ЗОК-4
58

ВЕСЦІ

АКАДЭМІІ НАВУК БССР

СЕРЫЯ
ФІЗІКА-МАТЭМАТЫЧНЫХ
НАВУК

ФЗ-05
29191

4

ВЫДАВЕЦТВА „НАВУКА І ТЭХНІКА"

МІНСК 1969

n/st. via 8/A 2020


НАВУКА
І
ТЭХНІКА

ИЗВЕСТИЯ

АКАДЕМИИ НАУК БССР

СЕРИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ
НАУК

№ 4

ИЗДАТЕЛЬСТВО „НАУКА И ТЕХНИКА“

МИНСК 1969

ВЕСЦІ

АКАДЭМІІ НАВУК БССР

30К-4
58

СЕРЫЯ
ФІЗІКА-МАТЭМАТЫЧНЫХ
НАВУК

ФБ-05
29191

№ 4

ВЫДАВЕЦТВА „НАВУКА І ТЭХНІКА“

МІНСК 1969

Кафедральная библиотека ГНУ І. Дзіна

Рэдакцыйная калегія:

Ф. І. ФЕДАРАЎ (галоўны рэдактар), Д. А. СУПРУНЕНКА
(нам. галоўнага рэдактара), М. М. АЛЯХНОВІЧ, Ф. Д. ГАХАЎ,
У. І. КРЫЛОЎ, М. М. СІРАТА, У. Г. СПРЫНДЖУК,
Я. І. ФІРСАЎ, С. А. ЧУНІХІН

ВЕСЦІ АКАДЭМІІ НАВУК БЕЛАРУСКАЙ ССР № 4 1969
СЕРЫЯ ФІЗІКА-МАТЭМАТЫЧНЫХ НАВУК

УДК 517.9 : 535.4

Е. А. ИВАНОВ, А. В. МОШИНСКИЙ, Б. С. ГЕЛЬФОНД

К ДИФРАКЦИИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН НА ДВУХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ЦИЛИНДРАХ

В предыдущей статье [1] были рассмотрены некоторые теоретические вопросы, относящиеся к установлению условия разрешимости бесконечной системы (8) из [1], и оценки скорости сходимости приближенного решения этой системы к точному в зависимости от порядка ее усечения. Данная статья является продолжением [1] и содержит иллюстрацию метода — графики функций, характеризующих рассеянное на цилиндрах электромагнитное поле в волновой зоне при различной конфигурации дифрагирующей системы из двух эллиптических цилиндров. Рассчитывались амплитудная функция $|A(\varphi)|$, определяемая формулой (6) из [1], и радиолокационное поперечное сечение для двух идеально проводящих параллельных эллиптических цилиндров, определяемое формулой (7) из той же работы. Все расчеты были осуществлены на электронной вычислительной машине «Минск-2». Собственные значения и коэффициенты функций Матье вычислялись по схеме, указанной в [2]. Угловые функции Матье вычислялись затем с помощью рядов Фурье, их определяющих, а модифицированные и комбинированные решения уравнения Матье — с помощью рядов по произведениям функций Бесселя (формулы (4.3.3), (4.3.5) из [2]). Как известно, при табулировании функций Матье с помощью указанных схем и формул возникают специфические трудности — из-за ограниченности разрядной сетки ЭВМ таблица значений функций Матье может быть составлена лишь при сравнительно небольших значениях параметра $q=k^2f^2/4$ (k — волновое число, f — фокусное расстояние эллипса поперечного сечения цилиндра). В приведенных ниже примерах мы ограничились лишь значениями q, не превосходящими 2.

На рис. 1 приведено семейство кривых $|A(\varphi)|$ в зависимости от полярного угла φ, представляющих собой диаграммы направленности по напряженности поля, рассеянного на системе из двух эллиптических цилиндров, возбуждаемых нормально падающей плоской волной ТМ-типа. Конфигурация цилиндров в z-плоскости указана на рисунке (стрелки указывают направление распространение волны). Цилиндры считались тождественными ($q_{-1}=q_{+1}=1$). Их поверхности задавались значением $\xi=\xi^0_{-1}=\xi^0_{+1}=0{,}6931$ (отношение большей оси эллипса сечения к меньшей $a/b\simeq 1{,}7$). Расстояние между осями цилиндров $2kl_0=6$. Кривые *1—5* (номер каждой из них соответствует номеру рисунка, показывающего конфигурацию системы) наглядно показывают, как меняется форма диаграммы направленности дифрагирующей системы в зависимости от расположения цилиндров системы по отношению друг к другу.

Как обычно, для двух тождественных отражателей, симметрично расположенных относительно направления падения волны, для всех конфигураций максимум переизлученной энергии создается в направлении падения волны ($\varphi=90°$). Однако величина максимума существенным

образом зависит от взаимного расположения цилиндров системы, она наибольшая для случая, когда большие оси эллипсов сечения параллельны, т. е. $\beta=0$ (β — угол между положительными направлениями осей $O_s x_s$ локальных координатных систем, совпадающих с большими осями эллипсов). При изменении угла β наблюдается осцилляция величины главного максимума в направлении падения волны.

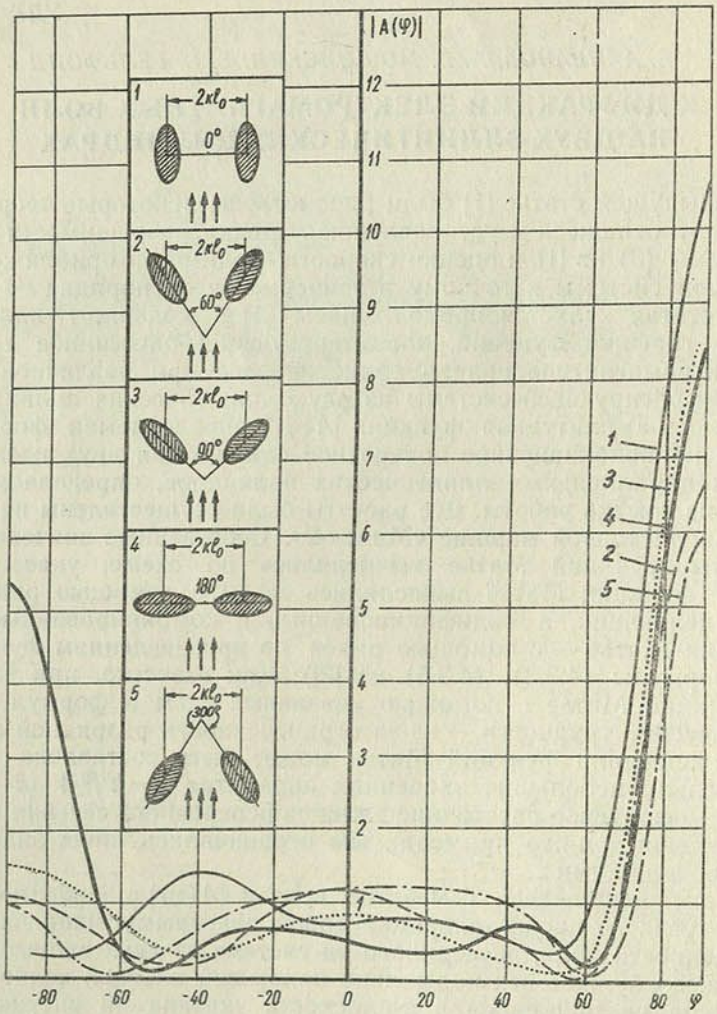


Рис. 1. Диаграммы рассеяния двух взаимодействующих эллиптических цилиндров при различной ориентации их эллипсов поперечного сечения:

1—$\beta=0$; *2*—60°; *3*—90; *4*—180; *5*—300

Боковое излучение (в направлении лучей $\varphi=0$ и 180°) и излучение в направлении на источник ($\varphi=270°$) также зависят от конфигурации системы. В частности, минимальное боковое излучение и максимальное излучение в направлении на источник имеют место в том случае, когда большие оси эллипсов сечения цилиндров лежат на одной прямой. С точки зрения минимизации переизлучения поля в обратном направлении (в направлении на источник) наиболее подходящей конфигурацией системы является та, которая соответствует кривой *1*, т. е. случаю, когда

$\beta=0$. При такой конфигурации системы двух цилиндров переизлучение вперед ($\varphi=90°$) примерно в 37 раз больше переизлучения назад, в направлении на источник (очевидно, что по мере деформации эллиптических цилиндров в круговые во всех рассмотренных здесь случаях все кривые будут приближаться к одной, отвечающей случаю круговых цилиндров).

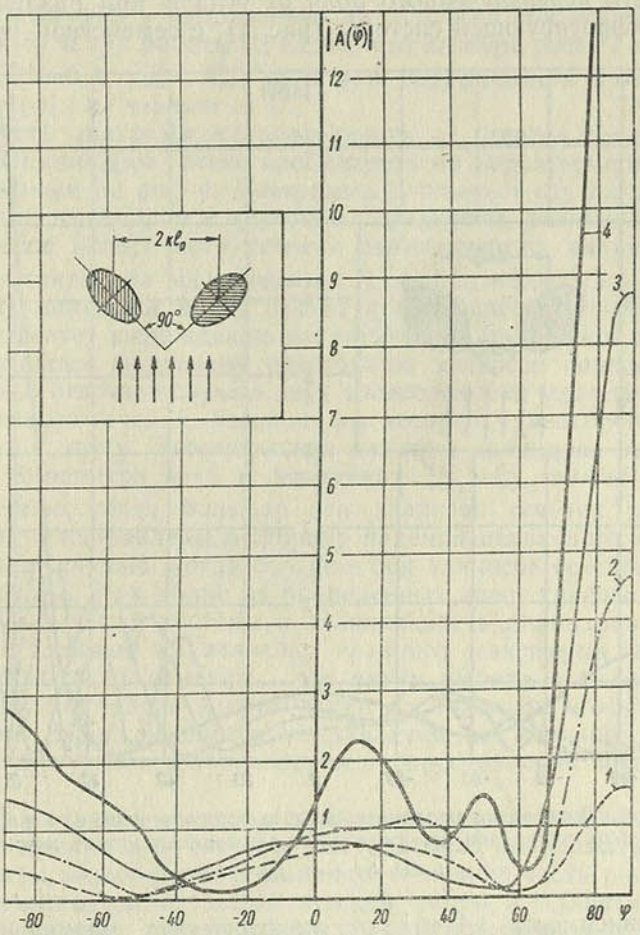


Рис. 2. Диаграммы направленности поля, переизлученного двумя эллиптическими цилиндрами, в зависимости от электрических размеров эллипсов поперечного сечения:

1—$q=0{,}1$; *2*—0,5; *3*—1; *4*—2

На рис. 2 представлены диаграммы направленности (графики функции $|A(\varphi)|$ в зависимости от угла φ) для случая, когда идентичные эллиптические цилиндры ($q_{-1}=q_{+1}=q$, $\xi^0_{-1}=\xi^0_{+1}=\xi^0=0{,}6931$) ориентированы так, что $\beta=90°$ ($2kl_0=6$). Как и раньше, стрелки указывают направление распространения волны. Диаграммы направленности здесь построены для значений параметра q 0,1, 0,5, 1 и 2, при которых расстояния $2f$ между фокусами эллипса сечения цилиндров равнялись соответственно $0{,}201\lambda$, $0{,}45\lambda$ $0{,}637\lambda$ $0{,}9\lambda$, где λ — длина волны.

Из рисунка видно, что диаграммы направленности носят ярко выраженный лепестковый характер. С ростом q форма диаграмм меня-

ется. При $q=2$ наблюдается заметная осцилляция переизлученного поля. С ростом q интенсивность переизлученного поля в направлении падения волны и в направлении на источник возрастает. Интересно также отметить, что в освещенной области с ростом q минимум интенсивности переизлученного поля смещается в направлении к границе области тени. Из сравнения семейства кривых, выражающих зависимость интенсивности переизлученного поля от угла φ при различных конфигурациях дифрагирующей системы (рис. 1), с семейством кривых, отра-

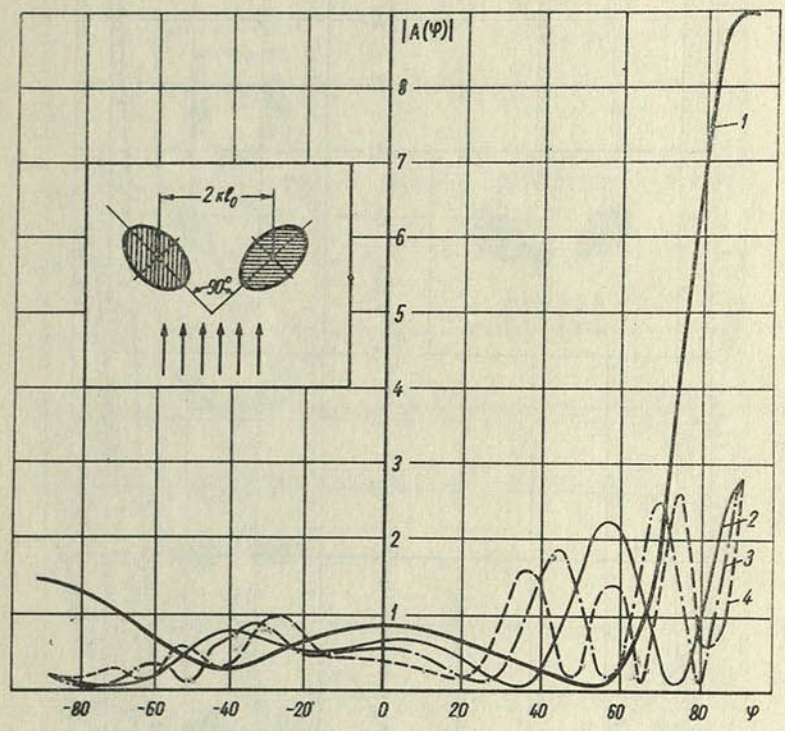


Рис. 3. Диаграммы рассеяния двух взаимодействующих эллиптических цилиндров при различных расстояниях между ними:
1—$2kl_0=6$; *2*—12; *3*—18; *4*—24

жающих зависимость $|A(\varphi)|$ от электрических размеров цилиндров (рис. 2), можно прийти к заключению, что изменение интенсивности переизлученного поля как в направлении падения волны, так и в направлении на источник, обусловленное изменением конфигурации дифрагирующей системы, эквивалентно изменением электрических размеров цилиндров при фиксированной их ориентации. Это обстоятельство является важным, так как, изменяя ориентацию цилиндров, можно управлять характеристиками рассеяния данной дифрагирующей системы, не прибегая к изменению частоты падающего поля или поперечных размеров цилиндров.

Для выяснения влияния расстояния $2l_0$ между цилиндрами на вид диаграмм направленности рассеянного поля был произведен расчет диаграмм при фиксированных значениях $q=q_{-1}=q_{+1}=1$ и $\xi^0_{+1}=\xi^0_{-1}=0{,}6931$, $\beta=90°$ (рис. 3).

Из рисунка видно, что во всех четырех случаях с ростом $2kl_0$ наблюдается появление дополнительных лепестков, число которых растет

с увеличением $2kl_0$. При $2kl_0=6$ интенсивность переизлученного поля в прямом и обратном направлениях значительно больше, чем в остальных из рассмотренных здесь случаев. Очевидно, что при значениях $2kl_0 \geqslant 12$ взаимодействие между цилиндрами выражено слабо, и поэтому дополнительный вклад, обусловленный многократным вторичным рассеянием волн на цилиндрах, не существен. Поэтому и наблюдается совпадение главных максимумов переизлученного поля в направлении падения волны и максимумов в направлении на источник при значениях $\alpha=\pi/2$ (из формул (8) и (9) работы [1] видно, что по мере роста l коэффициенты $\alpha_{nm}^{-s,s}$, $\beta_{nm}^{-s,s} \to 0$ и $\gamma_{nm}^{-s,s}$, $\delta_{nm}^{-s,s} \to 0$ и в направлениях $\varphi=\pi/2$, $\varphi=3\pi/2$ значение $|A(\varphi)|$ не зависит от l).

Зависимость диаграмм направленности от степени деформации эллиптических цилиндров легко просмотреть по характеристикам излучения, приведенным на рис. 4. Диаграмма *1* отвечает случаю вырождения эллиптических цилиндров в круговые с радиусом, равным большой полуоси эллипсов поперечного сечения эллиптических цилиндров, которые и здесь считаются идентичными ($\xi_{+1}^0=\xi_{-1}^0=0{,}6931, q_{+1}=q_{-1}=q=1$). Облучающая цилиндры волна падает в направлении $\varphi=90°$. Диаграмма *2* соответствует вырождению эллиптических цилиндров в круговые с радиусом, равным фокусному расстоянию эллипсов поперечного сечения. График 3 отвечает случаю двух эллиптических цилиндров с эллипсами поперечного сечения, большие оси которых ориентированы под углом 90° друг к другу. Электрические размеры цилиндров определяются значениями параметра $q=2$ и координат $\xi_{+1}^0=\xi_{-1}^0=0{,}6931$. График *4* отвечает случаю, когда большие оси эллипсов сечения параллельны между собой и направлены в сторону падения первичного поля, а график *5* отвечает случаю, когда большие оси эллипсов сечения находятся на одной прямой. Как видно из приведенных здесь графиков, конфигурация дифрагирующей системы и эллиптичность цилиндров существенным образом влияют на величину главного максимума переизлученного поля. Интересно отметить, что путем выбора размеров сечения эллиптических цилиндров и ориентации их эллипсов можно добиться минимального переизлучения в направлении на источник при максимальном переизлучении в направлении распространения волны (см. график 3).

На рис. 5 в верхней части представлены графики радиолокационного поперечного сечения для системы, составленной из эллиптического цилиндра и ленты, экранирующей цилиндр, в нижней части рисунка — для системы, составленной из металлической ленты и эллиптического цилиндра, затеняющего ленту. Конфигурация рассеивающих структур и их ориентация относительно падающего поля в обоих случаях показана на рисунке. Расчет радиолокационного поперечного сечения производился по формуле (7) из [1]. Графики *1, 2, 3* верхней части рисунка вычислены для случая, когда параметры цилиндра $q_{-1}=1$, $\xi_{-1}^0=0{,}6931$ фиксировались, а ширина ленты $2f(\xi_{+1}^0=0)$ соответственно принималась равной $0{,}637\lambda$; $0{,}45\lambda$ и $0{,}201\lambda$ ($q_{+1}=1$, 05 и 0,1). Графики *1, 2, 3, 4* нижней части рисунка соответствуют случаю, когда ширина полосы фискировалась ($q_{-1}=1$, $\xi_{-1}^0=0$), а параметр q_{+1} затеняющего цилиндра ($\xi_{+1}^0=1$) соответственно брался равным 2, 1, 0,5, 0,1. Все графики рис. 5 отражают зависимость величины $k\sigma_B/16$ от $2kl_0$, т. е. от расстояния между лентой и цилиндром. Как видно, графики имеют ярко выраженный осциллирующий характер, при этом минимумы и максимумы обусловлены гашением и усилением полей, возбуждаемых поверхностными токами, индуцированными на цилиндрах.

Полученные результаты позволяют сделать следующие выводы:

1. Взаимная ориентация эллипсов поперечных сечений цилиндров и их эллиптичность существенно влияют на величину главного максимума переизлученного поля.

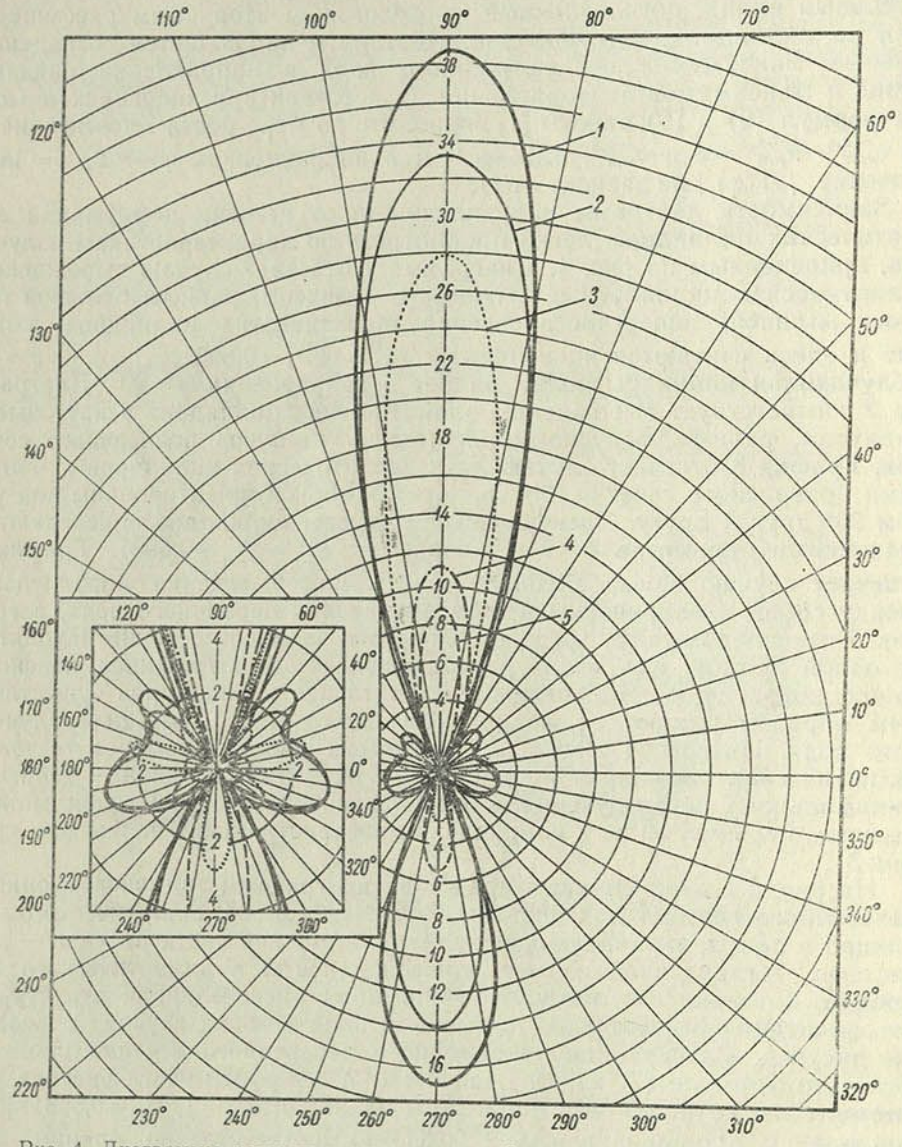


Рис. 4. Диаграммы рассеяния двух взаимодействующих цилиндров в зависимости от деформации эллипсов поперечного сечения

2. Выбор расстояния между цилиндрами, выбор размеров эллипсов поперечного сечения цилиндров и их ориентации может служить эффективным средством минимизации или оптимизации радиолокационного поперечного сечения отражателя, состоящего из двух эллиптических цилиндров или лент.

3. При наличии двух эллиптических цилиндров диаграммы направленности переизлученного поля носят, как обычно, лепестковый характер, при этом число лепестков диаграммы растет с ростом l.

4. Характер диаграмм направленности и интенсивность переизлученного поля зависят от электрических размеров поперечников цилиндров.

5. Изменение ориентации эллипсов поперечного сечения цилиндров позволяет управлять характеристиками рассеяния системы, не прибегая к изменению частоты падающего поля или электрических размеров цилиндров.

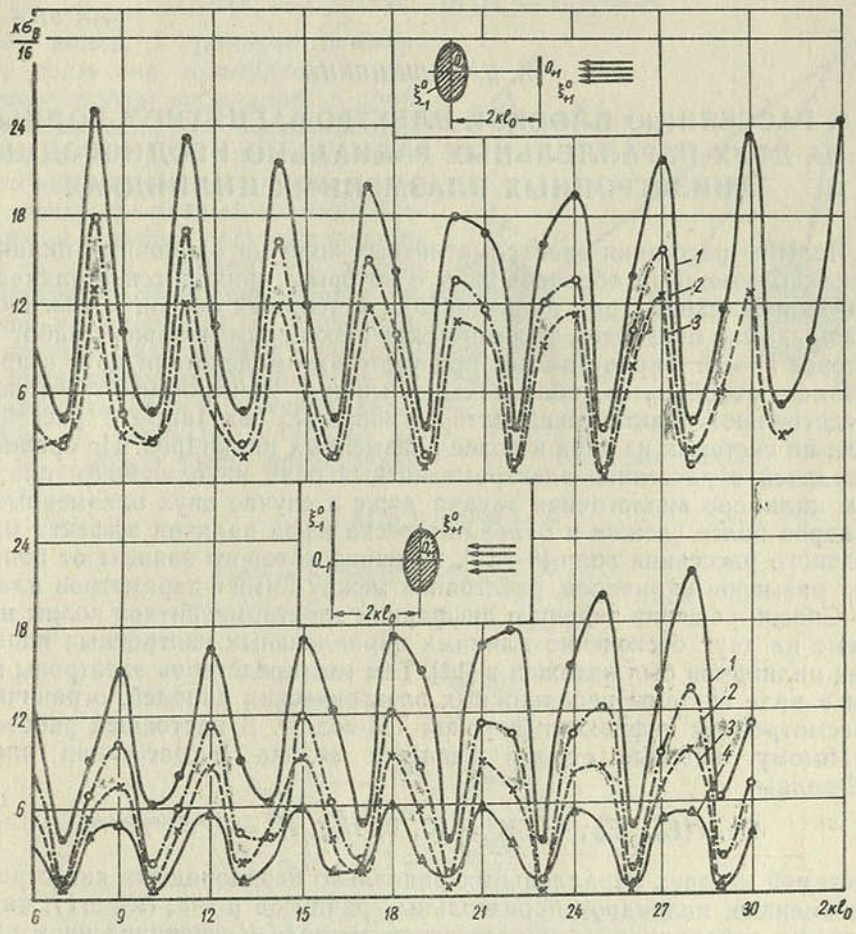


Рис. 5. Зависимость радиолокационного поперечного сечения структуры типа полоса—эллиптический цилиндр от расстояния между лентой и цилиндром

В заключение отметим также, что применяемый метод решения задачи в диапазоне волн, сравнимых с поперечными размерами цилиндров или превосходящих их, удобен для составления типовых программ, реализующих алгоритм решения задачи на быстродействующих электронных вычислительных машинах.

Литература

1. Иванов Е. А., Мошинский А. В. Весці АН БССР, сер. фіз.-мат. навук, № 3, 1969.

2. Иванов Е. А. Дифракция электромагнитных волн на двух телах. Изд. «Наука и техника», Минск, 1968.

Институт математики АН БССР,
Минский радиотехнический институт

Поступило в редакцию 16.IX 1968

ВЕСЦІ АКАДЭМІІ НАВУК БЕЛАРУСКАЙ ССР № 4 1969
СЕРЫЯ ФІЗІКА-МАТЭМАТЫЧНЫХ НАВУК

УДК 517.9 : 535.4

А. В. МОШИНСКИЙ

К РАССЕЯНИЮ ПЛОСКОЙ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ВОЛНЫ НА ДВУХ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ РАДИАЛЬНО НЕОДНОРОДНЫХ АНИЗОТРОПНЫХ ПЛАЗМЕННЫХ ЦИЛИНДРАХ

Явление рассеяния электромагнитных волн на одиночных цилиндрических плазменных образованиях, с которым приходится сталкиваться в антенной технике, при радиолокации метеорных следов и диагностике плазмы, было предметом теоретических и экспериментальных работ ряда авторов [1—7]. Наряду с этим при учете взаимодействия друг с другом плазменных объектов, облучаемых внешним электромагнитным полем, представляют практический интерес вопросы, связанные с рассеянием волн на системах из двух и более плазменных цилиндров. По сравнению с задачей о рассеянии электромагнитных волн на одиночном плазменном цилиндре аналогичная задача даже в случае двух плазменных цилиндров более сложна и более интересна из-за наличия эффекта многократного рассеяния волн [8—11], величина которого зависит от поперечных размеров цилиндров, расстояния между ними и параметров плазмы.

Способ решения задачи о дифракции электромагнитной волны на системе из двух бесконечно длинных параллельных изотропных плазменных цилиндров был изложен в [12]. Там мы, представив электроны плазмы в виде системы неподвижных электрических диполей, ограничились рассмотрением дифракции плоской TM-волны. В настоящей работе, по-видимому, впервые строго решается задача о рассеянии плоской TE-волны

$$\mathbf{E}^0 = \{E^0_\rho,\ E^0_\varphi,\ 0\},\ \mathbf{H}^0 = \{0,\ 0,\ H^0_z\},\ H^0_z = H^0 e^{ik(\mathbf{n}\vec{\rho})-i\omega t^*)} \tag{1}$$

системой из двух параллельных радиально неоднородных анизотропных плазменных цилиндров произвольных радиусов $\rho_s = a_s$ $(s = \pm 1)$, находящихся в однородном внешнем магнитном поле H_0, направленном параллельно продольным осям цилиндров. Предполагается, что направление распространения волны (1), определяемое единичным вектором $\mathbf{n}$, составляет угол $\pi/2$ с образующими цилиндров и угол α с положительным направлением оси Ox, лежащей на линии центров цилиндров в плоскости Oxy (см. рисунок).

Магнитная составляющая суммарного поля вне цилиндров

$$H_z = H^0_z + H^1_z \tag{2}$$

H^1_z — магнитная составляющая переизлученного поля, подлежащая определению) должна удовлетворять уравнениям Максвелла

$$\operatorname{rot}\mathbf{H} = -ik\mathbf{E},\quad \operatorname{rot}\mathbf{E} = ik\mathbf{H},$$
$$\operatorname{div}\mathbf{E} = 0,\quad \operatorname{div}\mathbf{H} = 0 \tag{3}$$

*) В дальнейшем временной множитель $e^{-i\omega t}$ для удобства записи опускается.

или получаемому из них двумерному скалярному уравнению Гельмгольца

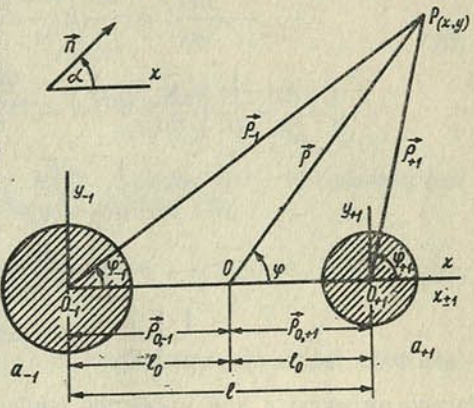
$$\Delta H_z + k^2 H_z = 0, \quad k = \frac{2\pi}{\lambda}, \tag{4}$$

а на поверхности ($\rho_s = a_s$, $s = \pm 1$) каждого из цилиндров — общим граничным условиям

$$[\mathbf{n}(\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2)] = 0, \quad [\mathbf{n}(\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2)] = 0 \tag{5}$$

(здесь индекс 1 приписан суммарному полю вне цилиндров, индекс 2—полю внутри цилиндров) и принципу излучения на бесконечности.

Ограничиваясь рассмотрением бесстолкновительной плазмы и считая электроны плазмы взаимодействующими с волной (1) независимо друг от друга, найдем, что тензор диэлектрической проницаемости холодной неоднородной и анизотропной плазмы, находящейся в постоянном продольном магнитном поле H_0, в локальных цилиндрических координатах с началом в точках O_s ($s = \pm 1$) может быть представлен [13] так:



Геометрия задачи

$$\overleftrightarrow{\varepsilon}(\rho_s) = \begin{vmatrix} \varepsilon_1(\rho_s) & i\varepsilon_2(\rho_s) & 0 \\ -i\varepsilon_2(\rho_s) & \varepsilon_1(\rho_s) & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3(\rho_s) \end{vmatrix}, \tag{6}$$

где

$$\varepsilon_1(\rho_s) = 1 - \frac{\omega_p^2(\rho_s)}{\omega^2 - \omega_g^2},$$

$$\varepsilon_2(\rho_s) = -\frac{\omega_g}{\omega} \frac{\omega_p^2(\rho_s)}{\omega^2 - \omega_g^2}, \tag{7}$$

$$\varepsilon_3(\rho_s) = 1 - \frac{\omega_p^2(\rho_s)}{\omega^2},$$

$$\omega_p = \sqrt{\frac{N(\rho_s)e^2}{m}}, \quad \omega_g = \frac{eH_0}{m}$$

(здесь $N(\rho_s)$ — распределение электронов плазмы по радиусу s-го цилиндра, e и m — соответственно заряд и масса электрона).

Система уравнений Максвелла для области плазмы ($\rho_s \leqslant a_s$, $s = \pm 1$) имеет вид [13]

$$\begin{aligned} &\operatorname{rot}\mathbf{E} = ik\mathbf{H}, \quad \operatorname{div}\mathbf{H} = 0, \\ &\operatorname{rot}\mathbf{H} = -ik\mathbf{D}, \quad \operatorname{div}\mathbf{D} = 0, \end{aligned} \tag{8}$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{D} &= \{D_{\rho_s}, D_{\varphi_s}, D_{z_s}\}, \\ D_{\rho_s} &= \varepsilon_1(\rho_s) E_{\rho_s} + i\varepsilon_2(\rho_s) E_{\varphi_s}, \\ D_{\varphi_s} &= -i\varepsilon_2(\rho_s) E_{\rho_s} + \varepsilon_1(\rho_s) E_{\varphi_s}, \\ D_{z_s} &= \varepsilon_3(\rho_s) E_{z_s}. \end{aligned} \tag{9}$$

Полагая, что $\frac{\partial}{\partial z} = 0$, из уравнений Максвелла (8) и соотношений (9) легко устанавливаем связь между составляющими поля в объеме плазмы s-го цилиндра:

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial H_z}{\partial \varphi} = -ik\left[\varepsilon_1(\rho)E_\rho + i\varepsilon_2(\rho)E_\varphi\right]; \tag{10}$$

$$-\frac{\partial H_z}{\partial \rho} = -ik\left[-i\varepsilon_2(\rho)E_\rho + \varepsilon_1(\rho)E_\varphi\right]; \tag{11}$$

$$\frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial}{\partial \rho}(\rho H_\varphi) - \frac{\partial H_\rho}{\partial \varphi}\right] = -ik\varepsilon_3(\rho)E_z; \tag{12}$$

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial E_z}{\partial \varphi} = -ikH_\rho; \tag{13}$$

$$-\frac{\partial E_z}{\partial \rho} = -ikH_\varphi; \tag{14}$$

$$\frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial}{\partial \rho}(\rho E_\varphi) - \frac{\partial E_\rho}{\partial \varphi}\right] = ikH_z. \tag{15}$$

(здесь индексы s для удобства записи опущены).

Если, учитывая, что $H_z(\rho_s, \varphi_s)$ должна быть периодической функцией от φ_s, представить ее в виде ряда Фурье $H_z(\rho_s, \varphi_s) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n(\rho_s)\, e^{in\varphi_s}$, то тогда из (10), (11) и (15), как и в [7], для неизвестных радиальных функций $f_n(\rho_s)$ получим однородное дифференциальное уравнение второго порядка

$$\frac{d^2 f_n(\rho_s)}{d\rho_s^2} + \frac{1}{\rho_s g(\rho_s)}\frac{d}{d\rho_s}\left[\rho_s g(\rho_s)\right]\frac{df_n(\rho_s)}{d\rho_s} + \frac{1}{g(\rho_s)}\left\{k^2 + \right.$$
$$\left. + \frac{n}{\rho_s}\frac{d}{d\rho_s}\left[\frac{\varepsilon_2(\rho_s)}{\varepsilon_1(\rho_s)}\, g(\rho_s)\right] - \frac{n^2}{\rho_s^2}\, g(\rho_s)\right\} f_n(\rho_s) = 0, \tag{16}$$

в котором

$$g(\rho_s) = \varepsilon_1(\rho_s)/\left(\varepsilon_1^2(\rho_s) - \varepsilon_2^2(\rho_s)\right).$$

Уравнение может быть решено либо с помощью метода обобщенных степенных рядов [14], либо методом эталонного уравнения [15, 16], нашедшего в последнее время широкое применение при решении задач о распространении электромагнитных волн в ионосферных слоях [17], а также в случае рассеяния электромагнитных волн на цилиндрических плазменных оболочках [6]. Заметим, что в случае радиально однородной плазмы мы из (16) приходим к обычному уравнению Бесселя

$$\frac{d^2 f_n(\rho_s)}{d\rho_s^2} + \frac{1}{\rho_s}\frac{df_n(\rho_s)}{d\rho_s} + \left[k^2\frac{\varepsilon_1^2 - \varepsilon_2^2}{\varepsilon_1} - \frac{n^2}{\rho_s^2}\right] f_n(\rho_s) = 0, \tag{17}$$

решения которого известны.

Решение задачи для областей вне ($\rho_s > a_s$) и внутри ($\rho_s \leqslant a_s$) цилиндров соответственно будем искать в виде рядов

$$H_z^1 = H^0 \sum_{s=\pm 1}\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n^{(s)} H_n^{(1)}(k\rho_s)\, e^{in\varphi_s}, \tag{18}$$

$$H_z^2 = H^0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n^{(s)} R_n^{(s)}(k\rho_s)\, e^{in\varphi_s}, \tag{19}$$

в которых $H_n^{(1)}(k\rho_s)$ — функции Ханкеля 1-го рода, а $R_n^{(s)}(k\rho_s)$—радиальные функции, являющиеся решениями уравнения (16). Неизвестные коэффициенты $a_n^{(s)}$, $b_n^{(s)}$ разложений (18), (19) определяются из граничных условий (5), которые в скалярной форме имеют вид

$$H_z^2|_{\rho_s=a_s} = (H_z^0 + H_z^1)|_{\rho_s=a_s}, \tag{20}$$

$$\left(\frac{\partial H_z^0}{d\rho_s} + \frac{\partial H_z^1}{\partial \rho_s}\right)\Bigg|_{\rho_s=a_s} = \left\{ g(\rho_s)\frac{\partial H_z^2}{\partial \rho_s} - \frac{i\varepsilon_2(\rho_s)\, g(\rho_s)}{\rho_s \varepsilon_1(\rho_s)}\frac{\partial H_z^2}{\partial \varphi_s}\right\}\Bigg|_{\rho_s=a_s}.$$

Представив первичное поле (1) в виде разложения по собственным функциям в s-ой цилиндрической системе координат [18]

$$H_z^0 = H^0 e^{iskl_0\cos\alpha} \sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n J_n(k\rho_s)\, e^{in(\varphi_s-\alpha)}, \quad l_0 = l/2, \tag{21}$$

при помощи хорошо известной в теории цилиндрических функций обобщенной теоремы сложения [19]

$$H_n^{(1)}(k\rho_s)\, e^{in\varphi_s} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} J_m(k\rho_{-s})\, H_{n-m}^{(1)}(k\rho_{s,-s})\, e^{im\varphi_{-s}+i(n-m)\varphi_{s,-s}},$$

где $\rho_{s,-s} > \rho_s$, а $\rho_{s,-s}$ и $\varphi_{s,-s}$ — координаты начала $-s$-ой системы координат в координатах $+s$-ой системы*), из граничных условий (20) для коэффициентов $a_n^{(s)}$ после ряда преобразований получим бесконечную систему линейных уравнений такого же вида, как и в [9]:

$$a_n^{(s)} + \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m^{(-s)} G_n(ka_s)\frac{J_n'(ka_s)}{H_n^{(1)}(ka_s)} H_{m-n}^{(1)}(k\rho_{-s,s})\, e^{i(m-n)\varphi_{-s,s}} =$$

$$= -i^n G_n(ka_s)\frac{J_n'(ka_s)}{H_n^{(1)\prime}(ka_s)}\, e^{iskl_0\cos\alpha - in\alpha}, \tag{22}$$

где

$$G_n(ka_s) = \frac{\left[\dfrac{J_n(ka_s)}{J_n'(ka_s)} D_n(ka_s) - R_n^{(s)}(ka_s)\right]}{\left[\dfrac{H_n^{(1)}(ka_s)}{H_n^{(1)\prime}(ka_s)} D_n(ka_s) - R_n^{(s)}(ka_s)\right]}, \tag{23}$$

а

$$D_n(ka_s) = \frac{1}{\varepsilon_2^2(a_s) - \varepsilon_1^2(a_s)}\left[\frac{n\varepsilon_2(a_s)}{ka_s} R_n^{(s)}(ka_s) + \varepsilon_1(a_s) R_n^{(s)\prime}(ka_s)\right]. \tag{24}$$

После введения замены неизвестных по формуле

$$a_n^{(s)} = J_n'(ka_s)\, A_n^{(s)} \tag{25}$$

*) В нашем случае $\varphi_{-1,+1} = 0$, $\varphi_{+1,-1} = \pi$, $\rho_{-s,s} = \rho_{+s,-s} = l$.

получаемая из (22) бесконечная система уравнений

$$A_n^{(s)} + \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sigma_{nm}^{-s,s} A_m^{(-s)} = F_{n,s}, \quad s = \pm 1,\ n = 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots, \tag{26}$$

в которой теперь

$$\sigma_{nm}^{-s,s} = \frac{J_m'(ka_{-s})}{H_n^{(1)\prime}(ka_s)} H_{m-n}^{(1)}(k\rho_{-s,s})\, G_n(ka_s)\, e^{i(m-n)\varphi_{-s,s}}, \tag{27}$$

$$F_{n,s} = -i^n \frac{G_n(ka_s)}{H_n^{(1)\prime}(ka_s)} e^{iskl_0\cos\alpha - in\alpha}, \tag{28}$$

может быть разрешима методом редукции при условии, что цилиндры не соприкасаются. Действительно, повторив рассуждения, аналогичные приведенным в [20], считая функцию $G_n(ka_s)$ ограниченной по модулю для всех n некоторой константой, найдем, что для всех n и m

$$|\sigma_{nm}^{-s,s}| < \text{const}_1 \frac{(|n| + |m|)!}{|n|!\,|m|!} \left(\frac{a_s}{l}\right)^{|n|} \left(\frac{a_{-s}}{l}\right)^{|m|} \tag{29}$$

и что

$$|F_{n,s}| < \text{const}_2\, \gamma^{|n|}, \quad \gamma < 1. \tag{30}$$

На основании (29) и (30) и соответствующих теорем из [21—23], касающихся бесконечных систем уравнений, убеждаемся в том, что система (26) как система с вполне непрерывной формой и свободными членами, удовлетворяющими при разумно выбранных параметрах плазмы условию $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |F_{n,s}|^2 < \infty$, разрешима методом редукции, сходящимся к точному по норме пространства l^2.

Из граничных условий (20) также устанавливается связь между коэффициентами $a_n^{(s)}$, $b_n^{(s)}$ разложений (18), (19). С учетом замены (25) эта связь дается формулой

$$b_n^{(s)} = \frac{2iJ_n'(ka_s)}{\pi ka_s \{J_n(ka_s) D_n(ka_s) - J_n'(ka_s) R_n^{(s)}(ka_s)\}} A_n^{(s)}. \tag{31}$$

Компоненты поля внутри каждого из плазменных цилиндров легко находятся из (10), (11), (15) и здесь из-за экономии места специально не приводятся.

В волновой зоне, для которой в цилиндрических координатах с началом в точке O, $\rho_s \simeq \rho - sl_0\cos\varphi$, $\varphi_s \simeq \varphi$, $\rho \gg l_0$ $(l_0 = l/2)$, применив в (19) асимптотическую формулу для функций Ханкеля

$$H_n^{(1)}(k\rho_s) = (-i)^n \sqrt{\frac{\pi}{k\rho}}\, e^{i\left(k\rho - \frac{\pi}{4}\right) - iskl_0\cos\varphi}, \tag{32}$$

из уравнений Максвелла (3) найдем, что компоненты переизлученного поля $E_\rho^1 = E_z^1 = H_\rho^1 = H_\varphi^1 = 0$, а $H_z^1 \neq 0$, $E_\varphi^1 \neq 0$, причем

$$H_z^1 = E_\varphi^1 = A(\varphi) \frac{e^{ik\rho}}{\sqrt{\rho}}, \tag{33}$$

где амплитудная функция $A(\varphi)$ переизлученного поля определяется выражением

$$A(\varphi) = H^0 \sqrt{\frac{2}{\pi k}}\, e^{-i\frac{\pi}{4}} \sum_{s=\pm 1} e^{-iskl_0\cos\varphi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-i)^n A_n^{(s)} J_n'(ka_s)\, e^{in\varphi}. \quad (34)$$

Радиолокационное поперечное сечение рассеяния для двух параллельных плазменных круговых цилиндров дается формулой

$$\sigma_B = \frac{4}{k} \left| \sum_{s=\pm 1} e^{iskl_0\cos\alpha} \sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n A_n^{(s)} J_n'(ka_s)\, e^{in\alpha} \right|^2. \quad (35)$$

В заключение отметим, что эффект взаимодействия плазменных цилиндров скрыт в сущности коэффициентов $a_n^{(s)}$, $b_n^{(s)}$ разложений (18), (19). В этом нетрудно убедиться, если, считая плазменные цилиндры достаточно разнесенными, воспользоваться при решении системы (26) методом последовательных приближений (см., например, [18], стр. 244), применение которого позволяет получить приближенное решение системы (26) в «замкнутой» форме:

$$A_n^{(s)} = F_{n,s} + \beta_n^{(s)} H \frac{HQ^{-s}D^s - D^{-s}}{1 - [H^2 Q^{-s} Q^{+s}]}, \quad (36)$$

где

$$H = \sqrt{\frac{1}{\pi k l_0}}\, e^{i\left(kl - \frac{\pi}{4}\right)}; \quad \beta_n^{(s)} = i^n \frac{G_n(ka_s)}{H_n^{(1)'}(ka_s)}\, e^{in\varphi - s.s};$$

$$Q^s = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n^{(s)} \beta_n^{(s)}; \quad \alpha_n^{(s)} = (-i)^n J_n'(ka_s)\, e^{-in\varphi - s,s}; \quad (37)$$

$$D^s = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n'^{(s)} F_{n,s}.$$

Физический смысл решения (36) очевиден. Первое слагаемое в правой части (36) отражает результат возбуждения цилиндров лишь полем первичной падающей волны (1), а второе слагаемое учитывает эффект взаимодействия цилиндров, выражающегося в последовательном многократном рассеянии волн на цилиндрах.

Литература

1. Platzman P. M., Ozaki H. T. J. Appl. Phys., **31**, № 9, 1597, 1960.
2. Днестровский Ю. Н., Костомаров Д. П. Радиотехника и электроника, № 3, 1963.
3. Paul-Etienne Fangeras M. C. r. Acad. Sci. Paris, **259**, № 5, 1311, 1964.
4. Rothman H. S. IEEE Trans. Antennas and Propagat., **AP-13**, № 1, 164, 1965.
5. Рыжова Л. К., Якименко И. П. Изв. вузов, Радиофизика, **10**, № 5, 1967.
6. Максимов Ю. Н. Радиотехника и электроника, **12**, № 2, 1967.
7. Rusch W. V. T., Yeh C. IEEE Trans. Antennas and Propagat., **AP-15**, № 3, 452, 1967.
8. Twersky V. J. Appl. Phys., **23**, 407, 1952.
9. Иванов Е. А., Ильюкевич С. Ф. ДУ, **1**, № 1, 1965.
10. Иванов Е. А. Радиотехника и электроника, **11**, № 5, 1966.
11. Кинберг Б. Е., Гуревич С. В. Радиотехника и электроника, **13**, № 5, 1968.
12. Иванов Е. А., Мошинский А. В. ДАН БССР, **12**, № 3, 1968.
13. Эллис В., Буксбаум С., Берс А. Волны в анизотропной плазме. Атомиздат, 1966.

14. Пермяков В. А. Изв. вузов, Радиофизика, 11, № 4, 1968.
15. Петрашень М. И. Уч. зап. ЛГУ, № 7, 1949.
16. Дородницын А. А. УМН, 7, в. 6, 1952.
17. Макаров Г. И. Сб. «Проблемы дифракции и распространения волн», в. 1. Изд. ЛГУ, 1962.
18. Иванов Е. А. Дифракция электромагнитных волн на двух телах. Изд. «Наука и техника», Минск, 1968.
19. Стрэттон Дж. Теория электромагнетизма. Гостехиздат, М., 1948.
20. Иванов Е. А., Мошинский А. В. Весці АН БССР, сер. фіз.-мат. навук, № 3, 1969.
21. Канторович Л. В., Крылов В. И. Приближенные методы высшего анализа. М., Физматгиз, 1962.
22. Вулих Б. В. Введение в функциональный анализ. Изд. «Наука», М., 1967.
23. Канторович Л. В., Акилов Г. П. Функциональный анализ в нормированных пространствах. Физматгиз, М., 1958.

Минский радиотехнический институт

Поступило в редакцию 10.I 1969

ВЕСЦІ АКАДЭМІІ НАВУК БЕЛАРУСКАЙ ССР № 4 1969
СЕРЫЯ ФІЗІКА-МАТЭМАТЫЧНЫХ НАВУК

УДК 513.88 : 513.83

Ю. И. МАКОВОЗ

ПОПЕРЕЧНИКИ НЕКОТОРЫХ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ КЛАССОВ В ПРОСТРАНСТВЕ L

В линейном метрическом пространстве X рассмотрим множество M и подпространство Γ. Отклонением множества M от подпространства Γ называется величина

$$\delta(M,\ \Gamma) = \sup_{x \in M} \rho(x,\ \Gamma) = \sup_{x \in M} \inf_{Y \in \Gamma} \rho(x,\ y).$$

29191

n-й поперечник $d_n(M)$ (по А. Н. Колмогорову) множества M в пространстве X определяется как нижняя грань

$$d_n(M) = \inf_{\Gamma_n} \delta(M,\ \Gamma_n)$$

отклонений множества M от всевозможных линейных подпространств Γ_n размерности n из X.

Вычислению поперечников множеств в конкретных функциональных пространствах посвящено уже много работ (см. [1] и [2], где приведена обширная библиография). Достаточно полно исследованы поперечники важнейших функциональных классов в равномерной метрике и в метрике L_2. Результатов же по вычислению поперечников в других интегральных метриках известно сравнительно немного. Настоящая работа имеет целью частично восполнить этот пробел: мы изучаем здесь поперечники ряда функциональных классов в пространстве L.

§ 1. Основная лемма.

Пусть M и Γ означают соответственно произвольное множество и линейное подпространство банахового пространства X. Из теоремы Хана — Банаха легко следует формула

$$\delta(M,\ \Gamma) = \sup_{x \in M} \sup_{F \in S^* \cap \Gamma^\perp} |F(x)|$$

(здесь S^* означает единичную сферу сопряженного пространства X^*, $\Gamma^\perp$ — аннулятор подпространства Γ, т. е. совокупность линейных ограниченных функционалов $F(x)$, обращающихся в нуль на Γ). Мы будем использовать более слабое утверждение

$$\delta(M,\ \Gamma) \geqslant \sup_{x \in M} |F(x)| \qquad (1)$$

(справедливое для любого $F \in S^* \cap \Gamma^\perp$), которое доказывается совсем просто. Действительно, если $x \in M$, $y \in \Gamma$, то $|F(x)| = |F(x-y)| \leqslant \|F\| \|x - y\| = \|x - y\|$. Переходя в этом неравенстве сначала к inf по y, а затем к sup по x, получим (1).



Пусть теперь $X \equiv L[a, b]$. Разобьем отрезок $[a, b]$ на части точками $a=t_0<t_1<\ldots<t_{N+1}=b$, положим $\Delta_\nu=[t_{\nu-1}, t_\nu]$ $(\nu=1, 2, \ldots, N+1)$ и рассмотрим в пространстве $L[a, b]$ функционал

$$F_\lambda(x)=\sum_{\nu=1}^{N+1}\lambda_\nu\int_{\Delta\nu}x(t)\,dt=\int_0^{2\pi}x(t)\,\lambda(t)\,dt \tag{2}$$

($\lambda(t)$ — ступенчатая функция, принимающая значения λ_ν на отрезках Δ_ν). Ясно, что

$$\|F\|=\max_\nu|\lambda_\nu|=\max_t|\lambda(t)|.$$

Если Γ_N — некоторое N-мерное подпространство из $L[a, b]$, то, очевидно, всегда можно выбрать $N+1$ чисел λ_ν так, чтобы $F\in S^*\cap\Gamma_N^\perp$. При таком выборе чисел λ_ν для любого множества M из $L[a, b]$ будем иметь $\delta(M, \Gamma_N)\geqslant\sup_{x\in M}|F_\lambda(x)|$. Заметим еще, что если множество M содержит все функции вида $x(t)=\text{const}$, то для того чтобы $\delta(M, \Gamma_N)$ было конечным, необходимо, чтобы подпространство Γ_N содержало функцию $e(t)\equiv 1$; в этом случае $F_\lambda(e)=0$, или иначе $\sum_{\nu=1}^{N+1}\lambda_\nu=0$. Из сказанного выше вытекает следующая лемма.

Лемма 1. *Пусть M — произвольный класс функций из $L[a, b]$. Если существует такое разбиение отрезка $[a, b]$ на $N+1$ частей точками $a=t_0<t_1<\ldots<t_{N+1}=b$, что для любого упорядоченного набора вещественных чисел $\{\lambda_\nu\}=\lambda$ $(\nu=0, 1, \ldots, N)$, удовлетворяющего условию*

$$\max_{1<\nu<N+1}|\lambda_\nu|=1, \tag{3}$$

имеет место неравенство

$$\sup_{x\in M}|F_\lambda(x)|\geqslant d$$

($F_\lambda(x)$ определяется формулой (2)), то

$$d_N(M)\geqslant d.$$

Если класс M содержит все функции вида $x(t)=\text{const}$, то можно ограничиться лишь теми наборами λ, для которых

$$\sum_{\nu=1}^{N+1}\lambda_\nu=0. \tag{4}$$

Заметим, между прочим, что если провести сходные рассуждения с функционалом $F_\lambda(x)=\sum_{\nu=1}^{N+1}\lambda_\nu x(t_\nu)$ $(t_\nu\in T)$ в пространстве $C(T)$, то получится теорема А. Н. Колмогорова о поперечниках в $C(T)$, так что лемма 1 является в известном смысле аналогом этой теоремы.

§ 2. Поперечники класса $\widetilde{W}_L^r$

Пусть $\tilde{L}$ означает совокупность вещественных 2π-периодических функций $x(t)$ с нормой

$$\|x\|=\int_0^{2\pi}|x(t)|\,dt$$

($\tilde{L}$ можно, конечно, отождествить с подпространством пространства $L[0,2\pi]$). Под $\widetilde{W}_L^r$ мы понимаем совокупность функций $x(t) \in \tilde{L}$, имеющих $(r-1)$-ю абсолютно непрерывную производную и r-ю производную, подчиненную условию

$$\| x^{(r)}(t) \|_L = \int_0^{2\pi} | x^{(r)}(t) | \, dt \leqslant 1.$$

Иначе класс $\widetilde{W}_L^r$ можно определить как совокупность функций $x(t)$, представимых в виде

$$x(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} D_r(t-s)\,\varphi(s)\,ds + \text{const},$$

где

$$\varphi(t) \in \tilde{L}, \quad \| \varphi \|_L = 1, \quad \int_0^{2\pi} \varphi(s)\,ds = 0, \tag{5}$$

$$D_r(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos\left(kt + \frac{r\pi}{2}\right)}{k^r}.$$

Приближения в метрике L функций этого класса тригонометрическими полиномами изучены в работе С. М. Никольского [3], в которой доказано равенство

$$\delta(\widetilde{W}_L^r, T_{2n-1}) = \frac{K_r}{n^r}, \tag{6}$$

где T_{2n-1} означает $(2n-1)$-мерное подпространство тригонометрических полиномов порядка $\leqslant n-1$,

$$K_r = \frac{4}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^{m(r+1)}}{(2m+1)^{r+1}}.$$

Мы покажем, что подпространство T_{2n-1} является экстремальным для $\widetilde{W}_L^r$ в метрике L среди подпространств размерности $2n-1$. Именно, имеет место следующая теорема (для $r=1$ эта теорема была высказана без доказательства Л. В. Тайковым [4]).

Теорема 1.

$$d_{2n-1}(\widetilde{W}_L^r) = \frac{K_r}{n^r}.$$

Доказательство. Из (6) вытекает, что $d_{2n-1}(\widetilde{W}_L^r) \leqslant K_r n^{-r}$, так что нужно доказать лишь обратное неравенство.

Рассмотрим функцию

$$g(t) = \frac{1}{2\pi}\left[D_r\left(t + \frac{\pi}{n}\right) - D_r(t)\right],$$

которую можно, очевидно, представить в виде

$$g(t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} D_r(t-s)\left[\delta\left(s + \frac{\pi}{n}\right) - \delta(s)\right] ds. \tag{7}$$

δ-Функцию в этом равенстве мы понимаем символически: в том смысле, что можно указать δ-образную последовательность $\delta_k(s)$, подставляя которую вместо $\delta(s)$ в (7), получим левую часть этого равенства как предел правой при $k \to \infty$. Можно при этом взять $\delta_k(s)$ такими, чтобы функции $\varphi_k(s) = \frac{1}{2}\left[\delta_k\left(s + \frac{\pi}{n}\right) - \delta_k(s)\right]$ удовлетворяли условиям (5). Отсюда следует, что $g(t)$ принадлежит замыканию в L класса $\widetilde{W}_L^r$. Дальнейшие рассуждения мы проведем для нечетного r. Положим в лемме 1 $a = 0$, $b = 2\pi$, $t_\nu = \frac{\nu\pi}{n}$ $(\nu = 0, 1, \ldots, 2n)$, возьмем произвольный набор чисел λ, удовлетворяющий условиям (3) и (4), и рассмотрим соответствующий функционал $F_\lambda(x)$. Поскольку функция $g(t)$, как и все ее сдвиги $g_h = g(t-h)$, принадлежит замыканию класса $\widetilde{W}_L^r$, то для доказательства теоремы 1 в силу леммы 1 достаточно показать, что $\sup_h |F_\lambda(g_h)| \geqslant K_r n^{-r}$. Пусть U означает совокупность 2π-периодических функций $u(h)$, представимых в виде

$$u(h) = \int_0^{2\pi} g(t-h)\,\lambda(t)\,dt,$$

где $\lambda(t)$ — кусочно-постоянная функция, значения которой на отрезках Δ_ν удовлетворяют условиям (3) и (4).

В силу предыдущих рассуждений утверждение теоремы 1 немедленно вытекает из следующей леммы.

