

3043
58

ВЕСЦІ

АКАДЭМІІ НАВУК БССР

СЕРЫЯ
ФІЗІКА-МАТЭМАТЫЧНЫХ
НАВУК

1

ВЫДАВЕЦТВА „НАВУКА І ТЭХНІКА“

МІНСК 1969

ба 05
4109

april ka gop.
2010

111

[Blank white label]

LIBRARY

ACADEMIC LIBRARY



ИЗВЕСТИЯ

АКАДЕМИИ НАУК БССР

СЕРИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ
НАУК

№ 1

ИЗДАТЕЛЬСТВО „НАУКА И ТЕХНИКА“

МИНСК 1969

ВЕСЦІ

30кг
58

АКАДЭМІІ НАВУК БССР

СЕРЫЯ
ФІЗІКА-МАТЭМАТЫЧНЫХ
НАВУК

№ 1

Ба 05
4109

ВЫДАВЕЦТВА „НАВУКА І ТЭХНІКА“

МІНСК 1969

82

АКАДЕМІЯ НАУК БССР

Рэдакцыйная калегія:

- Ф. І. ФЕДАРАУ (галоўны рэдактар),
- Д. А. СУПРУНЕНКА (нам. галоўнага рэдактара),
- М. М. АЛЯХНОВІЧ, Ф. Д. ГАХАУ, У. І. КРЫЛОУ,
- М. М. СІРАТА, У. Г. СПРЫНДЖУК, Я. І. ФІРСАУ,
- С. А. ЧУНІХІН

981.02
2039

М. М. АЛЯХНОВІЧ

Л. Г. КРУГЛИКОВА, В. И. КРЫЛОВ

ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ И УЛУЧШЕНИЕ СХОДИМОСТИ

§ 1. Задача улучшения сходимости и ее отношение к проблеме определения предела расходящейся последовательности. Содержание задачи улучшения сходимости наглядно можно выразить следующим образом.

Пусть дана сходящаяся последовательность S_n ($n = 1, 2, 3, \dots$), $S_n \rightarrow S$. По ней нужно построить новую последовательность

$$\sigma_n = f_n(S_1, S_2, \dots), \quad n = 1, 2, \dots; \quad (1.1)$$

при этом выбор преобразований f_1, f_2, \dots должен быть таким, чтобы, во-первых, новая последовательность σ_n сходилась к тому же предельному значению S , что и S_n , и, во-вторых, чтобы сходимость $\sigma_n \rightarrow S$ была бы более быстрой, чем сходимость $S_n \rightarrow S$. Второе из этих условий зависит от выбора критерия сравнения скоростей сходимости.

Достигнуть улучшения сходимости последовательности путем ее преобразования (1.1) можно, по-видимому, только опираясь на какие-либо свойства S_n , и выбор преобразования поэтому должен быть связан с характером сходимости $S_n \rightarrow S$. Одно и то же преобразование, примененное к различным последовательностям, может дать разные результаты — улучшить сходимость одних последовательностей, ухудшить сходимость других или даже привести к расходящимся последовательностям σ_n .

Можно указать два вопроса, исследование которых, по нашему мнению, будет иметь большое значение в теории улучшения сходимости.

1. При построении (1.1) для каждого множества последовательностей S_n , обладающих близкими в каком-то смысле законами сходимости (например, последовательности, сходящиеся по закону, близкому к геометрической прогрессии), можно пытаться находить преобразование (1.1), улучшающее сходимость всех или по крайней мере многих последовательностей множества.

В решении этой задачи можно рассчитывать на тем больший успех, чем более близкими друг другу будут законы сходимости переменных S_n и, стало быть, чем более узкими будут рассматриваемые множества последовательностей S_n .

Так как для многих последовательностей, встречающихся в практике вычислений, закон сходимости может быть в какой-то мере указан заранее, можно ожидать, что для счетной работы будут иметь значение не только правила улучшения сходимости, применимые к широкому классу последовательностей (такие, например, как правило средних арифметических), но и специализированные правила, позволяющие достигнуть сильного улучшения сходимости в узких классах последовательностей. К числу специализированных правил можно, например, отнести δ^2 -правило

Эйткена, позволяющее улучшать сходимость последовательностей, близких по типу сходимости к геометрической прогрессии $S_n = C + Aq^n$.

2. Для каждого определенного правила преобразования (1.1) нужно выяснить условия, которым должна удовлетворять последовательность S_n , для того чтобы соответствующая последовательность σ_n была сходящейся, и найти условия, при которых происходит улучшение сходимости.

Задача улучшения сходимости последовательностей тесно связана с классической проблемой математики — задачей целесообразного определения сумм расходящихся рядов и пределов расходящихся последовательностей. Применительно к последовательностям эта задача имеет следующий смысл. Дано некоторое множество S последовательностей S_n ($n=1, 2, \dots$) и нужно указать преобразование (1.1), переводящее каждую последовательность S_n из S в сходящуюся последовательность σ_n ($n=1, 2, \dots$), $\sigma_n \rightarrow \sigma$. Число σ называют f -пределом S_n и пишут $\lim S_n = \sigma(f)$.

Способ преобразования должен быть таким, чтобы, во-первых, f -предел S_n не противоречил обычному пределу: если последовательность S_n сходится к пределу S , то соответствующая последовательность σ_n должна сходиться к тому же пределу; во-вторых, должно удовлетворяться условие, связанное с целью, которую мы ставим заранее при определении обобщенного f -предела. Мы поясним эту мысль двумя простыми примерами.

Напомним сначала проблему нахождения суммируемой на отрезке $[-\pi, \pi]$ функции F по ее коэффициентам Фурье

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(t) \cos ktdt, \quad b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(t) \sin ktdt, \quad k = 0, 1, \dots$$

Для решения ее в простейшем случае можно составить ряд

$$\frac{1}{2} a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx), \quad (1.2)$$

и если он окажется равномерно сходящимся на $[-\pi, \pi]$, то сумма его будет давать значения $F(x)$ всюду на $[-\pi, \pi]$. За последовательность S_n здесь естественно принять последовательность частичных сумм ряда

$$(1.2) \quad S_n = S_n(x) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx). \quad \text{Но может ока-}$$

заться, что ряд (1.2) не будет обладать равномерной сходимостью или окажется расходящимся на некотором множестве точек отрезка $[-\pi, \pi]$, которое может совпадать со всем отрезком. В этом случае последовательность $S_n(x)$ без ее предварительного изменения не дает возможности найти F везде или почти везде на $[-\pi, \pi]$ путем предельного перехода. Возникает потребность преобразования $S_n(x)$ в некоторую новую последовательность $\sigma_n(x) = f_n[S_1(x), S_2(x), \dots]$, $n = 1, 2, \dots$, которая сходилась бы почти везде на $[-\pi, \pi]$ к некоторой функции $F(x)$, при этом такой, чтобы ее коэффициенты Фурье были равны заданным числам*) a_k и b_k . Это последнее условие и является тем дополнительным требованием, которое мы

*) В теории расходящихся рядов доказывается, что такая задача может быть решена, например, при помощи линейного абелевого преобразования ряда Фурье: почти везде будет

$$\frac{1}{2} a_0 + \sum_{k=1}^n r^k (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \rightarrow F(x)$$

при $r \rightarrow 1 - 0$.

должны по смыслу задачи наложить на выбор правила преобразования частичных сумм $S_n(x)$.

В качестве второго примера возьмем проблему аналитического продолжения степенного ряда. Допустим, что аналитическая функция $f(z)$ задана рядом

$$f(z) = c_0 + c_1 z + \dots + c_n z^n + \dots, \quad (1.3)$$

сходящимся в круге $|z| < R$. Разложением (1.3) $f(z)$ определяется, принципиально говоря, всюду в области регулярности, которая может быть шире круга $|z| < R$. Она является некоторой многолистной поверхностью Римана над плоскостью z . Возьмем на этой поверхности точку z . Если она принадлежит указанному выше кругу, то в этой точке значение $f(z)$ может быть найдено как предел последовательности значений частичных сумм ряда (1.3) $S_n(z) = c_0 + c_1 z + \dots + c_n z^n$. Если же z лежит вне круга, то при помощи последовательности $S_n(z)$ без ее предварительного преобразования значение $f(z)$, как правило, не может быть найдено путем предельного перехода при $n \rightarrow \infty$ ввиду расходимости последовательности $S_n(z)$. Как и в предыдущей задаче, возникает потребность преобразования $S_n(z)$ в новую последовательность $\sigma_n(z) = f_n[S_1(z), S_2(z), \dots]$. Эта последовательность, во-первых, должна быть сходящейся и, во-вторых, ее предельное значение должно совпадать со значением f в точке z на избранном листе римановой поверхности*). Второе условие также есть дополнительное требование, которое накладывается на выбор преобразования самой задачей аналитического продолжения.

Особенно большое внимание в теории «обобщенного» предела расходящейся последовательности привлекают к себе так называемые регулярные преобразования, которые обладают двумя свойствами: 1) они применимы к любым сходящимся последовательностям S_n и 2) для всех сходящихся последовательностей сохраняют предельное значение: из $S_n \rightarrow S$ следует $\sigma_n \rightarrow S$.

Признак регулярности преобразования хорошо известен лишь в линейном случае**).

Для того чтобы линейное преобразование

$$\sigma_m = \sum_{n=1}^{\infty} c_{mn} S_n, \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (1.4)$$

было регулярным, необходимо и достаточно выполнение условий:

1. Существует число $M < \infty$, такое, что при $n = 1, 2, \dots$ верно нера-

$$\text{венство } \sum_{m=0}^{\infty} |c_{mn}| \leq M;$$

$$2. \gamma_n = \sum_{m=0}^{\infty} c_{mn} \rightarrow 1 \text{ при } n \rightarrow \infty;$$

3. Для каждого фиксированного m ($m = 0, 1, \dots$) будет $c_{mn} \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

В обеих задачах можно указать черты, сближающие их и дающие возможность рассматривать их параллельно. Рабочим аппаратом как в той, так и в другой задаче является преобразование заданной последовательности в новую, что дает возможность использовать известные результаты теории преобразования последовательностей. Кроме того,

*) Это может быть в частных случаях достигнуто, например, при помощи линейных преобразований эйлера, борелева, миттаг-леффлера вида и др.

**) Теория суммирования расходящихся рядов с большой подробностью развита только для случая линейных преобразований (см., напр., [1, 2]). Наши знания о применении нелинейных преобразований к суммированию рядов находятся в зачаточном состоянии и являются отрывочными.

условия, предъявляемые к каждой из задач, не противоречат друг другу и во многих случаях оказываются совместимыми. Так, например, преобразования, позволяющие выполнить обобщенное суммирование расходящихся рядов, могут улучшить сходимость некоторых рядов, сходящихся в обычном смысле [5]. Это обстоятельство побуждает по крайней мере в отдельных случаях находить условия, при которых то или иное преобразование будет и выполнять обобщенное суммирование одних рядов, и улучшать сходимость других рядов. Простым и хорошо известным примером такого преобразования является преобразование средних арифметических $\sigma_n = \frac{1}{n}(S_1 + S_2 + \dots + S_n)$, позволяющее не только улучшить

сходимость многих сходящихся знакопеременных рядов, но и преобразовывать ряды Фурье всякой непрерывной функции F в равномерно сходящиеся к F последовательности тригонометрических многочленов.

В статье рассматривается преимущественно задача об улучшении сходимости последовательности при помощи интерполяционных преобразований простых типов. Авторы ограничились алгебраическим интерполированием как обычным, так и основанным на идее наименьших квадратов. Некоторое внимание было уделено также вопросу о возможности применения интерполяционных преобразований к суммированию расходящихся рядов. В большинстве случаев был получен отрицательный ответ, так как такие преобразования могли переводить в сходящиеся последовательности только некоторые частные классы последовательностей, которые сходятся в обычном смысле.

§ 2. Применение последовательности интерполированных к нахождению предельного значения. Множество S последовательностей S_n ($n = 1, 2, \dots$) будем считать заданным. Задача интерполирования S_n состоит в разыскании такой функции $P_m(n)$ из некоторого класса функций целочисленного параметра n , которая при $m + 1$ фиксированных значениях n_0, n_1, \dots, n_m параметра n , называемых узлами интерполирования, принимала бы значения $S_{n_0}, S_{n_1}, \dots, S_{n_m}$. Функцию $P_m(n)$ мы будем выбирать в виде линейной комбинации заранее известных функций $\omega_k(n)$, $k = 0, 1, \dots$:

$$P_m(n) = a_0 \omega_0(n) + a_1 \omega_1(n) + \dots + a_m \omega_m(n). \quad (2.1)$$

Выбор функций $\omega_k(n)$ подчиним следующим требованиям:

1. Система функций ω_k должна быть системой Чебышева: для всяких m и при любых различных значениях аргумента n_0, n_1, \dots, n_m

$$D_m(n_0, \dots, n_m) = D_m = \begin{vmatrix} \omega_0(n_0) & \omega_1(n_0) & \dots & \omega_m(n_0) \\ \omega_0(n_1) & \omega_1(n_1) & \dots & \omega_m(n_1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \omega_0(n_m) & \omega_1(n_m) & \dots & \omega_m(n_m) \end{vmatrix} \neq 0. \quad (2.2)$$

2. Каждая функция $\omega_k(n)$ имеет конечное предельное значение при $n \rightarrow \infty$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \omega_k(n) = \omega_k. \quad (2.3)$$

3. Для всякой S_n из S и любого $\varepsilon > 0$ существует такая линейная комбинация (2.1), что при всяких $n = 1, 2, \dots$ выполняется неравенство

$$|S_n - P_m(n)| < \varepsilon.$$

Последнее требование есть условие полноты системы ω_k в множестве S последовательностей S_n . Если оно не выполняется, то нельзя быть уверенным в возможности сколь угодно точного интерполирования S_n , а следовательно, и интересующего нас предельного значения S , если оно существует.

Требование совпадения $P_m(n)$ и S_n в узлах n_k ($k=0, \dots, m$) дает систему $m+1$ уравнений для нахождения коэффициентов a_0, \dots, a_m :

$$a_0 \omega_0(n_k) + a_1 \omega_1(n_k) + \dots + a_m \omega_m(n_k) = S_{n_k}, \\ k = 0, 1, \dots, m.$$

Так как $D_m \neq 0$, система имеет решение и только одно. Явное выражение $P_m(n)$ через $\omega(n_k)$ и S_{n_k} хорошо известно в теории интерполирования:

$$P_m(n) = \frac{1}{D_m} \begin{vmatrix} 0 & \omega_0(n) & \dots & \omega_m(n) \\ S_{n_0} & \omega_0(n_0) & \dots & \omega_m(n_0) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ S_{n_m} & \omega_0(n_m) & \dots & \omega_m(n_m) \end{vmatrix}. \quad (2.4)$$

Будем теперь неограниченно увеличивать n и примем $\lim P_m(n) = P_m(\infty)$ за приближенное значение $S = \lim S_n$:

$$P_m(\infty) = \frac{1}{D_m} \begin{vmatrix} 0 & \omega_0 & \dots & \omega_m \\ S_{n_0} & \omega_0(n_0) & \dots & \omega_m(n_0) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ S_{n_m} & \omega_0(n_m) & \dots & \omega_m(n_m) \end{vmatrix} = \\ = \sum_{k=0}^m a_k(n_0, \dots, n_m) \omega_k = \sigma_m \approx S. \quad (2.5)$$

(2.5) является интерполяционным правилом приближенного вычисления по $m+1$ значениям S_{n_0}, \dots, S_{n_m} переменной S_n ее предельного значения S .

Желая получить возможность сколь угодно точного нахождения S , мы должны построить процесс, позволяющий выполнить бесконечную последовательность интерполирований. Такой процесс определится бесконечной матрицей узлов

$$\begin{pmatrix} n_0^1 & n_1^1 & \dots & n_{m_1}^1 \\ n_0^2 & n_1^2 & \dots & n_{m_2}^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ n_0^p & n_1^p & \dots & n_{m_p}^p \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}; \quad (2.6)$$

здесь в строке номера p помещены узлы $n_0^p, \dots, n_{m_p}^p$ интерполирования на p -м шаге. Таким образом, из значений S_n при помощи преобразования

$$\sigma_p = \sum_{k=0}^{m_p} a_k(S_{n_0^p}, \dots, S_{n_{m_p}^p}) \omega_k \quad (2.7)$$

получается последовательность значений

$$\sigma_p = \sigma_p(n_0^p, \dots, n_{m_p}^p), \quad p = 1, 2, \dots$$

Из (2.5) видно, что a_k являются линейными функциями $S_{n_0^p}, \dots, S_{n_{m_p}^p}$

и, следовательно, равенство (2.7) определяет линейное преобразование заданной последовательности S_n в новую последовательность σ_p ($p = 1, 2, \dots$).

Сходимость $\sigma_p (p \rightarrow \infty)$ так же, как и скорость сходимости, зависит от свойств S_n , выбора функций $\omega_k(n)$ и матрицы узлов (2.6). Некоторые частные случаи исследования этих вопросов будут рассмотрены в настоящей и следующих работах авторов.

§ 3. Интерполирование алгебраическими многочленами от $\frac{1}{n}$. Случай фиксированного числа узлов. Для приложений наибольшее значение имеет, по-видимому, интерполирование S_n алгебраическими многочленами от $\frac{1}{n}$.

$$P_m(n) = a_0 + a_1 n^{-1} + \dots + a_m n^{-m}. \quad (3.1)$$

За функции $\omega_k(n)$ здесь приняты обратные степени n : $\omega_0(n) = 1$, $\omega_1(n) = \frac{1}{n}$, $\omega_2(n) = \frac{1}{n^2}$, ... Первое и второе условия для функций $\omega_k(n)$, указанные в § 2, очевидно выполняются. Что же касается третьего условия о полноте, то многочлены (3.1) образуют полную систему в множестве всех сходящихся последовательностей. Чтобы убедиться в этом, можно, например, совершив замену $x = \frac{1}{n}$, считать переменную x непрерывно изменяющейся на отрезке $0 \leq x \leq 1$ и непрерывно продолжить функцию $S_n = S_{\frac{1}{x}}$ на $0 \leq x \leq 1$, что, очевидно, возможно ввиду сходимости S_n при $x \rightarrow 0$. После этого достаточно воспользоваться известной теоремой Вейерштрасса о полноте алгебраических многочленов в множестве непрерывных функций.

Для интерполирования на шаге номера n рассмотрим узлы $n, n+1, \dots, n+m$, матрица (2.6) будет $m+1$ -диагональной:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & m+1 & 0 & \dots \\ 0 & 2 & 3 & \dots & \dots & m+2 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}.$$

Многочлен $P_m(n)$, интерполирующий S_n , может быть получен по правилу Лагранжа, если его записать в переменной $x = \frac{1}{n}$. Несложные вычисления покажут, что преобразование (2.7) здесь имеет следующую простую форму:

$$\sigma_n = \frac{1}{m!} \sum_{k=0}^m (-1)^{m+k} \binom{m}{k} (n+k)^m S_{n+k}, \quad \binom{m}{k} = \frac{m!}{k!(m-k)!}. \quad (3.2)$$

(3.2) не является регулярным преобразованием, более того, оно может переводить сходящиеся последовательности S_n в расходящиеся, так как его коэффициенты, а следовательно, и сумма их абсолютных значений будут величинами порядка n^m .

Пусть, например, $S_n = (-1)^n \frac{1}{n}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 0$. Здесь

$$\sigma_n = \frac{1}{m!} \sum_{k=0}^m (-1)^{k+m} \binom{m}{k} (-1)^{n+k} (n+k)^{m-1} =$$

$$= (-1)^{n+m} \frac{n^{m-1}}{m!} \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} \left(1 + \frac{k}{n}\right)^{m-1} = O[(-1)^n/n^{m-1}].$$

При $m = 1$ $\sigma_n = (-1)^{n+1}$, если же $m > 1$, σ_n будет неограниченно возрастающей знакопеременной величиной.

Для дальнейшего полезно отметить некоторые свойства преобразования (3.2). Так как интерполирование при помощи $P_m(n)$ должно быть точным для всякого многочлена от $\frac{1}{n}$ степени не больше m , то преобразование (3.2) должно давать точное предельное значение S_n в том случае, когда $S_n = \frac{1}{n^p}$; $p = 0, 1, \dots, m$. Отсюда следуют две леммы.

Лемма 1. Сумма коэффициентов преобразования (3.2) равна единице:

$$\frac{1}{m!} \sum_{k=0}^m (-1)^{m+k} \binom{m}{k} (n+k)^m = 1. \quad (3.3)$$

Это вытекает из (3.2) при $S_n = 1$, $n = 1, 2, \dots$

Лемма 2. Для $p = 1, 2, \dots, m$ выполняются равенства

$$\frac{1}{m!} \sum_{k=0}^m (-1)^{m+k} \binom{m}{k} (n+k)^{m-p} = 0. \quad (3.4)$$

Они получаются из (3.2) для $S_n = \frac{1}{n^p}$, $p = 1, 2, \dots, m$.

Предположим теперь $p > m$.

Лемма 3. Если $S_n = \frac{1}{n^p}$, $p > m$, то

$$\sigma_n^{(m)} = \frac{(-1)^m}{n(n+1)\dots(n+m)} a_{p-m-1}, \quad (3.5)$$

где

$$a_\nu = \sum_{\alpha_0 + \alpha_1 + \dots + \alpha_m = \nu} \frac{1}{n^{\alpha_0} (n+1)^{\alpha_1} \dots (n+m)^{\alpha_m}}, \quad \nu \geq 0, \alpha_k \geq 0.$$

Доказательство. Положим $t = \frac{1}{n}$ и интерполируем функцию $S(t) = t^p$ по значениям в точках $\frac{1}{n}, \frac{1}{n+1}, \dots, \frac{1}{n+m}$, считая $S\left(\frac{1}{n+k}\right) = S_{n+k}$.

$$P_m(n) = \Pi_m(t) =$$

$$= \sum_{k=0}^m \left[\left(t - \frac{1}{n}\right) \dots \left(t - \frac{1}{n+k-1}\right) \left(t - \frac{1}{n+k+1}\right) \dots \right. \\ \left. \dots \left(t - \frac{1}{n+m}\right) \right] \left[\left(\frac{1}{n+k} - \frac{1}{n}\right) \dots \left(\frac{1}{n+k} - \frac{1}{n+k-1}\right) \times \right. \\ \left. \times \left(\frac{1}{n+k} - \frac{1}{n+k+1}\right) \dots \left(\frac{1}{n+k} - \frac{1}{n+m}\right) \right]^{-1}. \quad (3.6)$$

Легко проверить, что

$$P_m(\infty) = \Pi_m(0) = \sigma_n^{(m)} = \frac{1}{m!} \sum_{k=0}^m (-1)^{k+m} \binom{m}{k} (n+k)^m S_{n+k}. \quad (3.7)$$

Нас интересует остаток интерполирования, он представим в виде контурного интеграла

$$t^p - \Pi_m(t) = \frac{\omega(t)}{2\pi i} \int_l \frac{\tau^p}{\omega(\tau)(\tau-t)} d\tau, \quad (3.8)$$

где l — любая замкнутая кривая, охватывающая отрезок $\left[0, \frac{1}{n}\right]$, и

$$\omega(t) = \left(t - \frac{1}{n}\right) \left(t - \frac{1}{n+1}\right) \dots \left(t - \frac{1}{n+m}\right).$$

Пусть $t \rightarrow 0$, учитывая (3.7), из (3.8) получаем

$$\sigma_n^{(m)} = - \frac{(-1)^{m+1}}{n(n+1)\dots(n+m)} \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_l \frac{\tau^p}{\omega(\tau)\tau} d\tau. \quad (3.9)$$

Подынтегральная функция в (3.9) может быть представлена в виде

$$\begin{aligned} \frac{\tau^p}{\omega(\tau)\tau} &= \tau^{p-1} \frac{1}{\tau^{m+1} \left(1 - \frac{1}{n\tau}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{(n+m)\tau}\right)} = \\ &= \tau^{p-m-2} \sum_{\alpha_0=0}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha_0} \tau^{\alpha_0}} \sum_{\alpha_1=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^{\alpha_1} \tau^{\alpha_1}} \dots \sum_{\alpha_m=0}^{\infty} \frac{1}{(n+m)^{\alpha_m} \tau^{\alpha_m}} = \\ &= \tau^{p-m-2} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{\tau^{\nu}} \sum_{\alpha_0+\alpha_1+\dots+\alpha_m=\nu} \frac{1}{n^{\alpha_0} (n+1)^{\alpha_1} \dots (n+m)^{\alpha_m}}; \end{aligned}$$

последнее выражение является лорановским разложением подынтегральной функции в окрестности бесконечно удаленной точки, и интеграл $\frac{1}{2\pi i} \int_l \frac{\tau^p}{\omega(\tau)\tau} d\tau$

равен вычету подынтегральной функции в бесконечности, или коэффициенту при τ^{-1} . Такая степень получится при $\nu = p - m - 1$. Окончательно

$$\begin{aligned} \sigma_n^{(m)} &= \frac{(-1)^m}{n(n+1)\dots(n+m)} \sum_{\alpha_0+\alpha_1+\dots+\alpha_m=p-m-1} \frac{1}{n^{\alpha_0} (n+1)^{\alpha_1} \dots (n+m)^{\alpha_m}} = \\ &= \frac{(-1)^m}{n(n+1)\dots(n+m)} a_{p-m-1}. \end{aligned}$$

Отметим, что $a_{p-m-1} = O\left(\frac{1}{n^{p-m-1}}\right)$ и, следовательно, $\sigma_n^{(m)} = O\left(\frac{1}{n^p}\right)$.

Поскольку (3.2) может не сохранять сходимости, важно выяснить класс последовательностей, которые переводятся в сходящиеся при этом преобразо-

вания. С этой целью обратим преобразование (3.2). Последнее равносильно решению линейного разностного уравнения порядка m :

$$L(S_n) = \frac{1}{m!} \sum_{k=0}^m (-1)^{m+k} \binom{m}{k} (n+k)^m S_{n+k} = \sigma_n \quad (3.10)$$

при произвольных начальных значениях S_1, S_2, \dots, S_m .

Так как старший коэффициент уравнения $\frac{1}{m!} (n+m)^m$ отличен от нуля при всяких $m \geq 0$ и $n \geq 1$, оно всегда разрешимо.

Лемма 2 дает систему m линейно независимых решений $\frac{1}{n^p}, p=1, 2, \dots$

... m , однородного уравнения $L(S_n) = 0$, что позволяет построить общее решение (3.10). Для этого достаточно воспользоваться, например, методом вариации произвольных постоянных. Вычисления, которые необходимо выполнить, не имеют принципиальных трудностей, хотя и являются громоздкими по записи. Отпуская их, мы укажем лишь на то, что общее решение (3.10) может быть записано в следующей форме:

$$S_n = \sum_{p=1}^m C_p n^{-p} + \frac{m}{n^m} \sum_{t=1}^{n-m} (n-t-1) \dots (n-t-m+1) \sigma_t. \quad (3.11)$$

При $n=1, 2, \dots, m$ вторая сумма теряет смысл и заменяется нулем. Эта сумма является решением неоднородного уравнения (3.10) с нулевыми начальными значениями $S_1 = S_2 = \dots = S_m = 0$.

В преобразовании (3.11), обращаемом (3.10), числа σ_t могут принимать любые значения. Если считать $\sigma_t, t=1, 2, \dots$, произвольной сходящейся последовательностью, то (3.11) даст параметрическое представление всякой последовательности $S_n (n=1, 2, \dots)$, которая преобразуется в сходящуюся последовательность после интерполяционного преобразования (3.10). Параметрами представления являются числа C_p , определяющие начальные значения S_1, S_2, \dots, S_m последовательности S_n , и величины σ_t .

Отметим одно свойство параметрического представления S_n , облегчающее его исследование: коэффициенты при σ_t являются положительными числами. Это обстоятельство, в частности, дает возможность просто доказать формулируемую ниже теорему, показывающую, что преобразование (3.10) не может быть применено для обобщенного суммирования расходящихся рядов.

Теорема 1. Для того чтобы последовательность σ_n , полученная в результате преобразования (3.2), сходилась, необходимо, чтобы последовательность S_n была сходящейся: $S_n \rightarrow S$; при этом, если σ_n сходится, то $\lim \sigma_n = S = \lim S_n$.

Доказательство. Пусть $\sigma_n = \sigma + \delta_n, \delta_n \rightarrow 0$. Так как для $n \rightarrow \infty$ при всяких C_p первая сумма правой части (3.11) стремится к нулю ($\sum_{p=1}^m C_p n^{-p} \rightarrow 0$), достаточно показать, что вторая сумма стремится к σ . Но сообразно с равенством $\sigma_n = \sigma + \delta_n$, она распадается на две части*):

*) При преобразованиях мы воспользовались известным равенством

$$\sum_{k=0}^l \binom{p+k}{p} = \binom{p+l+1}{p+1}.$$

$$\begin{aligned}
& \frac{m}{n^m} \sum_{t=1}^{n-m} (n-t-1) \dots (n-t-m+1) \sigma + \\
& + \frac{m}{n^m} \sum_{t=1}^{n-m} (n-t-1) \dots (n-t-m+1) \delta_t = \\
& = \sigma \frac{(n-1)(n-2) \dots (n-m)}{n^m} + \frac{m}{n^m} \sum_{t=1}^{n-m} (n-t-1) \dots \\
& \dots (n-t-m+1) \delta_t = I + II.
\end{aligned}$$

Первое слагаемое последнего выражения очевидно стремится к σ , и нам осталось проверить, что сумма II, содержащая δ_t , будет стремиться к нулю. Так как $\delta_n \rightarrow 0$, существуют числа M и $N(\varepsilon) = N$, такие, что при всяких n будет $|\delta_n| < M$ и для $n > N + m$ $|\delta_t| < \varepsilon$, где ε — произвольно заданное положительное число:

$$\begin{aligned}
|II| &= \left| \sum_{t=1}^N \frac{m}{n} \left(1 - \frac{t+1}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{t+m-1}{n}\right) \delta_t + \right. \\
& + \left. \frac{m}{n^m} \sum_{t=N+1}^{n-m} (n-t-1) \dots (n-t-m+1) \delta_t \right| \leq \frac{mMN}{n} + \\
& + \varepsilon \frac{m}{n^m} \sum_{t=1}^{n-m} (n-t-1) \dots (n-t-m+1) = \\
& = \frac{mMN}{n} + \varepsilon \frac{(n-1) \dots (n-m) m}{n^m} \leq \frac{mMN}{n} + \varepsilon m.
\end{aligned}$$

Ввиду произвольности ε , отсюда следует, что $II \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

Отметим еще одну теорему (без доказательства).

Теорема 2. Пусть $m' < m$. Если последовательность

$$\sigma_n^{(m)} = \frac{1}{m!} \sum_{k=0}^m (-1)^{k+m} \binom{m}{k} (n+k)^m S_{n+k}$$

сходится, то последовательность $\sigma_n^{(m')}$ также сходится.

§ 4. Улучшение сходимости. Последовательности степенного и асимптотического степенного типов сходимости. Примеры.

Нашей целью сейчас будет выяснить условия, при выполнении которых последовательность σ_n , полученная после преобразования, будет сходиться более быстро, чем исходная последовательность S_n . Это мы сделаем для отдельных, но широких и очень часто встречающихся в приложениях типов последовательностей*).

Определение 1. Будем говорить, что последовательность S_n принадлежит алгебраическому (степенному) типу сходимости степени r , если она представима в виде

$$S_n = c_0 + c_1 n^{-1} + c_2 n^{-2} + \dots + (c_r + \gamma_n) n^{-r}, \quad \gamma_n \rightarrow 0. \quad (4.1)$$

*) Краткое изложение см. в [3, 4].

Определение 2. Последовательность S_n принадлежит асимптотическому степенному типу, если для нее представление (4.1) верно при всяких r .

Определение 3. Последовательность S_n принадлежит аналитическому типу сходимости, если существует число N , такое, что при всяких $n > N$ S_n представима сходящимся степенным рядом

$$S_n = c_0 + c_1 n^{-1} + \dots + c_r n^{-r} + \dots \quad (4.2)$$

Подвергнем S_n вида (4.1) интерполяционному преобразованию (3.2). Из лемм 2 и 3 следует, что

$$\begin{aligned} \sigma_n^{(m)} = & c_0 + \frac{(-1)^m}{n(n+1)\dots(n+m)} \{c_{m+1} + c_{m+2} a_1 + \dots + c_r a_{r-m-1}\} + \\ & + \frac{1}{m! n^{r-m}} \sum_{k=0}^m (-1)^{k+m} \binom{m}{k} \left(1 + \frac{k}{n}\right)^m \frac{\gamma_{n+k}}{\left(1 + \frac{k}{n}\right)^r}, \end{aligned} \quad (4.3)$$

где

$$a_i = O\left(\frac{1}{n^i}\right).$$

Рассмотрим сумму отдельно, оценим ее:

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{m!} \sum_{k=0}^m (-1)^{k+m} \binom{m}{k} \left(1 + \frac{k}{n}\right)^m \frac{\gamma_{n+k}}{(1 + k/n)^r} \right| \leq \\ \leq & \max_{n < p < n+m} |\gamma_p| \cdot \frac{1}{m!} \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} \left(1 + \frac{k}{n}\right)^m \frac{1}{\left(1 + \frac{k}{n}\right)^r} \leq B \max_{n < p < n+m} |\gamma_p|, \end{aligned}$$

и так как $\gamma_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, то и вся сумма стремится к нулю, как $O(\gamma_n)$, при любых m и r . Следовательно, третье слагаемое в (4.3) есть $O(n^{m-r} \gamma_n)$, и при $m > r$ нельзя гарантировать сходимости преобразованной последовательности, не зная заранее более точно характера убывания γ_n при $n \rightarrow \infty$. При $m \leq r$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n^{(m)} = c_0.$$

Пусть c_p ($p = 1, 2, \dots, r$) — первый коэффициент, отличный от нуля, в представлении (4.1), т. е.

$$S_n = c_0 + \frac{c_p}{n^p} + \frac{c_{p+1}}{n^{p+1}} + \dots + \frac{c_r + \gamma_n}{n^r}, \quad c_p \neq 0, \quad (4.4)$$

и, следовательно,

$$S_n - c_0 = O\left(\frac{1}{n^p}\right).$$

Рассмотрим, как ведет себя преобразованная последовательность. В (4.3) второе слагаемое есть либо $O\left(\frac{1}{n^{m+1}}\right)$, если $m \geq p$, либо $O\left(\frac{1}{n^p}\right)$, если $m < p$. Следовательно, второе слагаемое в (4.3) может убывать быстрее, чем $\frac{1}{n^p}$, только при $m \geq p$. Третье слагаемое в (4.3), как мы уже показали,

есть $O(\gamma_n/n^{r-m})$, где $\gamma_n \rightarrow 0$, или $o(1/n^{r-m})$, и оно будет убывать быстрее, чем $\frac{1}{n^p}$, во всяком случае, если $r-m \geq p$, т. е. при $m \leq r-p$. Отсюда вытекает

Теорема 3. *Порядок сходимости последовательности вида (4.4), где $r \geq 2p$ повышается при интерполяционном преобразовании порядка m , если $p \leq m \leq r-p$.*

Допустим теперь, что последовательность S_n принадлежит асимптотическому степенному типу сходимости. Для нее второе условие теоремы 3 ($m \leq r-p$) всегда выполняется, и для таких последовательностей верна

Теорема 4. *Если последовательность S_n принадлежит асимптотическому степенному типу сходимости и для нее верно представление*

$$S_n = c_0 + c_p n^{-p} + \dots + (c_r + \gamma_n^r) n^{-r}, \quad (4.5)$$

$$c_p \neq 0, \quad \gamma_n^r \rightarrow 0, \quad r = 1, 2, \dots,$$

то после применения к ней интерполяционного преобразования (3.2) с $m \geq p$ порядок сходимости повышается.

Рассмотрим примеры.

1. Пусть нужно вычислить интеграл

$$I = \int_a^b f(x) dx.$$

Для приближенного вычисления применяем формулу трапеций

$$I \approx T_n = h \left[\frac{1}{2} f(a) + f(a+h) + \dots + \frac{1}{2} f(b) \right], \quad h = \frac{b-a}{n}.$$

Известно, что для любой функции, интегрируемой по Риману, $T_n \rightarrow I$, а скорость сходимости зависит от гладкости $f(x)$. Если $f(x)$ имеет на $[a, b]$ непрерывную производную порядка 2ν , то для T_n справедлива формула Эйлера—Маклорена

$$T_n = I + \sum_{k=1}^{\nu-1} \frac{(b-a)^{2k}}{(2k)!n^{2k}} B_{2k} [f^{(2k-1)}(b) - f^{(2k-1)}(a)] + \rho_{2\nu}(f) =$$

$$= I - \frac{(b-a)^2}{12n^2} [f'(b) - f'(a)] + \frac{(b-a)^4}{720n^4} [f'''(b) - f'''(a)] - \dots,$$

где B_{2k} — числа Бернулли и $\rho_{2\nu}(f) = O(h^{2\nu}) = O\left(\frac{1}{n^{2\nu}}\right)$. Выписанная формула показывает, что сходимость к интегралу правила трапеций имеет алгебраический тип степени 2ν и $T_n - I = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$. Следовательно, для улучшения сходимости достаточно применять интерполирование любого порядка m , где $2 \leq m \leq 2\nu - 2$.

В качестве конкретного примера рассмотрим интеграл

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x} dx = \ln 2 \cong 0,69314718.$$

Здесь

$$\begin{aligned} T_3 &= 0,7 \\ T_4 &= 0,697023809523809 \\ T_5 &= 0,695634920634920 \\ T_6 &= 0,694877344877345 \\ T_7 &= 0,694419469419469 \\ T_8 &= 0,694121850371850 \\ T_9 &= 0,693917602005837 \\ T_{10} &= 0,693771403175428 \end{aligned}$$

Правило трапеций при разбиении отрезка на 10 равных частей дает только 2 верных знака.

Преобразуем полученную последовательность приближений к интегралу. Пусть $m = 2$:

$$\begin{aligned} \sigma_6 &= 0,693137 \\ \sigma_7 &= 0,693141 \\ \sigma_8 &= 0,693143, \end{aligned}$$

т. е. 4 верных цифры.

Пусть $m = 4$:

$$\begin{aligned} \sigma_5 &= 0,69314734 \\ \sigma_6 &= 0,69314725, \end{aligned}$$

здесь 6 верных цифр.

Пусть $m = 6$:

$$\begin{aligned} \sigma_3 &= 0,693147165 \\ \sigma_4 &= 0,693147176. \end{aligned}$$

Последний результат дал 8 верных цифр.

2. Вычисление дзета-функции Римана:

$$\zeta(s) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^s} = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n^{(s)}$$

при помощи интерполяционного преобразования третьего порядка.

Положим сначала $s = 2$:

$$\zeta(2) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = 1,644934066$$

$$\begin{aligned} S_{23} &= 1,60238729247989 & \sigma_{23} &= 1,644934051 \\ S_{24} &= 1,60412340359100 & \sigma_{24} &= 1,644934054 \\ S_{25} &= 1,60572340359100 & \sigma_{25} &= 1,644934056 \\ S_{26} &= 1,60720269353183 \\ S_{27} &= 1,60857443564431 \\ S_{28} &= 1,60984994584839 \end{aligned}$$

Рассмотрим еще сходные вычисления при $s = 3$:

$$\begin{aligned} \zeta(3) &= 1,202056903 & \sigma_{23} &= 1,2020576 \\ S_{23} &= 1,201151925537420088 & \sigma_{24} &= 1,2020575 \\ S_{24} &= 1,201224263500383051 & \sigma_{25} &= 1,2020574 \\ S_{25} &= 1,201288263500383051 \\ S_{26} &= 1,201345159267337990 \\ S_{27} &= 1,201395964530763281 \\ S_{28} &= 1,201441518466623339 \end{aligned}$$

Литература

1. Харди Г. Расходящиеся ряды. ИЛ, 1951.
2. Кук Р. Бесконечные матрицы и пространства последовательностей. ГИФМЛ, 1960.
3. Крылов В. И. ДАН БССР, № 5, 1965.
4. Крылов В. И. ДАН БССР, № 7, 1965.
5. Bilodeau G. G. J. Math. and Phys., 40, № 4, 289, 1961.

Институт математики
АН БССР

Поступило в редакцию 30.X 1968

УДК 517.942+518

А. А. ПАЛЬЦЕВ

О ВЫЧИСЛЕНИИ СФЕРОИДАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ И ИХ ПЕРВЫХ ПРОИЗВОДНЫХ НА ЭВМ. I

Многие задачи физики, механики и других прикладных наук приводят к решению краевых задач для волнового уравнения Гельмгольца

$$(\Delta^2 + k^2)u = 0, \quad (1)$$

когда граничные условия заданы на поверхности вытянутого (сплюснутого) сфероида. В этом случае одним из эффективных методов их решения является метод разделения переменных в вытянутых (сплюснутых) координатных системах, с помощью которого удается получить наиболее простую аналитическую запись граничных условий и свести уравнение (1) к системе трех обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка.

Решения этих уравнений известны. Это — угловые и радиальные вытянутые (сплюснутые) сфероидальные функции и тригонометрические функции кратных углов.

Однако до сих пор нет унификации в обозначениях сфероидальных функций; свойства их изучены недостаточно, а отсутствие полных таблиц значений сфероидальных функций сильно тормозит их практическое применение. Существующие таблицы численных значений сфероидальных функций [1—5] позволяют получать количественные результаты при решении довольно узкого класса прикладных задач, так как они составлены только для небольшой сетки значений параметров.

Еще не преодолены и специфические трудности, возникающие при табулировании сфероидальных функций в широком диапазоне изменения их параметров.

Настоящая работа состоит из двух частей. В первой приводятся алгоритмы вычисления на ЭВМ собственных значений и коэффициентов разложения угловых сфероидальных функций в ряд Фурье по присоединенным функциям Лежандра. Во второй части даются алгоритмы вычисления на ЭВМ значений угловых и радиальных сфероидальных функций и их первых производных. Все алгоритмы реализованы на ЭВМ «Минск-2» в Вычислительном центре АН БССР [7]. Расчеты по этим алгоритмам показали их достаточную эффективность при довольно широком диапазоне изменения параметров.

Всюду в этой работе используются обозначения сфероидальных функций, принятые в [1]. Кроме того, введен некоторый параметр α , позволяющий одновременно рассматривать вытянутые и сплюснутые сфероидальные функции.

1. ВОЛНОВОЕ УРАВНЕНИЕ В СФЕРОИДАЛЬНЫХ КООРДИНАТАХ

Рассмотрим сфероидальные системы координат, связанные с декартовой системой уравнениями

$$\begin{aligned}x &= f[(\xi^2 - \alpha^2)(1 - \eta^2)]^{\frac{1}{2}} \cos \varphi, \\y &= f[(\xi^2 - \alpha^2)(1 - \eta^2)]^{\frac{1}{2}} \sin \varphi, \\z &= f\xi\eta,\end{aligned}$$

где $2f$ — расстояние между фокусами сфероидов, $-1 \leq \eta \leq 1, 0 \leq \varphi \leq 2\pi$, $0 \leq \xi < \infty$ ($\alpha = -i$), $1 \leq \xi < \infty$ ($\alpha = 1$). При $\alpha = 1$ имеем вытянутую сфероидальную координатную систему, при $\alpha = -i$ сплюснутую сфероидальную систему координат.

Считаем, что координаты ξ, η, φ образуют всегда правостороннюю систему. В этих координатах уравнение (1) имеет вид

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial \xi} (\xi^2 - \alpha^2) \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \eta} (1 - \eta^2) \frac{\partial u}{\partial \eta} + \\+ \frac{\xi^2 - \alpha^2 \eta^2}{(\xi^2 - \alpha^2)(1 - \eta^2)} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + c^2 (\xi^2 - \alpha^2 \eta^2) u = 0,\end{aligned} \quad (2)$$

$$c = \frac{2\pi}{\lambda} f = kf \quad (\lambda \text{ — длина волны}).$$

Методом разделения переменных частные решения уравнения (2) выражаются в форме произведения

$$u_{mn}(\xi, \eta, \varphi) = S_{mn}(ac, \eta) R_{mn}(ac, \alpha^3 \xi) \Phi(\varphi).$$

Функции $S_{mn}(ac, \eta)$ и $R_{mn}(ac, \alpha^3 \xi)$ называются соответственно угловыми и радиальными сфероидальными функциями порядка m и степени n (m и n — целые числа, $n \geq 0, |m| \leq n$). Они удовлетворяют обыкновенным дифференциальным уравнениям

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\eta} \left[(1 - \eta^2) \frac{d}{d\eta} S_{mn}(ac, \eta) \right] + \\+ \left[\lambda_{mn}(ac) - \alpha^2 c^2 \eta^2 - \frac{m^2}{1 - \eta^2} \right] S_{mn}(ac, \eta) = 0, \\ \frac{d}{d\xi} \left[(\xi^2 - \alpha^2) \frac{d}{d\xi} R_{mn}(ac, \alpha^3 \xi) \right] - \\- \left[\lambda_{mn}(ac) - c^2 \xi^2 - \frac{m^2}{\xi^2 - \alpha^2} \right] R_{mn}(ac, \alpha^3 \xi) = 0,\end{aligned} \quad (3)$$

где $\lambda_{mn}(ac)$ — собственные значения постоянной разделения, при которых функция $S_{mn}(ac, \eta)$ ограничена в полюсах координатных сфероидов, когда $\eta = \pm 1$. Ограниченные на $[-1, 1]$ решения $S_{mn}(ac, \eta)$ называются сплюснутыми угловыми сфероидальными функциями ($\alpha = -i$) и вытянутыми угловыми сфероидальными функциями ($\alpha = 1$) первого рода. При стремлении параметра c к нулю дифференциальное уравнение (3) переходит в уравнение присоединенных функций Лежандра. Поэтому является естественным представление угловых сфероидальных функций первого рода в виде ряда

$$S_{mn}(ac, z) = \sum_{r=0,1}^{\infty} d_r^{mn}(ac) P_{m+r}^n(z) \quad (4)$$

по присоединенным функциям Лежандра $P_n^m(z)$. Штрих у знака суммы здесь и в дальнейшем означает, что суммирование ведется по четным значениям r , когда $(n - m)$ — четное, и по нечетным значениям r , когда $(n - m)$ — нечетное.

Функции $S_{mn}(ac, \eta)$ образуют ортогональную систему на $[-1, 1]$, т. е.

$$\int_{-1}^1 S_{mn}(ac, \eta) S_{mn'}(ac, \eta) d\eta = \delta_{nn'} N_{mn},$$

где $\delta_{nn'}$ — символ Кронекера и

$$N_{mn} = 2 \sum_{r=0,1}^{\infty} \frac{(r+2m)! [d_r^{mn}(ac)]^2}{(2r+2m+1)r!},$$

а коэффициенты разложения (4) удовлетворяют рекуррентному соотношению, которое приводится ниже.

2. ВЫЧИСЛЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТОВ $d_r^{mn}(ac)$,

СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ $\lambda_{mn}(ac)$

И НОРМИРУЮЩЕГО МНОЖИТЕЛЯ N_{mn}

Подставляя (4) в (3) и используя известные соотношения между присоединенными функциями Лежандра, получим рекуррентную формулу для коэффициентов

$$\varepsilon_{r+2}^m d_{r+2}^{mn}(ac) + (\gamma_r^m - \lambda_{mn}) d_r^{mn}(ac) + \frac{\beta_r^m}{\varepsilon_r^m} d_{r-2}^{mn}(ac) = 0, \quad (5)$$

где

$$\beta_r^m = \frac{r(r-1)(2m+r)(2m+r-1)\alpha^4 c^4}{(2m+2r-1)^2(2m+2r-3)(2m+2r+1)} \quad (r \geq 2);$$

$$\gamma_r^m = (m+r)(m+r+1) + \frac{1}{2} \alpha^2 c^2 \left[1 - \frac{4m^2 - 1}{(2m+2r-1)(2m+2r+3)} \right]$$

$$\varepsilon_r^m = \frac{(2m+r-1)(2m+r)\alpha^2 c^2}{(2m+2r-1)(2m+2r+1)} \quad (r \geq 2).$$

Уравнение (5) есть однородное разностное уравнение второго порядка, которое имеет два нетривиальных решения. Можно показать, что при $r \rightarrow \infty$ $d_r^{mn}(ac)/d_{r-2}^{mn}(ac)$ либо возрастает, либо убывает, как $-\alpha^2 c^2/4r^2$. Выбираем то решение уравнения (5), при котором

$$\lim_{r \rightarrow \infty} d_r^{mn}(ac)/d_{r-2}^{mn}(ac) = 0. \quad (6)$$

Тогда ряд (4) будет абсолютно и равномерно сходиться при всех конечных значениях z .

Из соотношения (5) коэффициенты $d_r^{mn}(ac)$ определяются с точностью до постоянного множителя, который находится из условия нормировки

$$\sum_{r=0}^{\infty} (-1)^{\frac{r-\delta}{2}} (r+2m+\delta)! d_r^{mn}(ac) / 2^r \left(\frac{r-\delta}{2} \right)! \left(\frac{r+2m+\delta}{2} \right)! = 1 \quad (7)$$

$$= (-1)^{\frac{n-m-\delta}{2}} (n+m+\delta)! / 2^{n-m} \left(\frac{n-m-\delta}{2} \right)! \left(\frac{n+m+\delta}{2} \right)!,$$

где

$$\delta = \begin{cases} 0, & (n-m) - \text{четное,} \\ 1, & (n-m) - \text{нечетное.} \end{cases}$$

Это условие получается из требования, чтобы

$$S_{mn}(ac, \eta) = P_n^m(\eta) \text{ и } S'_{mn}(ac, \eta) = P_n^{m'}(\eta)$$

при $\eta = 0$.

Из (5) легко получить

$$d_{r+2}^{mn}(ac)/d_r^{mn}(ac) = -\beta_{r+2}^m / \left[\gamma_{r+2}^m - \lambda_{mn}(ac) + \varepsilon_{r+4}^m \frac{d_{r+4}^{mn}(ac)}{d_{r+2}^{mn}(ac)} \right] \varepsilon_{r+2}^m, \quad (8)$$

$$d_{r+2}^m(ac)/d_r^m(ac) = - \left[\gamma_r^m - \lambda_{mn}(ac) + \beta_r^m / \varepsilon_r^m \frac{d_r^{mn}(ac)}{d_{r-2}^{mn}(ac)} \right] \frac{1}{\varepsilon_{r+2}^m}. \quad (9)$$

Итерируя уравнение (8), учитывая (6), получим для $d_{r+2}^{mn}(ac)/d_r^{mn}(ac)$ бесконечную непрерывную дробь; итерируя (9), получим конечную непрерывную дробь, так как при $r < 0$

$$d_r^{mn}(ac) = 0.$$

Приравнивая эти дроби, при $r = n - m$ для нахождения собственных значений $\lambda_{mn}(ac)$ имеем трансцендентное уравнение

$$\begin{aligned} \gamma_{n-m}^m - \lambda_{mn}(ac) - \frac{\beta_{n-m}^m}{\gamma_{n-m-2}^m - \lambda_{mn}(ac)} - \frac{\beta_{n-m-2}^m}{\gamma_{n-m-4}^m - \lambda_{mn}(ac)} - \dots - \\ - \frac{\beta_{n-m+2}^m}{\gamma_{n-m+2}^m - \lambda_{mn}(ac)} - \frac{\beta_{n-m+4}^m}{\gamma_{n-m+4}^m - \lambda_{mn}(ac)} - \dots = 0. \end{aligned} \quad (10)$$

Однако вычисление собственных значений $\lambda_{mn}(ac)$ непосредственно из уравнения (10) при малых c связано с большой потерей значащих цифр при нахождении $\gamma_{n-m}^m - \lambda_{mn}(ac)$. Поэтому с вычислительной точки зрения более удобно находить из уравнения (10) значение $t_{mn} = \gamma_{n-m}^m - \lambda_{mn}(ac)$.

Перепишем уравнение (10) в виде

$$\begin{aligned} f(t_{mn}) = t_{mn} - \frac{\beta_{n-m}^m}{\gamma_{n-m-2}^m - \gamma_{n-m}^m + t_{mn}} - \frac{\beta_{n-m-2}^m}{\gamma_{n-m-4}^m - \gamma_{n-m-2}^m + t_{mn}} - \dots - \\ - \frac{\beta_{n-m+2}^m}{\gamma_{n-m+2}^m - \gamma_{n-m}^m + t_{mn}} - \frac{\beta_{n-m+4}^m}{\gamma_{n-m+4}^m - \gamma_{n-m+2}^m + t_{mn}} - \dots = 0. \end{aligned}$$

Для нахождения корней трансцендентного уравнения

$$f(t_{mn}) = 0 \quad (11)$$

можно применить метод Вегстейна [8], который не требует вычисления производной. Однако сходимость метода Вегстейна зависит от выбора начального приближения к корню. Поэтому используем для нахождения значений t_{mn} из уравнения (11) следующий алгоритм, который всегда сходится.

