ВЕСЦІ
АКАДЭМІІ НАВУК БССР

СЕРЫЯ
ФІЗІКА-МАТЭМАТЫЧНЫХ
НАВУК

6

ВЫДАВЕЦТВА „НАВУКА І ТЭХНІКА"

МІНСК 1969


НАВУКА
І ТЭХНІКА

ИЗВЕСТИЯ

АКАДЕМИИ НАУК БССР

СЕРИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ
НАУК

№ 6

ИЗДАТЕЛЬСТВО „НАУКА И ТЕХНИКА“

МИНСК 1969

ВЕСЦІ

АКАДЭМІІ НАВУК БССР

СЕРЫЯ
ФІЗІКА-МАТЭМАТЫЧНЫХ
НАВУК

№ 6

За 4109

Государственная
БИБЛИОТЕКА
СССР
им. В. И. Ленина
Инв 31136

ВЫДАВЕЦТВА „НАВУКА І ТЭХНІКА“

МІНСК 1969

Рэдакцыйная калегія:

Ф. І. ФЁДАРАЎ (галоўны рэдактар),
Д. А. СУПРУНЕНКА (нам. галоўнага рэдактара),
М. М. АЛЯХНОВІЧ, Ф. Д. ГАХАЎ,
У. І. КРЫЛОЎ, М. М. СІРАТА,
У. Г. СПРЫНДЖУК, Я. І. ФІРСАЎ,
С. А. ЧУНІХІН

ВЕСЦІ АКАДЭМІІ НАВУК БЕЛАРУСКАЙ ССР № 6 1969
СЕРЫЯ ФІЗІКА-МАТЭМАТЫЧНЫХ НАВУК

УДК 512.94

Л. Е. ЗАГОРИН

ПЕРИОДИЧЕСКИЕ ГРУППЫ ВЕЩЕСТВЕННО-КВАТЕРНИОННЫХ МАТРИЦ ВТОРОЙ СТЕПЕНИ

Еще в работе К. Жордана [1] были полностью описаны конечные группы комплексных матриц второй степени. При изучении периодических матричных вещественно-кватернионных групп возникает аналогичный вопрос об описании конечных групп 2×2-матриц над телом вещественных кватернионов Q. Конечные и вообще периодические разрешимые вещественно-кватернионные группы матриц можно описать при помощи методов, разработанных Д. А. Супруненко в монографии [2]. Наиболее трудно разыскать (с точностью до сопряженности в полной линейной группе $GL(2, Q)$) все конечные неразрешимые группы вещественно-кватернионных 2×2-матриц. В данной заметке полностью описываются максимальные периодические подгруппы $GL(2, Q)$.

1. Обозначения. Q — тело вещественных кватернионов с базисом $1, i, j, k$; Q^* — мультипликативная группа тела Q; K — поле комплексных чисел; C — периодическая часть мультипликативной группы поля K; P — поле действительных чисел; $GL(2, Q)$, $GL(2, K)$ — полные линейные группы; E_2 — единичная матрица $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; $\Gamma = \{a, b, c, \ldots\}$ — группа, порожденная матрицами $a, b, c, \ldots$; группу $\{E_2, -E_2\}$ будем обозначать через J; $N_\Gamma(G)$ — нормализатор подгруппы G в группе Γ; $\Gamma : F$ — индекс подгруппы F в группе Γ; порядок конечной группы G обозначим через (G); знак $\sim$ обозначает сопряженность элементов (или подгрупп) в группе. Под вполне приводимой группой будет пониматься группа 2×2-матриц из $GL(2, Q)$, приводимая к диагональному виду. (1), (2) и т. д. обозначает ссылку на предложение 1 или 2 и т. д. Введем еще обозначения для некоторых комплексных чисел: $\xi = \dfrac{1+i}{\sqrt{2}}$; θ — первообразный корень десятой степени из единицы; $\lambda = \dfrac{1}{\theta^2 - \theta^{-2}}$; μ — комплексное число, удовлетворяющее уравнению $\lambda^2 + \mu^2 + 1 = 0$ [1]. Отметим, что λ и μ чисто мнимые.

2. Неприводимые примитивные периодические подгруппы $GL(2, K)$. Как следует из [1], любая неприводимая примитивная периодическая подгруппа $GL(2, K)$ сопряжена в $GL(2, K)$ с одной из следующих групп:

$$K_1 = \left\{\Phi_1, \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, l = \frac{1}{i\sqrt{2}} \begin{pmatrix} m\xi^{-1} & m\xi \\ -m\xi^{-1} & m\xi \end{pmatrix}\right\},$$

$$\begin{pmatrix} m^3 & 0 \\ 0 & m^3 \end{pmatrix} \in \Phi_1,$$

$$m \in C;\ K_2 = \left\{\Phi_2, \begin{pmatrix} n\xi & 0 \\ 0 & n\xi^{-1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, l\right\}, \begin{pmatrix} n^2 & 0 \\ 0 & n^2 \end{pmatrix} \in \Phi_2,$$

$$n \in C;\ l \in K_1;\ K_3 = \left\{\Phi_3, \begin{pmatrix} \theta & 0 \\ 0 & \theta^{-1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} \lambda & \mu \\ \mu & -\lambda \end{pmatrix}\right\}.$$

Здесь Φ_1, Φ_2, Φ_3 — некоторые подгруппы группы CE_2. В частности, если $\Phi_1 = \Phi_2 = \Phi_3 = CE_2$, то можно считать $m = 1$, $n = 1$, $K_1 \subset K_2$, а K_2 и K_3 будут максимальными периодическими подгруппами $GL(2, K)$. В этом случае обозначим K_1, K_2, K_3 соответственно через $\overline{K}_1$, $\overline{K}_2$, $\overline{K}_3$. Отметим, что $\overline{K}_2 : \overline{K}_1 = 2$, фактор-группа K_2/Φ_2 порядка 24, K_2 — разрешимая группа; $K_3 : \Phi_3 = 60$, K_3/Φ_3 изоморфна знакопеременной группе A_5. K_3 — неразрешимая группа (см. [1]). Заметим еще, что если $\Phi_1 = \Phi_2 = \Phi_3 = J$ и $m = n = 1$, то группы K_1, K_2, K_3 вполне приводимы в $GL(2, Q)$ — все матрицы этих групп приводятся одновременно к диагональному виду при помощи матрицы $\begin{pmatrix} 1 & j \\ 1 & -j \end{pmatrix}$, $j^2 = -1$.

Предложение 1 (см. [1]). В K_1 есть только две (с точностью до сопряженности) максимальные абелевы подгруппы:

$$F_{11} = \left\{\Phi_1, \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}\right\} \text{ и } F_{21} = \{\Phi_1, l\};$$

в K_2 есть только три попарно несопряженные максимальные абелевы подгруппы:

$$F_{12} = \left\{\Phi_2, \begin{pmatrix} n\xi & 0 \\ 0 & n\xi^{-1} \end{pmatrix}\right\},\ F_{22} = \{\Phi_2, l\},\ F_{32} = \left\{\Phi_2, \begin{pmatrix} 0 & n\xi \\ -n\xi^{-1} & 0 \end{pmatrix}\right\};$$

в K_3 есть только три попарно несопряженные максимальные абелевы подгруппы:

$$F_{13} = \left\{\Phi_3, \begin{pmatrix} \theta & 0 \\ 0 & \theta^{-1} \end{pmatrix}\right\},\ F_{23} = \left\{\Phi_3, \begin{pmatrix} \theta^2 & 0 \\ 0 & \theta^{-2} \end{pmatrix} v\right\},\ F_{33} = \left\{\Phi_3, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\right\}.$$

3. Периодические подгруппы в Q^*. Введем следующие подгруппы группы $Q^* : M_1 = \{j, C\}$, $j^2 = -1$, $M_2 = \left\{\xi, \frac{1+j}{\sqrt{2}}\right\}$, $(M_2) = 48$, $M_3 = \{\theta, j, \lambda + j\mu\}$, $(M_3) = 120$. Как следует из [6] (стр. 185, следствие 5), M_1, M_2, M_3 — максимальные периодические подгруппы Q^* и любая периодическая подгруппа Q^* сопряжена в Q^* с подгруппой одной из групп M_1, M_2, M_3 (ср. [4], теорема 6). Интересно отметить, что соответствие $i \to \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$, $j \to \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ приводит к изоморфизмам $M_2 \cong K_2$, $M_3 \cong K_3$, если в K_2 и K_3 положить $\Phi_2 = \Phi_3 = J$, $m = 1$, $n = 1$. Отметим еще, что $M_3 \cong SL(2, 5)$.

4. Неприводимые примитивные периодические подгруппы $GL(2, Q)$. Пусть Γ — неприводимая примитивная периодическая подгруппа $GL(2, Q)$, F — максимальный абелев нормальный делитель Γ. Известно, что индекс $\Gamma : F$ конечен. Будем считать, что в F есть матрица $-E_2$, иначе вместо Γ рассматривалась бы периодическая же группа $\{\Gamma, -E_2\}$.

Предложение 2. Либо $F = J$, либо F сопряжен в $GL(2, Q)$ с подгруппой группы CE_2.

Действительно, по теореме Клиффорда ([2], стр. 15, и [5]), линейная P-оболочка K' группы F — простая алгебра над P. Следовательно, K' —

поле. Если $F \neq J$, то $K' \supset PE_2$ и, значит, $K' \sim KE_2$. После соответствующего трансформирования группы Γ можно считать, что $K' = KE_2$. Теперь $F \subseteq CE_2$, и предложение доказано.

Предложение 3. Пусть Γ — максимальная неприводимая примитивная периодическая подгруппа $GL(2, Q)$. Тогда либо $F = J$, либо $F \sim CE_2$.

