

# ВЕСЦІ

АКАДЭМІІ НАВУК БССР

---

СЕРЫЯ  
ФІЗІКА-МАТЭМАТЫЧНЫХ  
НАВУК

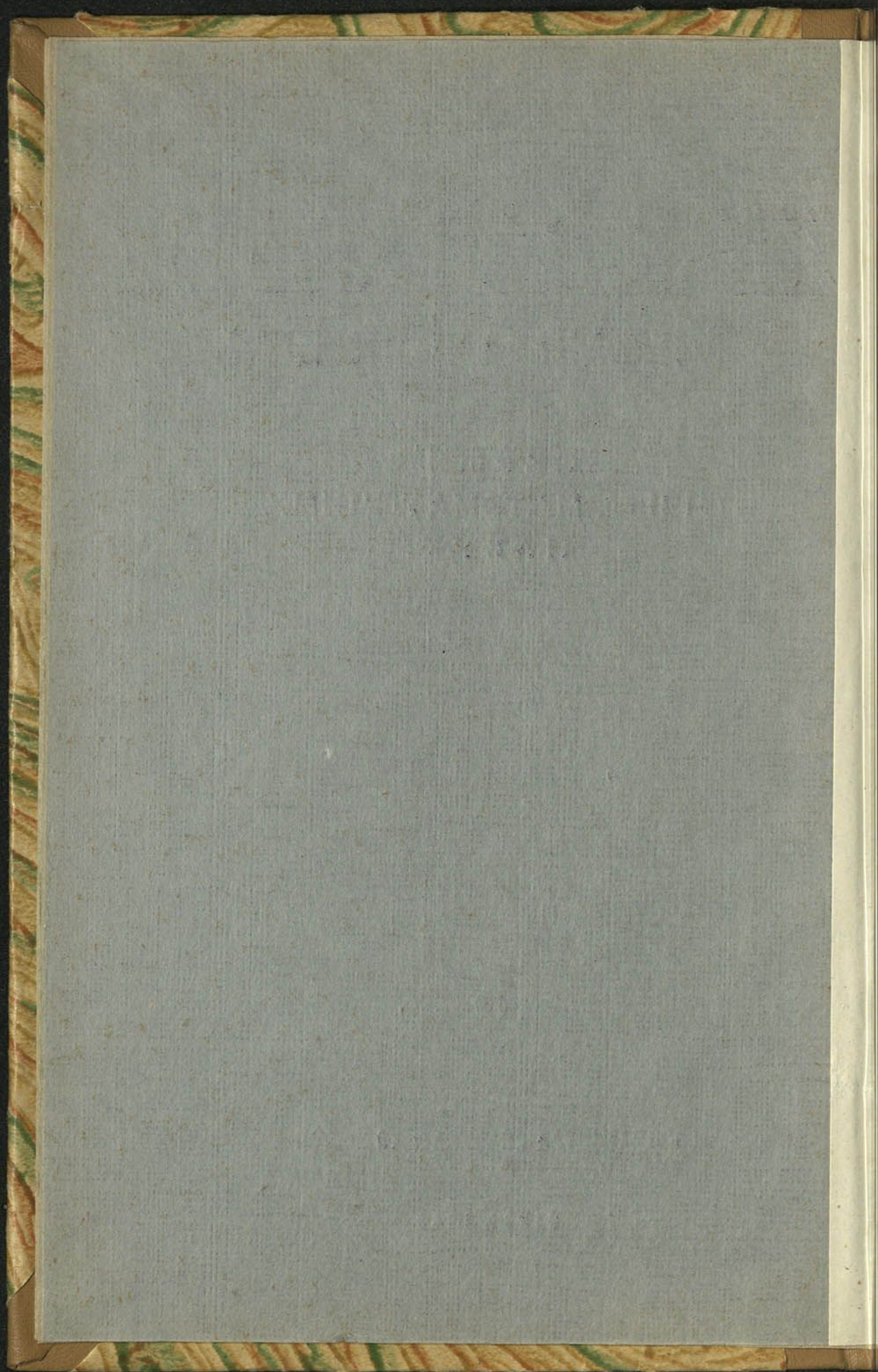
5

ВЫДАВЕЦТВА „НАВУКА І ТЭХНІКА“

---

МІНСК 1989

Бд 4109





Государственная  
БИБЛИОТЕКА  
СССР  
им. В. И. Ленина

Шиб 31136

# ИЗВЕСТИЯ

АКАДЕМИИ НАУК БССР

---

СЕРИЯ  
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ  
НАУК

№ 5

ИЗДАТЕЛЬСТВО „НАУКА И ТЕХНИКА“

---

МИНСК 1969

# ВЕСЦІ

АКАДЭМІІ НАВУК БССР

---

30К-3

58

СЕРЫЯ  
ФІЗІКА-МАТЭМАТЫЧНЫХ  
НАВУК

№ 5

---

ВЫДАВЕЦТВА „НАВУКА І ТЭХНІКА“

МІНСК 1969

Рэдакцыйная калегія:

Ф. І. ФЕДАРАУ (галоўны рэдактар),  
Д. А. СУПРУНЕНКА (нам. галоўнага рэдактара),  
М. М. АЛЯХНОВІЧ, Ф. Д. ГАХАУ,  
У. І. КРЫЛОУ, М. М. СІРАТА,  
У. Г. СПРЫНДЖУК, Я. І. ФІРСАУ,  
С. А. ЧУНІХІН.

В. С. КОНЮХ

**О РАЗРЕШИМЫХ ПОДГРУППАХ  
 СИМПЛЕКТИЧЕСКОЙ ГРУППЫ**

Пусть  $V$  — векторное пространство размерности  $2m$  над полем  $P$ ,  $f(x, y)$  — невырожденная знакопеременная форма на  $V$ ,  $Sp(f, V)$  — симплектическая группа на  $V$ , ассоциированная с формой  $f$ , т. е.  $Sp(f, V) = \{g \in GL(2m, P), f(gx, gy) = f(x, y)\}$ . Если  $\Phi_m = \begin{bmatrix} 0 & E_m \\ -E_m & 0 \end{bmatrix}$  — матрица формы  $f_0$  в базисе  $u_1, \dots, u_m, \dots, u_{2m}$ , (1)

то симплектическую группу, ассоциированную с формой  $f_0$ , мы будем называть просто симплектической группой и обозначать  $Sp(2m, P)$ . В матричной записи группа  $Sp(2m, P)$  совпадает с совокупностью всех матриц  $g$  из  $GL(2m, P)$ , удовлетворяющих условию  ${}^t g \Phi_m g = \Phi_m$ , где  ${}^t g$  — транспонированная  $g$ . Подпространство  $W \subset V$  называется изотропным, если  $\text{rad } W = \{w \in W, f(w, x) = 0 \text{ для всех } x \in W\} = W$ . Если же  $\text{rad } W = 0$ , то  $W$  называется невырожденным. Через  $W^0$  будем обозначать ортогональное дополнение к  $W$ , т. е.  $W^0 = \{v \in V, f(v, w) = 0 \text{ для всех } w \in W\}$ .

Подгруппа  $H$  группы  $Sp(2m, P)$  называется  $s$ -приводимой, если найдется такое целое  $v, 1 \leq v \leq m$ , и такая матрица  $t \in Sp(2m, P)$ , что матрицы группы  $t^{-1}Ht$  имеют вид

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \dots & \alpha_{1v} & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & * \\ \alpha_{v1} & \dots & \alpha_{vv} & & \\ 0 & \dots & 0 & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & * \\ 0 & \dots & 0 & & \end{pmatrix}.$$

В противном случае подгруппа  $H$  группы  $Sp(2m, P)$  называется  $s$ -неприводимой. Как показал Д. А. Супруненко (см. [1]),  $s$ -неприводимые подгруппы группы  $Sp(2m, P)$  играют важную роль при изучении разрешимых подгрупп полной линейной группы.

Если  $G$  — подгруппа группы  $GL(n, P)$ , то всякое  $G$ -инвариантное подпространство в дальнейшем для краткости будем называть  $G$ -модулем.

§ 1. Предложение 1. Подгруппа  $H$  группы  $Sp(2m, P)$  тогда и только тогда  $s$ -неприводима, когда каждый  $H$ -модуль невырожден.

Доказательство. Если каждый  $H$ -модуль невырожден, то из определения  $s$ -неприводимости следует, что группа  $H$   $s$ -неприводима.

Пусть теперь группа  $H$   $s$ -неприводима и  $W$  —  $H$ -модуль. Положим  $W = \text{rad } W + W'$ ; нетрудно видеть, что  $\text{rad } W$  —  $H$ -модуль;  $\text{rad } W \subseteq M$ , где  $M$  — максимальное изотропное подпространство пространства  $V$ .

Если  $v_1, \dots, v_r$  — базис  $\text{rad } W$ ,  $v_1, \dots, v_r, \dots, v_m$  — базис  $M$ , то существует базис

$$v_1, \dots, v_m, \dots, v_{2m} \quad (2)$$

пространства  $V$ , такой, что  $f_0(v_i, v_{m+j}) = \delta_{ij}$ ,  $1 \leq i, j \leq m$ ,  $\delta_{ij}$  — символ Кронекера (см. [5], стр. 164). Очевидно, матрица перехода от базиса (1) к базису (2) симплектическая. Последнее противоречит  $s$ -неприводимости группы  $H$ .

**Предложение 2.** Пусть  $H$  —  $s$ -неприводимая подгруппа группы  $Sp(2m, P)$ . Тогда пространство  $V$  представимо в виде прямой суммы попарно ортогональных минимальных  $H$ -модулей.

**Доказательство.** Пусть  $W$  — минимальный  $H$ -модуль. Из предложения 1 следует, что  $W$  невырожден. Таким образом,  $V = W + W^0$ , причем  $W^0$  —  $H$ -модуль. Отсюда и вытекает предложение.

**Теорема 1.** Максимальная разрешимая подгруппа  $H$  группы  $Sp(2m, P)$  тогда и только тогда  $s$ -неприводима, когда пространство  $V$  представимо в виде прямой суммы попарно ортогональных минимальных  $H$ -модулей.

**Доказательство.** Если  $H$   $s$ -неприводима, то в силу предложения 2  $V = Q_1 + \dots + Q_s$ , где  $Q_i$  — попарно ортогональные минимальные  $H$ -модули. Пусть теперь  $V = Q_1 + \dots + Q_s$  — разложение пространства  $V$  в прямую сумму попарно ортогональных минимальных  $H$ -модулей,  $H_i$  — ограничение  $H$  на  $Q_i$ . Построим группу  $G_i \subset GL(2m, P)$ , такую, что: 1) операторы  $G_i$  векторы подпространства  $Q_j$ ,  $i \neq j$ , оставляют неподвижными; 2) в подпространстве  $Q_i$   $G_i$  действует, как группа  $H$ . Очевидно,  $G_i \in Sp(2m, P)$ . Пусть  $G = G_1 \dots G_s$ . Нетрудно видеть, что  $G \cong H$  и группа  $G$  разрешима. Отсюда в силу максимальной  $H$  следует, что  $H = G$  и, таким образом,  $Q_i$  — единственные нетривиальные минимальные  $H$ -модули, содержащиеся в  $V$ . Если сейчас  $W$  — нетривиальный  $H$ -модуль, то  $W = Q_{i_1} + \dots + Q_{i_l}$  и, следовательно,  $W$  невырожден. Отсюда и из предложения 1 следует, что группа  $H$   $s$ -неприводима. Теорема доказана.

Отметим, что требование максимальной группы  $H$  в условии теоремы 1 существенно. Ниже мы приводим пример разрешимой  $s$ -приводимой подгруппы  $H$  группы  $Sp(4, 2)$ , которая удовлетворяет условию теоремы 1.

Пусть  $u_1, u_2, u_3, u_4$  — базис пространства  $V$  над простым полем характеристики 2. Обозначим через  $H_1$  группу, состоящую из всех матриц вида  $\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix}$ , где матрицы  $a$  пробегает группу  $GL(2, 2)$ . Положим  $H = t^{-1}H_1t$ , где

$$t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Нетрудно видеть, что  $H$  —  $s$ -приводимая подгруппа группы  $Sp(4, 2)$ . Пусть

$$(v_1, v_2, v_3, v_4) = (u_1, u_2, u_3, u_4) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3)$$

Непосредственно проверяется, что подпространства, натянутые на векторы  $v_1, v_2$  и  $v_3, v_4$ , ортогональны и невырождены и группа  $H$ , записанная в базисе (3), совпадает с матричной группой  $H_1$ .

**Предложение 3.** Пусть  $\Gamma$  — максимальная примитивная неприводимая разрешимая подгруппа группы  $GL(p^t, P)$ , максимальный абелев нормаль-

ный делитель  $F$  которой совпадает с мультипликативной группой поля  $PE_n$ ;  $p$  — простое число. Если  $p^l$  — максимальная степень  $p$ , входящая в порядок фактор-группы  $\Gamma/F$ , то при  $p > 2$   $l \leq \frac{2t(3+p)}{p} - 1$ , а при  $p = 2$   $l \leq 4t - 1$ .

Доказательство. Пусть  $A/F$  — максимальный абелев нормальный делитель  $\Gamma/F$ . Тогда, как известно,  $[A:F] = p^{2t}$ ,  $\Gamma/A \cong H$ , где  $H$  — некоторая  $s$ -неприводимая разрешимая подгруппа группы  $Sp(2t, P)$  (см. [1]). Согласно предложению 2,  $H$  вполне приводима. Следовательно, если  $p^\beta$  — максимальная степень  $p$ , входящая в порядок  $H$ , то при  $p > 2$   $\beta \leq \frac{6t}{p} - 1$ ,

а при  $p = 2$   $\beta \leq 2t - 1$  (см. [3]). Отсюда и следует предложение.

§ 2. Пусть теперь  $W$  — максимальное изотропное подпространство пространства  $V$ . Не нарушая общности, будем считать, что  $W$  — подпространство, натянутое на векторы  $u_1, \dots, u_m$  (см. (1)). Очевидно, все операторы из  $Sp(2m, P)$ , перемещающие векторы  $W$  внутри  $W$ , образуют некоторую подгруппу  $H$  группы  $Sp(2m, P)$ . Нетрудно видеть, что в матричной записи группа  $H$  совпадает с совокупностью всех матриц вида

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & {}^t a^{-1} \end{pmatrix}, \quad a \in GL(m, P), \quad b \text{ — симметрическая } m \times m\text{-матрица.}$$

Подгруппа  $R$  группы  $H$ , состоящая из всех матриц вида

$$\begin{pmatrix} E_m & b \\ 0 & E_m \end{pmatrix}, \quad b \text{ — симметрическая } m \times m\text{-матрица,}$$

является нормальным делителем группы  $H$ . Если  $P$  — конечное поле порядка  $p^l$ , то порядок группы  $R$ , очевидно, равен  $p^{\frac{m^2+m}{2}}$ . Построим группу

$$\Gamma = AR, \quad (4)$$

где группа  $A$  состоит из всех матриц вида

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & {}^t a^{-1} \end{pmatrix},$$

матрицы  $a$  пробегают некоторую максимальную разрешимую неприводимую подгруппу группы  $GL(m, P)$ . Очевидно, группа  $\Gamma$  максимальна среди разрешимых подгрупп группы  $H$ .

Теорема 2. Группа  $\Gamma$ , определяемая равенством (4), максимальна среди разрешимых подгрупп группы  $Sp(2m, P)$ .

Доказательство. Пусть

$$\Gamma \subset B \subset Sp(2m, P), \quad (5)$$

где  $B$  — разрешимая группа. Возможны два случая: 1) группа  $B$  приводима, 2) группа  $B$  неприводима. Обратимся сначала к случаю 1). Если  $L$  — минимальный  $B$ -модуль, то, так как  $\Gamma \subset B$ ,  $L$  —  $\Gamma$ -модуль. Из (4) следует, что размерность  $L$  равна  $m$  и, следовательно,  $L$  — минимальный  $\Gamma$ -модуль. В силу того что  $\Gamma$  максимальна среди разрешимых подгрупп  $Sp(2m, P)$ , перемещающих векторы  $W$  внутри  $W$ ,  $W + L = V$  и, таким образом, группа  $\Gamma$  вполне приводима. Пусть  $\Gamma_1$  (соответственно  $R_1$ ) — ограниченные  $\Gamma$  (соответственно  $R$ ) на  $L$ . Очевидно,  $R_1$  — унипотентный нормальный делитель группы  $\Gamma_1$ . Последнее противоречит неприводимости группы  $\Gamma_1$ .

Пусть теперь группа  $B$  неприводима. Как известно,  $B$  обладает абелевым нормальным делителем  $F$ , индекс которого меньше некоторого числа

$\rho(m)$ , зависящего только от  $m$ . Нетрудно проверить, что  $F$  не содержит унитарных элементов. Если теперь  $P$  — бесконечное поле, то включение (5) противоречит конечности индекса  $F$  в  $B$ . Пусть  $P$  — конечное поле порядка  $p^l$ ,  $p^\alpha$  — максимальная степень  $p$ , входящая в порядок группы  $B$ . Как известно (см. [3]), при  $p > 2$   $\alpha \leq l \left( \frac{6m}{p} - 1 \right)$ , а при  $p = 2$   $\alpha \leq l(2m - 1)$ .

Если  $m > 2$  или же  $p > 3$ , последнее противоречит включению (5). Пусть теперь  $m = 2$ ,  $p \leq 3$ . Из результатов работы [4] и второй главы книги [2] следует, что  $\alpha \leq 2l + 1$ . С другой стороны, если  $p^\beta$  — максимальная степень  $p$ , входящая в порядок группы  $\Gamma$ , то из построения  $\Gamma$  следует, что при  $l = 1$   $\beta = 4$ , а при  $l > 1$   $\beta > 2l + 1$ . Таким образом, в обоих случаях мы приходим в противоречие с включением (5). Теорема доказана.

### Литература

1. Супруненко Д. А. ДАН СССР, 184, № 1, 1969.
2. Супруненко Д. А. Разрешимые и нильпотентные линейные группы. Минск, 1958.
3. Huppert B. Math. Z., 67, 479, 1957.
4. Bucht G. Arc. f. Mat., 11, 1, 1916.
5. Артин Э. Геометрическая алгебра. Изд. «Наука», М., 1969.

Институт математики  
АН БССР

Поступило в редакцию 7.IV 1969

Г. И. КАРПИЛОВСКИЙ

**КОНЕЧНЫЕ ГРУППЫ, ДОПУСКАЮЩИЕ ТОЧНОЕ  
НЕПРИВОДИМОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ СТЕПЕНИ 5  
НАД ПОЛЕМ РАЦИОНАЛЬНЫХ ЧИСЕЛ**

В [1] дано описание всех максимальных конечных подгрупп группы целочисленных  $4 \times 4$ -матриц. Основным шагом в описании (с точностью до изоморфизма) всех конечных подгрупп группы целочисленных  $5 \times 5$ -матриц является нахождение всех конечных групп, допускающих точное неприводимое представление степени 5 над полем рациональных чисел  $R$ , поскольку все представления над полем  $R$  реализуются над кольцом целых рациональных чисел.

В настоящей работе решается эта задача. В § 2 и 3 описываются соответственно все разрешимые и неразрешимые группы, допускающие точное неприводимое  $R$ -представление степени 5. Оказывается, таких групп существует точно 18 (6 разрешимых и 12 неразрешимых).

§ 1. Обозначения. Некоторые леммы. Будем употреблять следующие обозначения:  $R$  — поле рациональных чисел;  $\pi$  — поле из двух элементов;  $\bar{\pi}$  — алгебраическое замыкание поля  $\pi$ ,  $GL(n, T)$  — полная линейная группа над полем  $T$ ;  $N \triangleleft G$ ,  $\bar{N}$  — нормальный делитель группы  $G$ ;  $[n]$  — циклическая группа порядка  $n$ ;  $m(G, T)$  — наименьшая степень точного представления группы  $G$  над полем  $T$ ;  $|G|$ ,  $Z(G)$ ,  $G'$  — соответственно порядок, центр и коммутант группы  $G$ .

Для исследования  $R$ -представлений группы  $G$  нами будут использованы следующие леммы.

Лемма 1.1. Пусть  $G$  — произвольная конечная подгруппа группы  $GL(5, R)$ . Тогда  $|G| = 2^\alpha 3^\beta 5^\gamma$  ( $0 \leq \alpha \leq 8$ ;  $0 \leq \beta \leq 2$ ;  $\gamma = 0, 1$ ). Если  $G_i$  — силовская  $p_i$ -подгруппа группы  $GL(5, R)$  ( $i = 1, 2, 3$ ;  $p_1 = 2$ ;  $p_2 = 3$ ;  $p_3 = 5$ ), то  $G_1 = G \times [2]$ , где  $G$  является полупрямым произведением группы  $[2] \times [2] \times [2] \times [2]$  на группу диэдра 8-го порядка,  $G_2 = [3] \times [3]$ ,  $G_3 = [5]$ .

Доказательство леммы 1.1 непосредственно вытекает из результатов работы [2].

Лемма 1.2. Пусть  $G_1 = [10]$ ,  $G_2 = \langle a \mid a^5 = 1 \rangle$ ,  $G_3: a^5 = b^2 = 1, b^{-1}ab = a^{-1}$ ,  $G_4: a^5 = b^4 = 1, b^{-1}ab = a^2$ . Тогда  $m(G_1, \pi) > 4$ ,  $m(G_i, \pi) = 4$  ( $i = 2, 3, 4$ ) и каждая из групп  $G_i$  ( $i = 2, 3, 4$ ) имеет лишь одно точное  $\pi$ -представление степени 4. Эти представления задаются так:

$$G_2: a \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$
$$G_3: a \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad b \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$G_4: a \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, b \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Доказательство. Ядро всякого неприводимого  $\pi$ -представления группы  $G_1$  содержит ее силовскую 2-подгруппу, откуда следует, что  $m(G_1, \pi) > 4$ . Всякое точное  $\pi$ -представление группы  $G_i$  степени 4 ( $i=2, 3, 4$ ) является неприводимым, а потому утверждение леммы относительно групп  $G_i$  ( $i=2, 3, 4$ ) можно получить из хорошо известных фактов теории модулярных представлений конечных групп (см., например, [4]).

Известно [5], что группы  $A_5$  и  $S_5$  абстрактно задаются следующим образом:

$$A_5: a^5 = b^2 = (ba)^3 = 1, \quad S_5: a^5 = b^4 = (b^2a)^3 = (ba^3)^2 = 1.$$

Относительно этих групп имеет место следующее утверждение.

Лемма 1.3. Каждая из групп  $S_5$  и  $A_5$  обладает лишь одним точным  $\pi$ -представлением степени 4:

$$A_5: a \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, b \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (1)$$

$$S_5: a \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, b \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Доказательство. Легко проверить, что (1) действительно задают точные неприводимые  $\pi$ -представления. Поскольку группа  $A_5(S_5)$  обладает двумя 2-регулярными классами, то число неприводимых  $\pi$ -представлений группы  $A_5(S_5)$  равно 2. Значит, всякое неприводимое  $\pi$ -представление группы  $A_5(S_5)$  степени 4 является абсолютно неприводимым, откуда следует утверждение леммы.

Лемма 1.4. Пусть группа  $G$  обладает точным неприводимым  $R$ -представлением  $\Gamma$  степени  $p$  ( $p$  — простое нечетное). Тогда группа  $G$  неабелева и  $\Gamma$  абсолютно неприводимо. Более того, если  $G$  — группа с центром, то  $G = G_1 \times Z(G)$ , где  $|Z(G)| = 2$ , а  $G_1$  — группа без центра, состоящая из элементов, которым соответствуют матрицы представления  $\Gamma$  с детерминантом, равным 1.

Доказательство. Поскольку степени неприводимых  $R$ -представлений абелевой группы равны  $\phi(m)$ , где  $m$  — некоторое натуральное число, а  $\phi$  — функция Эйлера, то группа  $G$  неабелева и представление  $\Gamma$  абсолютно неприводимо. Вторая часть леммы непосредственно вытекает из леммы Шура.

Лемма 1.5. Пусть  $p$  — простое, а группа  $G$  допускает точное неприводимое  $R$ -представление  $\Gamma$  степени  $p$ . Если  $N \triangleleft G$ , то либо  $N$  — элементарная абелева 2-группа, либо  $\Gamma \downarrow N$  неприводимо.

Утверждение леммы 1.5 является следствием теоремы Клиффорда [4].

Лемма 1.6. Пусть  $G$  является группой без центра и содержит подгруппу  $H = [2] \times [2] \times [2] \times [2]$ . Если группа  $G$  обладает точным  $R$ -представлением степени 5, то  $C_G(H) = H$ .

Доказательство. Группа  $G_1 = G \times [2]$ , очевидно, также допускает точное  $R$ -представление степени 5. Если  $C_G(H) \neq H$ , то группа  $G_1$  обладает

абелевой подгруппой, строго содержащей элементарную абелеву группу порядка  $2^5$ , что невозможно ввиду [8].

§ 2. Конечные разрешимые группы, допускающие точное неприводимое  $R$ -представление степени 5. Ввиду лемм 1.1 и 1.4 для описания всех групп, допускающих точное неприводимое  $R$ -представление степени 5, достаточно рассматривать группы без центра порядка  $2^\alpha 3^\beta 5$  ( $0 \leq \alpha \leq 7$ ,  $0 \leq \beta \leq 2$ ). Итак, пусть  $G$  — разрешимая группа без центра, допускающая точное неприводимое  $R$ -представление степени 5 и имеющая порядок  $|G| = 2^\alpha 3^\beta 5$  ( $0 \leq \alpha \leq 7$ ;  $0 \leq \beta \leq 2$ ). Тогда группа  $G$  обладает подгруппой  $G_1$  порядка  $|G_1| = 3^\beta 5$ . Если  $\beta = 1, 2$ , то группа  $G_1$  является абелевой и  $m(G_1, R) > 5$  ввиду [8]. Значит,  $\beta = 0$  и  $|G| = 2^\alpha 5$  ( $0 \leq \alpha \leq 7$ ). Пусть  $1 = G_0 \subset G_1 \subset \dots \subset G_k \subset G_{k+1} \subset G_{t-1} \subset G_t = G$  — главный ряд группы  $G$  и  $G_{k+1}/G_k = [5]$ . Прежде всего  $k \neq 0$ . В противном случае неприводимые комплексные представления группы  $G$  индуцируются линейными характерами некоторых ее подгрупп, содержащих силовскую 5-подгруппу (см. [3]), и их степени равны  $2^y$ , что противоречит наличию абсолютно неприводимого представления степени 5 у группы  $G$  (в силу леммы 1.4). Далее, если  $\Gamma$  — точное неприводимое  $R$ -представление группы  $G$  степени 5, то, применяя последовательно леммы 1.4 и 1.5 к группам  $G_{t-1}, \dots, G_{k+2}, G_{k+1}$ , получаем, что  $\Gamma \downarrow G_{t-1}, \dots, \Gamma \downarrow G_{k+2}, \Gamma \downarrow G_{k+1}$  являются абсолютно неприводимыми представлениями групп  $G_{t-1}, \dots, G_{k+2}, G_{k+1}$ , причем каждая из групп  $G_{t-1}, \dots, G_{k+2}, G_{k+1}$  не содержит центра. Действительно, если элемент  $g \in G$  принадлежит центру одной из подгрупп  $G_{t-1}, \dots, G_{k+2}, G_{k+1}$ , то в силу леммы Шура  $\Gamma(g) = \lambda E$ , где  $\lambda = \pm 1$ , а потому  $g \in Z(G)$ . Легко видеть, что  $\Gamma \downarrow G_k$  — приводимое представление группы  $G_k$ , поскольку в противном случае в силу леммы 1.4  $\Gamma \downarrow G_k$  было бы абсолютно неприводимым, что невозможно, так как  $|G_k| = 2^y$ .

Значит, по лемме 1.5 группа  $G_k$  есть элементарная абелева группа порядка  $2^y$ , а в силу лемм 1.2 и 1.6 группа  $G$  — расширение элементарной абелевой группы  $G_k$  порядка  $2^4$ , причем  $C_G(G_k) = G_k$ . Таким образом, расширению группы  $G_k$  соответствует точное  $\lambda$ -представление группы  $G/G_k$  степени 4.

Группа  $G/G_k$  содержит циклический нормальный делитель  $G_{k+1}/G_k$  порядка 5, который в силу леммы 1.2 должен совпадать со своим централизатором. Значит, число  $|G|$  принимает значения 80, 160 или 320. Если  $N$  — нормализатор силовской 5-подгруппы группы  $G$ , то очевидно, что  $N \cap G_k = 1$  и  $|N|$  соответственно равен 5, 10, 20. Следовательно,  $G$  — полупрямое произведение элементарной абелевой группы порядка  $2^4$  на нормализатор силовской 5-подгруппы, который является расширением циклической группы 5-го порядка, совпадающей со своим централизатором. В силу леммы 1.2 существует лишь одна такая группа каждого из порядков 80, 160, 320, и ее определяющие соотношения имеют вид

$$\begin{aligned} |G| = 80, \quad a_i^2 &= (a_i, a_j) = 1, \quad (i, j = 1, 2, 3, 4), \quad a^5 = 1, \\ a^{-1}a_1a &= a_1a_2, \quad a^{-1}a_2a = a_2a_3, \quad a^{-1}a_3a = a_3a_4, \quad a^{-1}a_4a = a_4; \\ |G| = 160, \quad a_i^2 &= (a_i, a_j) = 1, \quad (i, j = 1, 2, 3, 4), \\ a^5 &= b^2 = 1, \quad b^{-1}ab = a^{-1}, \end{aligned} \tag{2}$$

$$\begin{aligned} a^{-1}a_1a &= a_1a_2, \quad a^{-1}a_2a = a_2a_3, \quad a^{-1}a_3a = a_3a_4, \quad a^{-1}a_4a = a_4, \quad b^{-1}a_1b = a_4, \\ b^{-1}a_2b &= a_1a_2a_3, \quad b^{-1}a_3b = a_1a_3a_4, \quad b^{-1}a_4b = a_4; \\ |G| = 320, \quad a_i^2 &= (a_i, a_j) = 1, \quad (i, j = 1, 2, 3, 4), \\ a^5 &= b^4 = 1, \quad b^{-1}ab = a^2, \end{aligned} \tag{3}$$

$$\begin{aligned} a^{-1}a_1a &= a_1a_2, & a^{-1}a_2a &= a_2a_3, & a^{-1}a_3a &= a_3a_4, & a^{-1}a_4a &= a_1, \\ b^{-1}a_1b &= a_2, & b^{-1}a_2b &= a_4, & b^{-1}a_3b &= a_1a_2a_4, & b^{-1}a_4b &= a_1a_2a_3. \end{aligned} \quad (4)$$

Заметим, что группы (2) и (3) являются нормальными делителями группы (4), а потому достаточно доказать существование точного неприводимого  $R$ -представления степени 5 у группы (4) (см. лемму 1.5). Это представление индуцируется линейным характером  $\chi$

$$\chi(a_1) = \chi(a_2) = \chi(a_3) = \chi(a_4) = -1, \quad \chi(b) = 1,$$

силовой 2-подгруппы группы (4) и имеет вид

$$\begin{aligned} a_1 \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, & a_2 \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, & a_3 \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \\ a_4 \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, & a \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, & b \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Итак, нами доказана следующая теорема.

**Теорема 2.1.** *Все конечные разрешимые группы, допускающие точное неприводимое  $R$ -представление степени 5, исчерпываются группами (2), (3), (4), а также прямыми произведениями каждой из них на циклическую группу второго порядка.*

§ 3. Конечные неразрешимые группы, допускающие точное неприводимое  $R$ -представление степени 5.

**Лемма 3.1.** *Пусть группа  $G(G_1)$  является расширением группы  $S_6(A_6)$  с помощью циклической группы второго порядка и допускает точное  $R$ -представление  $\Gamma$  степени 5. Тогда  $\Gamma$  неприводимо,  $G \cong S_6 \times [2]$ , а,  $G_1 \cong A_6 \times [2]$  либо  $G_1 \cong S_6$ .*

**Доказательство.** Поскольку  $m(G(G_1), R) = 5$  и всякое точное  $R$ -представление группы  $A_6(S_6)$  степени 5 является неприводимым, то представление  $\Gamma$  неприводимо. Группа  $S_6$  обладает двумя классами сопряженных элементов  $c_1$  и  $c_2$  порядка 3, причем ввиду [9] всякий внешний автоморфизм группы  $S_6$  переводит эти 2 класса друг в друга. Характер всякого неприводимого  $R$ -представления группы  $S_6$  степени 5 принимает на этих классах значения 2 и  $-1$  (см. [7]). Значит, всякое расширение группы  $S_6$  с помощью циклической группы второго порядка, допускающее точное  $R$ -представление степени 5, определяет автоморфизм группы  $S_6$ , оставляющий классы  $c_1$  и  $c_2$  на месте, т. е. ее внутренний автоморфизм. Следовательно,  $G \cong S_6 \times [2]$ . Погрузим группу  $A_6$  в группу  $S_6$ . Тогда  $c_1, c_2 \in A_6$  и все автоморфизмы группы  $S_6$  индуцируют автоморфизм группы  $A_6$ . Поскольку  $C_{S_6}(A_6) = 1$ , то все внутренние автоморфизмы группы  $S_6$  индуцируют точно  $6!$  автоморфизмов группы  $A_6$ , оставляющих классы  $c_1$  и  $c_2$  на месте. Всякий внешний автоморфизм группы  $S_6$  индуцирует автоморфизм группы  $A_6$ , переводящей классы  $c_1$  и  $c_2$  друг в друга. Значит, все автоморфизмы группы  $A_6$  индуцируются автоморфизмами группы  $S_6$ , откуда следует, что всякий автоморфизм группы  $A_6$  либо оставляет классы  $c_1$  и  $c_2$  на месте, и тогда он индуцируется внутренним автоморфизмом группы  $S_6$ , либо переводит их друг в друга.

Поскольку каждое неприводимое  $R$ -представление группы  $A_6$  степени 5 получается путем ограничения  $\Gamma \downarrow A_6$  некоторого неприводимого представ-

ления  $\Gamma$  группы  $S_6$ , то каждый неприводимый характер группы  $A_6$  степени 5 также принимает на классах  $c_1$  и  $c_2$  значения 2 и  $-1$ . Значит,  $G_1$  — расширение группы  $A_6$ , которому соответствует автоморфизм последней, индуцированный внутренним автоморфизмом группы  $S_6$ . Если этот автоморфизм является внутренним автоморфизмом группы  $A_6$ , то  $G_1 \cong A_6 \times [2]$ , в противном случае  $G_1 \cong S_6$ .

Лемма доказана.

**Лемма 3.2.** Пусть группа  $G$  является расширением элементарной абелевой группы  $\bar{G}$  порядка  $2^4$  с помощью элементарной абелевой группы  $\bar{G}$  порядка  $3^2$ , причем  $C_G(\bar{G}) = \bar{G}$ . Тогда  $m(G, R) > 5$ .

**Доказательство.** Силовская 3-подгруппа группы  $GL(4, \pi)$  изоморфна группе  $[3] \times [3]$ , а соответствие

$$a \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad b \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (5)$$

дает точное  $\pi$ -представление степени 4 группы  $(a) \times (b) (a^3 = b^3 = 1)$ . Поскольку в  $GL(4, \pi)$  силовские 3-подгруппы сопряжены, то найдутся такие представители  $a$  и  $b$  смежных классов  $G$  по  $\bar{G}$ , которые определяют в  $\bar{G}$  автоморфизмы вида (5). Таким образом, группу  $G$  можно задать определяющими соотношениями

$$\begin{aligned} a_i^2 = (a_i, a_j) = 1, \quad (i, j = 1, 2, 3, 4), \quad a^3 = b^3 = (a, b) = 1, \quad a^{-1}a_1a = a_2, \\ a^{-1}a_2a = a_1a_2, \quad a^{-1}a_3a = a_3, \quad a^{-1}a_4a = a_4, \quad b^{-1}a_1b = a_1, \quad b^{-1}a_2b = a_2, \\ b^{-1}a_3b = a_4, \quad b^{-1}a_4b = a_3a_4. \end{aligned}$$

Значит,  $G' = \bar{G}$  и степени абсолютно неприводимых представлений группы  $G$  суть 1, 3, 9. Если  $\Gamma$  —  $R$ -представление группы  $G$  степени 5, то разложение его в сумму абсолютно неприводимых имеет вид

$$\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3,$$

где

$$\deg \Gamma_1 = \deg \Gamma_2 = 1, \quad \deg \Gamma_3 = 3.$$

Пусть  $N_i$  — ядро представления  $\Gamma_i$ . Очевидно, что  $N_1 \cap N_2 \supseteq G'$ , а поскольку  $N_3 \cap G' \neq 1$ , то представление  $\Gamma$  не является точным. Лемма доказана.

**Следствие.** Пусть группа  $G$  является расширением элементарной абелевой группы  $\bar{G}$  порядка  $2^4$  с помощью группы  $A_6$ , причем  $C_G(\bar{G}) = \bar{G}$ . Тогда  $m(G, R) > 5$ .

Заметим, что каждая из групп  $A_5, S_5, A_6, S_6$  имеет точное неприводимое  $R$ -представление степени 5 [7]. Пусть  $G$  — произвольная неразрешимая группа без центра, допускающая точное неприводимое  $R$ -представление  $\Gamma$  степени 5. Тогда, очевидно,  $|G| = 2^\alpha 3^\beta 5$  ( $0 \leq \alpha \leq 7; \beta = 1, 2$ ). Пусть, далее,  $1 = G_0 \subset G_1 \subset \dots \subset G_k \subset G_{k+1} \subset \dots \subset G_{t-1} \subset G_t = G$  — композиционный ряд группы  $G$ . Известно [6], что порядки всех простых групп, не превышающих 6232, исчерпываются числами 60, 168, 360, 504, 660, 1092, 2448, 2520, 3420, 4080, 5616, 6048, 6072. Следовательно, если  $G_{k+1}/G_k$  — простая группа составного порядка, то либо  $G_{k+1}/G_k \cong A_5$ , либо  $G_{k+1}/G_k \cong A_6$ .

Заметим, что все группы  $G_{t-1}, \dots, G_{k+2}, G_{k+1}$  являются группами без центра, причем  $\Gamma \downarrow G_{t-1}, \dots, \Gamma \downarrow G_{k+2}, \Gamma \downarrow G_{k+1}$  — неприводимые  $R$ -представления групп  $G_{t-1}, \dots, G_{k+2}, G_{k+1}$ .

Могут представиться 2 случая.

1.  $k = 0$ , т. е.  $G_1 \cong A_5$  либо  $G_1 \cong A_6$ .

Если  $G_1 \cong A_5$ , то или  $G = G_1 \cong A_5$ , или  $|G_2/G_1| = 2$  и  $G = G_2 \cong S_5$  ( $|G_2/G_1| \neq 3$ , ибо всякое расширение группы  $A_5$  с помощью циклической группы третьего порядка является тривиальным и не допускает точного  $R$ -представления степени 5). Если  $G_1 \cong A_6$ , то либо  $G = G_1 \cong A_6$ , либо ввиду леммы 3.1  $G = G_2 \cong S_6$ .

2.  $k \neq 0$ .

Пусть  $G_{k+1}/G_k \cong A_6$ . Тогда  $|G_k| = 2^\gamma$ , а в силу лемм 1.5, 1.6  $\gamma = 4$  и группа  $G_{k+1}$  является расширением элементарной абелевой группы  $G_k$  порядка  $2^4$  с помощью группы  $A_6$ , причем  $C_{G_{k+1}}(G_k) = G_k$ . Ввиду следствия из леммы 3.2 группа  $G_{k+1}$  не допускает точного  $R$ -представления степени 5 и, значит,  $G_{k+1}/G_k$  не изоморфно  $A_6$ .

Итак, пусть  $G_{k+1}/G_k \cong A_5$ . Тогда расширению  $G_{k+1}$  группы  $G_k$  соответствует точное  $\pi$ -представление группы  $A_5$  степени 4. Покажем, что всякое такое расширение расщепляемо и задается определяющими соотношениями

$$a_i^2 = (a_i, a_j) = 1, \quad (i, j = 1, 2, 3, 4), \quad a^5 = b^2 = (ba)^3 = 1,$$

$$a^{-1}a_1a = a_3,$$

$$a^{-1}a_2a = a_4, \quad a^{-1}a_3a = a_1a_2a_3a_4, \quad a^{-1}a_4a = a_1, \quad b^{-1}a_1b = a_1a_2a_3, \quad (6)$$

$$b^{-1}a_2b = a_4, \quad b^{-1}a_3b = a_2a_3a_4, \quad b^{-1}a_4b = a_2.$$

Действительно, в силу леммы 1.3 найдутся такие представители  $c$  и  $d$  смежных классов группы  $G_{k+1}$  по  $G_k$ , что

$$c^5 = a_1^{\alpha_1} a_2^{\alpha_2} a_3^{\alpha_3} a_4^{\alpha_4}, \quad d^2 = a_1^{\beta_1} a_2^{\beta_2} a_3^{\beta_3} a_4^{\beta_4}, \quad (dc)^3 = a_1^{\gamma_1} a_2^{\gamma_2} a_3^{\gamma_3} a_4^{\gamma_4},$$

$$c^{-1}a_1c = a_3, \quad c^{-1}a_2c = a_4, \quad c^{-1}a_3c = a_1a_2a_3a_4, \quad c^{-1}a_4c = a_1, \quad d^{-1}a_1d = a_1a_2a_3,$$

$$d^{-1}a_2d = a_4, \quad d^{-1}a_3d = a_2a_3a_4, \quad d^{-1}a_4d = a_2,$$

$$(\alpha_i, \beta_i, \gamma_i = 0, 1; i = 1, 2, 3, 4).$$

Поскольку  $m([5], \pi) = 4$ , то из  $(c, a_1^{\alpha_1} a_2^{\alpha_2} a_3^{\alpha_3} a_4^{\alpha_4}) = 1$  следует, что  $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0$ , т. е.  $c^5 = 1$ .

Далее,

$$d^{-1}a_1^{\beta_1} a_2^{\beta_2} a_3^{\beta_3} a_4^{\beta_4} d = a_1^{\beta_1} a_2^{\beta_1 + \beta_2 + \beta_3} a_3^{\beta_1 + \beta_2} a_4^{\beta_2 + \beta_3},$$

откуда

$$\beta_1 = 0, \quad \beta_2 = \beta_3 + \beta_4, \quad \text{т. е. } d^2 = a_2^{\beta_2 + \beta_3} a_3^{\beta_2} a_4^{\beta_4}.$$

Из соотношения

$$(dc)^{-1} a_1^{\gamma_1} a_2^{\gamma_2} a_3^{\gamma_3} a_4^{\gamma_4} (dc) = a_1^{\gamma_1 + \gamma_2} a_2^{\gamma_1 + \gamma_2} a_3^{\gamma_2} a_4^{\gamma_4}$$

вытекает, что

$$\gamma_2 = 0, \quad \gamma_1 = \gamma_3, \quad \text{т. е. } (dc)^3 = a_1^{\gamma_1} a_3^{\gamma_1} a_4^{\gamma_4}.$$

Положим

$$a = ca_3^{\gamma_1 + \beta_2} a_4^{\gamma_4}, \quad b = da_1^{\beta_2} a_4^{\beta_4}.$$

Тогда нетрудно проверить, что

$$a^5 = b^3 = (ba)^3 = 1.$$

Значит, группа  $G_{k+1}$  является полупрямым произведением группы  $G_k$  на группу  $A_5$ , которому соответствует точное  $\pi$ -представление группы  $A_5$  степени 4. Как легко видеть, всякое точное  $R$ -представление  $\Gamma$  группы  $G_{k+1}$  степени 5 неприводимо. Действительно, в противном случае имеет место

разложение  $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$ , где  $\deg \Gamma_1 = 1$ , а  $\deg \Gamma_2 = 4$ , поскольку всякое точное приводимое  $R$ -представление группы  $A_5$  степени 5 разлагается в сумму одномерного и четырехмерного неприводимых представлений.

В силу равенства  $G'_{k+1} = G_{k+1}$  группа  $G_{k+1}$  имеет точное  $R$ -представление  $\Gamma_2$  степени 4, что, очевидно, невозможно. Легко проверить, что следующее представление группы  $G_{k+1}$  точно:

$$a_1 \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad a_2 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad a_3 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$a_4 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}; \quad a \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad b \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Заметим далее, что ни одна собственная подгруппа группы  $G_k$  не является нормальным делителем группы  $G_{k+1}$  (в противном случае  $m([5], \pi) < 4$ ). Пусть  $\varphi$  — произвольный автоморфизм группы  $G_{k+1}$ . Тогда  $\varphi(G_k) \cap G_k \neq 1$ , а в силу  $\varphi(G_k) < G_{k+1}$   $\varphi(G_k) = G_k$ , т. е.  $G_k$  — характеристическая подгруппа группы  $G_{k+1}$ . Далее,  $|G_{k+2}/G_{k+1}| \neq 3$ , ибо в противном случае группа  $G_{k+2}$  содержит элемент 15-го порядка, а потому не допускает точное  $R$ -представление степени 5. Значит,  $G_{k+2}/G_k$  — расширение группы  $G_{k+1}/G_k \cong A_5$  с помощью циклической группы второго порядка. Поскольку группа  $G_{k+2}/G_k$  допускает точное  $\pi$ -представление степени 4, то  $G_{k+2}/G_k \cong S_5$ . Легко проверяется, что группа  $G_k$  является характеристической подгруппой группы

$G_{k+2}$ . Значит, всякое расширение группы  $G_{k+2}$  с помощью циклической группы третьего порядка содержит элемент 15-го порядка, а потому из  $|G_{k+2}| = 2^7 \cdot 3 \cdot 5$  следует, что либо  $G = G_{k+1}$ , либо  $G = G_{k+2}$ .

Итак, осталось рассмотреть группу  $G_{k+2}$ . Покажем, что она является расщепляемым расширением группы  $G_k$  и ее определяющие соотношения имеют вид

$$a_i^2 = (a_i, a_j) = 1, \quad (i, j = 1, 2, 3, 4), \quad a^5 = b^4 = (ba^3)^2 = (b^2a)^3 = 1.$$

$$a^{-1}a_1a = a_3, \quad a^{-1}a_2a = a_4, \quad a^{-1}a_3a = a_1a_2a_3a_4, \quad a^{-1}a_4a = a_1, \quad (7)$$

$$b^{-1}a_1b = a_1a_2a_3a_4, \quad b^{-1}a_2b = a_2a_3a_4, \quad b^{-1}a_3b = a_2, \quad b^{-1}a_4b = a_3.$$

Действительно, в силу леммы 1.3 определяющие соотношения группы  $G_{k+2}$  можно записать в виде

$$c^5 = 1, \quad d^4 = a_1^{\alpha_1} a_2^{\alpha_2} a_3^{\alpha_3} a_4^{\alpha_4}, \quad (dc^3)^2 = a_1^{\gamma_1} a_2^{\gamma_2} a_3^{\gamma_3} a_4^{\gamma_4},$$

$$(d^2c)^3 = a_1^{\beta_1} a_2^{\beta_2} a_3^{\beta_3} a_4^{\beta_4},$$

$$c^{-1}a_1c = a_3, \quad c^{-1}a_2c = a_4, \quad c^{-1}a_3c = a_1a_2a_3a_4, \quad c^{-1}a_4c = a_1, \quad d^{-1}a_1d = a_1a_2a_3a_4,$$

$$d^{-1}a_2d = a_2a_3a_4, \quad d^{-1}a_3d = a_2, \quad d^{-1}a_4d = a_3,$$

$$(\alpha_i, \beta_i, \gamma_i = 0, 1, i = 1, 2, 3, 4).$$

В силу соотношений

$$(d, a_1^{\alpha_1} a_2^{\alpha_2} a_3^{\alpha_3} a_4^{\alpha_4}) = d^2c, \quad (a_1^{\beta_1} a_2^{\beta_2} a_3^{\beta_3} a_4^{\beta_4}) = (dc^3, a_1^{\gamma_1} a_2^{\gamma_2} a_3^{\gamma_3} a_4^{\gamma_4}) = 1$$

имеем

$$d^4 = a_2^{\alpha_2} a_4^{\alpha_4}, \quad (d^2c)^3 = a_1^{\beta_1} a_3^{\beta_3} a_4^{\beta_4}; \quad (dc^3)^2 = a_1^{\gamma_1} a_3^{\gamma_3} a_4^{\gamma_4}.$$

Положим

$$b = da_1^{\alpha_2}, \quad a = ca_2^{\alpha_3+\gamma_1} a_3^{\alpha_2+\beta_1} a_4^{\beta_4}.$$

Нетрудно проверить, что

$$a^5 = b^4 = (b^2a)^3 = 1, \quad (ba^3)^2 = a_3^{\gamma_3} a_4^{\gamma_4}.$$

Далее,

$$(ba^3)^{-1} = a^2b^3 = ba^3a_3^{\gamma_3} a_4^{\gamma_4}, \quad b^{-1}ab = (a^3b^2)^3 a_1^{\gamma_4} a_2^{\gamma_3+\gamma_4} a_3^{\gamma_3}.$$

Следовательно,

$$[b^2(a^3b^2)^3 a_1^{\gamma_4} a_2^{\gamma_3+\gamma_4} a_3^{\gamma_3}]^3 = a_1^{\gamma_3+\gamma_4} a_3^{\gamma_4} a_4^{\gamma_3+\gamma_4} = 1,$$

откуда

$$\gamma_3 = \gamma_4 = 0,$$

т. е.  $(ba^3)^2 = 1$ . Легко проверить, что следующее  $R$ -представление группы  $G_{h+2}$  степени 5 является точным и неприводимым:

$$a_1 \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad a_2 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad a_3 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$a_4 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad a \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad b \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Итак, нами доказана следующая теорема

**Теорема 3.1.** Все конечные неразрешимые группы, допускающие точное неприводимое  $R$ -представление степени 5 исчерпываются группами (6), (7),  $A_5$ ,  $S_5$ ,  $A_6$ ,  $S_6$  и прямыми произведениями каждой из них на циклическую группу второго порядка.

Приношу благодарность С. Д. Берману за ряд ценных замечаний.

### Литература

1. Dade E. C. Illin. J. Math. № 1, 99, 1965.
2. Вольвачев Р. Т. Изв. АН СССР, сер. мат., 27, № 5, 1963.
3. Берман С. Д. Изв. АН СССР, сер. мат., 30, 69, 1966.
4. Curtis Ch. W., Reiner I. Representation theory of finite groups and associative algebras. N. Y.—London, 1962.
5. Miller G. A. Am. J. M., 363, 1911.
6. Cole N. Am. M. S. Bull., 30, 489.
7. Мурнаган Ф. Д. Теория представлений групп. ИЛ, 1950.
8. Карпиловский Г. И. Тр. Всесоюз. Колл. общ. Алг., Рига, 1967.
9. Burnside W. Theory of groups of finite order. Cambridge, 1911.

Харьковский институт  
радиоэлектроники

Поступило в редакцию 2.IV 1969

УДК 518:517.944/947

В. А. БАСИК

**ОБ ОДНОМ УПРОЩЕНИИ  
 АЛГОРИТМА МАТРИЧНОЙ ПРОГОНКИ**

Метод разностной прогонки [1, 2] является одним из наиболее экономичных методов решения систем линейных алгебраических уравнений, аппроксимирующих краевые задачи для дифференциальных уравнений.

Однако, если использовать специальные свойства рассматриваемых граничных задач, можно добиться сокращения объема вычислительной работы и в некоторых схемах метода прогонки, как это сделано в [3]. В предлагаемой заметке алгоритм, изложенный в [3], обобщается на случай более широкого класса граничных задач.

Пусть необходимо найти решение  $u(x, y)$  уравнения

$$a(x)u_{xx} + b(y)u_{yy} + c(x)u_x + d(y)u_y - 2(p(x) + g(y))u = f(x, y), \quad (1)$$

заданного в прямоугольнике  $D$  ( $0 \leq x \leq 1$ ,  $0 \leq y \leq 1$ ), удовлетворяющее краевым условиям

$$-\alpha_1 u_x + \beta_1 u|_{x=0} = \varphi(0, y), \quad (2)$$

$$\alpha_2(y)u_x + \beta_2(y)u|_{x=1} = \varphi(1, y), \quad (3)$$

$$-\alpha_3 u_y + \beta_3 u|_{y=0} = \varphi(x, 0), \quad (4)$$

$$\alpha_4 u_y + \beta_4 u|_{y=1} = \varphi(x, 1). \quad (5)$$

Коэффициенты в (1) и (3), а также функции  $f$  и  $\varphi$  будем считать дважды непрерывно дифференцируемыми. Кроме того, полагаем

$$a(x) > 0, \quad b(y) > 0, \quad p(x) + g(y) \geq 0, \quad \alpha_k \beta_k \geq 0, \quad \alpha_k^2 + \beta_k^2 > 0, \quad k = 1, 2, 3, 4, \quad (6)$$

$\alpha_m, \beta_m$  при  $m = 1, 3, 4$  — постоянные величины.

В качестве расчетной сетки возьмем совокупность узлов  $(x_i, y_j)$ , координаты которых суть числа

$$x_i = \left(i + \frac{1}{2}\right)h, \quad y_j = \left(j + \frac{1}{2}\right)k, \quad i = 0, 1, \dots, M, \quad j = 0, 1, \dots, N,$$

где

$$h = \frac{1}{M+1}, \quad k = \frac{1}{N+1}.$$

Значение какой-либо функции  $\psi(x, y)$  в точке  $(x_i, y_j)$  условимся обозначать через  $\psi_{i,j}$ , а отношение  $h/k$  через  $\delta$ .

Дифференциальное уравнение (1) в каждой внутренней точке  $(x_i, y_j)$  аппроксимируется следующим разностным уравнением:

$$\mu_i^{(1)}u_{i-1,j} + e_j^{(1)}u_{i,j-1} - 2(m_j + a_i + h^2 p_i)u_{i,j} + e_j^{(2)}u_{i,j+1} + \mu_i^{(2)}u_{i+1,j} = h^2 f_{i,j}, \quad (7)$$

где

$$\mu_i^{(1)} = a_i - \frac{1}{2} c_i h, \quad e_j^{(1)} = b_j \delta^2 - \frac{1}{2} d_j \delta h, \quad m_j = b_j \delta^2 + g_j h^2,$$

$$\mu_i^{(2)} = a_i + \frac{1}{2} c_i h, \quad e_j^{(2)} = b_j \delta^2 + \frac{1}{2} d_j \delta h.$$

Будем считать  $h$  и  $k$  выбранными так, что  $\mu_i^{(1)}$ ,  $\mu_i^{(2)}$ ,  $e_j^{(1)}$ ,  $e_j^{(2)}$ ,  $m_j$  — положительные числа.

Краевые условия (2) — (5) аппроксимируются соотношениями

$$\left( \alpha_1 + \frac{\beta_1}{2} h \right) u_{-1,j} + \left( -\alpha_1 + \frac{\beta_1}{2} h \right) u_{0,j} = h \varphi(0, y_j), \quad (8)$$

$$\left( \alpha_{2,j} + \frac{\beta_{2,j}}{2} h \right) u_{M+1,j} + \left( -\alpha_{2,j} + \frac{\beta_{2,j}}{2} h \right) u_{M,j} = h \varphi(1, y_j), \quad (9)$$

$$\left( \alpha_3 + \frac{\beta_3}{2} k \right) u_{i,-1} + \left( -\alpha_3 + \frac{\beta_3}{2} k \right) u_{i,0} = k \varphi(x_i, 0), \quad (10)$$

$$\left( \alpha_4 + \frac{\beta_4}{2} k \right) u_{i,N+1} + \left( -\alpha_4 + \frac{\beta_4}{2} k \right) u_{i,N} = k \varphi(x_i, 1). \quad (11)$$

Исключив из (7) с помощью (10) и (11)  $u_{i,-1}$  и  $u_{i,N+1}$ , запишем систему (7) — (11) в матричной форме:

$$\mu_i^{(1)} \mathbf{V}_{i-1} - (B + 2(\alpha_i + h^2 \rho_i) E) \mathbf{V}_i + \mu_i^{(2)} \mathbf{V}_{i+1} = \mathbf{F}_i, \quad (12)$$

$$\mathbf{V}_{-1} = \gamma^{(1)} \mathbf{V}_0 + \Phi_1, \quad (13)$$

$$\mathbf{V}_{M+1} = \Gamma \mathbf{V}_M + \Phi_2, \quad (14)$$

где

$$B = \begin{bmatrix} 2m_0 - e_0^{(1)} \gamma^{(3)} & -e_0^{(2)} & 0 & \dots & 0 \\ -e_1^{(1)} & 2m_1 & -e_1^{(2)} & \dots & 0 \\ 0 & -e_2^{(1)} & 2m_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2m_N - e_N^{(2)} \gamma^{(4)} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{V} = (u_{i,0}, u_{i,1}, \dots, u_{i,N})^T,$$

$$\mathbf{F}_i = (h^2 f_{i,0} - e_0^{(1)} \omega^{(3)} \varphi(x_i, 0), h^2 f_{i,1}, \dots, h^2 f_{i,N-1}, h^2 f_{i,N} - e_N^{(2)} \omega^{(4)} \varphi(x_i, 1))^T,$$

$$\Phi_1 = (\omega^{(1)} (\varphi(0, y_0), \varphi(0, y_1), \dots, \varphi(0, y_N)))^T,$$

$$\Phi_2 = (\omega_0^{(2)} \varphi(1, y_0), \omega_1^{(2)} \varphi(1, y_1), \dots, \omega_N^{(2)} \varphi(1, y_N))^T,$$

$\Gamma$  — диагональная матрица с элементами по главной диагонали  $\gamma_0^{(2)}, \gamma_1^{(2)}, \dots, \gamma_N^{(2)}$

$$\gamma^{(1)} = (2\alpha_1 - \beta_1 h)(2\alpha_1 + \beta_1 h)^{-1}, \quad \omega^{(1)} = 2h(2\alpha_1 + \beta_1 h)^{-1},$$

$$\gamma_j^{(2)} = (2\alpha_{2,j} - \beta_{2,j} h)(2\alpha_{2,j} + \beta_{2,j} h)^{-1}, \quad \omega_j^{(2)} = 2h(2\alpha_{2,j} + \beta_{2,j} h)^{-1},$$

$$\gamma^{(m)} = (2\alpha_m - \beta_m k)(2\alpha_m + \beta_m k)^{-1}, \quad \omega^{(m)} = 2k(2\alpha_m + \beta_m k)^{-1}, \quad m = 3, 4.$$

Предварительно преобразовав систему (12) — (14), будем искать ее решение по методу прогонки. Заметим, что  $B$  — якобиева нормальная матрица. Поэтому все ее собственные значения вещественны и различны ([4]). Следовательно,  $B$  представима в виде

$$B = T\Lambda T^{-1}, \quad (15)$$

где  $\Lambda$  — диагональная матрица.

