

Зок-4
58

ВЕСЦІ

АКАДЭМІІ НАВУК БССР

СЕРЫЯ
ФІЗІКА-МАТЭМАТЫЧНЫХ
НАВУК

3

ВЫДАВЕЦТВА „НАВУКА І ТЭХНІКА“

МІНСК 1969

5020
19197

April 10 1880



ИЗВЕСТИЯ

АКАДЕМИИ НАУК БССР

СЕРИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ
НАУК

№ 3

ИЗДАТЕЛЬСТВО „НАУКА И ТЕХНИКА“

МИНСК 1969

ВЕСЦІ

АКАДЭМІІ НАВУК БССР

30к-4

58

СЕРЫЯ
ФІЗІКА-МАТЭМАТЫЧНЫХ
НАВУК

№ 3

ВЫДАВЕЦТВА „НАВУКА І ТЭХНІКА“

МІНСК 1969



Рэдакцыйная калегія:

Ф. І. ФЕДАРАУ (галоўны рэдактар),
Д. А. СУПРУНЕНКА (нам. галоўнага рэдактара),
М. М. АЛЯХНОВІЧ, Ф. Д. ГАХАУ, У. І. КРЫЛОУ,
М. М. СІРАТА, У. Г. СПРЫНДЖУК, Я. І. ФІРСАУ,
С. А. ЧУНІХІН

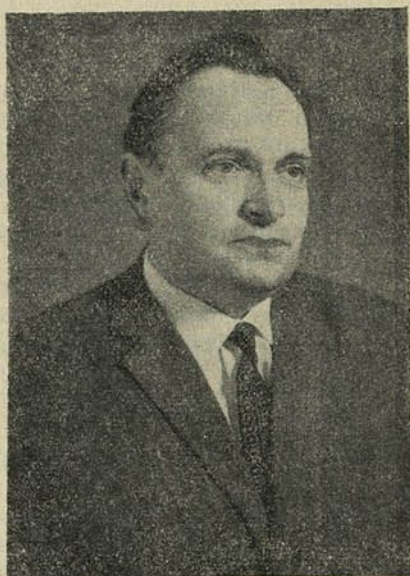
2024
10/10

М. А. БАРЫСЕВІЧ — ПРЭЗІДЭНТ АКАДЭМІІ НАВУК БЕЛАРУСКАЙ ССР

Сесія Агульнага сходу Акадэміі навук БССР, якая адбылася 14 мая 1969 г., выбрала прэзідэнтам АН БССР акадэміка АН БССР Мікалая Аляксандравіча Барысевіча.

М. А. Барысевіч нарадзіўся ў 1923 г., беларус, член КПСС, удзельнік Вялікай Айчыннай вайны 1941—1945 гг.

М. А. Барысевіч — доктар фізіка-матэматычных навук, прафесар, з'яўляецца буйным вучоным, які ўзбагаціў навуку работамі вялікага значэння ў галіне малекулярнай спектраскапіі і люмінесценцыі. Ён аўтар больш 80 навуковых работ, у тым ліку манаграфіі «Возбужденные состояния сложных молекул в газовой фазе». У работах М. А. Барысевіча атрыманы навуковыя рэзультаты першаступеннай важнасці, узнікаючыя на новую ступень даследаванні па спектраскапіі і люмінесценцыі шмататомных малекул у газавым асяроддзі. Вялікае значэнне маюць таксама яго работы па аптычных квантавых генераторах і інфрачырвонай тэхніцы.



Работы М. А. Барысевіча вызначаюцца цесным спалучэннем эксперыментальных і тэарэтычных метадаў даследавання, паўнотой, закончанасцю і арыгінальнасцю атрыманых рэзультатаў. Яны атрымалі шырокае прызнанне як у нашай краіне, так і за мяжой.

У Акадэміі навук БССР М. А. Барысевіч працуе з 1954 г. Навуковай грамадскасці ён вядомы не толькі як відны вучоны, але і як таленавіты арганізатар. З 1955 па студзень 1969 г. Мікалай Аляксандравіч быў намеснікам дырэктара па навуковай рабоце і загадчыкам лабараторыі Ордэна Працоўнага Чырвонага Сцяга Інстытута фізікі АН БССР. У 1966 г. М. А. Барысевіч быў выбран членам-карэспандэнтам, а ў 1969 г. — акадэмікам і віцэ-прэзідэнтам АН БССР.

Побач з вялікай навуковай і навукова-арганізацыйнай работай М. А. Барысевіч удзяляе многа ўвагі падрыхтоўцы навуковых кадраў.

На працягу рада год М. А. Барысевіч з'яўляецца членам Навуковага савета АН ССР па праблеме «Люмінесценцыя», членам бюро Камісіі па спектраскапіі АН ССР, старшынёй Беларускага рэспубліканскага і членам прэзідыума Усесаюзнага савета навукова-тэхнічных таварыстваў, віцэ-прэзідэнтам секцыі «Навука і тэхніка» Таварыства дружбы

і культурных сувязей з зарубежнымі краінамі. Ён удзельнічаў у рабоце генеральных канферэнцый МАГАТЭ ў якасці намесніка кіраўніка і кіраўніка дэлегацыі БССР.

За актыўны ўдзел у развіцці навукі і ўкараненне яе дасягненняў у народную гаспадарку М. А. Барысевіч у 1967 г. узнагароджан ордэнам Працоўнага Чырвонага Сцяга. Ён узнагароджан таксама двума ордэнамі Чырвонай Звязды, ордэнам Айчынай вайны I ступені і пяццю медалямі.

ВЫСТУПЛЕННЕ М. А. БАРЫСЕВІЧА НА СЕСІІ АГУЛЬНАГА СХОДУ АН БССР 14 МАЯ 1969 г.

Дарагія таварышы!

Дазвольце падзякаваць Вам за аднадушнае выбранне мяне на высокую і адказную пасаду прэзідэнта Беларускай акадэміі навук.

На працягу 17 год Акадэмію навук узначальваў Васіль Феафілавіч Купрэвіч. За гэтыя гады наша акадэмія ператварылася ў сапраўдны штаб беларускай навукі, яна стала буйным навуковым цэнтрам у сістэме савецкай навукі. Цяжка пераацаніць заслугі ў гэтай справе Васіля Феафілавіча. Васіль Феафілавіч быў вялікім вучоным і выдатным арганізатарам навукі, ён быў аб'ектыўным і справядлівым, бескарыслівым і скромным, а калі неабходна было, — строгім і патрабавальным. Васіль Феафілавіч валодаў усімі тымі якасцямі, якія неабходны для прэзідэнта Акадэміі навук. І калі мне ўдасца зрабіць хоць бы невялікую частку таго, што зрабіў для Беларускай акадэміі навук Васіль Феафілавіч, я буду вельмі рад.

Таварышы! Нашы дасягненні добра вядомы, і ў кароткім выступленні дазвольце мне на іх не спыняцца. Я хацеў бы сказаць аб некаторых нявырашаных, на мой погляд, праблемах.

У нашай акадэміі ў цяперашні час маецца шырокая сетка навуковых устаноў. У нас ёсць Аддзяленне грамадскіх навук, інстытуты якога паспяхова займаюцца вывучэннем гісторыі, мовы, літаратуры і культуры беларускага народа, вывучэннем марксісцка-ленінскай філасофіі і палітычнай эканоміі. У нас ёсць Аддзяленне біялагічных навук, інстытуты якога вядуць даследаванні флоры і фауны Беларусі, а таксама распрацоўваюць тэарэтычныя праблемы сучаснай біялогіі, фізіялогіі і медыцыны. У сістэме Акадэміі навук створана Аддзяленне фізіка-матэматычных навук з невялікім лікам інстытутаў, але даволі значных, якія распрацоўваюць сучасныя праблемы матэматыкі і фізікі. Самым вялікім з'яўляецца Аддзяленне тэхнічных навук, якое займаецца вырашэннем пытанняў, што адносяцца да новай тэхнікі. На жаль, у нашай Акадэміі навук нязначную ўдзельную вагу займаюць хімічныя навукі і практычна не прадстаўлены навукі аб Зямлі.

На агульных сходах акадэміі не адзін раз падымалася пытанне аб развіцці ў акадэміі даследаванняў прыродных рэсурсаў нашай рэспублікі. У свой час у сістэме Акадэміі навук знаходзіўся Інстытут геалагічных навук, які перададзены Міністэрству геалогіі СССР. Цяпер гэта міністэрства паставіла пытанне аб перадачы дадзенага інстытута Упраўленню геалогіі пры Савеце Міністраў БССР. Было б правільна вярнуць гэты інстытут Акадэміі навук. Акадэмія, відаць, не павінна стаяць убаку і ад вывучэння водных рэсурсаў рэспублікі і яе глеб. Мне здаецца, што на працягу наступнай пяцігодкі ў Акадэміі навук БССР павінна быць створана Аддзяленне навукі аб Зямлі.

Іншы раз нам прыходзіцца чуць дыскусіі аб перавагах некаторых навук, а часам і проціпастаўленне адных галін навукі другім. Акадэмія навук створана для гарманічнага развіцця розных галін навукі. Яе арганізацыйныя формы дазваляюць аказваць дабратворны ўплыў адных навук на развіццё другіх, ажыццяўляць даследаванні на стыку розных галін навукі. На жаль, гэтыя магчымасці ў нашай акадэміі выкарыстоўваюцца недастаткова. Напрыклад, даследаванні інстытутаў фізікі, фізікі і цвёрдага цэла і паўправаднікоў, цепла- і масаабмену па некаторых праблемах перакрываюцца, аднак каардынацыя іх не наладжана. Адсутнічае патрэбная каардынацыя і хімічных даследаванняў, якія вядуцца ў Акадэміі навук. Слаба выкарыстоўваюцца матэматычныя і фізічныя метады даследаванняў у інстытутах хімічнага і біялагічнага профілю. Таму адной з важных задач, якія стаяць перад Прэзідэнтам, з'яўляецца арганізацыя і каардынацыя комплексных даследаванняў па асобных праблемах, аказанне дапамогі інстытутам у асваенні навішых метадаў вывучэння.

Асноўнай задачай Акадэміі навук з'яўляецца правядзенне фундаментальных даследаванняў, якія аказваюць істотны ўплыў на навукова-тэхнічны прагрэс. Таму мы павінны канцэнтраваць свае намаганні на параўнальна невялікім ліку актуальных напрамкаў і дабівацца таго, каб у гэтых напрамках нашы інстытуты станавіліся вядучымі ў Савецкім Саюзе. Цэніцца не колькасць напрамкаў, над якімі працуе навуковая ўстанова, а арыгінальнасць атрыманых вынікаў, іх глыбіня, іх практычнае значэнне. Інстытуты павінны быць строга прафіляванымі і аказваць за ўзровень даследаванняў у выбраным імі напрамку, як гэта патрабуецца пастановай ЦК КПСС і Савета Міністраў СССР «Аб мерах па павышэнню эфектыўнасці працы навуковых устаноў і ўскарэнню выкарыстання ў народнай гаспадарцы дасягненняў навукі і тэхнікі».

Таварышы! Вялікую шкоду можа прынесці некрытычная ацэнка вынікаў навуковай дзейнасці. Трэба прама сказаць, што апошнія гады ў Акадэміі навук недастаткова крытычна ацэньвалася дзейнасць некаторых вучоных і нават інстытутаў. Сталі праяўляцца тэндэнцыі перавялічвання дасягнутых поспехаў. Неабходна адзначыць і тое, што ў некаторых нашых установах імкнуцца як мага больш скарыстаць сродкаў з агульнага фонду, не клапацячыся аб эканомным іх расходаванні, стараюцца любой цаной павялічваць штаты падраздзяленняў, не звяртаючы ўвагі на мэтазгоднасць і рэальныя магчымасці. З такімі тэндэнцыямі мы павінны весці рашучую барацьбу.

У асноўным нашы інстытуты маюць дастаткова вытворчых плошчаў, хоць некаторыя з іх яшчэ знаходзяцца ў цяжкіх умовах. Нам адпускаюць штогод на капітальнае будаўніцтва вялікія сродкі. Аднак па раду прычын апошнія гады гэтыя сродкі асвойваюцца толькі на 60—65 працэнтаў. У выніку за тры гады Акадэмія навук БССР недаатрымала 8000 квадратных метраў вытворчых плошчаў. У мінулым годзе план уводу плошчаў выкананы ўсяго толькі на 10 працэнтаў. Сёлета, хоць план чатырох месяцаў выкананы, будаўніцтва ўводных аб'ектаў зноў зрываецца. Відаць, мы дрэнна растлумачваем будаўнікам значэнне навукі ў сучасным грамадстве і не настойліва дабіваемся выканання імі планаў.

Аб неабходнасці стварэння ў Акадэміі навук БССР належнай эксперыментальнай базы я гаварыў на мінулым агульным сходзе.

У нас вострай з'яўляецца жыллёвая праблема. Мне прыемна Вам паведаміць, што Савет Міністраў прыняў рашэнне аб значным павелічэнні асігнаванняў Акадэміі навук на жыллёвае будаўніцтва. На 1970 г. запланавана 800 тысяч рублёў па дзяржаўнаму бюджэту і каля 350

тысяч па кааператыўнаму будаўніцтву. Гэта ў два разы больш, чым выдзелена ў гэтым годзе.

Есць у нас і іншыя нявырашаныя праблемы, на якіх дазвольце мне сёння не спыняцца.

Заканчваючы сваё выступленне, хачу запэўніць Вас, што Прэзідыум Акадэміі навук зробіць усё неабходнае для таго, каб Беларускае акадэмія навук заняла дастойнае месца сярод рэспубліканскіх акадэміяў і стала яшчэ больш значным звяном у сістэме савецкай навукі.

Яшчэ раз сардэчна дзякую за аказанае мне давер'е.

Л. Г. КРУГЛИКОВА, В. И. КРЫЛОВ

**ИНТЕРПОЛИРОВАНИЕ ПРЕДЕЛЬНОГО ЗНАЧЕНИЯ
ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ И УЛУЧШЕНИЕ СХОДИМОСТИ.
СЛУЧАЙ ВОЗРАСТАЮЩЕГО ЧИСЛА УЗЛОВ**

§ 1. Преобразование последовательности и некоторые его свойства. В [1] был рассмотрен вопрос об улучшении сходимости последовательности S_n ($n=1, 2, \dots$), $S_n \rightarrow S$, основанный на интерполировании ее предельного значения S алгебраическим многочленом от $1/n$, при этом число узлов интерполирования считалось одинаковым на всех шагах. Сейчас мы рассмотрим простейший случай переменного числа узлов, когда матрица узлов интерполирования является треугольной и имеет форму

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ 1 & 2 & & & & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \\ 1 & 2 & \dots & \dots & \dots & \dots & n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}. \quad (1.1)$$

Многочлен $P_{n-1}(k) = c_0 + c_1 k^{-1} + \dots + c_{n-1} k^{-n+1}$, интерполирующий S_n по ее значениям S_k ($k=1, 2, \dots, n$), как сразу же видно, есть

$$P_{n-1}(k) = -\frac{1}{D} \begin{vmatrix} 0 & 1 & k^{-1} & \dots & \dots & k^{-n+1} \\ S_1 & 1 & 1 & \dots & \dots & 1 \\ S_2 & 1 & 2^{-1} & \dots & \dots & 2^{-n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ S_n & 1 & n^{-1} & \dots & \dots & n^{-n+1} \end{vmatrix}, \quad D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & \dots & 1 \\ 1 & 2^{-1} & \dots & \dots & 2^{-n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & n^{-1} & \dots & \dots & n^{-n+1} \end{vmatrix}.$$

Предельное значение P_{n-1} при $k \rightarrow \infty$ принимается за приближенную величину предела переменной S_n : $P_{n-1}(\infty) = \sigma_n \approx \lim S_n = S$. Несложные вычисления приводят к равенству

$$\sigma_n = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+n} \frac{k^n}{k!(n-k)!} S_k, \quad n=1, 2, \dots, \quad (1.2)$$

которое дает линейное преобразование вида $\sigma_n = \sum_{k=1}^n a_{nk} S_k$ заданной последовательности S_n в новую последовательность σ_n и является записью интерполяционной последовательности приближений к S с матрицей узлов (1.1).

Преобразование (1.2) применимо, очевидно, к любой последовательности S_n независимо от того, будет или не будет она сходящейся.

Рассмотрим коэффициенты преобразования $a_{nk} = (-1)^{k+n} \frac{k^n}{k!(n-k)!}$. Когда S_n есть величина постоянная, например, $S_n = 1$, интерполирование ее предельного значения будет всегда точным, и поэтому при всех значениях n будет выполняться равенство

$$\sum_{k=1}^n a_{nk} = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+n} \frac{k^n}{k!(n-k)!} = 1, \quad n = 1, 2, \dots \quad (1.3)$$

Если k фиксировано и $n \rightarrow \infty$, то

$$a_{nk} = O\left(\frac{k^n}{(n-k)!}\right) = O\left(\frac{n^k k^n}{n!}\right) \quad (1.4)$$

и коэффициенты каждого столбца в матрице преобразования стремятся к нулю с ростом n . Пусть $k = n - j$, где j фиксировано, и $n \rightarrow \infty$:

$$a_{n, n-j} = (-1)^j \frac{(n-j)^n}{j!(n-j)!} = O\left[\frac{(n-j)^n}{(n-j)!}\right] = O\left[e^n (n-j)^{j-\frac{1}{2}}\right].$$

Поэтому коэффициенты каждой диагонали в матрице преобразования быстро растут по абсолютной величине. Отсюда, в частности, следует, что преобразование (1.2) не всегда сохраняет сходимость: сходящаяся последовательность S_n может переходить в расходящуюся.

Представляет интерес выяснить, каким будет множество последовательностей S_n , сходимость которых сохраняется при преобразовании (1.2). Быстрый рост $a_{n, n-j} (n \rightarrow \infty)$ заставляет ожидать, что такое множество не будет широким.

Обратим преобразование (1.2). Для этого отделим первые n равенств в (1.2) и будем рассматривать их как систему уравнений с неизвестными $S_k (k=1, 2, \dots, n)$, а $\sigma_k (k=1, 2, \dots, n)$ считать членами произвольной последовательности:

$$\begin{aligned} S_1 &= \sigma_1, \\ \frac{1}{2!} (-C_2^1 S_1 + 2^2 S_2) &= \sigma_2, \\ \frac{(-1)^3}{3!} (-C_3^1 S_1 + C_3^2 2^3 S_2 - 3^3 S_3) &= \sigma_3, \\ &\dots \\ \frac{(-1)^n}{n!} (-C_n^1 S_1 + C_n^2 2^n S_2 - \dots + (-1)^n n^n S_n) &= \sigma_n, \end{aligned}$$

где

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Система всегда разрешима, так как определитель ее Δ отличен от нуля:

$$\Delta = \frac{1 \cdot 2^2 \dots n^n}{1 \cdot 2! \dots n!}.$$

Для определения вида исходной последовательности достаточно найти только S_n :

$$S_n = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & \sigma_1 \\ \frac{1}{2!} [-C_2^1] & \frac{2^2}{2!} & \dots & \dots & \sigma_2 \\ -\frac{1}{3!} [-C_3^1] & -\frac{1}{3!} C_3^2 2^3 & \dots & \dots & \sigma_3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{(-1)^n}{n!} [-C_n^1] & \frac{(-1)^n}{n!} C_n^2 2^n & \dots & \dots & \sigma_n \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{n^n} \sum_{l=1}^n l! \sigma_l \begin{vmatrix} (l+1)l & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ C_{l+2}^l l^2 & C_{l+2}^{l+1} (l+1) & 1 & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ C_{n-1}^l l^{n-l-1} & C_{n-1}^{l+1} (l+1)^{n-l-2} & C_{n-1}^{l+2} (l+2)^{n-l-3} & \dots & \dots & 1 \\ C_n^{l n-l} & C_n^{l+1} (l+1)^{n-l-1} & C_n^{l+2} (l+2)^{n-l-2} & \dots & \dots & n(n-1) \end{vmatrix}.$$

Пользуясь, например, методом индукции по параметру n ($n = l + 1, l + 2, \dots$), можно доказать, что значение определителя, стоящего под знаком суммы, равно $C_n^l l n^{n-l-1}$. Окончательно для S_n получаем:

$$S_n = \frac{1}{n^n} \sum_{l=1}^n l! C_n^l l n^{n-l-1} \sigma_l = \sum_{l=1}^n l \frac{n!}{(n-l)! n^{l+1}} \sigma_l =$$

$$= \sum_{l=1}^n \frac{l(n-l+1) \dots (n-1)n}{n^{l+1}} \sigma_l. \quad (1.5)$$

Из (1.5) следует, что коэффициенты обратного преобразования положительны и при закреплённом l стремятся к нулю при неограниченном росте n . Сумма коэффициентов равна единице:

$$\sum_{l=1}^n \frac{l(n-l+1) \dots (n-1)n}{n^{l+1}} = 1,$$

так как постоянная величина при прямом преобразовании (1.2) сохраняется. Все условия теоремы о регулярности преобразования (1.5) выполнены (см. [1]), и, значит, обратное преобразование регулярно. Получили следующую теорему.

Теорема. Для того чтобы преобразованная последовательность σ_n была сходящейся, необходимо, чтобы исходная S_n также сходилась, причём если $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$, то и $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = S$.

Поскольку в сходящиеся при помощи (1.2) преобразуются лишь сходящиеся последовательности, и к тому же лишь часть их ^{*}, то преобразование (1.2) не может служить для нахождения обобщённого предела последовательности, но оно оказывается полезным для улучшения сходимости.

^{*} Коэффициенты преобразования (1.5) положительны, и сумма их равна единице. Само преобразование поэтому есть преобразование средних взвешенных. Каждая последовательность S_n , которая переводится в сходящуюся при помощи (1.2), может быть, следовательно, получена из сходящейся последовательности при помощи преобразования средних взвешенных весьма частного вида.

§ 2. Улучшение сходимости. Пусть $u(z)$ — функция, аналитическая в окрестности бесконечно далекой точки, т. е. для $|z| > R$

$$u(z) = c_0 + \frac{c_1}{z} + \frac{c_2}{z^2} + \dots + \frac{c_k}{z^k} + \dots$$

Отнесем S_n к последовательностям аналитического типа сходимости [1], если для $n > N$ $S_n = u(n)$, или

$$S_n = c_0 + \frac{c_1}{n} + \frac{c_2}{n^2} + \dots + \frac{c_k}{n^k} + \dots$$

Для постоянной S_n все коэффициенты, кроме c_0 , обращаются в 0. Если же S_n отлична от постоянной, среди коэффициентов будут отличные от нуля. Пусть c_p первый из них:

$$S_n = c_0 + \frac{c_p}{n^p} + \frac{c_{p+1}}{n^{p+1}} + \dots, \quad c_p \neq 0. \quad (2.1)$$

Последовательность вида (2.1) сходится со скоростью $1/n^p$.

Теорема. Последовательность аналитического типа сходимости всегда преобразуется в сходящуюся при помощи (1.2), и если она не приводится к постоянной, то при этом происходит улучшение сходимости.

Путем замены $z = 1/x$ перейдем от функции $u(z)$, аналитической в окрестности бесконечно далекой точки ($|z| > R$), к функции $v(x)$, аналитической около нуля ($|x| < \frac{1}{R}$):

$$u(z) = u\left(\frac{1}{x}\right) = v(x), \quad v\left(\frac{1}{k}\right) = u(k) = S_k.$$

Рассмотрим последовательность точек $x_k = \frac{1}{k}$ ($k = 1, 2, \dots$); так как $\frac{1}{k} \rightarrow 0$, то, начиная с некоторой, все такие точки лежат в круге радиуса $1/R$ с центром в 0, а вне этого круга остается лишь конечное число точек x_1, x_2, \dots, x_m . Пусть l — некоторый контур, охватывающий $[0, x_{m+1}]$ и лежащий внутри круга $|x| < \frac{1}{R}$. Рассмотрим интеграл

$$\frac{1}{2\pi i} \int_l \frac{v(t)}{\omega(t)t} dt,$$

где

$$\omega(t) = (t-1) \left(t - \frac{1}{2}\right) \dots \left(t - \frac{1}{n}\right).$$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_l \frac{v(t)}{\omega(t)t} dt = \frac{v(0)}{\omega(0)} + \sum_{k=m+1}^n \frac{v(x_k)}{x_k \omega'(x_k)} =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\omega(0)} \left\{ v(0) + \sum_{k=1}^m \frac{\omega(0)}{(-x_k)\omega'(x_k)} v(x_k) - \sum_{k=1}^n \frac{\omega(0)}{(-x_k)\omega'(x_k)} v(x_k) \right\} = \\
&= \frac{1}{\omega(0)} \left\{ c_0 + \right. \\
&+ \sum_{k=1}^m \frac{(-1) \left(-\frac{1}{2}\right) \dots \left(-\frac{1}{n}\right)}{\left(-\frac{1}{k}\right) \left(\frac{1}{k}-1\right) \dots \left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k-1}\right) \left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right) \dots \left(\frac{1}{k}-\frac{1}{n}\right)} S_k - \\
&- \left. \sum_{k=1}^n \frac{(-1) \left(-\frac{1}{2}\right) \dots \left(-\frac{1}{n}\right)}{\left(-\frac{1}{k}\right) \left(\frac{1}{k}-1\right) \dots \left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k-1}\right) \left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right) \dots \left(\frac{1}{k}-\frac{1}{n}\right)} S_k \right\} = \\
&= \frac{1}{\omega(0)} \left\{ c_0 + \sum_{k=1}^m (-1)^{n+k} \frac{k^n}{k!(n-k)!} S_k - \sum_{k=1}^n (-1)^{n+k} \frac{k^n}{k!(n-k)!} S_k \right\}.
\end{aligned}$$

Так как

$$\omega(0) = \frac{(-1)^n}{n!}, \quad \sum_{k=1}^n (-1)^{n+k} \frac{k^n}{k!(n-k)!} S_k = \sigma_n,$$

$$c_0 = \lim S_n = S,$$

то

$$\sigma_n - S = \sum_{k=1}^m (-1)^{n+k} \frac{k^n}{k!(n-k)!} S_k - \frac{(-1)^n}{n!} \frac{1}{2\pi i} \int_l \frac{v(t)}{\omega(t)} \frac{dt}{t}. \quad (2.2)$$

Ввиду неравенства (1.4) сумма, стоящая справа, имеет оценку вида

$$\left| \sum_{k=1}^m \right| \leq A \frac{n^m m^{n+1}}{n!}.$$

Если δ есть расстояние от контура l до отрезка $\left[0, \frac{1}{m+1}\right]$, то при любом значении t на l для $\omega(t)$ верно неравенство $|\omega(t)| \geq B\delta^n$, и поэтому для интеграла в (2.2) справедливо неравенство

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int_l \frac{v(t)}{\omega(t)} \frac{dt}{t} \right| \leq C\delta^{-n}.$$

Поэтому для разности $\sigma_n - S$ верна оценка

$$|\sigma_n - S| \leq A \frac{n^m m^{n+1}}{n!} + \frac{C}{n! \delta^n}, \quad (2.3)$$

т. е. последовательность σ_n стремится к пределу быстрее любой степени $1/n$.

Замечание. В связи с тем, что с ростом n коэффициенты (1.2) быстро возрастают по абсолютному значению, применение (1.2) на практике можно использовать лишь для не очень больших n .

Пример 1.

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x} dx = \ln 2 \approx 0,693147.$$

Вычисление интеграла по правилу трапеций дает следующую последовательность приближенных значений:

$$\begin{aligned} T_1 &= 0,7 \\ T_2 &= 0,697023809523809 \\ T_3 &= 0,695634920634920 \\ T_4 &= 0,694877344877344 \\ T_5 &= 0,694419469419469 \\ T_6 &= 0,694121850371850 \\ T_7 &= 0,693917602005837 \\ T_8 &= 0,693771403175428 \end{aligned}$$

Применение интерполирования по возрастающему числу узлов приводит к улучшенным значениям:

$$\begin{aligned} \sigma_6 &= 0,693018 \\ \sigma_7 &= 0,693110 \\ \sigma_8 &= 0,693138 \end{aligned}$$

Пример 2. Вычисление дзета-функции Римана:

$$\begin{aligned} \zeta(3) &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^{19} \frac{1}{k^3} + \sum_{k=20}^{20+n} \frac{1}{k^3} \right) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 1,202056, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_1 &= 1,2009758216582533926 \\ S_2 &= 1,2010697360083660898 \\ S_3 &= 1,2011519255374200883 \\ S_4 &= 1,2012242635003830513 \\ S_5 &= 1,2012882635003830513 \\ S_6 &= 1,2013451592673379898 \\ S_7 &= 1,2013959645307632807 \end{aligned}$$

Подвергнув полученную последовательность преобразованию (1.2), получаем:

$$\sigma_5 = 1,201827$$

$$\sigma_6 = 1,201985$$

$$\sigma_7 = 1,202092$$

Литература

1. Кругликова Л. Г., Крылов В. И. Весті АН БССР, сер. фіз.-мат. наук, № 1, 1969.

Институт математики АН БССР

Поступило в редакцию 13.XI 1968

Е. А. ИВАНОВ, А. В. МОШИНСКИЙ

ДИФРАКЦИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН НА ДВУХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ЦИЛИНДРАХ

Задаче о дифракции электромагнитных волн на двух параллельных бесконечно длинных эллиптических цилиндрах посвящен ряд работ [1—10]. Однако только в некоторых из них содержатся примеры численного решения, и то лишь для весьма частных случаев (например, [1, 4—6]). Отыскание строгого решения такой задачи в эллиптических координатах в общем случае сопряжено с большими математическими трудностями, связанными в первую очередь с табулированием в широком диапазоне изменения аргументов угловых и радиальных функций Матье, через которые записывается решение. По этой причине дифракционная задача для эллиптических цилиндров намного сложнее аналогичной задачи для двух круговых цилиндров [11—16], содержащейся в первой в качестве частного случая. Вместе с тем она намного интереснее последней благодаря большому числу параметров, определяющих решение задачи и позволяющих путем варьирования их исследовать дифракцию электромагнитных волн на сложных препятствиях, составленных из двух цилиндров с различными по форме поперечными сечениями (каждый из эллиптических цилиндров можно непрерывным образом «деформировать» в пределах от полосы до кругового цилиндра). Такого рода задачи могут служить модельными для многих конкретных задач, возникающих в различных областях радиофизики и радиотехники. В частности, длины волн, обычно употребляемые в радиолокации, как правило, сравнимы с поперечными размерами отражающих препятствий (целей), в связи с чем при расчете рассеянного электромагнитного поля методы геометрической и физической оптики становятся непригодными и нужно применять более строгие методы. В этом отношении наиболее эффективным является метод разделения переменных, позволяющий получать количественные характеристики по строгим формулам в диапазоне длин волн, сравнимых с поперечными размерами препятствий.

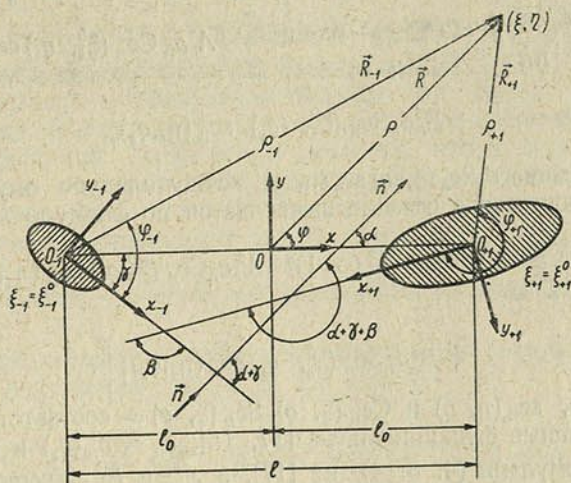
Настоящая работа, состоящая из двух частей, посвящена обсуждению некоторых вопросов, возникающих при численном решении задачи в случае двух идеально проводящих эллиптических цилиндров. Данная первая часть носит теоретический характер. Вторая часть содержит примеры численного решения, иллюстрирующие теорию.

Задача ставится следующим образом.

В неограниченном однородном и изотропном пространстве с электромагнитными константами ϵ , μ , σ ($\sigma=0$) находятся два идеально проводящих бесконечно длинных эллиптических цилиндра с параллельными продольными осями и с произвольной ориентацией соответствующих осей эллипсов поперечного сечения их плоскостью. Расстояние между осями цилиндров равно l , а фокусное расстояние эллипса s -го цилиндра ($s=\pm 1$) равно f_s . Начало координатной системы $Oxyz$ находится в точ-

ке O на линии центров эллипсов сечения, посередине между ними. Большие полуоси эллипсов, вдоль которых направлены оси $O_s x_s$ ($s = \pm 1$) локальных координатных систем, образуют между собой угол β (геометрия задачи в плоскости $z = \text{const}$ дана на рисунке). В локальных эллиптических координатах s -го цилиндра его боковая поверхность задается уравнением $\xi_s = \xi_s^0$. Цилиндры возбуждаются плоской волной

$$\vec{E}^0 = e^{ik(\vec{n}\vec{R})} \quad (1)$$



К постановке задачи

(множитель $\exp(-i\omega t)$ всюду опускается; $k = \frac{\omega}{c} \sqrt{\epsilon\mu}$, где c — скорость света в пустоте, а ω — круговая частота колебаний), распространяющаяся в направлении единичного вектора \vec{n} , образующего угол α с осью Ox (ось Ox направлена вдоль линии центров эллипсов сечения) и угол $\pi/2$ с осью Oz , параллельной образующим цилиндров. С осями $O_s x_s$ локальных систем вектор \vec{n} образует углы α_s , $s = \pm 1$, где $\alpha_{-1} = \alpha + \gamma$, $\alpha_{+1} = \alpha + \gamma + \beta$ (γ — угол между отрезком $O_{-1}O_{+1}$ и осью $O_{-1}x_{-1}$). Ищется переизлученное поле \vec{E}^1, \vec{H}^1 , рассеянное на цилиндрах. В рассматриваемом случае это двумерная задача, не зависящая от координаты z . В эллиптических координатах ее решение может быть найдено через скалярный потенциал Герца u из соотношений

$$E_z = k^2 u, \quad H_\xi = \frac{-ike}{h} \frac{\partial u}{\partial \eta}, \quad H_\eta = \frac{ike}{h} \frac{\partial u}{\partial \xi}, \quad (2)$$

где $h = f \sqrt{\text{ch}^2 \xi - \cos^2 \eta}$; f — фокусное расстояние координатных эллипсов. Здесь $u = u^0 + u^1$, где u^0 — потенциал первичного поля \vec{E}^0, \vec{H}^0 , а u^1 — потенциал искомого поля. Функция u^1 должна быть решением уравнения Гельмгольца

$$\Delta u^1 + k^2 u^1 = 0, \quad (3)$$

удовлетворяющим на поверхности s -го цилиндра граничному условию

$$u^0 + u^1 = 0, \quad \xi_s = \xi_s^0, \quad s = \pm 1, \quad (4)$$

и дополнительному условию излучения на бесконечности. Строгое решение задачи (3), (4) имеется в [17]. В частности, в приближении волновой зоны в полярных координатах ρ , φ с началом в точке O , поле \vec{E}^1 , \vec{H}^1 определяется выражениями

$$E_z^1 = -\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} H_\varphi^1 = \frac{e^{ik\rho}}{\sqrt{\rho}} A(\varphi) \quad (5)$$

с амплитудной функцией ($\eta_{-1} = \varphi + \gamma$, $\eta_{+1} = \varphi + \gamma + \beta$; $l_0 = l/2$)

$$A(\varphi) = \sqrt{\frac{8}{\pi k}} e^{-i\pi/4} \sum_{s=\pm 1} e^{-iskl_0 \cos \varphi} \sum_{n=0}^{\infty} \{A_n^s c_n \text{Ce}_n(\xi_s^0, q_s) \text{se}_n(\eta_s, q_s) + B_n^s d_n \text{Se}_n(\xi_s^0, q_s) \text{se}_n(\eta_s, q_s)\} \quad (6)$$

(члены, содержащие $d_0 \text{Se}_0(\xi, q) \text{se}_0(\eta, q)$ всюду следует опускать) Радиолокационное поперечное сечение вычисляется по формуле

$$\sigma_B = \frac{16}{k} \left| \sum_{s=\pm 1} e^{iskl_0 \cos \alpha} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \{A_n^s c_n \text{Ce}_n(\xi_s^0, q_s) \text{se}_n(\eta_s, q_s) + B_n^s d_n \text{Se}_n(\xi_s^0, q_s) \text{se}_n(\eta_s, q_s)\} \right|^2 \quad (7)$$

Здесь $\text{se}_n(\eta, q)$, $\text{se}_n(\eta, q)$ и $\text{Ce}_n(\xi, q)$, $\text{Se}_n(\xi, q)$ — соответственно угловые и модифицированные функции Матье [17, 18]; $c_n = c_n(q_s)$ и $d_n = d_n(q_s)$ определяются формулами (4.3.4) из [17], а A_n^s и B_n^s — решения бесконечной системы линейных уравнений

$$A_n^s + \sum_{m=0}^{\infty} \{a_{nm}^{-s,s} A_m^{-s} + \beta_{nm}^{-s,s} B_m^{-s}\} = F_n^s, \quad (8)$$

$$B_n^s + \sum_{m=0}^{\infty} \{\gamma_{nm}^{-s,s} A_m^{-s} + \delta_{nm}^{-s,s} B_m^{-s}\} = \Phi_n^s,$$

$$s = \pm 1; n = 0, 1, \dots$$

(выражения с B_0^s следует опускать), где

$$\begin{aligned} a_{nm}^{-s,s} &= 2 \frac{c_m(q_{-s}) \text{Ce}_m(\xi_{-s}^0, q_{-s})}{c_n(q_s) \text{Me}_n^{(1)}(\xi_s^0, q_s)} Q_{mn}^{(1)}(-s, s; \beta); n, m = 0, 1, \dots; \\ \beta_{nm}^{-s,s} &= 2 \frac{d_m(q_{-s}) \text{Se}_m(\xi_{-s}^0, q_{-s})}{c_n(q_s) \text{Me}_n^{(1)}(\xi_s^0, q_s)} \tilde{Q}_{mn}^{(1)}(-s, s; \beta); m = 1, 2, \dots; n = 0, 1, \dots; \\ \gamma_{nm}^{-s,s} &= 2 \frac{c_m(q_{-s}) \text{Ce}_m(\xi_{-s}^0, q_{-s})}{d_n(q_s) \text{Ne}_n^{(1)}(\xi_s^0, q_s)} R_{mn}^{(1)}(-s, s; \beta); m = 0, 1, \dots; n = 1, 2, \dots; \\ \delta_{nm}^{-s,s} &= 2 \frac{d_m(q_{-s}) \text{Se}_m(\xi_{-s}^0, q_{-s})}{d_n(q_s) \text{Ne}_n^{(1)}(\xi_s^0, q_s)} \tilde{R}_{mn}^{(1)}(-s, s; \beta); n, m = 1, 2, \dots; \end{aligned} \quad (9)$$

$$F_n^s = -\frac{e^{iskl_0 \cos \alpha} c_n(\eta_s, q_s)}{c_n(q_s) \text{Me}_n^{(1)}(\xi_s^0, q_s)}, n = 0, 1, \dots;$$

$$\Phi_n^s = -\frac{e^{iskl_0 \cos \alpha} d_n(\eta_s, q_s)}{d_n(q_s) \text{Ne}_n^{(1)}(\xi_s^0, q_s)}, n = 1, 2, \dots \quad (10)$$

Здесь $Me_n^{(1)}(\xi, q)$ и $Ne_n^{(1)}(\xi, q)$ — комбинированные решения уравнения Матье [17, 18], а $Q_{mn}^{(1)}, \bar{Q}_{mn}^{(1)}, R_{mn}^{(1)}$ и $\bar{R}_{mn}^{(1)}$ — величины, определенные формулами (4. 5. 13) — (4. 5. 16) из [17].

По той же схеме, что и в [17] (см. (8. 3. 20) — (8. 3. 23) в [17]) система (8) может быть приведена к нормальной форме, которая в операторном виде записывается уравнением

$$x + Ax = b. \quad (11)$$

Здесь x — последовательность, элементами которой служат неизвестные $A_n^{\pm 1}, B_n^{\pm 1}$; b — последовательность с элементами $F_n^{\pm 1}, \Phi_n^{\pm 1}$; A — оператор, порожденный матрицей коэффициентов системы (8). Будем рассматривать уравнение (11) над пространством I_2 — гильбертовым пространством числовых последовательностей. Тогда можно показать, что и в общем случае оператор A вполне непрерывен в I_2 (для частного случая идентичных цилиндров с большими осями эллипсов сечения, находящимися на одной прямой, это утверждение доказывалось в [2]), если $l > a_{+1} + a_{-1}$, где a_s — большая полуось s -го эллипса, $s = \pm 1$, и что система (8) единственным образом разрешима методом усечения, сходящемуся к точному по норме пространства I_2 .

Оценим сначала по модулю величину множителя $Q_{mn}^{(1)}$, содержащегося в $a_{nm}^{-s, s}$. Он имеет явное выражение (см. (4. 5. 13) в [17])

$$Q_{mn}^{(1)} = \frac{1}{2} \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{\infty} A_r^{(n)}(q_s) A_p^{(m)}(q_{-s}) \left[\cos r\beta \{i^{r-p} H_{r-p}^{(1)}(kl) \cos(r-p) \alpha_{-s, s} + \right. \\ \left. + i^{r+p} H_{r+p}^{(1)}(kl) \cos(r+p) \alpha_{-s, s}\} \pm \sin r\beta \{i^{r-p} H_{r-p}^{(1)}(kl) \sin(r-p) \alpha_{-s, s} + \right. \\ \left. + i^{r+p} H_{r+p}^{(1)}(kl) \sin(r+p) \alpha_{-s, s}\} \right] \quad (12)$$

$H_n^{(1)}(x)$ — функция Ханкеля; $\alpha_{-1, 1} = \gamma$; $\alpha_{+1, -1} = \pi + \gamma$; $A_r^{(n)}$ и $B_r^{(n)}$ — коэффициенты Фурье функций Матье; штрих у знака сумм означает, что суммирование производится по четным (нечетным) номерам r и p , если n и m четные (нечетные) соответственно. Очевидно, что

$$|Q_{mn}^{(1)}| \leq \text{const} \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{\infty} |A_r^{(n)}(q_s) A_p^{(m)}(q_{-s}) H_{r+p}^{(1)}(kl)|. \quad (13)$$

Из формул (4. 2. 30), (4. 2. 31) в [17] следует, что для всех n и r справедливы оценки

$$|A_{n+2r}^{(n)}(q)| \leq \text{const}_0 \frac{n!}{r!(n+r)!} \left(\frac{q}{4}\right)^r, \quad r \geq 0, \quad (14)$$

$$|A_{n-2r}^{(n)}(q)| \leq \text{const}_0 \frac{(n-r-1)!}{r!(n-1)!} \left(\frac{q}{4}\right)^r, \quad n-2r \geq 0.$$

Положим в (13) $r = n + 2\mu$ и $p = m + 2\nu$, тогда

$$|Q_{mn}^{(1)}| \leq \text{const}_1 \sum_{\mu=-\frac{n}{2}}^{\infty} \sum_{\nu=-\frac{m}{2}}^{\infty} |A_{n+2\mu}^{(n)}(q_s) A_{m+2\nu}^{(m)}(q_{-s}) H_{n+m+2\mu+2\nu}^{(1)}(kl)|,$$



откуда на основании (14) и неравенства

$$|H_n^{(1)}(x)| \leq \text{const} \frac{(n-1)! 2^n}{x^n} \quad (15)$$

находим, что

$$|Q_{mn}^{(1)}| \leq \text{const}_2 \sum_{\mu=0}^{\infty} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{m!n! 2^{n+m} (n+m+2\mu+2\nu-1)! (kf_s)^{2\mu} (kf_{-s})^{2\nu}}{\mu! \nu! (n+\mu)! (m+\nu)! (kl)^{n+m+2\mu+2\nu}} \quad (16)$$

Пользуясь асимптотической формулой Стирлинга $n! \sim n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}$ и формулой [23] $(n+a)! \sim n! n^a$, $a > 0$, находим, что для любых n и m

$$\begin{aligned} |Q_{mn}^{(1)}| &\leq \text{const}_3 \frac{m!n! 4^{n+m}}{(kf_s)^n (kf_{-s})^m} \sum_{\mu=n}^{\infty} \sum_{\nu=m}^{\infty} \frac{(\mu+\nu)!}{\mu! \nu!} \left(\frac{f_s}{l}\right)^\mu \left(\frac{f_{-s}}{l}\right)^\nu \leq \\ &\leq \text{const}_4 \frac{m!n! 4^{n+m}}{(kf_s)^n (kf_{-s})^m}, \end{aligned} \quad (17)$$

если $l > f_{-1} + f_{+1}$. Следовательно, ряд, определяющий $Q_{mn}^{(1)}$, сходится абсолютно и равномерно, если

$$l > f_{+1} + f_{-1}. \quad (18)$$

Очевидно, что сходимость ряда улучшается с ростом l и с уменьшением f_s (при $f_s = 0$ величина $|Q_{mn}^{(1)}(kl)| \leq \text{const} |H_{n+m}^{(1)}(kl)|$). Рассмотрим теперь контурный интеграл

$$J_{mn} = \int_{C_0} e^{ik(\vec{n}\vec{R}_{-s,s})} \text{ce}_n(\delta \pm \beta, q_s) \text{ce}_m(\delta, q_{-s}) d\delta, \quad (19)$$

где $(\vec{n}\vec{R}_{-s,s}) = l \cos(\alpha_{-s,s} - \delta)$ и интегрирование производится вдоль контура C_0 с концами в точках $\left(\frac{\pi}{2} - i\infty\right)$ и $\left(-\frac{\pi}{2} + i\infty\right)$. Нетрудно заметить, что формальная замена в (19) функций Матье рядами Фурье, которыми они определяются, и использование формул (2.3.15) из [17], приводит к выражению $Q_{mn}^{(1)}$, отличающемуся от него лишь множителем π , т. е. что формально $Q_{mn}^{(1)} = \pi J_{mn}$. Исследуем интеграл (19), представив его в виде суммы:

$$J_{mn} = J_{mn}^{(1)} + J_{mn}^{(2)} + J_{mn}^{(3)}, \quad (20)$$

где

$$J_{mn}^{(1)} = \int_{-\pi/2}^{-\pi/2+i\infty} e^{ik(\vec{n}\vec{R}_{-s,s})} \text{ce}_n(\delta \pm \beta, q_s) \text{ce}_m(\delta, q_{-s}) d\delta, \quad J_{mn}^{(2)} = \int_{\pi/2}^{-\pi/2+i\infty} e^{ik(\vec{n}\vec{R}_{-s,s})} \text{ce}_n(\delta \pm \beta, q_s) \text{ce}_m(\delta, q_{-s}) d\delta, \quad J_{mn}^{(3)} = \int_{\pi/2-i\infty}^{\pi/2} e^{ik(\vec{n}\vec{R}_{-s,s})} \text{ce}_n(\delta \pm \beta, q_s) \text{ce}_m(\delta, q_{-s}) d\delta.$$

Рассмотрим, например, $J_{mn}^{(1)}$. После замены $\delta = -\frac{\pi}{2} + iz$, получим

$$\begin{aligned} J_{mn}^{(1)} &= i \int_0^{\infty} e^{-ikl \sin(\alpha_{-s,s} - iz)} \text{ce}_n \left[i \left(\frac{\pi i}{2} + z + \beta \right), q_s \right] \text{ce}_m \left[i \left(\frac{\pi i}{2} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + z \right), q_{-s} \right] dz. \end{aligned} \quad (21)$$

Пользуясь соотношениями

$$\begin{aligned}
 ce_{2n}(iz, q) &= Ce_{2n}(z, q), \quad ce_{2n+1}(iz, q) = Ce_{2n+1}(z, q), \\
 Ce_{2n}\left(\frac{\pi i}{2} + z, q\right) &= (-1)^n Ce_{2n}(z, -q), \quad Ce_{2n+1}\left(\frac{\pi i}{2} + z, q\right) = \\
 &= i(-1)^n Se_{2n+1}(z, -q)
 \end{aligned}
 \tag{22}$$

и асимптотическими (относительно аргумента) представлениями

$$\begin{aligned}
 (-1)^n d_{2n+1}(q) Se_{2n+1}(z, -q) &\sim i \sqrt{\frac{1}{2\pi v}} e^v, \quad (-1)^n c_{2n}(q) Ce_{2n}(z, -q) \sim \\
 &\sim \sqrt{\frac{1}{2\pi v}} e^v, \\
 v &= \frac{kf}{2} e^z,
 \end{aligned}
 \tag{23}$$

нетрудно установить, что интеграл (21) абсолютно и равномерно сходится, если

$$l \cos \alpha_{-s,s} \geq f_s + f_{-s} \tag{24}$$

(фактически если $l \cos \alpha_{-s,s} \geq f_s \cos \beta + f_{-s}$). Действительно, подынтегральное выражение в (21) есть непрерывная функция в промежутке $0 \leq z \leq z_0$,

где z_0 может быть как угодно велико. Следовательно, интеграл $\int_0^{z_0}$ сходится

при любых значениях его параметров. Рассмотрим теперь интеграл $\int_{z_0}^{\infty}$ с очень большим z_0 . Пользуясь соотношениями (22), (23) находим, что приближенно

$$\int_{z_0}^{\infty} = A_{mn} \int_{z_0}^{\infty} e^{-kshz[l \cos \alpha_{-s,s} - f_s \cos \beta - f_{-s}] - z + \text{Im}} dz,$$

где $\text{Im} = -ikl \sin \alpha_{-s,s} \text{ch } z \pm i\beta/2$, а множитель A_{mn} зависит лишь от m, n, k, f_s . Поэтому

$$\left| \int_{z_0}^{\infty} \right| \leq \text{const}_{mn} \int_{z_0}^{\infty} e^{-kshz[l \cos \alpha_{-s,s} - f_s - f_{-s}] - z} dz. \tag{25}$$

Здесь интеграл справа при соответствующем выборе z_0 может быть сделан сколь угодно малым ($\text{Re } k > 0$), если имеет место неравенство (24) (при $\alpha_{-s,s} = 0$ условие (24) совпадает с (18)). Аналогичным образом устанавливается и сходимость интеграла $J_{mn}^{(3)}$ при (24). Интеграл $J_{mn}^{(2)}$ с конечными пределами интегрирования сходится, очевидно, при любых значениях его параметров. Таким образом, неравенством (24) определяются условия, при выполнении которых интеграл (19) сходится абсолютно и равномерно для любого m и n . При этих же условиях оказывается допустимой перемена порядка суммирования и интегрирования в (19) при замене функций $se_n(\eta, q)$ их рядами Фурье. Поэтому, если наряду с (24) имеет место и (18), то тогда

$$Q_{mn}^{(1)} \equiv \pi J_{mn}^{(1)}. \tag{26}$$

Взятый в (19) путь интегрирования ограничивает область определения тождества (26) лишь теми значениями угла $\alpha_{-s,s}$, для которых справедливо неравенство (24). Однако изменением пути интегрирования в (19), а именно его вертикальных частей, можно на основании интегральной теоремы Коши аналитически продолжить функцию и воспользоваться другим путем интегрирования, например, контуром C_1 с концами в точках $\left(\frac{\pi}{2} - \alpha_{-s,s} - i\infty\right)$ и $\left(-\frac{\pi}{2} + \alpha_{-s,s} + i\infty\right)$, получая прежний результат интегрирования. Тогда по прежней схеме найдем, что (26) будет иметь место при условии (18), если кроме того еще и

$$l \geq f_s \cos(\alpha_{-s,s} \pm \beta) + f_{-s} \cos(\alpha_{-s,s}). \quad (27)$$

Так как $f_s + f_{-s} \geq f_s \cos(\alpha_{-s,s} \pm \beta) + f_{-s} \cos(\alpha_{-s,s})$, то условие (18) останется единственным, при выполнении которого (26) будет иметь место для всех $n, m, \alpha_{-s,s}$ и β .

Рассмотрим теперь аналитическое продолжение

$$J_{mn} = \int_{C_1} e^{ik(\vec{n}\vec{R}_{-s,s})} ce_n(\delta \mp \beta, q_s) se_n(\delta, q_{-s}) d\delta, \quad (28)$$

дающее (26) при (18), и оценим его по модулю. Для этого предварительно найдем асимптотическое представление функций $Ce_n(z, q)$, $Se_n(z, q)$ относительно индекса n .

