

Зокр
58

ВЕСЦІ

АКАДЭМІІ НАВУК БССР

СЕРЫЯ
ФІЗІКА-МАТЭМАТЫЧНЫХ
НАВУК

аФ-05
20191

2

ВЫДАВЕЦТВА „НАВУКА І ТЭХНІКА“

МІНСК 1969

прел. на зерного



ИЗВЕСТИЯ

АКАДЕМИИ НАУК БССР

СЕРИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ
НАУК

№ 2

ИЗДАТЕЛЬСТВО „НАУКА И ТЕХНИКА“

МИНСК 1969

ВЕСЦІ ^{30кч} 58

АКАДЭМІІ НАВУК БССР

СЕРЫЯ
ФІЗІКА-МАТЭМАТЫЧНЫХ
НАВУК

№ 2

ВЫДАВЕЦТВА „НАВУКА І ТЭХНІКА“

МІНСК 1969

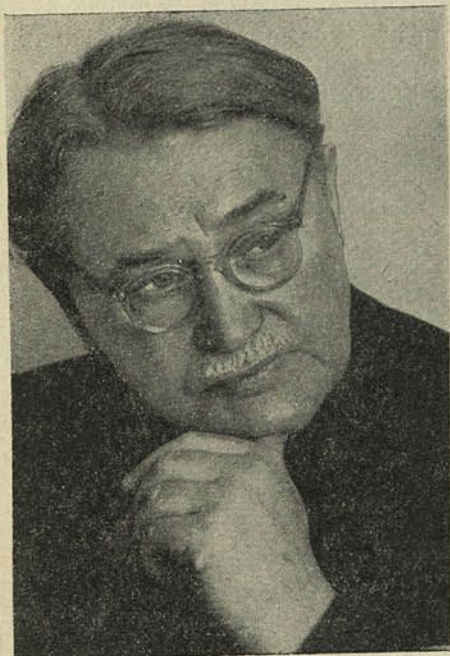


50
1-6162
29197

Рэдакцыйная калегія:

Ф. І. ФЕДАРАУ (галоўны рэдактар),
Д. А. СУПРУНЕНКА (нам. галоўнага рэдактара),
М. М. АЛЯХНОВІЧ, Ф. Д. ГАХАУ, У. І. КРЫЛОУ,
М. М. СІРАТА, У. Г. СПРЫНДЖУК, Я. І. ФІРСАУ,
С. А. ЧУНІХІН

ВАСІЛЬ ФЕАФІЛАВІЧ КУПРЭВІЧ



Савецкая навука панесла вялікую страту. На 73-м годзе жыцця раптоўна памёр прэзідэнт Акадэміі навук БССР, дэпутат Вярхоўнага Савета СССР, член Цэнтральнага Камітэта Кампартыі Беларусі, Герой Сацыялістычнай Працы, член-карэспандэнт Акадэміі навук СССР, акадэмік АН БССР, заслужаны дзеяч навукі БССР, доктар біялагічных навук, прафесар Васіль Феафілавіч Купрэвіч.

В. Ф. Купрэвіч быў выдатным вучоным і грамадскім дзеячам, які аддаў усе свае сілы служэнню Савецкай Айчыне, партыі і народу, развіццю савецкай навукі.

Васіль Феафілавіч Купрэвіч нарадзіўся ў 1897 г. у вёсцы Кленікі Смалявіцкага раёна Мінскай губерні ў сям'і селяніна. У 16 год ён скончыў сельскагаспадарчае вучылішча і паступіў юнгай на флот. У час першай сусветнай вайны служыў на Балтыйскім ваенным флоце стар-

шыней-камендорам эскадранага мінаносца «Самсон». З камандай мінаносца ў кастрычніку 1917 г. ён прыняў удзел у легендарным штурме Зімяга палаца, а пазней — у баях з ворагамі Савецкай улады.

Працоўны шлях Васіль Феафілавіч пачаў у 1918 г. настаўнікам вясковай школы ў Смалявіцкім раёне. У 1931 г. ён заканчвае аграбіялагічнае аддзяленне Маскоўскага інстытута павышэння кваліфікацыі педагогаў і паступае ў аспірантуру Інстытута біялогіі АН БССР. Аспіранцкую падрыхтоўку праходзіць у Батанічным інстытуце АН СССР у Ленінградзе. У 1934 г. паспяхова абараняе кандыдацкую дысертацыю і вяртаецца ў АН БССР, дзе працягвае даследаванні па фізіялогіі раслін.

З 1938 па 1952 г. навуковая дзейнасць Васіля Феафілавіча працякала ў Батанічным інстытуце АН СССР у Ленінградзе. Тут ён працаваў старшым навуковым супрацоўнікам, загадчыкам лабараторыі і з 1949 г. — дырэктарам інстытута. У 1941 г. ён абараняе доктарскую дысертацыю. У гады Вялікай Айчыннай вайны ў цяжкіх умовах блакады Ленінграда працягваў навукова-даследчую работу, якую не спыняў да канца сваіх дзён.

У 1952 г. В. Ф. Купрэвіч выбіраецца акадэмікам і прэзідэнтам АН БССР, у 1953 г.— членам-карэспандэнтам АН СССР.

Васіль Феафілавіч Купрэвіч быў буйнейшым вучоным-біёлагам, і пакінуў багатую навуковую спадчыну. Ён з'явіўся аўтарам рада вялікіх манаграфій, цікавых даследаванняў у галіне сістэматыкі ніжэйшых раслін, фізіялогіі хворай расліны, глебайай энзімалогіі. Працы Васіля Феафілавіча шырока вядомы не толькі ў рэспубліцы, але і па-за межамі нашай краіны, выказаныя ў іх ідэі будуць яшчэ доўга служыць развіццю біялагічнай навукі.

17 год нязменна В. Ф. Купрэвіч узначальваў Акадэмію навук БССР. За гэты час АН БССР вырасла ў буйнейшы навуковы цэнтр рэспублікі, а па раду навуковых праблем заняла вядучае месца ў Савецкім Саюзе. Вялікая заслуга ў гэтым належыць Васілю Феафілавічу.

Усё сваё жыццё Васіль Феафілавіч спалучаў навукова-даследчую работу з вялікай выкладчыцкай, рэдактарскай, грамадскай дзейнасцю. На працягу многіх год ён быў рэдактарам «Ботанического журнала» АН СССР, часопісаў «Микология и фитопатология», «Доклады Академии наук БССР», «Весті Акадэміі навук БССР», серыя біялагічных навук.

За вялікія заслугі ў развіцці савецкай навукі В. Ф. Купрэвіч быў удастоен звання Героя Сацыялістычнай Працы, узнагароджан двума ордэнамі Леніна, ордэнам Працоўнага Чырвонага Сцяга, ордэнам «Знак Пашаны» і медалямі.

Усе, хто ведаў Васіля Феафілавіча Купрэвіча, працаваў разам з ім, запамнілі яго вялікую працавітасць і патрабавальнасць да сябе, яркі талент даследчыка, высокае ўсведамленне патрыятычнага і навуковага абавязку, прынцыповасць у вырашэнні навуковых пытанняў і шчырую добразычлівасць і чуласць да людзей.

Светлы вобраз Васіля Феафілавіча назаўсёды захаваюць у памяці яго таварышы, вучні, супрацоўнікі.

И. З. ШТОКАЛО

**ВАЖНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ
ПО ПРОБЛЕМАМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ
(К 60-ЛЕТИЮ АКАДЕМИКА АН БССР Н. П. ЕРУГИНА)**

Среди математиков нашей страны и за рубежом хорошо известны труды академика АН БССР Еругина Николая Павловича в области теории дифференциальных уравнений и ее приложений.

Цель настоящей статьи — осветить результаты, полученные Н. П. Еругиным в его основных научных исследованиях.

**1. НЕКОТОРЫЕ ПРОБЛЕМЫ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ**

Советским математикам принадлежат выдающиеся достижения в различных областях математики и, в частности, в аналитической теории дифференциальных уравнений.

Как это всегда бывает при возникновении новых направлений математических исследований, на определенном этапе их развития используются известные уже методы. Однако при дальнейшем более глубоком изучении вопросов, особенно в связи с выдвиганием в этих областях новых проблем, связанных с требованиями жизненной практики и развития соответствующей математической теории, зарождается необходимость создания новых методов, которые соответствовали бы новому уровню научных исследований. Так случилось и в развитии аналитической теории дифференциальных уравнений. Уже в работах Пуанкаре, Римана и Пенлеве возникли проблемы, которые потребовали создания существенно новых методов в рассматриваемой нами математической области. Впоследствии такие требования постепенно нарастали, и в соответствии с этим аналитическая теория дифференциальных уравнений обогатилась новыми эффективными методами, которые были на уровне нужд как жизненной практики, так и внутренних запросов развития математической теории в этой области. Выдающийся вклад в это дело внесли наши советские ученые.

В работах Н. П. Еругина по некоторым проблемам аналитической теории дифференциальных уравнений получен ряд новых результатов, оказавших существенное влияние на развитие исследований в этой области математики.

Проблема Пуанкаре. В конце XIX века возникла так называемая проблема Пуанкаре для регулярной системы дифференциальных уравнений

$$\frac{dX}{dz} = X \sum_{k=1}^m \frac{U_k}{z - a_k}, \quad (1)$$

где X — интегральная матрица n -го порядка; U_k ($k=1, 2, \dots, m$) — постоянные относительно z матрицы n -го порядка; a_k — комплексные или

действительные числа (регулярные особые точки решений) и z — независимая комплексная переменная величина.

Эту систему исследовал Фукс, который показал, что в окрестности особой точки a_k имеет место представление

$$X(z) = (z - a_k)^{W_k} \bar{X}_k(z - a_k) \quad (k = 1, 2, \dots, m),$$

где W_k — постоянные матрицы n -го порядка (функции от U_1, U_2, \dots, U_m), характеризующие многозначность матрицы $X(z)$ в окрестности точки $z = a_k$; $\bar{X}_k(z - a_k)$ — матрицы n -го порядка, регулярные в окрестности точки $z = a_k$. Мы берем матрицу $X(z)$, нормированную в точке $z = b$, т. е. $X(b) = I$ (единичная матрица).

В исследованиях Пуанкаре обращалось внимание на нахождение алгоритма для определения характеристических чисел матрицы W_k , причем в указанных исследованиях не изучались эти матрицы как функции от U_1, U_2, \dots, U_m . Последнюю задачу решил полностью И. А. Лаппо-Данилевский на основе развитой им теории функций от матриц. Ему же принадлежит результат, показывающий, что матрицы W_k представляют собой мероморфные функции, а тем самым и однозначные функции. Таким образом, он полностью решил проблему Пуанкаре для системы (1). И. А. Лаппо-Данилевский рассмотрел также более сложную задачу, которая состоит в следующем:

Пусть задана система дифференциальных уравнений в виде

$$\frac{dX}{dz} = X \sum_{k=-m}^{\infty} P_k (z - a)^k, \quad (2)$$

где a — комплексное или вещественное число, представляющее иррегулярную особую точку; P_k — постоянные матрицы.

Имеем

$$X = (z - a)^W X_1(z - a),$$

где W — постоянная матрица; $X_1(z - a)$ — однозначная матрица в окрестности точки $z = a$.

В связи с этим возникает вопрос об определении матрицы W как функции от матриц P_k . Лаппо-Данилевский решил эту задачу для случая, когда матрицы P_k находятся в окрестности нулевой матрицы. Оставалась нерешенной задача аналитического продолжения этих функций на любые значения P_k и выяснения аналитической природы этих функций. Это и было осуществлено в исследованиях Н. П. Еругина, содержащихся в его работах «О показательной подстановке некоторых иррегулярных систем» (1935) и «Проблема Пуанкаре» (1938).

Н. П. Еругин построил общее представление W , т. е. при всех значениях P_k , а не только при малых, и показал, что W уже будет бесконечно-значной функцией от матриц P_k .

Этим была решена проблема Пуанкаре для иррегулярной особой точки системы (2), т. е. дано общее представление W и выяснена ее аналитическая природа. Тем самым была решена соответствующая задача для системы (2), записанной в обычном (нематричном) виде. Если для такой системы будем искать решение в виде

$$X_m = z^{\rho} \sum_{k=-\infty}^{\infty} b_k^{(m)} z^k \quad (m = 1, 2, \dots, n),$$

где ρ и b_k — постоянные, то для определения последних получим, как известно, бесконечную систему линейных алгебраических уравнений,

коэффициенты которой содержат элементы матриц P_k . Решение этой системы и представляло основную трудность. В исследованиях Н. П. Еругина найдены величины ρ и b_k при всех значениях элементов P_k и выяснена природа ρ и b_k как аналитических функций от всех элементов P_k .

Проблема (B) Лаппо-Данилевского. Пусть дана система линейных дифференциальных уравнений.

$$\frac{dY}{dz} = Y \left[\frac{U_1}{(z-a_1)^{m_1}} + \frac{U_2}{(z-a_2)^{m_2}} \right], \quad (3)$$

где U_1, U_2 — постоянные матрицы второго порядка; m_1, m_2 — целые положительные числа больше единицы; Y — интегральная матрица второго порядка.

Лаппо-Данилевским поставлена так называемая проблема (B) о представлении Y в виде

$$Y(b, z) = X(z) \bar{Y}(z) \quad (Y(b, b) = I),$$

где $\bar{Y}(z)$ — однозначная на всей плоскости z матрица; $X(z)$ — матрица, которая включает в себя всю многозначность $Y(b, z)$.

В работах Лаппо-Данилевского эта проблема решена только для матриц U_1, U_2 , имеющих значение в окрестности нулевой матрицы, хотя он рассматривал эту задачу и для более сложных систем.

Матрицы $X(z)$ и $Y(z)$ при всех значениях U_1, U_2 нашел в своих работах Н. П. Еругин. Таким образом, ему принадлежит полное решение проблемы (B) Лаппо-Данилевского для системы (3).

Построение решений в окрестности иррегулярной особой точки. В 1942 г. Н. П. Еругин предложил метод построения интегральной матрицы системы линейных дифференциальных уравнений

$$\frac{dX}{dz} = X \sum_{k=\Delta}^{\infty} A_k z^{-k}$$

в виде ряда, равномерно сходящегося в окрестности иррегулярной особой точки $z = \infty$. Этот метод оказался весьма эффективным и нашел широкое применение в исследованиях и других авторов.

Системы нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений, не имеющие подвижных особых точек типа существенно особых. В своих работах «Аналитическая теория нелинейных систем дифференциальных уравнений» (1952), «К аналитической теории нелинейных дифференциальных уравнений» (1956) и «Аналитическая теория нелинейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений» (доклад на Всесоюзном совещании по дифференциальным уравнениям) (1957) Н. П. Еругин исследовал вопросы, относящиеся к системам нелинейных дифференциальных уравнений, не имеющих таких особых точек z_0 , положение которых определяется начальными значениями, когда при $z \rightarrow z_0$ вектор решения (x, y) не стремится к определенной точке (x_0, y_0) .

Рассмотрим дифференциальные уравнения вида

$$w' = P(w', w, z), \quad (4)$$

где P — рациональная функция относительно w', w .

В конце XIX и в начале XX столетия Пенлеве из уравнений (4) выделил такие, для которых решения не имеют подвижных особых точек типа существенно особых, т. е. таких особых точек z_0 , что при $z \rightarrow z_0$ вектор (w', w) не имеет предела. В связи с этим Пенлеве разработал соот-

ветствующий метод выделения классов уравнений, подчиняющихся необходимым условиям отсутствия подвижных многозначных особых точек. Метод Пенлеве выделения указанных классов уравнений связан с применением способа Пуанкаре разложения решения системы в ряд по малому параметру. Заключительное же рассуждение Пенлеве основано на остроумном использовании факта полярности подвижных особых точек.

Этот метод был впоследствии использован многими другими авторами, однако вскоре выяснилось, что он малоэффективен для более широкого круга задач.

Н. П. Еругину удалось с помощью построенных им методов найти классы систем уравнений

$$\frac{dx}{dz} = P(x, y, z), \quad \frac{dy}{dz} = Q(x, y, z), \quad (5)$$

для которых решения не имеют подвижных особых точек типа существенно особых. Этот класс уравнений намного сложнее уравнения (4), и, кроме того, природа особых подвижных точек, изученных этими методами, труднодоступнее тех, которые возможны в уравнениях Пенлеве. Оказалось, что эти подвижные особые точки могут быть и многозначными, что заведомо не охватывается методом Пенлеве. Н. П. Еругин предложил метод построения решений в окрестности этих особых точек в одних случаях в виде сходящихся рядов, в других же случаях в виде асимптотических. Эти результаты Н. П. Еругина явились фундаментальным вкладом в теорию обыкновенных дифференциальных уравнений.

Теория уравнений Пенлеве. Рассмотрим первое уравнение Пенлеве:

$$\frac{d^2w}{dz^2} = 6w^2 + z. \quad (6)$$

Общее решение этого уравнения является мероморфной функцией

$$w = \frac{P(z)}{Q(z)}, \quad (7)$$

где $P(z)$ и $Q(z)$ — целые функции.

До работ Н. П. Еругина вопрос об интегрировании этого уравнения считался законченным, и решения получили название трансцендентных Пенлеве. Пенлеве показал, что решения уравнения (6) имеют подвижными особыми точками z_0 только полюсы второго порядка.

Н. П. Еругин, исследуя эти результаты, поставил такие вопросы:

1) Будет ли решение уравнения (6) иметь, кроме полюса z_0 , другие полюсы и в случае положительного ответа на этот вопрос, сколько будет таких полюсов — конечное или бесконечное количество?

2) Где расположен ближайший к z_0 полюс и как расположены остальные полюсы?

В работе «К теории первого уравнения Пенлеве» (1958) Н. П. Еругин нашел целые функции $P(z)$ и $Q(z)$, составляющие мероморфную функцию (7), благодаря чему было построено представление во всей области существования всякого решения уравнения (6). Он дал способ определения подвижных особых точек в качестве функций начальных значений и показал, как найти ближайший к z_0 другой полюс. Некоторые авторы показали, что уравнение (6) имеет решения только с бесконечным числом полюсов.

Рассмотрим теперь второе уравнение Пенлеве:

$$\frac{d^2\omega}{dz^2} = 2\omega^3 + z\omega + a \quad (a = \text{const}). \quad (8)$$

Как показал Пенлеве, решения этого уравнения являются также мероморфными функциями и имеют только подвижные полюсы первого порядка с вычетами, равными $+1$ и -1 .

Н. П. Еругин в работах «К теории уравнения Риккати» (1958) и «О второй трансцендентной Пенлеве» (1958) показал, что при $a = -\frac{1}{2}$ существуют решения уравнения (8) с бесконечным числом полюсов на вещественной положительной полуоси, все вычеты которых имеют один и тот же знак. Подобная картина будет и при $a = \frac{1}{2}$, только бесконечное число полюсов располагается на отрицательной полуоси с вычетами, имеющими тоже один и тот же знак. Таким образом, построено решение во всей области существования. Показано, что полюсы этого решения находятся как функции начальных значений, и дана асимптотическая формула этих полюсов.

Результаты Н. П. Еругина, относящиеся к решениям первого и второго уравнений Пенлеве, способствовали развитию этих вопросов в работах других авторов. Так, в 1959 г. А. И. Яблонский в работах «О рациональных решениях второго уравнения Пенлеве» и «К вопросу о числе полюсов решения второго уравнения Пенлеве» установил, что уравнение (8) имеет также рациональные решения. Этим опровергнута трансцендентность общего решения этого уравнения. Кроме того, в работах «Общее представление решения второго уравнения Пенлеве» (1958) и «О вычетах полюсов решений второго уравнения Пенлеве» (1960) А. И. Яблонский нашел общее представление решения уравнения (8) в виде мероморфной функции и показал, что, кроме решений, исследованных Н. П. Еругиным, и $\omega = \frac{1}{z}$ при $a = -1$, $\omega = -\frac{1}{z}$ при $a = 1$, нет решений с вычетами одного знака.

О связи между проблемами общей и качественной теорий дифференциальных уравнений в вещественной области и аналитической теории дифференциальных уравнений. В исследованиях Н. П. Еругина установлена тесная связь между проблемами общей и качественной теорий дифференциальных уравнений в вещественной области и аналитической теории дифференциальных уравнений. Для иллюстрации рассмотрим систему уравнений, приведенную в одной из работ Н. П. Еругина,

$$\frac{dx}{dt} = y - x + x^3, \quad \frac{dy}{dt} = -x - y - y^3. \quad (9)$$

Результаты, содержащиеся в упомянутых ранее работах Н. П. Еругина по аналитической теории дифференциальных уравнений, позволяют сделать следующие утверждения относительно вещественных решений системы (9):

- 1) существуют движения, определяемые этой системой, для которых x стремится к конечному x_0 и y бесконечно возрастает при t , стремящемся к конечному t_0 ;
- 2) существуют движения для этой системы, которые обладают свойством $x \rightarrow \infty$, $y \rightarrow y_0$ (конечное) при $t \rightarrow t_0$ (конечное);

3) не существует движений, обладающих этими свойствами при $t_0 \rightarrow \infty$;
 4) не существует движений, для которых $x \rightarrow \infty$, $y \rightarrow \infty$ при $t \rightarrow t_0$ (конечное или бесконечное);

5) не существует движений, чтобы $x(t)$ или $y(t)$ оставалось бы неопределенным при $t \rightarrow t_0$ (конечное);

6) не существует движения, при котором точка $M(t)$ удалялась бы в бесконечность по спирали. Это последнее вытекает из предыдущего, так как если бы точка $M(t)$ удалялась в бесконечность по спирали, то существовала бы точка неопределенности, чего не могло бы быть по свойству 5.

В работе «О продолжении решений дифференциальных уравнений» (1951) показано, что если движение, определяемое системой

$$\frac{dx_k}{dt} = F_k(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (k = 1, 2, \dots, n),$$

где F_k суть непрерывные функции во всякой конечной точке, непродолжимо для $t > t_0$, то $M(t) \rightarrow \infty$ при $t \rightarrow t_0$. Это значит, что точка $M(t)$ не может оставаться в ограниченной области и не стремиться к ∞ .

Здесь, однако, не отрицается возможность того, что $M(t)$ остается неопределенной при $t \rightarrow \infty$ или что $M(t) \rightarrow \infty$ при $t \rightarrow \infty$. Последнее отрицается для системы (9) свойством, указанным в п. 5.

Таким образом, всякое движение, определяемое системой (9), обладает одним из следующих свойств: 1) либо оно ограничено и тогда оно существует при всех t ; 2) либо оно непродолжимо при $t \rightarrow t_0$ и тогда оно асимптотически приближается к прямой $x = x_0$, при этом $y \rightarrow \infty$, или это движение стремится к прямой $y = y_0$, при этом $x \rightarrow \infty$, когда $t \rightarrow t_0$.

В связи со сказанным следует остановиться еще на одной теореме, доказанной Н. П. Еругиным в работе «Некоторые общие вопросы устойчивости движения» (1951), относящейся к системе дифференциальных уравнений типа (5), которая формулируется следующим образом:

Если имеем

$$sL(s) \leq |xP(x, y, z) + yQ(x, y, z)| \quad (10)$$

при $s = \sqrt{x^2 + y^2} > s_0$, где $L(s) > 0$ и $\int_{s_0}^s \frac{ds}{L(s)}$ ограничен при $s \rightarrow \infty$, то

всякое решение системы (5) либо непродолжимо вне конечного промежутка $|z - z_0| \leq N$, либо решение ограничено при $-\infty < z < \infty$.

Условия этой теоремы являются достаточными для того, чтобы решения системы облопадали полученными в теореме свойствами.

В связи с упомянутыми результатами автором были поставлены некоторые вопросы, в частности:

1. Возможно ли, нарушив условия сформулированной теоремы, сохранить свойства решений, о которых идет речь в теореме, для системы n (> 2) уравнений?

2. Какими условиями можно заменить условие (10) теоремы, чтобы свойства решений, полученные в ней, сохранились?

3. Какова роль аналитичности рассматриваемой системы дифференциальных уравнений?

Н. П. Еругин в своих работах рассмотрел ряд других возможных задач, относящихся к связи аналитической и качественной теории дифференциальных уравнений.

В своих глубоких исследованиях Н. П. Еругин показал, как выводы, полученные в аналитической теории дифференциальных уравнений, мо-

гут быть эффективным образом использованы и в качественной теории дифференциальных уравнений, причем это относится не только к случаям, когда отсутствуют существенно особые точки, но и к случаям, когда они имеются.

Н. П. Еругин показал, что существует принципиальная характерная связь между теорией линейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами и аналитической теорией линейных систем, развитой в работах Лаппо-Данилевского. Решение проблемы Пуанкаре в работе Н. П. Еругина позволило дать общее решение проблемы Флоке.

Фундаментальным вкладом в развитие исследований в области теории дифференциальных уравнений явились также работы Н. П. Еругина «Приводимые системы» (1946), «Метод Лаппо-Данилевского в теории линейных дифференциальных уравнений» (1956) и «Линейные системы обыкновенных дифференциальных уравнений» (1963).

2. ОБЩАЯ ТЕОРИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Как и в аналитической теории, работы Н. П. Еругина по общей теории дифференциальных уравнений сыграли существенную роль в развитии исследований по ряду направлений в этих областях. Остановимся прежде всего на вопросе о продолжении решений систем обыкновенных дифференциальных уравнений.

В работе «О продолжении решений систем обыкновенных дифференциальных уравнений» (1951) Н. П. Еругину принадлежит следующая теорема:

Дана система дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

где $f_i(t, x_1, x_2, \dots, x_n)$ — непрерывные в области $D(x_1, x_2, \dots, x_n)$, а переменная t изменяется в конечном интервале $p \leq t \leq q$.

Тогда всякое решение этой системы при $t \rightarrow T$, где $p < T < q$, либо стремится к точке M_0 области D , либо стремится к границе области D . Это значит, что точка $M(t) = M(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$ при $t \rightarrow T$ попадает в сколь угодно малую окрестность границы области D и больше оттуда не выходит.

Интересны также следствия из этой теоремы.

Следствие 1: если при $t > T$ решение $M(t)$ не продолжимо, то точка $M(t)$ стремится к границе области D при $t \rightarrow T$. Если граница области D состоит из конечного числа точек, то $M(t)$ либо стремится к одной из этих точек, либо уходит в бесконечность.

Следствие 2: если $f_i(t, x_1, x_2, \dots, x_n)$ для $i = 1, 2, \dots, n$ определены и непрерывны при всех x_1, x_2, \dots, x_n и t , то $M(t)$ либо продолжима на все t , либо $M(t) \rightarrow \infty$ при $t \rightarrow T$ (конечное). Во втором случае $M(t)$ покидает навсегда сферу любого радиуса.

В работе «Некоторые общие вопросы теории устойчивости движения» (1951) доказана следующая теорема:

Если в системе

$$\frac{dx_k}{dt} = X_k(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (k = 1, 2, \dots, n),$$

где функции $X_k(t, x_1, x_2, \dots, x_n)$ определены и непрерывны в области $-\infty < t < \infty$, $-\infty < x_i < \infty$ для всех значений $i = 1, 2, \dots, n$ и $rL(r) \leq |x_1 X_1 + x_2 X_2 + \dots + x_n X_n|$ при $r > r_0$, $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$,

$L(r) > 0$, причем интеграл $\int_0^{\infty} \frac{dr}{L(r)}$ ограничен для $r \rightarrow \infty$, то решение указанной системы или непродолжимо вне конечного промежутка $|t - t_0| < N$, или оно ограничено при $-\infty < t < \infty$.

Далее Н. П. Еругин рассматривает систему

$$\frac{dx}{dt} = P(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = Q(x, y),$$

где $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ — функции, определенные и непрерывные на всей плоскости и удовлетворяющие условию Липшица во всякой конечной части плоскости. Доказаны две общие теоремы о существовании предельного цикла при условии, что существует решение, которое обладает некоторым свойством.

Значительный интерес вызвали следующие теоремы Н. П. Еругина, посвященные движению $M(c, t)$, где c — точка, соответствующая $t = t_0$ и лежащая в том пространстве, в котором происходит движение.

Теорема I. 1. Пусть A — открытое множество точек, определенное свойством, что $M(c, t) \subset A$ при $t(c, t_0) < t < \infty$, если $c \in A$; t_0 — произвольное и движение $M(c, t)$ не продолжимо при $t < t(c, t_0)$.

2. Пусть движение $M(c, t) \rightarrow \infty$ при $t \rightarrow t(c, t_0)$, когда $c \in \bar{A}$ (замыкание A).

3. Пусть движение $M(c, t)$ — непрерывно по c, t для конечных c из области \bar{A} и для $t(c, t_0) < t < \infty$. Тогда граница $A = \bar{A} - A$ состоит из движений $M(c, t) \subset \bar{A} - A$, где $c \in \bar{A} - A$.

Теорема II: Пусть A является множеством точек, определенным свойствами:

- 1) движение $M(c, t) \subset A$ при $t(c, t_0) < t < \infty$, если $c \in A$;
- 2) для всякого движения $M(c, t)$, где $c \in A$, имеется $t^*(t(c, t_0) < t^* < \infty)$ такое, что $M(c, t^*) \in g \subset A$, где g — открытое множество, составляющее правильную часть множества A ;
- 3) движение $M(c, t) \rightarrow \infty$ при $t \rightarrow t(c, t_0)$, когда $c \in \bar{A}$;
- 4) движения $M(c, t)$ определены и непрерывны по c и t для всех конечных c из области $R \supset \bar{A}$ и для $t(c, t_0) < t < \infty$.

Тогда граница области A состоит из траекторий, т. е. $M(c, t) \subset \bar{A} - A$, если $c \in \bar{A} - A$.

Пользуясь результатами, изложенными в этих теоремах и следствиях из них, Н. П. Еругин установил, что границами некоторых областей, заполненных интегральными кривыми, имеющими определенные свойства, являются множества, состоящие из движений. В его исследованиях показано, что области, заполненные траекториями и изученные А. М. Ляпуновым в его знаменитой докторской диссертации, ограничены движениями.

В кругу этих вопросов привлекают к себе внимание следующие теоремы Н. П. Еругина.

Теорема I. Если начало координат $(0, 0)$ является единственной точкой равновесия и если движение $x = 0, y = 0$ есть положительно асимптотически устойчивое невозмущенное движение в смысле Ляпунова, то границей области асимптотической устойчивости будет либо предельный цикл, либо движение $M(c, t) \rightarrow \infty$ как при $t \rightarrow \infty$, так и при $t \rightarrow -\infty$.

Теорема II. Если начало координат $(0, 0)$ есть единственная точка равновесия и $x = 0, y = 0$ — асимптотически устойчивое невозмущенное движение, а также если отсутствуют движения, уходящие в бесконеч-

ность при $t \rightarrow \infty$ и нет предельного цикла, то область асимптотической устойчивости есть вся плоскость x, y .

Теорема III. 1. Пусть движение $x=0, y=0$ будет асимптотически положительно устойчивое невозмущенное движение.

2. Пусть не имеется предельного цикла, окружающего область асимптотической устойчивости.

3. Пусть область асимптотической устойчивости — конечна.

Тогда, кроме $(0, 0)$, имеются еще точки равновесия на конечном расстоянии.

Теорема III позволяет иногда обнаружить существование предельного цикла.

Все результаты, полученные Н. П. Еругиным по вопросам движения $M(c, t)$, послужили основой дальнейших исследований в этой области как его самого, так и многих других авторов.

Обратимся теперь к вопросам, относящимся к системам линейных однородных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами. Для таких уравнений возникает задача о представлении матрицы фундаментальной системы решений в виде произведения двух матриц, одна из которых должна быть периодической как функция независимой переменной t , а другая — вида $\exp At$, где A — постоянная матрица. Как известно, дело сводится к определению матрицы A , которая доставляет качественную характеристику решений рассматриваемой системы дифференциальных уравнений. Иногда матрицу A удается построить в виде сходящегося ряда по малым параметрам, входящим в коэффициенты системы. Но в этом случае остается нерешенной задача общего представления матрицы A при больших значениях параметров.

Затем возникает задача аналитической характеристики матрицы A как функции тех параметров, которые входят в коэффициенты системы уравнений. Важной является задача определения той функциональной зависимости между параметрами, входящими в коэффициенты дифференциальных уравнений, при которой система уравнений имеет периодические или ограниченные решения. Часто эти периодические решения требуется построить приближенно. Это — один круг задач из вещественной теории линейных систем с периодической матрицей коэффициентов.

Другой круг задач связан с аналитической теорией линейных систем дифференциальных уравнений. В аналитической теории линейных однородных систем дифференциальных уравнений с однозначными аналитическими коэффициентами давно рассматривалась задача представления матрицы фундаментальной системы решений в окрестности особой точки в виде произведения двух матриц, одна из которых является однозначной в окрестности рассматриваемой особой точки a , а вторая — многозначная матрица вида $\exp [A \ln(z-a)]$, где A — постоянная матрица, а z — независимая переменная. Здесь матрица A и характеризует многозначную особенность матрицы фундаментальной системы решений дифференциальных уравнений.

Проблема Пуанкаре — Лаппо-Данилевского в аналитической теории дифференциальных уравнений состояла в том, чтобы найти матрицу A как функцию параметров, входящих в коэффициенты дифференциальных уравнений, и дать полную аналитическую характеристику этой функции.

Задача общего представления матрицы A как функции параметров системы при произвольных значениях этих параметров, а не только при малых значениях, в иррегулярном случае была решена Н. П. Еругиным в 1935—1938 гг. на основании аппарата теории функций от матриц, разработанного в трудах Лаппо-Данилевского.

Дело в том, что еще А. М. Ляпунов обратил внимание на общность задач определения матриц A в теории линейных систем с периодически коэффициентами и в аналитической теории линейных систем дифференциальных уравнений. Именно он в одном частном случае системы линейных дифференциальных уравнений с периодически коэффициентами свел задачу нахождения A к нахождению соответствующей матрицы A для такой системы линейных дифференциальных уравнений с однозначными аналитическими коэффициентами, для которой эту матрицу легко можно найти.

Н. П. Еругин развил мысль А. М. Ляпунова до полного решения задачи определения матрицы A для системы с вещественными периодически коэффициентами на основании решенной в аналитической теории задачи Пуанкаре—Лаппо-Данилевского. Он также показал, что могут оказаться полезными в теории дифференциальных уравнений с периодически коэффициентами и матрицы A , построенные Лаппо-Данилевским для одной специальной фундаментальной системы решений, на которую почти не обращали до этого внимания.

Для решения всех указанных задач Н. П. Еругину потребовалось создание некоторого нового дополнительного аппарата теории функций от матриц, что он осуществил в новых параграфах работы «Метод Лаппо-Данилевского в теории линейных дифференциальных уравнений» (1956) и что представляет самостоятельный научный интерес. Затем он решил большой цикл основных вопросов, связанных с построением матрицы A .

В своей работе Н. П. Еругин дал строгую формулировку проблемы Лаппо-Данилевского и осуществил ее решение. А именно, построил генеральное представление так называемой показательной подстановки, характеризующей многозначность интегральной подстановки в окрестности особой точки линейной системы дифференциальных уравнений. Это делается как в случае регулярной особой точки (Лаппо-Данилевский), когда показательная подстановка является мероморфной, следовательно, однозначной функцией от дифференциальных подстановок, так и в случае иррегулярной особой точки (Н. П. Еругин), когда показательная подстановка оказывается бесконечнозначной функцией от дифференциальных подстановок. Далее он выполнил представление интегральной матрицы системы линейных дифференциальных уравнений с вещественными периодически коэффициентами в виде произведения двух матриц, одна из которых — периодическая, другая — показательная $\exp At$, где A — постоянная матрица. Показано, в каких случаях эта постоянная матрица будет вещественной, если период второго множителя совпадает с периодом матрицы коэффициентов заданной системы.

Н. П. Еругиным изложены методы решения некоторых основных задач из теории линейных систем дифференциальных уравнений с вещественными периодически коэффициентами на основе теории дифференциальных уравнений в области вещественной переменной и на основе теории приводимых систем. Он показал, как можно матрицу A представить в виде сходящегося ряда по параметрам, входящим в коэффициенты линейной системы дифференциальных уравнений, причем отмечено, что эти ряды сходятся, вообще говоря, не при всех конечных значениях параметров, и тут же указаны некоторые достаточные признаки сходимости. Кроме того, им указан некоторый общий подход к задаче разложения матрицы A в ряд по параметру, вводимому искусственно в решаемую систему. Общее исследование области сходимости для системы двух уравнений Н. П. Еругин дал в своей монографии «Приводимые системы».

Н. П. Еругин четко указал, что вопросы ограниченности и периодичности решений систем линейных дифференциальных уравнений исследуются на основе аппарата аналитической теории дифференциальных уравнений, а именно на основе специальной показательной подстановки Лаппо-Данилевского.

В своей книге о методе Лаппо-Данилевского в теории линейных дифференциальных уравнений Н. П. Еругин привел таблицу констант Лаппо-Данилевского, составленную в Ленинградском отделении Математического института АН СССР.

По достоинству оценив важность результатов, полученных в исследованиях Лаппо-Данилевского, Н. П. Еругин значительно продолжил и обогатил это направление в теории дифференциальных уравнений, а также выдвинул новые проблемы, относящиеся к этому кругу идей.

Среди работ Н. П. Еругина по вопросам общей теории дифференциальных уравнений следует отметить его статью «Построение всего множества систем дифференциальных уравнений, имеющих заданную интегральную кривую и применение этого построения к вопросам теории дифференциальных уравнений» (1952). В этой работе автором выведены необходимые и достаточные условия, которым должны удовлетворять функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$, чтобы система дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = P(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = Q(x, y)$$

имела своей интегральной кривой заданную кривую.

Большой интерес представляет также работа «О структуре решений инвариантной системы дифференциальных уравнений» (1959), в которой рассмотрена система линейных дифференциальных уравнений

$$\frac{dX}{dt} = XP(t),$$

где $P(t)$ — матрица n -го порядка, вид которой не меняется после некоторого преобразования $t = \varphi(z)$.

В процессе исследований находится аналитическая структура интегральной матрицы $X(t)$ и доказывается существование замены независимой переменной, при которой заданная система переходит в другую линейную систему, матрица коэффициентов которой будет периодической.

В работе «О периодических решениях дифференциальных уравнений» (1956) предлагается способ нахождения периодических решений системы

$$\frac{dx_k}{dt} = f_k(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (k = 1, 2, \dots, n),$$

где $f_k(t, x_1, x_2, \dots, x_n)$ — функции, непериодические относительно t , или же эти функции являются периодическими, но их период несоизмерим с периодом искомого решения.

В исследовании, осуществленном Н. П. Еругиным, дан способ нахождения орбитальной устойчивости найденных периодических решений.

Кроме рассмотренных выше работ Н. П. Еругина по общей теории дифференциальных уравнений, имеется еще ряд его работ, относящихся к этому циклу исследований. Все они содержат глубокие результаты, явившиеся существенным вкладом в теорию дифференциальных уравнений. Методы, разработанные Н. П. Еругиным, оказались настолько действенными, что они нашли широкое применение в исследованиях многих других авторов.

3. КАЧЕСТВЕННАЯ ТЕОРИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ И ТЕОРИЯ УСТОЙЧИВОСТИ ДВИЖЕНИЯ

Еще в конце XIX столетия А. М. Ляпунов ввел в связи с разработкой теории устойчивости движения глубокую классификацию линейных систем дифференциальных уравнений. Именно он рассмотрел три класса этих систем: 1. Неправильные системы. 2. Правильные системы. 3. Приводимые системы.

Как известно, Ляпунов называет систему

$$\frac{dX}{dt} = XP(t) \quad (11)$$

приводимой, если существует матрица Z , ограниченная для $t > t_0$ вместе с $\frac{dZ}{dt}$ и $D(Z^{-1})$, где D — знак определителя, для которой матрица B в преобразованной системе

$$\frac{dY}{dt} = YB,$$

полученной из исходной путем преобразования $Y = XZ$, является постоянной.

При этом, очевидно: $B = Z^{-1}P(t)Z + Z^{-1}\frac{dZ}{dt}$.

Ляпунов показал, что если матрица $P(t)$ периодическая, то система (11) приводима. Других приводимых систем А. М. Ляпунов не указал. Несмотря на важную роль приводимых систем в теории устойчивости движения, теория таких систем не была построена до 1942 г., хотя попытки выявить какой-нибудь другой класс приводимых систем были. Выдающуюся роль в решении указанной проблемы сыграла монография Н. П. Еругина «Приводимые системы» (1946). Ему удалось построить общую теорию приводимых систем на основе аппарата, разработанного Лаппо-Данилевским.

В этой работе впервые в достаточно полном и строгом виде получила свое построение общая теория приводимых систем, в ней выведены необходимые и достаточные условия приводимости систем дифференциальных уравнений, а также достаточные признаки приводимости многих классов систем. В этой работе созданы некоторые новые методы исследования систем линейных дифференциальных уравнений.

В начале указанной книги изложены общие теоремы о приводимых системах, найден общий вид матрицы B приведенной системы и матрицы приведения Z , а также показаны достаточные признаки приводимости некоторых конкретных систем.

Среди других линейных систем Н. П. Еругиным рассмотрена система

$$\frac{dX}{dt} = XP(t)\lambda,$$

где λ — малый параметр и $P(t + \omega) = P(t)$.

Им показано, что решение этой системы можно представить в виде

$$X = \exp \sum_{k=1}^{\infty} A_k \lambda^k \sum_{k=0}^{\infty} Z_k(t) \lambda^k, \quad (Z_k(t + \omega) = Z_k(t)),$$

где A_k — постоянные и ряды $\sum_{k=1}^{\infty} A_k \lambda^k$, $\sum_{k=0}^{\infty} Z_k \lambda^k$ сходятся при достаточно ма-

лых λ . Также показано, как можно найти A_k и Z_k и в том случае, когда $P(t)$ — матрица почти периодическая.

Н. П. Еругиным показано, что для систем более общего вида с почти периодической матрицей $P(t)$ решение вопроса приводимости, а также исследование вопроса ограниченности решений является весьма трудным. Проблема в этом случае упирается в различные свойства линейных соотношений между несоизмеримыми частотами почти периодической матрицы $P(t)$.

В своей работе «Некоторые общие вопросы теории устойчивости движения» (1951) Н. П. Еругин на основании критерия И. З. Штокало устойчивости решений линейной системы

$$\frac{dx}{dt} = [A + \varepsilon f(t)] x,$$

где $f(t) = \sum_{\mu} C_{\mu} e^{i\mu t}$ ($C_{\mu} = \text{const}$) (μ — вещественные числа), а также, используя лемму IV И. З. Штокало, имеющуюся в его монографии «Линейные дифференциальные уравнения с переменными коэффициентами (1960, стр. 38), и теорию приводимых систем, исследовал вопросы устойчивости нелинейной системы

$$\frac{dy_k}{dt} = \sum_{v=1}^n y_v P_{v,k}(t) + R_k(t, y_1, y_2, \dots, y_n),$$

где матрица $P_{v,k}(t)$ совпадает с матрицей И. З. Штокало.

Эта работа Н. П. Еругина имела принципиальное значение и явилась, по сути, первым исследованием, в котором удалось перенести ряд общих результатов, относящихся к устойчивости решений, установленных для линейных систем, на нелинейные, сыграв этим самым основополагающую роль в деле дальнейших исследований по этим вопросам в области нелинейных систем.

Н. П. Еругин несколько иначе и короче, чем А. М. Ляпунов, вывел необходимые и достаточные условия асимптотической устойчивости и неустойчивости решения уравнения

$$\frac{d^2x}{dt^2} + P(t)x = 0, \quad (P(t + \omega) = P(t)).$$

Им же показано, что если ни одно из этих условий не выполнено, то общее решение указанного уравнения будет периодическим (этого у Ляпунова не имеется).

В работе «Некоторые общие проблемы качественной и аналитической теории линейных систем дифференциальных уравнений» (1955) рассмотрены весьма важные вопросы, имеющие большое значение как с точки зрения развития теории дифференциальных уравнений, так и в направлении актуальных приложений, в частности, в теории автоматического регулирования. Поэтому рассмотрим несколько подробнее результаты, содержащиеся в ней.

Первую часть труда Н. П. Еругин посвятил освещению общей теории поведения интегральных кривых в целом, в частности, сделано существенное замечание, относящееся к формуле Грина.

В дальнейшем рассмотрены вопросы, касающиеся периодических решений. Среди этих результатов следует отметить теорему о существовании периодических решений, которая обобщает известный принцип кольца. Доказана теорема о том, что область устойчивости является



всегда открытой. Установлено при некоторых условиях существование интегральных кривых, входящих в точку равновесия.

На основе вариационных принципов Н. П. Еругин развил качественную теорию системы двух дифференциальных уравнений. Здесь доказано следующее: пусть дана система

$$\frac{dx}{dt} = P(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = Q(x, y)$$

$$(P(0, 0) = Q(0, 0) = 0),$$

где правые части имеют непрерывные производные.

Составим уравнение

$$D(x, y) = P'_x(x, y) + Q'_y(x, y) = \lambda \quad (12)$$

и предположим, что последнее определяет единственную кривую $l(\lambda)$ на плоскости x, y . Здесь возможны два случая: 1) кривая $l(0)$ — замкнута и окружает точку $(0, 0)$; 2) кривая $l(0)$ не окружает точку $(0, 0)$.

В первом случае введем в рассмотрение

$$I(\lambda) = \iint_{D(\lambda)} D(x, y) dx dy \quad (D(\lambda) \text{ — область, ограниченная кривой } l(\lambda)).$$

Предположим, что существует λ такое, что

$$I(\lambda_1) = 0.$$

Тогда область $D(\lambda_1)$ имеет наибольшую площадь среди тех областей B , которые охватывают область $D(0)$ и для которых

$$I(B) = 0.$$

Экстремальное значение λ_1 можно искать и из уравнения

$$I(l(\lambda)) = \int_{l(\lambda)} P(x, y) dy - Q(x, y) dx = 0.$$

Может случиться, что экстремальная кривая есть периодическое решение исходной системы. Но может этого и не быть. Однако справедлива следующая теорема:

Если кривые $l(0)$ и $l(\lambda_1)$ не имеют контакта, т. е. точек, в которых касательная совпадает с направлением поля исходной системы, то периодического решения не существует.

Если имеется несколько экстремальных кривых $l(\lambda_1)$, то в случае существования периодического решения одна из кривых $l(\lambda_1)$ или кривая $l(0)$ имеет контакт.

Уравнение контактов кривой $l(\lambda)$ (12) будет

$$P(x, y) [P''_{xx}(x, y) + Q''_{xy}(x, y)] + Q(x, y) [P''_{xy}(x, y) + Q''_{yy}(x, y)] = 0. \quad (13)$$

Следовательно, если нет пересечения экстремальной кривой $l(\lambda_1)$ с кривой (13), то периодических решений нет.

Если соотношение (13) невозможно при $x^2 + y^2 \neq 0$, то периодические решения, окружающие точку $(0, 0)$, отсутствуют. Если же (13) представляет собою тождество в силу (12) при некотором λ_0 , то $l(\lambda_0)$ есть решение исходного уравнения.

Во втором случае, т. е. когда кривая $l(0)$ не окружает точку $(0, 0)$ и не имеет, по крайней мере, двух контактов, то периодических решений, окружающих указанную точку, не имеется.

Н. П. Еругиным подробно изучена качественная картина в целом для системы

$$\frac{dx}{dt} = a_{11}x + a_{12}y + f(x), \quad \frac{dy}{dt} = a_{21}x + a_{22}y, \quad (f(0) = 0), \quad (14)$$

где a_{ik} — постоянные и $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} > 0$, $a_{11} + a_{22} < 0$, а $f(x)$ — непрерывная функция, удовлетворяющая неравенствам Гурвица, которые, как показал Н. П. Еругин, имеют разный вид в зависимости от того, будет ли $a_{22} < 0$, $a_{22} > 0$ или $a_{22} = 0$.

Изучение качественной картины в целом проведено на основе изучения зон, ограниченных кривыми

$$a_{11}x + a_{12}y + f(x) = 0, \quad a_{21}x + a_{22}y = 0.$$

При этом подробно выясняется вся картина изучаемого явления.

Прием Н. П. Еругина изучения зон, ограниченных некоторыми кривыми, послужил основанием в соответствующих исследованиях В. И. Зубова, Н. Н. Виноградова, В. И. Плисса, С. А. Маркосяна и др.

Н. П. Еругиным в рассматриваемой работе установлена вторым методом А. М. Ляпунова асимптотическая устойчивость в целом нулевого решения системы (14) при $a_{22} < 0$, $a_{12} > 0$, $a_{21} > 0$. Далее им установлена качественная картина в окрестности точки $(0, 0)$ при некоторых других предположениях относительно a_{ik} . Затем была изучена качественная картина в целом и доказана следующая теорема:

Для точки $M(t)$ всякого движения системы (14) имеет место один из двух случаев: 1) точка $M(t)$ входит в точку $(0, 0)$ при $t \rightarrow \infty$; 2) полярный угол φ точки $M(t)$ неограниченно возрастает.

Следует еще отметить доказательство, осуществленное Н. П. Еругиным совершенно элементарным путем, об асимптотической устойчивости в целом. Оценена скорость приближения точки $M(t)$ к $(0, 0)$ и рассмотрена качественная картина в целом при условиях

$$a_{22} < 0, \quad a_{12} > 0, \quad a_{21} < 0, \quad a_{22}^2 + 2a_{12}a_{21} > 0,$$

а также изучен вопрос об устойчивости в целом и рассмотрена качественная картина в зависимости от наличия первой степени x в $\alpha(x)$, если

$$f(x) = ax - \alpha(x), \quad \text{где} \quad \begin{cases} f(x) < ax & (x > 0) \\ f(x) > ax & (x < 0), \end{cases}$$

Н. П. Еругину принадлежит изучение качественной картины расположения интегральных кривых системы (14) и построение мажорантной системы линейных уравнений, охватывающих интегральные кривые системы (14) сверху и снизу.

Рассмотрение качественной картины поведения интегральных кривых системы (14) заканчивается доказательством следующей общей теоремы:

Пусть дана система

$$\frac{dx}{dt} = ax + by + P(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = cx + dy + Q(x, y),$$

где постоянные a, b, c, d удовлетворяют условиям

$$(a - d)^2 + 4bc > 0$$

и

$$\frac{P(x, y)}{\sqrt{x^2 + y^2}} \rightarrow 0, \quad \frac{Q(x, y)}{\sqrt{x^2 + y^2}} \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad (x^2 + y^2) \rightarrow 0,$$

для которой движение $x=y=0$ устойчиво. Тогда точка $(0, 0)$ есть узел и вдоль критического направления входит единственная интегральная кривая.

Кроме ранее изученного случая $D > 0$, рассматривается система (14) для случая $D = a_{22}^2 + a_{12}a_{21} < 0$.

Показано, что точка $(0, 0)$ является фокусом и найдена область устойчивости нулевого решения.

Далее изучен предельный случай, а именно, когда

$$D = a_{22}^2 + a_{12}a_{21} = 0, \quad a_{22} < 0, \quad a_{12} > 0, \quad a_{21} < 0.$$

В этом случае система дифференциальных уравнений может быть записана в виде

$$\frac{dx}{dt} = -a_{22}x + a_{12}y - \alpha(x), \quad \frac{dy}{dt} = a_{21}x + a_{22}y, \quad (15)$$

где $\alpha(x) > 0$ при $x \neq 0$.

Эту систему Н. П. Еругин путем замены $Y = a_{12}y - a_{22}x$ приводит к системе

$$\frac{dx}{dt} = Y - \alpha(x), \quad \frac{dY}{dt} = a_{22}\alpha(x). \quad (16)$$

В довершение этого Н. П. Еругин сформулировал следующую теорему.

Все движения, определяемые уравнениями (15), обладают тем свойством, что $x \rightarrow 0, y \rightarrow 0$, когда $t \rightarrow \infty$. Позднее он возвратился к этому вопросу и внес сюда некоторые коррективы, сформулировав свой результат таким образом:

если $M = \max \alpha(x)$ при $x > 0$

и $m = -\max \alpha(x)$ при $x < 0$,

то область $x^2 + y^2 \leq r = \min(m, M)$ является областью устойчивости. Отсюда следует, что если $r = \infty$, то все движения, определяемые уравнениями (15), обладают свойством $x \rightarrow 0, y \rightarrow 0$, когда $t \rightarrow \infty$.

Заметим от себя, что автор мог бы добавить к этому следующее.

Из (16), разделив второе уравнение на первое, а затем проинтегрировав, получим

$$\frac{1}{2} (Y^2 - Y_0^2) - \int_0^t \alpha(x) \frac{dY}{dt} dt = \int_0^x a_{22}\alpha(x) dx$$

или

$$V = \frac{1}{2} Y_0^2 + \int_0^t \alpha(x) \frac{dY}{dt} dt = \frac{1}{2} Y^2 - \int_0^x a_{22}\alpha(x) dx > 0,$$

так как $a_{22} < 0$ и $\alpha(x) > 0$.

Далее $\frac{dV}{dt} = \alpha(x) \frac{dY}{dt}$, а используя второе уравнение (16), имеем

$$\frac{dV}{dt} = a_{22} [\alpha(x)]^2 < 0,$$

т. е. здесь V есть функция Ляпунова.

Когда $\int_0^x \alpha(x) dx \rightarrow \infty$ при $|x| \rightarrow \infty$, то $V = V(x, y) \rightarrow \infty$ при $(x^2 + Y^2) \rightarrow \infty$, а тогда и $(x^2 + Y^2) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$.

Впоследствии это несколько другим способом и было доказано Н. П. Еругиным в его работе «Построение множества систем дифференциальных уравнений, имеющих заданную интегральную кривую, и применение этого построения к вопросам теории дифференциальных уравнений» (1951), чем полностью исчерпана данная проблема.

Впоследствии Н. Н. Красовский доказал, что случаи, отмеченные Н. П. Еругиным, — когда $r = \infty$ и когда $\int_0^x \alpha(x) dx \rightarrow \infty$ при $|x| \rightarrow \infty$, исчерпывают случаи асимптотической устойчивости в целом. Другими словами, если $|\alpha(x)|$ и $\int_0^x \alpha(x) dx$ ограничены, то асимптотическая устойчивость в целом при $a_{22}^2 + a_{12}a_{21} = 0$ не имеет места.