В самом деле, если $F \neq J$, то (2) считаем, что $F \subseteq CE_2$. Пусть $h \in F \setminus J$, h — комплексный скаляр. Тогда $ghg^{-1} = h$ либо $ghg^{-1} = h^{-1}$, $g \in \Gamma$. Отсюда, если $t \in CE_2$, $g \in \Gamma$, то $gtg^{-1} = t$ либо $gtg^{-1} = t^{-1}$. Значит, ΓC — периодическая группа и CE_2 — ее абелев нормальный делитель. В силу максимальности Γ $\Gamma C = \Gamma$, $CE_2 \subset \Gamma$, $F = CE_2$. Утверждение доказано.

Предложение 4. Если V — централизатор F в Γ, то $\Gamma = V$ либо $\Gamma : V = 2$.

Действительно, если $F = J$, то $\Gamma = V$. Пусть $\Gamma \supset V$, $h \in F \setminus J$, $g \in \Gamma \setminus V$. Тогда $ghg^{-1} = h^{-1}$. Если g_1 — любая другая матрица из $\Gamma \setminus V$, то $g_1 h g_1^{-1} = h^{-1}$, $g_1 g^{-1} \in V$, $g_1 \in Vg$, и $\Gamma : V = 2$.

Предложение 5. Если $\Gamma : V = 2$, то V — неприводимая примитивная подгруппа $GL(2, Q)$.

Доказательство. Предположим, что V не является неприводимой подгруппой. Тогда можно считать, что V состоит из комплексных матриц вида $\begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$, причем F состоит из скаляров cE_2, $c \in C$. Если $F = V$, то, как в [3], стр. 61, показываем, что Γ импримитивна. Противоречие. Значит, $F \subset V$. Из равенства $ghg^{-1} = h^{-1}$, $h \in F$, $g \in \Gamma \setminus V$, следует, что

$$g = \begin{pmatrix} j_1 & j_2 \\ j_3 & j_4 \end{pmatrix}, \quad j_i = \alpha_i j + \beta_i k, \quad j^2 = k^2 = -1; \quad \alpha_i, \beta_i \in P, \quad i = 1, 2, 3, 4.$$

В $V \setminus F$ есть матрица $t = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$, где a и b не сопряжены в Q^*. Матрица g трансформирует t в одну из четырех матриц $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}^r$, $\begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}^r$, $r = \pm 1$. Отсюда и из несопряженности a и b легко получить, что $g = \begin{pmatrix} j_1 & 0 \\ 0 & j_4 \end{pmatrix}$ либо $g = \begin{pmatrix} 0 & j_2 \\ j_3 & 0 \end{pmatrix}$, т. е. Γ импримитивна. Противоречие. Следовательно, V неприводима. Предположим, что V импримитивна в $GL(2, Q)$. Можно считать тогда, что $V = \left\{ \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{pmatrix} \right\}$, V — комплексная группа. Если в V есть $\begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \notin F$, то аналогично предыдущему показываем, что Γ импримитивна. Противоречие. Если в $V \setminus F$ нет матриц вида $\begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$, то $V : F = 2$, $V = \left\{ F, \begin{pmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{pmatrix} \right\}$. Тогда V — абелева группа и приводится к диагональному виду, что противоречит неприводимости V. Следовательно, V примитивна в $GL(2, Q)$.

Предложение 6. Группы $\overline{K}_1$, $\overline{K}_2$, $\overline{K}_3$ (см. п. 2) примитивны в $GL \times (2, Q)$.

Доказательство. Предположим, что $\overline{K}_1$ импримитивна в $GL(2, Q)$. Тогда $s^{-1}\overline{K}_1 s = G$, где $G = \left\{ \begin{pmatrix} q_1 & 0 \\ 0 & q_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & q_3 \\ q_4 & 0 \end{pmatrix} \right\}$, q_i — некоторые кватернионы. Квадрат любой матрицы из G есть диагональная матрица. Поэтому для $\begin{pmatrix} \xi & 0 \\ 0 & \xi \end{pmatrix} \in \Phi_1$ имеем $s^{-1} \begin{pmatrix} \xi & 0 \\ 0 & \xi \end{pmatrix}^2 s = s^{-1} \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} s = \begin{pmatrix} q_1 & 0 \\ 0 & q_2 \end{pmatrix}$. Но тогда

$q_1 \sim q_2 \sim i$ в Q^* и можно считать, что $s^{-1}\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} s = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}$, $s^{-1}\overline{K}_1 s = G_1$, где G_1 — группа вида G. Отсюда видно, что s—комплексная матрица и $\overline{K}_1$ импримитивна в $GL(2, K)$, что невозможно. Для $\overline{K}_2$ и $\overline{K}_3$ рассуждения аналогичны.

Введем теперь группы $R = \left\{\overline{K}_2, \begin{pmatrix} j & 0 \\ 0 & j \end{pmatrix}\right\}$, $S = \left\{\overline{K}_3, \begin{pmatrix} j & 0 \\ 0 & j \end{pmatrix}\right\}$, $j^2 = -1$. Очевидно, R и S — неприводимые примитивные периодические подгруппы $GL(2, Q)$, так как они содержат примитивные подгруппы $\overline{K}_2$, $\overline{K}_3$.

Предложение 7. Группы R и S — максимальные периодические подгруппы $GL(2, Q)$.

Это следует из максимальности в $GL(2, K)$ подгрупп $\overline{K}_2$, $\overline{K}_3$ и из (4).

Предложение 8. Любая неприводимая примитивная периодическая подгруппа $\Gamma \subset GL(2, Q)$, для которой $F \supset J$, сопряжена в $GL(2, Q)$ с подгруппой одной из групп R, S.

Доказательство. Будем считать, что $F = CE_2$. Если $\Gamma = V$, то Γ — комплексная группа и предложение верно. Пусть поэтому $\Gamma : V = 2$. Тогда ввиду (5) V — неприводимая примитивная подгруппа $GL(2, K)$. Поэтому можно считать, что V совпадает с одной из групп $\overline{K}_1$, $\overline{K}_2$, $\overline{K}_3$. Рассмотрим каждую из этих возможностей.

а) $V = \overline{K}_1$. Если $g \in \Gamma \setminus V$ и $F_{11} \subset \overline{K}_1$ (см. (1)), то $gF_{11}g^{-1} = F'_{11} \subset \overline{K}_1$. Ввиду (1) $F_{11} \sim F'_{11}$ уже в $\overline{K}_1$, $vF_{11}v^{-1} = F'_{11}$, $v \in V$. Отсюда следует, что $v^{-1}g \in N_\Gamma(F_{11})$. Так как $v^{-1}g \in \Gamma \setminus V$, то $v^{-1}g = \begin{pmatrix} j_1 & j_2 \\ j_3 & j_4 \end{pmatrix}$ (см. (5)). Легко видеть, что одна из матриц $v^{-1}g$ или $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} v^{-1}g \in N_\Gamma(F_{11})$ должна быть перестановочна с матрицей $\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \in F_{11}$. Пусть, например, $v^{-1}g\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} v^{-1}g$. Тогда $v^{-1}g = \begin{pmatrix} 0 & j_2 \\ j_3 & 0 \end{pmatrix}$. Одновременно в $N_\Gamma(F_{11})$ есть и матрица $\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & j_2 \\ j_3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -j_2 \\ j_3 & 0 \end{pmatrix}$. Так как $\begin{pmatrix} 0 & \pm j_2 \\ j_3 & 0 \end{pmatrix}^2 = \pm \begin{pmatrix} j_2 j_3 & 0 \\ 0 & j_3 j_2 \end{pmatrix} \in F_{11}$, то необходимо, чтобы $j_2 j_3 = \pm 1$ или $j_2 j_3 = \pm i$. Пусть сначала $j_2 j_3 = \pm 1$. Тогда $j_3 = \mp j_2$, $cj_2c^{-1} = j$, c — некоторое комплексное число. Теперь $\begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -j_2 \\ j_2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c^{-1} & 0 \\ 0 & c^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} j & 0 \\ 0 & j \end{pmatrix} \in R$, $\begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix} V \begin{pmatrix} c^{-1} & 0 \\ 0 & c^{-1} \end{pmatrix} = V \subset R$ и, следовательно, $\begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix} \Gamma \begin{pmatrix} c^{-1} & 0 \\ 0 & c^{-1} \end{pmatrix} \subset R$. Пусть теперь $j_2 j_3 = \pm i$. В Γ есть матрица $\begin{pmatrix} 0 & \pm j_2 \\ j_3 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mp j_2 & 0 \\ 0 & \pm j_2 i \end{pmatrix}$. Но $j_2 \sim j$ при помощи некоторого комплексного числа c. Теперь $\begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} j_2 & 0 \\ 0 & j_2 i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c^{-1} & 0 \\ 0 & c^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} j & 0 \\ 0 & j \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} \in R$, так как $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi & 0 \\ 0 & \xi \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi^{-1} & 0 \\ 0 & \xi \end{pmatrix} \in R$. Поэтому снова $\begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix} \Gamma \begin{pmatrix} c^{-1} & 0 \\ 0 & c^{-1} \end{pmatrix} \subset R$.

б) $V=\overline{K}_2$; F_{12}, F_{22}, $F_{32}\subset\overline{K}_2$ (см. (1)). Как в а), в $N_\Gamma(F_{12})$ есть матрицы $\begin{pmatrix}0 & \pm j_2\\ j_3 & 0\end{pmatrix}$. Так как $\begin{pmatrix}0 & \pm j_2\\ j_3 & 0\end{pmatrix}^2=\pm\begin{pmatrix}j_2j_3 & 0\\ 0 & j_3j_2\end{pmatrix}\in F_{12}$, то необходимо, чтобы $j_2j_3=\xi^r$, r — целое число. Если r — четное, то $j_2j_3=\pm 1$ или $\pm i$ и, дословно повторяя рассуждения случая а), получим $\Gamma\sim R$. Пусть r — нечетное, например, $r=1$. Тогда $j_2j_3=\pm\xi$, $j_3=\pm j_2^{-1}\xi$. В Γ есть матрица $s=l\begin{pmatrix}0 & j_2\\ j_2^{-1}\xi & 0\end{pmatrix}^{-1}$, $l\in F_{22}$. Легко проверить, что $F_{32}\subset s^{-1}F_{12}s\in\overline{K}_2$, а это противоречит максимальности абелевой группы F_{32} (1).