Алгоритм. Взяв в качестве начального приближения к корню

$$t_{mn}^0 = \gamma_{n-m}^m - \left\{ n(n+1) - \frac{\alpha^2 c^2}{2} \left[\frac{(2m-1)(2m+1)}{(2n-1)(2n+3)} - 1 \right] + \right. \\ \left. + \frac{c^4}{2} \left[\frac{(n-m-1)(n-m)(n+m-1)(n+m)}{(2n+1)(2n-1)^3(2n-3)} - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{(n-m+1)(n-m+2)(n+m+1)(n+m+2)}{(2n+5)(2n+3)^3(2n+1)} \right] \right\},$$

применим к уравнению (11) один раз простую итерацию

$$t_{mn}^1 = f(t_{mn}^0).$$

Далее, полагая $t_{mn}^{k-1} = t_{mn}^0$; $t_{mn}^k = t_{mn}^1$, вычисляется следующее приближение по формуле

$$t_{mn}^{k+1} = t_{mn}^k - F(t_{mn}^k, t_{mn}^{k-1}), \quad (12)$$

где

$$F(t_{mn}^k, t_{mn}^{k-1}) = \frac{f(t_{mn}^k)(t_{mn}^k - t_{mn}^{k-1})}{f(t_{mn}^k) - f(t_{mn}^{k-1})}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Затем проверяется выполнимость условия

$$|f(t_{mn}^{k+1})| < |f(t_{mn}^k)|. \quad (13)$$

Если неравенство выполняется, то вычисляется последовательность значений

$$f[t_{mn}^k - rF(t_{mn}^k, t_{mn}^{k-1})], \quad r = 2, 3, \dots$$

до тех пор, пока не будет впервые достигнуто $r = N$, при котором

$$|f[t_{mn}^k - (N+1)F(t_{mn}^k, t_{mn}^{k-1})]| > |f[t_{mn}^k - NF(t_{mn}^k, t_{mn}^{k-1})]|,$$

после чего в качестве следующего приближения принимается

$$t_{mn}^{k+1} = t_{mn}^k - NF(t_{mn}^k, t_{mn}^{k-1}).$$

Если неравенство (13) не выполняется, т. е.

$$|f(t_{mn}^{k+1})| > |f(t_{mn}^k)|,$$

то в этом случае вычисляются значения

$$f \left[t_{mn}^k - \frac{F(t_{mn}^k, t_{mn}^{k-1})}{2^r} \right], \quad r = 2, 3, \dots$$

пока r не достигнет величины N , для которой

$$\left| f \left[t_{mn}^k - \frac{F(t_{mn}^k, t_{mn}^{k-1})}{2^{N-1}} \right] \right| > \left| f \left[t_{mn}^k - \frac{F(t_{mn}^k, t_{mn}^{k-1})}{2^N} \right] \right| \leq \\ \leq \left| f \left[t_{mn}^k - \frac{F(t_{mn}^k, t_{mn}^{k-1})}{2^{N+1}} \right] \right|,$$

после чего t_{mn}^{k+1} принимается равным

$$t_{mn}^{k+1} = t_{mn}^k - \frac{F(t_{mn}^k, t_{mn}^{k-1})}{2^N}.$$

Итеративный процесс прекращается, если выполняется условие

$$|\varepsilon t_{mn}^k| - |\Delta t_{mn}^k| \geq 0,$$

где

$$\Delta t_{mn}^k = t_{mn}^{k+1} - t_{mn}^k.$$

Зная значение t_{mn} , можно вычислить коэффициенты $d_r^{mn}(ac)$, $r \geq 0$, по следующему алгоритму:

$$d_r^{mn}(ac) = d_{n-m}^{mn}(ac) \bar{d}_r^{mn}(ac),$$

$$d_{n-m}^{mn}(ac) = \frac{(-1)^{\frac{n-m-\delta}{2}} \prod_{i=1}^{\frac{n+m+\delta}{2}} \left(\frac{n+m+\delta}{2} + i \right)}{2^{n-m} \left(\frac{n-m-\delta}{2} \right)!} \bar{d}_r^{mn}(ac),$$

$$\bar{d}_r^{mn}(ac) = \sum_{r=\delta}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{r-\delta}{2}} \prod_{i=1}^{\frac{r+2m+\delta}{2}} \left(\frac{r+2m+\delta}{2} + i \right)}{2^r \left(\frac{r-\delta}{2} \right)!} \bar{d}_r^{mn}(ac),$$

где $\delta = \begin{cases} 0, & \text{если } (n-m) \text{ — четное,} \\ 1, & \text{если } (n-m) \text{ — нечетное.} \end{cases}$

Для $r < n-m$ $\bar{d}_r^{mn}(ac)$ вычисляются по формулам

$$\bar{d}_r^{mn}(ac) = \bar{d}_r^{mn}(ac) \bar{d}_{r+2}^{mn}(ac) \dots \bar{d}_{n-m-2}^{mn}(ac),$$

где

$$\bar{d}_r^{mn}(ac) = \frac{d_r^{mn}(ac)}{d_{r+2}^{mn}(ac)} =$$

$$= \frac{-\varepsilon_{r+2}^m}{\gamma_r^m - \gamma_{n-m}^m + t_{mn} - \frac{\beta_r^m}{\gamma_{r-2}^m - \gamma_{n-m}^m + t_{mn}} - \frac{\beta_{r-2}^m}{\gamma_{r-4}^m - \gamma_{n-m}^m + t_{mn}} \dots}$$

Для $r > n-m$ $\bar{d}_r^{mn}(ac)$ вычисляются по формулам

$$\bar{d}_r^{mn}(ac) = \bar{d}_r^{mn}(ac) \bar{d}_{r-2}^{mn}(ac) \dots \bar{d}_{n-m}^{mn}(ac),$$

где

$$\bar{d}_r^{mn}(ac) = \frac{d_{r+2}^{mn}(ac)}{d_r^{mn}(ac)} =$$

$$= \frac{\beta_{r+2}^m}{\gamma_{r+2}^m - \gamma_{n-m}^m + t_{mn}} - \frac{\beta_{r+4}^m}{\gamma_{r+4}^m - \gamma_{n-m}^m + t_{mn}} \dots / \varepsilon_{r+2}^m.$$

Полагаем также $\prod_{i=1}^{\frac{n+m}{2}} \left(\frac{n+m}{2} + i \right) = 1$ при $n=m=0$ и $\prod_{i=1}^{\frac{r+2m}{2}} \left(\frac{r+2m}{2} + i \right) = 1$ при $m=r=0$.

В приведенном алгоритме коэффициенты $d_r^{mn}(ac)$ находятся сначала с точностью до множителя $d_{n-m}^{mn}(ac)$, который, когда c мало, является, как правило, наибольшим при данных m и n . Значение $d_{n-m}^{mn}(ac)$ находится из условия нормализации (7). Таким образом, повышается точность вычисления $d_r^{mn}(ac)$. Нормирующий множитель вычисляется по формуле

$$N_{mn} = 2 \sum_{r=0,1}^{\infty} \frac{[d_r^{mn}(ac)]^2 \prod_{i=1}^{2m} (r+i)}{2m+2r+1},$$

$$\prod_{i=1}^{2m} (r+i) = 1 \text{ при } m=0.$$

Значения непрерывных дробей, входящих в данные алгоритмы, вычислялись по правилу, приведенному в [6].

По данным алгоритмам было пересчитано в случае сплюснутой сфероидальной системы координат большинство таблиц, приведенных в [1], и, как правило, получались те же значения. Однако в таблице 131 [1] должно быть

$$\lambda_{03}(-i4,8) = 1,00865,$$

$$\lambda_{13}(-i0,6) = 11,832.$$

Кроме того, формулы (3.1.8), (3.1.9) и (3.1.10) из [1] должны соответственно иметь вид

$$N_r^m = -\beta_r^m / \gamma_r^m - \lambda_{mn} + N_{r+2}^m \quad (r \geq 2),$$

$$N_{r+2}^m = -\left(\gamma_r^m - \lambda_{mn} + \frac{\beta_r^m}{N_r^m} \right) \quad (r \geq 2),$$

$$N_2^m = -(\gamma_0^m - \lambda_{mn}), \quad N_3^m = -(\gamma_1^m - \lambda_{mn}).$$

Автор выражает благодарность Е. А. Иванову за советы и постоянное внимание к работе.

Литература

1. Фламмер К. Таблицы сфероидальных волновых функций (Б-ка матем. таблиц, в. 17). ВЦ АН СССР, М., 1962.
2. Stratton J. A., Morse P. M., Chu L. J., Little J. D. C., Corbato F. J. Spheroidal wave Functions. N. Y., 1956.
3. Stratton J. A., Morse P. M., Chu L. J., Huntner R. A. Elliptic Cylinder and Spheroidal wave Functions. N. Y., 1941.
4. Bouwkamp C. J. J. Math. Phys., 26, 79, 1947.
5. Leitner A., Spence R. D. J. Frankl. Inst., 249, 299, 1950.
6. Сб. «Математическое обеспечение ЭВМ «Минск-2», в. 2, 1968.
7. Сб. «Математическое обеспечение ЭВМ «Минск-2», в. 3, 1968.
8. Wegstein J. H. Commun. Assoc. Comput. Mach., 1, 6, 9, 1958.

Институт математики
АН БССР

Поступило в редакцию 28.X 1968

В. А. ЕМЕЛИЧЕВ

О ЛОКАЛЬНЫХ МИНИМУМАХ В ОДНОЙ МНОГОЭКСТРЕМАЛЬНОЙ ЗАДАЧЕ. I

Сложность решения многоэкстремальных задач связана с тем, что локальный экстремум не всегда является глобальным. Поэтому естественный путь решения таких задач состоит в построении всех локальных экстремумов и выборе среди них наилучшего. При этом процедура построения локальных экстремумов должна быть по возможности проще.

В настоящей статье решается задача вогнутого программирования, состоящая в минимизации сепарабельной функции

$$F(X) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f(x_{ij}) \quad (1)$$

при выполнении условий

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j, \quad j = \overline{1, n}, \quad (2)$$

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i, \quad i = \overline{1, m}, \quad (3)$$

$$x_{ij} \geq 0, \quad i = \overline{1, m}, \quad j = \overline{1, n}, \quad (4)$$

где a_i, b_j — целые положительные числа, $f(x)$ — строго вогнутая функция в том смысле, что ее производная убывает*

Предполагаем невырожденность задачи (1) — (4) и наличие баланса

$$\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j.$$

Векторы $A = (a_1, a_2, \dots, a_m)$ и $B = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ определяют множество $M(A, B)$ матриц $X = \{x_{ij}\}_{m \times n}$, элементы которых удовлетворяют указанным условиям (2) — (4). Каждую матрицу этого множества будем называть планом задачи (1) — (4). В силу вогнутости функции $F(X)$ и выпуклости многогранника $M(A, B)$ очевидно, что локальные минимумы следует искать среди множества $V(A, B)$ вершин многогранника $M(A, B)$. В дальнейшем под локальным минимумом (или, точнее сказать, точкой локального минимума) функции $F(X)$ при условиях (2) — (4) будем понимать такую вершину X^0 многогранника $M(A, B)$, что $F(X^0) \leq F(X)$ для всех соседних с ней вершин X . Такую вершину X^0 будем также называть локально-минимальным планом задачи (1) — (4).

* К задаче (1) — (4) сводится задача специализации литейного производства (см. [1]).

§ 1. Лемма 1 (см. [2]). Если $a < b \leq c < d$ и $a + d = b + c$, то для любой строго вогнутой функции $f(x)$ имеет место неравенство

$$f(a) + f(d) < f(b) + f(c).$$

Лемма 2. Если $a + c > b$ и $c > 0$, то для любой строго вогнутой функции $f(x)$ имеет место неравенство

$$f(a) + f(b) > f(a + c) + f(b - c). \quad (5)$$

Доказательство. Возможны два случая: $a \geq b$ и $a < b$.

1) Если $a \geq b$, то $b - c < b \leq a < a + c$. Отсюда на основании леммы 1 получаем неравенство (5).

2) Если $a < b$, то $b - c < a < b < a + c$. Отсюда вновь вытекает справедливость неравенства (5). Лемма 2 доказана.

Так как локально-минимальные планы задачи (1) — (4) следует искать среди вершин многогранника $M(A, B)$, то нас будут интересовать лишь планы X^0 , у которых множество «занятых клеток» $T = \{(i, j) | x_{ij}^0 > 0\}$ *) не содержит циклов, а каждая клетка $(i, j) \in T$ образует с занятыми клетками единственный цикл.

Определение 1. Три отличные от нуля компоненты $x_{kp}^0, x_{kq}^0, x_{lq}^0$ плана $X^0 \in V(A, B)$ будем называть нормальной тройкой. Числа x_{kp}^0 и x_{lq}^0 назовем крайними, x_{kq}^0 — внутренним. Так как $X^0 \in V(A, B)$, то $x_{lp}^0 = 0$.

Очевидна следующая

Лемма 3. Если положительная компонента x_{kq}^0 плана X^0 такова, что $x_{kq}^0 < \min(a_k, b_q)$, то в X^0 существует нормальная тройка $x_{kp}^0, x_{kq}^0, x_{lq}^0$, внутренним числом которой является x_{kq}^0 .

Определение 2. Нормальную тройку $x_{kp}^0, x_{kq}^0, x_{lq}^0$ плана $X^0 \in V(A, B)$ будем называть идеальной, если одно из крайних чисел (x_{kp}^0 или x_{lq}^0) не меньше суммы остальных чисел этой тройки ($x_{kp}^0 \geq x_{kq}^0 + x_{lq}^0$ или $x_{lq}^0 \geq x_{kp}^0 + x_{kq}^0$).

Определение 3. План $X^0 \in V(A, B)$ будем называть идеальным, если всякая его нормальная тройка идеальна. Множество идеальных планов задачи (1) — (4) обозначим через $J(A, B)$.

Теорема 1. План задачи (1) — (4) является локальным минимумом тогда и только тогда, когда он идеальный.

Доказательство достаточности содержится в [2] (см. доказательство теоремы 5) и состоит в том, что выясняется невозможность улучшения идеального плана X^0 путем исправления на циклах, т. е. путем перехода в соседние вершины.

Необходимость докажем от противного. Пусть план $X^0 = \{x_{ij}^0\} \in V(A, B)$ является локальным минимумом и пусть существует нормальная тройка $x_{kp}^0, x_{kq}^0, x_{lq}^0$, не являющаяся идеальной, т. е.

$$x_{kp}^0 + x_{kq}^0 > x_{lq}^0, \quad (6)$$

$$x_{kq}^0 + x_{lq}^0 > x_{kp}^0. \quad (7)$$

Очевидно, что достаточно рассмотреть случай, когда

$$x_{kp}^0 \geq x_{lq}^{0**}. \quad (8)$$

*) В силу невырожденности задачи множество T содержит ровно $m+n-1$ клеток.

***) Естественно, что в этом случае неравенство (6) является следствием неравенства (8).

Клетка $(t, p) \in \bar{T}$ образует единственный цикл U с занятыми клетками: $U = \{(t, p), (t, q), (k, q), (k, p)\}$. Как известно, для перехода в соседнюю вершину (\bar{X}^0) необходимо числа, стоящие на четных местах (x_{tq}^0, x_{kp}^0) , уменьшить на $\min(x_{tq}^0, x_{kp}^0) = x_{tq}^0$, числа, стоящие на нечетных местах $(0, x_{kq}^0)$, увеличить на $\min(x_{tq}^0, x_{kp}^0) = x_{tq}^0$, а числа, не вышедшие в цепь, оставить без изменения.

Так как справедливо неравенство (7) и $x_{tq}^0 > 0$, то в силу леммы 2 имеем

$$F(X^0) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f(x_{ij}^0) = \sum_{(i,j) \in W \setminus U} f(x_{ij}^0) + f(0) + f(x_{tq}^0) + f(x_{kq}^0) + \\ + f(x_{kp}^0) > \sum_{(i,j) \in W \setminus U} f(x_{ij}^0) + f(x_{tq}^0) + f(0) + f(x_{kq}^0 + x_{tq}^0) + \\ + f(x_{kp}^0 - x_{tq}^0) = F(\bar{X}^0),$$

где

$$W = \{(i, j) \mid i = \overline{1, m}; j = \overline{1, n}\}, \quad U = \{(t, p), (t, q), (k, q), (k, p)\}.$$

Это значит, что во множестве $V(A, B)$ нашлась вершина \bar{X}^0 соседняя с вершиной X^0 , в которой значение функционала $F(X)$ меньше, чем в X^0 . Следовательно, план X^0 не является локальным минимумом функции $F(X)$. Полученное противоречие доказывает необходимость условий теоремы.

Следствие. Количество локальных минимумов и сами локально-минимальные планы задачи (1) — (4) не зависят от характера изменений строго вогнутой функции $f(x)$, а зависят только от многогранника $M(A, B)$, т. е. от векторов A и B .

Поэтому в дальнейшем множество локальных минимумов будем обозначать через $L(A, B)$. Итак, $L(A, B) = J(A, B)$.

§ 2. Рассмотрим следующую процедуру Φ , состоящую из $m+n-1$ шагов. Пусть $A^{(1)} = A$, $B^{(1)} = B$, т. е. $a_i^{(1)} = a_i$, $i = \overline{1, m}$; $b_j^{(1)} = b_j$, $j = \overline{1, n}$. k -й шаг ($1 \leq k \leq m+n-1$) алгоритма Φ . Выбираем из каждого вектора $A^{(k)} = (a_1^{(k)}, a_2^{(k)}, \dots, a_m^{(k)})$ и $B^{(k)} = (b_1^{(k)}, b_2^{(k)}, \dots, b_n^{(k)})$ по одной положительной компоненте $a_i^{(k)}$ и $b_j^{(k)}$.

Полагаем

$$x_{ij}^0 = z_k = \min(a_i^{(k)}, b_j^{(k)}); \quad (9)$$

$$x_{\alpha j}^0 = 0 \text{ для всех } \alpha \in C_{ij}, \text{ если } a_i^{(k)} > b_j^{(k)};$$

$$x_{i\beta}^0 = 0 \text{ для всех } \beta \in D_{ij}, \text{ если } a_i^{(k)} < b_j^{(k)};$$

$$x_{\alpha j}^0 = x_{i\beta}^0 = 0 \text{ для всех } \alpha \in C_{ij}, \beta \in D_{ij}, \text{ если } a_i^{(k)} = b_j^{(k)*}, \quad (9')$$

где $C_{ij} = \{1, 2, \dots, i-1, i+1, \dots, m\} \setminus \{\alpha \mid (\alpha, j) \in T^{(k)}\}$, $D_{ij} = \{1, 2, \dots, j-1, j+1, \dots, n\} \setminus \{\beta \mid (i, \beta) \in T^{(k)}\}$, а $T^{(k)}$ — множество занятых k -му шагу клеток.

Векторы $A^{(k)}$ и $B^{(k)}$ преобразуем в $A^{(k+1)}$ и $B^{(k+1)}$ по следующим правилам:

$$a_{\alpha}^{(k+1)} = a_{\alpha}^{(k)}, \quad \alpha = 1, 2, \dots, i-1, i+1, \dots, m;$$

$$a_i^{(k+1)} = a_i^{(k)} - z_k;$$

$$b_{\beta}^{(k+1)} = b_{\beta}^{(k)}, \quad \beta = 1, 2, \dots, j-1, j+1, \dots, n;$$

$$b_j^{(k+1)} = b_j^{(k)} - z_k. \quad (10)$$

*) Этот случай представится лишь на последнем $(m+n-1)$ -м шаге, так как задача (1) — (4) невырожденная.

Переходим к следующему шагу. На этом заканчивается описание алгоритма φ .

Непосредственно из определения процедуры φ следует

Лемма 4. Если многогранник $M(A, B)$ невырожден, то и $M(A^{(k)}, B^{(k)})$, $k < m + n - 1$, невырожден.

Отсюда, в частности, вытекает

Лемма 5. Если на k -м шаге ($1 \leq k < m + n - 1$) процедуры φ окажется, что одна из положительных компонент вектора $A^{(k)}$ равна одной из положительных компонент вектора $B^{(k)}$, то задача (1) — (4) является вырожденной.

Теорема 2. С помощью процедуры φ строится план $X^0 \in V(A, B)$.

Доказательство. Очевидно, что матрица $X^0 = \{x_{ij}^0\}$, построенная с помощью процедуры φ , является планом задачи (1) — (4). Покажем, что X^0 — вершина многогранника $M(A, B)$, т. е. $X^0 \in V(A, B)$.

Так как по предположению задача (1) — (4) невырожденная, то в силу леммы 5 последовательность Z , получающаяся в процессе построения плана X^0 с помощью процедуры φ , содержит ровно $m + n - 1$ положительных чисел: $z_1, z_2, \dots, z_{m+n-1}$. Следовательно, количество ненулевых компонент плана X^0 равно $m + n - 1$.

Отсутствие циклов во множестве T занятых клеток плана X^0 докажем индукцией по $p = m + n$. Для $p = 2$, когда $m = n = 1$, имеем лишь один план, который не имеет циклов. Предположим, утверждение верно для $p = m + n - 1$. Пусть, например, $z_1 = x_{ij}^0 = \min(a_i, b_j) = a_i$, тогда $x_{i\beta}^0 = 0$, $\beta = 1, 2, \dots, j-1, j+1, \dots, n$, и далее с помощью процедуры φ строим план транспортной задачи размерности $(m-1) \times n$ с векторами $A^{(2)} = (a_1, a_2, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_m)$ и $B^{(2)} = (b_1, b_2, \dots, b_{j-1}, b_j - a_i, b_{j+1}, \dots, b_n)$. Этот план по предположению не содержит циклов и вместе с $x_{ij}^0 = a_i$ будет планом исходной задачи. Так как i -я строка содержит лишь одну положительную компоненту x_{ij}^0 , то ее присоединение к плану, не содержащему циклов, не может породить ни одного цикла. Доказательство теоремы закончено.

Теорема 3. Любой план $X^0 \in V(A, B)$ может быть построен с помощью процедуры φ .

Доказательство. Обозначим через $Z^{(1)} = \{z_1, z_2, \dots, z_{m+n-1}\}$ множество положительных компонент плана $X^0 = \{x_{ij}^0\} \in V(A, B)$, т. е.

$$Z^{(1)} = \{x_{ij}^0 \mid x_{ij}^0 > 0, i = \overline{1, m}; j = \overline{1, n}\}.$$

Как известно, числа множества $Z^{(1)}$ не образуют циклов в матрице X^0 . Пусть $A^{(1)} = A$, $B^{(1)} = B$.

Рассмотрим следующую процедуру ω .

k -й шаг ($1 \leq k \leq m + n - 1$). Проверяем, существует ли такое число $z_\gamma = x_{ij}^0 \in Z^{(k)}$, что $z_\gamma = x_{ij}^0 = \min(a_i^{(k)}, b_j^{(k)})$. Если да, то преобразуем векторы $A^{(k)}$ и $B^{(k)}$ в $A^{(k+1)}$ и $B^{(k+1)}$ по формулам (10), полагаем $Z^{(k+1)} = Z^{(k)} \setminus \{z_\gamma\}$ и переходим к следующему шагу. Если нет, то процедура ω закончена.

Очевидно, если процедура ω длится $m + n - 1$ шагов, то план X^0 строится с помощью процедуры φ .

Допустим, что после некоторого $(k-1)$ -го шага среди оставшихся положительных компонент $Z^{(k)}$ плана X^0 нет ни одной такой z_γ , что $z_\gamma = x_{ij}^0 = \min(a_i^{(k)}, b_j^{(k)})$, т. е. любая оставшаяся компонента $z_\gamma = x_{ij}^0 < \min(a_i^{(k)}, b_j^{(k)})$. Отсюда на основании леммы 3 в $Z^{(k)}$ существует нормальная тройка $x_{ii}^0, x_{ij}^0, x_{pj}^0$ плана X^0 . На том же основании ($x_{pj}^0 < \min(a_p^{(k)},$

$b_j^{(k)})$ существует нормальная тройка $x_{ij}^0, x_{pj}^0, x_{pq}^0 \in Z^{(k)}$ и т. д. Таким образом, получаем необрывающуюся последовательность положительных компонент $x_{it}^0, x_{ij}^0, x_{pj}^0, x_{pq}^0, x_{iq}^0, \dots$ плана X^0 , причем каждая из этих компонент принадлежит множеству $Z^{(k)}$. В силу конечности множества $Z^{(k)}$, начиная с некоторого места, числа в этой последовательности должны повторяться. Следовательно, множество занятых клеток плана X^0 содержит цикл, что противоречит принадлежности плана X^0 множеству $V(A, B)$. Полученное противоречие доказывает теорему 3.

Из теорем 2 и 3 вытекает

Следствие. $V(A, B) = M_\varphi(A, B)$, где $M_\varphi(A, B)$ — множество планов, каждый из которых построен с помощью процедуры φ .

§ 3. Процедуру φ , в результате работы которой появляется невозрастающая последовательность Z положительных чисел, т. е. $z_1 \geq z_2 \geq \dots \geq z_{m+n-1} > 0$, будем называть методом невозрастающей последовательности и обозначать через φ^* .

Лемма 6. В процессе построения плана с помощью процедуры φ^* внутреннее число нормальной тройки не может появиться раньше крайних чисел этой тройки.

Доказательство. Пусть в процессе построения плана X^0 число $z_k = x_{ij}^0 = \min(a_i^{(k)}, b_j^{(k)})$ появилось раньше чисел $z_{k_1} = x_{ip}^0$ и $z_{k_2} = x_{ij}^0$. Это означает, что в момент заполнения клетки (i, j) , т. е. на k -м шаге алгоритма φ^* , запас груза в i -м пункте производства $(a_i^{(k)})$ и потребность j -го пункта назначения $(b_j^{(k)})$ превышают число $z_k = x_{ij}^0$, т. е. $\min(a_i^{(k)}, b_j^{(k)}) > z_k$. Полученное противоречие доказывает лемму 6.

Из леммы 6, в частности, вытекает

Лемма 7. План, построенный методом φ^* , не может иметь нормальной тройки, в которой внутреннее число больше крайних.

Лемма 8. План, построенный методом φ^* , не может иметь нормальной тройки, крайние числа которой равны.

Доказательство. Пусть для нормальной тройки $x_{kp}^0, x_{kq}^0, x_{iq}^0$ некоторого плана X^0 , построенного методом φ^* , утверждение леммы неверно, т. е. $x_{kp}^0 = x_{iq}^0$. В силу теоремы 2 $X^0 \in V(A, B)$, т. е. X^0 является вершиной многогранника $M(A, B)$. Перейдем в соседнюю вершину \bar{X}^0 , компоненты $\{\bar{x}_{ij}^0\}$ которой вычисляются по формулам

$$\begin{aligned}\bar{x}_{kp}^0 &= x_{kp}^0 - \min(x_{kp}^0, x_{iq}^0) = 0, \\ \bar{x}_{iq}^0 &= x_{iq}^0 - \min(x_{kp}^0, x_{iq}^0) = 0, \\ \bar{x}_{kq}^0 &= x_{kq}^0 + \min(x_{kp}^0, x_{iq}^0), \\ \bar{x}_{ip}^0 &= \min(x_{kp}^0, x_{iq}^0), \\ \bar{x}_{ij}^0 &= x_{ij}^0, \quad (i, j) \in W \setminus U,\end{aligned}$$

где $W = \{(i, j) | i = \overline{1, m}; j = \overline{1, n}\}$, $U = \{(k, p), (t, q), (k, q), (t, p)\}$.

Таким образом, число положительных компонент опорного плана \bar{X}^0 равно $m + n - 2$. Это противоречит условию невырожденности многогранника $M(A, B)$. Лемма 8 доказана.

Литература

- Емеличев В. А., Шлефрин В. И. Экономика и математические методы, 4, в. 1, 1968.
- Емеличев В. А. Весті АН БССР, сер. фіз.-мат. навук, № 3, 1965.

Белорусский государственный университет им. В. И. Ленина

Поступило в редакцию 20.VI 1968

В. Н. АБРАШИН

**СХОДИМОСТЬ И ОЦЕНКА ПОГРЕШНОСТИ МЕТОДА
 СЕТОК ДЛЯ НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧ В СЛУЧАЕ
 ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ**

В работе доказывается равномерная сходимость и дается оценка погрешности многоточечных схем метода сеток для задачи Гурса. Для простоты изложения рассмотрим лишь одно гиперболическое уравнение второго порядка, однако результат может быть обобщен и на системы уравнений такого типа, а также на другие краевые задачи.

Рассмотрим следующую задачу Гурса:

$$\begin{aligned} u_{xy} &= a(x, y)u_x + b(x, y)u_y + f(x, y, u), & (1) \\ u(x, 0) &= \varphi(x), \quad u(0, y) = \psi(y), \quad \varphi(0) = \psi(0), & (2) \\ 0 \leq x &\leq l_1, \quad 0 \leq y \leq l_2. \end{aligned}$$

Разобьем область $D \{0 \leq x \leq l_1, 0 \leq y \leq l_2\}$ сеткой характеристик $x = x_i = ih_1, y = y_j = jh_2; h_1, h_2 > 0; i = 0, 1, \dots, N_1; j = 0, 1, \dots, N_2;$
 $N_1 = \left[\frac{l_1}{h_1} \right], N_2 = \left[\frac{l_2}{h_2} \right]$. Предположим, что в точках $(x_i, y_j) (i = 1, 2, \dots, k_1 - 2$ при $j = 1, 2, \dots, N_2$ и $j = 1, 2, \dots, k_2 - 2$ при $i = 1, 2, \dots, N_1)$ как-то найдено приближенное решение $u_{ij} = v_{ij}$ задачи (1), (2) с соответствующими погрешностями δ_{ij} .

Ниже исходную задачу Гурса приближенно заменим аппроксимирующей ее системой алгебраических уравнений.

Предполагая, что в D существует производная $b_y(x, y)$, преобразуем уравнение (1) к виду

$$(u_x - b(x, y)u)_y = a(x, y)u_x - b_y(x, y)u + f(x, y, u). \quad (3)$$

На прямых $y = y_j (j = 0, 1, \dots, N_2)$ выражение (3) заменим следующей дифференциально-разностной схемой:

$$\begin{aligned} &\sum_{m=0}^{k_2-1} A_m [u_x(x, y_{j+m}) - b(x, y_{j+m})u(x, y_{j+m})] = \\ &= h_2 \sum_{m=0}^{k_2-1} B_m [a(x, y_{j+m})u_x(x, y_{j+m}) - b_y(x, y_{j+m})u(x, y_{j+m}) + \\ &+ f(x, y_{j+m}, u(x, y_{j+m}))] + h_2 r_j(x), \quad j = 0, 1, \dots, N_2 - k_2 + 1, \end{aligned} \quad (4)$$

причем

$$A_{k_2-1} \neq 0, \quad \sum_{m=0}^{k_2-1} A_m = 0,$$

$$\sum_{m=0}^{k_2-1} m^v A_m = v! \sum_{m=0}^{k_2-1} m^{v-1} B_m / (v-1)! \quad (1 \leq v \leq \rho_2),$$

$$\sum_{m=0}^{k_2-1} m^{\rho_2+1} A_m = (\rho_2 + 1)! \sum_{m=0}^{k_2-1} m^{\rho_2} B_m / \rho_2!,$$

ρ_2 называется степенью точности схемы (4) [1].

Здесь

$$r_j(x) = h_2^{\rho_2} \sum_{m=1}^{k_2-1} \int_0^m \left[\frac{A_m (m-\tau)^{\rho_2}}{\rho_2!} - \frac{B_m (m-\tau)^{\rho_2-1}}{(\rho_2-1)!} \right] \times \\ \times \frac{\partial^{\rho_2+1} [u_x(x, y_j + \tau h_2) - b(x, y_j + \tau h_2) u(x, y_j + \tau h_2)]}{\partial y^{\rho_2+1}} d\tau.$$

Теперь, предполагая, что в D существует производная $a_x(x, y)$, преобразуем равенство (4) к виду

$$\left\{ \sum_{m=0}^{k_2-1} [A_m - h_2 B_m a(x, y_{j+m})] u(x, y_{j+m}) \right\}_x = \\ = \sum_{m=0}^{k_2-1} \{ [A_m b(x, y_{j+m}) - h_2 B_m (b_y(x, y_{j+m}) + a_x(x, y_{j+m}))] u(x, y_{j+m}) + \\ + h_2 B_m f(x, y_{j+m}, u(x, y_{j+m})) \} + \\ + h_2 r_j(x), \quad j = 0, 1, \dots, N_2 - k_2 + 1. \quad (5)$$

На прямых $x = x_i (i = 0, 1, \dots, N_1)$ уравнение (5) заменим разностной схемой

$$\sum_{n=0}^{k_1-1} L_n \sum_{m=0}^{k_2-1} [A_m - h_2 B_m a(x_{i+n}, y_{j+m})] u(x_{i+n}, y_{j+m}) = \\ = h_2 \sum_{n=0}^{k_1-1} M_n \left\{ \sum_{m=0}^{k_1-1} \{ [A_m b(x_{i+n}, y_{j+m}) - h_2 B_m (b_y(x_{i+n}, y_{j+m}) + \\ + a_x(x_{i+n}, y_{j+m}))] u(x_{i+n}, y_{j+m}) + h_2 B_m f(x_{i+n}, y_{j+m}, u(x_{i+n}, y_{j+m})) \} + \right. \\ \left. + h_2 r_j(x_{i+n}) \right\} + h_1 r_{ij}^*, \quad i = 0, 1, \dots, N_1 - k_1 + 1; \\ j = 0, 1, \dots, N_2 - k_2 + 1, \quad (6)$$

причем

$$L_{k_1-1} \neq 0, \quad \sum_{n=0}^{k_1-1} L_n = 0,$$

$$\sum_{n=0}^{k_1-1} n^v L_n = v! \sum_{n=0}^{k_1-1} n^{v-1} M_n / (v-1)! \quad (1 \leq v \leq \rho_1),$$

$$\sum_{n=0}^{k_1-1} n^{\rho_1+1} L_n = (\rho_1 + 1)! \sum_{n=0}^{k_1-1} n^{\rho_1} M_n / \rho_1!.$$

Здесь

$$r_{ij}^* = h_1^{\rho_1} \sum_{n=1}^{k_1-1} \int_0^n \left[\frac{L_n(n-\tau)^{\rho_1}}{\rho_1!} - \frac{M_n(n-\tau)^{\rho_1-1}}{(\rho_1-1)!} \right] \times \\ \times \frac{\partial^{\rho_1+1}}{\partial x^{\rho_1+1}} \left[\sum_{m=0}^{k_2-1} [A_m - h_2 B_m a(x_i + \tau h_1, y_{j+m})] u(x_i + \tau h_1, y_{j+m}) \right] d\tau.$$

Опустив в равенстве (6) остаточные члены, получим следующую систему алгебраических уравнений, аппроксимирующую исходную задачу:

$$\sum_{n=0}^{k_1-1} \sum_{m=0}^{k_2-1} \alpha_{i+n, j+m}^{(n,m)} u_{i+n, j+m} = \sum_{n=0}^{k_1-1} \sum_{m=0}^{k_2-1} \beta_{i+n, j+m}^{(n,m)} f(x_{i+n}, y_{j+m}, u_{i+n, j+m}), \quad (7)$$

$$i = 0, 1, \dots, N_1 - k_1 + 1, j = 0, 1, \dots, N_2 - k_2 + 1;$$

$$u_{v\mu} = v_{v\mu} \text{ при } v = 1, 2, \dots, k_1 - 2 (\mu = 1, 2, \dots, N_2) \text{ и}$$

$$\text{при } \mu = 1, 2, \dots, k_2 - 2 (v = 1, 2, \dots, N_1),$$

$$u_{0\mu} = \psi(y_\mu) (\mu = 0, 1, \dots, N_2), u_{v0} = \varphi(x_v) (v = 0, 1, \dots, N_1),$$

где

$$\alpha_{i+n, j+m}^{(n,m)} = L_n [A_m - h_2 B_m a(x_{i+n}, y_{j+m})] - \\ - h_1 M_n [A_m b(x_{i+n}, y_{j+m}) - h_2 B_m (b_y(x_{i+n}, y_{j+m}) + a_x(x_{i+n}, y_{j+m}))], \\ \beta_{i+n, j+m}^{(n,m)} = h_1 h_2 M_n B_m.$$

Схемы (7) могут быть явными и неявными. Если выражение $f(x, y, u)$ линейно относительно u , то шаги h_1 и h_2 можно выбрать всегда такими, что схема (7) будет явной (конкретное ограничение на h_1 и h_2 будет указано ниже). При

$$\beta_{i+k_1-1, j+k_2-1}^{(k_1-1, k_2-1)} = 0$$

для явности схемы (7) требуется, чтобы $\alpha_{i+k_1-1, j+k_2-1}^{(k_1-1, k_2-1)} \neq 0$, что всегда можно достичь, выбрав h_1 и h_2 достаточно малыми.

Исследуем сходимость и дадим оценку погрешности предложенной вычислительной схемы.

Для погрешности метода $\gamma_{ij} = u(x_i, y_j) - u_{ij}$ нетрудно получить следующую систему алгебраических уравнений

$$\sum_{n=0}^{k_1-1} L_n \sum_{m=0}^{k_2-1} [A_m - h_2 B_m a(x_{i+n}, y_{j+m})] \gamma_{i+n, j+m} = \\ = h_1 \sum_{n=0}^{k_1-1} M_n \sum_{m=0}^{k_2-1} [A_m b(x_{i+n}, y_{j+m}) - h_2 \xi_{i+n, j+m}^{(n,m)}] \gamma_{i+n, j+m} + \\ + R_{ij}, i = 0, 1, \dots, N_1 - k_1 + 1; j = 0, 1, \dots, N_2 - k_2 + 1; \quad (7) \\ \gamma_{v\mu} = \delta_{v\mu}^* (v = 0, 1, \dots, k_1 - 2 \text{ при } \mu = 0, 1, \dots, N_2 \text{ и} \\ \mu = 0, 1, \dots, k_2 - 2 \text{ при } v = 0, 1, \dots, N_1).$$

Здесь

$$\begin{aligned} \xi_{i+n, j+m}^{(n, m)} &= B_m \left\{ [b_y(x_{i+n}, y_{j+m}) + a_x(x_{i+n}, y_{j+m})] - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\partial f(x_{i+n}, y_{j+m}, u_{i+n, j+m} + \Theta \gamma_{i+n, j+m})}{\partial u} \right\} \quad (0 < \Theta < 1), \\ R_{ij} &= h_1 h_2 \left(\sum_{n=0}^{k_1-1} M_n r_j(x_{i+n}) + \eta_{ij} \right), \\ \eta_{ij} &= h_1^{\rho_1} \sum_{n=0}^{k_1-1} \int_0^n \left[\frac{L_n (n-\tau)^{\rho_1}}{\rho_1!} - \frac{M_n (n-\tau)^{\rho_1-1}}{(\rho_1-1)!} \right] \eta_{ij}^*(\tau) d\tau, \\ \eta_{ij}^*(\tau) &= \\ &= \frac{\partial^{\rho_1+1}}{\partial x^{\rho_1+1}} \left[\frac{1}{h_2} \sum_{m=0}^{k_2-1} [A_m - h_2 B_m a(x_{i+n}, y_{j+m})] u(x_i + \tau h_1, y_{j+m}) \right]. \end{aligned}$$

Если предположить, что искомая функция имеет ограниченную производную $\frac{\partial^{\rho_1+2} u}{\partial x^{\rho_1+1} \partial y}$, то из того, что $\sum_{m=0}^{k_2-1} A_m = 0$, следует ограниченность функций $\eta_{ij}^*(\tau)$.

Имея в виду, что $a(x_{i+n}, y_{j+m}) = a(x_i, y_{j+m}) + n h_1 a_x(x_i + \Theta_1 n h_1, y_{j+m})$ ($0 < \Theta_1 < 1$), из равенства (7) получим

$$\begin{aligned} &\sum_{n=0}^{k_1-1} L_n \sum_{m=0}^{k_2-1} [A_m - h_2 B_m a(x_i, y_{j+m})] \gamma_{i+n, j+m} = \\ &= h_1 \sum_{n=0}^{k_1-1} M_n \sum_{m=0}^{k_2-1} A_m b(x_{i+n}, y_{j+m}) \gamma_{i+n, j+m} + \\ &\quad + h_1 h_2 \sum_{n=0}^{k_1-1} \sum_{m=0}^{k_2-1} \xi_{i+n, j+m}^{*(n, m)} \gamma_{i+n, j+m} + R_{ij}, \end{aligned} \quad (8)$$

где $i = 0, 1, \dots, N_1 - k_1 + 1$; $j = 0, 1, \dots, N_2 - k_2 + 1$,

$$\xi_{i+n, j+m}^{*(n, m)} = L_n A_m n a_x(x_i + \Theta_1 n h_1, y_{j+m}) - M_n \xi_{i+n, j+m}^{(n, m)}.$$

Запишем систему (8) в матричном виде

$$\begin{aligned} &\sum_{n=0}^{k_1-1} L_n P_{ij} \Gamma_{i+n, j} = h_1 \sum_{n=0}^{k_1-1} M_n K_j Q_{i+n, j} \Gamma_{i+n, j} + \\ &\quad + h_1 h_2 \sum_{n=0}^{k_1-1} \Phi_{i+n, j}^{(n)} \Gamma_{i+n, j} + R_{ij}, \quad i = 0, 1, \dots, N_1 - k_1 + 1; \end{aligned} \quad (9)$$

$j = 0, 1, \dots, N_2 - k_2 + 1$; $\Gamma_{vj} = T_{vj}$ ($v = 0, 1, \dots, k_2 - 2$).

Здесь

$$P_{ij} = \begin{bmatrix} \omega_{i k_2-1}^{(k_2-1)} & 0 & \cdot & 0 & \cdot & 0 & 0 \\ \omega_{i k_2-1}^{(k_2-2)} & \omega_{i k_2}^{(k_2-1)} & \cdot & 0 & \cdot & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \omega_{i k_2-1}^{(0)} & \omega_{i k_2}^{(1)} & \cdot & 0 & \cdot & 0 & 0 \\ 0 & \omega_{i k_2}^{(0)} & \cdot & 0 & \cdot & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & \omega_{ij}^{(0)} & \omega_{ij}^{(1)} & \omega_{ij+k_2-2}^{(k_2-1)} & 0 \\ 0 & 0 & \cdot & 0 & \omega_{ij}^{(0)} & \omega_{ij+k_2-2}^{(k_2-2)} & \omega_{ij+k_2-1}^{(k_2-1)} \end{bmatrix},$$

$$\omega_{ij+k_2-1}^{(m)} = A_m - h_2 B_m a(x_i, y_{j+k_2-1}),$$

$$Q_{i+nj} = \begin{bmatrix} b(x_{i+n}, y_{k_2-1}) & 0 & \cdot & 0 & \cdot & 0 & 0 \\ 0 & b(x_{i+n}, y_{k_2}) & \cdot & 0 & \cdot & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & b(x_{i+n}, y_{j+k_2-2}) & \cdot & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdot & 0 & \cdot & 0 & b(x_{i+n}, y_{j+k_2-1}) \end{bmatrix},$$

$$\Phi_{i+nj}^{(n)} = \begin{bmatrix} \xi_{i+n k_2-1}^{*(n, k_2-1)} & 0 & \cdot & 0 & \cdot & 0 & 0 \\ \xi_{i+n k_2-1}^{*(n, k_2-2)} & \xi_{i+n k_2}^{*(n, k_2-1)} & \cdot & 0 & \cdot & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \xi_{i+n k_2-1}^{*(n, 0)} & \xi_{i+n k_2}^{*(n, 1)} & \cdot & 0 & \cdot & 0 & 0 \\ 0 & \xi_{i+n k_2}^{*(n, 0)} & \cdot & 0 & \cdot & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & \xi_{i+n j-1}^{*(n, 0)} & \xi_{i+n j}^{*(n, 1)} & \xi_{i+n j+k_2-2}^{*(n, k_2-1)} & 0 \\ 0 & 0 & \cdot & 0 & \xi_{i+n j}^{*(n, 0)} & \xi_{i+n j+k_2-2}^{*(n, k_2-2)} & \xi_{i+n j+k_2-1}^{*(n, k_2-1)} \end{bmatrix},$$

$$K_j = \begin{bmatrix} A_{k_2-1} & 0 & \cdot & 0 & \cdot & 0 & 0 \\ A_{k_2-2} & A_{k_2-1} & \cdot & 0 & \cdot & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ A_0 & A_1 & \cdot & 0 & \cdot & 0 & 0 \\ 0 & A_0 & \cdot & 0 & \cdot & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & A_0 & A_1 & A_{k_2-1} & 0 \\ 0 & 0 & \cdot & 0 & A_0 & A_{k_2-2} & A_{k_2-1} \end{bmatrix},$$

$$\Gamma_{i+nj} = \begin{bmatrix} \gamma_{i+n k_2-1} \\ \gamma_{i+n k_2} \\ \vdots \\ \gamma_{i+n j+k_2-2} \\ \gamma_{i+n j+k_2-1} \end{bmatrix}^{j+1}, \quad T_{vj} = \begin{bmatrix} \delta_{v k_2-1}^* \\ \delta_{v k_2}^* \\ \vdots \\ \delta_{v j+k_2-2}^* \\ \delta_{v j+k_2-1}^* \end{bmatrix},$$

$$R_{ij}^* = \begin{bmatrix} R_{i0} + \sigma_{i,(0)+(k_2-2)} \\ R_{i1} + \sigma_{i,(1)+(k_2-3)} \\ \vdots \\ R_{i k_2-2} + \sigma_{i,(k_2-2)+(0)} \\ R_{i k_2-1} \\ \vdots \\ R_{ij} \end{bmatrix},$$

$$\sigma_{i,(\mu)+(\nu)} = h_1 \sum_{n=0}^{k_1-1} M_n \sum_{m=0}^{\nu} A_m b(x_{i+n}, y_{j+m}) \delta_{i+n \mu+m}^* +$$

$$+ h_1 h_2 \sum_{n=0}^{k_1-1} \sum_{m=0}^{\nu} \xi_{i+n \mu+m}^{*(n,m)} \delta_{i+n \mu+m}^* -$$

$$- \sum_{n=0}^{k_1-1} \sum_{m=0}^{\nu} L_n [A_m - h_2 B_m a(x_i, y_{\mu+m})] \delta_{i+n \mu+m}^*.$$

Заметим, что h_2 следует выбрать так, чтобы было $A_{k_2-1} - h_2 B_{k_2-1} \times \times a(x_i, y_{j+k_2-1}) > 0$. Имея в виду указанное выше замечание, равенство (9) преобразуем к виду

$$\sum_{n=0}^{k_1-1} L_n \Gamma_{i+n j} = h_1 \sum_{n=0}^{k_1-1} (M_n P_{ij}^{-1} K_j Q_{i+n j} + h_2 P_{ij}^{-1} \Phi_{i+n j}^{(n)}) \Gamma_{i+n j} +$$

$$+ P_{ij}^{-1} R_{ij}^*, \quad i = 0, 1, \dots, N_1 - k_1 + 1;$$

$$j = 0, 1, \dots, N_2 - k_2 + 1. \quad (10)$$

Здесь

$$P_{ij}^{-1} = \begin{bmatrix} \omega_{i k_2-1}^{*(0)} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \omega_{i k_2-1}^{*(1)} & \omega_{i k_2}^{*(1)} & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \omega_{i k_2-1}^{*(j-1)} & \omega_{i k_2}^{*(j-1)} & \dots & \omega_{i j+k_2-2}^{*(j-1)} & 0 \\ \omega_{i k_2-1}^{*(j)} & \omega_{i k_2}^{*(j)} & \dots & \omega_{i j+k_2-2}^{*(j)} & \omega_{i j+k_2-1}^{*(j)} \end{bmatrix},$$

где $\omega_{i \mu+k_2-1}^{*(\nu)}$ определяются равенствами

$$\sum_{m=0}^{k_2-1} [A_m + h_2 B_m a(x_i, y_{\mu+k_2-1})] \omega_{i \mu-m+2(k_2-1)}^{*(\nu)} = \delta_{\mu \nu} =$$

$$= \begin{cases} 1 & \text{при } \mu = \nu, \\ 0 & \text{при } \mu \neq \nu, \end{cases} \quad (11)$$

$\mu, \nu = 0, 1, \dots, j$; $\omega_{i \mu+k_2-1}^{*(\nu)} \equiv 0$ при $\mu > \nu$.

Перепишем (11) в виде

$$\sum_{m=0}^{k_2-1} A_m \omega_{i \mu-m+2(k_2-1)}^{*(\nu)} =$$

$$= h_2 \sum_{m=0}^{k_2-1} B_m a(x_i, y_{\mu+k_2-1}) \omega_{i, \mu-m+2(k_2-1)}^{*(v)} + \delta_{\mu v}, \quad (12)$$

$$\mu, v = 0, 1, \dots, j; \omega_{i, \mu+k_2-1}^{*(v)} \equiv 0 \text{ при } \mu > v.$$

Решение задачи (12) можно записать в виде

$$\begin{aligned} \omega_{i, \mu+k_2-1}^{*(v)} &= \sum_{l=v}^{\mu} g(l-\mu+k_2-1) \times \\ &\times \left[h_2 \sum_{m=0}^{k_2-1} B_m a(x_i, y_{l+k_2-1}) \omega_{i, l-m+2(k_2-1)}^{*(v)} + \delta_{lv} \right], \quad (13) \\ \mu &= 0, 1, \dots, v; v = 0, 1, \dots, j, \end{aligned}$$

где $g(l-\mu+k_2-1)$ — разностная функция Грина, являющаяся решением неоднородного уравнения

$$\sum_{m=0}^{k_2-1} A_m g(m+v-\mu) = \delta_{\mu v}, \quad \mu = 0, 1, \dots, v; v = 0, 1, \dots, j,$$

удовлетворяющая нулевым начальным условиям

$$g(m) = 0, \quad m = 0, 1, \dots, k_2-2. \quad (14)$$

Для решения разностного уравнения (14) при условии, что все корни характеристического уравнения $\sum_{m=0}^{k_2-1} A_m z^m = 0$ по модулю не превосходят единицы, а кратные из них по модулю строго меньше единицы, выполняется соотношение

$$\sup_{0 < v < +\infty} |g(v)| = g < +\infty.$$

Если выражение (12) разрешим относительно $\omega_{i, \mu+k_2-1}^{*(v)}$ и полученное значение подставим в правую часть равенства (13), получим выражение следующего вида:

$$\begin{aligned} \omega_{i, \mu+k_2-1}^{*(v)} &= \sum_{l=v}^{\mu+1} g(l-\mu+k_2-1) \times \\ &\times \left[h_2 \sum_{m=0}^{k_2-1} B_m a(x_i, y_{l+k_2-1}) \omega_{i, l-m+2(k_2-1)}^{*(v)} + \right. \\ &\left. + \delta_{lv} \right] + g(k_2-1) h_2 \sum_{m=0}^{k_2-2} \alpha_{i, \mu+m}^{*(m)} \omega_{i, \mu-m+2(k_2-1)}^{*(v)}, \quad (15) \end{aligned}$$

где

$$\alpha_{i, \mu+m}^{*(m)} = B_{k_2-1} a(x_i, y_{\mu+k_2-1}) \frac{A_m - h_2 B_m a(x_i, y_{\mu+k_2-1})}{A_{k_2-1} - h_2 B_{k_2-1} a(x_i, y_{\mu+k_2-1})} + B_m a(x_i, y_{\mu+k_2-1}).$$

Равенство (15) мажорируем равенством вида

$$V_{i, \mu+k_2-1}^{(v)} = gA \sum_{l=v}^{\mu+1} h_2 \sum_{m=0}^{k_2-1} |B_m| V_{i, l-m+2(k_2-1)} + g +$$

$$+ gh_2 \alpha^* \sum_{m=0}^{k_2-2} V_{i, \mu-m+2(k_2-1)}^{(v)}, \quad \mu, v = 0, 1, \dots, j, \quad (16)$$

где

$$|\omega_{i, \mu+k_2-1}^{*(v)}| \leq V_{i, \mu+k_2-1}^{(v)}, \quad A = \max_D |a(x, y)|, \quad \alpha^* = \max_{m, i, \mu} |\alpha_{i, \mu+m}^{*(m)}|.$$

Совершенно аналогично запишем

$$\begin{aligned} V_{i, \mu+k_2}^{(v)} &= gA \sum_{l=v}^{\mu+2} h_2 \sum_{m=0}^{k_2-1} |B_m| V_{i, l-m+2(k_2-1)}^{(v)} + g + \\ &+ gh_2 \alpha^* \sum_{m=0}^{k_2-2} V_{i, \mu-m+1+2(k_2-1)}^{(v)}. \end{aligned} \quad (17)$$

Теперь из равенства (16) вычтем равенство (17)

$$\begin{aligned} V_{i, \mu+k_2-1}^{(v)} &= V_{i, \mu+k_2}^{(v)} + h_2 gA \sum_{m=0}^{k_2-1} |B_m| V_{i, \mu+1-m+2(k_2-1)}^{(v)} + \\ &+ gh_2 \alpha^* (V_{i, \mu+k_2}^{(v)} - V_{i, \mu+2k_2-1}^{(v)}), \quad V_{i, \mu+k_2-1}^{(v)} \equiv 0 \text{ при } \mu > v, \\ &\mu, v = 1, 2, \dots, j. \end{aligned} \quad (18)$$

Из (18) по аналогии с [2] получим следующую оценку для $\omega_i^* = \max_{\mu, v, i} |\omega_{i, \mu+k_2-1}^{*(v)}|$:

$$\omega_i^* \leq (1 + \lambda h_2)^j / \alpha \leq \frac{1}{\alpha} e^{\lambda y_j},$$

где

$$\alpha = \min_{i, \mu} |A_{k_2-1} - h_2 B_{k_2-1} a(x_i, y_{\mu+k_2-1})|,$$

$$\lambda = gA \sum_{m=0}^{k_2-1} |B_m| + 2g\alpha^*.$$

Матрица $P_{ij}^{-1} K_j$ имеет следующий вид:

$$P_{ij}^{-1} K_j = \begin{bmatrix} \beta_{i, k_2-1}^{*(0)} & 0 & \cdot & 0 & 0 \\ \beta_{i, k_2-1}^{*(1)} & \beta_{i, k_2}^{*(1)} & \cdot & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \beta_{i, k_2-1}^{*(j-1)} & \beta_{i, k_2}^{*(j-1)} & \cdot & \beta_{i, j+k_2-2}^{*(j-1)} & 0 \\ \beta_{i, k_2-1}^{*(j)} & \beta_{i, k_2}^{*(j)} & \cdot & \beta_{i, j+k_2-2}^{*(j)} & \beta_{i, j+k_2-1}^{*(j)} \end{bmatrix},$$

где

$$\begin{aligned} \beta_{i, \mu+k_2-1}^{*(v)} &= \sum_{m=0}^{k_2-1} A_m \omega_{i, \mu-m+2(k_2-1)}^{*(v)} = \\ &= h_2 \sum_{m=0}^{k_2-1} B_m a(x_i, y_{\mu+k_2-1}) \omega_{i, \mu-m+2(k_2-1)}^{*(v)} + \delta_{\mu v}, \end{aligned}$$

$$\mu = 0, 1, \dots, v; \quad v = 0, 1, \dots, j.$$

Решение разностного матричного уравнения (10) запишем в виде

$$\begin{aligned} \Gamma_{i+k_1-1j} &= \sum_{v=0}^i q(i+k_1-1-v) h_1 \sum_{n=0}^{k_1-1} Q_{v+nj}^{(n)} \Gamma_{v+nj} + \\ &+ \sum_{\mu=0}^{k_2-2} q_{\mu}(i+k_2-1) T_{\mu j} + \sum_{v=0}^i q(i+k_1-1-v) P_{vj}^{-1} R_{vj}^*, \end{aligned} \quad (19)$$

$$i = 0, 1, \dots, N_1 - k_1 + 1; j = 0, 1, \dots, N_2 - k_2 + 1,$$

где

$$Q_{v+nj}^{(n)} = M_n P_{vj}^{-1} K_j Q_{v+nj} + h_2 P_{vj}^{-1} \Phi_{v+nj}^{(n)},$$

$q_v(i+k_1-1)$ ($v = 0, 1, \dots, k_1-2$) — функции Грина, являющиеся решениями однородного разностного уравнения

$$\sum_{n=0}^{k_1-1} L_n q_v(i+n) = 0, \quad i = 0, 1, \dots, N_1 - k_1 + 1, \quad (20)$$

удовлетворяющие соответствующим начальным условиям

$$q_v(\mu) = \delta_{\mu v} \quad (v, \mu = 0, 1, \dots, k_1-2), \quad (21)$$

а $q(i+k_1-1-v)$ — функция Грина, являющаяся решением неоднородного уравнения

$$\sum_{n=0}^{k_1-1} L_n g(i+n) = \delta_{i0}, \quad i = 0, 1, \dots, N_1 - k_1 + 1, \quad (22)$$

удовлетворяющая нулевым начальным условиям

$$q(v) = 0 \quad (v = 0, 1, \dots, k_1-2). \quad (23)$$

Поведение решения задач (20), (21) и (22), (23) при возрастании i будет определяться расположением корней характеристического уравнения

$$\sum_{n=0}^{k_1-1} L_n z^n = 0.$$

Если все корни характеристического уравнения лежат внутри или на границе единичного круга, причем корни, лежащие на границе, не являются кратными, то решения задач (20), (21) и (22), (23) будут ограничены, т. е.

$$\sup_{0 < i < \infty} |q_v(i)| \leq q_v < +\infty, \quad v = 0, 1, \dots, k_1-2;$$

$$\sup_{0 < i < \infty} |q(i)| \leq q < +\infty, \quad \bar{q} = \max_v \{q, q_v\}.$$

Из равенства (9) найдем

$$\Gamma_{i+k_1-1j} = \sum_{n=0}^{k_1-2} P_{i+k_1-1j}^{*-1} Q_{i+nj}^{*(n)} \Gamma_{i+nj} + P_{i+k_1-1j}^{*-1} R_{ij}^*, \quad (24)$$

где

$$P_{i+k_1-1j}^* = L_{k_1-1} P_{ij} - h_1 M_{k_1-1} K_j Q_{i+k_1-1j} - h_1 h_2 \Phi_{i+k_1-1j}^{(k_1-1)},$$

$$Q_{i+nj}^{*(n)} = -P_{ij} L_n + h_1 M_n K_j Q_{i+nj} + h_1 h_2 \Phi_{i+nj}^{(n)},$$

при этом h_1 и h_2 надо выбирать так, чтобы было $\tau_{ij} = [A_{k_2-1} - h_2 B_{k_2-1} \times \times a(x_i, y_{j+k_2-1})] L_{k_1-1} - h_1 M_{k_1-1} A_{k_2-1} b(x_{i+k_1-1}, y_{j+k_2-1}) - h_1 h_2 \xi_{i+k_1-1, j+k_2-1}^{*(k_2-1)} > 0$.