Рассмотрим теперь работу Н. П. Еругина «Качественное исследование интегральных кривых системы дифференциальных уравнений» (1950). В этом исследовании изучена система

$$\frac{dx}{dt} = a_{11}x + a_{12}y + f(y), \quad \frac{dy}{dt} = a_{21}x + a_{22}y, \quad (17)$$

подчиненная условиям Гурвица.

Автор показал, что в этом случае

$$a_{22} + a_{11} < 0, \quad a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} > 0$$

и

$$f(y) < \frac{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}{a_{21}} y - \alpha(y), \quad \begin{cases} \alpha(y) > 0 & \text{при } y > 0, \\ \alpha(y) < 0 & \text{при } y < 0, \end{cases}$$

что позволяет систему (17) представить в виде

$$\frac{dx}{dt} = a_{11}x + \frac{a_{11}a_{22}}{a_{21}} y - \alpha(y), \quad \frac{dy}{dt} = a_{21}x + a_{22}y.$$

В работе показано:

- 1) Все движения обладают свойством $(x^2 + y^2) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$.
- 2) Выяснена качественная картина при всех возможных предположениях.
- 3) Дан способ аналитического построения интегральных кривых вдоль особых направлений.

Таким образом, Н. П. Еругиным, в основном, впервые построена теория систем дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_1}{dt} = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + f(x_k),$$

$$\frac{dx_2}{dt} = a_{21}x_1 + a_{22}x_2,$$

подчиненных обобщенным условиям Гурвица. Именно, выясняются локальные и в целом качественные картины поведения интегральных кривых, а также вопросы устойчивости в целом. Но наряду с этим построена и общая теория поведения интегральных кривых на плоскости, а также развиты новые методы исследования систем дифференциальных уравнений.

Эти результаты, полученные Н. П. Еругиным, вызвали большую серию исследований, подробный анализ которых дан в обзоре Н. П. Еругина «О периодических решениях дифференциальных уравнений» (1956).

Весьма общая теорема о неустойчивости, охватывающая все известные теоремы о неустойчивости, доказана Н. П. Еругиным в его работе «К теории дифференциальных уравнений обыкновенных и в частных производных» (1951). Она доказана для системы

$$\frac{dx_k}{dt} = f_k(t, x_1, x_2, \dots, x_n), \quad f_k(0, 0, \dots, 0) = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, n),$$

где $f_k(t, x_1, x_2, \dots, x_n)$ — непрерывна в окрестности точки $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$.

Таким образом, в отличие от прежних работ, не предполагается единственных решений.

Автор замечает при этом, что в формулировке А. М. Ляпунова об устойчивости требуется лишь малое отклонение возмущенных движений от невозмущенных, но молчаливо предполагается продолжимость движений на весь бесконечный промежуток $t > t_0$. У него продолжимость решений автоматически следует из единственных решений.

Если же не предполагать единственности решений, то, как показывает Н. П. Еругин, свойства продолжимости и малого отклонения решений от невозмущенного независимы, т. е. можно указать системы, где будет иметь место малое отклонение возмущенных систем (при достаточно малых вариациях начальных значений) при всех значениях t , для которых существует возмущенное движение лишь на конечном промежутке независимого временного t .

Автором доказана лемма:

Пусть дана система дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_k}{dt} = f_k(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (k = 1, 2, \dots, n), \quad (18)$$

где $f_k(t, x_1, x_2, \dots, x_n)$ — непрерывные функции в области $[V(t)]$, определяемой непрерывной функцией $V(x_1, x_2, \dots, x_n)$ неравенством $V(x_1, x_2, \dots, x_n) > 0$ с границей $V(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$.

Предположим, что

$$V' = \sum_{k=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_k} f_k(t, x_1, x_2, \dots, x_n) + \frac{\partial V}{\partial t} > 0$$

в окрестности граничных точек области $[V(t)]$, а на указанной границе V' может обращаться и в нуль.

Тогда непрерывное движение $x = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$, начавшись в области $[V(t)]$ в момент $t = T$, не выходит из области $[V(t)]$ при всех $t > T$, пока оно существует.

На основании этой леммы доказана теорема Н. П. Еругина: Если область $[V(t)]$ в пространстве $[x]$ равномерно ограничена при $t \rightarrow \infty$ или, если известно, что непрерывное движение $x(t)$ системы (18) ограничено, то движение $x(t)$, начавшись в момент $t = T$ в области $[V(t)]$, непрерывно продолжимо для всех $t > T$, если в окрестности граничных точек области $[V(t)]$ имеем $V' > 0$.

Доказана также другая теорема Н. П. Еругина.

Если область $[V(t)]$ стягивается при $t \rightarrow \infty$ к точке a и в окрестности граничных точек этой области $V' > 0$, то непрерывное движение $x(t)$, начавшись в области $[V(t)]$ в момент $t = T$, непрерывно продолжимо для всех $t > T$ и при этом обязательно $x(t) \rightarrow a$ при $t \rightarrow \infty$.

В одной из своих работ Н. П. Еругин рассмотрел систему

$$\frac{dx}{dt} = f(x) + ay, \quad \frac{dy}{dt} = bx + cy, \quad f(0) = 0,$$

где a, b, c — постоянные, $f(x)$ — функция непрерывная, подчиненная условиям

$$x[f(x) + cx] < 0, \quad x[cf(x) - abx] > 0 \quad \text{при } x \neq 0.$$

В связи с рассмотрением указанной системы Н. П. Еругин высказал некоторые замечания по поводу рассуждений И. Г. Малкина, который ввел, кроме выписанных выше условий подчинения функции $f(x)$, дополнительное условие: $c \frac{f(x)}{x} - ab > \varepsilon$, ($|x| > \varepsilon$), являющееся излишним и делающее задачу совершенно элементарной. Затем Н. П. Еругин установил следующее.

Если хотя бы в как угодно малой окрестности точки $x = 0$ имеем $|f(x)| < M(x)$ и $\int_0^x [cf(x) - abx] dx \rightarrow \infty$ при $x \rightarrow \pm \infty$, то все решения написанной выше системы дифференциальных уравнений продолжимы при $t \rightarrow \infty$ и обладают свойством

$$(x^2 + y^2) \rightarrow 0 \quad \text{при } t \rightarrow \infty.$$

Кроме того, нулевое решение $x = y = 0$ асимптотически устойчиво. Доказательство потребовало весьма сложных рассуждений и основано на многих теоремах Н. П. Еругина.

Далее рассмотрен случай, когда

$$\int_0^x [cf(x) - abx] dx \rightarrow D > 0 \quad \text{при } x \rightarrow \pm \infty \text{ и } c^2 + ab \neq 0,$$

и доказано свойство $(x^2 + y^2) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$.

Доказательство, как и выше, оказалось сопряженным с большими трудностями и выполнено с привлечением многих прежних результатов автора.

Н. П. Еругин глубоко проанализировал первый и второй методы А. М. Ляпунова, их влияние на развитие теории устойчивости движения и, естественно, на исследования по теории дифференциальных уравнений. Им рассмотрены соответствующие проблемы и выдвинуты новые вопросы, которые рассмотрены и решены в ряде его работ и в некоторых работах других авторов. В связи с этим нам хотелось бы обратить внимание на весьма содержательный обзор Н. П. Еругина «О периодических решениях дифференциальных уравнений», помещенный в ПММ (1956).

В своих обзорах Н. П. Еругин рассмотрел также метод Крылова—Боголюбова укороченного преобразования, развитый в работах И. З. Штокало на системы

$$\frac{dx}{dt} = x \sum_{k=0}^{\infty} P_k(t) \lambda^k,$$

где $P_k(t)$ — квазипериодические или соответственно почти периодические матрицы, причем в этих обзорах отмечено, что метод И. З. Штокало также применим для решения вопросов устойчивости и приближенного представления решений многих других, более общих систем. Кроме того, Н. П. Еругин показал, что в этих случаях не требуется даже дополнительных замечаний, а остается в силе метод таким, каким он развит в исследованиях И. З. Штокало.

В работах Н. П. Еругина довольно подробно освещены и работы Ю. А. Митропольского по применению асимптотических методов к решению задач, связанных с решением как линейных, так и нелинейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений.

4. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

В работе «О функционально-инвариантных решениях» (1948) Н. П. Еругин рассмотрел уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (a — \text{постоянная})?$$

Как известно, функционально-инвариантные решения этого уравнения даны формулой В. И. Смирнова — С. Л. Соболева

$$x + f(u)y + \frac{\sqrt{1+f^2(u)}}{a}t + \varphi(u) = 0,$$

где $f(u)$ и $\varphi(u)$ — произвольные функции.

С. Л. Соболев доказал, что других функционально-инвариантных решений указанное уравнение не имеет.

А как найти функционально-инвариантные решения уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}.$$

Ответ на этот вопрос дан в исследованиях Н. П. Еругина. Метод, им предложенный, позволяет найти функционально-инвариантные решения при любом числе независимых переменных при постоянных коэффициентах в уравнении. Следует отметить, что с увеличением числа независимых переменных метод становится все более громоздким, но это уже лежит в существе дела.

После решения этого вопроса привлекло к себе внимание уравнение с переменными коэффициентами

$$L(u) \equiv a \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2c \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + b \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \\ + d \frac{\partial u}{\partial x} + e \frac{\partial u}{\partial y} = 0,$$

где a, b, c, d, e — функции от x, y .

В работе Н. П. Еругина «О функционально-инвариантных решениях уравнений с переменными коэффициентами» (1949) решен вопрос о необходимых и достаточных условиях существования решений этого уравнения. Найдены также условия существования обобщенного функционально-инвариантного решения.

Н. П. Еругин указал способ нахождения общего решения рассматриваемого уравнения в случае наличия хотя бы одного функционально-инвариантного решения или обобщенного функционально-инвариантного решения. Это позволяет решать граничные задачи и задачу Коши.

Далее исследовано Н. П. Еругиным уравнение с постоянными коэффициентами

$$a \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2c \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + b \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + d \frac{\partial u}{\partial x} + e \frac{\partial u}{\partial y} + gu = 0.$$

Для этого уравнения автор находит во всех случаях общее решение либо с помощью функционально-инвариантного решения, либо в виде

$$v(x, y) = \int_0^y \psi_2(t) F(x(y-t)) dt + \\ + \int_0^x \psi_1(t) F(y(x-t)) dt + cF(x, y),$$

где $v(x, y)$ — решение уравнения $\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = v$, к которому приводится рассматриваемое уравнение, в случае отсутствия у последнего функционально-инвариантных решений. Здесь $\psi_1(t)$, $\psi_2(t)$ — произвольные функции и $F(z) = I_0(2i\sqrt{z})$ с функцией Бесселя $I_0(\rho)$.

Пользуясь видом $v(x, y)$, Н. П. Еругин нашел решение задачи Коши в замкнутой форме. Им получено в замкнутой форме решение некоторых систем интегральных уравнений. В замкнутой форме найдено также решение смешанной граничной задачи.

Н. П. Еругин в своей работе «Замкнутое решение параболической граничной неоднородной задачи» (1950) нашел в замкнутой форме решение параболической граничной задачи

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad \begin{array}{ll} u = p = \text{const} & \text{при } y = 0, \quad t > 0, \\ u = 0 & \text{при } y = l, \quad t > 0, \\ u = 0 & \text{при } t = 0, \quad 0 < y < l. \end{array}$$

Это решение имеет вид

$$u = \frac{p}{2\pi} (l - y) + \frac{p}{2\pi i} \int_0^\infty \frac{1}{\tau} \left[\frac{\sin(y-l)\sqrt{i\tau} e^{-i\tau t}}{\sin l\sqrt{i\tau}} - \right. \\ \left. - \frac{\sin(y-l)\sqrt{-i\tau} e^{i\tau t}}{\sin l\sqrt{-i\tau}} \right] dt.$$

Здесь легко выделить и вещественную часть. Отсюда автор получил способы суммирования рядов. Упомянутый результат оказал большое принципиальное влияние на ряд работ крупных авторов.

В исследованиях Н. П. Еругина по решению уравнений в частных производных рассмотрены важные проблемы в этой области, и полученные им результаты явились ярким вкладом в решение сложных задач теории дифференциальных уравнений в частных производных.

5. ОБЩИЕ ВОПРОСЫ АНАЛИЗА

Исследования Н. П. Еругина по общим вопросам математического анализа относятся к различным проблемам анализа, имеющим непосредственное значение для интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений.

Так, в работе «Приближенное интегрирование некоторой колеблющейся функции» (1950), выполненной совместно с С. Л. Соболевым, рассмотрена следующая задача:

Пусть

$$I = \int_0^b f(x) \varphi(x) dx, \quad b = nk, \quad \int_0^k \varphi(x) dx = 0,$$

где $\varphi(x)$ — периодическая с периодом k функция, $f(x)$ — такая, для которой осуществляется

$$|f^{(m)}(x) - f^{(m)}(x+h)| \leq H_m |h|,$$

и n — целое положительное число.

Доказано, что

$$I = \sum_{l=0}^{m-1} [f^{(l)}(b) - f^{(l)}(0)] \frac{(-1)^l}{k} \int_0^k t \Phi_l(t) dt + (-1)^m I_m,$$

где I_m оценивается неравенством

$$|I_m| \leq \frac{k^2}{4} n H_m \left(\frac{k}{4}\right)^m M, \quad |\varphi(x)| \leq M.$$

Этим получена для интеграла, выписанного в начале, асимптотическая формула, в связи с чем вычисление его сводится к вычислению интеграла в промежутке k . При больших n решение задачи, естественно, значительно облегчается, ибо здесь обычные формулы приближенного вычисления интегралов непригодны из-за того, что подынтегральная функция имеет в промежутке интегрирования много колебаний. Легко видеть, что предположение $\int_0^k \varphi(x) dx = 0$ и то, что n — целое, не является существенным.

Н. П. Еругину принадлежит монография «Неявные функции», опубликованная в Ленинградском университете в 1956 г. В ней рассматривается вопрос о существовании и фактическом построении двух неявных функций от одной независимой переменной, которые определены уравнениями, выраженными голоморфными или же частично голоморфными функциями. Этот вопрос рассматривается во всех особых случаях. Доказывается, что при аналитическом продолжении неявных функций не встретятся особые точки неопределенности в области голоморфности функций, определяемых этими неявными функциями. В некоторых случаях это имеет место и тогда, когда уравнения, определяющие неявные функции, выражены не голоморфными функциями. Это позволяет найти всю область сходимости рядов, представляющих неявные функции, а также всю область существования этих функций. Эти вопросы, естественно, имеют немалое значение и в теории дифференциальных уравнений.

К числу работ по математическому анализу, встречающихся в теории дифференциальных уравнений, принадлежит также работа Н. П. Еругина «Разложение в ряд по параметру функции от матрицы» (1959). В этой работе доказывается сходимость ряда

$$Y = f(X) = \sum_{k=0}^{\infty} Y_k \varepsilon^k, \quad X = \sum_{k=0}^{\infty} X_k \varepsilon^k,$$

где X_k — постоянные матрицы, $f(z)$ — аналитическая функция (может быть и многозначная), голоморфная в окрестности точек a_k , являющихся характеристическими числами матрицы X при $\varepsilon=0$, а ε — малый параметр.

К этой работе примыкает также исследование Н. П. Еругина «Разложение в ряд по параметру иррегулярного значения функции от матрицы» (1960). Здесь рассматривается вопрос о сходимости ряда, изученного в предыдущей работе, но представляющего иррегулярное значение $f(X)$.

Имеются и другие труды Н. П. Еругина по общим вопросам математического анализа, но на них здесь мы не останавливаемся из-за ограниченности предоставленного нам объема.

В 1963 г. вышла в свет книга Н. П. Еругина «Линейные системы обыкновенных дифференциальных уравнений» (Издательство АН БССР).

В этой монографии рассмотрены линейные системы обыкновенных дифференциальных уравнений с периодическими и квазипериодическими коэффициентами. Хотя системы с почти периодическими коэффициентами не упоминаются, однако полученные здесь результаты по отношению систем с квазипериодическими коэффициентами можно распространить на системы с почти периодическими коэффициентами.

Первые параграфы монографии посвящены общим вопросам, относящимся к теории функций от одной и многих матриц. Исследуется вопрос о разложении в ряд по степеням ε матричной функции

$f\left(\sum_{k=0}^{\infty} X_k \varepsilon^k\right)$, где X_k — матрицы, причем рассматриваются как регуляр-

ные, так и иррегулярные значения. Далее излагаются, следуя Ляпунову, общие теоремы о разложении в ряд по параметру ε интегральной матрицы линейной системы дифференциальных уравнений, а также указываются результаты, относящиеся к решению проблемы Пуанкаре и Лаппо-Данилевского из аналитической теории систем линейных дифференциальных уравнений. Для системы общего вида

$$\frac{dX}{dt} = X \sum_{k=0}^{\infty} P_k(t) \varepsilon^k$$

указываются различные способы построения для интегральной матрицы $X(t) = N(t) \exp At$ матриц A (постоянная) и $N(t)$ (периодическая) в виде рядов по параметру ε , а также даются приближенные способы построения этой интегральной матрицы.

После этого исследуются канонические системы линейных дифференциальных уравнений

$$\frac{dX}{dt} = X \left(P_0 + \sum_{k=1}^{\infty} P_k(t) \varepsilon^k \right) \quad (19)$$

с периодическими матрицами $P_k(t)$ и постоянной матрицей P_0 , выводятся условия, при которых интегральная матрица $X(t)$ этой системы будет ограниченной. Также изучается случай квазипериодических матриц $P_k(t)$, впервые рассмотренный И. З. Штокало.

На основе метода И. З. Штокало выводятся некоторые приближенные интегральные матрицы системы (19) в случае квазипериодических $P_k(t)$, даются оценки приближения этих решений, а также указаны некоторые другие приближенные формы решений.

Рассмотрена задача Б. П. Демидовича нахождения условий ограниченности при малых ω интегральной матрицы системы

$$\frac{dX}{dt} = XP(t),$$

где $P(t)$ — периодическая матрица с периодом ω и существует

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{1}{\omega} \int_0^{\omega} P(t) dt = M \quad \text{при } \omega \rightarrow 0.$$

В книге устанавливается связь между проблемами Пуанкаре и Лаппо-Данилевского, с одной стороны, и проблемой Флоке — с другой о представлении интегральной матрицы системы

$$\frac{dX}{dt} = XP(t) \quad (P(t + \omega) = P(t))$$

в виде

$$X = \exp At N(t),$$

где A — постоянная матрица и $N(t)$ — периодическая.

Рассмотрен вопрос об ограниченности и периодичности решений однородных систем линейных дифференциальных уравнений.

Следуя Ляпунову, проведено исследование об ограниченности решений уравнения

$$\frac{d^2x}{dt^2} + p(t)x = 0 \quad (p(t + \omega) = p(t)).$$

Установлены условия, при которых все решения этого уравнения будут ограничены, а также условия, при которых имеются периодические решения.

Далее доказывается, что периодические решения системы n уравнений

$$\frac{dX}{dt} = XP(t, \varepsilon) \quad [(P(t + 2\pi, \varepsilon) = P(t, \varepsilon))]$$

можно представить в виде рядов [по положительным степеням ε , сходящимся в той же области, в какой сходится ряд

$$P(t, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} P_k(t) \varepsilon^k.$$

В книге изложены способы решения вопросов существования ограниченных и периодических решений уравнения

$$\frac{d^2x}{dt^2} + p(t)x = 0,$$

где $p(t)$ — знакопеременная периодическая функция.

Рассмотрена система линейных дифференциальных уравнений вида

$$\frac{dX}{dt} = XP(t, \varepsilon), \quad P(t, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} P_k(t) \varepsilon^k,$$

где матрицы $P(t + 2\pi) = P(t)$. Даны способы нахождения условий, при которых интегральная матрица этой системы обладает свойством $X(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$ или будет ограниченной колеблющейся.

Исследуется также система дифференциальных уравнений

$$\frac{dX}{dt} = XP(t, \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n, \varepsilon),$$

где матрица $P(t + 2\pi, \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n, \varepsilon) = P(t, \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n, \varepsilon)$, и найдены условия для параметров, чтобы интегральная матрица $X(t)$ была ограниченной колеблющейся (И. С. Аржаных).

В работе подробно рассмотрены исследования И. З. Штокало, относящиеся к линейным дифференциальным уравнениям, а также другие вопросы обыкновенных дифференциальных уравнений и некоторые смежные вопросы математического анализа.

Указанная монография Н. П. Еругина содержит решение новейших проблем, относящихся к линейным системам обыкновенных дифференциальных уравнений. Автор рассматривает в ней не только собственные результаты, но и результаты других авторов, что делает монографию настольной книгой для лиц, занимающихся вопросами теории дифференциальных уравнений.

Заслуживает глубокого внимания большая статья Н. П. Еругина «Первый метод Ляпунова», помещенная в журнале «Дифференциальные уравнения» (1967, № 4). В начале этой статьи автор приводит строгую формулировку задачи об устойчивости решений, данную А. М. Ляпуновым для системы

$$\frac{dx}{dt} = xP(t) + f(t, x),$$

где $P(t)$ — матрица n -го порядка.

Далее автор статьи характеризует первый и второй методы Ляпунова и вместе с тем излагает классификацию линейных систем, введенную Ляпуновым. Здесь же делается замечание, что и для нелинейной системы вопрос об устойчивости получает полное решение при выполнении определенных условий. Затем Н. П. Еругин рассматривает систему нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных и указывает результат Ляпунова о существовании единственного голоморфного решения этой системы.

В статье резюмируется тот факт, что в тех случаях, когда А. М. Ляпунов получал асимптотическую устойчивость нулевого решения, порождаемую лишь свойством первого приближения, он получал и общее решение в окрестности $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$ для всех $t > t_0$. Если же он доказывал асимптотическую устойчивость нулевого решения в сомнительном случае, используя второй метод, то общего решения он получить не смог. Это не осуществлено и до сих пор.

Не имея возможности исследовать общий случай корней характеристического уравнения, Ляпунов в своем основном труде «Общая задача об устойчивости движения» рассматривал систему

$$\frac{dx}{dt} = y + X(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = Y(x, y),$$

где $X(x, y)$, $Y(x, y)$ — голоморфные функции в окрестности $x = y = 0$. Тем самым он изучил случай, когда первое приближение имеет два нуле-

вых характеристических числа. В 1954 г. была найдена рукопись А. М. Ляпунова, в которой рассмотрена система

$$\frac{dx}{dt} = y + X(x, y, x_1, x_2, \dots, x_n),$$

$$\frac{dy}{dt} = Y(x, y, x_1, x_2, \dots, x_n),$$

$$\frac{dx_s}{dt} = p_{s1}x_1 + p_{s2}x_2 + \dots + p_{sn}x_n + X_s(x, y, x_1, x_2, \dots, x_n)$$

$$(s = 1, 2, \dots, n),$$

где X , Y и X_s — голоморфные функции в окрестности $x=y=0$, не содержащие свободных и линейных членов. Исследование указанной системы потребовало математической виртуозности для достижения поставленной цели.

Из рассмотренных А. М. Ляпуновым систем с правыми частями, образованными периодическими функциями от t , следует отметить случаи: 1) когда первое приближение имеет одно характеристическое число, равное нулю, а все остальные являются отрицательными; 2) когда первое приближение имеет два нулевых характеристических числа, а все остальные — отрицательные.

В связи с исследованиями Ляпунова в этой области Н. П. Еругин в своей статье выдвинул ряд вопросов, на которые тут же дал соответствующие ответы с подробным изложением своих соображений и доказательств. При рассмотрении материала, относящегося к исследованиям А. М. Ляпунова, Н. П. Еругин изложил результаты, содержащиеся в его собственных работах, а также в работах других авторов, послуживших развитию идей Ляпунова.

В конце своей статьи Н. П. Еругин рассматривает метод Крылова — Боголюбова и их учеников, внесших существенный вклад в развитие теории дифференциальных уравнений и весьма важных приложений в механике, физике и технике.

В данной статье вкратце рассмотрены основные направления исследований Н. П. Еругина. Свыше тридцати пяти лет напряженных научных усилий увенчались выдающимися результатами, которые выдвинули его на передние рубежи нашей отечественной математики. Уже в 1941 г. он завершил докторскую диссертацию, которую не успел защитить в связи с началом Великой Отечественной войны. Оставив рукописи своему учителю, он ушел на Ленинградский фронт. После тяжелого ранения и глубокой контузии в 1942 г. Н. П. Еругин, лежа в госпитале, продолжал свои научные исследования, вошедшие впоследствии в «Приводимые системы» и написал работу «Обобщение одной теоремы Ляпунова». Это составило содержание его докторской диссертации, блестяще защищенной в 1943 г. За работы в области дифференциальных уравнений Н. П. Еругин был удостоен Государственной премии.

Научные труды Н. П. Еругина по теории дифференциальных уравнений являются фундаментальным вкладом в математическую науку.

Научная, педагогическая, административная и общественная деятельность Н. П. Еругина высоко оценена нашим Правительством. В 1967 г. ему присвоено почетное звание заслуженного деятеля науки БССР, а в 1969 г. — высокое звание Героя Социалистического Труда.

ХОАНГ ДИНЬ ЗУНГ

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ОБРАТНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ МНОГОСВЯЗНОЙ ОБЛАСТИ

В [2] мы уже рассмотрели устойчивость обратной краевой задачи аналитических функций, предполагая, что задаваемая область D_w приведена к стандартной области — единичному кругу, когда оператор Шварца, входящий в решение задачи, имеет явное выражение. Здесь докажем устойчивость этой задачи непосредственно, не приводя ее решение к стандартной области. Этим же методом далее будет доказана устойчивость обратной краевой задачи для многосвязной области.

В последующем будем пользоваться понятиями и обозначениями из работы [2] и будем рассматривать только устойчивость внутренней задачи; для внешней задачи исследование аналогично.

1. По [1] решение обратной краевой задачи в общем случае имеет вид

$$z = f(w) = e^{i\alpha} \int e^{\chi(w)} dw + C, \quad (1)$$

где α — произвольная вещественная постоянная, C — произвольная комплексная постоянная,

$$\chi(w) = S \ln \omega(\sigma),$$

S — оператор Шварца для области D_w ,

$$\omega(\sigma) = \frac{ds}{d\sigma} = \frac{1}{\sqrt{u'^2(s(\sigma)) + v'^2(s(\sigma))}}. \quad (2)$$

По формуле представления оператора Шварца для односвязной области можно переписать

$$\chi(w) = \frac{1}{2\pi} \int_0^l \frac{\partial M(w, \zeta)}{\partial n} \ln \omega(\sigma) d\sigma, \quad (3)$$

где n — внутренняя нормаль, $\zeta = \zeta(\sigma)$ — комплексная координата точки контура, $M(w, \zeta) = G(w, \zeta) + iH(w, \zeta)$ — комплексная функция Грина области D_w , $G(w, \zeta)$ — функция Грина оператора Лапласа для области D_w , $H(w, \zeta)$ — гармоническая функция, сопряженная функции $G(w, \zeta)$ по переменной z .

Имеет место следующая

Теорема. *Внутренняя обратная краевая задача в постановке работы [1] устойчива.*

Доказательство. Возьмем какую-нибудь внутреннюю допустимую деформацию $\{L_{w_n}\}$ кривой L_w . Тогда решение обратных краевых задач с известными кривыми L_{w_n} имеет вид:

$$z_n = f_n(w) = e^{i\alpha} \int e^{\chi_n(w)} dw + C, \quad (4)$$

где

$$\begin{aligned} \chi_n(w) &= S \ln \omega_n(\sigma) = S \ln \frac{ds_n}{d\sigma} = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{l_n} \frac{\partial M_n(w, \zeta)}{\partial n} \ln \omega_n(\sigma) d\sigma, \end{aligned} \quad (5)$$

$M_n(w, \zeta) = G_n(w, \zeta) + iH_n(w, \zeta)$ — комплексная функция Грина области D_{w_n} . Здесь постоянные выберем общими для всех L_{z_n} и L_z . l_n — длина контура L_{w_n} .

Рассмотрим теперь последовательность функций Грина $\{G_n(w, \zeta)\}$, $w, \zeta \in D_{w_n}$. Как известно, отыскание функции Грина $G_n(w, \zeta)$ сводится к решению частного случая задачи Дирихле для области D_{w_n} . Но М. В. Келдыш в [3] доказал устойчивость задачи Дирихле для непрерывных функций. Поэтому при наших предположениях задача отыскания функции Грина $G(w, \zeta)$ для области D_w устойчива. Отсюда последовательность $\{G_n(w, \zeta)\}$ равномерно сходится к функции $G(w, \zeta)$. Аналогично этому последовательность $\{H_n(w, \zeta)\}$ равномерно сходится к функции $H(w, \zeta)$ внутри области D_w . Следовательно, последовательность комплексных функций Грина $\{M_n(w, \zeta)\}$ равномерно сходится внутри D_w к функции $M(w, \zeta)$. Отсюда по [4] последовательность $\left\{ \frac{\partial M_n(w, \zeta)}{\partial n} \right\}$ равномерно сходится внутри D_w

к $\frac{\partial M(w, \zeta)}{\partial n}$; далее по [2] при любой допустимой деформации контура L_w

последовательность $\{\ln \omega_n(\sigma)\}$ равномерно сходится к $\ln \omega(\sigma)$. Поэтому по формулам (1), (3) — (5) и по стремлению l_n к l , когда n стремится к бесконечности, последовательность $z_n = f_n(w)$ равномерно сходится к функции $z = f(w)$, тем доказана устойчивость исследуемой задачи.

2. Переходим теперь к рассмотрению устойчивости обратной краевой задачи для многосвязной области. Эта задача может быть сформулирована следующим образом [1].

Даны $n+1$ пар функций параметра s

$$u = u_k(s), v = v_k(s), 0 \leq s \leq l_k, k = 0, 1, \dots, n, \quad (6)$$

периодических с периодами l_k и имеющих производные, удовлетворяющие условию Гельдера и не обращающиеся в нуль. Уравнения (6) определяют в плоскости $w = u + iv$ $n+1$ замкнутых кривых $L_{0w}, L_{1w}, \dots, L_{nw}$. Функции $u_k(s)$ и $v_k(s)$ считаются такими, что кривые L_{kw} не самопересекающиеся, а также не пересекают друг друга, и контур L_{0w} охватывает все остальные. Они определяют $(n+1)$ -связную область D_w в плоскости w , являясь контуром области ($L_w = L_{0w} + L_{1w} + \dots + L_{nw}$).

Внутренняя задача. Определить в плоскости z $n+1$ кривых $L_{0z}, L_{1z}, \dots, L_{nz}$ ($L_z = L_{0z} + L_{1z} + \dots + L_{nz}$), ограничивающих конечную область D_z^+ так, чтобы, считая s длиной дуг кривых L_{kz} , комплексные функции $\omega_k(s) = u_k(s) + iv_k(s)$ были краевым значением аналитической функции $w = w(z)$, конформно отображающей область D_z^+ на область D_w .

Внешняя задача. Если в предыдущей формулировке конечную область D_z^+ заменить на D_z^- , содержащую бесконечно удаленную точку, то получим постановку внешней задачи.

По [5] решение внутренней задачи имеет вид

$$z = F(w) = e^{i\beta} \int e^{\lambda(w)} dw + C, \quad (7)$$

где β — произвольная вещественная постоянная, C — произвольная комплексная постоянная, $\lambda(w) = S \ln \omega(\sigma)$, S — оператор Шварца для многосвязной области D_w ,

$$\lambda(w) = \frac{1}{2\pi} \int_{L_w} \frac{\partial M(w, \zeta)}{\partial n} \ln \omega(\sigma) d\sigma, \tag{8}$$

где

$$\omega(\sigma) = \frac{ds}{d\sigma} = \frac{1}{\sqrt{u'^2(s(\sigma)) + v'^2(s(\sigma))}},$$

$M(w, \zeta)$ — комплексная функция Грина для многосвязной области.

Аналогично предыдущему получается следующая

Теорема. Поставленная выше внутренняя обратная задача для многосвязной области если разрешима, то устойчива.

Доказательство. Возьмем какую-либо внутреннюю допустимую деформацию $\{L_{w_n}\}$ кривой L_w . Тогда кривые L_{z_n} получаются переходом к граничным значениям следующих выражений:

$$z_n = F_n(w) = e^{i\beta} \int e^{\lambda_n(w)} dw + C, \tag{9}$$

где

$$\lambda_n(w) = S \ln \omega_n(\sigma) = \frac{1}{2\pi} \int_{L_{w_n}} \frac{\partial M_n(w, \zeta)}{\partial n} \ln \omega_n(\sigma) d\sigma, \tag{10}$$

$\omega_n(\sigma)$ и $M_n(w, \zeta)$ определены, как в предыдущем. По [3] задача Дирихле для непрерывных функций в любой конечно-связной области тоже устойчива. Поэтому при допустимой деформации $\{L_{w_n}\}$ контура L_w последовательность функций Грина $\{G_n(w, \zeta)\}$ областей D_{w_n} равномерно сходится внутри D_w к функции Грина $G(w, \zeta)$. Отсюда последовательность $\left\{ \frac{\partial M_n(w, \zeta)}{\partial n} \right\}$

равномерно сходится внутри D_w к $\frac{\partial M(w, \zeta)}{\partial n}$.

Теперь мы покажем, что последовательность $\{\omega_n(\sigma)\}$ равномерно сходится к $\omega(\sigma)$. В [4] доказана следующая

теорема: пусть в плоскости w дана последовательность многосвязных областей A_n ($n = 1, 2, \dots$), содержащих точку w_0 и сходящихся по отношению к w_0 к ядру A , и пусть функции $z_n = f_n(w)$ однолистно отображают области A_n на области B_n так, что $f_n(w_0) = z_0$, $f'_n(w_0) > 0$, $n = 1, 2, \dots$. Для того чтобы последовательность функций $f_n(w)$ равномерно сходилась внутри области A к конечной функции, необходимо и достаточно, чтобы последовательность многосвязных областей B_n по отношению к z_0 имела ядро и сходилась к своему ядру B ; тогда предельная функция однолистно отображает A на B . Но также по [4] всякую n -связную область в плоскости w (которая не имеет изолированных граничных точек) можно посредством регулярной функции отобразить взаимно однозначно на n -листный круг $|\zeta| < 1$. Поэтому непосредственно получается, что если последовательность функций $z_n = f_n(\zeta)$, $f_n(\zeta_0) = z_0$, $f'_n(\zeta_0) > 0$, $n = 1, 2, \dots$, взаимно однозначно отображает n -листный круг $|\zeta| < 1$ соответственно на последовательность n -связных областей B_n , то, для того чтобы последовательность функций $f_n(\zeta)$ равномерно сходилась к конечной функции, необходимо и достаточно, чтобы последовательность областей B_n сходилась к своему ядру B . Тогда предельная функция $f(\zeta)$ взаимно однозначно отображает n -листный круг $|\zeta| < 1$ на

ядро B . Теперь с помощью этого предложения, замечая, что по условию разрешимости задачи отображающая функция $z = z(w)$ будет однозначной, поступим совершенно так же, как в [6] и [2]. Получим, что при любой допустимой деформации контура L_w последовательность $\ln \omega_n(\sigma)$ равномерно сходится к $\ln \omega(\sigma)$.

Теперь из предыдущих выводов и по формулам (7)–(10) утверждаем, что последовательность $\{z_n = F_n(w)\}$ равномерно сходится к $z = F(w)$. Отсюда по теореме об отображении многосвязных областей с переменными границами [4], которая сформулирована выше, последовательность областей $\{D_{z_n}^+\}$ сходится к ядру D_z^+ , что и требовалось доказать.

Для внешней деформации контура L_w решение аналогично.

3. В заключение решим еще один вопрос об устойчивости обратной краевой задачи для случая односвязных областей. Согласно [1] решение обратной краевой задачи — определить функцию $z = z(w)$, конформно отображающую заданную область D_w на искомую D_z , сводится к решению задачи Шварца — определить аналитическую функцию $\ln \frac{dz}{dw}$ по заданной на границе области

ее вещественной части $\ln \frac{ds}{d\sigma}$. Эта задача в существенном сводится к задаче

Дирихле для области D_w (в случае односвязности области). В [3] М. В. Келдыш доказал некоторые теоремы об устойчивости задачи Дирихле для внутренней деформации области (в нашей терминологии). На основе этих результатов легко получить некоторые заключения об устойчивости нашей обратной задачи, например следующую теорему.

Построим сначала непрерывную функцию φ , определенную во всей плоскости w и совпадающую с $\ln \frac{ds}{d\sigma} = \Phi(\sigma)$ на границе L_w . Обозначим че-

рез $\Psi_{n,\varphi}$ решение задачи Дирихле в области D_w , ограниченной контуром L_{w_n} при граничных данных φ . По [3] последовательность $\{\Psi_{n,\varphi}\}$ сходится в области D_w , причем сходимости внутри области D_w равномерная.

Предельная функция Ψ_Φ не зависит от специального выбора (внутренней) деформации $\{D_{w_n}\}$. Отсюда легко может быть получена следующая

Теорема. Обратная краевая задача с известным контуром L_w будет устойчива, если в каждой точке $\zeta(\sigma) \in L_w$ выполняется условие

$$\Psi_\Phi(\zeta) = \Phi = \ln \frac{ds}{d\sigma}.$$

Доказательство. По [3] при наших предположениях задача Дирихле для области D_w с граничными данными $\Phi = \ln \frac{ds}{d\sigma}$ устойчива.

Значит, последовательность $\{\Psi_{n,\varphi}\}$ равномерно сходится к $\operatorname{Re} \ln \frac{dz}{dw}$. От-

сюда следует, что последовательность $\{z_n(w)\}$ равномерно сходится к $z(w)$ в D_w . Затем на основе известной теоремы Каратеодори [4] об отображении областей с переменными границами получим, что последовательность $\{D_{z_n}\}$ сходится к ядру D_z . Теорема доказана.

Для внешней деформации решение аналогично.

Автор выражает благодарность Ф. Д. Гахову за ценные советы и внимание к работе.

Литература

1. Гахов Ф. Д. Краевые задачи. Физматгиз, М., 1963.
2. Хоанг Д. З. Весті АН БССР, сер. фіз.-мат. навук, № 4, 1967.
3. Келдыш М. В. УМН, вып. VIII, 1940.
4. Голузин Г. М. Геометрическая теория функций комплексного переменного. Гостехиздат, М., 1952.
5. Тумашев Г. Г. и Нужин М. Т. Обратные краевые задачи и их приложения. Казань, 1965.
6. Чикин Л. А. Уч. зап. Ростовского ун-та, т. 43, вып. 6, 1959.

Белорусский государственный университет
им. В. И. Ленина

Поступило в редакцию 14.VI 1968

В. Н. АБРАШИН

**О СХОДИМОСТИ МЕТОДА ПРЯМЫХ ПРИ РЕШЕНИИ
 НЕКОТОРЫХ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ**

В [1, 2] рассмотрена одна схема метода прямых повышенной точности при решении некоторых краевых задач для линейных уравнений параболического и гиперболического типов. Данная статья посвящена обобщению результатов [1, 2] на случай квазилинейных уравнений.

1. Пусть существует единственное решение следующей задачи:

$$\begin{aligned} \rho(x, t, u) \frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t, u) \quad (0 \leq x \leq l, 0 \leq t \leq T), \\ u(x, 0) &= \varphi(x) \quad (0 \leq x \leq l), \\ u(0, t) &= \psi_1(t), \quad u(l, t) = \psi_2(t), \quad 0 \leq t \leq T, \end{aligned} \quad (1)$$

где $\rho(x, t, u) > 0$.

Предположим, что решение задачи (1) имеет в Π ($0 \leq x \leq l, 0 \leq t \leq T$) ограниченную производную $\frac{\partial^6 u}{\partial x^6}$.

Приближенное решение краевой задачи (1) будем искать методом прямых, аппроксимируя исходную задачу задачей Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \rho(x_{n+1}, t, u_{n+1}) u'_{n+1} + 10 \rho(x_n, t, u_n) u'_n + \rho(x_{n-1}, t, u_{n-1}) u'_{n-1} = \\ = \frac{12}{h^2} (u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1}) + f(x_{n+1}, t, u_{n+1}) + 10f(x_n, t, u_n) + \\ + f(x_{n-1}, t, u_{n-1}), \quad 0 \leq t \leq T, \quad u_n(0) = \varphi(x_n); \\ u_0 = \psi_1(t), \quad u_N = \psi_2(t), \quad n = 1, 2, \dots, N-1, \quad u_n = u_n(t) \end{aligned} \quad (2)$$

на прямых $x = x_n = nh$ ($n = 0, 1, \dots, N$).

Для погрешности метода $\gamma_n = \gamma_n(t) = u(x_n, t) - u_n(t)$, предполагая, что функции $f(x, t, u)$, $\rho(x, t, u)$ непрерывно дифференцируемы по u , получим следующую задачу Коши:

$$\begin{aligned} \rho(x_{n+1}, t, \bar{u}_{n+1}) \gamma'_{n+1} + 10 \rho(x_n, t, \bar{u}_n) \gamma'_n + \rho(x_{n-1}, t, \bar{u}_{n-1}) \gamma'_{n-1} = \\ = \frac{12}{h^2} (\gamma_{n+1} - 2\gamma_n + \gamma_{n-1}) + c(x_{n+1}, t) \gamma_{n+1} + 10c(x_n, t) \gamma_n + \\ + c(x_{n-1}, t) \gamma_{n-1} + r_n, \quad 0 \leq t \leq T, \quad n = 1, 2, \dots, N-1; \\ \gamma_n(0) = 0, \quad \gamma_0 = 0, \quad \gamma_N = 0, \quad \bar{u}_n = u(x_n, t), \end{aligned} \quad (3)$$

где

$$c(x_n, t) = \frac{\partial f(x_n, t, u_n + \theta_1 \gamma_n)}{\partial u} - \frac{\partial \rho(x_n, t, u_n + \theta_2 \gamma_n)}{\partial u} u'_n,$$

$$|r_n| \leq \frac{h^4}{20} M_6, \quad M_6 = \max_{\Pi} \left| \frac{\partial^6 u}{\partial x^6} \right|, \quad 0 < \theta_1, \theta_2 < 1.$$

Систему (3) запишем в матричной форме

$$A_N P_N \Gamma'_N = -Q_N \Gamma_N + A_N C_N \Gamma_N + R_N, \quad 0 \leq t \leq T, \quad \Gamma_N(0) = 0. \quad (4)$$

Здесь

$$A_N = \begin{bmatrix} 10 & 1 & 0 & \vdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 10 & 1 & \vdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 10 & \vdots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 10 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 1 & 10 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 & 1 & 10 \end{bmatrix},$$

$$Q_N = \frac{1}{h^2} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & \vdots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \vdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \vdots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix},$$

$$P_N = \begin{bmatrix} \rho(x_1, t, \bar{u}_1) & 0 & \vdots & 0 & 0 \\ 0 & \rho(x_2, t, \bar{u}_2) & \vdots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \vdots & \rho(x_{N-2}, t, \bar{u}_{N-2}) & 0 \\ 0 & 0 & \vdots & 0 & \rho(x_{N-1}, t, \bar{u}_{N-1}) \end{bmatrix},$$

$$C_N = \begin{bmatrix} c(x_1, t) & 0 & \vdots & 0 & 0 \\ 0 & c(x_2, t) & \vdots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \vdots & c(x_{N-2}, t) & 0 \\ 0 & 0 & \vdots & 0 & c(x_{N-1}, t) \end{bmatrix},$$

$$R_N = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_{N-2} \\ r_{N-1} \end{bmatrix}, \quad \Gamma_N = \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \vdots \\ \gamma_{N-2} \\ \gamma_{N-1} \end{bmatrix}.$$

Уравнение (4) перепишем в виде

$$P_N \Gamma'_N = -A_N^{-1} Q_N \Gamma_N + C_N \Gamma_N + A_N^{-1} R_N, \quad 0 \leq t \leq T. \quad (5)$$

Покажем, что матрица $A_N^{-1} Q_N$ положительно определенная. Матрицу $Q_N^{-1} A_N = (A_N^{-1} Q_N)^{-1}$ можно записать в виде (см. [3])

$$Q_N^{-1} A_N = Q_N^{-1} (12E_N - h^2 Q_N) = B_N \Lambda_N B_N, \quad (6)$$

где

$$B_N = \{b_{n,s}\} = \left\{ (-1)^{n+s} \sqrt{\frac{1}{N}} \sin \frac{n \cdot s \pi}{N} \right\} \quad (n, s = 1, \dots, N-1),$$

E_N — единичная матрица порядка $N-1$,

$$\Lambda_N = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{N-1}), \quad \lambda_n = h^2 \left[\frac{6}{1 + \cos \frac{n\pi}{N}} - 1 \right] > 0.$$

Из (6) непосредственно следует, что матрица $A_N^{-1} Q_N$ положительно определена.

Положив в (5) $V_N = P_N^{-\frac{1}{2}} \Gamma_N$, получим

$$V'_N = [-P_N^{-\frac{1}{2}} A_N^{-1} Q_N P_N^{-\frac{1}{2}} + P_N^{-\frac{1}{2}} C_N P_N^{-\frac{1}{2}} + (P_N^{-\frac{1}{2}})' P_N^{-\frac{1}{2}}] V_N + P_N^{-\frac{1}{2}} A_N^{-1} R_N, \quad 0 \leq t \leq T, \quad V_N(0) = 0. \quad (7)$$

По аналогии с [1] оценим решение задачи (7)

$$\|V_n\| \leq \int_0^t \|\bar{R}_n\| \int_{\tau}^t \mu[\bar{P}_N] d\xi d\tau, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (8)$$

где

$$\|V_n\| = \sqrt{\sum_{n=1}^{N-1} v_n^2}, \quad \|\bar{R}_n\| = \|P_N^{-\frac{1}{2}} A_N^{-1} R_N\| = \sqrt{\sum_{n=1}^{N-1} \xi_n^2},$$

v_n, ξ_n — элементы векторов V_n, \bar{R}_n ;

$$\bar{P}_N = -P_N^{-\frac{1}{2}} A_N^{-1} Q_N P_N^{-\frac{1}{2}} + P_N^{-\frac{1}{2}} C_N P_N^{-\frac{1}{2}} + (P_N^{-\frac{1}{2}})' P_N^{-\frac{1}{2}},$$

$\mu[\bar{P}_N]$ — третья логарифмическая норма матрицы \bar{P}_N (см. [4]).

В дальнейшем нам понадобятся следующие свойства логарифмической нормы:

- а) $\mu(A+B) \leq \mu(A) + \mu(B)$,
 б) $\mu(A) \leq \|A\|$ (под $\| \cdot \|$ здесь и всюду ниже будем понимать третью норму).

Из неравенства (8), имея в виду а), б), для погрешности метода получим следующую оценку:

$$|\gamma_n(t)| \leq h^{3.5} \frac{\sqrt{l} t}{200\rho} M_6 \exp ta, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (9)$$

где

$$\alpha = \frac{c}{\rho} + \frac{\rho'}{\rho^{\frac{1}{2}}}, \quad \rho = \min_{\Pi} \rho(x, t, u),$$

$$\rho' = \max_{\Pi} |(\rho^{\frac{1}{2}}(x, t, u))'_t|, \quad c = \max_{\Pi} |c(x_n, t)|.$$

2. Теперь рассмотрим первую краевую задачу для гиперболического уравнения

$$a(x, t) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f\left(x, t, u, \frac{\partial u}{\partial t}\right), \quad 0 \leq t \leq T, \quad 0 \leq x \leq l; \quad (10)$$

$$u(x, 0) = \varphi_1(x), \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = \varphi_2(x), \quad 0 \leq x \leq l;$$

$$u(0, t) = \psi_1(t), \quad u(l, t) = \psi_2(t), \quad 0 \leq t \leq T,$$

где $a(x, t) > 0$, $\frac{\partial f\left(x, t, u, \frac{\partial u}{\partial t}\right)}{\partial u} \leq 0$.

Функции, заданные в условиях задачи (10), будем предполагать такими, что решение этой краевой задачи существует, единственно и имеет ограниченную в Π ($0 \leq t \leq T$, $0 \leq x \leq l$) производную $\frac{\partial^6 u}{\partial x^6}$.

На прямых $x_n = nh$ ($n = 0, 1, \dots, N$) краевую задачу (10) аппроксимируем задачей Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} & a(x_{n+1}, t) \ddot{u}_{n+1} + 10a(x_n, t) \ddot{u}_n + a(x_{n-1}, t) \ddot{u}_{n-1} = \\ & = \frac{12}{h^2} (u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1}) + f(x_{n+1}, t, u_{n+1}, \dot{u}_{n+1}) + 10f(x_n, t, u_n, \dot{u}_n) + \\ & + f(x_{n-1}, t, u_{n-1}, \dot{u}_{n-1}), \quad 0 \leq t \leq T, \quad n = 1, 2, \dots, N-1; \end{aligned} \quad (11)$$

$$u_n(0) = \varphi_1(x_n), \quad \dot{u}_n(0) = \varphi_2(x_n), \quad u_0 = \psi_1(t), \quad u_N = \psi_2(t).$$

Для погрешности схемы (11) по аналогии с п. 1 получим следующую задачу Коши:

$$A_N K_N \Gamma_N'' = -Q_N \Gamma_N + A_N L_N \Gamma_N + A_N F_N \Gamma_N' + R_N, \quad (12)$$

$$0 \leq t \leq T, \quad \Gamma_N(0) = 0, \quad \Gamma_N'(0) = 0,$$

где

$$K_N = \begin{bmatrix} a(x_1, t) & 0 & \vdots & 0 & 0 \\ 0 & a(x_2, t) & \vdots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \vdots & a(x_{N-2}, t) & 0 \\ 0 & 0 & \vdots & 0 & a(x_{N-1}, t) \end{bmatrix},$$

$$L_N = \begin{bmatrix} \beta_1 & 0 & \vdots & 0 & 0 \\ 0 & \beta_2 & \vdots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \vdots & \beta_{N-2} & 0 \\ 0 & 0 & \vdots & 0 & \beta_{N-1} \end{bmatrix}, \quad F_N = \begin{bmatrix} \xi_1 & 0 & \vdots & 0 & 0 \\ 0 & \xi_2 & \vdots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \vdots & \xi_{N-2} & 0 \\ 0 & 0 & \vdots & 0 & \xi_{N-1} \end{bmatrix},$$

$$\beta_n = \frac{\partial f[x_n, t, u_n + \bar{\theta}_1 \gamma_n, u'(x_n, t)]}{\partial u},$$

$$\xi_n = \frac{\partial f[x_n, t, u_n, u'_n + \bar{\theta}_2 \gamma'_n]}{\partial u'_t},$$

$$0 < \bar{\theta}_1, \bar{\theta}_2 < 1.$$

Так как матрица $A_N^{-1}Q_N - L_N$ положительно определенная, то для нее существует положительно определенный квадратный корень $\Phi^2 = A_N^{-1}Q_N - L_N$. Уравнение (12) перепишем в виде

$$W'_N = [\bar{K}_N^{-\frac{1}{2}} \bar{Q}_N \bar{K}_N^{-\frac{1}{2}} + \bar{K}_N^{-\frac{1}{2}} \bar{F}_N \bar{K}_N^{-\frac{1}{2}} + (\bar{K}_N^{-\frac{1}{2}})' \bar{K}_N^{-\frac{1}{2}}] W_N + \bar{K}_N^{-\frac{1}{2}} \bar{R}_N, \quad W_N(0) = 0, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (13)$$

где

$$W_N = \bar{K}_N^{-\frac{1}{2}} \begin{bmatrix} V_N \\ Z_N \end{bmatrix}, \quad V_N = \Gamma'_N, \quad Z_N = \Phi_N \Gamma_N, \quad \bar{K}_N = \begin{bmatrix} K_N & 0 \\ 0 & E_N \end{bmatrix},$$

$$Q_N = \begin{bmatrix} 0 & -\Phi_N \\ \Phi_N & 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{F}_N = \begin{bmatrix} F_N & 0 \\ 0 & \Phi'_N \Phi_N^{-1} \end{bmatrix}, \quad \bar{R}_N = \begin{bmatrix} A_N^{-1} R_N \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Из уравнения (13) по аналогии с [2] получим следующую оценку погрешности метода:

$$|\gamma_n(t)| \leq h^{3.5} \frac{\sqrt{l} t^2}{400a} M_6 \exp \alpha_1 t, \quad 0 \leq t \leq T, \quad n = 1, 2, \dots, N-1, \quad (14)$$

где

$$\alpha_1 = \frac{f_u}{a} + \frac{a'}{a^{\frac{1}{2}}}, \quad a = \min_{\Pi} a(x, t),$$

$$a' = \max_{\Pi} |(a^{\frac{1}{2}}(x, t))'|,$$

$$f_u = \max_{\Pi} \left\{ \left| 12 \frac{\partial^2 f(x, t, u, u_t)}{\partial x \partial u} \right|, \left| \frac{\partial f(x, t, u, u_t)}{\partial u_t} \right| \right\}.$$

Из полученных оценок погрешности метода (9), (12) непосредственно следует равномерная сходимость полученных вычислительных схем к решениям исходных задач со скоростью порядка $h^{3.5}$.

Литература

1. В. Н. Абрашин. ДАН БССР, 11, № 11, 970, 1967.
2. В. Н. Абрашин. ДАН БССР, 13, № 1, 13, 1969.
3. В. Н. Фаддеева. Тр. Матем. ин-та им. В. А. Стеклова, 28, 47, 1949.
4. С. М. Лозинский. Изв. вузов. Математика, № 5, 52, 1958.

Институт математики АН БССР

Поступило в редакцию 16. V 1968

А. К. ПОКАЛО

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ЛИНЕЙНЫХ МЕТОДОВ
 СУММИРОВАНИЯ РЯДОВ ФУРЬЕ ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ
 ФУНКЦИЙ

1. Обозначим через $W^{(p)}MK$ (p — фиксированное натуральное число) класс периодических, с периодом 2π , функций $f(x)$, имеющих абсолютно непрерывную производную $(p-1)$ -го порядка и производную p -го порядка $f^{(p)}(x)$, для которой $\|f^{(p)}\|_M = \sup_{0 < x < 2\pi} |f^{(p)}(x)| \leq K$. Как известно, всякая функция $f(x)$ из рассматриваемого класса разлагается в абсолютно сходящийся ряд Фурье

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos k(x-t) dt. \quad (1)$$

Дифференцируя ряд (1) последовательно m раз ($m = 1, 2, \dots, p-1$), получим разложение в абсолютно сходящийся ряд Фурье производной $f^{(m)}(x)$:

$$f^{(m)}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^m}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos \left[k(x-t) + \frac{m\pi}{2} \right] dt. \quad (2)$$

Одновременно с рядами (1) и (2) абсолютно сходятся сопряженные с ними ряды

$$\bar{f}^{(m)}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^m}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) \cos \left(kt + \frac{m+1}{2} \pi \right) dt \quad (3)$$

($m = 0, 1, 2, \dots, p-1$; $\bar{f}^{(0)}(x) = \bar{f}(x)$), а суммы их являются функциями, сопряженными к функциям $f(x)$ и $f^{(m)}(x)$.

