

Серия 5

69 04 15

# ВЕСЦІ АКАДЭМІІ НАВУК БССР

---

СЕРЫЯ  
ФІЗІКА-МАТЭМАТЫЧНЫХ  
НАВУК

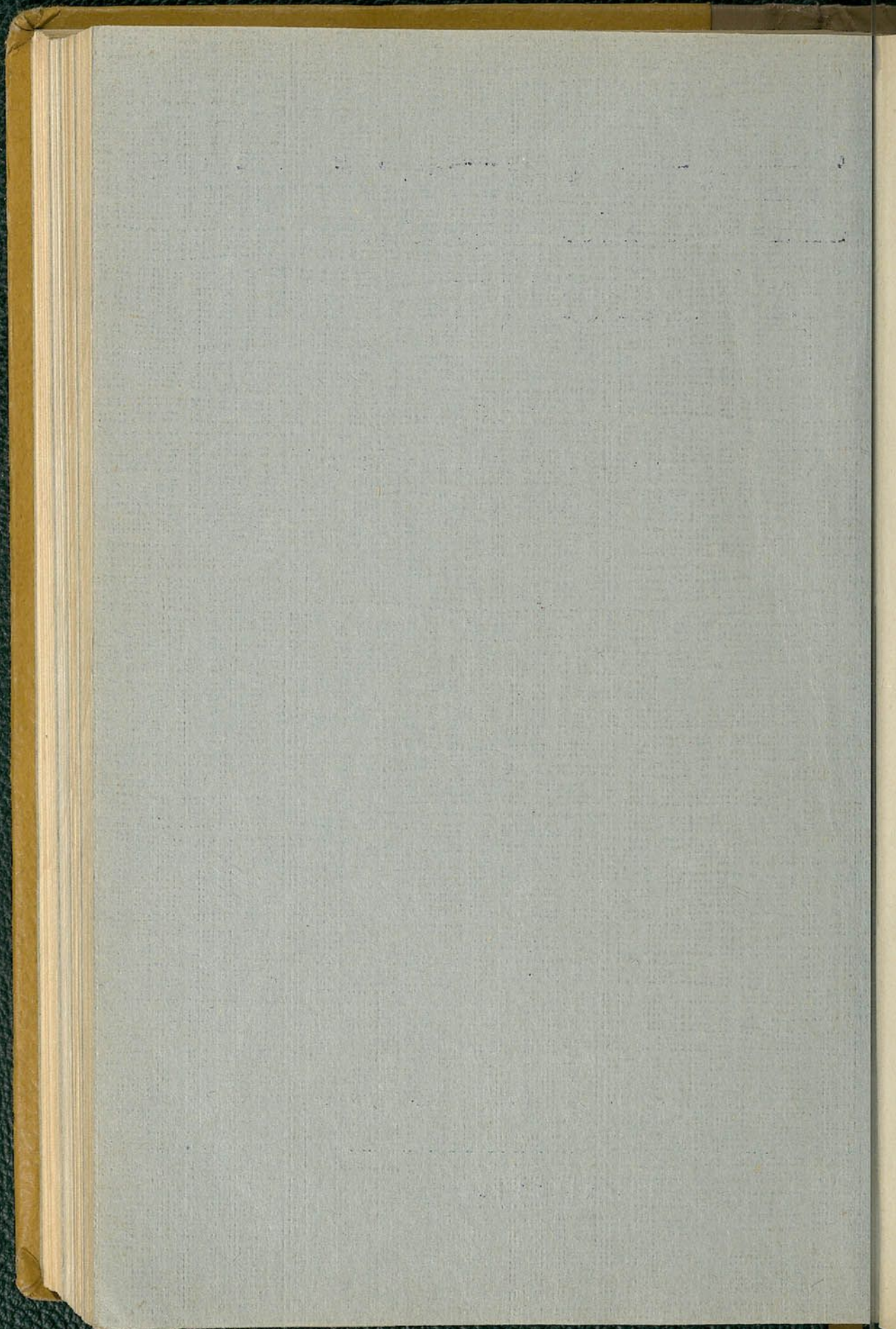


5

ВЫДАВЕЦТВА „НАВУКА І ТЭХНІКА“

---

МІНСК 1968





1951

# ИЗВЕСТИЯ

АКАДЕМИИ НАУК БССР

---

СЕРИЯ  
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ  
НАУК

№ 5

ИЗДАТЕЛЬСТВО „НАУКА И ТЕХНИКА“

---

МИНСК 1968

69.64.15

# ВЕСЦІ

АКАДЭМІІ НАВУК БССР

---

---

СЕРЫЯ  
ФІЗІКА-МАТЭМАТЫЧНЫХ  
НАВУК

Ба 3942

№ 5

ВЫДАВЕЦТВА „НАВУКА І ТЭХНІКА“

---

МІНСК 1968



Рэдакцыйная калегія:

Ф. І. ФЕДАРАЎ (галоўны рэдактар),  
Д. А. СУПРУНЕНКА (нам. галоўнага рэдактара),  
М. М. АЛЯХНОВІЧ, Ф. Д. ГАХАЎ, У. І. КРЫЛОЎ, М. М. СІРАТА,  
У. Г. СПРЫНДЖУК, Я. І. ФІРСАЎ, С. А. ЧУНІХІН

Л. М. ТАМІЛЬЧЫК

## РАЗВІЦЦЕ ФІЗІКА-МАТЭМАТЫЧНЫХ НАВУК У БЕЛАРУСІ ЗА 50 ГАДОУ

Гісторыя развіцця фізіка-матэматычных навук у Беларусі вядзе свой пачатак ад 1921 г., калі па ўказанню У. І. Леніна ў Мінску быў створан Беларускі дзяржаўны ўніверсітэт. Да гэтага ва ўсёй Беларусі не толькі не існавала ні адной навуковай установы, але поўнасьцю адсутнічалі вышэйшыя навучальныя ўстановы як тэхнічнага, так і агульнаадукацыйнага профілю.

Стварэнне ўніверсітэта дазволіла ажыццявіць першы неабходны для развіцця навукі крок — пачаць падрыхтоўку спецыялістаў. Вядома, гэты працэс спачатку не мог ажыццяўляцца без удзелу людзей, якія самі займаліся б навуковай дзейнасцю і былі б здольныя далучыць да навукі моладзь. Першымі такімі спецыялістамі былі высокакваліфікаваныя матэматыкі Ц. Л. Бурсцін (пасля выбраны акадэмікам АН БССР) і Я. Громер (адзін з супрацоўнікаў А. Эйнштэйна), якія прыехалі ў Мінск у 1928—1929 гг.

1929 год азнаменаваўся важнай падзеяй у навуковым жыцці Беларусі: была створана Акадэмія навук БССР, а з 1932 г. у яе сістэме пачаў працаваць Фізіка-тэхнічны інстытут — першая ў рэспубліцы навуковая ўстанова, дзе былі прадстаўлены фізіка-матэматычныя навукі. Дырэктар гэтага інстытута Ц. Л. Бурсцін узначаліў даследаванні па дыферэнцыяльнай геаметрыі, механіцы і тэорыі адноснасці. Такім чынам, ужо ў канцы 20-х гадоў узніклі спрыяльныя ўмовы для выхавання навуковых кадраў па матэматыцы. Аднак у той час ні Беларускае Акадэмія, ні ўніверсітэт яшчэ не мелі спецыялістаў, якія маглі б узначаліць падрыхтоўку маладых вучоных па фізіцы. Таму маладыя беларускія фізікі вучыліся і праходзілі стажыроўку ў навуковых установах Масквы, Ленінграда і іншых гарадоў.

Іменна такім шляхам былі падрыхтаваны ў даваенны перыяд першыя беларускія спецыялісты па фізіцы (І. Р. Некрашэвіч, Ф. І. Фёдараў, І. П. Шапіра і інш.). У выніку да канца 30-х гадоў з'явілася магчымасць стварэння на фізічным аддзяленні фізіка-матэматычнага факультэта БДУ кафедра агульнай фізікі (загадчык І. Р. Некрашэвіч), тэарэтычнай фізікі (Ф. І. Фёдараў), рэнтгенафізікі (І. П. Шапіра) і электрамагнітных хістанняў (Е. В. Сняткоў). На гэтых кафедрах і былі сканцэнтраваны навуковыя сілы, якія праводзілі даследаванні па фізіцы ў перадваенныя гады.

Адразу ж пасля заканчэння Вялікай Айчыннай вайны была адноўлена навуковая работа ў галіне фізіка-матэматычных навук. У фізіка-тэхнічным сектары АН БССР, арганізаваным у канцы 1945 г., пачалі праводзіцца даследаванні па тэорыі элементарных часцінак (Ф. І. Фёдараў), радыефізіцы (І. Р. Некрашэвіч), тэорыі дыферэнцыяльных ураўненняў (М. А. Мінкевіч). Аднак пачынаючы з 1947 г. фізіка-матэматычныя даследаванні ў Беларускай Акадэміі навук былі спынены і да 1953 г. развіваліся выключна на кафедрах Беларускага дзяржаўнага ўніверсітэта.

Трэба сказаць, што на працягу значнага прамежку часу навуковыя даследаванні ў галіне фізікі і матэматыкі не атрымалі ў рэспубліцы неабходнага развіцця. Гэта было звязана перш за ўсё з адсутнасцю неабходнай эксперыментальнай базы і сучасных форм арганізацыі навуковай працы ў сістэме буйных навуковых калектываў. Пачатак якасна новага этапа ў развіцці фізіка-матэматычных навук у Беларусі адносіцца да 1953 г., калі пры Фізіка-тэхнічным інстытуце АН БССР быў створан фізіка-матэматычны сектар, які ўзначалілі выхаванцы лясенградскай аптычнай школы акадэміка С. І. Вавілава прафесары А. Н. Сеўчанка і Б. І. Сцяпанаў, абраныя акадэмікамі АН БССР. Праз два гады на базе гэтага сектара быў арганізаван Інстытут фізікі і матэматыкі, першым дырэктарам якога стаў акадэмік АН БССР А. Н. Сеўчанка, а ў 1957 г. Інстытут узначаліў акадэмік АН БССР Б. І. Сцяпанаў. Інстытут стаў хутка аснашчацца сучасным абсталяваннем, што дазволіла разгарнуць сур'ёзныя эксперыментальныя даследаванні, адначасова пачалі развівацца інтэнсіўныя тэарэтычныя даследаванні. Найбольш здольныя выпускнікі Беларускага ўніверсітэта сталі першымі супрацоўнікамі інстытута. З гэтага часу пачаўся надзвычай важны для развіцця беларускай навукі працэс — стварэнне навуковых школ у галіне фізікі і матэматыкі. А. Н. Сеўчанка ўзначаліў арганізацыю даследаванняў у галіне люмінесцэнцыі, Б. І. Сцяпанаў — у галіне тэарэтычнай спектраскапіі. Пад кіраўніцтвам Ф. І. Фёдарова, абранага ў 1956 г. у члены-карэспандэнты АН БССР, пачалі развівацца даследаванні па фізіцы элементарных часцінак і тэарэтычнай крышталаоптыцы.

У 1956 г. у састаў Беларускай Акадэміі навук былі абраны буйныя матэматыкі М. П. Яругін і У. І. Крылоў, шырока вядомы сваімі працамі ў галіне малекулярнай спектраскапіі М. А. Ельяшэвіч і М. М. Сірата — аўтар рада арыгінальных даследаванняў у галіне фізікі цвёрдага цела і паўправаднікоў. Членамі-карэспандэнтамі АН БССР, акрамя Ф. І. Фёдарова, сталі вядомыя спецыялісты ў галіне тэорыі груп — Д. А. Супрункі і С. А. Чуніхін. Вакол нанова абраных акадэмікаў таксама пачала групавацца таленавітая навуковая моладзь, падрыхтаваная ў вуні рэспублікі і галоўным чынам ва ўніверсітэце. Усё гэта стварыла базу для хуткага росту колькасці і ўзроўню падрыхтоўкі навуковых кадраў. У выніку ўжо к 1959 г. з'явіліся ўмовы для стварэння новых спецыялізаваных навуковых устаноў. З Інстытута фізікі і матэматыкі выдзеліўся Інстытут матэматыкі і вылічальнай тэхнікі, дырэктарам якога стаў акадэмік М. П. Яругін. Амаль адначасова ўзнік Аддзел фізікі цвёрдага цела і паўправаднікоў, рэарганізаваны ў канцы 1963 г. у інстытут. Яго ўзначаліў акадэмік М. М. Сірата. Такім чынам, на працягу дзесяцігоддзя Беларускае Акадэмія навук папоўнілася трыма самастойнымі навуковымі ўстановамі фізіка-матэматычнага профілю. Значнае павелічэнне аб'ёму даследаванняў і колькасці распрацоўваемых напрамкаў запатрабавала новых форм арганізацыі навуковай дзейнасці. Таму ў лістападзе 1963 г. было створана Аддзяленне фізіка-матэматычных навук, у састаў якога ўвайшлі Інстытуты фізікі, матэматыкі, фізікі цвёрдага цела і паўправаднікоў.

За пяць гадоў існавання Аддзялення фізіка-матэматычных навук яго інстытуты значна ўмацавалі сваю эксперыментальную базу, папоўніліся высокакваліфікаванымі навуковымі кадрамі. На працягу гэтага часу адбываўся рост аб'ёму і якасці даследаванняў па раду актуальных праблем сучаснай фізікі і матэматыкі. Пры гэтым адбывалася фарміраванне арыгінальнага навуковага напрамку кожнага з інстытутаў.

Інстытут фізікі цяпер з'яўляецца спецыялізаванай навуковай устаноўай аптычнага профілю. Гэта адзін з вядучых навуковых цэнтраў краі-

ны ў галіне спектраскапіі, люмінесценцыі і квантавай электронікі. У інстытуце праводзяцца тэарэтычныя і эксперыментальныя даследаванні ў радзе актуальных напрамкаў сучаснай фізікі: квантавай электроніцы, атамнай і малекулярнай спектраскапіі, фізіцы плазмы, фотахіміі і люмінесценцыі, опыты і акустыцы крышталюў.

Шырокую вядомасць набылі фундаментальныя даследаванні акадэміка Б. І. Сцяпанавы і яго шматлікіх вучняў, прысвечаныя вывясленню фундаментальных заканамернасцей узаемадзеяння святла з рэчывам, а таксама пытанням тэорыі квантавых генератараў. Аб значнасці гэтых даследаванняў сведчыць прысуджэнне акадэміку Б. І. Сцяпанаву ў 1967 г. адной з вышэйшых узнагарод АН СССР за выдатныя работы ў галіне фізікі — залатога медаля імя С. І. Вавілава. Высокі ўзровень эксперыментальнай тэхнікі, дасягнуты ў Інстытуце фізікі, дазволіў упершыню ў свеце стварыць квантавыя генератары на растворах арганічных фарбавальнікаў, што з'яўляецца адным з найбольш значных дасягненняў апошніх гадоў у гэтай галіне.

Добра вядомыя як у нашай краіне, так і за яе межамі фундаментальныя даследаванні механізма фотасінтэзу, выкананыя пад кіраўніцтвам акадэміка А. Н. Сеўчанкі.

Істотнае месца ў навукавай дзейнасці інстытута займае распрацаваны пад кіраўніцтвам лаўрэата Ленінскай прэміі акадэміка М. А. Ельшэвіча арыгінальны напрамак — вывучэнне нізкатэмпературнай плазмы спектраскапічнымі метадамі.

У галіне малекулярнай спектраскапіі надзвычай тонкія метады даследавання ўласцівасцей узбуджаных малекул распрацаваны членам-карэспандэнтам АН БССР М. А. Барысевічам з супрацоўнікамі.

Арыгінальныя метады, распрацаваныя акадэмікам Ф. І. Фёдаравым, пакладзены ў аснову новага напрамку ў тэарэтычнай крышталаоптыцы і крышталаакустыцы, які інтэнсіўна распрацоўваецца кіруемай ім групай даследчыкаў.

У інстытуце паспяхова развіваюцца даследаванні па тэорыі квантаваных палёў і элементарных часцінак і ў галіне ядзернай спектраскапіі.

Характэрнай рысай дзейнасці Інстытута фізікі з'яўляецца высокая ўдзельная вага тэарэтычных даследаванняў, а таксама іх арганічная сувязь з эксперыментам. Паспехі інстытута ў даследчай дзейнасці і падрыхтоўцы навуковых кадраў высока ацэнены ўрадам. У 1967 г. Інстытут фізікі быў узнагароджан ордэнам Працоўнага Чырвонага Сцяга.

У Інстытуце матэматыкі праводзіцца распрацоўка як фундаментальных, так і прыкладных матэматычных праблем. Навуковая школа акадэміка М. П. Яругіна займаецца распрацоўкай якаснай тэорыі дыферэнцыяльных ураўненняў. Пад кіраўніцтвам акадэміка У. І. Крылова ажыццяўляецца стварэнне новых вылічальных метадаў матэматыкі. Акадэмікі Д. А. Супрункі і С. А. Чуніхін стварылі і на працягу рада гадоў паспяхова развіваюць разам са сваімі вучнямі арыгінальныя напрамкі ў галіне тэорыі лінейных і абстрактных груп. Распрацоўку вельмі актуальных праблем, звязаных з матэматычнымі задачамі тэорыі аўтаматычнага кіравання, узначальвае акадэмік Я. А. Барбашын. У дзейнасці Інстытута матэматыкі значнае месца займаюць работы па праблеме матэматычнага забеспячэння электронных вылічальных машын. У красавіку 1968 г. пры Інстытуце матэматыкі створан Вылічальны цэнтр АН БССР, які ўзначальвае работы па матэматычнаму забеспячэнню ўсіх ЭВМ Мінскай серыі ў сістэме Акадэміі навук СССР.

Сістэматычныя даследаванні ў галіне фізікі цвёрдага цела і паўправаднікоў праводзяцца ў спецыялізаваным акадэмічным інстытуце адпаведнага профілю.

У лабараторыях Інстытута фізікі цвёрдага цела і паўправаднаікоў атрымліваюць развіццё ідэі яго кіраўніка акадэміка М. М. Сіраты, якія датычаць даследавання прыроды хімічнай сувязі і іншых уласцівасцей цвёрдых цел на аснове размеркавання электроннай шчыльнасці ў крышталях. Тут распрацоўваюцца навуковыя асновы стварэння матэрыялаў з асаблівымі фізічнымі ўласцівасцямі, даследуюцца ўласцівасці цвёрдых цел пры нізкіх температурах, у моцных электрычных і магнітных палях.

Цесная сувязь даследаванняў інстытутаў з пытаннямі практыкі, знаходзіць адлюстраванне ў выкананні вялікай колькасці работ па гаспадарчых дагаворах з рознымі прадпрыемствамі і ўстановамі рэспублікі і краіны.

Паралельна з развіццём фізіка-матэматычных даследаванняў у акадэмічных інстытутах ішло стварэнне навуковага цэнтра пры Беларускаім дзяржаўным універсітэце імя У. І. Леніна, рэктарам якога з 1957 г. з'яўляецца акадэмік А. Н. Сеўчанка. Вялікі вопыт навукова-арганізацыйнай работы, накоплены ў працэсе стварэння Інстытута фізікі і матэматыкі, аказаўся надзвычай карысным пры разгортванні навукова-даследчай работы на фізічным і матэматычным факультэтах БДУ. Кафедры універсітэта, якія раней займаліся ў асноўным забеспячэннем навучальнага працэсу, паступова пачалі ператварацца ў цэнтры навуковай работы на факультэтах. Гэтаму садзейнічала ўмацаванне кафедраў як у выніку кантакта з інстытутамі фізікі і матэматыкі, так і ў асобных выпадках шляхам прыцягнення на работу высокакваліфікаваных спецыялістаў з іншых навуковых цэнтраў краіны. Так прыйшлі ва універсітэт вядомы савецкі матэматык акадэмік АН БССР Ф. Д. Гахаў — спецыяліст па крайніх задачах матэматычнай фізікі і інтэгральных ураўненнях, а таксама член-карэспандэнт АН БССР У. Г. Вафіадзі — буйны вучоны, які працуе ў галіне радыэлектронікі і фізічнай аптыкі. Пры буйнейшых кафедрах фізічнага факультэта былі арганізаваны спецыялізаваныя навукова-даследчыя лабараторыі, якія займаюцца рашэннем як навуковых, так і прыкладных задач. Ва універсітэце быў створан таксама ўласны Вылічальны цэнтр.

Трэба падкрэсліць, што цесны кантакт, які існаваў паміж універсітэтам і Інстытутам фізікі і матэматыкі з моманту ўзнікнення апошняга, адыграў рашаючую ролю ў хуткім развіцці фізіка-матэматычных навук у Беларусі. Ён аказаўся ў аднолькавай меры плённым як для універсітэта, так і для Акадэміі. Асноўныя навуковыя кадры акадэмічных інстытутаў — у першую чаргу акадэмікі і члены-карэспандэнты праводзілі вялікую педагогічную і навукова-арганізацыйную работу на кафедрах БДУ. У сувязі з гэтым рэзка ўзрос агульны ўзровень падрыхтоўкі выпускнікоў фізічнага і матэматычнага факультэтаў. У сваю чаргу гэта значыла, што інстытуты Акадэміі навук БССР сталі папаўняцца людзьмі, лепш падрыхтаванымі да навуковай работы.

Адным з асноўных дасягненняў апошніх дзесяці гадоў трэба лічыць паспяховае вырашэнне праблемы падрыхтоўкі кандыдатаў навук па фізіка-матэматычных спецыяльнасцях у асноўным за лік выпускнікоў фізічнага і матэматычнага факультэтаў універсітэта. Цяпер як акадэмічныя інстытуты, так і кафедры універсітэта не толькі забяспечваюць сябе неабходнай колькасцю кандыдатаў навук па цэламу раду асноўных спецыяльнасцей, але рыхтуюць навуковыя кадры для іншых вышэйшых навучальных устаноў Беларусі, а таксама аказваюць дапамогу ў падрыхтоўцы праз аспірантуру кандыдатаў навук для іншых рэспублік.

Характэрным паказчыкам узроўню сталасці навуковых калектываў з'яўляецца іх здольнасць расціць кадры вышэйшай кваліфікацыі — дактароў навук. Цяпер гэты працэс пачаўся ўжо як у Акадэміі, так і ва

універсітэце. Доктарамі фізіка-матэматычных навук сталі многія нядаўнія выпускнікі фізічнага і матэматычнага факультэтаў БДУ, а таксама спецыялісты, якія прыехалі ў Беларусь з іншых рэспублік, але сфарміраваліся ў навуковых адносінах іменна тут. Гэта Б. Б. Бойка, які атрымаў вучоную ступень доктара навук за дысертацыю, прадстаўленую ў якасці кандыдацкай; нядаўні выпускнік БДУ, а цяпер яго прарэктар Л. В. Валодзька; У. Г. Спрынджук, які вырашыў вядомую праблему Малера; У. П. Платонаў, удастоены прэміі імя Ленінскага камсамола за выдатныя работы ў галіне тапалагічных груп; В. Д. Ткачоў, які атрымаў рад цікавых рэзультатаў у галіне аптыкі паўправаднікоў. Доктарамі навук сталі А. П. Іваноў, Я. І. Фірсаў, Г. П. Гурыновіч. У навуковых колах добра вядомыя работы П. А. Апанасевіча, А. М. Самсона, Я. А. Іванова, Л. І. Кісялеўскага і інш., якія рыхтуюць доктарскія дысертацыі. Усе яны выхаванцы Беларускага універсітэта. Трэба адзначыць, што першы кандыдат фізіка-матэматычных навук з'явіўся ў Беларусі ў 1936 г. (Ф. І. Фёдараў). Цяпер у нашай рэспубліцы працуе 29 дактароў і звыш 130 кандыдатаў фізіка-матэматычных навук.

Узросшы аўтарытэт беларускіх навуковых устаноў знаходзіць выражэнне ў тым, што Інстытутам фізікі і матэматыкі АН БССР даручана выданне ўсесаюзных спецыялізаваных фізіка-матэматычных часопісаў, якія з моманту першага выхаду ў свет рэгулярна перакладаюцца і перавыдаюцца за рубяжом (у ЗША). Аб росце гэтага аўтарытэту сведчыць таксама колькасць напісаных беларускімі вучонымі фундаментальных манаграфій, што ўвесь час павялічваецца, якія выходзяць у рэспубліканскіх і ўсесаюзных выдавецтвах, а таксама перавыдаюцца за рубяжом. Аб гэтым гаворыць таксама і пастаянны ўдзел беларускіх фізікаў і матэматыкаў у рабоце шматлікіх усесаюзных і міжнародных канферэнцый, нарад і сімпозіумаў па розных праблемах фізікі і матэматыкі, прычым інстытуты АН БССР і БДУ імя У. І. Леніна часта выступаюць у якасці іх арганізатараў.

Вучоныя, якія працуюць у галіне фізіка-матэматычных навук, маюць права ганарыцца тым высокім узроўнем развіцця, якога дасягнулі гэтыя навукі ў Беларусі да пяцідзесяцігоддзя з дня яе стварэння.

И. А. ПАВЛОВ

КОММУТАТИВНЫЕ НИЛЬПОТЕНТНЫЕ АЛГЕБРЫ МАТРИЦ  
 КЛАССА  $n-3$ . II

Эта статья является продолжением [2], обозначения которой здесь используются.

Рассмотрим случай б), когда в алгебре  $N$  нет матрицы ранга  $n-2$ , удовлетворяющей условию (1) из [2], но есть матрица ранга  $n-3$ , удовлетворяющая условию (1) из [2]. Пусть  $a$  ранга  $n-3$  принадлежит  $N$ . Тогда можно считать, что  $a = e_{21} + e_{32} + \dots + e_{n-3, n-4} + e_{n-1, n-2}$ . Если  $b \in N$ , то в силу теоремы 6 [1, стр. 21]

$$b = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_{n-5} & \alpha_{n-6} & \dots & 0 & \beta_1 & 0 & 0 \\ \alpha_{n-4} & \alpha_{n-5} & \dots & 0 & \beta_2 & \beta_1 & \lambda \\ \gamma_1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \gamma_2 & \gamma_1 & \dots & 0 & \varepsilon & 0 & \nu \\ \delta & 0 & \dots & 0 & \mu & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Матрица  $b_1 = b - \alpha_1 a - \dots - \alpha_{n-4} a^{n-4} \in N$ :

$$b_1 = \beta_1 (e_{n-4, n-2} + e_{n-3, n-1}) + \beta_2 e_{n-3, n-2} + \gamma_1 (e_{n-2, 1} + e_{n-1, 2}) + \gamma_2 e_{n1} + \varepsilon e_{n-1, n-2} + \lambda e_{n-3, n} + \nu e_{n-1, n} + \delta e_{n1} + \mu e_{n, n-2}. \quad (1)$$

Заметим, что параметры  $\nu$  и  $\mu$  в выражении (1) не могут быть одновременно отличными от нуля, иначе в  $N$  содержалась бы матрица ранга  $n-2$ , удовлетворяющая условию (1) из [2], что противоречит предположению случая б).

Здесь имеются две возможности:  $(b, \alpha) e_{n-1, n-2} \in N$  и  $(b, \beta) e_{n-1, n-2} \notin N$ .

$(b, \alpha)$  пусть  $e_{n-1, n-2} \in N$ . Тогда из условия  $e_{n-1, n-2} b_1 = b_1 e_{n-1, n-2}$  следует  $\beta_1 = \gamma_1 = 0$ . Если  $e_{n-3, n} \in N$ , то и  $e_{n-1, n} \in N$ , и множество всех матриц, перестановочных с  $a, e_{n-1, n-2}, e_{n-3, n}, e_{n-1, n}$ , образует коммутативную нильпотентную алгебру ранга  $n+1$ :

$$N_{22} = [a, a^2, \dots, a^{n-4}, e_{n-3, n-2}, e_{n-1, 1}, e_{n-1, n-2}, e_{n-3, n}, e_{n-1, n}].$$

Если  $e_{n1} \in N$ , тогда  $e_{n, n-2} \in N$ , и мы получим

$$N_{23} = [a, a^2, \dots, a^{n-4}, e_{n-3, n-2}, e_{n-1, 1}, e_{n-1, n-2}, e_{n1}, e_{n, n-2}].$$

Лемма 1. Если  $e_{n-1n-2} \in N$ , а  $e_{n-3n} \notin N$ ,  $e_{n-1n} \notin N$ ,  $e_{n1} \notin N$ ,  $e_{nn-2} \notin N$ , то в  $N$  есть базис

$$a, a^2, \dots, a^{n-4}, e_{n-3n-2}, e_{n-11}, e_{n-1n-2}, c, \quad (2)$$

где  $c = \lambda e_{n-3n} + \nu e_{n-1n} + \delta e_{n1} + \mu e_{nn-2}$ .

Доказательство аналогично доказательству леммы 1 [1, стр. 71]. В этом случае мы получили четырехпараметрическое семейство алгебр с базисом (2). Можно показать, что всякая алгебра вида  $N_{\lambda, \nu, \delta, \mu}$  сопряжена в  $P_n$  с одной из попарно несопряженных алгебр  $N_{1,0,0,1}$ ,  $N_{1,0,1,0}$ ,  $N_{0,1,1,0}$ . Алгебры  $N_{1,0,0,1}$ ,  $N_{1,0,1,0}$ ,  $N_{0,1,1,0}$  обозначим через  $N_{24}$ ,  $N_{25}$ ,  $N_{26}$  соответственно:

$$N_{24} = [a, a^2, \dots, a^{n-4}, e_{n-3n-2}, e_{n-11}, e_{n-1n-2}, e_{n-3n} + e_{nn-2}];$$

$$N_{25} = [a, a^2, \dots, a^{n-4}, e_{n-3n-2}, e_{n-11}, e_{n-1n-2}, e_{n-3n} + e_{n1}];$$

$$N_{26} = [a, a^2, \dots, a^{n-4}, e_{n-3n-2}, e_{n-11}, e_{n-1n-2}, e_{n-1n} + e_{n1}].$$

(b,  $\beta$ ) пусть  $e_{n-1n-2} \notin N$ . Тогда по крайней мере одно из чисел  $\beta_1$  и  $\gamma_1$  в (1) отлично от нуля.

Лемма 2. Если  $e_{n-1n-2} \notin N$ ,  $b_3 \notin N$  и выполняется одно из трех условий:

$$(b, \beta, 1) \quad \beta_1 \gamma_1 \neq 0;$$

$$(b, \beta, 2) \quad \beta_1 = 0, \quad \gamma_1 \neq 0, \quad e_{n-3n} \notin N;$$

$$(b, \beta, 3) \quad \beta_1 \neq 0, \quad \gamma_1 = 0, \quad e_{n1} \notin N,$$

то в  $N$  есть базис

$$a, a^2, \dots, a^{n-4}, b_1, b_2, b_3, \quad (3)$$

где  $b_2 = ab_1 = \beta_1 e_{n-3n-2} + \gamma_1 e_{n-11}$ ,  $b_3 = \lambda e_{n-3n} + \delta e_{n1}$ .

Доказательство аналогично доказательству леммы 1 [1, стр. 71]. Базис (3) алгебры  $N$  удовлетворяет следующим соотношениям:

$$ab_1 = b_2, \quad ab_2 = ab_3 = 0,$$

$$b_1^2 = \beta_1 \gamma_1 a^{n-5} + (\beta_2 \gamma_1 + \gamma_2 \beta_1) a^{n-4} + \epsilon b_2 + (\beta_1 \nu + \mu \gamma_1) b_3, \quad (4)$$

$$b_1 b_2 = \beta_1 \gamma_1 a^{n-4}, \quad b_3^2 = \lambda \delta a^{n-4}.$$

Имеют место

Лемма 3. Пусть  $c, d_1, d_2, d_3$  — такие матрицы из  $N$ , что  $c^{n-4}, d_2, d_3$  линейно независимы, а  $cd_1 = d_2, cd_2 = cd_3 = 0$ . Тогда  $c, c^2, \dots, c^{n-4}, d_1, d_2, d_3$  — базис  $N$ .

Лемма 4. Пусть  $M$  — аннулятор  $N$ . Если при условии (b,  $\beta$ , 1)  $\lambda \delta \neq 0$ , то  $M = [a^{n-4}]$ , если же при этом условии  $\lambda \delta = 0$ , то  $M = [a^{n-4}, b_3]$ . Если при условии (b,  $\beta$ , 2)  $e_{n1} \notin N$  или при условии (b,  $\beta$ , 3)  $e_{n-3n} \notin N$ , то  $M = [a^{n-4}, b_2]$ . Если же при условии (b,  $\beta$ , 2)  $e_{n1} \in N$  или при условии (b,  $\beta$ , 3)  $e_{n-3n} \in N$ , то  $M = [a^{n-4}, b_2, b_3]$ .

Лемма 5. (i) Если при условии (b,  $\beta$ , 1)  $\lambda \delta \neq 0$ , то сигнатура  $N$  равна  $(1, n-2, 1)$ . (ii) Если при условии (b,  $\beta$ , 1)  $\lambda = 0, \delta \neq 0$ , то сигнатура  $N$  равна  $(1, n-3, 2)$ . (iii) Если при условии (b,  $\beta$ , 1)  $\lambda \neq 0, \delta = 0$ , то сигнатура  $N$  равна  $(2, n-3, 1)$ . (iv) Если при условии (b,  $\beta$ , 2)  $e_{n1} \notin N$ , то сигнатура  $N$  равна  $(1, n-3, 2)$ . (v) Если при условии (b,  $\beta$ , 2)  $e_{n1} \in N$ , то сигнатура  $N$  равна  $(1, n-4, 3)$ . (vi) Если при условии (b,  $\beta$ , 3)  $e_{n-3n} \notin N$ , то сигнатура  $N$  равна  $(2, n-3, 1)$ . (vii) Если при условии (b,  $\beta$ , 3)  $e_{n-3n} \in N$ , то сигнатура  $N$  равна  $(3, n-4, 1)$ .

Доказательство лемм 3, 4, 5 аналогично доказательству лемм 2, 3, 4 [1, стр. 72]. Следовательно, возможны семь типов алгебр  $N$ : (i), (ii), (iii), (iv), (v), (vi), (vii). Заметим, что алгебры, имеющие различные сигнатуры,

не сопряжены в  $P_n$ . Можно показать, что алгебры типа (ii) неизоморфны алгебрам типа (iv) и алгебры типа (iii) неизоморфны алгебрам типа (vi). В силу [1, стр. 48] сопряженность каких-либо двух алгебр одного и того же типа следует из их изоморфизма. Ниже классифицируются алгебры каждого из этих семи типов.

(i) пусть  $\beta_1\gamma_1 \neq 0$ ,  $\lambda\delta \neq 0$ .

Очевидно, можно считать  $\gamma_1 = 1$ . Тогда  $b_2 = \beta_1 e_{n-3n-2} + e_{n-11}$ . В силу этого мы можем считать в (3), что  $\gamma_2 = 0$ . Если вместо  $b_1, b_2$  взять соответственно  $\frac{b_1}{\sqrt{\beta_1}}, \frac{b_2}{\sqrt{\beta_1}}$ , то соотношения (4) примут вид

$$ab_1 = b_2, \quad ab_2 = ab_3 = 0,$$

$b_1^2 = a^{n-5} + \beta_2 a^{n-4} + \varepsilon b_2$ ,  $b_1 b_2 = a^{n-4}$ ,  $b_3^2 = \lambda \delta a^{n-4}$ . Если теперь положить  $a_1 = a + \beta_2(n-5)^{-1} a^2$ , то получим семейство алгебр с базисом

$$a_1, a_1^2, \dots, a_1^{n-4}, b_1, b_2, b_3,$$

где  $b_1^2 = a_1^{n-5} + \varepsilon b_2$ ,  $b_1 b_2 = a_1^{n-4}$ ,  $b_3^2 = \lambda \delta a_1^{n-4}$ . Если затем вместо  $b_3$  взять  $\frac{b_3}{\sqrt{\lambda\delta}}$ , то в итоге получим однопараметрическое семейство алгебр с базисом

$$a_1, a_1^2, \dots, a_1^{n-4}, b_1, b_2, b_3,$$

где  $b_1^2 = a_1^{n-5} + \varepsilon b_2$ ,  $b_1 b_2 = b_3^2 = a_1^{n-4}$ .

Лемма 6. Если  $n > 7$ ,  $\varepsilon \neq 0$ , то  $N_\varepsilon \cong N_1$ .

Доказательство. Матрицы  $c, c^2, \dots, c^{n-4}, d_1, d_2, d_3$ , где  $c = a_1 + \frac{\sqrt[3]{\varepsilon^2 - 1}}{\varepsilon} b_1$ ,  $d_1 = \frac{1 - \varepsilon \sqrt[3]{\varepsilon}}{\varepsilon \sqrt[3]{\varepsilon}} a_1^{n-6} + \frac{1}{\sqrt[3]{\varepsilon}} b_1$ ,  $d_2 = \frac{\sqrt[3]{\varepsilon} - \varepsilon}{\varepsilon} a_1^{n-5} + \sqrt[3]{\varepsilon} b_2$ ,  $d_3 = b_3$ , образуют базис алгебры  $N_\varepsilon$ , так как выполняются условия леммы 3. Легко убедиться, что  $d_1^2 = c^{n-5} + d_2$ . Следовательно,  $N_\varepsilon \cong N_1$ .

Лемма доказана.

Лемма 7. Если  $n = 7$ ,  $\varepsilon \neq \pm 2i$ , то  $N_\varepsilon \cong N_0$ .

Доказательство аналогично доказательству леммы 5 [1, стр. 74].

Лемма 8. Если  $n > 7$ , то алгебры  $N_0$  и  $N_1$  неизоморфны. Если  $n = 7$ , то алгебры  $N_0$  и  $N_{2i}$  неизоморфны.

Доказательство аналогично доказательству леммы 6 [1, стр. 76].

Алгебры  $N_0, N_1, N_{2i}$  обозначим через  $N_{27}, N_{28}, \tilde{N}_{28}$  соответственно:

$$\begin{aligned} N_{27} &= [a, a^2, \dots, a^{n-4}, e_{n-4n-2} + e_{n-3n-1} + \\ &\quad + e_{n-21} + e_{n-12}, e_{n-3n-2} + e_{n-11}, e_{n-3n} + e_{n1}]; \\ N_{28} &= [a, a^2, \dots, a^{n-4}, e_{n-4n-2} + e_{n-3n-1} + e_{n-21} + \\ &\quad + e_{n-12} + e_{n-1n-2}, e_{n-3n-2} + e_{n-11}, e_{n-3n} + e_{n1}]; \\ \tilde{N}_{28} &= [a, \dots, a^{n-4}, e_{n-4n-2} + e_{n-3n-1} + e_{n-21} + e_{n-12} + \\ &\quad + 2ie_{n-1n-2}, e_{n-3n-2} + e_{n-11}, e_{n-3n} + e_{n1}]. \end{aligned}$$

Таким образом, рассмотрение случая (i) закончено.

(ii) пусть  $\beta_1\gamma_1 \neq 0$ ,  $\lambda = 0$ ,  $\delta \neq 0$ .

В этом случае мы получим двухпараметрическое семейство алгебр с базисом

$$a_1, a_1^2, \dots, a_1^{n-4}, b_1, b_2, b_3,$$

где  $a_1 b_1 = b_2$ ,  $a_1 b_2 = a_1 b_3 = b_3^2 = 0$ ,  $b_1^2 = a_1^{n-5} + \varepsilon b_2 + \mu b_3$ ,  $b_1 b_2 = a_1^{n-4}$ .

Лемма 9. Если  $n > 7$ ,  $\varepsilon \neq 0$ ,  $\rho \neq 0$ , то  $N_{\varepsilon, \mu} \cong N_{1,1}$ .

Доказательство. Выберем в качестве базиса алгебры  $N_{\varepsilon, \mu}$  матрицы  $c, c^2, \dots, c^{n-4}, d_1, d_2, d_3$ , где  $c = \varepsilon^{\frac{2}{7-n}} a_1, d_1 = \varepsilon^{\frac{n-5}{7-n}} b_1, d_2 = \varepsilon^{\frac{n-3}{7-n}} b_2, d_3 = \varepsilon^{\frac{2n-10}{7-n}} \mu b_3$ . Легко проверить, что условия леммы 3 выполняются и  $d_1^2 = c^{n-5} + d_2 + d_3$ . Следовательно,  $N_{\varepsilon, \mu} \cong N_{1,1}$ . Лемма доказана.

Лемма 10. Если  $\mu \neq 0$ , то  $N_{0, \mu} \cong N_{0,1}$ .

Доказательство. Матрицы  $c, c^2, \dots, c^{n-4}, d_1, d_2, d_3$ , где  $c = a_1, d_1 = b_1, d_2 = b_2, d_3 = \mu b_3$ , удовлетворяют условиям леммы 3, следовательно, они образуют базис  $N_{0, \mu}$ , и  $d_1^2 = c^{n-5} + d_3$ . Отсюда  $N_{0, \mu} \cong N_{0,1}$ . Лемма доказана.

Лемма 11. Если  $n > 7$ ,  $\varepsilon \neq 0$ , то  $N_{\varepsilon, 0} \cong N_{1,0}$ .

Доказательство. Согласно лемме 3, матрицы  $c, c^2, \dots, c^{n-4}, d_1, d_2, d_3$ , где  $c = \varepsilon^{\frac{2}{7-n}} a_1, d_1 = \varepsilon^{\frac{n-5}{7-n}} b_1, d_2 = \varepsilon^{\frac{n-3}{7-n}} b_2, d_3 = b_3$ , образуют базис  $N_{\varepsilon, 0}$ , и  $d_1^2 = c^{n-5} + d_2$ . Следовательно,  $N_{\varepsilon, 0} \cong N_{1,0}$ , и лемма доказана.

Лемма 12. Если  $n=7$ ,  $\varepsilon \neq \pm 2i$ , то при  $\mu \neq 0$   $N_{\varepsilon, \mu} \cong N_{0,1}$  и  $N_{\varepsilon, 0} \cong N_{0,0}$ .

Доказательство аналогично доказательству леммы 5 [1, стр. 74].

Лемма 13. Если  $n > 7$ , то алгебры  $N_{0,0}, N_{1,0}, N_{0,1}, N_{1,1}$  попарно неизоморфны. Если  $n=7$ , то алгебры  $N_{0,0}, N_{2i,0}, N_{0,1}, N_{2i,1}$  попарно неизоморфны.

Доказательство аналогично доказательству леммы 6 [1, стр. 76]. Алгебры  $N_{0,0}, N_{1,0}, N_{2i,0}, N_{0,1}, N_{1,1}, N_{2i,1}$  обозначим через  $N_{29}, N_{30}, \tilde{N}_{30}, N_{31}, N_{32}, \tilde{N}_{32}$  соответственно:

$$N_{29} = [a, a^2, \dots, a^{n-4}, e_{n-4n-2} + e_{n-3n-1} + e_{n-21} + e_{n-12}, e_{n-3n-2} + e_{n-11}, e_{n-3n}];$$

$$N_{30} = [a, a^2, \dots, a^{n-4}, e_{n-4n-2} + e_{n-3n-1} + e_{n-21} + e_{n-12} + e_{n-1n-2}, e_{n-3n-2} + e_{n-11}, e_{n-3n}];$$

$$\tilde{N}_{30} = [a, a^2, \dots, a^{n-4}, e_{n-4n-2} + e_{n-3n-1} + e_{n-21} + e_{n-12} + 2ie_{n-1n-2}, e_{n-3n-2} + e_{n-11}, e_{n-3n}];$$

$$N_{31} = [a, a^2, \dots, a^{n-4}, e_{n-4n-2} + e_{n-3n-1} + e_{n-21} + e_{n-12} + e_{nn-2}, e_{n-3n-2} + e_{n-11}, e_{n-3n}];$$

$$N_{32} = [a, a^2, \dots, a^{n-4}, e_{n-4n-2} + e_{n-3n-1} + e_{n-21} + e_{n-12} + e_{n-1n-2} + e_{nn-2}, e_{n-3n-2} + e_{n-11}, e_{n-3n}];$$

$$\tilde{N}_{32} = [a, a^2, \dots, a^{n-4}, e_{n-4n-2} + e_{n-3n-1} + e_{n-21} + e_{n-12} + 2ie_{n-1n-2} + e_{nn-2}, e_{n-3n-2} + e_{n-11}, e_{n-3n}].$$

Итак, случай (ii) полностью изучен.

Из лемм 9—13 и теоремы 10 [1, стр. 43] вытекает

Следствие. При  $n > 7$  всякая алгебра  $N$  типа (iii) сопряжена в  $P_n$  с одной из четырех попарно неизоморфных алгебр:  $N'_{29} - N'_{32}$ . При  $n=7$  алгебра типа (iii) сопряжена с одной из четырех попарно неизоморфных алгебр:  $N'_{29}, N'_{30}, N'_{31}, N'_{32}$ .

Обозначим  $N'_{29} = N_{33}, N'_{30} = N_{34}, \tilde{N}'_{30} = \tilde{N}_{34}, N'_{31} = N_{35}, N'_{32} = N_{36}, \tilde{N}'_{32} = \tilde{N}_{36}$ .

(iv) пусть  $\beta_1 = 0, \gamma_1 \neq 0, e_{n-3n} \notin N, e_{n1} \notin N$ .

В этом случае мы получим однопараметрическое семейство алгебр с базисом

$$a, a^2, \dots, a^{n-4}, b_1, b_2, b_3,$$

где  $ab_1 = b_2$ ,  $ab_2 = ab_3 = b_1b_2 = 0$ ,  $b_1^2 = a^{n-4} + \varepsilon b_2$ ,  $b_3^2 = a^{n-4}$ .

Лемма 14. Если  $\varepsilon \neq 0$ , то  $N_\varepsilon \cong N_1$ .

Доказательство. Согласно лемме 3, матрицы  $c, c^2, \dots, c^{n-4}$ ,  $d_1, d_2, d_3$ , где  $c = \varepsilon^{\frac{2}{6-n}} a$ ,  $d_1 = \varepsilon^{\frac{n-4}{6-n}} b_1$ ,  $d_2 = \varepsilon^{\frac{n-2}{6-n}} b_2$ ,  $d_3 = \varepsilon^{\frac{n-4}{6-n}} b_3$ , образуют базис  $N_\varepsilon$ , и  $d_1^2 = c^{n-4} + d_2$ . Следовательно,  $N_\varepsilon \cong N_1$ . Лемма доказана.

Можно показать, что алгебры  $N_0$  и  $N_1$  неизоморфны. Обозначим алгебры  $N_0, N_1$  через  $N_{37}, N_{38}$  соответственно:

$$N_{37} = [a, a^2, \dots, a^{n-4}, e_{n-21} + e_{n-12}, e_{n-11}, e_{n-3n} + e_{n1}];$$

$$N_{38} = [a, a^2, \dots, a^{n-4}, e_{n-21} + e_{n-12} + \\ + e_{n-1n-2}, e_{n-11}, e_{n-3n} + e_{n1}].$$

Рассмотрение случая закончено.

(v) Пусть  $\beta_1 = 0$ ,  $\gamma_1 \neq 0$ ,  $e_{n-3n} \notin N$ ,  $e_{n1} \in N$ .

В этом случае мы получим двухпараметрическое семейство алгебр с базисом

$$a, a^2, \dots, a^{n-4}, b_1, b_2, b_3,$$

где  $ab_1 = b_2$ ,  $ab_2 = ab_3 = b_1b_2 = b_3^2 = 0$ ,  $b_1^2 = a^{n-4} + \varepsilon b_2 + \mu b_3$ .

Лемма 15. Если  $\mu \neq 0$ , то  $N_{\varepsilon, \mu} \cong N_{0,1}$ .

Доказательство. Матрицы  $c, c^2, \dots, c^{n-4}$ ,  $d_1, d_2, d_3$ , где  $c = a$ ,  $d_1 = b_1$ ,  $d_2 = b_2$ ,  $d_3 = \varepsilon b_2 + \mu b_3$ , удовлетворяют условиям леммы 3, следовательно, образуют базис  $N_{\varepsilon, \mu}$ . Легко проверить, что  $d_1^2 = c^{n-4} + d_3$ . Отсюда  $N_{\varepsilon, \mu} \cong N_{0,1}$ . Лемма доказана.

Лемма 16. Если  $\varepsilon \neq 0$ , то  $N_{\varepsilon, 0} \cong N_{1,0}$ .

Доказательство. Выберем в качестве базиса  $N_{\varepsilon, 0}$  матрицы  $c, c^2, \dots, c^{n-4}$ ,  $d_1, d_2, d_3$ , где  $c = \varepsilon^{\frac{2}{6-n}} a$ ,  $d_1 = \varepsilon^{\frac{n-4}{6-n}} b_1$ ,  $d_2 = \varepsilon^{\frac{n-2}{6-n}} b_2$ ,  $d_3 = b_3$ . Условия леммы 3 выполняются, и  $d_1^2 = c^{n-4} + d_2$ . Следовательно,  $N_{\varepsilon, 0} \cong N_{1,0}$ , и лемма доказана.

Можно показать, что алгебры  $N_{0,0}, N_{1,0}, N_{0,1}$  попарно неизоморфны. Обозначим алгебры  $N_{0,0}, N_{1,0}, N_{0,1}$  через  $N_{39}, N_{40}, N_{41}$  соответственно:

$$N_{39} = [a, a^2, \dots, a^{n-4}, e_{n-21} + e_{n-12}, e_{n-11}, e_{n1}];$$

$$N_{40} = [a, a^2, \dots, a^{n-4}, e_{n-21} + e_{n-12} + e_{n-1n-2}, e_{n-11}, e_{n1}];$$

$$N_{41} = [a, a^2, \dots, a^{n-4}, e_{n-21} + e_{n-12} + e_{nn-2}, e_{n-11}, e_{n1}].$$

Из лемм 14—16 и теоремы 10 [1, стр. 43] вытекает

Следствие. Всякая алгебра типа (vi) сопряжена в  $P_n$  с одной из двух попарно неизоморфных алгебр:  $N'_{37}, N'_{38}$ . Всякая алгебра типа (vii) сопряжена в  $P_n$  с одной из трех попарно неизоморфных алгебр:  $N'_{39}, N'_{40}, N'_{41}$ . Обозначим  $N'_{37} = N_{42}$ ,  $N'_{38} = N_{43}$ ,  $N'_{39} = N_{44}$ ,  $N'_{40} = N_{45}$ ,  $N'_{41} = N_{46}$ . Таким образом, рассмотрение случаев (i) — (vii) закончено.

Пусть теперь выполняется условие (b,  $\beta$ ,  $\delta'$ )  $\beta_1 = 0$ ,  $\gamma_1 \neq 0$ ,  $e_{n-3n} \in N$ . Тогда  $e_{n-1n} \in N$  и  $\delta = \mu = 0$ .

Лемма 17. При условии  $(b, \beta, 2')$  в  $N$  можно выбрать базис

$$a, a^2, \dots, a^{n-4}, e_{n-3n}, e_{n-1n}, e_{n-11}, c, \quad (5)$$

где  $c = \gamma_1(e_{n-21} + e_{n-12}) + \beta_2 e_{n-3n-2} + \varepsilon e_{n-1n-2}$ .

Доказательство аналогично доказательству леммы 1 [1, стр. 71]. В этом случае мы получили трехпараметрическое семейство алгебр с базисом (5). Можно показать, что всякая алгебра вида  $N_{\gamma, \beta, \varepsilon}$  сопряжена в  $P_n$  с одной из попарно несопряженных алгебр  $N_{1,0,0}$ ,  $N_{1,1,0}$ ,  $N_{1,1,1}$ . Обозначим алгебры  $N_{1,0,0}$ ,  $N_{1,1,0}$ ,  $N_{1,1,1}$  через  $N_{47}$ ,  $N_{48}$ ,  $N_{49}$  соответственно:

$$N_{47} = [a, a^2, \dots, a^{n-4}, e_{n-3n}, e_{n-1n}, e_{n-11}, e_{n-21} + e_{n-12}];$$

$$N_{48} = [a, a^2, \dots, a^{n-4}, e_{n-3n}, e_{n-1n}, e_{n-11}, e_{n-21} + e_{n-12} + e_{n-3n-2}];$$

$$N_{49} = [a, a^2, \dots, a^{n-4}, e_{n-3n}, e_{n-1n}, e_{n-11}, e_{n-21} + e_{n-12} + e_{n-3n-2} + e_{n-1n-2}].$$

Если выполняется условие  $(b, \beta, 3')$   $\beta_1 \neq 0$ ,  $\gamma_1 = 0$ ,  $e_{n1} \in N$ , то можно показать, что всякая алгебра  $N$  сопряжена в  $P_n$  с одной из попарно несопряженных алгебр:

$$N_{50} = [a, a^2, \dots, a^{n-4}, e_{n1}, e_{nn-2}, e_{n-3n-2}, e_{n-4n-2} + e_{n-3n-1}];$$

$$N_{51} = [a, a^2, \dots, a^{n-4}, e_{n1}, e_{nn-2}, e_{n-3n-2}, e_{n-4n-2} +$$

$$+ e_{n-3n-1} + e_{n-11}]; \quad N_{52} = N'_{49},$$

и алгебры  $N_{47} - N_{52}$  попарно не сопряжены.

Случай, когда  $e_{n-1n-2} \notin N$  и  $\lambda e_{n-3n} + \delta e_{n-1} \notin N$ , дает 15 алгебр и будет рассмотрен в отдельной статье.

Из лемм 1—17 следует

Теорема 2. Всякая алгебра  $N$ , которая не содержит матрицы ранга  $n-2$ , удовлетворяющей условию (1) из [2], но содержит матрицу ранга  $n-3$ , удовлетворяющую условию (1) из [2], сопряжена в  $P_n$  при  $n \geq 7$  с одной из 48 попарно несопряженных алгебр:  $N_{22} - N_{76}$ , при  $n = 7$  с одной из 48 попарно несопряженных алгебр:  $N_{22} - N_{27}$ ,  $\tilde{N}_{28}$ ,  $N_{29}$ ,  $\tilde{N}_{30}$ ,  $N_{31}$ ,  $\tilde{N}_{32}$ ,  $N_{33}$ ,  $\tilde{N}_{34}$ ,  $N_{35}$ ,  $\tilde{N}_{36}$ ,  $N_{37} - N_{76}$ .

Таким образом, рассмотрение случая б) полностью закончено.

Теорема 3. Всякая алгебра  $N$ , которая не содержит матриц рангов  $n-2$  и  $n-3$ , удовлетворяющих условию (1) из [2], сопряжена в  $P_n$  с одной из семи попарно несопряженных алгебр:

$$N_{53} = [a, a^2, \dots, a^{n-4}, e_{n-21} + e_{n-3n-2}, e_{n-11} + e_{n-3n-1}, e_{n1} + e_{n-3n}];$$

$$N_{54} = [a, a^2, \dots, a^{n-4}, e_{n-21} + e_{n-3n-2}, e_{n-11} + e_{n-3n-1}, e_{n1}];$$

$$N_{55} = [a, a^2, \dots, a^{n-4}, e_{n-21} + e_{n-3n-2}, e_{n-11}, e_{n1}];$$

$$N_{56} = [a, \dots, a^{n-4}, e_{n-21}, e_{n-11}, e_{n1}];$$

$$N_{57} = N'_{54}, \quad N_{58} = N'_{55}, \quad N_{59} = N'_{56},$$

где  $a = e_{21} + e_{32} + \dots + e_{n-3n-4}$ .

Доказательство легко получить, используя [1, стр. 84—87].

Теоремы 1—3 объединяются в следующем утверждении.

**Теорема 4.** Множество классов сопряженных максимальных коммутативных нильпотентных подалгебр класса  $n-3$  алгебры  $P_n$  бесконечно в том и только в том случае, когда  $n$  равно 9 или 10. При  $n=7$  число таких классов равно 67, при  $n=8$  — 73, при  $n>10$  — 76.

Полную систему представителей этих классов образуют при  $n=7$  алгебры  $N_1—N_6$ ,  $N_{10}$ ,  $N_{13}—N_{16}$ ,  $N_{19}—N_{27}$ ,  $\tilde{N}_{28}$ ,  $N_{29}$ ,  $\tilde{N}_{30}$ ,  $N_{31}$ ,  $\tilde{N}_{32}$ ,  $N_{33}$ ,  $\tilde{N}_{34}$ ,  $N_{35}$ ,  $\tilde{N}_{36}$ ,  $N_{37}—N_{76}$ ; при  $n=8$  алгебры  $N_1—N_8$ ,  $N_{10}—N_{13}$ ,  $N_{15}—N_{19}$ ,  $N_{21}—N_{76}$ ; при  $n>10$  алгебры  $N_1—N_{76}$ .

Автор выражает благодарность Д. А. Супруненко за обсуждение вопросов, связанных с настоящей статьей.

### Литература

1. Супруненко Д. А. и Тышкевич Р. И. Перестановочные матрицы. Изд. «Наука и техника», Минск, 1966.
2. Павлов И. А. Вестн АН БССР, сер. физ.-мат. наук, № 4, 1968.

Институт математики  
АН БССР

Поступило в редакцию  
23.II 1968

В. З. ФЕЙНБЕРГ

## ОДНОРОДНЫЕ УНАРНЫЕ АЛГЕБРЫ И ИХ ГРУППЫ АВТОМОРФИЗМОВ

1. Введение. Пусть  $\Lambda$  — произвольное множество,  $f$  — отображение  $\Lambda$  в себя,  $\langle \Lambda, f \rangle$  — унарная алгебра, ассоциированная с  $f$ . Изучение унарной алгебры равносильно изучению графа отображения  $f$ . Унарные алгебры с различных точек зрения исследовались в [1—5]. Весьма интересным представляется вопрос о строении группы автоморфизмов такой алгебры. Соображения симметрии подсказывают рассмотрение в первую очередь однородных унарных алгебр (т. е. алгебр с транзитивной группой автоморфизмов), тем более что трудности, характерные для произвольных унарных алгебр, проявляются уже в однородном случае.

В настоящей статье решаются следующие два вопроса:

1. Какими инвариантами характеризуется однородная унарная алгебра?

2. Каково строение ее группы автоморфизмов?

Очевидно, если однородная унарная алгебра  $\langle \Lambda, f \rangle$  обладает хотя бы одним циклом конечной длины  $n$ , то каждая ее точка порождает цикл длины  $n$ , и поэтому с точностью до изоморфизма она определяется парой  $(\alpha, n)$ , где  $\alpha$  — мощность множества ее циклов,  $n$  — длина произвольного цикла. Группа автоморфизмов такой алгебры изоморфна, как легко видеть, сплетению  $B_n \wr S_\alpha$ , где  $S_\alpha$  — полная симметрическая группа множества мощности  $\alpha$ ,  $B_n$  — циклическая группа порядка  $n$ .

Что касается унарной алгебры без циклов конечной длины (этот случай является основным), то оказывается (теорема 1), что она однородна тогда и только тогда, когда мощность множества  $f^{-1}(x)$  не зависит от  $x \in \Lambda$ . С точностью до изоморфизма  $\langle \Lambda, f \rangle$  определяется парой  $(\alpha, \gamma)$ , где  $\alpha$  — число (мощность) множества максимальных связных (неприводимых) подалгебр алгебры  $\langle \Lambda, f \rangle$ , а  $\gamma$  — мощность множества  $f^{-1}(x)$ .

Для описания  $\text{Aut}(\langle \Lambda, f \rangle)$ -группы автоморфизмов однородной унарной алгебры мы применяем теоретико-групповую операцию сплетения. Свойства этой операции исследованы в [6—9]. Понятие полного сплетения\*)  $\text{Wr}_{icI} G_i$  групп  $G_i$  по вполне упорядоченному множеству  $I$  ввел Л. А. Калужнин [6]. Это понятие обобщается нами на случай, когда в качестве  $I$  берется  $Z$  — линейно упорядоченное множество целых чисел. И затем, когда все  $G_i$  являются экземплярами некоторой фиксированной группы подстановок  $G$ , строится специального вида полупрямое произведение  $(\text{Wr}_{icZ} G_i) \rtimes Z$  группы  $\text{Wr}_{icZ} G_i$  на аддитивную группу целых чисел. Тогда (теорема 6) группа автоморфизмов однородной унарной алгебры типа  $(\alpha, \gamma)$  изоморфна группе

\*) Мы говорим «полное сплетение», чтобы не путать его с конструкцией Ф. Холла [7], которая также называется сплетением, но в отличие от полного сплетения последнее действует на дискретном прямом произведении множеств. Отметим, что это дискретное сплетение вводится по любому линейно упорядоченному множеству.

Ба 3905

$((Wr(S_{\nu})_i) \times Z) \int S_{\alpha}$ , где  $(S_{\nu})_i$  —  $i$ -ый экземпляр полной симметрической группы  $S_{\nu}$ .

**2. Определения и обозначения.** Итак, пусть  $f$  — отображение произвольного множества  $\Lambda$  в себя,  $\langle \Lambda, f \rangle$  — ассоциированная с ним унарная алгебра. Через  $\langle M, f \rangle$ ,  $M \subseteq \Lambda$  обозначим унарную алгебру, операция которой совпадает с  $f/M$ , т. е. с ограничением отображения  $f$  на подмножестве  $M$ . Пусть  $x \in \Lambda$  таково, что  $f^n(x) = x$  и  $n$  — наименьшее натуральное число, обладающее этим свойством, тогда ограничение  $f$  на множестве  $(x, f(x), \dots, f^{n-1}(x))$  называется (конечным) циклом длины  $n$  алгебры  $\langle \Lambda, f \rangle$  (или отображения  $f$ ). Если  $\Lambda$  конечно, то  $f$  содержит по крайней мере один цикл. Бесконечным циклом называется ограничение  $f$  на множестве  $\{x_i\}_{i \in Z}$ ,  $x_i \in \Lambda$ , таком, что  $f(x_i) = x_{i-1}$ .  $Z$  будет обозначать множество целых чисел. Заметим, что конечные циклы отображения  $f$  не пересекаются, в то время как для бесконечных циклов это, вообще говоря, неверно.