в) $V=\overline{K}_3$. Как в случаях а), б), в $N_\Gamma(F_{13})$ есть матрица $t=\begin{pmatrix}0 & j_2\\ j_3 & 0\end{pmatrix}$, $t^2=\begin{pmatrix}j_2j_3 & 0\\ 0 & j_3j_2\end{pmatrix}\in F_{13}$, $F_{13}\subset\overline{K}_3$ (1). Если $t^2\neq\pm E_2$, то, взяв вместо t матрицу t_1, полученную из t умножением на подходящую степень матрицы $\begin{pmatrix}\theta & 0\\ 0 & \theta^{-1}\end{pmatrix}$, будем иметь $t_1^2=-E_2$ или E_2. Поэтому можно считать, что $t=\begin{pmatrix}0 & j_2\\ j_2 & 0\end{pmatrix}$ или $t=\begin{pmatrix}0 & -j_2\\ j_2 & 0\end{pmatrix}$, $j_2^2=-1$. Предположим, что $t=\begin{pmatrix}0 & j_2\\ j_2 & 0\end{pmatrix}$. Тогда $tvt^{-1}=\begin{pmatrix}-\bar\lambda & \bar\mu\\ \bar\mu & \bar\lambda\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda & -\mu\\ -\mu & -\lambda\end{pmatrix}\in\overline{K}_3$. В $\overline{K}_3$ нет матрицы $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$, иначе $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\in F_{13}$, что невозможно (1). С другой стороны, $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\times v\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda & -\mu\\ -\mu & -\lambda\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\theta & 0\\ 0 & \theta^{-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\theta & 0\\ 0 & \theta^{-1}\end{pmatrix}$ и, следовательно, $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\overline{K}_3\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}=\overline{K}_3$. Поэтому $\overline{K}_3$ — подгруппа индекса 2 в группе $G=\left\{\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix},\ \overline{K}_3\right\}$, что противоречит максимальности $\overline{K}_3$ в $GL(2, K)$. Следовательно, $t=\begin{pmatrix}0 & -j_2\\ j_2 & 0\end{pmatrix}$. Так как $j_2\sim j$ при помощи некоторого комплексного числа c, то

$$\begin{pmatrix}c & 0\\ 0 & c\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & -j_2\\ j_2 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c^{-1} & 0\\ 0 & c^{-1}\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}j & 0\\ 0 & j\end{pmatrix}\in S,\ \begin{pmatrix}c & 0\\ 0 & c\end{pmatrix}V\begin{pmatrix}c^{-1} & 0\\ 0 & c^{-1}\end{pmatrix}\subset S.$$

Отсюда следует: $\begin{pmatrix}c & 0\\ 0 & c\end{pmatrix}\Gamma\begin{pmatrix}c^{-1} & 0\\ 0 & c^{-1}\end{pmatrix}=S$. Предложение 8 полностью доказано.

Остается рассмотреть максимальные неприводимые примитивные периодические подгруппы $\Gamma\subset GL(2, Q)$, для которых $F=J$. В силу конечности индекса $\Gamma:F$ такие группы должны быть конечными. Для их описания можно применить методы работы [1], учитывая, однако, специфику тела Q. Детальное исследование приводит к следующим утверждениям (сформулируем их без доказательства).

Предложение 9. Каждая максимальная неприводимая примитивная периодическая подгруппа $\Gamma \subset GL(2, Q)$, в которой максимальный абелев нормальный делитель F совпадает с J, сопряжена в $GL(2, Q)$ с группой

$$\mathfrak{L} = \left\{ \begin{pmatrix} \xi & 0 \\ 0 & \xi \end{pmatrix}, \; l = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \xi^{-1} & \xi \\ -\xi^{-1} & \xi \end{pmatrix}, \; \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & j \end{pmatrix} \right\}, \; j^2 = -1,$$

$\mathfrak{L}$ — конечная неразрешимая группа порядка 3840.

Предложение 10. В $\mathfrak{L}$ есть нормальный делитель

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \; iE_2, \; jE_2 \right\}, \; (A) = 32,$$

A/F — абелева группа, фактор-группа $\mathfrak{L}/A$ имеет порядок 120 и изоморфна группе G_0 матриц четвертой степени, образующие которой

$$t_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad t_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad t_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

имеют элементы из простого поля характеристики 2, $t_1^5 = t_2^4 = t_3^3 = E_4$ (см. [7], § 3).

Предложение 10а. Матрицы t_1, t_2^2, t_3 из G_0 порождают неразрешимую группу G_1 порядка 60, изоморфную знакопеременной группе A_5. В силу теоремы о соответствии подгрупп при гомоморфизме $(\mathfrak{L} \to G_0)$ группе G_1 соответствует в группе $\mathfrak{L}$ неразрешимая подгруппа

$$\mathfrak{L}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}, \; \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \xi^{-1} & \xi \\ -\xi^{-1} & \xi \end{pmatrix}, \; \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & j \end{pmatrix} \right\}, \; \mathfrak{L} : \mathfrak{L}_1 = 2, \; (\mathfrak{L}_1) = 1920,$$

$\mathfrak{L}_1$ — неприводимая примитивная группа, максимальный абелев нормальный делитель $\mathfrak{L}_1$ совпадает с J.

5. Неприводимые imprimитивные периодические подгруппы $GL(2, Q)$. Введем следующие подгруппы $GL(2, Q)$: $\Gamma_k = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \; \begin{pmatrix} q_1 & 0 \\ 0 & q_2 \end{pmatrix} \right\}$, $k = 1, 2, 3$, q_1 и q_2 независимо друг от друга пробегают группы M_k (см. п. 3). Очевидно, Γ_k — неприводимые imprимитивные подгруппы $GL(2, Q)$.

Предложение 11. Любая неприводимая imprимитивная периодическая подгруппа $GL(2, Q)$ сопряжена с подгруппой одной из групп Γ_k, $k = 1, 2, 3$.

Доказательство. Пусть Γ — неприводимая imprимитивная периодическая подгруппа $GL(2, Q)$. Тогда можно считать, что $\Gamma = \left\{ \begin{pmatrix} q_1 & 0 \\ 0 & q_2 \end{pmatrix}, \; \begin{pmatrix} 0 & q_3 \\ q_4 & 0 \end{pmatrix} \right\}$, q_i — некоторые кватернионы. Если $s = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & q_4 \end{pmatrix}$, то $s^{-1}\Gamma s = \Gamma'$, где $\Gamma' = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & q \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \; \begin{pmatrix} q & 0 \\ 0 & q \end{pmatrix}, \; \begin{pmatrix} q_5 & 0 \\ 0 & q_6 \end{pmatrix} \right\}$, где q, q_5, q_6 — кватернионы. Очевидно, q_5 и q_6 пробегают одну и ту же подгруппу M группы Q^*. Можно считать (см. п. 3), что M—подгруппа одной из групп M_k, $k = 1, 2, 3$.

Теперь $\begin{pmatrix} q_5 & 0 \\ 0 & q_6 \end{pmatrix} \in \Gamma_k$, $\begin{pmatrix} 0 & q \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & q \end{pmatrix} \in \Gamma_k$, и $\Gamma' \subseteq \Gamma_k$, что и требовалось.

Предложение 12. Γ_k — максимальные периодические подгруппы $GL(2, Q)$.

Для Γ_2 и Γ_3 доказательство опустим (оно занимает много места). Докажем предложение для Γ_1. Предположим, что $\Gamma \supset \Gamma_1$, Γ — максимальная периодическая подгруппа $GL(2, Q)$. Очевидно, Γ неприводима. В силу (11) Γ не может быть импримитивной. Поэтому Γ примитивна, F — максимальный абелев нормальный делитель Γ, индекс $\Gamma : F$ конечен. С другой стороны, уже в подгруппе $G = \{F, \Gamma_1\}$ группы Γ индекс $G : F$ бесконечен. Противоречие. Предложение доказано.

6. Вполне приводимые периодические подгруппы $GL \times (2, Q)$. Введем следующие вполне приводимые подгруппы $GL(2, Q)$: $\Gamma_{ij} = \left\{\begin{pmatrix} q_1 & 0 \\ 0 & q_2 \end{pmatrix}\right\}$, $i \neq j$, $i, j = 1, 2, 3$; q_1 и q_2 независимо друг от друга пробегают группы соответственно M_i и M_j (см. п. 3).

Предложение 13. Всякая вполне приводимая периодическая подгруппа $GL(2, Q)$ сопряжена в $GL(2, Q)$ с подгруппой одной из групп Γ_k, $k = 1, 2, 3$, либо Γ_{ij}, $i \neq j$, $i, j = 1, 2, 3$.

Доказательство очевидно.

Предложение 14. Группы Γ_{ij} — максимальные периодические подгруппы $GL(2, Q)$.

Докажем максимальность Γ_{12}. Предположим, что $\Gamma \supset \Gamma_{12}$, Γ — максимальная периодическая подгруппа $GL(2, Q)$. В силу (13) группа Γ не может приводиться к диагональному виду, поэтому Γ неприводима. Если Γ импримитивна, то ввиду (11) Γ_{12} вкладывается в одну из групп Γ_k, $k = 1. 2, 3$, что невозможно. Если же Γ примитивна, то ввиду (8) Γ_{12} вкладывается в одну из групп R или S, что также невозможно. Следовательно, Γ_{12} максимальна. Аналогично Γ_{13}, Γ_{21}, Γ_{31} максимальны. Заметим, что максимальность групп Γ_{23}, Γ_{32} (как, впрочем, и групп Γ_2 и Γ_3) можно установить, используя предложения 8, 9.

