні адрозніваюцца ад выпраменьвальных уласцівасцей матэрыялу абалонкі, сценкі якой нагрэты да іншай, напрыклад больш нізкай, тэмпературы. Такія вымярэнні амаль непазбежны пры вызначэнні тэмпературы паверхні ферытавых і дыэлектрычных укладышаў, якія награвяюцца ў палях ЗВЧ унутры хваляводаў, і ў радзе тэхналагічных працэсаў пры тэрмічнай апрацоўцы вырабаў.

У рэальных умовах, як правіла, нагрэў цела і абалонкі нераўнамерны, г. зн. тэмпература з'яўляецца функцыяй каардынат пунктаў паверхні, а самі паверхні цела і абалонкі знаходзяцца ў стане праменнай раўнавагі, г. зн. цеплаабмен паміж імі адбываецца толькі за кошт выпраменьвання.

Разгледзім выпраменьванне невялікага ўчастка паверхні цела, тэмпература якога T_1 больш за тэмпературу сценак поласці T_2 .

Результуючы паток выпраменьвання Φ_p (рыс. 1), які пасылаецца невялікім участкам паверхні цела праз адтуліну d_a у напрамку аб'ектыва пірометра, можна разглядаць як суму трох складаючых

$$\Phi_p = \Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3, \quad (1)$$

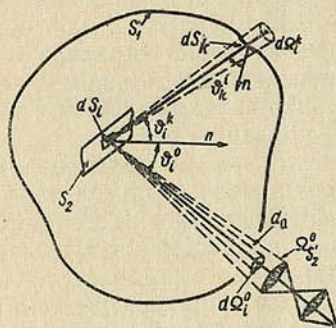
дзе Φ_1 — паток выпраменьвання, які непасрэдна вылучаецца фотаметруемым участкам паверхні цела пры тэмпературы T_1 ; Φ_2 — доля патоку выпраменьвання, вылучаемага паверхняй поласці пры тэмпературы T_2 , якая адбіваецца затым назіраемым участкам паверхні ў напрамку прылады праз адтуліну d_a ; Φ_3 — доля патоку выпраменьвання, вылучаемага паверхняй цела, якая адбіваецца ад унутранай паверхні сценак поласці і пераадбіваецца затым назіраемым участкам паверхні цела ў напрамку пірометра.

Калі велічыня патоку выпраменьвання Φ_1 вызначаецца толькі выпраменьвальнымі ўласцівасцямі і тэмпературай паверхні цела, то для патокаў выпраменьвання Φ_2 і Φ_3 істотнае значэнне маюць таксама і адбівальныя ўласцівасці ўнутранай паверхні сценак поласці, яе тэмпература, размяшчэнне назіраемага ўчастка ў адносінах да адтуліны і сценак абалонкі і г. д. [1—5].

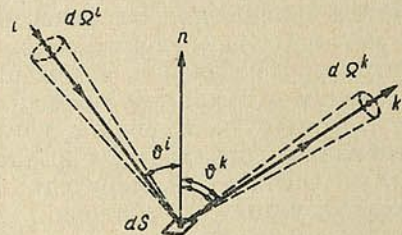
Каб знайсці выраз для патоку выпраменьвання Φ_p , выкарыстаем наступныя вызначэнні [2] (рыс. 2):

1. Прыватная адбівальная здольнасць r^{ik} элемента паверхні dS ёсць доля выпраменьвання, адбітага ў напрамку k , якая прыходзіцца на адзінкавы цялесны вугал (стэрадыян), калі выпраменьванне падае з напрамку i .

2. Адбівальная здольнасць ρ^i элемента паверхні dS ёсць доля выпраменьвання, якая адбіваецца ў паўсферу, калі выпраменьванне падае з напрамку i .



Рыс. 1. Выпраменьванне з поласці назіраемага ўчастка паверхні цела



Рыс. 2. Элемент паверхні (i — напрамак падзення выпраменьвання; k — напрамак адбіцця)

З гэтых вызначэнняў непасрэдна вынікае, што

$$\rho^i = \int_{2\pi} r^{ik} d\Omega^k, \quad (2)$$

дзе $d\Omega^k$ — адзінкавы цялесны вугал у напрамку k .

Дадаткова ўвядзем вызначэнне.

3. Прыватная адносная выпраменьвальная здольнасць ϵ^k элемента паверхні dS ёсць доля чорнага выпраменьвання, якая пасылаецца ў напрамку k у адзінкавы цялесны вугал пры тэмпературы T .

Для прыватных адбівальных здольнасцей маюць месца суадносіны

$$r_i^{ok} \cos \vartheta_i^0 = r_i^{ko} \cos \vartheta_i^k, \quad (3)$$

якія лёгка можна ўстанавіць з дапамогай тэарэмы адваротнасці, сфармуляванай Гельмгольцам [7].

З гэтага часу будзем лічыць, што верхнія індэксы азначаюць напрамак, а ніжнія — элемент паверхні. Цяпер састаўляючы элементарных патокаў выпраменьвання $d\Phi_1$, $d\Phi_2$ і $d\Phi_3$ можна даць у выглядзе (рыс. 1)

$$d\Phi_1 = \epsilon_i^0 I_T \cos \vartheta_i^0 d\Omega_i^0 dS_i, \quad (4)$$

$$d\Phi_2 = \epsilon_k^i \rho I_T \cos \vartheta_k^i d\Omega_k^i dS_k r_i^{ko} \cos \vartheta_i^k d\Omega_i^k d\Omega_i^0 dS_i, \quad (5)$$

$$d\Phi_3 = I_T \cos \vartheta_i^k d\Omega_i^k dS_i \rho_k^i r_i^{ko} \cos \vartheta_k^i d\Omega_k^i d\Omega_i^0 dS_k, \quad (6)$$

дзе I_{T_1} — спектральная шчыльнасць патоку выпраменьвання чорнага цела пры тэмпературы T_1 , якая даецца формулай Планка*); ε_i^o — прыватная адносная выпраменьвальная здольнасць элемента паверхні dS_i цела пры тэмпературы T_1 у напрамку d_a ; $d\Omega_i^o$ — адзінкавы цялесны вугал, калі яго назіраць з элемента паверхні dS_i цела ў напрамку d_a ; ρ — каэфіцыент, які залежыць ад даўжыні хвалі і роўны адносінам I_{T_2}/I_{T_1} , дзе I_{T_2} — спектральная шчыльнасць патоку выпраменьвання чорнага цела пры тэмпературы T_2 ; r_i^{ko} — прыватная адбівальная здольнасць элемента паверхні dS_i цела ў напрамку d_a , калі выпраменьванне падае ад элемента паверхні dS_k поласці з напрамку k ; $d\Omega_i^k$ — цялесны вугал, які ахопліваецца элементам паверхні поласці, калі яго назіраць з элемента паверхні цела; ε_k^i — прыватная адносная выпраменьвальная здольнасць элемента паверхні dS_k поласці ў напрамку элемента паверхні dS_i цела; ρ_k^i — адбівальная здольнасць элемента паверхні dS_k поласці, калі выпраменьванне падае з напрамку i ад элемента dS_i паверхні цела.

Праінтэгруем выраз (1) па паверхні цела і па ўсіх напрамках паўсферы

$$\Phi_1 = I_{T_1} \int_{S_2} \int_{2\pi} \varepsilon_i^o \cos \vartheta_i^o d\Omega_i^o dS_i. \quad (7)$$

Дапусцім, што пірометр мае дастаткова высокую вуглавую вырашающую здольнасць і рэгіструе патак, вылучаемы дастаткова малым участкам паверхні S_2' цела ($S_2' \rightarrow dS_i$) і ў невялікім цялесным вугле $\Omega_{S_2}^o$ ($\Omega_{S_2}^o \rightarrow d\Omega_i^o$).

Тады, калі выпраменьвальныя ўласцівасці аднародныя па ўсёй паверхні цела, (7) можна замяніць прыбліжанай роўнасцю

$$\Phi_1 \approx \varepsilon_{T_1} I_{T_1} S_2' \cos \vartheta_{S_2'}^o \Omega_{S_2'}^o, \quad (8)$$

дзе ε_{T_1} — адносная выпраменьвальная здольнасць назіраемай паверхні пры тэмпературы T_1 .

Выкарыстаўшы суадносіны (3), перапішам (5) і (6) у выглядзе

$$d\Phi_2 = \varepsilon_k^i \rho I_{T_1} \cos \vartheta_k^i d\Omega_k^i dS_k r_i^{ok} \cos \vartheta_i^o d\Omega_i^o dS_i, \quad (5')$$

$$d\Phi_3 = I_{T_1} \cos \vartheta_i^o d\Omega_i^o dS_i \rho_k^i r_i^{ok} \cos \vartheta_k^i d\Omega_k^i dS_k. \quad (6')$$

і праінтэгруем дадаткова па паверхні поласці S_1 . Выкарыстаўшы вызначэнне (2), з якога вынікае, што

$$\int_{2\pi} r_i^{ok} d\Omega_k^i = \rho_i^o,$$

атрымаем

$$\Phi_2 \approx \rho \rho_{T_1} I_{T_1} S_2' \Omega_{S_2'}^o \cos \vartheta_{S_2'}^o \int_{S_1} \int_{2\pi} \varepsilon_k^i \cos \vartheta_k^i d\Omega_k^i dS_k, \quad (9)$$

$$\Phi_3 \approx \rho_{T_1} I_{T_1} S_2' \Omega_{S_2'}^o \cos \vartheta_{S_2'}^o \int_{S_1} \int_{2\pi} \rho_k^i \cos \vartheta_k^i d\Omega_k^i dS_k, \quad (10)$$

дзе ρ_{T_1} — адбівальная здольнасць назіраемага ўчастка паверхні S_2' .