Заметим также, что матрицы P_{ij}^{*-1} , $P_{ij}^{*-1}Q_{i+nj}^{(n)}$ находятся совершенно так же, как и матрицы P_{ij}^{-1} , $P_{ij}^{-1}K_j$.

Подставив равенство (24) в правую часть равенства (19), получим

$$\begin{aligned} \Gamma_{i+k_1-1j} &= \sum_{v=0}^{i-1} q(i+k_1-1-v) h_1 \sum_{n=0}^{k_1-1} Q_{v+nj}^{(n)} \Gamma_{v+nj} + \\ &+ q(k_1-1) h_1 \sum_{n=0}^{k_1-2} \Phi_{i+nj}^{(n)} \Gamma_{i+nj} + \sum_{v=0}^{k_1-2} q_v(i+k_1-1) T_{vj} + \\ &+ \sum_{v=0}^i q(i+k_1-1-v) P_{vj}^{-1} R_{vj}^* + q(k_1-1) h_1 Q_{i+k_1-1j}^{(k_1-1)} P_{i+k_1-1j}^{*-1} R_{ij}^*, \quad (25) \end{aligned}$$

где

$$i = 0, 1, \dots, N_1 - k_1 + 1; j = 0, 1, \dots, N_2 - k_2 + 1,$$

$$\Phi_{i+nj}^{(n)} = Q_{i+k_1-1j}^{(k_1-1)} P_{i+k_1-1j}^{*-1} Q_{i+nj}^{(n)} + Q_{i+nj}^{(n)}.$$

Равенство (25) заменим мажорирующим его равенством вида

$$\begin{aligned} \Gamma_{i+k_1-1j}^* &= \bar{q} \sum_{v=0}^{i-1} h_1 \tau \sum_{n=0}^{k_1-1} \Gamma_{v+nj}^* + \bar{q} h_1 \tau^* \sum_{n=0}^{k_1-2} \Gamma_{i+nj}^* + \\ &+ \bar{q} \sum_{v=0}^{k_1-2} T_{vj} + \bar{q}(i+1)r + \bar{q} h_1 \bar{r}, \quad (26) \end{aligned}$$

где

$$i = 0, 1, \dots, N_1 - k_1 + 1, j = 0, 1, \dots, N_2 - k_2 + 1,$$

$$\|\Gamma_{i+k_1-1j}\| \leq \Gamma_{i+k_1-1j}^*, \quad \tau = \max_{n,j,i} \|Q_{i+nj}^{(n)}\|,$$

$$\tau^* = \max_{n,i,j} \|\Phi_{i+nj}^{(n)}\|, \quad \|T_{vj}\| \leq T_{vj}^*,$$

$$r = \max_{r,i,j} \|P_{ij}^{-1} R_{ij}^*\|, \quad \bar{r} = \max_{n,i,j} \|P_{i+k_1-1j}^{*-1} R_{ij}^*\|$$

(под $\|\cdot\|$ будем понимать первую норму).

Совершенно аналогично запишем

$$\begin{aligned} \Gamma_{i+k_1-2j}^* &= \bar{q} \sum_{v=0}^{i-2} h_1 \tau \sum_{n=0}^{k_1-1} \Gamma_{v+nj}^* + \bar{q} h_1 \tau^* \sum_{n=0}^{k_1-1} \Gamma_{i+n-1j}^* + \\ &+ \bar{q} \sum_{v=0}^{k_1-2} T_{vj} + \bar{q} r + \bar{q} h_1 \bar{r}. \quad (27) \end{aligned}$$

Вычтя равенство (27) из равенства (26), получим

$$\begin{aligned} \Gamma_{i+k_1-1j}^* &= \Gamma_{i+k_1-2j}^* + \bar{q} h_1 \tau \sum_{n=0}^{k_1-1} \Gamma_{i+n-1j}^* + \bar{q} h_1 \tau^* \Gamma_{i+k_1-2j}^* - \\ &- \bar{q} h_1 \tau^* \Gamma_{i-1j}^* + \bar{q} r, \quad i = 1, 2, \dots, N_1 - k_1 + 1; \\ &j = 1, 2, \dots, N_2 - k_2 + 1, \end{aligned}$$

откуда по аналогии с [2] находим

$$\Gamma_{i+k_1-1}^* \leq (1 + h_1 \beta_j)^i \bar{q} (k_1 - 1) \delta + (1 + h_1 \beta_j) \beta^* \delta + \\ + [(i+1)r_j + \bar{\tau}_j h_1 \bar{r}_j] \bar{q} (1 + h_1 \beta_j)^i, \\ i = 0, 1, \dots, N_1 - k_1 + 1; \quad j = 0, 1, \dots, N_2 - k_2 + 1. \quad (28)$$

Здесь

$$\delta = \max_{0 < v < k_1 - 2} \max_{0 < i < N_2} |\delta_{vi}^*|,$$

$$\beta_j = \bar{q} \mu_j \left[k_1 + 1 + \frac{1}{\xi} e^{\lambda_1 y_j} (L v_j + h_1 (v_j + v_j^*) + h_1 y_{j+1} \xi^* h_2) \right],$$

$$\mu_j = M (A B_1 \frac{1}{\alpha} e^{\lambda_1 y_j} + 1) + \frac{1}{\alpha} e^{\lambda_1 y_j} y_{j+1} k_2 \xi^*,$$

$$\xi = \min_{i,j} |\tau_{ij}|, \quad \lambda_1 = g \Delta \left(k_2 + 1 + 2 \frac{A_2 + h_2 \Delta}{|A_{k_2-1}| - h_2 \Delta} \right),$$

$$\Delta = L A B_2 \left(1 + \frac{1}{\Theta} \right) + h_2 \xi^* \frac{1}{\Theta},$$

$$v_j = y_j \Delta + 1, \quad v_j^* = v_j - y_j L A B_2, \quad \xi^* = \max_{i,j,m,n} |\xi_{i+n}^{*(n,m)}|_{j+k_2-1},$$

$$M = \max_n |M_n|, \quad A = \max_D |a(x, y)|, \quad B_1 = \sum_{m=0}^{k_2-1} |B_m|,$$

$$B = \max_D |b(x, y)|, \quad A_2 = \max_m |A_m|, \quad B_2 = \max_m |B_m|,$$

$$\Theta = |L_{k_1-1}| - h_1 M B, \quad L = \sum_{n=0}^{k_1-1} |L_n|,$$

$$\beta_j^* = h_1 \mu_j (k_1 - 1) k_1 \frac{1}{2} + h_1 \mu_j \frac{1}{\xi} e^{\lambda_1 y_j} (L v_j + h_1 (v_j^* + v_j) + h_1 y_j \xi^* k_2) k_2,$$

$$r_j = \frac{1}{\alpha} e^{\lambda_1 y_j} [R(j+1) + k_2 \sigma h_1],$$

$$R = \max_{i,j} |R_{ij}|, \quad \sigma = \max_{i,\mu,v} \frac{1}{h_1} |\sigma_{i,(\mu)+(\nu)}|,$$

$$\bar{\tau}_j = \mu_j, \quad \bar{r}_j = \frac{1}{\xi} e^{\lambda_1 y_j} [R(j+1) + k_2 \sigma h_1].$$

Итак, для погрешности вычислительной схемы (7) из неравенства (28) получим следующую оценку:

$$|Y_{i+k_1-1} - y_{j+k_2-1}| \leq e^{x_i \beta_j} \delta [\bar{q} (k_1 - 1) + \beta_j^*] \bar{q} + \\ + \bar{q} e^{x_i \beta_j + y_j \lambda_1} \sigma \frac{1}{\alpha} k_2 (x_{i+1} + h_1) + \\ + \bar{q} e^{x_i \beta_j} \frac{1}{\alpha} (e^{y_j \lambda_1} x_{i+1} y_{j+1} + h_1 e^{y_j \lambda_1}) (h_1^{\rho_1} \rho_1^* + h_2^{\rho_2} \rho_2^*),$$

$$i = 0, 1, \dots, N_1 - k_1 + 1; \quad j = 0, 1, 2, \dots, N_2 - k_2 + 1, \quad (29)$$

отсюда непосредственно видно, какие требования нужно предъявить к нахождению начальных значений, чтобы вычислительная схема (7) имела погрешность метода порядка $O(h_1^{\rho_1} + h_2^{\rho_2})$. Здесь

$$\rho_1^* = \max_{i,j} \frac{1}{h_1^{\rho_1}} |\eta_{ij}|,$$

$$\rho_2^* = \max_{i,j} \frac{1}{h_2^{\rho_2}} \left| \sum_{n=0}^{k_1-1} r_j(x_{i+n}) M_n \right|.$$

Таким образом, мы показали, что приближенное решение задач (1), (2), которое дается схемой (7), при достаточной гладкости исходной задачи, соответствующей точности начальных данных, равномерно сходится к точному со скоростью порядка $O(h_1^{\rho_1} + h_2^{\rho_2})$.

Замечание 1. Если

$$\sum_{n=0}^{k_1-2} \left| \frac{L_n}{L_{k_1-1}} \right| \leq 1 \quad \text{и} \quad \sum_{m=0}^{k_2-2} \left| \frac{A_m}{A_{k_2-1}} \right| \leq 1,$$

то $g = 1$, $\bar{q} = 1$, и проверять расположение корней полиномов

$$\sum_{n=0}^{k_1-1} z^n L_n = 0 \quad \text{и} \quad \sum_{m=0}^{k_2-1} A_m z^m = 0$$

нет необходимости. К схемам такого типа можно отнести схемы, рассмотренные в работах [2, 3].

Замечание 2. Полученные результаты без труда распространяются и на системы уравнений вида:

$$\frac{\partial^2 u_i}{\partial x \partial y} = a_i(x, y) \frac{\partial u_i}{\partial x} + \sum_{j=1}^p b_{ij}(x, y) \frac{\partial u_j}{\partial y} +$$

$$+ f(x, y, u_1, u_2, \dots, u_p), \quad i = 1, 2, \dots, p.$$

Замечание 3. Подобные результаты могут быть получены и в случае задач Коши, Пикара, а также для 1-й и 2-й смешанных задач [4].

Литература

1. Dalkquist G., Math. Scand., 4, № 1, 33, 1956.
2. Абрашин В. Н., Бобков В. В. Весті АН БССР, сер. фіз.-мат. навук, № 1, 1968.
3. Бобков В. В., Крылов В. Н. Весті АН БССР, сер. фіз.-мат. навук, № 1, 1966.
4. Бобков В. В., Крылов В. Н. Дифференциальные уравнения, № 2, 230, 1965.

Институт математики
АН БССР

Поступило в редакцию 2.II 1968

Л. П. ПРИМАЧУК

**О РАЗРЕШИМОСТИ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ
 С ОБРАТНЫМ СДВИГОМ КАРЛЕМАНА**

1. Пусть Γ — единичный круг. Рассмотрим следующую краевую задачу: найти две функции, аналитические соответственно внутри и вне круга по краевому условию на Γ

$$a(t)\varphi^+(t) + b(t)\varphi^+(\alpha(t)) + c(t)\varphi^-(t) + d(t)\varphi^-(\alpha(t)) = g(t), \quad \varphi^-(\infty) = 0, \quad (1)$$

где $a(t), b(t), c(t), d(t) \in H(\Gamma)$, $g(t), \varphi^\pm(t) \in L_2(\Gamma)$, $\alpha(t)$ — изменяющий направление обхода сдвиг Карлемана ($\alpha(\alpha(t)) \equiv t$), $\alpha'(t) \neq 0$ и удовлетворяет условию Гельдера с $\lambda > \frac{1}{2}$.

В [5] показано, что условие нетеровости задачи (1) имеет вид

$$\Delta(t) = b(t)d(\alpha(t)) - c(t)a(\alpha(t)) \neq 0, \quad (2)$$

а индекс (1) $\kappa = \text{Ind } \Delta(t)$. В дальнейшем предполагаем, что условие (2) выполнено.

Обозначим

$$\begin{aligned} \Delta_1(t) &= c(t)c(\alpha(t)) - d(t)d(\alpha(t)), \\ \Delta_2(t) &= a(t)a(\alpha(t)) - b(t)b(\alpha(t)), \\ V(t) &= b(t)c(\alpha(t)) - a(\alpha(t))d(t). \end{aligned} \quad (3)$$

Нетрудно видеть, что

$$\begin{aligned} \Delta(t)\Delta(\alpha(t)) - V(t)V(\alpha(t)) &= \Delta_1(t)\Delta_2(t), \\ \Delta_1(t) &= \Delta_1(\alpha(t)), \quad \Delta_2(t) = \Delta_2(\alpha(t)). \end{aligned} \quad (4)$$

В [1] показано, что если $\Delta_2(t) \neq 0$ и выполнено условие

$$\left| \frac{V(t)X^-(\alpha(t))}{\Delta(t)X^-(t)} \sqrt{|\alpha'(t)|} \right| < 1, \quad (5)$$

где

$$X^-(z) = \exp \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \ln \left\{ \frac{\tau^{-\gamma} \Delta(\tau)}{\Delta_2(\tau)} \right\} \frac{d\tau}{\tau - z}, \quad z \in D^-,$$

то число линейно независимых решений l и условий разрешимости p вычисляются по формуле

$$l = \max(0, \kappa); \quad p = \max(0, -\kappa). \quad (6)$$

Возникает естественный вопрос, какие характеристики коэффициентов задачи и сдвига $\alpha(t)$ влияют на разрешимость, когда условие (5) не выполняется. Целью настоящей заметки и является получение одной такой характеристики. Будем пользоваться методом, аналогичным методу [3].

2. Пусть $\Delta_2(t) \neq 0$.

Задачу (1) можно переписать в следующей форме:

$$\varphi^+(t) = \frac{\Delta(t)}{\Delta_2(t)} \varphi^-(t) + \frac{V(t)}{\Delta_2(t)} \varphi^-(\alpha(t)) + H(t). \quad (7)$$

Из (4) следует, что $\text{Ind} \frac{\Delta(t)}{\Delta_2(t)} = \text{Ind} \Delta(t) = \kappa$.

Сопряженная задача для (1) имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{c(\alpha(t))}{\Delta(\alpha(t))} \psi^+(t) - \frac{\alpha'(t)d(\alpha(t))}{\Delta(t)} \psi^+(\alpha(t)) + \frac{a(\alpha(t))}{\Delta(t)} \psi^-(t) - \\ - \frac{\alpha'(t)b(\alpha(t))}{\Delta(\alpha(t))} \psi^-(\alpha(t)) = 0. \end{aligned} \quad (8)$$

С помощью функций (3) она переписывается в виде

$$\psi^-(t) = \frac{\Delta(t)}{\Delta_2(t)} \psi^+(t) - \frac{V(\alpha(t))\alpha'(t)}{\Delta_2(t)} \psi^+(\alpha(t)). \quad (8')$$

Чтобы в дальнейшем не производить для сопряжений краевой задачи (8') нового исследования вопросов разрешимости, сведем ее посредством конформного отображения функцией $w = \frac{1}{z}$ к типу (7).

Тогда на Γ получим из (8') краевое условие

$$\begin{aligned} \psi^-\left(\frac{1}{\tau}\right) = \frac{\Delta\left(\frac{1}{\tau}\right)}{\Delta_2\left(\frac{1}{\tau}\right)} \psi^+\left(\frac{1}{\tau}\right) - \\ - \frac{V\left(\alpha\left(\frac{1}{\tau}\right)\right)\alpha'\left(\frac{1}{\tau}\right)}{\Delta_2\left(\frac{1}{\tau}\right)} \psi^+\left(\alpha\left(\frac{1}{\tau}\right)\right). \end{aligned} \quad (8'')$$

Для того чтобы обеспечить обращение в нуль на бесконечности, введем новые искомые функции в виде

$$h^+(w) = \frac{1}{\omega} \psi^-(w), \quad h^-(w) = \frac{1}{\omega} \psi^+(w).$$

Из (8') будем иметь

$$h^+(\tau) = \frac{\Delta^1(\tau)}{\Delta_2^1(\tau)} h^-(\tau) - \frac{V^1(\alpha(\tau))\alpha'\left(\frac{1}{\tau}\right)\alpha'(\tau)}{\Delta_2^1(\tau)\tau} h^-(\alpha(\tau)), \quad (8''')$$

где

$$\Delta^1(\tau) = \Delta\left(\frac{1}{\tau}\right), \quad \Delta_2^1(\tau) = \Delta_2\left(\frac{1}{\tau}\right), \quad V^1(\alpha(\tau)) = V\left(\alpha\left(\frac{1}{\tau}\right)\right).$$

Очевидно, что

$$\text{Ind } \Delta(t) = -\text{Ind } \Delta^1(\tau).$$

В дальнейшем для упрощения новую переменную τ будем снова обозначать через t .

Если l' — число линейно независимых решений (8'''), то из теоремы Негера

$$l - l' = \kappa. \quad (9)$$

Обозначим $X_1^\pm(t)$, $X_2^\pm(t)$ канонические функции задач

$$X_1^+(t) = t^{-\kappa} \frac{\Delta(t)}{\Delta_2(t)} X_1^-(t), \quad (10)$$

$$X_2^+(t) = t^\kappa \frac{\Delta^1(t)}{\Delta_2^1(t)} X_2^-(t).$$

3. Для исследования вопросов разрешимости задачи (7) будем сводить ее к интегральному уравнению, левую часть которого разбиваем на два слагаемых. Одно из них удовлетворяет принципу сжатых отображений, а второе при выполнении определенных условий будет тождественно обращаться в нуль. Для этого поступим следующим образом.

Введем функции

$$B_1(t) = B(\alpha(t)) t^{-\kappa}, \quad (11)$$

$$T(t, \tau) = \frac{1}{2\pi i} \left[\frac{\alpha'(\tau)}{\alpha(\tau) - \alpha(t)} - \frac{1}{\tau - t} \right] B_1(\tau),$$

где

$$B(t) = \frac{V(t) X_1^-(\alpha(t))}{\Delta(t) X_1^-(t)}.$$

Обозначим

$$M = \max_{\Gamma} \sqrt{|\alpha'(t)|}. \quad (12)$$

Разложим функции $B_1(t)$ и $T(t, \tau)$ в ряды Фурье по системе $\{t^k\}$:

$$B_1(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} B_k t^k, \quad T(t, \tau) = \sum_{-\infty}^{+\infty} C_k(t) \tau^k. \quad (13)$$

Первый ряд сходится равномерно, второй в среднем в $L_2(\Gamma)$ по τ , равномерно относительно t , так как в силу условий, наложенных на $\alpha(t)$, функция

$$\left[\frac{\alpha'(\tau)}{\alpha(\tau) - \alpha(t)} - \frac{1}{\tau - t} \right] \in L_2(\Gamma)$$

по обеим переменным [2, 4].

Возьмем произвольные два числа $\gamma_1 \geq 0$, $\gamma_2 \geq 0$, $\gamma_1 + \gamma_2 \leq 1$.

Определим наименьшие два числа $N_1(\gamma_1)$, $N_2(\gamma_2)$, для которых выполнено условие

$$\left| B_1(t) - \sum_{-N_1}^{N_1} B_k t^k \right| < \frac{\gamma_1}{M}, \quad (14)$$

$$\iint_{\Gamma} \left| T(t, \tau) - \sum_{-N_2}^{N_2} C_k(t) \tau^k \right|^2 ds d\sigma < \frac{\gamma_2^2}{M^2}.$$

Пусть $n_1(\gamma_1) = N_1(\gamma_1)$, если $B_{N_1} \neq 0$. Если же $B_{N_1} = 0$, то обозначим $n_1(\gamma_1)$ число, для которого $B_{n_1} \neq 0$, а $B_{n_1+1} = \dots = B_{N_1} = 0$. Аналогично определим число $n_2(\gamma_2)$.

Обозначим $n(\gamma_1, \gamma_2) = \max(n_1(\gamma_1), n_2(\gamma_2)) + 1$.

Определим

$$n = \min n(\gamma_1, \gamma_2) \text{ по всем } \gamma_1 \geq 0, \gamma_2 \geq 0, \gamma_1 + \gamma_2 \leq 1, \quad (15)$$

т. е. если пара (γ_1^0, γ_2^0) реализует (15), то

$$n = \max(n_1^0(\gamma_1^0), n_2^0(\gamma_2^0)) + 1.$$

По этой же схеме определим число m для сопряженной задачи, записанной в виде (8''). Для этого возьмем функции

$$B_1^1(t) = B^1(\alpha(t)) t^\kappa,$$

$$T(t, \tau)^1 = \frac{1}{2\pi i} \left[\frac{\alpha'(\tau)}{\alpha(\tau) - \alpha(t)} - \frac{1}{\tau - t} \right] B_1^1(\tau), \quad (11')$$

где

$$B^1(t) = \frac{V^1(\alpha(t)) \alpha' \left(\frac{1}{t} \right) \alpha(t)}{\Delta^1(t) X_2^-(t)} X_2^-(\alpha(t)).$$

Теперь для определения числа m нужно подставить в (13) и (14) $B_1^1(t)$ вместо $B_1(t)$ и $T(t, \tau)^1$ вместо $T(t, \tau)$.

4. Справедлива следующая

Теорема. Пусть $\Delta_2(t) \neq 0$. Тогда для числа l решений однородной задачи (I) имеют место следующие оценки:

- 1) если $\kappa \leq -n$, то $l = 0$;
- 2) если $-n < \kappa \leq 0$, то $0 \leq l \leq l_0$,

где $l_0 = \min(m - \kappa, n + \kappa)$;

- 3) если $\kappa \geq m$, то $l = \kappa$;

- 4) если $0 \leq \kappa < m$, то $\kappa \leq l \leq l_0^1$,

где $l_0^1 = \min(m, 2\kappa + n)$.

Доказательство. Пусть сначала $\kappa \leq 0$.

Умножая (7) на $t^{-\kappa}$, перепишем однородную задачу (7) в виде

$$\Phi^+(t) = \Phi^-(t) + B(t) \Phi^-(\alpha(t)), \quad \Phi^-(\infty) = 0, \quad (16)$$

где

$$\Phi^+(t) = \frac{t^{-\kappa} \Phi^+(t)}{X_1^+(t)}, \quad \Phi^-(t) = \frac{\Phi^-(t)}{X_1^-(t)}, \quad B(t) = \frac{V(t) X_1^-(\alpha(t))}{\Delta(t) X_1^-(t)}.$$

Используя (16) и условие аналитической продолжимости $\Phi^\pm(t)$ [2], нетрудно получить для (16) интегральное уравнение относительно $\Phi^-(t)$

$$\Phi^-(t) + \frac{B(t) \Phi^-(\alpha(t))}{2} - \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{B(\tau) \Phi^-(\alpha(\tau))}{\tau - t} d\tau = 0. \quad (17)$$

Задача (16) и уравнение (17) эквивалентны, так как из самого вида уравнения вытекает, что всякое решение $\Phi(t)$ (17) есть функция типа $\Phi^-(t)$.

Заменяя t на $\alpha(t)$, прибавляя и вычитая $\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{B(\alpha(\tau)) \Phi^-(\tau)}{\tau-t} d\tau$, получим для $\Phi^-(t)$ уравнение

$$\Phi^-(\alpha(t)) + \frac{B(\alpha(t)) \Phi^-(t)}{2} + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{B(\alpha(\tau)) \Phi^-(\tau)}{\tau-t} d\tau + \\ + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \left[\frac{\alpha'(\tau)}{\alpha(\tau) - \alpha(t)} - \frac{1}{\tau-t} \right] B(\alpha(\tau)) \Phi^-(\tau) d\tau = 0.$$

Последнее с помощью функций (11) перепишем в виде

$$\Phi^-(\alpha(t)) + \frac{B_1(t) t^{\kappa} \Phi^-(t)}{2} + \\ + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{B_1(\tau) \tau^{\kappa} \Phi^-(\tau)}{\tau-t} d\tau + \int_{\Gamma} T(t, \tau) \tau^{\kappa} \Phi^-(\tau) d\tau = 0. \quad (18)$$

Пусть

$$T_1(t) = \sum_{-N_1^0}^{n_1^0} B_k t^k, \quad T_2(t, \tau) = \sum_{-N_2^0}^{n_2^0} C_k(t) \tau^k. \quad (19)$$

Представим (18) в форме

$$\Phi^-(\alpha(t)) + K[\Phi^-(t)] + \frac{T_1(t) t^{\kappa} \Phi^-(t)}{2} + \\ + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{T_1(\tau) \tau^{\kappa} \Phi^-(\tau)}{\tau-t} d\tau + \int_{\Gamma} T_2(t, \tau) \tau^{\kappa} \Phi^-(\tau) d\tau = 0, \quad (20)$$

где

$$K[\Phi^-(t)] \equiv \frac{[B_1(t) - T_1(t)] t^{\kappa} \Phi^-(t)}{2} + \\ + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{[B_1(\tau) - T_1(\tau)] \tau^{\kappa} \Phi^-(\tau)}{\tau-t} d\tau + \int_{\Gamma} [T(t, \tau) - T_2(t, \tau)] \tau^{\kappa} \Phi^-(\tau) d\tau.$$

Случай 1). Пусть $\kappa + n \leq 0$. Так как $n_1^0 < n$, $n_2^0 < n$, то функции $T_1(\tau) \tau^{\kappa} \Phi^-(\tau)$, $T_2(t, \tau) \tau^{\kappa} \Phi^-(\tau)$ по τ являются функциями аналитическими во внешности круга и исчезающими на бесконечности. Поэтому последние три слагаемых в (20) тождественно равны нулю, и для определения $\Phi^-(t)$ из (20) остается уравнение

$$\Phi^-(\alpha(t)) + K[\Phi^-(t)] = 0. \quad (21)$$

Подействовав на обе части (21) оператором Q , где $Q\psi \equiv \psi(\alpha(t))$ ($\|Q\|_{L_2(\Gamma)} \leq \max_{\Gamma} \sqrt{|\alpha'(t)|} = M$), будем иметь

$$\Phi^-(t) + QK[\Phi^-(t)] = 0. \quad (21')$$

Из (14) следует, что

$$\|QK\|_{L_2(\Gamma)} < 1. \quad (22)$$

Таким образом, (21'), а значит, и (16) не имеют решений при $\kappa + n \leq 0$. Для 1) теорема доказана.

Случай 2). Если $\kappa > -n$, то ищем $\Phi^-(t)$ в виде

$$\Phi^-(t) = \frac{q_1}{t} + \dots + \frac{q_{n+\kappa}}{t^{n+\kappa}} + \frac{\Phi_0^-(t)}{t^{n+\kappa}}. \quad (23)$$

Повторяя дословно аналогичные рассуждения из [3], получим, что в этом случае

$$0 \leq l \leq \kappa + n.$$

К случаю 2) мы еще вернемся после рассмотрения разрешимости сопряженной задачи. Сейчас перейдем к случаю положительного индекса.

3) Если $\kappa \geq 0$, то ищем $\psi^+(z)$ в виде

$$\psi^+(z) = z^{-\kappa} [\varphi^+(z) - P_{\kappa-1}(z)],$$

где $P(z)$ — многочлен.

Для определения $\Phi^-(t)$ получим неоднородное уравнение (17), в правую часть которого входит κ произвольных постоянных.

По предыдущей схеме получим, что в этом случае число решений заключено в границах

$$\kappa \leq l \leq n + 2\kappa.$$

Для того чтобы получить утверждение теоремы в случае 3), перейдем к рассмотрению разрешимости сопряженной задачи (8'''). В этом случае она имеет отрицательный индекс $-\kappa$. Поэтому из определения числа m следует, что при $-\kappa + m \leq 0$, $l' = 0$, а при $-\kappa < -m$, $0 \leq l' \leq m - \kappa$.

Тогда из формулы (9) получим, что $l = 0$ при $\kappa \geq m$ и $\kappa \leq l \leq m$ при $\kappa < m$.

Утверждение 3) доказано.

Сравнивая неравенства

$$\kappa \leq l \leq n + 2\kappa,$$

$$\kappa \leq l \leq m,$$

получим теорему в случае 4). Аналогично, если $\kappa < 0$, то $-\kappa \leq l' \leq m - 2\kappa$, т. е. $0 \leq l \leq m - \kappa$. Сравнивая неравенства

$$0 \leq l \leq m - \kappa,$$

$$0 \leq l \leq n + \kappa,$$

получим теорему в случае 2).

Теорема доказана полностью.

Замечание 1. Аналогичная теорема имеет место для (1) при $\Delta_1(t) \neq 0$.

Замечание 2. Отметим, что к задаче (1) сводится обычным способом аналитического продолжения интегро-функциональное уравнение

$$a(t)\varphi(t) + b(t)\varphi(\alpha(t)) + \frac{c(t)}{\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t} d\tau + \\ + \frac{d(t)}{\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\varphi(\tau)}{\tau - \alpha(t)} d\tau = f(t). \quad (24)$$

Поэтому теорему без труда можно распространить на уравнение (24).

Приношу благодарность профессору Ф. Д. Гахову за руководство работой.

Литература

1. Литвинчук Г. С. ДАН УССР, сер. А, № 11, 1967.
2. Гахов Ф. Д. Краевые задачи. М., 1963.
3. Примачук Л. П. Весті АН БССР, сер. фіз.-мат. навук, № 4, 1968.
4. Сабитов И. Х. Мат. сборник, т. 64 (106): 2, 1964.
5. Литвинчук Г. С. Известия АН СССР, № 3, 1967.

УДК 517.948

В. И. АЗАМАТОВА

ОБ ИСКЛЮЧИТЕЛЬНОМ СЛУЧАЕ
ОДНОГО ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ
НА ПОЛУОСИ

Интегральное уравнение с суммарным и разностным ядрами

$$\lambda_1 \varphi(x) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} [a(x-t) + b(x+t)] \varphi(t) dt = f(x), \quad 0 < x < \infty, \quad (1)$$

к которому сводятся некоторые задачи математической физики, изучалось многими авторами ([1—3] и др.).

Во всех работах, кроме [3], предполагаются выполненными условия

$$A(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} a(t) e^{ixt} dt \neq -\lambda_1, \quad (2)$$

$$B(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} b(t) e^{ixt} dt \neq -\lambda_2, \\ -\infty < x < \infty.$$

В работе [3] автор пытается рассмотреть исключительные случаи для уравнения более общего вида. Но условие эллиптичности уравнения не совместимо с обращением в нуль или бесконечность указанных им функций всюду на действительной оси, кроме начала координат.

Цель настоящей работы рассмотреть исключительные случаи, когда функции $\lambda_1 + A(x)$ и $\lambda_2 + B(x)$ в отдельных точках действительной оси могут обращаться в нуль целого порядка. При этом будем считать, что выполняется условие

$$[\lambda_1 + A(x)] [\lambda_1 + A(-x)] = [\lambda_2 + B(x)] [\lambda_2 + B(-x)], \quad (3)$$

которое дает возможность получить решение интегрального уравнения (1) в замкнутой форме.

Предварительно рассмотрим исключительные случаи одной краевой задачи Карлемана для действительной оси.

Найти функцию, аналитическую в верхней (нижней) полуплоскости, предельные значения которой на действительной оси удовлетворяют условию

$$\Phi^+(x) = G(x) \Phi^+(-x) + g(x) \quad (3')$$

или

$$\Phi^-(-x) = G(x) \Phi^-(x) + g(x). \quad (3'')$$

Известно, что необходимыми условиями разрешимости задачи Карлемана являются следующие:

$$G(x)G(-x) = 1, \quad (4)$$

$$g(x) + G(x)g(-x) = 0. \quad (4')$$

Будем предполагать, что функция $G(x)$ в отдельных точках действительной оси обращается в нуль или бесконечность целых порядков. Из условия (4) вытекает, что нули и полюсы*) функции $G(x)$ не могут быть в произвольных точках. Так, нуль функции $G(x)$ должен быть полюсом того же порядка функции $G(-x)$. Бесконечно удаленная точка, принадлежащая контуру, не может быть исключительной точкой задачи, так как в силу непрерывности $G(x)$ на всей оси $G(\infty) = G(-\infty)$ и, следовательно, $G(\infty) = \pm 1$.

Итак, будем считать, что функция $G(x)$ имеет вид

$$G(x) = \frac{\prod_1^r (x + b_j)^{\beta_j}}{\prod_1^r (x - b_j)^{\beta_j}} G_1(x), \quad (5)$$

где $G_1(x)$ — функция, удовлетворяющая условию Гельдера, не обращающаяся в нуль всюду на оси и удовлетворяющая условию

$$G_1(x)G_1(-x) = 1. \quad (6)$$

Пусть $\text{Ind } G_1(x) = \kappa$; $\sum_1^r \beta_j = \rho$.

Решение задачи будем искать в классе функций, ограниченных во всех точках контура и исчезающих на бесконечности. Отсюда следует, что функция $g(x)$ не должна иметь полюсов в точках, отличных от b_j . Будем считать, что функция $g(x)$ может иметь полюсы лишь в точках b_j , их порядок не превышает β_j и $g(\infty) = 0$, т. е.

$$g(x) = \frac{(x+i)^{\rho} g_1(x)}{\prod_1^r (x - b_j)^{\beta_j}},$$

где $g_1(x)$ — исчезающая на бесконечности функция, которая, как следует из (4'), должна удовлетворять условию

$$(x+i)^{\rho} g_1(x) + (x-i)^{\rho} g_1(-x) G_1(x) = 0. \quad (7)$$

Остановимся на решении задачи (3'). Решение (3'') проводится аналогично. Запишем краевое условие в виде

$$\Phi^+(x) = \frac{\prod_1^r (x + b_j)^{\beta_j}}{\prod_1^r (x - b_j)^{\beta_j}} G_1(x) \Phi^+(-x) + \frac{(x+i)^{\rho} g_1(x)}{\prod_1^r (x - b_j)^{\beta_j}}. \quad (8)$$

*) Полюсами функции будем называть точки, в которых функция (неаналитическая) обращается в бесконечность целого порядка.

Так как $\Phi^+(\pm x)$ — предельные значения функций, аналитических соответственно в верхней и нижней полуплоскости, то, обозначая $\Phi^+(\pm x) = W^\pm(x)$, получим, что решение задачи Карлемана (8) эквивалентно решению краевой задачи Римана для полуплоскости

$$W^+(x) = \frac{\prod_1^r (x + b_j)^{\beta_j}}{\prod_1^r (x - b_j)^{\beta_j}} G_1(x) W^-(x) + \frac{(x+i)^p g_1(x)}{\prod_1^r (x - b_j)^{\beta_j}} \quad (9)$$

с дополнительным условием $W^-(-x) = W^+(x)$. (10)

Решение задачи Римана (9) можно получить по известной схеме. Исключительной точкой, в которой у канонических функций однородной и неоднородной задачи допускается наивысший возможный порядок, будем считать $z = -i$.

Однородная задача.

$$W^+(x) = \frac{\prod_1^r (x + b_j)^{\beta_j}}{\prod_1^r (x - b_j)^{\beta_j}} G_1(x) W^-(x). \quad (11)$$

Пусть $\chi(z)$ — каноническая функция однородной задачи Римана с коэффициентом $G_1(x)$:

$$\begin{aligned} \chi^+(z) &= e^{\Gamma^+(z)}, & \operatorname{Im} z > 0, \\ \chi^-(z) &= \left(\frac{z-i}{z+i} \right)^{-\kappa} e^{\Gamma^-(z)}, & \operatorname{Im} z < 0, \end{aligned} \quad (12)$$

где

$$\Gamma(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \ln \left[\left(\frac{\tau-i}{\tau+i} \right)^{-\kappa} G_1(\tau) \right] \frac{d\tau}{\tau-z}. \quad (13)$$

Заменяя $G_1(x) = \frac{\chi^+(x)}{\chi^-(x)}$, приведем краевое условие к виду

$$\frac{W^+(x)}{\prod_1^r (x + b_j)^{\beta_j} \chi^+(x)} = \frac{W^-(x)}{\prod_1^r (x - b_j)^{\beta_j} \chi^-(x)}.$$

Применяя теорему об аналитическом продолжении и обобщенную теорему Лиувилля, учитывая, что единственной особой точкой рассматриваемой функции может быть лишь полюс в точке $z = -i$ порядка не выше κ (при $\kappa > 0$), а на бесконечности она обращается в нуль порядка $\rho + 1$, получим

$$\frac{W^+(z)}{\prod_1^r (z + b_j)^{\beta_j} \chi^+(z)} = \frac{W^-(z)}{\prod_1^r (z - b_j)^{\beta_j} \chi^-(z)} = \frac{P_{\kappa-\rho-1}(z)}{(z+i)^\kappa}.$$

Отсюда

$$W^+(z) = \frac{\prod_1^r (z + b_j)^{\beta_j} e^{\Gamma^+(z)} P_{\kappa-p-1}(z)}{(z+i)^\kappa},$$

$$W^-(z) = \frac{\prod_1^r (z - b_j)^{\beta_j} e^{\Gamma^-(z)} P_{\kappa-p-1}(z)}{(z-i)^\kappa}.$$
(14)

Потребуем теперь, чтобы $W^-(-z) = W^+(z)$.

В [2] показано, что если функция $G_1(x)$ удовлетворяет условию (6), то

$$e^{\Gamma^+(-x)} = e^{i\alpha + \Gamma^-(x)} = e^{i\alpha + \Gamma^+(x)} \left(\frac{x-i}{x+i} \right)^\kappa G_1^{-1}(x),$$
(15)

где $\alpha = \arg G_1(-\infty)$ (α может принимать значения либо 0, если $G_1(\infty) = 1$, либо π , если $G_1(\infty) = -1$).

Используя это соотношение, получим, что решение задачи Римана (11) тогда и только тогда будет являться решением однородной задачи Карлемана, когда коэффициенты многочлена $P_{\kappa-p-1}(z)$ удовлетворяют условию

$$P_{\kappa-p-1}(-z) = (-1)^{\kappa-p+\frac{\alpha}{\pi}} P_{\kappa-p-1}(z).$$
(16)

Последнее условие показывает, что, наряду с $z = c_k$, корнем этого многочлена должен быть также и $z = -c_k$.

Отсюда получаем:

1. Если $\alpha = 0$ и $\kappa - p = 2N$, то $P(z) = c_0 \prod_1^{N-1} (z^2 - c_k^2)$;
2. $\alpha = 0$, $\kappa - p = 2N - 1$, $P(z) = c_0 z \prod_1^{N-2} (z^2 - c_k^2)$;
3. $\alpha = \pi$, $\kappa - p = 2N$, $P(z) = c_0 z \prod_1^{N-1} (z^2 - c_k^2)$;
4. $\alpha = \pi$, $\kappa - p = 2N - 1$, $P(z) = c_0 \prod_1^{N-1} (z^2 - c_k^2)$,

где c_k ($k = 0, 1, \dots, N-1$) — произвольные постоянные.

Таким образом, число линейно независимых решений при $\kappa - p > 0$ равно N или $N-1$ (при $\alpha = 0$; $\kappa - p = 2N - 1$). При $\kappa - p \leq 0$ задача имеет лишь нулевое решение.

Пусть условия (16) выполнены. Тогда решение однородной задачи Карлемана найдем по формуле

$$\Phi^+(z) = \frac{1}{2} [W^+(z) + W^-(-z)].$$
(17)

Итак, если коэффициент $G(x)$ краевой задачи Карлемана (3') для действительной оси обращается в нуль и бесконечность целого порядка и имеет вид (5), то число линейно независимых решений в классе функций, огра-

ниченных на контуре и исчезающих на бесконечности, уменьшается по сравнению с нормальным случаем ($\beta_j = 0$, $\rho = 0$) на половину суммарного порядка полюсов $\frac{\rho}{2}$, если ρ четное и $\alpha = 0$ или $\alpha = \pi$, на $\frac{\rho+1}{2}$ при ρ нечетном, $\alpha = \pi$, или на $\frac{\rho-1}{2}$ при ρ нечетном, $\alpha = 0$.

Неоднородная задача. Общее решение неоднородной задачи (8) можно получить, складывая общее решение однородной задачи с частным решением неоднородной задачи.

Построим так же, как в [6], специальное частное решение соответствующей неоднородной задачи Римана (9), называемое канонической функцией неоднородной задачи.

Оно имеет вид

$$Y^+(z) = \frac{(z+i)^{2\rho}\Psi^+(z) - Q_\rho(z)}{(z+i)^\rho \prod_1 (z-b_j)^{\beta_j}} \chi^+(z), \quad (18)$$

$$Y^-(z) = \frac{(z+i)^{2\rho}\Psi^-(z) - Q_\rho(z)}{(z+i)^\rho \prod_1 (z+b_j)^{\beta_j}} \chi^-(z),$$

где

$$\Psi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g_1(\tau)}{\chi^+(\tau)} \frac{d\tau}{\tau-z}, \quad (19)$$

$Q_\rho(z)$ — интерполяционный многочлен для функций

$$\begin{aligned} (z+i)^{2\rho}\Psi^+(z) & \quad \text{в точках } b_j, \\ (z+i)^{2\rho}\Psi^-(z) & \quad \text{в точках } -b_j \end{aligned} \quad (20)$$

с узлами интерполяции $\pm b_j$ кратностей β_j . Известно, что такой многочлен определяется единственным образом и степень его $\rho = 2\rho - 1$.

Покажем теперь, что предельные значения функции $\Psi(z)$ удовлетворяют условию

$$\Psi^-(-x) = e^{i\alpha}\Psi^+(x) \left(\frac{x+i}{x-i} \right)^{\rho+\alpha}. \quad (21)$$

Из (19) следует, что

$$\frac{g_1(x)}{\chi^+(x)} = \Psi^+(x) - \Psi^-(x), \quad (22)$$

а

$$\Psi(-z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g_1(\tau)}{\chi^+(\tau)} \frac{d\tau}{\tau+z}.$$

Заменяя τ на $-\tau$ и используя (7) и (15), получим

$$\Psi(-z) = \frac{e^{i\alpha}}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g_1(\tau)}{\chi^+(\tau)} \left(\frac{\tau+i}{\tau-i} \right)^{\rho+\alpha} \frac{d\tau}{\tau-z},$$

откуда

$$e^{i\alpha} \frac{g_1(x)}{\chi^+(x)} \left(\frac{x+i}{x-i} \right)^{p+\kappa} = \Psi^-(x) - \Psi^+(-x). \quad (23)$$

Из (22) и (23) найдем, что

$$e^{i\alpha} \left(\frac{x+i}{x-i} \right)^{p+\kappa} [\Psi^+(x) - \Psi^-(x)] = \Psi^-(x) - \Psi^+(-x),$$

или

$$e^{i\alpha} \left(\frac{x+i}{x-i} \right)^{p+\kappa} \Psi^+(x) - \Psi^-(x) = e^{i\alpha} \left(\frac{x+i}{x-i} \right)^{p+\kappa} \Psi^-(x) - \Psi^+(-x).$$

Последнее можно рассматривать как однородную краевую задачу Римана, индекс которой равен нулю. В классе функций, исчезающих на бесконечности, она имеет лишь нулевое решение, т. е.

$$e^{i\alpha} \left(\frac{z+i}{z-i} \right)^{p+\kappa} \Psi^+(z) - \Psi^-(z) \equiv 0.$$

Значит, формула (21) доказана.

Так как предельные значения $\Psi^+(x)$ и $\Psi^-(x)$ связаны формулой (21), то интерполяционный многочлен $Q_p(x)$ должен удовлетворять условию

$$(x-i)^{\kappa-p} Q_p(-x) = e^{i\alpha} (x+i)^{\kappa-p} Q_p(x) \quad (24)$$

и, следовательно, многочлен $Q_p(x)$ обязательно должен быть четным или нечетным. При этом достаточно требовать, чтобы он был интерполяционным лишь для одной из функций: $(x+i)^{2p} \Psi^+(x)$ в точках b_j или $(x+i)^{2p} \Psi^-(x)$ в точках $-b_j$. Из формул (21) и (24) будет вытекать, что он является интерполяционным и для другой функции.

Чтобы обеспечить существование интерполяционного многочлена, нужно потребовать, чтобы функции $G_1(x)$ и $g_1(x)$ в точках b_j имели производные порядков β_j , удовлетворяющие условию Гельдера.

Построенная таким образом каноническая функция неоднородной задачи Римана (18) удовлетворяет условию $Y^-(z) = Y^+(z)$.

Частное решение неоднородной задачи Карлемана (8) получим по формуле

$$\Phi_0^+(z) = \frac{1}{2} [Y^+(z) + Y^-(z)].$$

А общее решение задачи (8) будет иметь вид

$$\Phi^+(z) = \Phi_0^+(z) + \frac{1}{2} [W^+(z) + W^-(z)], \quad (24)$$

где $W^\pm(z)$ — общее решение однородной задачи (8).

Число линейно независимых решений неоднородной задачи при $\kappa - p > 0$ совпадает с числом линейно независимых решений соответствующей однородной задачи. При $\kappa - p = 0$ однородная задача имеет лишь нулевое решение, а неоднородная безусловно и однозначно разрешима. Если $\kappa - p < 0$, то $P_{\kappa-p-1}(z) \equiv 0$, а каноническая функция $Y^-(z)$, имеющая в точке $z = -i$ порядок $\kappa - p < 0$, перестает быть решением неоднородной задачи. Однако, подчиняя свободный член $g(x)$ $p - \kappa$ условиям, можно добиться повышения порядка в точке $z = -i$ на $p - \kappa$ единиц и тем самым сделать каноническую функцию решением неоднородной задачи.

Для этого необходимо и достаточно, чтобы в разложении функции $(z+i)^{2p}\Psi(z) - Q_p(z)$ в ряд в окрестности точки $z = -i$ первые $p - \kappa$ коэффициентов обращались в нуль. Разложение $(z+i)^{2p}\Psi(z) - Q_p(z)$ в ряд можно представить в виде

$$(z+i)^{2p}\Psi(z) - Q_p(z) = -c_0 - c_1(z+i) - c_2(z+i)^2 - \dots - c_{2p-1}(z+i)^{2p-1} + c_{-1}(z+i)^{2p} + c_{-2}(z+i)^{2p+1} + \dots + c_{-k}(z+i)^{2p+k-1} + \dots,$$

где $c_0, c_1, \dots, c_{2p-1}$ — коэффициенты многочлена $Q_p(z)$, а c_{-k} — коэффициенты разложения $\Psi(z)$ и, следовательно,

$$c_{-k} = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g_1(\tau)}{\chi^+(\tau)} \frac{d\tau}{(\tau+i)^k}.$$

Условия разрешимости будут иметь вид

$$c_0 = c_1 = c_2 = \dots = c_{p-\kappa} = 0. \quad (25)$$

Но так как многочлен $Q_p(z)$, содержащий $2p$ коэффициентов, обязательно четный или нечетный, то половина его коэффициентов p автоматически равна нулю, а остальные условия

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{g_1(\tau)}{\chi^+(\tau)} \frac{d\tau}{(\tau+i)^k} = 0, \quad k = 1, 2, \dots, p - \kappa,$$

можно записать в эквивалентной форме

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{g_1(\tau)}{\chi^+(\tau)} \left(\frac{\tau-i}{\tau+i}\right)^k \frac{d\tau}{\tau+i} = 0, \quad k = 0, 1, \dots, p - \kappa - 1. \quad (26)$$

Но в силу условия (7)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{g_1(\tau)}{\chi^+(\tau)} \left(\frac{\tau-i}{\tau+i}\right)^k \frac{d\tau}{\tau+i} = e^{i\alpha} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g_1(\tau)}{\chi^+(\tau)} \left(\frac{\tau-i}{\tau+i}\right)^{-\kappa-p-k-1} \frac{d\tau}{\tau+i},$$

и, следовательно, для выполнения условий разрешимости (26) достаточно, чтобы лишь половина первых из них удовлетворялась. Остальные будут их следствиями.

Таким образом, для разрешимости краевой задачи Карлемана при $\kappa - p < 0$ нужно, чтобы выполнялись $|N|$ условий или $|N| + 1$ при $\alpha = 0$, $\kappa - p = 2N - 1$.

Рассмотрим теперь интегральное уравнение (1). Доопределяя его на всю ось, получим

$$\begin{aligned} \lambda_1 \varphi_+(x) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} [a(x-t) + b(x+t)] \varphi_+(t) dt = \\ = f(x) - \lambda_2 \varphi_+(-x) + \varphi_-(x), \quad -\infty < x < \infty. \end{aligned}$$

Преобразуя по Фурье, будем иметь

$$[\lambda_1 + A(x)] \Phi^+(x) + [\lambda_2 + B(x)] \Phi^+(-x) = \Phi^-(x) + F(x). \quad (27)$$

В силу взаимной однозначности преобразования Фурье решения интегрального уравнения (1) и краевой задачи (27) эквивалентны.

Зная решение краевой задачи (27), решение интегрального уравнения (1) найдем по формуле

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi^+(t) e^{-ixt} dt. \quad (28)$$

Пусть функции $\lambda_1 + A(x)$ и $\lambda_2 + B(x)$ в отдельных точках действительной оси обращаются в нуль целых порядков и выполнено условие (3). Тогда нули этих функций должны быть или в одних и тех же точках c_k , или в точках b_j и $-b_j$, симметрично расположенных относительно мнимой оси. Будем считать, что функции $\lambda_1 + A(x)$, $\lambda_2 + B(x)$ имеют вид

$$\begin{aligned} \lambda_1 + A(x) &= \prod_1^r (x - b_j)^{\beta_j} \prod_1^s (x - c_k)^{\gamma_k} A_1(x), \\ \lambda_2 + B(x) &= \prod_1^r (x + b_j)^{\beta_j} \prod_1^s (x - c_k)^{\gamma_k} B_1(x), \end{aligned} \quad (29)$$

$$\sum_1^r \beta_j = p_1, \quad \sum_1^s \gamma_k = p_2,$$

где $A_1(x)$ и $B_1(x)$ нигде в конечных точках в нуль не обращаются и удовлетворяют условию $A_1(x)A_1(-x) = B_1(x)B_1(-x)$. В работе [2] показано, что при условии (3) решение краевой задачи (27) приводится к двум крайним задачам Карлемана

$$\Phi^-(x) = \frac{\lambda_2 + B(-x)}{\lambda_1 + A(x)} \Phi^-(x) + \frac{\lambda_2 + B(-x)}{\lambda_1 + A(x)} F(x) - F(-x) \quad (30)$$

и

$$\Phi^+(x) = -\frac{\lambda_2 + B(x)}{\lambda_1 + A(x)} \Phi^+(-x) + \frac{F(x) + \Phi^-(x)}{\lambda_1 + A(x)}.$$

В случае (29) они будут иметь вид

$$\Phi^-(x) = \frac{\prod_1^s (x + c_k)^{\gamma_k}}{\prod_1^s (x - c_k)^{\gamma_k}} G_1(x) \Phi^-(x) + \frac{g_1(x)(x+i)^{p_1}}{\prod_1^s (x - c_k)^{\gamma_k}}, \quad (31)$$

$$\Phi^+(x) = \frac{\prod_1^r (x + b_j)^{\beta_j}}{\prod_1^r (x - b_j)^{\beta_j}} G_2(x) \Phi^+(-x) + \frac{g_2(x)(x+i)^{p_1}}{\prod_1^r (x - b_j)^{\beta_j}}, \quad (31')$$

где

$$G_1(x) = \frac{(-1)^{p_1+p_2} B_1(-x)}{A_1(x)}, \quad G_1(x)G_1(-x) = 1,$$

$$G_2(x) = -\frac{B_1(x)}{A_1(x)}, \quad G_2(x)G_2(-x) = 1,$$

$$g_1(x) = \frac{1}{(x+i)^{p_1}} \left[\prod_1^s (x+c_k)^{\gamma_k} B_1(-x) F(x) - \prod_1^s (x-c_k)^{\gamma_k} A_1(x) F(-x) \right],$$

$$(x+i)^{p_1} g_1(x) + (x-i)^{p_1} g_1(-x) G_1(x) = 0,$$

$$g_2(x) = \frac{F(x) + \Phi^-(x)}{\prod_1^s (x-c_k)^{\gamma_k} A_1(x) (x+i)^{p_2}},$$

$$(x+i)^{p_2} g_2(x) + (x-i)^{p_2} g_2(-x) G_2(x) = 0.$$

Пусть $\text{Ind } G_1(x) = \kappa_1$, $\text{Ind } G_2(x) = \kappa_2$.