Умножим обе части уравнений (12) — (14) слева на  $T^{-1}$ . Учитывая (15), получим

$$\mu_i^{(1)}\hat{V}_{i-1} - (\Lambda + 2(a_i + h^2 p_i)E)\hat{V}_i + \mu_i^{(2)}\hat{V}_{i+1} = \hat{F}_i, \quad (16)$$

$$\hat{V}_{-1} = \gamma^{(1)}\hat{V}_0 + \hat{\Phi}_1, \quad (17)$$

$$\hat{V}_{M+1} = T^{-1}\Gamma T\hat{V}_M + \hat{\Phi}_2, \quad (18)$$

где

$$\hat{V}_i = T^{-1}\hat{V}_i, \quad \hat{F}_i = T^{-1}F_i, \quad \hat{\Phi}_1 = T^{-1}\Phi_1, \quad \hat{\Phi}_2 = T^{-1}\Phi_2.$$

Решение системы (16) — (18) ищем в виде

$$\hat{V}_{i-1} = X_i\hat{V}_i + Y_i. \quad (19)$$

Используя (19), из (16) получим

$$(\Lambda + 2(a_i + h^2 p_i)E - \mu_i^{(1)}X_i)\hat{V}_i = \mu_i^{(2)}\hat{V}_{i+1} - \hat{F}_i + \mu_i^{(1)}Y_i. \quad (20)$$

Если

$$\det(\Lambda + 2(a_i + h^2 p_i)E - \mu_i^{(1)}X_i) \neq 0, \quad (21)$$

то, умножив (20) слева на  $(\Lambda + 2(a_i + h^2 p_i)E - \mu_i^{(1)}X_i)^{-1}$ , а затем сравнив полученное выражение с (19), получим рекуррентные соотношения для вычисления  $X_i$  и  $Y_i$ :

$$X_{i+1} = \mu_i^{(2)}(\Lambda + 2(a_i + h^2 p_i)E - \mu_i^{(1)}X_i)^{-1}, \quad (22)$$

$$Y_{i+1} = \frac{1}{\mu_i^{(2)}} X_{i+1}(\mu_i^{(1)}Y_i - \hat{F}_i). \quad (23)$$

Вычисления по формулам (22) — (23) можно вести при условии, что нам известны начальные значения для матрицы и вектора  $X_0$  и  $Y_0$ . Сравнивая (17) и (19), получим

$$X_0 = \gamma^{(1)}E, \quad (24)$$

$$Y_0 = \hat{\Phi}_1. \quad (25)$$

Далее по формулам (22) — (23) можно найти значения

$$X_1, X_2, \dots, X_{M+1}, \quad Y_1, Y_2, \dots, Y_{M+1}.$$

После этого можно по формуле (19) в обратном ходе вычислить все значения вектора  $\hat{V}_i$ . Крайнее значение вектора  $\hat{V}_{M+1}$  определим из системы уравнений

$$\hat{V}_M = X_{M+1}\hat{V}_{M+1} + Y_M,$$

$$\hat{V}_{M+1} = T^{-1}\Gamma T\hat{V}_M + \hat{\Phi}_2.$$

Если

$$\det(E - T^{-1}\Gamma T X_{M+1}) \neq 0, \quad (26)$$

то

$$\hat{V}_{M+1} = (E - T^{-1}\Gamma T X_{M+1})^{-1}(\hat{\Phi}_2 + T^{-1}\Gamma T Y_{M+1}).$$

Наконец, по формуле

$$V_i = T\hat{V}_i$$

находим значения искомого вектора  $V_i$ .

Устойчивость (21) соотношений (19), (22), (23) следует из неравенств

$$\|X_m\|_I \leq 1, \quad m = 0, 1, \dots, M+1, \quad (27)$$

которые мы докажем методом математической индукции.

В силу условий (6) для достаточно малых  $h$  справедливо неравенство

$$\|X_0\|_I = |\gamma^{(1)}| \|E\|_I \leq 1.$$

Пусть  $\|X_i\|_I \leq 1$  при  $i = 0, 1, \dots, m-1$ . Из (22) имеем

$$\begin{aligned} \|X_m\|_I &\leq |\mu_{m-1}^{(1)} (\min_j \lambda_j + 2a_{m-1} + 2h^2\rho_{m-1} - \mu_{m-1}^{(1)})^{-1}| = \\ &= \frac{\mu_{m-1}^{(2)}}{|\min_j \lambda_j + 2h^2\rho_{m-1} + \mu_{m-1}^{(2)}|}. \end{aligned}$$

Собственные числа матрицы  $B$  неотрицательны. Следовательно,

$$\|X_m\|_I \leq 1.$$

Таким образом, неравенства (27) доказаны.

Заметим, что из (27) и (6) следует выполнимость условия (21). Для выполнимости (26) ограничений (6) недостаточно. Пусть в (3)  $\alpha_2$  и  $\beta_2$  — постоянные. Тогда для выполнения (26) необходимо и достаточно, чтобы наряду с (6) выполнялось условие

$$|\beta_1| + |\beta_2| + |\beta_3| + |\beta_4| + |p(x) + g(y)| \neq 0. \quad (28)$$

Элементы главной диагонали диагональной матрицы  $\Lambda$  определяются как корни характеристического уравнения

$$\det(\lambda E - B) = 0. \quad (29)$$

Получим рекуррентные соотношения для вычисления коэффициентов многочлена  $P(\lambda) = |\lambda E - B|$ .

Обозначим через  $D_j(\lambda)$  угловой минор порядка  $j$  матрицы  $B$  и пусть  $D_0(\lambda) = 1$ . Имеем [4]

$$D_j(\lambda) = (\lambda - 2m_{j-1}) D_{j-1}(\lambda) - e_{j-1}^{(1)} e_{j-2}^{(2)} D_{j-2}(\lambda), \quad j = 2, 3, \dots, N, \quad (30)$$

$$D_{N+1}(\lambda) = (\lambda - 2m_N + e_N^{(2)} \gamma^{(4)}) D_N(\lambda) - e_N^{(1)} e_{N-1}^{(2)} D_{N-1}(\lambda).$$

Пусть

$$D_j(\lambda) = S_j^{(j)} \lambda^j + S_{j-1}^{(j)} \lambda^{j-1} + \dots + S_0^{(j)}. \quad (31)$$

Подставив в (30) вместо  $D_{j-1}(\lambda)$  и  $D_{j-2}(\lambda)$  многочлены типа (31), а затем сравнив полученное выражение с (30), получим

$$S_i^{(j)} = S_{i-1}^{(j-1)} - 2m_{j-1} S_i^{(j-1)} - e_{j-1}^{(1)} e_{j-2}^{(2)} S_i^{(j-2)}, \quad j = 2, 3, \dots, N, \quad (32)$$

$$S_i^{(N+1)} = S_{i-1}^{(N)} - (2m_N - e_N^{(2)} \gamma^{(4)}) S_i^{(N)} - e_N^{(1)} e_{N-1}^{(2)} S_i^{(N-1)},$$

где

$$S_{j+1}^{(j)} = S_{j+2}^{(j)} = S_{-1}^{(j)} = 0.$$

По формуле (32) мы сможем последовательно вычислить коэффициенты полиномов  $D_2(\lambda)$ ,  $D_3(\lambda)$ , ...,  $D_{N+1}(\lambda)$ , а  $D_{N+1}(\lambda) = P(\lambda)$ .

Преобразующая матрица  $T$  определяется как совокупность  $N+1$  линейно независимых векторов (столбцов). Для якобиевой матрицы  $k$ -я компонента собственного вектора, соответствующего характеристическому числу  $\lambda_j$ , находится по формуле [4]:

$$t_{1,j} = C_j D_0(\lambda_j), \quad t_{k,j} = \frac{C_j D_{k-1}(\lambda_j)}{e_0^{(2)}, e_1^{(2)}, \dots, e_{k-2}^{(2)}}, \quad k = 2, 3, \dots, N+1, \quad (33)$$

где  $C_j$  — произвольные числа, отличные от нуля.

Матрицу  $T^{-1}$  в данном случае можно построить, не занимаясь обращением матрицы как таковым.

Рассмотрим матрицу  $L$ , для которой справедливо равенство

$$B = L^{-1} \Lambda L. \quad (34)$$

С другой стороны, мы нашли такую матрицу  $T$ , что справедливо (15). Следовательно, в классе матриц  $L$  найдется матрица  $L_0$ , для которой верно

$$L_0 T = E. \quad (35)$$

Транспонируя обе части уравнения (34), получим

$$B^T = L^T \Lambda (L^{-1})^T.$$

Элементы  $s_{m,n}$  матрицы  $L^T$  можно вычислить по соотношениям типа (33):

$$s_{1,n} = \sigma_n D_0(\lambda_n), \quad s_{m,n} = \frac{\sigma_n D_{m-1}(\lambda_n)}{e_1^{(1)} e_2^{(1)} \dots e_{m-1}^{(1)}}, \quad m = 2, 3, \dots, N+1, \\ n = 1, 2, \dots, N+1, \quad (36)$$

где  $\sigma_n$  — произвольные числа, отличные от нуля.

Рассмотрим произведение  $LT = \{\tau_{i,j}\}$ , где

$$\tau_{i,j} = \sigma_i C_j \left( \sum_{k=1}^N \frac{D_k(\lambda_i) D_k(\lambda_j)}{e_1^{(1)} e_2^{(1)} \dots e_k^{(1)} e_0^{(2)} e_1^{(2)} \dots e_{k-1}^{(2)}} + 1 \right).$$

Так как по (36) можно определить весь класс матриц  $L$  (см. [5]), то должны найтись такие  $\bar{\sigma}_1, \bar{\sigma}_2, \dots, \bar{\sigma}_{N+1}$ , что выполняется (35). Следовательно,

$$\bar{\sigma}_i C_j \left( \sum_{k=1}^N \frac{D_k(\lambda_i) D_k(\lambda_j)}{\prod_{s=1}^k e_s^{(1)} \cdot e_{s-1}^{(2)}} + 1 \right) = \delta_{i,j},$$

где  $\delta_{i,j}$  — символ Кронекера.

По условию

$$\bar{\sigma}_i C_j \neq 0,$$

и, значит,

$$\bar{\sigma}_i = \frac{1}{C_j} \left( \sum_{k=1}^N \frac{D_k^2(\lambda_i)}{\prod_{s=1}^k e_s^{(1)} e_{s-1}^{(2)}} + 1 \right)^{-1}. \quad (37)$$

Итак, элементы  $\hat{t}_{i,j}$  матрицы  $T^{-1}$  определяются по соотношениям

$$\hat{t}_{i,1} = \bar{\sigma}_i D_0(\lambda_i), \quad \hat{t}_{i,j} = \frac{\bar{\sigma}_i D_{j-1}(\lambda_i)}{e_1^{(1)} e_2^{(1)} \dots e_{j-1}^{(1)}}, \quad i = 1, 2, \dots, N+1, \\ j = 2, 3, \dots, N+1,$$

где  $\bar{\sigma}_i$  находятся по (37).

В заключение отметим, что реализация предлагаемого метода решения краевой задачи (1) — (5) связана с выполнением  $\approx 6N^2M + KN^3$  операций сложения и умножения, тогда как в случае метода прогонки, изложенного в [2], число аналогичных операций  $\approx KN^3M$ , где  $K$  — постоянная, зависящая от выбора метода обращения матриц.

### Литература

1. Годунов С. К., Рябенский В. С. Введение в теорию разностных схем. ФМ, М., 1962.
2. Гельфанд И. М., Локуцкий О. В. «О методе «прогонки» для решения разностных уравнений». Дополнение к [1], стр. 283—310.
3. Лященко I. М. Доповіді АН УРСР, № 4, 1964.
4. Гантмахер Ф. Р., Крейн М. Г. Осцилляционные матрицы ядра и малые колебания механических систем. ГИТТЛ, М.—Л., 1950.
5. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. Изд. «Наука», М., 1967.
6. Курош А. Г. Курс высшей алгебры. Изд. «Наука», М., 1965.

Белорусский государственный университет им. В. И. Ленина

Поступило в редакцию 22.IV 1969

В. А. ЛИСКОВЕЦ

## ПОДСЧЕТ КОРНЕВЫХ ИНИЦИАЛЬНО СВЯЗНЫХ ОРИЕНТИРОВАННЫХ ГРАФОВ

В теории перечисления графов существует проблема подсчета всех попарно не изоморфных инициально связанных ориентированных графов с данным числом вершин (и дуг). Она фигурирует (под номером 3) в списке основных нерешенных задач перечисления графов в обзорной статье Ф. Харари [5].

Диграф (следуя Харари, так мы для краткости будем называть впредь ориентированные графы) называется инициально связным (по терминологии [5] — диграф с источником), если в нем есть вершина, из которой достижимы все остальные вершины посредством ориентированных путей.

В настоящей статье мы решаем указанную проблему для корневого случая, т. е. подсчитываем диграфы с одной выделенной вершиной (корнем), все остальные вершины которых достижимы из нее. Наличие корня означает, что рассматриваются лишь все такие изоморфизмы графов, при которых корню соответствует корень. Решение проблемы для бескорневого случая пока неизвестно. Мы ограничиваемся перечислением по числу вершин, так как подсчет при заданном числе вершин и дуг не вызывает принципиальных затруднений и сводится к замене величин, входящих в полученные формулы, на соответствующие им производящие многочлены (по числу дуг). Но доказательство этого факта заняло бы слишком много места.

Ключом к решению проблемы, строящемуся на основе известной леммы Бернсайда, является тождество (9), связывающее число всех корневых инициально связанных диграфов, обладающих определенной симметрией, с аналогичным числом связанных неориентированных графов. Последнее находится методом Гилберта [6]. Мы даем прямое комбинаторное доказательство этого тождества. Частный случай тождества приведен ранее в [3], где решена также более простая задача подсчета без учета возможных симметрий. Такой подход использует технику разбиений чисел и приводит к довольно сложной явной формуле, содержащей суммирование по особому типу объектов (их число изучается в § 5).

§ 1. Мы придерживаемся в основном терминологии [1]. Ограничимся рассмотрением обыкновенных конечных графов, т. е. не имеющих петель и кратных ребер и дуг. В качестве основного множества вершин рассматривается множество  $V = V_n = \{v_1, \dots, v_n\}$ ,  $n = 1, 2, \dots$ . Дуга, исходящая из  $v_i$  и заходящая в  $v_j$ , обозначается  $(v_i, v_j)$ . Когда необходимо, диграф будем отождествлять с соответствующим ему (иррефлексивным) бинарным отношением, а неориентированный граф — с симметрическим отношением. Подстановка  $g$  на  $V$  называется автоморфизмом графа  $\Gamma$ , если ребро (дуга)  $(v_i, v_j)$  в  $\Gamma$  есть тогда и только тогда, когда в нем есть ребро (дуга)  $(g(v_i), g(v_j))$ . При этом  $\Gamma$  называется инвариантным относительно  $g$ . Если  $W \subseteq V$ ,

подграф графа  $\Gamma$ , индуцированный на  $W$  ([1], стр. 12), т. е. ограничение  $\Gamma$  на  $W$ , обозначается  $\Gamma_W$ ; если  $g(W) = W$ , то  $g$  индуцирует на  $W$  подстановку, обозначаемую  $g_W$ .

Число всех попарно не изоморфных диграфов с  $n$  вершинами обозначим через  $P(n)$ , а неориентированных графов — через  $P_0(n)$ .  $C_0(n)$  означает соответствующее число связанных неориентированных графов. Для обозначения числа соответствующих корневым графов используется штрих, так что  $P'(n)$  — число корневых диграфов,  $C'_0(n)$  — число связанных корневых графов и т. д.  $A'(n)$  обозначает число всех попарно не изоморфных корневых инициально связанных относительно корня диграфов с  $n$  вершинами. Производящие функции этих величин обозначаются теми же буквами. В качестве корня фиксируем вершину  $v_1$ .

Каждая подстановка  $g$  на  $V_n$  характеризуется своим типом, или классом  $\tau$  ([4], стр. 92), который является некоторым разбиением числа  $n$ , т. е. выражением вида  $n = n_1 + n_2 + \dots$ , или  $n = \sum_{l=1}^n j_l l$ , где  $n_i > 0$ ,  $j_l \geq 0$  целые. Здесь  $n_1, n_2, \dots$  — длины независимых циклов  $g$ , называемые слагаемыми  $\tau$ ,  $j_l$  — число циклов  $g$  длины  $l$ .  $n$  называется весом  $\tau$  и обозначается  $|\tau|$ . Разбиения мы будем обозначать малыми греческими буквами или записывать в стандартном виде  $\tau = (1^{j_1} 2^{j_2} \dots n^{j_n})$ , в котором члены с  $j_l = 0$  могут и не записываться. Разбиение, состоящее из одного слагаемого, т. е. вида  $n = n$ , отождествляется с этим слагаемым. К разбиениям будем причислять и пустое разбиение веса 0, обозначаемое  $\emptyset$ . Тип  $\emptyset$  имеет подстановка пустого множества. Введем понятие суммы двух разбиений в обычном векторном смысле, т. е. если  $\tau = (1^{j_1} \dots n^{j_n})$ ,  $\sigma = (1^{i_1} \dots m^{i_m})$ ,  $m \leq n$ , то  $\tau + \sigma = \sigma + \tau = (1^{j_1+i_1} \dots m^{j_m+i_m} (m+1)^{j_{m+1}} \dots n^{j_n})$ ,  $|\tau + \sigma| = |\tau| + |\sigma|$ . Соответственно вводится умножение разбиения на натуральное число. Если  $j_l \geq i_l$ ,  $l = 1, \dots, m$ , имеет смысл говорить теперь о разности  $\tau - \sigma$ , при этом будем писать  $\sigma \leq \tau$ , что определяет отношение частичного порядка на множестве всех разбиений. Число слагаемых в  $\tau$  обозначим  $k(\tau)$ , число нечетных слагаемых —  $k_1(\tau)$ , четных —  $k_2(\tau)$ , так что  $k(\tau) = \sum j_l$ ,  $k_1(\tau) = \sum j_{2l-1}$ ,  $k_2(\tau) = \sum j_{2l}$ ,  $k(\tau) = k_1(\tau) + k_2(\tau)$ ,  $k_{(l)}(\tau + \sigma) = k_{(l)}(\tau) + k_{(l)}(\sigma)$ . Введем далее обозначения  $\tau! = \prod_l (j_l!)$ ,  $\emptyset! = 1$ ;  $C_\tau^\sigma = C_{j_1}^{i_1} \dots C_{j_m}^{i_m} = \tau! / \sigma! (\tau - \sigma)!$ , если  $\sigma \leq \tau$  (иначе полагаем  $C_\tau^\sigma = 0$ );  $\pi(\tau) = \prod j_l!$ . Пусть  $(k, l)$  означает наибольший общий делитель чисел  $k$  и  $l$ , а  $[k, l]$  — их наименьшее общее кратное. Обозначим  $(\sigma, \tau) = (\tau, \sigma) = \sum_k \sum_l (k, l) i_k j_l$  сумму наибольших общих делителей всех пар слагаемых из  $\sigma$  и  $\tau$  ( $(\emptyset, \tau) = 0$ ).

Производящие функции вводятся следующим образом (подробнее о методе производящих функций см. [4], особенно главу 2; см. также [9]). Числу  $n$  ставится в соответствие  $x^n$ , а функции  $\Phi(n)$  — степенной ряд  $\Phi(x) = \sum_n \Phi(n) x^n$ . Аналогично разбиению  $\tau = (1^{j_1} \dots n^{j_n})$  ставится в соответствие одночлен  $y_1^{j_1} \dots y_n^{j_n}$ , который мы обозначим кратко  $y^\tau$ , а функции  $\varphi(\tau)$  — ряд  $\varphi(y) = \sum_\tau \varphi(\tau) y^\tau / \tau!$ , называемый экспоненциальной производящей функцией. Полезность введенных таким образом производящих функций хорошо известна. Но их рассмотрение в рамках обычной теории функций не представляется возможным, так как эти ряды часто оказываются всюду расходящимися. Поэтому оперирование ими (особенно в случае бесконечного числа переменных) нуждается в специальном обосновании. Кратко остановимся на этом.

Пусть  $K$  — (коммутативное) кольцо формальных бесконечных степенных рядов над полем рациональных чисел от бесконечного числа «неизвестных»  $x, t, y_1, y_2, \dots, y_n, \dots$ , каждый одночлен которых имеет конечную степень. Наряду со сложением и умножением (и частичным делением) в  $K$  можно ввести формально операторы  $\exp f$  (свободный член  $f$  равен 0),  $\log f$  (свободный член  $f$  равен 1),  $D_{y_i} f$  аналогично выражению соответствующих операций над степенными рядами в математическом анализе<sup>\*)</sup>. Кроме того, используется операция суперпозиции (подстановки)  $y_i = f_i, i = 1, 2, \dots$ , в  $f$  ( $f, f_i \in K$ ), что записывается  $g = f|_{\{y_i=f_i\}}$ , при условии, чтобы  $g \in K$ , т. е. чтобы в результате приведения членов не возникли бесконечные или неопределенные коэффициенты. В частности, этому существенно условию удовлетворяет подстановка  $y_i = x^i f_i, i = 1, 2, \dots$ , где  $f_i$  не содержит  $x$ , так как существует лишь конечное число одночленов, дающих в результате этой подстановки члены, содержащие  $x$  в заданной степени. Можно доказать, что эти операции связаны между собой обычными соотношениями: суперпозиция является эндоморфизмом  $K$ , перестановочным с  $\exp$  и  $\log$ , дифференцирование  $D_{y_i}$  линейно,  $\log(fg) = \log f + \log g$ ,  $\exp \log f = f$ ,  $D_{y_i}(\log f) = f^{-1} D_{y_i} f$  и т. д. Это позволяет теперь оперировать элементами  $K$  точно так же, как обычными степенными рядами, не требуя их сходимости в обычном смысле.

§ 2. Основным методом перечисления графов является знаменитая теорема Пойа и ее обобщения (см., например, [2, 5, 7]). Однако для наших целей будет достаточно ограничиться следующей простой теоремой, обычно называемой леммой Бернсайда ([1], стр. 278, [2]), на которую опирается теорема Пойа<sup>\*\*)</sup>.

**Теорема 1.** Пусть  $G$  — группа подстановок, действующих на конечном множестве  $X, Y \subseteq X, G(Y) = Y$ . Тогда число орбит (областей транзитивности)  $G$ , на которые разбивается  $Y$ , равно

$$|G|^{-1} \sum_{g \in G} j_1^{(Y)}(g),$$

где  $j_1^{(Y)}(g)$  — число стационарных точек  $g_Y$ , т. е. таких  $x \in Y$ , что  $g(x) = x$ ,  $|G|$  — порядок  $G$ .

**Замечание.** Если  $g_1$  и  $g_2$  — две сопряженные в  $G$  подстановки, то  $j_1^{(Y)}(g_1) = j_1^{(Y)}(g_2)$ .

В теории перечисления графов эту теорему можно применять следующим образом. Если  $\Gamma$  — произвольный граф с множеством вершин  $V$ , а  $G$  — группа подстановок, действующих на  $V$ , и  $g \in G$ , то  $g$  переводит  $\Gamma$  в определенный граф  $g(\Gamma)$ , изоморфный  $\Gamma$ . Точнее следовало бы сказать, что группа  $G$  индуцирует группу подстановок, абстрактно изоморфную  $G$ , на множестве всех графов, но мы их можем отождествлять. Пусть  $B_n$  — некоторый класс графов на  $V_n$ , инвариантный относительно  $G$ , т. е. такой, что если  $\Gamma \in B_n$ ,  $g \in G$ , то  $g(\Gamma) \in B_n$ . Обозначим через  $B(n) = B_G(n)$  число попарно не изоморфных относительно  $G$  графов в  $B_n$  (т. е. орбит  $G$  на  $B_n$ ), а через  $b(g)$  — число всех графов из  $B_n$ , инвариантных относительно подстановки  $g \in G$ . Тогда получаем

**Следствие.**

$$B(n) = |G|^{-1} \sum_{g \in G} b(g). \quad (1)$$

<sup>\*)</sup> Удобно предварительно ввести в  $K$  нормирование обычным образом.

<sup>\*\*)</sup> Мы даем ее в слегка обобщенном виде (ср. [2]), необходимом для дальнейшего.

Это сводит проблему определения  $B(n)$  к задаче нахождения  $b(g)$  для всех  $g \in G$ . Первым шагом к ее решению является нахождение  $b(e_n) = B_{e_n}(n)$ , где  $e_n$  — тождественная подстановка. Это число, называемое числом графов из  $B_n$  с отмеченными (маркированными) вершинами, представляет самостоятельный интерес (см. [5, 6]). Разумеется, задача его определения более проста, однако в известном смысле можно сказать, что следствие теоремы 1, приведенное выше, сводит к ней общую задачу. В самом деле, пусть  $B'_n$  — подкласс  $B_n$  всех графов, инвариантных заданной подстановке  $g$  из группы  $G$ . Тогда  $B'_n$  «инвариантен» относительно  $e_n$  и мы имеем  $b(g) = b'(e_n)$ . Выражение (1) можно было бы непосредственно использовать для подсчета многих графов, но теорема Пойа является более удобным и эффективным инструментом (особенно когда подсчитываются графы с заданным числом вершин и ребер (дуг)). Однако, к сожалению, при подсчете сложных величин типа  $A'(n)$  непосредственно теорему Пойа применить не удается.

Обычно в комбинаторных задачах в качестве  $G$  выступает симметрическая группа  $S_n$  всех подстановок на  $V_n$ . В частности, она неявно входит в определение  $P(n)$ ,  $P_0(n)$ ,  $C_0(n)$ . Пусть  $B_n$  — любой из соответствующих им классов графов. Как известно, подстановки в  $S_n$  сопряжены тогда и только тогда, когда они имеют одинаковый тип, причем существует  $n!/\tau! \pi(\tau)$  подстановок типа  $\tau$ . Поэтому  $b(g)$  можно обозначить через  $b(\tau)$ , где  $\tau$  — тип  $g$ . Это тем более удобно, что  $\tau$  не зависит от выбора исходного множества вершин.  $B_n$  инвариантен относительно  $S_n$ . Поэтому формула (1) превращается в

$$B(n) = \sum_{|\tau|=n} b(\tau)/\tau! \pi(\tau). \quad (2)$$

Рассмотрение корневых графов с фиксированной в качестве корня вершиной  $v_1$  равносильно тому, что в качестве исходной группы возможных симметрий берется группа  $S'_n = S_1 \times S_{n-1} \subseteq S_n$ , где  $S_1$  «действует» на  $\{v_1\}$ . В  $S'_n$  существует  $(n-1)!/(\tau-1)! \pi(\tau)$  подстановок типа  $\tau$ . Все рассматриваемые классы корневых графов инвариантны относительно  $S'_n$ . Поэтому имеем для них аналогично общую формулу

$$B'(n) = \sum_{|\tau|=n, \tau > 1} b(\tau)/(\tau-1)! \pi(\tau). \quad (3)$$

В дальнейшем в соответствии с этими обозначениями  $a(\tau)$  означает число всех инициально связных относительно  $v_1$  диграфов, инвариантных относительно некоторой выбранной подстановки  $g$  типа  $\tau$ ,  $g(v_1) = v_1$ . Соответствующий смысл имеют  $p(\tau)$ ,  $p_0(\tau)$ ,  $c_0(\tau)$ .

§ 3. Начнем со следующих известных результатов.

Лемма 1.  $p_0(\tau) = 2^{[(\tau, \tau) - k_1(\tau)]/2}$ ,  $p(\tau) = 2^{(\tau, \tau) - k(\tau)}$ .

Доказательство. Нетрудно проверить, что эти формулы равносильны выражениям  $p_0(\tau)$  и  $p(\tau)$ , данным в иной форме в [7, 8, 4]. Но нам будет удобно привести здесь краткое доказательство.

1. Пусть  $g$  — подстановка на  $V$  типа  $\tau$ ,  $\Gamma$  — неориентированный граф, инвариантный относительно  $g$ . Если  $f_1, f_2$  — два различных цикла  $g$  длин  $l$  и  $m$  соответственно, то вместе с ребром  $(v_{i_1}, v_{i_2})$ ,  $v_{i_1} \in f_1$ ,  $v_{i_2} \in f_2$ ,  $\Gamma$  обязан содержать еще  $[l, m]$  определенных ребер, соединяющих вершины  $f_1$  и  $f_2$  между собой, причем каждая вершина  $f_2$  соединена с некоторой верши-

ной  $f_1$  и наоборот. Наличие всех этих ребер в графе на присутствие других не влияет. Так как  $lm/[l, m] = (l, m)$ , существует  $2^{(l,m)}$  возможностей соединения вершин  $f_1$  и  $f_2$  допустимо относительно  $g$ . Теперь рассмотрим возможные соединения вершин цикла  $f_1$  друг с другом. Легко видеть, что они полностью определяются соединением вершины  $v_{i_1}$  с  $[l/2]$  следующими за ней в цикле вершинами, причем все такие соединения допустимы. Значит, всего возможных вариантов соединения вершин цикла  $f_1$  в графе  $\Gamma$  есть  $2^{l/2}$  для четного  $l$  и  $2^{(l-1)/2}$  для нечетного. Общее число  $p_0(g)$  получается произведением по всем неупорядоченным парам циклов  $g$  (не обязательно различных), что и дает требуемый результат.

2. Для диграфов рассуждения в принципе такие же, с тем лишь отличием, что рассматриваются упорядоченные пары циклов, а соединения внутри одного цикла  $f_1$  полностью определяются набором дуг, исходящих из  $v_{i_1}$ , что дает  $2^{l-1}$  возможностей.

**Теорема 2.** Для  $c_0(\tau)$  при  $\tau \geq 1$  справедливо следующее рекуррентное соотношение:

$$c_0(\tau) + \sum_{1 \leq \sigma < \tau} C_{\tau-1}^{\sigma-1} p_0(\tau - \sigma) c_0(\sigma) = p_0(\tau). \quad (4)$$

**Доказательство.** Соотношение (4) обобщает случай  $\tau = (1^n)$  (в котором  $\sigma = (1^t)$ ,  $t < n$ ), рассмотренный Гилбертом [6], и доказывается с помощью таких же рассуждений (см. также [3]). Пусть  $g$  — подстановка типа  $\tau$ ,  $g(v_1) = v_1$ ,  $\Gamma$  — неориентированный граф, инвариантный относительно  $g$ ,  $W \subseteq V$  — множество связанных с  $v_1$  вершин в  $\Gamma$ . Покажем, что  $g(W) = W$ , так что существует подстановка  $h = g_W$  типа  $\sigma$ ,  $1 \leq \sigma \leq \tau$ . Имеем  $v_1 \in W$ . Далее (по индукции) пусть цикл  $f_1$  подстановки  $g$  целиком лежит в  $W$ , для  $f_2$  содержит вершину  $v_i$ , соединенную ребром с некоторой вершиной  $f_1$ . Тогда  $v_i \in W$  и, как и в первом пункте доказательства леммы 1, каждая вершина  $f_2$  связана ребром с некоторой вершиной  $f_1$ . Значит,  $f_2$  также целиком лежит в  $W$ , что и требовалось доказать. Итак, связный подграф  $\Gamma_W$  (компонента связности  $v_1$ ) инвариантен относительно  $h$ ,  $\Gamma_{V-W}$  инвариантен относительно  $g_{V-W}$  типа  $\tau - \sigma$ . Обратно, при заданных  $g$  и  $W$ ,  $v_1 \in W$ ,  $g(W) = W$ , любому связному неориентированному графу на  $W$ , инвариантному относительно  $g_W$ , и любому графу на  $V - W$ , инвариантному относительно  $g_{V-W}$ , соответствует вполне определенный граф на  $V$ , инвариантный относительно  $g$ , являющийся их объединением. Наконец, заметим, что для  $\sigma$  существует ровно  $C_{\tau-1}^{\sigma-1}$  множеств  $W \subseteq V$ ,  $g(W) = W$ ,  $v_1 \in W$ , таких, что  $g_W$  имеет тип  $\sigma$ . Отсюда и вытекает (4) (ср. [6, 3]). Теорема доказана.

Соотношение (4) позволяет последовательно находить все  $c_0(\tau)$ , начиная с  $c_0(1) = 1$ . По (3) отсюда получается выражение  $C'_0(n)$ ,  $n = 1, 2, \dots$ . Однако из (4) можно получить явное выражение  $c_0(\tau)$  и более простое выражение  $C'_0(n)$ . Для этого рассмотрим производящие функции  $c'_0(y) = \sum_{\tau \geq 1} c_0(\tau) y^\tau / \tau!$ ,  $p_0(y) = \sum_{\tau \neq \emptyset} p_0(\tau) y^\tau / \tau!$ . Умножим обе части (4) на  $y^{\tau-1}$  и просуммируем по всем  $\tau \geq 1$ . Тогда получим, учитывая тот факт, что  $y^{\sigma+\delta} = y^\sigma y^\delta$ , и обозначая  $\delta = \tau - \sigma$ ,

$$(1 + \sum_{\delta \neq \emptyset} p_0(\delta) y^\delta / \delta!) \sum_{\sigma \geq 1} c_0(\sigma) y^{\sigma-1} / (\sigma - 1)! = \sum_{\tau \geq 1} p_0(\tau) y^{\tau-1} / (\tau - 1)!. \quad (5)$$

что равносильно

$$(1 + p_0(y)) D_{y_1} c'_0(y) = D_{y_1} (1 + p_0(y)).$$

Отсюда получаем

$$c'_0(y) = \log(1 + p_0(y)) + \bar{C}(y_2, y_3, \dots).$$

Легко понять, что  $\log(1 + p_0(y))$  отличается от  $c'_0(y)$  лишь членами, соответствующими разбиениям  $\tau$ , не содержащим единичных слагаемых. Поэтому

$$c'_0(y) = [\log(1 + p_0(y))] |_{\tau > 1}, \quad (6)$$

или равносильно

$$c'_0(y) = \log \left( \frac{1 + p_0(y)}{1 + p_0(y)|_{y_i=0}} \right).$$

Эта формула обобщает известное выражение Гилберта [6] экспоненциальной производящей функции для  $c_0(1^n)$

$$c_0(x) = \log(1 + p_0(x)).$$

Как и в [6], мы можем получить отсюда явное выражение  $c_0(\tau)$ ,  $\tau \geq 1$ . Для этого разложим обычным образом логарифм в (6) в ряд по степеням  $p_0(y)$

$$c'_0(y) = \left[ \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m+1} \frac{p_0^m(y)}{m} \right] |_{\tau > 1}$$

и вычислим  $p_0^m(y)$ :

$$p_0^m(y) = \sum_{\tau \neq \emptyset} y^\tau / \tau! \sum_{\tau_k, i_k} \tau! \frac{m!}{\prod (i_k!)} \prod_k \left( \frac{p_0(\tau_k)}{\tau_k!} \right)^{i_k},$$

где внутреннее суммирование ведется по всем таким упорядоченным наборам неотрицательных целых чисел  $i_k$  и непустых разбиений  $\tau_k$ , что  $\sum_k i_k \tau_k = \tau$ ,  $\sum_k i_k = m$ . Окончательно получаем

Следствие 1.

$$c_0(\tau) = \tau! \sum_{(\tau)} (-1)^k \frac{(\sum_k i_k - 1)!}{\prod (i_k!)} \prod_k \left( \frac{p_0(\tau_k)}{\tau_k!} \right)^{i_k}, \quad \tau \geq 1, \quad (7)$$

где  $(\tau)$  означает всевозможные разбиения  $\tau$  вида  $\tau = \sum_k i_k \tau_k$ ,  $\tau_k \neq \emptyset$ .

Вернемся теперь к соотношению (5) и произведем в нем подстановку  $y_i = x^i/i$ ,  $i = 1, 2, \dots$ . Это превратит член  $p_0(\delta) y^\delta / \delta!$  в  $p_0(\delta) x^m / \delta! \pi(\delta)$ , где  $m = |\delta|$ , что в сумме по всем  $\delta$ ,  $|\delta| = m$ , дает в силу (2)  $P_0(m) x^m$ .

Аналогичные изменения претерпевают (с  $\tau, \sigma \geq 1$ , и использованием (3)) правая часть и члены, содержащие  $c_0(\sigma)$ . Тем самым мы доказали

Следствие 2.

$$C'_0(x) = P'_0(x)/(1 + P_0(x)). \quad (8)$$

Более простым путем эта формула, дающая весьма простое выражение  $C'_0(x)$  через известные производящие функции от одной переменной, была выведена Ф. Харари [7].

§ 4. Перейдем к доказательству основного результата этой статьи.

Теорема 3. *Справедливо следующее тождество:*

$$a(\tau) = 2^{[(\tau, \tau) - k_1(\tau)]/2 - k_2(\tau)} c_0(\tau) = 2^{-k_2(\tau)} \rho_0(\tau) c_0(\tau), \quad \tau \geq 1. \quad (9)$$

Дадим непосредственное комбинаторное доказательство. Его идея заключается в том, чтобы определенным образом ориентировать ребра произвольного связного графа  $\Gamma$ , инвариантного относительно  $g$ , превращая его в инициально связный диграф  $D$ , и поставить в соответствие  $\Gamma$  все наддиграфы  $D$  (на том же множестве вершин), инвариантные относительно  $g$ . Здесь  $g$  — подстановка на  $V$  типа  $\tau$ ,  $g(v_1) = v_1$ .

1. Итак, пусть  $\Gamma$  — связный неориентированный граф, инвариантный относительно  $g$ . Для ориентации ребер  $\Gamma$  построим на  $V$  бинарное отношение  $R_{\Gamma, g}$ . Рассмотрим разложение  $V = W_0 \cup W_1 \cup W_2 \cup \dots$  на попарно не пересекающиеся подмножества следующего вида:  $W_0 = \{v_1\}$ ,  $W_i, i \geq 1$ , — множество всех вершин, каждая из которых соединена в  $\Gamma$  ребром с некоторой вершиной из  $W_{i-1}$ , но не соединена ни с одной вершиной  $W_j, j < i-1$ . В силу связности  $\Gamma$  такое разложение существует и единственно. С помощью тех же рассуждений, что и в доказательстве теоремы 2, нетрудно показать, что  $g(W_i) = W_i$ . Определим теперь отношение  $R_{g, i}$  на  $W_i$ , не зависящее от  $\Gamma$ . Если  $f_1$  и  $f_2$  — два различных цикла  $g$ , действующих на  $W_i$ , и если вершина с наименьшим номером среди вершин  $f_1$  и  $f_2$  лежит в  $f_1$ , то положим, что  $R_{g, i}$  содержит все пары вида  $(v_r, v_l), v_r \in f_1, v_l \in f_2$ . Пусть теперь  $f$  — цикл  $g_{W_i}$  вида  $f = (v_{i_1}, v_{i_2}, \dots, v_{i_l})$ . Будем тогда считать, что  $(v_{i_r}, v_{i_t}) \in R_{g, i}, 1 \leq r, t \leq l$ , тогда и только тогда, когда  $t = r + 1, r + 2, \dots, r + [l/2]$ , где черта означает вычет по модулю  $l$ . Построенное таким образом  $R_{g, i}$  (соответствующий диграф) инвариантно относительно  $g$ . Введем отношение  $J(W_0, W_1, W_2, \dots)$ , состоящее из всех пар вида  $(v_{i_k}, v_{i_p}),$  где  $v_{i_k} \in W_k, v_{i_p} \in W_p, k < p$ , также инвариантное относительно  $g$ . Наконец, положим  $R_{\Gamma, g} = J(W_0, W_1, \dots) \cup_i R_{g, i}$ . Очевидно,  $R_{\Gamma, g}$  — полное отношение, т. е.  $(v_h, v_l) \in R_{\Gamma, g}$  или  $(v_l, v_h) \in R_{\Gamma, g}$  для всех  $v_h \neq v_l$ , причем  $R_{\Gamma, g}$  содержит обе эти пары тогда и только тогда, когда  $v_h, v_l$  являются противоположными вершинами цикла  $g$  четной длины (их присутствие объясняется полнотой  $R_{\Gamma, g}$  и его инвариантностью относительно  $g$ ). Тогда  $D_{\Gamma, g} = \Gamma \cap R_{\Gamma, g}$  и есть требуемый диграф, инвариантный относительно  $g$  и инициально связный относительно  $v_1$  (что вытекает из построения  $R_{\Gamma, g}$  и тех же рассуждений, что и в доказательстве теоремы 2).

2. Пусть  $J$  — полное симметрическое иррефлексивное бинарное отношение на  $V, \bar{R}_{\Gamma, g} = J - R_{\Gamma, g}$ . Пусть  $\Gamma_1$  — неориентированный граф (симметрическое отношение), инвариантный относительно  $g, \bar{D} = \bar{R}_{\Gamma, g} \cap \Gamma_1$ . Существует ровно  $2^{-k_2(\tau)} \rho_0(\tau)$  таких различных диграфов  $\bar{D}$ , и все они инвариантны относительно  $g$ . В самом деле,  $\bar{R}_{\Gamma, g} \cap \Gamma_1 = \bar{R}_{\Gamma, g} \cap \Gamma_2$  тогда и только

тогда, когда  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$  отличаются друг от друга разве что наличием ребер, соединяющих все пары противоположащих вершин некоторых циклов  $g$  четной длины (наличие одного такого ребра в графе, инвариантно относительно  $g$ , означает наличие их всех для данного цикла). Поставим в соответствие графу  $\Gamma$   $2^{-k_2(\tau)} p_0(\tau)$  различных (в силу построения  $\bar{R}_{\Gamma, g}$ ) инициально связанных диграфов вида  $D_{\Gamma, g} \cup \bar{D}$ .

3. Обратно, пусть  $D$  — инициально связанный диграф, инвариантно относительно  $g$ . Рассмотрим разложение  $V = U_0 \cup U_1 \cup U_2 \cup \dots$ , где  $U_0 = \{v_1\}$ ,  $U_i, i \geq 1$ , состоит из всех вершин, в которые входят дуги  $D$ , исходящие из  $U_{i-1}$ , но не входят дуги, исходящие из  $U_j, j < i-1$ . Это позволяет построить, как и в пункте 1, отношения  $J(U_0, U_1, \dots)$ ,  $R_{g, i}$  и  $R_{D, g} = J(U_0, U_1, \dots) \cup_i R_{g, i}$ . Пусть  $D_0 = R_{D, g} \cap D$ ,  $\Gamma = D_0 \cup D_0^{-1}$  — соответствующий неориентированный граф. Без труда проверяется, что  $\Gamma$  связан и инвариантен относительно  $g$ . Из построений выше вытекает, что  $D_{\Gamma, g} = D_0$ ,  $R_{\Gamma, g} = R_{D, g}$  и, кроме того,  $D_{\Gamma_1, g} \neq D_{\Gamma_2, g}$ , если  $\Gamma_1 \neq \Gamma_2$ , и что сам  $D$  является наддиграфом  $D_0$  вида  $D_0 \cup \bar{D}$ , где  $\bar{D} = \bar{R}_{\Gamma, g} \cap \Gamma_1$ ,  $\Gamma_1$  — некоторый граф. Поэтому диграф  $D$  соответствует указанному в пункте 2 образом однозначно определенному графу  $\Gamma$ . Теорема доказана.

Следствие 1.  $a(\tau), \tau \geq 1$ , удовлетворяет следующему рекуррентному соотношению:

$$a(\tau) + \sum_{1 < \sigma < \tau} C_{\tau-1}^{\sigma-1} 2^{(\tau, \tau-\sigma)-k(\tau-\sigma)} a(\sigma) = 2^{(\tau, \tau)-k(\tau)}. \quad (10)$$

Доказательство получается из теорем 2, 3 и леммы 1 с помощью простых преобразований.

Частный случай (9) и (10) для  $\tau = (1^n)$  был доказан нами ранее в [3]. Мы могли бы доказать (10) методом [3], откуда легко вытекает (9). Но приведенное доказательство теоремы 3 представляет самостоятельный интерес.

Тождество (9) можно записать в следующем любопытном виде:

$$a(\tau)/p(\tau) = c_0(\tau)/p_0(\tau), \quad \tau \geq 1,$$

имеющем очевидный вероятностный смысл. Следует еще отметить, что показатель коэффициента при  $c_0(\tau)$  в (9) совпадает с показателем в выражении  $p_1(\tau) = 3^{\lfloor (\tau, \tau) - k_1(\tau) \rfloor / 2 - k_2(\tau)}$  для числа антисимметрических диграфов, которое легко доказать аналогично лемме 1 (сам коэффициент не выражает число графов какого-либо естественного вида).

Из (3), (7) и (9) получаем основную формулу, дающую явное выражение для  $A'(n)$ .

Следствие 2.

$$A'(n) = \sum_{|\tau|=n} j_1 \frac{2^{-k_2(\tau)} p_0(\tau)}{\pi(\tau)} \sum_{(\tau)} (-1)^k \frac{(\sum_k i_k - 1)!}{\prod_k (i_k!)} \prod_k \left( \frac{p_0(\tau_k)}{\tau_k!} \right)^{i_k}, \quad (11)$$

где  $\tau = (1^{j_1} 2^{j_2} \dots n^{j_n})$ ,  $(\tau)$  — разбиение разбиения  $\tau$  вида  $\tau = \sum_k i_k \tau_k, i_k \geq 0, \tau_k \neq \emptyset$ .

В вычислительном отношении формула (11) довольно громоздка и использует суммирование по новому типу объектов. Общее число слагаемых растет довольно быстро (см. § 5).

Первые несколько значений  $A'(n)$  таковы:  $A'(1) = 1$ ,  $A'(2) = 2$ ,  $A'(3) = 18$ ,  $A'(4) = 440$ ,  $A'(5) = 32404$ ,  $A'(6) = 7424016$ .

К сожалению, коэффициент в тождестве (9) не может быть получен (для всех  $\tau \geq 1$ ) с помощью какой-либо суперпозиции из  $y^\tau$ , так как суперпозиция мультипликативна, а  $(\tau, \tau)$  нелинейно (это квадратичная форма от  $j_i$ ). Поэтому не удастся выразить  $A'(n)$  через  $C'_0(n)$  или выразить  $A'(x)$  через известные производящие функции от одной переменной аналогично выражению (8) для  $C'_0(x)$ . По-видимому, (11) не допускает существенного упрощения.  $A'(x)$  можно легко выразить с помощью суперпозиции через  $c'_0(y)$  и  $p_0(y)$ , используя операцию внутреннего произведения для полиномов и рядов со многими переменными, известную из теории характеров групп (ее определение и применение в комбинаторном анализе см. в [9]) или через специально построенную для  $c_0(\tau)$  производящую функцию.

Все полученные результаты можно обобщить на случай перечисления при заданном числе вершин  $n$  и дуг  $N$  (для  $a(1^n, N)$  это сделано в [3]). Однако формулы и рассуждения будут более сложными. Но отметим без доказательства, что окончательные результаты можно записать в точно таком же виде, как и приведенные выше, если заменить  $A'(n)$  на много-

$$\text{член } A'(n, z) = \sum_{N=n-1}^{n(n-1)} A'(n, N)z^N, \quad p_0(\tau) \text{ — на } p_0(\tau, z) = \sum_{N=0}^{n(n-1)/2} p_0(\tau, N)z^N$$

и т. д. Значение  $p_0(\tau, N)$  можно найти в [7, 8].

Гораздо важнее было бы найти  $A(n)$  или  $A(x)$ , т. е. перейти к некорневому случаю. Здесь возникает ситуация, аналогичная перечислению деревьев, где сначала были посчитаны корневые деревья, а затем найдена Отгером простая формула, выражающая производящую функцию для числа некорневых деревьев через производящую функцию для числа корневых (см. [4], стр. 163, [5]). Однако в нашем случае столь простого соотношения, вероятно, нет, и для некорневых графов проблема остается нерешенной.

§ 5. Рассмотрим кратко вопрос о числе слагаемых в (11), т. е. о числе разбиений разбиений  $n$ . При этом мы не будем ограничиваться разбиениями тех разбиений, у которых  $j_1 \geq 1$ . Легко убедиться, что даже при малых  $n$  числа разбиений разбиений обоюда вида мало отличаются друг от друга. Получение точных результатов во втором случае также не вызовет затруднений.

Итак, пусть  $\alpha_n$  означает число разбиений разбиений веса  $n$ , т. е. число решений  $\left| \sum_k i_k \tau_k \right| = n$  в неотрицательных целых числах  $i_k$  и разбиениях

$$\tau_k \neq \emptyset \text{ или равносильно решений системы уравнений } \sum_{k=1}^{j_l} i_k j_{lk} = j_l, \quad \sum_{l=1}^n l j_l = n, \text{ где } \sum_l j_{lk} \neq 0. \text{ Подобные многомерные разбиения встречаются во мно-$$

гих работах (ср., например, [10]), но обычно в них рассматривают величины, зависящие от многих параметров или при иных ограничениях на  $j_l$ . Общее же число таких разбиений для всех наборов  $j_1, j_2, \dots$ , подчиненных условию  $\sum_l j_l = n$ , по-видимому, не встречалось.

Выведем выражение для производящей функции  $\alpha(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n x^n$ , где  $\alpha_0 = 1$  по определению. Рассуждения будут аналогичны тем, которые применяются при изучении обычных разбиений (см. [4], стр. 133). Пусть  $\tau$  — разбиение,  $M_\tau(y) = 1 + y^\tau + (y^\tau)^2 + (y^\tau)^3 + \dots$ . Тогда выражение  $F(y) =$

$= \prod_{\tau \neq \emptyset} M_{\tau}(y)$  является, как нетрудно доказать, производящей функцией для разбиений разбиений, т. е. показатель каждого слагаемого имеет вид такого разбиения (и все они однозначно представляются указанным образом). Для получения производящей функции их числа надо каждое слагаемое в  $F(y)$ , соответствующее разбиению разбиения  $n$ , превратить в  $x^n$ , что достигается подстановкой  $y_i = x^i$ . Но при этой подстановке  $M_{\tau}(y)$  превращается в  $1 + x^n + x^{2n} + x^{3n} + \dots$  ( $|\tau| = n$ ). Отсюда получаем

$$\alpha(x) = (1-x)^{-\bar{p}(1)} (1-x^2)^{-\bar{p}(2)} (1-x^3)^{-\bar{p}(3)} \dots, \quad |x| < 1, \quad (12)$$

где  $\bar{p}(n)$  — число разбиений  $n$ . Эта формула имеет естественное сходство с известным выражением производящей функции  $\bar{p}(x)$  для  $\bar{p}(n)$  ([4], стр. 133). Соотношение (12) можно записать в ином виде, если преобразовать его после логарифмирования и воспользоваться видом  $\bar{p}(x)$ . Получится

$$\alpha(x) = \exp \sum_{k=1}^{\infty} \bar{p}(x^k)/k.$$

Это выражение совершенно аналогично формуле [7], выражающей  $P_0(x)$  через  $C_0(x)$  (ср. также [4], стр. 151, 174).

Первые несколько значений  $\alpha_n$  таковы:  $\alpha_1 = 1$ ,  $\alpha_2 = 3$ ,  $\alpha_3 = 6$ ,  $\alpha_4 = 14$ ,  $\alpha_5 = 27$ ,  $\alpha_6 = 58$ ,  $\alpha_7 = 111$ ,  $\alpha_8 = 223$ .

Было бы очень интересно исследовать асимптотическое поведение  $\alpha_n$ ,  $n \rightarrow \infty$  (ср. [10]). По-видимому, справедлива оценка  $\alpha_n < 2^n$  для всех  $n > 1$ .

### Литература

1. Берж К. Теория графов и ее применения. ИЛ, 1962.
2. Де Брейн Н. Дж. Сб. «Прикладная комбинаторная математика». Под ред. Э. Беккенбаха. Изд. «Мир», М., 1968.
3. Лисковец В. А. ДАН СССР, 184, № 6, 1969.
4. Риордан Дж. Введение в комбинаторный анализ. ИЛ, 1963.
5. Харари Ф. Сб. «Прикладная комбинаторная математика». Под ред. Э. Беккенбаха. Изд. «Мир», М., 1968.
6. Gilbert E. N. Canad. J. Math., 8, № 3, 405, 1956.
7. Nagary F. Trans. Amer. Math. Soc., 78, № 2, 445, 1955.
8. Oberschelp W. Math. Ann., 174, № 1, 53, 1967.
9. Read R. C. Canad. J. Math., 20, № 4, 808, 1968.
10. Wright E. M. Quart. J. Math. (Oxford), 17(2), № 65, 39, 1966.

Институт математики  
АН БССР

Поступило в редакцию 6.III 1969

УДК 518:517.944/947

В. В. БОБКОВ, Н. А. БОБКОВА

### ОБ ОДНОМ СПОСОБЕ ПОСТРОЕНИЯ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ СХЕМ МЕТОДА ХАРАКТЕРИСТИК

С основной идеей метода характеристик — идеей численного интегрирования вдоль характеристических линий — мы встречаемся, например, еще в монографии Массо [1]. Простейшая схема метода Массо является аналогом известного метода Эйлера (метода ломаных) приближенного решения обыкновенных дифференциальных уравнений. Предпринимался ряд попыток построения вычислительных схем метода характеристик, более точных, чем схемы метода Массо. Характерны в этом направлении работы Д. Ю. Панова [2]. Подход Д. Ю. Панова по своей идее перекликается с многошаговыми методами решения обыкновенных дифференциальных уравнений и приводит к достаточно громоздким вычислительным схемам. В данной заметке будет рассмотрен подход к построению вычислительных схем метода характеристик, использующий основную идею способа получения одношаговых правил приближенного решения обыкновенных дифференциальных уравнений, предложенного в работе [3].

Пусть в плоскости  $\xi, \eta$  дана следующая гиперболическая система двух дифференциальных уравнений первого порядка с двумя неизвестными функциями  $\bar{u} = \bar{u}(\xi, \eta)$  и  $\bar{v} = \bar{v}(\xi, \eta)$ :

$$a_{11} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \xi} + a_{12} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \eta} + a_{13} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \xi} + a_{14} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \eta} = a_1,$$

$$a_{21} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \xi} + a_{22} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \eta} + a_{23} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \xi} + a_{24} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \eta} = a_2,$$

где  $a_{ij} = a_{ij}(\xi, \eta)$ ,  $a_i = a_i(\xi, \eta, \bar{u}, \bar{v})$ ,  $i = 1, 2, j = 1, 2, 3, 4$ , есть известные функции указанных аргументов.

Хотя основное внимание в работе будет уделено лишь задаче Гурса, которая заключается (см., например, [4]) в отыскании решения  $u, v$  исходной системы, если на двух ее характеристиках, выходящих из одной точки, заданы согласованные значения  $u$  и  $v$ , однако изложенный ниже подход к построению вычислительных схем метода характеристик применим также к задаче Коши и к некоторым другим задачам. Так как коэффициенты  $a_{ij}$  ( $i = 1, 2, j = 1, 2, 3, 4$ ) исходной системы зависят только от независимых переменных  $\xi, \eta$ , то ее характеристики не зависят от решения поставленной задачи и могут быть найдены предварительно. Будем считать их известными (кстати, предлагаемый ниже способ построения вычислительных схем метода характеристик с успехом может быть применен и к задаче приближенного построения сетки характери-

стик). Примем эти характеристики за координатные линии в новой координатной системе  $x, y$ . Тогда, как известно [5], дифференциальные соотношения между неизвестными функциями  $u = u(x, y)$  и  $v = v(x, y)$  на характеристиках  $y = \text{const}$  и  $x = \text{const}$  могут быть приведены соответственно к виду

$$a(x, y) \frac{\partial u}{\partial x} + b(x, y) \frac{\partial v}{\partial x} = f(x, y, u, v)$$

и

$$c(x, y) \frac{\partial u}{\partial y} + d(x, y) \frac{\partial v}{\partial y} = g(x, y, u, v),$$

где функции  $a(x, y)$ ,  $b(x, y)$ ,  $c(x, y)$ ,  $d(x, y)$ ,  $f(x, y, u, v)$  и  $g(x, y, u, v)$  известным образом записываются по виду исходной системы с учетом проведенной замены переменных. Пусть, кроме того,  $\varphi_1(x)$  и  $\varphi_2(x)$  есть заданные в случае нашей задачи Гурса значения  $u$  и  $v$  на граничной характеристике  $y = 0$ , а  $\psi_1(y)$  и  $\psi_2(y)$  — соответственно на характеристике  $x = 0$ .