Вылічэнне патокаў Φ_2 і Φ_3 выклікае значныя матэматычныя цяжкасці нават для поласцей правільных геаметрычных форм, калі выпраменьванне не падпарадкоўваецца закону Ламберта. Дапусцім, што адносная выпрамень-

*) Тут разглядаюцца спектральныя велічыні. Для спрашчэння індэкс λ апускаецца.

вальная здольнасць матэрыялу абалонкі аднародная па ўсёй паверхні і падпарадкоўваецца гэтаму закону, г. зн. значэнне яе адно і тое ж ва ўсіх напрамках. Тады ўраўненні (9) і (10) могуць быць пададзены так:

$$\Phi_2 \approx \rho \rho_{T_1} \varepsilon_{T_2} I_{T_1} S_2' \Omega_{S_2}' \cos \vartheta_{S_2}' \int_{S_1} \int_{2\pi} \cos \vartheta_k^i d \Omega_k^i d S_k, \quad (9')$$

$$\Phi_3 \approx \rho_{T_1} \rho_{T_2} I_{T_1} S_2' \Omega_{S_2}' \cos \vartheta_{S_2}' \int_{S_1} \int_{2\pi} \cos \vartheta_k^i d \Omega_k^i d S_k. \quad (10')$$

дзе ε_{T_2} — адносная выпраменьвальная здольнасць матэрыялу паверхні поласці; ρ_{T_2} — яе адбівальная здольнасць для непразрыстых цел; на аснове закону Кірхгофа

$$\rho_{T_2} = 1 - \varepsilon_{T_2}. \quad (11)$$

Калі дапусціць яшчэ, што

$$\int_{S_1} \int_{2\pi} \cos \vartheta_k^i d \Omega_k^i d S_k = 1,$$

г. зн., што велічыня патокаў выпраменьвання Φ_2 і Φ_3 не залежыць ад памераў і формы поласці, то замест (9') і (10') можна запісаць

$$\Phi_2 \approx \rho \rho_{T_1} I_{T_1} S_2' \cos \vartheta_{S_2}' \Omega_{S_2}' \varepsilon_{T_2}, \quad (12)$$

$$\Phi_3 \approx \rho_{T_1} \rho_{T_2} I_{T_1} S_2' \cos \vartheta_{S_2}' \Omega_{S_2}'. \quad (13)$$

Абазначым

$$I_{T_1} S_2' \cos \vartheta_{S_2}' \Omega_{S_2}' = M.$$

Пасля гэтых пераўтварэнняў выраз для результируючага патоку Φ_p можна даць у выглядзе

$$\Phi_p \approx M (\varepsilon_{T_1} + \rho \rho_{T_1} \varepsilon_{T_2} + \rho_{T_1} \rho_{T_2}), \quad (14)$$

або

$$\Phi_p \approx M \varepsilon_T', \quad (15)$$

дзе

$$\varepsilon_T' = \varepsilon_{T_1} + \rho \rho_{T_1} \varepsilon_{T_2} + \rho_{T_1} \rho_{T_2}. \quad (16)$$

Велічыню ε_T' будзем называць уяўнай адноснай выпраменьвальнай здольнасцю назіраемага ўчастка паверхні цела.

Выкарыстаўшы (11), запішам апошнюю роўнасць у выглядзе

$$\varepsilon_T' = \varepsilon_{T_1} + \rho \varepsilon_{T_2} (1 - \varepsilon_{T_1}) + (1 - \varepsilon_{T_1}) (1 - \varepsilon_{T_2}). \quad (16')$$

З гэтага ўраўнення можа быць вылічана велічыня ε_T' , калі вядомы значэнні ε_{T_1} і ε_{T_2} , а таксама значэнне каэфіцыента ρ . Значэнне ρ роўна адносінам спектральнай шчыльнасці патоку выпраменьвання чорнага цела пры тэмпературы T_2 і даўжыні хвалі λ да спектральнай шчыльнасці патоку выпраменьвання чорнага цела пры тэмпературы T_1 і той жа даўжыні хвалі. Калі ж значэнне ε_T' неабходна вылічыць у вобласці спектра ад λ_1 да λ_2 мікрон, то значэнне ρ можа быць вылічана шляхам колькаснага інтэгравання па формуле

$$\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} I_{\lambda, T_2} d \lambda / \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} I_{\lambda, T_1} d \lambda, \quad (17)$$

дзе I_{λ, T_1} і I_{λ, T_2} — спектральная шчыльнасць патоку выпраменьвання чорнага цела адпаведна пры тэмпературы T_1 і T_2 . У гэтым выпадку ўраўненне (16') будзе справядліва для ϵ'_T у адносінах да выбранага прыёмніка выпраменьвання, калі значэнні ϵ_{T_1} і ϵ_{T_2} вызначаны з дапамогай гэтага ж прыёмніка ў інтэрвале даўжыні хвалі ад λ_1 да λ_2 .

Тут мы абмежаваліся разглядаць аднаразовага адбіцця патокаў выпраменьвання. Мы таксама не ўлічвалі страт, якія мелі месца пры па-

глыннанні цеплавой энергіі выпраменьвання атмасферай унутры поласці, а таксама страт, якія непазбежна ўзнікаюць пры кожным пераадбіцці ад паверхні. Трэба мець на ўвазе, што як доля выпраменьвання, якая ўносіцца ў рэзультуючы патак, так і доля страт вельмі змяншаюцца з кожным наступным пераадбіццём, а страты на паглыннанне могуць аказацца нязначнымі. Нягледзячы на гэтыя дапушчэнні, выраз (16') для вызначэння велічыні ϵ'_T не без поспеху можа быць выкарыстан для практычных мэт у піраметры. Так, ім можна карыстацца пры радыяцыйных вымярэннях тэмпературы паверхні цела ўнутры хваляводаў практычна ўсіх памераў, што шырока ўжываюцца.

На рыс. 3 прыведзены эксперыментальныя крывыя ўяўнай адноснай эфектыўнай выпраменьвальнай здольнасці ϵ'_T паверхні ферыту Ф-600, які знаходзіцца ўнутры хвалявода сячэннем 60×60 мм і даўжынёй каля 300 мм. Унутраная паверхня сценак хвалявода мае адносную эфектыўную выпраменьвальную здольнасць (у адносінах да выбранага прыёмніка) $\epsilon_{T_2} = 0,78 \div 0,86$, а паверхня ферыту $\epsilon_{T_1} = 0,52 \div 0,60$ у вобласці тэмператур ад 40 да 180 °С. Вымярэнні рабіліся з дапамогай піраметра сумарнай радыяцыі з фотаэлектрычным прыёмнікам выпраменьвання—сярніста-свінцовым фотасупраціўленнем. Вырашальная здольнасць піраметра па тэмпературы і—3 °С у межах тэмператур ад 40 да 300 °С. Піраметр мае таксама і высокую вуглавую вырашальную здольнасць. Такім чынам, рэгістравалася выпраменьванне ад участка паверхні плошчай парадку 4—5 мм² пры адлегласці ад гэтай паверхні да галоўнай плоскасці аб'ектыва піраметра 350—400 мм.

Назіраемая паверхня ферыту — плоскасць з аднароднымі выпраменьвальнымі ўласцівасцямі — знаходзілася на адлегласці 30 мм ад сценак хвалявода, праз адтуліну ў якой дыяметрам 6 мм праводзіліся назіранні. Значэнне ϵ'_T вызначалася як адносіны электрычнага сігналу ад назіраемага ўчастка паверхні да сігналу ад чорнага цела пры той жа тэмпературы. Значэнне выпраменьвальнай здольнасці матэрыялу, які ўтварае ўнутраную паверхню хвалявода, вызначалася аналагічна з дапамогай таго ж піраметра. Для гэтых вымярэнняў з дадзенага хвалявода быў зроблен узор у выглядзе пласцінкі $60 \times 5 \times 2$ мм³.

З рыс. 3 відаць, што значэнне ϵ'_T значна ўзрастае ў залежнасці ад ступені нагрэву сценак хвалявода. Па меры прыбліжэння тэмпературы сценак да тэмпературы паверхні ферыту значэнне ϵ'_T набліжаецца да адзінкі (крывыя 1 і 2), а пры $T_2 > T_1$ велічыня ϵ'_T прымае значэнне, большае за адзінку. Адпаведна пры гэтых умовах каэфіцыент ρ прымае значэнні $\rho = 1$

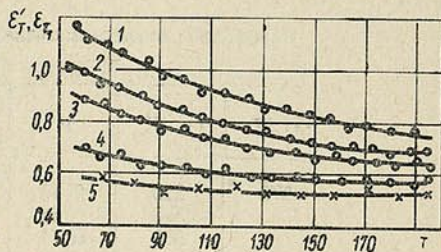


Рис. 3. Залежнасць ад тэмпературы T , °С уяўнай адноснай эфектыўнай выпраменьвальнай здольнасці ϵ'_T паверхні ферыту Ф-600 у хваляводзе (1—пры $T_2 = 95 \pm 2^\circ \text{C}$; 2— $65 \pm 2^\circ \text{C}$; 3— $45 \pm 2^\circ \text{C}$; 4—пры хатняй тэмпературы) і выпраменьвальнай здольнасці той жа паверхні ферыту па-за хваляводам ϵ_{T_1} (5)

і $\rho > 1$. Значенню $\rho = 0$ відповідає крива 4. Практично можна лічыць, што пры $T_1 \simeq T_2$ індывідуальныя выпраменьваючыя ўласцівасці паверхні цела «згладжваюцца», іншымі словамі, ажыццяўляецца пераход да чорнага выпраменьвання з поласці.