Рассмотрим еще треугольную матрицу чисел $\|\mu_k^{(n)}\|$, $k = 0, 1, 2, \dots, n$. Будем считать, что числа $\mu_k^{(n)}$ разлагаются в абсолютно сходящиеся ряды по степеням $\frac{k}{n}$ ($k \leq n$):

$$\mu_k^{(n)} = \sum_{m=0}^{\infty} a_m \left(\frac{k}{n} \right)^m \quad (4)$$

с коэффициентами $a_m = a_m(n)$, удовлетворяющими при всех $n \geq 0$ условиям

$$\sum_{m=1}^{\infty} m |a_m| = O(1). \quad (5)$$

Впервые такие матрицы рассматривались в работе [10].
При помощи чисел $\mu_k^{(n)}$ построим линейные операторы

$$U_n [f, x] = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) \left[\frac{\mu_0^{(n)}}{2} + \sum_{k=1}^n \mu_k^{(n)} \cos kt \right] dt \quad (6)$$

и

$$\bar{U}_n [f, x] = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) \sum_{k=1}^n \mu_k^{(n)} \cos \left(kt + \frac{\pi}{2} \right) dt. \quad (7)$$

Теорема 1. Если $f(x) \in W^{(\rho)}MK$ и числа $\mu_k^{(n)}$ ($k = 0, 1, 2, \dots, n$; $n = 0, 1, 2, \dots$) удовлетворяют условиям (4) и (5), то

$$U_n [f, x] = \sum_{v=0}^{\rho-1} (-1)^v \frac{a_{2v}}{n^{2v}} f^{(2v)}(x) + \sum_{v=1}^{\rho} (-1)^{v+1} \frac{a_{2v-1}}{n^{2v-1}} \bar{f}^{(2v-1)}(x) + R_p(x), \quad (8)$$

где $\rho = E \left(\frac{p+1}{2} \right)$,

$$\|R_p\|_M \leq \frac{K}{n^p} \left\{ \frac{4}{\pi^2} \left| \sum_{m=0}^{\infty} a_m \right| \ln n + |a_p| \gamma_p(n) \right\} + O \left(\frac{1}{n^p} \right), \quad (9)$$

$$\gamma_{2p}(n) = O(1) \quad \text{и} \quad \gamma_{2p-1}(n) = \frac{2}{\pi} \ln n. \quad (10)$$

Теорема 2. При выполнении условий теоремы 1

$$\bar{U}_n [f, x] = \sum_{v=0}^{\rho-1} (-1)^v \frac{a_{2v}}{n^{2v}} \bar{f}^{(2v)}(x) + \sum_{v=1}^{\rho} (-1)^v \frac{a_{2v-1}}{n^{2v-1}} f^{(2v-1)}(x) + \bar{R}_p(x), \quad (11)$$

где

$$\|\bar{R}_p\|_M \leq \frac{K}{n^p} \left\{ \frac{4}{\pi^2} \left| \sum_{m=0}^{\infty} a_m \right| \ln n + |a_p| \gamma_{p+1}(n) \right\} + O \left(\frac{1}{n^p} \right), \quad (12)$$

$\gamma_{p+1}(n)$ определяются соотношением (10) и $\rho = E \left(\frac{p+1}{2} \right)$.

Частные случаи теоремы 1 доказаны А. Н. Колмогоровым [3], С. М. Никольским [7], А. Зигмундом [2] (см. также [11], 8.7.27), И. П. Натансоном ([4] и [6], см. также [5]). Для треугольной матрицы чисел $\mu_k^{(n)}$, удовлетворяющих условию

$$\mu_k^{(n)} = \sum_{m=0}^N \alpha_m^{(n)} k^m + \rho_N(n, k),$$

формула (8) получена автором в работе [9].

Частные случаи теоремы 2 содержатся в работах В. Т. Пинкевича [8], С. М. Никольского [7], А. Зигмунда [2].

Доказательство теоремы 1 излагается в пункте II. Доказательство теоремы 2, лишь незначительно отличающееся от доказательства теоремы 1, не приводится. В пункте III уточняется при $p \geq 3$ формула И. П. Натансона [6] для сингулярного интеграла Д. Джексона, оценивается $\sup_{f \in W^{(p)}_{MK}} \max_{0 < x < 2\pi} |U_n[f, x] - f(x)|$ и указываются условия, при которых операторы (6) и (7) дают приближение порядка наилучшего для самой функции $f(x)$ из рассматриваемого класса и для производных $f^{(s)}(x)$ ($s \leq p-1$) этой функции.

Полученные результаты распространяются на класс $W^{(p)}LK$ 2π -периодических функций $f(x)$ с абсолютно непрерывной производной $(p-1)$ -го порядка и производной p -го порядка $f^{(p)}(x)$, для которой

$$\|f^{(p)}\|_L = \int_0^{2\pi} |f^{(p)}(x)| dx \leq K.$$

II. Доказательство теоремы 1. Воспользуемся условием (4) и представим оператор (6) в виде сходящегося ряда

$$U_n[f, x] = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{a_m}{n^m} V_m(x), \quad (13)$$

где

$$V_m(x) = V_{m,n}[f, x] = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) \sum_{k=1}^n k^m \cos ktdt \quad (14)$$

и штрих при знаке \sum означает, что при $m=0$ добавляется слагаемое $\frac{1}{2}$. Для $m=0, 1, 2, \dots, p-1$ положим затем

$$r_m(x) = r_{m,n}(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{k^m}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) \cos ktdt. \quad (15)$$

Ряды (15) могут лишь знаком отличаться от остатков рядов (1) и (2) при m четном и остатков рядов (3) при m нечетном. Из равенств (1) — (3) получим при $2\nu \leq p-1$ и $2\nu-1 \leq p-1$ соотношения

$$V_{2\nu}(x) = (-1)^\nu f^{(2\nu)}(x) - r_{2\nu}(x),$$

$$V_{2\nu-1}(x) = (-1)^{\nu+1} f^{(2\nu-1)}(x) - r_{2\nu-1}(x).$$

Подставив полученные значения $V_m(x)$ ($m=0, 1, 2, \dots, p-1$) в правую часть равенства (13), получим соотношение (8) с последним слагаемым $R_p(x)$ в виде

$$R_p(x) = - \sum_{m=0}^{p-1} \frac{a_m}{n^m} r_m(x) + \sum_{m=p}^{\infty} \frac{a_m}{n^m} V_m(x). \quad (16)$$

Перейдем теперь к доказательству неравенства (9). Для этого преобразуем ряды $r_m(x)$ и суммы $V_m(x)$. Ряды, незначительно отличающиеся от рядов $r_m(x)$, оценивались в работе [8] В. Т. Пинкевичем. Некоторые формулы и оценки, полученные в [8], мы используем, другие нужные нам

соотношения и неравенства легко получить указанными там методами. Положим

$$D_m(t) = D_{m,n}^{(p)}(t) = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{\cos\left(kt + \frac{p\pi}{2}\right)}{k^{p-m}} \quad (0 \leq m \leq p-1),$$

$$A_n(t) = A_n^{(p)}(t) = \frac{\sin\left(\frac{2n+1}{2}t + \frac{p\pi}{2}\right)}{2\sin\frac{t}{2}},$$

$$B_n(t) = B_n^{(p)}(t) = \frac{\cos\frac{p\pi}{2} \sin^2\frac{n+1}{2}t}{2\sin^2\frac{t}{2}},$$

$$C_n(t) = C_n^{(p)}(t) = \frac{\sin\frac{p\pi}{2} \sin(n+1)t}{4\sin^2\frac{t}{2}}.$$

Будем считать еще для $\alpha \geq 1$

$$\Delta\left(\frac{1}{k^\alpha}\right) = \frac{1}{k^\alpha} - \frac{1}{(k+1)^\alpha}; \quad \Delta_2\left(\frac{1}{k^\alpha}\right) = \Delta\left(\frac{1}{k^\alpha}\right) - \Delta\left[\frac{1}{(k+1)^\alpha}\right].$$

Применяя дважды преобразование Абеля, так же как и в [8], докажем, что для $t \neq 2\pi N$ ($N = 0, \pm 1, \dots$) и $0 \leq m \leq p-1$

$$\begin{aligned} D_m(t) &= -\frac{A_n(t)}{(n+1)^{p-m}} - \Delta\left[\frac{1}{(n+1)^{p-m}}\right][B_n(t) + C_n(t)] + \\ &+ \sum_{k=n+1}^{\infty} \Delta_2\left(\frac{1}{k^{p-m}}\right)[B_k(t) + C_k(t)] = -\frac{A_n(t)}{(n+1)^{p-m}} + I_m(t). \end{aligned} \quad (17)$$

Интегрируя по частям коэффициенты Фурье ряда (15), представим этот ряд в виде следующего интеграла:

$$r_m(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^{(p)}(x+t) D_m(t) dt.$$

Разобьем полученный интеграл на два, распространенных на интервалы $(-\pi, 0)$ и $(0, \pi)$, и в интеграле по интервалу $(-\pi, 0)$ введем новую переменную $u = -t$. Объединив оба интеграла, получим соотношение

$$r_m(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \psi_p(t) D_m(t) dt,$$

где

$$\psi_p(t) = \psi_p(x, t) = f^{(p)}(x+t) + (-1)^p f^{(p)}(x-t). \quad (18)$$

Пусть еще

$$I_n^{(p)} = \frac{1}{\pi} \int_{\frac{1}{n}}^{\pi} \psi_p(t) A_n^{(p)}(t) dt. \quad (19)$$

При помощи равенства (17) получим теперь для $r_m(x)$ выражение

$$r_m(x) = \frac{I_n^{(p)}(x)}{(n+1)^{p-m}} + \frac{1}{\pi} L_m(x), \quad (20)$$

где

$$L_m(x) = \int_0^{\frac{1}{n}} \psi_p(t) D_m(t) dt + \int_{\frac{1}{n}}^{\pi} \psi_p(t) l_m(t) dt. \quad (21)$$

Приступая к преобразованию сумм $V_m(x)$ при $m \geq p$, введем обозначения

$$H_m(t) = H_{m,n}^{(p)}(t) = \sum_{k=1}^n k^{m-p} \cos\left(kt + \frac{p\pi}{2}\right) \quad (m \geq p),$$

$$\Delta(k^\alpha) = k^\alpha - (k+1)^\alpha; \quad \Delta_2(k^\alpha) = \Delta(k^\alpha) - \Delta[(k+1)^\alpha] \quad (\alpha \geq 1).$$

Применим к сумме $H_m(t)$ дважды преобразование Абеля. Тогда для $m > p$ $t \neq 2\pi N$ ($N = 0, \pm 1, \dots$)

$$H_m(t) = n^{m-p} A_n(t) + \Delta[(n-1)^{m-p}] [B_{n-1}(t) + C_{n-1}(t)] + \\ + \sum_{k=0}^{n-2} \Delta_2(k^{m-p}) [B_k(t) + C_k(t)] = n^{m-p} A_n(t) + q_m(t). \quad (22)$$

Из (14) при помощи (22) и (19) получим ($m > p$)

$$V_m(x) = n^{m-p} I_n^{(p)}(x) + \frac{1}{\pi} Q_m(x), \quad (23)$$

где

$$Q_m(x) = \int_0^{\frac{1}{n}} \psi_p(t) H_m(t) dt + \int_{\frac{1}{n}}^{\pi} \psi_p(t) q_m(t) dt. \quad (24)$$

При $m = p$

$$Q_p(x) = \int_0^{\frac{1}{n}} \psi_p(t) H_p(t) dt \quad (25)$$

и

$$V_p(x) = I_n^{(p)}(x) - I_0^{(p)}(x) + \frac{1}{\pi} Q_p(x). \quad (26)$$

Из (16), (20), (23) и (26) следует, что

$$R_p(x) = \frac{1}{n^p} \left[\sum_{m=0}^{\infty} a_m + O\left(\frac{1}{n}\right) \right] I_n^{(p)}(x) - \frac{a_p}{n^p} I_0^{(p)}(x) -$$

$$-\frac{1}{\pi} \sum_{m=0}^{p-1} \frac{a_m}{n^m} L_m(x) + \frac{1}{\pi} \sum_{m=p}^{\infty} \frac{a_m}{n^m} Q_m(x). \quad (27)$$

Приступаем теперь к оценке правой части соотношения (27). В работе [8] показано, что при $p > 0$

$$\int_{\frac{1}{n}}^{\pi} |B_k(t) + C_k(t)| dt = O(k) \quad (k = 1, 2, \dots). \quad (28)$$

Так же, как и в работе [8], доказывается, что для ограниченных p и $m < p$

$$\int_0^{\frac{1}{n}} |D_m(t)| dt = O\left(\frac{m}{n^{p-m}}\right). \quad (29)$$

Из соотношения

$$(n-1) |\Delta[(n-1)^{m-p}]| + \sum_{k=1}^{n-2} k \Delta_2(k^{m-p}) = O(mn^{m-p}),$$

справедливого для ограниченных p и всех $m > p$, следует, что

$$\int_0^{\frac{1}{n}} |H_m(t)| dt = O(mn^{m-p}). \quad (30)$$

Пусть теперь $f(x) \in W^{(p)}MK$. Тогда из (18) следует, что

$$\|\Psi_p\|_M \leq 2K. \quad (31)$$

Поэтому из соотношения (21) при помощи (31), (29), (28) и (17) получим для ограниченных p и $m < p$

$$L_m(x) = O\left(\frac{m}{n^{p-m}}\right), \quad (32)$$

а из (24) или (25) и (31), (30), (22) и (28) следует, что для $m \geq p$

$$Q_m(x) = O(mn^{m-p}). \quad (33)$$

Для интеграла (19) А. Н. Колмогоровым [3] получена оценка

$$|I_n^{(p)}(x)| \leq \frac{4K}{\pi^2} \ln n + O(1). \quad (34)$$

Легко доказать, что

$$|I_0^{(2v-1)}(x)| \leq \frac{2K}{\pi} \ln n + O(1), \quad I_0^{(2v)}(x) = O(1). \quad (35)$$

Из соотношения (27) при помощи (32) — (35) получим неравенство (9). Теорема доказана.

III. а) Условиям (4) и (5) удовлетворяют множители

$$\mu_k^{(2n-2)} = \begin{cases} 1 - \frac{3k}{2n(2n^2+1)} - \frac{3k^2}{2n^2+1} + \frac{3k^3}{2n(2n^2+1)}, & 0 \leq k \leq n-2, \\ \frac{4n^2-1}{2n^2+1} - \frac{(12n^2-1)k}{2n(2n^2+1)} + \frac{3k^2}{2n^2+1} - \frac{k^3}{2n(2n^2+1)}, & n-1 \leq k \leq 2n-2, \end{cases}$$

определяющие сингулярный интеграл Д. Джексона

$$J_n(x) = \frac{3}{2\pi n(2n^2+1)} \int_{-\pi}^{\pi} f(t+x) \left(\frac{\sin \frac{nt}{2}}{\sin \frac{t}{2}} \right)^4 dt.$$

Следствие 1. Если $f(x) \in W^{(3)} MK$, то

$$J_n(x) = f(x) + \frac{3}{2n^2} f''(x) + O\left(\frac{\ln n}{n^3}\right);$$

если $f(x) \in W^{(p)} MK$ при $p \geq 4$, то

$$J_n(x) = f(x) - \frac{3}{2n(2n^2+1)} \bar{f}'(x) + \frac{3}{2n^2+1} f''(x) + \\ + \frac{3}{2n(2n^2+1)} \bar{f}''(x) + O\left(\frac{1}{n^p}\right).$$

В следствии 1 уточняется результат И. П. Натансона [6] для сингулярного интеграла $J_n(x)$.

б) Следствие 2. Если $a_0 = a_0(n) = 1$, то при выполнении условий теоремы 1

$$\sup_{f \in W^{(p)} MK} \max_{0 < x < 2\pi} |U_n[f, x] - f(x)| \leq \\ \leq \frac{4K}{\pi} \sum_{m=1}^{p-1} \frac{|a_m|}{n^m} A_{p-m} + \|R_p\|_{M'}, \quad (36)$$

где

$$A_m = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k(m-1)}}{(2k+1)^m}.$$

Неравенство (36) следует из оценок (см. [1] и [7])

$$\sup_{f \in W^{(p)} MK} \max_{0 < x < 2\pi} |f^{(m)}(x)| \leq \frac{4}{\pi} K A_{p-m}, \\ \sup_{f \in W^{(p)} MK} \max_{0 < x < 2\pi} |\bar{f}^{(m)}(x)| \leq \frac{4}{\pi} K A_{p-m},$$

справедливых для $m \leq p-1$ ($p = 1, 2, \dots$).

Следствие 3. Пусть числа $\mu_k^{(n)}$ удовлетворяют условиям (4) и (5). Тогда для того чтобы операторы (6) осуществляли на классе функций $W^{(p)} MK$ приближение порядка наилучшего, необходимо и достаточно, чтобы

$$\sum_{m=0}^{\infty} a_m = O\left(\frac{1}{\ln n}\right); \quad (37)$$

$$\left. \begin{aligned} a_0 &= 1 + O\left(\frac{1}{n^p}\right), \\ a_m &= O\left(\frac{1}{n^{p-m}}\right) \quad (1 \leq m \leq p-1) \end{aligned} \right\} \quad (38)$$

и для нечетного p

$$a_p = O\left(\frac{1}{\ln n}\right). \quad (39)$$

Достаточность условий (37)—(39) следует из неравенства (36) и соотношений (9) и (10). Необходимость условия (37) следует из работы А. Н. Колмогорова [3], необходимость условий (38) и (39) следует из работ С. М. Никольского [7] и А. Зигмунда [2].

Аналогичные следствия можно получить также из теоремы 2.

с) Следствие 4. Пусть числа $\mu_k^{(n)}$ удовлетворяют условиям (4), (5), (37) и условию (39) для любого p и $f(x) \in W^{(p)} MK$. Тогда 1) если существует четное $s = 2q$, $0 < s \leq p-1$, такое, что

$$\left. \begin{aligned} a_s &= 1 + O\left(\frac{1}{n^{p-1}}\right), \\ a_m &= O\left(\frac{1}{n^{p-m}}\right) \quad (0 \leq m \leq p-1, m \neq s), \end{aligned} \right\} \quad (40)$$

то

$$(-1)^q n^{2q} U_n[f, x] = f^{(2q)}(x) + O\left(\frac{1}{n^{p-2q}}\right); \quad (41)$$

2) если условия (40) выполняются для некоторого нечетного $s = 2q-1$, $0 < s \leq p-1$, то

$$(-1)^q n^{2q-1} \bar{U}_n[f, x] = f^{(2q-1)}(x) + O\left(\frac{1}{n^{p-2q+1}}\right). \quad (42)$$

Замечание. Из соотношений (41) и (42) следует, что при выполнении условий следствия 4 операторы

$$T_n^{(2q)}[f, x] = (-1)^q n^{2q} U_n[f, x] \quad (0 \leq 2q \leq p-1)$$

$$T_n^{(2q-1)}[f, x] = (-1)^q n^{2q-1} \bar{U}_n[f, x] \quad (0 < 2q \leq p)$$

осуществляют приближение порядка наилучшего для производных функции $f(x) \in W^{(p)} MK$ соответствующего порядка.

Аналогичные операторы можно построить и для приближения производных $\bar{f}^{(s)}(x)$ ($s = 1, 2, \dots, p-1$) функции $\bar{f}(x)$, сопряженной к функции $f(x)$.

Легко проверить, что условиям следствия 4 удовлетворяют, в частности, числа

$$\mu_k^{(n)} = \left(\frac{k}{n}\right)^s - \left(\frac{k}{n}\right)^{p+v} \quad (v = 1, 2, \dots; s = 1, 2, \dots, p-1).$$

Литература

1. Бернштейн С. Н. Собр. соч., т. 11. Изд. АН СССР, М., 170, 1954.
2. Zygmund A. Duke Math. Journal, 12, № 4, 685, 1945.
3. Колмогоров А. Н. Ann. of Mathematics, 36, № 2, 521, 1935.
4. Натансон И. П. ДАН СССР, 45, № 2, 290, 1944.
5. Натансон И. П. Конструктивная теория функций. М.—Л., Гостехиздат, 1949.
6. Натансон И. П. ДАН СССР, 73, № 2, 273, 1950.
7. Никольский С. М. ДАН СССР, 31, 210, 1941.
8. Пинкевич В. Т. Изв. АН СССР, сер. матем., 4, № 6, 521, 1940.
9. Покало А. К. Уч. зап. Минского гос. пед. института им. А. М. Горького, сер. физико-математическая, вып. 7, 51, 1957.
10. Покало А. К. Весті АН БССР, сер. фіз.-техн. навук, № 1, 24, 1962.
11. Тиман А. Ф. Теория приближения функций действительного переменного. М., Физматгиз, 1960.

Минский педагогический институт
им. М. Горького

Поступило в редакцию 29.IV 1968

В. И. ПЛАТОНОВА, Л. К. ТУТАЕВ

**К ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ
 СОСТАВНОГО МНОГООБРАЗИЯ M_{22}
 В АФФИННОМ ТРЕХМЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ**

Многообразие M_{22} состоит из элементов (A, α) , где α — плоскость и A — точка плоскости α . Точку A называют центром плоскости α . Центры A элементов (A, α) составляют двумерную поверхность (A) . Первому индексу символа M_{22} соответствует размерность поверхности (A) , а второму — размерность плоскости α .

§ 1. ВЫБОР КАНОНИЧЕСКОГО РЕПЕРА

Уравнения дифференциальных перемещений репера $(A\bar{e}_i)$ в аффинном трехмерном пространстве [1]

$$d\bar{A} = \omega^i \bar{e}_i, \quad d\bar{e}_i = \omega_i^k \bar{e}_k, \quad i, j, k = 1, 2, 3. \quad (1.1)$$

Структурные уравнения:

$$D\omega^i = [\omega^k \omega_k^i], \quad D\omega_i^j = [\omega_i^k \omega_k^j]. \quad (1.2)$$

Если векторы \bar{e}_2, \bar{e}_3 репера $(A\bar{e}_i)$ поместить в плоскости α , а начало A в центр этой плоскости, то уравнения (1.1) при сохранении указанной принадлежности запишутся в виде

$$\delta\bar{A} = 0, \quad \delta\bar{e}_1 = \pi_1^i \bar{e}_i, \quad \delta\bar{e}_2 = \pi_2^2 \bar{e}_2 + \pi_2^3 \bar{e}_3, \quad \delta\bar{e}_3 = \pi_3^2 \bar{e}_2 + \pi_3^3 \bar{e}_3. \quad (1.3)$$

Формы $\omega^1, \omega^2, \omega^3, \omega_2^1, \omega_3^1$ главные. Поместим векторы \bar{e}_1, \bar{e}_2 репера $(A\bar{e}_i)$ в касательной плоскости к поверхности (A) в точке A , тогда

$$\omega^3 = 0. \quad (1.4)$$

Все главные формы отнесем к базису, состоящему из форм ω^1, ω^2 . Имеем:

$$\omega_2^1 = a_{2\alpha}^1 \omega^\alpha, \quad \omega_3^1 = a_{3\alpha}^1 \omega^\alpha, \quad \alpha, \beta, \gamma = 1, 2. \quad (1.5)$$

Дифференцируя внешне уравнения (1.4) и (1.5), получим:

$$\left. \begin{aligned} [\omega_\alpha^3 \omega^\alpha] &= 0, \\ [da_{2\alpha}^1 - a_{2\beta}^1 \omega_\alpha^\beta + a_{2\alpha}^1 (\omega_1^1 - \omega_2^2) - a_{3\alpha}^1 \omega_2^3, \omega^\alpha] &= 0, \\ [da_{3\alpha}^1 - a_{3\beta}^1 \omega_\alpha^\beta + a_{3\alpha}^1 (\omega_1^1 - \omega_3^3) - a_{2\alpha}^1 \omega_2^3, \omega^\alpha] &= 0. \end{aligned} \right\} (1.6)$$

При вариации только вторичных форм в уравнениях (1.6) получим

$$\pi_1^3 = \pi_2^3 = 0,$$

$$\left. \begin{aligned} \delta a_{21}^1 &= a_{22}^1 \pi_1^2 + a_{21}^1 \pi_2^2, & \delta a_{31}^1 &= a_{32}^1 \pi_1^2 + a_{21}^1 \pi_3^2 + a_{31}^1 \pi_3^3, \\ \delta a_{22}^1 &= a_{22}^1 (2\pi_2^2 - \pi_1^1), & \delta a_{32}^1 &= a_{22}^1 \pi_3^2 + a_{32}^1 (\pi_3^3 + \pi_2^2 - \pi_1^1). \end{aligned} \right\} (1.7)$$

Положим:

$$a_{21}^1 = 1, \quad a_{31}^1 = 1, \quad a_{32}^1 = 0, \quad a_{22}^1 \neq 0. \quad (1.8)$$

При этом исключаются из рассмотрения многообразия, для которых плоскости α параллельны вдоль линии ω^1 , и многообразия, для которых линии ω^2 прямые.

При условиях (1.8) из уравнений (1.7) $\pi_3^2 = \pi_3^3 = 0$, $\pi_2^2 = -a_{22}^1 \pi_1^2$. Из уравнений (1.5) при условиях (1.8) и из уравнений (1.6) после применения леммы Картана следует:

$$\left. \begin{aligned} \omega_1^3 &= a_1 \omega^1 + a_2 \omega^2, & \omega_2^1 &= \omega^1 + a_{22}^1 \omega^2, \\ \omega_2^3 &= a_2 \omega^1 + a_3 \omega^2, & \omega_3^1 &= \omega^1, \\ \omega_2^2 &= -a_{22}^1 \omega_1^2 - (a_2 + b_1) \omega^1 - (a_3 + b_2) \omega^2, \\ \omega_3^2 &= -\frac{1 + c_2}{a_{22}^1} \omega^1 - \frac{a_{22}^1 + c_3}{a_{22}^1} \omega^2, \\ \omega_3^3 &= \left(\frac{1 + c_2}{a_{22}^1} - c_1 \right) \omega^1 + \left(\frac{a_{22}^1 + c_3}{a_{22}^1} - c_2 \right) \omega^2. \end{aligned} \right\} (1.9)$$

Последнее уравнение этой системы запишем в виде

$$\omega_3^3 = q_1 \omega^1 + q_2 \omega^2, \quad (1.10)$$

при этом

$$c_2 = a_{22}^1 (q_1 + c_1) - 1; \quad c_3 = a_{22}^1 (q_2 - 1) + a_{22}^1 (q_1 + c_1) - a_{22}^1. \quad (1.11)$$

Дифференцируя внешне первое и второе уравнения из (1.9) и (1.10), получим

$$\left. \begin{aligned} [da_1 - a_1 (2\omega_1^1 - \omega_3^3) - 2a_2 \omega_1^2, \omega^1] + [da_2 - a_2 (\omega_1^1 + \omega_2^2 - \omega_3^3) - \\ - a_1 \omega_2^1 - a_3 \omega_1^2, \omega^2] = 0, \\ [da_2 - a_2 (\omega_1^1 + \omega_2^2 - \omega_3^3) - a_3 \omega_1^2 - a_1 \omega_2^1, \omega^1] + \\ + [da_3 - a_3 (2\omega_2^2 - \omega_3^3) - 2a_2 \omega_2^1, \omega^2] = 0, \\ [dq_1 - q_1 \omega_1^1 - q_2 \omega_2^1 + \omega_1^3 - a_2 \omega_3^2, \omega^1] + \\ + [dq_2 - q_2 \omega_2^2 - q_1 \omega_2^1 - a_3 \omega_3^2, \omega^2] = 0. \end{aligned} \right\} (1.12)$$

Отсюда при вариации вторичных форм:

$$\left. \begin{aligned} \delta a_1 &= 2a_1 \pi_1^1 + 2a_2 \pi_1^2, & \delta a_2 &= a_2 (\pi_1^1 - a_{22}^1 \pi_1^2) + a_3 \pi_1^2, \\ \delta a_3 &= -a_{22}^1 a_3 \pi_1^2, & \delta q_1 &= q_1 \pi_1^1 + q_2 \pi_1^2, & \delta q_2 &= -a_{22}^1 q_2 \pi_1^2. \end{aligned} \right\} (1.13)$$

Положим:

$$a_2 = 0, \quad a_3 \neq 0, \quad q_1 = -2. \quad (1.14)$$

Исключая из рассмотрения точки A параболического типа на поверхности (A) , будем считать вместе с $a_3 \neq 0$ также $a_1 \neq 0$. Из уравнений (1.13) при

условиях (1.14) $\pi_1^2 = \pi_1^1 = 0$. Все формы ω_i^j стали главными. Репер выбран. По лемме Картана из уравнений (1.12) при условиях (1.14):

$$\left. \begin{aligned} -a_1\omega_2^1 - a_3\omega_1^2 &= p_1\omega^1 + p_2\omega^2, \\ 2\omega_1^1 - q_2\omega_1^2 + \omega_1^3 &= t_1\omega^1 + t_2\omega^2. \end{aligned} \right\} \quad (1.15)$$

Из уравнений (1.9), (1.15), учитывая (1.11) и (1.14), можно найти выражения всех форм ω_i^j через ω^1, ω^2 . Заметив, что в выражении формы ω_1^1 функции t_1, t_2 подчиняются только структурным уравнениям (1.2), а в выражениях форм ω_1^2, ω_2^2 таковыми являются функции p_1, p_2 и b_1, b_2 , соответственно обозначим:

$$\omega_1^1 = T_\alpha \omega^\alpha, \quad \omega_1^2 = P_\alpha \omega^\alpha, \quad \omega_2^2 = B_\alpha \omega^\alpha. \quad (1.16)$$

Уравнения движения выбранного канонического репера запишем в виде:

	\bar{e}_1	\bar{e}_2	\bar{e}_3
$d\bar{A}$	ω^1	ω^2	0
$d\bar{e}_1$	$T_1\omega^1 + T_2\omega^2$	$P_1\omega^1 + P_2\omega^2$	$a_1\omega^1$
$d\bar{e}_2$	$\omega^1 + a_{22}^1\omega^2$	$B_1\omega^1 + B_2\omega^2$	$a_3\omega^2$
$d\bar{e}_3$	ω^1	$(2 - c_1)\omega^1 + (1 - q_2 + 2a_{22}^1 - a_{22}^1 c_1)\omega^2$	$-2\omega^1 + q_2\omega^2$

Уравнения (1.17) содержат одиннадцать дифференциальных инвариантов $T_1, T_2, P_1, P_2, B_1, B_2, a_1, a_{22}^1, a_3, c_1, q_2$.

§ 2. ОТНОШЕНИЕ КАНОНИЧЕСКОГО РЕПЕРА К МНОГООБРАЗИЮ M_{22}

Ось Ax^2 репера (\bar{Ae}_i) направлена по касательной к линии пересечения поверхности (A) с плоскостью α элемента (A, α); ось Ax^1 — по сопряженному направлению с осью Ax^2 .

При смещении точки A по линии пересечения поверхности (A) с плоскостью α торс, огибающий семейство плоскостей α , соприкасается с плоскостью ($\bar{Ae}_2\bar{e}_3$) по оси Ax^3 .

Характеристика на плоскости ($\bar{Ae}_2\bar{e}_3$) семейства плоскостей α соответствующего смещению точки A по линии на поверхности (A), соприкасающейся с осью Ax^1 , пересекает оси Ax^2 и Ax^3 в точках $(0, -1, 0)$ и $(0, 0, -1)$. Точки, симметричные указанным относительно точки A , — единичные точки $E_2(0, 1, 0)$ и $E_3(0, 0, 1)$ осей Ax^2, Ax^3 .

При смещении канонического репера (\bar{Ae}_i) по линии ω^1 точка E_3 описывает линию, уравнения касательной к которой в точке E_3 , в локальных координатах

$$x^1 = 2\lambda, \quad x^2 = (2 - c_1)\lambda, \quad x^3 = 1 - 2\lambda. \quad (2.1)$$

Эта прямая пересекает касательную плоскость к поверхности (A) в точке A , в точке $B(1; 0, 5(2 - c_1); 0)$. Прямая, проведенная через точку B параллельно оси Ax^2 , пересекает ось Ax^1 в ее единичной точке $E_1(1, 0, 0)$.

При выборе канонического репера условиями $a_1 \neq 0, a_3 \neq 0$ исключены из рассмотрения точки A параболического типа поверхности (A). Условием $a_{22}^1 \neq 0$ исключены из рассмотрения многообразия M_{22} , для которых соприкасающаяся плоскость линии ω^2 в точке A совпадает с плоскостью α элемента (A, α).

§ 3. ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ ИСТОЛКОВАНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ИНВАРИАНТОВ

При смещении точки A по линии ω^1 или ω^2 точки E_i и им симметричные относительно A точки \dot{c}_i описывают линии $(E_i)_1, (\dot{c}_i)_1$ или $(E_i)_2, (\dot{c}_i)_2$. Касательные к линиям $(E_i)_1$ и $(\dot{c}_i)_1$ соответственно в точках E_i и \dot{c}_i лежат в одной плоскости и пересекаются в точке $D(-T_1, -P_1, -a_1)$. В этом — геометрическое истолкование инвариантов T_1, P_1, a_1 .

Инвариант P_2 — обратный по величине и противоположный по знаку первой координате точки ребра возврата торса, огибаемого касательными плоскостями поверхности (A) в точках A линии ω^2 .

Касательная к линии $(E_1)_2$ в точке E_1 пересекает прямую $x^3 = 0, x^2 = 1 + P_2$ в точке $F(1 + T_2, 1 + P_2, 0)$. Касательная к линии $(E_2)_1$ пересекает прямую $x^3 = 0, x^1 = 2$ в точке $K(2; 1 + B_1, 0)$.

Для геометрического истолкования инварианта c_1 ограничимся получением точки $B(1; 0, 5(2 - c_1); 0)$ в § 2.

Касательные к линиям $(E_2)_2$ и $(\dot{c}_2)_2$ в точках E_2 и \dot{c}_2 соответственно лежат в одной плоскости и пересекаются в точке $N(-a_{22}^1, -B_2, -a_3)$. Инвариант $(1 - q_2 + 2a_{22}^1 - a_{22}^1 c_1)$ — обратный по величине и противоположный по знаку третьей координате точки ребра возврата торса, огибаемого плоскостями α элемента (A, α) при смещении точки A по линии ω^2 . Касательная к линии $(E_3)_2$ в точке E_3 пересекает прямую $x^1 = 0, x^2 = 2 - q_2 + 2a_{22}^1 - a_{22}^1 c_1$ в точке $Q(0; 2 - q_2 + 2a_{22}^1 - a_{22}^1 c_1; 1 + q_2)$. Получена геометрическая характеристика всех инвариантов.

§ 4. НЕКОТОРЫЕ ЧАСТНЫЕ КЛАССЫ МНОГООБРАЗИЙ

1. Многообразия с плоскими координатными линиями ω^1 выделяются условием

$$d\left(\frac{P_1}{a_1}\right) + \left[\frac{P_1}{a_1}(B_1 + 2) + 2 - c_1\right]\omega^1 = 0. \quad (4.1)$$

2. Многообразия с плоскими линиями ω^2 на поверхности (A) выделяются условием

$$d\left(\frac{a_3}{a_{22}^1}\right) = \frac{a_3}{a_{22}^1}(T_2 - q_2)\omega^2. \quad (4.2)$$

3. Многообразия, определяемые уравнением

$$P_1 = 0, \quad (4.3)$$

характеризуются тем, что линии ω^1 являются союзными линиями конгруэнции аффинных нормалей [2].

4. Условием

$$dP_2 = T_2 P_2 \omega^2 \quad (4.4)$$

выделяются многообразия, у которых при смещении точки A в направлении $d\bar{A} = \omega^2 \bar{e}_2$ сопряженные направления образуют конус с вершиной в точке $M(-1/P_2; 0; 0)$.

5. Если $B_1 = 0$, то при смещении точки A по линии ω^1 ось Ax^2 описывает конус с вершиной в точке \dot{c}_2 .

6. Многообразия, определяемые уравнением

$$1 - q_2 + a_{22}^1(2 - c_1) = 0, \quad (4.5)$$

характеризуются тем, что аффинные нормали поверхности (A) вдоль линий ω^2 образуют цилиндрические поверхности.

7. Если дифференциальные инварианты удовлетворяют условиям

$$q_2 = a_{22}^1 (2 - c_1); \quad 2 - c_1 \neq 0, \quad (4.6)$$

то многообразие обладает тем свойством, что на поверхности (A) два семейства линий кривизны совпадают.

8. Многообразия, для которых

$$2 - c_1 = 0, \quad T_2 = 2 - q_2(1 + 0,5B_1), \quad q_2 \neq 0, \quad (4.7)$$

выделяются тем, что координатная сеть линий на поверхности (A) совпадает с сетью линий кривизны.

Многообразия каждого из рассмотренных здесь классов существуют с произволом двух функций двух аргументов.

Литература

1. Фиников С. П. Метод внешних форм Картана в дифференциальной геометрии. ГИТТЛ, М.—Л., 1948.
2. Щербakov Р. Н. Курс аффинной и проективной дифференциальной геометрии. Изд. Томского ун-та, Томск, 1960.

Белорусский государственный университет
им. В. И. Ленина

Поступило в редакцию 5.VII 1968

З. И. БЕЛЬСКИЙ

ТРИ-ТКАНИ С ИЗОТЕРМИЧЕСКИМИ, РАВНОПУТНЫМИ,
 ИЗОГЕОДЕЗИЧЕСКИМИ И ПОЛОСАТЫМИ СЕТЯМИ ГЕССЕ

§ 1. ТРИ-ТКАНИ С ИЗОТЕРМИЧЕСКИМИ СЕТЯМИ ГЕССЕ

1. В [4], § 1, показано, что на поверхности три-ткань с действительной сетью Гессе (p, q) вполне определяется заданием единичного векторного поля a и двух действительных скалярных полей μ и ν

$$\mu = \text{ctg } \widehat{ap}, \quad \nu = \text{ctg } \widehat{aq}. \quad (1.1)$$

Единичные направляющие векторы p_0 и q_0 сети Гессе выражаются через a, μ, ν так:

$$p_0 = \frac{\mu a + \tilde{a}}{\sqrt{1 + \mu^2}}, \quad q_0 = \frac{\nu a + \tilde{a}}{\sqrt{1 + \nu^2}} \quad (1.2)$$

(\tilde{a} — вектор, дополнительный к a).

2. Пусть $\omega = \widehat{pq}$, тогда, согласно [1], § 52,

$$k_p = k - \frac{\nabla \omega}{2}, \quad k_q = k + \frac{\nabla \omega}{2}, \quad (1.3)$$

где k_p, k_q и k — трансверсальные векторы единичных векторных полей p_0, q_0 и орта биссектрисы внутреннего сетевого угла. Отсюда получаем

$$k = \frac{1}{2} (k_p + k_q), \quad \nabla \omega = k_q - k_p. \quad (1.4)$$

Из (1.1) следует, что

$$k_p = k_a - \nabla \text{arctg } \mu, \quad k_q = k_a - \nabla \text{arctg } \nu. \quad (1.5)$$

3. Всякая изотермическая сеть характеризуется тем, что она ортогональна и ее вектор кривизны k соленоидален (см. [3], II, § 3). Из (1.2) следует, что сеть Гессе три-ткани (a, μ, ν) ортогональна лишь тогда, когда

$$\nu = -\frac{1}{\mu}. \quad (1.6)$$

Из (1.5) в силу (1.4) получим

$$k = k_a - \frac{1}{2} (\nabla \text{arctg } \mu + \nabla \text{arctg } \nu).$$

Отсюда из (1.6) будем иметь $k = k_a - \nabla \operatorname{arctg} \mu$. Но в силу (71) и (41) из

[2] $\operatorname{div}_a k = \operatorname{rot}_a \tilde{k} = \kappa'_a a + \kappa'_a \tilde{a}$, а $\operatorname{div} \nabla \operatorname{arctg} \mu = \Delta_2 \operatorname{arctg} \mu$. Следовательно,

$$\operatorname{div} k = \kappa'_a a + \kappa'_a \tilde{a} - \Delta_2 \operatorname{arctg} \mu = 0. \quad (1.7)$$

Таким образом, три-ткань (a, μ, ν) имеет изотермическую сеть Гессе тогда и только тогда, когда один параметр, например μ , удовлетворяет дифференциальному уравнению (1.7), а второй параметр ν выражается через μ формулой (1.6). Очевидно, что и ν удовлетворяет тому же дифференциальному уравнению (1.7).

Легко видеть, что три-ткани с изотермическими сетями Гессе существуют на любой поверхности.

Из (1.7) видно, что если семейство a -линий изотермическое, а ξ — произвольная гармоническая функция (в частности, постоянная), то три-ткань $(a, \operatorname{tg} \xi, -\operatorname{ctg} \xi)$ имеет изотермическую сеть Гессе.

В дальнейшем будем рассматривать три-ткани вида: $(a, \mu, -\mu)$. Они замечательны тем, что векторы p и q симметричны относительно вектора \tilde{a} ; следовательно, ортогональная сеть (a, \tilde{a}) есть биссекторная сеть сети Гессе (p, q) , а также каждой из сетей (b, c) и (b', c') . Кроме того, вектор \tilde{a} совпадает с действительным вектором a' присоединенной три-ткани (a', b', c') .

§ 2. ТРИ-ТКАНИ С РАВНОПУТНЫМИ СЕТЯМИ ГЕССЕ

1. Будем предполагать, что положительные направления сетевых линий сети Гессе (p, q) заданы направляющими векторами $p = \mu a + \tilde{a}$ и $q = -\mu a + \tilde{a}$. Тогда сеть (p, q) является равнопутной тогда и только тогда, когда (см. [3], § 5) $\tau_p + \tau_q = 0$, или, согласно [3], (14),

$$k_p + k_q = 0. \quad (2.1)$$

Подставив выражения векторов k_p, k_q, p и q для три-ткани $(a, \mu, -\mu)$ в равенство (2.1), получим

$$(k_a + \nabla \operatorname{arctg} \mu)(\mu a + \tilde{a}) + (k_a - \nabla \operatorname{arctg} \mu)(-\mu a + \tilde{a}) = 0. \quad (2.2)$$

Но

$$k_a = \operatorname{rot} a = \kappa_a, \quad k_{\tilde{a}} = \operatorname{rot} \tilde{a} = \kappa_{\tilde{a}}. \quad (2.3)$$

Раскрыв скобки в (2.2) и приняв во внимание (2.3), получим:

$$2\mu a \nabla \operatorname{arctg} \mu = -2\kappa_{\tilde{a}},$$

или, что то же,

$$a \nabla \ln(1 + \mu^2) = -2\kappa_{\tilde{a}}. \quad (2.4)$$

Примем сеть (a, \tilde{a}) за координатную; тогда метрическая форма поверхности примет вид

$$ds^2 = A^2 du^2 + B^2 dv^2. \quad (2.5)$$

Будем считать a -линии u -линиями, тогда

$$a^i = \left\{ \frac{1}{A}, 0 \right\}, \quad \tilde{a}_i = \{0, B\};$$

$$\kappa_a = \frac{1}{\sqrt{g}} (\partial_u \tilde{a}_2 - \partial_v \tilde{a}_1) = \frac{1}{A} \partial_u \ln B$$

и равенство (2.4) запишется так:

$$\partial_u \ln(1 + \mu^2) = -2\partial_u \ln B.$$

Отсюда получаем

$$\mu = \pm \sqrt{\frac{\eta^2(v)}{B^2} - 1}; \quad (2.6)$$

p -линии и q -линии сети Гессе являются интегральными кривыми дифференциальных уравнений

$$A du = \pm \sqrt{\eta^2(v) - B^2} dv.$$

Итак, три-ткань $(a, \mu, -\mu)$, где a -орт касательной к u -линии, имеет равнопутную сеть Гессе тогда и только тогда, когда параметр μ выражается формулой (2.6).

Если параметр μ наряду с дифференциальным уравнением (2.4) удовлетворяет также дифференциальному уравнению

$$\tilde{a} \nabla \ln \frac{\mu^2}{1 + \mu^2} = -2\kappa_a,$$

то сеть Гессе три-ткани $(a, \mu, -\mu)$ будет не только равнопутной, но и чебышевской (см. [4], (2.15)).

2. Применим полученный результат к плоскости, отнесенной к полярным координатам ρ, φ . Метрическая форма имеет вид: $ds^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\varphi^2$.

Пусть ρ -линии будут \tilde{a} -линиями, тогда $\tilde{a}^i = \{1, 0\}$, $a^i = \left\{0, -\frac{1}{\rho}\right\}$.

Следовательно, в силу (2.6) $\mu = \mu(\rho)$.

Таким образом, всякая три-ткань $(a, \mu(\rho), -\mu(\rho))$, где $a^i = \left\{0, -\frac{1}{\rho}\right\}$ имеет равнопутную сеть Гессе (p, q) , где $p^i = \mu a^i + \tilde{a}^i = \left\{1, -\frac{\mu(\rho)}{\rho}\right\}$, $q^i = -\mu a^i + \tilde{a}^i = \left\{1, \frac{\mu(\rho)}{\rho}\right\}$; p -линии и q -линии сети Гессе изображаются уравнениями

$$\varphi = \varphi_0 \mp \int_{\rho_0}^{\rho} \frac{\mu(\rho)}{\rho} d\rho = \varphi_0 \mp \lambda(\rho). \quad (2.7)$$

Итак, при подходящем выборе функции $\mu = \rho \lambda'(\rho)$ сеть Гессе может оказаться любая наперед заданная сеть вращения относительно полюса.

3. Из (1.1) и (1.2) следует, что при повороте направлений три-ткани в каждой точке поверхности на один и тот же (ориентированный) угол φ направления ее сети Гессе также во всех точках поворачиваются на тот же самый угол φ . Найдем условия, определяющие три-ткань $(a, \mu, -\mu)$ с вращаемой равнопутной сетью Гессе. Так как $\rho_0 = q_0 \cos \omega - \tilde{q}_0 \sin \omega$, то условие (2.1) запишется так:

$$(k + k \cos \omega + \tilde{k} \sin \omega) q_0 = 0.$$

Но k и \tilde{k} — функции k и $\nabla \omega$ (см. (1.4)); значит, вектор, что в скобках, в процессе вращения сети Гессе не изменяется, а вектор q_0 вращается.

Поэтому последнее равенство в процессе вращения не нарушается тогда и только тогда, когда

$$k + k \cos \omega + \tilde{k} \sin \omega = 0. \quad (2.8)$$

Легко проверить, что для три-ткани $(a, \mu, -\mu)$

$$\cos \omega = \frac{1 - \mu^2}{1 + \mu^2}, \quad \sin \omega = \frac{2\mu}{1 + \mu^2} \quad (2.9)$$

и последнее равенство в силу (1.5) принимает вид

$$(1 + \mu^2) \left(k_a - \nabla \operatorname{arctg} \mu \right) + (1 - \mu^2) \left(\tilde{k}_a + \nabla \operatorname{arctg} \mu \right) + \\ + 2\mu \left(\tilde{k} + \tilde{\nabla} \operatorname{arctg} \mu \right) = 0,$$

или, что то же,

$$\mu \left(\tilde{k}_a - \mu \nabla \operatorname{arctg} \mu \right) - \left(\tilde{k}_a - \mu \nabla \operatorname{arctg} \mu \right) \tilde{} = 0.$$

Так как $\mu \neq 0$, то это равенство равносильно следующему:

$$\tilde{k}_a - \mu \nabla \operatorname{arctg} \mu = 0.$$

Отсюда имеем

$$\nabla \ln(1 + \mu^2) = 2\tilde{k}_a. \quad (2.10)$$

Условие его интегрируемости $\operatorname{rot} \tilde{k} \equiv \operatorname{div} k = 0$ заключается в том, что векторное поле a должно быть изотермическим.

Если это условие выполнено, то в процессе вращения три-ткани $(a, \mu, -\mu)$, где μ — решение дифференциального уравнения (2.10), сеть Гессе, вращаясь, остается равнопутной, а сеть (a, \tilde{a}) , вращаясь, остается биссекторной сетью Гессе.

Примем сеть (a, \tilde{a}) за координатную и введем на ней изотермические параметры u, v . Тогда метрическая форма поверхности примет вид:

$$ds^2 = e^{2\sigma(u,v)} (du^2 + dv^2). \quad (2.11)$$

Пусть a -линии будут u -линиями, тогда уравнение (2.10) равносильно следующему:

$$\nabla \ln(1 + \mu^2) = \nabla \ln e^{-2\sigma}.$$

Отсюда находим

$$\mu = \pm \sqrt{c^2 e^{-2\sigma} - 1}; \quad (2.12)$$

p -линии и q -линии сети Гессе являются интегральными кривыми дифференциальных уравнений

$$du = \pm \sqrt{c^2 e^{-2\sigma} - 1} dv.$$

4. Векторное дифференциальное уравнение (2.10) равносильно системе двух скалярных уравнений:

$$\begin{cases} a \nabla \ln(1 + \mu^2) = -2\kappa_{\tilde{a}}, \\ \tilde{a} \nabla \ln(1 + \mu^2) = -2\kappa_a. \end{cases}$$

Сравнивая полученную систему уравнений с системой (2.15) из [4], которую можно записать так:

$$\begin{cases} a \nabla \ln(1 + \mu^2) = -2\kappa_a^-, \\ \tilde{a} \nabla \ln(1 + \mu^2) - 2\kappa_a = \tilde{a} \nabla \ln \mu^2, \end{cases}$$

находим условие, чтобы вращаемая равнопутная сеть (p, q) была чебышевской

$$\tilde{a} \nabla \mu = 0.$$

Это равенство в силу второго уравнения первой системы равносильно следующему: $\kappa_a = 0$.

Так как биссекторная сеть (a, \tilde{a}) вращаемой равнопутной сети (p, q) есть изотермическая сеть (см. [3], II, § 5, п. 3), то отсюда и из последнего равенства приходим к заключению, что векторное поле a является геодезически-изотермическим.

Следовательно, (см. [1], 56), вращаемая равнопутная сеть (p, q) является чебышевской только лишь на поверхностях, изометричных поверхностям вращения, когда a -линии — меридианы.

Теперь выясним, при каких условиях вращаемая равнопутная сеть (p, q) , не будучи чебышевской, становится таковой в процессе вращения. В силу только что доказанного это возможно тогда и только тогда, когда поверхность есть поверхность вращения, а изотермическая сеть (a, \tilde{a}) в процессе вращения превращается в сеть меридианов и параллелей. Значит, необходимое и достаточное условие этого состоит в том, что a -линии должны быть изогональными траекториями меридианов. Значение постоянного угла между меридианами и a -линиями не имеет значения.

§ 3. ТРИ-ТКАНИ С ИЗОГЕОДЕЗИЧЕСКИМИ СЕТЯМИ ГЕССЕ

1. Зададим положительные направления сетевых кривых сети Гессе (p, q) направляющими векторами $p = \mu a + \tilde{a}$ и $q = -\mu a + \tilde{a}$; тогда условие того, что сеть (p, q) изогодезическая, запишется так (см. [3], (11) и (72)):

$$k_p p + k_q q = 0. \quad (3.1)$$

Подставив выражения векторов k_p, k_q, p и q и приняв во внимание (2.3), получим

$$2\mu a \nabla \operatorname{arctg} \mu = 2\kappa_a^-,$$

или, что то же,

$$a \nabla \ln(1 + \mu^2) = 2\kappa_a^-. \quad (3.2)$$

Легко показать (см. § 2), что если a -линии принять за u -линии в системе координат (2.5), то параметр μ выразится формулой

$$\mu = \pm \sqrt{\frac{B^2}{\eta^2(v)} - 1}; \quad (3.3)$$

p -линии и q -линии сети Гессе являются интегральными кривыми дифференциальных уравнений

$$A du = \pm B \sqrt{\frac{B^2}{\eta^2(v)} - 1} dv.$$

Таким образом, три-ткань $(a, \mu, -\mu)$, где a -орт касательной к u -линии, имеет изогодезическую сеть Гессе тогда и только тогда, когда параметр μ выражается формулой (3.3).

Если параметр μ наряду с дифференциальным уравнением (3.2) удовлетворяет также дифференциальному уравнению

$$\tilde{a} \nabla \ln \frac{\mu^2}{1 + \mu^2} = 2\kappa_a,$$

то сеть Гессе три-ткани $(a, \mu, -\mu)$ будет не только изогодезической, но и геодезической (см. [4], (3.4)).

2. Выясним условия, определяющие три-ткань $(a, \mu, -\mu)$ с вращаемой изогодезической сетью Гессе. Так как $p_0 = q_0 \cos \omega - \tilde{q}_0 \sin \omega$, то условие (3.1) можно представить так:

$$\left(\underset{q}{k} + \underset{p}{k} \cos \omega + \underset{p}{\tilde{k}} \sin \omega \right) q_0 = 0.$$

Отсюда получаем условие вращаемости

$$\underset{q}{k} + \underset{p}{k} \cos \omega + \underset{p}{\tilde{k}} \sin \omega = 0. \quad (3.4)$$

Подставив сюда выражения векторов $\underset{p}{k}$, $\underset{q}{k}$, $\underset{p}{\tilde{k}}$ из (1.5), а также $\cos \omega$ и $\sin \omega$ из (2.9), получим

$$\mu \left(\underset{a}{\tilde{k}} + \mu \nabla \operatorname{arctg} \mu \right) - \left(\underset{a}{\tilde{k}} + \mu \nabla \operatorname{arctg} \mu \right)^{\sim} = 0.$$

Так как $\mu \neq 0$, то последнее равенство равносильно следующему:

$$\underset{a}{\tilde{k}} + \mu \nabla \operatorname{arctg} \mu = 0.$$

Отсюда имеем

$$\nabla \ln (1 + \mu^2) = -2 \underset{a}{\tilde{k}}. \quad (3.5)$$

Условие его интегрируемости заключается в том, что векторное поле a должно быть изотермическим.