По заданному шагу  $h > 0$  построим сетку характеристик  $x = x_i = ih$ ,  $y = y_j = jh$ ,  $i, j = 0, 1, 2, \dots$ , и будем искать приближенное решение  $u_{ij}$ ,  $v_{ij}$  поставленной задачи лишь в точках пересечения этих характеристик. Предположим, что вычисления доведены до характеристик  $x = x_m$  ( $m \geq 0$ ) и  $y = y_n$  ( $n \geq 0$ ) включительно, и станем искать интересующее нас решение в точке  $(x_{m+1}, y_{n+1})$ . Для этого перепишем наши дифференциальные соотношения на характеристиках в виде

$$\frac{\partial}{\partial x} [a(x, y)u + b(x, y)v] = \frac{\partial a(x, y)}{\partial x} u + \frac{\partial b(x, y)}{\partial x} v + f(x, y, u, v),$$

$$\frac{\partial}{\partial y} [c(x, y)u + d(x, y)v] = \frac{\partial c(x, y)}{\partial y} u + \frac{\partial d(x, y)}{\partial y} v + g(x, y, u, v)$$

и рассмотрим их соответственно вдоль характеристик  $y = y_{n+1}$  и  $x = x_{m+1}$ :

$$\frac{\partial}{\partial x} [a(x, y_{n+1})u(x, y_{n+1}) + b(x, y_{n+1})v(x, y_{n+1})] = F_{n+1}(x),$$

$$\frac{\partial}{\partial y} [c(x_{m+1}, y)u(x_{m+1}, y) + d(x_{m+1}, y)v(x_{m+1}, y)] = G_{m+1}(y),$$

где

$$F_{n+1}(x) = \frac{\partial a(x, y_{n+1})}{\partial x} u(x, y_{n+1}) + \frac{\partial b(x, y_{n+1})}{\partial x} v(x, y_{n+1}) + f[x, y_{n+1}, u(x, y_{n+1}), v(x, y_{n+1})],$$

$$G_{m+1}(y) = \frac{\partial c(x_{m+1}, y)}{\partial y} u(x_{m+1}, y) + \frac{\partial d(x_{m+1}, y)}{\partial y} v(x_{m+1}, y) + g[x_{m+1}, y, u(x_{m+1}, y), v(x_{m+1}, y)].$$

Интегрируем выписанные дифференциальные соотношения на характеристиках соответственно по  $x$  в пределах от  $x_m$  до  $x_{m+1}$  и по  $y$  в пределах от  $y_n$  до  $y_{n+1}$ :

$$\begin{aligned} a_{m+1, n+1} u_{(m+1, n+1)} + b_{m+1, n+1} v_{(m+1, n+1)} - a_{m, n+1} u_{(m, n+1)} - b_{m, n+1} v_{(m, n+1)} = \\ = \int_{x_m}^{x_{m+1}} F_{n+1}(x) dx, \end{aligned}$$

$$c_{m+1,n+1}u_{(m+1,n+1)} + d_{m+1,n+1}v_{(m+1,n+1)} - c_{m+1,n}u_{(m+1,n)} - d_{m+1,n}v_{(m+1,n)} = \\ = \int_{y_n}^{y_{n+1}} G_{m+1}(y) dy.$$

Здесь

$$a_{i,j} = a(x_i, y_j), \quad b_{i,j} = b(x_i, y_j), \quad c_{i,j} = c(x_i, y_j), \\ d_{i,j} = d(x_i, y_j), \quad u_{(i,j)} = u(x_i, y_j), \quad v_{(i,j)} = v(x_i, y_j).$$

Интегралы, стоящие в правых частях полученных равенств, будем искать приближенно в виде

$$\int_{x_m}^{x_{m+1}} F_{n+1}(x) dx \approx h \sum_{i=1}^q A_i F_{n+1}(x_m + \alpha_i h), \\ \int_{y_n}^{y_{n+1}} G_{m+1}(y) dy \approx h \sum_{i=1}^q A_i G_{m+1}(y_n + \alpha_i h).$$

Если мы сможем достаточно точно вычислять значения выписанных квадратурных сумм, то для определения искоемых значений  $u_{(m+1,n+1)}$ ,  $v_{(m+1,n+1)}$  будем иметь следующую систему двух линейных алгебраических уравнений:

$$a_{m+1,n+1}u_{(m+1,n+1)} + b_{m+1,n+1}v_{(m+1,n+1)} - a_{m,n+1}u_{(m,n+1)} - b_{m,n+1}v_{(m,n+1)} \approx \\ \approx h \sum_{i=1}^q A_i F_{n+1}(x_m + \alpha_i h), \quad (1)$$

$$c_{m+1,n+1}u_{(m+1,n+1)} + d_{m+1,n+1}v_{(m+1,n+1)} - c_{m+1,n}u_{(m+1,n)} - d_{m+1,n}v_{(m+1,n)} \approx \\ \approx h \sum_{i=1}^q A_i G_{m+1}(y_n + \alpha_i h).$$

Параметры  $A_i$  и  $\alpha_i$  ( $i = 1, 2, \dots, q$ ) при этом можно находить, например, из системы уравнений

$$\sum_{i=1}^q A_i \alpha_i^{j-1} = \frac{1}{j}, \quad j = 1, 2, \dots, 2q. \quad (2)$$

Уравнения этой системы можно получить, потребовав, например, совпадения до членов с множителем  $h^{2q}$  включительно разложений по формуле Тейлора обеих частей приближенных равенств (1). Как уже отмечалось в [3], система (2) однозначно разрешима, при этом  $0 < A_i \leq 1$ ,  $0 < \alpha_i < 1$  для всех  $i = 1, 2, \dots, q$ . При данном  $q$  для определения параметров  $A_i$  и  $\alpha_i$  ( $i = 1, 2, \dots, q$ ) можно требовать выполнения соотношений

$$\sum_{i=1}^q A_i \alpha_i^{j-1} = \frac{1}{j}$$

лишь для  $j = 1, 2, \dots, k$  ( $k < 2q$ ). Тогда, очевидно, остаточный член будет величиной лишь порядка  $h^{k+1}$ , но мы будем иметь  $2q - k$  свободных параметров, выбором которых можно разумно распорядиться.

Правые части равенств (1) зависят от неизвестных значений  $u(x_m + \alpha_i h, y_{n+1})$ ,  $v(x_m + \alpha_i h, y_{n+1})$  и  $u(x_{m+1}, y_n + \alpha_i h)$ ,  $v(x_{m+1}, y_n + \alpha_i h)$ ,  $i =$

$= 1, 2, \dots, q$ . Наличие множителя  $h$  позволяет на порядок понизить требования к нахождению этих значений. Если принять величину  $\alpha_i h$  за новый шаг  $h_i$  для каждого  $i = 1, 2, \dots, q$ , то для определения соответствующей пары значений  $u, v$  можно снова записать систему равенств типа (1). Число уравнений для выбора соответствующих параметров при этом может быть уменьшено на единицу, а требования к нахождению вновь введенных неизвестных значений  $u$  и  $v$  могут быть понижены еще на порядок. Это позволяет уже уменьшить на единицу число слагаемых квадратурной суммы. Поступая аналогично и далее, мы придем, наконец, к случаю, когда выбор параметров будет ограничиваться единственным требованием типа

$$\sum_{i=1}^q A_i = 1,$$

что позволит не вводить новых неизвестных значений и замкнуть процесс.

Рассмотрим далее несколько конкретных вычислительных схем метода характеристик, построенных предлагаемым способом.

1. Вычислительные схемы метода характеристик с локальной погрешностью решения порядка  $h^2$  определяются единственным требованием

$$\sum_{i=1}^q A_i = 1. \quad (3)$$

При  $q = 1$  один из параметров  $A_1$  равен 1, а второй параметр  $\alpha_1$  можно взять равным 0. Тогда приходим к вычислительной схеме метода характеристик, аналогичной схеме Массо:

$$L_{m+1, n+1}(u_{m+1, n+1}, v_{m+1, n+1}) = L_{m, n+1} + hF_{m, n+1},$$

$$M_{m+1, n+1}(u_{m+1, n+1}, v_{m+1, n+1}) = M_{m+1, n} + hG_{m+1, n}.$$

Здесь

$$L_{i, j} \equiv L_{i, j}(u_{i, j}, v_{i, j}) \equiv a_{i, j} u_{i, j} + b_{i, j} v_{i, j},$$

$$M_{i, j} \equiv M_{i, j}(u_{i, j}, v_{i, j}) \equiv c_{i, j} u_{i, j} + d_{i, j} v_{i, j},$$

$$F_{i, j} \equiv F_{i, j}(u_{i, j}, v_{i, j}) \equiv \frac{\partial a(x_i, y_j)}{\partial x} u_{i, j} + \frac{\partial b(x_i, y_j)}{\partial x} v_{i, j} + \\ + f(x_i, y_j, u_{i, j}, v_{i, j}),$$

$$G_{i, j} \equiv G_{i, j}(u_{i, j}, v_{i, j}) \equiv \frac{\partial c(x_i, y_j)}{\partial y} u_{i, j} + \frac{\partial d(x_i, y_j)}{\partial y} v_{i, j} + \\ + g(x_i, y_j, u_{i, j}, v_{i, j}).$$

2. Чтобы построить по предлагаемому способу вычислительную схему метода характеристик, имеющую порядок локальной погрешности решения на единицу выше, нужно на выбор параметров дополнительно к (3) наложить еще следующее ограничение:

$$\sum_{i=1}^q A_i \alpha_i = \frac{1}{2}. \quad (4)$$

При  $q = 1$  система (3), (4) имеет единственное решение:  $A_1 = 1$ ,  $\alpha_1 = \frac{1}{2}$ .

Соответствующую этому набору параметров вычислительную схему метода

характеристик нетрудно записать. Можно построить и более простые схемы. При  $q = 2$  система (3), (4) имеет много решений. Рассмотрим одно из них:  $A_1 = A_2 = \frac{1}{2}$ ,  $\alpha_1 = 0$ ,  $\alpha_2 = 1$ . Выпишем две вычислительные схемы метода, соответствующие такому выбору параметров. Первая из них носит неявный характер:

$$L_{m+1, n+1}(u_{m+1, n+1}, v_{m+1, n+1}) = L_{m, n+1} + \frac{h}{2} F_{m, n+1} + \\ + \frac{h}{2} F_{m+1, n+1}(u_{m+1, n+1}, v_{m+1, n+1}), \\ M_{m+1, n+1}(u_{m+1, n+1}, v_{m+1, n+1}) = M_{m+1, n} + \frac{h}{2} G_{m+1, n} + \\ + \frac{h}{2} G_{m+1, n+1}(u_{m+1, n+1}, v_{m+1, n+1}).$$

Ведя вычисления по этой схеме, мы должны на каждом шаге решать систему двух, вообще говоря, нелинейных уравнений относительно  $u_{m+1, n+1}$ ,  $v_{m+1, n+1}$ . Эта схема близка схеме из [6]. Вторая из вычислительных схем, соответствующих данному набору параметров, носит предсказывающе-исправляющий характер:

$$L_{m+1, n+1}(\bar{u}_{m+1, n+1}, \bar{v}_{m+1, n+1}) = L_{m, n+1} + hF_{m, n+1}, \\ M_{m+1, n+1}(\bar{u}_{m+1, n+1}, \bar{v}_{m+1, n+1}) = M_{m+1, n} + hG_{m+1, n}, \\ L_{m+1, n+1}(u_{m+1, n+1}, v_{m+1, n+1}) = L_{m, n+1} + \frac{h}{2} F_{m, n+1} + \\ + \frac{h}{2} F_{m+1, n+1}(\bar{u}_{m+1, n+1}, \bar{v}_{m+1, n+1}), \\ M_{m+1, n+1}(u_{m+1, n+1}, v_{m+1, n+1}) = M_{m+1, n} + \frac{h}{2} G_{m+1, n} + \\ + \frac{h}{2} G_{m+1, n}(\bar{u}_{m+1, n+1}, \bar{v}_{m+1, n+1}).$$

Сначала, решая первую систему двух линейных алгебраических уравнений, мы находим лишь грубые (с локальной погрешностью порядка  $h^2$ ) значения  $\bar{u}_{m+1, n+1}$ ,  $\bar{v}_{m+1, n+1}$  приближенного решения задачи в точке  $(x_{m+1}, y_{n+1})$ , а затем по ним из второй системы двух линейных алгебраических уравнений находим уточненные значения  $u_{m+1, n+1}$ ,  $v_{m+1, n+1}$  приближенного решения (с локальной погрешностью порядка  $h^3$ ). Такая линеаризация первой схемы удобна и тем, что обе системы линейных алгебраических уравнений имеют одинаковые матрицы коэффициентов при неизвестных.

3. Желая повысить порядок локальной погрешности решения еще на единицу, мы должны построение вычислительных схем метода подчинить еще одному дополнительному условию

$$\sum_{i=1}^q A_i \alpha_i^2 = \frac{1}{3}. \quad (5)$$

Одно из решений системы (3), (4), (5) при  $q = 2$  будет, например, таким:

$$A_1 = \frac{1}{4}, \quad A_2 = \frac{3}{4}, \quad \alpha_1 = 0, \quad \alpha_2 = \frac{2}{3}.$$

По этим значениям параметров можно построить следующую вычислительную схему метода характеристик:

$$L_{m+\frac{2}{3},n+1}(\bar{u}_{m+\frac{2}{3},n+1}, \bar{v}_{m+\frac{2}{3},n+1}) = L_{m,n+1} + \frac{2}{3} hF_{m,n+1},$$

$$M_{m+\frac{2}{3},n+1}(\bar{u}_{m+\frac{2}{3},n+1}, \bar{v}_{m+\frac{2}{3},n+1}) = M_{m+\frac{2}{3},n} + hG_{m+\frac{2}{3},n},$$

$$L_{m+1,n+\frac{2}{3}}(\bar{u}_{m+1,n+\frac{2}{3}}, \bar{v}_{m+1,n+\frac{2}{3}}) = L_{m,n+\frac{2}{3}} + hF_{m,n+\frac{2}{3}},$$

$$M_{m+1,n+\frac{2}{3}}(\bar{u}_{m+1,n+\frac{2}{3}}, \bar{v}_{m+1,n+\frac{2}{3}}) = M_{m+1,n} + \frac{2}{3} hG_{m+1,n},$$

$$L_{m+\frac{2}{3},n+1}(u_{m+\frac{2}{3},n+1}, v_{m+\frac{2}{3},n+1}) = L_{m,n+1} + \frac{h}{3} F_{m,n+1} + \\ + \frac{h}{3} F_{m+\frac{2}{3},n+1}(\bar{u}_{m+\frac{2}{3},n+1}, \bar{v}_{m+\frac{2}{3},n+1}),$$

$$M_{m+\frac{2}{3},n+1}(u_{m+\frac{2}{3},n+1}, v_{m+\frac{2}{3},n+1}) = M_{m+\frac{2}{3},n} + \frac{h}{2} G_{m+\frac{2}{3},n} + \\ + \frac{h}{2} G_{m+\frac{2}{3},n+1}(\bar{u}_{m+\frac{2}{3},n+1}, \bar{v}_{m+\frac{2}{3},n+1}),$$

$$L_{m+1,n+\frac{2}{3}}(u_{m+1,n+\frac{2}{3}}, v_{m+1,n+\frac{2}{3}}) = L_{m,n+\frac{2}{3}} + \frac{h}{2} F_{m,n+\frac{2}{3}} + \\ + \frac{h}{2} F_{m+1,n+\frac{2}{3}}(\bar{u}_{m+1,n+\frac{2}{3}}, \bar{v}_{m+1,n+\frac{2}{3}}),$$

$$M_{m+1,n+\frac{2}{3}}(u_{m+1,n+\frac{2}{3}}, v_{m+1,n+\frac{2}{3}}) = M_{m+1,n} + \frac{h}{3} G_{m+1,n} + \\ + \frac{h}{3} G_{m+1,n+\frac{2}{3}}(\bar{u}_{m+1,n+\frac{2}{3}}, \bar{v}_{m+1,n+\frac{2}{3}}),$$

$$L_{m+1,n+1}(u_{m+1,n+1}, v_{m+1,n+1}) = L_{m,n+1} + \frac{h}{4} F_{m,n+1} + \frac{3}{4} hF_{m+\frac{2}{3},n+1},$$

$$M_{m+1,n+1}(u_{m+1,n+1}, v_{m+1,n+1}) = M_{m+1,n} + \frac{h}{4} G_{m+1,n} + \frac{3}{4} hG_{m+1,n+\frac{2}{3}}.$$

При  $q = 3$  вычислительная схема метода характеристик с локальной погрешностью решения порядка  $h^4$  может быть, например, построена, если исходить из параметров

$$A_1 = \frac{1}{6}, \quad A_2 = \frac{2}{3}, \quad A_3 = \frac{1}{6}, \quad \alpha_1 = 0, \quad \alpha_2 = \frac{1}{2}, \quad \alpha_3 = 1,$$

при этом можно строить как явный, так и неявный варианты схемы.

4. Рассмотрим вычислительные схемы метода характеристик с локальной погрешностью решения порядка  $h^5$ . Согласно предложенному способу построения таких схем, исходные параметры должны удовлетворять системе (3) — (5), дополненной уравнением

$$\sum_{i=1}^q A_i \alpha_i^3 = \frac{1}{4}.$$

Одно из решений такой системы при  $q = 3$  дает, например, следующий набор параметров:

$$A_1 = \frac{1}{6}, \quad A_2 = \frac{2}{3}, \quad A_3 = \frac{1}{6}, \quad \alpha_1 = 0, \quad \alpha_2 = \frac{1}{2}, \quad \alpha_3 = 1.$$

Выпишем одну из вычислительных схем, соответствующих этому случаю:

$$\begin{aligned} L_{m+1, n+\frac{1}{4}}(u_{m+1, n+\frac{1}{4}}, v_{m+1, n+\frac{1}{4}}) &= L_{m, n+\frac{1}{4}} + \frac{h}{2} F_{m, n+\frac{1}{4}} + \\ &+ \frac{h}{2} F_{m+1, n+\frac{1}{4}}(u_{m+1, n+\frac{1}{4}}, v_{m+1, n+\frac{1}{4}}), \\ M_{m+1, n+\frac{1}{4}}(u_{m+1, n+\frac{1}{4}}, v_{m+1, n+\frac{1}{4}}) &= M_{m+1, n} + \frac{h}{8} G_{m+1, n} + \\ &+ \frac{h}{8} G_{m+1, n+\frac{1}{4}}(u_{m+1, n+\frac{1}{4}}, v_{m+1, n+\frac{1}{4}}), \\ L_{m+\frac{1}{4}, n+1}(u_{m+\frac{1}{4}, n+1}, v_{m+\frac{1}{4}, n+1}) &= L_{m, n+1} + \frac{h}{8} F_{m, n+1} + \\ &+ \frac{h}{8} F_{m+\frac{1}{4}, n+1}(u_{m+\frac{1}{4}, n+1}, v_{m+\frac{1}{4}, n+1}), \\ M_{m+\frac{1}{4}, n+1}(u_{m+\frac{1}{4}, n+1}, v_{m+\frac{1}{4}, n+1}) &= M_{m+\frac{1}{4}, n} + \frac{h}{2} G_{m+\frac{1}{4}, n} + \\ &+ \frac{h}{2} G_{m+\frac{1}{4}, n+1}(u_{m+\frac{1}{4}, n+1}, v_{m+\frac{1}{4}, n+1}), \\ L_{m+\frac{1}{2}, n+\frac{1}{2}}(u_{m+\frac{1}{2}, n+\frac{1}{2}}, v_{m+\frac{1}{2}, n+\frac{1}{2}}) &= L_{m, n+\frac{1}{2}} + \frac{h}{4} F_{m, n+\frac{1}{2}} + \\ &+ \frac{h}{4} F_{m+\frac{1}{2}, n+\frac{1}{2}}(u_{m+\frac{1}{2}, n+\frac{1}{2}}, v_{m+\frac{1}{2}, n+\frac{1}{2}}), \\ M_{m+\frac{1}{2}, n+\frac{1}{2}}(u_{m+\frac{1}{2}, n+\frac{1}{2}}, v_{m+\frac{1}{2}, n+\frac{1}{2}}) &= M_{m+\frac{1}{2}, n} + \frac{h}{4} G_{m+\frac{1}{2}, n} + \\ &+ \frac{h}{4} G_{m+\frac{1}{2}, n+\frac{1}{2}}(u_{m+\frac{1}{2}, n+\frac{1}{2}}, v_{m+\frac{1}{2}, n+\frac{1}{2}}), \\ L_{m+1, n+\frac{1}{2}}(u_{m+1, n+\frac{1}{2}}, v_{m+1, n+\frac{1}{2}}) &= L_{m, n+\frac{1}{2}} + \frac{h}{6} F_{m, n+\frac{1}{2}} + \\ &+ \frac{2}{3} h F_{m+\frac{1}{2}, n+\frac{1}{2}} + \frac{h}{6} F_{m+1, n+\frac{1}{2}}(u_{m+1, n+\frac{1}{2}}, v_{m+1, n+\frac{1}{2}}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M_{m+1, n+\frac{1}{2}}(u_{m+1, n+\frac{1}{2}}, v_{m+1, n+\frac{1}{2}}) &= M_{m+1, n} + \frac{h}{12} G_{m+1, n} + \\
&+ \frac{h}{3} G_{m+1, n+\frac{1}{4}} + \frac{h}{12} G_{m+1, n+\frac{1}{2}}(u_{m+1, n+\frac{1}{2}}, v_{m+1, n+\frac{1}{2}}), \\
L_{m+\frac{1}{2}, n+1}(u_{m+\frac{1}{2}, n+1}, v_{m+\frac{1}{2}, n+1}) &= L_{m, n+1} + \frac{h}{12} F_{m, n+1} + \\
&+ \frac{h}{3} F_{m+\frac{1}{4}, n+1} + \frac{h}{12} F_{m+\frac{1}{2}, n+1}(u_{m+\frac{1}{2}, n+1}, v_{m+\frac{1}{2}, n+1}), \\
M_{m+\frac{1}{2}, n+1}(u_{m+\frac{1}{2}, n+1}, v_{m+\frac{1}{2}, n+1}) &= M_{m+\frac{1}{2}, n} + \frac{h}{6} G_{m+\frac{1}{2}, n} + \\
&+ \frac{2}{3} h G_{m+\frac{1}{2}, n+\frac{1}{2}} + \frac{h}{6} G_{m+\frac{1}{2}, n+1}(u_{m+\frac{1}{2}, n+1}, v_{m+\frac{1}{2}, n+1}), \\
L_{m+1, n+1}(u_{m+1, n+1}, v_{m+1, n+1}) &= L_{m, n+1} + \frac{h}{6} F_{m, n+1} + \\
&+ \frac{2}{3} h F_{m+\frac{1}{2}, n+1} + \frac{h}{6} F_{m+1, n+1}(u_{m+1, n+1}, v_{m+1, n+1}), \\
M_{m+1, n+1}(u_{m+1, n+1}, v_{m+1, n+1}) &= M_{m+1, n} + \frac{h}{6} G_{m+1, n} + \\
&+ \frac{2}{3} h G_{m+1, n+\frac{1}{2}} + \frac{h}{6} G_{m+1, n+1}(u_{m+1, n+1}, v_{m+1, n+1}).
\end{aligned}$$

Вычисления по этой схеме предполагают решение на каждом шаге шести систем из двух нелинейных уравнений с двумя неизвестными. При этом, правда, помимо основного результата, мы получаем дополнительную информацию о решении еще в пяти вспомогательных точках. Эта схема уже знакомым нам способом может быть и линеаризована. Если же сохранить неявный характер схемы, то решать каждую из систем можно, например, итерационно. В силу гиперболичности исходных дифференциальных уравнений матрицы коэффициентов при неизвестных в левых частях каждой из шести систем неособенны, т. е. эти системы могут быть легко приведены к виду, удобному для итерации. Наличие же множителя  $h$  при неизвестных в правых частях наших систем позволяет надеяться на быструю сходимость итераций при достаточно малом  $h > 0$ .

Аналогичным образом можно строить и более точные вычислительные схемы метода характеристик. Дополнительные трудности при построении таких схем не носят принципиального характера.

### Литература

1. Massau I. Mémoire sur l'intégration graphique des équations aux dérivées partielles. Chent, 1899.
2. Панов Д. Ю. Численное решение квазилинейных гиперболических систем дифференциальных уравнений в частных производных. М., 1957.
3. Бобков В. В. Вестн. АН БССР, сер. физ.-мат. наук, № 4, 1967.
4. Березин И. С., Жидков Н. П. Методы вычислений, 2. М., 1959.
5. Коллатц Л. Численные методы решения дифференциальных уравнений. ИЛ, 1953.
6. Бобков В. В. ДУ, 1, № 2, 1965.

А. В. МОШИНСКИЙ

## ДИФРАКЦИЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ВОЛНЫ НА СИСТЕМЕ ЩЕЛЕЙ В БЕСКОНЕЧНОМ ИДЕАЛЬНО ПРОВОДЯЩЕМ ЭКРАНЕ

§ 1. Введение. Интерес к задачам дифракции и рассеяния электромагнитных волн на плоской металлической решетке, образованной параллельными проводящими лентами, или на системе щелей в идеально проводящем экране вызван потребностями оптики и спектроскопии, квантовой электроники, электроники сверхвысоких частот и антенной техники.

Большей частью при теоретических исследованиях рассеяния и дифракции волн на решетках падающее электромагнитное поле задается в виде плоской волны. Однако при экспериментальных исследованиях, да и почти во всех практических случаях, падающее поле представляет цилиндрическую (или сферическую) волну, так как линейные (или точечные) источники фактически всегда находятся на конечном расстоянии от решетки. По этой причине представляет интерес строгое решение задачи о рассеянии и дифракции электромагнитных волн с неплоским фронтом на протяженном препятствии, в качестве которого, например, может быть взят бесконечный экран с конечной системой параллельных щелей произвольной ширины.

В рамках строгой теории существует несколько подходов к решению задач дифракции плоских или цилиндрических электромагнитных (или акустических) волн на бесконечных решетках (см., например [1—4]).

В настоящей работе классическим методом разделения переменных в эллиптической системе координат строго решается задача о дифракции цилиндрической электромагнитной волны на решетке, образованной конечной системой щелей в тонком идеально проводящем экране бесконечных размеров, находящемся в свободном пространстве ( $\epsilon = \mu = 1, \sigma = 0$ ). Формулы, полученные здесь в результате строгого решения задачи, пригодны в широком диапазоне изменений параметров решетки и длины волны возбуждения для численных исследований дифракционных полей как в ближней, так и в дальней зонах.

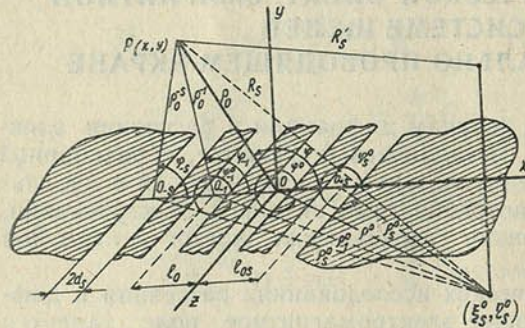
§ 2. Формулировка задачи. Пусть на конечную систему из  $2N+1$  параллельных щелей, прорезанных в тонком идеально проводящем плоском экране бесконечных размеров (рисунок), от источника, которым служит направленный параллельно щелям бесконечно тонкий провод с электрическим током, фаза которого в плоскостях  $z = \text{const}$  постоянна, снизу ( $y < 0$ ) падает цилиндрическая электромагнитная волна

$$E_z^i = BH_0^{(1)}(kR_s), \quad (1)$$

где  $B = -\frac{\pi k}{c} I e^{-i\omega t}$ ;  $k = \frac{\omega}{c}$ ;  $I$  — ток нити;  $R_s = \sqrt{(x_s - x_s^0)^2 + (y_s + y_s^0)^2}$  —

расстояние от источника до точки наблюдения.

Предполагается, что щели имеют ширину  $2d_s$  и расположены справа и слева симметрично относительно некоторой средней щели. Координатная система  $Oxyz$  введена так, что ее начало совпадает с центром средней щели, а ось  $Oz$  направлена вдоль щели. С центром в каждой щели введены локальные декартовы координатные системы  $O_s x_s y_s z_s$  с осями, совпадающими по направлению с направлением осей системы  $Oxyz$ . Все щели пронумерованы так, что средней щели приписан номер  $s=0$ , всем слева расположенным щелям—номера  $s=-1, -2, -3, \dots, -N$ , а всем справа расположенным—номера  $s=+1, +2, +3, \dots, +N$ . Расстояние между центрами  $s$ -й и  $j$ -й щели ( $s \neq j, s, j = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots, \pm N$ ) обозначим через



Дифракционная структура

где

$$0 \leq \xi_s \leq \infty, \quad 0 \leq \eta_s \leq 2\pi.$$

Плоскость щелей в эллиптических координатах задается уравнением  $\xi_s = 0$  для всех  $\eta_s$ , а положение источника цилиндрической волны—координатами  $\xi_s = \xi_s^0$  ( $s = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm N$ ).

Задача состоит в отыскании решения системы уравнений Максвелла, удовлетворяющего соответствующим граничным условиям на поверхности экрана и в плоскости щелей, а также условию излучения Зоммерфельда на бесконечности.

§ 3. Решение задачи. Согласно [5, 6], падающая цилиндрическая волна (1) может быть представлена в виде разложения по функциям Матье, записанным в системе координат  $s$ -й щели:

$$E_z^i = 2B \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left[ c_n^2(q_s) \operatorname{ce}_n(\eta_s, q_s) \operatorname{ce}_n(\eta_s^0, q_s) \begin{cases} \operatorname{Me}_n^{(1)}(\xi_s^0, q_s) \operatorname{Ce}_n(\xi_s, q_s) \\ \operatorname{Me}_n^{(1)}(\xi_s, q_s) \operatorname{Ce}_n(\xi_s^0, q_s) \end{cases} + \right. \\ \left. + d_n^2(q_s) \operatorname{se}_n(\eta_s, q_s) \operatorname{se}_n(\eta_s^0, q_s) \begin{cases} \operatorname{Ne}_n^{(1)}(\xi_s^0, q_s) \operatorname{Se}_n(\xi_s, q_s) \\ \operatorname{Ne}_n^{(1)}(\xi_s, q_s) \operatorname{Se}_n(\xi_s^0, q_s) \end{cases} \right], \quad \begin{matrix} \xi_s < \xi_s^0 \\ \xi_s > \xi_s^0 \end{matrix} \quad (2)$$

где  $\operatorname{ce}_n(\eta_s, q_s)$ ,  $\operatorname{se}_n(\eta_s, q_s)$ ,  $\operatorname{Me}_n^{(1)}(\xi_s, q_s)$ ,  $\operatorname{Ne}_n^{(1)}(\xi_s, q_s)$ ,  $\operatorname{Ce}(\xi_s, q_s)$ ,  $\operatorname{Se}(\xi_s, q_s)$ —угловые и радиальные функции Матье, зависящие от параметра  $q_s = (kd_s)^2/4$  [5];  $c_n(q_s)$ ,  $d_n(q_s)$ —коэффициенты разложения, определение которых дано, например, в [6];  $\xi_s$ ,  $\eta_s$  и  $\xi_s^0$ ,  $\eta_s^0$ —соответственно координаты точки наблюдения и источника цилиндрической электромагнитной волны.

На поверхности металла тангенциальная составляющая полного поля должна равняться нулю. Вполне очевидно, что для удовлетворения этого требования необходимо воспользоваться разложением функции Ханкеля (2), содержащим только нечетные (относительно 0,  $\pi$ ) угловые функции Матье, так как на металле, т. е. при  $\eta_s = 0$  или  $\pi$ ,  $\operatorname{se}_n(0, q_s) = \operatorname{se}_n(\pi, q_s) = 0$  для всех целых  $n$ .

$l_{js}$ , при этом будем иметь в виду, что если  $|j-s|=1$ , то  $l_{js} = l_0$ . В общем случае  $l_{js} = |j-s|l_0$ .

Одновременно с локальными декартовыми координатами  $x_s, y_s, z_s$  с центром каждой из щелей вводятся локальные эллиптические координаты  $\xi_s, \eta_s, z_s$ , связь между которыми устанавливается соотношениями

$$\begin{aligned} x_s &= d_s \operatorname{ch} \xi_s \cos \eta_s, \\ y_s &= d_s \operatorname{sh} \xi_s \sin \eta_s \quad (z_s = z), \end{aligned}$$

В области  $y < 0$  ( $\pi < \eta_s < 2\pi$ ) существует падающая волна, распространяющаяся в направлении положительных значений оси  $y$ , отраженная от металлического экрана волна, распространяющаяся в направлении отрицательных значений  $y$ , и рассеянная волна, обусловленная разрывом непрерывности поверхности экрана. В области  $y > 0$  ( $\pi < \eta_s < 0$ ) существует только лишь дифрагированная волна, прошедшая через щель.

Суперпозицию падающей и отраженной волн в области  $y < 0$  ( $\pi < \eta_s < 2\pi$ ) можно представить как

$$E_z^i + E_z^r = B [H_0^{(1)}(kR_s) - H_0^{(1)}(kR_s')], \quad (3)$$

где  $R_s' = \sqrt{(x_s - x_s^0)^2 + (y_s - y_s^0)^2}$  — расстояние от фиктивного источника до точки наблюдения. Принимая во внимание, что для зеркально отображенного (фиктивного) источника  $\eta_s^0 = 2\pi - \eta_s$ , а также то, что  $\text{se}_n(2\pi - \eta_s^0) = -\text{se}_n(\eta_s^0)$  для всех  $n$ , выражение (3) на основании (2) можно записать так:

$$E_z^i + E_z^r = 4B \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n d_n^2(q_s) \text{se}_n(\eta_s, q_s) \text{se}_n(\eta_s^0, q_s) \text{Ne}_n^{(1)}(\xi_s^0, q_s) \times \\ \times \text{Se}_n(\xi_s, q_s), \quad \xi_s < \xi_s^0. \quad (4)$$

Для того чтобы выполнялось условие непрерывности поля при переходе через плоскость щелей ( $y=0$ ), необходимо в области  $y < 0$  к падающему и отраженному полям прибавить рассеянное на щелях поле  $E_z^{d*}$ , которое так же, как и дифрагированное поле  $E_z^{d**}$  в области  $y > 0$ , должно удовлетворять граничному условию на металле и условию излучения на бесконечности.

Если обозначить через  $\psi_s$  функцию, определяющую поле, дифрагированное через  $s$ -ю щель (или рассеянное на  $s$ -й щели), и искать ее также в виде ряда по функциям Матье, полагая, что

$$\psi_s = 2B \sum_{n=1}^{\infty} a_n^s d_n(q_s) \text{Ne}_n^{(1)}(\xi_s, q_s) \text{se}_n(\eta_s, q_s), \quad (5)$$

где

$$a_n^s = \begin{cases} a_n^{s*} & \text{для области } 2\pi \leq \eta_s \leq \pi, \\ a_n^{s**} & \text{для области } \pi > \eta_s > 0, \end{cases}$$

то тогда полное дифрагированное поле  $E_z^d$  можно представить в виде суммы

$$E_z^d = \sum_{s=-N}^N \psi_s. \quad (6)$$

Таким образом, суммарное поле для всех  $\xi_s < \xi_s^0$  в области под экраном ( $\pi < \eta_s < 2\pi$ )

$$E_z^i + E_z^r + E_z^{d*} = 4B \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n d_n(q_s) \text{se}_n(\eta_s, q_s) \text{se}_n(\eta_s^0, q_s) \times \\ \times \text{Ne}_n^{(1)}(\xi_s^0, q_s) \text{Se}_n(\xi_s, q_s) + 2B \sum_{s=-N}^N \sum_{n=1}^{\infty} a_n^{s*} d_n(q_s) \text{se}_n(\eta_s, q_s) \text{Ne}_n^{(1)}(\xi_s, q_s), \quad (7)$$

а суммарное дифрагированное поле в области над экраном ( $\pi > \eta_s > 0$ ) запишется

$$E_z^{d**} = 2B \sum_{s=-N}^N \sum_{n=1}^{\infty} a_n^{s**} d_n(q_s) \text{se}_n(\eta_s, q_s) \text{Ne}_n^{(1)}(\xi_s, q_s). \quad (8)$$

Неизвестные коэффициенты  $a_n^s$  разложений (7), (8) подлежат определению из граничных условий в плоскости  $s$ -й щели:

$$E_z^i + E_z^r + E_z^{d*} = E_z^{d**}, \quad \xi_s = 0, \quad (9)$$

$$\frac{\partial}{\partial \xi} (E_z^i + E_z^r + E_z^{d*}) = -\frac{\partial E_z^{d**}}{\partial \xi_s}, \quad \xi_s = 0, \quad (9a)$$

где

$$s = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm \dots, \pm N.$$

Из условия (9) следует, что  $a_n^{s*} = a_n^{s**} = a_n^s$  для всех  $n$ , что позволяет в дальнейшем не делать различия между дифрагированным и рассеянным полями, так что при этом  $E_z^{d*} = E_z^{d**} = E_z^d$  для верхнего и нижнего полупространств.

Чтобы применить граничное условие (9a), необходимо предварительно записать выражение для  $E_z^d$  в эллиптической системе координат  $s$ -й щели. Для этого воспользуемся теоремой сложения для собственных функций эллиптического цилиндра [6], которая в рассматриваемом нами случае ( $\beta = 0$ , оси  $O_s x_s$  обеих локальных систем лежат на одной прямой) принимает вид

$$d_m(q_j) \text{Ne}_m^{(1)}(\xi_j, q_j) \text{se}_m(\eta_j, q_j) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \bar{R}_{mn}^{(1)}(j, s, kl_{js}) \times \\ \times d_n(q_s) \text{Se}_n(\xi_s, q_s) \text{se}_n(\eta_s, q_s), \quad (10)$$

где

$$\bar{R}_{mn}^{(1)} = \frac{1}{2} \sum_{r,p=1}^{\infty} B_r^{(n)}(q_s) B_p^{(m)}(q_j) \{ i^{r-p} H_{r-p}^{(1)}(k\rho_{js}) \cos(r-p) \alpha_{js} - \\ - i^{r+p} H_{r+p}^{(1)}(k\rho_{js}) \cos(r+p) \alpha_{js} \}, \quad (11)$$

а через  $\rho_{js}$ ,  $\alpha_{js}$  обозначены полярные координаты центра  $s$ -й щели в системе координат  $j$ -й щели. В выражении (11)  $B_r^{(n)}(q_s)$ ,  $B_p^{(m)}(q_j)$  — коэффициенты Фурье функций Матье. Тогда получим, что

$$E_z^d = 2B \sum_{n=1}^{\infty} a_n^s d_n(q_s) \text{Ne}_n^{(1)}(\xi_s, q_s) \text{se}_n(\eta_s, q_s) + \\ + 4B \sum_{\substack{j=-N \\ j \neq s}}^N \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} a_m^j d_m(q_j) \text{Se}_m(\xi_j, q_j) \text{se}_m(\eta_j, q_j) \bar{R}_{mn}^{(1)}(j, s, kl_{js}). \quad (12)$$

Применив условие (9a) к выражениям (4) и (12), на основании свойств ортогональности функций Матье найдем, что неизвестные коэффициенты  $a_n^s$  могут быть определены из решения бесконечной системы линейных уравнений

$$A_n^s + \sum_{\substack{j=-N \\ j \neq s}}^N \sum_{m=1}^{\infty} A_m^j \sigma_{nm}^{js} = F_n^s, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (13)$$

где

$$A_n^s = \frac{a_n^s}{d_n(q_s) \text{Se}_n^r(0, q_s)}, \quad (14)$$

$$\sigma_{nm}^{js} = 2 \frac{d_m(q_j) \text{Se}'_m(0, q_j)}{d_n(q_s) \text{Ne}_n^{(1)'}(0, q_s)} \tilde{R}_{mn}^{(1)}(j, s, kl)^*, \quad (15)$$

$$F_n^s = -(-1)^n \frac{\text{Ne}_n^{(1)}(\xi_s^0, q_s)}{\text{Ne}_n^{(1)'}(0, q_s)} \text{se}_n(\eta_s^0, q_s). \quad (16)$$

Полученная нами система уравнений заменой коэффициентов

$$A_n^s = x_{(2N+1)(n-1)+(N+1)+s} \quad (17)$$

и введением новых обозначений для комплексных элементов  $\sigma_{nm}^{js}$  и свободных членов  $F_n^s$  по формулам

$$\sigma_{nm}^{js} = C_{(2N+1)(n-1)+(N+1)+s, (2N+1)(m-1)+(N+1)+j}, \quad (18)$$

$$F_n^s = b_{(2N+1)(n-1)+(N+1)+s} \quad (19)$$

приводится к нормальному виду

$$x_i + \sum_{k=1}^{\infty} C_{ik} x_k = b_i, \quad i = 1, 2, 3, \dots \quad (20)$$

более удобному при численном решении задачи.

Исследование и доказательство разрешимости бесконечной системы линейных уравнений (13) в рассматриваемом нами случае может быть проведено по той же схеме, что и в работе [7], посвященной дифракции плоской ГМ-волны на двух эллиптических цилиндрах. Действительно, пользуясь асимптотическими относительно индекса оценками радиальных функций Матье [6], как и в [7], можно показать, что элементы матрицы системы (13) (или же (20)) для всех номеров  $n$  и  $m$  удовлетворяют неравенству

$$|\sigma_{nm}^{js}| < \text{const}_1 \frac{(n+m)!}{n!m!} \left(\frac{d_s}{l_{js}}\right)^n \left(\frac{d_j}{l_{js}}\right)^m. \quad (21)$$

Оценивая правые части системы (13), получим, что для всех  $n$

$$|F_n^s| < \frac{\text{const}_2}{n} \gamma_{0s}^n, \quad \gamma_{0s} = \frac{1}{e^{\xi_s^0}} \leq 1. \quad (22)$$

С помощью оценок (21) и (22), так же как и в [7], нетрудно установить, что система (13) ((20)) приближенно может быть разрешима методом редукции [8, 9], сходящимся к точному по норме пространству  $l_2$ . Из того, что  $\{A_n^s\} \in l_2$ , следует ограниченность  $|A_n^s|$  для всех  $s$  и  $n$ , на основании которой из (13) с учетом оценок (21) и (22) находим, что

$$|A_n^s| \leq \text{const} \left[ \frac{\gamma_{0s}^n}{n} + \left(\frac{d_s}{l_s - d}\right)^n \right], \quad (23)$$

где

$$l_s - d = \min(l_{js} - d_j).$$

\* Штрих у обычных и модифицированных функций Матье означает дифференцирование по аргументу. Например,

$$\text{Ce}'_n(\xi_0, q) = \frac{d}{d\xi} \text{Ce}_n(\xi, q)|_{\xi=\xi_0}.$$

Нетрудно теперь заметить, что, если  $l_s > d + d_s$ , фактически выполняется неравенство  $\sum_{n=1}^{\infty} |A_n^s| < \infty$ , означающее принадлежность решения  $\{A_n^s\}$  системы (13) пространству  $I_1$  [9]. Последнее после подстановки (14) в ряд (5) позволяет установить абсолютную и равномерную сходимость как ряда (5), определяющего дифрагированное на  $s$ -й щели поле, так и рядов, получающихся из него в результате дифференцирования нужное число раз по координатам  $\xi_s, \eta_s$ .

§ 4. Расчетные формулы для составляющих поля в ближней и дальней зонах. На основании замены (14)  $z$ -ю составляющую дифрагированного (рассеянного) на щелях поля запишем в виде

$$E_z^d = 2B \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} A_n^s d_n^2(q_s) \text{Se}'_n(0, q_s) \text{Ne}_n^{(1)}(\xi_s, q_s) + \sum_{\substack{j=-N \\ j \neq s}}^N \sum_{n=1}^{\infty} A_n^j d_n^2(q_j) \text{Se}'_n(0, q_j) \text{Ne}_n^{(1)}(\xi_j, q_j) \text{se}_n(\eta_j, q_j) \right\}. \quad (24)$$

Пользуясь теоремой сложения (10), с помощью (13) найдем, что

$$2 \sum_{\substack{j=-N \\ j \neq s}}^N \sum_{n=1}^{\infty} A_n^j d_n^2(q_j) \text{Se}'_n(0, q_j) \text{Ne}_n^{(1)}(\xi_j, q_j) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} d_n^2(q_s) \text{Se}_n(\xi_s, q_s) \text{Ne}_n^{(1)'}(0, q_s) \text{se}_n(\eta_s, q_s) (F_n^s - A_n^s). \quad (25)$$

В результате подстановки (25) в (24) для верхнего полупространства ( $y > 0$ ) получим выражение

$$E_z^d = 2B \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} A_n^s d_n^2(q_s) [\text{Ne}_n^{(1)}(\xi_s, q_s) \text{Se}'_n(0, q_s) - \text{Se}_n(\xi_s, q_s) \text{Ne}_n^{(1)'}(0, q_s)] \text{se}_n(\eta_s, q_s) - \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n d_n^2(q_s) \text{Se}_n(\xi_s, q_s) \text{Ne}_n^{(1)}(\xi_s, q_s) \text{se}_n(\eta_s^0, q_s) \text{se}_n(\eta_s, q_s) \right\}, \quad (26)$$

которое пригодно для численного счета и анализа поля вблизи  $s$ -й щели, если  $\xi_s < \xi_s^0$  и  $l_{s,s'} > d_s \text{ch } \xi_s$  ( $l_{s,s'}$  — расстояние между соседними щелями).

В области под экраном ( $y < 0$ ) при условии, что  $\xi_s < \xi_s^0$  и  $l_{s,s'} > d_s \text{ch } \xi_s$ , полное поле, записанное в локальных эллиптических координатах  $s$ -й щели, дается выражением

$$E_z = E_z^i + E_z^r + E_z^d = 2B \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} A_n^s d_n^2(q_s) [\text{Ne}_n^{(1)}(\xi_s, q_s) \text{Se}'_n(0, q_s) - \text{Se}_n(\xi_s, q_s) \text{Ne}_n^{(1)'}(0, q_s)] \text{se}_n(\eta_s, q_s) + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n d_n^2(q_s) \text{Se}_n(\xi_s, q_s) \text{Ne}_n^{(1)}(\xi_s^0, q_s) \text{se}_n(\eta_s^0, q_s) \text{se}_n(\eta_s, q_s) \right\}. \quad (27)$$

Остальные отличные от нуля составляющие электромагнитного поля вблизи любой  $s$ -й щели для верхнего и нижнего полупространства определяются из соотношений

$$H_{\xi} = \frac{1}{ikh} \frac{\partial E_z}{\partial \eta}, \quad H_{\eta} = -\frac{1}{ikh} \frac{\partial E}{\partial \xi} \quad (h = d \sqrt{\text{ch}^2 \xi - \cos \eta}) \quad (28)$$

в результате подстановки в них выражений (26), (27).

Расчет поля вблизи щелей по формулам (26)—(28) не представляет особого труда. Основная трудность, возникающая при пользовании этими формулами, связана в основном с решением бесконечной системы уравнений (13). При наличии решений системы (13) и таблиц соответствующих функций Матье расчет по формулам (26)—(28) может быть осуществлен вручную с помощью настольных счетных устройств.

В случае, когда точка наблюдения находится на расстояниях от экрана, намного превосходящих длину волны возбуждения и ширину решетки из щелей (дальняя зона), так что можно считать

$$\eta_s \approx \varphi_s \approx \varphi, \quad \rho_s \approx \frac{d_s e^{\xi_s}}{2}, \quad \rho_s \approx \rho_0 \mp l_{0s} \cos \varphi, \quad \rho_0 \geq l_{0s},$$

и когда применима асимптотическая формула

$$d_n(q_s) \text{Ne}_n^{(1)}(\xi_s, q_s) \approx L e^{\mp ikl_{0s} \cos \varphi^*}, \quad (29)$$

где

$$L = \sqrt{\frac{2}{\pi k \rho_0}} e^{i(k\rho_0 - \frac{\pi}{4})}, \quad (30)$$

в полярных координатах с началом в точке  $O$ , совпадающим с центром «нулевой» щели ( $s=0$ ) в области над экраном ( $y > 0$ ), дифрагированное поле в приближении волновой зоны будет

$$E_z^d = -H_{\varphi}^d = A(\varphi) \frac{e^{ik\rho_0}}{\sqrt{\rho_0}}, \quad (31)$$

где амплитудная функция

$$A(\varphi) = B \sqrt{\frac{8}{\pi k}} e^{-i\frac{\pi}{4}} \sum_{s=-N}^N e^{\mp ikl_{0s} \cos \varphi} \times \\ \times \sum_{n=1}^{\infty} A_n^s d_n(q_s) \text{Se}'_n(0, q_s) \text{se}_n(\varphi, q_s). \quad (32)$$

Учитывая, что в приближении волновой зоны в полярных координатах с началом в точке  $O$

$$H_0^{(1)}(kR_s) - H_0^{(1)}(kR'_s) = \\ = Bi \sqrt{\frac{8}{\pi k \rho_0}} \sin(k\rho^0 \sin \varphi \sin \varphi^0) e^{i(k\rho_0 - k\rho^0 \cos \varphi \cos \varphi^0 - \frac{\pi}{4})} \quad (33)$$

( $\rho^0, \varphi^0$  — полярные координаты источника цилиндрической электромагнитной волны в системе координат с началом в точке  $O$ ), полное поле  $E_z^d$  в даль-

\*1) Верхний знак в показателе степени при  $e$  берется, если  $s$ -я щель расположена справа от «нулевой» щели, нижний — если щель расположена слева.

ней зоне нижнего полупространства ( $y < 0$ ) можно определить с помощью выражения

$$E_z^d \simeq -H_\varphi = BF(\varphi) \frac{e^{ik\rho_0}}{\sqrt{\rho_0}}, \quad (34)$$

в котором

$$F(\varphi) = \sqrt{\frac{8}{\pi}} e^{-i\frac{\pi}{4}} \left\{ i \sin(k\rho^0 \sin\varphi \sin\varphi^0) e^{-ik\rho^0 \cos\varphi \cos\varphi^0} + \sum_{s=-N}^N e^{\mp ik l_{0s} \cos\varphi} \sum_{n=1}^{\infty} A_n^s d_n(q_s) \text{Se}'_n(0, q_s) \text{se}_n(\varphi, q_s) \right\} \quad (35)$$

— множитель направленности, учитывающий влияние экрана со щелями на излучение бесконечно тонкого провода с электрическим током, направленного параллельно кромкам щелей.

§ 5. Погонный коэффициент пропускания щелей. Во многих практических случаях наряду с распределением поля необходимо знать коэффициент пропускания щелей в экране. Однако в случае, когда падающая волна обладает неплоским фронтом, обычное определение сечения пропускания щели (или системы щелей) как отношения полной мощности, прошедшей через щели, к абсолютному значению действительной части комплексного вектора Пойтинга в плоскости щелей оказывается непригодным, так как амплитуда вектора Пойтинга падающего, например, цилиндрического поля не постоянная в плоскости даже одной щели. В случае наличия двух и более щелей вопрос об однозначном определении амплитуды вектора Пойтинга падающего поля, а значит, и сечения пропускания в плоскости щелей становится еще более неопределенным. При наличии одной щели в плоском экране можно определить, например, среднее значение амплитуды вектора Пойтинга в плоскости щели или ее значение в центре щели, или на краях [10].

В рассматриваемой нами геометрии задач в предположении, что источник цилиндрической волны удален на конечное, но достаточно большое расстояние от экрана, когда можно воспользоваться асимптотическими формулами для функций Ханкеля, более удобным оказывается определить среднее арифметическое значение амплитуды вектора Пойтинга от значений амплитуд вектора Пойтинга в центре каждой щели. Очевидно, что при таком определении амплитуды вектора Пойтинга падающего цилиндрического поля оно при удалении источника на бесконечность переходит в обычное определение амплитуды вектора Пойтинга падающей плоской волны [11].

Определим коэффициент пропускания системы  $(2N+1)$  щелей одинаковой ширины  $2d$  с расстоянием между центрами соседних щелей, равным  $l_0$ . Как и в случае дифракции плоской волны, погонный коэффициент пропускания системы щелей равной ширины дается формулой

$$T = \frac{\frac{c}{8\pi} \rho_0 \int_0^\pi |E_z^d| d\varphi}{\tau \bar{S}_i}, \quad (36)$$

где в нашем случае  $\tau = 2(2N+1)d$  — общая ширина щелей,  $\bar{S}_i = \frac{B^2 c}{4\pi^2 k (2N+1)} \sum_{s=-N}^N \frac{1}{\rho_s^0}$  — среднее арифметическое значение амплитуды вектора Пойтинга падающего цилиндрического поля.

Принимая во внимание, что  $|E_z^d|^2 = \text{Re} \{E_z^d E_z^{*d}\}$  ( $E_z^{*d}$  — комплексно сопряженная величина), и учитывая (31) и (32), из (36) окончательно получим выражение, определяющее погонный коэффициент пропускания системы  $(2N+1)$  одинаковых щелей ( $q_{+1} = q_{-1} = q$ ):

$$T = \frac{2}{\sqrt{q} \sum_{s=-N}^N \frac{1}{k\rho_s^0}} \text{Re} \left[ \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \sum_{s=-N}^N |a_n^s|^2 \right\} + \sum_{n,m=1}^{\infty} \sum_{j=-N}^N \left\{ a_n^j \sum_{\substack{s=-N \\ s \neq j}}^N a_m^{*s} \delta_{nm}^{(j-s)} \right\} \right], \quad (37)$$

в котором

$$\delta_{nm}^{(j-s)} = s_{nm} (|j-s|l_0), \text{ если } s < j,$$

$$\delta_{nm}^{(j-s)} = r_{nm} (|j-s|l_0), \text{ если } s > j.$$

Здесь

$$s_{nm} (|j-s|l_0) = \sum_{r=1}^{\infty} \sum B_r^{(n)}(q) B_r^{(m)}(q) \times \\ \times \{i^{r-t} J_{r-t}(k|j-s|l_0) - i^{-r-t} J_{r+t}(k|j-s|l_0)\}, \quad (38)$$

$$r_{nm} (|j-s|l_0) = \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{t=1} B_r^{(n)}(q) B_t^{(m)}(q) \times \\ \times \{i^{r-t} J_{r-t}(k|j-s|l_0) - i^{r+t} J_{r+t}(k|j-s|l_0)\}. \quad (39)$$

Коэффициенты  $a_n^s$  ( $a_n^{*s}$ ) в (37) после решения системы (13) находятся из (14).

В заключение отметим, что с точки зрения принципа двойственности [11] полученное здесь решение задачи о дифракции цилиндрической волны  $E_z^i$  электрического типа на системе щелей в бесконечном экране является также решением задачи о дифракции магнитной цилиндрической волны  $H_z^i$  на решетке из лент.

### Литература

1. Вайнштейн Л. А. ЖТФ, 15, № 5, 1955.
2. Baldwin G. L., Heis A. E. Math. Scand., 2, № 1, 103, 1954.
3. Агранович З. С., Марченко В. А., Шестопалов В. П. ЖТФ, 32, № 4, 1962.
4. Хенл Х., Мауэ А., Вестпфаль К. Теория дифракции. Изд. «Мир», М., 1964.
5. Мак-Махлан Н. В. Теория и приложения функций Матье. ИЛ, 1953.
6. Иванов Е. А. Дифракция электромагнитных волн на двух телах. Изд. «Наука и техника», Минск, 1968.
7. Канторович Л. В., Крылов В. Ч. Приближенные методы высшего анализа. Физматгиз, М., 1962.
8. Иванов Е. А., Мошинский А. В. Весті АН БССР, сер. фіз.-мат. наук, № 3, 1969.
9. Вулих Б. З. Введение в функциональный анализ. Изд. «Наука», М., 1967.
10. Кинг Р., У Тай-Цзунь. Рассеяние и дифракция электромагнитных волн. ИЛ, 1962.
11. Вайнштейн Л. А. Электромагнитные волны. Изд. «Советское радио», М., 1957.

Минский радиотехнический институт

Поступило в редакцию 17.III 1969

В. В. ХАРИТОНОВ

К ВОПРОСУ О РЕШЕНИИ  
 НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ,  
 СВОДИМЫХ К ОБОБЩЕННОМУ  
 ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОМУ УРАВНЕНИЮ БЕССЕЛЯ

В результате решения различного рода задач теплопроводности с граничными условиями 3-го рода при наличии теплообмена излучением весьма часто приходится иметь дело с дифференциальными уравнениями вида [1]

$$\frac{d^2 T}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dT}{dr} - A(T^4 - T_c^4) = 0, \quad (1)$$

которое заменой переменных  $\theta = T/T_0$ ,  $x = r/r_n$  сводится к

$$\frac{d^2 \theta}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{d\theta}{dx} - \bar{A}(\theta^4 - \bar{B}) = 0. \quad (2)$$

Здесь имеем

$$\bar{A} = Ar_n^2 T_0^3, \quad \bar{B} = T_c^4 / T_0^4.$$

Ввиду того что уравнение вида (2) в известных функциях неразрешимо [2], обычно [1] прибегают к искусственному приему замены закона излучения Стефана—Больцмана ( $T^4$ ) на закон Ньютона ( $T^1$ ), т. е. предполагается, что

$$c_{\text{н}}(T^4 - T_c^4) \approx \alpha_{\text{н}}(T - T_c).$$

В результате этого (2) сводится к уравнению вида

$$u'' + \frac{1}{z} u' - u = 0, \quad (3)$$

решениями которого, как известно, являются модифицированные функции Бесселя  $I_0(z)$  и  $K_0(z)$  [3, 4].