З табліцы відаць, што разыходжанне паміж вылічаным і вымераным значэннямі ε'_T мае месца толькі ў другім знаку. Сярэдняя адносная памылка вымярэння складае каля 2%.

Табліца
Параўнанне эксперыментальных і вылічаных значэнняў ε'_T
пры $\varepsilon_{T_1} = 0,55$, $\varepsilon_{T_2} = 0,86$

T_1 , °К	T_2 , °К	ρ	Значэнні ε'_T		Адносная памылка, %
			вымераныя	вылічаныя	
373	320	0,43	0,76	0,78	2
	340	0,54	0,82	0,82	0
	360	0,74	0,95	0,90	5
400	320	0,18	0,69	0,66	3
	340	0,37	0,76	0,74	2
	360	0,78	0,87	0,91	4

Такім чынам, гэта супадзенне можна лічыць добрым, і ў радзе задач параметры яно можа забяспечыць неабходную дакладнасць вымярэнняў.

Літаратура

1. Рибо Г. Оптическая пирометрия. ГТТИ, М., 1934.
2. De Vos I. C. Physica, 20, № 10, 669, 689, 1954.
3. Холопов Г. К. Оптико-механическая промышленность, № 1, 1968.
4. Спэрроу Е. И., Эккерт Е. Р., Алберс Л. У. Теплопередача, 84, 90, 1962.
5. Stineman R. N. Electro-Technol., 74, № 5, 116—118, 1964.
6. Биргер Г. И. Измерительная техника, № 7, 1966.
7. Helmholtz H. Vorlesungen über theoretische Physik, 2. Leipzig, 1898—1903.
8. Брамсон М. А. Справочные таблицы по инфракрасному излучению нагретых тел. Изд. «Наука», М., 1964.

Белорусский государственный
университет им. В. И. Ленина

Поступило в редакцию
27.III 1968

УДК 533.915+539.216.2 : 537.3

А. Д. АНДРЭЕУ, В. І. ЛОЙКА, І. Р. НЕКРАШЭВІЧ

УПЛУЎ ЭКСПАЗІЦЫІ І НАПРУЖАННЯ НА ІНЖЭКЦЫЮ ЭЛЕКТРОНАУ З ПЛАЗМЫ ГАЗАВАГА РАЗРАДУ У СЕЛЕН

За апошнія гады быў апублікаван рад работ, у якіх вивучаліся працэсы пераносу зараду ў тонкіх слях аморфнага селену [1—5].

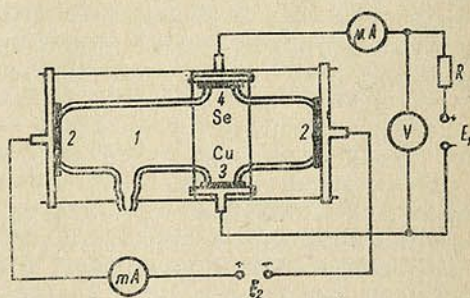
У гэтай рабоце былі выкарыстаны слаі аморфнага селену таўшчыняй 30—50 мк. Селен наносіўся з паравой фазы на алюмініевую пласцінку, якая папярэдне пакрывалася слоем вісмуту. Пласцінка з нанесеным слоем селену служыла адным з электродаў газаразраднай камеры, у якой узбуджаўся тлеючы разрад ад крыніцы пастаяннага напружання пры розных цісках паветра. Канцэнтрацыя электронаў (на восі дадатнага слупа) у плазме складала $1 \cdot 10^9 \text{ см}^{-3}$.

Кантакт слупа плазмы са слоем аморфнага селену ажыццяўляўся праз бакавыя вокны ў камеры (рыс. 1). Плошча кантакту складала 2 см^2 .

Алюмініевы электрод з нанесеным слоем аморфнага селену далучаўся да дадатнага полюса крыніцы пастаяннага току.

Даследавалася залежнасць токаў, якія праходзяць праз плазму і слой селену, ад часу пры адным і тым жа ўзроўні інжэкцыі, але пры розных значэннях напружання і велічыні супраціўлення ў вымяральным ланцугу (рыс. 2).

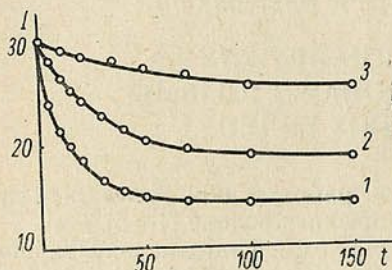
Як відаць з рысунка, велічыня току змяншаецца з часам і дасягае стацыянарнага значэння. Пры аднолькавым узроўні інжэкцыі, які забяспечваецца аднолькавым пачатковым токам, велічыня стацыянарнага току ўзрастае пры павелічэнні дадатковага супраціўлення. Часавая залежнасць току мае экспаненцыяльны характар толькі пры параўнаўча вялікіх значэннях дадатковага супраціўлення. У пачатковы момант часу ўлоўнікі не паспяваюць запаўняцца і ток інжэкцыі ўплывае на ток, які праходзіць, нахшталь таго, як гэта адбываецца пры чыстым дыэлектрыку [6]. Па меры запаўнення ўлоўнікаў доля свабодных носьбітаў змяншаецца, што суправаджаецца спадам току ў часе. Пры павелічэнні дадатковага супраціўлення пастаянны ўзровень інжэкцыі можа быць забяспечан павелічэннем прыкладнага напружання, што выклікае павелічэнне электрычнага поля ў слоі.



Рыс. 1. Схема эксперыментальнай устаноўкі для вымярэнняў на тлеючым разрадзе:

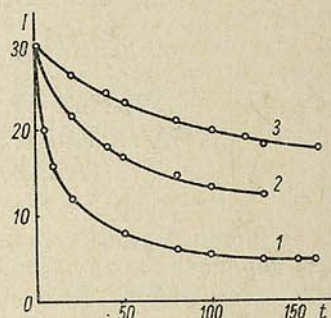
1 — разрадная камера; 2 — электроды; 3 — медны электрод; 4 — алюмініевы электрод, пакрыты слоем аморфнага селену

Можна меркаваць, што захоп носьбітаў адбываецца на больш дробных улоўніках з глыбінёй ўзроўню $< 0,01$ эв. Імавернасьць узбуджэння такіх улоўнікаў [7, 8], разлічаная для эфектыўнай масы $m^* = 2,5$ [3] і глыбіні ўзроўню ўлоўніка $0,005$ эв, блізкая да адзінкі. У гэтых умовах паявое ўзбуджэнне ўлоўнікаў можа быць адной з прычын росту ўсталяванага току пры павелічэнні дадатковага супраціўлення. Частка плошчы пад крывой, адпавядаючая ўчастку спаду току, дае поўную велічыню зараду, інжэктыраванага ў слой. Велічыня зараду аказваецца



Рыс. 2. Залежнасць току I , мка ў сістэме метал—плазма—селен—метал ад часу вытрымкі t , сек пад напружаннем пры адным і тым жа ўзроўні інжэкцыі, але розных значэннях напружання і супраціўлення ў ланцугу:

1 — $R=0$ і $V=60$ в; 2 — 440 ом і 80 в; 3 — 1 ком і 110 в



Рыс. 3. Залежнасць току I , мка ў сістэме метал—аквадаг—селен—метал ад часу t , сек вытрымкі яе пад напружаннем пры адным і тым жа ўзроўні інжэкцыі, але розных значэннях напружання і супраціўлення ў ланцугу:

1 — $R=0$ і $V=70$ в; 2 — 1 мом і 110 в; 3 — 2 мом і 140 в

адной і той жа для розных значэнняў дадатковага супраціўлення. Пры гэтым колькасць захопленых носьбітаў змяншаецца з павелічэннем дадатковага супраціўлення ў ланцугу. Такім чынам, змяншаецца ўплыў працэсаў захопу на велічыню току, які праходзіць. Гэта можа прывесці да таго, што прэваліруючымі будуць ёмістасныя эфекты, звязаныя з наапаўненнем зараду ў слой. Такое наапаўненне характарызуецца, як вядома, экспаненцыяльнай залежнасцю.

Былі таксама вымераны токі, якія праходзяць праз слой аморфнага селену, пры пастаянным напружанні, прыкладзеным да ўзору (плюс крыніцы на алюмініевым электродзе). У якасці другога электрода ўжываліся слаі аквадагу, якія наносіліся на паверхню слоя селену. Плошча кантакту складала $0,7$ см². Даследавалася залежнасць току інжэкцыі ад часу пры розных супраціўленнях у ланцугу структуры метал — ды-электрык — метал, а таксама тэмпературная залежнасць току інжэкцыі ад часу. Нагрэў рабіўся ў тэрмастаце да тэмпературы, якая не перавышала 60 °С. Павелічэнне тэмпературы вышэй за ўказаную прыводзіла, як правіла, у інтэрвале выкарыстоўваемых напружанняў да неабарачальных з'яў.