Алгебру  $\langle \Lambda, f \rangle$  назовем связной (неприводимой), если для любых  $x, y \in \Lambda$   $f^k(x) = f^n(y)$  при некоторых  $k, n \in Z$ ,  $k \geq 0, n \geq 0$ .  $f^0$ , как обычно, совпадает с тождественным отображением множества  $\Lambda$ .

Очевидно, унарную алгебру  $\langle \Lambda, f \rangle$  можно представить в виде объединения попарно непересекающихся максимальных связных подалгебр алгебры  $\langle \Lambda, f \rangle$  (коротко: связных компонент алгебры  $\langle \Lambda, f \rangle$ )

$$\langle \Lambda, f \rangle = \bigcup_{i \in I} \langle C_i, f \rangle, \quad (1)$$

где  $\langle C_i, f \rangle$  — связная компонента, причем  $C_i \cap C_j = \emptyset$ ,  $i \neq j$ . Если множество  $I$  конечно, то мы получаем однозначное представление  $f$  в виде произведения попарно перестановочных отображений, т. е.  $f = f_1 f_2 \dots f_n$ , где  $f_i = f/C_i$ . Это аналогично представлению (конечной) подстановки в виде произведения циклов. В общем же случае мы имеем (1), которое позволяет в принципе вопросы, относящиеся к унарным алгебрам, свести к связному случаю.

Как обычно, принимаем  $f(M) = \{f(x) | x \in M\}$ ,  $f^{-1}(M) = \{x | x \in \Lambda, f(x) \in M\}$ ,  $M \subseteq \Lambda$ . Через  $S_{\alpha}$  обозначим полную симметрическую группу множества мощности  $\alpha$ , а через  $\overline{M}$  — мощность множества  $M$ .

Все прямые произведения, сплетения, симметрические группы, которые встречаются в этой статье, являются полными, поэтому слово «полное» часто будет опускаться.

**3. Классификация однородных унарных алгебр.** Содержание этого параграфа составляет следующая

**Теорема 1.** 1. Унарная алгебра  $\langle \Lambda, f \rangle$  без циклов конечной длины однородна тогда и только тогда, когда  $\overline{f^{-1}(x)} = \overline{f^{-1}(y)}$  для любых  $x, y \in \Lambda$ .

2. С точностью до изоморфизма однородная унарная алгебра  $\langle \Lambda, f \rangle$  определяется парой  $(\alpha, \gamma)$ , где  $\alpha$  — кардинальное число множества связных компонент алгебры  $\langle \Lambda, f \rangle$ , а  $\gamma = \overline{f^{-1}(x)}$ ,  $x \in \Lambda$ .

3. Для любой пары кардинальных чисел  $(\alpha, \gamma)$  существует однородная унарная алгебра типа  $(\alpha, \gamma)$ .

**Доказательство.** Так как необходимость утверждения 1 очевидна, то из представления (1) следует, что для доказательства пунктов 1, 2 достаточно ограничиться следующим предложением.

Если  $\langle \Lambda, f \rangle$ ,  $\langle M, g \rangle$  — две связные унарные алгебры без циклов конечной длины, удовлетворяющие условию  $\overline{f^{-1}(x)} = \overline{g^{-1}(y)}$  для любых  $x \in \Lambda$ ,  $y \in M$ , то для фиксированных  $a \in \Lambda$ ,  $b \in M$  существует изоморфизм  $\varphi$  алгебр  $\langle \Lambda, f \rangle$  на алгебру  $\langle M, g \rangle$ , переводящий  $a$  в  $b$ .

Это мы и будем сейчас доказывать. Положим  $P_0 = \{f^k(a)\}$ ,  $P'_0 = \{g^k(b)\}$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$ , так как  $\langle \Lambda, f \rangle$  не имеет циклов конечной длины, то  $f^i(a) \neq f^j(a)$  при  $i \neq j$ . Аналогично  $g^i(b) \neq g^j(b)$ ,  $i \neq j$ .

Пусть теперь  $P_n$  определено, тогда полагаем

$$P_{n+1} = f^{-1}(P_n) \setminus \bigcup_{i < n} P_i. \quad (2)$$

В силу связности  $\langle \Lambda, f \rangle$

$$\Lambda = \bigcup_{i=0}^{\infty} P_i, \quad P_i \cap P_j = \emptyset, \quad i \neq j. \quad (3)$$

Аналогично для алгебры  $\langle M, g \rangle$

$$M = \bigcup_{i=0}^{\infty} P'_i, \quad P'_i \cap P'_j = \emptyset, \quad i \neq j. \quad (3')$$

Определим биективное отображение  $\varphi_0$  множества  $P_0$  на  $P'_0$ , полагая

$$\varphi_0(f^i(a)) = g^i(b), \quad i = 0, 1, 2, \dots \quad (4)$$

Очевидно,  $\varphi_0$  — изоморфизм подалгебры  $\langle P_0, f \rangle$  на подалгебру  $\langle P'_0, g \rangle$ .

Обозначим далее

$$A_k = \bigcup_{i < k} P_i, \quad A'_k = \bigcup_{i < k} P'_i.$$

Пусть теперь для каждого  $k \leq n$  определено изоморфное отображение  $\varphi_k$  подалгебры  $\langle A_k, f \rangle$  на подалгебру  $\langle A'_k, g \rangle$  таким образом, что

$$\varphi_k/A_j = \varphi_j, \quad j \leq k. \quad (5)$$

Построим тогда индуктивно изоморфное отображенное  $\varphi_{n+1}$  подалгебры  $\langle A_{n+1}, f \rangle$  на  $\langle A'_{n+1}, g \rangle$ . Будем считать, что ограничение  $\varphi_{n+1}$  на  $A_n$  совпадает с  $\varphi_n$ , а для того чтобы задать действие  $\varphi_{n+1}$  на  $P_{n+1}$ , представим  $P_{n+1}$  и  $P'_{n+1}$  в виде  $P_{n+1} = \bigcup_{x \in P_n} f^{-1}(x)$ ,  $P'_{n+1} = \bigcup_{x \in P'_n} g^{-1}(x)$ . Такое пред-

ставление возможно в силу связности  $\langle \Lambda, f \rangle$  и  $\langle M, g \rangle$ . Обозначим через  $\psi_x^{**}$  некоторое биективное отображение множества  $f^{-1}(x)$  на множество  $g^{-1}(\varphi_n(x))$  и тогда положим

$$\varphi_{n+1}/A_n = \varphi_n, \quad \varphi_{n+1}/f^{-1}(x) = \psi_x, \quad x \in P_n. \quad (6)$$

Действие отображения  $\varphi_{n+1}$  определено корректно, ибо  $A_{n+1} = A_n \cup P_{n+1}$ ,  $A_n \cap P_{n+1} = \emptyset$ , а  $P_{n+1}$  представлено как объединение попарно непересекающихся множеств  $f^{-1}(x)$ ,  $x \in P_n$ . Непосредственной проверкой можно убедиться в том, что  $\varphi_{n+1}$  — изоморфизм, удовлетворяющий условию (5).

Таким образом, для любого натурального  $n$  индуктивно определен изоморфизм  $\varphi_n$  подалгебры  $\langle A_n, f \rangle$  на подалгебру  $\langle A'_n, g \rangle$ .

Алгебру  $\langle \Lambda, f \rangle$  (соответственно  $\langle M, g \rangle$ ) можно представить как предел последовательности подалгебр  $\langle A_n, f \rangle$  (соответственно  $\langle A'_n, g \rangle$ ), поэтому условие (5) дает изоморфизм  $\varphi$  унарной алгебры  $\langle \Lambda, f \rangle$  на алгебру  $\langle M, g \rangle$  как предел последовательности изоморфизмов  $\varphi_n$ , а так как  $\varphi_0(a) = b$ , то  $\varphi(a) = b$ . Утверждения 1 и 2 доказаны.

Для того чтобы доказать 3, достаточно показать существование по крайней мере одной алгебры типа  $(\beta, \gamma)$ . По предложению 2 все ее связные компоненты попарно изоморфны, тогда, взяв  $\alpha$  экземпляров одной из них,

\* ) Это представление является частным случаем представления из [3].

\*\* ) Такое  $\psi_x$  существует, ибо  $f^{-1}(x) = g^{-1}(y)$  по условию.



мы получим алгебру типа  $(\alpha, \gamma)$ . Ниже (лемма 3) для любого кардинального числа  $\gamma$  мы строим однородную алгебру  $\langle \bar{X}, V \rangle$ , любую связную компоненту которой будем считать канонической однородной связной алгеброй типа  $\gamma$  (точнее типа  $(1, \gamma)$ ). Этот канонический вид существенно используется при изучении группы автоморфизмов однородных унарных алгебр.

**4. Группа автоморфизмов однородной унарной алгебры.** Если учесть что действие автоморфизма унарной алгебры можно независимо задавать на ее связных компонентах и что связные компоненты в однородном случае попарно изоморфны, то легко доказать:

**Лемма 1.**  $\text{Aut}(\langle \Lambda, f \rangle) \simeq \text{Aut}(\langle K, f \rangle) \wr S_a$ , где  $\langle \Lambda, f \rangle$  — произвольная однородная унарная алгебра,  $\langle K, f \rangle$  — ее связная компонента, а  $a$  — число ее связных компонент.

Если  $\langle \Lambda, f \rangle$  содержит цикл длины  $n$ , то  $\text{Aut}(\langle K, f \rangle)$  — циклическая группа порядка  $n$ . Поэтому в дальнейшем достаточно ограничиться связной однородной унарной алгеброй без конечных циклов. Изучением группы автоморфизмов такой алгебры мы и будем в основном заниматься в этом параграфе.

В дальнейшем часто будет использоваться конгруэнция, введенная в следующей лемме.

**Лемма 2.** Пусть  $\langle \Lambda, f \rangle$  — связная однородная алгебра без циклов конечной длины,  $R$  — отношение эквивалентности, определенное условием:  $\lambda R \mu$  тогда и только тогда, когда  $f^k(\mu) = f^k(\lambda)$ ,  $\lambda, \mu \in \Lambda$ ,  $k \geq 0$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ . Тогда:

1.  $R$  — конгруэнция алгебры  $\langle \Lambda, f \rangle$ .
2. Фактор-алгебра  $\langle \bar{\Lambda}, \bar{f} \rangle$  по конгруэнции  $R$  — бесконечный цикл, т. е.  $\langle \bar{\Lambda}, \bar{f} \rangle \simeq \langle \mathbb{Z}, ' \rangle$ , где  $n' = n - 1$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ .
3. Если  $\varphi \in \text{Aut}(\langle \Lambda, f \rangle)$ , то  $R$  — также конгруэнция алгебры  $\langle \Lambda, \varphi \rangle$ .
4. Если  $\langle \bar{\Lambda}, \bar{f} \rangle$  — фактор-алгебра по конгруэнции  $R$ , то  $\bar{\varphi}$  — автоморфизм алгебры  $\langle \bar{\Lambda}, \bar{f} \rangle$  и соответствие  $\varphi \rightarrow \bar{\varphi}$  — гомоморфизм  $\text{Aut}(\langle \Lambda, f \rangle)$  на  $\text{Aut}(\langle \bar{\Lambda}, \bar{f} \rangle)$ . Последняя группа является бесконечной циклической группой, порожденной циклом  $(\dots, \bar{f}^{-2}(\bar{\lambda}), \bar{f}^{-1}(\bar{\lambda}), \bar{\lambda}, \bar{f}(\bar{\lambda}), \bar{f}^2(\bar{\lambda}), \dots)$ ,  $\bar{\lambda} \in \bar{\Lambda}$ .

5.  $\text{Ker}(\varphi \rightarrow \bar{\varphi})$  состоит из всех  $\varphi \in \text{Aut}(\langle \Lambda, f \rangle)$  таких, что  $\lambda R \varphi(\lambda)$  для всех  $\lambda \in \Lambda$ .

**Доказательство.** 1. Соотношение  $f^{k-1}(f(\lambda)) = f^{k-1}(f(\mu))$  показывает, что если  $\lambda R \mu$ , то  $f(\lambda) R f(\mu)$ . Следовательно,  $R$  — конгруэнция.

2. Если  $\bar{\mu}$  — класс эквивалентности, содержащий  $\mu \in \Lambda$ , то  $\mu \rightarrow \bar{\mu}$  — канонический гомоморфизм

$$\bar{f}(\bar{\mu}) = \bar{f}(\bar{\mu}). \quad (7)$$

Для того чтобы доказать 2, достаточно убедиться в том, что  $\langle \bar{\Lambda}, \bar{f} \rangle$  — связная алгебра, а  $\bar{f}$  — подстановка без конечных циклов. Первое следует из того, что  $\langle \Lambda, f \rangle$  такова.

Если  $\bar{f}^k(\bar{\mu}) = \bar{\mu}$ , то в силу (7)  $f^k(\mu) = \mu$ ,  $f^k(\mu) R \mu$ ,  $f^{k+l}(\mu) = f^l(\mu)$ ,  $f^k(f^l(\mu)) = f^l(\mu)$ , но  $f$  не содержит конечных циклов, поэтому  $k = 0$ . Следовательно,  $\bar{f}$  также не содержит конечных циклов. Установим теперь сюръективность и инъективность  $\bar{f}$ . В силу однородности  $\langle \Lambda, f \rangle$  по крайней мере для одного  $\lambda \in \Lambda$  существует  $\mu$  такое, что  $f(\mu) = \lambda$ , поэтому  $\bar{f}(\bar{\mu}) = \bar{\lambda}$ . Если далее  $\bar{f}(\bar{\mu}) = \bar{f}(\bar{\lambda})$ , то в силу (7)  $f(\mu) = f(\lambda)$ ,  $f(\mu) R f(\lambda)$ ,  $f^k(f(\mu)) = f^k(f(\lambda))$ ,  $\mu R \lambda$ ,  $\bar{\lambda} = \bar{\mu}$ . Пункт 2 доказан.

3. Пусть  $\lambda R \mu$ ,  $\lambda, \mu \in \Lambda$ , т. е.  $f^k(\lambda) = f^k(\mu)$ , тогда  $\varphi^{f^k}(\lambda) = \varphi^{f^k}(\mu)$ , а так как  $\varphi f = f \varphi$ , то  $f^k(\varphi(\lambda)) = f^k(\varphi(\mu))$ . Следовательно,  $\varphi(\lambda) R \varphi(\mu)$ .

4. Если  $\mu \rightarrow \bar{\mu}$  — канонический гомоморфизм алгебры  $\langle \Lambda, \varphi \rangle$  на  $\langle \bar{\Lambda}, \bar{\varphi} \rangle$ , то

$$\bar{\varphi}(\bar{\lambda}) = \overline{\varphi(\lambda)}. \quad (8)$$

В силу (7), (8) справедливы равенства  $\bar{f}(\varphi(\bar{\lambda})) = \overline{f(\varphi(\lambda))} = \overline{\varphi f(\lambda)} = \overline{\varphi \bar{f}(\lambda)}$ , которые показывают, что  $\bar{\varphi}$  — автоморфизм алгебры  $\langle \bar{\Lambda}, \bar{f} \rangle$ . Из пункта 2 следует, что  $\bar{f}$  является бесконечным циклом, т. е.  $\bar{f} = (\dots \bar{f}^{-1}(\bar{\lambda}), \bar{\lambda}, \bar{f}(\bar{\lambda}) \dots)$ . Если  $\psi$  — автоморфизм алгебры  $\langle \bar{\Lambda}, \bar{f} \rangle$ , то  $\psi \bar{f} = \bar{f} \psi$ , но, как легко видеть, все подстановки, перестановочные с циклом  $\bar{f}$ , являются его степенями, т. е.  $\psi = \bar{f}^k$  для некоторого  $k \in Z$ . Следовательно,  $\text{Aut}(\langle \bar{\Lambda}, \bar{f} \rangle) = \{ \bar{f}^k \}$ ,  $k \in Z$ . Из однородности  $\langle \Lambda, f \rangle$  и из равенств  $\varphi_1 \varphi_2(\lambda) = \varphi_1 \varphi_2(\bar{\lambda}) = \overline{\varphi_1 \varphi_2(\lambda)}$  следует, что соответствие  $\varphi \rightarrow \bar{\varphi}$  — гомоморфизм  $\text{Aut}(\langle \Lambda, f \rangle)$  на  $\text{Aut}(\langle \bar{\Lambda}, \bar{f} \rangle)$ .

Из леммы 1 следует, что  $\text{Aut}(\langle \Lambda, f \rangle) / \text{Ker}(\varphi \rightarrow \bar{\varphi})$  — бесконечная циклическая группа. Ниже (теорема 3) мы опишем строение группы  $\text{Ker}(\varphi \rightarrow \bar{\varphi})$ , а затем укажем (теорема 5) то расширение, с помощью которого из  $\text{Ker}(\varphi \rightarrow \bar{\varphi})$  и бесконечной циклической группы получается группа  $\text{Aut}(\langle \Lambda, f \rangle)$ . Но предварительно введем некоторые определения и обозначения.

Пусть  $X = \prod_{i \in Z} X_i$  — (полное) прямое произведение множеств  $X_i$ . Элементы  $X$  суть векторы  $x = (x_i)_{i \in Z}$ ,  $x_i \in X_i$  —  $i$ -ая координата вектора  $x$ .  ${}^h X$  — прямое произведение  $\prod_{i > h} X_i$ .  $p \in {}^h X$  будем называть  $k$ -сегментом (иногда

просто сегментом). Если для любого  $i$ ,  $i \geq k$ ,  $i$ -ая координата  $k$ -сегмента  $p \in {}^h X$  совпадает с  $i$ -ой координатой вектора  $x \in X$  ( $l$ -сегмента  $q$ ,  $l \leq k$ ), то назовем сегмент  $p$   $k$ -сегментом вектора  $x$  (или сегмента  $q$ ).  $k$ -сегмент вектора  $x$  обозначим  ${}^k x$ . Каждый элемент множества  ${}^k X$  можно представить (правда, неоднозначно) в виде  ${}^k x$ , где  $x \in X$ ,  $k \in Z$ , поэтому  $k$ -сегменты будут часто обозначаться таким образом. Пусть  $\tilde{X} = \bigcup_{k \in Z} {}^k X$ . Если каждый

элемент  $p$  множества  $P$  принадлежит  $\prod_{t_p < i < n-1} X_i$  или  $\prod_{i < n-1} X_i$ , то через  ${}^n c \circ p$ ,  $c \in X$ ,  $n \in Z$ , обозначим множество всех элементов вида  ${}^n c \circ p$ , где  ${}^n c \circ p$  — сегмент или вектор,  $i$ -ая координата которого совпадает с  $i$ -ой координатой  $c$ , если  $i \geq n$ , или с  $i$ -ой координатой  $p$  в противоположном случае.

На множествах  $X$ ,  $\tilde{X}$  введем отношения эквивалентности  $T$ ,  $\tilde{T}$ . Будем говорить, что  $x \equiv y \pmod k$ ,  $x, y \in X$ ,  $k \in Z$ , если  ${}^k x = {}^k y$  (аналогично:  ${}^n x \equiv {}^m y \pmod k$ ,  $k \geq \max(n, m)$ ,  ${}^n x, {}^m y \in \tilde{X}$ , если  ${}^k x = {}^k y$ ). Очевидно, сравнение по  $\pmod k$  — отношение эквивалентности. Будем писать  $x T y$  ( ${}^n x \tilde{T} {}^m y$ ), если  $x \equiv y \pmod k$  ( ${}^n x \equiv {}^m y \pmod k$ ) хотя бы для одного  $k \in Z$ . Класс эквивалентности  $C$  ( $\tilde{C}$ ) по отношению  $T$  ( $\tilde{T}$ ) назовем связной компонентой множества  $X$  ( $\tilde{X}$ ). Непосредственно проверяется, что отображение  $C \rightarrow \tilde{C}$ , где  $\tilde{C} = \bigcup_{k \in Z, x \in C} [{}^k x]$  — биективное отображение множества связных компонент  $X$  на множество связных компонент  $\tilde{X}$ .

Пусть  $X^k = \prod_{i < k} X_i$ ,  $(\tilde{X})^k = \bigcup_{n \in Z, n < i < k} \prod_{i < k} X_i$ , тогда класс эквивалентности множества  $X$  (или  $\tilde{X}$ ) по  $\pmod k$ ,  $k$  фиксировано, содержащий  $c$  ( ${}^k c$ ), имеет вид

${}^k c \circ X^{k-1}$  ( ${}^k c \circ (\tilde{X})^{k-1}$ ). Следовательно, если  $C$  — связная компонента множества  $X$ , содержащая  $c$ , то

$$C = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} {}^k c \circ X^{k-1}, \quad {}^k c \circ X^{k-1} \subseteq {}^n c \circ X^{n-1}, \quad k \leq n. \quad (9)$$

Аналогично

$$\tilde{C} = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} {}^k c \circ (\tilde{X})^{k-1}, \quad {}^k c \circ (\tilde{X})^{k-1} \subseteq {}^n c \circ (\tilde{X})^{n-1}, \quad k \leq n. \quad (10)$$

Пусть далее  $C, B, (\tilde{C}, \tilde{B})$  — связные компоненты множества  $X(\tilde{X})$ , тогда существует биективное отображение  $\psi: C \rightarrow B$  ( $\tilde{\psi}: \tilde{C} \rightarrow \tilde{B}$ ) такое, что  $x \equiv y \pmod k$ ,  $x, y \in C$  ( ${}^n x \equiv {}^m y \pmod k$ ,  ${}^n x, {}^m y \in \tilde{C}$ ) тогда и только тогда, когда  $\psi(x) \equiv \psi(y) \pmod k$  ( $\tilde{\psi}({}^n x) \equiv \tilde{\psi}({}^m y) \pmod k$ ). Действительно, если  $c = (c_i)$ ,  $b = (b_i)$  — фиксированные векторы компонент  $C$  и  $B$  соответственно и  $\tau_i$  — подстановка  $X_i$ , переводящая  $C_i$  в  $B_i$ , то  $\psi(x) = (\tau_i(x_i))$  ( $\tilde{\psi}({}^l x) = (\tau_i(x_i))_{i > l}$ ) и будет требуемым отображением.

Введем на множестве  $X$  основную для дальнейшего операцию  $V$  (операцию сокращения сегмента), полагая  $V({}^k x) = {}^{k+1}x$ ,  ${}^k x \in \tilde{X}$ , т. е. образом  $k$ -сегмента при операции  $V$  считаем его  $(k+1)$ -сегмент. Очевидно,  $V^l({}^k x) = {}^{k+l}x$ ,  $l \geq 0$ ,  $l \in \mathbb{Z}$ , поэтому унарная алгебра  $\langle \tilde{X}, V \rangle$  не имеет циклов конечной длины. Отношение  $\tilde{T}$ , введенное нами выше, есть тогда не что иное, как отношение связности унарной алгебры  $\langle \tilde{X}, V \rangle$ , т. е. если  $\tilde{C}$  — связная компонента множества  $\tilde{X}$ , то  $\langle \tilde{C}, V \rangle$  — связная компонента алгебры  $\langle \tilde{X}, V \rangle$  и наоборот.

Лемма 3. Пусть  $X = \prod_{i \in \mathbb{Z}} X_i$  и  $\bar{X}_i = \gamma$ , тогда  $\langle \tilde{X}, V \rangle$  — однородная унарная алгебра типа  $(\alpha, \gamma)$ ,  $\alpha$  — число связных компонент.

Доказательство следует из утверждений 1 и 2 теоремы 1, так как  $V^{-1}({}^k x) = {}^k x \circ X_{k-1}$  и  $V^{-1}({}^k x) = \gamma$ ,  ${}^k x \in \tilde{X}$ .

Эта лемма доказывает утверждение 3 теоремы 1.

Любую связную компоненту  $\langle \tilde{C}, V \rangle$  алгебры  $\langle \tilde{X}, V \rangle$  мы будем называть канонической связной однородной (к. с. о.) унарной алгеброй типа  $\gamma$ ,  $\gamma = \bar{X}_i$ .

Отметим, что построение однородной связной унарной алгебры типа  $\gamma$  сходно с построением (канонического) ультраметрического пространства Кантора ([6], § 4).

В случае, если  $R$  — конгруэнция, введенная в лемме 1,  $\langle \tilde{C}, V \rangle$  — к. с. о. алгебра,  $\langle \tilde{C}, V \rangle$  — фактор-алгебра алгебры  $\langle \tilde{C}, V \rangle$  по конгруэнции  $R$ , то элементами  $\tilde{C}$  являются множества  ${}^k(\tilde{C}) = \tilde{C} \cap {}^k X$ , другими словами: конгруэнция  $R$  совпадает с эквивалентностью  ${}^n x \sim {}^m y$  тогда и только тогда, когда  $n = m$ . Действительно, если  $V^k({}^n x) = V^k({}^m y)$ ,  ${}^n x = (x_i)_{i > n}$ ,  ${}^m y = (y_i)_{i > m}$ ,  ${}^n x, {}^m y \in \tilde{C}$ ,  $x_i, y_i \in X_i$ , то из определения  $V$  следует, что  $x_{n+k} = y_{m+k}$  и  $n = m$  и наоборот, если  ${}^n x, {}^m y \in \tilde{C}$ , то в силу связности  $\langle \tilde{C}, V \rangle$   $V^k({}^n x) = V^k({}^m y)$ ,  $x_{n+k} = y_{m+k}$ ,  $k = m$ , поэтому  ${}^n x R {}^m y$ . Следовательно,  $\tilde{C} = \{ {}^k(\tilde{C}) \}_{k \in \mathbb{Z}}$ .

Подстановка  $\varphi$  связной компоненты  $\tilde{C}$  (или множества  $\tilde{X}$ ) называется автоматной, если выполняются следующие два условия:

1.  $\varphi$  переводит  $k$ -сегмент в  $k$ -сегмент, т. е. если  ${}^k x \in {}^k X$ , то и  $\varphi({}^k x) \in {}^k X$ .

2.  $\varphi$  переводит  $k$ -сегмент сегмента  ${}^l x$ ,  $k \geq l$ , в  $k$ -сегмент сегмента  $\varphi({}^l x)$ .

Если в этом определении заменить  $\tilde{C}$  свободной полугруппой, порожденной некоторым алфавитом, а  $k$ -сегмент — словом длины  $(-k)$ ,  $k \leq 0$ , то мы

получим обычное понятие автоматной подстановки свободной полугруппы (см., например, [10]).

Очевидно, совокупность  $A(\tilde{C})$  ( $A(\tilde{X})$ ) всех автоматных подстановок множества  $\tilde{C}$  ( $\tilde{X}$ ) образует группу. С точностью до подобия определение группы  $A(\tilde{C})$  не зависит от выбора связной компоненты  $\tilde{C}$ . Если  $\tilde{B}$  — другая связная компонента, то в качестве отображений подобия достаточно взять отображения  $\rho \rightarrow \tilde{\psi}(\rho)$  и  $\tilde{g} \rightarrow \tilde{\psi}\tilde{g}\tilde{\psi}^{-1}$ ,  $\rho \in \tilde{C}$  ( $\tilde{\psi}$  определено выше),  $\tilde{g} \in A(\tilde{C})$ . (Относительно подобия см. [14], стр. 69).

Следующее замечание показывает, что достаточно ограничиться группой  $A(\tilde{C})$ .

Замечание 1.  $A(\tilde{X}) \simeq A(\tilde{C}) \int S_\alpha$ ,  $\alpha$  — мощность множества связных компонент множества  $\tilde{X}$ .

Теорема 2. Пусть  $\langle \tilde{C}, V \rangle$  — к. с. о. алгебра,  $\varphi \rightarrow \bar{\varphi}$  — гомоморфизм  $\text{Aut}(\langle \tilde{C}, V \rangle)$  на  $\text{Aut}(\langle \tilde{C}, \bar{V} \rangle)$ , введенный в лемме 1, тогда  $\text{Ker}(\varphi \rightarrow \bar{\varphi})$  совпадает с  $A(\tilde{C})$ .

Доказательство. Пусть  ${}^n x \in \tilde{C}$ ,  $\varphi \in \text{Ker}(\varphi \rightarrow \bar{\varphi})$ , тогда в силу того что  $\tilde{C} = \{^k(\tilde{C})\}_{k \in Z}$  (см. замечание выше) и в силу утверждения 5 леммы 1,  $\varphi({}^n x)$  —  $n$ -сегмент. Следовательно,  $\varphi$  удовлетворяет условию 1. А. Так как  $\varphi$  — автоморфизм, то  $\varphi V^k({}^n x) = V^k \varphi({}^n x)$  для любого  $k \geq 0$ ,  $k \in Z$ , но  $V^k({}^n x)$  —  $(n+k)$ -сегмент сегмента  ${}^n x$ , поэтому  $\varphi$  удовлетворяет условию 2. А. С другой стороны, если  $\varphi$  — автоматная подстановка, то  $\varphi$  переводит сегмент  $V({}^n x)$ , который является  $(n+1)$ -сегментом сегмента  ${}^n x$ , в  $(n+1)$ -сегмент сегмента  $\varphi({}^n x)$ , т. е. в  $V\varphi({}^n x)$ . Следовательно,  $\varphi V({}^n x) = V\varphi({}^n x)$ . Теорема доказана.

Отметим, что на подобную связь понятия автоматной подстановки и операции сокращения  $V$  было указано в [11] (теорема 7).

Пусть теперь  $G_i$  ( $i \in Z$ ) — семейство групп подстановок,  $X_i$  — область действия  $G_i$ ,  $C$  — связная компонента полного прямого произведения  $X = \prod_{i \in Z} X_i$ . Тогда совокупность  $\text{Wr}_{i \in Z} G_i$  (или  $\text{Wr}_{i \in Z}^* G_i$ ) всех отображений  $g$  множества  $C$  (или  $X$ ), определенных условиями

$$g(x) = (g_i({}^{i+1}x)(x_i))_{i \in Z}, \tag{1.W}$$

где  $x = (x_i) \in C$  (или  $x \in X$ ), а  $g_i({}^{i+1}x)$  — функция, заданная на множестве  ${}^{i+1}C = \{{}^{i+1}c\}_{c \in C}$  (или  ${}^{i+1}X$ ) со значением в группе  $G_i$ ;

$$\text{множество } \{i \mid i \in Z, g_i({}^{i+1}x)(x_i) \neq x_i\} \text{ пусто} \tag{2.W}$$

или ограничено сверху для каждого  $x \in C$  (или  $x \in X$ ),

— образует группу.

Отображения  $g$  вида 1.W мы будем записывать в виде таблицы функций  $g = (g_i({}^{i+1}x))_{i \in Z}$ .

Пусть  $g = (g_i({}^{i+1}x))$ ,  $h = (h_i({}^{i+1}x))$ ,  $g, h \in \text{Wr}_{i \in Z} G_i$  (или  $g, h \in \text{Wr}_{i \in Z}^* G_i$ ), тогда

$$hg(x) = (h_i({}^{i+1}(g(x)))(g_i({}^{i+1}x)(x_i))). \tag{11}$$

Следовательно,  $\text{Wr}_{i \in Z} G_i$  ( $\text{Wr}_{i \in Z}^* G_i$ ) замкнута относительно обычной композиции отображений. Отображение  $1 = (1_i({}^{i+1}x))_{i \in Z}$ , где  $1_i({}^{i+1}x)$  — функция, постоянная на  ${}^{i+1}C$  ( ${}^{i+1}X$ ) и принимающая значение  $1_i$  — единицы группы  $G_i$ , явля-

ется, очевидно, тождественным отображением множества  $C(X)$ . Так как ассоциативность имеет место, то мы показали, что  $WrG_i$  ( $Wr^*G_i$ ) — группа с единицей. Ниже докажем, что отображение  $g$ , удовлетворяющее условиям 1.W и 2.W, в действительности является подстановкой и что (см. (16)) наряду с  $g$   $g^{-1}$  также принадлежит  $WrG_i$ . Этим будет доказано, что  $WrG_i$  — группа, а то, что  $Wr^*G_i$  — группа, будет тогда следовать из леммы 4.

Иногда, чтобы подчеркнуть, что группа  $WrG_i$  рассматривается именно как группа подстановок множества  $C$ , будем писать  $(C)WrG_i$  вместо  $WrG_i$ .

Сделаем еще несколько замечаний, непосредственно касающихся введенного выше определения.

Прежде всего определенные выше группы  $(C)WrG_i$  не зависят от связной компоненты  $C$ . Точнее, если  $C$  и  $B$  — связные компоненты  $X$ , то  $(C)WrG_i$  подобна  $(B)WrG_i$ . Для доказательства достаточно рассмотреть построенное выше соответствие  $\psi: C \rightarrow B$  и соответствие  $g \rightarrow \psi g \psi^{-1}$ ,  $g \in (C)WrG_i$ , которые и дадут требуемое подобие.

Условие 2.W является необходимым и достаточным для того, чтобы  $g$  вида 1.W, действующее на  $C$ , переводило  $C$  в себя (или же, если мы рассматриваем  $g$  как элемент группы  $Wr^*G_i$ , чтобы  $g$  каждую связную компоненту  $C$  множества  $X$  переводило в себя).

Для группы  $(C)WrG_i$  достаточно потребовать, чтобы условие 2.W выполнялось по крайней мере для одного элемента  $x \in C$ , ибо для любого  $x \in C$   $x \equiv c \pmod{k}$ , при некотором  $k \in Z$ , зависящем от  $x$ .

Отметим также, что если вместо множества  $Z$  взять вполне упорядоченное множество  $I$ , то мы получим обычное определение сплетения групп  $G_i$ ,  $i \in I$ . Условие 2.W для таких сплетений заведомо выполняется.

Лемма 4. Группа  $Wr^*G_i$  подобна полному прямому произведению  $\alpha$  экземпляров группы  $WrG_i$ , где  $\alpha$  — мощность множества связных компонент  $X$ .

Доказательство следует из замечаний, сделанных выше, и из того факта, что действие  $g$  вида 1.W можно задавать независимо на связных компонентах.

Докажем теперь, что отображение  $g = (g_i^{(i+1)x})$  множества  $C$ , определенное условиями 1.W и 2.W, является подстановкой.

Сюръективность  $g$ . Пусть  $c = (c_i) \in C$ , требуется найти  $z \in C$  такое, что  $g(z) = c$ . Из условия 2.W следует существование такого  $k$ , что

$$c_i g_i^{(i+1)c} = c_i \text{ для всех } i \geq k. \quad (12)$$

Из (12) в свою очередь следует, что  $g$  переводит множество  ${}^{k_c}X^{k-1}$  в себя, поэтому  $g$  индуцирует отображение  $t^{(g)}$  множества  $X^{k-1}$  в себя

$$t^{(g)}(y) = (g_i^{(i+1)({}^{k_c}y)}(y_i))_{i < k-1}, \quad y = (y_i)_{i < k-1}, \quad y \in X^{k-1}. \quad (13)$$

При изменении  $y \in X^{k-1}$   ${}^{k_c}$  не изменяется, следовательно,  $g_i^{(i+1)({}^{k_c}y)}$  можно считать функцией  $t_i^{(g)}$ , определенной на  $\prod X_j$  со значением в группе  $G_i$ . Поэтому  $t^{(g)} = (t_i^{(g)})_{i < k-1}$  принадлежит  $WrG_i$  сплетению групп  $G_i$ ,  $i \leq k-1$ , по вполне упорядоченному множеству  $\{i \mid i \leq k-1\}$ , а так как

$WrG_i$  — группа, то существует такое  $q \in X^{k-1}$ , что  $t^{(g)}(q) = (c_i)_{i < k-1}$ . Если теперь в качестве  $z$  взять  ${}^k c \circ q$ , то в силу (12), (13)  $g({}^k c \circ q) = c$ .

Инъективность  $g$ . Для любых неравных  $x, z \in C$  существует, очевидно, такое  $k$ , что  $x \equiv z \pmod k$ ,  $x \not\equiv z \pmod{k-1}$ , тогда  $g_{k-1}({}^k x)(x_{k-1}) \neq g_{k-1}({}^k z)(z_{k-1})$  и, следовательно,  $g(x) \neq g(z)$ .

Непосредственно может быть доказана

Лемма 5. 1. Разбиение связной компоненты  $C$  на множества вида  $p \circ X^{k-1}$ ,  $p \in {}^k C$ ,  $C = \bigcup_{p \in {}^k C} p \circ X^{k-1}$ , является разбиением множества  $C$  на системы примитивности группы  $(C)WrG_i$ .

2. На множестве  $p \circ X^{k-1}$   $(C)WrG_i$  индуцирует группу, подобную  $WrG_i$ .

3. Все подстановки  $g \in (C)WrG_i$ , оставляющие на месте системы импримитивности вида  $p \circ X^{k-1}$ , образуют группу, подобную полному прямому произведению  $\beta$  экземпляров группы  $WrG_i$ ,  $\beta = {}^k \bar{C}$ .

Теорема 3. Пусть  $X = \bigcup_{i \in Z} PX_i$ ,  $C$  — связная компонента, тогда  $(C)WrS_i$  изоморфна  $A(\bar{C})$ ,  $S_i$  — симметрическая группа множества  $X_i$ .

Доказательство. Пусть  $x = (x_i)$ ,  $y = (y_i)$  принадлежат  $C$ ,  $g = (g_i({}^{i+1}x)) \in (C)WrG_i$ . Если  ${}^k x = {}^k y$ , то для  $i \geq k$   $g_i({}^{i+1}x)(x_i) = g_i({}^{i+1}y)(y_i)$ , следовательно,  ${}^k(g(x)) = {}^k(g(y))$ . В свою очередь это позволяет каждой подстановке  $g \in (C)WrS_i$  поставить в соответствие подстановку  $\tilde{g} \in A(\bar{C})$ , полагая

$$({}^k x)\tilde{g} = {}^k(g(x)), \quad x \in C. \tag{14}$$

Инъективность  $\tilde{g}$  доказывается точно так же, как была выше доказана инъективность  $g$ , а сюръективность  $\tilde{g}$  следует из сюръективности  $g$ . Поэтому  $\tilde{g}$  — действительно подстановка. Из определения  $\tilde{g}$  видно, что  $\tilde{g} \in A(\bar{C})$ .

Докажем теперь, что соответствие  $g \rightarrow \tilde{g}$  является биективным соответствием между  $(C)WrS_i$  и  $A(\bar{C})$ .

Сюръективность. Пусть  $r \in A(\bar{C})$ ,  ${}^{i+1}x \in {}^{i+1}X$ . Определим на  ${}^{i+1}X$  функцию  $g({}^{i+1}x)$  со значением в  $S_i$ , считая образом  $y_i \in X_i$  при отображении  $g_i({}^{i+1}x)$   $i$ -ую координату сегмента  $r({}^{i+1}x \circ y_i)$

$$g_i({}^{i+1}x)y_i = r({}^{i+1}x \circ y_i) \setminus r({}^{i+1}x). \tag{15}$$

Справа стоит теоретико-множественная разность множеств координат соответствующих сегментов. Так как  $r$  — подстановка, то из (15) следует, что  $g_i({}^{i+1}x)$  — подстановка множества  $X_i$  ( ${}^{i+1}x$  фиксировано). Легко проверить, что отображение  $g$ , определяемое таблицей функций  $g_i({}^{i+1}x)$ , и будет как раз тем отображением  $g \in (C)WrS_i$ ,  $\tilde{g}$  для которого совпадает с  $r$ . Инъек-

тивность  $\tilde{g}$  проверяется непосредственно.

Равенства  $\tilde{g}'\tilde{g}({}^i x) = {}^i(g'g(x)) = \tilde{g}'({}^i g(x)) = \tilde{g}'\tilde{g}({}^i x)$  показывают, что соответствие  $g \rightarrow \tilde{g}$  — изоморфизм. Теорема доказана.

Следствие 1.  $A(X) \cong \prod_{i \in Z} (WrS_i) \wr S_\alpha$ ,  $\alpha$  — мощность множества связных компонент  $X$ .

Следствие 2. Если  $\varphi \rightarrow \bar{\varphi}$  гомоморфизм  $\text{Aut} \langle \bar{C}, V \rangle$  на  $\text{Aut} \langle \bar{C}, \bar{V} \rangle$ , введенный в лемме 2, то  $\text{Ker}(\varphi \rightarrow \bar{\varphi})$  изоморфно  $\text{Wr}_{i \in Z} S_i$ .

Следствие 3. Группу  $(C) \text{Wr}_{i \in Z} G_i$ ,  $G_i$  — группа подстановок множества  $X_i$ , можно изоморфно вложить в группу  $A(\bar{C})$ .

Следствия 1, 2 вытекают из замечания 1 и теоремы 2 соответственно.

Фиксируем теперь  $k \in Z$ ,  $p \in {}^k X$  и рассмотрим изоморфное вложение группы  $\text{Wr}_{i < k-1} S_i$  в группу  $(C) \text{Wr}_{i \in Z} S_i$ , определяемое следующим образом: если  $t \in \text{Wr}_{i < k-1} S_i$ , то поставим ему в соответствие  $t'$

$$t'(x) = \begin{cases} x, & \text{если } x \notin p \circ X^{k-1} \\ p \circ t(y), & \text{если } x = p \circ y, y \in X^{k-1}. \end{cases}$$

Очевидно, соответствие  $t \rightarrow t'$  — действительно изоморфное вложение. Отождествим группу  $\text{Wr}_{i < k-1} S_i$  с ее изоморфным образом.

Обозначим через  $A(p \circ (\bar{X})^{k-1})$  группу автоматных подстановок множества  $p \circ (\bar{X})^{k-1}$ , т. е. группу всех подстановок множества  $p \circ (\bar{X})^{k-1}$ , удовлетворяющих условиям 1.A и 2.A.

Аналогично рассмотрим изоморфное вложение группы  $A(p \circ (\bar{X})^{k-1})$  в группу  $A(\bar{C})$ , определяемое следующим образом: если  $r \in A(p \circ (\bar{X})^{k-1})$ , то поставим ему в соответствие

$$r'(q) = \begin{cases} q, & \text{если } q \notin p \circ (\bar{X})^{k-1} \\ p \circ r(l), & \text{если } q = p \circ l, l \in (\bar{X})^{k-1}. \end{cases}$$

Отождествим группу  $A(p \circ (\bar{X})^{k-1})$  с подгруппой, на которую она отображается при изоморфизме  $r \rightarrow r'$ . Тогда, очевидно, соответствие  $g \rightarrow \tilde{g}$ , введенное в теореме 3, индуцирует изоморфизм группы  $\text{Wr}_{i < k-1} S_i$  на  $A(p \circ (\bar{X})^{k-1})$ .

Если теперь предположить, что все  $X_i$  суть экземпляры одного и того же множества  $Y$ , то нами получена в качестве следствия основная теорема [11, 12], устанавливающая, что группа автоматных подстановок (в смысле [10], см. также [13]) свободной полугруппы  $F(Y)$ , порожденной множеством  $Y$ , изоморфна  $\text{Wr}_{0 < i \in Z} S_i$ , где  $S_i$  —  $i$ -й экземпляр симметрической группы множества  $Y^*$ . Эту теорему можно было бы доказать и непосредственно, используя метод доказательства теоремы 3.

Воспользуемся теперь соответствием  $g \rightarrow \tilde{g}$ , установленным в теореме 3, чтобы доказать, наконец, что  $(C) \text{Wr}_{i \in Z} G_i$  — группа. Нам осталось только показать, что наряду с  $g \in (C) \text{Wr}_{i \in Z} G_i$   $g^{-1}$  также принадлежит  $(C) \text{Wr}_{i \in Z} G_i$ . Итак, пусть  $g$  определяется таблицей функций  $(g_i^{(i+1)x})_{i \in Z}$ , тогда  $h = (h_i^{(i+1)x})_{i \in Z}$

$$h_i^{(i+1)x} = (g_i(\tilde{g}^{-1(i+1)x}))^{-1} \quad (16)$$

как раз и будет совпадать с  $g^{-1}$ . Действительно, применяя (11) и (16), получаем

$$\begin{aligned} hg(x) &= (h_i^{(i+1)(g(x))} (g_i^{(i+1)x}(x_i)))_{i \in Z} = (h_i(\tilde{g}^{(i+1)x}) (g_i^{(i+1)x}(x_i)))_{i \in Z} = \\ &= (g_i(\tilde{g}^{-1}(\tilde{g}^{(i+1)x})))^{-1} (g_i^{(i+1)x}(x_i)))_{i \in Z} = \\ &= ((g_i^{(i+1)x})^{-1} (g_i^{(i+1)x}(x_i)))_{i \in Z} = (x_i)_{i \in Z} = x. \end{aligned}$$

\*) С точностью до терминологии группа  $A(p \circ (\bar{X})^{k-1})$  и является как раз группой автоматных подстановок (в смысле [10]) свободной полугруппы  $F(Y)$  (см. также замечание после условий 1.A и 2.A).

Следовательно,  $h = g^{-1}$ , но так как  $h_i(i+1x) \in G_i$ , то и  $g^{-1} \in (C) \text{Wr}G_i$ .

В сплетении групп по вполне упорядоченному множеству обратный элемент определяется индуктивно. Здесь же подобным образом доказать существование обратного элемента нельзя, и (16), по-видимому, является единственным способом определения обратного элемента.

Если при построении группы  $\text{Wr}G_i$  не требовалось, чтобы группы совпадали (точнее, чтобы они были попарно подобны), то для конструкции, которую мы вводим ниже, такое совпадение обязательно.

Пусть для каждого  $i \in Z$   $G_i$  —  $i$ -й экземпляр фиксированной группы подстановок  $G$ , действующей на  $Y$ .  $X_i$  (область действия группы  $G_i$ ) —  $i$ -й экземпляр множества  $Y$ . Тогда совокупность  $H = H(G)$  всех отображений  $g^{(n)}$ ,  $n \in Z$ , связной компоненты  $C$  полного прямого произведения  $X = \prod_{i \in Z} X_i^*$ , определенных условиями

$$g^{(n)}(x) = (g_i^{(n)}(i+1x)(x))_{i \in Z}, \quad (1.W')$$

где  $x = (x_i) \in C$ ,  $x_i \in X_i$ , а  $g_i^{(n)}(i+1x)$  — функция, заданная на множестве  $i+1C (= U^{i+1}C)$  со значением в группе  $G_{i-n}$ ;

по крайней мере для одного  $x \in C$  множество

$$\{i \mid i \in Z, g_i^{(n)}(i+1x)(x_i) \neq x_{i+n}\} \text{ пусто или ограничено сверху,} \quad (2.W')$$

— образует группу.

Отображение  $g^{(n)}$  вида 1.W' будем записывать в виде таблицы функций  $g^{(n)} = (g_i^{(n)}(i+1x))_{i \in Z}$ .

Пусть  $g^{(n)} = (g_i^{(n)}(i+1x))$ ,  $h^{(k)} = (h_i^{(k)}(i+1x))$ ,  $g^{(n)}, h^{(k)} \in H$ , тогда  $h^{(k)}g^{(n)}(x) = (h_{i-n}^{(k)}(i-n+1(g^{(n)}(x))))(g_i^{(n)}(i+1x)(x_i))_{i \in Z}$ . Следовательно,  $H$  замкнута относительно умножения отображений.

Все замечания, касающиеся определения группы  $\text{Wr}G_i$ , справедливы и здесь. В частности, определение группы  $H$  не зависит от связной компоненты  $C$  множества  $X$ . Ниже мы покажем, что  $H$  действительно группа.

Для упрощения дальнейших рассуждений предположим, что связная компонента  $C$  содержит вектор  $c = (c_i)_{i \in Z}$ , все координаты которого совпадают, т. е.  $c_i = c_j$  для всех  $i, j \in Z$ , и будем рассматривать  $C$  как область действия группы  $H$ . Пусть  $1^{(k)} = (1_i^{(k)})_{i \in Z}$ , где  $1_i^{(k)} = 1_i^{(k)}(i+1x)$  — функция, постоянная на  $i+1X$ , принимающая значение  $1_{i+k}$  — единицы групп  $G_{i+k}$ . (Тогда  $1^{(0)} = 1$  — единица группы  $H$ ). Если  $x = (x_i) \in C$ , то  $x \equiv c \pmod n$  для некоторого  $n \in Z$  и  $1^{(k)}(x) = 1^{(k)}(c) \pmod{n-k}$ . В силу специального выбора  $c \in C$ ,  $1^{(k)}(c) = c$ . Следовательно,  $1^{(k)}$  отображает  $C$  в себя. Таким образом,  $1^{(k)} \in H$ . Множество  $1^{(Z)}$  всех отображений вида  $1^{(k)}$ ,  $k \in Z$ , как легко проверить, образует группу, изоморфную  $Z$  — аддитивной группе целых чисел. Очевидно, далее, что множество всех отображений вида  $g^{(0)}$ , есть не что иное, как группа  $\text{Wr}G_i$  (в дальнейшем отображение  $g^{(0)} \in H$  будем обозначать просто  $g$ ).

Каждому отображению  $(g_i^{(k)}(i+1x)) = g^{(k)} \in H$  поставим теперь в соответствие отображение  $g = (g_i(i+1x)) \in \text{Wr}G_i$ , где

$$g_{i-k}(i+1x = i-k+1y) = g_i^{(k)}(i+1x). \quad (17)$$

\* Иными словами,  $X$  есть не что иное, как полная прямая степень множества  $Y$  с показателем  $Z$ .

Тогда  $g^{(h)}$  единственным образом представляется в виде

$$g^{(h)} = g1^{(h)}. \quad (18)$$

Действительно,  $g1^{(h)}(x) = (g_{i-k}^{(i+1-h)}(1^{(h)}(x))) (1_i^{(k)}(i+1)x(x_i))_{i \in Z} =$   
 $= (g_{i-k}^{(i-k+1)}(x')) (x'_{i-k})_{i \in Z} = (g_{i-k}^{(i+1)}(x))_{i \in Z} = (g_i^{(k)}(i+1)x(x_i))_{i \in Z} = g^{(h)}(x)$ .  
 Здесь положено  $1^{(h)}(x) = x'$  (а тогда  $x'_i = x_{i+h}$ ). Единственность представления (18) следует из того, что  $1^{(Z)} \cap \text{Wr}G_i = 1$ . Так как  $H$  порождается группами, то  $H$  в действительности группа. Нами доказана

**Теорема 4.** *Группа  $H(G)$  является полупрямым произведением аддитивной группы целых чисел  $Z$  на группы  $\text{Wr}G_i$ . Символически  $H(G) =$   
 $= (\text{Wr}G_i) \times Z^*$ .*

**Теорема 5.** *Пусть  $C$  — связная компонента полного прямого произведения  $X = \prod_{i \in Z} X_i$ ,  $\bar{X}_i = \bar{X}_j = \gamma$ , тогда группа автоморфизмов к.с.о. унарной алгебры  $\langle \bar{C}, V \rangle$  изоморфна группе  $H(S_\gamma)$ , где  $S_\gamma$  — симметрическая группа множества мощности  $\gamma$ .*

**Доказательство.** Как и выше, будем предполагать, что  $X_i (i \in Z)$  —  $i$ -й экземпляр некоторого фиксированного множества  $Y$ ,  $\bar{Y} = \gamma$  и что  $C$  содержит  $c = (c_i)_{i \in Z}$  такое, что  $c_i = c_j$  для всех  $i, j \in Z$ . Аналогично тому, как это сделано в доказательстве теоремы 3, каждому отображению  $g^{(n)} \in H(S_\gamma)$  поставим в соответствие отображение  $\tilde{g}^{(n)}$  множества  $\bar{C}$ ,  $\tilde{g}^{(n)}(m x) = g^{(n)}(x)$ ,  $x \in C$ . Если  $m x = m y$ ,  $x, y \in C$ , то легко понять, что  $g^{(n)}(m x) = g^{(n)}(m y)$ . Поэтому  $\tilde{g}^{(n)}$  — однозначное отображение. Пусть  $\tilde{H}(S_\gamma)$  — множество всех отображений вида  $\tilde{g}^{(n)}$ , тогда равенства  $\tilde{h}^{(k)} \tilde{g}^{(n)}(m x) = \tilde{h}^{(k)}(m^{-n} g^{(n)}(x)) = m^{-n-k} (h^{(k)}(g^{(n)}(x))) = h^{(k)} \tilde{g}^{(n)}(m x)$  показывают, что соответствие  $g^{(n)} \rightarrow \tilde{g}^{(n)}$  — гомоморфизм группы  $H(S_\gamma)$  на группу  $\tilde{H}(S_\gamma)$ . Каждый элемент  $g^{(n)}$  представляется в виде произведения  $g1^{(n)}$  (см. (18)), поэтому  $\tilde{g}^{(n)} = \tilde{g}\tilde{1}^{(n)}$ . Если  $\tilde{g}\tilde{1}^{(n)} = \tilde{h}\tilde{1}^{(k)}$ , то  $\tilde{1}^{(n-k)} = \tilde{g}\tilde{h}$ . Слева стоит отображение, которое каждый  $m$ -сегмент переводит в  $(m-n+k)$ -сегмент, справа — автоматное отображение, а это возможно лишь в том случае, когда  $n = k$ . Следовательно,  $\tilde{g}^{(n)}$  единственным образом представляется в виде произведения  $\tilde{g}\tilde{1}^{(n)}$ . Таким образом, соответствие  $g^{(n)} \rightarrow \tilde{g}^{(n)}$  — изоморфизм группы  $H(S_\gamma)$  на  $\tilde{H}(S_\gamma)$ . Докажем, наконец, что группа  $\tilde{H}(S_\gamma)$  как раз и будет группой автоморфизмов унарной алгебры  $\langle \bar{C}, V \rangle$ . Для этого, очевидно, достаточно показать, что отображение  $\tilde{1}^{(k)}$  — автоморфизм и что все автоморфизмы порождаются отображениями вида  $\tilde{1}^{(h)}$  и  $\tilde{g}$ . Выше мы доказали, что все автоматные подстановки составляют ядро гомоморфизма  $\text{Aut}(\langle \bar{C}, V \rangle)$  на  $\text{Aut}(\langle \bar{C}, \bar{V} \rangle)$ . Очевидно,  $V\tilde{1}^{(k)}(m x) = (x'_i)_{i > m-k+1}$ , где  $m x = (x_i)_{i > m}$ ,  $\tilde{1}^{(k)}(m x) = (x'_i)_{i > m-k}$ ,  $x'_i = x_{i+1}$ .  $\tilde{1}^{(k)}V(m x) = \tilde{1}^{(k)}(x'_i)_{i > m-1} = (x'_i)_{i > m-k+1}$ . Следовательно,  $\tilde{1}^{(k)}$  — автоморфизм алгебры  $\langle \bar{C}, V \rangle$ .

Пусть  $\varphi \in \text{Aut} \langle \bar{C}, V \rangle$ ,  $\langle \bar{C}, \bar{V} \rangle$  — фактор-алгебра по конгруэнции  $R$  (см. лемму 2), тогда  $\bar{C} = \{h(\bar{C})\}$  (см. замечание после леммы 3). Из пункта 4 леммы 2 следует, что если  $\varphi$  переводит некоторый  $m$ -сегмент в  $(m-k)$ -сегмент, то  $\varphi$  переводит каждый  $n$ -сегмент в  $(n-k)$ -сегмент. Поэтому  $\varphi\tilde{1}^{(k)}$  пере-

\*) Интересно отметить, что подобного рода полупрямое произведение (правда, в совершенно другой форме), когда в качестве группы  $\text{Wr}G_i$  берется дискретное сплетение, рассматривалась Ф. Холлом [7].

водит каждый  $n$ -сегмент в  $n$ -сегмент. Снова применяя пункт 4 леммы 2, получаем, что  $\varphi \tilde{I}^{(-h)} \in \text{Ker}(\varphi \rightarrow \bar{\varphi})$ . Следовательно,  $\tilde{I}^{(h)}\varphi$  — автоматная подстановка. Теорема доказана.

В качестве следствия предыдущей теоремы и леммы 1 получаем основную теорему.

**Теорема 6.** *Группа автоморфизмов однородной унарной алгебры типа  $(\alpha, \gamma)$  без циклов конечной длины изоморфна полному сплетению  $H(S_\alpha) \wr S_\gamma$ ,  $S_\alpha, S_\gamma$  — симметрические группы множеств мощности  $\alpha, \gamma$  соответственно.*

Заметим, что из теоремы 4 следует, что  $H(S_\gamma)$  является полупрямым произведением  $Wr(S_\gamma) \rtimes Z$ ,  $(S_\gamma)_i$  —  $i$ -й экземпляр группы  $S_\gamma$ .

$i \in Z$

### Литература

1. Marica J. G., Bryant S. J. *Pacif. J. Math.*, **10**, № 4, 1347, 1960.
2. Иванова О. А. *Вестн. Моск. ун-та, сер. физ.-мат. наук*, № 3, 31, 1964.
3. Novotný M. *Pacif. J. Math.*, **13**, № 4, 1359, 1963.
4. Weaver M. W. *Pacif. J. Math.*, **10**, № 2, 705, 1960.
5. Prešić S. *Publ. Fac. Electrotech. Univ. Belgrade, Ser. Mat., ct. Phys.*, **64**, 29, 1961.
6. Калужни Л. А. *Acta Math. Hungarica*, **2**, F. 3—4, 197, 1951.
7. Hall P. *Proc. Cambridge Philos. Soc.*, **58**, № 2, 170, 1962.
8. Baumslag G. *Proc. Cambridge Philos. Soc.*, **55**, 224, 1959.
9. Neumann P. M. *Math. Z.*, **84**, № 4, 343, 1964.
10. Глушков В. М. *Успехи матем. наук*, **16**, вып. 5, 3, 1961.
11. Лисковец В. А., Фейнберг В. З. *Вестн. АН БССР, сер. физ.-мат. наук*, № 3, 55, 1965.
12. Заровный В. П. *ДАН СССР*, **160**, № 3, 562, 1965.
13. Ногейс Ж. *Проблемы кибернетики*, вып. 9, 23, 1963.
14. Холл М. *Теория групп*. ИЛ, М., 1962.

Институт математики  
АН БССР

Поступило в редакцию  
5.VI 1968

Г. М. ЛЕВИН, В. С. ТАНАЕВ

## ОБ ОДНОМ КЛАССЕ КОМБИНАТОРНЫХ ЗАДАЧ ОПТИМИЗАЦИИ

Многие задачи математического программирования, возникающие в процессе создания автоматизированных систем проектирования, конструирования, календарного планирования и т. п., носят комбинаторный характер. Это обстоятельство в значительной степени затрудняет поиск оптимальных проектных и конструкторских решений, поскольку, с одной стороны, подобные задачи достаточно громоздки для осуществления непосредственного перебора возможных вариантов, с другой — многие регулярные методы математического программирования оказываются малоэффективными или вообще неприемлемыми для решения задач дискретной оптимизации.

Теория дискретного программирования, несмотря на интенсивные и небезрезультатные усилия многих исследователей, все еще далека от завершения, и получить точное решение ряда практически интересных задач за приемлемое время по-прежнему не представляется возможным.

Ниже описывается один класс комбинаторных задач, к необходимости рассмотрения которых приводят многочисленные реальные ситуации. Речь идет о нахождении оптимального значения функций, в рекуррентном задании которых содержатся некоторые характеристики соответствующих перестановок. Для построения искомого решения используются приемы, характерные для метода динамического программирования Р. Беллмана [1] и так называемого метода последовательного анализа вариантов, детальное описание которого дано в работах А. Вальда [2], В. С. Михалевича и Н. З. Шора [3, 4]. По-видимому, при оптимизации подобных функций указанные приемы оказываются наиболее эффективными, позволяя получить решение в результате пересмотра числа вариантов, существенно меньшего по сравнению с непосредственным перебором возможных вариантов.

1. Пусть  $P$  — множество перестановок  $\pi_l = (i_1, i_2, \dots, i_l)$  из  $l = 1, \dots, n$  элементов множества  $N = \{1, \dots, n\}$ .

Под  $st$ -окрестностью  $k$ -го элемента в перестановке  $\pi_l = (i_1, \dots, i_k, \dots, i_l)$  (обозначение  $B_{st}(\pi_l, k)$ ) будем понимать упорядоченный набор  $\langle Q, \sigma_s, \sigma_t \rangle$ , где  $\sigma_s = (i_{\max(1, k-s+1)}, \dots, i_{k-1}, i_k)$  и  $\sigma_t = (i_{k+1}, i_{k+2}, \dots, i_{\min(l, k+t)})$  — перестановки длины  $\min(k, s)$  и  $\min(l - k, t)$  соответственно, а  $Q$  — множество элементов  $\{i_1, \dots, i_{k-s}\}$ .

Требуется найти перестановку  $\pi_l \in P$ , которой соответствует наименьшее значение функции  $F(\pi_l, l)$ , заданной на множестве  $P$  рекуррентным соотношением

$$F(\pi_l, k) = \Phi [F(\pi_l, k-1), B_{st}(\pi_l, k)], \quad (1)$$

где  $F(\pi_l, 0)$  — известная, не зависящая от  $\pi_l$  величина. Предполагается, что функция, стоящая в правой части соотношения (1), является монотонно возрастающей по  $F(\pi_l, k-1)$ .

Пусть  $\pi^*$  — некоторая перестановка из элементов множества  $N$ . Обозначим  $B_{s-1, t}(\pi^*, k) = B(k)$  и  $\min \{F(\pi_l, k) \mid \pi_l \in P, B_{s-1, t}(\pi_l, k) = B(k)\} = \bar{F}[B(k)]$ .