Использование подобного приема, естественно, не может быть рекомендовано во всех случаях, ибо мы уже на первоначальном этапе вносим в решение погрешность, и тем большую, чем больше разность  $T - T_c$ . Следовательно, необходимо отыскать путь к точному решению исходного уравнения (2)—(1), которое с учетом подстановки  $z = x \sqrt{\bar{A}}$  перепишем в виде

$$\frac{d^2 \theta}{dz^2} + \frac{1}{z} \frac{d\theta}{dz} - \theta^4 = -\bar{B}. \quad (4)$$

Поскольку в большинстве задач  $T_c \ll T$  и, следовательно, в (2) можно с большой точностью положить  $\bar{B} \approx 0$ , то необходимо решить уравнение\*)

$$\frac{d^2 \theta}{dz^2} + \frac{1}{z} \frac{d\theta}{dz} - \theta^4 = 0, \quad (5)$$

\*) В тех же случаях, когда  $T_c$  мало отличается от  $T$ , хорошие результаты дает указанная выше линеаризация уравнения, позволяющая обойтись обычными функциями Бесселя.

которое по аналогии с (3) будем в дальнейшем называть обобщенным Бесселевским уравнением.

Поскольку показатель при  $\theta$  может быть в принципе любой, то, следовательно, общий вид обобщенного бесселевского уравнения будет

$$u'' + \frac{1}{z} u' - u^m = 0. \quad (6)$$

При  $m=1$  имеем обычное бесселевское уравнение, при  $m=4$  — уравнение задач теплопроводности. Следует указать, что уравнение (6) отличается от уравнений Эмдена — Фаулера [2], которые, поскольку в них при первой производной стоит коэффициент 2, позволяют произвести резкое упрощение задачи [6] (кстати, они тоже решаются лишь в некоторых частных случаях).

Искомое решение может быть найдено методом неопределенных коэффициентов, как это делалось при решении обычного ( $m=1$ ) бесселевского уравнения [7].

Ищем решение уравнения (6) в виде ряда

$$u = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k.$$

Тогда имеем

$$\frac{du}{dz} = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k z^{k-1}; \quad \frac{d^2 u}{dz^2} = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) a_k z^{k-2}.$$

При этом, если мы за определяющую температуру  $T_0$  выбрали температуру на оси тела, так что  $T_{r=0} = T_0$ , имеем  $\theta(0) = 1$  и  $u'(0) = \theta'(0) = 0$ , откуда

$$a_0 = 1, \quad a_1 = 0. \quad (7)$$

Подставим полученные ряды в (6). Тогда

$$\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) a_k z^{k-1} + \sum_{k=1}^{\infty} k a_k z^{k-1} - z \left( \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k \right)^m = 0$$

или, поскольку [8]

$$\left( \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \right)^m = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k,$$

где

$$c_0 = a_0^m; \quad c_f = \frac{1}{f a_0} \sum_{k=1}^f (km - f + k) a_k c_{f-k},$$

с учетом (7) запишем:

$$(2a_2 z + 2 \cdot 3 a_3 z^2 + 3 \cdot 4 a_4 z^3 + \dots) + (2a_2 z + 3a_3 z^2 + 4a_4 z^3 + \dots) - (c_0 z + c_1 z^2 + c_2 z^3 + \dots) = 0; \quad (8)$$

$$c_0 = 1, \quad c_1 = m a_1 c_0 = 0, \quad c_2 = m a_2, \quad c_3 = m a_3,$$

$$c_4 = \frac{1}{2} m(m-1) a_2^2 + m a_4 \quad \text{и т. д.}$$

Приравнивая в (8) коэффициенты при одинаковых степенях  $z$ , получим

$$4a_2 - 1 = 0, \quad 9a_3 - c_1 = 0, \quad 16a_4 - c_2 = 0, \\ 25a_5 - c_3 = 0, \quad 36a_6 - c_4 = 0,$$

или

$$k^2 a_k - c_{k-2} = 0.$$

Отсюда получаем:

$$a_2 = \frac{1}{2^2}, \quad a_3 = 0, \quad a_4 = \frac{m}{2^2 \cdot 4^2}, \quad a_5 = 0, \\ a_6 = \frac{m(3m-2)}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2}, \quad a_7 = 0, \quad a_8 = \frac{m(18m^2 - 29m + 12)}{2^4 \cdot 4!^2}, \quad a_9 = 0, \\ a_{10} = \frac{m(174m^3 - 477m^2 + 448m - 144)}{2^5 \cdot 5!^2} \text{ и т. д.}$$

Подставив значения  $a_5$  в исходный ряд, искомое решение найдем как

$$\theta(z) = 1 + \frac{z^2}{2^2} + \frac{m}{2^4 \cdot 2!^2} z^4 + \frac{m(3m-2)}{2^6 \cdot 3!^2} z^6 + \frac{m(18m^2 - 29m + 12)}{2^8 \cdot 4!^2} z^8 + \\ + \dots + \frac{m(Am^{h-2} - Bm^{h-3} + \dots \pm c)}{2^{2k} \cdot k!^2} z^{2k} + \dots \quad (9)$$

Нетрудно заметить, что при  $m=1$  полученное нами решение переходит в ряд  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{2^{2k} k!^2} = I_0(z)$  — модифицированную функцию Бесселя 1-го рода нулевого порядка.

Поэтому решение уравнения (6) по аналогии определим как обобщенную модифицированную функцию Бесселя 1-го рода нулевого порядка  $m$ -й степени и обозначим

$$I_0^m(z) = 1 + \frac{1}{2^2} z^2 + \frac{m}{2^4 \cdot 2!^2} z^4 + \frac{m(3m-2)}{2^6 \cdot 3!^2} z^6 + \frac{m(18m^2 - 29m + 12)}{2^8 \cdot 4!^2} z^8 + \\ + \frac{m(174m^3 - 477m^2 + 448m - 144)}{2^{10} \cdot 5!^2} z^{10} + \dots \quad (10)$$

Полученное решение можно записать и иначе:

$$I_0^m(z) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k = 1 + m_1 z^2 + m_2 z^4 + \dots + m_k z^{2k} + \dots \quad (11)$$

Здесь  $m_1 = a_2$ ;  $m_2 = a_4$  и т. д.  $m_k = a_{2k}$  из ряда (10).

Поскольку согласно выводу общий вид коэффициентов  $a_k$  и  $c_k$  будет соответственно

$$a_k = \frac{c_{k-2}}{k^2} \text{ и } c_k = \frac{1}{k} \sum_{k_1=2}^k [k_1 m - (k - k_1)] a_{k_1} c_{k-k_1}, \quad (12)$$

то

$$a_k = \frac{1}{(k-2)k^2} \sum_{k_1=2}^{k-2} [k_1(m+1) - (k-2)] a_{k_1} c_{k-2-k_1},$$

где

$$k_1 = 2, 4, 6, \dots, \quad k = 4, 6, 8 \dots$$

Подставляя в (12) значения  $c_{k-2-k_1}$  и  $a_{k_1}$  и произведя суммирование, после соответствующих преобразований получим, что начиная с  $m_3$  имеет место неравенство

$$m_k < \frac{2(2k)^{k-3} m^{k-1}}{2^{2k} k!^2} = \frac{k^{k-3} m^{k-1}}{2^{k+2} k!^2} \quad (k=3, 4, 5 \dots). \quad (13)$$

Следовательно, ряду (11) можно сопоставить ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} v_k = 1 + \frac{1}{2^2} z^2 + \frac{m}{2^4 \cdot 2!^2} z^4 + \dots + \frac{2^{k-2} k^{k-3} m^{k-1}}{2^{2k} k!^2} z^{2k} + \dots, \quad (14)$$

такой, что начиная с  $k=3$  выполняется условие  $u_k < v_k$  или

$$m_k |z|^{2k} < \frac{k^{k-3} m^{k-1} |z|^{2k}}{2^{k+2} k!^2}.$$

Следовательно,  $I_0^m(z) < \sum_{k=0}^{\infty} v_k$ , а поскольку ряд  $\sum_{k=0}^{\infty} v_k$  сходится, ибо

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{v_{k+1}}{v_k} \right| = \frac{(k+1)^{k-2} m^k z^{2(k+1)} 2^{k+2} k!^2}{2^{k+3} (k+1)!^2 k^{k-3} m^{k-1} z^{2k}} = \frac{mz^2}{2k} = 0,$$

то сходится и ряд  $I_0^m(z)$ .

Ряд (14), являющийся мажорантой ряда (11), можно аппроксимировать рядом

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} v_{1k} = 1 + \frac{1}{2^2} z^2 + \frac{m}{2^4 \cdot 2!^2} z^4 + \frac{2m^2}{2^6 \cdot 3!^2} z^6 + \frac{2^2 m^3}{2^8 \cdot 4!^2} z^8 + \dots + \\ + \frac{2^{k-2} m^{k-1}}{2^{2k} k!^2} z^{2k} + \dots \end{aligned} \quad (15)$$

при  $m > 4$  или рядом

$$\sum_{k=0}^{\infty} v_{2k} = 1 + \frac{1}{2^2} z^2 + \frac{m}{2^4 \cdot 2!^2} z^4 + \frac{m^2}{2^6 \cdot 3!^2} z^6 + \dots + \frac{m^{k-1}}{2^{2k} k!^2} z^{2k} \quad (16)$$

при  $m < 4$ .

Сравнивая соответствующие члены рядов (15) и (16) с членами ряда (14), можно видеть, что  $v_{1k} < v_k$  и  $v_{2k} < v_k$ . Следовательно, заключаем, что ряды (15) и (16) с определенной степенью точности могут аппроксимировать и ряд  $I_0^m(z)$ , т. е. можно записать, что при  $m > 4$

$$I_0^m(z) \approx \sum_{k=0}^{\infty} v_{1k},$$

а при  $m < 4$

$$I_0^m(z) \approx \sum_{k=0}^{\infty} v_{2k}.$$

Умножив (15) на  $2^2 m$  и (16) на  $m$ , после несложных преобразований будем иметь

$$I_0^m(z) \approx \frac{4m-1}{4m} + \frac{z^2}{8} + \frac{I_0(\sqrt{2m}z)}{4m} \quad \text{при } m > 4,$$

$$I_0^m(z) \approx \frac{m-1}{m} + \frac{I_0(\sqrt{m}z)}{m} \quad \text{при } m < 4,$$

что позволяет наряду с (10) и (11) для решения исходного уравнения использовать имеющиеся таблицы [9, 10].

При этом надо иметь в виду, что в практических расчетах обычно выполняется условие  $z \leq 1$ , что позволяет ограничиваться малым числом членов ряда (10). Указанное условие определяется тем, что  $z = x \sqrt{\bar{A}}$ . Поскольку  $x = r/r_n \leq 1$  и  $\bar{A} = Ar_n^2 T_0^3$  также меньше единицы, если  $r_n < 10^3$  см и  $T_0 < 10^3$  град, ибо  $A \sim \frac{c_0}{\lambda r_n}$ , где  $c_0 \sim 10^{-12}$  вт/см<sup>2</sup>·град<sup>4</sup> и  $\lambda \sim 1$  вт/см·град, то и  $z \leq 1$ . В общем случае, чтобы  $z < 1$ , необходимо удовлетворить условию  $\epsilon r_n T_0^3 / \lambda < 1,77 \cdot 10^{11}$ .

Решение уравнения вида

$$zu'' + u' + zu^m = 0,$$

к которому подстановкой  $z = \pm it$  можно свести исходное (6), получается совершенно аналогичным образом и определяется как  $I_0^m(z)$ . Выражение для  $J_0^m(z)$  можно получить из (10) указанной выше подстановкой.

Автор благодарит А. И. Яблонского за обсуждение затронутых в статье вопросов и ценные замечания.

### Обозначения

$u$  — функция;  $z$  — аргумент;  $m$  — показатель;  $T$  — температура;  $r$  — радиус;  $T_c$  — температура среды;  $r_n$  — наружный радиус;  $T_0$  — температура на оси;  $c_n$  — приведенный коэффициент излучения;  $\epsilon$  — степень черноты;  $\alpha_n$  — приведенный коэффициент теплообмена;  $J_0^m(z)$  — обобщенная функция Бесселя 1-го рода;  $I_0^m(z)$  — обобщенная модифицированная функция Бесселя 1-го рода;  $\theta$  — приведенная температура.

### Литература

1. Лыков А. В. Теория теплопроводности. Изд. «Высшая школа», М., 1967.
2. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. Изд. «Наука», М., 1965.
3. Лебедев Н. Н. Специальные функции и их приложения. Физматгиз, 1963.
4. Ватсон Г. Теория бesselевых функций, 1, ИЛ, 1949.
5. Смирнов В. И. Курс высшей математики, 3. Гостехиздат, 1951.
6. Сансоне Дж. Обыкновенные дифференциальные уравнения, 2. ИЛ, 1954.
7. Грэй Э., Метьюз Г. Б. Функции Бесселя и их приложения к физике и механике. ИЛ, 1953.
8. Рыжик И. М., Градштейн И. С. Таблицы интегралов, рядов, сумм и произведений. Гостехиздат, 1951.
9. Янке Е., Эмде Ф., Леш Ф. Специальные функции. Изд. «Наука», М., 1968.
10. Таблицы значений функций Бесселя от мнимого аргумента. Изд. АН СССР, 1950.

Институт физики твердого тела  
и полупроводников АН БССР

Поступило в редакцию 20.III 1969

Г. Н. ПЫХТЕЕВ

О КВАДРАТУРНЫХ ФОРМУЛАХ  
ДЛЯ ИНТЕГРАЛОВ ТИПА КОШИ  
ПО ПРЯМОЛИНЕЙНОМУ РАЗОМКНУТОМУ КОНТУРУ  
И МЕТОДАХ ОЦЕНКИ ИХ ПОГРЕШНОСТИ

При решении различных задач механики сплошной среды и теоретической физики и краевых задач теории функций часто приходится иметь дело с интегралами типа Коши по отрезку прямой, которые при помощи простейших преобразований могут быть приведены к интегралу вида

$$\Omega(z) = \frac{\omega(z)}{\pi i} \int_{-1}^1 \frac{1}{\omega(t)} \frac{f(t)}{t-z} dt, \quad z \in [-1, 1], \quad (1)$$

а их главные значения — к сингулярному интегралу

$$T(x) = \frac{\omega(x)}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{1}{\omega(t)} \frac{f(t)}{t-x} dt, \quad x \in [-1, 1]. \quad (2)$$

Здесь  $\omega(x)$  — фиксированная действительная функция;  $\omega(z)$  — функция, аналитическая в верхней полуплоскости всюду, за исключением, может быть, бесконечно удаленной точки, в которой для нее допустим полюс, и удовлетворяющая условию

$$\lim_{z \rightarrow x} \omega(z) = \omega(x), \quad z \rightarrow x \in [-1, 1];$$

$f(x)$  — функция, принадлежащая достаточно гладкому классу, по крайней мере она удовлетворяет на отрезке  $[-1, 1]$  условию Гельдера. Относительно  $\omega(x)$  предполагается также, что она удовлетворяет условию Гельдера на отрезке  $[-1, 1]$  и может иметь нули в конечном числе точек  $c_1, c_2, \dots, c_n$  отрезка  $[-1, 1]$ , в окрестности которых она представима в виде  $\omega(x) = |x - c_k|^{\alpha_k} \omega_k(x)$ ,  $0 < \alpha_k < 1$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ), где  $\omega_k(x)$  удовлетворяет условию Гельдера в окрестности точки  $c_k$  и не обращается в нуль в точке  $c_k$ . В силу известных свойств интеграла типа Коши предельные значения интеграла (1) на отрезке  $[-1, 1]$  и его главное значение (2) связаны соотношением

$$\Omega(x) = f(x) - iT(x), \quad x \in [-1, 1], \quad (3)$$

которое представляет собой одну из известных формул Сохоцкого [1, 2]. Наиболее простыми из интегралов (1), (2) будут интегралы с  $\omega(z) \equiv 1$ . В механике сплошной среды весьма часто приходится иметь дело с интегралами, которые являются частным случаем интегралов (1), (2),

когда  $\omega(z) = -i\sqrt{z^2-1}$ . До настоящего времени методы приближенного вычисления интегралов (1), (2) мало разработаны как в практическом, так и в теоретическом отношении. Можно указать несколько работ [3—9], в которых даются приближенные формулы для вычисления интегралов (2) с  $\omega(x) \equiv 1$  или с  $\omega(x) = \sqrt{1-x^2}$ . Имеется работа [10], посвященная приближенному вычислению интегралов (1) с  $\omega(z) \equiv 1$  и с  $\omega(z) = -i\sqrt{z^2-1}$  в случае, когда  $z=x$ ,  $|x| > 1$  и работа [11], в которой получены приближенные формулы для вычисления интеграла (2). Однако оценка погрешности приближенных формул в [3—10] либо совсем не производится, либо даются очень грубые оценки сверху, а оценка, полученная в [11], справедлива только для непрерывно-дифференцируемых функций, и, следовательно, она не может быть использована при вычислении многих интегралов, встречающихся в задачах механики и теоретической физики, у которых подынтегральная функция принадлежит более широкому классу. Кроме того, все указанные работы, за исключением одной [10], посвящены вычислению только сингулярных интегралов (2), в то время как при решении многих задач механики и теоретической физики приходится вычислять сразу интегралы (1) и их главные значения (2). Поэтому нам представляется интересным рассмотреть вопрос об общих методах оценки погрешности приближенных формул, которые охватывают все известные приближенные формулы для интегралов (1), (2), в некотором, достаточно широком с точки зрения приложений, классе функций. Последнему вопросу и посвящена настоящая работа. В ней рассматриваются приближенные формулы для интегралов (1), (2), имеющие некоторую аналогию с квадратурными формулами для обычных римановых интегралов, а именно — приближенное значение интеграла представляется в форме линейной комбинации конечного числа произведений заданных функций на заданные линейные функционалы. Для этих формул при некоторых предположениях относительно их предлагаются методы получения априорных оценок погрешности в классе функций, который является обобщением класса  $\omega^r(M; a, b)$ , введенного С. М. Никольским в его работах по квадратурным формулам [12—14], на класс функций, дифференцируемых с заданной плотностью.

1. Обозначения. Условимся далее буквой  $D$  обозначать верхнюю полуплоскость, а буквой  $\bar{D}$  — верхнюю полуплоскость вместе с действительной осью, т. е. замкнутую полуплоскость. Если  $F(z)$  есть некоторая функция комплексного переменного  $z=x+iy$ , определенная в  $D$ , то ее предельные значения на действительной оси будем обозначать через  $F(x)$ . Пусть оператор  $S$  зависит не только от функции  $f$ , но и от точки  $\zeta$  верхней полуплоскости или действительной оси; тогда, если нужно отметить оба указанных факта, для оператора  $S$  будет употребляться обозначение  $S(f|\zeta)$ . Аналогичное обозначение будет употребляться и в том случае, если оператор  $S$  является функционалом, а функция  $f$  зависит от двух переменных  $f=f(x, \zeta)$ , причем оператор  $S$  берется по переменной  $x$ . Пусть функция, входящая в оператор  $S(f|\zeta)$ , зависит от двух переменных,  $f=f(x, t)$  и оператор берется по переменной  $x$ ; тогда будем писать  $S(f|\zeta, t)$ . Если при этом функция  $f$  имеет вид  $f(\varphi(x) + \psi(t))$ , то будем писать  $S(f(\varphi + \psi(t))|\zeta)$ . Если  $S$  является функционалом и функция  $f=f(\varphi(x) + \psi(t))$ , причем функционал берется по переменной  $x$ , то функционал  $S$  будем обозначать через  $S(f(\varphi + \psi(t)))$ .

Будем далее, как это принято в функциональном анализе, обозначать через  $C(-1, 1)$  пространство непрерывных на отрезке  $[-1, 1]$  действительных функций, в котором введена норма  $\|f\| = \max |f(x)|$ ,  $x \in [-1, 1]$ ,  $f(x) \in$

$\in C(-1,1)$ , а через  $C(D)$  — пространство непрерывных в  $\bar{D}$  функций, в котором введена норма  $\|F\| = \max_z |F(z)|$ ,  $z \in \bar{D}$ ,  $F(z) \in C(D)$ .

2. Понятие квадратурной формулы. Пусть для интеграла (1) имеет место приближенное равенство

$$\Omega(z) \approx \mathcal{L}(f|z) \equiv \sum_{k=0}^{n-1} A_k^*(z) L_k(f), \quad (4)$$

где  $A_k^*(z)$  — заданные функции, аналитические в  $D$  всюду, кроме, быть может, бесконечно удаленной точки, в которой для них допустим полюс порядка не большего, чем у функции  $\omega(z)$ , а  $L_k(f)$  — заданные действительные аддитивные и однородные функционалы. Если точка  $z$  зафиксирована и в качестве функционалов  $L_k(f)$  взяты значения функции  $f(x)$  или ее производных в точках отрезка  $[-1,1]$ , то формула (4) напоминает квадратурную формулу для обычного интеграла. Имея в виду эту аналогию, будем далее всюду любое приближенное равенство (4) называть квадратурной формулой для интеграла (1). Пусть функции  $A_k^*(z)$  имеют на отрезке  $[-1,1]$  действительной оси предельные значения

$$A_k^*(x) = B_k(x) - iA_k(x), \quad x \in [-1,1].$$

Тогда приближенное равенство

$$T(x) \approx L(f|x) \equiv \sum_{k=0}^{n-1} A_k(x) L_k(f) \quad (5)$$

будем называть квадратурной формулой для интеграла (2). Квадратурная формула для интеграла (2), таким образом, по определению получается из квадратурной формулы для интеграла (1). Для получения формулы (5) нужно в формуле (1) перейти к пределу при  $z \rightarrow x \in [-1,1]$ , а затем, используя соотношение (3), отделить мнимые части. Если при этом отделить действительные части, то будем иметь приближенную формулу для функции

$$f(x) \approx L_0(f|x) \equiv \sum_{k=0}^{n-1} B_k(x) L_k(f). \quad (6)$$

Погрешность квадратурных формул (4) и (5) в данной точке  $z$  или  $x$  характеризуют операторы

$$E_\Omega(f|z) = \Omega(z) - \mathcal{L}(f|z) \quad (7)$$

и

$$E_T(f|x) = T(x) - L(f|x). \quad (8)$$

Оператор

$$E_0(f|x) = f(x) - L_0(f|x) \quad (9)$$

характеризует погрешность приближенной формулы (6) в данной точке  $x$ . Из равенства (3) следует, что операторы (7) — (9) связаны на отрезке  $[-1,1]$  действительной оси соотношением

$$E_\Omega(f|x) = E_0(f|x) - iE_T(f|x), \quad x \in [-1,1]. \quad (10)$$

3. Классы функций  $\omega_p^r$  и  $\omega_p^r(M)$ . Наибольшая ошибка приближения. Погрешность квадратурных формул (4), (5) зависит от того, к какому классу принадлежит функция  $f(x)$ . Априорные оценки величины погрешности квадратурных формул (4), (5) имеет смысл получать для каких-либо достаточно узких классов функций. В теории квадратурных формул обычных римановых интегралов достаточно эффективные методы наход-

дения оценок приближения квадратурных формул были разработаны для класса  $\omega^r(M; a, b)$  [12—14], который является множеством класса  $\omega^r(a, b)$ . При исследовании квадратурных формул для интегралов (1) и (2) целесообразно ввести классы функций, являющиеся некоторым обобщением классов  $\omega^r(-1, 1)$  и  $\omega^r(M; -1, 1)$ . Пусть  $\rho(x)$  есть заданная на отрезке  $[-1, 1]$  неотрицательная непрерывная функция. Возьмем определенную на отрезке  $[-1, 1]$  функцию  $f(x)$  и назовем функцию  $f_\rho^{(r)}(x)$ , образованную из  $f(x)$  при помощи рекуррентных соотношений

$$\begin{aligned} f_\rho^{(1)}(x) &= \rho f'(x), \quad f_\rho^{(2)}(x) = \rho \frac{d}{dx} (f_\rho^{(1)}(x)), \quad \dots, \quad f_\rho^{(r)}(x) = \\ &= \rho \frac{d}{dx} (f_\rho^{(r-1)}(x)), \end{aligned}$$

производной с весом  $\rho(x)$  от  $f(x)$  или просто производной  $f_\rho^{(r)}(x)$ . Введем далее класс функций  $\omega_\rho^r$ , определяемый следующим образом: класс  $\omega_\rho^r$  состоит из всех функций, заданных на отрезке  $[-1, 1]$ , непрерывных и имеющих непрерывные производные  $f_\rho^{(s)}(x)$  до  $(r-1)$ -го порядка включительно и непрерывную или кусочно-непрерывную производную  $f_\rho^{(r)}(x)$ . Выделим в классе  $\omega_\rho^r$  функции, удовлетворяющие неравенству

$$|f_\rho^{(r)}(x)| \leq M,$$

и назовем это множество функций классом  $\omega_\rho^r(M)$ . Легко видеть, что определенный таким образом класс  $\omega_\rho^r(M)$  при  $\rho(x) \equiv 1$  совпадает с классом  $\omega^r(M; -1, 1)$ . При  $r=0$  класс  $\omega_\rho^r$  не зависит от  $\rho(x)$  и совпадает с классом непрерывных и кусочно-непрерывных функций, определенных на отрезке  $[-1, 1]$ . Следовательно, классы  $\omega_\rho^r$  и  $\omega_\rho^r(M)$  при  $r=0$  совпадают с классами  $\omega^0(-1, 1)$  и  $\omega^0(M; -1, 1)$ . При  $r=0$  класс  $\omega_\rho^r$  есть нормированное пространство с нормой  $\sup_x |f(x)|$ ,  $x \in [-1, 1]$ , а при  $r \geq 1$  он представляет собой линейное пространство, для каждого элемента которого  $f(x)$  число  $\sup_x |f_\rho^{(r)}(x)|$ ,  $x \in [-1, 1]$ , является полунормой. Известно, что из линейного пространства с полунормой можно образовать нормированное пространство (см., например, [15]). Образовав указанное нормированное пространство из  $\omega_\rho^r$ , получим фактор-пространство  $\bar{\omega}_\rho^r = \omega_\rho^r / \omega_0^r$ , где через  $\omega_0^r$  обозначено множество функций класса  $\omega_\rho^r$ , у которых  $r$ -я производная равна нулю на отрезке  $[-1, 1]$ . Элементами  $\bar{\omega}_\rho^r$  являются классы  $\bar{f}(x)$ , определяемые следующим образом: класс  $\bar{f}(x)$ , содержащий функцию  $f(x)$ , есть совокупность всех сумм вида  $f(x) + f_0(x)$ , где  $f_0(x) \in \omega_0^r$ . Число

$$\|f\| = \sup_x |f_\rho^{(r)}(x)|, \quad x \in [-1, 1], \quad f(x) \in \bar{f}(x), \quad (11)$$

является нормой для  $\bar{\omega}_\rho^r$ . Таким образом, фактор-пространство  $\bar{\omega}_\rho^r = \omega_\rho^r / \omega_0^r$  является нормированным пространством, норма которого определяется равенством (11). Если функция  $\frac{1}{\rho(x)}$  интегрируема на отрезке  $[-1, 1]$ , то множество  $\omega_0^r$  представляет собой совокупность произвольных полиномов  $\sum_{k=0}^{r-1} c_k \Theta^k(x)$ , где  $\Theta(x)$  — функция, определяемая равенством

$$\Theta(x) = \pm \int_{x_0}^x \frac{1}{\rho(t)} dt. \quad (12)$$

При оценке погрешности квадратурных формул (4), (5), очевидно, представляет интерес рассматривать такие классы  $\omega_\rho^r$ , для любой функции которых существуют интегралы (1) и (2) и имеет место формула Сохоцкого (3). Можно указать достаточное условие, когда класс  $\omega_\rho^r$  этим свойством обладает.

*Лемма.* Если функция  $\rho(x)$ , определяющая класс  $\omega_\rho^r$ , такова, что отношение  $\frac{1}{\rho(x)}$  интегрируемо на отрезке  $[-1, 1]$  и функция  $\Theta(x)$ , определяемая равенством (12), удовлетворяет условию Гельдера, то интеграл (2) существует в смысле главного значения по Коши всюду на отрезке  $[-1, 1]$ , за исключением, может быть, концов, а интеграл (1) является аналитической функцией в  $D$  и его предельные значения связаны с интегралом (2) соотношением (3).

*Доказательство.* Для того чтобы убедиться в справедливости этого утверждения, достаточно установить, что функция  $f(x)$  удовлетворяет условию Гельдера. В последнем легко убедиться, если ввести переменное  $\Theta$ , определяемое равенством (12), и функцию  $f_*(\Theta) = f[x(\Theta)]$ ,  $\Theta \in [\alpha, \beta]$ . Действительно,  $f_*(\Theta) \in \omega^1(\alpha, \beta)$ , если  $f(x) \in \omega_\rho^r$ , а поэтому для любых двух точек  $\Theta_1$  и  $\Theta_2$  отрезка  $[\alpha, \beta]$  имеем  $|f_*(\Theta_1) - f_*(\Theta_2)| \leq M |\Theta_1 - \Theta_2|$ . Отсюда следует, что если функция  $\Theta(x)$  удовлетворяет условию Гельдера с постоянной  $A$  и показателем  $\mu$ , то для любых двух точек  $x_1$  и  $x_2$  отрезка  $[-1, 1]$

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq M |\Theta(x_1) - \Theta(x_2)| \leq MA |x_1 - x_2|^\mu.$$

Для практических целей очень важны оценки ошибки приближения квадратурных формул (4), (5), равномерные по  $z$  и  $x$  и не зависящие от индивидуальных свойств функции  $f(x)$ . В связи с этим введем понятие наибольшей ошибки приближения квадратурных формул (4), (5).

Пусть класс  $\omega_\rho^r$  обладает таким свойством, что для любой функции этого класса существуют интегралы (1) и (2) и имеет место формула (3). Тогда будем называть наибольшей ошибкой приближения квадратурной формулы (4) в классе  $\omega_\rho^r(M)$  число

$$E_\Omega = \sup_{z, f} |E_\Omega(f|z)|, \quad z \in \bar{D}, \quad f(x) \in \omega_\rho^r(M),$$

а наибольшей ошибкой приближения квадратурной формулы (5) в классе  $\omega_\rho^r(M)$  — число

$$E_T = \sup_{x, f} |E_T(f|x)|, \quad x \in [-1, 1], \quad f(x) \in \omega_\rho^r(M).$$

Легко видеть, что если оператор  $E_\Omega(f|z)$  есть непрерывная в  $\bar{D}$  функция при  $f(x) \in \omega_\rho^r$  и если он ограничен при отображении  $\bar{\omega}_\rho^r$  в  $C(D)$ , то

$$E_\Omega = \|E_\Omega\| M, \quad (13)$$

где  $\|E_\Omega\|$  — норма  $E_\Omega(f|z)$ .

Точно так же, если оператор  $E_T(f|x)$  есть непрерывная на отрезке  $[-1, 1]$  функция при  $f(x) \in \omega_\rho^r$  и он ограничен при отображении  $\bar{\omega}_\rho^r$  в  $C(-1, 1)$ , то

$$E_T = \|E_T\| M, \quad (14)$$

где  $\|E_T\|$  — норма  $E_T(f|x)$ .

4. Квадратурные формулы, у которых оператор (7) есть оператор Фредгольма от  $f_{\rho}^{(r)}(x)$ . Многообразие квадратурных формул (4), (5) весьма обширно. Выделим из этого многообразия квадратурные формулы, у которых оператор (7), характеризующий погрешность формулы (4), для любой функции  $f(x) \in \omega_{\rho}^r$ , представим в виде

$$E_{\Omega}(f|z) = \int_{-1}^1 \frac{1}{\rho(t)} \gamma_r(z, t) f_{\rho}^{(r)}(t) dt, \quad (15)$$

где функция  $\gamma_r(z, t)$  непрерывна как функция двух переменных в области  $D^* = \bar{D} + [-1, 1]$  ( $z \in \bar{D}$ ,  $t \in [-1, 1]$ ), т. е. оператор (7) есть оператор Фредгольма от  $f_{\rho}^{(r)}(x)$ , если отношение  $\frac{1}{\rho(x)}$  интегрируемо. В этом случае, при выполнении условий леммы п. 3, операторы (8), (9) имеют аналогичное представление, а именно

$$E_T(f|x) = \int_{-1}^1 \frac{1}{\rho(t)} \alpha_r(x, t) f_{\rho}^{(r)}(t) dt, \quad (16)$$

$$E_0(f|x) = \int_{-1}^1 \frac{1}{\rho(t)} \beta_r(x, t) f_{\rho}^{(r)}(t) dt, \quad (17)$$

где  $\alpha_r(x, t)$ ,  $\beta_r(x, t)$  определяются из соотношения

$$\gamma_r(x, t) = \beta_r(x, t) - i\alpha_r(x, t), \quad x \in [-1, 1].$$

В самом деле, перейдем в равенстве (15) к пределу при  $z \rightarrow x \in [-1, 1]$  под знаком интеграла, что возможно в силу непрерывности  $\gamma_r(z, t)$ , а затем, используя соотношение (10), которое имеет место в силу леммы п. 3, отделим в полученном равенстве мнимые и действительные части. Тогда будем иметь представления (16) и (17).

5. Основные соотношения для определения погрешности квадратурных формул. Квадратурные формулы, у которых оператор (7) представим в виде (15), интересны в том отношении, что при выполнении определенных условий для них можно установить соотношения, позволяющие найти оценку сверху для наибольшей ошибки формулы (4) и наибольшую ошибку формулы (15), если только известны наибольшие значения следующих функций:

$$\alpha_r(x) = \int_{-1}^1 \frac{1}{\rho(t)} |\alpha_r(x, t)| dt \quad (x \in [-1, 1]), \quad \beta_r(x) =$$

$$= \int_{-1}^1 \frac{1}{\rho(t)} |\beta_r(x, t)| dt \quad (x \in [-1, 1]),$$

$$\gamma_r(x) = \int_{-1}^1 \frac{1}{\rho(t)} |\gamma_r(x, t)| dt \quad (|x| \in [1, \infty)). \quad (18)$$

Теорема 1. Пусть для оператора (7) квадратурной формулы (1) имеет место представление (15), в котором функция  $\gamma_r(z, t)$  непрерывна в области  $D^* = \bar{D} + [-1, 1]$  ( $z \in \bar{D}$ ,  $t \in [-1, 1]$ ) и оператор (7) есть аналитическая в  $D$  функция, если  $f(x) \in \omega_\rho^r$ . Тогда для наибольшей ошибки квадратурной формулы (4) в классе  $\omega_\rho^r(M)$ , у которого функция  $\rho(x)$  удовлетворяет условиям леммы п. 3, имеет место оценка сверху

$$E_\Omega \leq \delta_r M, \quad \delta_r = \max \left( \sqrt{\alpha_r^2 + \beta_r^2}, \gamma_r \right), \quad (19)$$

где

$$\alpha_r = \max_x \alpha_r(x) \quad (x \in [-1, 1]), \quad \beta_r = \max_x \beta_r(x) \quad (x \in [-1, 1]),$$

$$\gamma_r = \max_x \gamma_r(x) \quad (|x| \in [1, \infty]),$$

а наибольшая ошибка квадратурной формулы (5) в этом же классе в точности равна

$$E_T = \alpha_r M. \quad (20)$$

Доказательство. Введем нормированное пространство с нормой (11). Так как  $\gamma_r(z, t)$  непрерывна в  $D^*$ , то  $E_\Omega(f|z)$  является непрерывной функцией в  $\bar{D}$ , и мы можем рассматривать  $E_\Omega(f|z) = E_\Omega(\bar{f}|z)$  как оператор из  $\bar{\omega}_\rho^r$  в  $C(D)$ . Вследствие того что оператор  $E_\Omega(f|z) = E_\Omega(\bar{f}|z)$  является еще и аналитической в  $D$  функцией, имеем  $|E_\Omega(f|z)| \leq \max_x |E_\Omega(f|x)|$ ,  $-\infty \leq x \leq \infty$ .

Отсюда, учитывая равенства (15) — (17) и вводя функции (18), имеем

$$\|E_\Omega(\bar{f}|z)\| \leq \sup_x \left( \sqrt{\alpha_r^2(x) + \beta_r^2(x)}, \gamma_r(x) \right) \|f\|, \quad -\infty \leq x \leq \infty.$$

Функции  $\alpha_r(x)$ ,  $\beta_r(x)$ ,  $\gamma_r(x)$  непрерывны в своих замкнутых областях определения, так как функция  $\gamma_r(z, t)$  непрерывна в  $D^*$ , и, следовательно, достигают максимума в некоторой точке. Учитывая это, приходим к неравенству

$$\|E_\Omega\| \leq \max \left( \sqrt{\alpha_r^2 + \beta_r^2}, \gamma_r \right),$$

из которого, вследствие того что имеет место формула (13), вытекает оценка (19).

Для того чтобы получить формулу (20), обратимся к равенству (16). Так как  $\alpha_r(x, t)$  непрерывна в квадрате  $-1 \leq x, t \leq 1$ , то оператор  $E_T(f|x)$  является непрерывной функцией на отрезке  $[-1, 1]$ . Введем пространство  $\bar{\omega}_\rho^r$  с нормой (11) и будем рассматривать  $E_T(f|x) = E_T(\bar{f}|x)$  как оператор из  $\bar{\omega}_\rho^r$  в  $C(-1, 1)$ . Используя представление (16) и вводя функцию  $\alpha_r(x)$ , которая будет непрерывной на отрезке  $[-1, 1]$  (вследствие того, что  $\alpha_r(x, t)$  непрерывна в квадрате  $-1 \leq x, t \leq 1$ ), находим

$$\|E_T(\bar{f}|x)\|_{C(-1, 1)} \leq \max_x \alpha_r(x) \|f\|, \quad x \in [-1, 1]$$

и, следовательно,

$$\|E_T\| \leq \alpha_r = \alpha_r(x_0), \quad x_0 \in [-1, 1]. \quad (21)$$

Рассмотрим далее функцию

$$f_0(x) = \int_0^x \frac{1}{\rho(x^\tau)} dx^\tau \int_0^{x^\tau} \frac{1}{\rho(x^{\tau-1})} dx^{\tau-1} \dots$$

$$\dots \int_0^{x^2} \frac{1}{\rho(x^1)} \operatorname{sign} \alpha_r(x_0, x^1) dx^1.$$

Легко видеть, что  $f_0(x) \in \omega_\rho^r$  и  $f_0^{(r)}(x) = \operatorname{sign} \alpha_r(x_0, x)$ . Обозначим через  $\bar{f}_0(x)$  класс  $\bar{\omega}_\rho^r$ , содержащий  $f_0(x)$ . Рассматривая  $E_T(f_0|x) = E_T(\bar{f}_0|x)$ , имеем  $|E_T(\bar{f}_0|x)| \leq \|E_T\| \|f_0\|$ . Полагая здесь  $x = x_0$  и учитывая, что

$$\|E_T(\bar{f}_0|x)\|_{C(-1,1)} = \int_{-1}^1 \frac{1}{\rho(t)} \alpha_r(x_0, t) \operatorname{sign} \alpha_r(x_0, t) dt = \alpha_r(x_0),$$

находим

$$\alpha_r = \alpha_r(x_0) \leq \|E_T\|, \quad x_0 \in [-1, 1]. \quad (22)$$

Из (21) и (22) получаем  $\|E_T\| = \alpha_r$ , откуда в силу того, что имеет место формула (14), следует равенство (20). Теорема доказана.

Можно указать условия, при выполнении которых оценка (19) становится более определенной.

**Теорема 2.** Пусть выполнены условия теоремы 1 и пусть, кроме того, выполнено одно из условий

$$\operatorname{Re} E_\Omega(f|x) = 0, \quad 1 \leq |x| < \infty \quad (23)$$

или

$$\operatorname{Im} E_\Omega(f|x) = 0, \quad 1 \leq |x| < \infty. \quad (24)$$

Тогда для наибольшей ошибки квадратурной формулы (14) в классе  $\omega_\rho^r(M)$ , у которого функция  $\rho(x)$  удовлетворяет условиям леммы п. 3, имеет место оценка

$$E_\Omega \leq \delta_r M, \quad \delta_r = \sqrt{\alpha_r^2 + \beta_r^2}. \quad (25)$$

**Доказательство.** Так же, как и при доказательстве теоремы 1, устанавливаем неравенство (19). Затем, используя любое из условий (23) или (24), продолжаем  $E_\Omega(f|z)$  как функцию  $z$  через отрезки  $(-\infty, -1)$ ,  $(1, \infty)$  в нижнюю полуплоскость. В результате такого продолжения оператор  $E_\Omega(f|z)$  будет функцией от  $z$ , аналитической в плоскости с разрезом вдоль отрезка  $[-1, 1]$  действительной оси и в силу непрерывности  $\gamma_r(z, t)$  в  $D^*$  непрерывной на берегах разреза. Поэтому  $|E_\Omega(f|z)|$  принимает максимальное значение на отрезке  $[-1, 1]$ , откуда  $\max(|E_\Omega(f|z)|, \gamma_r) = \sqrt{\alpha_r^2 + \beta_r^2}$  и, следовательно, в силу второго неравенства (19),  $E_\Omega \leq \sqrt{\alpha_r^2 + \beta_r^2}$ , что и требовалось доказать.

Соотношения (19), (25), (20), доставляемые теоремами 1 и 2, если выполнены условия этих теорем, можно положить в основу методов оценки погрешности квадратурных формул (4), (5). Определение погрешности такими методами сводится или к непосредственному вычислению величин  $\alpha_r$ ,  $\beta_r$ ,  $\gamma_r$ , или к замене  $\alpha_r$ ,  $\beta_r$ ,  $\gamma_r$  большими величинами. При вычислении  $\alpha_r$ ,  $\beta_r$ ,  $\gamma_r$  могут встретиться большие трудности, связанные, в основном, с определением нулей функций  $\alpha_r(x, t)$ ,  $\beta_r(x, t)$ ,  $\gamma_r(x, t)$ . Однако это компенсируется тем, что в результате получаются априорные оценки в классе  $\omega_\rho^r(M)$ , не зависящие от индивидуальных свойств функции  $f(x)$ , что важно для приближенных методов решения краевых задач и уравнений, в которые входят интегралы (1), (2). Удачная замена  $\alpha_r$ ,  $\beta_r$ ,  $\gamma_r$  большими величинами может привести к простым и практически удобным оценкам погрешности квадратурных формул (4), (5).

## Литература

1. Мусхелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения. Физматгиз, М., 1962.
2. Гахов Ф. Д. Краевые задачи. Физматгиз, М., 1958.
3. Multhopp H. Luftfahrtforschung, 15, № 4, 1938.
4. Каландия А. И. *Мат. сб.*, 42 (84), № 2, 1957.
5. Serbin H. *Quart. Appl. Math.*, 12, № 2, 1954.
6. Иванов В. В. *Тр. Новочеркасск. политехн. ин-та*, 67 (81), 1958.
7. Пыхтеев Г. Н. *ПММ*, 23, в. 6, 1959.
8. Каландия А. И. *ДАН СССР*, 125, № 4, 1959.
9. Райкерус А. А. *Уч. зап. Карельск. пед. ин-та*, 14, 1963.
10. Пыхтеев Г. Н. *ПММ*, 24, в. 6, 1960.
11. Корнейчук А. А. *Сб. «Численные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений и квадратурные формулы»*. Изд. «Наука», М., 1964.
12. Никольский С. М. *УМН*, 5, в. 2 (36).
13. Никольский С. М. *Изв. АН СССР, сер. мат.*, 16, 1952.
14. Никольский С. М. *Квадратурные формулы*. Физматгиз, М., 1958.
15. Шилов Г. Е. *Математический анализ. Специальный курс*. Физматгиз, М., 1961.

*Институт ядерной энергетики  
АН БССР*

*Поступило в редакцию 24.III 1969*

И. А. СОКОЛОВ

О КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ТИПА РИМАНА  
ДЛЯ ПОЛИАНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ  
НА ОКРУЖНОСТИ

§ 1. Пусть  $D^+$  — конечная односвязная область плоскости комплексного переменного  $z = x + iy$ , ограниченная простым кусочно-гладким замкнутым контуром  $L$ . Для определенности будем считать начало координат принадлежащим области  $D^+$ . Известно [1], что всякое вещественное регулярное в  $D^+$  решение  $U(x, y)$  уравнения

$$\Delta^n U = 0, \quad (1)$$

где  $\Delta$  — оператор Лапласа, можно представить в виде

$$U(x, y) = \operatorname{Re} \sum_{p=0}^{n-1} \bar{z}^p z^p \varphi_p^+(z), \quad (2)$$

где  $\varphi_p^+(z)$  — аналитические в  $D^+$  функции, выражающиеся через  $U(x, y)$  с точностью до аддитивных мнимых постоянных. С другой стороны, выражение (2) при произвольных функциях  $\varphi_p^+(z)$  ( $p = 0, 1, \dots, n-1$ ), аналитических в  $D^+$ , доставляет некоторое регулярное решение уравнения (1).

Таким образом, формула (2) дает общее выражение всех вещественных регулярных в  $D^+$  решений уравнения (1) через  $n$  аналитических функций.

Функция (2) называется (регулярной) полигармонической порядка  $n$  функцией, или  $n$ -гармонической функцией.

Функцию

$$V(x, y) = \operatorname{Im} \sum_{p=0}^{n-1} \bar{z}^p z^p \varphi_p^+(z), \quad (3)$$

являющуюся также решением уравнения (1), называют полигармонической функцией, сопряженной с  $U(x, y)$ . Наконец, если  $U(x, y)$  и  $V(x, y)$  — две сопряженные полигармонические функции, то функция

$$F^+(z, \bar{z}) = U(x, y) + iV(x, y) \quad (4)$$

называется полианалитической  $n$ -го порядка в области  $D^+$ .

Для полианалитической функции  $n$ -го порядка на основании определения будем иметь следующее представление:

$$F^+(z, \bar{z}) = \sum_{p=0}^{n-1} \bar{z}^p z^p \varphi_p^+(z). \quad (5)$$

Имеются еще и другие определения полианалитической функции, отличные от выше приведенного [3]; они нам не понадобятся, поэтому мы их не приводим.

§ 2. Введем сейчас понятие кусочно-аналитической  $n$ -го порядка функции. Пусть  $L$  — простой кусочно-гладкий замкнутый контур. Как обычно, через  $D^+$  обозначим внутреннюю по отношению к  $L$  область, через  $D^-$  — внешнюю.

Определение 1. Функция  $F^-(z, \bar{z})$  называется полианалитической порядка  $n$  в области  $D^-$ , если в окрестности бесконечно удаленной точки она имеет представление

$$F^-(z, \bar{z}) = \varphi_0^-(z) + \sum_{p=1}^{n-1} z^p \frac{1}{z^{p+1}} \varphi_p^-(z), \quad (6)$$

где  $\varphi_p^-(z)$  ( $p = 0, 1, \dots, n-1$ ) — аналитические в  $D^-$  функции.

Определение 2. Функция  $F(z, \bar{z})$  называется кусочно-аналитической  $n$ -го порядка, если она в двух дополняющих друг друга до полной плоскости областях  $D^+$ ,  $D^-$  определяется двумя самостоятельными выражениями  $F^+(z, \bar{z})$ ,  $F^-(z, \bar{z})$ :

$$F(z, \bar{z}) = \begin{cases} F^+(z, \bar{z}), & z \in D^+, \\ F^-(z, \bar{z}), & z \in D^-. \end{cases} \quad (7)$$

В работе [2] рассматриваются задачи типа Гильберта для полианалитических функций. Точно так же, естественным обобщением известной задачи Римана для аналитических функций является следующая: найти кусочно-аналитическую  $n$ -го порядка функцию  $F(z, \bar{z})$ , исчезающую на бесконечности и удовлетворяющую на контуре  $L$  условиям

$$\Delta^k F^+(t, \bar{t}) = G_k(t) \Delta^k F^-(t, \bar{t}) + g_k(t) \quad (8)$$

$$(k = 0, 1, \dots, n-1),$$

где  $G_k(t)$ ,  $g_k(t)$  ( $k = 0, 1, \dots, n-1$ ) — функции точек контура  $L$ , удовлетворяющие условию Гельдера, причем  $G_k(t)$  ( $k = 0, 1, \dots, n-1$ ) не обращаются в нуль;

$$\Delta^k F^\pm(t, \bar{t}) = \lim_{z \rightarrow t} 4^k \frac{\partial^{2k} F^\pm(z, \bar{z})}{\partial z^k \partial \bar{z}^k} = 4^k \frac{\partial^{2k} F^\pm(t, \bar{t})}{\partial t^k \partial \bar{t}^k} \quad (9)$$

( $k = 0, 1, \dots, n-1$ ;  $z$  принадлежит соответственно  $D^+$  или  $D^-$ ).

Если  $g_k(t) \equiv 0$  ( $k = 0, 1, \dots, n-1$ ), то имеем однородную задачу, в противном случае — неоднородную.

Рассмотрение поставленной задачи для произвольного контура приводит к серьезным трудностям. В настоящей работе ограничимся случаем единичной окружности. Здесь, как это будет следовать из дальнейшего, задача допускает исчерпывающее исследование, так же как и в случае аналогичной задачи для аналитических функций.

Для сокращения записи введем обозначения

$$z^p \varphi_p^+(z) = f_p^+(z) \quad (p = 0, 1, \dots, n-1), \quad (10)$$

$$\varphi_0^-(z) = f_0^-(z), \quad \frac{1}{z^{p+1}} \varphi_p^-(z) = f_p^-(z) \quad (p = 1, \dots, n-1). \quad (11)$$

Тогда

$$F^\pm(z, \bar{z}) = \sum_{p=0}^{n-1} z^p f_p^\pm(z), \quad (12)$$

$$\Delta^k F^\pm(t, \bar{t}) = 4^k k! \sum_{p=k}^{n-1} C_p^k \bar{t}^{p-k} [f_p^\pm(t)]^{(k)} \quad (13)$$

$$(k = 0, 1, \dots, n-1).$$

§ 3. Однородная задача. Найти кусочно-аналитическую  $n$ -го порядка функцию  $F(z, \bar{z})$ , исчезающую на бесконечности и удовлетворяющую на окружности  $L$  условиям

$$\Delta^k F^+(t, \bar{t}) = G_k(t) \Delta^k F^-(t, \bar{t}) \quad (14)$$

$$(k = 0, 1, \dots, n-1).$$

Пусть

$$\kappa_k = \text{Ind } G_k(t), \quad \Gamma_k(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\ln[\tau^{\kappa_k} G_k(\tau)]}{\tau - z} d\tau,$$

$$X_k^+(z) = e^{\Gamma_k^+(z)}, \quad X_k^-(z) = z^{-\kappa_k} e^{\Gamma_k^-(z)}$$

$$(k = 0, 1, \dots, n-1).$$

Последнее условие из (14) имеет вид

$$[f_{n-1}^+(t)]^{(n-1)} = G_{n-1}(t) [f_{n-1}^-(t)]^{(n-1)}.$$

Введем вспомогательную кусочно-аналитическую функцию

$$W_{n-1}^\pm(z) = [f_{n-1}^\pm(z)]^{(n-1)}. \quad (15)$$

Очевидно,

$$W_{n-1}^\pm(t) = [f_{n-1}^\pm(t)]^{(n-1)}$$

и для определения функций  $f_{n-1}^\pm(z)$  нужно прежде всего решить обычную задачу Римана

$$W_{n-1}^+(t) = G_{n-1}(t) W_{n-1}^-(t), \quad (16)$$

причем в классе аналитических функций, имеющих на бесконечности нуль порядка  $2n-1$ , так как этим свойством обладает  $[f_{n-1}^-(z)]^{(n-1)}$ . Условно мы это будем записывать так:

$$W_{n-1}^+(t) = G_{n-1}(t) W_{n-1}^-(t), \quad (17)$$

$$W_{n-1}^-(z) = O\left(\frac{1}{z^{2n-1}}\right).$$

Решение задачи (17), как известно [1], дается формулой

$$W_{n-1}^\pm(z) = X_{n-1}^\pm(z) P_{\tilde{\kappa}_{n-1}-1}(z), \quad (18)$$

где  $\tilde{\kappa}_{n-1} = \kappa_{n-1} - 2(n-1)$ ,  $P_{\tilde{\kappa}_{n-1}-1}(z)$  — многочлен степени  $\tilde{\kappa}_{n-1}-1$  с произвольными коэффициентами, причем если  $\tilde{\kappa}_{n-1} \leq 0$ , то в (18) следует положить

$$P_{\tilde{\kappa}_{n-1}-1}(z) \equiv 0.$$

Тогда из (18) и (15) получаем

$$f_{n-1}^{\pm}(z) = \frac{1}{(n-2)!} \int_{L^{\pm}} (z-\zeta)^{n-2} X_{n-1}^{\pm}(\zeta) P_{\tilde{\kappa}_{n-1}-1}(\zeta) d\zeta, \quad (19)$$

где  $L^+$  ( $L^-$ ) — произвольная кривая, принадлежащая  $D^+$  ( $D^-$ ) и соединяющая точки 0 и  $z$  ( $\infty$  и  $z$ ).

Определение 3. Приведенным индексом  $\tilde{\kappa}_k$  коэффициента  $G_k(t)$  называется величина

$$\tilde{\kappa}_k = \kappa_k - 2k \quad (k = 0, 1, \dots, n-1).$$

Подставляя предельные значения  $f_{n-1}^{\pm}(t)$  найденных функций  $f_{n-1}^{\pm}(z)$  в  $(n-1)$ -е условие (14), мы для определения функций  $f_{n-2}^{\pm}(z)$  получим следующую задачу:

$$\begin{aligned} & [f_{n-2}^+(t)]^{(n-2)} + (n-1) \bar{t} [f_{n-1}^+(t)]^{(n-2)} = \\ & = G_{n-2}(t) \{ [f_{n-2}^-(t)]^{(n-2)} + (n-1) \bar{t} [f_{n-1}^-(t)]^{(n-1)} \}. \end{aligned} \quad (20)$$

Решение ее сводится к решению некоторой задачи Римана типа (17).

Допустим, что мы уже нашли функции

$$f_{k+1}^{\pm}(z), \dots, f_{n-1}^{\pm}(z). \quad (21)$$

Подставляя предельные значения функций (21) в  $(k+1)$ -е условие (14), мы в силу (13) будем иметь

$$\begin{aligned} & [f_k^+(t)]^{(k)} + \sum_{p=k+1}^{n-1} C_p^k \bar{t}^{p-k} [f_p^+(t)]^{(k)} = \\ & = G_k(t) \{ [f_k^-(t)]^{(k)} + \sum_{p=k+1}^{n-1} C_p^k \bar{t}^{p-k} [f_p^-(t)]^{(k)} \}. \end{aligned} \quad (22)$$

Введем вспомогательную кусочно-аналитическую функцию

$$W_k^{\pm}(z) = [f_k^{\pm}(z)]^{(k)} + \sum_{p=k+1}^{n-1} C_p^k \frac{1}{z^{p-k}} [f_p^{\pm}(z)]^{(k)}, \quad (23)$$

имеющую на бесконечности порядок не ниже  $2k+1$ . Так как на единичной окружности  $\bar{t} = 1/t$ , то из (13) и (23) следует

$$\Delta^k F^{\pm}(t, \bar{t}) = 4^k k! W_k^{\pm}(t) \quad (24)$$

и (22) в новых обозначениях принимает вид

$$W_k^+(t) = G_k(t) W_k^-(t).$$

Таким образом, для определения  $f_k^{\pm}(z)$ , как это видно из (23), необходимо решить следующую задачу Римана:

$$\begin{aligned} & W_k^+(t) = G_k(t) W_k^-(t), \\ & W_k^-(z) = O\left(\frac{1}{z^{2k+1}}\right). \end{aligned} \quad (25)$$

Решение задачи (25) дается формулой

$$W_k^\pm(z) = X_k^\pm(z) P_{\tilde{\kappa}_k-1}(z), \quad (26)$$

где  $P_{\tilde{\kappa}_k-1}(z)$  — многочлен степени  $\tilde{\kappa}_k - 1$  с произвольными коэффициентами, причем если  $\tilde{\kappa}_k \leq 0$ , то  $P_{\tilde{\kappa}_k-1}(z) \equiv 0$ . Тогда из (23) и (26)

$$f_k^\pm(z) = \frac{1}{(k-1)!} \int_{L^\pm} (z-\zeta)^{k-1} \left\{ X_k^\pm(\zeta) P_{\tilde{\kappa}_k-1}(\zeta) - \sum_{p=k+1}^{n-1} C_p^k \frac{1}{\zeta^{p-k}} [f_p^\pm(\zeta)]^{(k)} \right\} d\zeta \quad (27)$$

$$(k = n-2, n-3, \dots, 1),$$

и аналогично

$$f_0^\pm(z) = X_0^\pm(z) P_{\kappa_0-1}(z) - \sum_{p=1}^{n-1} \frac{1}{z^p} f_p^\pm(z). \quad (28)$$

Решение же исходной задачи (14) дается формулой

$$F^\pm(z, \bar{z}) = \sum_{k=0}^{n-1} \bar{z}^k f_k^\pm(z), \quad (29)$$

или

$$F^\pm(z, \bar{z}) = X_0^\pm(z) P_{\kappa_0-1}(z) + \sum_{k=1}^{n-1} \left( \bar{z}^k - \frac{1}{z^k} \right) f_k^\pm(z), \quad (30)$$

где функции  $f_k^\pm(z)$  ( $k = 0, 1, \dots, n-1$ ) определяются формулами (19), (27), (28).

Определим число  $s$  следующим образом:

$$s = \begin{cases} \sum_{\tilde{\kappa}_k > 0} \tilde{\kappa}_k & (\text{сумма положительных приведенных индексов}) \\ 0, & \text{если все } \tilde{\kappa}_k \leq 0. \end{cases}$$

Тогда предыдущие рассмотрения приводят к следующему результату. Задача (14) при  $s > 0$  имеет решение, линейно зависящее от  $s$  произвольных постоянных, а при  $s = 0$  имеет лишь тривиальное решение.

Замечание. Если искать решение задачи (14) в классе функций, ограниченных на бесконечности, то число произвольных постоянных может увеличиться на единицу (а именно при  $\kappa_0 \geq 0$ ). Решение дается формулой (29) (или (30)), где многочлен  $P_{\kappa_0-1}(z)$  надо заменить на многочлен  $P_{\kappa_0}(z)$ .