Лемма 2. *Для любой функции $u(h) \in U$ имеет место неравенство*

$$\max_h |u(h)| \geqslant \frac{K_r}{n^r}.$$

Доказательство. Положим

$$\bar{u}(h) = \int_0^{2\pi} g(t-h)\,\operatorname{sgn}\sin nt\,dt.$$

Простые вычисления показывают, что

$$\bar{u}\left(\frac{\nu\pi}{n}\right) = (-1)^{\frac{r+1}{2}+\nu+1} K_r n^{-r} \quad (\nu = 0, 1, \ldots, 2n-1). \tag{8}$$

Нужно разложить $\operatorname{sgn}\sin nt$ в ряд Фурье и воспользоваться равенством Парсеваля. Если предположить, что для некоторой $u(h) \in U$ $\max_h |u(h)| < K_r n^{-r}$, то функция $v(h) = u(h) - \bar{u}(h)$ будет иметь в силу (8) в точках t_ν $2n$ перемен знака. По теореме Лагранжа столько же перемен знака должна иметь и функция $v^{(r-1)}(h)$, но мы сейчас покажем, что это невозможно. Действительно, поскольку $\max_\nu |\lambda_\nu| = 1$, одно из λ_ν равно $+1$ или -1. Не уменьшая общности, можно считать, что $\lambda_1 = 1$. Тогда

$$v(h) = \int_0^{2\pi} g(t-h)\,l(t)\,dt,$$

где $l(t)$ — кусочно-постоянная функция, равная нулю на Δ_1. Выполняя простые преобразования, получим, что

$$v^{(r-1)}(h)=\text{const}\cdot\int_0^{2\pi}\psi(t)\,l(t+h)\,dt,$$

где

$$\psi(t)=\begin{cases}-\dfrac{\pi}{2n}, & \left(0<t<2\pi-\dfrac{\pi}{n}\right),\\ \pi-\dfrac{\pi}{2n}, & \left(2\pi-\dfrac{\pi}{n}<t<2\pi\right).\end{cases}$$

Учитывая, что

$$\int_0^{2\pi} l(t)\,dt=0,$$

получим, что, во-первых, $v^{(r-1)}(h)$ есть кусочно-линейная функция и, во-вторых, $v^{(r-1)}(0)=0$. Поэтому $v^{(r-1)}(h)$ может иметь не более $2n-2$ перемен знака. Тем самым лемма 2, а вместе с нею и теорема 1 доказана для нечетного r.

Если же r—*четное*, то доказательство проводится аналогично; нужно только взять в качестве $[a, b]$ отрезок $\left[-\dfrac{\pi}{2n},\ 2\pi-\dfrac{\pi}{n}\right]$ и вместо $\operatorname{sgn}\sin nt$ в доказательстве леммы 2 взять $\operatorname{sgn}\cos nt$.

§ 3. Поперечники класса W_L^r (непериодический случай)

1. Рассмотрим теперь в пространстве $L[0, 2\pi]$ класс W_L^r, составленный из функций $x(t)$ (не обязательно периодических), удовлетворяющих условию $\|x^{(r)}(t)\|_L\leqslant 1$. Из включения $W_L^r\supset\widetilde{W}_L^r$ и теоремы 1 следует оценка снизу для поперечников этого класса:

$$d_{2n-1}(W_L^r)\geqslant K_r n^{-r}. \tag{9}$$

Если положить $x^{(r)}(t)=\alpha(t)$, то всякая функция $x(t)$ из W_L^r может быть представлена в виде

$$\left.\begin{aligned} x(t)&=\frac{1}{(r-1)!}\int_0^t(t-s)^{r-1}\alpha(s)\,ds+\sum_{k=0}^{r-1}c_k t^k\\ &\|\alpha(s)\|_L\leqslant 1\end{aligned}\right\}. \tag{10}$$

И обратно: всякая функция $x(t)$ вида (10) принадлежит W_L^r.

Замечание 1. Положим

$$q_r(t)=\begin{cases}\dfrac{1}{(r-1)!}t^{r-1} & \text{при } t\geqslant 0,\\ 0 & \text{при } t<0.\end{cases}$$

Пусть Q означает совокупность функций $q_h(t)=q_r(t-h)$. Формуле (10) можно придать другой вид

$$W_L^r=P_r+\overline{\operatorname{conv}(QU-Q)} \tag{10}$$

(здесь P_r — совокупность многочленов степени $\leqslant r-1$, conv означает выпуклую оболочку, черта сверху — замыкание в L). Согласно этой формуле, W_L^r получается из Q путем следующей цепочки операций: 1) объединение с $(-Q)$, 2) переход к выпуклой оболочке, 3) замыкание и 4) сложение с r-мерным подпространством P_r. Легко понять, что первые три операции не изменяют поперечника, а четвертая увеличивает его индекс не более, чем на r единиц.

Теорема 2. *При $n \to \infty$ имеет место следующее асимптотическое равенство*:

$$d_{2n-1}(W_L^r) = K_r n^{-r} + 0(n^{-r-1}).$$

Доказательство. Между функциями $D_r(t-h)$ и $q_r(t-h)$ при $0 < t < 2\pi$ и $0 < h < 2\pi$ $(t \neq h)$ существует следующее соотношение, проверяемое непосредственно:

$$\frac{(-1)^r}{\pi} D_r^{(r-1)}(t-h) - q_r^{(r-1)}(t-h) = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2\pi}(t-h).$$

Отсюда вытекает, что при любом $h \in (0, 2\pi)$

$$q_r(t-h) = \frac{(-1)^r}{\pi} D_r(t-h) + p_r(t), \tag{11}$$

где $p_r(t)$ — некоторый полином степени r (коэффициенты его зависят от h, но это для дальнейшего несущественно).

Как известно (см. [4], стр. 303), существует такой тригонометрический полином $\theta_r(t)$ порядка $\leqslant n-1$, что

$$\| D_r(t) - \theta_r(t) \|_L \leqslant \pi K_r n^{-r}. \tag{12}$$

Положим $\Gamma_{2n+r-1} = T_{2n-1} + P_{r+1}$. Сопоставляя замечание 1, (11) и (12), получим

$$\delta(W_L^r, \Gamma_{2n+r-1}) \leqslant K_r n^{-r}. \tag{13}$$

Утверждение теоремы 2 есть непосредственное следствие оценок (9) и (13).

2. Для $r = 1$ можно [6] указать и точное значение поперечников $d_n(W_L^1)$:

$$d_n(W_L^1) = \frac{\pi}{n} \tag{14}$$

$\left(\text{для сравнения формулы (14) с теоремой 2 заметим, что } K_1 = \frac{\pi}{2}\right)$.

Покажем, что этот результат может быть получен с помощью развитых выше соображений. Нам будет удобнее взять сейчас в качестве основного отрезок $[0, 1]$ $\left(\text{в этом случае формула (14) приобретает вид } d_n[W^1_{L[0,1]}] = \frac{1}{2n}\right)$. Оценка поперечников снизу может быть получена с помощью леммы 1: положим $a = 0$, $b = 1$, $\Delta_1 = \left[0, \frac{1}{2n}\right]$, $\Delta_{n+1} = \left[\frac{2n-1}{2n}, 1\right]$, остальные отрезки $\Delta_2, \ldots, \Delta_n$ возьмем равными по длине $\frac{1}{n}$. Пусть теперь $\lambda = \{\lambda_\nu\}$ — набор чисел, о котором говорится в лемме 1, и для некоторого

$k|\lambda_k| = 1$. Если $k \neq 0,\ n+1$, то положим $\bar{x}(t) = \frac{1}{2}\chi_k(t)$, где $\chi_k(t)$ — характеристическая функция интервала Δ_k. Если же $k=0$ или $n+1$, то положим $\bar{x}(t) = \chi_k(t)$. В обоих случаях $\bar{x}(t)$ будет, очевидно, принадлежать замыканию класса W_L^1 в L. Если $F_\lambda(x)$ — функционал из леммы 1, то, очевидно, $|F_\lambda(\bar{x})| = \frac{1}{2n}$ и по этой лемме $d_n \geqslant \frac{1}{2n}$. С другой стороны, разобьем отрезок [0, 1] на n равных частей $\left[\frac{\nu-1}{n}, \frac{\nu}{n}\right]$ $(\nu = 1, \ldots, n)$ и рассмотрим n-мерное подпространство Γ_n функций, кусочно-постоянных на этих отрезках. Покажем, что $\delta(W_L^1, \Gamma_n) = \frac{1}{2n}$. Действительно, класс Q состоит в данном случае из функций $q_h(t)$ вида

$$q_h(t) = \begin{cases} 0, & (0 \leqslant t < h), \\ 1, & (h \leqslant t \leqslant 1). \end{cases}$$

Легко видеть, что для любой функции $q_h(t)$ может быть найдена функция $\gamma_h(t) \in \Gamma_n$, такая, что $\|q_h(t) - \gamma_h(t)\| \leqslant 1/2n$. Поскольку функция $e(t) \equiv 1$ принадлежит Γ_n, то в силу замечания 1 такова же оценка приближения подпространством Γ_n для любой функции из W_L^1.

Замечание 2. В упоминавшейся уже работе [2] анонсирован следующий результат: подпространство, составленное из кусочно-полиномиальных функций, является экстремальным для W_L^r при некотором специальном выборе точек сопряжения на отрезке [0, 1]. Этот результат, естественно, обобщает только что изученный случай $r = 1$.

§ 4. Поперечники классов A_L^σ и Γ_L^ρ.

1. Класс A_L^σ состоит из вещественных 2π-периодических функций $x(t)$, продолжаемых аналитически в полосу $|\operatorname{Im} z| < \sigma$ $(z = t + i\tau)$ и удовлетворяющих при $|\tau| < \sigma$ неравенству

$$\int_0^{2\pi} |\operatorname{Re} x(t + i\tau)|\, dt \leqslant 1.$$

В работе [3] доказано, что

$$\delta(A_L^\sigma,\ T_{2n-1}) =$$

$$= \frac{8}{\pi} \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu \frac{q^{(2\nu+1)n}}{1+q^{2(2\nu+1)n}} \frac{1}{2\nu+1} = \delta_n(q = e^{-\sigma}).$$

Мы докажем, что подпространство T_{2n-1} является экстремальным для A_L^σ в метрике L. Положим

$$H(z) = 1 + 4 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{q^m}{1+q^{2m}} \cos mz.$$

Легко проверить непосредственно, что функция $g(t) = \frac{1}{2\pi} H(t)$ принад-

лежит A_L^σ. Рассуждая так же, как и при доказательстве теоремы 1, получим для любого подпространства Γ_{2n-1} и соответствующей ему функции $\lambda(t)$

$$\delta(A_L^\sigma, \Gamma_{2n-1}) \geqslant$$

$$\geqslant \max_h \left| \int_0^{2\pi} g(t-h)\lambda(t)\,dt \right| = \max_h \left| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} H(t-h)\lambda(t)\,dt \right|.$$

Воспользуемся теперь леммой В. М. Тихомирова ([1], стр. 98), из которой вытекает, что последний максимум не может быть меньше, чем δ_n. Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 3.

$$d_{2n-1}(A_L^\sigma) = \frac{8}{\pi} \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu \frac{q^{(2\nu+1)n}}{1+q^{2(2\nu+1)n}} \frac{1}{2\nu+1} \qquad (q = e^{-\sigma}).$$

2. Класс Γ_L^ρ состоит из функций $x(t)$, представимых в виде

$$x(t) = u(\rho, t),$$

где $u(\rho, t)$ — функция, гармоническая в круге $|r|<1$ и удовлетворяющая при $0 \leqslant r < 1$ неравенству

$$\int_0^{2\pi} |u(r, t)|\,dt \leqslant 1.$$

В той же работе [3] доказано, что

$$\delta(\Gamma_L^\rho, T_{2n-1}) = \frac{4}{\pi} \operatorname{arctg} \rho^n.$$

Имеет место

Теорема 4.

$$d_{2n-1}(\Gamma_L^\rho) = \frac{4}{\pi} \operatorname{arctg} \rho^n.$$

Доказывается эта теорема аналогично предыдущей, только в качестве $g(t)$ здесь надо взять функцию

$$g(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{1-\rho^2}{1-2\rho\cos t+\rho^2},$$

которая, как легко видеть, принадлежит Γ_L^ρ.

§ 5. Поперечники класса $\widetilde{W}^r H_L^\alpha$

Класс H_L^α $(0<\alpha\leqslant 1)$ состоит из 2π-периодических функций $x(t)$, удовлетворяющих условию: для любого h

$$\sup_{|\tau|<h} \| x(t+\tau) - x(t) \|_L \leqslant h^\alpha.$$

Класс $\widetilde{W}^r H_L^\alpha$ состоит из 2π-периодических функций $x(t)$, имеющих $(r-1)$-ю абсолютно непрерывную производную, r-я производная которых принад-

лежит H_L^α. Для этого класса мы указываем лишь точный порядок убывания поперечников при $n \to \infty$. Именно, имеет место следующая теорема.

Теорема 5. *Существуют постоянные* $A_{r,\alpha}$ *и* $B_{r,\alpha}$, *такие, что*

$$A_{r,\alpha} n^{-r-\alpha} \leqslant d_n(\widetilde{W}^r H_L^\alpha) \leqslant B_{r,\alpha} n^{-r-\alpha}. \tag{15}$$

Доказательство. Оценка поперечников $d_n(\widetilde{W}^r H_L^\alpha)$ сверху следует из известного неравенства

$$\delta(\widetilde{W}^r H_L^\alpha, T_{2n-1}) \leqslant \frac{B_{r,\alpha}}{n^{r+\alpha}}$$

(см. [5], стр. 338); для получения оценки снизу нам понадобятся некоторые предварительные построения. Рассмотрим сначала функцию

$$y(t) = y(t, a, b) = \begin{cases} (t-a)^{\alpha-1}, & \text{если } t \in [a, b], \\ 0, & \text{если } t \bar{\in} [a, b]. \end{cases}$$

Эта функция удовлетворяет условию

$$\| y(t+\tau) - y(t) \|_L \leqslant C |\tau|^\alpha, \tag{16}$$

где C — некоторая постоянная (в этом можно убедиться простым вычислением).

Разобьем отрезок $[0, 2\pi]$ на $(n+1)$ равных частей Δ_ν $(\nu = 1, 2, \ldots, n+1)$. Пусть $\lambda = \{\lambda_\nu\}$ — произвольный набор чисел, удовлетворяющий условиям леммы 1. Не уменьшая общности, можно считать, что $\lambda_1 = 1$. Разобьем в свою очередь отрезок Δ_1 на 2^r равных частей точками $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_{2^r} = \frac{2\pi}{n+1}$. Нам понадобится функция $\bar{y}(t)$, которая строится следующим образом. На интервале $(0, t_1)$ полагаем $\bar{y}(t) = t^{\alpha-1}$. На следующем интервале (t_1, t_2) мы определим $\bar{y}(t)$ нечетным образом относительно точки $t = t_1$ (т. е. положим на этом интервале $\bar{y}(t) = -(t_2 - t)^{\alpha-1}$). Определенную таким образом на $(0, t_2)$ функцию $\bar{y}(t)$ продолжим четным образом относительно t_2 на интервал (t_2, t_4). После этого функция $\bar{y}(t)$ будет уже определена на $(0, t_4)$, и мы продолжим ее на интервал (t_4, t_8) нечетным образом относительно t_4 и т. д. Таким путем мы определим $\bar{y}(t)$ на Δ_1. Вне Δ_1 положим $\bar{y}(t) = 0$ и, наконец, за пределы отрезка $[0, 2\pi]$ продолжим $\bar{y}(t)$ периодически. Построенная таким образом функция $\bar{y}(t)$ будет при некотором C_1 удовлетворять условию

$$\| y(t+\tau) - \bar{y}(t) \|_L \leqslant C_1 |\tau|.$$

Это вытекает из того, что $\bar{y}(t)$ является линейной комбинацией функций вида $y(t, t_i, t_{i+1})$, удовлетворяющих неравенству (16).

Если положить

$$\bar{x}(t) = \frac{1}{C_1} \int_0^t \int_0^{\tau_{r-1}} \ldots \int_0^{\tau_1} \bar{y}(\tau)\, d\tau d\tau_1 \ldots d\tau_{r-1},$$

то эта функция будет, очевидно, принадлежать $\widetilde{W}^r H_L^\alpha$. Кроме того, легко убедиться, что $x(t) \geqslant 0$ на $[0, 2\pi]$ (это вытекает из специальной симметрии графика функции $\bar{y}(t)$). По лемме 1 имеем:

$$d_n(\widetilde{W}^r H_L^\alpha) \geqslant |F_\lambda(\bar{x})| = \int_{\Delta_1} \bar{x}(t)\,dt >$$

$$> \int_0^{t_1} \bar{x}(t)\,dt = C_2 t_1^{\alpha+r} = A_{r,\alpha} n^{-r-\alpha},$$

Откуда и вытекает оценка снизу в теореме 5.

Литература

1. Тихомиров В. М. УМН, **15**, в. 3, 1960.
2. Иоффе А. Д., Тихомиров В. М. УМН, **23**, в. 6, 1968.
3. Никольский С. М. Изв. АН СССР, **10**, № 3, 1946.
4. Тайков Л. В. Математические заметки, **1**, в. 2, 1967.
5. Тиман А. Ф. Теория приближения функций действительного переменного. Физматгиз, 1960.
6. Тихомиров В. М., Бабаджанов С. Б. Изв. АН УзССР, сер. физ.-мат. наук, № 2, 1967.

Белорусский государственный университет им. В. И. Ленина

Поступило в редакцию 27.I 1969

ВЕСЦІ АКАДЭМІІ НАВУК БЕЛАРУСКАЙ ССР № 4 1969
СЕРЫЯ ФІЗІКА-МАТЭМАТЫЧНЫХ НАВУК

УДК 513.73

Е. В. КОРОБЕНОК, А. Ф. ОРЕЩЕНКО

К ГЕОМЕТРИИ ПОВЕРХНОСТЕЙ С ИЗОТРОПНЫМИ ЛИНИЯМИ КРИВИЗНЫ В ПРОСТРАНСТВЕ $^1E_3$

В $^1E_3$ — трехмерном евклидовом пространстве индефинитной метрики $(--+)$ рассматриваются двумерные поверхности V_2

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}(u, v), \tag{1}$$

касательная плоскость которых пересекается с изотропным конусом по двум образующим. Уравнения инфинитезимального смещения репера $(A, \mathbf{e}_I)$ имеют вид (см. [1])

$$\begin{gathered} d\mathbf{A} = \omega^I \mathbf{e}_I, \\ d\mathbf{e}_I = \omega_I^J \mathbf{e}_J, \\ I, J, K = 1, 2, 3, \end{gathered} \tag{2}$$

где ω^I, ω_I^J — формы Пфаффа, удовлетворяющие уравнениям структуры

$$\begin{aligned} D\omega^I &= \omega^K \wedge \omega_K^I, \\ D\omega_I^J &= \omega_I^K \wedge \omega_K^J. \end{aligned} \tag{3}$$

Реперы первого порядка с вектором $\mathbf{e}_3$, нормальным к поверхности V_2, выделяются уравнением Пфаффа

$$\omega^3 = 0. \tag{4}$$

Замыкая (4) по формулам (3) и продолжая полученное в результате внешнее квадратичное уравнение по лемме Картана (см. [1]), имеем

$$\omega_i^3 = \Lambda_{ij}\omega^j \quad (i, j, k = 1, 2), \tag{5}$$

где совокупность величин $\Lambda_{ij} = \Lambda_{ji}$ образует второй фундаментальный тензор поверхности V_2. Для рассматриваемых нами поверхностей V_2 тензор Λ_{ij} может иметь следующие характеристики Сегре: [11], [2], [1$\bar{1}$], сообразно которым мы разделяем поверхности на три класса, называя их соответственно поверхностями класса [11], [2], [1$\bar{1}$].

По теореме А. З. Петрова (см. [2]), для поверхностей каждого из этих классов существует (вообще говоря, неортогональный) репер $(A, \mathbf{e}_I')$, в котором тензоры g_{ij} (метрический) и Λ_{ij} приводятся к простейшему виду. Ниже рассматривается строение поверхностей класса [2] и для сравнения (кратко) класса [11], тензоры g_{ij} и Λ_{ij} которых имеют соответственно вид [2]

$$g_{i'j'} = \begin{bmatrix} 0 & \varepsilon \\ \varepsilon & 0 \end{bmatrix}, \quad \Lambda_{i'j'} = \begin{bmatrix} 0 & \varepsilon\rho \\ \varepsilon\rho & \varepsilon \end{bmatrix}, \tag{6}$$

$$g_{i'j'} = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 \end{bmatrix}, \qquad \Lambda_{i'j'} = \begin{bmatrix} \varepsilon_1\rho_1 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2\rho_2 \end{bmatrix} \tag{7}$$

$$(i',\ j' = 1,\ 2),$$

где ε, $\varepsilon_j = \pm 1$, ρ, ρ_j в собственные значения тензора Λ_{ij}.

Класс поверхностей [11] (сокращенно $V_2[11]$). Так как касательная плоскость к поверхности псевдоевклидова (содержит два изотропных направления), то, не теряя общности, положим в (7) $\varepsilon_1 = 1$, $\varepsilon_2 = -1$. Тензоры $g_{i'j'}$ и $\Lambda_{i'j'}$ примут вид

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \Lambda_{ij} = \begin{pmatrix} \rho_1 & 0 \\ 0 & -\rho_2 \end{pmatrix}. \tag{8}$$

Векторы $\mathbf{e}_j$ располагаются в касательной плоскости, вектор $\mathbf{e}_3$ — по нормали к поверхности. Поэтому формы Пфаффа удовлетворяют условиям псевдоортогональности

$$\omega_I^I = 0, \quad \omega_2^1 = \omega_1^2, \quad \omega_3^2 = \omega_2^3, \quad \omega_3^1 = -\omega_1^3. \tag{9}$$

Покажем, что репер $(A, \mathbf{e}_I)$, в котором тензоры g_{ij} и Λ_{ij} принимают вид (8), является каноническим. Воспользуемся для этого уже полученными нами равенствами вида (4) и (5), причем, полагая в (5) Λ_{ij} согласно (8), имеем

$$\omega_1^3 = \rho_1\omega^1, \quad \omega_2^3 = -\rho_2\omega^2. \tag{10}$$

После внешнего дифференцирования (10) в силу (3), (4), (9), (10) и применения к результату леммы Картана получаем

$$\omega_1^2 = r_1\omega^1 + r_2\omega^2 \quad (\rho_1 \neq \rho_2). \tag{11}$$

В фиксированной точке поверхности V_2 $\omega^i = 0$ и в силу (4), (9) — (11) все формы Пфаффа обращаются в нуль, а это и означает, что репер $(A, \mathbf{e}_I)$ канонический.

Заметим, что в случае $\rho_1 = \rho_2$ поверхностями V_2 [11] являются сферы (линейчатые), причем оба семейства их прямолинейных образующих изотропные.

Деривационные формулы поверхности получаются из уравнений (2) в силу (4), (9)—(11) в виде

$$\begin{aligned} d\mathbf{A} &= \omega^1\mathbf{e}_1 + \omega^2\mathbf{e}_2, \\ d\mathbf{e}_1 &= (r_1\omega^1 + r_2\omega^2)\,\mathbf{e}_2 + \rho_1\omega^1\mathbf{e}_3, \\ d\mathbf{e}_2 &= (r_1\omega^1 + r_2\omega^2)\,\mathbf{e}_1 - \rho_2\omega^2\mathbf{e}_3, \\ d\mathbf{e}_3 &= -\rho_1\omega^1\mathbf{e}_1 - \rho_2\omega^2\mathbf{e}_2, \end{aligned} \tag{12}$$

где ρ_i, r_i — функции от u, v, являющиеся инвариантами поверхности.

На основании (3) и в силу (4), (9) — (11) уравнениями структуры системы (12) будут

$$\begin{aligned} &D\omega^1 = -r_1\omega^1 \wedge \omega^2, \quad D\omega^2 = r_2\omega^1 \wedge \omega^2, \\ &d\rho_1 \wedge \omega^1 + r_1(\rho_2 - \rho_1)\,\omega^1 \wedge \omega^2 = 0, \\ &d\rho_2 \wedge \omega^2 + r_2(\rho_2 - \rho_1)\,\omega^1 \wedge \omega^2 = 0, \\ &dr_1 \wedge \omega^1 + dr_2 \wedge \omega^2 + (\rho_1\rho_2 + r_2^2 - r_1^2)\,\omega^1 \wedge \omega^2 = 0. \end{aligned} \tag{13}$$

Поверхности V_2 [11] в силу уравнений (12), (13) существуют с произволом в одну функцию двух аргументов (см. [1]).

Исследование строения поверхностей V_2 [11] аналогично исследованию поверхностей V_2 в собственно евклидовом пространстве $E_3 (V_2 \subset E_3)$ с учетом, конечно, особенностей, возникающих за счет псевдоевклидовости метрики. Приведем здесь (без вывода) еще некоторые основные результаты.

1. Оси $\mathbf{e}_j$ канонического репера $(A, \mathbf{e}_I)$ имеют главные направления, а координатные линии ω^i являются линиями кривизны.

2. Инварианты ρ_j являются главными кривизнами k_j, так что гауссова кривизна поверхности

$$K = \rho_1 \cdot \rho_2. \tag{14}$$

Формула для вычисления геодезической кривизны k_g линии на поверхности класса [11] в ${}^1E_3$ принимает вид

$$k_g d\sigma = \frac{1}{2} d \ln \left| \frac{\omega^1 + \omega^2}{\omega^1 - \omega^2} \right| + \omega_1^2, \tag{15}$$

где

$$d\sigma^2 = \varepsilon ds^2 = \varepsilon d\mathbf{A}^2 \quad (\varepsilon = \pm 1), \tag{16}$$

причем ε выбирается так, чтобы $d\sigma^2$ было положительным. В частности, из (15) с учетом (16) имеем

$$k g_{|\omega^j = 0} = r_j \quad (j = 1, 2),$$

т. е. инварианты r_j являются геодезическими кривизнами координатных линий.

3. Отметим для примера некоторые особенности поверхностей V_2 [11] по сравнению с поверхностями V_2 в E_3.

а) В точке поверхности V_2[11], в которой $K > 0$, имеем два различных вещественных асимптотических направления, а в точке, в которой $K < 0$,— асимптотические направления мнимые. Для V_2 в E_3, как известно, будет наоборот.

б) Поверхностями V_2(11) со всеми постоянными инвариантами являются сферы (при $\rho_1 = \rho_2$), круговые цилиндры с мнимой образующей и круговые (гиперболические) цилиндры с вещественной образующей, а среди V_2 в E_3 таковыми являются сферы и круговые цилиндры с вещественной образующей.

Класс поверхностей [2] (V_2[2]). Заметим вначале, что преобразование вида

$$\mathbf{e}_i = A_i^{j'} \mathbf{e}_{j'}, \quad A_i^{j'} = \begin{bmatrix} \varepsilon & 0 \\ 0 & \varepsilon \end{bmatrix} \tag{17}$$

репера $(A, \mathbf{e}_I')$ оставляет инвариантными тензоры g_{ij} и Λ_{ij}. Полагая же в (17)

$$A_i^{j'} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \varepsilon \end{bmatrix} \quad (\varepsilon = \pm 1), \tag{18}$$

получим репер $(A, \mathbf{e}_I)$, в котором тензоры (6) принимают вид

$$g_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \Lambda_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & \rho \\ \rho & \varepsilon \end{bmatrix}. \tag{19}$$

Векторы $\mathbf{e}_i$ репера $(A, \mathbf{e}_I)$ располагаются в касательной плоскости так, что в силу (19)

$$\mathbf{e}_i^2 = 0, \quad \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j = 1 \quad (i \neq j), \tag{20}$$

вектор $\mathbf{e}_3$ направлен по нормали к поверхности и, следовательно,

$$\mathbf{e}_3^2 = 1, \quad \mathbf{e}_3\mathbf{e}_i = 0. \tag{21}$$

Этот репер называется циклическим (см. [3]).

Исходя из (20), (21) и используя (2), получаем соотношения на формы Пфаффа

$$\omega_1^2 = \omega_2^1 = \omega_3^3 = 0,$$
$$\omega_2^2 = -\omega_1^1, \quad \omega_3^2 = -\omega_1^3, \quad \omega_3^1 = -\omega_2^3. \tag{22}$$

Кроме того, (5) в силу (19) принимает вид

$$\omega_1^3 = \rho\omega^2, \quad \omega_2^3 = \rho\omega^1 + \varepsilon\omega^2. \tag{23}$$

Внешнее дифференцирование (23) с использованием (3) и применение леммы Картана дает

$$d\rho = 2\varepsilon a\omega^2, \quad \omega_1^1 = a\omega^1 + b\omega^2. \tag{24}$$

Все формы Пфаффа в фиксированной точке $\mathbf{A}_0 \in V_2$ в силу (4), (22)—(24) с учетом $\omega^i = 0$ обращаются в нуль, а следовательно, выбранный нами циклический репер $(A, \mathbf{e}_I)$ канонический.

Деривационные формулы поверхности V_2 в этом репере получаются из (2) с использованием (4), (22)—(24) в виде

$$d\mathbf{A} = \omega^1\mathbf{e}_1 + \omega^2\mathbf{e}_2,$$
$$d\mathbf{e}_1 = (a\omega^1 + b\omega^2)\,\mathbf{e}_1 + \rho\omega^2\mathbf{e}_3,$$
$$d\mathbf{e}_2 = -(a\omega^1 + b\omega^2)\,\mathbf{e}_2 + (\rho\omega^1 + \varepsilon\omega^2)\,\mathbf{e}_3, \tag{25}$$
$$d\mathbf{e}_3 = -(\rho\omega^1 + \varepsilon\omega^2)\,\mathbf{e}_1 - \rho\omega^2\mathbf{e}_2,$$

где ρ, a, b — функции от u, v — являются инвариантами поверхности V_2 [2].

Уравнения структуры (3) для системы (25) в силу (4), (22)—(24) принимают вид

$$D\omega^1 = b\omega^1 \wedge \omega^2, \quad D\omega^2 = a\omega^1 \wedge \omega^2,$$
$$(da + a^2\omega^1) \wedge \omega^2 = 0, \tag{26}$$
$$da \wedge \omega^1 + db \wedge \omega^2 + (2ab - \rho^2)\,\omega^1 \wedge \omega^2 = 0.$$

На основании (24) — (26) заключаем, что поверхности V_2 [2] существуют с произволом в две функции одного аргумента (см. [1]).

Будем искать поверхности V_2 [2] со всеми постоянными инвариантами. Тогда на основании (26) заключаем, что

$$\rho = a = 0, \quad D\omega^2 = 0. \tag{27}$$

Следовательно (см. [1]),

$$\omega^2 = dv. \tag{28}$$

Положим

$$\omega^1 = m(v)\,du. \tag{29}$$

Из (28), (29) в силу (26) и независимости du, dv имеем

$$\frac{dm(v)}{dv} = -bm(v). \tag{30}$$

Интегрированием (30) находим $m = Ce^{-bv}$, так что (29) принимает вид

$$\omega^1 = Ce^{-bv}\,du. \tag{31}$$

(C — постоянная интегрирования). Система (25) в силу (27), (28), (31) с учетом $b = \text{const}$ будет системой дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами вида

$$\begin{gathered} d\mathbf{A} = Ce^{-bv}\,\mathbf{e}_1 du + \mathbf{e}_2 dv, \\ d\mathbf{e}_1 = b\mathbf{e}_1 dv, \\ d\mathbf{e}_2 = (-b\mathbf{e}_2 + \varepsilon\mathbf{e}_3)\,dv, \\ d\mathbf{e}_3 = -\varepsilon\,\mathbf{e}_1 dv. \end{gathered} \tag{32}$$

Интегрируя второе уравнение (32), находим

$$\mathbf{e}_1 = e^{bv}\mathbf{C}_1, \tag{33}$$

откуда следует, что вектор $\mathbf{e}_1$ всегда остается коллинеарным себе и, следовательно, искомые поверхности цилиндрические. Из четвертого и третьего уравнений (32) соответственно получаем

$$\begin{gathered} \mathbf{e}_3 = -\frac{\varepsilon}{b}\,e^{bv}\mathbf{C}_1 + \mathbf{C}_3, \\ \mathbf{e}_2 = -\frac{1}{2b^2}\,e^{bv}\,\mathbf{C}_1 + e^{-bv}\,\mathbf{C}_2 + \frac{\varepsilon}{b}\,\mathbf{C}_3. \end{gathered} \tag{34}$$

В силу (33), (34) первое уравнение (32) после интегрирования дает уравнение искомых поверхностей

$$\mathbf{A} = \left(Cu - \frac{1}{2b^3}\,e^{bv}\right)\mathbf{C}_1 - \frac{1}{b}\,e^{-bv}\,\mathbf{C}_2 + \frac{\varepsilon}{b}\,v\,\mathbf{C}_3 + \mathbf{A}_0, \tag{35}$$

где $\mathbf{C}_I$ (постоянные интегрирования) при $v = 0$ относительно канонического репера имеют следующие значения:

$$\underset{0}{\mathbf{C}_1} = \underset{0}{\mathbf{e}_1},\quad \underset{0}{\mathbf{C}_2} = -\frac{1}{2b^2}\,\underset{0}{\mathbf{e}_1} + \underset{0}{\mathbf{e}_2} - \frac{\varepsilon}{b}\,\underset{0}{\mathbf{e}_3},$$

$$\underset{0}{\mathbf{C}_3} = \frac{\varepsilon}{b}\,\underset{0}{\mathbf{e}_1} + \underset{0}{\mathbf{e}_3},$$

причем

$$(\underset{0}{\mathbf{C}_1},\ \underset{0}{\mathbf{C}_2},\ \underset{0}{\mathbf{C}_3}) = (\underset{0}{\mathbf{e}_1},\ \underset{0}{\mathbf{e}_2},\ \underset{0}{\mathbf{e}_3}).$$

Относительно репера $(A,\ \mathbf{C}_I)$ найденные поверхности имеют уравнения

$$\begin{gathered} x^1 = Cu - \frac{1}{2b^3}\,e^{bv}, \\ x^2 = -\frac{1}{b}\,e^{-bv}, \\ x^3 = \frac{\varepsilon}{b}\,v, \end{gathered} \tag{36}$$

или

$$bx^2 = -\exp(-\varepsilon b^2 x^3).$$

Таким образом, поверхностями со всеми постоянными инвариантами являются экспоненциальные цилиндрические поверхности с изотропными образующими.

Каноническое уравнение поверхности V_2 [2] (см. [3]) имеет вид

$$x^3 = \frac{1}{2}\varepsilon x^{2^2} + \rho x^1 x^2 + \varepsilon a x^1 x^{2^2} + \frac{1}{3}\varepsilon b x^{2^3} + \ldots$$

К сечению этой поверхности плоскостью $x^1 = 0$ соприкасающейся кривой второго порядка будет парабола

$$x^3 = \frac{1}{2}\varepsilon x^{2^2}. \tag{37}$$

Прямая $x^1 = x^3 - \frac{\varepsilon}{2} = 0$ пересекается с (37) в точке $\mathbf{p}\left(1;\ \frac{\varepsilon}{2}\right)$, с помощью которой с точностью до направления определяется вектор $\mathbf{e}_2$. Конец вектора $\mathbf{C} = \mathbf{e}_1 + \frac{1}{2}\mathbf{e}_2$ лежит на единичной окружности ($\mathbf{C}^2 = 1$). Последняя в пересечении с прямой $\mathbf{M} = \mathbf{A} + \frac{1}{2}\mathbf{e}_2 + \lambda\mathbf{e}_1$ дает точку $\mathbf{C}$, позволяющую однозначно определить вектор $\mathbf{e}_1 = \mathbf{AC} - \frac{1}{2}\mathbf{e}_2$. В силу выбора репера векторы $\mathbf{e}_i$ имеют изотропные направления. Заметим еще, что $d(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) = 0$, т. е. объем базисного параллелепипеда постоянен при всех смещениях репера.

Таким образом, получено геометрическое истолкование единичных точек E_i, а тем самым и канонического репера $(A, \mathbf{e}_I)$.

Квадратичные формы поверхности V_2 [2]

$$\mathrm{I} = 2\omega^1\omega^2, \quad \mathrm{II} = 2\rho\omega^1\omega^2 + \varepsilon\omega^{2^2} \tag{38}$$

содержат общий линейный множитель. Для нормальной кривизны k_n имеем соотношение

$$k_n = \frac{\varepsilon}{2}m + \rho \quad \left(m = \frac{\omega^2}{\omega^1}\right). \tag{39}$$

В направлении ω^1, являющимся главным направлением второго фундаментального тензора, $k_n = \rho$. В этом смысле ρ является главной кривизной. Заметим, однако, что ρ не является экстремальным значением нормальной кривизны k_n.

Будем искать линии кривизны как линии Γ на V, в точках которых нормали к поверхности V_2 допускают огибающую, т. е.

$$d(\mathbf{A} + \lambda\mathbf{e}_3) \equiv d\lambda\mathbf{e}_3. \tag{40}$$

Соотношение (40) имеет место при $\lambda_j = \frac{1}{\rho}$, что влечет $\omega^2 = 0$. Итак, координатная линия ω^1 для поверхностей V_2 [2] является двойной изотропной линией кривизны. Инвариант ρ является главной кривизной, а следовательно, ρ^2 есть гауссова кривизна поверхности V_2 [2]. Заметим, что вдоль линии ω^1 имеет место аналог формулы Родрига, а именно $d_1\mathbf{e}_3 = -\rho d_1\mathbf{A}$.

Характеристикой плоскости $x^2 = 0$ при бесконечно малом сдвиге по любой линии, кроме линии ω^1, в репере точки $\mathbf{A}$ будет прямая $x^2 = x^3 -$

$-1/\rho = 0$, а характеристикой плоскости $x^1 = 0$ при смещении по линии ω^1 — прямая $x^1 = x^3 - 1/\rho = 0$.

Вариация радиус-вектора

$$\mathbf{F} = \mathbf{A} + \frac{1}{\rho}\mathbf{e}_3 \tag{41}$$

фокуса нормали вдоль линии ω^1 в силу (25) дает $d_1\mathbf{F} \equiv 0$. Следовательно, все нормали к поверхности $V_2[2]$ в точках линии ω^1 проходят через одну и ту же точку $\mathbf{F} = \mathbf{F}_0$. Последняя является центром сферы (радиуса $1/\rho$), касающейся поверхности $V_2[2]$ вдоль прямолинейной образующей. При сдвиге вдоль любой линии, отличной от линии ω^1, имеем

$$d\mathbf{F} = d_2\mathbf{F} = -\frac{\varepsilon}{\rho}(\rho\mathbf{e}_1 + 2a\mathbf{e}_3)\omega^2$$

(d_j — операторы дифференцирования вдоль линий ω^j), а следовательно, фокальная поверхность конгруэнции нормалей к поверхности $V_2[2]$ вырождается в линию (41).

Асимптотические линии в силу (38) описываются уравнениями

$$\omega^2 = 0,\ 2\rho\omega^1 + \varepsilon\omega^2 = 0. \tag{42}$$

Вектор $d_1^2\mathbf{A}$ оказывается коллинеарным вектору $d_1\mathbf{A}$, т. е. $\mathbf{e}_1$, поэтому асимптотическая линия ω^1 является прямой.

Итак, все поверхности $V_2[2]$ линейчатые с изотропными образующими.

Развертывающиеся поверхности характеризуются тем, что касательная плоскость к ним вдоль образующей остается неизменной, т. е. $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, d_1\mathbf{e}_2) = 0$. Последнее в силу (24), (25) влечет

$$\rho = a = 0. \tag{43}$$

Деривационные формулы (25) в силу (43)

$$\begin{aligned} d\mathbf{A} &= \omega^1\mathbf{e}_1 + \omega^2\mathbf{e}_2, \\ d\mathbf{e}_1 &= b\omega^2\mathbf{e}_1, \\ d\mathbf{e}_2 &= -b\omega^2\mathbf{e}_2 + \varepsilon\omega^2\mathbf{e}_3, \\ d\mathbf{e}_3 &= -\varepsilon\omega^2\mathbf{e}_1 \end{aligned} \tag{44}$$

позволяют сделать заключение: развертывающиеся поверхности $V_2[2]$ являются цилиндрическими. Из уравнений структуры (26) в силу (43) следует, что они существуют с произволом в одну функцию одного аргумента.

Будем искать линейчатые поверхности, образующие которых имеют направления, соответствующие второму семейству асимптотических линий (42), т. е. квадрики. Для этого при сдвиге вдоль асимптотической должно выполняться соотношение $d\mathbf{A} \parallel d^2\mathbf{A} \parallel (\mathbf{e}_1 - 2\varepsilon\rho\mathbf{e}_2)$. Оно имеет место при

$$a = \frac{2}{3}\varepsilon\rho b. \tag{45}$$

Уравнения структуры (26) в силу (45) принимают вид

$$\begin{gathered} D\omega^1 = b\omega^1 \wedge \omega^2,\quad D\omega^2 = \frac{2}{3}\varepsilon\rho b\omega^1 \wedge \omega^2, \\ \rho^2 b\omega^1 \wedge \omega^2 = 0. \end{gathered} \tag{46}$$

Непосредственно следует, что либо $\rho = 0$ (второе асимптотическое направление переходит в первое) и поверхности будут развертывающимися, либо $b = 0$, откуда $a = \rho = 0$. Итак, квадрик среди поверхностей $V_2[2]$ не существует.

Так как поверхности $V_2[2]$ линейчатые, то можно искать на них стрикционные линии. Однако предельное положение общего перпендикуляра двух бесконечно близких образующих совпадает с направлением $\mathbf{e}_1$, поэтому стрикционная точка удаляется в бесконечность, а следовательно, стрикционная линия несобственная.

Параметром распределения является ρ, так как $\lim\limits_{\omega^2 \to 0} \dfrac{\Delta V}{\omega^{2^2}} = \rho$, где $\Delta V = (\mathbf{e}_1, d_2\mathbf{A}, d_2\mathbf{e}_1) = \rho\omega^{2^2}$ есть относительный момент двух бесконечно близких образующих $V_2[2]$.

Геодезическая кривизна линии Γ на V_2 вычисляется по формуле

$$k_g d\sigma^3 = (\mathbf{e}_3, d\mathbf{A}, d^2\mathbf{A}),$$

которая в циклическом репере принимает вид

$$k_g d\sigma = \frac{1}{2} d \ln \left| \frac{\omega^2}{\omega^1} \right| - \omega_1^1. \tag{47}$$

Для линий $\omega^2 : \omega^1 = \pm 1$ из (47) с учетом (16) получаем

$$k_g = -\frac{1}{\sqrt{2}}(a \pm b). \tag{48}$$

Геодезическая кривизна второй асимптотической линии (42) будет

$$k_g = \frac{2\varepsilon\rho\, b - 3a}{\sqrt{-2\varepsilon\rho}}. \tag{49}$$

Соотношениями (48), (49) заканчивается геометрическое истолкование инвариантов поверхностей $V_2[2]$.

Замечание. Преобразование вида (17), где

$$A_{i''}^{i} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1 \\ -1/2 & 1 \end{bmatrix},$$

переводит циклический репер в ортонормированный репер (R), в котором тензоры (19) принимают вид

$$g_{i''j''} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \Lambda_{i''j''} = \begin{bmatrix} 1+\rho & 1 \\ 1 & 1-\rho \end{bmatrix}.$$

Изучение поверхностей $V_2[2]$ в репере (R) оказывается, однако, менее удобным.

Литература

1. Фиников С. П. Метод внешних форм Картана. ГИТТЛ, 1948.
2. Петров А. З. Изв. Казанск. физ.-мат. о-ва, сер. 3, 14, 1949.
3. Картан Э. Теория конечных непрерывных групп и дифференциальная геометрия, изложенные методом подвижного репера. Изд. МГУ, 1963.

Могилевский государственный педагогический институт,
Белорусский государственный университет им. В. И. Ленина

Поступило в редакцию 28.II 1969

ВЕСЦІ АКАДЭМІІ НАВУК БЕЛАРУСКАЙ ССР № 4 1969
СЕРЫЯ ФІЗІКА-МАТЭМАТЫЧНЫХ НАВУК

УДК 517.942+518

С. П. ЕРАШЕВСКАЯ, А. А. ПАЛЬЦЕВ

О ВЫЧИСЛЕНИИ СФЕРОИДАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ И ИХ ПЕРВЫХ ПРОИЗВОДНЫХ НА ЭВМ. II

В [6] приведены алгоритмы вычисления собственных значений, нормирующего множителя и коэффициентов разложения угловых сфероидальных функций первого рода в ряд по присоединенным функциям Лежандра.

В этой работе даются алгоритмы вычисления значений угловых и радиальных сплюснутых и вытянутых сфероидальных функций и их первых производных. Для сплюснутых радиальных функций первого и второго рода и их первых производных приводится также таблица значений при $\xi=0$, $c=0{,}5\ (0{,}5)5$, $n=m(1)8$, $m=0{,}1$. Все алгоритмы реализованы в виде стандартных программ на ЭВМ «Минск-2(22)» в режиме Т в Вычислительном центре АН БССР.

Предлагаемые небольшие таблицы значений сплюснутых радиальных функций первого и второго рода (привести более полные таблицы не позволяет объем статьи) и особенно наличие стандартных программ вычисления сфероидальных функций и их первых производных дают возможность получать на ЭВМ «Минск-2(22)» в режиме Т, а также и на новой более производительной ЭВМ «Минск-32» численные результаты при решении довольно широкого круга прикладных задач (например, при расчете характеристик излучения поверхностных сфероидальных (дисковых) антенн и др.), строгое решение которых в настоящее время уже известно (см., например, [1—3]).

1. Вычисление угловых сфероидальных функций и их первых производных. Для вычисления значений угловых сфероидальных функций первого рода и их первых производных используем разложения в ряд по присоединенным функциям Лежандра первого рода [4]

$$S_{mn}(\alpha c,z)=\sum_{r=0,1}^{\infty}{}' d_r^{mn}(\alpha c)\,P_{m+r}^{m}(z),$$
$$S'_{mn}(\alpha c,\ z)=\sum_{r=0,1}^{\infty}{}' d_r^{mn}(\alpha c)\,P_{m+r}^{m'}(z), \qquad (1)$$

где для сплюснутых сфероидальных функций $\alpha=-i$, а для вытянутых $\alpha=1$. Присоединенные функции Лежандра первого рода определены следующим образом [4]:

$$P_n^m(z)=(1-z^2)^{\frac{m}{2}}\frac{d^mP_n(z)}{dz^m},$$

когда $-1 \leqslant z \leqslant 1$,

$$P_n^m(z) = (z^2 - 1)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m P_n(z)}{dz^m},$$

когда $z > 1$ или комплексное число.

Угловые сфероидальные функции второго рода $S_{mn}^{(2)}(\alpha c, \alpha^3 z)$, определенные на $(-1, 1)$, в прикладных задачах встречаются редко, так как они имеют логарифмические особенности при $z = \pm 1$. Эти значения z соответствуют сфероидальным координатам $\eta = \pm 1$ или $\xi = \mp i$. Они находятся в области определения η. Поэтому предполагаем в дальнейшем, что угловые сфероидальные функции второго рода и их первые производные определены при $z \geqslant 0\,(\alpha = -i)$ и $z > 1\,(\alpha = 1)$, и используем для их вычисления разложения в ряд по присоединенным функциям Лежандра второго рода [4]

$$S_{mn}^{(2)}(\alpha c, \alpha^3 z) = \sum_{r=-\infty}^{\infty}{}' d_r^{mn}(\alpha c) Q_{m+r}^m(\alpha^3 z),$$

$$S_{mn}^{(2)\prime}(\alpha c, \alpha^3 z) = \sum_{r=-\infty}^{\infty}{}' d_r^{mn}(\alpha c)\, Q_{m+r}^{m\prime}(\alpha^3 z). \tag{2}$$

Алгоритмы вычисления значений $Q_n^m(\alpha^3 z)$ и $Q_n^{m\prime}(\alpha^3 z)$ даны в [5]. Коэффициенты $d_r^{mn}(\alpha c)$ для $r \geqslant 0$ в разложениях (1) и (2) те же, что и [6]. Коэффициенты $d_r^{mn}(\alpha c)$ при $r < 0$ в (2) также удовлетворяют рекуррентному соотношению

$$\varepsilon_{r+2}^m d_{r+2}^{mn}(\alpha c) + (\gamma_r^m - \lambda_{mn}) d_r^{mn}(\alpha c) + \frac{\beta_r^m}{\varepsilon_r^m} d_{r-2}^{mn}(\alpha c) = 0,$$

приведенному в [6], которое в данном случае распространяется и на отрицательные значения r.

Известно [4], что присоединенные функции Лежандра второго рода $Q_{m+r}^m(\alpha^3 z)$ становятся бесконечно большими, а коэффициенты $d_r^{mn}(\alpha c)$ равными нулю, когда $r < -2m$. Однако

$$\lim_{\rho \to 0} d_{-r+\rho}^{mn}(\alpha c)\, Q_{m-r+\rho}^m(\alpha^3 z) = d_{-r}^{mn}(\alpha c)\, P_{r-m-1}^m(\alpha^3 z), \quad r > 2m,$$

где

$$d_{-r}^{mn}(\alpha c) = \lim_{\rho \to 0} \frac{d_{-r+\rho}^{mn}(\alpha c)}{\rho}.$$

Таким образом, для угловых сфероидальных функций второго рода и их первых производных имеют место разложения

$$S_{mn}^{(2)}(\alpha c, \alpha^3 z) = \sum_{r=-2m,-2m+1}^{\infty}{}' d_r^{mn}(\alpha c)\, Q_{m+r}^m(\alpha^3 z) + \sum_{r=2m+2,2m+1}^{\infty}{}' d_{-r}^{mn}(\alpha c) P_{r-m-1}(\alpha^3 z),$$

$$S_{mn}^{(2)\prime}(\alpha c, \alpha^3 z) = \sum_{r=-2m,-2m+1}^{\infty}{}' d_r^{mn}(\alpha c)\, Q_{m+r}^{m\prime}(\alpha^3 z) +$$

$$+ \sum_{r=2m+2,2m+1}^{\infty}{}' d_{-r}^{mn}(\alpha c)\, P_{r-m-1}^{m\prime}(\alpha^3 z)$$

коэффициенты которых $d_r^{mn}(\alpha c)$ при $-2m \leqslant r < 0$ и $d_{-r}^{mn}(\alpha c)$ при $r > 2m$ вычисляются по следующему алгоритму:

$$d_r^{mn}(\alpha c) = d_0^{mn}(\alpha c)\,\tilde{d}_r^{mn}(\alpha c), \quad (n-m) \text{ — четное},$$

$$d_r^{mn}(\alpha c) = d_1^{mn}(\alpha c)\,\tilde{d}_r^{mn}(\alpha c), \quad (n-m) \text{ — нечетное},$$

$$\tilde{d}_r^{mn}(\alpha c) = d_r^{mn}(\alpha c)/d_0^{mn}(\alpha c) = \bar{d}_{-2}^{mn}(\alpha c)\,\bar{d}_{-4}^{mn}(\alpha c)\ldots\bar{d}_r^{mn}(\alpha c), \ (n-m) \text{— четное},$$

$$\tilde{d}_r^{mn}(\alpha c) = d_r^{mn}(\alpha c)/d_1^{mn}(\alpha c) = \bar{d}_{-1}^{mn}(\alpha c)\,\bar{d}_{-3}^{mn}(\alpha c)\ldots\bar{d}_r^{mn}(\alpha c), \ (n-m) \text{ — нечетное},$$

$$\bar{d}_r^{mn}(\alpha c) = d_r^{mn}(\alpha c)/d_{r+2}^{mn}(\alpha c) =$$

$$= -\varepsilon_{r+2}^m/\gamma_r^m - \lambda_{mn} - \frac{\beta_r^m}{\gamma_{r-2}^m - \lambda_{mn} - \dfrac{\beta_{r-2}^m}{\gamma_{r-4}^m - \lambda_{mn}} - \ldots}$$

Для $r = -2m-2$, $(n-m)$ — четное, и $r = -2m-1$, $(n-m)$ — нечетное, ε_{r+2}^m вычисляются по формулам

$$\varepsilon_{-2m}^m = \frac{\alpha^2 c^2}{(2m+1)\,(1-2m)},$$

$$\varepsilon_{-2m+1}^m = \frac{\alpha^2 c^2}{(3-2m)\,(1-2m)}.$$

2. Вычисление радиальных сфероидальных функций и их первых производных. Радиальные и угловые сфероидальные функции первого рода являются целыми функциями и удовлетворяют одному и тому же дифференциальному уравнению второго порядка. Поэтому имеют место соотношения [4]

$$R_{mn}^{(1)}(\alpha c,\ \alpha^3\xi) = \frac{1}{k_{mn}^{(1)}(\alpha c)} \sum_{r=0,1}^{\infty\,\prime} d_r^{mn}(\alpha c)\,P_{m+r}^m(\alpha^3\xi),$$

$$R_{mn}^{(1)\prime}(\alpha c,\ \alpha^3\xi) = \frac{1}{k_{mn}^{(1)}(\alpha c)} \sum_{r=0,1}^{\infty\,\prime} d_r^{mn}(\alpha c)\,P_{m+r}^{m\prime}(\alpha^3\xi), \tag{3}$$

где

$$k_{mn}^{(1)}(\alpha c) = \begin{cases} \dfrac{i^{m-n}(2m+1)\,P_n^m(0)\,\sigma_{mn}}{d_0^{mn}(c)\,c^m}, & \alpha = 1, \\ & (n-m) \text{ — четное}; \\ \dfrac{i^{2m-n}(2m+1)\,P_n^m(0)\,\sigma_{mn}}{d_0^{mn}(-ic)\,c^m}, & \alpha = -i, \end{cases}$$

$$k_{mn}^{(1)}(\alpha c) = \begin{cases} \dfrac{i^{m-n+1}(2m+3)\,P_n^{m+1}(0)\,\sigma_{mn}}{d_1^{mn}(c)\,c^{m+1}}, & \alpha = 1, \\ & (n-m) \text{ — нечетное}; \\ \dfrac{i^{2m-n+2}(2m+3)\,P_n^{m+1}(0)\,\sigma_{mn}}{d_1^{mn}(-ic)\,c^{m+1}}, & \alpha = -i, \end{cases}$$

$$\sigma_{mn} = \lim_{\eta \to 1} (1-\eta^2)^{-\frac{m}{2}} S_{mn}(ac, \eta) = \frac{1}{2^m m!} \sum_{r=0,1}^{\infty}{}' d_r^{mn}(ac) \prod_{k=1}^{2m} (r+k),$$

$$\prod_{k=1}^{2m} (r+k) = 1 \quad \text{при} \quad m = 0.$$

Радиальные и угловые сфероидальные функции второго рода и их первые производные также пропорциональны [4]:

$$R_{mn}^{(2)}(ac, \alpha^3\xi) = \frac{1}{k_{mn}^{(2)}(ac)} \left[\sum_{r=-2m,\,-2m+1}^{\infty}{}' d_r^{mn}(ac)\, Q_{m+r}^{m}(\alpha^3\xi) + \right.$$

$$\left. + \sum_{r=2m+2,\,2m+1}^{\infty}{}' d_{-r}^{mn}(ac)\, P_{r-m-1}^{m}(\alpha^3\xi) \right], \tag{4}$$

$$R_{mn}^{(2)'}(ac, \alpha^3\xi) = \frac{1}{k_{mn}^{(2)}(ac)} \left[\sum_{r=-2m,\,-2m+1}^{\infty}{}' d_r^{mn}(ac)\, Q_{m+r}^{m'}(\alpha^3\xi) + \right.$$

$$\left. + \sum_{r=2m+2,\,2m+1}^{\infty}{}' d_{-r}^{mn}(ac)\, P_{r-m-1}^{m'}(\alpha^3\xi) \right],$$

где

$$k_{mn}^{(2)}(ac) = \begin{cases} \dfrac{i^{n-m}(2m)!\, d_{-2m}^{mn}(c)\, \sigma_{mn}}{(2m-1)c^{m-1} p_n^m(0)}, & \alpha = 1, \\ \dfrac{i^{n-1}(2m)!\, d_{-2m}^{mn}(-ic)\, \sigma_{mn}}{(2m-1)\, c^{m-1} P_n^m(0)}, & \alpha = -i, \end{cases} \qquad (n-m) \text{ — четное;}$$

$$k_{mn}^{(2)}(ac) = \begin{cases} \dfrac{i^{n-m-1}(2m)!\, d_{-2m+1}^{m}(c)\, \sigma_{mn}}{(3-2m)(2m-1)\, c^{m-2} P_n^{m+1}(0)}, & \alpha = 1, \\ \dfrac{i^{n+1}(2m)!\, d_{-2m+1}^{mn}(-ic)\, \sigma_{mn}}{(3-2m)(2m-1)\, c^{m-2} P_n^{m+1}(0)}, & \alpha = -i, \end{cases} \qquad (n-m) \text{ — нечетное.}$$

Разложения (3), (4) хорошо сходятся, когда $c\xi$ не слишком велико. При $c\xi$ больших для вычисления радиальных сфероидальных функций и их первых производных можно использовать следующие разложения:

$$R_{mn}^{(1)}(ac, \alpha^3\xi) = \frac{1}{2^m m!\, \sigma_{mn}} \left(\frac{\xi^2 - \alpha^2}{\xi^2} \right)^{\frac{m}{2}} \times$$

$$\times \sum_{r=0,1}^{\infty}{}' i^{r+m-n} d_r^{mn}(ac) \prod_{k=1}^{2m} (r+k)\, j_{m+r}(c\xi),$$

$$R_{mn}^{(1)'}(ac, \alpha^3\xi) = \frac{1}{2^m m!\, \sigma_{mn}} \left(\frac{\xi^2 - \alpha^2}{\xi^2} \right)^{\frac{m}{2}} \times$$

$$\times \sum_{r=0,1}^{\infty}{}' i^{r+m-n} d_r^{mn}(ac) \prod_{k=1}^{2m} (r+k) \left[c j'_{m+r}(c\xi) + \frac{m\alpha^2}{\xi(\xi^2 - \alpha^2)}\, j_{m+r}(c\xi) \right],$$

$$R_{mn}^{(2)}(\alpha c,\ \alpha^3\xi) = \frac{1}{2^m m!\,\sigma_{mn}}\left(\frac{\xi^2-\alpha^2}{\xi^2}\right)^{\frac{m}{2}}\times$$

$$\times\sum_{r=0,\,1}^{\infty}{}' i^{r+m-n}d_r^{mn}(\alpha c)\prod_{k=1}^{2m}(r+k)\,n_{m+r}(c\xi),$$

$$R_{mn}^{(2)'}(\alpha c,\alpha^3\xi) = \frac{1}{2^m m!\,\sigma_{mn}}\left(\frac{\xi^2-\alpha^2}{\xi^2}\right)^{\frac{m}{2}}\times$$

$$\times\sum_{r=0,\,1}^{\infty}{}' i^{r+m-n}d_r^{mn}(\alpha c)\prod_{k=1}^{2m}(r+k)\left[cn'_{m+r}(c\xi)+\frac{m\alpha^2}{\xi(\xi^2-\alpha^2)}\,n_{m+r}(c\xi)\right],$$

где $j_{m+r}(c\xi)$ и $n_{m+r}(c\xi)$ — сферические функции Бесселя соответственно первого и второго рода, $\prod_{k=1}^{2m}(r+k)=1$ при $m=0$.