Заметим, что κ_1 и κ_2 всегда одновременно четные или нечетные. Действительно,

$$\kappa_1 + \kappa_2 = \text{Ind } G_1(x) + \text{Ind } G_2(x) = 2 \text{Ind} \frac{1}{A_1(x)} = 2\kappa,$$

$$\kappa_1 - p_1 = 2N_1 \quad \text{или} \quad \kappa_1 - p_1 = 2N_1 - 1,$$

$$\kappa_2 - p_2 = 2N_2 \quad \text{или} \quad \kappa_2 - p_2 = 2N_2 - 1.$$

Если $\frac{\lambda_2}{\lambda_1} = 1$, то $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = \pi$.

При $\frac{\lambda_2}{\lambda_1} = -1$ $\alpha_1 = \pi$, $\alpha_2 = 0$.

По формуле (24) находим решение задачи (31) и подставляем значение $\Phi^-(x)$ в (31'). При этом получим краевую задачу Карлемана, свободный член которой будет содержать $\Phi^-(x)$. Как следует из условия (27), задача в классе функций, ограниченных на контуре и исчезающих на бесконечности, будет разрешима только тогда, когда функция $F(x) + \Phi^-(x)$ обращается в нуль в точках c_k , являющихся общими нулями функций $\lambda_1 + A(x)$ и $\lambda_2 + B(x)$, порядка γ_k , т. е. когда свободный член $f(x)$ уравнения (1) удовлетворяет условию

$$[F(x) + \Phi^-(x)]_{x=c_k}^{(i)} = 0, \quad k = 1, 2, \dots, s, \quad i = 0, 1, \dots, \gamma_k - 1. \quad (32)$$

Заметим, что этим условиям нельзя удовлетворить за счет произвольных постоянных, входящих в решение $\Phi^-(x)$.

Если эти условия выполнены, то при $\kappa_1 - p_1 \geq 0$ и $\kappa_2 - p_2 \geq 0$ интегральное уравнение (1) будет иметь $\kappa - \frac{p_1 + p_2}{2}$ линейно независимых решений. При $\kappa_1 - p_1 < 0$ и $\kappa_2 - p_2 < 0$ однородное уравнение имеет лишь нулевое решение, а неоднородное однозначно разрешимо при выполнении $\frac{p_1 + p_2}{2} - \kappa$ условий разрешимости. При $\kappa_1 - p_1 < 0$, $\kappa_2 - p_2 \geq 0$ для раз-

решимости уравнения свободный член, кроме условий (32), должен удовлетворять еще $|N_1|$ (или $|N_1| + 1$ при $\alpha_1 = 0$, $\kappa_1 - p_1 = 2N_1 - 1$) условиям. Если они выполнены, то решение будет содержать N_2 (или $N_2 - 1$ при $\alpha_2 = 0$, $\kappa_2 - p_2 = 2N_2 - 1$) произвольных постоянных.

Если $\kappa_1 - p_1 \geq 0$, $\kappa_2 - p_2 < 0$, то число линейно независимых решений уравнения будет меньше N_1 (или $N_1 - 1$ при $\alpha_1 = 0$, $\kappa_1 - p_1 = 2N_1 - 1$) на r , где r — ранг некоторой матрицы, элементы которой выражаются через $A(x)$ и $B(x)$.

Если рассматривать соответствующее (1) уравнение первого рода ($\lambda_1 = \lambda_2 = 0$), то в силу условия (3) функции $A(x)$ и $B(x)$ должны иметь в бесконечно удаленной точке нуль одного и того же порядка. Поэтому $G_1(x)$ и $G_2(x)$ будут по-прежнему ограничены на бесконечности. Если через λ обозначить порядок нуля $A(x)$ на бесконечности и считать для общности, что кроме бесконечно удаленной точки функции $A(x)$ и $B(x)$ могут обращаться в нуль еще в конечных точках, т. е. могут быть представлены в виде (29) ($\lambda_1 = \lambda_2 = 0$), то к необходимым условиям разрешимости (32) добавятся еще $\lambda + 1$ условие. И если все они будут выполнены, то справедливы те же выводы о числе линейно независимых решений и условиях разрешимости, что и в случае соответствующего уравнения второго рода.

Литература

1. Фельдман И. А. Изв. АН Молдавской ССР, № 10 (88), 1961.
2. Беркович Ф. Д. Изв. вузов, Математика, № 1 (50), 1966.
3. Юханонов Н. Н. ДАН ТаджССР, 10, № 4, 1967.
4. Квеселава Д. А. Тр. Тбилисс. матем. ин-та, 16, 1948.
5. Мельник И. М. Изв. вузов, Математика, № 2 (39), 1964.
6. Гахов Ф. Д. Краевые задачи. Физматгиз, М., 1963.
7. Гахов Ф. Д., Смагина В. И. Изв. АН СССР, сер. матем., 26, № 3, 1962.

Белорусский государственный
университет им. В. И. Ленина

Поступило в редакцию 26.IV 1968

В. И. МОНАСТЫРНЫЙ

О СОПРЯЖЕННОСТИ РАЗРЕШИМЫХ ПОДГРУПП В МУЛЬТИПЛИКАТИВНОЙ ГРУППЕ ТЕЛА

Пусть T — тело конечного ранга над своим центром Z ; T^* , Z^* — соответствующие мультипликативные группы. В [1] были получены основные результаты о разрешимых подгруппах группы T^* . Здесь мы находим условия сопряженности максимальных разрешимых подгрупп в T^* . Кроме этого, получена дополнительная информация о строении указанных групп.

Будем говорить, что подгруппа $\Gamma \subset T^*$ неприводима, если линейная Z -оболочка $[\Gamma] = T$.

Тело T называется p -примарным, если его ранг $(T : Z) = p^\alpha$, p — простое число.

Пусть G — максимальная неприводимая разрешимая подгруппа T^* . Следуя [1], рассмотрим инвариантный ряд

$$G \supseteq V \supseteq A \supseteq F \supseteq 1, \quad (1)$$

где F — максимальный абелев нормальный делитель G ; V — централизатор F в G ; A/F — максимальная группа среди абелевых инвариантных подгрупп G/F , содержащихся в V/F . Известно [1], что $F = \Sigma^*$, где Σ — некоторое нормальное сепарабельное над Z поле, A/F — прямое произведение элементарных абелевых групп порядков, делящих степень $(\Delta : \Sigma)$, где $\Delta = [A]$.

Найдем строение централизатора V из ряда (1).

Теорема 1. Подгруппа A определена группой G однозначно, а V либо равна A , либо $V = \{1+a, 1+b, A\}$, где $a, b \in A$, $a^2 = b^2 = -1$, $ab = -ba$.

Доказательство. Так как индекс $G : F$ конечен [1], то фактор-группа V/F конечна. Легко видеть, что центр V равен F . Следовательно, по теореме Бэра—Витта [2], коммутант V' конечен.

Пусть H — периодическая часть группы A и H коммутативна. Так как A — нормальный делитель G и H характеристична в A , то H — нормальный делитель G . Очевидно, $H \cdot F$ — абелев нормальный делитель G . Из максимальной F в G следует, что $H \subset F$. Подгруппа A имеет такое строение [1]:

$$A = (a_1)(b_1)(a_2)(b_2) \dots (a_k)(b_k)F, \quad (2)$$

где коммутаторы $[a_i, b_j] = [a_i, a_s] = [b_m, b_t] = 1$ при $i \neq j$, $l \neq s$, $m \neq t$; $[a_i, b_i] = \varepsilon_i \in F$, $\varepsilon_i^{p_i} = 1$; p_i — простые числа; индекс $A : F = (\Delta : \Sigma) = r^2$, $\Delta = [A]$, $\Sigma = [F]$.

Возьмем подполе $\Sigma_0 = \Sigma(a_1, a_2, \dots, a_k)$. Так как A_0/F порядка r , где $A_0 = \{a_1, a_2, \dots, a_k, F\}$, то на основании (2) степень $(\Sigma_0 : \Sigma) = r$ и Σ_0 — максимальное подполе Δ . Заметим еще, что элементы группы $B_0 = \{b_1, b_2, \dots, b_k\}$ индуцируют все Σ -автоморфизмы поля Σ_0 .

Аналогично $L_0 = \Sigma(b_1, b_2, \dots, b_k)$ максимальное подполе Δ и элементы группы A_0 индуцируют все Σ -автоморфизмы L_0 . Теперь для любого $v \in V$ имеем

$$va_i v^{-1} = h_i a_i, \quad (3)$$

где h_i — конечного порядка элемент из A , т. е. $h_i \in F$, $a_i \in \Sigma_0$. Значит, v индуцирует Σ -автоморфизм Σ_0 , и поэтому $v = b_0\alpha$, $\alpha \in \Sigma_0$, $b_0 \in B_0$. С другой стороны,

$$vb_i v^{-1} = f_i b_i, \quad (4)$$

где $b_i \in L_0$, $f_i \in F$. Следовательно, также $v = a_0\beta$, $a_0 \in A_0$, $\beta \in L_0$. Таким образом, $b_0\alpha = a_0\beta$. Отсюда $\beta b_0^{-1} \in \Sigma_0$, кроме того, $\beta b_0^{-1} \in L_0$. Так как тело $\langle \Sigma_0, L_0 \rangle = \Delta$, то $\beta b_0^{-1} \in F$ и $\beta \in A$. В итоге получаем $V = A$.

Рассмотрим второй случай: периодическая часть H некоммутативна. Тогда $H = Q_0 \times C_0$, где $Q_0 = \{a, b\}$ — группа кватернионов, C_0 — локально циклическая без 2-элементов (см., например, [3]). Легко видеть, что Q_0 — нормальный делитель G .

Покажем, что $N = \{1 + a, 1 + b\}$ — подгруппа G . Действительно, N — нормальный делитель $G \cdot N$. Группа $G \cdot N$ разрешима, и так как G максимальна в T^* , то $N \subset G$. Очевидно, также $N \subset V$.

Далее, Q_0 — нормальный делитель N , причем представители фактор-группы N/Q_0 индуцируют все внешние автоморфизмы Q_0 . Таким образом, элементы N индуцируют все автоморфизмы Q_0 . Из этого и нормальности Q_0 в G следует, что любой элемент $g = f\mu$, где $g \in G$, $f \in N$, $\mu \in C$ — централизатору Q_0 в G . Следовательно, можно записать $G = N \cdot C$.

Тогда $V = N \cdot C_1$, где $C_1 \subseteq C$. Коммутант C_1 конечен и не содержит группу кватернионов. По теореме 7 [4], группа C_1 метациклическая. Так как $C_1 = V \cap C$ — нормальный делитель G , то C_1 , C_1' — также нормальные делители G . Отсюда легко заметить, что $C_1' \subset F$, т. е. группа C_1 метабелева. Также метабелева и группа $D = Q_0 C_1$, причем D — нормальный делитель G . Легко видеть, что D/F — единственная максимальная абелева подгруппа V/F , инвариантная в G/F . Следовательно, $D = A$ и централизатор $V = \{1 + a, 1 + b, A\}$, где $a, b \in A$, $a^2 = b^2 = -1$, $ab = -ba$. Теорема доказана.

Предложение 1. Если фактор-группа G/F нильпотентна, то $V = F$, причем Σ является максимальным подполем тела T .

Действительно, пусть $G/F = \bar{G}$ и $\bar{G} \supset \bar{G}_1 \supset \dots \supset \bar{G}_m = \bar{1}$ — нижний центральный ряд \bar{G} . Предположим $A \neq F$, тогда $\bar{A} = A/F$ — абелев нормальный делитель \bar{G} . Обозначим $\bar{B}_i = \bar{G}_i \cap \bar{A}$ и пусть $\bar{B}_{i+1} = \bar{1}$. Существует элемент $\bar{a} = aF \in \bar{B}_i$, такой, что коммутатор $[\bar{g}, \bar{a}] = \bar{1}$ для любого $\bar{g} \in \bar{G}$, $a \notin F$. Отсюда вытекает равенство $gag^{-1} = \lambda a$, где $\lambda \in F$, т. е. $(a)F$ — абелев нормальный делитель G . В силу максимальной F в G $a \in F$. Противоречие. Значит, $A = F$ и по теореме 1 $V = F$. Из леммы 7 [1] теперь получаем $\Sigma = [F]$ — максимальное подполе T .

Предложение 2. Пусть T — p -примарное тело; G, V — подгруппы из ряда (1). Тогда при $p > 2$ $V = \Sigma_0^*$, где Σ_0^* — максимальное подполе T , а при $p = 2$ и $V \neq F$ $V = \{1 + a, 1 + b, \Sigma^*\}$, где $\{a, b\}$ — группа кватернионов, степень $(\Sigma : Z) = 2^{k-1}$, если $(T : Z) = 2^{2k}$.

В самом деле, пусть $p > 2$. Согласно результатам работы [1], имеем $(G : A)(A : F) = (T : \Delta)(\Delta : \Sigma)$, где $\Delta = [A]$, $\Sigma = [F]$. Так как $(T : \Delta) = p^i$, $(\Delta : \Sigma) = p^d$, то G/F — конечная p -группа и, как хорошо известно, нильпотентна. Равенство $V = \Sigma_0^*$ теперь вытекает из предложения 1.

Перейдем к случаю $p = 2$, $V \neq F$. По теореме 1 $\{1 + a, 1 + b, A\} = V$, где $Q_0 = \{a, b\}$ — группа кватернионов из A . Было установлено, что $G = N \cdot C$ (см. доказательство теоремы 1). По теореме об изоморфизме $G/V \cong C/V \cap C$, причем $V \cap C = A_1$, $A = Q_0 A_1$ (см. запись (2)). Так как A_1/F — конечная 2-группа и $G : V = (\Sigma : Z)$, то индекс $C : F = 2^t$. Следовательно, фактор-группа C/F нильпотентна. Теперь, как и при доказательстве предложения 1, имеем $sa_0c^{-1} = \lambda a_0$, где $\lambda \in F$, $a_0 \in A_1$. Но это противоречит макси-

мальности F в G . Следовательно, $a_0 \in F$, $A_1 = F$. Отсюда подгруппа $A = Q_0 F$, а $V = \{1+a, 1+b, F\}$.

Найдем степень $(\Sigma : Z)$, где $\Sigma^* = F$. Ясно, $\text{rang}(\Delta : \Sigma) = 4$. Далее $(T : \Delta)(\Delta : \Sigma)(\Sigma : Z) = (\Sigma : Z)^2 \cdot 4$ и, значит, $(\Sigma : Z) = 2^{k-1}$.

Это предложение обобщает теорему 1 из [6].

Предложение 3. Пусть A_π — подгруппа A , порожденная некоторой системой представителей классов смежности A/F . Если фактор-группа $A_\pi Z^*/Z^*$ периодическая, то либо $V = \Sigma_0^*$, где Σ_0 — максимальное подполе T , либо $V = \{1+a, 1+b, \Sigma^*\}$, где $a^2 = b^2 = -1$, $ab = -ba$, степень $(\Sigma : Z) = \sqrt{n/2}$, $n = (T : Z)$.

Доказательство. Рассмотрим сперва случай $V = A$. Тогда периодическая часть H группы A абелева. Предположим $A \neq F$. Пусть $G_0 = \{g, a_0\}$, где $g \in G$, $a_0 \in A \setminus F$. Можно записать $G_0 = (g)A_0$, где A_0 — нормальный делитель. Так как индекс $G:F$ конечен, то некоторая степень g содержится в центре G_0 . Значит, фактор-группа G_0 по ее центру Z_0 конечна. Тогда коммутант G'_0 конечен, причем $G'_0 \subset F$, ибо $H \subset F$. Следовательно, $ga_0g^{-1} = \lambda a_0$ для любого $g \in G$, $\lambda \in F$, и мы приходим к противоречию. Таким образом, $V = A = F$ и $[F] = \Sigma_0$ — максимальное подполе T .

Второй случай: $V = \{1+a, 1+b, A\}$, где $A = Q_0 A_1$, $Q_0 = \{a, b\}$ — группа кватернионов (см. запись (2)). Легко видеть, что периодическая часть A_1 абелева и содержится в F . Так как $G = NC$ (см. доказательство теоремы 1), то $A_1 = V \cap G$ — нормальный делитель G . Теперь, как и в первом случае, имеем: $ga_0g^{-1} = ha_0$, где $h \in F$, $a_0 \in A_1$.

Отсюда $a_0 \in F$, и мы заключаем, что $A_1 = F$, $A = Q_0 F$. Следовательно, $V = \{1+a, 1+b, F\}$, где $F = \Sigma^*$. Равенство $(\Sigma : Z) = \sqrt{n/2}$ доказывается так же, как в предложении 2.

Найдем необходимое и достаточное условие сопряженности максимальных разрешимых подгрупп в T^* .

Теорема 2. Две максимальные неприводимые разрешимые подгруппы G_1 и G_2 тогда и только тогда сопряжены в мультипликативной группе T^* тела T , если в T^* сопряжены их подгруппы A_1 и A_2 из ряда (1).

Необходимость немедленно следует из теоремы 1.

Докажем достаточность. Пусть G_1, G_2, A_1, A_2 — подгруппы, указанные в теореме 2, и $tA_2t^{-1} = A_1$ для некоторого $t \in T^*$. Обозначим $G_3 = tG_2t^{-1}$. Пусть G_1 имеет инвариантный ряд (1) вида $G_1 \supset A_1 \supset F$. Тогда соответствующий ряд для G_3 будет $G_3 \supset A_1 \supset F$. Как известно [1], $G_1/A_1 \simeq \Phi(\Sigma)$ — группе Галуа поля $\Sigma = [F]$ над Z . Следовательно, $G_1/A_1 \simeq G_3/A_1 \simeq \Phi(\Sigma)$. Отсюда следует, что для каждого $g \in G_1$ имеем $g = fa$, где $f \in G_3$, $a \in \Delta_0$ — централизатору Σ в T .

Покажем, что $\Delta_0 = \Delta = [A_1]$. Очевидно, $\Delta \subseteq \Delta_0$. По известной теореме [5] ранг

$$(T : Z) = (\Sigma : Z)(\Delta_0 : Z) = (\Sigma : Z)^2(\Delta_0 : \Sigma). \quad (4)$$

С другой стороны [1],

$$(T : Z) = (T : \Delta)(\Delta : \Sigma)(\Sigma : Z) = (\Sigma : Z)^2(\Delta : \Sigma). \quad (5)$$

Из равенств (4), (5) получаем $(\Delta_0 : \Sigma) = (\Delta : \Sigma)$ и, значит, $\Delta_0 = \Delta$.

Далее, так как $a \in \Delta^*$ и $aA_1a^{-1} = A_1$, то a индуцирует автоморфизм конечной абелевой группы A_1/F . Следовательно, некоторая степень a принадлежит F и фактор-группа $D_1 = \{a, A_1\}$ по ее центру Z_1 конечна. Тогда имеем $aa_i a^{-1} = h_i a_i$, где $h_i \in F$, $a_i \in A_1$ (см. запись (2)). Отсюда вытекает, что a индуцирует Σ — автоморфизм поля $\Sigma_0 = \Sigma(\alpha_1, \dots, \alpha_k)$. Дальнейшее доказательство аналогично первой части теоремы 1, и мы получаем $a \in A_1$. Значит, $f \in G_1$, $G_3 \subseteq G_1$. В силу максимальной $G_3 = G_1 = tG_2t^{-1}$.

Перейдем ко второму случаю: $A_1 \neq V_1$. Тогда $V_1 = \{1 + a, 1 + b, A_1\}$, $\{a, b\}$ — группа кватернионов из A_1 . Так как $tA_2t^{-1} = A_1$, то, легко видеть, $tV_2t^{-1} = V_1$. Следовательно, V_1 — нормальный делитель G_3 , причем $G_3/V_1 \cong \cong \Phi(\Sigma)$. Как и в первом случае, имеем равенство: $g = fa$ для любого $g \in G_1$, $f \in G_3$, $a \in \Delta = [A_1]$. Также получаем $aa_ia^{-1} = h_ia_i$, где h_i — элемент конечного порядка из A_1 . Периодическая часть A_1 равна $Q_0 \times C_0$, $Q_0 = \{a, b\}$, C_0 — локально циклическая без 2-элементов. Запишем $A_1 = Q_0 \cdot A_2$ (см. (2)). Тогда, очевидно, $C_0 \subset F$ и для $a_i \in A_2$ получим $[a, a_i] = h_i \in F$. Следовательно, α индуцирует Σ -автоморфизм поля $\Sigma_0 = \Sigma(a_2, a_3, \dots, a_k)$, где $a_i \in A_2$. Но все Σ -автоморфизмы Σ_0 индуцируются элементами группы $B_2 = \{b_2, \dots, b_k\}$ (см. (2)). Поэтому $\alpha = \beta\mu$, $\beta \in B_2$, $\mu \in \Gamma_0$ — централизователю поля Σ_0 в теле Δ .

Покажем, что $\Gamma_0 = \Sigma_0(a, b)$, $a, b \in Q_0$. Очевидно, $\Sigma_0(a, b) \subseteq \Gamma_0$. По известной теореме, имеем $(\Delta : \Sigma) = (\Gamma_0 : \Sigma)(\Sigma_0 : \Sigma) = r^2$, кроме того, $(\Sigma_0 : \Sigma) = r/2$. Отсюда $(\Gamma_0 : \Sigma) = 2r$, $(\Gamma_0 : \Sigma_0) = 4$. Таким образом, $\Gamma_0 = \Sigma_0(a, b)$.

Аналогичные рассуждения показывают, что $\alpha = \delta\lambda$, где $\delta \in A_0 = \{a_2, a_3, \dots, a_k\}$, $\lambda \in \Gamma_1$ — централизователю поля $\Sigma_1 = \Sigma(b_2, b_3, \dots, b_k) \subset \Delta$. Легко видеть, $\Gamma_1 = \Sigma_1(a, b)$.

Заметим теперь, что $\mu = v_1\gamma_0$, $\lambda = v_2\gamma_1$, где $v_1, v_2 \in N = \{1 + a, 1 + b\}$, $\gamma_0 \in \Sigma_0$, $\gamma_1 \in \Sigma_1$. Следовательно, $\beta v_1\gamma_0 = \delta v_2\gamma_1$ и элемент $\gamma_1\beta^{-1}$ принадлежит централизователю тела $\Delta_2 = \Sigma(a_2, a_3, \dots, a_k, b_2, b_3, \dots, b_k)$ в Δ , т. е. $\gamma_1\beta^{-1} \in \Sigma(a, b)$. Поскольку $\alpha Q_0\alpha^{-1} = Q_0$, то $\gamma_1 = v_2^{-1}\delta^{-1}\alpha$ содержится в нормализаторе Q_0 . Тогда на основании теоремы 1 [6] имеем $\gamma_1\beta^{-1} = v_0f_1$, $v_0 \in N$, $f_1 \in F$. Значит, $\gamma_1 \in V_1$, $\alpha \in V_1$. Таким образом, $f = g\alpha^{-1} \in G_1$, $G_3 \subseteq G_1$. В силу максимальной $G_3 = G_1 = tG_2t^{-1}$. Теорема доказана.

С л е д с т в и е. Две максимальные неприводимые разрешимые подгруппы p -примарного тела T , тогда и только тогда сопряжены в группе T^* , если в T^* сопряжены их максимальные абелевы нормальные делители.

Доказательство непосредственно вытекает из предложения 2 и теоремы 2.

В заключение хочу выразить искреннюю благодарность академику АН БССР профессору Д. А. Супруненко за внимание к работе.

Литература

1. Супруненко Д. А. Изв. АН СССР, сер. мат., 26, № 4, 1962.
2. Капланский И. Введение в дифференциальную алгебру. ИЛ, 1959, стр. 78.
3. Монастырный В. И. ДАН БССР, 8, № 8, 1964.
4. Amitsur S. Trans. Amer. Mat. Soc., 80, № 2, 1955.
5. Джекобсон Н. Теория колец. ИЛ, 1947, стр. 197.
6. Монастырный В. И. Сибирск. мат. журн., 6, № 1, 1965.

Минский педагогический институт им. А. М. Горького

Поступило в редакцию 24.IV 1968

Л. Б. ШНЕПЕРМАН

ПРЕДСТАВЛЕНИЯ СЛАБО РАВНОМЕРНОЙ СВЯЗКИ ГРУПП ОПЕРАТОРАМИ ГИЛЬБЕРТОВА ПРОСТРАНСТВА

Представление топологической полугруппы A в топологическую полугруппу B — это непрерывный гомоморфизм A и B .

Если B — полугруппа операторов комплексного гильбертова пространства, наделенная сильной операторной топологией, то представление будем называть H -представлением.

Достаточность (полнота) системы представлений, а также неприводимость представления понимаются в обычном смысле.

Основным результатом этой статьи является теорема о существовании достаточной системы неприводимых H -представлений для слабо равномерной связки групп.

§ 1. СЛАБАЯ РАВНОМЕРНОСТЬ

1.1. Пусть A — локально бикомпактная топологическая полугруппа, $a, b \in A$, $Y \subset A$, и W — окрестность в A , замыкание которой бикомпактно. Полугруппа A называется слабо равномерной, если 1) всякий раз, когда $\overline{aYb} \subset W$, существуют такие окрестности $V(a)$ и $V(b)$, что

$$V(a)YV(b) \subset W,$$

и 2) всякий раз, когда $\overline{aYb} \subset A \setminus \overline{W}$, существуют такие окрестности $V(a)$ и $V(b)$, что

$$V(a)YV(b) \subset A \setminus \overline{W}.$$

При этом либо a , либо b может быть пустым символом.

Легко видеть, что дискретные и бикомпактные полугруппы слабо равномерны.

1.2. Пусть A — полугруппа. Через λ_a будем обозначать левый сдвиг полугруппы A , порожденный элементом $a \in A$, а через μ_a — правый сдвиг. Для любого $x \in A$

$$\lambda_a x = ax, \mu_a x = xa.$$

1.3. Пусть A — инверсная полугруппа. Через a^* будем обозначать элемент, сопряженный элементу a . Если N — непустое подмножество полугруппы A , то $N^* = \{x^*\}_{x \in N}$. Обозначим через φ отображение полугруппы A на себя: $\varphi(a) = a^*$ для любого $a \in A$.

1.4. Если A — 1) слабо равномерная полугруппа, 2) связка групп, и 3) подполугруппа идемпотентов $E \subset A$ — вполне несвязна, то назовем A слабо равномерной связкой групп.

1.5. Лемма. Пусть A — слабо равномерная связка групп. Тогда отображение φ непрерывно.

Доказательство. Пусть F — замкнутое подмножество A , $e \in \bar{F}^*$ — идемпотент, V — произвольная окрестность точки e . Покажем, что множество

$$F_V = V^* \cap F \cap \lambda_e^{-1}V$$

не пусто.

Так как $e \in \bar{F}^*$, то $V \cap F^* \neq \emptyset$. Значит, $V^* \cap F \neq \emptyset$. Поэтому, если допустить существование такой окрестности V , что $F_V = \emptyset$, то $x \in V^* \cap F$ влечет $x \notin \lambda_e^{-1}V$, и, следовательно, $ex \notin V$. Значит,

$$e(V^* \cap F) \cap V = \emptyset$$

и

$$e(V^* \cap F) \subset A \setminus V.$$

А так как полугруппа A вполне регулярна, то

$$e(V^* \cap F)e \subset A \setminus V.$$

Пусть W такая окрестность точки e , то $\bar{W} \subset V$. Так как множество $A \setminus V$ замкнуто, то

$$\overline{e(V^* \cap F)e} \subset A \setminus V \subset A \setminus \bar{W}.$$

Полугруппа A слабо равномерная, поэтому существует такая окрестность U точки e , что

$$U(V^* \cap F)U \subset A \setminus \bar{W}.$$

Можно считать, что $U \subset W$.

Множество $U \cap F^*$ не пусто. Пусть z — точка из этого множества. Тогда

$$z = zz^*z \in U(U^* \cap F)U \subset$$

$$\subset U(V^* \cap F)U \subset A \setminus \bar{W}.$$

Значит, $z \notin \bar{W}$. Тем более $z \notin U$.

Это противоречие доказывает, что $F_V \neq \emptyset$.

Пусть V и W выбраны, как выше. Тогда легко видеть, что

$$F_V^* = V \cap \mu_e^{-1}V^* \cap F^*.$$

Отсюда следует

$$F_V^* \cap W = W \cap \mu_e^{-1}V^* \cap F^* \supset$$

$$\supset W \cap \mu_e^{-1}W^* \cap F = F_W^* \neq \emptyset.$$

Поэтому $e \in \bar{F}_V^*$ при любой окрестности V .

Далее имеем

$$e\bar{F}_W \subset e\bar{F}_W \subset \bar{W} \subset V.$$

Значит, существует такая окрестность U точки e ($U \subset W$), что $UF_W \subset U$. Тем более $UF_U \subset V$.

Точно так же подберем такую окрестность Q точки e ($Q \subset U$), что $F_Q Q \subset U$.

Пусть теперь $z \in F_Q$. Тогда $z^* \in Q$ и

$$z = zz^*z \in F_Q Q F_Q \subset UF_Q \subset UF_U \subset V.$$

Итак, $z \in F_Q \cap V$. Значит, $F_Q \cap V \neq \emptyset$. Тем более $F \cap V \neq \emptyset$. А это означает, что $e \in F$. Следовательно, $e = e^* \in F^*$.

Теперь покажем, что если $\varphi(F)$ — замкнутое множество, то и F — замкнутое множество.

Выберем точку $a \in \bar{F}$. Пусть U — окрестность точки a , и обозначим $K_U = F \cap U$. Ясно, что $a \in \overline{K_U}$ при любой окрестности U .

Далее,

$$\begin{aligned} a^*a &\in a^*\overline{K_U} \subset \overline{a^*K_U} = \\ &= \overline{\varphi(K_U^*a)} \subset \varphi(\overline{K_U^*a}). \end{aligned}$$

Значит, $a^*a \in \overline{K_U^*a}$, так как a^*a — идемпотент.

Пусть теперь V — окрестность точки a^*a . Тогда $V \cap K_U^*a \neq \emptyset$ и

$$N_{V,U}^* = \mu_a^{-1}V \cap K_U^*a \neq \emptyset.$$

Легко видеть, что

$$N_{V,U} = \lambda_{a^*}^{-1}V^* \cap K_U,$$

и если U' — окрестность точки a , то

$$N_{V,U} \cap U' = N_{V,U \cap U'}.$$

Поэтому $a \in N_{V,U}$ при любых V и U .

Пусть теперь V' — такая окрестность точки a^*a , что $\bar{V}' \subset V$. Так как $N_{V',U}^*a \subset V'$, то $\overline{N_{V',U}^*a} \subset V' \subset V$. Значит, существует такая окрестность U' точки a (можно считать, $\bar{U}' \subset U$), что $N_{V',U'}^* \subset V$. Тем более, $N_{V',U'}^* \subset V$.

Пусть теперь W — окрестность точки a^* , и W' — такая окрестность точки a^* , что $\bar{W}' \subset W$. Можно предположить, что окрестность V выбрана так, что $Va^* \subset W'$.

Тогда

$$N_{V',U'}^*(aa^*) = (N_{V',U'}^*a)a^* \subset V'a^* \subset W'.$$

Значит,

$$(aa^*)N_{V',U'}^* = N_{V',U'}^*(aa^*) \subset W',$$

и существует такая окрестность V'' точки aa^* , что $V''N_{V',U'}^* \subset W$. Так как $aa^* = a^*a$, то можно считать, что $V'' \subset V'$. Тогда $V''N_{V',U'}^* \subset W$.

Итак, если R — окрестность точки a^* , то существуют такие P и Q — окрестности точек a и aa^* соответственно, что $PN_{P,Q}^* \subset R$. В свою очередь есть такие окрестности этих же точек — $P' \subset P$ и $Q' \subset Q$, что $N_{P',Q'}^* \subset P$. Тогда

$$N_{P',Q'}^*Q'N_{P',Q'}^* \subset PN_{P',Q'}^* \subset PN_{P',Q'}^* \subset R.$$

Пусть теперь $z \in N_{P',Q'}^*$. Тогда $z \in Q'$ и $z^* \in N_{P',Q'}^*$. Значит,

$$z^* = z^*zz^* \in N_{P',Q'}^*Q'N_{P',Q'}^* \subset R.$$

Отсюда следует, что $N_{P',Q'}^* \cap R \neq \emptyset$, а тогда подалюбо $F^* \cap R \neq \emptyset$ и потому $a^* \in \bar{F}^*$. Но $F^* = \varphi(F)$ — замкнутое множество. Следовательно, $a^* \in F^*$ и $a \in F$.

1.6. Положим $\gamma(a) = a\varphi(a)$ для любого $a \in A$.

Лемма. Пусть A — слабо равномерная связка групп. Тогда
 1) отображение γ является представлением полугруппы A на ее подполугруппу идемпотентов E ;

2) каждая групповая компонента G полугруппы A является замкнутым множеством;

3) каждая групповая компонента G полугруппы A является топологической группой.

Доказательство. 1) Так как непрерывна функция $\varphi(a)$, то непрерывна и функция $\gamma(a) = a\varphi(a)$. Далее, для любых $x, y \in A$

$$\gamma(xy) = xy\varphi(xy) = xyu^*x^* = xx^*yu^* = \gamma(x)\gamma(y).$$

2) Каждая групповая компонента G является полным прообразом единицы группы G при непрерывном преобразовании γ .

3) Группа G , локально бикомпактная по 2), будучи абстрактной группой и локально бикомпактной полугруппой, является топологической группой [4].

§ 2. КОММУТАТИВНАЯ ПОЛУГРУППА ИДЕМПОТЕНТОВ

2.1. Лемма. Пусть E — локально бикомпактная вполне несвязная слабо равномерная коммутативная полугруппа идемпотентов. Тогда для любой окрестности U точки $e \in E$ существует открытая бикомпактная топологическая полугруппа P , содержащая e и содержащаяся в U .

Доказательство. Существует открытая бикомпактная окрестность R точки e , содержащаяся в U . Рассмотрим на R следующее бинарное отношение σ : для любой пары f и g из R $f\sigma g$ тогда и только тогда, когда fx и gx одновременно принадлежат или не принадлежат R при любом $x \in E$.

Непосредственной проверкой легко убедиться, что σ — отношение эквивалентности, а так как $f\sigma g$ влечет

$$(cf) x \in R \leftrightarrow f(cx) \in R \leftrightarrow g(cx) \in R \leftrightarrow (cg) x \in R$$

для $c \in R$ и $x \in E$, то σ — конгруэнтность на R .

Пусть K_f — класс конгруэнтности, содержащий f ,

$$X_f = \{x \mid x \in E, fx \in R\},$$

$$Y_f = \{x \mid x \in E, fx \in E \setminus R\}.$$

Ясно, что X_f и Y_f — открыто-замкнутые подмножества в R и

$$g \in K_f \leftrightarrow gX_f \subset R \text{ и } gY_f \subset E \setminus R.$$

Но

$$K_f x \subset R \rightarrow \overline{K_f} x \subset \overline{K_f} x \subset R \rightarrow \overline{K_f} X_f \subset R,$$

и аналогично $\overline{K_f} Y_f \subset E \setminus R$. Следовательно, $\overline{K_f} = K_f$. Значит, K_f — бикомпакт.

В силу слабой равномерности E для каждого $k \in K_f$ существует такая окрестность $V(k)$, что $V(k)X_f \subset R$ и $V(k)Y_f \subset E \setminus R$. Поэтому существует такая окрестность $V(K_f)$ бикомпакта K_f , что

$$V(K_f)X_f \subset R \text{ и } V(K_f)Y_f \subset E \setminus R.$$

Значит, $V(K_f) = K_f$. Итак, K_f — открытое бикомпактное подмножество.

Так как σ — конгруэнтность, то каждый ее класс является полугруппой. Поэтому, положив $K_e = P$, получим утверждение леммы.

2.2. Пусть E — коммутативная полугруппа идемпотентов. На E можно естественным образом ввести отношение порядка: для любых $x, y \in E$ положим $x \leq y$ тогда и только тогда, когда $xy = x$. Когда ниже речь идет о по-

рядке на полугруппе E , то всегда имеется в виду именно такой способ упорядочения.

Заметим, что бикompактная топологическая полугруппа идемпотентов всегда имеет наименьший элемент [8].

2.3. Лемма. Пусть E — топологическая хаусдорфова коммутативная полугруппа идемпотентов и $t \in E$. Тогда множество tE замкнуто.

Доказательство. Пусть $z \notin tE$. Тогда $z \neq tz$. Значит, существуют такие окрестности $U(z)$ и $U(tz)$, что $U(z) \cap U(tz) = \emptyset$ и $tU(z) \subset U(tz)$. Следовательно, $U(z) \cap tU(z) = \emptyset$. Это означает, что в $U(z)$ нет ни одного элемента вида tx , $x \in E$. Действительно, если бы $tx \in U(z)$, то $tx = t \cdot tx \in tU(z)$, что невозможно. Поэтому $U(z) \cap tE = \emptyset$. Итак, каждая точка z принадлежит множеству $E \setminus tE$ вместе с некоторой своей окрестностью. То есть множество $E \setminus tE$ открыто, а tE — замкнуто.

2.4. Обозначим через Π мультипликативную полугруппу, состоящую из чисел 0 и 1. Топология на Π — дискретная.

Лемма. Пусть E — локально бикompактная вполне несвязная слабо равномерная коммутативная полугруппа идемпотентов с единицей e . Тогда для любого $t \in E$, $t \neq e$, существует представление ζ полугруппы E в полугруппу Π , разделяющее точки e и t .

Доказательство. Множество $U = E \setminus tE$ открыто (лемма 2.3), а потому существует открытая бикompактная топологическая полугруппа P , содержащая e и содержащаяся в U (лемма 2.1).

Обозначим через h наименьший элемент из P , и пусть

$$H = \{x \mid x \in E, xh = h\}.$$

Если $x \in H$, то $xh = h \in P$. Значит, существует такая окрестность V точки x , что $Vh \subset P$. Но тогда $Vh \subset Ph = h$ и $V \subset H$, т. е. множество H — открытое.

Из непрерывности умножения следует, что если $Nh = h$, то $\overline{Nh} = h$. Значит, $H = \overline{H}$ — замкнутое множество. H — полугруппа, так как из $x, y \in H$ следует, что $(xy)h = x(yh) = xh = h$.

Множество $E \setminus H$ является идеалом полугруппы E . Действительно, $z \in E \setminus H$ означает, что $zh \neq h$, и если допустить, что $(zx)h = h$, то $h = z(zx)h = zh \neq h$. Идеал $E \setminus H$ вполне изолированный, так как H — полугруппа.

Так как $h \in P \subset U$, то $h \notin tE$ и $ht \neq h$. Значит, $t \in E \setminus H$.

Полагая

$$\zeta(x) = \begin{cases} 1, & \text{когда } x \in H, \\ 0, & \text{когда } x \in E \setminus H, \end{cases}$$

получаем представление, удовлетворяющее требованиям леммы.

2.5. Пусть E — топологическая коммутативная полугруппа идемпотентов. Каждый элемент $f \in E$ индуцирует сдвиг полугруппы E , который будем обозначать через λ_f ($\lambda_f = \mu_f$, п. 1.2).

λ_f — представление E в fE , так как отображение λ_f непрерывно и $\lambda_f(xy) = f(xy) = fx \cdot fy = \lambda_f x \cdot \lambda_f y$.

2.6. Теорема. Пусть E — локально бикompактная слабо равномерная коммутативная полугруппа идемпотентов. Полугруппа E допускает достаточную систему представлений в полугруппу Π тогда и только тогда, когда пространство E вполне несвязно.

Доказательство. 1. Пусть пространство E вполне несвязно. Если $f, g \in E$, то либо $fg \neq f$, либо $fg \neq g$. Пусть, например, справедливо первое. Так как fE — замкнутое подмножество E (лемма 2.3), то полугруппа fE локально бикompактная с единицей f , и к ней применима лемма 2.4. Пусть ζ — представление полугруппы fE на полугруппу Π , разделяющее точки f и fg . Тогда $\zeta \lambda_f$ — представление полугруппы E на полугруппу Π , разделяющее точки f и g .

2. Пусть точки f и g топологической полугруппы идемпотентов E принадлежат одной связной компоненте. Так как $\zeta(x)$ либо 0, либо 1 при любом $x \in E$ и функция ζ непрерывная, то всегда $\zeta(f) = \zeta(g)$.

§ 3. ПРЕДСТАВЛЕНИЯ

3.1. Теорема. Пусть A — слабо равномерная связка групп. Тогда полугруппа A допускает достаточную систему представлений в классе локально бикомпактных групп с присоединенным изолированным нулем.

Доказательство. Пусть элементы a и b принадлежат различным групповым компонентам связки A . Тогда γ (1.6) — представление A на E , причем $\gamma(a) \neq \gamma(b)$. Топологическая полугруппа E локально бикомпактна, так как множество E — замкнутое. Если теперь ζ — представление полугруппы E на Π , разделяющее точки $\gamma(a)$ и $\gamma(b)$ (лемма 2.6), то $\zeta\gamma$ — представление A на Π , разделяющее точки a и b .

Пусть теперь a и b принадлежат одной и той же групповой компоненте с единицей e . Выберем две непересекающиеся окрестности U и V точек a и b соответственно и такую окрестность W точки e , чтобы $aW \subset U$ и $bW \subset V$. Существует бикомпактная полугруппа $P \subset E$, открытая в E , содержащаяся в $W \cap E$ и содержащая e (лемма 2.1). Эта полугруппа P имеет минимальный элемент h (2.2). Групповую компоненту, единицей которой служит h , обозначим через H . Ясно, что $ha \neq hb$ и $ha, hb \in H$. Напомним, что H — топологическая группа (лемма 1.5).

Положим

$$S = \{x \mid x \in E, x \geq h\}, \quad T = E \setminus S.$$

Покажем, что T — открыто-замкнутый вполне изолированный идеал полугруппы E . Во-первых, если $(xy)h = h$, то $xh = x(xy)h = (xy)h = h$. Аналогично $yh = h$. Значит, $x, y \in S$ и T — идеал. Во-вторых, S — полугруппа, а потому T — вполне изолированный идеал. В-третьих, при непрерывном отображении λ_h (2.5) полугруппы E в себя S является полным прообразом открыто-замкнутого множества P : $S = \lambda_h^{-1}P$. Поэтому множество S , а вместе с ним и T , замкнуто.

Так как γ — представление полугруппы A на E , то $\gamma^{-1}T$ — открыто-замкнутый вполне изолированный идеал полугруппы A . Поэтому

$$\lambda_h A = h(\gamma^{-1}S \cup \gamma^{-1}T) = H \cup h\gamma^{-1}T,$$

где $h\gamma^{-1}T$ — вполне изолированный открыто-замкнутый идеал полугруппы hA .

Положим, наконец, H^0 — группа H с присоединенным изолированным нулем 0 и

$$\xi(x) = \begin{cases} x, & \text{если } x \in H, \\ 0, & \text{если } x \in hA \setminus H. \end{cases}$$

Ясно, что ξ — представление полугруппы hA на H^0 . Итак, $\xi\lambda_h$ — представление полугруппы A в группу с присоединенным изолированным нулем H^0 , разделяющее точки a и b .

3.2. Следствием этой теоремы и известного результата И. М. Гельфанда и Д. А. Райкова [1] о существовании достаточной системы неприводимых унитарных представлений для локально бикомпактных топологических групп является

Теорема. Слабо равномерная связка групп допускает достаточную систему неприводимых H -представлений в классе унитарных групп с присоединенным изолированным нулем.

3.3. Так как всякая бикомпактная топологическая полугруппа является слабо равномерной, то из 3.2 и теоремы А. Гуревич [2] о разложе-

нии пространства унитарного представления бикompактной топологической группы в прямую сумму конечномерных инвариантных подпространств следует доказанная в [7]

Теорема. Вполне регулярная инверсная бикompактная топологическая полугруппа, подполугруппа идемпотентов которой вполне несвязна, допускает достаточную систему неприводимых конечномерных представлений в классе групп с присоединенным изолированным нулем.

Литература

1. Гельфанд И. М., Райков Д. А. Матем. сб., 13, № 2—3, 1943, стр. 301—316.
2. Hurevitch A. Матем. сб., 13, № 1, 1943, стр. 79—86.
3. Данфорд Н., Шварц Дж. Т. Линейные операторы. ИЛ, 1962.
4. Ellis R. Proc. Am. Math. Soc., 8, 1957, 372—373.
5. Ляпин Е. С. Полугруппы. Физматгиз, 1960.
6. Понтрягин Л. С. Непрерывные группы. Гостехиздат, 1954.
7. Шнеперман Л. Б. ДАН СССР, 176, № 3, 533, 1967.
8. Шварц Шт. Чехосл. матем. ж., 5 (80), 1955.

Минский государственный
педагогический институт
им. А. М. Горького

Поступило в редакцию 16.V 1968

А. А. ДАДАЯН

ТКАНЬ КОДАЦЦИ

Известно (см., например, [1], стр. 13), что на произвольной поверхности V_2 трехмерного евклидова пространства, отнесенной к гауссовым координатам u, v , с первым γ_{ij} и вторым π_{ij} основными тензорами, ковариантная производная

$$\pi_{ijk} = \frac{\partial \pi_{ij}}{\partial u^k} - \Gamma_{ik}^s \pi_{sj} - \Gamma_{jk}^s \pi_{si}$$

второго основного тензора, являясь трижды ковариантным тензором, симметричным относительно всех индексов, удовлетворяет соотношениям

$$\gamma^{sk} \pi_{shi} = 2H_i; \quad \tilde{\pi}^{sk} \pi_{shi} = \frac{K_i}{K}, \quad (1)$$

где K и H — соответственно гауссова и средняя кривизны поверхности; Γ_{ij}^k — связность, построенная на базе метрического тензора γ_{ij} ; знак \sim означает, что индексы подняты с помощью дискриминантного тензора ϵ_{ij} .

Тензор π_{ijk} , как известно, называется тензором Кодацци. Тожественное обращение в нуль тензора Кодацци, как видно из равенств (1), есть условие, необходимое и достаточное для того, чтобы на поверхности как гауссова, так и средняя кривизны имели постоянные значения. Этими свойствами [1] характеризуются плоскость, сфера и круглый цилиндр.

В настоящей работе изучается 3-ткань [2] на поверхности V_2 , порождаемая тензором Кодацци, и устанавливаются некоторые критерии отдельных классов поверхностей в зависимости от типа этой ткани.

§ 1. Выражение тензора Кодацци через основные инварианты поверхности. Тензор Кодацци π_{ijk} , удовлетворяющий соотношениям (1), можно найти явным образом, выразив его через основные тензоры γ_{ij} и π_{ij} поверхности, кривизны K и H и их первые производные. Для этого из основных тензоров γ_{ij} и π_{ij} при помощи операций скалярного, векторного и смешанного произведений [3] построим «ортогональный репер» из трех взаимно аполярных и линейно независимых тензоров γ_{ij} , четвертого основного тензора ρ_{ij} поверхности и их векторного произведения

$$\lambda_{ij} = \epsilon^{sk} \gamma_{s(i} \rho_{j)k}. \quad (2)$$

Тензор λ_{ij} связан с основными инвариантами поверхности соотношением

$$\lambda_{ij} = H \gamma_{ij} - \pi_{ij}. \quad (3)$$

В бинарной области любой тензор, симметричный по двум индексам, можно разложить по трем линейно независимым тензорам [4]. Если тензор a_{ijk} симметричен по всем трем индексам, то легко показать, что его разложение будет иметь уже следующий вид:

$$a_{ijk} = x_{(k} \gamma_{ij)} + y_{(k} \rho_{ij)} + z_{(k} \lambda_{ij)}, \quad (4)$$

где круглые скобки, как обычно, означают симметрирование по заключенным в них индексам.

Исключив из рассмотрения поверхности, на которых $\pi_{ijk} = 0$, разложим тензор Кодащи по тензорам γ_{ij} , ρ_{ij} и λ_{ij} . Итак, (4) дает

$$\pi_{ijk} = x_{(k}\gamma_{ij)} + y_{(k}\rho_{ij)} + z_{(k}\lambda_{ij)}. \quad (5)$$

Определим тензоры x_k , y_k и z_k . Умножим обе части (5) на γ^{ij} и свернем по индексам i и j , получим

$$\gamma^{ij}\pi_{ijk} = 4x_k + y_k\gamma^{ij}\rho_{ij} + 2y_j\rho_k^i + z_k\gamma^{ij}\lambda_{ij} + 2z_j\lambda_k^i. \quad (6)$$

Применив первое равенство (1) и учитывая, что

$$\gamma^{ij}\rho_{ij} = \gamma^{ij}\lambda_{ij} = \tilde{\rho}^{ij}\lambda_{ij} = 0, \quad (7)$$

из (6) будем иметь

$$2x_k + y_i\rho_k^i + z_i\lambda_k^i = H_k. \quad (8)$$

Умножив обе части (5) на $\tilde{\lambda}^{ij}$ и свернув по индексам i и j , при условиях (7) получим

$$\tilde{\lambda}^{ij}\pi_{ijk} = 2x_j\tilde{\lambda}^{ij}\gamma_{ik} + 2y_j\tilde{\lambda}^{ij}\rho_{ik} + 4z_k. \quad (9)$$

Легко заметить, что для левой части (9) из (3) получается выражение

$$\tilde{\lambda}^{ij}\pi_{ijk} = -\frac{C_k}{C}, \quad (10)$$

где $C = H^2 - K$ — эйлерова разность.

Так как тензоры γ_{ij} , ρ_{ij} и λ_{ij} определяют тройку сетей [5], то

$$\varepsilon^{is}\gamma_{ks} = C\tilde{\lambda}^{sj}\rho_{sk}; \quad \varepsilon^{sj}\rho_{sk} = C\tilde{\lambda}^{sj}\gamma_{sk}; \quad \varepsilon^{js}\lambda_{sk} = C\tilde{\rho}^{sj}\gamma_{sk}. \quad (11)$$

При условиях (10) и (11) из равенства (9) получим

$$2x_j\varepsilon^{sj}\rho_{sk} + 2y_j\varepsilon^{sj}\gamma_{ks} + 2Cz_k = -C_k. \quad (12)$$

Из определения четвертого основного тензора поверхности

$$\rho_{ij} = \varepsilon_{(i}^s\pi_{j)s}$$

легко получить равенство

$$\tilde{\rho}^{ij}\pi_{ijk} = \frac{1}{C}(\varepsilon_{.k}^s C_s - 2\rho_k^s H_s). \quad (13)$$

Свернув теперь (5) с тензором $\tilde{\rho}^{ij}$, при тех же условиях (11) с учетом (13), получим

$$x_j\varepsilon^{js}\lambda_{sh} + 2y_k C + z_j\varepsilon^{js}\gamma_{ks} = \frac{1}{2}(\varepsilon_{.k}^s C - 2\rho_k^s H_s). \quad (14)$$

Решив, наконец, уравнения (8), (12) и (14), для тензоров x_k , y_k и z_k получим значения:

$$x_i = \frac{1}{6E}(4CH_i + HC_i + \pi_i^l C_l); \quad y_i = 0; \quad z_i = -\frac{1}{3C}(C_i + HH_i + \pi_i^l H_l). \quad (15)$$

Таким образом, (5) принимает вид

$$\pi_{ijk} = 3[x_i(\gamma_{jk}) - 2z_i(\lambda_{jk})]. \quad (16)$$

Это разложение тензора Кодацци можно несколько видоизменить, если заменить тензор λ_{ij} его значением из (3). Сделав эту замену, после некоторых преобразований получим

$$\pi_{ijk} = a_{(k} \gamma_{ij)} + b_{(k} \pi_{ij)}, \quad (17)$$

где

$$a_k = \frac{1}{6c} (-4KH_k + HK_k + \pi_k^l K_l); \quad b_k = \frac{1}{3c} (3HH_k - K_k - \pi_k^l H_l). \quad (18)$$

Таково явное выражение тензора Кодацци.

Заметим, что тождественное обращение в нуль тензора a_i характеризует поверхности Дарбу (поверхности второго порядка). Поверхности, на которых тождественно обращается в нуль тензор b_i , названы нами поверхностями Дарбу второго рода. Эти поверхности принадлежат к классу поверхностей вращения. Поверхности, на которых тождественно обращается в нуль тензор Кодацци, т. е. плоскость, сфера и круглый цилиндр, естественно назвать поверхностями Кодацци. Легко показать, что поверхности Кодацци являются поверхностями, общими для классов поверхностей Дарбу и поверхностей Дарбу второго рода. В терминах теории множеств это предложение можно сформулировать следующим образом: пересечением указанных трех классов поверхностей является класс поверхностей Кодацци.

§ 2. Ткань Кодацци и алгебраические комитанты ее тензора. С тензором Кодацци π_{ijk} можно связать кубическую инвариантную дифференциальную форму $\pi_{ijk} du^i du^j du^k$. Приравняв эту форму нулю

$$\pi_{ijk} du^i du^j du^k = 0, \quad (19)$$

получим дифференциальное уравнение некоторой 3-ткани [2]. Эту ткань назовем тканью Кодацци, а каждую линию ее — линией Кодацци. Уравнение (19) назовем дифференциальным уравнением ткани Кодацци. Очевидно, через каждую точку поверхности, не особенную относительно тензора Кодацци, проходят либо одна, либо три действительных линии Кодацци. В комплексной области уравнение (19) в окрестности каждой точки определяет три семейства линий Кодацци. На некоторых поверхностях все три семейства или два из них могут и совпадать. Вообще же, применяя классификацию кубического уравнения по характеру его корней, можно заключить, что существуют поверхности, на которых либо все три семейства линий ткани Кодацци совпадают, либо совпадают два из трех семейств, либо все три семейства линий ткани Кодацци различны. В последнем случае могут быть поверхности, на которых действительными являются все три семейства и поверхности, на которых действительным является только одно семейство, а два семейства — мнимые. Естественно выяснить, на каких поверхностях имеет место тот или иной тип ткани Кодацци.