§ 4. Неоднородная задача. Найти кусочно-аналитическую  $n$ -го порядка функцию  $F(z, \bar{z})$ , исчезающую на бесконечности и удовлетворяющую на окружности  $L$  условиям

$$\Delta^k F^+(t, \bar{t}) = G_k(t) \Delta^k F^-(t, \bar{t}) + 4^k k! g_k(t) \quad (31)$$

$$(k = 0, 1, \dots, n-1)$$

(множитель  $4^k k!$  введен для удобства).

Пусть

$$\Psi_k(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{g_k(\tau)}{X_k^+(\tau)} \frac{d\tau}{\tau - z} \quad (k = 0, 1, \dots, n-1).$$

Рассуждая как и в случае однородной задачи, получим, что для определения  $f_{n-1}^{\pm}(z)$  требуется решить следующую задачу Римана:

$$\begin{aligned} W_{n-1}^{+}(t) &= G_{n-1}(t) W_{n-1}^{-}(t) + g_{n-1}(t) \\ W_{n-1}^{-}(z) &= O\left(\frac{1}{z^{2n-1}}\right). \end{aligned} \quad (32)$$

Рассмотрим всевозможные случаи.

1. При  $\tilde{\kappa}_{n-1} \geq 0$

$$W_{n-1}^{\pm}(z) = [f_{n-1}^{\pm}(z)]^{(n-1)} = X_{n-1}^{\pm}(z) [\Psi_{n-1}^{\pm}(z) + P_{\tilde{\kappa}_{n-1}-1}^{\pm}(z)].$$

Отсюда

$$f_{n-1}^{\pm}(z) = \frac{1}{(n-2)!} \int_{L^{\pm}} (z-\zeta)^{n-2} X_{n-1}^{\pm}(\zeta) [\Psi_{n-1}^{\pm}(\zeta) + P_{\tilde{\kappa}_{n-1}-1}^{\pm}(\zeta)] d\zeta \quad (33)$$

(если  $\tilde{\kappa}_{n-1} = 0$ , то  $P_{\tilde{\kappa}_{n-1}-1}^{\pm}(z) \equiv 0$ ).

2. При  $\tilde{\kappa}_{n-1} < 0$  задача (32) разрешима тогда и только тогда, когда выполнены условия

$$\int_L \frac{g_{n-1}(\tau)}{X_{n-1}^{+}(\tau)} \tau^{k-1} d\tau = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, -\tilde{\kappa}_{n-1}). \quad (34)$$

При выполнении условий (34) функции  $f_{n-1}^{\pm}(z)$  выражаются формулой (33), где следует положить  $P_{\tilde{\kappa}_{n-1}-1}^{\pm}(z) \equiv 0$ .

Пусть все условия разрешимости при определении  $f_{k+1}^{\pm}(z), \dots, f_{n-1}^{\pm}(z)$  выполнены и функции  $f_{k+1}^{\pm}(z), \dots, f_{n-1}^{\pm}(z)$  определены.

Тогда, подставляя краевое значение функции

$$\Delta^k F^{\pm}(z, \bar{z}) = 4^k k! \left\{ [f_k^{\pm}(z)]^{(k)} + \sum_{p=k+1}^{n-1} C_p^k \bar{z}^{p-k} [f_p^{\pm}(z)]^{(k)} \right\}$$

в  $(k+1)$ -е условие (31) и учитывая, что

$$[f_k^{\pm}(t)]^{(k)} + \sum_{p=k+1}^{n-1} C_p^k \bar{t}^{p-k} [f_p^{\pm}(t)]^{(k)}$$

есть краевое значение аналитической в  $D^{\pm}$  функции

$$W_k^{\pm}(z) = [f_k^{\pm}(z)]^{(k)} + \sum_{p=k+1}^{n-1} C_p^k \frac{1}{z^{p-k}} [f_p^{\pm}(z)]^{(k)},$$

приходим к следующей задаче Римана:

$$\begin{aligned} W_k^{+}(t) &= G_k(t) W_k^{-}(t) + g_k(t), \\ W_k^{-}(z) &= O\left(\frac{1}{z^{2k+1}}\right). \end{aligned} \quad (35)$$

Рассуждая, как и выше, получим

$$f_k^\pm(z) = \frac{1}{(k-1)!} \int_{L^\pm} (z-\zeta)^{k-1} \left\{ X_k^\pm(\zeta) [\Psi_k^\pm(\zeta) + P_{\tilde{\kappa}_{k-1}}(\zeta)] - \sum_{p=k+1}^{n-1} C_p^k \frac{1}{\zeta^{p-k}} [f_p^\pm(\zeta)]^{(k)} \right\} d\zeta \quad (36)$$

$$(k = n-2, \dots, 1),$$

$$f_0^\pm(z) = X_0^\pm(z) [\Psi_0^\pm(z) + P_{\tilde{\kappa}_{0-1}}(z)] - \sum_{p=1}^{n-1} \frac{1}{z^p} f_p^\pm(z), \quad (37)$$

при этом, если некоторое  $\tilde{\kappa}_k \leq 0$  ( $k = 0, 1, \dots, n-2$ ), то  $P_{\tilde{\kappa}_{k-1}}(z) \equiv 0$ , причем в случае  $\tilde{\kappa}_k < 0$  задача (35), а следовательно, и задача (31) разрешимы лишь при выполнении условий

$$\int_L \frac{g_k(\tau)}{X_k^+(\tau)} \tau^{m-1} d\tau = 0 \quad (38)$$

$$(m = 1, 2, \dots, -\tilde{\kappa}_k).$$

Следует отметить примечательное обстоятельство: условия разрешимости не зависят от произвольных постоянных. Поэтому они не могут быть удовлетворены подбором этих постоянных. Таким образом, условия разрешимости являются ограничениями относительно свободных членов  $g_k(t)$  краевых условий (31).

Допустим сейчас, что для всех отрицательных  $\tilde{\kappa}_k$  (если таковые есть) выполнены условия типа (38). Тогда решение задачи (31) существует и дается формулой

$$F^\pm(z, \bar{z}) = \sum_{p=0}^{n-1} \bar{z}^p \bar{f}_p^\pm(z), \quad (39)$$

или

$$F^\pm(z, \bar{z}) = X_0^\pm(z) [\Psi_0^\pm(z) + P_{\tilde{\kappa}_{0-1}}(z)] + \sum_{p=1}^{n-1} \left( \bar{z}^p - \frac{1}{z^p} \right) \bar{f}_p^\pm(z), \quad (40)$$

где функции  $\bar{f}_p^\pm(z)$  ( $p = 0, 1, \dots, n-1$ ) определяются формулами (33), (36), (37).

Положив в (39) (или (40)) все произвольные постоянные равными нулю, получим частное решение задачи (31)

$$\bar{F}^\pm(z, \bar{z}) = \sum_{p=0}^{n-1} \bar{z}^p \bar{f}_p^\pm(z), \quad (41)$$

где

$$\bar{f}_{n-1}^\pm(z) = \frac{1}{(n-2)!} \int_{L^\pm} (z-\zeta)^{n-2} X_{n-1}^\pm(\zeta) \Psi_{n-1}^\pm(\zeta) d\zeta,$$

$$\tilde{f}_k^\pm(z) = \frac{1}{(k-1)!} \int_{L^\pm} (z-\zeta)^{k-1} \left\{ X_k^\pm(\zeta) \Psi_k^\pm(\zeta) - \sum_{p=k+1}^{n-1} C_p^k \frac{1}{\zeta^{p-k}} [\tilde{f}_p^\pm(\zeta)]^{(k)} \right\} d\zeta$$

$$(k = n-2, \dots, 1),$$

$$\tilde{f}_0^\pm(z) = X_0^\pm(z) \Psi_0^\pm(z) - \sum_{p=1}^{n-1} \frac{1}{z^p} \tilde{f}_p^\pm(z).$$

Решение задачи (31) можно сейчас записать в виде

$$F^\pm(z, \bar{z}) = F_0^\pm(z, \bar{z}) + \tilde{F}^\pm(z, \bar{z}),$$

где  $F_0^\pm(z, \bar{z})$  — решение соответствующей однородной задачи (см. формулы (29), (19), (27), (28)).

Пусть

$$p = \begin{cases} -\sum_{\tilde{\kappa}_k < 0} \tilde{\kappa}_k & \text{(сумма распространена на отрицательные приведенные} \\ & \text{индексы),} \\ 0, & \text{если все } \tilde{\kappa}_k \geq 0. \end{cases}$$

Определение 4. Индексом  $\kappa$  задачи (31), ((14)) называется сумма приведенных индексов  $\kappa_k$  коэффициентов  $G_k(t)$ :

$$\kappa = \sum_{k=0}^{n-1} \tilde{\kappa}_k.$$

Сформулируем окончательный результат.

1. Если все приведенные индексы задачи (31) неотрицательны, то задача (31) безусловно разрешима при произвольных  $g_k(t)$  ( $k=0, 1, \dots, n-1$ ). Решение дается формулой (39) (или (40)) и линейно зависит от  $s$  произвольных постоянных, причем, если  $s=0$ , то задача (31) имеет единственное решение (41).

Во всех остальных случаях при выполнении  $p$  условий разрешимости задача (31) имеет решение (39) (или (40)), линейно зависящее от  $s$  произвольных постоянных, причем при  $s=0$  задача (31) имеет единственное решение (41).

2. В любом случае

$$\kappa = s - p.$$

Замечание. Если ищется решение задачи (31) в классе функций, ограниченных на бесконечности, то число произвольных постоянных может увеличиться на единицу (а именно при  $\kappa_0 \geq 0$ ). Число условий разрешимости может уменьшиться на единицу (при  $\kappa_0 < -1$ ). Если  $\kappa_0 = -1$ , то условия разрешимости могут появиться лишь в случае, если среди остальных приведенных индексов есть отрицательные. Решение дается формулой (39) (или (40)), где  $P_{\kappa_0-1}(z)$  следует заменить на  $P_{\kappa_0}(z)$ .

### Литература

1. Гахов Ф. Д. Краевые задачи. М., 1963.
2. Ганин М. П. ДАН СССР, 80, № 3, 1951.
3. Балк М. Б. Изв. АН АрмССР, сер. физ.-мат. наук, 18, № 3, 1965.

Белорусский государственный университет им. В. И. Ленина

Поступило в редакцию 17.IV 1969

Э. М. ШАЦ

**НАИЛУЧШАЯ КУБАТУРНАЯ ФОРМУЛА  
 ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА ФУНКЦИЙ**

Пусть множество  $F_{01}(M)$  состоит из функций  $f(x, y)$ , удовлетворяющих на  $[0, 1; 0, 1]$  следующим условиям:

$$f(x, 0) \equiv f(x, 1) \equiv f(0, y) \equiv f(1, y) \equiv 0;$$

$f'_x, f'_y$  и  $f''_{xy}$  ограничены, интегрируемы и

$$\left\{ \int_0^1 \int_0^1 [f''_{xy}(x, y)]^2 dx dy \right\}^{1/2} \leq M.$$

Решим следующую экстремальную задачу. Среди формул вида

$$\int_0^1 \int_0^1 f(x, y) dx dy = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^m F_{kl} f(x_k, y_l) + R_{n,m}(f) \quad (1)$$

надо найти наилучшую, т. е. ту, для которой

$$R_{n,m}(f) = \sup_{f \in F_{01}} |R_{n,m}(f)|$$

принимает наименьшее значение.

Функцию  $f(x, y) \in F_{01}(M)$  можно записать в виде

$$f(x, y) = \int_0^1 \int_0^1 f''_{uv}(u, v) [E(x-u) - x] [E(y-v) - y] dudv, \quad (2)$$

где

$$E(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 0, \\ 1 & \text{при } x > 0. \end{cases}$$

Используя (2) и неравенство Коши—Буняковского для  $R_{n,m}(f)$ , имеем

$$\begin{aligned} R_{n,m}(f) &= \int_0^1 \int_0^1 f(x, y) dx dy - \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^m F_{kl} f(x_k, y_l) = \int_0^1 \int_0^1 f''_{uv}(u, v) \times \\ &\times K(u, v) dudv \leq M \left\{ \int_0^1 \int_0^1 [K(u, v)]^2 dudv \right\}^{1/2}, \end{aligned} \quad (3)$$

где

$$\begin{aligned} K(u, v) &= (1-u)(1-v) - \frac{1-v}{2} - \frac{1-u}{2} + \frac{1}{4} - \\ &- \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^m F_{kl} [E(x_k - u)E(y_l - v) - x_k E(y_l - v) - y_l E(x_k - u) + x_k y_l]. \end{aligned}$$

Так как для функции

$$f(x, y) = \frac{M \int_0^x \int_0^y K(u, v) dudv}{\sqrt{\int_0^1 \int_0^1 [K(x, y)]^2 dx dy}},$$

принадлежащей  $F_{01}(M)$ , неравенство (3) превращается в равенство, то

$$\sup_{f \in F_{01}(M)} |R_{n,m}(f)| = M \left\{ \int_0^1 \int_0^1 [K(u, v)]^2 dudv \right\}^{1/2}.$$

Таким образом, задача сводится к минимизации величины

$$U = \int_0^1 \int_0^1 [K(u, v)]^2 dudv = \int_0^1 \int_0^1 \left[ t\omega - \frac{t}{2} - \frac{\omega}{2} + \frac{1}{4} - \right. \\ \left. - \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^m p_{kl} [E(t-t_k)E(\omega-\omega_l) - (1-t_k)E(\omega-\omega_l) - (1-\omega_l)E(t-t_k) + \right. \\ \left. + (1-t_k)(1-\omega_l)]^2 dt d\omega, \right.$$

где

$$1-u=t; \quad 1-v=\omega; \quad 1-x_{n-k+1}=t_k; \quad 1-y_{m-l+1}=\omega_l;$$

$$p_{kl} = F_{n-k+1, m-l+1}; \quad k=1, \dots, n; \quad l=1, \dots, m.$$

Поступая по аналогии с [1], имеем

$$U = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m \int_{t_i}^{t_{i+1}} \int_{\omega_j}^{\omega_{j+1}} \left[ t\omega - \frac{t}{2} - \frac{\omega}{2} + \frac{1}{4} - \sum_{k=1}^i \sum_{l=1}^j p_{kl} + \right. \\ \left. + \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^m p_{kl} (1-t_k) + \sum_{k=1}^i \sum_{l=1}^m p_{kl} (1-\omega_l) - \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^m p_{kl} (1-t_k)(1-\omega_l) \right]^2 dt d\omega = \\ = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m \int_{t_i}^{t_{i+1}} \int_{\omega_j}^{\omega_{j+1}} \left[ t\omega - \frac{t}{2} - \frac{\omega}{2} + c_{ij} \right] dt d\omega, \quad (4)$$

где

$$c_{ij} = \frac{1}{4} - \sum_{k=1}^i \sum_{l=1}^j p_{kl} + \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^j p_{kl} (1-t_k) + \sum_{k=1}^i \sum_{l=1}^m p_{kl} (1-\omega_l) - \\ - \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^m p_{kl} (1-t_k)(1-\omega_l) \quad (i=0, 1, \dots, n; j=0, 1, \dots, m)^*). \quad (5)$$

\*) При  $i=0$  или  $j=0$   $\sum_{k=1}^i \sum_{l=1}^j p_{kl} = 0$ ; при  $j=0$   $\sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^j p_{kl} (1-t_k) = 0$ ; при  $i=0$

$\sum_{k=1}^i \sum_{l=1}^m p_{kl} (1-\omega_l) = 0$ ;  $t_0 = \omega_0 = 0$ ;  $t_{n+1} = \omega_{m+1} = 1$ .

Очевидно, что  $U$  примет наименьшее значение, если каждое из слагаемых

$$J_{ij} = \int_{t_i}^{t_{i+1}} \int_{\omega_j}^{\omega_{j+1}} \left[ t\omega - \frac{t}{2} - \frac{\omega}{2} + c_{ij} \right]^2 dt d\omega$$

в области  $[t_i, t_{i+1}; \omega_j, \omega_{j+1}]$  примет наименьшее значение:

$$\begin{aligned} J_{ij} = & \frac{(t_{i+1}^3 - t_i^3)(\omega_{j+1}^3 - \omega_j^3)}{9} + \frac{(t_{i+1}^3 - t_i^3)(\omega_{j+1} - \omega_j)}{12} + \\ & + \frac{(t_{i+1} - t_i)(\omega_{j+1}^3 - \omega_j^3)}{12} + c_{ij}^2 (t_{i+1} - t_i)(\omega_{j+1} - \omega_j) - \\ & - \frac{(t_{i+1}^3 - t_i^3)(\omega_{j+1}^2 - \omega_j^2)}{6} - \frac{(t_{i+1}^2 - t_i^2)(\omega_{j+1}^3 - \omega_j^3)}{6} + \\ & + c_{ij} \frac{(t_{i+1}^2 - t_i^2)(\omega_{j+1}^2 - \omega_j^2)}{2} + \frac{(t_{i+1}^2 - t_i^2)(\omega_{j+1}^2 - \omega_j^2)}{8} - \\ & - c_{ij} \frac{(t_{i+1}^2 - t_i^2)(\omega_{j+1} - \omega_j)}{2} - c_{ij} \frac{(t_{i+1} - t_i)(\omega_{j+1}^2 - \omega_j^2)}{2}. \end{aligned}$$

Приравнявая  $\frac{dJ_{ij}}{dc_{ij}}$  к нулю, находим

$$c_{ij} = \frac{t_{i+1} + t_i}{4} + \frac{\omega_{j+1} + \omega_j}{4} - \frac{(t_{i+1} + t_i)(\omega_{j+1} + \omega_j)}{4}. \quad (6)$$

Так как  $\frac{d^2J_{ij}}{dc_{ij}^2} > 0$ , то при (6)  $J_{ij}$  имеет наименьшее значение.

Подставив  $J_{ij}$  в (4), получаем

$$\begin{aligned} U \geq & \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m \left[ \frac{1}{9} (t_{i+1}^3 - t_i^3)(\omega_{j+1}^3 - \omega_j^3) - \frac{1}{6} (t_{i+1}^3 - t_i^3)(\omega_{j+1}^2 - \omega_j^2) - \right. \\ & - \frac{1}{6} (t_{i+1}^2 - t_i^2)(\omega_{j+1}^3 - \omega_j^3) + \frac{1}{8} (t_{i+1}^2 - t_i^2)(t_{i+1} + t_i)(\omega_{j+1}^2 - \omega_j^2) + \\ & + \frac{1}{8} (t_{i+1}^2 - t_i^2)(\omega_{j+1}^2 - \omega_j^2)(\omega_{j+1} + \omega_j) - \frac{1}{16} (t_{i+1} + t_i)(t_{i+1}^2 - \\ & - t_i^2)(\omega_{j+1} - \omega_j) - \frac{1}{16} (t_{i+1} - t_i)(\omega_{j+1}^2 - \omega_j^2)(\omega_{j+1} + \omega_j) - \\ & - \frac{1}{16} (t_{i+1}^2 - t_i^2)(t_{i+1} + t_i)(\omega_{j+1} + \omega_j)(\omega_{j+1}^2 - \omega_j^2) = -\frac{1}{18} + \\ & + \frac{1}{16} \sum_{i=0}^n (t_{i+1}^2 - t_i^2)(t_{i+1} + t_i) + \frac{1}{16} \sum_{j=0}^m (\omega_{j+1} + \omega_j)(\omega_{j+1}^2 - \omega_j^2) - \\ & - \frac{1}{16} \sum_{i=0}^n (t_{i+1} + t_i)(t_{i+1}^2 - t_i^2) \sum_{j=0}^m (\omega_{j+1} + \omega_j)(\omega_{j+1}^2 - \omega_j^2). \end{aligned}$$

Найдем  $t_i$  и  $\omega_j$  ( $i = 1, \dots, n; j = 1, \dots, m$ ), минимизирующие правую часть последнего неравенства. Имеем систему уравнений

$$\begin{aligned} t_2^2 - 2t_1 t_2 &= 0, \\ t_3^2 + 2t_2 t_1 - 2t_2 t_3 - t_1^2 &= 0, \\ &\dots, \\ t_{n+1}^2 - 2t_n t_{n+1} + 2t_n t_{n-1} - t_{n-1}^2 &= 0, \\ t_{n+1} &= 1 \end{aligned} \tag{7}$$

и аналогичную систему для нахождения  $\omega_j$  ( $j = 1, \dots, m$ ).

Решение систем (7) (с учетом условий  $t_i, \omega_j \geq 0, t_{i+1} > t_i, \omega_{j+1} > \omega_j$ ) дает

$$t_i = \frac{i}{n+1}, \quad \omega_j = \frac{j}{m+1} \quad (i = 1, \dots, n; j = 1, \dots, m). \tag{8}$$

Таким образом, величина  $U$  достигает своего наименьшего значения при узлах (8).

Найдем теперь значения  $p_{kl}$  ( $k = 1, \dots, n; l = 1, \dots, m$ ). Приравняв (6) и (5), с учетом (8) имеем

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} - \sum_{k=1}^i \sum_{l=1}^j p_{kl} + \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^j p_{kl} \left(1 - \frac{k}{n+1}\right) + \sum_{k=1}^i \sum_{l=1}^m p_{kl} \left(1 - \frac{l}{m+1}\right) - \\ - \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^m p_{kl} \left(1 - \frac{k}{n+1}\right) \left(1 - \frac{l}{m+1}\right) = \frac{2i+1}{4(n+1)} + \frac{2j+1}{4(m+1)} - \\ - \frac{(2i+1)(2j+1)}{4(n+1)(m+1)}. \end{aligned} \tag{9}$$

При  $i = 0, j = 0$  получаем

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} - \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^m p_{kl} \left(1 - \frac{k}{n+1}\right) \left(1 - \frac{l}{m+1}\right) = \frac{1}{4(n+1)} + \frac{1}{4(m+1)} - \\ - \frac{1}{4(n+1)(m+1)}. \end{aligned} \tag{10}$$

При  $i = 0$ , используя (10), из (9) имеем

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^j p_{kl} \left(1 - \frac{k}{n+1}\right) = \frac{2j+1}{4(m+1)} - \frac{2j+1}{4(n+1)(m+1)} - \frac{1}{4(m+1)} + \\ + \frac{1}{4(n+1)(m+1)}. \end{aligned} \tag{11}$$

Аналогично при  $j = 0$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^i \sum_{l=1}^m p_{kl} \left(1 - \frac{l}{m+1}\right) = \frac{2i+1}{4(n+1)} - \frac{2i+1}{4(n+1)(m+1)} - \frac{1}{4(n+1)} + \\ + \frac{1}{4(n+1)(m+1)}. \end{aligned} \tag{12}$$

Подставляя (10), (11) и (12) в (9), окончательно получаем

$$\sum_{k=1}^i \sum_{l=1}^j p_{kl} = \frac{(2i+1)(2j+1)}{4(n+1)(m+1)} - \frac{2i+1}{4(n+1)(m+1)} - \frac{2j+1}{4(n+1)(m+1)} + \frac{1}{4(n+1)(m+1)}. \quad (13)$$

Из (13) находим

$$p_{kl} = \frac{1}{(n+1)(m+1)} \quad (k=1, \dots, n; l=1, \dots, m).$$

Используя связь между  $x_k$  и  $t_k$ ,  $y_l$  и  $w_l$ ,  $F_{kl}$  и  $p_{kl}$ , имеем

$$x_k = \frac{k}{n+1}, \quad y_l = \frac{l}{m+1}, \quad F_{kl} = \frac{1}{(n+1)(m+1)}, \quad k=1, \dots, n, \quad l=1, \dots, m. \quad (14)$$

Подставляя (14) в (1), находим наилучшую для множества  $F_{01}(M)$  кубатурную формулу

$$\int_0^1 \int_0^1 f(x, y) dx dy = \frac{1}{(n+1)(m+1)} \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^m f\left(\frac{k}{n+1}, \frac{l}{m+1}\right) + R_{n,m}(f). \quad (15)$$

Найдем еще оценку остатка формулы (15). Получаем

$$\begin{aligned} \min_{F_{kl}, x_k, y_l} \sup_{f \in F_{01}(M)} |R_{n,m}(f)| &= M \sqrt{\min_{F_{kl}, x_k, y_l} U} = \\ &= M \left\{ -\frac{1}{18} + \frac{1}{16} \sum_{i=0}^n \left[ \frac{(i+1)^2}{(n+1)^2} - \frac{i^2}{(n+1)^2} \right] \left[ \frac{i+1}{n+1} + \frac{i}{n+1} \right] + \right. \\ &+ \frac{1}{16} \sum_{j=0}^m \left[ \frac{(j+1)^2}{(m+1)^2} - \frac{j^2}{(m+1)^2} \right] \left[ \frac{j+1}{m+1} + \frac{j}{m+1} \right] - \frac{1}{16} \sum_{i=0}^n \left[ \frac{(i+1)^2}{(n+1)^2} - \frac{i^2}{(n+1)^2} \right] \left[ \frac{i+1}{n+1} + \frac{i}{n+1} \right] \sum_{j=0}^m \left[ \frac{(j+1)^2}{(n+1)^2} - \frac{i^2}{(n+1)^2} \right] \left[ \frac{j+1}{n+1} + \frac{j}{n+1} \right] \left. \right\}^{1/2} = \frac{M}{12(n+1)(m+1)} \sqrt{n^2 + m^2 + 2n + 2m + 1}. \end{aligned}$$

Аналогично можно провести исследование на случай интегралов произвольной кратности.

Полученные результаты являются обобщением результатов в [2].

**З а м е ч а н и е.** Аналогичным исследованием получена формула для множества функций  $F(M)$ , удовлетворяющих на  $[0,1; 0,1]$  следующим условиям:

$$f(x, 0) \equiv f(0, y) \equiv f(1, 1) \equiv 0;$$

$f'_x$ ,  $f'_y$  и  $f''_{xy}$  ограничены, интегрируемы и

$$\left\{ \int_0^1 \int_0^1 [f''_{xy}(x, y)]^2 dx dy \right\}^{1/2} \leq M.$$

Наилучшая кубатурная формула для данного множества имеет вид

$$\int_0^1 \int_0^1 f(x, y) dx dy = \frac{1}{(n+1)(m+1)} \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{l=1}^{m-1} f\left(\frac{k}{n+1}, \frac{l}{m+1}\right) +$$

$$+ \frac{3}{2(n+1)(m+1)} \sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{k}{n+1}; \frac{m}{m+1}\right) +$$

$$+ \frac{3}{2(n+1)(m+1)} \sum_{l=1}^{m-1} f\left(\frac{n}{n+1}; \frac{l}{m+1}\right) + \frac{2}{(n+1)(m+1)} f\left(\frac{n}{n+1}; \frac{m}{m+1}\right) + R_{n,m}(f).$$

При этом оценка остатка формулы

$$\min_{F_{k,l,x_k,y_l}} \sup_{f \in F(M)} |R_{n,m}(f)| = \frac{M}{12(n+1)(m+1)} \sqrt{4(n^2 + m^2 + 2n + 2m) + 7}.$$

#### Литература

1. Левин М. Изв. АН ЭССР, сер. физ.-мат. и техн. наук, № 2, 1963.
2. Левин М. Изв. АН ЭССР, Физика—математика, 17, № 1, 1968.

Белорусский государственный университет им. В. И. Ленина

Поступило в редакцию 24.IV 1969

С. И. ГАЙДУК, Н. И. ЗАХАРЕНКОВА

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА КОНТУРНОГО ИНТЕГРАЛА  
К РЕШЕНИЮ ОДНОЙ ЗАДАЧИ  
О ПОПЕРЕЧНЫХ КОЛЕБАНИЯХ РЕЛАКСИРУЮЩЕГО  
СТЕРЖНЯ

Известно, что в приложениях возникает большое число задач о колебаниях различных стержней. Уравнения, описывающие эти колебания, выводятся, например, в [1]. Некоторые из упомянутых задач рассматривались в работах ряда авторов. Однако далеко не все возникающие здесь задачи охватываются опубликованными до сих пор работами.

В настоящей работе дается строгое решение задачи о поперечных колебаниях однородного конечного релаксирующего стержня в случае, когда один его конец ( $x=0$ ) закреплен, а второй ( $x=l$ ) свободен. Задача решается методом контурного интеграла [2].

1. Постановка задачи. Требуется найти решение системы уравнений

$$v + a \frac{\partial v}{\partial t} = b \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t},$$
$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + c \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \quad (1)$$

$$(0 < x < l, \quad 0 < t \leq T)$$

при начальных условиях

$$v|_{t=0} = \varphi(x), \quad u|_{t=0} = \psi_0(x), \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = \psi_1(x) \quad (0 < x < l) \quad (2)$$

и граничных условиях

$$u|_{x=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=0} = 0, \quad v|_{x=l} = 0, \quad \left. \frac{\partial v}{\partial x} \right|_{x=l} = 0 \quad (0 < t \leq T). \quad (3)$$

В сформулированной задаче (1)–(3)  $a > 0$ ,  $b > 0$ ,  $c > 0$  — физические постоянные,  $v(x, t)$  — функция изгибающего момента,  $u(x, t)$  — функция прогиба оси стержня.

Предполагается, что функции  $\varphi(x)$ ,  $\psi_0(x)$  и  $\psi_1(x)$  удовлетворяют следующим условиям:

а) функции  $\varphi(x)$  и  $\psi_1(x)$  на интервале  $[0, l]$  имеют четыре первые непрерывные производные и пятые кусочно-непрерывные,

б) функция  $\psi_0(x)$  на интервале  $[0, l]$  имеет шесть первых непрерывных производных и седьмую кусочно-непрерывную,

в) удовлетворяются равенства

$$\frac{d^k \varphi(x)}{dx^k} \Big|_{x=0} = \frac{d^k \varphi(x)}{dx^k} \Big|_{x=l} = 0, \quad \frac{d^k \psi_1(x)}{dx^k} \Big|_{x=0} = \frac{d^k \psi_1(x)}{dx^k} \Big|_{x=l} = 0$$

$$(k = 0, 1, 2, 3);$$

$$\frac{d^k \psi_0(x)}{dx^k} \Big|_{x=0} = \frac{d^k \psi_0(x)}{dx^k} \Big|_{x=l} = 0 \quad (k = 0, 1, 2, 3, 4, 5).$$

2. Построение формального решения. Поставим задаче (1) — (3) в соответствие следующую вспомогательную (спектральную) задачу:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} - p^2 z = -F(x, \lambda), \quad (4)$$

$$\frac{d^2 z}{dx^2} + q^2 y = -\Phi(x, \lambda),$$

$$y|_{x=0} = 0, \quad \frac{dy}{dx} \Big|_{x=0} = 0, \quad z|_{x=l} = 0, \quad \frac{dz}{dx} \Big|_{x=l} = 0, \quad (5)$$

где

$$p^2 = \frac{1 + a\lambda}{b\lambda}, \quad q^2 = c\lambda^2,$$

$$F(x, \lambda) = \frac{a\varphi(x) - b\psi_0''(x)}{b\lambda}, \quad \Phi(x, \lambda) = -c[\lambda\psi_0(x) + \psi_1(x)].$$

Решение последней задачи можно представить в виде

$$y(x, \lambda) = \int_0^x G_{11}(x, \xi, \lambda) F(\xi, \lambda) d\xi + \int_x^l G_{11}^*(x, \xi, \lambda) F(\xi, \lambda) d\xi +$$

$$+ \int_0^x G_{12}(x, \xi, \lambda) \Phi(\xi, \lambda) d\xi + \int_x^l G_{12}^*(x, \xi, \lambda) \Phi(\xi, \lambda) d\xi, \quad (6)$$

$$z(x, \lambda) = \int_0^x G_{21}(x, \xi, \lambda) F(\xi, \lambda) d\xi + \int_x^l G_{21}^*(x, \xi, \lambda) F(\xi, \lambda) d\xi +$$

$$+ \int_0^x G_{22}(x, \xi, \lambda) \Phi(\xi, \lambda) d\xi + \int_x^l G_{22}^*(x, \xi, \lambda) \Phi(\xi, \lambda) d\xi, \quad (7)$$

где

$$G_{11}(x, \xi, \lambda) = g(x, \xi, \lambda) + \frac{1}{\Delta(\lambda)} [R(x, \xi, \lambda) + S(x, \xi, \lambda)],$$

$$G_{11}^*(x, \xi, \lambda) = -g(x, \xi, \lambda) + \frac{1}{\Delta(\lambda)} [R(x, \xi, \lambda) + S(x, \xi, \lambda)],$$

$$G_{21}(x, \xi, \lambda) = \frac{1}{p^2} \frac{\partial^2 G_{11}}{\partial x^2}, \quad G_{21}^*(x, \xi, \lambda) = \frac{1}{p^2} \frac{\partial^2 G_{11}^*}{\partial x^2}, \quad (8)$$

$$G_{22}(x, \xi, \lambda) = g(x, \xi, \lambda) - \frac{1}{\Delta(\lambda)} [R(x, \xi, \lambda) - S(x, \xi, \lambda)],$$

$$\begin{aligned}
G_{22}^*(x, \xi, \lambda) &= -g(x, \xi, \lambda) - \frac{1}{\Delta(\lambda)} [R(x, \xi, \lambda) - S(x, \xi, \lambda)], \\
G_{12}(x, \xi, \lambda) &= -\frac{1}{q^2} \frac{\partial^2 G_{22}}{\partial x^2}, \quad G_{12}^*(x, \xi, \lambda) = -\frac{1}{q^2} \frac{\partial^2 G_{22}^*}{\partial x^2}, \\
g(x, \xi, \lambda) &= \frac{1}{4\mu_1\mu_2 \sqrt{\alpha}} [\mu_1 \operatorname{sh} \mu_2 \sqrt{\alpha} (\xi - x) + \mu_2 \operatorname{sh} \mu_1 \sqrt{\alpha} (\xi - x)], \\
\Delta(\lambda) &= 4\mu_1\mu_2 \sqrt{\alpha} (1 + \operatorname{ch} \mu_1 \sqrt{\alpha} l \operatorname{ch} \mu_2 \sqrt{\alpha} l), \\
R(x, \xi, \lambda) &= \mu_1 \operatorname{ch} \mu_1 \sqrt{\alpha} x \operatorname{sh} \mu_2 \sqrt{\alpha} \xi + \mu_2 \operatorname{ch} \mu_2 \sqrt{\alpha} x \operatorname{sh} \mu_1 \sqrt{\alpha} \xi - \\
&\quad - \mu_1 \operatorname{sh} \mu_2 \sqrt{\alpha} x \operatorname{ch} \mu_1 \sqrt{\alpha} \xi - \mu_2 \operatorname{sh} \mu_1 \sqrt{\alpha} x \operatorname{ch} \mu_2 \sqrt{\alpha} \xi - \\
&\quad - \mu_1 \operatorname{ch} \mu_1 \sqrt{\alpha} (l - x) \operatorname{sh} \mu_2 \sqrt{\alpha} (l - \xi) + \mu_2 \operatorname{sh} \mu_1 \sqrt{\alpha} (l - x) \operatorname{ch} \mu_2 \sqrt{\alpha} (l - \xi) - \\
&\quad - \mu_2 \operatorname{ch} \mu_2 \sqrt{\alpha} (l - x) \operatorname{sh} \mu_1 \sqrt{\alpha} (l - \xi) + \mu_1 \operatorname{sh} \mu_2 \sqrt{\alpha} (l - x) \operatorname{ch} \mu_1 \sqrt{\alpha} (l - \xi), \\
S(x, \xi, \lambda) &= \mu_1 \operatorname{ch} \mu_1 \sqrt{\alpha} l \operatorname{sh} \mu_2 \sqrt{\alpha} l [\operatorname{ch} \mu_2 \sqrt{\alpha} (x - \xi) - \operatorname{ch} \mu_1 \sqrt{\alpha} (x + \xi)] + \\
&\quad + \mu_2 \operatorname{sh} \mu_1 \sqrt{\alpha} l \operatorname{ch} \mu_2 \sqrt{\alpha} l [\operatorname{ch} \mu_1 \sqrt{\alpha} (x - \xi) - \operatorname{ch} \mu_2 \sqrt{\alpha} (x + \xi)] + \\
&\quad + \operatorname{sh} \mu_1 \sqrt{\alpha} l \operatorname{sh} \mu_2 \sqrt{\alpha} l [\mu_1 \operatorname{sh} \mu_1 \sqrt{\alpha} (x + \xi) + \mu_2 \operatorname{sh} \mu_2 \sqrt{\alpha} (x + \xi)], \\
\alpha &= pq, \quad \mu_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} (1 - i), \quad \mu_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} (1 + i).
\end{aligned}$$

В п. 4 будет показано, что решение задачи (1)–(3) представляется в виде пределов последовательностей контурных интегралов

$$\begin{aligned}
u(x, t) &= \frac{1}{2\pi i} \lim_{v \rightarrow \infty} \int_{\Gamma_v} y(x, \lambda) e^{\lambda t} d\lambda, \quad v(x, t) = \\
&= \frac{1}{2\pi i} \lim_{v \rightarrow \infty} \int_{\Gamma_v} z(x, \lambda) e^{\lambda t} d\lambda, \quad (9)
\end{aligned}$$

где  $\Gamma_v$  ( $v=1, 2, 3, \dots$ ) — некоторая последовательность расширяющихся замкнутых контуров, описанная в п. 4.

3. Вывод формул разложения. Для дальнейшего функции (8) удобно представить в следующем виде:

$$\begin{aligned}
G_{11}(x, \xi, \lambda) &= g_{11}(x, \xi, \lambda) + \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} y_k(x, \lambda) \frac{\Delta_{1k}^{11}(\xi, \lambda)}{\Delta(\lambda)}, \\
G_{11}^*(x, \xi, \lambda) &= g_{11}^*(x, \xi, \lambda) + \sum_{k=1}^4 (-1)^{k+1} y_k(x, \lambda) \frac{\Delta_{1k}^{11}(\xi, \lambda)}{\Delta(\lambda)}, \\
G_{12}(x, \xi, \lambda) &= g_{12}(x, \xi, \lambda) + \sum_{k=1}^4 (-1)^{k+1} y_k(x, \lambda) \frac{\Delta_{1k}^{12}(\xi, \lambda)}{\Delta(\lambda)}, \quad (10)
\end{aligned}$$

$$G_{12}^*(x, \xi, \lambda) = g_{12}^*(x, \xi, \lambda) + \sum_{k=1}^4 (-1)^{k+1} y_k(x, \lambda) \frac{\Delta_{1k}^{12}(\xi, \lambda)}{\Delta(\lambda)},$$

где

$$g_{11}(x, \xi, \lambda) = \sum_{k=1}^2 y_k(x, \lambda) Y_k(\xi, \lambda), \quad g_{11}^*(x, \xi, \lambda) = - \sum_{k=1}^2 y_{k+2}(x, \lambda) Y_{k+2}(\xi, \lambda);$$

$$g_{12}(x, \xi, \lambda) = \sum_{k=1}^2 y_k(x, \lambda) Z_k(\xi, \lambda), \quad g_{12}^*(x, \xi, \lambda) = - \sum_{k=1}^2 y_{k+2}(x, \lambda) Z_{k+2}(\xi, \lambda);$$

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} U_{11} & U_{12} & U_{13} & U_{14} \\ U_{21} & U_{22} & U_{23} & U_{24} \\ U_{31} & U_{32} & U_{33} & U_{34} \\ U_{41} & U_{42} & U_{43} & U_{44} \end{vmatrix};$$

$\Delta_{1k}^{11}(\xi, \lambda)$  ( $k=1, 2, 3, 4$ ) — определители четвертого порядка, полученные из определителя

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \alpha_1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_2 & \cdot & \Delta(\lambda) & \cdot & \cdot \\ \alpha_3 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_4 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix}$$

вычеркиванием первой строки и  $(k+1)$ -го столбца;  $\Delta_{1k}^{12}(\xi, \lambda)$  ( $k=1, 2, 3, 4$ ) — определители четвертого порядка, полученные из определителя

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \beta_1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \beta_2 & \cdot & \Delta(\lambda) & \cdot & \cdot \\ \beta_3 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \beta_4 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix}$$

также вычеркиванием первой строки и  $(k+1)$ -го столбца;

$$\alpha_m = \sum_{n=2}^2 U_{m,2+n} Y_{2+n}(\xi, \lambda), \quad \alpha_{m+2} = - \sum_{n=1}^2 U_{m+2,n} Y_n(\xi, \lambda),$$

$$\beta_m = \sum_{n=1}^2 U_{m,2+n} Z_{2+n}(\xi, \lambda), \quad \beta_{m+2} = - \sum_{n=1}^2 U_{m+2,n} Z_n(\xi, \lambda),$$

$$U_{mk} = \left. \frac{d^{m-1} y_k(x, \lambda)}{dx^{m-1}} \right|_{x=0}, \quad U_{m+2,k} = \left. \frac{d^{m-1} z_k(x, \lambda)}{dx^{m-1}} \right|_{x=l}$$

$$(m=1, 2, k=1, 2, 3, 4);$$

$y_k(x, \lambda) = e^{\mu_k \sqrt{\alpha} x}$ ,  $z_k(x, \lambda) = \frac{q}{\rho} \mu_k^2 e^{\mu_k \sqrt{\alpha} x}$  ( $k=1, 2, 3, 4$ ) — фундаментальная система решений однородной системы дифференциальных уравнений, соответствующей системе (4),

$$Y_k(\xi, \lambda) = -\frac{1}{4\mu_k \sqrt{\alpha}} e^{-\mu_k \sqrt{\alpha} \xi}, \quad Z_k(\xi, \lambda) = \frac{\mu_k \rho}{4q \sqrt{\alpha}} e^{-\mu_k \sqrt{\alpha} \xi}$$

( $k=1, 2, 3, 4$ );

числа  $\mu_k$  ( $k=1, 2, 3, 4$ ), являющиеся корнями четвертой степени из  $-1$ , занумерованы в каждом из квадрантов комплексной  $\lambda$ -плоскости так же, как соответствующие им числа  $\mu_k$  ( $k=1, 2, 3, 4$ ) в [3]; функции  $G_{2m}(x, \xi, \lambda)$  и  $G_{2m}^*(x, \xi, \lambda)$  ( $m=1, 2$ ) получаются соответственно из функций  $G_{1m}(x, \xi, \lambda)$  и  $G_{1m}^*(x, \xi, \lambda)$  ( $m=1, 2$ ) заменой  $y_k(x, \lambda)$  на  $z_k(x, \lambda)$ .

**Теорема 1.** Если функции  $\varphi(x)$  и  $\psi_1(x)$  на интервале  $[0, l]$  имеют первые непрерывные и вторые кусочно-непрерывные производные, а функция  $\psi_0(x)$  на том же интервале имеет три первые непрерывные и четвертую кусочно-непрерывную производные и если удовлетворяются условия

$$\varphi(0) = \varphi(l) = 0, \quad \psi_1(0) = \psi_1(l) = 0,$$

$$\left. \frac{d^k \psi_0(x)}{dx^k} \right|_{x=0} = \left. \frac{d^k \psi_0(x)}{dx^k} \right|_{x=l} = 0 \quad (k=0, 1, 2),$$

то имеют место следующие формулы разложения:

$$\frac{1}{2\pi i} \lim_{v \rightarrow \infty} \int_{O_v} y(x, \lambda) \lambda^s d\lambda = \begin{cases} \psi_0(x), & s=0, \\ \psi_1(x), & s=1, \end{cases} \quad (11)$$

$$\frac{1}{2\pi i} \lim_{v \rightarrow \infty} \int_{O_v} z(x, \lambda) d\lambda = \varphi(x),$$

где  $O_v$  ( $v=1, 2, 3, \dots$ ) — последовательность определенным образом выбранных расширяющихся концентрических окружностей

$$|\lambda| = \rho_v \quad (v=1, 2, 3, \dots).$$

**Доказательство.** Учитывая условия а)–в) пункта 1 и выполняя в (6) и (7) интегрирование по частям с учетом (10) и с учетом того, что при достаточно больших  $|\lambda|$

$$\sqrt{\alpha} = \gamma \sqrt{\lambda} \left[ 1 + O\left(\frac{1}{\lambda}\right) \right]^*,$$

где

$$\gamma = \sqrt[4]{\frac{ac}{b}}, \quad (12)$$

после ряда преобразований получим, что

$$y(x, \lambda) = \frac{\psi_0(x)}{\lambda} + \frac{\psi_1(x)}{\lambda^2} + \frac{1}{\lambda^2 \gamma \sqrt{\lambda}} \frac{V(x, \lambda)}{H(\lambda)},$$

\*) Для функции  $\omega = \sqrt{\lambda}$  выбрана та ветвь, для которой  $\operatorname{Re} \sqrt{\lambda} \geq 0$  ( $-\pi \leq \arg \lambda \leq \pi$ ).

$$z(x, \lambda) = \frac{a\varphi(x)}{1+a\lambda} + \frac{1}{\lambda\sqrt{\lambda}} \frac{W(x, \lambda)}{H(\lambda)}, \quad (13)$$

где

$$H(\lambda) = 1 + e^{2\mu_2 \sqrt{\lambda} \nu t} + O\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right), \quad (14)$$

а функции  $V(x, \lambda)$ ,  $W(x, \lambda)$  равномерно ограничены по модулю при достаточно больших  $|\lambda|$ .

Можно показать, так же как в [3], следующее: 1) корни уравнения (14), имеющие для достаточно больших  $\nu$  ( $\nu$  — целые положительные числа) вид

$$\lambda_\nu = \pm \frac{(2\nu + 1)^2 \pi^2 i}{4t^2 \nu^2} + O(1) + O\left(\frac{1}{\nu^2}\right), \quad (15)$$

лежат внутри некоторых замкнутых и расширяющихся с увеличением  $\nu$  кривых  $C_{\pm\nu}$ ; 2) можно выбрать систему расширяющихся концентрических окружностей  $|\lambda| = \rho_\nu$  ( $\rho_\nu \rightarrow \infty$  при  $\nu \rightarrow \infty$ ), которые не пересекают кривых  $C_{\pm\nu}$ ; 3) вне областей, ограниченных кривыми  $C_{\pm\nu}$ , справедливо неравенство

$$|H(\lambda)| \geq N > 0. \quad (16)$$

Из равномерной ограниченности по модулю функций  $V(x, \lambda)$ ,  $W(x, \lambda)$  и неравенства (16) следует, что на окружностях  $|\lambda| = \rho_\nu$  ( $\nu = 1, 2, 3, \dots$ ), которые мы обозначим через  $O_\nu$ , имеют место неравенства

$$\left| \frac{V(x, \lambda)}{H(\lambda)} \right| < C, \quad \left| \frac{W(x, \lambda)}{H(\lambda)} \right| < C, \quad (17)$$

где  $C$  — некоторая постоянная величина.

Подставив под знаки интегралов в (11) вместо  $y(x, \lambda)$  и  $z(x, \lambda)$  правые части равенств (13) и вычислив интегралы с учетом (17), получим формулы разложения (11).

4. Обоснование формального решения. Возьмем в комплексной  $\lambda$ -плоскости последовательность расширяющихся замкнутых контуров  $\Gamma_\nu$  ( $\nu = 1, 2, 3, \dots$ ), образованных отрезками прямых  $\operatorname{Re} \lambda = \pm h$ , где  $h$  выберем так, чтобы числа (15) лежали внутри полосы  $-h \leq \operatorname{Re} \lambda \leq h$ , и замыкающими эти отрезки дугами окружностей  $O_\nu$ , описанных в пункте 3 (см. рисунок).

**Теорема 2.** При выполнении условий а)–в) п. 1 задача (1)–(3) имеет решение  $u(x, t)$ ,  $v(x, t)$ , непрерывное при  $0 \leq x \leq l$ ,  $0 \leq t \leq T$ , обладающее в той же области непрерывными производными, встречающимися в задаче, и представимое формулами (9).

**Доказательство.** Покажем, что функции, определяемые формулами (9), удовлетворяют уравнению (1), начальным условиям (2) и граничным условиям (3). Для этого достаточно показать равномерную относительно  $x \in [0, l]$  и  $t \in [0, T]$  сходимости интегралов

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} \int_{\Gamma_\nu} \lambda^s \frac{d^m y}{dx^m} e^{\lambda t} d\lambda \quad (18)$$

$$(m = 0, s = 0; \quad m = 0, s = 1; \quad m = 1, s = 0; \quad m = 2, s = 0; \quad m = 2, s = 1),$$

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} \int_{\Gamma_\nu} \lambda^s \frac{d^m z}{dx^m} e^{\lambda t} d\lambda \quad (19)$$

$$(m = 0, s = 0; \quad m = 0, s = 1; \quad m = 1, s = 0; \quad m = 2, s = 0).$$

Интегралы (18) и (19) будут равномерно сходиться, если их части на отрезках  $a_\nu a_{\nu+k}$ ,  $b_\nu b_{\nu+k}$ ,  $a'_\nu a'_{\nu+k}$ ,  $b'_\nu b'_{\nu+k}$  и на дугах  $a_\nu b_\nu$ ,  $a_{\nu+k} b_{\nu+k}$ ,  $a'_\nu b'_\nu$ ,  $a'_{\nu+k} b'_{\nu+k}$  стремятся равномерно относительно  $x \in [0, 1]$  и  $t \in [0, T]$  к нулю при  $\nu \rightarrow \infty$  для всех  $k$ .

Дифференцируя два раза по  $x$  равенства (6) и (7) и выполняя затем в них интегрирование по частям с учетом (10) и условий а)–в) п. 1, после ряда преобразований с учетом (12) получим, что

$$\begin{aligned} \frac{d^m y}{dx^m} &= \gamma_m F(x, \lambda) + V_m^{(1)}(x, \lambda) + (V\lambda)^{m-8} \frac{V_m^{(2)}(x, \lambda)}{H(\lambda)}, \\ \frac{d^m z}{dx^m} &= \gamma_m \Phi(x, \lambda) + W_m^{(1)}(x, \lambda) + (V\lambda)^{m-6} \frac{W_m^{(2)}(x, \lambda)}{H(\lambda)}, \end{aligned} \quad (20)$$

где

$$\gamma_m = \begin{cases} 0, & m=0, 1, \\ -1, & m=2, \end{cases}$$

$$\begin{aligned} V_m^{(1)}(x, \lambda) &= \frac{1}{4\lambda} \sum_{k=1}^4 \left\{ \sum_{n=1}^5 \left[ \frac{a}{b} \varphi(x) - \psi_0^{(n)}(x) \right]^{(n-1)} (\mu_k \sqrt{\alpha})^{m-n-1} + \right. \\ &\left. + \frac{1}{\lambda} \sum_{n=1}^5 (\mu_k \sqrt{\alpha})^{m-n+1} \psi_1^{(n-1)}(x) + \sum_{n=1}^7 (\mu_k \sqrt{\alpha})^{m-n+1} \psi_0^{(n-1)}(x) \right\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W_m^{(1)}(x, \lambda) &= -\frac{c\lambda}{4} \sum_{k=1}^4 \left\{ \sum_{n=1}^5 \left[ \frac{a}{b} \varphi(x) - \psi_0^{(n)}(x) \right]^{(n-1)} (\mu_k \sqrt{\alpha})^{m-n-3} + \right. \\ &\left. + \frac{1}{\lambda} \sum_{n=1}^5 (\mu_k \sqrt{\alpha})^{m-n-1} \psi_1^{(n-1)}(x) + \sum_{n=1}^7 (\mu_k \sqrt{\alpha})^{m-n-1} \psi_0^{(n-1)}(x) \right\}, \end{aligned}$$

$V_m^{(2)}(x, \lambda)$ ,  $W_m^{(2)}(x, \lambda)$  ( $m=0, 1, 2$ ) — функции, ограниченные по модулю при достаточно больших  $|\lambda|$ .

Докажем, например, равномерную сходимость интегралов (18). Пусть

$$\frac{\partial^{m+s} u_\nu}{\partial x^m \partial t^s} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_\nu} \lambda^s \frac{d^m y}{dx^m} e^{\lambda t} d\lambda = I_{ms}(\Gamma_\nu),$$

тогда

$$\frac{\partial^{m+s} u}{\partial x^m \partial t^s} = \lim_{\nu \rightarrow \infty} \frac{\partial^{m+s} u_\nu}{\partial x^m \partial t^s}.$$

Пусть, дальше,  $T_{\nu k} = a_\nu a_{\nu+k} b_{\nu+k} b_\nu a_\nu$  и  $T'_{\nu k} = a'_\nu b'_\nu b'_{\nu+k} a'_{\nu+k} a'_\nu$  (см. рисунок), тогда

$$\frac{\partial^{m+s} u_{\nu+k}}{\partial x^m \partial t^s} - \frac{\partial^{m+s} u_\nu}{\partial x^m \partial t^s} = I_{ms}(\Gamma_{\nu+k}) - I_{ms}(\Gamma_\nu) = I_{ms}(T_{\nu k}) + I_{ms}(T'_{\nu+k}).$$

Отсюда получаем, что

$$\left| \frac{\partial^{m+s} u_{\nu+k}}{\partial x^m \partial t^s} - \frac{\partial^{m+s} u_\nu}{\partial x^m \partial t^s} \right| \leq |I_{ms}(T_{\nu k})| + |I_{ms}(T'_{\nu+k})|.$$

Подставляя под знак интеграла

$$I_{ms}(T_{vk}) = \frac{1}{2\pi i} \int_{T_{vk}} \lambda^s \frac{d^m y}{dx^m} e^{\lambda t} d\lambda$$

вместо производной  $\frac{d^m y}{dx^m}$  ее значение из равенств (20) и учитывая аналитичность\*) в  $T_{vk}$  первых двух слагаемых, получим, что

$$I_{ms}(T_{vk}) = \frac{1}{2\pi i} \int_{T_{vk}} (\sqrt{\lambda})^{m+2s-8} \frac{V_m^{(2)}(x, \lambda)}{H(\lambda)} e^{\lambda t} d\lambda. \quad (21)$$

Учитывая оценку

$$\left| \frac{V_m^{(2)}(x, \lambda)}{H(\lambda)} \right| < C, \quad (22)$$

имеющую место на окружностях  $O_v$ , можно показать, что на дугах  $a_v b_v$  и  $a_{v+h} b_{v+h}$  модуль интеграла (21) не превосходит величины  $A e^{\frac{hT}{\rho_{v+k}^2} \frac{m+2s-6}{2}}$  ( $A$  — постоянная величина), которая стремится к нулю при  $v \rightarrow \infty$  для всех значений  $m$  и  $s$ , указанных в (18).

Так как кривые  $C_{\pm v}$  с ростом  $v$  расширяются, то, начиная с некоторого  $v$ , они будут пересекаться с прямыми  $\text{Re } \lambda = \pm h$ , и поэтому для оценки интеграла (21) на отрезках  $a_v a_{v+h}$  и  $b_v b_{v+h}$  мы не можем использовать оценку (22).

Из (14) следует, что

$$|H(\lambda)| \geq \left| 1 + O\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right) \right| - |e^{2\mu_2 \sqrt{\lambda} \gamma t}|. \quad (23)$$

Можно показать, что  $\left| 1 + O\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right) \right| = \left| 1 + O\left(\frac{1}{\sqrt{r}}\right) \right|$ , где  $\lambda = re^{i\varphi}$ , а на прямых  $\text{Re } \lambda = \pm h$

$$\text{Re } 2\mu_2 \sqrt{\lambda} \gamma t = \frac{2h\gamma t}{\sqrt{r+h} - \sqrt{r-h}} = O\left(\frac{1}{\sqrt{r}}\right),$$

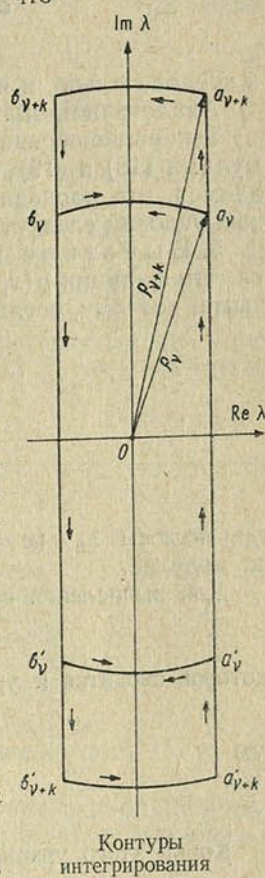
поэтому  $|e^{2\mu_2 \sqrt{\lambda} \gamma t}| = 1 + O\left(\frac{1}{\sqrt{r}}\right)$ , и из (23) следует, что на упомянутых прямых  $|H(\lambda)| \geq O\left(\frac{1}{\sqrt{r}}\right)$ .

Таким образом, на отрезках  $a_v a_{v+h}$  и  $b_v b_{v+h}$  имеет место оценка

$$\left| \frac{V_m^{(2)}(x, \lambda)}{H(\lambda)} \right| < B \sqrt{r},$$

а модуль интеграла (21) на этих отрезках не превосходит величины  $\frac{7-2s-m}{6-2s-m} C e^{\frac{hT}{\rho_v^2} \frac{m+2s-5}{2}}$  ( $C$  — постоянная величина), которая стремится

\*) Выбирается одна из четырех ветвей функции  $\sqrt{\lambda}$ .



к нулю при  $\nu \rightarrow \infty$  для всех значений  $m$  и  $s$ , указанных в (18).

Таким образом,

$$|I_{ms}(T_{\nu k})| \rightarrow 0 \quad \text{при } \nu \rightarrow \infty.$$

Аналогично можно показать, что

$$|I_{ms}(T'_{\nu k})| \rightarrow 0 \quad \text{при } \nu \rightarrow \infty.$$

Отсюда следует равномерная сходимость последовательностей

$$\frac{\partial^{m+s} u_{\nu}(x, t)}{\partial x^m \partial t^s} \quad (\nu = 1, 2, 3, \dots),$$

а следовательно, и интегралов (18).