Алгоритмы для вычисления значений сферических функций Бесселя и их первых производных приведены в [5].

Замечание. В работе [4] формулы (4.6.14), (4.6.15b), (4.6.16b), (5.3.18), (5.3.20) даны с ошибками. Они должны иметь соответственно вид

$$P_{mn}^{(1)'}(-ic,\,i0) = \frac{i^{n-m-1}2^m m!\,c^{m+1}d_1^{mn}(-ic)}{(2m+3)\sum_{r=1}^{\infty}{}' d_r^{mn}(-ic)\,\frac{(2m+r)!}{r!}},$$

$$R_{mn}^{(2)}(-ic,\,i0) = -\frac{1}{cR_{mn}^{(1)'}(-ic,\,i0)} =$$

$$= \frac{i^{n-m+1}(2m+3)\sum_{r=1}^{\infty}{}' d_r^{mn}(-ic)\,\frac{(2m+r)!}{r!}}{2^m m!\,c^{m+2}d_1^{mn}(-ic)},$$

$$R_{mn}^{(2)'}(-ic,\,i0) = \frac{i^{n-m-1}(2m-3)(2m-1)m!\,c^{m-2}\pi}{2^{2n-m+1}(2m)!\,d_{-2m+1}^{mn}(-ic)\sum_{r=1}^{\infty}d_r^{mn}(-ic)\,\frac{(2m+r)!}{r!}}\times$$

$$\times\left[\frac{(n+m+1)!}{\left(\frac{n-m-1}{2}\right)!\left(\frac{n+m+1}{2}\right)!}\right],$$

$$c\eta\xi J_m(k\rho) = 2\sum_n i^{n-m-1}N_{mn}^{-1}S'_{mn}(c,\,0)\,S_{mn}(c,\,\eta)\,R_{mn}^{(1)}(c,\,\xi),$$

$$c\eta\,(\xi^2-1)^{\frac12}J_m[c\,(\xi^2-1)^{\frac12}(1-\eta^2)^{\frac12}] =$$

$$= \sum_n i^{n-m-1}(2n+1)\,\frac{(n-m)!}{(n+m)!}\,P_n^{m'}(0)\,P_n^m(\eta)\,j_n[c\,(\xi^2-1)^{\frac12}],$$

где $(n-m)$ — нечетное.

Ниже приводятся таблицы значений сплюснутых радиальных функций первого и второго рода при $\xi=0$; $c=0,\,5\,(0,\,5)\,5$; $n=m\,(1)\,8$; $m=0,\,1$.

Таблица 1

Значения сплюснутых радиальных сфероидальных функций и их первых производных при $m=0$

c	n	$R_{0n}^{(1)}(-ic, i0)$	$R_{0n}^{(1)\prime}(-ic, i0)$	$R_{0n}^{(2)}(-ic, i0)$	$R_{0n}^{(2)\prime}(-ic, i0)$
0,5	0	0,972652 (0)	0	—0,297100 (1)	0,205623 (1)
	1	0	0,165015 (0)	—0,121201 (2)	0,181103 (2)
	2	0,559640 (— 2)	0	—0,142051 (3)	0,357372 (3)
	3	0	0,712587 (— 3)	—0,280667 (4)	0,986434 (4)
	4	0,567921 (— 5)	0	—0,780438 (5)	0,352162 (6)
	5	0	0,715078 (— 6)	—0,279690 (7)	0,154124 (8)
	6	0,250475 (— 8)	0	—0,122672 (9)	0,798482 (9)
	7	0	0,314276 (— 9)	—0,636382 (10)	0,477796 (11)
	8	0,616841 (—12)	0	—0,381131 (12)	0,324233 (13)
1,0	0	0,895647 (0)	0	—0,125234 (1)	0,111651 (1)
	1	0	0,320488 (0)	—0,312024 (1)	0,401525 (1)
	2	0,228683 (— 1)	0	—0,180683 (2)	0,437286 (2)
	3	0	0,565779 (— 2)	—0,176747 (3)	0,610632 (3)
	4	0,913596 (— 4)	0	—0,244981 (4)	0,109457 (5)
	5	0	0,228143 (— 4)	—0,438322 (5)	0,239981 (6)
	6	0,160695 (— 6)	0	—0,960423 (6)	0,622297 (7)
	7	0	0,401627 (— 7)	—0,248987 (8)	0,186303 (9)
	8	0,158130 (— 9)	0	—0,745331 (9)	0,632390 (10)
1,5	0	0,783194 (0)	0	—0,621850 (0)	0,851216 (0)
	1	0	0,458591 (0)	—0,145373 (1)	0,146083 (1)
	2	0,531504 (— 1)	0	—0,556287 (1)	0,125430 (2)
	3	0	0,188301 (— 1)	—0,354042 (2)	0,118689 (3)
	4	0,466653 (— 3)	0	—0,325182 (3)	0,142861 (4)
	5	0	0,172349 (— 3)	—0,386813 (4)	0,209476 (5)
	6	0,183778 (— 5)	0	—0,564186 (5)	0,362756 (6)
	7	0	0,684332 (— 6)	—0,974185 (6)	0,724770 (7)
	8	0,406199 (— 8)	0	—0,194292 (8)	0,164123 (9)
2,0	0	0,655714 (0)	0	—0,303551 (0)	0,762527 (0)
	1	0	0,574477 (0)	—0,870357 (0)	0,621280 (0)
	2	0,979136 (— 1)	0	—0,251492 (1)	0,510654 (1)
	3	0	0,436461 (— 1)	—0,114558 (2)	0,366828 (2)
	4	0,149320 (— 2)	0	—0,781124 (2)	0,334850 (3)
	5	0	0,720678 (— 3)	—0,693791 (3)	0,369882 (4)
	6	0,103832 (— 4)	0	—0,757179 (4)	0,481547 (5)
	7	0	0,510622 (— 5)	—0,979197 (5)	0,722622 (6)
	8	0,407024 (— 7)	0	—0,146335 (7)	0,122843 (8)
2,5	0	0,534307 (0)	0	—0,137571 (0)	0,748634 (0)
	1	0	0,666742 (0)	—0,599932 (0)	0,278217 (0)
	2	0,156489 (0)	0	—0,142624 (1)	0,255609 (1)
	3	0	0,824454 (— 1)	—0,485170 (1)	0,145366 (2)
	4	0,370344 (— 2)	0	—0,260504 (2)	0,108008 (3)
	5	0	0,217579 (— 2)	—0,183841 (3)	0,959966 (3)
	6	0,398861 (— 4)	0	—0,159969 (4)	0,100286 (5)
	7	0	0,242171 (— 4)	—0,165173 (5)	0,120611 (6)
	8	0,243573 (— 6)	0	—0,197223 (6)	0,164222 (7)
3,0	0	0,433464 (0)	0	—0,573547 (—1)	0,768998 (0)
	1	0	0,737008 (0)	—0,452279 (0)	0,125606 (0)
	2	0,222475 (0)	0	—0,929033 (0)	0,149830 (1)
	3	0	0,135894 (0)	—0,245289 (1)	0,668913 (1)
	4	0,782817 (— 2)	0	—0,107327 (2)	0,425813 (2)
	5	0	0,533638 (— 2)	—0,624643 (2)	0,317648 (3)
	6	0,120095 (— 3)	0	—0,450796 (3)	0,277558 (4)
	7	0	0,861679 (— 4)	—0,386842 (4)	0,278782 (5)
	8	0,105231 (— 5)	0	—0,384270 (5)	0,316764 (6)

Продолжение табл. 1

c	n	$R_{0n}^{(1)}(-ic, i0)$	$R_{0n}^{(1)\prime}(-ic, i0)$	$R_{0n}^{(2)}(-ic, i0)$	$R_{0n}^{(2)\prime}(-ic, i0)$
3,5	0	0,356993 (0)	0	—0,224352 (—1)	0,800336 (0)
	1	0	0,788831 (0)	—0,362200 (0)	0,560834 (—1)
	2	0,283082 (0)	0	—0,645518 (0)	0,100930 (1)
	3	0	0,202518 (0)	—0,141080 (1)	0,337634 (1)
	4	0,148335 (— 1)	0	—0,514230 (1)	0,192614 (2)
	5	0	0,113169 (— 1)	—0,252467 (2)	0,124211 (3)
	6	0,305751 (— 3)	0	—0,155154 (3)	0,934468 (3)
	7	0	0,251260 (— 3)	—0,113713 (4)	0,806531 (4)
	8	0,363151 (— 5)	0	—0,966068 (4)	0,786765 (5)
4,0	0	0,301057 (0)	0	—0,846006 (—2)	0,830407 (0)
	1	0	0,826435 (0)	—0,302504 (0)	0,245847 (—1)
	2	0,324751 (0)	0	—0,449507 (0)	0,769819 (0)
	3	0	0,278698 (0)	—0,897027 (0)	0,179955 (1)
	4	0,259572 (— 1)	0	—0,277032 (1)	0,963122 (1)
	5	0	0,215260 (— 1)	—0,116138 (2)	0,548458 (2)
	6	0,688638 (— 3)	0	—0,618961 (2)	0,363035 (3)
	7	0	0,632817 (— 3)	—0,395059 (3)	0,274953 (4)
	8	0,106332 (— 4)	0	—0,292844 (4)	0,235111 (5)
4,5	0	0,259879 (0)	0	—0,313623 (—2)	0,855098 (0)
	1	0	0,853738 (0)	—0,260293 (0)	0,105669 (—1)
	2	0,340063 (0)	0	—0,299739 (0)	0,653474 (0)
	3	0	0,359296 (0)	—0,618494 (0)	0,985117 (0)
	4	0,426902 (— 1)	0	—0,164630 (1)	0,520546 (1)
	5	1	0,375761 (— 1)	—0,591393 (1)	0,265435 (2)
	6	0,141274 (— 2)	0	—0,276810 (2)	0,157298 (3)
	7	0	0,142383 (— 2)	—0,156074 (3)	0,106241 (4)
	8	0,274643 (— 4)	0	—0,102467 (4)	0,809131 (4)
5,0	0	0,228747 (0)	0	—0,115484 (—2)	0,874328 (0)
	1	0	0,873857 (0)	—0,228871 (0)	0,446026 (—2)
	2	0,330267 (0)	0	—0,185752 (0)	0,605570 (0)
	3	0	0,438780 (0)	—0,455809 (0)	0,542551 (0)
	4	0,665260 (— 1)	0	—0,106643 (1)	0,300634 (1)
	5	0	0,610974 (— 1)	—0,327346 (1)	0,137860 (2)
	6	0,269307 (— 2)	0	—0,135710 (2)	0,742647 (2)
	7	0	0,292804 (— 2)	—0,683051 (2)	0,453107 (3)
	8	0,642562 (— 4)	0	—0,401763 (3)	0,311254 (4)

Для контроля результатов вычислений значения радиальных сфероидальных функций первого рода и их первых производных, вычисленные из (3), сравнивались со значениями, вычисленными из разложений

$$R_{mn}^{(1)}(\alpha c, \alpha^3\xi) = \frac{1}{S_{mn}(\alpha c, 0)} \times$$

$$\times \sum_{r=0}^{\infty}{}' i^{r+m-n} d_r^{mn}(\alpha c)\, P_{m+r}^m(0)\, j_{m+r}\left[c\,(\xi^2-\alpha^2)^{\frac{1}{2}}\right],$$

$$R_{mn}^{(1)\prime}(\alpha c, \alpha^3\xi) = \frac{c\xi}{S_{mn}(\alpha c, 0)\,(\xi^2-\alpha^2)^{\frac{1}{2}}} \times$$

$$\times \sum_{r=0}^{\infty}{}' i^{r+m-n} d_r^{mn}(\alpha c)\, P_{m+r}^m(0)\, j'_{m+r}\left[c\,(\xi^2-\alpha^2)^{\frac{1}{2}}\right],$$

$(n-m)$ — четное;

Таблица 2

Значения сплюснутых радиальных сфероидальных функций и их первых производных при $m=1$

c	n	$R_{1n}^{(1)}(-ic, i0)$	$R_{1n}^{(1)\prime}(-ic, i0)$	$R_{1n}^{(2)}(-ic, i0)$	$R_{1n}^{(2)\prime}(-ic, i0)$
0,5	1	0,163363(0)	0	—0,100586(2)	0,122426(2)
	2	0	0,164977(—1)	—0,121229(3)	0,282167(3)
	3	0,238453(—3)	0	—0,248414(4)	0,838740(4)
	4	0	0,282824(—4)	—0,707154(5)	0,311395(6)
	5	0,143265(—6)	0	—0,257526(7)	0,139602(8)
	6	0	0,175025(—7)	—0,114269(9)	0,735089(9)
	7	0,449406(—10)	0	—0,598013(10)	0,445032(11)
	8	0	0,554612(—11)	—0,360613(12)	0,304669(13)
1,0	1	0,307619(0)	0	—0,291656(1)	0,325077(1)
	2	0	0,640134(—1)	—0,156217(2)	0,349206(2)
	3	0,191667(—2)	0	—0,157213(3)	0,521737(3)
	4	0	0,449499(—3)	—0,222470(4)	0,970002(4)
	5	0,459503(—5)	0	—0,404066(5)	0,217626(6)
	6	0	0,111698(—5)	—0,895273(6)	0,573296(7)
	7	0,576014(—8)	0	—0,234082(8)	0,173607(9)
	8	0	0,141758(—8)	—0,705426(9)	0,594418(10)
1,5	1	0,417078(0)	0	—0,149799(1)	0,159842(1)
	2	0	0,136983(0)	—0,486678(1)	0,100620(2)
	3	0,652444(—2)	0	—0,317414(2)	0,102180(3)
	4	0	0,224959(—2)	—0,296351(3)	0,127044(4)
	5	0,350275(—4)	0	—0,357270(4)	0,190326(5)
	6	0	0,126616(—4)	—0,526524(5)	0,334578(6)
	7	0,986362(—7)	0	—0,916555(6)	0,675884(7)
	8	0	0,362349(—7)	—0,183985(8)	0,154347(9)
2,0	1	0,482286(0)	0	—0,911105(0)	0,103673(1)
	2	0	0,227279(0)	—0,219994(1)	0,400367(1)
	3	0,156689(—1)	0	—0,103861(2)	0,319103(2)
	4	0	0,699100(—2)	—0,715205(2)	0,299122(3)
	5	0,148400(—3)	0	—0,642468(3)	0,336927(4)
	6	0	0,706463(—4)	—0,707751(4)	0,444837(5)
	7	0,741211(—6)	0	—0,922221(5)	0,674572(6)
	8	0	0,360568(—6)	—0,138670(7)	0,115608(8)
2,5	1	0,501706(0)	0	—0,570240(0)	0,797280(0)
	2	0	0,325672(0)	—0,122823(1)	0,185251(1)
	3	0,311466(—1)	0	—0,447054(1)	0,128425(2)
	4	0	0,166778(—1)	—0,239839(2)	0,969782(2)
	5	0,456022(—3)	0	—0,170785(3)	0,877151(3)
	6	0	0,266987(—3)	—0,149820(4)	0,928197(4)
	7	0,354812(—5)	0	—0,155763(5)	0,112736(6)
	8	0	0,213836(—5)	—0,187059(6)	0,154687(7)
3,0	1	0,481891(0)	0	—0,343689(0)	0,691719(0)
	2	0	0,423409(0)	—0,787260(0)	0,919331(0)
	3	0,549061(—1)	0	—0,231633(1)	0,607097(1)
	4	0	0,335374(—1)	—0,993916(1)	0,384237(2)
	5	0,114440(—2)	0	—0,582437(2)	0,291274(3)
	6	0	0,787707(—3)	—0,423169(3)	0,257473(4)
	7	0,127728(—4)	0	—0,365361(4)	0,260971(5)
	8	0	0,913603(—5)	—0,364856(5)	0,298687(6)
3,5	1	0,435781(0)	0	—0,192347(0)	0,655636(0)
	2	0	0,513545(0)	—0,556357(0)	0,467982(0)
	3	0,885602(—1)	0	—0,138062(1)	0,322622(1)
	4	0	0,596920(—1)	—0,478647(1)	0,174381(2)
	5	0,249870(—2)	0	—0,236400(2)	0,114345(3)

Продолжение табл. 2

c	n	$R_{1n}^{(1)}(-ic, i0)$	$R_{1n}^{(1)\prime}(-ic, i0)$	$R_{1n}^{(2)}(-ic, i0)$	$R_{1n}^{(2)\prime}(-ic, i0)$
	6	0	0,195663(—2)	—0,146024(3)	0,869018(3)
	7	0,377783(—4)	0	—0,107586(4)	0,756293(4)
	8	0	0,311106(—4)	—0,918381(4)	0,742762(5)
4,0	1	0,378875(0)	0	—0,983138(—1)	0,659847(0)
	2	0	0,591732(0)	—0,422488(0)	0,238077(0)
	3	0,131930(0)	0	—0,916582(0)	0,189494(1)
	4	0	0,967153(—1)	—0,258490(1)	0,870610(1)
	5	0,492999(—2)	0	—0,109271(2)	0,507100(2)
	6	0	0,427938(—2)	—0,584196(2)	0,338519(3)
	7	0,967827(—4)	0	—0,374496(3)	0,258311(4)
	8	0	0,896797(—4)	—0,278770(4)	0,222260(5)
4,5	1	0,324044(0)	0	—0,460519(—1)	0,685777(0)
	2	0	0,656311(0)	—0,338593(0)	0,119250(0)
	3	0,180914(0)	0	—0,653926(0)	0,122833(1)
	4	0	0,145128(0)	—0,153122(1)	0,464724(1)
	5	0,900777(—2)	0	—0,559650(1)	0,246701(2)
	6	0	0,847996(—2)	—0,262055(2)	0,147086(3)
	7	0,222196(—3)	0	—0,148261(3)	0,100012(4)
	8	0	0,227481(—3)	—0,976883(3)	0,766017(4)
5,0	1	0,277954(0)	0	—0,201565(—1)	0,719544(0)
	2	0	0,707787(0)	—0,282571(0)	0,583689(—1)
	3	0,227056(0)	0	—0,480189(0)	0,880839(0)
	4	0	0,203983(0)	—0,980473(0)	0,259375(1)
	5	0,154974(—1)	0	—0,312160(1)	0,129053(2)
	6	0	0,155186(—1)	—0,128877(2)	0,696351(2)
	7	0,467895(—3)	0	—0,650317(2)	0,427446(3)
	8	0	0,521321(—3)	—0,383641(3)	0,295127(4)

$$R_{mn}^{(1)}(\alpha c, \alpha^3\xi) = \frac{\xi}{S'_{mn}(\alpha c, 0)(\xi^2-\alpha^2)^{\frac{1}{2}}} \times$$

$$\times \sum_{r=1}^{\infty}{}' i^{r+m-n} d_r^{mn}(\alpha c) P_{m+r}^{m'}(0) j_{m+r}[c(\xi^2-\alpha^2)^{\frac{1}{2}}],$$

$$R_{mn}^{(1)\prime}(\alpha c, \alpha^3\xi) = \frac{1}{S'_{mn}(\alpha c, 0)(\xi^2-\alpha^2)} \sum_{r=1}^{\infty}{}' i^{r+m-n} d_r^{mn}(\alpha c) P_{m+r}^{m'}(0) \times$$

$$\times \left\{ -\frac{\alpha^2}{(\xi^2-\alpha^2)^{1/2}} j_{m+r}[c(\xi^2-\alpha^2)^{\frac{1}{2}}] + c\xi^2 j'_{m+r}[c(\xi^2-\alpha^2)^{\frac{1}{2}}] \right\},$$

$(n-m)$ — нечетное.

Кроме того, вычислялось значение вронскиана. Контроль, которому подвергались результаты вычислений, позволяет предполагать, что погрешность всех чисел, помещенных в таблицы, не превосходит 10^{-6}.

Авторы выражают благодарность Е. А. Иванову за советы и постоянное внимание к работе.

Литература

1. Иванов Е. А. Дифракция электромагнитных волн на двух телах. Изд. «Наука и техника», Минск, 1968.
2. Сб. «Дифракция электромагнитных волн на некоторых телах вращения». Изд. «Советское радио», М., 1957.
3. Сб. «Антенны», в. 4. Изд. «Связь», М., 1968.
4. Фламмер К. Таблицы сфероидальных волновых функций (Б-ка матем. таблиц, в. 17). Изд. ВЦ АН СССР, М., 1962.
5. Сб. «Математическое обеспечение ЭВМ «Минск-2», в. 2, 1968.
6. Пальцев А. А. Весці АН БССР, сер. фіз-мат. навук, № 1, 1969.

Институт математики
АН БССР

Поступило в редакцию 24.II 1969

ВЕСЦІ АКАДЭМІІ НАВУК БЕЛАРУСКАЙ ССР № 4 1969
СЕРЫЯ ФІЗІКА-МАТЭМАТЫЧНЫХ НАВУК

УДК 514.544

ХОАНГ ДИНЬ ЗУНГ

О НЕУСТОЙЧИВОСТИ ОБРАТНОЙ СМЕШАННОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ

В [1] мы уже исследовали устойчивость обратной смешанной краевой задачи аналитических функций. Здесь изучается вопрос: при каких условиях эта задача станет неустойчивой. Мы рассмотрим два примера общего характера. Из одного из них будет выведена неустойчивость задачи теории фильтрации.

Будем пользоваться обозначениями [1].

Покажем, что если производные задаваемых функций $u(\tau)$, $v(\tau)$, определяющих дугу L_w^2, одновременно обращаются в нуль, то обратная смешанная задача может оказаться неустойчивой.

1. Пусть на неизвестной части L_z^2 искомого контура заданы функции $u(\tau)$ и $v(\tau)$, которые определяются следующими разложениями:

$$u = (\tau - \tau_0)^\gamma \varphi_0(\tau) + u_0,$$
$$v = (\tau - \tau_0)^\gamma \Psi_0(\tau) + v_0, \quad \tau \in [\tau_n, \tau_1], \tag{1}$$

где u_0, v_0 — постоянные; $\varphi_0(\tau_0) \neq 0$, $\Psi_0(\tau_0) \neq 0$; $\varphi_0(\tau)$ и $\Psi_0(\tau)$ дифференцируемы справа и слева от точки τ_0. Рассмотрим здесь только случай, когда γ — четное, $\geqslant 2$ и $\tau \equiv \operatorname{Re} z = x$. Для других случаев исследование аналогично. В этом случае, по [2], $w_0 = u_0 + iv_0$ есть точка возврата. Пусть w_0— точка возврата дуги L_w^2 с углом 2π. Тогда функция, отображающая верхнюю полуплоскость на область D_w в окрестности t_0, соответствующей точке w_0, имеет вид

$$w = \omega(t) = (t - t_0)^2 w_0(t) + w_0 \quad (w_0(t_0) \neq 0). \tag{2}$$

Из соотношения на контуре $u(\tau) + v(\tau) = \omega(t)$, учитывая (1) и (2), получим

$$(\tau - \tau_0)^\gamma w^*(\tau) = (t - t_0)^2 w_0(t) \quad (w^*(\tau_0) \neq 0),$$

откуда

$$\tau - \tau_0 = (t - t_0)^{\frac{2}{\gamma}} w_0^*(t),$$

поэтому

$$h(t) = \frac{d\tau}{dt} = (t - t_0)^{\frac{2}{\gamma} - 1} h_0^*(t). \tag{3}$$

Теперь возьмем такую деформацию $\{L_{w_m}^2\}$ части L_w^2, в которой $L_{w_m}^2$ определяется следующими уравнениями:

$$u_m = u + (\tau - \tau_0)^{4/3} u_{\varepsilon_m}(\tau),$$
$$v_m = v + (\tau - \tau_0)^{4/3} v_{\varepsilon_m}(\tau), \tag{4}$$

где $u_{\varepsilon_m}(\tau_0) \neq 0$, $v_{\varepsilon_m}(\tau_0) \neq 0$; $u_{\varepsilon_m}(\tau)$ и $v_{\varepsilon_m}(\tau)$ одновременно стремятся к нулю, когда m стремится к бесконечности.

Применяя результат М. А. Лаврентьева об отображениях близких областей [6] и учитывая (2), получим, что функции $w_m = \omega_m(\zeta)$, конформно отображающие верхнюю полуплоскость ζ соответственно на области D_{w_m} в окрестности t_0, тоже имеют вид

$$w_m = \omega_m(t) = (t - t_0)^2 w_m(t) + w_0 \quad (w_m(t_0) \neq 0,\ m = 1, 2, \ldots). \tag{5}$$

Отсюда, аналогично предыдущему, получим

$$h_m(t) = \frac{d\tau_m}{dt} = (t - t_0)^{1/2} h_m^*(t). \tag{6}$$

По [3], с учетом (3), (6) дуга L_z^2 имеет в точке z_0, соответствующей $t = t_0$, угол $2\pi/\gamma$, все дуги $L_{z_m}^2$ имеют угол $3\pi/2$. По определению ядра последовательности некоторых областей A_n [7], граничные точки области A_n, начиная с некоторого n, должны находиться произвольно близко к границе ядра. Но в нашем случае, хотя и при достаточно больших значениях m, граничные точки областей D_{z_m} и D_z в окрестности угловой точки z_0 находятся значительно далеко друг от друга, если γ достаточно большое. Поэтому D_z не является ядром последовательности D_{z_m}, значит, задача неустойчива.

2. Рассмотрим еще случай, когда задаваемые функции имеют показательную особенность. Пусть они представляются в следующем виде:

$$u = \varphi_0(\tau) \exp\left\{-\frac{\alpha}{|\tau - \tau_0|^\gamma}\right\} + u_0,$$

$$v = \Psi_0(\tau) \exp\left\{-\frac{\alpha}{|\tau - \tau_0|^\gamma}\right\} + v_0, \tag{7}$$

где $\alpha > 0$, $0 < \gamma < 1$, $\varphi(\tau_0)$ и $\Psi(\tau_0)$ отличны от нуля. В этом случае дуга L_w^2 имеет точку возврата. Пусть угол в этой точке w_0 равен 2π. Функция $w = \omega(t)$ теперь имеет вид

$$w = \omega(t) = |t - t_0|^2 w_0(t) + w_0 \quad (w(t_0) \neq 0). \tag{8}$$

Затем, поступив совершенно так же, как в [3], мы получим, что дуга L_z^2 в соответствующей точке z_0 имеет точку возврата $\left(\text{случай } \frac{1}{\gamma} > 1\right)$, тогда для функции $z = F(\zeta)$, которая конформно отображает полуплоскость ζ на D_z, будем иметь $|F(\zeta)| < \infty$ в точке t_0.

Теперь возьмем следующую деформацию $\{L_{w_m}^2\}$ части L_w^2:

$$u_m = u + u_{\varepsilon_m}(\tau) \exp\left\{-\frac{\alpha}{|\tau - \tau_0|}\right\},$$

$$v_m = v + v_{\varepsilon_m}(\tau) \exp\left\{-\frac{\alpha}{|\tau - \tau_0|}\right\}, \tag{9}$$

где $u_{\varepsilon_m}(\tau_0)$ и $v_{\varepsilon_m}(\tau_0)$ отличны от нуля, $u_{\varepsilon_m}(\tau)$ и $v_{\varepsilon_m}(\tau)$ одновременно стремятся к нулю, когда m стремится к бесконечности.

Рассуждая так же, как в п. 1, мы получим, что функции $w_m = \omega_m(t)$, отображающие полуплоскость соответственно на D_{w_m}, тоже имеют вид

$$w_m = \omega_m(t) = |t - t_0|^2 w_m(t) + w_0 \qquad (w_m(t_0) \neq 0, \quad m = 1, 2, \ldots). \tag{10}$$

Из соотношения на контуре $u_m(\tau) + iv_m(\tau) = \omega_m(t)$, учитывая (9) и (10), получим

$$P_m(\tau) \exp\left\{-\frac{\alpha}{|\tau - \tau_0|}\right\} = |t - t_0|^2 w_m(t),$$

где $P_m(\tau)$ — определенная функция, отличная от нуля в точке τ_0.

Отсюда, разрешая относительно $\tau - \tau_0$ и дифференцируя по t, получим

$$h_m(t) = \frac{d\tau_m}{dt} = A_m(t)\,|t - t_0|^{-1}\,|\ln|t - t_0||^{-2}. \tag{11}$$

Из (11), по [3], все $L^2_{z_m}$ имеют некоторую асимптоту $x_m = \operatorname{Re} z_m = \overset{\bullet}{x_m} \in \in [x_n^0, x_1^0]$, и функции $z_m = F_m(\zeta)$, отображающие полуплоскость ζ на D_{z_m}, имеют логарифмическую особенность в точке $t = t_0$. Но из предыдущего следует, что функция $z = F(\zeta)$ ограничена в точке $t = t_0$. Поэтому последовательность $\{z_m = F_m(\zeta)\}$ не сходится к $z = F(\zeta)$. Отсюда, по известной теореме Каратеодори [7] об отображениях областей с переменными границами, последовательность областей $\{D_{z_m}\}$ не сходится к области D_z. Значит, задача неустойчива.

3. Как известно, все обратные краевые задачи теории фильтрации относятся к классу обратных смешанных краевых задач. В дальнейшем мы приведем пример задачи фильтрации, который показывает нарушение устойчивости. По [4], решение задач построения подземного контура по заданному распределению скорости фильтрации сводится к решению таких обратных смешанных краевых задач, в которых известны граничные значения функций φ и Ψ комплексного потенциала $w = \varphi + i\Psi$. Поэтому для простоты мы начинаем с того, что на искомом подземном контуре L_z^2 задаем граничные значения потенциала скоростей φ и функции тока Ψ такого вида:

$$\varphi(s) = (s - s_0)^q \alpha(s) + \varphi_0, \qquad \Psi(s) = 0 \quad (0 \leqslant s \leqslant l,\ q > 1,\ \alpha(s_0) \neq 0), \tag{12}$$

где s — дуговая абсцисса, отсчитываемая от концевой точки B искомого подземного контура $BC\,(L_z^2)$. Условия задачи фильтрации заданы по рис. 1.

Здесь предполагается, что жидкость идеальная несжимаемая, фильтрация напорная, глубина водопроницаемого слоя конечная. Задаются заранее величины: коэффициент фильтрации k, длина искомого подземного контура l и расход Q. Отсюда, согласно [5], в плоскости комплексного потенциала w L_w есть прямоугольник (см. рис. 2).

Рассмотрим концевые точки B и C подземного контура в плоскости z В плоскости w им соответствуют угловые точки с углом $\frac{\pi}{2}$. Поэтому функция, отображающая внешность единичного круга на D_w в окрестности $t_0 = e^{i\Theta_0}$, соответствующей угловой точке B (или C) плоскости w, имеет вид

$$w - w_0 = (t - t_0)^{\frac{1}{2}} w_0(t) \quad (w_0(t_0) \neq 0), \tag{13}$$

откуда, поступая так же, как в [2], мы получим, что подземный контур L_z^2 имеет угловую точку с углом $\beta = \pi/2q$ при $\Theta = \Theta_0$ (т. е. в точке B или C).

Теперь возьмем следующую деформацию $\{L_{w_m}^2\}$ части L_w^2 (BC):

$$\varphi_m(s) = \varphi(s) + (s - s_0)^{\frac{2}{3}} \varphi_{\varepsilon_m}(s),$$
$$\Psi_m(s) = \Psi(s) + (s - s_0)^{\frac{2}{3}} \Psi_{\varepsilon_m}(s), \tag{14}$$

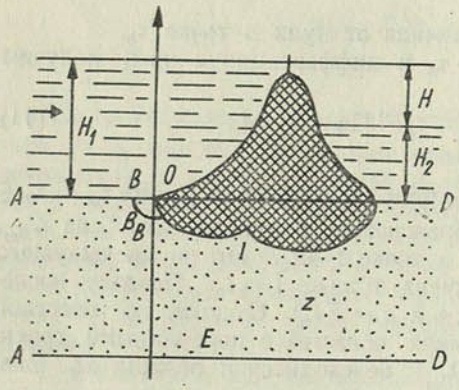


Рис. 1

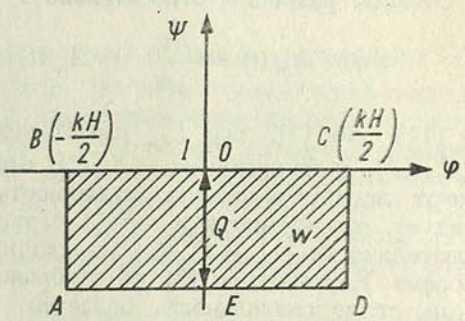


Рис. 2

где $\varphi_{\varepsilon_m}(s_0)$ и $\Psi_{\varepsilon_m}(s_0)$ отличны от нуля, $\varphi_{\varepsilon_m}(s)$ и $\Psi_{\varepsilon_m}(s)$ одновременно стремятся к нулю, когда m стремится к бесконечности. Затем, поступая так же, как в п. 1, получим, что все дуги последовательности $\{L_{z_m}^2\}$ имеют угловую точку с углом $\beta = \frac{3}{4}\pi$ в точке B (или C). Поэтому, из предыдущего и по [7], область D_z не является ядром последовательности $\{D_{z_m}\}$, значит, задача неустойчива.

Это можно подтвердить и физическими соображениями. В самом деле, по заключению в [5] о поведении скорости фильтрации в угловых точках области движения, в нашем случае для L_z^2 скорость в точке B (или C) равна нулю, так как точка B (или C) находится на пересечении границы водоема и непроницаемой границы и угол в этих точках $\beta = \frac{\pi}{2q} < \frac{\pi}{2}$. Но для всех $L_{z_m}^2$ скорость фильтрации в точке B (или C) бесконечна, так как углы в этих точках больше $\pi/2$.

Для случая внутренней точки непроницаемого подземного контура дело обстоит аналогично.

Замечая, что в этом случае отображающая функция в окрестности t_0, соответствующей внутренней точке $I(\varphi_0, 0)$, имеет вид

$$w - w_0 = (t - t_0)\, w_0(t) \quad (w_0(t_0) \neq 0), \tag{15}$$

поступая аналогично изложенному выше, получим, что задача тоже неустойчива. В этом случае для L_z^2 $\beta_I = \frac{\pi}{q} < \pi$, точка I находится на непроница-

емой границе, поэтому скорость фильтрации равна нулю. Но для всех $L^2_{z_m}$ $\beta_l = \frac{3}{2}\pi > \pi$, поэтому скорость равна бесконечности.

В заключение автор благодарит Ф. Д. Гахова за ценные советы и внимание к работе.

Литература

1. Хоанг Динь Зунг. Весці АН БССР, сер. фіз.-мат. навук, № 4, 5, 1968.
2. Гахов Ф. Д. Краевые задачи. М., 1963.
3. Монахов В. Н. Тр. КАИ, в. 64, 1941.
4. Нужин М. Т., Ильинский Н. Б. Методы построения подземного контура гидротехнических сооружений. Изд. КГУ, Казань, 1963.
5. Полубаринова-Кочина П. Я. Теория движения грунтовых вод. ГИТТЛ, 1952.
6. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного. Физматгиз, 1965.
7. Голузин Г. М. Геометрическая теория функций комплексного переменного. Гостехиздат, 1952.

Белорусский государственный университет им. В. И. Ленина

Поступило в редакцию 12.VII 1968

ВЕСЦІ АКАДЭМІІ НАВУК БЕЛАРУСКАЙ ССР № 4 1969
СЕРЫЯ ФІЗІКА-МАТЭМАТЫЧНЫХ НАВУК

УДК 517.948.32

М. Э. ТОЛОЧКО

О КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ РИМАНА С БЕСКОНЕЧНЫМ ИНДЕКСОМ ДЛЯ ПОЛУПЛОСКОСТИ

1. Рассмотрим на вещественной оси $-\infty < t < \infty$ однородную краевую задачу Римана

$$\Phi^+(t) = G(t)\,\Phi^-(t) \tag{1}$$

в предположении, что коэффициент $G(t)$ удовлетворяет условиям:

a) $\arg G(t) = \begin{cases} \varphi(t)\,|t|^{\rho}, & |t| \geqslant 1, \\ \varphi(t), & |t| \leqslant 1, \end{cases}$

где $0 < \rho < 1/2$, $\varphi(t) \in H[-1;\ 1]$ (условие Гельдера) и $\varphi(t)\,|t|^{-\varepsilon} \in H$ при $|t| \geqslant 1$*) и любом $\varepsilon > 0$;

b) существуют и отличны от нуля конечные

$$\lim_{r \to +\infty} r^{1-\rho} \int_1^{+\infty} \frac{\arg G[(-1)^k t]}{t(t-r)}\,dt = A_k \quad (k = 1,\ 2);$$

c) $\ln |G(t)| \in H\ (-\infty;\ \infty)$.

Задача (1) в случае, когда $G(t) \equiv 1$ для $t < 1$ и $\ln |G(t)|$, $\varphi(t) \in H\ [1;\ \infty]$, $\varphi(\infty) \neq 0$ (по терминологии [2], одностороннее завихрение $\arg G(t)$), впервые была изучена Н. В. Говоровым [2]. В настоящей работе также рассматривается один из случаев бесконечного индекса, но при более общих предположениях относительно $\arg G(t)$ (соответствующий пример приведен в п. 5). Кроме того, ниже будет показано (пп. 2, 3), что в силу условия b) $\arg G(t)$ является неограниченным для достаточно больших t, как положительных, так и отрицательных. Поэтому рассматриваемая задача относится к случаю двустороннего завихрения $\arg G(t)$.

Установим, что при определенном соотношении между величинами A_1, A_2 и ρ однородная задача (1) имеет бесконечное множество линейно независимых, ограниченных во всей замкнутой плоскости решений. Для этого достаточно будет показать, что существует такое решение $X(z)$ задачи (1), которое ограничено и не имеет нулей в любом круге $|z| < r$, и что для некоторых $\eta > 0$ и $\omega > 0$ выполняется оценка

$$|X^{\pm}(re^{i\theta})| < \eta e^{-\omega r^{\rho}},\ z = re^{i\theta}, \tag{2}$$

*) Условие Гельдера для бесконечного контура, как обычно, имеет вид

$$|f(t_1) - f(t_2)| < A \left| \frac{1}{t_1} - \frac{1}{t_2} \right|^{\mu},$$

где

$$t_1,\ t_2 \neq 0,\ A, \mu = \text{const},\ 0 < \mu \leqslant 1.$$

равномерно по $\theta \in [0; \pi]$ и $\theta \in [\pi; 2\pi]$ соответственно. Тогда линейно независимые решения задачи (1) можно представить в виде

$$\Phi_k(z) = z^k X(z), \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

2. Рассмотрим сначала вспомогательную задачу

$$\Phi_2^+(t) = G_2(t)\,\Phi_2^-(t), \quad 1 < t < \infty, \tag{3}$$

с коэффициентом $G_2(t) \equiv G(t)$, $t \geqslant 1$. Нетрудно установить, что функция

$$X_2(z) = \exp\left\{\frac{z}{2\pi i}\int_1^{+\infty} \frac{\ln G_2(x)}{x(x-z)}\,dx\right\} \tag{4}$$

является аналитической во всей плоскости, исключая луч $t \geqslant 1$, не имеет нулей и ограничена в любом кольце $0 < r < |z-1| < R < \infty$. Кроме того, она удовлетворяет краевому условию (3). Установим свойства $X_2(z)$ в окрестности бесконечно удаленной точки.

Лемма. *При любом* $\varepsilon > 0$ *и* $z \to \infty$ *для* $X_2(z)$ *справедлива оценка*

$$\ln |X_2(z)| = \underline{0}\,(|z|^{\rho+\varepsilon}).$$

Доказательство. С помощью замены переменных $z = 1/\xi$, $x = 1/u$ перейдем в (4) к конечному контуру:

$$\ln X_2\left(\frac{1}{\xi}\right) = \frac{1}{2\pi i}\int_1^0 \frac{\ln\left|G_2\left(\frac{1}{u}\right)\right|}{u-\xi}\,du + \frac{1}{2\pi}\int_1^0 \frac{\varphi\left(\frac{1}{u}\right)}{u^\rho(u-\xi)}\,du \equiv$$

$$\equiv I_1(\xi) + I_2(\xi).$$

Используя условие с), а также свойства интеграла типа Коши в окрестности концов контура интегрирования ([1], стр. 73), легко получить, что в окрестности $\xi = 0$

$$\frac{1}{K} < |I_1(\xi)| < K, \quad 0 < K < \infty. \tag{5}$$

Далее,

$$I_2(\xi) = \frac{1}{2\pi}\int_1^0 \frac{\varphi\left(\frac{1}{u}\right)}{u^\rho(u-\xi)}\,du = \frac{1}{2\pi}\int_1^0 \frac{u^\varepsilon\,\varphi\left(\frac{1}{u}\right)}{u^{\rho+\varepsilon}(u-\xi)}\,du, \quad \varepsilon > 0.$$

Воспользовавшись снова свойством интеграла типа Коши с плотностью, имеющей степенную особенность на конце контура интегрирования ([1], стр. 80), а также условием а), имеем при любом $\varepsilon > 0$ и $\xi \to 0$

$$\ln |I_2(\xi)| = 0\left(\frac{1}{|\xi|^{\rho+\varepsilon}}\right). \tag{6}$$

Возвращаясь теперь к бесконечному контуру и учитывая (5) и (6), получаем требуемое.

Следствие. Порядок на бесконечности функций $X_2(z)$ и $[X_2(z)]^{-1}$ в смысле определения [2] не превосходит $\rho\,(< 1/2)$.

Можно теперь показать, что справедлива

Теорема 1. *Функция* $X_2(z)$ *удовлетворяет соотношению* $(z = re^{i\theta})$

$$\lim_{r\to\infty} r^{-\rho} \ln |X_2(re^{i\theta})| = h_{X_2}(\theta) = -\frac{\lambda_2}{2\sin \pi\rho} \cos \rho(\theta - \pi), \tag{7}$$

где $\lambda_2 = -A_2(\pi \operatorname{ctg} \pi\rho)^{-1}$ *и стремление к пределу в* (7) *равномерно по* $\theta \in [0;\ 2\pi]$.

Доказательство. Предположим сначала, что $A_2 = 0$.
Тогда из условия b) следует, что при $\theta = 0;\ 2\pi$ существует

$$\lim_{r\to\infty} r^{-\rho} \ln |X_2(re^{i\theta})| = 0. \tag{8}$$

Поэтому на основании следствия из леммы и ([5], стр. 74) имеем

$$\overline{\lim_{r\to\infty}} r^{-\rho} \ln |X_2(re^{i\theta})| \leqslant 0, \quad \theta \in [0;\ 2\pi]. \tag{9}$$

Проведя аналогичное рассуждение для функции $[X_2(z)]^{-1}$, получим, что

$$\underline{\lim_{r\to\infty}} r^{-\rho} \ln |X_2(re^{i\theta})| \geqslant 0, \quad \theta \in [0;\ 2\pi]. \tag{10}$$

Из (9) и (10) вытекает существование нулевого для всех $\theta \in [0;\ 2\pi]$ предела в (8). Так как порядок $X_2(z)$ в замкнутом угле $0 \leqslant \arg z \leqslant 2\pi$ не превосходит $\rho\ (< 1/2)$, а на границе полуплоскостей $\operatorname{Im} z < 0$ и $\operatorname{Im} z > 0$ $X_2(z)$ имеет вполне регулярный рост порядка ρ, то $X_2(z)$ имеет вполне регулярный рост порядка ρ в замкнутых углах $0 \leqslant \arg z \leqslant \pi$ и $\pi \leqslant \arg z \leqslant 2\pi$ [3]. Поэтому стремление к нулевому пределу в (8) равномерно по $\theta \in [0;\ 2\pi]$.

Пусть теперь $A_2 \neq 0$. Рассмотрим функцию

$$X_2^*(z) = \exp\left\{-\frac{z}{2\pi} \int_1^{+\infty} \frac{\lambda_2\, dx}{x^{1-\rho}(x - z)}\right\},$$

где λ_2 определено в условии теоремы. Известно [2], что $X_2^*(z)$ удовлетворяет равномерно по $\theta \in [0;\ 2\pi]$ соотношению

$$\lim_{r\to\infty} r^{-\rho} \ln |X_2^*(re^{i\theta})| = \frac{\lambda_2}{2\sin \pi\rho} \cos \rho(\theta - \pi). \tag{11}$$

Поэтому для функции $Y(z) = X_2(z)\, X_2^*(z)$ справедливо заключение леммы, и, кроме того, при $\theta = 0;\ 2\pi$ $\lim\limits_{r\to\infty} r^{-\rho} \ln |Y(re^{i\theta})| = 0$. Тогда на основании доказанного равномерно по $\theta \in [0;\ 2\pi]$ существует

$$\lim_{r\to\infty} r^{-\rho} \ln |Y(re^{i\theta})| \equiv 0.$$

Учитывая теперь (11), приходим к требуемому.

Замечание. Доказанное утверждение можно рассматривать как распространение известного результата [2] для функции $X_2(z)$ на случай меньших ограничений на $\arg G(t)$ (см. п. 5).

Следствие. В условиях a) — c) $\arg G(t)$ является неограниченным при $t \to +\infty$.

Действительно, для функции $X_2(z)$ при $r > 1$ справедливо ([4], стр. 50)

$$\int_0^{2\pi} \ln |X_2(re^{i\theta})|\, d\theta = -\int_1^r \frac{\arg G(t)}{t}\, dt.$$

Деля обе части этого равенства на r^ρ и устремляя r к бесконечности, получаем в силу теоремы 1, что существует конечный

$$\lim_{r\to\infty}\frac{1}{r^\rho}\int_1^r\frac{\arg G(t)}{t}\,dt=\frac{\lambda_2}{2\sin\pi\rho}\int_0^{2\pi}\cos\rho(\theta-\pi)\,d\theta=\frac{\lambda_2}{\rho}\neq 0,$$

откуда необходимо следует, что $\overline{\lim\limits_{t\to+\infty}}\, t^{-\rho}\,|\arg G(t)|>0$.

3. Рассмотрим теперь вторую из вспомогательных задач

$$\Phi_1^+(t)=G_1(t)\,\Phi_1^-(t),\quad -\infty<t<-1 \tag{12}$$

с коэффициентом $G_1(t)\equiv G(t)$, $t\leqslant -1$. Аналогично предыдущему можно установить, что функция

$$X_1(z)=\exp\left\{\frac{z}{2\pi i}\int_{-\infty}^{-1}\frac{\ln G_1(x)}{x(x-z)}\,dx\right\} \tag{13}$$

является аналитической во всей плоскости с разрезом по лучу $t\leqslant -1$, не имеет нулей и ограничена в любом кольце $0<r<|z+1|<R<\infty$ и для $-\infty<t<-1$ удовлетворяет краевому условию (12). Справедлива

Теорема 2. *Функция $X_1(z)$ удовлетворяет во всей плоскости соотношению*

$$\lim_{r\to\infty}r^{-\rho}\ln|X_1(re^{i\theta})|=h_{X_1}(\theta)=\begin{cases}\dfrac{\lambda_1}{2\sin\pi\rho}\cos\rho\theta, & 0\leqslant\theta\leqslant\pi,\\[2ex] \dfrac{\lambda_1}{2\sin\pi\rho}\cos\rho(\theta-2\pi), & \pi\leqslant\theta\leqslant 2\pi,\end{cases} \tag{14}$$

где $\lambda_1=-A_1(\pi\operatorname{ctg}\pi\rho)^{-1}$ и стремление к пределу в (14) равномерно по θ в каждом из углов $0\leqslant\theta\leqslant\pi$ и $\pi\leqslant\theta\leqslant 2\pi$.

Доказательство. Рассмотрим функцию $X_1(-z)$. Произведя в (13) замену переменных $\xi=-z$, $y=-x$, имеем

$$X_1(-z)=\tilde{X}(\xi)=\exp\left\{\frac{\xi}{2\pi i}\int_1^{+\infty}\frac{\ln[G_1(-y)]^{-1}}{y(y-\xi)}\,dy\right\}. \tag{15}$$

Применяя теорему 1 к функции $\tilde{X}(\xi)$, имеем ($\xi=re^{i\vartheta}$)

$$\lim_{r\to\infty}r^{-\rho}\ln|\tilde{X}(re^{i\vartheta})|=h_{\tilde{X}}(\vartheta)=\frac{\lambda_1}{2\sin\pi\rho}\cos\rho(\vartheta-\pi).$$

Заметим теперь, что, как следует из (15), $h_{X_1}(\theta)=h_{\tilde{X}}[\vartheta(\theta)]$, где

$$\vartheta(\theta)=\begin{cases}\theta+\pi, & 0\leqslant\theta\leqslant\pi,\\ \theta-\pi, & \pi\leqslant\theta\leqslant 2\pi.\end{cases}$$

Теорема 2 доказана.

Следствие. В условиях а) — с) $\arg G(t)$ является неограниченным при $t\to-\infty$.

Наконец, для последней из вспомогательных задач

$$\Phi_0^+(t)=G_0(t)\,\Phi_0^-(t),\quad -1<t<1,$$

где $G_0(t) \equiv G(t)$, $|t| \leqslant 1$, функция

$$X_0(z) = \exp\left\{\frac{1}{2\pi i}\int_{-1}^{1}\frac{\ln G_0(x)}{x-z}\,dx\right\} \tag{16}$$

является решением, не имеющим нулей и ограниченным в любой области $0<r<|z+1|\leqslant\infty \cap 0<r<|z-1|\leqslant\infty$. Из свойств $G_0(t)$ и (16) следует, что равномерно по $\theta\in[0;\ 2\pi]$

$$\lim_{r\to\infty}\ln|X_0(re^{i\theta})| = 0. \tag{17}$$

4. Покажем теперь, что при определенном соотношении между величинами A_1, A_2 и ρ для исходной задачи (1) существует ограниченное решение, не имеющее нулей в любом круге $|z|<r$ и удовлетворяющее оценке (2). Рассмотрим с этой целью функцию

$$X(z) = X_1(z)\,X_0(z)\,X_2(z), \tag{18}$$

где $X_k(z)$, $k=0,\ 1,\ 2$, определены формулами (4), (13) и (16). В силу свойств интегралов типа Коши, входящих в представления для $X_k(z)$, $k=0,\ 1,\ 2$, функция $X(z)$ является ограниченной и отличной от нуля в любой конечной области. Кроме того, $X(z)$ удовлетворяет краевому условию (1).

Теорема 3. *Пусть $G(t)$ удовлетворяет условиям а) — с) и, кроме того,*

1) при $A_1A_2<0$ $\operatorname{sgn}A_k=(-1)^{k-1}$, $k=1,\ 2$;

2) при $A_1A_2>0$ $(A_2A_1^{-1})^{\operatorname{sgn}A_k}<\cos\pi\rho$.

Тогда для функции $X(z)$, определенной соотношением (18), выполняется оценка (2) равномерно по $\theta\in[0;\ \pi]$ и $\theta\in[\pi;\ 2\pi]$.

Доказательство. Как следует из теорем 1 и 2, а также из (17) и (18), функция $X(re^{i\theta})$ удовлетворяет равномерно по θ в каждом из углов $0\leqslant\theta\leqslant\pi$ и $\pi\leqslant\theta\leqslant2\pi$ соотношению

$$\lim_{r\to\infty} r^{-\rho}\ln|X(re^{i\theta})| = h_X(\theta) = h_{X_1}(\theta) + h_{X_2}(\theta),$$

где $h_{X_k}(\theta)$ определены формулами (7) и (14). Поэтому оценка (2) для функции $X(z)$ выполняется тогда и только тогда, если

$$h_X(\theta)<h<0, \quad 0\leqslant\theta\leqslant2\pi. \tag{19}$$

Поскольку каждая из функций $h_{X_k}(\theta)$ сохраняет знак ($0<\rho<1/2$!) для всех $\theta\in[0;\ 2\pi]$, то при $A_1A_2<0$ (19) выполняется лишь в том случае, если $\operatorname{sgn}A_k=(-1)^{k-1}$, $k=1,\ 2$. Если же знаки A_k совпадают, то, как следует из (7) и (14), знаки $h_{X_k}(\theta)$ различны. При этом, например, если $A_k>0$, то $h_{X_2}(\theta)\leqslant h_{X_2}(\pi)$, $\theta\in[0;\ 2\pi]$. Вместе с тем $-h_{X_1}(\theta)\geqslant -h_{X_1}(\pi)$, $\theta\in[0;\ 2\pi]$. Поэтому (19) выполняется в том и только в том случае, если $h_{X_2}(\pi)<-h_{X_1}(\pi)$, т. е.

$$\lambda_2\lambda_1^{-1} = A_2A_1^{-1}<\cos\pi\rho.$$

Рассуждая аналогично в случае $A_k<0$, $k=1,\ 2$, придем к тому, что для выполнения (19) необходимо и достаточно, чтобы $h_{X_1}(0)<-h_{X_2}(0)$, или

$$\lambda_1\lambda_2^{-1} = A_1A_2^{-1}<\cos\pi\rho,$$

что и доказывает теорему.

Замечание 1. Если проводить аналогию со случаем, рассмотренным в [2] (одностороннее завихрение $\arg G(t)$), то соотношения между A_k и ρ, устанавливаемые в теореме 3, можно считать соответствующими случаю плюс-бесконечного индекса для двустороннего завихрения $\arg G(t)$.

Замечание 2. Можно было допустить в условии b) равенство нулю одного из пределов. Тогда для выполнения (19) необходимо потребовать, чтобы для отличного от нуля A_k $\operatorname{sgn} A_k = (-1)^{k-1}$.

5. Следует, конечно, показать, что условия a) и b) являются меньшими ограничениями на $\arg G(t) = \varphi(t)\,|t|^{\rho}$ ($|t| \geqslant 1$), чем рассматриваемые в [2], где фигурирует требование $\varphi(t) \in H[1;\ \infty)$.

В качестве примера рассмотрим функцию

$$\varphi(t)\,t^{\rho} = [\lambda + \sin \ln t\,(\ln t)^{-1}]\,t^{\rho}, \quad t \geqslant 1,\ 0 < \rho < 1/2, \quad \lambda = \text{const}.$$

Известно ([1], стр. 23), что функция $(\ln t)^{-1}$ не удовлетворяет условию Гельдера на бесконечном промежутке $[\alpha;\ \infty)$, $\alpha > 1$. Поэтому и $\varphi(t) \in H[1;\ \infty)$. Покажем, однако, что функция $t^{-\varepsilon}\varphi(t) \in H[1;\ \infty)$ при любом $\varepsilon > 0$. Для этого достаточно, перейдя к конечному отрезку $0 \leqslant u \leqslant 1$, установить, что функция

$$\psi(u) = u^{\varepsilon} \sin \ln u\,(\ln u)^{-1} \in H[0;\ 1],\ \varepsilon > 0.$$

Рассмотрим сегмент $[0;\ e^{-\pi/2}]$ и разобьем его на отрезки $I_k = [v_{k+1};\ v_k]$, $k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$, где $v_k = e^{-\frac{\pi}{2}(2k+1)}$ — точки, в которых $\sin \ln u$ достигает экстремума. Функция $\psi(u)$ является непрерывно дифференцируемой в $(0;\ e^{-\pi/2})$ и, кроме того,

$$\max_{u \in I_k} |\psi'(u)| < C_1 e^{\pi k(1-\varepsilon)},$$

где $C_1 = \text{const}$, не зависит от k. Поэтому если u_1, u_2 — произвольные точки I_k, то из формулы конечных приращений следует, что

$$\frac{|\psi(u_1) - \psi(u_2)|}{|u_1 - u_2|} \leqslant \max_{u \in I_k} |\psi'(u)| < C_1 e^{\pi k(1-\varepsilon)}$$

или

$$|\psi(u_1) - \psi(u_2)| < C_1 |u_1 - u_2|^{\varepsilon} |u_1 - u_2|^{1-\varepsilon} e^{\pi k(1-\varepsilon)}. \tag{20}$$

Но $|u_1 - u_2| \leqslant v_k - v_{k+1} = C_2 e^{-\pi k}$ (C_2 не зависит от k). Поэтому $|u_1 - u_2|^{1-\varepsilon} \leqslant C_3 e^{-\pi k(1-\varepsilon)}$, и, на основании (20), для всех $u_1,\ u_2 \in I_k$

$$|\psi(u_1) - \psi(u_2)| < C\,|u_1 - u_2|^{\varepsilon}.$$

Пусть теперь $u_1 \in I_{k_1}$, $u_2 \in I_{k_2}$ и $k_1 < k_2$. Легко видеть, что в I_{k_1} найдется точка $\tilde{u}_2$, такая, что $\psi(u_2) = \psi(\tilde{u}_2)$. Следовательно,

$$|\psi(u_1) - \psi(u_2)| = |\psi(u_1) - \psi(\tilde{u}_2)| < C\,|u_1 - \tilde{u}_2|^{\varepsilon} < C\,|u_1 - u_2|^{\varepsilon}.$$

Если же, например, $u_2 = 0$, то

$$|\psi(u_1) - \psi(u_2)| = |\psi(u_1)| = u_1^{\varepsilon}\,|\sin \ln u_1\,(\ln u_1)^{-1}| < C u_1^{\varepsilon}.$$

Таким образом, $\psi(u) \in H[0;\ e^{-\pi/2}]$. Учитывая теперь, что $\psi(u)$ непрерывно дифференцируема в $(0;\ 1)$ и, кроме того, $\lim\limits_{u \to 1-0} \psi'(u) = \varepsilon$, получаем окончательно, что $\psi(u) \in H[0;\ 1]$.