Известно, что при $n \rightarrow \infty$ $ce_n(z, q) \rightarrow \cos nz$, $se_n(z, q) \rightarrow \sin nz$ равномерно по $z \in [0, 2\pi]$. Поэтому из сравнения интегральных представлений [17]

$$J_n(k\rho) \frac{\cos(n\varphi)}{\sin(n\varphi)} = \frac{(-i)^n}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{ik\rho \cos(\varphi-\alpha)} \frac{\cos(n\alpha)}{\sin(n\alpha)} d\alpha$$

и

$$\begin{aligned} \frac{c_n(q) Ce_n(z, q) ce_n(\eta, q)}{d_n(q) Se_n(z, q) se_n(\eta, q)} &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{ikf[\text{ch}z \cos \eta \cos \alpha + \text{sh}z \sin \eta \sin \alpha]} \times \\ &\times \left\{ \frac{ce_n(\alpha, q)}{se_n(\alpha, q)} \right\} d\alpha, \end{aligned}$$

взятых соответственно при $\varphi = 0$ и $\eta = 0$ и достаточно большом n (соотношения, содержащие угловые нечетные функции предварительно дифференцируются по φ и η соответственно) найдем, что

$$\begin{aligned} c_n(q) Ce_n(z, q) &\sim i^n J_n(kf \text{ch} z), \\ d_n(q) Se_n(z, q) &\sim i^n J_n(kf \text{ch} z). \end{aligned} \quad (29)$$

Поэтому при соответствующем выборе постоянной для всех n

$$\left| \frac{c_n(q) Ce_n(z, q)}{d_n(q) Se_n(z, q)} \right| \leq \text{const} J_n(kf \text{ch} z). \quad (30)$$

Так как [19]

$$|J_n(z)| \leq \frac{|z^n|}{2^n n!} e^{|\text{Im}z|} \quad (31)$$

для всех n и z ($n \geq 0$), то вместо (30) получим следующие оценки для функций Матье:

$$\left| \begin{matrix} c_n(q) Ce_n(z, q) \\ d_n(q) Se_n(z, q) \end{matrix} \right| \leq \text{const} \frac{|(k f \text{ ch } z)^n|}{2^{n n!}} e^{\text{Im}(k f \text{ ch } z)} \quad (32)$$

Представим теперь интеграл (28) суммой вида (20), где

$$J_{mn}^{(1)} = \int_{-\pi/2 + \alpha_{-s,s}}^{-\pi/2 + \alpha_{-s,s} + i\infty} \dots, \quad J_{mn}^{(2)} = \int_{\pi/2 - \alpha_{-s,s}}^{-\pi/2 + \alpha_{-s,s}} \dots, \quad J_{mn}^{(3)} = \int_{\pi/2 - \alpha_{-s,s} - i\infty}^{\pi/2 - \alpha_{-s,s}} \dots$$

На основании (22)

$$J_{mn}^{(1)} = i \int_0^\infty e^{-k l \text{ sh } z} Ce_n \left[\frac{\pi i}{2} \pm i\beta - i\alpha_{-s,s} + z, q_s \right] Ce_m \left[\frac{\pi i}{2} - i\alpha_{-s,s} + z, q_{-s} \right] dz,$$

а на основании (32)

$$|J_{mn}^{(1)}| \leq \text{const}_4 \frac{(k f_s)^n (k f_{-s})^m}{2^{n+m} n! m! c_n(q_s) c_m(q_{-s})} \int_0^\infty e^{-k l \text{ sh } z} (\text{sh } z)^{n+m} dz, \quad (33)$$

или после замены $k l \text{ sh } z = t$

$$|J_{mn}^{(1)}| \leq \text{const}_5 \frac{(k f_s)^n (k f_{-s})^m}{2^{n+m} n! m! c_n(q_s) c_m(q_{-s}) (kl)^{n+m}} \int_0^\infty e^{-t} t^{n+m-1} dt. \quad (34)$$

Вычислив интеграл Эйлера, стоящий справа в (34), получим

$$|J_{mn}^{(1)}| \leq \text{const}_5 \frac{(k f_s)^n (k f_{-s})^m (n+m-1)!}{2^{n+m} n! m! c_n(q_s) c_m(q_{-s}) (kl)^{n+m}}. \quad (35)$$

Аналогичная оценка получается и для интеграла $J_{mn}^{(3)}$. Исходя из явного выражения величины $c_n(q)$ (см. (4.3.4), [17]) и представления (4.2.31) из [17] находим, что

$$|J_{mn}^{(1)}|, |J_{mn}^{(3)}| \leq \text{const}_6 \frac{2^{n+m} (n+m-1)!}{(kl)^{n+m}}. \quad (36)$$

Правая часть (36) неограниченно возрастает с ростом n или m . Поэтому интеграл $J_{mn}^{(2)}$, ограниченный некоторой константой для всех n и m будет также мажорироваться правой частью неравенства (36). Таким образом, для всех n и m справедлива оценка

$$\pi |J_{mn}| = |Q_{mn}^{(1)}| \leq \text{const}_7 \frac{2^{n+m} (n+m-1)!}{(kl)^{n+m}}, \quad (37)$$

на основании которой имеем

$$|\alpha_{nm}^{-s,s}| \leq \text{const}_8 \left| \frac{c_m(q_{-s}) Ce_m(\xi_{-s}^0, q_{-s})}{c_n(q_s) Me_n^{(1)}(\xi_s^0, q_s)} \right| \frac{2^{n+m} (n+m-1)!}{(kl)^{n+m}}. \quad (38)$$

Пользуясь (30) и асимптотическим представлением функции $\text{Me}_n^{(1)}(\xi, q)$ при большом n [17], устанавливаем следующую оценку для матричных элементов $a_{nm}^{-s,s}$ системы (8):

$$|a_{nm}^{-s,s}| \leq \text{const}_9 \frac{(n+m)!}{n! m!} \left(\frac{a_s}{l}\right)^n \left(\frac{a_{-s}}{l}\right)^m; \quad (39)$$

здесь $a_s = f_s \text{ch } \xi_s^0$ — длина большей полуоси эллипса сечения s -го цилиндра, $s = \pm 1$.

На основе подобных рассуждений оценка (39) получается и для всех других матричных элементов системы (8).

Рассматривая поведение правых частей системы (8) сначала при больших n , находим затем, что для всех n имеет место оценка

$$\left\{ \begin{array}{l} |F_n^s| \\ |\Phi_n^s| \end{array} \right\} \leq \text{const}_{10} \left(\frac{eka_s}{2n_0}\right)^n \leq \text{const}_0 \tau_s^n, \quad 0 < \tau_s = \frac{eka_s}{2n_0} < 1 \quad (40)$$

(n_0 — число, начиная с которого справедлива формула $n! \sim n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}$). Так как норма оператора \mathbf{A} в \mathbf{I}_2

$$\|\mathbf{A}\| \leq \left[\text{const} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \left\{ \frac{(n+m)!}{n! m!} \left(\frac{a_s}{l}\right)^n \left(\frac{a_{-s}}{l}\right)^m \right\}^2 \right]^{1/2} < \infty,$$

если $l > a_s + a_{-s}$ и $\sum_{n=0}^{\infty} |F_n^s|^2 < \infty$, $\sum_{n=0}^{\infty} |\Phi_n^s|^2 < \infty$ (т. е. $\mathbf{b} \in \mathbf{I}_2$), то отсюда и следует справедливость сделанного раньше утверждения относительно \mathbf{A} и разрешимости системы (8) методом редукции (см. [20 — 22]). При этом

$$\text{и решение системы } \mathbf{x} \in \mathbf{I}_2 \text{ (т. е. } \sum_{n=0}^{\infty} |A_n^s|^2 < \infty \text{ и } \sum_{n=1}^{\infty} |B_n^s|^2 < \infty).$$

Нетрудно теперь заметить, что фактически $\sum_{n=0}^{\infty} |A_n^s| < \infty$ и $\sum_{n=0}^{\infty} |B_n^s| < \infty$, т. е. решение системы (8) принадлежит пространству \mathbf{I}_1 [21]. Действительно, из (8) находим, что, например,

$$|A_n^s| \leq |F_n^s| + \sum_{m=0}^{\infty} [|a_{nm}^{-s,s} A_m^{-s}| + |\beta_{nm}^{-s,s} B_m^{-s}|],$$

Принадлежность A_n^s , B_n^s пространству \mathbf{I}_2 означает их ограниченность по модулю для всех n . Поэтому на основании полученных выше оценок для матричных элементов и правых частей системы получим

$$\begin{aligned} |A_n^s|, |B_n^s| &\leq \left[\text{const}_1 \tau_s^n + \text{const}_2 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(n+m)!}{n! m!} \left(\frac{a_s}{l}\right)^n \left(\frac{a_{-s}}{l}\right)^m \right] = \\ &= \left[\text{const}_1 \tau_s^n + \text{const}_2 \frac{a_s^n l}{(l - a_{-s})^{n+1}} \right] \leq \text{const} \max \{ \tau_s^n, l_s^n \}, \end{aligned} \quad (41)$$

где $t_s = a_s / (l - a_s) < 1$. Этот результат позволяет, в свою очередь, легко установить абсолютную и равномерную сходимость всех рядов, определяющих переизлученное поле в любой точке пространства.

В заключение первой части статьи отметим, что на основе результатов из [22] и полученных выше оценок для матричных элементов и правых частей системы (8) легко находится оценка скорости сходимости приближенного решения \tilde{x} системы (8) к ее точному решению по норме пространства в зависимости от числа N — порядка усечения системы (8). Она имеет вид

$$\|x - \tilde{x}\| \leq \text{const} \max \{ \tau_s^N, t_s^N \}. \quad (42)$$

При конечных значениях l число n_0 , определяющее τ_s , можно взять настолько большим, чтобы $t_s > \tau_s$, и тогда вместо (42) скорость сходимости приближенного решения к точному по норме l_2 будет оцениваться величиной

$$\text{const} t_s^N. \quad (43)$$

При $l \rightarrow \infty$ все $\alpha_{nm}^{-s,s}$, $\beta_{nm}^{-s,s}$, $\gamma_{nm}^{-s,s}$ и $\delta_{nm}^{-s,s} \rightarrow 0$, и тогда

$$A_n^s \rightarrow F_n^s, \quad B_n^s \rightarrow \Phi_n^s. \quad (44)$$

Литература

1. Saermark K. Appl. Sci. Res., Section B, 7, 417, 1959.
2. Иванов Е. А., Родов А. М. Вестн АН БССР, сер. физ.-техн. наук, № 2, 1960.
3. Millar R. F. Can. J. Phys., 2, 272, 1960.
4. Иванов Е. А. Вестн АН БССР, сер. физ.-техн. наук, № 1, 1962.
5. Иванов Е. А. Вестн АН БССР, сер. физ.-техн. наук, № 4, 1963.
6. Germeu K. Ann. der Physik, 13, № 5—6, 237, 1964.
7. Andreason Modens G. IEEE Trans. Anten. and Propadat., Ap-12, № 6, 1964.
8. Germeu K. Ann. der Physik, 7, B 17, № 7—8, 1966.
9. Мошинский А. В. Вестн АН БССР, сер. физ.-мат. наук, № 4, 1966.
10. Мошинский А. В. Вестн АН БССР, сер. физ.-мат. наук, № 2, 1967.
11. Twersky V. J. Appl. Phys., 23, № 4, 1952.
12. Row R. J. Appl. Phys., 26, № 6, 1955.
13. Twersky V. Electromagnetic waves. Madison Press, 1962.
14. Иванов Е. А., Ильюкевич С. Ф. Дифференциальные уравнения, № 1, 1965.
15. Иванов Е. А., Коблова Г. М. Вестн АН БССР, сер. физ.-мат. наук, № 4, 1967.
16. Кинбер Б. Е., Гуревич С. В. Радиотехника и электроника, 8, № 5, 1968.
17. Иванов Е. А. Дифракция электромагнитных волн на двух телах. Изд. «Наука и техника». Минск, 1968.
18. Мак-Лаклан Н. В. Теория и приложения функций Матье. М., 1953.
19. Ватсон Г. Н. Теория бесселевых функций, 1. ИЛ, 1947.
20. Канторович Л. В., Крылов В. И. Приближенные методы высшего анализа. Физматгиз, М., 1962.
21. Вулих Б. З. Введение в функциональный анализ. Изд. «Наука». М., 1967.
22. Канторович Л. В., Акилов Г. М. Функциональный анализ в нормированных пространствах. Физматгиз, М., 1958.
23. Поллиа Г., Сеге Г. Теоремы и задачи из анализа, 1. М., 1956.

Институт математики АН БССР,
Минский радиотехнический институт

— Поступило в редакцию 16.IX 1968

В. Н. РУСАК

СОПРЯЖЕННЫЕ РАЦИОНАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ И ОЦЕНКИ ИХ ПРОИЗВОДНЫХ

Для рациональных функций, ограниченных на вещественной оси, обычным образом вводится понятие сопряженной функции и изучается вопрос об оценках производных от рациональной функции и ей сопряженной. В § 1 излагаются свойства дробей С. Н. Бернштейна для всей вещественной оси. В § 2 рассматриваются пары сопряженных функций, связанные с интерполяционными рациональными дробями. В § 3 получены оценки производных от рациональной функции и ей сопряженной, обобщающие известные оценки для тригонометрических многочленов и прежние результаты автора.

§ 1. Свойства рациональных дробей С. Н. Бернштейна. Следуя [1], введем обозначения

$$\varphi_k = \arg(\alpha_k + i\beta_k - x), \quad \beta_k > 0, \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

$$\psi_n = \Psi_n(x) = 2 \sum_{k=1}^n \varphi_k, \quad t_{2n}(x) = \prod_{k=1}^n [(\alpha_k - x)^2 + \beta_k^2]. \quad (1)$$

При обозначениях (1) будем иметь при любом φ

$$M_{2n, \varphi}(x) \equiv \cos[\psi_n(x) + \varphi] = \frac{1}{2} \left\{ e^{i(\varphi + 2 \sum_{k=1}^n \varphi_k)} + e^{-i(\varphi + 2 \sum_{k=1}^n \varphi_k)} \right\} = \frac{1}{2} \left\{ e^{i\varphi} \prod_{k=1}^n \frac{(\alpha_k + i\beta_k - x)^2}{(\alpha_k - x)^2 + \beta_k^2} + e^{-i\varphi} \prod_{k=1}^n \frac{(\alpha_k - i\beta_k - x)^2}{(\alpha_k - x)^2 + \beta_k^2} \right\} \equiv \frac{P_{2n, \varphi}(x)}{t_{2n}(x)}, \quad (2)$$

где $P_{2n, \varphi}(x)$ — многочлен степени не выше $2n$. Мы будем называть $M_{2n, \varphi}(x)$ косинус-дробью С. Н. Бернштейна. Отметим, что $P_{2n, \varphi}(x)$ будет иметь степень меньше $2n$ именно лишь в случае, если $\varphi = \frac{\pi}{2} \pmod{\pi}$.

Мы можем считать в согласии с (1), что $\varphi_k(-\infty) = 0$, $\varphi_k(\infty) = \pi$. И поскольку

$$\psi_n'(x) = \left(2 \sum_{k=1}^n \operatorname{arccctg} \frac{\alpha_k - x}{\beta_k} \right)' = 2 \sum_{k=1}^n \frac{\beta_k}{(\alpha_k - x)^2 + \beta_k^2} > 0, \quad (3)$$

то аргумент $\psi_n(x) + \varphi$ при возрастании x от $-\infty$ до ∞ строго возрастает от φ до $\varphi + 2n\pi$. Это означает, что $\cos[\psi_n(x) + \varphi]$ на промежутке $-\infty \leq x \leq \infty$ обращается в нуль $2n$ раз, если при $\varphi = \frac{\pi}{2} \pmod{\pi}$ считать точки $-\infty$ и ∞ за одну точку.

Фиксируем некоторое $\varphi = \varphi_0 \neq \frac{\pi}{2} \pmod{\pi}$ и обозначим нули косинус-доби $M_{2n, \varphi_0}(x)$ через

$$-\infty < \bar{x}_1 < \bar{x}_2 < \dots < \bar{x}_{2n} < \infty. \quad (4)$$

Если теперь φ возрастает на промежутке $\varphi_0 \leq \varphi < \varphi_0 + \pi$, то нули $\{x_k\}$ косинус-доби $M_{2n, \varphi}(x) = \cos[\psi_n(x) + \varphi]$ с учетом монотонности $\psi_n(x)$ будут непрерывно смещаться влево, так, что

$$-\infty \leq x_1 \leq \bar{x}_1, \bar{x}_1 < x_2 \leq \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_{2n-1} < x_{2n} \leq \bar{x}_{2n}, \bar{x}_{2n} < x_1 \leq \infty. \quad (5)$$

Каждая точка вещественной оси побывает нулем косинус-доби при некотором $\varphi_0 \leq \varphi < \varphi_0 + \pi$.

Наряду с косинус-добию введем синус-добию С. Н. Бернштейна (см. (1))

$$N_{2n, \varphi}(x) \equiv \sin[\psi_n(x) + \varphi] \equiv Q_{2n}(x)/t_{2n}(x). \quad (6)$$

Очевидно, при всех x справедливо равенство

$$M_{2n, \varphi}^2(x) + N_{2n, \varphi}^2(x) = 1. \quad (7)$$

Синус-добию $N_{2n, \varphi}(x)$ также обращается в нуль в $2n$ точках $\{y_i\}_{i=1}^{2n}$ при любом φ , если считать при $\varphi = 0 \pmod{\pi}$ точки $-\infty$ и ∞ за одну точку, что вытекает из равенства

$$N_{2n, \varphi}(x) = M_{2n, \varphi - \frac{\pi}{2}}(x). \quad (8)$$

§ 2. Построение сопряженных рациональных функций. Всякую рациональную функцию с фиксированным знаменателем

$$R_{2n}(x) = (a_0 x^{2n} + a_1 x^{2n-1} + \dots + a_{2n})/t_{2n}(x) \quad (9)$$

можно представить в виде

$$R_{2n}(x) \equiv CM_{2n, \varphi}(x) + \sum_{k=1}^{2n} R_{2n}(x_k) \frac{M_{2n, \varphi}(x)}{(x - x_k) M'_{2n, \varphi}(x_k)}, \quad (10)$$

где считается $\varphi \neq \frac{\pi}{2} \pmod{\pi}$.

Учитывая (2), (4) и (6), имеем

$$M'_{2n, \varphi}(x_k) = -N_{2n, \varphi}(x_k) \psi'_n(x_k). \quad (11)$$

Поэтому из (10) и (11) следует представление

$$R_{2n}(x) \equiv CM_{2n, \varphi}(x) - \sum_{k=1}^{2n} R_{2n}(x_k) \frac{N_{2n, \varphi}(x_k) M_{2n, \varphi}(x)}{(x - x_k) \psi'_n(x_k)}. \quad (12)$$

Если $f(x)$ определена на всей вещественной оси, то функцию

$$\bar{f}(x) = -\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{f(x+t) - f(x-t)}{t} dt \quad (13)$$

называют сопряженной по отношению к $f(x)$.

Известно, что если $f(x) \in L_p$, $p > 1$, то имеет место двойственная формула (см., например, [2], стр. 170)

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\bar{f}(x+t) - \bar{f}(x-t)}{t} dt. \quad (13')$$

Если $f(x)$ есть рациональная функция вида (9), то сопряженная функция также будет рациональной функцией с тем же знаменателем. Это будет ясно из дальнейшего. Более того, мы найдем подходящее выражение для $\bar{R}_{2n}(x)$, если $R_{2n}(x)$ записано по формуле (12).

Сперва найдем сопряженную функцию $\bar{f}(x)$, если

$$f(x) \equiv M_{2n,\varphi}(x) = \frac{P_{2n}(x)}{t_{2n}(x)}. \quad (14)$$

Для простоты будем считать, что все числа $\alpha_k + i\beta_k$ различны. Разложим косинус-дробь С. Н. Бернштейна на простые дроби:

$$\begin{aligned} \frac{P_{2n}(x)}{t_{2n}(x)} &= C_1 + \sum_{k=1}^n \frac{P_{2n}(\alpha_k + i\beta_k)}{(x - \alpha_k - i\beta_k) t'_{2n}(\alpha_k + i\beta_k)} + \\ &+ \sum_{k=1}^n \frac{P_{2n}(\alpha_k - i\beta_k)}{(x - \alpha_k + i\beta_k) t'_{2n}(\alpha_k - i\beta_k)}. \end{aligned} \quad (15)$$

Поскольку \bar{f} линейно зависит от f , то достаточно найти сопряженную функцию для простой дроби

$$f_k(x) = \frac{1}{x - \alpha_k + i\beta_k}.$$

Согласно (13), вычисляем

$$\begin{aligned} \bar{f}_k(x) &= -\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{1}{t} \left(\frac{1}{x+t - \alpha_k + i\beta_k} - \frac{1}{x-t - \alpha_k + i\beta_k} \right) dt = \\ &= \frac{1}{\pi} \frac{1}{x - \alpha_k + i\beta_k} \left\{ \int_0^{\infty} \frac{dt}{t+x - \alpha_k + i\beta_k} - \int_0^{\infty} \frac{dt}{t-x + \alpha_k - i\beta_k} \right\} = \\ &= \frac{1}{\pi} \frac{1}{x - \alpha_k + i\beta_k} \left\{ \int_0^{\infty} \frac{t+x - \alpha_k - i\beta_k}{(t+x - \alpha_k)^2 + \beta_k^2} dt - \right. \\ &\left. - \int_0^{\infty} \frac{t-x + \alpha_k + i\beta_k}{(t-x + \alpha_k)^2 + \beta_k^2} dt \right\} = \frac{-i}{x - \alpha_k + i\beta_k}. \end{aligned} \quad (16)$$

Если теперь $f_k(x) = 1/(x - \alpha_k - i\beta_k)$, то по принципу комплексного сопряжения

$$\bar{f}_k(x) = i/(x - \alpha_k - i\beta_k). \quad (17)$$

Учитывая (16), (17) и то, что сопряженной функцией для константы будет нуль, имеем из (15) (см. (14))

$$\bar{f}(x) = \sum_{k=1}^n \frac{iP_{2n}(\alpha_k + i\beta_k)}{(x - \alpha_k - i\beta_k)t'_{2n}(\alpha_k + i\beta_k)} - \sum_{k=1}^n \frac{iP_{2n}(\alpha_k - i\beta_k)}{(x - \alpha_k + i\beta_k)t'_{2n}(\alpha_k - i\beta_k)}. \quad (18)$$

Разложим теперь на простые дроби синус-дробь С. Н. Бернштейна (см. (6)):

$$\begin{aligned} \frac{Q_{2n}(x)}{t_{2n}(x)} &= C_2 + \sum_{k=1}^n \frac{Q_{2n}(\alpha_k + i\beta_k)}{(x - \alpha_k - i\beta_k)t'_{2n}(\alpha_k + i\beta_k)} + \\ &+ \sum_{k=1}^n \frac{Q_{2n}(\alpha_k - i\beta_k)}{(x - \alpha_k + i\beta_k)t'_{2n}(\alpha_k - i\beta_k)}. \end{aligned} \quad (19)$$

Из (7) вытекает:

$$P_{2n}^2(x) + Q_{2n}^2(x) \equiv t_{2n}^2(x), \quad (20)$$

и, в частности при $x = \alpha_k \pm i\beta_k$,

$$P_{2n}^2(\alpha_k \pm i\beta_k) + Q_{2n}^2(\alpha_k \pm i\beta_k) = 0. \quad (20')$$

Заметим, что многочлен $P_{2n}(x) + iQ_{2n}(x)$ имеет все корни в верхней полуплоскости. Действительно, учитывая (1), (2) и (6), имеем

$$\begin{aligned} P_{2n}(x) + iQ_{2n}(x) &= t_{2n}(x) [M_{2n,\varphi}(x) + iN_{2n,\varphi}(x)] = \\ &= t_{2n}(x) e^{i[\psi_n(x) + \varphi]} = e^{i\varphi} \prod_{k=1}^n (\alpha_k + i\beta_k - x)^2. \end{aligned} \quad (21)$$

Поэтому из (20')

$$P_{2n}(\alpha_k + i\beta_k) = -iQ_{2n}(\alpha_k + i\beta_k), \quad P_{2n}(\alpha_k - i\beta_k) = iQ_{2n}(\alpha_k - i\beta_k). \quad (22)$$

Сравнивая теперь (18) и (19) с учетом (22), заключаем, что сопряженными будут косинус-дробь и синус-дробь С. Н. Бернштейна

$$f(x) = M_{2n,\varphi}(x), \quad \bar{f}(x) = N_{2n,\varphi}(x) + C_3. \quad (23)$$

Покажем теперь, что если

$$f(x) = -N_{2n,\varphi}(x_k) M_{2n,\varphi}(x)/(x - x_k) \equiv P_{2n-1}(x)/t_{2n}(x), \quad (24)$$

то

$$\bar{f}(x) = C_4 + \{1 - N_{2n,\varphi}(x_k) N_{2n,\varphi}(x)\}/(x - x_k) \equiv C_4 + \frac{Q_{2n-1}(x)}{t_{2n}(x)}. \quad (25)$$

Действительно, с одной стороны, для $\bar{f}(x)$ имеет место формула вида (18), где лишь $P_{2n}(x)$ заменяется на $P_{2n-1}(x)$. С другой стороны, можно написать разложение вида (19) с заменой $Q_{2n}(x)$ на $Q_{2n-1}(x)$. Поэтому остается проверить соотношение вида (22), что мы и проделаем.

Из (24) следует

$$P_{2n-1}(x)(x-x_k) = -t_{2n}(x)N_{2n,\varphi}(x_k)M_{2n,\varphi}(x) = -N_{2n,\varphi}(x_k)P_{2n}(x) \quad (26)$$

и из (25)

$$Q_{2n-1}(x)(x-x_k) = t_{2n}(x) - N_{2n,\varphi}(x_k)Q_{2n}(x). \quad (27)$$

Взяв отношение (26) и (27) и полагая в нем $x = \alpha_k \pm i\beta_k$, имеем

$$P_{2n-1}(\alpha_k \pm i\beta_k)/Q_{2n-1}(\alpha_k \pm i\beta_k) = P_{2n}(\alpha_k \pm i\beta_k)/Q_{2n}(\alpha_k \pm i\beta_k). \quad (28)$$

Это и доказывает равенство (25).

Учитывая (23) и (25), можем написать сопряженную рациональную функцию для $R_{2n}(x)$ (см. формулу (12)):

$$\bar{R}_{2n}(x) = CN_{2n,\varphi}(x) + \sum_{k=1}^{2n} \frac{1 - N_{2n,\varphi}(x_k)N_{2n,\varphi}(x)}{(x-x_k)\psi_n(x_k)} R_{2n}(x_k) + C_5. \quad (29)$$

Отметим еще, что из (23) и (13') вытекает с точностью до константы следующее равенство:

$$\bar{N}_{2n,\varphi}(x) = -M_{2n,\varphi}(x). \quad (23')$$

Результаты этого параграфа остаются справедливыми и в случае, если среди чисел $\{\alpha_k + i\beta_k\}_{k=1}^n$ имеются равные.

§ 3. Оценки производной сопряженной рациональной функции.

Теорема 1. Если рациональная функция вида (9) удовлетворяет условию

$$|R_{2n}(x)| \leq 1, \quad -\infty \leq x \leq \infty, \quad (30)$$

то справедлива оценка

$$[R_{2n}'(x) + \bar{R}_{2n}'(x)]^2 \leq 2 \sum_{k=1}^n \frac{\beta_k}{(\alpha_k - x)^2 + \beta_k^2}. \quad (31)$$

Знак равенства в (31) будет достигаться только для дробей С. Н. Бернштейна в их нулях.

Доказательство. Умножим (12) на $\cos \alpha$, (29) на $\sin \alpha$ и вычтем:

$$R_{2n}(x) \cos \alpha - \bar{R}_{2n}(x) \sin \alpha = CM_{2n,\varphi+\alpha}(x) - \sum_{k=1}^{2n} R_{2n}(x_k) \frac{N_{2n,\varphi}(x_k)M_{2n,\varphi+\alpha}(x) + \sin \alpha}{(x-x_k)\psi_n(x_k)} - C_5 \sin \alpha. \quad (32)$$

Дифференцируем (32) по x и полагаем $x = y_i$, где y_i есть нуль функции $N_{2n,\varphi+\alpha}(x)$, $\alpha \neq \frac{\pi}{2} \pmod{\pi}$,

$$R_{2n}'(y_i) \cos \alpha - \bar{R}_{2n}'(y_i) \sin \alpha = \sum_{k=1}^{2n} R_{2n}(x_k) \frac{N_{2n,\varphi}(x_k)M_{2n,\varphi+\alpha}(y_i) + \sin \alpha}{(y_i - x_k)^2 \psi_n(x_k)} \equiv \sum_{k=1}^{2n} \gamma_{ki} R_{2n}(x_k), \quad (33)$$

$$|R_{2n}'(y_i) \cos \alpha - \bar{R}_{2n}'(y_i) \sin \alpha| \leq \sum_{k=1}^{2n} |R_{2n}(x_k)| \cdot |\gamma_{ki}|. \quad (33')$$

Если в формуле (33) положить $R_{2n}(x) \equiv N_{2n,\varphi}(x)$, то получим (см. (23'))

$$\begin{aligned} & M_{2n,\varphi}(y_i) \psi'_n(y_i) \cos \alpha - N_{2n,\varphi}(y_i) \psi'_n(y_i) \sin \alpha = \\ & = \sum_{k=1}^{2n} N_{2n,\varphi}(x_k) \frac{N_{2n,\varphi}(x_k) M_{2n,\varphi+\alpha}(y_i) + \sin \alpha}{(y_i - x_k)^2 \psi'_n(x_k)}, \end{aligned}$$

или

$$\psi'_n(y_i) = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1 + N_{2n,\varphi}(x_k) M_{2n,\varphi+\alpha}(y_i) \sin \alpha}{(y_i - x_k)^2 \psi'_n(x_k)} = \sum_{k=1}^{2n} |\gamma_{ki}|. \quad (34)$$

Если $R_{2n}(x)$ удовлетворяет условию (30), то из (33) имеем

$$|R'_{2n}(y_i) \cos \alpha - \tilde{R}'_{2n}(y_i) \sin \alpha| \leq \sum_{k=1}^{2n} |\gamma_{ki}| = \psi'_n(y_i), \quad (35)$$

где левая и правая части неравенства непрерывно зависят от φ и α . Остается заметить, что всякую точку x на вещественной оси можно рассматривать как нуль некоторой функции $N_{2n,\varphi+\alpha}(x)$, считая α фиксированным и изменяя лишь параметр φ .

Поэтому при любом фиксированном α

$$|R'_{2n}(x) \cos \alpha - \tilde{R}'_{2n}(x) \sin \alpha| \leq \psi'_n(x). \quad (35')$$

Теперь из (35') в силу произвольности α вытекает оценка (31). Знак равенства в (31) возможен одновременно со знаком равенства в (33'). Поскольку знаки γ_{ki} переменные, то $R_{2n}(x_k)$ должно попеременно равняться 1 и -1 в $2n$ точках, нулях функции $M_{2n,\varphi}(x)$. Если учесть еще условие (30), то мы должны заключить, что случай равенства в (31) осуществляется лишь при

$$R_{2n}(x) = \pm N_{2n,\varphi}(x), \quad \tilde{R}_{2n}(x) = \pm M_{2n,\varphi}(x).$$

Следствие. При условии (30) верны оценки

$$|R'_{2n}(x)| \leq \psi'_n(x), \quad |\tilde{R}'_{2n}(x)| \leq \psi'_n(x).$$

Первая из этих оценок получена нами в работе [5]. Выведем теперь более общую оценку производной.

Теорема 2. Для любой положительной возрастающей выпуклой функции $\Phi(t)$ справедлива оценка

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} \Phi \left(\left| \frac{R'_{2n}(x) \cos \alpha - \tilde{R}'_{2n}(x) \sin \alpha}{\psi'_n(x)} \right| \right) \psi'_n(x) dx \leq \\ & \leq \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(|R_{2n}(x)|) \psi'_n(x) dx. \end{aligned} \quad (36)$$

Знак равенства в (36) достигается только для рациональных дробей С. Н. Бернштейна.

Доказательство. Будем считать, что в (33) и (34)

$$\varphi \neq \frac{\pi}{2}, \quad \alpha \neq \frac{\pi}{2}, \quad \varphi + \alpha \neq 0, \quad \frac{\pi}{2} \pmod{\pi}.$$

Мы этим исключаем случай, когда x_k либо y_i попадает на бесконечность. Наряду с равенством (34) справедливо двойственное равенство

$$\psi'_n(x_k) = \sum_{i=1}^{2n} \frac{1 + \sin \alpha N_{2n, \varphi}(x_k) M_{2n, \varphi + \alpha}(y_i)}{(y_i - x_k)^2 \psi'_n(y_i)}. \quad (34')$$

Чтобы установить (34'), заметим прежде всего, что

$$N_{2n, \varphi}(x) = M_{2n, \varphi - \frac{\pi}{2}}(x), \quad M_{2n, \varphi + \alpha}(x) = N_{2n, \varphi + \alpha + \frac{\pi}{2}}, \\ \varphi - \frac{\pi}{2} - \varphi - \alpha - \frac{\pi}{2} = -\alpha - \pi.$$

Теперь можно представить, что равенство (34') получается так же, как и (34), если строить интерполяционную формулу по $\{y_i\}$, затем брать производную при $x = x_k$ и вместо α писать $-\alpha - \pi$.

Из (33') имеем

$$\left| \frac{R'_{2n}(y_i) \cos \alpha - \tilde{R}'_{2n}(y_i) \sin \alpha}{\psi'_n(y_i)} \right| \leq \sum_{k=1}^{2n} |R_{2n}(x_k)| \frac{|\gamma_{ki}|}{\psi'_n(y_i)}. \quad (37)$$

Учитывая теперь неравенство Иенсена для сумм, имеем

$$\Phi \left(\left| \frac{R'_{2n}(y_i) \cos \alpha - \tilde{R}'_{2n}(y_i) \sin \alpha}{\psi'_n(y_i)} \right| \right) \leq \sum_{k=1}^{2n} \frac{|\gamma_{ki}|}{\psi'_n(y_i)} \Phi(|R_{2n}(x_k)|). \quad (38)$$

Суммируем (38) по i , учитывая (34'):

$$\sum_{i=1}^{2n} \Phi \left(\left| \frac{R'_{2n}(y_i) \cos \alpha - \tilde{R}'_{2n}(y_i) \sin \alpha}{\psi'_n(y_i)} \right| \right) \leq \sum_{i=1}^{2n} \sum_{k=1}^{2n} \frac{\Phi(|R_{2n}(x_k)|)}{\psi'_n(y_i)} |\gamma_{ki}| = \\ = \sum_{k=1}^{2n} \frac{\Phi(|R_{2n}(x_k)|)}{\psi'_n(x_k)} \sum_{i=1}^{2n} \frac{1 + \sin \alpha N_{2n, \varphi}(x_k) M_{2n, \varphi + \alpha}(y_i)}{(y_i - x_k)^2 \psi'_n(y_i)} = \\ = \sum_{k=1}^{2n} \Phi(|R_{2n}(x_k)|). \quad (39)$$

Неравенство (39) можно теперь рассматривать при любых φ и α , так как обе его части непрерывны по этим параметрам. Будем считать α фиксированным. Если φ изменяется на $[0, \pi)$, то точки $\{x_k\}_{k=1}^{2n}$ полностью замечают вещественную ось:

$$x_k \in \delta_k, \quad \sum \delta_k = (-\infty, \infty), \quad \delta_k \delta_i = 0 \quad (k \neq i).$$

Аналогично обстоит дело и с $\{y_i\}_{i=1}^{2n}$:

$$y_i \in \lambda_i, \quad \sum \lambda_i = (-\infty, \infty), \quad \lambda_i \lambda_j = 0 \quad (i \neq j).$$

Проинтегрируем (39) по φ :

$$\sum_{i=1}^{2n} \int_0^\pi \Phi \left(\left| \frac{R'_{2n}(y_i) \cos \alpha - \tilde{R}'_{2n}(y_i) \sin \alpha}{\psi'_n(y_i)} \right| \right) d\varphi \leq \sum_{k=1}^{2n} \int_0^\pi \Phi(|R_{2n}(x_k)|) d\varphi. \quad (40)$$

В (40) слева и справа делаем замены вида

$$\psi_n(x) + \varphi = \text{const}, \quad d\varphi = -\psi'_n(x) dx.$$

При таких заменах отрезок $[0, \pi]$ отображается в отрезки $\{\lambda_i\}$ и $\{\delta_k\}$, пробегаемые справа налево. Неравенство (40) переписывается в форме

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Phi \left(\left| \frac{R'_{2n}(x) \cos \alpha - \tilde{R}'_{2n}(x) \sin \alpha}{\psi'_n(x)} \right| \right) \psi'_n(x) dx \leq \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(|R_{2n}(x)|) \psi'_n(x) dx, \quad (40')$$

что совпадает с оценкой (36).

Остается исследовать случаи знака равенства в (36). Мы должны иметь строгое равенство во всех оценках, начиная с (37). Но в (37) знак равенства будет тогда, когда в (33'), что мы уже разобрали в связи с доказательством теоремы 1. Таким образом, неравенство (37) обратится в равенство лишь для дроби С. Н. Бернштейна $R_{2n}(x) \equiv C_6 N_{2n, \varphi}(x)$.

Переходя от (37) к (38), мы будем иметь

$$\begin{aligned} \Phi \left(\left| \frac{R'_{2n}(y_i) \cos \alpha - \tilde{R}'_{2n}(y_i) \sin \alpha}{\psi'_n(y_i)} \right| \right) &= \Phi \left(\sum_{k=1}^{2n} |R_{2n}(x_k)| \cdot \frac{|\gamma_{ki}|}{\psi'_n(y_i)} \right) = \\ &= \Phi \left(|R_{2n}(x_k)| \sum_{k=1}^{2n} \frac{|\gamma_{ki}|}{\psi'_n(y_i)} \right) = \sum_{k=1}^{2n} \frac{|\gamma_{ki}|}{\psi'_n(y_i)} \Phi(|R_{2n}(x_k)|), \end{aligned} \quad (38')$$

поскольку

$$|R_{2n}(x_k)| = |C_6| = \text{const} \quad \text{и} \quad \sum_{k=1}^{2n} \frac{|\gamma_{ki}|}{\psi'_n(y_i)} = 1.$$

Во всех дальнейших оценках также будут выполнены знаки равенства.

Теорема 2 доказана полностью.

Отметим, что частный случай оценки (36) получен в [6], там же отмечена связь результата с неравенством А. Зигмунда для тригонометрических многочленов (см., например, [3]).

Замечание 1. Исходя из интерполяционной формулы (12), можно получить и следующую оценку:

$$|\sin \alpha \psi'_n(x) R_{2n}(x) + \cos \alpha R'_{2n}(x)| \leq \psi'_n(x),$$

из которой в силу произвольности α следует (см. в этой связи [4], стр. 346)

$$|R'_{2n}(x)| \leq \psi'_n(x) \sqrt{1 - R_{2n}^2(x)}.$$

Замечание 2. Результаты этой заметки могут быть перенесены на рациональные функции вида $R_n(x) = P_n(x)/\sqrt{t_{2n}(x)}$.

Литература

1. Бернштейн С. Н. Экстремальные свойства полиномов. М.—Л., 1937.
2. Тиман А. Ф. Теория приближения функций действительного переменного. М., 1960.
3. Зигмунд А. Тригонометрические ряды. 2. М., 1965.
4. Ахиезер Н. И. Лекции по теории аппроксимации. М., 1965.
5. Русак В. Н. ДАН БССР, 7, № 9, 1963.
6. Русак В. Н. ДАН БССР, 10, № 5, 1966.

Белорусский государственный университет
им. В. И. Ленина

Поступило в редакцию 15. XI 1968

Л. П. ПРИМАЧУК

**О РАЗРЕШИМОСТИ НЕКОТОРЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ
СО СДВИГОМ КАРЛЕМАНА ДЛЯ СИСТЕМЫ n ПАР ФУНКЦИЙ**

Постановка задач: Пусть \mathcal{L} — контур Ляпунова, ограничивающий область D^+ . Область, дополняющую $D^+ + \mathcal{L}$ до полной плоскости, обозначим D^- . Рассматриваются следующие краевые задачи: найти кусочно-аналитический вектор $\varphi(z) = (\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n)$ так, чтобы почти всюду на \mathcal{L} он имел граничные значения $\varphi^+(t)$ и $\varphi^-(t)$, принадлежащие $L_2(\mathcal{L})$, и удовлетворял одному из краевых условий:

$$\varphi^+(t) = A(t)\varphi^-(t) + B(t)\varphi^-(\alpha_-(t)) + C(t), \quad (1)$$

$$\varphi^+(t) = A(t)\varphi^-(t) + B(t)\overline{\varphi^-(\alpha_+(t))} + C(t), \quad \varphi^-(\infty) = 0, \quad (2)$$

где $A(t), B(t)$ — заданные матрицы: $A(t) = \|a_{ij}(t)\|, B(t) = \|b_{ij}(t)\|, (i, j = 1, 2, \dots, n)$; $C(t) = (c_1, c_2, \dots, c_n)$ — заданный вектор, причем $a_{ij}(t), b_{ij}(t) \in H(\mathcal{L})$; $c_i(t) \in L_2(\mathcal{L})$; $\alpha_{\pm}(t)$ — соответственно сохраняющий или изменяющий направление обхода сдвиг Карлемана ($\alpha(\alpha(t)) \equiv t, \alpha'_{\pm}(t) \neq 0, \alpha'_{\pm}(t) \in H(\mathcal{L})$).

Кроме того, будем предполагать, что $\det A(t) \neq 0$ всюду на \mathcal{L} .

Нетерова теория этих задач построена Г. С. Литвинчуком [1]. Для $n=1$ разрешимость их для случая, когда \mathcal{L} — единичный круг, рассматривалась в [2] и работах автора [8, 9].

В приведенной выше постановке при $\alpha_+(t) \equiv t$ задача (2) изучалась в работе М. А. Шешко [7].

Если $B(t) \equiv 0$, то получаем известную задачу Римана, изученную в работах Ф. Д. Гахова [3] и Н. П. Векуа [4]. Целью настоящей работы является перенесение результатов [2, 9] на задачи (1), (2).

В дальнейшем через l будем обозначать число линейно независимых*) решений однородных задач, через ρ — число условий разрешимости неоднородных.

§ 1. Пусть $X^{\pm}(z)$ — каноническая матрица решений задачи Римана (см., [3], стр. 12)

$$\omega^+(t) = A(t)\omega^-(t). \quad (3)$$

Порядки столбцов матрицы $X^-(z)$ в окрестности $z = \infty$ называются частными индексами задачи (3). Обозначим их:

$$\kappa_1 \geq \kappa_2 \geq \dots \geq \kappa_m \geq 0 > \kappa_{m+1} \geq \dots \geq \kappa_n,$$

$$\kappa_1 + \dots + \kappa_m = \lambda, \quad \kappa_{m+1} + \dots + \kappa_n = \nu,$$

$$\lambda + \nu = \text{Ind}(\det A(t)).$$

*) Для (1) линейная независимость решений понимается в смысле комбинации с комплексными постоянными, а для (2) — с вещественными.

В этом случае матрицу $A(t)$ можно представить в виде

$$A(t) = X^+(t) D(t) [X_1^-(t)]^{-1}, \quad D(t) = \begin{vmatrix} t^{\alpha_1} & 0 \\ \cdot & \cdot \\ 0 & t^{\alpha_n} \end{vmatrix},$$

причем $X^+(z)$, $X_1^-(z)$ не вырождаются во всей плоскости. Введем следующие обозначения:

$$Z(t) = [D(t)]^{-1} [X^+(t)]^{-1} B(t) X_1^-(\alpha(t)), \quad (4)$$

$$S\mu = \frac{1}{\pi i} \int_{\mathcal{L}} \frac{\mu(\tau)}{\tau - t} d\tau; \quad Q\mu = \mu(\alpha(t)),$$

$$T\mu = \frac{1}{2} Z(t) [-Q\mu + QS\mu], \quad K = \max_{\mathcal{L}} \sqrt{|\alpha'(t)|}.$$

Известно, что

$$\|S\mu\|_{L_2(\mathcal{L})} \leq M \|\mu\|_{L_2(\mathcal{L})},$$

где M — постоянная, не зависящая от $\mu(t)$.

Легко получить, что

$$\|Q\mu\|_{L_2(\mathcal{L})} \leq K \|\mu\|_{L_2(\mathcal{L})}.$$

Поэтому, оценивая в $L_2(\mathcal{L})$ норму оператора $T\mu$, получим

$$\|T\mu\|_{L_2(\mathcal{L})} \leq \frac{(1+M)Kn}{2} \max_{\substack{t \in \mathcal{L} \\ i,j=1,\dots,n}} |z_{ij}(t)| \|\mu\|_{L_2(\mathcal{L})}.$$

Справедлива следующая
Теорема 1. Если

$$\frac{(1+M)Kn}{2} \max_{\substack{t \in \mathcal{L} \\ i,j=1,\dots,n}} |z_{ij}(t)| < 1, \quad (5)$$

то для задачи (1)

1) в случае, когда частные индексы одного знака,

$$l = \max(0, \kappa), \quad p = \max(0, -\kappa);$$

2) при $\lambda > 0$, но $\lambda \neq \kappa$

$$0 \leq l \leq \lambda, \quad p = l - \kappa.$$

Для задачи (2) матрица $Z(t) = [D(t)]^{-1} [X^+(t)]^{-1} B(t) \overline{X_1^-(\alpha(t))}$.

Теорема 2. Если выполнено условие (5), то для задачи (2)

1) в случае, когда частные индексы одного знака,

$$l = \max(0, 2\kappa); \quad p = \max(0, -2\kappa);$$

2) при $\lambda > 0$, но $\lambda \neq \kappa$

$$0 \leq l \leq 2\lambda, \quad p = l - 2\kappa.$$

Доказательство теорем проводится по схеме работ [2, 5].

Приведем несколько простых примеров, характеризующих отличие случаев 1) и 2).

Пример 1.

$$\Phi_1^+(t) = \frac{t^2}{3} \Phi_1^-(t), \quad \mathcal{L}: |z| = 1,$$

$$\Phi_2^+(t) = \frac{1}{3t^2} \Phi_2^-(t) + \frac{1}{9t^4} \Phi_1^-\left(\frac{1}{t}\right) + f(t),$$

где $f(t)$ — произвольная функция. Здесь матрица

$$Z(t) = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ \frac{1}{3t^2} & 0 \end{vmatrix},$$

условие (5) выполнено.

Решая последовательно задачи Римана, получим:

$$\Phi_1^+(z) = c_1 + c_2 z, \quad \Phi_1^-(z) = \frac{3}{z^2} [c_1 + c_2 z],$$

$$\Phi_2^+(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{L}} \frac{f(t)}{t-z} dt, \quad \Phi_2^-(z) = -c_1 - \frac{c_2}{z} + \frac{3z^2}{2\pi i} \int_{\mathcal{L}} \frac{f(t)}{t-z} dt.$$

Так как $\Phi_2^-(\infty) = 0$, то при $f(t) \equiv 0$ необходимо чтобы $c_1 = 0$. При $f(t) \not\equiv 0$ необходимо, чтобы

$$\int_{\mathcal{L}} f(t) dt = 0,$$

$$c_1 = -\frac{3}{2\pi i} \int_{\mathcal{L}} t f(t) dt.$$

Частные индексы равны (2, -2), однако в общее решение однородной задачи входит одна произвольная постоянная, а для разрешимости неоднородной необходимо одно условие разрешимости.

Пример 2.

$$\Phi_1^+(t) = \frac{t^2}{3} \Phi_1^-(t), \quad \mathcal{L}: |z| = 1,$$

$$\Phi_2^+(t) = \frac{1}{3t^4} \Phi_2^-(t) + \frac{1}{9t^3} \Phi_1^-\left(\frac{1}{t}\right) + f(t).$$

Условие (5) выполнено. Частные индексы равны (2, -4),

$$\Phi_1^+(z) = c_1 + c_2 z, \quad \Phi_1^-(z) = \frac{3}{z^2} (c_1 + c_2 z),$$

$$\Phi_2^+(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{L}} \frac{f(\tau)}{\tau-z} d\tau, \quad \Phi_2^-(z) = -c_1 z^3 - c_2 z^2 + \frac{3z^4}{2\pi i} \int_{\mathcal{L}} \frac{f(t)}{t-z} dt.$$

Так как $\Phi_2^-(\infty) = 0$, то при $f(t) \equiv 0$, $c_1 = 0$, $c_2 = 0$, а следовательно, однородная задача неразрешима. При $f(t) \not\equiv 0$ необходимо, чтобы

$$\int_{\mathcal{L}} t^3 f(t) dt = 0,$$

$$\int_{\mathcal{L}} t^2 f(t) dt = 0,$$

$$c_1 = -\frac{3}{2\pi i} \int_{\mathcal{L}} f(t) dt, \quad c_2 = -\frac{3}{2\pi i} \int_{\mathcal{L}} t f(t) dt,$$

т. е. требуется выполнение двух условий разрешимости.

По аналогии с [5] условие (5) естественно назвать условием эллиптичности задач (1), (2).

§ 2. Рассмотрим теперь общий случай, когда условие эллиптичности не выполняется. Уже простые примеры для $n=1$ показывают, что в этом случае на разрешимость задач, кроме индекса $\alpha(t)$ влияют другие характеристики. Покажем это на следующем примере:

$$\varphi^+(t) = \varphi^-(t) - \frac{1-2t^2}{t^4} \varphi^-\left(\frac{1}{t}\right), \quad \mathcal{L}: |z|=1.$$

Здесь $\kappa = \text{Ind } 1 = 0$, но задача имеет решение

$$\varphi^+(z) = 2c, \quad \varphi^-(z) = \frac{c}{z^2}.$$

Ниже будем предполагать, что контур \mathcal{L} и сдвиг $\alpha(t)$ удовлетворяют следующим дополнительным условиям: если $t(s)$ — уравнение \mathcal{L} , отнесенное к дуге s , то $t'(s)$ удовлетворяет условию Гельдера с показателем $\gamma > \frac{1}{2}$, аналогично $\alpha'(t)$ удовлетворяет условию Гельдера $\gamma_1 > \frac{1}{2}$.

В дальнейшем будем пользоваться разложением некоторых функций по следующему базису, построенному в [6]: система функций $t'(s), t^k(s)$, $-\infty < k < +\infty$ является линейно независимой и полной в $L_2(\mathcal{L})$. Из этой системы строится ортонормированная система функций $\{f_n(t)\}$

$$f_0(t) = a_0^{(0)} t'(s), \quad a_0^{(0)} \neq 0,$$

$$f_{2n-1}(t) = t'(s) [a_0^{(2n-1)} + a_1^{(2n-1)} t + a_2^{(2n-1)} t^2 + \dots + a_{2n-1}^{(2n-1)} t^{2n-1}], \quad a_{2n-1}^{(2n-1)} \neq 0,$$

$$f_{2n}(t) = t'(s) [a_0^{(2n)} + \dots + a_{2n-1}^{(2n)} t^{2n-1} + a_{2n}^{(2n)} t^{2n}], \quad a_{2n}^{(2n)} \neq 0,$$

$$1 \leq n < +\infty.$$

Введем матрицы:

$$Z_1(t) = \begin{cases} Z(\alpha(t)) t^{-\kappa}, & \text{если } \kappa = \lambda \text{ или } \kappa = \nu, \\ Z(\alpha(t)) t^{-\lambda}, & \text{если } \lambda > 0, \text{ но } \lambda \neq \kappa, \end{cases} \quad (7)$$

$$T(t, \tau) = \frac{1}{2\pi i} \left[\frac{1}{\tau - t} - \frac{\alpha'(\tau)}{\alpha(\tau) - \alpha(t)} \right] Z_1(\tau). \quad (8)$$

В силу условий, наложенных на $\alpha(t)$, элементы матрицы $T(t, \tau)$ принадлежат $L_2(\mathcal{L})$ по обоим переменным. Разложим элементы этих матриц в ряды Фурье по системе $\{f_k(t)\}$

$$z_{ij}^1(t) = \sum_{k=0}^{\infty} B_{ij}^k f_k(t), \quad B_{ij}^k = \int_{\mathcal{L}} z_{ij}^1(t) \overline{f_k(t)} ds, \quad (9)$$

$$T_{ij}(t, \tau) = \sum_{k=0}^{\infty} c_{ij}^k(t) f_k(\tau), \quad c_{ij}^k(t) = \int_{\mathcal{L}} T_{ij}(t, \tau) \overline{f_k(\tau)} d\sigma, \quad (10)$$

$$i, j = 1, 2, \dots, n.$$

Ряды (9) сходятся равномерно, ряды (10) сходятся в среднем по τ и равномерно относительно t .

Возьмем теперь два числа: $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_1 \geq 0, \gamma_2 \geq 0, \gamma_1 + \gamma_2 \leq 1$. Пусть $N_1(\gamma_1)$ и $N_2(\gamma_2)$ — наименьшие числа, для которых

$$\max_{i,j=1,\dots,n} \left\{ \left| z_{ij}^1(t) - \sum_{k=0}^{N_1(\gamma_1)} B_{ij}^k f_k(t) \right| \cdot |t|^\kappa \right\} < \frac{2\gamma_1}{K(1+M)n}, \quad (11)$$

$$\max_{i,j=1,\dots,n} \left\{ \iint_{\mathcal{L}\mathcal{L}} \left| T_{ij}(t, \tau) - \sum_{k=0}^{N_2(\gamma_2)} c_{ij}^k f_k(\tau) \right|^2 |\tau|^{2\kappa} |d\tau| \right\} < \frac{\gamma_2^2}{n^2 K^2}$$

(в случае, когда $\lambda > 0$, но $\lambda \neq \kappa$, нужно κ заменить на λ).

Определим число $\mu(\gamma_1, \gamma_2)$ как наибольшую положительную степень $[t(s)]^\mu$, при которой в рядах

$$\sum_{k=0}^{N_1(\gamma_1)} B_{ij}^k f_k(t), \quad \sum_{k=0}^{N_2(\gamma_2)} c_{ij}^k(t) f_k(\tau), \quad i, j = 1, \dots, n,$$

стоит не равный нулю коэффициент.

Обозначим

$$\mu = \min \mu(\gamma_1, \gamma_2) + 1 \text{ по всем } \gamma_1, \gamma_2 \geq 0, \gamma_1 + \gamma_2 \leq 1. \quad (12)$$

Сформулируем теперь основной результат.