Для исследования указанного вопроса построим алгебраические комитанты [6] тензора Кодацци (17). Таковыми являются кубическая форма (19), ее дискриминант

$$\Pi = 4(\pi_{111}\pi_{122} - \pi_{112}^2)(\pi_{112}\pi_{222} - \pi_{122}^2) - (\pi_{111}\pi_{222} - \pi_{112}\pi_{122})^2, \quad (20)$$

гессиан

$$b_{ij} = \frac{1}{2} \varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} \pi_{\alpha\gamma i} \pi_{\beta\delta j} \quad (21)$$

и взаимный тензор

$$\check{\pi}_{ijk} = \varepsilon^{\alpha\beta} b_{\alpha i} \pi_{\beta jk}. \quad (22)$$

Не уменьшая общности рассуждений, отнесем поверхность V_2 к сети линий кривизны u и v . Если главные кривизны поверхности обозначить через σ и σ , а компоненты тензоров γ_{ij} и π_{ij} соответственно через E, F, G и L, M, N , то из основных соотношений

$$K = \frac{\sigma\sigma}{12}, \quad 2H = \frac{\sigma}{1} + \frac{\sigma}{2}, \quad C = \frac{1}{4}(\frac{\sigma}{1} - \frac{\sigma}{2})^2, \quad (23)$$

$$L = \frac{\sigma E}{1}, \quad N = \frac{\sigma G}{2}$$

путем дифференцирования по u и v получим

$$K_u = \frac{\sigma_u \sigma}{12} + \frac{\sigma \sigma_u}{12}, \quad 2H_u = \frac{\sigma_u}{1} + \frac{\sigma_u}{2}, \quad (24)$$

$$K_v = \frac{\sigma_v \sigma}{12} + \frac{\sigma \sigma_v}{12}, \quad 2H_v = \frac{\sigma_v}{1} + \frac{\sigma_v}{2}.$$

При всем этом введенные нами векторы (18) будут иметь компоненты

$$a_u = \frac{1}{3(\frac{\sigma}{1} - \frac{\sigma}{2})} (3\frac{\sigma\sigma_u}{12} - \frac{\sigma\sigma_u}{21}), \quad b_u = \frac{1}{3(\frac{\sigma}{1} - \frac{\sigma}{2})} (\frac{\sigma_u}{1} - 3\frac{\sigma_u}{2}), \quad (25)$$

$$a_v = \frac{1}{3(\frac{\sigma}{1} - \frac{\sigma}{2})} (3\frac{\sigma\sigma_v}{21} - \frac{\sigma\sigma_v}{12}), \quad b_v = \frac{1}{3(\frac{\sigma}{1} - \frac{\sigma}{2})} (\frac{\sigma_v}{2} - 3\frac{\sigma_v}{1}).$$

Для компонент тензора Кодацци (17) получим

$$\pi_{111} = E\sigma_u, \quad \pi_{112} = E\sigma_v, \quad \pi_{122} = G\sigma_u, \quad \pi_{222} = G\sigma_v, \quad (26)$$

а компоненты его гессиана (21) получают следующие значения:

$$b_{11} = \frac{1}{G} (G\sigma_u\sigma_u - E\sigma_v^2); \quad b_{12} = \sigma_u\sigma_v - \sigma_v\sigma_u; \quad b_{22} = \frac{1}{E} (E\sigma_v\sigma_v - G\sigma_u^2). \quad (27)$$

§ 3. Поверхности, на которых совпадают все три семейства линий ткани Кодацци. Из теории алгебраических инвариантов [7] известно, что для того чтобы кубическая дифференциальная форма в бинарной области представляла куб линейной дифференциальной формы, необходимо и достаточно, чтобы гессиан этой формы тождественно обращался в нуль. Отсюда следует, что ткань Кодацци, все три семейства кривых которой совпадают, характеризуются тем, что

$$G\sigma_u\sigma_u = E\sigma_v^2, \quad \sigma_u\sigma_v = \sigma_v\sigma_u, \quad E\sigma_v\sigma_v = G\sigma_u^2. \quad (28)$$

Первое равенство указывает на то, что величина $\sqrt{E\sigma_v}$ есть средняя геометрическая величин $\sqrt{G\sigma_u}$ и $\sqrt{G\sigma_u}$, т. е.

$$\sqrt{E\sigma_v} = \rho \sqrt{G\sigma_u}, \quad \sqrt{G\sigma_u} = \rho \sqrt{E\sigma_v}.$$

Отсюда

$$\sigma_u = \rho^2 \sigma_u, \quad \sigma_v = \rho \sqrt{\frac{G}{E}} \sigma_u. \quad (29)$$

Рассуждая аналогично и относительно третьего равенства (28), будем иметь:

$$\sigma_2^v = q^2 \sigma_1^v, \quad \sigma_2^u = q \sqrt{\frac{E}{G}} \sigma_1^v. \quad (30)$$

Подставляя теперь соответствующие величины во второе равенство (28), получим

$$p = q, \quad E = G. \quad (31)$$

Таким образом,

$$\sigma_1^v = p \sigma_1^u, \quad \sigma_2^u = p^2 \sigma_1^u, \quad \sigma_2^v = p^3 \sigma_1^u. \quad (32)$$

Известно (см., например, [1], стр. 225), что в системе координат, отнесенной к линиям кривизны,

$$\sigma_1^v = \frac{E_v}{2E} (\sigma_2 - \sigma_1), \quad \sigma_2^u = \frac{G_u}{2G} (\sigma_1 - \sigma_2). \quad (33)$$

Вычислим теперь гауссову кривизну поверхности, применяя известную формулу Фробениуса:

$$K = -\frac{1}{2} \frac{1}{EG} \left[\frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{E_v}{EG} \right) + \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{G_u}{EG} \right) \right]. \quad (34)$$

Эту формулу при условиях (31) и (33) можно записать в виде

$$K = -\frac{1}{E} \frac{1}{(\sigma_2 - \sigma_1)} \left[\sigma_{1vv} (\sigma_2 - \sigma_1) + \sigma_{2uu} (\sigma_1 - \sigma_2) - (\sigma_2^v - \sigma_1^v) \sigma_1^v - (\sigma_1^u - \sigma_2^u) \sigma_2^u \right]. \quad (35)$$

Дифференцируя первое и второе равенства (32) соответственно по u и v и применяя к полученным соотношениям те же равенства (32), получим

$$\sigma_{1vv} = p^2 \sigma_{1v}^v + p p_u \sigma_1^u + p^2 \sigma_{1uu}^v,$$

$$\sigma_{2uu} = 2p p_u \sigma_1^u + p^2 \sigma_{1uu}.$$

При этих значениях вторых производных главных кривизн из (35) следует, что $K = 0$. Это значит, что на искомой поверхности либо $\sigma_1 = 0$, либо $\sigma_2 = 0$. Пусть, например, $\sigma_1 = 0$ (заметим, что оба случая приводят к одному и тому же результату), тогда из (28) получаем, что $\sigma_2^u = 0$, т. е. $\sigma_2 = \sigma_2(v)$.

Это значит, что из всех торсов поставленной задаче удовлетворяют только развертывающиеся поверхности вращений. Исключив из них поверхности Кодацци, приходим к следующему предложению: единственными поверхностями, на которых совпадают все три семейства ткани Кодацци, являются круглые конусы. Легко показать, что единственным семейством линий Кодацци является семейство прямолинейных образующих.

§ 4. Поверхности, на которых совпадают два семейства линий ткани Кодацци. Рассмотрим теперь такую ткань Кодацци, два семейства линий которой совпадают, а третье семейство отлично от них. С точки зрения алгебраических инвариантов [7] соответствующая кубическая форма (19) характеризуется тем условием, что ее дискриминант (20) обращается в нуль, а гессиан отличен от нуля. Займемся отысканием указанных поверхностей. В системе координат,

отнесенной к сети линий кривизны, компоненты тензора Кодацци, как было уже установлено, имеют вид (26). При этих значениях для дискриминанта (20) получаем:

$$\Pi = EG \left(3EG\sigma_1^2\sigma_2^2 + 6EG\sigma_{12}\sigma_u\sigma_v - 4G^2\sigma_u\sigma_u^3 - 4E^2\sigma_v^3\sigma_v - EG\sigma_u^2\sigma_v^2 \right). \quad (36)$$

Так как теперь $\Pi = 0$ на всей поверхности, то, в частности, это равенство имеет место и вдоль каждой линии кривизны. Рассмотрим линии кривизны u ($v = \text{const}$). Вдоль каждой линии этого семейства $\sigma = \sigma(u)$ и $\sigma = \sigma(u)$, поэтому $\sigma_v = \sigma_v = 0$. При этих условиях (36) примет вид

$$\Pi = -4EG^3\sigma_u\sigma_u^3. \quad (37)$$

Отсюда, либо $\sigma_u = 0$, либо $\sigma_u = 0$. Пусть $\sigma_u = 0$ (случай $\sigma_u = 0$ приводит к тому же результату). Это означает, что семейство u -линий сети линий кривизны является семейством окружностей (в частности, может быть и семейством прямых). Аналогично, рассматривая линии кривизны v ($u = \text{const}$), заметим, что v -линии сети линий кривизны также являются семейством окружностей. Таким образом, указанный тип поверхностей нужно искать только среди циклид Дюпена и торсов. Все торсы, за исключением принадлежащих к поверхностям Кодацци и круглых конусов, принадлежат к искомым поверхностям. В самом деле, так как торсы характеризуются тем, что $K = 0$, то либо $\sigma = 0$, либо $\sigma = 0$. Пусть $\sigma = 0$, тогда $\sigma_u = \sigma_v = 0$; поэтому из (36) и (27) имеем $\Pi = 0$, $b_{ij} \neq 0$. Рассмотрим циклиды Дюпена. М. А. Акивис установил [8], что циклиды Дюпена характеризуются тем, что введенный им на поверхности конформный тензор Дарбу b_{ijk} тождественно обращается в нуль, причем на поверхности, отнесенной к сети линий кривизны, конформный тензор Дарбу имеет следующие компоненты:

$$b_{111} = -b_{122} = \pi_{111}, \quad b_{222} = -b_{112} = \pi_{222}. \quad (38)$$

Для циклид Дюпена дискриминант (36) примет значение

$$\Pi = 3E^2G^2\sigma_v^2\sigma_u^2 \quad (39)$$

и обратится в нуль либо при $\sigma_v = 0$, либо при $\sigma_u = 0$. Кроме этого, так как $\pi_{111} = \pi_{222} = 0$, то $\sigma_u = \sigma_v = 0$. Из всего этого заключаем, что на линиях кривизны одного семейства σ и σ сохраняют постоянные значения,

что, как известно, характеризует поверхность вращения. Из циклид Дюпена, исключая поверхности рассмотренных выше типов, такой поверхностью является тор. Таким образом, тор и развертывающиеся поверхности (кроме плоскости, круглого цилиндра и круглого конуса) характеризуются тем, что два семейства линий их ткани Кодацци совпадают. Легко показать, что на этих поверхностях ткань Кодацци (имея два существенно различных семейства линий) совпадает с сетью линий кривизны, причем в случае развертывающихся поверхностей два совпадающих семейства ткани совпадают с прямолинейными образующими, а в случае тора — с семейством конгруэнтных окружностей. Сеть Гессе ткани Кодацци этих поверхностей вырождается, и ее единственное семейство совпадает с двойным семейством ткани.

Из значения дискриминанта (39) тензора Кодацци на циклидах Дюпена следует, что для остальных поверхностей этого класса $\Pi > 0$, т. е.

ткань Кодацци состоит из трех различных действительных семейств линий, причем два семейства ткани совпадают с сетью линий кривизны, а третье семейство определяется дифференциальным уравнением

$$E\sigma_1 du + G\sigma_2 dv = 0.$$

Сеть Гессе этих поверхностей является мнимой сетью и имеет дифференциальное уравнение

$$E^2\sigma_1^2 du^2 + EG\sigma_1\sigma_2 dudv + G^2\sigma_2^2 dv^2 = 0.$$

§ 5. Ткань Кодацци на некоторых простейших типах поверхностей. Результаты, полученные в предыдущих параграфах, приводят к тому, что отдельные поверхности трехмерного евклидова пространства локально, как принято рассматривать в классической дифференциальной геометрии, можно характеризовать по типу ткани Кодацци, а именно: а) плоскость, сфера и круглый цилиндр, или, как нами были они названы — поверхности Кодацци, характеризуются тем, что на них отсутствует ткань Кодацци; 2) круглый конус характеризуется тем, что все три семейства его ткани Кодацци совпадают; 3) тор и развернутые поверхности, отличные от таковых, входящих в пункты 1) и 2), характеризуются тем, что два семейства линий их ткани Кодацци совпадают.

На остальных поверхностях, на которых тензор Кодацци в некоторых окрестностях точки не обращается в нуль, ткань Кодацци состоит из трех различных семейств линий. В действительной области этот случай распадается на два: случай, когда одно семейство является действительным, и случай, когда действительными являются все три семейства. Довольно сложным строением тензора Кодацци (17) и (18) приводит к весьма сложным строениям его комитантов, при помощи которых исследуется ткань. Поэтому классификация поверхностей V_2 в действительной области связана с трудностями вычислительного характера.

Ниже мы рассмотрим ткань Кодацци на некоторых простейших типах поверхностей V_2 .

1. *Поверхности постоянной средней кривизны.* Тензор Кодацци (17) на поверхностях постоянной средней кривизны имеет более простое строение. Так как при $H = \text{const}$, $H_i = 0$, то векторы (18) принимают следующие значения:

$$a_k = \frac{1}{6c} (HK_k + \pi'_k K_l), \quad b_k = -\frac{K_k}{3c}.$$

Из (20) для дискриминанта будем иметь $\Pi = A\gamma\Delta(K, K)^2 > 0$, где A — некоторая постоянная положительная величина, γ — дискриминант метрического тензора, а $\Delta(K, K) = \gamma_{ij}K^iK^j$ — дифференциальный инвариант Бельтрами.

Отсюда следует, что ткань Кодацци состоит из трех действительных семейств линий.

Из первого соотношения (1) следует, что тензор Кодацци аполярнен относительно метрического тензора: $\gamma^{ij}\pi_{ijk} = 0$.

Таким образом, на поверхностях постоянной средней кривизны ткань Кодацци является равноугольной тканью [2]. Сеть Гессе ткани Кодацци совпадает с изотропной сетью поверхности.

2. *Поверхности Дарбу (поверхности второго порядка).* В § 1 отмечалось, что поверхности Дарбу характеризуются тем, что на них вектор a_k тождественно обращается в нуль. Отнеся поверхность к сети асимптотических линий для компонент тензора Кодацци, получим

$$\pi_{111} = 0, \quad \pi_{112} = \frac{3}{4K} K_u, \quad \pi_{122} = \frac{3}{4K} K_v, \quad \pi_{222} = 0.$$

Дифференциальное уравнение ткани Кодацци примет вид

$$(K_u du + K_v dv) dudv = 0.$$

Отсюда следует, что два семейства линий ткани Кодацци совпадают с семействами асимптотических линий, а третье семейство является семейством линий уровня гауссовой кривизны.

Таким образом, на поверхностях Дарбу отрицательной кривизны ткань Кодацци действительная и состоит из двух семейств асимптотических линий и семейства линий, на которых $K = \text{const}$; на поверхностях Дарбу положительной кривизны ткань Кодацци состоит из тех же семейств, но при этом, как известно, асимптотические линии являются мнимыми линиями.

3. *Поверхности Дарбу второго рода.* На поверхностях Дарбу второго рода тензор b_k равен нулю. При этом дифференциальное уравнение ткани Кодацци приводится к виду

$$\gamma_{ij} H_k du^i du^j du^k = 0.$$

Отсюда следует, что на поверхностях Дарбу второго рода ткань Кодацци состоит из двух семейств изотропных линий и семейства линий уровня средней кривизны.

4. *Семейство параллельных поверхностей.* Известно [1], что основные тензоры и их инварианты двух параллельных поверхностей связаны следующими соотношениями:

$$\gamma_{ij}^* = \gamma_{ij} - 2\pi_{ij}h + \nu_{ij}h^2, \quad \pi_{ij}^* = \pi_{ij} - \nu_{ij}h,$$

$$K^* = \frac{K}{W(h)}, \quad H^* = \frac{H - Kh}{W(h)},$$

где $W(h) = 1 - 2Hh + Kh^2$, а h — расстояние между поверхностями. Довольно элементарные, но несколько громоздкие вычисления приводят к тому, что на параллельных поверхностях тензоры Кодацци совпадают. Отсюда следует, что на всех поверхностях параллельного семейства ткани Кодацци соответствуют друг другу.

Литература

1. Каган В. Ф. Основы теории поверхностей, ч. 2. М.—Л., 1948.
2. Дадаян А. А. Уч. зап. МГПИ им. В. И. Ленина, № 243, 1965.
3. Дубнов Я. С. Тр. сем. по вект. и тенз. анализу, в. 6, 1948.
4. Рускол Д. Е. Тр. сем. по вект. и тенз. анализу, в. 12, 1963.
5. Шуликовский В. И. Классическая дифференциальная геометрия. М., 1963.
6. Либер А. Е. Тр. сем. по вект. и тенз. анализу, в. 9, 1952.
7. Гуревич Г. Б. Основы теории алгебраических инвариантов. М.—Л., 1948.
8. Акивис М. А. УМН, 20, в. 1 (121), 1965.

Минский педагогический институт им. А. М. Горького

Поступило в редакцию 28.V 1968

УДК 538.3 : 539.121.7

А. И. БОЛСУН, Р. А. ВЛАСОВ, В. К. ГРОНСКИЙ,
 Ф. И. ФЕДОРОВ

ЭФФЕКТ ВАВИЛОВА—ЧЕРЕНКОВА ДЛЯ ЧАСТИЦ СО СПИНАМИ В ГИРОТРОПНЫХ СРЕДАХ

Излучение Вавилова — Черенкова для частиц с низшими спинами при движении в гиротропной среде частично рассматривалось в [1]. В настоящей работе решается общая задача о черенковском излучении частиц со спинами (включая и высшие спины) при произвольном направлении движения в гиротропных (оптически активных) немагнитных кристаллах любой симметрии. В оптической части расчета используются бескоординатные методы [2, 3], матричные элементы находятся методом проективных операторов [4].

Эффект Вавилова — Черенкова в первом приближении можно рассматривать как однофотонный процесс, которому в импульсном представлении соответствует матричный элемент

$$S^{(1)} = \frac{-ie\kappa(n/e\epsilon'e^*)^{1/2}}{(p_0q_0k_0\hbar c)^{1/2}} \{\bar{u}(q)\hat{e}(k)u(p)\} \delta(p-q-k). \quad (1)$$

Это выражение отлично от нуля при условии выполнения законов сохранения импульса и энергии

$$p-q=k, \quad p_0 - \frac{k_0}{n} = q_0. \quad (2)$$

В (1) и (2) p и q — начальный и конечный импульсы частицы, k — импульс фотона (в единицах \hbar); p_0 , q_0 , k_0/n — соответствующие энергии (в единицах $\hbar c$); $u(p)$ и $u(q)$ — волновые функции начального и конечного состояний; $\hat{e} = e_\nu \gamma^\nu$, γ^ν — матрицы волнового уравнения ($\gamma^\nu p_\nu + i\kappa$) $u = 0$, $\kappa = mc/\hbar$; $k_0 = |k| = \frac{\omega}{c} n$, n — показатель преломления.

Условие излучения имеет вид

$$\cos \Theta = \frac{pk}{|p||k|} = \frac{1}{n\beta} + \frac{k_0}{2|p|} (1 - n^{-2}). \quad (3)$$

Используя проективные операторы [4] для вероятности перехода неполяризованных частиц со спином s_1 , получим выражение

$$|S^{(1)}|^2 = \frac{e^2\kappa^2(n/e\epsilon'e^*)}{p_0q_0k_0\hbar c} |M|^2 \delta^2(p-q-k), \quad (4)$$

где

$$|M|^2 = |\bar{u}(q)\hat{e}(k)u(p)|^2 = \frac{1}{2s_1+1} [\hat{e} \alpha(p) \bar{\tilde{e}}(\alpha)(q)]_e. \quad (5)$$

Вероятность перехода в интервал конечных состояний равна

$$dW = |S^{(1)}|^2 dk dq. \quad (6)$$

Заменяя в (4) и далее в (6) одну из δ -функций $\delta(0) = (1/(2\pi)^4) VcT$ и принимая во внимание, что при нашей нормировке плотность падающих частиц $\rho = 1/(2\pi)^3$, для вероятности перехода (6) в единичном объеме и за единицу времени получим, проинтегрировав по трем компонентам импульса:

$$d\omega = \frac{dW}{VT} = \frac{e^2 \kappa^2 n / \epsilon \epsilon' e^*}{2\pi \rho_0 q_0 k_0 \hbar} |M|^2 \delta\left(p_0 - q_0 - \frac{\omega}{c}\right) dk. \quad (7)$$

Энергия, излучаемая частицей за единицу времени в единичном объеме,

$$\dot{\epsilon} = \int c \hbar \frac{k_0}{n} d\omega. \quad (8)$$

Подставляя сюда (7) и переходя к сферическим координатам, будем иметь

$$\dot{\epsilon} = \frac{e^2 \kappa^2 c}{2\pi \rho_0} \int \frac{|M|^2 (1/\epsilon \epsilon' e^*) \delta\left(p_0 - q_0 - \frac{\omega}{c}\right)}{q_0} k_0^2 dk_0 dy d\varphi, \quad (9)$$

где $y = \cos \vartheta$, и интегрирование далее производится аналогично [1, 5] с помощью замены переменных:

$$\omega = \frac{ck_0}{n(c(p_0 - q_0), y, \varphi)}, \quad z = \frac{p_0 - q_0}{k_0} n(c(p_0 - q_0), y, \varphi).$$

При этом черенковский угол следует выразить через углы:

$$\cos \Theta = \sin \vartheta_1 \sin \vartheta \cos(\varphi - \varphi_1) + \cos \vartheta_1 \cos \vartheta, \quad (10)$$

где φ_1 и ϑ_1 определяют направление начального импульса частицы, а углы φ и ϑ — направление импульса фотона. В результате найдем:

$$\dot{\epsilon} = \frac{e^2 \kappa^2}{2\pi \rho_0 |p| c} \int \frac{|M|^2 (n^2 / \epsilon \epsilon' e^*) \omega d\omega d\varphi}{G'_y + \left(G - \frac{k_0}{|p|}\right) \frac{n'_y}{n}}. \quad (11)$$

Здесь G — правая часть (10). Из (3) и (10) угол ϑ можно выразить в зависимости от ω . Таким образом, задача далее сводится к вычислению $|M|^2$. Вектор поляризации e , фигурирующий в (5) и параллельный электрическому полю E , определяется из уравнений Максвелла для плоских электромагнитных волн в оптически активных средах:

$$D = \epsilon' E = -[mH], \quad H = [mE], \quad (12)$$

$$\epsilon' = \epsilon + ig \times, \quad g = \alpha' m, \quad m = n\mathbf{n},$$

где ϵ — тензор диэлектрической проницаемости без учета оптической активности; α' — тензор оптической активности; m — вектор рефракции. В общем случае удобно предварительно найти H и перейти затем к $E = -\epsilon'^{-1}[mH]$. Исключая из (12) E , запишем уравнение для H в ковариантной форме [2]:

$$\mathbf{n} \times \epsilon'^{-1} \mathbf{n} \times H = -\frac{1}{n^2} H. \quad (13)$$

Это уравнение можно решить, используя поперечность \mathbf{H} ($\mathbf{Hn} = 0$) и представляя его в виде разложения [3]:

$$\mathbf{H} = a' \mathbf{h}_+^0 + a'' \mathbf{h}_-^0, \quad (14)$$

где \mathbf{h}_\pm^0 — два решения такой же задачи, но без учета оптической активности

$$\mathbf{n} \times \varepsilon^{-1} \mathbf{n} \times \mathbf{h}_\pm^0 = -\frac{1}{n^{0\pm}} \mathbf{h}_\pm^0, \quad h_{\pm}^{0\pm} = 1, \quad [\mathbf{n} \mathbf{h}_\pm^0] = \pm h_{\mp}^0. \quad (15)$$

Для двухосных кристаллов

$$\mathbf{h}_\pm^0 = C_\pm \left(\frac{[\mathbf{m}_\pm^0 \mathbf{c}']}{|[\mathbf{m}_\pm^0 \mathbf{c}']|} \pm \frac{[\mathbf{m}_\pm^0 \mathbf{c}'']}{|[\mathbf{m}_\pm^0 \mathbf{c}'']|} \right), \quad (16)$$

где \mathbf{c}' и \mathbf{c}'' — единичные векторы бинормалей [2]. Для обыкновенных и необыкновенных волн в одноосных кристаллах имеем

$$\mathbf{h}_0 = \frac{[\mathbf{m}_0 [\mathbf{m}_0 \mathbf{c}]]}{n_0 \sqrt{[\mathbf{m}_0 \mathbf{c}]^2}}, \quad \mathbf{h}_e = \frac{[\mathbf{m}_e \mathbf{c}]}{\sqrt{[\mathbf{m}_e \mathbf{c}]^2}}. \quad (17)$$

Подставляя (14) в (13), найдем [3]

$$\mathbf{H}_\pm = A_\pm (\mathbf{h}_\pm^0 + i \xi \mathbf{h}_\mp^0), \quad (18)$$

$$\mathbf{e}_\pm \parallel \mathbf{E}_\pm = A_\pm (\mathbf{e}_\pm^{(1)} + i \mathbf{e}_\mp^{(2)}). \quad (19)$$

Здесь

$$\mathbf{e}_\pm^{(1)} = \frac{n_\pm}{n_\pm^0} \mathbf{e}_\pm^0 + \xi \frac{n_\pm^0}{n_\pm^2 n_\mp^0} [\mathbf{g} \mathbf{e}_\mp^0], \quad (20)$$

$$\mathbf{e}_\pm^{(2)} = \xi \frac{n_\pm}{n_\mp^0} \mathbf{e}_\mp^0 - \frac{1}{n_\mp^2} [\mathbf{g} \mathbf{e}_\pm^0].$$

В формулах (20)

$$\mathbf{e}_\pm = -\varepsilon^{-1} [\mathbf{m}_\pm^0 \mathbf{h}_\pm^0]; \quad \xi = g / (\delta_1 + \sqrt{\delta_1^2 + g^2}),$$

$$\delta_1 = (1/2) (n_+^{0\pm} - n_-^{0\pm}), \quad g = ng; \quad n_\pm^2 = n_0^2 \pm \sqrt{\delta_1^2 + g^2},$$

$$n_0^2 = (1/2) (n_+^{0\pm} + n_-^{0\pm}); \quad \bar{n}^2 = \frac{1}{3} \varepsilon_c$$

(ε_c — след тензора).

Множитель A_\pm выбираем таким образом, чтобы

$$\mathbf{e}_\pm \mathbf{e}_\pm^* = 1, \quad \text{т. е. } A_\pm = \frac{1}{\sqrt{(\mathbf{e}_\pm^{(1)})^2 + (\mathbf{e}_\pm^{(2)})^2}}.$$

Тогда формула (5) примет вид

$$|M_\pm|^2 = \frac{A_\pm^2}{2s_1 + 1} \left\{ [\hat{\mathbf{e}}_\pm^{(1)} \alpha(q) \hat{\mathbf{e}}_\pm^{(1)} \alpha(p)]_c + [\hat{\mathbf{e}}_\pm^{(2)} \alpha(q) \hat{\mathbf{e}}_\pm^{(2)} \alpha(p)]_c \right\}. \quad (21)$$

Полная энергия излучения, согласно (21),

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_+ + \mathcal{E}_-. \quad (22)$$

*) Используется индефинитная метрика.

Приведем следы $|M_{\pm}^{(m)}|^2 = (1/(2s_1 + 1)) [\hat{e}_{\pm}^{(m)} \alpha(q) \hat{e}_{\pm}^{(m)} \alpha(p)]_c$ (здесь $m = 1, 2$) для частиц с различными спинами.

1. Спин $s_1 = 0$.

$$\alpha(p) = \frac{\hat{p}(\hat{p} + \kappa)}{2\kappa^2}, \quad (23)$$

$$|M_{\pm}^{(m)}|^2 = \frac{1}{4\kappa^4} \left\{ 4 \left[\kappa^2 + \frac{1}{4} k_{0\pm}^2 (1 - n_{\pm}^{-2}) \right] \times \right. \\ \left. \times (\text{pe}_{\pm}^{(m)})^2 - 4\kappa^2 (\text{pe}_{\pm}^{(m)}) (\mathbf{k}_{\pm} \mathbf{e}_{\pm}^{(m)}) + \kappa^2 (\mathbf{k}_{\pm} \mathbf{e}_{\pm}^{(m)})^2 \right\}.$$

2. Спин $s_1 = 1/2$.

$$\alpha(p) = \frac{\hat{p} + \kappa}{2\kappa}, \\ |M_{\pm}^{(m)}|^2 = \frac{1}{2\kappa^2} \left[2 (\mathbf{e}_{\pm}^{(m)} \mathbf{p})^2 - 2 (\mathbf{e}_{\pm}^{(m)} \mathbf{p}) \times \right. \\ \left. \times (\mathbf{e}_{\pm}^{(m)} \mathbf{k}_{\pm}) + \frac{1}{2} (\mathbf{e}_{\pm}^{(m)})^2 k_{0\pm}^2 (1 - n_{\pm}^{-2}) \right]. \quad (24)$$

3. Спин $s_1 = 1$.

$$\alpha(p) = \frac{\hat{p}(\hat{p} + \kappa)}{2\kappa^2}, \\ |M_{\pm}^{(m)}|^2 = \frac{1}{12\kappa^4} \left\{ k_{0\pm}^2 (1 - n_{\pm}^{-2}) \left[2\kappa^2 + \frac{1}{2} k_{0\pm}^2 (1 - n_{\pm}^{-2}) \right] \times \right. \\ \left. \times (\mathbf{e}_{\pm}^{(m)})^2 + 2 [6\kappa^2 + k_{0\pm}^2 (1 - n_{\pm}^{-2})] [(\text{pe}_{\pm}^{(m)})^2 - \right. \\ \left. - (\text{pe}_{\pm}^{(m)}) (\mathbf{k}_{\pm} \mathbf{e}_{\pm}^{(m)})] + \kappa^2 (\mathbf{k}_{\pm} \mathbf{e}_{\pm}^{(m)})^2 \right\}. \quad (25)$$

4. Спин $s_1 = 3/2$.

$$\alpha(p) = \frac{\hat{p} + \kappa}{2\kappa} \left\{ 1 + \left[\frac{1}{3\kappa} (\rho_{\alpha} \eta_{\beta} - \rho_{\beta} \eta_{\alpha}) - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{1}{3} \eta_{\alpha} \eta_{\beta} - \frac{2}{3} \frac{\rho_{\alpha} \rho_{\beta}}{\kappa^2} \right] B^{\alpha\beta} \right\},$$

где

$$\eta^{\nu} = \bar{\gamma}^{\nu} \times I, \quad B^{\mu\nu} = I \times \bar{B}^{\mu\nu},$$

$\bar{\gamma}^{\mu}$ — обычные дираковские матрицы, I — четырехмерная единичная матрица, $\bar{B}^{\mu\nu}$ — квадратные четырехмерные матрицы, являющиеся элементами полной матричной алгебры [6]:

$$(\bar{B}^{\mu\nu})_{\alpha\beta} = g^{\mu\alpha} \delta_{\beta}^{\nu}, \\ |M_{\pm}^{(m)}|^2 = \frac{1}{9\kappa^6} \left\{ [(\mathbf{e}_{\pm}^{(m)} \mathbf{p})^2 - (\mathbf{e}_{\pm}^{(m)} \mathbf{p}) (\mathbf{e}_{\pm}^{(m)} \mathbf{k}_{\pm})] \left[9\kappa^4 + k_{0\pm}^2 (1 - n_{\pm}^{-2}) \times \right. \right. \\ \left. \left. \times \left(2\kappa^2 + \frac{1}{2} k_{0\pm}^2 (1 - n_{\pm}^{-2}) \right) \right] + \frac{1}{2} (\mathbf{e}_{\pm}^{(m)})^2 k_{0\pm}^2 (1 - n_{\pm}^{-2}) \times \right. \\ \left. \times \left[\frac{5}{2} \kappa^4 + \frac{1}{2} k_{0\pm}^2 (1 - n_{\pm}^{-2}) \left(2\kappa^2 + \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. + \frac{1}{2} k_{0\pm}^2 (1 - n_{\pm}^{-2}) \right) \right] + (\mathbf{e}_{\pm}^{(m)} \mathbf{k}_{\pm})^2 \kappa^4 \right\}. \quad (26)$$

При переходе к классическому пределу $\hbar \rightarrow 0$ следы (23), (24), (25), (26) равны

$$|M_{\pm}^{(m)}|^2 = \frac{(\mathbf{p}\mathbf{e}_{\pm}^{(m)})^2}{\kappa^2}. \quad (27)$$

Задавая $\mathbf{p} = |\mathbf{p}|\mathbf{s}$, из (11) и (27) получим общую формулу для потерь без учета квантовых добавок

$$\zeta_{\pm} = \frac{e^2\beta}{2\pi c} \int \frac{A_{\pm}^2(n_{\pm}^2/e\mathbf{e}'\mathbf{e}^*)[(\mathbf{se}_{\pm}^{(1)})^2 + (\mathbf{se}_{\pm}^{(2)})^2]}{G_y + \frac{1}{n_{\pm}} \left(G - \frac{k_{0\pm}}{|\mathbf{p}|} \right) \frac{\partial n_{\pm}}{\partial y}} \omega d\omega d\varphi. \quad (28)$$

Интегрирование в (28) по ω выполняется в пределах, где справедливо классическое условие излучения $\cos \Theta = 1/n_{\pm}\beta$.

Литература

1. Полубаринов И. В. Дипломная работа, МГУ, 1953.
2. Федоров Ф. И. Оптика анизотропных сред. Изд. АН БССР, 1958.
3. Бокуть Б. В., Федоров Ф. И. Опт. и спектр., 15, 797, 1963.
4. Федоров Ф. И. ЖЭТФ, 35, 493, 1958.
5. Бор Н. Прохождение атомных частиц через вещество. ИЛ, 1950.
6. Гронский В. К. Канд. дисс., Минск, 1965.
7. Petráš M. Č. S. fysik Časopis, 5, 160, 1955.

Институт физики
АН БССР

Поступило в редакцию 5.XI 1968

О. С. ИВАНИЦКАЯ, И. С. СЯГЛО

К РАЗЫСКАНИЮ ПРОСТЫХ ПАРАМЕТРОВ
 ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛОРЕНЦА
 В ПОЛЕ ТЯГОТЕНИЯ ШВАРЦШИЛЬДА

1. Неинерциальные системы отсчета аналитически представляются полем ортонормированных тетрадных векторов $e_k(x^\lambda)^*$, например, [1—4]. Преобразование к тетрадным векторам в данной точке от перенесенных параллельно из бесконечно близкой точки осуществляется бесконечно малым (б. м.) преобразованием Лоренца

$$\delta\omega_{kn} = -\delta\omega_{nk} = \gamma_{kn\lambda} dx^\lambda, \quad \delta e_k = \delta\omega_k^n e_n, \quad (1)$$

где $\gamma_{kn\lambda}$ — специальный вид коэффициентов связности (коэффициенты вращения Риччи). Если системы отсчета находятся в гравитационном поле, то $\gamma_{kn\lambda}$ удовлетворяют уравнению гравитации Эйнштейна, записанному в тетрадной форме.

Переход от одной неинерциальной системы отсчета к другой производится с помощью обобщенного (неголономного) преобразования Лоренца, зависящего от координат:

$$e_k(x^\lambda) = L_k^n(x^\rho) e_n. \quad (2)$$

Выполнение этого преобразования эквивалентно изменению калибровочных условий, добавляемых к тетрадному уравнению Эйнштейна.

В [5] рассмотрены трансформационные свойства преобразований $\delta\omega_{kn}$, а также их свертков

$$\delta J_1 = \frac{1}{2} \eta_{knrs} \delta\omega^{kn} \delta\omega^{rs} = {}^D \delta\omega_{kn} \delta\omega^{kn},$$

$$\eta_{knrs} = -(-\eta)^{\frac{1}{2}} e_{knrs}, \quad e_{knrs} = 1, \quad (3)$$

$$\eta = \det \eta_{kn}, \quad \eta_{kn} = \text{diag}(1, 1, 1, -1),$$

$$\delta J_2 = \eta_{kn} \eta_{rs} \delta\omega^{kr} \delta\omega^{ns} = \delta\omega_{kn} \delta\omega^{kn}. \quad (4)$$

Эти свертки не инвариантны относительно обобщенных преобразований Лоренца и при различных калибровочных условиях для тетрад (обобщенных коэффициентов Ламе), относительно которых сформулированы тетрадные уравнения Эйнштейна, принимают различные значения. В частности, один из свертков или оба сразу могут оказаться равными

*) Греческие индексы относятся к глобальной системе координат, латинские — к локальным. Соответственно до k и k они пробегают значения 1, 2, 3; начиная с k и k — значения 1, 2, 3, 4. Численные значения латинских индексов берутся в скобки.

нулю. Для перехода к таким случаям в [5] указаны дифференциальные уравнения относительно обобщенного преобразования Лоренца

$$\delta J'_1 = \delta J_1 - {}^D\delta\omega^{mq}L^s{}_m dL_{s'q} - \frac{1}{2}\eta^{kmn'r'} dL_{n'k} dL_{r'm} = 0, \quad (5)$$

$$\delta J'_2 = \delta J_2 + dL_{n'r} dL^{n'r} - 2\delta\omega^{kn}L^r{}_k dL_{r'n} = 0. \quad (6)$$

Если $\delta J_1 = 0$ при любом δJ_2 , то параметры б. м. преобразования Лоренца являются простыми, т. е. $\delta\omega_{kn}$ может быть представлено в виде антисимметричного произведения двух геометрических объектов первого ранга. В частности, один из них может оказаться конечным, а другой будет определяться перемещением dx^λ , входящим в $\delta\omega_{kn}$.

С точки зрения трактовки калибровочных условий, как задающих систему отсчета в гравитационном поле, а также анализа тетрадного уравнения Эйнштейна изучение структуры преобразований Лоренца (1) и (2) представляет определенный интерес. Так, в частности, если обнаружится, что $L^{h'}{}_n(x^\lambda)$, преобразующее некоторое поле векторов $e_k(x^\lambda)$ в другое поле $e_{k'}(x^\lambda)$, не содержит гиперболического вращения, то обе калибровки задают системы отсчета в одинаковом состоянии движения.

Представим уравнения (5) и (6) в иной форме, более удобной для их решения. Для этого воспользуемся бивекторной параметризацией преобразования Лоренца, явно рассмотренной в тензорном виде в [6], выделив в ней бивектор-параметр. Исследуем эти уравнения применительно к полю тяготения Шварцшильда и, интегрируя их, найдем такие частные случаи обобщенного преобразования Лоренца, которые позволяют перейти от «нормальной» калибровки тетрад к их «временной» калибровке [3].

2. Два случая простых бивектор-параметров. Если принята бивекторная параметризация, то преобразование Лоренца можно представить в виде

$$L^k{}_n = \frac{1}{\sqrt{(1+i_2)^2 + i_1^2}} [(1+i_2)\delta^k{}_n + 2p^k{}_n + 2p^{kr}p_{rn}], \quad (7)$$

$$i_1 = \frac{1}{2} p_{kn} {}^D p^{kn}, \quad i_2 = \frac{1}{2} p_{kn} p^{kn}. \quad (8)$$

Если бивектор p_{kn} простой, то

$$L^k{}_n = \delta^k{}_n + \frac{2}{1+i_2} (p^k{}_n + p^{kr}p_{rn}). \quad (9)$$

В этом случае находим:

$$\eta^{knrs} L^{m'}{}_k dL_{m'n} L^{q'}{}_r dL_{q's} = 0, \\ dL^{k'r} dL_{n'r} = \frac{1}{(1+i_2)^2} dp^{kn} dp_{kn}, \quad (10)$$

$$L^k{}_r dL_{k's} = \frac{2}{1+i_2} (dp_{rs} - 2p_{[r|n} dp^n{}_{s]}).$$

Подставляя выражения (10) в уравнения (5) и (6) и учитывая, что они должны быть справедливы при произвольных dx , находим

$$\eta^{knrs} \left[\frac{4}{1+i_2} \gamma_{kn(\rho} (\partial_\tau) p_{rs} - 2p_{rm} \partial_\tau) p^n{}_s + \gamma_{kn(\rho} \gamma_{|rs|\tau)} \right] = 0, \quad (11)$$

$$\frac{1}{(1+i_2)^2} \partial_{(\rho} p_{|kn} \partial_{\tau)} p^{kn} - \frac{4}{1+i_2} \gamma^{kn}_{(\rho} (\partial_{\tau)} p_{kn} - 2p_{|kr} \partial_{\tau)} p^r_n) + \gamma_{kn(\rho} \gamma^{kn}_{\tau)} = 0. \quad (12)$$

Если

$$p_{kn} = \begin{pmatrix} 0 & A & B & 0 \\ -A & 0 & C & 0 \\ -B & -C & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (13)$$

то уравнения (11) и (12) принимают вид

$$\begin{aligned} & \gamma_{(1)(4)(\lambda} [\partial_{\tau)} C + A \partial_{\tau)} B - B \partial_{\tau)} A] - \gamma_{(2)(4)(\lambda} [\partial_{\tau)} B - A \partial_{\tau)} C + C \partial_{\tau)} A] + \\ & + \gamma_{(3)(4)(\lambda} [\partial_{\tau)} A + B \partial_{\tau)} C - C \partial_{\tau)} B] + \\ & + \frac{1+i_2}{16} \eta^{knrs} \gamma_{kn(\lambda} \gamma_{rs|\tau)} = 0, \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(1+i_2)^2} \left(\partial_{(\rho} A \partial_{\tau)} A + \partial_{(\rho} B \partial_{\tau)} B + \partial_{(\rho} C \partial_{\tau)} C \right) - \\ & - \frac{4}{1+i_2} [\gamma_{(1)(2)(\rho} (\partial_{\tau)} A + B \partial_{\tau)} C - C \partial_{\tau)} B) + \\ & + \gamma_{(1)(3)(\rho} (\partial_{\tau)} B - A \partial_{\tau)} C + C \partial_{\tau)} A) + \gamma_{(2)(3)(\rho} (\partial_{\tau)} C + \\ & + A \partial_{\tau)} B - B \partial_{\tau)} A) + \frac{1}{2} \gamma_{kn(\rho} \gamma^{kn}_{\tau)} = 0. \end{aligned} \quad (15)$$

Если же бивектор-параметр взять в виде

$$p_{kn} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & u \\ 0 & 0 & 0 & v \\ 0 & 0 & 0 & w \\ -u & -v & -w & 0 \end{pmatrix}, \quad (16)$$

что соответствует преобразованию гиперболического вращения, то уравнения (11) и (12) запишутся в форме

$$\begin{aligned} & \gamma_{(1)(2)(\lambda} \partial_{\tau)} w - \gamma_{(1)(3)(\lambda} \partial_{\tau)} v + \gamma_{(2)(3)(\lambda} \partial_{\tau)} w + \\ & + \gamma_{(1)(4)(\lambda} (w \partial_{\tau)} v - v \partial_{\tau)} w) - \gamma_{(2)(4)(\lambda} (w \partial_{\tau)} u - \\ & - u \partial_{\tau)} w) + \gamma_{(3)(4)(\lambda} (v \partial_{\tau)} u - u \partial_{\tau)} v) + \\ & + \frac{1+i_2}{16} \eta^{knrs} \gamma_{kn(\lambda} \gamma_{rs|\tau)} = 0, \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(1+i_2)^2} (\partial_{(\tau} u \partial_{\lambda)} u + \partial_{(\tau} v \partial_{\lambda)} v + \partial_{(\tau} w \partial_{\lambda)} w) + \\ & + \frac{4}{1+i_2} [\gamma_{(1)(2)(\tau} (v \partial_{\lambda)} u - u \partial_{\lambda)} v) + \\ & + \gamma_{(1)(3)(\tau} (w \partial_{\lambda)} u - u \partial_{\lambda)} w) + \\ & + \gamma_{(2)(3)(\tau} (w \partial_{\lambda)} v - v \partial_{\lambda)} w) - \\ & - \gamma_{(1)(4)(\lambda} \partial_{\tau)} u - \gamma_{(2)(4)(\lambda} \partial_{\tau)} v - \\ & - \gamma_{(3)(4)(\lambda} \partial_{\tau)} w] - \frac{1}{2} \gamma_{kn(\lambda} \gamma^{kn}_{\tau)} = 0. \end{aligned} \quad (18)$$

3. Отыскание некоторых простых параметров для поля тяготения Шварцшильда. При «нормальной» калибровке тетрад имеем

$$h_{\mu}^k = \text{diag} \left(a, r, r \sin \Theta, \frac{1}{a} \right), \quad (19)$$

$$a = \left(1 - \frac{2m\kappa}{c^2 r} \right)^{-\frac{1}{2}}.$$

Тогда не равны нулю лишь следующие компоненты б. м. преобразования Лоренца:

$$\begin{aligned} \delta\omega_{(1)(2)} &= \gamma_{(1)(2)2} dx^2 = -\frac{d\Theta}{a}, \\ \delta\omega_{(1)(3)} &= \gamma_{(1)(3)3} dx^3 = -\frac{\sin \Theta d\varphi}{a}, \\ \delta\omega_{(2)(3)} &= \gamma_{(2)(3)3} dx^3 = -\cos \Theta d\varphi, \\ \delta\omega_{(1)(4)} &= \gamma_{(1)(4)4} dx^4 = \frac{\kappa m}{cr^2} dt, \end{aligned} \quad (20)$$

т. е.

$$\delta J_1 = -\frac{2\kappa m}{cr^2} \cos \Theta d\varphi dt, \quad (21)$$

$$\delta J_2 = \frac{1}{a^2} \left[d\Theta + (\sin^2 \Theta + a^2 \cos^2 \Theta d\varphi^2 - \frac{\kappa^2 m^2}{c^2 r^4} dt^2) \right]. \quad (22)$$

Подставляя (20) и (21) в (14), получим следующую систему уравнений:

$$\partial_\lambda C + A \partial_\lambda B - B \partial_\lambda A = -\frac{1 + A^2 + B^2 + C^2}{2} \cos \Theta \delta_\lambda^3. \quad (23)$$

Положив $C = AB$, находим первое частное решение

$$A = \frac{\pm 1 \pm \sin \Theta}{\cos \Theta}, \quad B = \pm \text{ctg} \frac{\varphi}{2}. \quad (24)$$

Ему соответствует преобразование Лоренца

$$L_{1n}^k = \begin{pmatrix} \cos \varphi \sin \Theta & \mp \cos \varphi \cos \Theta & \pm \sin \varphi & 0 \\ \mp \cos \Theta & -\sin \Theta & 0 & 0 \\ \pm \sin \varphi \sin \Theta & -\sin \varphi \cos \Theta & -\cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (25)$$

Второе частное решение получим, приняв $C = -AB$:

$$A = \pm \text{tg} \frac{\varphi}{2}, \quad B = \frac{\pm 1 \pm \sin \Theta}{\cos \Theta}. \quad (26)$$

Тогда

$$L_{2n}^k = \begin{pmatrix} -\cos \varphi \sin \Theta & \pm \sin \varphi & \pm \cos \varphi \cos \Theta & 0 \\ \pm \sin \varphi \sin \Theta & \cos \varphi & -\sin \varphi \cos \Theta & 0 \\ \mp \cos \Theta & 0 & -\sin \Theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (27)$$

Третье частное решение

$$A = \frac{\cos(\varphi + \Theta)}{1 + \sin(\varphi + \Theta)}, \quad B = -\frac{\sin \varphi + \cos \Theta}{1 + \sin(\varphi + \Theta)},$$

$$C = \frac{\cos \varphi + \sin \Theta}{1 + \sin(\varphi + \Theta)}. \quad (28)$$

В этом случае преобразование Лоренца имеет вид

$$L_3^k = \begin{pmatrix} \cos \varphi \sin \Theta & \cos \varphi \cos \Theta & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi \sin \Theta & \sin \varphi \cos \Theta & \cos \varphi & 0 \\ \cos \Theta & -\sin \Theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (29)$$

Применяя (25), (27) и (29) к тетрадам (19), получим новые тетрады, которые во всех трех случаях удовлетворяют условиям

$$h_a^a = h_{\alpha}^{(\alpha)} = 0. \quad (30)$$

Эти условия можно независимо принять в качестве калибровочных условий («временная» калибровка тетрад [3]). Например, используя преобразование (29), получим тетрады

$$h_{\mu}^{k'} = \begin{pmatrix} a \cos \varphi \sin \Theta & a \sin \varphi \sin \Theta & a \cos \Theta & 0 \\ r \cos \varphi \cos \Theta & r \sin \varphi \cos \Theta & -r \sin \Theta & 0 \\ -r \sin \varphi \cos \Theta & r \cos \varphi \cos \Theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (31)$$

которые были независимо найдены в [7] непосредственным интегрированием уравнений Эйнштейна.

Ясно, что $h_{\mu}^{k'}$, $h_{\mu}^{k'} = L_2^{k'n} h_{\mu}^n$, $h_{\mu}^{k'} = L_1^{k'n} h_{\mu}^n$ задают системы отсчета, пребывающие в том же состоянии движения, что и система отсчета, задаваемая посредством «нормальных» тетрад (19).

Приведенные случаи преобразования Лоренца являются двухпараметрическими. Легко убедиться, что система уравнений (23) не имеет решением однопараметрическое преобразование Лоренца. Действительно, полагая в (23) отличным от нуля только A , только B или только C , приходим к противоречию.

Преобразованием Лоренца с простыми параметрами, соответствующими гиперболическому вращению, нельзя преобразовать непростые параметры б. м. преобразования Лоренца в простые, удовлетворяющие условию $\delta J_1 = 0$, так как система уравнений (17) с коэффициентами вращения Риччи (20) неинтегрируема. Но, как ранее было показано, этого можно добиться преобразованиями кругового вращения, например (25), (27), (29).

В [5] отмечено, что переход к калибровке, когда $\delta J_2 = 0$, может существенно упростить уравнение Эйнштейна. Однако преобразованием с параметрами (13) или (16) невозможно перейти от «нормальных» тетрад к тетрадам, удовлетворяющим условию $\delta J_2 = 0$, так как, подставив (20) в (15) или (18), получим системы уравнений, в неинтегрируемости которых легко убедиться.

Литература

1. Родичев В. И. Известия вузов, Физика, № 1, 1965.
2. Treder H. J. Entstehung, Entwicklung und Perspektiven der Einsteinschen Gravitationstheorie. Berlin, 1966.

3. Иваницкая О. С. Сб. «Гравитация и теория относительности», в. 4—5. Казань, 1968.
4. Иваницкая О. С., Сягло И. С. Сб. «Гравитация и теория относительности», в. 4—5. Казань, 1968.
5. Иваницкая О. С. Весті АН БССР, сер. фіз.-мат. навук, № 3, 1968.
6. Иваницкая О. С. Сб. «Гравитация и теория относительности», в. 3. Казань, 1967.
7. Сусурин Г. Э., Левашев А. Е. Сб. «Гравитация и теория относительности», в. 4—5, Казань, 1968.

*Институт физики АН БССР,
Белорусский государственный
университет им. В. И. Ленина*

Поступило в редакцию 7.VI 1968

УДК 530.12:531.18+538.3

А. С. ПОТУПА, В. И. СТРАЖЕВ, Л. М. ТОМИЛЬЧИК

К ПРОБЛЕМЕ МАГНИТНОГО ЗАРЯДА В ЭЛЕКТРОДИНАМИКЕ

В последние годы наблюдается заметное оживление интереса к проблеме магнитного заряда (м. з.). Однако отрицательный результат предыдущих попыток его экспериментального обнаружения (см., например, [1] и цитированную там литературу) побуждает критически проанализировать теоретические предпосылки, лежащие в основе введения м. з. в электродинамику. Как известно, основным мотивом для введения м. з. явилось стремление распространить инвариантность уравнений Максвелла относительно преобразований Лармора $\mathbf{E} \rightarrow \pm \mathbf{H}$, $\mathbf{H} \rightarrow \mp \mathbf{E}$ на случай наличия источников. С другой стороны, появление м. з. в квантовой теории приводит к квантованию величины электрического заряда (э. з.) в соответствии с соотношениями

$$eg = \frac{1}{2} n\hbar c, \quad (1)$$

$$eg = n\hbar c, \quad (2)$$

где e — э. з., g — м. з., $n=0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Соотношения (1), (2) получены соответственно в работах Дирака [2] и Швингера [3]. Они могут быть выведены также из весьма простых соображений, основанных на квантовании проекции углового момента электромагнитного поля, создаваемого статической парой, состоящей из точечных электрического и магнитного зарядов [4—6]. Такой способ получения условия квантования мы будем далее называть методом Вильсона, а точечный м. з. — магнитным зарядом Вильсона (м. з. В.).

В настоящее время в литературе, посвященной проблеме м. з., фактически отсутствует анализ того, с использованием каких физических моделей м. з. связаны различные способы получения соотношений (1), (2). Неясен и вопрос об адекватности эмпирических моделей, лежащих в основе экспериментов, посвященных поискам м. з., тем теоретическим представлениям, которые используются при его введении в электродинамику*).

В настоящей работе показано, что известные в литературе три варианта вывода соотношения (1), (2) фактически основаны на различном определении модели м. з., что в свою очередь связано с разными способами симметризации уравнений Максвелла.

1. Дуальная инвариантность и точечный магнитный заряд. Преобразования Лармора можно рассматривать как частный случай более общих преобразований [7, 8]

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \mathbf{E}' \cos \varphi \pm \mathbf{H}' \sin \varphi, \\ \mathbf{H} &= \mp \mathbf{E}' \sin \varphi + \mathbf{H}' \cos \varphi, \end{aligned} \quad (3)$$

* Анализ экспериментальной ситуации будет предметом обсуждения в отдельной работе.