Из всего сказанного следует

Теорема. *В $GL(2, Q)$ имеется 12 попарно несопряженных максимальных периодических подгрупп*

$$R,\ S,\ \mathfrak{L},\ \Gamma_k,\ k = 1, 2, 3,\ \Gamma_{ij},\ i \neq j,\ i, j = 1, 2, 3, \qquad (\alpha)$$

и каждая периодическая подгруппа $GL(2, Q)$ сопряжена в $GL(2, Q)$ с подгруппой одной из групп (α).

Литература

1. Iordan C. J. für Math, 84, H. 2—3, 89.
2. Супруненко Д. А. Разрешимые и нильпотентные линейные группы. Минск, 1958.
3. Супруненко Д. А. Мат. сб., 50 (92), № 1, 1960.
4. Супруненко Д. А. Изв. АН СССР, сер. матем., 26, № 4, 1962.
5. Залесский А. Е. ДАН БССР, 7, № 2, 1963.
6. Монастырный В. И. Сиб. мат. ж., 6, № 1, 1965.
7. Загорин Л. Е. Весці АН БССР, сер. фіз.-мат. навук, № 2, 1966.

Новозыбковский педагогический институт

Поступило в редакцию 9.VI 1969

ВЕСЦІ АКАДЭМІІ НАВУК БЕЛАРУСКАЙ ССР № 6 1969
СЕРЫЯ ФІЗІКА-МАТЭМАТЫЧНЫХ НАВУК

УДК 512.86

В. С. КОНЮХ

О МАКСИМАЛЬНЫХ РАЗРЕШИМЫХ ПОДГРУППАХ ВЕЩЕСТВЕННО-ОРТОГОНАЛЬНОЙ ГРУППЫ

Максимальные разрешимые подгруппы комплексной унитарной группы изучались Д. А. Супруненко и автором в [2]. В настоящей заметке рассматриваются максимальные разрешимые подгруппы вещественно-ортогональной группы $O(n)$.

§ 1. Пусть D — поле действительных чисел, $O(n)$ — группа всех вещественно-ортогональных $n \times n$-матриц. По аналогии с [2] подгруппу H группы $GL(n, D)$ будем называть OR-подгруппой, если H сопряжена в $GL(n, D)$ с некоторой максимальной разрешимой подгруппой группы $O(n)$. Легко видеть, что одна OR-подгруппа $GL(n, D)$ не может содержаться в другой OR-подгруппе $GL(n, D)$,

Пусть Γ — максимальная неприводимая примитивная разрешимая подгруппа $GL(n, D)$, F — максимальный абелев нормальный делитель Γ, а V — централизатор F в Γ. Согласно [1], возможны два случая: а) $F = D^*$, где D^* — мультипликативная группа поля D; б) $F \cong C^*$, где C^* — мультипликативная группа поля C комплексных чисел. Случай б) возможен только при четном n, и тогда матрицы группы F можно записать в виде

$$\begin{bmatrix} \lambda & -\mu \\ \mu & \lambda \end{bmatrix} \times E_{\frac{n}{2}};\ \lambda,\ \mu \in D,\ \lambda^2 + \mu^2 \neq 0,$$

а группу V рассматривать как подгруппу группы $GL\left(\frac{n}{2},\ C'\right)$, где C' — поле, состоящее из всех матриц $\begin{bmatrix} \lambda & -\mu \\ \mu & \lambda \end{bmatrix}$; $\lambda,\ \mu \in D$.

Отметим, что в случае б) для $g \in \Gamma$

$$g^{-1}\left(\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \times E_{\frac{n}{2}}\right) g = \pm \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \times E_{\frac{n}{2}}.$$

Отсюда получаем

$$g = t^{\nu} u;\ \nu = 0, 1;\ t = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \times E_{\frac{n}{2}},\ u \in GL\left(\frac{n}{2},\ C'\right). \qquad (1)$$

Обозначим через $\pm SL(n, D)$ подгруппу $GL(n, D)$, состоящую из всех матриц, определители которых равны ± 1.

Лемма 1. *Группа Γ представима в виде $\Gamma = \Gamma_0 F$, где $\Gamma_0 \subseteq \Gamma \cap \cap \pm SL(n, D)$ — конечная группа, а F — максимальный абелев нормальный делитель* Γ.

Доказательство. В случае а) доказательство леммы аналогично доказательству лемм 27 и 29 из [1]. В случае б) $[\Gamma: V] \leqslant 2$ ([1], стр. 13).

Поскольку $F \subset V \subset GL\left(\frac{n}{2}, C'\right)$, причем $[V:F] \leqslant \rho(n)$, то группа V представима в виде

$$V = V_0 F, \tag{2}$$

где конечная группа V_0 совпадает с пересечением $V \cap SL\left(\frac{n}{2}, C'\right)$.

Следовательно, в случае, когда $\Gamma = V$, лемма доказана.

Пусть теперь $[\Gamma:V] = 2$, $\Gamma = \{g, V\}$. Мы можем считать, что g — элемент конечного порядка. Действительно, $g^2 = v^1 = v_0 f \in V$, где $f \in F$, а v_0 — элемент порядка $k < +\infty$ (см. (2)). Так как $g^{-1}(v')^k g = g^{-1} f^k g = f^k$, то $f^k = \lambda E_n \in D^*$. Положим $g' = g \frac{1}{\sqrt[2k]{|\lambda|}} E_n$. Очевидно, g^1 — элемент конечного порядка, $\Gamma = \{g^1, V\}$. Для $v_0 \in V_0 = V \cap SL\left(\frac{n}{2}, C'\right)$, $g^{-1} v_0 g = u^{-1} t^{-1} v_0 t u$ (см. (1)). Очевидно, определители операторов v_0 и $t^{-1} v_0 t$ из $GL\left(\frac{n}{2}, C'\right)$ совпадают. Следовательно, $g^{-1} V_0 g \subseteq V_0$. Положим $V' = \{g, V_0\}$. Порядок V' конечен и, следовательно, $V' \subseteq \Gamma \cap \pm SL(n, D)$. Нетрудно видеть, что $\Gamma = V'F$. Лемма доказана.

Теорема 1. *Максимальная неприводимая примитивная разрешимая подгруппа* Γ *группы* $GL(n, D)$ *содержит единственную OR-подгруппу* Φ *группы* $GL(n, D)$, $\Phi = \Phi(\Gamma) = \Gamma \cap \pm SL(n, D)$. Φ-*примитивна.*

Доказательство. В случае а) доказательство теоремы аналогично доказательству теоремы 1 из [2]. Обратимся теперь к случаю б). Пусть $\Phi = \Gamma \cap \pm SL(n, D)$. Очевидно, Φ — нормальный делитель Γ. В силу леммы 1 $\Phi = S\Gamma_0$, где $S = F \cap \pm SL(n, D)$. Пусть $g_0 = E_n, g_1, \ldots g_l$ — различные элементы группы Γ_0, тогда матрица

$$M = {}^t g_0 g_0 + \ldots + {}^t g_l g_l, \tag{3}$$

где ${}^t g_i$ — транспонированная g_i соответствует квадратичной форме H, инвариантной при преобразованиях g_i, $i = 1, \ldots, l$ (см. [8], стр. 323). В силу (1) матрица M представима в виде $M = {}^t\overline{u}_1 u_1 + \ldots + {}^t\overline{u}_l u_l$, где $u_i \in GL\left(\frac{n}{2}, C'\right)$, а $\overline{u}_i = t^{-1} u_i t$ (см. (1)). Следовательно, матрицу M можно рассматривать как матрицу, соответствующую положительно определенной эрмитовой форме H' с коэффициентами из поля C'. В силу этого существует такая матрица $A \in GL\left(\frac{n}{2}, C'\right)$, что ${}^t\overline{A} M A = E_{\frac{n}{2}}$, где $E_{\frac{n}{2}}$ — единица группы $GL\left(\frac{n}{2}, C'\right)$.

Перейдем к матрицам порядка n над D. Тогда последнее равенство запишется в виде ${}^t A M A = E_n$. Отсюда в силу (3) следует, что $A^{-1}\Gamma_0 A \subset O(n)$ и, следовательно, $\Phi_1 = A^{-1} \Phi A \subset O(n)$. Покажем, что Φ_1 максимальна среди разрешимых подгрупп $O(n)$. Пусть $\Phi_1 \subset \Phi_2 \subset O(n)$, где Φ_2 — разрешимая группа. Тогда

$$B = A\Phi_2 A^{-1} \supset \Phi, \tag{4}$$

причем для $b \in B$, $\det b = \pm 1$. Очевидно, $D^* B \supset D^* \Phi = \Gamma$. Отсюда в силу максимальности Γ, $\Gamma = D^* B$, $B \subset \Gamma$, $B \subseteq \Phi$. Последнее противоречит (4).

Следовательно, Φ_1 максимальна среди разрешимых подгрупп $O(n)$, т. е. Φ является OR-подгруппой $GL(n, D)$. Если теперь $H \subset \Gamma$ — какая-либо OR-подгруппа $GL(n, D)$, то для $h \in H$ $\det h = \pm 1$, следовательно, $H \subseteq \Phi$. Так как одна OR-подгруппа $GL(n, D)$ не может содержаться в другой OR-подгруппе, то $H = \Phi$. Итак, Φ — единственная OR-подгруппа $GL(n, D)$, содержащаяся в Γ. Очевидно, Φ примитивна. Теорема доказана.