Теорема 3. Если условие эллиптичности не выполнено, то для задачи (1)

1) при $\kappa = \nu$ а) $l = 0, p = \kappa$, если $\kappa + \mu \leq 0$; б) $0 \leq l \leq n(\mu + \kappa), p = l - \kappa$, если $-\mu < \kappa \leq 0$;

2) при $\kappa = \lambda$

$$\kappa \leq l \leq \kappa + n(\mu + \kappa), \quad p = l - \kappa;$$

3) при $\lambda > 0$, но $\lambda \neq \kappa$

$$0 \leq l \leq \lambda + n(\mu + \lambda), \quad p = l - \kappa.$$

Обозначим теперь

$$Z_1(t) = \begin{cases} \overline{Z(\alpha(t))} t^{-\kappa}, & \text{если } \kappa = \lambda \text{ или } \kappa = \nu, \\ \overline{Z(\alpha(t))} t^{-\lambda}, & \text{если } \lambda > 0, \text{ но } \lambda \neq \kappa, \end{cases} \quad (7')$$

$$T(t, \tau) = \frac{1}{2\pi i} \left[\frac{\tau'(s)}{\tau-t} - \frac{\overline{\alpha'(\tau)} \overline{\tau'(s)}}{\alpha(\tau) - \alpha(t)} \right] Z_1(\tau). \quad (8')$$

Определим теперь число μ , подставив в формулы (11) и (12) функции (7') и (8').

Справедлива

Теорема 4. Если условие эллиптичности не выполнено, то для задачи (2)

1) при $\kappa = \nu$ а) $l = 0$, $p = 2|\kappa|$, если $\kappa + \mu \leq 0$, б) $0 \leq l \leq 2n(\mu + \kappa)$, $p = l - 2\kappa$, если $-\mu < \kappa \leq 0$;

2) при $\kappa = \lambda$

$$2\kappa \leq l \leq 2(\kappa + n(\mu + \kappa)), \quad p = l - 2\kappa;$$

3) при $\lambda > 0$, $\lambda \neq \kappa$

$$0 \leq l \leq 2(\lambda + n(\mu + \lambda)), \quad p = l - 2\kappa.$$

Доказательство этих теорем аналогично доказательству соответствующих теорем при $n = 1$, данных в [8, 9].

Выражаю большую признательность профессору Ф. Д. Гахову за руководство работой.

Литература

1. Литвинчук Г. С. Изв. АН СССР, сер. матем., 31, № 3, 1967.
2. Литвинчук Г. С. ДАН УССР, № 11, 1967.
3. Гахов Ф. Д. УМН, 7, в. 4 (50), 1952.
4. Векуа Н. П. Системы сингулярных уравнений. 1950.
5. Михайлов Л. Г. Новый класс особых интегральных уравнений и его применения к дифференциальным уравнениям с сингулярными коэффициентами. Душанбе, 1963.
6. Сабитов И. Х. Матем. сборник, 64 (106), 2, 1964.
7. Шешко М. А. Весці АН БССР, сер. фіз.-мат. навук, № 1, 1967.
8. Примачук Л. П. Весці АН БССР, сер. фіз.-мат. навук, № 4, 1968.
9. Примачук Л. П. Весці АН БССР, сер. фіз.-мат. навук, № 1, 1969.

Белорусский государственный университет
им. В. И. Ленина

Поступило в редакцию 4.X 1968

Н. Н. ТРЕТЬЯКОВА

**ПРОИЗВОДЯЩИЕ ФУНКЦИИ ДЛЯ МАТРИЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ
 НЕПРИВОДИМЫХ УНИТАРНЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ
 ГРУППЫ $SO(n)$ ВРАЩЕНИЙ n -МЕРНОГО ПРОСТРАНСТВА**

Благодаря глубокой связи, которая существует между теорией представлений групп и теорией специальных функций [1], результаты исследования конкретных групп важны как с точки зрения теории представлений групп, так и с точки зрения теории специальных функций. В данной работе рассматриваются неприводимые унитарные представления (НУП) группы $SO(n)$ вращений n -мерного вещественного евклидова пространства ($n \geq 3$). Исходя из интегрального представления [2], для матричных элементов получены производящие функции. Применяемая техника является обобщением на случай группы $SO(n)$ соответствующей техники для группы $SO(3)$ [1]. Все обозначения принимаются из [2].

Известно, что матричные элементы неприводимых унитарных представлений группы $SO(n)$ выражаются через матричные элементы представлений группы $SO(n-1)$ и элементы матрицы $t_{\alpha\beta}^L(\lambda)$, соответствующей в представлении вращению на угол λ в плоскости (x_{n-1}, x_n) (см. [4]). Здесь L — совокупность чисел m_k , $1 \leq k \leq [n/2]$, $m_k \geq m_{k+1}$, задающих представление, α и β — схемы из [3], определяющие место данного матричного элемента в матрице. Таким образом, изучение матричных элементов НУП группы $SO(n)$ сводится к изучению функций $t_{\alpha\beta}^L(\lambda) = P_{A\bar{\alpha}}^L(\cos \lambda)$, где A, B — первые строки схем α и β , $\bar{\alpha}$ — часть схемы, получающаяся из α выбрасыванием A (см. [4]).

Как и следовало ожидать, производящие функции для $P_{A\bar{\alpha}}^L(\cos \lambda)$ имеют различный вид при четных и нечетных n .

1. Найдем сначала производящую функцию в случае нечетных $n = 2k + 1$. Запишем интегральное представление [2] для функций

$$P_{A\bar{\alpha}}^{L,n}(\cos \lambda) = C \int_{-1}^1 P_{MN\gamma}^{B,n-1} \left(\frac{x \cos \lambda + i \sin \lambda}{ix \sin \lambda + \cos \lambda} \right) \bar{P}_{MN\gamma}^{A,n-1}(x) \times \\ \times (ix \sin \lambda + \cos \lambda)^{m_1} (1 - x^2)^{\frac{n-4}{2}} dx. \quad (1)$$

Здесь $P_{MN\gamma}^A(\cos \theta)$ — значение матричного элемента, соответствующего вращению на угол θ в плоскости (x_{n-2}, x_{n-1}) , C — некоторая константа.

В интеграле (1) сделаем замену переменной интегрирования по формуле $x = \cos \theta$. Учитывая свойства подинтегральной функции, данный интеграл можно записать в виде:

$$P_{AB\bar{\alpha}}^L(\cos \lambda) = \frac{C}{2} \int_0^{2\pi} P_{MN\gamma}^B \left(\frac{\cos \theta \cos \lambda + i \sin \lambda}{i \cos \theta \sin \lambda + \cos \lambda} \right) \bar{P}_{MN\gamma}^A(\cos \theta) \times \\ \times (i \cos \theta \sin \lambda + \cos \lambda)^{m_1} \sin^{2k-2} \theta d\theta. \quad (2)$$

С помощью подстановки $t = e^{i\theta}$ путь интегрирования в (2) превращается в замкнутый контур $|t| = 1$:

$$P_{AB\bar{\alpha}}^L(\cos \lambda) = \frac{C}{2i} \oint_{|t|=1} P_{MN\gamma}^B \left(\frac{\cos \lambda \frac{t+t^{-1}}{2} + i \sin \lambda}{i \frac{t+t^{-1}}{2} \sin \lambda + \cos \lambda} \right) \bar{P}_{MN\gamma}^A \left(\frac{t+t^{-1}}{2} \right) \times \\ \times \left(i \frac{t+t^{-1}}{2} \sin \lambda + \cos \lambda \right)^{m_1} \left(\frac{t-t^{-1}}{2} \right)^{2k-2} \frac{dt}{t}. \quad (3)$$

Введем $h = [\cos \lambda + i/2 \sin \lambda (t+t^{-1})]^{-1}$. При этом окружность $|t| = 1$ преобразуется в замкнутый контур Γ . Можно считать, что $\Gamma: |h| = a < 1$. Следовательно,

$$P_{AB\bar{\alpha}}^L(\cos \lambda) = - \frac{C}{2i} \oint_{\Gamma} P_{MN\gamma}^B \left(\frac{\cos \lambda - h}{i \sin \lambda} \right) \bar{P}_{MN\gamma}^A \left(\frac{1-h \cos \lambda}{ih \sin \lambda} \right) \times \\ \times \sin^{2-2k} \lambda (1-2h \cos \lambda + h^2)^{k-3/2} \frac{dh}{h^{m_1+2k-1}}. \quad (4)$$

(Заметим, что C , вообще говоря, зависит от m_1 .) Единственная особая точка в интеграле $h=0$. Используя формулу Коши для коэффициентов ряда Тейлора [5], запишем следующее разложение:

$$\frac{1}{\pi} \sum_{m_1=p}^{\infty} C^{-1} P_{AB\bar{\alpha}}^L(\cos \lambda) h^{m_1+n-3} = \\ = P_{MN\gamma}^B \left(\frac{\cos \lambda - h}{i \sin \lambda} \right) P_{MN\gamma}^A \left(\frac{1-h \cos \lambda}{ih \sin \lambda} \right) \frac{(1-2h \cos \lambda + h^2)^{\frac{n-4}{2}}}{\sin^{n-3} \lambda}. \quad (5)$$

Здесь p — наибольшее из чисел, входящих в схемы A и B . В частности, при $A=B$ константу C легко определить из (1), положив $\lambda=0$:

$$C^{-1} = \int_{-1}^1 P_{MN\gamma}^A(x) \bar{P}_{MN\gamma}^A(x) (1-x^2)^{\frac{n-4}{2}} dx \stackrel{\text{def}}{=} \|P_{MN\gamma}^A\|. \quad (5')$$

Приведем некоторые частные случаи формулы (5).

а) При $n=3$ можно получить производящую функцию для обобщенных сферических функций $P_{mn}^l(\cos \lambda)$ (см. [3]), стр. 94):

$$\sum_{l=n}^{\infty} \left[\frac{(l-n)!(l+n)!}{(l-m)!(l+m)!} \right]^{1/2} P_{mn}^l(\cos \lambda) h^l = \\ = \frac{P_{mn}^l \left(\frac{\cos \lambda - h}{i \sin \lambda} \right) \bar{P}_{mn}^l \left(\frac{1-h \cos \lambda}{ih \sin \lambda} \right)}{\sqrt{1-2h \cos \lambda + h^2}}, \quad (6)$$

где $P^m(\cos \theta) = e^{im\theta}$ — матричные элементы, соответствующие в представлении вращения на угол θ в плоскости (x_1, x_2) . (Матричные элементы НУП группы $SO(2)$). Выражение (6) равносильно формуле (3) работы [1, стр. 162].

б) Производящая функция для зональных сферических функций ($A = B = 0$) имеет наиболее простой вид:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\pi} \sum_{m_1=0}^{\infty} P_{000}^{L, n}(\cos \lambda) h^{m_1+n-3} = \\ & = \frac{2^{3-n} \Gamma(n-2)}{\Gamma^2\left(\frac{n-2}{2}\right)} \cdot \frac{(1-2h \cos \lambda + h^2)^{\frac{n-4}{2}}}{\sin^{n-3} \lambda}. \end{aligned} \quad (7)$$

Здесь $P_{000}^L(\cos \lambda)$ — с точностью до постоянной полиномы Гегенбауэра. Эту же формулу можно было бы получить иным путем, проинтегрировав $(n-3)$ раза производящую функцию для полиномов Гегенбауэра $C_{m_1}^{\frac{n-2}{2}}(\cos \lambda)$ [6].

2. Если же n четно, то дополнить контур интегрирования в (1) до замкнутого не удастся. Найдем производящую функцию из других соображений. Известно, что

$$C_{m_1}^{\frac{n-2}{2}}(\cos \lambda) = \frac{\Gamma(n+m_1-2)}{\Gamma(n-2) m_1!} P_{000}^{L, n}(\cos \lambda), \quad (8)$$

где $L = \{m_1, 0, \dots, 0\}$. Используя производящую функцию для $C_{m_1}^p$, запишем

$$\begin{aligned} & \sum_{m_1=0}^{\infty} (n+m_1-3)(n+m_1-4) \dots (m_1+1) P_{000}^{L, n}(\cos \lambda)^{m_1} = \\ & = \Gamma(n-2) (1-2h \cos \lambda + h^2)^{\frac{2-n}{2}}. \end{aligned} \quad (9)$$

Интегрируя (9) $n-3$ раза по h , найдем производящую функцию для зональных сферических функций и в случае n четного:

$$\begin{aligned} & \sum_{m_1=0}^{\infty} P_{000}^{L, n}(\cos \lambda) h^{m_1+n-3} = \frac{2^{4-n} \Gamma(n-2)}{\Gamma^2\left(\frac{n-2}{2}\right)} \operatorname{arctg} \frac{h - \cos \lambda}{\sin \lambda} \times \\ & \times \sin^{3-n} \lambda (1-2h \cos \lambda + h^2)^{\frac{n-4}{2}}. \end{aligned} \quad (10)$$

Отсюда, в частности, при $n=4$

$$\sum_{m_1=0}^{\infty} K_{00}^{m_1, 0}(\cos \lambda) h^{m_1+1} = \frac{1}{\sin \lambda} \operatorname{arctg} \frac{h - \cos \lambda}{\sin \lambda}. \quad (11)$$

Найдем подробно производящую функцию для матричных элементов НУП группы $SO(4)$. Из формул работы [7] можно вычислить, что

$$D_0^2 \cdot D_1^2 \cdot D_2^2 \cdot \dots \cdot D_r^2 K_{rr}^{m_1, 0}(\mu) = \frac{d^r}{d\mu^r} C_{m_1}^1(\mu) \quad (12)$$

($\mu = \cos \lambda$). Используя свойства полиномов Гегенбауэра [6],

$$\frac{d^r}{d\mu^r} C_{m_1}^l(\mu) = 2^r \Gamma(r+1) C_{m_1-r}^{r+1}(\mu) \quad (13)$$

и формулу (8), можно установить следующую зависимость:

$$K_{r,r}^{m_1+r,0}(\mu) = \frac{2^r \Gamma\left(r + \frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}} P_{00,0}^{L,2r+4}(\mu). \quad (14)$$

Тогда, учитывая разложение (10), можно записать:

$$\sum_{m_1=0}^{\infty} K_{r,r}^{m_1+r,0}(\cos \lambda) h^{m_1+2r+1} = \gamma_r \sin^{-2r-1} \lambda \times \\ \times (1-2h \cos \lambda + h^2)^r \operatorname{arctg} \frac{h - \cos \lambda}{\sin \lambda}, \quad (15)$$

где $\gamma_r = \frac{\Gamma^2(r+1/2) 2^r (2r+1)}{\pi \Gamma(r+1)}$. Но, с другой стороны, из [3] можно вычислить, что

$$P_{r0}^r \left(\frac{h - \cos \lambda}{i \sin \lambda} \right) \bar{P}_{0r}^r \left(\frac{1 - h \cos \lambda}{ih \sin \lambda} \right) = \left(\frac{1 - 2h \cos \lambda + h^2}{4h \sin^2 \lambda} \right)^r. \quad (16)$$

Тогда разложению (15) можно придать такую форму (сравнить с (11)):

$$\sum_{m_1=r}^{\infty} K_{r,r}^{m_1,0}(\cos \lambda) h^{m_1+1} = \gamma_r \cdot 2^{2r} P_{r0}^r \left(\frac{h - \cos \lambda}{i \sin \lambda} \right) \bar{P}_{0r}^r \left(\frac{1 - h \cos \lambda}{ih \sin \lambda} \right) \times \\ \times \frac{1}{\sin \lambda} \operatorname{arctg} \frac{h - \cos \lambda}{\sin \lambda}. \quad (17)$$

Для произвольного четного n производящая функция для $P_{AB\bar{\alpha}}^L(\cos \lambda)$ такова*:

$$\sum_{m_1=p}^{\infty} C^{-1} P_{AB\bar{\alpha}}^L(\cos \lambda) h^{m_1+n-3} = P_{MN\gamma}^B \left(\frac{h - \cos \lambda}{i \sin \lambda} \right) \bar{P}_{MN\gamma}^A \left(\frac{1 - h \cos \lambda}{ih \sin \lambda} \right) \times \\ \times \sin^{3-n} \lambda (1-2h \cos \lambda + h^2)^{\frac{n-4}{2}} \operatorname{arctg} \frac{h - \cos \lambda}{\sin \lambda}. \quad (18)$$

Формулам (5) и (18) можно придать единый вид, если воспользоваться $(n-3)$ кратным интегрированием по h :

$$\sum_{m_1=p}^{\infty} \delta_n P_{AB\bar{\alpha}}^{L,n}(\cos \lambda) h^{m_1+n-3} = P_{MN\gamma}^B \left(\frac{h - \cos \lambda}{i \sin \lambda} \right) \bar{P}_{MN\gamma}^A \left(\frac{1 - h \cos \lambda}{ih \sin \lambda} \right) \times \\ \times \int \int \dots \int \frac{dh dh \dots dh}{(1-2h \cos \lambda + h^2)^{\frac{n-2}{2}}}. \quad (19)$$

* В формулах (5) и (18) опущены несущественные полиномы степени $(n-3)$ от h , не содержащие функций $P_{AB\bar{\alpha}}^L(\cos \lambda)$.

Здесь p — наибольшее из чисел, входящих в схемы A и B , $\delta_n = [(n-4)!!]^2 C^{-1}$, где C определяется из (5').

В частности, для зональных сферических функций из (19) имеем:

$$\sum_{m_1=0}^{\infty} P_{000}^L(\cos \lambda) h^{m_1+n-3} = \Gamma(n-2) \int \int \dots \int_{n-3} \frac{dh dh \dots dh}{(1-2h \cos \lambda + h^2)^{\frac{n-2}{2}}}. \quad (20)$$

Формула (19) дает еще одно доказательство справедливости разложения (18) при четных n . Запишем для нечетных n производящую функцию (5) в интегральном виде (19). Затем примем в данном выражении n любым. Отсюда, в частности, будем иметь производящую функцию для $P_{AB\bar{\omega}}^L(\cos \lambda)$ при четных n , для которой (18) является лишь иной формой записи.

Пользуюсь случаем поблагодарить А. М. Родова за внимание и ценные советы.

Литература

1. Виленкин Н. Я. Специальные функции и теория представлений групп. М., 1965.
2. Виленкин Н. Я. ДАН СССР, 113, № 1, 1957.
3. Гельфанд И. М., Минлос Р. А., Шапиро З. Я. Представления группы вращений и группы Лоренца. М., 1958.
4. Ламбина Е. Н. ДАН БССР, 9, № 2, 1965.
5. Маркушевич А. И. Теория аналитических функций. Гостехиздат, М., 1950.
6. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М., 1963.
7. Ламбина Е. Н. ДАН БССР, 6, № 10, 1962.

Минский радиотехнический институт

Поступило в редакцию 17.VI 1968

Д. Н. КРАВЧУК

ОБ ЭКСТРЕМУМЕ ЛИНЕЙНОЙ ФОРМЫ
НА ЦИКЛИЧЕСКОЙ ГРУППЕ

Пусть, как и в [1], $f = \sum_{\nu=1}^n a_{\nu} x_{\nu}$ — вещественная линейная форма n переменных, а t — некоторая подстановка из симметрической группы S_n . Если $t(\nu) = \alpha_{\nu}$, то, применяя к f подстановку t , получим

$$f_t = \sum_{\nu=1}^n a_{\nu} x_{\alpha_{\nu}}.$$

Пусть $b = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ — фиксированный n -мерный вектор. Тогда величина

$$f_t(b) = \sum_{\nu=1}^n a_{\nu} b_{\alpha_{\nu}}$$

есть значение линейной формы f на подстановке t при заданном векторе b .

В [2] поставлена следующая проблема. Пусть H — произвольное непустое подмножество симметрической группы S_n . Требуется найти в H такую подстановку h_0 , что $f_{h_0}(b) \leq f_h(b)$ для любой h из H .

Можно считать, что коэффициенты формы занумерованы следующим образом:

$$a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n.$$

Пусть H — множество всех n -членных циклов симметрической группы S_n . В [3] рассмотрена задача отыскания подстановок, доставляющих форме f минимальное и максимальное значение на множестве H в следующих двух случаях упорядочения компонент вектора b :

$$b_1 \geq b_2 \geq \dots \geq b_n, \quad (1)$$

$$b_1 \leq b_2 \leq \dots \leq b_n. \quad (2)$$

Обозначим через γ целую часть числа $\frac{n+1}{2}$. Разобьем символы $1, 2, \dots, n$ на два класса. К классу A отнесем символы $\alpha_i \leq \gamma$ при четном n или $\alpha_i < \gamma$ при нечетном n , а к классу B — символы $\beta_j > \gamma$. В [3], в частности, показано, что минимизирующая подстановка при условиях (2) содержится в множестве $M \subset H$, состоящем из $2 \cdot 3^{\gamma-2}$ подстановок, обладающих следующими свойствами:

- 1) символы из классов A и B чередуются;
- 2) символы из A возрастают, а символы из B убывают слева и справа к γ ;

3) слева от γ перед каждым символом β из B , а справа от γ за каждым символом β стоит такой символ α из A , что $\alpha + \beta \leq n + 1$.

В настоящей статье поставленная проблема рассматривается в случае, когда H образует циклическую группу порядка n . Приводятся результаты решения этой проблемы, когда образующей циклической группы является подстановка множества M , а компоненты вектора b удовлетворяют неравенствам (2). Рассматривается также вопрос отыскания в этом случае подстановки, доставляющей линейной форме при условиях (1) максимальное значение.

Пусть

$$t = (1, \beta_2, \alpha_3, \dots, \beta_{j-1}, \alpha_j, \dots, \gamma_k, \dots, \beta_l, \alpha_{l+1}, \dots, \beta_n)$$

— подстановка множества M .

Лемма. Если в подстановке $t \in M$ символ γ стоит на k -ом месте, то

$$\alpha_j + \beta_{j-1} \geq n + 1 \quad \text{при } 1 < j < k$$

и

$$\alpha_j + \beta_{j+1} \geq n + 1 \quad \text{при } k < j < n - 1.$$

Покажем это. Для $k = \{2, 3, n - 1, n\}$ лемма очевидна. Поэтому будем считать, что $3 < k < n - 1$.

Пусть в подстановке t символам из A , расположенным между α_j и γ , предшествуют символы из B , для которых требование леммы выполняется, а $\alpha_j + \beta_{j-1} < n + 1$. Покажем, что в таком случае нарушается свойство 3) подстановок из M .

Пусть B' — множество символов из класса B , не меньших $n + 1 - \alpha_j$. Так как перед α_j в t стоит символ β_{j-1} , для которого по предположению $\alpha_j + \beta_{j-1} < n + 1$, то число символов из B' , стоящих в t слева от γ , не больше $\frac{j-1}{2} - 1$. Всего же в B' α_j символов. Следовательно, справа от γ

количество p символов из B' не меньше, чем $\alpha_j - \frac{j-1}{2} + 1$.

Подсчитаем теперь количество символов из класса A , меньших α_j и стоящих в t справа от γ . Учитывая то, что левее γ их $\frac{j-1}{2}$, искомое число

будет равно $\alpha_j - \frac{j-1}{2} - 1 = q$.

Пусть β_l — самый левый из всех символов B' , стоящих правее γ . По свойству 3) подстановок из M непосредственно за β_l в t должен стоять такой символ α_{l+1} , что $\beta_l + \alpha_{l+1} \leq n + 1$. Но ввиду свойства 2) и того, что $p - q \geq 2$, $\alpha_{l+1} > \alpha_j$. В свою очередь $\beta_l \geq n + 1 - \alpha_j$. Отсюда $\beta_l + \alpha_{l+1} > n + 1 - \alpha_j + \alpha_j = n + 1$, что невозможно.

Следует заметить, что при четном n лемма справедлива и для $j = k$. При n нечетном выполняется неравенство

$$\gamma_k + \beta_{k-1} \geq n + 1, \quad \text{если } k \text{ — нечетно,}$$

и

$$\gamma_k + \beta_{k+1} \geq n + 1, \quad \text{если } k \text{ — четно.}$$

Лемма доказана.

Перейдем теперь к основному вопросу.

Теорема 1. Если циклическая группа H порядка n порождена подстановкой t множества M , то при нечетном n минимум линейной форме на H при условиях (2) доставляет по крайней мере одна из подстановок t, t^{-1} .

Доказательство. Пусть

$$t = (1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_i, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_{n-i}, \alpha_{n-i+1}, \dots, \alpha_n)$$

из M — образующая циклической группы. В t до γ на нечетных местах стоят символы из класса A и на четных — из класса B , а после γ — наоборот.

Покажем вначале, что при произвольном нечетном i

$$f_{i'}(b) \leq f_{i'+2}(b), \quad 1 \leq i' \leq n-2.$$

Можно считать, что всегда $t(1) = n = \alpha_2$. Составим разность $\Delta_i f = f_{i'}(b) - f_{i'+2}(b)$ и покажем, что она меньше или равна нулю:

$$\begin{aligned} \Delta_i f &= a_{\alpha_{n-i+2}}(b_{\alpha_2} - b_{\alpha_4}) + a_{\alpha_{n-i+4}}(b_{\alpha_4} - b_{\alpha_6}) + \dots + a_{\alpha_{n-1}} \times \\ &\times (b_{\alpha_{i-1}} - b_{\alpha_{i+1}}) + a_1(b_{\alpha_{i+1}} - b_{\alpha_{i+3}}) + a_{\alpha_6}(b_{\alpha_{i+3}} - b_{\alpha_{i+5}}) + \dots \\ &+ a_{\alpha_{n-i-1}}(b_{\alpha_{n-1}} - b_1) + a_{\alpha_{n-i}}(b_{\alpha_n} - b_{\alpha_2}) + \\ &+ a_{\alpha_{n-i-2}}(b_{\alpha_{n-2}} - b_{\alpha_n}) + \dots + a_{\alpha_2}(b_{\alpha_{i+2}} - b_{\alpha_{i+4}}) + \\ &+ a_{\alpha_n}(b_{\alpha_i} - b_{\alpha_{i+2}}) + a_{\alpha_{n-2}}(b_{\alpha_{i-2}} - \\ &- b_{\alpha_i}) + \dots + a_{\alpha_{n-i+1}}(b_1 - b_{\alpha_2}). \end{aligned}$$

Здесь ввиду свойства 2) подстановок из M индексы элементов, расположенных в скобках, удовлетворяют следующим неравенствам:

$$\alpha_2 > \alpha_4 > \alpha_6 > \dots > \alpha_{i-1} > \alpha_{i+1} > \\ > \alpha_{i+3} > \dots > \alpha_{n-1} > 1$$

и

$$\alpha_2 > \alpha_n > \alpha_{n-2} > \dots > \alpha_{i+4} > \\ > \alpha_{i+2} > \alpha_i > \dots > \alpha_3 > 1.$$

В свою очередь индексы коэффициентов формы, стоящих у положительных и отрицательных скобок, подчиняются соответственно следующим соотношениям:

$$\alpha_{n-i+2} > \alpha_{n-i+4} > \dots > \alpha_{n-1} > \\ > 1 < \alpha_3 < \dots < \alpha_{n-i-1} \quad (3)$$

и

$$\alpha_{n-i} < \alpha_{n-i-2} < \dots < \alpha_2 > \\ > \alpha_n > \alpha_{n-2} > \dots > \alpha_{n-i+1}. \quad (4)$$

Кроме того, $\alpha_{n-i+2} < \alpha_{n-1}$ и $\alpha_{n-i-1} < \alpha_{n-i+1}$. Отсюда и из структуры подстановки t видно, что символы из (3) и (4) разбиты на непересекающиеся классы, которые в дальнейшем будем обозначать соответственно через C_{p_j} и D_{q_j} . Величины p_j и q_j означают количество символов в соответствующем классе. Символы класса C_{p_j} , так же, как и D_{q_j} , в ряду $1, 2, \dots, n$ стоят без пропусков, причем они упорядочены согласно (3) и (4). Очевидно, $\sum_{j=1}^v (p_j + q_j) = n$. Здесь $v \leq \frac{n-1}{2}$ — количество классов C_{p_j} или D_{q_j} .

Если классы расположить в порядке возрастания входящих в них символов, то будем иметь в зависимости от места γ в t и величины показателя степени либо

$$C_{p_1}, D_{q_1}, C_{p_2}, D_{q_2}, \dots, C_{p_v}, D_{q_v},$$

либо

$$C_{p_v}, D_{q_v}, C_{p_{v-1}}, D_{q_{v-1}}, \dots, C_{p_1}, D_{q_1}.$$

Пусть для определенности имеет место первая последовательность. Рассмотрим следующие слагаемые из $\Delta_i f$:

$$\begin{aligned} & a_{\alpha_{u_j}} (b_{\alpha_{i+u_j}} - b_{\alpha_{i+u_j+2}}), \\ & a_{\alpha_{u_j+2}} (b_{\alpha_{i+u_j+2}} - b_{\alpha_{i+u_j+4}}), \\ & \dots \dots \dots \\ & a_{\alpha_{v_j-2}} (b_{\alpha_{i+v_j-2}} - b_{\alpha_{i+v_j}}), \\ & a_{\alpha_{v_j}} (b_{\alpha_{i+v_j}} - b_{\alpha_{i+v_j+2}}) \\ \text{и} \\ & a_{\alpha_{r_j}} (b_{\alpha_{i+r_j}} - b_{\alpha_{i+r_j+2}}), \\ & a_{\alpha_{r_j-2}} (b_{\alpha_{i+r_j-2}} - b_{\alpha_{i+r_j}}), \\ & \dots \dots \dots \\ & a_{\alpha_{s_j+2}} (b_{\alpha_{i+s_j+2}} - b_{\alpha_{i+s_j+4}}), \\ & a_{\alpha_{s_j}} (b_{\alpha_{i+s_j}} - b_{\alpha_{i+s_j+2}}). \end{aligned}$$

Здесь α_{u_j} и α_{r_j} — первые, а α_{v_j} и α_{s_j} — последние символы классов C_{p_j} и D_{q_j} . Покажем, что в этих слагаемых $b_{\alpha_{i+r_j}} \geq b_{\alpha_{i+v_j+2}}$. Для этого достаточно убедиться в том, что $\alpha_{i+r_j} > \alpha_{i+v_j+2}$.

В силу леммы ввиду четности r_j $\alpha_{r_j} + \alpha_{r_j+1} \geq n+1$. Будем обозначать через $\bar{\alpha}_{\mu_j}$ наименьший, а через $\alpha_{\mu_j}^*$ наибольший из символов $1, 2, \dots, n$, которые могут стоять в t на μ_j -том месте. Ввиду этого $\alpha_{r_j} + \bar{\alpha}_{r_j+1} = n+1$. Отсюда $\bar{\alpha}_{r_j+1} = n+1 - \alpha_{r_j}$. А так как между α_{r_j} и α_{i+r_j} на нечетных местах в t стоит $\frac{i-1}{2}$ символов, то α_{i+r_j} может отличаться от α_{r_j+1} самое малое на величину $\frac{i-1}{2}$. Поэтому

$$\bar{\alpha}_{i+r_j} = n+1 - \alpha_{r_j} + \frac{i-1}{2}.$$

Выразим теперь через α_{r_j} символ α_{i+v_j+2} . Из свойства 2) подстановок из M ввиду нечетности v_j следует, что $\alpha_{v_j} + \alpha_{v_j+1} \leq n+1$. Отсюда $\alpha_{v_j+1}^* = n+1 - \alpha_{v_j}$. Так как $\alpha_{v_j+2} - \alpha_{v_j} = q_j + 1$, то $\alpha_{v_j+3}^* = \alpha_{v_j+1}^* - q_j - 1$. В свою очередь α_{i+v_j+2} меньше α_{v_j+3} самое малое на $\frac{i-1}{2}$. Поэтому

$$\alpha_{i+v_j+2}^* = \alpha_{v_j+1}^* - q_j - 1 - \frac{i-1}{2} = n - \alpha_{v_j} - q_j - \frac{i-1}{2}.$$

При $j > 1$ $\alpha_{v_j} = \alpha_{r_j} - 1$, следовательно,

$$\alpha_{i+v_j+2}^* = n+1 - \alpha_{r_j} - \frac{i-1}{2} - q_j.$$

Значит,

$$\alpha_{i+r_j} - \alpha_{i+v_j+2} \geq \bar{\alpha}_{i+r_j} - \alpha_{i+v_j+2}^* = i - 1 + q_j > 0.$$

При $j = 1$ эту разность следует уменьшить на $\frac{i-1}{2}$, так как в этом случае α_{v_j} может быть меньше α_{r_j} на $\frac{i+1}{2}$ единиц. Но и величина $\frac{i-1}{2} + q_j > 0$. Значит,

$$b_{\alpha_{i+r_j}} \geq b_{\alpha_{i+v_j+2}}.$$

Более того, $b_{\alpha_{i+r_{j-2}}}, b_{\alpha_{i+r_{j-4}}}, \dots, b_{\alpha_{i+s_j}}$ тоже не меньше $b_{\alpha_{i+v_j+2}}$. Так как $b_{\alpha_{i+r_{j-2}}} \geq b_{\alpha_{i+r_{j-4}}} \geq \dots \geq b_{\alpha_{i+s_j}}$, то, чтобы убедиться в этом, достаточно показать, что $b_{\alpha_{i+s_j}} \geq b_{\alpha_{i+v_j+2}}$. Легко видеть, что $\bar{\alpha}_{i+s_j}$ меньше $\bar{\alpha}_{i+r_j}$ на величину $q_j - 1$. Поэтому при $j > 1$

$$\alpha_{i+s_j} - \alpha_{i+v_j+2} \geq \bar{\alpha}_{i+s_j} - \alpha_{i+v_j+2}^* = i > 0.$$

При $j = 1$ эта разность тоже больше нуля, так как

$$\alpha_{i+s_j} - \alpha_{i+v_j+2} \geq \frac{i-1}{2} + 1.$$

Будем теперь шаг за шагом увеличивать в $\Delta_i f$ символы из классов C_{p_j} и D_{q_j} , начиная с минимального, на 1. Нетрудно убедиться в том, что на l -ом шаге $\Delta_i^{(l-1)} f \leq \Delta_i^{(l)} f$. Действительно, если символ, полученный после прибавления единицы, принадлежит классу C_{p_j} , то это очевидно. Если же он принадлежит классу D_{q_j} , то это следует из того, что $b_{\alpha_{i+r_j}} \geq b_{\alpha_{i+r_{j-2}}} \geq \dots \geq b_{\alpha_{i+s_j}} \geq b_{\alpha_{i+v_j+2}}$. Другими словами, вместе с увеличением символа увеличивается или в худшем случае остается неизменным элемент, стоящий у положительной скобки.

При достижении символа α_{v_v} — максимального в последнем классе C_{p_v} заменим $b_{\Delta_i^{(k)} f}$, полученной на последнем шаге, символы из D_{q_v} минимальным символом из этого класса. Приведя подобные члены, будем иметь

$$\Delta_i^{(k+1)} f = a_{\alpha_{v_v}} (b_{\alpha_{i+s_{v-1}}} - b_{\alpha_{i+v_v+2}}) + a_{\alpha_{\min}} (b_{\alpha_{i+s_v}} - b_{\alpha_{i+r_v+2}}).$$

Здесь

$$\alpha_{i+s_{v-1}} = \alpha_{i+r_v+2}, \text{ а } \alpha_{i+v_v+2} = \alpha_{i+s_v} = 1.$$

Поэтому

$$\Delta_i f \leq \Delta_i^{(k+1)} f = (a_{\alpha_{v_v}} - a_{\alpha_{\min}}) (b_{\alpha_{i+s_{v-1}}} - b_1).$$

Если принять во внимание тот факт, что $\alpha_{v_v} < \alpha_{\min}$, а $\alpha_{i+s_{v-1}} > 1$, то станет очевидным, что $\Delta_i f \leq 0$.

Этим мы показали, что при различных по величине компонентах вектора и коэффициентах формы минимум форме на нечетных степенях подстановки t будет доставлять 1-я степень, т. е. сама подстановка t .

Проведя аналогичные рассуждения, можно показать, что среди четных степеней подстановки t при различных a_μ и b_η минимум форме доставляет наибольшая степень, т. е. $t^{n-1} = t^{-1}$.

Теорема доказана.

Рассмотрим теперь случай четного n .

Теорема 2. Пусть циклическая группа H порядка n порождена подстановкой t из M . Тогда при условиях (2) в случае четного n подстановку, минимизирующую значение линейной формы на H , можно искать только среди нечетных степеней подстановки t .

Доказательство. Для удобства представим подстановку t из M с помощью символов из классов A и B :

$$t = (1, \beta_2, \alpha_3, \beta_4, \dots, \alpha_i, \beta_{i+1}, \dots, \alpha_{n-1}, \beta_n).$$

Для доказательства теоремы достаточно показать, что при произвольном нечетном i

$$f_{ti}(b) \leq f_{t^{i+1}}(b), \quad 1 \leq i \leq n-1.$$

Запишем разность $\Delta_i f = f_{ti}(b) - f_{t^{i+1}}(b)$ и покажем, что она неположительна:

$$\begin{aligned} \Delta_i f = & a_1(b_{\beta_{i+1}} - b_{\alpha_{i+2}}) + a_{\alpha_3}(b_{\beta_{i+3}} - b_{\alpha_{i+4}}) + \dots + \\ & + a_{\alpha_{n-i}}(b_{\beta_n} - b_1) + a_{\alpha_{n-i+2}}(b_{\beta_2} - b_{\alpha_3}) + \dots + a_{\alpha_{n-1}}(b_{\beta_{i-1}} - b_{\alpha_i}) + \\ & + a_{\beta_2}(b_{\alpha_{i+2}} - b_{\beta_{i+3}}) + a_{\beta_4}(b_{\alpha_{i+4}} - b_{\beta_{i+5}}) + \dots + a_{\beta_{n-i-1}}(b_{\alpha_{n-1}} - \\ & - b_{\beta_n}) + a_{\beta_{n-i+1}}(b_{\alpha_1} - b_{\beta_2}) + \dots + a_{\beta_n}(b_{\alpha_i} - b_{\beta_{i+1}}). \end{aligned}$$

Так как $\max \alpha_l < \min \beta_k$, то у коэффициентов формы с индексами из класса A стоят положительные скобки, а у коэффициентов с индексами из B — отрицательные. Поэтому, если в $\Delta_i f$ заменить индексы коэффициентов формы α_l максимальным символом из A , а β_k — минимальным символом из B , то будем иметь

$$\begin{aligned} \Delta_i f & \leq a_{\alpha_{\max}} \left(\sum_k b_{\beta_k} - \sum_l b_{\alpha_l} \right) + a_{\beta_{\min}} \left(\sum_l b_{\alpha_l} - \sum_k b_{\beta_k} \right) = \\ & = (a_{\alpha_{\max}} - a_{\beta_{\min}}) \left(\sum_k b_{\beta_k} - \sum_l b_{\alpha_l} \right) \leq 0, \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

Перейдем теперь к рассмотрению задачи отыскания подстановки, доставляющей форме f на циклической группе максимальное значение при условиях (1).

Справедлива следующая

Теорема 3. Если образующей циклической группы является подстановка t из M , то для нахождения подстановки, доставляющей на H при условиях (1) линейной форме максимальное значение, достаточно ограничиться рассмотрением значений линейной формы в случае нечетного n на подстановках t и t^{-1} , а в случае четного n на подстановках t^1, t^3, \dots, t^{n-1} .

Доказательство аналогично доказательству теорем 1 и 2.

Литература

1. Кунцевич И. М., Супруненко Д. А. Минимум линейной формы на знакопеременной группе. ДАН БССР, 10, № 3, 1966.
2. Супруненко Д. А. О значениях линейной формы на множестве подстановок. «Кибернетика», № 2, 1968.
3. Айзенштат В. С., Кравчук Д. Н. К вопросу отыскания экстремума линейной формы на множестве всех полных циклов. ДАН БССР, 12, № 2, 1968.

Э. М. ПАЛЬЧИК, Н. П. КОНТОРОВИЧ

О ГРУППАХ, ВСЕ i -е МАКСИМАЛЬНЫЕ ПОДГРУППЫ КОТОРЫХ ПЕРЕСТАНОВОЧНЫ С СИЛОВОЙ ПОДГРУППОЙ. II

§ 1. В работе [1] первым из авторов были получены результаты, которые мы сформулируем здесь в виде теоремы:

(i). Пусть в конечной группе G существует дисперсивная π -холловская подгруппа G_π . Если G_π перестановочна со всеми i -ми максимальными подгруппами группы G , то

- а) при $i=1$ G_π инвариантна в G ;
- б) при $i=2$ или G_π инвариантна в G , или G — группа Миллера — Морено (минимальная неабелева группа);
- в) при $i=3$ группа G π -разрешима;
- г) при $i=4$ группа G или π -разрешима, или изоморфна одной из неразрешимых групп, все четвертые максимальные подгруппы которых инвариантны.

В этой работе мы, продолжая исследования, начатые в [1], изучим строение группы, у которой все пятые максимальные подгруппы перестановочны с дисперсивной холловской подгруппой. Доказанная здесь теорема может рассматриваться как обобщение результатов Янко — Берковича ([2], теорема б, и [20]), которые требовали, чтобы все пятые максимальные подгруппы были инвариантны в группе. Для удобства приведем основные используемые здесь результаты и обозначения.

$\tau(G)$ — число различных простых делителей порядка $|G|$ группы G ;
 $\lambda(G)$ — число всех (а не только различных) простых делителей числа $|G|$;
 $M \triangleleft G$ ($M \triangleleft \triangleleft G$); M — инвариантная (достижимая) подгруппа в G ; $\Gamma_i(H)$ — совокупность всех i -х максимальных подгрупп группы H ; условимся писать просто Γ_i , если $H=G$; $R_\pi(G)$ — максимальный π -разрешимый нормальный делитель группы G ; $\Phi(G)$ — подгруппа Фраттини группы G ; $H^g = g^{-1}Hg$; группа G называется примарной (бипримарной), если $\tau(G)=1$ ($\tau(G)=2$); $\{\Gamma_i\}$ — порождение всех подгрупп из Γ_i ; $|G:H|$ — индекс подгруппы H в G .

(ii). ([2], теорема 7). Если в неразрешимой группе G все подгруппы из Γ_5 достижимы, то они даже инвариантны в G и G изоморфна одной из следующих групп:

- а) $LF(2, p^n)$, $p^n = 8, 9, 27$;
- б) $LF(2, p)$, $\lambda(p \pm 1) < 5$;
- в) $SL(2, p)$, $\lambda(p \pm 1) < 4$;
- г) $PGL(2, p)$, $p \neq 7, 11$, $\lambda(p \pm 1) < 4$;
- д) $Q \times L$, где $|Q| = q$, а L может быть одной из следующих групп:
 - 1) $LF(2, 5)$;
 - 2) $LF(2, 13)$ или $SL(2, 5)$, $\lambda(G) = 5$;
 - 3) $LF(2, p)$, $\lambda(p \pm 1) = 3$, $p \not\equiv \pm 1 \pmod{5}$, $\lambda(G) = 6$.

Замечание 1. Перечисленные в пункте д) группы 1)–3) исчерпывают все неразрешимые группы, у которых все подгруппы из Γ_4 инвариантны (см. [3] или [4]).

(iii). [5]. Если G_2 является группой кватернионов (обычной или обобщенной), то G содержит нормальный делитель порядка $2 \cdot g$, $(2, g) = 1$.

(iv). [6]. Если $AB^g = B^gA$ для всех $g \in G$, $A \neq 1 \neq B$, $AB \neq G$, то существует нормальный делитель N в G , такой, что $N \neq G$, $A \subseteq N$, или $B \subseteq N$.

(v). [7]. Если $G/D \cong LF(2, p)$, $|D| = 2$, то либо $G \cong SL(2, p)$, либо $G = D \times H$, где $H \cong G/D$.

(vi). [8]. Если G/D — простая неабелева группа, $|D| = p$, $p > 2$, и G имеет подгруппу $H \cong G/D$, то $G = D \times H$.

(vii). [8]. Если G/D — простая неабелева группа, $|D| = q^2$, то $Q = Z(G)$.

(viii). [9]. Если $N \triangleleft G$, $U \subseteq G$, $N \subseteq \Phi(U)$, то $N \subseteq \Phi(G)$.

(ix). [10]. Если $AN = NA$, $BH = HB$, то и $\{A, B\}H = H\{A, B\}$, где A, B, H — подгруппы из G .

(x). ([2], теорема 12). Если $G \neq \{\Gamma_1\}$, то G — примарная циклическая группа; если $G \neq \{\Gamma_2\}$, то $\tau(G) \leq 2$ и G имеет в Γ_1 циклическую примарную группу; если $G \neq \{\Gamma_3\}$, то группа G разрешима.

(xi). ([11], следствие из леммы 3). Пусть подгруппа R содержит подгруппу H такую, что $HG_\pi = G_\pi H$. Если $R \cap G_\pi = R_\pi$, то $HR_\pi = R_\pi H$.

(xii). [12]. Если $AB = BA$, и φ — гомоморфизм G в G^φ , то $A^\varphi B^\varphi = B^\varphi A^\varphi$.

(xiii). [16]. Если в не π -разрешимой группе G все собственные подгруппы π -разрешимы, то $G/\Phi(G)$ — простая неабелева группа и любой нормальный делитель из G содержится в $\Phi(G)$.

(xiv). [17]. Если G_p — циклическая подгруппа, то группа G или p -разрешима, или только один индекс ее композиционного ряда делится на p .

§ 2. Здесь мы докажем основной результат работы. Предварительно получим один вспомогательный факт, который интересен и сам по себе.

Лемма. Пусть группа G не порождается всеми своими четвертыми максимальными подгруппами. Тогда имеет место одно из следующих утверждений:

1) группа G разрешима;

2) G является неразрешимой группой, все четвертые максимальные подгруппы которой инвариантны;

3) G является неразрешимой группой и $|G : \{\Gamma_4\}|$ является простым числом.

Доказательство. Пусть группа G неразрешима. Предположим далее, что не все ее подгруппы из Γ_4 инвариантны. Заметим, что $\{\Gamma_4\}$ является нормальным делителем в G . Если $|G : \{\Gamma_4\}|$ не есть простое число, то ясно, что $\{\Gamma_4\}$ не является максимальной подгруппой. Поэтому в Γ_4 имеется подгруппа M , содержащая $\{\Gamma_4\}$ собственнно. Но это означает, что $M \neq \{\Gamma_3(M)\}$. Тогда, по (x), следует разрешимость M . Но тогда и $\{\Gamma_4\}$ — разрешимая подгруппа. Группа $G/\{\Gamma_4\}$ должна быть неразрешимой, ибо в противном случае и G оказалась бы разрешимой. Группа $G/\{\Gamma_4\}$ имеет, очевидно, единичными все подгруппы из $\Gamma_4(G/\{\Gamma_4\})$. Поэтому ее строение хорошо известно (см. замечание 1). Следовательно, $G/\{\Gamma_4\}$ изоморфна одной из групп, перечисленных в пунктах 1)–3) из д) в заключении теоремы (ii), исключая, конечно, $SL(2, 5)$. Рассматривая теперь отдельно два случая: 1) $G/\{\Gamma_4\}$ изоморфна одной из простых групп указанного вида, кроме $LF(2, 5)$ и 2) $G/\{\Gamma_4\}$ изоморфна $LF(2, 5)$, мы таким же методом, как и в соответствующем месте доказательства теоремы 3 из [1], показываем, что $|\{\Gamma_4\}| = 1$, либо $|\{\Gamma_4\}| = 2$ и G — группа из пункта 2) заключения леммы. Поэтому остается предположить, что имеет место пункт 3) заключения леммы. Лемма доказана.

Теорема. Пусть в группе G существует π -холловская дисперсивная подгруппа G_π . Если G_π перестановочна со всеми подгруппами из Γ_5 , то группа G либо π -разрешима, либо является неразрешимой группой, все подгруппы которой из множества Γ_5 инвариантны.

Доказательство. Пусть M — произвольная максимальная подгруппа группы G . Если в множестве $\Gamma_4(M)$ все подгруппы инвариантны в M и M неразрешима, то по замечанию 1 заключаем, что $M \cong SL(2,5)$, или $M \cong LF(2, p)$, $p = 5, 13$, при $p > 13$ $\lambda(p \pm 1) = 3$, $p \not\equiv \pm 1 \pmod{5}$. Если ни одно простое число $p \in \pi$ не делит $|M|$, то M тривиально π -разрешима. Поэтому пусть $|M|$ делится на простые числа из π . Если M порождается своими подгруппами из $\Gamma_4(M)$, то по условию и (ix) $G_\pi M = MG_\pi$. Но тогда $G_\pi \cap M$ является π -холловской подгруппой в M . Этим мы показали существование M_π в M . По (xi) M удовлетворяет условию теоремы (i) при $i = 4$. Поэтому M либо π -разрешима, либо $M \cong SL(2,5)$ или $M \cong LF(2, p)$, $p = 5, 13$, при $p > 13$ $\lambda(p \pm 1) = 3$, $p \not\equiv \pm 1 \pmod{5}$. Если же $M \neq \{\Gamma_4(M)\}$, то, по лемме, M либо разрешима, либо изоморфна одной из перечисленных уже групп, либо $|M : \{\Gamma_4(M)\}| = q$. Тогда $\{\Gamma_4(M)\} = H \in \Gamma_2$. По условию и (ix), $HG_\pi = G_\pi H$. Тогда $H_\pi = G_\pi \cap H$. По (xi), H удовлетворяет условию теоремы (i) при $i = 3$, ибо $\Gamma_3(H) \subseteq \Gamma_5$. Значит, H π -разрешима. Но тогда и M π -разрешима, так как $H \triangleleft M$ и $|M : H| = q$. Итак, имеет место

Замечание 2. Каждая подгруппа из Γ_1 может быть либо π -разрешимой, либо изоморфной одной из групп 1) — 3) пункта д) заключения теоремы (ii).

Рассмотрим отдельно следующие возможные случаи.

1. $R_\pi(G) = R = 1$. Тогда каждая не π -разрешимая подгруппа из Γ_1 изоморфна одной из простых групп $LF(2, p)$, $\lambda(p \pm 1) < 4$, $p \neq 7, 11$, при $p > 13$ $p \not\equiv \pm 1 \pmod{5}$, так как $M \cong SL(2,5)$ не может быть максимальной подгруппой в этом случае. В самом деле, если $M \cong SL(2,5)$, то 2-силовская подгруппа из M либо собственно содержится в некоторой 2-подгруппе из G , либо совпадает с силовской 2-подгруппой группы G . Если $M_2 = G_2$, то по (iii) в G имеется разрешимый по известным теоремам Бернсайда ([14], § 128) и Томпсона — Фейта [15] нормальный делитель T . Если $|T|$ делится на простые числа из π , то ясно, что T также π -разрешим. Если $|T|$ не делится ни на одно простое число из π , то T тривиально π -разрешим. В обоих случаях имеем противоречие с предположением. Если же $M_2 \subset G_2$, то пусть P — та минимальная 2-надгруппа над M_2 , которая не входит в M . Обозначим через D инвариантную подгруппу порядка 2 из $M \cong SL(2,5)$. Тогда, учитывая, что D есть характеристическая подгруппа в M_2 , имеем $D \triangleleft \{P, M\} = G$. Ввиду только что проведенных рассуждений, снова имеем $R_\pi(G) \neq 1$.

Если $N \triangleleft G$, то N не может содержаться в π -разрешимой максимальной подгруппе, так как $R = 1$. Поэтому N содержится в одной из перечисленных выше простых групп. Так как группа автоморфизмов группы $LF(2, p)$ есть $PGL(2, p)$, то мы получаем группу из пункта г) заключения теоремы (ii). Тогда это есть группы и из заключения нашей теоремы. Если же G — простая группа, то она может удовлетворять условию нашей теоремы лишь в том случае, когда множество Γ_5 состоит только из единичных подгрупп. Это показано в начале доказательства теоремы 3 работы [1]. В этом случае теорема доказана.

2. $R_\pi(G) = R \neq 1$. Из замечания 2 следует, что R могут содержать только π -разрешимые подгруппы из Γ_1 , или изоморфные $SL(2,5)$.

2.a. $R \neq \Phi(G)$ и все подгруппы, содержащие R , π -разрешимы. Тогда в G найдется такая подгруппа M , что $MR = G$. Ясно, что M не π -разрешимая подгруппа, иначе G оказалась бы π -разрешимой и доказывать нечего. Поэтому M изоморфна одной из групп 1) — 3) пункта д) заключения теоремы (ii). Если бы $M \triangleleft G$, то сразу видно, что все подгруппы из Γ_5 были бы достижимы в G . Из (ii) следовало бы утверждение теоремы. Поэтому пусть M не является нормальным делителем G . Так как в качестве под-

группы M у нас выбрана группа, строение которой хорошо известно, то выберем в $\Gamma_3(M)$ подгруппу T порядка 3, если $M \cong SL(2,5)$ и T порядка 2 в остальных случаях. Исходя из того, что $G = MR$, легко видеть, что существует в Γ_3 подгруппа $K = T \cdot R$. Пусть сначала T не принадлежит $\Gamma_1(K)$. Тогда $T \subseteq A \in \Gamma_2(K) \subseteq \Gamma_5$. По условию $G_\pi A^g = A^g G_\pi$ для всех $g \in G$. Ясно, что $G_\pi A \neq G$, ибо в противном случае G_π имеет индекс 2 или 3 в G , что невозможно, так как в первом случае G_π оказалась бы инвариантной в G , поэтому G оказалась бы разрешимой, а во втором случае $|G : G_\pi| = 3$. Вспомним, что это имеет место в случае, когда $\Gamma_1 \ni M \cong SL(2,5)$. Но тогда группа $G/R \cong M/M \cap R$ имела бы π -холловскую подгруппу $G_\pi R/R$ индекса 3, что, как непосредственно легко проверить, не имеет места. Итак, $G_\pi A \neq G$. По (iv) тогда A или G_π содержится в собственном нормальном делителе N группы G . Если $G_\pi \subseteq N$, то $N \in \Gamma_1$, так как все подгруппы из Γ_i , $i > 1$, π -разрешимы (это следует из замечания 2). Если бы $N \in \Gamma_i$, $i > 1$, то ввиду $G_\pi \subseteq N \triangleleft G$ следовала бы π -разрешимость G . Поэтому $N \in \Gamma_1$ и N не π -разрешимый нормальный делитель. Но тогда из замечания 2 сразу видно, что $N = M$, что влечет $M \triangleleft G$, а этот случай исключен ранее. Если же $A \subseteq N$, то $N \cap M \triangleleft M$ и $T \subseteq N \cap M$, что также влечет $N = M$ даже в случае $M \cong SL(2,5)$, ибо тогда $|T| = 3$ по выбору. То есть, опять $M \triangleleft G$. Противоречие с предположением $M \triangleleft G$.