Установим теперь, что существует

$$\lim_{r \to \infty} r^{1-\rho} \int_1^{+\infty} \frac{\varphi(t)\,dt}{t^{1-\rho}(t-r)} = -\pi\lambda \operatorname{ctg} \pi\rho.$$

Действительно,

$$r\int_1^{+\infty}\frac{\varphi(t)\,dt}{t^{1-\rho}(t-r)}=r\int_1^{+\infty}\frac{\lambda dt}{t^{1-\rho}(t-r)}+r\int_1^{+\infty}\frac{\sin\ln t dt}{t^{1-\rho}\ln t\,(t-r)}\equiv$$
$$\equiv B_1(r)+B_2(r).$$

Покажем прежде всего, что $B_2(r)=0(r^\rho)$ при $r\to+\infty$. Перейдем к конечному контуру $\left(t=\frac{1}{u},\ r=\frac{1}{\sigma}\right)$. Имеем

$$B_2\left(\frac{1}{\sigma}\right)=\int_1^0\frac{\sin\ln u du}{u^\rho\ln u\,(u-\sigma)}=\frac{\sin\ln\sigma}{\ln\sigma}\int_1^0\frac{du}{u^\rho(u-\sigma)}-$$
$$-\int_0^1\frac{\sin\ln u\,(\ln u)^{-1}-\sin\ln\sigma\,(\ln\sigma)^{-1}}{u^\rho(u-\sigma)}\,du\equiv B_{21}\left(\frac{1}{\sigma}\right)+B_{22}\left(\frac{1}{\sigma}\right).$$

Но ([1], стр. 75) при $\sigma\to0$ $B_{21}\left(\frac{1}{\sigma}\right)=0\left(\frac{1}{\sigma^\rho}\right)$. Далее,

$$\left|B_{22}\left(\frac{1}{\sigma}\right)\right|\leqslant\int_0^1\frac{|w(u)-w(\sigma)|}{u^\rho|u-\sigma|}\,du,$$

где функция $w(u)=\sin\ln u\,(\ln u)^{-1}$ непрерывна на отрезке $[0;\ 1]$ и имеет в $(0;\ 1)$ производную $w'(u)$, подчиненную условию

$$|w'(u)|<\nu(u)\,u^{-1},\quad\lim_{u\to0}\nu(u)=0.$$

Так как $0<\rho<1/2$, то ([4], стр. 142) при $\sigma\to0$ $B_{22}\left(\frac{1}{\sigma}\right)=0\left(\frac{1}{\sigma^\rho}\right)$. Отсюда, возвращаясь к бесконечному контуру, имеем

$$\lim_{r\to\infty}r^{-\rho}B_2(r)=0,$$

а вместе с тем [2] и

$$\lim_{r\to\infty}r^{-\rho}[B_1(r)+B_2(r)]=-\pi\lambda\operatorname{ctg}\pi\rho.$$

Этим и заканчивается построение примера.

6. Проведенные выше рассуждения позволяют рассмотреть также и другие задачи. Так, например, из решения задачи (1) при $G(t)\equiv1$ $(t<0)$ в классе ограниченных функций элементарной заменой переменных можно получить решение в соответствующем классе краевой задачи Карлемана

$$\Psi^+(\sigma)=A(\sigma)\,\Psi^+[\alpha(\sigma)]$$

для угловой области D_γ:

$$0<\arg\xi<\frac{2\pi}{\gamma},\quad1<\gamma<\infty,$$

где

$$A(\sigma)=A(t^{1/\gamma})=G(t),\quad0\leqslant\sigma<\infty,$$

а функция $\alpha(\sigma)$ ставит в соответствие друг другу точки сторон D_γ, равноудаленные от вершины угла.

В заключение автор выражает глубокую благодарность академику АН БССР Ф. Д. Гахову, руководившему настоящей работой, и доктору физико-математических наук Н. В. Говорову за ценные замечания.

Литература

1. Гахов Ф. Д. Краевые задачи. Физматгиз, 1963.
2. Говоров Н. В. ДАН СССР, **154**, № 6, 1964.
3. Говоров Н. В. ДАН СССР, **162**, № 3, 1965.
4. Говоров Н. В. Докт. дисс. Харьков, 1967.
5. Левин Б. Я. Распределение корней целых функций. Гостехиздат, 1956.

Белорусский государственный университет им. В. И. Ленина

Поступило в редакцию 16.I 1969

ВЕСЦІ АКАДЭМІІ НАВУК БЕЛАРУСКАЙ ССР № 4 1969
СЕРЫЯ ФІЗІКА-МАТЭМАТЫЧНЫХ НАВУК

УДК 517.948.32 : 517.544

Н. Ф. НАУМОВИЧ

ИСКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ СЛУЧАИ ОБОБЩЕННОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ РИМАНА С СОПРЯЖЕНИЕМ

В настоящей статье будет исследована краевая задача

$$\varphi^+(t) = a(t)\,\varphi^-(t) + b(t)\,\overline{\varphi^-(t)} + c(t) \text{ на } \Gamma \qquad (A)$$

в случае, когда ее коэффициенты могут обращаться в нуль или бесконечность целого порядка. Этот вопрос при условии ограниченности решения на контуре исследован Н. Юхановым [6]. Здесь задача будет решена в более широких классах функций с допустимыми бесконечностями неинтегрируемого порядка.

§ 1. Будем предполагать, что в задаче (А) коэффициенты $a(t)$ и $b(t)$ представимы следующим образом:

$$a(t) = \frac{\prod_{i=1}^{\alpha}(t-a_i)^{\nu_i}}{\prod_{j=1}^{\beta}(t-b_j)^{\pi_j}}\,a_1(t),\quad b(t) = \frac{\prod_{i=1}^{\delta}(t-a_i)^{\mu_i}}{\prod_{j=1}^{n}(t-b_j)^{\omega_j}}\,b_1(t), \qquad (1)$$

где ν_i, π_j, μ_i, ω_j — целые положительные числа, $a_1(t)$ и $b_1(t)$ удовлетворяют условию Гельдера, кроме точек c_k, где $a_1(t)$ имеет разрывы первого рода, и $\mu_i \geqslant \nu_i$, $\omega_j \leqslant \pi_j$, $\alpha < \delta$, $\beta \geqslant n$. Функция $c(t)$ удовлетворяет условию Гельдера.

Рассмотрим класс функций H_{pqr}, введенный Л. А. Чикиным [5]. Кусочно-голоморфная функция $\Phi(z)$ принадлежит классу H_{pqr}, если в окрестности точек $a_1, \ldots, a_p$ и $b_1, \ldots, b_q$ одна из функций $\Phi^+(z)$ или $\Phi^-(z)$ может обращаться в бесконечность целого порядка, в окрестностях точек $c_1, \ldots, c_r$ обе функции $\Phi^+(z)$ и $\Phi^-(z)$ могут обращаться в бесконечность порядка меньше единицы, в окрестностях остальных критических точек $\Phi^+(z)$ и $\Phi^-(z)$ остаются ограниченными.

Задачу в обобщенной постановке сформулируем так: дан простой гладкий контур Γ; на нем заданы функции $a(t)$, $b(t)$, $c(t)$, определяемые формулой (1) и дифференцируемые в окрестностях точек a_i, b_j. Требуется найти кусочно-голоморфную функцию $\varphi(z)$, принадлежащую классу H_{pqr} и исчезающую на бесконечности, если ее граничные значения удовлетворяют на Γ условию (А). Для решения этой задачи воспользуемся методом, изложенным в цитированной работе Л. А. Чикина.

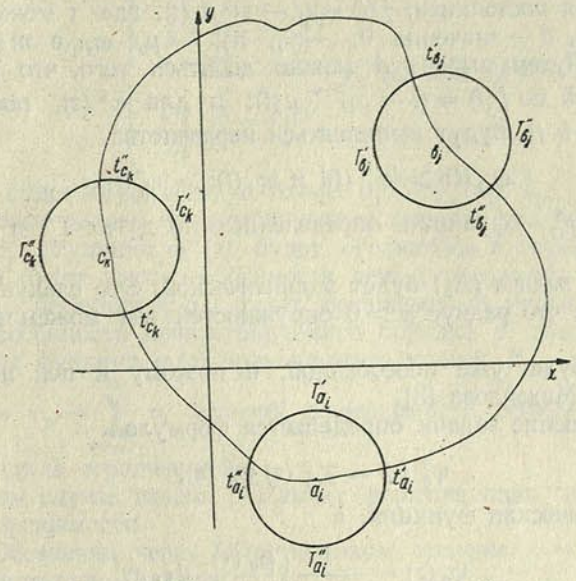
§ 2. Рассмотрим задачу (А) в предположении, что $|a(t)| > |b(t)|$ (эллиптический случай). Для нее построим так называемую приведенную задачу

$$\varphi_0^+(t) = a_0(t)\,\varphi_0^-(t) + b_0(t)\,\overline{\varphi_0^-(t)} + c_0(t) \text{ на } \Gamma_0. \qquad (A_0)$$

Для этого проводим окружности с центрами в особых точках коэффициентов $a(t)$, $b(t)$ и $c(t)$ достаточно малого радиуса ε и заменяем контур Γ контуром Γ_0, который символически можно записать так:

$$\Gamma_0 = \Gamma' + \sum_{i=1}^{\alpha} T_{a_i} + \sum_{j=1}^{n} T_{b_j} + \sum_{k=1}^{\gamma} T_{c_k}. \tag{2}$$

Γ' получается из Γ удалением дуг $t't''$. $\sum_{i=1}^{\alpha} T_{a_i}$ и другие суммы из (2) обозначают совокупность дуг окружностей T (рис. 1). Эти дуги выбираем по



Способ выбора приведенного контура Γ_0

правилу: для нулей $a_1, \ldots, a_p$ берутся дуги $T''_{a_1}, \ldots, T''_{a_p}$, для нулей $a_{p+1}, \ldots, a_\alpha$ — дуги $T'_{a_{p+1}}, \ldots, T'_{a_\alpha}$; для полюсов $b_1, \ldots, b_q$ берутся дуги $T'_{b_1}, \ldots, T'_{b_q}$, для $b_{q+1}, \ldots, b_\beta$ — дуги $T''_{b_{q+1}}, \ldots, T''_{b_\beta}$; для точек разрыва $c_1, \ldots, c_r$ берутся дуги $T''_{c_1}, \ldots, T''_{c_r}$, для остальных точек разрыва — дуги T'. T' обозначает дугу окружности T, принадлежащую D^+, T'' — дугу окружности T, принадлежащую D^-. На этом контуре определяем коэффициенты $a_0(t)$, $b_0(t)$, $c_0(t)$:

$$a_0(t) = \begin{cases} a(t) & \text{при } t \in \Gamma', \\ (t-a_i)^{\nu_i} F_{a_i}(t) & \text{при } t \in T_{a_i} \quad i = 1, \ldots, \alpha, \\ (t-b_j)^{-\pi_j} F_{b_j}(t) & \text{при } t \in T_{b_j} \quad j = 1, \ldots, n, \\ F_{c_k}(t) & \text{при } t \in T_{c_k} \quad k = 1, \ldots, \gamma, \end{cases}$$

$$b_0(t) = \begin{cases} b(t) & \text{при } t \in \Gamma', \\ (t-a_i)^{\mu_i} \Psi_{a_i}(t) & \text{при } t \in T_{a_i} \quad i = 1, \ldots, \alpha, \\ (t-b_j)^{-\pi_j} \Psi_{b_j}(t) & \text{при } t \in T_{b_j} \quad j = 1, \ldots, n, \\ \Psi_{c_k}(t) & \text{при } t \in T_{c_k} \quad k = 1, \ldots, \gamma, \end{cases} \tag{3}$$

$$c_0(t) = \begin{cases} c(t) & \text{при } t \in \Gamma', \\ \Omega_{\mathrm{I}}(t) & \text{при } t \in T', \\ \Omega_{\mathrm{II}}(t) & \text{при } t \in T''. \end{cases} \tag{3}$$

F_{a_i}, F_{b_j}, F_{c_k}, Ψ_{a_i}, Ψ_{b_j}, Ψ_{c_k}, Ω_{I}, Ω_{II} принадлежат семейству дробно-линейных функций $\varphi(z)$, определенных равенством

$$\frac{\varphi(z) - f(t')}{\varphi(z) - f(t'')} = A\,\frac{z - t'}{z - t''}. \tag{4}$$

A — произвольная постоянная; $f(t) = (t-\tau)^d m(t)$, где τ может принимать значения a_i и b_j, d — значения 0, $-\nu_i$, π_j, $-\mu_i$, ω_j, а $m(t)$ — значения $a(t)$, $b(t)$, $c(t)$. Путем выбора A можно добиться того, что для функции $\varphi(z)$, построенной по $f(t) = (t-a_i)^{-\nu_i} a(t)$, и для $\varphi^*(z)$, построенной по $f(t) = (t-a_i)^{-\mu_i} b\ t)$, будут выполняться неравенства

$$|\varphi_{\mathrm{II}}(t)| > |\varphi^*_{\mathrm{II}}(t)| \text{ и } |\varphi_{\mathrm{I}}(t)| > |\varphi^*_{\mathrm{I}}(t)|, \tag{5}$$

где φ_{I}, φ_{II}, φ^*_{I}, φ^*_{II} — функции, определенные на дугах T' и T'' окружностей.

Приведенная задача (A_0) будет эллиптической. Это следует из (3) и (5), а также из того, что радиус $\varepsilon > 0$ окружностей мы можем выбирать как угодно малым.

Задача (A_0) будет уже неособенной, и поэтому к ней применимы результаты Л. Г. Михайлова [3].

1. $\varkappa = 0$. Решение задачи определяется формулой

$$\varphi_0^{\pm}(z) = X_0^{\pm}(z)\,\psi_0^{\pm}(z), \tag{6}$$

где $X_0^{\pm}$ — каноническая функция, а

$$\psi_0(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{\mu_0(\tau)}{\tau - z}\,d\tau. \tag{7}$$

В свою очередь $\mu_0(t)$ можно определить из интегрального уравнения

$$\mu_0(t) = \frac{b_0(t)\,\overline{X_0^-(t)}}{a_0(t)\,X_0^-(t)} \cdot \frac{1}{2}\left(\overline{-\mu_0(t) + S_{\mu_0}(t)}\right), \tag{8}$$

где

$$S_{\mu} \equiv \frac{1}{\pi i}\int_{\Gamma}\frac{\mu(\tau)}{\tau - t}\,d\tau.$$

Покажем, что $\varphi(z) = \lim\limits_{\Gamma_0 \to \Gamma} \varphi_0(z)$ будет принадлежать классу H_{pqr}.

Предположим, что у $a(t)$ есть только точки разрыва первого рода c_k $(k = 1, \ldots, \gamma)$. Поведение канонической функции было исследовано Н. И. Мусхелишвили [4]. Следуя ему, можно записать

$$X(z) = \begin{cases} (z - c_k)^{\lambda_k + i l_k}\, e^{\Theta^+(t)} & \text{при } z \in D^+, \\ (z - c_k)^{\lambda_k + i l_k}\, e^{\Theta^-(t)} & \text{при } z \in D^-, \end{cases} \tag{9}$$

где $\lambda_k = \dfrac{1}{2\pi}\,[\arg a(c_k + 0) - \arg a(c_k - 0)]_{\Gamma}$, $\Theta(z)$ — ограниченная функция. Для точек c_k, определяющих класс решения, λ_k удовлетворяет условию $-1 < \lambda_k < 0$, а для остальных c_k $0 < \lambda_k < 1$.

Сопоставляя (6), (7), (8), (9), заключаем, что в этом случае $\varphi(z)$ будет принадлежать классу H_{pqr}.

Пусть теперь $a(t)$ имеет вид (1), исключая точки разрыва. $X(z)$ можно получить по формуле

$$X(z)=\begin{cases}\dfrac{\prod\limits_{i=p+1}^{\alpha}(z-a_i)^{\nu_i}}{\prod\limits_{j=1}^{q}(z-b_j)^{\pi_j}}X_1^+(z) & \text{при } z\in D^+,\\[2ex] \dfrac{\prod\limits_{j=q+1}^{\beta}(z-b_j)^{\pi_j}}{\prod\limits_{i=1}^{p}(z-a_i)^{\nu_i}}X_1^-(z) & \text{при } z\in D^-.\end{cases}\tag{10}$$

Функция $\psi(z)$ будет ограничена в точках $a_1, \ldots, a_p, b_1, \ldots, b_q$ и будет иметь особенности целого неинтегрируемого порядка в точках $a_{p+1}, \ldots, a_\alpha$ и $b_{q+1}, \ldots, b_\beta$. Функция $\varphi^+(z)$ будет ограничена в точках $a_1, \ldots, a_\alpha, b_{q+1}, \ldots, b_\beta$ и будет иметь особенности неинтегрируемого порядка в точках $b_1, \ldots, b_q$. Функция $\varphi^-(z)$ будет ограничена в точках $b_1, \ldots, b_q$ и будет иметь особенности неинтегрируемого порядка в точках $a_1, \ldots, a_\alpha$. Для того чтобы функция $\varphi(z)$ принадлежала классу H_{pqr}, необходимо на $\varphi^-(z)$ наложить $\nu_p = \sum\limits_{i=p+1}^{\alpha}\nu_i$ условий разрешимости, чтобы она в точках $a_{p+1}, \ldots, a_\alpha$ стала ограниченной.

Итак, в этом случае задача (A) имеет решение лишь при выполнении ν_p условий разрешимости.

2. $\varkappa > 0$. Обозначим через $P_0(z)$ полином степени $\varkappa - 1$ с произвольными коэффициентами. Полагая

$$\psi_0^-(z)=\varphi_0^-(z),\ \psi_0^+(z)=z^{-\varkappa}\left[\varphi_0^+(z)-P_0(z)\right]$$

(начало координат предполагается находящимся в D^+), получим задачу

$$\psi_0^+(t)=a_{10}(t)\,\psi_0^-(t)+b_{10}(t)\,\overline{\psi_0^-(t)}+c_{10}(t),\tag{A_{10}}$$

где

$$a_{10}(t)=t^{-\varkappa}a_0(t),\ b_{10}(t)=t^{-\varkappa}b_0(t),\ c_{10}(t)=t^{-\varkappa}\left[c_0(t)-P_0(t)\right].$$

Очевидно, что

$$\operatorname{Ind}a_{10}(t)=0,\ \left|\frac{b_{10}(t)}{a_{10}(t)}\right|=\left|\frac{b_0(t)}{a_0(t)}\right|.$$

Получаем уже исследованный случай.

3. $\varkappa < 0$. Все сказанное для $\psi_0^+(z)$ остается справедливым, но $\varphi^+(z)=z^{\varkappa}\psi^+(z)$ в точке $z=0$ будет иметь полюс. Для его аннулирования необходимо наложить дополнительное условие, чтобы $\psi^+(z)$ имела при $z=0$ нуль порядка $|\varkappa|$. Это приводит к $|\varkappa|$ условиям разрешимости.

Теорема 1. *Пусть на простом гладком контуре* Γ *задано краевое условие* (*A*) *и*

$$\sup\left|\frac{b(t)}{a(t)}\right|<\frac{2}{1+S_p},$$

где S_p — норма в L_p сингулярного оператора

$$S_\mu \equiv \frac{1}{\pi i}\int_\Gamma \frac{\mu(\tau)}{\tau - z}\, d\tau.$$

Тогда при $\varkappa \geqslant 0$ и $2\varkappa > \nu_p$ однородная задача имеет $2\varkappa - \nu_p$ линейно-независимых решений в классе H_{pqr}. Неоднородная задача имеет единственное решение при выполнении ν_p условий разрешимости. При $\varkappa < 0$ однородная задача не имеет решений, отличных от нулевого, а для разрешимости неоднородной необходимо и достаточно выполнение $2|\varkappa| + \nu_p$ условий разрешимости.

§ 3. Пусть теперь $|a(t)| = |b(t)|$ (параболический случай). Условие параболичности накладывает ограничения на коэффициенты $a(t)$ и $b(t)$. Они могут иметь особенности в одних и тех же точках и одного и того же порядка. Поэтому в выражении их (1) нужно положить $\mu_i = \nu_i$, $\omega_j = \pi_j$, $\delta = \alpha$ и $n = \beta$. Функции $\frac{a(t)}{b(t)}$ и $c(t)$ должны быть дифференцируемы в точках a_i, b_j. Решение ищем среди ограниченных функций.

Возьмем комплексное сопряжение от (A)

$$\overline{\varphi^+(t)} = \overline{b(t)}\,\varphi^-(t) + \overline{a(t)}\,\overline{\varphi^-(t)} + \overline{c(t)} \qquad (\bar{A})$$

и исключим из (A) и $(\bar{A})$ $\varphi^-(t)$ и $\overline{\varphi^-(t)}$. Это дает

$$\varphi^+(t) = \frac{a(t)}{\overline{b(t)}}\,\overline{\varphi^+(t)} + c(t) - \overline{c(t)}\,\frac{a(t)}{\overline{b(t)}}. \qquad (B_1)$$

Коэффициент $\frac{a(t)}{\overline{b(t)}}$ не имеет никаких особенностей и удовлетворяет условию Гельдера. Свободный член тоже удовлетворяет условию Гельдера. К задаче (B_1) применима лемма [3].

Пусть $\lambda = \operatorname{Ind}\frac{a(t)}{\overline{b(t)}}$; l_1 — число решений однородной задачи, линейно-независимых над полем вещественных чисел; p_1 — число вещественных условий разрешимости неоднородной. Тогда при $\lambda \geqslant 0$ $l_1 = \lambda + 1$, $p_1 = 0$, при $\lambda < 0$ $l_2 = 0$, $p_2 = |\lambda| - 1$. Теперь из (B_1) найдем $\varphi^+(t)$ и подставим в (A). Получим внешнюю задачу

$$\overline{\varphi^-(t)} = -\frac{a(t)}{b(t)}\,\varphi^-(t) + \frac{\varphi^+(t) - c(t)}{b(t)}. \qquad (B_2)$$

Для применения леммы необходимо потребовать, чтобы свободный член удовлетворял условию Гельдера. Функция $\varphi^+(t) - c(t)$ в точках $a_1, \ldots, a_\alpha$ должна обращаться в нуль порядков $\nu_1, \ldots, \nu_\alpha$. Это дает $\nu = \sum_{i=1}^{\alpha} \nu_i$ условий разрешимости. Применяем лемму.

Пусть $s = \operatorname{Ind}\frac{a(t)}{b(t)}$. При $s \geqslant 0$ $l_2 = s + 1$, $p_2 = 0$, при $s < 0$ $l_2 = 0$, $p_2 = |\mu| - 1$.

Имеет место

Теорема 2. *Пусть в задаче (A) $|a(t)| \equiv |b(t)|$, $a(t)$, $b(t)$, $c(t)$ имеют вид, указанный выше,*

$$\lambda = \operatorname{Ind}\frac{a(t)}{\overline{b(t)}},\quad s = \operatorname{Ind}\frac{a(t)}{b(t)}.$$

Обозначим: $\lambda + s = 2\varkappa$, l *— число решений однородной задачи и* p *— число условий разрешимости неоднородной,*

$$\nu = \sum_{i=1}^{\alpha} \nu_i.$$

Рассматриваются решения, ограниченные на бесконечности. Тогда картина разрешимости имеет следующий вид:

1) *если* $\lambda < 0$, $s < 0$, *то* $l = 0$, $p = 2|\varkappa| + \nu - 2$;
2) *если* $\lambda < 0$, $s \geqslant 0$, *то* $l = \max\{0, s - \nu + 1\}$, $p = |\lambda| + \nu - 1$;
3) *если* $\lambda \geqslant 0$, $s \geqslant 0$, *то* $l = \max\{0, 2\varkappa - \nu + 2\}$, $p = \nu$;
4) *если* $\lambda \geqslant 0$, $s < 0$, *то разрешимость задачи зависит от числа решений системы*

$$\sum_{j=1}^{\lambda+1} A_{kj}\alpha_j = f_k, \quad k = 1, 2, \ldots, |s| + \nu - 1.$$

Если ранг системы $r = |s| + \nu - 1$, то однородная задача имеет $l = \lambda - \nu - |s| + 2$ решений. Если $r < |s| + \nu - 1$, то однородная задача имеет $l = \lambda - r + 1$ решений. Если $\lambda + 1 < |s| + \nu - 1$, то неизвестных меньше, чем уравнений. Неоднородная система, вообще говоря, несовместна, и однородная имеет только нулевое решение. Для совместности системы необходима и достаточна ортогональность $\{f_k\}$ к решениям транспонированной системы. Если $r < \lambda + 1$, то $p = |s| + \nu - r - 1$, при этом однородная система будет иметь $\lambda - r + 1$ нетривиальных решений.

Литература

1. Гахов Ф. Д. Изв. Казанск. физ.-мат. о-ва, **14**, сер. 3, 1949.
2. Гахов Ф. Д. Краевые задачи. Физматгиз, 1963.
3. Михайлов Л. Г. Тр. АН ТаджССР, отд. физ. и мат., **1**, 1963.
4. Мусхелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения. Физматгиз, 1962.
5. Чикин Л. А. Уч. зап. Казанск. ун-та, **113**, № 10, 1953.
6. Юханонов Н. Канд. дисс. Душанбе, 1967.

Белорусский государственный университет им. В. И. Ленина

Поступило в редакцию 24.I 1969

ВЕСЦІ АКАДЭМІІ НАВУК БЕЛАРУСКАЙ ССР № 4 1969
СЕРЫЯ ФІЗІКА-МАТЭМАТЫЧНЫХ НАВУК

УДК 518 : 517(944)947

В. Н. АБРАШИН, Г. Ф. ГОРБАЧЕВА

О СХОДИМОСТИ НЕКОТОРЫХ СХЕМ МЕТОДА ПРЯМЫХ ПРИ РЕШЕНИИ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

Рассматривается метод прямых при решении некоторых краевых задач для уравнения параболического типа. Исследуется сходимость двухслойной схемы, которая в отличие от схемы Роте [1] дает более высокий порядок сходимости. В [2] для аналогичной схемы доказана сходимость и дана среднеквадратичная оценка погрешности для случая, когда коэффициенты уравнения зависят только от пространственной переменной.

Пусть существует единственное решение следующей краевой задачи:

$$k(x,\ t)\ \frac{\partial u}{\partial t} = c(x,\ t)\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + c_1(x,\ t)\ \frac{\partial u}{\partial x} + d(x,\ t)\,u + f(x,\ t), \tag{1}$$

$$0 < x < l, \quad 0 \leqslant t \leqslant T,$$

$$u(x,\ 0) = \varphi(x) \quad (0 \leqslant x \leqslant l), \tag{2}$$

$$u(0,\ t) = \psi_1(t),\ u(l,\ t) = \psi_2(t) \quad (0 \leqslant t \leqslant T),$$

где $k(x,\ t) > 0$, $c(x,\ t) > 0$ (на прямых $x = 0$, $x = l$ вместо функции u могут быть заданы ее производные первого порядка по x).

Для упрощения исследования наше уравнение (1) запишем в виде

$$a(x,\ t)\ \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + g(x,\ t)\,u + f(x,\ t),$$

$$0 < x < l, \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{3}$$

где

$$a(x,\ t) > 0$$

(к такому виду можно привести простой заменой неизвестной функции).

Построим решетку прямых $t = t_n = nh$, $n = 0,\ 1,\ \ldots,\ N = [T/h]$, $h > 0$. На этих прямых краевую задачу (3), (2) заменим аппроксимирующей ее краевой задачей для системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$a_{n+1}(x)\left[u_{n+1}(x) - u_n(x)\right] = hu''_{n+1}(x) + hu''_n(x) +$$

$$+ hg_{n+1}(x)\,u_{n+1}(x) + hg_n(x)\,u_n(x) + hf_{n+1}(x) \quad (0 < x < l), \tag{4}$$

$$u_{n+1}(0) = \psi_1(t_{n+1}),\ u_{n+1}(l) = \psi_2(t_{n+1}),$$

$$u_0(x) = \varphi(x) \quad (0 \leqslant x \leqslant l), \quad n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ N-1.$$

Здесь

$$a_{n+1}(x) = a(x,\ t_{n+1}) + a(x,\ t_n),$$

$$g_{n+1}(x) = g(x,\ t_{n+1}),\ f_{n+1}(x) = f(x,\ t_{n+1}) + f(x,\ t_n).$$

Погрешность метода $\gamma_n(x) = u(x, t_n) - u_n(x)$ в силу линейности исходного уравнения удовлетворяет решению следующей краевой задачи для системы обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$a_{n+1}(x)\left(\gamma_{n+1}(x) - \gamma_n(x)\right) = h\gamma''_{n+1}(x) + h\gamma''_n(x) +$$

$$+ hg_{n+1}(x)\gamma_{n+1}(x) + hg_n(x)\gamma_n(x) + r_{n+1}(x) \quad (0 < x < l), \tag{5}$$

$$\gamma_{n+1}(0) = 0, \ \gamma_{n+1}(l) = 0, \ \gamma_0(x) = 0 \quad (0 \leqslant x \leqslant l),$$

$$n = 0, 1, 2, \ldots, N-1,$$

где

$$\max_n \max_x r_{n+1}(x) = h^3 |z|$$

при условии, что $u(x, t)$ имеет непрерывную производную 3-го порядка, $|z|$ не зависит от h.

Теперь нашей целью является получение среднеквадратичной оценки погрешности

$$\|\gamma_{n+1}(x)\|_2 = \sqrt{\int_0^l \gamma^2_{n+1}(x)\,dx}$$

предложенной вычислительной схемы. Умножив уравнение (5) на $\gamma_{n+1}(x)$ и проинтегрировав полученное выражение от 0 до l, будем иметь:

$$\int_0^l a_{n+1}(x)\gamma^2_{n+1}(x)\,dx + h\int_0^l \gamma'^2_{n+1}(x)\,dx =$$

$$= \int_0^l a_{n+1}(x)\gamma_n(x)\gamma_{n+1}(x)\,dx - h\int_0^l \gamma'_n(x)\gamma'_{n+1}(x)\,dx +$$

$$+ h\int_0^l g_{n+1}(x)\gamma^2_{n+1}(x)\,dx + h\int_0^l g_n(x)\gamma_n(x)\gamma_{n+1}(x)\,dx + \tag{6}$$

$$+ \int_0^l r_{n+1}(x)\gamma_{n+1}(x)\,dx,$$

$$n = 0, 1, 2, \ldots, N-1.$$

Из (6) нетрудно получить следующее неравенство:

$$(1 - 2h\xi)\int_0^l a_{n+1}(x)\gamma^2_{n+1}(x)\,dx \leqslant$$

$$\leqslant (1 + h\eta)\sqrt{\int_0^l a_{n+1}(x)\gamma^2_{n+1}(x)\,dx}\sqrt{\int_0^l a_n(x)\gamma^2_n(x)\,dx} +$$

$$+ h\sqrt{\int_0^l \gamma'^2_{n+1}(x)\,dx}\sqrt{\int_0^l \gamma'^2_n(x)\,dx} + \tag{7}$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{a}}\sqrt{\int_0^l a_{n+1}(x)\gamma^2_{n+1}(x)\,dx}\sqrt{\int_0^l r^2_{n+1}(x)\,dx},$$

$$n = 0, 1, \ldots, N-1,$$

где

$$\xi = \max_{0<x<l} \max_{0<t<T} |g(x, t)/a(x, t)|, \quad \eta = \xi + a_t,$$

$$a_t = \max_{0<x<l} \max_{0<t<T} \left| \frac{\partial a(x, t)}{\partial t} \Big/ a(x, t) \right|,$$

$$a = \min_{0<x<l} \min_{0<t<T} a(x, t),$$

шаг h выбирается таким, чтобы $1 - 2h\xi > 0$.

Выражение (5) умножим на $\gamma_{n+1}(x) - \gamma_n(x)$ и проинтегрируем от 0 до l:

$$\int_0^l a_{n+1}(x)\left(\gamma_{n+1}(x) - \gamma_n(x)\right)^2 dx = -h \int_0^l \gamma_{n+1}'^2(x)\, dx +$$

$$+ h \int_0^l \gamma_n'^2(x)\, dx + h \int_0^l g_{n+1}(x)\, \gamma_{n+1}^2(x)\, dx - h \int_0^l g_n(x)\, \gamma_n^2(x)\, dx + \qquad (8)$$

$$+ h^2 \int_0^l g_{tn+1}(x)\ \gamma_{n+1}(x)\, \gamma_n(x)\, dx + \int_0^l r_{n+1}(x)\left(\gamma_{n+1}(x) - \gamma_n(x)\right) dx,$$

$$n = 0,\ 1,\ \ldots,\ N-1,$$

где

$$g_{tn+1}(x) = \frac{\partial g(x,\ t_n + \tilde{\tau}_n h)}{\partial t},\ 0 < \tilde{\tau}_n < 1.$$

Из (8) получим следующее неравенство:

$$h \int_0^l \gamma_{n+1}'^2(x)\, dx \leqslant h \int_0^l \gamma_n'^2(x)\, dx + h \int_0^l g_{n+1}(x)\, \gamma_{n+1}^2(x)\, dx -$$

$$- h \int_0^l g_n(x)\, \gamma_n^2(x)\, dx + h^2 \int_0^l g_{tn+1}(x)\, \gamma_{n+1}(x)\, \gamma_n(x)\, dx + \qquad (9)$$

$$+ \int_0^l r_{n+1}(x)\left(\gamma_{n+1}(x) - \gamma_n(x)\right) dx, \quad n = 0,\ 1,\ \ldots,\ N-1.$$

Просуммировав неравенство (9), начиная с $n = 0$, нетрудно получить

$$h \int_0^l \gamma_{n+1}'^2(x)\, dx \leqslant h\xi \int_0^l a_{n+1}(x)\, \gamma_{n+1}^2(x)\, dx +$$

$$+ nhg_t h \frac{1}{a}\ (1 + ha_t) \sqrt{\int_0^l a_{n+1}(x)\, \gamma_{n+1}^2(x)\, dx} \sqrt{\int_0^l a_n(x) \gamma_n^2(x) dx} +$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{a}} \sqrt{\int_0^l r_{n+1}^2(x)\, dx} \sqrt{\int_0^l a_{n+1}(x)\, \gamma_{n+1}^2(x)\, dx} + \qquad (10)$$

$$+ \frac{nh}{\sqrt{a}} h^3 \sqrt{\int_0^l a_n(x) \gamma_n^2(x)\, dx} \sqrt{\int_0^l \tilde{z}_n'^2(x)\, dx},$$

где

$$g_t = \max_{0<i<n} \max_{0<x<l} \frac{\partial g_{ti+1}(x)}{\partial t},$$

$$\sqrt{\int_0^l \overset{\cdot}{a_{n+1}}(x)\,\overset{\cdot}{\gamma}{}^2_{n+1}(x)\,dx} = \max_{0<i<n} \sqrt{\int_0^l a_{i+1}(x)\,\gamma^2_{i+1}(x)\,dx},$$

$$\sqrt{\int_0^l \overset{\cdot}{a_n}(x)\,\overset{\cdot}{\gamma}{}^2_n(x)\,dx} = \max_{0<i<n} \sqrt{\int_0^l a_i(x)\,\gamma_i^2(x)\,dx},$$

$$\sqrt{\int_0^l \tilde{z}_n^{*2}(x)\,dx} = \max_{1<i<n} \sqrt{\int_0^l z_{i-1}^{*2}(x)\,dx},$$

а $\max\limits_i \max\limits_x |z_i^*| = z^*$ не зависит от h при условии, что искомое решение четырежды непрерывно дифференцируемо по t.

Подставив (10) в (7), получим

$$(1 - 2h\xi)\int_0^l a_{n+1}(x)\,\gamma^2_{n+1}(x)\,dx \leqslant$$

$$\leqslant (1 + h\eta)\sqrt{\int_0^l a_{n+1}(x)\,\gamma^2_{n+1}(x)\,dx}\sqrt{\int_0^l a_n(x)\,\gamma_n^2(x)\,dx} +$$

$$+ nh^2 g_t \frac{1 + ha_t}{a}\sqrt{\int_0^l \overset{\cdot}{a_{n+1}}(x)\,\overset{\cdot}{\gamma}{}^2_{n+1}(x)\,dx}\sqrt{\int_0^l \overset{\cdot}{a_n}(x)\,\overset{\cdot}{\gamma}{}^2_n(x)\,dx} + \qquad (11)$$

$$+ \frac{2}{\sqrt{a}}\sqrt{\int_0^l r^2_{n+1}(x)\,dx}\sqrt{\int_0^l a_{n+1}(x)\,\gamma^2_{n+1}(x)\,dx} +$$

$$+ \frac{nh}{\sqrt{a}}\,h^3\sqrt{\int_0^l \overset{\cdot}{a_n}(x)\,\overset{\cdot}{\gamma}{}^2_n(x)\,dx}\sqrt{\int_0^l \tilde{z}_n^{*2}(x)\,dx}.$$

Из рекуррентного неравенства (11) последовательно, начиная с $n = 0$, получим

$$\sqrt{\int_0^l a_{n+1}(x)\,\gamma^2_{n+1}(x)\,dx} \leqslant$$

$$\leqslant h^2 \frac{1}{\sqrt{a}}\,e^{t_n p_n}(2hnz + h^2n^2z^*) = h^2M, \quad n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ N-1, \qquad (12)$$

где

$$p_n = \eta + nhg_t\frac{1 + ha_t}{a},$$

$$z = \max_{0<n<N} \max_{0<x<l} |z_n(x)|,$$

$$z^* = \max_{0<n<N} \max_{0<x<l} |z_n^*(x)|.$$

Из (12) непосредственно следует среднеквадратичная сходимость рассматриваемой схемы метода прямых со скоростью порядка h^2.

Теперь найдем оценку для $\sqrt{\int_0^l \gamma'^2_{n+1}(x)\,dx}$. Для этого подставим выражение (12) в неравенство (10):

$$\sqrt{\int_0^l \gamma'^2_{n+1}(x)\,dx} \leqslant h^2 \left[\xi M^2 + t_n (1 + ha_t) g_t M^2 + \right. \tag{13}$$

$$\left. + \sqrt{\frac{l}{a}}\, zM + t_n \sqrt{\frac{l}{a}}\, Mz^* \right]^{1/2} = h^2 M_n^*, \quad n = 0, 1, 2, \ldots, N-1.$$

Из (13), имея в виду, что

$$|\gamma(x)| \leqslant \sqrt{l} \sqrt{\int_0^l \gamma'^2_{n+1}(x)\,dx},$$

получим (в случае первой краевой задачи)

$$|\gamma_{n+1}(x)| \leqslant h^2 \sqrt{l}\, M_n^*, \quad n = 0, 1, 2, \ldots, N-1. \tag{14}$$

Из (14) следует равномерная сходимость предложенной вычислительной схемы со скоростью порядка h^2.

Аналогичными рассуждениями можно доказать сходимость схемы (4) в случае, когда в правой части уравнения (1) заданы производные по пространственным переменным более высокого порядка.

Замечание 1. Пользуясь идеей метода интегральных соотношений [3], для (3), (2) можно построить вычислительную схему вида

$$a(x, t_{n+1}) u_{n+1}(x) - a(x, t_n) u_n(x) =$$

$$= h \int_0^1 \frac{\partial a(x, t_n + \theta h)}{\partial t} (1-\theta)\, d\theta u_{n+1}(x) +$$

$$+ h \int_0^1 \frac{\partial a(x, t_n + \theta h)}{\partial t} \theta d\theta u_n(x) + \frac{h}{2} u''_{n+1}(x) + \frac{h}{2} u''_n(x) +$$

$$+ h \int_0^1 g(x, t_n + \theta h)(1-\theta)\, d\theta u_{n+1}(x) +$$

$$+ h \int_0^1 g(x, t_n + \theta h)\, \theta d\theta u_n(x) + h \int_0^1 f(x, t_n + \theta h)\, d\theta,$$

$$u_{n+1}(0) = \psi_1(t_{n+1}), u_{n+1}(1) = \psi_2(t_{n+1}),$$

$$u_0(x) = \varphi(x) \quad (0 \leqslant x \leqslant 1), \quad n = 0, 1, 2, \ldots, N-1.$$

С помощью предложенного способа для этого случая также можно доказать равномерную и среднеквадратичную сходимость со скоростью порядка h^2.

Замечание 2. Для краевой задачи

$$c(x,\ t)u_t = L\left(u(x,\ t)\right) + f(x,\ t,\ u),\ 0 \leqslant x \leqslant l,\ \ 0 \leqslant t \leqslant T.$$

$$D_{1,j}u|_{x=0} = \psi_{1,j}(t),\ \ D_{2,j}u|_{x=l} = \psi_{2,j}(t),\ \ j = 1,\ 2,\ \ldots,\ m, \qquad (15)$$

$$u(x,\ 0) = \varphi(x),\ \ c(x,\ t) > 0$$

(где $L(u)$ — дифференциальный оператор пространственных переменных порядка $2m$, коэффициенты в котором зависят от x и от t, $D_{1,j}\ u$, $D_{2,j}u$— дифференциальные операторы, коэффициенты которых зависят от t, оператор L^*, определенный операцией Lu и граничными условиями (15), самосопряжен и ограничен сверху $(L^*u,\ u) \leqslant \lambda(t)(u,\ u)$, где $\lambda(t)$ неположительно) рассмотрим схему Роте

$$c(x,\ t_{n+1})[u_{n+1} - u_n] = hL_{n+1}(u_{n+1}) + hf(x,\ t_{n+1},\ u_{n+1}),\ 0 \leqslant x \leqslant l,$$

$$D_{1,j}u_{n+1}|_{x=0} = \psi_{1,j}(t_{n+1}),\ \ D_{2,j}u_{n+1}|_{x=l} = \psi_{2,j}(t_{n+1}),\ \ j = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ m,$$

$$u_0(x) = \varphi(x),\ \ n = 0,\ 1,\ \ldots,\ N-1.$$

Указанным способом для погрешности схемы Роте нетрудно получить оценку

$$\|\nu_{n+1}(x)\|_2 \leqslant h\,\frac{ct_{n+1}}{2c_1}\,M_2 \exp t_{n+1}\left(a + \frac{f_u}{c_1}\right),\ \ n = 0,\ 1,\ \ldots,\ N-1,$$

где

$$cM_2 = \max_{0<x<l}\max_{0<t<T}\left|c(x,\ t)\,\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right|,\ \ c_1 = \min_{0<x<l}\min_{0<t<T} c(x,\ t),$$

$$a = \max_{0<t<T}\max_{0<x<l}\left|\frac{c_t(x,\ t)}{c(x,\ t)}\right|,\ \ f_u = \max_{0<t<T}\max_{0<x<l}\left|\frac{\partial f}{\partial u}\right|.$$

Замечание 3. Аналогичные результаты могут быть получены и для задачи вида

$$\frac{\partial \varphi(u)}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,\ t,\ u),\ \ 0 \leqslant x \leqslant l,\ \ 0 \leqslant t \leqslant T,$$

$$u(0,\ t) = \varphi_1(t),\ \ u(l,\ t) = \varphi_2(t),\ \ u(x,\ 0) = \psi(x), \qquad (16)$$

где

$$\varphi_u(u) > 0.$$

Используя приведенный подход, нетрудно показать сходимость схемы Роте для задачи (16) как в пространстве $L_2(0,\ l)$, так и в пространстве $C(0,\ l)$.

Замечание 4. Предложенным подходом можно доказать сходимость метода прямых для уравнения эллиптического типа для схем обычных и повышенной точности [4], а также для гиперболической краевой задачи [2].

Литература

1. Бобков В. В., Лисковец О. А. ДУ, 2, № 5, 1966.
2. Лисковец О. А. ЖВММФ, 5, № 2, 1965.
3. Бобков В. В., Крылов В. И. ДУ, 1, № 2, 1965.
4. Абрашин В. Н. ДАН БССР, 11, № 8, 1967.

Институт математики АН БССР

Поступило в редакцию 13.I 1969

ВЕСЦІ АКАДЭМІІ НАВУК БЕЛАРУСКАЙ ССР № 4 1969
СЕРЫЯ ФІЗІКА-МАТЭМАТЫЧНЫХ НАВУК

УДК 517.948.32

А. С. МОТКИН

О ЧИСЛЕ РЕШЕНИЙ СИНГУЛЯРНОГО ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ НА БЕСКОНЕЧНОМ КОНТУРЕ

В [3] показано, что теория характеристического интегрального уравнения с ядром Коши

$$a(t)\varphi(t) + \frac{b(t)}{\pi i}\int_{\Gamma}\frac{\varphi(\tau)}{\tau - t}\,d\tau = f(t) \qquad (1)$$

на замкнутом контуре, простирающемся в бесконечность, вообще говоря, не совпадает с известной теорией уравнения (1) на конечном контуре. В то время как на конечном контуре уравнение (1) всегда равносильно соответствующей ему краевой задаче Римана, в случае бесконечного контура равносильность имеет место лишь при выполнении дополнительного условия. Отсюда проистекает различие в теории. Целью данной работы является точный подсчет числа решений и условий разрешимости уравнения (1).

1. Допустим для определенности, что а) точка i принадлежит области D^+, а точка нуль — области D^-; б) $a^2(t) - b^2(t) = 1$. Обозначим

$$\operatorname{Ind}\frac{a(t) - b(t)}{a(t) + b(t)} = \varkappa.$$

2. Пусть $\varphi(t)$ — решение уравнения (1). Вводя, аналогично тому как это делается в обычной теории [1, 2], кусочно-аналитическую функцию

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{\varphi(\tau)}{\tau - z}\,d\tau,$$

получим [3], что последняя является, как и в случае конечного контура, решением краевой задачи Римана

$$\Phi^+(t) = \frac{a(t) - b(t)}{a(t) + b(t)}\Phi^-(t) + \frac{f(t)}{a(t) + b(t)}. \qquad (2)$$

При выполнении условия

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{\varphi(t)}{t}\,dt = \Phi^-(0) \qquad (3)$$

решение уравнения (1) может быть получено из краевой задачи (2) по формуле

$$\varphi(t) = \Phi^+(t) - \Phi^-(t).$$

Пусть функции $a(t)$, $b(t)$, $f(t)$ и $\varphi(t)$ удовлетворяют на контуре Γ условию Гельдера $|\varphi(t_1)-\varphi(t_2)|<A\left|\frac{1}{t_1}-\frac{1}{t_2}\right|^{\lambda}$, где A — положительное число и $0<\lambda<1$.

Если $\varkappa\geqslant 0$, то решением задачи Римана, соответствующей уравнению (1), будет функция

$$\Phi(z)=X(z)\left[\Psi(z)+\sum_{k=0}^{\varkappa}c_k z^{k-\varkappa}\right],$$

где

$$X^+(z)=e^{\Gamma^+(z)},\quad X^-(z)=\left(\frac{z-i}{z}\right)^{-\varkappa}e^{\Gamma^-(z)},$$

$$\Gamma(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{z\ln\left[\left(\frac{\tau-i}{\tau}\right)^{-\varkappa}\frac{a(\tau)-b(\tau)}{a(\tau)+b(\tau)}\right]}{\tau(\tau-z)}\,d\tau,$$

$$\Psi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{zf(\tau)\,d\tau}{[a(\tau)+b(\tau)]\,X^+(\tau)\,\tau(\tau-z)}.$$

Из решения краевой задачи найдем $\Phi^-(0)=i^{\varkappa}c_0$,

$$\varphi(t)=\Phi^+(t)-\Phi^-(t)=a(t)f(t)-\frac{tb(t)Z(t)}{\pi i}\int_{\Gamma}\frac{f(\tau)}{\tau Z(\tau)}\frac{d\tau}{\tau-t}-$$

$$-2b(t)Z(t)\cdot\sum_{k=0}^{\varkappa}c_k t^{k-\varkappa},\qquad(4)$$

где

$$Z(t)=[a(t)+b(t)]\,X^+(t).$$

На основании равенства (3), если выполняется условие

$$c_0\left(\frac{1}{\pi i}\int_{\Gamma}\frac{b(t)Z(t)}{t^{\varkappa+1}}\,dt+i^{\varkappa}\right)+\frac{c_1}{\pi i}\int_{\Gamma}\frac{b(t)Z(t)}{t^{\varkappa}}\,dt+\ldots+\frac{c_{\varkappa}}{\pi i}\int_{\Gamma}\frac{b(t)Z(t)}{t}\,dt=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\left[\frac{a(t)f(t)}{t}-\frac{b(t)Z(t)}{\pi i}\int_{\Gamma}\frac{f(\tau)}{\tau Z(\tau)}\frac{d\tau}{\tau-t}\right]dt,\qquad(5)$$

то формула (4) дает решение уравнения (1).

Если в равенстве (5) по крайней мере один из коэффициентов при c_k $(k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ \varkappa)$ отличен от нуля, то оно определяет одну из произвольных постоянных, входящих в (4), и решение уравнения (1) при любой правой части (в том числе и $f(t)\equiv 0$) линейно зависит от $\varkappa$ параметров. Если выполняется условие

$$\frac{1}{\pi i}\int_{\Gamma}\frac{b(t)Z(t)}{t^{\varkappa+1}}\,dt+i^{\varkappa}=\int_{\Gamma}\frac{b(t)Z(t)}{t^{\varkappa}}\,dt=\ldots=\int_{\Gamma}\frac{b(t)Z(t)}{t}\,dt=0,\qquad(6)$$

то уравнение (1), вообще говоря, неразрешимо. Из (5) получим, что условием его разрешимости будет выполнение равенства

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\left[\frac{a(t)f(t)}{t}-\frac{b(t)Z(t)}{\pi i}\int_\Gamma\frac{f(\tau)}{\tau Z(\tau)}\frac{d\tau}{\tau-t}\right]dt=0. \tag{7}$$

Если последнее удовлетворяется, то решение уравнения (1) дается формулой (4) при произвольных значениях $c_k\,(k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ \varkappa)$. Очевидно, что для однородного уравнения

$$a(t)\varphi(t)+\frac{b(t)}{\pi i}\int_\Gamma\frac{\varphi(\tau)}{\tau-t}d\tau=0 \tag{8}$$

условие (7) выполняется. Следовательно, при $\varkappa\geqslant 0$, если имеет место равенство (6), то однородное уравнение имеет $\varkappa+1$ линейно-независимых решений. Таким образом, при $\varkappa\geqslant 0$, если однородное уравнение (8) имеет $\varkappa+1$ линейно-независимых решений, то соответствующее неоднородное, вообще говоря, неразрешимо.

Ниже приводятся примеры, показывающие, что указанные возможности действительно имеют место.

Если $\varkappa<0$, то однородная задача Римана не имеет решений, отличных от тривиального, а неоднородная при выполнении $-\varkappa-1$ условий разрешимости

$$\int_\Gamma\frac{f(t)\,dt}{Z(t)\,t^{k+1}}=0\ \ (k=1,\ 2,\ \ldots,\ -\varkappa-1) \tag{9}$$

имеет решение

$$\Phi(z)=X(z)\,\Psi(z).$$

Следовательно, при $\varkappa<0$ однородное интегральное уравнение (8) не имеет нетривиальных решений, а неоднородное, если выполняется $-\varkappa$ условий разрешимости (3) и (9), имеет единственное решение.

Сформулируем полученный результат.

Теорема. *При $\varkappa\geqslant 0$, если выполняется одно из условий*

$$\int_\Gamma\frac{b(t)Z(t)}{t^k}dt\neq 0\ \ (k=1,\ 2,\ \ldots,\ \varkappa),\quad \frac{1}{\pi i}\int_\Gamma\frac{b(t)Z(t)}{t^{\varkappa+1}}dt\neq -i^\varkappa, \tag{10}$$

то однородное уравнение (8) имеет $\varkappa$ линейно-независимых решений (при $\varkappa=0$ нулевое решение в расчет не принимается), а если выполняется условие

$$\frac{1}{\pi i}\int_\Gamma\frac{b(t)Z(t)}{t^{\varkappa+1}}dt+i^\varkappa=\int_\Gamma\frac{b(t)Z(t)}{t^\varkappa}dt=\ldots=\int_\Gamma\frac{b(t)Z(t)}{t}dt=0, \tag{11}$$

то (8) имеет $\varkappa+1$ линейно-независимых решений.

При $\varkappa<0$ однородное уравнение не имеет нетривиальных решений.

При $\varkappa\geqslant 0$, если выполняется одно из условий (10), то неоднородное уравнение (1) разрешимо при любой правой части и его общее решение линейно зависит от $\varkappa$ параметров, а если выполняется условие (11), то неоднородное уравнение (1), вообще говоря, неразрешимо. При выполнении условия разрешимости

$$\int_\Gamma\left[\frac{a(t)f(t)}{t}-\frac{b(t)Z(t)}{\pi i}\int_\Gamma\frac{f(\tau)}{\tau Z(\tau)}\frac{d\tau}{\tau-t}\right]dt=0 \tag{12}$$

уравнение (1) имеет решение, зависящее линейно от $\varkappa + 1$ *параметров.*

При $\varkappa < 0$ *неоднородное уравнение (1) имеет решение, если выполняются* $-\varkappa$ *условий (3), (9).*

Полученные результаты являются точными в том смысле, что все рассмотренные в теореме случаи действительно реализуются. Покажем это на примерах.

Пример 1. Положим, что $\frac{i}{2} \in D^+$, а $-i$, $0 \in D^-$.

Интегральному уравнению

$$\frac{3t}{t-2i}\varphi(t) - \frac{1}{\pi i}\int_\Gamma \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t}\,d\tau = 0 \tag{13}$$

с $\varkappa = 1$ соответствует краевая задача

$$\Phi^+(t) = \frac{2t-i}{t+i}\,\Phi^-(t),$$

имеющая решение

$$\Phi^+(z) = \frac{c_0}{z+i} + \frac{c_1 z}{z+i},\quad \Phi^-(z) = \frac{c_0}{2z-i} + \frac{c_1}{2z-i}.$$

Из решения краевой задачи найдем

$$\Phi^-(0) = ic_0,$$

$$\varphi(t) = \Phi^+(t) - \Phi^-(t) = \frac{(t-2i)c_0}{(t+i)(2t-i)} + \frac{t(t-2i)c_1}{(t+i)(2t-i)}.$$

Запишем условие (5) для уравнения (13):

$$\frac{c_0}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{(t-2i)\,dt}{t(t+i)(2t-i)} + \frac{c_1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{(t-2i)\,dt}{(t+i)(2t-i)} = ic_0.$$

Учитывая, что

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{(t-2i)\,dt}{t(t+i)(2t-i)} = i,\quad \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{(t-2i)}{(t+i)(2t-i)} = -\frac{3}{4},$$

получим $ic_0 - \frac{3}{4}c_1 = ic_0$, т. е. $c_1 = 0$.

Таким образом, уравнение (13) имеет решение

$$\varphi(t) = \frac{(t-2i)c_0}{(t+i)(2t-i)}.$$

Для неоднородного уравнения

$$\frac{3t}{t-2i}\varphi(t) - \frac{1}{\pi i}\int_\Gamma \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t}\,d\tau = f(t), \tag{14}$$

если положить

$$c_1 = \frac{1}{\pi i}\int_\Gamma \left[\frac{(t-2i)f(t)}{2(t+i)(2t-i)} + \frac{t(t-2i)}{(t+i)(2t-i)\pi i 6}\int_\Gamma \frac{(\tau-2i)f(\tau)\,d\tau}{\tau^2(\tau-t)}\right]dt,$$

условие (5) выполняется при любой функции $f(t)$. Следовательно, уравнение (14) разрешимо при любой правой части.

Пример 2. Положим, что $i \in D^+$, а $-i$, $0 \in D^-$.

Интегральному уравнению

$$\frac{i}{t}\varphi(t) - \frac{1}{\pi i}\int_\Gamma \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t}\,d\tau = 0 \tag{15}$$

с $\varkappa = 1$ соответствует краевая задача

$$\Phi^+(t) = -\frac{t-i}{t+i}\,\Phi^-(t),$$

имеющая решение

$$\Phi^+(z) = -\frac{c_0}{z+i} - \frac{c_1 z}{z+i}, \quad \Phi^-(z) = \frac{c_0}{z-i} + \frac{c_1 z}{z-i}.$$

Из решения краевой задачи получим

$$\Phi^-(0) = ic_0,$$

$$\varphi(t) = -\frac{2c_0 t}{t^2+1} - \frac{2c_1 t^2}{t^2+1}. \tag{16}$$

Так как

$$-\frac{1}{\pi i}\int_\Gamma \frac{dt}{t^2+1} = i, \quad \int_\Gamma \frac{t\,dt}{t^2+1} = 0,$$

условие (5) для уравнения (15)

$$-\frac{c_0}{\pi i}\int_\Gamma \frac{dt}{t^2+1} - \frac{c_1}{\pi i}\int_\Gamma \frac{t\,dt}{t^2+1} = ic_0$$

выполняется при произвольных значениях постоянных c_0 и c_1 и решение (16) уравнения (15) линейно зависит от двух параметров. Коэффициенты уравнения (15) удовлетворяют условию (7). Поэтому соответствующее неоднородное уравнение

$$\frac{i}{t}\varphi(t) + \frac{1}{\pi i}\int_\Gamma \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t}\,d\tau = f(t), \tag{17}$$

вообще говоря, неразрешимо.

При $f(t) = \dfrac{1}{t-i}$ условие разрешимости (7)

$$\int_\Gamma \frac{dt}{(t-i)^2} = 0$$

выполняется и уравнение (17) имеет решение

$$\varphi(t) = \frac{c_0 t}{t^2+1} + \frac{c_1 t}{t^2+1} - \frac{t}{(t-i)^2}.$$

При $f(t) = 1$ условие разрешимости (7) имеет вид

$$\int_{\Gamma} \frac{dt}{t+i} = 0.$$

Так как

$$\int_{\Gamma} \frac{dt}{t+i} = -\pi i,$$

оно не выполняется и уравнение

$$\frac{i}{t}\varphi(t) + \frac{1}{\pi i}\int_{\Gamma} \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t}\,d\tau = 1$$

не имеет решений, в то время как однородное имеет решение, зависящее от двух параметров.

Все рассмотренные уравнения имеют $\varkappa = 1$. Однако характер разрешимости у них различный.

Если на конечном контуре при $\varkappa \geqslant 0$ $\varkappa$ однозначно определяет число решений уравнения (1) и из разрешимости однородного следует безусловная разрешимость неоднородного, то на контуре, простирающемся в бесконечность, на число решений уравнения (1) влияют и другие характеристики (10) — (12) коэффициентов и свободного члена, а из разрешимости однородного уравнения, вообще говоря, не следует разрешимость неоднородного.

Автор выражает благодарность академику АН БССР Ф. Д. Гахову, под руководством которого была выполнена эта работа.

Литература

1. Гахов Ф. Д. Краевые задачи. Физматгиз, 1963.
2. Мусхелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения. Физматгиз, 1962.
3. Моткин А. С. Весці АН БССР, сер. фіз.-мат. навук, № 4, 1967.