Аналогично [5] можно показать справедливость следующего рекуррентного соотношения

$$\tilde{F}[B(k+1)] = \min_{\pi_i \in P^*} \Phi \{ \tilde{F}[B(k)], B_{s,t}(\pi_i, k+1) \}. \quad (2)$$

Здесь  $P^*$  — множество перестановок  $\pi_i \in P$ , для которых  $B_{s-1,t}(\pi_i, k+1) = B(k+1)$  и  $F(\pi_i, k) = \tilde{F}[B(k)]$ , где  $B(k) = B_{s-1,t}(\pi_i, k)$ .

Тем самым, если  $n \leq s+t$ , необходимо осуществить, вообще говоря, перебор всех  $\pi_i \in P$  с последующим выбором наилучшей перестановки. В противном случае, вычислив значения функций  $\tilde{F}[B(s)] = F(\pi_{s+t}, s)$  по формуле (1) для всех  $\pi_{s+t} \in P$ , можно воспользоваться соотношением (2).

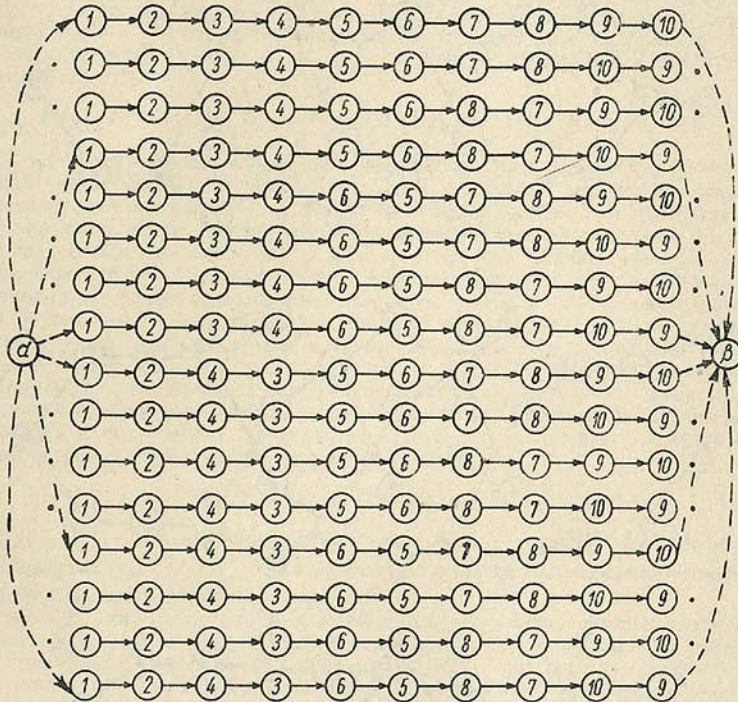


Рис. 1

В качестве примера рассмотрим задачу выбора оптимальной перестановки из множества перестановок, представленных на рис. 1, в предположении, что значение оптимизируемой функции определяется рекуррентным соотношением вида (1).

Используя (2), мы по существу заменяем задачу поиска пути из  $\alpha$  в  $\beta$ , обладающего требуемым свойством, в графе рис. 1, задачей поиска пути, обладающего аналогичным свойством, в некотором новом графе, получаемом из первого в результате объединения вершин. Вершины графа рис. 1 объединяются в одну вершину нового графа, если соответствующие им элементы из  $N$  в данной последовательности имеют одинаковые  $(s-1, t)$ -окрестности. Рис. 2 иллюстрирует процесс объединения вершин графа рис. 1 при а)  $s=2, t=1$ ; б)  $s=1, t=2$ ; в)  $s=3, t=1$ .

Размер и «сложность» получаемых графов естественно рассматривать в качестве оценки вычислительной сложности алгоритма построения оптимальной перестановки. С увеличением  $n, s$  и  $t$  размер этих графов существенно возрастает и тем самым значительно увеличивается необходимый объем вы-

числений. В общем случае для определения оптимальной перестановки  $\pi_n$  из множества всех перестановок длины  $n > s + t$  требуется, вообще говоря,

вычислитель  $R_F = \sum_{k=1}^n \frac{1}{(b_k - 1)!} A_n^{c_k}$  значений функций  $F(\pi_n, k)$ , из них за-

помнить  $R_3 = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{b_k!} A_n^{c_k} + 1$  значений, произведя  $R_{cp} = R_F - R_3$  сравнений. При этом одновременно требуется помнить не более  $R_n =$

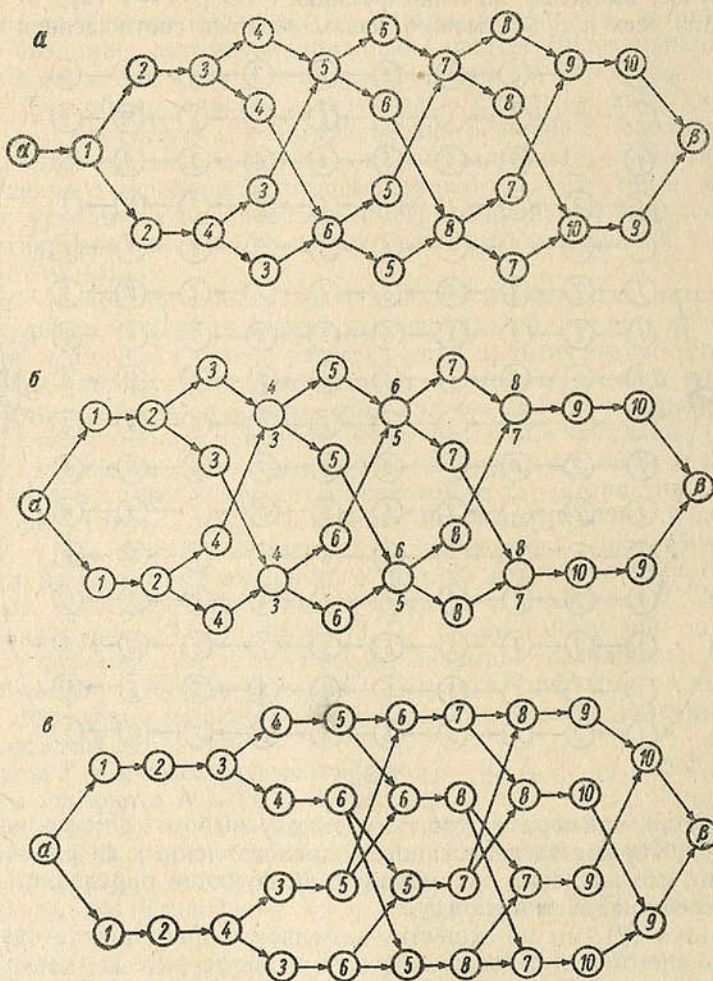


Рис. 2

$= \frac{4d(d - [d]) + 2}{\left[ d + \frac{1}{2} \right]! \left[ d + \frac{3}{2} \right]!}$  значений. Здесь  $b_k = \max(k - s, 0) + 1$ ;  $c_k =$   
 $= \min(t + k, n)$ ;  $d = \frac{1}{2}(n - t - s)$ ;  $A_n^m$  — число размещений из  $n$  элементов по  $m$ ;  $[p]$  — целая часть числа  $p$ . При  $n \leq s + t$  процесс объединения вершин

неосуществим, что приводит, вообще говоря, к необходимости анализа всех перестановок  $\pi_i \in P$ .

2. Рассмотрим несколько реальных ситуаций, процесс принятия решения в которых сводится (при определенной идеализации) к решению указанной задачи.

Пример 1. Процесс обработки объекта в технологической машине можно представить как последовательное прохождение объектом некоторого фиксированного множества  $N$  операций, возможный порядок прохождения которых регламентируется рядом технологических факторов.

а) Продолжительность такта работы многопозиционной технологической машины параллельно-последовательного действия, в каждой позиции которой выполняется некоторая операция из  $N$ , определяется длительностью лимитирующей операции. Длительность выполнения каждой операции зависит, вообще говоря, от того, какие операции были выполнены на предыдущей позиции. Задача выбора последовательности выполнения операций, минимизирующей продолжительность такта работы машины, заключается в выборе перестановки  $\pi_n = (i_1, \dots, i_k, \dots, i_n)$  элементов множества  $N$ , минимизирующей значение функции

$$F(\pi_n, k) = \max \{F(\pi_n, k-1), T[B_{1,0}(\pi_n, k)]\}, F(\pi_n, 0) = 0.$$

Здесь  $T(Q, i_k)$  — длительность выполнения операции  $i_k$  при условии, что ей предшествовали операции множества  $Q$ . Значение  $T(Q, i_k) = \infty$ , если  $Q$  не содержит всех операций, предшествование которых операции  $i_k$  диктуется технологическими соображениями.

б) Время выполнения каждой операции в технологической машине последовательного действия состоит из основного и вспомогательного. Вообще говоря, основное время операции зависит от множества ранее выполненных операций, а вспомогательное — как от множества ранее выполненных операций, так и от последовательности их выполнения. В зависимости от требуемой точности решения задачи и характера операций при оценке вспомогательного времени на каждую операцию достаточно учесть влияние множества всех ранее выполненных операций и последовательность выполнения не более  $p$  операций, непосредственно предшествующих данной. В этом случае задача выбора последовательности выполнения операций, минимизирующей общее время на обработку, сводится к построению перестановки  $\pi_n = (i_1, \dots, i_k, \dots, i_n)$  элементов множества  $N$ , соответствующей наименьшему значению функции

$$F(\pi_n, k) = F(\pi_n, k-1) + T[B_{p+1,0}(\pi_n, k)], F(\pi_n, 0) = 0,$$

Здесь  $T[Q, (\sigma_p, i_k)]$  — время выполнения операции  $i_k$  при условии, что ей предшествуют операции множества  $\{i_1, \dots, i_{k-1}\}$  и упорядочение  $p$  операций, непосредственно предшествующих операции  $i_k$ , описывается перестановкой  $\sigma_p$ .

Пример 2. Такт работы  $m$ -позиционной технологической машины состоит из вспомогательного и рабочего хода. Первый заключается в одновременной переадресации объектов, находящихся в позициях  $j=1, \dots, m-1$ , в позиции  $j+1$ , поступлении в 1-ю позицию нового обрабатываемого объекта и выдачи с  $m$ -ой позиции обработанного объекта; второй — в обработке объектов, находящихся в соответствующих позициях. Продолжительность рабочего хода определяется длительностью лимитирующей в данном такте операции; продолжительность вспомогательного хода предполагается постоянной и равной  $t_{вс}$ .

Общее время  $F(\pi_n, n)$  обработки заданного множества объектов  $N = \{1, \dots, n\}$  при некоторой фиксированной последовательности  $\pi_n = (i_1, \dots, i_k, \dots, i_n)$  их поступления в машину и заданной матрице  $(t_i^j)$  длительностей обработки  $i$ -го объекта в  $j$ -ой позиции определяется следующими соотношениями:

$$F(\pi_n, 1) = \sum_{r=1}^m \max(t_{i_1}^r, t_{i_2}^{r-1}, \dots, t_{i_r}^1) + mt_{вс},$$

$$F(\pi_n, k) = F(\pi_n, k-1) + T[B_{1,m-1}(\pi_n, k)] + t_{вс}.$$

Здесь  $T[B_{1,m-1}(\pi_n, k)] = \max(t_{i_k}^m, t_{i_{k+1}}^{m-1}, \dots, t_{i_{\max(m+k-n,1)}}^{\min(m+k-1,n)})$ .

Задача заключается в выборе такой перестановки элементов множества  $N$ , удовлетворяющей заданным требованиям частичной упорядоченности множества  $N$ , которой соответствует наименьшее значение функции  $F(\pi_n, n)$ .

Пример 3. На множестве операций  $N = \{1, \dots, i, \dots, n\}$ , обеспечивающих требуемый технологический объем обработки, задано отношение частичного порядка, регламентирующее возможную последовательность их выполнения. Для каждой операции, выпол-

няемой в отдельной позиции  $n$ -позиционной технологической системы, указано конечное множество  $H_i$  возможных положений обрабатываемого объекта на позиции. Затраты на перемещение объекта между смежными  $k-1$  и  $k$ -ой позициями определяются величиной  $q(h_{k-1}, h_k)$ , зависящей от положений  $h_{k-1}$  и  $h_k$  обрабатываемого объекта в соответствующих позициях; затраты, связанные с выполнением  $i$ -ой операции при  $h$ -положении объекта, — величиной  $r(i, h, N')$ , где  $N'$  — множество операций, выполненных на предыдущих позициях.

Задачу выбора последовательности выполнения операций и положений объекта в соответствующих позициях, отвечающих заданным технологическим требованиям и обеспечивающих минимум суммарных затрат, можно рассматривать как задачу построения некоторой перестановки  $\pi_n = (\langle i_1, h_1 \rangle, \dots, \langle i_k, h_k \rangle, \dots, \langle i_n, h_n \rangle)$ , минимизирующей значение функции

$$F(\pi_n, k) = F(\pi_n, k-1) + L[B_{2,0}(\pi_n, k)], \quad F(\pi_n, 0) = 0.$$

Здесь  $L[B_{2,0}(\pi_n, k)] = q(h_{k-1}, h_k) + r(i_k, h_k, N')$ .

3. К естественным обобщениям приводит рассмотрение задачи оптимизации на множестве  $P$  функций вида

$$F(\pi_i, k) = \Phi[F(\pi_i, k-1), I(\pi_i, k)], \quad F(\pi_i, 0) = \text{const}, \quad (5)$$

где  $I(\pi_i, k)$  — некоторая характеристика перестановки  $\pi_i$  на шаге  $k$ .

Предполагается, что  $I(\pi_i, k)$  обладает следующими свойствами: каковы бы ни были перестановки  $\pi^1 = (\sigma_{k_1}, \sigma_{m_1})$  и  $\pi^2 = (\sigma_{k_2}, \sigma_{m_2})$  из  $P$  такие, что  $I(\pi^1, k_1) = I(\pi^2, k_2)$ ,

1) перестановка  $\pi = (\sigma_{k_1}, \sigma_{m_2}) \in P$  и

$$2) I(\pi, k_1 + j) = I(\pi^r, k_r + j), \quad \text{где } r = \left[ \frac{j+3}{2} \right], \quad j = -1, 0, 1.$$

Пусть  $\pi^* \in P$ . Обозначим  $I(\pi^*, k) = I$  и  $P(I)$  — множество всех перестановок  $\pi_i \in P$ , для которых существуют такие  $1 \leq k_{\pi_i} \leq l$ , что  $I(\pi_i, k_{\pi_i}) = I$ . Пусть  $I_1, \dots, I_j, \dots, I_m$  — различные элементы множеств  $\{I(\pi_i, k_{\pi_i} - 1) \mid \pi_i \in P(I)\}$  и  $\hat{F}(I) = \min \{F(\pi_i, k_{\pi_i}) \mid \pi_i \in P(I)\}$ .

Если функция, стоящая в правой части выражения (5), является монотонно возрастающей относительно первого аргумента, то

$$\hat{F}(I) = \Phi \left[ \min_{1 < j < m} \hat{F}(I_j), I \right]. \quad (6)$$

Действительно, соотношение (6) справедливо для перестановок множества  $P(I)$ . Покажем, что значение  $\hat{F}(I_j)$  достигается на некоторой перестановке  $\pi$  из этого множества. Пусть  $\pi^1 = (\sigma_{k_1}, \sigma_{m_1})$  — перестановка, для которой  $I(\pi^1, k_1) = I_j$  и  $F(\pi^1, k_1) = \hat{F}(I_j)$ . Выберем произвольную перестановку  $\pi^2 = (\sigma_{k_2}, \sigma_{m_2})$  такую, что  $I(\pi^2, k_2) = I_j$  и  $I(\pi^2, k_2 + 1) = I$ . Рассмотрим перестановку  $\pi = (\sigma_{k_1}, \sigma_{m_2})$ . По свойству 1  $\pi \in P$ , по свойству 2 и свойствам функции (5)  $I(\pi, k_1 + 1) = I$  и  $F(\pi, k_1) = F(\pi^1, k_1) = \hat{F}(I_j)$ . Соотношение (6) позволяет организовать процесс поиска оптимальной перестановки аналогично описанному в п. 1.

Функция  $I(\pi_i, k)$  может быть достаточно произвольной и зависеть как от размера решаемой задачи, так и от требуемой точности решения.

В частности, определенный практический интерес представляет возможность использования при решении задач, аналогичных описанным в п. 2, переменных величин  $s$  и  $t$ . Это позволяет полнее учитывать особенности отдельных задач и тем самым упрощает процесс их решения.

В данном случае под  $st$ -окрестностью  $k$ -го элемента в перестановке  $\pi_i = (i_1, \dots, i_k, \dots, i_l)$  по-прежнему подразумевается упорядоченный набор  $B_{st}(\pi_i, k) = \langle Q, \sigma_s, \sigma_t \rangle$  с той лишь разницей, что значения

$$s = s(\pi_i, k); \quad t = t(\pi_i, k) \quad (7)$$

и функции (7) обладают следующими свойствами:

1) каковы бы ни были  $\pi^1 = (\sigma_k, \sigma_{m_1})$  и  $\pi^2 = (\sigma'_k, \sigma_{m_2})$  из  $P$  такие, что  $B_{st}(\pi^1, k) = B_{st}(\pi^2, k)$ , и  $\pi = (\sigma_k, \sigma_{m_2})$

$$s(\pi, k+j) = s(\pi^r, k+j); \quad t(\pi, k+j) = t(\pi^r, k+j),$$

где  $r = \left[ \frac{j+3}{2} \right]$  и  $j = -1, 0, 1$ ;

2) для всех  $\pi_l \in P$  и  $1 \leq k \leq l$

$$s(\pi_l, k+1) \leq s(\pi_l, k) + 1; \quad t(\pi_l, k+1) \geq t(\pi_l, k) - 1.$$

Функция  $B_{st}(\pi_l, k)$ , очевидно, удовлетворяет всем требованиям, предъявляемым к  $I(\pi_l, k)$ .

**З а м е ч а н и е.** Соотношения (2), (6) дают возможность получить точное решение указанных задач в результате выполнения относительно большого объема вычислений, который может быть существенно уменьшен более полным учетом специфики решаемой задачи.

Так, для широкого класса реальных ситуаций функция  $F(\pi_l, k)$  обладает следующим дополнительным свойством: существует достаточно большое число  $P_0$  такое, что  $\Phi(P, I) \geq P$  для всех  $I$  и  $P \geq P_0$ . В этом случае, если известна верхняя оценка  $P^* \geq P_0$  оптимального значения функции  $F(\pi_l, l)$ , нет необходимости вычислять, сравнивать и запоминать значения  $F(\pi_l, k) \geq P^*$ .

К дальнейшему сокращению объема вычислений приводит обычно используемая на практике допустимость замены требования получения точного решения возможностью получения приближенного решения.

В данном случае представляется целесообразным

- исключить из рассмотрения бесперспективные с точки зрения некоторых эвристических соображений варианты;
- организовать после соответствующего зондирования поиск рационального решения в нескольких наиболее перспективных областях;
- осуществить многократное последовательное разбиение решаемой задачи на ряд задач меньшего размера с использованием получаемой на предыдущих этапах информации о решении последних;
- осуществить многократное последовательное решение задачи при фиксации отдельных частей конструируемой перестановки с последующим использованием получаемой при этом информации;
- проводить текущую поэтапную оценку перспективности конструируемых перестановок с соответствующим «дистраиванием» наиболее перспективных.

Комплексное применение этих и аналогичных приемов позволяет получить практически приемлемое решение реальных задач большого размера.

### Литература

1. Беллман Р., Дрейфус С. Прикладные задачи динамического программирования. Изд. «Наука», М., 1965.
2. Вальд А. Последовательный анализ. М., 1960.
3. Михалевич В. С., Шор Н. З. Тр. экономико-математического семинара, вып. 1. Изд. ЛЭММ АН СССР, М., 1962.
4. Михалевич В. С. Кибернетика, № 1, 2, 1965.
5. Танаев В. С., Левин Г. М. Весті АН БССР, сер. фіз.-мат. наук, № 3, 1967.

Институт технической  
кибернетики АН БССР

Поступило в редакцию  
26.1 1968

А. П. РЯБУШКО, К. С. ФИЛИПОВИЧ

**ОГРАНИЧЕННАЯ ПЛОСКАЯ КРУГОВАЯ ЗАДАЧА  
 ТРЕХ ТЕЛ В ОБЩЕЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ**

Рассмотрим три тела (материальные точки)  $M_1, M_2, M_3$  с ньютоновыми массами соответственно  $m_1, m_2, m_3$ . Пусть  $\xi^a, \xi^a, \xi^a$  ( $a=1, 2, 3$ ) — координаты их центров тяжести в пост-ньютоновом приближении. Уравнения движения в этом приближении имеют вид:

$$\begin{aligned} m_1 \frac{d^2 \xi^a}{dt^2} - \frac{\partial U}{\partial \xi^a} + F_a &= 0, \\ m_2 \frac{d^2 \xi^a}{dt^2} - \frac{\partial U}{\partial \xi^a} + \Phi_a &= 0, \\ m_3 \frac{d^2 \xi^a}{dt^2} - \frac{\partial U}{\partial \xi^a} + \Psi_a &= 0, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $U = k \left( \frac{m_1 m_2}{r_{12}} + \frac{m_1 m_3}{r_{13}} + \frac{m_2 m_3}{r_{23}} \right)$ ,  $k$  — ньютонова постоянная тяготения,  $r_{ij}^2 = (\xi^s - \xi^s)(\xi^s - \xi^s)$  ( $i, j, s = 1, 2, 3$ ) (здесь по  $s$  суммирование),

$$\begin{aligned} F_a &= \frac{1}{c^2} \left\{ \frac{d}{dt} \left[ \left( \frac{m_1}{2} \frac{d \xi^s}{dt} \frac{d \xi^s}{dt} + 3km_1 m_2 r_{12}^{-1} + \right. \right. \right. \\ &+ \left. \left. \left. 3km_1 m_3 r_{13}^{-1} \right) \frac{d \xi^a}{dt} - \frac{1}{2} km_1 m_2 r_{12} \Big|_{\xi^a}^2 \frac{d \xi^s}{dt} - \frac{1}{2} km_1 m_3 r_{13} \Big|_{\xi^a}^3 \frac{d \xi^s}{dt} - \right. \\ &- \left. 4km_1 m_2 r_{12}^{-1} \frac{d \xi^a}{dt} - 4km_1 m_3 r_{13}^{-1} \frac{d \xi^a}{dt} \right] - km_1 m_2 \left( \frac{3}{2} \frac{d \xi^s}{dt} \frac{d \xi^s}{dt} + \right. \\ &+ \left. \frac{3}{2} \frac{d \xi^s}{dt} \frac{d \xi^s}{dt} - 4 \frac{d \xi^s}{dt} \frac{d \xi^s}{dt} \right) (r_{12}^{-1}) \Big|_{\xi^a} - km_1 m_3 \left( \frac{3}{2} \frac{d \xi^s}{dt} \frac{d \xi^s}{dt} + \right. \\ &+ \left. \frac{3}{2} \frac{d \xi^s}{dt} \frac{d \xi^s}{dt} - 4 \frac{d \xi^s}{dt} \frac{d \xi^s}{dt} \right) (r_{13}^{-1}) \Big|_{\xi^a} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2} k m_1 m_2 \frac{d^1 \xi^r}{dt} \frac{d^2 \xi^s}{dt} r_{12} \Big|_{\xi^a}^1 \frac{2}{\xi^s} \frac{1}{\xi^r} + \frac{1}{2} k m_1 m_3 \frac{d^1 \xi^r}{dt} \frac{d^3 \xi^s}{dt} r_{13} \Big|_{\xi^a}^1 \frac{3}{\xi^s} \frac{1}{\xi^r} + \\
& + \frac{1}{2} k^2 m_1 m_2 (m_1 + m_2) (r_{12}^{-2}) \Big|_{\xi^a}^1 + \frac{1}{2} k^2 m_1 m_3 (m_1 + m_3) (r_{13}^{-2}) \Big|_{\xi^a}^1 + \\
& \left. + k^2 m_1 m_2 m_3 (r_{12}^{-1} r_{23}^{-1} + r_{23}^{-1} r_{13}^{-1} + r_{13}^{-1} r_{12}^{-1}) \Big|_{\xi^a}^1 \right\}
\end{aligned}$$

(здесь значок  $|\xi$  означает частную производную по  $\xi$ ),  $\Phi_a$  и  $\Psi_a$  получают-ся из  $F_a$  круговой заменой индексов 1, 2, 3 [1].

В уравнениях (1) произведем сокращение на общие множители  $m_i$  и в оставшихся выражениях положим  $m_3 = 0$ , так как в дальнейшем будем рассматривать ограниченную задачу трех тел (два тела с массами  $m_1$  и  $m_2$  тяжелые, а третье легкое). Тогда уравнения (1) примут вид:

$$\begin{aligned}
\frac{d^2 \xi^a}{dt^2} - \frac{\partial U_1}{\partial \xi^a} + F_a^* &= 0, \\
\frac{d^2 \xi^a}{dt^2} - \frac{\partial U_2}{\partial \xi^a} + \Phi_a^* &= 0, \\
\frac{d^2 \xi^a}{dt^2} - \frac{\partial U_3}{\partial \xi^a} + \Psi_a^* &= 0,
\end{aligned} \tag{2}$$

где  $U_1 = \frac{\mu_2}{r_{12}}$ ,  $U_2 = \frac{\mu_1}{r_{12}}$ ,  $U_3 = \frac{\mu_1}{r_{13}} + \frac{\mu_2}{r_{23}}$ ,  $\mu_i = k m_i$ .

В исходном ньютоновом приближении выберем точные круговые решения Лагранжа для треугольного и прямолинейного расположения тел [2], т. е. если  $\xi_0^a$ ,  $\xi_0^2$ ,  $\xi_0^3$  — координаты тел в ньютоновом приближении, то решения имеют вид:

$$\begin{aligned}
\xi_0^1 &= x_a^0 \cos \omega t - y_a^0 \sin \omega t, \\
\xi_0^2 &= x_a^0 \sin \omega t + y_a^0 \cos \omega t, \\
\xi_0^3 &= 0,
\end{aligned} \tag{3}$$

где  $x_1^0 = -\frac{\mu_2 r_{12}^0}{\mu_1 + \mu_2}$ ,  $x_2^0 = \frac{\mu_1 r_{12}^0}{\mu_1 + \mu_2}$ ,  $(r_{12}^0)^2 = (\xi_0^1 - \xi_0^2)(\xi_0^1 - \xi_0^3)$ ,  $y_1^0 = y_2^0 = 0$ ,  $x_3^0, y_3^0$  — постоянные, такие, что тела  $M_1, M_2, M_3$ , равномерно вращаясь вокруг общего центра масс с постоянной угловой скоростью  $\omega$ , расположены все время либо на одной прямой, либо в вершинах равностороннего треугольника, а

$$\omega^2 = (\mu_1 + \mu_2) (r_{12}^0)^{-3}. \tag{4}$$

Общее решение уравнений (2) будем искать в виде:

$$\xi^1 = (x_a + x_a^0) \cos \omega t - (y_a + y_a^0) \sin \omega t,$$

$$\xi^2 = (x_a + x_a^0) \sin \omega t + (y_a + y_a^0) \cos \omega t, \quad (5)$$

$$\xi^3 = z_a + z_a^0,$$

где  $x_a, y_a, z_a$  — релятивистские добавки к известным ньютоновым значениям координат центров тяжести тел  $x_a^0, y_a^0, z_a^0$  в системе координат, вращающейся вокруг оси  $O\xi^3$  с постоянной угловой скоростью  $\omega$  (0 — ньютонов центр тяжести тел).

Подставив (5) в (2) и учтя ньютоново приближение (3), (4), получим неоднородные системы линейных дифференциальных уравнений 2-го порядка с постоянными коэффициентами для определения  $x_a, y_a, z_a$ :

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 - 2\omega\dot{y}_1 - \omega^2 x_1 - 2\mu_2 (r_{12}^0)^{-3} (x_1 - x_2) + a &= 0, \\ \ddot{y}_1 + 2\omega\dot{x}_1 - \omega^2 y_1 + \mu_2 (r_{12}^0)^{-3} (y_1 - y_2) &= 0, \\ \ddot{x}_2 - 2\omega\dot{y}_2 - \omega^2 x_2 + 2\mu_1 (r_{12}^0)^{-3} (x_1 - x_2) + b &= 0, \\ \ddot{y}_2 + 2\omega\dot{x}_2 - \omega^2 y_2 - \mu_1 (r_{12}^0)^{-3} (y_1 - y_2) &= 0, \\ \ddot{z}_1 + \mu_2 (r_{12}^0)^{-3} (z_1 - z_2) &= 0, \\ \ddot{z}_2 - \mu_1 (r_{12}^0)^{-3} (z_1 - z_2) &= 0; \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \ddot{x}_3 - 2\omega\dot{y}_3 - a_1 x_3 + 3b_1 y_3 + V_1 + a_0 &= 0, \\ \ddot{y}_3 + 2\omega\dot{x}_3 + 3b_1 x_3 - a_2 y_3 + V_2 + b_0 &= 0, \end{aligned} \quad (7)$$

$$\ddot{z}_3 + a_3 z_3 = \mu_1 (r_{13}^0)^{-3} z_1 + \mu_2 (r_{23}^0)^{-3} z_2,$$

где

$$a = \mu_2 \frac{\omega^2}{c^2} \left( 3 - \frac{\mu_1 \mu_2}{(\mu_1 + \mu_2)^2} \right),$$

$$b = -\mu_1 \frac{\omega^2}{c^2} \left( 3 - \frac{\mu_1 \mu_2}{(\mu_1 + \mu_2)^2} \right),$$

$$a_1 = \omega^2 - \mu_1 (r_{13}^0)^{-3} - \mu_2 (r_{23}^0)^{-3} + 3\mu_1 (r_{13}^0)^{-5} (x_1^0 - x_3^0)^2 + 3\mu_2 (r_{23}^0)^{-5} (x_2^0 - x_3^0)^2,$$

$$a_2 = \omega^2 - \mu_1 (r_{13}^0)^{-3} - \mu_2 (r_{23}^0)^{-3} + 3\mu_1 (r_{13}^0)^{-5} (y_3^0)^2 + 3\mu_2 (r_{23}^0)^{-5} (y_3^0)^2,$$

$$a_3 = \mu_1 (r_{13}^0)^{-3} + \mu_2 (r_{23}^0)^{-3},$$

$$b_1 = [\mu_1 (r_{13}^0)^{-5} (x_1^0 - x_3^0) + \mu_2 (r_{23}^0)^{-5} (x_2^0 - x_3^0)] y_3^0,$$

$$\begin{aligned} V_1 = & -\mu_1 [(r_{13}^0)^{-3} - 3(r_{13}^0)^{-5} (x_1^0 - x_3^0)^2] x_1 - \mu_2 [(r_{23}^0)^{-3} - 3(r_{23}^0)^{-5} (x_2^0 - \\ & - x_3^0)^2] x_2 - 3\mu_1 (r_{13}^0)^{-5} (x_1^0 - x_3^0) y_3^0 y_1 - 3\mu_2 (r_{23}^0)^{-5} (x_2^0 - x_3^0) y_3^0 y_2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V_2 = & -3\mu_1 (r_{13}^0)^{-5} (x_1^0 - x_3^0) y_3^0 x_1 - 3\mu_2 (r_{23}^0)^{-5} (x_2^0 - x_3^0) y_3^0 x_2 - \\ & - \mu_1 [(r_{13}^0)^{-3} - 3(r_{13}^0)^{-5} (y_3^0)^2] y_1 - \mu_2 [(r_{23}^0)^{-3} - 3(r_{23}^0)^{-5} (y_3^0)^2] y_2, \end{aligned}$$

$a_0, a_1, a_2, a_3, a, b_0, b_1, b$  — постоянные, а  $V_1$  и  $V_2$  — линейные функции с постоянными коэффициентами от  $x_1, x_2, y_1, y_2$ .

Общее решение системы (6) имеет вид:

$$\begin{aligned}x_1 &= (c_1 t + c_3 + \mu_2 c_6) \sin \omega t - (c_2 t + c_4 - \mu_2 c_5) \cos \omega t + 2\mu_2 c_7 + \frac{a}{3\omega^2}, \\x_2 &= (c_1 t + c_3 - \mu_1 c_6) \sin \omega t - (c_2 t + c_4 + \mu_1 c_5) \cos \omega t - 2\mu_1 c_7 + \frac{b}{3\omega^2}, \\y_1 &= (c_1 t + c_3 + 2\mu_2 c_6) \cos \omega t + (c_2 t + c_4 - 2\mu_2 c_5) \sin \omega t - 3\mu_2 \omega c_7 t + \mu_2 c_8, \\y_2 &= (c_1 t + c_3 - 2\mu_1 c_6) \cos \omega t + (c_2 t + c_4 + 2\mu_1 c_5) \sin \omega t + 3\mu_1 \omega c_7 t - \mu_1 c_8, \\z_1 &= \mu_2 (c_{11} \cos \omega t + c_{12} \sin \omega t) + c_9 t + c_{10}, \\z_2 &= -\mu_1 (c_{11} \cos \omega t + c_{12} \sin \omega t) + c_9 t + c_{10},\end{aligned}\tag{8}$$

где  $c_\alpha$  — произвольные постоянные интегрирования ( $\alpha = 1, 2, \dots, 12$ ). Как видим, решение (8) содержит вековые члены. Из общего решения (8) выберем два частных. Первое, когда два тела и в пост-ньютоновом приближении движутся по окружностям, радиусы которых меньше радиусов ньютоновых окружностей на величины порядка  $\mu/c^2$ :

$$\begin{aligned}x_1 &= \frac{a}{3\omega^2} = \frac{\mu_2}{c^2} \left( 1 - \frac{\mu_1 \mu_2}{3(\mu_1 + \mu_2)^2} \right), \\x_2 &= \frac{b}{3\omega^2} = -\frac{\mu_1}{c^2} \left( 1 - \frac{\mu_1 \mu_2}{3(\mu_1 + \mu_2)^2} \right), \\y_1 &= y_2 = z_1 = z_2 = 0.\end{aligned}\tag{9}$$

И второе, когда начальные условия в общем решении (8) выбираются в виде  $x_1 = y_1 = z_1 = x_2 = y_2 = z_2 = 0$ ,  $\dot{x}_1 = \dot{y}_1 = \dot{z}_1 = \dot{x}_2 = \dot{y}_2 = \dot{z}_2 = 0$  при  $t = 0$ , т. е. выбираем частное решение, для которого в начальный момент времени положения тел  $M_1$  и  $M_2$  в пост-ньютоновом приближении совпадают с их положениями в ньютоновом приближении. Это частное решение характеризуется следующими значениями постоянных  $c_\alpha$ :

$$\begin{aligned}c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = c_6 = c_8 = c_9 = c_{10} = c_{11} = c_{12} &= 0, \\c_5 &= \frac{a}{\mu_2 \omega^2}, \quad c_7 = -\frac{2a}{3\mu_2 \omega^2}\end{aligned}$$

и записывается в виде:

$$\begin{aligned}x_1 &= \frac{\mu_2}{c^2} \left( 3 - \frac{\mu_1 \mu_2}{(\mu_1 + \mu_2)^2} \right) (\cos \omega t - 1), \\x_2 &= -\frac{\mu_1}{c^2} \left( 3 - \frac{\mu_1 \mu_2}{(\mu_1 + \mu_2)^2} \right) (\cos \omega t - 1), \\y_1 &= \frac{2\mu_2}{c^2} \left( 3 - \frac{\mu_1 \mu_2}{(\mu_1 + \mu_2)^2} \right) (\omega t - \sin \omega t), \\y_2 &= -\frac{2\mu_1}{c^2} \left( 3 - \frac{\mu_1 \mu_2}{(\mu_1 + \mu_2)^2} \right) (\omega t - \sin \omega t).\end{aligned}\tag{10}$$

Таким образом, два тяжелых тела движутся в той же плоскости, что

и в ньютоновом приближении, а их центр масс остается неподвижным и совпадает с началом координат, так как  $\mu_1 x_1 + \mu_2 x_2 = 0$ ,  $\mu_1 y_1 + \mu_2 y_2 = 0$ .

Тела движутся по несколько деформированным окружностям. Расстояние  $r_{12}$  между телами  $M_1$  и  $M_2$  не испытывает вековых изменений, так как  $r_{12} = r_{12}^0 + (x_1 - x_2)$ . Угловая скорость движения по относительной траектории оказывается меньше, чем ньютонова,  $\tilde{\omega} = \omega + \Delta\omega$ :

$$\Delta\omega = -\frac{2}{c^2} \frac{3\mu_1^2 + 5\mu_1\mu_2 + 3\mu_2^2}{r_{12}^0(\mu_1 + \mu_2)} \omega < 0.$$

Если  $m_1 = 2 \cdot 10^{33}$  г,  $m_2 = 0$ ,  $r_{12}^0 = 6 \cdot 10^{13}$  см, то полярный угол, который опишет радиус-вектор тела  $M_2$  за 100 лет, будет меньше полярного угла в ньютоновом приближении за то же время на величину  $\Delta\varphi \approx 71''$ .

Решаем теперь систему (7). Общее решение третьего уравнения этой системы имеет вид

$$z_3 = \bar{c}_5 \cos \sqrt{\bar{a}_3} t + \bar{c}_6 \sin \sqrt{\bar{a}_3} t \quad (z_1 = z_2 = 0), \quad (11)$$

где  $\bar{c}_5$ ,  $\bar{c}_6$  — произвольные постоянные интегрирования. Так как  $z_3$  — периодическая функция времени порядка  $1/c^2$ , то третье тело при своем движении уклоняется от плоскости  $z_3^0 = 0$  незначительно. Этими отклонениями можно пренебречь, т. е. положить  $\bar{c}_5 = \bar{c}_6 = 0$ .

Характеристическое уравнение однородной части первых двух уравнений системы (7) имеет вид

$$\lambda^4 + (4\omega^2 - a_1 - a_2)\lambda^2 + a_1 a_2 - 9b_1^2 = 0. \quad (12)$$

I. В ньютоновом приближении выбираем круговое решение Лагранжа для треугольного расположения тел:

$$r_{12}^0 = r_{13}^0 = r_{23}^0, \quad x_3^0 = \frac{\mu_1 - \mu_2}{2(\mu_1 + \mu_2)} r_{12}^0, \quad y_3^0 = \frac{\sqrt{3}}{4} r_{12}^0. \quad (13)$$

Тогда

$$a_1 = \frac{3}{4} \omega^2, \quad a_2 = \frac{9}{4} \omega^2, \quad b_1 = -\frac{\sqrt{3}}{4} \frac{\mu_1 - \mu_2}{\mu_1 + \mu_2} \omega^2. \quad (13')$$

Учитывая (13), (13'), из (12) получаем

$$\lambda = \pm \omega \sqrt{-\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{\mu_1^2 + \mu_2^2 - 25\mu_1\mu_2}}{2(\mu_1 + \mu_2)}}. \quad (14)$$

Здесь и далее, не ограничивая общности рассуждений, будем считать  $\mu_1 \gg \mu_2$ .

а) Если

$$\mu_1 > \frac{25 + 3\sqrt{69}}{2} \mu_2 \approx 24,959\mu_2,$$

то все корни (14) уравнения (12) чисто мнимые и различны. Введя обозначения

$$\alpha^2 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{\mu_1^2 + \mu_2^2 - 25\mu_1\mu_2}}{2(\mu_1 + \mu_2)}, \quad \beta^2 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{\mu_1^2 + \mu_2^2 - 25\mu_1\mu_2}}{2(\mu_1 + \mu_2)},$$

получим решение однородной системы в виде:

$$\begin{aligned}
 x_3 = & \left( 2\alpha\bar{c}_1 - \frac{3\sqrt{3}}{4} \frac{\mu_1 - \mu_2}{\mu_1 + \mu_2} \bar{c}_2 \right) \sin \alpha\omega t - \\
 & - \left( 2\alpha\bar{c}_2 + \frac{3\sqrt{3}}{4} \frac{\mu_1 - \mu_2}{\mu_1 + \mu_2} \bar{c}_1 \right) \cos \alpha\omega t + \\
 & + \left( 2\beta\bar{c}_3 - \frac{3\sqrt{3}}{4} \frac{\mu_1 - \mu_2}{\mu_1 + \mu_2} \bar{c}_4 \right) \sin \beta\omega t - \\
 & - \left( 2\beta\bar{c}_4 + \frac{3\sqrt{3}}{4} \frac{\mu_1 - \mu_2}{\mu_1 + \mu_2} \bar{c}_3 \right) \cos \beta\omega t, \\
 y_3 = & \left( \alpha^2 + \frac{3}{4} \right) (\bar{c}_1 \cos \alpha\omega t + \bar{c}_2 \sin \alpha\omega t) + \\
 & + \left( \beta^2 + \frac{3}{4} \right) (\bar{c}_3 \cos \beta\omega t + \bar{c}_4 \sin \beta\omega t),
 \end{aligned} \tag{15}$$

где  $\bar{c}_\gamma$  — произвольные постоянные интегрирования ( $\gamma = 1, 2, 3, 4$ ).

б) Если

$$\mu_1 = \frac{25 + 3\sqrt{69}}{2} \mu_2 \approx 24,959\mu_2,$$

то корни (14) уравнения (12) двукратные, чисто мнимые:

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \omega i, \quad \lambda_{3,4} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \omega i.$$

И в этом случае решение однородной системы имеет вид:

$$\begin{aligned}
 x_3 = & \left[ \left( \frac{\sqrt{23}}{4} c'_1 + \sqrt{2} c'_2 + \frac{2}{5} c'_3 + \frac{\sqrt{46}}{5} c'_4 \right) + \right. \\
 & + \left. \left( \frac{\sqrt{23}}{4} c'_3 + \sqrt{2} c'_4 \right) \omega t \right] \cos \frac{\omega t}{\sqrt{2}} + \left[ \left( -\sqrt{2} c'_1 + \frac{\sqrt{23}}{4} c'_2 - \right. \right. \\
 & - \left. \frac{\sqrt{46}}{5} c'_3 + \frac{2}{5} c'_4 \right) + \left. \left( -\sqrt{2} c'_3 + \frac{\sqrt{23}}{4} c'_4 \right) \omega t \right] \sin \frac{\omega t}{\sqrt{2}}, \\
 y_3 = & -\frac{5}{4} \left[ (c'_1 + c'_3 \omega t) \cos \frac{\omega t}{\sqrt{2}} + (c'_2 + c'_4 \omega t) \sin \frac{\omega t}{\sqrt{2}} \right],
 \end{aligned} \tag{15'}$$

где  $c'_\gamma$  — произвольные постоянные интегрирования.

в) Если

$$\mu_1 < \frac{25 + 3\sqrt{69}}{2} \mu_2 \approx 24,959\mu_2,$$

то корни (14) уравнения (12) комплексные и различные. Введя обозначения

$$\lambda_{1,2} = \omega (\alpha_1 \pm \beta_1 i), \quad \lambda_{3,4} = -\omega (\alpha_1 \pm \beta_1 i) \quad (\alpha_1 > 0),$$

получим решение однородной системы в виде:

$$x_3 = e^{\alpha_1 \omega t} \left\{ \left[ \left( 2\alpha_1 + \frac{\sqrt{3}}{4} \frac{\mu_1 - \mu_2}{\mu_1 + \mu_2} \right) \bar{c}'_1 + 2\beta_1 \bar{c}'_2 \right] \cos \beta_1 \omega t + \right.$$

$$\begin{aligned}
& + \left[ -2\beta_1 \bar{c}'_1 + \left( 2\alpha_1 + \frac{\sqrt{3}}{4} \frac{\mu_1 - \mu_2}{\mu_1 + \mu_2} \right) \bar{c}'_2 \right] \sin \beta_1 \omega t \Big\} + \\
& + e^{-\alpha_1 \omega t} \left\{ \left[ \left( \frac{\sqrt{3}}{4} \frac{\mu_1 - \mu_2}{\mu_1 + \mu_2} - 2\alpha_1 \right) \bar{c}'_3 + 2\beta_1 \bar{c}'_4 \right] \cos \beta_1 \omega t + \right. \\
& \left. + \left[ -2\beta_1 \bar{c}'_3 + \left( \frac{\sqrt{3}}{4} \frac{\mu_1 - \mu_2}{\mu_1 + \mu_2} - 2\alpha_1 \right) \bar{c}'_4 \right] \sin \beta_1 \omega t \right\}, \quad (15'') \\
y_3 = & e^{\alpha_1 \omega t} \left\{ \left[ \left( \alpha_1^2 - \beta_1^2 - \frac{3}{4} \right) \bar{c}'_1 + 2\alpha_1 \beta_1 \bar{c}'_2 \right] \cos \beta_1 \omega t + \right. \\
& + \left[ \left( \alpha_1^2 - \beta_1^2 - \frac{3}{4} \right) \bar{c}'_2 - 2\alpha_1 \beta_1 \bar{c}'_1 \right] \sin \beta_1 \omega t \Big\} + e^{-\alpha_1 \omega t} \left\{ \left[ -2\alpha_1 \beta_1 \bar{c}'_4 + \right. \right. \\
& \left. \left. + \left( \alpha_1^2 - \beta_1^2 - \frac{3}{4} \right) \bar{c}'_3 \right] \cos \beta_1 \omega t + \left[ 2\alpha_1 \beta_1 \bar{c}'_3 + \right. \right. \\
& \left. \left. + \left( \alpha_1^2 - \beta_1^2 - \frac{3}{4} \right) \bar{c}'_4 \right] \sin \beta_1 \omega t \right\},
\end{aligned}$$

где  $\bar{c}'_v$  — произвольные постоянные интегрирования.

Подставляя далее в неоднородную часть системы (7) решение (9) системы (6) и учитывая условия (13), (13'), видим, что система (7) допускает постоянное частное решение:

$$\begin{aligned}
x_3 = & \frac{3a_0(\mu_1 + \mu_2)^2 - \sqrt{3}(\mu_1^2 - \mu_2^2) \left[ \frac{3\sqrt{3}}{2c^2} \frac{\mu_1 \mu_2}{\mu_1 + \mu_2} \left( 1 - \frac{\mu_1 \mu_2}{(\mu_1 + \mu_2)^2} \right) + b_0 \right]}{9\mu_1 \mu_2 \omega^2}, \\
y_3 = & \frac{-\sqrt{3}a_0(\mu_1^2 - \mu_2^2) + (\mu_1 + \mu_2)^2 \left[ \frac{3\sqrt{3}}{2c^2} \frac{\mu_1 \mu_2}{\mu_1 + \mu_2} \left( 1 - \frac{\mu_1 \mu_2}{(\mu_1 + \mu_2)^2} \right) + b_0 \right]}{9\mu_1 \mu_2 \omega^2} \quad (16).
\end{aligned}$$

Таким образом, в случае а) треугольник устойчив, так как общее решение системы (7) состоит из суммы решений (15) и (16), а в этих решениях все члены — периодические функции времени. В случае б) треугольник устойчив только тогда, когда начальные условия выбраны так, что  $c'_3 = 0$ ,  $c'_4 = 0$ , если же  $(c'_3)^2 + (c'_4)^2 \neq 0$ , то в решении, которое состоит из суммы решений (15') и (16), появляются вековые члены вида  $t \cos \frac{\omega t}{\sqrt{2}}$ ,  $t \sin \frac{\omega t}{\sqrt{2}}$ .

В случае в) треугольник устойчив, если  $\bar{c}'_1 = \bar{c}'_2 = 0$ . Если начальные условия такие, что хотя бы одно из  $\bar{c}'_1$ ,  $\bar{c}'_2$  не равно нулю, то в решении появляются вековые члены вида  $e^{\alpha_1 \omega t} \cos \beta_1 \omega t$  и движение неустойчиво.

Подставляя теперь в неоднородную часть системы (7) решение (10) системы (6), получим частное решение неоднородной системы в виде:

$$\begin{aligned}
x_3 = & A_1 \cos \omega t + A_2 \sin \omega t + A_3 \omega t + A_4, \\
y_3 = & B_1 \cos \omega t + B_2 \sin \omega t + B_3 \omega t + B_4,
\end{aligned} \quad (17)$$

где  $A_v, B_v$  — постоянные и

$$A_3 = \frac{\sqrt{3}(\mu_1 + \mu_2)}{c^2} \left( 3 - \frac{\mu_1 \mu_2}{(\mu_1 + \mu_2)^2} \right) \neq 0,$$

$$B_3 = -\frac{\mu_1 - \mu_2}{c^2} \left( 3 - \frac{\mu_1 \mu_2}{(\mu_1 + \mu_2)^2} \right).$$

Рассуждая аналогично предыдущему, получаем, что в общем решении всегда будут вековые члены вида  $\omega t$ , а в случае в) могут быть и члены вида  $e^{a_1 \omega t} \cos \beta_1 \omega t$ ,  $e^{a_1 \omega t} \sin \beta_1 \omega t$ .

II. В ньютоновом приближении выбираем круговые решения Лагранжа для прямолинейного расположения тел ( $y_3^0 = 0$ ). Тогда

$$a_1 > 0, \quad a_2 = \omega^2 - \mu_1 (r_{13}^0)^{-3} - \mu_2 (r_{23}^0)^{-3}, \quad b_1 = 0. \quad (18)$$

а) Тело  $M_3$  в ньютоновом приближении расположено между телами  $M_1$  и  $M_2$ . Тогда  $r_{12}^0 > r_{13}^0$ ,  $r_{12}^0 > r_{23}^0$ . Учитывая (4), имеем:  $a_2 < 0$ , два корня характеристического уравнения (12) действительные:  $\lambda_1 = \lambda_0$ ,  $\lambda_2 = -\lambda_0 < 0$ , и два — чисто мнимые:  $\lambda_3 = \tilde{\lambda}_0 i$ ,  $\lambda_4 = -\tilde{\lambda}_0 i$ . Общее решение однородной системы, соответствующей системе (7), имеет вид:

$$x_3 = 2\omega\lambda_0 (c_1 e^{\lambda_0 t} + c_2 e^{-\lambda_0 t}) + 2\omega\tilde{\lambda}_0 (c_3 \cos \tilde{\lambda}_0 t + c_4 \sin \tilde{\lambda}_0 t), \quad (19)$$

$$y_3 = (\lambda_0^2 - a_1) (c_1 e^{\lambda_0 t} + c_2 e^{-\lambda_0 t}) + (\tilde{\lambda}_0^2 + a_1) (-c_3 \sin \tilde{\lambda}_0 t + c_4 \cos \tilde{\lambda}_0 t),$$

где

$$\lambda_0^2 = \frac{a_1 + a_2 - 4\omega^2 + \sqrt{(a_1 + a_2 - 4\omega^2)^2 - 4a_1 a_2}}{2},$$

$$\tilde{\lambda}_0^2 = \frac{4\omega^2 - a_1 - a_2 + \sqrt{(a_1 + a_2 - 4\omega^2)^2 - 4a_1 a_2}}{2},$$

$c_\gamma$  — произвольные постоянные интегрирования.

б) В ньютоновом приближении тело  $M_2$  расположено между телами  $M_1$  и  $M_3$ . Тогда, учитывая  $r_{13}^0 = r_{12}^0 + r_{23}^0$  и (4), имеем  $a_2 > 0$  и все корни характеристического уравнения (12) чисто мнимые. Введя обозначения

$$\sigma^2 = \frac{4\omega^2 - a_1 - a_2 - \sqrt{(a_1 + a_2 - 4\omega^2)^2 - 4a_1 a_2}}{2},$$

$$\delta^2 = \frac{4\omega^2 - a_1 - a_2 + \sqrt{(a_1 + a_2 - 4\omega^2)^2 - 4a_1 a_2}}{2},$$

получим общее решение однородной системы, соответствующей системе (7),

$$x_3 = 2\omega\sigma (\bar{c}_1 \sin \sigma t - \bar{c}_2 \cos \sigma t) + 2\omega\delta (\bar{c}_3 \sin \delta t - \bar{c}_4 \cos \delta t), \quad (19')$$

$$y_3 = (\sigma^2 + a_1) (\bar{c}_1 \cos \sigma t + \bar{c}_2 \sin \sigma t) + (\delta^2 + a_1) (\bar{c}_3 \cos \delta t + \bar{c}_4 \sin \delta t),$$

где  $\bar{c}_\gamma$  — произвольные постоянные интегрирования.

Подставляя в неоднородную часть системы (7) решение (9) системы (6) и учитывая условия (8), видим, что система (7) допускает постоянное частное решение:

$$x_3 = \frac{V_1^* + a_0}{a_1},$$

$$y_3 = \frac{b_0}{a_2}, \quad (20)$$

где

$$V_1^* = \frac{2\mu_1\mu_2}{c^2} \left( 1 - \frac{\mu_1\mu_2}{3(\mu_1 + \mu_2)^2} \right) [(r_{23}^0)^{-3} - (r_{13}^0)^{-3}].$$

Рассуждая далее, как и в случае треугольного расположения тел, получим, что если два тяжелых тела  $M_1$  и  $M_2$  в пост-ньютоновом приближении движутся по окружностям, а третье (легкое) тело в ньютоновом приближении расположено между ними, то при определенных начальных условиях (если в (19)  $c_1 \neq 0$ ) в решении уравнений (7) имеются вековые члены вида  $e^{\lambda_0 t}$  и, следовательно, исходная ньютонова конфигурация распадается с течением времени (третье тело уходит с прямой  $M_1 M_2$ ). Если начальные условия выбраны так, что  $c_1 = 0$ , то решения системы (7) периодические и, следовательно, ньютонова конфигурация устойчива.

Подставляя теперь в неоднородную часть системы (7) решение (10) системы (6), получим частное решение неоднородной системы (7) в виде:

$$\begin{aligned} x_3 &= A_1' \cos \omega t + A_2', \\ y_3 &= B_1' \sin \omega t + B_2' \omega t + B_3', \end{aligned} \quad (21)$$

где  $A_1', A_2', B_1', B_2', B_3'$  — постоянные и

$$B_2' = -2 \frac{\mu_1\mu_2}{a_2 c^2} \left( 3 - \frac{\mu_1\mu_2}{(\mu_1 + \mu_2)^2} \right) [(r_{13}^0)^{-3} - (r_{23}^0)^{-3}] \neq 0.$$

Следовательно, в решении уравнений (7), если тела  $M_1$  и  $M_2$  движутся в пост-ньютоновом приближении, согласно (10), при любых начальных условиях будут вековые члены вида  $\omega t$ , а в случае а) возможны и члены вида  $e^{\lambda_0 t}$ .

Полученные результаты могут найти применение в астрономии и астрофизике при рассмотрении вопросов, связанных с эволюцией систем тел.

### Литература

1. Л. Инфельд, Е. Плебаньский. Движение и релятивизм. ИЛ, 1962.
2. Г. Н. Дубошин. Небесная механика. Аналитические и качественные методы. Изд. «Наука», 1964.

Белорусский государственный университет  
им. В. И. Ленина

Поступило в редакцию  
26.IV 1968

С. Ф. ИЛЬЮКЕВИЧ

### К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧИ О ДИФРАКЦИИ ПЛОСКОЙ ВОЛНЫ НА ДВУХ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ НЕПРОВОДЯЩИХ КРУГОВЫХ ЦИЛИНДРАХ

Задачи дифракции плоской электромагнитной волны на двух телах являются модельными для целого ряда практически важных задач, возникающих, например, в различных областях радиофизики и радиотехники.

В настоящее время известно достаточно большое число теоретических и экспериментальных работ, посвященных проблеме дифракции электромагнитных волн на двух бесконечно длинных идеально проводящих цилиндрах с учетом их взаимодействия. К ним относятся, например, [1—4]. Однако в большинстве случаев эти работы содержат только решения соответствующих краевых задач без их анализа, основанного на получении численных результатов. Можно указать лишь несколько работ, в которых имеются примеры численного решения задачи. Так, в [5] приведены некоторые численные результаты для двух параллельных бесконечно длинных составных цилиндров, в [10] содержится ряд величин, полученных для случая двух сильно разнесенных идеально проводящих круговых цилиндров. Более полные данные, относящиеся к возможности численного решения задачи дифракции электромагнитных волн на двух идеально проводящих цилиндрах, даются в [7], [8].

Кроме [6], нам известна лишь одна работа [9], в которой имеются расчеты решения задачи дифракции на двух непроводящих параллельных цилиндрах для частного случая плоской волны, распространяющейся вдоль линии центров кругов их поперечного сечения.

Данная статья, являющаяся продолжением задачи, рассмотренной в [6], посвящена вопросам численного исследования задачи на взаимодействие двух параллельных бесконечно длинных непроводящих круговых цилиндров, возбуждаемых плоской электромагнитной волной типа ТМ ( $E^0|Oz$ )

$$E^0 = E_0 e^{ik_0(n \cdot \vec{\rho})}, \quad (1)$$

(множитель  $\exp(-i\omega t)$ , как обычно, всюду опускается, амплитуда волны  $E_0$  считается равной 1), распространяющейся в направлении единичного вектора  $n$ , нормального к осям цилиндров и образующего произвольный угол  $\alpha$  с линией центров цилиндров (здесь  $\vec{\rho}$  — радиус-вектор точки наблюдения,  $e$  — единичный вектор вдоль  $E^0$ ,  $k_0 = (\epsilon_0 \mu_0)^{1/2} \omega$ ).

Решение этой задачи получается в качестве частного случая из [6]. Если в [6] положить  $\theta = \pi/2$ , то тогда решение исследуемой нами задачи вне цилиндров будет задаваться формулами:

$$E_\rho^1 = E_\varphi^1 = H_z^1 = 0,$$

$$E_z^1 = k_0^2 \Pi^1,$$

$$H_\rho^1 = -\frac{ik_0^2}{\omega \mu_0 \rho} \cdot \frac{\partial \Pi^1}{\partial \varphi},$$

$$H_\varphi^1 = \frac{ik_0^2}{\omega \mu_0} \cdot \frac{\partial \Pi^1}{\partial \rho},$$
(2)

где  $\Pi^1 = \Pi^0 + \Pi^p$ ,  $\Pi^0$  — скалярный потенциал Герца первичного поля волны (1), а  $\Pi^p$  — потенциал Герца рассеянного на цилиндрах поля, определяемые выражениями:

$$\Pi^0 = \frac{1}{k_0^2} e^{ik_0(n\rho)},$$
(3)

а

$$\Pi^p = \sum_{s=\pm 1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n^s H_n^{(1)}(k_0 \rho_s) \cos n\varphi_s + \sum_{s=\pm 1} \sum_{n=1}^{\infty} b_n^s H_n^{(1)}(k_0 \rho_s) \sin n\varphi_s,$$
(4)

где  $H_n^{(1)}(k_0 \rho_s)$  — функция Ханкеля первого рода.

Внутри каждого из цилиндров поле находится по формулам вида (2), в которых вместо  $\Pi^1$  следует брать потенциал  $\Pi_s^2$ :

$$\Pi_s^2 = \sum_{n=0}^{\infty} c_n^s I_n(k_1 \rho_s) \cos n\varphi_s + \sum_{n=1}^{\infty} d_n^s I_n(k_1 \rho_s) \sin n\varphi_s$$
(5)

(здесь  $I_n(k_1 \rho_s)$  — функция Бесселя первого рода, а  $k_1^2 = \frac{\varepsilon_1 \mu_1 \omega^2 + 4i\pi\sigma_1 \mu_1 \omega}{c^2}$ )

Величины  $a_n^s$ ,  $b_n^s$ ,  $c_n^s$  и  $d_n^s$  являются решениями бесконечных систем

$$\alpha_n + \sum_{m=0}^{\infty} x_{nm} \alpha_m = \varphi_n,$$

$$\beta_n + \sum_{m=0}^{\infty} y_{nm} \beta_m = \sigma_n,$$

$$\gamma_n + \sum_{m=0}^{\infty} z_{nm} \gamma_m = \psi_n,$$

$$\tau_n + \sum_{m=0}^{\infty} v_{nm} \tau_m = \kappa_n,$$
(6)

имеющих нормальную форму, где

$$a_n^s = I_n(k_0 a) A_n^s, \quad b_n^s = I_n(k_0 a) B_n^s; \quad c_n^s = H_n^{(1)}(k_1 a) C_n^s, \quad d_n^s = H_n^{(1)}(k_1 a) D_n^s,$$

$$x_{nm} = T_n D_{nm}; \quad y_{nm} = -T_n D_{nm}; \quad z_{nm} = T_n E_{nm}; \quad v_{nm} = -T_n E_{nm};$$

$$\alpha_n = A_n^{+1} + (-1)^n A_n^{-1}; \quad \varphi_n = \Phi_n^{+1} + (-1)^n \Phi_n^{-1};$$

$$\beta_n = A_n^{+1} - (-1)^n A_n^{-1}; \quad \sigma_n = \Phi_n^{+1} - (-1)^n \Phi_n^{-1};$$

$$\gamma_n = B_n^{+1} + (-1)^n B_n^{-1}; \quad \psi_n = F_n^{+1} + (-1)^n F_n^{-1};$$

$$\tau_n = B_n^{+1} - (-1)^n B_n^{-1}; \quad \kappa_n = F_n^{+1} - (-1)^n F_n^{-1},$$
(7)

а

$$T_n = \frac{1}{I_n(k_0 a)} \frac{\begin{vmatrix} k_1 I_n(k_0 a) & \mu_1 I'_n(k_0 a) \\ k_0 I_n(k_1 a) & \mu_0 I'_n(k_1 a) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} k_1 H_n^{(1)}(k_0 a) & \mu_1 I_n(k_1 a) \\ k_0 H_n^{(1)'}(k_0 a) & \mu_0 I'_n(k_0 a) \end{vmatrix}},$$

$$D_{nm} = I_m(k_0 a) (-1)^m [H_{m-n}^{(1)}(k_0 l) + (-1)^n \delta_n H_{m+n}^{(1)}(k_0 l)],$$

$$E_{nm} = I_m(k_0 a) (-1)^m [H_{m-n}^{(1)}(k_0 l) - (-1)^n \delta_n H_{m+n}^{(1)}(k_0 l)],$$

(8)

$$\Phi_n^s = -\frac{1}{k_0^2} \varepsilon_n \cos n\alpha T_n e^{ik_0(n \vec{\rho}_s)} i^n,$$

$$F_n^s = -\frac{1}{k_0^2} \varepsilon_n \sin n\alpha T_n e^{ik_0(n \vec{\rho}_s)} i^n,$$

причем

$$\delta_n = \begin{cases} 0, & n = 0 \\ 1, & n \neq 0 \end{cases}, \quad \varepsilon_n = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 2, & n \neq 0 \end{cases}.$$

Как отмечается в [7], [8], эти системы единственным образом разрешимы методом усечения в пространстве числовых последовательностей  $l^2$ . Каждая из систем (6) решается независимо от другой и все они сходны по своей структуре.