Пусть теперь $T \in \Gamma_1(K)$. По теореме Херштейна [19] о разрешимости группы с абелевой максимальной подгруппой следует $\tau(K) \leq 2$. Если $\tau(K) = 1$, то $|K| = 4$ или 9. Откуда $|R| = 2$ или 3. Так как группа G/R полупроста (по определению $R_\pi(G) = R$), то из изоморфизма $G/R = MR/R \cong M/M \cap R$ следует даже, что она проста. Так как в G имеется подгруппа, изоморфная M , то по (v) или (vi) следует, что либо $M \triangleleft G$, либо G изоморфна группе из пункта в) заключения теоремы (ii). Обе эти возможности исключаем как ведущие к цели. Пусть поэтому $\tau(K) = 2$. Ясно, что тогда K не имеет бипримарных подгрупп, то есть является либо нильпотентной, либо группой Шмидта (даже группой типа A (см. [13]). Если K нильпотентна, то $\alpha = 1$, где $|K| = 2p_1^\alpha$, или $|K| = 3p_1^\alpha$, ввиду $T \in \Gamma_1(K)$. Если K — типа A , то из свойств групп Шмидта следует [18], что α — наименьшее положительное целое число, удовлетворяющее сравнению $p_1^\alpha \equiv 1 \pmod{q}$, где $q = 2$ или 3. Из малой теоремы Ферма следует, что $|K| = 2p_1$, или $|K| = 3p_1^2$. Значит, $|R| = p_1$ или p_1^2 . По (vi) и (vii) опять следует, что $M \triangleleft G$, вопреки предположению M не является нормальным делителем G . Итак, в этом случае теорема доказана, так как случай $R \subset M \cong SL(2,5)$ невозможен по (viii).

2.6. $R_\pi(G) = R = \Phi(G)$. Тогда в Γ_1 все подгруппы могут быть только π -разрешимыми или изоморфными $SL(2,5)$; это следует из замечания 2.

2.6.1. Пусть $SL(2,5) \cong M \notin \Gamma_1$. Тогда все собственные подгруппы не π -разрешимой группы G π -разрешимы. По (xiii) тогда G/R — простая неабелева группа. Если $H/R \in \Gamma_5(G/R)$ и $G_\pi R/R$ — π -холловская подгруппа в G/R , то, так как по условию $HG_\pi = G_\pi H$, то и $HG_\pi R = G_\pi RH$, тогда из (xii) следует, что G/R удовлетворяет условию теоремы. По индукции, учитывая простоту G/R , заключаем, что G/R изоморфна одной из групп пунктов а) или б) заключения теоремы (ii).

2.6.1.1. $G/R = \bar{G} \cong LF(2, p)$, $\lambda(p \pm 1) = 4$, или $\bar{G} \cong LF(2, 3^2)$. Тогда в $\Gamma_1(\bar{G})$ имеются подгруппы \bar{K} и \bar{L} порядков 2 и p_1 , $p_1 > 2$. Ясно, что \bar{K} и \bar{L} непериодичны с $\bar{G}_\pi = G_\pi R/R$. В противном случае, так как $\bar{G}_\pi \bar{K} \neq \bar{G}$ и $\bar{G}_\pi \bar{L} \neq \bar{G}$ (в группах, которым изоморфна \bar{G} , нет холловских дисперсивных подгрупп индекса 2 или p_1), по (iv) следовала бы непростота \bar{G} . Но тогда подгруппы K и L непериодичны с $G_\pi R$ по (xii). По (ix)

тогда $K \neq \{\Gamma_1(K)\}$ и $L \neq \{\Gamma_1(L)\}$, ибо $\Gamma_1(K) \subseteq \Gamma_5$ и $\Gamma_1(L) \subseteq \Gamma_5$, то есть по (x) K и L — циклические примарные группы. Тогда R одновременно является 2-группой и p_1 -группой, $p_1 > 2$. Это возможно, если $R = 1$. В этом случае теорема доказана.

2.6.1.2. $G/R = \bar{G} \cong LF(2, p)$, $\lambda(p \pm 1) \leq 3$, $p \neq 5, 7, 11$, $p = 13$. Тогда в $\Gamma_3(\bar{G})$ имеются подгруппы \bar{K} и \bar{L} порядков 2 и p_1 , $p_1 > 2$. Как и в предыдущем пункте, показывается, что $K \neq \{\Gamma_2(K)\}$ и $L \neq \{\Gamma_2(L)\}$. По (x) тогда $\tau(K) \leq 2$ и $\tau(L) \leq 2$. Если $\tau(K) = 1 = \tau(L)$, то, как и в предыдущем случае, $\Phi(G) = 1$. Пусть теперь $\tau(L) = 1$, $\tau(K) = 2$. Тогда, ввиду $\Phi(G) \subseteq L$, следует $|\Phi(G)| = p_1^\alpha$, $p_1 > 2$. Тогда $|K| = 2 \cdot p_1^\alpha$. Если бы 2-силовская подгруппа K_2 группы K не принадлежала $\Gamma_1(K)$, то $K_2 \subseteq A \in \Gamma_5$. По условию $A^g G_\pi = G_\pi A^g$ для всех $g \in G$. Тогда $A^g \Phi(G)$ и $G_\pi \Phi(G)$ тоже были бы перестановочны. Поэтому по (xii) также \bar{K} и $\bar{G}_\pi = G_\pi \Phi(G) / \Phi(G)$ были бы перестановочны, причем \bar{G}_π не может быть индекса 2 в \bar{G} , поэтому $\bar{G} \neq \bar{K} \bar{G}_\pi$ и из (iv) следовала бы непростота \bar{G} , что невозможно. Поэтому $K_2 \in \Gamma_1(K)$. Тогда K не содержит бипримарных подгрупп, то есть является группой типа A, либо нильпотентна. В обоих случаях $\alpha = 1$ (это следует из свойств групп Шмидта [18] или из того, что $K_2 \in \Gamma_1(K)$, если K нильпотентна). Итак, $|\Phi(G)| = p_1$, $p_1 > 2$. Среди групп, которым изоморфна \bar{G} , есть такие, которые содержат в $\Gamma_4(\bar{G})$ подгруппу \bar{N} порядка 2. Для таких групп $p \equiv \pm 1 \pmod{5}$. Как и в случае 1.6.1.1 показывается, что N — циклическая 2-группа, откуда $\Phi(G) < N$ и $\Phi(G)$ — 2-группа. Но мы уже установили, что $\Phi(G)$ p_1 -группа, $p_1 > 2$. Противоречие показывает, что должно быть $p \not\equiv \pm 1 \pmod{5}$, или $p = 13$. Итак, $\bar{G} \cong LF(2, p)$, $p = 13$, или $\lambda(p \pm 1) \leq 3$, p несравнимо с $\pm 1 \pmod{5}$. Но в этих группах все подгруппы из $\Gamma_4(\bar{G})$ единичны по замечанию 1. Ввиду $|\Phi(G)| = p_1$, в Γ_5 все подгруппы также единичны, то есть инвариантны. Поэтому пусть $\tau(L) = 2$, $\tau(K) = 1$. Аналогичными рассуждениями показывается, что в этом случае $|\Phi(G)| = 2$. Из (v) следует, что в этом случае G есть группа из пункта в) заключения теоремы (ii), ибо группы другого вида из заключения теоремы (v) не удовлетворяют условию теоремы как содержащие в Γ_5 подгруппу порядка 2 (тогда по (iv) простой неабелев множитель из (v) оказался бы непростым). И в этом случае теорема доказана. Пусть, наконец, $\tau(K) = 2 = \tau(L)$. Тогда $|\Phi(G)| = 2^\alpha p_1^\beta$, $|K| = 2^{\alpha+1} p_1^\beta$, $|L| = 2^\alpha p_1^{\beta+1}$. Если бы p_1 -силовская подгруппа T из K принадлежала $\Gamma_1(K)$, то ввиду $T \triangleleft K$ следовало бы $\alpha = 0$. Этот случай уже нами рассматривался, ибо тогда $|\Phi(G)| = p_1^\beta$. По (x) тогда 2-силовская подгруппа K_2 из K максимальная циклическая в K . Тогда и 2-силовская подгруппа L_2 из L циклическая. Поэтому L — нильпотентная группа. Если бы в L была максимальна L_2 , то $\beta = 0$, что уже рассматривалось ранее. Поэтому в L максимальна p_1 -силовская подгруппа. Откуда $\alpha = 1$. Так как в K все собственные подгруппы нильпотентны, то K либо нильпотентна, либо группа Шмидта. В обоих случаях $\beta = 1$. Итак, $|\Phi(G)| = 2p_1$. Как и выше, показывается, что p несравнимо с $\pm 1 \pmod{5}$. По замечанию 1 тогда $\lambda(\bar{G}) \leq 6$. Так как в этом случае для любой максимальной подгруппы \bar{M} из \bar{G} имеет место $\lambda(\bar{M}) \leq 3$, то в Γ_1 для любой максимальной подгруппы M имеет место $\lambda(M) \leq 5$. Поэтому в Γ_5 могут встретиться только подгруппы простого порядка. Значит, если $T \in \Gamma_5$, то $G_\pi T \neq G$, ибо $\lambda(G_\pi) \leq 5$, а $\lambda(G) > 6$. По (iv) и (xiii) следует, что $T \subseteq \Phi(G)$, ибо G_π не содержится в $\Phi(G)$ как холловская. Но если $T \subseteq \Phi(G)$, то $T \triangleleft \triangleleft G$. Итак, все подгруппы из Γ_5 достижимы (а значит, по (ii) и инвариантны в G). В этом случае теорема доказана.

2.6.1.3. $G/R = \bar{G} \cong LF(2,5)$. В $\Gamma_3(\bar{G})$ имеется подгруппа \bar{K} порядка 2. По (i), когда $i = 3$, следует $\bar{K}\bar{G}_\pi \neq \bar{G}_\pi\bar{K}$, где $\bar{G}_\pi = G_\pi R/R$. Как и в пункте 2.6.1.2. показывается, что $\tau(K) \leq 2$, где $\bar{K} = K/R$. Если $\tau(K) = 1$, то $|K| = 2^{\alpha+1}$, $|\Phi(G)| = 2^\alpha$, причем, по (x) $\Phi(G)$ является циклической максимальной подгруппой в K . В этом случае $|G| = 2^{\alpha+2} \cdot 3 \cdot 5$. Так как $\bar{G}_2 \in \Gamma_2(\bar{G})$, то $G_2 \in \Gamma_2$. Если $\alpha > 2$, то пусть Q — произвольная подгруппа в G_2 порядка $2^{\alpha-1}$. Ясно, что $\alpha - 1 \geq 2$ и $Q \in \Gamma_5$. По условию $Q^g G_\pi = G_\pi Q^g$ для всех $g \in G$. $Q G_\pi \neq G$, так как в G нет холловской подгруппы индекса $\leq 2^{\alpha-1}$. По (iv) и (xiii) следует, что $Q \subseteq \Phi(G)$, ибо G_π не содержится в $\Phi(G)$ как холловская. Так как $\Phi(G)$ циклическая, то в $\Phi(G)$ имеется точно одна подгруппа порядка $|Q|$. Поэтому и в G_2 имеется точно одна подгруппа порядка $|Q| = 2^{\alpha-1}$, $\alpha - 1 \geq 2$. Тогда G_2 должна быть циклической. Это невозможно для неразрешимой группы (см. [14], § 128 и [15]). Итак, $\alpha \leq 2$. Тогда, если $Q \in \Gamma_5$, то $|Q| = 2$, поэтому $G_\pi Q \neq G$. В силу условия (iv) и (xiii) $Q \subseteq \Phi(G)$, то есть $Q \triangleleft \triangleleft G$. По (ii) теорема доказана.

Если теперь $\tau(K) = 2$, то либо $|\Phi(G)| = p_1^\beta$, $|K| = 2 \cdot p_1^\beta$, либо $|\Phi(G)| = 2^\alpha p_1^\beta$, $|K| = 2^{\alpha+1} p_1^\beta$.

Если $|\Phi(G)| = p_1^\beta$, то учитывая, что силовская подгруппа из G не может лежать в $\Phi(G)$ и что $p_1 > 2$, заключаем, что $p_1 = 3$ или 5. Пусть для определенности $p_1 = 3$. Тогда $|G| = 2^2 \cdot 3^{\beta+1} \cdot 5$. Так как $\bar{G}_3 \in \Gamma_2(\bar{G})$, то $G_3 \in \Gamma_2$. Если $K_2 \in \Gamma_1(K)$, то K не имеет бипримарных подгрупп и $\beta = 1$. Если же по (x) $K_{p_1} \in \Gamma_1(K)$, то, как и выше, показывается, что если $\beta \geq 2$, то G_3 содержит единственную подгруппу порядка $p_1^{\beta-1}$. Тогда G_3 была бы циклической, что по (xiv) невозможно. Значит, $\beta < 2$. Но тогда, если $Q \in \Gamma_5$, то легко подсчитать, что $|Q| = 1$. Поэтому пусть $|\Phi(G)| = 2^\alpha p_1^\beta$, $\alpha > 0$.

Если бы $K_{p_1} \in \Gamma_1(K)$, то $|K| = 2 \cdot p_1^\beta$, то есть $\alpha = 0$. Поэтому по (x) $K_2 \in \Gamma_1(K)$. Тогда все собственные подгруппы из K нильпотентны. Значит, K либо нильпотентна, либо группа Шмидта. В обоих случаях $\beta = 1$. Пусть P — p_1 -силовская подгруппа из $\Phi(G)$ порядка p_1 . Учитывая, что G/P удовлетворяет условию теоремы и G/P имеет нормальный делитель, являющийся 2-группой, по индукции заключаем, что G/P изоморфна одной из групп пункта в) заключения теоремы (ii). G/P не изоморфна группам из пункта д) теоремы (ii), так как все подгруппы в G π -разрешимы. Откуда следует, что $|R| = |\Phi(G)| = 2p_1$. Соответственно $|G| = 2^3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot p_1$, где $p_1 = 3$ или 5. Поэтому, если $Q \in \Gamma_5$, то $|Q| = q$. Значит, если G_π — любая возможная дисперсивная холловская подгруппа в G , то $G_\pi Q \neq G$. По условию, теоремам (iv) и (xiii) $Q \subseteq \Phi(G)$, т. е. $Q \triangleleft \triangleleft G$ и по (ii) в этом случае теорема доказана.

2.6.1.4. $G/R = \bar{G} \cong LF(2,8)$. Тогда в $\Gamma_4(\bar{G})$ имеется подгруппа \bar{K} порядка 2. Из теоремы 3 из [1] следует, что $\bar{K}\bar{G}_\pi \neq \bar{G}_\pi\bar{K}$. Но тогда и $K G_\pi \neq G_\pi K$. По (ix) и (x) следует, что K есть циклическая 2-группа. Так как в \bar{G} 2-силовская подгруппа лежит в $\Gamma_2(\bar{G})$, то $G_2 \in \Gamma_2$. Значит, любая подгруппа Q порядка $|R| = 2^\alpha$ лежит в Γ_5 . По условию $Q^g G_\pi = G_\pi Q^g$ для всех $g \in G$. Так как $|G| = 2^{\alpha+3} \cdot 3 \cdot 7$, то ясно, что $Q G_\pi \neq G$ для любой π -холловской подгруппы G_π из G . По (iv) и (xiii) $Q \subseteq \Phi(G)$. Это означает, что в G_2 имеется единственная подгруппа порядка 2^α . Если $\alpha > 1$, то G_2 была бы циклической, что невозможно для неразрешимой группы. Значит, $\alpha = 1$ и G_2 есть обобщенная группа кватернионов. Но тогда $G_2/\Phi(G)$ должна быть диэдральной группой порядка 2, что невозможно, так как в

$LF(2,8)$ 2-силовская подгруппа является элементарной абелевой. Противоречие, исключающее этот случай.

2.6.1.5. $G/R = \bar{G} \cong LF(2,3^3)$. Тогда в $\Gamma_4(\bar{G})$ имеется подгруппа \bar{K} порядка 3. Как и в случае 2.6.1.4. показывается, что G_3 является циклической группой, что невозможно в силу (xiv).

2.6.2. Если $\Gamma_1 \ni M \cong SL(2,5)$, то $|\Phi(G)| = 2$. Если бы $G/\Phi(G) = \bar{G}$ была непроста, то ввиду $R_\pi(G) = \Phi(G)$ в \bar{G} может иметься только не π -разрешимый нормальный делитель. Так как в этом случае в \bar{G} имеется подгруппа \bar{M} , изоморфная $LF(2,5)$, то $\bar{M} \triangleleft \bar{G}$, то есть $M \triangleleft G$, где $M \cong SL(2,5)$. Этот случай мы рассматривали еще в случае 1.а. Поэтому можно считать, что $G/\Phi(G)$ — простая неабелева группа. Поэтому все рассуждения из пункта 2.6.1 можно повторить. При этом доказательство всюду значительно облегчается, так как $|\Phi(G)| = 2$ и в $\bar{G} = G/\Phi(G)$ имеется максимальная подгруппа, изоморфная $LF(2,5)$. Теорема полностью доказана.

Литература

1. Пальчик Э. М. Весті АН БССР, сер. фіз.-мат. навук, № 1, 1968.
2. Беркович Я. Г. ДАН СССР, 169, № 3, 1966.
3. Беркович Я. Г. Изв. АН СССР, сер. мат., 28, № 3, 1964.
4. Jancko Z. Math. Z., 82, 82, 1963.
5. Brauer R., Suzuki M. Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 45, № 12, 1757, 1959.
6. Kegel O. Archiv d. Math., 12, 90, 1961.
7. Schur I. J. reine und angew. Math., 132, 85, 1907.
8. Лельчук М. П. Сб. «Конечные группы». Изд. «Наука и техника», Минск, 1966.
9. Gaschütz W. Math. Z., 58, 160, 1953.
10. Ore O. Duke Math. J., 5, 431, 1939.
11. Kegel O. Math. Z., 78, 205, 1962.
12. Deskins W. Math. Z., 82, 125, 1963.
13. Чунихин С. А. Подгруппы конечных групп. Изд. «Наука и техника», Минск, 1964.
14. Burnside W. Theory of groups of finite order, sec. ed. Cambridge, 1911.
15. Feit W., Thompson J. Pacific J. Math., 13, № 3, 775, 1963.
16. Беркович Я. Г., Пальчик Э. М. Сибирск. мат. журн., 8, № 4, 1967.
17. Wielandt H. Abh. math. Semin. Univ. Hamburg, 22, 215, 1958.
18. Шмидт О. Ю. Матем. сб., 31, 366, 1924.
19. Herstein I. Proc. Amer. Math. Soc., 9, № 2, 255, 1958.
20. Jancko Z. Math. Z., 84, № 4, 428, 1964.

Р. П. МЕДВЕДЕВА

КОНЕЧНЫЕ РАЗРЕШИМЫЕ ГРУППЫ С ЗАДАНЫМ ЧИСЛОМ НЕИНВАРИАНТНЫХ ПОДГРУПП В КОМПОЗИЦИОННЫХ РЯДАХ

Разобьем множество конечных групп на непересекающиеся классы, отнеся к классу $\Delta(k, n)$ каждую конечную группу G , удовлетворяющую следующим требованиям: если $\langle C_i \rangle$ — совокупность композиционных рядов группы G , t_i — число членов ряда C_i , неинвариантных в G , то

$$\max_i t_i = n, \quad \max_{i,j} (t_i - t_j) = k.$$

Класс $\Delta(0, 0)$ образуют группы с транзитивностью инвариантности; разрешимые группы этого класса описаны в [1]. В настоящей работе рассматриваются разрешимые группы из класса $\Delta(0, n)$, где n — произвольное натуральное число, т. е. конечные разрешимые группы с заданным числом $n > 0$ неинвариантных членов в композиционных рядах.

Лемма 1. Пусть $G \in \Delta(0, n)$. Пусть M будет минимальной инвариантной подгруппой порядка p^α группы G , Q/M — минимальной инвариантной подгруппой порядка q^β фактор-группы G/M ; p и q — простые числа. Тогда:

- 1) если $q \neq p$, то $\beta = 1$,
- 2) если $q = p$, то $\alpha = 1$.

Доказательство. Поскольку $G \in \Delta(0, n)$, то в любом композиционном ряде подгруппы Q содержится одна и только одна нетривиальная инвариантная в G подгруппа. Поэтому, если N — инвариантная в G подгруппа группы Q , то либо $N = M$, либо $Q = N \times M$. Последний случай в силу произвольности N возможен лишь при условии $\alpha = \beta = 1$, и тогда лемма верна.

Предположим теперь, что любой композиционный ряд группы Q проходит через подгруппу M . Рассмотрим два случая.

1. $q \neq p$. Пусть M_1 — подгруппа из M , отличная от M и инвариантная в Q . Поскольку любой композиционный ряд группы Q проходит через M , то централизатор фактор-группы M/M_1 в Q/M_1 совпадает с M/M_1 . По лемме 1 работы [2] Q/M — циклическая фактор-группа и, следовательно, $\beta = 1$.

2. $q = p$. Если $\alpha \neq 1$, то тогда группа Q как p -группа с единственной подгруппой M порядка p^α , где $\alpha > 1$, должна быть циклической, что противоречит выбору M .

Лемма 2. Пусть G — разрешимая группа из класса $\Delta(0, n)$, G/L — максимальная сверхразрешимая фактор-группа группы G . Если L содержит циклическую инвариантную подгруппу группы G , то L — группа кватернионов 8-го порядка.

Доказательство проведем индукцией по порядку группы. Пусть M — инвариантная подгруппа простого порядка p группы G , Q/M — минимальная инвариантная подгруппа фактор-группы G/M , содержащаяся в L/M ; пусть порядок Q/M равен q^β . Рассмотрим два возможных случая.

1. $q \neq p$. Тогда по лемме 1 $\beta = 1$. Поскольку для G/M лемма верна, то L/M является группой кватернионов. Обозначим через $C(M)$ централизатор подгруппы M в L . Поскольку Q/M — единственный минимальный нормальный делитель фактор-группы L/M , то либо $C(M) = M$, либо $C(M) \cong Q$.

В первом случае изоморфизм, существующий между $L/C(M)$ и подгруппой группы автоморфизмов группы M , требует, чтобы L/M была циклической, что невозможно. Во втором случае $Q = M \times R$, где R — характеристическая подгруппа группы Q . Это приводит к противоречию: фактор-группа L/R порядка $4p$ не является группой кватернионов, хотя для G/R теорема должна быть верна. Таким образом, случай $q \neq p$ невозможен.

2. $q = p$. Предположим, что $\beta = 1$. Поскольку для G/M теорема верна, то L/M является группой кватернионов и тогда порядок L равен 16. Нетрудно убедиться, что в любом композиционном ряде группы L содержится только один неизменяемый в G член. Из этого и из выбора L следует, что любая максимальная подгруппа группы L и только она неизменяема в G . Следовательно, $L \in \Delta(0, 0)$, и поскольку L — абелева 2-группа, то она должна быть гамильтоновой. С другой стороны, любая максимальная подгруппа L_1 группы L является циклической, так как содержит единственную подгруппу индекса p : существование у нее двух таких подгрупп, которые, как выше отмечено, будут инвариантами в G , привело бы к инвариантности в G самой группы L_1 . Гамильтонова группа, все максимальные подгруппы которой циклические, может быть только обычной группой кватернионов, что противоречит порядку L . Случай $\beta = 1$ невозможен.

Предположим, что $\beta > 1$. Пусть M_1 — произвольная подгруппа группы Q порядка p . В проходящем через M_1 композиционном ряде группы Q содержится лишь одна нетривиальная инвариантная в G подгруппа и по лемме 1 порядок ее равен p . Следовательно, $M_1 \triangleleft G$ и поэтому либо $M_1 = M$, либо $M_1 M = Q$. Последнее, однако, невозможно при $\beta > 1$. Итак, $M_1 = M$ и Q является p -группой с единственной подгруппой порядка p , т. е. циклической или обобщенной группой кватернионов. Циклической Q как содержащая неизменяемые в G подгруппы не может быть. Во втором случае, поскольку Q/M — элементарная абелева группа, Q является группой кватернионов 8-го порядка.

Если $Q = L$, то лемма доказана.

Предположим, что $Q \neq L$. Обозначим через R/Q минимальный содержащийся в L/Q нормальный делитель фактор-группы G/Q . Пусть порядок R/Q равен r^ν . Поскольку $\beta > 1$, то из леммы 1, примененной к фактор-группе G/M , следует, что $r \neq 2$. Но тогда, по той же лемме, $\nu = 1$. Из этого следует, что лемма верна для фактор-группы G/Q , и поэтому L/Q — группа кватернионов, т. е. 2-группа, в противоречие с доказанным ранее.

Лемма доказана.

Теорема 1. Пусть G — разрешимая группа из класса $\Delta(0, n)$, $n > 0$, G/L — максимальная сверхразрешимая фактор-группа группы G . Тогда: 1) L является либо элементарной абелевой группой порядка p^{n+1} , либо группой кватернионов 8-го порядка, либо расширением элементарной абелевой группы нечетного порядка p^n с помощью группы кватернионов 8-го порядка; 2) любой композиционный ряд группы G проходит через L .

Доказательство. Обозначим через M минимальный нормальный делитель G , содержащийся в L . Подгруппа M абелева элементарная, пусть порядок M равен p^α .

Если $\alpha = 1$, то по лемме 2 L — группа кватернионов.

Если $\alpha > 1$, и $M=L$, то легко видеть, что $\alpha = n+1$.

Пусть $\alpha > 1$, но $M \neq L$. Обозначив через Q/M минимальный нормальный делитель G/M , содержащийся в L/M , убеждаемся с помощью леммы 1, что Q не может быть p -группой и что порядок Q/M равен простому числу q . Теперь из леммы 2 следует, что L/M — группа кватернионов. Следовательно, L является расширением элементарной абелевой группы M с помощью группы кватернионов и $p \neq 2$. Нетрудно убедиться, что Q и M являются единственными инвариантными в G подгруппами в проходящем через них композиционном ряде L . Из этого следует, что $\alpha = n$. Первая часть теоремы доказана.

Предположим теперь, что в классе $\Delta(0, n)$ существуют разрешимые группы, для которых неверно второе утверждение теоремы. Пусть из них группа G имеет наименьший порядок.

Обозначим через M минимальную инвариантную подгруппу группы G . Предположим, что M не входит в L . Тогда $M \cap L = 1$. Пусть L_1 — максимальная инвариантная в G подгруппа L . Построим подгруппу ML . Нетрудно видеть, что $ML/L_1 = ML_1/L_1 \times L/L_1$. Применяя дважды к фактор-группе G/L_1 лемму 1, убеждаемся, что порядок фактор-группы L/L_1 — простое число. Это противоречит выбору подгруппы L .

Следовательно, любой минимальный нормальный делитель M группы G содержится в L . Поскольку для G/M теорема верна, то любой композиционный ряд группы G , проходящий через M , содержит подгруппу L . В силу произвольности M это утверждение верно для любого композиционного ряда группы G .

Теорема доказана. Из нее следует, что при любом n у разрешимых групп из класса $\Delta(0, n)$ число составных индексов в главных рядах не превосходит двух.

Рассмотрим теперь разрешимые группы, принадлежащие классу $\Delta(0, 1)$.

Теорема 2. Пусть G — разрешимая группа из класса $\Delta(0, 1)$, G/L — максимальная сверхразрешимая фактор-группа группы G . Если порядок L нечетный, то L является единственным минимальным делителем группы G , имеет порядок p^2 и совпадает с силовской подгруппой группы G , относящейся к наибольшему простому делителю порядка G .

Доказательство. Воспользуемся для обозначения порядка группы G символом $|G|$. Из теоремы 1 следует, что $|L| = p^2$ и что L является единственным минимальным нормальным делителем G . Осталось показать, что p является максимальным простым делителем $|G|$ и что L является силовской подгруппой группы G .

Фактор-группа G/L обладает упорядоченной силовской башней. Обозначим через q максимальный простой делитель G/L , через R/L — минимальный нормальный делитель фактор-группы G/L порядка q . Из леммы 1 следует, что $q \neq p$, а применив к R уже упоминавшуюся лемму из работы [2], заключаем, что q делит $p^2 - 1$. Это возможно лишь при условии $q < p$ или $p = 2$. Поскольку последнее исключено условием теоремы, то $q < p$; тогда $(|G : L|, p) = 1$.

Теорема доказана.

Теорема 3. Пусть G — разрешимая группа из класса $\Delta(0, 1)$, G/L — максимальная сверхразрешимая фактор-группа группы G . Если порядок L четный, то G изоморфна одной из следующих групп: 1) группе тетраэдра, 2) группе октаэдра, 3) $SL(2, 3)$, 4) $GL(2, 3)$.

Доказательство. Из теоремы 1 следует, что $|L| = 4$ или $|L| = 8$, в последнем случае L — группа кватернионов.

Убедимся прежде всего в том, что $|G/L| = 3$ или $|G/L| = 6$. Не нарушая общности доказательства, можно считать, что $|L| = 4$. Централиза-

тор $C(L)$ группы L в G совпадает с L . Действительно, из леммы 1 следует, что L является максимальной инвариантной 2-подгруппой группы G . Если бы $C(L) \neq L$, то в $C(L)$ можно было бы найти абелеву инвариантную подгруппу порядка $4q$, $q \neq 2$ и мы смогли бы построить композиционный ряд группы G , не проходящий через L , что противоречит теореме 1.

Группа автоморфизмов группы L имеет шестой порядок. Фактор-группа $G/C(L)$ изоморфна подгруппе группы автоморфизмов L и, следовательно, порядок фактор-группы $G/C(L)$ делит число 6. Выше показано, что $C(L) = L$, а поскольку L является максимальной достижимой 2-подгруппой группы G , то $|G/L| = 3$ или $|G/L| = 6$.

Рассмотрим два возможных случая.

1. Пусть $|L| = 4$. Тогда $|G| = 12$ или $|G| = 24$.

Если $|G| = 12$, то поскольку L является единственным минимальным нормальным делителем группы G , группа G является группой тетраэдра.

Если $|G| = 24$, то можно утверждать на основании теоремы 1 и леммы 1, что 2, 3, 2, 2 — единственное расположение индексов в композиционных рядах группы G ; силовская 2-подгруппа группы G диэдральная; абелевой она не может быть, так как централизатор L в G совпадает с L ; у группы кватернионов все максимальные подгруппы циклические, что противоречит структуре L . Группа G полностью определяется этими условиями это группа октаэдра.

2. Пусть $|L| = 8$. Тогда L — группа кватернионов, ее минимальная подгруппа P является единственным минимальным нормальным делителем группы G . Фактор-группа G/P , как выше показано, может быть только группой тетраэдра или октаэдра. В первом случае $G \cong SL(2, 3)$, во втором $G \cong GL(2, 3)$.

Теорема доказана полностью.

Если G — разрешимая группа из класса $\Delta(0, 0)$, то, по [1], любая ее подгруппа также принадлежит к классу $\Delta(0, 0)$. Аналогом этого утверждения является следующая

Теорема 4. Если G — разрешимая группа из класса $\Delta(0, 1)$, то любая ее подгруппа принадлежит одному из классов $\Delta(0, 0)$, $\Delta(0, 1)$, $\Delta(1, 1)$.

Доказательство. Поскольку соотношение $k \leq n$ вытекает из самого определения класса $\Delta(k, n)$, то следует только показать, что композиционные ряды любой подгруппы M группы G содержат не более чем по одному инвариантному в M члену.

Для групп, описанных в теореме 3, это очевидно.

Пусть G — описанного в теореме 2 вида, G/L — максимальная сверхразрешимая фактор-группа группы G . Тогда $|L| = P^2$, где P — максимальный простой делитель $|G|$.

Предположим, что M не принадлежит к классу $\Delta(0, 0)$. Обозначим через Q минимальную инвариантную достижимую подгруппу M . Построим $D = M \cap L$. Фактор-группа G/L принадлежит классу $\Delta(0, 0)$, следовательно, ML/L и изоморфная ей фактор-группа M/D также не содержат в своих композиционных рядах инвариантных членов. Из этого следует, что $D \neq 1$, D не входит в Q и что $QD \triangleleft M$. Поскольку любая достижимая подгруппа группы Q инвариантна в M , то Q обладает единственной максимальной инвариантной подгруппой Q_1 .

Предположим, что $|Q : Q_1| \neq p$. Тогда, как легко видеть, Q/Q_1 будет характеристической подгруппой фактор-группы QD/Q_1 , что невозможно. Следовательно, $|Q : Q_1| = p$. Тогда $|D| = p$ и $M \supset L$. Поскольку силовская p -подгруппа группы Q инвариантна в ней, то Q является p -группой, т. е. $|Q| = p$.

Если любой композиционный ряд группы M , проходящий через Q , проходит и через L , то в силу произвольности выбора Q $M \in \Delta(0,1)$ или $M \in \Delta(1,1)$. В противном случае можно найти содержащую Q инвариантную подгруппу R группы M порядка p^2r ; $R \supseteq L$, $Q \triangleleft R$ и R/Q — абелева. Поскольку Q не может быть коммутантом группы R , то R — абелева. Поэтому R является подгруппой централизатора $C(L)$ группы L в G . Однако $C(L) = L$, как это показывает теорема 2. Пришли к противоречию.

Теорема доказана.

Литература

1. Gaschütz W. J. reine und angew. Math., 198, № 1—2, 87, 1957.
2. Huppert B. Math. Ann., 164, 133, 1966.

Витебский государственный педагогический институт Поступило в редакцию 26.IX 1968
им. С. М. Кирова

В. И. ПЛАТОНОВА

К ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ
 СОСТАВНОГО МНОГООБРАЗИЯ M_{32}
 В АФФИННОМ ТРЕХМЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Многообразие M_{32} состоит из элементов (A, α) , где α — плоскость и A — точка плоскости α . Точку A называют центром плоскости α . Центры A элементов (A, α) заполняют все аффинное трехмерное пространство, что соответствует индексу 3 символа M_{32} , а двумерной плоскости α соответствует индекс 2 этого символа.

§ 1. ВЫБОР КАНОНИЧЕСКОГО РЕПЕРА

Уравнения дифференциальных перемещений репера $(A\bar{e}_i)$ в аффинном трехмерном пространстве

$$d\bar{A} = \omega^i \bar{e}_i, \quad d\bar{e}_i = \omega_i^k \bar{e}_k, \quad i, j, k = 1, 2, 3. \quad (1.1)$$

Структурные уравнения:

$$D\omega^i = [\omega^k \omega_k^i], \quad D\omega_i^j = [\omega_i^k \omega_k^j]. \quad (1.2)$$

Если A — начало репера в центре элемента (A, α) , а векторы \bar{e}_2, \bar{e}_3 в плоскости α этого элемента, то уравнения (1.1), сохраняющие такую принадлежность:

$$\delta\bar{A} = 0, \quad \delta\bar{e}_1 = \pi_1^k \bar{e}_k, \quad \delta\bar{e}_2 = \pi_2^2 \bar{e}_2 + \pi_2^3 \bar{e}_3, \quad \delta\bar{e}_3 = \pi_3^2 \bar{e}_2 + \pi_3^3 \bar{e}_3.$$

Следовательно, формы $\omega^i, \omega_2^1, \omega_3^1$ главные.

Так как центры элементов (A, α) заполняют все пространство, то перемещения точки A должны быть свободными, т. е. формы $\omega^1, \omega^2, \omega^3$ линейно независимыми.

Имеем

$$\omega_2^1 = a_{2i}^1 \omega^i, \quad \omega_3^1 = b_{3i}^1 \omega^i. \quad (1.3)$$

Дифференцируя внешне уравнения (1.3) и применяя лемму Картана, получим:

$$da_{2i}^1 - a_{2k}^1 \omega_i^k - a_{2i}^2 (\omega_2^2 - \omega_1^1) - b_{3i}^1 \omega_2^3 = a_{2ij}^1 \omega^j, \quad (1.4)$$

$$db_{3i}^1 - b_{3k}^1 \omega_i^k - b_{3i}^1 (\omega_3^3 - \omega_1^1) - a_{2i}^1 \omega_3^2 = b_{3ij}^1 \omega^j,$$

причем

$$a_{2ij}^1 = a_{2ji}^1; \quad b_{3ij}^1 = b_{3ji}^1. \quad (1.5)$$

Положим

$$a_{21}^1 = 0, \quad b_{31}^1 = 0, \quad a_{22}^1 = 0, \quad b_{33}^1 = 0, \quad a_{23}^1 \neq 0, \quad b_{32}^1 \neq 0, \quad a_{23}^1 + b_{32}^1 \neq 0. \quad (1.6)$$

При этих условиях из уравнений (1.3), (1.4) следует

$$\begin{aligned} \omega_2^1 &= a_{23}^1 \omega^3, \quad \omega_3^1 = b_{32}^1 \omega^2, \quad \omega_1^3 = -\frac{a_{21}^1}{a_{23}^1} \omega^i, \\ \omega_2^3 &= -\frac{a_{22}^1}{a_{23}^1 + b_{32}^1} \omega^i, \quad \omega_1^2 = -\frac{b_{31}^1}{b_{32}^1} \omega^i, \quad \omega_3^2 = -\frac{b_{33}^1}{a_{23}^1 + b_{32}^1} \omega^i. \end{aligned} \quad (1.7)$$

Свободными остались три вторичных параметра, соответствующие формам $\pi_1^1, \pi_2^2, \pi_3^3$.

Обозначим

$$\omega_1^3 = a_{1i}^3 \omega^i, \quad \omega_2^3 = a_{2i}^3 \omega^i, \quad \omega_1^2 = a_{1i}^2 \omega^i, \quad \omega_3^2 = a_{3i}^2 \omega^i. \quad (1.8)$$

При этом из соотношений (1.7) и (1.5) имеем

$$a_{23}^1 a_{12}^3 = a_{21}^3 (a_{23}^1 + b_{32}^1), \quad b_{32}^1 a_{13}^2 = a_{31}^2 (a_{23}^1 + b_{32}^1). \quad (1.9)$$

Дифференцируя внешне уравнения (1.8), получим

$$\begin{aligned} [da_{1i}^3 - a_{1k}^3 \omega_i^k - a_{1i}^3 (\omega_1^1 - \omega_3^3) - a_{2i}^3 \omega_1^2, \omega^i] &= 0, \\ [da_{2i}^3 - a_{2k}^3 \omega_i^k - a_{2i}^3 (\omega_2^2 - \omega_3^3) - a_{1i}^3 \omega_2^1, \omega^i] &= 0, \\ [da_{1i}^2 - a_{1k}^2 \omega_i^k - a_{1i}^2 (\omega_1^1 - \omega_2^2) - a_{3i}^2 \omega_1^3, \omega^i] &= 0, \\ [da_{3i}^2 - a_{3k}^2 \omega_i^k - a_{3i}^2 (\omega_3^3 - \omega_2^2) - a_{1i}^2 \omega_3^1, \omega^i] &= 0. \end{aligned} \quad (1.10)$$

Если положить

$$a_{23}^2 = a_{12}^2 = a_{32}^2 = -1, \quad (1.11)$$

то формы $\omega_1^1, \omega_2^2, \omega_3^3$ станут главными и, следовательно,

$$\omega_1^1 = a_{1i}^1 \omega^i, \quad \omega_2^2 = a_{2i}^2 \omega^i, \quad \omega_3^3 = a_{3i}^3 \omega^i. \quad (1.12)$$

Канонический репер выбран. Уравнения дифференциальных перемещений канонического репера:

	\bar{e}_1	\bar{e}_2	\bar{e}_3
$d\bar{A}$	ω^1	ω^2	ω^3
$d\bar{e}_1$	$a_{1i}^1 \omega^i$	$a_{11}^2 \omega_1 - \omega^2 + a_{13}^2 \omega^3$	$a_{1i}^3 \omega^i$
$d\bar{e}_2$	$a_{23}^1 \omega^3$	$a_{2i}^2 \omega^i$	$\frac{a_{12}^3 a_{23}^1}{a_{23}^1 + b_{32}^1} \omega^1 + a_{22}^3 \omega^2 - \omega^3$
$d\bar{e}_3$	$b_{32}^1 \omega^2$	$\frac{a_{13}^2 b_{32}^1}{a_{23}^1 + b_{32}^1} \omega^1 - \omega^2 + a_{33}^2 \omega^3$	$a_{3i}^3 \omega^i$

(1.13)

Уравнения (1.13) содержат 18 дифференциальных инвариантов: $a_{11}^1, a_{12}^1, a_{13}^1, a_{11}^2, a_{13}^2, a_{11}^3, a_{13}^3, a_{21}^1, a_{22}^1, a_{23}^1, a_{22}^2, a_{23}^2, a_{22}^3, b_{32}^1, a_{33}^1, a_{31}^2, a_{32}^2, a_{33}^2$, подчиняющихся уравнениям (1.2).

§ 2. ОТНОШЕНИЕ КАНОНИЧЕСКОГО РЕПЕРА К МНОГООБРАЗИЮ M_{32}

Ось Ax^1 определена так, что при смещении точки A в направлении Ax^1 семейство плоскостей α элемента (A, α) имеет несобственную характеристику на плоскости $(A\bar{e}_2\bar{e}_3)$.

Оси Ax^2 и Ax^3 имеют асимптотические направления относительно элемента (A, α) . При смещении точки A по линии ω^2 плоскость $(A\bar{e}_1\bar{e}_3)$ образует однопараметрическое семейство плоскостей, характеристика которого на плоскости Ax^1x^3 имеет в локальных координатах уравнения

$$x^1 + x^3 - 1 = 0, \quad x^2 = 0. \quad (2.1)$$

Прямая (2.1) пересекает оси Ax^1 и Ax^3 соответственно в точках $E_1(1, 0, 0)$ и $E_3(0, 0, 1)$ — единичных точках этих осей.

Уравнения характеристики семейства плоскостей $(A\bar{e}_1\bar{e}_2)$ при смещении точки A по линии ω^3 , на плоскости Ax^1x^2 относительно репера $(A\bar{e}_i)$:

$$a_{13}^3 x^1 - x^2 + 1 = 0, \quad x^3 = 0. \quad (2.2)$$

Прямая (2.2) пересекает ось Ax^2 в точке $E_2(0, 1, 0)$ — единичной точке оси Ax^2 .

Условиями $a_{23}^1 \neq 0$, $b_{32}^1 \neq 0$, $a_{23}^1 + b_{32}^1 \neq 0$ исключены из рассмотрения случаи неопределенности осей Ax^2 , Ax^3 .

§ 3. ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ ИСТОЛКОВАНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ИНВARIANTОВ

При смещении канонического репера $(A\bar{e}_i)$ по линиям ω^i единичные точки E_k и симметричные им точки \mathcal{E}_k относительно точки A описывают линии $(E_k)_i$ и $(\mathcal{E}_k)_i$.

Касательные к линиям $(E_1)_1$ и $(\mathcal{E}_1)_1$ в точках E_1 и \mathcal{E}_1 соответственно лежат в одной плоскости и пересекаются в точке $B(-a_{11}^1, -a_{11}^2, -a_{11}^3)$.

Касательные к линиям $(E_2)_1$ и $(\mathcal{E}_2)_1$ в точках E_2 и \mathcal{E}_2 пересекают плоскость $x^1 = 1$ соответственно в точках

$$C\left(1, 1 + a_{21}^2, \frac{a_{12}^3 a_{23}^1}{a_{23}^1 + b_{32}^1}\right) \text{ и } D\left(1, \frac{a_{13}^2 b_{32}^1}{a_{23}^1 + b_{32}^1}, 1 + a_{31}^3\right).$$

Касательные к линиям $(E_2)_3$ и $(\mathcal{E}_2)_2$ в точках E_2 и \mathcal{E}_2 лежат в плоскости $x^1 = 0$ и пересекаются в точке

$$F(0, -a_{22}^2, -a_{22}^3).$$

Касательные к линиям $(\mathcal{E}_1)_2$ и $(\mathcal{E}_3)_2$ пересекают плоскость $x^2 + 2 = 0$ соответственно в точках

$$K(a_{12}^1 - 1; -2; a_{12}^3) \text{ и } M(b_{32}^1; -2; a_{32}^3 - 1).$$

Прямая, проведенная через точку $N(1, 0, 2)$, параллельно касательной к линии $(\mathcal{E}_1)_3$ в точке \mathcal{E}_1 и касательная к линии $(E_1)_3$ в точке E_1 лежат в одной плоскости и пересекаются в точке

$$P(a_{13}^1 + 1, a_{13}^2, a_{13}^3 + 1).$$

Касательная к линии $(\mathcal{E}_2)_3$ в точке \mathcal{E}_2 пересекает плоскость $x^3 + 2 = 0$ в точке

$$Q(a_{23}^1, a_{23}^2 - 1, -2).$$

Касательные, проведенные к линиям $(E_3)_3$ и $(\mathcal{E}_3)_3$, пересекаются в точке

$$R(0, -a_{33}^2, -a_{33}^3).$$

С помощью точек $B, C, D, F, K, M, P, Q, R$ дано геометрическое истолкование всех инвариантов.

§ 4. РАЗВЕРТЫВАЮЩИЕСЯ ПОВЕРХНОСТИ МНОГООБРАЗИЯ ОСИ Ax^1

Найдем направление, при смещении по которому центра A элемента (A, α) оси Ax^1 канонического репера образуют развертывающуюся поверхность.

Пусть

$$\bar{C} = \bar{A} + \rho \bar{e}_1 \quad (4.1)$$

радиус-вектор точки ребра возврата торса, образованного осями Ax^1 при смещении точки A в направлении $d\bar{A} = \omega^i \bar{e}_i$. Дифференцируя равенство (4.1) при помощи уравнений (1.13) и используя условие коллинеарности $d\bar{C} = \lambda \bar{e}_1$, получим

$$\begin{aligned} \omega^2 + \rho(a_{11}^2 \omega^1 - \omega^2 + a_{13}^2 \omega^3) &= 0, \\ \omega^3 + \rho(a_{11}^3 \omega^1 + a_{12}^3 \omega^2 + a_{13}^3 \omega^3) &= 0. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Условие совместности уравнений (4.2) относительно ρ

$$a_{12}^3 \omega^2 - a_{13}^3 \omega^3 + a_{11}^3 \omega^1 \omega^2 - a_{11}^2 \omega^1 \omega^3 + (a_{13}^3 + 1) \omega^2 \omega^3 = 0. \quad (4.3)$$

Этому уравнению соответствует уравнение конуса второго порядка

$$a_{12}^3 x^2 - a_{13}^3 x^3 + a_{11}^3 x^1 x^2 - a_{11}^2 x^1 x^3 + (a_{13}^3 + 1) x^2 x^3 = 0. \quad (4.4)$$

Следовательно, при смещении центра A элемента (A, α) по линии l с касательной в вершине A_0 на образующей конуса (4.4) оси Ax^1 канонического репера образуют развертывающуюся поверхность.

Уравнение (4.4) есть уравнение конуса Малюса для направления \bar{e}_1 [2]. Обозначим его символом M .

§ 5. КЛАССИФИКАЦИЯ МНОГООБРАЗИЙ M_{32}

Эти многообразия можно классифицировать в соответствии с исследованием уравнения конуса M . Конус M определен пятью дифференциальными инвариантами из восемнадцати, входящими в уравнения (1.13), поэтому предложенная классификация сравнительно грубая. Однако с ее помощью выявляются некоторые инвариантные свойства этих многообразий. Выделим в отдельный класс M_{32}^s многообразия, для которых

$$a_{11}^2 = a_{13}^2 = a_{11}^3 = a_{12}^3 = 0, \quad a_{13}^3 = -1. \quad (5.1)$$

Многообразия этого класса характеризуются тем, что оси Ax^1 канонического репера образуют связку с центром в единичной точке оси Ax^1 при смещении репера по любому направлению, отличному от направления оси Ax^1 . Разобьем оставшиеся многообразия на четыре класса M_{32}^k и $M_{32}^{p_i}$ ($i = 0, 1, 2$).

M_{32}^k — класс многообразий с невырожденным конусом M . Признак этих многообразий:

$$\delta = 0,25 [(a_{11}^3)^2 a_{13}^2 - a_{12}^3 (a_{11}^2)^2 - a_{11}^2 a_{11}^3 (a_{13}^3 + 1)] \neq 0. \quad (5.2)$$

Многообразия $M_{32}^{p_i}$ имеют конус M вырожденным. Общий признак этих многообразий:

$$\delta = 0. \quad (5.3)$$

$M_{32}^{p_2}$ — класс многообразий с конусом M , вырожденным в прямую; соответствующие условия:

$$a_{11}^2 = 0, a_{11}^3 = 0, (a_{13}^3 + 1)^2 + 4a_{12}^3 a_{13}^2 < 0, a_{12}^3 \neq 0. \quad (5.4)$$

$M_{32}^{p_1}$ — класс многообразий, у которых совокупность образующих конуса M составляет сдвоенный пучок прямых; соответствующие условия:

$$a_{12}^3 \neq 0, a_{11}^3 = 0, a_{11}^2 = 0, (a_{13}^3 + 1)^2 + 4a_{12}^3 a_{13}^2 = 0, \quad (5.5)$$

$$a_{12}^3 = 0, a_{13}^2 \neq 0, a_{11}^2 = 0, a_{11}^3 = 0, a_{13}^3 + 1 = 0. \quad (5.6)$$

$M_{32}^{p_2}$ — класс многообразий, у которых совокупность образующих конуса M составляет пару пучков прямых; условия этого:

$$a_{12}^3 \neq 0, a_{11}^3 \neq 0; \quad (5.7)$$

$$a_{12}^3 \neq 0, a_{11}^3 = 0, (a_{13}^3 + 1)^2 + 4a_{12}^3 a_{13}^2 > 0; \quad (5.8)$$

$$a_{12}^3 = 0, a_{13}^2 \neq 0, a_{11}^2 \neq 0; \quad (5.9)$$

$$a_{12}^3 = 0, a_{13}^2 \neq 0, a_{11}^2 = 0, a_{13}^3 + 1 \neq 0; \quad (5.10)$$

$$a_{12}^3 = 0, a_{13}^2 = 0. \quad (5.11)$$

При условиях (5.11) по крайней мере один из инвариантов a_{11}^3 , a_{11}^2 , $a_{13}^3 + 1$ должен быть отличен от нуля.

§ 6. НЕКОТОРЫЕ ЧАСТНЫЕ КЛАССЫ МНОГООБРАЗИЙ

I. Многообразия, дифференциальные инварианты которых удовлетворяют условию

$$a_{11}^2 da_{11}^3 - a_{11}^3 da_{11}^2 + \left[a_{11}^2 \left(a_{11}^2 \frac{a_{12}^3 a_{23}^1}{a_{23}^1 + b_{32}^1} + a_{11}^3 a_{31}^3 \right) - \right. \\ \left. - a_{11}^3 \left(a_{11}^2 a_{21}^2 + a_{11}^3 \frac{a_{13}^2 b_{52}^1}{a_{23}^1 + b_{32}^1} \right) \right] \omega^1 = 0, \quad (6.1)$$

выделяются тем, что линия ω^1 для них плоская.

II. Если выполняется условие

$$a_{22}^3 = 0, \quad (6.2)$$

то выделяются многообразия с плоскими линиями ω^2 .

III. Уравнение

$$a_{33}^2 = 0 \quad (6.3)$$

соответствует многообразиям с плоской линией ω^3 .

IV. Многообразия, для которых

$$a_{11}^2 = 0, a_{11}^3 \neq 0, \quad (6.4)$$

характеризуются тем, что соприкасающаяся плоскость линии ω^1 в точке A совпадает с плоскостью Ax^1x^3 .

V. Если выполняются условия

$$a_{11}^3 = 0, a_{11}^2 \neq 0, \quad (6.5)$$

то соприкасающаяся плоскость линии ω^1 в точке A многообразий M_{32} совпадает с плоскостью Ax^1x^2 .

VI. Для многообразий, определяемых уравнениями

$$a_{11}^2 = 0, \quad a_{11}^3 = 0, \quad (6.6)$$

линия ω^1 — прямая.

VII. Многообразия, определяемые уравнением

$$a_{12}^3 = 0, \quad (6.7)$$

характеризуются тем, что оси Ax^1 репера при смещении точки A по линии ω^2 образуют развертывающуюся поверхность с ребром возврата $(E_1)_2$. Оси Ax^2 при смещении точки A по линии ω^1 описывают цилиндрическую поверхность.

VIII. Уравнениями

$$a_{12}^3 = 0, \quad a_{12}^1 = 0 \quad (6.8)$$

выделяются многообразия, для которых оси Ax^1 вдоль линии ω^2 описывают конус с вершиной в точке E_1 .

IX. Многообразия, для которых

$$a_{13}^2 = 0, \quad (6.9)$$

обладают тем свойством, что оси Ax^1 при смещении точки A по линии ω^3 образуют торс. Ребро возврата торса описывает точка $\overline{M} = \overline{A} - \frac{1}{a_{13}^3} \overline{e}_1$. Второй особенностью этих многообразий является то, что оси Ax^3 вдоль линии ω^1 образуют цилиндрическую поверхность.

X. Условиями

$$a_{13}^2 = 0, \quad da_{13}^3 = a_{13}^3 a_{13}^1 \omega^3 \quad (6.10)$$

выделяются многообразия, для которых оси Ax^1 при смещении A по линии ω^3 описывают коническую поверхность с центром в точке $M \left(-\frac{1}{a_{13}^3}, 0, 0 \right)$. В частности, если $a_{13}^3 = 0$, конус вырождается в цилиндр.

Литература

1. Фиников С. П. Метод внешних форм Картана в дифференциальной геометрии. М.—Л., ГИТТЛ, 1948.
2. Щербаков Р. Н., Рахула М. О. Геометрический сборник, вып. 1. Изд. Томского ун-та, 1962.