З рыс. 3 вынікае, што замена плазмы аквадагам не мяняе прыкметна характару залежнасці току ад часу. Павелічэнне тэмпературы выклікае рост велічыні ўсталяванага току (рыс. 4), а ўчастак спаду току на часовай залежнасці знікае.

Далейшае павелічэнне тэмпературы ўзору прыводзіць да раўнамернага росту току. Гэта можна растлумачыць наступным чынам. Пры нагрыванні сярэдня цеплавая энергія носьбітаў павялічваецца і ўзмац-

няецца працэс спусташэння ўлоўнікаў. Доля свабодных носбітаў пры гэтым узрастае. Паколькі велічыня стацыянарнага току залежыць ад колькасці свабодных носбітаў, то нагрэў прыводзіць да павелічэння ўсталяванага току. Награванне ўзору выклікае таксама павелічэнне рухомасці носбітаў [3], што таксама можа прыводзіць да павелічэння току. Для разліку шчыльнасці току ў слоі селену пры наяўнасці ўлоўнікаў можна выкарыстаць выраз, прыведзены ў [9]:

$$j = 10^{-13} \epsilon \mu \theta \frac{V^2}{L^3}, \quad (1)$$

дзе ϵ — дыэлектрычная пастаянная; μ — рухомасць носбітаў; V — прыкладзенае напружанне; L — таўшчыня слоя. Велічыня

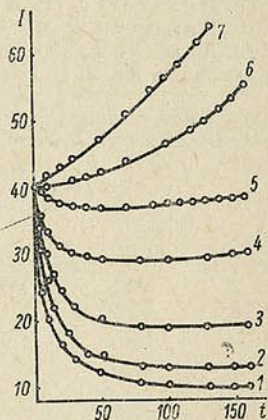
$$\theta = \frac{N_v}{N_t} \exp\left(-\frac{E}{kT}\right), \quad (2)$$

дзе E — глыбіня ўзроўню залягання ўлоўнікаў; N_v — эфектыўная шчыльнасць станаў у валентнай зоне; N_t — шчыльнасць улоўнікаў; k — пастаянная Больцмана; T — абсалютная тэмпература.

Як відаць з рыс. 4, нахіл прамалінейных участкаў мяняецца ў часе. Эфектыўная энергія актывацыі, якая вызначаецца з нахілу прамалінейных участкаў, павялічваецца з часам, што можа быць выклікана запаўненнем улоўнікаў, якія маюць суцэльны спектр размеркавання па энергіях.

Раўнамерны рост току пры тэмпературах, якія перавышаюць 50°C (рыс. 4), можа быць выклікан пачаткам крышталізацыі селену. Велічыня ўдзельнага супраціўлення селену пры зададзенай тэмпературы змяншаецца з цягам часу [10]. Змяншэнне супраціўлення выклікае адпаведна рост току ў слоі. Пры тэмпературах ніжэй 50°C працэсы крышталізацыі могуць не вельмі прыкметна праяўляцца. У гэтых умовах прыкладзенае да структуры знешняе напружанне пры аднолькавым узроўні інжэкцыі праходзіць праз максімум, які можа супадаць з пачаткам прыкметнай крышталізацыі селену.

Атрыманая эксперыментальная даныя, а таксама іх якасны аналіз паказваюць, што незалежна ад тыпу кантакту ў сляях аморфнага селену ток мяняецца ў часе ў выніку інжэкцыі носбітаў зараду. Працэсы пераносу носбітаў зараду ў слоі аморфнага селену характарызуецца наяўнасцю ўлоўнікаў, якія размяшчаюцца, відаць, на паверхні кантактнага слоя. Ступень запаўнення гэтых улоўнікаў залежыць ад умоў эксперымента і вызначаецца ў асноўным наступнымі фактарамі: велічынёй унутранага поля ў слоі селену, канцэнтрацыяй свабодных носбітаў і іх рухомасцю. Апошнія два фактары праяўляюцца пры награванні структуры, што можа мець значэнне для схем, якія працуюць ва ўмовах павышаных тэмпературных рэжымаў. Ацэнка ўкладу кожнага з указаных вышэй фактараў выходзіць за рамкі гэтай работы і з'яўляецца прадметам далейшага даследавання.



Рыс. 4. Залежнасць току I , яка ў сістэме метал—аквадаг—селен—метал ад часу вытрымкі t , сек пад напружаннем пры адным і тым жа ўзроўні інжэкцыі, але розных значэннях напружання і тэмпературы:

1— 30°C і 140 в; 2— 35°C і 140 в; 3—40 і 150; 4—45 і 170; 5—50 і 180; 6—55 і 160; 7—60 і 100

Літаратура

1. Lanyon H. P. D., Spear W. E. Proc. Phys. Soc., 6, № 498, 1157, 1961.
2. Dresner I. J. Chem. Phys., 35, № 5, 1628, 1961.
3. Hartke I. Phys. Rev., 125, № 4, 1177, 1962.
4. Lanyon H. P. D. Phys. Rev., 130, № 1, 134, 1963.
5. Вищакас Ю. К., Юшка Г. Б., Петровицус А. Д., Матуленис А. Ю. ФТТ, 8, в. 5, 1616, 1966.
6. Brander R. W., Lamb D. K., Rundle P. C. Brit. J. Appl. Phys., 18, № 1, 23, 1966.
7. Franz W. Ann. Phys., 11, 17, 1952.
8. Pochler T. O., Abraham D. J. Appl. Phys., № 8, 2452, 1966.
9. Бакиров М. Я., Джалимов И. З. ФТТ, 8, в. 1, 293, 1966.
10. Ахмедов Ф. И., Маковский Ф. А., Пирагас Л. Е. Изв. Ленингр. электротехн. ин-та им. В. И. Ульянова, 3, в. 57, 135, 1966.

*Белорусский государственный
университет им. В. И. Ленина*

*Поступило в редакцию
3.1 1968*

КАРОТКІЯ ПАВЕДАМЛЕННІ

УДК 51.330.115

В. И. КОМЛИК, В. А. ЕМЕЛИЧЕВ

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ЦЕЛОЧИСЛЕННОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

1. Рассмотрим задачу максимизации линейной формы

$$L(X) = L(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{j=1}^n c_j x_j \quad (1)$$

при условиях

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i, \quad i = 1, 2, \dots, m; \quad (2)$$

$$0 \leq x_j \leq d_j, \quad j = 1, 2, \dots, n; \quad (3)$$

$$x_j \text{ — целое число, } j = 1, 2, \dots, n. \quad (4)$$

Параметры $b_i > 0$, $d_j > 0$, $c_j > 0^*$, a_{ij} — целые числа.

Известно [1], что для решения этой задачи при $m=1$ может быть эффективно использован метод динамического программирования. Однако по мере увеличения числа ограничений трудоемкость метода резко возрастает в связи с необходимостью вычисления функций m переменных. Предлагаемый алгоритм состоит в направленном переборе планов вспомогательной задачи с одним ограничением ($m=1$) до получения плана задачи (1)–(4), который и будет оптимальным. Таким образом, решение m -мерной задачи сводится к решению ряда одномерных задач.

2. Предварительно докажем довольно очевидную теорему о решении задачи максимизации (1) при одном линейном ограничении и условиях (3).

Теорема 1. *Оптимальный план $X^0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ задачи A_i максимизации линейной формы (1) при условиях*

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i,$$

$$0 \leq x_j \leq d_j, \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

где $a_{ij} > 0$, $j = 1, 2, \dots, n^{**}$;

$$\frac{c_1}{a_{i1}} \geq \frac{c_2}{a_{i2}} \geq \dots \geq \frac{c_n}{a_{in}}, \quad (5)$$

^{*}) Случай $c_j < 0$ сводится к рассматриваемому заменой $\bar{x}_j = d_j - x_j$.

^{**}) Если $a_{ij} \leq 0$, то j -ая компонента оптимального плана задачи A_i равна d_j .

определяется формулами

$$x_j^0 = \begin{cases} d_j, & \text{если } j \leq r_0, \\ 0, & \text{если } j > r_0 + 1, \end{cases} \quad (6)$$

$$x_{r_0+1}^0 = \frac{b_i - \sum_{j < r_0} a_{ij} d_j}{a_{i, r_0+1}},$$

где $r_0 = \max \left\{ r \mid \sum_{j < r} a_{ij} d_j \leq b_i \right\}$.

Доказательство. Случай $\sum_{j=1}^n a_{ij} d_j \leq b_i$ тривиальный, так как $x_j^0 = d_j$, $j = 1, 2, \dots, n$. Если $\sum_{j=1}^n a_{ij} d_j > b_i$, то оптимальный план задачи A_i принадлежит множеству $G' = \left\{ X \mid \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i, 0 \leq x_j \leq d_j, j = 1, 2, \dots, n \right\}$. Поэтому для доказательства теоремы достаточно показать, что для любого плана $X' = (x'_1, x'_2, \dots, x'_n) \in G'$ выполняется неравенство $L(X^0) \geq L(X')$, где $X^0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ — план, определяемый формулами (6).