Аналогично доказывается равномерная сходимость интегралов (19).

Теперь непосредственной подстановкой функций, определяемых формулами (18) и (19), в систему уравнений (1) и в условия (2) и (3) убеждаемся, что последние удовлетворяются, причем выполнимость начальных условий следует из формул разложения (11).

5. Вычетное представление решения. Нетрудно убедиться, что функции  $y(x, \lambda)$  и  $z(x, \lambda)$  являются однозначными и мероморфными, поэтому, согласно известной теореме о вычетах,

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \text{Res } y(x, \lambda) e^{\lambda t}, \quad (24)$$

$$v(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \text{Res } y(x, \lambda) e^{\lambda t},$$

где полюсы  $\lambda_k$  ( $k = 1, 2, 3, \dots$ ) занумерованы в порядке возрастания их модулей.

Для вычисления вычетов в (24) нужно найти корни уравнения

$$1 + \text{ch } \mu_1 \sqrt{a} l \text{ch } \mu_2 \sqrt{a} l = 0,$$

которое сводится к уравнению

$$2 + \text{ch } \sqrt{2} \omega l + \cos \sqrt{2} \omega l = 0,$$

где

$$\omega = \sqrt{a} = \sqrt[4]{\frac{c\lambda(1+a\lambda)}{b}}.$$

Корни этого уравнения найдены в [3] и имеют вид

$$\omega_k = \pm \frac{\kappa_k}{l\sqrt{2}} (1+i), \quad \omega_k = \pm \frac{\kappa_k}{l\sqrt{2}} (1-i) \quad (k = 1, 2, 3, \dots),$$

где с точностью до трех десятичных знаков

$$\kappa_1 = 1,875, \quad \kappa_2 = 4,694, \quad \kappa_n = \frac{\pi}{2} (2n-1) \quad (n \geq 3).$$

Теперь, так же как в [3], решение (24) можно привести к виду, похожему на вид, данный в [3].

### Литература

1. Р ж а н и ц ы н А. Р. Некоторые вопросы механики систем, деформирующихся во времени. Гостехиздат, М., 1949.
2. Р а с у л о в М. Л. Метод контурного интеграла. Изд. «Наука», М., 1964.
3. Г а й д у к С. И. ДУ, 3, № 9, 1967.

Институт математики  
АН БССР

Поступило в редакцию 29.IV 1969

Ф. И. ФЕДОРОВ

ОСНОВНОЕ СОСТОЯНИЕ АТОМА ГЕЛИЯ

В классических работах Хиллерааса [1] на основе вариационного метода впервые был дан достаточно точный для того времени квантово-механический расчет основного состояния атома гелия. С тех пор этому вопросу было посвящено множество публикаций и интерес к нему не ослабевает до последнего времени. Возросшая точность спектроскопического эксперимента потребовала, а применение ЭВМ сделало возможным значительное уточнение расчетов. Основные достигнутые здесь результаты могут быть вкратце охарактеризованы табл. 1, ни в коей мере не претендующей на полноту.

Таблица 1

Волновые функции атома гелия

Авторы	Год	$n$	$-E$	$p$
Хиллераас [1]	1939	6	2,90324	4
Чандрасекар и Герцберг [2]	1955	18	2,903716	5
Киношита [3]	1957	39	2,9037225	6
Киношита [4]	1959	80	2,9037237	6
Пекерис [5]	1959	1078	2,903724375	9
К. Шварц [6]	1962	189	2,90372437616	9
Ермолаев и Сочилин [7]	1964	37	2,9037238	6
Мидтдал [8]	1965	203	2,9037243346	8
Франковский и Пекерис [9]	1966	246	2,9037243770326	12

Здесь  $n$  — число членов пробной функции (оно же число вариационных параметров),  $E$  — энергия основного состояния атома гелия в атомных единицах,  $p$  — число правильных цифр в значении  $E$ .

Следуя Хиллераасу, большинство авторов использует пробные функции вида

$$\psi = \sum_v C_v \psi_v, \quad \psi_v = u^{k_v} v^{l_v} s^{m_v} e^{-\epsilon s}, \quad (1)$$

где  $s=r_1+r_2$ ,  $t=r_2-r_1$ ,  $u=r_{12}=|r_1-r_2|$  — переменные Хиллерааса,  $r_1$ ,  $r_2$  — радиус-векторы электронов,  $C_v$  — вариационные параметры. Сам Хиллераас использовал лишь целые положительные показатели  $k_v$ ,  $l_v$ ,  $m_v$ . В [3, 4] были введены отрицательные, а в [10] — полуцелые показатели  $k_v$ ,  $m_v$  (последние использованы также в [6]). В [5] пробные функции брались в виде произведений полиномов Лягерра от периметрических координат. В [7] была предпринята интересная попытка применить в качестве пробных функций члены ряда Фока [11]. В [8] использовалось восходящее еще к Хиллераасу сочетание теории возмущений с вариационным методом. Наконец, в [9] функции вида (1) были дополнены множителями  $\ln s$ ,  $\ln^2 s$ ,  $(s^2+t^2)^{1/2}$ , что усложняет вычисления.

Из таблицы ясно, что даже небольшое повышение точности значения  $E$  достигается путем весьма значительного увеличения числа пробных функций. Очевидно, что, например, использование 1078-членной функции [5] для различных расчетов довольно затруднительно. Следует еще учесть, что если значение  $E$  с помощью этой функции находится с относительной точностью порядка  $10^{-10}$ , то средний квадрат радиус-вектора электрона  $\langle r_1^2 \rangle$  она дает с относительной ошибкой 0,025 по сравнению с опытом, т. е. с точностью на 8 порядков худшей.

В силу самой природы вариационного метода добавка к волновой функции любого члена, удовлетворяющего граничным условиям, в принципе может только улучшить значение энергии. Поэтому, набирая достаточно большое число членов и соответственно вариационных параметров, всегда можно получить значение энергии с хорошей точностью. Предельным воплощением подобного подхода является работа [5]. Ясно, однако, что это далеко не лучший путь, и уже в работах [6] — [9] наметилась иная тенденция, которую вкратце можно охарактеризовать так: получить высокую точность значения энергии с максимально простой волновой функцией. С этой точки зрения выделяется работа [7], поскольку во всех остальных работах подобная точность значения  $E$  достигалась при помощи большего числа членов. Однако функцию, использованную в [7], нельзя назвать простой ввиду довольно сложного вида отдельных ее слагаемых.

Наиболее простыми являются расчеты с функциями типа (1), включая и случай, когда показатели  $k_v$  и  $m_v$  являются отрицательными или полужелыми. Цель настоящей работы — показать, что, ограничиваясь такими функциями, можно получить значения энергии с высокой точностью, используя сравнительно небольшое число членов. Три обстоятельства отличают наш подход от описанных в литературе.

1. Совокупность допустимых значений показателей  $k_v$  и  $m_v$  была расширена за счет включения одновременно и полужелых [10], и отрицательных [3] показателей, разумеется, при соблюдении граничных условий.

2. Коэффициент  $\varepsilon$  в экспоненте функции  $\psi_v(1)$  считался различным для разных функций, т. е. последние брались в виде  $\psi_v = u^{k_v} t^{l_v} s^{m_v} e^{-\varepsilon v s}$ , причем  $\varepsilon_v$  подбирались из условия минимума  $E$ . Таким образом, наряду с линейными вариационными параметрами  $C_v$  использовалось такое же число нелинейных вариационных параметров  $\varepsilon_v$ .

3. Волновая функция строилась по следующему методу: вначале задавалась некоторая трехчленная функция, затем ее параметры  $C_v$  и  $\varepsilon_v$  улучшались и доводились до оптимальных, т. е. дающих наименьшее значение  $E$ . После этого из заранее фиксированной совокупности функций выбиралась четвертая функция, дающая вместе с первыми тремя наилучшее  $E$ . Затем параметры  $C_v$ ,  $\varepsilon_v$  полученной 4-членной функции оптимизировались, и далее процесс повторялся, т. е. выбиралась пятая функция, полученная 5-членная функция улучшалась и т. д.

В качестве исходной трехчленной функции была взята  $\psi^{(3)} = e^{-1,6875s} + C_2 s e^{-2s} + C_3 u e^{-2s}$ . Коэффициент  $\varepsilon_1^0$  в экспоненте первого члена был выбран по известной формуле  $\varepsilon = Z - 5/16$ , а в двух других членах взят равным  $Z$ , т. е. 2. Коэффициенты  $C_v$ , как обычно, находились из характеристического уравнения, после чего улучшенные значения  $\varepsilon_v$ , минимизирующие  $E$  при заданных  $C_v$ , находились по методу скорейшего спуска. Общие расчетные формулы имеют вид

$$\varepsilon_v = \varepsilon_v^0 + \lambda C_v D_v,$$

где

$$\lambda = \frac{\sum_{v=1}^n C_v^2 D_v^2}{\sum_{v=1}^n C_v^2 D_v^2 D'_v + \sum_{v,\mu=1}^n C_v^2 C_\mu^2 D_v D_\mu [N_{v\mu} (H_{v\mu} - E) - 2K_v D_\mu / N]}$$

$$E = (\psi, H\psi) / N, \quad N = (\psi, \psi), \quad \psi = \psi^{(n)} = \sum_{v=1}^n C_v \psi_v, \quad C_1 = 1,$$

$$D_v = (s\psi_v, (H - E)\psi), \quad D'_v = (s^2\psi_v, (H - E)\psi),$$

$$N_{v\mu} = (s^2\psi_v, \psi_\mu), \quad H_{v\mu} = (s\psi_v, Hs\psi_\mu), \quad K_v = (s\psi_v, \psi),$$

$H$  — оператор энергии. При нахождении оптимальных  $\varepsilon_v$  производилась итерация, т. е. улучшенные значения  $\varepsilon_v$  рассматривались как начальные ( $\varepsilon_v^{(0)}$ ) для следующего цикла расчета. После некоторого числа итераций по  $\varepsilon_v$  вычислялись новые значения  $C_v$  из характеристического уравнения. Такие вычисления повторялись до тех пор, пока значение  $E$  не переставало уменьшаться. После оптимизации  $\psi^{(3)}$  выбиралась лучшая функция  $\psi^{(4)} = \psi^{(3)} + C_4 \psi_4$ . Выбор  $\psi_4$  (как и всех последующих  $\psi_v$ ) производился из фиксированной совокупности  $S$ , содержащей 193 функции с различными  $k_v, l_v, m_v$ . Эти функции были разбиты на три примерно равные группы, соответствующие  $l = 0, 2, 4$ . Начальные значения  $\varepsilon_v$  ( $v \geq 4$ ) выбирались по формуле  $\varepsilon_v = 2 + 0,1 \sigma_v$ , где  $\sigma_v = k_v + l_v + m_v$ . В совокупность  $S$  входили функции, для которых число  $\sigma$  принимало значения  $3/2, 2, 5/2, 3, 7/2, 4, 5$ . Программа была составлена так, что машина добавляла к  $\psi^{(n)}$  в качестве  $\psi_{n+1}$  по очереди функции из совокупности  $S$  (или некоторой ее части), производила 3—4 описанных выше цикла вычислений, печатала результат и переходила к следующей функции. Функция  $\psi^{(n+1)}$ , дававшая лучший результат, оптимизировалась путем многократной итерации, после чего тем же путем производился выбор  $\psi^{(n+2)} = \psi^{(n+1)} + C_{n+2} \psi_{n+2}$  и т. д.

Результаты описанных вычислений приведены в табл. 2. Сравнение ее с табл. 1 показывает, что наша 5-членная функция дает значительно лучший результат для энергии, чем 6-членная функция Хиллерааса. Аналогично 7-членная функция из табл. 2 дает лучшую энергию, чем 25-членная функция К. Шварца (см. [6]), для которой  $E = -2,9037094$ . Далее, наша 8-членная функция дает лучшую энергию, чем 18-членная функция Чандрасекара и Герцберга [2], хотя при получении последней авторы также воспользовались выбором из нескольких вариантов пробных функций.

Известно [11], что точная волновая функция двухэлектронного атома вблизи ядра должна иметь вид  $\psi = 1 - Zs + 0,5u$ . В нашем случае это означает, что должно быть  $\varepsilon_1 - C_2 = 2, C_3 = 0,5$ . Фактически для 8-членной функции из табл. 2 соответствующие числа равны 1,923 и 0,485. В то же время для 18-членной функции [2] эти числа равны соответственно 1,896 и 0,414. Таким образом, и по этим показателям наша 8-членная функция превосходит функцию [2].

Следует обратить внимание и на то обстоятельство, что (см. табл. 2) 8-членная функция имеет лишь один коэффициент ( $C_7$ ), по абсолютной величине меньший 0,1, а 9-членная функция — два ( $C_7$  и  $C_9$ ). В то же время в функции Чандрасекара — Герцберга [2] таких коэффициентов 13, а в функции Киношита [3] — 34. Соответственно в обеих этих функциях лишь для 5 коэффициентов выполняется условие  $|C_v| > 0,1$ . Это обстоя-

Таблица 2

## Параметры волновых функций\*)

$-E$		2,902862	2,903563	2,903684	2,9037106	2,90371815	2,90371883
(000)	$\varepsilon_1$ $C_1$	1,704763 1	1,830401 1	1,800367 1	1,8071351 1	1,80939296 1	1,81021263 1
(001)	$\varepsilon_2$ $C_2$	2,032282 -0,225041	2,285597 -0,106554	2,138486 -0,122338	2,1509342 -0,1106534	2,17434299 -0,11338544	2,17825331 -0,11349520
(100)	$\varepsilon_3$ $C_3$	1,932776 0,345147	1,784999 0,522272	1,817479 0,496826	1,7916262 0,4758446	1,80243294 0,48536782	1,80263843 0,50339139
(020)	$\varepsilon_4$ $C_4$	1,754085 0,109674	1,801171 0,127305	1,829573 0,169526	1,7308316 0,0994771	1,75209013 0,12375259	1,75177040 0,12282118
( $^{3/2}00$ )	$\varepsilon_5$ $C_5$		1,921394 -0,213692	1,971358 -0,178999	1,9029967 -0,1580524	1,92973956 -0,16537847	1,93097455 -0,19035214
( $^{2/2}2^{-1/2}$ )	$\varepsilon_6$ $C_6$			2,330497 -0,060192	2,5738614 -0,0574243	2,55283292 0,13482779	2,55275937 0,11650656
( $^{-1/2}20$ )	$\varepsilon_7$ $C_7$				2,1403347 0,0760957	2,13174170 0,08820734	2,13064858 0,08680103
( $12^{-1/2}$ )	$\varepsilon_8$ $C_8$					2,27646877 -0,20125874	2,27474399 -0,18347244
( $^{5/2}00$ )	$\varepsilon_9$ $C_9$						2,25010682 0,00949643

\*) Цифры в скобках ( $^{5/2}00$ ) и т. д. дают  $k_v$ ,  $l_v$ ,  $m_v$ .

тельство говорит о том, что в последних двух функциях лишь небольшая часть членов дает более или менее существенный вклад в результирующее значение энергии, а для подавляющего большинства членов этот вклад незначителен. Что же касается функций из табл. 2, то, как можно судить по коэффициентам  $C_v$ , вклады отдельных членов распределяются значительно более равномерно.

Отметим, что в процессе выборки, вплоть до 9-членной функции и соответственно до значения энергии, имеющего 6 верных знаков, ни одна функция с  $l=4$  не дала существенной добавки. Аналогично функция [2] не содержит ни одного члена с множителем  $t^4$ , а 39-членная функция [3] имеет лишь один такой член  $0,000555t^4$ . Таким образом, мы приходим к выводу, что если представить волновую функцию в виде ряда

$$\psi = \psi_0(s, u) + \psi_1(s, u)t^2 + \psi_2(s, u)t^4 + \dots + \psi_k(s, u)t^{2k} + \dots,$$

то, ограничиваясь первыми двумя членами, можно получить значение  $E$  с точностью не менее чем до 6 знаков. Последующие члены потребуются для достижения более высокой точности, причем, по-видимому, их вклад быстро падает с увеличением  $k$ .

В заключение следует подчеркнуть, что каждая из приведенных в табл. 2 функций является рекордной в том смысле, что она дает наилучшее значение энергии при соответствующем числе членов по сравнению со всеми другими известными функциями.

К сожалению, мощность имевшихся в нашем распоряжении ЭВМ не позволила пойти дальше в направлении более высокой точности, соответствующей нижней половине табл. 1. Однако полученные результаты дают основание предположить, что изложенный выше подход позволит получить значения  $E$  самой высокой точности с помощью функций,

содержащих значительно меньшее число членов, чем в других аналогичных расчетах.

Расчеты проводились в вычислительном центре Института математики АН БССР. Программы были составлены А. А. Велеско, которой автор считает своим долгом выразить глубокую благодарность. Автор благодарен также Ю. Г. Примовой и Т. В. Гончар за выполнение вычислений.

### Литература

1. Hylleraas E. Z. Phys., 54, 374, 1939.
2. Chandrasekhar S., Herzberg G. Phys. Rev., 98, 1050, 1955.
3. Kinoshita T. Phys. Rev., 105, 1490, 1957.
4. Kinoshita T. Phys. Rev., 115, 366, 1959.
5. Pekeris C. Phys. Rev., 115, 1216, 1959.
6. Schwartz C. Phys. Rev., 128, 1196, 1962.
7. Ермолаев А. М., Социлин Г. Б. ДАН СССР, 155, 1050, 1964.
8. Midtdal J. Phys. Rev., 138, 1010, 1965.
9. Frankowski K., Pekeris C. Phys. Rev., 146, 46, 1966.
10. Schwartz H. Phys. Rev., 103, 110, 1956.
11. Фок В. А. Изв. АН СССР, сер. физ., 18, 161, 1954.
12. Гомбаш П. Проблема многих частиц в квантовой механике. ИЛ, 1952.

*Институт физики  
АН БССР*

*Поступило в редакцию 25.VII 1969*

М. М. СІРАТА, Я. М. ГАЛАЛОБАУ

### ЭКСПЕРЫМЕНТАЛЬНАЕ ДАСЛЕДАВАННЕ СТРУКТУРНЫХ АМПЛІТУД У ФАСФІДЗЕ ІНДЫЮ

Вызначэнне структурных амплітуд злучэнняў  $A^{UV}$  неабходна для пазнання прыроды хімічнай сувязі. Для вызначэння эфектыўных іонных зарадаў асаблівую цікавасць прадстаўляюць структурныя амплітуды, якія вызначаюцца рознасцю атамных рассейваючых фактараў кампанентаў злучэння [1], г. зн. маюць выгляд  $|F| = 4|f_1 - f_2|$ .

У даследуемым намі паўправадніковым злучэнні InP указаныя структурныя амплітуды большыя, што дазваляе вымяраць іх з дастаткова высокай дакладнасцю.

Для вымярэнняў інтэгральных інтэнсіўнасцей дыфракцыйных рэфлексаў ад InP выкарыстоўваліся плоскія парашковыя ўзоры дыяметрам 20 мм і таўшчынёй 2—3 мм. Узоры рыхтаваліся з тонкіх парашкоў, атрыманых наступнымі паслядоўнымі аперацыямі: расціраннем, прасейваннем і адмучываннем у талуоле. Памеры часцінак кантраляваліся пад мікраскопам і ва ўсіх выпадках былі не больш 1 мк. Узоры спрасоўваліся пры розных цісках да 6000 кг/см<sup>2</sup>. Некалькі ўзораў было падрыхтавана без ціску з невялікай колькасцю звязваючага рэчыва. Узоры, прыгатаваныя са звязкай, шліфаваліся і паліраваліся. Паверхні спрасаваных узораў былі дастаткова гладкімі, паколькі выкарыстоўваўся плунжэр з люстэркава гладкай паверхняй.

Дыфракцыйныя спектры здымаліся ў Сu  $K_{\alpha}$ -выпраменьванні, монахраматызаваным пругка выгнутай монакрышталічнай пласцінкай германію, зрэзанай па плоскасці (111). Узоры ў час здымання вярцеліся ў плоскасці адбіцця. Выпраменьванне рэгістравалася стынцыляцыйным лічыльнікам (NaI (Tl)) з амплітудным аналізатарам. Скорасць лічэння не перавышала 1500 імп/сек. Інтэгральная інтэнсіўнасць вызначалася паводле паказанняў электрамеханічнага лічыльніка, фон вымяраўся як перад пікам, так і пасля яго.

Узоры, падрыхтаваныя пры розных цісках і са звязваючым рэчывам, папярэдне даследаваліся на эфекты пераважнай арыентацыі і порыстасці.

З павелічэннем фармовачнага ціску адносныя інтэнсіўнасці рэфлексаў (111), (200) і (311) маюць прыкладна аднолькавую тэндэнцыю павялічваць інтэнсіўнасць (на 2—3%) за кошт змяншэння ўплыву эфекту порыстасці (рыс. 1). Інтэнсіўнасці рэфлексаў (220) і (440) моцна павялічваюцца з павелічэннем ціску да наступлення насычэння пры фармовачным ціску ~2500 кг/см<sup>2</sup>. Аналіз адносін інтэнсіўнасцей розных пар рэфлексаў  $I_{h_1k_1l_1}/I_{h_2k_2l_2}$  ад спрасаваных узораў і аналагічных адносін для ўзораў, прыгатаваных без ціску, паказаў, што на інтэнсіўнасці рэфлексаў (220) і (440) уплывае эфект пераважнай арыентацыі крышталічнай плоскасці (110). Плоскасць (110)

з'яўляецца плоскасцю найлягчэйшага сколу ў злучэннях  $A^{III}B^V$  [2] з прычыны спецыфікі прыроды хімічнай сувязі ў гэтых злучэннях, таму пры расціранні парашкоў InP імавернасць выхаду плоскасці (110) на паверхню часцінак з'яўляецца найбольшай. Пры моцным спрасаванні парашкоў з'яўляецца тэкстура гэтай плоскасці. Аналагічны малюнак для плоскасці (100) назіраў Хасоя з супрацоўнікамі [3] у нітрыдзе ванадыю.

Для вызначэння структурных фактараў  $|F|^2$  у InP выкарыстоўваліся ўзоры, спрасаваныя пры ціску  $2500 \text{ кг/см}^2$ . У значэнні вымераных інтэ-

гральных інтэнсіўнасцей рэфлексаў (220) і (440) уводзіліся папраўкі на пераважную арыентацыю. Велічыні паправак вызначаліся з параўнання гэтых інтэнсіўнасцей з інтэнсіўнасцямі, вымеранымі на ўзорах, падрыхтаваных без ціску.

Папраўкі на тэмпературнае дыфузнае рассеяванне ўводзіліся паводле Чыпмана і Паскіна [4]. Экстынкцыйныя эфекты былі нязначныя, паколькі выкарыстоўваліся вельмі дробныя расцёртыя парашкі [12]. Каэфіцыент абсорбцыі браўся роўным  $\mu = 993 \text{ см}^{-1}$  [5]. Палярызацыйны фактар вызначаўся з выразу [6]

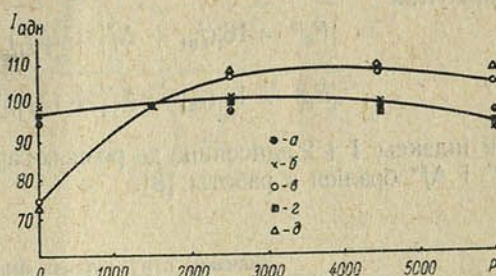


Рис. 1. Залежнасць адносных інтэгральных інтэнсіўнасцей рэфлексаў  $I_{адн}$ , % ад фармовачнага ціску  $P$ ,  $\text{кг/см}^2$  узораў InP:

а - (111); б - (200); в - (220); г - (311); д - (440)

$$\rho = \frac{1 + \gamma \cos^2 2\theta_m \cos^2 2\theta}{1 + \gamma \cos^2 2\theta_m}$$

дзе  $\gamma$  — параметр, які залежыць ад крышталічнага стану крышталі-монахрамата.

Намі эксперыментальна вызначана  $\gamma = 1,17 \pm 0,01$ . Для вызначэння  $\gamma$  праводзіліся вымярэнні інтэнсіўнасцей рэфлексаў пры экватарыяльнай ( $I_v$ ) і азімутальнай ( $I_v$ ) устаноўцы крышталі-аналізатара. Пры гэтым [6]

$$\gamma = \frac{I_v/I_v - \gamma_k \cos^2 2\theta}{\cos^2 2\theta_m \left( 1 - \frac{I_v}{I_v} \cos^2 2\theta \right)}$$

дзе  $\gamma_k$  — параметр, які залежыць ад крышталічнага стану крышталі-аналізатара.

У якасці крышталі-аналізатараў выкарыстоўваліся монакрышталічныя пласцінкі Ge і Si з плоскасцямі зрэзу (111) і пласцінкі кварцу з плоскасцю зрэзу (1011). Даследаваліся інтэнсіўнасці адбіццяў трэцяга парадку ад гэтых плоскасцей,  $2\theta$  якіх блізкія да  $90^\circ$ . У такім выпадку выраз для  $\gamma$  прымае выгляд

$$\gamma = \frac{I_v}{I_v \cos^2 2\theta_m}$$

Для ўстаноўкі крышталі-аналізатара на ГУР-4 выкарыстоўвалася ГП-3, якая некалькі ўдасканалвалася, што дазволіла вярцець крышталі-аналізатар у час рэнтгеназдымкі са скорасцю  $1/6 \text{ град/мін}$ .

Перавод адносных інтэгральных інтэнсіўнасцей у абсалютны машаб праводзіўся двума метадамі: вымярэннем першаснага рэнтгенаўскага

пучка, аслабленага сістэмай алюмініевых аслабіцеляў, і выкарыстаннем эталона. У якасці эталона браўся карбанільны нікель (рэфлекс (311)).

Розніца рэзультатаў гэтых двух метадаў прывязкі да абсалютнага маштабу складала каля 1%, г. зн. была ў межах дакладнасці эксперыменту.

У табліцы прыведзены эксперыментальныя і тэарэтычныя значэнні структурных амплітуд. Тэарэтычныя значэнні  $|F_0|^2$  разлічваліся для выпадку нейтральных атамаў, з выкарыстаннем  $f_0$ -фактараў [7, 10, 11] па формулах

$$|F_0|^2 = 16|(f_{01} + \Delta f'_1 + i\Delta f''_1) \pm (f_{02} + \Delta f'_2 + i\Delta f''_2)|^2,$$

$$|F_0|^2 = 16|(f_{01} + \Delta f'_1 + i\Delta f''_1)|^2 + |(f_{02} + \Delta f'_2 + i\Delta f''_2)|^2,$$

дзе індэкс 1 і 2 адносяцца да розных сартоў атамаў, дысперсійныя папраўкі  $\Delta f'$  і  $\Delta f''$  браліся з работы [8].

Табліца

Значэнні структурных амплітуд для InP

$hkl$	$\frac{\sin\theta}{\lambda}$	$ F_0 _{\text{эксп}}$	$ F_0 _{\text{РХ-Ф}}$	$ F_0 _{\text{Д-С}}$	$ F_0 _{\text{Х-Ф-С}}$
111	0,1474	177,8	177,81	179,46	178,70
200	0,1704	119,5	120,60	122,00	121,98
220	0,2409	189,5	188,66	189,35	189,72
311	0,2826	145,4	144,50	146,33	145,80
222	0,2956	102,7	102,12	103,12	104,40
400	0,3408	162,6	159,74	163,04	162,40
331	0,3714	128,0	125,83	128,14	127,21
420	0,3808	90,9	88,88	90,24	90,04
422	0,4173	145,8	143,00	145,64	144,68
511}	0,4427	114,1	113,30	115,50	114,53
333}					
440	0,4819	133,1	131,24	133,52	132,44
531	0,5040	105,5	104,39	105,85	104,90
620	0,5388	121,9	121,84	123,72	122,94
533	0,5586	98,3	97,54	98,88	97,93
444	0,5902	114,5	114,24	116,00	115,72

Скарачэнні РХФ абазначаюць рэлятывісцкія значэнні паводле Хартры — Фока з улікам абменнага ўзаемадзеяння [11]; ДС — рэлятывісцкія значэнні паводле Хартры — Фока з улікам абменнага ўзаемадзеяння ў слейтэраўскім прыбліжэнні [10]; ХФС — нерэлятывісцкія значэнні паводле Хартры з улікам абменнага ўзаемадзеяння ў слейтэраўскім прыбліжэнні [7].

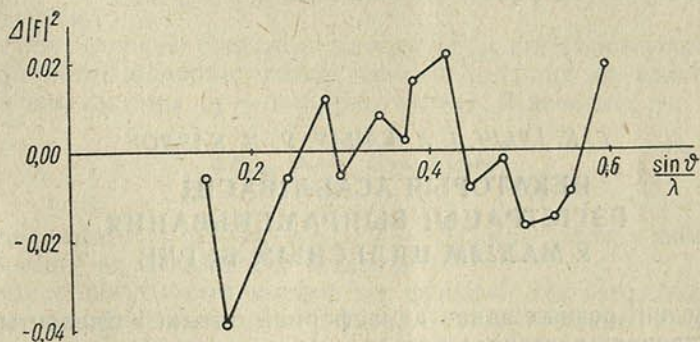
Тэмпературныя фактары  $M = B \frac{\sin^2\theta}{\lambda^2}$  для рознага сорту атамаў вызначаліся з умовы мінімальнага значэння

$$\sum_{hkl} \frac{f_{\text{эксп}} e^M - f_{\text{тэар}}}{f_{\text{тэар}}}$$

для 12 рэфлексаў пры вялікіх вуглах адбіцця рэнтгенаўскіх прамянёў. Тут  $f_{\text{тэар}} = f_0 + \Delta f'$ . Намі атрыманы значэнні  $B_p = 1,3 \text{ \AA}^2$  і  $B_{\text{In}} = 1,5 \text{ \AA}^2$ , што ўзгадняецца са значэннямі  $B_p = 1,34 \text{ \AA}^2$  і  $B_{\text{In}} = 1,69 \text{ \AA}^2$ , вызначанымі з тэмпературных рэнтгенаўскіх вымярэнняў дэбаеўскай тэмпературы [9].

Як відаць з рыс. 2, найбольшае адноснае адхіленне значэнняў эксперыментальных структурных фактараў ад тэарэтычных [10]

$$\Delta|F|^2 = \frac{|F|_{\text{эксп}}^2 - |F|_{\text{тэар}}^2}{|F|_{\text{тэар}}^2}$$



Рыс. 2. Адноснае адхіленне эксперыментальных значэнняў структурных фактараў InP ад тэарэтычна разлічаных для выпадку нейтральных атамаў [10]

мае рэфлекс (200), пры гэтым эксперыментальнае значэнне меншае, чым тэарэтычнае. Гэта сведчыць аб тым, што электроны ў злучэнні InP пераходзяць ад атамаў металу In да атамаў P. Эфектыўныя зарады атамаў, вызначаныя па раней прапанаванаму намі метаду [1], роўныя  $0,40 \pm 0,15$  эл.

### Літаратура

1. Сирота Н. Н., Гололобов Е. М. ДАН СССР, 156, 1075, 1964.
2. Pfister H. Z. Naturforsch., 10a, 79, 1955.
3. Hosoya S., Yamagishi F., Tokonami M. Tech. Rep. of ISSP, ser. A, № 275, 1967.
4. Chipman D. K., Paskin A. J. Appl. Phys., 30, 1992, 1959.
5. Int. Tables for X-Ray Crystallography, 3. Birmingham, 1962.
6. Олехнович Н. М. Кристаллография, 14, в. 2, 1969.
7. Hanson H. P., Herman F., Lea J. D., Shillman S. Acta Cryst., 17, 1040, 1964.
8. Cromer D. T. Acta Cryst., 18, 17, 1965.
9. Розов В. В., Сирота Н. Н. Сб. «Химическая связь в полупроводниках и твердых телах». Изд. «Наука и техника», Минск, 1965.
10. Cromer D. T., Waber J. T. Acta Cryst., 18, 104, 1965.
11. Doyle P. A., Turner P. S. Acta Cryst., A24, 390, 1968.
12. Sirota N. N. Acta Cryst., A25, 223, 1969.

Институт физики твердого тела  
и полупроводников АН БССР

Поступило в редакцию 8.IV 1969

Г. К. ІЛЫЧ, І. Л. КАЦАЎ, У. Д. КАЗЛОЎ

### НЕКАТОРЫЯ АСАБЛІВАСЦІ РЭГІСТРАЦЫ ВЫПРАМЕНЬВАННЯ У МАЛЫМ ЦЯЛЕСНЫМ ВУГЛЕ

Пры рашэнні розных задач атмасфернай оптыкі і гідраоптыкі неабходна рэгістраваць рассеянае асяроддзем выпраменьванне, якое распаўсюджваецца ў некаторым малым цялесным вугле. Для гэтай мэты часта ўжываюцца аптычныя сістэмы, якія складаюцца з аб'ектыва і дыяфрагмы, размешчанай у яго факальнай плоскасці. Аналагічныя пры-

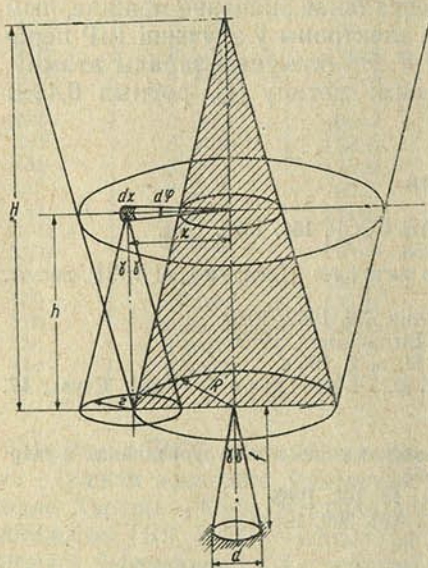


Рис. 1. Схема аптычнай сістэмы

лады, якія называюцца «свеча-мерамі», ўжываюцца іншы раз для вызначэння сілы святла розных крыніц, паколькі пры змяненні ў некаторых межах адлегласці паміж паверхняй аб'ектыва і крыніцай праз адтуліну дыяфрагмы праходзіць практычна адзін і той жа светавы паток, прапарцыянальны сіле святла [1, 2].

У радзе выпадкаў неабходна ведаць, які адносна ўклад у велічыню сумарнага рэгіструемага патоку ўносяць розныя ўчасткі фотаметрыруемай свецячайся прасторы, што знаходзяцца на адвольных адлегласцях ад паверхні аб'ектыва. Высветленню гэтага пытання і прысвечана дадзеная праца.

Дапусцім, што фотаметрыруецца раўнамерна свецячаяся плоскасць, якая знаходзіцца на адлегласці  $h$  ад аб'ектыва. Дапусцім таксама, што кожны элемент гэтай плоскасці выпраменьвае артатропна\*).

Фотаметрыруючая аптычная сістэма, якая паказана на рыс. 1, складаецца з лінзы радыуса  $R$  і дыяфрагмы з дыяметрам адтуліны  $d$ , размешчанай у фокусе аб'ектыва, прычым  $d \ll f$  ( $f$  — фокусная адлегласць аб'ектыва).

Нягледзячы на тое што, паводле меркавання, усе элементы плоскасці выпраменьваюць аднолькава, іх уклад у велічыню сумарнага рэгі-

\* Меркаванне аб артатропнасці не абмяжоўвае агульнасці разважанняў, паколькі ў межах малага вугла прыёму практычна заўсёды можна лічыць выпраменьванне раўнаяркасным.

струемага патоку будзе розным у залежнасці ад адлегласці да аптычнай восі. Разгледзім заштрыхаваны на рыс. 1 конус, асновай якога служыць паверхня аб'ектыва, вугал пры вяршыні складае  $2\gamma = d/f$ , а вышыня  $H = R \operatorname{ctg} \gamma$ . Выпраменьванне, якое зыходзіць ад участкаў плоскасці, што ляжаць унутры гэтага конуса, прымаецца ў цялесным вугле, адпаведны плоскі вугал якога роўны  $2\gamma$ . Для ўсіх астатніх участкаў цялесны вугал прыёму меншы.

Знойдзем велічыню светавога патоку  $dF_{\text{пэрг}}$ , які рэгіструецца прыёмнікам ад элемента паверхні  $x dx d\varphi$ , што знаходзіцца на адлегласці  $x$  ад аптычнай восі сістэмы ( $\varphi$  — палярны вугал). Відавочна,

$$dF_{\text{пэрг}} = \frac{j}{h^2} S(x) x dx d\varphi, \quad (1)$$

дзе  $j$  — удзельная сіла святла, а  $S(x)/h^2$  — цялесны вугал, у якім прымаецца выпраменьванне ад выдзеленага элемента.

Атрыманне аналітычнага выразу для функцыі  $S(x)$  зводзіцца да вызначэння плошчы перакрыцця двух кругоў. Радыус аднаго з іх роўны  $R$ , радыус другога  $r = h \operatorname{tg} \gamma$ , а адлегласць паміж цэнтрамі роўна  $x$  (гл. рыс. 1). Для блізкай зоны прыёму (вобласць  $h \leq H$ ,  $r \leq R$ ) пры  $0 \leq x \leq R - r$   $S(x) = \pi r^2$ , а пры  $R - r \leq x \leq R + r$  функцыя  $S(x)$  вызначаецца формулай

$$S(x) = \frac{1}{2} \left\{ \pi (R^2 + r^2) - \sqrt{[(R+r)^2 - x^2][x^2 - (R-r)^2]} \right\} - \\ - R^2 \arcsin \frac{R^2 - r + x}{2rx} + r^2 \arcsin \frac{R^2 - r^2 + x}{2rx}. \quad (2)$$

Калі  $x \geq R + r$ , то  $S(x) = 0$ .

Для далёкай зоны прыёму (дзе  $h \geq H$ ,  $r \geq R$ ) пры  $0 \leq x \leq r - R$   $S(x) = \pi R^2$ , а пры  $r - R \leq x \leq r + R$   $S(x)$  таксама вызначаецца формулай (2).

Відавочна, што велічыня поўнага светавога патоку  $F$ , які рэгіструецца ад лобой фотаметруемай плоскасці, перпендыкулярнай аптычнай восі сістэмы, не павінна залежаць ад адлегласці  $h$ . Сапраўды, інтэгруючы выраз (1) для прыватных выпадкаў  $h = 0$ ,  $h = H$  і  $h = \infty$ , дзе выгляд функцыі  $S(x)$  моцна спрашчаецца, лёгка пераканацца, што

$$F(h) = \frac{1}{h^2} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\infty} j S(x) x dx = j \pi^2 R^2 \operatorname{tg}^2 \gamma. \quad (3)$$

Абазначым велічыню светавога патоку, які распаўсюджваецца выдзеленым элементам асяроддзя ўнутр конуса з вуглом раствору  $2\gamma$ , праз  $dF_{\text{выл}}$  і будзем выражаць адлегласць ад элементарнага свецячага участка асяроддзя да паверхні аб'ектыва ў долях блізкай зоны  $\kappa = h/H$ , а аддаленне ад аптычнай восі характарызаваць адносінамі каардынаты  $x$  да радыуса аб'ектыва  $R$ . Тады функцыя

$$f\left(\kappa, \frac{x}{R}\right) = \frac{dF_{\text{пэрг}}}{dF_{\text{выл}}} = \frac{S\left(\frac{x}{R}\right)}{\pi h^2 \operatorname{tg}^2 \gamma} \quad (4)$$

выражае адносную адчувальнасць рэгіструючай сістэмы да розных свецячыхся участкаў.

На рыс. 2 функцыя  $f(\kappa, x/R)$  прыведзена графічна. Розныя крывыя адпавядаюць розным значэнням параметра  $\kappa$ .

Калі  $\kappa = h/H = 0$  (кропкі на паверхні лінзы), то  $f(\kappa = 0, x/R) = \text{const} = 1$ . Значэнні  $0 \leq \kappa \leq 1$  адпавядаюць блізкай зоне рэгістрацыі выпраменьвання. Тут можна выдзеліць вобласці, дзе ўсе ўчасткі фотаметрыруемай плоскасці даюць аднолькавы ўклад у рэгіструемы светавы паток. Каардынаты  $x$  гэтых участкаў, як лёгка бачыць на рыс. 1, ляжаць у інтэрвале ад  $x/R = 0$  да  $x/R = 1 - \kappa$ . Пры гэтым  $f(\kappa, x/R) = 1$ . Для ўчасткаў, якія характарызуюцца каардынатамі  $1 + \kappa \geq x/R \geq 1 - \kappa$ , функцыя  $f(\kappa, x/R)$  змяншаецца пры павелічэнні  $x/R$ . З рыс. 2 відаць, што гэта змяншэнне прыбліжана можна

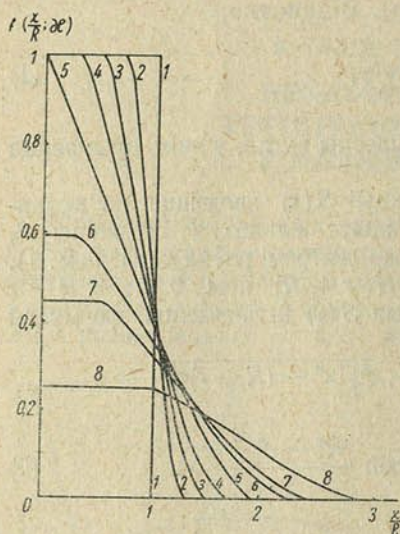


Рис. 2. Функцыя  $f(\kappa, x/R)$ . Лічы на крывых адпавядаюць розным значэнням  $\kappa$ :

1 —  $\kappa = 0$ ; 2 — 0,3; 3 — 0,5; 4 — 0,7; 5 — 1; 6 — 1,3; 7 — 1,5; 8 — 2

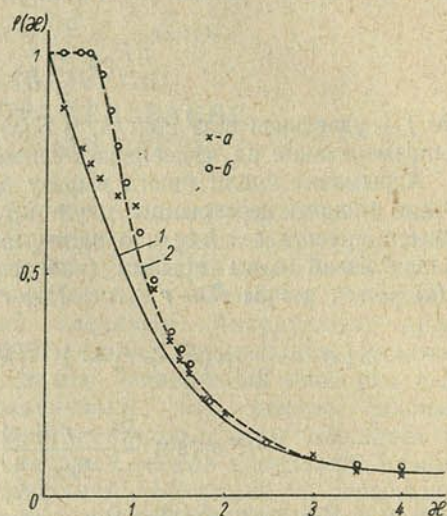


Рис. 3. Функцыя  $f(x)$ . Крывыя 1 і 2 атрыманы колькасным інтэграваннем для выпадкаў 1 і 2:

a — разлік па формулах (9) і (10); б — па (11) і (12)

лічыць лінейным. Дакладны выгляд функцыі  $S(x)$  на спадаючых участках (формула (2)) дастаткова складаны. Аднак, калі не патрэбна высокая дакладнасць, можна выкарыстаць прыбліжаную лінейную залежнасць, выраз для якой у пераменных  $x/R$  і  $\kappa$  у вобласці  $1 + \kappa \geq x/R \geq 1 - \kappa$  будзе мець выгляд

$$f\left(\kappa, \frac{x}{R}\right) = \frac{1}{2\kappa} \left(1 + \kappa - \frac{x}{R}\right). \quad (5)$$

Калі  $x/R \geq 1 + \kappa$ ,  $f(\kappa, x/R) = 0$ . Аналагічную апраксімацыю лёгка выканаць і для далёкай зоны прыёму выпраменьвання. У гэтым выпадку пры  $\kappa - 1 \geq x/R \geq 0$   $f(\kappa, x/R) = \text{const} = 1/\kappa^2$ . Для значэнняў  $\kappa + 1 \geq x/R \geq \kappa - 1$ , дзе ідзе спадаючы ўчастак крывой, функцыю  $f(\kappa, x/R)$  можна прыбліжана апраксіміраваць выразам выгляду

$$f\left(\kappa, \frac{x}{R}\right) = \frac{1}{2\kappa^2} \left(1 + \kappa - \frac{x}{R}\right). \quad (6)$$

Нарэшце, для  $x/R \geq \kappa + 1$   $f(\kappa, x/R) = 0$ .

Такім чынам, для дакладнага вызначэння ўкладу розных участкаў свецячайся плоскасці ў рэгіструемы светавы паток неабходна карыстацца выразам (2), а для прыбліжаных ацэнак можна абмежавацца формуламі (5) і (6).

Дадзім яшчэ адну фізічную інтэрпрэтацыю функцыі  $f(\kappa, x/R)$ .

Няхай адтуліна дыяфрагмы з'яўляецца раўнамерна свецячайся крыніцай, якая стварае ва ўсіх пунктах паверхні аб'ектыва аднолькавую асветленасць  $E_0$ . Выкарыстоўваючы меркаванні, аналагічныя прыведзеным вышэй пры атрыманні выразу для функцыі  $S(x)$ , лёгка паказаць, што асветленасць  $E$  у любым пункце зоны распаўсюджвання выпраменьвання апісваецца формулай

$$E = f\left(\kappa, \frac{x}{R}\right) E_0. \quad (7)$$

Такім чынам,  $f(\kappa, x/R)$  можна разглядаць таксама як функцыю адноснага размеркавання асветленасці па радыусу плоскага экрана, размешчанага на адлегласці  $h$  ад паверхні каліметра.

Разгледзім прыклады выкарыстання атрыманых рэзультатаў для дзвюх канкрэтных аптычных сістэм.

1. Няхай рассеіваючае асяроддзе асвятляецца крыніцай, размешчанай у адтуліне дыяфрагмы  $d$ . Пры гэтым асветленасць у зоне распаўсюджвання светавога пучка вызначаецца формулай (7). Аптычная сістэма, якая ўжываецца для фарміравання пучка святла з разыходжаннем  $2\gamma$ , адначасова служыць і для рэгістрацыі рассеянага выпраменьвання.

Вызначым, які ўклад у сумарны рэгіструемы паток уносяць плоскія слаі рассеіваючага асяроддзя, якія знаходзяцца на розных адлегласцях ад паверхні аб'ектыва. Аслабленне выпраменьвання ў асяроддзі не ўлічваецца. Для гэтага трэба праінтэграваць выраз (1), прыняўшы ў ім  $j = \sigma E(x)$ . Тут  $\sigma$  — каэфіцыент прапарцыянальнасці, які залежыць ад уласцівасцей асяроддзя,  $E(x)$  вызначаецца формулай (7). Тады рэгіструемы светавы паток, які прыходзіць ад слоя адзінкавай таўшчыні, размешчанага на адлегласці  $h$  ад аб'ектыва, роўны

$$F_{\text{рег}}(h) = \frac{\sigma}{h^2} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\infty} E(x) S(x) x dx. \quad (8)$$

На рис. 3 суцэльнай лініяй прыведзена залежнасць  $f(\kappa) = F_{\text{рег}}(\kappa)/F_{\text{рег}}(\kappa=0)$ . Даныя атрыманы колькасным інтэграваннем.

Выкарыстаўшы прапанаваную вышэй апраксімацыю функцыі  $S(x)$ , лёгка атрымаць прыбліжаныя аналітычныя выразы для функцыі  $f(\kappa)$ . Для блізкай зоны ( $0 \leq \kappa \leq 1$ ) маем

$$f(\kappa) = 1 + \frac{1}{3} \kappa(\kappa - 2). \quad (9)$$

Для далёкай зоны ( $1 \leq \kappa \leq \infty$ )

$$f(\kappa) = \frac{1}{\kappa^4} \left[ \kappa^2 + 1 - \frac{2}{3} (\kappa + 1) \right]. \quad (10)$$

Рэзультаты разліку па формулах (9) і (10) паказаны на рис. 3 адпаведнымі кропкамі ля крывой 1.

Супастаўленне рэзультатаў колькаснага інтэгравання і разлікаў па прыбліжаных формулах дазваляе меркаваць аб дакладнасці прынятых апраксімацый (5) і (6).

Адзначым, што функцыя  $f(\kappa)$  не залежыць ад параметраў сістэмы  $R$  і  $\gamma$ . Іх уплыў выявіцца на агульнай велічыні рэгіструемага светавога патоку, але не на адноснай адчувальнасці сістэмы да розных фотаметрыруемых участкаў. Патрабуецца толькі, каб вугал  $\gamma$  быў дастаткова малым.

2. Разгледзім выпадак, калі асяроддзе асвятляецца кропкавай крыніцай, размешчанай на паверхні аб'ектыва ў яго цэнтры. Разыходжанне выпраменьвання ад гэтай крыніцы роўна  $2\gamma$ . Прыём рассеянай радыяцыі ажыццяўляецца аптычнай сістэмай, прыведзенай на рыс. 1. Рэзультаты машынных разлікаў функцыі  $f(x)$  для гэтага выпадку прыведзены на рыс. 3 пункцірнай крывой 2. Выкарыстанне адпаведных прыбліжаных формул дазваляе атрымаць аналітычныя выразы для  $f(x)$ . Для блізкай зоны пры  $0 \leq x \leq 0,5$   $f(x) = 1$ , а ў зоне  $0,5 \leq x \leq 1$

$$f(x) = \frac{1}{3} + \frac{3x - 1}{6x^3}. \quad (11)$$

Для далёкай зоны ( $1 \leq x \leq \infty$ )

$$f(x) = \frac{6x^2 - 3x + 1}{6x^4}. \quad (12)$$

Рэзультаты разліку па формулах (11) і (12) прыведзены на рыс. 3 адпаведнымі кропкамі ля крывой 2.

Разгледжаныя выпадкі ахапляюць толькі дзве аптычныя сістэмы, якія іншы раз выкарыстоўваюцца, напрыклад, пры заздзіраванні атмасферы. Выкарыстаны спосаб разважанняў і атрыманыя рэзультаты, на наш погляд, прымянімы да рашэння вялікага кола прыкладных задач, звязаных з рэгістрацыяй светавага патокаў.

У заключэнне аўтары выказваюць глыбокую ўдзячнасць А. П. Іванову за цікавасць да работы.

#### Літаратура

1. Тиходеев П. М. Световые измерения в светотехнике. Госэнергоиздат, Л., 1962.
2. Гершун А. А. ДАН СССР, 51, № 8, 1946.

Інстытут фізікі  
АН БССР

Поступило в редакцию 6.III 1969

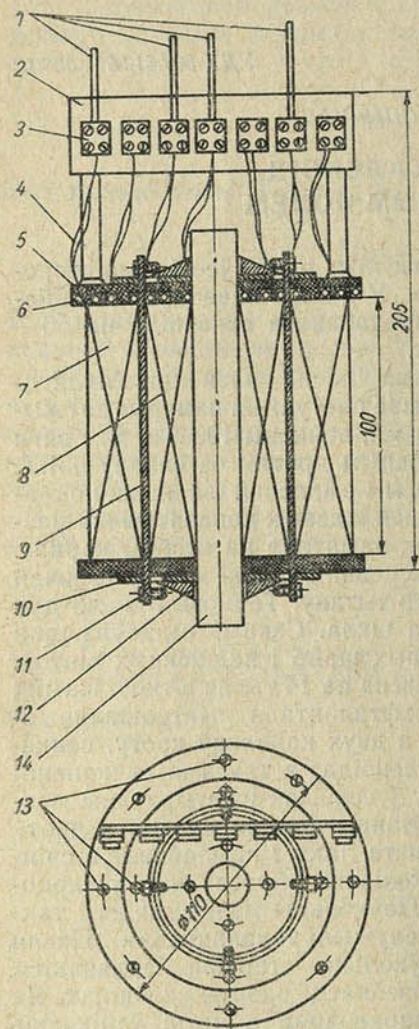
УДК 537.312.62 : 538.12

А. А. ДРОЗД, В. І. ГАСЦІШЧАУ

### ЗВЫШПРАВODНЫ САЛЕНОІД З МОЦНЫМ МАГНІТНЫМ ПОЛЕМ

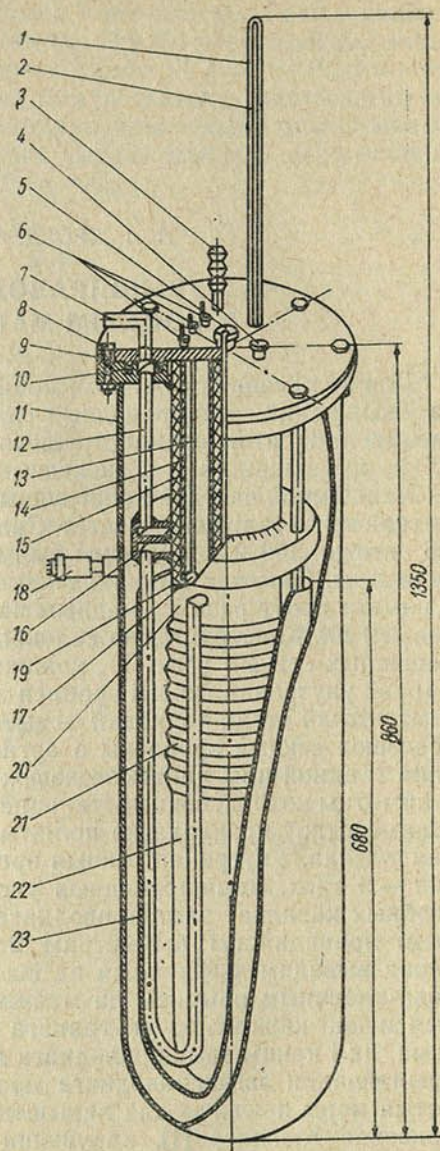
Для атрымання статычных моцных магнітных палёў ўсё больш шырока ўжываюцца звышправодныя саленоіды. У даным паведамленні апісваецца лабараторная канструкцыя звышправоднага саленоіда на 50—60 кэ, прызначанага для даследчых работ.

Неад'емнай часткай канструкцыі, акрамя ўласна саленоіда, з'яўляецца геліевы металічны крыстат. Саленоід мае наступныя памеры: даўжыню намоткі 100 мм, унутраны дыяметр 19 мм, вонкавы 100 мм. Яго вага каля 3 кг. Намотка выканана звышправодным дротам са сплаву 65БТ. Дыяметр дроту разам з медным пакрыццём і эмалевай ізаляцыяй складае 270 мк. Канструктыўна саленоід зроблен з дзвюх канцэнтрычна размешчаных секцый (рыс. 1), кожная з якіх намотана на асобны каркас. Каркас унутранай секцыі зроблен з тонкасценнай трубкай з нержавеючай немагнітнай сталі, вонкавай — вытачаны з тытану. Тарцовыя шчокі для абедзвюх секцый зроблены з арганічнага шкла. Секцыі змацоўваюцца адна з адной пры дапамозе дзвюх канічных шайб і падціскных вінтоў. У абмотцы кожнай секцыі старанна ўкладзена па 14 тысяч віткоў. Паміж сляямі віткоў пракладзена поліэтылентэрэфталантвая электраізаляцыйная плёнка. Унутраная секцыя зроблена з двух кавалкаў дроту, вонкавая — з трох. Звышправодныя ўводы саленоіда, а таксама сучляненні асобных кавалкаў звышправоднага дроту ў секцыях шунтыраваны меднымі праваднікамі дыяметрам 2 мм. Канцы звышправоднага дроту перад вывадам ачышчаліся ад ізаляцыйнага лаку і прыпайваліся свінцова-алавяным прыпоем да медных паўкольцаў, упрасаваных у тарцовыя шчокі каркасаў з унутранага боку. Паўкольцы мелі вывады і таксама, як і канцы звышправоднага дроту, служылі токапаводамі. Пасля прыпайвання звышправоднага дроту паўкольцы старанна ізаляваліся. Гэтыя меры прыняты для павышэння надзейнасці работы саленоіда. Як паказвае Кюнцлер [1], парушэнні звышправоднай абмоткі ўзнікаюць часцей за ўсё ў месцах выгібаў, а не ў цэнтры ўнутранага слоя, дзе ёсць максімальнае поле. Шунтыраванне сучляненняў тыпу звышправаднік — звышправаднік і звышправаднік — праваднік меднымі паўкольцамі апраўдала сябе пры эксплуатацыі саленоіда ў рэжыме непасрэднай запіткі. Токаўводы да секцый саленоіда выкананы з меднай кабельнай аплеткі ў выглядзе пустацелых цыліндраў. Вялікая паверхня цыліндраў дазволіла адводзіць частку цеплапрытоку, ахалоджваючы іх выпараючым геліем. Секцыі саленоіда запітваліся пасобку. Для сілкавання саленоіда пасля невялікіх пераробак у схеме рэгулявання выкарыстоўваўся стабілізатар току тыпу П-138. Ток у секцыі ўводзіўся пачаргова ад розных крыніц электрапрыводам на працягу пяці мінут. Для аховы крыніц току ад э.р.с. самаіндукцыі, якая ўзнікае пры парушэнні звышправоднасці, у ланцугах сілкавання секцый уключаны паслядоўна дыёды



Рыс. 1. Звышправодны саленоід:

1 — токаўводы; 2 — магнажная пліта; 3 — кантактныя заціскі; 4 — звышправодныя і медныя ўводы; 5 — шчака вонкавага каркаса; 6 — кантактнае паўкальцо; 7 — абмотка вонкавай секцыі; 8 — абмотка ўнутранай секцыі; 9 — каркас вонкавай секцыі; 10 — шчака ўнутранай секцыі; 11 — крапежныя венты; 12 — канічная шайба; 13 — крапежныя венты шчок секцыі; 14 — каркас ўнутранай секцыі



Рыс. 2. Геліевы крыстат:

1 — агарожа паплаўковай прылады; 2 — шкала ўзроўню вадкага гелію; 3 — патрубак для заліўкі азоту; 4 — патрубак для заліўкі гелію; 5 — патрубак для вымяральнага прыстаавання; 6 — патрубкі для токаўводаў саленоіда; 7 — патрубак для збору гелію; 8 — верхні фланец; 9 — крапежныя балты; 10 — ушчыляльная пракладка; 11 — корпус; 12 — трубка; 13 — токаўвод; 14 — сасуд для вадкага азоту; 15 — пенапластавая пробка; 16 — кальцавы зборнік; 17 — прахадны ізалятар; 18 — тэрмаметрычная лямпа; 19 — экран; 20 — гарлавіна; 21 — сільфон; 22 — геліевы сасуд; 23 — цэлавый экран

тыпу ВК2-200. Абарона ж саміх абмотак секцый ад перанапружанняў ажыццяўлялася нізкаомнымі шунтамі. Шунты размяшчаліся па-за крыстатам для зніжэння расходу вадкага гелію ў выніку выдзялення цяпла ў моманты парушэння звышправоднасці абмоткі.