оставляющих инвариантными уравнения Максвелла

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} &= 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{H} = 0, \\ \operatorname{rot} \mathbf{H} - \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} &= 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{E} = 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Наличие таких преобразований приводит к произволу в идентификации полевых компонент свободного поля. Введение в уравнения Максвелла неоднородности (электрического тока и заряда) приводит к явной асимметрии между полевыми компонентами, для ликвидации которой можно ввести второй ток — магнитный. Потребовав для токов и зарядов существования преобразований типа (3) [9]*)

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_e &= \mathbf{J}'_e \cos \varphi \pm \mathbf{J}'_m \sin \varphi, \\ \mathbf{J}_m &= \mp \mathbf{J}'_e \sin \varphi \pm \mathbf{J}'_m \cos \varphi, \\ \rho_e &= \rho'_e \cos \varphi \pm \rho'_m \sin \varphi, \\ \rho_m &= \mp \rho'_e \sin \varphi \pm \rho'_m \cos \varphi, \end{aligned} \quad (5)$$

уравнения Максвелла можно записать в полностью симметричной форме:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} &= -\mathbf{J}_m, \quad \operatorname{div} \mathbf{H} = \rho_m, \\ \operatorname{rot} \mathbf{H} - \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} &= \mathbf{J}_e, \quad \operatorname{div} \mathbf{E} = \rho_e. \end{aligned} \quad (6)$$

Для того чтобы эта симметрия допускала физическую интерпретацию, необходимо построить модель м. з., для которого магнитные компоненты поля выполняли бы ту же роль, какую электрические компоненты играют для э. з. Как известно, моделью э. з. в классической электродинамике является точечный (нульмерный) объект, возникающий в результате предельного перехода — устремления к нулю геометрических параметров пробного тела**), входящего в систему идеализированных измерительных приборов. Такая модель позволяет ввести релятивистскую мировую линию э. з. и последовательно построить электродинамику Максвелла — Лоренца. Наиболее естественной с физической точки зрения моделью м. з. может служить полубесконечный тонкий соленоид (или магнитный брусок), идеализированным геометрическим образом которого является одномерный объект — пространственная линия. Это приводит к ликвидации симметрии относительно пространственных отражений, характерной для классических моделей статических э. з., что согласуется с псевдовекторным характером магнитных компонент поля. Такую модель мы будем называть симметричным м. з. Для согласования с моделями классической механики необходимо перейти к точечному м. з., сохранив при этом симметрию задачи (псевдовекторность магнитного поля). С другой стороны, именно переход к однотипным моде-

*) Как показано в [10, 11], преобразования вида (3), (5) реализуют в электродинамике однопараметрическую группу внутренней симметрии.

**) Имеется в виду устремление к нулю радиуса, поскольку в топологическом смысле односвязное тело произвольной формы (куб, параллелепипед и т. д.) эквивалентно шару.

лям позволяет рассматривать (3), (5) в качестве преобразований группы симметрии уравнений (6), т. е. придать физический смысл операциям типа $e \rightleftharpoons g$. Однако преобразования (3), (5) оставляют инвариантными выражения для плотности энергии $W = \frac{1}{8\pi}(\mathbf{E}^2 + \mathbf{H}^2)$, вектора

Умова — Пойтинга $\mathbf{S} = \frac{1}{4\pi} \mathbf{E} \times \mathbf{H}$, и силы Лоренца

$$\mathbf{f} = \rho_e \mathbf{E} + \rho_m \mathbf{H} + \mathbf{J}_e \times \mathbf{H} - \mathbf{J}_m \times \mathbf{E}. \quad (7)$$

Отсюда следует, что вопрос об определении параметра φ и фиксации его численного значения есть вопрос соглашения, а не экспериментального выбора. В частности, можно определить φ следующим образом:

$$\mathbf{J}'_m = \pm \mathbf{J}'_e \operatorname{tg} \varphi \quad (\rho'_m = \pm \rho'_e \operatorname{tg} \varphi),$$

что приводит на основе (3), (5) к уравнениям Максвелла с $\mathbf{J}_m = 0$, $\rho_m = 0$, в которые будут входить эффективный электрический ток и эффективные поля. Существует и альтернативная возможность

$$\mathbf{J}'_m = \mp \mathbf{J}'_e \operatorname{ctg} \varphi \quad (\rho'_m = \mp \rho'_e \operatorname{ctg} \varphi),$$

приводящая к уравнениям Максвелла с $\mathbf{J}_e = 0$, $\rho_e = 0$ и с эффективным магнитным зарядом и соответствующими полями. Однако выбор названий для эффективных величин является, разумеется, чисто условным. Конкретизация этого выбора и приводит к появлению асимметрии в уравнениях Максвелла. Существенно отметить, что для этого случая имеется корректно сформулированная измерительная процедура [12].

Таким образом, классическая электродинамика не нуждается во введении магнитных зарядов для симметризации уравнений Максвелла, поскольку симметричное по отношению к э. з. задание точечного магнитного заряда фактически уничтожает последний (делает его принципиально необнаружимым вследствие переопределения заряда как эффективного). Иными словами, динамическая реализация^{*} м. з. В. в максвелловской электродинамике невозможна. Необходимость рассмотрения проблемы м. з. на классическом уровне следует из того, что измерительные процедуры для выбора моделей квантовой теории должны принципиально основываться на корректно определенных классических моделях. В частности, это касается измерительной процедуры, на базе которой осуществляется введение токовых компонент. При этом в соответствии с измерительными процедурами типа Бора—Розенфельда [13] обязательно должна существовать корректная классическая модель для заряда, что и реализуется в обычной «однозарядовой» электродинамике. Справедливость вывода о невозможности динамической реализации м. з. В. может быть проиллюстрирована путем анализа ряда работ, посвященных проблеме м. з. Подчеркнем, что в подавляющем большинстве работ термин «монополь» (или «магнитный заряд») употребляется без четкого определения модели м. з., о которой фактически идет речь^{**}. В результате под одним и тем же названием зачастую фигурируют разные объекты, что может привести к известным недоразумениям. Ниже мы подробно рассмотрим вопрос о монополях Дирака и Швингера, пока же отметим, что, например, в [14—19] фактически анализируется

* Понятие динамической реализации заряда мы употребляем в смысле Вигнера, т. е. имеем в виду то обстоятельство, что заряд определяет наличие силовой связи с полями.

** Возможно, причина этого кроется в наличии аналогичных по форме условий типа (1), (2) для всех моделей.

ситуация, связанная с м. з. В. По существу там с различных точек зрения показывается отсутствие динамической реализации м. з. В. не только в классическом, но и в квантовом вариантах теории. Так, например, исходя из локального лагранжиана

$$L = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^2 + A_\mu J_\mu^e + B_\mu J_\mu^m, \quad (8)$$

где

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \partial_\rho B_\sigma, \quad (9)$$

$$\tilde{F}_{\mu\nu} = \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu + \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \partial_\rho A_\sigma,$$

A_μ , J_μ^e , B_μ , J_μ^m — соответственно электрический и магнитный потенциалы и токи, можно прийти лишь к двум изолированным группам уравнений, одна из которых относится к электродинамике с э. з. без м. з., а вторая — к электродинамике с м. з. без э. з. [14]. Возможность включения взаимодействия между э. з. и м. з. связана с необходимостью отказа от локального лагранжиана. Однако и при этом одновременное получение из единого лагранжиана как уравнений движения, так и уравнений поля не является возможным [15, 16]. Принципиальный недостаток использования двух потенциалов заключается в увеличении числа степеней свободы электромагнитного поля, что делает невозможным построение замкнутой квантовоэлектродинамической схемы с м. з. В. [17]. Получение лоренц-ковариантной вторично-квантованной теории с м. з. В., для которой выполнялось бы условие, налагаемое на компоненты тензора энергии-импульса [23]:

$$-i [T_{00}(\mathbf{x}), T_{00}(\mathbf{x}')] = (T_{0k}(\mathbf{x}) + T_{0k}(\mathbf{x}')) \partial_k \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}'), \quad (10)$$

возможно лишь при условии $eg=0$, т. е. отказа от динамической интерпретации м. з. В. [17]. Попытка построения квантовой электродинамики с м. з. В. [18] на основе беспотенциального формализма Мандельштама [19] также не увенчалась успехом (см. [20]).

2. Магнитные заряды Дирака и Швингера. В работах Дирака [2] и Швингера [3] предпринята попытка произвести устранение асимметрии, свойственной классической электродинамике, на уровне квантовой теории. Как будет показано ниже, это эффективно эквивалентно переопределению модели м. з. на классическом уровне. Кроме того, такая процедура в схеме Дирака и в схеме Швингера совершается различными способами, что по существу означает введение в теорию неэквивалентных моделей м. з. Рассмотрим вначале классический предел теории Дирака. Здесь каждый м. з. ассоциируется с некоторой незамкнутой линией (в английском тексте string) произвольной формы, исходящей из м. з. на бесконечность или оканчивающейся на другом м. з., равном по величине и противоположном по знаку. Для фиксирования положения этой линии вводятся динамические координаты и импульсы. Классическая теория базируется на следующем интеграле действия:

$$S = \sum_{e(g)} m \int ds + \sum_e e \int A_\nu(z) \frac{dz_\nu}{ds} ds + \frac{1}{4} \int F_{\mu\nu}^*(x) F_{\mu\nu}(x) d^4x, \quad (11)$$

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + \sum_g \tilde{G}_{\mu\nu}, \quad (12)$$

где $F_{\mu\nu}^*(x) = \int F_{\mu\nu}(x') \gamma(x-x') d^4x$; $\gamma(x-x')$ — функция, совпадающая в пределе с $\delta(x-x')$; $\tilde{G}_{\mu\nu}$ — полевая величина, являющаяся функцией динамических переменных string и отличная от нуля только на последней. Предполагается, что взаимодействие между м. з. и полем описывается третьим членом в (11), поскольку $F_{\mu\nu}$, как видно из (12), является функцией как потенциала, так и переменных string. Подчеркнем, что возможность получения уравнений движения и поля из интеграла действия (11) требует постулирования условия, не вытекающего непосредственно из принципа наименьшего действия. Именно string никогда не должна проходить через заряженные частицы (вето Дирака [24]). Хотя расположение и форма string могут быть произвольными, а сама она считается ненаблюдаемой, вето Дирака является чрезвычайно сильным условием, которое делает представление о монополе Дирака несовместимым с моделью точечной заряженной частицы. Обычно считается, что возможность введения string обусловлена тем, что электромагнитное поле задается с помощью потенциала. Однако задание магнитного поля через потенциал ($\mathbf{H} = \text{rot } \mathbf{A}$) предполагает, что полный поток через любую замкнутую поверхность всегда равен 0. Это противоречит закону Гаусса, который требует, чтобы поток был равен величине $4\pi g$, где g — общий м. з. внутри замкнутой поверхности. В результате на любой односвязной замкнутой поверхности, окружающей м. з., существует хотя бы одна точка, в которой поле не может быть представлено через потенциал. Поэтому возникает непрерывная совокупность точек, образующих некоторую линию сингулярности. Используя произвол в выборе формы линии сингулярности, существенно предполагаемый в схеме Дирака, рассмотрим простейший случай, когда м. з. помещен в начале координат, а линия сингулярности представляет собой прямую, направление которой задается единичным вектором \mathbf{n} . Потенциал в этом случае определяется выражением

$$\mathbf{A} = \frac{g}{|r|} \frac{\mathbf{n} \times \mathbf{r}}{r - \mathbf{n}\mathbf{r}}. \quad (13)$$

Магнитное поле при этом равно величине $\mathbf{H} = \nabla \times \mathbf{A} = g\mathbf{r}/r^3$ повсюду, за исключением точек, расположенных на прямой $\mathbf{r} = a\mathbf{n}$ (a — непрерывный параметр > 0). Но это — как раз поле, создаваемое полубесконечным тонким прямым соленоидом с осью, направленной вдоль \mathbf{n} , и концом, помещенным в начало координат, т. е. поле, соответствующее модели симметричного м. з. Рассмотрение такого объекта с необходимостью требует привлечения бесконечного числа степеней свободы. Это достигается посредством введения в определение полевых величин члена $\tilde{G}_{\mu\nu}$, являющегося функцией динамических переменных string. Однако возможность формального рассмотрения монополя Дирака в качестве точечной частицы обусловлена требованием, чтобы магнитный поток вдоль \mathbf{n} не приводил к какому-либо наблюдаемым эффектам. Последнее обеспечивается с помощью вето Дирака, играющего роль своего рода «принципа запрета»*).

Как было показано выше, построение динамической теории с точечным м. з. невозможно. Мы видим, что введение string и вместе с ней вето Дирака в целях формулировки самосогласованной динамической теории приводит к созданию схемы, которая наряду с классическим полем содержит модель классической заряженной частицы, отличную от модели частицы ньютоновской механики. Одновременно при этом в

* На квантовомеханическом уровне аналогичную роль выполняет соотношение $eg = \frac{1}{2} n\hbar c$, обеспечивающее цикличность фазы ψ -функции (см., например, [25], гл. 20).

теории Дирака теряется симметрия относительно преобразований дуальности. Действительно, в схеме Дирака уравнения имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \partial_\nu F_{\mu\nu}^* &= \sum_e e \int \frac{dz_\mu}{ds} \delta_4(x - z(s)) ds, \\ \partial_\nu \tilde{F}_{\mu\nu} &= \sum_g g \int \frac{dz_\mu}{ds} \delta_4(x - z(s)) ds, \end{aligned} \quad (14)$$

и дуальные преобразования (3), (5) вообще не могут быть определены. После предельного перехода $\gamma(x) \rightarrow \delta(x)$ возникает возможность введения лишь дискретных преобразований, которые, однако, осуществляют переход к дуально-сопряженной системе, где string связана с э. з., а м. з. является точечным. Таким образом, трактовка монополя Дирака в качестве динамического объекта нарушает симметричную структуру электродинамики. В классической теории монополя Швингера, развитой в работе [21], удается восстановить эквивалентность всех точек пространства — времени, утерянную в схеме Дирака, за счет специфического определения интеграла действия S :

$$\begin{aligned} S = \int (dx) & \left\{ -\frac{1}{2} F_{\mu\nu} (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) + \right. \\ & + \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F_{\mu\nu} + \int ds_e \left[p_\mu \frac{dx_\mu}{ds} - \right. \\ & \left. \left. - \frac{1}{2m} (p - eA)^2 \right] + \int ds_g \left[p_\mu \frac{dx_\mu}{ds} - \frac{1}{2m} (p - gB)^2 \right] \right\}. \end{aligned} \quad (15)$$

Здесь величины $\frac{1}{2m} [p - eA]^2$ и $\frac{1}{2m} (p - gB)^2$ возникают в результате следующего предельного перехода:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2m} [p - qC(x)]^2 &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{4}{m} \frac{k^2}{\varepsilon^2} \times \\ & \times \left\{ 1 - \exp \left[-\frac{i}{k} \int_{x-\frac{1}{2}\varepsilon}^{x+\frac{1}{2}\varepsilon} dx_1^\mu (p_\mu - qC_\mu(x_1)) \right] \right\}, \end{aligned} \quad (16)$$

где $qC(x)$ равно либо $eA(x)$, либо $gB(x)$; k — некоторая постоянная размерности действия. Потенциалы A_μ и B_μ имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} A_\mu &= - \int (dx') F_{\mu\nu}(x') h_n^\nu(x - x'), \\ B_\mu &= - \int (dx') F_{\mu\nu}(x') h_n^\nu(x - x'), \end{aligned} \quad (17)$$

где h_n^ν — трехмерное распределение, локализованное на полубесконечной линии сингулярности $x^\mu = n^\mu |x^2|^{1/2}$ ($\mu = 1, 2, 3, 4$, n^μ — произвольный постоянный вектор). Величина h_n^ν удовлетворяет уравнению

$$-\partial_\nu [h_n^\nu(x - x')] = \delta(x - x'). \quad (18)$$

Полевые тензоры определяются через потенциалы следующим образом:

$$F_{\mu\nu}(x) = \partial_\mu A_\nu(x) - \partial_\nu A_\mu(x) + \int (dx') \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} J_\rho^e(x') h_n^\sigma(x-x'), \quad (19)$$

$$\tilde{F}_{\mu\nu}(x) = \partial_\mu B_\nu(x) - \partial_\nu B_\mu(x) + \int (dx') \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} J_\rho^m(x') h_n^\sigma(x'-x).$$

Возможность получения непротиворечивым образом уравнений движения связана с наложением дополнительного условия следующего вида:

$$\frac{eg}{4\pi k} = n; \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad (20)$$

роль которого эквивалентна роли вето Дирака в теории монополя. Соотношение (20) идентично условиям (1), (2), если константу отождествить с постоянной Планка \hbar . Классическая теория монополя Швингера обладает той особенностью, что в ней линия сингулярности не закреплена за каким-либо типом заряда (электрическим или магнитным). Это обстоятельство связано с тем, что построение квантовой теории Швингера проводится на базе полевой концепции, в то время как в схеме Дирака исходными являются частичные представления. Это выражается в различном выборе потенциала, который в теории Швингера имеет вид

$$A_n(x) = \frac{g}{r} \frac{1}{2} \left(\frac{\mathbf{n} \times \mathbf{r}}{r + n\mathbf{r}} - \frac{\mathbf{n} \times \mathbf{r}}{r - n\mathbf{r}} \right),$$

в то время как потенциал в теории Дирака задается соотношением (13). Это различие и обуславливает разницу между (1) и (2).

Характерной чертой как теории Дирака, так и теории Швингера является потеря явной инвариантности относительно вращений, присущей точечной модели м.з. Существенно, что в теории Швингера угловой момент статической пары э.з.— монополю начинает зависеть от геометрии линии сингулярности*). Это приводит к потере непрерывной дуальной симметрии. Однако в отличие от схемы Дирака здесь остается возможность рассмотрения дискретных дуальных преобразований.

З а к л ю ч е н и е. Существующие теоретические схемы электродинамики с магнитными зарядами фактически строятся на базе использования трех различных моделей магнитного заряда. Это различие связано, с одной стороны, с разным выбором частичной модели на классическом уровне (заряженная точка и полубесконечный соленоид), с другой стороны — с переопределением характера симметрии полевых уравнений (наличие или отсутствие симметрии относительно непрерывных дуальных преобразований, свойственной уравнениям для свободного поля).

Оставаясь в рамках симметрии, присущей уравнениям Максвелла для свободного поля, и основываясь на модели заряженных частиц механики Ньютона (м.з. В.), невозможно включить м.з. в электродинамику в качестве наблюдаемого физического объекта.

Альтернативные схемы Дирака и Швингера связаны с отказом от модели точечной заряженной частицы, т. е. так или иначе вводят в теорию модель неньютоновой частицы.

Вопрос о принципиальной возможности идентификации частичных объектов типа монополей Дирака и Швингера в системе некоторых измерительных процедур требует специального рассмотрения.

*) Вентцель [24] отмечает, что этот факт находится в противоречии с картиной «подлинного монополя», причем под последним он понимает монополю Дирака.

Литература

1. Carithers W. L., Stefanski R., Adair R. K. Phys. Rev., **149**, 1070, 1966.
2. Dirac P. A. M. Proc. Roy. Soc., **A133**, 60, 1931; Phys. Rev., **74**, 817, 1948.
3. Schwinger J. Phys. Rev., **144**, 1057, 1966.
4. Saha M. N. Phys. Rev., **75**, 1968, 1949.
5. Fierz M. Helv. Phys. Acta, **17**, 27, 1944.
6. Wilson M. A. Phys. Rev., **75**, 309, 1949.
7. Rainich G. Y. Trans. Am. Math. Soc., **27**, 106, 1925; Proc. Nat. Acad. Sci. (USA), **10**, 124, 1924.
8. Misner C., Wheeler J. Ann. of Phys., **2**, 523, 1957.
9. Katz R. Am. J. Phys., **30**, 41, 1962.
10. Стражев В. И., Томильчик Л. М. Весті АН БССР, сер. фіз.-мат. наук, № 2, 1968.
11. Потупа А. С., Стражев В. И., Томильчик Л. М. Весті АН БССР, сер. фіз.-мат. наук, № 3, 1968.
12. Harrison H. et al. Am. J. Phys., **31**, 249, 1963.
13. Bohr N., Rosenfeld L. Kgl. Danske Videnskab. Selskab. Medd, **12**, 8, 1933; Phys. Rev., 1950.
14. Томильчик Л. М. ДАН БССР, **8**, 379, 1964.
15. Rosenbaum D. Phys. Rev., **147**, 891, 1966.
16. Rohrlich F. Phys. Rev., **150**, 1104, 1966.
17. Hagen C. R. Phys. Rev., **140**, B804, 1965.
18. Cabibbo N., Ferrari E. Nuovo Cim., **35**, 1236, 1963.
19. Mandelstam S. Ann. of Phys., **19**, 1, 1962.
20. Тевикян Р. В. ЖЭТФ, **50**, 911, 1966.
21. Jan T. M. Phys. Rev., **160**, 1182, 1967.
22. Швингер Ю. УФН, **91**, 49, 1967.
23. Schwinger J. Phys. Rev., **127**, 324, 1962.
24. Wentzel G. Suppl. Theor. Phys., **37—38**, 1963, 1966.
25. Кемпфер Ф. Основные положения квантовой механики. Изд. «Мир», 1967.

Институт физики
АН БССР

Поступило в редакцию 12.VII 1968

Л. Г. МОРОЗ, Н. В. МАКСИМЕНКО

АНАЛИЗ АМПЛИТУДЫ ОДНОМЕЗОННОГО ФОТОРОЖДЕНИЯ В ОБЛАСТИ ЭНЕРГИЙ ВТОРОГО РЕЗОНАНСА

В области энергий второго резонанса мультипольная амплитуда E_2 является резонансной. Тем не менее даже при грубом описании процесса одномезонного фоторождения нельзя ограничиться только одной мультипольной амплитудой. Как можно судить по степени поляризации нуклона отдачи [3], немаловажную роль играют и другие мультипольные амплитуды.

В данной работе проводится феноменологический анализ амплитуды одномезонного фоторождения в области энергий второго резонанса на основе экспериментальных данных по поляризации нуклонов отдачи [3] и дифференциальному сечению фоторождения π -мезонов [6] в рамках резонансной модели [7].

В разложении амплитуды одномезонного фоторождения по парциальным волнам достаточно ограничиться мультипольными амплитудами с орбитальным моментом конечного состояния π -мезон-нуклонной системы $l \leq 3$ (см., например, [1, 2]). Мы будем предполагать в соответствии с резонансной моделью [7], что основной вклад в процесс фоторождения дают мультипольные амплитуды, поведение которых в области энергий до 1 Бэв носит резонансный характер.

В рамках этой резонансной модели поляризация нуклона отдачи в направлении $[\mathbf{n}_\pi \times \mathbf{n}_\gamma]$ при фоторождении на угол $\theta = 90^\circ$ в СЦМ может быть записана в следующем виде [3]:

$$P_{от} = \frac{\text{Im}(B^*A - 4B^*C - 4D^*B + \sqrt{3}E^*A - 2\sqrt{3}E^*C - 2\sqrt{3}E^*D)}{A_0}, \quad (1)$$

где

$$A_0 = |A|^2 + \frac{5}{2} (|B|^2 + |C|^2 + |D|^2) + \frac{3}{2} |E|^2 + \text{Re}(5CD^* - AC^* - AD^* + \sqrt{3}BE^*). \quad (2)$$

Здесь A, B, C, D и E — резонансные части амплитуд E_0^+, M_1^+, E_2^- и E_3^- соответственно.

Воспользуемся в дальнейшем следующим выражением для мультипольных амплитуд, выведенным в пренебрежении каналом двухмезонного фоторождения*) [5]:

$$A = \begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ 2 \end{bmatrix} e^{i\alpha_{31}^S} E_1^3 \left(\frac{1}{2} \right),$$

*) Некоторый учет двухмезонного фоторождения в рассматриваемой области энергий при сохранении вида формул (3) достигается, если под амплитудами E и M подразумевать величины, полученные умножением исходных изотопических амплитуд на множители, происходящие от мнимой части фазы π - N -рассеяния.

$$\begin{aligned}
 B &= \begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ 2 \end{bmatrix} e^{i\alpha_{33}^P} M_1^3 \left(\frac{3}{2} \right), \\
 C &= \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix} e^{i\alpha_{13}^D} \left[E_1^1 \left(\frac{3}{2} \right) \pm 2\delta E_1^1 \left(\frac{3}{2} \right) \right], \\
 D &= \begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ 2 \end{bmatrix} e^{i\alpha_{33}^D} E_1^3 \left(\frac{3}{2} \right), \\
 E &= \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \sqrt{2} \\ 1 \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix} e^{i\alpha_{15}^F} \left[E_2^1 \left(\frac{5}{2} \right) \pm 2\delta E_2^1 \left(\frac{5}{2} \right) \right],
 \end{aligned} \tag{3}$$

где верхние индексы при электрических и магнитных мультипольных амплитудах E и M представляют собой удвоенное значение изотопического спина; нижние индексы — момент количества движения фотона по отношению к нуклону, а в скобках указан полный момент количества движения состояния; α_{2T2J} — сдвиги фаз упругого рассеяния π -мезона на нуклоне в состояниях с изотопическим спином T и с полным моментом J .

Формулы (3) записаны для двух возможных каналов реакции фоторождения: $\gamma + n \rightarrow p + \pi^-$ — верхняя строчка и $\gamma + p \rightarrow p + \pi^0$ — нижняя строчка соответственно.

В [3] экспериментально определена поляризация нуклона отдачи в реакциях фоторождения π^0 -мезона на протоне и фоторождения π^- -мезона на нейтроне в области энергий 715 Мэв. Были получены следующие результаты:

$$\begin{aligned}
 P_{от}(\gamma + n \rightarrow p + \pi^-) &= -0,26 \pm 0,06, \\
 P_{от}(\gamma + p \rightarrow p + \pi^0) &= -0,45 \pm 0,06.
 \end{aligned} \tag{4}$$

Характерной особенностью является то, что знак поляризации для обоих каналов одинаков. Основываясь на этой особенности, Вергенелакис [7] предположил, что основной вклад в поляризацию нуклона отдачи дает член $-\text{Im}(2\sqrt{3}E^*C)$, так как только этот член обеспечивает одинаковость знака поляризации нуклона отдачи для реакции фоторождения π^0 - и π^- -мезонов. Этим обусловлен его вывод о том, что доминирующий вклад в процесс фоторождения π -мезона в области энергий 2-го резонанса дают амплитуды E_{2-} и E_{3-} .

Однако этот вывод не согласуется с предложенной ранее моделью Пайерлса [5] (согласно которой в этой области энергий доминирующими являются мультипольные амплитуды E_{2-} и M_{1+}), основанной на анализе углового распределения в процессе фоторождения π -мезонов.

Проанализировав остальные интерференционные члены с помощью данных [4] по фазовым сдвигам мезон-нуклонного рассеяния

$$\alpha_{31}^S = -28^\circ, \alpha_{33}^P = 168, \alpha_{13}^D = 90, \alpha_{33}^D = -1, \alpha_{15}^F = 6^\circ, \tag{5}$$

приходим к выводу, что малость остальных членов в формуле (1) по сравнению с $-\text{Im}(2\sqrt{3}E^*C)$, за исключением $-\text{Im}(4BC^*)$, обусловлена соотношением фазовых сдвигов интерферирующих мультиполей.

Воспользовавшись этим, будем считать, что вклад в поляризацию нуклона отдачи вносят члены $-\text{Im}(4C^*B)$ и $-\text{Im}(2\sqrt{3}E^*C)$, однако доминирующим должен быть второй член, ибо только в этом случае значения поляризации нуклона отдачи при фоторождении π^0 - и π^- -мезонов будут совпадать по знаку. Исходя из этих соображений, в нашей модели при последующих расчетах пренебрежем в числителе выражения (2) всеми членами, за исключением этих двух.

Дифференциальное сечение фоторождения π -мезонов можно записать в виде [5]

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = A_0 + A_1x + A_2x^2 + A_3x^3 + A_4x^4.$$

Здесь

$$\begin{aligned} A_1 &= \text{Re}(2AB^* - 3\sqrt{3}AE^* + 2BD^* + \\ &\quad + 2CB^* + 6\sqrt{3}DE^* + 6\sqrt{3}CE^*), \\ A_2 &= 9|E|^2 - \frac{3}{2}|D|^2 - \frac{3}{2}|C|^2 - \frac{3}{2}|B|^2 + \\ &\quad + \text{Re}(3AD^* + 3AC^* - 3CD^* - 3\sqrt{3}BE^*), \\ A_3 &= \text{Re}(5\sqrt{3}AE^* - 4\sqrt{3}DE^* - 4\sqrt{3}CE^*), \\ A_4 &= \frac{15}{2}|E|^2, \end{aligned} \quad (6)$$

$$x = \cos \theta,$$

а A_0 определяется формулой (2).

Согласно [6], в области энергий второго резонанса экспериментальные значения величин A (в микробарнах) следующие:

$$A_0 = 4,14, \quad A_1 = 0,34, \quad A_2 = -5,56, \quad A_3 = -0,62, \quad A_4 = 3,013. \quad (7)$$

Воспользуемся тем, что A , B , C , D и E выражаются, согласно (3), через изотопические амплитуды и сдвиги фаз упругого рассеяния π -мезона на нуклоне, значения которых даны в (5). Тогда систему уравнений (6) относительно A , B , C , D и E совместно с уравнением (1) для реакции $\gamma + p \rightarrow p + \pi^0$, которое в нашей модели приобретает вид

$$P_{\text{от}} = \frac{\text{Im}(-4C^*B - 2\sqrt{3}E^*C)}{A_0}, \quad (8)$$

можно свести к системе уравнений относительно изотопических амплитуд:

$$\begin{aligned} 4x^2 + 10y^2 + \frac{5}{8}z^2 + 10u^2 + \frac{3}{8}v^2 - \sqrt{3}yv + \\ + 0,1zu - 4xy - 0,47xz + 4,14, \\ - 8xy + 3\sqrt{3}xv - 8yu + 0,42yz + \\ + 6\sqrt{3}uv - 0,15\sqrt{3}zv = 0,34, \\ \frac{9}{4}v^2 - 6u^2 - \frac{3}{8}z^2 - 6y^2 + 12xu + \\ + 1,5xz + 0,06zu - 6\sqrt{3}yv = -5,56, \end{aligned}$$

$$4\sqrt{3}uv - 5\sqrt{3}xv + 0,1\sqrt{3}zv = -0,88, \quad (9)$$

$$\frac{15}{8}v^2 = 3,013,$$

$$3,92yz - \frac{\sqrt{3}}{2}zv = -1,71,$$

где x , y , z , u и v равны соответственно $E_1^3\left(\frac{1}{2}\right)$, $M_1^3\left(\frac{3}{2}\right)$, $E_1^3\left(\frac{3}{2}\right) - 2\delta E_1^1\left(\frac{3}{2}\right)$, $E_1^3\left(\frac{3}{2}\right)$ и $E_2^1\left(\frac{5}{2}\right) - 2\delta E_2^1\left(\frac{5}{2}\right)$, а численные значения фаз упругого рассеяния π -мезона на нуклоне приведены в (5). Здесь использованы данные, приведенные в (4), (5) и (7).

Значения изотопических амплитуд, удовлетворяющие этой системе, следующие:

$$E_1^3\left(\frac{1}{2}\right) = 0,0237;$$

$$M_1^3\left(\frac{3}{2}\right) = 0,5;$$

$$E_1^1\left(\frac{3}{2}\right) - 2\delta E_1^1\left(\frac{3}{2}\right) = -1,9; \quad (10)$$

$$E_1^3\left(\frac{3}{2}\right) = -0,018;$$

$$E_2^1\left(\frac{5}{2}\right) - 2\delta E_2^1\left(\frac{5}{2}\right) = 1,27.$$

Решение было получено в два этапа. Вначале было найдено решение для амплитуд B , C и E в предположении, что амплитуды A и D малы, а точное решение системы уравнений (9) находилось методом итерации. Как выяснилось, значение «больших» амплитуд (B , C и E) малочувствительно по отношению к изменению «малых» амплитуд A и D , что косвенно позволяет судить об устойчивости полученного решения по отношению к случайным изменениям используемых экспериментальных данных.

Согласно (3) и (10), амплитуды A , B , C , D и E реакции $\gamma + p \rightarrow p + \pi^0$ в области энергий второго резонанса имеют следующие числовые значения (в 10^{-15} см):

$$A = 0,0474e^{i\alpha_{31}^S},$$

$$B = e^{i\alpha_{33}^P},$$

$$C = 0,95e^{i\alpha_{13}^D},$$

$$D = -0,036e^{i\alpha_{33}^D},$$

$$E = -0,63e^{i\alpha_{15}^F}. \quad (11)$$

Полученные значения дают возможность предположить, что в области энергий второго резонанса основной вклад в сечение фоторождения и поляризации нуклонов отдачи для $\gamma + p \rightarrow p + \pi^0$ дают три мультипольные амплитуды E_{2-} , E_{3-} и M_{1+} , в то время как остальными амплитудами можно пренебречь.

Подтверждением этой модели является то, что значения поляризации нуклона отдачи для реакции $\gamma + n \rightarrow p + \pi^-$, найденные по формуле (8) с учетом (3) и (10), удовлетворяют экспериментальным данным (4) (при условии, что изоскалярные амплитуды $2\delta E_1^1 \left(\frac{3}{2}\right)$ и $2\delta E_2^1 \left(\frac{3}{2}\right)$ пренебрежимо малы).

Таким образом, экспериментальные данные [6] по дифференциальному сечению фоторождения π -мезонов и поляризации нуклонов отдачи в области энергий второго резонанса свидетельствуют о важности вклада по крайней мере трех мультипольных амплитуд E_{2-} , E_{3-} и M_{1+} .

Вследствие этого, если оставаться в рамках резонансной модели [7], оказывается, что как модель Пайерлса [5], учитывающая только амплитуды E_{2-} и M_{1+} , так и модель Вергенелакиса [7], отдающего предпочтение амплитудам E_{2-} и E_{3-} , в значительной мере приближенны. Если первая противоречит экспериментальным данным по поляризации нуклона отдачи [3], то вторая не согласуется с экспериментальными данными [6] по дифференциальному сечению процесса.

Литература

1. Chew G. F. et al. Phys. Rev., **106**, 1345, 1957.
2. Rashid H. A. Nuovo Cimento, **23**, 965, 1964.
3. Kenemuth I. R., Stein P. S. Phys. Rev., **129**, 2259, 1963.
4. Auvil P. et al. Phys. Lett., **12**, 76, 1964.
5. Pierls R. F. Phys. Rev., **118**, 325, 1960.
6. De Staebler H. et al. Phys. Rev., **140**, № 2 B, 1965, B336.
7. Vergenelacis. Nuovo Cim., **31**, 1125, 1964.

Институт физики
АН БССР

Поступило в редакцию 23.11 1968

В. С. ВИХРЕНКО, В. Б. НЕМЦОВ, Л. А. РОТТ

УРАВНЕНИЯ ПЕРЕНОСА ДЛЯ МНОГОКОМПОНЕНТНЫХ СИСТЕМ

Микроскопическое обоснование феноменологических уравнений переноса представляет актуальную задачу статистической физики [1]. В настоящей работе процессы переноса в конденсированных многокомпонентных средах изучаются с помощью статистических функций условных распределений [2].

Рассмотрим конденсированную систему, состоящую из m различных сортов ($\gamma, \lambda, \xi, \dots$) молекул. Количество молекул γ -сорта в системе равно n_γ , а общее количество $N = \sum_{\gamma=1}^m n_\gamma$. Тогда, разбив весь объем V системы на

N равных молекулярных ячеек объемом $v = \frac{V}{N}$, введем кинетические функции распределения так, чтобы выражение $F_{sk}(\mathbf{q}_\gamma, \mathbf{p}_\gamma, \mathbf{q}_\lambda^2, \mathbf{p}_\lambda^2, \dots, \mathbf{q}_\xi^s, \mathbf{p}_\xi^s; t) \times \times d\mathbf{q}d\mathbf{p}d\mathbf{q}^2d\mathbf{p}^2 \dots d\mathbf{q}^s d\mathbf{p}^s$ определяло вероятность обнаружить молекулу сорта γ около точки \mathbf{q} с импульсом, близким к \mathbf{p} , молекулу сорта λ около точки \mathbf{q}^2 с импульсом, близким к \mathbf{p}^2 , и т. д., и при условии, что координаты $\mathbf{q}, \mathbf{q}^2, \dots, \mathbf{q}^s$ находятся в выделенном молекулярном объеме v_1 , а остальные $N-s$ молекул распределены по оставшимся $N-1$ ячейкам так, чтобы в каждой из них находилось одновременно не более k молекул, причем $s \leq k$.

Аналогично выражение $F_{sk}^{(l)}(\mathbf{q}_\gamma, \mathbf{p}_\gamma, \dots, \mathbf{q}_\xi^{s+l}, \mathbf{p}_\xi^{s+l}; t) d\mathbf{q}d\mathbf{p} \dots d\mathbf{q}^{s+l} d\mathbf{p}^{s+l}$ дает вероятность обнаружить некоторое состояние s молекул определенных сортов в ячейке v_1 , l молекул определенных сортов в некоторой другой ячейке v_i при условии, что остальные $N-s-l$ молекул распределены по оставшимся $N-2$ молекулярным ячейкам системы так, чтобы в каждой из них находилось одновременно не более k молекул, причем $s, l \leq k$.

Для сокращения записи введем обозначения

$$\begin{aligned} F_{sk}(\mathbf{q}_\gamma, \mathbf{p}_\gamma, \mathbf{q}_\lambda^2, \mathbf{p}_\lambda^2, \dots, \mathbf{q}_\xi^s, \mathbf{p}_\xi^s; t) &= F_{sk}(\gamma, \lambda, \dots, \xi; t), \\ F_{sk}^{(l)}(\mathbf{q}_\gamma, \mathbf{p}_\gamma, \dots, \mathbf{q}_\xi^{s+l}, \mathbf{p}_\xi^{s+l}; t) &= F_{sk}^{(l)}(\gamma, \dots, \xi; t). \end{aligned} \quad (1)$$

Воспользуемся далее уравнением Лиувилля

$$\frac{\partial D_N}{\partial t} = \sum_{i=1}^N \left\{ \frac{\partial H_N}{\partial q^{i\alpha}} \frac{\partial D_N}{\partial p^{i\alpha}} - \frac{\partial H_N}{\partial p^{i\alpha}} \frac{\partial D_N}{\partial q^{i\alpha}} \right\}, \quad (2)$$

где D_N — функция распределения динамических состояний всей системы, i указывает номер частицы, а $\alpha = 1, 2, 3$ — координаты. Под дважды

повторяющимся индексом координат подразумевается суммирование. Гамильтониан системы в предположении парного взаимодействия имеет вид

$$H_N = \sum_{\gamma=1}^m \sum_{i=1}^{n_\gamma} \frac{(p_\gamma^i)^2}{2m_\gamma} + \frac{1}{2} \sum_{\gamma, \lambda=1}^m \sum_{j=1}^{n_\gamma} \sum_{i=1}^{n_\lambda} \Phi(q_\gamma^j - q_\lambda^i), \quad (3)$$

$\Phi(q_\gamma^j - q_\lambda^i) = \Phi_{\gamma\lambda}$ — потенциал парного взаимодействия между частицами γ и λ сортов. Знак штрих при суммировании означает, что при $\gamma = \lambda$ член $j = i$ исключается. m_γ — масса частицы сорта γ .

Интегрируя уравнение (2) по динамическим переменным $N - 1$ частиц и учитывая только те состояния, когда в выделенном молекулярном объеме системы v_1 находится молекула сорта γ , а остальные молекулы распределены так, что в каждой ячейке можно обнаружить не более двух молекул произвольных сортов, получим определяющее уравнение для двухиндексной функции распределения $F_{12}(\gamma, t)$

$$\frac{\partial F_{12}(\gamma; t)}{\partial t} + \frac{p^\alpha}{m_\gamma} \frac{\partial F_{12}(\gamma; t)}{\partial q^\alpha} = \int_{v-v_1} \int_{\Omega_p} \sum_{\lambda=1}^m \frac{\partial \Phi_{\gamma\lambda}}{\partial q^\alpha} \frac{\partial \bar{F}_{12}^{(1)}(\gamma, \lambda; t)}{\partial p^\alpha} dq^2 dp^3, \quad (4)$$

где Ω_p — пространство импульсов, а трехиндексная функция распределения с тильдой определяется соотношением

$$\bar{F}_{12}^{(1)}(\gamma, \lambda; t) = F_{12}^{(1)}(\gamma, \lambda; t) + \int_{v_2} \int_{\Omega_p} \sum_{\zeta=1}^m F_{12}^{(2)}(\gamma, \lambda, \zeta; t) dq^3 dp^3 \quad (5)$$

и выражает плотность вероятности таких состояний системы, когда в объеме v_1 находится только одна молекула сорта γ около точки (q, p) μ -пространства этой молекулы, в некотором другом объеме v_2 находится вторая молекула сорта λ около точки (q^2, p^2) ее μ -пространства, и в этом же объеме возможно присутствие третьей молекулы любого сорта, что и учитывается вторым слагаемым правой части.

Приведем статистический вывод феноменологических законов сохранения в многокомпонентных смесях, используя указанный выше метод условных распределений (законы сохранения соответственно для однокомпонентной системы были рассмотрены в работе [3]).

Среднее значение некоторой физической величины $\Psi_\gamma = \Psi(q_\gamma, p_\gamma; t)$, зависящей от свойств молекулы сорта γ , определяется выражением

$$\langle \Psi_\gamma \rangle = \frac{\int_{\Omega_p} \Psi_\gamma F_{12}(\gamma; t) dp}{\int_{\Omega_p} F_{12}(\gamma; t) dp} = \frac{1}{n_\gamma} \int_{\Omega_p} \Psi_\gamma F_{12}(\gamma; t) dp, \quad (6)$$

где $n_\gamma = n_\gamma(q; t) = \int_{\Omega_p} F_{12}(\gamma; t) dp$ — плотность числа частиц сорта γ в точке q . Плотность массы γ -компонента определяется выражением

$$\rho_\gamma(q; t) = m_\gamma n_\gamma(q; t). \quad (7)$$

Операция усреднения некоторой динамической величины предполагает, кроме проведения усреднения по пространству импульсов, усреднение и по макроскопически малому объему конфигурационного пространства (подробнее об этом см. в [4]). В методе условных распределений достаточно провести

усреднение по объему молекулярной ячейки, так что выражение для усредненной величины запишется в форме

$$\langle \Psi_\gamma \rangle = \frac{1}{n_\gamma} \frac{1}{v} \int_{v_1} \int_{\Omega_p} \Psi_\gamma(\mathbf{q} + \mathbf{R}, \mathbf{p}; t) \times \\ \times F_{12}(\mathbf{q} + \mathbf{R}; \mathbf{p}; t) d\mathbf{R}d\mathbf{p}, \quad \mathbf{q} \subset v_1. \quad (8)$$

В дальнейшем указанная операция будет всюду подразумеваться.

Умножим выражение (4) на Ψ_γ и проинтегрируем его по пространству импульсов молекулы. В результате получим после некоторых преобразований уравнение переноса величины Ψ_γ

$$\frac{\partial}{\partial t} (n_\gamma \langle \Psi_\gamma \rangle) + \frac{\partial}{\partial q^\alpha} \left(\frac{n_\gamma}{m_\gamma} \langle \Psi_\gamma p^\alpha \rangle \right) = M\Psi_\gamma, \quad (9)$$

где

$$M\Psi_\gamma = \int_{\Omega_p} \left(\frac{\partial \Psi_\gamma}{\partial t} + \frac{p^\alpha}{m_\gamma} \frac{\partial \Psi_\gamma}{\partial q^\alpha} \right) F_{12}(\gamma; t) d\mathbf{p} - \\ - \int_{v-v_1} \int_{\Omega_p} \sum_{\lambda=1}^m \frac{\partial \Phi_{\gamma\lambda}}{\partial q^\alpha} \frac{\partial \Psi_\gamma}{\partial p^\alpha} \bar{F}_{12}^{(1)}(\gamma, \lambda; t) dp d\mathbf{p}^2 d\mathbf{q}^2.$$

Положим $\Psi_\gamma = m_\gamma$. После подстановки в уравнение (9) и суммирования по всем сортам молекул системы приходим к уравнению непрерывности

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial q^\alpha} (\rho u^\alpha) = 0, \quad (10)$$

где $\rho = \sum_{\gamma=1}^m \rho_\gamma$, а средняя скорость течения \mathbf{u} определяется соотношением

$$\rho \mathbf{u} = \sum_{\gamma=1}^m \rho_\gamma \mathbf{u}_\gamma, \quad \mathbf{u}_\gamma = \frac{1}{\rho_\gamma} \int_{\Omega_p} \mathbf{p} F_{12}(\gamma; t) d\mathbf{p}, \quad (11)$$

\mathbf{u}_γ — средняя скорость движения молекул сорта γ .

Чтобы получить закон сохранения импульса, достаточно в уравнении (9) использовать соотношение $\Psi_\gamma = p^\alpha - m_\gamma u_\gamma^\alpha$. Суммируя затем полученное выражение по всем сортам молекул системы и производя преобразования, аналогичные использованным для получения уравнений переноса в методе ББГКИ для однокомпонентных систем (см., например, [5]), с учетом операции усреднения (8) в методе условных распределений, получим

$$\rho \frac{du^\alpha}{dt} + \frac{\partial P^{\alpha\beta}}{\partial q^\beta} = 0, \quad (12)$$

где $P^{\alpha\beta}$ — тензор напряжений, состоящий из двух слагаемых:

$$P^{\alpha\beta} = P_{\text{кин}}^{\alpha\beta} + P_{\text{пот}}^{\alpha\beta}. \quad (13)$$

Кинетическая часть тензора напряжений определяется равенством

$$P_{\text{кин}}^{\alpha\beta} = \sum_{\gamma=1}^m \rho_\gamma \langle v_\gamma^\alpha v_\gamma^\beta \rangle, \quad (14)$$

где $v_\gamma^\alpha = \frac{p^\alpha}{m_\gamma} - u^\alpha$ — тепловая скорость молекулы сорта γ .

Потенциальная часть

$$P_{\text{пот}}^{\alpha\beta} = - \int_{v-v_1} \int_{\Omega_p} \frac{(q^\alpha - q^{2\alpha})(q^\beta - q^{2\beta})}{2|q - q^2|} \times \\ \times \left\{ \sum_{\gamma, \lambda=1}^m \Phi_{\gamma\lambda}' \bar{F}_{12}^{(1)}(\gamma, \lambda; t) \right\} dq^2 dp^2 dp. \quad (15)$$

Рассматривая линейную реакцию системы, подвергнутой изотермической деформации аналогично [6, 7], получим тензор напряжений как величину, обусловленную наложенной деформацией и отсчитываемую от первоначального равновесного состояния среды:

$$\sigma_{ik} = \left\{ kT \delta_{ik} \delta_{mn} \sum_{\gamma=1}^m F_{12}(\gamma) + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \int_{v-v_1} \frac{1}{r} \left[\sum_{\gamma, \lambda=1}^m \frac{d}{dr} \left(\frac{\Phi_{\gamma\lambda}'(r)}{r} \right) \bar{F}_{12}^{(1)}(\gamma, \lambda) \right] x_i x_k x_m x_n d\mathbf{r} + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \int_{v-v_1} \frac{1}{r} \left[\sum_{\gamma, \lambda=1}^m \Phi_{\gamma\lambda}'(r) \bar{F}_{12}^{(1)}(\gamma, \lambda) \right] \times \right. \\ \left. \times (-x_i x_k \delta_{mn} + x_i x_m \delta_{kn} + x_k x_m \delta_{in}) d\mathbf{r} \right\} \frac{\partial w_n}{\partial q^m}. \quad (16)$$

Здесь $\mathbf{r} = \mathbf{q} - \mathbf{q}^2$, $\mathbf{r} = \mathbf{r}(x_1, x_2, x_3)$; \mathbf{w} — вектор смещения частицы; δ_{mn} — символ Кронекера; T — абсолютная температура; k — постоянная Больцмана.

Для упрощения (16) применим аппроксимацию функций условных распределений посредством выделения функций φ :

$$F_{12}^{(2)}(\gamma, \lambda, \varepsilon; t) = \frac{N_\varepsilon}{v} \varphi_3(\gamma, \lambda, \varepsilon; t) F_{12}^{(1)}(\gamma, \lambda; t); \\ F_{12}^{(1)}(\gamma, \lambda; t) = \frac{N_\lambda}{v} \varphi_2(\gamma, \lambda; t) F_{12}(\gamma; t); \\ \bar{F}_{12}^{(1)}(\gamma, \lambda; t) = \frac{N_\lambda}{v} \tilde{\varphi}_2(\gamma, \lambda; t) F_{12}(\gamma; t), \quad (17)$$

где

$$\tilde{\varphi}_2(\gamma, \lambda; t) = \varphi_2(\gamma, \lambda; t) \left[1 + \frac{1}{v} \int_{v_i} \int_{\Omega_p} \sum_{\varepsilon=1}^m N_\varepsilon \varphi_3(\gamma, \lambda, \varepsilon; t) dq^3 dp^3 \right],$$

$N_\gamma = \frac{n_\gamma}{N}$ — мольная доля γ -компонента.

Представление многоиндексных функций распределения через функции φ оказалось полезным в применении к исследованию как однокомпонентных, так и двух- и трехкомпонентных конденсированных систем в равновесном состоянии [8 — 10].

В дальнейшем для однородной среды, находящейся в термодинамическом равновесии, будем применять оправданное приближение

$$F_{12}(\gamma; t) \simeq F_{11}(\gamma) \simeq \frac{N_\gamma}{v}. \quad (18)$$

Переходя к изотропной среде и предполагая, что $\tilde{\varphi}_2(\gamma, \lambda)$ (в равновесном случае) зависит только от расстояния r между частицами, с учетом выражений (17) и (18), после интегрирования в (16) по угловым переменным получим

$$\begin{aligned} \sigma_{ik} = & \left\{ \left[\frac{kT}{v} - \frac{2\pi}{3v^2} \int_{r_0}^{\infty} \sum_{\gamma, \lambda=1}^m N_\gamma N_\lambda \Phi'_{\gamma\lambda}(r) \tilde{\varphi}_2(\gamma, \lambda) r^3 dr + \right. \right. \\ & + \left. \frac{2\pi}{15v^2} \int_{r_0}^{\infty} \sum_{\gamma, \lambda=1}^m N_\gamma N_\lambda \frac{d}{dr} \left(\frac{\Phi'_{\gamma\lambda}(r)}{r} \right) \tilde{\varphi}_2(\gamma, \lambda) r^5 dr \right] \delta_{ik} \delta_{mn} + \\ & + \frac{2\pi}{15v^2} \int_{r_0}^{\infty} \sum_{\gamma, \lambda=1}^m N_\gamma N_\lambda \times \\ & \times \left. \frac{d}{dr} (r^4 \Phi'_{\gamma\lambda}(r)) \tilde{\varphi}_2(\gamma, \lambda) dr [\delta_{im} \delta_{kn} + \delta_{in} \delta_{km}] \right\} \frac{\partial \omega_n}{\partial q^m}. \quad (19) \end{aligned}$$

Здесь r_0 — радиус молекулярной ячейки сферической формы $\left(\frac{4}{3} \pi r_0^3 = v \right)$.

Как известно, для изотропной среды тензор модулей упругости имеет вид

$$c_{ikmn} = \lambda \delta_{ik} \delta_{mn} + \mu (\delta_{im} \delta_{kn} + \delta_{in} \delta_{km}), \quad (20)$$

где λ и μ — коэффициенты Ляме.

Тогда, принимая во внимание, что выражение в фигурных скобках (19) представляет собой тензор модулей упругости обычной симметрии, находим выражения для модуля изотермического всестороннего сжатия

$$\begin{aligned} k_T = \lambda + \frac{2}{3} \mu = \frac{kT}{v} + \frac{2\pi}{9v^2} \times \\ \times \int_{r_0}^{\infty} \sum_{\gamma, \lambda=1}^m \frac{d}{dr} \left(\frac{\Phi'_{\gamma\lambda}(r)}{r^2} \right) N_\gamma N_\lambda \tilde{\varphi}_2(\gamma, \lambda) r^6 dr \quad (21) \end{aligned}$$

и модуля сдвига

$$\mu_s = \mu_T = \mu = \frac{2\pi}{15v^2} \int_{r_0}^{\infty} \sum_{\gamma, \lambda=1}^m N_\gamma N_\lambda \frac{d}{dr} (r^4 \Phi'_{\gamma\lambda}(r)) \tilde{\varphi}_2(\gamma, \lambda) dr. \quad (22)$$

Переход к адиабатическому модулю всестороннего сжатия производится известным образом:

$$\begin{aligned} k_s = \frac{kT}{v} + \frac{2\pi}{9v^2} \int_{r_0}^{\infty} \sum_{\gamma, \lambda=1}^m N_\gamma N_\lambda \times \\ \times \frac{d}{dr} \left(\frac{\Phi'_{\gamma\lambda}(r)}{r^2} \right) \tilde{\varphi}_2(\gamma, \lambda) r^6 dr + \frac{Tv}{c_v} \left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_v^2. \quad (23) \end{aligned}$$

Здесь P — давление, c_v — теплоемкость при постоянном объеме.

Далее, усредняя с помощью (9) величину $\Psi_\gamma = \frac{(p^\alpha - m_\gamma u^\alpha)^2}{2m_\gamma}$, после суммирования по всем сортам молекул системы находим уравнение переноса кинетической части внутренней энергии

$$\rho \frac{d\varepsilon_{\text{кин}}}{dt} + \frac{\partial j_{\text{кин}}^\alpha}{\partial q^\alpha} + P^{\alpha\beta} D^{\alpha\beta} = - \int_{v-v_1} \int_{\Omega_p} \sum_{\gamma, \lambda=1}^m \frac{\partial \Phi_{\gamma\lambda}}{\partial q^\alpha} \left(\frac{p^\alpha}{m} - u^\alpha \right) \bar{F}_{12}^{(1)}(\gamma, \lambda; t) dq^2 dp^2 dp, \quad (24)$$

где $\varepsilon_{\text{кин}} = \frac{\langle v^2 \rangle}{2}$ — кинетическая энергия на единицу массы, определяемая соотношением

$$\sum_{\gamma=1}^m \rho_\gamma \frac{\langle v_\gamma^2 \rangle}{2} = \rho \frac{\langle v^2 \rangle}{2} = \rho \varepsilon_{\text{кин}}; \quad (25)$$

кинетическая составляющая потока тепла

$$j_{\text{кин}}^\alpha = \frac{1}{2} \sum_{\gamma=1}^m \rho_\gamma \langle v_\gamma^\alpha v_\gamma^2 \rangle; \quad (26)$$

тензор скоростей деформаций

$$D^{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u^\alpha}{\partial q^\beta} + \frac{\partial u^\beta}{\partial q^\alpha} \right). \quad (27)$$

Чтобы получить уравнение переноса потенциальной составляющей энергии, необходимо воспользоваться кинетическим уравнением, определяющим функцию $\bar{F}_{12}^{(1)}(\gamma, \lambda; t)$.