Мы имеем $L(X^0) - L(X') = \sum_{j=1}^n c_j \Delta x_j$, где $\Delta x_j = x_j^0 - x'_j$, $j = 1, 2, \dots, n$. Здесь

$$\Delta x_j \geq 0 \quad \text{для } j = 1, 2, \dots, r_0 \quad (0 \leq r_0 \leq n-1)^*),$$

$$\Delta x_j \leq 0 \quad \text{для } j = r_0 + 2, r_0 + 3, \dots, n.$$

Возможны два случая:

1) $\Delta x_{r_0+1} \geq 0$. Тогда

$$L(X^0) - L(X') = \sum_{j=1}^{r_0+1} c_j \Delta x_j - \sum_{j=r_0+2}^n c_j |\Delta x_j|.$$

Так как справедливы неравенства (5), то

$$c_j \geq \frac{c_{r_0+1}}{a_{i, r_0+1}} a_{ij}, \quad j = 1, 2, \dots, r_0 + 1,$$

$$c_j \leq \frac{c_{r_0+1}}{a_{i, r_0+1}} a_{ij}, \quad j = r_0 + 2, r_0 + 3, \dots, n.$$

Следовательно,

$$L(X^0) - L(X') \geq \frac{c_{r_0+1}}{a_{i, r_0+1}} \left(\sum_{j=1}^{r_0+1} a_{ij} \Delta x_j - \sum_{j=r_0+2}^n a_{ij} |\Delta x_j| \right) =$$

$$= \frac{c_{r_0+1}}{a_{i, r_0+1}} \sum_{j=1}^n a_{ij} \Delta x_j = \frac{c_{r_0+1}}{a_{i, r_0+1}} \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j^0 - \sum_{j=1}^n a_{ij} x'_j \right) = 0,$$

что и требовалось доказать.

*) Случай $r_0 = n$ исключен нами ранее как тривиальный.

2) $\Delta x_{r_0+1} < 0$. Здесь доказательство проводится аналогично, с той лишь разницей, что $1 \leq r_0 \leq n-1$. Если бы $r_0 = 0$, то $a_{i1}d_1 > b_i$, т. е. $x_1^0 = \frac{b_i}{a_{i1}}$, $x_j^0 = 0$, $j = 2, 3, \dots, n$, и, следовательно, $\Delta x_1 \geq 0$. Доказательство теоремы закончено.

Обозначим через L_i максимальное значение функционала задачи A_i . Очевидно, что $L(X) \leq \min_{1 \leq i \leq m} L_i$ для любого плана X задачи (1) — (4).

3. Задачу A_i с дополнительным условием целочисленности (4) будем обозначать через A_i^* . Аналогично [2] план $\bar{X} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)$ задачи A_i^* будем называть h -оптимальным ($1 \leq h \leq n$) и обозначать $(*, *, \dots, *, \bar{x}_{h+1}, \dots, \bar{x}_n)$, если

$$L(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n) = c_{h+1}\bar{x}_{h+1} + \dots + c_n\bar{x}_n + f_h \left(b_i - \sum_{j=h+1}^n a_{ij}\bar{x}_j \right).$$

Здесь $f_h(z)$ — оптимальное значение линейной формы задачи A_i^* , в котором индекс n и параметр b_i заменены соответственно на h и z [1].

Таким образом, $\bar{X} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)$ — h -оптимальный план задачи A_i^* , если $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)$ — оптимальный план задачи максимизации линейной формы $\sum_{j=1}^h c_j x_j$ при условиях

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^h a_{ij}x_j &\leq b_i - \sum_{j=h+1}^n a_{ij}\bar{x}_j; \\ 0 &\leq x_j \leq d_j, \quad j = 1, 2, \dots, h; \\ x_j &\text{ — целое число, } j = 1, 2, \dots, h. \end{aligned}$$

Эффективный метод решения этой задачи подробно изложен в [1] для случая, когда $a_{ij} > 0$, $j = 1, 2, \dots, h$. Если среди чисел a_{ij} , $j = 1, 2, \dots, h$ есть $a_{ik} \leq 0$, то, очевидно, что k -ая компонента h -оптимального плана задачи A_i^* равна d_k .

Непосредственно из определения h -оптимального плана \bar{X} следует, что

$$L(\bar{X}) = \max_{X \in M_i(\bar{X})} L(X), \quad (7)$$

где $M_i(\bar{X})$ — множество всевозможных планов задачи A_i^* , у которых $x_j = \bar{x}_j$, $j = h+1, h+2, \dots, n$.

Используя понятие h -оптимального плана задачи A_i^* , можно следующим образом описать алгоритм построения последовательности всех планов X_i^1, X_i^2, \dots задачи A_i^* в порядке невозрастания функционала (1), т. е. такой последовательности, что $L(X_i^k) = \max_{X \in G_i^k} L(X)$, где $G_i^k = G_i^{k-1} \setminus X_i^{k-1}$, а

$G_i^1 = G_i$ — множество всех планов задачи A_i^* .

Первый шаг. Среди множества W_i^1 ($n-1$)-оптимальных планов

$$(*, *, \dots, *, d), \quad l = 0, 1, \dots, \min \left(d_n, \left[\frac{b_i - \sum_{j \in J_{i,n-1}} a_{ij}d_j}{a_{in}} \right] \right)^*$$

* Если $a_{in} \leq 0$, то $l = 0, 1, 2, \dots, d_n$.

задачи A_i^* , где $J_{i,n-1}^- = \{j | j \in \{1, 2, \dots, n-1\}, a_{ij} \leq 0\}$, находим такой план $X_i^1 = (*, *, \dots, *, s_n^1) = (s_1^1, s_2^1, \dots, s_n^1)$, что $L(X_i^1) = \max_{x \in W_i^1} L(X)$.

k -ый шаг ($k = 2, 3, \dots$). Множество планов W_i^{k-1} преобразуем во множество W_i^k по следующему правилу. Оставляем без изменения все планы множества W_i^{k-1} , кроме плана $X_i^{k-1} = (*, *, \dots, *, s_p^{k-1}, \dots, s_n^{k-1}) = (s_1^{k-1}, s_2^{k-1}, \dots, s_n^{k-1})$, который заменяем системой планов

$$(*, *, \dots, *, s_{q-1}, s_q^{k-1}, \dots, s_p^{k-1}, \dots, s_n^{k-1}),$$

где

$$q = 2, 3, \dots, p,$$

$$s_{q-1} = 0, 1, \dots, s_{q-1}^{k-1} - 1, s_{q-1}^{k-1} + 1, \dots$$

$$\dots, \min \left(d_{q-1}, \left[\frac{b_i - \sum_{j=q}^n a_{ij} s_j^{k-1} - \sum_{i \in J_{i,q-2}^-} a_{ij} d_j}{a_{i,q-1}} \right] \right)^*,$$

$$J_{i,q-2}^- = \{j | j \in \{1, 2, \dots, q-2\}, a_{ij} \leq 0\}.$$

Далее находим такой план X_i^k , что $L(X_i^k) = \max_{x \in W_i^k} L(X)$, и переходим к следующему шагу.

4. Введем обозначение $M_i^k = \bigcup_{x \in W_i^k} M_i(X)$. Очевидно, что $M_i^1 = G_i$, где

G_i — множество всех планов задачи A_i^* . Через G будем обозначать множество планов задачи (1) — (4).

Теорема 2. План X_i^k последовательности X_i^1, X_i^2, \dots такой, что $X_i^k \in G$, а $X_i^l \notin G$, $l = 1, 2, \dots, k-1$, является оптимальным планом задачи (1) — (4).

Доказательство. В алгоритме φ множество W_i^k получается из множества W_i^{k-1} путем замены плана X_i^{k-1} множеством планов $O(X_i^{k-1})$, т. е.

$$W_i^k = (W_i^{k-1} \setminus X_i^{k-1}) \cup O(X_i^{k-1}),$$

при этом $O(X_i^{k-1})$ обладает свойством

$$\bigcup_{x \in O(X_i^{k-1})} M_i(X) = M_i(X_i^{k-1}) \setminus X_i^{k-1}.$$

Отсюда

$$\begin{aligned} M_i^k &= \bigcup_{x \in W_i^k} M_i(X) = \left\{ \bigcup_{x \in W_i^{k-1} \setminus X_i^{k-1}} M_i(X) \right\} \cup \left\{ \bigcup_{x \in O(X_i^{k-1})} M_i(X) \right\} = \\ &= \left\{ \bigcup_{x \in W_i^{k-1} \setminus X_i^{k-1}} M_i(X) \right\} \cup \left\{ M_i(X_i^{k-1}) \setminus X_i^{k-1} \right\} = M_i^{k-1} \setminus X_i^{k-1}. \end{aligned}$$

*) Если $a_{i,q-1} \leq 0$, то $s_{q-1}^{k-1} = d_{q-1}$ и $s_{q-1} = 0, 1, \dots, d_{q-1} - 1$.