Канструкцыя распрацаванага намі геліевага крыстата для забеспячэння работы саленоіда паказана на рыс. 2.

Крыстат спраектаваны для работы без азотнай ванны з дадатковым ахаладжэннем экрана парай выпараючага гелію. Прамежкавая тэмпература цеплавога экрана падтрымлівалася прыкладна 60—70 °К. Сасуд для вадкага гелію выканан з дзвюх частак. Ніжняя — гэта масіўная медная шклянка, зробленая метадам выціскання.

Верхняя часткай геліевага сасуда служыць тонкасценны сільфон з немагнітнай нержавеючай сталі. Перад зборкай сільфон быў расцягнуты да з'яўлення астаткавай дэфармацыі. Да фланца крыстата геліевы сасуд падвешаны на тонкасценнай трубе, зробленай з немагнітнай нержавеючай сталі. Карысная глыбіня геліевага сасуда складае 550 мм. Дыяметр гарлавіны роўны 128 мм, гэта стварае магчымасць для хуткага дэмантажу аб'ектаў вялікага памеру. Рабочы аб'ём крыстата роўны 7 л.

Корпус крыстата, ніжняя частка геліевага сасуда і экран зроблены з медзі. Усе астатнія дэталі зроблены з немагнітнай нержавеючай сталі. Паверхня элементаў крыстата з боку вакууміраванай прасторы старанна адпаліравана. Цеплаізаляючая поласць адпампавана да  $10^{-4}$  мм рт. ст., пасля запаўнення вадкім геліем вакуум падтрымліваецца на ўзроўні  $10^{-4}$ — $10^{-5}$  мм рт. ст. невялікай колькасцю актывіраванага вугалю. Актывіраваны вугаль знаходзіцца ў кармане, размешчаным на днішчы геліевага сасуда і мае з ім добры цеплавы кантакт. Вакно кармана для загрузкі вугалю зачынена шчыльнай сеткай. Усе злучэнні ў крыстаце паяны сярэбраным і свінцова-алавяным прыпоямі. Фланцы крыстата змацоўваюцца паміж сабой балтамі і ўшчыльняюцца пракладкамі з вакуумнай гумы.

Для змяншэння цеплапрытоку ў геліевы сасуд за кошт свабоднай канвекцыі газападобнага гелію верхняя частка гарлавіны закрыта пробкай з пенапласту. Пробка знізу ахавана паліраваным медным экранам для змяншэння цеплапрытоку выпраменьваннем.

Недахопы, якія маюць месца ў канструкцыях крыстатаў [2, 3], намі часткова пераадолены за кошт наступных канструктыўных рашэнняў. У якасці верхняй часткі геліевага сасуда выкарыстан сільфон, які выконвае ролю падоўжанага цеплавога мосціка. Даўжыня яго сценкі прыкладна ў тры разы перавышае вышыню звычайнага цыліндра пры іншых аднолькавых даных. Створана прымусовае актыўнае ахаладжэнне цеплавога экрана і гарлавіны выпараючымся халодным геліем.

Месцараспалажэнне падзлучэнняў да гарлавіны трубак, якія служыць для забору выпараючага гелію, выбрана з разліку ахаладжэння цеплавога экрана да 60—70 °К. Гелій адводзіцца праз тры трубки, прыпаяныя да гарлавіны на адным узроўні раўнамерна па яе дыяметру. У прасторы паміж геліевым сасудам і корпусам гэтыя трубки выгнуты ў выглядзе выцягнутых петляў. Праціглыя канцы трубак падключаны да кальцавога зборніка. На трубках замацаваны экран, які мае з імі добры цеплавы кантакт. Экран ахоўвае ад цеплавога выпраменьвання геліевы зборнік і частку гарлавіны. На ўчастку пераходу ад экрана да кальцавога зборніка ў разрывы медных трубак, якія адводзяць халодны газ, устаўлены асабліва тонкасценныя нержавеючыя трубки таго ж дыяметра. Асабліва тонкасценныя трубки выконваюць ролю цеплавога мосціка. Кальцавы зборнік мае з гарлавінай крыстата агульную сценку,

якую і абмывае выпарыўшыся гелій. Халодны газ адымае цеплыню, пранікаючую да геліевага зборніка ў выніку цеплаправоднасці матэрыялу гарлавіны.

З кальцавага зборніка газ праз тры тонкасценныя нержавеючыя трубки паступае ў зборнік, які знаходзіцца ў ніжнім фланцы крысцата, а затым праз патрубак у агульную сістэму збору гелію.

Крысцат быў выпрабаваны ў рабоце як без азотнага ахаладжэння, так і пры ахаладжэнні вонкавага корпуса вадкім азотам. Для гэтага яго змяшчалі ў д'юараўскі сасуд з пенапласту і залівалі вадкім азотам. Істотнага змянення скорасці выпарэння вадкага гелію ў гэтым выпадку не выяўлена, аднак расход вадкага гелію пры яго заліўцы зніжаўся.

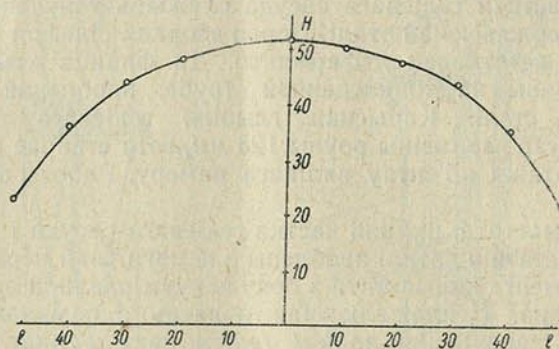


Рис. 3. Тыпалогія магнітнага поля на восі саленоіда ( $H$ , кэ,  $l$  — адлегласць у мм ад цэнтра)

Узровень вадкага гелію фіксаваўся паплаўковай прыладай. Паплавок быў зроблены з пенапласту. У рабочым стане саленоід размяшчаецца ў ніжняй частцы геліевага сасуда на падстаўцы з пенапласту. Шклянка з матэрыялу з высокай электраправоднасцю выконвае ролю каротказамкнутага вітка, які адводзіць частку энергіі магнітнага поля пры разбурэнні звышправоднасці абмоткі саленоіда.

Верхнія канцы токаўводаў саленоіда ахаладжаюцца да тэмпературы вадкага азоту. Для гэтай мэты да ніжняй часткі верхняга фланца прымацаваны сасуд, які мае патрубкі для заліву вадкага азоту і адводу газу. Кожны токаўвод саленоіда праходзіць у верхнім фланцы праз ушчыльнены патрубак. Усяго іх шэсць. У днішча сасуда для азоту па колькасці токаўводаў закладзена шэсць прахадных шклянкіх ізалятараў тыпу «слэзка». На ўчастку ад днішча азотнага сасуда і вышэй токаўводы зроблены з меднага эмаліраванага дроту дыяметрам 2 мм. Токі ўводы разлічаны на ток да 25 а. Былі выпрабаваны розныя рэжымы паралельнага і паслядоўнага ўключэння секцый. Максімальнае значэнне напружанасці магнітнага поля ў цэнтры саленоіда складала 52 кэ пры току ўнутранай секцыі 20 а і току вонкавай 10,3 а. На рис. 3 прыведзена кривая размеркавання напружанасці магнітнага поля ўздоўж восі саленоіда. Вымярэнне поля рабілася мілівеберметрам тыпу М119.

Неаднароднасць поля ў цэнтры саленоіда на даўжыні 10 мм склала адзін працэнт. Саленоід паказаў сябе ўстойлівым у эксплуатацыі. Ён знаходзіўся ў рабоце доўгі час і вытрымаў некалькі дзесяткаў пераводаў са звышправоднага ў нармальны стан. Момент пераходу саленоіда ў нармальны стан суправаджаўся характэрным трэскам унутры крысцата і бурным кароткачасовым кіпеннем гелію. Расход гелію пры гэтым не перавышаў 0,4—0,5 л.

У заключэнне аўтары выказваюць удзячнасць навуковаму кіраўніку акадэміку АН БССР М. М. Сіраце за пастаноўку тэмы данай работы і пастаянную да яе цікавасць, інжынеру І. І. Пічкалёву за дапамогу пры вырабе крыстата.

### Літаратура

1. Kunzler J. E. J. Appl. Phys., Supplement, 33 (3), 1042, 1962.
2. Фрадков А. Б. Приборы и техника эксперимента, № 1, 1961.
3. Кейлин В. Е. Кристаты нового типа для сверхпроводящих соленоидов. Препринт. Институт атомной энергии, М., 1966.

*Институт физики твердого тела  
и полупроводников АН БССР*

*Поступило в редакцию 4.IV 1969*

Э. В. РАТНІКАУ

### РАЗЛІКОВЫЯ ХАРАКТАРЫСТЫКІ КАРАНУЮЧАГА СЛОЯ

Працэсы іанізацыі і ўзбуджэння нейтральных часцінак пры каронным разрадзе лакалізаваны ў вузкай вобласці каля электрода з малым радыусам крывізны паверхні. Гэту вобласць інтэнсіўнай іанізацыі прынята называць карануючай вобласцю, асноўнымі параметрамі якой з'яўляюцца яе лінейныя памеры і канцэнтрацыя ў ёй зарадаў. Астатняя частка разрадлага прамежку прадстаўляе сабой газавое асяроддзе, у якім пад дзеяннем прыкладзенага поля дрэйфуюць у асноўным іоны аднаго знака, што адпавядаюць палярнасці карануючага электрода. Фізічны стан гэтай вобласці поўнасцю вызначаецца станам карануючага слоя. Таму веданне параметраў апошняга з'яўляецца неабходнай умовай для характарыстыкі кароннага разраду.

У дадзенай рабоце прапануецца метада ацэнкі таўшчыні карануючага слоя і канцэнтрацыі носбітаў зарадаў у ім, заснаваны на ўяўленні аб эфектыўнай энергіі іанізацыі [1]. Паколькі ў выпадку дадатнай кароны карануючы электрод акружаны дадатным прасторавым зарадам, то, як лічыць Браун [2], фармальна яго можна разглядаць як эфектыўнае павелічэнне радыуса анода. Мяркуючы, што роўным значэнням эфектыўнай энергіі іанізацыі  $\varepsilon^*$  адпавядаюць роўныя велічыні напружанасці поля  $E$  ля паверхні карануючага электрода як у выпадку дадатнай, так і для адмоўнай кароны, можна вылічыць эфектыўнае павелічэнне радыуса закруглення дадатнага вастрыя. У выпадку цыліндрычнай сіметрыі электродаў нескажонае прасторавым зарадам поле апісваецца выразам [3, 4]

$$E = \frac{U}{r \ln \frac{R}{r}}, \quad (1)$$

дзе  $U$  — патэнцыял карануючага электрода;  $r$  — радыус цэнтральнага дроту;  $R$  — радыус знешняга цыліндра.

Аднак пры паяўленні прасторавага зараду велічыня поля паблізу паверхні карануючага электрода зменіцца. Абазначыўшы эфектыўнае павелічэнне радыуса крывізны анода, які акружан дадатным прасторавым зарадам, праз  $\Delta r$ , у адпаведнасці з выразам [1] можам сцвярджаць, што велічыня поля зменшыцца і будзе роўна

$$E' = \frac{U}{(r + \Delta r) \ln \frac{R}{r + \Delta r}}. \quad (2)$$

Пры адмоўнай кароне ў адрозненне ад дадатнай накапленне прасторавага зараду адбываецца на некаторым аддаленні ад карануючага электрода. Таму можна меркаваць, што дэфармацыя поля каля яго

паверхні намнога меншая ў параўнанні з узрушэннем поля ў выпадку дадатнай кароны. Такім чынам, пры фіксаваным патэнцыяле карануючага электрода значэнне напружанасці поля ў зададзеным пункце зоны іанізацыі з улікам уплыву прасторавага зараду прыкметна зменіцца па велічыні палярнасці карануючага электрода. Каб напружанасці поля ў разглядаемым пункце аказаліся роўнымі па велічыні, неабходна, каб патэнцыялы карануючага электрода пры змяненні яго палярнасці былі звязаны суадносінамі

$$\frac{U^+}{(r + \Delta r) \ln \frac{R}{r + \Delta r}} = \frac{U^-}{r \ln \frac{R}{r}}, \quad (3)$$

дзе  $U^+$  і  $U^-$  — патэнцыялы карануючага электрода ў выпадках дадатнай і адмоўнай палярнасці.

Рашаючы ўраўненне (3), атрымаем

$$U^+ r \ln \frac{R}{r} = U^- (r + \Delta r) [\ln R - \ln (r + \Delta r)]. \quad (4)$$

Пераўтвараючы лагарыфмічную функцыю  $\ln (r + \Delta r)$  да выгляду  $[\ln (1 + \Delta r/r) + \ln r]$ , зручнага для раскладання ў ступенны рад, і выкарыстоўваючы першы член раскладання, прыблізна атрымаем

$$U^+ r \ln \frac{R}{r} = U^- (r + \Delta r) \left( \ln \frac{R}{r} - \frac{\Delta r}{r} \right). \quad (5)$$

Не ўлічваем член, які змяшчае  $\Delta r^2$ . Тады адносна  $\Delta r$  будзем мець

$$\Delta r = \frac{r \left( \frac{U^+}{U^-} - 1 \right) \ln \frac{R}{r}}{\ln \frac{R}{r} - 1}. \quad (6)$$

У прыватнасці, адносіны  $U^+/U^-$ , што адпавядаюць аднаму і таму ж значэнню эфектыўнай энергіі іанізацыі, можна замяніць адносінамі патэнцыялаў запальвання дадатнай і адмоўнай карон у адпаведнасці з прынятым раней дапушчэннем. Тады выраз (6) набывае выгляд

$$\Delta x = \frac{r \left( \frac{U_n^+}{U_n^-} - 1 \right) \ln \frac{R}{r}}{\ln \frac{R}{r} - 1}. \quad (7)$$

Тут  $\Delta x$  — таўшчыня карануючага слоя.

Паколькі размеркаванне электрычнага поля ў разрадным прамежку падпарадкоўваецца закону Пуасона [5], то можна вылічыць канцэнтрацыю носьбітаў зарадаў у карануючым слоі, ведаючы яго таўшчыню.

Інтэгруючы ўраўненне Пуасона

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = 4 \pi n_i e, \quad (8)$$

атрымаем

$$\frac{\partial U}{\partial x} = 4 \pi n_i e x + c_1, \quad (9)$$

$$U = 4 \pi n_i e \frac{x^2}{2} + c_1 x + c_2. \quad (10)$$

Пры  $x = 0$ , г. зн. на паверхні карануючага электрода, патэнцыял  $U = U_0$ , тады з роўнасці (10) выцякае

$$c_2 = U_0. \quad (11)$$

З прычыны таго што ў вобласці ўніпалярнай праводнасці змяненне патэнцыялу, якое прыпадае на адзінку даўжыні разрадлага прамежку, настолькі малое ў параўнанні з карануючай вобласцю, што на яго можна не звяртаць увагі, у першым прыбліжэнні можна лічыць градыент патэнцыяла за межамі карануючага слоя роўным нулю. Такім чынам, другой гранічнай умовай з'яўляецца роўнасць нулю градыента патэнцыяла ў пункце  $x = x_1$ , які знаходзіцца на адлегласці таўшчыні дадатнага прасторавага зараду ад вастрыя. Выкарыстаўшы гэту ўмову, для  $c_1$  будзем мець

$$c_1 = -4\pi n_i e x_1. \quad (12)$$

Падставім пастаянныя  $c_1$  і  $c_2$  у роўнасць (10) і для пункта  $x = x_1$  атрымаем суадносіны

$$4\pi n_i e \frac{x_1^2}{2} - 4\pi n_i e x_1^2 + U_0 = U_1. \quad (13)$$

Рашаючы ўраўненне (13) адносна  $n_i$ , для канцэнтрацыі носбітаў зарадаў у карануючым слоі знаходзім

$$n_i = \Delta U / 2\pi e x_1^2, \quad (14)$$

дзе  $\Delta U$  — зніжэнне напружання ў карануючым слоі;  $x_1$  — працягласць карануючага слоя.

Але паколькі вылічэнне  $\Delta U$  з'яўляецца даволі складанай задачай з прычыны ўзрушэння поля прасторавым зарадам, абмяжуемся прыблізнай ацэнкай канцэнтрацыі зарадаў. Няхай  $\Delta U = E_{\text{ср}} x_1$ , тады выраз (14) набывае выгляд

$$n_i = \frac{E_{\text{ср}}}{2\pi e x_1}. \quad (15)$$

$E_{\text{ср}}$  можна ацаніць з дакладнасцю да парадку, калі разлічыць напружанасць поля на ўнутранай і знешняй межах карануючага слоя з дапамогай формулы (1).

Такім чынам, сістэма ўраўненняў

$$\Delta x = \frac{r \left( \frac{U_n^+}{U_n^-} - 1 \right) \ln \frac{R}{r}}{\ln \frac{R}{r} - 1}, \quad (16)$$

$$n_i = \frac{\Delta U}{2\pi e (\Delta x)^2}$$

дазваляе разлічыць найбольш важныя характарыстыкі вобласці інтэнсіўнай іанізацыі кароны.

Па метаду рэдуцыраваных характарыстык былі знойдзены значэнні суадносін  $U_{\text{кр}}^+ / U_{\text{кр}}^-$  пры разрадзе ў паветры і вуглякіслым газе для розных ціскаў. Даныя ў выпадку разраду ў паветры атрыманы для карануючага элект-

рода з радыусам закруглення  $10^{-3}$  см, у выпадку разраду ў  $\text{CO}_2$ — $5 \cdot 10^{-3}$  см. Разліковыя параметры карануючага слоя такія.

Ціск, мм. рт. сл	У паветры		У вуглякіслым газе	
	750	600	750	600
$U_{\text{кр}}^+ / U_{\text{кр}}^-$	1,65	1,72	1,11	1,23
$x$ , см	$5,8 \cdot 10^{-4}$	$6,1 \cdot 10^{-4}$	$4,8 \cdot 10^{-4}$	$1,1 \cdot 10^{-3}$
$n_i$ , см $^{-3}$	$2,03 \cdot 10^{14}$	$1,8 \cdot 10^{14}$	$2,3 \cdot 10^{14}$	$1,0 \cdot 10^{14}$

Рэзультаты вылічэння параметраў карануючага слоя адносяцца да выпадку напружання ў разрадным прамежку 10 кв. Арыенціраваная канцэнтрацыя носьбітаў зарадаў у вобласці інтэнсіўнай іанізацыі складае  $10^{14}$  см $^{-3}$ . Таўшчыня карануючага слоя сувымерная з радыусам закруглення карануючага электрода. Павелічэнне працягласці зоны іанізацыі з памяншэннем ціску асяроддзя ў разрадным прамежку, відаць, тлумачыцца павелічэннем даўжыні свабоднага прабегу электронаў. Памяншэнне ж канцэнтрацыі абумоўлена памяншэннем шчыльнасці газу.

У заключэнне неабходна адзначыць, што, як паказаў Н. А. Капцоў [5], таўшчыня дадатнага карануючага слоя прыблізна роўна радыусу закруглення паверхні карануючага электрода. Выраз (7), адрозніваючыся параўнальнай прастамай, прыводзіць да аналагічнага рэзультата. Для параўнання рэзультатаў, якія адносяцца да ацэнкі велічыні канцэнтрацыі зарадаў у вобласці карануючага слоя, аўтар, на жаль, не мае даных.

#### Літаратура

1. Ратников Э. В. Вестн АН БССР, сер. фіз.-мат. навук, № 4, 1967.
2. Браун С. Элементарные процессы в плазме газового разряда. Госатомиздат, М.—Л., 1960.
3. Леб Л. Основные процессы электрических разрядов в газах. ГИТТЛ, М., 1950.
4. Добрецов Л. Н. Электронная и ионная эмиссия. ГИТТЛ, М.—Л., 1952.
5. Капцов А. Н. Коронный разряд и его применение в электрофилтрах. Гостехиздат, М.—Л., 1947.

Белорусский государственный университет им. В. И. Ленина

Поступило в редакцию 9.XII 1968

Н. Н. ТРЕТЬЯКОВА

НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА МАТРИЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ  
 НЕПРИВОДИМЫХ УНИТАРНЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ  
 ГРУППЫ  $SO(n)$

1. Соотношения симметрии. Интегральное представление [1] дает возможность доказать следующие соотношения между функциями  $P_{A,B,\bar{\alpha}}^{L,n}(\mu)$ , где  $L$  — совокупность чисел, определяющих представление;  $n$  — размерность пространства группы вращений;  $A, B, \bar{\alpha}$  — схемы, определяющие место данного элемента в матрице представления:

$$P_{A,B,\bar{\alpha}}^{L,2k}(-\mu) = (-1)^{L+A+B+N} P_{A,B,\bar{\alpha}}^{L-,2k}(\mu), \quad (1)$$

$$P_{A,B,\bar{\alpha}}^{L,2k+1}(-\mu) = (-1)^{L+A+B+N} P_{A^-,B,\bar{\alpha}}^{L-,2k+1}(\mu), \quad (1')$$

$$\bar{P}_{A,B,\bar{\alpha}}^{L,2k}(\mu) = (-1)^{A+B} P_{B,A,\bar{\alpha}}^{L-,2k}(\mu), \quad (2)$$

$$\bar{P}_{A,B,\bar{\alpha}}^{L,2k+1}(\mu) = (-1)^{A+B} P_{B,A,\bar{\alpha}}^{L-,2k+1}(\mu). \quad (2')$$

Здесь  $A^-, L^-$  — схемы  $A, L$ , в которых числа  $m_{2k-1,k}, n_k$  взяты с обратными знаками (см. [2]);  $N$  — первая строка схемы  $\bar{\alpha}^*$ .

Из соотношений (1), (1') следует:

$$P_{A,B,\bar{\alpha}}^{L,2k}(-1) = (-1)^{L+N} \delta_{A,B}, \quad (3)$$

$$P_{A,B,\bar{\alpha}}^{L,2k+1}(-1) = (-1)^{L+N} \delta_{A^-,B}. \quad (3')$$

2. Асимптотические представления. Пусть  $m_1$  — старший вес представления, определяемого схемой  $L$ . Из интегрального представления [1] методом перевала нетрудно получить разложение  $P_{A,B,\bar{\alpha}}^{L,n}(\cos \lambda)$  при больших  $m_1$ :

$$P_{A,B,\bar{\alpha}}^{L,n}(\cos \lambda) \sim C \frac{\Gamma\left(\frac{l+1}{2}\right) 2^{\frac{l+1}{2}}}{l! (m_1 \sin \lambda)^{\frac{l+1}{2}}} \left\{ \exp \left[ im_1 \lambda + i(l+1) \left( \frac{\lambda}{2} - \frac{\pi}{4} \right) \right] \times \right. \\ \left. \times \varphi_{(0)}^{(l)} + (-1)^l \exp \left[ -im_1 \lambda - i(l+1) \left( \frac{\lambda}{2} - \frac{\pi}{4} \right) \right] \varphi_{(\pi)}^{(l)} \right\} [1 + O(m_1^{-1})], \quad (4)$$

где

$$0 < \delta \leq \lambda \leq \pi - \delta, \\ \varphi(z) = P_{M,N,\gamma}^{B,n-1} \left( \frac{\cos z \cos \lambda + i \sin \lambda}{i \cos z \sin \lambda + \cos \lambda} \right) \bar{P}_{M,N,\gamma}^{A,n-1}(\cos z) \sin^{n-3} z,$$

\*) Через  $L + A + B + N$  обозначена сумма всех чисел, входящих в схемы  $L, A, B, N$

$l$  — наименьший из порядков нулей функции  $\varphi(z)$  в точках перевала  $z = 0$  и  $z = \pi$ ,  $C$  — константа, определяемая интегральным представлением  $P_{A,B,\alpha}^{L,n}$  из [1].

Рассмотрим отдельно случаи четной и нечетной размерностей пространства.

А.  $n = 2k$ .

Полагая  $l = n - 3$  и используя соотношения (1) и (2), найдем

$$\frac{\varphi^{(l)}(0)}{l!} = \bar{P}_{MNY}^{A,2k-1}(1) P_{MNY}^{B,2k-1}(1) = \delta_{M,N}, \quad (5)$$

$$(-1)^l \frac{\varphi^{(l)}(\pi)}{l!} = \bar{P}_{MNY}^{A,2k-1}(-1) P_{MNY}^{B,2k-1}(-1) = (-1)^{A+B} \delta_{M,N}. \quad (5')$$

Подставив (5) и (5') в (4), получим асимптотическое представление при четных  $n$

$$P_{A,B,\alpha}^{L,2k}(\cos \gamma) \sim C \frac{\Gamma(k-1) 2^{k-1}}{(m_1 \sin \lambda)^{k-1}} \left\{ \exp \left[ im_1 \lambda + i(k-1) \left( \lambda - \frac{\pi}{2} \right) \right] \delta_{M,N} + \right. \\ \left. + (-1)^{A+B} \exp \left[ -im_1 \lambda - i(k-1) \left( \lambda - \frac{\pi}{2} \right) \right] \delta_{M,N} \right\} [1 + O(m_1^{-1})]. \quad (6)$$

Б.  $n = 2k + 1$ .

Полагая  $l = n - 3$  и используя соотношения (1') и (2'), найдем

$$\frac{\varphi^{(l)}(0)}{l!} = \bar{P}_{M,N,\gamma}^{A,2k}(1) P_{M,N,\gamma}^{B,2k}(1) = \delta_{M,N}, \quad (7)$$

$$\frac{\varphi^{(l)}(\pi)}{l!} = \bar{P}_{M,N,\gamma}^{A,2k}(-1) P_{M,N,\gamma}^{B,2k}(-1) = (-1)^{A+B} \delta_{M,N}. \quad (7')$$

Подставив (7) и (7') в (4), получим асимптотическое представление при нечетных  $n$

$$P_{A,B,\alpha}^{L,2k+1}(\cos \lambda) \sim C \frac{\Gamma\left(k - \frac{1}{2}\right) 2^{k - \frac{1}{2}}}{(m_1 \sin \lambda)^{k - \frac{1}{2}}} \times \\ \times \left\{ \exp \left[ im_1 \lambda + i(2k-1) \left( \frac{\lambda}{2} - \frac{\pi}{4} \right) \right] + \right. \\ \left. + (-1)^{A+B} \exp \left[ -im_1 \lambda - i(2k-1) \left( \frac{\lambda}{2} - \frac{\pi}{4} \right) \right] \right\} [\delta_{M,N} + O(m_1^{-1})]. \quad (8)$$

В частности, для диагональных элементов

$$P_{A,A,\alpha}^{L,2k+1}(\cos \lambda) = C \frac{\Gamma\left(k - \frac{1}{2}\right) 2^{k - \frac{1}{2}}}{(m_1 \sin \lambda)^{k - \frac{1}{2}}} \times \\ \times \cos \left[ m_1 \lambda + (2k-1) \left( \frac{\lambda}{2} - \frac{\pi}{4} \right) \right] [1 + O(m_1^{-1})]. \quad (9)$$

Разложение (9) при  $n = 3$  совпадает с асимптотическим представлением обобщенных сферических функций, найденным нами ранее [3]:

$$P_{AA}^{n,3}(\cos \lambda) \sim \left( \frac{2}{\pi m_1 \sin \lambda} \right)^{1/2} \sin \left[ \left( m_1 + \frac{1}{2} \right) \lambda + \frac{\pi}{4} \right], \quad (10)$$

которое при  $A = 0$  дает известное представление полиномов Лежандра.

Общий вывод: при больших  $m_1$  функции  $P_{A,A,\alpha}^{L,n}$  суть бесконечно малые порядка  $(n-2)/2$ , если  $M = N$  (для любых  $n$ ) и если  $M \neq N$  (для  $n$  четных). В остальных случаях  $P_{A,A,\alpha}^{L,n}$  имеют порядок выше  $(n-2)/2$ .

3. Рекуррентные формулы. Введем в рассмотрение функции

$$u_l(\mu) = \sin^{n-3} \lambda \sum_M P_{A,A,\alpha}^{L,M,n}(\cos \lambda), \quad (11)$$

где  $L = (l, M)$  — совокупность чисел, определяющих представление,  $\mu = \cos \lambda$ ,  $l$  — старший вес представления. Суммирование ведется по всем  $M$ , допускаемым данной схемой  $A$ . С помощью формул (5) и (18) для производящих функций  $P_{A,B,\alpha}^{L,n}$  (см. [4]) можно вывести следующую рекуррентную формулу:

$$(l+n-3)u_l(\mu) + lu_{l-1}(\mu) = (1+\mu) \frac{d}{d\mu} [u_l - u_{l-1}]. \quad (12)$$

Соотношение (11), справедливое при любых схемах  $A$ , при  $n = 3$  совпадает с найденным ранее [3] для обобщенных сферических функций.

Если в (11) положить  $A = 0$ , получим функции

$$u_{l,0}(\mu) = \sin^{n-3} \lambda P_{0,0,0}^{l,n}(\cos \lambda),$$

являющиеся некоторым обобщением зональных сферических функций. Для них нетрудно доказать следующие соотношения:

$$(2l+n-2)u_{l,0}(\mu) = \frac{d}{d\mu} [u_{l+1,0}(\mu) - u_{l-1,0}(\mu)], \quad (13)$$

$$(l+n-3)u_{l,0}(\mu) = \mu \frac{d}{d\mu} u_{l,0}(\mu) - \frac{d}{d\mu} u_{l-1,0}(\mu), \quad (14)$$

$$(l+1)u_{l,0}(\mu) = \frac{d}{d\mu} u_{l+1,0}(\mu) - \mu \frac{d}{d\mu} u_{l,0}(\mu). \quad (15)$$

При  $n = 3$   $u_{l,0}(\mu) = P_l(\mu)$  и формулы (12)—(15) переходят в известные соотношения для полиномов Лежандра [5].

Пользуюсь случаем поблагодарить А. М. Родова за внимание к работе.

### Литература

1. Виленкин Н. Я. ДАН СССР, 113, № 1, 1957.
2. Гельфанд И. М., Минлос Р. А., Шапиро З. Я. Представления группы вращений и группы Лоренца. М., 1958.
3. Третьякова Н. Н. ДАН БССР, 11, № 4, 1967.
4. Третьякова Н. Н. Весті АН БССР, сер. фіз.-мат. навук, № 3, 1969.
5. Виленкин Н. Я. Специальные функции и теория представлений групп. М., 1965.

УДК 518:517(944)947

В. Н. АБРАШИН, Г. Ф. ГОРБАЧЕВА

### ОБ ОДНОЙ СХЕМЕ МЕТОДА ПРЯМЫХ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

Рассматривается двухслойная схема метода прямых (когда значения неизвестной функции находятся на прямых, параллельных пространственной оси) в случае первой краевой задачи для параболического уравнения второго порядка. В отличие от двухслойных схем, исследованных ранее [1, 2], исходная краевая задача аппроксимируется не краевой задачей для системы обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка, а краевой задачей для системы обыкновенных дифференциальных уравнений четвертого порядка. Это дает возможность получить двухслойную схему, сходящуюся со скоростью порядка  $O(h^4)$ , в то время как двухслойные схемы, рассмотренные в [1, 2], имеют скорости сходимости  $O(h)$ ,  $O(h^2)$ . Реализация предложенной схемы несколько сложнее, чем в [1] и [2], так как нам приходится на каждой прямой решать краевую задачу для обыкновенного дифференциального уравнения четвертого порядка, а не второго. Однако, если реализация метода происходит по схеме, предложенной в [3], это не столь существенно.

Пусть существует единственное решение следующей краевой задачи:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - g(x)u + f(x, t), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (1)$$

$$u(0, t) = \psi_1(t), \quad \dot{u}(1, t) = \psi_2(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (2)$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq 1,$$

где

$$a(x) > 0, \quad g(x) \geq 0.$$

Функции  $a(x)$ ,  $g(x)$ ,  $f(x, t)$ ,  $\varphi(x)$ ,  $\psi_1(t)$ ,  $\psi_2(t)$  предполагаются настолько гладкими, чтобы  $\frac{\partial^5 u}{\partial t^5}$  была непрерывна в области  $\Pi$  ( $0 \leq x \leq 1$ ,  $0 \leq t \leq T$ ). Проинтегрировав уравнение (1) поперек каждой из полос, на которые область  $\Pi$  разбивается прямыми  $t = t_n = nh$ ,  $h > 0$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots, N = [T/h]$ , получим следующую систему интегральных соотношений:

$$u(x, t_{n+1}) - u(x, t_n) = \int_{t_n}^{t_{n+1}} \left[ a(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - g(x)u + f(x, t) \right] dt, \quad (3)$$

$$0 \leq x \leq 1, \quad n = 0, 1, 2, \dots, N-1.$$

Если функции  $u$ ,  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$  проинтерполировать по их значениям и значе-

ниям их производных по  $t$  на прямых  $t=t_n$ ,  $t=t_{n+1}$ , то, имея в виду, что

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t} = \frac{\partial}{\partial x^2} \left( a(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - g(x) u + f(x, t) \right),$$

нетрудно получить краевую задачу для системы обыкновенных дифференциальных уравнений, аппроксимирующую исходную задачу:

$$\begin{aligned} u_{n+1}(x) - u_n(x) = & -\frac{h^2}{12} a(x) [(a(x) u_{n+1}''(x))'' - (g(x) u_{n+1}(x))''] + \\ & + \alpha_{n+1}(x) u_{n+1}''(x) + \xi_{n+1}(x) u_{n+1}(x) + \frac{h^2}{12} a(x) [(a(x) u_n''(x))'' - \\ & - (g(x) u_n(x))''] + \beta_n(x) u_n''(x) + \eta_n(x) u_n(x) + f_{n+1}, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad (4) \end{aligned}$$

$$u_{n+1}(0) = \psi_1(t_{n+1}), \quad u_{n+1}''(0) = \frac{1}{a(0)} [\psi_1'(t_{n+1}) + g(0) \psi_1(t_{n+1}) + f(0, t_{n+1})],$$

$$u_{n+1}(1) = \psi_2(t_{n+1}), \quad u_{n+1}''(1) = \frac{1}{a(1)} [\psi_2'(t_{n+1}) + g(1) \psi_2(t_{n+1}) + f(1, t_{n+1})],$$

$$u_0(x) = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad n = 0, 1, \dots, N-1.$$

Здесь

$$\alpha_{n+1}(x) = \frac{h}{2} a(x) + g(x) a(x) \frac{h^2}{12}, \quad \xi_{n+1}(x) = -\frac{h}{2} g(x) - g^2(x) \frac{h^2}{12},$$

$$\beta_n(x) = \frac{h}{2} a(x) - g(x) a(x) \frac{h^2}{12}, \quad \eta_n(x) = -\frac{h}{2} g(x) + g^2(x) \frac{h^2}{12},$$

$$f_{n+1} = -\frac{h^2}{12} a(x) \left[ \frac{\partial^2 f(x, t_{n+1})}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 f(x, t_n)}{\partial x^2} \right] +$$

$$+ \frac{h^2}{12} g(x) [f(x, t_{n+1}) - f(x, t_n)] + \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(x, t) dt,$$

$$u_{n+1}(x) \approx u(x, t_{n+1}).$$

Задача (4) решается последовательно, начиная с  $n=0$ .

Теперь исследуем погрешность предложенной вычислительной схемы. Для погрешности метода  $\gamma_{n+1}(x) = u(x, t_{n+1}) - u_{n+1}(x)$  в силу линейности нашей задачи получим следующую краевую задачу:

$$\begin{aligned} \frac{1}{a(x)} (\gamma_{n+1}(x) - \gamma_n(x)) = & -\frac{h^2}{12} (a(x) \gamma_{n+1}''(x))'' + \left( \frac{h}{2} + \frac{h^2}{12} g(x) \right) \gamma_{n+1}''(x) + \\ & + \frac{h^2}{12} (g(x) \gamma_{n+1}(x))'' + \frac{h^2}{12} (a(x) \gamma_n''(x))'' + \left( \frac{h}{2} - \frac{h^2}{12} g(x) \right) \gamma_n''(x) - \\ & - \frac{h^2}{12} (g(x) \gamma_n(x))'' - \frac{g(x)}{a(x)} \left( \frac{h}{2} + \frac{h^2}{12} g(x) \right) \gamma_{n+1}(x) - \\ & - \frac{g(x)}{a(x)} \left( \frac{h}{2} - \frac{h^2}{12} g(x) \right) \gamma_n(x) + r_{n+1}(x), \quad 0 < x < 1, \quad (5) \end{aligned}$$

$$\gamma_{n+1}(0) = 0, \quad \gamma_{n+1}(1) = 0, \quad \gamma_0(x) = 0,$$

$$\gamma_{n+1}''(0) = 0, \quad \gamma_{n+1}''(1) = 0, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad n = 0, 1, 2, \dots, N-1,$$

где

$$r_{n+1}(x) = \frac{h^5}{120} \int_0^1 \frac{\partial^5 K(x, t_{n+1} + \bar{\theta}h)}{\partial \bar{\theta}^5} \bar{\theta}^2 (1 - \bar{\theta})^2 d\bar{\theta},$$

$$0 < \bar{\theta} < 1.$$

Умножив выражение (5) на  $\gamma_{n+1}(x) - \gamma_n(x)$ , затем проинтегрировав его от 0 до 1, имея в виду, что  $\gamma_n(0) = 0$ ,  $\gamma_{n+1}(0) = 0$ ,  $\gamma_n(1) = 0$ ,  $\gamma_{n+1}(1) = 0$ , и применив неравенство Коши — Буняковского, получим

$$\int_0^1 \frac{g(x)}{a(x)} \gamma_{n+1}^2(x) dx + \int_0^1 \gamma_{n+1}'^2(x) dx \leq \frac{1 + \frac{2}{3} h\bar{g}}{1 - \frac{2}{3} h\bar{g}} \times$$

$$\times \left[ \int_0^1 \frac{g(x)}{a(x)} \gamma_n^2(x) dx + \int_0^1 \gamma_n'^2(x) dx \right] + \frac{2}{h \left( 1 - \frac{2}{3} h\bar{g} \right)} \times$$

$$\times \int_0^1 r_{n+1}(x) (\gamma_{n+1}(x) - \gamma_n(x)) dx, \quad (6)$$

шаг  $h$  выбирается таким, чтобы было  $1 - \frac{2}{3} h\bar{g} > 0$ .

Из рекуррентного неравенства (6) последовательным суммированием начиная с  $n = 0$ , получим

$$\int_0^1 \frac{g(x)}{a(x)} \gamma_{n+1}^2(x) dx + \int_0^1 \gamma_{n+1}'^2(x) dx \leq \frac{2}{h \left( 1 - \frac{2}{3} h\bar{g} \right)} \left[ \sqrt{\int_0^1 r_{n+1}^2(x) dx} \times \right.$$

$$\times \sqrt{\int_0^1 \gamma_{n+1}'^2(x) dx} + \sum_{i=1}^n \frac{\left( 1 + \frac{2}{3} h\bar{g} \right)^{n-i}}{\left( 1 - \frac{2}{3} h\bar{g} \right)^{n-i+1}} \times$$

$$\left. \times \sqrt{\int_0^1 \gamma_i'^2(x) dx} \sqrt{\int_0^1 R_i^2(x) dx} \right], \quad (7)$$

где

$$R_i(x) = r_i(x) - r_{i+1}(x) + h\bar{g} (r_i(x) - r_{i+1}(x)).$$

Пусть для  $n = n_0$  левая часть неравенства (7) будет наибольшей, тогда

$$\int_0^1 \frac{g(x)}{a(x)} \gamma_{n_0+1}^2(x) dx + \int_0^1 \gamma_{n_0+1}'^2(x) dx \leq \frac{2}{h \left( 1 - \frac{2}{3} h\bar{g} \right)} \times$$

$$\begin{aligned}
& \times \left[ \sqrt{\int_0^1 r_{n_0+1}^2(x) dx} \sqrt{\int_0^1 \gamma_{n_0+1}'^2(x) dx + \int_0^1 \frac{g(x)}{a(x)} \gamma_{n_0+1}^2(x) dx} + \right. \\
& \quad \left. + \sqrt{\int_0^1 \gamma_{n_0}'^2(x) dx + \int_0^1 \frac{g(x)}{a(x)} \gamma_{n_0}^2(x) dx} \times \right. \\
& \quad \left. \times \sum_{i=1}^{n_0} \frac{\left(1 + \frac{2}{3} h\tilde{g}\right)^{n_0-i}}{\left(1 - \frac{2}{3} h\tilde{g}\right)^{n_0-i+1}} \sqrt{\int_0^1 R_i^2(x) dx} \right] \leq \\
& \leq \frac{2}{h \left(1 - \frac{2}{3} h\tilde{g}\right)} \sqrt{\int_0^1 \gamma_{n_0+1}'^2(x) dx + \int_0^1 \frac{g(x)}{a(x)} \gamma_{n_0+1}^2(x) dx} \times \\
& \quad \times \left[ \sqrt{\int_0^1 r_{n_0+1}^2(x) dx} + \tilde{R} \sum_{i=1}^{n_0} \frac{\left(1 + \frac{2}{3} h\tilde{g}\right)^{n_0-i}}{\left(1 - \frac{2}{3} h\tilde{g}\right)^{n_0-i+1}} \right],
\end{aligned}$$

где  $\tilde{R} = \max_i \max_x |R_i|$ , и для любого  $n$  будет иметь место

$$\begin{aligned}
& \sqrt{\int_0^1 \gamma_{n+1}'^2(x) dx + \int_0^1 \frac{g(x)}{a(x)} \gamma_{n+1}^2(x) dx} \leq \\
& \leq \frac{2}{h \left(1 - \frac{2}{3} h\tilde{g}\right)} \left[ \sqrt{\int_0^1 r_{n+1}^2(x) dx} + \tilde{R} \sum_{i=1}^n \frac{\left(1 + \frac{2}{3} h\tilde{g}\right)^{n-i}}{\left(1 - \frac{2}{3} h\tilde{g}\right)^{n-i+1}} \right] \leq \\
& \leq h^4 M_1 + h^4 e^{\frac{4}{3} h\tilde{g}} M_2. \tag{8}
\end{aligned}$$

Из неравенства (8), имея в виду, что

$$|\gamma(x)| \leq \left| \int_0^x \gamma'(x) dx \right| \leq \int_0^1 |\gamma'(x)| dx,$$

получаем

$$\sqrt{\int_0^1 \gamma_{n+1}'^2(x) dx} \leq h^4 M,$$

$$|\gamma_{n+1}(x)| \leq h^4 M, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad n = 0, 1, \dots, N-1.$$

Из полученной оценки погрешности приближенной краевой задачи (5) непосредственно следует при  $h \rightarrow 0$  равномерная сходимость рассматриваемой схемы метода прямых для задач (1), (2) со скоростью порядка  $h^4$ .

**З а м е ч а н и е 1.** Аналогичный результат можно получить и для схем, которые связывают больше двух слоев, причем при применении интерполирования Эрмита первая производная может входить не на всех прямых.

**З а м е ч а н и е 2.** Повышать точность вычислительных схем метода прямых за счет увеличения порядка аппроксимирующего уравнения можно и для эллиптических уравнений. В этом случае нетрудно построить трехслойные схемы, сходящиеся со скоростью порядков  $h^4$ ,  $h^6$ . Если воспользоваться результатами [4], то можно построить и многослойные схемы более высокого порядка точности.

### Литература

1. Костюкович Е. Х. Канд. дисс. БГУ, Минск, 1958.
2. Абрашин В. Н., Горбачева Г. Ф. Вестн АН БССР, сер. физ.-мат. наук, № 4, 1969.
3. Фаддеева В. Н. Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова, 28, 73, 1949.
4. Абрашин В. Н. ДУ, 4, № 7, 1968.

Институт математики  
АН БССР

Поступило в редакцию 6.III 1969

А. С. ПОТУПА

### УЗКОРЕЗОНАНСНАЯ АППРОКСИМАЦИЯ КАК НЕОБХОДИМОЕ УСЛОВИЕ «ЯДЕРНОЙ ДЕМОКРАТИИ» И АДРОННЫЙ СПЕКТР МАСС

Благодаря значительным успехам в классификации экспериментальных данных с помощью траекторий Редже ( $RT$ ) и удачному использованию узкорезонансной аппроксимации ( $NRA$ ) в свёрхсходящихся правилах сумм [1] и массовых формулах теории унитарной симметрии, недавно были развиты динамические схемы, базирующиеся на растущих  $RT$ , т. е. на совместном использовании моделей  $RT$  и  $NRA$  [2, 3]. Столь существенным продвижением мы обязаны работам Ван Хоа [4] и Дюранда [5], показавших, что узкорезонансная аппроксимация совместна с описанием в терминах полюсов Редже тогда и только тогда, когда  $RT$  бесконечно возрастают, а также Мандельстама [2], который развил аргументацию в пользу линейного роста  $RT$ , что эквивалентно  $NRA$ .

С другой стороны, Ширковым в [6] была замечена эмпирическая спектральная закономерность для адронов, согласно которой средние значения кинематической переменной (введенной в [7])

$$x = s - M_i^2 - m_k^2, \quad (1)$$

где  $M_i$  — масса частицы мишени, а  $m_k$  — масса налетающей частицы, при  $s = M_{ik}^2$  — квадрату массы резонанса в данном канале, усредненной по мультиплетам с одинаковыми  $J^P$ , образуют примерно эквидистантный спектр. Например, для мезонов  $\rho$  (765),  $K^*$  (890) и  $\Phi$  (1020) с модами распада  $(\pi + \pi)$ ,  $(\pi + K)$  и  $(K + \bar{K})$  соответственно  $\bar{x} = 0,55$ . Для мультиплета  $D(2^+)$   $\bar{x} = 1,70$ , а для  $F(3^-)$  —  $\bar{x} = 2,80$ . Отклонения от средних значений  $x$  как для мезонов, так и для барионов не превышают 10%. Отклонения от эквидистантности имеют тот же порядок.

Цель этой заметки — показать следующее:

1. Узкорезонансная аппроксимация является необходимым условием выполнения гипотезы Чью и Фраучи [8] об эквивалентном статусе стабильных и нестабильных частиц с точки зрения измерений импульса.

2. Основываясь на  $NRA$ , можно естественно объяснить эквидистантный спектр  $x$ , не прибегая к предложенному Ширковым в [9] «фундаментальному» уравнению на собственные значения оператора  $\hat{x}$ .

Рассмотрим приближение узкими резонансами с точки зрения идеализированных измерений импульса. Поскольку в релятивистской квантовой теории сколь угодно быстрые измерения запрещены, для неопределенности импульса всегда имеет место соотношение [10]

$$\Delta p > \frac{1}{\Delta t}. \quad (2)$$

Поэтому фактически необходимо пользоваться асимптотическими ( $\Delta t \rightarrow \infty$ ) измерениями. Для нестабильных частиц измерение определено лишь в случае  $\Delta t < \tau$ , где  $\tau$  — время жизни. Учет последнего неравенства и соотношения (2) приведет к следующему выражению:

$$\Delta p > \frac{1}{\tau}, \quad (3)$$

или

$$\Delta p > \Gamma, \quad (3')$$

где  $\Gamma = 1/\tau$  — ширина резонанса.

Соотношение (3') является фундаментальным для измерения импульса и вводит для него «неустранимую» индивидуальную ошибку, аналогичную ошибке в измерении координаты релятивистской частицы с массой  $M$  ( $\Delta x > \frac{1}{M}$ ). Естественно, пользуясь (3'), можно выделять

стабильные частицы ( $\Gamma=0$ ), для которых импульс является хорошо определенной величиной.

Однако в этом случае нельзя избежать противоречия с гипотезой эквивалентного статуса стабильных частиц и резонансов и связанной с ней идеей зашнуровки [8]. С другой стороны, включая в рассмотрение не только асимптотические измерения импульса, как это сделал Джекобсон [11], мы столкнемся с плохой определенностью этой величины, вытекающей из индивидуальных ошибок (3) или (3').

Эти затруднения, носящие вполне принципиальный характер, можно преодолеть, вводя уже на уровне измерений узкорезонансное приближение. Благодаря этому правую часть в (3') можно обратить в нуль, а гипотеза эквивалентного статуса будет означать возможность асимптотических измерений импульса для любой частицы. Очевидно, что такое приближение будет обладать приблизительно 10-процентной точностью, т. е. порядка отношения наибольшей  $\Gamma$ -ширины к соответствующей массе. Поскольку узкорезонансная аппроксимация ( $\text{Im}\alpha(t)=0$ ) согласуется только с линейно растущими траекториями Редже (точнее, с линейным ростом  $\text{Re}\alpha(t)$ ), можно вводить среднюю универсальную траекторию, усредняя по мультиплетам с одинаковыми  $J^P$ . При учете кроссинг-симметрии нетрудно видеть, что  $x = \frac{s+u}{2} - M_i^2 - m_k^2$ . При учете связи ман-

дельстамовских переменных на массовой оболочке  $s+t+u - 2M_i^2 - 2m_k^2 = 0$  получаем

$$x = -\frac{t}{2}. \quad (4)$$

Поэтому эквидистантный спектр по  $x$  является следствием эквидистантности спектра по  $t$ . Последнее же условие связано с линейностью роста траекторий Редже:

$$t = a\alpha(t) + b. \quad (5)$$

Частицы (связанные состояния), по определению, возникают при  $\alpha(t) = J$ , где  $J$  — целое или полуцелое число, обозначающее полный момент. Таким образом, в хорошем согласии с экспериментальными данными возникает эквидистантный спектр как по переменной  $x$ , так и по квадратам резонансных масс

$$M_i^2 = aJ + b. \quad (6)$$

Использованная при этом 10-процентная аппроксимация вполне согласуется с фактической точностью определения масс резонансов [12].

Таким образом, узкорезонансная аппроксимация естественно включается в гипотезу эквивалентного статуса и совместно с моделью траекторий Редже в принципе объясняет основные спектральные закономерности адронов. Поэтому в рамках 10-процентной аппроксимации линейно растущие до бесконечности траектории Редже действительно являются хорошей базой для адронной динамики, основанной на представлении о «ядерной демократии».

Автор благодарит участников семинара лаборатории теоретической физики за интересные обсуждения.

### Литература

1. Матвеев В. А. и др. Препринт P2-3118. Дубна, 1967.
2. Mandelstam S. Phys. Rev., 166, 1539, 1968.
3. Veneziano G. Nuovo Cim., 57A, 190, 1968.
4. Van Hove L. Phys. Lett., 24B, 183, 1967.
5. Durand L. Phys. Rev., 161, 1610, 1967.
6. Ширков Д. В. ДАН СССР, 181, 837, 1968.
7. Serebryakov V. V., Shirkov D. V. Nuovo Cim., 51A, 878, 1967.
8. Chew G. F., Frautschi S. C. Phys. Rev. Lett., 7, 394, 1961.
9. Ширков Д. В. ДАН СССР, 181, 1097, 1968.
10. Landau L., Peierls R. Z. f. Phys., 69, 56, 1931.
11. Jacobson D. A. Nuovo Cim., 58B, 124, 1968.
12. Rosenfeld A. H. et al. Rev. Mod. Phys., 40, 77, 1968.

Институт физики  
АН БССР

Поступило в редакцию 25.IV 1969

УДК 539.2 : 535.314 + 666

Н. Н. СИРОТА, И. А. АФОНСКАЯ, Н. В. КОРНИЛОВА

**ПОКАЗАТЕЛЬ ПРЕЛОМЛЕНИЯ  
ГЕРМАНИЕВО-СВИНЦОВОБОРАТНЫХ СТЕКОЛ**

В настоящей статье сообщаются данные о концентрационной области стеклообразования и результаты определения показателя преломления стекол тройной системы  $\text{GeO}_2\text{—PbO—B}_2\text{O}_3$ .

В литературе отсутствуют данные о концентрационных областях образования стекол в этой системе и их свойствах. Исследованы лишь двойные системы, например в работах [1, 2] (система  $\text{PbO—GeO}_2$ ), [3] (система  $\text{PbO—B}_2\text{O}_3$ ), [4] (система  $\text{B}_2\text{O}_3\text{—GeO}_2$ ). Показатель преломления определялся на стеклах системы  $\text{GeO}_2\text{—PbO}$  [2] и  $\text{GeO}_2\text{—B}_2\text{O}_3$  [4].

Нами предпринято систематическое изучение физических свойств стекол указанной системы.

Таблица

Составы исследованных стекол системы  $\text{GeO}_2\text{—PbO—B}_2\text{O}_3$  (по данным синтеза) и их температуры размягчения

Составы, мол. %			$T_p, ^\circ\text{C}$	Составы, мол. %			$T_p, ^\circ\text{C}$	Составы, мол. %			$T_p, ^\circ\text{C}$
$\text{GeO}_2$	$\text{PbO}$	$\text{B}_2\text{O}_3$		$\text{GeO}_2$	$\text{PbO}$	$\text{B}_2\text{O}_3$		$\text{GeO}_2$	$\text{PbO}$	$\text{B}_2\text{O}_3$	
0	22	78	495	**20	10	70	454	50	50	0	403
0	23	77	490	20	20	60	468	55	45	0	417
0	25	75	511	20	30	50	452	60	10	30	466
0	30	70	491	20	40	40	470	60	20	20	507
0	33,3	66,7	496	20	50	30	379	60	30	10	497
0	40	60	472	20	60	20	335	60	40	0	429
0	45	55	452	*20	70	10	305	63	37	0	471
0	49	51	455	30	10	60	464	65	35	0	478
0	50	50	415	30	20	50	503	66	34	0	444
0	51	49	421	30	30	40	480	67	33	0	459
0	55,5	44,5	390	30	40	30	482	68	32	0	466
0	60	40	363	30	50	20	352	69	31	0	482
0	66,6	33,4	340	*30	60	10	340	70	10	20	485
0	70	30	331	40	10	50	487	70	20	10	492
**10	10	80	475	40	20	40	461	70	30	0	473
10	20	70	479	40	30	30	461	75	25	0	487
10	30	60	488	40	40	20	438	80	10	10	499
10	40	50	469	40	50	10	395	80	20	0	486
10	50	40	413	50	10	40	495	85	15	0	499
10	60	30	326	50	20	30	482	87,5	12,5	0	484
*10	70	20	295	50	30	20	478	90	10	0	508
*10	80	10	288	50	40	10	460				

Примечание. Звездочкой обозначены стекла, показатели преломления которых не были измерены, так как превышают 2,05, двумя звездочками — стекла, прозрачные только при отливке в очень тонкий слой, а в больших слоях молочные.

Исходными материалами служили борная кислота марки ХЧ (ГОСТ 9656-61), двуокись германия особой чистоты (ЦМТУ 05-1767) и окись свинца ЧДА (ГОСТ 9199-59). В некоторых случаях вместо окиси свинца использовался сурик, чистый (МРТУ 6-09-993-64).

Стекла приготавливались путем сплавления смеси компонентов в платиновых тиглях в силитовой печи в атмосфере воздуха, навеска составляла 40—50 г. Температура варки стекла подбиралась в зависимости от состава в пределах от 700 до 1350 °С. В расплавленном состоянии

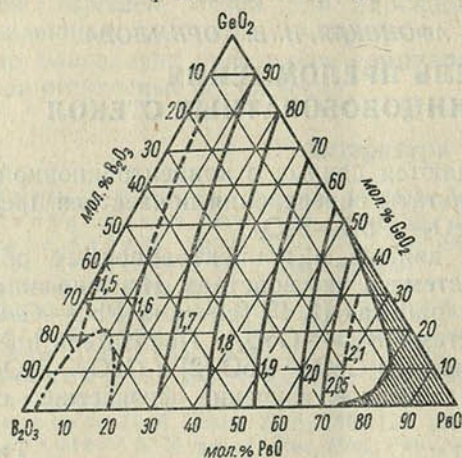


Рис. 1. Концентрационный треугольник системы  $\text{GeO}_2\text{—PbO—V}_2\text{O}_3$ , изолинии показателя преломления и область стеклообразования (не заштрихована). Пунктир — изолинии, построенные путем экстраполяции экспериментальных данных. Штрихпунктир — область молочных стекол

стекло тщательно перемешивалось с целью гомогенизации платиновым шпателем и выдерживалось в течение двух часов при максимальной для данного состава температуре. Затем расплав выливался в стальную изложницу. Отливки имели форму дисков диаметром 3 см, толщиной

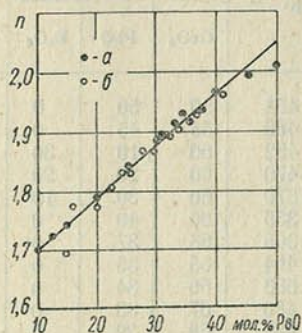


Рис. 2. Зависимость показателя преломления стекол системы  $\text{GeO}_2\text{—PbO}$  от состава:

a — наши данные; б — данные работы [2]

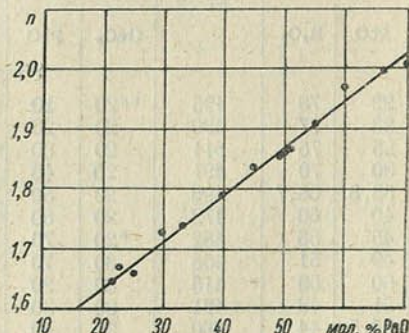


Рис. 3. Зависимость показателя преломления стекол системы  $\text{V}_2\text{O}_3\text{—PbO}$  от состава

2—3 мм. Для снятия напряжений отливки подвергались отжигу при температуре на 15—25 °С ниже температуры размягчения. Предварительно для каждого состава определялась температура размягчения по dilatометрическим кривым (см. таблицу).