Проинтегрируем уравнение Лиувилля (2) с учетом только тех состояний системы, когда в выделенной молекулярной ячейке v_1 находится одна молекула сорта γ , в некоторой другой молекулярной ячейке v_2 — одна молекула сорта λ , а в любой иной ячейке находится не более двух молекул. В результате получим кинетическое уравнение, определяющее функцию $\bar{F}_{12}^{(1)}(\gamma, \lambda; t)$,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{F}_{12}^{(1)}(\gamma, \lambda; t)}{\partial t} + \left\{ \frac{p^\alpha}{m_\gamma} \frac{\partial}{\partial q^\alpha} + \frac{p^{2\alpha}}{m_\lambda} \frac{\partial}{\partial q^{2\alpha}} - \frac{\partial \Phi_{\gamma\lambda}}{\partial q^\alpha} \frac{\partial}{\partial p^\alpha} - \right. \\ \left. - \frac{\partial \Phi_{\gamma\lambda}}{\partial q^{2\alpha}} \frac{\partial}{\partial p^{2\alpha}} \right\} \bar{F}_{12}^{(1)}(\gamma, \lambda; t) = \int_{v-v_1-v_2} \int_{\Omega_p} \sum_{\varepsilon=1}^m \left(\frac{\partial \Phi_{\gamma\varepsilon}}{\partial q^\alpha} \frac{\partial}{\partial p^\alpha} + \right. \\ \left. + \frac{\partial \Phi_{\lambda\varepsilon}}{\partial q^{2\alpha}} \frac{\partial}{\partial p^{2\alpha}} \right) \left\{ \bar{F}_{12}^{(1)}(\gamma, \lambda, \varepsilon; t) + \right. \\ \left. + \int_{v_i} \int_{\Omega_p} \sum_{\zeta=1}^m \bar{F}_{12}^{(12)}(\gamma, \lambda, \varepsilon, \zeta; t) dq^4 dp^4 \right\} dq^3 dp^3. \quad (28) \end{aligned}$$

Учитывая те состояния системы, когда в первой молекулярной ячейке находится молекула сорта γ , а в некоторой другой молекулярной ячейке —

две молекулы сортов λ и ε , получим уравнение, определяющее функцию $F_{12}^{(2)}(\gamma, \lambda, \varepsilon; t)$:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial F_{12}^{(2)}(\gamma, \lambda, \varepsilon; t)}{\partial t} + \left\{ \frac{p^\alpha}{m_\gamma} \frac{\partial}{\partial q^\alpha} + \frac{p^{2\alpha}}{m_\lambda} \frac{\partial}{\partial q^{2\alpha}} + \frac{p^{3\alpha}}{m_\varepsilon} \frac{\partial}{\partial q^{3\alpha}} - \right. \\ & - \frac{\partial \Phi_{\gamma\lambda}}{\partial q^\alpha} \frac{\partial}{\partial p^\alpha} - \frac{\partial \Phi_{\gamma\lambda}}{\partial q^{2\alpha}} \frac{\partial}{\partial p^{2\alpha}} - \frac{\partial \Phi_{\gamma\varepsilon}}{\partial q^\alpha} \frac{\partial}{\partial p^\alpha} - \frac{\partial \Phi_{\gamma\varepsilon}}{\partial q^{3\alpha}} \frac{\partial}{\partial p^{3\alpha}} - \\ & \left. - \frac{\partial \Phi_{\gamma\varepsilon}}{\partial q^{2\alpha}} \frac{\partial}{\partial p^{2\alpha}} - \frac{\partial \Phi_{\gamma\varepsilon}}{\partial q^{3\alpha}} \frac{\partial}{\partial p^{3\alpha}} \right\} F_{12}^{(2)}(\gamma, \lambda, \varepsilon; t) = \\ & = \int_{v-v_1-v_2} \int_{\Omega_p} \sum_{\zeta=1}^m \left(\frac{\partial \Phi_{\gamma\zeta}}{\partial q^\alpha} \frac{\partial}{\partial p^\alpha} + \frac{\partial \Phi_{\lambda\zeta}}{\partial q^{2\alpha}} \frac{\partial}{\partial p^{2\alpha}} + \frac{\partial \Phi_{\varepsilon\zeta}}{\partial q^{3\alpha}} \frac{\partial}{\partial p^{3\alpha}} \right) \times \\ & \times \left\{ F_{12}^{(21)}(\gamma, \lambda, \varepsilon, \zeta; t) + \int_{v_i} \int_{\Omega_p} \sum_{\xi=1}^m F_{12}^{(22)}(\gamma, \lambda, \varepsilon, \zeta, \xi; t) dq^5 dp^5 \right\} dq^4 dp^4. \quad (29) \end{aligned}$$

Здесь функции с четырьмя индексами определяют плотность вероятности конфигураций групп молекул, расположенных в трех выделенных молекулярных ячейках системы.

Проинтегрируем уравнение (29) по координатам и импульсам третьей частицы. Просуммировав затем полученное выражение по всем сортам третьей молекулы и сложив с уравнением (28), получим в соответствии с (5) уравнение, определяющее функцию $\bar{F}_{12}^{(1)}(\gamma, \lambda; t)$:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \bar{F}_{12}^{(1)}(\gamma, \lambda; t)}{\partial t} + \left\{ \frac{p^\alpha}{m_\gamma} \frac{\partial}{\partial q^\alpha} + \frac{p^{2\alpha}}{m_\lambda} \frac{\partial}{\partial q^{2\alpha}} - \right. \\ & \left. - \frac{\partial \Phi_{\gamma\lambda}}{\partial q^\alpha} \frac{\partial}{\partial p^\alpha} - \frac{\partial \Phi_{\gamma\lambda}}{\partial q^{2\alpha}} \frac{\partial}{\partial p^{2\alpha}} \right\} \bar{F}_{12}^{(1)}(\gamma, \lambda; t) = \\ & = \int_{v-v_1-v_2} \int_{\Omega_p} \sum_{\zeta=1}^m \left(\frac{\partial \Phi_{\gamma\zeta}}{\partial q^\alpha} \frac{\partial}{\partial p^\alpha} + \frac{\partial \Phi_{\lambda\zeta}}{\partial q^{2\alpha}} \frac{\partial}{\partial p^{2\alpha}} \right) \bar{F}_{12}^{(11)}(\gamma, \lambda, \zeta; t) dq^3 dp^3, \quad (30) \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \bar{F}_{12}^{(11)}(\gamma, \lambda, \zeta; t) &= F_{12}^{(11)}(\gamma, \lambda, \zeta; t) + \int_{v_i} \int_{\Omega_p} \sum_{\varepsilon=1}^m F_{12}^{(12)}(\gamma, \lambda, \varepsilon, \zeta; t) dq^3 dp^3 + \\ & + \int_{v_j} \int_{\Omega_p} \sum_{\varepsilon=1}^m F_{12}^{(21)}(\gamma, \lambda, \varepsilon, \zeta; t) dq^3 dp^3 + \\ & + \int_{v_i} \int_{v_j} \int_{\Omega_p} \sum_{\varepsilon, \xi=1}^m F_{12}^{(22)}(\gamma, \lambda, \varepsilon, \zeta, \xi; t) dq^3 dp^3 dq^5 dp^5. \end{aligned}$$

Плотность потенциальной энергии $\varepsilon_{\text{пот}}$ на единицу массы вещества определяется выражением

$$\rho \varepsilon_{\text{пот}} = \sum_{\gamma, \lambda=1}^m \rho_\gamma \varepsilon_{\text{пот}}^{\gamma\lambda}, \quad (31)$$

где

$$\varepsilon_{\text{пот}}^{\gamma\lambda} = \frac{1}{2} \int_{V-v_1} \int_{\Omega_p} \Phi_{\gamma\lambda} \frac{\bar{F}_{12}^{(1)}(\gamma, \lambda; t)}{\rho_\gamma(\mathbf{q}; t)} dq^2 dp^2 dp.$$

Умножим уравнение (30) на $\frac{1}{2} \Phi_{\gamma\lambda}$ и проинтегрируем по p , p^2 и q^2 . Последующее суммирование по γ и λ приведет к уравнению переноса потенциальной энергии

$$\rho \frac{d\varepsilon_{\text{пот}}}{dt} + \frac{\partial j_{1\text{пот}}^\alpha}{\partial q^\alpha} = \frac{1}{2} \sum_{\gamma, \lambda=1}^m \int_{V-v_1} \int_{\Omega_p} \left(\frac{p^\alpha}{m_\gamma} - \frac{p^{2\alpha}}{m_\lambda} \right) \times \\ \times \frac{\partial \Phi_{\gamma\lambda}}{\partial q^\alpha} \bar{F}_{12}^{(1)}(\gamma, \lambda; t) dq^2 dp^2 dp. \quad (32)$$

Складывая (24) и (32), после некоторых преобразований получим уравнение баланса энергии в обычной форме

$$\rho \frac{d\varepsilon}{dt} + \frac{\partial j^\alpha}{\partial q^\alpha} + P^{\alpha\beta} D^{\alpha\beta} = 0. \quad (33)$$

Здесь плотность внутренней энергии на единицу массы

$$\varepsilon = \varepsilon_{\text{кин}} + \varepsilon_{\text{пот}} \quad (34)$$

и плотность потока тепла

$$j^\alpha = j_{\text{кин}}^\alpha + j_{1\text{пот}}^\alpha + j_{2\text{пот}}^\alpha, \quad (35)$$

$$j_{1\text{пот}}^\alpha = \frac{1}{2} \sum_{\gamma, \lambda=1}^m \int_{V-v_1} \int_{\Omega_p} \left(\frac{p^\alpha}{m_\gamma} - u^\alpha \right) \Phi_{\gamma\lambda} \bar{F}_{12}^{(1)}(\gamma, \lambda; t) dq^2 dp^2 dp,$$

$$j_{2\text{пот}}^\alpha = \frac{1}{4} \sum_{\gamma, \lambda=1}^m \int_{V-v_1} \int_{\Omega_p} \frac{x_\alpha x_\beta}{r} \left[\left(\frac{p^\beta}{m_\gamma} - u^\beta \right) + \left(\frac{p^{2\alpha}}{m_\lambda} - u^\beta \right) \right] \times \\ \times \Phi_{\gamma\lambda}'(r) \bar{F}_{12}^{(1)}(\gamma, \lambda; t) dr dp^2 dp.$$

Строго говоря, здесь получена плотность потока тепла, обусловленная двумя факторами: макроскопически ненаблюдаемым хаотическим движением молекул — собственно плотность потока тепла и плотность потока тепла $j_{\text{диф}}$, обусловленная макроскопически наблюдаемыми диффузионными потоками. Следуя [11], определим $j_{\text{диф}}$ следующим образом:

$$j_{\text{диф}} = \sum_{\gamma=1}^m \rho_\gamma (\mathbf{u}_\gamma - \mathbf{u}) \mathfrak{H}_\gamma, \quad (36)$$

где \mathfrak{H}_γ — энтальпия, приходящаяся на единицу массы вещества сорта γ .

Тогда плотность потока тепла, обусловленная макроскопически ненаблюдаемым хаотическим движением молекул,

$$j' = j - j_{\text{диф}}, \quad (37)$$

где j определяется выражением (35).

Литература

1. Вихренко В. С., Немцов В. Б., Ротт Л. А. Доклад на III Всес. съезде по теор. и прикл. механике. Аннотации докладов, Изд. АН СССР, 1968.
2. Ротт Л. А. ЖФХ, 31, 1468, 1957; 32, 2845, 1958; ДАН БССР, 2, 58, 1958.
3. Вихренко В. С., Немцов В. Б., Ротт Л. А. ДАН БССР, 12, 307, 1968.
4. Kirkwood J. G. J. Chem. Phys., 14, 180, 1946.
5. Короткина М. Р. Вестник МГУ, Сер. мат. и мех., в. 5, 1966.
6. Немцов В. Б., Ротт Л. А. ДАН БССР, 11, 310, 1967.
7. Немцов В. Б., Ротт Л. А. Сб. «Применение ультразвуки к исследованию вещества», в. 23. МОПИ, М., 1968.
8. Ротт Л. А. ЖФХ, 36, 2235, 1962; 38, 459, 1964.
9. Ротт Л. А. УФЖ, 7, 686, 1962; 9, 354, 1964.
10. Ротт Л. А. ДАН СССР, 160, № 5, 1965.
11. Kirkwood J. G., Crawford B. L. J. Phys. Chem., 56, 1048, 1952.

Белорусский технологический
институт им. С. М. Кирова

Поступило в редакцию 22.IV 1968

Л. Ф. ІЛЬЮШЭНКА, Л. П. КАСЦЮК-КУЛЬГАУЧУК,
М. М. ГАЛКОЎСКАЯ

ДАСЛЕДАВАННЕ МАГЧЫМАСЦІ ЗНІЖЭННЯ
КАЭРЦЫТЫЎНАЙ СІЛЫ
І ПАВЫШЭННЯ КАЭФІЦЫЕНТА ПРАМАВУГОЛЬНАСЦІ
ПЯТЛІ ГІСТЭРЭЗІСУ
ЭЛЕКТРААСАДЖАНЫХ ЖАЛЕЗАНІКЕЛЕВЫХ ПЛЭНАК. II.

Для рэгулявання працэсу электраасаджэння ў радзе выпадкаў карыстаюцца ўнясеннем у электраліт паверхнева актыўных рэчываў, якія змяшчаюць серу [1]. У [2] намі было паказана, што выкарыстанне ў якасці дабаўкі саянакіслага тысямікарбазіду выклікае значнае зніжэнне каэрцытыўнай сілы і павышэнне каэфіцыента прамавугольнасці пятлі гістэрэзісу жалезанікелевых плёнак. Пад дзеяннем тысямікарбазіду значна зніжаюцца ўнутраныя напружанні. З'яўляецца цікавым вывучэнне механізма дзеяння памянёнай дабаўкі. З гэтай мэтай у дадзенай рабоце праведзена даследаванне ўплыву тысямікарбазіду на крышталічную структуру плёнак, скорасць іх асаджэння, змяненне колькасці жалеза ў плёнках рознай таўшчыні, магнітную структуру плёнак і велічыню поля анізатрапіі.

Асаджэнне плёнак праводзілася па методыцы, апісанай намі ў [2]. Канцэнтрацыя дабаўкі тысямікарбазіду ў электраліце складала 0,3 г/л.

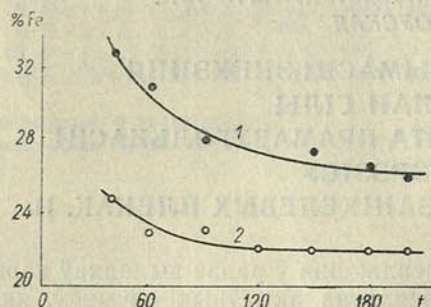
Магнітныя характарыстыкі плёнак вызначаліся па петлях гістэрэзісу, якія атрымліваліся на асцылаграфічнай устаноўцы пры частаце 50 гц. Былі даследаваны плёнкі таўшчынёй ад 1000 да 5000 Å. Таўшчыня плёнак вызначалася на мікраскопе МІІІ-4 і вагавым метадам. Магнітная структура вывучалася парашковым метадам з дапамогай мікраскопа МІІН-8 [3]. Крышталічная структура даследавалася на электронным мікраскопе УЭМВ-100 метадам вугальных рэплік, адцененых плацінай.

Тысямікарбазід як паверхнева актыўнае рэчыва аказвае ўплыў на характарыстыкі двайнога электрычнага слоя, змяняе ўмовы разраду іонаў на паверхні катода. Гэта прыводзіць да змянення скорасці асаджэння і структуры асадку, а ў выпадку сумеснага асаджэння металаў — да змянення саставу асаджаемага сплаву. Вядома [4], што пры сумесным асаджэнні нікелю і жалеза ў пачатковай стадыі працэсу адбываецца пераважнае асаджэнне жалеза, у выніку чаго ніжнія слаі плёнку аказваюцца абагачанымі жалезам. Градыент саставу па таўшчыні, які ўзнікае ў плёнках, аказвае істотны ўплыў на іх магнітныя характарыстыкі. Праведзенае намі даследаванне саставу плёнку ў залежнасці ад таўшчыні паказала, што ў прысутнасці саянакіслага тысямікарбазіду сярэдня колькасць жалеза ў плёнцы памяншаецца.

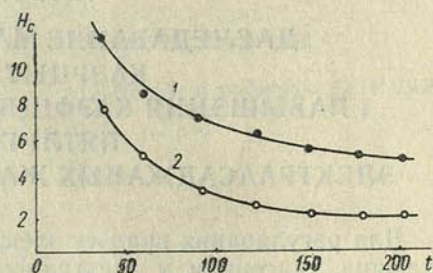
З рис. 1 бачым, што пры ўвядзенні тысямікарбазіду ў электраліт градыент саставу па таўшчыні плёнку памяншаецца. Так, для інтэрва-

лу таўшчынь 1000—2000 Å розніца ў сярэдняй колькасці жалеза ў плёнках, атрыманых у адсутнасць тысямікарбазіду, складае прыкладна 7%, для плёнак жа, атрыманых з электраліту з дабаўкай тысямікарбазіду, яна змяншаецца да 3%.

Такім чынам, тысямікарбазід садзейнічае выраўноўванню саставу плёнкі па таўшчыні. Істотным з'яўляецца таксама тое, што выраўноўванне саставу па таўшчыні наступае на больш ранняй стадыі працэсу асаджэння, г. зн. пры меншых таўшчынях. Такое дзеянне тысямікарба-



Рыс. 1. Залежнасць колькасці жалеза ў плёнках ад часу асаджэння, t , сек: 1 — для плёнак, асаджаных з электраліту без дабаўкі; 2 — для плёнак, асаджаных з электраліту, які змяшчае 0,3 г/л тысямікарбазіду HCl



Рыс. 2. Залежнасць ад часу асаджэння, t , сек каэфіцыентаў сілы H_c , з плёнак, атрыманых без дабаўкі (1), і плёнак, атрыманых з электраліту, які змяшчае 0,3 г/л тысямікарбазіду HCl (2)

зіду аналагічнае дзеянню гіпафасфіту [5], тыямачавіны [6, 7], арсяніду натрыю [8] і сахарыну [9].

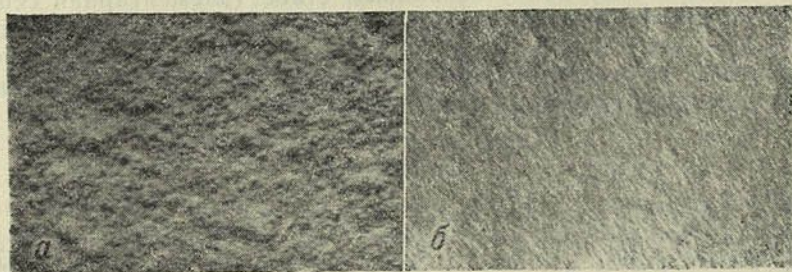
Даныя па змяненню каэфіцыентаў сілы ў залежнасці ад таўшчыні плёні для абодвух разглядаемых намі выпадкаў прыведзены на рыс. 2.

Як бачым, плёнкі, атрыманых з электраліту, які змяшчае даследуемую дабаўку, маюць больш нізкую каэфіцыентную сілу ў параўнанні з плёнкамі, асаджанымі без дабаўкі. Пры павелічэнні таўшчыні плёнкі каэфіцыентная сіла памяншаецца і пры дасягненні некаторай таўшчыні застаецца амаль нязменнай. Для плёнак, асаджаных з тысямікарбазідам, гэта таўшчыня меншая, што, відаць, звязана з выраўноўваннем саставу плёнкі па таўшчыні пад уздзеяннем тысямікарбазіду. Некаторае памяншэнне каэфіцыентаў сілы можна аднесці за кошт павелічэння скорасці асаджэння плёнак пад уплывам дабаўкі, г. зн. за кошт павелічэння таўшчыні плёнкі. Намі сапраўды ўстаноўлена, што з раствору, які змяшчае тысямікарбазід, плёнкі асаджаюцца з большай скорасцю. Скорасць асаджэння ўзрастае ад 22 да 25 Å/сек. Павелічэнне скорасці асаджэння садзейнічае таму, што плёнка асаджаецца больш свабоднай ад розных прымесей, што таксама вядзе да зніжэння каэфіцыентаў сілы як структурна адчувальнай характарыстыкі.

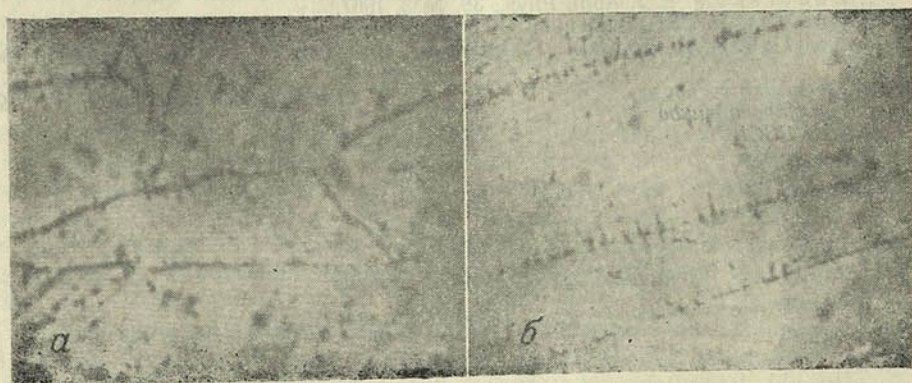
Змяненне характару працякання працэсаў на катодзе і скорасці асаджэння плёнкі, абумоўленае тысямікарбазідам, аказвае істотны ўплыў на крышталічную структуру плёнак.

З рыс. 3 відаць, што памеры крышталітаў у плёнках, асаджаных з электраліту з дабаўкай, меншыя, чым ў плёнак, атрыманых з электраліту без дабаўкі. Памяншэннем памераў крышталітаў можна растлумачыць адзначанае намі раней зніжэнне каэфіцыентаў сілы плёнак пры ўвядзенні ў электраліт тысямікарбазіду. Тысямікарбазід садзейнічае таксама больш раўнамернаму асаджэнню плёнкі, згладжванню яе паверхні.

Унутраны фізіка-хімічны стан плёнка, звязаны з яе саставам і ўмовамі атрымання, вызначае даменную структуру плёнка. Па характару даменнай структуры можна меркаваць аб магнітнай анізатрапіі плёнка, дысперсіі восей лёгкага намагнічвання. Змяненне даменнай структуры пад дзеяннем магнітнага поля можа даць уяўленне аб тых працэсах, якія суправаджаюць перамагнічванне плёнка, характарызуюць яе каэрцытыўную сілу і поле анізатрапіі. З рыс. 4 відаць, што для даменнай структуры плёнак, асаджаных з электраліту без тысямікарбазіду, ха-



Рыс. 3. Электроннамікраскапічныя здымкі структуры паверхні плёнак:
а — без дабаўкі; б — з дабаўкай



Рыс. 4. Даменная структура плёнак (таўшчыня 1000 Å):
а — без дабаўкі; б — з дабаўкай

рактэрна наяўнасць моцна скрыўленых граніц, замкнутых абласцей. У плёнак, асаджаных з электраліту з тысямікарбазідам, дамены больш буйныя, граніцы даменаў паралельныя напрамку прыкладзенага пры асаджэнні магнітнага поля. Такое змяненне даменнай структуры цягне за сабой павышэнне прамавугольнасці пятлі гістэрэзісу, зніжэнне дысперсіі восей лёгкага намагнічвання (да $3-5^\circ$) і велічыні поля анізатрапіі H_k амаль удвая.

Такім чынам, унясенне тысямікарбазіду ў электраліт пры асаджэнні магнітных жалезанікелевых плёнак садзейнічае атрымання больш аднародных па саставу плёнак, павелічэнню скорасці іх асаджэння, зніжэнню ўнутраных напружанняў, каэрцытыўнай сілы, поля анізатрапіі і дысперсіі восей лёгкага намагнічвання.

Тысямікарбазід прымае ўдзел у працэсе аднаўлення на катодзе, і плёнка, атрыманая ў яго прысутнасці, змяшчаюць у сваім саставе

серу. У сувязі з гэтым вельмі важным з'яўляецца вызначэнне колькасці серы ў плёнках, а таксама высвятленне механізма яе пранікнення ў асадак. Для плёнак, асаджаных з раствораў з тыямачавінай і сахарынам, такія даследаванні праводзіліся ў [6, 9]. Устаноўлена, што ў радзе выпадкаў колькасць серы ў плёнцы перавышае мяжу яе растваральнасці ў цвёрдых растворах з адпаведнымі металамі. Пытанне аб тым, ці ўваходзіць сера ў крышталічную рашотку сплаву, утвараючы цвёрды раствор, ці існуе ў выглядзе хімічных злучэнняў з металічнымі кампанентамі сплаву або ў свабодным стане (элементарная сера) патрабуе далейшага вывучэння. Для даследаваных намі плёнак было ўстаноўлена, што колькасць серы ў іх павялічваецца з павелічэннем канцэнтрацыі тысямікарбазіду ў раствору. Пры канцэнтрацыі яго 0,3 г/л у плёнцы змяшчаецца каля 1% серы.

Літаратура

1. Суцягіна А. А., Горбунова К. М. ЖФХ, 35, № 11, 1961.
2. Ильющенко Л. Ф., Костюк-Кульгаўчук Л. П. Весті АН БССР, сер. фіз.-мат. навук, № 1, 1967.
3. Ильющенко Л. Ф., Галковская М. М. Вычислительная техника. Изд. «Наука и техника», Минск, 1964.
4. Cockett G. H., Spenser-Timms E. S. J. Electrotechn. Soc., 108, № 9, 1961.
5. Freitag W. O., Mathias J. C., Di Giulio G. D. J. Electrotechn. Soc., 111, № 1, 1964.
6. Politycki A., Gottgart H. Z. Angew. Phys., 14, Н. 6, 1962.
7. Luborsky F. E. J. Appl. Phys., 38, № 3, 1967.
8. Freitag W. O., Di Giulio G. D. J. Electrotechn. Soc., 113, № 5, 1966.
9. Smith R. S., Godycki L. E., Lloyd J. C. J. Electrotechn. Soc., 108, № 10, 1961.

Институт физики твёрдого
тела и полупроводников
АН БССР

Поступило в редакцию 6.VIII 1968

УДК 546.791.6 : 535.343.2

А. І. КАМЯК, Л. В. ВАЛАДЗЬКО

**АНАЛІЗ ТОНКАЙ СТРУКТУРЫ
АБСАРБЦЫЙНЫХ СПЕКТРАУ КРЫШТАЛЯУ
НІТРАТАУ УРАНІЛУ ПРЫ 77 °К**

У цяперашні час існуюць два пункты погляду на прыроду абсарбцыйных спектраў уранілавых злучэнняў. Адпаведна аднаму з іх, спектры паглынання тлумачацца пераходамі з ніжняга электроннага стану іона уранілу на кампаненты трыплета верхняга ўзбуджанага электроннага стану. Другі пункт погляду, які, на нашу думку [1], з'яўляецца больш праўдападобным, зыходзіць з таго, што ў абсарбцыйных спектрах уранілавых злучэнняў праяўляюцца пераходы ў некалькі (не менш чатырох) узбуджаных электронных станаў іона уранілу. Тонкая структура асобных электронных станаў звязана з аптычнымі пераходамі на хістальныя падузроўні малекулы комплексу ці на падузроўні крышталічнай рашоткі.

З мэтай праверкі апошняй гіпотэзы аб наяўнасці некалькіх узбуджаных электронных станаў у структурнай вобласці спектра паглынання уранілавых злучэнняў мы правялі даследаванне абсарбцыйных спектраў крышталюў нітратаў уранілу ў натуральным і палярызаваным святле пры 77 °К. Аб'ектамі вывучэння служылі крышталі шасцівоннага нітрата уранілу і рубідыйуранілнітрату. Запіс спектраў паглынання праводзіўся на спектрафотаметрычных устаноўках, якія мы апісалі ў [2, 3].

З мэтай лепшага супастаўлення спектраў паглынання абодвух крышталюў мы на рыс. 1 прывялі іх умоўную карціну ў выглядзе ліній, даўжыня якіх характарызуе каэфіцыент малярнай экстынкцыі. На рыс. 2 паказана доўгахвалевая вобласць спектра паглынання крышталю $UO_2(NO_3)_2 \cdot 6H_2O$, запісаная ў палярызаваным святле пры двух становішчах аналізатара (галоўная плоскасць прапускання ўздоўж бісектрысы вострага вугла і перпендыкулярна ёй). На рыс. 3 прыведзена кароткахвалевая вобласць спектра паглынання таго ж крышталю, запісаная ў натуральным святле. Запіс спектра праводзіўся па двухпрамянёваму метаду на спектрафотаметрычнай устаноўцы [3], пабудаванай на базе ДФС-8. Сувяз паміж частотамі ніжняга і верхніх узбуджаных электронных станаў даследуемых крышталюў паказана ў табл. 1 і 2. Для спектраў люмінесценцыі прыведзена толькі частка назіраемых частот. Зорачкамі адзначаны лініі, якія паўтараюцца ў наступных групам.

Для выдзялення першага ўзбуджанага электроннага стану мы карысталіся правіламі люстэркавай сіметрыі Леўшына і дыхраізмам паглынання ліній. Паколькі для інтэрпрэтацыі ліній паглынання істотнай з'яўляецца палярызацыя апошніх, былі вывучаны спектры паглынання арыентаваных крышталюў у палярызаваным святле. Напрамак распаўсюджвання палярызаванага святла быў перпендыкулярны грані 010 у крышталі $UO_2(NO_3)_2 \cdot 6H_2O$.

Таблиця 1

Частоты, см^{-1} , спектрау паглынання і люмінесценцыі крыштала шасціводнага нітрату уранілу пры 77°К

Люмінесценцыя	Паглыннанне				Адцясенне
	20589	21488	23381	27210	
20588	20589	21488	23381	27210	ν_0
24	31*				
94	74	50	75	83*	$\nu_2 \text{UO}_2^{2+}$
220*	187				$\nu_2 \text{UO}_2^{2+}$
253*	234		204		$\nu_2 \text{UO}_2^{2+}$
279	278		265	271	
415*				417*	
663*	686*		642*		
714	708*				$\nu_5 \text{ONO}_2$
865*	726*	700*	712*	714*	$\nu_1 \text{UO}_2^{2+}$
758*	752*	761*	760*		$\nu_3 \text{ONO}_2$
816*			813		$\nu_6 \text{ONO}_2$
1043	1047*				$\nu_2 \text{ONO}_2$

Таблиця 2

Частоты, см^{-1} , спектрау паглынання і люмінесценцыі крыштала рубідыйуранілнітрату пры 77°К

Люмінесценцыя	Паглыннанне				Адцясенне
	21193	21790	23658	27607	
21193	21193	21790	23658	27607	ν_0
24		51		31	
149			104		
229*	188		178		$\nu_2 \text{UO}_2^{2+}$
252*	230	252			$\nu_2 \text{UO}_2^{2+}$
		302			
		479			
891*	775*	752*	750*	740*	$\nu_1 \text{UO}_2^{2+}$

Пры даследаванні структуры спектра паглынання можна заўважыць, што частоты асобных ліній выдзеленых электронных станаў можна ўявіць у выглядзе роўнасці:

$$\nu = \nu_{\text{эд}} + n\nu_{1\text{хст}} + m\nu_{2\text{хст}} + \dots,$$

дзе $\nu_{\text{эд}}$ —частата электроннага пераходу; ν_1 і ν_2 —частоты хістання іона уранілу і іншых лігандаў, каардынаваных у экватарыяльнай плоскасці; $n, m = 0, 1, 2, 3 \dots$

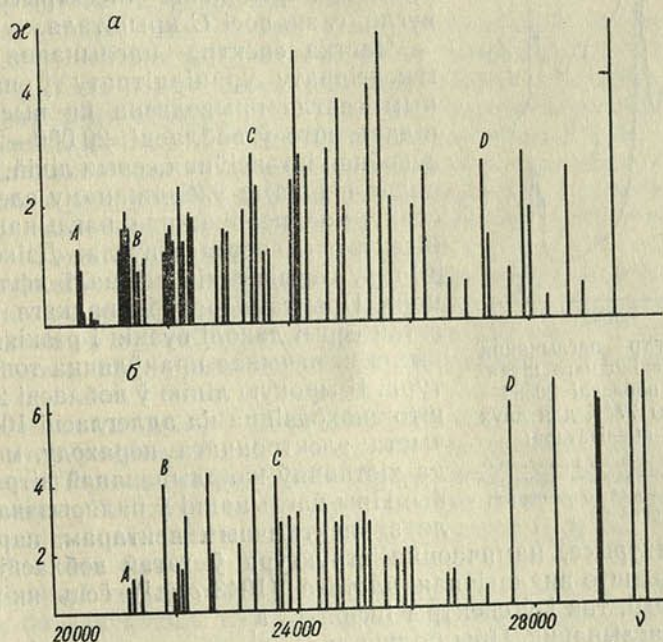
Частата 20589 см^{-1} спектра паглынання супадае з частотой кароткахвалевай мяжы спектра люмінесценцыі. Яна, натуральна, адпавядае чыста электроннаму пераходу ў першы ўзбуджаны стан. Велічыня рознасці паміж гамалагічнымі групамі ў гэтым электронным стане роўная 726 см^{-1} і вызначае частату поўнасіметрычнага валентнага хістання ν_1

іона уранілу. Памяншэнне дадзенай частаты $\tilde{\nu}$ параўнанні з асноўным станам глумачыцца аслабленнем квазіпругкай пастаяннай пры ўзбуджэнні малекулы ўранілнітрату.

Калі выкарыстаць лінейную і сіметрычную мадэль трохатамнай групы UO_2^{++} , то адпаведна з тэорыяй у гарманічным прыбліжэнні можна лічыць справядлівымі адносіны

$$\frac{\nu_3}{\nu_1} = \sqrt{1 + \frac{2m}{M}} = 1,0651,$$

дзе m — маса атама кіслароду; M — маса атама урану; ν_1 і ν_3 — частоты сіметрычнага і антысіметрычнага хістанняў іона уранілу. Некаторыя



Рыс. 1. Спектр паглынання крышталю шасціводнага нітрату уранілу (а) і крышталю рубідыйуранілнітрату (б) пры 77°K :

A, B, C, D — лініі, якія адпавядаюць чыста электронным пераходам ва ўзбуджаны стан

адхіленні ад гэтай велічыні павінны сведчыць аб змяненні параметраў уранілавай групы за кошт узнікнення донарна-акцэптарных узаемадзеянняў з лігандамі ў экватарыяльнай плоскасці. У рабоце [4] прыведзены гэтыя адносіны ў спектрах люмінесценцыі для 12 злучэнняў уранілу. Сярэдняе значэнне атрыманых адносін роўна 1,09 з адхіленнем у 0,01—0,02, а адносіны $\nu_1/\nu'_1 = 1,2$. Калі лічыць, што ва ўзбуджаным стане іон уранілу захоўвае сваю форму, то, відаць, адносіны ν'_3/ν'_1 таксама павінны быць блізкія да 1,09. Такім чынам, аўтары [4] знайшлі ў спектры паглынання $\text{K}_4[\text{UO}_2(\text{CO}_3)_3]$ частату ν'_3 антысіметрычных валентных хістанняў іона уранілу, роўную 753 cm^{-1} .

Прымяняючы гэты метад да нашага выпадку, мы павінны былі б атрымаць частату антысіметрычных хістанняў іона уранілу UO_2^{++} у першым узбуджаным электронным стане, роўную 791 cm^{-1} . Назіраемую ж частату лепш за ўсё аднесці не да дэфармацыйных хістанняў іона UO_2^{++} , а да хістанняў каардынаванай нітратнай групы. Аналагічная паласа ёсць як у спектры люмінесценцыі [5] (758 cm^{-1}), так і ў спектры інфрачырвонага паглынання (750 cm^{-1}) гэтага злучэння. Частату 708 cm^{-1} па

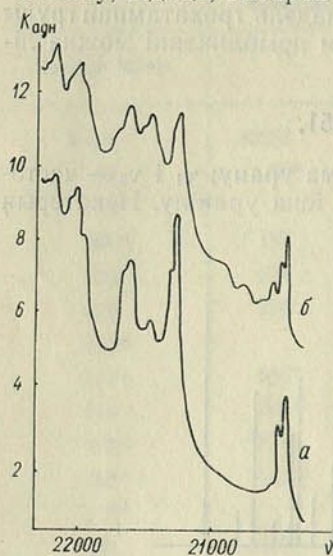


Рис. 2. Спектр паглынання крышталю шасціводнага нітрату уранілу ў вобласці 20589—22250 см^{-1} пры 77°К для двух становішч аналізатара:

а — галоўная плоскасць праніскання паралельна бісектрысе вострага вугла аптычных восяў; б — перпендыкулярна ёй

вострай бісектрысе, намячаецца структура ў гэтай вобласці. Дастаткова сказаць, што аналагічная частата (1043 см^{-1}) ёсць як у спектры люмінесцэнцыі, так і ў спектры інфрачырвонага паглынання. Пры больш дэталёвым назіранні за лініяй 1047 см^{-1} высветлілася, што яна з'яўляецца дублетам 1034 і 1056 см^{-1} . Слабая лінія, што знаходзіцца на адлегласці 686 см^{-1} ад частаты электроннага пераходу, відаць, адносіцца таксама да хістанняў нітратнай групы. Акрамя таго, у вобласці трэцяй лініі першай серыі мы назіраем састаўную частату 1394 см^{-1} (708+686 см^{-1}), якая праяўляецца з малой інтэнсіўнасцю. Перыядычнасць у вобласці першай серыі назіраецца да 4—5 квантаў поўнасіметрычных валентных хістанняў.

Пасля другой лініі першага ўзбуджанага стану, якая належыць поўнасіметрычным хістанням іона UO_2^{++} , пачынаецца новая серыя ліній, якая належыць другому ўзбуджанаму электроннаму стану. Падставай для такога аднясення служыць форма палос, велічыня паглынання і іх паводзіны ў палярызаваным святле. Паглынне ў гэтай серыі ліній

аналагічных прычынах мы адносім таксама да хістанняў каардынаваных нітратных груп. Значыць, частата антысіметрычных валентных хістанняў, відаць, забаронена правіламі адбору і не праяўляецца ў спектры паглынання. Частоты 187 і 234 см^{-1} мы адносім да дэфармацыйных хістанняў іона уранілу ва ўзбуджаным электронным стане. Лініі, якія адпавядаюць поўнасіметрычным валентным хістанням іона уранілу, больш рэзкія ў паглыннанні, калі электрычны вектар падаючага на крышталь святла мае напрамак, паралельны бісектрысе вострага вугла, г. зн. восі С крышталю.

Частка спектра паглынання крышталю гексагідрату уранілнітрату ў палярызаваным святле прыведзена на рыс. 2, з якога відаць, што ў вобласці 20000—21500 см^{-1} асноўная інтэнсіўная серыя ліній, якая адпавядае першаму ўзбуджанаму электроннаму стану, мае пераважнае паглынне ўздоўж бісектрысы вострага вугла. Дзіке і Дункан [6] гэту серыю ліній назвалі «флуарэсцэнтнай». Пры тэмпературы вадкага азоту лініі гэтай серыі даволі вузкія і рэзкія. У некаторых з іх пачынае праяўляцца тонкая структура. Шырокую лінію ў вобласці 21636 см^{-1} , што знаходзіцца на адлегласці 1047 см^{-1} ад чыста электроннага пераходу, мы адносім да хістанняў каардынаванай нітратнай групы. Пры паглыннанні ў палярызаваным святле з электрычным вектарам, паралельным

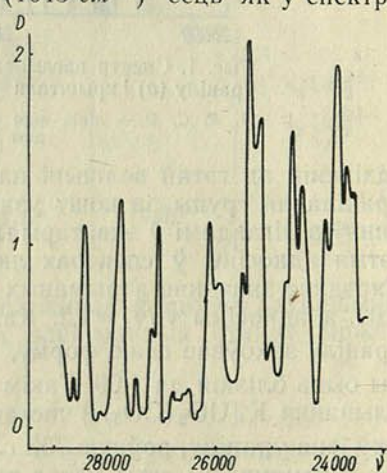


Рис. 3. Спектр паглынання крышталю $\text{UO}_2(\text{NO}_3)_2 \cdot 6\text{H}_2\text{O}$ у вобласці частот ν 24000—29000 см^{-1}

выражана больш моцна ў тым выпадку, калі электрычны вектар накіраван перпендыкулярна бісектрысе вострага вугла; дыхраізм з'яўляецца адваротным дыхраізму паглынання першай серыі ліній. Як па колькасці ліній, так і па іх форме, велічыні каэфіцыента паглынання, палярызацыі гэта серыя моцна адрозніваецца ад першай. Пачаткам яе трэба лічыць лінію 21488 см^{-1} , што супадае з пачаткам «магнітнай» серыі па тэрміналогіі Дзіке і Дункана, хоць паводзіны ліній у магнітным полі для дадзенага крышталю не вывучаліся ў [6]. Перыядычнасць гэтай серыі паўтаранна з частатой 700 см^{-1} , што, відаць, вызначае велічыню поўнасіметрычных валентных хістанняў іона уранілу ў другім узбуджаным стане.

Пасля трэцяй лініі другой серыі пачынаецца новая серыя ліній (23381 см^{-1}), якая, відаць, адносіцца да трэцяга ўзбуджанага электроннага стану. Гэта серыя ліній мае параўнальна большыя каэфіцыенты паглынання (рыс. 1, а), а самі лініі дастаткова шырокія; такім чынам, вымярэнне дыхраізму тут недастаткова надзейнае. У пачатку гэтай серыі ёсць накладанне трох электронных пераходаў, што прыводзіць да адносна большага сумарнага каэфіцыента паглынання. Тут можна заўважыць рад ліній, якія належаюць, відаць, да хістанняў нітратных груп ($642, 760, 813\text{ см}^{-1}$). Гэта серыя ліній, па тэрміналогіі Дзіке і Дункана, адносіцца да «дыфузнай», хоць па форме ліній і велічыні паглынання яе нельга параўнаць з серыяй аднавосных крышталюў у аналагічнай вобласці. Перыядычнасць яе паўтаранна прыкладна 712 см^{-1} і прасочваецца яна да 5—6 квантаў поўнасіметрычных валентных хістанняў іона уранілу.

Практычна свабоднай ад накладання ліній усіх астатніх серыі з'яўляецца «ультрафіялетавая» серыя, пачаткам якой трэба лічыць лінію 27810 см^{-1} . Перыядычнасць паўторнасці галаўных ліній гэтай серыі роўна прыкладна 714 см^{-1} і назіраецца да 3 квантаў поўнасіметрычнага валентнага хістання, пасля чаго рэзка ўзрастае каэфіцыент паглынання, што з'яўляецца вынікам узбуджэння электронных абалонак лігандаў [1]. Лініі гэтай серыі даволі рэзкія і вузкія і лёгка вызначаюцца па спектру, бо адчуваюць найменшае ўзрушэнне з боку папярэдніх электронных станаў.

Спектр паглынання рубідыйуранілнітрату пры тэмпературы вадкага азоту прадстаўлен на рыс. 1, б, дзе вышыня адпаведнай лініі характарызуе малярны каэфіцыент экстынкцыі. Чыста электронны пераход спектра паглынання крышталю характарызуецца частатой 21193 см^{-1} , якая рэзанансна супадае з першай лініяй спектра люмінесценцыі. Ён мае вельмі малы каэфіцыент паглынання і часткова палярызаван перпендыкулярна аптычнай восі крышталю, што добра адпавядае яго палярызацыі ў спектры люмінесценцыі. Як электронны пераход, так і частата поўнасіметрычных валентных хістанняў палярызаваны ў спектры люмінесценцыі перпендыкулярна аптычнай восі крышталю. У вобласці чыста электроннага пераходу выяўлены рэзка палярызаваныя палосы паглынання, якія знаходзяцца ад частаты чыста электроннага пераходу на адлегласці 188 см^{-1} (перпендыкулярна аптычнай восі крышталю) і 230 см^{-1} (паралельна аптычнай восі крышталю). Гэтыя частоты трэба, відаць, аднесці да дэфармацыйных хістанняў іона уранілу, калі меркаваць па іх палярызацыі, паколькі ў спектры люмінесценцыі частоты дэфармацыйных хістанняў таксама палярызаваны па-рознаму.

Такім чынам, структура спектра і палярызацыя ліній пры пераходах у верхні ўзбуджаны стан аналагічныя структуры спектра люмінесценцыі пры пераходах у ніжні неўзбуджаны стан. Некаторае памяншэнне частот дэфармацыйных хістанняў у верхнім узбуджаным стане на 30—

35 см^{-1} тлумачыцца памяншэннем квазіпругкай пастаяннай пры ўзбуджэнні іона уранілу.

У вобласці 21790 см^{-1} пачынаецца моцная шырокая лінія, якая не дае магчымасці прасачыць за перыядычнасцю першай серыі. Можна толькі меркаваць, што слабая лінія 21968 см^{-1} , якая знаходзіцца ад частаты чыста электроннага пераходу на адлегласці 775 см^{-1} , з'яўляецца поўнасіметрычным валентным хістаннем іона уранілу ў першым узбуджаным электронным стане. Частата 21790 см^{-1} дае пачатак новай серыі, якая паўтараецца з перыядычнасцю 752 см^{-1} . Палосы гэтай серыі праўляюцца пры двух напрамках электрычнага вектара паглынаемага святла — уздоўж аптычнай восі крышталю і перпендыкулярна ёй. У спектры, палярызаваным перпендыкулярна на восі крышталю, паглыннанне больш моцнае і структура больш багатая, чым у кампаненце, паралельнай аптычнай восі. Пачатак гэтай серыі супадае з «магнітнай» серыяй Дзіке і Дункана.

У вобласці «магнітнай» серыі можна прасачыць за радам слабых ліній з частотамі 51, 252, 302, 479 см^{-1} , сярод якіх, відаць, знаходзяцца дэфармацыйныя хістанні іона уранілу і хістанні крышталічнай рашоткі.

Пасля трэцяй лініі «магнітнай» серыі пачынаецца новая серыя ліній (23658 см^{-1}), якая па форме і велічыні каэфіцыентаў паглынання іх займае асобае месца. З-за вялікай шырыні ліній і малых каэфіцыентаў паглынання яна была названа ў [6] «дыфузнай». Заўважыць тут якія-небудзь адрозненні ў палярызаваным паглыннанні не ўдаецца з-за дастаткова вялікай размытасці ліній. Перыядычнасць паўторнасці галаўных ліній серыі 750 см^{-1} . Акрамя таго, унутры яе можна выявіць рад слабых ліній, якія адносяцца да хістанняў нітратных груп ці крышталічнай рашоткі.

Зусім асобна ад усіх астатніх знаходзіцца «ультрафіялетава» серыя, пачаткам якой можна лічыць лінію 27607 см^{-1} . Галаўная лінія гэтай серыі даволі рэзкія і шырокія, паўтараюцца з частатой поўнасіметрычных валентных хістанняў іона уранілу, роўнай у сярэднім 740 см^{-1} .

Такім чынам, на падставе аналізу спектраў паглынання $\text{UO}_2(\text{NO}_3)_2 \cdot 6\text{H}_2\text{O}$ і $\text{RbUO}_2(\text{NO}_3)_3$ можна заключыць, што ў структурнай вобласці пры тэмпературы вадкага азоту можна выдзеліць бадай чатыры ўзбуджаных электронных станы. Пры больш нізкіх тэмпературах (вадкім вадародзе ці геліі) павінна адбывацца далейшая дэталізацыя ліній у спектрах паглынання. Вымярэнні пры адпаведных тэмпературах будуць вельмі карыснымі для інтэрпрэтацыі ліній тонкай структуры ў кожным узбуджаным электронным стане, што з'явіцца прадметам далейшага вывучэння.

У заключэнне аўтары выражаюць сардэчную падзяку акадэміку АН БССР А. Н. Сеўчанка за цікавасць да праводзіўшыхся даследаванняў.

Літаратура

1. Володько Л. В., Комяк А. И., Слепцов Л. Е. Опт. и спектр., 23, 730, 1967.
2. Володько Л. В., Комяк А. И., Слепцов Л. Е. ЖПС, 3, 134, 1965.
3. Володько Л. В., Комяк А. И., Ситников В. М. ЖПС, 10, 345, 1968.
4. Горбенко-Германов Д. С., Зенкова Р. А. Опт. и спектр., 20, 842, 1966.
5. Володько Л. В. Опт. и спектр., 19, 751, 1965.
6. Dicke G. H., Dunkan A. V. F. Spectroscopic Properties of Uranium Compounds. N. Y., 1949.

Белорусский государственный университет им. В. И. Ленина

Поступило в редакцию 6.11.1968

КАРОТКІЯ ПАВЕДАМЛЕННІ

УДК 537.311.33

Н. Н. СИРОТА, Ц. З. ВИТКИНА, Э. Е. МАТЯС

**МАГНИТНАЯ ВОСПРИИМЧИВОСТЬ
 ТВЕРДЫХ РАСТВОРОВ СИСТЕМЫ GaSb—GaAs**

Имеется ряд работ [1—5], посвященных исследованию магнитных свойств полупроводниковых соединений GaSb, GaAs. Однако магнитные свойства их твердых растворов оставались неизученными. В настоящей работе была измерена магнитная восприимчивость непрерывного ряда взаимных твердых растворов на основе GaAs, GaSb. Измерения проводились по методу Гуи в интервале температур 170—600 °К. Порошкообразные образцы компактно засыпали в тонкостенные открытые сверху

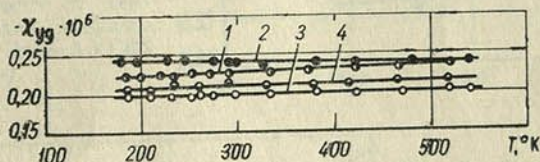


Рис. 1. Температурная зависимость удельной магнитной восприимчивости некоторых составов твердых растворов системы GaSb—GaAs ($H = 6500$ э):

1 — GaSb; 2 — 0,12 GaAs, 0,88 GaSb; 3 — 0,35 GaAs, 0,65 GaSb; 4 — 0,84 GaAs, 0,16 GaSb

кварцевые ампулы $\varnothing 4$ мм. Высота образца составляла 50 мм. Измерения выполнялись в вакууме 10^{-4} мм рт. ст. Погрешность измерений не превышала 4%. Состав и гомогенность образцов контролировались рентгеноструктурным и химическим анализами.

Результаты измерений приведены на рис. 1, 2. Поскольку изменение диамагнитной восприимчивости в исследуемом температурном интервале составляет не более 10% (рис. 1), можно предположить, что для всех

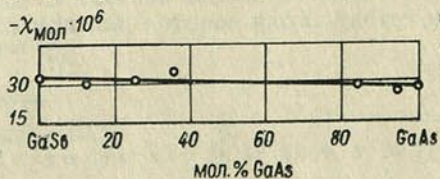


Рис. 2. Зависимость молярной диамагнитной восприимчивости от состава системы твердых растворов GaSb—GaAs ($H = 6500$ э, $T = 300$ °К)

образцов измеренная восприимчивость является восприимчивостью решетки [1, 2].

Концентрационная зависимость молярной восприимчивости непрерывного ряда твердых растворов исследуемой системы линейна (рис. 2).

Этот результат согласуется с предположением Матиаша [3] о линейной зависимости $\chi_{\text{мол}}$ от состава в системе твердых растворов соединений $A^{\text{III}}B^{\text{V}}$ при замещении атома B .

Буш [1] обратил внимание на то, что восприимчивость решетки полупроводниковых соединений зависит от общего числа электронов Z . Нами было обнаружено, что с ростом Z молярная диамагнитная восприимчивость увеличивается в ряду твердых растворов от GaAs к GaSb. Обращает на себя внимание тот факт, что для соединений с общим $A^{\text{III}}(B^{\text{V}})$ компонентом и их твердых растворов соответствующие точки ложатся в хорошем приближении на прямую линию.

Зависимость ширины запрещенной зоны от $\chi_{\text{мол}}$ в ряду полупроводниковых соединений GaP, GaAs, GaSb и их взаимных твердых растворов практически линейна.

Литература

1. Busch G. A., Kern R. Helv. Phys. Acta, **29**, № 3, 189, 1956; **32**, № 1, 24, 1959.
2. Matyáš M. Чехосл. физ. журн., **V12**, № 11, 838, 1962.
3. Matyáš M. Чехосл. физ. журн., **V11**, № 6, 461, 1961.
4. Глазов В. М., Чижевская С. Н. ФТТ, **6**, № 6, 1964.
5. Römelt G., Geist D. Z. angew. Phys., **V.14**, № 2, 1962.

Институт физики твердого тела
и полупроводников АН БССР

Поступило в редакцию 8.V 1968

УДК 537.311.33

Н. Н. СИРОТА, В. П. ШИМАНСКАЯ, Ц. З. ВИТКИНА

МАГНИТНАЯ ВОСПРИИМЧИВОСТЬ ТВЕРДЫХ РАСТВОРОВ СИСТЕМЫ ZnS—CdS

Ранее исследовались магнитные свойства соединений ZnS и CdS [1—3]. Однако магнитные свойства твердых растворов на основе сульфидов цинка и кадмия до сих пор не изучены. В настоящей работе была измерена магнитная восприимчивость непрерывного ряда твердых растворов системы ZnS—CdS со структурой типа вюрцит.

Измерения проводились по методу Гуи при напряженности магнитного поля 4500 и 6500 э при комнатной температуре. Порошкообразные образцы компактно засыпали в тонкостенные открытые сверху кварцевые ампулы Ø 4 мм. Высота образца составляла 50 мм. Измерения выполнялись в вакууме 10^{-4} мм рт. ст.