Последнее равенство справедливо, так как

$$\left\{ \bigcup_{x \in W_i^{k-1} \setminus X_i^{k-1}} M_i(X) \right\} \cap M_i(X_i^{k-1}) = \emptyset^*.$$

Итак, $M_i^k = M_i^{k-1} \setminus X_i^{k-1}$, т. е. $M_i^k = M_i^1 \setminus \{X_i^1, X_i^2, \dots, X_i^{k-1}\}$. Поэтому в силу (7)

$$\begin{aligned} L(X_i^k) &= \max_{\bar{x} \in W_i^k} L(\bar{X}) = \max_{\bar{x} \in W_i^k} \max_{x \in M_i(\bar{X})} L(X) = \\ &= \max_{x \in M_i^k} L(X) = \max_{x \in M_i^1 \setminus \{x_i^1, x_i^2, \dots, x_i^{k-1}\}} L(X). \end{aligned}$$

Так как $X_i^l \in G$, $l = 1, 2, \dots, k-1$ и $G \subset M_i^1$, то

$$L(X_i^k) = \max_{x \in M_i^1 \setminus \{x_i^1, x_i^2, \dots, x_i^{k-1}\}} L(X) \geq \max_{x \in G} L(X).$$

С другой стороны, $X_i^k \in G$, поэтому

$$L(X_i^k) \leq \max_{x \in G} L(X).$$

Следовательно, $L(X_i^k) = \max_{x \in G} L(X)$, а это доказывает теорему.

5. Непосредственно из теоремы 2 вытекает следующий алгоритм ψ поиска оптимального плана задачи (1) — (4).

Предварительно находим $\min_{1 \leq i \leq m} L_i = L_i$ (см. п. 2). На k -ом шаге ($k = 1, 2, \dots$) строим план X_i^k задачи A_i^* (см. п. 4) и проверяем, удовлетворяет ли он условиям (2). Если да, то X_i^k — оптимальный план задачи (1) — (4). Если нет, то переходим к $(k+1)$ -му шагу.

Нетрудно заметить, что изложенные алгоритмы φ и ψ не изменятся, если допустить равенство нулю некоторых коэффициентов линейной формы (1). При этом лишь упрощается нахождение h -оптимальных планов, так как если $c_j = 0$ и $a_{ij} > 0$, то j -ая компонента h -оптимального плана ($j \leq h$) задачи A_i^* равна нулю, а если $c_j = 0$ и $a_{ij} \leq 0$, то j -ая компонента h -оптимального плана ($j \leq h$) задачи A_i^* равна d_j .

6. В заключение отметим, что трудоемкость описанного метода почти не увеличивается, если заменить линейную форму (1) нелинейной сепарабельной функцией.

Кроме того, метод применим к решению задачи дискретного программирования с сепарабельной целевой функцией:

$$\sum_{j=1}^n f_j(x_j) \rightarrow \max; \quad (8)$$

$$(x_{j1}, x_{j2}, \dots, x_{j p_j}) \in B_i, \quad i = 1, 2, \dots, m; \quad (9)$$

$$x_j \in \{e_{j1}, e_{j2}, \dots, e_{j p_j}\}, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad (10)$$

где

$f_j(x_j)$ — произвольная функция;

$j_{ir} \in \{1, 2, \dots, n\}$, $r = 1, 2, \dots, p_i$, $i = 1, 2, \dots, m$;

$j_{ir} \neq j_{is}$ при $r \neq s$;

*) Заметим, что $M_i(X') \cap M_i(X'') = \emptyset$ для всех $X', X'' \in W_i^{k-1}$ и $X' \neq X''$.

B_i — некоторое множество p_i -мерных векторов;

$$e_{jr} \neq e_{js} \quad \text{при } r \neq s.$$

Каждое из множеств B_i может быть задано различными способами, например: а) уравнением, б) неравенством, в) логическим условием, г) списком входящих в B_i векторов и т. д.*)

Чтобы найти оптимальный план задачи (8) — (10), необходимо подобно тому как в алгоритме ψ последовательно в порядке невозрастания функционала $\sum_{j=1}^n f_j(x_j)$ строить планы задачи

$$\sum_{j=1}^n f_j(x_j) \rightarrow \max;$$

$$\sum_{j=1}^n x_j \leq \sum_{j=1}^n \max_{1 \leq r \leq k_j} e_{jr};$$

$$x_j \in \{e_{j1}, e_{j2}, \dots, e_{jk_j}\}, \quad j = 1, 2, \dots, n$$

до выполнения условий (9).

Литература

1. Гольштейн Е. Г., Юдин Д. Б. Новые направления в линейном программировании. М., 1966.
2. Емеличев В. А., Комлик В. И. ДАН БССР, 10, № 10, 1966.
3. Финкельштейн Ю. Ю. Экономика и математические методы, 1, вып. 2, 1965.

Белорусский государственный университет им. В. И. Ленина

Поступило в редакцию
22.IX 1967

* Постановка задачи взята из [3].

ЗМЕСТ

МАТЭМАТЫКА

В. Г. Спринджук. Оценки линейных форм с p -адическими логарифмами алгебраических чисел	5
В. С. Айзенштат, Д. Н. Кравчук. Об экстремуме линейной формы на множестве всех циклов произвольной длины k группы S_n	15
Л. П. Примачук. О числе решений краевой задачи с сопряжением и сдвигом Карлемана	20
Хоанг Динь Зунг. Устойчивость обратной краевой задачи в случае многолистности решения и некоторые обобщения	26
Б. М. Архипов, А. Я. Хохряков. К вопросу об оценке матрицы Грина периодической краевой задачи	31
И. А. Павлов. Коммутативные нильпотентные алгебры матриц класса $n-3$. I	39
А. К. Лапковский. О гиперквадриках с изотропными линиями кривизны	47
Н. Я. Козловский. Об оценке остаточного члена интерполяционно-квадратурных формул с узлами Чебышева первого и второго рода	53
П. И. Монастырный, В. А. Басик. О методе прогонки в случае многомерных разностных уравнений	63
В. А. Казущик, В. И. Ладес. Автоматическое построение схем, сравнивающих значения линейной функции с заданными константами	72

ФІЗІКА

Н. Н. Сирота, В. Б. Шипило. Влияние высоких давлений на электропроводность и коэффициент Холла монокристаллов антимонида галлия n - и p -типов при различных температурах	80
О. С. Иваницкая. О свойствах параметров бесконечно малых лоренцевых преобразований в гравитационном поле	85
А. А. Кавалёв, У. А. Піліповіч, Ю. В. Развін. Залежнась некоторых параметров моанімпульсаў рубінавых АКГ ад пачатковага прапускання пасіўных затвораў	92
И. Л. Кацев, А. П. Иванов. Отражение светового импульса от предмета в рассеивающей среде	102
В. Н. Третьяков. Комптоновское рассеяние на дейтроне	109
Л. Ф. Корзун. Аб радыяцыйным вымярэнні тэмпературы паверхні цела, якое знаходзіцца ў замкнутай поласці	119
А. Д. Андреев, В. І. Лойка, І. Р. Некрашэвіч. Уплыў экспанзіцы і напружання на інжекцыю электронаў з плазмы газавога разраду ў селен	123

КАРОТКІЯ ПАВЕДАМЛЕННІ

В. И. Комлик, В. А. Емеличев. Об одной задаче целочисленного программирования	127
---	-----

СОДЕРЖАНИЕ

МАТЕМАТИКА

В. Г. Спринджук. Оценки линейных форм с p -адическими логарифмами алгебраических чисел	5
В. С. Айзенштат, Д. Н. Кравчук. Об экстремуме линейной формы на множестве всех циклов произвольной длины k группы S_n	15
Л. П. Примачук. О числе решений краевой задачи с сопряжением и сдвигом Карлемана	20
Хоанг Динь Зунг. Устойчивость обратной краевой задачи в случае многолистности решения и некоторые обобщения	26
Б. М. Архипов, А. Я. Хохряков. К вопросу об оценке матрицы Грина периодической краевой задачи	31
И. А. Павлов. Коммутативные нильпотентные алгебры матриц класса $n-3$. I.	39
А. К. Лапковский. О гиперквадратах с изотропными линиями кривизны	47
Н. Я. Козловский. Об оценке остаточного члена интерполяционно-квадратурных формул с узлами Чебышева первого и второго рода	53
П. И. Монастырский, В. А. Басик. О методе прогонки в случае многомерных разностных уравнений	63
В. А. Казушик, В. И. Ладес. Автоматическое построение схем, сравнивающих значения линейной функции с заданными константами	72

ФИЗИКА

Н. Н. Сирота, В. Б. Шипило. Влияние высоких давлений на электропроводность и коэффициент Холла монокристаллов антимонида галлия n - и p -типов при различных температурах	80
О. С. Иваницкая. О свойствах параметров бесконечно малых лоренцевых преобразований в гравитационном поле	85
А. А. Ковалев, В. А. Пилипович, Ю. В. Развин. Зависимость некоторых параметров моноимпульсов рубиновых ОКГ от начального пропускания пассивных затворов	92
И. Л. Кацев, А. П. Иванов. Отражение светового импульса от предмета в рассеивающей среде	102
В. Н. Третьяков. Комptonовское рассеяние на дейтроне	109
Л. Ф. Корзун. О радиационном измерении температуры поверхности тела, находящегося в замкнутой полости	119
А. Д. Андреев, В. И. Лойко, И. Г. Некрашевич. Влияние экспозиции и напряжения на инжекцию электронов из плазмы газового разряда в селен	123

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

В. И. Комлик, В. А. Емеличев. Об одной задаче целочисленного программирования	127
---	-----

РЕФЕРАТЫ

УДК 511

Оценки линейных форм с p -адическими логарифмами алгебраических чисел. Спринджук В. Г. «Весті Акадэміі навук БССР, серыя фізіка-матэматычных навук. 1968 г., № 4, 5—14.