Минский педагогический институт
им. А. М. Горького

Поступило в редакцию 5.VII 1968

О. С. ИВАНИЦКАЯ

СОПОСТАВЛЕНИЕ ДВУХ СПОСОБОВ РАЗГРАНИЧЕНИЯ СИСТЕМ ОТСЧЕТА И СИСТЕМ КООРДИНАТ В ЭЙНШТЕЙНОВОЙ ТЕОРИИ ГРАВИТАЦИИ

1. В эйнштейновском изложении теории гравитации (сокращенно ОТО) часто подразумевается, что преобразования допустимых координат совпадают с преобразованиями систем отсчета, подобно тому как в специальной теории относительности (СТО) лоренцевы преобразования являются преобразованиями и псевдодекартовых координат и инерциальных систем отсчета. Это встретило возражения, особенно в [1]. Основной аргумент против отождествления в ОТО понятий систем отсчета и систем координат состоит в следующем. Измерению подвергаются не 4-мерные величины в целом, но их пространственная и временная части в отдельности при условии, что расщепление 4-пространства на 3-пространство и время производится по законам СТО (в соответствующем приближении). В ОТО же расщепление осуществляется произвольными эквикоординатными гиперповерхностями. Поскольку система отсчета связана с измерениями, расщепление 4-пространства относительно нее должно производиться по законам СТО. Таким образом, разграничение в ОТО систем отсчета и систем координат влечет за собой разграничение пространственных и временных частей величин на задаваемые относительно системы отсчета и относительно системы координат.

Представление о системе отсчета связывается с полем (совокупностью) пробных частиц (наблюдателей) [2]. Предложены два разных способа аналитического задания этого поля. Первый, общековариантный способ предложен и получил значительное развитие в [3—15]. Согласно этим работам, система отсчета задается полем мирового метрического вектора

$$\gamma^\mu \stackrel{\text{def}}{=} \frac{dx^\mu}{ds} = \frac{g_{\mu 4}}{\sqrt{g_{44}}} = \text{diag}(\gamma^\alpha = 0, \gamma^4 = 1/\sqrt{g_{44}}), \quad (1)$$

а преобразования систем отсчета совпадают с ограниченным множеством координатных преобразований. Оно остается после вычитания из любых допустимых преобразований координат подмножества вида

$$x^{\alpha'} = x^{\alpha'}(x^\beta), \quad P^{\alpha'}_4 = \partial x^{\alpha'}/\partial x^4 = 0, \quad (2)$$

$$x^{4'} = x^{4'}(x^\beta, x^4), \quad (3)$$

которое оставляет, по определению, систему отсчета неизменной или, по терминологии, принятой в [3], связывает между собой идентичные системы отсчета.

Второй способ задания вышеуказанного поля пробных частиц, менее разработанный, предложен в тетрадной формулировке ОТО, на-

пример в [16—18], где оно рассматривается как поле неголономного ортонормированного репера (тетрад). Преобразованиями систем отсчета принимаются локальные лоренцевы преобразования.

Первый из указанных способов в большей мере развивался при рассмотрении уравнений движения, второй — эйнштейновых уравнений гравитации (в тетрадной форме). Сопоставим эти способы и найдем условие их совпадения.

2. Идентичные системы. Из уравнений *)

$$\begin{aligned} dx^\mu &= h^\mu_a dx^a + h^\mu_{(4)} dx^{(4)}, \\ ds^2 &= g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = \eta_{kn} dx^k dx^n, \\ \eta_{kn} &= \text{diag}(1, 1, 1, -1), \end{aligned} \quad (4)$$

где h^μ_k — тетрадные компоненты (коротко тетрады), находим**)

$$ds \left| \frac{dx^a}{dx^{(4)}} = 0 \right. = dx^{(4)}, \quad h^\mu_{(4)} \left| \frac{dx^a}{dx^{(4)}} = 0 \right. = \frac{dx^\mu}{dx^{(4)}} = \frac{dx^\mu}{ds} = \gamma^\mu. \quad (5)$$

Если, в частности,

$$h^\alpha_{(4)} = 0, \quad (6)$$

то в силу ортогональности тетрад также

$$h_4^a = 0. \quad (7)$$

Тогда требование $\gamma^\alpha = 0$ — упрощенная запись трех калибровочных условий, выраженных через прямые тетрады с помощью уравнений (6), через обратные — с помощью (7). Упрощение записи, состоящее в отбрасывании произвольного, но фиксированного индекса (4), мешает явно связать преобразование системы отсчета с локальным лоренцевым преобразованием, которое может воздействовать на индекс (4). Восстановив этот индекс, имеем

$$\begin{aligned} h^{\alpha'}_{(4)'} &= P^{\alpha'}_{\mu} L_{(4)'}{}^{\mu k} h^\mu_k = \\ &= P^{\alpha'}_{\beta} L_{(4)'}{}^{\beta c} h^\beta_c + P^{\alpha'}_4 L_{(4)'}{}^{4k} h^4_k. \end{aligned} \quad (8)$$

Если координатное преобразование относится к подмножеству (2) и (3), то

$$h^{\alpha'}_{(4)'} = P^{\alpha'}_{\beta} L_{(4)'}{}^{\beta c} h^\beta_c + P^{\alpha'}_{\beta} L_{(4)'}{}^{(4)k} h^{\beta k}. \quad (9)$$

Задавая две системы отсчета условиями

$$h^{\alpha'}_{(4)'} = 0, \quad h^\alpha_{(4)} = 0 \quad (10)$$

и полагая $P^{\alpha'}_4 = 0$, $P^{\alpha'}_{\beta} \neq 0$, $h^\beta_c \neq 0$, из (9) находим

$$L_{(4)'}{}^c = 0, \quad L_{(4)'}{}^{(4)k} = \delta_{(4)'}{}^{(4)k}. \quad (11)$$

Если $L_{(4)'}{}^c \neq 0$, то, согласно (8), уравнения

$$h^{\alpha'}_{(4)'} = P^{\alpha'}_{\beta} L_{(4)'}{}^{\beta c} h^\beta_c + P^{\alpha'}_4 L_{(4)'}{}^{4k} h^4_k = 0$$

*) Греческие индексы относятся к криволинейной глобальной системе, латинские — к локальной псевдодекартовой. Индексы начал алфавитов соответственно до α и k пробегают значения 1, 2, 3, начиная с α и $k = 1, 2, 3, 4$. Численные значения латинских индексов помещены в скобки.

**) Звездочка над равенством показывает, что оно относится к произвольной, но фиксированной локальной псевдодекартовой системе координат.

удовлетворяются лишь тогда, когда $P^{\alpha'}_4 \neq 0$.

Таким образом, локальное лоренцево преобразование, производящее гиперболическое вращение неголономного репера, изменяет систему отсчета. Локальные лоренцевы преобразования кругового вращения оставляют систему отсчета неизменной, по терминологии, принятой в [3], переводят ее в идентичную.

3. Локальный аналог хронометрических инвариантов. При переходе от одной системы отсчета к ей идентичной чисто пространственная часть любого контрвариантного по всем индексам мирового тензора остается инвариантной относительно (3) и преобразуется относительно (2) с помощью трехмерного преобразования с коэффициентами $P^{\alpha'}_{\beta} = \partial x^{\alpha'} / \partial x^{\beta}$, поскольку в силу (2)

$$dx^{\alpha'} = P^{\alpha'}_{\mu} dx^{\mu} = P^{\alpha'}_{\beta} dx^{\beta}. \quad (12)$$

Величины, полностью инвариантные относительно (2) и (3), т. е. одинаковые во всех идентичных системах отсчета, названы в [4] хронометрическими инвариантами. С изменением системы отсчета они преобразуются.

Рассмотрим пространственную и временную части локальных тензоров в отдельности. Например,

$$v^{\mu} = h^{\mu}_k v^k = \overset{*}{v}^{\mu} + h^{\mu}_{(4)} v^{(4)}, \quad \overset{*}{v}^{\mu} \stackrel{\text{def}}{=} h^{\mu}_a v^a, \quad (13)$$

$$g_{\mu\nu} = h_{\mu}^k h_{\nu}^n \eta_{kn} = \overset{*}{g}_{\mu\nu} + h_{\mu}^{(4)} h_{\nu}^{(4)} \eta_{(4)(4)}, \quad (14)$$

$$\overset{*}{g}_{\mu\nu} \stackrel{\text{def}}{=} h_{\mu}^a h_{\nu}^b \eta_{ab}.$$

Следовательно,

$$\overset{*}{v}^{\mu} \stackrel{\text{def}}{=} h^{\mu}_a v^a = \overset{*}{v}^{\mu} + h^{\mu}_{(4)} v^{(4)} - h^{\mu}_k v^k L_{(4)}{}^{kL}{}_{(4)}{}^n, \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \overset{*}{g}_{\mu\nu} &= h_{\mu}^a h_{\nu}^b \eta_{ab} = \overset{*}{g}_{\mu\nu} + h_{\mu}^{(4)} h_{\nu}^{(4)} \eta_{(4)(4)} - \\ &- h_{\mu}^k h_{\nu}^n L_{(4)}{}^{kL}{}_{(4)}{}^n \eta_{(4)(4)}. \end{aligned} \quad (16)$$

Отсюда видно, что мировые компоненты пространственных частей локальных тензоров являются аналогами хронометрических инвариантов. Эти компоненты инвариантны относительно локальных преобразований кругового вращения неголономного репера. Мировые тензоры, не отмеченные звездочкой, задаются относительно координатной системы, отмеченные звездочкой сверху — относительно системы отсчета.

4. Условия совпадения. Нетрудно убедиться, что

$$dt \stackrel{\text{def}}{=} g_{\mu 4} dx^{\mu} / \sqrt{g_{44}} \Big|_{h_4^a=0} = h_{\mu}^{(4)} dx^{\mu} = dx^{(4)}, \quad (17)$$

$$\gamma_{\alpha\beta} \stackrel{*}{=} g_{\alpha\beta} - g_{\alpha 4} g_{\beta 4} / g_{44} \Big|_{h_4^a=0} = \overset{*}{g}_{\alpha\beta},$$

$$\overset{*}{g}_{\alpha 4} \Big|_{h_4^b=0} = 0, \quad \overset{*}{g}_{44} \Big|_{h_4^b=0} = 0, \quad (18)$$

$$\overset{*}{v}_{\mu} = \overset{*}{g}_{\mu\nu} \overset{*}{v}^{\nu} = h_{\mu}^a v_a = h_{\mu}^k h_{\nu}^l v_{\nu} - h_{\mu}^{(4)} h_{(4)}^{\nu} v_{\nu} \stackrel{*}{=}$$

$$= \overset{*}{v}_{\mu} + \gamma_{\mu\nu} v_{\nu} \gamma^{\nu}, \quad \gamma^{\mu} \gamma_{\mu} = \eta_{(4)(4)} = h^{\mu}_{(4)} h_{\mu(4)} = -1, \quad (19)$$

$$\overset{*}{v}_4 \Big|_{h_4^a=0} = 0,$$

соответственно dt , $\gamma_{\alpha\beta}$, $v_\mu + \gamma_\mu v_\nu \gamma^\nu$ — хронометрически инвариантные время, метрический тензор, вектор. Следовательно, уравнения (7) являются условиями совпадения хронометрических инвариантов с мировыми компонентами соответствующих частей локальных величин. Аналогично

$$\Delta x^4 = -g_{\alpha 4} dx^\alpha / g_{44} \Big|_{h_4^a=0} = \Delta x^4 \Big|_{dx^{(4)}=0} = -\frac{h_\alpha^{(4)} dx^\alpha}{h_4^{(4)}}, \quad (20)$$

где Δx^4 , $\Delta x^4 \Big|_{dx^{(4)}=0}$ — промежутки координатного времени двух физически (локально) одновременных событий, т. е. тетрадное условие синхронизации выполняется, когда

$$h_\alpha^{(4)} = 0, \quad (21)$$

метрическое — если кроме (21) также удовлетворяется (7). Тогда из требования ортонормируемости тетрад и из (21) вытекает калибровка тетрад $h_a^4 = 0$, названная Швингером «временной».

Из (17) видно, что присоединение к (21) соотношения $h_4^{(4)} = 1$ дает четыре координатных условия синхронности. Тогда координатное время, совпадая с физическим, собственным, становится неголономным.

5. Итак, преобразования систем отсчета как поля метрического вектора с помощью координатных преобразований, не сводимых к (2) и (3), неявно влечет за собой локальное лоренцево преобразование гиперболического вращения. Преобразование системы отсчета в ее реперном определении явно, по определению, является локальным лоренцевым.

В общем случае задания систем отсчета полем неголономного репера общее координатное и локальное лоренцево преобразование принимаются, как, например, в [16, 17], независимыми. Тогда коэффициенты $L_{(4)'}^c$ и $P_{(4)'}^{\alpha'}$ не связаны друг с другом и система отсчета задается любыми допустимыми калибровочными условиями, не обязательно включающими уравнения $h_a^b = 0$.

Вопрос о генерировании координатного преобразования из данного локального лоренцева преобразования рассматривается в [19].

Литература

1. Фок В. А. Изв. АН СССР, сер. физ., **30**, 1229, 1966.
2. Зельдович Я. Б., Новиков И. Д. Релятивистская астрофизика. Изд. «Наука», 1967.
3. Møller C. The theory of relativity. Oxford, 1962.
4. Зельманов А. Л. ДАН СССР, **107**, 815, 1956.
5. Зельманов А. Л. Тр. 6-го Совещания по космологии. М., 1959.
6. Зельманов А. Л. ДАН СССР, **124**, 1030, 1959.
7. Cattaneo C. Nuovo Cimento, **10**, 318, 1958; **11**, 733, 1959; **13**, 237, 1959.
8. Cattaneo C. C. r. Acad. sci., **248**, 197, 1959.
9. Cattaneo C. Rendiconti di Mat., **20**, 18, 1961.
10. Pirani F. Les Théories Relativistes de la Gravitation. CNRS, Paris, 1962.
11. Синг Дж. Общая теория относительности. М., 1963.
12. Schmutzger E. Z. Naturforschg., **19a**, 665, 1964.
13. Salié N. Wiss. Zschr. d. Univ. Jena, Math.-nat., **15**, 45, 63, 1966.
14. Новиков И. Д. Астр. журн., **38**, 564, 1961.
15. Захаров В. Н., Мицкевич Н. В. Тезисы докл. 5-й междунар. конф. по гравитации и теор. отн. Тбилиси, 1968, стр. 113.
16. Treder H. J. Сб. «Entstehung, Entwicklung und Perspektiven der Einsteinschen Gravitations-theorie», Akad. Verl. Berlin, 1966, стр. 314.
17. Родичев В. И. Эйнштейновский сборник, № 1, 1968.
18. Иваницкая О. С. Вестн. АН БССР, сер. физ.-мат. наук, № 5, 1968.
19. Иваницкая О. С. Обобщенные преобразования Лоренца. Изд. «Наука и техника», Минск, 1969.

А. Е. ЛЕВАШЕВ, В. Н. ТУНЯК

К СКАЛЯРНОЙ МОДЕЛИ ОБЩЕЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

1. Принцип физического моделирования ОТО [1] представляет один из возможных путей решения трудной проблемы энергии-импульса гравитационного поля в этой теории. Так как в теорию гравитации Ньютона переходят по принципу соответствия релятивистские теории различных полей (скалярного, векторного и тензорного поля 2-го ранга), то физическое моделирование ОТО может быть связано с теорией этих полей в римановом пространстве — времени [2, 3].

Рассмотрим моделирование ОТО с помощью скалярного гравитационного поля. Примем функцию действия материи S в некотором римановом пространстве V_4 с сигнатурой $(+, -, -, -)$ в виде *)

$$S = - \sum \int mc ds - \frac{1}{c} \int \rho \varphi \sqrt{-g} d^4x + \frac{1}{8\pi\gamma c} \int g^{\alpha\beta} \partial_\alpha \varphi \partial_\beta \varphi \sqrt{-g} d^4x, \quad (1)$$

где ρ — плотность гравитирующих масс, φ — скалярный гравитационный потенциал, $g_{\mu\nu}$ — фундаментальный тензор пространства V_4 , очевидно, уже не являющийся гравитационным потенциалом, γ — постоянная Ньютона.

Варьируя S , получаем уравнения движения пробной частицы [4]

$$\frac{\delta}{\delta s} \left[m \left(1 + \frac{\varphi}{c^2} \right) \frac{dx^\alpha}{ds} \right] = \frac{m}{c^2} g^{\alpha\sigma} \partial_\sigma \varphi \quad (2)$$

и уравнение поля [5]

$$\nabla_\alpha \nabla^\alpha \varphi = -4\pi\gamma\rho. \quad (3)$$

В предельном случае слабого гравитационного поля ($\varphi \ll c^2$, искривление пространства — времени незначительно) и малых скоростей движения ($v \ll c$) уравнения (2), (3) переходят соответственно в уравнения движения Ньютона

$$\frac{dv^k}{dt} = \nabla^k \varphi$$

и уравнение Пуассона

$$\Delta \varphi = 4\pi\gamma\rho.$$

Гравитационная сила в уравнениях движения (2) — градиентный вектор, что делает возможным определение энергии-импульса гравитационного поля, ковариантное относительно двух основных групп преобразований — группы координатных преобразований и группы локаль-

*) Греческие индексы пробегает значения 0, 1, 2, 3, латинские индексы — значения 1, 2, 3.

ных преобразований тетрад. Тензор энергии-импульса гравитационного поля имеет в соответствии с (1) вид

$$T_{\mu\nu} = -\frac{1}{4\pi\gamma} \left(\partial_\mu\varphi\partial_\nu\varphi - \frac{1}{2} g_{\mu\nu}g^{\alpha\beta}\partial_\alpha\varphi\partial_\beta\varphi \right). \quad (4)$$

Система уравнений (2), (3) будет полностью определена, если будет задан фундаментальный тензор риманова пространства V_4 . Для этого воспользуемся принципом моделирования [1]: а) сигнатура моделирующего пространства V_4 и моделируемого \bar{V}_4 , т. е. пространства ОТО, одинаковы; б) координаты обоих пространств V_4 и \bar{V}_4 идентичны; в) уравнения движения (2) пробной частицы с собственной массой, отличной от нуля, в пространстве V_4 есть геодезическая в пространстве \bar{V}_4 . Тогда фундаментальный тензор $g_{\mu\nu}$ в пространстве V_4 связан с фундаментальным тензором $\bar{g}_{\mu\nu}$ пространства \bar{V}_4 соотношением

$$\bar{g}_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} \left(1 + \frac{\varphi}{c^2} \right)^2, \quad (5)$$

Уравнения Эйнштейна в пространстве ОТО \bar{V}_4

$$\bar{G}_{\mu\nu} = \kappa \bar{T}_{\mu\nu}, \quad (6)$$

согласно (5), можно представить в виде

$$G_{\mu\nu} - \kappa \bar{T}_{\mu\nu} - \nabla_\mu \nabla_\nu \psi + \frac{1}{2} \partial_\mu \psi \partial_\nu \psi + g_{\mu\nu} (\nabla_\alpha \nabla^\alpha \psi + \frac{1}{4} \partial_\alpha \psi \partial^\alpha \psi) = 0, \quad (7)$$

где

$$\psi = 2 \ln \left(1 + \frac{\varphi}{c^2} \right). \quad (8)$$

Тем самым устанавливается связь между $g_{\alpha\beta}$ и $T_{\mu\nu}$. Система уравнений, определяющая геометрию пространства — времени и гравитационное поле, состоит из уравнений (3) и (7). Связь между уравнениями движения и поля, характерная для ОТО, так же, как и в [5], проявляется в том, что уравнения движения (2) и уравнение поля (3) не независимы друг от друга, но связаны определяемым ими неевклидовым характером геометрии. Этим система уравнений (2) и (3) отличается от теории Нордстрема.

В рассмотренной скалярной модели ОТО мы получаем: 1) общековариантное обобщение теории гравитации Ньютона; 2) энергию-импульс гравитационного поля, выражаемую тензором (4); 3) совпадение изотропных геодезических моделирующего пространства V_4 и моделируемого пространства \bar{V}_4 (в отличие от векторной модели ОТО [1]); 4) упрощение анализа нелинейности гравитационного поля и его квантования [6].

2. Рассмотрим частные случаи применения уравнений (3) и (7) — слабое гравитационное поле и поле сферической симметрии.

В слабом гравитационном поле уравнения (7) можно, накладывая дополнительные условия

$$\partial_\alpha \left(h_\nu^\alpha - \frac{1}{2} \delta_\nu^\alpha h \right) = -\partial_\nu \psi, \quad (9)$$

представить в виде

$$\eta^{\sigma\tau} \partial_\sigma \partial_\tau \left(h_{\mu\nu} - \frac{h}{2} \eta_{\mu\nu} - \frac{2\varphi}{c^2} \eta_{\mu\nu} \right) = -\frac{16\pi\gamma}{c^4} T_{\mu\nu}, \quad (10)$$

где $\eta_{\sigma\tau} = \text{diag} (1, -1, -1, -1)$, $h_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu}$ — малые отклонения от метрики псевдоевклидова пространства, $h = h^\nu_\nu$. При движении гравити-

рующих масс с малыми скоростями существенна лишь одна компонента тензора энергии-импульса $\bar{T}_{00} = \rho c^2$, и уравнения (10) принимают с учетом (2) вид

$$\Delta h_{0k} = 0, \quad \Delta h_{ik} = \frac{16\pi\gamma}{c^2} \rho \delta_{ik}, \quad (11)$$

что приводит к

$$h_{00} = h_{0k} = 0, \quad h_{ik} = \frac{4\varphi}{c^2} \delta_{ik}. \quad (12)$$

Для квадрата интервала имеем

$$ds^2 = c^2 dt^2 - \left(1 - \frac{4\varphi}{c^2}\right) (dx^2 + dy^2 + dz^2). \quad (13)$$

Компонента g_{00} в данном приближении не зависит от гравитационного поля.

В статическом сферически-симметричном гравитационном поле в силу (3) и (7) имеем

$$\varphi = \varphi(r) = c^2 [(1 - \Phi)^{-1} - 1], \quad (14)$$

$$g_{\alpha\beta} = (1 - \Phi)^2 \begin{pmatrix} 1 - \frac{2\gamma m}{rc^2} & & & \\ & -\left(1 - \frac{2\gamma m}{rc^2}\right)^{-1} & & \\ & & -r^2 & \\ & & & -r^2 \sin^2 \Theta \end{pmatrix}, \quad (15)$$

где

$$\Phi = \frac{1}{2} \ln \left(1 - \frac{2\gamma m}{rc^2}\right). \quad (16)$$

В слабом гравитационном поле соотношения (14), (15) принимают вид

$$\varphi_0 = -\frac{\gamma m}{r},$$

$$g_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -\left(1 + \frac{4\gamma m}{rc^2}\right) & & \\ & & -\left(r + \frac{\gamma m}{c^2}\right)^2 & \\ & & & -\left(r + \frac{\gamma m}{c^2}\right)^2 \sin^2 \Theta \end{pmatrix},$$

т. е. ньютонову гравитационному полю φ соответствует квадрат интервала [7]

$$ds^2 = c^2 dt^2 - \gamma_{ik} dx^i dx^k,$$

где γ_{ik} — некоторый 3-мерный тензор.

3. В работе [6], также посвященной рассмотрению скалярного гравитационного поля в пространстве V_4 , уравнение поля совпадает с уравнением (3). Однако вместо уравнений (2) и (7) принимаются соответственно

$$\frac{\delta}{\delta s} \left(\frac{dx^\alpha}{ds} \right) = 0 \quad (17)$$

и

$$G_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}, \quad (18)$$

где $T_{\mu\nu}$ — суммарный тензор энергии-импульса в пространстве V_4 , включающий энергию-импульс гравитационного поля. В предельном случае слабого гравитационного поля и малых скоростей движения гравитирующих масс уравнения (18) принимают вид

$$\Delta \left(h_{00} - \frac{h}{2} \right) = \frac{16\pi\gamma}{c^2} \rho, \quad (19)$$

$$\Delta \left(h_{ik} + \frac{h}{2} \delta_{ik} \right) = 0. \quad (20)$$

Переходя от уравнений (17) к правильным в скалярной теории уравнениям движения (2), находим, согласно принципу соответствия, $h_{00} = 0$ и

$$\Delta h = -\frac{32\pi\gamma}{c^2} \rho. \quad (21)$$

Сворачивая затем (20) с δ^{ik} , получаем $\Delta h = 0$. Это противоречит уравнениям (21); следовательно, при переходе от уравнений (17) к уравнениям (2) уравнения (18) не удовлетворяют принципу соответствия с теорией гравитации Ньютона. Отмеченные затруднения характерны и для аналогичной векторной теории гравитации в римановом пространстве [8].

Литература

1. Петров А. З. Тезисы 5-й Международ. конф. по гравитации и теории относительности. Тбилиси, 1968.
2. Петров А. З. Сб. «Теория относительности и гравитация». Изд. Каз. ун-та, в. 4—5, 1968.
3. Konradin W. Fortsch. Phys., 15, 309, 1967.
4. Nordstrom G. Ann. Phys., 42, 533, 1913.
5. Левашев А. Е. ДАН СССР, 4, 31, 1934.
6. Vilmaz H. Phys. Rev., 111, 1417, 1958.
7. Унт В. Сб. «Проблемы гравитации». Тез. 2-й Советской гравитац. конф., 1965.
8. Mociutchi C. An. Univ. Timisoara, ser. stiinte mat.-fiz., 4, 233, 1966.

Белорусский государственный университет
им. В. И. Ленина

Поступило в редакцию 20.I 1969

С. И. ЛОБКО

О НЕЛЕПТОННОМ РАСПАДЕ Ω^- -ГИПЕРОНА

Открытый недавно [1] Ω^- -гиперон с массой около 1680 Мэв и временем жизни $\sim 10^{-10}$ сек в настоящее время является единственной известной метастабильной частицей, имеющей спин 3/2. Поскольку масса частицы недостаточна для быстрых распадов $\Omega^- \rightarrow \Xi^- + \bar{K}^0$ или $\Omega^- \rightarrow \Xi + K^-$, то Ω^- -гиперон может распадаться только по слабому взаимодействию на гиперон и мезон, причем способов распада может быть несколько [2—10]. Теоретически изучались многими авторами [2—7] различные типы распада Ω^- -гиперона. В работе [2] даны оценки различных типов распада, причем наибольшая относительная вероятность (60%) получена для распада (Ξ, π). В работах [4—7] рассматривались также лептонные распады Ω^- -гиперона. Для вероятности электронного распада [5] получена оценка $\Gamma(\Omega^- \rightarrow \Xi + e + \bar{\nu})/\Gamma(\Omega^- \rightarrow \Xi + \pi) \leq 5\%$. Обычно при вычислении вероятностей нелептонных распадов в качестве исходного уравнения берется уравнение для частицы со спином 3/2, а в качестве получившихся частиц берутся дираковская частица и мезон [8, 10].

В данной работе для описания распада Ω^- -гиперона используется уравнение для частицы с переменным спином 1/2—3/2 и двумя массами покоя [13, 14]. Состояние частицы с большим значением массы и спином 3/2 ставится в соответствие Ω^- -гиперону, а с меньшим значением массы и спином 1/2 — в соответствие получившемуся фермиону. В работе исследуется указанный процесс без учета и с учетом поляризации исходных и конечных частиц на основе уравнения первого порядка для частицы со спином 1/2—3/2 [14—16]:

$$(\alpha_k \nabla_k + \kappa) \psi = 0 \quad (h = c = 1), \quad (k = 1, 2, 3, 4), \quad (1)$$

где α_k — квадратные матрицы 20-го порядка, описывающие свойства частицы; ψ — 20-мерная волновая функция; κ — постоянная, связанная с массой частицы*). Матрицы α_k можно представить в блочной форме с помощью матриц Дирака γ_k [16]. Для вероятности нелептонного распада можно в нашем случае, следуя общим правилам [11], записать выражение

$$d\omega = \frac{1}{(2\pi)^4} |M|^2 \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}' - \mathbf{k}) \frac{d\mathbf{p}'}{(2\pi)^3} \cdot \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3}, \quad (2)$$

где $\mathbf{p}, \mathbf{p}', \mathbf{k}$ — соответственно импульсы начального и конечного состояния частицы со спином 1/2—3/2 и мезона. Амплитуда M двухчастичного распада может быть представлена в виде суммы двух слагаемых:

$$M = \{F(u_2^* \eta u_1) + G(u_2^* A u_1)\} \varphi, \quad (3)$$

где φ — волновая функция мезона; η и A — матрицы скалярного и псевдоскалярного произведений 20-мерных векторов u_1 и u_2 ; F и G — константы

*) Похожая задача решалась иным способом Карпманом В. И. [9] на базе уравнения для частицы 1/2—3/2 в спинтензорной форме и без учета поляризации частиц.

связи, характеризующие слабое взаимодействие. Так как распад двухчастичный, то аналогично работе [11] можно показать, что вектор и псевдовектор, которые можно построить в общем случае из величин, описывающих данный процесс, сводятся к скалярному и псевдоскалярному слагаемым в (3). Матрица A удовлетворяет условию $\eta A \eta = -A$. Если использовать для матрицы η блочную запись [16]

$$\eta = \begin{bmatrix} i\gamma_5 & & & & \\ & -i\gamma_5 & & & \\ & & -i\gamma_5 & & \\ & & & i\gamma_5 & \\ & & & & i\gamma_5 \end{bmatrix}, \quad \gamma_5 = i\gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4, \quad \gamma_5^2 = -I, \quad (4)$$

то можно матрицу A выбрать в виде

$$A = \begin{bmatrix} -\gamma_4 & & & & \\ & -\gamma_4 & & & \\ & & \gamma_4 & & \\ & & & -\gamma_4 & \\ & & & & -\gamma_4 \end{bmatrix}. \quad (5)$$

Нахождение квадрата модуля $|M|^2$, входящего в (2), как показано в [12], сводится к вычислению следов от соответствующих произведений проективных операторов и матриц. В нашем случае

$$|M|^2 = F^2 (\tau_2 \tau_1)_c + G^2 (\bar{A} \tau_2 A \tau_1)_c + F^* G (\tau_2 A \tau_1)_c + F G^* (\bar{A} \tau_2 \tau_1)_c, \quad (6)$$

где $\tau_i = \alpha_i \beta_i$, α_i и β_i — соответственно массовый и спиновый проективные операторы, $\bar{A} = \eta A^+ \eta$. Поскольку в нашем случае алгебра матриц α_k практически неизвестна, то вычисление следов будем сводить к следам от дираковских матриц.

1. Если $|M|^2$ просуммировать по спином частицы конечного состояния и усреднить по спином начального, то

$$\frac{1}{2s_1 + 1} \sum_{s_1, s_2} |M|^2 = \frac{1}{2s_1 + 1} \{ F^2 (a_2 a_1)_c + G^2 (\bar{A} a_2 A a_1)_c + GF^* (a_2 A a_1)_c + FG^* (\bar{A} a_2 a_1)_c \}, \quad (7)$$

так как сумма спиновых проективных операторов по всем проекциям спина $\sum_k \beta_k = I$. Проективные операторы α и β строятся по правилам, изложенным в [12]. В нашем случае матрицы α_k , описывающие свойства частиц, удовлетворяют следующему минимальному уравнению:

$$\hat{p}^2 (\hat{p}^2 - \kappa^2) (\hat{p}^2 - \kappa^2 \lambda^2) = 0, \quad (8)$$

где $\hat{p} = i\alpha_k p_k$, p_k — 4-импульс частицы, постоянная λ равна отношению масс двух возможных состояний частицы. Используя минимальное уравнение (8), получаем следующее выражение для массовых проективных операторов начального и конечного состояний частицы:

$$\alpha_2 = \frac{(\hat{p}^{(2)} - \kappa) (\hat{p}^{(2)2} - \kappa^2 \lambda^2) \hat{p}^{(2)2}}{-2\kappa^5 (1 - \lambda^2)}, \quad (9)$$

$$\alpha_1 = \frac{(\hat{p}^{(1)} - \kappa) \left(\hat{p}^{(1)2} - \frac{\kappa^2}{\lambda^2} \right) \hat{p}^{(1)2}}{-2\kappa^5 \left(1 - \frac{1}{\lambda^2} \right)}. \quad (10)$$

Поскольку двадцатимерные матрицы α_h можно представить в блочной форме с помощью матриц Дирака, то вычисление выражения (7) после подстановки в него выражений (4), (5), (9) и (10) сводится к следам от различных комбинаций матриц Дирака. После проведения указанных, довольно громоздких вычислений получим два квадрата модуля процесса распада без учета поляризации частиц следующее выражение:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2s_1 + 1} \sum_{s_1, s_2} |M|^2 = & \frac{2}{9\kappa^6} \left[(F^2 - G^2) \left\{ -\kappa^2 a \left[\kappa^2 p'^2 + \left(p_4 p'_4 + \frac{1}{9} Q \right) Q + \right. \right. \right. \\ & + \frac{1}{2} (p_2^2 + p_3^2) (p_2'^2 + p_3'^2) + \frac{8}{9} q^2 q'^2 - p_4'^2 p^2 + \frac{1}{2} p_4 p'_4 Q - \frac{2}{9} Q^2 \left. \right\} + \\ & + \kappa^2 \lambda (P p'^2 + Q p^2) + a \lambda \left[\frac{4}{9} p_4 p'_4 Q^2 - \frac{2}{9} p^2 p'^2 P + Q \left(2p_4'^2 p_4^2 + \right. \right. \\ & + \frac{2}{3} p^2 p_4'^2 - \frac{2}{3} p'^2 p_4^2 \left. \right) - p_4 p'_4 p^2 p_4'^2 + \frac{8}{9} q^2 q'^2 P + \frac{4}{9} q^2 Q^2 (p_2^2 + p_3^2) + \\ & + (p_2'^2 + p_3'^2) (p_2^2 + p_3^2) P \left. \right] \left. \right\} + \frac{a\lambda}{6} (FG^* + F^*G) \left\{ \frac{1}{4} (p_2' p_3 - p_3' p_2) \times \right. \\ & \times (p_4 p'_4 - p_4' p_4) (p_2 p'_2 + p_3 p'_3) + (p_2' p_3 - p_3' p_2) \left[p_4 p_4 p'^2 - p_4' p_4' p^2 - \right. \\ & - (p_2^2 + p_3^2) \left(\frac{3}{2} p_1 p_4 + \frac{1}{2} p_4' p_1' \right) \left. \right] + \frac{1}{4} (3p_2' p_4 + p_4 p_4') [p_2' p_3' (p_3^2 - p_2^2) + \\ & \left. \left. + p_2 p_3 (p_2'^2 - p_3'^2)] - \frac{2}{3} q'^2 (p_2' p_3 - p_3' p_2) p_4 p_4' \right\}, \quad (11) \end{aligned}$$

где $P = \sum_{i=1}^4 p_i p_i'$, $Q = P - p_4 p_4'$, $q^2 = p_1^2 + \frac{1}{4} p_2^2 + \frac{1}{4} p_3^2$.

В (11) штрих относится к конечному состоянию. Из выражения (11) можно сделать следующие выводы.

Величина $|M|^2$ зависит от всех степеней импульсов начального и конечного состояний частицы от второй до шестой. Кроме этого, $|M|^2$ зависит от обоих массовых состояний частицы и величины λ равной отношению масс.

В выражение (7) входит также постоянная $a = \left(c_1 + \frac{1}{2} \right) \left(c_2 + \frac{1}{2} \right) < 0$,

где c_1, c_2 — произвольные постоянные, входящие в основные матрицы α_h , описывающие частицу.

Если считать, что происходит распад покоящегося гиперона, то из (11) получим следующее выражение:

$$\frac{1}{2s_1 + 1} \sum_{s_1, s_2} |M|^2 = \frac{2}{9} \frac{p'^2}{\kappa^2} \left\{ a (G^2 - F^2) + \frac{\lambda}{\kappa^2} p_4 p'_4 (G^2 + F^2) \right\}. \quad (12)$$

Последнее выражение очень простое и легко может быть проверено на опыте.

2. Найдем теперь сечение процесса распада гиперона с учетом поляризации частиц в начальном и конечном состояниях. В этом случае возможны восемь различных переходов гиперона с массой κ и проекциями спина $\pm 3/2$, $\pm 1/2$ в состояние с массой κ/λ и проекциями спина $\pm 1/2$. Выражения (6) для $|M|^2$ будут содержать теперь спиновые проективные операторы $\beta_{\pm 1/2}$ и $\beta_{\pm 3/2}$. Для частицы со спином $1/2-3/2$ эти операторы выражаются через инфинитезимальные операторы I_{kl} , соответствующие вращениям в пространстве волновых функций ψ , следующим образом:

$$\beta_{\pm 1/2} = \pm \frac{1}{2} \left(\hat{\sigma} \pm \frac{1}{2} \right) \left(\hat{\sigma}^2 - 9/4 \right),$$

$$\beta_{\pm 3/2} = \pm \frac{1}{6} \left(\hat{\sigma} \pm 3/2 \right) \left(\hat{\sigma}^2 - \frac{1}{4} \right), \quad \hat{\sigma} = \frac{i}{2|\mathbf{p}|} \delta_{klm} I_{lm} p_k.$$

В общем случае результаты вычислений $|M|^2$ очень громоздки. Для упрощения допустим, что до распада импульс гиперона был направлен по оси x , т. е. $p(p_1, 0, 0, p_4)$. Тогда $|M|^2$, соответствующий переходу $\kappa \left(\pm \frac{3}{2} \right) \rightarrow \frac{\kappa}{\lambda} \left(\pm \frac{1}{2} \right)$, будет иметь следующий вид:

$$|M|^2 = - \frac{a}{6p^2 \kappa^6} \left(\kappa^2 + \frac{4}{3} p^2 \right) q^2 q'^2 \left\{ \lambda P (\cos \theta \pm 1) (G^2 + F^2) - \right.$$

$$- \left[2\kappa^2 (\cos \theta \pm 1) - \frac{\lambda}{|\mathbf{p}'| |\mathbf{p}|} [|\mathbf{p} \times \mathbf{p}'|^2] (F^2 - G^2) \mp \lambda \left[Q \left(\frac{p_4}{|\mathbf{p}|} - \frac{p'_4}{|\mathbf{p}'|} \right) + \right. \right. (13)$$

$$\left. \left. + \frac{p_4 p'^2}{|\mathbf{p}'|} - \frac{p'_4 p^2}{|\mathbf{p}|} \right] (F^* G + G^* F) \right\},$$

где θ — угол, который составляет направление движения родившегося гиперона с осью x , знак плюс соответствует переходам между состояниями с проекциями спина гиперонов одного знака, а знак минус между проекциями спина разных знаков.

Наконец, в случае перехода $\kappa (\pm 1/2) \rightarrow \frac{\kappa}{\lambda} (\pm 1/2)$ найдем для $|M|^2$ следующее выражение:

$$|M|^2 = - \frac{2a p^2}{9\kappa^6} \left(p_4'^2 + \frac{1}{9} p'^2 \right) \left\{ \lambda P (\cos \theta \pm 1) (F^2 + G^2) + \right.$$

$$+ \left[\frac{\lambda}{|\mathbf{p}'| |\mathbf{p}|} [|\mathbf{p} \times \mathbf{p}'|^2] - \kappa^2 (\cos \theta \pm 1) \right] (F^2 - G^2) \pm \lambda (F^* G - G^* F) \times$$

$$\times \left[Q \left(\frac{p_4}{|\mathbf{p}|} - \frac{p'_4}{|\mathbf{p}'|} \right) + \frac{p_4 p'^2}{|\mathbf{p}'|} - \frac{p'_4 p^2}{|\mathbf{p}|} \right] + \frac{q^2 q'^2 a}{18\kappa^4 p^2} \left\{ 2\kappa^2 (\cos \theta \pm 1) (F^2 - G^2) - \right.$$

$$- \left[\lambda P (\cos \theta \pm 1) + \frac{\lambda [|\mathbf{p} \times \mathbf{p}'|^2]}{|\mathbf{p}'| |\mathbf{p}|} \right] (F^2 + G^2) \pm 3\lambda (F^* G - G^* F) \times$$

$$\times \left[Q \left(\frac{p_4}{|\mathbf{p}|} - \frac{p'_4}{|\mathbf{p}'|} \right) + \frac{p_4 p'^2}{|\mathbf{p}'|} - \frac{p'_4 p^2}{|\mathbf{p}|} \right] \left. \right\} - \frac{4a}{9\kappa^6} \left\{ \left[q^2 (\cos \theta \pm 1) - \right. \right.$$

$$\left. - \frac{[|\mathbf{p} \times \mathbf{p}'|^2]}{2|\mathbf{p}'| |\mathbf{p}|} \right] \left[\kappa^2 \left(P - \frac{8}{9} Q \right) (F^2 + G^2) + \left(\frac{16}{9} \lambda p_4 p'_4 Q + \lambda p_4^2 p_4'^2 + \right. \right.$$

$$+ \frac{2\lambda}{9} Q^2 \left(G^2 - F^2 \right) - \frac{\lambda}{3} \left(\frac{1}{3} p^2 p'^2 + p_4^2 p'^2 + p_4'^2 p^2 \right) (F^2 + G^2) \left. \right] + \\ + 2(\kappa^2 - 2\lambda Q - 10\lambda p_4 p_4') (\cos \theta \pm 1) |[\mathbf{p} \times \mathbf{p}']|^2 (F^2 + G^2) \left. \right\}. \quad (14)$$

Выражения (13) и (14) позволяют проанализировать зависимость сечения распада гиперона от импульсов и масс как начальной частицы, так и продуктов распада. Сечение распада быстро растет с ростом импульса гиперона, а также зависит от $\cos \theta$ как в первой, так и во второй степенях. Полученные результаты существенно отличаются от приведенных в работе [10], где для описания родившегося гиперона использовалось уравнение Дирака.

В заключение автор благодарит Ф. И. Федорова за замечания по работе, а также выпускника БГУ Нгуен Ван Фунга, принимавшего участие в выполнении довольно громоздких вычислений.

Литература

1. Barnes V. E., Connolly P. L. Phys. Rev., Lett., 12, 204, 1964.
2. Glaskow S. L., Socolow R. H. Phys. Lett., 10, № 1, 1964.
3. Abrams G. S. Phys. Rev. Lett., 13, 670, 1964.
4. Yellin I. Phys. Rev., 135, B, 1203, 1964.
5. De-Santis V. Phys. Rev. Lett., 13, 217, 1964.
6. Gupta K. C., Mathur V. S. Nuovo Cimento, 36, 1359, 1965.
7. Mathews I. Phys. Rev., 137, 448, 1965.
8. Suzuki Mahiko. Progr. Theor. Phys., 32, 138, 1964.
9. Карпман В. И. Уч. зап. Минского пединст., сер. физ.-мат., в. 5.
10. Гронский В. Н. Весті АН БССР, сер. физ.-мат. наук, № 2, 1965.
11. Окунь Л. Б. Слабое взаимодействие элементарных частиц. Физматгиз, М., 1963.
12. Федоров Ф. И. ЖЭТФ, 35, 493, 1958.
13. Гинзбург В. Л. ЖЭТФ, 12, 425, 1942; 13, 33, 1943.
14. Vhabha H. Phil. Mag., 43, 33, 1952.
15. Файнберг В. Я. Тр. ФИ АН СССР, 4, 269, 1955.
16. Лобко С. И. Автореф. дисс. Минск, 1965.

Белорусский государственный университет
им. В. И. Ленина

Поступило в редакцию 15.1 1969

Н. Ф. КУНІН, Э. В. РАТНІКАЎ, О. Д. КАДАЦЕНКА

МЕХАНІЧНЫЯ ЭФЕКТЫ ПРЫ КАРОННЫМ РАЗРАДЗЕ З ПАДАГРАВАЕМАГА ВОСТРАГА КРАЮ

З'ява электрычнага ветру пры каронным разрадзе вядома вельмі даўно. Яшчэ ў 1901—1909 гг. Чатак [1] прапанаваў выкарыстаць яе для вымярэння рухомасцей іонаў. Пазней цікавасць да гэтых даследаванняў была выклікана магчымасцямі электрычнай ачысткі газаў [2, 3]. У апошні час каронны разрад зноў прыцягнуў да сябе ўвагу даследчыкаў па прычыне выяўленай магчымасці атрымліваць значную рэактыўную цягу ў працэсе разраду [4—7].

У гэтай рабоце разглядаюцца механічныя эфекты, якія ўзнікаюць на карануючым электродзе. На рыс. 1 паказана схема вагаў 1 з электрамагнітнай кампенсацыяй, на якіх праводзілася вымярэнне механічнай сілы, што дзейнічае на карануючы электрод 2 памерамі $50 \times 2 \times 0,4$ мм, размешчаны паралельна восі вагаў. Такім чынам, пры нагрэве карануючай пласціны яе падаўжэнне, якое суправаджаецца перамяшчэннем зажымаў пад дзеяннем сціснутай спружыны, не парушала раўнавагі вагаў. Размяшчэнне электродаў, а таксама электрычных уводаў у рухомую частку вагаў дазваляла максімальна пазбегнуць электростатычных і механічных перашкод.

Для стварэння накіраванага току разраду прымяняўся экрануючы электрод, які, таксама як і карануючы электрод, быў заземлены. Акрамя таго, край карануючай пласцінкі, звернуты ў бок, процілеглы экрануючаму электроду, падвяргаўся механічнаму заточванню. У выніку асіметрыі напружанасці электрычнага поля каля краёў пласцінкі разрад адбываўся ў напрамку свабоднага краю карануючага электрода. Пры гэтым карануючы электрод падвяргаўся дзеянню механічнай сілы, велічыня якой аўтаматычна запісвалася на дыяграмную ленту з дакладнасцю да 1,5 мГ.

На рыс. 2 і 3 прыведзены вольт-амперныя характарыстыкі разраду і адпаведныя ім залежнасці механічнай сілы F ад напружання U . Як тыя, так і другія з'яўляюцца сям'ёй крывых, якія якасна паўтараюцца і зрушаны адна адносна адной у бок меншых напружанняў з павелічэннем тэмпературы карануючага электрода. Пры фіксаваным напружанні велічыня механічнай сілы расце з павышэннем T , аднак пры гэтым павялічваецца і ток разраду. Таму механічная сіла не з'яўляецца функцыяй адной толькі тэмпературы. Калі ж механічную сілу нарміраваць да адзінкі электрычнай магутнасці W , якая падводзіцца да электродаў, то залежнасць F ад T будзе насіць адназначны характар.

На рыс. 4 паказаны залежнасці $F/W - U$ пры $T = \text{const}$. У выпадку адмоўнай кароны велічыня ўдзельнай сілы з ростам напружання зніжаецца. Для дадатнай кароны ход крывых з'яўляецца больш складаным. У вобласці тэмператур ад 293 да 560 °К удзельная сіла з павышэннем напружання расце. Пры высокіх жа тэмпературах (950 °К і вы-

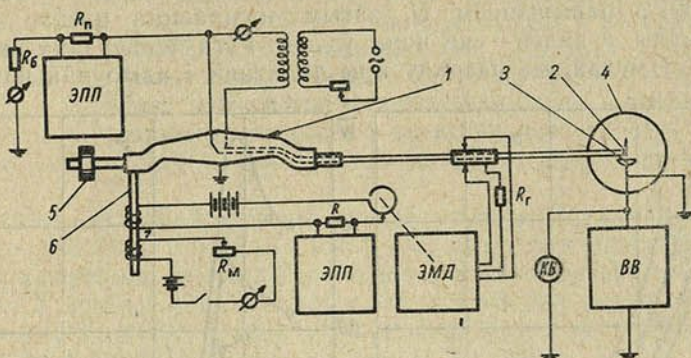


Рис. 1. Схема карануючай устаноўкі:

1 — рычаговая вагі; 2 — карануючы электрод; 3 — экрануючы электрод; 4 — некарануючы электрод; 5 — механічны балансір; 6 — жалезны сардэчнік, звязаны з сістэмай электрамагнітнай кампенсацыі

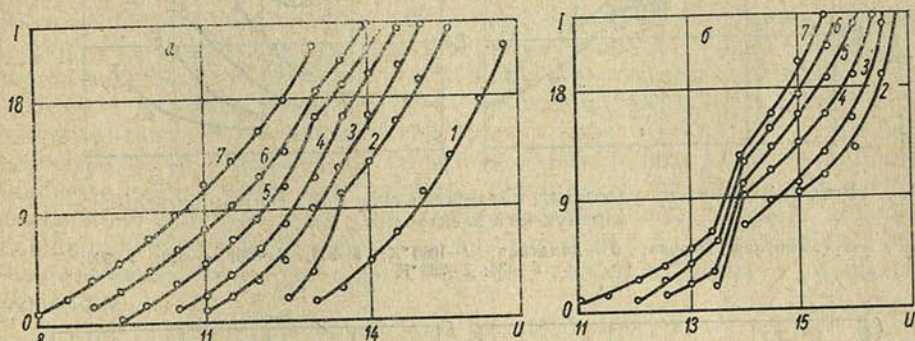


Рис. 2. Вольт-амперныя характарыстыкі кароннага разраду (I , мка; U , кв):

а — адмоўная карона; б — дадатная; 1—293 °К; 2—435; 3—560; 4—690; 5—820; 6—950; 7—1080 °К

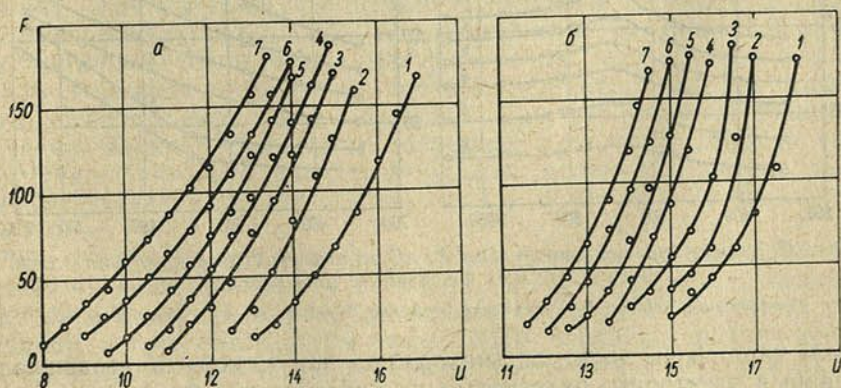


Рис. 3. Залежнасць механічнай сілы F , мГ, якая дзейнічае на карануючы электрод, ад напружання U , кв:

а — адмоўная карона; б — дадатная; 1—293 °К; 2—435; 3—560; 4—690; 5—820; 6—950; 7—1080 °К

шэй) пачатковая стадыя разраду характарызуецца павелічэннем значэнняў F/W з павышэннем U , затым назіраецца рэзкае зніжэнне ўдзельнай сілы, а далей — яе новы ўздым. Гэта непасрэдна ўказвае на адрозненне ў механізме разраду пры дадатнай і адмоўнай кароне.

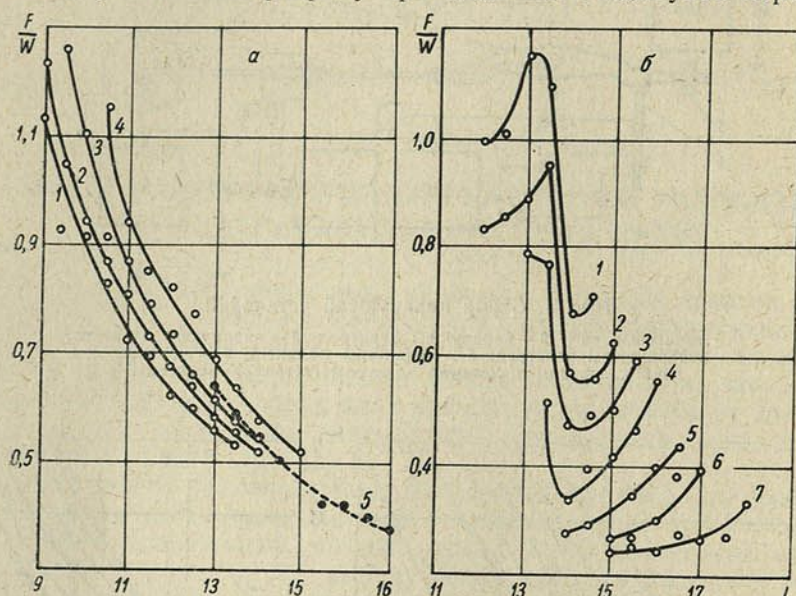


Рис. 4. Залежнасць удзельнай механічнай сілы F/W , $\Gamma/\text{вт}$ ад патэнцыялу карануючага электрода U , кВ:

а — адмоўная корона; б — дадатная; 1—1080 °К; 2—950; 3—820; 4—690; 5—560; 6—435; 7—293 °К

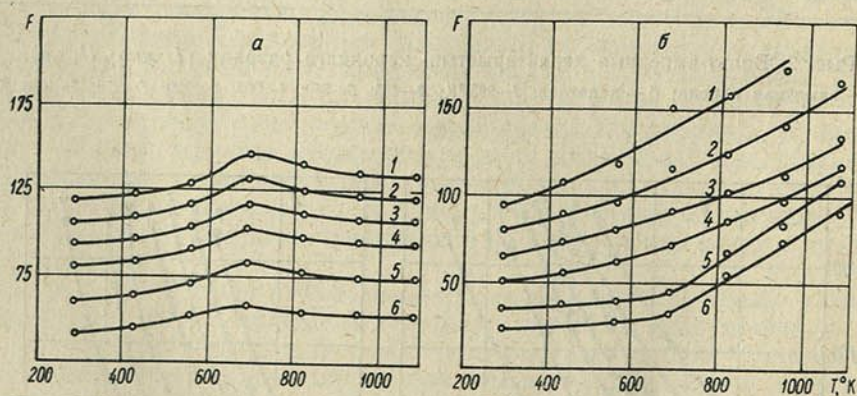


Рис. 5. Залежнасць механічнай сілы F , мГ ад тэмпературы карануючага электрода T , °К пры фіксаваным току разраду:

а — адмоўная корона; б — дадатная; 1—18 мкА; 2—15; 3—14; 4—12; 5—9; 6—6 мкА

Калі карануючы электрод знаходзіцца пад адмоўным патэнцыялам, эмітаваныя электроны, разагнаныя да вялікіх энергій у вобласці моцных палёў, іанізуюць прыэлектродны газ, пакідаючы ззаду дадатнае іонае воблака. У вобласці слабых палёў затарможаныя электроны прыліпаюць да малекул і атамаў кіслароду, утвараючы адмоўныя іоны [1, 2], якія імкнуцца да анода, уцягваючы за сабой малекулы газу. Эфект уцягвання газавога асяроддзя абумоўлен наяўнасцю ўнутранага трэн-

ня ў газе [6]. Такім чынам, у выніку электростатычнага ўзаемадзеяння паміж далучанай масай адмоўнага іоннага зараду і катодам на карануючы электрод уздзейнічае механічная сіла, велічыня якой будзе залежаць як ад велічыні самога поля, так і ад велічыні экрануючага дзеяння прасторавага дадатнага зараду. З ростам поля велічыня і працягласць дадатнага прасторавага зараду павялічваюцца, аслабляючы, такім чынам, сілу ўзаемадзеяння катода з адмоўнай іоннай вобласцю.