Теорема 2. *Пусть H — примитивная OR-подгруппа $GL(n, D)$. Тогда $\Gamma = D^*H$ — единственная максимальная разрешимая подгруппа $GL(n, D)$, содержащая H, причем $H = \Gamma \cap \pm SL(n, D)$.*

Доказательство. Пусть H содержится в максимальной разрешимой подгруппе Γ группы $GL(n, D)$. Согласно теореме 1, $H = \Gamma \cap \pm SL(n, D)$. Отсюда вытекает равенство $\Gamma = D^*H$.

§ 2. Пусть теперь Γ — импримитивная максимальная разрешимая подгруппа $GL(n, D)$, а

$$D^{(n)} = Q_1 + \ldots + Q_k \tag{5}$$

— полное разложение пространства $D^{(n)}$ на системы импримитивности Γ (см. [1], стр. 12). Тогда в некотором базисе

$$u_1^1, \ldots, u_m^1, \ldots, u_1^k, \ldots, u_m^k$$

пространства $D^{(n)}$, приуроченном к разложению (5), группа Γ записывается в виде

$$\Gamma = G^{(k)}T, \tag{6}$$

где группа $G^{(k)}$ состоит из всех матриц $g = \operatorname{diag}[g_1, \ldots, g_k]$, g_j независимо друг от друга пробегают максимальную разрешимую примитивную подгруппу G группы $GL(m, D)$, а группа T изоморфна некоторой максимальной разрешимой транзитивной подгруппе симметрической группы S_k, причем для t из T, $t(u_j^\mu) = u_j^\nu$, $\mu = 1, \ldots, k$, $j = 1, \ldots, m$ (см. [1], стр. 13). Согласно теореме 1, в G содержится единственная OR-подгруппа $\Phi = \Phi(G)$ группы $GL(m, D)$. Построим группу

$$\overline{\Gamma} = \Phi^{(k)}T, \tag{7}$$

где $\Phi^{(k)}$ состоит из всех матриц вида $\operatorname{diag}[g_1, \ldots, g_k]$, g_j пробегают группу Φ.

Лемма 2. *Группа $\overline{\Gamma}$ неприводима.*

Доказательство леммы аналогично доказательству леммы 1 из [2].

Теорема 3. *Пусть Γ — максимальная импримитивная разрешимая подгруппа $GL(n, D)$, содержащая OR-подгруппу B группы $GL(n, D)$. Тогда группа B сопряжена в Γ с группой $\overline{\Gamma}$, определяемой равенством (7).*

Доказательство теоремы аналогично доказательству теоремы 4 из [2].

Если F — максимальный абелев нормальный делитель группы Γ, то, согласно [1], возможны два случая:

$$i)\ F = \{f \mid f = \operatorname{diag}[\lambda_1 E_m, \ldots, \lambda_k E_m],\ \lambda_i \in D^*\},$$

$$ii)\ F = \{f \mid f = \operatorname{diag}[c_1 E_{\frac{m}{2}}, \ldots, c_k E_{\frac{m}{2}}],\ c_i \in C'\}.$$

В случае ii) справедлива

Теорема 4. *Группа $\overline{\Gamma}$, определяемая равенством (7), является OR-подгруппой группы $GL(n, D)$.*

Доказательство теоремы аналогично доказательству теоремы 3 из [2].

Обратимся теперь к случаю i).

Лемма 3. *Если*

$$\overline{\Gamma} \subseteq B \subset GL(n, D), \tag{8}$$

где B — разрешимая группа, а $n > 2$, $n \neq 4$, то группа B импримитивна.

Доказательство. Пусть группа B примитивна, F_1 — максимальный абелев нормальный делитель B. Мы можем считать, что B максимальна среди разрешимых подгрупп $GL(n, D)$. Согласно [1], возможны два случая:

1) $F_1 \cong C^*$, где C^* — мультипликативная группа поля комплексных чисел;

2) $F_1 = D^* E_n$.

Случай 1). Если V — централизатор группы F_1 в B, то $[B:V] \leqslant 2$. Отсюда получаем, что при $n > 2$ ограничения N_i группы $N = \Phi^{(k)} \cap V$ на Q_i, $i = 1, \ldots, k$ (см. (5)), попарно неэквивалентны. Следовательно, $F_1(Q_i) = Q_i$, FF_1 (см. i)) — абелева группа. Очевидно, группа $\Gamma F_1 = F_1 \Gamma$ разрешима. Так как Γ максимальна среди разрешимых подгрупп $GL(n, D)$, то $\Gamma F_1 = \Gamma$, $F_1 \subset \Gamma$. Последнее включение противоречит конечности индекса F в Γ.

Случай 2). Согласно [1], случай 2) имеет место только при $n = 2^t$. Рассмотрим две возможности: а) $k = 2^r < n$ (см. (8)), б) $k = n$.

а) Очевидно, $\overline{\Gamma} \subseteq B_0 = B \cap \pm SL(n, D)$. Пусть $A/D^*E_{\frac{n}{k}}$ (A_1/D^*E_n) максимальный абелев нормальный делитель $G/D^*E_{\frac{n}{k}}$ (B/D^*E_n) (см. (6)). Как известно [1], $A/D^*E_{\frac{n}{k}}$, A_1/D^*E_n — элементарные абелевы 2-группы, причем центры групп A, A_1 совпадают с группами $D^*E_{\frac{n}{k}}$, D^*E_n соответственно. Положим

$$A_0 = A \cap \pm SL\left(\frac{n}{k}, D\right), \quad A_0^{(k)} = \{a \mid a = \operatorname{diag}[a_1, \ldots, a_k],\ a_i \in A_0\}, \tag{9}$$

$$A_1' = A_1 \cap \pm SL(n, D).$$

Согласно [1], $[A : D^*E_{\frac{n}{k}}] = \frac{n^2}{k^2} = 2^{2(t-r)}$. Следовательно, если 2^l — максимальная степень 2, входящая в порядок группы $\overline{\Gamma}$, то $l \geqslant [2(t-r) + 1]2^r + r$. С другой стороны, согласно (7), максимальная степень 2, входящая в порядок группы B_0, не превосходит 2^{4t}. При $k > 2$ последнее противоречит включению (8).

Пусть $k = 2$, $N = A_0^{(2)} \cap A_1$ (см. (9)). Очевидно, N — нормальный делитель группы $\overline{\Gamma}$. Если dN — порядок группы N, то, так как $[A_0^{(2)} A_1 : A_1] = [A_0^{(2)} : N] \leqslant 2^{2t-1}$ (см. [7]), $dN \geqslant 2^{2t-1}$. Следовательно, в N существует такая матрица $a = \operatorname{diag}[a_1, a_2]$, что $a_1 \neq \pm E_{\frac{n}{2}}$. Пусть $b_1 \in A_0$, $b_1 a_1 b_1^{-1} a_1^{-1} = -E_{\frac{n}{2}}$. Положим $b = \operatorname{diag}[b_1, E_{\frac{n}{2}}]$. Очевидно, $bab^{-1} = ha \in N$, где $h = \operatorname{diag}[-E_{\frac{n}{2}}, E_{\frac{n}{2}}]$. Следовательно, $h \in N \subseteq A_1'$. В группе A_1' есть такая матрица d, что $hdh^{-1}d^{-1} = -E_n$. Отсюда, в силу того что $d^2 = \pm E_n$, получаем

$$d = \begin{bmatrix} 0 & \pm D^{-1} \\ D & 0 \end{bmatrix} \in A_1'.$$

Так как группа A_0 импримитивна (см. [1], стр.57), а группа Φ примитивна, то фактор-группа Φ/A_0 нетривиальна. Пусть $gA_0 \neq A_0$ — произвольный элемент факторгруппы Φ/A_0, $g_1 = \operatorname{diag}[g, E_{\frac{n}{2}}]$. Как легко проверить,

$$\begin{bmatrix} g & 0 \\ 0 & E_{\frac{n}{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \pm D^{-1} \\ D & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g^{-1} & 0 \\ 0 & E_{\frac{n}{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \pm D^{-1} \\ D & 0 \end{bmatrix} = \\ = \begin{bmatrix} \pm g & 0 \\ 0 & \pm Dg^{-1}D^{-1} \end{bmatrix} = a_1 \in A_1'.$$

Так как $a_1^2 = \pm E_n$, то $g^2 = \pm E_{\frac{n}{2}}$ и, следовательно, Φ/A_0 — 2-группа. Отсюда получаем, что если 2^β (2^l) — максимальная степень 2, входящая в порядок группы $\Phi(\overline{\Gamma})$, то $\beta \geqslant 2t$, $l \geqslant 4t+1$. Последнее противоречит включению (8).

б) Пусть теперь группа $\overline{\Gamma}$ — мономиальна, 2^l — максимальная степень 2, входящая в порядок $\overline{\Gamma}$. Нетрудно видеть, что $l \geqslant 2^t + t$. Согласно [7], при $n > 8$ последнее противоречит включению (8). Случай $n = 8$ рассмотрим отдельно.

Пусть

$$\overline{F} = \{f | f = \operatorname{diag}[\lambda_1, \ldots, \lambda_8],\ \lambda_i = \pm 1\},\ N = \overline{F} \cap A_1$$

(см. (9)). Согласно [3], индекс централизатора группы ND^* в A_1 совпадает с порядком факторгруппы ND^*/D^*E_8. Отсюда в силу того, что $[A_1 : D^*E_8] = 2^6$, а N — абелева группа, следует, что $dN \leqslant 2^4$. Следовательно,

$$[\overline{F}A_1 : A_1] = [\overline{F} : N] \geqslant 2^4. \tag{10}$$

Фактор-группа B/A_1 изоморфна некоторой вполне приводимой разрешимой подгруппе H симплектической группы $Sp(6, 2)$ [3, 7]. Из результатов работ [1, 5] непосредственно следует, что порядок силовской 2-подгруппы P группы H не превосходит 2^4, причем в случае, когда $dP = 2^4$, группа P неабелева. Последнее противоречит (10). Лемма доказана.