В приближении волновой зоны рассеянное поле (здесь мы будем рассматривать только такое поле) определяется выражением [8]

$$E_z^1 = -\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} H_\varphi^1 = \frac{e^{ik\rho}}{\sqrt{\rho}} A(\varphi),$$

где

$$A(\varphi) = k_0^2 \sqrt{\frac{2}{\pi k_0}} e^{-\frac{i\pi}{4}} \sum_{s=\pm 1} \sum_{\kappa=0}^{\infty} (-i)^\kappa I_\kappa(k_0 a) e^{-isk_0 l_0 \cos \varphi} \times \\ \times [A_n^s \cos n\varphi + B_n^s \sin n\varphi]$$

(10)

— амплитудная функция рассеянного поля, а величина радиолокационного поперечного сечения [8] находится по формуле

$$\sigma = \lim_{\rho \rightarrow \infty} 2\pi\rho \left| \frac{E^1}{E^0} \right|^2,$$

или

$$\sigma = 2\pi |A(\pi + \alpha)|^2.$$

С помощью стандартных программ для функций Бесселя [11] и других функций, встречающихся в (6), усеченные системы вида

$$z_i + \sum_{j=0}^N a_{ij} z_j = b_i \quad (i = 0, 1, \dots, N),$$

(12)

получающиеся из (6), если там ограничить область изменения индексов  $n$  и  $m$  значением  $N$  ( $n, m = 0; 1; 2; \dots; N$ ), могут быть легко запрограммированы, что позволит найти приближенные значения неизвестных  $a_n, \beta_n, \gamma_n$  и  $\tau_n$  с помощью ЭВМ.

Нами была составлена рабочая программа для решения усеченных систем, дающая возможность находить приближенные значения неизвестных для различных значений  $N$  — порядка усечения системы, и рассмотрены некоторые вопросы, относящиеся к исследованию скорости сходимости приближенных решений с изменением  $N$ . В качестве примеров построены графики для различных значений параметров, определяющих решение задачи в волновой зоне.

Исследование вопросов, относящихся к численному решению систем, проводилось при значениях параметров  $k_0a=1, k_1a=2; k_0a=2, k_1a=3$  и др. и значениях  $k_0l=4; 5; 10; 15; 20; 50; 100$ . При этом наблюдалось следующее.

Например, при  $k_0a=2, k_1a=3$  и при всех перечисленных значениях  $k_0l$  (кроме  $k_0l=4; 5$ ) достаточно взять  $N=[2k_0a]=4$ , чтобы получить точность вычисления до 3-го десятичного знака. С увеличением порядка усечения  $N$  точность вычисления увеличивается и, начиная с  $N=8$ , для всех последующих порядков усечения результаты счета практически совпадают (вычисления проводились с обычной значностью).

Решение систем при других из вышеуказанных параметров с различным порядком усечения показывает, что для получения точности вычислений не ниже 2-го десятичного знака можно в качестве исходного приближения также брать  $N=[2k_0a]$ . (Эти выводы аналогичны сделанным в [7] в случае металлических цилиндров).

Приведенная таблица характеризует скорость сходимости вычислительного процесса при решении систем для различных последовательно возрастающих значений  $N$ .

Во всех рассмотренных случаях оказалось, что элементы матрицы коэффициентов систем (6) быстро убывают с возрастанием  $n$  либо  $m$ , либо  $n$  и  $m$  одновременно. Причем скорость убывания такова, что она позволяет сделать вывод о выполнимости для коэффициентов  $a_{ij}$  систем (6) неравенств

$$\sum_{j=0}^{\infty} |a_{ij}| < 1 \quad (i = 0, 1, 2, \dots)$$

(здесь  $a_{ij}$  обозначают коэффициенты  $x_{nm}, y_{nm}, z_{nm}$  и  $v_{nm}$  в системах (6)), указывающих на то, что рассматриваемые системы являются регулярными и к ним можно применять метод последовательных приближений (вообще говоря, системы (6) для взятых параметров являются вполне регулярными). В случае же, когда  $k_0l=4$  (цилиндры касаются) или  $k_0l=5$  (расстояние между цилиндрами мало), наблюдается колебание значений абсолютных величин матричных элементов систем (6) с ростом  $n$  и  $m$  для взятых порядков усечения, и при решении систем (6) для  $N=4, 5, 6, \dots$  в результатах совпадают только две первые значащие цифры после запятой, значения же остальных цифр колеблются, то убывая, то возрастая. Например, при вычислении неизвестных  $A_{0N}^{-1}$  для различных значений  $N$  — порядка усечения при  $k_0a=2, k_1a=3, k_0l=5$  оказывается

$N=4$	$N=5$	$N=6$	$N=7$	$N=8$
-2,874999	-2,874917	-2,874978	-2,875109	-2,874934
1,307948	1,307991	1,308032	1,308063	1,308056

(нижняя строка отвечает мнимой части  $A_{0N}^{-1}$ ). Поэтому на основании только рассмотренных примеров (при вычислениях с обычной значностью) мы пока ничего не можем сказать о сходимости вычислительного процесса в случае, когда цилиндры касаются. По-видимому, исследование решений таких

Таблица

Значения дифракционных коэффициентов для различных порядков усечения систем (6) и  $k_0 a = 2$ ,  $k_2 a = 3$ ,  $k_0 l = 20$ ,  $\alpha = 0^\circ$ . Верхняя строка — вещественная, нижняя — мнимая часть  $A_{0N}^{\pm 1}$

$n$	$N=4$	$p$	$N=5$	$p$	$N=6$	$p$	$N=7$	$p$	$N=8$	$p$	$N=9$	$p$
$A_{0N}^{+1} = A_{0N} \cdot 10^p$												
0	-3260863	+1	-3260873	+1	-3260875	+1	-3260875	+1	-3260874	+1	-3260874	+1
	-1509796	+1	-1509822	+1	-1509815	+1	-1509810	+1	-1509811	+1	-1509811	+1
1	22834774	+1	2283772	+1	2283767	+1	2283763	+1	2283763	+1	2283763	+1
	-2462864	+1	-2462864	+1	-2462866	+1	-2462870	+1	-2462869	+1	-2462869	+1
2	2059613	+1	2059623	+1	2059622	+1	2059622	+1	2059622	+1	2059622	+1
	-6364060	-1	-6362932	-1	-6363235	-1	-6363494	-1	-6363465	-1	-6363465	-1
3	1204112	0	1204098	0	1204102	0	1204105	0	1204105	0	1204105	0
	3228093	0	3228111	0	3228109	0	3228109	0	3228109	0	3228109	0
4	-4880126	-1	-4880146	-1	-4880146	-1	-4880146	-1	-4880146	-1	-4880146	-1
	1892664	-1	1892643	-1	1892646	-1	1892648	-1	1892648	-1	1892648	-1
5			-1390491	-2	-1390491	-2	-1390489	-2	-1390489	-2	-1390489	-2
			-3344567	-2	-3344568	-2	-3344568	-2	-3344568	-2	-3344568	-2
6					-5516157	-2	-5516153	-2	-5516154	-2	-5516154	-2
					3080860	-2	3080851	-2	3080852	-2	3080852	-2
7							-1338188	-1	-1338188	-1	-1338188	-1
							-1225966	-1	-1225967	-1	-1225967	-1
8									-1285553	-2	-1285553	-2
									4493824	-2	4493824	-2
9											8021319	-4
											2943508	-5

$$A_{0N}^{-1} = A_{0N} \cdot 10^p$$

0	-1097175	+1	-1097188	+1	-1097193	+1	-1097192	+1	-1097192	+1	-1097192	+1
	2686783	+1	2686781	+1	2686781	+1	2686782	+1	2686782	+1	2686782	+1
1	-3194939	+1	-3194944	+1	-3194945	+1	-3194945	+1	-3194944	+1	-3194944	+1
	-1749793	+1	-1749782	+1	-1749777	+1	-1749778	+1	-1749779	+1	-1749779	+1
2	-1914601	0	-1914530	0	-1914506	0	-1914512	0	-1914514	0	-1914514	0
	-1728993	+1	-1728994	+1	-1728996	+1	-1728996	+1	-1728996	+1	-1728996	+1
3	3485081	0	3485077	0	3485075	0	3485074	0	3485075	0	3485075	0
	-2425916	0	-2425927	0	-2425929	0	-2425929	0	-2425929	0	-2425929	0
4	2644576	-1	2644563	-1	2644560	-1	2644559	-1	2644559	-1	2644559	-1
	4531681	-1	4531681	-1	4531683	-1	4531685	-1	4531685	-1	4531685	-1
5			-5050001	-2	-5050000	-2	-5050000	-2	-5049999	-2	-5049999	-2
			3290409	-2	3290410	-2	3290411	-2	3290412	-2	3290412	-2
6					5589636	-2	5589630	-2	5599629	-2	5589629	-2
					7776319	-2	7776320	-2	7776319	-2	7776319	-2
7							-4057710	-1	-4057710	-1	-4057710	-1
							2213959	-1	2213959	-1	2213959	-1
8									5737312	-2	5737312	-2
									6596541	-2	6596541	-2
											1114119	-3
											-5088801	-4

систем с удвоенной или утроенной значностью позволит сделать более конкретные выводы.

Ниже приводятся диаграммы направленности, построенные для функций

$$K = \left| \frac{1}{k_0^2} \sqrt{\frac{\pi k_0}{2}} A(\varphi) \right|^2; \quad K_1 = \left| \frac{1}{k_0^2} \sqrt{\frac{\pi k_0}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} (-i)^n I_n(k_0 a) e^{-ik_0 l_0 \cos \varphi} \times \right. \\ \left. \times [A_n^{+1} \cos n\varphi + B_n^{+1} \sin n\varphi] \right|^2; \quad K_2 = \left| \frac{1}{k_0^2} \sqrt{\frac{\pi k_0}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} (-i)^n I_n(k_0 a) e^{ik_0 l_0 \cos \varphi} \times \right. \\ \left. \times [A_n^{-1} \cos n\varphi + B_n^{-1} \sin n\varphi] \right|^2$$

в зависимости от угла  $\varphi$  ( $K_1$  и  $K_2$  представляют интенсивность рассеяния соответственно на  $s$ -ом и  $-s$ -ом цилиндрах в отдельности), и графики радиолокационного поперечного сечения.

На рис. 1 представлены графики функции  $K$  для значений параметров:

- а)  $k_0 a = 2, k_1 a = 3, k_0 l = 20, \alpha = 0^\circ$  и  $\alpha = 90^\circ$ ,  
 б)  $k_0 a = 3, k_1 a = 2, k_0 l = 15, \alpha = 0^\circ$  и  $\alpha = 90^\circ$ .

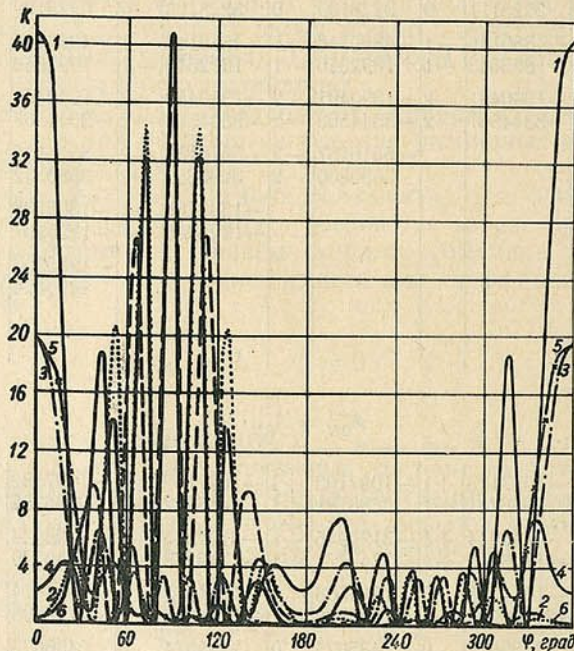


Рис. 1. Графики функции  $K$ :

$k_0 a = 2, k_1 a = 3, k_0 l = 20$  и  $\alpha = 0^\circ$  (1) и  $\alpha = 90^\circ$  (2),  $k_0 a = 2, k_1 a = 20$  и  $\alpha = 0^\circ$  (3) и  $\alpha = 90^\circ$  (4) — цилиндры металлические,  $k_0 a = 3, k_1 a = 2, k_0 l = 15$  и  $\alpha = 0^\circ$  (5) и  $\alpha = 90^\circ$  (6)

При  $\alpha = 0^\circ$  (когда волна распространяется вдоль положительного направления оси  $Ox$ ) график имеет ось симметрии, проходящую через точку  $\varphi = 180^\circ$ . Интенсивность рассеяния возрастает, осциллируя при переходе из освещенной области ( $90^\circ \leq \varphi \leq 270^\circ$ ) в область геометрической тени ( $-90^\circ \leq \varphi \leq 90^\circ$ ), достигая своего наибольшего значения при  $\varphi = 0^\circ$  (в случаях а и б) и наименьшего при  $\varphi = 95^\circ$  (в случае а) и  $\varphi = 156^\circ$  (в случае б).

При  $\alpha = 90^\circ$  (волна распространяется вдоль оси  $Oy$ ) интенсивность рассеяния также возрастает при переходе из освещенной области ( $180^\circ \leq$

$\varphi \leq 360^\circ$ ) в область геометрической тени ( $0^\circ \leq \varphi \leq 180^\circ$ ), причем в освещенной области график имеет ось симметрии при  $\varphi = 270^\circ$ , а в области геометрической тени — при  $\varphi = 90^\circ$ . Максимальное значение интенсивности

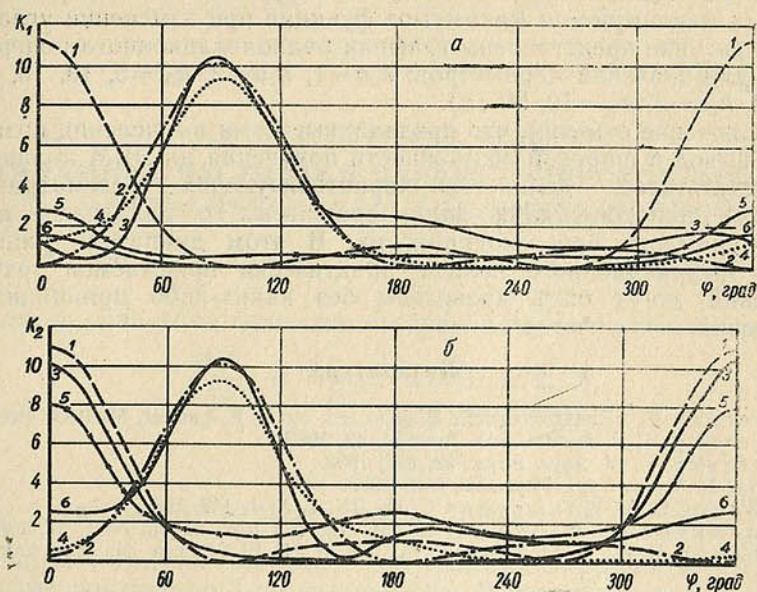


Рис. 2. Графики функции  $K_1$  (а) и  $K_2$  (б) :

$k_0 a = 2, k_1 a = 3, k_0 l = 20$  и  $\alpha = 0^\circ$  (1) и  $\alpha = 90^\circ$  (2),  $k_0 a = 3, k_1 a = 2, k_0 l = 15$  и  $\alpha = 0^\circ$  (3) и  $\alpha = 90^\circ$  (4),  $k a = 2, k l = 20$  и  $\alpha = 0^\circ$  (5) и  $\alpha = 90^\circ$  (6) — цилиндры металлические

рассеяния достигается при  $\varphi = 90^\circ$  (в обоих случаях), а минимальное — при  $\varphi = 257^\circ$  (а) и  $\varphi = 81^\circ$  (б).

На рис. 1 приведены также графики интенсивности рассеяния в случае металлических цилиндров. Очевидно, что в этом случае интенсивность рассеяния больше интенсивности рассеяния непроводящих цилиндров в освещенной области и меньше в области геометрической тени.

На рис. 2 изображены графики функции  $K_1$  и  $K_2$ . Они симметричны относительно  $\varphi = 180^\circ$  при  $\alpha = 0$ , а при  $\alpha = 90^\circ$  интенсивность рассеяния на  $s$ -ом цилиндре в направлении  $\varphi$  полностью совпадает с интенсивностью рассеяния на  $-s$ -ом цилиндре в направлении  $\pi - \varphi$ . Из рисунка видно, что наличие второго цилиндра увеличивает интенсивность рассеяния по сравнению с интенсивностью рассеяния

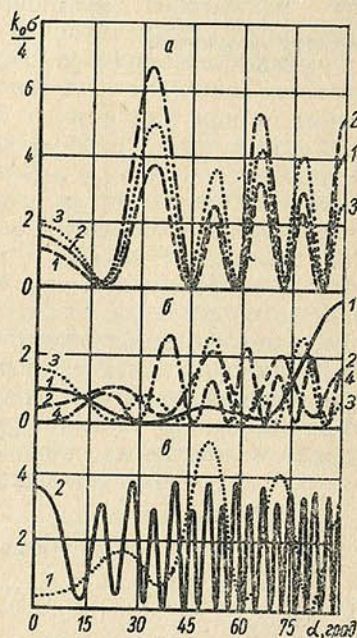


Рис. 3. Графики функции  $\frac{k_0 \sigma}{4}$  :

а)  $k_0 a = 1, k_0 l = 15$  и  $k_1 a = 5$  (1),  $k_1 a = 3$  (2) и  $k_1 a = 10$  (3),  
б)  $k_0 a = 1, k_1 a = 2$  и  $k_0 l = 5$  (1),  $k_0 l = 10$  (2),  $k_0 l = 15$  (3) и  
 $k_0 l = 20$  (4), в)  $k_0 a = 2, k_1 a = 3$  и  $k_0 l = 10$  (1) и  $k_0 l = 50$  (2)

на одном цилиндре. Для сравнения приведены также графики функций  $K_1$  и  $K_2$  в случае металлических цилиндров.

На рис. 3, а представлены графики функции  $\frac{k_0\sigma}{4}$  для различных значений  $k_1a$  ( $k_0a$  и  $k_0l$  не меняются). Наблюдается закономерность в чередовании максимумов и минимумов функции при изменении угла  $\alpha$ . На этом же рисунке представлены графики радиолокационного поперечного сечения для значений параметров:  $k_0a=1$ ,  $k_1a=2$ ,  $k_0l=5$ , 10, 15, 20 (б) и  $k_0a=2$ ,  $k_1a=3$ ,  $k_0l=10$ , 50 (в).

В заключение отметим, что проделанные нами вычисления позволяют сделать вывод о широкой возможности получения на ЭВМ количественных результатов, полностью характеризующих рассматриваемую задачу в диапазоне длин волн, сравнимых с радиусами цилиндров или намного превосходящих их. В этом диапазоне длин волн расчеты дифракционного поля с практически приемлемой точностью вычислений могут быть проведены без каких-либо принципиальных затруднений.

### Литература

1. Tversky V. «Electromagnetic Waves», ed. by R. E. Langer, Madison Press, 1962.
2. Tversky V. J. Acoust. Soc. Am., 24, 42, 1952.
3. Tversky V. J. Appl. Phys., 23, 407, 1952.
4. Row R. V. J. Appl. Phys., 26, 666, 1955.
5. Иванов Е. А., Ильюкевич С. Ф. ДУ, 1, № 1, 117, 1965.
6. Ильюкевич С. Ф. Весті АН БССР, сер. фіз.-мат. навук, № 1, 47, 1967.
7. Иванов Е. А., Коблова Г. М. Весті АН БССР, сер. фіз.-мат. навук, № 4, 47, 1968.
8. Иванов Е. А. Дифракция электромагнитных волн на двух телах. Изд-во «Наука и техника», Минск, 1968.
9. Окамото Нобуо, Йосимура Йосикадзу, Наканиси Йосиро, Кумагаи Сабуро. Дэнки цусин гаккай дзасси, J. Inst. Elect. Commun Engrs., Jap., 49, № 12, 1966.
10. Кинбер Б. Е., Гуревич С. В. Радиотехника и электроника, 13, № 5, 1968.
11. Стандартные программы для ЭВМ «Минск-2». Изд-во «Наука и техника», Минск, 1967.

Институт математики  
АН БССР

Поступило в редакцию  
17.VII 1968

А. В. МИНКЕВИЧ, Ф. И. ФЕДОРОВ

**ДИНАМИКА ЧАСТИЦЫ В ПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ ФОРМЕ  
 И КОВАРИАНТНЫЙ ВАРИАЦИОННЫЙ ПРИНЦИП**

**УРАВНЕНИЯ ДИНАМИКИ В ПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ ФОРМЕ**

Обычные уравнения динамики частицы в параметрической форме

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^a} = \frac{dp_a}{d\tau} \quad (a = 0, 1, 2, 3), \quad (1)$$

$$p_a = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u^a}, \quad (2)$$

где  $\tau$  — произвольный параметр вдоль мировой линии,  $u^a = \frac{dx^a}{d\tau}$ ,  $p_a$  —

обобщенный 4-импульс частицы, применимы лишь к функциям Лагранжа  $\mathcal{L}$ , однородным степени I по «скоростям». В некоторых случаях (например, в релятивистской динамике) целесообразно использование неоднородных функций Лагранжа. В связи с этим возникает необходимость получения уравнений движения, а также выражения для  $p_a$ , не ограниченных условием однородности  $\mathcal{L}$ .

При получении уравнений движения из вариационного принципа проявляется существенное различие между независимой переменной — временной координатой  $t$  в обычной динамике и произвольным параметром  $\tau$  в рассматриваемом случае. Между  $dt$  и дифференциалами пространственных координат  $dx^i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) вдоль мировой линии частицы при варьировании никакой связи не существует. В то же время при получении уравнений движения в параметрической форме следует учитывать соотношение, связывающее  $d\tau$  и  $dx^a$ . Так, например, в релятивистской динамике при выборе в качестве  $\tau$  собственного времени частицы имеем  $d\tau^2 = -g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta$  ( $g_{\alpha\beta}$  — метрический тензор 4-мерного пространства — времени), переход к другому параметру  $d\tau' = f(x^\alpha, dx^\alpha)$  изменяет лишь форму соотношения связи. Произвол в выборе  $\tau$ , таким образом, соответствует произволу в выборе функций, определяющих параметризацию, а не отсутствию соотношения связи. Это соотношение оказывается существенным в случае однородных  $\mathcal{L}$ , поскольку интеграл действия вдоль всякой мировой линии  $S = \int \mathcal{L} d\tau$  при этом оказывается не зависящим от параметризации. Однако при получении лагранжевых уравнений, не ограниченных требованием однородности, подобное соотношение необходимо учитывать. Связь между  $d\tau$  и  $dx^a$  представим в виде<sup>1</sup>

$$d\tau = \sum_{(k,n)} c_{kn} (a_{\alpha_1 \dots \alpha_n}^{(k)} dx^{\alpha_1} \dots dx^{\alpha_n})^{\frac{1}{n}} > 0, \quad (3)$$

$$v \equiv \sum_{(k,n)} c_{kn} (a_{\alpha_1 \dots \alpha_n}^{(k)} u^{\alpha_1} \dots u^{\alpha_n})^{\frac{1}{n}} = 1,$$

<sup>1</sup> По повторяющимся индексам  $\alpha_i$  подразумевается суммирование от 0 до 3.

где  $a_{\alpha_1 \dots \alpha_n}^{(k)}$  — симметризованные по всем индексам произвольные функции координат,  $c_{kn}$  — постоянные коэффициенты. Соотношение (3) играет роль дополнительного условия при получении уравнений движения на основе вариационного принципа. Уравнения динамики в параметрической форме получим из вариационного принципа

$$\delta S = \delta \int_a^b \mathcal{L} d\tau = \int_a^b (\delta \mathcal{L} d\tau + \mathcal{L} \delta d\tau) = 0, \quad (4)$$

где  $a$  и  $b$  соответствуют двум фиксированным точкам на мировой линии. Полагая  $\delta x^\alpha|_{x=a} = \delta x^\alpha|_{x=b} = 0$ , получим из (4)

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\alpha} - \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u^\beta} u^\beta - \mathcal{L} \right) \frac{\partial v}{\partial x^\alpha} = \frac{dp_\alpha}{d\tau}, \quad (5)$$

где обобщенный 4-импульс  $p_\alpha$ , определяемый как  $dS/dx^\alpha$  вдоль экстремальной мировой линии, равен

$$p_\alpha = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u^\alpha} - \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u^\beta} u^\beta - \mathcal{L} \right) \frac{\partial v}{\partial u^\alpha}. \quad (6)$$

Из (6) и (3) получаем соотношение

$$p_\alpha u^\alpha - \mathcal{L} = 0, \quad (7)$$

которое в случае однородной  $\mathcal{L}$ , согласно теореме Эйлера  $\left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u^\alpha} u^\alpha = \mathcal{L} \right)$ , является следствием однородности. Легко показать, что в силу (3) уравнения (5) не являются независимыми. Сворачивая (5) с  $u^\alpha$  и используя (6) и (7), имеем

$$\left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u^\alpha} u^\alpha - \mathcal{L} \right) \frac{\partial v}{\partial x^\alpha} = 0. \quad (8)$$

В случае однородной функции  $\mathcal{L}$  условие (8) выполняется тождественно по теореме Эйлера, в случае неоднородной  $\mathcal{L}$  (8) выполняется в силу (3) и, наоборот, из (8) следует  $v = \text{const}$ , т. е. при частном выборе константы получаем (3). Легко проверить, что соотношения (5) и (6) обладают следующими свойствами инвариантности:

а) Инвариантность по отношению к произвольному изменению формы функции Лагранжа с помощью условия (3) (форм-инвариантность), т. е. инвариантность по отношению к переходу

$$\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}' = \mathcal{L}(\psi_A, a_{\alpha_1 \dots \alpha_n}^{(k)'}, u^{\alpha'}) + f_4(v),$$

где  $\psi_A' = \psi_A f_1(v)$  ( $\psi_A$  — полевые переменные),  $a_{\alpha_1 \dots \alpha_n}^{(k)'} = a_{\alpha_1 \dots \alpha_n}^{(k)} f_2(v)$ ,  $u^{\alpha'} = u^\alpha f_3(v)$ , причем в силу (3)  $f_{1,2,3} = 1$  и  $f_4 = 0$ ;

б) Инвариантность по отношению к переходу от одного параметра к другому

$$\begin{aligned} dt &= \sum_{(k,n)} c_{kn} (a_{\alpha_1 \dots \alpha_n}^{(k)} dx^{\alpha_1} \dots dx^{\alpha_n})^{\frac{1}{n}} \rightarrow dt' = \\ &= \sum_{(k,n)} c'_{kn} (a_{\alpha_1 \dots \alpha_n}^{(k)'} dx^{\alpha_1} \dots dx^{\alpha_n})^{\frac{1}{n}}, \end{aligned}$$

$$\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}' = \mathcal{L} \left( x^\alpha, \frac{u^{\alpha'}}{\sum_{(k,n)} c_{kn} (a_{\alpha_1 \dots \alpha_n}^{(k)} u^{\alpha_1'} \dots u^{\alpha_n'})^{\frac{1}{n}}} \right) \times \\ \times \sum_{(k,n)} c_{kn} (a_{\alpha_1 \dots \alpha_n}^{(k)} u^{\alpha_1'} \dots u^{\alpha_n'})^{\frac{1}{n}}.$$

При проверке указанных свойств инвариантности следует иметь в виду, что условие (3) можно использовать лишь после выполнения операций дифференцирования, поскольку при дифференцировании  $u^\alpha$  рассматриваются как независимые, хотя в силу (3)  $u^\alpha$  являются зависимыми. Приведем несколько примеров по использованию соотношений (5) и (6).

а) Классическая динамика. Выбирая  $d\tau = dt$ , запишем функцию Лагранжа

$$\mathcal{L} = T - V = \frac{m}{2} \sum_{i=1}^3 \left( \frac{dx^i}{d\tau} \right)^2 - V(x^i, t).$$

Соотношения (5) и (6) с  $\alpha = 1, 2, 3$  дают обычные уравнения движения и выражение 3-импульса, для  $\alpha = 0$  имеем

$$p_0 = -(T + V) = -E, \quad \frac{\partial V}{\partial t} = \frac{dE}{dt}.$$

б) Релятивистская динамика. Инвариантность  $d\tau$  по отношению к общим координатным преобразованиям соответствует тензорному характеру функций  $a_{\alpha_1 \dots \alpha_n}^{(k)}$ . Выбирая  $d\tau^2 = -g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta$  (сигнатура +2, скорость света  $c = 1$ ), запишем (5) и (6) для данного случая

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\alpha} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u^\beta} u^\beta - \mathcal{L} \right) \frac{\partial g_{\lambda\gamma}}{\partial x^\alpha} u^\lambda u^\gamma = \frac{dp_\alpha}{d\tau}, \quad (9)$$

$$p_\alpha = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u^\alpha} + \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u^\beta} u^\beta - \mathcal{L} \right) g_{\alpha\gamma} u^\gamma. \quad (10)$$

Полагая в (9)  $g_{\alpha\beta} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$ , получим уравнения динамики частицы в пространстве Минковского в прямоугольной декартовой системе координат [1].

Если в (3)  $a_{\alpha_1 \dots \alpha_n}^{(k)}$  являются функциями не только координат, но и скоростей, то вместо (5) и (6) будем иметь

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\alpha} - \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u^\beta} u^\beta - \mathcal{L} \right) \frac{\partial v}{\partial x^\alpha} A^{-1} = \frac{dp_\alpha}{d\tau}, \quad (11)$$

$$p_\alpha = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u^\alpha} - \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u^\beta} u^\beta - \mathcal{L} \right) \frac{\partial v}{\partial u^\alpha} A^{-1}, \quad (12)$$

где

$$A = 1 + \sum_{(k,n)} \frac{c_{kn}}{n} (a_{\alpha_1 \dots \alpha_n}^{(k)} u^{\alpha_1} \dots u^{\alpha_n})^{\frac{1}{n}-1} \times \\ \times \frac{\partial a_{\beta_1 \dots \beta_n}^{(k)}}{\partial u^\alpha} u^\alpha u^{\beta_1} \dots u^{\beta_n}.$$

Соотношение (7) остается без изменения. Соотношения (11) и (12) являются форм-инвариантными, инвариантность по отношению к изменению параметра имеет место в случае, если для исходного параметра функции  $a_{a_1 \dots a_n}^{(k)}$  не зависят от скоростей, что как раз имеет место как в классической, так и в релятивистской динамике.

В силу (7) канонический интеграл действия имеет обычный вид

$$S = \int p_\alpha u^\alpha d\tau. \quad (13)$$

При этом имеет место соотношение связи между  $x^\alpha$  и  $p_\alpha$

$$\Omega(x, p) = 0. \quad (14)$$

Соотношение (14) в некоторых случаях (например, для однородных  $\mathcal{L}$ ) является следствием неразрешимости (6) относительно  $u^\alpha$ ; если соотношения (6) разрешимы относительно  $u^\alpha$ , то (14) эквивалентно (3) и (7). Использование метода неопределенных множителей Лагранжа для определения условного экстремума интеграла действия (13) как функционала независимых переменных  $x^\alpha$  и  $p_\alpha$  при наличии дополнительного условия (14)

$$\delta S = \delta \int \{p_\alpha u^\alpha - \lambda \Omega(x, p)\} d\tau = 0 \quad (15)$$

приводит к каноническим уравнениям в параметрической форме, которые имеют обычный вид [2, 3]:

$$\frac{dx^\alpha}{d\tau} = \lambda \frac{\partial \Omega}{\partial p_\alpha}, \quad (16a)$$

$$\frac{dp_\alpha}{d\tau} = -\lambda \frac{\partial \Omega}{\partial x^\alpha} \quad (16b)$$

( $\lambda$  — неопределенный множитель Лагранжа). Выражая из (16a)  $p_\alpha = p_\alpha \left( x, \frac{dx}{d\tau}, \lambda \right)$  и подставляя полученное выражение  $p_\alpha$  в (14), можно определить  $\lambda$  как функцию  $x$  и  $\frac{dx}{d\tau}$ . Поскольку вид канонического интеграла (13) не зависит от выбора функции Лагранжа и используемого параметра, то уравнения (16) обладают теми же свойствами инвариантности, что и лагранжевы уравнения (5). Произвол, существующий в выборе условия (14), компенсируется введением соответствующего множителя Лагранжа  $\lambda$ .

#### КОВАРИАНТНЫЙ ВАРИАЦИОННЫЙ ПРИНЦИП

Уравнения движения частицы должны обладать свойством ковариантности по отношению к произвольным преобразованиям пространственных координат в классической динамике и по отношению к общим координатным преобразованиям в релятивистской динамике. Очевидно, что по форме лагранжевы уравнения (5) и канонические уравнения (16b) не удовлетворяют указанным свойствам ковариантности. Подобная ситуация совершенно аналогична той, которая имеет место в обычной динамике. Уравнения Лагранжа

$$\frac{\partial L}{\partial q^i} = \frac{dp_i}{dt} \left( p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}, \quad \dot{q}^i = \frac{dq^i}{dt}, \quad i = 1, 2, 3 \right), \quad (17)$$

получаемые из вариационного принципа

$$\delta S = \delta \int L(q^i, \dot{q}^i, t) dt = 0 \quad (18)$$

(независимые переменные  $q^i$ ), а также канонические уравнения (19б)

$$\frac{dq^i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad (19a)$$

$$\frac{\partial p_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q^i}, \quad (19б)$$

получаемые из вариационного принципа

$$\delta S = \delta \int \{p_i \dot{q}^i - H(q^i, p_i, t)\} dt = 0 \quad (20)$$

(независимые переменные  $q^i$  и  $p_i$ ) не обладают тензорной формой и, следовательно, по форме (но не по содержанию) явно не ковариантны по отношению к произвольным преобразованиям пространственных координат.

Представляет интерес сформулировать вариационный принцип в таком виде, чтобы уравнения динамики частицы явно обладали указанными свойствами ковариантности. Этого можно достичь, вводя понятие ковариантной вариации аналогично понятию ковариантного дифференциала. Пусть  $L_n$  — пространство с определенным линейным параллельным перенесением размерности  $n$  (пространство аффинной связности) и  $\Phi$  — некоторое тензорное поле в этом пространстве (индексы опущены); ковариантная вариация  $\delta_K \Phi$  по определению есть

$$\delta_K \Phi = \nabla_\alpha \Phi \delta x^\alpha, \quad (21)$$

где  $\nabla_\alpha$  — оператор ковариантной производной. Ковариантная вариация (21) обладает всеми свойствами ковариантного дифференциала [4], в частности, ковариантная вариация скаляра совпадает с обычной вариацией. В связи с этим вариационный принцип можно формулировать как требование обращения в нуль ковариантной вариации интеграла действия<sup>1</sup>. Не конкретизируя пока характера параллельного перенесения, получим уравнения движения в пространстве  $L_4$  с помощью ковариантного вариационного принципа, соответствующего (4)

$$\delta_K S = \int_a^b \left\{ \left( \nabla_\alpha \mathcal{L} \delta x^\alpha + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u^\alpha} \delta_K u^\alpha \right) d\tau + \mathcal{L} \delta_K d\tau \right\} = 0. \quad (22)$$

Учитывая, что  $\delta_K(dx^\alpha) = \delta(dx^\alpha) + \Gamma^\alpha_{\nu\beta} dx^\beta \delta x^\nu$  и  $d_K(\delta x^\alpha) = d(\delta x^\alpha) + \Gamma^\alpha_{\nu\beta} \times \delta x^\beta dx^\nu$  ( $d_K$  — ковариантный дифференциал,  $\Gamma^\alpha_{\nu\beta}$  — коэффициенты связности), и считая  $\delta(dx^\alpha) = d(\delta x^\alpha)$ , получим

<sup>1</sup> В более общем случае, когда контравариантная  $\Gamma^\mu_{\nu\lambda}$  и ковариантная  $\Gamma^\mu_{\nu\lambda}$  связности задаются независимо друг от друга [6], принцип Гамильтона нельзя формулировать как требование обращения в нуль ковариантной вариации интеграла действия, поскольку ковариантная вариация свертка при этом не совпадает с обычной вариацией. Тем не менее и в этом случае для всякой конкретной функции Лагранжа вариационные уравнения можно записать в тензорной форме, используя формулу  $\delta(a_\mu b^\mu) = \delta_K(a_\mu b^\mu) - C^\mu_{\nu\lambda} a^\nu b^\mu \delta x^\lambda$ . ( $C^\mu_{\nu\lambda} \equiv \Gamma^\mu_{\nu\lambda} + \Gamma^\mu_{\lambda\nu}$ ), при этом в уравнениях появляются дополнительные члены с тензором  $C^\mu_{\nu\lambda}$ .

$$\delta_K(dx^\alpha) = d_K(\delta x^\alpha) + 2S_{\nu\beta}^\alpha dx^\beta \delta x^\nu, \quad (23)$$

где  $S_{\beta\gamma}^\alpha \equiv \Gamma_{[\beta\gamma]}^\alpha$  — тензор кручения. Используя (23), (3), обычным путем из (22) получаем уравнения движения

$$\nabla_\alpha \mathcal{L} - \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u^\beta} v - \mathcal{L} \right) \nabla_\alpha v + 2S_{\alpha\gamma}^\beta p_\beta u^\gamma = \frac{d_K p_\alpha}{d\tau}, \quad (24)$$

причем обобщенный 4-импульс  $p_\alpha$  по-прежнему определяется формулой (6)<sup>1)</sup>. Согласно теории относительности, физическое пространство — время образует риманов континуум  $V_4$ , так что коэффициенты связности совпадают со скобками Кристоффеля и  $S_{\beta\gamma}^\alpha = 0$ . Выбирая в качестве  $\tau$  собственное время частицы и учитывая, что  $\nabla_\alpha g_{\beta\gamma} = 0$ , запишем ковариантное обобщение уравнений (9) (см. также [5]):

$$\nabla_\alpha \mathcal{L} = \frac{d_K p_\alpha}{d\tau}. \quad (9')$$

Ковариантный вариационный принцип, соответствующий (15)

$$\delta_K S = \delta_K \int \{ p_\alpha u^\alpha - \lambda \Omega(x, p) \} d\tau = 0,$$

с учетом (23) дает

$$\frac{d_K p_\alpha}{d\tau} = -\lambda \left( \nabla_\alpha \Omega - 2S_{\alpha\gamma}^\beta p_\beta \frac{\partial \Omega}{\partial p_\gamma} \right), \quad (25)$$

уравнения (16а) остаются без изменения.

Аналогичным образом можно получить ковариантные по форме уравнения движения в пространстве  $L_3$ , соответствующие (17) и (19). Ковариантный принцип, соответствующий (18), дает

$$\nabla_i L + 2S_{ik}^l p_l \dot{q}^k = \frac{d_K p_i}{dt} \quad (i = 1, 2, 3). \quad (26)$$

Ковариантный вариационный принцип, соответствующий (20), дает

$$\frac{d_K p_i}{dt} = -\nabla_i H + 2S_{ik}^l p_l \frac{\partial H}{\partial p_k}, \quad (27)$$

уравнения (19а) остаются без изменения. В обычной классической динамике  $S_{ki}^l = 0$  и уравнения (26) и (27) принимают вид

$$\nabla_i L = \frac{d_K p_i}{dt}, \quad (26')$$

$$\frac{d_K p_i}{dt} = -\nabla_i H. \quad (27')$$

Ковариантные по форме уравнения классической динамики (26') и (27') можно получить, заменяя в (17) и (19) производные по пространственным координатам на ковариантные производные и  $\frac{d}{dt}$  на абсолютную производ-

<sup>1)</sup> В неголономной координатной системе уравнение (24) (в отличие от (5)) сохраняет свою форму. В этом легко убедиться, используя формулы  $\delta(dx^\mu) = d(\delta x^\mu) + 2\Omega_{\nu\lambda}^\mu dx^\nu \delta x^\lambda$  и  $S_{\nu\lambda}^\mu = \Gamma_{[\nu\lambda]}^\mu + \Omega_{\nu\lambda}^\mu$  ( $\Omega_{\nu\lambda}^\mu$  — объект неголономности).

ную  $\frac{d_K}{dt}$  в смысле метрики 3-мерного пространства. Аналогично общеквариантные лагранжеры (24) и канонические (25) уравнения релятивистской динамики ( $S^{\alpha}_{\beta\gamma} = 0$ ) можно получить путем замены в (15) и (16)  $\partial_\alpha \rightarrow \nabla_\alpha$  и  $\frac{d}{d\tau} \rightarrow \frac{d_K}{d\tau}$  в смысле метрики 4-мерного пространства — времени.

### Литература

1. Бурсиан В. ЖРФХО, ч. физ., 59, 175, 1927; Infeld L. Bul. Acad. Pol., ser. math. phys., 5, 491, 1957.
2. Синг Дж. Классическая динамика. М., 1963.
3. Ланцош К. Вариационные принципы механики. М., 1965.
4. Схоутен Я. А. Тензорный анализ. М., 1965.
5. Trautman A. Bull. Acad. Pol., ser. math. phys., 5, 721, 1957.
6. J. A. Schouten. Der Ricci-Kalkül. Berlin, 1924.

Белорусский государственный университет  
им. В. И. Ленина

Поступило в редакцию  
13.VI 1968

А. А. КУЦАК, А. П. ПРИШИВАЛКО

### РАСЧЕТ ОТКРЫТЫХ РЕЗОНАТОРОВ В ПРИБЛИЖЕНИИ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ОПТИКИ

При решении задач, относящихся к расчету резонаторов в оптическом диапазоне, методы геометрической оптики в целом ряде случаев приводят к результатам, находящимся в хорошем соответствии с экспериментом. Относительная простота и наглядность этих методов оправдывают попытки расширить их область применения. Сравнивая получаемые в этом приближении решения и выводы с экспериментальными результатами и решениями, полученными другими методами, можно определить условия их применимости и возможности экстраполяции.

В настоящей работе приближение геометрической оптики (в сочетании с некоторыми другими методами) применено для установления ана-

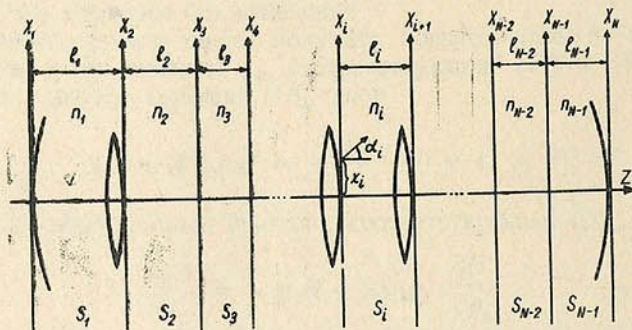


Рис. 1. Сложный резонатор с внутренними оптическими элементами

литической связи между параметрами резонатора (радиусы кривизны зеркал, расстояние между ними и т. п.) и характеристиками излучения. Сравнение полученных результатов с имеющимися экспериментальными данными и результатами, полученными в работах [1—3] на основе метода волновых пучков, показывает применимость этого метода к решению подобных задач.

Рассмотрим двумерный сложный резонатор, образованный двумя идеальными зеркалами и имеющий внутренние оптические элементы. Выделим внутри резонатора ячейки, характеризующиеся определенными оптическими свойствами. В каждой ячейке введем систему координат  $X_i, Z_i$  (рис. 1). Зададим луч, выходящий из  $i$ -ой плоскости, координатами  $x_i, \alpha_i$ , где  $x_i$  — расстояние от точки пересечения луча с этой плоскостью до оси  $Z$ ,  $\alpha_i$  — угол, образованный лучом с осью  $Z$ . Положительное направление угла отсчитывается против часовой стрелки.

Известно, что в параксиальном приближении конечные координаты луча  $x_{in}$ ,  $\alpha_{in}$  после  $n$  проходов в резонаторе связаны с его начальными координатами  $x_{i0}$ ,  $\alpha_{i0}$  через квадратную матрицу преобразования  $\Gamma_i$  [4, 5]:

$$\begin{pmatrix} x_{in} \\ \alpha_{in} \end{pmatrix} = \Gamma_i^n \begin{pmatrix} x_{i0} \\ \alpha_{i0} \end{pmatrix}, \quad \Gamma_i = \begin{pmatrix} A_i & B_i \\ C_i & D_i \end{pmatrix}, \quad (1)$$

где первый и второй индексы у координат обозначают номер ячейки и число проходов соответственно. Если система устойчива, должно выполняться условие

$$-1 < \frac{1}{2} \text{Sp } \Gamma_i < 1. \quad (2)$$

В таких системах существуют огибающие лучей, которые достаточно просто можно найти с учетом свойств матрицы  $\Gamma_i$  [6, 7]. Эти огибающие как бы запирают некоторую совокупность лучей внутри замкнутой области. Подобные совокупности лучей определяют тот или иной тип собственного колебания резонатора.

Найдем огибающую в  $i$ -ой ячейке. Введем матрицу  $P$ , удовлетворяющую соотношению

$$\Gamma_i^+ P \Gamma_i = P, \quad (3)$$

где  $\Gamma_i^+$  — транспонированная матрица  $\Gamma_i$ . Тогда выполняется равенство

$$\begin{pmatrix} x_{in} \\ \alpha_{in} \end{pmatrix}^+ P \begin{pmatrix} x_{in} \\ \alpha_{in} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{i0} \\ \alpha_{i0} \end{pmatrix}^+ P \begin{pmatrix} x_{i0} \\ \alpha_{i0} \end{pmatrix} = a_i^2. \quad (4)$$

Найдя  $P$  из (3) и подставляя в (4), получаем

$$\begin{pmatrix} x_{in} \\ \alpha_{in} \end{pmatrix}^+ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2p_i & q_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{in} \\ \alpha_{in} \end{pmatrix} = x_{in}^2 + q_i \alpha_{in}^2 + 2p_i \alpha_{in} x_{in} = a_i^2, \quad (4')$$

где

$$2p_i = \frac{D_i - A_i}{C_i}, \quad q_i = -\frac{B_i}{C_i}.$$

Запишем теперь дифференциальное уравнение для прямых, координаты которых в точках пересечения с  $i$ -ой плоскостью удовлетворяют равенству (4) или (4'). Учитывая, что в параксиальном приближении  $x_{in} = X_i - Z_i \frac{dX_i}{dZ_i}$ ,

$\alpha_{in} = \frac{dX_i}{dZ_i}$ , где  $X_i$ ,  $Z_i$  — произвольные точки на прямой, имеем

$$\begin{aligned} & \left( X_i - Z_i \frac{dX_i}{dZ_i} \right)^2 + q_i \left( \frac{dX_i}{dZ_i} \right)^2 + \\ & + 2p_i \left( X_i - Z_i \frac{dX_i}{dZ_i} \right) \left( \frac{dX_i}{dZ_i} \right) = a_i^2. \end{aligned} \quad (5)$$

Искомая огибающая будет, очевидно, совпадать с особым решением уравнения (5).

Особое решение имеет вид

$$\frac{X_i^2}{a_i^2} - \frac{Z_i'^2}{b_i^2} = 1, \quad (6)$$

где

$$Z_i' = Z_i - p_i, \quad b_i^2 = q_i - p_i^2 = \frac{4 - (A_i + D_i)^2}{4C_i^2}.$$

Таким образом, система лучей ограничена гиперболой, центр которой находится в точке  $(0, p_i)$ . Как видно, в (6) все величины определяются через элементы матрицы преобразования  $\Gamma_i$ , за исключением постоянной  $a_i$ .

Для нахождения  $a_i$  воспользуемся условием фазировки, предложенным в работе [8]. Это условие получается при асимптотическом решении волнового уравнения

$$(\Delta + k^2)U = 0 \quad (7)$$

для замкнутых областей. Оно выражается в виде интегралов типа

$$k \oint \vec{\nabla} S_i \cdot d\vec{\sigma} = 2\pi m \quad (8)$$

по базисным кривым некоторой замкнутой поверхности, образованной из области существования лучей. В выражении (8)  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ ;  $m$  — целое

число,  $\vec{\nabla} S_i$  — изменение фазы вдоль луча, удовлетворяющее уравнению эйконала

$$(\vec{\nabla} S_i)^2 = 1. \quad (9)$$

Асимптотическое решение уравнения (7) приводит к обращению в бесконечность амплитуды поля в некоторых точках, геометрическое место которых (каустика) совпадает с огибающей лучей в системе. За каустикой амплитуда поля экспоненциально затухает. Таким образом, поле в основном сосредоточено между каустическими поверхностями.

Легко заметить, что эллиптическая область существования лучей, рассмотренная в [8], обладает свойствами, во многом аналогичными свойствам резонатора со сферическими зеркалами. В обоих случаях лучи ограничены двумя отражающими поверхностями и гиперболической каустикой. Поэтому, как и в [8], для лучей в сферическом резонаторе можно построить полое тело, топологически подобное тору, по базисным кривым которого берется интеграл (8). Нетрудно показать, что и в сложном резонаторе область существования лучей преобразуется к тору, если при этом не учитывать отражение от промежуточных элементов. В интеграле (8)  $\vec{\nabla} S_i$  будет теперь удовлетворять уравнению

$$(\vec{\nabla} S_i)^2 = n_i^2, \quad (10)$$

где  $n_i$  — показатель преломления в  $i$ -ой ячейке. Так как  $\vec{\nabla} S_i$  совпадает с направлением лучей в каждой ячейке, то целесообразно записать уравнение пучка прямых, используя общее решение уравнения (5). Общее решение имеет вид

$$X_i = CZ'_i + \sqrt{a_i^2 - C^2 b_i^2}. \quad (11)$$

Отсюда в параксиальном приближении получаем

$$C = \frac{1}{n_i} \frac{\partial S_i}{\partial X_i} = \frac{\frac{X_i Z'_i}{b_i^2} \pm \frac{a_i}{b_i} \sqrt{1 + \frac{Z'^2}{b_i^2} - \frac{X_i^2}{a_i^2}}}{1 + \frac{Z'^2}{b_i^2}}, \quad (12)$$

$$\frac{1}{n_i} \frac{\partial S_i}{\partial Z_i} \approx 1 - \frac{1}{2} \left( \frac{1}{n_i} \frac{\partial S_i}{\partial X_i} \right)^2. \quad (13)$$

Как известно, на поверхности тора можно найти две независимые (базисные) кривые. Как и в работе [7], в качестве одного пути интегрирования выберем окружность в поперечном сечении в плоскости  $Z'_i = 0$ , в качестве второго — окружность в продольном сечении в плоскости  $X_i = 0$ . При интегрировании получаем следующие два выражения:

$$k2 \frac{a_i}{b_i} \int_{-a_i}^{a_i} n_i \sqrt{1 - \frac{X_i^2}{a_i^2}} dX_i = k \frac{a_i^2}{b_i} \pi n_i = 2\pi \left( m + \frac{1}{2} \right), \quad (14)$$

$$2k \sum_{i=1}^{N-1} n_i \int_0^{l_i} \left[ 1 - \frac{a_i^2}{2b_i^2} \left( 1 + \frac{Z_i'^2}{b_i^2} \right)^{-1} \right] dZ' =$$

$$= 2k \sum_{i=1}^{N-1} n_i l_i - k \sum_{i=1}^{N-1} \frac{a_i^2}{b_i} n_i \left[ \arctg \frac{l_i - p_i}{b_i} + \arctg \frac{p_i}{b_i} \right] = 2\pi q, \quad (15)$$

где  $m, q$  — целые числа, причем  $q \gg m$  ( $q \sim 7 \cdot 10^6$ ).

Учитывая связь  $\frac{a_1^2}{b_1} n_1 = \dots = \frac{a_i^2}{b_i} n_i = \dots = \frac{a_{N-1}^2}{b_{N-1}} n_{N-1}$ , из (14), (15)

находим

$$\frac{2\pi v}{c} = \frac{\pi q}{\sum l_i n_i} + \frac{m + \frac{1}{2}}{\sum l_i n_i} \sum \left( \arctg \frac{l_i - p_i}{b_i} + \arctg \frac{p_i}{b_i} \right), \quad (16)$$

$$\frac{a_i^2}{b_i} n_i \approx \frac{2m + 1}{\pi q} \sum l_i n_i. \quad (17)$$

Зная матрицу преобразования луча в системе, по формулам (16), (17) можно рассчитать частоту колебаний, поперечный размер моды, а также оценить расходимость моды на бесконечности.

Рассмотрим симметричный резонатор со сферическими зеркалами и диэлектрической вставкой (стержнем) внутри. Радиус зеркал  $R$ , длина вставки  $L$ , расстояние от вставки до зеркал  $l$  (рис. 2). Размеры зер-

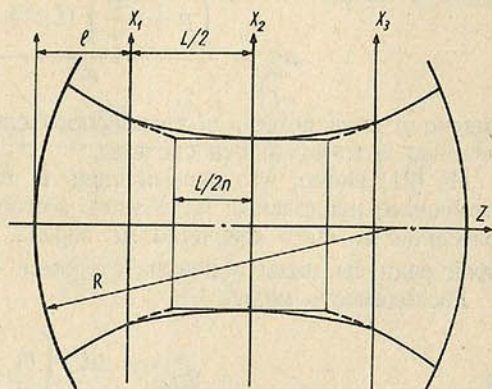


Рис. 2. Симметричный резонатор со сферическими зеркалами и диэлектрической вставкой

кал и поперечное сечение стержня считаем достаточно большими, чтобы не учитывать влияния дифракции.

Матрицы преобразования  $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$  имеют вид:

$$\Gamma_1 = \begin{pmatrix} 2G^2 - 1 + \frac{2L}{Rn} G & G \left( \frac{L^2}{n^2 R} + R - RG^2 \right) \\ -\frac{4}{R} G & 2G^2 - 1 - \frac{2L}{Rn} G \end{pmatrix}, \quad (18)$$

$$\Gamma_2 = \begin{pmatrix} 2G^2 - 1 & G(L + 2ln)(G + 1) \\ -\frac{4}{Rn} G & 2G^2 - 1 \end{pmatrix}, \quad (19)$$

$$\Gamma_3 = \begin{pmatrix} 2G^2 - 1 - \frac{2L}{Rn} G & G \left( \frac{L^2}{n^2 R} + R - RG^2 \right) \\ -\frac{4}{R} G & 2G^2 - 1 + \frac{2L}{Rn} G \end{pmatrix}, \quad (20)$$

где  $G = 1 - \frac{L + 2ln}{Rn}$ ,

Выражение (16) в этом случае, согласно выбранным системам координат, преобразуется:

$$\frac{2\pi\nu}{c} = \frac{\pi q}{Ln + 2l} + \frac{m + \frac{1}{2}}{Ln + 2l} \left[ \arctg \frac{l + p_1}{b_1} - \arctg \frac{p_1}{b_1} + \right. \\ \left. + \arctg \frac{l - p_3}{b_3} + \arctg \frac{p_3}{b_3} + 2 \arctg \frac{L}{2b_2} \right]. \quad (16')$$

С учетом (18), (19), (20) формулы (16'), (17) записываются следующим образом:

$$\frac{2\pi\nu}{c} = \frac{\pi q}{Ln + 2l} + \frac{m + p + 1}{Ln + 2l} \cdot 2 \arctg \frac{2ln + L}{Rn \sqrt{1 - G^2}}, \quad (21)$$

$$a_{mq}^2 = \frac{\left(m + \frac{1}{2}\right) (Ln + 2l)}{\pi q} R \sqrt{1 - G^2}, \quad (22)$$

$$a_{pq}^2 = \frac{\left(p + \frac{1}{2}\right) (Ln + 2l)}{\pi q} R \sqrt{1 - G^2}. \quad (23)$$

Индекс  $p$  появляется для трехмерного случая в силу симметрии задачи относительно оптической оси системы.

Из (21) видно, что первый член в выражении для частот определяет устойчивые продольные колебания, а второй член — поправку на поперечные колебания за счет сферичности зеркал. Величины  $a_{mq}^2$ ,  $a_{pq}^2$  представляют собой радиусы моды в центре стержня.

Расходимость моды:

$$\Theta = \frac{2a_{mq}}{R \sqrt{1 - G^2}} = \frac{\left(m + \frac{1}{2}\right) \nu}{2\pi c} \cdot \frac{1}{a_{m\nu}}, \quad (24)$$

где

$$a_{m\nu}^2 = \frac{\left(m + \frac{1}{2}\right) \nu}{2\pi c} R \sqrt{1 - G^2}.$$

Условие устойчивости резонатора со стержнем в рамках геометрической оптики имеет вид

$$0 \leq G^2 \leq 1. \quad (25)$$

Для исследуемого резонатора  $G = 1 - \frac{2ln + L}{Rn}$ .

Пусть  $G = 0$ . Для пустого резонатора — это условие конфокальности ( $R = d$ ,  $d$  — расстояние между зеркалами). В нашем случае условие конфокальности имеет такой же вид, но связь между геометрическими параметрами системы несколько иная:

$$R = 2l + \frac{L}{n}. \quad (26)$$

Для рассматриваемой системы условие конфокальности выполняется при большем расстоянии между зеркалами, чем для соответствующего резонатора без стержня (при  $n = 1$ ,  $d = 2l + L$ ).

Случай  $G = 1$  соответствует предельно близкому расположению зеркал ( $2l + L = 0$ ) или  $R \rightarrow \infty$ .

Соотношение  $G = -1$  определяет условие концентрического расположения зеркал для пустого резонатора ( $d = 2R$ ). В нашем случае это условие дает

$$2R = 2l + \frac{L}{n}. \quad (27)$$

Таким образом, граница устойчивости дальше на  $\Delta = L \frac{n-1}{n}$ . Например,

для рубина с  $L = 10$  см  $\Delta \approx 4,5$  см.

Легко видеть, что в рассматриваемом резонаторе с симметрично расположенным стержнем существуют три огибающих поверхности лучей: гиперболоид внутри стержня и два одинаковых симметрично расположенных гиперболоида в промежутках между стержнем и зеркалами. На рис. 2 изображено их плоское сечение. Горловины или сужения всех трех гипербол одинаковы, но сужения боковых гипербол смещены от центра резонатора на величину  $\frac{L}{2n}$ . Размер моды в центре стержня  $a_{mq}$  определяется соотношением

$$a_{mq}^2 = \frac{R(Ln + 2l) \sqrt{1 - G^2}}{\pi} \cdot \frac{m + \frac{1}{2}}{q}. \quad (28)$$

Размер пятна на торце:

$$x_T^2 = a_{mq}^2 \left[ 1 + \frac{L^2}{R^2 n^2 (1 - G^2)} \right]. \quad (29)$$

Размер пятна на зеркале:

$$x_3^2 = a_{mq}^2 \left[ 1 + \frac{(2ln + L)^2}{R^2 n^2 (1 - G^2)} \right]. \quad (30)$$

Для упрощения анализа полученных зависимостей введем относительные

$$\text{величины } A^2 = a_{mq}^2 \frac{m + \frac{1}{2}}{q}, \quad X_T^2 = x_T^2 \frac{m + \frac{1}{2}}{q}, \quad X_3^2 = x_3^2 \frac{m + \frac{1}{2}}{q}.$$

Из соотношений (28) — (30) следует, что объем моды, который определяется размером гиперболы, увеличивается с ростом показателя преломления. На рис. 3, а изображены соответствующие зависимости  $A^2$  и  $X_3^2$  при

различных значениях  $L$ . При больших  $L$  получаются большие значения  $A^2$  и  $X_3^2$ , соответствующие кривые идут круче, зависимость от  $n$  проявляется сильнее.

При увеличении длины стержня  $L$  радиусы пятен также возрастают (рис. 3, б). Из графиков видно, что зависимость от длины стержня сильнее для больших  $R$ .

На рис. 3, в дана зависимость  $A^2$  и  $X_3^2$  от радиуса кривизны зеркал при различных  $l$ . С возрастанием  $l$  наклон кривых увеличивается.