У выпадку дадатнай кароны фотаэлектронны або электронны, вызвалены пры распадзе адмоўных іонаў кіслароду ў вобласці моцных палёў, нейтралізуюцца на анодзе, іанізуючы на сваім шляху нейтральныя малекулы. У выніку дадатны карануючы электрод акружан дадатным воблакам іонаў, электростатычнае адштурхванне якога прыводзіць да з'яўлення механічнай сілы, прыкладзенай да анода.

Рост значэнняў F/W з павелічэннем патэнцыялу карануючага электрода выклікан павелічэннем шчыльнасці прасторавага дадатнага зараду, які непасрэдна акружае анод. Пад дзеяннем кулонаўскіх сіл утвораны прасторавы зарад выштурхоўваецца з вобласці, якая прылягае да карануючага электрода, уцягваючы за сабой нейтральныя малекулы газу. Эфект уцягнення дрэйфуючымі іонамі нейтральных малекул асяроддзя па прычыне наяўнасці сіл унутранага трэння будзе тым больш значны, чым большая шчыльнасць прасторавага зараду.

Рэзкае падзенне значэнняў F/W з'яўляецца вынікам заўважаных на вольт-амперных характарыстыках зрываў пры $U=13,5$ кв. Гэтыя зрывы абумоўлены ўзнікненнем разраду з заэкранавага краю карануючай пласцінкі. Пры гэтым ток разраду ўзрастае, а рэзультуючае дзеянне механічнай сілы слабее, г. зн. разрад з заэкранавага краю пласціны суправаджаецца механічнай сілай, накіраванай у процілеглы бок адносна механічнай сілы, якая дзейнічае на свабодны край карануючага электрода.

Уплыў тэмпературы на каронны разрад адлюстраван на рыс. 5. Для дадатнай кароны пры $I=\text{const}$ механічная сіла павялічваецца з ростам T , прычым крутасць адпаведных крывых тым большая, чым вышэй тэмпература. Павышэнне тэмпературы прыводзіць да павелічэння каэфіцыента ўнутранага трэння газу, што будзе ствараць дадатковае тармажэнне іоннага патоку. Такім чынам, рэдукцыя скорасці іоннага патоку прывядзе да павелічэння механічнай сілы на анодзе. З другога боку, павышэнне тэмпературы пры фіксаваным току разраду суправаджаецца зніжэннем патэнцыялу карануючага электрода, па прычыне чаго скорасць дрэйфу іонаў зніжаецца. Пры гэтым павялічваецца час іх узаемадзеяння з малекуламі асяроддзя, што прыводзіць да больш інтэнсіўнага ўцягнення іонамі нейтральных малекул, г. зн. да павелічэння далучанай масы іоннага патоку, і ў сваю чаргу ўзмацняе механічны эфект.

Для адмоўнай кароны крывыя, якія апісваюць залежнасці F ад T , праходзяць праз максімум у вобласці $T=700$ °К. Паколькі механічны эфект пры адмоўнай кароне абумоўлен генерацыяй адмоўных іонаў кіслароду, а пры тэмпературы звыш 700 °К павялічваецца ступень рэгенерацыі іонаў O_2^- , г. зн. канстанта раўнавагі паміж электроннай і адмоўнай іоннай кампанентай зрушваецца ў бок павелічэння свабодных электронаў, то велічыня механічнай сілы, якая дзейнічае на карануючы электрод, будзе памяншацца. Сапраўды, як толькі лавінная карона пераходзіць у стрымленую, механічная сіла знікае. Гэта акалічнасць служыць пацвярджэннем выказанаму меркаванню аб ролі электроннай правадзімасці ва ўзбуджэнні механічнай сілы.

Такім чынам, пры змяненні ўмоў каранавання расходуецца розная электрычная магутнасць на перадачу карануючаму электроду адзінкі рэактыўнай сілы. Значыць, карануючая канструкцыя, якая з'яўляецца крыніцай механічнай цягі, можа разглядацца як своеасаблівы газавы рэдуктар пры трансфармацыі электрычнай энергіі ў механічную.

Літаратура

1. Леб Л. Основные процессы электрических разрядов в газах. ГИТТЛ, М.—Л. 1950.
2. Капцов Н. А. Коронный разряд. Гостехиздат, М.—Л., 1947.
3. Баймаков Ю. В. Электричество, № 3, 1947.
4. Прокопович Л. И. ЖТФ, 36, № 4, 1966.
5. Матвеев К. К., Остроумов Г. А. Электронная обработка материалов, № 3, 1967.
6. Ратніков Э. В. ДАН БССР, 11, № 12, 1967.
7. Ратніков Э. В. Весці АН БССР, сер. фіз.-мат. навук, № 4, 1967.

Белорусский государственный университет
им. В. И. Ленина

Поступило в редакцию 11.IX 1968

УДК 533.9 : 537.52

М. В. АФАНАСЬЕУ, С. Н. КАПЕЛЬЯН, Л. П. ФІЛІПАУ,
У. А. МАРОЗАУ

АБ СКОРАСЦІ ПЛАЗМЕННЫХ СТРУМЕНЯУ, УЗНІКАЮЧЫХ ПРЫ ДЗЕЯННІ ІМПУЛЬСНЫХ ЦЕПЛАВЫХ ПАТОКАУ НА МЕТАЛІЧНЫЯ ПАВЕРХНІ

Эксперыментальна ўстаноўлена, што як пры магутных імпульсных разрадах, так і пры ўздзеянні сфакусіраванага выпраменьвання аптычнага квантавага генератара на паверхню металу з апошняй вырываюцца плазменныя струмені, скорасці якіх дасягаюць 10^3 — 10^4 м/сек [1, 2].

Механізм перадачы энергіі металу пад дзеяннем магутных цеплавых патокаў разгледжан у [3—5], дзе ўказваецца, што ў аднамернай пастаноўцы цеплафізічная задача з паверхневай і аб'ёмнай крыніцамі цяпла, сфармуляваная адносна рухомага фронту выпарэння з пачаткам каардынат на самым фронце выпарэння, прыводзіць да ўраўнення

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} = a \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + v \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\omega_0}{c\gamma_0}, \quad (1)$$

дзе $T = T(x, t)$ — тэмпература; c , γ_0 , a — удзельная цеплаёмкасць, шчыльнасць і тэмператураправоднасць рэчыва электрода; ω_0 — аб'ёмная крыніца цяпла,

$$\omega_0 = \rho j^2 e^{-kx}, \quad (2)$$

j — шчыльнасць току; ρ — удзельнае супраціўленне; ρ , c , γ_0 , a , j у далейшым прымаюцца пастаяннымі; k — каэфіцыент, які паказвае, наколькі хутка зніжаецца шчыльнасць току з павелічэннем глыбіні.

Ураўненне (1) неабходна рашыць пры наступных гранічных умовах:

$$\text{пры } x=0 \quad T = T^*, \quad T > T_0; \quad (3)$$

$$\text{пры } x \rightarrow \infty \quad T \rightarrow T_0. \quad (4)$$

Пачатковая ўмова:

$$\text{пры } \tau=0 \quad T = T_0. \quad (5)$$

Тут T^* — тэмпература, якая ўстанаўліваецца на фронце выпарэння, зыходзячы з закону захавання энергіі

$$q + \lambda \frac{\partial T}{\partial x} = r\gamma_0 v, \quad (6)$$

дзе λ і r — удзельная цеплаправоднасць і цеплыня параўтварэння; q — шчыльнасць цеплавога патоку.

Ураўненне (1) з гранічнымі і пачатковымі ўмовамі (3)—(5) і ўмовай цеплавога балансу (6) істотна нелінейнае. Лікавае рашэнне задачы [5] паказвае, што для магутных цеплавых патокаў, якія маюць месца пры ўздзеянні сфакусіраванага выпраменьвання АКГ і імпульсных

разрадаў, скорасць рухаючагася фронту выпарэння і плаўлення настолькі вялікая, што вобласць, аддаленая ад фронту выпарэння, не паспявае прагрэцца, і поле тэмператур у ёй параўнальна блізкае да пачатковага. У гэтым выпадку можна лінеарызаваць задачу, лічачы $v = \text{const}$ і разлічваючы яе асобна для кожнага інтэрвалу часу аналагічна [6].

Рашэнне дыферэнцыяльнага ўраўнення (1) з гранічнымі і пачатковымі ўмовамі (3)–(6) было атрымана пасля двухразовага прымянення інтэгральнага пераўтварэння Лапласа

$$T(x, t) = T_0 + \frac{1}{2} (T^* - T_0) \left[e^{-\frac{vx}{a}} \Phi^* \left(\frac{x - vt}{2\sqrt{at}} \right) + \Phi^* \left(\frac{x + vt}{2\sqrt{at}} \right) \right] + \frac{\omega_0 e^{-kx}}{k^2 a - kv} [e^{(k^2 a - kv)t} - 1] + \frac{1}{2} \frac{\omega_0}{k^2 a - kv} \left\{ \left[e^{-\frac{vx}{a}} \Phi^* \left(\frac{x - vt}{2\sqrt{at}} \right) + \Phi^* \left(\frac{x + vt}{2\sqrt{at}} \right) \right] - e^{(k^2 a - kv)t} \left[e^{-\frac{vx}{a} + kx} \Phi^* \left(\frac{x - vt + 2akt}{2\sqrt{at}} \right) + e^{-kx} \Phi^* \left(\frac{x + vt - 2akt}{2\sqrt{at}} \right) \right] \right\}. \quad (7)$$

Атрыманае рашэнне (7) дазваляе разлічыць тэмпературнае поле электрода і скорасць рухаючагася фронту пры даволі складаных выпадках нагрэву адначасова дзеючымі паверхневай і аб'ёмнай крыніцамі цяпла. Праведзеныя разлікі паказваюць, што пры шчыльнасці току да 10^7 а/см^2 дзеянне аб'ёмнай крыніцы цяпла не прыводзіць да істотнага змянення тэмпературы паверхні і скорасці фронту выпарэння. Абмяжоўваючыся толькі паверхневай крыніцай цяпла, атрымаем

$$T(x, t) = T_0 + \frac{1}{2} (T^* - T_0) \left[e^{-\frac{vx}{a}} \Phi^* \left(\frac{x - vt}{2\sqrt{at}} \right) + \Phi^* \left(\frac{x + vt}{2\sqrt{at}} \right) \right]. \quad (8)$$

Для вылічэння скорасці рухаючагася фронту выпарэння скарыстаем ураўненне цеплага балансу (6) пры $x = 0$, адкуль атрымаем

$$v = \frac{q - \lambda (T^* - T_0) \left\{ \frac{v_0}{2a} \left[1 + \Phi \left(\frac{v\sqrt{t}}{2\sqrt{a}} \right) \right] + \frac{e^{-\frac{v^2 t}{4a}}}{\sqrt{\pi a t}} \right\}}{r\gamma}, \quad (9)$$

дзе v_0 і v — скорасці рухаючагася фронту выпарэння ў паслядоўныя пра-
межкі часу;

$$\Phi^*(x) = 1 - \Phi(x); \quad \Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-x^2} dx.$$

Выпарэнне пачынаецца не адразу пасля дзеяння крыніцы цяпла. Некаторы час t_0 затрачваецца на нагрэў паверхні. Гэты час вызначаецца з умовы $v = 0$ і $T = T_{\text{кнп}}$, падставіўшы якую ва ўраўненне (8), знойдзем

$$t_0 = \left[\frac{\lambda (T_{\text{кнп}} - T_0)}{q \sqrt{\pi a}} \right]^2. \quad (10)$$

Для вялікіх шчыльнасцей цеплавых патокаў, $q > 10^{10}$ вт/м², t_0 параўнальна невялікі ($t_0 < 10^{-6}$ сек) і скорасць рухаючагася фронту выпарэння вымяраецца метрамі і дзесяткамі метраў у секунду. Прыем аналагічна [3—6] для разглядаемых выпадкаў фрэнкелеўскі механізм выпарэння

$$\frac{dn}{ndt} = \nu_0 e^{-\frac{u_0}{k_0 T^*}}, \quad (11)$$

дзе ν_0 — частата хістанняў паверхневага атама каля стану раўнавагі; dn/ndt — імавернасць выпарэння паверхневага атама за адзінку часу; u_0 — патэнцыяльная энергія часцінкі пры выпарэнні; k_0 — пастаянная Больцмана.

Тады для тэмпературы рухаючагася фронту выпарэння T^* атрымаем наступны выраз:

$$T^* = \frac{r}{R} \frac{\lg e}{\lg v_s - \lg v}, \quad (12)$$

дзе e — аснова натуральных лагарыфмаў; v_s — максімальная скорасць фронту выпарэння пры $T \rightarrow \infty$. Згодна з (11),

$$v_s = \frac{n'_0}{n_0} v_0, \quad (13)$$

дзе n'_0 і n_0 — лік атамаў на адзінцы паверхні і ў адзінцы аб'ёму.

Мяркуючы, што металічная пара, якая фарміруецца ў далейшым у плазменны струмень, паводзіць сябе як ідэальны газ з некаторым эфектыўным значэннем паказчыка адыябаты β для ціску пары p у момант вылету струменя, атрымаем

$$p = n_0 k_0 T^* e^{-\frac{r}{RT^*}}. \quad (14)$$

Як адзначаецца ў [4], пачатковая скорасць сцякання плазменнага струменя амаль не залежыць ад знешняга ціску. Таму для вызначэння пачатковай скорасці плазменнага струменя можна прымяніць тэорыю сцякання газу з посуду ў вакуум пры скачкападобным адкрыцці перагародкі.

Для неўстанавіўшагася руху скорасць вылету струменя пры гэтым

$$u = \frac{2C_0}{\beta - 1}, \quad (15)$$

дзе C_0 — мясцовая скорасць гуку пры адпаведных тэрмадынамічных умовах,

$$C_0 = \left(\frac{\beta p}{\gamma} \right)^{1/2}. \quad (16)$$

Падстаўляючы ў (15) p з (14) і ўлічваючы, што, згодна з фрэнкелеўскім механізмам выпарэння [7], шчыльнасць пары ў струмені

$$\gamma = \gamma_0 e^{-\frac{r}{R_0 T^*}}, \quad (17)$$

канчаткова для скорасці плазменнага струменя атрымаем выраз

$$u = \frac{2}{\beta - 1} \left(\frac{\beta n_0 k_0 T^*}{\gamma_0} \right)^{1/2}. \quad (18)$$

Ураўненне (18) дазваляе зрабіць параўнанне з эксперыментам.

Значэнні T^* на рис. 1, а разлічаны па формуле (12) з улікам (9). Як відаць з графіка, пры $q > 10^{12}$ вт/м² для большасці разлічаных металаў T^* мае парадак 10000 °С.

Значэнні скорасцей плазменнага струменя, вылічаныя па формуле (18) пры $\beta = 1,25$, прыведзены на рис. 1, б. Неабходна ўлічыць, што пры павышэнні тэмпературы фронту выпарэння β , як указана ў [8], плаўна змяняецца ад 1,67 да 1,25 і, значыць, пачатковыя велічыні скорасцей, паказаных на рис. 1, б, завышаны. Мінімальнае значэнне скорасцей

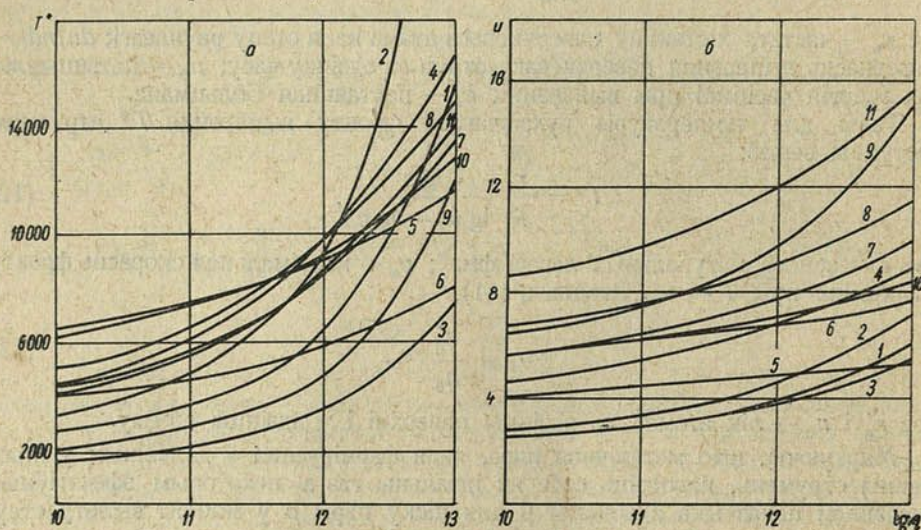


Рис. 1. Тэмпература рухомага фронту выпарэння T^* , °С і скорасць плазменнага струменя u , км/сек у залежнасці ад шчыльнасці цеплага патоку q , вт/м²:

1 — для Bi; 2 — Pb; 3 — Cd; 4 — Sn; 5 — W; 6 — Ni; 7 — Cu; 8 — Fe; 9 — Mg; 10 — Mo; 11 — Al

вылету плазменнага струменя атрымаць, калі прыняць ва ўраўненні (17) $T^* = T_{\text{кпл}}$ і $\beta = 1,67$. Для розных металаў гэтыя скорасці наступныя:

Металы	Bi	Pb	Cd	Sn	W	Ni	Cu	Fe	Mg	Mo	Al
u , км/сек	0,87	0,9	0,94	1,65	1,74	2,14	2,14	2,25	2,28	2,52	3,15

Часавыя разгорткі факелаў іскравага разраду атрыманы на камеры СФР-2. Структура факелаў у моцнай ступені залежыць ад рэжыму разраду, матэрыялу і дыяметра электродаў. Пры малых энергіях разраднага імпульсу струменнага сцякання пары на разгортках не назіраецца і з паверхні электродаў адбываецца спакойнае выпарэнне (рис. 2, а). З павелічэннем энергіі разраду фронт спакойнага выпарэння, які рухаецца параўнальна павольна ($u = 150 \div 300$ м/сек), пачынаюць прабываць асобныя струменьчыкі выпараючага металу, пачатковыя скорасці якіх для розных металаў такія ($\pm 25\%$):

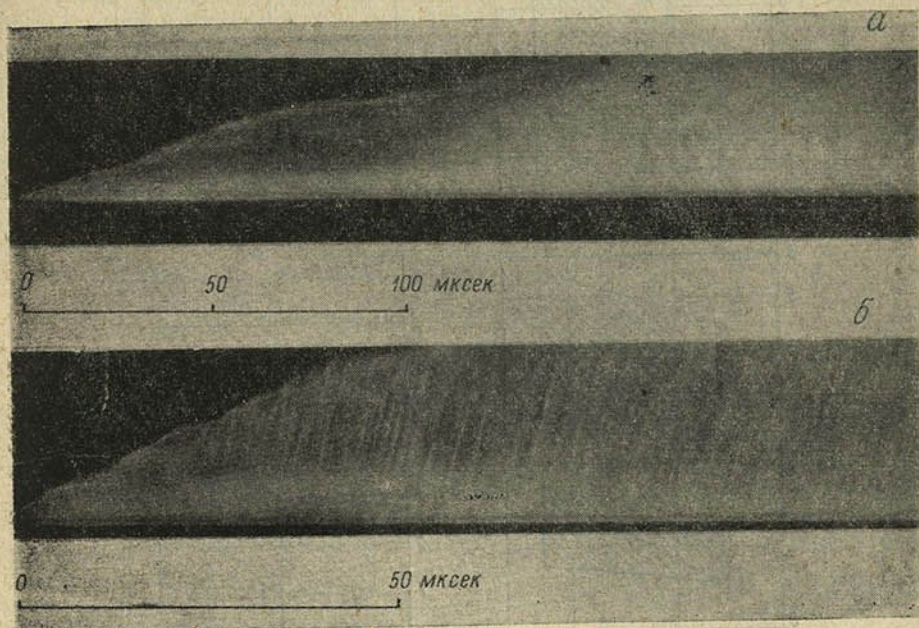
Метал	Cd, Pb	Mo, Sn	W, Cu	Fe	Al
u , км/сек	1,0	1,5—1,6	2,2	2,8	3,0

Здавальняючае ўзгадненне тэарэтычных і эксперыментальных даных дазваляе выказаць меркаванне, што струменнае сцяканне пары пачынаецца пры тэмпературы фронту выпарэння $T = T_{\text{кпл}}$.

Пры далейшым павелічэнні энергіі разраду частата і яркасць струменяў павялічваецца. На некаторай адлегласці ад электрода ўтвара-

еца цёмная вобласць (рыс. 2, б), якая ўказвае на тое, што факел мае характэрны выгляд звышгукавага цячэння ва ўмовах недарасырэння. Струменны характар сцякання ў цёмнай прасторы не праглядаецца з-за экрануючага дзеяння перыферычных абласцей высокатэмпературнай плазмы, і скорасці струменяў можна вымераць толькі пасля праходжання цёмнай прасторы.

Рэгуляванне шчыльнасці цеплавога патоку, які паступае на электроды пры іскравым разрадзе, можна ажыццявіць шляхам кантракцыі



Рыс. 2. Фотаразгортка факела іскравога разраду:

а — пры $q < q_{кр}$; б — пры $q > q_{кр}$

канала разраду. Для гэтага цыліндрычны электрод, які служыў анодам, змяшчаўся ў кварцавую трубку адпаведнага дыяметра. Разрад паміж пласцінкай (катод) і цыліндрычным анодам дыяметрам ад 6 да 0,75 мм ажыццяўляўся з дапамогай падпалу.

Энергія імпульсу W была падабрана так, каб след разраду цалкам перакрываў электрод з максімальным дыяметрам 6 мм. Разрадны імпульс ствараўся фарміруючай лініяй, якая складаецца з 4 ячэек ($L = 15$ мкгн; $C = 100$ мкф), і асцылаграфавалася пры дапамозе асцылографа С1-19.

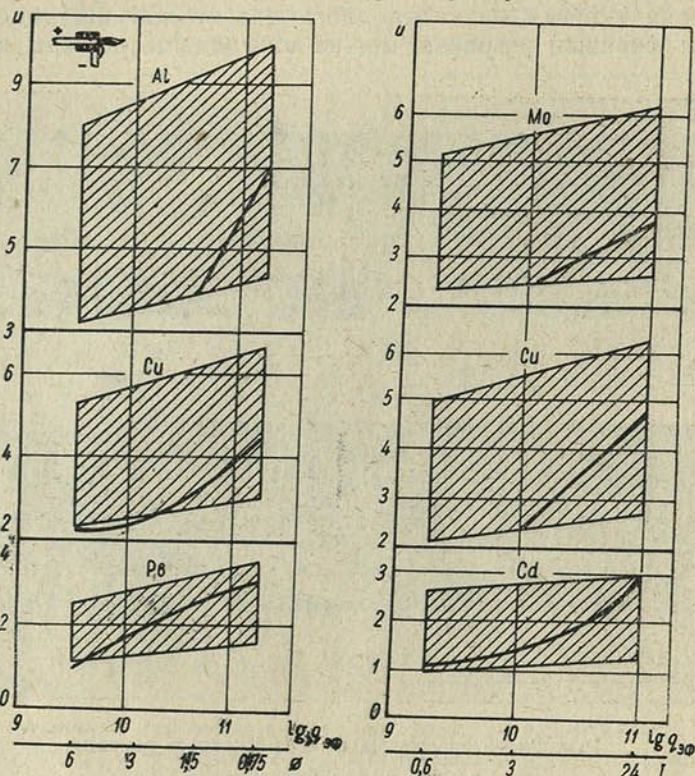
Асцылаграфаванне разраду паказала, што пры памяншэнні дыяметра цыліндрычнага электрода напружанне на разрадным прамежку павялічваецца, а сіла разраднага току застаецца нязменнай. Калі прыняць, што аноднае зніжэнне патэнцыялу застаецца пастаянным пры розных дыяметрах, то

$$q_{эф} = \frac{U_a + \varphi}{\pi R^2 t_1} \int_0^{t_1} I dt = \frac{(U_a + \varphi) I_{эф}}{\pi R^2} \quad (19)$$

Лічачы імпульс току прамавугольным з $I_{эф} = 8,5$ ка і мяркуючы, што U_a і φ адпаведна роўныя 6 і 4 в, для шчыльнасцей цеплавога патоку,

якія прыпадаюць на цыліндрычны электрод дыяметрам 6; 3; 1,5 і 0,75 мм, атрымаем значэнні $(0,3; 1,2; 4,8 \text{ і } 19,2) \cdot 10^{10} \text{ вт/м}^2$.

Эксперыментальныя і тэарэтычныя, разлічаныя па ўраўненню (17), значэнні скорасці струменяў пры адпаведных цеплавых патоках і $\beta = 1,25 \div 1,67$ прыведзены на рыс. 3. Адначасова намі вызначалася скорасць струменяў, якія вылятаюць з факелутвараючага электрода пры



Рыс. 3. Эксперыментальныя (крывыя) і разліковыя (заштрыхаваныя вобласці) значэнні скорасці струменя u , км/сек:

а — пры розных дыяметрах электродаў φ , мм; б — пры розных энергіях разрадлага контура I , ка

іскравым разрадзе ёмкасці $C = 400 \text{ мкф}$, $U = 300, 900, 2600 \text{ в}$, працягласці разраду $t_i = 320 \cdot 10^{-6} \text{ сек}$, велічыні разрадлага току ў імпульсах $I_{\text{эф}} = 0,6; 3 \text{ і } 24 \text{ ка}$. У гэтым выпадку эфектыўная шчыльнасць цеплага патоку, якая прыпадае на факелутвараючы электрод дыяметрам 2 мм, адпаведна роўная $(0,19; 0,96; 7,65) \cdot 10^{10} \text{ вт/м}^2$.

Для алюмініевых электродаў дыяметрам 3 і 6 мм, таксама як для малібдэнавага і меднага электродаў, пры малых значэннях $q_{\text{эф}}$ струменнага сцякання пары не назіраецца. Неабходна адзначыць, што вымераныя пачатковыя значэнні скорасцей для ўсіх даследаваных металаў амаль супадаюць з разліковымі значэннямі пры $\beta = 1,67$. Гэта ўказвае на тое, што струменьчыкі пары металу пры шчыльнасцях цеплага патоку, якія толькі нязначна перавышаюць $q_{\text{кр}}$, пры выльце, напэўна, неіанізаваныя.

Пры павышэнні эфектыўнай шчыльнасці цеплага патоку эксперыментальныя значэнні скорасцей струменяў пары металу, вымераныя пасля праходжання цёмнай прасторы, усё больш збліжаюцца з разліковымі значэннямі скорасцей на верхняй мяжы заштрыхаванай воб-

ласці ($\beta=1,25$), атрыманымі пры ўмове поўнай іанізацыі металічнай пары. Гэта сведчыць аб усё больш поўнай іанізацыі пары металаў у струменях, якія сцякаюць з факелутвараючага электрода.

Іанізацыю пары металу пры даследаваных $q_{эф}$ нельга вытлумачыць высокай тэмпературай паверхні электрода. Нават пры максімальным выкарыстаным $q_{эф}=1,22 \cdot 10^{11}$ вт/м² тэмпература паверхні электрода, разлічаная па формуле (12), не перавышае 6400 °С.

Ацэнка колькасці іанізаваных атамаў для тэмпературы 6400 °С па ўраўненню Саха паказвае, што лік іх складае каля 1% ад усёй колькасці атамаў у струмені факела. Застаецца меркаваць, што ў гэтым выпадку іанізацыя пары металу адбываецца ў цёмнай прыэлектроднай прасторы пры праходжанні факела праз канал разраду. Гэта меркаванне ўзгадняецца з літаратурнымі данымі [9, 10], паводле якіх плазменны струмень, распаўсюджваючыся ўздоўж канала разраду, мае тэмпературу ў 3—4 разы большую, чым пры адсутнасці канала разраду. Акрамя гэтага, магчыма, што павышэнню ступені іанізацыі садзейнічаюць таксама моцныя электрамагнітныя палі, якія ўзнікаюць пры працяканні разраднага току.

Літаратура

1. Мандельштам С. Л., Райский С. М. Изв. АН СССР, сер. фіз., 13, №5, 1949.
2. Корунчиков А. И., Янковский А. А. ЖПС, 5, № 5, 1966.
3. Головейко А. Г. Изв. вузов, Энергетика, № 12, 1965.
4. Анисимов С. И. и др. ЖТФ, 36, в. 7, 1966.
5. Головейко А. Г. ИФЖ, 13, № 2, 1967.
6. Померанцев А. А. Тепло- и массоперенос, 3. Общие вопросы теплообмена (тр. совещания). Госэнергоиздат, 1963.
7. Френкель Я. И. Сб. избр. трудов, 3. Кинетическая теория жидкостей. Изд. АН СССР, 1959.
8. Зельдович Я. Б., Райзер Ю. А. Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений. Изд. «Наука», М., 1966.
9. Снопко В. Н., Киселевский Л. И. ЖПС, 5, 2, 1966.
10. Огурцова Н. Н., Подмошенский И. В., Шелемина В. М. Опт. и спектр., 15, 743, 1963.

Белорусский политехнический институт,
Минский радиотехнический институт

Поступило в редакцию 10.X 1968

В. И. БЕЛОУСОВА, Э. А. РУДАК

ОСТАТОЧНОЕ $n-p$ -ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ В НЕЧЕТНО-НЕЧЕТНЫХ ЯДРАХ

1. Изучение структуры нижних уровней нечетно-нечетных ядер представляет значительный интерес ввиду возможности получить сведения об остаточном нейтрон-протонном взаимодействии $V_{np}(r)$:

$$V_{np}(r) = V_{eff}^n(1 - \alpha + \alpha\sigma_n\sigma_p)f(r) + V^T S_{12}f(r), \quad (1)$$

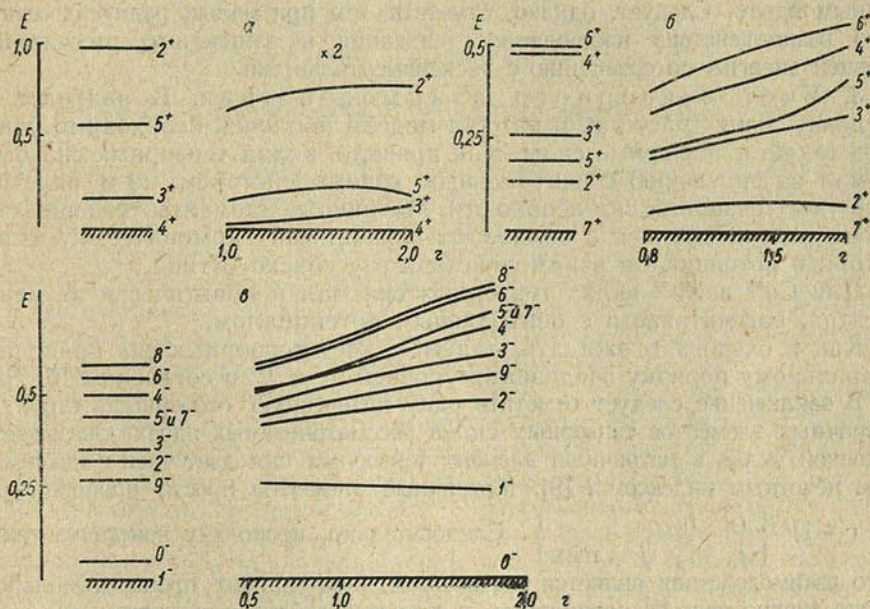
где V_{eff}^n — эффективный потенциал центрального взаимодействия; α — параметр смеси обычных и спин-обменных сил; V^T — потенциал тензорного взаимодействия; S_{12} — обычный оператор тензорного взаимодействия и $f(r)$ — функция, определяющая форму потенциала. Задача по существу сводится к установлению вида функции $f(r)$ и определению входящих в $V_{np}(r)$ параметров посредством расчета энергетического расщепления уровней нечетно-нечетных ядер. Однако необходимость выбора для исследуемых ядер определенных моделей заставляет с осторожностью подходить даже к результатам наиболее полных и последовательных теоретических расчетов. Пригодность выбранной модели для описания конкретного ядра в конечном итоге определяет надежность расчетов. Поэтому для исследования потенциала остаточного взаимодействия $V_{np}(r)$ следует использовать такие ядра, для описания которых пригодность той или иной модели не вызывает сомнений. С этой точки зрения из всех изученных экспериментально нечетно-нечетных ядер наиболее подходящими, по-видимому, являются ядра Cl^{38} и K^{40} . Ядра Cl^{38} и K^{40} имеют один протон и одну протонную «дырку» в оболочке $1d_{3/2}$ и один нейтрон в оболочке $1f_{7/2}$. Оба ядра очень хорошо описываются моделью нечетных групп в приближении $j-j$ -связи [1, 2]. Это позволяет получить из эксперимента достаточно точные значения разностей матричных элементов E_I и использовать их для оценки параметров. Параметры центрального и тензорного взаимодействия, полученные на основании данных по Cl^{38} и K^{40} , приведены в [3]. В настоящей работе делается попытка использовать полученные параметры для описания спектров уровней нечетно-нечетных ядер Co^{56} , Nb^{92} и Bi^{210} .

2. Расчет с центральным потенциалом. Расчет спектров уровней ядер Co^{56} , Nb^{92} и Bi^{210} производился с волновыми функциями гармонического осциллятора и потенциалом взаимодействия гауссовского типа. Параметры V_{eff}^n и α взяты из [3]. Результаты расчета и сравнение их с экспериментальными данными приведены на рисунке.

Для Co^{56} рассчитанный спектр уровней конфигурации $(1f_{7/2}^{-1}, 2p_{3/2})$ плохо согласуется с экспериментальным. Уровень 5^+ лежит гораздо ниже экспериментального. Наблюдающаяся с ростом r_{np} тенденция к пересечению уровней 3^+ и 5^+ явно противоречит эксперименту. Результат несколько неожиданный, поскольку ядро Co^{56} довольно близко к Cl^{38} и K^{40} по заполняе-

мым оболочкам протонов и нейтронов и можно было бы ожидать сходства потенциалов остаточного взаимодействия.

В случае ядра Nb^{92} рассчитанный спектр уровней конфигурации ($1g_{9/2}, 2d_{5/2}$) довольно хорошо согласуется с экспериментальным, если не считать инверсии уровней 3^+ и 5^+ и слишком большого энергетического интервала между уровнями 4^+ и 6^+ . Это обстоятельство отмечалось также в работе [4], согласно которой в ядре Nb^{92} параметр смеси $\alpha \sim 0,135$. Недавно было проведено дополнительное экспериментальное исследова-



Спектры уровней ядер Co^{56} (а), Nb^{92} (б) и Bi^{210} (в):

слева — эксперимент; справа — расчет

ние спектра уровней Nb^{92} с целью уточнить порядок следования уровней 3^+ и 5^+ [5]. Результаты работы оказались в согласии с предыдущими экспериментами. По-видимому, только центральное взаимодействие не может правильно объяснить порядок следования всех уровней в ядре Nb^{92} .

Рассчитанный спектр уровней конфигурации ($1h_{9/2}, 2g_{9/2}$) в ядре Bi^{210} достаточно хорошо воспроизводит экспериментальный, за исключением уровней 0^- и 1^- . Это хорошо известный случай нарушения «сильного» правила Нордгейма. Наблюдаемый экспериментально порядок следования уровней 0^- и 1^- объясняется действием тензорных сил. При этом положение уровней с более высокими спинами под действием тензорных сил изменяется мало [6, 7].

Таким образом, центральное остаточное взаимодействие, параметры V_{eff}^n и α которого определены посредством расчета спектров уровней конфигураций ($1d_{3/2}, 1f_{7/2}$) и ($1d_{3/2}, 1f_{7/2}$) в ядрах Cl^{38} и K^{40} , удовлетворительно описывает спектры уровней ядер Nb^{92} и Bi^{210} и плохо спектр уровней ядра Co^{56} . Более детальное исследование спектров уровней указанных ядер посредством варьирования параметров V_{eff}^n и α показывает, что они существенно зависят от величины параметра смеси α . Так, спектр уровней ядра Co^{56} очень хорошо описывается центральными силами короткого радиуса и с малым параметром смеси $\alpha \sim 0,08$ [8]. Именно большой параметр смеси $\alpha \sim 0,16$ и

приводит к плохому согласию рассчитанного спектра с экспериментальным. Случай с ядром Co^{56} позволяет сделать вывод, что параметр смеси обычных и спин-обменных сил α является не только функцией радиуса взаимодействия, но и существенно зависит от одночастичных состояний нейтрона и протона. В ядре Nb^{92} , напротив, для объяснения наблюдаемого экспериментально порядка следования уровней 2^+ и 7^+ параметр смеси α должен быть большим $\sim 0,13 - 0,16$. Ядро Bi^{210} не очень критично к величине параметра смеси α . Параметр V_{eff}^u в одинаковой степени удовлетворяет всем рассмотренным ядрам. Следует, однако, отметить, что при малых радиусах остаточного взаимодействия наблюдается тенденция к занижению рассчитанных уровней энергии по сравнению с экспериментальными.

3. Учет тензорного взаимодействия. В наиболее последовательных расчетах в рамках модели оболочек необходимо учитывать также и тензорные силы. Как правило, вклад тензорных сил бывает мал по сравнению с центральным взаимодействием, но в ряде случаев учет тензорных сил необходим. Матричные элементы тензорных сил также рассчитывались с волновыми функциями гармонического осциллятора и потенциалом взаимодействия гауссовского типа.

Для Co^{56} и Nb^{92} вклад тензорных сил мал и практически не меняет спектра, рассчитанного с центральным потенциалом.

Как и следовало ожидать, для Bi^{210} учет тензорных сил приводит к правильной порядку следования уровней 0^- и 1^- в согласии с [6, 7].

В заключение следует отметить одну интересную особенность структуры матричных элементов тензорных сил в рассматриваемых ядрах. Оказывается, основной вклад в матричный элемент тензорных сил дает член с максимальным нечетным индексом l [9]. Матричные элементы просто пропорциональны $(-1)^l \begin{Bmatrix} j_p & j_n & l \\ j_n & j_p & l = \max \end{Bmatrix}$. Следовательно, поскольку константа тензорного взаимодействия является параметром, коэффициент пропорциональности также можно считать параметром, и характер действия тензорных сил может быть понят без непосредственных расчетов радиальных интегралов. Как правило, большинство расчетов с учетом тензорных сил проводится на ЭЦВМ, и такая простая структура матричных элементов осталась незамеченной. Следует также отметить, что во всех трех случаях тензорные силы действуют в направлении, обратном действию спин-обменных сил.

Литература

1. Goldstein S., Talmi I. Phys. Rev., **102**, 589, 1956.
2. Pandya S. P. Phys. Rev., **103**, 956, 1956.
3. Рудак Э. А. Ядерная физика, **7**, 1192, 1968.
4. Pandya S. P. Phys. Lett., **10**, 178, 1964.
5. Ball J. B., Cates M. R. Phys. Lett., **25**, 126, 1967.
6. Kim I. E., Rasmussen J. O. Nucl. Phys., **47**, 184, 1963.
7. Hughes T. A., Snow R., Pinkston W. T. Nucl. Phys., **82**, 129, 1966.
8. Wells D. O. Nucl. Phys., **66**, 562, 1965.
9. DeShalit A., Walecka J. D. Nucl. Phys., **22**, 184, 1961.

УДК 539.17

А. П. БОГДАНОВ, Э. А. РУДАК, Е. И. ФИРСОВ

РЕАКЦИЯ $\text{Ca}^{48}(n, \gamma)\text{Ca}^{49}$ НА ТЕПЛОВЫХ НЕЙТРОНАХ

Исследование реакции $\text{Ca}^{48}(n, \gamma)\text{Ca}^{49}$ на тепловых нейтронах представляет особый интерес с точки зрения «прямого» захвата нейтрона [1], поскольку ядро Ca^{49} состоит из дважды магического остова Ca^{48} и одного валентного нейтрона. Аналогичная ситуация наблюдается в реакции $\text{Ca}^{40}(n, \gamma)\text{Ca}^{41}$ на тепловых нейтронах, сечение которой и, как отмечается в [2], отношение приведенных вероятностей γ -переходов типа $E1$ из захватного состояния на нижние $p_{3/2}$ - и $p_{1/2}$ -уровни можно удовлетворительно объяснить «прямым» захватом нейтрона.

Ранее спектр γ -лучей из реакции $\text{Ca}^{48}(n, \gamma)\text{Ca}^{49}$ на тепловых нейтронах исследовался с помощью люминесцентного спектрометра с защитой антисовпадениями [3]. Были обнаружены γ -переходы Ca^{49} из захватного состояния в основное и на первый возбужденный уровень 2,03 Мэв.

Возбужденные уровни ядра Ca^{49} исследовались в реакции срыва $\text{Ca}^{48}(n, \gamma)\text{Ca}^{49}$ [4, 5]. Одночастичные $2p_{3/2}$ - и $2p_{1/2}$ -уровни ядра Ca^{49} расположены при энергиях возбуждения 0 и 2,03 Мэв и имеют примерно одинаковые приведенные нейтронные ширины. Наиболее подробная схема уровней ядра Ca^{49} приведена в [6].

Экспериментальные результаты. Спектр γ -лучей из реакции $\text{Ca}^{48}(n, \gamma)\text{Ca}^{49}$ на тепловых нейтронах исследовался на реакторе ИРТ АН БССР с помощью магнитного комптоновского γ -спектрометра с разрешением 2% и люминесцентного спектрометра γ - γ -совпадений. В качестве образца использовался углекислый кальций CaCO_3 . Вес образца 2,32 г. Изотопический состав кальция и вклад отдельных изотопов в сечение реакции (n, γ) на тепловых нейтронах, согласно паспортным данным, следующие:

Изотоп	Ca^{40}	Ca^{42}	Ca^{43}	Ca^{44}	Ca^{46}	Ca^{48}
Содержание изотопа, %	29,8	0,5	0,4	2,2	0,1	67,1
Сечение реакции, б	0,22	0,61	—	0,72	0,25	1,1
Вклад изотопа в сечение, %	7,9	0,3	—	1,9	—	89,7

(сечение реакции $\text{Ca}^{42}(n, \gamma)\text{Ca}^{43}$ на тепловых нейтронах определено в [8]).

С помощью люминесцентного спектрометра получен одиночный спектр γ -лучей Ca^{49} (рис. 1) и установлен каскадный переход $3,09 \rightarrow 2,06$ Мэв Ca^{49} из захватного состояния в основное через p -уровень 2,03 Мэв. Энергия γ -лучей 5,14 и 3,09 Мэв с точностью в 20 кэв определены с помощью магнитного комптоновского γ -спектрометра. Определение интенсивностей γ -лучей Ca^{49} связано с некоторыми трудностями, так как ядро Ca^{49} распадается с периодом 8,8 мин на первый возбужденный уровень 3,08 Мэв ядра Sc^{49} . Поэтому в спектре γ -лучей Ca^{49} присутствует интенсивная фоновая линия с энергией 3,08 Мэв. После учета вклада данной линии для интенсивностей γ -лучей Ca^{49} 5,14, 3,09 и 2,06 Мэв

получены значения 78, 22 и 22 соответственно (интенсивности даны в числах γ -лучей на 100 захватов нейтронов).

Обсуждение экспериментальных результатов. В реакции $\text{Ca}^{48}(n, \gamma)\text{Ca}^{49}$ на тепловых нейтронах удалось установить γ -переходы типа $E1$ из захватного состояния в основное ($5,14 \text{ Мэв}$) и на первый возбужденный $p_{1/2}$ -уровень $2,03 \text{ Мэв}$ ($3,09 \text{ Мэв}$). Представляет интерес попытаться интерпретировать их с точки зрения «прямого» захвата нейтрона. В случае «прямого» захвата нейтрона вероятности γ -пе-

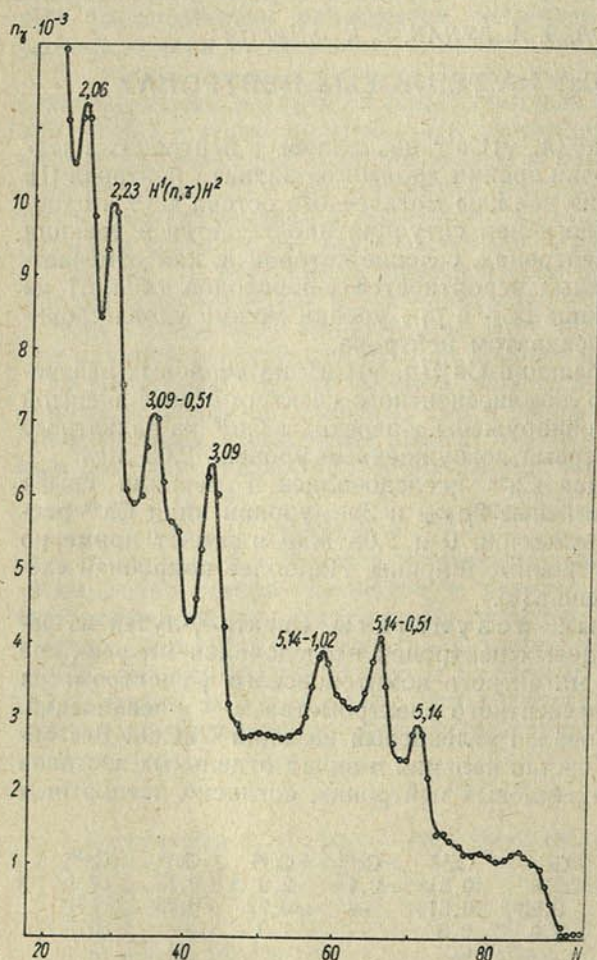


Рис. 1. Одиночный спектр γ -лучей из реакции $\text{Ca}^{48}(n, \gamma)\text{Ca}^{49}$ на тепловых нейтронах (n, γ — число импульсов; N — номер канала)

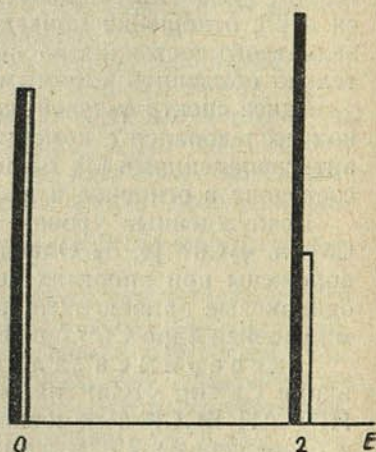


Рис. 2. Сравнение вероятностей γ -переходов типа $E1$ из захватного состояния Ca^{49} с приведенными нейтронными ширинами конечных p -уровней (единицы относительные):

черная полоса — I_{γ}/E_{γ}^3 ; светлая — $\theta^2(2j+1)$ [4]

реходов типа $E1$ из захватного состояния, пропорциональные I_{γ}/E_{γ}^3 (E_{γ} — энергия перехода, I_{γ} — интенсивность), должны коррелировать с приведенными нейтронными ширинами $v_n^2(2j+1)$ конечных p -уровней (j — спин p -уровня) [1]. Результаты сравнения вероятностей γ -переходов типа $E1$ из захватного состояния Ca^{49} с приведенными нейтронными ширинами конечных p -уровней приведены на рис. 2. Ожидаемой в случае «прямого» захвата нейтрона корреляции между указанными выше величинами здесь не наблюдается.

В связи с этим представляет интерес сделать теоретические оценки сечения «прямого» захвата нейтрона ядром Ca^{48} . Сечение «прямого»

захвата рассчитывалось по формуле [1]

$$\sigma = \frac{4}{9} \frac{1}{\pi v} \times \frac{Z^2}{A^2} \times \frac{e^2}{c^3 \hbar^4} \times (2j_f + 1) \times E_\gamma^3 \times \left| \int_0^\infty \Psi_f^* r \operatorname{Re} \Psi_i r^2 dr \right|^2 \quad (1)$$

Здесь Ψ_i и Ψ_f — волновые функции начального и конечного состояний; j_f — спин конечного p -уровня; E_γ — энергия перехода на p -уровень со спином j_f ; v — скорость тепловых нейтронов. Поскольку применение ЭЦВМ позволяет решать уравнение Шредингера для очень широкого класса потенциалов, оценка сечения «прямого» захвата по существу сводится к выбору потенциала взаимодействия нейтрона с ядром. Волновые функции связанных p -уровней Ψ_f и налетающих нейтронов Ψ_i рассчитывались в потенциале Саксона — Вудса

$$V(r) = -V_0 \left(1 + \exp \frac{r-R}{a} \right)^{-1} \quad (2)$$

Здесь V_0 — глубина потенциальной ямы; $R = 1,25 \times A^{1/3} \phi$; a — параметр размытия края потенциальной ямы.

В случае налетающих нейтронов использовался оптический потенциал с учетом изобарического члена [7]

$$V_0 = V \left(1 - 0,63 \frac{N-Z}{A} \right) (1 + i\xi) \text{ Мэв.} \quad (3)$$

Таблица

Сечения «прямого» захвата нейтронов в зависимости от параметра размытия края потенциальной ямы и мнимой части оптического потенциала

$E_\gamma, \text{ Мэв}$	$V\xi, \text{ Мэв}$	j_f	$\sigma, \text{ б}$			
			$a=0,5$	$a=0,6$	$a=0,7$	эксп.
Ядро Ca^{41}						
6,41	0	3/2-	—	0,214	—	0,05
	1		0,047	0,096	0,324	
	2		0,060	0,129	0,353	
	3		0,064	0,144	0,351	
4,42	0	1/2-	—	0,043	—	0,03
	1		0,010	0,025	0,068	
	2		0,013	0,027	0,075	
	3		0,014	0,029	0,074	
Ядро Ca^{49}						
5,15	0	3/2-	0,022	0,048	0,094	0,86
	1		0,027	0,062	0,014	
	2		0,031	0,081	0,154	
	3		0,035	0,086	0,144	
3,15	0	1/2-	0,003	0,005	0,014	0,24
	1		0,004	0,008	0,021	
	2		0,005	0,009	0,023	
	3		0,005	0,010	0,022	

В случае связанных p -уровней глубина потенциальной ямы при заданных параметрах R , a и энергии связи уровня подбирается ЭЦВМ автоматически. Расчеты функций Ψ_i и Ψ_f производились в вычислительном центре ЛГУ им. А. А. Жданова на ЭЦВМ «М-20» и «БЭСМ».

Для сравнения сечение «прямого» захвата нейтрона рассчитывалось также для ядра Ca^{40} . Результаты расчетов сечения «прямого» захвата при $V=53 \text{ Мэв}$, $V\xi=0, 1, 2$ и 3 Мэв в зависимости от параметра a представлены в таблице.

В случае ядра Ca^{49} не удалось получить правильное отношение матричных элементов переходов $5,15$ и $3,15 \text{ Мэв}$ ни при каком выборе па-

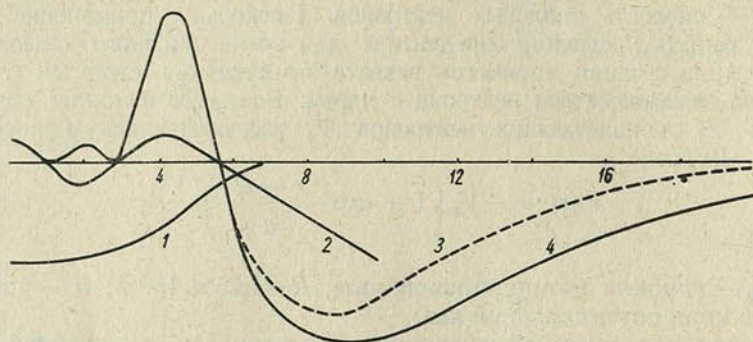


Рис. 3. Волновая функция налетающего нейтрона Ψ_i и интегранд $\Psi_i^* r \Psi_f r^2$ в потенциале Саксона—Вудса для ядра Ca^{41} [2] (r, ϕ):
1 — $v(r)$; 2 — Ψ_i ; 3 — $(s \rightarrow 2p_{3/2})$; 4 — $(s \rightarrow 2p_{1/2})$

раметров a и $V\xi$. Также не удается объяснить и абсолютные значения сечений указанных переходов. По-видимому, «прямой» захват в реакции (n, γ) на ядре Ca^{48} не играет существенной роли, что согласуется с результатами последних экспериментов по измерению сечения «прямого» захвата в ядрах с $A \sim 50$ [9—11].