Белорусский государственный университет им. В. И. Ленина

Поступило в редакцию 15.VII 1968

ВЕСЦІ АКАДЭМІІ НАВУК БЕЛАРУСКАЙ ССР № 4 1969
СЕРЫЯ ФІЗІКА-МАТЭМАТЫЧНЫХ НАВУК

УДК 517.948.32

Н. Н. ЛУЧКО

О СИСТЕМАХ ОСОБЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ТИПА СВЕРТКИ С СОПРЯЖЕНИЕМ

§ 1. Рассмотрим систему интегральных уравнений

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_{ij}\varphi_j(x) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} \sum_{j=1}^{n} k_{ij}^1(x-t)\,\varphi_j(t)\,dt +$$

$$+ \sum_{j=1}^{n} \gamma_{ij}\overline{\varphi}_j(x) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} \sum_{j=1}^{n} k_{ij}^3(x-t)\,\overline{\varphi}_j(t)\,dt +$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{0} \sum_{j=1}^{n} k_{ij}^2(x-t)\,\varphi_j(t)\,dt + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{0} \sum_{j=1}^{n} k_{ij}^4(x-t)\,\overline{\varphi}_j(t)\,dt + \tag{1.1}$$

$$+ \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{j=1}^{n} m_{ij}(x,\,-t)\,\varphi_j(t)\,dt + \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{j=1}^{n} n_{ij}(x,\,t)\,\overline{\varphi}_j(t)\,dt = f_i(x)$$

$$(i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n),$$

которую с использованием векторно-матричной символики можно записать в виде

$$\lambda\varphi(x) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} k_1(x-t)\,\varphi(t)\,dt +$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{0} k_2(x-t)\,\varphi(t)\,dt + \gamma\overline{\varphi}(x) +$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} k_3(x-t)\,\overline{\varphi}(t)\,dt + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{0} k_4(x-t)\,\overline{\varphi}(t)\,dt +$$

$$+ \int_{-\infty}^{+\infty} m(x,\,-t)\,\varphi(t)\,dt + \int_{-\infty}^{+\infty} n(x,\,t)\,\overline{\varphi}(t)\,dt = f(x). \tag{1.2}$$

Искомая вектор-функция $\varphi(x)$ и свободный член $f(x)$ принадлежат $L_2(-\infty,\ +\infty)$, а разностные ядра — $L(-\infty,\ +\infty)$. λ, γ — кусочно-постоянные матрицы, причем

$$\lambda = \begin{cases} \lambda_1, & x > 0, \\ \lambda_2, & x < 0, \end{cases} \qquad \gamma = \begin{cases} \lambda_3, & x > 0, \\ \lambda_4, & x < 0. \end{cases}$$

Ядра $m(x, -t)$, $n(x, t)$ удовлетворяют условию

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} |m(x, -t)|^2\,dxdt < +\infty, \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} |n(x, t)|^2\,dxdt < +\infty.$$

Оператор преобразования Фурье обозначим через V:

$$\Phi(x) = V\varphi(x) = \lim_{l_1,\ l_2\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-l_1}^{l_2} \varphi(t)\, e^{itx}\,dt. \tag{1.3}$$

Имеют место следующие соотношения:

$$V[\overline{\varphi}(x)] = \overline{\Phi}(-x),\ V[\varphi(x)\operatorname{sgn} x] = \frac{1}{\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{V[\varphi(t)]}{t-x}\,dt,$$

где интеграл понимается в смысле главного значения по Коши и определяет функцию из $L_2(-\infty, +\infty)$:

$$V[k * \varphi] = V\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} k(x-t)\,\varphi(t)\,dt\right] = K(x)\,\Phi(x),$$

$$V_t[m(x, -t)] = M_1(x, -t),$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} m(x, -t)\ \varphi(t)\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} M_1(x, t)\,\Phi(t)\,dt,$$

$$V_x[M_1(x, t)] = M(x, t),\ \int_{-\infty}^{+\infty} M_1(t, x)\,\varphi(t)\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} M(t, x)\,\Phi(-t)\,dt.$$

Известно, что $K(x)$ исчезает на бесконечности и непрерывна. Полагая $K(\pm\infty) = 0$, будем рассматривать $K(x)$ как непрерывную функцию на замкнутой вещественной оси.

§ 2. Введем обозначения

$$a_1(x) = \frac{1}{2}[k_1(x) + k_2(x)],\ a_2(x) = \frac{1}{2}[k_1(x) - k_2(x)],$$

$$b_1(x) = \frac{1}{2}[k_3(x) + k_4(x)],\ b_2(x) = \frac{1}{2}[k_3(x) - k_4(x)],$$

$$\gamma_1 = \frac{1}{2}(\lambda_1 + \lambda_2),\ \gamma_2 = \frac{1}{2}(\lambda_1 - \lambda_2),$$

$$\nu_1 = \frac{1}{2}(\lambda_3 + \lambda_4),\ \nu_2 = \frac{1}{2}(\lambda_3 - \lambda_4).$$

Система (1.1), записанная с использованием обозначений (2.1) и оператора $\operatorname{sgn} t$, преобразованием Фурье приводится к системе интегральных уравнений с ядром Коши

$$[\gamma_1 + A_1(x)]\,\Phi(x) + \frac{\gamma_2 + A_2(x)}{\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\Phi(t)}{t-x}\,dt +$$

$$+\frac{\nu_2+B_2(x)}{\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\overline{\Phi}(-t)}{t-x}\,dt+[\nu_1+B_1(x)]\,\overline{\Phi}(-x)+$$

$$+\int_{-\infty}^{+\infty}M(x,\ t)\,\Phi(t)\,dt+\int_{-\infty}^{+\infty}N(x,\ -t)\,\overline{\Phi}(-t)\,dt=F(x). \qquad (2.2)$$

Присоединим к системе (2.2) систему, полученную из нее комплексным сопряжением и заменой x на $-x$, t на $-t$. Мы придем к системе $2n$ интегральных уравнений с ядром Коши

$$P(x)\overset{*}{\Phi}(x)+\frac{Q(x)}{\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\overset{*}{\Phi}(t)}{t-x}\,dt+$$

$$+\int_{-\infty}^{+\infty}K(x,\ t)\ \overset{*}{\Phi}(t)\ dt=\overset{*}{F}(x), \qquad (2.3)$$

где

$$P(x)=\begin{bmatrix}\gamma_1+A_1(x) & \nu_1+B_1(x)\\ \overline{\nu}_1+\overline{B}_1(-x) & \overline{\gamma}_1+\overline{A}_1(-x)\end{bmatrix},$$

$$Q(x)=\begin{bmatrix}\gamma_2+A_2(x) & \nu_2+B_2(x)\\ \overline{\nu}_2+\overline{B}_2(-x) & \overline{\gamma}_2+\overline{A}_2(-x)\end{bmatrix},$$

$$K(x,\ t)=\begin{bmatrix}M(x,\ t) & N(x,\ -t)\\ \overline{N}(-x,\ t) & \overline{M}(-x,\ -t)\end{bmatrix}$$

— матрицы порядка $2n$, записанные в клеточной форме.

Используя метод Н. И. Мусхелишвили ([4], стр. 452), нетрудно показать, что однородные системы (2.2) и (2.3) имеют одно и то же число линейно независимых решений в $L_2(-\infty,\ +\infty)$, если линейную независимость для системы (2.2) понимать в смысле комбинации с действительными коэффициентами, а для системы (2.3) — в смысле комбинации с комплексными коэффициентами. Имея полную систему $\overset{*}{\Phi}_i(x)$ $(i=1,\ 2,\ \ldots,\ l)$ линейно независимых решений системы (2.3), можно построить все решения системы (2.2) и, наоборот, из каждого решения системы (2.2) легко получить соответствующее решение системы (2.3). Неоднородная система (2.2) разрешима тогда и только тогда, когда разрешима неоднородная система (2.3). Построим систему, союзную (1.1). Система

$$P'(x)\overset{*}{\Psi}(x)-\frac{1}{\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{Q'(t)\overset{*}{\Psi}(t)}{t-x}\,dt+$$

$$+\int_{-\infty}^{+\infty}K'(t,\ x)\overset{*}{\Psi}(t)\,dt=0 \qquad (2.4)$$

является союзной (2.3) и эквивалентна однородной системе n уравнений

$$[\gamma_1+A_1'(x)]\,\Psi(-x)-\frac{1}{\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\gamma_2'+A_2'(t)}{t-x}\,\Psi(-t)\,dt+$$

$$+[\overline{\nu}_1'+\overline{B}_1'(-x)]\,\overline{\Psi}(x)-\frac{1}{\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\nu_2'+B_2'(-t)}{t-x}\,\overline{\Psi}(t)\,dt+$$

$$+\int_{-\infty}^{+\infty} M'(t,\ x)\,\Psi(-t)\,dt+\int_{-\infty}^{+\infty}\bar{N}'(-t,\ x)\,\bar{\Psi}(t)\,dt=0. \qquad (2.5)$$

Применяя к (2.5) обратный оператор Фурье, заменяя x на $-x$, а t на $-t$ и учитывая обозначения (2.1), получаем

$$\lambda_1'\psi(x)+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} k_1'(t-x)\,\psi(t)\,dt+$$

$$+\bar{\lambda}_3'\bar{\psi}(x)+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\bar{k}_3'(t-x)\,\bar{\psi}(t)\,dt+$$

$$+\int_{-\infty}^{+\infty} m'(t,\ -x)\,\psi(t)\,dt+\int_{-\infty}^{+\infty}\bar{n}'(t,\ x)\,\bar{\psi}(t)\,dt=0,\ x>0; \qquad (2.6)$$

$$\lambda_2'\psi(x)+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} k_2'(t-x)\,\psi(t)\,dt+$$

$$+\bar{\lambda}_4'\bar{\psi}(x)+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\bar{k}_4'(t-x)\,\bar{\psi}(t)\,dt+$$

$$+\int_{-\infty}^{+\infty} m'(t,-x)\,\psi(t)\,dt+\int_{-\infty}^{+\infty}\bar{n}'(t,\ x)\,\bar{\psi}(t)\,dt=0,\ x<0.$$

Систему (2.6) назовем союзной (1.1). Следовательно, союзной системой для (1.1) является система парных интегральных уравнений типа свертки с сопряжением.

В силу эквивалентности однородных систем (1.1) и (2.3) естественно индексом системы интегральных уравнений (1.1) назвать величину

$$\varkappa=\operatorname{Ind}\det[(P+Q)^{-1}(P-Q)]=\operatorname{Ind}\frac{\Delta_2(x)}{\Delta_1(x)}.$$

В дальнейшем считаем $\Delta_1(x)\neq 0$, $\Delta_2(x)\neq 0$, называя такой случай нормальным. Обозначим через l и l' соответственно число линейно независимых решений однородных систем (1.1) и (2.6). Исходя из теорем Нетера для систем уравнений с ядром Коши с учетом эквивалентности систем (1.1) и (2.3), (2.4) и (2,6), легко установить справедливость теорем, аналогичных теоремам Нетера.

Теорема 1. *Разность чисел линейно независимых решений однородных союзных систем (1.1) и (2.6) определяется формулой*

$$l-l'=\varkappa.$$

Теорема 2. *Для разрешимости системы интегральных уравнений типа свертки с сопряжением необходимо и достаточно выполнения условий*

$$\operatorname{Re}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\psi_j(t)\,dt\right]=0 \qquad (j=1,\ 2,\ \ldots,\ l'),$$

где $\psi_j(x)$ — полная система линейно независимых решений союзной системы (2.6).

§ 3. Систему (1.2) при $m(x,\ t) \equiv n(x,\ t) \equiv 0$ назовем характеристической. С помощью односторонних вектор-функций

$$\varphi_+(x) = \begin{cases} \varphi(x), & x > 0, \\ 0, & x < 0, \end{cases} \quad \varphi_-(x) = \begin{cases} 0, & x > 0, \\ -\varphi(x), & x < 0, \end{cases} \tag{3.1}$$

и последующего применения преобразования Фурье она сводится к краевой задаче

$$[\lambda_1 + K_1(x)]\,\Phi^+(x) - [\lambda_2 + K_2(x)]\,\Phi^-(x) +$$

$$+ [\lambda_3 + K_3(x)]\,\overline{\Phi}^+(-x) - [\lambda_4 + K_4(x)]\,\overline{\Phi}^-(-x) = F(x). \tag{3.2}$$

Введем обозначения:

$$c_i(x) = \lambda_i + K_i(x) \quad (i = 1,\ 2,\ 3,\ 4), \tag{3.3}$$

$$\Phi_1^+(z) = \Phi^+(z), \quad \Phi_2^+(z) = \overline{\Phi}^+(-z),$$

$$\Phi_1^-(z) = \Phi^-(z), \quad \Phi_2^-(z) = \overline{\Phi}^-(-z). \tag{3.4}$$

Присоединяя к (3.2) равенство, полученное из него комплексным сопряжением и заменой x на $-x$, и учитывая обозначения (3.3), получаем краевую задачу Римана для $2n$ пар функций

$$A(x)\,\overset{*}{\Phi}{}^+(x) = B(x)\,\overset{*}{\Phi}{}^-(x) + \overset{*}{F}(x), \tag{3.5}$$

где

$$A(x) = \begin{bmatrix} c_1(x) & c_3(x) \\ \overline{c}_3(-x) & \overline{c}_1(-x) \end{bmatrix}, \quad B(x) = \begin{bmatrix} c_2(x) & c_4(x) \\ \overline{c}_4(-x) & \overline{c}_2(-x) \end{bmatrix} \tag{3.6}$$

— клеточные матрицы порядка $2n$. Союзная характеристическая система приводится к краевой задаче Римана

$$\Omega^+(x) = A'(x)\,[B'(x)]^{-1}\,\Omega^-(x), \tag{3.7}$$

союзной краевой задаче (3.5).

Вычислим матрицу коэффициентов задачи Римана (3.5): $G(x) = A^{-1}(x)B(x)$. Пусть $\det c_1(x) \neq 0$. Тогда

$$G(x) = \begin{bmatrix} H_1^{-1}(-x) & 0 \\ 0 & H_1^{-1}(x) \end{bmatrix} \times$$

$$\times \begin{bmatrix} c_2(x) - c_3(x)\,\overline{c}_1^{-1}(-x)\,c_4(-x) & c_4(x) - c_3(x)\,\overline{c}_1^{-1}(-x)\,\overline{c}_2(-x) \\ \overline{c}_4(-x) - \overline{c}_3(-x)\,c_1^{-1}(x)\,c_2(x) & \overline{c}_2(-x) - \overline{c}_3(-x)\,c_1^{-1}(x)\,\overline{c}_4(x) \end{bmatrix}$$

$$\left(H_1(x) = \overline{c}_1(-x) - \overline{c}_3(-x)\,c_1^{-1}(x)\,c_3(x)\right).$$

В случае $\det c_3(x) \neq 0$ получаем

$$G(x) = \begin{bmatrix} \overline{H}_2^{-1}(-x) & 0 \\ 0 & H_2^{-1}(x) \end{bmatrix} \times$$

$$\times \begin{bmatrix} \overline{c}_4(-x) - \overline{c}_1(-x)\,c_3^{-1}(x)\,c_2(x) & \overline{c}_2(-x) - \overline{c}_1(-x)\,c_3^{-1}(x)\,c_4(x) \\ c_2(x) - c_1(x)\,\overline{c}_3^{-1}(-x)\,\overline{c}_4(-x) & c_4(x) - c_1(x)\,\overline{c}_3^{-1}(-x)\,\overline{c}_2(-x) \end{bmatrix}$$

$$\left(H_2(x) = \overline{c}_3(-x) - \overline{c}_1(-x)\,c_3^{-1}(x)\,c_1(x)\right).$$

Матрица коэффициентов союзной задачи (3.7) в случае $\det c_2(x) \neq 0$ имеет вид

$$[G^{-1}(x)]' = \begin{bmatrix} c_1'(x) - \bar{c}_3'(-x)\,\bar{c}_2'^{-1}(-x)\,c_4'(x) \\ c_3'(x) - \bar{c}_1'(-x)\,\bar{c}_2'^{-1}(-x)\,c_4'(x) \end{bmatrix} \times$$

$$\times \begin{bmatrix} \bar{c}_3'(-x) - c_1'(x)\,c_2'^{-1}(x)\,\bar{c}_4'(-x) \\ \bar{c}_1'(-x) - c_3'(x)\,c_2'^{-1}(x)\,\bar{c}_4'(-x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_3'^{-1}(x) & 0 \\ 0 & \bar{H}_3'^{-1}(-x) \end{bmatrix}$$

$$\left(H_3'(x) = \bar{c}_2'(-x) - c_4'(x)\,c_2'^{-1}(x)\,\bar{c}_4'(-x)\right),$$

и, если $\det c_4(x) \neq 0$,

$$[G^{-1}(x)]' = \begin{bmatrix} \bar{c}_3'(-x) - c_1'(x)\,c_4'^{-1}(x)\,\bar{c}_2'(-x) \\ \bar{c}_1'(-x) - c_3'(x)\,c_4'^{-1}(x)\,\bar{c}_2'(-x) \end{bmatrix} \times$$

$$\times \begin{bmatrix} c_1'(x) - \bar{c}_3'(-x)\,\bar{c}_4'^{-1}(-x)\,c_2'(x) \\ c_3'(x) - \bar{c}_1'(-x)\,\bar{c}_4'^{-1}(-x)\,c_2'(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{H}_4'^{-1}(-x) & 0 \\ 0 & H_4'^{-1}(x) \end{bmatrix}$$

$$\left(H_4'(x) = c_4'(x) - \bar{c}_2'(-x)\,\bar{c}_4'^{-1}(-x)\,c_2(x)\right).$$

Компоненты вектор-решения $\overset{*}{\Phi}_i(z) = [\Phi_1^i(z),\ \Phi_2^i(z)]$ краевой задачи (3.5) должны удовлетворять на контуре дополнительному условию $[\Phi_1^i(x)]^{\pm} = [\bar{\Phi}_2^i(-x)]^{\pm}$, которое, однако, не уменьшает числа решений, так как всегда найдется такое комплексное число d, что

$$\tilde{\Phi}_i(x) = [d\,\Phi_1^i(x) + \bar{d}\,\bar{\Phi}_2^i(-x),\ d\,\Phi_2^i(x) + \bar{d}\,\bar{\Phi}_1^i(-x)]$$

образуют полную систему линейно независимых решений краевой задачи, причем их компоненты автоматически удовлетворяют дополнительному условию.

В общем случае получить решение задач (3.5) и (3.7) в замкнутой форме не удается. Дальнейшее исследование характеристической системы проводится при некоторых дополнительных предположениях относительно матриц-ядер $k_j(x)$ $(j = 1, 2, 3, 4)$.

§ 4. Положим

$$k_j(x) = \begin{cases} k_j^1(x), & x > 0 \\ k_j^2(x), & x < 0 \end{cases} \qquad (j = 1, 2, 3, \ ).$$

$k_j^1(x)$ дополним нулем для отрицательной полуоси, а $k_j^2(x)$ — для положительной полуоси.

1. Пусть выполнены условия

$$k_2^1(x) \equiv k_1^2(x) \equiv k_3^2(x) \equiv k_4^1(x) = 0. \tag{4.1}$$

Обозначим

$$A^i(x) = \begin{bmatrix} \lambda_1 + K_1^i(x) & \lambda_3 + K_3^i(x) \\ \bar{\lambda}_3 + \bar{K}_3^i(-x) & \bar{\lambda}_1 + \bar{K}_1^i(-x) \end{bmatrix},$$

$$B^i(x) = \begin{bmatrix} \lambda_2 + K_2^i(x) & \lambda_4 + K_4^i(x) \\ \bar{\lambda}_4 + \bar{K}_4^i(-x) & \bar{\lambda}_2 + \bar{K}_2^i(-x) \end{bmatrix}$$

$$(i = 1, 2).$$

Система (1.2) эквивалентна краевой задаче Римана

$$A^1(x)\overset{*}{\Phi}{}^+(x) = B^2(x)\overset{*}{\Phi}{}^-(x) + \overset{*}{F}(x).$$

Матрицы $A^1(z)$ и $B^2(z)$ аналитичны в верхней и нижней полуплоскостях соответственно, причем $\det A^1(z)$ в верхней полуплоскости и $\det B^2(z)$ в нижней могут иметь конечное число нулей. С помощью конечного числа элементарных преобразований, или, что все равно, с помощью умножения слева на многочленную матрицу с постоянным определителем, приходим к задаче

$$A_1^1(x)\overset{*}{\Phi}{}^+(x) = B_1^2(x)\overset{*}{\Phi}{}^-(x) + \overset{*}{F}_1(x),$$

где матрицы $A_1^1(z)$ и $B_1^2(z)$ аналитичны и неособенны в соответствующих полуплоскостях. Решением задачи (4.3) являются векторы

$$\overset{*}{\Phi}{}^+(x) = [A_1^1(x)]^{-1}\overset{*}{F}{}_1^+(x) = [\Phi_1^+(x),\ \Phi_2^+(x)],$$

$$\overset{*}{\Phi}{}^-(x) = [B_1^2(x)]^{-1}\overset{*}{F}{}_1^-(x) = [\Phi_1^-(x),\ \Phi_2^-(x)].$$

Решение исходной системы (1.2) получаем по формуле

$$\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}[d\,\Phi_1^+(x) + \bar{d}\,\overline{\Phi}_2^+(-x) - d\,\Phi_1^-(x) - \bar{d}\,\Phi_2^-(-x)]\,e^{-itx}\,dx.$$

2. Пусть выполнены условия $k_1^2(x) \equiv k_2^2(x) \equiv k_3^2(x) \equiv k_4^2(x) \equiv 0$. Система (1.1) приводится к эквивалентной задаче Римана

$$A_1^1(x)\overset{*}{\Phi}{}^+(x) = B_1^1(x)\overset{*}{\Phi}{}^-(x) + \overset{*}{F}_2(x)$$

с матрицами $A_1^1(x)$, $B_1^1(x)$, аналитичными и неособенными в верхней полуплоскости. Поэтому

$$\overset{*}{\Phi}{}^+(x) = [A_1^1(x)]^{-1}B_1^1(x)\{[B_1^1(x)]^{-1}\overset{*}{F}_2(x)\}^+,\quad \overset{*}{\Phi}{}^-(x) = \{[B_1^1(x)]^{-1}\overset{*}{F}_2(x)\}^-.$$

3. Пусть выполнены условия

$$k_1^1(x) \equiv k_2^1(x) \equiv k_3^1(x) \equiv k_4^1(x) \equiv 0,$$

тогда

$$\overset{*}{\Phi}{}^+(x) = \{[A_1^2(x)]^{-1}\overset{*}{F}_3(x)\}^+,$$

$$\overset{*}{\Phi}{}^-(x) = [B_1^2(x)]^{-1}\{[A_1^2(x)]^{-1}\overset{*}{F}_3(x)\}^-,$$

откуда легко получить решение исходной системы (1.1). Выполнение одного из условий 1—3 приводит к разрешимости союзной характеристической системы в замкнутой форме.

4. Решение характеристической системы можно получить в замкнутой форме, если матрица коэффициентов $G(x)$ эквивалентной задачи Римана является функционально-коммутативной (ф.—к.). Выясним условия, обеспечивающие ф.—к. матрицы:

$$G(x) = \left\{\begin{bmatrix}\lambda_1 & \lambda_3\\ \bar{\lambda}_3 & \bar{\lambda}_1\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}K_1(x) & K_3(x)\\ \overline{K}_3(-x) & \overline{K}_1(-x)\end{bmatrix}\right\}^{-1}\times$$

$$\times\left\{\begin{bmatrix}\lambda_2 & \lambda_4\\ \overline{\lambda}_4 & \overline{\lambda}_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}K_2(x) & K_4(x)\\ \overline{K}_4(-x) & \overline{K}_2(-x)\end{bmatrix}\right\}=$$

$$=[\lambda_5+K_5(x)]^{-1}[\lambda_6+K_6(x)].$$

По теореме Винера ([5], § 3) найдется такая матрица $R_1(x)$, что $R_1(x)+$ $+\lambda_5^{-1}=[\lambda_5+K_5(x)]^{-1}$. Матрица $r_1(x)$ называется резольвентой ядра $k_5(x)$.

$$G(x)=R_1(x)K_6(x)+\lambda_5^{-1}K_6(x)+$$

$$+R_1(x)\lambda_6+\lambda_5^{-1}\lambda_6=G_1(x)+\lambda_5^{-1}\lambda_6.$$

$G_1(x)$ исчезает на бесконечности, поэтому из теоремы Морозова следует, что для ф. — к. матрицы $G(x)$ необходимы и достаточны ф. — к. матрицы $G_1(x)$ и перестановочность матриц $G_1(x)$ (или $G(x)$) и $\lambda_5^{-1}\lambda_6$. Мы можем сделать такое заключение.

Необходимым и достаточным условием ф.— к. матрицы $G(x)$ является ф. — к. матрицы

$$g_1(x)=r_1(x)\lambda_6+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}r_1(t)\,k_6(x-t)\,dt+\lambda_5^{-1}k_6(x)$$

и ее перестановочность с матрицей $\lambda_5^{-1}\lambda_6$ или ф. — к. матрицы

$$g_2(x)=r_2(x)\lambda_5+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}r_2(x-t)\,k_5(t)\,dt+\lambda_6^{-1}k_5(x)$$

перестановочность последней с матрицей $\lambda_6^{-1}\lambda_5$. $r_2(x)$ — резольвента ядра $k_6(x)$.

§ 5. В заключение выделим некоторые случаи, когда краевая задача (3.5) упрощается.

1°. При выполнении одного из условий

1) $\det c_1(x)\neq 0,\quad c_4(x)=c_3(x)\overline{c}_1^{-1}(-x)\overline{c}_2(-x),$

2) $\det c_3(x)\neq 0,\quad c_4(x)=c_1(x)\overline{c}_3^{-1}(-x)\overline{c}_2(-x),$

3) $\det c_1(x)\neq 0,\quad c_2(x)=c_3(x)\overline{c}_1^{-1}(-x)\overline{c}_4(-x),$

4) $\det c_3(x)\neq 0,\quad c_2(x)=c_1(x)\overline{c}_3^{-1}(-x)\overline{c}_4(-x)$

краевая задача (3.5) и ей союзная (3.7) распадаются на две задачи Римана для n пар функций каждая. Пусть, например, выполнено условие 1). Тогда

$$\Phi_1^+(x)=c_1^{-1}(x)c_2(x)\Phi_1^-(x)+$$

$$+\overline{H}_1^{-1}(-x)F(x)-\overline{H}_1^{-1}(-x)c_3(x)\overline{c}_1^{-1}(-x),\qquad(5.1)$$

$$\Phi_2^+(x)=\overline{c}_1^{-1}(-x)\overline{c}_2(-x)\Phi_2^-(x)+$$

$$+H_1^{-1}(x)\overline{F}(-x)-H_1^{-1}(x)\times\overline{c}_3(-x)c_1^{-1}(x).\qquad(5.2)$$

Краевая задача (5.1) получается из (5.2) комплексным сопряжением и заменой x на $-x$. Легко установить, что индексы $\varkappa_1$ и $\varkappa_2$ этих задач связа-

ны соотношением $\varkappa_1 = \varkappa_2 = \frac{1}{2}\varkappa$. Мы получаем по существу одну краевую задачу Римана для n пар функций вместо (3.5) и задачу Римана для n пар функций вместо (3.7).

2°. Пусть выполнены условия

$$\det c_1(x) \neq 0,\ c_4(x) - c_3(x)\overline{c_1}^{-1}(-x)\,\overline{c_2}(-x) =$$

$$= [c_2(x) - c_3(x)\overline{c_1}^{-1}(-x)\,\overline{c_4}(-x)]\,C^-(x),$$

или

$$\det c_1(x) \neq 0,\ \overline{H_2}^{-1}(-x)\,[c_2(x) - c_3(x)\overline{c_1}^{-1}(-x)\,\overline{c_4}(-x)] =$$

$$= C^+(x)\,H_1^{-1}(x)\,[c_4(x) - c_3(x)\overline{c_1}^{-1}(-x)\,\overline{c_2}(-x)],$$

где $C^+(x)$, $C^-(x)$ — произвольные матрицы порядка n, аналитические в соответствующих полуплоскостях, за исключением некоторого числа точек, где их элементы могут иметь полюсы конечного порядка. В этом случае матрица коэффициентов $G(x)$ краевой задачи (3.5) с помощью конечного числа элементарных преобразований приводится к виду

$$G(x) = G_1^+(x)\,G_2(x) \text{ или } G(x) = G_3(x)\,G_4^-(x),$$

где $G_1^+(x)$, $G_4^-(x)$ — матрицы порядка $2n$, аналитичные и неособенные в соответствующих полуплоскостях, а $G_2(x)$, $G_3(x)$ — клеточно-диагональные матрицы. Краевая задача (3.5) распадается на две задачи для n пар функций каждая, вида (5.1) и (5.2). Аналогичные условия можно сформулировать для случаев

$$\det c_2(x) \neq 0,\quad \det c_3(x) \neq 0,\quad \det c_4(x) \neq 0.$$

Литература

1. Гахов Ф. Д. Краевые задачи. Физматгиз, 1963.
2. Гахов Ф. Д. УМН, 7, в. 4 (50) 1952.
3. Титчмарш Е. Введение в теорию интегралов Фурье. М., 1948.
4. Мусхелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения. Физматгиз, 1962.
5. Крейн М. Г. УМН, **13**, в. 2 (80), 1958.
6. Черский Ю. И. Уч. зап. Казанск. ун-та, **113**, кн. 10, 1953.
7. Морозов В. В. Уч. зап. Казанск. ун-та, **112**, кн. 9, 1952.
8. Комяк И. И. Весці АН БССР, сер. фіз.-мат. навук, № 2, 1967.
9. Зарипов Р. Х. ДАН СССР, **99**, № 2, 1954.
10. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. Изд. «Наука», М., 1966.

Белорусский государственный университет им. В. И. Ленина

Поступило в редакцию 25.XII 1968

ВЕСЦІ АКАДЭМІІ НАВУК БЕЛАРУСКАЙ ССР № 4 1969
СЕРЫЯ ФІЗІКА-МАТЭМАТЫЧНЫХ НАВУК

УДК 519.95

В. А. ЕМЕЛИЧЕВ

О ЛОКАЛЬНЫХ МИНИМУМАХ В ОДНОЙ МНОГОЭКСТРЕМАЛЬНОЙ ЗАДАЧЕ. II

§ 4*). Покажем, что множество $R(A, B)$ планов, каждый из которых построен методом (φ*) невозрастающей последовательности, содержит все локальные минимумы задачи (1)—(4), т. е. $L(A, B) \subseteq R(A, B)$.

Определение 4. Нормальную тройку x^0_{ip}, x^0_{ij}, x^0_{tj} плана $X^0 \in V(A, B)$ будем называть предидеальной, если одно из крайних чисел больше другого крайнего числа и не меньше внутреннего ($x^0_{ip} > x^0_{tj}$, $x^0_{ip} \geqslant x^0_{ij}$ или $x^0_{tj} > x^0_{ip}$, $x^0_{tj} \geqslant x^0_{ij}$).

Определение 5. План $X^0 \in V(A, B)$ будем называть предидеальным, если всякая его нормальная тройка предидеальна. Множество предидеальных планов задачи (1)—(4) обозначим через $P(A, B)$.

Из лемм 7 и 8 вытекает

Теорема 4. *Всякий план, построенный методом невозрастающей последовательности, является предидеальным, т. е.* $R(A, B) \subseteq P(A, B)$.

Заметим, что, вообще говоря, не всякий предидеальный план может быть построен методом невозрастающей последовательности.

Как следствие из леммы 6 получаем

Утверждение 1. Если нормальная тройка $z_{k_1} = x^0_{ip}$, $z_{k_2} = x^0_{ij}$, $z_{k_3} = x^0_{tj}$ плана X^0, построенного методом φ*, такова, что $z_{k_1} = z_{k_2} > z_{k_3}$ (или $z_{k_1} < z_{k_2} = z_{k_3}$), то должно выполняться неравенство $k_1 < k_2 < k_3$ (или $k_3 < k_2 < k_1$), т. е. число z_{k_1} должно появиться в процедуре φ* раньше, чем числа z_{k_2} и z_{k_3}, а z_{k_2} раньше, чем z_{k_3}.

Определение 6. Нормальную тройку x^0_{ip}, x^0_{ij}, x^0_{tj} плана $X^0 \in V(A, B)$ будем называть почти идеальной, если одно из крайних чисел больше каждого из остальных чисел тройки ($x^0_{ip} > x^0_{ij}$, $x^0_{ip} > x^0_{tj}$ или $x^0_{tj} > x^0_{ij}$, $x^0_{tj} > x^0_{ip}$).

Определение 7. План $X^0 \in V(A, B)$ будем называть почти идеальным, если всякая его нормальная тройка почти идеальна. Множество почти идеальных планов задачи (1)—(4) обозначим через $J'(A, B)$.

Непосредственно из определений 2—7 следуют леммы.

Лемма 9. $J(A, B) \subseteq J'(A, B) \subseteq P(A, B)$.

Лемма 10. Если план X^0 почти идеальный и z_1—его наибольшая положительная компонента, то не существует нормальной тройки плана X^0, в которой число z_1 было бы внутренним.

Теорема 5. *Всякий почти идеальный план можно построить методом невозрастающей последовательности, т. е.* $J'(A, B) \subseteq R(A, B)$.

Доказательство. Пусть X^0 — почти идеальный план, а Z — невозрастающая последовательность его положительных компонент: $z_1 \geqslant z_2 \geqslant \ldots \geqslant z_{m+n-1}$ ($z_t = x^0_{i_t j_t}$, $t = \overline{1, m+n-1}$). Пусть компоненты $z_1, z_2, \ldots, z_{k-1}$ плана X^0 строятся методом φ*, т. е. для них справедливы равенства

$$z_t = x^0_{i_t j_t} = \min(a^{(t)}_{i_t}, b^{(t)}_{j_t}), \quad t = \overline{1, k-1}.$$

*) Продолжение. §§ 1—3 см. в [1].

При этом векторы A и B перерабатываются в векторы $A^{(k)}$ и $B^{(k)}$ по правилу (10).

Покажем, что z_k $(1 \leqslant k \leqslant m+n-1)$ также можно построить методом φ^k, т. е.

$$z_k = x^0_{i_k j_k} = \min (a^{(k)}_{i_k}, b^{(k)}_{j_k}). \tag{17}$$

Прежде всего оставшиеся положительные компоненты $z_k, z_{k+1}, \ldots, z_{m+n-1}$ плана X^0 являются положительными компонентами плана $\overline{X}^0 \in M(A^{(k)}, B^{(k)})$ (остальные компоненты плана $\overline{X}^0$ равны нулю). Очевидно, что план $\overline{X}^0$ почти идеальный. Отсюда на основании леммы 10 число $z_k = x^0_{i_k j_k}$ не может быть внутренним числом нормальной тройки плана $\overline{X}^0$, т. е. или в i_k-й строке, или в j_k-м столбце матрицы $\overline{X}^0$ нет других положительных компонент, кроме числа $x^0_{i_k j_k}$. Поэтому справедливо равенство (17). Нетрудно видеть также, что при этом векторы $A^{(k)}$ и $B^{(k)}$ преобразуются в $A^{(k+1)}$ и $B^{(k+1)}$ по правилам (10). Теорема доказана.

Из теорем 4 и 5 и леммы 9 следует

Теорема 6. $J(A, B) \subseteq J'(A, B) \subseteq R(A, B) \subseteq P(A, B) \subseteq V(A, B) \subseteq M(A, B)$.

Отсюда в силу следствия теоремы 1 вытекает

Теорема 7. *Всякий локальный минимум функции $F(X)$ при ограничениях (2)—(4) можно построить методом невозрастающей последовательности, т. е. $L(A, B) \subseteq R(A, B)$.*

Следствие. Если с помощью метода невозрастающей последовательности построить всевозможные планы, то среди них будут все локальные минимумы.

§ 5. Опишем процесс ψ построения множества $L(A, B)$ всех локальных минимумов функции $F(X)$ при условиях (2)—(4), т. е. множества $J(A, B)$ всех идеальных планов задачи (1)—(4). Этот процесс состоит из двух этапов. На первом этапе строим все планы множества $R(A, B)$, на втором из этого множества удаляем не идеальные планы.

Остановимся прежде всего на первом этапе. Как известно, в процессе построения плана X^0 с помощью метода φ^* таблица размерности $m \times n$ последовательно заполняется положительными числами $z_1 \geqslant z_2 \geqslant \ldots \geqslant z_{m+n-1}$ *). Если совершено k шагов $(1 \leqslant k \leqslant m+n-1)$ процедуры φ^*, то полученную при этом таблицу, состоящую из k положительных чисел $(z_1, z_2, \ldots, z_k)$ будем называть началом k-го порядка плана X^0 и обозначать — $X^0_{(k)}$. Очевидно, что сам план X^0 является началом $(m+n-1)$-го порядка $(X^0 = X^0_{(m+n-1)})$.

Отметим, что таблица $X^0_{(k)}$, вообще говоря, может быть началом k-го порядка и некоторых других планов, построенных методом φ^*.

Теорема 8. *Пусть $X_{(k-1)}$ — начало $(k-1)$-го порядка плана, который строится методом невозрастающей последовательности, а $z_1, z_2, \ldots, z_{k-1}$ — его положительные компоненты $(z_1 \geqslant z_2 \geqslant \ldots \geqslant z_{k-1})$.*

Тогда k-ая $(1 \leqslant k \leqslant m+n-1)$ компонента z_k должна удовлетворять условиям:

1) $z_k \leqslant \min \{\max (a^{(k)}_1, a^{(k)}_2, \ldots, a^{(k)}_m), \max (b^{(k)}_1, b^{(k)}_2, \ldots, b^{(k)}_n)\}$,

2) $z_k \in \{a^{(k)}_1, a^{(k)}_2, \ldots, a^{(k)}_m, b^{(k)}_1, b^{(k)}_2, \ldots, b^{(k)}_n\}$,

3) $z_k (m+n-k) \geqslant \sum_{i=1}^{m} a^{(k)}_i$,

4) $z_k \leqslant z_{k-1}$,

*) Некоторые клетки заполняются нулями по правилу (9′).

причем $z_0 = \infty$.

Доказательство. Первые два условия непосредственно следуют из (9).

Так как в результате работы процедуры φ^* должна появиться невозрастающая последовательность чисел $z_1, z_2, \ldots, z_{k-1}, z_k, \ldots, z_{m+n-1}$, то третье условие вытекает из неравенства

$$z_k (m + n - k) \geqslant \sum_{i=k}^{m+n-1} z_i = \sum_{i=1}^{m} a_i^{(k)}.$$

Условие $z_k \leqslant z_{k-1}$ очевидно для $k = 2, 3, \ldots, m + n - 1$. Доказательство теоремы закончено.

Введем в рассмотрение множество чисел

$$Z_k = \{z_k \mid \leqslant \min \{ \max (a_1^{(k)}, a_2^{(k)}, \ldots, a_m^{(k)}), \max (b_1^{(k)}, b_2^{(k)}, \ldots, b_n^{(k)})\} ;$$

$$z_k \in \{ a_1^{(k)}, a_2^{(k)}, \ldots, a_m^{(k)}, b_1^{(k)}, b_2^{(k)}, \ldots, b_n^{(k)}\} ; \; z_k (m + n - k) \geqslant$$

$$\geqslant \sum_{i=1}^{m} a_i^{(k)}; \; z_k \leqslant z_{k-1}\} , \qquad (18)$$

где $k = \overline{1, m + n - 1}$ ($z_0 = \infty$). При этом предполагаем, что начало $X_{(k-1)}$ существует.

Понятно, что множество Z_k может оказаться пустым. Это значит, что начало $X_{(k-1)}$ не может быть достроено методом φ^* до плана задачи (1)—(4).

Определение 8. Будем говорить, что клетка (i, j) на k-м шаге ($1 \leqslant k \leqslant m + n - 1$) алгоритма φ^* соответствует положительному числу z, если $z = \min (a_i^{(k)}, b_j^{(k)})$.

Теорема 9. *Пусть множество* Z_k ($1 \leqslant k \leqslant m + n - 1$) *непусто. Тогда любому числу этого множества на k-м шаге алгоритма* φ^* *соответствует хотя бы одна клетка, т. е. в качестве k-й компоненты можно взять любое число множества* Z_k.

Доказательство. Прежде всего заметим, что любое число множества Z_k положительно (см. условие 3).

Пусть $\max (a_1^{(k)}, a_2^{(k)}, \ldots, a_m^{(k)}) = a_\mu^{(k)} < \max (b_1^{(k)}, b_2^{(k)}, \ldots, b_n^{(k)}) = b_\nu^{(k)}$ *). Из условия 2) следует, что z_k может быть либо компонентной вектора $A^{(k)}$, либо компонентой вектора $B^{(k)}$.

Пусть $z_k = a_i^{(k)}$. Тогда $z^{(k)} \leqslant a_\mu^{(k)} \leqslant b_\nu^{(k)}$. Отсюда следует, что клетка (i, ν) на k-м шаге соответствует числу z_k, так как $z_k = a_i^{(k)} = \min (a_i^{(k)}, b_\nu^{(k)})$. Очевидно, что любая клетка (i, β), для которой $b_\beta^{(k)} \geqslant a_i^{(k)}$, соответствует числу $z_k = a_i^{(k)}$.

Пусть $z_k = b_j^{(k)}$. Тогда $z_k \leqslant a_\mu^{(k)}$. Это означает, что клетка (μ, j) соответствует числу z_k, так как $z_k = b_j^{(k)} = \min (a_\mu^{(k)}, b_j^{(k)})$. Вообще любая клетка (α, j), для которой $a_\alpha^{(k)} \geqslant b_j^{(k)}$, соответствует числу $z_k = b_j^{(k)}$. Теорема доказана.

Теперь изложим первый этап алгоритма φ. Этот этап состоит в построении множества $R(A, B)$, и его процедура непосредственно вытекает из теорем 8 и 9.

Для первого шага строим множество $Z_1 = \{z_1^1, z_1^2, \ldots, z_1^{p_1}\}$ по формуле (18), находим для каждого z_1^t, $t = \overline{1, p_1}$ все соответствующие ему клетки $(i_1^t, j_1^t), (i_2^t, j_2^t), \ldots, (i_{q_t}^t, j_{q_t}^t)$ и для каждой клетки по правилам (9) и (9′)

*) В случае $a_\mu^{(k)} > b_\nu^{(k)}$ доказательство проводится аналогично.

строим начало 1-го порядка. В результате получаем множество всех начал 1-го порядка в количестве $\sum_{t=1}^{p_1} q_t$ штук.

На втором шаге первого этапа для каждого начала 1-го порядка построение чисел z_2, нахождение для них соответствующих клеток и построение начал 2-го порядка осуществляются аналогичным образом с той лишь разницей, что векторы $A^{(1)} = A$ и $B^{(1)} = B$ заменены векторами $A^{(2)}$ и $B^{(2)}$ по правилам (10). В результате второго шага получаем множество всех начал 2-го порядка и т. д.

Если на k-м шаге ($2 \leqslant k \leqslant m + n - 1$) для некоторого начала $(k-1)$-го порядка обнаружим пустоту множества Z_k, то это начало не может быть достроено до плана задачи (1) — (4), и его следует отбросить.

После $m + n - 1$ шагов получаем множество планов $R(A, B)$. На этом заканчивается первый этап алгоритма ψ.

Утверждение 2. Множество $R(A, B)$, построенное на первом этапе алгоритма ψ, содержит по крайней мере один план.

Для доказательства этого утверждения заметим, что таким планом будет, например, план, построенный методом наибольшего элемента [2].

Второй этап алгоритма ψ состоит в удалении из $R(A, B)$ тех планов, которые не являются идеальными. Эту процедуру можно осуществить следующим образом.

Пусть $X^0 \in R(A, B)$ и $z_1, z_2, \ldots, z_{m+n-1}$ — невозрастающая последовательность Z его положительных компонент.

Возьмем k-й шаг ($1 \leqslant k \leqslant m + n - 1$) алгоритма ξ. Среди компонент $z_i \leqslant z_k$ ищем все нормальные тройки, в которых число z_k является крайним. Для каждой такой нормальной тройки z_k, z', z'' проверяем, выполняется ли неравенство $z_k \geqslant z' + z''$. Если да (т. е. для каждой выполняется), то переходим к следующему шагу. Если нет, то удаляем X^0 из $R(A, B)$.

Теорема 10. *Алгоритм ξ тогда и только тогда удаляет план X^0 из $R(A, B)$, когда этот план не идеальный.*

Доказательство. *Необходимость.* Пусть на k-м шаге работы алгоритма ξ план $X^0 \in R(A, B)$ удаляется из $R(A, B)$, т. е. нашлась нормальная тройка z_k, z', z'' (z' — внутреннее число), для которой справедливо неравенство $z_k < z' + z''$. По условию $z_k \geqslant z'$, $z_k \geqslant z''$, отсюда $z'' < z_k + z'$. Итак, каждое крайнее число меньше суммы остальных чисел нашей тройки. Следовательно, план X^0 не идеальный.

Достаточность. Пусть план $X^0 \in R(A, B)$ не идеальный, т. е. существует не идеальная нормальная тройка z', z'', z'''. В силу теоремы 4 $z' \geqslant z''$, $z' \geqslant z'''$ (z'' — внутреннее число). Пусть z' является k-м членом невозрастающей последовательности Z положительных компонент плана X^0. Следовательно, на k-м шаге алгоритма ξ будет обнаружена неидеальность нормальной тройки z', z'', z''', и план X^0 будет удален из $R(A, B)$. Теорема доказана.

В результате испытания каждого плана $X^0 \in R(A, B)$ с помощью алгоритма ξ получаем подмножество $R'(A, B)$ множества $R(A, B)$, состоящее в силу теорем 1, 7 и 10 из всех локальных минимумов функции $F(X)$, т. е. $R'(A, B) = J(A, B) = L(A, B)$.

Пример 1. $A = (40, 31, 30)$, $B = (51, 49, 1)$. С помощью алгоритма ψ строим множество всех локальных минимумов этой задачи. Оказывается, что множество $R(A, B)$, которое строится на первом этапе алгоритма ψ, состоит из шести планов. Из них четыре плана являются идеальными, т. е. локальными минимумами:

$$X_1 = \{x_{11} = 40,\ x_{22} = 31,\ x_{32} = 18,\ x_{31} = 11,\ x_{33} = 1\}^*),$$

*) Остальные компоненты плана равны нулю.

$$X_2 = \{x_{12} = 40,\ x_{21} = 31,\ x_{31} = 20,\ x_{32} = 9,\ x_{33} = 1\},$$

$$X_3 = \{x_{11} = 40,\ x_{32} = 30,\ x_{22} = 19,\ x_{21} = 11,\ x_{23} = 1\},$$

$$X_4 = \{x_{12} = 40,\ x_{31} = 30,\ x_{21} = 21,\ x_{22} = 9,\ x_{23} = 1\}.$$

§ 6. Вопрос о том, какой из идеальных планов задачи (1) — (4) является глобальным минимумом, зависит, конечно, от характера изменения строго вогнутой функции $f(x)$. Однако в некоторых случаях глобальный минимум не зависит от функции $f(x)$.

Далее удобно воспользоваться следующим обозначением. Если планы X', $X'' \in V(A, B)$ и $Z' = \{z_1', z_2', \ldots, z_{m+n-1}'\}$, $Z'' = \{z_1'', z_2'', \ldots z_{m+n-1}''\}$ — невозрастающие последовательности положительных компонент этих планов*), то будем писать

$$X' \prec\!\!\succ X'',$$

если

$$\sum_{\gamma=1}^{i} z_\gamma' \geqslant \sum_{\gamma=1}^{i} z_\gamma'',\ i = \overline{1, m+n-2}.$$

Планы X', $X'' \in V(A, B)$ будем называть сравнимыми, если $X' \prec\!\!\succ X''$ или $X'' \prec\!\!\succ X'$. В противном случае будем говорить, что они не сравнимы.

Теорема 11 (Карамата; см. [3], стр. 48**). *Пусть* $X' = \{x_{ij}'\} \in V(A, B)$, $X'' = \{x_{ij}''\} \in V(A, B)$. *Если* $X' \prec\!\!\succ X''$, *то для любой вогнутой функции* $f(x)$ *имеем неравенство*

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f(x_{ij}') \leqslant \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f(x_{ij}'').$$

Отсюда следует

Теорема 12. *Пусть среди идеальных планов задачи* (1) — (4) *существует такой план* X^*, *что* $X^* \prec\!\!\succ X$ *для всех* $X \in J(A, B)$. *Тогда для любой строго вогнутой функции* $f(x)$ *план* X^* *является глобальным минимумом функции* $F(X) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f(x_{ij})$ *при условиях* (2)—(4), *т. е.* $F(X^*) \leqslant F(X)$ *для всех* $X \in M(A, B)$.

Пример 1'. $A = (40, 31, 30)$, $B = (51, 49, 1)$. Как уже отмечалось (см. пример 1), множество $L(A, B)$ состоит из четырех планов, среди которых есть $X_2 \prec\!\!\succ X$ для всех $X \in L(A, B) = J(A, B)$. Следовательно, для любой строго вогнутой функции $f(x)$ план $X_2 = \{x_{12} = 40,\ x_{21} = 31,\ x_{31} = 20,\ x_{32} = 9,\ x_{33} = 1\}$ является глобальным минимумом функции $F(X)$. Отметим, что этот план не совпадает с локальным минимумом (X_1), построенным методом наибольшего элемента [2].

Бинарное отношение $\prec\!\!\succ$ есть отношение частичной упорядоченности. Следовательно, множество планов $J(A, B) \subseteq V(A, B)$ относительно знака $\prec\!\!\succ$ является частично упорядоченным. Придерживаясь обычной терминологии (см. [4]), план $X^0 \in J(A, B)$ будем называть минимальным планом множества $J(A, B)$, если в этом множестве нет ни одного плана $X \neq X^0$, удовлетво-

*) Это значит, что

1) $z_1' \geqslant z_2' \geqslant \ldots \geqslant z_{m+n-1}'$, $z_1'' \geqslant z_2'' \geqslant \ldots \geqslant z_{m+n-1}''$;

2) $\sum_{\gamma=1}^{m+n-1} z_\gamma' = \sum_{\gamma=1}^{m+n-1} z_\gamma''$.

**) Здесь теорема Карамата формулируется в удобном нам виде.

ряющего условию $X \prec X^0$. Ясно, что множество $J(A, B)$ может содержать много различных минимальных планов и эти планы не сравнимы между собой. Заметим, что если оно содержит один такой план, то по теореме 12 этот план будет глобальным минимумом.

Так как множество $J(A, B)$ — конечное, то справедлива следующая

Лемма 11. *Если план $X \in J(A, B)$, то либо X — минимальный план множества $J(A, B)$, либо в $J(A, B)$ существует хотя бы один минимальный план, сравнимый с X.*

Теорема 13. *Один из глобальных минимумов функции $F(X) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} f(x_{ij})$ при условиях (2)—(4) находится среди минимальных планов множества $J(A, B)$.*

Доказательство. Пусть X^* — лучший план среди минимальных планов множества $J(A, B)$, т. е. X^* удовлетворяет условию

$$F(X^*) = \min_{X \in J^*(A, B)} F(X), \tag{19}$$

где $J^*(A, B)$ — совокупность минимальных планов множества $J(A, B)$. Покажем, что X^* — глобальный минимум задачи (1) — (4). Для этого достаточно показать, что $F(X^*) \leqslant F(X)$ для любого плана $X \in J(A, B)$.

Пусть $X \in J(A, B)$. Тогда в силу леммы 11 возможны два случая.

Случай 1. X — минимальный план множества $J(A, B)$. Ввиду (19) имеем $F(X^*) \leqslant F(X)$.

Случай 2. Существует в $J(A, B)$ минимальный план X^0, такой, что $X^0 \prec X$. Отсюда, согласно теоремы 11, $F(X^0) \leqslant F(X)$. Но в силу (19) $F(X^*) \leqslant F(X^0)$. Поэтому, окончательно, $F(X^*) \leqslant F(X)$. Теорема доказана.

Так как введенное нами отношение порядка $\prec$ не зависит от функции $f(x)$, то справедливо следующее очевидное

Утверждение 3. Количество минимальных планов частично упорядоченного множества $J(A, B)$ и сами эти планы не зависят от характера изменения строго вогнутой функции $f(x)$.

Пример 2. $A = (13, 9, 2)$, $B = (10, 8, 6)$. Локальными минимумами являются следующие три плана:

$$X_1 = \{x_{11} = 10,\ x_{22} = 8,\ x_{13} = 3,\ x_{33} = 2,\ x_{23} = 1\},$$

$$X_2 = \{x_{21} = 9,\ x_{12} = 8,\ x_{13} = 5,\ x_{31} = 1,\ x_{33} = 1\},$$

$$X_3 = \{x_{11} = 10,\ x_{23} = 6,\ x_{12} = 3,\ x_{22} = 3,\ x_{32} = 2\}.$$

Здесь $X_1 \prec X_3$, а планы X_1 и X_2 не сравнимы. Следовательно, $\{X_1, X_2\}$ — совокупность минимальных планов множества $J(A, B)$, т. е. для любой вогнутой функции $f(x)$ глобальным минимумом функции $F(X)$ будет один из планов X_1 или X_2. Например, для функции $f_1(x) = +\sqrt{x}$ глобальным минимумом будет план X_2, а для функции $f_2(x) = -x^2$ — план X_1.

Литература

1. Емеличев В. А. Весці АН БССР, сер. фіз.-мат. навук, № 1, 1969.
2. Емеличев В. А. Весці АН БССР, сер. фіз.-мат. навук, № 3, 1965.
3. Беккенбах Э., Беллман Р. Неравенства. Изд. «Мир», М., 1965.
4. Курош А. Г. Лекции по общей алгебре. Физматгиз, М., 1962.

Белорусский государственный университет им. В. И. Ленина

Поступило в редакцию 26.VI 1968

ВЕСЦІ АКАДЭМІІ НАВУК БЕЛАРУСКАЙ ССР № 4 1969
СЕРЫЯ ФІЗІКА-МАТЭМАТЫЧНЫХ НАВУК

УДК 519.48

А. Е. ЗАЛЕССКИЙ

О СОПРЯЖЕННОСТИ В КЛАССИЧЕСКИХ ГРУППАХ

Статья содержит доказательства результатов, анонсированных в [1]. Пусть $f(x, y)$ — невырожденная полуторалинейная, ε-эрмитова форма ($\varepsilon = \mp 1$) на пространстве E над телом D с инволютивным антиавтоморфизмом j; размерность $E:D = n < \infty$. Если P — линейное преобразование E, то через ${}^{\sigma}P$ обозначим линейное преобразование, задаваемое формулой

$$f(Px, y) = f(x, {}^{\sigma}Py),$$

где σ — антиавтоморфизм алгебры $L(E)$ всех линейных преобразований пространства E. Обозначим через s автоморфизм группы $GL(E)$ всех обратимых линейных преобразований пространства E, вычисляемый по формуле

$$ {}^{s}P = {}^{\sigma}P^{-1}, \quad P \in GL(E). \tag{1}$$

Как обычно [2], через $Z^1(S, GL(E))$ обозначается множество коциклов и через $H^1(S, GL(E))$ — множество когомологий со значениями в $GL(E)$ для группы S порядка 2, порожденной автоморфизмом s.

Примечание. Иногда удобно рассматривать $Z^1(S, G)$ и $H^1(S, G)$ и в том случае, когда S — группа автоморфизмов и антиавтоморфизмов группы G. Дадим соответствующее определение. Коцикл со значениями в G есть отображение группы S в G, удовлетворяющее условиям:

$$g_{st} = g_s {}^{s}g_t, \text{ если } s, t \text{ — автоморфизмы группы } G,$$

$$g_{st} = {}^{s}g_t g_s, \text{ если } s \text{ — антиавтоморфизм, } t \text{ — автоморфизм,}$$

$$g_{st} = {}^{s}g_t g_s^{-1}, \text{ если } s \text{ — автоморфизм, } t \text{ — антиавтоморфизм,}$$

$$g_{st} = g_s^{-1} {}^{s}g_t, \text{ если } s, t \text{ — антиавтоморфизмы } G.$$

Здесь ${}^{s}g$ — результат действия автоморфизма или антиавтоморфизма s на элемент $g \in G$.

Множество всех коциклов обозначим через $Z^1(S, G)$. Два коцикла $s \to g_s$, $s \to g_s'$ называются когомологичными, если существует $h \in G$, такое, что

$$g_s' = \begin{cases} h^{-1} {}^{s}g_s {}^{s}h, & \text{если } s \text{ — автоморфизм,} \\ {}^{s}h g_s h, & \text{если } s \text{ — антиавтоморфизм.} \end{cases}$$

Отношение «быть когомологичными» есть отношение эквивалентности на $Z_1(S, G)$, и множество классов эквивалентных коциклов обозначаются через $H^1(S, G)$, а сами классы называются элементами $H^1(S, G)$. Если S состоит только из автоморфизма, то это определение совпадает с общепринятым. При подходящих определениях, обобщающих соответствующие определения для случая, когда S — группа автоморфизмов, можно получить все основные свойства $H^1(S, G)$, хорошо известные, когда S—

группа автоморфизмов. Например, определив «согласованность» действий группы S и G на правом главном однородном пространстве X относительно G формулой

$$^s(xg) = \begin{cases} {}^sx{}^sg, & \text{если } s \text{ — автоморфизм,} \\ {}^sx{}^sg^{-1}, & \text{если } s \text{ — антиавтоморфизм,} \end{cases}$$

можно указать взаимно однозначное соответствие между $H^1(S, G)$ и множеством классов главных однородных пространств на G [2, 1-58]. Однако мы не будем на этом останавливаться. $H^0(S, G)$ определим как множество элементов $g \in G$, таких, что ${}^sg = g$, если s — автоморфизм, и ${}^sg = g^{-1}$, если g — антиавтоморфизм. Отметим, что если S — группа, порожденная антиавтоморфизмом $g \to g^{-1}$, то $H^1(S, G)$ взаимно однозначно соответствует множеству попарно несопряженных инволюций G.

В дальнейшем S — группа, порожденная автоморфизмом s вида (1), Σ — группа, порожденная антиавтоморфизмом σ.

Заметим, что если S — группа автоморфизмов второго порядка, то $Z^1(S, G)$ и $Z^1(\Sigma, G)$, $H^1(S, G)$ и $H^1(\Sigma, G)$, $H^0(S, G)$ и $H^0(\Sigma, G)$ соответствуют друг другу взаимно однозначно.

В дальнейшем в ряде случаев нам удобнее будет иметь дело с группой $H^1(\Sigma, GL(E))$, однако мы без оговорок будем считать, что утверждения для $H^1(\Sigma, GL(E))$ эквивалентны соответствующим утверждениям для $H^1(S, GL(E))$.

Теорема 1. *Формула*

$$f_P(x, y) = f(Px, y), \tag{2}$$

*где f — ε-эрмитова полуторалинейная невырожденная форма на E, задает взаимно однозначное соответствие между $Z^1(S, GL(E))$ и множеством всех невырожденных ε-эрмитовых полуторалинейных форм на E, причем когомологичным коциклам соответствуют эквивалентные формы и обратно, т. е. $H^1(S, GL(E))$ взаимно однозначно соответствует множеству классов эквивалентных форм.**)

Доказательство. 1) Пусть P — коцикл, f_P задана формулой (2). Тогда

$$f_P(y, x) = f(Py, x) = \varepsilon f(x, Py)^i =$$

$$= \varepsilon f({}^sP^{-1}x, y) \overset{(*)}{=} \varepsilon f(Px, y)^i = \varepsilon f_P(x, y)^i. \tag{3}$$

Здесь в пункте, отмеченном (*), использовано определение коцикла. Обратно, если f_P — невырожденная полуторалинейная форма, то формула (2) однозначно определяет $P \in GL(E)$. Если f_P — ε-эрмитова, то равенство (3) в пункте (*) дает ${}^sP = P^{-1}$.