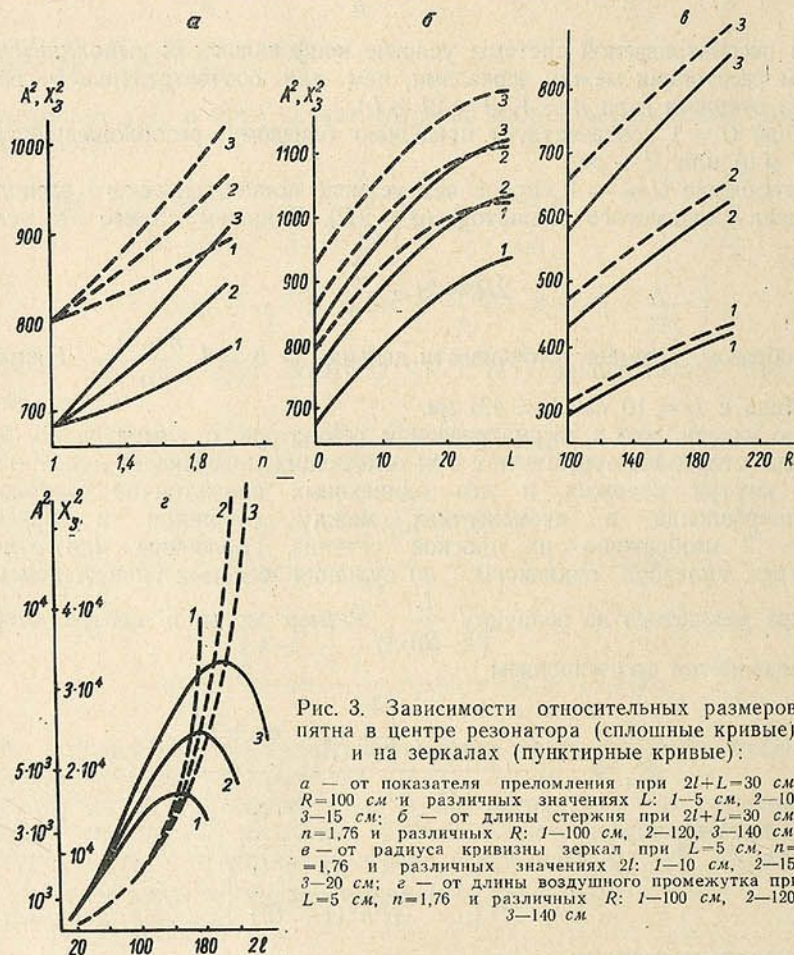


Рис. 3. Зависимости относительных размеров пятна в центре резонатора (сплошные кривые) и на зеркалах (пунктирные кривые):

а — от показателя преломления при  $2l+L=30$  см,  $R=100$  см и различных значениях  $L$ : 1—5 см, 2—10, 3—15 см; б — от длины стержня при  $2l+L=30$  см,  $n=1,76$  и различных  $R$ : 1—100 см, 2—120, 3—140 см; в — от радиуса кривизны зеркал при  $L=5$  см,  $n=1,76$  и различных значениях  $2l$ : 1—10 см, 2—15, 3—20 см; г — от длины воздушного промежутка при  $L=5$  см,  $n=1,76$  и различных  $R$ : 1—100 см, 2—120, 3—140 см

Несколько своеобразна зависимость радиусов пятна от длины свободной части резонатора (рис. 3, г). Величина  $A^2$  имеет максимумы, а  $X_3^2$  стремится к бесконечности по мере приближения резонатора к концентрическому. Заметим, что  $X_1^2$  также обращается в бесконечность в непосредственной близости от границы устойчивости. В табл. 1 приведены некоторые значения размеров пятен для нескольких мод.

Частота колебаний в резонаторе со сферическими зеркалами и со стержнем внутри определяется выражением

$$\nu = \frac{c}{2} \cdot \frac{q}{Ln + 2l} + \frac{c}{2\pi} \frac{m + p + 1}{Ln + 2l} \arccos \left( 1 - \frac{2ln + L}{Rn} \right). \quad (31)$$

Расстояние между продольными частотами:

$$\Delta\nu_{\parallel} = \frac{c}{2(Ln + 2l)}. \quad (32)$$

Расстояние между поперечными частотами:

$$\Delta\nu_{\perp} = \frac{c}{2\pi} \cdot \frac{1}{Ln + 2l} \arccos \left( 1 - \frac{2ln + L}{Rn} \right). \quad (33)$$

Таблица 1

Значения размеров пятен на торце  
и на зеркалах (в мм) для некоторых мод при  $L = 10$  см,  
 $R = 200$  см,  $2l = 190$  см

$m$	$n=1$		$n=1,8$	
	$2x_T$	$2x_3$	$2x_T$	$2x_3$
0	602,4	850,4	614,2	860,2
1	1043	1475	1064	1490
3	1593	2254	1624	2280

Выражение (31) с учетом (32) можно переписать в виде

$$\frac{\nu}{\Delta\nu_{\parallel}} = q + \frac{1}{\pi} (m + p + 1) \arccos \left( 1 - \frac{2ln + L}{Rn} \right). \quad (34)$$

Формулы (32), (33) показывают, что, варьируя длину резонатора, можно уменьшить разницу между  $\Delta\nu_{\parallel}$  и  $\Delta\nu_{\perp}$ , т. е. расстояние между продольными и поперечными модами.

$$\text{При } Rn = 2ln + L \quad \Delta\nu_{\parallel} = 2\Delta\nu_{\perp},$$

$$\text{при } 2Rn = 2ln + L \quad \Delta\nu_{\parallel} = \Delta\nu_{\perp}.$$

Из (34) видно, что для одного и того же типа колебания ( $m, p, q$  заданы) резонансная частота уменьшается с увеличением показателя преломления.

На рис. 4 приведены зависимости  $\Delta\nu_{\perp}$  от различных параметров. Расчет показывает, что при увеличении  $R, n$  и  $L$   $\Delta\nu_{\perp}$  уменьшается.

Расстояния между частотами сильнее всего зависят от базы резонатора. Однако, если  $\Delta\nu_{\parallel}$  просто обратно пропорционально  $2l$ , то  $\Delta\nu_{\perp}$  связана с  $2l$  более сложным образом и имеет экстремум (минимум) (рис. 4, з).

Сделаем несколько оценок величин  $\Delta\nu$ . Обозначим через  $\delta_{\parallel}$  изменение  $\Delta\nu_{\parallel}$ , а через  $\delta_{\perp}$  изменение  $\Delta\nu_{\perp}$ . Если сравнить пустую резонансную полость и резонансную полость с рубином ( $R = 200$  см,  $2l = 190$  см,  $L = 10$  см,  $n = 1,76$ ), то  $\delta_{\perp} \approx 7$  мГц,  $\delta_{\parallel} \approx 10$  мГц. Изменение  $L$  в 5 раз (от 4 до 20 см при  $2l + L = 200$  см и  $R = 200$  см) дает при  $n = 1,54$   $\delta_{\parallel} = 10$  мГц,  $\delta_{\perp} = 7$  мГц, а при  $n = 1,76$   $\delta_{\parallel} = 14$  мГц,  $\delta_{\perp} = 9$  мГц.

Из графиков видно, что при изменении параметров резонатора может возникать более сильная зависимость от показателя преломления и длины стержня.

Расходимость моды связана с размером наименьшего сечения (горловины) гиперболы соотношениями (24). Поскольку эти соотношения

достаточно просты, приведем лишь несколько значений угла расходимости.

При  $2l = 25$  см,  $L = 5$  см,  $R = 500$  см,  $n = 1,76$

$$\theta_{m=2} \approx 5'37''; \quad \theta_{m=6} \approx 10'6''; \quad \theta_{m=10} \approx 14'12''.$$

Как видно, расходимость моды увеличивается с возрастанием поперечного индекса.

К сожалению, в литературе отсутствуют подходящие экспериментальные данные, с которыми можно непосредственно сравнить полученные в

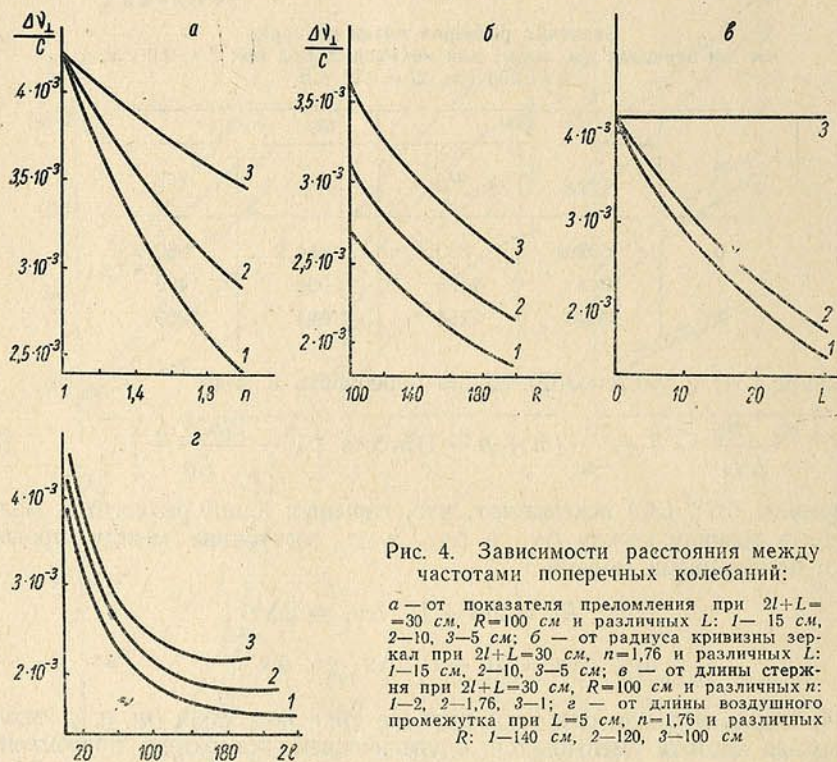


Рис. 4. Зависимости расстояния между частотами поперечных колебаний:

а — от показателя преломления при  $2l+L=30$  см,  $R=100$  см и различных  $L$ : 1—15 см, 2—10, 3—5 см; б — от радиуса кривизны зеркал при  $2l+L=30$  см,  $n=1,76$  и различных  $L$ : 1—15 см, 2—10, 3—5 см; в — от длины стержня при  $2l+L=30$  см,  $R=100$  см и различных  $L$ : 1—2, 2—1,76, 3—1; г — от длины воздушного промежутка при  $L=5$  см,  $n=1,76$  и различных  $R$ : 1—140 см, 2—120, 3—100 см

работе результаты. В [9] приведены значения размеров области возбуждения различных мод. В табл. 2 эти значения сравниваются с величина-

Таблица 2

Сравнение размеров областей возбуждения мод (в мм), вычисленных по (28), с приведенными в [9] при  $L = 5$  см,  $2l = 16$  см,  $n = 1,76$

$m$	$R$ , см	$a_{mq}$ расчетное	$a_{mq}$ из [9]
2	780	1,4	1,95
6	500	2,0	2,3
10	340	2,3	2,7

ми, определяемыми из формулы (28). Как видно из таблицы, расхождение расчетных и экспериментальных значений составляет около 15%.

Если в (28) и (34) положить  $n=1$  (пустой резонатор), то получим выражения для  $a_{0q}$  и  $v$ , совпадающие с аналогичными выражениями в [3] (для  $a_{0q}$  с точностью до  $\sqrt{2}$ ), что также подтверждает правильность полученного решения.

Таким образом, использование методов геометрической оптики позволяет получить решение для сложного резонатора с внутренними элементами, определяющее сечение области существования мод, расходимость пучка и собственные частоты. Следует заметить, что в приведенном решении получено простое выражение для размера поперечных мод. Не определяется лишь распределение поля. В ряде задач такое решение может оказаться более простым, чем по методу пучков [3], и вполне достаточным для практических целей. Рассмотрение случаев, в которых целесообразно применение такого решения, будет проведено в следующей работе.

В заключение авторы пользуются случаем выразить признательность академику АН БССР Б. И. Степанову, П. А. Апанасевичу и Е. К. Науменко за обсуждения и советы в процессе работы.

### Литература

1. Н. Когельник. Bell. Syst. Techn. J., 44, 455, 1965.
2. Н. Когельник. Appl. Opt., 4, 1562, 1965.
3. Х. Когельник, Т. Ли. Зарубежная радиоэлектроника, 3, 102, 1967.
4. М. Bertolotti. Nuovo cimento, 32, 1242, 1964.
5. В. Macke. J. de Phys., 26, 104A, 1965.
6. W. К. Капп. Appl. Opt., 4, 758, 1965.
7. М. М. Попов. Вестник Ленингр. ун-та. Физика, химия, 4, 42, 1967.
8. J. V. Keller, S. I. Rubinow. App. of Phys., 9, 24, 1960.
9. А. М. Леонтович, А. П. Ведуга. ЖЭТФ, 46, 71, 1964.

Институт физики  
АН БССР

Поступило в редакцию  
17.IV 1968

О. С. ИВАНИЦКАЯ

## НЕГОЛОНОМНЫЕ ЛОРЕНЦЕВЫ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ СИСТЕМ ОТСЧЕТА

1. **Введение.** В специальной теории относительности (СТО) и особенно эйнштейновой теории гравитации (общей теории относительности, ОТО) систему отсчета часто отождествляют с системой координат. Это встречает возражения, например, в [1]. Предложены два варианта аналитического определения системы отсчета: в первом оно выводится из определения системы координат [2, 3], во втором — дается в принципе независимо от введения координатной системы с помощью ортонормированных базисных векторов<sup>1</sup>. Такое, реперное, определение системы отсчета, иногда непоследовательно и неявно, принимается во многих работах. Вероятно, наибольшего развития оно достигло в [4, 5, 6]. В [4] детально обсуждаются положения, выражающие в СТО и ОТО требование неизменности, по определению присущей эталонам. Это весьма важно для раскрытия соответствия реперного определения системы отсчета положениям метрологии [7], обязательным для эксперимента. В [5] особенно полно обсуждается неголономность репера. В [6] более подробно раскрывается причина, толкнувшая на отождествление системы отсчета с системой координат: возможность идентификации в СТО преобразования для псевдокартовых координат и для ортонормированных базисных векторов. Это позволяет естественно развить переход от преобразования инерциальных систем отсчета посредством постоянного лоренцева преобразования к преобразованию неинерциальных систем отсчета, в частности, находящихся в гравитационном поле, с помощью обобщенных, неголономных, но также лоренцевых преобразований.

Однако имеются и упущения. Так, упускается рассмотрение истоков неголономности репера, частично имеющих уже в классической физике. Упускается и возможность в принципе синтетических построений поля базисных векторов. В результате в [5] координатная сетка (градировка) излишне включается как составная часть в определение системы отсчета. Недостаточно подчеркивается, что координатная система при реперном определении системы отсчета вводится как вспомогательный прием, освобождающий от более трудных и менее развитых синтетических построений, в частности, рассмотренных в [8]. Это позволяет оперировать числами — проекциями  $h_{\mu}^{(k)}$  базисных векторов  $e_{(h)}$  вместо них самих. Естественно, это не устраняет сложностей, но переводит их в другую форму: неголономность репера. В общем случае излишне и привлечение твердых тел. Не приводятся конкретные примеры, не указывается на те частные случаи реперного задания системы отсчета,

<sup>1</sup> Греческие индексы относятся к криволинейной координатной системе, латинские — без скобок и в скобках — соответственно к голономному и неголономному ортонормированному реперу. Соответственно до  $\mu$  и  $k$  они пробегают значения 1, 2, 3, начиная с  $\mu$  и  $k$  1, 2, 3, 4.

например [9], которые уже рассмотрены независимо из более узких соображений. Не подчеркивается, что трансформационные размерности собственного времени и интервала совпадают лишь относительно голономных преобразований Лоренца и что относительно неголономных лоренцевых преобразований они различны.

Ниже дается синтез имеющихся рассуждений реперного определения системы отсчета с частичным устранением упущений и иллюстрациями на примерах из кинематики, динамики СТО и ОТО, релятивистской теории вращения. В примерах из СТО дается доопределение трансформационных размерностей величин, обычно явно не фиксированных. Примеры из ОТО и теории вращения рассматриваются бегло, так как с указанной точки зрения они уже рассмотрены в [10, 11].

2. **Реперное определение систем отсчета.** Физическая теория должна допускать возможность введения неизменных величин, представляющих в теории эталоны, т. е. введение образов эталонов, и величин, вообще говоря, переменных, определенных относительно этих образов и удовлетворяющих аксиомам линейного пространства над полем вещественных чисел. Это необходимо для сравнения теории с экспериментом и облегчает ее физическую интерпретацию.

Система отсчета в теории, это — образ лаборатории, т. е. набора «рабочих мер», сверенных с эталонами, поддерживаемыми в неизменном состоянии. Простейшая система отсчета, это образ набора рабочих мер длины и, поскольку последние могут быть взаимно разноориентированными, то и рабочей меры угла. Образом эталона угла может быть принят прямой угол в смысле евклидовой геометрии. Выразить эти свойства эталонов длины и угла можно посредством трех векторов  $e_{(a)}$ . Последние и являются образами эталонов длины и угла, если подчинить их условию ортонормированности и потребовать, чтобы преобразования этих векторов в точке и при перемещении из точки в точку были только преобразованиями вращения. Более полный образ лаборатории — набор образов эталонов не только длины, но и времени. В СТО вскрывается их зависимость от скорости, вообще говоря, переменной, являющейся функцией координат. Геометрически эту зависимость можно выразить введением четвертого вектора  $e_{(4)}$ , касательного к мировой линии, и обобщением трехмерной ориентации векторов  $e_{(a)}$  на четырехмерную. Тогда эталоном угла может быть принят прямой угол в смысле псевдоевклидовой геометрии, а четверка (тетрада) базисных векторов  $e_{(h)}$  дает образы эталонов длины, времени и угла, если в соотношениях

$$e_{(k)} \cdot e_{(n)} = \eta_{(k)(n)} = \text{diag}(1, 1, 1, -1) = \text{inv.}, \quad (1)$$

$$e_{(k')} = L_{(k')}^{(n)}(x^\lambda) e_{(n)}, \quad \delta e_{(k)} = \delta \omega_{(k)}^{(n)} e_{(n)}$$

преобразования  $L_{(k')}^{(n)}$  и  $\delta \omega_{(k)}^{(n)}$  будут лоренцевыми. Последние обеспечат неизменность образов эталонов в любом месте при любой их ориентации. Лоренцевы преобразования, содержащиеся в (1), вообще говоря, зависят от координат. Естественно, что  $L_{(k')}^{(n)}(x^\lambda)$ , когда они содержат параметры гиперболического вращения, можно выразить через скорости, зависящие от четырех координат. С переходом к ОТО уточняется, во-первых, что переменная скорость, которая может быть выделена в  $L_{(k')}^{(n)}(x^\lambda)$ , вызывается как гравитационным полем, так и другими побочными причинами. Во-вторых, что  $\delta \omega_{(k)}^{(n)}$  подчиняются гравитационному уравнению Эйнштейна.

Итак, неголономный лоренцев базис является образом весьма упрощенным неинерциальной системы отсчета, как бы ее аналитической, весьма общей моделью. Этот образ выражает наиболее простые и характерные черты, связанные с представлением о лаборатории, располагаю-

щей мерами длины, времени и угла, и с представлением об измерении. Лоренцев базис позволяет ввести компоненты величин, например,  $E^{(k)}$ , где  $\mathbf{E} = E^{(k)}\mathbf{e}_{(k)} = \text{inv.}$ , удовлетворяющих аксиомам линейного пространства, которые могут рассматриваться как образы результатов измерения. Применение к лоренцеву базису лоренцева преобразования, зависящего от координат, осуществляет переход от одной, вообще говоря, неинерциальной системы отсчета к другой.

3. **Неголономный базис Ламэ и его релятивистское обобщение.** Многие теории классической физики целесообразно развить в общековариантной форме, используя любую заранее не предпрешенную систему координат, криволинейную. Тогда в теорию входят базисные векторы:

$$g_{\alpha\beta} = \mathbf{e}_\alpha \cdot \mathbf{e}_\beta = f(x^\gamma) \neq \text{const}, \quad (2)$$

т. е. их нельзя рассматривать как образы эталонов длины. Соответственно «криволинейные» (мировые или тензориальные) компоненты величин не являются образами результатов измерения. Поэтому следует допустить возможность переопределения или «перелицовки» базиса и соответственно тензориальных компонент. Это можно осуществить с помощью коэффициентов Ламэ

$$\mathbf{e}_{(a)} = h_\alpha \mathbf{e}_\alpha, \quad (3)$$

в частности  $E_{(a)} = h_\alpha E_\alpha$ , где ортонормированный базис — базис Ламэ — касателен к осям криволинейной координатной системы (если она ортогональна). Очевидно, базис Ламэ меняет свою ориентацию от точки к точке. Чтобы преобразование базиса, имеющее при этом место, было преобразованием вращения, его следует выразить через коэффициенты связности специального вида — коэффициенты вращения Риччи

$$\delta\omega_{(a)(b)} = \gamma_{(a)(b)\alpha} dx^\alpha = -\delta\omega_{(b)(a)}. \quad (4)$$

Если с помощью базиса Ламэ ввести локальную декартову систему координат, то окажется, что дифференциалы этих координат (квазиординат [12]) не являются полными, поскольку оказываются отличными от нуля следующие соотношения:

$$\frac{d}{[1]} \frac{d}{[2]} x^{(a)} = \partial_{[\beta} h_{\alpha]}^{(a)} dx^\alpha dx^\beta = \Omega_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta \neq 0, \quad (5)$$

$$\Omega_{\alpha\beta} = -\partial_\beta h_\alpha, \quad dx = dx^{(a)} \mathbf{e}_{(a)},$$

$\Omega_{\alpha\beta}$  — трехмерный объект неголономности [13]. Следовательно, базис Ламэ не является градиентом — эквиординатных гиперплоскостей не существует. В этом смысле базис Ламэ неголономен.

С переходом к общековариантным теориям в СТО и ОТО неголономный базис Ламэ обобщается в неголономный лоренцев базис, характеризуемый четырёхмерными объектами неголономности. Тогда и дифференциал локального времени становится, вообще говоря, неполным. В частности, если  $\delta\omega_{(k)(n)} = \gamma_{(k)(n)\lambda} dx^\lambda = 0$ , объекты неголономности также равны нулю. Это возможно только в СТО. Тогда лоренцев базис голономен и определяет инерциальную систему отсчета.

Итак, коэффициенты Ламэ переопределяют базисные векторы в общековариантных теориях. С другой стороны, удобнее оперировать не непосредственно с векторами  $\mathbf{e}_{(k)}$  как прямыми образами, но с числами, с их проекциями на оси глобальной координатной системы. Поэтому удобно системе отсчета задавать коэффициентами Ламэ  $h_\mu^{(k)}$ , но уже посредством вспомогательной координатной системы.

При релятивистском обобщении неголономного базиса Ламэ и в СТО и в ОТО допускают новые возможности: предполагается любая ориентация лоренцева базиса относительно глобальной координатной системы. Поэтому может оказаться, что по физическим соображениям неголономный базис связан с некоторыми искривленными линиями, не принятыми за координатные оси. Поэтому матрица релятивистских коэффициентов Ламэ не только четырехмерна, но, вообще говоря, и недиагональна. В частности, поскольку пространство СТО плоское, в качестве глобальной координатной системы может быть введена псевдодекартова. Тогда коэффициентами Ламэ, обобщенными, являются неголономные преобразования Лоренца, преобразующие голономный лоренцев базис в неголономный и, следовательно, инерциальную систему отсчета в неинерциальную. Такие неголономные лоренцевы преобразования играют основополагающую роль в динамике СТО. Обычно их неголономный характер не обсуждается и математически не оформляется в полной мере.

4. **Неголономные лоренцевы преобразования в динамике СТО.** Рассмотрим частный случай неголономного лоренцева преобразования, когда оно зависит только от четвертой координаты — времени. Тогда

$$\begin{aligned} \partial_a L_k^{(n)} &= 0, \quad \partial_4 L_k^{(n)} \neq 0, \quad L_4^{(4)} = (1 - \beta^2(x^4))^{-\frac{1}{2}}, \\ L_4^{(a)} &= \beta(1 - \beta^2)^{-\frac{1}{2}}, \\ \beta(x^4) &= v(x^4)/c, \end{aligned} \quad (6)$$

т. е.

$$\begin{aligned} \Omega^{(4)}_{ab} &= \partial_{[b} L_{a]}^{(4)} = 0, \quad \Omega^{(c)}_{ab} = 0, \\ \Omega^{(4)}_{a4} &= \partial_4 L_a^{(4)} \neq 0, \quad \Omega^{(a)}_{b4} = \partial_4 L_b^{(a)} \neq 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Дифференциалы локальных псевдодекартовых координат относительно контуров, лежащих в трехмерном пространстве, являются полными, но относительно контуров, расположенных в пространственно-временных гиперповерхностях, неполными. С помощью (6) вычислим

$$\begin{aligned} \Omega^{(4)}_{a4} &= \frac{d}{cdt} \frac{v_a/c}{(1 - \beta^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{1 - \beta^2} \left( \frac{\dot{v}_a}{c} \sqrt{1 - \beta^2} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{v_b \dot{v}^b}{c^2 (1 - \beta^2)^{\frac{1}{2}}} \right). \end{aligned} \quad (8)$$

В случаях  $v_b \dot{v}^b = 0$  и  $v_b \dot{v}^b = v_a \dot{v}^a$  соответственно имеем

$$\frac{m}{(1 - \beta^2)^{\frac{1}{2}}} \dot{v}_a = mc \Omega^{(4)}_{a4}, \quad \frac{m}{(1 - \beta^2)^{3/2}} \dot{v}_a = mc \Omega^{(4)}_{a4}, \quad (9)$$

суммирование по  $b$  производится, по  $a$  — нет. Следовательно,  $\Omega^{(4)}_{a4}/m$  является плотностью «классической» или «мировой» силы. В электродинамике, например, имеем

$$F_{a \text{ класс}} = \frac{dx^k}{dt} E_{ak} = \Omega^{(4)}_{a4}, \quad (10)$$

где опущена тензорная размерность у  $dt = \frac{1}{c} dx^4$ , поскольку голономная система предполагается произвольно, но заданной и опущен индекс (4) как не относящийся к глобальной системе координат. В результате такого упрощения  $\Omega^{(4)}_{a4}$  рассматривается как вектор относительно голономных преобразований Лоренца глобальной координатной системы. Связь мировой силы с силой Минковского является результатом «перелицовки» индекса 4 (нижнего) у рассматриваемой компоненты объекта неголономности:

$$\Omega^{(4)}_{a(4)} = L_{(4)}^k \Omega^{(4)}_{ak} = L_{(4)}^b \Omega^{(4)}_{ab} + L_{(4)}^4 \Omega^{(4)}_{a4}. \quad (11)$$

Например, в электродинамике имеем

$$F_{a \text{ рел}} = F_{a \text{ минк}} = \Omega^{(4)}_{a(4)} = L_{(4)}^4 F_{a \text{ класс}}. \quad (12)$$

Рассмотрим компоненту  $\Omega^{(4)}_{(4)4}$  и «перелицуем» в ней второй индекс

$$\Omega^{(4)}_{(4)4} = L_{(4)}^k \Omega^{(4)}_{k4} = L_{(4)}^a \Omega^{(4)}_{a4} = \frac{v^a F_a / c}{(1 - \beta^2)^{1/2}}, \quad (13)$$

т. е.  $\Omega^{(4)}_{(4)4}/m$  — плотность мощности. Приведенный явно учет неголономности лоренцева преобразования, лежащего в основе уравнений движения динамики СТО (без  $\ddot{x}^k$ ) вскрывает неполноту дифференциала собственного времени, отмеченную еще в [14].

**5. Учет зависимости массы от скорости и неголономные лоренцевы преобразования в ОТО.** Подсчет вращения перигелия Меркурия по законам динамики СТО [15] дает 1/6 от 43". Однако в ОТО «поперечная» масса Меркурия явно не вводится, т. е. ее учет производится в иной форме. Из предыдущего ясно, в какой именно. Действительно, при нормальных калибровочных условиях [11] для поля Шварцшильда лишь следующие компоненты объекта неголономии отличны от нуля:

$$\Omega_{(2)(1)(2)} = \Omega_{(3)(1)(3)} = \frac{1}{2ar}, \quad \Omega_{(3)(2)(3)} = -\frac{\text{ctg}\theta}{2r}, \quad (14)$$

$$\Omega^{(4)}_{14} = \frac{ma}{r^2}, \quad a = \left(1 - \frac{2m^*}{r}\right)^{-\frac{1}{2}}.$$

Сравнение компоненты  $\Omega^{(4)}_{14}$  в (9) и (14) показывает, что с точностью до членов порядка  $v^4/c^4 \approx m^4/r^4$  они совпадают. В первом случае  $\Omega^{(4)}_{14}$  находится явно из неголономного лоренцева преобразования, во втором — в результате решения эйнштейнова уравнения тяготения и нормальной калибровки тетрад, т. е. соответствующей неинерциальной системы отсчета в ее реперном определении. Мировая гравитационная сила и «сила тяготения Минковского» соответственно будут иметь вид

$$F_1 = \frac{ma}{r^2}, \quad F_{1 \text{ минк}} = h^{\mu(4)} \Omega^{(4)}_{1\mu} = \frac{ma^2}{r^2}. \quad (15)$$

В предельном случае, когда обобщенное лоренцево преобразование заменяется обобщенным галилеевым преобразованием, зависящим от координат, контрвариантная компонента  $\Omega^{(4)}_{14}$  исчезает. Тогда локальное время  $dx^{(4)}$  совпадает с глобальным  $dt$ , ньютоновым, метрический тензор вырождается [16, 17], но ковариантная компонента  $\Omega_{(4)14}$ , выражающая силу тяготения, остается отличной от нуля. Из (14) видно, почему не существует последо-

вательного перехода от ОТО к динамике СТО. Действительно, невозможно одновременно устранить кривизну трехмерного пространства переходом

$$\lim_{a \rightarrow 1} \Omega_{(2)(1)(2)} = \lim_{a \rightarrow 1} \Omega_{(3)(1)(3)} = \frac{1}{2r} \quad (16)$$

и сохранить при этом в  $\Omega_{(4)_{14}}$  коэффициент  $a = \left(1 - \frac{2m^*}{r}\right)^{-\frac{1}{2}}$  с точностью до членов  $m^4/r^4$ , учтя таким образом зависимость массы от скорости. Нормальная калибровка тетрадь соответствует свободно падающей системе отсчета [11], где рассмотрены также иные варианты калибровочных условий и соответственно неголономных преобразований Лоренца в поле тяготения, а также характер их неголономности.

6. **Неголономные лоренцевы преобразования к равноускоренной и вращающейся системе отсчета.** Выделим из меллеровского преобразования [18] неголономное лоренцево:

$$L_{(r)}^h(t) = \begin{pmatrix} \text{ch } \alpha t & 0 & 0 & c \text{ sh } \alpha t \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \text{sh } \alpha t / c & 0 & 0 & \text{ch } \alpha t \end{pmatrix}, \quad P_{\mu}^h = \frac{\partial x^h}{\partial x^{\mu}}, \quad x^4 = t, \quad (17)$$

$$x^h = M_{\mu}^h x^{\mu} + M^h = \text{diag} \left( \frac{c}{g} (\text{ch } \alpha t - 1), 0, 0, \frac{\text{sh } \alpha t}{g} \right),$$

$$\alpha = \frac{g}{c} = \text{const}, \quad P_{\mu}^h = L_{(r)}^h h_{\mu}^{(r)},$$

$$h_{\mu}^{(r)} = \text{diag} \left( 1, 1, 1, \left( 1 + \frac{\alpha x^1}{c} \right) \right).$$

Разлагая в ряд, получаем обобщенное, но голономное галилеево преобразование

$$\lim_{c \rightarrow \infty} L_{(r)}^h = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & gt \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = G_{(r)}^h(t), \quad (18)$$

т. е. в пределе находим

$$\lim_{c \rightarrow \infty} dx^{(4)} = G_h^{(4)} dx^h = dx^4,$$

$$\lim_{c \rightarrow \infty} \Omega_{(1)(4)}^{(k)} = G_{(1)}^m G_{(4)}^n \partial_{[n} G_m]^{(k)} = 0,$$

$$\lim_{c \rightarrow \infty} dx^{(1)} = G_h^{(1)} dx^h = dx^{1'}, \quad x^{1'} = x^1 - \frac{gt^2}{2}. \quad (19)$$

Таким образом, частный случай неголономного лоренцева преобразования [16] задает переход от инерциальной к равноускоренной системе отсчета. В [9, 10] детально исследован другой частный случай неголономного лоренцева преобразования:

$$L^k_n(r) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma & 0 & -\omega r \gamma / c^2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\omega r \gamma & 0 & \gamma \end{pmatrix}, \quad \gamma = \left(1 - \frac{\omega^2 r^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}}, \quad (20)$$

осуществляющий переход к равномерно вращающейся системе отсчета. Им обусловлена и неполнота дифференциала локального (натурального) времени и неэвклидовость геометрии подпространства — плоскости вращения, хотя четырехмерное пространство — время остается плоским.

Таким образом, реперное задание системы отсчета позволяет объединить разрозненные вопросы теории относительности общим релятивистским методом — применением неголономных преобразований Лоренца и раскрыть связи между различными разделами релятивистской физики. Лоренцевы преобразования с постоянными параметрами, получившие столь широкое применение, находят свое продолжение. Эти голономные преобразования, а также обобщенные галилеевы преобразования, зависящие от координат, содержатся при этом как предельные случаи.

### Литература

1. Фок В. А. Изв. АН СССР, сер. физ., **30**, 1229, 1966.
2. Зельманов А. Л. ДАН СССР, **107**, № 6, 1956.
3. Cattaneo C. Nuov. Cim., **10**, 318, 1958.
4. Arzeliès H. Relativ. Général. Grav. fasc., 1, Paris, 1961.
5. Родичев В. И. Изв. вузов, № 1, 142, 1965.
6. Treder H. J. Entstehung, Entwicklung und Perspektiven der Einsteinschen Gravitationstheorie. Berlin, 1966.
7. Маликов М. Ф. Основы метрологии. М., 1949.
8. Левашев А. Е. Метод. пробл. теор. измерен. Киев, 1966.
9. Irvine W. M. Physica, **30**, 1160, 1964.
10. Иваницкая О. С., Сягло И. С. Сб. грав. и теор. отн. Казан. ун-т, вып. 4—5, 105, 1968.
11. Иваницкая О. С. Сб. грав. и теор. отн. Казан. ун-т, вып. 4—5, 139, 1968.
12. Синг Дж. Л. Тензорные методы в динамике. М., 1947.
13. Схоутен Я. А. Тенз. анализ для физ. М., 1965.
14. Сб. классиков релятивизма. ОНТИ, 1935, стр. 208.
15. Зоммерфельд А. Электродинамика. М., 1958.
16. Иваницкая О. С. Весті АН БССР, сер. фіз.-мат. наук, № 2, 130, 1966.
17. Иваницкая О. С., Костюк Н. Ф. Весті АН БССР, сер. фіз.-мат. наук, № 3, 117, 1966.
18. Møller C. Kgl. Danske Vid. Selsk. Mat. Medd., **20**, 110, 1958.
19. Рогожин Ю. А. Пробл. гравитации. Тезисы 2-й сов. грав. конф. Тбилиси, 1965.
20. Салия Р. Н. Сооб. АН ГрузССР, **38**, 45, 1965.

Институт физики  
АН БССР

Поступило в редакцию  
7.VI 1968

А. С. ПОТУПА

## К АНАЛИЗУ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ МОДЕЛЕЙ

### ВВЕДЕНИЕ

Как известно, в период построения релятивистской квантовой механики было обнаружено, что в рамках идеализированных измерительных процедур возникают неустранимые индивидуальные погрешности координат частицы [1—3], причем для минимальной погрешности координаты имеет место соотношение

$$\Delta x_{\min} \geq l_m, \quad (1)$$

где  $l_m = \frac{h}{mc}$  — комптоновская длина волны частицы.

Это обстоятельство сыграло важную роль при интерпретации релятивистских волновых уравнений, позволив установить физическую основу усреднения по большим пространственно-временным областям, необходимого для устранения нечетных частей некоторых операторов [4, 5]. С другой стороны, имели место попытки модификации теории пространства — времени с целью естественного включения в нее соотношения (1). При этом обычная интерпретация (1) сводилась к утверждению, что определение положения частицы с точностью, превышающей  $l_m$ , невозможно и, следовательно, не имеет смысла говорить о пространственно-временных промежутках, меньших  $l_m$ . Отсюда, как правило, делался вывод о необходимости отказа от непрерывности и перехода к моделям дискретного (квантованного) пространства [1, 6, 7].

Недостаток подобного подхода заключается, на наш взгляд, в следующем: включая некоторое понятие в теорию, мы не должны, строго говоря, определять его с «некоторой точностью»; использование же степени правдоподобия (степени точности определения) заранее ограничивает возможность построения точной теории. С этой точки зрения, понятие «положение частицы в пространстве — времени» или имеет смысл или не имеет его. Наиболее отчетливо справедливость этого положения можно установить, пользуясь методами, предложенными фон Нейманом, Биркгофом и Макки при построении аксиоматической квантовой механики [8—10]. Основной идеей формулировки является восстановление гильбертова пространства состояний по определенной структуре частично упорядоченного множества вопросовных наблюдаемых  $Q_E(A)$ , т. е. вопросов типа: «принадлежит ли измеренное значение наблюдаемой  $A$  борелевскому подмножеству  $E$  действительной прямой  $R$ ». Множество всех вопросов квантовой механики  $Q$  называется ее логикой и содержит понятие «одновременной рассудимости» [9, 10], т. е. существуют пары вопросов, не допускающие одновременных ответов. Это обстоятельство связано с корреляцией дисперсий некоторых величин в идеализированных измерительных процедурах квантовой меха-

ники (соотношениями неопределенностей) и приводит к наделению  $Q$  модулярной (дедекиндовой) структурой с ортогональными дополнениями [8, 11, 12]. Основываясь далее на изоморфизме между логикой квантовой механики и частично упорядоченным по включению множеством всех подпространств сепарабельного, комплексного гильбертова пространства, можно построить обычную квантовую механику как теорию самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве. С другой стороны, множество всех подпространств фазового пространства классической механики изоморфно дистрибутивной структуре (с ортодополнениями) вопросных наблюдаемых, т. е. позволяет реализовать логику классической механики в форме булевой логики.

Однако по определению вопросных наблюдаемых ни в квантовом, ни в классическом случае не допускается использование величин с неустранимой индивидуальной погрешностью. Простой иллюстрацией действительности этого запрета является тот факт, что существование соотношений неопределенностей для координаты и импульса фактически приводит к появлению индивидуальной погрешности для укороченного действия  $\Delta S_0 \gtrsim h$ , из-за чего лишается точного смысла понятие «положение частицы в фазовом пространстве», хотя можно по отдельности определять положения в координатном и импульсном пространствах. Аналогично при установлении в рамках идеализированных измерительных процедур соотношения типа (1) понятие «положение частицы в пространстве — времени» также теряет смысл. Такой вывод, сделанный в основном с позиции формальной логики, непосредственно опирается на хорошо установленный факт: *макроскопический наблюдатель обладает булевой логикой*.

При оценке ситуации, связанной с существованием индивидуальных погрешностей (что противоречит измеримости  $R$ ), это положение необходимо учитывать явно, т. е. как физический постулат<sup>1)</sup>. Сформулируем его в виде следующего «принципа конструктивности»: каждый фундаментальный объект теории должен быть задан конструктивно, т. е. описанием типа идеализированных измерительных процедур, необходимых для его построения в терминах измеримых величин.

В данной работе на основе анализа алгебры свойств, определяющих пространственно-временные величины, будет построена модель модулярного пространства — гильбертова пространства физической системы отсчета (ФСО), для которого обычное пространство — время играет роль классического предела, а аналог дискретного пространства соответствует квазиклассической области.

#### ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ЧАСТИЦЫ КАК ФИЗИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ ОТСЧЕТА

В конструктивном плане пространство — время можно рассматривать как континуум ФСО. Под ФСО обычно понимается объект, снабженный масштабами и часами. Способ задания часов и масштабов, т. е. их определения, фиксируется, как правило, лишь интуитивно. Это связано прежде всего с неявным отождествлением ФСО с «идеальной физической лабораторией». Подобное отождествление имеет принципиальное значение, позволяя распространить принцип относительности на любые объекты, и при этом ликвидирует проблему влияния измерительных устройств на состояние ФСО. Такая идеализация исключительно плодотворна при анализе круга явлений, не требующих рассмотрения

<sup>1)</sup> Как подчеркивал фон Нейман (см. [11]), мы обычно выбираем те свойства, о истинности или ложности которых можно судить сколь угодно точно. Это связано со свойством измеримого множества иметь почти всюду плотность 0 или 1.

в качестве ФСО элементарных частиц. Именно для них интуитивное определение часов и масштабов становится неприемлемым, поэтому процедуру построения ФСО необходимо фиксировать в явном виде. Такая фиксация должна приводить к установлению «естественной градуировки», т. е. пространственно-временных единиц, в которых можно задать любой элемент геометрической природы.

Выбор «естественной градуировки» должен позволить рассматривать любое событие как пространственно-временной объект при условии, что его длительность и протяженность содержат очень большое число соответствующих единиц. По-видимому, наиболее реальной кандидатурой на роль естественных единиц можно считать комбинации типа  $h/mc$  и  $h/mc^2$ . Это диктуется как соображениями размерности, так и тем, что комптоновские единицы — единственные величины, не содержащие констант взаимодействия (заряда  $e$ , постоянной Ферми  $G$  и т. п.), и, следовательно, градуировка не зависит от деталей процессов, в которых участвуют данные частицы. Подчеркнем также, что комптоновская градуировка имеет важный физический смысл для нестабильных частиц, требуя для их идентификации выполнения условия  $T \gg h/mc^2$ , где  $T$  — время жизни. В области частиц-резонансов аналог этого условия  $\Gamma \ll m$  ( $\Gamma$  — ширина резонанса) имеет определяющее значение.

Рассмотрим, каким образом понятие «положение объекта  $A$  в пространстве — времени» —  $x_A$  может задаваться в терминах алгебры свойств. Фактически использованному выше интуитивному определению  $x_A$  соответствует построение некоторых пар вопросных наблюдаемых ( $\alpha, \beta$ ) для каждой  $x_A$  — вопросной наблюдаемой координаты, т. е.

$$x_A = \alpha \wedge \beta. \quad (2)$$

Например,  $\alpha$  может фиксировать состояние объекта, а  $\beta$  — принадлежащего ему масштаба или часов. В случае элементарной частицы подобного построения сделать нельзя, так как, задавая точно элементарный объект, мы теряем, по определению последнего, информацию о масштабе и наоборот.

Покажем, что нелокализуемость объекта в пространстве — времени действительно связана с введением собственных часов ФСО. Простейшую «часовую конструкцию» можно построить, используя осцилляторную модель классической механики. Траектория тяжелого тела массы  $M$  имеет тогда вид (одномерный случай):

$$X_M(t) = X_0 + V_0 t + \frac{\mu}{M} \left( x_0 \cos \omega_0 t + \frac{v_0}{\omega_0} \sin \omega_0 t \right),$$

$$X_0 = \frac{Mx_{0M} + mx_{0m}}{\mu}; \quad V_0 = \frac{Mv_{0M} + mv_{0m}}{\mu}; \quad (3)$$

$$x_0 = x_{0M} - x_{0m}; \quad v_0 = v_{0M} - v_{0m}; \quad \mu = \frac{mM}{M+m},$$

где  $m$  — масса «часовой материальной точки»; индекс 0 означает начальные условия (для координат и скоростей).

Усредняя по большому интервалу времени  $T$  ( $T \gg \frac{1}{\omega_0}$ ), можно рассматривать траекторию тела  $M$  как прямолинейную и его движение как свободное. Считая  $\omega_0$  очень большой величиной, этого положения можно добиться для любых реальных промежутков усреднения. При учете квантовых эффектов можно дать качественную оценку нелокализуемости «часовой

конструкции», устанавливая минимум амплитуды колебаний в (3). Если принять  $x_0\omega_0 \sim \frac{\hbar}{\mu}$ , то имеем

$$A_{\min} \sim \frac{\mu}{M} \sqrt{\frac{\hbar}{\mu\omega_0}}. \quad (4)$$

Из (4) видно, что при  $M \gg m$  часовые осцилляции можно практически не включать в рассмотрение. Однако при сравнимых  $M$  и  $m$ ,  $T$  и  $\frac{1}{\omega_0}$  учет «часовой конструкции» становится существенным. Точное решение квантовомеханической модели осциллятора дает «неустранимую» дисперсию координаты [12]:

$$\sqrt{\langle x^2 \rangle} = \Delta x \geq \sqrt{\frac{\hbar}{\mu\omega_0}}. \quad (5)$$

Нетрудно видеть, что при  $\omega_0 = \frac{mc^2}{\hbar} = \frac{c}{l_m}$  соотношения (1) и (5) становятся эквивалентными. Причем устанавливается связь между амплитудой и частотой «часовых осцилляций», характерная для эффекта «дрожания» в релятивистской квантовой механике [12]. Именно в смысле проведенного выше рассмотрения можно утверждать, что «размазывание» частицы по области с размерами  $l_m$  при попытке фиксировать положение частицы необходимо для существования ее как ФСО, снабженной часами. Однако такая система отсчета не может быть элементом (точкой) пространства — времени обычного типа.

#### МОДУЛЯРНОЕ ПРОСТРАНСТВО

Нетрудно видеть, что соотношение (2) позволяет установить аналогию между пространственно-временной координатой и «фазовой плоскостью одномерного движения». Считая, что  $\alpha$  и  $\beta$  могут непрерывно меняться в финитной области  $S = [\alpha_1, \alpha_2] \times [\beta_1, \beta_2]$ , можно ввести координату с помощью меры на этой области:

$$x_A = \frac{1}{2\pi} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \int_{\beta_1}^{\beta_2} dad\beta. \quad (6)$$

При рассмотрении элементарной частицы необходимо изменить определение пространства ФСО таким образом, чтобы учесть индивидуальные погрешности координат как дополнительную в алгебре свойств  $\alpha, \beta$ .

Введем гильбертово пространство  $H^s$  и определим алгебру свойств как структуру всех самосопряженных идемпотентов (т. е. элементов вида  $a = a^* = a^2$ ) в кольце всех линейных ограниченных операторов в  $H^s$ . В соответствии со структурой, образуемой подпространствами  $H^s$ , назовем его модулярным пространством. Эта модель должна служить естественной реализацией пространственной модели для ФСО.

Дополнительные свойства  $\alpha, \beta$  можно задать в такой структуре перестановочными соотношениями вида:

$$[\alpha, \beta]_- = il_m, \quad [\alpha, \alpha]_- = [\beta, \beta]_- = 0, \quad (7)$$

Отождествив вопросные идемпотенты с проекторными мерами в  $H^s$ , можно в силу спектральной теоремы поставить им во взаимно-однозначное соответствие самосопряженные операторы:

$$A = \int_{-\infty}^{\infty} \alpha dP(\alpha), \quad B = \int_{-\infty}^{\infty} \beta dP(\beta), \quad (8)$$

В квазиклассическом случае, при учете финитности  $S$ , возникнут условия квантования, аналогичные условиям Амбарцумяна — Иваненко:

$$x_A = l_m \left( n + \frac{1}{2} \right) \quad (9)$$

Следует, однако, учесть, что область применимости (9) ограничена точностью использования понятия  $x_A$ .

### Выводы

Таким образом, геометрическая концепция пространственно-временных моделей при учете результатов идеализированных измерительных процедур релятивистской квантовой механики оказывается весьма ограниченной. Это следует хотя бы из того, что при учете (1) невозможно обычным методом задать топологию пространства — времени системой «шаров»  $\rho(x, y) < \epsilon$ .

Более точный анализ показывает, что координатное пространство не наблюдаемо и должно быть заменено более общей структурой. Это обстоятельство не позволяет, строго говоря, использовать соответствующие дифференциальные операторы и уравнения.

Отметим, что константа  $l_m$  в данной модели не является в обычном смысле разновидностью «фундаментальной длины». Ее конечность накладывает на использование квазиевклидовых геометрических моделей пространства — времени ограничения, аналогичные тем, которые в геометрии траекторий классической механики возникают в связи с конечностью постоянной Планка. При этом важно учесть, что для каждого сорта частиц  $l_m$  определяется отдельно.

Нелокализуемость одночастичного состояния в объеме с размерами, меньшими  $l_m$ , является весьма общим результатом релятивистской квантовой механики. Интересно, что именно этот результат может устранить известную «асимметрию влияния» релятивистской концепции пространства — времени на структуру квантовой теории.

После того как работа над статьей была завершена, автор получил возможность ознакомиться с препринтом Давида Финкельштейна [13], который использовал аналогичную математическую модель для пространства — времени. Однако в [13] фактически сохранена наблюдаемость координат, что позволяет установить точное условие квантования для времени, появляющееся у нас лишь в «квазиклассической» области. В этом смысле модель, построенная в [13], является, по-видимому, промежуточной между дискретными пространствами [1, 6, 7] и моделью модулярного пространства, рассмотренной выше.

В заключение выражаем благодарность Л. М. Томильчику, В. И. Стражеву, Б. В. Крылову, В. Н. Третьякову и всем участникам семинара лаборатории теоретической физики за важные и интересные обсуждения проблемы.

## Литература

1. Ambarzumian V., Iwanenko D. *Zs. f. Phys.*, **64**, 563, 1930.
2. Schroedinger E. *Berl. Ber. Phys. Math.*, **12**, 1931.
3. Landau L., Peierls R. *Zs. f. Phys.*, **69**, 56, 1931.
4. Newton T. D., Wigner E. P. *Rev. Mod. Phys.*, **21**, 400, 1949.
5. Швевбер С. Введение в релятивистскую квантовую теорию поля. ИЛ, 1963.
6. Heisenberg W. *Zs. f. Phys.*, **65**, 4, 1930.
7. Born M., Rumer Y. *Zs. f. Phys.*, **69**, 141, 1931.
8. Макки Дж. Лекции по математическим основам квантовой механики. Изд. «Мир», 1965.
9. Birkhoff G., von Neumann J. *Ann. of Math.*, **37**, 835, 1936.
10. фон Нейман. Математические основы квантовой механики. Изд. «Наука», 1964.
11. Биркгоф Г. Теория структур. ИЛ, 1952.
12. Давыдов А. С. Квантовая механика. ФМ, 1963.
13. Finkelstein D. *The Space-Time Code. Trieste, IC (68)*, 19, 1968.

Институт физики  
АН БССР

Поступило в редакцию  
5.VII 1968

УДК 669.017:538

Л. Ф. ІЛЬЮШЭНКА, А. В. БАЛТУШКІН, М. У. ШЭЛЕГ,  
М. А. КРЫВЕНКА

### УПЛУУ МАТЭРЫЯЛУ ПАДЛОЖКІ НА МАГНІТНЫЯ ХАРАКТАРЫСТЫКІ І СТРУКТУРУ ЭЛЕКТРААСАДЖАНЫХ ПЛЁНАК

Прырода матэрыялу падложкі, структура і стан яе паверхні аказваюць істотны ўплыў на працэс электракрышталізацыі і ўласцівасці магнітных плёнак. Паколькі электраасаджэнне робіцца на металічныя падложкі, маючыя крышталічную структуру, вялікую ролю ў гэтым выпадку адыгрывае з'ява эпітаксіі, якая заключаецца ў тым, што плёнка працягвае і ўзнаўляе крышталічную структуру падложкі. Дзякуючы гэтаму размеры крышталітаў плёнкі ў значнай ступені вызначаюцца размерамі крышталітаў падложкі. Наяўнасць эпітаксіі аказвае ўплыў таксама на магнітную структуру плёнак, характар яе анізатрапіі [1]. Уплыў падложкі асабліва моцны для тонкай плёнкі; пры павелічэнні ж таўшчыні эпітаксія памяншаецца і пры некаторай таўшчыні, не аднолькавай для розных умоў асаджэння, знікае. Пры іншых аднолькавых умовах арыентавуючае дзеянне полікрышталічнай падложкі, якая мае дробныя крышталічныя зерні, спыняецца раней, чым у выпадку буйных крышталітаў. Згодна [2], гэтыя таўшчыні роўны адпаведна 1000 і 5000 Å. Аднак у залежнасці ад наяўнасці ў электраліце паверхнева-актыўных рэчываў і іншых дабавак уплыў падложкі на эпітаксіяльны рост плёнкі можа спыняцца на больш ранняй стадыі працэсу.

Прырода матэрыялу катода (падложкі) аказвае таксама значны ўплыў на ўласцівасці падвоянага прыкатоднага слоя і характар працякання працэсаў на катодзе, якія суправаджаюць электралітычнае вылучэнне металу або сплаву. Так, у залежнасці ад матэрыялу падложкі можа змяняцца велічыня перанаяпружання пры вылучэнні металу. Павелічэнне ж перанаяпружання, як вядома, садзейнічае вылучэнню на катодзе больш дробнакрышталічных асадкаў. Велічыня перанаяпружання вышэй у пачатковы перыяд фарміравання плёнкі — у перыяд утварэння цэнтраў крышталізацыі, а рост утварыўшыхся зародышаў працякае пры больш нізкай катоднай палярывацыі. Перанаяпружанне ў пачатковы момант таксама залежыць ад матэрыялу падложкі, таму што для розных матэрыялаў хуткасць пасівіравання паверхні катода будзе рознай.

Такім чынам, пры электраасаджэнні падложка адыгрывае вельмі актыўную ролю: яна не толькі абумоўлівае сваёй структурай эпітаксіяльны рост плёнкі, але і аказвае істотны ўплыў на механізм працэсу электраасаджэння. У сувязі з гэтым выбару падложкі пры электраасаджэнні плёнак неабходна ўдзяляць асаблівую ўвагу.

У якасці падложак выкарыстоўваюцца многія металы як у выглядзе пласцінак ці дроту, так і ў выглядзе тонкіх слаёў, якія напыляюцца ў вакууме на шкло. Істотнай пры выбары падложкі павінна быць высокая ўзнаўляльнасць яе характарыстык, ад якой у многім залежыць узнאַў-

ляльнасць уласцівасцей атрымліваемых плёнак. Больш падыходзячымі з гэтага пункту погляду трэба лічыць падложкі, якія прадстаўляюць сабой слаі металу ў некалькі тысяч ангстрэм, напыленыя на покрыўнае шкло ў строга кантраліруемых умовах. У прыватнасці, напыленне неабходна праводзіць пры аднолькавай тэмпературы падложкі, таму што ў адваротным выпадку размеры крышталітаў напыленага металу могуць моцна адрознівацца [3].

Нягледзячы на тое што правільны выбар падложкі вельмі важны пры электралітычным асаджэнні плёнак, да гэтага часу няма сістэматычных даследаванняў па гэтаму пытанню. Матэрыял падложкі выбіраюць цяпер па-рознаму ў залежнасці ад канкрэтных умоў і жадання эксперымэнтатара; часам гэты выбар робіцца зусім выпадкова. Часцей за ўсё пры электраасаджэнні плёнак карыстаюцца падложкамі ў выглядзе слаёў золата, напыленых на шкло. Упершыню такая падложка была выкарыстана Вольфам і на ёй атрыманы пермалоевыя плёнкі з магнітнымі характарыстыкамі, якія адпавядалі патрабаванням, што прад'яўляюцца да плёнак памяці электронных вылічальных машын [4]. Разам з тым безумоўна цікава даследаваць падложкі з іншых матэрыялаў і атрымаць параўнальныя даныя аб характарыстыках плёнак, якія асаджаны на гэтыя падложкі.

У сувязі з гэтым у данай рабоце была пастаўлена задача вывучэння ўплыву матэрыялу і структуры паверхні падложкі на структуру і магнітныя характарыстыкі электраасаджаных плёнак. Намі праведзена даследаванне магнітных характарыстык Ni—Fe-плёнак і характару палярызаваных крывых пры іх асаджэнні на падложкі з розных металаў. Даследавана таксама структура падложак, напыленых пры розных тэмпературах, і структура асаджаных на іх плёнак. Для атрымання падложкі былі выкарыстаны металы — медзь, золата, серабро і хром. Гэтыя металы маюць каэфіцыенты цеплавога расшырэння, блізкія паміж сабой і блізкія па велічыні да каэфіцыентаў цеплавога расшырэння шкла і асаджаемага сплаву (у адпаведным інтэрвале тэмператур). Матэрыял падложкі павінен забяспечваць трывалае счапленне з наносімай на яго плёнкай. Пры эпітаксіяльным росце дзякуючы цеснаму збліжэнню асаджаючыхся атамаў з атамамі падложкі трываласць счаплення паміж падложкай і асадкам (плёнкай) дастаткова высокая. Аднак гэта справядліва толькі пры ўмове блізкасці велічынь пастаянных рашоткі металу падложкі і асаджаемага металу. Калі ж розніца ў міжатамных адлегласцях у крышталічнай рашотцы асаджаемага металу і падложкі перавышае 15%, то, згодна [5], структура катода не ўзнаўляецца і счапляльнасць слабая. Велічыні пастаянных рашоткі выбраных намі металаў (Cu — 3,6 Å, Ag — 4,06, Au — 4,08, Cr — 2,89 Å) і велічыня пастаянай рашоткі асаджаемага сплаву (80% Ni, 20% Fe — 3,55 Å) дастаткова блізкія паміж сабой і таму счапленне плёнкі з падложкай павінна быць трывалым. Падложкі прадстаўлялі сабой слаі металаў таўшчынёй каля 1500 Å, напыленыя ў вакууме  $10^{-5}$  мм рт. сл. на награванае да 200, 150 і 60 °С покрыўнае шкло. З прычыны дрэннай адгезіі са шклом золата, серабро і медзь напыляліся на падслой хрому таўшчынёй каля 300 Å.

Плёнкі пермалою (80% Ni, 20% Fe) таўшчынёй да 4500 Å асаджаліся з сульфатнага электраліта, які змяшчаў ( $g/l$ ): NiSO<sub>4</sub>·7H<sub>2</sub>O—280; FeSO<sub>4</sub>·7H<sub>2</sub>O—10; H<sub>3</sub>BO<sub>3</sub>—30; MgSO<sub>4</sub>—120; сахарын — 0,6. У якасці анода выкарыстоўвалася пласцінка з электралітычнага нікелю. Асаджэнне праводзілася пры хатняй тэмпературы, pH=3,5 і катоднай шчыльнасці току 10 ма/см<sup>2</sup>. Пры гэтых умовах хуткасць асаджэння плёнкі складала прыкладна 30 Å/сек.

Былі даследаваны магнітныя характарыстыкі — каэрцытыўная сіла  $H_c$ , поле анізатрапіі  $H_k$  і дысперсія восей лёгкага намагнічання  $\alpha_{50}$ . Каэрцытыўная сіла і яе залежнасць ад таўшчыні плёнкі вывучаліся з дапамогай распрацаванай намі асцыляграфічнай устаноўкі, якая дазваляла знімаць кривую  $H_c=f(h)$  (дзе  $h$  — таўшчыня плёнкі) у працэсе асаджэння. На рыс. 1 прадстаўлена блок-схема гэтай устаноўкі. У цэнтры катушак Гельмгольца 3 размешчан столік 1, на які змяшчаецца электралітычная ванна 2. Канструкцыя ванны выканана такім чынам, што падложка знаходзіцца на дне ванны і размяшчаецца ў непасрэднай блізкасці да здымнай катушкі  $K_1$ , якая знаходзіцца пад паверхняй століка. Кампенсацыя перашкод адбываецца з дапамогай катушкі  $K_2$ . Выхадное напружанне, індукіруемае ў здымнай катушцы, прапарцыянальнае змяненню магнітнага патоку ў плёнцы, інтэгрыруецца і падаецца на вертыкальны ўваход асцыляграфа. Для гарызантальнага адхілення праменя выкарыстоўваецца пераменнае напружанне, сілкуючае катушкі Гельмгольца. У плоскасці плёнкі ствараецца пераменнае арыенціруемае магнітнае поле напружанасцю 40 э.

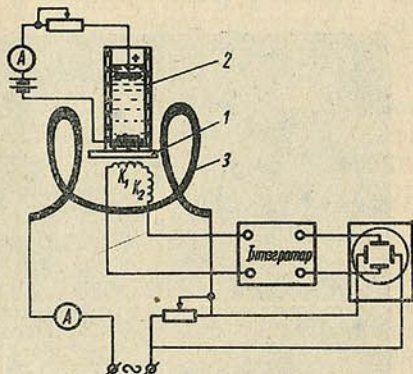


Рис. 1. Схема асцыляграфічнай устаноўкі для даследавання пятлі гістэрэзісу ў працэсе асаджэння плёнкі

Поле анізатрапіі  $H_k$  вызначалася з дапамогай магнітометра,  $\alpha_{50}$  — па метаду Кроутэра [6]. Запіс крывых  $\varphi-t$  (дзе  $\varphi$  — патэнцыял,  $t$  — час) пры пастаяннай шчыльнасці току рабіўся на ўстаноўцы, схема якой дадзена на рыс. 2. Устаноўка забяспечвала магчымасць пры дапа-

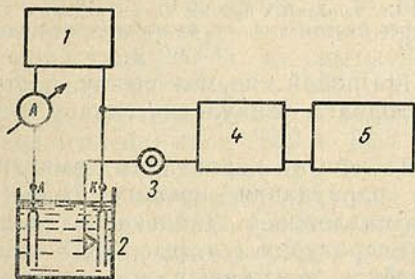


Рис. 2. Схема ўстаноўкі для зняцця крывых патэнцыял — час:

1 — стабілізаваная крыніца току; 2 — электралітычная ячэйка; 3 — электрод параўнання; 4 — узмацніцель; 5 — рэгістратар (ЭПП-09)

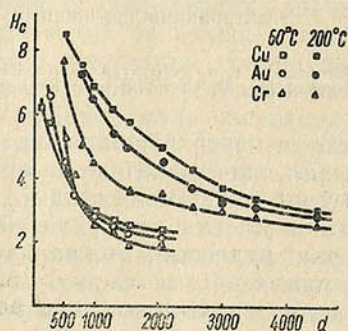


Рис. 3. Залежнасць каэрцытыўнай сілы, э ад таўшчыні плёнак, А, асаджаных на падложкі з розных металаў, напыленых на шкло пры тэмпературах 60 і 200 °С

мозе самапісца ЭПП-09 бесперапынна рэгістраваць велічыню катоднага патэнцыялу на працягу ўсяго часу асаджэння плёнкі. Структура падложак і плёнак даследавалася на электронным мікраскопе УЭМВ-100 метадам вугальных рэплік, адцененых плацінай.