Доказаны две теоремы об оценках снизу p -адической нормы линейных форм с p -адическими логарифмами алгебраических чисел. Первая теорема аналогична известной теореме А. Бэйкера об оценках линейных форм с комплекснозначными логарифмами, а вторая является ее усилением при специальных предположениях.

Библиографий 10.

УДК 51 : 330.115

Об экстремуме линейной формы на множестве всех циклов произвольной длины k группы S_n . Айзенштат В. С., Кравчук Д. Н. «Весті Акадэміі навук БССР», серыя фізіка-матэматычных навук. 1968 г., № 4, 15—19.

Рассмотрена задача отыскания подстановки, доставляющей минимальное (максимальное) значение функции $f_t = \sum_{v=1}^n a_v b_{t(v)}$, где t пробегает множество всех циклов длины k симметрической группы S_n , а a_v и b_v — заданные вещественные числа.

Приводятся результаты решения этой задачи в случаях, когда $b_1 \geq b_2 \geq \dots \geq b_n$ и $b_1 \leq b_2 \leq \dots \leq b_n$.

Библиографий 2.

УДК 517.948.32

О числе решений краевой задачи с сопряжением и сдвигом Карлемана. Примачук Л. П. «Весті Акадэміі навук БССР», серыя фізіка-матэматычных навук. 1968 г., № 4, 20—25.

На единичном круге Γ рассматривается следующая краевая задача:

$$\varphi^+(t) = a(t) \varphi^-(t) + b(t) \overline{\varphi^-(\alpha(t))} + d(t), \quad \varphi^-(\infty) = 0, \quad (1)$$

где $a(t)$, $b(t) \in H(\Gamma)$, $|a(t)| \neq 0$, $\alpha(t)$ — прямой сдвиг Карлемана для $n = 2$, $\alpha'(t) \neq 0$ и удовлетворяет условию Гельдера с $\lambda > \frac{1}{2}$.

Получены оценки числа линейно независимых решений через некоторые функциональные характеристики $a(t)$, $b(t)$ и $\alpha(t)$.

Библиографий 3.

УДК 514.544

Устойчивость обратной краевой задачи в случае многолистности решения и некоторые обобщения. Хоанг Динь Зунг. «Весті Академії наук БССР», серия фізика-математических наук. 1968 г., № 4, 26—30.

Дано обобщение результатов, полученных автором в работе, опубликованной в журнале «Весті АН БССР», № 4, 1967, на случай многолистности решения обратной краевой задачи, а также показано, что эта задача может оказаться неустойчивой, если производные задаваемых функций одновременно обращаются в нуль.

Библиографий 8.

УДК 517.919

К вопросу об оценке матрицы Грина периодической краевой задачи. Архипов Б. М., Хохряков А. Я. «Весті Академії наук БССР», серия фізика-математических наук. 1968 г., № 4, 31—38.

Приводятся оценки матрицы Грина краевой задачи

$$\ddot{x} + A(t)x = 0, \quad x(\alpha) = x(\beta), \quad \ddot{x}(\alpha) = \ddot{x}(\beta),$$

где $A(t)$ — непрерывная на промежутке $[\alpha, \beta]$ $n \times n$ -матрица, а также оценки функции Грина и ее производной по первому аргументу одномерной периодической краевой задачи для уравнения второго порядка.

Библиографий 4.

УДК 519.48

Коммутативные нильпотентные алгебры матриц класса n -3. Павлов И. А. «Весті Академії наук БССР», серия фізика-математических наук. 1968 г., № 4, 39—46.

Пусть P — алгебраически замкнутое поле нулевой характеристики, $U_{n,k}$ — множество всех максимальных коммутативных нильпотентных подалгебр класса k полной линейной алгебры P_n , а $\bar{U}_{n,k}$ — множество классов сопряженных в P_n алгебр из $U_{n,k}$. Известно, что для $n \leq 6$ множество $\bar{U}_{n,k}$ при любом возможном k конечно, для $n > 6$ множества $\bar{U}_{n,2}$, $\bar{U}_{n,n-2}$, $\bar{U}_{n,n-1}$, $\bar{U}_{n,n}$ конечны, а при $3 \leq k \leq n-4$ множество $\bar{U}_{n,k}$ бесконечно. В реферируемой работе доказывается бесконечность $\bar{U}_{9,6}$, $\bar{U}_{10,7}$ и производится классификация с точностью до сопряженности в P_n алгебр множеств $U_{7,4}$, $U_{8,5}$ и $U_{n,n-3}$ при $n > 10$, содержащих матрицу a ранга $n-2$, удовлетворяющую условию $a^{n-4} \neq 0$.

Библиографий 7.

УДК 513

О гиперквадриках с изотропными линиями кривизны. Лаповский А. К. «Весті Академії наук БССР», серия фізика-математических наук. 1968 г., № 4, 47—52.

Основные свойства гиперквадрик евклидова пространства охарактеризованы Л. Л. Вербицким (Тр. сем. по вект. и тенз. анализу, в. 8, 1949). Можно показать, что полученные им результаты сохраняют силу и для того случая псевдоевклидова пространства E_{n+1} , когда характеристика Сегре λ -матрицы $\|\Lambda_{ij} - \lambda q_{ij}\|$ 2-го фундаментального тензора Λ_{ij} гиперквадрики простого типа $(1 \dots 1)$.

Рассматриваются гиперквадрики с m действительными неизотропными главными направлениями; показано, что эти направления образуют голономное поле площадок, огибаемое нормальными m -поверхностями с регу-

лярной метрикой. Далее доказывается нормальность гиперквадрики, 2-й фундаментальный тензор которой имеет характеристическую матрицу с элементарными делителями кратности не выше 2; при этом подповерхности, ортогональные к линиям кривизны (в том числе и к изотропным), являются поверхностями уровня скаляров, являющихся определенными функциями главных кривизн; показано, что изотропные линии кривизны суть прямые.

Библиографий 4.

УДК 517.512.6

Об оценке остаточного члена интерполяционно-квadrатурных формул с узлами Чебышева первого и второго рода. Козловский Н. Я. «Весті Академії наук БССР», серия фізика-математических наук. 1968 г., № 4, 53—62.

Статья является продолжением работы С. М. Никольского «Квadrатурные формулы» (М., 1958) об определении верхней грани квadrатурной формулы

$$\sup_{f \in F} \left| \int_a^b f(x) dx - \sum_{k=0}^{m-1} p_k f(x_k) \right|$$

С. М. Никольским определена верхняя грань для простейших квadrатурных формул.

В этой работе найдено асимптотическое значение верхней грани по узлам полинома Чебышева первого и второго рода интерполяционной квadrатурной формулы для класса функций F , имеющих кусочно-непрерывную первую производную, удовлетворяющих неравенству

$$\left(\int_{-1}^1 |f'(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \leq M.$$

Получена оценка по узлам полинома Чебышева первого рода

$$\begin{aligned} \sup_{f \in F} \left| \int_{-1}^1 f(x) dx - \sum_{k=0}^{2n-1} p_k f(x_k) \right| = \\ = M \left[\frac{\pi^2}{36n^2} + O\left(\frac{\ln^2 n}{n^4}\right) \right]^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

и по узлам полиномов Чебышева второго рода

$$\begin{aligned} \sup_{f \in F} \left| \int_{-1}^1 f(x) dx - \sum_{k=0}^{2n-1} p_k f(x_k) \right| = \\ = M \left[\frac{\pi^2}{36n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right) \right]^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Библиографий 4.

УДК 518:517

О методе прогонки в случае многомерных разностных уравнений. Монастырский П. И., Басик В. А. «Весті Академії наук БССР», серия фізика-математических наук. 1968 г., № 4, 63—71.

В работе рассматривается применение метода прогонки к решению системы линейных алгебраических уравнений, возникающей при аппроксимации трехмерного уравнения теплопроводности, проводится исследование устойчивости и дается оценка накоплений вычислительных погрешностей.

Библиографий 6.

УДК 681.3.001

Автоматическое построение схем, сравнивающих значения линейной функции с заданными константами. Казушик В. А., Ладес В. И. «Весті Академії наук БССР», серия фізика-матэматычных навук. 1968 г., № 4, 72—79.

Предлагается алгоритм автоматического синтеза логических преобразователей, поведение которых описывается функцией, зависящей от линейной функции с целочисленными коэффициентами.

Каноническая таблица для этого случая строится со стороны старшего разряда.

Машинный алгоритм построения канонической таблицы состоит из трех частей. В первой части вычисляются границы интервалов значений линейной функции, принадлежащих вершинам канонической таблицы. Во второй части производится проверка условий принадлежности вычисленных границ заданным интервалам числовой оси и формируются обозначения элементов канонической таблицы. В третьей части накопленная информация выводится на печать в виде таблицы.

Формулы для вычисления интервалов значений линейной функции представлены в удобном для реализации на ЭВМ виде.

Описывается блок-схема программы вычисления и печати канонических таблиц на ЭВМ «Минск-22» (режим Т). Применение алгоритма и программы иллюстрируется примером.

Таблиц 2. Иллюстраций 3. Библиографий 3.

УДК 537.226+537.311.33] : [537+535

Влияние высоких давлений на электропроводность и коэффициент Холла монокристаллов антимонида галлия *n* и *p*-типов при различных температурах. Сирота Н. Н., Шипило В. Б. «Весті Академії навук БССР», серия фізика-матэматычных навук. 1968 г., № 4, 80—84.