2) Пусть $Q = g^{-1}P{}^sg$. Тогда

$$f_Q(x, y) = f(Qx, y) = f(g^{-1}P{}^sgx, y) = f(P{}^sgx, {}^sgy) = f_P({}^sgx, {}^sgy),$$

т. е. f_Q и f_P эквивалентны. Обратное получим, прочитав эти равенства в обратном порядке.

Отметим, что группа U_{f_P} метрических автоморфизмов пространства E относительно формы f_P есть подгруппа $GL(E)$ фиксированных точек относительно автоморфизма $S_P : S_P g = P{}^sgP^{-1}$. В частности, $U_f = H^0(S, GL(E))$.

Предложение 1. Пусть S — группа автоморфизмов группы G, U —

---

*) В [1] это утверждение сформулировано в несколько более общей форме (теорема 4); Доказательство этого общего случая ничем не отличается от приводимого здесь.

подгруппа тех $g \in G$, для которых ${}^s g = g$, $s \in G$. Пусть M — множество представлений группы X в U, эквивалентных в G, N — множество классов представлений из M, эквивалентных в U. Тогда N взаимно однозначно соответствует ядру отображения

$$H^1(S, C(X)) \to H^1(S, G),$$

где $C(X)$ — централизатор в G образа группы X в каком-либо представлении из M.

Доказательство. Множество N взаимно однозначно соответствует множеству таких двойных классов UgC группы G по подгруппам U, $C = C(X)$, что $g^{-1}\,{}^s g \in C$, а именно, каждому двойному классу UgC сопоставляется класс представлений $X \to (ugc)\,X\,(ugc)^{-1}$ *). Этот класс принадлежит N, ибо при $x \in X$ $[(ugc)\,x\,(ugc)^{-1}] \in U$ ввиду условия ${}^s g \in gC$. Обратно, каждому элементу множества N сопоставляем естественным образом класс UgC; для любого представителя g этого класса $g^{-1}\,{}^s g \in C$. Теперь предложение есть частный случай ([2], prop. 36, 1-64). Мы приведем непосредственное доказательство.

Пусть $g \in UgC$, $g^{-1}\,{}^s g = c_s \in C$.

Тогда отображение $s \to c_s$ есть коцикл со значениями в C, эквивалентный единичному в $Z^1(S, G)$. Разным представителям класса UgC соответствуют коциклы, эквивалентные в C. Тем самым указано отображение множества N в ядро отображения $H^1(S, C) \to H^1(S, G)$. Обратно, если $s \to c_s$ — коцикл, содержащийся в $Z^1(S, C)$ и такой, что $g^{-1} c_s\,{}^s g = 1$, $g \in G$ (1 — единица группы C), то сопоставим ему класс $Ug^{-1}C$. Элемент g^{-1} определен с точностью до умножения слева на $u \in U$ (если $g_1^{-1} c_s\,{}^s g_1 = 1$, то $c_s = g_1\,{}^s g_1^{-1} = g\,{}^s g^{-1}$, откуда $g^{-1} g_1 = {}^s g^{-1}\,{}^s g_1 = {}^s(g^{-1} g_1)$, т. е. $g^{-1} g_1 \in U$, $g_1 \in gU$, $g_1^{-1} \in Ug^{-1}$); выбор другого коцикла $s \to \bar{c}_s$, эквивалентного в $Z^1(S, C)$ коциклу $s \to c_s$, приводит к умножению g^{-1} справа на элемент $c \in C$. Мы получили отображение, обратное к построенному выше.

Теорема 2. *Пусть M — конечномерная алгебра над совершенным полем характеристики $\neq 2$, σ — инволютивный антиавтоморфизм алгебры M, $\Sigma = \{\sigma\}$ — группа порядка 2. Тогда существует разложение M в сумму радикала R и полупростой алгебры A, такое что*

1) ${}^\sigma R = R$, ${}^\sigma A = A$, *A инволютивно изоморфна M/R;*

2) *Если $M = A_1 + R = A_2 + R$, A_1, A_2 — полупростые подалгебры алгебры M, то A_1 и A_2 сопряжены с помощью элемента вида $1 + r$, $r \in R$, $1 + r \in H^0(\Sigma, M)$;*

3) *Отображение $H^1(\Sigma, A) \to H^1(\Sigma, M)$ взаимно однозначно.*

Доказательство. Первое и второе утверждения в более общем виде доказал Е. Тафт [3]. Покажем теперь, что отображение в п. 3) теоремы сюръективно, другими словами, что каждый коцикл из $Z^1(\Sigma, M)$ когомологичен некоторому коциклу из $Z^1(\Sigma, A)$. Предположим сначала, что $R^2 = 0$. Для $x \in R$ положим $Q(x) = {}^\sigma(1 + x)\,P\,(1 + x)$, где $P \in Z^1(\Sigma, M)$, $P = a + r$, $a \in A$, $r \in R$. Тогда ${}^\sigma P = {}^\sigma a + {}^\sigma r = P = a + r$, откуда ${}^\sigma a - a = r - {}^\sigma r$, и так как $R \cap A = 0$, то ${}^\sigma a = a$, ${}^\sigma r = r$. Поэтому $Q(x) = a + {}^\sigma x a + a x + r$. Значение $x = -a^{-1} r/2$ является решением уравнения $Q(x) = a$, т. е. $Q(-a^{-1} r/2) \in Z^1(\Sigma, A)$. Если $R^2 \neq 0$, то при инволютивном гомоморфизме $M \to M/R^2$ (инволюция на M/R^2 естественно индуцируется инволюцией σ) коцикл перейдет в коцикл, и следовательно, можно подобрать $x \in R$ так, что ${}^\sigma(1 + x)\,P\,(1 + x) \in A + R^2 = M_1$. Мы получаем возможность повторить предыдущее рассуждение для алгебры с инволюцией M_1 и т. д., что приведет

*) Для упрощения мы отождествляем X с подгруппой группы U; общность при этом сохраняется.

в конце концов к желаемому результату. Инъективность отображения в п. 3) следует из изоморфизма $A \cong M/R$.

Теорема 3. *Пусть f — ε-эрмитова полуторалинейная форма, $D : Z < \infty$, Z — центр тела D, причем Z — совершенное поле характеристики $\neq 2$, C — централизатор группы $X \subset U_f$ в $L(E)$, W — полупростая Σ-инвариантная подалгебра алгебры C максимальной размерности, W_m — группа обратимых элементов алгебры W. Тогда множество N (см. предложение 1) взаимно однозначно соответствует ядру отображения: $H^1(S, W_m) \to \to H^1(S, GL(E))$.*

Доказательство вытекает из сопоставления предложения 1 и теоремы 2. При этом надо учитывать, что централизатор X в $GL(E)$ совпадает с группой C_m обратимых элементов алгебры C, а также определение групп C и Σ.

Таким образом, конечность $H^1(S, W_m)$ влечет конечность множества N. Ниже приводятся условия, при выполнении которых $H^1(S, W_m)$ конечно. Однако условия, обеспечивающие конечность ядра отображения $H^1(S, W_m) \to \to H^1(S, GL(E))$ в том случае, когда $H^1(S, W_m)$ бесконечно, не найдены.

Теорема 4. *Пусть выполняются условия теоремы 3 и W — прямая сумма полных матричных колец над телом D. Предположим, что множество неэквивалентных эрмитовых (симметрических) форм на одномерном пространстве над телом D конечно. Тогда множество N конечно.*

Доказательство. Пусть W — прямая сумма простых колец W_i, $i = 1, \ldots, n$. Очевидно, что либо ${}^\sigma W_i = W_i$, либо ${}^\sigma W_i = W_j$, $i \neq j$. Тогда индексы i можно перенумеровать таким образом, что ${}^\sigma W_i = W_i$, $i = 1, \ldots, s$, ${}^\sigma W_i = W_{i+1}$, $i = s+1$, $s+3$, $\ldots$, $n-1$. Тогда $H^1(\Sigma, W_m)$ есть объединение множеств $H^1(\Sigma, (W_i)_m)$, $i = 1, \ldots, s$ и $H^1(\Sigma, (W_i + W_{i+1})_m)$, $i = s+1, \ldots, n-1$. Конечность множества $H^1(\Sigma, (W_i)_m)$, $i = 1, \ldots, s$ следует из результатов А. Вагнера ([4] th. 1, 2). Покажем, что $H^1(\Sigma, (W_i + W_{i+1})_m)$ состоит из одного элемента. Пусть $P \in H^1(\Sigma, (W_i + W_{i+1})_m)$, $P = (P_1, P_2)$, $P_1 \in (W_i)_m$, $P_2 \in (W_{i+1})_m$; ${}^\sigma P = P$ влечет ${}^\sigma P_1 = P_2$, ${}^\sigma P_2 = P_1$. Положим $Q = (P_1^{-1}, 1)$; тогда ${}^\sigma QPQ = 1$, что и требовалось.

Теорема 5. *Пусть $G \subset U_f$, D конечномерно над Z, Z — совершенное поле характеристики $\neq 2$. Если число одномерных неэквивалентных эрмитовых форм конечно, то число классов сопряженных унипотентных элементов в U_f конечно.*

Доказательство. Пусть α — унипотентный элемент из U. Покажем, что $C(\alpha) = W + R$, R — нильпотентный радикал $C(\alpha)$, W — прямая сумма полных матричных колец в точности над телом D. Тогда результат будет следовать из теоремы 4. Пусть $\beta = 1 - \alpha$, β — нильпотентный элемент и $C(\beta) = C(\alpha)$. Очевидно, достаточно показать, что в некотором базисе пространства E β есть сумма жордановых клеток вида

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & \cdot & \cdot & \\ & & & \cdot & \cdot \\ & & & & 1 \\ & & & & 0 \end{pmatrix}. \tag{4}$$

Согласно [5] (гл. 3, теор. 19), достаточно доказать это для циклического подмодуля $E_0 \subset E$. Пусть x — образующая E_0. Тогда $\beta^i x$ линейно независимы и составляют базис E_0. В базисе $x, \beta x, \ldots, \beta^n x$ ($\beta^{n+1} x = 0$, $\beta^n x \neq 0$) β имеет вид (4).

Примечание 1. Теорема 5 есть первая часть теоремы 2 статьи [1]. Доказательство второго утверждения этой теоремы, которое имел в виду автор, содержало ошибку.

Примечание 2. Теорема 5 справедлива для любых, а не только унипотентных элементов, если верно следующее предположение. Пусть D конечномерно над своим центром Z, Z — совершенное поле характеристики $\neq 2$, σ — антиавтоморфизм тела D, $\sigma^2 = 1$, D_1 — подтело тела D, ${}^{\sigma}D_1 = D_1$ и $D : D_1 < \infty$. Тогда конечность множества $H^1(\Sigma, D_1)$ влечет конечность $H^1(\Sigma, D)$.

З. И. Боревич сообщил автору, что оно верно, если D коммутативно, $\sigma = 1$, $D : D_1 = 2^{\alpha}$.

Теорема 6. *Пусть индекс эрмитовой (или симметрической) формы f над телом D характеристики $\neq 2$ больше или равен 2. Если множество эрмитовых (симметрических) форм на одномерном пространстве бесконечно, то унипотентные элементы в U_f разбиваются в бесконечное число классов сопряженных.*

Доказательство. Пусть f — эрмитова (в частности, симметрическая) форма на E, $f(x, y) = \overline{f(y, x)}$. Из условия теоремы следует, что в некотором базисе $V + \{e_1\} + \{e_2\} = E$ $f = f_0 + x_1\bar{t}_2 + t_1\bar{x}_2$, $f(e_1, V) = f(e_2, V) = 0$, $f(e_1, e_1) = f(e_2, e_2) = 0$, $f(e_1, e_2) = \overline{f(e_2, e_1)} = 1$, f_0 — ограничение f на V.

Пусть $\lambda \in V$. Рассмотрим линейное преобразование $T_\lambda \in GL(E)$, заданное соотношениями

$$T_\lambda(e_1) = e_1,\ T_\lambda(x) = f_0(x, \lambda)e_1 + x,\ x \in V,$$

$$T_\lambda(e_2) = e_2 + \tau_\lambda e_1 - \lambda,$$

где

$$\tau_\lambda \in D,\ \tau_\lambda + \bar{\tau}_\lambda = -f_0(\lambda, \lambda).$$

Тогда, как легко проверить, $T_\lambda \in U_f$.

Предположим теперь, что λ — неизотропный вектор (его существование гарантируется тем, что λ не кососимметрична). Предположим, что $UT_\lambda = T_\mu U$, $\mu \in V$, $U \in U_f$, $\mu \neq 0$. Пусть $Ue_1 = \alpha e_1 + s + \beta e_2$, $s \in V$. Вычислим

$$T_\mu Ue_1 = T_\mu(\alpha e_1 + s + \beta e_2) = \alpha T_\mu e_1 + T_\mu s + \beta(e_2 + \tau_\mu e_1 - \mu) =$$
$$= s + f_0(\mu, s)e_1 + \beta(e_2 + \tau_\mu e_1 - \mu) + \alpha e_1,$$

$$UT_\lambda e_1 = Ue_1 = \alpha e_1 + s + \beta e_2.$$

Сравнивая проекции векторов $T_\mu Ue_1$, $UT_\lambda e_1$ на пространство V, получаем $s - \beta\mu = s$, т. е. $\beta = 0$. Итак, $Ue_1 = \alpha e_1 + s$.

Пусть $Ue_2 = \gamma e_2 + y + \delta e_1$, $y \in V$. Вычислим

$$UT_\lambda e_2 = U(e_2 + \tau_\lambda e_1 - \lambda) = \gamma e_2 - U\lambda + t,\ t \in \{V, e_1\},$$

$T_\mu Ue_2 = T_\mu(\gamma e_2 + y + \delta e_1) = \gamma T_\mu e_2 + T_\mu(y + \delta e_1) = \gamma(e_2 + \tau_\mu e_1 - \mu) + T_\mu \times$
$\times(y + \delta e_1) = \gamma e_2 + t_1,\ t_1 \in \{V, e_1\}$.

Сравнивая здесь коэффициенты при e_2, получим $U\lambda \in \{V, e_1\}$.

Сравним теперь

$$UT_\lambda\lambda = U(f_0(\lambda, \lambda)e_1 + \lambda) = f_0(\lambda, \lambda)(\alpha e_1 + s) + U\lambda,$$

и

$$T_\mu U\lambda = U\lambda + (T_\mu - 1)U\lambda.$$

Получим

$$f_0(\lambda, \lambda)(\alpha e_1 + s) = (T_\mu - 1)U\lambda \in \{e_1\}.$$

Следовательно, так как $f_0(\lambda, \lambda) = f(\lambda, \lambda) \neq 0$, то $s = 0$. Тем самым доказано, что $Ue_1 = \alpha e_1$. Так как $\{V, e_1\} = \{e_1\}^{\perp}$, то $U(\{e_1, V\}) \subset \{e_1, V\}$.

Отметим, что $U|_V \subset U_{f_0}$.

Сравним еще раз UT_λ и $T_\mu U$ на V:

$$UT_\lambda x = U(f_0(x, \lambda)e_1 + x) = f_0(x, \lambda)\alpha e_1 + Ux, \quad x \in V,$$

$$T_\mu Ux = Ux + f(Ux, \mu)e_1,$$

ибо

$$Ue_1 = \alpha e_1.$$

Получаем

$$f(Ux, \mu) = f_0(x, \lambda)\alpha, \quad f(x, U^{-1}\mu) = f(x, \alpha^i\lambda),$$

откуда на V имеем

$$U^{-1}\mu|_V = \alpha^i\lambda.$$

Но, по теореме Витта, два вектора переводятся друг в друга унитарным преобразованием тогда и только тогда, когда

$$f(\mu, \mu) = f(\alpha^i\lambda, \alpha^i\lambda) = \alpha^i f(\lambda, \lambda)\alpha.$$

Таким образом, множество несопряженных в U_f элементов вида T_λ, λ — неизотропный вектор, взаимно однозначно соответствует множеству N классов конгруэнтности элементов вида $f(\lambda, \lambda) \in D$, $\lambda \in V$.

Так как индекс формы $f \geqslant 2$, то индекс формы $f_0 \geqslant 1$, так что аналогично предыдущему в некотором базисе f_0 примет вид

$$f_0 = x_1 t_2^j + t_1 x_2^j + f_1,$$

$$f_0(\lambda, \lambda) = \lambda\delta^j + \delta\gamma^j + f_1(\lambda, \lambda),$$

где f_1 — ограничение f_0 на подпространстве размерности $\dim V - 2$. Очевидно, что $\gamma\delta^j + \delta\gamma^j$ пробегает множество Θ всех j-симметричных элементов тела D, и следовательно, $f_0(\lambda, \lambda)$ пробегает Θ. Так как $\alpha^i\Theta\alpha \in \Theta$, то ясно, что Θ взаимно однозначно соответствует $Z^1(j, D_m)$, а N взаимно однозначно соответствует $H^1(j, D_m)$.

Литература

1. Залесский А. Е. ДАН БССР, **12**, № 2, 1968.
2. Serre J.-P. Cohomologie Gaboisienne. Springer, Berlin, 1964.
3. Taft E. Math. Ann. **149**, № 4, 271, 1963.
4. Wagner A. Math. Z. **97**, № 1, 66, 1967.
5. Джекобсон Н. Теория колец. М., 1947.

Институт математики АН БССР

Поступило в редакцию 18.XI 1968

ВЕСЦІ АКАДЭМІІ НАВУК БЕЛАРУСКАЙ ССР № 4 1969
СЕРЫЯ ФІЗІКА-МАТЭМАТЫЧНЫХ НАВУК

УДК 519.4

В. М. ШИРЯЕВ

О ПОЛУГРУППЕ ПАР ВНУТРЕННИХ СДВИГОВ ПОЛУГРУППЫ

Настоящая статья посвящена выяснению связи между полугруппой и полугруппой пар ее внутренних сдвигов.

В § 1 решается вопрос, какие условия необходимы и достаточны для того, чтобы данная полугруппа была изоморфна полугруппе пар внутренних сдвигов некоторой полугруппы.

В § 2 выясняется способ построения произвольной полугруппы, полугруппа пар внутренних сдвигов которой изоморфна данной полугруппе.

Обозначения и определения взяты из работ [1—6]. Ниже приведены основные обозначения, употребляющиеся в данной работе.

Пусть A — некоторое множество, H — его подмножество, φ — отображение, определенное на A, γ—бинарное отношение, такое, что

$$pr_1 \gamma \subset A.$$

Тогда

A) $\varepsilon_\varphi = \varphi^{-1} \circ \varphi$ — ядро отображения φ (см. [2]);

B) распространение отображения φ на $A \times A$ обозначается φ, т. е. если $(a, b) \in A \times A$, то $\varphi(a, b) = (\varphi(a), \varphi(b))$ (см. [6]);

C) $\widetilde{\gamma}(H) = \bigcup\limits_{x \in H} \gamma \langle x \rangle$ (см. [2]);

D) $\Delta_A = \{(a, b) \mid a, b \in A \ a = b\}$.

Пусть теперь A наделено структурой полугруппы, тогда

E) F_A — полугруппа пар внутренних сдвигов полугруппы A, т. е. множество пар (φ_a, ψ_a), где $\varphi_a(\psi_a)$ — левый (соответственно правый) сдвиг, производимый элементом $a \in A$, с умножением $(\forall a, b \in A)\ ((\varphi_a, \psi_a)(\varphi_b, \psi_b) = (\varphi_a \circ \varphi_b, \psi_b \circ \psi_a)$ (см. [4]).

Далее $\zeta_A : A \to F_A$ — естественный гомоморфизм A на F_A, где $\zeta_A(a) = (\varphi_a, \psi_a)$, если $a \in A$;

F) $\rho_H = \{(a, b) \mid a, b \in A \ ab \in H\}$ (см [5]);

G) $\rho^A = \{((a, b), (c, d)) \mid a, b, c, d \in A \ ab = cd\}$.

H) Отношение $\pi_A \subset (A \times A) \times (A \times A)$ есть эквивалентное замыкание следующего отношения π'_A:

$$\pi'_A = \{((a, b), (c, d)) \mid a, b, c, d \in A \ (\exists g \in A)\ (c = ag)\ (b = gd)\}.$$

§ 1.

Определение 1. Полугруппа N принадлежит классу $\mathfrak{F}$ тогда и только тогда, когда для нее найдется такая полугруппа A, что N изоморфна F_A.

1.1. Пусть $f : F_A \to N$ — изоморфизм F_A на N.

Введем следующее обозначение: если $a \in A$, то $\bar{a} = f \circ \zeta_A(a)$.

Тогда верны следующие две леммы.

Лемма 1.

$$(\forall\, a,\ b,\ c,\ d \in A)\,\big((\overline{a},\ \overline{b}) \in \varepsilon_{\zeta_N} \Rightarrow acd = bcd,\ cda = cdb\big). \tag{1}$$

Доказательство. Если $(\overline{a},\ \overline{b}) \in \varepsilon_{\zeta_N}$, то, так как f — изоморфизм,

$$\big(\zeta_A(a),\ \zeta_A(b)\big) = \big((\varphi_a,\ \psi_a),\ (\varphi_b,\ \psi_b)\big) \in \varepsilon_{\zeta_{F_A}}. \tag{2}$$

Из (2) следует, что для произвольного $c \in A$

$$(\varphi_a,\ \psi_a)\,(\varphi_c,\ \psi_c) = (\varphi_b,\ \psi_b)\,(\varphi_c,\ \psi_c),$$

$$(\varphi_c,\ \psi_c)\,(\varphi_a,\ \psi_a) = (\varphi_c,\ \psi_c)\,(\varphi_b,\ \psi_b).$$

Теперь, если $d \in A$, то

$$acd = bcd,\ dac = dbc,\ cad = cbd,\ dca = dcb,$$

откуда и следует консеквент импликации (1), так как c и d произвольные элементы из A.

Лемма 2.

$$(\forall a,\ b,\ c,\ d \in A)\,\big((\overline{a},\ \overline{b}),\ (\overline{c},\ \overline{d}) \in \pi_N \Rightarrow ab = cd\big). \tag{3}$$

Доказательство. По определению π_N [3],

$$\pi_N = \bigcup_{n=1}^{\infty} (\pi'_N \cup \overline{\pi'_N}^{-1})^n \cup \Delta_{N\times N}. \tag{4}$$

Если $(\overline{a},\ \overline{b}),\ (\overline{c},\ \overline{d}) \in \Delta_{N\times N}$, то $\zeta_A(a) = \zeta_A(c)$, $\zeta_A(b) = \zeta_A(d)$, тогда

$$ab = \varphi_a(b) = \varphi_c(b) = cb = \psi_b(c) = \psi_d(c) = cd.$$

Если $(\overline{a},\ \overline{b}),\ (\overline{c},\ \overline{d}) \in \pi'_N$, то пусть g — такой элемент из A, что $\overline{c} = \overline{ag}$, $\overline{b} = \overline{gd}$.

Так как f — изоморфизм, то

$$(\varphi_b,\ \psi_b) = (\varphi_g,\ \psi_g)\,(\varphi_d,\ \psi_d),$$

$$(\varphi_c,\ \psi_c) = (\varphi_a,\ \psi_a)\,(\varphi_g,\ \psi_g).$$

Теперь

$ab = \psi_b(a) = \psi_d \circ \psi_g(a) = agd = \varphi_{ag}(d) = \varphi_a \circ \varphi_g(d) = \varphi_c(d) = cd$. Аналогично $ab = cd$, если $(\overline{a},\ \overline{b}),\ (\overline{c},\ \overline{d}) \in \overline{\pi'_N}^{-1}$. Теперь, применяя индукцию по n, легко доказать импликацию

$$(\forall a,\ b,\ c,\ d \in A)\,\big((\overline{a},\ \overline{b}),\ (\overline{c},\ \overline{d}) \in (\pi'_N \cup \overline{\pi'_N}^{-1})^n \Rightarrow ab = cd\big). \tag{5}$$

Принимая во внимание (4), получаем (3).

1.2. Пусть ε — эквивалентность на множестве $N\times N$. Нам понадобятся следующие условия, наложенные на ε:

К1. $\pi_N \subset \varepsilon \subset \rho^N$;

К2. $(\forall x,\ y \in N)\,\big((x,\ y) \in \varepsilon_{\zeta_N} \setminus \Delta_N \Rightarrow (\exists p)\,(p \in N \setminus NN)\,\big((p,\ x),\ (p,\ y)\big) \in \varepsilon \vee \big((x,\ p),\ (y,\ p)\big) \in \varepsilon\big)$.

Определение 2. Пусть $\{X_x\}_{x\in N}$ — семейство множеств с полугруппой N — множеством индексов.

Это семейство будем называть N-допустимым, если

$$(\forall x,\ y\in N)\,(X_x\cap X_y\neq\varnothing \Rightarrow x=y)\,(X_x=\varnothing \Rightarrow x\in NN). \tag{6}$$

1.3. Теорема 1. *Для того чтобы полугруппа N принадлежала классу $\mathfrak{F}$, необходимо и достаточно, чтобы условие* К2 *выполнялось для* π_N.

Замечание 1. Условие К1 для π_N всегда выполняется, так как $\pi_N\subset\subset\rho^N$. Действительно, если $((x,\ y)\,(u,\ v))\in\pi'_N$, то для некоторого $w\in N$ $u=xw$, $y=wv$. Тогда $xy=x(wv)=(xw)\,v=uv$.

Поэтому $\pi'_N\subset\rho^N$, а так как ρ^N — эквивалентность, то $\pi_N\subset\rho^N$.

Доказательство теоремы 1. *Необходимость.* Пусть, как и раньше, $f:F_A\to N$ — изоморфизм F_A на N и $\bar a=f\circ\zeta_A(a)$, если $a\in A$. Пусть $x,\ y\in N$ и $(x,\ y)\in\varepsilon_{\zeta_N}$. Тогда найдутся такие $a,\ b\in A$, что $(\bar a,\ \bar b)=(x,\ y)$.

Пусть $N=NN$, тогда $F_AF_A=F_A$. Если $q\in A$, то для некоторых $c,\ d\in A$

$$(\varphi_q,\ \psi_q)=(\varphi_c,\ \psi_c)\,(\varphi_d,\ \psi_d)=(\varphi_{cd},\ \psi_{cd}).$$

Согласно лемме 1, получаем

$$aq=\psi_q(a)=\psi_{cd}(a)=acd=bcd=\psi_{cd}(b)=\psi_q(b)=bq.$$

Аналогично $qa=qb$. В силу произвольности $q\,(a,\ b)\in\varepsilon_{\zeta_A}$, т. е. $\bar a=\bar b$. Таким образом, $\varepsilon_{\zeta_N}=\Delta_N$ и К2 выполняется.

Пусть теперь $NN\neq N$ и $(x,\ y)\in\varepsilon_{\zeta_N}\setminus\Delta_N$, тогда для некоторых $a,\ b\in A$ $(\bar a,\ \bar b)=(x,\ y)$ и $\zeta_A(b)\neq\zeta_A(a)$ и, значит, для какого-то $c\in A$

$$ac\neq bc\ \vee\ ca\neq cb. \tag{7}$$

При этом $\zeta_A(c)\overline{\in}F_AF_A$, в противном случае для некоторых $g,\ h\in A$, $\zeta_A(c)=\zeta_A(g)\,\zeta_A(h)=\zeta_A(gh)$ и, если, например, $ac\neq bc$, то это противоречило бы лемме 1. Действительно, так как $(\bar a,\ \bar b)\in\varepsilon_{\zeta_N}$, то

$$ac=\psi_c(a)=\psi_{gh}(a)=agh=bgh=\psi_{gh}(b)=\psi_c(b)=bc.$$

Из (7) следует, согласно лемме 2, что

$$((\bar c,\ \bar a),\ (\bar c,\ \bar b))\,\overline{\in}\,\pi_N\ \vee\ ((\bar a,\ \bar c),\ (\bar b,\ \bar c))\,\overline{\in}\,\pi_N,$$

при этом, так как $\zeta_A(c)\overline{\in}F_AF_A$, то $\bar c\in N\setminus NN$.

Теперь, так как $(x,\ y)$ — произвольная пара из $\varepsilon_{\zeta_N}\setminus\Delta_N$, то верно

$$\begin{aligned}&(\forall x,\ y\in N)\,((x,\ y)\in\varepsilon_{\zeta_N}\setminus\Delta_N \Rightarrow(\exists p\in N\setminus NN)\wedge\\ &\wedge\,(((x,\ p),\ (y,\ p))\,\overline{\in}\,\pi_N\ \vee\ ((p,\ x),\ (p,\ y))\,\overline{\in}\,\pi_N).\end{aligned} \tag{8}$$

Достаточность. Из замечания 1 и условия теоремы следует, что можно подобрать такую эквивалентность ε на $N\times N$, что выполняются условия К1, К2. Зафиксируем какое-нибудь N-допустимое семейство множеств $\{X_x\}_{x\in N}$.

Пусть Z — множество, равномощное $N\times N/\varepsilon$, такое, что $Z\cap(\bigcup\limits_{x\in N}X_x)=\varnothing$. Пусть $\varkappa$ — отображение $N\times N$ на Z, такое, что

$$\varepsilon_\varkappa=\varepsilon.$$

Для каждого $x \in N$ положим $K_x = X_x \cup \breve{\varkappa}(\rho_{\{x\}})$. Пусть $A = \bigcup\limits_{x \in N} K_x$. Легко видеть, что

$$K_x \cap K_y \neq \varnothing \Rightarrow x = y. \tag{9}$$

Это следует из условий, наложенных на Z и $\{X_x\}_{x \in N}$, и из того, что для каждого $x \in N$ $\rho_{\{x\}}$ насыщено относительно $\varepsilon_\varkappa$ (в силу условия К1).

Пусть $\bar{a}$ — индекс множества из семейства $\{K_x\}_{x \in N}$, к которому принадлежит a, $a \in A$.

Из уравнения (9) следует, что $\zeta : A \to N$ есть отображение A на N, где $(\forall a \in A)(\zeta(a) = \bar{a})$.

Рассмотрим закон композиции на A

$$(\forall a,\ b \in A)\,(ab = \varkappa(\bar{a},\ \bar{b})).$$

Докажем

$$(\forall a,\ b \in A)\,(\overline{ab} = \bar{a}\bar{b}). \tag{10}$$

(10) следует из того, что $\varkappa(\bar{a},\ \bar{b}) \in \breve{\varkappa}(\rho_{\{\overline{ab}\}} \subset) K_{\overline{ab}}$.

Пусть a, b, $c \in A$, тогда из (10) получаем, используя К1,

$$(ab)c = \varkappa(\overline{\varkappa(\bar{a},\ \bar{b})},\ \bar{c}) = \varkappa(\overline{\bar{a}\bar{b}},\ \bar{c}) = \varkappa(\bar{a},\ \overline{\bar{b}\bar{c}}) =$$
$$= \varkappa(\bar{a},\ \overline{bc}) = a(bc).$$

Таким образом, A — полугруппа.

Из (10) следует, что ζ — гомоморфизм A на N. Если мы докажем, что

$$\varepsilon_\zeta = \varepsilon_{\zeta_A}, \tag{11}$$

то тогда, так как N изоморфна A/ε_ζ, N изоморфна F_A, которая изоморфна A/ε_{ζ_A}.

Докажем (11). Из определения умножения легко видеть, что $\varepsilon_\zeta \subset \varepsilon_{\zeta_A}$.

Докажем обратное включение. Пусть $a,\ b \in A$ и $(a,\ b) \in \varepsilon_{\zeta_A}$, тогда из (10) следует, что

$$(\forall c \in A)\,(\overline{\bar{a}c} = \overline{ac} = \overline{bc} = \overline{\bar{b}c},\ \overline{c\bar{a}} = \overline{c\bar{b}}).$$

Это означает, что $(\bar{a},\ \bar{b}) \in \varepsilon_{\zeta_N}$.

Если $a,\ b \overline{\in} \varepsilon_\zeta$, то $(\bar{a},\ \bar{b}) \in \varepsilon_{\zeta_N} \setminus \Delta_N$.

Из условия К2 для $\varepsilon_\varkappa$ имеем:

$$(\exists q \in N \setminus NN)\,(\varkappa(\bar{a},\ q) \neq \varkappa(\bar{b},\ q) \vee \varkappa(q,\ \bar{a}) \neq \varkappa(q,\ \bar{b})).$$

Так как ζ — сюръекция, то для некоторого $c \in A$

$$ac \neq bc \vee ca \neq cb. \tag{12}$$

(12) противоречит тому, что $(a,\ b) \in \varepsilon_{\zeta_A}$.

Таким образом, $\bar{a} = \bar{b}$. Так как a, b — произвольные элементы из A, то $\varepsilon_{\zeta_A} \subset \varepsilon_\zeta$, и (11) доказано. Теорема доказана.

§ 2

2.1. Определение 3. Тройка $(N,\ \varepsilon,\ \{X_x\}_{x \in N})$ есть типа $\mathscr{R}$, если:

1) N — полугруппа класса $\mathscr{T}$;

2) ε — эквивалентность на $N \times N$, для которой выполняются условия К1 — К2;

3) $\{X_x\}_{x\in N}$ — N-допустимое семейство множеств.

Определение 4. Тройка $(N, \varepsilon, \{X_x\}_{x\in N})$ типа $\mathscr{R}$ определяет полугруппу A, если:

1) $\varkappa$ — такое отображение $N\times N$ в A с ядром $\varepsilon_\varkappa = \varepsilon$, что

$$(\bigcup_{x\in N} X_x)\cap pr_2\varkappa = \varnothing;$$

2) $\{K_x\}_{x\in N}$ — такое семейство непересекающихся попарно, непустых множеств, что

$$A = \bigcup_{x\in N} K_x, \tag{13}$$

$$(\forall x\in N)(K_x = X_x \cup \breve{\varkappa}(\rho_{\{x\}}); \tag{14}$$

3) если $\bar{a}$ обозначает индекс множества из семейства $\{K_x\}_{x\in N}$, к которому принадлежит $\bar{a}$, то

$$(\forall a, b\in A)(ab = \varkappa(\bar{a}, \bar{b})). \tag{15}$$

2.2. При доказательстве достаточности теоремы 1 было показано, что каждая тройка типа $\mathscr{R}$ определяет некоторую полугруппу A, причем, если это тройка $(N, \varepsilon, \{X_x\}_{x\in N})$, то N изоморфна F_A.

Предложение 2.2. Каждая полугруппа A определяется некоторой тройкой $(N, \varepsilon, \{X_x\}_{x\in N})$ типа $\mathscr{R}$.

Доказательство. Пусть $N = F_A$, $\{K_x\}_{x\in N}$ — семейство ε_{ζ_A} — классов, при этом индекс каждого такого класса есть образ элементов его при гомоморфизме ζ_A. Если $a\in A$, то положим $\bar{a} = \zeta_A(a)$.

Пусть $\varkappa$: $F_A\times F_A\to A$, где, если $a, b\in A$, то $\varkappa(\bar{a}, \bar{b}) = ab$. Пусть $(\bar{a}, \bar{b}) = (\bar{c}, \bar{d})$, тогда $ab = ad = cd$. Таким образом, $\varkappa$ — отображение.

Покажем, что для $\varepsilon_\varkappa$ выполняются К1, К2.

Так как ζ_A — гомоморфизм, то

$$(\forall a, b, c, d\in A)(\varkappa(\bar{a}, \bar{b}) = \varkappa(\bar{c}, \bar{d}) \Rightarrow \bar{a}\bar{b} = \bar{c}\bar{d}).$$

Поэтому $\varepsilon_\varkappa \subset \rho^{F_A}$. Из леммы 2 следует, что $\pi_{F_A} \subset \varepsilon_\varkappa$, поэтому К1 выполняется.

Пусть теперь для некоторых $x, y\in F_A$ $(x, y)\in \varepsilon_{\zeta_{F_A}}\setminus\Delta_{F_A}$, тогда для некоторых $a, b\in A$ $(\bar{a}, \bar{b}) = (x, y)$ и существует $c\in A$, такое, что $ac\neq bc \vee ca\neq cb$, т. е.

$$((\bar{c}, \bar{a}), (\bar{c}, \bar{b}))\notin \varepsilon_\varkappa \vee ((\bar{a}, \bar{c}), (\bar{b}, \bar{c}))\notin \varepsilon_\varkappa.$$

При этом, если бы $\bar{c}\in F_AF_A$, то это противоречило бы лемме 1 (см. доказательство необходимости теоремы 1). К2 для $\varepsilon_\varkappa$ выполняется.

Семейство $\{X_x\}_{x\in F_A}$, где $X_x = K_x\setminus AA$, F_A — допустимо, так как $X_x = \varnothing \Rightarrow K_x\subset AA$ и, следовательно, $x\in F_AF_A$, и эти множества попарно не пересекаются. Далее, $pr_2\varkappa = AA$, поэтому п. 1) определения 4 выполняется.

Осталось показать, что выполняется (14).

Если $a\in K_x$, то $\bar{a} = x$ и, если $a\in A\setminus AA$, то $a\in X_x$, если $a\in AA$, то для некоторых $a_1, a_2\in A$

$$a = a_1a_2 = \varkappa(\bar{a}_1, \bar{a}_2)\in \breve{\varkappa}(\rho_{\{\overline{a_1a_2}\}}) = \breve{\varkappa}(\rho_{\{\overline{a_1a_2}\}}) = \breve{\varkappa}(\rho_{\{\bar{a}\}}\} = \breve{\varkappa}(\rho_{\{x\}}).$$

Поэтому $K_x\subset X_x\cup\breve{\varkappa}(\rho_{\{x\}})$.

Пусть

$$a \in X_x \cup \bar{\varkappa}(\rho_{\{x\}}).$$

Если $a \in X_x$, то $a \in K_x$. Если $a \in \bar{\varkappa}(\rho_{\{x\}})$, то для некоторых a_1, $a_2 \in A$ $\bar{a}_1 \bar{a}_2 = x$ и $a = \varkappa(\bar{a}_1, \bar{a}_2) = a_1 a_2$. Следовательно,

$$\bar{a} = \zeta_A(a) = \zeta_A(a_1 a_2) = \zeta_A(a_1)\,\zeta_A(a_2) = \overline{\bar{a}_1 a_2} = x,$$

т. е. $a \in K_x$. (14) доказано, а вместе с ним и предложение.

2.3. Определение 5. Тройки $(N_1, \varepsilon_1, \{X_x^{(1)}\}_{x \in N_1})$ и $(N_2, \varepsilon_2, \{X_x^{(2)}\}_{x \in N_2})$ типа $\mathscr{R}$ назовем эквивалентными, если существует изоморфизм τ N_1 на N_2, такой, что выполняются следующие условия:

I1. $\bar{\tau}(\varepsilon_1) = \varepsilon_2$;

I2. $X_x^{(1)}$ равномощно $X_{\tau(x)}^{(2)}$, если $x \in N_1$.

Теорема 2. *Пусть A_1 и A_2 — полугруппы, определяемые соответственно тройками $(N_1, \varepsilon_1, \{X_x^{(1)}\}_{x \in N_1})$ и $(N_2, \varepsilon_2, \{X_x^{(2)}\}_{x \in N_2})$ типа $\mathscr{R}$.*

Для того чтобы A_1 и A_2 были изоморфны, необходимо и достаточно, чтобы соответствующие тройки были эквивалентны.

Доказательство. Пусть $f_i : F_{A_i} \to N_i$ — изоморфизм F_{A_i} на N_i $i = 1, 2$, $K_x^{(i)} = \varepsilon_{\zeta_{A_i}}$ — класс, элементы которого есть прообразы x при гомоморфизме $f_i \circ \zeta_{A_i}$; если $a \in A_i$, то $\bar{a} = f_i \circ \zeta_{A_i}(a)$.

Необходимость. Пусть σ — изоморфизм A_1 на A_2. Пусть

$$\tau = f_2 \circ \zeta_{A_2} \circ \sigma \circ \bar{\zeta}_{A_1}^{-1} \circ \bar{f}_1^{-1}.$$

Докажем, что τ — изоморфизм N_1 на N_2:

$$\tau \circ \bar{\tau}^{-1} = f_2 \circ \zeta_{A_2} \circ \sigma \circ \bar{\zeta}_{A_1}^{-1} \circ \bar{f}_1^{-1} \circ f_1 \circ \zeta_{A_1} \circ \bar{\sigma}^{-1} \circ \bar{\zeta}_{A_2}^{-1} \circ \bar{f}_2^{-1} =$$

$$= f_2 \circ \zeta_{A_2} \circ \sigma \circ \bar{\zeta}_{A_1}^{-1} \circ \Delta_{F_{A_1}} \circ \zeta_{A_1} \circ \bar{\sigma}^{-1} \circ \bar{\zeta}_{A_2}^{-1} \circ \bar{f}_2^{-1} = f_2 \circ \zeta_{A_2} \circ \sigma \circ \varepsilon_{\zeta_{A_1}} \circ \bar{\sigma}^{-1} \circ \bar{\zeta}_{A_2}^{-1} \circ \bar{f}_2^{-1}.$$

Так как σ — изоморфизм A_1 на A_2, то

$$\bar{\sigma}(\varepsilon_{\zeta_{A_1}}) = \varepsilon_{\zeta_{A_2}} \tag{16}$$

и $\sigma \circ \varepsilon_{\zeta_{A_1}} \circ \bar{\sigma}^{-1} = \varepsilon_{\zeta_{A_2}}$, поэтому

$$\tau \circ \bar{\tau}^{-1} = f_2 \circ \zeta_{A_2} \circ \varepsilon_{\zeta_{A_2}} \circ \bar{\zeta}_{A_2}^{-1} \circ \bar{f}_2^{-1} = f_2 \circ \zeta_{A_2} \circ \bar{\zeta}_{A_2}^{-1} \circ \bar{f}_2^{-1} = f_2 \circ \Delta_{F_{A_2}} \circ \bar{f}_2^{-1} = \Delta_{N_2}.$$

Далее,

$$\bar{\tau}^{-1} \circ \tau = f_1 \circ \zeta_{A_1} \circ \bar{\sigma}^{-1} \circ \bar{\zeta}_{A_2}^{-1} \circ \bar{f}_2^{-1} \circ f_2 \circ \zeta_{A_2} \circ \sigma \circ \bar{\zeta}_{A_1}^{-1} \circ \bar{f}_1^{-1} =$$

$$= f_1 \circ \zeta_{A_1} \circ \bar{\sigma}^{-1} \circ \varepsilon_{\zeta_{A_2}} \circ \sigma \circ \bar{\zeta}_{A_1}^{-1} \circ \bar{f}_1^{-1} = f_1 \circ \zeta_{A_1} \circ \varepsilon_{\zeta_{A_1}} \circ \bar{\zeta}_{A_1}^{-1} \circ \bar{f}_1^{-1} =$$

$$= f_1 \circ \zeta_{A_1} \circ \bar{\zeta}_{A_1}^{-1} \circ \bar{f}_1^{-1} = f_1 \circ \Delta_{F_{A_1}} \circ \bar{f}_1^{-1} = \Delta_{N_1}.$$

Таким образом, τ — биекция.

Покажем, что τ — гомоморфизм.

Из определения τ видно, что, если $(x, y)\in\tau$, то существуют $a\in A_1$, $b\in A_2$, такие, что $b=\sigma(a)$ и $(x, y)=(\bar{a}, \bar{b})$. Если $a_1\in A_1$, $\bar{a}_1=\bar{a}$, то из (16) следует, что $\overline{\sigma(a_1)}=\overline{\sigma(a)}$. Так как $f_1\circ\zeta_{A_1}$ — сюръекция, то верно

$$(\forall a\in A)(\tau(\bar{a}))=\overline{\sigma(a)}. \tag{17}$$

Пусть $x, y\in N_1$ и $x=\bar{a}$, $y=\bar{b}$ для некоторых $a, b\in N_1$, тогда

$$\tau(x)\tau(y)=\tau(\bar{a})\tau(\bar{b})=\overline{\sigma(a)}\,\overline{\sigma(b)}=\overline{\sigma(a)\sigma(b)}=$$

$$=\overline{\sigma(ab)}=\tau(\overline{ab})=\tau(\bar{a}\bar{b})=\tau(xy).$$

Таким образом, τ — изоморфизм N_1 на N_2.

Докажем теперь, что

$$\tilde{\tau}(\varepsilon_1)=\varepsilon_2. \tag{18}$$

Пусть $((x, y), (u, v))\in\varepsilon_1$, тогда найдутся $a_1, b_1, c_1, d_1\in A_1$, такие, что $((x, y), (u, v))=((\bar{a}_1, \bar{b}_1), (\bar{c}_1, \bar{d}_1))$ и $a_1b_1=c_1d_1$, но тогда

$$\sigma(a_1)\sigma(b_1)=\sigma(c_1)\sigma(d_1)$$

и, следовательно,

$$\left((\overline{\sigma(a_1)}, \overline{\sigma(b_1)}), (\overline{\sigma(c_1)}, \overline{\sigma(d_1)})\right)\in\varepsilon_2,$$

но

$$\left((\overline{\sigma(a_1)}, \overline{\sigma(b_1)}), (\overline{\sigma(c_1)}, \overline{\sigma(d_1)})\right)=\left((\tau(x), \tau(y)), (\tau(u), \tau(v)\right)\in\tilde{\tau}(\varepsilon_1).$$

Пусть теперь $x_2, y_2, u_2, v_2\in N_2$, $((x_2, y_2), (u_2, v_2))\in\varepsilon_2$, тогда существуют $a_2, b_2, c_2, d_2\in A_2$, такие, что $((x_2, y_2), (u_2, v_2))=(\bar{a}_2, \bar{b}_2), (\bar{c}_2, \bar{d}_2)\in\varepsilon_2$ и $a_2b_2=c_2d_2$, но тогда

$$\sigma^{-1}(a_2)\sigma^{-1}(b_2)=\sigma^{-1}(c_2)\sigma^{-1}(d_2)$$

и, следовательно,

$$\left((\overline{\sigma^{-1}(a_2)}, \overline{\sigma^{-1}(b_2)}), (\overline{\sigma^{-1}(c_2)}, \overline{\sigma^{-1}(d_2)})\right)\in\varepsilon_1.$$

Теперь, используя (17), получаем

$$\tau\left(\left(\overline{\sigma^{-1}(a_2)}, \overline{\sigma^{-1}(b_2)}\right), \left(\overline{\sigma^{-1}(c_2)}, \overline{\sigma^{-1}(d_2)}\right)\right)=$$

$$=\left(\left(\tau\left(\overline{\sigma^{-1}(a_2)}\right), \tau\left(\overline{\sigma^{-1}(b_2)}\right)\right)\left(\tau\left(\overline{\sigma^{-1}(c_2)}\right), \tau\left(\overline{\sigma^{-1}(d_2)}\right)\right)\right)=$$

$$=\left(\overline{\sigma\circ\sigma^{-1}(a_2)}, \overline{\sigma\circ\sigma^{-1}(b_2)}\right), \left(\overline{\sigma\circ\sigma^{-1}(c_2)}, \overline{\sigma\circ\sigma^{-1}(d_2)}\right)\Big)=$$

$$=((\bar{a}_2, \bar{b}_2), (\bar{c}_2, \bar{d}_2))=((x_2, y_2), (u_2, v_2)).$$

(18) доказано.

Так как σ — изоморфизм, то $\varepsilon_{\zeta_{A_1}}$-классы он отображает на $\varepsilon_{\zeta_{A_2}}$-классы. Кроме того, элементы из $A_1\setminus A_1A_1$ он переводит в элементы из $A_2\setminus A_2A_2$, поэтому, так как, согласно (17), $\sigma(a)\in K^{(2)}_{\tau(x)}$, $x=\bar{a}$, то $\sigma\big|_{X^{(1)}_x}$ есть биекция $X^{(1)}_x$ на $X^{(2)}_{\tau(x)}$. Необходимость доказана.

Достаточность. Пусть τ — изоморфизм N_1 на N_2, указанный в определении 5.

Пусть $\{\xi_x\}_{x\in N_1}$ — семейство биекций

$$\xi_x: X^{(1)}_x\to X^{(2)}_{\tau(x)}.$$

Пусть

$$\varkappa_1 : N_1 \times N_1 \to A_1 A_1,$$

где

$$\varkappa_2 : N_2 \times N_2 \to A_2 A_2,$$

$$\varkappa_1(\bar{a}_1, \bar{b}_1) = a_1 b_1, \quad \varkappa_2(\bar{a}_2, \bar{b}_2) = a_2 b_2,$$

если $a_1, b_1 \in A_1$, $a_2, b_2 \in A_2$.

Пусть $\sigma : A_1 \to A_2$, где

$$\text{если } a = a_1 a_2 \in A_1 A_1, \text{ то } \sigma(a) = \varkappa_2(\tau(a_1), \tau(a_2)),$$

$$\text{если } a \in X_x^{(1)}, \text{ то } \sigma(a) = \xi_x(a).$$

Докажем, что σ — изоморфизм.

а) σ есть отображение.

Действительно, $pr_1 \sigma = A_1$.

Так как $\bigcup\limits_{x \in N_1} \xi_x = \sigma|_{A_1/A_1 A_1}$ — отображение, то нам нужно доказать, что σ функционально на $A_1 A_1$.

Пусть $a_1 a_2 = a = a_3 a_4$, тогда $((\bar{a}_1, \bar{a}_2), (\bar{a}_3, \bar{a}_4)) \in \varepsilon_1$ и из I 1 следует, что

$$(\tau(\bar{a}_1), \tau(\bar{a}_2)), (\tau(\bar{a}_3), \tau(\bar{a}_4)) \in \varepsilon_2$$

и поэтому

$$\varkappa_2(\tau(\bar{a}_1), \tau(\bar{a}_2)) = \varkappa_2(\tau(\bar{a}_3), \tau(\bar{a}_4)).$$

б) σ сюръективно.

Пусть $a = a_1 a_2 \in A_2$, тогда, так как τ—сюръекция, то найдутся $x_1, x_2 \in N_1$, такие, что $\tau(x_1) = \bar{a}_1$, $\tau(x_2) = \bar{a}_2$, поэтому

$$\sigma(\varkappa_1(x_1, x_2)) = \varkappa_2(\bar{a}_1, \bar{a}_2) = a.$$

Если $a \in A_2 \setminus A_2 A_2$, то для некоторого $x \in N_1$ $\tau(x) = \bar{a}$.

Так как ξ_x — сюръекция $X_x^{(a)}$ на $X_{\bar{a}}^{(2)}$, то найдется $b \in X_x^{(1)}$, такое, что $a = \xi_x(b) = \sigma(b)$.

в) σ инъективно.

По определению σ,

$$\overset{\frown}{\sigma}(A_2 \setminus A_2 A_2) = A_1 \setminus A_1 A_1 \quad \overset{\frown}{\sigma}(A_2 A_2) = A_1 A_1.$$

Поэтому, когда $a, b \in A_1$, тогда, если $\sigma(a) = \sigma(b)$, то либо $a, b \in A_1 \setminus A_1 A_1$, либо $a, b \in A_1 A_1$. Если $a, b \in A_1 \setminus A_1 A_1$, то $\sigma(a), \sigma(b) \in X^{(2)}_{\tau(\bar{b})} \cap X^{(2)}_{\tau(\bar{a})}$, поэтому $\tau(\bar{a}) = \tau(\bar{b})$ и, следовательно, $\bar{a} = \bar{b}$. Так как $\xi_{\bar{a}}$ — биекция, то $a = b$.

Пусть теперь $a = a_1 a_2$, $b = b_1 b_2$, тогда

$$\varkappa_2(\tau(\bar{a}_1), \tau(\bar{a}_2)) = \varkappa_2(\tau(\bar{b}_1), \tau(b_2)),$$

поэтому

$$\tau(((\bar{a}_1, \bar{a}_2), (\bar{b}_1, \bar{b}_2))) \in \varepsilon_2 = \overset{\frown}{\tau}(\varepsilon_1).$$

Следовательно, для некоторых $x, y, u, v \in N_1$, $((x, y), (u, v)) \in \varepsilon_1$

$$\tau(((\bar{a}_1, \bar{a}_2), (\bar{b}_1, \bar{b}_2))) = \tau(((x, y), (u, v))),$$

и так как τ — биекция, то

$$((\bar{a}_1, \bar{a}_2), (\bar{b}_1, \bar{b}_2)) = ((x, y), (u, v)) \in \varepsilon_1,$$

и тогда $a = a_1 a_2 = b_1 b_2 = b$. Таким образом σ взаимооднозначно отображает A_1 на A_2.

Покажем, что если $a_1 \in A_1$, то

$$\overline{\sigma(a_1)} = \tau(\bar{a}_1). \tag{19}$$

Пусть $a_1 \in X_x^{(1)}$, тогда $\bar{a}_1 = x$ и

$$\sigma(a_1) = \zeta_x(a_1) \in X_{\tau(x)}^{(2)} \subset K_{\tau(x)}^{(2)}.$$

Таким образом,

$$\overline{\sigma(a_1)} = \tau(x).$$

Если $a_1 = b_1 c_1$, то, согласно определению,

$$\sigma(a_1) = \varkappa_2\left(\tau(\bar{b}_1),\ \tau(\bar{c}_1)\right)$$

и

$$\overline{\sigma(a_1)} = \overline{\varkappa_2\left(\tau(\bar{b}_1),\ \tau(\bar{c}_1)\right)} = \tau(\bar{b}_1)\tau(\bar{c}_1) = \tau(\bar{b}_1\bar{c}_1) =$$
$$= \tau(\overline{b_1 c_1}) = \tau(\bar{a}_1).$$

(19) доказано.

Теперь докажем, что σ — гомоморфизм.

Пусть $a_1,\ b_1 \in A_1$, тогда, используя (19), получаем

$$\sigma(a_1 b_1) = \sigma\left(\varkappa_1(\bar{a}_1,\ \bar{b}_1)\right) = \varkappa_2\left(\tau(\bar{a}_1),\ \tau(\bar{b}_1)\right) = \varkappa_2\left(\overline{\sigma(a_1)},\ \overline{\sigma(b_1)}\right) =$$
$$= \sigma(a_1)\sigma(b_1).$$

Теорема доказана.

Из теоремы 2, в частности, следует, что каждая тройка типа $\mathscr{R}$ может определять лишь изоморфные между собою полугруппы, и, если некоторая полугруппа определяется двумя тройками типа $\mathscr{R}$, то они эквивалентны.

Литература

1. Ляпин Е. С. Полугруппы. Физматгиз, 1960.
2. Вагнер В. В. Сб. «Теория полугрупп и ее применения». в. 1. Изд. Саратовск. ун-та, 1965.
3. Вагнер В. В. Мат. сб., **32** (74), в. 3, 1953.
4. Глускин Л. М. Мат. сб., **55** (97), № 4, 1961.
5. Шайн Б. М. Мат. сб., **55**, № 4, 1961.
6. Бурбаки Н. Теория множеств. Изд. «Мир», М., 1965.

Белорусский государственный университет им. В. И. Ленина

Поступило в редакцию 25.IX 1968

ВЕСЦІ АКАДЭМІІ НАВУК БЕЛАРУСКАЙ ССР № 4 1969
СЕРЫЯ ФІЗІКА-МАТЭМАТЫЧНЫХ НАВУК

УДК 519.8

А. Б. АНТОНЕВИЧ, В. И. БРОНШТЕЙН

О НАХОЖДЕНИИ МИНИМАЛЬНОГО ДИАГНОСТИЧЕСКОГО НАБОРА КОНТРОЛЬНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

В статье рассматривается задача о нахождении минимального диагностического набора контрольных элементов устройства. В п. 2 дается способ сведения этой задачи к задаче целочисленного линейного программирования. В п. 3 приводится метод, названный методом «наискорейшего спуска» для нахождения диагностического набора, близкого к минимальному.

1. Постановка задачи. Рассмотрим устройство, которое может находиться в n состояниях. Пусть в этом устройстве имеется m контрольных элементов, каждый из которых может находиться в p состояниях. По состояниям m контрольных элементов можно определить, в каком состоянии находится устройство. Задача состоит в том, чтобы выделить минимальное $r \leqslant m$ количество контрольных элементов, по состояниям которых можно определить состояние устройства. Состояния устройства можно описать матрицей A, элемент которой a_{ij}, где $a_{ij} \in \{1, 2, ..., p\}$, представляет собой состояние контрольного элемента с номером j ($j = 1, 2, ..., m$), когда устройство находится в состоянии с номером i ($i = 1, 2, ..., n$). Набор столбцов матрицы A, такой, что строки A можно различить по значениям элементов хотя бы в одном из столбцов набора, называется диагностическим набором столбцов.

Задача состоит в нахождении диагностического набора с минимальным количеством столбцов. Поскольку при больших n и m простым перебором решить задачу невозможно из-за большого количества вариантов, возникает необходимость в построении эффективных методов решения задачи.

Набору столбцов матрицы A поставим в соответствие вектор $\mathbf{x}$ с m компонентами, такой, что компонента $x_j = 1$, если столбец под номером j входит в набор, и $x_j = 0$, если столбец j не входит в набор. Нормой вектора $\mathbf{x}$ назовем число $\|\mathbf{x}\| = \sum_{j=1}^{m} x_j$, равное числу столбцов в соответствующем вектору $\mathbf{x}$ наборе. Умножая каждый столбец j ($j = 1, 2, \ldots, m$) матрицы A на x_j, получим матрицу B.

Элементы b_{ij} матрицы B равны:

$$b_{ij} = a_{ij} x_j \qquad (1.1)$$

$$(i = 1, 2, \ldots, n;\ j = 1, 2, \ldots, m).$$

Будем рассматривать строки B как векторы $\mathbf{b}_i$:

$$\mathbf{b}_i = (b_{i1}, b_{i2}, \ldots, b_{im}).$$

Тогда нахождение минимального диагностического набора столбцов матрицы A сводится к нахождению среди множества векторов $\{\mathbf{x}\}$, удовлетворяющих условию

$$\mathbf{b}_i \neq \mathbf{b}_k, \text{ если } i \neq k, \tag{1.2}$$

(где $i, k = 1, 2, \ldots, n$ и $\mathbf{b}_i$ образуются по (1.1)) вектора $\mathbf{x} \in \{\mathbf{x}\}$ с наименьшей нормой, т. е. удовлетворяющего условию

$$\|\mathbf{x}\| = \sum_{j=1}^{m} x_j \text{ минимальна.} \tag{1.3}$$

2. Сведение к задаче целочисленного линейного программирования. Построим по матрице A вспомогательную матрицу C следующим образом. Возьмем две строки матрицы A

$$(a_{i1}a_{i2} \ldots a_{im}), (a_{k1}a_{k2} \ldots a_{km}),$$

$$i = 1, 2, \ldots, n-1, \; k = i+1, i+2, \ldots, n$$

и по ним построим строку матрицы C с номером

$$l = n(i-1) - \frac{i(i-1)}{2} + (k-i),$$

где $l = 1, 2, \ldots, \frac{n(n-1)}{2}$, по правилу

$$c_{lj} = 0, \text{ если } a_{ij} = a_{kj}, \tag{2.1}$$

$$c_{lj} = 1, \text{ если } a_{ij} \neq a_{kj}. \tag{2.2}$$

Например, для матрицы A_1 матрица C_1 выразится так:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & 3 \\ 4 & 3 & 1 \end{bmatrix}, \quad C_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Задача целочисленного линейного программирования, эквивалентная задаче (1.1), (1.2), (1.3), формулируется следующим образом.
Найти

$$\min_{\mathbf{x}} \sum_{j=1}^{m} x_j \tag{2.3}$$

при следующих ограничениях:

$$\sum_{j=1}^{m} c_{lj} x_j \geqslant 1$$

$$(j = 1, 2, \ldots, m)$$

$$\left(l = 1, 2, \ldots, \frac{n(n-1)}{2}\right); \tag{2.4}$$

$$x_j = 0 \text{ или } 1. \tag{2.5}$$

Эквивалентность задач (1.1) — (1.3) и (2.3) — (2.5) видна из следующих соображений.