Залежнасць каэрцытыўнай сілы ад таўшчыні плёнак, асаджаных на падложкі, атрыманыя з розных матэрыялаў пры розных тэмпературах, паказваюць кривыя рыс. 3. Кожная з крывых, змешчаных на графіку,

з'яўляецца сярэдняй па 10—12 плёнак. З гэтага відаць, што каэрцытыўная сіла плёнак аднолькавай таўшчыні, асаджаных на падложкі з розных металаў, неаднолькавая. Пры таўшчынях больш 700 Å яна мае найбольшыя значэнні для плёнак, асаджаных на медныя падложкі, і найменшыя для асаджаных на хромавыя падложкі. У плёнак таўшчынёй менш 700 Å залежнасць каэрцытыўнай сілы ад матэрыялу падложкі некалькі іншая. Адрозненне ў велічыні каэрцытыўнай сілы захоўваецца пры ўсіх даследаваных намі таўшчынях і звязана, відаць, не толькі з ха-

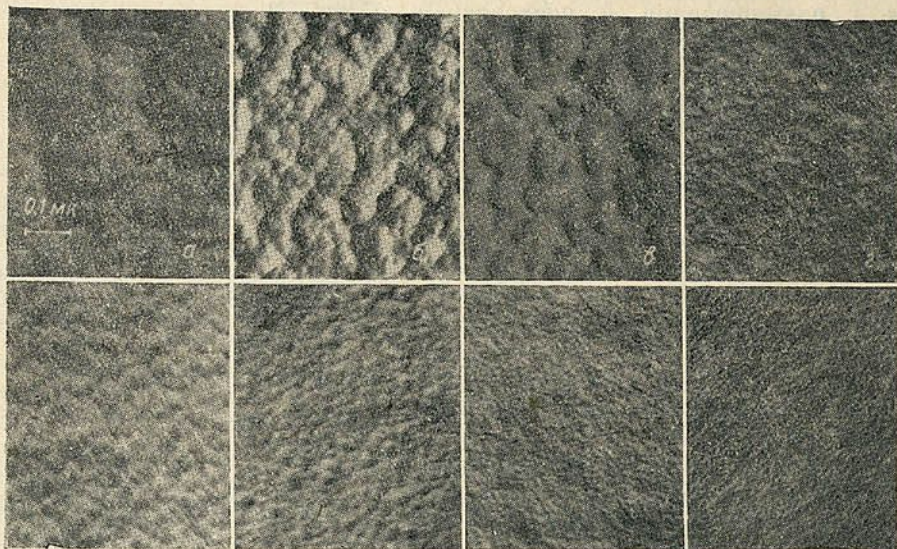


Рис. 4. Электроннамікраскапічныя здымкі структуры падложак і асаджаных на іх плёнак:

верхні рад: а, б, в — структура падложак Si, Au і Cr, напыленых пры 200 °С; г — падложкі Cr, напыленая пры 60 °С; ніжні рад: пермалоевыя плёнка, асаджаная на адпаведныя падложкі.  $\times 90\,000$

рактарам паверхні падложкі, але і з прыродай яе матэрыялу і тым уплывам, які ён аказвае на працэс катоднага ўзнаўлення сплаву, асабліва ў яго пачатковай стадыі.

Змяненні каэрцытыўнай сілы, абумоўленыя характарам змянення паверхні падложкі, можна бачыць з параўнання крывых  $H_c = f(h)$ , атрыманых пры асаджэнні плёнак на падложкі з аднолькавага матэрыялу, але напыленыя пры розных тэмпературах (гл. рыс. 3). У гэтым выпадку каэрцытыўная сіла менш у плёнак, асаджаных на падложкі, напыленыя пры больш нізкіх тэмпературах. Гэта справядліва для ўсіх даследаваных намі матэрыялаў і пры ўсіх таўшчынях плёнак. Такі характар змянення каэрцытыўнай сілы можа быць абумоўлены змяненнем крышталічнай структуры падложкі пры розных тэмпературах напылення і яе ўплывам на структуру плёнак. Гэта пацвярджаецца атрыманымі намі электроннамікраскапічнымі здымкамі структуры падложак і асаджаных на іх плёнак (рыс. 4). Размеры зерняў падложак (пры аднолькавай тэмпературы напылення) залежаць ад матэрыялу падложкі. Найбольшыя размеры назіраюцца ў меднай падложкі і найменшыя — у хромавай. З паніжэннем тэмпературы напылення размеры крышталітаў падложкі памяншаюцца. Напрыклад, для хрому, напыленага пры тэмпературы 200 °С, яны складаюць каля 550 Å, а для хрому, напыленага пры 60 °С, ~300 Å.

Кожнае зерне падложкі складаецца з больш дробных крышталітаў. Размеры зерняў назіраемай на падложках субструктуры таксама звязаны з прыродай іх матэрыялу і маюць найменшую велічыню для тых матэрыялаў, у якіх меншыя размеры зерняў асноўнай структуры.

Размеры крышталітаў у плёнках вызначаюцца размерамі зерняў падложкі. Як правіла, чым большыя размеры крышталітаў падложкі, тым больш буйнакрышталічнай з'яўляецца асаджаная на яе плёнка. Пры гэтым намі выяўлена карэляцыя паміж размерамі зерняў у плёнцы і размерамі зерняў субструктуры падложак. Так, у плёнкі таўшчынёй каля 400 Å, асаджанай на золата, размеры зерняў плёнкі і зерняў субструктуры падложкі аднолькавыя. Плёнка такой таўшчыні поўнаасцю паўтарае рэльеф падложкі. Гэта можа служыць пацвярджэннем эпітаксіяльнага росту плёнкі, прычым эпітаксіяльны рост адбываецца згодна атрыманых намі даных у маштабе субструктуры, назіраемай на падложцы.

Параўнанне даных па даследаванню каэрцытыўнай сілы і структуры плёнак, асаджаных на розныя падложкі, паказвае, што ў залежнасці ад таўшчыні плёнкі ўплыў размераў крышталітаў на каэрцытыўную сілу плёнак неаднолькавы. Пры малых таўшчынях (да 700 Å) каэрцытыўная сіла меншая ў плёнак, якія маюць буйнейшае зерне (у нашым выпадку гэта плёнкі, асаджаныя на медныя падложкі); пры таўшчынях жа вышэй 700 Å каэрцытыўная сіла Ni—Fe-плёнак памяншаецца з памяншэннем размераў крышталітаў (з даследаваных намі плёнак найменшую каэрцытыўную сілу маюць плёнкі, асаджаныя на хромавую падложку). Такі характар змянення каэрцытыўнай сілы ў залежнасці ад велічыні крышталітаў электраасаджаных плёнак узгадняецца з данымі ўплыву структуры на каэрцытыўную сілу плёнак, атрыманых тэрмічным выпарэннем у вакууме [7, 8]. Гэта звязваюць са змяненнем характару меж даменаў пры змяненні таўшчыні плёнкі — пераходам ад меж Нееля і меж з папярочнымі сувязямі да меж Блоха [7].

З рыс. 3 таксама вынікае, што пры больш дробных зернях падложкі яе ўплыў на каэрцытыўную сілу плёнак спыняецца на больш ранній стадыі працэсу асаджання, г. зн. пры меншых таўшчынях. Сапраўды, для падложкі з хрому, напыленай пры тэмпературы 60 °С (сярэдняя размеры зерняў каля 300 Å), каэрцытыўная сіла робіцца амаль пастаяннай пры таўшчыні плёнкі каля 1500 Å. Для той жа падложкі, напыленай пры 200 °С (сярэдняя размеры зерняў ~ 550 Å), гэта дасягаецца пры таўшчыні плёнкі каля 2500 Å. Для плёнак на залатой і меднай падложках гэты эфект мае месца пры большых таўшчынях. Гэта можа быць звязана з уплывам матэрыялу падложкі на памяншэнне градыента саставу плёнкі па таўшчыні. Сапраўды, рэзультаты хімічнага аналізу атрыманых намі плёнак паказалі, што ў плёнак, асаджаных на залатыя падложкі, сярэдняя колькасць жалеза ніжэй, чым у плёнак, асаджаных на хром.

Залежнасць каэрцытыўнай сілы ад таўшчыні даецца формулай Нееля [9]

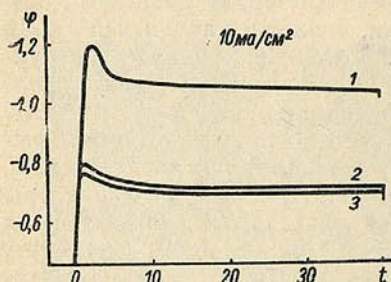
$$H_c = Ah^{-n},$$

дзе паказчык ступені  $n$  вызначаецца саставам плёнкі, матэрыялам і станам паверхні падложкі. Для вельмі тонкай плёнкі тэарэтычнае значэнне  $n = 4/3$ . Колькасны значэнні паказчыка  $n$ , разлічаныя на аснове крытых рыс. 3 для плёнак, асаджаных на розныя падложкі, роўны адпаведна для плёнкі, асаджанай на медную падложку, 0,52, залатую — 0,9, хромавую — 1,0 (тэмпература напылення падложак 60 °С). Для падложак, атрыманых пры больш высокіх тэмпературах, велічыня  $n$  адпаведна меншая. Так, для плёнкі, асаджанай на хромавую падложку, напыленую пры 200 °С, паказчык  $n$  раўняецца 0,76. Такім чынам, пры памян-

шэнні размераў зерня падложкі колькаснае значэнне паказчыка  $n$  у формуле Нееля расце і набліжаецца да велічыні, атрыманай для вакуумных плёнак [10].

Важныя даныя аб характары працэсу асаджэння плёнкі можна атрымаць пры даследаванні крывых  $\varphi-t$ .

Атрыманыя намі крывыя  $\varphi-t$  пры асаджэнні пермалоевых плёнак на падложкі з розных матэрыялаў пры пастаяннай шчыльнасці току



Рыс. 5. Крывыя  $\varphi-t$ , атрыманыя пры асаджэнні на падложкі з розных матэрыялаў:

1 - Cr, 2 - Au, 3 - Cu

прадстаўлены на рыс. 5. Мы бачым, што велічыні ўстойлівых патэнцыялаў асаджэння для падложак медзі, золата вельмі блізкія паміж сабой і значна ніжэй патэнцыялу асаджэння на падложку з хрому. Такім чынам, асаджэнне на хром адбываецца пры больш высокай палярызцы. Гэта тлумачыцца павышанай здольнасцю хрому як найбольш тугаплаўкага з усіх даследаваных намі металаў да адсорбцыі на сваёй паверхні паверхнева-актыўных і іншых рэчываў, якія знаходзяцца ў раствору, у выніку чаго іоны металаў на ім узнаўляюцца цяжэй. Таму структура плёнак, асаджаных на хром, з'яўляецца больш дробнакрышталічнай. Гэта пацвярджаецца таксама рэзультатамі праведзенага намі электроннамікраскапічнага даследавання структуры плёнак. Сяраўды, сярэднія размеры крышталітаў Ni-Fe-плёнак таўшчынёй 1800 Å, асаджаных на золата, складаюць каля 200 Å, а размеры крышталітаў такой жа плёнкі, асаджанай на хром, — каля 120 Å (тэмпература напылення падложак хрому і золата 200 °C). Пры асаджэнні на падложкі з хрому і золата, напылення пры 60 °C, зерне ў плёнках вельмі блізкае па размерах — адпаведна 80 і 90 Å.

Даныя па даследаванню залежнасці каэрцытыўнай сілы  $H_c$ , поля анізатрапіі  $H_k$  і дысперсіі анізатрапіі  $\alpha_{50}$  ад матэрыялу і структуры падложкі прыведзены ў табліцы, з якой відаць, што велічыня поля анізатрапіі таксама залежыць ад матэрыялу падложкі. Для плёнкі таўшчынёй 1800 Å, асаджанай на медную падложку, яна роўна 4,9 э, для той жа плёнкі, асаджанай на золата, — 3,1 э, на хром — 2,3 э (падложкі атрыманы пры тэмпературы 60 °C). Для тых жа плёнак  $\alpha_{50}$  раўняецца адпаведна 4,9; 4,2 і 4,0 °.

Плёнкі, асаджаныя на падложкі з медзі і золата, напыленыя пры 200 °C, з'яўляюцца інверснымі ( $H_c/H_k > 1$ ). У плёнкі, асаджанай на хромавую падложку, атрыманую пры той жа тэмпературы,  $H_k$  блізкія па велічыні да  $H_c$ . Аналагічныя плёнкі былі апісаны ў работах [11—13].

Такім чынам, матэрыял падложкі і яго структура аказваюць істотны ўплыў на магнітныя характарыстыкі і структуру электраасаджаных плёнак.

Як было паказана, выкарыстанне падложкі, напыленай пры больш нізкай тэмпературы, дазваляе атрымаць плёнкі больш дробнакрышталічнай з лепшымі магнітнымі характарыстыкамі. Аднак трэба мець на ўвазе, што з паніжэннем тэмпературы напылення пагаршаецца адгезія металічнага слоя са шклом, што можа прывесці да адслойвання плёнак разам з металічным падслоем. Найбольш слабай адгезіяй са шклом валодае золата нават пры высокіх тэмпературах напылення (200 °C). Таму на шкло спачатку наносіцца хром, а потым золата. Акрамя таго,

Табліца  
Магнітныя характарыстыкі плёнак 80% Ni—20% Fe  
таўшчынёй 1800 Å, асаджаных на падложкі з розных  
матэрыялаў

Матэрыял падложкі	Тэмпература напылення падложкі, °C	Магнітныя характарыстыкі плёнак		
		каэрцытыўная сіла $H_c$ , э	поле анізатрапіі $H_k$ , э	дысперсія восей лёгкага намагнічвання $\alpha_{50}$ , град
Cu	60	2,4	4,9	3,9
	200	5,0	2,0	—
Cr	60	1,9	2,3	3,2
	200	3,5	3,6	4,4
Au	60	2,2	3,1	3,0
	200	4,5	2,3	4,0

пры нізкіх тэмпературах напылення ў падложках узнікаюць значныя ўнутраныя напружанні, якія могуць быць прычынай узнікнення напружанняў у плёнках і прыводзіць да пагаршэння іх магнітных уласцівасцей.

Плёнкі, асаджаныя на сярэбраныя падложкі, па магнітных характарыстыках блізкія да плёнак на золале, аднак слаі серабра валодаюць вельмі слабай адгезіяй са шклом і з падслоем хрому, у выніку чаго лёгка адслойваюцца разам з асаджанай на іх плёнкай Ni—Fe. Больш трывалае счапленне са шклом маюць слаі серабра, атрыманыя хімічным асаджэннем.

Параўнанне характарыстык плёнак, асаджаных электралітычна на падложку з розных матэрыялаў, паказала, што Ni—Fe-плёнкі на хромавай падложцы маюць магнітныя характарыстыкі, блізкія да характарыстык плёнак, асаджаных на залатую падложку, і плёнак, атрыманых выпарэннем у вакууме.

### Вывады

1. Даследаван характар змянення каэрцытыўнай сілы ў залежнасці ад таўшчыні для плёнак, асаджаных на падложкі з розных металаў. Паказана, што пры таўшчынях вышэй 700 Å каэрцытыўная сіла меншая ў плёнак, асаджаных на хромавую падложку, і найбольшая ў плёнак, асаджаных на медную падложку. Пры таўшчыні плёнкі менш 700 Å залежнасць адваротная: найбольшая каэрцытыўная сіла ў плёнкі, асаджанай на хром, а найменшая — у плёнкі, асаджанай на медзь.

2. Даследавана залежнасць структуры і магнітных характарыстык электраасаджаных Ni—Fe-плёнак ад матэрыялу і структуры падложкі. Атрыманы электроннамікраскапічныя здымкі структуры падложкі з розных металаў (Cu, Au, Cr), напыленых пры розных тэмпературах (200, 150, 60 °C) і асаджаных на іх пермалоевых плёнак. Устаноўлена карэляцыя паміж размерамі зерня падложкі і размерамі крышталітаў у плёнцы. Выказана меркаванне аб тым, што эпітаксіяльны рост плёнкі мае месца ў маштабе назіраемай на падложцы субструктуры.

3. Устаноўлена, што з памяншэннем размераў зерня ў электраасаджаных Ni—Fe-плёнках таўшчынёй 1800 Å памяншаюцца  $H_c$ ,  $H_k$  і  $\alpha_{50}$ . Пры асаджэнні на падложкі з медзі і золата, напыленыя пры 200 °C, атрыманы інверсныя плёнкі ( $H_c/H_k > 1$ ).

4. Даследаван характар крывых  $\phi-t$  пры асаджэнні Ni—Fe-плёнак на падложкі з розных металаў. Атрыманыя даныя супастаўляюцца з данымі па даследаванні структуры плёнак.

5. Паказана, што характарыстыкі плёнак таўшчынёй больш 700 Å, асаджаных на хром, параўнальныя з характарыстыкамі плёнак, асаджаных на залатыя падложкі, а ў некаторых выпадках пераўзыходзяць іх. Гэта можа мець значэнне пры масавым вырабе плёнак.

6. Дадзена апісанне прыбора для даследавання пятлі гістэрэзісу ў працэсе асаджэння плёнак.

### Літаратура

1. Doyle W. D. IEEE Trans. on Magnetics., v. Mag.-2, № 2, 1966.
2. Современные аспекты электрохимии. Изд. «Мир», М., 1967.
3. Girard R. Journ. of Appl. Phys., 38, № 3, 1967.
4. Wolf J. W. Journ. of Appl. Phys., 33, 1152, 1962.
5. Ваграмян А. Т. и Петрова Ю. С. Физико-механические свойства электролитических осадков. Изд. АН СССР, М., 1960.
6. Crowther T. S. J. Appl. Phys., 34, 580, 1963.
7. Heinzl C. O. and Walker G. A. J. Appl. Phys., 37, №10, 1962.
8. Дурасова Ю. А. и Никитина Т. Н. Изв. АН СССР, серия физич., т. XXIX, № 4, 1965.
9. Neel L. J. Phys. Radium., 17, 250, 1956.
10. Праттон М. Тонкие ферромагнитные пленки. Л., 1967.
11. Smith D. O., Huber E. E., Cohen M. S. and Weiss G. P. J. Appl. Phys., 31, № 5, Suppl. 1960.
12. Wolf J. W., Katz H. W., Brain A. E. Proceedings of the 1959 Electronic Components Conference, Philadelphia, Pennsylvania, May 6—8, p. 15, 1959.
13. Fisher R. D., Haber H. E. Nature, 199, № 13, 1963.

*Інстытут фізікі цвёрдага цела  
і пайправаднікоў АН БССР*

*Паступіла ў рэдакцыю  
29.IV 1968*

Г. І. МАКАВЕЦКІ

## ДАСЛЕДАВАННЕ СТРУКТУРЫ І НЕКАТОРЫХ ФІЗІЧНЫХ УЛАСЦІВАСЦЕЙ СЕЛЕНІДУ І ТЭЛУРЫДУ МАРГАНЦУ І ІХ УЗАЕМНЫХ РАСТВОРАУ

Вядомыя ў літаратуры даныя па даследаванню фізічных уласцівасцей селеніду і тэлурыду марганцу далёка не поўныя і часта супярэчлівыя. Так, напрыклад, электраправоднасць селеніду марганцу даследавалася Муракамі [1] і Пальмерам [2] толькі ў вобласці нізкіх тэмператур. Нам невядома аб існаванні якіх-небудзь даследаванняў па тэрмаэлектрычных і цеплавых уласцівасцях  $MnSe$ . Вельмі супярэчлівыя даныя па даследаванню тэрмаэлектрычных уласцівасцей тэлурыду марганцу [3—5]. Да пачатку гэтага даследавання ў літаратуры адсутнічалі якія-небудзь даныя, што пацвердзілі б факт існавання раствораў халькагенідаў марганцу. Таму комплекснае даследаванне структурных, электрычных, тэрмаэлектрычных і магнітных уласцівасцей тэлурыду і селеніду марганцу і іх узаемных раствораў прадстаўляе значную цікавасць. Даследаванне фізічных уласцівасцей сплаваў квазібінарнай сістэмы  $MnSe-MnTe$  прадстаўляецца актуальным і таму, што бінарныя злучэнні, якія ўтвараюць гэту сістэму, з'яўляюцца не толькі паўправаднікамі, але і антыферамагнетыкамі.

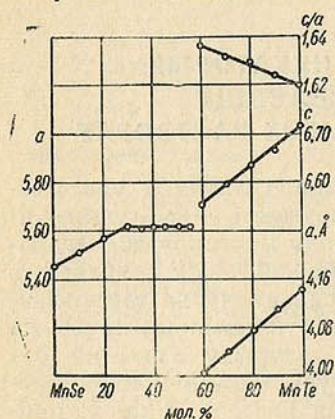
**Прыгатаванне ўзораў.** Для даследавання было выбрана 14 саставаў, якія ўзяты праз 10 мал. % па краях і праз 5 мал. % у цэнтры сістэмы. Зыходныя элементы, якія былі выкарыстаны для атрымання сплаваў даследаванай сістэмы, мелі наступныя характарыстыкі па чысціні: селен з колькасцю прымесей крэмнію  $1 \cdot 10^{-4}$ , магнію  $1 \cdot 10^{-5}$ , медзі  $< 1 \cdot 10^{-5}$ , жалеза  $4 \cdot 10^{-5}$ , двойчы вазагнаны тэлуры і электралітычны марганец, з паверхні якога награваннем у вакууме была выдалена вокісная плёнка.

Тэлурыд марганцу атрымлівалі метадам прамога сплаўлення наважкі стэхіяметрычнага саставу зыходных кампанентаў у адпампаваных і адпаяных кварцавых ампулах у індуктары высокачастотнага генератара. Узоры тэлурыду марганцу для тэрмаэлектрычных і дылатаметрычных даследаванняў былі падрыхтаваны ў выглядзе цыліндраў дыяметра 5 мм, вышынёй да 50 мм адліўкай у вакууме ў графітавую зложніцу загадзя сінтэзаванага злучэння. Для нейтронаграфічных даследаванняў узоры атрымлівалі прасаваннем у стальной прасформе парашку загадзя сінтэзаванага тэлурыду марганцу з наступным спяканнем і адпалам на працягу 100—120 гадз пры тэмпературы 800 °С.

Сінтэз селеніду марганцу праводзіўся наступным чынам. Наважка зыходных кампанентаў, узятых у стэхіяметрычных суадносінах, у адпампаванай і адпаянай кварцавай ампуле награвалася да 400 °С і вытрымлівалася пры гэтай тэмпературы на працягу 2 гадз, пасля чаго тэмпература павышалася да 700 °С. Пры гэтай тэмпературы ампула вытрымлівалася на працягу 6 гадз. Далей тэмпература павышалася з хуткасцю не больш 50° у гадзіну і даводзілася да 1100 °С. Вытрымка пры

гэтай тэмпературы складала 8 гадз, потым праводзілася павольнае зніжэнне тэмпературы печы да поўнага ахалоджэння.

Падобным метадам былі падрыхтаваны сплавы ўсіх астатніх саставаў сістэмы з той розніцай, што тэмпература канчатковага спякання ў некаторых выпадках даводзілася да 1150 °С, а час спякання скарачаўся да 2—3 гадз. Атрыманыя ўзоры падвяргаліся месячнаму адпалу пры тэмпературы 750—800 °С. Адна частка ўзораў усіх саставаў пасля адпалу ахалоджвалася павольна разам з печчу, другая — хутка на паветры.



Для дылатаметрычных і тэрмаэлектрычных даследаванняў селеніду марганцу і квазібінарнага сячэння MnSe—MnTe выраблялі ўзоры ў форме цыліндраў дыяметрам 5,2 мм, вышынёй 25—35 мм. Такія ўзоры атрымліваліся прасаваннем у сталёнай прасформе парашку загадзя сінтэзаванага саставу з наступным спяканнем і адпалам пры тэмпературы 800 °С на працягу

Рys. 1. Залежнасць пастаянных рашотак  $a$  і  $c$ , Å і адносіны  $c/a$  сплаваў сістэмы MnSe—MnTe ад саставу

120 гадз у адпампаваных і адпаяных кварцавых ампулах. Узоры селеніду марганцу і прамежкавых саставаў даследаванай сістэмы для нейтронграфічных даследаванняў былі падрыхтаваны таксама метадам прасавання парашкоў загадзя сінтэзаваных сплаваў з наступным спяканнем пры тэмпературы 800 °С на працягу 120 гадз у адпампаваных і адпаяных кварцавых ампулах.

Рэзультаты праведзенага хімічнага аналізу сістэмы MnSe—MnTe сведчаць аб тым, што саставы атрыманых сплаваў у межах хібінасцей метаду аналізу адпавядаюць саставам узятых наважак.

**Рэнтгенаўскае і металаграфічнае даследаванне.** Сплавы ўсіх выбраных саставаў даследаванай сістэмы былі падвергнуты рэнтгенаграфічнаму аналізу. Здымка рэнтгенаграм рабілася з парашковага ўзору на апарате УРС-50И у медным выпраменьванні з гейгер-мюлераўскім лічальнікам з аўтаматычным запісам інтэнсіўнасцей дэбаеўскіх адбіткаў пры хатняй тэмпературы. Падлік пастаянных элементарнай ячэйкі сплаваў даследаванай сістэмы ў выпадку MnSe і сплаваў на яго аснове рабіўся па дыфракцыйных адбітках (420), (422), (600) і (620), а ў выпадку MnTe і сплаваў на яго аснове — па адбітках (114), (122), (300), (123) і (106).

Паводле атрыманых даных, MnSe мае структуру тыпу NaCl з пастаяннай рашоткі, роўнай  $5,456 \pm 0,002 \text{ Å}$ , што добра ўзгадняецца з данымі іншых аўтараў [6—8]. Тэлурыд марганцу мае структуру тыпу NiAs з пастаяннымі элементарнай ячэйкі  $a = 4,143 \pm 0,002 \text{ Å}$ ,  $c = 6,711 \pm 0,003 \text{ Å}$ , што таксама адпавядае літаратурным даным [9—11].

Як відаць з рys. 1, у абласцях існавання цвёрдых раствораў у сістэме MnSe—MnTe адбываецца практычна лінейнае змяненне пастаянных элементарных ячэек. З аднаго боку, павелічэнне колькасці тэлурыду марганцу ў сплавах на аснове MnSe прыводзіць да лінейнага павелічэння пастаяннай элементарнай ячэйкі. З другога боку, пры павелічэнні колькасці MnSe у сплавах на аснове MnTe пастаянныя элементарнай ячэйкі лінейна памяншаюцца. Значэнні пастаянных элементарнай ячэй-

кі сплаваў з колькасцю  $\text{MnSe}$  30 і 40 мал. % атрыманы пры загартоўцы ўзораў ад тэмпературы 800 °С.

Аналіз атрыманых рэнтгенаграм паказаў, што на рэнтгенаграмах адпаленых і павольна ахалоджаных узораў саставаў  $\text{MnSe}$ , 0,9  $\text{MnSe} \cdot 0,1 \text{MnTe}$  і 0,8  $\text{MnSe} \cdot 0,2 \text{MnTe}$  назіраліся толькі максімумы, характэрныя для кубічнай структуры тыпу  $\text{NaCl}$ . На рэнтгенаграмах адпаленых і павольна ахалоджаных узораў саставу 0,7  $\text{MnSe} \cdot 0,3 \text{MnTe}$ , акрамя максімумаў кубічнай структуры, пачынаў праяўляцца пярэдні найбольш інтэнсіўны максімум (101) структуры нікель-арсеніднага тыпу, што сведчыць аб двухфазнасці даследаванага ўзору і наяўнасці ў ім, акрамя асноўнай фазы з кубічнай рашоткай, невялікай колькасці фазы з рашоткай  $\text{NiAs}$ . Гэты вывад пацвердзіў мікраструктурны аналіз.

На рэнтгенаграмах адпаленых і павольна ахалоджаных узораў сплаваў саставаў  $\text{MnTe}$ , 0,1  $\text{MnSe} \cdot 0,9 \text{MnTe}$  і 0,2  $\text{MnSe} \cdot 0,8 \text{MnTe}$  назіраліся максімумы, характэрныя для гексаганальнай структуры нікель-арсеніднага тыпу.

Рэнтгенаграмы павольна ахалоджаных пасля адпалу ўзораў саставаў 0,3  $\text{MnSe} \cdot 0,7 \text{MnTe}$  і 0,4  $\text{MnSe} \cdot 0,6 \text{MnTe}$  сведчаць аб тым, што гэтыя ўзоры двухфазныя з перавагай фазы са структурай  $\text{NiAs}$ . Адпал пры тэмпературы 800 °С і наступная загартоўка прыводзілі да таго, што на рэнтгенаграмах толькі слаба намячаўся максімум (200) кубічнай структуры.

Такім чынам, аналіз рэнтгенаграм, а таксама лінейны характар змянення параметраў рашотак сплаваў сістэмы  $\text{MnSe}-\text{MnTe}$  дазваляе меркаваць, што пры тэмпературах ~500 °С вобласць цвёрдых раствораў на аснове селеніду марганцу працягваецца прыкладна да 20—25 мал. % колькасці тэлурыду марганцу. З боку тэлурыду марганцу вобласць цвёрдых раствораў на яго аснове пры ўказаных тэмпературах не перавышае 20 мал. % колькасці селеніду марганцу. У астатняй вобласці канцэнтрацый квазібінарнай сістэмы  $\text{MnSe}-\text{MnTe}$  мае месца гетэрагенная сумесь цвёрдых раствораў са структурай  $\text{NaCl}$  і  $\text{NiAs}$ .

Для даследавання мікраструктуры і мікрацвёрдасці сплаваў сістэмы  $\text{MnSe}-\text{MnTe}$  былі прыгатаваны мікрашліфы адпаленых пры 800 °С сплаваў, павольна і хутка ахалоджаных ад тэмпературы адпалу.

Вымярэнні мікрацвёрдасці рабіліся на прыборы ПМТ-3 пры нагрузцы 20 г. Устаноўлена, што мікрацвёрдасць цвёрдых раствораў на аснове селеніду марганцу з павелічэннем колькасці  $\text{MnTe}$  і цвёрдых раствораў на аснове тэлурыду марганцу з павелічэннем колькасці  $\text{MnSe}$  рэзка ўзрастае.

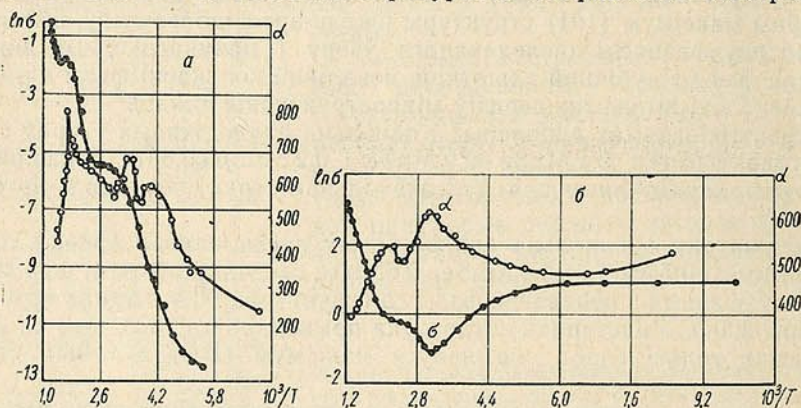
**Тэрмаэлектрычныя даследаванні.** У вобласці тэмператур 100—850 °К кампенсацыйным метадам на пастаянным току зроблены вымярэнні ўдзельнай электраправоднасці і тэрмаэлектрарухаючай сілы сплаваў сістэмы  $\text{MnSe}-\text{MnTe}$ . Кампенсацыя здзяйснялася з дапамогай высакамнага патэнцыяметра ППТВ-1. Вымярэнні тэрмаэлектрарухаючай сілы рабіліся пры перападзе тэмператур 10—15°.

На рыс. 2, а прадстаўлены вынікі даследавання тэмпературнай залежнасці ўдзельнай электраправоднасці і тэрмаэлектрарухаючай сілы селеніду марганцу. Вобласць уласнай праводнасці ў  $\text{MnSe}$  наступае пры тэмпературах вышэй 680 °К. У інтэрвале тэмператур 600—670 °К мае месца пераход ад прымеснай да ўласнай праводнасці, якому адпавядае максімум каэфіцыента тэрмаэлектрарухаючай сілы. Знак каэфіцыента тэрмаэрс селеніду марганцу, як і ўсіх астатніх сплаваў даследаванай сістэмы, аказваўся дадатным.

У цвёрдых раствораў на аснове селеніду марганцу вобласць уласнай праводнасці наступае пры тэмпературах вышэй 700 °К. У вобласці тэм-

ператур пераходу да ўласнай праводнасці (550—650 °К) на крывых залежнасці тэрмаэрс ад адваротнай тэмпературы назіраюцца максімумы.

Даследаванне тэлурыду марганцу паказала, што пры тэмпературах вышэй 500 °К (рыс. 2, б) яго электраправоднасць расце за лік праводнасці ўласных носбітаў. Пры тэмпературы 318 °К на крывой  $\ln \sigma = f(1/T)$  назіраецца мінімум, які адпавядае значнаму максімуму тэрмаэлектрарухаючай сілы. Ніжэй указанай тэмпературы ў тэлурыду марганцу адбываецца змена знака тэмпературнага каэфіцыента электрасупра-



Рыс. 2. Залежнасць электраправоднасці,  $\text{ом}^{-1} \cdot \text{см}^{-1}$  і тэрмаэлектрарухаючай сілы,  $\text{мкв/град}$  селеніду марганцу (а) і тэлурыду марганцу (б) ад тэмпературы, °К

ціўлення з адмоўнага на дадатны. Тэрмаэлектрарухаючая сіла пры паніжэнні тэмпературы ніжэй 160 °К зноў прыкметна ўзрастае. У вобласці тэмператур 420—500 °К, якія адпавядаюць пераходу ад прымеснай праводнасці да ўласнай, тэрмаэлектрарухаючая сіла праходзіць праз некаторы максімум. Пры далейшым павышэнні тэмпературы ў вобласці ўласнай праводнасці назіраецца практычна лінейнае зніжэнне крывой залежнасці каэфіцыента тэрмаэрс ад адваротнай тэмпературы.

Вобласць уласнай праводнасці ў цвёрдых раствораў на аснове MnTe праяўляецца пры тэмпературах вышэй 620 °К. Мінімум удзельнай электраправоднасці назіраецца ў іх у вобласці тэмператур 300—340 °К. Пры далейшым паніжэнні тэмпературы, як і ў тэлурыду марганцу, назіраецца змяненне знака тэмпературнага каэфіцыента электрасупраціўлення. Мінімум на крывых залежнасці лагарыфма ўдзельнай электраправоднасці ад адваротнай тэмпературы цвёрдых раствораў на аснове MnTe у інтэрвале тэмператур 250—400 °К адпавядае максімуму тэрмаэлектрарухаючай сілы. У вобласці тэмператур 500—600 °К на крывых залежнасці каэфіцыента тэрмаэрс ад адваротнай тэмпературы назіраецца значнае ўзрастанне тэрмаэрс, якое адбываецца па лінейнаму закону. У вобласці ўласнай праводнасці адбываецца практычна лінейнае зніжэнне тэрмаэлектрарухаючай сілы ў функцыі адваротнай тэмпературы.

Па тангенсу вугла нахілу крывых залежнасці лагарыфма ўдзельнай электраправоднасці ад адваротнай тэмпературы ў вобласці ўласнай праводнасці вызначаны велічыні шырыні забароненай зоны сплаваў даследаванай сістэмы, прыведзеныя на рыс. 3. З рысунка відаць, што шырыня забароненай зоны сплаваў на аснове MnSe лінейна памяншаецца пры павелічэнні ў іх колькасці MnTe<sup>1</sup>. Шырыня забароненай зоны спла-

<sup>1</sup> У рабоце [12] у выніку памылкі, дапушчанай у разліках, прыведзены ўдвая заніжаныя значэнні шырыні забароненай зоны.

ваў на аснове  $MnTe$  нязначна ўзрастае пры павелічэнні колькасці селеніду марганцу.

Па даных тэмпературнай залежнасці электраправоднасці і тэрмаэлектрарухаючай сілы сплаваў сістэмы пры пэўных тэмпературах былі пабудаваны ізатэрмы электраправоднасці і тэрмаэрс. Ход гэтых ізатэрм сведчыць аб тым, што ў даследаванай сістэме цвёрдыя растворы на аснове  $MnSe$  пры тэмпературы  $500^\circ K$  працягваюцца не менш чым да 20 мал. % колькасці тэлурыду. Цвёрдыя растворы на аснове  $MnTe$  утвараюцца ў сістэме пры канцэнтрацыі селеніду марганцу не вышэй 20 мал. %.

**Каэфіцыент лінейнага расшырэння.** Дылатаметрычныя вымярэнні сплаваў сістэмы рабіліся на кварцавым дылатометры са стрэлачным індыкатарам часавога тыпу з цаной дзялення  $0,001$  і  $0,002$  мм у вакууме ў інтэрвале  $100-700^\circ K$ .

З рис. 4, а відаць, што на крывых змянення каэфіцыента лінейнага расшырэння і падаўжэння ўзору тэлурыду марганцу ў залежнасці ад тэмпературы ў вобласці  $250-310^\circ K$  назіралася анамалія, якая абумоўлена антыферамагнітным пераўтварэннем. Максімальнае значэнне каэфіцыента лінейнага расшырэння адзначаецца пры тэмпературы  $307^\circ K$ .

Ход крывых тэмпературнай залежнасці падаўжэння і каэфіцыента лінейнага расшырэння цвёрдых раствораў на аснове тэлурыду марганцу падобны на ход гэтых крывых у чыстага тэлурыду марганцу. Таксама, як і ў тэлурыду марганцу, у вобласці тэмператур  $250-350^\circ K$  крывая каэфіцыента лінейнага расшырэння праходзіць праз максімум. Пры павелічэнні колькасці селеніду марганцу ў цвёрдых растворах на аснове тэлурыду марганцу становішча максімуму каэфіцыента лінейнага расшырэння зрушваецца ў бок больш нізкіх тэмператур. Змяненне канцэнтрацыі цвёрдага раствору на 10 мал. % прыводзіць да змянення тэмпературы Нееля прыкладна на  $4^\circ$ . Указанае зрушэнне тэмпературы антыферамагнітнага пераўтварэння якасна пацверджана праведзенымі магнітнымі і нейтронаграфічнымі даследаваннямі.

Рэзультаты дылатаметрычнага даследавання ўзору селеніду марганцу прадстаўлены на рис. 4, б. Пры награванні ўзору значная анамалія ходу крывых падаўжэння і каэфіцыента лінейнага расшырэння, звязаная з антыферамагнітным пераўтварэннем, назіралася ў вобласці тэмператур  $140-150^\circ K$ . У ходзе далейшага награвання пры тэмпературах  $260-270^\circ K$  на дылатаметрычнай крывой назіраецца значнае спісканне. Пры ахаладжэнні ўзору з больш высокіх тэмператур у інтэрвале  $180-160^\circ K$  назіраецца пераўтварэнне, якое суправаджаецца расшырэннем узору. Такім чынам, гэтыя два супрацьлеглыя эфекты сведчаць аб тым, што ў даным выпадку мае месца значны гістэрэзіс пераўтварэння.

Паводле атрыманых даных, пераўтварэнне пры  $260-270^\circ K$  пры награванні і адваротнае пераўтварэнне пры  $180-160^\circ K$  пры ахаладжэнні з'яўляецца паліморфным пераўтварэннем. Наяўнасць вялікага тэмпературнага гістэрэзісу пераўтварэння абумоўлена значнымі аб'ёмнымі змяненнямі, якія суправаджаюць пераўтварэнне [13]. Змяненне тыпу крышталічнай структуры пры пераўтварэнні было даследавана і пацверджана метадамі рэнтгена- і нейтронаграфічнага аналізаў [14].

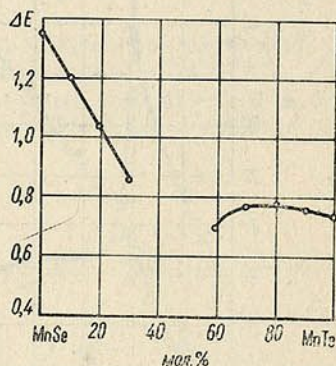


Рис. 3. Залежнасць шырыні забароненай зоны,  $\Delta E$  сплаваў сістэмы  $MnSe-MnTe$  ад саставу

На дылатаметрычных крывых цвёрдых раствораў на аснове селеніду марганцу ў вобласці тэмператур 260—290 °К назіралася анамалія, падобная да той, што назіралася ў тым жа тэмпературным інтэрвале ў чыстага MnSe. Трэба адзначыць, што на гэтых крывых не выяўлена анамалій, якія можна было б прыняць як абумоўленыя антыферамагнітным пераўтварэннем. На нейтронаграмах узананых цвёрдых раствораў, што былі зняты пры тэмпературы 110 °К, не выяўлена магнітных адбіткаў.

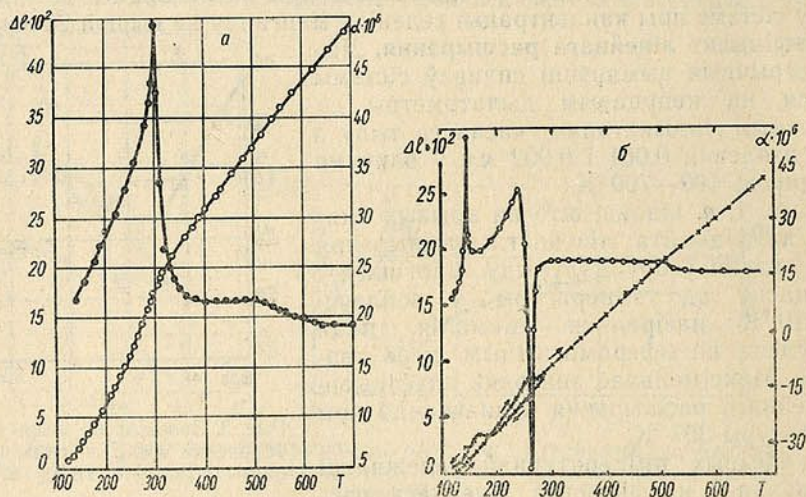


Рис. 4. Залежнасць падаўжэння, мм і каэфіцыента лінейнага расшырэння,  $1/\text{град}$  узору тэлурыду марганцу (даўжыня ўзору 30,1 мм) — а і селеніду марганцу (даўжыня ўзору 25,2 мм) — б ад тэмпературы, °К

Таму можна меркаваць, што тэмпература пераходу ў антыферамагнітны стан у цвёрдых раствораў значна ніжэй за тэмпературу пераходу  $\alpha$ -MnSe.

### Вывады

1. У выніку праведзенага даследавання сістэмы MnSe—MnTe паказана існаванне квазібінарнага сячэння, шырокай вобласці растваральнасці і паўправадніковых уласцівасцей ва ўсім інтэрвале канцэнтрацый.

2. Метадам рэнтгенаграфічнага аналізу даследавана змяненне пастаянных элементарных ячэек у залежнасці ад саставу. Паказана, што пастаянная элементарнай ячэйкі цвёрдых раствораў на аснове селеніду марганцу лінейна ўзрастае з павелічэннем колькасці тэлурыду марганцу, а пастаянная элементарнай ячэйкі цвёрдых раствораў на аснове тэлурыду марганцу лінейна памяншаюцца з павелічэннем колькасці селеніду марганцу.

3. Шырыня забароненай зоны сплаваў сістэмы MnSe—MnTe змяняецца ад 1,38—1,40 эВ у селеніду марганцу да 0,86 эВ у саставу 0,7 MnSe · 0,3 MnTe і ад 0,74 эВ у тэлурыду марганцу да 0,78 эВ у сплава саставу 0,2 MnSe · 0,8 MnTe.

4. Ход крывых ізатэрм электраправоднасці і тэрмаэрс сведчыць аб тым, што ў даследаванай сістэме цвёрдыя растворы на аснове MnSe пры тэмпературы  $\sim 500$  °К працягваюцца не менш чым да 20 мал. % колькасці тэлурыду марганцу. Цвёрдыя растворы на аснове MnTe утвараюцца ў сістэме пры канцэнтрацыі селеніду марганцу не вышэй 20 мал. %.

5. У вобласці температур 290—310 °К на кривих температурнай залежності коефіцієнта лінійнаго расшырэння телуриду марганцу і цвёрдых раствораў на яго аснове выяўлены значныя анамаліі, абумоўленыя пераходам сплаваў з антыферамагнітнага стану ў парамагнітны.

6. Павелічэнне канцэтрацыі селеніду марганцу ў цвёрдых растворах на аснове телуриду марганцу прыводзіць да зніжэння тэмпературы Нееля.

Змяненне тэмпературы Нееля лінейна залежыць ад змянення канцэтрацыі цвёрдых раствораў і змянення пастаянных элементарнай крышталічнай ячэйкі.

7. Вымярэннямі тэрмічнага падаўжэння, а таксама рэнтгенаўскім і нейтронаграфічным даследаваннямі селеніду марганцу і цвёрдых раствораў на яго аснове паказана, што пераўтварэнне пры 260—270 °К пры нагрэве і адваротнае пераўтварэнне пры 180—160 °К пры ахаладжэнні з'яўляецца паліморфным пераўтварэннем.

### Літаратура

1. Murakami M. Bull. Fac. Eng., Hiroshima Univ., 2, 67, 1953; Chem. Abstr., 48, 1747, 1954.
2. Palmer W. J. Appl. Phys., 25, 125, 1954.
3. Squire Ch. F. Phys. Rev., 56, 922, 1939.
4. Johansen H. A. J. Inorg. and Nucl. Chem., 6, 344, 1958.
5. Miller R. C., Heikes R. R., Ure R. W. Thermoelectricity in Science and Engineering, 430, N. Y.—London, 1961.
6. Broch E. Z. Physik Chem., 127, 446, 1927.
7. Boroni A. Z. Krist., 99, 336, 1938.
8. Taylor A. Appl. Spectroscop., 14, 116, 1960.
9. Oftedal J. Z. Physik Chem., 128, 135, 1927.
10. Furberg S. Acta Chem. Scand., 7, 693, 1953.
11. Greenwold S. Acta Cryst., 6, 396, 1953.
12. Маковецкий Г. И., Сирота Н. Н. ДАН БССР, 9, 85, 1965.
13. Сирота Н. Н. Труды НТО черн. металлургии, XII, 108, 1958.
14. Сирота Н. Н., Маковецкий Г. И. ДАН БССР, 10, 542, 1966.

*Институт фізікі цвёрдага цела  
і паўправаднікоў АН БССР*

*Паступіла ў рэдакцыю  
19.VI 1968*

О. П. КУЗНЕЧИК

### ЭНЕРГЕТИЧЕСКАЯ ЯРКОСТЬ НЕБА В ОБЛАСТИ 1,8—2,5 мкм

Измерялась энергетическая яркость облачного неба, неба с переменной облачностью и ясного неба в «окне прозрачности» атмосферы 1,8—2,5 мкм в условиях города Минска (высота над уровнем моря 243 м).

При измерениях распределения энергетической яркости по небу производилось непрерывное сканирование по азимуту на  $180^\circ$  от вертикала Солнца со скоростью  $0,0096 \text{ рад} \cdot \text{сек}^{-1}$  при различных углах возвышения от  $10$  до  $90^\circ$  в основном через  $10^\circ$ , а также непрерывное сканирование с той же угловой скоростью по углу возвышения при фиксированных азимутах.

Для регистрации потока излучения от неба применялось сернисто-свинцовое фотоспротивление с размером фотослоя  $1 \times 1 \text{ мм}^2$ , которое располагалось в фокусе зеркально-отражательной системы инфракрасного радиометра [1], пороговая чувствительность которого с данным типом фотоспротивления составляла по энергетической яркости  $0,57—0,60 \text{ мквт} \cdot \text{см}^{-2} \cdot \text{стер}^{-1}$ .

Для выделения необходимого спектрального диапазона (1,8—2,5 мкм) применялся изготовленный автором светофильтр, состоящий из предварительно отполированной, а затем просветленной пластинки германия толщиной 1 мм, находящейся между двумя пластинками (толщиной по 2 мм каждая) стекла типа ЛК-5. Просветление германия производилось в расчете на получение максимального пропускания при длине волны 2 мкм.

Для определения абсолютных значений энергетической яркости до и после измерений проводилась калибровка системы по черному телу (зачерненному внутри ламповой копотью и имеющему отношение площади излучающего отверстия к площади полости порядка 0,02), которое заполняло поле зрения приемника на расстоянии 8 м от объектива. При этом принимались специальные меры, в частности дополнительная калибровка радиометра до восхода Солнца или после захода, чтобы избежать влияния рассеянного света Солнца на результаты калибровки. Температура калибровочного черного тела могла изменяться от окружающей до  $900^\circ\text{C}$  и поддерживаться с точностью  $2,5^\circ\text{C}$ , хотя, как правило, калибровочный интервал температур был  $75—350^\circ\text{C}$ .

Предполагается, что относительная ошибка при измерениях энергетической яркости не превышала 10%. В пункте наблюдения при измерениях регистрировалась только температура окружающего воздуха, а все остальные метеоданные поступали из местного метеоцентра.

Энергетическая яркость ясного неба в области 1,8—2,5 мкм в основном определяется рассеянным светом Солнца [2] и зависит от целого ряда параметров, таких, как длина волны, зенитные расстояния Солнца и наблюдаемого участка, угловое расстояние между Солнцем и наблю-

даемым участком, азимут наблюдения, состояние атмосферы, альbedo подстилающей поверхности и т. д. В реальных условиях эти параметры могут встречаться в самых различных сочетаниях, поэтому теоретически

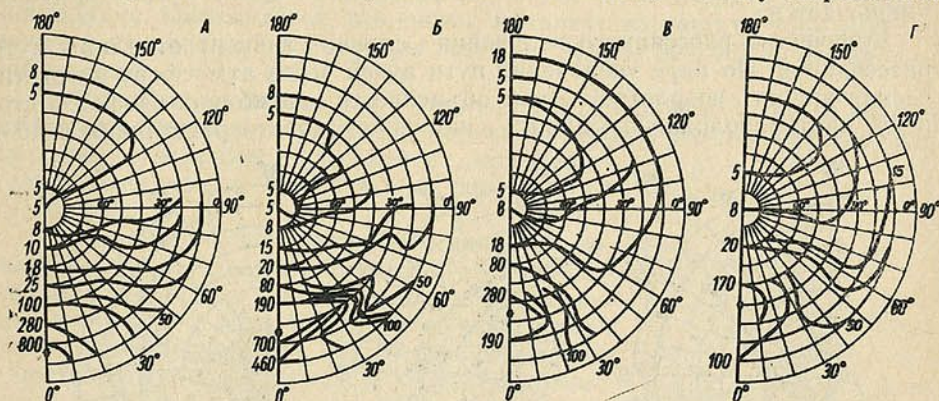


Рис. 1. Распределение, в виде изофот, энергетической яркости ( $\text{мквт} \cdot \text{см}^{-2} \cdot \text{стер}^{-1}$ ) по ясному небу по измерениям:

9.IX 1967 г., 17.20—18.10 при угле возвышения Солнца  $\epsilon=17 \pm 3,6^\circ$  — карта А и 16.10—17.00,  $\epsilon=25,5 \pm 3,9^\circ$  — Б при окружающей температуре  $T=21^\circ\text{C}$  и влажности воздуха  $U=46\%$ ; 4.IX 1967 г., 10.45—11.25,  $\epsilon=35 \pm 3,3^\circ$  — В и 11.25—11.55,  $\epsilon=40 \pm 1,2^\circ$  — Г при  $T=23^\circ\text{C}$  и  $U=56\%$

рассчитать энергетическую яркость неба в этой области очень трудно [3].

На рис. 1 представлена последовательность карт изофот ясного неба для различных углов возвышения Солнца. Изофоты распадаются на два семейства: на те, которые окружают Солнце, и на более слабые, которые окружают горизонт. Карты изофот для безоблачного неба показывают, что область наибольших энергетических яркостей окружает Солнце (так, например, в области, находящейся от Солнца на угловом расстоянии от 10 до 20°, энергетическая яркость равна нескольким сотням  $\text{мквт} \cdot \text{см}^{-2} \cdot \text{стер}^{-1}$  и превышает на 1—2 порядка минимальную энергетическую яркость, наблюдаемую при тех же условиях), а довольно большая область наименьших энер-

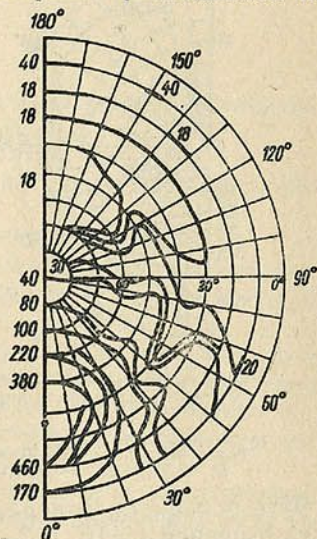


Рис. 2. Распределение, в виде изофот, энергетической яркости ( $\text{мквт} \cdot \text{см}^{-2} \cdot \text{стер}^{-1}$ ) по ясному небу по измерениям:

20.VIII 1967 г., 9.30—10.20,  $\epsilon=35 \pm 4,0^\circ$ ,  $T=16^\circ\text{C}$  и  $U=75\%$

гетических яркостей отстоит от Солнца на угловых расстояниях, зависящих от высоты Солнца и примерно на 90° по азимуту от Солнца. Точка наименьшей энергетической яркости в среднем находится от Солнца на угловых расстояниях 60—90°, если вести отсчет в угловой мере по вертикалу Солнца. При восходе или заходе Солнца область наименьшей энергетической яркости находится в зените, а изофоты почти concentрически располагаются около точки зенита, как около центра, и только в стороне Солнца, приблизительно на угловом расстоянии 30—40°, симметрия нарушается быстрым возрастанием энерге-

тических яркостей. По мере поднятия Солнца над горизонтом количество рассеянного излучения увеличивается, а угловое расстояние между Солнцем и областью наименьших энергетических яркостей, как правило, уменьшается.

Количество рассеянного излучения сильно зависит от длины пути рассеивания. По мере увеличения пути лучей через атмосферу энергетическая яркость возрастает. Этим объясняется загибание изофот в сторону, противоположную Солнцу, начиная с углового расстояния в 40—

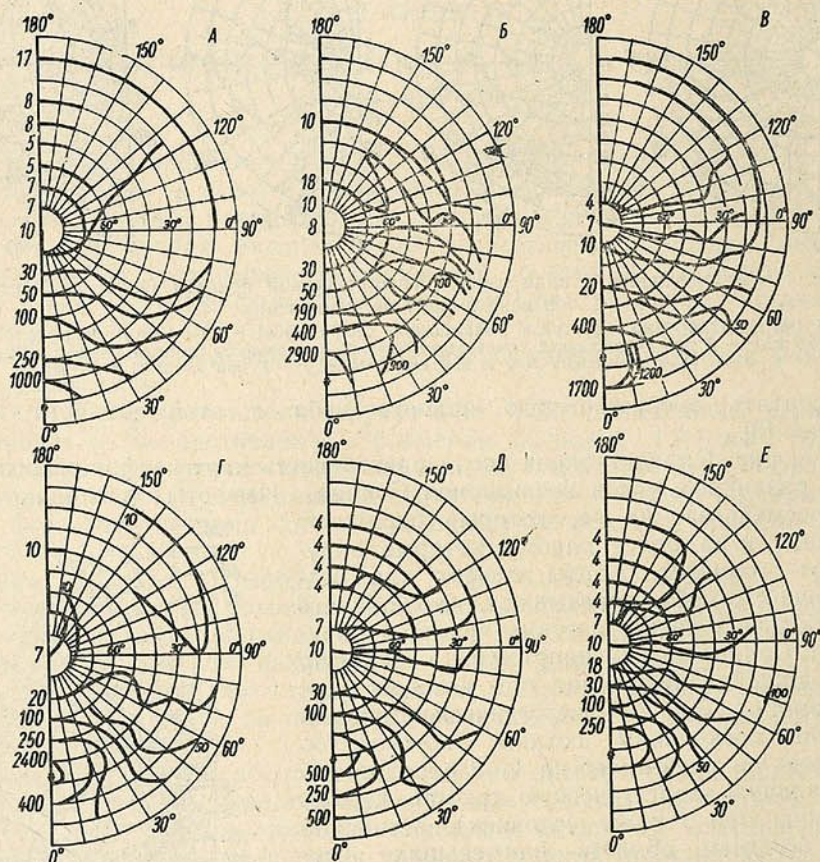


Рис. 3. Распределение, в виде изофот, энергетической яркости ( $\text{мквт} \cdot \text{см}^{-2} \times \text{стер}^{-1}$ ) по небу с переменной облачностью (в 9.00 7 Cl, в 12.00 4 Cl) по измерениям:

10.IX 1967 г., 7.00—7.50,  $\epsilon=7,5 \pm 3,9^\circ$ —А; 8.10—8.50,  $\epsilon=17 \pm 3,3^\circ$ —Б; 9.17—10.07,  $\epsilon=25 \pm 3,0^\circ$ —В; 10.30—11.20,  $\epsilon=33 \pm 2,1^\circ$ —Г; 11.30—12.20,  $\epsilon=37 \pm 1,2^\circ$ —Д; 12.33—13.23,  $\epsilon=39 \pm 0,3^\circ$ —Е

$50^\circ$  и больше от Солнца, и тот факт, что энергетическая яркость при угле возвышения  $\epsilon=10^\circ$  в 2—5 раз больше, чем в зените.

На картах изофот для ясного неба видно, что изофоты асимметричны как относительно солнечного вертикала, так и относительно направления, перпендикулярного к нему. Асимметрия относительно направления, перпендикулярного вертикалу Солнца, зависит от местоположения Солнца на небе и, вероятно, определяется изменением концентрации рассеивающих частиц с высотой. Асимметрия относительно вертикала Солнца удовлетворительного объяснения пока не имеет, но, возможно, указывает на то, что рассеивание не является изотропным и существует значительное рассеивание вперед.

Некоторые особенности распределения энергетической яркости по небосводу могут быть обнаружены расшифровкой записей сканирования при постоянном угле возвышения, в том числе и при угле возвышения Солнца. Оказывается, что сигнал начинает возрастать с  $90\text{--}100^\circ$  по азимуту от Солнца постепенно, а затем — вблизи  $30\text{--}40^\circ$  по азимуту — очень резко.

Необходимо отметить, что с увеличением влажности воздуха энергетическая яркость ясного неба в рассматриваемом участке спектра, как правило, возрастает при прочих приблизительно одинаковых условиях (см. рис. 1, карта В и рис. 2).

Распределение энергетических яркостей по облачному небу зависит от высоты закрытого облаками Солнца, типа облаков и плотности облачного слоя. Зона наибольших энергетических яркостей на небе не всегда совпадает с местоположением Солнца, перекрытого плотными облаками, хотя чаще всего местоположение Солнца отчетливо обнаруживается на картах изофот. При облачном небе и для неба с переменной облачностью в области 1,8—

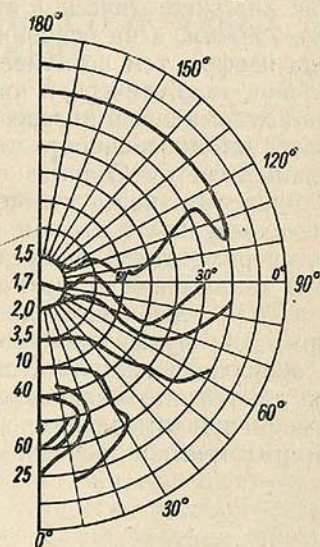


Рис. 4. Распределение, в виде изофот, энергетической яркости ( $\text{мквт} \cdot \text{см}^{-2} \cdot \text{стер}^{-1}$ ) по небу с переменной облачностью (3 Си) по измерениям:

27.VIII 1967 г., 10.20—11.10,  $\epsilon=37 \pm 3,8^\circ$ ,  $T=19^\circ\text{C}$  и  $U=63\%$

2,5 мкм встречаются распределения энергетических яркостей следующих типов:

- 1) карты изофот однотипны с картами изофот ясного неба,
- 2) энергетические яркости распределены по небу случайным образом,

3) переплетение первых двух ситуаций с различным весом.

Распределение энергетических яркостей первого типа встречается, например, при наличии перистых облаков, в этом случае энергетическая яркость выше энергетической яркости ясного неба и уменьшается с уменьшением количества облаков (см. рис. 3). При наличии кучевых облаков в количестве до 3—4 баллов также имеет место распределение первого типа, в этом случае энергетическая яркость облачного неба ниже энергетической яркости ясного неба и возрастает с уменьшением количества облаков (см. рис. 4).

Распределение энергетических яркостей второго типа встречается, например, при наличии перисто-слоистых облаков количеством от 9 до 10 баллов, при наличии слоисто-кучевых — 8 баллов, а также при наличии кучевых и кучево-дождевых облаков — 8—9 баллов.