Легко показать, что если a -линии принять за u -линии в координатной системе (2.11), то параметр μ выражается формулой

$$\mu = \pm \sqrt{c^{-2} e^{2\sigma} - 1}; \quad (3.6)$$

p -линии и q -линии являются интегральными кривыми дифференциальных уравнений:

$$du = \pm \sqrt{c^{-2} e^{2\sigma} - 1} dv.$$

Итак, на любой поверхности существует однопараметрическое семейство три-тканей $(a, \mu, -\mu)$, где a -орт касательной к u -линии, а μ выражается формулой (3.6).

Присоединенные три-ткани имеют вид $\left(\tilde{a}, \frac{1}{\mu}, -\frac{1}{\mu} \right)$. Все эти три-

ткани имеют вращаемые изогодезические сети Гессе; сеть (a, \tilde{a}) , вращаясь, служит в процессе вращения биссекторной сетью для всех сетей Гессе.

3. Точно так же, как из приведенного выше уравнения (3.5) и (3.4) из [4], легко установить, что вращаемая изогодезическая сеть (p, q) является геодезической только лишь на поверхностях, изометричных поверхностям вращения, когда a -линии — меридианы.

Отсюда получаем, что для того, чтобы вращаемая изогеодезическая сеть (p, q) , не будучи геодезической, становилась таковой в процессе вращения, необходимо и достаточно, чтобы a -линии были изогональными траекториями меридианов поверхности вращения.

§ 4. ТРИ-ТКАНИ С ПОЛОСАТЫМИ СЕТЯМИ ГЕССЕ

1. Будем предполагать, что направления векторов p и q выбраны так, что для полосатой сети (p, q) выполнено условие (см. [3], § 4): $\tilde{t} \nabla \omega = 0$. Если (p, q) является сетью Гессе три-ткани $(a, \mu, -\mu)$, то для нее $\tilde{t} \parallel a$ и последнее равенство запишется так:

$$a \nabla \mu = 0. \quad (4.1)$$

Очевидно, что три-ткани с полосатыми сетями Гессе существуют на любой поверхности.

Примем сеть (a, \bar{a}) за координатную и пусть метрическая форма поверхности имеет вид (2.5).

Из (4.1) легко найти, что $\mu = \mu(v)$.

Итак, три-ткань $(a, \mu(v), -\mu(v))$, где $a^i = \left\{ \frac{1}{A}, 0 \right\}$, имеет полосатую сеть Гессе (p, q) , где

$$p^i = \left\{ \frac{\mu(v)}{A}, \frac{1}{B} \right\}, \quad q^i = \left\{ -\frac{\mu(v)}{A}, \frac{1}{B} \right\};$$

p -линии и q -линии являются интегральными кривыми дифференциальных уравнений

$$A du = \pm B \mu(v) dv.$$

2. Найдем условия, определяющие три-ткань, у которой сеть Гессе является одновременно полосатой и равнопутной. Система уравнений (4.1), (2.4) равносильна следующей:

$$a \nabla \mu = 0, \quad \kappa_{\bar{a}} = 0. \quad (4.2)$$

Как и должно быть (см. [3], § 8), из (4.2) и (3.2) следует, что сеть Гессе также изогеодезическая с биссекторной полугеодезической сетью.

Из второго равенства (4.2) следует, что векторное поле \bar{a} потенциальное: $\bar{a} = \nabla \bar{a}$. Отсюда в силу первого равенства (4.2)

$$\mu = \mu(\bar{a}). \quad (4.3)$$

Следовательно, три-ткань $(a, \mu, -\mu)$ имеет равнопутную (и изогеодезическую) полосатую сеть Гессе тогда и только тогда, когда линии тока векторного поля a — геодезические, а параметр μ является функцией потенциала векторного поля \bar{a} .

3. Выясним, наконец, условия, определяющие три-ткань (a, μ, v) с вращаемой равнопутной изогеодезической (а поэтому и полосатой) сетью Гессе. Параметры μ и v должны удовлетворять системе уравнений (2.8), (3.4):

$$\frac{k}{p} + \frac{k \cos \omega}{q} + \frac{\tilde{k} \sin \omega}{q} = 0,$$

$$\frac{k}{q} + \frac{k \cos \omega}{p} + \frac{\tilde{k} \sin \omega}{p} = 0.$$

Складывая и вычитая эти уравнения, получим равносильную систему:

$$\left(\frac{k}{p} + \frac{k}{q}\right)(1 + \cos \omega) + \left(\frac{\tilde{k}}{p} + \frac{\tilde{k}}{q}\right) \sin \omega = 0,$$

$$\left(\frac{k}{p} - \frac{k}{q}\right)(1 - \cos \omega) - \left(\frac{\tilde{k}}{p} - \frac{\tilde{k}}{q}\right) \sin \omega = 0.$$

Отсюда следует, что

$$\frac{k}{p} = \frac{k}{q} = 0.$$

Следовательно, оба параметра μ и ν должны удовлетворять одному и тому же дифференциальному уравнению

$$\nabla \operatorname{arctg} \zeta = \frac{k}{a}, \quad (4.4)$$

где ζ — неизвестная функция.

Легко проверить, что сеть Гессе в этом случае декартова, что возможно только на торах. Если на плоскости $a = \{\cos \alpha, \sin \alpha\}$, то из (4.4) легко получить, что

$$\mu = \operatorname{tg}(\alpha + \alpha_0); \quad \nu = \operatorname{tg}(\alpha + \alpha'_0); \quad \alpha_0 \neq \alpha'_0.$$

Литература

1. Норден А. П. Теория поверхностей. М., 1956.
2. Комиссарук А. М. Уч. зап. Минского педагогического института им. А. М. Горького, вып. 5, 1956, 15—40.
3. Комиссарук А. М. Уч. зап. Минского педагогического института им. А. М. Горького, вып. 9, 1958, 35—64.
4. Бельский З. И. Весні АН БССР, сер. фіз.-матэм. навук, № 2, 1968.

Минский пединститут им. А. М. Горького

Поступило в редакцию 19. IV 1968 г.

А. В. МИНКЕВИЧ, Ф. И. ФЕДОРОВ

ТЕНЗОРНЫЙ ВАРИАЦИОННЫЙ МЕТОД И ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ

Несмотря на широкое использование методов тензорного анализа в физике, особенно после создания общей теории относительности, такие общие методы теории поля, как вариационный метод, формализм Нетер, канонический формализм в их обычном изложении не являются тензорными. Поскольку тензорная форма уравнений в теории поля, особенно в случае неевклидова пространства, имеет бесспорные преимущества, представляется желательной ковариантизация указанных выше методов теории поля. Это тем более важно, что тензорный подход во многих случаях является гораздо проще, а также дает определенные возможности для получения новых явно ковариантных выражений некоторых важных физических характеристик. Некоторые связанные с этим вопросы уже рассматривались в литературе. В [1] были получены тензорные вариационные уравнения динамики частицы, а в [2] — тензорные вариационные уравнения теории поля для негеометрических полей в случае 4-мерного метрического пространства с несимметрическим линейным параллельным перенесением. В [3] рассматривался вопрос о получении ковариантных канонических уравнений в общей теории относительности.

Получение тензорной формулировки рассматриваемых методов теории поля существенно связано с предположением о геометрической структуре физического пространства-времени. В общей теории относительности пространство-время образует риманов континуум V_4 . В то же время развитие компенсационного подхода в теории поля приводит к введению поля кручения как возможной динамической реализации момента импульса. В связи с этим ковариантизация будет рассматриваться для случая 4-мерного метрического пространства с несимметрическим линейным параллельным перенесением L_4 . Наибольший интерес представляет случай пространства с метрической связностью U_4 . В § 1 рассматривается тензорный вариационный метод, в частности применительно к метрическому полю и полю кручения. В § 2 тензорные вариационные уравнения используются при рассмотрении законов сохранения, а также для получения ковариантного тензора энергии-импульса. В § 3 затрагиваются некоторые вопросы о тензорном каноническом формализме.

1. ТЕНЗОРНЫЙ ВАРИАЦИОННЫЙ МЕТОД

Если интеграл действия есть

$$S = \int_{\Omega_4} d^4v L(Q_A, Q_{A;\mu}, Q_{A;\mu,\nu}, \dots), \quad (1)$$

где Q_A — полевые переменные, $d^4v \equiv d^4x \sqrt{-g}$ — элемент инвариантного объема, а точка с запятой, а также символ ∇ означают ковариантную производную относительно полной связности, то вариационная производная имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\delta S}{\delta Q_A} = & \frac{\partial L}{\partial Q_A} - (\nabla_\mu + A_\mu) \frac{\partial L}{\partial Q_{A;\mu}} + \\ & + (\nabla_\nu + A_\nu) (\nabla_\mu + A_\mu) \frac{\partial L}{\partial Q_{A;\nu\mu}} - \dots \end{aligned} \quad (2)$$

и уравнения Лагранжа есть

$$\frac{\delta S}{\delta Q_A} = 0. \quad (3)$$

Вектор

$$A_\mu = 2S_{\mu\lambda}^{\cdot\lambda} + \frac{1}{2} Q_{\lambda\cdot\mu}^{\cdot\lambda}, \quad (4)$$

где $S_{\mu\nu}^{\cdot\lambda}$ — тензор кручения, $Q_{\mu\nu\lambda} \equiv \nabla_\lambda g_{\mu\nu}$ (в пространстве $U_4 Q_{\mu\nu\lambda} = 0$). При получении (2), как обычно, вариации δQ_A на границе области интегрирования полагались равными нулю, а также использовалась теорема Гаусса—Остроградского в виде [2]

$$\int_{\Omega_4} (\nabla_\mu + A_\mu) u^\mu d^4v = \oint_{\Omega_3} u^\mu \varepsilon(n) n_\mu d^3v. \quad (5)$$

Если функция Лагранжа L в (1) зависит от производных не выше 1-го порядка, то тензорные вариационные уравнения (3) принимают вид [2]

$$\frac{\partial L}{\partial Q_A} - (\nabla_\mu + A_\mu) \frac{\partial L}{\partial Q_{A;\mu}} = 0. \quad (6)$$

Если интеграл действия есть

$$S = \int_{\Omega_4} d^4v L(Q_A, Q_{A|\mu}, Q_{A|\mu\nu}, \dots), \quad (7)$$

где вертикальная черта, а также символ $\bar{\nabla}$ означают ковариантную производную относительно скобок Кристоффеля, то вариационная производная имеет вид

$$\frac{\delta S}{\delta Q_A} = \frac{\partial L}{\partial Q_A} - \bar{\nabla}_\mu \frac{\partial L}{\partial Q_{A|\mu}} + \bar{\nabla}_\nu \bar{\nabla}_\mu \frac{\partial L}{\partial Q_{A|\nu\mu}} - \dots \quad (8)$$

В частном случае интеграла (7) $S = \int d^4v L(Q_A, Q_{A|\mu})$ тензорные вариационные уравнения выглядят так

$$\frac{\partial L}{\partial Q_A} - \bar{\nabla} \frac{\partial L}{\partial Q_{A|\mu}} = 0. \quad (9)$$

Как отмечалось в [2], уравнения (6) не применимы в том случае, когда полевые переменные имеют геометрическое происхождение (метрика, кручение). Это связано с тем, что представление интеграла действия в виде (1) или (7) при этом не всегда возможно, а также операции варьирования и ковариантного дифференцирования в данном случае не перестановочны; при получении же (6) из принципа Гамильтона $\delta S = 0$ предполагается их коммутативность. В связи с этим получение тензорных вариационных уравнений для геометрических полей требует отдельного рассмотрения.

Метрическое поле. Прежде всего необходимо выбрать наиболее подходящие тензорные переменные для метрического поля, являющиеся аргументами функции Лагранжа. Метрический тензор $g_{\mu\nu}$ для этой цели не подходит, поскольку $\nabla_\lambda g_{\mu\nu} = 0$. В связи с этим удобно перейти к меропределиению Ламэ (см., напр., [4, 5]). Независимые переменные метрического поля — коэффициенты Ламэ h_i^μ и обратные им величины h_i^μ , удовлетворяющие обычным соотношениям *

$$h_i^\mu h^{i\nu} \equiv \eta^{ik} h_i^\mu h_k^\nu = g^{\mu\nu},$$

$$h_i^\mu h_i^\nu = \delta_\mu^\nu, \quad h_i^\mu h_k^\mu = \delta_k^i.$$

Важнейшие тензоры, выражающиеся через производные коэффициентов Ламэ: а) объект неголономности $C_{\mu\nu}^i = \partial_{[\mu} h_{\nu]}^i$,

б) коэффициенты Риччи $\Delta_{\mu,\nu\lambda} = h_{i\mu} C_{\nu\lambda}^i + h_{i\lambda} C_{\nu\mu}^i + h_{i\nu} C_{\mu\lambda}^i$. Получим тензорные вариационные уравнения, задавая интеграл действия в виде

$$S = \int_{\Omega_4} d^4x h L(h_i^\mu, h_i^\nu, C_{\mu\nu}^i), \quad h = \det(h_i^\mu). \quad (11)$$

Согласно принципу Гамильтона

$$\delta S = \int_{\Omega_4} d^4x \left\{ \delta h L + h \left(-\frac{\partial L}{\partial h_i^\mu} \delta h_i^\mu + \frac{\partial L}{\partial h_i^\nu} \delta h_i^\nu + \frac{\partial L}{\partial C_{\mu\nu}^i} \delta C_{\mu\nu}^i \right) \right\} = 0.$$

Отсюда, учитывая, что

$$\delta h = h h_i^\mu \delta h_i^\mu, \quad \delta h_k^\mu = -h_i^\mu h_k^\nu \delta h_i^\nu, \quad \delta C_{\mu\nu}^i = \nabla_{[\mu} \delta h_{\nu]}^i + S_{\mu\nu}^{\lambda} \delta h_i^\lambda,$$

а также используя (5), получим следующие тензорные уравнения

$$\left(L - \frac{\partial L}{\partial h_i^\nu} h_i^\nu \right) h_k^\mu + \frac{\partial L}{\partial h_k^\mu} - (\nabla_\nu + A_\nu) \frac{\partial L}{\partial C_{\nu\mu}^k} + \frac{\partial L}{\partial C_{\lambda\nu}^k} S_{\lambda\nu}^{\mu} = 0. \quad (12)$$

Если функция Лагранжа есть функция коэффициентов Ламэ и коэффициентов Риччи, т. е.

$$S = \int_{\Omega_4} d^4x h L(h_i^\mu, h_i^\nu, \Delta_{\mu,\nu\lambda}), \quad (13)$$

то тензорные вариационные уравнения для метрического поля, получаемые аналогичным путем, имеют вид

$$\left(L - \frac{\partial L}{\partial h_i^\nu} h_i^\nu \right) h_k^\mu + \frac{\partial L}{\partial h_k^\mu} + L^{\lambda,\nu\mu} C_{k\nu\lambda} - \bar{\nabla}_\nu (L^{\lambda,[\nu\mu]} h_{k\lambda}) = 0, \quad (14)$$

$$\text{где } L^{\lambda,\nu\mu} \equiv \frac{\partial L}{\partial \Delta_{\lambda,\nu\mu}} + \frac{\partial L}{\partial \Delta_{\mu,\nu\lambda}} + \frac{\partial L}{\partial \Delta_{\nu,\lambda\mu}}.$$

* «Мировые» индексы (греческие) поднимаются и опускаются с помощью тензоров $g_{\mu\nu}$ и $g^{\mu\nu}$; локальные индексы (латинские) поднимаются и опускаются с помощью $\eta^{ik} = \eta_{ik} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$.

При рассмотрении метрического поля, взаимодействующего с другими физическими полями, к интегралу действия (11) и (13) следует добавить действие рассматриваемых полей S' , что приведет к появлению в правой части уравнений (12) и (14) метрического тензора энергии-импульса $\theta_{\kappa}^{\mu} \equiv$

$$\equiv - \frac{\delta S'}{\delta h_{\kappa}^{\mu}}.$$

Поле кручения. Рассматривая поле кручения как независимое динамическое поле, получим для него тензорные вариационные уравнения, задавая интеграл действия в виде

$$S = \int_{\Omega_4} d^4 v L(S_{\mu\nu}^{\cdot\lambda}, \nabla_{\sigma} S_{\mu\nu}^{\cdot\lambda}). \quad (15)$$

Для вычисления коммутанта

$$[\delta, \nabla_{\sigma}] S_{\mu\nu}^{\cdot\lambda} = \delta \Gamma_{\sigma\rho}^{\lambda} S_{\mu\nu}^{\cdot\rho} - \delta \Gamma_{\sigma\mu}^{\rho} S_{\rho\nu}^{\cdot\lambda} - \delta \Gamma_{\sigma\nu}^{\rho} S_{\mu\rho}^{\cdot\lambda}$$

необходимо определить вариацию $\delta \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}$ соответствующую $\delta S_{\mu\nu}^{\cdot\lambda}$. Искомая вариация находится из формулы

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} = \{^{\lambda}_{\mu\nu}\} - \frac{1}{2} (Q_{\nu\cdot\mu}^{\lambda} + Q_{\mu\cdot\nu}^{\lambda} - Q_{\mu\nu}^{\cdot\lambda}) + S_{\cdot\nu\mu}^{\lambda} + S_{\cdot\mu\nu}^{\lambda} + S_{\mu\nu}^{\cdot\lambda}$$

и равна

$$\delta \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} = \delta S_{\cdot\mu\nu}^{\lambda} + \delta S_{\cdot\nu\mu}^{\lambda} + \delta S_{\mu\nu}^{\cdot\lambda}.$$

Получаемые обычным путем из принципа Гамильтона тензорные вариационные уравнения для поля кручения имеют следующий вид

$$\begin{aligned} \Omega^{[\mu\nu]}_{\lambda} = 0, \quad \Omega^{\mu\nu}_{\lambda} \equiv & \frac{\partial L}{\partial S_{\mu\nu}^{\cdot\lambda}} - (\nabla_{\sigma} + A_{\sigma}) \frac{\partial L}{\partial S_{\mu\nu\sigma}^{\cdot\lambda}} + \\ & + \left(\frac{\partial L}{\partial S_{\alpha\beta\cdot\nu}^{\cdot\rho}} S_{\alpha\beta}^{\cdot\sigma} + \frac{\partial L}{\partial S_{\alpha\beta\cdot\sigma}^{\cdot\rho}} S_{\alpha\beta}^{\cdot\nu} - \frac{\partial L}{\partial S_{\alpha\sigma\cdot\nu}^{\cdot\beta}} S_{\alpha\rho}^{\cdot\beta} - \frac{\partial L}{\partial S_{\sigma\alpha\cdot\nu}^{\cdot\beta}} S_{\rho\alpha}^{\cdot\beta} - \right. \\ & - \frac{\partial L}{\partial S_{\alpha\nu\cdot\sigma}^{\cdot\beta}} S_{\alpha\rho}^{\cdot\beta} - \left. \frac{\partial L}{\partial S_{\nu\alpha\cdot\sigma}^{\cdot\beta}} S_{\rho\alpha}^{\cdot\beta} \right) g_{\lambda\sigma} g^{\mu\rho} + \frac{\partial L}{\partial S_{\sigma\rho\cdot\mu}^{\cdot\lambda}} S_{\sigma\rho}^{\cdot\nu} - \\ & - \frac{\partial L}{\partial S_{\nu\sigma\cdot\mu}^{\cdot\rho}} S_{\lambda\sigma}^{\cdot\rho} - \frac{\partial L}{\partial S_{\sigma\nu\cdot\mu}^{\cdot\rho}} S_{\sigma\lambda}^{\cdot\rho}. \end{aligned} \quad (16)$$

Если интеграл действия задан в виде $S = \int d^4 v L(S_{\mu\nu}^{\cdot\lambda}, S_{\mu\nu\sigma}^{\cdot\lambda})$, вариационные уравнения имеют вид (9). Аналогичным путем могут быть найдены тензорные вариационные уравнения для других геометрических полей (напр., $Q_{\mu\nu\lambda}$). Можно также произвести учет зависимости функции Лагранжа от более высоких производных полевых переменных.

2. ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ И КОВАРИАНТНЫЙ ТЕНЗОР ЭНЕРГИИ-ИМПУЛЬСА

Группы движения пространства и ковариантные законы сохранения.

Следуя Траутману [6], рассмотрим вопрос о законах сохранения в пространстве U_4 . Подобно V_4 , в таком пространстве всякой группе движения соответствует закон сохранения. Точечное преобразование $x^{\mu} \rightarrow x'^{\mu} = x^{\mu} + \delta \zeta^{\mu}$ ($\delta \zeta^{\mu} \equiv v^{\mu} \delta t$), индуцируемое векторным полем v^{μ} , определяет движение пространства, если обращаются в нуль производные Ли основных геометрических объектов относительно v^{μ} [7]. Так, в пространстве U_4 движение задается уравнениями

$$D_L g_{\mu\nu} = 0, \quad D_L S_{\mu\nu}^{\cdot\lambda} = 0. \quad (17)$$

В пространстве L_4

$$D_L g_{\mu\nu} = 2\nabla_{(\mu} v_{\nu)} + 4S_{\sigma(\mu\nu)} v^\sigma - (2Q_{\sigma(\mu\nu)} - Q_{\mu\nu\sigma}) v^\sigma, \quad (17')$$

$$D_L S_{\mu\nu}^{\cdot\lambda} = -S_{\mu\nu}^{\cdot\sigma} \nabla_\sigma v^\lambda - 2S_{\sigma[\mu}^{\cdot\lambda} \nabla_{\nu]} v^\sigma + (\nabla_\sigma S_{\mu\nu}^{\cdot\lambda} - 4S_{\sigma[\mu}^{\cdot\rho} S_{\nu]\rho}^{\cdot\lambda} - 2S_{\sigma\rho}^{\cdot\lambda} S_{\mu\nu}^{\cdot\rho}) v^\sigma.$$

В случае движения пространства имеет место соотношение

$$D_L \Gamma_{\mu\lambda}^{\cdot\sigma} = 0. \quad (18)$$

Рассмотрим систему взаимодействующих полей Q_A и точечного источника в пространстве U_4 . Интеграл действия системы

$$S = \int_{\Omega_4} d^4x \left\{ \tilde{L} \times \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{L} \delta_4(x - \xi) d\tau \right\}, \quad S_f = \int_{\Omega_4} d^4x \tilde{L}, \quad (19)$$

$$\tilde{L} = \sqrt{-g} L(Q_A, Q_{A;\mu}, g^{\mu\nu}, S_{\mu\nu}^{\cdot\lambda}), \quad \mathcal{L} = \mathcal{L}(Q_A, u^\mu),$$

$u^\mu = \frac{d\xi^\mu}{d\tau}$ — скорость частицы, $d\tau = \sqrt{-g_{\mu\nu} d\xi^\mu d\xi^\nu}$. Поскольку \tilde{L} — скалярная плотность веса +1, имеет место соотношение

$$\delta_L \tilde{L} - (\tilde{L} \delta \xi^\mu)_{;\mu} = 0. \quad (20)$$

(δ_L означает дифференциал Ли относительно $\delta \xi^\mu$). Для всякого решения уравнений (17) с учетом (18) отсюда получаем

$$-\frac{\delta S_f}{\delta Q_A} \delta Q_A + (\nabla_\mu = A_\mu) \left(-\frac{\partial L}{\partial Q_{A;\mu}} \delta Q_A + L \delta \xi^\mu \right) = 0. \quad (21)$$

Используя уравнения движения частицы [1]

$$\partial_\alpha \mathcal{L} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u^\beta} u^\beta - \mathcal{L} \right) \partial_\alpha g_{\mu\nu} u^\mu u^\nu = \frac{dp_\alpha}{d\tau},$$

где обобщенный 4-импульс

$$p_\alpha = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u^\alpha} + \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u^\beta} u^\beta - \mathcal{L} \right) u_\alpha,$$

можно получить

$$\frac{d(p_\mu \delta \xi^\mu)}{d\tau} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial Q_A} \delta Q_A - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u^\beta} u^\beta - \mathcal{L} \right) u^\mu u^\nu \delta g_{\mu\nu} = 0. \quad (22)$$

При этом использовалось соотношение

$$\partial_\alpha \mathcal{L} \delta \xi^\alpha + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u^\alpha} \frac{d\delta \xi^\alpha}{d\tau} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial Q_A} \delta Q_A.$$

Умножая (22) на $\delta_4(x - \xi)$, интегрируя по τ и складывая с (21), с учетом (17) и уравнений поля, получаем ковариантный закон сохранения*

$$(\nabla_\mu + A_\mu) \left(-\frac{\partial L}{\partial Q_{A;\mu}} \delta Q_A + L \delta \xi^\mu \right) + \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau \frac{\delta_4(x - \xi)}{\sqrt{-g}} \frac{d(p_\mu \delta \xi^\mu)}{d\tau}, \quad (23)$$

*) Заметим, что $\frac{\delta_4(x - \xi)}{\sqrt{-g}}$ есть скаляр.

Интегрируя (23) между двумя пространственно-подобными поверхностями с учетом (5), будем иметь

$$\int_{\sigma} \left(-\frac{\partial L}{\partial Q_{A;\mu}} \delta Q_A + L \delta \zeta^\mu \right) d\sigma_\mu + p_\mu \delta \zeta^\mu |_\sigma = \text{const} \quad (24)$$

(σ — пространственно-подобная гиперповерхность). Если $\delta \zeta^\mu$ есть инфинитезимальное движение и если поле Q_A инвариантно относительно $\delta \zeta^\mu$ ($\delta Q_A = 0$), из (22) следует закон сохранения для частицы

$$p_\mu \delta \zeta^\mu = \text{const}. \quad (25)$$

Если система полей Q_A инвариантна по отношению к калибровочному преобразованию $Q_A \rightarrow Q_A + \delta Q_A$, то имеет место закон сохранения

$$(\nabla_\mu + A_\mu) \left(\frac{\partial L}{\partial Q_{A;\mu}} \delta Q_A \right) = 0, \quad (26)$$

Дифференциальным законам сохранения (23), (26) можно придать более привычную форму, производя замену $\nabla_\mu + A_\mu \rightarrow \bar{\nabla}_\mu$, так как для любого вектора j^μ : $(\nabla_\mu + A_\mu) j^\mu = \bar{\nabla}_\mu j^\mu$. Заметим также, что (23) и (26) выполняются в произвольном пространстве L_4 , где A_μ определяется формулой (4).

Ковариантный тензор энергии-импульса. Формулировка законов сохранения энергии-импульса, а также определение тензора энергии-импульса в пространстве Минковского существенно связаны с наличием 4-параметрической группы движений (группы трансляций), отражающей однородность пространства-времени. В пространстве с более общей, вообще говоря, неоднородной геометрической структурой подобные понятия (тензор энергии-импульса) определяются по аналогии с пространством Минковского. Однако поскольку в плоском пространстве возможны различные определения тензора энергии-импульса, подобный переход является, вообще говоря, неоднозначным. Остановимся вкратце на некоторых свойствах канонического и метрического тензора энергии-импульса. Сохранение энергии-импульса в форме, приводящей к каноническому тензору энергии-импульса, для системы полей Q_A и точечного источника в соответствии с (23) в прямоугольной декартовой системе координат выражается следующим соотношением

$$\partial_\mu \left(L \delta_\nu^\mu - \frac{\partial L}{\partial Q_{A;\mu}} Q_{A;\nu} \right) + \int d\tau \delta_4(x - \xi) \frac{dp_\nu}{d\tau} = 0. \quad (27)$$

При переходе к непрерывному распределению пылевидной материи, идеализацией которой и является материальная точка, соотношение (27) можно представить в случае произвольной координатной системы в виде

$$\nabla_\mu t_\nu^\mu = \nabla_\mu (t_\nu^f + t_\nu^p) = 0, \quad (28)$$

$$t_\nu^f = L \delta_\nu^\mu - \frac{\partial L}{\partial Q_{A;\mu}} Q_{A;\nu}, \quad t_\nu^p = u^\mu p_\nu.$$

Тензоры t_ν^f и t_ν^p — канонические тензоры энергии-импульса соответственно поля и пылевидной материи с учетом взаимодействия. В соответствии со строением функции Лагранжа для частицы $\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_{int}$ тензор $t_{\mu\nu}^p$ можно представить в виде суммы двух частей, одна из которых соответствует свободной частице, а вторая — взаимодействию частицы с внешними полями.

$$t_{\mu\nu}^p = t_{\mu\nu}^{p(0)} + t_{\mu\nu}^{p(int)}, \quad t_{\mu\nu}^{p(0)} = u_\mu p_\nu^{(0)} (\mathcal{L}_0 = -m, \quad p_\nu^{(0)} = m u_\nu),$$

$$t_{\mu\nu}^{p(int)} = u_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}_{int}}{\partial u^\nu} + \left(\frac{\partial \mathcal{L}_{int}}{\partial u^\lambda} u^\lambda - \mathcal{L}_{int} \right) u_\nu \right].$$

Заметим, что выражение $t_{\mu\nu}^p$, подобно p_ν (см. [1]), является инвариантным по отношению к произвольному изменению формы функции Лагранжа частицы с помощью дополнительного условия

$$g_{\mu\nu} u^\mu u^\nu = -1. \quad (29)$$

В пространстве с не исчезающим тензором кривизны соотношение (28), вообще говоря, нарушается. Ковариантная дивергенция тензора $t_{\mu\nu}^p$ выражается при этом через тензор кривизны, свернутый с Q_A и $Q_{A;\mu}$.

Метрический тензор энергии-импульса $\Theta^{\mu\nu}$ вводится с помощью варьирования интеграла действия по метрике, которая рассматривается при этом как внешнее поле. Если рассматриваемая система содержит точечные источники, то результат варьирования при этом не является вполне определенным, поскольку существует произвол в выборе функции Лагранжа для частицы благодаря условию (29). Для того чтобы результат был однозначным, необходимо либо подходящим образом ограничить произвол в выборе функции Лагранжа для частицы, либо построить теорию, инвариантную по отношению к произвольному изменению формы функции Лагранжа с помощью условия (29). Инвариантная теория излагается в книге Фока [8] для непрерывного распределения материи, при этом существенно использование уравнения непрерывности

$$\bar{\nabla}_\mu (m u^\mu) = 0, \quad (30)$$

где m — инвариантная плотность массы. Аналогичные выражения для тензора энергии-импульса получаются, если функцию Лагранжа для частицы задавать в виде $\mathcal{L} = \mathcal{L}(Q_A, u^\mu)$. Метрический тензор энергии-импульса при этом имеет вид [6]

$$\Theta^{\mu\nu} = \overset{f}{\Theta}^{\mu\nu} + \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u^\lambda} u^\nu - \mathcal{L} \right) u^\mu u^\nu \frac{\delta_4(x - \xi)}{V - g} dt.$$

В случае непрерывного распределения пылевидной материи закон сохранения запишем в виде

$$\bar{\nabla}_\mu \Theta^{\mu\nu} = \bar{\nabla}_\mu (\overset{f}{\Theta}^{\mu\nu} + \overset{p}{\Theta}^{\mu\nu}) = 0, \quad (31)$$

$$\overset{f}{\Theta}^{\mu\nu} = \frac{2}{V - g} \left(\frac{\partial \bar{\mathcal{L}}}{\partial g_{\mu\nu}} - \partial_\nu \frac{\partial \bar{\mathcal{L}}}{\partial g_{\mu\nu,\lambda}} \right), \quad \overset{p}{\Theta}^{\mu\nu} = \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u^\lambda} u^\lambda - \mathcal{L} \right) u^\mu u^\nu.$$

Отличительной чертой тензора $\Theta^{\mu\nu}$ является отсутствие того соответствия между отдельными частями функции Лагранжа и соответствующими частями тензора $\Theta^{\mu\nu}$, которое имеет место для тензора $t^{\mu\nu}$. Дело в том, что $\overset{f}{\Theta}^{\mu\nu}$ и $\overset{p}{\Theta}^{\mu\nu}$, вообще говоря, не есть тензоры энергии-импульса соответственно поля и частицы (с учетом взаимодействия). Так, если \mathcal{L}_{int} есть (как, например, в электродинамике) однородная степени 1 по скоростям функция, то L_{int} вовсе не вносит вклада в $\overset{p}{\Theta}^{\mu\nu}$; это означает, что взаимодействие

учтено в члене $\Theta^{\mu\nu}$. В других случаях взаимодействие частицы с полем учитывается посредством как $\Theta^{\mu\nu}$, так и $\Theta^{\mu\nu}$. Это имеет место в случае взаимодействия частицы со скалярным Φ и тензорным $h_{\mu\nu}$ полями с лагранжианами взаимодействия соответственно в виде $km\Phi$ и $k'mh_{\mu\nu}u^\mu u^\nu$ (k и k' — некоторые постоянные). В связи с этим задание уравнений движения для частицы в виде [9]

$$\nabla_\mu (\Theta^{\mu\nu} + tu^\mu u^\nu) = 0,$$

как отмечалось в [10], вообще говоря, является некорректным. Поскольку соотношения (28) и (31) согласуются между собой, а так же с методом Фока [8], отметим, что уравнение непрерывности для пылевидной материи всегда имеет вид (30), где ковариантная производная берется по отношению к символам Кристоффеля, построенным из постулируемой метрики физического пространства-времени. В пространстве L_4 тензор $\Theta^{\mu\nu}$, как легко показать, удовлетворяет условию

$$(\nabla_\mu + A_\mu) \Theta^\mu_\sigma - \frac{1}{2} (Q_{\mu\nu\sigma} + 4S_{\sigma(\mu\nu)}) \Theta^{\mu\nu} = 0.$$

Перейдем к определению ковариантного тензора энергии-импульса, связанного с заданием интеграла действия в виде (19). Для этого следует вычислить вариацию интеграла действия, соответствующую инфинитезимальному преобразованию координат $x^\mu \rightarrow x^{\mu'} = x^\mu + \delta\zeta^\mu$, рассматривая все поля, за исключением метрики, как динамические, удовлетворяющие вариационным уравнениям. Процедура вычисления при этом совершенно аналогична той, которая приводит к уравнению (23), поскольку при рассматриваемом преобразовании координат вариация формы функции (δ^*) численно равна взятому с обратным знаком дифференциалу Ли $\delta^* = -\delta_L$. Следует, однако, учесть, что уравнения (17)

и (18) при этом не выполняются, и, следовательно, операции варьирования и ковариантного дифференцирования не коммутативны. Конкретизируя тензорную размерность рассматриваемых полей, а именно понимая под Q_A совокупность скалярного Φ , векторного Φ_μ и симметричного тензорного $h_{\mu\nu}$ полей, определим следующие коммутанты:

$$\left. \begin{aligned} [\delta^*, \nabla_\nu] \Phi_\mu &= -\delta^* \Gamma_{\nu\mu}^\lambda \Phi_\lambda, \\ [\delta^*, \nabla_\lambda] h_{\mu\nu} &= -\delta^* \Gamma_{\lambda\mu}^\sigma h_{\sigma\nu} - \delta^* \Gamma_{\lambda\nu}^\sigma h_{\mu\sigma} \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

Вариация связности есть (см., напр., [11])

$$\delta^* \Gamma_{\mu\lambda}^\alpha = -\delta \Gamma_{\mu\lambda}^\alpha = -(\nabla_\mu \nabla_\lambda v^\alpha + 2S_{\rho\lambda}^{\alpha\sigma} \nabla_\mu v^\rho + 2v^\sigma \nabla_\mu S_{\rho\lambda}^{\alpha\sigma} + v^\sigma R_{\sigma\mu\lambda}^{\alpha\sigma}) \delta t, \quad (33)$$

где $R_{\sigma\mu\lambda}^{\alpha\sigma}$ — тензор кривизны.

Принимая во внимание уравнения движения для полей, а также (32) и (33), будем иметь в случае пространства Минковского

$$\begin{aligned} \delta S &= \int_{\Omega_4} d^4v \left\{ \left(-\frac{1}{2} L g_{\mu\nu} + \frac{\partial L}{\partial g^{\mu\nu}} \right) \delta^* g^{\mu\nu} + \frac{\partial L}{\partial \Phi_{\mu\nu}} \Phi_\lambda \nabla_\nu \nabla_\mu \delta \zeta^\lambda + \right. \\ &+ 2 \frac{\partial L}{\partial h_{\mu\nu;\lambda}} h_{\sigma\nu} \nabla_\nu \nabla_\mu \delta \zeta^\sigma \left. \right\} + \frac{1}{2} \int_{\Omega_4} d_4x \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau \delta_4(x - \xi) \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u^\lambda} u^\lambda - \mathcal{L} \right) u^\mu u^\nu \delta^* g_{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (34)$$

Используя уравнения $\delta^*g^{\mu\nu} = 2\delta\xi^{(\mu;\nu)}$, $\delta^*g_{\mu\nu} = -2\delta\xi_{(\mu;\nu)}$, интегрируя в (34) по частям, а также полагая вариации $\delta\xi^\mu$ и их первые производные на границе области Ω_4 равными нулю, получим ковариантный тензор энергии-импульса*

$$T_\nu^\lambda = \left\{ L\delta_\nu^\lambda - 2 \frac{\partial L}{\partial g^{\mu\nu}} g^{\mu\lambda} + \nabla_\mu \left(\frac{\partial L}{\partial \varphi_{\lambda;\mu}} \varphi_\nu \right) + \right. \\ \left. + 2\nabla_\rho \left(\frac{\partial L}{\partial h_{\lambda;\sigma;\rho}} h_{\nu\sigma} \right) \right\} + \int d\tau \frac{\delta_\lambda(x-\xi)}{\sqrt{-g}} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u^\mu} u^\mu - \mathcal{L} \right) u^\lambda u_\nu. \quad (35)$$

Переходя к непрерывному распределению материи, запишем закон сохранения энергии-импульса

$$\nabla_\lambda T_\nu^\lambda = \nabla_\nu (T_\nu^\lambda + T_\nu^\lambda) = 0,$$

где T_ν^λ — выражение в фигурных скобках в (35), а $T_\nu^\lambda = \Theta_\nu^\lambda$. Тензор $T^{\lambda\nu}$, вообще говоря, несимметричен. Соответствие между составными частями полного лагранжиана и тензора T_ν^λ такое же, как и в случае метрического тензора энергии-импульса. В пространстве с неисчезающими кривизной и кручением ковариантная дивергенция тензора T_ν^λ , как легко видеть, учитывая (33) и (17'), выражается через тензоры кривизны и кручения, свернутые с полевыми компонентами и их ковариантными производными.

3. О ТЕНЗОРНОМ КАНОНИЧЕСКОМ ФОРМАЛИЗМЕ

В обычном каноническом формализме временная и пространственные координаты существенно неравноправны, что приводит к тому, что уже в плоском пространстве в прямоугольной декартовой координатной системе канонические уравнения по форме не являются ковариантными. В связи с этим при построении ковариантного канонического формализма прежде всего необходимо ликвидировать это неравноправие. В [12] это достигается благодаря сопоставлению каждой полевой переменной четырех «импульсов». Однако подобное отступление от обычного соответствия между числом полевых переменных и сопряженных им импульсов вызывает определенные возражения, особенно при переходе в квантовую область. При этом формализм в [12] не является тензорным. Наиболее естественным представляется введение произвольной пространственно-подобной гиперповерхности σ , являющейся ковариантным обобщением плоской гиперповерхности $x^0 = \text{const}$ в обычном формализме. В [13] при рассмотрении канонических уравнений в квантовой теории поля в пространстве Минковского производная по временной координате при этом заменяется на функциональную производную по σ (по аналогии с ковариантной теорией представления взаимодействия). В [3] используется ковариантное обобщение временной $n^\mu \nabla_\mu$ и пространственных $\bar{\nabla}_\mu = \Sigma_\mu^\nu \nabla_\nu$ ($\Sigma_\mu^\nu = \delta_\mu^\nu + n^\nu n_\mu$) ковариантных производных (n^μ — единичный вектор нормали к гиперповерхности σ , $n^\mu n_\mu = -1$). Следуя [3], можно получить тензорные канонические уравнения в пространстве L_4 для случая, когда лагранжевы переменные и канонические импульсы

* Чтобы получить ковариантный тензор энергии-импульса для систем, включающих спинорные поля, необходимо перейти к мероопределению Ламэ.

являются независимыми, а уравнения поля имеют вид (6). Ковариантный импульс

$$\pi^A = -n^\mu \bar{\partial} Q_{A;\mu}. \quad (36)$$

Ковариантный «гамильтониан»

$$H = \int_{(\sigma)} d^3v H, \quad H = \pi^A n^H \nabla_\mu Q_A - L \quad (37)$$

является функцией Q_A , π^A и их ковариантных пространственных производных. Тензорные канонические уравнения имеют вид

$$n^\mu \nabla_\mu Q_A = \frac{\delta H}{\delta \pi^A}, \quad n^\mu \nabla_\mu \pi^A + A_\mu \frac{\partial L}{\partial Q_{A;\mu}} = -\frac{\delta H}{\delta Q_A} \quad (38)$$

при условии

$$\nabla_\mu n^\mu = 0, \quad n^\mu \nabla_\mu n^\nu = 0. \quad (39)$$

Заметим, что член $A_\mu \frac{\partial L}{\partial Q_{A;\mu}}$ в уравнении (38) также должен быть выражен через Q_A , π^A и их пространственные производные. При использовании уравнений движения (9) в формулах (36)–(39) следует произвести замену $\nabla_\mu \rightarrow \bar{\nabla}_\mu$, при этом член $A_\mu \frac{\partial L}{\partial Q_{A;\mu}}$ в (38) исчезает. Что касается метрического поля, то построение тензорного канонического формализма для него должно быть существенно связано с тетрадным подходом, а также учитывать те осложнения, которые связаны с наличием связей в обобщенной гамильтоновой динамике Дирака [14].

Литература

1. Минкевич А. В., Федоров Ф. И. Вестн. АН БССР, сер. физ.-мат., № 5, 1968.
2. Минкевич А. В., Федоров Ф. И. ДАН БССР, 1969, № 4.
3. Roche C. Cahiers de Phys., 20, 265, 1966.
4. Румер Ю. Б. Исследования по 5-оптике, ГИТТЛ, 1956.
5. Родичев В. И. Сб. «Современные проблемы гравитации». Тбилиси, 1967, стр. 71.
6. Trautman A. Bull. Acad. Polon. Sc., Cl. III, 4, 679, 1956; 5, 721, 1957.
7. Schouten J. A. Ricci Calculus. Berlin, 1954, p. 346.
8. Фок В. А. Теория пространства, времени и тяготения. М., 1961, § 47, 48.
9. Tonnelat M. A., Lederer S. C. R., 256, 371, 1963; Mavrides S. C. R., 257, 4139, 1963; Capella M. A. C. R., 258, 87, 1964.
10. Минкевич А. В. ДАН БССР, 11, № 9, 782, 1967.
11. Схоутен И. А., Стройк Д. Дж. Введение в новые методы дифференциальной геометрии. М.—Л., 1, 1939, § 12.
12. Брежнев В. С. Изв. высших уч. завед., Физика, № 6, 1964.
13. Utiyama R. Progr. Theor. Phys., 5, 437, 1950.
14. Dirac P. A. M. Proc. Roy. Soc., A246, No 1246, 326, 1958 (перевод в сб. «Новейшие проблемы гравит.», М., 1961).

Г. Э. СУСУРИН, О. С. ИВАНИЦКАЯ

К СОПОСТАВЛЕНИЮ КАЛИБРОВКИ ТЕТРАД БРЕЖНЕВА—РАДЫНОВА С ДРУГИМИ КАЛИБРОВКАМИ

1. Тетрадные калибровочные условия. Уравнения гравитации Эйнштейна можно представить в таком, тетрадном, виде, что неизвестными функциями становятся не метрический тензор *) $g_{\mu\nu}$, а обобщенные коэффициенты Ламэ h_{μ}^k (коротко тетрады) [1—3]. Тетрадные уравнения Эйнштейна не определяют полностью 16 компонент h_{μ}^k и поэтому дополняются 6 калибровочными условиями. Тот или иной выбор этих условий фиксирует определенные локальные неголономные системы координат:

$$dx^k = h_{\mu}^k dx^{\mu}, \quad \Omega_{\mu\nu}^k = \partial_{[\nu} h_{\mu]}, \quad (1.1)$$

$\Omega_{\mu\nu}^k$ — объекты неголономности. Наиболее популярными являются следующие простейшие калибровки тетрад.

«Нормальная» калибровка:

$$h_{\mu}^k = 0 \text{ при } \mu < k. \quad (1.2)$$

«Временная» калибровка тетрад [3, 4]:

$$h_0^a = 0, \quad h_{\alpha}^{\hat{0}} = 0. \quad (1.3)$$

Сохранив половину условий (1.3), приходим к калибровке

$$h_0^a = 0, \quad h_{1\hat{2}} = h_{2\hat{1}}, \quad h_{1\hat{3}} = h_{3\hat{1}}, \quad h_{2\hat{3}} = h_{3\hat{2}}, \quad (1.4)$$

введенной в [5], требующей симметрии чисто пространственных компонент тетрад. В работе [6] для слабого поля предлагаются тетрады, полностью симметричные относительно диагонали, в [7] предложена калибровка тетрад, требующая «наименьшего их уклонения от нуля». Указанные калибровки алгебраические. В качестве примера дифференциальных калибровок приведем 6 условий

$$\gamma_{kno} = h_{\mu}^k \nabla_o h_{\mu n}^i = 0, \quad (1.5)$$

где ∇_o — производная ковариантная относительно символов Кристоффеля. В [8] для (1.5) предложено название «кулоновой» калибровки, поскольку при переходе к спинорному формализму она напоминает кулоновскую калибровку электродинамики. Перечисленные калибровки тетрад не общековариантны и при их выборе не прибегают к каким-либо общим принципам (исключением является случай [6]).

*) Греческие индексы относятся к голономной глобальной системе координат, латинские — локальной неголономной. Оба вида индексов начала алфавитов соответственно до κ и k пробегает значения 1, 2, 3, начиная соответственно с κ и k , — 0, 1, 2, 3. Над численными значениями латинских индексов ставится символ Λ . Положим $\rho, \tau = 2, 3, \epsilon = 1, 2$.

В. С. Брежнев и А. Г. Радынов [9] предложили калибровку тетрад, которая обращает на себя внимание, во-первых, своей общековариантной формой, во-вторых, тем, что ее основным конструктивным элементом является объект неголономности — первоначальная характеристика тетрад. В процессе конструирования калибровки закладываются требования, направленные на обеспечение ее совместности с эйнштейновыми уравнениями тяготения. Общий случай предлагаемой в [9] калибровки весьма громоздок. При наложении ограничений она упрощается и принимает вид:

$$\nabla_{\lambda} \gamma^{[\mu\nu\lambda]} = 0, \quad \nabla_{\lambda} \Omega^{[\mu\nu\lambda]} = 0, \quad (1.6)$$

где $\gamma_{\mu\nu\sigma}$ — тензориальные компоненты коэффициентов вращения.

Калибровка (1.6) может сыграть свою роль в общековариантных исследованиях гравитационного и других полей. Поэтому интересно сопоставить (1.6) с перечисленными популярными калибровками, в частности установить, не являются ли они частным случаем калибровочных условий (1.6) Брежнева—Радынова.

Прежде всего естественно проверить для ряда известных решений $g_{\mu\nu}$ уравнений Эйнштейна, соблюдается ли (1.6) при перечисленных калибровках тетрад. Далее приводятся результаты такой проверки, охватывающие также ряд других тетрад.

Для дальнейшего удобно представить (1.6) в виде:

$$\partial_{[\sigma} l_{\nu]} + \Gamma^{\lambda}_{\lambda[\sigma} l_{\nu]} = 0, \quad (1.7)$$

$$l_{\nu}^{\text{def}} = -\frac{1}{h} \eta^{\nu\mu\sigma\lambda} \gamma_{\mu\sigma\lambda}, \quad \eta^{\nu\mu\sigma\lambda} = h^{-1} \epsilon_{\nu\mu\sigma\lambda},$$

$$\eta_{\nu\mu\sigma\lambda} = -h \epsilon_{\nu\mu\sigma\lambda}, \quad h \equiv \text{Det } h_{\mu}^k,$$

$$\gamma_{\mu\nu\sigma} = -\Omega_{\mu\nu\sigma} + \Omega_{\nu\mu\sigma} + \Omega_{\sigma\mu\nu}, \quad (1.8)$$

$\epsilon_{\nu\mu\sigma\lambda}$ — тензор Леви—Чивита. Десять уравнений

$$g_{\mu\nu} = h_{\mu}^k h_{\nu}^n \eta_{kn} \quad (1.9)$$

при заданном $g_{\mu\nu}$ и 6 выбранных калибровочных условиях позволяют вычислить все 16 тетрад. Тогда с помощью (1.1), (1.8) и (1.7) может быть найден вектор l_{ν} . Коль скоро символы Кристоффеля при заданном $g_{\mu\nu}$ известны, подстановка их и найденного l_{ν} в (1.7) позволяет выяснить его соблюдение для рассмотренного случая.

Результаты проверки разбиты на 4 группы: 1) $l_{\nu} = 0$, поскольку отсутствуют тензориальные компоненты вращения Риччи с тремя различными индексами (коротко «трехиндексные» компоненты); 2) $l_{\nu} = 0$, хотя трехиндексные компоненты вращения отличны от нуля. Для таких случаев, очевидно, калибровка Брежнева—Радынова выполняется; 3) $l_{\nu} \neq 0$, но можно сформулировать частные условия, совместные с эйнштейновыми уравнениями, при которых (1.6) удовлетворяется (ограниченное, или условное выполнение калибровки (1.6)) и, наконец, 4) вектор $l_{\nu} \neq 0$ имеет такие значения, что условия (1.6) не удовлетворяются.

Естественно наиболее подробно рассмотреть случай шварцшильдова решения. Приведенные ниже значения коэффициентов вращения Риччи могут представлять интерес независимо от проверки условия (1.6) для изучения других вопросов.

2. Частные случаи условий (1.6), исключают трехиндексные компоненты коэффициентов вращения Риччи. Метрика Шварцшильда (класс T_1) в пространственно-сферических координатах имеет вид *):

$$g_{\mu\nu} = \text{diag}(-a^2, a^2, r^2, r^2 \sin^2 \Theta), \quad a = \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-\frac{1}{2}}. \quad (2.1)$$

Подставляя (2.1) в (1.9) и пользуясь калибровочными условиями (1.2), затем (1.3) и (1.5), находим тетрады, которые после подстановки их в (1.1) и (1.8) приводят для «нормальной», «временной» и «кулоновой» калибровок соответственно к следующим отличным от нуля компонентам коэффициентов вращения Риччи:

$$\Upsilon_{010} = -\frac{m}{r^2}, \quad \Upsilon_{212} = r, \quad \Upsilon_{313} = r \sin^2 \Theta, \quad \Upsilon_{323} = r^2 \sin \Theta \cos \Theta, \quad (2.2)$$

$$\Upsilon_{0\alpha 0} = -\frac{m x^\alpha}{r^3}, \quad \Upsilon_{\alpha' \beta \alpha} = \frac{1-a}{r^2} x^\beta, \quad (2.3)$$

$$\Upsilon_{101} = -\frac{2mt}{r^3}, \quad \Upsilon_{212} = r, \quad \Upsilon_{313} = r \sin^2 \Theta, \quad \Upsilon_{323} = r^2 \sin \Theta \cos \Theta, \quad (2.4)$$

(суммация по α в (2.3) отсутствует).

В [10] выяснен характер неголономности указанных трех калибровок и предложена некоторая их интерпретация. В [11] рассмотрен случай непосредственного решения тетрадного уравнения Эйнштейна при «временной» калибровке. В (2.2)–(2.4) входят только двухиндексные коэффициенты вращения. Следовательно, вектор l_ν обращается в нуль. Таким образом, для шварцшильдова поля и в шварцшильдовых координатах «нормальная», «временная» и «кулоновая» калибровки являются частными случаями условия (1.6). Исключение «трехиндексных» компонент, конечно, зависит не только от принятой калибровки, но и от выбранных координатных условий.

Метрика T_1 Петрова [12]

$$g_{\mu\nu} = \text{diag}(-\beta^{-1}, \beta, \gamma, \gamma \text{sh}^2 x^2), \quad (2.5)$$

где β и γ — функции x^0, x^1 , интересна тем, что, как показано в [13], удовлетворяет обобщенному волновому критерию Зельманова, хотя и относится к классу T_1 , при нормальных тетрадах приводит к

$$\Upsilon_{010} = \frac{\partial_1 \beta}{2\beta^2}, \quad \Upsilon_{101} = \frac{1}{2} \partial_0 \beta, \quad \Upsilon_{202} = \frac{1}{2} \partial_0 \gamma, \quad \Upsilon_{212} = \frac{1}{2} \partial_1 \gamma, \quad (2.6)$$

$$\Upsilon_{303} = \frac{1}{2} \text{sh}^2 x^2 \partial_0 \gamma, \quad \Upsilon_{313} = \frac{1}{2} \text{sh}^2 x^2 \partial_1 \gamma, \quad \Upsilon_{323} = \gamma \text{sh} x^2 \text{ch} x^2.$$

Метрика T_2 Петрова [12]

$$dS^2 = 2tdx + \text{sh}^2 t dy^2 + \sin^2 t dz^2, \quad (2.7)$$

дополненная «кулоновой» калибровкой тетрад, дает

$$\Upsilon_{202} = \text{sh} t \text{ch} t, \quad \Upsilon_{303} = \sin t \cos t. \quad (2.8)$$

*) Когда обозначения широко известны, они специально не оговариваются.

Метрика T_3 Петрова [12]

$$dS^2 = -\lambda dt^2 + y^2 e^{-2t} dx^2 - 2dx dz, \quad (2.9)$$

$$\lambda = \left(z + \frac{1}{4} y^2 \right) \ln(\rho y^2) - y^2 + q, \quad \rho, q - \text{const}$$

удовлетворяется тетрадами

$$h_{\mu}^{\hat{0}} = \frac{1}{2} (e^{-\psi} + \lambda e^{\psi}) \delta_{\mu}^0 + e^{\psi} \delta_{\mu}^3, \quad h_{\mu}^{\hat{1}} = y e^{-t} \delta_{\mu}^1, \quad (2.10)$$

$$h_{\mu}^{\hat{2}} = \delta_{\mu}^2, \quad h_{\mu}^{\hat{3}} = -\frac{1}{2} (e^{-\psi} + \lambda e^{\psi}) \delta_{\mu}^0 + e^{\psi} \delta_{\mu}^3.$$

Эти тетрады приводят только к двухиндексным компонентам:

$$\gamma_{0\rho 0} = -\frac{1}{2} \partial_{\rho} \lambda, \quad \gamma_{101} = -y^2 e^{-2t}, \quad \gamma_{121} = y e^{-2t}. \quad (2.11)$$

Во всех приведенных примерах (2.1)–(2.11), а также для метрик Тауба [12, стр. 96] при «кулоновых» тетрадах, Уимена [14] и Бонди [15] при нормальных тетрадах условие (1.6) удовлетворяется.