Условие $\mathbf{b}_i = \mathbf{b}_k$ при $i \neq k$ эквивалентно условию $\sum_{j=1}^{m} c_{lj}x_j = 0$ для l, соответствующего паре (i, k), а условие $b_i \neq b_k$ — условию $\sum_{j=1}^{m} c_{lj}x_j \neq 0$, но так как $\sum_{j=1}^{m} c_{lj}x_j$ принимает только целочисленные неотрицательные значения, то $\sum_{j=1}^{m} c_{lj}x_j \geqslant 1$. Существует несколько алгоритмов решения задачи (2.3)—(2.5), например алгоритм Гомори [3, 4]. Однако решить эту задачу даже при небольших n и m трудно из-за медленной сходимости алгоритмов целочисленного линейного программирования и большой размерности вспомогательной матрицы C. Так при $n = 20$ C имеет $\frac{n(n-1)}{2} = 190$ строк. Нужно найти методы решения первоначальной задачи (1.1) — (1.3) без приведения к задаче целочисленного линейного программирования. В п. 3 предлагается метод поиска приближенного решения задачи (1.2), (1.3), требующий небольшого числа простых операций.

3. Метод наискорейшего спуска. Вектор x можно разложить по базисным векторам

$$\mathbf{x} = \sum_{j=1}^{m} x_j \mathbf{e}_j,$$

где

$$\mathbf{e}_j = (\underbrace{0,\ 0,\ \ldots,\ 0,\ 1}_{j},\ 0,\ \ldots,\ 0),$$

$$x_j = 0 \text{ или } 1,\ \|\mathbf{e}_j\| = 1.$$

Таким образом, каждому столбцу A с номером j ставится в соответствие вектор $\mathbf{e}_j$. В дальнейшем, используя вектор $\mathbf{e}_j$, будем иметь ввиду соответствующий ему столбец j матрицы A.

Будем говорить, что вектор $\mathbf{x}$ предшествует вектору $\mathbf{y}$, и записывать $\mathbf{x} < \mathbf{y}$, если соответствующий $\mathbf{x}$ набор столбцов содержится в наборе столбцов, соответствующем вектору $\mathbf{y}$, т. е. $x_j \leqslant y_j$ $(j = 1, 2, \ldots, m)$. Отсюда ясно, что $\mathbf{x} < \mathbf{x} + \mathbf{e}_j$.

На множестве векторов $\{\mathbf{x}\}$ зададим функцию $F(\mathbf{x})$, обладающую следующими свойствами:

1) Функция $F(\mathbf{x})$ монотонно возрастает, т. е. если $\mathbf{y} > \mathbf{x}$, то $F(\mathbf{y}) \geqslant F(\mathbf{x})$;

2) $F(\mathbf{x})$ принимает максимальное, равное M, значение на векторах $\mathbf{x}$, соответствующих диагностическим наборам столбцов, т. е. удовлетворяющих условию (1.2);

3) $F(\mathbf{x}) < M$ для $\mathbf{x}$, соответствующих недиагностическим наборам, т. е. для которых не выполняется условие (1.2). Из 1) следует, что на векторе $\mathbf{x} = (0, 0, \ldots, 0)$ $F(\mathbf{x})$ принимает минимальное значение, а из 2) следует, что $F(\mathbf{x}) = M$ для $\mathbf{x} = (1, 1, \ldots, 1)$.

Построим последовательность векторов $\mathbf{x}^k$ по следующему правилу:

$$\mathbf{x}^0 = 0, \tag{3.1}$$

$$F(\mathbf{x}^{k+1}) = \max_j F(\mathbf{x}^k + \mathbf{e}_j) \tag{3.2}$$

для j таких, что $x_j^k = 0$.

Заметим, что

$$\|\mathbf{x}^{k+1}\| = \|\mathbf{x}^k\| + \|\mathbf{e}_j\| = \|\mathbf{x}^k\| + 1 = \|\mathbf{x}^0\| + k.$$

При некотором $k = q$ $(r \leqslant q \leqslant m)$ получим $F(\mathbf{x}^q) = M$, т. е. $\mathbf{x}^q$ соответствует диагностическому набору. Возьмем в качестве приближенного решения задачи (1.1) — (1.3) вектор $\mathbf{x}^q$. Построение такой последовательности векторов практически не трудно, так как на шаге k нужно выбирать из $s = m - k - \|\mathbf{x}^0\|$ вариантов, где $k = 0, 1, \ldots, q$.

Наискорейший рост $F(\mathbf{x})$ на каждом шаге позволяет предполагать, что максимум $F(\mathbf{x}^q) = M$ достигнут одним из коротких путей, т. е. что q не намного превосходит r. Если с помощью F мы не можем однозначно определить вектор $\mathbf{x}^{k+1}$, то нужно либо использовать другую функцию с такими же свойствами, либо выбор проделать случайным образом.

4. Выбор функции $F(\mathbf{x})$. Каждый набор столбцов, соответствующий вектору $\mathbf{x}$, разбивает строки матрицы A на $p(\mathbf{x})$ групп, таких, что строки i, k попадают в одну группу тогда и только тогда, когда $a_{ij} = a_{kj}$ для j, таких, что $x_j = 1$.

Количество строк в группе s обозначим $k_s(\mathbf{x})$, где $s = 1, 2, \ldots, p(\mathbf{x})$. Тогда следующие функции будут удовлетворять условиям 1), 2), 3) п. 3:

$$F_1(\mathbf{x}) = p(\mathbf{x}), \tag{4.1}$$

$$F_2(\mathbf{x}) = -[\max_s k_s(\mathbf{x})]$$

$$(s = 1, 2, \ldots, p(\mathbf{x})). \tag{4.2}$$

Группы строк для каждого $\mathbf{x}$ можно перенумеровать таким образом, что

$$k_1 \geqslant k_2 \geqslant \ldots \geqslant k_{p(\mathbf{x})},$$

тогда

$$F_3^\beta(\mathbf{x}) = -\Big[\sum_{s=1}^{\beta} \alpha^{1-s} k_s(\mathbf{x})\Big], \tag{4.3}$$

где α и β — какие-либо фиксированные числа и не зависят от вектора $\mathbf{x}$; α^{1-s} — весовой множитель; β — количество слагаемых $(\alpha \geqslant n,\ \beta \leqslant n)$.

Ясно, что

$$F_3^1 \equiv F_2,$$

$$F_4(\mathbf{x}) = -\Big[\sum_{s=1}^{p(\mathbf{x})} k_s^2(\mathbf{x})\Big], \tag{4.4}$$

$$F_5(\mathbf{x}) = -\Big[\sum_{s=1}^{p(\mathbf{x})} k_s^\gamma(\mathbf{x})\Big],\ \gamma > 1, \tag{4.5}$$

$$F_6(\mathbf{x}) = -\left[\sum_{s=1}^{p(\mathbf{x})} \frac{k_s(\mathbf{x})}{n} \ln \frac{k_s(\mathbf{x})}{n}\right]. \tag{4.6}$$

При выборе $\mathbf{x}$ по алгоритму (3.1), (3.2) с помощью F_1 мы получаем разбиение матрицы A на каждом шаге на наибольшее количество групп, а с помощью F_2 — такое разбиение, что группа с наибольшим количеством строк будет минимальна.

F_3 учитывает и меньшие по величине группы строк, что желательно в случае, если для нескольких $\mathbf{x}$ количество строк в наибольших группах

совпадают. Аналогичное истолкование можно дать F_4 и F_5. Функцию F_6 можно истолковать как количество информации, которое можно получить из соответствующего вектору $\mathbf{x}$ набора контрольных элементов. Приведем максимальные значения $F(\mathbf{x}) = F(1, 1, \ldots, 1)$:

$$\max_{\mathbf{x}} F_1(\mathbf{x}) = n, \tag{4.7}$$

$$\max_{\mathbf{x}} F_2(\mathbf{x}) = -1, \tag{4.8}$$

$$\max_{\mathbf{x}} F_3^{\beta}(\mathbf{x}) = -\sum_{s=1}^{\beta} \alpha^{1-s} = -\frac{\alpha^{\beta} - 1}{\alpha^{\beta-1}(\alpha - 1)}, \tag{4.9}$$

$$\max_{\mathbf{x}} F_4(\mathbf{x}) = -n, \tag{4.10}$$

$$\max_{\mathbf{x}} F_5(\mathbf{x}) = -n, \tag{4.11}$$

$$\max_{\mathbf{x}} F_6(\mathbf{x}) = -\sum_{s=1}^{n} \frac{1}{n} \ln \frac{1}{n} = -\ln \frac{1}{n}. \tag{4.12}$$

5. Выбор начального вектора $\mathbf{x}^0$. До сих пор предполагалось, что $\mathbf{x}^0 = 0$. Выбирая в качестве $\mathbf{x}^0$ различные векторы, получим различные локально-оптимальные в смысле [6] диагностические наборы столбцов. Вектор $\mathbf{x}^0$ можно выбирать случайным образом или руководствуясь различными соображениями, например, можно предложить следующий метод выбора. По вспомогательной матрице C (2.1), (2.2) выбирается строка с наименьшим количеством единиц. Затем в качестве $\mathbf{x}^0$ можно взять вектор $\mathbf{x}$ с $x_j = 1$ для тех столбцов матрицы C, в которых в выбранной строке стоят единицы.

6. Некоторые обобщения задачи. Если добавить к матрице A дополнительный столбец со значениями в конечном множестве из N элементов, то можно считать, что на множестве строк A задана функция f, принимающая конечное число значений (значения приводятся в дополнительном столбце). Тогда можно решить предложенным методом с небольшими модификациями следующую задачу: найти минимальный набор столбцов матрицы A, такой, что строки $a_i \neq a_k$ хотя бы в одном из столбцов набора, если только $f_i \neq f_k$. Если $p = 2$, $N = 2$, то эта задача эквивалентна поиску минимального числа переменных неполностью определенной функции алгебры логики. Если $N = 2$, то аналогичная задача ставится для n-местных предикатов [5]. Наконец, если номера столбцов A считать номерами входов конечного автомата, а строки A — состояниями автомата, то матрица A совпадает с частью таблицы переходов конечного автомата (подтаблицей выходов). Тогда наша задача (1.1) — (1.3) эквивалентна задаче поиска диагностической входной последовательности минимальной длины, по которой можно различать состояния конечного автомата [1, 2, 5].

7. Пример. Возьмем конкретную матрицу A (табл. 1). Здесь $n = 15$, $m = 14$, $a_{ij} \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Положим $F(\mathbf{x}) = F_1$, $\mathbf{x}^0 = 0$. Вычислим $F_1(\mathbf{x}^0 + \mathbf{e}_j) = p(\mathbf{e}_j)$ для $j = 1, 2, \ldots, m$. Результаты приведены в табл. 2. Кроме того, в табл. 2 приводятся значения $k_s(\mathbf{e}_j)$, где $s = 1, 2, 3, 4, 5$. Ясно, что $\max_j p(\mathbf{e}_j) = p(\mathbf{e}_9) = 5$. Значит, $\mathbf{x}^1 = \mathbf{e}_9$. Найдем вектор $\mathbf{x}^2$. Для групп строк, полученных на первом шаге разбиением матрицы A по столбцу $j = 9$, найдем

$$F_1(\mathbf{x}^1 + \mathbf{e}_j) = p(\mathbf{x}^1 + \mathbf{e}_j) = p(\mathbf{e}_9 + \mathbf{e}_j)$$

Таблица 1

Матрица A

i/j	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	$k_s(\mathbf{e}_{14})$
1	4	2	2	2	4	5	4	3	3	1	2	1	2	1	$k_1=2$
2	2	1	2	2	2	1	2	2	2	2	5	1	5	1	
3	1	2	2	2	1	1	2	1	1	2	2	2	2	2	$k_2=9$
4	5	2	2	5	5	1	2	5	3	2	2	2	2	2	
5	2	1	2	2	2	1	2	2	2	2	2	2	2	2	
6	2	2	2	2	2	5	2	2	2	5	2	2	2	2	
7	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	
8	2	2	2	2	2	1	2	2	2	2	2	2	2	2	
9	1	4	2	2	1	2	2	1	2	2	2	2	2	2	
10	2	2	2	2	2	2	2	2	4	2	2	2	2	2	
11	2	2	2	2	2	2	2	3	3	2	2	2	2	2	
12	1	4	3	2	1	1	2	1	1	3	1	1	3	4	$k_3=4$
13	1	4	3	1	1	1	2	1	5	1	5	4	5	4	
14	1	4	2	2	5	2	2	5	3	2	1	4	3	4	
15	1	4	3	2	5	1	2	5	3	2	5	4	5	4	

Таблица 2

Значения $p(\mathbf{e}_j)$, $k_s(\mathbf{e}_j)$; $s=1,2,\ldots, p(\mathbf{e}_j)$; $k_s \leqslant k_{s+1}$

j	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
p	4	3	2	3	4	3	2	4	5	4	3	3	3	3
k_1	7	8	12	13	7	8	14	5	6	11	10	9	10	9
k_2	6	5	3	1	4	5	1	4	5	2	3	3	3	4
k_3	1	2		1	3	2		3	2	1	2	3	2	2
k_4	1				1			3	1	1				
k_5									1					

для $j=1, 2, \ldots, m$; $j \neq 9$. Результаты приведены в табл. 3. Видно, что $\max_j p(\mathbf{x}^1 + \mathbf{e}_j) = 9$ достигается сразу для $j \in \{1, 2, 6, 11, 12, 13, 14\}$. Чтобы выбрать единственное значение j воспользуемся функцией

$$F_3^{\beta}(\mathbf{x}) = -\sum_{s=1}^{\beta} \alpha^{1-s} k_s(\mathbf{x}).$$

Таблица 3

Значения $p(\mathbf{x}^1+\mathbf{e}_j)$, $j\neq 9$ и $k_s(\mathbf{x}^1+\mathbf{e}_j)$, $j=1, 2, 6, 11, 12, 13, 14$

j	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
p	9	9	7	6	8	9	6	7		8	9	9	9	9
k_1	5	3				3					5	5	5	5
k_2	2	3				3					3	2	3	2
k_3	2	3				2					1	2	1	2

Для этого вычислим $k_s(\mathbf{x}^1+\mathbf{e}_j)$ для $j\in\{1, 2, 6, 11, 12, 13, 14\}$. Результаты приведены в табл. 3. Положим $\alpha=100$, $\beta=3$. Тогда

$$\max_j F_3^3(\mathbf{x}^1+\mathbf{e}_j)=F_3^3(\mathbf{x}^1+\mathbf{e}_6)=-3{,}0302.$$

Значит,

$$\mathbf{x}^2=\mathbf{x}^1+\mathbf{e}_6=\mathbf{e}_9+\mathbf{e}_6.$$

$F_1(\mathbf{x}^2+\mathbf{e}_j)=p(\mathbf{x}^2+\mathbf{e}_j)$ для $j=1, 2, \ldots, m$, $j\neq 9,6$

приведены в табл. 4. Видно, что

$$\max_j F_1(\mathbf{x})=\max_j F_1(\mathbf{x}^2+\mathbf{e}_j)=F_1(\mathbf{x}^2+\mathbf{e}_2)=14.$$

Значит,

$$\mathbf{x}^3=\mathbf{e}_9+\mathbf{e}_6+\mathbf{e}_2.$$

Значения

$$F_1(\mathbf{x}^3+\mathbf{e}_j)=p(\mathbf{x}^3+\mathbf{e}_j)$$

Таблица 4

Значения $p(\mathbf{x}^2+\mathbf{e}_j)$, $j\neq 9, 6$

j	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
p	12	14	11	10	11		9	11		10	13	13	13	13

для $j\neq 9, 6, 2$ приведены в табл. 5. Таким образом, $\max_j F_1(\mathbf{x}^3+\mathbf{e}_j)=15$ достигается для $\mathbf{x}=\mathbf{x}^3+\mathbf{e}_j$, $j=11, 12, 13, 14$.

Таблица 5

Значения $p(\mathbf{x}^3+\mathbf{e}_j)$, $j\neq 9, 6, 2$

j	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
p	14		14	14	14		14	14		14	15	15	15	15

Выбирая j случайным образом, положим $j=11$. Отсюда

$$\mathbf{x}^4=\mathbf{e}_9+\mathbf{e}_6+\mathbf{e}_2+\mathbf{e}_{11}.$$

Так как мы достигли $\max_{\mathbf{x}} F_1(\mathbf{x})=15$, мы получили вектор $\mathbf{x}^4$, соответствующий диагностическому набору. Значит, $\mathbf{x}^4=\mathbf{e}_9+\mathbf{e}_6+\mathbf{e}_2+\mathbf{e}_{11}=(0, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 0)$ будет решением задачи (1.2), (1.3).

Приведенный пример показывает простоту построения минимального набора столбцов.

Вручную весь процесс можно проделать за несколько минут для матрицы $n \times m = 15 \times 14$. Кроме того, метод легко запрограммировать на ЦВМ, хотя преимущество решения на машине должно сказаться только для достаточно больших n, m (порядка нескольких десятков). Если же необходимо построить абсолютно минимальный набор столбцов, то после решения задачи методом наискорейшего спуска можно некоторым перебором найти этот набор. Ясно, что такой перебор намного меньше полного перебора, так как число столбцов в абсолютно минимальном наборе $r \leqslant q$. Для этого перебора можно воспользоваться построением графа, где ребро означает какой-нибудь столбец, и найти минимальный путь для перехода из начальной вершины в одну из конечных.

Замечание. Полученный методом (3.1), (3.2) вектор x^q является приближенным решением задачи (2.3) — (2.5) целочисленного линейного программирования.

Литература

1. Глушков В. М. Синтез цифровых автоматов. М., 1962.
2. Гилл А. Введение в теорию конечных автоматов. М., 1966.
3. Юдин Д. Б., Гольштейн Е. Г. Задачи и методы линейного программирования. М., 1964.
4. Данциг Д. Б. Линейное программирование и его применение и обобщения. М., 1966.
5. Айзерман М. А., Гусев Л. А., Розоноэр Л. И. Логика. Автоматы. Алгорифмы. М., 1963.
6. Бурков В. Н., Ловецкий С. Е. Изв. АН СССР, Техническая кибернетика, № 4, 1968.

Белорусский государственный университет им. В. И. Ленина, Институт тепло- и массообмена АН БССР

Поступило в редакцию 23.I 1969

ВЕСЦІ АКАДЭМІІ НАВУК БЕЛАРУСКАЙ ССР № 4 1969
СЕРЫЯ ФІЗІКА-МАТЭМАТЫЧНЫХ НАВУК

УДК 539.172.4

Э. А. РУДАК, Е. И. ФИРСОВ, А. М. ХИЛЬМАНОВИЧ

СПЕКТРЫ γ-ЛУЧЕЙ ИЗ РЕАКЦИИ (n, γ) НА ТЕПЛОВЫХ НЕЙТРОНАХ НА ЯДРАХ ^{74}Se, ^{76}Se И ^{77}Se

Спектры γ-лучей из реакции (n, γ) на изотопах селена исследованы довольно плохо. Основные результаты ранних работ касаются только изотопов ^{76}Se и ^{77}Se и приведены в [1]. Реакция $^{76}Se(n, \gamma)^{77}Se$ исследовалась с помощью Ge(Li)-детектора γ-лучей [2].

В настоящей работе приводятся результаты исследования спектров γ-лучей из реакции (n, γ) на тепловых нейтронах на образцах из разделенных изотопов ^{74}Se, ^{76}Se и ^{77}Se с помощью магнитного комптоновского спектрометра с разрешением 2%. Методика эксперимента приведена в [3], характеристики образцов — в табл. 1.

Таблица 1

Основные характеристики образцов

Образец	Вес, *г*	Содержание изотопов, %						Вклад в сечение реакции, %					
		^{74}Se	^{76}Se	^{77}Se	^{78}Se	^{80}Se	^{82}Se	^{74}Se	^{76}Se	^{77}Se	^{78}Se	^{80}Se	^{82}Se
^{74}Se	5,5	40,9	8,1	4,7	13,1	27,1	6,1	69,0	23,2	6,7	0,1	0,5	0,4
^{76}Se	1,9	0,4	75,2	3,1	6,0	13,2	2,1	0,3	97,4	2,0	—	0,1	—
^{77}Se	3,0	0,3	3,7	76,0	7,3	11,1	1,6	0,4	8,8	90,3	0,1	0,3	0,1

Экспериментальные результаты. Аппаратурные спектры γ-лучей из реакции (n, γ) на изотопах ^{74}Se, ^{76}Se и ^{77}Se приведены на рис. 1—3. Спектры носят сложный характер, и идентификация многих линий с энергией меньше 4—5 *Мэв* затруднительна. Наибольшую трудность представило исследование γ-лучей из реакции $^{74}Se(n, \gamma)^{75}Se$ вследствие значительной примеси в образце изотопов ^{76}Se, ^{77}Se и практически полного отсутствия экспериментальных данных об уровнях ^{75}Se с энергией возбуждения выше 1,2 *Мэв*. Результаты исследования даны в табл. 2. Ошибка в определении энергии приведена в скобках в единицах последней цифры; ошибка в определении интенсивностей ~20%; звездочкой отмечена группа линий.

Обсуждение экспериментальных результатов. Ядро ^{75}Se изучено довольно плохо, особенно в области энергий возбуждения выше 1 *Мэв*. Известна только одна работа по исследованию реакции (d, p) на образце с плохим обогащением по изотопу ^{74}Se [4]. Реакция $^{74}Se(n, \gamma)^{75}Se$ ранее не изучалась. В настоящей работе удалось обнаружить переходы ^{75}Se с энергией 7,74, 7,44, 7,18, 7,02, 6,44 и 6,23 *Мэв* из исходного состояния в реакции (n, γ) на уровни с энергией 0,28, 0,58, 0,86, 1,01, 1,59 и 1,80 *Мэв*. Уровни 1,59 и 1,80 *Мэв* введены нами. За ис-

Таблица 2

Энергии, интенсивности (в числах γ-квантов на 100 захватов нейтронов) и принадлежность излучающему изотопу исследованных γ-лучей

№	Излучающий изотоп	E_γ, *Мэв*	I_γ, %	№	Излучающий изотоп	E_γ, *Мэв*	I_γ, %
		^{74}Se (n, γ) ^{75}Se					
1	78	9,91 (2)	0,8	15*	75	4,99	1,0
2	78	9,18 (2)	0,5	16	75	4,56 (2)	0,5
3	78	8,50 (2)	0,3		77		0,5
4	78	8,15 (2)	0,4	17	75	4,40 (2)	0,5
5	75	7,74 (2)	15,7	18*	75	4,22	0,5
6	75	7,44 (2)	1,3	19*	75	4,01	0,8
	77		0,9	20	75	3,51 (2)	1,4
7	75	7,18 (2)	1,7	21	75	3,30 (2)	0,8
	77		0,6	22	75	1,80 (2)	0,6
8	75	7,02 (2)	1,6	23	75	1,37 (2)	2,0
9	78?	6,83 (2)	0,3	24	75	1,32 (2)	1,8
10	77	6,61 (2)	1,3	25	75	1,15 (2)	2,0
11	75	6,44 (2)	1,6	26*	75	1,01	1,3
12	75	6,23 (2)	0,6	27	75	0,92 (2)	3,2
	77		0,3	28	75	0,75 (2)	3,7
13	77	6,03 (2)	1,0	29	75	0,62 (2)	4,1
14*	75	5,59	1,1		78		2,4
	77			30	аннигил.	0,51	
		^{76}Se(n, γ) ^{77}Se					
1	77	7,42 (2)	7,2	17	77	3,23 (2)	1,1
2	77	7,18 (2)	5,0	18	77	3,01 (2)	1,0
3	77	6,88 (3)	0,4	19	77	2,85 (2)	0,9
4	77	6,58 (2)	10,3	20	77	2,75 (2)	0,4
5	77	6,41 (2)	2,5	21	77	2,61 (2)	1,3
6	77	6,24 (2)	2,2	22*	77	2,24	0,5
7	77	6,02 (2)	6,7	23*	77	2,10	0,5
8	77	5,81 (2)	2,6	24	77	1,98 (2)	1,1
9	77	5,60 (2)	5,9	25	77	1,40 (2)	4,7
10*	77	5,10	6,6	26	77	1,29 (2)	3,2
11	77	4,56 (2)	5,2	27	77	1,17 (2)	2,0
12	77	4,40 (3)	1,4	28	77	0,87 (2)	3,2
13	77	4,19 (2)	0,7	29	77	0,80 (2)	1,3
14*	77	3,92	2,2	30	77	0,75 (2)	2,1
15*	77	3,50	2,0	31	77	0,57 (2)	4,4
16	77	3,30 (2)	1,3	32	77	0,52 (2)	4,0
		^{77}Se(n, γ) ^{78}Se					
1	78	10,48 (2)	1,7	18	78	4,08 (2)	1,4
2	78	9,90 (2)	15,1	19*	78	3,85	0,2
3	78	9,16 (2)	7,9	20	78	3,44 (2)	1,3
4	78	8,49 (2)	2,6	21*	78	3,13	1,4
5	78	8,15 (2)	4,9	22	78	2,67 (2)	1,5
6	78	7,70 (2)	2,2	23	78	2,54 (2)	0,9
7	78	7,49 (2)	1,9	24	78	2,28 (2)	1,4
8	78	7,21 (2)	4,7	25	78	2,00 (2)	2,9
9	78	7,05 (2)	2,2	26	78	1,94 (2)	1,9
10*	78	6,82	2,0	27	78	1,71 (2)	4,1
11	78	6,51 (2)	1,1	28	78	1,32 (2)	4,7
12	78	6,27 (2)	1,7	29	78	1,26 (2)	3,4
13*	78	6,07	1,5	30	78	1,17 (2)	2,0
14	78	5,81 (2)	1,8	31	78	0,90 (2)	4,4
15*	78	5,67	1,1	32	78	0,71 (2)	8,2
16	78	4,64 (2)	0,9	33	78	0,62 (2)	49,5
17	78	4,48 (2)	1,2	34	аннигил.	0,51	

ключением уровня 0,28 *Мэв*, квантовые характеристики этих уровней неизвестны. По-видимому, все они *p*-уровни (в [4] угловое распределение протонов не исследовалось). Можно ожидать, что такие переходы существуют также и на неизвестные уровни в районе 2,44, 3,04, 3,47, 3,63 и 3,81 *Мэв*.

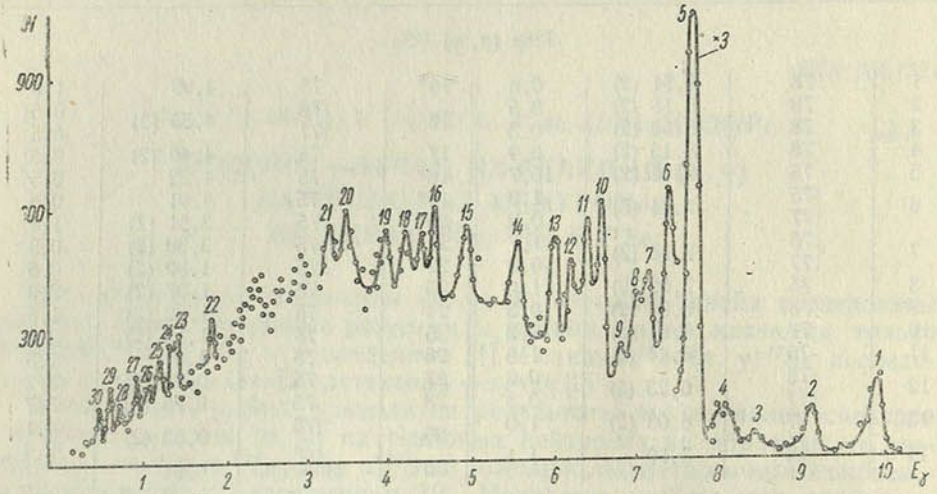


Рис. 1. Спектр γ-лучей из реакции $^{74}Se(n, \gamma)^{75}Se$

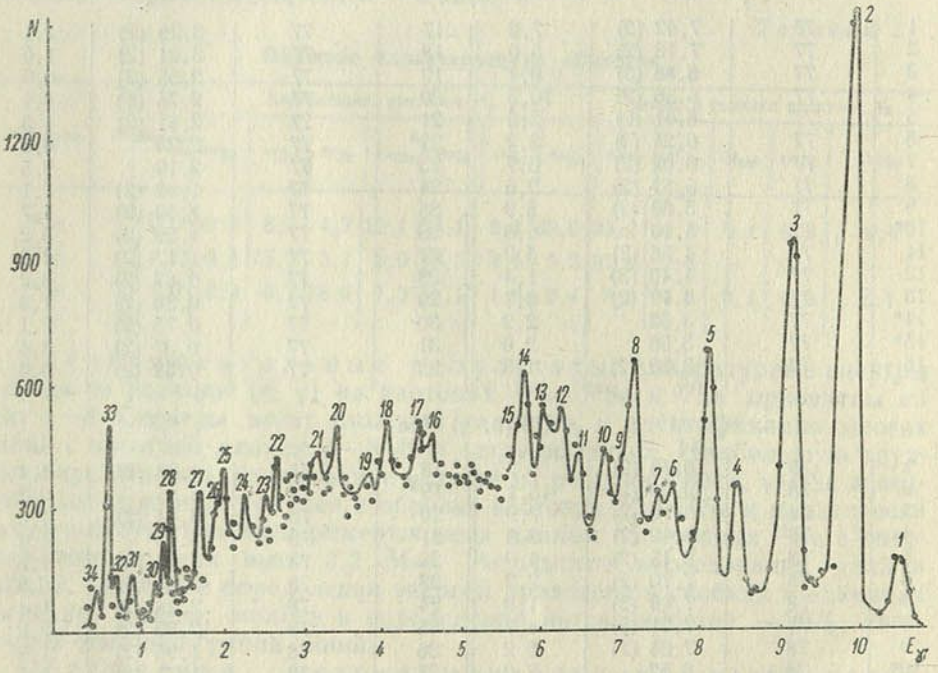


Рис. 2. Спектр γ-лучей из реакции $^{76}Se(n, \gamma)^{77}Se$

Схема распада уровней ^{75}Se с энергией меньше 1,2 *Мэв* известна из данных по радиоактивному распаду ^{75}As и ^{75}Br и приведена в [1]. Поэтому по результатам данной работы составлены только схема переходов ядра ^{75}Se из исходного состояния в реакции (n, γ) и схема распада уровней с энергией больше 1,2 *Мэв* (рис. 4).

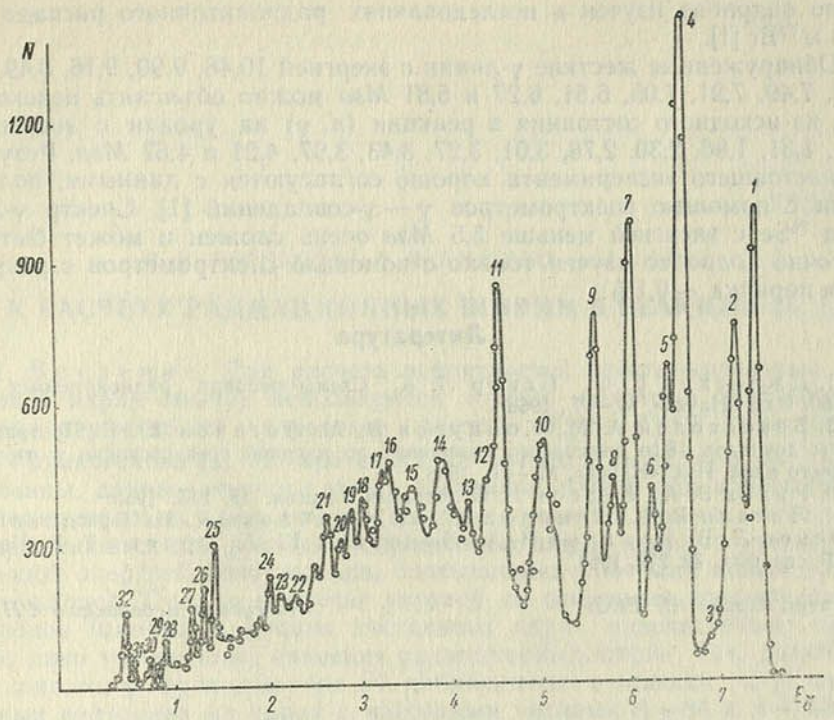


Рис. 3. Спектр γ-лучей из реакции $^{77}Se(n, \gamma)^{78}Se$

В согласии с [1] обнаружены переходы ^{77}Se из исходного состояния в реакции (n, γ) с энергией 7,41, 7,18, 6,88, 6,58, 6,41, 6,24, 6,02, 5,81, 5,60 и 4,56 *Мэв* на уровни с энергией 0, 0,24, 0,52, 0,82, 1,00, 1,18, 1,38, 1,61, 1,83 и 2,85 *Мэв*. Наблюдаемая в районе 5,10 *Мэв* группа линий соответствует переходам ^{77}Se на уровни с энергией 2,20—2,50 *Мэв*. Следует отметить, что в отношении жесткой части спектра ^{77}Se результаты настоящей работы и данные, приведенные в [1], существенно отличаются от результатов измерения с помощью Ge(Li)-детектора γ-лучей [2]. Так, в [2] не обнаружены интенсивные γ-линии с энергией 5,81 и 4,56 *Мэв*. Примерно в два раза занижены интенсивности. В отношении распада уровней, возбужденных в переходах ^{77}Se из исходного состояния, следует отметить прямые переходы с уровней 2,85, 1,38 и 1,18 *Мэв* в основное состояние. Распад уровней с энергией ниже 1 *Мэв* доста-

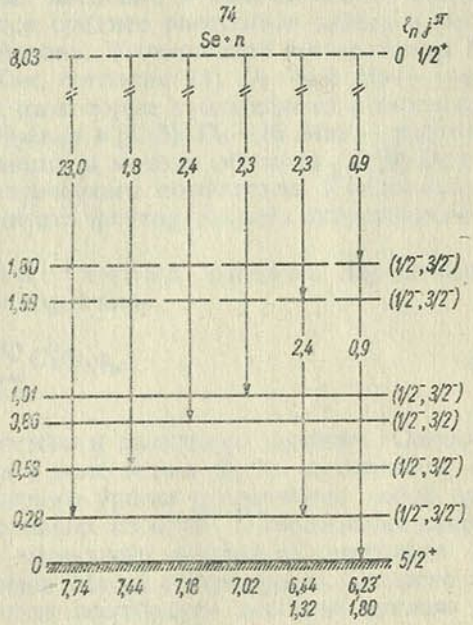


Рис. 4. Схема распада ^{75}Se из захватного состояния в реакции (n, γ)

точно подробно изучен в исследованиях радиоактивного распада ядер ^{77}As и ^{77}Br [1].

Обнаруженные жесткие γ-линии с энергией 10,48, 9,90, 9,16, 8,49, 8,15, 7,70, 7,49, 7,21, 7,05, 6,51, 6,27 и 5,81 *Мэв* можно объяснить переходами ^{78}Se из исходного состояния в реакции (n, γ) на уровни с энергией 0, 0,61, 1,31, 1,96, 2,30, 2,78, 3,01, 3,27, 3,43, 3,97, 4,21 и 4,67 *Мэв*. Результаты настоящего эксперимента хорошо согласуются с данными, полученными с помощью спектрометров γ — γ-совпадений [1]. Спектр γ-лучей ядра ^{78}Se с энергией меньше 5,5 *Мэв* очень сложен и может быть достаточно подробно изучен только с помощью спектрометров с разрешением порядка $\sim 0{,}1\,\%$.

Литература

1. Джелепов Б. С., Пекер Л. К. Схемы распада радиоактивных ядер A<100. Изд. «Наука», М.—Л., 1966.

2. Берестовой А. М., Кондуров И. А., Логинов Ю. Е. Программа и тезисы докладов 18-го ежегодного совещания по ядерной спектроскопии и структуре атомного ядра. Изд. «Наука», М.—Л., 1968.

3. Рудак Э. А., Фирсов Е. И. Атомная энергия, **18**, 285, 1965.

4. Литвин В. Ф., Немилов Ю. А., Жеребцова К. И., Гриднев К. А., Краснов Л. В., Комаров В. А., Лакомкин Ю. А., Орлова Т. В. Изв. АН СССР, сер. физ., **32**, 276, 1968.

Институт физики АН БССР

Поступило в редакцию 4.III 1969

ВЕСЦІ АКАДЭМІІ НАВУК БЕЛАРУСКАЙ ССР № 4 1969
СЕРЫЯ ФІЗІКА-МАТЭМАТЫЧНЫХ НАВУК

УДК 539. 14

В. И. БЕЛОУСОВА, В. А. КНАТЬКО, Э. А. РУДАК

К РАСЧЕТУ РАДИАЦИОННЫХ ШИРИН В РЕАКЦИИ (n, γ)

1. Введение. Для расчета вероятностей электромагнитных переходов в ядрах обычно используются хорошо известные одночастичные оценки вероятностей переходов протона $W_\gamma^{\text{одн}} = \Gamma_\gamma^{\text{одн}}/\hbar$ Вайскопфа [1] или Мошковского [2]. Не претендуя на точность выше, чем по порядку величины, данные оценки служат отправной точкой при интерпретации экспериментальных результатов. Наиболее успешно одночастичные оценки применяются для расчета радиационных ширин ядерных уровней с небольшой энергией возбуждения, описываемых простыми конфигурациями нуклонов. Однако в случае уровней со сложными конфигурациями нуклонов (например, уровни составного ядра) одночастичные оценки дают явно завышенные значения радиационных ширин. Так, радиационные ширины γ-переходов типа $E1$, наблюдаемые в реакции (n, γ) на медленных нейтронах на ядрах с массовыми числами $A \sim 50$ и $A \sim 200$, порядка 0,1 *эв*. Одночастичные же оценки радиационных ширин γ-переходов типа $E1$ с энергией ~ 7 *Мэв* в ядрах указанных выше групп ~ 100 *эв*, т. е. превышают экспериментальные значения примерно в 10^3 раз.

Расхождение теоретических оценок с экспериментальными в данном случае объясняется необходимостью введения в одночастичные оценки множителя D/D_0. Под D понимается среднее расстояние между s-резонансами вблизи энергии связи нейтрона. В отношении же величины D_0 однозначной интерпретации нет. Так, согласно [3], $D_0 \sim 0{,}5$ *Мэв* — расстояние между нижними уровнями, на которые наблюдаются γ-переходы. Совершенно иная трактовка предложена в [4, 5]: $D_0 \sim 15$ *Мэв* — расстояние между одночастичными s-уровнями в модели оболочек. В [6] D_0 полагается равным мнимой части оптического потенциала. Представляет интерес поэтому попытаться рассчитать фактор запрета теоретически и выяснить смысл величин D и D_0.

2. Модификация одночастичных оценок. Представим волновую функцию исходного уровня ψ_i в виде

$$\psi_i = \sum_{\lambda,\mu} C_\lambda^\mu \Phi_\lambda \varphi_\mu, \qquad (1)$$

где Φ_λ и φ_μ — волновые функции остова и валентного нуклона. Одночастичный переход валентного нуклона в поле остова Φ_λ из состояния φ_μ исходного уровня в состояние φ_ν конечного уровня представляет собой процесс, состоящий из двух последовательных событий: 1) образования конфигурации ядра $\Phi_\lambda \varphi_\mu$ и 2) перехода валентного нуклона из состояния φ_μ в состояние φ_ν в течение времени жизни данной конфигурации. Согласно теореме умножения теории вероятности, вероятность перехода нуклона из состояния φ_μ в состояние φ_ν в поле остова Φ_λ $W_\gamma(\mu \to \nu)$ должна быть равна произведению вероятности образования конфигурации $\Phi_\lambda \varphi_\mu$ W_λ^μ на

условную вероятность перехода нуклона из состояния φ_μ в состояние φ_ν в поле остова Φ_λ в течение времени жизни конфигурации $\Phi_\lambda\varphi_\mu$ $P(\gamma/\mu\nu)$:

$$W_\gamma(\mu \to \nu) = W_\lambda^\mu P(\gamma/\mu\nu). \tag{2}$$

Условную вероятность $P(\gamma/\mu\nu)$ можно вычислить по обычной формуле радиоактивного распада

$$P(\gamma/\mu\nu) = 1 - \exp(-\tau_\lambda^\mu W_\gamma^{\text{одн}}), \tag{3}$$

где τ_λ^μ — время жизни конфигурации $\Phi_\lambda\varphi_\mu$. Величина τ_λ^μ должна быть порядка характеристического ядерного времени, и $\tau_\gamma^{\text{одн}} = 1/W_\gamma^{\text{одн}} \gg \tau_\lambda^\mu$. Поэтому можно положить

$$P(\gamma/\mu\nu) = \tau_\lambda^\mu W_\gamma^{\text{одн}}(\mu \to \nu). \tag{4}$$

Вероятность образования конфигурации $\Phi_\lambda\varphi_\mu$ в единицу времени

$$W_\lambda^\mu (сек^{-1}) = 1/T_\lambda^\mu, \tag{5}$$

где T_λ^μ — период появления конфигурации. На основании (4) и (5) парциальная радиационная ширина ядерного уровня $\Gamma_\gamma(\mu \to \nu)$ может быть выражена через одночастичную радиационную ширину $\Gamma_\gamma^{\text{одн}}(\mu \to \nu)$:

$$\Gamma_\gamma(\mu \to \nu) = \tau_\lambda^\mu / T_\lambda^\mu \Gamma_\gamma^{\text{одн}}(\mu \to \nu). \tag{6}$$

Следовательно, фактором запрета является отношение времени жизни конфигурации к периоду ее появления, и можно положить $D = \hbar/T_\lambda^\mu$ и $D_0 = \hbar/\tau_\lambda^\mu$. Период появления конфигурации T_λ^μ зависит от структуры рассматриваемого уровня. В предельном случае одночастичного уровня ($\psi_i = \Phi_\lambda\varphi_\mu$) $\tau_\lambda^\mu \sim T_\lambda^\mu$ и $\Gamma_\gamma(\mu \to \nu) \sim \Gamma^{\text{одн}}(\mu \to \nu)$. Однако для уровней со сложной волновой функцией период T_λ^μ может быть гораздо больше τ_λ^μ, и соответственно $\Gamma_\gamma(\mu \to \nu) \ll \Gamma_\gamma^{\text{одн}}(\mu \to \nu)$.

3. Резонансный захват нейтронов в области каналов. Численные оценки радиационных ширин ядерных уровней по (6), очевидно, также не могут претендовать на точность выше, чем по порядку величины. Тем не менее в ряде случаев знание явного вида фактора запрета вероятности одночастичного перехода может быть полезным. В качестве примера рассмотрим резонансный захват нейтронов в области каналов в реакции (n, γ) на медленных нейтронах. Резонансному захвату нейтронов в области каналов соответствуют переходы типа $E1$ ядра-продукта из исходного состояния невозбужденное ядро-мишень $+s$-нейтрон на конечные p-уровни [7]. Подобный механизм захвата нейтронов наиболее вероятен для ядер с $A \sim 50$ и $A \sim 200$, у которых вблизи основного состояния находятся одночастичные $2p$- и $3p$-уровни. Согласно теоретическим оценкам [3], резонансный захват в области каналов в значительной степени объясняет аномальный характер спектров γ-лучей из реакции (n, γ) на ядрах указанных выше групп: наличие интенсивных линий (интенсивность I_γ до 50—70 γ-квантов на 100 захватов нейтронов) большой энергии, соответствующих переходам типа $E1$ ядра-продукта из захватного состояния на нижние p-уровни. Подобные теоретические оценки, однако, слишком грубы и носят общий характер. Соотношение же (6) позволяет иметь критерий для оценки роли резонансного захвата нейтронов в области каналов, связанный с параметрами нейтронных резонансов.

Период появления исходной конфигурации невозбужденное ядро-мишень + s-нейтрон T_0^s связан с нейтронной шириной резонанса Γ_n [3]:

$$T_0^s = \hbar P(E)/\Gamma_n, \tag{7}$$

где $P(E)$ — коэффициент прохождения нейтрона с энергией E через поверхность ядра. В случае медленных нейтронов $P(E) \sim \sqrt{E}$ и $T_0^s \sim 1/\Gamma_n^0$, где Γ_n^0 — приведенная нейтронная ширина резонанса. Следовательно, парциальные радиационные ширины $\Gamma_\gamma(s \to p)$, соответствующие резонансному захвату нейтронов в области каналов, должны быть пропорциональны приведенным нейтронным ширинам резонансов Γ_n^0, т. е.

$$\Gamma_\gamma(s \to p)/\Gamma_n^0 = \text{const} \tag{8}$$

для резонансов одного и того же ядра.

В качестве примера рассмотрим величины, приведенные в таблице. Отношение Γ_γ/Γ_n^0 сильно меняется от резонанса к резонансу, т. е. в рассматриваемой реакции резонансный захват нейтронов в области каналов, по-видимому, не играет существенной роли. Этот факт не является странным, поскольку, согласно [7], резонансный захват нейтронов в области каналов более вероятен в ядрах, близких к магическим с $A \sim 200$.

Таблица

Сравнение парциальных радиационных ширин перехода типа $E1$ с энергией 4,059 Мэв из реакции $^{238}U(n, \gamma)^{239}U$ с приведенными нейтронными ширинами [9]

Энергия резонанса, эв	Γ_γ, Мэв	Γ_n, Мэв	Γ_γ/Γ_n^0
6,7	0,67	1,48	1,18
10,2	0,19	$1,4 \cdot 10^3$	1000
21,0	0,84	9,0	0,43
36,7	0,09	33,0	0,016
66,2	0,32	23,0	0,11
81,1	0,32	2,1	1,41

Аналогичные сравнения парциальных радиационных ширин с приведенными нейтронными ширинами резонансов для большого числа переходов типа $E1$ из реакции $^{169}Tu(n, \gamma)^{170}Tu$ [10] также не обнаруживают корреляции между указанными величинами. К сожалению, более подробный анализ затруднен из-за недостатка экспериментальных данных относительно парциальных радиационных ширин отдельных резонансов, особенно в области ядер с $A \sim 50$.

Литература

1. Weisskopf V. P. Phys. Rev., 83, 1073, 1951.
2. Moszkowski S. A. Phys. Rev., 89, 474, 1953.
3. Блатт Д., Вайскопф В. Теоретическая ядерная физика. ИЛ, 1954.
4. Levin I. S., Huges D. J. Phys. Rev., 101, 1328, 1956.
5. Bartholomew G. A. Ann. Rev. of hucl. Sci., 11, 259, 1961.
6. Зарецкий Д. Ф. ЖЭТФ, 37, 1084, 1959.
7. Lane A. M., Lynn J. E. Nucl. Phys., 17, 563, 1960.
8. Lane A. M., Lynn J. E. Nucl. Phys., 17, 586, 1960.
9. Chrien R. E., Price D. L., Wasson O. A., Bhat M. R., Lone M. A., Beer M. Phys. lett., 25B, 195, 1967.
10. Beer M., Lone M. A., Chrien R. E., Wasson O. A., Bhat M. R., Muether N. R. Phys. Rev. lett., 20, 340, 1968.

Институт физики
АН БССР

Поступило в редакцию 26.XI 1968

ВЕСЦІ АКАДЭМІІ НАВУК БЕЛАРУСКАЙ ССР № 4 1969
СЕРЫЯ ФІЗІКА-МАТЭМАТЫЧНЫХ НАВУК

УДК 621.378.3

В. А. МАСТОЎНІКАЎ, А. М. РУБІНАЎ

ЭНЕРГЕТЫЧНЫЯ ХАРАКТАРЫСТЫКІ АКГ НА РАСТВОРАХ АРГАНІЧНЫХ ФАРБАВАЛЬНІКАЎ З УЗБУДЖЭННЕМ АД ІМПУЛЬСНЫХ ЛЯМП

Аптычная генерацыя ў растворах арганічных фарбавальнікаў пры напампаванні ад імпульсных лямп упершыню атрымана ў [1, 2]. У цяперашні час больш падрабязна вывучаны часавыя і спектральныя ўласцівасці такіх генератараў [3]. Дадзеная работа змяшчае вынікі эксперыментальных даследаванняў іх энергетычных характарыстык.

Даследаванні праводзіліся з лазерам, аналагічным апісанаму ў [3]. Раствор фарбавальніка змяшчаўся ў кварцавую цыліндрычную кювету даўжынёй 10 *см*, унутраным дыяметрам 0,5 *см*. Для напампавання выкарыстоўвалі імпульсныя лямпы тыпу ИФП-1200, якія змяшчаліся разам з кюветай у асвятляльнік з пасярэбранай фальгі. Рэзанатар быў створан вынаснымі люстрамі. Сілкаванне імпульсных лямп рабілася ад кандэнсатара ёмістасцю 50 *мкф*. Працягласць імпульсу напампавання па паўшырыні складала 60 *мксек*.

У рабоце праводзіліся вымярэнні парогу і энергіі генерацыі. Энергія вымяралася з дапамогай балометра тыпу «пацучынае гняздо». Адчувальнасць балометра складала 0,002 *дж*, хібнасць вымярэнняў не перавышала 30%.

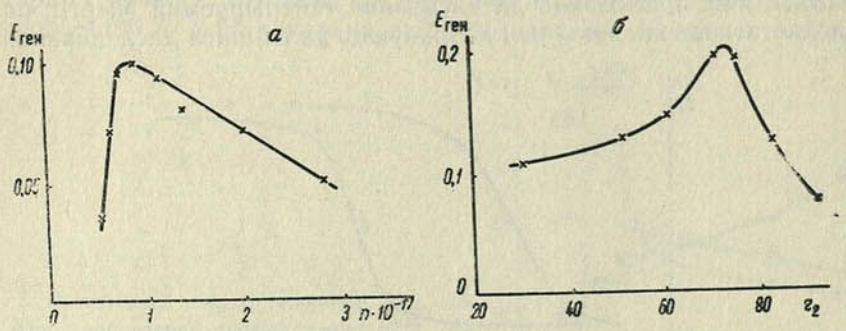
Пяройдзем да абмеркавання эксперыментальных даных.

З рыс. 1,*а* відаць, што залежнасць $E_{ген}$ ад n мае ярка выражаны максімум, які адпавядае $n=10^{17}$ *см*$^{-3}$. Любая змена канцэнтрацыі адносна гэтага значэння прыводзіць да зніжэння генерыруемай энергіі, прычым хуткасць зніжэння асабліва вялікая пры памяншэнні канцэнтрацыі. Назіраемы выгляд залежнасці звязан з умовамі паглынання фарбавальнікам радыяцыі напампавання. Пры малых канцэнтрацыях у кювеце паглынаецца толькі невялікая частка ўзбуджаючага святла, што і вызначае малую энергію генерыруемага выпраменьвання. Павелічэнне канцэнтрацыі малекул фарбавальніка прыводзіць да хуткага ўзрастання долі паглынутай энергіі. Пры канцэнтрацыі $n\simeq 1{,}2\cdot 10^{17}$ *см*$^{-3}$ каэфіцыент паглынання ў максімуме паласы складае 15 *см*$^{-1}$. Просты разлік паказвае, што ў гэтым выпадку ў кювеце дыяметрам 0,5 *см* паглынаецца 35% падаючага патоку. Далейшае павышэнне канцэнтрацыі працягвае павялічваць долю паглынутага напампавання, аднак пры гэтым (у выніку пагаршэння ўмоў прасочвання выпраменьвання) істотна памяншаецца шчыльнасць узбуджаючага святла ўнутры кюветы. Гэта змяншае перавышэнне напампавання над парогам і ў канчатковым выніку прыводзіць да зніжэння энергіі генерацыі.

Аптымальнае значэнне канцэнтрацыі малекул фарбавальніка залежыць ад памераў кюветы і тыпу рэчыва. Больш універсальным трэба лічыць здабытак каэфіцыента паглынання раствору ў максімуме паласы на радыус кюветы ($k_{макс}\, r$) [4]. У гэтым выпадку аптымальная велічыня $k_{макс}\, r$ складае $\sim 3{,}2$.

Як і ў выпадку лазераў іншых тыпаў, для генератара на фарбавальніку існуе аптымальнае значэнне каэфіцыента адлюстравання прапускаючага люстра (рыс. 1,*б*). У дадзеным выпадку яно роўна 0,72, што адпавядае каэфіцыенту карысных страт рэзанатара 0,016 $см^{-1}$.

Ацэнку каэфіцыента шкодных страт ρ можна зрабіць, пабудаваўшы



Рыс. 1. Залежнасць энергіі генерацыі $E_{ген}$, *дж* раствору радаміну 6 *G* у этылавым спірце ад канцэнтрацыі актыўных часцінак *n*, $см^{-3}$ (*а*) і ад каэфіцыента адбіцця выходнага люстра r_2, % пры $r_1=98$

залежнасць $k_r/E_{ген}$ ад k_r. Энергія генерацыі фарбавальніка прыблізна можа быць выражана звычайнай формулай [5]

$$E_{ген} = l_s h\nu_{ген} n_1 B_{13} U_{нап} \Delta t \left(1 - \frac{1}{x}\right) \frac{k_r}{\rho + k_r}, \qquad (1)$$

дзе l — даўжыня; s — плошча папярочнага сячэння генерыруючай зоны; $h\nu_{ген}$ — энергія генерыруемага кванта; n_1 — заселенасць асноўнага стану (звычайна $n_1 = n$); $B_{13}U_{нап}$ — імавернасць паглынання напампавання; x — лік парогаў; Δt — працягласць генерацыі. Абазначым $h\nu_{ген} n_1 B_{13} U_{нап} \Delta t = 1/a$, атрымаем

$$\frac{k_r}{E_{ген}} = \frac{a(\rho + k_r)}{(1 - 1/x)}. \qquad (2)$$

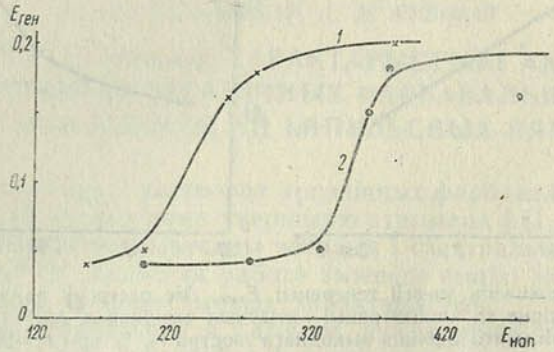
Калі не звяртаць увагі на змяненне Δt пры змяненні k_r, то для малых k_r, калі парог малы і велічыня x значна больш за 1, будзем мець лінейную залежнасць $k_r/E_{ген}$ ад k_r:

$$\frac{k_r}{E_{ген}} = a(\rho + k_r). \qquad (3)$$

Пабудаваўшы такую залежнасць па рэзультатах эксперыментальных вымярэнняў, няцяжка вызначыць параметр страт ρ. Велічыня страт, знойдзеная такім спосабам па даных рыс. 1,*б*, роўная 0,025 $см^{-1}$. Трэба, аднак, заўважыць, што гэта ацэнка прадстаўляецца вельмі грубай і характарызуе нейкае сярэдняе значэнне каэфіцыента страт ρ. У сапраўднасці страты генератара могуць істотна змяняцца як у працэсе кожнага імпульсу выпраменьвання, так і пры змяненні k_r.

Значную цікавасць прадстаўляе залежнасць энергіі генерацыі ад энергіі напампавання. На рыс. 2 абедзве крывыя маюць прыкладна аднолькавы выгляд і толькі ссунуты адна адносна другой па шкале энергій. Гэты зрух абумоўлены адрозненнем парогаў генерацыі для выкарыстоўваемых растваральнікаў. З рысунка відаць, што хуткасць павелічэння энергіі генерацыі істотна залежыць ад напампавання. Спачатку яна невялікая, а потым хутка ўзрастае. Такія паводзіны абумоўлены пашырэн-

нем генерыруючай вобласці рэчыва і ўзрастаннем працягласці выпраменьвання з напампаваннем. Пры далейшым павелічэнні энергіі ўзбуджэння энергія генерацыі насычаецца. У залежнасці ад растваральніка насычэнне адбываецца пры розных энергіях напампавання, аднак энергія генерацыі ў вобласці насычэння слаба залежыць ад растваральніка. Прычыны, якія прыводзяць да насычэння генерыруемай энергіі, пакуль што недастаткова высветлены і патрабуюць далейшага даследавання. Ва



Рыс. 2. Залежнасць энергіі генерацыі $E_{ген}$, *дж* раствору радаміну 6 *G* у метылавым (*1*) і этылавым (*2*) спіртах ад энергіі напампавання $E_{нап}$, *дж* пры нязменнай працягласці ўзбуджаючага імпульсу

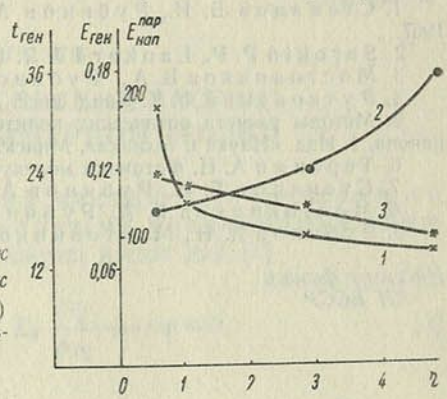
ўсякім выпадку, як паказвае аналіз, такое насычэнне не можа быць выклікана трыплет-трыплетным паглынаннем генерыруемай радыяцыі малекуламі фарбавальніка.

З уплывам трыплетнага стану, відаць, звязана залежнасць парогу і энергіі генерацыі ад вязкасці растваральніка. Вядома, што з павелічэннем вязкасці асяроддзя выхад флуарэсцэнцыі і час жыцця метастабільнага ўзроўню малекул фарбавальнікаў узрастаюць [6]. Пры гэтым можа змяняцца таксама імавернасць інтэрканверсіі з лабільнага на метастабільны ўзровень. Павелічэнне квантавага выхаду люмінесцэнцыі павінна прыводзіць да паніжэння парогу і павелічэння энергіі генерацыі, узрастанне ж часу жыцця метастабільнага ўзроўню або імавернасці інтэрканверсіі — да адваротнага эфекту, паколькі яно паляпшае ўмовы для накаплення часцінак у метастабільным стане [7].