Замечание 1. Максимальные разрешимые неприводимые подгруппы групп $GL(2, D)$, $GL(4, D)$ полностью описаны в работах [1, 4] соответственно. Непосредственно проверяется, что при $n = 2$ ($n = 4$) группа $\overline{\Gamma}$, определяемая равенством (7), содержится в максимальной примитивной разрешимой подгруппе группы $GL(2, D)$ ($GL(4, D)$), максимальный абелев нормальный делитель которой изоморфен мультипликативной группе поля комплексных чисел (совпадает с группой D^*E_4).

Теорема 5. *Группа $\overline{\Gamma}$, определяемая равенством (7), тогда и только тогда является OR-подгруппой группы $GL(n, D)$, когда*

1) $n > 2$, $n \neq 4$;

2) разложение (5) — единственное полное разложение на системы импримитивности группы $\overline{\Gamma}$;

3) если $\overline{\Gamma}$ мономиальна, то группа подстановок, индуцируемая $\overline{\Gamma}$ на системах импримитивности разложения (5), не является импримитивной группой, системы импримитивности которой состоят из двух или из четырех элементов.

Доказательство. Достаточность. Так как Φ — OR-подгруппа $GL(n, D)$, то существует $v \in GL\left(\frac{n}{k}, D\right)$, такая, что $v^{-1}\Phi v$ — ма-

ксимальная разрешимая подгруппа $O\left(\frac{n}{k}\right)$. Если теперь $d = v \times E_k$, то $\overline{\Gamma}_1 = d^{-1}\overline{\Gamma}d = d^{-1}\Phi^{(k)}Td \subset O(n)$. Покажем максимальность $\overline{\Gamma}_1$ среди разрешимых подгрупп $O(n)$. Пусть $\overline{\Gamma}_1 \subseteq B_1 \subset O(n)$, где B_1 — максимальная разрешимая подгруппа $O(n)$. Тогда

$$\overline{\Gamma} = d\,\overline{\Gamma}_1 d^{-1} \subseteq B = dB_1 d^{-1}. \tag{11}$$

B содержится в некоторой неприводимой максимальной разрешимой подгруппе H группы $GL(n, D)$. Согласно лемме 3, группа H импримитивна. Пусть

$$D^{(n)} = L_1 + \ldots + L_\rho \tag{12}$$

— полное разложение $D^{(n)}$ на системы импримитивности группы H. Так как $H \supset \overline{\Gamma}$, то L_j — системы импримитивности $\overline{\Gamma}$. Если (12) — полное разложение $D^{(n)}$ на системы импримитивности $\overline{\Gamma}$, то в силу условия 2) теоремы, разложения (12) и (5) совпадают. Пусть (12) не является полным разложением $D^{(n)}$ на системы импримитивности $\overline{\Gamma}$. Тогда согласно [1] (стр.12) и условиям 2), 3) теоремы $L_j = Q_{j_1} + \ldots + Q_{j\tau}$, $j = 1, \ldots, \rho$, причем при $k = n$, $\tau \neq 2^t$, $t = 1, 2$. Пусть $\overline{\Gamma}^j = \{g | g \in \overline{\Gamma},\ gL_j = L_j\}$, $\overline{\Gamma}_j$ — группа, индуцируемая группой $\overline{\Gamma}^j$ на L_j. Очевидно, группа $\overline{\Gamma}_j$ представима в виде полупрямого произведения $\overline{\Gamma}_j = T_j\Phi^{(\tau)}$, где $\Phi^{(\tau)} = \{g | g = \mathrm{diag}[g_1, \ldots, g_\tau],\ g_i \in \Phi\}$, а T_j — группа, индуцируемая группой $T^j = \{t | t \in T, tL_j = L_j\}$ на L_j. Так как группа T изоморфна максимальной транзитивной разрешимой подгруппе симметрической группы $S_{\frac{n}{k}}$, то группа T_j изоморфна максимальной транзитивной разрешимой подгруппе группы S_τ. Пусть H_j — группа, индуцируемая группой $H^j = \{h | h \in H,\ hL_j = L_j\}$ на L_j. Очевидно, H_j — примитивная группа, $\overline{\Gamma}_j = T_j\Phi^{(\tau)} \subseteq H_j$. Последнее включение противоречит лемме 3. Следовательно, разложения (12) и (5) совпадают. Отсюда следует, что $HF = FH = H$ (см. i)), $H \supseteq \Gamma$. Так как Γ максимальна среди разрешимых подгрупп $GL(n, D)$, то $H = \Gamma$. Очевидно, $B \subset \Gamma$ (см. (11)) — OR-подгруппа $GL(n, D)$. Согласно теореме 3, $\overline{\Gamma} = g^{-1}Bg$, где $g \in \Gamma$. Отсюда в силу (11) следует, что $\overline{\Gamma} = B$, $\overline{\Gamma}_1 = d^{-1}\overline{\Gamma}d$ максимальна среди разрешимых подгрупп $O(n)$.

Необходимость. Пусть теперь $\overline{\Gamma}$ является OR-подгруппой группы $GL(n, D)$. Тогда из замечания 1 непосредственно следует, что группа $\overline{\Gamma}$ удовлетворяет условиям 1), 3) теоремы. Покажем выполнение условия 2). Пусть

$$D^{(n)} = L_1 + \ldots + L_r \tag{13}$$

— тоже полное разложение пространства $D^{(n)}$ на системы импримитивности $\overline{\Gamma}$. Нетрудно показать, что группа $\overline{\Gamma}$ содержит группу H, состоящую из всех матриц h, умножающих векторы L_j на одно и то же число $\lambda_j = \pm 1$, $j = 1, \ldots, r$, в качестве максимального абелевого нормального делителя. Повторяя доказательство второй части теоремы 2 из [6], можно установить, что $H \subseteq \Phi^{(k)}$. Так как максимальный абелев нормальный делитель группы Φ равен $\{\pm E_n\}$, то из последнего включения следует, что $H \subseteq \overline{F} = \{f | f = \mathrm{diag}[\lambda_1, \ldots, \lambda_k],\ \lambda_i = \pm E_{\frac{n}{k}},\ i = 1, \ldots, k\}$. Отсюда следует, что $H = \overline{F}$, $L_j = Qv_{(j)}$, $j = 1, \ldots, r$.

Теорема доказана.

В заключение автор выражает глубокую признательность Д. А. Супруненко за обсуждение вопросов, связанных с настоящей заметкой.

Замечание при корректуре. Как установил автор, теорема 5 справедлива и без условия 2).

Литература

1. Супруненко Д. А. Разрешимые и нильпотентные линейные группы. Минск, 1958.
2. Супруненко Д. А., Конюх В. С. ДАН БССР, **11**, 667, 1967.
3. Супруненко Д. А. ДАН СССР, **184**, № 1, 1969.
4. Жаврид Г. П. Весці АН БССР, сер. фіз.-мат. навук, № 3, 1968.
5. Bucht G. Arc. f. Mat., **11**, 1, 1916.
6. Козел П. Т., Тышкевич Р. И. Изв. вузов, Математика, № 6, (31), 1962.
7. Конюх В. С. Весці АН БССР, сер. фіз.-мат. навук, № 5, 1969.
8. Холл М. Теория групп. ИЛ, 1962.

Институт математики АН БССР

Поступило в редакцию 23.V 1969

ВЕСЦІ АКАДЭМІІ НАВУК БЕЛАРУСКАЙ ССР № 6 1969
СЕРЫЯ ФІЗІКА-МАТЭМАТЫЧНЫХ НАВУК

УДК 519.46

Л. Б. ШНЕПЕРМАН

ПЛОТНО ВЛОЖЕННЫЕ ИДЕАЛЫ ТОПОЛОГИЧЕСКИХ ПОЛУГРУПП

1. Понятие плотно вложенного идеала было введено Е. С. Ляпиным в 1953 г. ([3], см. также [4]) для абстрактной характеристики некоторых полугрупп преобразований. Первый и типичный пример такой характеристики дает следующее утверждение: для того чтобы полугруппа A была изоморфна полугруппе всех преобразований множества Ω, необходимо и достаточно, чтобы она содержала плотно вложенный идеал K, равномощный Ω, с умножением

$$\forall_{x,\ y\in K}\ xy = x.$$

Плотные вложения изучались затем с разных точек зрения многими авторами. Л. М. Глускиным понятие плотно вложенного идеала было перенесено на полугруппы, наделенные структурами [2].

Понятие и основные результаты теории плотно вложенных идеалов переносятся в этой статье на топологические полугруппы.

2. Идеал K топологической полугруппы A назовем t-плотно вложенным, если выполняются следующие условия:

а) всякое нетривиальное представление*) полугруппы A индуцирует нетривиальное представление полугруппы K;

б) если B — топологическая полугруппа, содержащая A в качестве собственной подполугруппы, и K — идеал B, то существует нетривиальное представление полугруппы B, индуцирующее топологический изоморфизм на K.

3. Пусть K — топологическая полугруппа. Введем следующие обозначения.

λ и ρ — соответственно левый и правый непрерывные сдвиги полугруппы K:

$$\forall_{x,\ y\in K}\ \lambda(xy) = \lambda x \cdot y,$$

$$\forall_{x,\ y\in K}\ \rho(xy) = x \cdot \rho y.$$

λ_k и ρ_k — внутренний левый и правый сдвиги полугруппы K, порожденные элементом $k \in K$:

$$\forall x \in K\ \lambda_k x = kx,\quad \forall x \in K\ \rho_k x = xk.$$

Z_K — полугруппа пар непрерывных связанных сдвигов полугруппы K, т. е.

$$(\lambda,\ \rho) \in Z_K \leftrightarrow \rho\, x \cdot y = x \cdot \lambda y,$$

и для любых $(\lambda_1,\ \rho_1)$, $(\lambda_2,\ \rho_2) \in Z_K$

$$(\lambda_1,\ \rho_1) \cdot (\lambda_2,\ \rho_2) = (\lambda_1\lambda_2,\ \rho_2\rho_1).$$

$\tilde{K}$ — полугруппа пар внутренних сдвигов полугруппы K.