Показатель преломления стекол определялся иммерсионным методом на микроскопе МИН-8 для белого света. Иммерсионные жидкости имели пределы показателя преломления 1,408—1,780 и 1,785—2,05. Измерения проводились при комнатной температуре.

Как видно из рис. 1, показатели преломления стекол, составы которых в тройной системе лежат параллельно двойной системе  $\text{GeO}_2\text{—V}_2\text{O}_5$ , незначительно изменяются при изменении соотношения компонентов, возрастая с увеличением  $\text{GeO}_2$ . С другой стороны, показатель преломления стекла равномерно повышается от стороны германиево-боратных стекол к богатым окисью свинца германиево-свинцовым стеклам.

Значения показателя преломления стекол граничной системы  $\text{GeO}_2\text{—PbO}$ , полученные нами, хорошо совпадают с данными работы [2] (рис. 2). Зависимость показателя преломления стекол граничной системы  $\text{V}_2\text{O}_5\text{—PbO}$  от содержания окиси свинца (рис. 3) так же, как и зависимость, представленная на рис. 2, носит линейный характер.

### Литература

1. Евстропьев К. С., Иванов А. О. Оптико-механическая промышленность, № 9, 1959.
2. Phillips B., Scrogger M. L. J. Amer. cer. soc., 48, № 8, 398, 1965.
3. Мельникова И. Г., Евстропьев К. С., Кузнецов А. Я. ЖФХ, 25, в. 11, 1951.
4. Murthy M. K., Scroggie B. Phys. and Chem. of Glasses, 7, № 2, 68, 1966.

*Институт физики твердого тела  
и полупроводников АН БССР*

*Поступило в редакцию 28.III 1969*

Н. Н. СИРОТА, В. М. ВАРИКАШ

### ДИЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА $\gamma$ -ОБЛУЧЕННЫХ КРИСТАЛЛОВ ТРИГЛИЦИНСЕЛЕНАТА И ТРИГЛИЦИНФТОРБЕРИЛЛАТА

В последнее время все большее внимание уделяется изучению влияния радиационных воздействий на различные свойства сегнетоэлектрических кристаллов [1—3]. Значительное число работ посвящено исследованию воздействий различного рода облучений на диэлектрические свойства и петлю гистерезиса триглицинсульфата [4—9]. Для установления общих закономерностей воздействия  $\gamma$ -излучения на кристаллы группы триглицинсульфата представляло несомненный интерес исследование кристаллов, изоморфных триглицинсульфату.

В настоящем сообщении проведено исследование влияния больших доз  $\gamma$ -облучения на диэлектрические свойства кристаллов триглицинселената и его аналога триглицинфторбериллата. Измерения проводились на пластинках толщиной около 1 мм и площадью 0,5—2 см<sup>2</sup>, вырезанных из кристалла перпендикулярно его кристаллографическим осям. Электроды на образцы наносились из дисперсного серебра (паста Дегусса). Значения диэлектрических проницаемостей измерялись измерителем емкостей и индуктивностей типа ИЕВ-1. Термостатирование осуществлялось ультратермостатом Хепплера. Облучение образцов производилось на стандартном кобальтовом источнике Со<sup>60</sup>. Дозы облучения до 10<sup>8</sup> p набирались при интенсивности излучения 70 p/сек. После указанных доз облучения вследствие возникновения дефектов кристаллы триглицинселената приобретали красный оттенок, а кристаллы триглицинфторбериллата были молочно-белого цвета. Петли диэлектрического гистерезиса полностью исчезали.

Характер изменения диэлектрических свойств кристаллов триглицинселената и триглицинфторбериллата под действием  $\gamma$ -облучения показан на рис. 1. Как видно,  $\gamma$ -облучение приводит к резкому уменьшению диэлектрической проницаемости  $\epsilon_{22}$  в области фазового перехода. Вдали от фазового перехода  $\gamma$ -облучение увеличивает значение диэлектрической проницаемости. В результате этого температурная зависимость  $\epsilon_{22}$   $\gamma$ -облученных образцов значительно сглаживается, а максимум получается несколько размытым. Смещения температуры Кюри в обоих кристаллах под действием  $\gamma$ -облучения происходят в сторону более низких температур, однако эти смещения значительно меньше, чем наблюдавшиеся ранее для кристаллов триглицинсульфата [9]. Проводились также измерения диэлектрической проницаемости отожженных образцов после  $\gamma$ -облучения. Отжиг проводился в ультратермостате при 80 °С в течение 20 час. На том же рисунке приведены температурные зависимости диэлектрических проницаемостей  $\epsilon_{22}$  отожженных образцов. Отжиг приводит к уменьшению диэлектрической проницаемости во всем исследованном температурном интервале и более резкому проявлению максимума в области фазового перехода.

Аналогичным образом  $\gamma$ -облучение влияет на значение диэлектрических проницаемостей  $\epsilon_{11}$  и  $\epsilon_{33}$  триглицинселената (рис. 2). Для обоих направлений облучение ведет к возрастанию диэлектрических проницаемостей, значения которых несколько уменьшаются в процессе отжига

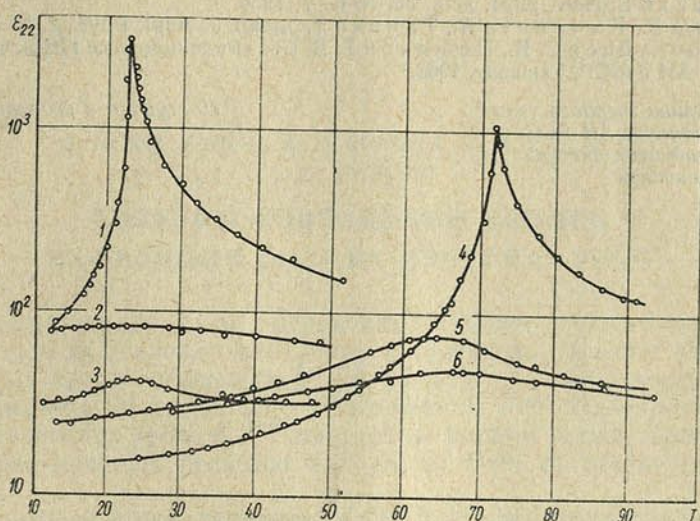


Рис. 1. Температурные зависимости ( $T$ , °C) диэлектрической проницаемости  $\epsilon_{22}$  триглицинселената (1, 2, 3) и триглицинфторбериллата (4, 5, 6):

1 и 4 — до облучения; 2 и 5 — после облучения; 3 и 6 — после отжига

га. Однако отжиг полностью не устраняет дефектов, возникающих в кристаллической решетке сегнетоэлектрика вследствие облучения, и поэтому не приводит к первоначальному значению диэлектрической проницаемости до облучения.

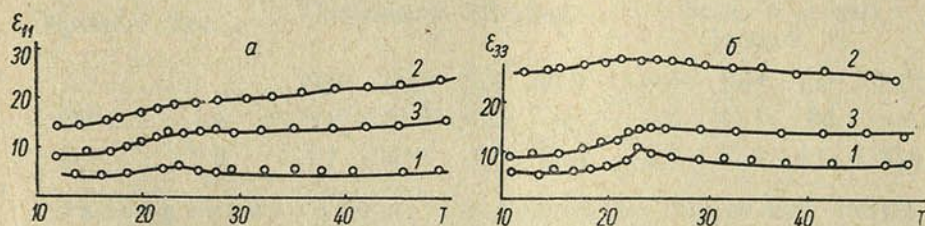


Рис. 2. Температурные зависимости диэлектрических проницаемостей  $\epsilon_{11}$  и  $\epsilon_{33}$  триглицинселената вдоль кристаллографических направлений [100] (а) и [001] (б):

1 — до облучения образцов; 2 — после облучения; 3 — после облучения и отжига

Полученные данные показывают, что закономерности, установленные по воздействию  $\gamma$ -облучения на диэлектрические свойства триглицинсульфата, имеют всеобщий характер. Они присущи также кристаллам триглицинселената и триглицинфторбериллата.

### Литература

1. Иванов Н. Р., Шувалов Л. А. Изв. АН СССР, сер. физ., 31, № 7, 1967.
2. Комлякова Н. С., Рудяк В. М. Изв. АН СССР, сер. физ., 31, № 11, 1967.
3. Данильчук Г. С., Кременчугский Л. С., Мальнев А. Ф. Изв. АН СССР, сер. физ., 31, № 11, 1967.

4. Юрин В. А., Баберкин А. С., Корниенко Э. Н., Гаврилова И. В. Изв. АН СССР, сер. физ., **24**, 1334, 1960.
5. Юрин В. А., Сильвестрова И. М., Желудев И. С. Кристаллография, **7**, 394, 1962.
6. Hilczer B., Jaskulski I. Bull. Acad. Polon. Sci., **11**, 715, 1963.
7. Fatuzzo E. Helv. phys. acta, **33**, № 6—7, 1960.
8. Toyda K., Kawabata A., Tanaka T. Jap. J. Appl. Phys., **2**, № 5, 331, 1963.
9. Стародубцев С. В., Пешиков Е. В. Сб. «Радиационные эффекты в твердых телах». Изд. АН УзССР, Ташкент, 1963.

*Институт физики твердого тела  
и полупроводников АН БССР,  
Минский радиотехнический  
институт*

*Поступило в редакцию 23.1 1969*

УДК 539.17

А. П. БОГДАНОВ, А. В. СОРОКА, В. Н. ТАДЭУШ,  
 Е. И. ФИРСОВ

**СПЕКТРЫ СОВПАДЕНИЙ  $\gamma$ -ЛУЧЕЙ  
 ИЗ РЕАКЦИИ ( $n, \gamma$ ) НА ИЗОТОПАХ  $Fe^{57,58}$**

Некоторые сведения о  $\gamma$ -переходах высокой энергии ядра  $Fe^{58}$  в реакции ( $n, \gamma$ ) на тепловых нейтронах получены на образцах с естественной смесью изотопов железа [1, 2]. Спектр  $\gamma$ -лучей с энергией выше 2 Мэв измерен в [3] на образце, обогащенном  $Fe^{57}$ . Однако способ разрядки ряда нижних уровней  $Fe^{58}$  остается не вполне ясным. Данные о  $\gamma$ -лучах, сопровождающих реакцию  $Fe^{58} (n, \gamma) Fe^{59}$ , в литературе отсутствуют.

Схемы возбужденных состояний  $Fe^{58}$  и  $Fe^{59}$  достаточно подробно исследованы в ( $d, p$ )-реакции [4—7]. Наиболее полные сведения об энергиях и квантовых характеристиках уровней  $Fe^{58}$  и  $Fe^{59}$  получены в работах [5] и [7] соответственно.

В данной работе приводятся результаты измерений спектров совпадений  $\gamma$ -лучей, испускаемых при захвате тепловых нейтронов  $Fe^{57}$  и  $Fe^{58}$ . Измерения выполнены с помощью сцинтилляционного спектрометра  $\gamma$ — $\gamma$ -совпадений на образцах, обогащенных изотопами  $Fe^{57}$  и  $Fe^{58}$ . Основные характеристики использованных образцов (соединение  $Fe_2O_3$ ) следующие.

Образец	Вес, г	Содержание изотопов, %				Вклад в сечение реакции, %			
		$Fe^{54}$	$Fe^{56}$	$Fe^{57}$	$Fe^{58}$	$Fe^{54}$	$Fe^{56}$	$Fe^{57}$	$Fe^{58}$
$Fe^{57}$	1,4	0,6	10,5	88,9	—	0,6	11,4	88	—
$Fe^{58}$	2,8	1,7	30,3	2,9	65,1	2,4	52,4	4,6	40,6

Экспериментальные результаты. *Изотоп  $Fe^{58}$* . Результаты измерения совпадений с  $\gamma$ -лучами, соответствующими прямым переходам из исходного состояния  $Fe^{58}$  на нижние уровни, представлены на рис. 1 и в таблице.

Наличие в спектре совпадений с  $\gamma$ -лучами  $>9$  Мэв (рис. 1, а) пика при 0,80 Мэв доказывает существование перехода из исходного состояния на первый возбужденный уровень 0,80 Мэв. Уровень 1,66 Мэв, заселяемый  $\gamma$ -переходом 8,37 Мэв, разряжается как непосредственно на основное состояние, так и каскадом через уровень 0,80 Мэв.

Интерпретация данных о способе разрядки уровня 1,66 Мэв затруднена тем обстоятельством, что  $\gamma$ -лучи 0,80 и 0,86 Мэв в спектрах совпадений не разрешены. Однако в спектре совпадений с  $\gamma$ -лучами 8,37 Мэв (рис. 1, б) пик 0,80 Мэв имеет значительно большую ширину, чем в предыдущем спектре и несколько смещен вправо. На рис. 1, в представлен суммарный спектр совпадений с  $\gamma$ -лучами 7,26 и 6,95 Мэв. Анализ спектров совпадений, полученных при нескольких близких значениях порога

одноканального анализатора, показывает, что пики 1,10, 1,96 и 2,78 Мэв обусловлены совпадениями с  $\gamma$ -лучами 7,26 Мэв, а пик 2,28 Мэв — с  $\gamma$ -лу-

Таблица

Каскадные переходы в  $Fe^{58}$  и  $Fe^{59}$ 

Исходный переход, Мэв	Заселяемый уровень, Мэв	Способ разрядки
<i>Излучающий изотоп <math>Fe^{58}</math></i>		
9,23	0,80	0,80
8,37	1,66	1,66~(60%)
		0,86—0,80~(40%)
7,26	2,78	2,78~(20%)
		1,96—0,80~(40%)
		1,10—1,66~(40%)
6,95	3,08	2,28—0,80
6,50	3,53	2,73—0,80
<i>Излучающий изотоп <math>Fe^{59}</math></i>		
6,31	0,29	0,29
5,87	0,73	0,73

чам 6,95 Мэв. В спектре совпадений с  $\gamma$ -лучами 6,50 Мэв (рис. 1, *г*) кроме уже известных линий, присутствует пик 2,73 Мэв, соответствующий  $\gamma$ -переходу с уровня 3,53 Мэв на первый возбужденный уровень.  $\gamma$ -Переходы с уровней 3,08 и 3,53 Мэв непосредственно на основное состояние в нашем эксперименте не обнаружены. Следует отметить, что наши данные о способах разрядки нижних уровней  $Fe^{58}$  расходятся с выводами работы [3].

*Изотоп  $Fe^{58}$ .* Спектры совпадений  $\gamma$ -лучей из реакции ( $n, \gamma$ ) на образце, обогащенном изотопом  $Fe^{58}$ , приведены на рис. 2. Из-за наличия в образце значительной примеси изотопа  $Fe^{56}$  в данных спектрах присутствуют также линии из реакции  $Fe^{56}(n, \gamma)Fe^{57}$ . Поэтому для более надежного определения, какому излучающему изотопу принадлежат наблюдаемые в спектрах совпадений линии, бы-

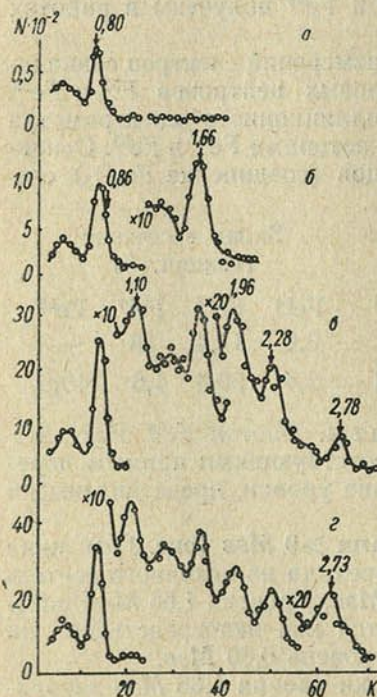


Рис. 1. Спектры совпадений с  $\gamma$ -лучами в реакции  $Fe^{57}(n, \gamma)Fe^{58}$  при энергии:

*а* — 9,23 Мэв; *б* — 8,37; *в* — 7,26 и 6,95; *г* — 6,50; *N* — число совпадений за 9 час; *K* — номер канала

ли измерены спектры совпадений на образце с естественной смесью изотопов железа, где основным излучающим изотопом является  $Fe^{57}$ . Сравнение полученных спектров позволило установить, что из исходного состояния  $Fe^{59}$  существуют прямые  $\gamma$ -переходы на  $p$ -уровни 0,29 и

0,73 Мэв, которые разряжаются только прямыми  $\gamma$ -переходами на основное состояние. Наблюдаемые в спектрах совпадений (рис. 2)  $\gamma$ -линии 0,36, 1,26, 1,62 и 1,72 принадлежат изотопу  $Fe^{57}$ , а 0,80 Мэв изотопу  $Fe^{58}$ .

В нашем эксперименте не было получено никаких указаний на существование  $\gamma$ -перехода из исходного состояния  $Fe^{59}$  на уровень 1,21 Мэв с характеристиками  $1/2^-$  [7]. Согласно [7], уровень 1,21 Мэв имеет приве-

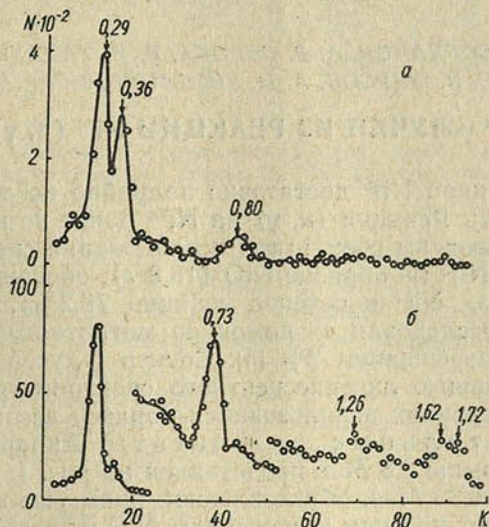


Рис. 2. Спектры совпадений с  $\gamma$ -лучами в реакции  $Fe^{58}(n, \gamma)Fe^{59}$  при энергиях:

а—6,31 Мэв; б—5,87

денную нейтронную ширину в четыре раза большую, чем уровни 0,29 и 0,73 Мэв. Отсутствие на него  $\gamma$ -перехода из исходного состояния в реакции  $(n, \gamma)$  является примером антикорреляции между вероятностями  $\gamma$ -переходов типа  $E1$  и приведенными нейтронными ширинами конечных  $p$ -уровней, как это имеет место в ядрах  $Fe^{57}$ ,  $Ni^{63}$  и  $Zn^{65}$ .

### Литература

1. Джелепов Б. С., Пекер Л. К. Схемы распада радиоактивных ядер  $A < 100$ . Изд. «Наука», М., 1966.
2. Грошев Л. В., Демидов А. М., Котельников Г. А., Луценко В. Н. Изв. АН СССР, сер. физ., 28, 1234, 1964.
3. Мурзин А. В., Белых Г. В., Голышкин В. И., Огородник А. Ф. Ядерная физика, 6, 446, 1967.
4. Бочин В. П., Жеребцова К. И., Золотарев В. С. и др. Вестник ЛГУ, сер. физ. и хим., 4, 22, 1963.
5. Fulmer R. H., McCarthy A. L. Phys. Rev., 131, 2133, 1963.
6. Sperdufo A., Buechner W. W. Phys. Rev., 134, B142, 1964.
7. Klema E. D., Lee L. L. Jr., Schibber J. P. Phys. Rev., 161, 1134, 1967.

Институт физики  
АН БССР

Поступило в редакцию 18.IV 1969

А. П. БОГДАНОВ, А. В. СОРОКА, В. Н. ТАДЭУШ,  
 Е. И. ФИРСОВ, А. М. ХИЛЬМАНОВИЧ

**СПЕКТР  $\gamma$ -ЛУЧЕЙ ИЗ РЕАКЦИИ  $Ni^{64}(n, \gamma) Ni^{65}$**

Спектр уровней ядра  $Ni^{65}$  достаточно подробно исследован только в реакции  $(d, p)$  [1—4]. Реакция  $(n, \gamma)$  на  $Ni^{64}$  ранее не изучалась. В настоящей работе приведены результаты исследования спектра  $\gamma$ -лучей из реакции  $Ni^{64}(n, \gamma) Ni^{65}$  на образце  $NiO$  (18,8 г), обогащенном до 91,9% изотопом  $Ni^{64}$  (вклад  $Ni^{64}$  в сечение реакции 78,2%). Спектр  $\gamma$ -лучей высокой энергии исследован с помощью магнитного комптоновского  $\gamma$ -спектрометра с разрешением 2% [5]. Спектр  $\gamma$ -лучей низкой энергии исследовался с помощью люминесцентного спектрометра  $\gamma$ — $\gamma$ -совпадений [6]. В этих измерениях использовался образец весом 4 г.

Экспериментальные результаты. Аппаратурный спектр  $\gamma$ -лучей с энергией выше 2,8 Мэв представлен на рис. 1. Все обнаруженные  $\gamma$ -линии, кроме 6,84 Мэв, обусловленной примесью в образце изотопа  $Ni^{62}$ , соответствуют прямым  $\gamma$ -переходам  $Ni^{65}$  из исходного состояния на нижние  $p$ -уровни с энергиями 0,06, 0,31, 0,70 и 1,41 Мэв. Данные по энергиям и интенсивностям обнаруженных  $\gamma$ -лучей приведены в таблице.

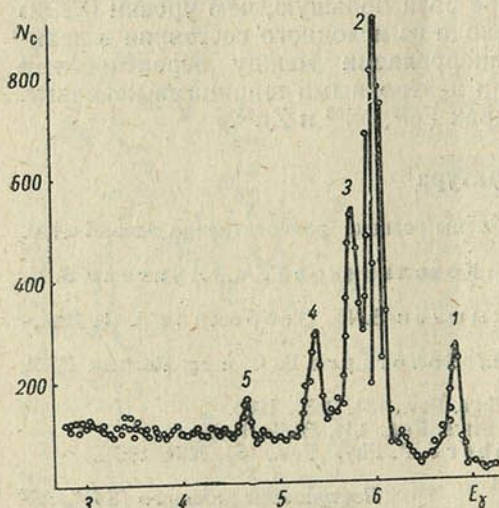


Рис. 1. Спектр  $\gamma$ -лучей из реакции  $Ni^{64}(n, \gamma) Ni^{65}$

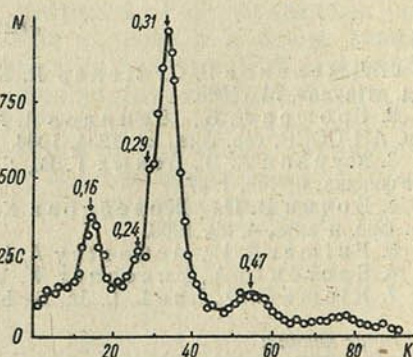


Рис. 2. Спектр совпадений с  $\gamma$ -лучами 5,81 Мэв ( $N$  — число совпадений за 9 час,  $K$  — номер канала)

Из энергетических соображений следует, что  $\gamma$ -лучи 6,06 Мэв должны находиться в совпадении с  $\gamma$ -лучами 0,06 Мэв. Однако спектр совпадений с  $\gamma$ -лучами 6,06 Мэв получить не удалось, так как порог чувствительности быстрой схемы совпадений равен 0,08 Мэв. Спектры совпадений с  $\gamma$ -лучами 5,81, 5,42 и 4,70 Мэв представлены на рис. 2, 3. Небольшой

Таблица

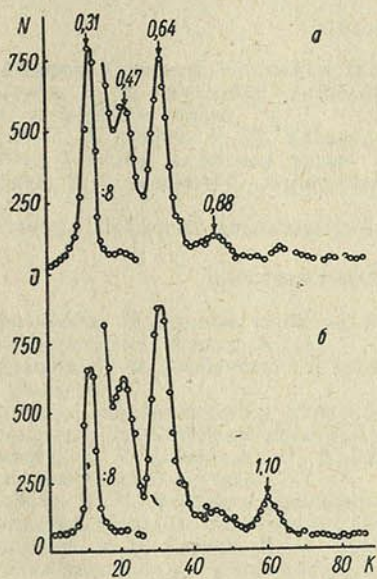
Энергии и интенсивности  $\gamma$ -лучей из реакции  $Ni^{64}(n, \gamma)Ni^{65*}$ 

Исходный переход, Мэв	$I_\gamma, \%$	Заселяемый уровень, Мэв	Способ разрядки
6,06 (2)	61	0,06	0,06
5,51 (2)	17	0,31	0,31 90%
5,42 (2)	8	0,70	0,24—0,06 10%
4,70 (2)	3	1,41	0,64—0,06
			1,10—0,31

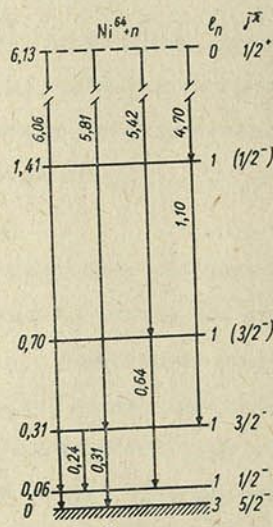
\*) Ошибка в определении энергии приведена в скобках в единицах последней цифры. Ошибка в определении интенсивности порядка 20%.

прилив у жесткого края линии 0,64 Мэв является пиком суммы каскадных  $\gamma$ -лучей 0,64—0,06 Мэв. Пики при 0,16, 0,29, 0,47, 0,88 и 1,20 Мэв обусловлены наличием в образце примесей изотопов  $Ni^{58,60,62}$ . Все они появляются в спектрах совпадений с  $\gamma$ -лучами, энергия которых выше энергии связи нейтрона в ядре  $Ni^{65}$  и точно совпадают по энергии с наиболее интенсивными переходами в ядрах  $Ni^{59,61,63}$  [7].

Схема  $\gamma$ -переходов  $Ni^{65}$ , составленная на основе данных настоящего эксперимента и работ [1, 3], приведена на рис. 4. В схему включены толь-

Рис. 3. Спектры совпадений с  $\gamma$ -лучами:

а — 5,42 Мэв, б — 4,70

Рис. 4. Схема  $\gamma$ -переходов ядра  $Ni^{65}$ 

ко уровни, возбуждаемые в реакции  $(n, \gamma)$ . Явной корреляции между вероятностями  $E1$ -переходов  $I_\gamma/E_\gamma^3$  с приведенными нейтронными ширинами конечных  $p$ -уровней не наблюдается. Малой приведенной нейтронной ширине уровня 0,31 Мэв с характеристиками  $3/2^-$  соответствует большая величина  $I_\gamma/E_\gamma^3$ , тогда как для уровня 0,70 Мэв теми же характеристиками имеет место обратное соотношение между указанными

величинами. Прямой переход на  $p$ -уровень 2,15 Мэв нами не обнаружен. Не обнаружено также никаких указаний на заселение уровней 1,33 и 1,78 Мэв, которые, по данным [1], имеют  $l_n = 1$ .

Обращает на себя внимание характер распада  $p$ -уровней 0,31, 0,70 и 1,41 Мэв. Уровни 0,70 и 1,41 Мэв распадаются только каскадными переходами через уровни 0,06 и 0,31 Мэв соответственно. Уровень же 0,31 Мэв на 90% распадается прямым переходом в основное состояние и на 10% каскадным переходом через уровень 0,06 Мэв, хотя, согласно одночастичной модели, прямой переход 0,31 Мэв является  $l$ -запрещенным  $M1$ -переходом  $p_{3/2} \rightarrow f_{5/2}$ , и вероятность его должна быть меньше вероятности каскадного  $l$ -разрешенного  $M1$ -перехода  $p_{3/2} \rightarrow p_{1/2}$ .

### Литература

1. McCarthy A. L., Fulmer R. H. Phys. Rev., **131**, 2133, 1963.
2. Бочин В. П., Жеребцова К. И., Комаров В. А., Краснов Л. В., Литвин В. Ф., Немилев Ю. А. Вестник ЛГУ, сер. физ. и хим., **10**, 34, 1965.
3. Lee L. L. Jr., Schiffer J. P. Phys. Rev., **154**, 1097, 1967.
4. Tee R. G., Aspinall A. Nucl. Phys., **A98**, 417, 1967.
5. Рудак Э. А., Фирсов Е. И. Атомная энергия, **18**, 285, 1965.
6. Богданов А. П., Фирсов Е. И. ПТЭ, **3**, 35, 1964.
7. Богданов А. П., Быстров Л. Н., Рудак Э. А., Фирсов Е. И. Ядерная физика, **5**, 1161, 1967.

Институт физики  
АН БССР

Поступило в редакцию 21.IV 1969

## ЗМЕСТ

### МАТЭМАТЫКА

В. С. Коных. О разрешимых подгруппах симплектической группы . . . . .	5
Г. И. Карпиловский. Конечные группы, допускающие точное неприводимое представление степени 5 над полем рациональных чисел . . . . .	9
В. А. Басик. Об одном упрощении алгоритма матричной прогонки . . . . .	17
В. А. Лисковец. Подсчет корневых изначально связанных ориентированных графов . . . . .	23
В. В. Бобков, Н. А. Бобкова. Об одном способе построения вычислительных схем метода характеристик . . . . .	33
А. В. Мошинский. Дифракция цилиндрической электромагнитной волны на системе щелей в бесконечном идеально проводящем экране . . . . .	41
В. В. Харитонов. К вопросу о решении некоторых задач теплопроводности, сводимых к обобщенному дифференциальному уравнению Бесселя . . . . .	50
Г. Н. Пыхтеев. О квадратурных формулах для интегралов типа Коши по прямолинейному разомкнутому контуру и методах оценки их погрешности . . . . .	55
И. А. Соколов. О краевой задаче типа Римана для полианалитических функций на окружности . . . . .	64
Э. М. Шац. Наилучшая кубатурная формула для одного класса функций . . . . .	72
С. И. Гайдук, Н. И. Захаренкова. Применение метода контурного интеграла к решению одной задачи о поперечных колебаниях релаксирующего стержня . . . . .	78

### ФІЗІКА

Ф. И. Федоров. Основное состояние атома гелия . . . . .	87
М. М. Сирата, Я. М. Галалобаў. Экспериментальнае даследаванне структурных амплітуд у фасфідзе індыю . . . . .	92
Г. К. Глыч, І. Л. Кацаў, У. Д. Казлоў. Некаторыя асаблівасці рэгістрацыі выпраменьвання ў малым цялесным вугле . . . . .	96
А. А. Дрозд, В. І. Гасцішчаў. Звышправодны саленіод з моцным магнітным полем . . . . .	101
Э. В. Ратнікаў. Разліковыя характарыстыкі карануючага слоя . . . . .	106

### КАРОТКІЯ ПАВЕДАМЛЕННІ

Н. Н. Третьякова. Некоторые свойства матричных элементов неприводимых унитарных представлений группы $SO(n)$ . . . . .	110
В. Н. Абрашин, Г. Ф. Горбачева. Об одной схеме метода прямых для параболического уравнения . . . . .	113
А. С. Потупа. Узкорезонансная аппроксимация как необходимое условие «ядерной демократии» и адронный спектр масс . . . . .	118
Н. Н. Сирота, И. А. Афонская, Н. В. Корнилова. Показатель преломления германиево-свинцовооборотных стекол . . . . .	121
Н. Н. Сирота, В. М. Варикаш. Диэлектрические свойства $\gamma$ -облученных кристаллов триглицинселената и триглицинфторбериллата . . . . .	124
А. П. Богданов, А. В. Сорока, В. Н. Тадэуш, Е. И. Фирсов. Спектры совпадений $\gamma$ -лучей из реакции $(n, \gamma)$ на изотопах $Fe^{57, 58}$ . . . . .	127
А. П. Богданов, А. В. Сорока, В. Н. Тадэуш, Е. И. Фирсов, А. М. Хильманович. Спектр $\gamma$ -лучей из реакции $Ni^{64}(n, \gamma)Ni^{65}$ . . . . .	130

## СОДЕРЖАНИЕ

## МАТЕМАТИКА

В. С. Колюх. О разрешимых подгруппах симплектической группы	5
Г. И. Карпиловский. Конечные группы, допускающие точное неприводимое представление степени 5 над полем рациональных чисел	9
В. А. Басик. Об одном упрощении алгоритма матричной прогонки	17
В. А. Лисковец. Подсчет корневых инициально связанных ориентированных графов	23
В. В. Бобков, Н. А. Бобкова. Об одном способе построения вычислительных схем метода характеристик	33
А. В. Мошинский. Дифракция цилиндрической электромагнитной волны на системе щелей в бесконечном идеально проводящем экране	41
В. В. Харитонов. К вопросу о решении некоторых задач теплопроводности, сводимых к обобщенному дифференциальному уравнению Бесселя	50
Г. Н. Пыхтеев. О квадратурных формулах для интегралов типа Коши по прямолинейному разомкнутому контуру и методах оценки их погрешности	55
И. А. Соколов. О краевой задаче типа Римана для полианалитических функций на окружности	64
Э. М. Шац. Наилучшая кубатурная формула для одного класса функций	72
С. И. Гайдук, Н. И. Захаренкова. Применение метода контурного интеграла к решению одной задачи о поперечных колебаниях релаксирующего стержня	78

## ФИЗИКА

Ф. И. Федоров. Основное состояние атома гелия	87
Н. Н. Сирота, Е. М. Гололобов. Экспериментальное исследование структурных амплитуд в фосфиде индия	92
Г. К. Ильич, И. Л. Кацев, В. Д. Козлов. Некоторые особенности регистрации излучения в малом телесном угле	96
А. А. Дрозд, В. И. Гостищев. Сверхпроводящий соленоид с сильным магнитным полем	101
Э. В. Ратников. Расчетные характеристики коронирующего слоя	106

## КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

Н. Н. Третьякова. Некоторые свойства матричных элементов неприводимых унитарных представлений группы $SO(n)$	110
В. Н. Абрашин, Г. Ф. Горбачева. Об одной схеме метода прямых для параболического уравнения	113
А. С. Потупа. Узкорезонансная аппроксимация как необходимое условие «ядерной демократии» и адронный спектр масс	118
Н. Н. Сирота, И. А. Афонская, Н. В. Корнилова. Показатель преломления германиево-свинцовооборотных стекол	121
Н. Н. Сирота, В. М. Варикаш. Диэлектрические свойства $\gamma$ -облученных кристаллов триглицинселената и триглицинфторбериллата	124
А. П. Богданов, А. В. Сорока, В. Н. Тадэуш, Е. И. Фирсов. Спектры совпадений $\gamma$ -лучей из реакции $(n, \gamma)$ на изотопах $Fe^{57, 58}$	127
А. П. Богданов, А. В. Сорока, В. Н. Тадэуш, Е. И. Фирсов, А. М. Хильманович. Спектр $\gamma$ -лучей из реакции $Ni^{64}(n, \gamma)Ni^{65}$	130

## РЕФЕРАТЫ

УДК 512.86

**О разрешимых подгруппах симплектической группы.** Конох В. С. «Вестці Акадэміі навук БССР», серыя фізіка-матэматычных навук. 1969 г., № 5, 5—8.

Рассматриваются два класса разрешимых подгрупп симплектической группы над произвольным полем, один из которых играет важную роль при изучении разрешимых подгрупп полной линейной группы.

Библиографий 5.

УДК 519.44

**Конечные группы, допускающие точное неприводимое представление степени 5 над полем рациональных чисел.** Карпиловский Г. И. «Вестці Акадэміі навук БССР», серыя фізіка-матэматычных навук. 1969 г., № 5, 9—16.

Дается полное описание (с точностью до изоморфизма) всех конечных групп, допускающих точное неприводимое представление степени 5 над полем рациональных чисел  $R$ . Таких групп существует точно 18, и для каждой из них указывается явная матричная реализация в группе  $GL(5, R)$ .

Библиографий 9.

УДК 518 : 517.944/947

**Об одном упрощении алгоритма матричной прогонки.** Басик В. А. «Вестці Акадэміі навук БССР», серыя фізіка-матэматычных навук. 1969 г., № 5, 17—22.

Решение первой, второй и третьей краевой задач в прямоугольной области  $D$  ( $0 \leq x \leq 1$ ,  $0 \leq y \leq 1$ ) для уравнения

$$a(x)u_{xx} + b(y)u_{yy} + c(x)u_x + d(y)u_y - 2(p(x) + g(y))u = f(x, y),$$

где  $a(x) > 0$ ,  $b(y) > 0$ , методом конечных разностей приводит к линейной системе алгебраических уравнений высокого порядка. Решая последнюю методом матричной прогонки, на каждом шаге приходится обращать полную матрицу  $N$ -го порядка. В работе обращения полных матриц заменяются обращением диагональных матриц.

Библиографий 6.

УДК 519.1+511

**Подсчет корневых инициально связных ориентированных графов.** Лисковец В. А. «Вестці Акадэміі навук БССР», серыя фізіка-матэматычных навук. 1969 г., № 5, 23—32.

Диграф (т. е. ориентированный граф) с корнем называется корневым инициально связным (к.и.с.), если все его вершины достижимы из корня. Устанавливается тождество, связывающее число всех к.и.с. диграфов без петель и кратных дуг, обладающих определенным автоморфизмом, с аналогичным числом связных неориентированных графов. Отсюда с помощью известной леммы Бернсайда выводится явная формула для числа всех попарно не изоморфных к.и.с. диграфов с  $n$  вершинами. Это решает корневой вариант одной из задач, сформулированных Ф. Харари.

Библиографий 10.

УДК 518 : 517.944/947

Об одном способе построения вычислительных схем метода характеристик. Бобков В. В., Бобкова Н. А. «Весті Академії наук БССР», серия фізика-математичних наук. 1969 г., № 5, 33—40.

Предлагается способ построения вычислительных схем метода характеристик, использующий основную идею метода получения одношаговых правил приближенного решения обыкновенных дифференциальных уравнений, основанного на многократном использовании квадратурных формул понижающейся алгебраической степени точности (РЖМат, 1968, 9Б 692). В частности, для задачи Гурса в случае гиперболической системы двух квазилинейных уравнений в частных производных первого порядка приведены примеры явных и неявных вычислительных схем метода характеристик, построенных по предлагаемому способу, с локальной погрешностью решения до порядка  $h^3$  включительно, где  $h$  — шаг сетки характеристик.

Библиографий 6.

УДК 517.9 : 535.4

Дифракция цилиндрической электромагнитной волны на системе щелей в бесконечном идеально проводящем экране. Мошинский А. В. «Весті Академії наук БССР», серия фізика-математичних наук. 1969 г., № 5, 41—49.

Методом разделения переменных в координатах эллиптического цилиндра решается задача о дифракции цилиндрической волны, источником которой является бесконечный тонкий провод с электрическим током, на конечной системе щелей в бесконечном идеально проводящем экране. Дифрагированное поле представляется в виде ряда по функциям Матье, неизвестные коэффициенты которого находятся из решения бесконечной системы линейных уравнений с комплексными матричными элементами и правыми частями, разрешимой методом редукции. Получены формулы, пригодные для численных исследований дифракционных полей как в ближней, так и в дальней зонах.

Иллюстраций 1. Библиографий 11.

УДК 517.6/8(083.3) : 536.3 : 536.48

К вопросу о решении некоторых задач теплопроводности, сводимых к обобщенному дифференциальному уравнению Бесселя. Харитонов В. В. «Весті Академії наук БССР», серия фізика-математичних наук. 1969 г., № 5, 50—54.

Рассмотрена задача о решении уравнения вида  $zu'' + u' \pm zu^m = 0$ , которое по аналогии можно именовать обобщенным бесселевским уравнением. Показано, что решениями указанного уравнения являются некоторые функции, частными случаями которых (при  $m=1$ ) являются обычные функции Бесселя. Приведены формулы полученных обобщенных ( $m>1$ ) функций Бесселя в виде рядов и некоторые их наиболее важные асимптотические представления через обычные ( $m=1$ ) функции Бесселя, что позволяет использовать для решения имеющиеся таблицы.

Библиографий 10.

УДК 517.392

О квадратурных формулах для интегралов типа Коши по прямолинейному разомкнутому контуру и методах оценки их погрешности. Пыхтеев Г. Н. «Весті Академії наук БССР», серия фізика-математичних наук. 1969 г., № 5, 55—63.

Рассматриваются приближенные формулы для интегралов типа Коши

$$\Omega(z) = \frac{\omega(z)}{\pi i} \int_{-1}^1 \frac{1}{\omega(t)} \frac{f(t)}{t-z} dt, \quad z \in [-1, 1]$$

и их главных значений

$$T(x) = \frac{\omega(x)}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{1}{\omega(t)} \frac{f(t)}{t-x} dt, \quad x \in [-1, 1]$$

( $\omega(x)$  — действительная функция,  $\omega(z)$  — аналитическая функция, удовлетворяющая условию  $\lim_{z \rightarrow x \in [-1, 1]} \omega(z) = \omega(x)$ ), имеющие некоторую аналогию с квадратурными формулами для обычных римановых интегралов, а именно: приближенное значение интеграла представляется в форме линейной комбинации конечного числа произведений заданных функций на заданные линейные функционалы. Предлагаются методы получения априорных оценок погрешности рассматриваемых приближенных формул в классе функций, дифференцируемых с заданной плотностью.

Библиографий 15.

УДК 517.948.32

О краевой задаче типа Римана для полианалитических функций на окружности. Соколов И. А. «Весті Академії наук БССР», серия фізика-математичних наук. 1969 г., № 5, 64—71.

Рассматривается задача типа Римана

$$\Delta^k F^+(t, \bar{t}) = G_k(t) \Delta^k F^-(t, \bar{t}) + g_k(t) \\ (k = 0, 1, \dots, n-1)$$

( $\Delta$  — оператор Лапласа) для полианалитических функций  $n$ -го порядка на окружности (определение полианалитической функции см. в монографии Ф. Д. Гахова «Краевые задачи». М., 1963 г.). На основе представления полианалитических функций через аналитические рассматриваемая задача сводится к  $n$  задачам Римана для аналитических функций. Это позволяет произвести точный подсчет числа линейно независимых решений задачи в зависимости от порядка  $n$  и индексов коэффициентов. Решение дается в замкнутой форме.

Библиографий 3.

УДК 518 : 517.392

Наилучшая кубатурная формула для одного класса функций. Шац Э. М. «Весті Академії наук БССР», серия фізика-математичних наук. 1969 г., № 5, 72—77.

Для множества функций  $f(x, y) \in F_{01}(M)$ , удовлетворяющих на  $[0, 1] \times [0, 1]$  следующим условиям:

$$f(x, 0) \equiv f(x, 1) \equiv f(0, y) \equiv f(1, y) \equiv 0,$$

$f'_x$ ,  $f'_y$  и  $f''_{xy}$  ограничены, интегрируемы и

$$\left\{ \int_0^1 \int_0^1 [f''_{xy}(x, y)]^2 dx dy \right\}^{1/2} \leq M,$$

строится наилучшая кубатурная формула вида

$$\int_0^1 \int_0^1 f(x, y) dx dy = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^m F_{kl} f(x_k, y_l) + R_{n, m}(f).$$

Наилучшей является кубатурная формула

$$\int_0^1 \int_0^1 f(x, y) dx dy = \frac{1}{(n+1)(m+1)} \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^m f\left(\frac{k}{n+1}, \frac{l}{m+1}\right) \\ + R_{n, m}(f).$$

где

$$\min_{F_{kl}, x_k, y_l} \sup_{f \in F_{01}(M)} |R_{n,m}(f)| =$$

$$= \frac{M}{12(n+1)(m+1)} \sqrt{n^2 + m^2 + 2n + 2m + 1}.$$

Библиографий 2.

УДК 517.946,9

Применение метода контурного интеграла к решению одной задачи о поперечных колебаниях релаксирующего стержня. Гайдук С. И., Захаренкова Н. И. «Весті Академії наук БССР», серия фізика-математичних наук. 1969 г., № 5, 78—86.

Дано строгое решение задачи о поперечных колебаниях однородного конечного релаксирующего стержня в случае, когда один его конец закреплен, а второй свободен.

Задача решается методом контурного интеграла.

Библиографий 3.

УДК 530.145

Основное состояние атома гелия. Федоров Ф. И. «Весті Академії наук БССР», серия фізика-математичних наук. 1969 г., № 5, 87—91.

Волновая функция основного состояния атома гелия строится из пробных

функций типа Хиллерааса  $\psi = \sum_{v=1}^n C_v \psi_v$ ,  $\psi_v = u^{k_v} t^{l_v} s^{m_v} e^{-\epsilon_v s}$ , с тем отличием, что показатели  $k_v$  и  $m_v$  могут принимать целые, полуцелые и отрицательные значения ( $l_v$  — четные) и  $\epsilon_v$  наряду с  $C_v$  являются вариационными параметрами. Функции  $\psi_v$  выбирались последовательно из заданной совокупности 193 функций. Приведены параметры  $\epsilon_v$ ,  $C_v$  и значения энергии  $E$  для  $n=4, 5 \dots 9$ . Полученные значения энергии меняются от  $E=-2,902862$  ( $n=4$ ) до  $E=-2,90371883$  ( $n=9$ ). Все полученные функции дают значительно лучшие значения энергии, чем любые другие известные функции с тем же числом членов.

Таблиц 2. Библиографий 12.

УДК 548.73

Экспериментальное исследование структурных амплитуд в фосфиде индия. Сирота Н. Н., Гололобов Е. М. «Весті Академії наук БССР», серия фізика-математичних наук. 1969 г., № 5, 92—95.

Для рентгеновских измерений использовались мелкие порошки ( $\leq 1$  мк) InP. Образцы приготавливались при различных давлениях и без давления. Снимались дифракционные спектры в  $\text{CuK}\alpha$ -излучении, монохроматизированном упруго изогнутой пластинкой германия (111). Образцы предварительно исследовались на эффекты пористости, преимущественной ориентации и грубости поверхности. В интегральные интенсивности рефлексов (220) и (440), снятых от спрессованных образцов, вводились поправки на преимущественную ориентацию. Поляризационный фактор определялся с учетом реального кристаллического состояния кристалл-монокроматора. Вводились поправки на дисперсию, ТДР, геометрию съемки. Переход к абсолютной шкале осуществлялся как методом эталона (Ni), так и непосредственным измерением первичного пучка. Определены температурные факторы атомов в соединении  $B_P=1,3 \text{ \AA}^2$ ,  $B_{In}=1,5 \text{ \AA}^2$ .

Таблиц 1. Иллюстраций 2. Библиографий 12.

УДК 535.36

Некоторые особенности регистрации излучения в малом телесном угле. Ильич Г. К., Кацев И. Л., Козлов В. Д. «Весті Академії наук БССР», серия фізика-математичних наук. 1969 г., № 5, 96—100.

Рассмотрена оптическая система, состоящая из объектива и диафрагмы с малым отверстием, расположенным в фокусе объектива. Определен отно-

сительный вклад различных участков фотометрируемого светящегося пространства, находящихся на произвольных расстояниях от объектива, в величину суммарного светового потока, регистрируемого приемником. Показано, что при определенных условиях функция чувствительности приемника к различным фотометрируемым участкам описывает также относительное распределение освещенности в прожекторном луче.

Полученные данные могут быть использованы при решении прикладных задач, связанных с оптическим зондированием атмосферы, водной среды и других рассеивающих объектов.

Иллюстраций 3. Библиографий 2.

УДК 537.312.62 : 538.12

**Сверхпроводящий соленоид с сильным магнитным полем.**

Дрозд А. А., Гостищев В. И. «Весті Академії наук БССР», серия фізика-математичних наук. 1969 г., № 5, 101—105.

Подробно описана конструкция секционированного сверхпроводящего соленоида с напряженностью магнитного поля 52 килоэрстед.

Приведена кривая распределения магнитного поля вдоль оси соленоида.

Дается описание и конструкция криостата для соленоида.

Иллюстраций 3. Библиографий 3.

УДК 537.523.3

**Расчетные характеристики коронирующего слоя.** Ратников Э. В.

«Весті Академії наук БССР», серия фізика-математичних наук. 1969 г., № 5, 106—109.

Предлагается метод расчета величины коронирующего слоя и концентрации в нем зарядов. Получены выражения, позволяющие оценить указанные параметры в области интенсивной ионизации короны.

Библиографий 5.

УДК 519.40

**Некоторые свойства матричных элементов неприводимых унитарных представлений группы  $SO(n)$ .** Третьякова Н. Н.

«Весті Академії наук БССР», серия фізика-математичних наук. 1969 г., № 5, 110—112.

Изучаются матричные элементы неприводимых унитарных представлений группы  $SO(n)$ , впервые вычисленные Н. Я. Виленкиным и Е. Н. Ламбиной. Получены соотношения симметрии для этих функций, найдены их асимптотические представления. Выведен ряд простых рекуррентных формул. В частности, при  $n=3$  полученные результаты согласуются с хорошо известными формулами для полиномов Лежандра и для обобщенных сферических функций.

Библиографий 5.

УДК 518 : 517(944)947

**Об одной схеме метода прямых для параболического уравнения.** Абрашин В. Н., Горбачева Г. Ф.

«Весті Академії наук БССР», серия фізика-математичних наук. 1969 г., № 5, 113—117.

В случае первой краевой задачи для параболического уравнения второго порядка

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - g(x)u + f(x, t), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq t \leq T,$$

$$a(x) > 0, \quad g(x) \geq 0,$$

рассматривается двухслойная схема метода прямых (когда значения неизвестной функции находятся на прямых, параллельных пространственной оси). В отличие от ранее рассмотренных схем исходная краевая задача аппроксимируется краевой задачей для системы обыкновенных дифференциальных уравнений четвертого порядка. Это дает возможность получить двухслойную схему, сходящуюся со скоростью порядка  $O(h^4)$ .

Библиографий 4.

УДК 539.12

**Узкорезонансная аппроксимация как необходимое условие «ядерной демократии» и адронный спектр масс.** Потупа А. С. «Весті Академії наук БССР», серия фізика-математичних наук. 1969 г., № 5, 118—120.

Показано, что модель 10-процентной аппроксимации, основанная на совместном использовании узкорезонансного приближения и усредненных по мультиплетам с одинаковыми  $J^P$  траекториях Редже, позволяет в принципе объяснить эмпирические спектральные закономерности адронов. Библиографий 12.

УДК 539.2 : 535.314 + 666

**Показатель преломления германиево-свинцовоборатных стекол.** Сирота Н. Н., Афонская И. А., Корнилова Н. В. «Весті Академії наук БССР», серия фізика-математичних наук. 1969 г., № 5, 121—123.

Приведены результаты определения области стеклообразования и измерения показателя преломления стекол тройной системы  $\text{GeO}_2\text{—PbO—B}_2\text{O}_3$ . Показано, что показатели преломления стекол, составы которых в тройной системе лежат параллельно двойной системе  $\text{GeO}_2\text{—B}_2\text{O}_3$ , незначительно возрастают с увеличением  $\text{GeO}_2$ . Показатель преломления стекла монотонно возрастает со стороны германиево-боратных стекол к стеклам, богатым PbO.

Таблиц 1. Иллюстраций 3. Библиографий 4.

УДК 537.226 + 537.311.33] : 539.16.04

**Диэлектрические свойства  $\gamma$ -облученных кристаллов триглицинселената и триглицифторбериллата.** Сирота Н. Н., Валикаш В. М. «Весті Академії наук БССР», серия фізика-математичних наук. 1969 г., № 5, 124—126.

Изучено влияние  $\gamma$ -облучения на диэлектрические свойства кристаллов триглицинселената и триглицифторбериллата. Установлено, что для обоих кристаллов после  $\gamma$ -облучения происходит уменьшение диэлектрической проницаемости  $\epsilon_{22}$  в области фазового перехода. Вдали от фазового перехода  $\gamma$ -облучение увеличивает  $\epsilon_{22}$ . После облучения возрастают также диэлектрические проницаемости  $\epsilon_{11}$  и  $\epsilon_{33}$ . Отжиг  $\gamma$ -облученных кристаллов частично изменяет значения диэлектрических проницаемостей кристаллов, однако не приводит к их исходным значениям.

Иллюстраций 2. Библиографий 9.

УДК 539.17

**Спектры совпадений  $\gamma$ -лучей из реакции  $(n, \gamma)$  на изотопах  $\text{Fe}^{57, 58}$ .** Богданов А. П., Сорока А. В., Тадэуш В. Н., Фирсов Е. И. «Весті Академії наук БССР», серия фізика-математичних наук. 1969 г., № 5, 127—129.

С помощью сцинтилляционного спектрометра совпадений исследованы спектры  $\gamma$ -лучей, сопровождающих захват тепловых нейтронов ядрами  $\text{Fe}^{57, 58}$ . Из анализа спектров совпадений получены данные о способе распада нижних возбужденных состояний  $\text{Fe}^{58}$  до 3,53 Мэв включительно. В  $\text{Fe}^{59}$  обнаружены прямые переходы из исходного состояния в реакции  $(n, \gamma)$  только на уровни 0,29 и 0,73 Мэв.

Таблиц 1. Иллюстраций 2. Библиографий 7.

УДК 539.17

**Спектр  $\gamma$ -лучей из реакции  $\text{Ni}^{64}(n, \gamma) \text{Ni}^{65}$ .** Богданов А. П., Сорока А. В., Тадэуш В. Н., Фирсов Е. И., Хильманович А. М. «Весті Академії наук БССР», серия фізика-математичних наук. 1969 г., № 5, 130—132.

С помощью магнитного комптоновского  $\gamma$ -спектрометра и сцинтилляционного спектрометра  $\gamma$ — $\gamma$ совпадений исследован спектр  $\gamma$ -лучей, возникающих при захвате тепловых нейтронов ядрами  $\text{Ni}^{64}$ . Обнаружены  $\gamma$ -переходы из исходного состояния  $\text{Ni}^{65}$  на нижние уровни 0,06, 0,31, 0,70 и 1,40 Мэв. Установлен способ разрядки этих уровней в основное состояние. Таблиц 1. Иллюстраций 4. Библиографий 7.

## ПРАВИЛА ДЛЯ АВТОРОВ

1. Статьи должны быть написаны на машинке через два интервала на одной стороне листа и представляться в двух экземплярах.

2. Формулы и буквенные обозначения должны быть аккуратно вписаны от руки чернилами. Для формул, выделенных в отдельную строку, следует оставлять достаточные пробелы в тексте. Греческие буквы должны быть обведены красным карандашом. Буквы, вписанные от руки, в формулах и в тексте должны подчеркиваться простым карандашом: прописные — двумя черточками снизу (напр.,  $\underline{S}$ ), строчные — двумя черточками сверху (напр.,  $\overline{s}$ ). Следует различать буквы  $O$  (прописную),  $o$  (строчную) и  $0$  (ноль), для чего буквы  $O$  и  $o$  подчеркивать двумя черточками, а ноль отмечать квадратной скобкой снизу ( $\underline{O}$ ,  $\underline{o}$ ,  $0$ ). Следует также различать буквы  $I$  и  $J$  (йот), для чего  $I$  писать, как римскую единицу, подчеркивая ее двумя черточками снизу. Векторы подчеркивать чернилами одной чертой снизу. Математические символы  $\cos$ ,  $\sin$ ,  $\lg$  и др., набираемые прямым шрифтом, и химические символы элементов ( $H$ ,  $N$ ,  $Cl$ ,  $Fe$  и т. д.) отмечаются простым карандашом квадратной скобкой снизу ( $\underline{\sin}$ ,  $\underline{\lg}$ ,  $\underline{N}$ ,  $\underline{Cl}$ ). Показатели степени и индексы, а также надстрочные знаки отмечаются дугой  $\smile$  (для верхнего индекса) или  $\frown$  (для нижнего).

3. В связи с введением с 1 января 1963 г. Международной системы единиц измерения (СИ) размерность всех величин, принятых в статьях, должна соответствовать указанной системе единиц измерения.

4. Цитируемая в статье литература должна даваться автором не в виде подстрочных сносок, а общим списком в конце статьи с обозначением ссылки в тексте порядковой цифрой в квадратных скобках. Список литературы должен быть оформлен следующим образом:

а) для книг: фамилия и инициалы автора, полное название книги, номер тома, место и год издания;

б) для журнальных статей: фамилия и инициалы автора, название журнала, номер тома (подчеркнуть), номер выпуска, страница и год.

Ссылки на неопубликованные работы не допускаются.

5. Рисунки должны быть выполнены на белой бумаге тушью размером  $15 \times 20$  см; надписи на рисунках не делать. Все обозначения указывать в тексте подрисуночных подписей. К статье прилагается список с номерами рисунков и текстом подрисуночных подписей. В тексте на полях обязательно указывается место для рисунков и таблиц.

Таблицы и список литературы печатаются на отдельных листах и прилагаются в конце статьи. Фотографии должны иметь контрастное изображение и быть отпечатаны на хорошей бумаге размером не менее  $9 \times 12$  см. На обороте рисунков должны быть указаны фамилия автора, название статьи и номер рисунка.

6. В случае представления двух или более статей одновременно необходимо указывать желательный порядок их помещения.

7. Авторы должны избегать повторения одних и тех же данных в таблицах, графиках и в тексте статьи.

8. К статье обязательно прилагается 2 экз. реферата.

9. Корректуры статей авторам, как правило, не посылаются. В случае посылки корректуры допускается лишь исправление ошибок типографии.

Корректурa должна возвращаться в редакцию не позже, чем на следующий день после получения ее автором. Невозвращение корректуры в срок не приостанавливает печатания статьи.

10. В случае возвращения статьи автору для исправления или при ее сокращении датой представления считается день получения редакцией окончательного текста.

253886

60 н.

Индекс  
74846