3. Частные случаи (1.6), допускающие трехиндексные компоненты коэффициентов вращения Риччи. Шварцшильдова метрика в пространственно-декартовых координатах и условие нормальности тетрад приводит к тетрадам, которые дают не только двухиндексные компоненты:

$$\begin{aligned} \gamma_{121} &= y\Delta, \quad \gamma_{122} = x\Delta, \quad \gamma_{133} = -xr^{-2}, \quad \gamma_{131} = x^2 zr^{-2} \Delta, \\ \gamma_{232} &= y^2 zr^{-2} \Delta, \quad \gamma_{010} = -mxr^{-3}, \quad \gamma_{020} = -myr^{-3}, \\ \gamma_{030} &= -mzr^{-3}, \quad \gamma_{231} = \gamma_{132} = xyzr^2 \Delta, \quad \Delta = (x^2 + y^2)^{-1}. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Однако равенство нулю вектора l_{ν} сохраняется. Действительно, из (3.1) следует

$$\gamma_{[231]} = \frac{1}{3} (\gamma_{231} - \gamma_{132}) = 0. \quad (3.2)$$

Метрики конформно-приводимых пространств имеют вид [12, стр. 402]:

$$\begin{aligned} dS^2 &= \alpha (x^0, x^1, x^2, x^3) (dS_1^2 + dS_2^2), \\ dS_1^2 &= g_{\mu_1 \nu_1} dx^{\mu_1} dx^{\nu_1}, \quad \mu_1, \nu_1 = 1, 2, \\ dS_2^2 &= g_{\mu_2 \nu_2} dx^{\mu_2} dx^{\nu_2}, \quad \mu_2, \nu_2 = 0, 3. \end{aligned} \quad (3.3)$$

При нормальной калибровке, кроме двухиндексных, отличны от нуля следующие трехиндексные компоненты:

$$\begin{aligned} \gamma_{102} = \gamma_{201} &= \alpha g_{12} \partial_0 \alpha, \quad \gamma_{013} = \gamma_{310} = \alpha g_{03} \partial_1 \alpha, \\ \gamma_{203} = \gamma_{302} &= -\alpha g_{03} \partial_2 \alpha, \quad \gamma_{231} = \gamma_{132} = \alpha g_{12} \partial_3 \alpha. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Компоненты (3.4) таковы, что $l_{\nu} = 0$, т. е. в случае (3.3) нормальная калибровка входит в состав условий (1.6).

4. Случай ограниченной справедливости калибровки (1.6). Метрика Переса (класс T_2) [16]

$$dS^2 = -dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 + 2f(dt + dz)^2, \quad (4.1)$$

$$f = f(u, x, y), \quad \partial_{\varepsilon} \partial_{\varepsilon} f = 0, \quad u = t + z$$

описывает гравитационные волны. Тетрады, предложенные Пересом, для этой метрики имеют вид

$$h_{\mu}^{\hat{0}} = \delta_{\mu}^0 - f(\delta_{\mu}^0 + \delta_{\mu}^3), \quad h_{\mu}^{\hat{1}} = \delta_{\mu}^1 \cos \Theta - \delta_{\mu}^2 \sin \Theta, \quad (4.2)$$

$$h_{\mu}^{\hat{2}} = \delta_{\mu}^2 \sin \Theta + \delta_{\mu}^1 \cos \Theta, \quad h_{\mu}^{\hat{3}} = \delta_{\mu}^3 + f(\delta_{\mu}^0 + \delta_{\mu}^3),$$

$$\Theta = \Theta(u, x, y).$$

Тогда

$$\gamma_{0\epsilon 0} = \gamma_{3\epsilon 3} = \gamma_{0\epsilon 3} = \gamma_{3\epsilon 0} = \partial_{\epsilon} f, \quad \gamma_{121} = \partial_1 \Theta, \quad (4.3)$$

$$\gamma_{212} = -\partial_2 \Theta, \quad \gamma_{120} = \gamma_{123} = \partial_u \Theta.$$

В этом случае вектор l_{ν} отличен от нуля, т. е.

$$\nabla_{\lambda} \gamma^{[02\lambda]} = 2\partial_{[1} l_{3]} = \nabla_{\lambda} \gamma^{[23\lambda]} = 2\partial_{[1} l_{0]} = -\frac{1}{3} \partial_1 \partial_u \Theta = 0, \quad (4.4)$$

$$\nabla_{\lambda} \gamma^{[01\lambda]} = 2\partial_{[2} l_{3]} = \nabla_{\lambda} \gamma^{[13\lambda]} = 2\partial_{[2} l_{0]} = \frac{1}{3} \partial_2 \partial_u \Theta = 0.$$

Соотношения (4.4) будут удовлетворяться лишь, если

$$\Theta = F(t+z) + \Phi(x, y). \quad (4.5)$$

Требование (4.5) не противоречит уравнениям Эйнштейна.

Метрика Кайгородова (класс T_3) [17]

$$dS^2 = -(xy + N - P^2 - Q^2) dt^2 + 2dy^2 + 2dz^2 - \\ - 2tdtx - 2Ptdty - 2Qtdtz, \quad (4.6)$$

где N, P, Q — функции x^0, x^2, x^3 , в случае тетрад, предложенных в [17] (после преобразования их в метрике $\eta_{kn} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$), приводит уравнение (1.7) к виду:

$$\nabla_{\lambda} \gamma^{[12\lambda]} = 2\partial_{[3} l_{0]} = \frac{1}{6} \partial_3 [\partial_3 (P - 2m) - \partial_2 (Q + 2n)], \quad (4.7)$$

$$\nabla_{\lambda} \gamma^{[13\lambda]} = 2\partial_{[0} l_{2]} = -\frac{1}{6} \partial_2 [\partial_3 (P - 2m) - \partial_2 (Q + 2n)],$$

т. е. удовлетворяется ограниченно при дополнительном требовании

$$\partial_3 (P - 2m) = \partial_2 (Q + 2n) + F(t), \quad (4.8)$$

не противоречащем эйнштейнову уравнению.

Аналогично удовлетворяют (1.6) при некоторых условиях, не противоречащих уравнениям Эйнштейна, метрика Робинсона [18] и Гольдберга — Керра [19] при тетрадах, предложенных там же, но преобразованных к метрике $\eta_{kn} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$.

5. Случай невыполнения калибровки (1.6). Рассмотрим Шварцшильдovu метрику при калибровочных условиях Родичева. Подвергнем тетрады (2.3) указанному в [3, стр. 89] обобщенному лоренцеву преобразованию. Тогда

$$h_{\alpha}^b = A\delta_{\alpha}^{\beta} + (a - A) \frac{x^{\alpha} x^{\beta}}{r^2} - \sqrt{1 - A^2} \epsilon_{\alpha\beta\gamma} \frac{x^{\gamma}}{r},$$

$$h_0^{\hat{0}} = \frac{1}{a}, \quad h_0^a = h_a^{\hat{0}}, \quad A = a \left(1 - \frac{3m}{4r} \right), \quad |\beta| = |b|. \quad (5.1)$$

В отличие от (2.3), эти тетрады удовлетворяют уравнениям

$$\nabla_{\lambda} h^{\lambda}_{\ k} = 0, \quad (5.2)$$

названным в [3] калибровочными условиями гармоничности (локальной неголономной системы координат). Подставив в (1.7) коэффициенты вращения Риччи, найденные с помощью (5.1), получим

$$\begin{aligned} \nabla_{\lambda} \gamma^{[12\lambda]} &= 2\partial_{[3]l_0} = M' \frac{x^3}{r}, \\ \nabla_{\lambda} \gamma^{[12\lambda]} &= 2\partial_{[0]l_2} = -M' \frac{x^2}{r}, \\ \nabla_{\lambda} \gamma^{[23\lambda]} &= 2\partial_{[1]l_0} = M' \frac{x^1}{r}. \end{aligned} \quad (5.3)$$

Поскольку

$$M' = - \left[\frac{1}{2} \left(1 - \frac{2m}{r} \right) \left(1 - \frac{9m}{4r} \right)^{-\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{m}{r^3}} \right] \neq 0, \quad (5.4)$$

тетрады (5.1) калибровке (1.6) не удовлетворяют.

Обратимся к метрике Переса (4.1), но заменим тетрады (4.2) нормальными тетрадами. В этом случае в силу (4.1) приходим к нарушению (1.6):

$$\nabla_{\lambda} \gamma^{[03\lambda]} = 2\partial_{[2]l_1} = \frac{1}{6} (1 - 2f)^{-2} [(\partial_1 f)^2 + (\partial_2 f)^2] \neq 0. \quad (5.5)$$

Перейдем к метрике (2.8), заменив тетрады (2.9) нормальными. Тогда

$$\begin{aligned} \nabla_{\mu} \gamma^{[03\mu]} &= (2\partial_{[2]l_1} + \Gamma_{\sigma[2]l_1}^{\sigma}) = \frac{1}{6} (\partial_2 \ln \lambda - \partial_2 \partial_2 \ln \lambda), \\ \nabla_{\mu} \gamma^{[02\mu]} &= 2\partial_{[1]l_3} = \frac{1}{6} \partial_3 \partial_2 \lambda, \\ \nabla_{\mu} \gamma^{[23\mu]} &= 2(\partial_{[1]l_0} + \Gamma_{\sigma[1]l_0}^{\sigma}) = \frac{1}{6} \partial_2 \ln \lambda. \end{aligned} \quad (5.6)$$

Из (5.6) видно, что при λ , заданном с помощью (2.9), калибровка (1.6) не выполняется.

Метрике T_1 Петрова [12] вида

$$dS^2 = e^{ky} \cos \sqrt{3} ky (dx^2 - dt^2) + e^{-2ky} dz^2 + 2e^{ky} \sin \sqrt{3} ky dx dy \quad (5.7)$$

при условии нормальности тетрад соответствуют такие коэффициенты вращения Риччи, что

$$\nabla_{\lambda} \gamma^{[01\lambda]} = 2\partial_{[3]l_2} = -\frac{k\sqrt{3}}{2} \partial_2 (e^{-\frac{1}{2}ky} \cos \sqrt{3} ky) \neq 0. \quad (5.8)$$

Очевидно, (5.11) обращается в нуль лишь при $y = \text{const}$. Тогда пространство — время становится плоским.

Проверка показывает, что в соответствующих координатных системах широко распространенные простые калибровки тетрад могут быть частными случаями калибровки (1.6) Брежнева—Радынова. Калибровка (1.6) может выполняться во всех петровских классах. Указаны

некоторые случаи, когда она не выполняется или выполняется условно. Тетрады, удовлетворяющие калибровке Брежнева — Радынова (2.2, 2.4, 2.6, 2.8; 3.1), а также (4.2) при

$$\theta = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{\partial_2 \partial_1 f}{\partial_1 \partial_1 f}, \quad (5.9)$$

являются каноническими, т. е. такими, что после перелицовки компонент тензора Римана — Кристоффеля

$$R_{klmn} = h^\mu_k h^\nu_l h^\sigma_m h^\lambda_n R_{\mu\nu\sigma\lambda}, \quad (5.10)$$

последние в собирательных индексах принимают каноническую форму.

Литература

1. Pirani F. A. E. Bull. Acad. Polon., 5, 143, 1956.
2. Sciama D. W. J. Math. Phys., 2, 472, 1960.
3. Родичев В. И. Эйнштейновский сборник, № 1, «Наука», 115, 1968.
4. Schwinger J. Phys. Rev., 130, 1253, 1963.
5. Kibble T. W. J. Math. Phys., 4, 1433, 1963.
6. Møller C. Math. Fys. Skr. Dan. Vid. Selsk., 1, 10, 1960.
7. Федоров Ф. И. Труды 2-й Сов. грав. конф. Тбилиси, 1968.
8. Peres A. Phys. Rev., 4, 59, 1963.
9. Брежнев В. С., Радынов А. Г. Сб.: Проблемы теор. грав. и элем. частиц. М., 1968.
10. Иванецкая О. С. Сб.: Грав. и теор. относит., Казан. ун-т, вып. 4—5, 1968.
11. Сусурин Г. Э., Левашев А. Е. Сб.: Грав. и теор. относит., Казан. ун-т, 4—5, 1968.
12. Петров А. З. Пространства Эйнштейна. М., 1961; Новые методы в ОТО. М., 1966.
13. Захаров В. Д. ГАИИШ, МГУ, № 131, 42, 1964.
14. Wyman M. Phys. Rev. 66, 267, 1964.
15. Bondi H., Pirani F. A. E., Robinson J. Proc. Roy. Soc., 251, 519, 1959.
16. Peres A. Phys. Rev. 118, 1105, 1960.
17. Кайгородов В. Р. Сб.: Грав. и теор. относит., Казан. ун-т, вып. 3, 156, 1967.
18. Newman E. J. Math. Phys., 2, 324, 1961.
19. Goldberg J. N., Kerr R. P. J. Math. Phys., 2, 332, 1961.

Институт физики АН БССР,
Белорусский государственный университет
им. В. И. Ленина

Поступило в редакцию 4. III 1968

Л. А. БАРЫСАГЛЕБСКИ, С. В. ПАЗОЙСКИ

ДА ТЭОРЫ СТРУКТУРНЫХ ПАПРАВАК
 У КАЭФІЦЫЕНТАХ ПАРНАЙ КАНВЕРСІІ
 ПРЫ МІ-ПЕРАХОДАХ ЯДРАУ

Для магнітных дыпольных пераходаў ядраў дыферэнцыяльны каэфіцыент парнай канверсіі (у далейшым КПК) можна прадставіць у наступным выглядзе [1, 3] (у рэлятывісцкіх адзінках):

$$\frac{d\beta\pi}{dE_+} = \frac{\alpha\pi k}{6} \sum_{\kappa\kappa_0} B_{\kappa\kappa_0} |R_{\kappa\kappa_0}^{(1)}(m) + R_{\kappa\kappa_0}^{(2)}(m)|^2. \quad (1)$$

Тут α — пастаянная тонкай структуры, k — энергія пераходу, κ_0, κ — квантавыя лікі, якія вызначаюць стан пазітрона і электрона. Каэфіцыенты $B_{\kappa\kappa_0}$ пратабуліраваны ў рабоце [2], $R_{\kappa\kappa_0}^{(1)}(m)$ — асноўныя радыяльныя інтэгралы і $R_{\kappa\kappa_0}^{(2)}(m)$ — дадатковыя радыяльныя інтэгралы, што вядуць да структурных паправак у КПК. Звычайна $R_{\kappa\kappa_0}^{(2)}(m)$ у параўнанні з $R_{\kappa\kappa_0}^{(1)}(m)$ малыя і ўлік $R_{\kappa\kappa_0}^{(2)}(m)$ прыводзіць толькі да некаторага ўдакладнення значэнняў КПК. Аднак пры моцна забароненых γ -пераходах ядраў $R_{\kappa\kappa_0}^{(2)}(m)$ могуць нават моцна прэваліраваць над $R_{\kappa\kappa_0}^{(1)}(m)$. У сувязі з гэтым даследаванне $R_{\kappa\kappa_0}^{(2)}(m)$ мае пэўную цікавасць.

Разлікі Ламбарда і Фішэра [1, 4] паказалі, што найбольш значны ўклад у суму [1] дае член з $\kappa_0 = -1$ і $\kappa = -1$ і што адпаведны дадатковы інтэграл $R_{-1,-1}^{(2)}(m)$ найбольш значны. Таму разглядам гэтага інтэграла мы і займемся.

Згодна з работай [3],

$$R_{-1,-1}^{(2)}(m) = i \sum_{\nu=0}^{\infty} q_{\nu}^{+}(m) u_{\nu}^{+}(m), \quad (2)$$

дзе $u_{\nu}^{+}(m)$ — ядзерныя параметры,

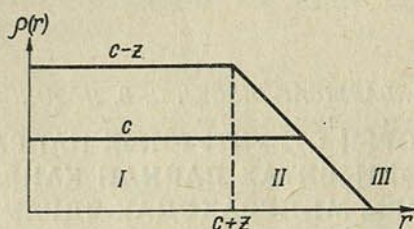
$$q_{\nu}^{+}(m) = a_{\nu} a_{\kappa_0} b_{\nu}^{+}(m) \quad (3)$$

— электронныя фактары. Множнікі a_{ν} і a_{κ_0} будзем задаваць прыбліжанымі аналітычнымі формуламі (вернымі пры выкананні ўмоў $\alpha ZR \ll 1$ і $k \ll 50$), а $b_{\nu}^{+}(m)$ — дакладнымі аналітычнымі выражэннямі, прыведзенымі ў рабоце [3].

З формул (1) — (3) відаць, што, ведаючы эксперыментальныя КПК і вылічыўшы $R_{\kappa\kappa_0}^{(1)}(m)$ і $q_{\nu}^{+}(m)$ з дапамогай электронных функцый, можна вызначыць ядзерныя параметры, і гэта вызначэнне будзе тым больш дакладным, чым дакладней будзем ведаць $R_{\kappa\kappa_0}^{(1)}(m)$ і $q_{\nu}^{+}(m)$.

Паколькі $q_v^+(m)$ залежыць ад паводзін электронных функцый унутры ядра, то памеры, форма і размеркаванне зарада ў ім будзе непараўнальна мацней адбівацца на $q_v^+(m)$, чым на $R_{\text{кк}_0}^{(1)}(m)$.

Звычайна пры разліках $q_v^+(m)$ мяркуецца, што зарад размяркоўваецца раўнамерна па аб'ёму ядра-сферы [1, 2].



У гэтай рабоце даследуецца, да якіх змяненняў значэнняў $q_v^+(m)$ прывядзе выкарыстанне размеркаванняў зарада двух тыпаў, што набліжаюцца ў той ці іншай меры да рэальнага. Першае з іх, што ўяўляе сабой эквівалентнае неаднароднае размеркаванне, будзем задаваць згодна з работамі [5, 6] формулай:

$$\rho(r) = \frac{21Z}{16\pi R''^3} \left[1 - \left(\frac{r}{R''} \right)^4 \right], \quad (4)$$

дзе

$$R'' = \frac{3}{\sqrt{7}} IA^{1/3} \left[1 + \frac{5}{2} \sigma - \frac{21}{8} \sigma^2 + \dots + \right. \\ \left. + \frac{5}{8\pi} \beta^2 \left(1 - \frac{13}{2} \sigma + \frac{173}{10} \sigma^2 - \dots \right) \right], \quad (5)$$

$$\sigma = \frac{1}{3} \left(\frac{\pi a}{IA^{1/3}} \right)^2, \quad \frac{a}{l} = \frac{2,49}{1,123 \ln 3}, \quad l = 1,123 \cdot 10^{-13} \text{ см}, \quad (6)$$

β — параметр дефармацыі ядра.

У якасці другога возьмем трапецыяпадобнае размеркаванне зарада, прадстаўленае на рысунку. Даўжыня ніжняй і верхняй асноў трапецыі, згодна з [7], роўная адпаведна $c+z$ і $c-z$, дзе c — радыус палавіннай шчыльнасці, вызначаны на падставе аналізу даных па рассеянню электронаў на ядрах:

$$c = 1,05 \cdot 10^{-13} A^{1/3} \text{ см}, \quad z = 1,53 \cdot 10^{-13} \text{ см}, \quad (7)$$

прычым шчыльнасць зарада $\rho(r)$ мае наступны выгляд у розных абласцях змянення r :

$$\begin{aligned} 1. \quad \rho(r) &= \rho(0), & 0 < r < c-z, \\ 2. \quad \rho(r) &= \rho(0) \frac{c+z-r}{2z}, & c-z < r < c+z, \\ 3. \quad \rho(r) &= 0, & r > c+z, \end{aligned} \quad (8)$$

дзе $\rho(0)$ — шчыльнасць зарада ў цэнтры ядра.

Электронныя функцыі ўнутры ядра возьмем у выглядзе ступенных рады, а па-за ядром як лінейную камбінацыю кулонаўскіх функцый, што належыць двум значэнням параметра $\gamma = \pm \sqrt{\kappa^2 - (az)^2}$ так, як гэта робіцца ў работах [8, 3]. Названыя ступенныя рады з'яўляюцца рознымі для

абласцей I і II, і для таго, каб яны задавальнялі сістэме дыферэнцыяльных ураўненняў Дырака з адпаведнымі патэнцыяламі, каэфіцыенты павінны падпарадкоўвацца розным рэкурэнтным суадносінам. У выніку разлікаў для ступенных радоў і рэкурэнтных суадносін паміж каэфіцыентамі ў вобласці II атрымаем наступныя выражэнні:

$$f_{x=-1}'' = \sum_{v=0}^{\infty} c_v'' r^{v+\mu}, \quad g_{x=-1}'' = \sum_{v=0}^{\infty} d_v'' r^{v+\mu}, \quad (9)$$

$$c_{v+1}'' = \frac{B_2 b_3 d_{v+1}'' - (E - 1 + B_2 b_4) d_v'' + B_2 b_2 d_{v-2}'' - B_2 d_{v-3}''}{v + \mu + 3}, \quad (10)$$

$$d_{v+1}'' = \frac{-B_2 b_3 c_{v+1}'' + (E + 1 + B_2 b_4) c_v'' - B_2 b_2 c_{v-2}'' + B_2 c_{v-3}''}{v + \mu + 1}, \quad (10')$$

$$\mu = -1 \pm \sqrt{1 - (B_2 b_3)^2}, \quad (11)$$

$$B_2 = \frac{\alpha Z}{8z'c'^3} \left(1 + \frac{z'^2}{c'^2} \right)^{-1}, \quad b_2 = 2(c' + z'), \quad b_3 = (c' - z')^4,$$

$$c' = \frac{c}{\lambda_h}, \quad z' = \frac{z}{\lambda_h}, \quad b_4 = 2(c' + z')^3, \quad \lambda_h$$

— камптонаўская даўжыня хвалі.

Радывальныя функцыі f_x і g_x у вобласці 2 уяўляюцца як лінейныя камбінацыі радоў (9) з двума рознымі значэннямі μ згодна з (11). Пасля выкарыстання ўмовы неперарывнасці радывальных функцый на мяжы абласцей I—II і II—III гэтыя функцыі поўнасьцю вызначаюцца і могуць быць выкарыстаны для разлікаў электронных фактараў.

z	β	Эквівалентнае аднароднае размеркаванне					Эквівалентнае неаднароднае размеркаванне					Трапецападобнае размеркаванне $\omega_1 = \frac{q_1^+(R''')}{q_1^+(R)}$
		$\omega_v = \frac{q_v^+(R')}{q_v^+(R)}$			$\frac{R_{-1,-1}^{(2)}(R')}{R_{-1,-1}^{(2)}(R)}$	$\omega_v = \frac{q_v^+(R'')}{q_v^+(R)}$			$\frac{R_{-1,-1}^{(2)}(R'')}{R_{-1,-1}^{(2)}(R)}$			
		κ	v			κ	v					
	1	2	3	0	1	2	3	0				
20	0	$\frac{4E_+ - 2}{E_- - 2}$	1,07	1,07	1,07	1,06	1,44	2,15	2,91	1,38	1,16	
62	0,315	$\frac{3E_+ - 1,4}{E_- - 1,6}$	1,02	1,02	1,02	1,02	1,34	1,94	2,72	1,29	1,18	
64	0,46	$\frac{4E_+ - 2}{E_- - 2}$	1,03	1,03	1,03	1,04	1,36	1,97	2,75	1,30	1,20	

У табліцы $q_v^+(R)$, $R_{-1,-1}^{(2)}(R)$ — электронныя фактары і структурныя папраўкі па Сліву, адпаведна разлічаныя пры эквівалентным аднародным аб'ёмным размеркаванні зарада ядра, $q_v^+(R')$, $q_v^+(R'')$, $q_1^+(R''')$, $R_{-1,-1}^{(2)}(R')$, $R_{-1,-1}^{(2)}(R'')$, $R_{-1,-1}^{(2)}(R''')$ — тыя ж велічыні, разлічаныя пры эквівалентным аднародным аб'ёмным размеркаванні зарада ядра з улікам дэфармацыі і паверхневага слоя, адпаведна пры эквівалентным неаднародным і неэквівалентным трапецападобным размеркаваннях статычнага зарада.

У табліцы змешчаны вынікі разлікаў адносін электронных фактараў, вылічаных пры размеркаванні зарада, задаваемым (4), і пры трапецападобным размеркаванні, да электронных фактараў, разлічаных пры эквіва-

лентным аднародным размеркаванні з радыусам ядра $R = 1,20 \cdot 10^{-13} A^{1/3}$ см. Акрамя таго, у табліцы прыведзены адносіны адпаведных велічынь $R_{-1,-1}^{(2)}(m)$, разлічаных у дапушчэнні паверхневых токаў пераходу (мадэль Сліва).

З табліцы відаць.

1. Змяненні электронных фактараў пры пераходзе да размеркаванняў ядзернага зарада, якія з'яўляюцца больш блізкімі да эксперыментальнага, аказаліся значнымі (20—45% для q_1^+ і 90—300% для q_2^+ і q_3^+). Улік гэтага прыводзіць да адпаведных змяненняў значэнняў ядзерных параметраў, якія вызначаюцца з эксперыментальных КПК.

2. Адносіны ω_ν слаба залежаць ад Z .

3. Параўнанне табліцы з адпаведнай табліцай работы [9] дае магчымасць зрабіць вывад, што велічыні адносін ω_ν для ўнутранай канверсіі на абалонках і парнай канверсіі пры M1-пераходах ядраў для адных і тых жа Z і k мала адрозніваюцца адна ад адной (максімум на 5%).

4. Дадатковыя даследаванні паказалі, што, як і ў выпадку электроннай унутранай канверсіі, адносіны ω_ν слаба залежаць ад k (павелічэнне k у 3—4 разы для $Z=64$ прыводзіць да змяненняў ω_ν на 1—2%) і амаль зусім не залежаць ад размеркавання энергіі паміж электронам і пазітронам (пры $k=4$, $Z=64$, $E_+=1$, $E_-=3$, $E_+=3$, $E_-=1$ ω_ν змяняецца на 1%).

Літаратура

1. Lombard R. J., Fischer W. *Helv. Phys. Acta*, 37, № 4—5, 1964.
2. Rose M. E. *Internal Conversion Coefficient*. North-Holland Publishing C. Amsterdam, 1958.
3. Борисоглебский Л. А. *ЖЭТФ*, 46, 1664, 1964.
4. Lombard R. J. *Helv. Phys. Acta*, 37, № 1, 1964.
5. Борисоглебский Л. А. *ЖЭТФ*, 47, 1575, 1964.
6. Church E. L., Weneser J. *Ann. Rev. Nucl. Sci.*, 10, 193, 1960.
7. Meligy A. S. *Nucl. Phys.*, 14, 248, 1959.
8. Борисоглебский Л. А. *Вестник МГУ, серия физ.-астроном.*, 5, 74, 1963.
9. Борисоглебский Л. А., Позойский С. В. *Весті АН БССР, серыя фіз.-мат.*, 2, 102, 1967.

Белорусский государственный университет
им. В. И. Ленина
Витебский государственный педагогический
институт

Поступило в редакцию 22.V 1968

А. И. КОМЯК

К ВОПРОСУ О СИММЕТРИИ ВОЗБУЖДЕННЫХ ЭЛЕКТРОННЫХ СОСТОЯНИИ В КРИСТАЛЛАХ НИТРАТОВ УРАНИЛА

Как показано в работе [1], из спектров поглощения кристаллов гексагидрата уранилнитрата и рубидийуранилнитрата при азотной температуре следует, что в рассмотренных случаях причина появления тонкой структуры одинакова. Она обязана наложению на электронный переход полносимметричных валентных колебаний иона уранила, а также колебаний лигандов и кристаллической решетки.

Тот факт, что поляризация люминесценции кристаллов ураниловых соединений не зависит от поляризации возбуждающего света [2], указывает на наличие хорошо развитых процессов передачи энергии возбуждения от возбужденной к невозбужденной молекуле. Можно показать теоретически [3, 4], что для электронно-колебательного перехода в молекуле с участием неполносимметричного колебания величина матричного элемента, описывающего передачу энергии возбуждения от молекулы к молекуле, много меньше, чем для сочетания чисто электронного перехода с полносимметричным колебанием.

Действительно, в спектрах поглощения наиболее интенсивными оказываются линии, соответствующие сочетанию электронного перехода с полносимметричным колебанием иона уранила в возбужденном состоянии и равном приблизительно 750 см^{-1} для $\text{RbUO}_2(\text{NO}_3)_3$ и 726 см^{-1} для $\text{UO}_2(\text{NO}_3)_2 \cdot 6\text{H}_2\text{O}$. Это колебание, относящееся к типу симметрии A'_1 для $\text{RbUO}_2(\text{NO}_3)_3$ и A_{1g} для $\text{UO}_2(\text{NO}_3)_2 \cdot 6\text{H}_2\text{O}$, и образует в спектре основные прогрессии.

Вторым по интенсивности является сочетание электронного перехода с колебаниями нитратных групп $1047, 708, 752\text{ см}^{-1}$. Эти линии должны обладать такой же поляризацией, что и чисто электронный переход. В ряде случаев поляризация линий не совпадает с поляризацией $0-0$ перехода. Отличие поляризации, свойственной чисто электронному переходу, свидетельствует о понижении симметрии соответствующих колебаний в результате образования комплекса.

Координация групп атомов в экваториальной плоскости иона уранила приводит, по-видимому, к деформации его электронного облака. Наиболее высокая из возможных симметрия комплекса с гексагональной координацией D_{6h} , по-видимому, не осуществляется в ураниловых соединениях. На основании нейтронографических данных для рассматриваемых кристаллов [5, 6] электронное облако иона уранила в рубидийуранилнитрате не может иметь симметрию выше, чем D_{3h} , а в гексагидрате уранилнитрата — D_{2h} . Из приведенных в [1] экспериментальных данных следует также, что понижение симметрии электронного облака вызывает увеличение интенсивности оптических переходов и увеличение сдвига спектра в длинноволновую область.

В молекуле уранилнитрата запрещены переходы с возбуждением колебаний симметрии B_2 , а в молекуле рубидийуранилнитрата оказываются запрещенными переходы с возбуждением колебаний симметрии A_2 . Наблюдаемые в некоторых случаях слабые переходы, соответствующие возбуждению этих типов колебаний, следует объяснить некоторыми отступлениями реальной молекулы от симметрии D_{3h} и C_{2v} . Дике и Дункан [7] указывают, что они наблюдали в некоторых случаях прогрессии с частотой антисимметричных и деформационных колебаний иона уранила до двух квантов.

Сопоставление спектров поглощения и люминесценции кристаллов показывает, что механизм взаимодействия электронных и колебательных движений для них одинаков. Оптические электроны атома урана, непосредственно участвующие в ковалентных связях с лигандами, при поглощении света в исследуемой области спектра будут переходить с одной молекулярной орбиты на другую. Мак-Глин и Смит [8] считают, что при этом совершаются переходы из молекулярной орбиты на разные f - и d -орбиты атома урана. Очевидно, что такие переходы должны сопровождаться либо увеличением, либо уменьшением степени ковалентности координационных связей. Однако, как показывает опыт, частоты колебаний нитратных групп во всех четырех возбужденных состояниях в основном одинаковы.

Три наиболее низкие возбужденные электронные состояния рассчитаны указанными выше авторами с привлечением гипотезы об их триплетном характере. Согласно приведенным в [8] теоретическим оценкам, вероятность электронных переходов в коротковолновой части структурной области спектра поглощения должна быть на два порядка выше, чем в длинноволновой, что не соответствует опыту.

Бесструктурная область спектра поглощения в кристаллах до настоящего времени не подвергалась исследованию. При рассмотрении уровней энергии иона уранила, равных $34\,000\text{ см}^{-1}$ (${}^1\Sigma_{0u}^-$ или ${}^1\Delta_{2u}$) и $\sim 48\,000\text{ см}^{-1}$ (${}^1\Pi_{1u}$), авторы [8] исходили из того факта, что спектр поглощения водного раствора уранилнитрата имеет в коротковолновой области два максимума (294 и 208 нм). Эти полосы как раз характерны для иона нитрата [9, 10]. Длинноволновая полоса принадлежит запрещенному $\pi^* \leftarrow n$ переходу и характеризуется небольшим молярным коэффициентом поглощения ($\kappa \sim 10$), а разрешенный $\pi^* \leftarrow \pi$ переход, обуславливающий поглощение в области 200 нм, характеризуется высоким значением κ , равным 10^4 . Проведенные нами исследования [11] спектров поглощения водных растворов нитрата калия и спиртовых растворов нитратов тория, самария, лантана и итрия, в которых связи нитратных групп с комплексообразователем имеют в значительной степени ковалентный характер [12], показали, что имеется определенная связь между степенью ковалентности координационных связей в рассматриваемых соединениях и интенсивностью полосы 290 нм. Рост степени ковалентности координационных связей, обуславливающий расщепление антисимметричного валентного колебания иона NO_3^- точечной группы D_{3h} на компоненты $\nu_4(B_1)$ и $\nu_1(A_1)$ точечной группы C_{2v} , сопровождается усилением поглощения света в области 290 нм.

Исследование [13] характера поглощения света кристаллами $\text{RbUO}_2(\text{NO}_3)_3$, $\text{CsUO}_2(\text{NO}_3)_3$ и $\text{NH}_4\text{UO}_2(\text{NO}_3)_3$ в этой области спектра показало, что максимум поглощения нитратных групп сдвинут в длинноволновую область ($\sim 320\text{ нм}$), а молярный коэффициент экстинкции значительно выше ($\kappa = 16$), чем в кристаллах с ионным характером нитратных групп ($\kappa = 0,45$ для NaN_3). Следовательно, ковалентный характер связей нитратных групп в кристаллах также приводит к росту

коэффициентов поглощения в рассматриваемой области. Исследование контуров полос поглощения в области 320 нм показывает, что в кристаллах $\text{RbUO}_2(\text{NO}_3)_3$, $\text{CsUO}_2(\text{NO}_3)_3$ и $\text{NH}_4\text{UO}_2(\text{NO}_3)_3$ только с красной стороны на эту полосу налагается колебательная структура иона уранила («ультрафиолетовая» серия). Контур этой полосы асимметричен, что дает основание полагать существование в этой области спектра электронных переходов другой (не ураниловой) природы.

Следовательно, при интерпретации спектров поглощения кристаллов нитратов уранила следует исходить не из 5 термов иона уранила, предложенных в работе [14] и отстоящих от основного электронного состояния на 22050, 24125, 27000, 34000 и 48000 см^{-1} , а из четырех термов ураниловой группы (см. рисунок) и двух термов нитратных групп (~ 31500 и 48000 см^{-1}).

Повышение симметрии координационной сферы в $\text{RbUO}_2(\text{NO}_3)_3$ можно рассматривать как причину понижения интенсивности поглощения в «диффузной» серии и повышения ее в «ультрафиолетовой». Характерным признаком высокосимметричной структуры является высокое разрешение «флуоресцентной» серии с очень ма-

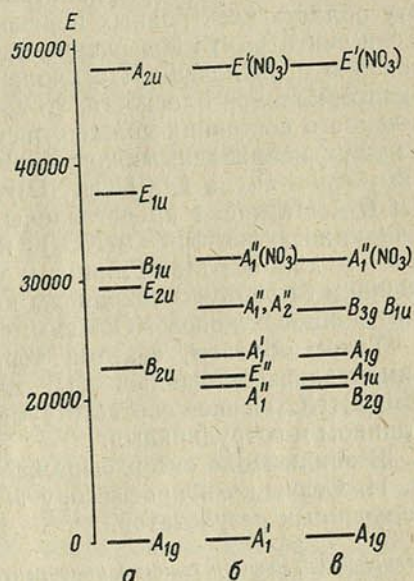


Рис. 1. Уровни энергии возбужденных электронных состояний иона уранила:

а — по данным Мак-Глинна и сотрудников [14];
б, в — по данным автора соответственно для
кристалла $\text{RbUO}_2(\text{NO}_3)_3$ и для кристалла
 $\text{UO}_2(\text{NO}_3)_2 \cdot 6\text{H}_2\text{O}$

лыми коэффициентами поглощения. При переходе к менее симметричной структуре в $\text{UO}_2(\text{NO}_3)_2 \cdot 6\text{H}_2\text{O}$ поглощение в области «флуоресцентной» и «диффузной» серий заметно возрастает. Изменение коэффициента поглощения в зависимости от структуры кристаллов говорит о том, что электронные состояния в рассматриваемых кристаллах относятся к разным типам симметрии. Эти четыре возбужденные электронные состояния иона уранила с запрещенным характером их оптического возбуждения хорошо согласуются с непроводимыми представлениями точечных групп D_{6h} , D_{3h} и D_{2h} . Сопоставляя характеры непроводимых представлений для ураниловой группы с гексагональной координацией (D_{6h}) с точечной группой симметрии D_{3h} для кристалла $\text{RbUO}_2(\text{NO}_3)_3$ и D_{2h} для $\text{UO}_2(\text{NO}_3)_2 \cdot 6\text{H}_2\text{O}$ и анализируя изменения в спектрах поглощения рассматриваемых кристаллов, можно высказать некоторые соображения о симметрии возбужденных электронных состояний иона уранила.

Основное электронное состояние ураниловой группы относится к полносимметричному представлению A_{1g} , на что указывает отсутствие заметного парамагнетизма. Нижнее возбужденное электронное состояние можно отнести к типу A''_1 для $\text{RbUO}_2(\text{NO}_3)_3$ и B_{2g} для уранилнитрата. Второе электронное состояние в значительно меньшей степени подвержено воздействию изменений структуры кристалла. Расщепление головных полос этой серии в магнитном поле для $\text{RbUO}_2(\text{NO}_3)_3$ достаточно надежно указывает на принадлежность этого электронного состояния в названном кристалле к типу симметрии E'' . В кристалле

уранилнитрата головные линии этой серии поляризованы перпендикулярно биссектрисе острого угла оптических осей; соответствующее электронное состояние относится к типу симметрии A_{1u} .

«Диффузная» серия в спектре поглощения $RbUO_2(NO_3)_3$ обладает наименьшей интенсивностью, а в кристалле $UO_2(NO_3)_2 \cdot 6H_2O$ значительной интенсивностью, сравнимой с таковой в «ультрафиолетовой» серии. Существенное нарушение запрета оптического возбуждения при переходе к кристаллам низшей симметрии позволяет его отнести к типу A'_1 в $RbUO_2(NO_3)_3$ и A_{1g} в $UO_2(NO_3)_2 \cdot 6H_2O$.

Поведение «ультрафиолетовой» серии маскируется наложением на эту область электронных переходов между уровнями энергии лигандов. Если считать, что повышение интенсивности поглощения в этой области связано с увеличением отклонения координируемых ураном атомов от экваториальной плоскости, то выбор типов симметрии четвертого возбужденного состояния должен пасть для кристалла $RbUO_2(NO_3)_3$ на одно из двух неприводимых представлений (A''_1 или A''_2) точечной группы симметрии D_{3h} , а для $UO_2(NO_3)_2 \cdot 6H_2O$ — (B_{3g} или B_{1u}) точечной группы D_{2h} . На рис. 1 представлены три системы уровней энергии: b и σ — для кристаллов $RbUO_2(NO_3)_3$ и $UO_2(NO_3)_2 \cdot 6H_2O$ по нашим данным, a — по данным Мак-Глинна и сотрудников [14]. Обозначения термов 48 000 и 31 500 cm^{-1} сохранены как и для классификации в случае модели свободных ионов NO_3^- симметрии D_{3h} .

Таким образом, система термов, полученная на основании экспериментальных данных [1] для кристаллов $UO_2(NO_3)_2 \cdot 6H_2O$ и $RbUO_2(NO_3)_3$, не соответствует системе термов, полученных Мак-Глинном и сотрудниками.

В заключение автор выражает искреннюю благодарность академику А. Н. Севченко и профессору Л. В. Володько за полезное обсуждение полученных результатов.

Белорусский государственный университет
им. В. И. Ленина

Поступило в редакцию 23.II 1968

Литература

1. Комяк А. И., Володько Л. В. Весті АН БССР, сер. фіз.-матем. навук, № 1, 1969.
2. Володько Л. В., Комяк А. И., Последович М. Р. Журнал прикладной спектроскопии, 8, 643, 1968.
3. Давыдов А. С. Теория поглощения света в молекулярных кристаллах. Изд-во АН УССР, Киев, 1951.
4. Craig G. P., Walmsley S. H. Mol. Phys., 4, 113, 1961.
5. Berclay G. A., Sabine T. M., Taylor J. C. Acta Cryst., 19, 205, 1965.
6. Taylor J. C., Mueller M. H. Acta Cryst., 19, 536, 1965.
7. Dicke G. H., Dunkan A. V. F. Spectroscopic Properties of Uranium Compounds, N. Y., 1949.
8. Mc Glynn S. P., Smith J. K., J. Mol. Spectroscopy, 6, 164, 1961.
9. Freund J. A., Lyons L. E. J. Chem. Soc., 1572, 1959.
10. Рао Ч. Н. Ф. Электронные спектры в химии. М., «Мир», 1964.
11. Володько Л. В., Комяк А. И., Слепцов Л. Е. Оптика и спектроскопия, 1967, 23, 730.
12. Ferrago J. R. J. Mol. Spectroscopy, 4, 99, 1960.
13. Комяк А. И., Севченко А. Н., Дитш Е. В. Доклады АН БССР, 12, № 9, 1968.
14. Mc Glynn S. P., Smith J. K., Neely W. C. J. Chem. Phys., 35, 105, 1961.

Л. Г. ПИКУЛИК, М. Я. КОСТКО, В. А. ЯКОВЕНКО

О СПЕКТРАЛЬНОЙ ЗАВИСИМОСТИ ЗАТУХАНИЯ СВЕЧЕНИЯ ФЛУОРЕСЦЕНЦИИ СЛОЖНЫХ МОЛЕКУЛ

Изменение длительности свечения по спектру флуоресценции у сложных молекул впервые обнаружено и объяснено в работе [1]. Позже [2, 3] были представлены новые результаты и высказаны дополнительные соображения о деталях явления. Попытка теоретически описать явление сделана в работе [4].

Возникновение зависимости $\tau = f(\nu_{\text{фл}})$ в дипольных стеклюющихся растворителях связано с релаксационными эффектами ориентационного взаимодействия. Изменение постоянного дипольного момента у молекулы после поглощения кванта света нарушает равновесное состояние ее со средой. В зависимости от времени релаксации молекул растворителя τ_r для возбужденных флуоресцирующих молекул до начала акта испускания света может устанавливаться и не устанавливаться новое равновесное состояние со средой. Степень установления равновесия определяет и степень взаимодействия флуоресцирующих молекул с растворителем. Это приводит к тому, что молекулы, высвечивающиеся в разные времена, могут оказаться в различных условиях взаимодействия с растворителем. По этой причине такие молекулы будут излучать различные кванты, что и приведет к зависимости длительности свечения по спектру флуоресценции.

В работе [3] было высказано предположение о влиянии флуктуаций ориентационного взаимодействия между возбужденной молекулой и молекулами растворителя на эффект зависимости $\tau = f(\nu_{\text{фл}})$. В частности, это позволило объяснить тот экспериментальный факт, что полоса флуоресценции не расширяется при соотношении времен $\tau \approx \tau_r$, как следовало ожидать из общих соображений.

Существование флуктуаций ориентационного взаимодействия предполагает, что между возбужденной молекулой и молекулами растворителя непрерывно происходят колебания (изменение взаимного положения) около равновесного состояния. Происходят флуктуации ориентационного взаимодействия как в большую, так и в меньшую сторону (от максимального взаимодействия к минимальному). В общем случае осуществляются все промежуточные степени взаимодействия между указанными крайними пределами.

Мгновенный спектр, испущенный молекулами, находящимися в максимальном взаимодействии со средой, является более длинноволновым относительно спектра, испущенного молекулами в минимальном взаимодействии. Наблюдаемый спектр флуоресценции есть сумма спектров, испущенных молекулами в различных состояниях взаимодействия *).

*) Следует помнить, что спектр сложных молекул, испускающих даже в строго одинаковых условиях, достаточно широк.

Это — одна из причин расширения спектральной полосы. Если флуктуации ориентационного взаимодействия осуществляются достаточно быстро, т. е. молекулы переходят с одних состояний взаимодействия в другие в течение малого времени, то длительность свечения по спектру флуоресценции является постоянной величиной. Эти условия обычно реализуются в невязких растворах при комнатных температурах*. Если охлаждением среды понижать скорость флуктуации, то при каких-то определенных для данной системы температурах возникнут условия, когда время перехода от минимального взаимодействия к максимальному окажется соизмеримым с длительностью возбужденного состояния примесных молекул. В этом случае более долгоживущие в возбужденном состоянии молекулы будут испускать более длинноволновый спектр, т. е. окажутся на длинноволновом участке суммарного наблюдаемого спектра флуоресценции. Таким образом, флуктуации ориентационного взаимодействия могут привести к возникновению зависимости $\tau = f(\nu_{\text{фл}})$.

В работе [3] впервые было обращено внимание на характеристичную частоту в спектре флуоресценции фталимидов $\nu_{\text{фл}}^{\text{инв}}$, для которой соответствующая длительность свечения остается постоянной при изменении длительности для других частот, происходящем при охлаждении среды. Эта частота находится на коротковолновом крае полосы флуоресценции, и есть основание предполагать, что $\nu_{\text{фл}}^{\text{инв}} = \nu_{\text{эл}}$. В настоящей работе получены дополнительные экспериментальные данные, подтверждающие характеристичность этой частоты в спектре флуоресценции фталимидов.

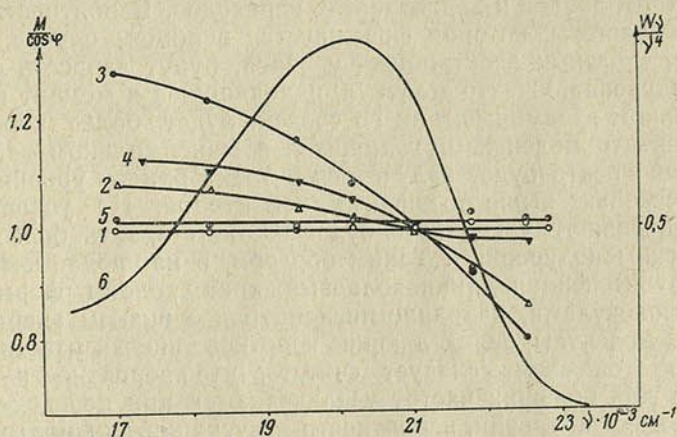
Фазовые флуорометры определяют длительность свечения по сдвигу фазы между возбуждающим светом и светом люминесценции. В случае экспоненциального характера затухания сдвиг фазы определяет длительность свечения. Измерения дополнительной характеристики свечения, так называемой относительной глубины модуляции, позволяют выяснить отступления от экспоненциальности затухания свечения [2]. Этот вопрос обычно решается по оценке значения величины $\frac{M}{\cos \varphi}$. Если $\frac{M}{\cos \varphi} = 1$, затухание свечения флуоресценции экспоненциально (M — относительная глубина модуляции, φ — флуорометрическая фаза).

На рисунке изображена зависимость $\frac{\dot{M}}{\cos \varphi}$ по спектру флуоресценции у 3-амино-N-метилфталимида в изобутаноле при разных температурах. При комнатных температурах значение $\frac{M}{\cos \varphi}$ практически равно 1. Это свидетельствует о том, что процесс затухания экспоненциален по всему спектру флуоресценции (прямая 1). При понижении температуры начинается отступление от экспоненциальности как на длинноволновом, так и на коротковолновом участке спектра (значение $\frac{M}{\cos \varphi} \neq 1$). Это отступление от экспоненциальности затухания возрастает при понижении температуры и достигает максимальных отклонений при -80°C . При дальнейшем понижении температуры отступление от экспоненциальности уменьшается, причем быстрее на коротковолновом участке и при -160°C свечение по всему спектру затухает по экспоненциальному закону. Как видно из рисунка, в спектре флуоресценции наблюдается частота, для которой $\frac{M}{\cos \varphi} = 1$ при любой

* С точки зрения этих представлений для расчетов спектров флуоресценции при различных температурах [4] необходимо использовать спектр при -196°C , а не при 20°C , как это сделано в работе [4].

температуре, т. е. процесс затухания интенсивности этой частоты экспоненциален. Эта частота совпадает с частотой инверсии $\nu_{\text{фл}}^{\text{инв}}$, определяемой по температурному изменению φ . Таким образом, новые экспериментальные данные подтверждают характеристичность $\nu_{\text{фл}}^{\text{инв}}$ у спектров флуоресценции фталимидов.

Для объяснения существования $\nu_{\text{фл}}^{\text{инв}}$ рассмотрим процесс возникновения зависимости длительности свечения по спектру флуоресценции в чисто



Зависимость $\frac{M}{655\varphi}$ ($\nu_{\text{фл}}$) у 3-амино-N-метилфталимида в изобутаноле при температурах (°C):

1 — +20; 2 — -40; 3 — -80; 4 — -110; 5 — -160; 6 — спектр флуоресценции при +20 °C

энергетическом плане. В общем случае спектр флуоресценции определяется двумя факторами [5]: распределением молекул по колебательным уровням в возбужденном состоянии $\rho(E_{\text{кол}}^*)$ и распределением вероятностей излучательных переходов для данной частоты по колебательным уровням $A(\nu, E_{\text{кол}}^*)$. Интенсивность для данной частоты в спектре задается выражением

$$I_{h\nu} = n^* h\nu \int_0^{\infty} \rho(E_{\text{кол}}^*) A(\nu, E_{\text{кол}}^*) dE^*$$

Как отмечалось выше, в растворе существуют ориентационные взаимодействия возбужденных молекул с растворителем. В результате этих взаимодействий функция распределения возбужденных молекул по колебательным уровням будет трансформирована (как бы более размыта по уровням) в сравнении с той же функцией при отсутствии взаимодействий. Ориентационное взаимодействие за время жизни возбужденного состояния смещает положение электронного уровня. Для каждого мгновенного положения электронного уровня имеется своя система колебательных подуровней с определенным распределением молекул по этим уровням. Очевидно, что системы колебательных уровней разных электронных состояний будут сильно перекрываться.

Таким образом, реальное распределение молекул по уровням энергии возбужденного состояния будет определяться суммой распределений всех таких мгновенных («элементарных») состояний. (Предполагается, что перераспределение по колебательным подуровням для мгновенного состояния всегда быстрее, чем смещение электронного уровня ориентационным взаимодействием).

Как следует из изложенного, указанное распределение возбужденных молекул по энергетическим состояниям строго не относится к одному электронному уровню. Однако условно можно считать (как обычно до сих пор делалось без всяких оговорок), что спектр флуоресценции определяется распределением молекул по энергетическим подуровням*) одного возбужденного (нижнего) электронного состояния $\rho(E^*)$ и вероятностями переходов с этого уровня в основное состояние.

Рассмотрим вопрос о вероятностях переходов. Вероятности перехода для данной частоты, которая формируется в общем случае, как показано выше, с разных электронных уровней, будут зависеть от энергии данного подуровня. Спектр молекул, находящихся в момент испускания в минимальном взаимодействии со средой, будет более коротковолновым, чем спектр молекул, находящихся в максимальном взаимодействии. Первый спектр будет излучаться с электронного уровня, расположенного несколько выше по энергии, чем второй. На условной схеме одного электронного уровня это будет соответствовать более высоким энергетическим подуровням. Таким образом, в наблюдаемом реальном спектре флуоресценции длинноволновый край полосы формируется в основном молекулами, находящимися на более низком энергетическом уровне, чем молекулы, определяющие коротковолновый участок спектра. Поэтому в этой схеме следует считать, что вероятности $A(\nu, E^*)$ испускания для больших частот увеличиваются при переходе на высокие энергетические уровни, вероятности испускания для малых частот — при переходе на низкие энергетические уровни.

Это возникает даже в том случае, если для одного электронного уровня (со своей системой колебательных подуровней) $A(\nu, E_{\text{кол}}^*) = f(\nu)$, т. е. вероятности испускания не зависят от энергии колебательного подуровня.

Рассмотрим наблюдаемые закономерности $\tau = f(\nu_{\text{фл}})$ с учетом свойств функции $\rho(E^*)$ и $A(\nu, E^*)$. Характер затухания флуоресценции для данной частоты будет определяться характером изменения функции $\rho(E^*)$ в процессе затухания. Вид функции $\rho(E^*)$ в режиме затухания может изменяться по-разному. Если скорость перераспределения молекул по уровням возбужденного состояния велика (это случай, когда $\tau_p \ll \tau_{\text{фл}}$), то вид функции в режиме затухания не изменяется, и интенсивности всех частот в спектре затухают одинаково. Если охлаждением среды скорость установления ориентационного взаимодействия понижена, что эквивалентно уменьшению скорости перераспределения по энергетическим подуровням, то вид функции $\rho(E^*)$ в процессе затухания может измениться. Это изменение будет вполне определенным, так как в начальные моменты возбуждения молекула находится в относительно более слабом взаимодействии с растворителем (степень ориентации молекул растворителя меньшая). Максимум функции $\rho(E^*)$ в зависимости от времени будет смещаться в сторону меньших значений E^* . Это будет происходить за счет перевода молекул растворителем на более низкие энергетические уровни возбужденного состояния. Изменение функции $\rho(E^*)$ в процессе затухания неизбежно приведет к изменению длительности свечения для разных частот спектра флуоресценции, если $A(\nu, E^*) = f(\nu, E^*)$.

Представленные выше изменения вероятностей излучательных переходов $A(\nu, E^*)$, а также изменение функции $\rho(E^*)$ в режиме затухания объясняют наблюдаемую зависимость $\tau = f(\nu_{\text{фл}})$. Уменьшение τ для больших частот в спектре флуоресценции, которые преимущественно

) Для таких систем будет употребляться термин E^ .