Особый интерес представляет ядро Ca^{41} . Сечение «прямого» захвата в ядре Ca^{41} рассчитывалось в работе [2] также с потенциалом Саксона—Вудса ($a=0,65 \phi$, $R=4,55 \phi$ и $V=47,1 \text{ Мэв}$). Для сечения было получено значение $0,55 \text{ б}$ и для отношения приведенных матричных элементов переходов $4,42$ и $6,41 \text{ Мэв}$ $3,1$, что достаточно хорошо согласуется с экспериментом. При этом оказывается, что основной вклад в матричный элемент дает область, находящаяся далеко за пределами ядра (рис. 3 из [2]).

В настоящей работе получить правильное отношение матричных переходов $4,42$ и $6,41 \text{ Мэв}$ не удалось ни при каком выборе параметров a и $V\xi$. Причина расхождения настоящих расчетов с результатами работы [2] заключается в волновой функции налетающего нейтрона. Функция Ψ_i , приведенная в [5], обладает лишним узлом при $r \sim 6 \phi$ и соответствует ядрам с гораздо большим массовым числом, чем 40.

В заключение авторы выражают признательность К. А. Гридневу и Л. В. Краснову за проведение расчетов волновых функций нейтрона в вычислительном центре ЛГУ им. А. А. Жданова.

Литература

1. Lane A. M., Lynn J. E. Nucl. Phys., 17, 563, 1960.
2. Morinaga H., Ishii C. Progr. Theor. Phys., 23, 161, 1960.
3. Raboy S., Trail C. BAPS, 9, 176, 1964.

4. Kashy E., Sperduto A., Enge H. A., Buechner W. W. Phys. Rev., 135, 865B, 1964.
5. Erskine J. R., Marinov A., Schiffer J. P. Phys. Rev., 142, 633, 1966.
6. Endt P. M., Van der Leun C. Nucl. Phys., A105, 1, 1967.
7. Чепурнов В. А. Ядерная физика, 6, 955, 1967.
8. Jr. Cranston F. P., White D. H., Smith A. J. BAPS, 9, 17, 1964.
9. Wasson O. A., Draper J. E. Nucl. Phys., 73, 499, 1965.
10. Wasson O. A., Bhat M. R., Chrien B. E., Lone M. A., Beer M. Phys. Rev. lett., 17, 1220, 1966.
11. Comfort J. R. Phys. Rev. lett., 20, 941, 1968; 21, 1030, 1968.

Институт физики АН БССР

Поступило в редакцию 3.11 1969

КАРОТКІЯ ПАВЕДАМЛЕННІ

УДК 536.421.4+536.421.1

В. М. РЫЖКОВСКИЙ, Н. Н. СИРОТА

НЕЙТРОНОГРАФИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ПЛАВЛЕНИЯ АНТИМОНИДА ГАЛЛИЯ

В данной работе с помощью нейтронографического метода исследовался переход из кристаллического в жидкое состояние полупроводникового соединения GaSb с целью установления особенностей изменения структуры при переходе через точку плавления.

Нейтронографическое исследование проводилось на нейтронографе, сконструированном на базе рентгеновского гониометра ГУР-3 и установленном на одном из горизонтальных каналов исследовательского реактора АН БССР. Использовался монохроматический пучок нейтронов с длиной волны $\lambda = 1,23 \text{ \AA}$. Монохроматизация осуществлялась по обычной схеме на отражение от плоскости (111) монокристалла Рb. Рассеянные на образце нейтроны регистрировались счетчиком СНМО-5, и отсчеты автоматически записывались с помощью специального устройства для автоматической записи нейтронограмм.

Для проведения нейтронографических съемок при высоких температурах была изготовлена специальная печь. Нагревательный элемент печи представляет собой нихромовую спираль, помещенную в корпус из теплоизоляционного материала с окошками для входного и выходного нейтронных пучков. Внутри печи помещается медный цилиндрический контейнер для образца с толщиной стенки 3 мм, который служит для выравнивания температуры в рабочем объеме. Печь заключена в экран из алюминия толщиной 1 мм. Такая конструкция печи обеспечивала возможность достижения температур до 900°C при небольшом температурном градиенте в рабочем объеме печи и вместе с тем была достаточно «прозрачной» для нейтронов.

Образец GaSb в вакуумированной до 10^{-3} мм рт. ст. кварцевой ампуле диаметром 15 мм со специальным вводом для термопары помещался в медный контейнер печи. Температура образца измерялась с помощью хромель-алюмелевой термопары и потенциометра постоянного тока типа ПП. Питание печи осуществлялось через электронный стабилизатор ES-531 «Энергия». Достаточно высокая стабильность питающего напряжения (0,1%), высокая инерционность печи и защищенность от внешних воздействий среды (печь находилась в баке радиационной защиты) позволяли поддерживать в рабочей ампуле установленную температуру с точностью $\pm 0,5^\circ\text{C}$ без дополнительных термостабилизирующих устройств.

Для нейтронографических съемок использовались монокристаллические образцы GaSb. Использование монокристаллических образцов давало возможность получать достаточно высокие интенсивности отражений при сравнительно небольших размерах падающего нейтронного пучка.

Соединение GaSb в виде крупнокристаллических образцов было получено сплавлением компонент по обычной методике. Исходным материалом для синтеза GaSb служили (%): галлий 99,99, сурьма «экстра» 99,999. Выбор и ориентировка монокристалла производились непосредственно на нейтронографе.

Для нейтронографических съемок использовался, как правило, самый интенсивный рефлекс от плоскости (111) при $2\theta = 20^\circ 20'$. В данном угловом интервале отсутствуют какие-либо когерентные пики, даваемые печью.

Производилось измерение интегральной интенсивности рефлекса в целом. С этой целью счетчик устанавливался в угловое положение, соответствующее максимуму рефлекса, а коллиматор «счетчик — образец» заменялся кадмиевой трубой диаметром 30 мм. Это обеспечивало перекрытие всего рефлекса счетчиком.

Температура плавления определялась предварительно по термическим кривым нагрева и охлаждения, причем после каждой съемки проводилось ее проверочное определение.

Для подтверждения правильности фиксации термодарой температуры плавления был поставлен проверочный эксперимент. Образец GaSb подвешивался на термодаре. По достижении температуры плавления образец, расплавляясь, стекал и выходил из области пучка нейтронов. При этом термодара точно указывала температуру плавления.

Так как в узком температурном интервале окрестности точки плавления возникали определенные трудности в установлении заданной температуры через каждые $1-2^\circ\text{C}$, как правило, использовался медленный нагрев с непрерывным изменением температуры. Непрерывно регистрировалось число нейтронов, рассеянных образцом за каждые последовательные 30 сек, и одновременно фиксировалась температура образца при каждом отсчете.

Поскольку при отсутствии терморегулировки после расплавления образца температура быстро растет, необходимо было найти способ искусственного замедления роста температуры расплава выше точки плавления. Для этого крупнокристаллические образцы GaSb брались большими (весом до 50 г) и в нижней части образца искусственно создавался температурный градиент (до $2-3^\circ\text{C}/\text{см}$). Измерительная термодара находилась в области облучаемого нейтронами монокристалла, где температурный градиент не превышал $0,7^\circ\text{C}/\text{см}$. Исследуемый монокристалл расплавлялся и шел его медленный перегрев, который фиксировала термодара, при продолжающемся плавлении остальной («низкотемпературной») части образца. Для уменьшения влияния температурного градиента в области исследуемого монокристалла облучаемый объем сводился к минимуму (максимальный размер нейтронного пучка был 10×10 мм, минимальный — 10×13 мм).

В процессе исследования было проведено несколько серий нейтронографических съемок. На рис. 1, а показаны кривые изменения интенсивности рефлекса (111) монокристалла GaSb в зависимости от температуры в окрестности точки плавления.

Как следует из полученных экспериментальных данных, с повышением температуры после достижения температуры плавления интенсивность рефлекса (111) у GaSb начинает резко снижаться, однако полное слияние рефлекса с фоном отмечается лишь при температурах, на $3-5^\circ\text{C}$ превышающих температуру плавления.

Проведенные нами контрольные измерения изменения интенсивности рефлексов (111) на монокристалле свинца показали, что подобного эффекта в случае свинца не наблюдается. При достижении температуры

плавления дальний порядок полностью разрушается и когерентное рассеяние исчезает (рис. 1, б).

Изменение интенсивности рефлекса (111) для GaSb со временем при переходе через точку плавления не монотонно выше точки плавления, а скачкообразно.

Полученные экспериментальные данные позволяют заключить, что соединение GaSb сохраняет дальний порядок структуры, по крайней мере в направлении [111] в узком интервале температур 3—5 °С выше точ-

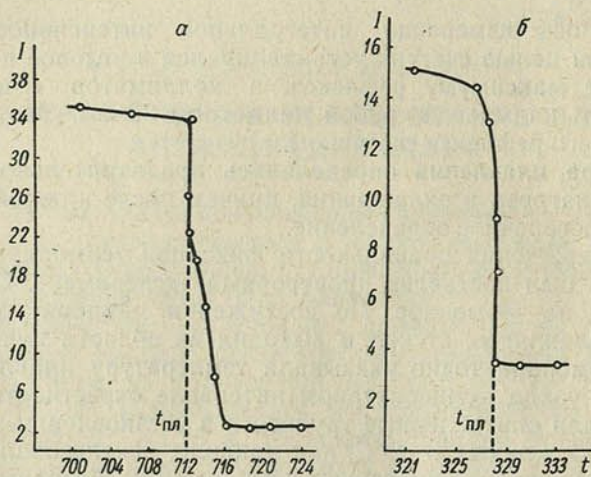


Рис. 1. Изменение интенсивности рефлекса (111) I , отн. ед. GaSb (а) Pb (б) в зависимости от температуры t , °С в окрестности точки плавления

ки плавления. Разрушение дальнего порядка в этом температурном интервале происходит скачками.

Заметим, что наши результаты находятся в известном согласии с результатами работ других авторов по исследованию структурно-чувствительных характеристик антимида галлия при переходе через точку плавления [1—3].

Литература

1. Глазов В. М., Чижевская С. Н. ФТТ, 3, № 9, 1961.
2. Амирханов Х. И., Магомедов Я. Б. УФЖ, 12, № 2, 1967.
3. Глазов В. М., Чижевская С. Н., Глаголева Н. Н. Жидкие полупроводники. Изд. «Наука», М., 1967.

Институт физики твердого тела
и полупроводников АН БССР

Поступило в редакцию 29.VII 1968

Б. В. БОКУТЬ, А. Н. СЕРДЮКОВ

НЕЛИНЕЙНОЕ ПОНДЕРОМОТОРНОЕ ВРАЩЕНИЕ, ВЫЗВАННОЕ МОЩНЫМ ИЗЛУЧЕНИЕМ

Пондеромоторное вращающее действие (эффект Садовского) заключается, как известно [1], в том, что под действием излучения среда испытывает вращающий момент плотности $\mathbf{M} = [\mathbf{P}\mathbf{E}]$. Расчет величины этого момента для случая линейной поляризации $\mathbf{P} = \hat{\kappa} \cdot \mathbf{E}$ был выполнен в [1, 2]. Однако, вообще говоря, поляризация \mathbf{P} зависит от напряженности поля \mathbf{E} внутри среды нелинейно: $\mathbf{P} = \hat{\kappa} \cdot \mathbf{E} + \hat{\chi} : \mathbf{E}\mathbf{E} + \hat{\theta} : \mathbf{E}\mathbf{E}\mathbf{E} + \dots$, где $\hat{\chi}$ и $\hat{\theta}$ — тензоры нелинейной восприимчивости соответственно третьего и четвертого ранга. Рассмотрение пондеромоторного действия излучения, обусловленного нелинейной зависимостью \mathbf{P} от \mathbf{E} , представляет несомненный интерес. В частности, в некоторых случаях измерение такого вращающего момента может дать дополнительную возможность экспериментального определения параметров нелинейностей.

Учитывая нелинейную зависимость \mathbf{P} от \mathbf{E} , получим для плотности вращающегося момента выражение

$$\mathbf{M} = [\hat{\kappa} \cdot \mathbf{E}, \mathbf{E}] + [\hat{\chi} : \mathbf{E}\mathbf{E}, \mathbf{E}] + [\hat{\theta} : \mathbf{E}\mathbf{E}\mathbf{E}, \mathbf{E}]. \quad (1)$$

Здесь первое слагаемое, связанное с восприимчивостью $\hat{\kappa}$, характеризует линейный вращающий момент, а два другие — нелинейный вращающий момент. В соответствии с этим будем говорить о линейном или нелинейном эффекте Садовского.

В дальнейших расчетах ограничимся каким-либо конкретным классом кристаллов, например $\overline{42m}$. Выберем систему координат так, чтобы ось z совпадала с оптической осью кристалла. Тогда $\kappa_{\mu\nu} = \kappa_{(\nu)}\delta_{\mu\nu}$, $\kappa_{(1)} = \kappa_{(2)} = \kappa_0$, $\kappa_{(3)} = \kappa_e$. Для тензоров $\hat{\chi}$ и $\hat{\theta}$ симметрия кристалла допускает отличие от нуля лишь компонент $\chi_{3,21}$, $\chi_{1,23} = \chi_{2,13}$ и $\theta_{1,111} = \kappa_{\mu\nu} = \kappa_{(\nu)}\delta_{\mu\nu}$, $\kappa_{(1)} = \kappa_{(2)} = \kappa_0$, $\kappa_{(3)} = \kappa_e$. Для тензоров $\hat{\chi}$ и $\hat{\theta}$ симметрия кристалла допускает отличие от нуля лишь компонент $\chi_{3,21}$, $\chi_{1,23} = \chi_{2,13}$ и $\theta_{1,111} = \theta_{2,222}$, $\theta_{3,333}$, $\theta_{2,233} = \theta_{3,223} = \theta_{1,133} = \theta_{3,113}$, $\theta_{1,122} = \theta_{2,112}$ [3, 4], причем $\chi_{\mu,\nu\sigma}$ и $\theta_{\mu,\nu\sigma\rho}$ предполагаются симметричными относительно любой перестановки соответственно двух и трех последних индексов. Таким образом, из (1) следует

$$\begin{aligned} M_1 &= 2\chi_{1,23}E_1E_3^2 - 2\chi_{3,21}E_1E_2^2 + [\kappa_0 - \kappa_e + \theta_{1,111}E_1^2 - \\ &\quad - \theta_{3,333}E_3^2 - 3\theta_{2,233}(E_1^2 + E_2^2 - E_3^2) + 3\theta_{1,122}E_1^2]E_2E_3, \\ M_2 &= -2\chi_{1,23}E_2E_3^2 + 2\chi_{3,21}E_2E_1^2 - [\kappa_0 - \kappa_e + \theta_{1,111}E_1^2 - \\ &\quad - \theta_{3,333}E_3^2 - 3\theta_{2,233}(E_1^2 + E_2^2 - E_3^2) + 3\theta_{1,122}E_2^2]E_1E_3, \\ M_3 &= -2\chi_{1,23}E_3(E_1^2 - E_2^2) + (\theta_{1,111} - 3\theta_{1,122})E_1E_2(E_1^2 - E_2^2). \end{aligned} \quad (2)$$

Отсюда легко видеть, что для кристаллов рассматриваемой симметрии в случае сильных полей линейный эффект Садовского невозможно наблюдать в чистом виде из-за влияния нелинейной восприимчивости $\hat{\theta}$.

В нелинейной среде, как известно, кроме волн на частоте падающего излучения, генерируется и электромагнитное излучение на кратных частотах [3, 5]. Ощутимая для рассматриваемой задачи интенсивность такого излучения может быть получена лишь для определенных направлений распространения основных волн (фазовое согласование). Чтобы можно было пренебречь генерацией высших гармоник, выберем направление распространения излучения в среде, отличающееся от направления фазового согласования. Например, ориентируя кристалл таким образом, чтобы излучение распространялось вдоль оптической оси кристалла z ($E_3=0$), из (2) получим

$$M_1 = -2\chi_{3,21}E_1E_2^2, \quad M_2 = 2\chi_{3,21}E_2E_1^2, \quad (3)$$

$$M_3 = (\theta_{1,111} - 3\theta_{1,122})E_1E_2(E_1^2 - E_2^2).$$

Если поле E в среде является монохроматическим, то усреднение (3) по времени обратит в нуль компоненты плотности вращающего момента M_1 и M_2 . Таким образом, усредненный вращающий момент в рассматриваемой ситуации будет обусловлен только тензором $\hat{\theta}$

$$M = \epsilon_3(\theta_{1,111} - 3\theta_{1,122})\langle E_1E_2(E_1^2 - E_2^2) \rangle. \quad (4)$$

Появление вращающего момента при распространении излучения большой интенсивности вдоль оптической оси одноосного кристалла вызвано тем, что величины $\langle E_1^2 \rangle$ и $\langle E_2^2 \rangle$ приводят к эффекту Керра, пропорциональному квадрату напряженности электрического поля [6]:

$$\kappa'_{(1)} = \kappa_0 + \theta_{1,111}\langle E_1^2 \rangle + 3\theta_{1,122}\langle E_2^2 \rangle,$$

$$\kappa'_{(2)} = \kappa_0 + \theta_{1,111}\langle E_2^2 \rangle + 3\theta_{1,122}\langle E_1^2 \rangle,$$

в результате чего одноосный кристалл в оптическом отношении становится, вообще говоря, двуосным. Соответствующие эффективные волновые числа при этом будут равны

$$k_1 = \frac{\omega}{c} \sqrt{\epsilon_1} = \frac{\omega}{c} \sqrt{1 + 4\pi(\kappa_0 + \theta_{1,111}\langle E_1^2 \rangle + 3\theta_{1,122}\langle E_2^2 \rangle)},$$

$$k_2 = \frac{\omega}{c} \sqrt{\epsilon_2} = \frac{\omega}{c} \sqrt{1 + 4\pi(\kappa_0 + \theta_{1,111}\langle E_2^2 \rangle + 3\theta_{1,122}\langle E_1^2 \rangle)}.$$

Учитывая только первые члены в разложении k_1 и k_2 по степеням $\theta_{\mu,\nu\sigma\rho}$, приближенно можем записать

$$k_1 = k_0 + \frac{2\pi\omega}{cn_0}(\theta_{1,111}\langle E_1^2 \rangle + 3\theta_{1,122}\langle E_2^2 \rangle), \quad (5)$$

$$k_2 = k_0 + \frac{2\pi\omega}{cn_0}(\theta_{1,111}\langle E_2^2 \rangle + 3\theta_{1,122}\langle E_1^2 \rangle),$$

где n_0 — показатель преломления обыкновенной волны с частотой ω (для слабых сигналов в линейном приближении), $k_0 = \frac{\omega n_0}{c}$ — ее волновое число.

Рассмотрим кристалл как полубесконечную среду, границей которой является плоскость, образованная кристаллографическими осями второго порядка x и y . Пренебрегая генерацией высших гармоник и изменением амплитуд волн вследствие нелинейности среды, можем записать компоненты напряженности электрического поля в кристалле [7]

$$E_{\mu} = \frac{2n}{n + n_0} U_{\mu} \cos(\omega t - k_{\mu} z + \delta_{\mu}), \quad \mu = 1, 2, \quad (6)$$

где U_{μ} — амплитуды нормально падающих на кристалл волн с фазовыми постоянными δ_{μ} ; n — показатель преломления волны в изотропной среде. Подставляя (5) и (6) в (4), получим величину вращающего момента $L = \int_0^d M dz$, действующего на кристалл площади S и толщины d :

$$L = \frac{3Scn_0 n^2 U^2 e_3 \sin 2\varphi}{4\pi\omega (n + n_0)^2} \times \left\{ \sin \left[\delta + \frac{4\pi\omega n^2 U^2 d}{cn_0 (n + n_0)^2} (\theta_{1,111} - 3\theta_{1,122}) \cos 2\varphi \right] - \sin \delta \right\}. \quad (7)$$

Здесь $U^2 = U_1^2 + U_2^2$, $\varphi = \arctg \frac{U_2}{U_1}$, $\delta = \delta_2 - \delta_1$. Учитывая то обстоятельство, что компоненты тензора $\hat{\theta}$ малы ($\sim 10^{-15}$ ед. CGSE [8]), будем считать, что для кристаллов обычных размеров

$$\begin{aligned} \sin \left[\frac{4\pi\omega n^2 U^2 d}{cn_0 (n + n_0)^2} (\theta_{1,111} - 3\theta_{1,122}) \cos 2\varphi \right] &\approx \\ &\approx \frac{4\pi\omega n^2 U^2 d}{cn_0 (n + n_0)^2} (\theta_{1,111} - 3\theta_{1,122}) \cos 2\varphi. \end{aligned}$$

Поэтому выражение (7) для кристаллов разумной толщины d приближенно с достаточной степенью точности может быть записано в следующем виде:

$$L = \frac{3Sdn^4 U^4 e_3}{2(n + n_0)^4} (\theta_{1,111} - 3\theta_{1,122}) \cos \delta \sin 4\varphi. \quad (8)$$

Аналогичные расчеты могут быть проделаны и для других одноосных и кубических кристаллов. Результаты таких расчетов для случая распространения излучения вдоль оптической оси кристалла приведены в таблице.

Нелинейный вращающий момент здесь зависит как от амплитуды, так и от поляризации падающего излучения. Как нетрудно видеть, в случае круговой поляризации $\left(\varphi = \frac{\pi}{4}; \delta = \frac{\pi}{2} (2N + 1), N = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \right)$ нелинейный вращающий момент оказывается отличным от нуля только для кристаллов тригональной системы. Для классов кристаллов $4mm$, $\bar{4}2m$, 422 , $4/m\bar{3}m$ и кубических этот момент оказывается наибольшим, когда падающее излучение линейно поляризовано ($\delta = N\pi$).

Полученные выражения для вращающего момента в некоторых случаях могут быть использованы для экспериментального определения соответствующих компонент тензора $\hat{\theta}$. Например, как это следует из таблицы, измеряя величины L и U , можно определить $\theta_{3,222}$ для кристаллов классов $3m$, 32 , $\bar{3}m$. Кроме того, в отдельных случаях определен-

Вращающий момент для случая распространения излучения
вдоль оптической оси одноосных кристаллов

Классы кристаллов	Вращающий момент
3, $\bar{3}$	$L = - \frac{3Sdn^4U^4}{(n+n_0)^4} \{ 2(e_1\theta_{3,222} - e_2\theta_{3,111}) [\sin^2\varphi - (\cos 2\delta + 2)\cos^2\varphi] \sin^2\varphi - (e_1\theta_{3,111} - e_2\theta_{3,222}) \times \cos\delta (1-4\sin^2\varphi) \sin 2\varphi \}$
3m, 32, $\bar{3}m$	$L = - \frac{3Sdn^4U^4}{(n+n_0)^4} \theta_{3,222} \{ 2e_1 [\sin^2\varphi - (\cos 2\delta + 2)\cos^2\varphi] \times \sin^2\varphi + e_2 \cos\delta (1-4\sin^2\varphi) \sin 2\varphi \}$
4, $\bar{4}$, 4/m	$L = \frac{3Sdn^4U^4e_3}{2(n+n_0)^4} \{ (\theta_{1,111} - 3\theta_{1,122}) \cos\delta \sin 4\varphi - 4\theta_{2,111} (\cos^2 2\varphi - \sin^2 2\varphi \cos^2\delta) \}$
4mm, $\bar{4}2m$, 422, 4/mmm и кубические (все классы)	$L = \frac{3Sdn^4U^4e_3}{2(n+n_0)^4} (\theta_{1,111} - 3\theta_{1,122}) \cos\delta \sin 4\varphi$
Гексагональные (все классы)	L = 0

ным выбором поляризации излучения можно упростить выражение для нелинейного вращающего момента, так что он окажется зависящим только от некоторой одной компоненты тензора $\hat{\theta}$. Полученное таким образом выражение может быть использовано для экспериментального измерения этой компоненты.

Ввиду малости $\theta_{\mu, \nu\sigma\rho}$ нелинейный вращающий момент также должен быть очень малым. Однако использование мощного излучения оптического квантового генератора может привести к сравнительно большому вращающему моменту нелинейной среды. Величина нелинейного момента для пластинки толщины $d \sim 0,1$ мм и площади $S \sim 1$ см² из кристалла KDP для излучения неодимового лазера ($\lambda = 1,06$ мк, $U \sim 10^6$ в/см) на основании выражения (8) оказывается порядка $L \sim 10^{-4}$ эрг.

В заключение авторы выражают искреннюю благодарность Б. Б. Бойко за ценные замечания.

Литература

1. Садовский А. И. Учен. зап. Юрьевского ун-та, 7, в. 1, 1899; 8, в. 2, 1900.
2. Бокуть Б. В. Вестн АН БССР, сер. физ.-мат. наук, № 4, 123, 1966.
3. Ахманов С. А., Хохлов Р. В. Проблемы нелинейной оптики. М., 1964.
4. Midwinter E., Warner J. Brit. J. Appl. Phys., 16, 1667, 1965.
5. Бломберген Н. Нелинейная оптика, «Мир», 1966.
6. Armstrong J. A., Bloembergen N., Ducuing J., Pershan P. S. Phys. Rev., 127, 1918, 1962.
7. Федоров Ф. И. Оптика анизотропных сред. Минск, 1958.
8. Быков В. С., Новиков М. Н. Аннотации докладов, представленных на IV Всесоюзный Симпозиум по нелинейной оптике. Киев, 1968, стр. 80.

С. И. УРБАНОВИЧ

ВРЕМЕНА ЖИЗНИ ВОЗБУЖДЕННЫХ СОСТОЯНИЙ ПОЗИТРОНИЯ В СРЕДЕ

Одним из наиболее важных методов исследования аннигиляции позитронов в конденсированных средах является нахождение распределения во времени продуктов двухфотонной аннигиляции.

Было установлено [5], что существует долгоживущая компонента $\tau_2 \sim 10^{-9}$ сек и короткоживущая компонента $\tau_1 \sim 10^{-10}$ сек. Вклад в величину времен жизни долгоживущей компоненты и ее интенсивность в общем спектре времен жизни позитронов могут вносить только состояния атома позитрония с временами жизни относительно самоаннигиляции во всяком случае не меньшими, чем величина τ_2 . Этому условию удовлетворяют состояния 1^3S_1 и nS при $n > 1$, n — главное квантовое число. Так как линейные размеры самого атома позитрония (Ps) с $n \geq 3$ не меньше 9 Å, т. е. превосходят величину постоянной решетки, а потенциал ионизации состояний с $n \geq 3$ не превосходит $\sim 0,8$ эв, то очевидна их роль в общем ансамбле времен жизни позитронов. Было бы неправдоподобным на этом основании отрицать вклад $2S$ -состояния атома позитрония в спектр времен жизни позитронов в среде. Возможность существования $2S$ -состояния Ps в вакууме была рассмотрена в [1]. Кроме того, было указано [7], что вероятность образования возбужденных состояний позитрония в вакууме $\sim 0,5$. Высказывалось предположение [2], что примерно 1/30 часть общего количества атомов Ps, находящихся в конденсированной среде, пребывает в $2S$ -состоянии. Возможность существования $2S$ -состояния Ps в случае воды предполагалась в [4].

Тем не менее роль $2S$ -состояния атома Ps в спектре времен жизни позитронов в конденсированной среде остается неясной. С учетом наличия среды, окружающей атом Ps, рассмотрим возбужденные состояния позитрония. В случае вакуума для nS -состояний Ps вероятность аннигиляции с возбужденного уровня больше, чем вероятность радиационных переходов. В состояниях же с $l \neq 0$ радиационные переходы более вероятны, поэтому атомы Ps, образовавшиеся в возбужденных состояниях, переходят в $1S$ -состояние. С точки зрения радиационных переходов (дипольных электрических) в $1S$ -состояние уровень $2S$ является метастабильным. Оценка величины времени жизни $2S$ -уровня атома позитрония относительно двухфотонных процессов приводит к значению $\sim 0,25$ сек, что значительно больше величины τ_2 .

Учтем влияние внутренних полей среды на состояние $2S$. Будем считать, что электрическое поле среды направлено вдоль оси z , а энергия взаимодействия атома Ps с возмущающим полем

$$H = e\mathcal{E}z, \quad (1)$$

где e — заряд электрона (позитрона), \mathcal{E} — напряженность электрического поля. Легко найти невозмущенные волновые функции уровней $2S$ и $2P_0$,

т. е. ψ_{2S} и ψ_{2P_0} . Учитывая указанные волновые функции, находим матричный элемент:

$$\langle 2S | z | 2P_0 \rangle = -6a, \quad (2)$$

где $2a$ — радиус первой борховской орбиты атома Ps. Поправки первого приближения теории возмущений к невозмущенным уровням энергии имеют вид

$$\delta E = 6e\zeta a. \quad (3)$$

При наличии поля собственные волновые функции нулевого приближения уровней $2S$ и $2P_0$ будут представлять собой суперпозицию функций ψ_{2S} и ψ_{2P_0} . Если в начальный момент времени $t = 0$ атом Ps находился в состоянии ψ_{2S} , то при $t > 0$ зависящая от времени волновая функция атома Ps в поле $\Psi(t)$ будет представляться в виде линейной комбинации волновых функций стационарных состояний

$$\Psi(t) = A\psi_- \exp\left\{-\frac{i}{\hbar}(E + \delta E)t\right\} + B\psi_+ \exp\left\{-\frac{i}{\hbar}(E - \delta E)t\right\}, \quad (4)$$

где E — величина лэмбовского сдвига уровней атома Ps, A и B — коэффициенты. Коэффициенты разложения найдем на основе теории возмущений:

$$\psi_- = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_{2S} - \psi_{2P_0}), \quad (5)$$

$$\psi_+ = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_{2S} + \psi_{2P_0}).$$

Выражение (4) с учетом начальных условий можно записать в виде

$$\Psi(t) = \left\{ \psi_{2S} \cos \frac{\delta Et}{\hbar} + i\psi_{2P_0} \sin \frac{\delta Et}{\hbar} \right\} \exp\left\{-\frac{i}{\hbar}Et\right\}. \quad (6)$$

Пусть в момент $t = 0$ функция $\Psi(0) = \psi_{2S}$, то через время T атом Ps переходит в состояние, описываемое волновой функцией ψ_{2P_0} , и обратно. Оценим величину напряженности поля при условии, что $T = \tau_2 = 2 \cdot 10^{-9}$ сек. Легко получаем численное значение

$$\zeta = \frac{\pi\hbar}{3eaT} \simeq 65 \text{ в/см}. \quad (7)$$

Даже в столь слабых полях, как (7), невозможно отличить и, следовательно, наблюдать уровень $2S$. В полях с $\zeta > 65$ в/см невозможно отличить состояние $2S$ от состояния $2P_0$. Время жизни уровня $2P_0$ атома позитрония по отношению к радиационным процессам $\sim 4 \cdot 10^{-9}$ сек [6].

Влияние соударений на процесс девозбуждения состояния $2S$ позитрония в случае молекулярных кристаллов было рассмотрено в [3]. Согласно [3], время жизни $2S$ -состояния из-за соударений с молекулами окружающей среды составляет $\sim 10^{-14}$ сек.

Непосредственным вычислением времени жизни $2S$ -состояния атома позитрония на основании [6] в случае столкновений с нейтральными атомами (молекулами) газа можно показать, что только при давлениях, меньших 10^0 мм рт. ст., время жизни уровня $2S$ будет больше значения величины компоненты τ_2 .

Таким образом, в условиях конденсированной среды и газов, находящихся при давлениях, больших 10^0 мм рт. ст., времена жизни воз-

бужденных состояний атома Ps не представляют самостоятельного интереса.

Однако образование состояний с $n > 1$ атомов позитрония оказывает влияние на интенсивность долгоживущей компоненты из-за потерь времени, затрачиваемого на осуществление переходов типа $nS \rightarrow 2P_0 \rightarrow 1S$ благодаря различным механизмам, осуществляющим подобный процесс.

Литература

1. Ore A. Univ. i Bergen Arbok, Natur. rekke, № 12, 1949.
2. Hughes Y., Marder S., Wu C. Phys. Rev., 98, 1840, 1955.
3. Wallace P. Phys. Rev., 100, 738, 1955.
4. Puolakka H. Ann. Acad. Sci. Fennicae. Physica, 6, 218, 1966.
5. Bell R., Graham R. Phys. Rev., 90, 644, 1953.
6. Бете Г., Солпитер Э. Квантовая механика атомов с одним и двумя электронами. М., 1960.
7. Власов Н. А. Антивещество. М., 1966.

Институт физики АН БССР

Поступило в редакцию 16.IX 1968

А. И. БЕДРИЦКИЙ, С. А. ДАНИЛОВА

**КОНЕЧНОМЕРНЫЕ НЕ ВПОЛНЕ ПРИВОДИМЫЕ
 ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ПЯТИМЕРНОЙ НЕОДНОРОДНОЙ
 ГРУППЫ ЛОРЕНЦА**

Для пятимерных неоднородных преобразований Лоренца

$$x'_i = \sum_{k=1}^5 \alpha_{ik} x_k + \beta_i$$

($i = 1, 2, 3, 4, 5$; $x_4 = ct$, $|\alpha| = 1$, $\alpha_{44} \geq 1$, $g_{ik} = 0$ при $i \neq k$, $g_{44} = 1$, $g_{ii} = -1$ при $i \neq 4$) с инвариантом $ds^2 = \sum_{k=1}^5 g_{kk} x_k^2$ можно по аналогии с

четырёхмерным случаем [1] определить не вполне приводимые представления группы, как представления с инфинитезимальными операторами поворотов M_{ik} и трансляций W_k вида

$$M_{ik} = \begin{vmatrix} I_{ik} & 0 \\ 0 & I_{ik} \end{vmatrix}, \quad W_k = \begin{vmatrix} 0 & U_k \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \quad (i, k = 1, 2, 3, 4, 5), \quad (1)$$

где I_{ik} — известные инфинитезимальные операторы представлений пятимерной однородной собственной группы Лоренца $T_\alpha(5)$ [2]. Перестановочные соотношения для M_{ik} и W_k сводятся к перестановочным соотношениям группы $T_\alpha(5)$

$$[I_{ik}, I_{js}] = g_{is} I_{kj} + g_{kj} I_{is} - g_{ij} I_{ks} - g_{ks} I_{ij} \quad (2)$$

и условиям

$$[I_{ik}, U_j] = g_{kj} U_i - g_{ij} U_k, \quad (3)$$

$$W_k W_i \equiv 0. \quad (4)$$

Пятнадцать генераторов M_{ik} и W_k реализуют не вполне приводимое представление пятимерной неоднородной собственной группы Лоренца $P_\alpha(5)$. Если ввести оператор S' отражений пространственных координат и оператор S'' отражений пространственных координат и пятой координаты, то можно определить соответственно неполную $P'_\alpha(5)$ и полную $P''_\alpha(5)$ пятимерные неоднородные группы Лоренца. Операторы S' и S'' даны в работе [3], а их коммутационные свойства выражаются соотношениями

$$S' M_{ik} + M_{ik} S' \quad (i, k = 1, 2, 3; i = 4, k = 5),$$

$$S' M_{ik} = -M_{ik} S' \quad (i = 4, 5, k = 1, 2, 3); \quad (5)$$

$$S'' M_{ik} = M_{ik} S'' \quad (i, k = 1, 2, 3; i = 5, k = 1, 2, 3),$$

$$S'' M_{ik} = -M_{ik} S'' \quad (i = 4, k = 1, 2, 3, 5); \quad (6)$$

$$S'W_i = -W_iS' \quad (i = 1, 2, 3), \quad S'W_i = W_iS' \quad (i = 4, 5); \quad (7)$$

$$S''W_i = -W_iS'' \quad (i = 1, 2, 3, 5), \quad S''W_4 = W_4S''. \quad (8)$$

Для нахождения генераторов W_k можно воспользоваться соотношением (3), которое дает формулу

$$U_5 = [U_5, I_{45}], \quad (9)$$

совпадающую с формулой (9) работы [3] для матрицы L_5 пятимерных уравнений слияния частиц.

Таким образом, возникает картина, аналогичная четырехмерному случаю [1]: задача по отысканию не вполне приводимых представлений групп $P_\alpha(5)$, $P'_\alpha(5)$ и $P''_\alpha(5)$ эквивалентна задаче по отысканию соответствующих этим группам пятимерных ковариантных уравнений слияния.

Итак, не вполне приводимые представления группы $P_\alpha(5)$ задаются любым числом «зацепляющихся» друг с другом пар чисел $\sigma \sim (n_0, p_0)$ и $\sigma' \sim (n'_0, p'_0)$ ($n'_0 = n_0$, $p'_0 = p_0$; $n'_0 = n_0$, $p'_0 = p_0 \pm 1$; $n'_0 = n_0 \pm 1$, $p'_0 = p_0$) и реализуются на основании формул (1) — (4) генераторами I_{ik} и $U_k = L_k$, известными из работ [2, 3]. Не вполне приводимые представления группы $P'_\alpha(5)$ задаются любым числом «зацепляющихся» друг с другом пар σ и σ' , исключая случаи $\sigma' = \sigma$, и реализуются на основании формул (1) — (5), (7) генераторами I_{ik} , $U_k = L_k$ и оператором S' , а не вполне приводимые представления группы $P''_\alpha(5)$ задаются любым числом «зацепляющихся» пар $\sigma' = \sigma$ и реализуются генераторами I_{ik} , $U_k = L_k$ и S'' (формулы (1) — (4), (6), (8)).

Естественно, возникает вопрос о возможности отыскания неприводимых представлений групп $P_\alpha(5)$, $P'_\alpha(5)$ и $P''_\alpha(5)$ посредством задания пар чисел σ и σ' .

Соотношения (2) и (3) определяют генераторы I_{ik} и U_k таких представлений, но необходимое в этом случае соотношение коммутации

$$[U_k, U_i] = 0$$

не может быть обеспечено никакими парами σ и σ' . Задача по отысканию неприводимых представлений группы $P_\alpha(5)$ решена в работе [4] на основе представлений группы евклидовых вращений в четырехмерном пространстве, группы евклидовых вращений и трансляций в трехмерном пространстве, неоднородной собственной четырехмерной группы Лоренца и (в случае $U_k=0$) группы $T_\alpha(5)$.

Литература

1. Широков Ю. М. ЖЭТФ, 33, 1208, 1957.
2. Бедрицкий А. И. Вестн АН БССР, сер. физ.-мат. наук, № 1, 1968.
3. Бедрицкий А. И. ЖЭТФ, 55, 1367, 1968.
4. Фушич В. И., Кривский И. Ю. Препринт, АН УССР, ИТФ-68-72, 1968.

Витебский педагогический институт
им. С. М. Кирова

Поступило в редакцию 3.II 1969

В. А. БЕЛОНОГОВ

КОНЕЧНЫЕ ГРУППЫ С ЕДИНСТВЕННЫМ КЛАССОМ НЕИНВАРИАНТНЫХ МАКСИМАЛЬНЫХ ПОДГРУПП

В настоящей статье доказываются две теоремы. Первая из них дает описание конечных групп, содержащих один и только один класс сопряженных неинвариантных максимальных подгрупп. Изучение этих групп было начато в диссертации автора [1], а описание таких групп с единичной подгруппой Фраттини получено Г. Паздерским в [2]. Последний результат вытекает из теоремы 1 и не используется при ее доказательстве.

Вторая теорема дает описание конечных групп, в которых каждая максимальная подгруппа инвариантна или p -разложима. В частности, оказалось, что если такая группа не p -разложима, то она имеет точно один класс сопряженных неинвариантных максимальных подгрупп. Исследование групп, описанных в теореме 2, было начато в работе С. А. Русакова [3], доказавшего существование в них инвариантной силовой подгруппы с p -разложимой фактор-группой. Мы не используем этот результат при доказательстве теоремы 2.

В заключение статьи построен пример, показывающий, что в p -неразложимых группах, описанных в теореме 2, неинвариантные максимальные подгруппы (а они все сопряжены) в общем случае не являются нильпотентными.

Кроме общепринятых обозначений, мы используем следующие: большие латинские буквы — группы; индекс внизу при группе обозначает порядок этой группы; $A \times B$ — полупрямое произведение с неинвариантным множителем A и инвариантным множителем B ; p, q — различные простые числа; α, β — натуральные числа.

Если $A \leq G$, то максимальной G -допустимой подгруппой A называется истинная G -допустимая (т. е. инвариантная в G) подгруппа A , не содержащая ни в какой другой истинной G -допустимой подгруппе A .

Классы сопряженных подгрупп называются просто классами подгрупп.

При доказательстве теорем используются следующие результаты (G обозначает конечную группу).

(а) Нормализатор силовой подгруппы из G не может содержаться в истинной инвариантной подгруппе G . Следовательно, G нильпотентна тогда и только тогда, когда в ней инвариантны все ее максимальные подгруппы [4].

(б) Группа G имеет исключительно p -разложимые максимальные подгруппы тогда и только тогда, когда она p -разложима или есть группа Шмидта [5].

(в) Если G имеет непримарную p -разложимую максимальную подгруппу M , то G имеет инвариантную подгруппу одного из видов: а) p -силовая подгруппа из M , б) силовское p -дополнение в M или в G [6].

(2) Если G имеет пару максимальных подгрупп взаимно простых порядков, то она простая. Исключение представляют лишь циклические группы порядка pq и группы типа A [7].

(3) В p -разрешимой но не p -разложимой группе не может быть более одного класса неизvariantных p -разложимых максимальных подгрупп.

Последний результат принадлежит автору и в более общей форме скоро появится в «Сибирском математическом журнале». Однако мы приведем сейчас его доказательство.

Пусть G — конечная p -разрешимая, но не p -разложимая группа. Тогда $G = P_p \alpha H_h$, $(p, h) = 1$, и если G имеет два класса неизvariantных p -разложимых максимальных подгрупп, то представителями этих классов будут подгруппы $P \times \bar{H}$ ($\bar{H} < H$) и $\bar{P} \times H$ ($\bar{P} < P$). Для любого $g = ab$, $a \in P$, $b \in H$, имеем $g^{-1}Pg = b^{-1}a^{-1}Pab = b^{-1}Pb \cong b^{-1}\bar{P}b = \bar{P}$ и также $gHg^{-1} \cong \bar{H}$. Отсюда следует, что подгруппы P и H также не инвариантны в G , а их сердцевины совпадают с \bar{P} и \bar{H} соответственно. Фактор-группа $G/\bar{P}\bar{H}$, согласно (2), есть циклическая группа порядка pq или группа типа A , но это противоречит тому, что $G/\bar{P}\bar{H}$ имеет две несопряженные неизvariantные максимальные подгруппы $\bar{P}\bar{H}/\bar{P}\bar{H}$ и $\bar{P}\bar{H}/\bar{P}\bar{H}$.

Утверждение (3) доказано.

Теорема 1. *Конечная группа G имеет точно один класс неизvariantных максимальных подгрупп тогда и только тогда, когда $G = H_h \times Q_{q^b}$, где $(h, q) = 1$, H нильпотентна и в Q имеется максимальная G -допустимая подгруппа \bar{Q} , такая, что $[H, \bar{Q}] \subseteq \Phi(Q)$.*

Доказательство. Пусть G имеет точно один класс неизvariantных максимальных подгрупп и пусть M — одна из подгрупп этого класса. Если Q — некоторая q -силовская подгруппа G для q , делящего индекс $|G:M|$, то все максимальные подгруппы G , содержащие Q , инвариантны в G , и ввиду (а) $G = H \times Q$, где H нильпотентна. Можно считать при этом, что $M = H\bar{Q}$, где $\bar{Q} < Q$. Ясно, что \bar{Q} является максимальной G -допустимой подгруппой в Q . Покажем, что $[H, \bar{Q}] \subseteq \Phi(Q)$. Ввиду $\Phi(Q) \subseteq \Phi(G)$ нам достаточно доказать, что $[H, \bar{Q}] = 1$ при $\Phi(Q) = 1$. Но при $\Phi(Q) = 1$ по теореме Машке ([8], теорема 16.3.1) имеем $Q = \bar{Q} \times R$, где $R < G$, и если предположить, что $[H, \bar{Q}] \neq 1$, т. е. что $C_Q(H) < \bar{Q}$, то $N_G(H) = HC_Q(H) < HC_Q(H)R \leq N < G$ (N — некоторая максимальная подгруппа G , содержащая $HC_Q(H)R$), что невозможно.

Докажем обратное. Пусть $G = H_h \times Q_{q^b}$, $(h, q) = 1$, H нильпотентна и \bar{Q} — максимальная G -допустимая подгруппа Q , такая, что $[H, \bar{Q}] \subseteq \Phi(Q)$. Понятно, что $H\bar{Q}$ есть максимальная подгруппа G , причем неизvariantная, так как из $H\bar{Q} < G$ и $[H, \bar{Q}] \subseteq \Phi(Q) \subseteq \Phi(G)$ вытекало бы $H < G$. Остается показать, что каждая максимальная подгруппа N группы G , не сопряженная с $H\bar{Q}$, инвариантна в G . Если $N \cong Q$, то это очевидно, если же нет, то с точностью до сопряженности $N = H\bar{Q}$, где \bar{Q} — максимальная G -допустимая подгруппа Q , и тогда $G = N\bar{Q}$. Так как $\bar{Q} < G$, то $[N, \bar{Q}] \subseteq [\bar{Q}, \bar{Q}] [H, \bar{Q}] \subseteq \bar{Q}\Phi(G) \subseteq N$ и значит $N < G$.

Теорема доказана.

Легко заметить, что теорема останется верной, если условие $[H, \bar{Q}] \subseteq \Phi(Q)$ заменить более слабым условием $[H, \bar{Q}] \subseteq \Phi(G)$. Далее, если $\Phi(Q) = 1$, то $G = (H \times \bar{Q}) \times \bar{Q}$, где \bar{Q} — минимальный нормальный делитель G , причем $\Phi(G) \cong \Phi(H\bar{Q}) \cap C_{H\bar{Q}}(\bar{Q})$, откуда следует теорема 4 из [2].

Из теоремы 1 и леммы 1 из [9], согласно которой, во всякой конечной группе имеется не более одного класса неизменных нильпотентных максимальных подгрупп, вытекает следующее

Следствие. В конечной ненильпотентной группе G каждая максимальная подгруппа инвариантна в G или нильпотентна тогда и только тогда, когда $G = H_h \times Q_{q^b}$, где $(h, q) = 1$, H нильпотентна и $C_Q(H)$ есть максимальная G -допустимая подгруппа Q .

Поскольку здесь, очевидно, $C_Q(H)$ содержится в гиперцентре группы G , то отсюда непосредственно вытекает характеристика таких групп, полученная в (10).

Теорема 2. В конечной группе G каждая максимальная подгруппа инвариантна или p -разложима тогда и только тогда, когда G есть группа одного из следующих типов:

- 1) G p -разложима;
- 2) $G = H_h \times P_{p^a}$, $(h, p) = 1$, H нильпотентна $C_P(H)$ есть максимальная G -допустимая подгруппа P ;
- 3) $G = (H_h \times P_{p^a}) \times Q_{q^b}$, $(h, pq) = 1$, H нильпотентна, $C_Q(P)$ есть максимальная G -допустимая подгруппа Q , $[H, C_Q(P)] \subseteq \Phi(Q)$.

Доказательство. Пусть G — конечная группа, каждая максимальная подгруппа которой инвариантна в G или p -разложима. Обозначим через $R_p(G)$ наибольший p -разрешимый нормальный делитель G и докажем, что $R_p(G) \neq 1$ при $G \neq 1$. Отсюда и из того факта, что каждая факторгруппа группы G также имеет лишь инвариантные или p -разложимые максимальные подгруппы, будет следовать, что G p -разрешима.

Достаточно рассмотреть лишь случай, когда p делит $|G|$ и G не имеет инвариантных силовских подгрупп. Рассмотрим в G пару максимальных подгрупп M и N , первая из которых содержит нормализатор p -силовской подгруппы P группы G , а вторая — нормализатор некоторой q -силовской подгруппы Q при $q \neq p$. Они не могут быть инвариантными в G , и поэтому обе p -разложимы: $M = P \times K$ и $N = \bar{P} \times \bar{K}$, где \bar{P} — p -силовская подгруппа в N . Если $K \neq 1$ или $\bar{P} \neq 1$, то $R_p(G) \neq 1$ ввиду (a). Если же $K = 1$ и $\bar{P} = 1$, то порядки максимальных подгрупп M и N взаимно просты и условие $R_p(G) \neq 1$ следует из (e) и (b). Таким образом, группа G p -разрешима. Но теперь, согласно (d), G оказывается p -разложимой группой или группой с единственным классом неизменных максимальных подгрупп. В последнем случае ввиду теоремы 1 G будет группой типа 2), если индекс неизменной максимальной подгруппы есть степень p , и группой типа 3) в противном случае. Итак, G есть группа одного из типов 1), 2), 3). Обратное утверждение непосредственно вытекает из теоремы 1. В группе типа 2) все неизменные максимальные подгруппы сопряжены с $HC_P(H)$, которая нильпотентна, а в группе типа 3) они сопряжены с $HPC_Q(P)$, которая p -разложима. Теорема доказана.

Заметим, что условие $[H, C_Q(P)] \subseteq \Phi(Q)$ в типе 3) теоремы 2 можно заменить условием $C_Q(P) = C_Q(H) \Phi(Q)$.

Пример. Рассмотрим группу $G = \{a, b, c, d, e\}$ с определяющими соотношениями:

$$a^3 = b^5 = c^{19} = d^{19} = e^{19} = 1, ab = ba \\ ce = ec, de = ed, cd = dce.$$

$$a^{-1}ca = c^7e^4, a^{-1}da = d^7e^{-4}, a^{-1}ea = e^{11},$$

$$b^{-1}cb = d^{-1}, b^{-1}db = cd^4, b^{-1}eb = e.$$

G есть группа порядка $3 \cdot 5 \cdot 19^3$ и имеет точно три класса максимальных подгрупп: инвариантную подгруппу индекса 3 (которая является группой Шмидта), инвариантную подгруппу индекса 5 (которая является группой Фробениуса) и класс неинвариантных подгрупп порядка $3 \cdot 5 \cdot 19$, сопряженных с $\{e\} \times (\{a\} \times \{e\})$.

Последняя подгруппа 5-разложима, но не нильпотентна. Следовательно, класс Λ_p p -неразложимых групп, описанных в теореме 2, в общем случае шире класса групп, описанных в следствии теоремы 1.

Нетрудно показать также, что класс групп, описанных в теореме 1, не исчерпывается классами Λ_p при всевозможных p .

Литература

1. Белоногов В. А. О максимальных подгруппах групп. Автореф. канд. дисс. Свердловск, 1963.
2. Pazderski G. Math. Nachr., 26, № 6, 1964.
3. Русаков С. А. Вестн АН БССР, сер. физ.-мат. наук, № 1, 1968.
4. Шмидт О. Ю. Матем. сб., 33, 1926.
5. Чунихина И. К., Чунихин С. А. Матем. сб., 15, № 2, 1944.
6. Романовский А. В. Конечные группы. Минск, 1966.
7. Белоногов В. А. Изв. вузов, математика, № 5(30), 1962.
8. Холл Ф. Теория групп. М., 1962.
9. Белоногов В. А. Сибирск. матем. журн., 5, № 5, 1964.
10. Нагребецкий В. Т. ДАН СССР, 172, № 1, 1967.

Свердловское отделение математического института
им. В. А. Стеклова АН СССР

Поступило в редакцию 2.IX 1968

ХРОНІКА

ГАДАВЫ АГУЛЬНЫ СХОД АКАДЭМІІ НАВУК БССР

14—15 сакавіка 1969 г. адбыўся Агульны сход Акадэміі навук БССР. 14 сакавіка на пасяджэннях агульных сходаў аддзяленняў былі заслуханы і абмеркаваны даклады акадэмікаў-сакратароў аддзяленняў аб важнейшых выніках работы за 1968 г.

15 сакавіка галавы Агульнага сходу АН БССР адкрыў віцэ-прэзідэнт АН БССР акадэмік АН БССР М. А. Барысевіч.

У сваім уступным слове тав. Барысевіч адзначыў поспехі Акадэміі навук БССР у юбілейным для рэспублікі годзе, а таксама павіншаваў адсутнага па хваробе прэзідэнта Акадэміі навук БССР члена-карэспандэнта АН СССР В. Ф. Купрэвіча і дырэктара Інстытута матэматыкі АН БССР акадэміка АН БССР М. П. Яругіна, якім за выдатныя заслугі перад савецкай наукай прысвоена званне Героя Сацыялістычнай Працы.

В. Ф. Купрэвіч, як адначыў у сваім выступленні тав. Барысевіч, з'яўляецца выдатным вучоным у галіне біялогіі. Яго працы па сістэматыцы ніжэйшых раслін, фізіялогіі хворай расліны, глебавай энзімалогіі набылі вядомасць як у нашай краіне, так і за рубяжом.

Акадэмік АН БССР М. П. Яругін — буйнейшы вучоны-матэматык. Яму належаць фундаментальныя працы ў галіне тэорыі дыферэнцыяльных ураўненняў, якія таксама шырока вядомы і ў нас і за рубяжом.

Вялікі ўклад у развіццё айчынай навукі і тэхнікі ўнёс Інстытут цепла- і масаабмену АН БССР, узнагароджаны ордэнам Працоўнага Чырвонага Сцяга. Тав. Барысевіч гарача павіншаваў калектыў інстытута з высокай ацэнкай яго працы і пажадаў новых творчых поспехаў. Уздзельнікі Агульнага сходу ўшанавалі ўстааннем памяць акадэміка АН БССР І. С. Лупіновіча, які памёр у 1968 г.

З дакладам «Аб навуковай і навукова-арганізацыйнай дзейнасці АН БССР у 1968 годзе» выступіў галоўны вучоны сакратар Прэзідыума АН БССР член-карэспандэнт АН БССР А. С. Махнач. Докладчык паведаміў аб выніках даследаванняў, выкананых у 1968 г. вучонымі Акадэміі навук.