В случае последних трех из всех упомянутых ситуаций минимальная энергетическая яркость составляла  $18\text{--}25 \text{ мквт} \cdot \text{см}^{-2} \cdot \text{стер}^{-1}$  (т. е. была в 3—5 раз больше, чем при ясном небе), средняя энергетическая яркость —  $80\text{--}100 \text{ мквт} \cdot \text{см}^{-2} \cdot \text{стер}^{-1}$  (т. е. была приблизительно равна энергетической яркости, встречавшейся на ясном небе на угловых расстояниях порядка  $30\text{--}40^\circ$  от Солнца), а энергетические яркости порядка  $200\text{--}300 \text{ мквт} \cdot \text{см}^{-2} \cdot \text{стер}^{-1}$  наблюдались даже при углах возвышения  $\epsilon=50\text{--}70^\circ$  и различных азимутах от 5 до  $175^\circ$ , хотя угол возвы-

шения Солнца над горизонтом был не больше  $10^\circ$ . При этом энергетическая яркость в области Солнца составляла  $100-120 \text{ мквт} \cdot \text{см}^{-2} \cdot \text{стер}^{-1}$ .

При наличии отдельных облаков на ясном небе энергетическая яркость последних превышает энергетическую яркость соседних участков ясного неба и зависит от их положения относительно Солнца.

Рядом авторов проводились измерения спектральной [3, 4] и в отдельных участках спектра [5, 6] энергетической яркости небосвода в области  $0,8-5 \text{ мкм}$ . На основании результатов измерений [3, 4] можно оценить значения энергетической яркости неба в «окне прозрачности» атмосферы  $1,8-2,5 \text{ мкм}$ , а на основании результатов измерений [5, 6] — характер хода изофот, тем не менее данные непосредственных измерений распределения энергетической яркости по небосводу в этой области представляют несомненный интерес, так как являются необходимыми для оценки колебаний прозрачности атмосферы [7] и оценки фона, создаваемого рассеянным светом Солнца.

Значения энергетической яркости в области  $1,8-2,5 \text{ мкм}$ , полученные в результате данной работы, совпадают по порядку величины с экспериментальными результатами других авторов [3, 4].

В заключение автор приносит благодарность доктору технических наук М. М. Мирошникову и Р. Н. Ивановой за предоставление аппаратуры, доктору физико-математических наук профессору В. Г. Вафиади за обсуждение результатов измерений и за ценные советы при написании данной статьи, инженерам В. М. Колесникову и Т. И. Потаповой за помощь при измерениях, а работникам Минской гидрометеорологической обсерватории за любезно предоставленные метеорологические данные.

### Литература

1. Кузнечик О. П., Долинин В. В., Кобак И. А. ДАН БССР, XI, № 11, 991, 1967.
2. Sloan R., Shaw J. H., Williams D. J. Opt. Soc. Amer., 45, № 6, 455, 1955.
3. Bolle H. J. Infrared Physics, 5, № 3, 115, 1965.
4. Bell E. E., Eisner L., Young J., Oetjen R. A. J. Opt. Soc. Amer., 50, № 12, 177, 1960.
5. Ярославцев И. Н. Изв. АН СССР, сер. геофиз., № 1, 83, 1953.
6. Bennett H. E., Bennett J. M., Nagel M. R. J. Opt. Soc. Amer., 50, № 2, 100, 1960.
7. Murray B. C., Westphal J. A. Scientific American, 213, № 2, 20, 1965.

Белорусский государственный университет  
имени В. И. Ленина

Поступило в редакцию  
25.V 1968

Н. Н. СИРОТА, А. У. ШЕЛЕГ

### РЕНТГЕНОГРАФИЧЕСКОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ СТРУКТУРНЫХ АМПЛИТУД ФОСФИДА ГАЛЛИЯ

С целью изучения природы и характера химической связи в полупроводниках нами экспериментально рентгеновским методом определены квадраты структурных амплитуд фосфида галлия, а также, исходя из экспериментальных значений этих величин, подсчитаны  $f$ -кривые ионов фосфора и галлия. Соединение GaP было получено из паровой фазы методом транспортной реакции. Монокристаллики фосфида галлия тщательно растирались в яшмовой ступке. Полученный таким образом порошок GaP затем отмучивался в толуоле до размеров частичек не больше 3 мк. Из отмученного порошка приготавливались образцы в виде таблеток диаметром 20 мм и толщиной 4—5 мм. Таблетки прессовались при давлениях от 6 до 8210 кг/см<sup>2</sup>. Исследовалось влияние давления на интенсивности дифракционных рефлексов. Было показано, что интенсивности рефлексов (220) и (440) растут с увеличением давления и несколько изменяется интенсивность рефлекса (111). Интенсивность же остальных измеренных рефлексов в пределах точности эксперимента 1—2% практически не изменяется с давлением. Для измерения структурных амплитуд GaP использовались образцы, спрессованные при давлении 2460 кг/см<sup>2</sup>. Относительные интенсивности рефлексов (220) и (440) исправлялись на эффект преимущественной ориентации.

Съемки рентгенограмм проводились при комнатной температуре на рентгеновском аппарате УРС-50ИМ в  $Cu-K_{\alpha}$  монохроматическом излучении. Монохроматором служила монокристаллическая изогнутая пластинка Ge толщиной 0,17 мм с радиусом кривизны  $R=330$  мм. Монохроматор стоял на первичном пучке. Рабочая поверхность пластинки, параллельная плоскости (111), шлифовалась, а затем полировалась. Германий выгоден в качестве монохроматора тем, что у него отсутствует второй порядок отражения от плоскости (111) лучей с длиной волны  $\lambda/2$ . Отражательная способность Ge достаточно велика, и, как показали расчеты, для  $Cu-K_{\alpha}$ -излучения при прочих равных условиях она в два с лишним раза выше, чем у Si.

В качестве детектора рентгеновских лучей использовался сцинтилляционный счетчик с кристаллом NaJ(Tl). Дискриминатором служил дифференциальный амплитудный анализатор. Запись рентгеновского дифракционного спектра производилась как непрерывно, так и поточечно. Подсчет интегральной интенсивности рефлексов производился по числу квантов, зарегистрированных электромеханическим счетчиком. Измеренные интенсивности рентгеновских дифракционных рефлексов исправлялись на ТДР по методу Чипмана и Паскина [1]. Поправка на экстинкцию не вводилась, так как размеры частичек порошка были достаточно малые.

При подсчете структурных амплитуд из измеренных интенсивностей поляризационный фактор брался в виде 
$$p = \frac{1 + \cos^2 2\theta_M \cdot \cos^2 2\theta}{1 + \cos^2 2\theta_M}$$

По измеренным интенсивностям рентгеновских рефлексов были определены квадраты структурных амплитуд GaP. Из значений структурных амплитуд определялись функции атомного рассеяния ионов Ga и P. Перевод  $f$ -кривых к абсолютной шкале производился методом эталона. Эталоном служил порошок никеля. Привязка производилась к рефлексу (311), экспериментальное значение интегрального отражения которого известно [2]. В полученные значения  $f$ -кривых вводилась диспер-

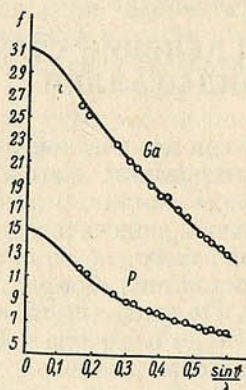


Рис. 1. Экспериментальные значения функций атомного рассеяния ионов Ga и P, приведенные к абсолютному нулю, в зависимости от  $\frac{\sin \theta}{\lambda}$ ,  $\text{Å}^{-1}$

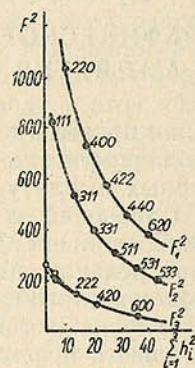


Рис. 2. Экспериментальные значения квадрата структурных амплитуд фосфида галлия

сионная поправка по Кроммеру [3], а также температурная поправка Дебая — Валлера.

На рис. 1 представлены экспериментальные  $f$ -кривые (точки) ионов Ga и P, приведенные к абсолютному нулю, и теоретические зна-

Таблица  
Экспериментальные значения функций атомного рассеяния ионов Ga и P, приведенные к абсолютному нулю

$hkl$	$f_{\text{Ga}}$	$f_{\text{P}}$	$hkl$	$f_{\text{Ga}}$	$f_{\text{P}}$
111	$26,21 \pm 0,09$	$11,59 \pm 0,04$	422	$16,91 \pm 0,08$	$7,06 \pm 0,04$
200	$25,35 \pm 0,06$	$11,07 \pm 0,03$	511	$16,11 \pm 0,05$	$6,82 \pm 0,02$
220	$22,77 \pm 0,10$	$9,28 \pm 0,04$	440	$14,72 \pm 0,05$	$6,50 \pm 0,02$
311	$21,39 \pm 0,08$	$8,69 \pm 0,03$	531	$14,32 \pm 0,06$	$6,32 \pm 0,03$
222	$20,82 \pm 0,07$	$8,44 \pm 0,03$	600	$14,09 \pm 0,11$	$6,31 \pm 0,05$
400	$19,28 \pm 0,10$	$7,80 \pm 0,04$	620	$13,39 \pm 0,05$	$6,06 \pm 0,02$
331	$18,25 \pm 0,09$	$7,59 \pm 0,04$	533	$12,89 \pm 0,06$	$5,96 \pm 0,03$
420	$18,08 \pm 0,08$	$7,47 \pm 0,03$			

чения  $f$ -кривых для нейтральных атомов по Хартри — Фоку (сплошные линии) [4]. Как видно из рис. 1, экспериментальные точки  $f$ -кривых при малых углах отражения для Ga ложатся ниже, а для P несколько выше теоретических значений по Хартри — Фоку. В таблице приводятся численные значения экспериментальных  $f$ -кривых ионов Ga и P.

На рис. 2 представлены экспериментальные значения квадрата структурных амплитуд GaP, приведенные к абсолютному нулю (черные кружочки) для различного сорта линий. Особый интерес представляют

разностные линии, квадрат структурной амплитуды которых выражается как

$$F_3^2 = (f_{\text{Ga}} - f_{\text{P}})^2. \quad (1)$$

Белыми кружочками обозначены теоретические значения  $F_3^2$ , подсчитанные по  $f$ -кривым Ga и P Хартри—Фока [4]. Как видно из рисунка, теоретические значения  $F_3^2$  при малых углах отражения идут значительно выше, чем экспериментальные, а это значит, что электроны в GaP переходят от атомов металла к атомам металлоида. Степень ионизации в соединении GaP, определенная из сравнения экспериментальных и теоретических значений структурных амплитуд  $F_3$ , равна  $0,5 \pm 0,1$  эл.

Из сравнения экспериментальных значений  $f$ -кривых Ga и P с теоретическими значениями по Хартри—Фоку [4] были подсчитаны характеристические температуры отдельно для ионов галлия и фосфора, которые равны соответственно  $\theta_{\text{Ga}} = 235$  и  $\theta_{\text{P}} = 360$  °К. Дебай—валлеровские факторы  $B$  и среднеквадратичные динамические смещения  $\bar{u}_{\text{дин}}^2$ , подсчитанные для ионов галлия и фосфора, равны  $B_{\text{Ga}} = 0,91 \text{ \AA}^2$ ,  $B_{\text{P}} = 0,89 \text{ \AA}^2$ ,  $\bar{u}_{\text{дин Ga}}^2 = 1,15 \times 10^{-2} \text{ \AA}^2$ ,  $\bar{u}_{\text{дин P}}^2 = 1,12 \cdot 10^{-2} \text{ \AA}^2$ .

#### Литература

1. Chipman D., Paskin A. J. Appl. Phys., 30, 1998, 1959.
2. Inkinen O., Suortti P. Ann. Acad. Scient. Fenn., AVI, 147, 1964.
3. Cromer D. Acta Cryst., 18, 17, 1965.
4. International Tables for X-ray Crystallography, vol. III, Birmingham, England, 1962.

Институт физики твердого тела  
и полупроводников АН БССР

Поступило в редакцию  
20.V 1968

Н. Н. СИРОТА, Э. Е. МАТЯС

### ИССЛЕДОВАНИЕ ТВЕРДЫХ РАСТВОРОВ СИСТЕМЫ GaSb—GaAs

В порядке систематического изучения структуры и свойств квазибинарных твердых растворов соединений  $A^{III}B^V$  в настоящей работе было исследовано изменение в зависимости от состава ширины запрещенной зоны  $\Delta E$  (эВ), периода идентичности  $a$  (Å) и микротвердости  $H$  (кг/мм<sup>2</sup>) сплавов системы GaSb—GaAs.

До настоящего времени в литературе имеются лишь отрывочные сообщения о возможности существования непрерывного ряда твердых растворов в этой системе [1, 2].

В работе Страуманиса и Кима [3] приведены значения постоянных решеток твердых растворов некоторых составов данной системы.

Сплавы для исследований нами готовились путем прямого сплавления. Исходными материалами служили галлий ГЛ—О, сурьма марки «Экстра» и мышьяк В5. Состав слитков проверялся с помощью химического анализа. Как известно, процессы диффузии и гомогенизации

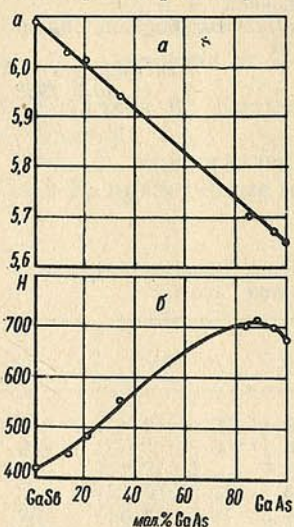


Рис. 1. Изменение периода идентичности  $a$ , Å (а) и микротвердости  $H$ , кг/мм<sup>2</sup> (б) в зависимости от состава в системе GaSb—GaAs

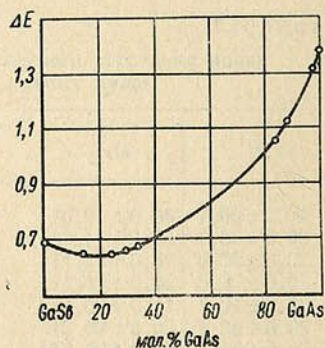


Рис. 2. Изменение ширины запрещенной зоны  $\Delta E$ , эВ в зависимости от состава в системе GaSb—GaAs

в сплавах исследуемой системы проходят чрезвычайно медленно. В целях гомогенизации нами применялся следующий режим отжига. Отжиг проводился при температурах, несколько превышающих соответствующие точки солидуса для сплавов данной системы [4]. Степень гомогенности полученных образцов контролировалась главным образом рентгенографически и на основании микроструктурного анализа. Микротвердость гомогенных сплавов определялась на приборе ПМТ-3.

Как показали измерения, микротвердость изменяется в зависимости от состава по плавной кривой, проходя через максимум, лежащий в области составов 80—90% GaAs (рис. 1, б).

Период идентичности определялся по линии (331). Рентгенограммы снимались на аппарате УРС-50И на медном  $K_{\alpha}$ -излучении со счетчиком Гейгера. На рис. 1, а приведены данные изменения периода идентичности в зависимости от состава. Как видно из рисунка, в исследуемой системе сравнительно хорошо выполняется правило Вегарда.

Измерение ширины запрещенной зоны осуществлялось оптическим методом по краю основной полосы поглощения. Съемки спектрограмм проводились по точкам на спектрометре ИКС-12 при комнатной температуре в интервале длин волн 0,75—2,5 мк. За край полосы поглощения принималась длина волны, при которой интенсивность пропускаемого образцом излучения уменьшалась в три раза по сравнению с максимальной пропускаемой интенсивностью.

Как видно из рис. 2, ширина запрещенной зоны в зависимости от состава изменяется со значительным отклонением от аддитивности в сторону минимума. В области концентраций 15—25% GaAs ширина запрещенной зоны имеет значение 0,64 эв при комнатной температуре.

Среди квазибинарных систем соединений  $A^{III}B^V$  изменение ширины запрещенной зоны в зависимости от состава с минимумом наблюдалось в системе InSb—InAs [5—6].

### Литература

1. Горюнова Н. А. Химия алмазоподобных полупроводников. Л., 1963.
2. Woolley J. C., Smith B. A. Proc. Phys. Soc., 72, 214, 1958.
3. Straumanis M. E., Kim C. D. J. Electrochem. Soc., 112, № 1, 112, 1965.
4. Вулли Дж. Сб. «Полупроводниковые соединения  $A^{III}B^V$ ». Под редакцией Р. Виллардсона, Х. Геринга, М., Металлургиздат, 1967.
5. Сирота Н. Н., Болванович Э. И. Сб. «Химическая связь в полупроводниках и термодинамика». Минск, изд-во «Наука и техника», 1966.
6. Woolley J. C., Warner J. Canad. J. Phys., 42, 1879, 1964.

Институт физики твердого тела  
и полупроводников АН БССР

Поступило в редакцию  
21.VI 1968

А. М. СОЛОДУХИН, Ф. И. ФЕДОРОВ

### К РАСЧЕТУ АТОМА ГЕЛИЯ

В работе [1] был предложен новый подход к расчету атомов, основанный на том, что точный гамильтониан задачи заменяется суммой одноэлектронных центрально-симметричных, но не кулоновских гамильтонианов. Эти одноэлектронные гамильтонианы в известной мере учитывают взаимодействие электронов, поскольку они выбираются так, чтобы их сумма наименее отличалась от исходного гамильтониана. Для одноэлектронного гамильтониана задача решается в первом приближении теории возмущений и из полученных волновых функций конструируется пробная волновая функция, с помощью которой вычисляется энергия атома.

Согласно [1], для пробной функции основного состояния двухэлектронного атома получается выражение

$$\begin{aligned} \Psi = e^{-\xi(r_1+r_2)} & [c_1 + c_2(r_1 + r_2) + c_3(e^{-2\xi r_1} + e^{-2\xi r_2}) + c_4(K_1 + K_2) + \\ & + c_5 r_1 r_2 + c_6(r_1 e^{-2\xi r_2} + r_2 e^{-2\xi r_1}) + c_7 e^{-2\xi(r_1+r_2)} + c_8(r_1 K_2 + r_2 K_1) + \\ & + c_9(K_1 e^{-2\xi r_2} + K_2 e^{-2\xi r_1}) + c_{10} K_1 K_2 + c_{11}(K'_1 + K'_2) + c_{12}(r_1 K'_2 + r_2 K'_1) + \\ & + c_{13}(K'_1 e^{-2\xi r_2} + K'_2 e^{-2\xi r_1}) + c_{14}(K_1 K'_2 + K_2 K'_1) + c_{15} K'_1 K'_2], \end{aligned}$$

где

$$K_a = K(r_a) = \frac{1 - e^{-2\xi r_a}}{r_a}, \quad K'_a = K'(r_a) = \int_0^{r_a} K(r) dr, \quad a = 1, 2. \quad (2)$$

В случае атома гелия по способу, указанному в [1], находим  $\xi = 1,791707$ .

Поскольку функция (1) довольно сложна, для рассмотрения возможностей данного метода ограничимся вначале десятью первыми членами.

Варьируя  $c_i$  ( $i = 1, 2, \dots, 10$ ) при указанном значении  $\xi$ , обычным путем (см. [2]) получаем значения энергии  $E$  и коэффициентов  $c_i$ :

$$E = -2,878152 \text{ ат. ед.}, \quad (3)$$

$$\begin{aligned} c_1 = 1; \quad c_2 = -0,4906879; \quad c_3 = 1,100585; \quad c_4 = 0,6162881; \\ c_5 = 0,1737867; \quad c_6 = -0,2536535; \quad c_7 = 1,454042; \quad c_8 = -0,1479803; \\ c_9 = 0,6577040; \quad c_{10} = 0,3263103. \end{aligned} \quad (4)$$

На втором этапе вычислений применяем метод растяжения координат [2]. Пробную функцию задаем в виде

$$\Psi' = \Psi_1(kr_1, kr_2), \quad (5)$$

где  $k$  — коэффициент растяжения, рассматриваемый как вариационный параметр, а  $\Psi_1$  отличается от  $\Psi$  (1) тем, что положено  $\xi = 1$ . В результате расчета (см. [2]) находим

$$E = -2,878797 \text{ ат. ед.}, \quad (6)$$

$$c_1 = 1; \quad c_2 = -0,2262425; \quad c_3 = 1,445066; \quad c_4 = 1,346797; \quad c_5 = 0,05039023; \\ c_6 = -0,2127090; \quad c_7 = 2,228746; \quad c_8 = -0,1942685; \quad c_9 = 1,747272; \quad (7) \\ c_{10} = 1,478617; \quad k = 1,555353.$$

Вычисления проводились на ЭЦВМ «Минск-2» Вычислительного центра БГУ им. В. И. Ленина.

С волновой функцией (1) при значениях параметров (7) были вычислены среднее значение квадрата расстояния электрона от ядра  $\langle r_1^2 \rangle$ , магнитная восприимчивость  $\chi$  и поляризуемость  $\alpha'$  в основном состоянии атома гелия. Они оказались соответственно равными:

$$\langle r_1^2 \rangle = 1,206845 \text{ ат. ед.}, \quad (8)$$

$$\chi = -1,912433 \cdot 10^{-6} \text{ см}^3, \quad (9)$$

$$\alpha' = 1,294645 \text{ ат. ед.} \quad (10)$$

Магнитная восприимчивость вычислялась по формуле [3]

$$\chi = -\frac{1}{3} \alpha^2 N a^3 \langle r_1^2 \rangle, \quad (11)$$

где  $\alpha$  — постоянная тонкой структуры,  $N$  — число Авогадро,  $a$  — радиус первой боровской орбиты в атоме водорода.

Поляризуемость находилась по формуле [3]

$$\alpha' = -2E', \quad (12)$$

где  $E'$  определяется из условия минимума интеграла

$$E' = 2 \int \Psi'^2 \left[ \beta (z_1 + z_2)^2 + \frac{1}{2} \beta^2 \right] dv_1 dv_2. \quad (13)$$

(Здесь  $\Psi'$  — волновая функция (5),  $z_1, z_2$  — координаты электронов,  $\beta$  — вариационный параметр).

Сравнение полученных результатов с расчетами других авторов приводит к следующим выводам. Значение энергии (6), полученное с помощью десятичной функции (5), лучше значения  $E = -2,878\,598$  ат. ед., достигнутого в работе [4] с использованием также десятичной функции без учета угловой корреляции, и практически совпадает со значением  $E = -2,878\,801$  ат. ед., полученным в работе [5] с помощью функций, содержащих 11 вариационных параметров, восемь из которых входят **нелинейно**. По-видимому, волновая функция (1) довольно хорошо учитывает радиальную корреляцию электронов в атоме гелия в основном состоянии. Действительно, дальнейшее небольшое улучшение значения энергии при расчетах с функциями, не учитывающими угловой корреляции электронов, достигается лишь за счет значительного увеличения числа вариационных параметров. Так, например, в [4] функция, содержащая 21 вариационный параметр, приводит к значению  $E = -2,878\,970$  ат. ед., а увеличение числа вариационных параметров до 66 в [6] улучшает последнее значение энергии только на  $0,548 \cdot 10^{-4}$  ат. ед.

Что касается значения  $\langle r_1^2 \rangle$  (8), то оно находится в лучшем согласии с экспериментальным значением  $\langle r_1^2 \rangle_{\text{exp}} = (1,22_0 \pm 0,006)$  ат. ед., [3], чем все известные авторам результаты, полученные с помощью вариационных волновых функций. Отметим, что Пекерис с помощью функции, содержащей 1078 членов, получил  $\langle r_1^2 \rangle = 1,193483$  ат. ед. [7]. Точно так же значения магнитной восприимчивости (9) и поляризуемости (10) лучше совпадают с экспериментальными значениями  $\chi_{\text{exp}} = -(1,93_3 \pm 0,01) \cdot 10^{-6} \text{ см}^3$  и  $\alpha'_{\text{exp}} = (1,40 \pm 0,01)$  ат. ед., чем значения  $\chi = -1,87 \cdot 10^{-6} \text{ см}^3$  и  $\alpha' = 1,26$  ат. ед., которые получаются при вычислениях с волновой функцией Хартри [3]. Таким образом, использованный здесь метод обладает определенной эффективностью и заслуживает внимания.

### Литература

1. Федоров Ф. И. Весті АН БССР, сер. фіз.-матэм. навук, № 3, 1968.
2. Гомбаш П. Проблема многих частиц в квантовой механике. М., 1953.
3. Бёте Г., Солпитер Э. Квантовая механика атомов с одним и двумя электронами. М., 1960.
4. Shull H., Löwdin P. O. J. Chem. Phys., 30, 617, 1959.
5. Handler G. S., Joy H. W. J. Chem. Phys., 40, 2408, 1964.
6. Davis H. L. J. Chem. Phys., 39, 1827, 1963.
7. Pekeris C. L. Phys. Rev., 115, 1216, 1959.

Белорусский государственный университет  
им. В. И. Ленина

Поступило в редакцию  
26.IV 1968

Н. И. КАБАЕВ

**О КОНКУРЕНЦИИ ВОЛН В КОЛЬЦЕВОМ ЛАЗЕРЕ  
 В СЛУЧАЕ СИЛЬНОГО ПОЛЯ В СМЕСИ ИЗОТОПОВ Ne**

Теоретическое исследование конкуренции волн в кольцевом ОКГ для случая малой интенсивности излучения проводилось в ряде работ [1—4]. Экспериментальное исследование в [5, 6] показало хорошее соответствие теоретических и экспериментальных результатов.

В статье, исходя из амплитудных уравнений, проведен расчет зоны подавления одной из волн без ограничения величины действующего поля в смеси изотопов Ne.

Если пренебречь связью между волнами за счет рассеяния, то из амплитудных уравнений [7—9] вытекают следующие уравнения для интенсивности двух встречных волн, генерируемых в кольцевом ОКГ:

$$\frac{dU_1}{dt} = U_1 \beta [k_{1yc} - k_1^n], \quad (1a)$$

$$\frac{dU_2}{dt} = U_2 \beta [k_{2yc} - k_2^n], \quad (1б)$$

где  $U_1, U_2$  — интенсивности волн;  $k_{yc}, k^n$  — коэффициенты усиления и потерь соответствующей волны;  $\beta$  — некоторый постоянный параметр, не зависящий от интенсивности волн.

Без учета пульсации населенностей рабочих уровней коэффициент усиления с учетом наличия изотопа Ne<sup>22</sup> определяется выражением [7—9]

$$k_{iyc} = k_0 \frac{\gamma}{\pi} \int \left\{ e^{-\left(\frac{v}{\bar{v}}\right)^2} d(kv) \right\} \times \\
 \times \left\{ [v_i - v_0 - kv]^2 + \gamma^2 \left[ 1 + \frac{\alpha U_i \gamma / \pi}{(v_i - v_0 - kv)^2 + \gamma^2} + \right. \right. \\
 \left. \left. + \frac{\alpha U_j \gamma / \pi}{(v_j - v_0 - kv)^2 + \gamma^2} \right] \right\}^{-1} + C_i. \quad (2)$$

где  $k_0$  — начальный коэффициент усиления в центре линии  $v_0$ ;  $v_i$  — частота генерации  $i$ -ой волны;  $\gamma$  — однородная ширина линии;  $\alpha$  — параметр нелинейности активной среды;

$$\bar{v} = \sqrt{\frac{2kT}{M}}; \quad k = \frac{2\pi}{\lambda}; \\
 C_i = k'_0 \frac{\gamma}{\pi} \int \left\{ e^{-\left(\frac{v}{\bar{v}}\right)^2} d(kv) \right\} \times \\
 \times \left\{ [(v_i - v'_0 - kv)^2 + \gamma^2] \left[ 1 + \frac{\alpha U_i \gamma / \pi}{(v_i - v'_0 - kv)^2 + \gamma^2} + \right. \right. \\
 \left. \left. + \frac{\alpha U_j \gamma / \pi}{(v_j - v'_0 - kv)^2 + \gamma^2} \right] \right\}^{-1}; \quad (3)$$

$k'_0$  — начальный коэффициент усиления в центре линии  $v_0$  изотопа Ne<sup>22</sup>.

В условиях стационарной генерации ( $\dot{U}_1 = \dot{U}_2 = 0$ ) система уравнений (1) имеет три решения, соответствующих как одноволновому, так и двухволновому режимам генерации. При этом одноволновые решения описывают явления полного подавления генерации на одной из волн. В случае газовых систем с доплеровским уширением эти решения имеют вид:

$$U_i = 0; \quad \frac{\alpha U_j}{\gamma \pi} \left[ \left( \frac{k_0 e^{-\left(\frac{v_i - v_0}{k\bar{v}}\right)^2} + k'_0 e^{-\left(\frac{v_j - v_0}{k\bar{v}}\right)^2}}{k_j^n} \right)^2 - 1 \right]; \quad i \neq j = 1, 2. \quad (4)$$

Можно показать, что однонаправленная генерация на  $j$  волне устойчива по отношению к малым возмущениям при условии

$$k_{iyc} - k_i^n < 0. \quad (5)$$

Подставляя (2), (3), (4) в (5) и производя интегрирование по скоростям при  $k\bar{v} \gg \gamma \left( 1 + \frac{\alpha U_j}{\gamma \pi} \right)^{1/2}$ , получим

$$e^{-\xi_i^2} - A \frac{\alpha U_j}{\gamma \pi} \left\{ e^{-\xi_i^2} + \frac{e^{-\xi_j^2}}{\left( 1 + \frac{\alpha U_j}{\gamma \pi} \right)^{1/2}} \left[ \frac{2\xi^2}{\xi^2 + \frac{\alpha U_j}{\gamma \pi}} - 1 \right] \right\} + C_i - \frac{1}{X_i} < 0, \quad (6)$$

где  $X_i$  — отношение коэффициента усиления в центре линии  $\text{Ne}^{20}$  к коэффициенту потерь для  $i$ -ой волны;

$$\xi_i = \frac{v_i - v_0}{k\bar{v}}; \quad \xi = \frac{v_i + v_j - 2v_0}{\gamma};$$

$$A = \frac{1}{\frac{\alpha U_j}{\gamma \pi} + \xi^2 + \frac{4\xi^2}{\xi^2 + \frac{\alpha U_j}{\gamma \pi}}}; \quad (7)$$

$\frac{\alpha U_j}{\gamma \pi}$  определяется выражением (4);

$$C_i = X_i \left\{ e^{-\xi_i'^2} - A' \frac{\alpha U_j}{\gamma \pi} \left[ e^{-\xi_i'^2} + \frac{e^{-\xi_j'^2}}{\left( 1 + \frac{\alpha U_j}{\gamma \pi} \right)^{1/2}} \left( \frac{2\xi'^2}{\xi'^2 + \frac{\alpha U_j}{\gamma \pi}} - 1 \right) \right] \right\}, \quad (8)$$

где  $X_i''$  — отношение коэффициента усиления в центре линии  $\text{Ne}^{22}$  к коэффициенту усиления в центре линии  $\text{Ne}^{20}$ ;

$$\xi_i' = \frac{v_i - v_0'}{k\bar{v}}, \quad \xi' = \frac{v_i + v_j - 2v_0'}{\gamma};$$

$$A' = \frac{1}{\frac{\alpha U_j}{\gamma \pi} + \xi'^2 + \frac{4\xi'^2}{\xi'^2 + \frac{\alpha U_j}{\gamma \pi}}}. \quad (9)$$

Поскольку изотопический сдвиг частоты по результатам измерений [10, 11]  $\nu'_0 - \nu_0 = 900 \text{ Мгц}$  для  $\lambda = 0,63 \text{ мк}$  и  $\nu'_0 - \nu_0 = 260 \text{ Мгц}$  для  $\lambda = 1,115 \text{ мк}$  гораздо больше естественной ширины линии, то

$$C_i \approx X_i'' e^{-\xi_i'^2} \quad (10)$$

Из (6) и (10) следует, что однонаправленная генерация на  $j$ -ой волне происходит в области расстройки частот генерации относительно центра линий, удовлетворяющих соотношению

$$\xi_1 < \xi < \xi_2, \quad (11)$$

где  $\xi_1, \xi_2$  — корни трансцендентного уравнения

$$\xi^2 = \frac{\gamma_1}{2} \pm \sqrt{\frac{\gamma_1^2}{4} + \gamma_2}, \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \gamma_1 = [X_i' (1 - X_j' e^{-\xi_j'^2})^3 + (3 + X_j'^2 e^{-2\xi_j'^2}) (e^{-\xi_j'^2} - e^{-\xi_i'^2}) X_i' X_j' + \\ + 2(X_j'^2 e^{-2\xi_j'^2} + 1) (X_j' - X_i')] [X_j' (e^{-\xi_i'^2} X_i' - 1)]^{-1}; \end{aligned}$$

$$\gamma_2 = \frac{[X_j'^2 e^{-2\xi_j'^2} - 1]^2 (X_j' - X_i')}{X_j' (X_i' e^{-\xi_i'^2} - 1)}; \quad (13)$$

$$X_j' = X_j (1 + X_j'' e^{-\xi_j'^2 + \xi_j^2}); \quad X_i' = \frac{X_i}{1 - C_i X_i}$$

Решение (12) в случае равных потерь будем искать методом последовательных приближений. В качестве нулевого приближения возьмем

$$\xi_0^2 = \gamma_1, \quad (14)$$

которое справедливо в области расстройки

$$\xi_0^2 \gg \gamma_2. \quad (15)$$

Разлагая  $e^{-\xi_{ij}^2}$  в ряд по степеням  $\xi_{ij}^2$ , согласно (12), (13), зону подавления  $i$  волны ( $U_i = 0$ ) определим выражением:

$$\begin{aligned} \Delta \xi = 2 \left\{ \left[ \frac{(3 + X_j'^2) X_i' \frac{\gamma^2}{(k\nu)^2} \delta}{2(X_i' - 1)} \right]^2 - \right. \\ \left. - \left[ \frac{X_i' (X_i' - 1)^3 + 4X_j X_j'' e^{-\xi_j'^2} \left( X_j' - 1 + \frac{\gamma^2}{(k\nu)^2} \cdot 2\Delta\nu_{\text{из}} \delta \right)}{X_j' (X_i' - 1)} \right]^2 \right\}^{\frac{1}{2}}; \quad (16) \end{aligned}$$

$$\delta = \frac{\nu_i - \nu_j}{\gamma}; \quad \Delta\nu_{\text{из}} = \frac{\nu'_0 - \nu_0}{k\nu}$$

В случае малых расщеплений и больших накачек, когда

$$X'_j - 1 \gg \frac{\gamma^2}{(kv)^2} \cdot 2\Delta v_{из} \delta, \quad (17)$$

зона подавления уменьшается с ростом концентрации  $Ne^{22}$ . В этом случае сравнительно небольшие концентрации  $Ne^{22}$  приводят к отсутствию подавления волн. Например, для  $X'_j - 1 = 10^{-3}$  концентрации  $Ne^{22} X'_j e^{-\xi_j'^2} = 0,02\%$  обращают зону подавления  $i$ -ой волны в нуль.

Если условие (17) выполнено в обратную сторону, то примесь  $Ne^{22}$  может как увеличивать, так и уменьшать зону подавления в зависимости от знака расщепления  $\delta$ . Для волны, расположенной ближе к центру линии  $Ne^{22}$ , зона подавления уменьшается, а для другой соответственно увеличивается. Наличие изотопа  $Ne^{22}$  равносильно в этом случае увеличению коэффициента усиления для волны, расположенной ближе к центру линии  $Ne^{22}$ .

В первом приближении, когда условие (15) не выполнено, границы зоны подавления определяются из выражения

$$\xi_i^2 = \frac{\xi_0^2}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\xi_0^2}{2}\right)^2 + \gamma_2}. \quad (18)$$

Можно видеть, что зона подавления еще сильнее убывает с ростом концентрации  $Ne^{22}$ .

Если потери различны, то, полагая экспоненциальные члены равными единице, границы зоны подавления определим из выражения

$$\xi^2 = \frac{X'_i(1 - X'_j)^3 + 2(X_j'^2 + 1)(X'_j - X'_i)}{X'_j(X'_i - 1)} \pm \sqrt{\left[\frac{X'_i(1 - X'_j)^3 + 2(X_j'^2 + 1)(X'_j - X'_i)}{X'_j(X'_i - 1)}\right]^2 - \frac{(X_j'^2 - 1)^2(X'_j - X'_i)}{X'_j(X'_i - 1)}}. \quad (19)$$

Следовательно, зона подавления  $i$ -ой волны убывает с ростом концентрации  $Ne^{22}$ .

В случае малых накачек, когда

$$(X'_{i,j} - 1) \ll 1; \quad (1 - X'_j)^3 \ll (X'_j - X'_i), \quad (20)$$

зона подавления определяется из выражения

$$\Delta\xi = \sqrt{\frac{X_j - X_i - X_j X'_j e^{-\xi_i'^2} (X_j + X_j X'' e^{-\xi_j'^2} - 1)}{X'_j(X'_i - 1)}}. \quad (21)$$

Таким образом, наличие изотопа  $Ne^{22}$  при выполнении условия (17) уменьшает конкуренцию волн как в случае равных, так и различных потерь. При этом сравнительно небольшие концентрации  $Ne^{22}$  сильно сказываются на конкуренции волн в зоне подавления.

### Литература

1. Агопowitz F. Phys. Rev., 139, A635, 1965.
2. Зейгер С. Г., Фрадкин Э. Е. Опт. и спектр., 21, 386, 1966.
3. Климантович Ю. П., Ланда П. С., Парнонцев Е. Г. ЖЭТФ, 52, 16, 1967.
4. Желнов Б. П., Смирнов В. С. Опт. и спектр., 23, 2, 1967.

5. Hitchings T. J., Durrett R. H., Jacobs F. D., Zingery W. L. *Phys. Rev.*, **152**, 467, 1967.
6. Багаев С. Н., Кузнецов В. С., Троцкий Ю. Т., Тронин Б. И. *ЖЭТФ*, **1**, 21, 1965.
7. Круглик Г. С. К теории биений в кольцевом ОКТ. Минск, 1967.
8. Квантовая оптика и квантовая радиофизика. Изд. «Мир», 1966.
9. Методы расчета оптических квантовых генераторов. Под редакцией Б. И. Степанова. Минск, 1966.
10. Zory Peter. *Appl. Phys.*, **37**, 9, 1966.
11. Cordover R. H., Jaseisd T. S., Javan A. *Appl. Phys. Letters*, **7**, 12, 1965.

Институт физики  
АН БССР

Поступило в редакцию  
3.VII 1968

А. Е. ЛЕВАШЕВ, В. Н. ТУНЯК

### К ОПРЕДЕЛЕНИЮ СИММЕТРИИ ПОЛЯ В ПОЛУМЕТРИЧЕСКОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Для физических процессов особый интерес представляют предельные группы симметрии, рассмотренные П. Кюри, когда одна или обе оси симметрии становятся осями бесконечного порядка [1]. Для теории относительности естественно локальное определение элементов симметрии посредством условий, накладываемых на коэффициенты аффинной связности [2]. В частности, эти условия могут быть наложены на тензорную часть этих коэффициентов. Рассмотрим этот метод определения симметрии на примере полуметрического центрально-симметричного пространства — времени при наличии кручения.

Полуметрическое пространство будем считать центрально-симметричным, если оно допускает 3-членную группу движений [3], с векторами Киллинга, имеющими, например, в сферических координатах ( $x^0 = ct$ ,  $x^1 = r$ ,  $x^2 = \Theta$ ,  $x^3 = \varphi$ ) следующий вид:

$$\begin{aligned}\xi_1^v &= \cos \varphi \delta_2^v - \sin \varphi \operatorname{ctg} \Theta \delta_3^v, \\ \xi_2^v &= \sin \varphi \delta_2^v + \cos \varphi \operatorname{ctg} \Theta \delta_3^v, \\ \xi_3^v &= -\delta_3^v\end{aligned}\quad (1)$$

(греческие индексы  $\alpha, \beta, \gamma, \dots$  принимают значения 0, 1, 2, 3; латинские —  $i, k, l, \dots$  — 1, 2, 3).

В соответствии с этим определением компоненты метрического тензора  $g_{\mu\nu}$  вектор

$$Q_\mu = -\frac{1}{4} g^{\alpha\beta} \nabla_\mu g_{\alpha\beta} \quad (2)$$

и тензор кручения

$$S_{\alpha\beta}^v = \Gamma_{[\alpha\beta]}^v \quad (3)$$

удовлетворяют следующей системе уравнений

$$\xi_k^\mu \partial_\mu g_{\alpha\beta} + 2g_{\mu(\alpha} \partial_{\beta)} \xi_k^\mu = 0, \quad (4)$$

$$\xi_k^\mu \partial_\mu Q_\lambda + Q_\mu \partial_\lambda \xi_k^\mu = 0, \quad (5)$$

$$\xi_k^\mu \partial_\mu S_{\alpha\beta}^\gamma + 2S_{\mu[\beta}^\gamma \partial_{\alpha]} \xi_k^\mu + S_{\beta\alpha}^\mu \partial_\mu \xi_k^\gamma = 0. \quad (6)$$

Уравнения (4), описывающие метрический тензор  $g_{\mu\nu}$ , были рассмотрены в теории центрально-симметричных гравитационных полей ОТО, поэтому мы приведем соответствующие результаты:

$$g_{\mu\nu} = 0 \text{ (при } \mu \neq \nu); g_{33} = g_{22} \sin^2 \Theta, \quad (7)$$

компоненты  $g_{11}$ ,  $g_{22}$ ,  $g_{00}$  являются функциями  $r$  и  $t$ .

Из уравнений (5), (6) следует, что в силу центральной симметрии пространства—времени обращаются в нуль следующие компоненты тензора кручения и вектора  $Q_\lambda$ :

$$Q_a = 0; S_{aa}^a = 0; S_{10}^a = S_{a1}^0 = S_{a0}^1 = 0. \quad (8)$$

( $a = 2, 3$ ; по  $a$  суммирование не проводится).

Далее находим, что компоненты  $S_{10}^0, S_{10}^1, S_{20}^2, S_{30}^3, S_{12}^2, S_{13}^3, Q_1, Q_0$ , вообще говоря, не равны нулю и являются функциями только  $r$  и  $t$ , причем

$$S_{02}^2 = S_{03}^3; S_{12}^2 = S_{13}^3. \quad (9)$$

Компоненты  $S_{23}^0, S_{23}^1, S_{12}^2, S_{13}^2, S_{03}^3, S_{02}^3$  являются функциями и переменной  $\Theta$ :

$$\begin{aligned} S_{23}^0 &= \sin \Theta F_0(r, t), \\ S_{23}^1 &= \sin \Theta F_1(r, t), \\ S_{30}^2 &= \sin \Theta F_2(r, t), \\ S_{10}^2 &= \sin \Theta F_3(r, t), \end{aligned} \quad (10)$$

где  $F_0, F_1, F_2, F_3$  — произвольные функции  $r$  и  $t$ . Согласно (6),

$$S_{13}^2 + \sin^2 \Theta S_{12}^3 = 0, \quad (11)$$

$$S_{03}^2 + \sin^2 \Theta S_{02}^3 = 0. \quad (12)$$

Таким образом, в соответствии с (8), (9), (11), (12), в центрально-симметричном пространстве имеется всего 8 независимых компонент тензора кручения. В частности, при наличии кручения в силу соотношения (10) элемент сферы заданного радиуса  $r$  обладает высокой максимальной диссимметрией—осью бесконечного порядка  $\infty$ , направленной вдоль радиуса, и допускает существование энантиоморфных (правых и левых) форм в зависимости от знака функции  $F_\alpha$ . И только для элемента сферы при  $\theta=0$  возникает локально плоскость симметрии, что является координатным эффектом. Диссимметрия понижается до  $\infty \cdot m$ .

Следовательно, в общем случае центрально-симметричного нестатического полуметрического пространства—времени его геометрия полностью определяется 13 функциями переменных  $r$  и  $t$ : 8— $S_{\lambda\nu}^\mu$ , 2— $Q_\lambda$ , 3— $g_{\mu\nu}$ . Для их нахождения необходимо задание системы дополнительных уравнений.

Физическим примером полуметрического пространства—времени с кручением может служить гравитационное поле шаровой симметрии. В тетрадной формулировке общей теории относительности с «мягкими» тетрадами [4, 5]

$$\Gamma_{\lambda\mu\nu} = \bar{\Gamma}_{\lambda\mu\nu} + g_{\lambda\mu} Q_\nu - 2g_{\nu[\lambda} f_{\mu]} - V_{[\lambda\mu\nu]}, \quad (13)$$

причем  $\nabla_\lambda g_{\mu\nu} = -g_{\mu\nu} Q_\lambda$ .

Выбор такой связности гарантирует, с одной стороны, сохранение изотропности вектора при квазипараллельном перенесении, с другой—квазиклассический вид уравнений движения в гравитационном поле

$$\ddot{x}^\lambda + \bar{\Gamma}_{\mu\nu}^\lambda \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu = f^\lambda. \quad (14)$$

Тривектор  $V_{[\mu\nu]}$  характеризует некоторое вращение,

$$V_{[012]} = \frac{\omega r}{1 - \omega^2 r^2}, \quad (15)$$

где  $\omega$  — угловая скорость.

### Литература

1. Шубников А. В. УФН, 59, 591, 1956.
2. Левашев А. Е. Тр. физ.-техн. инст. АН УзССР, 2, 55, 1949.
3. Петров А. З. Пространства Эйнштейна. М., 1961.
4. Левашев А. Е. App. d. Phys, 18, 209, 1966.
5. Левашев А. Е., Иваницкая О. С. Acta. phys. polon., 23, 647, 1963.

Белорусский государственный  
университет

Поступило в редакцию  
5.VII 1968

В. А. ЕМЕЛИЧЕВ, В. И. КОМЛИК

## О ПРОБЛЕМЕ НАДЕЖНОСТИ

Задачу надежности устройства во многих случаях можно формулировать как задачу построения надежного устройства из менее надежных компонент на основе дублирования. Если устройство состоит из некоторого числа последовательных ступеней, то его надежность, т. е. вероятность безотказной работы, можно принять равной произведению вероятностей безотказной работы отдельных ступеней. Увеличение надежности отдельной ступени происходит за счет параллельного размещения компонент-дублеров. При этом приходится учитывать практические ограничения по стоимости, объему, весу, потребляемой мощности и т. д. Таким образом, задача состоит в конструировании максимально надежного устройства с учетом указанных линейных ограничений, т. е. в максимизации функционала

$$P(X) = P(x_1, x_2, \dots, x_n) = \prod_{j=1}^n p_j(x_j) \quad (1)$$

при условиях

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \leq b_i, \quad i = 1, 2, \dots, m; \quad (2)$$

$$x_j = 0, 1, 2, \dots, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad (3)$$

где  $1+x_j$  — число компонент-дублеров, используемых в  $j$ -ой ступени;  $p_j(x_j)$  — вероятность безотказной работы  $j$ -ой ступени, когда в ней используется  $1+x_j$  компонент;  $a_{ij}$  —  $i$ -я характеристика  $j$ -ой ступени (например, вес, объем, стоимость и т. д.);  $b_i$  — ограничение по  $i$ -ой характеристике.

Как известно [1], для решения этой задачи при  $m=1$  эффективно используется метод динамического программирования. Однако по мере увеличения числа ограничений трудоемкость метода и требования, предъявляемые к памяти вычислительной машины, резко возрастают в связи с необходимостью вычисления функций  $m$  переменных. При решении задачи с двумя линейными ограничениями оказалось удобнее ввести множитель Лагранжа и использовать принцип оптимальности на каждом шаге, соответствующем выбранному значению множителя Лагранжа. В [2] используется иной путь для решения задачи (1) — (3) с тремя ограничениями. Задача надежности системы, содержащей два типа компонент, рассматривается в работе [3]. Решение этой задачи основано на использовании правил «доминирования».

Предлагаемый метод позволяет, на наш взгляд, в некоторой мере преодолеть трудности, связанные с размерностью. Метод состоит в направленном переборе планов вспомогательной задачи с одним линейным ограничением до получения плана задачи (1) — (3), который и будет

оптимальным, т. е. решение многомерной задачи, сводится к решению ряда одномерных задач. Кроме того, метод применим к решению задач надежности, в которых наряду с линейными ограничениями (2) должны выполняться и нелинейные.

Основное функциональное уравнение для решения задачи  $A_i$  максимизации функционала (1) при ограничениях

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \leq b_i, \quad x_j = 0, 1, 2, \dots, j = 1, 2, \dots, n$$

имеет вид (см. [1])

$$f_k(z) = \max_{0 < x_k < \left[ \frac{z}{a_{ik}} \right]} [p_k(x_k) f_{k-1}(z - a_{ik}x_k)], \quad k = 2, 3, \dots, n,$$

где  $0 \leq z \leq b_i$ , причем  $f_1(z) = p_1 \left( \left[ \frac{z}{a_{i1}} \right] \right)$ .

План  $\bar{X} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)$  задачи  $A_i$  будем называть  $k$ -оптимальным ( $1 \leq k \leq n$ ) и обозначать

$$(*, *, \dots, *, \bar{x}_{k+1}, \dots, \bar{x}_n),$$

если

$$P(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n) = \prod_{j=k+1}^n p_j(x_j) f_k \left( b_i - \sum_{j=k+1}^n a_{ij}\bar{x}_j \right).$$

Таким образом, план  $\bar{X} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)$  является  $k$ -оптимальным планом задачи  $A_i$ , если  $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_k)$  — оптимальный план задачи максимизации функционала  $\prod_{j=1}^k p_j(x_j)$  при условиях:

$$\sum_{j=1}^k a_{ij}x_j \leq b_i - \sum_{j=k+1}^n a_{ij}\bar{x}_j,$$

$$x_j = 0, 1, 2, \dots, j = 1, 2, \dots, k.$$

Используя понятие  $k$ -оптимального плана задачи  $A_i$ , можно следующим образом описать алгоритм построения последовательности планов задачи  $A_i$  в порядке невозрастания функционала, т. е. такой последовательности  $X_i^1, X_i^2, \dots$ , что

$$P(X_i^k) = \max_{x \in G_i^k} P(X), \quad k = 1, 2, \dots,$$

где

$$G_i^1 — \text{множество планов задачи } A_i,$$

$$G_i^k = G_i^{k-1} \setminus X_i^{k-1}, \quad k = 2, 3, \dots$$

Первый шаг. Среди множества  $W_1(n-1)$ -оптимальных планов

$$(*, *, \dots, *, l), \quad l = 0, 1, 2, \dots, \left[ \frac{b_i}{a_{in}} \right]$$

задачи  $A_i$  находим такой план  $X_i^1 = (*, *, \dots, *, s_n^1) = (s_1^1, s_2^1, \dots, s_n^1)$ , что

$$P(X_i^1) = \max_{x \in W_1} P(X).$$

$k$ -ый шаг ( $k=2, 3, \dots$ ). Множество планов  $W_{k-1}$  преобразуем во множество  $W_k$  по следующему правилу. Оставляем без изменения все планы множества  $W_{k-1}$ , кроме плана

$$X_i^{k-1} = (*, *, \dots, *, s_p^{k-1}, \dots, s_n^{k-1}) = (s_1^{k-1}, s_2^{k-1}, \dots, s_n^{k-1}),$$

который заменяем системой планов

$$(*, *, \dots, *, s_{q-1}^{k-1}, s_q^{k-1}, \dots, s_p^{k-1}, \dots, s_n^{k-1}),$$

где

$$q = 2, 3, \dots, p,$$

$$s_{q-1} = 0, 1, 2, \dots, s_{q-1}^{k-1} - 1, s_{q-1}^{k-1} + 1, \dots, \left[ \frac{b_i - \sum_{i=q}^n a_{ij} s_j^{k-1}}{a_{i,q-1}} \right].$$

Далее находим такой план  $X_i^k$ , что

$$P(X_i^k) = \max_{x \in W_k} P(X),$$

и переходим к следующему шагу.

Теперь сформулируем алгоритм  $\psi$  поиска оптимального плана задачи (1)–(3).

На предварительном шаге работы алгоритма  $\psi$  среди задач  $A_i$  ( $i=1, 2, \dots, m$ ) выбираем ту  $A_i$ , для которой оптимальное значение функционала (1) наименьшее<sup>1)</sup>.

$k$ -ый шаг ( $k=1, 2, \dots$ ) алгоритма  $\psi$  состоит в построении с помощью алгоритма  $\phi$  плана  $X_i^k$  задачи  $A_i$  и проверке выполнимости условий (2). Если  $X_i^k$  удовлетворяет условиям (2), то он оптимальный план задачи (1)–(3), если не удовлетворяет, то осуществляется переход к  $(k+1)$ -му шагу.

Оптимальность плана, полученного в результате работы алгоритма  $\psi$ , можно обосновать, повторяя аргументацию работы [4].

### Литература

1. Беллман Р., Дрейфус С. Прикладные задачи динамического программирования. Изд. «Наука», 1965.
2. Алексеев О. Г., Якушев В. И. Об алгоритме оптимального резервирования аппаратуры. Известия АН СССР. Техническая кибернетика, № 3, 1964.
3. Groschan F., Gray T. A. Optimum Redundancy under Multiplay Constrains. Oper. Res., v. 13, № 5, 1965.
4. Комлик В. И., Емеличев В. А. Об одной задаче целочисленного программирования. Вестн АН БССР, сер. физ.-мат. наук, № 4, 1968.

Белорусский государственный университет  
им. В. И. Ленина, ЦНИИТУ

Поступило в редакцию  
19.III 1968

<sup>1)</sup> Задачи  $A_i$  ( $i=1, 2, \dots, m$ ) можно решить методом динамического программирования (см. [1]).

ХОАНГ ДИНЬ ЗУНГ

**ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ОБРАТНОЙ СМЕШАННОЙ КРАЕВОЙ  
 ЗАДАЧИ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ**

Обратная смешанная краевая задача аналитических функций ставится следующим образом [1].

Пусть известная часть некоторого контура  $L_z$  будет полигон  $L_z^1$ , проходящий через заданные точки  $z_j^0$  ( $j = \overline{1, n}$ ), на котором задано краевое условие

$$\Phi(u, v) = 0, \quad (1)$$

связывающее действительную и мнимую части аналитической функции  $w = u + iv$ .

На неизвестной части  $L_z^2$  контура  $L_z$  задаются условия

$$u = f_1(\tau), \quad v = f_2(\tau), \quad \tau \in [\tau_n, \tau_1], \quad (2)$$

$\tau$  означает один из следующих параметров:  $x = \operatorname{Re} z$ ,  $\alpha = \operatorname{arctg} y_x$ ,  $\theta = \operatorname{arg} z$ ,  $r = |z|$  или  $s$  — дуговую абсциссу  $L_z^2$ , для которых возрастание (или убывание)  $\tau$  от  $\tau_n$  до  $\tau_1$  соответствует обходу  $L_z^2$  в положительном направлении.

Требуется определить неизвестную часть  $L_z^2$  и функцию  $w(z)$ , аналитическую в области, ограниченной контуром  $L_z$ , и удовлетворяющую краевым условиям (1), (2). При этом предполагается, что функции  $f_1(\tau)$  и  $\Phi(u, v)$  однозначные и дважды непрерывно дифференцируемые по их аргументам, а точки  $w_1^0 = f_1(\tau_1) + if_2(\tau_1)$ ,  $w_n^0 = f_1(\tau_n) + if_2(\tau_n)$  являются концами дуги  $\Phi(u, v) = 0$  в плоскости  $w = u + iv$ . Эти условия позволяют получить в плоскости  $w$  замкнутый кусочно-гладкий контур  $L_w = L_w^1 + L_w^2$ , определяемый уравнениями (1), (2). Без ограничения общности можно считать  $f_i(\tau)$  такими, что направления обхода на дугах  $L_z^2$  и  $L_w^2$  совпадают; тогда контур  $L_w$  может быть получен конформным отображением области  $D_z^+$ , внутренней к  $L_z$ , на область  $D_w$  с помощью аналитической функции  $w = u + iv$  с граничными значениями (1), (2).

В дальнейшем мы рассмотрим устойчивость обратной смешанной краевой задачи по отношению к малым изменениям дуги  $L_w^2$ , соответствующей неизвестной части  $L_z^2$ , или, что то же самое, по отношению к задаваемым контурным значениям (2) аналитической функции  $w(z)$ .

Понятие устойчивости задачи определено, как и в [4].

1. Здесь мы рассмотрим только случай, когда  $\tau \equiv x = \operatorname{Re} z$ . Для других случаев параметра  $\tau$  рассмотрение аналогично. Решение задачи в этом случае имеет вид [1]

$$z = F(\zeta) = -\frac{1}{\pi} \int_0^\zeta \frac{\Pi(\xi)}{\xi} \int_{L_\zeta^2} \frac{h(t)}{\Pi(t)} \left\{ \frac{1}{t-\zeta} - \frac{1}{2t} \right\} dt d\xi + C, \quad (3)$$

где  $\Pi(\zeta) = \prod_{i=1}^n (\zeta - t_i)^{\alpha_i - 1}$ ,  $\alpha_i \pi$  ( $i = \overline{1, n}$ ) — внутренние углы при вершинах многоугольника, составленного из заданного полигона и прямых  $x = x_1^0$ ,  $x = x_n^0$ ;  $h(t) = ith^*(t)$ ,  $h^*(t) = \frac{dx}{dt} = \frac{\omega_t(t)}{\omega_x[H(t)]}$ ;  $\omega = \omega(\zeta)$  — функция, конформно отображающая круг  $|\zeta| \leq 1$  на область  $D_\omega$ ;  $x = H(t, t_0, t_1, t_n)$  определится из граничного соотношения:  $f_1(x) + f_2(x) \equiv \omega(t)$ ;  $t \in L_\zeta^2$  — дуга окружности  $|t|=1$ , соответствующая  $L_\omega^2$ ; точкам  $t_i$  ( $i = \overline{1, n}$ ) соответствуют точки  $z_i^0$  ( $i = \overline{1, n}$ ) при конформном отображении круга  $|\zeta| < 1$  на область  $D_z^+$ .

Перейдем теперь к установлению устойчивости задачи. Учитывая формулу представления решения (3) этой задачи, рассмотрим прежде всего сходимость последовательности интегралов вида

$$\Phi_m(\zeta) = \int_0^\zeta Q_m(\zeta) \int_{L_\zeta^2} \frac{P_m(t) dt}{t - \zeta} d\zeta \quad (m = 1, 2, \dots), \quad (4)$$

где  $\zeta$  — точки круга  $|\zeta| < 1$ .

Лемма 1. Если последовательности функций  $\{Q_m(\zeta)\}$  и  $\{P_m(t)\}$  равномерно сходятся соответственно к функциям  $Q(\zeta)$  и  $P(t)$  в областях их определенности, то последовательность  $\{\Phi_m(\zeta)\}$  тоже равномерно сходится внутри единичного круга к  $\Phi(\zeta)$ ,

$$\Phi(\zeta) = \int_0^\zeta Q(\zeta) \int_{L_\zeta^2} \frac{P(t) dt}{t - \zeta} d\zeta. \quad (5)$$

Доказательство. Рассмотрим разность (4) и (5):

$$\Phi_m(\zeta) - \Phi(\zeta) = \int_0^\zeta Q_m(\zeta) \int_{L_\zeta^2} \frac{P_m(t) dt}{t - \zeta} d\zeta - \int_0^\zeta Q(\zeta) \int_{L_\zeta^2} \frac{P(t) dt}{t - \zeta} d\zeta.$$

Пусть функции  $Q_m(\zeta)$ ,  $Q(\zeta)$ ,  $P_m(t)$ ,  $P(t)$  удовлетворяют условию перестановки порядка интегрирования. Разность можно переписать в виде

$$\Phi_m(\zeta) - \Phi(\zeta) = \int_0^\zeta d\zeta \int_{L_\zeta^2} \frac{Q_m(\zeta) P_m(t) - Q(\zeta) P(t)}{t - \zeta} dt. \quad (6)$$

По предложению леммы последовательность  $\{Q_m(\zeta)\}$  равномерно сходится к  $Q(\zeta)$  в круге  $|\zeta| \leq 1$ , значит, для любого малого заданного  $\varepsilon_1 > 0$  существует  $N_1 > 0$  такое, что при  $m > N_1$  для всех  $\zeta \in |\zeta| \leq 1$  будет  $|Q_m(\zeta) - Q(\zeta)| < \varepsilon_1$ . Аналогично для любого заданного  $\varepsilon_2 > 0$  существует  $N_2$  такое, что при  $m > N_2$  для всех  $t \in L_\zeta^2$  будет  $|P_m(t) - P(t)| < \varepsilon_2$ . Отсюда легко получить, что для любого малого заданного  $\varepsilon_3$  существует  $N = \max(N_1, N_2)$  такое, что при  $m > N$  для всех  $\zeta \in |\zeta| \leq 1$  и  $t \in L_\zeta^2$  будет  $|Q_m(\zeta) P_m(t) - Q(\zeta) P(t)| < \varepsilon_3$ . Поэтому из (6)

$$|\Phi_m(\zeta) - \Phi(\zeta)| < \varepsilon_3 \int_0^\zeta d\zeta \int_{L_\zeta^2} \frac{dt}{|t - \zeta|}. \quad (7)$$

Из (7), поступая как и в [4], мы, наконец, получим, что последовательность  $\{\Phi_m(\zeta)\}$  равномерно сходится внутри круга  $|\zeta| < 1$  к  $\Phi(\zeta)$ . Этим лемма доказана.