испускаются с высоких энергетических уровней возбужденного состояния, связано с дополнительным уменьшением числа молекул (в сравнении с числом их для случая быстрого перераспределения по состояниям), находящихся на этих уровнях в процессе затухания. Увеличение τ для меньших частот, которые преимущественно испускаются с низких энергетических уровней, связано с увеличением доли молекул на этих уровнях в процессе затухания (в сравнении с числом их для случая быстрого перераспределения). Осуществляется как бы «перекачка» возбужденных молекул, которая ускоряет затухание интенсивности для частот коротковолнового края спектра и замедляет затухание интенсивности для частот длинноволнового края спектра.

Существенным в этой схеме объяснения $\tau = f(\nu_{\text{фл}})$ является то обстоятельство, что она позволяет объяснить наблюдаемую на опыте частоту инверсии $\nu_{\text{фл}}^{\text{инв}}$, для которой как длительность свечения, так и экспоненциальный характер затухания остаются неизменными. Если вероятность перехода данной частоты не зависит от энергетического уровня, то изменение вида функции $\rho(E^*)$ в процессе затухания не скажется на характере затухания флуоресценции этой частоты, т. е. длительность свечения остается неизменной, что и наблюдается для $\nu_{\text{фл}}^{\text{инв}}$. Необходимо несколько подробнее остановиться на этом вопросе, так как факт проявления $A(\nu_{\text{фл}}^{\text{инв}}, E^*) = \text{const}$ не является очевидным и не следует из приведенной раньше оценки изменения вероятностей переходов от энергии уровня для различных частот.

Наиболее простое допущение о независимости вероятностей переходов от $E_{\text{кол}}^*$ для спектра, испущенного молекулами в одинаковых условиях внешнего влияния растворителя, уже приводит к тому, что для реально наблюдаемого спектра (образованного молекулами, излучающими в разных фазах взаимодействия с растворителем) необходимо рассматривать, как отмечалось выше, изменение вероятностей переходов от энергии уровня.

Указанное простейшее предположение позволяет оценить характер изменения вероятностей переходов и объяснить наблюдаемую зависимость $\tau = f(\nu_{\text{фл}})$. Однако предсказать возможность существования $\nu_{\text{фл}}^{\text{инв}}$ только на этих основаниях нельзя. Поэтому необходимо предположить более сложный характер изменения вероятностей переходов для спектра, испущенного молекулами в одинаковых условиях взаимодействия с растворителем («элементарного» спектра). Экспериментальные данные хорошо объясняются, если допустить, что для «элементарного» спектра флуоресценции вероятность перехода не зависит от $E_{\text{кол}}^*$ только для одной частоты, которая и является $\nu_{\text{фл}}^{\text{инв}}$. Для частот $\nu > \nu_{\text{фл}}^{\text{инв}}$ и $\nu < \nu_{\text{фл}}^{\text{инв}}$ имеется некоторая зависимость $A(\nu, E_{\text{кол}}^*)$, по характеру аналогичная той, которая упоминалась раньше. (Можно предполагать, чем больше ν отличается от $\nu_{\text{фл}}^{\text{инв}}$, тем зависимость $A(\nu, E_{\text{кол}}^*)$ сильнее).

Изменение τ по полосе флуоресценции для «элементарного» спектра (практически ему аналогичен спектр флуоресценции при достаточно низкой температуре, когда ориентационное взаимодействие в возбужденном состоянии отсутствует) наблюдаться не будет. Это происходит вследствие быстрого перераспределения молекул по колебательным уровням возбужденного состояния. Быстрое перераспределение не позволяет проявиться зависимости $A(\nu, E_{\text{кол}}^*)$ в различном затухании для разных частот **). Это и есть случай постоянства τ по спектру флуорес-

* Можно считать, что $\nu_{\text{фл}}^{\text{инв}} = \nu_{\text{эл}}$, как предполагалось раньше [3].

** В работе [5] приведены расчеты, иллюстрирующие это положение.

пенции при низкой температуре, когда ориентационное взаимодействие в возбужденном состоянии отсутствует.

В случае проявления ориентационного взаимодействия реальный спектр флуоресценции определяется суммой мгновенных (различающихся по положению) «элементарных» спектров и суммарная вероятность переходов складывается из вероятностей для «элементарных» спектров. Если максимальное смещение «элементарных» спектров за время жизни возбужденного состояния невелико (в пользу этого положения говорит относительно слабое изменение полуширины наблюдаемых спектров при понижении температуры), то можно предположить, что для реального спектра сохранится постоянство суммарной вероятности переходов для всех энергетических уровней $A(\nu_{\text{фл}}^{\text{инв}} \pm \Delta\nu, E^*) = \text{const}$ в некоторой области частот вблизи $\nu_{\text{фл}}^{\text{инв}}$. Для остальных частот $A(\nu, E^*) = f(\nu, E^*)$. Характер зависимости $A(\nu, E^*)$ будет таким же, каким и для «элементарного» спектра, но изменение, вероятно, будет более резким.

Таким образом, приведенные предположения о характере изменения вероятностей переходов в «элементарном» спектре позволяют оценить изменения вероятностей переходов в экспериментально наблюдаемом спектре. Дополнительный учет изменения функции распределения молекул по энергетическим уровням в возбужденном состоянии в режиме затухания позволяет объяснить зависимость длительности свечения по спектру флуоресценции и существование в этой зависимости $\nu_{\text{фл}}^{\text{инв}}$.

Приведенная энергетическая схема на основании использования общепринятых положений позволяет объяснить все известные экспериментальные данные по вопросу зависимости $\tau = f(\nu_{\text{фл}})$.

В заключение следует высказать некоторые дополнительные соображения о зависимости длительности свечения по спектру флуоресценции. В рассмотренных случаях затухание свечения всех частот (за исключением $\nu_{\text{фл}}^{\text{инв}}$), что экспериментально показано в настоящей работе, происходит по неэкспоненциальному закону. Вследствие этого вопрос о корректном определении τ , пока неизвестна форма кривой затухания, остается открытым.

В работе [4] приведены расчетные кривые затухания флуоресценции. В частности, для частот длинноволнового края полосы флуоресценции предсказывается кривая затухания необычной формы. Вначале идет процесс разгорания флуоресценции и затем уже собственно затухания.

По этому поводу необходимо сказать следующее. В стационарном режиме возбуждения (даже тогда, когда, как рассматривалось выше, осуществляется дополнительная «перекачка» возбужденных молекул в состояние, с которого они излучали более длинноволновый спектр) устанавливается динамическое равновесие всех переходов и определенное число молекул в единицу времени высвечивается на длинноволновом крае полосы флуоресценции. Если мгновенно выключить возбуждение, то в процессе затухания свечения произойдет некоторая добавка частиц к возбужденным молекулам за счет «перекачки». Однако эта добавка не может довести число частиц до величины, большей, чем их число в стационарном режиме. Поэтому затухание флуоресценции будет происходить от уровня интенсивности в стационарном режиме, но более замедленное за счет добавки возбужденных молекул процессом «перекачки», происходящим в течение времени высвечивания. Процесса разгорания в этом случае быть не может, ибо он создал бы интенсивность флуоресценции данной частоты большую, чем при стационарном режиме.

Таким образом, при затухании флуоресценции после установления стационарного режима на кривой затухания участков разгорания

наблюдаться не должно. Разгорание свечения флуоресценции на длинноволновом участке спектра может возникнуть в нестационарном режиме при импульсном возбуждении малой длительности. В этом случае «перекачка» возбужденных молекул будет повышать их число до стационарного уровня и интенсивность флуоресценции вначале будет возрастать. Для окончательного решения этих вопросов необходимо экспериментальное изучение кривых затухания по спектру флуоресценции.

Литература

1. Черкасов А. С. ДАН СССР, 139, 658, 1961.
2. Веселова Т. В., Лиморева Л. А., Черкасов А. С., Широков В. И. Опт. и спектр., 19, 78, 1965.
3. Костко М. Я., Пикулик Л. Г., Яковенко В. А. ЖПС, 6, 746, 1967.
4. Бахшиев Н. Г., Мазуренко Ю. Т., Питерская И. В. Опт. и спектр., 21, 550, 1966.
5. Степанов Б. И. Люминесценция сложных молекул. Изд-во АН БССР, 1955.

Институт физики АН БССР

Поступило в редакцию 24. VII 1968

І. І. ПЯТРОУСКІ, С. А. РЭКУН, М. Ф. МЕЛЯШКЕВІЧ

УПЛУУ ТЭМПЕРАТУРЫ І НЕКАТОРЫХ ПРЫМЕСЕЙ НА ЭЛЕКТРЫЧНЫЯ УЛАСЦІВАСЦІ ГЕРМАНИЕВЫХ ДЫЁДАУ З АДМОУНЫМ СУПРАЦІЎЛЕННЕМ

У працэсе вывучэння электрычных уласцівасцей паўправадніковых дыёдаў, якія маюць у пэўным токавым рэжыме адмоўнае дыферэнцыяльнае супраціўленне, было ўстаноўлена [1, 2], што выгляд іх вольтамперных характарыстык $V=V(i)$ (тут V — напружанне, прыкладзенае да дыёда, i — адпавядаючы яму ток праз дыёд) моцна залежыць ад тэмпературы, асяроддзя, у якім знаходзіцца даследуемы дыёд, а таксама ад праводнасці прыкантактнай вобласці паўправадніка. У прыватнасці, павышэнне тэмпературы выклікае моцнае паніжэнне максімальнага напружання на характарыстыках дыёдаў і памяншэнне іх круцізны $|dV/di|$, роўнай велічыні адмоўнага дыферэнцыяльнага супраціўлення дыёдаў. Таксама аказалася, што падаючыя ўчасткі характарыстык дыёдаў, якім адпавядае іх адмоўнае дыферэнцыяльнае супраціўленне, з'яўляюцца толькі пры ўмове, калі супраціўленне дыёда, якое адпавядае пачатковаму ўзыходнаму ўчастку яго характарыстыкі, дастаткова вялікае.

Мэта гэтай работы заключаецца ў тым, каб на падставе рэзультатаў больш дакладных і рознабаковых эксперыментальных даследаванняў устанавіць, наколькі тэмпература і колькасць прымесей уплываюць на працэс узнікнення адмоўнага супраціўлення ў германіевых дыёдаў.

Даследуемыя ўзоры германію выразаліся з монакрышталаў, якія маюць праводнасць электроннага тыпу. Грані іх падвяргаліся шліфоўцы парашкамі карунду да люстранага бляску для прыдання ўзорам правільнай, зручнай для даследаванняў геаметрычнай формы, выдалення з іх паверхні шурпатасцей, забруджанняў і г. д., а таксама для выдалення існаваўшых у некаторых узорах электронна-дзірачных пераходаў, якія маглі б уплываць на характар вывучаемых з'яў. Адна з асноў узора прыпайвалася да металічнага трымальніка, з процілеглай гранню ажыццяўляўся кантакт праводзячага вастрыя. Вольт-амперныя характарыстыкі даследаваных дыёдаў здымаліся з дапамогай агульнавядомай вымяральной устаноўкі і будаваліся па пунктах на падставе паказанняў вымяральных прыбораў.

Аказалася, што ўсе характарыстыкі даследаваных дыёдаў пры пакаёвай тэмпературы мелі падаючыя ўчасткі пры кантакце праводзячага вастрыя з любым пунктам паверхні крыштала. Пры гэтым у адной частцы дыёдаў падаючыя ўчасткі знаходзіліся толькі на адваротных галінах іх характарыстык (крывая 1 на рыс. 1), у другой жа частцы дыёдаў падаючыя ўчасткі знаходзіліся на абедзвюх галінах іх характарыстык (крывая 2 на рыс. 1). Вольт-амперныя характарыстыкі, атрыманыя для розных узораў германію ў пары з праводзячым вастрыём, а

таксама пры змяненні становішча кантакту на паверхні кожнага з узораў, толькі крыху адрозніваліся адна ад адной велічынямі максімальнага напружання і адпавядаючага яму току. Такая невялікая розніца тлумачыцца больш ці менш раўнамерным размеркаваннем прымесей у аб'ёме крышталю, у выніку чаго электрычныя ўласцівасці апошніх у розных участках іх аб'ёму аказваюцца прыкладна аднолькавымі.

Аказалася таксама, што чым большая велічыня супраціўлення дыёда, якое адпавядае пачатковаму ўзыходнаму ўчастку яго характарысты-

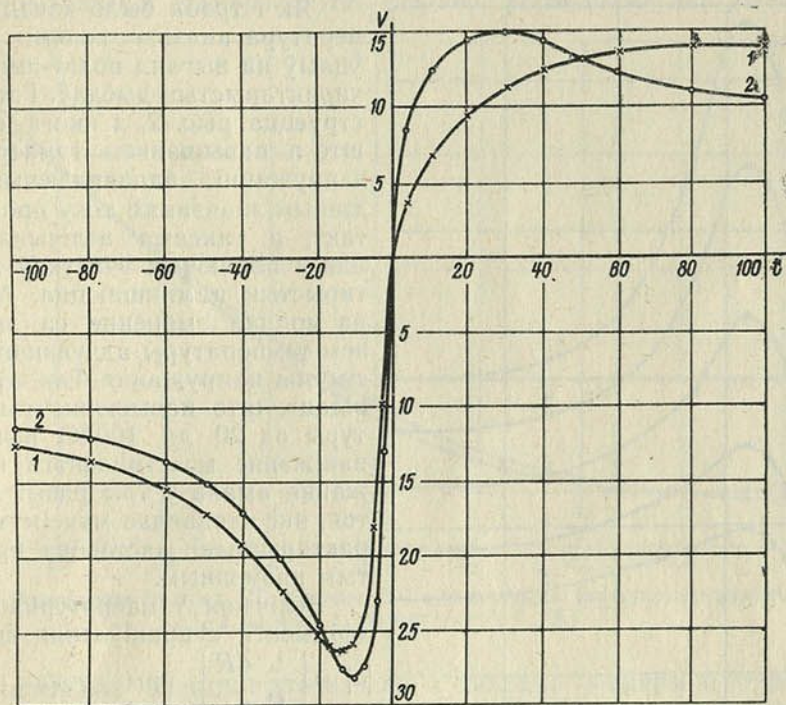
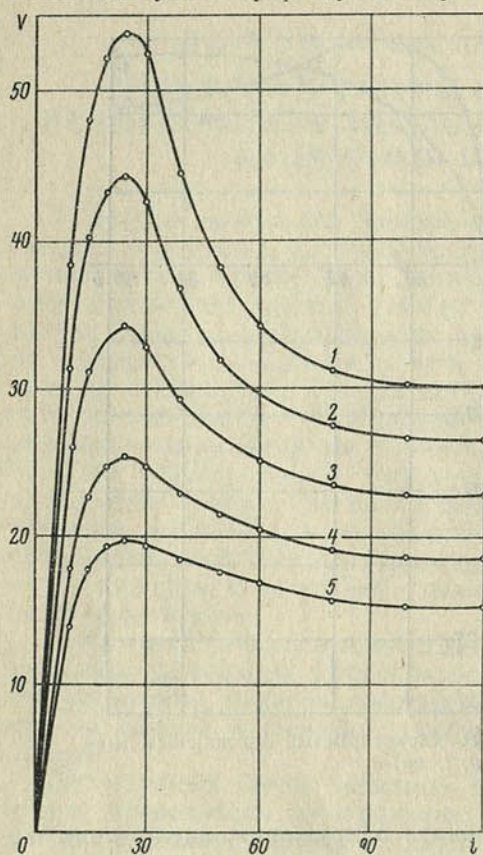


Рис. 1. Два выгляды вольт-амперных характарыстык германіевых дыёдаў (V , в; i , ма)

кі, тым большая велічыня максімальнага напружання, пасля якога пачынаецца падаючы ўчастак характарыстыкі, тым пры меншым току дасягаецца максімальнае напружанне, тым большая велічыня круцізны $|dV/di|$ падаючага ўчастка. Калі ж супраціўленне дыёда пры малым току аказваецца меншым за некаторую гранічную велічыню (для даследаваных крышталю гэта гранічная велічыня аказалася роўнай прыкладна 1200 ом), то адмоўнае супраціўленне ў дыёда наогул не ўзнікае. Гэта значыць, што адной з умоў, якая забяспечвае ўзнікненне ў паўправадніковых дыёдаў адмоўнага супраціўлення, з'яўляецца тое, што канцэнтрацыя носбітаў току ў паўправадніковым крышталю пры адсутнасці току павінна быць дастаткова малой.

Унітарныя ўласцівасці даследаваных дыёдаў выражаны даволі слаба. Кэфіцыент выпрачнення, вызначаемы як адносіны напружання на дыёдзе пры запіраючым напрамку тока да напружання пры такім жа току праводзячага напрамку, пры токах, меншых велічыні, што адпавядае максімуму характарыстыкі дыёда, не перавышаў 3—4 адзінкі. Пры токах жа, якія значна перавышаюць указаную велічыню, кэфіцыент выпрачнення аказаўся бліжкім да адзінкі. Указаная акалічнасць.

а таксама тое, што на від характарыстык даследаваных дыёдаў не аказвалі істотнага ўплыву ні матэрыял праводзячага вастрыя, ні апрацоўка паверхні крышталя (шліфоўка, траўленне і г. д.) і што падаючыя ўчасткі характарыстык у многіх выпадках назіраліся ў абодвух напрамках току, дазваляе заключыць, што кантактная рознасць патэнцыялаў, якая абумоўлівае ўніпалярную правадзімасць кантактаў паўправаднік — метал, не адыгрывае вызначальнай ролі ў працэсе ўзнікнення адмоўнага супраціўлення ў паўправадніковых дыёдах.



Як і трэба было чакаць, тэмпература аказвае вельмі моцны ўплыў на выгляд вольт-амперных характарыстык дыёдаў. Гэта ілюструецца рыс. 2, з якога відаць, што з павышэннем тэмпературы напружанні, адпавядаючыя дадзеным значэнням току праз кантакт, а таксама велічыня круцізны падаючых участкаў характарыстык памяншаюцца. Асабліва моцнае змяненне са змяненнем тэмпературы адчуваюць максімумы напружання. Так, з рыс. 2 відаць, што павышэнне тэмпературы ад 20 да 100 °С выклікае паніжэнне максімальнага напружання амаль у тры разы. Аднак ток, які адпавядае максімуму характарыстыкі, застаецца пры гэтым нязменным.

Велічыня тэмпературнага каэфіцыента супраціўлення дыёдаў

$$|\alpha| = \left| \frac{1}{R} \frac{dR}{dT} \right|$$

пры токах, якія

Рис. 2. Адваротная галіна вольт-ампернай характарыстыкі пры розных тэмпературах:

1 — 20 °С; 2 — 40; 3 — 60; 4 — 80; 5 — 100

значна адрозніваюцца ад велічыні, што адпавядае найбольш крута падаючым участкам іх характарыстык, параўнальна невялікая (1—1,5 працэнта на градус) і слаба залежыць ад велічыні току, крыху ўзрастаючы з павышэннем тэмпературы. Але па меры набліжэння току да ўказанага значэння тэмпературны каэфіцыент супраціўлення дыёдаў усё мацней змяняецца са змяненнем току, узрастаючы па велічыні да максімальнага значэння (4—6 працэнтаў на градус), дасягаемага пры дадзенай велічыні току. Аднак гэта максімальнае значэнне тым меншае, чым вышэй тэмпература.

Са сказанага вынікае, што павышэнне тэмпературы прыкантактнай вобласці паўправадніковага дыёда да некаторай належнай велічыні прыводзіць да надзвычай моцнага ўзрастання электраправоднасці гэтай вобласці, што садзейнічае ўзнікненню ў дыёда адмоўнага супраціўлення.

З мэтай эксперыментальнай праверкі гэтага меркавання былі праведзены вымярэнні ўдзельнай электраправоднасці σ даследаваных узо-

раў германію ў залежнасці ад тэмпературы T , а таксама вымярэнні тэрмаэрс ϵ , што ўзнікае ў іх пры наяўнасці градыента тэмпературы, у залежнасці ад розніцы тэмператур ΔT іх процілеглых граней. Сапраўды, калі справядліва ўказанае меркаванне, то пры тэмпературах, што адпавядаюць узнікненню падаючых участкаў на характарыстыках дыёдаў, ход гэтых залежнасцей павінен істотна змяняцца.

Вымярэнні напружання на ўчастках даўжыні даследуемых узораў, заключаных паміж вымяральнымі зондамі, неабходныя для вызначэн-

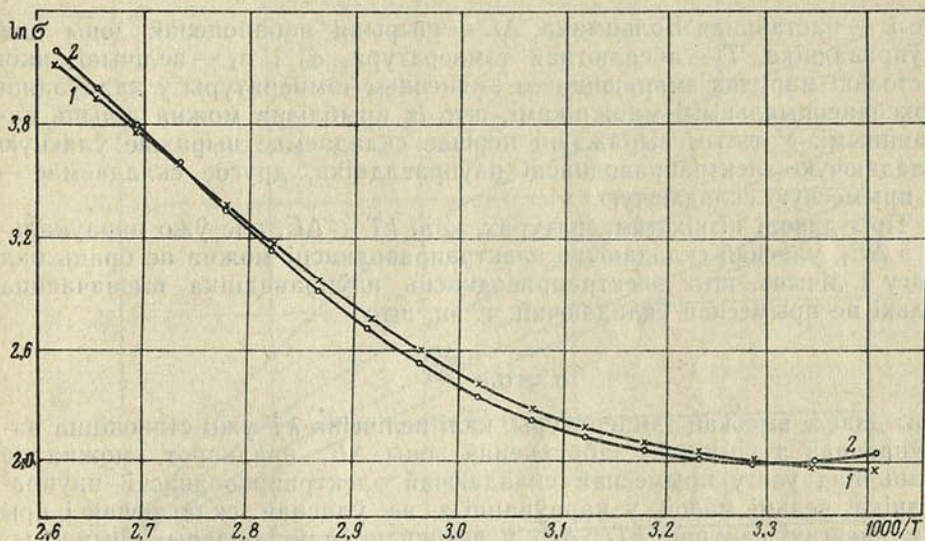


Рис. 3. Залежнасць $\ln \sigma$ ад $1/T$. Крывыя 1, 2 адпавядаюць характарыстыкам дыёдаў 1, 2 на рис. 1 (σ , $\text{ом}^{-1} \cdot \text{м}^{-1}$; T , $^{\circ}\text{К}$)

ня іх удзельнай электраправоднасці, а таксама вымярэнні тэрмаэрс праводзіліся кампенсцыйным метадам з дакладнасцю да 10^{-5} в. Хібнасць вымярэнняў не перавышала 4%.

На падставе гэтых вымярэнняў былі пабудаваны крывыя на рис. 3.

Для крышталяў, вольт-амперныя характарыстыкі якіх у пары з праводзячым вастрыём мелі падаючыя ўчасткі толькі на адваротных сваіх галінах (крывая 1), характэрна, што спачатку з павышэннем тэмпературы ад пакаёвай прыкладна да 40°C іх удзельная электраправоднасць узрастае параўнальна слаба. Залежнасць $\ln \sigma$ ад $\frac{1}{T}$ у гэтым інтэрвале тэмператур

аказваецца практычна лінейнай, прычым нахіл крывой $\ln \sigma = f\left(\frac{1}{T}\right)$ да восі абсцыс вельмі малы. Пры далейшым павышэнні тэмпературы велічыня $\ln \sigma$ узрастае ўсё больш моцна, так што лінейны характар залежнасці $\ln \sigma$ ад $\frac{1}{T}$ парушаецца. Але, пачынаючы ад значэння тэмпературы прыкладна 60°C , пры яе далейшым павышэнні ўказаная залежнасць зноў становіцца лінейнай, аднак электраправоднасць узора тут узрастае значна хутчэй, чым у пачатковым інтэрвале тэмператур ($20-40^{\circ}\text{C}$). Вугал нахілу прамалінейнага ўчастка крывой $\ln \sigma = f\left(\frac{1}{T}\right)$ да восі абсцыс аказваецца ўжо даволі вялікім.

Вывяўлены ход залежнасці ўдзельнай электраправоднасці ад тэмпературы характэрны для паўправаднікоў, якія маюць прымесьці толькі аднаго тыпу, ствараючыя прымесныя ўзроўні энергіі, размешчаныя на адной і той жа адлегласці ад зоны праводнасці ΔE_1 . Тады, як вядома [3], удзельная электраправоднасць паўправадніка можа быць выражана ў выглядзе

$$\sigma = \sigma_0 e^{-\frac{\Delta E}{2kT}} + \sigma_1 e^{-\frac{\Delta E_1}{2kT}},$$

дзе k — пастаянная Больцмана, ΔE — шырыня забароненай зоны для паўправадніка, T — абсалютная тэмпература, σ_0 і σ_1 — велічыні, для паўправадніка марудна змяняюцца са змяненнем тэмпературы ў параўнанні з экспаненцыяльнымі множнікамі, што іх прыблізна можна лічыць пастаяннымі. У гэтым выражэнні першае складаемае выражае ўласную складаючую электраправоднасці паўправадніка, другое складаемае — яе прымесную складаючую.

Пры даволі нізкіх тэмпературах, калі $kT \ll \Delta E$, але ўжо параўнальна з ΔE_1 , уласнай складаючай электраправоднасці можна не браць пад увагу і лічыць, што электраправоднасць паўправадніка вызначаецца толькі яе прымеснай складаючай, г. зн. што

$$\sigma \approx \sigma_1 e^{-\frac{\Delta E_1}{2kT}}.$$

Пры даволі высокай тэмпературы, калі велічыня kT ужо становіцца параўнальнай з шырынёй забароненай зоны ΔE , наадварот, можна не браць пад увагу прымеснай складаючай электраправоднасці паўправадніка, вельмі малой у параўнанні з яе ўласнай складаючай і пры тым дасягнуўшай пры $kT \gg \Delta E_1$ у выніку поўнай іанізацыі прымесных узроўняў энергіі свайго гранічнага значэння, і лічыць, што

$$\sigma = \sigma_0 e^{-\frac{\Delta E}{2kT}}.$$

Лагарыфмуючы два апошнія выразы, атрымаем пры даволі нізкай тэмпературы, калі электраправоднасць паўправадніка ў асноўным вызначаецца яе прымеснай складаючай,

$$\ln \sigma = \ln \sigma_1 - \frac{\Delta E_1}{2k} \frac{1}{T},$$

пры даволі высокай тэмпературы, калі электраправоднасць паўправадніка вызначаецца яе ўласнай складаючай,

$$\ln \sigma = \ln \sigma_0 - \frac{\Delta E}{2k} \frac{1}{T}.$$

Абедзве атрыманыя залежнасці $\ln \sigma$ ад $\frac{1}{T}$ у сістэме каардынат $\frac{1}{T}$, $\ln \sigma$ графічна паказваюцца прамымі, вуглы нахілу якіх да восі абсцыс адпаведна роўныя $\alpha = \text{arctg} \left(-\frac{\Delta E_1}{2k} \right)$ і $\beta = \text{arctg} \left(-\frac{\Delta E}{2k} \right)$.

Велічыні энергіі актывацыі ΔE_1 і ΔE носьбітаў току для даследаваных узораў былі вызначаны шляхам вымярэння вуглоў нахілу да восі абсцыс адпаведных участкаў эксперыментальных крывых, што выражаюць залежнасць $\ln \sigma$ ад $1/T$. Аказалася, што энергія актывацыі носьбітаў току ΔE_1 , якая адпавядае інтэрвалу тэмператур 20—40 °С, у ся-

рэдным роўная 0,023 эв. Сярэдняе ж значэнне энергіі актывацыі ΔE ў інтэрвале тэмператур 60—100 °С аказалася роўным 0,76 эв. Відаць, што ΔE_1 ёсць адлегласць ад прымесных узроўняў-донараў да дна зоны праводнасці. Велічыня ж ΔE аказалася прыкладна роўнай шырыні забароненай зоны для германію [4].

Электраправоднасць узораў другога тыпу з павышэннем тэмпературы ад 20 да 40 °С памяншалася (крывая 2 на рыс. 3). Гэта сведчыць аб поўнай іанізацыі прымесных узроўняў энергіі і пастаянстве канцэн-

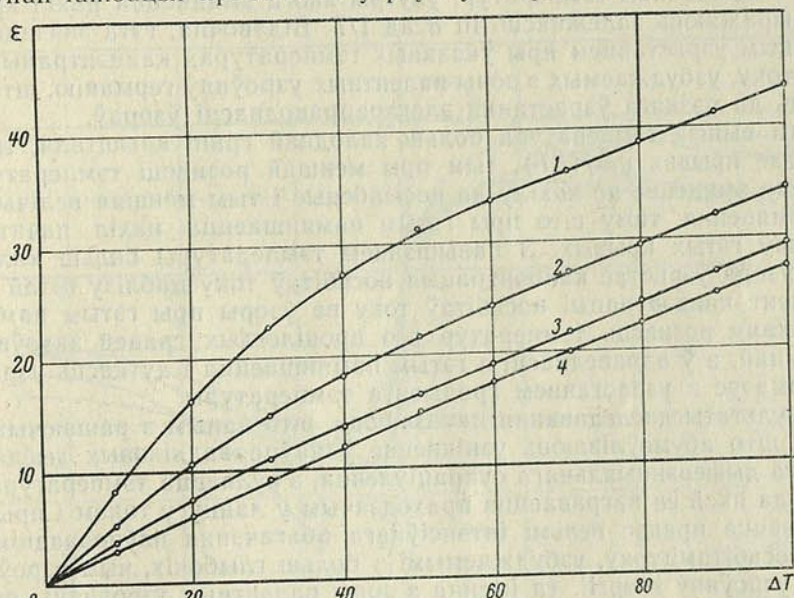


Рис. 4. Залежнасць тэрмаэрс ϵ , мв ад рознасці тэмператур процілеглых граней узору ΔT , °С:

1 — тэмпература халоднай грані 20 °С; 2 — 40; 3 — 60; 4 — 80

трацыі носьбітаў току ў дадзеным інтэрвале тэмператур. Памяншэнне электраправоднасці ўзораў з павышэннем тэмпературы абумоўліваецца памяншэннем рухомасці носьбітаў току пры гэтым працэсе. Пры больш высокіх тэмпературах электраправоднасць узораў змяняецца таксама, як і ў узораў першага тыпу.

Результаты эксперымента паказваюць, што пры даволі нізкай тэмпературы (да 40 °С) электраправоднасць даследуемых узораў вызначаецца яе прымеснай электроннай складаючай. Але ўжо пры тэмпературах парадку 50—60 °С вызначальнай становіцца ўласная складаючая іх электраправоднасці. Зусім магчыма, што змяненне ходу тэмпературнай залежнасці электраправоднасці ўзораў адбываецца пры тэмпературах, да якой нагрываецца кантакт праводзячага вастрыя з крышталем пры току, адпаведным падаючаму ўчастку характарыстыкі дыёда.

Аб гэтым жа сведчаць і рэзультаты вымярэння тэрмаэрс, што ўзнікае ў германіі пры наяўнасці градыента тэмпературы (рыс. 4).

Так, калі тэмпература больш халоднай грані роўная 20 °С, то пры ўзрастанні ΔT тэрмаэрс ϵ ва ўзоры спачатку ўзрастае прыкладна па лінейнаму закону. Але, пачынаючы ад рознасці тэмператур у 20° (г. зн. калі тэмпература больш гарачай грані роўная 40 °С), лінейны ход указанай залежнасці парушаецца: па меры павышэння тэмпературы нагрываемай грані, г. зн. пры далейшым узрастанні рознасці тэмператур, тэр-

маэрс узрасце ўсё больш марудна. Калі ж тэмпература награваемай грані дасягае прыкладна 60°C (г. зн. пры рознасці тэмператур у 40°), залежнасць тэрмаэрс ад рознасці тэмператур зноў становіцца лінейнай, аднак нахіл крывой $\epsilon=f(\Delta T)$ да восі абсцыс на гэтым участку значна меншы за нахіл яе пачатковага прамалінейнага ўчастка.

Характэрна, што інтэрвал значэнняў тэмпературы награваемай грані ($40\text{--}60^\circ\text{C}$), дзе адбываецца змяненне нахілу крывой $\epsilon=f(\Delta T)$, супадае з інтэрвалам тэмператур, унутры якога змяняецца нахіл крывых, што выражаюць залежнасць $\ln \sigma$ ад $1/T$. Відавочна, гэта звязана з інтэнсіўным узрастаннем пры ўказаных тэмпературах канцэнтрацыі носьбітаў току, узбуджаемых з зоны валентных узроўняў германію, што прыводзіць да рэзкага ўзрастання электраправоднасці ўзораў.

Чым вышэй тэмпература больш халоднай грані крышталя, тым ніжэй ідзе крывая $\epsilon=f(\Delta T)$, тым пры меншай рознасці тэмператур назіраецца змяненне яе нахілу да восі абсцыс і тым меншая велічыня гэтага змянення, таму што пры гэтым памяншаецца нахіл пачатковых участкаў гэтых крывых. З павышэннем тэмпературы больш халоднай грані ўзора ўзрастае канцэнтрацыя носьбітаў току паблізу гэтай грані. Градыент канцэнтрацыі носьбітаў току ва ўзоры пры гэтым памяншаецца, хаця рознасць тэмператур яго процілеглых граней захоўваецца нязменнай, а ў адпаведнасці з гэтым памяншаецца і хуткасць узрастання тэрмаэрс з узрастаннем градыента тэмпературы.

Результаты даследавання паказваюць, што адным з рашаючых фактараў, што абумоўліваюць узнікненне ў паўправадніковых дыёдаў адмоўнага дыферэнцыяльнага супраціўлення, з'яўляецца тэмпература кантакту, да якой ён награвецца праходзячым у ланцугу токамі і пры якой пачынаецца працэс вельмі інтэнсіўнага абагачэння паўправадніка новымі носьбітамі току, узбуджаемымі з больш глыбокіх, чым узроўні-донары, узроўняў энергіі, (а іменна з зоны валентных узроўняў), якія не адыгрывалі істотнай ролі пры больш нізкіх тэмпературах.

Але несумненна і тое, што тэмпература кантакту — не адзіны фактар, што абумоўлівае з'яўленне ў дыёдаў адмоўнага супраціўлення (хоць бы таму, што пры адной і той жа тэмпературы падаючыя ўчасткі на характарыстыках назіраліся не ва ўсіх даследаваных дыёдаў). Відаць, што ў працэсе ўзнікнення адмоўнага супраціўлення паўправадніковых дыёдаў важную ролю адыгрывае моцнае поле ў вобласці кантакту, якое садзейнічае ўзрастанню канцэнтрацыі носьбітаў току ў паўправадніку.

Далей зусім натуральна чакаць, што наяўнасць у паўправадніку прымесей, якія моцна ўплываюць на канцэнтрацыю носьбітаў току, павінна пэўным чынам у залежнасці ад роду прымесі і ад яе канцэнтрацыі ўплываць на выгляд вольт-ампернай характарыстыкі паўправадніковага дыёда і, у прыватнасці, на працэс узнікнення ў дыёда адмоўнага супраціўлення. Гэта меркаванне было падвергнута эксперыментальнай праверцы.

У даследуемыя ўзоры германію з праводнасцю электроннага тыпу электралітычным метадам уведзілася прымесь алюмінію, якая з'яўляецца для германію прымессю акцэптарнага тыпу. Крысталі германію памяшчаліся ў якасці катода ў электралітычную ванну з 15-працэнтным растворам солі $\text{Al}_2(\text{SO}_4)_3$, а затым праз электраліт прапускаўся пастаянны ток на працягу часу, дастатковага для таго, каб на паверхні даследуемага ўзора выдзеліўся суцэльны слой алюмінію, які можна распазнаць няўзброеным вокам. Пасля гэтага ўзоры памяшчаліся ў электрычную награвальную печ і вытрымліваліся пры тэмпературы да 500°C на працягу доўгага адрэзку часу (ад 3 да 7 сутак), з тым каб атамы

алюмінію, асаджанага на паверхні крышталю, маглі прадэфундзіраваць у яго тоўшчу на значную глыбіню. Затым слой алюмінію з паверхні ўзораў сашліфоўваўся. У выніку атрымліваліся ўзоры германію, якія маюць прымесь алюмінію, канцэнтрацыя якой ля кантактыруючай з вастрыём паверхні вызначалася часам вытрымкі крышталю пры павышанай тэмпературы і таўшчыней сашліфоўваемага паверхневага слою крышталю.

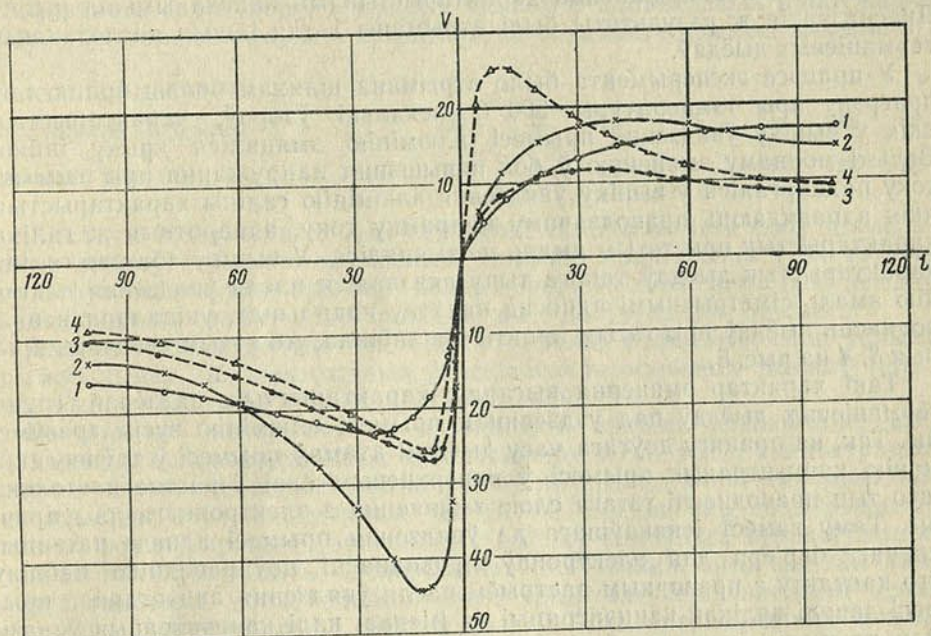


Рис. 5. Вольт-амперныя характарыстыкі германіевых дыёдаў перад (1, 3) і пасля (2, 4) увядзення прымесі. Суцэльныя лініі — нагрэў ад 3 да 7 сутак; пункцір — больш 7 сутак

Яшчэ да ўвядзення прымесі на кожным узоры ў адным і тым жа мікраўчастку паверхні ўтвараліся кантакты з праводзячым вастрыём і для кожнага з іх здымалася статычная вольт-амперная характарыстыка. Пры гэтым назіралася невялікая (да 15%) раскіданасць параметраў характарыстык, атрыманых пры розных становішчах кантакту. Таму за тыповую для данага крышталю ў пары з праводзячым вастрыём прымалася характарыстыка з сярэднімі параметрамі, у прыватнасці з сярэдняй велічыней яе круцізны, а таксама максімальнага напружання. Такія ж вымярэнні праводзіліся з дыёдамі і пасля ўвядзення прымесі ў даследуемыя ўзоры.

Аказалася, калі канцэнтрацыя ўведзенай ва ўзор прымесі алюмінію будзе дастаткова малой (а іменна, менш канцэнтрацыі донарнай прымесі, што знаходзіцца ва ўзоры), то тып праводнасці ўзору застаецца электронным. Аднак велічыня супраціўлення дыёда пры гэтым значна ўзрастае ў выніку памяншэння канцэнтрацыі носбітаў току і павелічэння шырыні прыкантактнага запіраючага слою. А гэта цягне за сабой узростанне максімальнага напружання на характарыстыцы дыёда, а таксама ўзрастанне велічыні круцізны яе падаючага ўчастка. Гэта ілюструецца рыс. 5 (крывыя 1, 2), з якога відаць, што максімум напружання на адваротнай галіне характарыстыкі дыёда, а таксама велічыня максімальнай круцізны яе падаючага ўчастка ў выніку ўвядзення

прымесі алюмінію ўзрастаюць амаль у два разы, ток жа, які адпавядае максімуму характарыстыкі, пры гэтым прыкладна ў столькі ж разоў памяншаецца.

Больш таго, аказалася, што калі да ўвядзення прымесі алюмінію характарыстыка даследаванага дыёда на сваёй прамой галіне не мела падаючага ўчастка, то пасля ўвядзення ў крышталі прымесі алюмінію падаючы ўчастак узнікаў і на прамой галіне характарыстыкі дыёда, што таксама пацвярджаецца характарыстыкамі, паказанымі на рыс. 5. Якасна такія ж рэзультаты былі атрыманы і для іншых даследаваных германіевых дыёдаў.

У працэсе эксперымента было атрымана шляхам больш працяглага прагрэву пры тэмпературы 500°C некалькі ўзораў, характарыстыкі якіх у выніку ўвядзення прымесі алюмінію змяняліся крыху інакш. Вельмі моцнаму змяненню ў бок павышэння напружання пры тым жа току падвяргаліся ў выніку ўвядзення алюмінію галіны характарыстык, якія адпавядаюць праводзячаму напрамку току, адваротныя ж галіны характарыстык дыёдаў такога тыпу аказаліся пасля ўвядзення алюмінію амаль сіметрычнымі адносна пачатку каардынат, уніпалярная праводнасць дыёдаў пры гэтым практычна знікала. Аб гэтым сведчаць крывыя 3, 4 на рыс. 5.

Такі характар змянення выгляду характарыстык дадзенай групы германіевых дыёдаў пад уздзеяннем прымесі алюмінію зусім зразумелы. Так, на працягу доўгага часу дыфузіі атамаў прымесі ў тоўшчу германію канцэнтрацыя прымесі ў паверхневым слаі ўзрастае настолькі, што тып праводнасці гэтага слою змяняецца з электроннага на дзірачны. Таму замест існаваўшага да ўвядзення прымесі аднаго патэнцыяльнага бар'ера для электронаў праводнасці паўправадніка паблізу яго кантакту з праводным вастрыём пасля ўвядзення акцептарнай прымесі даволі вялікай канцэнтрацыі (а іменна, калі канцэнтрацыя ўвадзімай прымесі акажацца большай за наяўную да гэтага канцэнтрацыю донарнай прымесі) на некаторай вельмі невялікай адлегласці ад кантакту ўтвараецца электронна-дзірачны пераход, які з'яўляецца патэнцыяльным бар'ерам для электронаў, што пераходзяць з электроннай вобласці паўправадніка ў дзірачную, і такім жа бар'ерам для дзірак, якія пераходзяць у адваротным напрамку. Акрамя таго, паблізу кантакту праводзячага вастрыя з паверхневым дзірачным слоём паўправадніка ўтвараецца дадатковы патэнцыяльны бар'ер для дзірак. Пры гэтым калі абодва бар'еры маюць прыкладна аднолькавую вышыню і калі праводзячыя напрамкі току для іх аказваюцца процілеглымі (гэта павінна быць, калі рознасць тэрмадынамічных работ выхаду з металічнага вастрыя і электроннага паўправадніка параўнальна невялікая ў адносінах да шырыні забароненай зоны паўправадніка, што ва ўмовах эксперымента, згодна [4], выконвалася, таму што праводзячае вастрыё было стальным), то адсюль вынікае, што ўніпалярныя ўласцівасці дыёда не павінны быць выражаны колькі-небудзь істотна і, значыць, супраціўленне яго ў абодвух напрамках току акажацца прыкладна аднолькавым, у прыватнасці роўным велічыні супраціўлення ў запіраючым напрамку току праз дыёд да ўвядзення прымесі.

Далей, таму што канцэнтрацыя прымесных атамаў алюмінію, што прадэфундзіравалі ў тоўшчу даследаваных узораў на розную глыбіню, павінна быць рознай, калі час, на працягу якога праводзіўся дыфузійны працэс пры павышанай тэмпературы, не вельмі вялікі, то адсюль вынікае, што па меры сашліфоўвання аднаго за адным слаёў узору, куды ўведзена прымесь, выгляд характарыстык дыёдаў павінен змяняцца.

ца ў напрамку набліжэння электрычных уласцівасцей даследаванага дыёда да зыходных, уласцівых яму да ўвядзення прымесі. Гэта і было пацверджана эксперыментальна. Прыводзім сярэднія значэнні максімальных напружанняў і адпаведныя ім сярэднія значэнні току для вольт-амперных характарыстык аднаго і таго ж дыёда, атрыманых пасля сашліфоўвання прыпаверхневых слаёў крышталю германію рознай таўшчыні (большаму нумару крывой адпавядае б'ольшая таўшчыня сашліфаванага слоя ўзору, а нумару крывой 0 адпавядаюць напружанне і ток, якія характарызуюць крышталю да ўвядзення прымесі алюмінію):

Нумар крывой	0	1	2	3	4	5	6
Максімальнае напружанне	60	9	10	12	14	16	20
Адпаведны ток	14	31	29	28	26	23	20

Дослед паказвае, што калі таўшчыня сашліфаванага слоя даследаваных узораў германію перавышае глыбіню пранікнення ў іх тоўшчу прадэфундзіраваўшай прымесі, вольт-амперныя характарыстыкі дыёдаў аказваюцца па свайму віду такімі ж, як і да ўвядзення прымесі.

Якасна такія ж рэзультаты былі атрыманы і пры вывучэнні ўплыву прымесі цынку на электрычныя ўласцівасці германіевых дыёдаў (прымесі цынку таксама з'яўляецца акцэптарнай).

Рэзультаты эксперыментаў дазваляюць зрабіць заключэнне, што ўвядзенне ў паўправадніковыя крышталі прымесей, тып і канцэнтрацыя апошніх аказваюць вельмі моцны уплыў на выгляд вольт-амперных характарыстык паўправадніковых дыёдаў і, несумненна, адыгрываюць важную ролю ў працэсе ўзнікнення ў дыёдаў адмоўнага супраціўлення. Акрамя таго, рэзультаты эксперымента паказваюць, што шляхам увядзення прымесей у паўправадніковыя крышталі пры належнай адпаведнасці іх канцэнтрацыі і саставу пастаўленым патрабаванням можна ў вельмі шырокіх межах змяняць выгляд вольт-амперных характарыстык паўправадніковых дыёдаў (іх максімумы, круцізну і г. д.) у пажаданым напрамку, што мае немалаважнае значэнне для практычнага выкарыстання дыёдаў [5].

Літаратура

1. Петровский И. И. ИФЖ, № 10, 1958.
2. Петровский И. И. ИФЖ, № 11, 1959.
3. Сб. «Полупроводники в науке и технике». Под ред. А. Ф. Иоффе. Изд. АН СССР, 1957.
4. Карякин Н. И., Быстров К. Н., Қиреев П. С. Краткий справочник по физике. Изд. «Высшая школа», М., 1963.
5. Петровский И. И. Весті АН БССР, сер. фіз.-тэхн. навук, № 4, 1957.

Белорусский государственный университет
им. В. И. Ленина

Поступило в редакцию 7. XII 1967

КАРОТКІЯ ПАВЕДАМЛЕННІ

УДК 539.23+621.318.1

Н. Н. СИРОТА, С. В. СУХВАЛО

КРИВЫЕ НАМАГНИЧЕНИЯ И НАМАГНИЧЕННОСТЬ НАСЫЩЕНИЯ ТОНКИХ ПЛЕНОК СПЛАВОВ СИСТЕМЫ Fe—Ni—Co

Сведений о систематическом исследовании намагниченности насыщения железо-никель-кобальтовых пленок в литературе нет. Известны, однако, работы, в которых изучалась намагниченность насыщения пленок отдельных составов сплавов системы Fe—Ni—Co, например, пермаллоевых [1—4]. Результаты исследования свидетельствуют о том, что намагниченность насыщения корректно изготовленных тонких пленок совпадает по величине с намагниченностью насыщения массивных образцов сплавов, начиная от толщины 30—50 Å.

Нами изучено 66 составов тонких пленок системы Fe—Ni—Co, из которых 36 принадлежали к тройной системе и 24 — к граничным бинарным системам Fe—Ni, Fe—Co и Ni—Co. Составы сплавов были взяты через 10 ат. % и равномерно распределялись по всему концентрационному треугольнику. Условия изготовления пленок описаны ранее в работе [5].

Все исследованные пленки были подвергнуты химическому анализу по методике, описанной в работе [6]. Объем пленок определялся по их весу, найденному при анализе состава пленок, и по их рентгеновской плотности [5]. Наряду с этим объем исследуемых пленок оценивался по их толщине, найденной с помощью интерферометрического метода.

Исследование процессов начального намагничения проводилось на магнитометре с независимым отклоняющим полем [7]. Кривые намагничения, как правило, снимались в полях от 0 до 100 э.

При исследовании начального намагничения пленок обращалось особое внимание на выбор методики размагничивания тонких пленок. Измерения на магнитометре показали, что метод размагничивания монотонно убывающим переменным полем не обеспечивает полного размагничивания пленок. Поэтому размагничивание тонких пленок проводилось непосредственно в самом магнитометре путем наложения магнитного постоянного поля вдоль оси трудного намагничения и последующего наложения затухающего переменного поля небольшой амплитуды в направлении оси легкого намагничения.

Кривые начального намагничения вдоль оси легкого намагничения пленок исследуемой тройной системы отличаются наличием при слабых полях участка с малой начальной магнитной проницаемостью, с медленным нарастанием интенсивности намагничения в функции поля и участка кривой с быстрым нарастанием интенсивности намагничения практически до насыщения в сравнительно малом интервале намагничивающих полей. Лишь у некоторых пленок, составы которых расположе-

ны вблизи вершин концентрационного треугольника исследуемой системы и вблизи границ α — γ -превращений, интервал полей, при которых происходит ускоренное нарастание интенсивности намагничивания в функции поля, растягивается на значительно большую величину (рис. 1, а). Кривые начального намагничивания этих пленок по оси легкого и тяжелого намагничивания различаются между собой незначительно.

Характерной особенностью процесса начального намагничивания тонких пленок указанных выше сплавов в направлении оси тяжелого на-

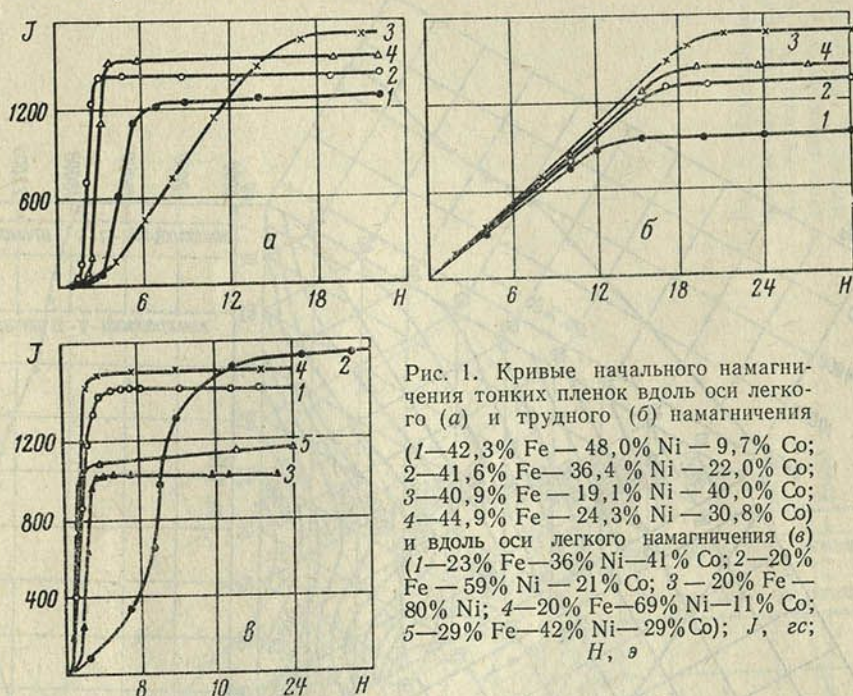
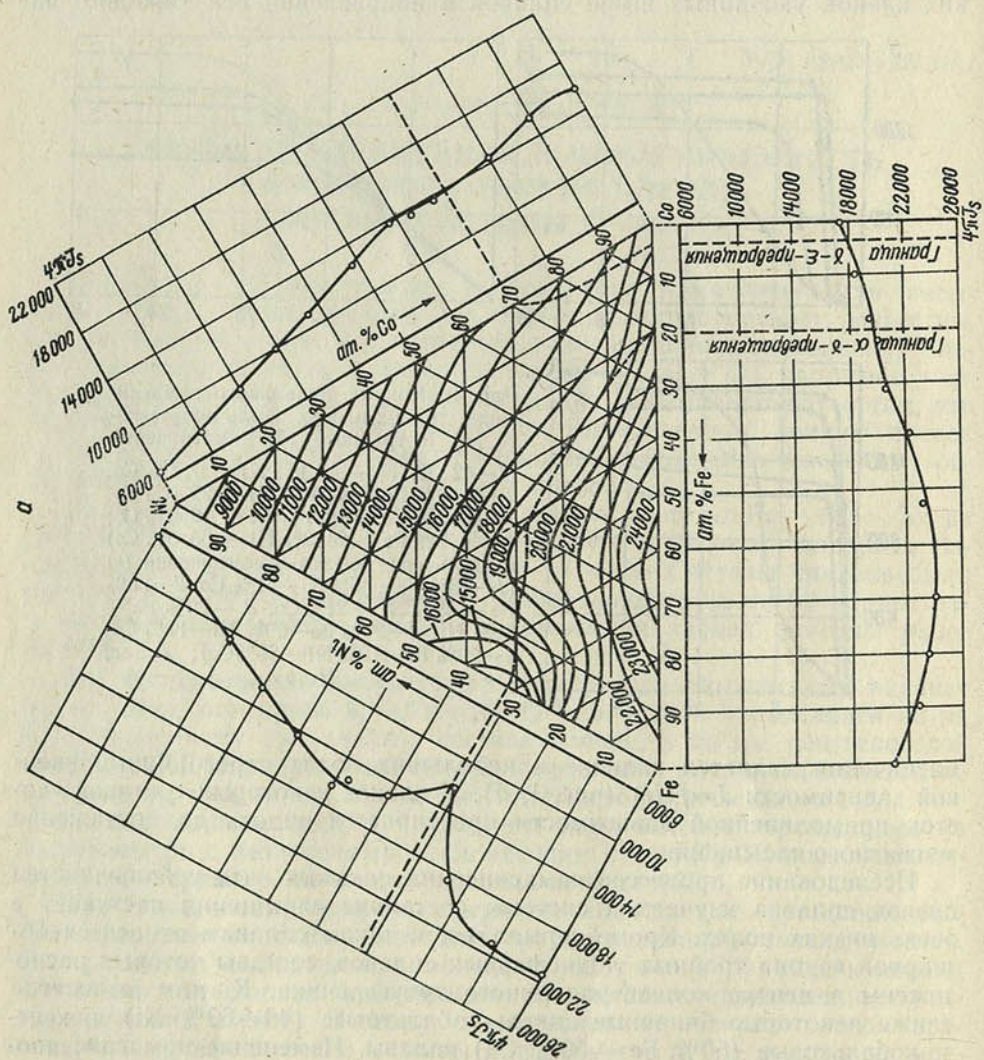


Рис. 1. Кривые начального намагничивания тонких пленок вдоль оси легкого (а) и трудного (б) намагничивания (1—42,3% Fe — 48,0% Ni — 9,7% Co; 2—41,6% Fe — 36,4% Ni — 22,0% Co; 3—40,9% Fe — 19,1% Ni — 40,0% Co; 4—44,9% Fe — 24,3% Ni — 30,8% Co) и вдоль оси легкого намагничивания (в) (1—23% Fe — 36% Ni — 41% Co; 2—20% Fe — 59% Ni — 21% Co; 3—20% Fe — 80% Ni; 4—20% Fe — 69% Ni — 11% Co; 5—29% Fe — 42% Ni — 29% Co); J , гс; H , э

магничивания является наличие в небольших полях строго прямолинейной зависимости $J=f(H)$ (рис. 1, б). У пленок некоторых составов участок прямолинейной зависимости простирается вплоть до достижения магнитного насыщения.