Інстытутам матэматыкі разглядаліся пытанні пабудовы рашэнняў некаторых сі-

стэм дыферэнцыяльных ураўненняў, паляпшэння сыходнасці радоў і паслядоўнасцей, даследаваліся рознасныя і дыферэнцыяльна-рознасныя схемы задач матэматычнай фізікі, праводзіліся даследаванні па тэорыі канечных і лінейных груп, разглядаліся пытанні тэорыі дэяфантавых прыбліжэнняў.

У галіне матэматычнага забеспячэння ЭВМ Мінскай серыі працягваліся работы па стварэнню бібліятэкі стандартных праграм для ЭВМ «Мінск-2» і «Мінск-22» у рэжыме Т, транслятара з алгарытмічнай мовы «АЛГАМС», закончана сістэма апрацоўкі даных на базе мовы «КОБОЛ».

Ордэна Працоўнага Чырвонага Сцяга Інстытутам фізікі распрацаваны генератары на растворах фарбавальнікаў, якія дазваляюць атрымліваць імпульсы выпраменьвання з частатой 40—50 гц і забяспечваюць пераналадку даўжыні хвалі кагерэнтнага выпраменьвання ў шырокім дыяпазоне ультрафіялетавай, бачнай і бліжняй інфрачырвонай вобласці спектра. Прапанаваны і рэалізаваны спосабы кіравання частатой генерацыі раствораў фарбавальнікаў. Атрыманы універсальныя суадносіны паміж спектрамі паглынання і люмінесценцыі паўправаднікоў, на аснове якіх эксперыментальна вызначаны каэфіцыенты ўзмацнення, абсалютная магутнасць люмінесценцыі і адлегласць паміж узроўнямі Фермі ў лазерных дыёдах. Распрацаваны аптычныя і спектраскапічныя метады кантролю рэжымаў плазменнага намяснення ўстойлівых гарачатрывалых пакрыццяў; высветлена перспектыва выкарыстання інфрачырвонай спектраскапіі для выяўлення прадуктаў уздзеяння выпраменьвання на арганічныя рэчывы. Распрацаваны новы спосаб канечнага перанарміравання зараду ў квантавай электрадынаміцы, развіта фармулёўка рэлятывісцкай электрадынамікі, яўна каварыянтная адносна лакальных пераўтварэнняў Лоранца.

Высветлен механізм рэакцыі фотаадаўлення хларафілу і яго вытворных, знойдзены спосаб ператварэння малекул хларафілу ў бактэрыяльныя пігменты.

Інстытутам фізікі цвёрдага цела і паўправаднікоў даследаваны кінетыка ператварэння сфалфіт-вюртцыт у сістэме CdS—ZnS і дынамічныя зрушэнні атамаў у халькагенідах цынку і кадмію. Распрацава-

на апаратура високаго ціску для сінтэзу боразону. Упершыню ўстаноўлен факт прамога ператварэння гексаганальнага нітрыду бору ў кубічную мадыфікацыю пры цісках 50—70 кбар і тэмпературы 3000 °С. У выніку даследавання сістэмы жалеза—нікель—кобальт выяўлены вобласці саставаў сплаваў з вялікімі абсалютнымі значэннямі магнітастрыкцыі; гэтыя сплавы могуць знайсці практычнае прымяненне для прыгатавання магнітастрыктараў. Створан саленоід, які дазваляе атрымаваць магнітнае поле напружанасцю да 53 кэрс.

У Інстытуце цэпла- і масаабмену закончана распрацоўка поўнай мікраскапічнай тэорыі выпарэння цел у вакууме; устаноўлена існаванне паверхні разрыву—хвалі разрэджвання каля выпараемай паверхні. Распрацаван метады разліку высокаінтэнсіўнага цэплаабмену пры звышгукавых цячэннях, які дазваляе праводзіць аптымізацыю ўмоў на паверхні цэплаабмену.

Атрыманы заканамернасці перыядычнага адрыву і ўтварэння віхравых дарожак у следзе за тупымі цэламі, якія абцякаюцца рэалагічнымі асяроддзямі вязка-пружкага тыпу. Прапанаван новы камбінаваны метады адтавання вечнамерзлых грунтаў, з якіх здабываецца асноўная частка золата СССР. Распрацаваны шкідзельныя схемы датчыкаў і прылад для вымярэння вільготнасці валакністых і дысперсных матэрыялаў.

У Фізіка-тэхнічным інстытуце распрацаван спосаб умацнення металу, які дазваляе без істотнага змянення першапачатковых памераў узору дасягаць вялікіх ступеней аднароднай пластычнай дэфармацыі. Распрацаван, даследаван і ўкараніў у вытворчасць новы спосаб атрымання прамазубых шасцярней. Устаноўлена, што накладанне ультрагукавых хістанняў значна зніжае намаганне і дазваляе скараціць лік праходаў пры валачэнні. Распрацаван спосаб пракаткі шліцаў на валах. Даследавана структура і ўласцівасці сплаваў на жалеза-хрома-марганцавай аснове; паказана, што алюміній зніжае цвёрдасць і павышае гарачачувальнасць сплаваў. Вывучаны заканамернасці ўтварэння і развіцця разгарных шчылін у штапах. Даследавана кінетыка разумацнення сплаву Д16 ва ўмовах хуткага няспыннага нагрэву. Атрыманы новыя даныя аб характары ўзаемадзеяння рэкрышталізацыі і фазавых ператварэнняў пры нагрэве са скорасцямі да 100 град/сек.

У Інстытуце ядзернай энергетыкі праведзены варыянты разліку рэактараў на хуткіх нейтронах вялікай і сярэдняй магутнасці, атрыманы фізічныя характарыстыкі гэтых рэактараў на розных дысацыіруючых цепланосьбітах. Складзены алгарытмы разліку прасторавага энергетычнага размеркавання нейтронаў у біялагічнай ахове ядзернага рэактара на вялікім аддаленні ад крыніцы. Распрацаваны прапановы па стварэнню эксперыментальнага газаахладжваемага рэактара на хуткіх нейтронах з дысацыіруючым цепланосьбітам. Праведзены работы па распрацоўцы турбін,

якія выкарыстоўваюць у якасці рабочага цэла дысацыіруючыя газы; даказана, што энергетычная турбіна на дысацыіруючым N_2O_4 мае істотныя перавагі. Завершана стварэнне універсальнай гама-ўстаноўкі УГУ-200. Створаны ўстаноўкі сінтэзу хлор-вугляродных злучэнняў для адпрацоўкі тэхналагічнага рэгламенту прамысловай вытворчасці. Адпрацаваны аптымальныя параметры радыацыйна-тэрмічнага сінтэзу фармальдэгіду.

У Інстытуце тэхнічнай кібернетыкі распрацаван аванпраект аўтаматызаванай сістэмы тэхнічнай падрыхтоўкі вытворчасці ў машынабудаванні, які вызначыў тэхнічныя сродкі перапрацоўкі інфармацыі, узаемадзеянне чалавека з машынай у працэсе праектавання. Створан комплекс алгарытмаў і праграм для праектавання інструментальнай падрыхтоўкі вытворчасці, тэхнічнага нарміравання станочных работ, праектавання раздзяляльных штапаў, тэхналагічных працэсаў апрацоўкі дэталей, схем кіравання машынамі і механізмамі. Распрацаван метады вызначэння аптымальных рэжымаў работы зблкіраваных аўтаматычных ліній з агрэгатных станкоў. Распрацаван прамысловы ўзор чарцёжна-графічнага аўтамата «Итекан-2» для атрымання чарцяжоў, графікаў, схем і іншай графічнай дакументацыі.

Лабараторыя электронікі праводзіла работы па стварэнню мікрамініяцюрных электравакуумных прылад. Атрыманы ўзоры прылад аб'ёмам каля 4 мм³ і спажываемай магутнасцю не менш 100 мвт. Гэтыя прылады адкрываюць шлях прымяненню вакуумных радыёламп у транзістарнай радыёэлектроніцы і іншых галінах.

У Адзеле механікі палімераў даследавана ўзаемасувязь надмалекулярных і фізіка-механічных уласцівасцей палімерных матэрыялаў, вывучана стойкасць металапалімераў у розных спецыяльных умовах, асяроддзях, сілавых палях. Распрацаваны прынцыпова новыя спосабы нанясення палімерных пакрыццяў. Створаны інжынерныя метады разліку і канструавання палімерных і металапалімерных вырабаў з улікам рэаномных, структурных, тэрмічных і іншых уласцівасцей палімераў.

У Інстытуце фізіка-арганічнай хіміі атрыманы новыя даныя па плацінавых каталізатарых, якія датычаць высвятлення прычын страты іх актыўнасці; устаноўлены шляхі ўтварэння двухвокісу вугляроду пры акісленні дыкарбонавых кіслот; распрацаваны спосабы атрымання рада ртуць-неарганічных злучэнняў на аснове рэакцыі дэкарбаксілавання дыацылатаў ртуці аліфатычнага і цыклааліфатычнага радоў; сінтэзаван рад новых тэрпеноідаў і даказана іх хімічная будова і інш.

У Інстытуце агульнай і неарганічнай хіміі знойдзены і рэкамендаваны танныя і эфектыўныя рэагенты для выкарыстання ў якасці дэпрэсараў гліністых шламаў пры флатацыі калійных руд; атрыманы жалеза-замешчаныя формы эрыяніту і цэаліту ты-

пу *L.*, які валодаюць высокай адсарбцыйнай актыўнасцю пры сорбцыі серавугляроду і інш.

Інстытутам торфу праводзіліся даследаванні па генезісу і хіміі торфу і выкарыстанню яго ў сельскай гаспадарцы.

Лабараторыяй геахімічных праблем устаноўлены заканамернасці распаўсюджвання рада хімічных элементаў і злучэнняў у адкладаннях антрапагену, неагену і палеагену; атрыманы новыя даныя аб тэмпературным рэжыме нетраў БССР.

У **Інстытуце эксперыментальнай батанікі** вывучана прымяненне бясхлорных калійных угнаенняў пад бульбу, распрацавана тэхналогія глыбіннага спосабу воцатнакіслага брадзжэння яблычных зброджаных сокаў і хімічнага саставу яблычнага воцату, атрыманага рознымі спосабамі пры яго захоўванні.

У **Інстытуце генетыкі і цыталогіі** асноўная ўвага была сканцэнтравана на распрацоўцы тэорыі гетэрозісу і высвятленні генетычных механізмаў гэтай з'явы. Арыгінальныя рэзультаты атрыманы пры вывучэнні асаблівасцей анеуплаіды ў цукровых буракоў, распрацаваны метадыкі павышэння частасці праўлення мутантных змяненняў і размнажэння мутантаў, якія дазваляюць на 3—4 гады скараціць перыяд стварэння канстантных форм пшаніцы.

Інстытутам фізіялогіі атрыманы рад новых даных, якія маюць важнае тэарэтычнае і практычнае значэнне. Выяўлена рознае дзеянне гармонаў шчытападобнай залозы на безумоўныя і ўмоўныя рэфлексы асобных органаў і сістэм; завершан першы этап даследаванняў па стварэнню новых цэнтраў мясцовай нервовай рэгуляцыі; даследаваны цэрэбравісцэральныя і нейрагумаральныя механізмы паталагічных рэакцый пры паражэннях цэнтральнай нервовай сістэмы на розных узроўнях.

У **Адзеле фізіялогіі і сістэматыкі ніжэйшых раслін** завершан першы этап работы па вывучэнню ўплыву ржаўнай інфекцыі на актыўнасць фотасінтэзу; распрацаван новы метад ліафільнай сушкі біялагічнага матэрыялу.

Цэнтральным батанічным садам выкананы даследаванні па праблеме «Інтродукцыя і акліматызацыя раслін».

Аддзелам заалогіі і паразіталогіі атрыманы новыя даныя па размеркаванню і экалогіі паляўніча-прамысловых і іншых гаспадарча каштоўных птушак.

Аддзелам мікрабіялогіі устаноўлена здольнасць некаторых мікраарганізмаў прадудыраваць пекталітычныя ферменты ў пажыўным асяроддзі без наяўнасці ў ім спецыфічнага індуктара пектынавых рэчываў.

Лабараторыяй біяфізікі і ізатопаў упершыню выяўлена ўласная флуарэсценцыя хларафілу *b* у расліне. Адкрыта існаванне дыскрэтных структурных форм бялковых ансамбляў у клетцы, якія кааператыўна і абарачальна пераходзяць адзін у адзін; знойдзена практычна аднакампанентная форма пратахларафіл-галахрому з мак-

сімумам у спектры паглынання 632 нм, пераходзячая пры асвятленні ў 673 нм.

У **Сектары геранталогіі** працягвалася вывучэнне функцыянальнай дзейнасці жыўёлін рознага ўзросту, працэсы старэння арганізма.

Інстытутам філасофіі і права завершана распрацоўка тэм «Структурныя змяненні інтэлігенцыі ў перыяд будаўніцтва камунізма (на матэрыялах БССР)», «Прававыя пытанні нарміравання і аховы працы рабочых і служачых».

Інстытутам гісторыі завершаны работы па III, IV, V тамах «Гісторыі БССР».

У **Інстытуце літаратуры імя Я. Купалы** праводзіліся даследаванні, якія садзейнічаюць далейшаму развіццю беларускага літаратуразнаўства.

У **Інстытуце мовазнаўства імя Я. Коласа** ўпершыню ў беларускай лексікаграфіі створан універсальны нарматыўны слоўнік-даведнік.

У **Інстытуце мастацтвазнаўства, этнаграфіі і фальклору** завершан рад тэм па праблемах беларускага мастацтва.

Інстытутам эканомікі распрацаваны прапановы па ўдасканаленню палажэнняў гаспадарчай рэформы, даследаваны пытанні крытэрыю і паказчыкі эфектыўнасці капітальных укладанняў і на іх аснове прапанавана метадыка вызначэння эфектыўнасці капітальных укладанняў у будаўніцтва; перададзены ў Дзяржплан БССР запіскі аб напрамках развіцця і размяшчэння асобных вытворчасцей на перыяд 1971—1980 гг.

У **Акадэміі навук БССР** у 1968 г. было выканана гаспадарча-дагаворных работ на суму 4472 тыс. руб. (26,7% ад усіх асігнванняў). Асноўны аб'ём гаспадарчых работ выканалі аддзяленні фізіка-тэхнічных і фізіка-матэматычных навук.

Рэдакцыйна-выдавецкая дзейнасць. Па колькасці назваў (129 кніг і 85 нумароў часопісаў) план выканан на 108,1%, па аб'ёму друкаванай прадукцыі ва ўлікова-выдавецкіх аркушах (2787 аркушаў) на 109,3%. Акадэмія навук выдавала 11 перыядычных выданняў. Супрацоўнікамі Акадэміі навук у 1968 г. апублікавана 1400 работ, у тым ліку 56 манаграфій і 27 зборнікаў.

Работа Галоўнай рэдакцыі БелСЭ. У 1968 г. завершана работа па стварэнню тэматычных слоўнікаў, складзена тры тамы алфавітных слоўнікаў, зладзен у набор рукапіс першага тома БелСЭ.

Работа фундаментальнай бібліятэкі імя Я. Коласа. Дзеючы фонд бібліятэкі на 1.1 1969 г. склаў 1 234 878 друкаваных адзінак, з іх 308 683 друкаваных адзінак зарубежных выданняў. Фонд бібліятэкі ў 1968 г. павялічыўся на 76 975 адзінак, з іх 19 829 адзінак зарубежных выданняў. Фондам бібліятэкі карысталіся 7002 чалавекі.

Каардынацыя навуковай дзейнасці. Важнае значэнне мела праведзеная ў 1968 г. XIII сесія Савета па каардынацыі навуковай дзейнасці, якая выявіла недахопы і намеціла канкрэтныя мерапрыемствы па паліпшэнню каардынацыйнай дзейнасці

у республіці. У 1968 г. пры Акадэміі навук функцыянірвала 30 навуковых саветаў па праблемах прыродазнаўчых і грамадскіх навук. Тры навуковыя саветы АН БССР здзяйсняюць каардынацыю даследаванняў у агульнасаюзным маштабе.

Стан і падрыхтоўка навуковых кадраў. На 1 студзеня 1969 г. у Акадэміі навук налічваўся 6881 чал., у тым ліку ў навуковых установах 5928 чал., у гаспадарчых — 953. У навуковых установах па бюджэту працавала 4312 чал. і па гаспадарчым тэматыцы 1616 чал. Колькасць навуковых супрацоўнікаў у навуковых установах складае 2817 чал., у тым ліку 90 доктороў і 720 кандыдатаў навук. У саставе Акадэміі навук на 1.1 1969 г. было 57 акадэмікаў і 37 членаў-карэспандэнтаў (зараз 63 акадэмікі і 54 члены-карэспандэнты).

У справаздачным годзе закончылі навучанне 184 аспіранты, 126 з адрывам і 58 без адрыву ад вытворчасці. З іх толькі 13 чалавек (7%) абаранілі дысертацыі ў тэрмін, 73 чалавекі (40,6%) падрыхтавалі дысертацыі да абароны, 98 чалавек (53,7%) выключаны ў сувязі з заканчэннем тэрміну навучання без завяршэння работы па дысертацыі. 159 чалавек абаранілі кандыдацкія і 15 — доктарскія дысертацыі.

Міжнародныя навуковыя сувязі. У 1968 г. у навуковыя камандзіроўкі за мяжу выязджала 87 навуковых супрацоўнікаў (з іх 52 — у сацыялістычныя краіны) для вывучэння зарубежнага вопыту даследаванняў галоўным чынам у галіне электронікі, деплафізікі, тэхнічнай кібернетыкі, фізікі цвёрдага цела, ядзернай энергетыкі.

Выкананне фінансавага плана і размеркаванне бюджэту. На выкананне плана навукова-даследчых работ было выдзелена 16224 тыс. руб. (з іх 8361 тыс. руб. на зарплату), у тым ліку па дзяржбюджэту 11 752 тыс. руб. (без укладанняў на капітальнае будаўніцтва) супраць 10 041 тыс. руб. у 1967 г.

Фінансавы план па дзяржбюджэту выканан на 11 555 тыс. руб. (98,3%). З агуль-

най сумы фактычных расходаў на заработную плату прыпадае 6356 тыс. руб. (55,0%), на навукова-даследчую работу (арт. 5) — 1698 тыс. руб. (14,7%), на набыццё абсталявання і інвентару (арт. 121) — 1375 тыс. руб. (10,8%).

Найбольшыя сумы дзяржбюджетных асігнаванняў прыпадаюць на інстытуты ядзернай энергетыкі (916 тыс. руб.), цепла-і масаабмену (823 тыс. руб.), фізікі (817 тыс. руб.), тэхнічнай кібернетыкі (627 тыс. руб.), фізікі цвёрдага цела і паўправаднікоў (615 тыс. руб.), найменшыя — на інстытуты АДДзялення грамадскіх навук: літаратуры (124 тыс. руб.) і г. д.

Выкананне плана капітальнага будаўніцтва. План капітальнага будаўніцтва АН БССР на 1968 г. зацверджан у суме 4420 тыс. руб., у тым ліку па будаўніча-мантажных работах — 2396 тыс. руб. Фактычна выканана работ на 3554 тыс. руб., або на 80,4% да гадавога плана, у тым ліку па будаўніча-мантажных работах 1440 тыс. руб., або 60,1% да гадавога плана.

У заключэнне член-карэспандэнт АН БССР А. С. Махнач адзначае, што ў АН БССР з году ў год павялічваецца колькасць навуковых супрацоўнікаў, растуць грашовыя асігнаванні, уведзяцца ў строй новыя вытворчыя плошчы. Аднак у рабоце асобных навуковых устаноў ёсць яшчэ многа недахопаў. Нездавальняюча ідуць справы ў Лабараторыі электронікі, на працягу многіх гадоў не могуць вызначыць свой профіль Інстытут торфу, АДДзел фізікі неразбуральнага кантролю.

У абмеркаванні справаздачы аб навуковай дзейнасці Акадэміі навук БССР за 1968 г. прынялі ўдзел акадэмікі АН БССР А. В. Лыкаў, В. А. Ляонаў, М. А. Дарожкін, К. І. Лукашоў, Д. А. Маркаў, Г. В. Багамолаў, Б. В. Ерафееў, М. С. Акулаў, П. П. Рагавой, члены-карэспандэнты АН БССР М. М. Ганчарык, В. М. Трэер.

А. Я. ФАКТАРОВІЧ,
Л. М. ГАРДЗІЕНКА

СЕСІЯ АГУЛЬНАГА СХОДУ АКАДЭМІІ НАВУК БССР

14 мая 1969 г. у Вялікай канферэнц-зале АН БССР адбылася сесія Агульнага сходу Акадэміі навук Беларускай ССР, на якой былі праведзены выбары прэзідэнта, віцэ-прэзідэнтаў, акадэміка-сакратара Аддзялення біялагічных навук АН БССР, а таксама разгледжаны іншыя арганізацыйныя пытанні.

Сесію адкрыў сакратар ЦК КПБ Ф. А. Сурганаў. За перыяд паміж апошняй сесіяй Агульнага сходу АН БССР і сённяшняй, сказаў ён, наша навука панесла вялікую страту. Памёрлі Герой Сацыялістычнай Працы, прэзідэнт АН БССР, член-карэспандэнт АН СССР, акадэмік АН БССР Васіль Феофілавіч Купрэвіч і акадэмік АН БССР Майсей Калінікавіч Юскавец.

Прысутныя ўшанавалі ўстааннем памяць В. Ф. Купрэвіча і М. К. Юскаўца.

Віцэ-прэзідэнт АН БССР акадэмік АН БССР К. К. Атраховіч уносіць прапанову аб вылучэнні кандыдатуры акадэміка АН БССР М. А. Барысевіча на пасаду прэзідэнта АН БССР. У абмеркаванні вылучанай кандыдатуры прынялі ўдзел акадэмікі АН БССР В. П. Севярдзенка, Б. І. Сцяпанаў, М. А. Дарожкін, В. А. Сярбента, А. Н. Сеўчанка. Выступіўшыя характарызавалі М. А. Барысевіча як буйнога вучонага-фізіка, чые даследаванні ў галіне спектраскапіі і люмінесценцыі шырока вядомы і ў нашай краіне, і за рубяжом, адзначалі яго вялікія арганізатарскія здольнасці, аўтарытэт сярод вучоных рэспублікі. Яны аднадушна рэкамендавалі Агульнаму сходу акадэміі кандыдатуру акадэміка АН БССР М. А. Барысевіча для выбарання прэзідэнтам АН БССР.

У выніку тайнага галасавання прэзідэнтам Акадэміі навук БССР выбіраецца акадэмік АН БССР Мікалай Аляксандравіч Барысевіч.

Сакратар ЦК КПБ Ф. А. Сурганаў павіншаваў М. А. Барысевіча з выбараннем на пасаду прэзідэнта Акадэміі навук БССР.

М. А. Барысевіч падзякаваў Агульнаму сходу за аказаньня яму давер'е і гонар, а таксама заверыў, што прыкладзе ўсе сілы да таго, каб апраўдаць іх у кіраўніцтве буйной навуковай установай — Акадэміяй навук БССР. Затым М. А. Барысевіч спыніўся на важнейшых задачах, якія стаяць перад калектывам вучоных акадэміі.

Віцэ-прэзідэнтамі АН БССР выбраны старэйшыя акадэмікі АН БССР М. Д. Несцяровіч і К. В. Гораў.

Мікалай Дзмітрыевіч Несцяровіч нарадзіўся ў 1903 г., беларус, член КПСС, удзельнік Вялікай Айчыннай вайны 1941—1945 гг.

М. Д. Несцяровіч — доктар біялагічных навук, прафесар, заслужаны дзеяч навукі БССР, вядомы батанік-дэндролог. Ён з'яўляецца буйным спецыялістам у галіне інтрадукцыі дрэвавых раслін, аўтарам больш 100 навуковых работ, у тым ліку 9 манаграфій. У яго працах упершыню ў БССР падведзены вынікі інтрадукцыі дрэў, кустарнікаў і ліян Беларусі, асветлен рад пытанняў тэорыі і метаду інтрадукцыі гэтых раслін, зроблены рэкамендацыі для больш шырокага ўкаранення іх у лясную гаспадарку і зялёнае будаўніцтва рэспублікі.

У Акадэміі навук БССР М. Д. Несцяровіч праявіў сябе буйным арганізатарам навукова-даследчай работы ў галіне біялагічных навук. У 1956 г. ён быў выбран акадэмікам АН БССР і з гэтага часу бяссменна кіраваў Аддзяленнем біялагічных навук АН БССР. Многа сіл і энергіі вучоны аддае выхаванню навуковых кадраў. Ім падрыхтаван вялікі атрад спецыялістаў у вобласці батанікі, дэндралогіі і біялогіі.

М. Д. Несцяровіч узнагароджан ордэнамі Айчыннай вайны I і II ступені, ордэнам Чырвонай Звязды, ордэнам «Знак Пашаны», трыма медалямі і дзвюма Ганаровымі граматамі Вярхоўнага Савета БССР.

Акадэмік АН БССР М. Д. Несцяровіч з'яўляецца членам Беларускага аддзялення Усесаюзнага батанічнага таварыства, на працягу рада год узначальваў часопіс «Весці Акадэміі навук БССР», серыя біялагічных навук.

Канстанцін Васільевіч Гораў нарадзіўся ў 1904 г., рускі, член КПСС. Заслужаны дзеяч навукі і тэхнікі БССР.

У Акадэміі навук БССР К. В. Гораў працуе з 1938 г. З 1938 па 1947 г. Канстанцін Васільевіч быў прэзідэнтам Акадэміі. Ён аддаў многа сіл і энергіі развіццю АН БССР і асабліва яе аднаўленню ў пасляваенны перыяд. З 1947 г. К. В. Гораў быў акадэмікам-сакратаром АН БССР, затым працаваў у Фізіка-тэхнічным інстытуце ды-

рэктрам, старэйшым навуковым супрацоўнікам, а з 1950 г. — загадчыкам лабараторыі металазнаўства.

Навуковая дзейнасць К. В. Горава разнастайная і шматгранная. Ёй апублікавана больш 60 навуковых работ. Яго навуковыя працы ахопліваюць розныя галіны металазнаўства і тэрмічнай апрацоўкі металаў і сплаваў. Ём выкананы шырокія даследаванні працэсаў крышталізацыі, структуры і ўласцівасцей сплаваў Fe—C—Si (галоўным чынам чыгуну) у залежнасці ад хімічнага саставу, мадыфікуючых дабавак, умоў мадыфікавання і іншых фактараў. На падставе атрыманых рэзультатаў пабудавана метастабільная дыяграма стану сплаваў Fe—C—Si, прыляганых да жалезнага вугля. Устаноўлена, што ў залежнасці ад хімічнага саставу чыгуну, скорасці ахаладжэння і велічыні дабаўкі цэрыю апошні можа працяўляць сябе як стабілізатар цэментыту або гратыфізатар. Пад кіраўніцтвам К. В. Горава выкананы даследаванні структуры і ўласцівасцей аўстэнітных гарачатрывалых сплаваў на нікелевай і жалезнай асновах у залежнасці ад колькасці малібдэну, вальфраму, кобальту, алюмінію і тытану. Ём створана новая марка гарачатрывалай сталі з паніжанай колькасцю нікелю, якая ўкараненнем тэрма механічнай апрацоўкі як метаду паляпшэння ўласцівасцей сплаваў.

Вялікую ўвагу ўдзяляў Канстанцін Васільевіч падрыхтоўцы маладых навуковых кадраў.

К. В. Гораў выбіраўся членам ЦК КПБ, дэпутатам Вярхоўнага Савета БССР.

Узнагароджан ордэнам Працоўнага Чырвонага Сцяга, адным медалем і дзвюма Ганаровымі граматамі Вярхоўнага Савета БССР.

Акадэмікам-сакратаром АДДзялення біялагічных навук АН БССР выбран акадэмік АН БССР І. А. Бульгін.

Дырэктрам Інстытута гісторыі АН БССР зацверджан член-карэспандэнт АН БССР І. М. Ігнаценка.

За вялікія заслугі ў развіцці савецкай навукі Прэзідыум Вярхоўнага Савета СССР Указам ад 13 сакавіка 1969 г. прысвоіў званне Героя Сацыялістычнай Працы віднаму савецкаму вучонаму, дырэктару Інстытута матэматыкі АН БССР акадэміку АН БССР М. П. Яругіну.

На сесіі Агульнага сходу АН БССР сакратар ЦК КПБ, намеснік старшыні Прэзідыума Вярхоўнага Савета БССР Ф. А. Сурганаў па даручэнні Прэзідыума Вярхоўнага Савета СССР уручыў ордэн Леніна і залатую звязду «Серп і Молат» М. П. Яругіну, сардэчна павіншаваў вучонага з высокай узнагародай Радзімы, пажадаў яму здароўя і далейшых творчых поспехаў. М. П. Яругін гарача падзякаваў Партыі і Ураду за высокую ацэнку яго працы і сказаў, што яна з'яўляецца прызнаннем заслуг усіх вучоных-матэматыкаў Беларусі. Ён заверыў сход, што і далей, разам з усімі вучонымі-матэматыкамі рэспублікі будзе дабівацца новых творчых поспехаў у імя перамогі камунізма.

А. У. ЯНГОЛЬ, З. П. ЯЦКЕВІЧ

СОДЕРЖАНИЕ

Н. А. Борисевич — президент Академии наук Белорусской ССР 5

МАТЕМАТИКА

Л. Г. Кругликова, В. И. Крылов. Интерполирование предельного значения последовательности и улучшение сходимости. Случай возрастающего числа узлов	9
Е. А. Иванов, А. В. Мошинский. Дифракция электромагнитных волн на двух эллиптических цилиндрах	16
В. Н. Русак. Сопряженные рациональные функции и оценки их производных	26
Л. П. Примачук. О разрешимости некоторых краевых задач со сдвигом Карлемана для системы n пар функций	34
Н. Н. Третьякова. Производящие функции для матричных элементов неприводимых унитарных представлений группы $SO(n)$ вращений n -мерного пространства	40
Д. Н. Кравчук. Об экстремуме линейной формы на циклической группе	45
Э. М. Пальчик, Н. П. Конторович. О группах, все i -е максимальные подгруппы которых перестановочны с силовой подгруппой. II	51
Р. П. Медведева. Конечные разрешимые группы с заданным числом неизвариантных подгрупп в композиционных рядах	58
В. И. Платонова. К дифференциальной геометрии составного многообразия M_{32} в аффинном трехмерном пространстве	63

ФИЗИКА

О. С. Иваницкая. Сопоставление двух способов разграничения систем отсчета и систем координат в эйнштейновой теории гравитации	69
А. Е. Левашев, В. Н. Туняк. К скалярной модели общей теории относительности	73
С. И. Лобко. О нелептонном распаде Ω -гиперона	77
Н. Ф. Кунни , Э. В. Ратников, О. Д. Кодатенко. Механические эффекты при коронном разряде с подогреваемого острого края	82
Н. В. Афанасьев, С. Н. Капельян, Л. П. Филиппов, В. А. Морозов. О скорости плазменных струй, возникающих при действии импульсных тепловых потоков на металлические поверхности	87
В. И. Белоусова, Э. А. Рудак. Остаточное n - p -взаимодействие в нечетно-нечетных ядрах	94
А. П. Богданов, Э. А. Рудак, Е. И. Фирсов. Реакция $Ca^{48}(n, \gamma)Ca^{49}$ на тепловых нейтронах	97

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

В. М. Рыжковский, Н. Н. Сирота. Нейтронографическое исследование плавления антимонида галлия	102
Б. В. Бокуть, А. Н. Сердюков. Нелинейное пондеромоторное вращение, вызванное мощным излучением	105
С. И. Урбанович. Времена жизни возбужденных состояний позитрония в среде	109
А. И. Бедрицкий, С. А. Данилова. Конечномерные не вполне приводимые представления пятимерной неоднородной группы Лоренца	112
В. А. Белоногов. Конечные группы с единственным классом неизвариантных максимальных подгрупп	114

ХРОНИКА

Годичное Общее собрание Академии наук БССР	118
Сессия Общего собрания Академии наук БССР	122

АТ 02147. Эздэдзена ў набор 24/IV-69 г. Падпісана да друку 16/VI-69 г. Фармац 70×108¹/₁₆. Друк. арк. 8,25. Ум. друк. арк. 11,55. Уч.-выд. арк. 11,2. Выд. зак. 946. Друк. зак. 353. Цана 60 кап.

Друкарня імя Францыска (Георгія) Скарыны выдавецтва «Навука і тэхніка» АН БССР і Дзярж-камітэта СМ БССР па друку. Мінск, Ленінскі праспект, 68

ЗМЕСТ

М. А. Барысевіч — прэзідэнт Акадэміі навук Беларускай ССР 5

МАТЭМАТЫКА

Л. Г. Кругликова, В. И. Крылов. Интерполирование предельного значения последовательности и улучшение сходимости. Случай возрастающего числа узлов	9
Е. А. Иванов, А. В. Мошинский. Дифракция электромагнитных волн на двух эллиптических цилиндрах	16
В. Н. Русак. Сопряженные рациональные функции и оценки их производных	26
Л. П. Примачук. О разрешимости некоторых краевых задач со сдвигом Карлемана для системы n пар функций	34
Н. Н. Третьякова. Производящие функции для матричных элементов неприводимых унитарных представлений группы $SO(n)$ вращений n -мерного пространства	40
Д. Н. Кравчук. Об экстремуме линейной формы на циклической группе	45
Э. М. Пальчик, Н. П. Конторович. О группах, все i -е максимальные подгруппы которых перестановочны с силовой подгруппой. II	51
Р. П. Медведева. Конечные разрешимые группы с заданным числом инвариантных подгрупп в композиционных рядах	58
В. И. Платонова. К дифференциальной геометрии составного многообразия M_{32} в аффинном трехмерном пространстве	63

ФІЗІКА

О. С. Иваницкая. Сопоставление двух способов разграничения систем отсчета и систем координат в эйнштейновой теории гравитации	69
А. Е. Левашев, В. Н. Туняк. К скалярной модели общей теории относительности	73
С. И. Лобко. О нелептонном распаде Ω^- -гиперона	77
<u>Н. Ф. Кунін</u> , Э. В. Ратнікаў, О. Д. Кадаценка. Механічныя эфекты пры каронным разрадзе з падаграваемага вострага краю	82
М. В. Афанасьев, С. Н. Капельян, Л. П. Філіпаў, У. А. Марозаў. Аб скорасці плазменных струменяў, узнікаючых пры дзеянні імпульсных цеплавых патокаў на металічныя паверхні	87
В. И. Белоусова, Э. А. Рудак. Остаточное n - p -взаимодействие в нечетно-нечетных ядрах	94
А. П. Богданов, Э. А. Рудак, Е. И. Фирсов. Реакция $Ca^{48}(n, \gamma)Ca^{49}$ на тепловых нейтронах	97

КАРОТКІЯ ПАВЕДАМЛЕННІ

В. М. Рыжковский, Н. Н. Сирота. Нейтронографическое исследование плавления антимонида галлия	102
Б. В. Бокуть, А. Н. Сердюков. Нелинейное пондеромоторное вращение, вызванное мощным излучением	105
С. И. Урбанович. Времена жизни возбужденных состояний позитрония в среде	109
А. И. Бедрицкий, С. А. Данилова. Конечномерные не вполне приводимые представления пятимерной неоднородной группы Лоренца	112
В. А. Белоногов. Конечные группы с единственным классом инвариантных максимальных подгрупп	114

ХРОНІКА

Гадавы Агульны сход Акадэміі навук БССР	118
Сесія Агульнага сходу Акадэміі навук БССР	122

РЕФЕРАТЫ

УДК 518

Интерполирование предельного значения последовательности и улучшение сходимости. Случай возрастающего числа узлов. Кругликова Л. Г., Крылов В. И. «Весті Акадэміі навук БССР», серия фізіка-матэматычных навук. 1969 г., № 3, 9—15.

Для преобразования вида

$$\sigma_n = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+n} \frac{k^n}{k!(n-k)!} S_k, \quad n = 1, 2, \dots \quad (1)$$

заданной последовательности S_n в новую последовательность σ_n доказывается, что σ_n может сходиться только в том случае, если S_n сходится, причем, если $\lim S_n = S$, то и $\lim \sigma_n = S$. Следовательно, преобразование (1) не может служить для нахождения обобщенного предела последовательности, но оно оказывается полезным для улучшения сходимости. В частности, если последовательность S_n принадлежит аналитическому типу сходимости, т. е. существует число N , такое, что при всяком $n > N$ S_n представима сходящимся степенным рядом

$$S_n = c_0 + c_1 n^{-1} + \dots + c_k n^{-k} + \dots,$$

то преобразование (1) улучшает ее сходимость.
Библиографий 1.

УДК 517.9:535.4

Дифракция электромагнитных волн на двух эллиптических цилиндрах. Иванов Е. А., Мошинский А. В. «Весті Акадэміі навук БССР», серия фізіка-матэматычных навук, 1969 г., № 3, 16—25.

Обсуждаются некоторые вопросы, возникающие при численном решении задачи о дифракции плоской электромагнитной волны на двух эллиптических цилиндрах. В частности, приводится доказательство разрешимости методом редукции бесконечной системы линейных уравнений, возникающей в этой задаче в случае двух идеально проводящих бесконечно длинных цилиндров с параллельными продольными осями и произвольно ориентированными осями эллипсов их поперечных сечений. Дается оценка скорости сходимости метода редукции к точному решению по норме пространства l_2 в зависимости от порядка усечения системы.
Иллюстраций 1. Библиографий 23.

УДК 517.512.6

Сопряженные рациональные функции и оценки их производных. Русак В. Н. «Весті Акадэміі навук БССР», серия фізіка-матэматычных навук. 1969 г., № 3, 26—33.

Для рациональных функций вида

$$R_{2n}(x) = P_{2n}(x)/t_{2n}(x), \quad t_{2n}(x) = \prod_{k=1}^n [(a_k - x)^2 + \beta_k^2] \quad (1)$$

обычным образом вводится понятие сопряженной функции на всей вещественной оси. Получены оценки для производных рациональной функции вида (1) и ей сопряженной.

Теорема 1. Если рациональная функция вида (1) удовлетворяет условию $|R_{2n}(x)| \leq 1$ при $-\infty < x < \infty$, то справедлива оценка

$$\left[R_{2n}'(x) + \tilde{R}_{2n}'(x) \right]^2 \leq 2 \sum_{k=1}^n \frac{\beta_k}{(a_k - x)^2 + \beta_k^2}, \quad (2)$$

где знак равенства достигается лишь для рациональных дробей С. Н. Бернштейна.

Из теоремы 1 в частном случае вытекает известная оценка для производной тригонометрического многочлена вместе с сопряженным. В реферируемой заметке доказана и более общая оценка, чем (2), обобщающая оценки А. Зигмунда для тригонометрического случая.

Библиографий 6.

УДК 517.948.3

О разрешимости некоторых краевых задач со сдвигом Карлемана для системы n пар функций. Примачук Л. П. «Весті Академії наук БССР», серия фізика-математичних наук. 1969 г., № 3, 34—39.

Изучаются краевые задачи о нахождении кусочно-аналитического вектора по граничным условиям:

$$\varphi^+(t) = A(t) \varphi^-(t) + B(t) \overline{\varphi^-(\alpha_+(t))} + C(t), \quad (1)$$

$$\varphi^+(t) = A(t) \varphi^-(t) + B(t) \varphi^-(\alpha_-(t)) + C(t), \quad (2)$$

где $\alpha_{\pm}(t)$ — соответственно сохраняющий или изменяющий направление обхода сдвиг Карлемана.

Получены условия, при которых задачи можно решать методом последовательных приближений, а также оценки числа решений, когда эти условия не выполняются.

Библиографий 9.

УДК 519.40

Производящие функции для матричных элементов неприводимых унитарных представлений группы $SO(n)$ вращений n -мерного пространства. Третьякова Н. Н. «Весті Академії наук БССР», серия фізика-математичних наук. 1969 г., № 3, 40—44.

В статье вычислены производящие функции для всех матричных элементов неприводимых унитарных представлений группы $SO(n)$. При этом явный вид производящих функций различен при n четных и нечетных. Однако их можно объединить в виде $(n-3)$ кратного интеграла.

Частным случаем полученных формул является известная производящая функция для обобщенных сферических функций.

Библиографий 7.

УДК 519.152

Об экстремуме линейной формы на циклической группе. Кравичук Д. Н. «Весті Академії наук БССР», серия фізика-математичних наук. 1969 г., № 3, 45—50.

Пусть подстановка t из симметрической группы S_n символ ν переводит в символ α_{ν} . Если $b = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ — фиксированный вещественный

n -мерный вектор, то значением линейной формы $l = \sum_{\nu=1}^n a_{\nu} x_{\nu}$ на t при векторе

b будем считать величину $f_t(b) = \sum_{v=1}^n a_v b_{a_v}$. В статье рассматривается за-

дача отыскания подстановки, доставляющей форме f минимальное (максимальное) значение на циклической группе. Приводятся результаты решения этой задачи в случае, когда циклическая группа порождена n -членным циклом определенной структуры, а компоненты вектора упорядочены следующим образом: $b_1 < b_2 < \dots < b_n$ и $b_1 > b_2 > \dots > b_n$.

Библиографий 3.

УДК 519.44

О группах, все i -е максимальные подгруппы которых перестановочны с силовской подгруппой. П. Пальчик Э. М., Конторович Н. П. «Весті Академії наук БССР», серия фізика-математичних наук. 1969 г., № 3, 51—57.

Для конечных групп доказывается следующее утверждение.

Пусть в группе G существует дисперсивная (в смысле Оре) π -холловская подгруппа G_π . Если G_π перестановочна со всеми пятью максимальными подгруппами группы G , то либо группа G π -разрешима, либо изоморфна одной из неразрешимых групп, все пятью максимальными подгруппы которых инвариантны.

Неразрешимые конечные группы с инвариантными пятью максимальными подгруппами описаны в РЖМат, 1966, 11A163.

Библиографий 20.

УДК 519.44

Конечные разрешимые группы с заданным числом неизменяемых подгрупп в композиционных рядах. Медведева Р. П. «Весті Академії наук БССР», серия фізика-математичних наук. 1969 г., № 3, 58—62.

Предложена следующая классификация конечных групп: конечная группа G принадлежит классу $\Delta(k, n)$, если она удовлетворяет требованиям: пусть $\langle C_i \rangle$ — множество композиционных рядов группы G , t_i — число членов ряда C_i , неизменяемых в G . Тогда

$$\max_i t_i = n, \quad \max_{i,j} (t_i - t_j) = k.$$

Исследуется строение разрешимых групп из класса $\Delta(0, n)$, где n — любое натуральное число. Подробно описаны разрешимые группы из класса $\Delta(0, 1)$.

Библиографий 2.

УДК 513

К дифференциальной геометрии составного многообразия M_{32} в аффинном трехмерном пространстве. Платонова В. И. «Весті Академії наук БССР», серия фізика-математичних наук. 1969 г., № 3, 63—68.

В статье исследовано многообразие M_{32} , представляющее собой трехпараметрическое семейство элементов (плоскость и точка на ней) в аффинном трехмерном пространстве. Выбран канонический репер, истолковано его отношение к многообразию и все дифференциальные инварианты. Проведена классификация этих многообразий и выделены некоторые частные классы.

Библиографий 2.

УДК 530.12

Сопоставление двух способов разграничения систем отсчета и систем координат в эйнштейновой теории гравитации. Иванчикая О. С. «Весті Академії наук БССР», серия фізика-математических наук. 1969 г., № 3, 69—72.

Показано, что преобразование систем отсчета в эйнштейновой теории гравитации по Зельманову—Каттанео неявно влечет за собой локальное лоренцево преобразование гиперболического вращения. Рассмотрены трансформационные свойства некоторых хронометрических инвариантов относительно этого преобразования.

Библиографий 19.

УДК 530.12

К скалярной модели общей теории относительности. Левашев А. Е., Туняк В. Н. «Весті Академії наук БССР», серия фізика-математических наук. 1969 г., № 3, 73—76.

Рассмотрена скалярная модель ОТО. Получены общеквариантное обобщение теории гравитации Ньютона, тензор энергии-импульса гравитационного поля, совпадение изотропных геодезических моделирующего и моделируемого пространств.

Библиографий 8.

УДК 539.126.6

О нелептонном распаде Ω -гиперона. Лобко С. И. «Весті Академії наук БССР», серия фізика-математических наук. 1969 г., № 3, 77—81.

Найдены с помощью уравнения для частицы с переменным спином $1/2-3/2$ сечения нелептонного распада Ω -гиперона с учетом поляризации частиц, причем состояние частицы со спином $3/2$ ставится в соответствие Ω -гиперону, а со спином $1/2$ — получившемуся в результате распада фермиону.

Библиографий 16.

УДК 537.523.3

Механические эффекты при коронном разряде с подогреваемого острого края. Куниин Н. Ф., Ратников Э. В., Кодатенко О. Д. «Весті Академії наук БССР», серия фізика-математических наук. 1969 г., № 3, 82—86.

Рассматриваются механические эффекты, возбуждаемые на коронирующем электроде при подогреве последнего до 1080 °К. С увеличением температуры коронирующего электрода реактивная тяга, измеряемая на коронирующем электроде, изменяется в значительных пределах. С изменением разности потенциалов в разрядном промежутке при фиксированной температуре коронирующего электрода расходится различная электрическая мощность на сообщение коронирующему электроду единицы реактивной силы. Делается вывод, что коронирующее устройство как источник механической тяги является своеобразным газовым редуктором при трансформации электрической энергии в механическую.

Иллюстраций 5. Библиографий 7.

УДК 533.9 : 537.52

О скорости плазменных струй, возникающих при действии импульсных тепловых потоков на металлические поверхности. Афанасьев Н. В., Капельян С. Н., Филиппов Л. П., Морозов В. А. «Весті Академії наук БССР», серия фізика-математических наук. 1969 г., № 3, 87—93.

На основании френкелевского механизма испарения и решения теплофизической задачи с поверхностными и объемными источниками тепла выведена формула для начальной скорости факела при истечении его в

пустоту. При помощи временной развертки на камере СФР-2 замерены начальные скорости факельных струй для конденсированных искровых разрядов различной мощности. Экспериментальные и расчетные значения начальных скоростей струй для различных металлов совпадают удовлетворительно.

Иллюстраций 3. Библиографий 10.

УДК 539.14

Остаточное n - p -взаимодействие в нечетно-нечетных ядрах. Белоусова В. И., Рудак Э. А. «Весті Академії наук БССР», серия фізика-математичних наук. 1969 г., № 3, 94—96.

Спектры уровней ядер Co^{56} , Nb^{92} и Bi^{210} рассчитываются в приближении $j-j$ -связи.

Иллюстраций 1. Библиографий 9.

УДК 539.17

Реакция $Ca^{48}(n, \gamma)Ca^{49}$ на тепловых нейтронах. Богданов А. П., Рудак Э. А., Фирсов Е. И. «Весті Академії наук БССР», серия фізика-математичних наук. 1969 г., № 3, 97—101.

Спектр γ -лучей из реакции $Ca^{48}(n, \gamma)Ca^{49}$ на тепловых нейтронах исследовался с помощью магнитного комптоновского γ -спектрометра и люминесцентного спектрометра γ - γ -совпадений на реакторе ИРТ АН БССР. В качестве образца использовался углекислый кальций (2,32 г). В результате эксперимента обнаружены γ -переходы типа $E1$ из захватного состояния Ca^{49} в основное состояние (5,14 Мэв) и на p -уровень 2,03 Мэв (3,09 Мэв). Сделана теоретическая оценка сечения «прямого» захвата тепловых нейтронов ядром Ca^{48} .

Таблиц 1. Иллюстраций 3. Библиографий 11.

УДК 536.421.4+536.421.1

Нейтроннографическое исследование плавления антимида галлия. Рыжковский В. М., Сирота Н. Н. «Весті Академії наук БССР», серия фізика-математичних наук. 1969 г., № 3, 102—104.

Проведено нейтроннографическое исследование перехода из кристаллического в жидкое состояние антимида галлия. Описана методика эксперимента. Установлено, что указанное соединение сохраняет остатки дальнего порядка структуры при температурах, на 3—5 °С превышающих температуру плавления.

Иллюстраций 1. Библиографий 3.

УДК 535

Нелинейное пондеромоторное вращение, вызванное мощным излучением. Бокуть Б. В., Сердюков А. Н. «Весті Академії наук БССР», серия фізика-математичних наук. 1969 г., № 3, 105—108.

Проведено теоретическое исследование вращающего действия мощного излучения на нелинейные одноосные и кубические кристаллы в пренебрежении генерацией высших гармоник. Получены соответствующие выражения для нелинейного вращающего момента, связанного с кубичной восприимчивостью среды при прохождении монохроматического излучения произвольной поляризации. Указываются оптимальные условия наблюдения нелинейного вращающего момента. Обсуждается возможность экспериментального измерения некоторых компонент тензора нелинейной восприимчивости четвертого ранга.

Таблиц 1. Библиографий 8.

УДК 539.189.2

Времена жизни возбужденных состояний позитрония в среде.
Урбанович С. И. «Весті Академії наук БССР», серия фізика-математичных наук, 1969 г., № 3, 109—111.

Рассматривается вклад возбужденных состояний атома позитрония в величину и интенсивность долгоживущей компоненты. Показано, что nS -состояния позитрония в среде из-за наличия механизмов, активно конкурирующих с радиационными процессами, не являются метастабильными. Даже в слабых полях среды за время, сравнимое с величиной жизни долгоживущей компоненты, осуществляются каскадные переходы в основное состояние позитрония. Этот же вывод распространен на случай газов. Приводятся численные оценки.

Библиографий 7.

УДК 530.145

Конечномерные не вполне приводимые представления пятимерной неоднородной группы Лоренца. Бедрицкий А. И., Данилова С. А. «Весті Академії наук БССР», серия фізика-математичных наук, 1969 г., № 3, 112—113.

Найдено действие на векторы канонического базиса инфинитезимальных операторов не вполне приводимых представлений собственной, неполной и полной пятимерных неоднородных групп Лоренца.

Библиографий 4.

УДК 519.44

Конечные группы с единственным классом неинвариантных максимальных подгрупп. Белоногов В. А. «Весті Академії наук БССР», серия фізика-математичных наук, 1969 г., № 3, 114—117.

Приводится описание конечных групп, имеющих точно один класс сопряженных неинвариантных максимальных подгрупп (теорема 1), а также описание конечных групп, в которых каждая подгруппа инвариантна или p -разложима (теорема 2).

Библиографий 10.

ПРАВИЛА ДЛЯ АВТОРОВ

1. Статьи должны быть написаны на машинке через два интервала на одной стороне листа и представляться в двух экземплярах.

2. Формулы и буквенные обозначения должны быть аккуратно вписаны от руки чернилами. Для формул, выделенных в отдельную строку, следует оставлять достаточные пробелы в тексте. Греческие буквы должны быть обведены красным карандашом. Буквы, вписанные от руки, в формулах и в тексте должны подчеркиваться простым карандашом: прописные — двумя черточками снизу (напр., \underline{S}), строчные — двумя черточками сверху (напр., \overline{s}). Следует различать буквы \overline{O} (прописную), \underline{o} (строчную) и 0 (ноль), для чего буквы \overline{O} и \underline{o} подчеркивать двумя черточками, а 0 отмечать квадратной скобкой снизу (\underline{C} , \overline{o} , 0). Следует также различать буквы \underline{I} и \underline{J} (йот), для чего \underline{I} писать, как римскую единицу, подчеркивая ее двумя черточками снизу. Векторы подчеркивать чернилами одной чертой снизу. Математические символы \cos , \sin , \lg и др., набираемые прямым шрифтом, и химические символы элементов (H , N , Cl , Fe и т. д.) отмечаются простым карандашом квадратной скобкой снизу ($\underline{\sin}$, $\underline{\lg}$, \underline{N} , \underline{Cl}). Показатели степени и индексы, а также надстрочные знаки отмечаются дугой \frown (для верхнего индекса) или \smile (для нижнего).

3. В связи с введением с 1 января 1963 г. Международной системы единиц измерения (СИ) размерность всех величин, принятых в статьях, должна соответствовать указанной системе единиц измерения.

4. Цитируемая в статье литература должна даваться автором не в виде подстрочных сносок, а общим списком в конце статьи с обозначением ссылки в тексте порядковой цифрой в квадратных скобках. Список литературы должен быть оформлен следующим образом:

а) для книг: фамилия и инициалы автора, полное название книги, номер тома, место и год издания;

б) для журнальных статей: фамилия и инициалы автора, название журнала, номер тома (подчеркнуть); номер выпуска, страница и год.

Ссылки на неопубликованные работы не допускаются.

5. Рисунки должны быть выполнены на белой бумаге тушью размером 15×20 см; надписи на рисунках не делать. Все обозначения указывать в тексте подрисунковых подписей. К статье прилагается список с номерами рисунков и текстом подрисунковых подписей. В тексте на полях обязательно указывается место для рисунков и таблиц.

Таблицы печатаются на отдельных листах и прилагаются в конце статьи. Фотографии должны иметь контрастное изображение и быть отпечатаны на хорошей бумаге размером не менее 9×12 см. На обороте рисунков должны быть указаны фамилия автора, название статьи и номер рисунка.

6. В случае представления двух или более статей одновременно необходимо указывать желательный порядок их помещения.

7. Авторы должны избегать повторения одних и тех же данных в таблицах, графиках и в тексте статьи.

8. К статье обязательно прилагается 2 экз. реферата.

9. Корректуры статей авторам, как правило, не посылаются. В случае послышки корректуры допускается лишь исправление ошибок типографии.

Корректра должна возвращаться в редакцию не позже, чем на следующий день после получения ее автором. Невозвращение корректуры в срок не приостанавливает печатания статьи.

10. В случае возвращения статьи автору для исправления или при ее сокращении датой представления считается день получения редакцией окончательного текста.

29791-1a5

60к.



80000003504275