*) т. е. не являющееся топологическим изоморфизмом.

Напомним, что полугруппа Z_K содержит K в качестве идеала [2].

4. Пусть A — топологическая полугруппа, K — ее идеал. Обозначим

$$(C;\ U)_l = \{a \mid a \in A;\ aC \subset U\},$$

$$(C;\ U)_r = \{a \mid a \in A;\ Ca \subset U\},$$

где C — бикомпакт в K, а U — открытое множество в K.

Пусть τ_K — это топология на A, предбазой которой служит семейство множеств $\{(C;\ U)_l,\ (C;\ U)_r\}$ при всевозможных C и U.

Заметим, что топология τ_K зависит лишь от исходной топологии на идеале K, но не зависит от исходной топологии на всей полугруппе A.

5. Лемма. *Исходная топология на полугруппе A мажорирует топологию τ_K* (п. 4).

Доказательство. Пусть $a \in (C;\ U)_l$. Тогда $aC \subset U$, и существует такая окрестность $V(a)$, что $V(a)\,C \subset U$. Это значит, что каждая точка a содержится в множестве $(C;\ U)_l$ вместе с некоторой своей окрестностью $V(a)$. Аналогично доказывается, что множество $(C;\ U)_r$ открыто в исходной топологии. Отсюда следует утверждение леммы.

6. Лемма. *Пусть локально бикомпактная полугруппа K содержится в топологической полугруппе A в качестве идеала и в A нет элементов, равнодействующих на K. Тогда полугруппа A, наделенная топологией τ_K, будет топологической.*

Доказательство. Топология τ_K хаусдорфова. Действительно, если a и b — два неравных элемента из A, то существует такой элемент $k \in K$, что $ka \neq kb$ или $ak \neq bk$. Например, пусть справедливо второе неравенство. Тогда существуют непересекающиеся окрестности $U(ak)$ и $U(bk)$ в исходной топологии на K и $a \in (k;\ U(ak))_l$, $b \in (k;\ U(bk))_l$, причем $(k;\ U(ak))_l \cap (k;\ U(bk))_l = \varnothing$.

Перейдем к доказательству непрерывности умножения на полугруппе A, наделенной топологией τ_K. Пусть $a,\ b \in A$ и $(C;\ U)_l$ — окрестность точки ab в топологии τ_K. Значит, $abC \subset U$. Поэтому существует такая окрестность с бикомпактным замыканием $V(bc) = V$, что $a\bar{V} \subset U$. Ясно, что $a \in (\bar{V};\ U)_l$ и $b \in (C;\ V)_l$. Если же $x \in (\bar{V};\ U)_l$ и $y \in (C;\ V)_l$, то $xyC = x(yC) \subset xV \subset x\bar{V} \subset U$. Значит,

$$(\bar{V};\ U)_l \cdot (C;\ V)_l \subset (C;\ U)_l.$$

Все остальное уже тривиально.

7. Пусть K — топологическая полугруппа. Если на K топология τ_K совпадает с исходной топологией, то назовем K возвратной топологической полугруппой.

Заметим, что возвратная топологическая полугруппа не имеет равнодействующих элементов. Непосредственно из конструкции топологии τ_K следует, что такие элементы нельзя было бы отделить окрестностями из τ_K, а значит, нельзя было бы отделить окрестностями из исходной топологии. Напомним, что пространство топологической полугруппы по определению хаусдорфово [5].

8. Широкие классы возвратных полугрупп устанавливает

Лемма. *Следующие топологические полугруппы являются возвратными: 1) бикомпактная полугруппа без равнодействующих элементов; 2) полугруппа K с умножением $\forall_{x,\,y \in A}\ xy = x$.*

Доказательство. 1) Пусть K — полугруппа с исходной топологией, а K' — эта же полугруппа с топологией τ_K. Поскольку на K исходная топология мажорирует топологию τ_K (п. 5), то отображение $f : K \to K' : fk = k$

непрерывно. А непрерывное взаимно однозначное отображение бикомпакта на хаусдорфово пространство — гомеоморфизм.

2) Во-первых, $k \in (C;\ U)_l \longleftrightarrow kC \subset U \longleftrightarrow k \in U$. Поэтому, если $(C;\ U)_l \neq \neq \varnothing$, то $(C;\ U)_l = U$.

Во-вторых, если $(C;\ U)_r \neq \varnothing$, то существует такое $k \in K$, что $k \in (C;\ U)_r$. Тогда $C = Ck \subset U$. Следовательно, и $CK = C \subset U$. А потому $(C;\ U)_r = K$.

9. Однако не каждая локально бикомпактная полугруппа даже без равнодействующих элементов является возвратной. На это указывает следующий пример.

Пример. Рассмотрим на плоскости точки

$$x_0 = (0,\ 0),\ x_n\left(0,\ \frac{1}{n}\right)\ (n = 1,\ 2,\ \ldots),$$

$$y_n = \left(1, \frac{1}{n}\right)\ (n = 1,\ 2,\ \ldots).$$

Пусть K — множество этих точек, наделенное топологией плоскости. Введем на K операцию умножения:

$$x_n x_s = x_s x_n = x_{\max\{n,\ s\}}\ (n, s \neq 0),$$

$$x_n y_s = y_s x_n = x_{\max\{n,\ s\}}\ (n \neq 0),$$

$$y_n y_{n+p} = x_{n+p}\ (p > 0),$$

$$y_n y_n = y_n,$$

$$x_0 x_n = x_n x_0 = x_0 y_s = y_s x_0 = x_0.$$

Легко проверить, что относительно этой операции K является локально бикомпактной топологической коммутативной полугруппой идемпотентов.

Пусть теперь $(C;\ U)$ — окрестность точки x_0 в топологии τ_K. Тогда $x_0 = x_0 C \subset U$, и, начиная с некоторого номера N, все $x_n\ (n > N)$ содержатся в U. В C может содержаться лишь конечное число элементов вида y_l. Пусть y_L — элемент с наибольшим номером из них. Положим $m = \max\{N + 1,\ L + 1\}$. Тогда ясно, что $y_m C \subset U$, т. е. $y_m \in (C;\ U)$. Значит, в каждой окрестности $(C;\ U)$ элемента x_0 содержатся элементы вида y_m.

Множество окрестностей $(C;\ U)$ в нашем примере является базой, так как

$$\bigcap_{s=1}^{t} (C_s;\ U_s) \supset \left(\bigcup_{s=1}^{t} C_s;\ \bigcap_{s=1}^{t} U_s\right).$$

Поэтому x_0 является предельной точкой множества $\{y_q \mid q = 1,\ 2,\ \ldots\}$ в топологии τ_K. Очевидно, что x_0 не является предельной точкой этого множества в исходной топологии.

10. Пусть K — возвратная локально бикомпактная полугруппа. Тогда K и $\tilde{K}$ (п. 3) алгебраически изоморфны. Изоморфизм $K \to (\lambda_k,\ \rho_k)$ индуцирует на $\tilde{K}$ топологию, которая позволяет на полугруппе Z_K (п. 3) построить топологию $\tau_{\tilde{K}}$ (п. 4). По определению возвратной полугруппы эта топология совпадает на $\tilde{K}$ с исходной топологией. Умножение на Z_K непрерывно относительно топологии $\tau_{\tilde{K}}$ (п. 6). Всюду ниже, говоря о топологической полугруппе Z_K, будем считать, что она наделена именно этой топологией.

11. В п. п. 11 — 18 в алгебраическом плане использованы результаты работы [2].

Лемма. *Пусть K — локально бикомпактная возвратная полугруппа и T — подполугруппа топологической полугруппы Z_K, содержащая $\tilde{K}$. Тогда всякое нетривиальное представление полугруппы T индуцирует нетривиальное представление полугруппы $\tilde{K}$.*

Доказательство. Из всех топологий, обращающих полугруппу T в топологическую и совпадающих на идеале $\tilde{K}$ с исходной, топология $\tau_{\tilde{K}}$ является минимальной (п. 5). Поэтому непрерывный изоморфизм полугруппы T является топологическим изоморфизмом. Значит, нетривиальное представление φ полугруппы T не может быть алгебраическим изоморфизмом. Поэтому представление φ является нетривиальным гомоморфизмом и достаточно сослаться на [2].

12. Лемма. *Пусть K — локально бикомпактная возвратная полугруппа, T — топологическая полугруппа, содержащая K в качестве идеала. Отображение $\varphi : T \to Z_K$:*

$$\forall_{t \in T}\ \varphi t = (\lambda_t, \rho_t)$$

является представлением, индуцирующим топологический изоморфизм на K.

Доказательство. Достаточно установить непрерывность отображения φ. Если $t \in T$, то обозначим

$$\varphi t = (\lambda_t, \rho_t) = z_t.$$

Прежде всего отметим, что φ является топологическим изоморфизмом K на $\tilde{K}$; это следует из самого построения топологии на $\tilde{K}$.

Пусть теперь одна из окрестностей предбазы топологии на $\tilde{K}$, например $(\tilde{C}; \tilde{U})_l$, содержит z_t. Тогда $z_t \tilde{C} \subset \tilde{U}$ и, следовательно, в полугруппе T имеем $tC \subset U$. Но в этом случае существует такая окрестность $V(t)$, что $V(t) \subset U$. А это равносильно тому, что

$$\varphi V(t) \subset (\tilde{C}; \tilde{U})_l.$$

Непрерывность отображения φ уже ясна.