Исследование процессов намагничивания показало, что у большинства пленок сплавов изучаемой системы состояние насыщения наступает в очень низких полях. Кроме пермаллоя, к таким сплавам относится обширная группа тройных γ -однофазных сплавов, составы которых расположены в центре концентрационного треугольника. К ним относятся также некоторые бинарные никель-кобальтовые (40÷60% Ni) и железо-кобальтовые (50% Fe — 50% Co) сплавы. Изменение намагниченности пленок в функции поля для различных групп сплавов системы Fe — Ni — Co показано на рис. 1. Кривые намагничивания свидетельствуют о том, что намагниченность пленок всех составов в полях 100—300 э практически достигает насыщения.

Измерение намагниченности насыщения пленок проводилось методом вращающих моментов в поле 5000 э [8]. На рис. 2, а показана диаграмма концентрационной зависимости намагниченности насыщения пленок системы Fe — Ni — Co. Из рисунка видно, что в направлении от никелевого угла концентрационной диаграммы к граничной системе Fe — Co наблюдается постепенный рост величины намагниченности на-



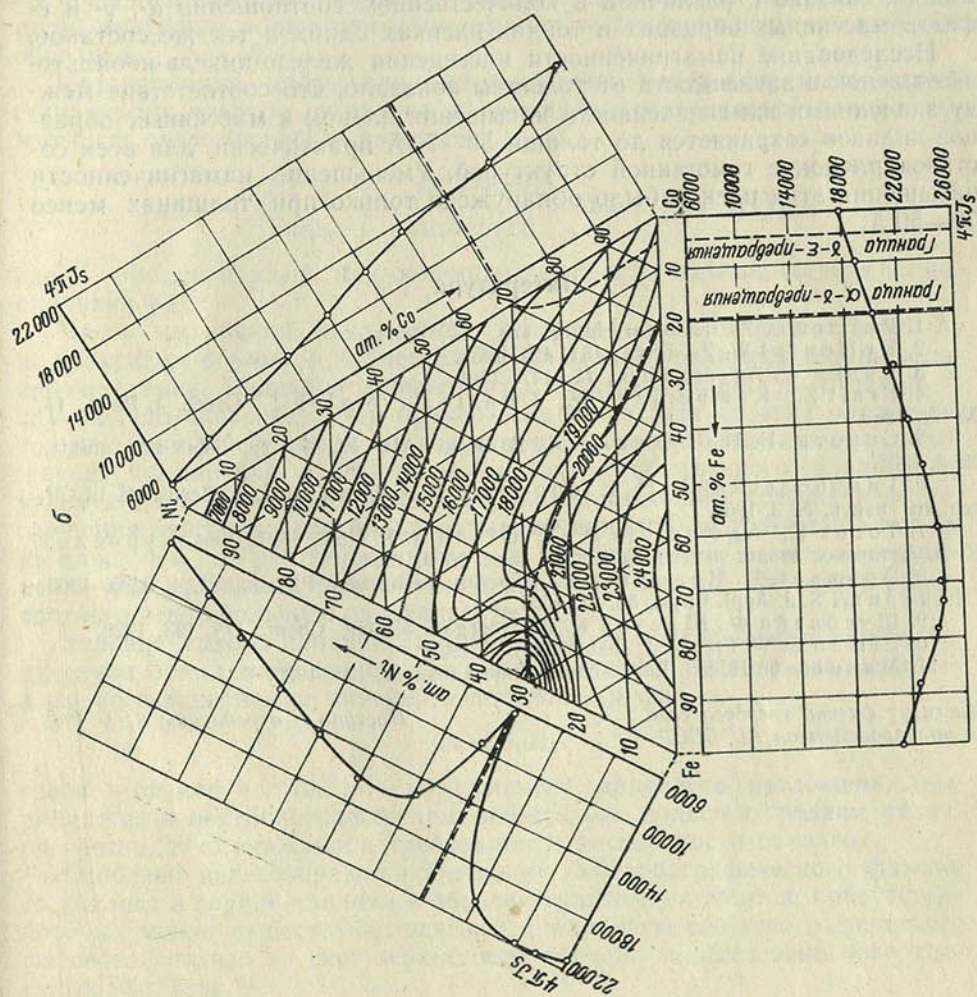


Рис. 2. Намагнитченность насыщения тонких пленок (а) и массивных образцов (б) сплавов системы Fe—Ni—Co. На диаграммах даны значения $4\pi J_s$, μs , приведенные к рентгеновской плотности. Пунктирной линией показаны границы α — γ и γ — ϵ -превращений

сыщения пленок. Наибольшая намагниченность насыщения имеет место в пленках бинарной системы Fe — Co.

В настоящей работе было проведено сопоставление между величинами намагниченности насыщения тонких пленок и массивных образцов сплавов исследуемой системы Fe — Ni — Co во всем диапазоне концентраций. Для этого была измерена намагниченность насыщения массивных образцов сплавов этой системы в поле 15 000 э. Измерения проводились методом Штеблеина—Шретера [9]. Результаты измерения показаны на рис. 2, б. Полученные значения магнитного насыщения сплавов, составы которых расположены вблизи оси Fe—Co, отличаются от значений, найденных Элменом и Масумото [10, 11]. Заметим, что измерения $4\pi J_s$ в работах [10, 11] проводились в полях, не превышающих 1500 э.

Данные измерений показывают, что в пределах существования твердых растворов значения намагниченности насыщения исследованных нами пленок и массивных образцов находятся в численном соответствии. Однако в областях существования гетерогенной структуры между намагниченностью насыщения пленок и массивных образцов сплавов системы Fe — Ni — Co наблюдается некоторое расхождение, что, возможно, связано с различием в количественном соотношении α -, γ - и ϵ -фаз в массивных образцах и тонких пленках одних и тех же составов.

Исследование намагниченности насыщения железо-никель-кобальтовых пленок в зависимости от толщины показало, что соответствие между значениями намагниченности насыщения пленок и массивных образцов сплавов сохраняется до толщин 50—70 Å практически для всех составов пленок с гомогенной структурой. Уменьшение намагниченности насыщения этих пленок было обнаружено только при толщинах менее 70—50 Å.

Литература

1. Reimer L. Zs. Naturforschung, **12a**, 550, 1957.
2. Hellental W. Zs. Phys., **151**, 421, 1958.
3. Ruske W. An. der Phys., **13**, 147, 1961.
4. Freit Z., Kamberrsky V., Ondris M., Malek Z. Czech. J. Phys., **13**, № 4, 1963.
5. Сирота Н. Н., Сухвало С. В. Весті АН БССР, сер. фіз.-мат. наук, № 3, 1968.
6. Ганопольский В. И., Езерская Т. В., Сухвало С. В. Весті АН БССР, сер. хім. наук, № 3, 1966.
7. Torok E., Agoweidis D. C., Olson A. L. RSZ, **35**, 8, 1964. Куроедов К. А. Авторское свидетельство № 162233, Бюл. № 9, 1964.
8. Hofmann I., Hemschik H. Experim. Techn. der Physik., **XI**, 4, 5295, 1963; Chikazumi S. J. Appl. Phys., **32**, 81, 1961.
9. Штеблеин Ф., Шретер К. Zs. anorgan. allgem. Chem., **174**, 193, 1928.
10. Elmen G. W. Frankl. J. Inst., **206**, 317, 1928.
11. Masumoto H. Sci. Rep. Tôhoku Imp. Univ., **18**, 195, 1929.

Институт физики твердого тела
и полупроводников АН БССР

Поступило в редакцию 31. V 1968

УДК 539.26+620.181.1

Э. А. ВАСИЛЬЕВ, Н. Н. СИРОТА

НЕЙТРОНОГРАФИЧЕСКИЙ ФАЗОВЫЙ АНАЛИЗ СПЛАВОВ СИСТЕМЫ MnSb—MnBi

Нейтроннографический метод исследования, позволяющий определять атомную и магнитную структуру твердых тел, применяется в основном к однофазным системам. Использование нейтроннографического метода при изучении многофазных систем может оказаться плодотворным и найти практическое применение при фазовом анализе вещества. Основные преимущества нейтроннографического фазового анализа обусловлены особенностями рассеяния нейтронов, позволяющими получать достаточно надежные количественные результаты без применения эталонных образцов.

Интенсивность дифракционных линий на нейтронограммах, представляющих ядерное рассеяние, в рамках рассматриваемой задачи может быть представлена выражением

$$I_{\text{экс}} = \left(\frac{I_0 \lambda^3 I \rho'}{8\pi r \rho_0} \right) V \frac{jN_c^2 F^2(hkl)}{\sin \theta \sin 2\theta} A(hkl) e^{-2W} = KVI_{\text{расч}},$$

где V — объем образца или объемная доля, если образец состоит из нескольких фаз.

Часть выражения, заключенная в скобки и обозначенная через K , не зависит от объемной концентрации фазы и определяется только условиями съемки. Величина структурного фактора $F^2(hkl)$ в отличие от случая рентгеновских лучей практически не зависит от угла рассеяния, так как атомный формфактор рассеяния нейтронов равен единице. Множитель поглощения $A(hkl)$ не оказывает существенного влияния на угловую зависимость интенсивности линий, поскольку коэффициент поглощения нейтронов для большинства материалов на три-четыре порядка ниже, чем для рентгеновских лучей. В связи с этим возможно применение для исследования образцов большого размера, что обеспечивает соответственно большую однородность их.

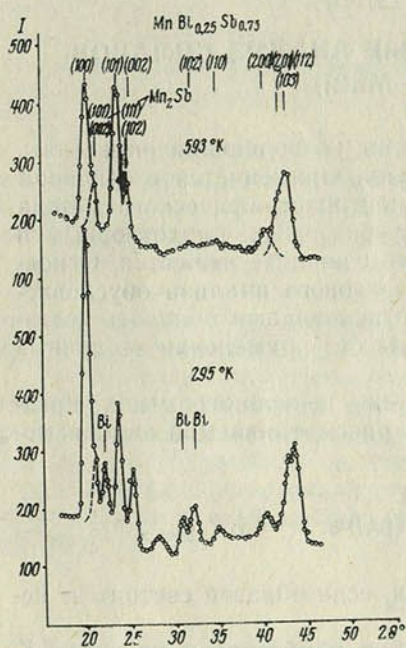
Условие малого влияния «зернистости» на интенсивность линий, полученное Бриндли [1] для случая многофазного образца с различающимися коэффициентами линейного поглощения фаз

$$\mu d < 0,01,$$

где d — размер частиц; μ — коэффициент линейного поглощения, выполняется в нейтроннографии при значительно большем среднем размере частиц, т. е. снижаются требования к дисперсности образца.

Особенно целесообразно применение нейтроннографического фазового анализа в случае наличия в образце тяжелых элементов, присутствие которых может существенно исказить результаты рентгенографического фазового анализа за счет зернистости образца и вследствие поверхностных эффектов.

Сплавы системы MnSb — MnBi, полученные с целью исследования магнитной структуры твердых растворов, представляют собой смесь трех фаз — Mn_2Sb , Bi и никельарсенидной фазы переменного состава $MnSb_{1-x}Bi_x$. Наличие в сплавах висмута, а не твердого раствора на его основе, образование которого в принципе не исключено в данной системе, было установлено на основании рентгенографических данных, показавших отсутствие смещения линий, приписываемых висмуту, по сравнению с линиями на рентгенограмме чистого висмута.



Определение фазового состава проводилось путем сравнения расчетных и экспериментальных интенсивностей близких по расположению на нейтронограммах линий (101) + (002) Mn_2Sb , (110) Bi, (101) и (100) $MnSb_{1-x}Bi_x$.

Интенсивность линий висмута измерялась по нейтронограммам, снятым при комнатной температуре, а интенсивность линий Mn_2Sb и $MnSb_{1-x}Bi_x$ — по нейтронограммам, снятым при температуре выше точки Кюри, чтобы исключить влияние магнитного рассеяния (см. рисунок). Съемки проводились на образцах, заключенных в кварцевые контейнеры.

Нейтронограммы сплава $MnBi_{0.25}Sb_{0.75}$, снятые при температурах 295 и 593°K (выше точки Кюри) (I , имп/мин)

Имея измеренные в одном масштабе интенсивности линий различных фаз, можем записать систему уравнений, решение которой дает объемные доли фаз, входящих в сплав:

$$KI_{расч}V_i = I_{iэксп}, \quad (2)$$

$$\sum V_i = 1.$$

Величина $I_{расч}$ для Mn_2Sb и Bi рассчитывалась на основании структурных данных. Значение $I_{расч}$ для никельарсенидной фазы зависит от состава и определяется в результате нескольких этапов расчета. Сначала в качестве приближенного значения выбиралась величина, соответствующая расчетному составу сплава, а затем проводилось последовательное уточнение значения $I_{расч}$, объемной доли фаз и состава никельарсенидной фазы.

В табл. 1 приведены результаты нейтронографического фазового анализа сплавов системы MnSb—MnBi. Из таблицы видно, что в исследуемой системе получены ограниченные твердые растворы с максимальным содержанием 12% Bi в сплавах на основе MnSb и около 8% Sb в сплавах на основе MnBi.

Согласно данным фазового анализа, в сплавах наблюдается избыток атомов марганца по сравнению со стехиометрическим составом. Эти атомы могут размещаться в бипирамидальных междуузлиях — сдвоен-

Таблица 1

Фазовый состав сплавов системы MnSb — MnBi

Состав сплава	Фазовый состав сплава, мол. %			с/а	Состав никельарсенидной фазы
	MnSb _{1-x} Bi _x	Mn ₂ Sb	Bi		
MnSb	100,0	—	—	1,40	MnSb
MnSb _{0,875} Bi _{0,125}	85,0	5,3	9,7	1,36	Mn[Mn _{0,05}]Sb _{0,96} Bi _{0,04}
MnSb _{0,75} Bi _{0,25}	70,5	10,7	18,8	1,37	Mn[Mn _{0,10}]Sb _{0,89} Bi _{0,11}
MnSb _{0,625} Bi _{0,375}	35,5	31,4	33,1	1,35	Mn[Mn _{0,05}]Sb _{0,88} Bi _{0,12}
Mn _{0,5} Bi _{0,5}	—	49,8	50,2	—	—
MnSb _{0,25} Bi _{0,75}	58,2	20,2	21,6	1,33	Mn _{0,75} [Mn _{0,25}]Sb _{0,08} Bi _{0,92}
MnBi	94,0	—	6,0	1,42	MnBi

Таблица 2

Сравнение расчетных и экспериментальных интенсивностей ядерного рассеяния в системе MnSb — MnBi

hkl	MnSb		Mn _{1,05} Bi _{0,04} Sb _{0,96}		Mn _{1,1} Bi _{0,11} Sb _{0,89}	
	I _{расч}	I _{эксп}	I _{расч}	I _{эксп}	I _{расч}	I _{эксп}
100	144,0	148	145,5	152	150,0	151
101	115,0	113	134,5	136	153,0	150
002	62,2	53	60,5	57	63,5	60
102	2,0	—	2,4	—	2,1	—
110	3,3	—	3,3	—	3,6	—
200	29,8	—	29,5	34	31,8	34
201	28,6	—	35,6	—	39,4	—
103	28,0	197	33,0	172	38,7	186
112	101,5	—	100,5	—	112,0	—

hkl	Mn _{1,05} Bi _{0,12} Sb _{0,88}		Mn _{1,0} Bi _{0,92} Sb _{0,08}		MnBi	
	I _{расч}	I _{эксп}	I _{расч}	I _{эксп}	I _{расч}	I _{эксп}
100	155,0	159	170,0	175	225,0	217
101	144,0	153	346,0	347	350,0	354
002	67,0	69	65,0	58	104,0	152
102	1,3	—	2,5	—	2,5	—
110	5,6	—	28,6	—	37	—
200	31,4	—	38,0	38	56,0	68
201	35,5	—	99,0	—	110,0	—
103	34,6	182	59,0	280	89,0	412
112	110,0	—	100	—	213,0	—

ных тетраэдрических порах никельарсенидной структуры. Отношение c/a при этом уменьшается от 1,63 для идеальной никельарсенидной решетки до 1,15 в решетке с полностью занятыми междоузлиями [2]. Наблюдаемое в эксперименте изменение c/a при переходе от MnSb к твердым растворам подтверждает предположение о размещении избыточных по отношению к стехиометрическому составу атомов марганца в

бипирамидальных междуузлиях с координатами $1/3, 2/3, 3/4; 2/3, 1/3, 1/4$.

Приведенные в табл. 2 данные указывают на достаточно хорошее соответствие между экспериментальными и расчетными интенсивностями ядерного рассеяния, которые получены в рамках принятой на основании фазового анализа модели размещения атомов марганца по междуузлиям.

Литература

1. Brindley G. W. *Phil. Mag.*, **36**, 347, 1945.
2. *Magnetism*, v. III. Spin arrangements and crystal structure. N. Y.—London, Acad. Press, 1963.

*Институт физики твердого тела
и полупроводников АН БССР*

Поступило в редакцию 29. VII 1968

Л. Е. ЗАГОРИН

О ПРИВОДИМЫХ
ЛОКАЛЬНО-НИЛЬПОТЕНТНЫХ
ГРУППАХ МАТРИЦ
НАД ТЕЛОМ ВЕЩЕСТВЕННЫХ КВАТЕРНИОНОВ

Нильпотентные и локально-нильпотентные подгруппы полной линейной группы $GL(n, K)$ над алгебраически замкнутым полем K были изучены в работах [1—3] Д. А. Супруненко и Р. И. Тышкевич. В частности, в теоремах 43,44 [1] и теоремах 2,3 [2] изучение приводимых нильпотентных и локально-нильпотентных подгрупп $GL(n, K)$ сводится к изучению неприводимых нильпотентных и локально-нильпотентных подгрупп. В теоремах 45 и 46 [1] устанавливается строение максимальных локально-нильпотентных подгрупп $GL(n, K)$ и конечность числа максимальных нильпотентных подгрупп $GL(n, K)$ фиксированного класса нильпотентности $l \geq n - 1$. В работе [4] рассматривались неприводимые нильпотентные и локально-нильпотентные подгруппы полной линейной группы $GL(n, Q)$ над телом вещественных кватернионов Q .

В настоящей статье с помощью методов работ [1—3] изучаются приводимые локально-нильпотентные подгруппы $GL(n, Q)$.

Введем следующие обозначения: Q — тело вещественных кватернионов; K — поле комплексных чисел; P — поле действительных чисел; $P \subset K \subset Q$; K^* и P^* — мультипликативные группы полей соответственно K и P ; $GL(n, Q)$, $GL(n, K)$, $GL(4n, P)$ — полные линейные группы; Q_m — полное матричное кольцо степени m ; $\langle \Gamma \rangle$ — линейная P -оболочка группы $\Gamma \subset GL(n, Q)$; E_m — единичная матрица степени m .

Запись $\Gamma_1 \neq \Gamma_1(K)$ обозначает, что группа $\Gamma_1 \subset GL(n, Q)$ не сопряжена в $GL(n, Q)$ ни с какой подгруппой группы $GL(n, K)$.

Если φ — регулярное представление тела Q , то, заменяя каждый элемент a_{ij} матрицы $g \in GL(n, Q)$ на $\varphi(a_{ij})$, получим вещественную матрицу $\varphi(g)$ степени $4n$. Пусть g пробегает группу $\Gamma \subset GL(n, Q)$. Тогда обозначим через $\varphi(\Gamma)$ ту подгруппу из $GL(4n, P)$, на которую отображается Γ при изоморфизме $g \rightarrow \varphi(g)$.

Теорема 1. Если локально-нильпотентная группа $\Gamma \subset GL(n, Q)$ состоит из матриц вида

$$g = \begin{pmatrix} a_g & b_g \\ 0 & c_g \end{pmatrix},$$

где $g \rightarrow a_g$ и $g \rightarrow c_g$ — неприводимые неэквивалентные представления (Γ' и Γ'' соответственно) группы Γ , то Γ вполне приводима.

Доказательство. Обозначим через G группу матриц $\begin{pmatrix} a_g & 0 \\ 0 & c_g \end{pmatrix}$. Очевидно, $\varphi(\Gamma')$ — вполне приводимая группа с эквивалентными неприводимыми блоками. Это же верно и для $\varphi(\Gamma'')$. Теперь предположим, что неприводимый блок H группы $\varphi(\Gamma')$ эквивалентен блоку группы $\varphi(\Gamma'')$. Тогда

группа $\varphi(G)$ сопряжена в $GL(4n, P)$ с группой матриц вида $\text{diag}(h, h, \dots, h)$, где $h \in H$. Отсюда следует простота алгебры $\langle \varphi(G) \rangle$. Значит, алгебра $\langle G \rangle$ также простая, и неприводимые блоки G эквивалентны, что противоречит условию теоремы. Следовательно, неприводимый блок группы $\varphi(\Gamma')$ не может быть эквивалентен блоку $\varphi(\Gamma'')$. Но тогда из теоремы 2 в работе [2] легко следует, что все матрицы группы $\varphi(\Gamma)$ одновременно приводятся к виду

$$\begin{pmatrix} \varphi(a_g) & 0 \\ 0 & \varphi(c_g) \end{pmatrix}.$$

Учитывая полную приводимость групп $\varphi(\Gamma')$ и $\varphi(\Gamma'')$, получаем, что $\varphi(\Gamma)$ вполне приводима. Отсюда следует полная приводимость Γ .

Теорема 2. Пусть нильпотентная подгруппа Γ группы $QL(n, Q)$ состоит из матриц вида

$$g = \begin{pmatrix} a(g) & b(g) \\ 0 & a(g) \end{pmatrix},$$

где $g \rightarrow a(g)$ — неприводимое представление Γ_1 группы Γ степени $m = \frac{n}{2}$.

Тогда все матрицы группы Γ с помощью матрицы

$$t = \begin{pmatrix} E_m & s \\ 0 & E_m \end{pmatrix}$$

можно одновременно трансформировать к виду

$$g = \begin{pmatrix} a(g) & \lambda(g)a(g) \\ 0 & a(g) \end{pmatrix}, \quad (1)$$

где $\lambda(g)$ — комплексное число, причем $\lambda(g) \in P$, если $\Gamma_1 \neq \Gamma_1(K)$.

Доказательство. Для неприводимой нильпотентной группы Γ_1 либо $\Gamma_1 \neq \Gamma_1(K)$ и центр Z_1 группы Γ_1 состоит из скаляров λE_m , $\lambda \in P^*$, либо можно считать, что $\Gamma_1 \subset GL(m, K)$ и Z_1 состоит из комплексных скаляров (см. работу [4]). Рассмотрим каждую из этих возможностей.

1. $\Gamma_1 \neq \Gamma_1(K)$. Считаем, что $P^*E_n \subset \Gamma$. Если матрица c содержится в центре Z группы Γ , то

$$c = \begin{pmatrix} \lambda E_m & x \\ 0 & \lambda E_m \end{pmatrix},$$

где $\lambda \in P^*$, $x \in Q_m$. Из равенства $cg = gc$, $g \in \Gamma$ следует

$$a(g)x = xa(g) \quad (2)$$

для всех $g \in \Gamma$. Значит, матрица x сопряжена в Q_m с μE_m , $\mu \in K$. Если μ не вещественно, то из выражения (2) следует, что Γ_1 — комплексная группа, а это противоречит нашему предположению. Следовательно, матрицы Z имеют вид

$$c = \begin{pmatrix} \lambda E_m & \mu E_m \\ 0 & \lambda E_m \end{pmatrix}, \quad \lambda, \mu \in P, \quad \lambda \neq 0. \quad (3)$$

Можно считать, что все обратимые матрицы вида (3) из $GL(n, Q)$ принадлежат Z . Далее, если

$$\begin{pmatrix} \lambda E_m & b \\ 0 & \lambda E_m \end{pmatrix} \in \Gamma, \quad \lambda \in P^*, \quad b \in Q_m,$$

то $b \in PE_m$ (см. доказательство лемм 3 и 4 в работе [2]). Поэтому любая матрица из Γ , возведенная в некоторую степень, дает матрицу вида (3). Отсюда легко получить (например, из работы [1]), что $\Gamma = \Gamma_0 Z P^*$, где Γ_0 — группа, порожденная множеством матриц конечного порядка из Γ . Группа $\Phi(\Gamma_0 P^*)$ порождается d -матрицами и по теореме 1-bis [2] вполне приводима. Значит, Γ_0 также вполне приводима. Отсюда следует, как в работе [2], приводимость Γ к виду (1) с помощью матрицы t .

2. $\Gamma_1 \subset GL(m, K)$. Считаем $P^*E_n \subset \Gamma$. Матрицы Z имеют вид

$$c = \begin{pmatrix} \lambda E_m & b \\ 0 & \lambda E_m \end{pmatrix}, \quad \lambda \in K^*.$$

Можно считать, что вместе с матрицей c в Z содержатся все обратимые матрицы $f(c)$, где $f(x)$ — полином над P .

Если $Z_1 = P^*E_m$, то доказательство аналогично рассуждениям случая 1. Пусть теперь $Z_1 \supset P^*E_m$. Тогда в Z есть матрица

$$c = \begin{pmatrix} (\alpha + \beta i) E_m & q \\ 0 & (\alpha + \beta i) E_m \end{pmatrix}, \quad \beta \neq 0, \quad \alpha + \beta i \in K^*,$$

а вместе с ней и матрица

$$c_1 = c\beta^{-1} - \alpha\beta^{-1} = \begin{pmatrix} iE_m & b \\ 0 & iE_m \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим матрицу

$$c_2 = \frac{1}{2} c_1^3 + \frac{3}{2} c_1 = \begin{pmatrix} iE_m & b_1 \\ 0 & iE_m \end{pmatrix} \in Z,$$

где $b_1 = \frac{1}{2}(b + ibi)$. Легко проверить непосредственно, что $ib_1 = -b_1i$ и что

матрица c_2 сопряжена с iE_n при помощи $s = \begin{pmatrix} E_m & \frac{1}{2} ib_1 \\ 0 & E_m \end{pmatrix}$. Но iE_n содержится в центре группы $s^{-1}\Gamma s$. Следовательно, $s^{-1}\Gamma s$ — комплексная группа,

которая приводится к виду (1) в силу теоремы 42 [1]. Доказательство полностью закончено.

Теорема 2 верна и для локально-нильпотентных подгрупп $GL(n, Q)$. Для $GL(n, Q)$ справедливы также аналоги теорем 43, 45, 46 [1] и теорем 2 и 3 из [2].

Литература

1. Супруненко Д. А. Разрешимые и нильпотентные линейные группы. Минск, 1958.
2. Супруненко Д. А., Тышкевич Р. И. Приводимые локально-нильпотентные линейные группы. Известия АН СССР, сер. мат. наук, 24, 1960, стр. 787—806.
3. Супруненко Д. А., Тышкевич Р. И. Приводимые нильпотентные и локально-нильпотентные линейные группы. Труды Института физики и математики АН БССР, вып. 3, 1959, стр. 221—233.
4. Загорин Л. Е. О неприводимых нильпотентных группах матриц над телом вещественных кватернионов. Вестн. АН БССР, сер. физ.-мат. наук, № 3, 1966.

Витебский технологический институт
легкой промышленности

Поступило в редакцию 4.VI 1968

А. А. СОКОЛЬСКИЙ

ДИФФЕРЕНЦИАЛЫ ЛИ И ПРОБНАЯ
РЕЛЯТИВИСТСКАЯ ЧАСТИЦА

1. Согласно принципу наименьшего действия, уравнения движения пробной релятивистской частицы в пространстве Минковского

$$x^\mu = (t, x, y, z), \quad c = 1, \quad g_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$$

имеют вид [1]

$$\frac{dP_\mu}{ds} = \frac{\partial L}{\partial x^\mu}, \quad (1)$$

где L — релятивистская функция Лагранжа,

$$ds = \sqrt{g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta},$$

$$P_\mu = \frac{\partial L}{\partial u^\mu} + \left(L - \frac{\partial L}{\partial u^\alpha} u^\alpha \right) u_\mu \quad (2)$$

— обобщенный 4-импульс частицы,

$$u^\mu = \frac{dx^\mu}{ds}$$

— ее 4-скорость.

В римановом пространстве уравнения (1) переходят [2] в

$$\frac{\delta P_\mu}{ds} = \frac{\partial L}{\partial \Psi^A} \nabla_\mu \Psi^A,$$

где δ — ковариантный дифференциал, ∇_μ — ковариантная производная, Ψ^A — полевые переменные (A — собирательный индекс).

2. Каково же обобщение уравнений (1) на пространства произвольной аффинной связности (L_n)?

Пусть в L_n заданы функции первоначальных переменных ξ^μ , $\Psi^A(\xi^\mu)$, $g_{\mu\lambda}(\xi^\mu)$, а кривая $\xi^\mu = \xi^\mu(s)$ доставляет экстремум интегралу действия

$$S = \int L \left(\Psi^A, g_{\mu\nu}, \frac{d\xi^\mu}{ds} \right) ds, \quad (3)$$

взятому в пределах от s_1 до s_2 .

Введем в окрестности кривой $\xi^\mu = \xi^\mu(s)$ дифференцируемое поле вектора $v^\alpha(\xi^\mu)$ так, чтобы

$$v^\alpha[\xi^\mu(s_1)] = v^\alpha[\xi^\mu(s_2)] = 0,$$

и вычислим S на варьированной кривой

$$\widetilde{\xi}^\mu = \xi^\mu + v^\mu dt.$$

Путем рассуждений, аналогичных [3, стр. 136], найдем

$$\tilde{S} = \int L(\Psi^A + D_L \Psi^A dt, g_{\mu\nu} + D_L g_{\mu\nu} dt, \frac{d\xi^\mu}{ds}) d\tilde{s},$$

где D_L — производная Ли относительно v^μ [3, стр. 115],

$$d\tilde{s} = \sqrt{(g_{\alpha\beta} + D_L g_{\alpha\beta}) d\xi^\alpha d\xi^\beta} = ds \left(1 + \frac{1}{2} u^\alpha u^\beta D_L g_{\alpha\beta} dt \right), \quad (4)$$

$$u^\mu = \frac{d\xi^\mu}{ds},$$

$$\frac{d\xi^\mu}{d\tilde{s}} = u^\mu \frac{ds}{d\tilde{s}} = u^\mu \left(1 - \frac{1}{2} u^\alpha u^\beta D_L g_{\alpha\beta} dt \right). \quad (5)$$

Подставляя (4) и (5) в (3), найдем

$$\begin{aligned} \delta S = dt \int & \left[\frac{\partial L}{\partial \Psi^A} D_L \Psi^A + \frac{\partial L}{\partial g_{\alpha\beta}} \times \right. \\ & \left. \times D_L g_{\alpha\beta} + \frac{1}{2} \left(L - \frac{\partial L}{\partial u^\sigma} u^\sigma \right) u^\alpha u^\beta D_L g_{\alpha\beta} \right] ds. \end{aligned} \quad (6)$$

Выражение (6) для вариации действия справедливо при любой аффинной связности, а также и в неголономных системах координат.

Для получения из $\delta S = 0$ ковариантного дифференциального уравнения запишем два вспомогательных равенства:

$$-\frac{\partial L}{\partial \Psi^A} \overset{m}{d}\Psi^A = \frac{\partial L}{\partial g_{\alpha\beta}} \overset{m}{d}g_{\alpha\beta} + \frac{\partial L}{\partial u^\alpha} \frac{dv^\alpha}{ds} dt, \quad (7)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \Psi^A} \overset{\cdot}{d}\Psi^A = -\frac{\partial L}{\partial g_{\alpha\beta}} \overset{\cdot}{d}g_{\alpha\beta} - \frac{\partial L}{\partial u^\alpha} \overset{\cdot}{d}u^\alpha, \quad (8)$$

где $\overset{m}{d}$ — разность значений увлеченного поля в точке $\xi^\mu + v^\mu dt$ и естественного в ξ^μ , а $\overset{\cdot}{d}$ — разность между значением поля, псевдопараллельного смещенного в точку $\xi^\mu + v^\mu dt$ и естественного в ξ^μ (см. [4, стр. 136]). Равенства (7) и (8) получаются соответственно из

$$\overset{m}{d}L = 0 \quad \text{и} \quad \overset{\cdot}{d}L = 0$$

в силу инвариантности L . Далее, согласно [4, стр. 137]:

$$dt \underset{L}{D} \equiv \delta - \overset{m}{d} = \delta + \overset{\cdot}{d} - \overset{m}{d}, \quad (9)$$

$$\frac{dv^\mu}{ds} dt - \overset{\cdot}{d}u^\mu = u^\alpha (\nabla_\alpha v^\mu - 2S_{\alpha\beta}{}^\mu v^\beta) dt, \quad (10)$$

$$\underset{L}{D} g_{\mu\nu} = v^\alpha \nabla_\alpha g_{\mu\nu} + 2g_{\alpha(\mu} \nabla_{\nu)} v^\alpha - 4g_{\beta(\mu} S_{\nu)\alpha}{}^\beta v^\alpha, \quad (11)$$

где тензор кручения

$$S_{\kappa\lambda}{}^\mu \equiv \Gamma_{[\kappa\lambda]}^\mu + \Omega^\mu{}_{\kappa\lambda} \quad (12)$$

равен антисимметричной части коэффициентов аффинной связности плюс объект неголономности [4, стр. 82].

Комбинируя (7), (8), (9) и (10), имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \Psi^A} \delta \Psi^A + \frac{\partial L}{\partial g_{\alpha\beta}} \delta g_{\alpha\beta} &= \frac{\partial L}{\partial \Psi^A} \delta \Psi^A + \\ + \frac{\partial L}{\partial g_{\alpha\beta}} \delta g_{\alpha\beta} + \frac{\partial L}{\partial u^\beta} u^\alpha (\nabla_\alpha v^\beta - 2S_{\alpha\sigma}{}^\beta v^\sigma) dt. \end{aligned} \quad (13)$$

Подставляя (11) и (13) в (6), находим

$$\begin{aligned} \delta S &= dt v^\alpha P_\alpha |_{s_2}^{s_1} + dt \int v^\alpha \left\{ \frac{\partial L}{\partial \Psi^A} \nabla_\alpha \Psi^A + \right. \\ &+ \nabla_\alpha g_{\mu\nu} \left[\frac{\partial L}{\partial g_{\mu\nu}} + \frac{1}{2} u^\mu u^\nu \left(L - \right. \right. \\ &\left. \left. - \frac{\partial L}{\partial u^\sigma} u^\sigma \right) \right] - 2u^\sigma S_{\sigma\alpha}{}^\kappa P_\kappa - \frac{\delta P_\alpha}{\delta s} \left. \right\} ds. \end{aligned}$$

В результате искомые уравнения движения:

$$\begin{aligned} \frac{\delta P_\mu}{ds} &= \frac{\partial L}{\partial \Psi^A} \nabla_\mu \Psi^A - Q_{\mu\alpha\beta} \left[\frac{\partial L}{\partial g_{\alpha\beta}} + \right. \\ &+ \frac{1}{2} u^\alpha u^\beta \left(L - \frac{\partial L}{\partial u^\sigma} u^\sigma \right) \left. \right] - 2u^\sigma P_\beta S_{\sigma\mu}{}^\beta, \end{aligned}$$

где P_μ сохраняет вид (2), а

$$Q_{\mu\alpha\beta} \equiv -\nabla_\mu g_{\alpha\beta}.$$

3. Некоторые следствия.

а) Свободная частица

$$\begin{aligned} L &= -m, \quad P_\mu = -m u_\mu, \\ \frac{\delta u_\mu}{ds} &= \left(2S_{\mu\alpha\beta} - \frac{1}{2} Q_{\mu\alpha\beta} \right) u^\alpha u^\beta. \end{aligned}$$

Таким образом, свободная частица в пространстве с кручением не движется по геодезической!

б) Скалярная частица

$$\begin{aligned} L &= -m + k\Phi, \\ P_\mu &= (-m + k\Phi) u_\mu, \\ \frac{\delta u_\mu}{ds} &= \frac{k}{m - k\Phi} (u^\lambda u_\mu - \delta_\mu^\lambda) \frac{\partial \Phi}{\partial x^\lambda} + \\ &+ u^\alpha u^\beta \left(2S_{\mu\alpha\beta} - \frac{1}{2} Q_{\mu\alpha\beta} \right). \end{aligned}$$

в) Заряд в электромагнитном поле при метрическом перенесении ($Q_{\mu\alpha\beta} = 0$)

$$\begin{aligned} L &= -m + e A_\mu u^\mu, \\ P_\mu &= -m u_\mu + e A_\mu, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\delta u_\mu}{ds} &= 2 \frac{e}{m} (\nabla_{[\sigma} A_{\mu]} + S_{\sigma\mu}{}^\beta A_\beta) u^\sigma + 2u^\alpha u^\beta S_{\mu\alpha\beta} = \\ &= 2 \frac{e}{m} (\partial_{[\sigma} A_{\mu]} + \Omega^\beta{}_{\sigma\mu} A_\beta) + 2u^\alpha u^\beta S_{\mu\alpha\beta}. \end{aligned}$$

Автор признателен профессору А. Е. Левашеву за эффективную помощь в работе.

Литература

1. Минкевич А. В., Сокольский А. А. Весті АН БССР, сер. фіз.-мат. навук, № 4, 1967.
2. Trautman A. Bull. Acad. Polon. Sci., III, 5, 721, 1957.
3. Схоутен Я. А. Тензорный анализ для физиков. М., 1965.
4. Схоутен Я. А., Стройк Д. Дж. Введение в новые методы дифференциальной геометрии, т. 1. ГОНТИ, М., 1939.

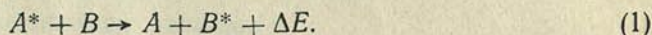
Белорусский государственный университет
им. В. И. Ленина

Поступило в редакцию 5.VII 1968

Л. Н. ОРЛОВ, Г. С. РОМАНОВ, В. С. РУБАНОВ

ВЛИЯНИЕ ТЕМПЕРАТУРЫ ГАЗА НА РЕЗОНАНСНУЮ ПЕРЕДАЧУ ЭНЕРГИИ ПРИ АТОМНЫХ СТОЛКНОВЕНИЯХ

В смеси газов, имеющих близко расположенные возбужденные уровни, может происходить резонансная передача энергии возбуждения при столкновениях:



Здесь A и B — невозбужденные атомы газов, звездочкой помечены атомы тех же газов в возбужденном состоянии; ΔE — разница в энергиях возбуждения уровней.

Этот процесс играет в ряде случаев существенную роль в заселении уровней и, в частности, в создании инверсии в генерирующих смесях типа гелий-неоновой. Частота столкновений с передачей

$$K = \gamma n_{A^*} \cdot n_B, \quad (2)$$

где n_{A^*} и n_B — число возбужденных атомов A^* и невозбужденных B соответственно в единице объема. Коэффициент пропорциональности γ определяется природой взаимодействующих атомов и условиями, в которых находится смесь, а его величина характеризует эффективность передачи энергии.

Величина γ связана с эффективным сечением передачи σ соотношением:

$$\gamma = \int_0^{\infty} \sigma(v) v \rho(v) dv, \quad (3)$$

где v — скорость относительного движения сталкивающихся частиц, а $\rho(v)$ — распределение по скоростям относительного движения.

Если для частиц того и другого сорта имеет место максвелловское распределение частиц по скоростям поступательного движения с одинаковой температурой T , то

$$\rho(v) = 4\pi \left(\frac{\mu}{2\pi kT} \right)^{3/2} e^{-\mu v^2/2kT} v^2, \quad (4)$$

где μ — приведенная масса сталкивающихся частиц.

Подставляя (4) в (3), получаем:

$$\gamma = 4\pi \left(\frac{\mu}{2\pi kT} \right)^{3/4} \int_0^{\infty} \sigma(v) v^3 e^{-\mu v^2/2kT} dv. \quad (5)$$

Легко видеть, что γ является функцией температуры газа. Поскольку σ зависит не только от скорости, но и от разницы в энергиях возбуждения уровней ΔE , то γ является также функцией ΔE .

Для анализа величины γ воспользуемся зависимостью $\sigma(\nu)$, полученной Штюкельбергом [1],

$$\sigma = \pi \left(\frac{C}{|\Delta E|} \right)^{2/3} f(X), \quad (6)$$

где

$$X = \frac{(\Delta E)^{\frac{s-1}{s}} \cdot C^{1/s}}{\hbar \nu}, \quad (7)$$

$f(X)$ — некоторая функция, заданная графически и не имеющая, вообще говоря, аналитического выражения, а C и s — постоянные, значения которых зависят от свойств взаимодействующих уровней.

Если взаимодействующие уровни обоих атомов связаны оптически с основными уровнями, то порядок величины C определяется равенством:

$$C = M^2, \quad (8)$$

где M — дипольный момент, связанный с оптическим переходом, который происходит в каждом атоме.

Если процесс передачи сопровождается переходами, связанными в каждом атоме с квадрупольным моментом, то

$$C \cong \frac{\nu^2}{e^2}, \quad (9)$$

где ν имеет тот же порядок величины, что и M^2 в выражении (8), а e — заряд электрона.

В первом случае $s=3$, во втором $s=5$. Вообще

$$s = p + q + 1, \quad (10)$$

где p — порядок электрического момента, связанного с переходом в первом атоме, а q — во втором.

Функция $f(X)$ имеет простое по виду асимптотическое выражение, пригодное во многих практически важных случаях:

$$f(X) = 32N_3 X^{s-1} e^{-2X}, \quad X \gg 1, \quad (11)$$

где N_3 — коэффициент, по порядку величины равный единице, зависящий от S . Нетрудно показать, что условие применимости выражения (11) выполняется достаточно хорошо для ΔE порядка нескольких сотых электронвольт до температур порядка тысяч градусов. Подставив (11) в (5) и оценив входящий в (5) интеграл по методу «перевала» [2], получаем [3]:

$$\gamma = \frac{128}{\sqrt{3}} \left(\frac{M}{2kT} \right)^{-\frac{1}{3}} \times \\ \times \frac{C^{\frac{2s+7}{3s}}}{\hbar^{\frac{2s+1}{3}}} |\Delta E|^{\frac{2s^2-s-7}{3s}} e^{-3 \left(\frac{M}{2kT} \right)^{1/3} \left(\frac{\Delta E \frac{s-1}{s} C}{\hbar} \right)^{2/3}}. \quad (12)$$

При вычислении интеграла сделан ряд приближений. Оценка этих приближений показывает, что погрешность Δ при расчете по формуле (12) определяется выражением:

$$\Delta = 0(e^{-\lambda}) + 0 \left(e^{-\frac{\lambda^2}{2}} \right). \quad (13)$$

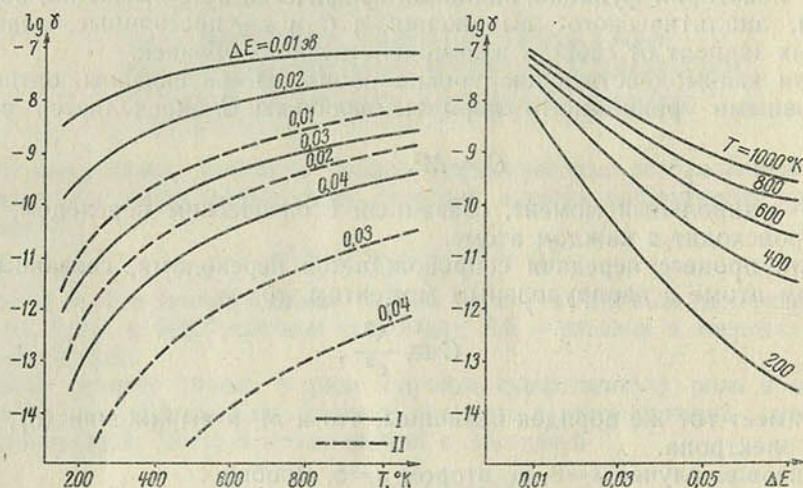
где $\lambda = f(\nu_0) - f(2\nu_0) = (2\alpha\beta^2)^{1/6}$

Как видно из (13), для ΔE порядка 0,04 эв и T порядка 600°K погрешность расчета по формуле (12) составляет 0,4%.

Из выражения (12) видно, что γ сильно (как $e^{\frac{-q}{T^{1/3}}}$) растет с увеличением температуры и падает с ростом q .

Сильная температурная зависимость объясняется следующими причинами.

Согласно расчетам Штюкельберга, зависимость сечения передачи от скорости носит резонансный характер. Максимальной величины сечение



Зависимость удельной вероятности передачи энергии при столкновениях от температуры (а) и от разности энергий возбуждения уровней (б):

I—S=4; II—S=6

достигает тогда, когда скорость становится сравнимой с параметром

$$v_{\text{опт}} = \frac{\Delta E^{\frac{s-1}{s}} C^{1/3}}{h} \quad (14)$$

При этом $X = 1$ и $f(X) = f^{\text{max}}$.

Обычно оптимальная скорость, определяемая (14), гораздо выше скорости теплового движения частиц газа и поэтому увеличение температуры газа создает более выгодные условия для передачи.

Что касается зависимости γ от ΔE , она объясняется тем, что передача энергии носит резонансный характер — эффективное сечение передачи тем больше, чем меньше ΔE .

На рисунке приведены графики зависимостей $\gamma(T)$ и $\gamma(\Delta E)$, рассчитанные по формуле (12) при значениях параметров, близких к тем, которые характерны для разряда в смеси He—Ne. Графики обнаруживают сильный рост величины γ с увеличением температуры и с уменьшением ΔE .

Сопоставление результатов расчета с экспериментальными данными по сечению передачи при столкновениях метастабильных атомов He (2^1S и 2^3S) с атомами неона показывает, что выражение (6) и, как следствие, (12) дают заниженные по абсолютной величине значения.

Поэтому (12) следует рассматривать лишь как выражение, описывающее характер зависимости эффективности передачи от температуры и расстояния между уровнями. Для их количественного описания сле-

дует производить нормировку расчетных зависимостей по экспериментальным данным.

Следует отметить, что выражение (12) позволяет рассчитывать также зависимость $\gamma(\mu)$, описывающую влияние изотопного состава смеси на эффективность передачи.

Литература

1. Stueckelberg. Helv. Phys. Acta, 5, 370, 1932.
2. Морс Ф., Фешбах Г. Методы теоретической физики, т. 1. ИЛ, 1958; Лаврентьев М., Шабат Б. Методы теории функций комплексного переменного. Физматгиз, 1958.
3. Рубанов В. С. Кандидатская диссертация. Минск, 1964.

Институт физики АН БССР

Поступило в редакцию 9. IX 1968

А. Д. АНДРЕЕВ, И. Г. НЕКРАШЕВИЧ, В. И. ПОПКО

ВОЛЬТАМПЕРНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ КОНТАКТА СЕЛЕН — ПЛАЗМА ПРИ НАЛИЧИИ МЕТАЛЛИЧЕСКОЙ СЕТКИ НА ПОВЕРХНОСТИ СЕЛЕНА

Величина тока, протекающего через контакт плазмы тлеющего разряда и слоя аморфного селена при постоянной величине приложенного напряжения, уменьшается со временем. Это указывает на эмиссию носителей заряда из плазмы и захват их в слое селена ловушками при минимальном вкладе процессов ударной ионизации [1].

В данной работе рассматриваются вольтамперные характеристики контакта плазмы тлеющего разряда со слоем аморфного селена в режиме управления величиной тока, протекающего через этот контакт.

Схема измерений приведена на рис. 1. Тлеющий разряд возбуждался в стеклянной камере 1 размером $20 \times 20 \times 10$ мм. Камера находилась

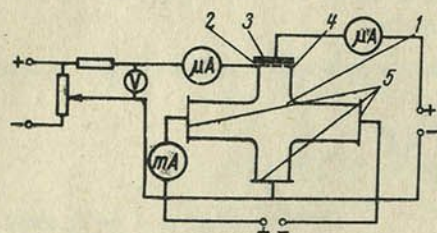


Рис. 1. Схема экспериментального устройства:

1 — газоразрядная камера, 2 — слой селена, 3 — алюминиевая подложка, 4 — металлическая сетка, 5 — медные электроды

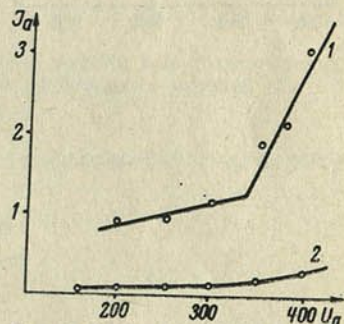


Рис. 2. Вольтамперная характеристика контакта плазма — селен при напряжении на сетке +100 в:

1 — прямая, 2 — обратная; I_a ($a \times 10^{-8}$), U_a (в)

под непрерывной откачкой, давление воздуха регулировалось с помощью игольчатого натекателя в пределах $2 \cdot 10^{-2}$ —10 мм рт. ст. Контакт плазмы тлеющего разряда с поверхностью слоя селена 2 осуществлялся через боковое окно в камере. Площадь контакта составляла $7,8 \cdot 10^{-5}$ м². Применялись слои аморфного селена толщиной ~ 50 мк и удельным сопротивлением, превышающим 10^8 ом · см, нанесенные из паровой фазы на висмутированную алюминиевую подложку 3. Для управления током, протекающим через контакт, применялась металлическая сетка 4. Сетка вплотную прилегала к поверхности слоя селена и уменьшала активную площадь контакта на 10%. Измерения проводились по истечении промежутка времени, достаточного для установления тока через контакт, мало изменяющегося со временем. Резкое уменьшение тока наблюда-

лось только в течение первых 15 сек. Далее это уменьшение становилось малозаметным.

На рис. 2 приведена вольтамперная характеристика контакта плазма — селен. Как видно из этого рисунка, кривая имеет перегиб, характерный для токов, ограниченных пространственным зарядом. Перегиб, наблюдаемый на вольтамперной характеристике, соответствует заполнению определенного энергетического уровня при $U_{TFL} = 350$ в. Концентрация ловушек определялась в предположении, что основную роль мо-

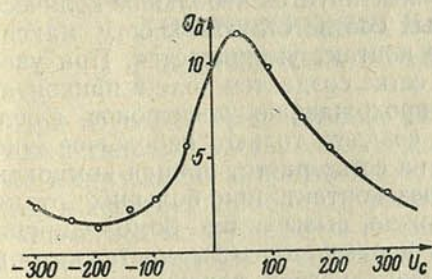


Рис. 3. Зависимость тока через контакт плазма — селен I_a ($a \cdot 10^{-6}$) от напряжения на сетке U_c (в) при напряжении на контакте $U_a = 400$ в

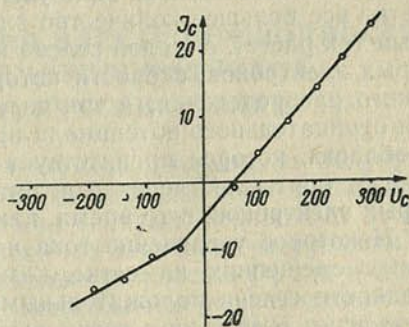


Рис. 4. Зависимость сеточного тока J_c ($a \cdot 10^{-6}$) от напряжения на сетке U_c (в) при напряжении на контакте $U_a = 400$ в

жет играть один уровень захвата; тогда $U_{TFL} = \frac{ed^2N_t}{\epsilon}$ [2], где e — заряд электрона, d — толщина слоя селена, N_t — концентрация ловушек, ϵ — диэлектрическая проницаемость селена. Концентрация ловушек, определенная по этой формуле, составляет $8,8 \cdot 10^{13}$ см⁻³. Если предположить, что в слой селена из плазмы инжектируются электроны, то можно рассчитать величину коэффициента захвата и глубину залегания уровней захвата. Для этой цели используем выражение для тока, протекающего через пленочную систему [2],

$$I = S \mu \epsilon \Theta \frac{U^2}{d^3}, \quad (1)$$

где степень заполнения ловушек

$$\Theta = \frac{N_c}{N_t} \exp\left(-\frac{E_t}{kT}\right), \quad (2)$$

S — площадь контакта, μ — подвижность носителей заряда, U — приложенное внешнее напряжение, N_c — эффективная плотность квантовых состояний в зоне проводимости, E_t — энергия уровней захвата, k — постоянная Больцмана, T — абсолютная температура.

При комнатной температуре для аморфного селена подвижность электронов $\mu = 8 \cdot 10^{-3}$ см² · в⁻¹ · сек⁻¹, диэлектрическая проницаемость $\epsilon = 6$ и эффективная плотность квантовых состояний $N_c = 10^{20}$ см⁻³ [3]. Измеряя величину стационарного тока в области напряжений ниже TFL , находим по формуле (1) степень заполнения ловушек ($\sim 10^{-3}$) и далее из (2) определяем энергию уровней захвата ($\sim 0,5$ эв).