Рис. 1. Зависимость удельной магнитной восприимчивости от температуры T , °К для твердого раствора состава 0,7 ZnS—0,3 CdS ($H=6500$ э)

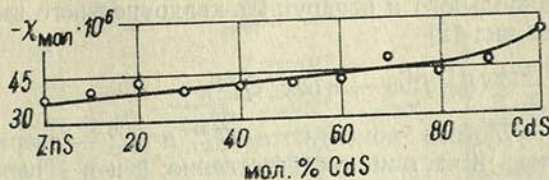
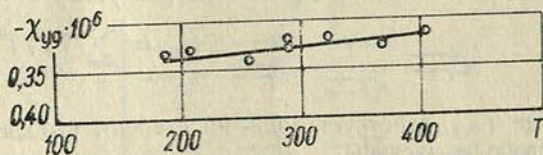


Рис. 2. Изменение молярной магнитной восприимчивости от состава системы ZnS—CdS ($H=6500$ э, $T=293$ °К)

На отдельных образцах была измерена магнитная восприимчивость в интервале температур 170—450 °К. Малое изменение удельной магнитной восприимчивости с изменением температуры (рис. 1) дает возможность предполагать, что это восприимчивость решетки [2].

Из рис. 2 видно, что значения молярной магнитной восприимчивости системы ZnS—CdS увеличиваются с ростом концентрации сернистого кадмия, что, по-видимому, обусловлено увеличением общего числа электронов [4]. На кривой изменения $-\chi_{мол}$ от состава можно отметить незначительное отклонение от аддитивной прямой, которое наблюдается и в других квазибинарных системах $A^{IV}B^{VI}$ [5].

Литература

1. Matyáš M. Чехосл. физ. журн., 12, -838, 1962.
2. Курик М. В., Гаваленко М. П., Витриховский М. И. УФЖ, 9, № 11, 1964.
3. Mikhail N., Agami F. I. J. Phys. Chem. Sol., 27, № 6/7, 909, 1966.
4. Busch G. A., Kern R. Helv. Phys. Acta, 29, № 3, 189, 1956; 32, № 1, 24, 1959.
5. Потыкевич И. В., Гавришак И. В., Раренко И. М. УФЖ, 8, № 11, 1963.

Институт физики твердого тела
и полупроводников АН БССР

Поступило в редакцию 24.V 1968

В. И. БЕЛОУСОВА

СПЕКТРЫ НИЖНИХ УРОВНЕЙ ЯДЕР $\text{Cd}^{111,113}$, $\text{Te}^{123,125}$, $\text{Xe}^{127,129}$

Для описания свойств нижних уровней в ядрах с нечетным A часто применяется модель, учитывающая взаимодействие нечетного нуклона с возбужденными состояниями четного остова.

Гамильтониан такой системы можно представить в виде

$$H = H_{\text{ост}} + H_{\text{ч}} + H_{\text{вз}},$$

где $H_{\text{ост}}$ — гамильтониан остова; $H_{\text{ч}}$ — гамильтониан частицы, движущейся в усредненном потенциале, созданном остовом; $H_{\text{вз}}$ — гамильтониан взаимодействия внешнего нуклона с остовом.

В общем виде [1] это взаимодействие можно представить в виде суммы скалярных произведений тензоров ранга k :

$$H_{\text{вз}} = \sum_k T_{\text{ост}}^{(k)} T_{\text{ч}}^{(k)},$$

где $T_{\text{ост}}^{(k)}$ действует лишь на степени свободы остова, а $T_{\text{ч}}^{(k)}$ — на степени свободы частицы.

В случае учета диполь-дипольного и квадруполь-квадрупольного взаимодействия гамильтониан имеет вид [2]

$$H_{\text{вз}} = -\xi (I_{\text{ост}}^{(1)} j_{\text{ч}}^{(1)}) - \eta (Q_{\text{ост}}^{(2)} Q_{\text{ч}}^{(2)}),$$

где $I_{\text{ост}}^{(1)}$ и $j_{\text{ч}}^{(1)}$ — операторы углового момента, а $Q_{\text{ост}}^{(2)}$ и $Q_{\text{ч}}^{(2)}$ — операторы квадрупольного момента остова и частицы соответственно; ξ и η — параметры, описывающие силу диполь-дипольного и квадруполь-квадрупольного взаимодействий соответственно. Поскольку относительно природы возбужденных состояний остова не делается конкретных предположений, матричные элементы $\langle I_{\text{ост}}' \| Q_{\text{ост}}^{(2)} \| I_{\text{ост}} \rangle$ для различных $I_{\text{ост}}'$ и $I_{\text{ост}}$ рассматриваются как параметры, причем

$$\chi_1 = \eta \langle 0 \| Q_{\text{ост}}^{(2)} \| 2 \rangle,$$

$$\chi_2 = \eta \langle 2 \| Q_{\text{ост}}^{(2)} \| 2 \rangle.$$

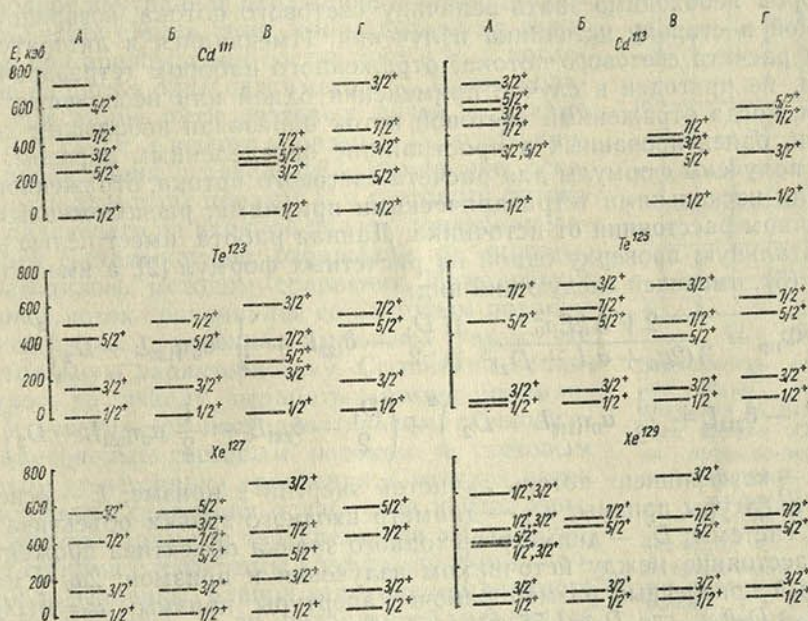
В настоящей работе данная модель применяется для расчета спектра нижних уровней ядер $\text{Cd}^{111,113}$, $\text{Te}^{123,125}$ и $\text{Xe}^{127,129}$.

Нечетный нейтрон в этих ядрах может находиться на близко лежащих одночастичных уровнях $2d_{3/2}$ и $3s_{1/2}$. Состояния остова ограничиваются основным и первым возбужденным со спином 2^+ . В представлении волновых функций типа $\psi_{\text{ост}} \psi_{\text{ч}}$ строилась матрица энергии. Посредством диагонализации матрицы энергии были найдены собственные значения уровней данных ядер при различных параметрах ξ , χ_1 , χ_2 и одночастичных энергиях $E(d_{3/2})$ и $E(s_{1/2})$, приведенных в таблице. Результаты расчета и сравнение с экспериментальными данными [3, 4] приведены на рисунке. Здесь же для сравне-

Таблица
 Параметры для расчета уровней ядер

Ядро	ξ	χ_1	χ_2	$E_{3/2} - E_{1/2}$
Cd ¹¹¹	0,26	0,1	0,3	0,4
Cd ¹¹³	0,264	0,2	0,1	0,3
Te ¹²³	0,14	0,1	0,1	0,2
Te ¹²⁵	0,2	0,2	0,2	0,2
Xe ¹²⁷	0,23	0,2	0,1	0,2
Xe ¹²⁹	0,13	0,3	0,4	0,2

ния приведены результаты расчета спектров уровней этих ядер в модели парных корреляций [5] и трехфононном приближении обобщенной модели [6].



Спектры уровней ядер Cd^{111,113}, Te^{123,125}, Xe^{127,129}.

А — эксперимент; Б — расчеты по обобщенной модели [3]; В — расчеты по модели парных корреляций [5]; Г — результаты настоящей работы

Все рассматриваемые модели удовлетворительно согласуются между собой в предсказании порядка следования нижних возбужденных уровней. Согласие рассчитанных спектров с экспериментальными, за исключением ядра Xe¹²⁹, неплохое.

Литература

1. De Shalit A. Phys. Rev., 122, 1530, 1961.
2. Thankappan V. K., True William W. Phys. Rev., 137, B793, 1965.
3. Д желепов Б. С., Пе кер Л. К., Сергеев В. О. Схемы распада радиоактивных ядер. М.—Л., 1963.
4. Graeffe G., Walters W. B. Phys. Rev., 153, 1321, 1967.
5. Kisslinger L. S., Sorensen R. A. Rev. Mod. Phys., 35, 853, 1963.
6. Glendenning N. K. Phys. Rev., 119, 213, 1960.

Б. Ю. ХАНОХ

О РАСЧЕТЕ СВЕТОВОГО ПОТОКА,
 ОТРАЖЕННОГО ТЕТРАЭДРИЧЕСКОЙ ПРИЗМОЙ

Во многих оптико-электронных приборах применяются стеклянные уголкового отражатели — тетраэдрические призмы. При расчетах таких приборов необходимо знать величину светового потока, возвращаемого призмой в сторону источника излучения. Имеющийся в литературе [1] метод расчета светового потока, отраженного набором тетраэдрических призм, не пригоден в случае применения одной или небольшого числа призм, когда отраженный световой поток образован небольшим числом пучков, ориентированных в пространстве определенным образом. В [2] были получены формулы для расчета светового потока, отраженного одной или несколькими тетраэдрическими призмами, расположенными на различном расстоянии от источника. Данная работа имеет целью экспериментальную проверку одной из расчетных формул [2], а именно формулы (6), имеющей следующий вид:

$$\Phi_{\text{пр}} = \frac{2 \sqrt{3} k E a_0^2}{3 (2a_0 + \alpha_0 L + D_2)^2} \left\{ \left(\frac{D_1}{2} - \delta_{123} L + \frac{1}{2} \alpha_0 \eta_{123} L + D_2 \right)^2 + \right. \\ \left. + \left(\frac{D_1}{2} - \delta_{213} L + \frac{1}{2} \alpha_0 \eta_{213} L + D_2 \right)^2 + \left(\frac{D_1}{2} - \delta_{231} L + \frac{1}{2} \alpha_0 \eta_{231} L + D_2 \right)^2 \right\}, \quad (1)$$

где k — коэффициент потерь лучистой энергии в призме; E — освещенность апертуры призмы; D_1 — диаметр входного зрачка объектива приемной системы; D_2 — диаметр выходного зрачка объектива прожектора; L — расстояние между источником излучения и призмой; $2a_0$ — максимальный поперечный размер рабочей апертуры призмы; $\alpha_0 = n (D_3/f_1 + D_3/f_2 + D_3/f_3)$, где $D_3 = 1,56 a_0$, f_1, f_2, f_3 — фокусные расстояния граней 1, 2, 3 (если отражательная грань призмы вогнута со стороны падающих лучей, то $f < 0$, а если выпуклая, то $f > 0$); n — показатель преломления материала призмы; $\delta_{123}, \delta_{213}, \delta_{231}$ — углы отклонения отраженных призмой лучей от направления луча, падающего нормально или почти нормально на фронтальную грань призмы; $\eta_{123}, \eta_{213}, \eta_{231}$ — коэффициенты, учитывающие асимметрию в расхождении отраженных пучков вследствие наклонного падения лучей на отражательные грани.

Экспериментальная проверка формулы (1) производилась на расстоянии $L = 70$ м с призмой, у которой сторона правильной шестиугольной апертуры $a_0 = 40$ мм, отраженные пучки фокусируются ($\alpha_0 < 0$) и угол расходимости каждого пучка после фокусировки больше, чем угол между осями двух симметрично отраженных пучков $\left(\delta_{\text{max}} < |\alpha_0| \left(1 - \frac{1}{2} \eta_{\text{max}} \right) \right)$.

Для проверки формулы (1) измерялись освещенность E входной апертуры призмы и световой поток $\Phi_{\text{пр}}$, возвращенный призмой и регистрируемый приемным устройством, расположенным на одной платформе с источником излучения. Предварительно были измерены необходимые

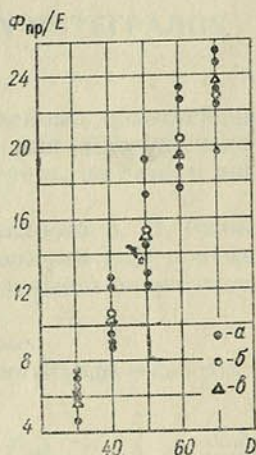
для расчета следующие параметры призмы: отклонение двугранных углов между отражающими гранями призмы от прямого, радиусы кривизны отражающих граней и коэффициенты асимметричной расходимости отраженных пучков η_{klm} .

Измерение ошибок двугранных углов между отражающими гранями призмы производилось автоколлимационным методом, предложенным А. И. Тудоровским [3]. Радиус кривизны отражающих граней измерялся также автоколлимационным методом [4]. Коэффициенты η_{klm} определялись по фотографиям картины отраженных пучков, полученным в натуральную величину путем введения фотобумаги в ход лучей без какой-либо проектирующей оптики. Потери светового потока в призме обусловлены поглощением в толще стекла и частичным отражением от передней грани призмы при преломлении (полагаем, что полное внутреннее отражение происходит без потерь). Для стекла типа крона потери на отражение при преломлении составляют 4%, а поглощение на пути в один сантиметр 1%. Таким образом, при длине пути световых лучей в призме $2h=10,3$ см (h — высота призмы) [5] коэффициент пропускания k равен 0,83. Измерение освещенности апертуры призмы E и светового потока $\Phi_{пр}$, падающего на входной зрачок приемно-передающей системы после отражения от призмы, производилось методом сравнения. Измеряемый световой поток сравнивался со световым потоком от источника сравнения, имеющего такую же спектральную характеристику. Сравнение производилось по сигналу, вырабатываемому приемником излучения при последовательном освещении его измеряемым световым потоком и световым потоком от источника сравнения. Световой поток от источника сравнения ослаблялся нейтральными светофильтрами и зачерненными металлическими сетками с известным коэффициентом ослабления до величины, равной величине измеряемого светового потока, и до ослабителей измерялся фотоэлектрическим люксметром типа Ю-16.

В формуле (1) выделим отношение $\Phi_{пр}/E$. Результаты измерений и расчета этой величины показаны на рисунке. При расчете отношения $\Phi_{пр}/E$ мы пользовались измеренными значениями величин a_0 , δ , L , a_0 и т. д., которые имеют некоторую погрешность измерения. Расчет погрешности значения отношения $\Phi_{пр}/E$ по известным погрешностям a_0 , δ , L , a_0 и т. д. дал значение относительной среднеквадратичной погрешности $\Phi_{пр}/E$, равное 4,5% для $D=70$ мм и 6% для $D=30$ мм. Относительная среднеквадратичная погрешность среднего арифметического экспериментального значения $\Phi_{пр}/E$ оценивается равной $\sim 20\%$.

Из рисунка следует, что в конкретном случае применения формула (1) дала хорошее совпадение с экспериментом для зрачков вплоть до диаметра 70 мм на расстоянии $L=70$ м. Следовательно, предлагаемые в [2] расчетные формулы можно рекомендовать для расчета светового потока, отраженного призмой на входной зрачок приемной системы.

Автор приносит большую благодарность проф. В. Г. Вафиади за ценные замечания и советы.



Зависимость отношения $\Phi_{пр}/E$, см² от диаметра D , мм входного зрачка объектива приемно-передающей системы ($D_1 = D_2 = D$):
 а — измеренные значения $\Phi_{пр}/E$; б — средние арифметические значения каждого ряда измерений; в — расчетные значения $\Phi_{пр}/E$

Литература

1. Кутев Ю. М., Садыкова А. И. Изв. вузов, Приборостроение, № 1, 1966.
2. Ханох Б. Ю. Весті АН БССР, сер. фіз.-мат. навук, № 2, 1968.
3. Тудоровский А. И. ГОИ, 14, в. 112—120, 1941.
4. Афанасьев В. А. Оптические измерения. Геозиздат, М., 1961.
5. Пик Л. И. Геодезия и картография, № 10, 1965.

Белорусский государственный
университет им. В. И. Ленина

Поступило в редакцию 3.X 1968

УДК 517.3

Е. Е. БЕЗЛЮДНЫЙ, Л. В. РАКОВА, Н. Г. СКЛЕПУС

ПРИБЛИЖЕННОЕ ВЫЧИСЛЕНИЕ ДВОЙНЫХ ИНТЕГРАЛОВ ПО МЕТОДУ В. Л. РВАЧЕВА

Вычисление кратных интегралов даже для простейших областей является весьма трудоемкой задачей. Между тем для многих задач прикладного характера необходимо вычислять интегралы по самым разнообразным областям интегрирования.

В настоящей работе на основе метода, предложенного В. Л. Рвачевым, строится практически удобная кубатурная формула для приближенного вычисления двойных интегралов по произвольной многоугольной области интегрирования.

Предлагаемый метод основан на следующей лемме.

Л е м м а: Для любого многочлена второй степени $P(x, y) = a_0 + a_1x + a_2y + a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{12}xy$ справедлива формула

$$\iint_{\Delta ABC} P(x, y) dx dy = \frac{S_{\Delta}}{3} (P_{12} + P_{13} + P_{23}), \quad (1)$$

где ΔABC — треугольная область интегрирования; S_{Δ} — площадь этого треугольника; P_{12} , P_{13} , P_{23} — значения многочлена $P(x, y)$ в точках, соответствующих серединам сторон треугольника.

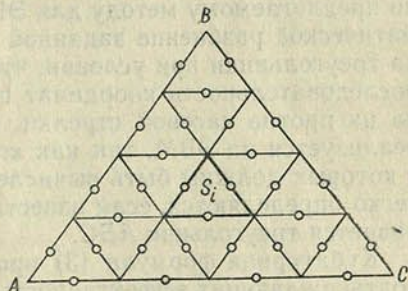
В справедливости формулы (1) можно убедиться непосредственной проверкой.

Разбивая область интегрирования ΔABC на систему элементарных треугольников S_i , площадь которых не превышает наперед заданную величину $\epsilon > 0$, интеграл по этой области можно представить в виде суммы интегралов по элементарным треугольникам.

Разбиение треугольника ABC на систему треугольников может происходить различными способами. В данной работе разбиение осуществляется путем соединения середин сторон треугольника (см. рисунок), в результате чего данный треугольник разбивается на 4 равновеликих треугольника. Применяя этот же способ разбиения к каждому из 4 полученных треугольников, получим 4^2 равновеликих треугольников и т. д.; на n -шаге, который назовем порядком разбиения, получим 4^n равновеликих треугольников.

Для такого разбиения имеет место следующая кубатурная формула:

$$\iint_{\Delta ABC} P(x, y) dx dy = \frac{S_{\Delta}}{3} [P_1 + P_2 + \dots + P_s + 2(P_{11} + P_{12} + \dots + P_{kj})], \quad (2)$$



где P_1, P_2, \dots, P_s — значения полинома $P(x, y)$ в точках, лежащих на сторонах треугольника ABC , а $P_{11}, P_{12}, \dots, P_{kj}$ — в точках, лежащих внутри треугольника ABC , $S_i \triangle$ — площадь элементарного треугольника S_i .

Если в соответствующих точках

$$P_1 = f_1, P_2 = f_2, \dots, P_s = f_s,$$

$$P_{11} = f_{11}, P_{12} = f_{12}, \dots, P_{kj} = f_{kj},$$

то

$$\iint_{\triangle ABC} f(x, y) dx dy = \frac{S_i \triangle}{3} [f_1 + f_2 + \dots + f_s + 2(f_{11} + f_{12} + \dots + f_{kj})] + R(f); \quad (3)$$

здесь $R(f)$ при данном ε удовлетворяет неравенству

$$|R(f)| \leq \frac{1}{8} \varepsilon S_{\triangle} M_0 + \frac{1}{6!} \varepsilon^2 S_{\triangle} M^*,$$

где S_{\triangle} — площадь треугольника ABC ;

$$M_0 = \max \left(\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2}; \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y^2} \right) \text{ в } \triangle ABC;$$

$$M^* = \max \left(\frac{\partial^4 f(x, y)}{\partial x^2 \partial y^2} \right) \text{ в } \triangle ABC.$$

Если областью интегрирования Ω является произвольный многоугольник, то, разбивая его на треугольники ABC , интеграл по многоугольной области можно представить в виде суммы интегралов по треугольным областям интегрирования.

Была составлена программа для вычисления двойных интегралов по предлагаемому методу для ЭВМ «Урал-2», предусматривающая автоматическое разбиение заданной многоугольной области интегрирования на треугольники при условии, что исходная информация задается в виде последовательности координат вершин многоугольника в порядке обхода их против часовой стрелки. Полученная кубатурная формула легко реализуется на ЭВМ, так как координаты узловых точек (см. рисунок), в которых должны быть вычислены значения подынтегральной функции, легко определяются, если известно число треугольников, на которое разбивается треугольник ABC .

Кубатурная формула (3) проверялась на многочисленных примерах, подтверждающих эффективность предлагаемого метода.

Пример 1.

$$I_1 = \int_1^3 \int_0^{3-x} (\ln x + \cos y + 2xy) dx dy = \begin{cases} 6,35565401 & \text{при } \varepsilon = 1, \\ 6,35988775 & \text{при } \varepsilon = 0,07. \end{cases}$$

Значения интеграла I_1 вычислены с помощью таблиц: $I_1 = 6,359886$.

Пример 2.

$$I_2 = \int_0^1 \int_0^{1-x} e^{x+y} dx dy = \begin{cases} 1,0026207 & \text{при } \varepsilon = 1, \\ 1,0000007 & \text{при } \varepsilon = 0,07. \end{cases}$$

Точное значение $I_2 = 1,000000$.

Пример 3.

$$I_3 = \int_4^{4,4} \int_2^{2,6} \frac{1}{xy} dx dy.$$

Точное значение интеграла $I_3 = 0,0250061$; по методу В. Рвачева при $\varepsilon = 0,02$ $I_3 = 0,025006043$; по методу Симпсона при $dx = 0,2$, $dy = 0,3$ $I_3 = 0,025006985$.

Литература

1. Крылов В. И. Приближенное вычисление интегралов. Изд. «Наука», М., 1967.
2. Березин И. С., Жидков Н. Л. Методы вычислений, 1. Изд. «Наука», М., 1966.

Харьковский институт
радиоэлектроники

Поступило в редакцию 1.III 1968

ХРОНІКА

ЮБІЛЕЙНАЯ СЕСІЯ АН БССР

16 снежня 1968 г. адбылася навуковая сесія Акадэміі навук БССР, прысвечаная 50-годдзю Беларускай ССР і Камуністычнай партыі Беларусі.

Пасяджэнне сесіі ўступным словам адкрыў прэзідэнт Акадэміі навук БССР член-карэспандэнт АН СССР, акадэмік АН БССР В. Ф. Купрэвіч. Ён адзначыў, што народ нашай рэспублікі дабіўся вялікіх перамог у будаўніцтве народнай гаспадаркі, развіцці навукі і культуры. У цяперашні час у складзе Акадэміі навук працуе 19 інстытутаў і 9 самастойных аддзелаў і лабараторый, у якіх занята звыш 2500 навуковых супрацоўнікаў. Даследаванні беларускіх вучоных вядомыя далёка за межамі рэспублікі.

Удзельнікаў юбілейнай сесіі вітаў намеснік старшыні Савета па каардынацыі навуковай дзейнасці акадэміі навук саюзных рэспублік пры Прэзідыуме АН СССР В. Д. Новікаў.

З дакладамі аб утварэнні БССР і Кампартыі Беларусі і аб развіцці Беларускай ССР за 50 год выступілі члены-карэспандэнты АН БССР С. П. Маргунскі і Н. В. Каменская.

На сесіі была зачытана прывітальная тэлеграма Акадэміі навук СССР, у якой прэзідэнт АН СССР акадэмік М. У. Келдыш і галоўны вучоны сакратар Прэзідыума АН СССР акадэмік Я. В. Пейве павіншавалі беларускіх вучоных з 50-годдзем БССР і Кампартыі Беларусі, пажадалі новых плённых поспехаў у развіцці навукі.

17 снежня пачала работу юбілейная сесія Аддзялення хімічных навук АН БССР. На сесіі было зроблена пяць дакладаў. Сярод іх даклад акадэміка-сакратара Аддзялення хімічных навук акадэміка АН БССР М. Ф. Ярмоленкі «Развіццё хімічнай навукі ў АН БССР», даклад акадэміка АН БССР К. І. Лукашова і члена-карэспандэнта АН БССР А. С. Махначы «Даследаванні ў галіне навукі аб Зямлі», члена-карэспандэнта АН БССР П. І. Бялькевіча «Уклад белару-

скіх вучоных у навуку аб торфе к 50-годдзю БССР» і іншыя.

17 снежня прайшла таксама юбілейная навуковая сесія Аддзялення біялагічных навук АН БССР. Сесію адкрыў акадэмік-сакратар аддзялення акадэмік АН БССР М. Д. Несцяровіч. Былі заслуханы даклады члена-карэспандэнта АН БССР І. С. Краўчанкі «50 год БССР і КПБ — знамянальная дата ў гісторыі беларускага народа», а таксама даклады акадэміка АН БССР І. А. Булыгіна і члена-карэспандэнта АН БССР С. А. Самцэвіча.

У гэты ж дзень праходзіла юбілейная сесія Аддзялення фізіка-тэхнічных навук. Было заслухана 7 дакладаў. Сесію ўступным словам адкрыў акадэмік-сакратар аддзялення акадэмік АН БССР А. К. Красін.

19 снежня адбылася юбілейная навуковая сесія Аддзялення грамадскіх навук. На сесіі было заслухана шэсць дакладаў па розных праблемах грамадскіх навук. Сярод іх даклады акадэміка-сакратара Аддзялення грамадскіх навук акадэміка АН БССР П. Ф. Глебкі «Вялікая Кастрычніцкая сацыялістычная рэвалюцыя і развіццё грамадскіх навук у Беларусі», акадэміка АН БССР М. Ц. Лынькова «Асноўныя этапы развіцця беларускай савецкай літаратуры за 50 год», а таксама даклады членаў-карэспандэнтаў АН БССР Ф. С. Марцінкевіча, І. С. Краўчанкі, доктара гістарычных навук В. К. Бандарчыка, кандыдата філалагічных навук М. В. Бірылы.

20 снежня праходзіла юбілейная навуковая сесія Аддзялення фізіка-матэматычных навук. У дакладах акадэміка-сакратара аддзялення акадэміка АН БССР Ф. І. Фёдарова «Развіццё даследаванняў па фізіцы ў БССР за 50 год», акадэміка АН БССР Д. А. Супрункі «Развіццё даследаванняў па матэматыцы ў БССР за 50 год» і іншых падводзіліся вынікі навуковых дасягненняў у галіне фізіка-матэматычных навук за гады Савецкай улады.

М. І. ГАЛЕНЧЫК

ЗМЕСТ

МАТЭМАТЫКА

Л. Г. Кругликова, В. И. Крылов. Интерполяционные преобразования последовательностей и улучшение сходимости	5
А. А. Пальцев. О вычислении сферональных функций и их первых производных на ЭВМ. I	19
В. А. Емеличев. О локальных минимумах в одной многоэкстремальной задаче. I	26
В. Н. Абрашин. Сходимость и оценка погрешности метода сеток для некоторых задач в случае гиперболических уравнений	31
Л. П. Примачук. О разрешимости краевой задачи с обратным сдвигом Карлемана	43
В. И. Азаматова. Об исключительном случае одного интегрального уравнения на полуоси	49
В. И. Монастырный. О сопряженности разрешимых подгрупп в мультипликативной группе тела	59
Л. Б. Шнеперман. Представления слабо равномерной связки групп операторами гильбертова пространства	63
А. А. Дадаян. Ткань Кодаци	70

ФІЗІКА

А. И. Болсун, Р. А. Власов, В. К. Гронский, Ф. И. Федоров. Эффект Вавилова—Черенкова для частиц со спинами в гиротропных средах	78
О. С. Иваницкая, И. С. Сягло. К разысканию простых параметров преобразования Лоренца в поле тяготения Шварцшильда	83
А. С. Потупа, В. И. Стражев, Л. М. Томильчик. К проблеме магнитного заряда в электродинамике	89
Л. Г. Мороз, Н. В. Максименко. Анализ амплитуды одномезонного фоторождения в области энергий второго резонанса	97
В. С. Вихренко, В. Б. Немцов, Л. А. Ротт. Уравнения переноса для многокомпонентных систем	102
Л. Ф. Гильюшэнка, Л. П. Касцюк-Кульгаучук, М. М. Галкоўская. Даследаванне магчымаści зніжэння каэрцытуйнай сілы і павышэння каэфіцыента прамавугольнасці пятлі гістэрэзісу электраасаджаных жалезанікелевых плёнак. II	111
А. І. Камяк, Л. В. Валадзько. Аналіз тонкай структуры абсарбцыйных спектраў крышталёў нітрату ўранілу пры 77°K	115

КАРОТКІЯ ПАВЕДАМЛЕННІ

Н. Н. Сирота, Ц. З. Виткина, Э. Е. Матяс. Магнитная восприимчивость твердых растворов системы GaSb—GaAs	121
Н. Н. Сирота, В. П. Шиманская, Ц. З. Виткина. Магнитная восприимчивость твердых растворов системы ZnS—CdS	123
В. И. Белоусова. Спектры нижних уровней ядер $Cd^{111, 113}$, $Te^{123, 125}$, $Xe^{127, 129}$	124
Б. Ю. Ханох. О расчете светового потока, отраженного тетраэдрической призмой	126
Е. Е. Безлюдный, Л. В. Ракова, Н. Г. Склепус. Приближенное вычисление двойных интегралов по методу В. Л. Рвачева	129

ХРОНІКА

Юбилейная сесія АН БССР	132
-------------------------	-----

СОДЕРЖАНИЕ

МАТЕМАТИКА

Л. Г. Кругликова, В. И. Крылов. Интерполяционные преобразования последовательностей и улучшение сходимости	5
А. А. Пальцев. О вычислении сфероидальных функций и их первых производных на ЭВМ. I	19
В. А. Емеличев. О локальных минимумах в одной многоэкстремальной задаче. I	26
В. Н. Абрашин. Сходимость и оценка погрешности метода сеток для некоторых задач в случае гиперболических уравнений	31
Л. П. Примачук. О разрешимости краевой задачи с обратным сдвигом Карлемана	43
В. И. Азаматова. Об исключительном случае одного интегрального уравнения на полуоси	49
В. И. Монастырный. О сопряженности разрешимых подгрупп в мультипликативной группе тела	59
Л. Б. Шнеперман. Представления слабо равномерной связки групп операторами гильбертова пространства	63
А. А. Дадаян. Ткань Кодаци	70

ФИЗИКА

А. И. Болсун, Р. А. Власов, В. К. Гронский, Ф. И. Федоров. Эффект Вавилова—Черенкова для частиц со спинами в гиротропных средах	78
О. С. Иваницкая, И. С. Сягло. К разысканию простых параметров преобразования Лоренца в поле тяготения Шварцшильда	83
А. С. Потупа, В. И. Стражев, Л. М. Томильчик. К проблеме магнитного заряда в электродинамике	89
Л. Г. Мороз, Н. В. Максименко. Анализ амплитуды одномезонного фоторождения в области энергий второго резонанса	97
В. С. Вихренко, В. Б. Немцов, Л. А. Ротт. Уравнения переноса для многокомпонентных систем	102
Л. Ф. Ильюшенко, Л. П. Костюк-Кульгавчук, М. М. Галковская. Исследование возможности снижения коэрцитивной силы и повышения коэффициента прямоугольности петли гистерезиса электроосажденных железоникелевых пленок. II	111
А. И. Комяк, Л. В. Володько. Анализ тонкой структуры абсорбционных спектров кристаллов нитратов уранила при 77 °К	115

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

Н. Н. Сирота, Ц. З. Виткина, Э. Е. Матяс. Магнитная восприимчивость твердых растворов системы GaSb—GaAs	121
Н. Н. Сирота, В. П. Шиманская, Ц. З. Виткина. Магнитная восприимчивость твердых растворов системы ZnS—CdS	123
В. И. Белоусова. Спектры нижних уровней ядер $Cd^{111, 113}$, $Te^{123, 125}$, $He^{127, 129}$	124
Б. Ю. Ханох. О расчете светового потока, отраженного тетраэдрической призмой	126
Е. Е. Безлюдный, Л. В. Ракова, Н. Г. Склепус. Приближенное вычисление двойных интегралов по методу В. Л. Рвачева	129

ХРОНИКА

Юбилейная сессия АН БССР	132
--------------------------	-----

РЕФЕРАТЫ

УДК 518

Интерполяционные преобразования последовательностей и улучшение сходимости. Кругликова Л. Г., Крылов В. И. «Весті Акадэміі навук БССР», серыя фізіка-матэматычных навук. 1969 г., № 1, 5—18.

Рассмотрены интерполяционные преобразования последовательностей при помощи многочленов от $\frac{1}{n}$, выяснен их аналитический вид, свойства, условия, сохраняющие сходимость преобразованной последовательности.

Определены некоторые довольно широкие классы последовательностей, сходимость которых улучшается после преобразования.

Библиографий 5.

УДК 517.942+518

О вычислении сферидальных функций и их первых производных на ЭВМ. Пальцев А. А. «Весті Акадэміі навук БССР», серыя фізіка-матэматычных навук. 1969 г., № 1, 19—25.

Приводятся алгоритмы вычисления на ЭВМ собственных значений и коэффициентов разложения угловых сферидальных функций в ряд Фурье по присоединенным функциям Лежандра.

Библиографий 8.

УДК 510.95

О локальных минимумах в одной многоэкстремальной задаче. Емеличев В. А. «Весті Акадэміі навук БССР», серыя фізіка-матэматычных навук. 1969 г., № 1, 26—30.

Известно, что в настоящее время для решения задачи отыскания глобального минимума функции в ограниченной области практически доступными методами являются статистические методы в комбинации с алгоритмами спуска в локальный минимум.

Теоретический и практический интерес представляет выявление таких классов задач, в которых всякий локальный минимум строится прямым методом, т. е. отпадает необходимость поиска локального минимума. К такому типу задач относится задача вогнутого программирования, состоящая в минимизации функции

$$F(X) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f(x_{ij})$$

при условиях

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i, \quad \sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j, \quad x_{ij} \geq 0 \quad (i = \overline{1, m}; j = \overline{1, n}),$$

где $f(x)$ — строго вогнутая функция ($f''(x) < 0$). Для этой задачи могут быть построены все локальные минимумы. Оказывается, множество L локальных минимумов является частично упорядоченным и не зависит от функции $f(x)$, причем бинарное отношение порядка \rightarrow таково, что из $X_1 \rightarrow X_2$ следует $F(X_1) < F(X_2)$. Поэтому глобальный минимум необходимо искать среди минимальных элементов множества L .

Библиографий 2.

УДК 518:517(944)947

Сходимости и оценка погрешности метода сеток для некоторых задач в случае гиперболических уравнений. Абрашин В. Н. «Весті Академії наук БССР», серия фізико-математичних наук. 1969 г., № 1, 31—42.

Рассматриваются многоточечные разностные схемы для некоторых задач в случае уравнения

$$u_{xy} = a(x, y) u_x + b(x, y) u_y + f(x, y, u).$$

При достаточной гладкости искомого решения доказывается сходимость и даются оценки погрешности предложенных вычислительных схем.

Библиографий 4.

УДК 517.948.32

О разрешимости краевой задачи с обратным сдвигом Карлемана. Примачук Л. П. «Весті Академії наук БССР», серия фізико-математичних наук. 1969 г., № 1, 43—48.

На единичной окружности Γ рассматривается краевая задача

$$a(t) \varphi^+(t) + b(t) \varphi^+(a(t)) + c(t) \varphi^-(t) + d(t) \varphi^-(a(t)) = g(t),$$

где $a(t)$, $b(t)$, $c(t)$, $d(t) \in H(\Gamma)$, $\varphi^\pm(t)$, $g(t) \in L_2(\Gamma)$, $a(t)$ — обратный сдвиг Карлемана, $a'(t) \neq 0$ и удовлетворяет условию Гельдера с $\lambda > \frac{1}{2}$.

Используя разложение некоторых функций в ряды Фурье, получили оценки числа решений задачи.

Библиографий 5.

УДК 517.948

Об исключительном случае одного интегрального уравнения на полусоси. Азаматова В. И. «Весті Академії наук БССР», серия фізико-математичних наук. 1969 г., № 1, 49—58.

Рассматривается интегральное уравнение

$$\lambda_1 \varphi(x) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty [a(x-t) + b(x+t)] \varphi(t) dt = f(x), \quad 0 < x < \infty,$$

в случае, когда

$$[\lambda_1 + A(x)] [\lambda_1 + A(-x)] = [\lambda_2 + B(x)] [\lambda_2 + B(-x)], \quad \lambda_2 = \pm \lambda_1,$$

$$\lambda_1 + A(x) = \prod_1^r (x - b_j)^{\beta_j} \prod_1^s (x - c_k)^{\gamma_k} A_1(x),$$

$$\lambda_2 + B(x) = \prod_1^r (x + b_j)^{\beta_j} \prod_1^s (x - c_k)^{\gamma_k} B_1(x),$$

где $A(x)$ и $B(x)$ — преобразования Фурье ядер $a(x)$ и $b(x)$.

На основании исследования исключительных случаев краевых задач Карлемана

$$\Phi^+(x) = G(x) \Phi^+(-x) + g(x)$$

и

$$\Phi^-(-x) = G(x) \Phi^-(x) + g(x)$$

получено решение уравнения в замкнутой форме и сделаны выводы о числе линейно независимых решений и условиях разрешимости данного уравнения и соответствующего ему уравнения 1-го рода ($\lambda_1 = \lambda_2 = 0$).

Библиографий 7.

УДК 519.45/46

О сопряженности разрешимых подгрупп в мультипликативной группе тела. Монастырский В. И. «Весті Академії наук БССР», серия фізика-математичних наук. 1969 г., № 1, 59—62.

Пусть T — тело конечного ранга над своим центром Z ; T^* , Z^* — соответствующие мультипликативные группы. Конечные подгруппы были изучены С. Амицуром. Строение разрешимых подгрупп изучалось в работе Д. А. Супруненко; им, в частности, рассматривался такой инвариантный ряд:

$$G \supseteq V \supseteq A \supseteq F \supseteq 1, \quad (R)$$

где G — максимальная неприводимая (т. е. линейная Z -оболочка группы G совпадает с T) разрешимая подгруппа T^* ; F — максимальный абелев нормальный делитель G ; V — централизатор F в G ; A/F — максимальная абелева группа среди инвариантных подгрупп G/F , содержащихся в V/F . Известно, что F — единственный максимальный абелев нормальный делитель G ; индекс $G:F < \infty$; Z -оболочка $[F] = \Sigma$ — нормальное сепарабельное над Z поле в T ; G/V изоморфна группе Галуа Σ над Z ; A/F — прямое произведение элементарных абелевых групп; $A:F = [A] \cdot \Sigma$. В работе получены следующие главные результаты.

Теорема 1. Подгруппа A определена группой G однозначно. V либо равна A , либо $V = \{1+a, 1+b, A\}$, где $a, b \in A$, $a^2=b^2=-1$, $ab=-ba$.

Теорема 2. Две максимальные неприводимые разрешимые подгруппы T^* тогда и только тогда сопряжены между собой в T^* , когда в T^* сопряжены их подгруппы A из ряда (R) .

Кроме этого, доказан ряд случаев, когда $V = F$ (например, если группа A/Z^* периодическая или G/F нильпотентна и др.)

Библиографий 6.

УДК 519.46

Представления слабо равномерной связки групп операторами гильбертова пространства. Шнеперман Л. Б. «Весті Академії наук БССР», серия фізика-математичних наук. 1969 г., № 1, 63—69.

Непрерывный гомоморфизм топологической полугруппы A в полугруппу операторов комплексного гильбертова пространства, наделенную сильной операторной топологией, называется H -представлением полугруппы A .

Пусть A — локально бикомпактная полугруппа, $a, b \in A$, $U \subset A$ и W — окрестность в A , замыкание которой бикомпактно. Полугруппа A называется слабо равномерной, если 1) всякий раз, когда $aYb \supset W$, существуют такие окрестности $V(a)$ и $V(b)$, что $V(a)Y \cdot V(b) \subset W$, и 2) всякий раз, когда $aYb \subset A \setminus \overline{W}$, существуют такие окрестности $V(a)$ и $V(b)$, что $V(a)YV(b) \subset A \setminus \overline{W}$.

Если A 1) слабо равномерная полугруппа, 2) связка групп и 3) подполугруппа идемпотентов $E \subset A$ вполне несвязна, то A называется слабо равномерной связкой групп.

Основная теорема. Слабо равномерная связка групп допускает достаточную систему неприводимых H -представлений в классе унитарных групп с присоединенным изолированным нулем.

Библиографий 8.

УДК 513

Ткань Кодаци. Дадаян А. А. «Весті Академії наук БССР», серия фізика-математичних наук. 1969 г., № 1, 70—77.

На базе тензора Кодаци поверхности трехмерного евклидова пространства строится 3-ткань Кодаци и устанавливается:

1. Круглый конус характеризуется тем свойством, что все три семейства линий ткани Кодаци совпадают.

2. Тор и развертывающиеся поверхности, отличные от плоскости, круглого цилиндра и круглого конуса характеризуются тем, что два из трех семейств линий ткани Кодацци совпадают.

3. Циклиды Дюпена (кроме тора, цилиндра и конуса) несут на себе ткань Кодацци из трех различных действительных семейств линий.

4. Поверхности постоянной средней кривизны характеризуются тем свойством, что их ткань Кодацци равноугольная.

Исследованы строения ткани Кодацци на поверхностях Дарбу, поверхностях Дарбу второго рода и семействах параллельных поверхностей.

Библиографий 8.

УДК 538.3 : 539.121.7

Эффект Вавилова — Черенкова для частиц со спинами в гиротропных средах Болсун А. И., Власов Р. А., Гронский В. К., Федоров Ф. И. «Весті Академії наук БССР», серия фізика-математичних наук. 1969 г., № 1, 78—82.

Рассмотрена квантовая теория эффекта Вавилова—Черенкова для частиц со спином (включая высшие спины 1, 3/2) в гиротропных кристаллах произвольной симметрии. Для учета влияния гиротропии и анизотропии, а также спина частицы использовался инвариантный подход, сочетающий бескоординатные методы в оптике анизотропных сред и методы проективных операторов для расчета матричных элементов.

Библиографий 7.

УДК 530.12

К разысканию простых параметров преобразования Лоренца в поле тяготения Шварцшильда. Иваницкая О. С., Сягло И. С. «Весті Академії наук БССР», серия фізика-математичних наук. 1969 г., № 1, 83—88.

Исследованы общие уравнения для разыскания простых параметров неголономного лоренцева преобразования в гравитационном поле. Для поля Шварцшильда найдены частные случаи лоренцева преобразования с простыми параметрами, соответствующие «временной» калибровке тетрадных гравитационных потенциалов.

Библиографий 7.

УДК 530.12 : 531.18 + 538.3

К проблеме магнитного заряда в электродинамике. Потапа А. С., Стражев В. И., Томильчик Л. М. «Весті Академії наук БССР», серия фізика-математичних наук. 1969 г., № 1, 89—96.

Показано, что введение в электродинамику объектов типа монополя Дирака и Швингера связано с отказом от моделей ньютоновской механики заряженных частиц и приводит к потере симметрии, присущей уравнениям для свободного электромагнитного поля. Рассмотрение магнитного заряда как реально существующего объекта в рамках представлений ньютоновской механики и классической теории поля невозможно. Известные способы получения соотношений $eg = 1/2 n\hbar c$; $eg = n\hbar c$ основаны на различном подходе к выбору модели для магнитного заряда.

Библиографий 25.

УДК 539.12

Анализ амплитуды одномезонного фоторождения в области энергий второго резонанса. Мороз Л. Г., Максименко Н. В. «Весті Академії наук БССР», серия фізика-математичних наук. 1969 г., № 1, 97—101.

На основе экспериментальных данных проанализирована амплитуда фоторождения л-мезона на нуклоне в области энергий второго резонанса

и определены относительные вклады мультипольных амплитуд. В рамках резонансной модели [7] показано, что предложенные ранее Пайерлсом и Вергенелаксом модели фоторождения в области энергий второго резонанса не отвечают характерным особенностям процесса.

Библиографий 7.

УДК 548.0

Уравнения переноса для многокомпонентных систем. Вихренко В. С., Немцов В. Б., Ротт Л. А. «Весті Академії наук БССР», серия фізика-математичних наук. 1969 г., № 1, 102—110.

На основе статистического метода условных распределений (многоиндексные коррелятивные функции) получены феноменологические уравнения неразрывности, переноса импульса и энергии для многокомпонентных систем. Приведены выражения для тензора напряжений, модулей сдвига и всестороннего сжатия в случае однородной смеси.

Библиографий 11.

УДК 669.017 : 538

Исследование возможности снижения коэрцитивной силы и повышения коэффициента прямоугольности петли гистерезиса электроосажденных железоникелевых пленок. II. Ильюшенко Л. Ф., Костюк-Кульгавчук Л. П., Галковская М. М. «Весті Академії наук БССР», серия фізика-математичних наук. 1969 г., № 1, 111—114.

Исследовано влияние солянокислого тиосемикарбазида на кристаллическую и доменную структуры пермаллоевых пленок, на скорость осаждения и изменение содержания железа в пленках различной толщины.

Установлено, что использование в качестве добавки тиосемикарбазида приводит к выравниванию состава пленок по толщине. В интервале толщин 1000—2000 Å различие в среднем содержании железа в пленках, полученных без добавки, составляет примерно 7%; для пленок, полученных с добавкой, — 3%.

Тиосемикарбазид способствует уменьшению размеров кристаллитов и укрупнению доменов в пленке, более равномерному осаждению и сглаживанию поверхности пленок, что влечет за собой снижение коэрцитивной силы, величины поля анизотропии и дисперсии осей легкого намагничивания, а также увеличение коэффициента прямоугольности петли гистерезиса.

Иллюстраций 4. Библиографий 9.

УДК 546.791.6 : 535.343.2

Анализ тонкой структуры абсорбционных спектров кристаллов нитратов уранила при 77°К. Комяк А. И., Володько Л. В. «Весті Академії наук БССР», серия фізика-математичних наук. 1969 г., № 1, 115—120.

С помощью фотометрической установки, построенной на базе ДФС-8, изучены при температуре жидкого азота в естественном и поляризованном свете спектры поглощения кристаллов $\text{UO}_2(\text{NO}_3)_2 \cdot 6\text{H}_2\text{O}$ и $\text{RbUO}_2(\text{NO}_3)_3$. Применяя правило зеркальной симметрии Левшина и учитывая характер коэффициента поглощения линейно поляризованного света, в исследуемых кристаллах авторы выделили четыре возбужденных электронных состояния, принадлежащие иону уранила. Частоты чисто электронных переходов равны 20 589, 21 488, 23 381, 27 210 cm^{-1} и 21 193, 21 790, 23 658, 27 607 cm^{-1} для шестиводного уранилнитрата и рубидийуранилнитрата соответственно. Тонкая структура спектров поглощения объяснена присутствием внутримолекулярных колебаний и колебаний кристаллической решетки. Основные прогрессии полос в спектрах поглощения принадлежат комбинации электронных переходов с полносимметричными

валентными колебаниями иона уранила. Частоты полносимметричных валентных колебаний иона уранила в возбужденных состояниях в среднем соответственно равны 726, 700, 712, 714 см^{-1} для $\text{UO}_2(\text{NO}_3)_2 \cdot 6\text{H}_2\text{O}$ и 775, 752, 750, 740 см^{-1} для $\text{RbUO}_2(\text{NO}_3)_3$.

Таблиц 2. Иллюстраций 3. Библиографий 6.

УДК 537.311.33

Магнитная восприимчивость твердых растворов системы GaSb—GaAs. Сирота Н. Н., Виткина Ц. З., Матяса Э. Е. «Весті Академії наук БССР», серия фізика-математичних наук. 1969 г., № 1, 121—122.

Сообщаются результаты измерений температурной зависимости диамагнитной восприимчивости твердых растворов на основе GaSb, GaAs. Установлена прямолнейная зависимость $\chi_{\text{мол}}$ от состава, ширины запрещенной зоны и суммарного числа электронов Z системы твердых растворов GaSb—GaAs.

Иллюстраций 2. Библиографий 5.

УДК 537.311.33

Магнитная восприимчивость твердых растворов системы ZnS—CdS. Сирота Н. Н., Шиманская В. П., Виткина Ц. З. «Весті Академії наук БССР», серия фізика-математичних наук. 1969 г., № 1, 123.

Приводится диамагнитная восприимчивость непрерывного ряда твердых растворов системы сульфид цинка—сульфид кадмия со структурой типа вюрцит.

Для твердого раствора состава $0,7\text{ZnS}—0,3\text{CdS}$ дана температурная зависимость (170—450°K) $\chi_{\text{уд}}$.

Иллюстраций 2. Библиографий 5.

УДК 539.14

Спектры нижних уровней ядер $\text{Cd}^{111, 113}$, $\text{Te}^{123, 125}$, $\text{Xe}^{127, 129}$. Белоусова В. И. «Весті Академії наук БССР», серия фізика-математичних наук. 1969 г., № 1, 124—125.

В модели типа «костов-частица» рассчитывались спектры нижних уровней ядер $\text{Cd}^{111, 113}$, $\text{Te}^{123, 125}$, $\text{Xe}^{127, 129}$. Получено удовлетворительное согласие расчетных спектров с экспериментом.

Таблиц 1. Иллюстраций 1. Библиографий 6.

УДК 535.31

О расчете светового потока, отраженного тетраэдрической призмой. Ханох Б. Ю. «Весті Академії наук БССР», серия фізика-математичних наук. 1969 г., № 1, 126—128.

Излагаются результаты экспериментальной проверки одной из расчетных формул, приведенных в работе Б. Ю. Ханоха («Весті АН БССР», сер. фіз.-мат. наук, № 2, 1968). Результаты представлены в виде графика, на котором нанесены ряды экспериментальных и расчетных значений. Погрешность эксперимента составляет 20%.

Иллюстраций 1. Библиографий 5.

УДК 517.3

Приближенное вычисление двойных интегралов по методу В. Л. Рвачева. Безлюдный Е. Е., Ракова Л. В., Склепус Н. Г. «Весті Академії наук БССР», серия фізика-математичних наук. 1969 г., № 1, 129—131.

Предлагается новый приближенный метод вычисления двойных интегралов по многоугольной области интегрирования. Приведены оценка погрешности полученной кубатурной формулы, примеры, подтверждающие эффективность полученной кубатурной формулы.

Иллюстраций 1. Библиографий 2.



ПРАВИЛА ДЛЯ АВТОРОВ

1. Статьи должны быть написаны на машинке через два интервала на одной стороне листа и представляться в двух экземплярах.

2. Формулы и буквенные обозначения должны быть аккуратно вписаны от руки чернилами. Для формул, выделенных в отдельную строку, следует оставлять достаточные пробелы в тексте. Греческие буквы должны быть обведены красным карандашом. Буквы, вписанные от руки, в формулах и в тексте должны подчеркиваться простым карандашом: прописные — двумя черточками снизу (напр., \underline{S}), строчные — двумя черточками сверху (напр., \overline{s}). Следует различать буквы \underline{O} (прописную), \overline{o} (строчную) и 0 (нуль), для чего буквы \underline{O} и \overline{o} подчеркивать двумя черточками, а нуль отмечать квадратной скобкой снизу (\underline{C} , \overline{o} , 0). Следует также различать буквы \underline{I} и \underline{J} (йот), для чего \underline{I} писать, как римскую единицу, подчеркивая ее двумя черточками снизу. Векторы подчеркивать чернилами одной чертой снизу. Математические символы \cos , \sin , \lg и др., набираемые прямым шрифтом, и химические символы элементов (\underline{H} , \underline{N} , \underline{Cl} , \underline{Fe} и т. д.) отмечаются простым карандашом квадратной скобкой снизу ($\underline{\sin}$, $\underline{\lg}$, \underline{N} , \underline{Cl}). Показатели степени и индексы, а также надстрочные знаки отмечаются дугой \frown (для верхнего индекса) или \smile (для нижнего).

3. В связи с введением с 1 января 1963 г. Международной системы единиц измерения (СИ) размерность всех величин, принятых в статьях, должна соответствовать указанной системе единиц измерения.

4. Цитируемая в статье литература должна даваться автором не в виде подстрочных ссылок, а общим списком в конце статьи с обозначением ссылки в тексте порядковой цифрой в квадратных скобках. Список литературы должен быть оформлен следующим образом:

а) для книг: фамилия и инициалы автора, полное название книги, номер тома, место и год издания;

б) для журнальных статей: фамилия и инициалы автора, название журнала, номер тома (подчеркнуть), номер выпуска, страница и год.

Ссылки на неопубликованные работы не допускаются.

5. Рисунки должны быть выполнены на белой бумаге тушью размером 15×20 см; надписи на рисунках не делать. Все обозначения указывать в тексте подрисовочных подписей. К статье прилагается список с номерами рисунков и текстом подрисовочных подписей. В тексте на полях обязательно указывается место для рисунков и таблиц.

Таблицы печатаются на отдельных листах и прилагаются в конце статьи. Фотографии должны иметь контрастное изображение и быть отпечатаны на хорошей бумаге размером не менее 9×12 см. На обороте рисунков должны быть указаны фамилия автора, название статьи и номер рисунка.

6. В случае представления двух или более статей одновременно необходимо указывать желательный порядок их помещения.

7. Авторы должны избегать повторения одних и тех же данных в таблицах, графиках и в тексте статьи.

8. К статье обязательно прилагается 2 экз. реферата.

9. Корректуры статей авторам, как правило, не посылаются. В случае посылки корректуры допускается лишь исправление ошибок типографии.

Корректурa должна возвращаться в редакцию не позже, чем на следующий день после получения ее автором. Невозвращение корректуры в срок не приостанавливает печатания статьи.

10. В случае возвращения статьи автору для исправления или при ее сокращении датой представления считается день получения редакцией окончательного текста.

4109-15a



B0000000 1422983

80 K.