Такім чынам, калі накапленне малекул на трыплетным узроўні істотна ўплывае на ўласцівасці генератара, то з павелічэннем вязкасці парог будзе ўзрастаць, а энергія генерацыі падаць. Калі ж гэты ўплыў нязначны, то павінна назірацца адваротная з'ява. Уплыў вязкасці растваральніка на парог, энергію і працягласць генерацыі паказан на рыс. 3. У якасці растваральніка выкарыстоўваліся разнастайныя спірты: метылавы ($\eta=0{,}55$ *спз*), этылавы ($\eta=1{,}08$ *спз*), ізапрапілавы ($\eta=2{,}86$ *спз*), ізабутылавы ($\eta=4{,}7$ *спз*) і ізаамілавы ($\eta=4{,}8$ *спз*). З рысунка відаць, што з павелічэннем вязкасці парог генерацыі расце, а энергія падае. Гэта сведчыць аб істотным ўплыве часцінак у трыплетным стане на энергетыку разглядаемага лазера. Пры каэфіцыенце вязкасці $\eta=20$ *спз* (этыленгліколь) узбудзіць генерацыю радаміну 6*G* выпраменьваннем імпульсных лямп не ўдалося. Яшчэ менш прыгодны для гэтай мэты такі растваральнік, як гліцэрын ($\eta=900$ *спз*). У той жа час трэба адзначыць, што пры ўзбуджэнні фарбавальнікаў вельмі кароткімі светлавымі імпульсамі (монаімпульсамі цвёрдацельных лазераў) вязкія растваральнікі (гліцэрын, ізаамілавы спірт) найбольш эфектыўныя [8]. Гэта абумоўлена тым,

што за каротки час ($\sim 10^{-8}$ *сек*) не паспявае адбыцца істотнага накаплення часцінак на метастабільным узроўні энергіі, і, значыць, лепшымі з'яўляюцца растваральнікі, якія забяспечваюць найбольшы квантавы выхад люмінесцэнцыі рэчыва.

Прыведзеныя вышэй даныя адносяцца да генератара, які не мае селектарных прылад. Шырыня спектра выпраменьвання складае ў гэтым выпадку ~ 100 Å. У [9] паказана, што істотнага звужэння спектра (да 1—2 Å) можна дабіцца, калі ўнесці ў рэзанатар генератара інтэрферометр Фабры—Перо з малой базай. Паварот інтэрферометра Фабры—Перо адносна восі лазера дазваляе плаўна змяшчаць лінію генерацыі ў межах $\sim$ ~ 200 Å.



Рыс. 3. Залежнасць энергіі генерацыі $E_{ген}$, *дж* (*1*), парогавай энергіі напампавання $E_{нап}^{пар}$, *дж* (*2*) і працягласці генерацыі $t_{ген}$, *мксек* (*3*) раствору радаміну 6 *G* ад вязкасці растваральніка η, *спз*

Разгледзім уплыў такога інтэрферометра на энергію выпраменьвання лазера. У дадзенай рабоце выкарыстоўваўся інтэрферометр з базай ~ 10 *мк* і каэфіцыентамі адбіцця пласцін 60%. Інтэрферометр устаўляўся паміж кюветай і люстрай з каэфіцыентам адбіцця 98%. Было заўважана, што ўплыў інтэрферометра на энергію генерацыі істотна залежыць ад яго базы. Устаўленне інтэрферометра ў рэзанатар не прыводзіць да істотнага змянення энергіі генерацыі пры такіх базах, калі ў становішчы інтэрферометра, блізкім да нулявога, максімум яго прапускания супадае з максімумам узмацнення рэчыва (нулявы стан адпавядае перпендыкулярнай настройцы пласцін інтэрферометра адносна восі лазера). У гэтым выпадку ўнясенне інтэрферометра і паварот яго ў межах 8° адносна нулявога становішча (адпавядаючы змяненню даўжыні хвалі генерыруемага выпраменьвання на $\Delta\lambda = 100$ Å) прыводзяць да памяншэння першапачатковай энергіі генерацыі не больш чым на 35%. Пры далейшым павароце інтэрферометра энергія падае значна хутчэй.

Калі змяніць базу на долі даўжыні хвалі (што лёгка дасягаецца пры змяненнях ступені прыціскання пласцін), то ў нулявым стане інтэрферометра максімум яго прапускання зрушыцца на край паласы ўзмацнення. У гэтым выпадку генерацыя будзе адбывацца на краю паласы ўзмацнення, у выніку чаго энергія выпраменьвання істотна памяншаецца (на парадак і больш). Пры павароце інтэрферометра адносна восі рэзанатара максімум прапускання набліжаецца да максімуму паласы ўзмацнення і энергія генерацыі ўзрастае. У нашым выпадку максімум выходзячага патоку дасягаўся пры павароце інтэрферометра на 15°. Аднак і ў гэтым стане энергія генерыруемага выпраменьвання была амаль утрая меншая, чым пры адсутнасці інтэрферометра. Гэта звязана з тым, што для павернутага інтэрферометра страты выпраменьвання істотна ўзрастаюць. У той жа час трэба адзначыць, што пры такой базе пашыраецца інтэрвал перастройкі даўжыні хвалі генерацыі. Калі ў пер-

шым варыянце перастройка магла здзяйсняцца ў межах $\Delta\lambda \sim 100$ Å, то ў дадзеным выпадку гэты інтэрвал павялічыўся да 230 Å.

У заключэнне аўтары выражаюць глыбокую падзяку акадэміку Б. І. Сцяпанаву за пастаянную ўвагу да работы.

Литература

1. Степанов Б. И., Рубинов А. Н., Мостовников В. А. ЖПС, 7, 116, 1967.
2. Sorokin P. P., Lankard J. R. I. B. M. J. Res and Developm., 11, 148, 1967.
3. Мостовников В. А., Рубинов А. Н. ДАН БССР, № 6, 1969.
4. Рутковский Ф. К. Канд. дисс. Минск, 1965.
5. Методы расчета оптических квантовых генераторов. Под редакцией Б. И. Степанова, 1. Изд. «Наука и техника», Минск, 1966.
6. Теренин А. Н. Фотоника молекул красителей. Л., 1967.
7. Степанов Б. И., Рубинов А. Н. УФН, 95, № 5, 1968.
8. Мостовников В. А., Рубинов А. Н., Лойко М. М. ЖПС, 9, 776, 1968.
9. Рубинов А. Н., Мостовников В. А. ДАН БССР, 12, 602, 1968.

Институт физики
АН БССР

Поступило в редакцию 9.I 1969

ВЕСЦІ АКАДЭМІІ НАВУК БЕЛАРУСКАЙ ССР № 4 1969
СЕРЫЯ ФІЗІКА-МАТЭМАТЫЧНЫХ НАВУК

УДК 530.145

А. И. БЕДРИЦКИЙ

О КУЛОНОВСКОМ РАССЕЯНИИ ЧАСТИЦ СО СПИНОМ 1/2 В ПЯТИМЕРНОЙ ТЕОРИИ

§ 1. Классификация состояний частиц и античастиц со спином 1/2, описываемых пятимерными уравнениями слияния. Уравнения слияния любого числа частиц имеют вид [1]

$$\sum_{n=1}^{3} L_n \frac{\partial \psi}{\partial x_n} + L_4 \frac{\partial \psi}{\partial x_0} + L_5 \frac{\partial \psi}{\partial x_5} + i\varkappa\psi = 0, \tag{1}$$

$$\psi = \frac{B}{L^{3/2} l_5^{1/2}} \exp i \left(\sum_{n=1}^{3} k_n x_n - k_0 x_0 + k_5 x_5 \right), \quad x_0 = ct, \; k_0 = \frac{E}{\hbar c},$$

$\mathbf{k} = \frac{\mathbf{p}}{\hbar}$; $k_5 = \frac{2\pi}{l_5} \nu$; B — столбцевая матрица, L^3 — объем основного параллелепипеда; x_5 — внутренний параметр с периодом l_5, характеризующий массу покоя частицы, которая принимает значения

$$m_0 = \varepsilon \frac{\hbar}{c} \sqrt{\varkappa^2 + k_5^2}, \quad \varepsilon = \pm 1, \; \nu = 0, \; \pm 1, \; \pm 2, \; \ldots$$

Для случая слияния двух одинаковых частиц со спином 1/2 матрицы восьмого порядка L_n и матрица A билинейной эрмитовой формы даны в работе [1]. При слиянии более двух одинаковых частиц со спином 1/2 нераспадающиеся уравнения (1) содержат матрицы L_4 и L_5, ни одна из которых не является эрмитовской. Если же в силу произвола в порядке расположения базисных векторов в пространстве представлений добиться эрмитовости одной из матриц L_4 или L_5, то уравнения (1) становятся распадающимися. Неудовлетворительными с физической точки зрения являются также и уравнения, возникающие при распаде уравнений (1) при $\varkappa = 0$, так как при выборе лагранжиана в форме (24) [1] плотность энергии частиц со спином 1/2, описываемых такими уравнениями, равна нулю. Учитывая изложенные обстоятельства, примем для описания частиц со спином 1/2 уравнения (1) с матрицами L_n восьмого порядка. Обозначая $x_4 = ix_0$, $k_4 = ik_0$, $\gamma_4 = L_4$, $\gamma_l = -iL_l (l = 1, 2, 3, 5)$, запишем уравнения (1) в виде

$$\sum_{n=1}^{5} \gamma_n \frac{\partial \psi}{\partial x_n} + \varkappa\psi = 0. \tag{2}$$

Если по аналогии с четырехмерным случаем ввести дираковски-сопряженную функцию $\bar{\psi} = \psi^* \gamma_4$, то можно получить уравнение

$$\sum_{n=1}^{5} \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial x_n} \gamma_n - \varkappa \psi = 0, \tag{3}$$

сопряженное относительно (2). Как и в четырехмерном случае, оба уравнения (2) и (3) получаются из одного и того же лагранжиана

$$L = \frac{1}{2i} \sum_{n=1}^{5} \left\{ \left(\bar{\psi}, \Lambda_n \frac{\partial \psi}{\partial x_n} \right) - \left(\frac{\partial \bar{\psi}}{\partial x_n} \Lambda_n, \psi \right) \right\} + \varkappa (\bar{\psi}, \psi). \tag{4}$$

Легко можно было бы установить, что алгебра матриц γ_n с условиями коммутации

$$\gamma_n \gamma_k + \gamma_k \gamma_n = 2\delta_{nk}. \tag{5}$$

определяется 32 линейно-независимыми матрицами: единичной матрицей $I = \gamma_n \gamma_n$, 5 матрицами γ_n, 10 матрицами $\Gamma_{nk} = \gamma_n \gamma_k$ $(n < k)$, 10 матрицами $\Gamma_{nkl} = \gamma_n \gamma_k \gamma_l$ $(n < k < l)$, 5 матрицами $\Gamma_{nklm} = \gamma_n \gamma_k \gamma_l \gamma_m$ $(n < k < l < m)$ и одной матрицей $\gamma_6 = \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 \gamma_4 \gamma_5$.

Уравнения (1) — (3) по сравнению с уравнениями Дирака имеют некоторые особенности, связанные с преобразованиями типа C, P, T. Эти уравнения ковариантны относительно группы $T_a''(5)$ [1], т. е. допускают преобразование инверсии P_1, которое сводится к отражению пространственных координат совместно с x_5, но не допускают отражений одних лишь пространственных координат. Опираясь на алгебру матриц γ_n, можно было бы также показать, что уравнения (1)—(3) не допускают преобразования зарядового сопряжения по всем пяти компонентам тока. Имеется возможность ввести лишь зарядовое сопряжение C_1, которое сводится к изменению знака четырех компонент тока j_n $(n = 1, 2, 3, 4)$ при постоянстве знака у j_5.

Преобразования различных инверсий и зарядового сопряжения для уравнений (1)—(3) имеют следующий вид:

$$C_1\psi(\mathbf{r}, x_5, t) = \gamma_3\gamma_1\bar{\psi}(\mathbf{r}, x_5, t), \quad P_2\psi(\mathbf{r}, x_5, t) = \gamma_2\gamma_5\bar{\psi}(-\mathbf{r}, x_5, t),$$

$$T_1\psi(\mathbf{r}, x_5, t) = \gamma_1\gamma_3\gamma_4\gamma_5\bar{\psi}(\mathbf{r}, x_5, -t), \quad U_3\psi(\mathbf{r}, x_5, t) = \gamma_2\gamma_4\bar{\psi}(-\mathbf{r}, -x_5, -t),$$

$$P_1\psi(\mathbf{r}, x_5, t) = \gamma_4\psi(-\mathbf{r}, -x_5, t), \quad T_2\psi(\mathbf{r}, x_5, t) = \gamma_1\gamma_2\gamma_3\psi(\mathbf{r}, -x_5, -t), \tag{6}$$

$$U_1\psi(\mathbf{r}, x_5, t) = \gamma_5\psi(-\mathbf{r}, x_5, -t), \quad U_2\psi(\mathbf{r}, x_5, t) = \gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4\psi(-\mathbf{r}, x_5, -t).$$

Кроме того, двойные знаки L_n $(n=1, 2, 3, 4)$ допускают еще и преобразование $U_4\psi(\mathbf{r}, x_5, t) = \psi(-\mathbf{r}, x_5, -t)$.

Формулы (6) дают возможность записать следующие соотношения, аналогичные преобразованию CPT четырехмерной квантовой теории поля:

$$C_1P_1T_1\psi(\mathbf{r}, x_5, t) = C_1P_2T_2\psi(\mathbf{r}, x_5, t) = \gamma_5\psi(-\mathbf{r}, -x_5, -t), \tag{7}$$

$$C_1U_3\psi(\mathbf{r}, x_5, t) = \gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4\psi(-\mathbf{r}, -x_5, -t), \tag{8}$$

$$C_1P_1T_1U_1\psi(\mathbf{r}, x_5, t) = C_1P_2T_1U_3\psi(\mathbf{r}, x_5, t) =$$

$$= C_1P_1T_2U_3\psi(\mathbf{r}, x_5, t) = C_1P_2T_2U_1\psi(\mathbf{r}, x_5, t) = \psi(\mathbf{r}, -x_5, t), \tag{9}$$

$$C_1P_2T_2U_2\psi(\mathbf{r}, x_5, t) = C_1P_1T_1U_2\psi(\mathbf{r}, x_5, t) = \gamma_6\psi(\mathbf{r}, -x_5, t). \tag{10}$$

При этом

$$(C_1P_1T_1)^2 = (C_1P_2T_2)^2 = (C_1U_3)^2 = (C_1P_1T_1U_1)^2 = (C_1P_1T_1U_2)^2 =$$

$$= (C_1P_2T_2U_1)^2 = (C_1P_2T_1U_3)^2 = (C_1P_2T_2U_2)^2 = (C_1P_1T_2U_3)^2 = 1. \tag{11}$$

Преобразования $C_1P_1T_1$, $C_1P_2T_2$ и C_1U_3 при переходе к четырехмерному случаю редуцируют к преобразованию CPT. Несмотря на эквивалентность преобразований $C_1P_1T_1$ и $C_1P_2T_2$, их физическое содержание должно быть различным в силу различия в структуре. То же самое относится и к преобразованиям $C_1P_1T_1U_1$, $C_1P_2T_1U_3$, $C_1P_2T_2U_1$ и $C_1P_1T_2U_3$, а также $C_1P_1T_1U_2$ и $C_1P_2T_2U_2$.

Вопрос о совместимости преобразований (7)—(10) с экспериментом остается открытым.

В [1] показано, что на основании метода проективных операторов, развитого Ф. И. Федоровым [2], можно выделить из волновой функции уравнений слияния состояния, относящиеся к различным значениям проекций спина на импульс частицы. Указанный метод проективных операторов дает возможность провести полную классификацию состояний, описываемых уравнениями (1)—(3).

Минимальное уравнение для матрицы оператора $\hat{p} = \sum_{n=1}^{5} ik_n\gamma_n$ имеет вид

$$\hat{p}^2 - \varkappa^2 = 0 \quad (k_0^2 = \mathbf{k}^2 + \varkappa^2 + k_5^2).$$

Массовые состояния частицы ($\varepsilon = +1$ — частица, $\varepsilon = -1$ — античастица) можно выделить с помощью проективного оператора $\alpha_\varepsilon = \frac{1}{2\varkappa}(-\varepsilon\hat{p} + \varkappa)$.

В системе покоя ($\mathbf{k} = 0$) матрица α_ε является собственным вектором оператора D [1]. Проективными операторами проекций спина на импульс частицы являются $\beta_s = (sS + 1/2)$, где $S = \frac{i}{|\mathbf{k}|}(k_1I_{23} + k_2I_{31} + k_3I_{12})$, $s = +1$ соответствует проекции спина $+\hbar/2$, $s = -1$ — проекции $-\hbar/2$. Операторы α_ε и β_s коммутируют с матрицей γ_6, имеющей собственные значения $\eta = \pm 1$. Поэтому при заданном массовом и спиновом состоянии частица в состоянии ψ будет характеризоваться еще одним внутренним параметром состояния η. Физический смысл параметра η может быть раскрыт лишь при исследовании поведения частицы в различных физических условиях.

Проективный оператор для выделения состояний с различными η запишется в виде

$$\rho_\eta = \frac{1}{2}(\eta\gamma_6 + 1).$$

Таким образом, для получения вектора состояния $\psi_{\varepsilon s\eta}$, отвечающего за данной энергии (εk_0), импульсу ($\mathbf{k}$), массе покоя (ε, $\varkappa$, k_5), проекции спина (s) и параметру η, достаточно перемножить соответствующие проективные операторы:

$$\tau_{\varepsilon s\eta} = \alpha_\varepsilon\beta_s\rho_\eta, \qquad (12)$$

$$\sum_\varepsilon \alpha_\varepsilon = 1, \quad \sum_s \beta_s = 1, \quad \sum_\eta \rho_\eta = 1.$$

Оператор $\tau_{\varepsilon s\eta}$ — также проективный.

Учитывая далее, что матрица $\tau_{\varepsilon s\eta}$ есть простая диада, а также соотношения $\tau_{\varepsilon s\eta}A = A\tau^+_{\varepsilon s\eta}$, $\hat{p}A = A\hat{p}^+$, $A^2 = 1$, $A^+ = A$*), можно полностью воспользоваться результатами работы [2] и прийти к формуле

*) Так как уравнения (1)—(3) в данном случае реализуются с помощью двух одинаковых неприводимых представлений обычной четырехмерной полной группы Лоренца, матрицу A, данную в [1], можно заменить на $A = \gamma_4$, при этом выполняются все необходимые соотношения (19), (20) и (25) работы [1].

$$\tau_{\varepsilon s\eta} = \pm\, \psi_{\varepsilon s\eta} \cdot \bar{\psi}_{\varepsilon s\eta}, \tag{13}$$

которая будет соответствовать нормировке по полной энергии $W + W'$ ($W = -T_4^4$, $W' = -T_5^5$):

$$\bar{\psi}_{\varepsilon s\eta}\psi_{\varepsilon s\eta} \equiv \psi^*_{\varepsilon s\eta}\gamma_4\psi_{\varepsilon s\eta} = \pm 1. \tag{14}$$

В нашем случае полная плотность энергии индефинитна ($|W| > |W'|$), а плотность заряда j_4 и полная плотность заряда $(j_4 + j_5)$ положительно определенны $\left(j_4 > |j_5|,\ j_5 \sim \dfrac{\varepsilon k_5}{\varkappa^2 + k_5^2}\right)$, поэтому будем применять нормировку по заряду

$$\bar{\psi}\gamma_4\psi \equiv \psi^*\psi = 1 \tag{15}$$

и нормировку по полному заряду

$$\bar{\psi}(\gamma_4 + L_5)\psi = 1. \tag{16}$$

Используя в дальнейшем метод проективных операторов, можно получить связь между различными нормировками и на основании ее прийти к формуле

$$\psi_{\varepsilon s\eta} \cdot \bar{\psi}_{\varepsilon s\eta} = \frac{\varkappa}{k_0}\, \tau_{\varepsilon s\eta} \tag{17}$$

для нормировки (15) и соотношению

$$\psi_{\varepsilon s\eta} \cdot \bar{\psi}_{\varepsilon s\eta} = \frac{\varkappa}{k_0 + k_5}\, \tau_{\varepsilon s\eta} \tag{18}$$

для нормировки (16).

Для вероятности перехода частицы со спином 1/2, описываемой уравнениями (1) — (3), из состояния $\psi'_{\varepsilon' s' \eta'}$ в состояние $\psi_{\varepsilon s\eta}$ в результате взаимодействия R имеет место соотношение, аналогичное соотношению работы [2]:

$$w = C_0 |\bar{\psi}'_{\varepsilon' s' \eta'} R \psi_{\varepsilon s\eta}|^2 = C_0 (\bar{R}\alpha_\varepsilon \beta_s \rho_\eta R \alpha_{\varepsilon'} \beta_{s'} \rho_{\eta'}) c, \tag{19}$$

где

$$\bar{R} = \gamma_4 R^+ \gamma_4.$$

§ 2. Упругое рассеяние. Первое приближение метода теории возмущений в задаче по упругому рассеянию частиц и античастиц со спином 1/2 тяжелым кулоновским центром с зарядом Ze на основании уравнений (1) — (3) может быть получено по аналогии с получением первого приближения на основании уравнений Дирака ([3], §§ 32, 36).

В математических расчетах будут иметь место лишь дополнительные интегрирование по пятой координате и суммирование по пятому волновому вектору k'_5. Так как массовое состояние рассеиваемой частицы не изменяется, то $k'_5 = k_5$. Направляя ось oz по импульсу падающей частицы ($k_1 = k_2 = 0$, $k_3 = k$) и совмещая координатную плоскость xoz с направлением импульса рассеянной частицы ($k'_1 = k \sin\theta$, $k'_2 = 0$, $k'_3 = k\cos\theta$), получаем после усреднения по s и суммирования по s' следующую формулу для дифференциального эффективного сечения рассеяния:

$$d\sigma_{1,2} = \frac{Z^2 l^4 E^2}{4c^4 p^4 \sin^4 \dfrac{\theta}{2}}\, Q_{1,2} d\Omega. \tag{20}$$

Сечение $d\sigma_1$ относится к нормировке по заряду (15), а $d\sigma_2$ — к нормировке по полному заряду (16).

На основании (17) — (19) для начального состояния η и конечного η' имеем

$$Q_1 = \frac{1+\eta\eta'}{4k_0^2}(k_0^2 + k_5^2 + k^2\cos\theta + \eta\eta'\varepsilon\varepsilon'\varkappa^2), \tag{21}$$

$$Q_2 = Q_1 \frac{k_0^2}{(k_0+k_5)^2}. \tag{22}$$

Из этих соотношений видно, что эффективные сечения для частиц ($\varepsilon'=\varepsilon=1$) и античастиц ($\varepsilon'=\varepsilon=-1$) совпадают. При $\eta'=\eta$ сечение $d\sigma_1$ совпадает с борновским приближением, а $d\sigma_2$ отличается от $d\sigma_1$ постоянным множителем и

$$\partial\sigma_2 = \frac{Z^2l^4m_0^2\left(1+\dfrac{p^2}{m_0^2c^2}\cos^2\dfrac{\theta}{2}\right)}{4p^4\left(1+\dfrac{k_5}{k_0}\right)\sin^4\dfrac{\theta}{2}}\,d\Omega. \tag{23}$$

При $\eta'=-\eta$ сечения $d\sigma_1 = d\sigma_2 = 0$.

Из выражения $m_0 = \varepsilon\dfrac{\hbar}{c}\sqrt{\varkappa^2+k_5^2}$ видим, что масса покоя частицы состоит из двух не аддитивных частей. Часть m_0, связанную с постоянной $\varkappa$, мы интерпретируем как некоторую «затравочную» часть массы, а часть, связанную с k_s, — как полевую часть массы.

Формула (23) указывает, что при заданной m_0 и заданном импульсе p (при этом определена и энергия $E=\varepsilon\sqrt{m_0^2c^4+c^2p^2}$) сечение $d\sigma_2$ зависит от вклада в массу полевой части. В крайнем релятивистском случае и при $k_5\to 0$ сечение $d\sigma_2\to d\sigma_1$. В нерелятивистском случае $d\sigma_2$ приводит к формуле Резерфорда только при $|k_5|\ll\varkappa$.

Расчет эффективных сечений $d\sigma_1$ для различных спиновых переходов $s\to s'$ на основании уравнений (1)—(3) ведет к тем же результатам, что и на основании дираковских уравнений. Усреднение по η и суммирование по η' дает прежние формулы (20) — (22).

Следует обратить внимание на одну деталь. При расчете эффективного сечения упругого рассеяния на основании уравнений Дирака имеется и отличная от нуля вероятность перехода $\varepsilon\to(-\varepsilon)$. Такие переходы как не имеющие физического смысла в данной задаче не рассматриваются. Но в принципе теория упругого рассеяния, опирающаяся на дираковские уравнения, такие переходы запретить не может. Теория упругого рассеяния, опирающаяся на уравнения (1)—(3), запрещает и такие переходы, если $\eta'\neq\eta$.

В заключение считаю своим приятным долгом поблагодарить проф. Ф. И. Федорова за интерес к работе, обсуждение результатов и полезные советы.

Литература

1. Бедрицкий А. И. ЖЭТФ, **55**, 1367, 1968.
2. Федоров Ф. И. ЖЭТФ, **35**, 493, 1958.
3. Соколов А., Иваненко Д. Квантовая теория поля. ГИТТЛ, М., 1952.

Витебский государственный педагогический институт им. С. М. Кирова

Поступило в редакцию 19.II 1969

ВЕСЦІ АКАДЭМІІ НАВУК БЕЛАРУСКАЙ ССР № 4 1969
СЕРЫЯ ФІЗІКА-МАТЭМАТЫЧНЫХ НАВУК

УДК 546.241 : 546.47

Н. Н. КОРЕНЬ, Н. Н. СИРОТА

НАРАЩИВАНИЕ ТЕЛЛУРИДА ЦИНКА НА СЕЛЕНИДЕ ЦИНКА МЕТОДОМ РЕАКЦИОННОЙ ДИФФУЗИИ

В предыдущих работах [1—3] изучались процессы образования пленок селенида и теллурида цинка на поверхности монокристаллов цинка при взаимодействии его с парами селена или теллура. При этом было показано, что пленки растут, как правило, по параболическому закону. Это свидетельствует о том, что рост их лимитируется скоростью диффузионных процессов в образующихся продуктах реакции. С помощью микроскопических исследований было установлено, что в общем процессе образования полупроводниковых пленок селенида и теллурида цинка преобладающую роль играет диффузия цинка через эти соединения.

Целью настоящей работы было получение двухслойных структур на цинке (например, теллурида цинка на селениде цинка и наоборот) методом реакционной диффузии. Эти исследования несомненно представляют значительный практический интерес, поскольку селенид цинка обладает *n*-типом проводимости, а теллурид цинка — *p*-типом проводимости.

Опыты по наращиванию двухслойных структур на цинке проводились следующим образом. Тщательно промытый монокристалл цинка помещался в одном конце эвакуированной до 10^{-4} *мм* рт. ст. стеклянной ампулы, кусочек химически чистого селена в другом ее конце. Затем ампула помещалась в электрическую печь с заданной температурой (380 °С) аналогично тому, как это проделывалось нами ранее [1—3]. По истечению определенного времени, достаточного для образования химического соединения измеримой толщины, образец извлекался из ампулы с селеном и помещался в другую ампулу, где в качестве реагента был взят теллур. Ампула опять откачивалась, отпаивалась и подвергалась нагреву определенное время при той же температуре. В этих условиях, как показали опыты, на поверхности селенида цинка образуется слой теллурида цинка, толщина которого увеличивается с увеличением продолжительности отжига.

Состав и структура образующихся диффузионных слоев исследовались микроскопическим и рентгенографическим методами.

На рис. 1, *а* представлена рентгенограмма, полученная от поверхности образца цинка, прогретого в парах селена в течение 2 *час* при температуре 380 °С. Рентгеносъемку проводили на ионизационной установке УРС-50И на медном излучении с никелевым фильтром. Как видно из рисунка, все дифракционные линии совпадают с линиями кубической структуры селенида цинка. Микротвердость этого диффузионного слоя, измеренная на приборе ПМТ-3 при нагрузке 20 *г*, составляет в среднем 135 *кг/мм*^{2}. Это значение хорошо совпадает с литературными данны-

ми [5]. Рентгенограмма, приведенная на рис. 1,*б*, получена от поверхности образца, подвергавшегося, кроме прогрева в парах селена в течение 2 *час*, дополнительному диффузионному отжигу в парах теллура в течение 1,5 *час* при температуре 380 °С. На этой рентгенограмме наряду с линиями от слоя селенида цинка, которые значительно ослаблены, отчетливо видны линии от кристаллической решетки теллурида цинка [4]. На рис. 1, *в* приведена рентгенограмма от того же образца после 8-часового диффузионного отжига в парах теллура. Здесь линий от селенида

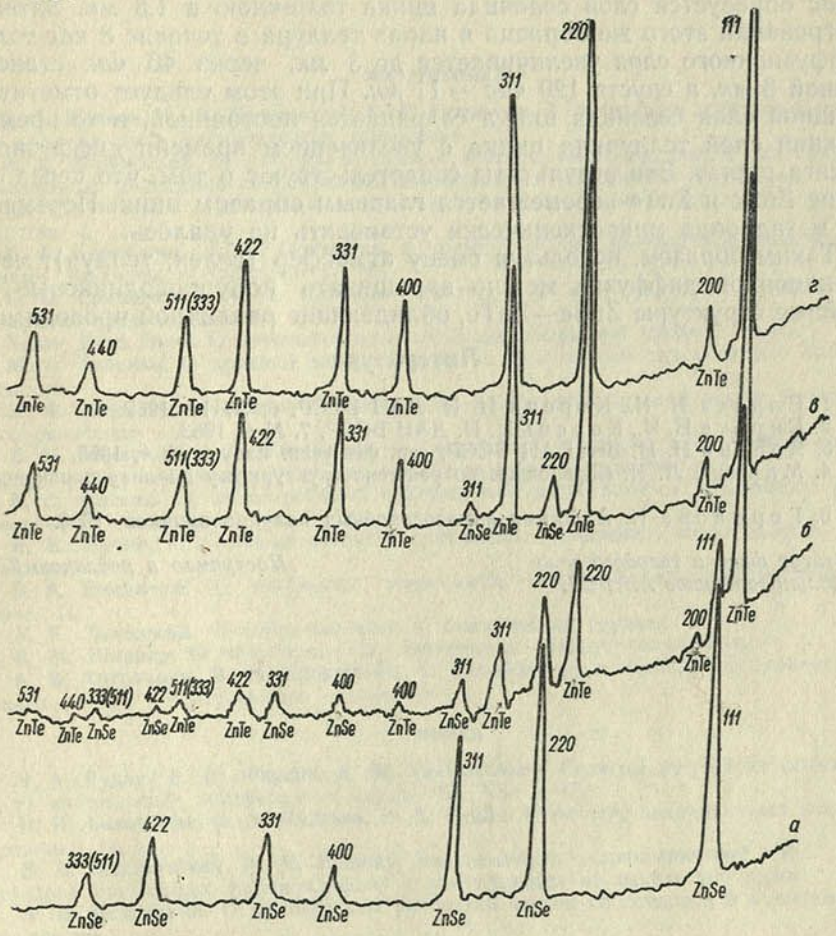


Рис. 1. Рентгенограммы поверхностей диффузионных слоев:

а — селенида цинка; *б*, *в* и *г* — теллурида цинка, образовавшегося на слое селенида цинка в течение 1, 5, 8 и 40 *час* соответственно

цинка почти совсем не видно. Это свидетельствует о том, что происходит дальнейшее увеличение толщины слоя теллурида цинка. Спустя 40 *час* диффузионного отжига в парах теллура линий от нижележащего слоя селенида цинка не наблюдается (рис. 1, *г*). Все имеющиеся дифракционные линии идентичны линиям от теллурида цинка с кубической кристаллической решеткой [2, 4]. Микротвердость этого слоя составляет в среднем 95 *кг/мм*^{2}, что совпадает с литературными данными [5].

Кроме рентгенографического исследования полученных диффузионных слоев были проведены микроскопические исследования этих слоев на микроскопе МИМ-8М. На нетравленных шлифах под микроскопом

отчетливо видно два слоя. Один слой, более светлый, соответствует селениду цинка, второй — теллуриду цинка. Особенно хорошо выявляются два слоя в поляризованном свете; они имеют различную окраску. Общая толщина диффузионного слоя увеличивается со временем взаимодействия по параболическому закону. Об этом свидетельствуют данные по кинетике роста диффузионного слоя теллурида цинка на слое селенида цинка при температуре 380 °С.

Так, при прогреве цинка в парах селена при этой температуре за 2 *час* образуется слой селенида цинка толщиною в 1,5 *мк*. Затем при прогревании этого же образца в парах теллура в течение 8 *час* толщина диффузионного слоя увеличивается до 3 *мк*, через 40 *час* становится равной 6 *мк*, а спустя 120 *час* — 11 *мк*. При этом следует отметить, что толщина слоя селенида цинка сохраняется постоянной, в то время как верхний слой теллурида цинка с увеличением времени диффузионного отжига растет. Эти результаты свидетельствуют о том, что через соединение ZnSe и ZnTe перемещается главным образом цинк. Перемещение же металлоида микроскопически установить не удалось.

Таким образом, используя смену атмосфер (селен, теллур), методом реакционной диффузии можно наращивать полупроводниковые двухслойные структуры ZnSe—ZnTe, обладающие различной проводимостью.

Литература

1. Сирота Н. Н., Корень Н. Н. ДАН БССР, **6**, № 12, 1962.
2. Сирота Н. Н., Корень Н. Н. ДАН БССР, **7**, № 6, 1963.
3. Корень Н. Н. Весці АН БССР, сер. фіз.-тэхн. навук, № 4, 1963.
4. Миркин Л. И. Справочник по рентгеноструктурному анализу поликристаллов, 1961.
5. Горюнова Н. А. Химия алмазоподобных полупроводников, 1963.

Институт физики твердого тела и полупроводников АН БССР

Поступило в редакцию 27.I 1969

ЗМЕСТ

МАТЭМАТЫКА

Е. А. Иванов, А. В. Мошинский, Б. С. Гельфонд. К дифракции электромагнитных волн на двух эллиптических цилиндрах 5

А. В. Мошинский. К рассеянию плоской электромагнитной волны на двух параллельных радиально неоднородных анизотропных плазменных цилиндрах . . 12

Ю. И. Маковоз. Поперечники некоторых функциональных классов в пространстве L 19

Е. В. Коробенок, А. Ф. Орещенко. К геометрии поверхностей с изотропными линиями кривизны в пространстве $^1E_3$ 29

С. П. Ерашевская, А. А. Пальцев. О вычислении сфероидальных функций и их первых производных на ЭВМ. II 37

Хоанг Динь Зунг. О неустойчивости обратной смешанной краевой задачи . . 47

М. Э. Толочко. О краевой задаче Римана с бесконечным индексом для полуплоскости 52

Н. Ф. Наумович. Исключительные случаи обобщенной краевой задачи Римана с сопряжением 60

В. Н. Абрашин, Г. Ф. Горбачева. О сходимости некоторых схем метода прямых при решении краевых задач для уравнения параболического типа . . . 66

А. С. Моткин. О числе решений сингулярного интегрального уравнения на бесконечном контуре 72

Н. Н. Лучко. О системах особых интегральных уравнений типа свертки с сопряжением 78

В. А. Емеличев. О локальных минимумах в одной многоэкстремальной задаче. II 87

А. Е. Залесский. О сопряженности в классических группах 93

В. М. Ширяев. О полугруппе пар внутренних сдвигов полугруппы . . . 99

А. Б. Антоневич, В. И. Бронштейн. О нахождении минимального диагностического набора контрольных элементов 108

ФІЗІКА

Э. А. Рудак, Е. И. Фирсов, А. М. Хильманович. Спектры γ-лучей из реакции (n, γ) на тепловых нейтронах на ядрах ^{74}Se, ^{76}Se и ^{77}Se 116

В. И. Белоусова, В. А. Кнатько, Э. А. Рудак. К расчету радиационных ширин в реакции (n, γ) 121

В. А. Мастоўнікаў, А. М. Рубінаў. Энергетычныя характарыстыкі АКГ на растворах арганічных фарбавальнікаў з узбуджэннем ад імпульсных лямп . . 124

А. И. Бедрицкий. О кулоновском рассеянии частиц со спином 1/2 в пятимерной теории 129

КАРОТКІЯ ПАВЕДАМЛЕННІ

Н. Н. Корень, Н. Н. Сирота. Наращивание теллурида цинка на селениде цинка методом реакционной диффузии 134

СОДЕРЖАНИЕ

МАТЕМАТИКА

Е. А. Иванов, А. М. Мошинский, Б. С. Гельфонд. К дифракции электромагнитных волн на двух эллиптических цилиндрах 5
А. В. Мошинский. К рассеянию плоской электромагнитной волны на двух параллельных радиально неоднородных анизотропных плазменных цилиндрах . . 12
Ю. И. Маковоз. Поперечники некоторых функциональных классов в пространстве L 19
Е. В. Коробенок, А .Ф. Орещенко. К геометрии поверхностей с изотропными линиями кривизны в пространстве $^1E_3$ 29
С. П. Ерашевская, А. А. Пальцев. О вычислении сфероидальных функций и их первых производных на ЭВМ. II 37
Хоанг Динь Зунг. О неустойчивости обратной смешанной краевой задачи . . 47
М. Э. Толочко. О краевой задаче Римана с бесконечным индексом для полуплоскости 52
Н. Ф. Наумович. Исключительные случаи обобщенной краевой задачи Римана с сопряжением 60
В. Н. Абрашин, Г. Ф. Горбачева. О сходимости некоторых схем метода прямых при решении краевых задач для уравнения параболического типа . . . 66
А. С. Моткин. О числе решений сингулярного интегрального уравнения на бесконечном контуре 72
Н. Н. Лучко. О системах особых интегральных уравнений типа свертки с сопряжением 78
В. А. Емеличев. О локальных минимумах в одной многоэкстремальной задаче. II 87
А. Е. Залесский. О сопряженности в классических группах 93
В. М. Ширяев. О полугруппе пар внутренних сдвигов полугруппы . . . 99
А. Б. Антоневич, В. И. Бронштейн. О нахождении минимального диагностического набора контрольных элементов 108

ФИЗИКА

Э. А. Рудак, Е. И. Фирсов, А. М. Хильманович. Спектры γ-лучей из реакции (n, γ) на тепловых нейтронах на ядрах ^{74}Se, ^{76}Se и ^{77}Se 116
В. И. Белоусова, В. А. Кнатько, Э. А. Рудак. К расчету радиационных ширин в реакции (n, γ) 121
В. А. Мостовников, А. Н. Рубинов. Энергетические характеристики ОКГ на растворах органических красителей с возбуждением от импульсных ламп . . . 124
А. И. Бедрицкий. О кулоновском рассеянии частиц со спином 1/2 в пятимерной теории 129

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

Н. Н. Корень, Н. Н. Сирота. Наращивание теллурида цинка на селениде цинка методом реакционной диффузии 134

АТ 11146. Здана ў набор 12/VI-69 г. Падпісана да друку 1/VIII-69 г. Фармат 70×108¹/₁₆. Друк. арк. 9,0. Ум. друк. арк. 12,6. Уч.-выд. арк. 12,4. Выд. зак. 973. Друк. зак. 446. Цана 60 кап.

Друкарня імя Францыска Скарыны выдавецтва «Навука і тэхніка» АН БССР і Дзяржкамітэта СМ БССР па друку. Мінск, Ленінскі праспект, 68

РЕФЕРАТЫ

УДК 517.9:535.4

К дифракции электромагнитных волн на двух эллиптических цилиндрах. Иванов Е. А., Мошинский А. В., Гельфонд Б. С. «Весці Акадэміі навук БССР», серыя фізіка-матэматычных навук. 1969 г., № 4, 5—11.

В статье, являющейся продолжением предыдущей работы авторов (Весці АН БССР, сер. фіз.-мат. навук, 1969 г., № 3), приведены и обсуждены графики функций, характеризующих электромагнитное поле, рассеянное на двух эллиптических цилиндрах. Графики построены на основе данных, вычисленных с помощью ЭВМ «Минск-2». Из анализа графиков сделаны выводы о влиянии конфигурации дифрагирующей системы на вид диаграмм направленности переизлученного поля.

Иллюстраций 5. Библиографий 2.

УДК 517.9:535.4

К рассеянию плоской электромагнитной волны на двух параллельных радиально неоднородных анизотропных плазменных цилиндрах. Мошинский А. В. «Весці Акадэміі навук БССР», серыя фізіка-матэматычных навук. 1969 г., № 4, 12—18.

С помощью теорем сложения для цилиндрических волновых финкций решается задача о рассеянии плоской ТЕ-волны системой из двух анизотропных радиально неоднородных плазменных цилиндров. Решение задачи, учитывающее эффект взаимодействия плазменных цилиндров, ищется в виде разложения по волновым функциям кругового цилиндра, для неизвестных коэффициентов которого получена бесконечная система линейных уравнений, разрешимая методом редукции. Даются выражения для переизлученного поля в волновой зоне и радиолокационного поперечного сечения рассеяния.

Иллюстраций 1. Библиографий 23.

УДК 513.88:513.83

Поперечники некоторых функциональных классов в пространстве *L*. Маковоз Ю. И. «Весці Акадэміі навук БССР», серыя фізіка-матэматычных навук. 1969 г., № 4, 19—28.

Изучаются n-ые поперечники (по А. Н Колмогорову) нескольких функциональных классов в пространстве L (в принятых обычно обозначениях $\tilde{W}_L^r$, W_L^r, A_L^σ, Γ_L^ρ, $\tilde{W}^r$, H_L^α). Для классов $\tilde{W}_L^r$, A_L^σ, Γ_L^ρ указаны точные значения поперечников, для W_L^r — асимптотически точные, для $\tilde{W}^r H_L^\alpha$ даны оценки, точные в смысле порядка при $n \to \infty$.

Библиографий 6.

УДК 513.73

К геометрии поверхностей с изотропными линиями кривизны в пространстве $^1E_3$. Коробенок Е. В., Орещенко А. Ф. «Весці Акадэміі навук БССР», серыя фізіка-матэматычных навук. 1969 г., № 4, 29—36.

Изучаются поверхности трехмерного евклидового пространства индефинитной метрики (— + +) с семейством двойных линий кривизны, которые оказываются асимптотическими, изотропными и сверх того прямыми. Эти поверхности являются линейчатыми с изотропными образующими. Стрикционная линия у них несобственная. Нормали вдоль каждой образующей образуют собственную связку. Рассматриваются торсы, а также поверхности, допускающие двучленную группу движений (экспоненциальные цилиндры). Применяется циклический репер; дано геометрическое истолкование нормировки базисных изотропных векторов и всех инвариантов.

Библиографий 3.

УДК 517.942+518

О вычислении сфероидальных функций и их первых производных на ЭВМ. Ерашевская С. П., Пальцев А. А. «Весці Акадэміі навук БССР», серыя фізіка-матэматычных навук. 1969 г., № 4, 37—46.

Даются алгоритмы вычисления на ЭВМ значений угловых и радиальных сфероидальных функций и их первых производных.

Для сплюснутых радиальных функций первого и второго рода и их первых производных приводятся небольшие таблицы их значений.

Таблиц 2. Библиографий 6.

УДК 514.544

О неустойчивости обратной смешанной краевой задачи. Хоанг Динь Зунг. «Весці Акадэміі навук БССР», серыя фізіка-матэматычных навук. 1969 г., № 4, 47—51.

Рассматриваются случаи, когда устойчивость обратной смешанной краевой задачи нарушается. Доказано, что если производные функций, задаваемых на неизвестной части искомого контура, одновременно обращаются в нуль, то эта задача может оказаться неустойчивой. Рассматривается также пример неустойчивости обратной смешанной краевой задачи теории фильтрации.

Иллюстраций 2. Библиографий 7.

УДК 517.948.32

О краевой задаче Римана с бесконечным индексом для полуплоскости. Толочко М. Э. «Весці Акадэміі навук БССР», серыя фізіка-матэматычных навук. 1969 г., № 4, 52—59.

Производится обобщение однородной краевой задачи Римана с бесконечным индексом степенного порядка, изученной Н. В. Говоровым (РЖ Мат., 1964, 10 Б 274), на случай, когда краевое условие задано на всей вещественной оси. Кроме того, расширяется класс рассматриваемых коэффициентов на функции, не удовлетворяющие в бесконечности условию Гельдера. Устанавливаются условия на коэффициент, при которых задача имеет бесконечное множество линейно независимых ограниченных решений.

Библиографий 5.

УДК 517.948.32:517.544

Исключительные случаи обобщенной краевой задачи Римана с сопряжением. Наумович Н. Ф. «Весці Акадэміі навук БССР», серыя фізіка-матэматычных навук. 1969 г., № 4, 60—65.

Решается краевая задача с сопряжением в случае, когда ее коэффициенты $a(t)$ и $b(t)$ могут обращаться в нуль или бесконечность целого порядка. Решение обобщается на класс функций, допускающих для одной из его составляющих обращение в бесконечность неинтегрируемого порядка.

Иллюстраций 1. Библиографий 6.

УДК 518:517(944)947

О сходимости некоторых схем метода прямых при решении краевых задач для уравнения параболического типа. Абрашин В. Н., Горбачева Г. Ф. «Весці Акадэміі навук БССР», серыя фізіка-матэматычных навук. 1969 г., № 4, 66—71.

Для некоторых краевых задач и для уравнения

$$k(x,\ t)\frac{\partial u}{\partial t} = c(x,\ t)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + c_1(x,\ t)\frac{\partial u}{\partial x} + d(x,\ t)u + f(x,\ t), \qquad (1)$$

на прямых $t = t_n$, $n = 1, 2, \ldots, N$, $N = [T/h]$ рассматривается двухслойная схема метода прямых повышенной точности. При достаточной гладкости решения задачи (1) доказывается равномерная сходимость и дается оценка погрешности метода. Скорость сходимости имеет порядок h^2. Указывается на возможность получения аналогичных результатов для других краевых задач.

Библиографий 4.

УДК 517.948.32

О числе решений сингулярного интегрального уравнения на бесконечном контуре. Моткин А. С. «Весці Акадэміі навук БССР», серыя фізіка-матэматычных навук. 1969 г., № 4, 72—77.

В работе дается точный подсчет числа решений уравнения

$$a(t)\varphi(t) + \frac{b(t)}{\pi i}\int_{\Gamma}\frac{\varphi(t)}{\tau - t}\,d\tau = f(t) \qquad (1)$$

на замкнутом контуре, простирающемся в бесконечность.

Пусть индекс уравнения (1) есть $\varkappa$. В отличие от случая конечного контура число решений однородного уравнения может оказаться $\varkappa+1$. Если однородное уравнение имеет $\varkappa$ решений, то неоднородное безусловно разрешимо, а если же у него $\varkappa+1$ решений, то неоднородное разрешимо лишь при выполнении дополнительного условия и его решение содержит линейно $\varkappa+1$ параметров.

Библиографий 3.

УДК 517.948.32

О системах особых интегральных уравнений типа свертки с сопряжением. Лучко Н. Н. «Весці Акадэміі навук БССР», серыя фізіка-матэматычных навук. 1969 г., № 4, 78—86.

Рассматривается система n интегральных уравнений типа свертки, содержащая наряду с искомой вектор-функцией $\varphi(x)$ ее сопряженное значение. Устанавливается равносильность системы некоторой системе $2n$ интегральных уравнений с ядром Коши. Определяются индекс и условия разрешимости. Характеристическая система сводится к равносильной ей краевой задаче для $2n$ пар функций. Получены некоторые условия, при которых система может быть решена в замкнутой форме.

Библиографий 10.

УДК 519.95

О локальных минимумах в одной многоэкстремальной задаче. Емеличев В. А. «Весці Акадэміі навук БССР», серыя фізіка-матэматычных навук. 1969 г., № 4, 87—92.

Статья является продолжением работы автора, опубликованной в журнале «Весці АН БССР», серыя фізіка-матэматычных навук, № 1, 1969. Библиографий 4.

УДК 519.48

О сопряженности в классических группах. Залесский А. Е. «Весці Акадэміі навук БССР», серыя фізіка-матэматычных навук, 1969 г., № 4, 93—98.

Приводится полное изложение результатов, анонсированных в статье автора в ДАН БССР, 12, № 2, 1968.
Библиографий 5.

УДК 519.4

О полугруппе пар внутренних сдвигов полугруппы. Ширяев В. М. «Весці Акадэміі навук БССР», серыя фізіка-матэматычных навук. 1969 г., № 4, 99—107.

Пусть N —полугруппа, $\pi_N \subset (N \times N) \times (N \times N)$—эквивалентное замыкание следующего отношения π'_N:

$$\pi'_N = \{((x, y), (u, v)) \mid x, y, u, v \in N$$

$$(\exists g \in N)(u = xg)(y = gv)\}.$$

Для того чтобы полугруппа N была изоморфна полугруппе пар внутренних сдвигов некоторой полугруппы A, необходимо и достаточно, чтобы для π_N выполнялось условие К2:

$$\text{К2. } (\forall x, y \in N)\left((x, y) \in \varepsilon_{\zeta_N} \setminus \Delta_N \Rightarrow\right.$$

$$\left. \Rightarrow (\exists q \in N \setminus NN)\left(((q, x), (q, y)) \overline{\in} \pi_N \vee ((x, q), (y, q)) \overline{\in} \pi_N\right)\right.$$

(Здесь ε_{ζ_N} — ядро естественного гомоморфизма N на полугруппу пар ее внутренних сдвигов F_N).

Пусть ε — эквивалентность на $N \times N$, удовлетворяющая условиям К2 и К1:

$$\text{К1. } \pi_N \subset \varepsilon \subset \rho^N = \{((x, y), (u, v)) \mid x, y, u, v \in N, xy = uv\}.$$

Пусть $\{X_x\}_{x \in N}$ — семейство попарно непересекающихся множеств, таких, что $X_x = \varnothing \Rightarrow x \in NN$.

Тогда тройка $(N, \varepsilon, \{X_x\}_{x \in N})$ называется типа R. Каждой тройке типа R соответствует определенным образом построенная полугруппа A, такая, что F_A изоморфна N. Для каждой полугруппы, напротив, найдется тройка типа R, которой она соответствует.

Две полугруппы изоморфны тогда и только тогда, когда тройки, которым они соответствуют, эквивалентны. Тройка $(N_1, \varepsilon_1, \{X_2^{(1)}\}_{x \in N_1})$ называется эквивалентной тройке $(N_2, E_2, \{X_x^{(2)}\}_{x \in N_2})$, если существует изоморфизм τ N_1 на N_2, такой, что выполняются условия

I1. $\tau(\varepsilon_1) = \varepsilon_2$.

I2. Для каждого $x \in N_1$ $X_x^{(1)}$ равномощно $X_{\tau(x)}^{(2)}$.

Библиографий 6.

УДК 519.8

О нахождении минимального диагностического набора контрольных элементов. Антоневич А. Б., Бронштейн В. И. «Весці Акадэміі навук БССР», серыя фізіка-матэматычных навук. 1969 г., № 4, 108—115.

Задача о нахождении минимального набора контрольных элементов устройства сводится к задаче целочисленного линейного программирования. Так как методы решения целочисленных задач сходятся медленно, дается метод приближенного решения первоначальной задачи. Метод состоит в построении последовательности наборов, которая стремится к решению исходной задачи. Дается несколько видов функции предпочтения для выбора очередного члена последовательности. Приводится пример, в котором из $m=14$ контрольных элементов за 4 шага строится диагностический набор из 4 элементов. Обсуждаются возможности обобщения задачи и применения этого метода.

Таблиц 5. Библиографий 6.

УДК 539.172.4

Спектры γ-лучей из реакции (n, γ) на тепловых нейтронах на ядрах ^{74}Se, ^{76}Se и ^{77}Se. Рудак Э. А., Фирсов Е. И., Хильманович А. М. «Весці Акадэміі навук БССР», серыя фізіка-матэматычных навук. 1969 г., № 4, 116—120.

Спектры γ-лучей из реакции (n, γ) на тепловых нейтронах на ядрах ^{74}Se, ^{76}Se и ^{77}Se исследовались с помощью магнитного комптоновского спектрометра с разрешением 2% на реакторе ИРТ АН БССР.

Таблиц 2. Иллюстраций 4. Библиографий 4.

УДК 539.14

К расчету радиационных ширин в реакции (n, γ). Белоусова В. И., Кнатько В. А., Рудак Э. А. «Весці Акадэміі навук БССР», серыя фізіка-матэматычных навук. 1969 г., № 4, 121—123.

Рассчитывается фактор запрета вероятностей одночастичных γ-переходов в реакции (n, γ).

Таблиц 1. Библиографий 10.

УДК 621.378.3

Энергетические характеристики ОКГ на растворах органических красителей с возбуждением от импульсных ламп. Мостовников В. А., Рубинов А. Н. «Весці Акадэміі навук БССР», серыя фізіка-матэматычных навук. 1969 г., № 4, 124—128.

Определена зависимость энергии генерации ОКГ на красителях при возбуждении импульсными лампами от концентрации активных молекул, коэффициента отражения выходного зеркала, вязкости растворителя, энергии накачки. Исследовано влияние на энергию излучения лазера интерферометра Фабри—Перо, используемого для сужения и перестройки спектра генерации.

Иллюстраций 3. Библиографий 9.

УДК 530.145

О кулоновском рассеянии частиц со спином 1/2 в пятимерной теории. Бедрицкий А. И. «Весці Акадэміі навук БССР», серыя фізіка-матэматычных навук. 1969 г., № 4, 129—133.

Исследуются пятимерные уравнения слияния для частиц со спином 1/2. Обосновываются уравнения слияния двух частиц. Рассмотрена алгебра матриц восьмого порядка таких уравнений и преобразования инверсий.

Установлено 9 преобразований типа CPT, три из которых при переходе к четырехмерному случаю редуцируют к CPT.

Проведена классификация состояний частиц и античастиц, описываемых указанными пятимерными уравнениями слияния, методом проективных операторов. В первом приближении метода теории возмущений решена задача по упругому рассеянию частиц и античастиц со спином 1/2 тяжелым кулоновским центром. При этом масса покоя частиц рассматривается состоящей из двух не аддитивных частей — «затравочной» и полевой, зависящей от пятой координаты. Нормировка по заряду приводит к борновскому приближению, нормировка по полному заряду дает в формуле Борна множитель, зависящий от полевой части массы. Рассмотрена зависимость эффективного сечения от введенного нового внутреннего параметра частиц.

Библиографий 3.

УДК 546.241:546.47

Наращивание теллурида цинка на селениде цинка методом реакционной диффузии. Корень Н. Н., Сирота Н. Н. «Весці Акадэміі навук БССР», серыя фізіка-матэматычных навук. 1969 г., № 4, 134—136.

С помощью рентгенографического и микроскопического исследований установлено, что методом реакционной диффузии сначала селена (теллура) из паровой фазы в цинк, а затем теллура (селена) на цинке наращиваются двухслойные структуры ZnSe — ZnTe, обладающие различным типом проводимости.

Иллюстраций 1. Библиографий 5.



ПРАВИЛА ДЛЯ АВТОРОВ

1. Статьи должны быть написаны на машинке через два интервала на одной стороне листа и представляться в двух экземплярах.

2. Формулы и буквенные обозначения должны быть аккуратно вписаны от руки чернилами. Для формул, выделенных в отдельную строку, следует оставлять достаточные пробелы в тексте. Греческие буквы должны быть обведены красным карандашом. Буквы, вписанные от руки, в формулах и в тексте должны подчеркиваться простым карандашом: прописные — двумя черточками снизу (напр., $\underline{\underline{S}}$), строчные — двумя черточками сверху (напр., $\overline{\overline{s}}$). Следует различать буквы *O* (прописную), *o* (строчную) и 0 (нуль), для чего буквы *O* и *o* подчеркивать двумя черточками, а нуль отмечать квадратной скобкой снизу ($\underline{\underline{O}}$, $\overline{\overline{o}}$, $\underline{0}$). Следует также различать буквы I и J (йот), для чего I писать, как римскую единицу, подчеркивая ее двумя черточками снизу. Векторы подчеркивать чернилами одной чертой снизу. Математические символы cos, sin, lg и др., набираемые прямым шрифтом, и химические символы элементов (H, N, Cl, Fe и т. д.) отмечаются простым карандашом квадратной скобкой снизу ($\underline{\sin}$, $\underline{\lg}$, $\underline{N}$, $\underline{Cl}$). Показатели степени и индексы, а также надстрочные знаки отмечаются дугой $\smile$ (для верхнего индекса) или $\frown$ (для нижнего).

3. В связи с введением с 1 января 1963 г. Международной системы единиц измерения (СИ) размерность всех величин, принятых в статьях, должна соответствовать указанной системе единиц измерения.

4. Цитируемая в статье литература должна даваться автором не в виде подстрочных сносок, а общим списком в конце статьи с обозначением ссылки в тексте порядковой цифрой в квадратных скобках. Список литературы должен быть оформлен следующим образом:

а) для книг: фамилия и инициалы автора, полное название книги, номер тома, место и год издания;

б) для журнальных статей: фамилия и инициалы автора, название журнала, номер тома (подчеркнуть), номер выпуска, страница и год.

Ссылки на неопубликованные работы не допускаются.

5. Рисунки должны быть выполнены на белой бумаге тушью размером 15×20 см; надписи на рисунках не делать. Все обозначения указывать в тексте подрисуночных подписей. К статье прилагается список с номерами рисунков и текстом подрисуночных подписей. В тексте на полях обязательно указывается место для рисунков и таблиц.

Таблицы печатаются на отдельных листах и прилагаются в конце статьи. Фотографии должны иметь контрастное изображение и быть отпечатаны на хорошей бумаге размером не менее 9×12 см. На обороте рисунков должны быть указаны фамилия автора, название статьи и номер рисунка.

6. В случае представления двух или более статей одновременно необходимо указывать желательный порядок их помещения.

7. Авторы должны избегать повторения одних и тех же данных в таблицах, графиках и в тексте статьи.

8. К статье обязательно прилагается 2 экз. реферата.

9. Корректуры статей авторам, как правило, не посылаются. В случае посылки корректуры допускается лишь исправление ошибок типографии.

Корректура должна возвращаться в редакцию не позже, чем на следующий день после получения ее автором. Невозвращение корректуры в срок не приостанавливает печатания статьи.

10. В случае возвращения статьи автору для исправления или при ее сокращении датой представления считается день получения редакцией окончательного текста.

29191-4a5

B0000003504266

60 к.