Возьмем теперь какую-нибудь внутреннюю допустимую деформацию  $\{L_{\omega_m}^2\}$  части  $L_{\omega}^2$  контура  $L_{\omega}$ , при этом концы  $\omega_n^0$  и  $\omega_1^0$  выберем общими для всех  $L_{\omega_m}^2$  и  $L_{\omega}^2$ . Тогда по (3) искомые дуги  $L_{z_m}^2$  ( $m = 1, 2, \dots$ ) соответственно определяются следующими формулами:

$$z_m = F_m(\zeta) = -\frac{1}{\pi} \int_0^{\xi} \frac{\Pi_m(\zeta)}{\zeta} \int_{L_{\zeta}^2} \frac{h_m(t)}{\Pi_m(t)} \left\{ \frac{1}{t-\zeta} - \frac{1}{2t} \right\} dt d\zeta + C \quad (8)$$

$$(m = 1, 2, \dots),$$

где  $\Pi_m(\zeta) = \prod_{i=1}^n (\zeta - t_i^m)^{\alpha_i - 1}$ ;  $h_m(t) = ith_m^*(t)$ ,  $h_m^*(t) = \frac{dx_m}{dt} = \frac{\omega_t^{m'}(t)}{\omega_{x_m}'[H_m(t)]}$ ;  $\omega = \omega^m(\zeta)$  — функция конформно отображает круг  $|\zeta| < 1$  на область  $D_{\omega_m}$ , ограниченную контуром  $L_{\omega_m} = L_{\omega}^1 + L_{\omega_m}^2$ ;  $x_m = H_m(t, t_0, t_1, t_n)$  определится из граничного соотношения:  $f_1^m(x) + if_2^m(x) \equiv \omega^m(t)$ ;  $t \in L_{\zeta}^2$  — дуга окружности  $|t| = 1$ , соответствующая  $L_{\omega}^2$ . Здесь мы можем выбрать постоянные  $t_1, t_n$  и  $C$  общими для всех  $L_{z_m}$  и  $L_z$  (в формулах (3) и (8)  $L_{\zeta}^2$  и постоянная  $C$  одинаковы), потому что по [2] решение обратной смешанной задачи определится единственно при произвольном выборе трех из постоянных  $t_i$  ( $i = 0, n$ ) и  $C$ ; точкам  $t_i^m$  ( $i = 1, n; m = 1, 2, \dots$ ) соответствуют точки  $z_i^0$  ( $i = 1, n$ ) при конформном отображении круга  $|\zeta| \leq 1$  на область  $D_{z_m}^+$ , ограниченную контуром  $L_{z_m} = L_z^1 + L_{z_m}^2$ .

**Лемма 2.** При любой допустимой деформации  $\{L_{\omega_m}^2\}$  части  $L_{\omega}^2$  контура  $L_{\omega}$  последовательности функций  $\{\Pi_m(\zeta)\}$  и  $\{h_m(t)\}$  в (8) равномерно сходятся соответственно к функциям  $\Pi(\zeta)$  и  $h(t)$  в (3) для всех  $\zeta \in |\zeta| \leq 1$  и  $t \in L_{\zeta}^2$ .

**Доказательство.** Рассмотрим разность

$$\begin{aligned} h_m(t) - h(t) &= it[h_m^*(t) - h^*(t)] = it \left[ \frac{\omega_t^{m'}(t)}{\omega_{x_m}'(H_m(t))} - \frac{\omega_t'(t)}{\omega_x'(H(t))} \right] = \\ &= it \frac{\omega_t^{m'}(\omega_x' - \omega_{x_m}') + \omega_{x_m}'(\omega_t^{m'} - \omega_t')}{\omega_{x_m}' \omega_x'} \end{aligned}$$

Отсюда

$$|h_m(t) - h(t)| \leq \left| \frac{t\omega_t^{m'}}{\omega_{x_m}' \omega_x'} \right| |\omega_{x_m}' - \omega_x'| + \left| \frac{t\omega_{x_m}'}{\omega_{x_m}' \omega_x'} \right| |\omega_t^{m'} - \omega_t'|. \quad (9)$$

Так как функции  $\omega = \omega^m(\zeta)$  и  $\omega = \omega(\zeta)$  соответственно конформно отображают круг  $|\zeta| \leq 1$  на области  $D_{\omega_m}$  и  $D_{\omega}$ , и  $\{L_{\omega_m}^2\}$  — допустимая деформация контура  $L_{\omega}$ , по [5] последовательности функций  $\{\omega^m(\zeta)\}$  и их производных  $\{\omega_t^{m'}(\zeta)\}$  равномерно сходятся в круге  $|\zeta| \leq 1$  соответственно к  $\omega(\zeta)$  и  $\omega_t'(\zeta)$ . Поэтому для любого малого заданного  $\varepsilon_1 > 0$  существует  $N_1 > 0$  такое, что при  $m > N_1$  для всех  $t \in |\zeta| = 1$  будет

$$|\omega_t^{m'} - \omega_t'| < \varepsilon_1. \quad (10)$$

Так как функции  $w = w(z_m)$  и  $w = w(z)$  получаются из функций  $w = \omega^m(\zeta)$  и  $w = \omega(\zeta)$  конформными отображениями круга  $|\zeta| \leq 1$  соответственно на области  $D_{z_m}^+$  и  $D_z^+$ , то последовательность  $\{w = w(x_m)\}$  и, следовательно,  $\{w' = w_{x_m}'\}$  тоже равномерно сходятся соответственно к  $w = w(x)$  и  $w' = w_x'$ . Следовательно, для сколь угодно малого заданного  $\varepsilon_2 > 0$  существует  $N_2 > 0$  такое, что при  $m > N_2$  будет

$$|w_{x_m}' - w_x'| < \varepsilon_2. \quad (11)$$

Теперь из (9)—(11) следует, что

$$|h_m(t) - h(t)| < A\varepsilon_1 + B\varepsilon_2 = \varepsilon,$$

где  $A = \max_{\forall m} \left| \frac{t\omega_t^{m'}}{\omega_{x_m}' \omega_x'} \right|$ ,  $B = \max \left| \frac{t}{\omega_x'} \right|$  — ограниченные величины. Значит, последовательность  $\{h_m(t)\}$  равномерно сходится для всех  $t \in L_z^2$  к функции  $h(t)$ .

Теперь рассмотрим функции  $\Pi_m(\zeta) = \prod_{i=1}^n (\zeta - t_i^m)^{\alpha_i - 1}$  и  $\Pi(\zeta) = \prod_{i=1}^n (\zeta - t_i)^{\alpha_i - 1}$ . Пусть  $t_i^m$  и  $t_i$  соответствуют  $\omega_i^m$  и  $\omega_i^0$  ( $\omega_n^m \equiv \omega_n^0$ ,  $\omega_1^m \equiv \omega_1^0$ ,  $m = 1, 2, \dots$ ) при конформных отображениях  $w = \omega^m(\zeta)$  и  $w = \omega(\zeta)$ , где  $\omega_i^m$  и  $\omega_i^0$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) соответствуют  $z_i$  при конформных отображениях  $w = w(z_m)$  и  $w = w(z)$  областей  $D_{z_m}^+$  и  $D_z^+$  соответственно на  $D_{w_m}$  и  $D_w$ . Из предыдущего последовательность функций  $\{w(x_m)\}$  равномерно сходится к  $w(x)$ , отсюда точки  $\omega_i^m$  стремятся к точкам  $\omega_i^0$ , когда  $m$  стремится к бесконечности. Поэтому точки  $t_i^m$  тоже стремятся к  $t_i$ , значит, последовательность  $\Pi_m(\zeta)$  равномерно сходится к  $\Pi(\zeta)$  для всех  $\zeta \in \{|\zeta| \leq 1\}$ . Этим лемма полностью доказана.

Из предыдущего непосредственно получается следующая

**Теорема.** Если задаваемые функции  $f_i(x)$  и  $\Phi(u, v)$  удовлетворяют условиям, упомянутым в постановке обратной смешанной краевой задачи (1), (2), то эта задача устойчива.

**Доказательство.** Рассмотрим разность (8) и (3)

$$\begin{aligned} z_m - z &= F_m(\zeta) - F(\zeta) = \\ &= -\frac{1}{\pi} \int_0^\zeta \frac{\Pi_m(\zeta)}{\zeta} \int_{L_z^2} \frac{h_m(t)}{\Pi_m(t)} \left\{ \frac{1}{t-\zeta} - \frac{1}{2t} \right\} dt d\zeta + \\ &+ \frac{1}{\pi} \int_0^\zeta \frac{\Pi(\zeta)}{\zeta} \int_{L_z^2} \frac{h(t)}{\Pi(t)} \left\{ \frac{1}{t-\zeta} - \frac{1}{2t} \right\} dt d\zeta. \end{aligned} \quad (12)$$

Из (12) и лемм 1 и 2 следует, что последовательность  $z_m = F_m(\zeta)$  равномерно сходится к функции  $z = F(\zeta)$ . Отсюда по теореме Каратеодори об отображении областей с переменными границами [6] последовательность областей  $D_{z_m}^+$  сходится к ядру  $D_z^+$ , что требовалось доказать.

Дело обстоит аналогично для любой допустимой деформации контура  $L_w^2$ .

2. Предыдущий вывод остается в силе и для случая, когда известная часть контура  $L_z$  состоит из нескольких разомкнутых криволинейных дуг. Это следует из того, что по [2, 3] решение обратной смешанной краевой задачи в этом случае можно получить из ее решения в случае полигональных контуров предельным переходом.

Автор выражает благодарность Ф. Д. Гахову за ценные советы и внимание к работе.

### Литература

1. Монахов В. Н. Материалы I конференции молодых научных работников, г. Казань, секция физ.-мат., 1959.
2. Монахов В. Н. Изв. вузов СССР, «Математика», № 1, 154, 1960.
3. Монахов В. Н. ДАН СССР, 141, № 4, 1961.
4. Хоанг Динь Зунг. Весті АН БССР, сер. фіз.-мат. навук, № 4, 1967.
5. Чикин Л. А. Уч. зап. Ростовского ун-та, 43, в. 6, 1959.
6. Голузин Г. М. Геометрическая теория функций комплексного переменного. Гостехиздат, М., 1952.

*Белорусский государственный университет  
им. В. И. Ленина*

*Поступило в редакцию  
24.IV 1968*

ПЕРАЛІК АРТЫКУЛАЎ,  
ЗМЕШЧАНых У ЧАСОПІСЕ «ВЕСЦІ АКАДЭМІІ НАВУК БССР»,  
СЕРЫЯ ФІЗІКА-МАТЭМАТЫЧНЫХ НАВУК,  
ЗА 1968 г.

Абрашин В. Н. О равномерной сходимости метода гиперплоскостей при решении некоторых нестационарных задач с самосопряженным оператором	3	47
Абрашин В. Н., Бобков В. В. Об одной многоточечной разностной схеме метода интегральных соотношений для гиперболического уравнения	2	57
Айзенштат В. С., Кравчук Д. Н. Об экстремуме линейной формы на множестве всех циклов произвольной длины $k$ группы $S_n$	4	15
Андрэў А. Д., Лойка В. І., Некрашэвіч І. Р. Уплыў экспазіцыі і напружаня на ін'екцыю электронаў з плазмы газавага разраду ў селен	4	123
Архипов Б. М., Хохряков А. Я. К вопросу об оценке матрицы Грина периодической краевой задачи	4	31
Барысаглебскі Л. А., Трусаў В. Ф. Да тэорыі ўнутранай канверсіі на $M$ -абалонцы атама	3	114
Барысевіч Н. А., Грушэцкі К. М. Да пытання аб геаметрычнай і электроннай структуры цукраў	2	109
Бедрицкий А. И. Линейные неприводимые представления пятимерной однородной собственной группы Лоренца	1	112
Бельский З. И. Три-ткани с чебышевскими и геодезическими сетями Гессе	2	66
Бобков В. В. Об одном методе приближенного решения задачи Гурса для гиперболического уравнения второго порядка	3	38
Богданов А. П., Сорока А. В., Тадэуш В. Н., Фирсов Е. И. О мультипольности перехода $0,645 \text{ Мэв}$ в ядре $V^{52}$	2	122
Богущ А. А., Крылов Б. В., Федоров Ф. И. О матрицах уравнений для частиц со спином 2	1	74
Буланов А. П. Приближение $x^{1/3}$ рациональными функциями	2	47
Бурдун А. А. О кривизне неголономной пространственноподобной гиперповерхности в пространстве Минковского	3	55
Варикаш В. М., Шольц Э., Мыл И. Диффузия триглицинсульфата в концентрированных водных растворах	2	119
Власовец Н. Н. О порядке приближения непрерывных функций на конечном отрезке с помощью некоторых алгебраических многочленов	2	31
Воднев В. Т. О пространствах Д. В. Веденяпина	1	61
Высоцкий Ю. М., Федоров А. П. Приставка к АИ-100 для снятия спектров Мессбауэра во временном режиме	1	119
Ганопольскі У. І. Аб дакладнасці фотаметрычных вымярэнняў. Асноўныя крыніцы памылак. I	1	98
Ганич П. Я. Пространственная структура рассеянного «назад» излучения, возникающего от освещения водной среды коллимированным пучком радиации	3	84
Ганопольский В. И., Езерская Т. В. О точности фотометрических измерений. Экспериментальная проверка точности измерений на фильтрофотометре по методу непосредственной фотометрии	2	114
Грибкова В. П. Об уточнении оценки погрешности решения интегральных уравнений Фредгольма методом асимптотических полиномов второго рода	1	25
Гуревич А. Б. К теореме о представимости произвольной функции суммой двух $D$ -непрерывных	3	134
Довыдов Б. Б., Костюкевич Е. А. Исследование ускорителя плазмы рельсового типа	3	108
Дымент З. М. О максимальных коммутативных подалгебрах полной матричной алгебры	1	17
Емеличев В. А., Комлик В. И. О проблеме надежности	5	119
Жаврид Г. П. Максимальные разрешимые подгруппы $GL(4, P)$	3	31

Залесский А. Е. Замечания о треугольной линейной группе . . . . .	2	129
Иваницкая О. С. Неголономные лоренцевы преобразования систем отсчета	5	70
Иваницкая О. С. О свойствах параметров бесконечно малых лоренцевых преобразований в гравитационном поле	4	85
Ильюкевич С. Ф. К решению задачи о дифракции плоской волны на двух параллельных непроводящих круговых цилиндрах	5	45
Ильющанка Л. Ф., Балтушкин А. В., Шэлег М. У., Крывенка М. А. Уплыў матэрыялу падложкі на магнітныя характарыстыкі і структуру электраасаджаных плёнак	5	83
Кабаев Н. И. О конкуренции волн в кольцевом лазере в случае сильного поля в смеси изотопов	5	111
Кавалёў А. А., Піліповіч У. А., Развін Ю. В. Залежнасць некаторых параметраў монаімпульсаў рубінавых АКГ ад пачатковага прапускання пасіўных затвораў	4	92
Казанцев Э. Н. Математическая модель графика выпуска изделий, удовлетворяющего требованию комплектации сборки	1	49
Казушич В. А., Ладес В. И. Автоматическое построение схем, сравнивающих значения линейной функции с заданными константами	4	72
Кацев И. Л., Иванов А. П. Отражение светового импульса от предмета в рассеивающей среде	4	102
Козловский Н. Я. Об оценке остаточного члена интерполяционно-квадратурных формул с узлами Чебышева первого и второго рода	4	53
Комлик В. И., Емеличев В. А. Об одной задаче целочисленного программирования	4	127
Комяк И. И. Об интегральном уравнении типа свертки с $N$ ядрами	3	62
Кононенко В. К., Грибковский В. П. Влияние легирования на пороговый ток в инжекционном лазере	3	98
Корзун Л. Ф. Аб радыяцыйным вымярэнні тэмпературы паверхні цела, якое знаходзіцца ў замкнутой поласці	4	119
Кузнецик О. П. Энергетическая яркость неба в области 1,8—2,5 $\mu\text{м}$	5	98
Кунцевич И. М. К вопросу минимизации значения линейной формы на множестве циклов длины $n$ . I	2	25
Кунцевич И. М. К вопросу минимизации значения линейной формы на множестве циклов длины $n$ . II	3	12
Кунцевич И. М. О минимизации значения линейной формы на множестве всех циклов длины $n$	1	12
Куцак А. А., Пришивалко А. П. Расчет открытых резонаторов в приближении геометрической оптики	5	60
Лапковский А. К. О гиперквадриках с изотропными линиями кривизны	4	47
Левашев А. Е., Туняк В. Н. К определению симметрии поля в полуметрическом пространстве	5	116
Левин Г. М., Танаев В. С. Об одном классе комбинаторных задач оптимизации	5	30
Лисковец В. А., Фейнберг В. З. Автоматные разбиения и подполугруппы свободной полугруппы	1	34
Мажуль М. М., Вайтовіч С. М. Уплыў ультрагукавых кавітацый на скорасць росту цвёрдай фазы з расплаву бетолу	3	120
Макавецкі Г. І. Даследаванне структуры і некаторых фізічных уласцівасцей селеніду і тэлурыду марганцу і іх узаемных раствораў	5	91
Маханёк А. Г., Корольков В. С. Задача об экранировании и антиэкранировании кристаллического поля для $4f^k$ оболочек редкоземельных ионов	2	86
Маханёк А. Г., Корольков В. С., Лонг Н. Н. Задача об экранировании и антиэкранировании ядерных электрических моментов	1	82
Минкевич А. В., Федоров Ф. И. Динамика частицы в параметрической форме и ковариантный вариационный принцип	5	53
Монастырский П. И., Басик В. А. О методе прогонки в случае многомерных разностных уравнений	4	63
Павлов И. А. Коммутативные нильпотентные алгебры матриц класса $n-3$ . I	4	39
Павлов И. А. Коммутативные нильпотентные алгебры матриц класса $n-3$ . II	5	10
Пальчик Э. М. О группах, все $i$ -е максимальные подгруппы которых перестановочны с силовой подгруппой. I	1	45
Поляков Л. Я. О разрешимых группах	2	43
Потупа А. С. К анализу пространственных моделей	5	77
Потупа А. С., Стражев В. И., Томильчик Л. М. Дуальная инвариантность в электродинамике как унитарная симметрия	3	124
Потупа А. С., Стражев В. И., Томильчик Л. М. К проблеме второго заряда в дуально-инвариантной электродинамике	2	126
Потупа А. С., Томильчик Л. М. К вопросу о квантовании пространства в рамках осцилляторной модели	1	117

Примачук Л. П. О числе решений краевой задачи с сопряжением и сдвигом Карлемана	4	20
Пятроўскі І. І., Рэ́кун С. А. Узнікненне адмоўнага супраціўлення ў германіевых і крэмніевых дыёдах заводскага вырабу	1	93
Романовский А. В. Свойства конечной группы, связанные с наибольшим простым делителем ее порядка	2	132
Рубанаў А. С., Чалей А. В. Уплыў нагрэву на работу рубінавага АКГ	2	80
Рудак Э. А. Спектры нижних уровней $Cl^{38}$ и $K^{40}$	2	76
Русаков С. А. О группах с максимальными подгруппами данного вида	1	49
Рябушко А. Г. Метрические свойства центрально-симметрических космологических решений уравнений Эйнштейна и состояние материи в случае зависимости давления от времени	1	105
Рябушко А. П., Филипович К. С. Ограниченная плоская круговая задача трех тел в общей теории относительности	5	36
Самсон А. М., Котомцева Л. А. Расчет шумов в матированном генерирующем стержне за счет проникновения радиации накачки	3	76
Сирота Н. Н., Матяс Э. Е. Исследование твердых растворов системы GaSb—GaAs	5	106
Сирота Н. Н., Олехнович Н. М. Изогнутый германиевый монохроматор для рентгеновского излучения	1	111
Сирота Н. Н., Сухвало С. В. Рентгенографическое и резистометрическое исследование тонких пленок сплавов системы железо — никель — кобальт	3	71
Сирота Н. Н., Шелег А. У. Рентгенографическое определение структурных амплитуд фосфида галлия	5	103
Сирота Н. Н., Шипило В. Б. Влияние высоких давлений на электропроводность и постоянную Холла монокристаллов антимонида галлия <i>n</i> - и <i>p</i> -типов при различных температурах	4	80
Солодухин А. М., Федоров Ф. И. К расчету атома гелия	5	103
Спринджук В. Г. Оценки линейных форм с <i>p</i> -адическими логарифмами алгебраических чисел	4	5
Стражев В. И., Томильчик Л. М. К вопросу о дуально-инвариантной электродинамике	2	102
Тамільчык Л. М. Развіццё фізіка-матэматычных навук у Беларусі за 50 гадоў	5	5
Третьяков В. Н. Комптоновское рассеяние на дейтроне	4	109
Турецкий А. X. Об одном методе приближения периодических функций тригонометрическими полиномами	3	5
Турецкий А. X., Корзун И. И. Оценка приближения интерполяционными полиномами Лагранжа с узлами Чебышева для класса функций, имеющих ограниченную в среднем производную данного порядка	2	5
Федоров Ф. И. К расчету атомных уровней	3	129
Фейнберг В. З. Однородные унарные алгебры и их группы автоморфизмов	5	17
Ханох Б. Ю. Формулы для разліку светавога патоку, адбітага тэтраэдрэчнай прызмай	2	95
Хапалюк А. П., Рудніцкі А. С. Умова генерацыі ў двухмерным рэзанатары	3	89
Хоанг Динь Зунг. Об устойчивости обратной смешанной краевой задачи аналитических функций	5	122
Хоанг Динь Зунг. Устойчивость обратной краевой задачи в случае многостепенности решения и некоторые обобщения	4	26
Чунихин С. А. Об индексалах и нормализаторах	1	5
Шенько М. А. Об общей краевой задаче линейного сопряжения с производными для системы и пар функций	3	22

## ЗМЕСТ

Л. М. Тамільчык. Развіццё фізіка-матэматычных навук у Беларусі за 50 гадоў	5
--	---

### МАТЭМАТЫКА

И. А. Павлов. Коммутативные нильпотентные алгебры матриц класса $n-3$ . II	10
В. З. Фейнберг. Однородные унарные алгебры и их группы автоморфизмов	17
Г. М. Левин, В. С. Танаев. Об одном классе комбинаторных задач оптимизации	30
А. П. Рябушко, К. С. Филипович. Ограниченная плоская круговая задача трех тел в общей теории относительности	36
С. Ф. Ильюкевич. К решению задачи о дифракции плоской волны на двух параллельных непроводящих круговых цилиндрах	45

### ФІЗІКА

А. В. Минкевич, Ф. И. Федоров. Динамика частицы в параметрической форме и ковариантный вариационный принцип	53
А. А. Куцак, А. П. Пришивалко. Расчет открытых резонаторов в приближении геометрической оптики	60
О. С. Иваницкая. Неголономные лоренцевы преобразования систем отсчета	70
А. С. Потупа. К анализу пространственных моделей	77
Л. Ф. Ільющэнка, А. В. Балтушкін, М. У. Шэлег, М. А. Крывенка. Уплыў матэрыялу падложкі на магнітныя характарыстыкі і структуру электраасаджаных плёнак	83
Г. І. Макавецкі. Даследаванне структуры і некаторых фізічных уласцівасцей селеніду і тэлурыду марганцу і іх узаемных раствораў	91
О. П. Кузнецик. Энергетическая яркость неба в области 1,8—2,5 мкм	98

### КАРОТКІЯ ПАВЕДАМЛЕННІ

Н. Н. Сирота, А. У. Шелег. Рентгенографическое определение структурных амплитуд фосфида галлия	103
Н. Н. Сирота, Э. Е. Матяс. Исследование твердых растворов системы GaSb—GaAs	106
А. М. Солонухин, Ф. И. Федоров. К расчету атома гелия	108
Н. И. Кабаев. О конкуренции волн в кольцевом лазере в случае сильного поля в смеси изотопов Ne	111
А. Е. Левашев, В. Н. Туняк. К определению симметрии поля в полуметрическом пространстве	116
В. А. Емеличев, В. И. Комлик. О проблеме надежности	119
Хоанг Динь Зунг. Об устойчивости обратной смешанной краевой задачи аналитических функций	122
Пералік артыкулаў, змешчаных у часопісе «Весці Акадэміі навук БССР», серыя фізіка-матэматычных навук, за 1968 г.	127

## СОДЕРЖАНИЕ

Л. М. Томильчик. Развитие физико-математических наук в Белоруссии за 50 лет . . . . .	5
---	---

### МАТЕМАТИКА

И. А. Павлов. Коммутативные нильпотентные алгебры матриц класса $n-3$ . II . . . . .	10
В. З. Фейнберг. Однородные унарные алгебры и их группы автоморфизмов . . . . .	17
Г. М. Левин, В. С. Танаев. Об одном классе комбинаторных задач оптимизации . . . . .	30
А. П. Рябушко, К. С. Филипович. Ограниченная плоская круговая задача трех тел в общей теории относительности . . . . .	36
С. Ф. Ильюкевич. К решению задачи о дифракции плоской волны на двух параллельных непроводящих круговых . . . . .	45

### ФИЗИКА

А. В. Минкевич, Ф. И. Федоров. Динамика частицы в параметрической форме и ковариантный вариационный принцип . . . . .	53
А. А. Куцак, А. П. Пришивалко. Расчет открытых резонаторов в приближении геометрической оптики . . . . .	60
О. С. Иваницкая. Неголономные лоренцевы преобразования систем отсчета . . . . .	70
А. С. Потупа. К анализу пространственных моделей . . . . .	77
Л. Ф. Ильюшенко, А. В. Болтушкин, М. У. Шелег, Н. А. Кривенко. Влияние материала подложки на магнитные характеристики и структуру электроосажденных пленок . . . . .	83
Г. И. Маковецкий. Исследование структуры и некоторых физических свойств селенида и теллурида марганца и их взаимных растворов . . . . .	91
О. П. Кузнецик. Энергетическая яркость неба в области 1,8—2,5 мкм . . . . .	98

### КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

Н. Н. Сирота, А. У. Шелег. Рентгенографическое определение структурных амплитуд фосфида галлия . . . . .	103
Н. Н. Сирота, Э. Е. Матяс. Исследование твердых растворов системы GaSb—GaAs . . . . .	106
А. М. Солодухин, Ф. И. Федоров. К расчету атома гелия . . . . .	108
Н. И. Кабаев. О конкуренции волн в кольцевом лазере в случае сильного поля в смеси изотопов Ne . . . . .	111
А. Е. Левашев, В. Н. Туняк. К определению симметрии поля в полуметрическом пространстве . . . . .	116
В. А. Емеличев, В. И. Комлик. О проблеме надежности . . . . .	119
Хоанг Динь Зунг. Об устойчивости обратной смешанной краевой задачи аналитических функций . . . . .	122
Перечень статей, помещенных в журнале «Известия Академии наук БССР», серия физико-математических наук, за 1968 г. . . . .	127

АТ 15374. Здадзена ў набор 15/XI-68 г. Падпісана да друку 19/XII-68 г. Фармат 70×108<sup>1/16</sup>. Друк. арк. 8,75 ум. друк. арк. 12,25. Уч.-выд. арк. 12,4. Выд. заказ 831. Друк. заказ 922. Цана 60 кап.

Друкарня імя Францыска (Георгія) Скарыны выдавецтва «Навука і тэхніка» АН БССР і Дзяржкамтэта СМ БССР па друку. Мінск, Ленінскі праспект, 68

РЕФЕРАТЫ

УДК 519.48

Коммутативные нильпотентные алгебры матриц класса  $n-3$ . II  
Павлов И. А. «Весті Акадэміі навук БССР», серыя фізіка-  
матэматычных навук. 1968 г., № 5, 10—16.

Пусть  $P$  — алгебраически замкнутое поле нулевой характеристики,  $U_{n,k}$  — множество всех максимальных коммутативных нильпотентных подалгебр класса  $k$  полной линейной алгебры  $P_n$ . В реферируемой работе производится классификация с точностью до сопряженности в  $P_n$  алгебр множества  $U_{n,n-2}$ .  
Библиографий 2.

УДК 519.48+519.44

Однородные унарные алгебры и их группы автоморфизмов.  
Фейнберг В. З. «Весті Акадэміі навук БССР», серыя  
фізіка-матэматычных навук. 1968 г., № 5, 17—29.

Пусть  $\Lambda$  — произвольное множество,  $f$  — отображение  $\Lambda$  в себя.  $\langle \Lambda, f \rangle$  — унарная алгебра, ассоциированная с  $f$ . Унарная алгебра с транзитивной группой автоморфизмов называется однородной.

В статье решаются следующие два вопроса:

1. Какими инвариантами характеризуется однородная унарная (о. у.) алгебра?

2. Каково строение ее группы автоморфизмов?

Случай, когда о. у. алгебра содержит хотя бы один цикл конечной длины, тривиален. Что касается унарной алгебры без циклов конечной длины, то оказывается (теорема 1), что она однородна тогда и только тогда, когда мощность множества  $f^{-1}(x)$  не зависит от  $x \in \Lambda$ . С точностью до изоморфизма  $\langle \Lambda, f \rangle$  определяется парой  $(\alpha, \gamma)$ , где  $\alpha$  — мощность множества максимальных связных подалгебр алгебры  $\langle \Lambda, f \rangle$ , а  $\gamma$  — мощность множества  $f^{-1}(x)$ .

Для описания группы автоморфизмов о. у. алгебры понятие полного сплетения  $Wr_{i \in I} G_i$  групп  $G_i$  по вполне упорядоченному множеству  $I$  обобщается на случай, когда в качестве  $I$  берется  $Z$  — линейно упорядоченное множество целых чисел, и затем, когда все  $G_i$  являются экземплярами некоторой фиксированной группы подстановок  $G$ , строится специального вида полупрямое произведение  $(Wr_{i \in Z} G_i) \rtimes Z$  группы  $Wr_{i \in Z} G_i$  на аддитивную группу целых чисел. Тогда (теорема 6) группа автоморфизмов о. у. алгебры типа  $(\alpha, \gamma)$  изоморфна группе  $((Wr_{i \in Z} (S_\gamma)_i) \rtimes Z) \wr S_\alpha$ , где  $(S_\gamma)_i$  —  $i$ -ый экземпляр группы  $S_\gamma$ ,  $S_\alpha$  — полные симметрические группы множеств мощности  $\gamma$ ,  $\alpha$  соответственно).  
Библиографий 14.

УДК 519.8

Об одном классе комбинаторных задач оптимизации. Левин  
Г. М., Танаев В. С. «Весті Акадэміі навук БССР», серыя  
фізіка-матэматычных навук. 1968 г., № 5, 30—35.

Рассматриваются вопросы определения оптимального значения функции на множестве перестановок, в рекуррентном задании которой содержатся некоторые характеристики соответствующей перестановки.

При построении искомого решения используются приемы, характерные для метода динамического программирования и метода последовательного анализа вариантов.

Иллюстраций 2. Библиографий 5.

УДК 530.12

**Ограниченная плоская круговая задача трех тел в общей теории относительности.** Рябушко А. П., Филипович К. С. «Весті Академії наук БССР», серия фізика-математичних наук. 1968 г., № 5, 36—44.

Проинтегрированы уравнения движения ограниченной плоской круговой задачи трех тел в следующем за ньютоновым приближении. В ньютоновом приближении берутся известные решения Лагранжа для треугольного и прямолинейного расположения тел. Найденные общие решения показывают, что движение рассматриваемых систем тел не является устойчивым, исходные конфигурации тел могут распадаться. Сделаны некоторые численные оценки. Полученные результаты могут быть использованы в астрономии и астрофизике в вопросах эволюции Солнечной и других систем.

Библиографий 2.

УДК 517.9 : 535.4

**К решению задачи о дифракции плоской волны на двух параллельных непроводящих круговых цилиндрах.** Ильюкевич С. Ф. «Весті Академії наук БССР», серия фізика-математичних наук. 1968 г., № 5, 45—52.

Методом разделения переменных в цилиндрических координатах решается задача о дифракции плоской волны на двух параллельных бесконечно длинных непроводящих круговых цилиндрах.

Исследуется возможность получения количественных результатов, характеризующих электромагнитное поле, рассеянное на цилиндрах.

В качестве расчетных формул использованы формулы строгой теории дифракции электромагнитных волн на двух круговых цилиндрах. Показано, что они пригодны для расчета дифракционного поля в диапазоне длин волн, сравнимых с радиусами цилиндров или намного превосходящих их.

Приводятся графики интенсивности рассеяния в дальней зоне и графики радиолокационного поперечного сечения для различных значений параметров.

Таблиц 2. Иллюстраций 4. Библиографий 11.

УДК 530.12 : 531.5

**Динамика частицы в параметрической форме и ковариантный вариационный принцип.** Минкевич А. В., Федоров Ф. И. «Весті Академії наук БССР», серия фізика-математичних наук. 1968 г., № 5, 53—59.

Получены лагранжевы и канонические уравнения динамики частицы в параметрической форме, а также выражение для обобщенного 4-импульса частицы, не ограниченные условием однородности функции Лагранжа по скоростям. Полученные соотношения являются инвариантными по отношению к произвольному изменению формы функции Лагранжа с помощью дополнительного условия, определяющего параметризацию, а также по отношению к выбору произвольного параметра. Полученные уравнения динамики в параметрической форме подобно обычным уравнениям динамики не обладают тензорной формой. Для получения тензорных по форме уравнений динамики частицы с помощью введения понятия ковариантной вариации формулируется ковариантный вариационный принцип как требование обращения в нуль ковариантной вариации интеграла действия. Таким путем получены тензорные уравнения движения частицы в пространстве  $L_4$  и  $L_3$  ( $L_n$  — пространство аффинной связности размерности  $n$ ). Записаны общековариантные по форме уравнения релятивистской динамики

частицы, а также явно ковариантные по отношению к произвольным преобразованиям пространственных координат уравнения классической динамики частицы.

Библиографий 6.

УДК 535.12

**Расчет открытых резонаторов в приближении геометрической оптики.** Куцак А. А., Пришивалко А. П. «Весті Академії наук БССР», серия фізика-математичних наук. 1968 г., № 5, 60—69.

В работе находятся резонансные частоты и размеры области, занимаемой каждым собственным колебанием (модой) в сложном резонаторе. Оценивается угловая расходимость отдельных мод. Задача решается в приближении геометрической оптики с привлечением условия фазировки. При этом отражение от поверхностей внутренних элементов резонатора (поверхности линз и т. п.) не учитывается, принимается во внимание только изменение оптического пути при внесении таких элементов.

Исследован симметричный резонатор со сферическими зеркалами и диэлектрической вставкой внутри. Приведены графики, характеризующие зависимость поперечных размеров мод и расстояния между частотами собственных колебаний от различных параметров такого резонатора.

Таблиц 2. Иллюстраций 4. Библиографий 9.

УДК 530.12

**Неголономные лоренцевы преобразования систем отсчета.** Иваницкая О. С. «Весті Академії наук БССР», серия фізика-математичних наук. 1968 г., № 5, 70—76.

Развито представление неинерциальных систем отсчета посредством неголономного лоренцева базиса и неголономных преобразований Лоренца. Рассмотрены примеры таких преобразований из кинематики и динамики специальной теории относительности и эйнштейновой теории гравитации.

Библиографий 20.

УДК 539.126.01

**К анализу пространственных моделей.** Потупа А. С. «Весті Академії наук БССР», серия фізика-математичних наук. 1968 г., № 5, 77—82.

Показано, что учет индивидуальных погрешностей координат в рамках идеализированных измерительных процедур релятивистской квантовой механики нарушает булевский тип структуры в множестве всех подпространств пространства — времени. На основе анализа алгебры свойств для физической системы отсчета (ФСО), снабженной часами, предложена модель модулярного пространства — гильбертова пространства ФСО. Классическим пределом такой модели является обычное пространство — время, а «квазиклассической» области соответствует аналог дискретного пространства.

Библиографий 13.

УДК 669.017 : 538

**Влияние материала подложки на магнитные характеристики и структуру электроосажденных пленок.** Ильюшенко Л. Ф., Болтушкин А. В., Шелег М. У., Кривенко Н. А. «Весті Академії наук БССР», серия фізика-математичних наук. 1968 г., № 5, 83—90.

В работе приведены результаты исследования магнитных характеристик ( $H_c$ ,  $H_k$  и  $\alpha_{50}$ ) и структуры электроосажденных магнитных пленок 80% Ni — 20% Fe толщиной до 4500 Å в зависимости от материала и структуры подложки. Исследованы подложки из меди, хрома, золота и серебра, напыленных на покровные стекла при различных температурах (200, 150 и 60 °C).

Получены электронномикроскопические снимки структуры подложек из различных металлов и осажденных на них пермаллоевых пленок. Установлена корреляция между размерами зерен подложки и кристаллитов в пленке. Показано, что с уменьшением размеров зерен в электроосажденных Ni—Fe-пленках толщиной более 700 Å уменьшаются коэрцитивная сила ( $H_c$ ), величина поля анизотропии ( $H_k$ ) и дисперсия анизотропии ( $\alpha_{50}$ ).

При осаждении на подложки из меди и золота, напыленных при температуре 200 °С, получены инверсные пленки ( $H_c/H_k > 1$ ). Исследована зависимость коэрцитивной силы от толщины пленок, осажденных на различные подложки. Дано описание прибора для исследования петель гистерезиса в процессе осаждения пленок.

Исследован характер кривых  $\varphi-t$  при осаждении Ni—Fe-пленок на подложки из различных металлов.

Таблиц 1. Иллюстраций 5. Библиографий 13.

УДК 537.311.33+548

**Исследование структуры и некоторых физических свойств селенида и теллурида марганца и их взаимных растворов.** Маковецкий Г. И. «Весті Академії наук БССР», серия фізико-математичних наук. 1968 г., № 5, 91—97.

В статье представлены результаты экспериментального исследования структуры, электрических, термоэлектрических и дилатометрических свойств селенида и теллурида марганца и их взаимных растворов. Показано существование квазибинарного сечения, широкой области растворимости и наличия полупроводниковых свойств во всем интервале концентраций. Ширина запрещенной зоны сплавов системы MnSe—MnTe изменяется от 1,38—1,40 эВ у селенида марганца до 0,86 эВ у состава 0,7 MnSe · 0,3 MnTe и от 0,74 эВ у теллурида марганца до 0,78 эВ у сплава состава 0,2 MnSe · 0,8 MnTe. В области температур 290—310 °К на кривых температурной зависимости коэффициента линейного расширения теллурида марганца и твердых растворов на его основе обнаружены значительные аномалии, обусловленные переходом сплавов из антиферромагнитного состояния в парамагнитное. Увеличение концентрации селенида марганца в твердых растворах на основе теллурида марганца приводит к снижению температуры Нееля. Измерениями термического расширения, а также рентгеновским и нейтрографическим исследованиями селенида марганца и твердых растворов на его основе показано, что превращение при 260—270 °К при нагреве и обратное превращение при 180—160 °К при охлаждении является полиморфным превращением.

Иллюстраций 4. Библиографий 14.

УДК 551.51

**Энергетическая яркость неба в области 1,8—2,5 мкм.** Кузнецик О. П. «Весті Академії наук БССР», серия фізико-математичних наук. 1968 г., № 5, 98—102.

С помощью радиометрической установки, допускающей сканирование неба в двух плоскостях, исследовалось распределение энергетической яркости облачного неба, неба с переменной облачностью и ясного неба в «окне прозрачности» атмосферы 1,8—2,5 мкм. Измерения проводились в условиях города Минска (высота над уровнем моря 243 м).

Описана методика измерений, аппаратура и ее калибровка. Полученные экспериментальные данные представлены в виде изофот. Оказалось, что распределение энергетической яркости по небосводу в этой области в основном определяется рассеянным светом Солнца и сильно зависит от длины пути рассеивания.

Иллюстраций 4. Библиографий 7.

УДК 548.73

**Рентгенографическое определение структурных амплитуд фосфида галлия.** Сирота Н. Н., Шелег А. У. «Весті Академії наук БССР», серия фізико-математичних наук. 1968 г., № 5, 103—105.

Приводятся значения структурных амплитуд фосфида галлия, измеренные рентгенографическим методом в  $Cu-K_{\alpha}$  монохроматическом излучении. Из значений измеренных структурных амплитуд определены функции атомного рассея-

ния ионов Ga и P. Показано, что в соединении GaP ион металла имеет положительный заряд, а металлоида — отрицательный. Из сравнения экспериментальных величин структурных амплитуд с их теоретическими значениями подсчитана степень ионизации в фосфиде галлия ( $0,5 \pm 0,1 \text{ эл}$ ), а также определены характеристические температуры и дебай-валлеровские факторы ионов Ga и P ( $\Theta_{\text{Ga}} = 235 \text{ }^\circ\text{K}$ ,  $B_{\text{Ga}} = 0,91 \text{ \AA}^2$ ,  $\Theta_{\text{P}} = 360 \text{ }^\circ\text{K}$ ,  $B_{\text{P}} = 0,89 \text{ \AA}^2$ ).

Таблиц 1. Иллюстраций 2. Библиографий 4.

УДК 537.311.33

**Исследование твердых растворов системы GaSb—GaAs.** Сирота Н. Н., Матяс Э. Е. «Весті Академії наук БССР», серия фізика-математичних наук. 1968 г., № 5, 106—107.

В работе сообщаются данные по изменению в зависимости от состава ширины запрещенной зоны  $\Delta E$ , периода идентичности  $a$  и микротвердости  $H$  сплавов системы GaSb—GaAs.

Обнаружено, что в исследуемой системе достаточно точно выполняется правило Вегарда. Ширина запрещенной зоны изменяется со значительным отклонением от аддитивности в сторону минимума. Зависимость микротвердости от состава имеет вид плавной кривой с максимумом в области составов 80—90% GaAs.

Иллюстраций 2. Библиографий 6.

УДК 530.145

**К расчету атома гелия.** Солодунин А. М., Федоров Ф. И. «Весті Академії наук БССР», серия фізика-математичних наук. 1968 г., № 5, 108—110.

Произведен расчет основного состояния атома гелия с помощью метода, предложенного в работе Ф. И. Федорова «К расчету атомных уровней» («Известия АН БССР», серия физ.-матем. наук, № 3, 1968). Точный гамильтониан атома заменяется суммой одноэлектронных центрально-симметричных, но не кулоновых гамильтонианов, которые в известной мере учитывают взаимодействие электронов. Для одноэлектронного гамильтониана задача решается в первом приближении теории возмущений и из полученных волновых функций конструируется пробная волновая функция.

Результаты расчетов энергии с десятичной функцией, учитывающей только радиальную корреляцию, дают лучшие или такие же результаты, как аналогичные расчеты других авторов.

Результат вычисления среднего квадрата радиуса электрона ближе к опыту, чем в работе Пекериса.

Библиографий 7.

УДК 621.379.3

**О конкуренции волн в кольцевом лазере в случае сильного поля в смеси изотопов.** Кабаев Н. И. «Весті Академії наук БССР», серия фізика-математичних наук. 1968 г., № 5, 111—115.

Исходя из амплитудных уравнений для плотности генерации, рассматривалась конкуренция волн в кольцевом лазере. Получено выражение для зоны подавления одной из волн без ограничения величины поля и при наличии изотопа. Показано, что примесь  $\text{Ne}^{22}$  уменьшает зону подавления одной из волн как в случае равных, так и в случае разных потерь.

Библиографий 11.

УДК 530.12

**К определению симметрии поля в полуметрическом пространстве.** Левашев А. Е., Туняк В. Н. «Весті Академії наук БССР», серия фізика-математичних наук. 1968 г., № 5, 116—118.

В работе рассмотрены условия, накладываемые центральной симметрией на тензор кручения и вектор  $Q_{\times}$  в полуметрическом пространстве. Показано, что в общем случае центрально-симметричного пространства —

времени его структура полностью определяется 13 функциями переменных  $z$  и  $t$ . Наличие кручения приводит к повышению диссимметрии пространства, характеризуемого одной осью симметрии бесконечного порядка. Возникновение плоскости симметрии имеет место лишь локально и является координатным эффектом.

Библиографий 5.

УДК 62—5:681.3—19

**О проблеме надежности.** Емеличев В. А., Комлик В. И. «Весті Академії наук БССР», серия фізика-математичних наук. 1968 г., № 5, 119—121.

Рассматривается проблема обеспечения максимальной надежности системы за счет дублирования ее компонент. При синтезе высоконадежных схем из заданных элементов приходится учитывать практические ограничения по стоимости, объему, весу и т. д. Известно, что для решения этой задачи при одном линейном ограничении эффективно используется метод динамического программирования. Однако по мере увеличения числа ограничений трудоемкость метода и требования, предъявляемые к памяти вычислительной машины, резко возрастают в связи с необходимостью вычисления многих переменных. Предлагаемый в работе метод решения задачи надежности позволяет в некоторой степени преодолеть эти трудности. Метод состоит в направленном переборе планов вспомогательной задачи с одним линейным ограничением, т. е. решение многомерной задачи сводится к решению ряда одномерных. Метод применим также к решению задач надежности, в которых наряду с линейными ограничениями должны выполняться и нелинейные.

Библиографий 4.

УДК 514.544

**Об устойчивости обратной смешанной краевой задачи аналитических функций.** Хоанг Динь Зунг. «Весті Академії наук БССР», серия фізика-математичних наук. 1968 г., № 5, 122—126.

Эта работа посвящена вопросу об устойчивости обратной смешанной краевой задачи, поставленной В. П. Моначовым. Устойчивость рассматривается по отношению к изменениям задаваемых контурных значений аналитической функции, которым соответствуют искомые контурные значения. Выводится одно вспомогательное предположение относительно сходимости последовательности особых интегралов типа Коши, на основе которого доказана устойчивость обратной смешанной задачи при сделанных предположениях в постановке этой задачи.

Библиографий 6.

УДК 536.3:536.52

**О радиационном измерении температуры поверхности тела, находящегося в замкнутой полости.** Корзун Л. Ф. «Весті Академії наук БССР», серия фізика-математичних наук. 1968 г., № 4, 119—122.

Работа написана применительно к случаю точечной радиационной пирометрии поверхности тел, находящихся в замкнутой полости, оболочка которой имеет температуру меньшую, чем температура тела. Приводится общее выражение для потока излучения, улавливаемого объективом пирометра, имеющего высокую угловую разрешающую способность, а также дается определение величины кажущейся относительной излучательной способности наблюдаемого участка поверхности тела. Приведены экспериментальные результаты, характеризующие зависимость кажущейся относительной излучательной способности феррита Ф-600 в волноводе от температуры, степени нагрева и излучательной способности материала внутренней поверхности волновода.

Таблиц 1. Иллюстраций 3. Библиографий 8.

УДК 533.915+539.216.2:537.3

**Влияние экспозиции и напряжения на инжекцию электронов из плазмы газового разряда в селен.** Андреев А. Д., Лойко В. И., Некрашевич И. Г. «Весті Академії наук БССР», серия фізика-математичних наук. 1968 г., № 4, 123—126.

Исследуются токи, протекающие в структуре металл—плазма—селен—металл, металл—аквадаг—селен—металл, при неизменном уровне инжекции носителей в слое селена. Получены зависимости токов, протекающих в указанных системах, от времени, а также зависимость тока от времени в структуре металл—аквадаг—селен—металл при различных температурах. Ток уменьшается с течением времени до некоторого стационарного значения, которое возрастает с увеличением сопротивления во внешней цепи, а форма кривой изменения тока во времени приближается к экспоненциальной зависимости. На основании этого сделан качественный вывод, что величина стационарного тока, зависящая от числа свободных носителей в слое селена, определяется захватом носителей на ловушках. При увеличении сопротивления число захваченных носителей уменьшается и преобладающими могут быть емкостные эффекты, связанные только с накоплением заряда в слое селена. При увеличении температуры значение установившегося тока растет, что объясняется началом процессов кристаллизации аморфного селена.

Иллюстраций 4. Библиографий 10.

УДК 51:330.115

**Об одной задаче целочисленного программирования.** Комлик В. И., Емельичев В. А., «Весті Академії наук БССР», серия фізика-математичних наук. 1968 г., № 4, 127—132.

В работе рассматривается задача целочисленного программирования. Предлагается метод решения, состоящий в направленном переборе планов вспомогательной задачи с одним ограничением до получения плана исходной задачи, который и будет оптимальным. Таким образом, решение многомерной задачи сводится к решению ряда одномерных задач.

Библиографий 3.

**В ИЗДАТЕЛЬСТВЕ „НАУКА И ТЕХНИКА“**

**ГОТОВИТСЯ К ПЕЧАТИ**

**А. П. Иванов**

**«ОПТИКА РАССЕИВАЮЩИХ СРЕД»**

*На русском языке. 40 л. Ориентировочная цена 2 р. 50 к.*

Книга посвящена двум аспектам оптики рассеивающих объектов: рассмотрению закономерностей переноса световой радиации в сильно мутных средах (вода, атмосфера, порошки, ткани, краски и т. д.) и методам спектроскопического анализа вещества по измерению фотометрических характеристик поля излучения, рассеянного средой. В первой части изложена сущность многократного рассеяния, современное состояние теории и эксперимента по переносу излучения в неоднородных системах. Особое внимание уделено нестационарному рассеянию, рассеянию узких пучков света, проявлению нелинейных оптических явлений в среде при больших плотностях радиации. Вторая часть книги посвящена обратной задаче теории переноса — освещению современных методов изучения оптических свойств рассеивающих объектов. Дано подробное описание аппаратуры, применяемой для изучения рассеяния света.

Предназначена для специалистов разных профессий, которые по роду своей деятельности связаны с неоднородными рассеивающими системами и нуждаются в знании оптических свойств этих систем или конкретной оценке потоков радиации, реализуемых в них.

*Заказы на книгу следует направлять Управлению книжной торговли Госкомитета СМ БССР по печати.*

*Адрес: г. Минск, Омский пер., 13.*

**В ИЗДАТЕЛЬСТВЕ „НАУКА И ТЕХНИКА“**

**ГОТОВИТСЯ К ПЕЧАТИ**

**КОЛЛЕКТИВ АВТОРОВ**

**«ХИМИЧЕСКАЯ СВЯЗЬ В КРИСТАЛЛАХ»**

*На русском языке. 30 л. Ориентировочная цена 2 р. 20 к.*

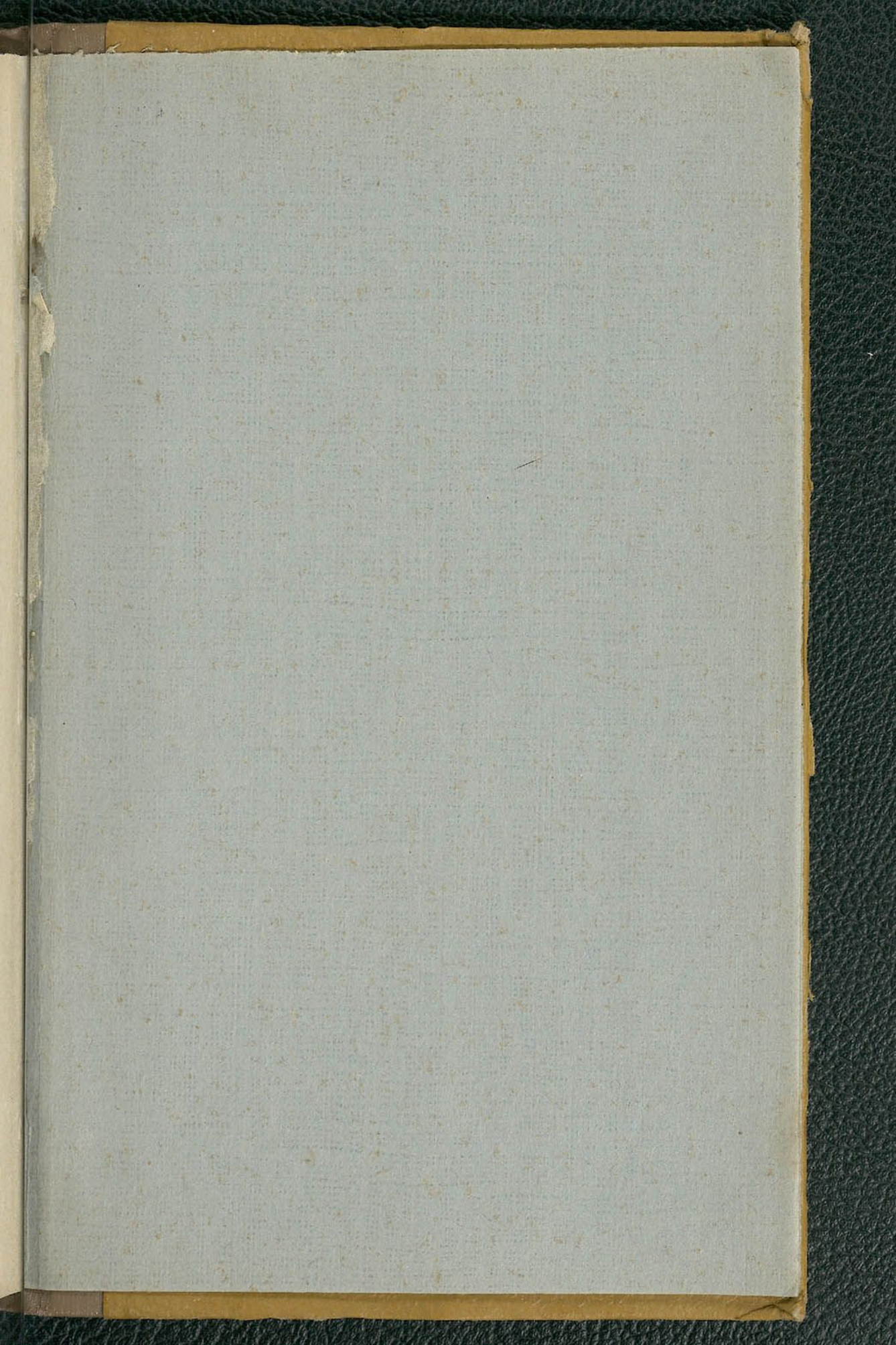
В книге обсуждаются важнейшие проблемы теории и экспериментального изучения природы химической связи в полупроводниках, магнитных и других кристаллах. В ней приводятся новые данные по экспериментальному изучению распределения электронной плотности в кристаллах, определению их термодинамических характеристик, исследованию динамики кристаллической решетки, выяснению характера межатомного взаимодействия и его связи с физическими свойствами твердого тела.

Книга представляет большой интерес для специалистов, работающих в области физики и химии твердого тела и полупроводников, для аспирантов и студентов старших курсов физических, физико-химических и металлургических специальностей.

*Заказы на книгу следует направлять Управлению книжной торговли Госкомитета СМ БССР по печати.*

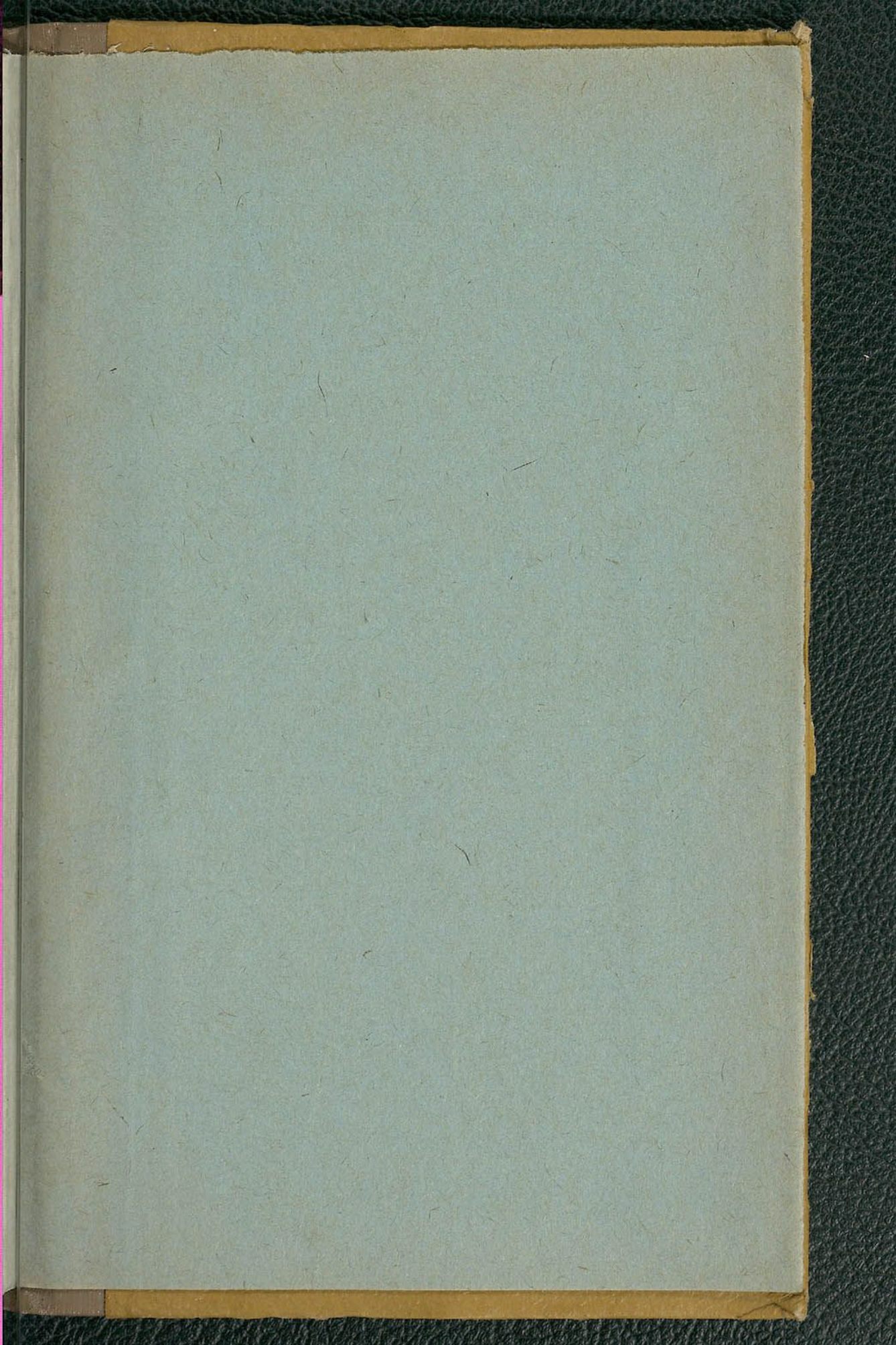
*Адрес: г. Минск, Омский пер., 13.*



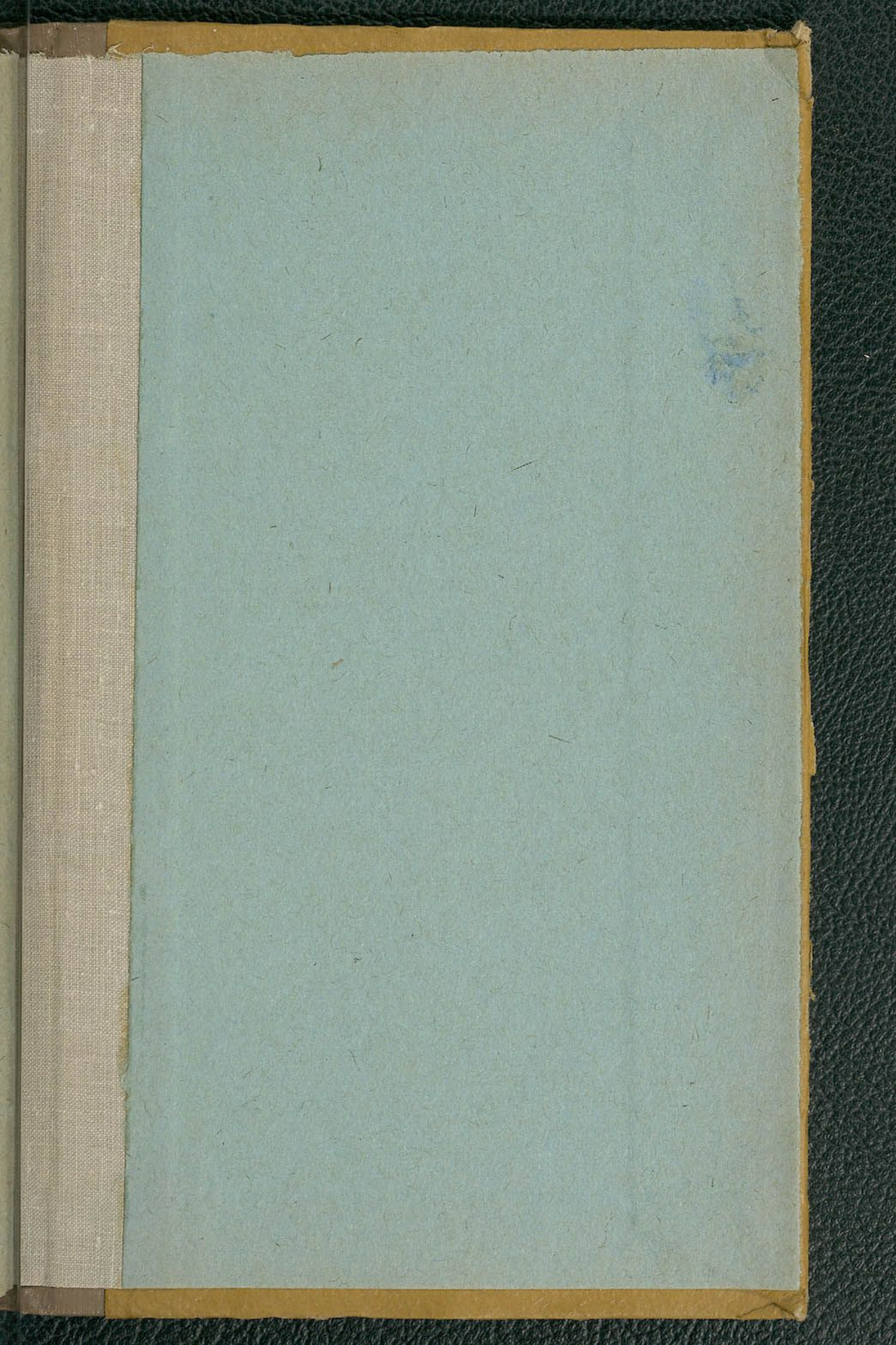


80 н.

Индокс  
74846









B0000000 128943 1