Контакт плазмы и слоя селена обладает униполярной проводимостью. Изменяя напряжение на сетке 4 (рис. 1), можно изменять величину тока, протекающего через контакт. На рис. 3 представлена зависимость величины тока I_a через контакт от величины напряжения, при-

ложенного к сетке. Как видно из этой зависимости, величина тока имеет максимум при положительном напряжении, равном 60 в. При достаточно высоких отрицательных смещениях, подаваемых на сетку, наблюдается некоторое увеличение тока. На рис. 4 дана зависимость сеточного тока от сеточного напряжения. Как видно из рис. 3 и 4, максимальный ток через контакт плазмы и слоя селена имеет место при нулевом токе на сетку. Коэффициент усиления данного устройства составляет ~ 2 . Эффективность управления величиной тока снижается за счет больших сеточных токов. При увеличении положительного потенциала на сетке все большее количество электронов осаждается на сетке, и сеточный ток растет, а в слой селена инжектируется небольшое количество быстрых электронов, скорости которых соответствуют хвосту максвелловского распределения, и ток через контакт уменьшается. При увеличении отрицательного потенциала на сетке создается поле в приконтактной области, которое препятствует прохождению электронов к слою селена, и опять ток через контакт создает только небольшое число быстрых электронов, в то время как на сетке растет ионная компонента тока. Некоторое увеличение тока через контакт при больших отрицательных смещениях на сетке, возможно, вызывается бомбардировкой поверхности селена положительными ионами плазмы, часть которых, пройдя через отверстия в сетке, вызывает нагрев поверхностного слоя селена и увеличение в нем концентрации свободных носителей заряда.

Литература

1. Višćakas J., Mačkus P., Smilga A. Phys. Status Solidi, 25, № 1, 331, 1968.
2. Вопросы пленочной электроники. Под ред. Д. В. Зернова и др. «Советское радио», 1966.
3. J. L. Hartke. Phys. Rev., 125, 1177, 1962.

Белорусский государственный университет
им. В. И. Ленина

Поступило в редакцию 1. VII 1968

УДК 537.226+537.312.7

М. Я. РЕЗНИКОВ, В. А. ЛАПШИН, Н. Г. ЛОБАЧ

УСТАНОВКА ДЛЯ ИЗМЕРЕНИЯ ЭЛЕКТРОПРОВОДНОСТИ ДИЭЛЕКТРИКОВ И ПОЛУПРОВОДНИКОВ В СИЛЬНЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ПОЛЯХ

При изучении проводимости диэлектриков и некоторых полупроводников в сильных электрических полях необходимо пользоваться короткими импульсами напряжения, так как сильный постоянный ток приводит к нагреванию образца вплоть до его теплового разрушения.

Известные по литературе механические устройства [3] для получения импульсов высокого напряжения оказываются непригодными из-за искрения контактов, возникающего уже при напряжении в несколько сотен вольт. Электронные устройства, применявшиеся некоторыми авторами [4, 5], оказываются непригодными по ряду важных причин. Например, устройство [1] не дает отдельных импульсов.

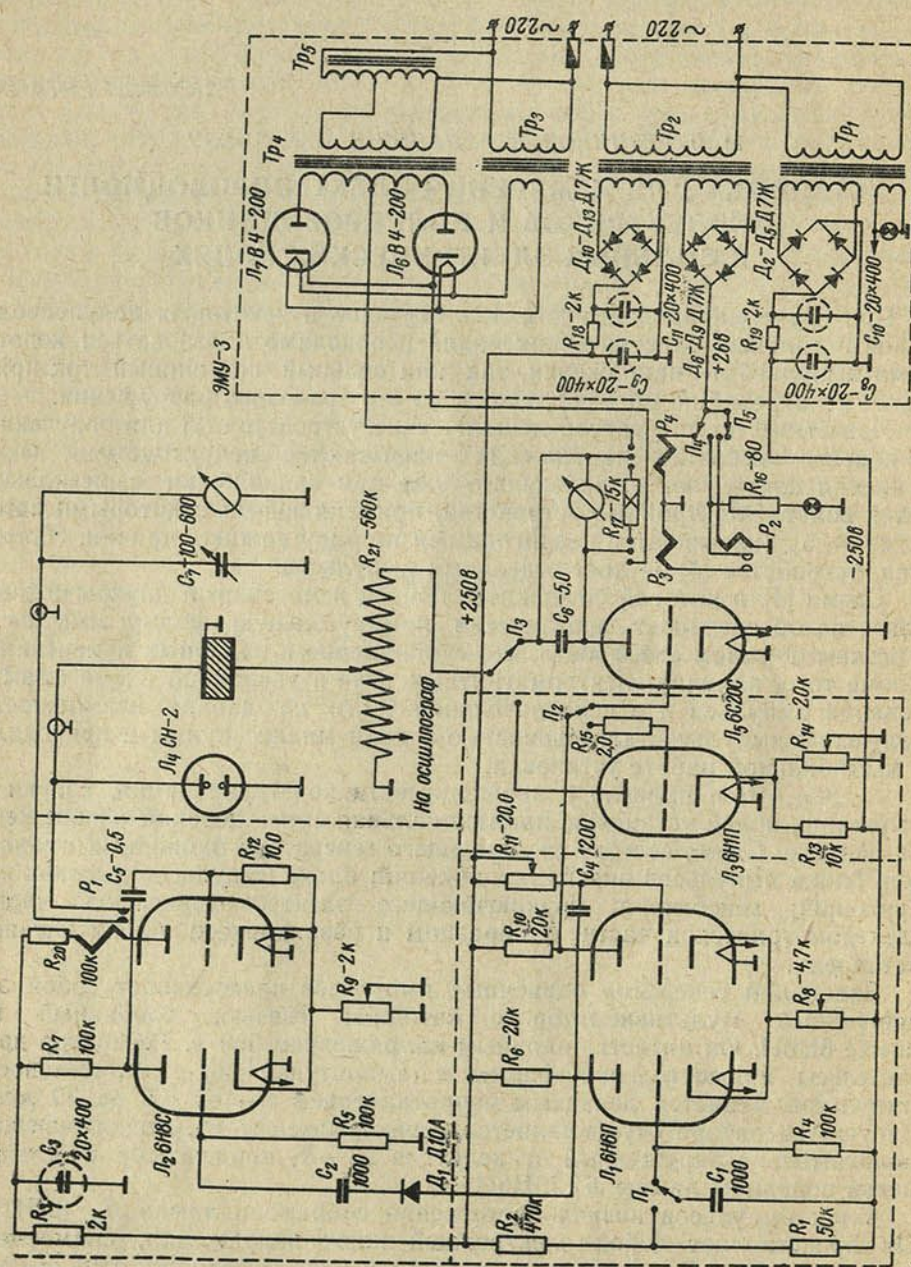
Схема [4], в которой содержится пентод и массивный двухрычажный ключ, не обеспечивает практически прямоугольную форму импульса, с резким обрывом его фронта, что существенно в подобных измерениях. Кроме того, наличие электромагнитных реле в указанной схеме формирования импульса и в исполнительной части не давало возможности получения импульсов длительностью в доли миллисекунды и приводило к нестабильной работе установки.

Все это и привело к необходимости конструирования, сборки и испытания новой установки, принципиальная схема которой изображена на рисунке. Схема состоит из задающего генератора одиночных импульсов; блока импульсов низких напряжений; блока импульсов высоких напряжений; генератора, подключающего электрометрическую часть; электрометрической части с образцом и разрядником; блока питания установки.

Задающий генератор одиночных импульсов представляет собой задержанный мультивибратор с катодной связью, собранный на лампе 6Н6П. Он питается анодным напряжением 500 в. Генератор дает импульсы прямоугольной формы с амплитудой 430 в. Длительность импульсов меняется декадным сопротивлением R_{11} от 0,5 до 30 мсек. Запуск генератора осуществляется переключателем Π_1 , подключающим положительно заряженный от делителя R_1-R_2 конденсатор C к сетке левой половины лампы L_1 (6Н6П).

Блок импульсов низких напряжений собран на лампе L_3 (6Н1П). Он представляет собой электронный ключ напряжения, снимаемого с делителя $R_{13}-R_{14}$. Амплитуда импульсов плавно меняется от 0 до 120 в при помощи переменного сопротивления R_{14} . В отсутствие импульса лампа заперта отрицательным напряжением -180 в. Для ограничения сеточного тока лампы во время импульса в цепь сетки лампы включено сопротивление R_{15} .

Блок импульсов высокого напряжения собран на лампе L_5 (6С20С). В аноде лампы стоит высоковольтный конденсатор большой емкости C_6 ,



Установка для измерения электропроводности диэлектриков и полупроводников в сильных электрических полях

который во время импульса заряжается через декадное сопротивление и лампу L_5 . В отсутствие импульса лампа L_5 закрыта отрицательным напряжением -180 в, что препятствует разрядке конденсатора C_6 . Для запираия лампы 6С20С на сетку достаточно подавать -20 в. Однако для того чтобы можно было применять другие типовые лампы, схема составлена таким образом, что на сетку подано отрицательное напряжение -180 в, которого достаточно для запираия мощных генераторных триодов с анодным питанием до 10 кВ.

Напряжение на конденсатор C_6 измеряется киловольтметром. При необходимости и для безопасности работы со схемой конденсатор C_6 при помощи реле P_3 и P_4 может присоединяться для разряда к остеклованному десятиваттному сопротивлению R_{17} .

Генератор, подключающий электрометрическую часть, собран на лампе 6А8С и служит для отъединения на $3-4$ сек электрометрической части от образца после прохождения через него импульса. Запуск генератора осуществляется задним фронтом импульса задающего генератора через диод Д10А и переходной конденсатор C_2 .

Электрометрическая часть состоит из измерительного конденсатора переменной емкости C_7 , лампового электрометра ЭМУ-3, образца с разрядником, введенным в схему для предотвращения выхода из строя электрометра в случае пробоя образца.

Низковольтный блок питания состоит из двух выпрямителей на 300 в, включенных по схеме сложения напряжений, и служит для получения напряжения накала.

Блок высокого напряжения состоит из высоковольтного выпрямителя (до 10 кВ), собранного на трансформаторе и кенотроне В4-200, низковольтного трансформатора, питающего цепь накала кенотрона, и отдельного выпрямителя на 24 в, питающего реле схемы.

Работа схемы. Импульс высокого напряжения получается при разряде конденсатора C_6 при открытой лампе L_5 . В исходном состоянии закрыты левые половины ламп L_1 и L_2 , а также лампа L_5 , конденсатор C_6 заряжен, контакты реле P_1 замкнуты. Для подачи импульса конденсатор C_1 , заряженный от делителя R_1-R_2 тумблером, переключается на сетку левой половины лампы L_1 и запускает мультивибратор. На его выходе появляется положительный импульс, который подается на сетку лампы L_5 . Лампа на время импульса открывается и, кроме того, вводится в режим насыщения, что необходимо для постоянства тока разряда конденсатора C_6 через сопротивление R_{21} и саму лампу.

Постоянство тока разряда конденсатора через сопротивление определяет собой постоянство падения напряжения, снимаемого с этого сопротивления на исследуемый образец. При подаче напряжения на образец ток, проходящий через образец, заряжает измерительный конденсатор C_7 . Во время импульса контакты реле P_1 остаются замкнутыми. По окончании импульса положительный перепад напряжения, образующийся в левом аноде лампы L_1 , через диод и переходной конденсатор подается на сетку закрытой левой половины лампы L_2 и запускает второй генератор. Ток через обмотку реле P_1 прекращается. Контакты реле на $3-4$ сек размыкаются, предотвращая разряд измерительного конденсатора C_7 . Затем схема вновь возвращается в исходное состояние. При помощи переключателя P_4 и реле P_3 , P_4 конденсатор C_6 подключается к высоковольтному выпрямителю и заряжается до необходимого напряжения.

Форма импульса, амплитуда и длительность контролируются осциллографом С1-19. Работа схемы в режиме импульсов низких напряжений отличается от работы в режиме импульсов высоких напряжений только

источником напряжения и тем, что электронным выключателем этого напряжения является другая лампа схемы L_3 . Импульсы низкого напряжения снимаются с делителя $R_{13}-R_{14}$ при открывании лампы L_3 .

В монтажном решении схема выполнена отдельными блоками на общем шасси, причем применение в электрометрической части схемы высокочувствительного электрометра ЭМУ-3 потребовало тщательной экранировки всех блоков. Вся высоковольтная часть (повышающий трансформатор Tr_4 , высоковольтные кенотроны В4-200, разрядный конденсатор C_6 , реле разрядки P_3, P_4 с сопротивлением R_{17}) собрана в отдельной секции установки.

Контрольные испытания установки проводились на всех диапазонах длительностей и амплитуд на постоянных известных высокоомных сопротивлениях. Ошибка результатов не превышала 10%, причем с повышением сопротивления образцов точность увеличивается.

В качестве испытания установки измерялась также электропроводность слюды. Полученные нами результаты хорошо согласовывались с данными других авторов [6, 7].

Выводы

Сконструированная и испытанная установка оказалась вполне приемлемой для измерений электропроводности диэлектриков и полупроводников в сильных электрических полях. Она позволяет подавать на образец высокое напряжение до 10 кВ микросекундной длительности строго прямоугольной формы с резким отрывом заднего фронта.

Управление установкой, благодаря рациональному расположению отдельных блоков и применению электронных устройств, удобно, легко и просто. Работа установки стабильна и дает воспроизводимые результаты измерений.

Литература

1. Иоффе А. В., Иоффе А. Ф. Влияние поля на электропроводность полупроводников. ЖЭТФ, т. 9, 1939, 1451—1458.
2. Иоффе А. В., Иоффе А. Ф. Полупроводники в сильных полях и их выпрямительные свойства. Изв. АН СССР, сер. физ., 1, 5—6, 1938.
3. Наследов Д. Н., Малышев Е. Поляризационные явления в аморфном селене. ЖТФ, т. XV, 1946.
4. Шидловский М. К. Электропроводность аморфного селена в сильных электрических полях. ЖТФ, XXIV, 5, 1954.
5. Вендерович, Преснов, Черных. Сборник, посвященный 70-летию А. Ф. Иоффе. М., АН СССР, 1950.
6. Богородицкий Н. П., Малышев В. Н. ЖТФ, IV, 7, 1934.
7. Богородицкий Н. П., Пасынков В. В. Материалы в радиоэлектронике. М., Госэнергоиздат, 1961.

Белорусский Ордена Трудового Красного
Знамени государственный университет
имени В. И. Ленина

Поступило в редакцию 25. VI 1968

ПИСЬМО В РЕДАКЦИЮ

В моей статье «Максимальные разрешимые подгруппы $GL(4, P)$ » (№ 3, 1968 г.) второй абзац теоремы 3 следует сформулировать следующим образом:

Если в квадратичном расширении $P(\theta)$ поля P нет элементов четвертого порядка, но элемент (-1) представим в виде суммы двух квадратов из P , то в $GL(4, P)$ с точностью до сопряженности в ней имеется одна максимальная примитивная разрешимая подгруппа Γ'_2 (формула (9)), максимальный абелев нормальный делитель которой совпадает с мультипликативной группой поля $P(\theta)$; если же в $P(\theta)$ $-1 \neq \gamma_1^2 + \delta_1^2$, $\gamma_1, \delta_1 \in P$, но $-1 = \gamma^2 + \delta^2$, $\gamma, \delta \in P(\theta)$, то в $GL(4, P)$ с точностью до сопряженности в ней имеется одна максимальная примитивная разрешимая подгруппа, являющаяся максимальной примитивной разрешимой подгруппой группы $GL(2, P(\theta))$, максимальный абелев нормальный делитель которой совпадает с мультипликативной группой поля $P(\theta)$.

Г. П. ЖАВРИД

ХРОНІКА

АКАДЭМІІ НАВУК БССР — 40 ГОД

17 студзеня 1969 г. у памяшканні Дзяржаўнага ордэна Леніна Акадэмічнага Вялікага тэатра оперы і балета БССР сабраліся шматлікія прадстаўнікі партыйных і грамадскіх арганізацый, вышэйшых навучальных устаноў рэспублікі, навуковыя супрацоўнікі АН БССР, каб урачыста адзначыць 40-годдзе вядучай навуковай установы ў Беларусі — Акадэміі навук БССР.

На сходзе прысутнічалі Старшыня Савета Міністраў БССР Ц. Я. Кісялёў, сакратары ЦК КПБ Ф. А. Сурганаў, У. Ф. Міцкевіч, А. А. Смірноў, першы намеснік Старшыні Савета Міністраў БССР У. Е. Лабанок, першы сакратар Мінскага абкома КПБ І. Я. Палякоў, намеснік Старшыні Прэзідыума Вярхоўнага Савета БССР І. Ф. Клімаў, намеснікі Старшыні Савета Міністраў БССР У. Г. Каменскі, Р. Я. Кісялёў, Ф. Л. Қоханаў, загадчык аддзела ЦК КПБ М. Ф. Капіч.

Сярод гасцей — віцэ-прэзідэнт Акадэміі навук СССР акадэмік М. Д. Міліёншчыкаў, лаўрэат Нобелеўскай прэміі акадэмік А. М. Прохараў, члены-карэспандэнты АН СССР В. І. Гальданскі, М. А. Гаўрылаў, намеснік старшыні Савета па каардынацыі навуковай дзейнасці акадэміі навук саюзных рэспублік пры Прэзідыуме АН СССР В. Д. Новікаў.

Урачысты сход адкрыў прэзідэнт Акадэміі навук БССР член-карэспандэнт АН СССР, акадэмік АН БССР В. Ф. Купрэвіч.

Слова для прывітання ад імя Цэнтральнага Камітэта Кампартыі Беларусі атрымлівае сакратар ЦК КПБ тав. Ф. А. Сурганаў. Гаворачы аб бурным прагрэсе ва ўсіх галінах народнай гаспадаркі рэспублікі за гады Савецкай улады, тав. Ф. А. Сурганаў падкрэсліў, што ў значнай меры гэта стала магчымым дзякуючы дасягненням беларускай навукі. У ліку вядучых калектываў АН БССР тав. Ф. А. Сурганаў называе калектывы ордэна Працоўнага Чырвонага Сцяга Інстытута фізікі, інстытутаў цепла- і масаабмену, матэматыкі, ядзернай энергетыкі, тэхнічнай кібернетыкі, Аддзела механікі палімераў. Сур'езных поспехаў дасягнулі калектывы інстытутаў фізікі цвёрдага цела і паўправаднікаў, генетыкі і цыталогіі, фізіялогіі і інш.

Тав. Ф. А. Сурганаў зачытаў тэкст ластановы ЦК КПБ, Прэзідыума Вярхоў-

нага Савета, Савета Міністраў БССР і Беларускага рэспубліканскага савета прафсаюзаў аб узнагароджанні ў канун паўвекавага юбілею БССР і КПБ калектыву АН БССР Памятным сцягам і ўручыў сцяг прадстаўнікам акадэміі на вечнае захаванне ў Акадэміі навук БССР.

Павіншаваўшы навуковых супрацоўнікаў, аспірантаў, лабарантаў, рабочых і служачых АН БССР з высокай узнагародай, тав. Ф. А. Сурганаў выказаў упэўненасць, што калектыву акадэміі і ў далейшым будзе выкарыстоўваць свае веды і вопыт дзеля паспяховага вырашэння адказных задач, якія застаўлены перад савецкім народам XXIII з'ездам КПСС.

Намеснік Старшыні Прэзідыума Вярхоўнага Савета БССР І. Ф. Клімаў зачытаў Указ Прэзідыума Вярхоўнага Савета БССР аб узнагароджанні Акадэміі навук БССР Ганаровай граматай Вярхоўнага Савета БССР і ўручыў Грамату прэзідэнту АН БССР В. Ф. Купрэвічу.

З дакладам «Аб дзейнасці Акадэміі навук БССР за 40 год» выступіў прэзідэнт АН БССР член-карэспандэнт АН СССР, акадэмік АН БССР В. Ф. Купрэвіч. Дакладчык выказаў сардэчную ўдзячнасць Цэнтральнаму Камітэту КПБ, Вярхоўнаму Савету, Савету Міністраў БССР, Беларускаму рэспубліканскаму савету прафсаюзаў за высокую ацэнку вынікаў працы акадэміі і запэўніў іх у гатоўнасці калектыву АН БССР здзейсніць любое заданне Партыі і Урада ў справе развіцця навукі і тэхнікі на карысць нашага народа.

В. Ф. Купрэвіч расказаў далей аб гісторыі стварэння Акадэміі навук БССР, яе структуры і кадрах, галоўных напрамках даследаванняў.

Віцэ-прэзідэнт Акадэміі навук СССР акадэмік М. Д. Міліёншчыкаў павіншаваў вучоных АН БССР са святам ад імя АН СССР і прэзідэнта АН СССР акадэміка М. У. Келдыша. Ён адзначыў, што 40 год — тэрмін невялікі, але за гэты час АН БССР змагла ператварыцца ў буйны навуковы цэнтр Савецкага Саюза. Па цэламу раду навуковых напрамкаў АН БССР займае важнае месца не толькі ў Савецкім Саюзе, але і ў свеце. Гэта, напрыклад, даследаванні ў галінах оптыкі і квантавай электронікі, тэорыі дыферэнцыяльных ураў-

нення і алгебры, цепла- і масаабмену, тэхнічнай кібернетыкі, механікі палімераў і інш.

Акадэмік М. Д. Міліёншчыкаў перадаў прывітальны адрас ад Прэзідыума АН СССР і пажадаў вучоным АН БССР новых поспехаў у развіцці навукі.

З прывітаньнямі выступілі міністр вышэйшай і сярэдняй спецыяльнай адукацыі БССР М. М. Мяшкоў, міністр асветы БССР М. Г. Мінкевіч, нам. дырэктара Беларускага ордэна Леніна аўтамабільнага завода П. Б. Ніжнік, прарэктар Беларускай сельскагаспадарчай акадэміі доктар сельскагаспадарчых навук А. М. Брагін і інш.

АГУЛЬНЫ СХОД АКАДЭМІІ НАВУК БССР

21—22 студзеня 1969 г. адбылася сесія Агульнага сходу Акадэміі навук БССР, на якой праведзены выбары акадэмікаў і членаў-карэспандэнтаў, прэзідэнта, віцэ-прэзідэнтаў, галоўнага вучонага сакратара Прэзідыума, акадэмікаў-сакратароў аддзяленняў і членаў Прэзідыума АН БССР.

У першы дзень работы сесіі Агульнага сходу АН БССР акадэмікамі АН БССР былі выбраны:

Барысевіч Мікалай Аляксандравіч — па спецыяльнасці «оптыка»,

Канавалаў Яўменій Рыгоравіч — па спецыяльнасці «машынабудаванне»,

Смольскі Мікалай Уладзіслававіч — па спецыяльнасці «інтрадукцыя і акліматызацыя раслін»,

Краўчанка Іван Сяргеевіч — па спецыяльнасці «гісторыя СССР і БССР»,

Марцынкевіч Фелікс Станіслававіч — па спецыяльнасці «эканоміка»,

Барысенка Васілій Васільевіч — па спецыяльнасці «літаратуразнаўства»,

Членамі-карэспандэнтамі АН БССР выбраны:

Бойка Барыс Барысавіч — па спецыяльнасці «оптыка»,

Валодзька Леанід Вікенцьевіч — па спецыяльнасці «оптыка»,

Платонаў Уладзімір Пятровіч — па спецыяльнасці «матэматыка»,

Спрынджук Уладзімір Генадзьевіч — па спецыяльнасці «матэматыка»,

Лабанаў Яўгеній Міхайлавіч — па спецыяльнасці «актывацыйны аналіз»,

Саламатаў Ілья Ільіч — па спецыяльнасці «хімічнае апаратабудаванне»,

Яшчарыцын Пётр Іванавіч — па спецыяльнасці «машынабудаванне»,

Гаранскі Георгій Канстанцінавіч — па спецыяльнасці «тэхнічная кібернетыка»,

Кавалёў Іван Сідаравіч — па спецыяльнасці «радыёэлектроніка»,

Белы Уладзімір Аляксеевіч — па спецыяльнасці «механіка палімераў»,

Міцкевіч Мікалай Іванавіч — па спецыяльнасці «фізічная хімія»,

Старобінец Рыгор Лазаравіч — па спецыяльнасці «аналітычная хімія»,

У адрас Акадэміі навук БССР паступіла шмат прывітаньняў. Сярод іх — прывітанні Мінскага абкома КПБ, Мінскага гарвыканкома, РК КПБ Савецкага раёна г. Мінска, ЦК ЛКСМБ, Прэзідыума АН УССР, Саюза пісьменнікаў БССР, саюзных і рэспубліканскіх міністэрстваў, былых партызан Магілёўскай вобласці і інш.

Прэзідэнт Акадэміі навук БССР В. Ф. Купрэвіч горача падзякаваў за віншаванні і добрыя пажаданні, якія былі выказаны ў адрас калектыву АН БССР.

Альдэкоп Юрый Артуравіч — па спецыяльнасці «арганічная хімія»,

Ганчарык Міхаіл Мікалаевіч — па спецыяльнасці «фотасінтэз раслін»,

Саўчанка Мікалай Яўсеевіч — па спецыяльнасці «медыцына»,

Іпацьеў Аляксандр Мікалаевіч — па спецыяльнасці «селекцыя і раслінаводства»,

Кулакоўская Тамара Нікандраўна — па спецыяльнасці «аграхімія і глебазнаўства»,

Вядута Мікалай Іванавіч — па спецыяльнасці «эканоміка»,

Ігнаценка Іларыён Мяфодзьевіч — па спецыяльнасці «гісторыя СССР і БССР»,

Шабуня Канстанцін Іванавіч — па спецыяльнасці «гісторыя СССР і БССР»,

Буслаў Казімір Паўлавіч — па спецыяльнасці «філасофія»,

Лушчыцкі Іван Мікалаевіч — па спецыяльнасці «філасофія»,

Мацкевіч Юзефа Фларыянаўна — па спецыяльнасці «мовазнаўства»,

Выбраных акадэмікаў і членаў-карэспандэнтаў цепла і сардэчна вітаў Агульны сход АН БССР.

22 студзеня 1969 г. адбыўся Агульны сход акадэмікаў і членаў-карэспандэнтаў АН БССР па выбарах прэзідэнта Акадэміі навук Беларускай ССР. Прэзідэнтам АН БССР на новы тэрмін выбран член-карэспандэнт АН СССР, акадэмік АН БССР Купрэвіч Васілій Феафілавіч.

Ад імя Цэнтральнага Камітэта КПБ і Савета Міністраў БССР акадэміка АН БССР В. Ф. Купрэвіча з выбраннем яго на пост прэзідэнта АН БССР горача павіншаваў сакратар ЦК КПБ Ф. А. Сурганав. Ён пажадаў прэзідэнту, усяму калектыву вучоных акадэміі новых творчых поспехаў на славу нашай Савецкай Радзімы і айчынай навукі.

Акадэмік АН БССР В. Ф. Купрэвіч сардэчна падзякаваў удзельнікам Агульнага сходу за аказанае яму высокае давер'е і запэўніў, што вучоныя Акадэміі навук БССР і ў далейшым будуць павышаць эфектыўнасць навукова-даследчых работ, уносяць належны ўклад у будаўніцтва камунізму ў нашай краіне.

У гэты ж дзень на заключным пасяджэнні сесія Агульнага сходу выбрала віце-прэзідэнтамі АН БССР акадэмікаў АН БССР Атраховіча (Крапіву) Кандрата Кандратавіча, Барысевіча Мікалая Аляксандравіча. Галоўным вучоным сакратаром Прэзідыума выбран член-карэспандэнт АН БССР Махнач Аляксандр Сямёнавіч. Акадэмікамі-сакратарамі аддзяленняў выбраны:

Аддзялення фізіка-матэматычных навук — акадэмік АН БССР Фёдараў Фёдар Іванавіч.

Аддзялення фізіка-тэхнічных навук — акадэмік АН БССР Вінакураў Фёдар Пятровіч.

Аддзялення біялагічных навук — акадэмік АН БССР Несцяровіч Мікалай Дзмітрыевіч.

Аддзялення грамадскіх навук — акадэмік АН БССР Глебка Пётр Фёдаравіч.

Членамі Прэзідыума АН БССР выбраны акадэмікі АН БССР Красін Андрэй Капітонавіч, Сеўчанка Антон Нічыпаравіч, Скарапанаў Сцяпан Гардзевіч.

У рабоце сесіі Агульнага сходу Акадэміі навук БССР прынялі ўдзел сакратар ЦК КПБ С. А. Пілатовіч, намеснік Старшыні Савета Міністраў БССР Р. Я. Кісялёў, загадчык аддзела ЦК КПБ М. Ф. Капіч, нам. вучонага сакратара Савета па кардынацыі навуковай дзейнасці акадэміі навук саюзных рэспублік пры Прэзідыуме АН СССР У. М. Дваранаў.

З. П. ЯЦКЕВІЧ, А. У. ЯНГОЛЬ

ЗМЕСТ

Васіль Феофілавіч Купрэвіч

5

МАТЭМАТЫКА

И. З. Штокало. Важные исследования по проблемам дифференциальных уравнений	7
Хоанг Динь Зунг. Об устойчивости обратной краевой задачи для многосвязной области	33
В. Н. Абрашин. О сходимости метода прямых при решении некоторых квазилинейных краевых задач	38
А. К. Покало. Об одном классе линейных методов суммирования рядов Фурье дифференцируемых функций	43
В. И. Платонова, Л. К. Тутаев. К дифференциальной геометрии составного многообразия M_{22} в аффинном трехмерном пространстве	51
З. И. Бельский. Три-ткани с изотермическими, равнопутными, изогодезическими и полосатыми сетями Гессе	56

ФІЗІКА

А. В. Минкевич, Ф. И. Федоров. Тензорный вариационный метод и законы сохранения	64
Г. Э. Сусурин, О. С. Иваницкая. К сопоставлению калибровки тетрад Брежнева—Радынова с другими калибровками	74
Л. А. Барысаглебскі, С. В. Пазойскі. Да тэорыі структурных паправак у каэфіцыентах парнай канверсіі пры М1-пераходах ядраў	81
А. И. Комяк. К вопросу о симметрии возбужденных электронных состояний в кристаллах нитратов уранила	85
Л. Г. Никулик, М. Я. Костко, В. А. Яковенко. О спектральной зависимости затухания свечения флуоресценций сложных молекул	89
І. І. Пятроўскі, С. А. Рэқун, М. Ф. Меляшкевіч. Уплыў тэмпературы і некаторых прымесей на электрычныя ўласцівасці германіевых дыёдаў з адмоўным супраціўленнем	96

КАРОТКІЯ ПАВЕДАМЛЕННІ

Н. Н. Сирота, С. В. Сухвало. Кривые намагничения и намагниченность насыщения тонких пленок сплавов системы Fe—Ni—Co	106
Э. А. Васильев, Н. Н. Сирота. Нейтронографический фазовый анализ сплавов системы MnSb—MnBi	111
Л. Е. Загорин. О приводимых локально-нильпотентных группах матриц над телом вещественных кватернионов	115
А. А. Сокольский. Дифференциалы Ли и пробная релятивистская частица	118
Л. Н. Орлов, Г. С. Романов, В. С. Рубанов. Влияние температуры газа на резонансную передачу энергии при атомных столкновениях	122
А. Д. Андреев, И. Г. Некрашевич, В. И. Попко. Вольтамперные характеристики контакта селен—плазма при наличии металлической сетки на поверхности селена	126
М. Я. Резников, В. А. Лапшин, Н. Г. Лобач. Установка для измерения электропроводности диэлектриков и полупроводников в сильных электрических полях	129
Г. П. Жаврид. Письмо в редакцию	133

ХРОНІКА

З. П. Яцкевіч, А. У. Янголь. Акадэміі навук БССР — 40 год	134
Агульны сход Акадэміі навук БССР	135

СОДЕРЖАНИЕ

Василий Феофилович Купревич 5

МАТЕМАТИКА

И. З. Штокало. Важные исследования по проблемам дифференциальных уравнений	7
Хоанг Динь Зунг. Об устойчивости обратной краевой задачи для многосвязной области	33
В. Н. Абрашин. О сходимости метода прямых при решении некоторых квазилинейных краевых задач	38
А. К. Покало. Об одном классе линейных методов суммирования рядов Фурье дифференцируемых функций	43
В. И. Платонова, Л. К. Гутаев. К дифференциальной геометрии составного многообразия M_{22} в аффинном трехмерном пространстве	51
З. И. Бельский. Три-ткани с изотермическими, равнопутными, изогеодезическими и полосатыми сетями Гессе	56

ФИЗИКА

А. В. Минкевич, Ф. И. Федоров. Тензорный вариационный метод и законы сохранения	64
Г. Э. Сусурин, О. С. Иваницкая. К сопоставлению калибровки тетраэд Брежнева—Радынова с другими калибровками	74
Л. А. Борисоглебский, С. В. Позойский. К теории структурных поправок в коэффициентах парной конверсии при $M1$ -переходах ядер	81
А. И. Комяк. К вопросу о симметрии возбужденных электронных состояний в кристаллах нитратов уранила	85
Л. Г. Пикулик, М. Я. Костко, В. А. Яковенко. О спектральной зависимости затухания свечения флуоресценций сложных молекул	89
И. И. Петровский, С. А. Рекун, М. Ф. Мелешкевич. Влияние температуры и некоторых примесей на электрические свойства германиевых диодов с отрицательным сопротивлением	96

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

Н. Н. Сирота, С. В. Сухвало. Кривые намагничения и намагниченность насыщения тонких пленок сплавов системы Fe—Ni—Co	106
Э. А. Васильев, Н. Н. Сирота. Нейтронографический фазовый анализ сплавов системы MnSb—MnBi	111
Л. Е. Загорин. О приводимых локально-нильпотентных группах матриц над телом вещественных кватернионов	115
А. А. Сокольский. Дифференциалы Ли и пробная релятивистская частица	118
Л. Н. Орлов, Г. С. Романов, В. С. Рубанов. Влияние температуры газа на резонансную передачу энергии при атомных столкновениях	122
А. Д. Андреев, И. Г. Некрашевич, В. И. Попко. Вольтамперные характеристики контакта селен—плазма при наличии металлической сетки на поверхности селена	126
М. Я. Резников, В. А. Лапшин, Н. Г. Лобач. Установка для измерения электропроводности диэлектриков и полупроводников в сильных электрических полях	129
Г. П. Жаврид. Письмо в редакцию	133

ХРОНИКА

З. П. Яцкевич, А. В. Янголь. Академии наук БССР — 40 лет	134
Общее собрание Академии наук БССР	135

AT 02091. Здана ў набор 26/11-69 г. Надпісана да друку 25/IV-69 г. Фармат $70 \times 108^{1/16}$. Друк. арк. 9.0. Ум. друк. арк. 12.6. Уч.-выд. арк. 12.3. Выд. зак. 915. Друк. зак. 185. Цана 60 кап.

Друкарня імя Францыска (Георгія) Скарыны выдавецтва «Навука і тэхніка» АН БССР і Дзяржкамітэта АН БССР па друку. Мінск, Ленінскі праспект, 68

РЕФЕРАТЫ

УДК 517.9

Важные исследования по проблемам дифференциальных уравнений. Штокало И. З. «Весті Акадэміі навук БССР», серыя фізіка-матэматычных навук. 1969 г., № 2, 7—32.

В статье подробно и достаточно полно изложены научные достижения Н. П. Еругина в различных областях дифференциальных уравнений и математического анализа.

УДК 517.544

Об устойчивости обратной краевой задачи для многосвязной области. Хоанг Динь Зунг. «Весті Акадэміі навук БССР», серыя фізіка-матэматычных навук. 1969 г., № 2, 33—37.

Рассматривается устойчивость обратной краевой задачи аналитических функций для случая многосвязных областей. На основе устойчивости задачи Дирихле и общей теории конформных отображений последовательности многосвязных областей доказана устойчивость задачи для этого случая.

Библиографий 6.

УДК 518 : 517 944(947)

О сходимости метода прямых при решении некоторых квазилинейных краевых задач. Абрашин В. Н. «Весті Акадэміі навук БССР», серыя фізіка-матэматычных навук. 1969 г., № 2, 38—42.

Рассмотрена одна схема метода прямых повышенной точности при решении некоторых краевых задач для квазилинейных уравнений параболического и гиперболического типов (случай, когда решение ищется на прямых, параллельных оси времени). В предположении достаточной гладкости исходных задач доказана равномерная сходимость и даже оценка погрешности предложенных вычислительных схем.

Библиографий 4.

УДК 517.512.2

Об одном классе линейных методов суммирования рядов Фурье дифференцируемых функций. Покало А. К. «Весті Акадэміі навук БССР», серыя фізіка-матэматычных навук. 1969 г., № 2, 43—50.

При условии, что

$$\mu_k^{(n)} = \sum_{m=0}^{\infty} a_m \left(\frac{k}{n}\right)^m \quad (k \leq n)$$

и

$$\sum_{m=1}^{\infty} m |a_m| = O(1),$$

для оператора

$$U_n[f, x] = \mu_0^{(n)} \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n \mu_k^{(n)} (a_k \cos kx + \beta_k \sin kx)$$

(a_k и β_k — коэффициенты Фурье функции $f(x) \in W^{(p)}MK$) получено представление

$$U_n[f, x] = F[f, x] + O \left\{ \left(1 + \left| \sum_{m=0}^{\infty} a_m \right| \ln n \right) \frac{1}{n^p} \right\},$$

где $F[f, x]$ выражается линейно через функцию $f(x)$, четные производные ее и нечетные производные сопряженной к ней функции.

Аналогичная формула доказана для оператора $\bar{U}_n[f, x]$, сопряженного с оператором $U_n[f, x]$.

Указываются условия, при которых операторы $U_n[f, x]$ и $\bar{U}_n[f, x]$ осуществляют приближение порядка, наилучшего для функции $f(x) \in W^{(p)}MK$ или ее производных. Уточняется при $p \geq 3$ известный результат И. П. Натансона для интеграла Д. Джексона.

Библиографий 11.

УДК 513

К дифференциальной геометрии составного многообразия M_{22} в аффинном трехмерном пространстве. Платонова В. И., Тутаев Л. К. «Весті Академії наук БССР», серия фізико-математичних наук. 1969 г., № 2, 51—55.

В статье исследовано многообразие M_{22} , представляющее собой двухпараметрическое семейство плоскостей с указанными на них точками в аффинном трехмерном пространстве. Относительно выбранного и геометрически истолкованного канонического репера указано геометрическое истолкование дифференциальных инвариантов. Исследованы некоторые простейшие классы этих многообразий.

Библиографий 2.

УДК 513

Три-ткани с изотермическими, равнопутными, изогодезическими и полосатыми сетями Гессе. Бельский З. И. «Весті Академії наук БССР», серия фізико-математичних наук. 1969 г., № 2, 56—63.

Три-ткань определяется одним векторным полем \underline{a} (орт касательной к линии одного семейства) и двумя скалярными полями μ и ν : $\mu = \text{ctg} \hat{a} \hat{p}$, $\nu = \text{ctg} \hat{a} \hat{q}$, где \hat{p} и \hat{q} — касательные векторы линий сети Гессе.

Рассмотрены условия, определяющие три-ткани с изотермическими, равнопутными, изогодезическими и полосатыми сетями Гессе.

Для того чтобы три-ткань $(\underline{a}, \mu, \nu)$ имела изотермическую сеть Гессе, необходимо и достаточно, чтобы один параметр, например μ , удовлетворял определенному дифференциальному уравнению, а ν выражался через μ формулой:

$$\nu = - \frac{1}{\mu}.$$

В остальных случаях рассмотрены условия для три-ткани $(\underline{a}, \mu, -\mu)$, т. е. такой три-ткани, у которой сеть $(\underline{a}, \underline{a})$ является биссекторной сетью сети Гессе и ортогональные траектории \underline{a} -линий совпадают с одним из семейств присоединенной три-ткани. В этих случаях дифференциальные уравнения проинтегрированы и найдены выражения параметра μ .

Наконец, установлены условия, определяющие три-ткань с заданной вращаемой сетью Гессе, т. е. три-ткань, имеющую сеть Гессе указанного вида и сохраняющую это свойство сети Гессе при повороте направлений три-ткани в каждой точке поверхности на один и тот же (ориентированный) угол φ .

После интегрирования дифференциальных уравнений в изотермической системе координат найдены окончательные выражения параметра μ . На-

пример, доказана теорема, утверждающая, что на любой поверхности существует ∞^1 три-тканей $(a, \mu, -\mu)$ с вращаемой равнопутной сетью Гессе; для всех сетей Гессе сеть (a, a) служит биссекторной сетью.

Аналогичный результат получен и для три-ткани с изогодезической сетью Гессе.

Если сеть Гессе три-ткани (a, μ, ν) является вращаемой равнопутной изогодезической, то она декартова. Следовательно, три-ткани с такими сетями Гессе существуют только на торах.

Библиографий 4.

УДК 530.12 : 531.5

Тензорный вариационный метод и законы сохранения. Минкевич А. В., Федоров Ф. И. «Весті Академії наук БССР», серия фізика-математичних наук. 1969 г., № 2, 64—73.

Тензорный вариационный метод применяется для получения уравнений поля (в частности, метрического и кручения) в случае 4-мерного метрического пространства с несимметрическим линейным параллельным перенесением L_4 . Тензорные вариационные уравнения для системы полей, взаимодействующих с точечным источником, используются для получения ковариантных законов сохранения в пространстве с кручением, соответствующих группам движения пространства. Найдено новое выражение ковариантного тензора энергии-импульса. Обсуждаются некоторые свойства канонического, метрического и ковариантного тензоров энергии-импульса для системы полей, взаимодействующих с точечным источником. Рассматривается вопрос о получении тензорных канонических уравнений теории поля в пространстве L_4 .

Библиографий 14.

УДК 530.12

К сопоставлению калибровки тетрад Брежнева—Радынова с другими калибровками. Сусурин Г. Э., Иванецкая О. С. «Весті Академії наук БССР», серия фізика-математичних наук. 1969 г., 74—80.

Приводятся результаты сопоставления калибровочных условий Брежнева—Радынова для тетрад в поле тяготения с другими калибровочными условиями. Выделяются случаи тетрад, полученных при других калибровочных условиях, удовлетворяющих также калибровке Брежнева—Радынова, удовлетворяющих ей при дополнительных ограничениях и не удовлетворяющих ей. Охватываются все три класса петровских полей тяготения.

Библиографий 19.

УДК 539.166

К теории структурных поправок в коэффициентах парной конверсии при М1-переходах ядер. Борисоглебский Л. А., Позойский С. В. «Весті Академії наук БССР», серия фізика-математичних наук. 1969 г., № 2, 81—84.

Исследована зависимость электронных факторов при ядерных параметрах в теории структурных магнитных дипольных КПК от статического ядерного заряда различного типа для $Z=20, 62, 64$. Показано, что изменения электронных факторов при переходе к распределению ядерного заряда, более близким к экспериментальному, как и в случае КВК на k -оболочке при М1-переходах ядер, заметны для электронного фактора при первом ядерном параметре и значительны для электронных факторов при остальных ядерных параметрах. Это ведет к изменениям ядерных параметров, определяемых из экспериментальных КПК.

Таблиц 1. Иллюстраций 1. Библиографий 9.

УДК 546.791.6

К вопросу о симметрии возбужденных электронных состояний в кристаллах нитратов уранила. Комьяк А. И. «Весті Академії наук БССР», серия фізика-математичних наук. 1969 г., № 2, 85—88.

На основе изученных абсорбционных спектров кристаллов нитратов уранила при комнатных и низких (77°K) температурах обсуждена симметрия четырех электронных возбужденных состояний иона уранила. В одноосных кристаллах $(\text{RbUO}_2(\text{NO}_3)_3, \text{CsUO}_2(\text{NO}_3)_3, \text{NH}_4\text{UO}_2(\text{NO}_3)_3)$ отнесение к типам симметрии произведено в соответствии с точечной группой D_{3h} , а в двуосных кристаллах — D_{2h} . Согласно нейтронографическим данным, более высокая симметрия (D_{6h}) не реализуется в кристаллах нитратов уранила. Произведено сопоставление типов симметрии с имеющимися литературными данными.

Иллюстраций 1. Библиографий 14.

УДК 535.372

О спектральной зависимости затухания свечения флуоресценции сложных молекул. Пикулик Л. Г., Костко М. Я., Яковенко В. А. «Весті Академії наук БССР», серия фізика-математичних наук. 1969 г., № 2, 89—95.

На фазовом флуорометре исследован характер затухания свечения флуоресценции по спектру испускания у 3-амино-N-метилфталмида в изобутаноле при разных температурах. Ранее у этого соединения авторами наблюдалось изменение длительности свечения по спектру флуоресценции, связанное с проявлением релаксационных эффектов ориентационного взаимодействия.

На основании измерения относительной глубины модуляции получены экспериментальные данные, позволяющие рассмотреть нарушение экспоненциальности затухания для различных участков спектра флуоресценции. Установлено, что при комнатной и достаточно низкой температуре интенсивности всех частот в спектре флуоресценции затухают по экспоненциальному закону. При промежуточных температурах, когда ориентационное взаимодействие изменяется за время, сравнимое с длительностью возбужденного состояния, интенсивности всех частот (за исключением некоторой частоты инверсии) затухают по неэкспоненциальному закону. Указанная частота инверсии, по-видимому, является характеристичной частотой в спектре флуоресценции (что было определено также ранее по изменению флуорометрической фазы).

Объяснение наблюдаемых закономерностей по зависимости длительности свечения по спектру флуоресценции проводится на основе общих энергетических схем с учетом изменения вероятностей переходов и распределения молекул по уровням в возбужденном состоянии.

Иллюстраций 1. Библиографий 5.

УДК 621.382.2

Влияние температуры и некоторых примесей на электрические свойства германиевых диодов с отрицательным сопротивлением. Петровский И. И., Рекун С. А., Мелешкевич М. Ф. «Весті Академії наук БССР», серия фізика-математичних наук. 1969 г., № 2, 96—105.

Исследованы вольт-амперные характеристики германиевых точечных диодов с отрицательным сопротивлением в зависимости от температуры среды, окружающей диод, и от концентрации примеси в кристалле германия. Показано, что указанные факторы оказывают существенное влияние на вид характеристик.

Исследованы также температурная зависимость электропроводности кристаллов и их термоэдс в зависимости от разности температур противоположных граней. Дается качественное объяснение полученных результатов.

Иллюстраций 5. Библиографий 5.

УДК 539.23+621.318.1

Кривые намагничения и намагниченность насыщения тонких пленок сплавов системы Fe—Ni—Co. Сирота Н. Н., Сухвалю С. В. «Весті Академії наук БССР», серия фізика-математических наук. 1969 г., № 2, 106—110.

В работе исследована концентрационная зависимость намагниченности насыщения пленок сплавов системы Fe—Ni—Co во всем диапазоне концентраций, изучена также намагниченность пленок указанной системы в функции толщины пленок и намагничивающего поля. Проверено соотношение между величиной намагниченности насыщения тонких пленок и массивных образцов сплавов системы Fe—Ni—Co в пределах всего концентрационного треугольника. Измерение намагниченности пленок осуществлялось по величине вращающих моментов в высоких магнитных полях.

Иллюстраций 2. Библиографий 11.

УДК 539.26+620.181.1

Нейтроннографический фазовый анализ сплавов системы MnSb—MnBi. Васильев Э. А., Сирота Н. Н. «Весті Академії наук БССР», серия фізика-математических наук. 1969 г., № 2, 111—114.

Рассмотрены особенности фазового анализа сплавов при помощи дифракции нейтронов и показана целесообразность применения нейтроннографического фазового анализа в случае исследования образцов с большим коэффициентом поглощения для рентгеновских лучей. Фазовым анализом сплавов системы MnSb—MnBi установлено количественное соотношение между присутствующими в сплаве фазами Mn_2Sb , Bi и $MnSb_{1-x}Bi_x$. Определен состав никельарсенидной фазы $MnSb_{1-x}Bi_x$ и показано, что избыточные по сравнению со стехиометрическим составом атомы марганца размещаются в бипирамидальных междоузлиях.

Таблиц 2. Иллюстраций 1. Библиографий 2.

УДК 512.94

О приводимых локально-нильпотентных группах матриц над телом вещественных кватернионов. Загорин Л. Е. «Весті Академії наук БССР», серия фізика-математических наук. 1969 г., № 2, 115—117.

Рассматриваются приводимые локально-нильпотентные группы вещественно-кватернионных матриц. Теория этих групп вполне аналогична развитой Д. А. Супруненко теории приводимых локально-нильпотентных групп матриц над полем комплексных чисел.

Библиографий 4.

УДК 530.12

Дифференциалы Ли и пробная релятивистская частица. Сокольский А. А. «Весті Академії наук БССР», серия фізика-математических наук. 1969 г., № 2, 118—121.

В статье исследуется вопрос о выводе из принципа наименьшего действия ковариантных уравнений движения пробной релятивистской частицы. С помощью дифференциалов Ли получены уравнения, справедливые при произвольном аффинном перенесении. Рассмотрен ряд частных случаев.

Библиографий 4.

УДК 539.186.6

Влияние температуры газа на резонансную передачу энергии при атомных столкновениях. Орлов Л. Н., Романов Г. С., Рубанов В. С. «Весті Академії наук БССР», серия фізика-математичних наук. 1969 г., № 2, 122—125.

На основании данных о зависимости эффективного сечения столкновений с передачей энергии от скорости взаимодействующих частиц получено выражение для вероятности резонансной передачи энергии, позволяющее учесть влияние температуры и свойств энергетических уровней взаимодействующих атомов на эффективность передачи энергии при соударениях тяжелых частиц. Приводятся результаты расчета для условий, характерных для He—Ne лазера.

Иллюстраций 1. Библиографий 3.

УДК 533+539.216.2 : 537.3

Вольтамперные характеристики контакта селен—плазма при наличии металлической сетки на поверхности селена. Андреев А. Д., Некрашевич И. Г., Попко В. И. «Весті Академії наук БССР», серия фізика-математичних наук. 1969 г., № 2, 126—128.

Исследуются вольтамперные характеристики контакта плазмы тлеющего разряда и слоя аморфного селена толщиной ~ 50 мк и удельным сопротивлением, превышающим 10^8 ом·см. Определена глубина залегания ($\sim 0,3$ эв) и концентрация ($8,8 \cdot 10^{13}$ см⁻³) уровней захвата в аморфном селене. Управление величиной тока, протекающего через контакт, с помощью металлической сетки, прилегающей к слою аморфного селена, позволяет получить статический коэффициент усиления ~ 2 . Высказывается предположение, что увеличение тока через контакт при высоких отрицательных смещениях на сетке может быть вызвано бомбардировкой селена положительными ионами плазмы.

Иллюстраций 4. Библиографий 3.

УДК 537.226+537.312.7

Установка для измерения электропроводности диэлектриков и полупроводников в сильных электрических полях. Резников М. Я., Лапшин В. А., Лобач Н. Г. «Весті Академії наук БССР», серия фізика-математичних наук. 1969 г., № 2, 129—132.

Приводится описание схемы установки для получения импульсов высокого напряжения. Установка отличается стабильностью и легкостью управления и весьма удобна для измерения электропроводности диэлектриков и полупроводников в сильных электрических полях.

Иллюстраций 1. Библиографий 7.



ПРАВИЛА ДЛЯ АВТОРОВ

1. Статьи должны быть написаны на машинке через два интервала на одной стороне листа и представляться в двух экземплярах.

2. Формулы и буквенные обозначения должны быть аккуратно вписаны от руки чернилами. Для формул, выделенных в отдельную строку, следует оставлять достаточные пробелы в тексте. Греческие буквы должны быть обведены красным карандашом. Буквы, вписанные от руки, в формулах и в тексте должны подчеркиваться простым карандашом: прописные — двумя черточками снизу (напр., S), строчные — двумя черточками сверху (напр., s). Следует различать буквы O (прописную), o (строчную) и 0 (ноль), для чего буквы O и o подчеркивать двумя черточками, а 0 отмечать квадратной скобкой снизу (C, o, 0). Следует также различать буквы I и J (йот), для чего I писать, как римскую единицу, подчеркивая ее двумя черточками снизу. Векторы подчеркивать чернилами одной чертой снизу. Математические символы \cos , \sin , \lg и др., набираемые прямым шрифтом, и химические символы элементов (H, N, Cl, Fe и т. д.) отмечаются простым карандашом квадратной скобкой снизу (sin, lg, N, Cl). Показатели степени и индексы, а также надстрочные знаки отмечаются дугой \smile (для верхнего индекса) или \frown (для нижнего).

3. В связи с введением с 1 января 1963 г. Международной системы единиц измерения (СИ) размерность всех величин, принятых в статьях, должна соответствовать указанной системе единиц измерения.

4. Цитируемая в статье литература должна даваться автором не в виде подстрочных сносок, а общим списком в конце статьи с обозначением ссылки в тексте порядковой цифрой в квадратных скобках. Список литературы должен быть оформлен следующим образом:

а) для книг: фамилия и инициалы автора, полное название книги, номер тома, место и год издания;

б) для журнальных статей: фамилия и инициалы автора, название журнала, номер тома (подчеркнуть), номер выпуска, страница и год.

Ссылки на неопубликованные работы не допускаются.

5. Рисунки должны быть выполнены на белой бумаге тушью размером 15×20 см; надписи на рисунках не делать. Все обозначения указывать в тексте подрисуночных подписей. К статье прилагается список с номерами рисунков и текстом подрисуночных подписей. В тексте на полях обязательно указывается место для рисунков и таблиц.

Таблицы печатаются на отдельных листах и прилагаются в конце статьи. Фотографии должны иметь контрастное изображение и быть отпечатаны на хорошей бумаге размером не менее 9×12 см. На обороте рисунков должны быть указаны фамилия автора, название статьи и номер рисунка.

6. В случае представления двух или более статей одновременно необходимо указывать желательный порядок их помещения.

7. Авторы должны избегать повторения одних и тех же данных в таблицах, графиках и в тексте статьи.

8. К статье обязательно прилагается 2 экз. реферата.

9. Корректуры статей авторам, как правило, не посылаются. В случае отправки корректуры допускается лишь исправление ошибок типографии.

Корректурa должна возвращаться в редакцию не позже, чем на следующий день после получения ее автором. Невозвращение корректуры в срок не приостанавливает печатания статьи.

10. В случае возвращения статьи автору для исправления или при ее сокращении датой представления считается день получения редакцией окончательного текста.

29191-205

60 н.



B0000003504274