Исследована зависимость удельной электропроводности σ и коэффициента Холла R монокристаллов антимонида галлия *n*- и *p*-типов в зависимости от давления (0—25 кбар) при различных температурах — от комнатной до 773°К. Исследования проводились в камере высокого давления, в которой находился электромагнит с нагревательной печью и образцом. Температура измерялась хромель-алюмелевой термопарой с точностью $\pm 2^\circ\text{K}$, а давление — манганиновым датчиком с точностью ± 200 бар. Приводится оценка погрешности измерения σ и R под высоким давлением.

Показано, что действие высокого давления и температуры существенно различно для *n*- и *p*-типов GaSb, что связывается с зонной структурой антимонида галлия.

Иллюстраций 4. Библиографий 7.

УДК 530.12

О свойствах параметров бесконечно малых лоренцевых преобразований в гравитационном поле. Иванецкая О. С. «Весті Академії навук БССР», серия фізика-матэматычных навук. 1968 г., № 4, 85—91.

Установлены свойства параметров бесконечно малого лоренцева преобразования в гравитационном поле в зависимости от калибровок тетрад. Приведены примеры простых, непростых, нулевых, канонических параметров, в частности, для шварцшильдова поля тяготения. Указана возможность упрощения гравитационного уравнения Эйнштейна в тетрадной форме при переходе к каноническим параметрам и возможность перехода к «векторной» параметризации указанного лоренцева преобразования.

Библиографий 14.

УДК 535.89

Зависимость некоторых параметров моноимпульсов рубиновых ОКГ от начального пропускания пассивных затворов. Ковалев А. А., Пилипович В. А., Развин Ю. В. «Весті Академії наук БССР», серия фізика-математичних наук, 1968 г., № 4, 92—101.

Исследовалась зависимость энергии и длительности моноимпульса рубинового ОКГ с пассивным затвором от начальной плотности просветляющегося фильтра. Найдено, что для фталоцианиновых затворов, просветляющихся в максимуме моноимпульса почти полностью, энергия моноимпульса линейно зависит от начальных потерь в ОКГ. Для криптоцианиновых затворов не наблюдается линейной зависимости между этими величинами, что объясняется неполным просветлением затвора. Показано, что влияние торцов рубина на величину начальных потерь может существенно изменить ход исследуемой зависимости.

Исследовалась также зависимость длительности моноимпульса Δt от начальной плотности фильтра T_{ϕ} . Экспериментальные результаты сопоставлены с теоретически рассчитанными зависимостями Δt от T_{ϕ} .

Таблиц 1. Иллюстраций 5. Библиографий 26.

УДК 535.36

Отражение светового импульса от предмета в рассеивающей среде. Кацев И. Л., Иванов А. П. «Весті Академії наук БССР», серия фізика-математичних наук, 1968 г., № 4, 102—108.

В приближении однократного рассеяния рассмотрена задача о видимости удаленного объекта в рассеивающей среде при использовании узконаправленного импульсного источника.

Найдена зависимость освещенности на приемнике от времени при довольно общих предположениях относительно геометрической схемы. Проанализировано влияние различных параметров системы излучатель — приемник (апертурные углы излучателя и приемника, расстояние между источником и приемником, длительность импульса), размеров объекта и расстояния до него на величину отношения сигнал/шум. Показано, например, что это отношение слабо зависит от расстояния τ_r между источником и приемником, если $\tau_r \ll \tau_h^*$ (τ_h^* — расстояние до объекта).

Иллюстраций 4. Библиографий 3.

УДК 539.121.7

Комптоновское рассеяние на дейтроне. Третьяков В. Н. «Весті Академії наук БССР», серия фізика-математичних наук, 1968 г., № 4, 109—116.

В импульсном приближении получена расчетная формула для сечения упругого рассеяния γ -квантов на дейтронах. Результаты расчета, проведенного на основе протонных и нейтронных амплитуд с учетом поправок на обменные силы, представлены на четырех графиках для углов рассеяния 90° , 110° , 140° в с. ц. и. (60 — 260 Мэв) и 50° , 90° в л. с. (60 — 140 Мэв). Проводится обсуждение результатов.

Таблиц 1. Иллюстраций 5. Библиографий 17.

В ИЗДАТЕЛЬСТВЕ „НАУКА И ТЕХНИКА“

ГОТОВИТСЯ К ПЕЧАТИ

О. С. Иваницкая

**«ОБОБЩЕННЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛОРЕНЦА
И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ»**

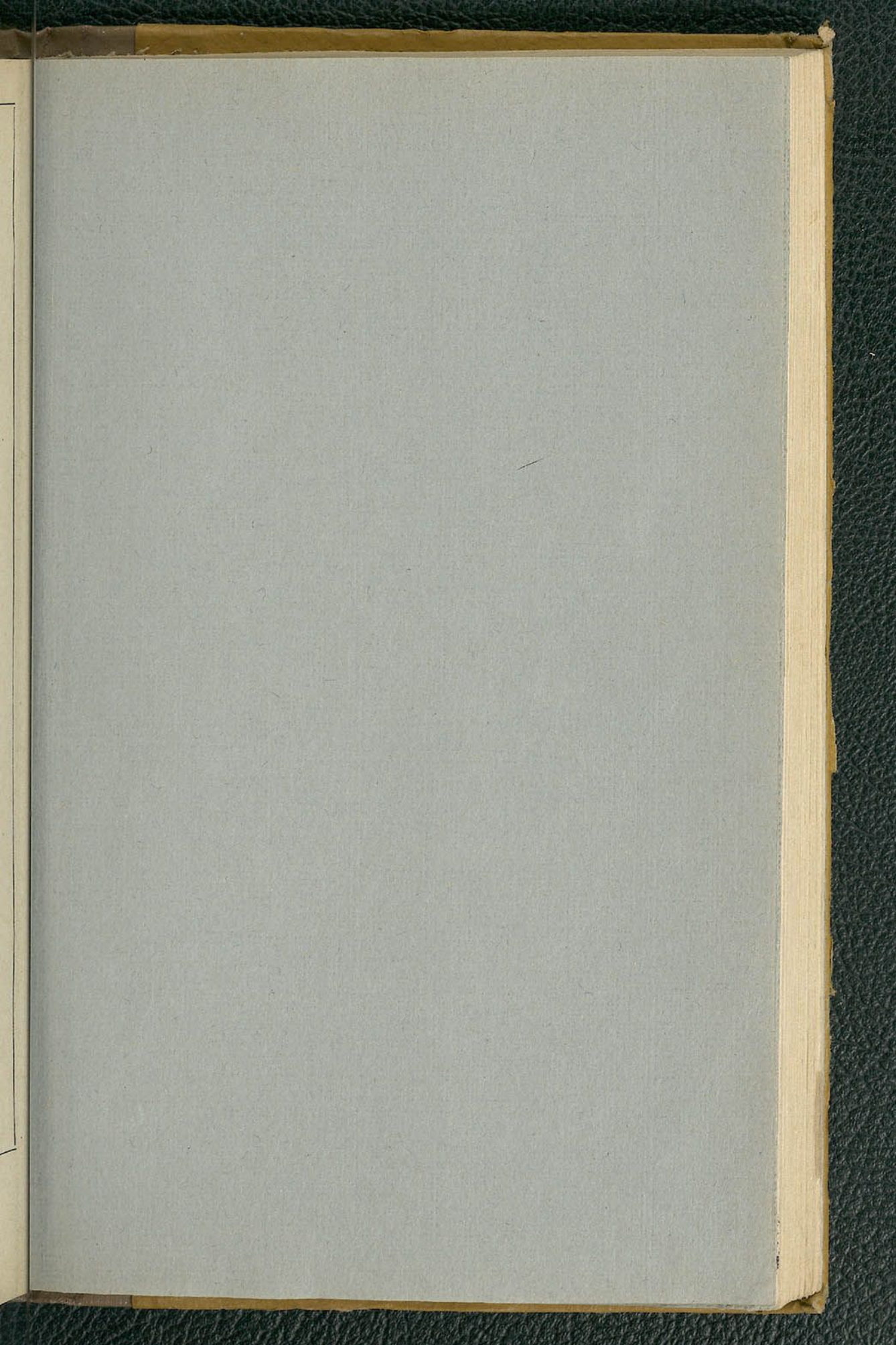
На русском языке. 15 л. Ориентировочная цена 1 руб.

В монографии с единой точки зрения систематизируются локальные преобразования Лоренца, зависящие от координат. Более детально они рассмотрены в трех разделах теоретической физики — в кинематике и динамике специальной теории относительности, в релятивистской теории вращения и общековариантной теории электромагнитного поля в плоском четырехмерном пространстве, но с искривленными подпространствами, в эйн-

штейновской теории гравитации в ее тетрадной форме. Анализируется геометрическая структура бесконечно малых обобщенных преобразований Лоренца, эквивалентных аффинной связности специального вида.

Монография рассчитана на научных работников в области специальной теории относительности и релятивистской теории гравитации, а также на преподавателей и студентов физических факультетов вузов.

*Заказы на книгу следует направлять Управлению книжной торговли Госкомитета СМ БССР по печати.
Адрес: г. Минск, Омский пер., 13.*



60 н.

Индекс
74846