13. Лемма. *Пусть K — локально бикомпактная возвратная полугруппа, K' — такой идеал топологической полугруппы T', что всякое нетривиальное представление полугруппы T' индуцирует нетривиальное представление полугруппы K', и φ' — произвольный топологический изоморфизм K' на $\tilde{K}$. Тогда существует, и притом единственный, топологический изоморфизм φ полугруппы T' в Z_K, являющийся продолжением φ'.*

Доказательство. Так как K' и K топологически изоморфны, то ясно, что существует топологическая полугруппа T, топологически изоморфная полугруппе T' и содержащая K в качестве идеала, причем, если ψ — топологический изоморфизм T' в T, то $\psi(T') = T$ и $\psi(K') = K$. Если еще $\alpha' : K \to \tilde{K}$ — естественный топологический изоморфизм, то ψ можно считать таким, что $\varphi' = \alpha' \psi$.

Остается доказать, что существует топологический изоморфизм α полугруппы T в Z_K, являющийся продолжением α' (единственность его будет следовать из единственности алгебраического изоморфизма). Отображение α:

$$\forall_{t \in T}\ \alpha t = (\lambda_t, \rho_t)$$

и будет этим топологическим изоморфизмом. Действительно, α — представление T в Z_K (лемма п. 12), тождественное на K. По условию представление α может быть только тривиальным.

14. Теорема. *Если K — локально бикомпактная возвратная полугруппа, то $\tilde{K}$ является t-плотно вложенным идеалом топологической полугруппы Z_K.*

Доказательство. Справедливость условия а) из п. 2 следует из леммы п. 11.

Пусть теперь T — собственная топологическая надполугруппа топологической полугруппы Z_K, содержащая $\tilde{K}$ в качестве идеала. Допустим, что всякое нетривиальное представление полугруппы T индуцирует нетривиальное представление полугруппы $\tilde{K}$. Из леммы п. 13 следует, что существует топологический изоморфизм φ полугруппы T в Z_K, индуцирующий тождественный изоморфизм на $\tilde{K}$. Но тогда топологический изоморфизм φ', индуцируемый отображением φ на полугруппе Z_K, содержащейся в T, является топологическим изоморфизмом Z_K в $\varphi' Z_K$, причем $\varphi' Z_K \neq Z_K$. По той же лемме тождественный изоморфизм Z_K на себя является единственным топологическим изоморфизмом Z_K в себя, индуцирующим тождественный изоморфизм на $\tilde{K}$. Противоречие.

15. Очевидным следствием предыдущего п. является

Теорема. *Для каждой локально бикомпактной возвратной полугруппы K существует топологическая полугруппа A, содержащая K в качестве t-плотно вложенного идеала.*

16. Из п. п. 11—13 без труда следует

Теорема. *Пусть K — локально бикомпактная возвратная полугруппа, являющаяся t-плотно вложенным идеалом топологической полугруппы A; K' — такой идеал топологической полугруппы T', что всякое нетривиальное представление полугруппы T' индуцирует нетривиальное представление полугруппы K'; φ' — топологический изоморфизм K' на K. Тогда существует, и притом единственный, топологический изоморфизм φ полугруппы T' в A, являющийся продолжением топологического изоморфизма φ'.*

17. Отсюда вытекает важная теорема о продолжении топологических изоморфизмов.

Теорема. *Пусть K — локально бикомпактная возвратная полугруппа, являющаяся t-плотно вложенным идеалом топологической полугруппы A; K' — t-плотно вложенный идеал топологической полугруппы A'; φ' — топологический изоморфизм K' на K. Тогда существует, и притом единственный, топологический изоморфизм полугруппы A' на A, являющийся продолжением топологического изоморфизма φ'.*

18. Из предыдущего п. вытекает результат, дающий возможность использовать t-плотно вложенные идеалы для внутренней характеристики топологических полугрупп.

Теорема. *Пусть K — локально бикомпактная возвратная полугруппа, являющаяся t-плотно вложенным идеалом топологической полугруппы A. Для того чтобы топологическая полугруппа A' была топологически изоморфна полугруппе A, необходимо и достаточно, чтобы полугруппа A' содержала t-плотно вложенный идеал K', топологически изоморфный K.*

19. Сейчас мы дадим абстрактную характеристику непрерывной полугруппы преобразований локально бикомпактного топологического пространства. Этот результат является обобщением теоремы Е. С. Ляпина (см. п. 1), доказательством которой мы воспользуемся в алгебраическом плане.

Напомним, что полугруппа непрерывных преобразований локально бикомпактного пространства, наделенная бикомпактно-открытой топологией, является непрерывной полугруппой преобразований.

Теорема. *Пусть* Ω *— локально бикомпактное топологическое пространство,* $S(\Omega)$ *— полугруппа непрерывных преобразований* Ω*, наделенная бикомпактно-открытой топологией. Для того чтобы топологическая полугруппа* A *была топологически изоморфна непрерывной полугруппе преобразований* $S(\Omega)$*, необходимо и достаточно, чтобы* A *содержала* t*-плотно вложенный идеал* K*, гомеоморфный* Ω*, с умножением*

$$\forall_{x,\, y \in K}\ xy = x.$$

Доказательство. *Пусть* $\alpha \in \Omega$. *Обозначим* $h_\alpha : \Omega \to \Omega : h_\alpha\, \xi = \alpha$. Совокупность всех преобразований h_α образует идеал H полугруппы $S(\Omega)$.

Пусть Λ — бикомпакт, а Γ — открытое множество в Ω, $(\Lambda; \Gamma)$ — окрестность в бикомпактно-открытой топологии на H. Тогда $(\Lambda; \Gamma) = \{h_\xi\}_\xi \in \Gamma$, и при любом бикомпакте Λ

$$\alpha \in \Gamma \leftrightarrow h_\alpha \in (\Lambda; \Gamma).$$

Значит, H и Ω гомеоморфны.

Условие а) п. 2 для H выполняется.

Пусть теперь топологическая полугруппа D содержит $S(\Omega)$, $D \neq S(\Omega)$ и H — идеал D. Тогда положим $\psi : D \to S(\Omega)$:

$$[\psi(d)]\,\alpha = [dh_\alpha]\,\alpha.$$

Отображение ψ — это гомоморфизм D на $S(\Omega)$, индуцирующий тождественный изоморфизм на H.

Докажем непрерывность отображения ψ. Пусть $H_\Pi = \{h_\xi\}_{\xi \in \Pi}$. Тогда, если $\psi(d) = s$, то

$$s \in (\Lambda; \Gamma) \leftrightarrow s\Lambda \subset \Gamma \leftrightarrow sH_\Lambda \subset H_\Gamma \leftrightarrow dH_\Lambda \subset H_\Gamma.$$

H_Γ — открытое множество $H \cap S(\Omega)$. Поэтому существует такое открытое множество $U \subset D$, что $H_\Gamma = H \cap U$. Так как H_Λ — бикомпакт, то найдется такая окрестность $V(d)$ в D, что $V(d)\, H_\Lambda \subset U$. Но так как H—идеал в D, то $V(d)\, H_\Lambda \subset U \cap H = H_\Gamma$. Значит,

$$\psi(V(d)) \subset (\Lambda; \Gamma).$$

Остается отметить тот очевидный факт, что на H отображение ψ является гомеоморфизмом.

Итак, H — локально бикомпактная возвратная полугруппа (п. 8), которая содержится в $S(\Omega)$ в качестве t-плотно вложенного идеала. Поэтому можно непосредственно воспользоваться теоремой из п. 18.

Литература

1. Ляпин Е. С. Полугруппы. Физматгиз, М., 1960.
2. Глускин Л. М. Матем. сб., 55 (97), № 4, 1961.
3. Ляпин Е. С. ДАН СССР, 88, № 1, 1953.
4. Ляпин Е. С. Уч. зап. Ленинградск. педин-та, **103**, 1955.
5. Hofmann K. H., Mostert P. S. Elements of compact semigroups. Merrill books, Columbus, 1966.

Минский государственный педагогический институт им. А. М. Горького

Поступило в редакцию 4.IV 1969

ВЕСЦІ АКАДЭМІІ НАВУК БЕЛАРУСКАЙ ССР № 6 1969
СЕРЫЯ ФІЗІКА-МАТЭМАТЫЧНЫХ НАВУК

УДК 519.95

В. А. ЕМЕЛИЧЕВ

ВОГНУТОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ С СЕПАРАБЕЛЬНОЙ ФУНКЦИЕЙ ЦЕЛИ ПРИ ЛИНЕЙНЫХ ОГРАНИЧЕНИЯХ

1. В этой заметке предлагается метод решения задачи A минимизации функции $F(X) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x_i)$ на выпуклом многограннике $D \subset R^n$. Причем многогранник D задан линейными неравенствами, среди которых существуют неравенства вида $0 \leqslant x_i \leqslant d_i$, $i = \overline{1,n}$ или же эти неравенства являются следствием других (см. ниже замечание 2); $f_i(x_i)$ — вогнутая на интервале $[0, d_i]$ функция*).

Как известно [1], минимум вогнутой функции на выпуклом многограннике, если он существует, достигается по крайней мере в одной вершине. Трудность решения таких задач связана с тем, что локальный минимум не всегда является глобальным.

В [1] был предложен общий метод решения задачи вогнутого программирования при линейных ограничениях. Здесь рассматривается частный случай и используется основная идея работы [2], применение которой к задаче A состоит в том, что последовательно выписываются вершины многогранника D в порядке неубывания вспомогательной линейной формы $L(X) \leqslant F(X)$ до выполнения критерия оптимальности (теорема 2).

2. Рассмотрим функцию

$$L(X) = \sum_{i=1}^{n} \frac{f_i(d_i) - f_i(0)}{d_i} x_i + \sum_{i=1}^{n} f_i(0).$$

В силу вогнутости функций $f_i(x_i)$ очевидна следующая

Лемма 1. *$L(X) \leqslant F(X)$ для всех $X \in D$.*

Подобно [1] можно предполагать, что многогранник D «невырожден» и, следовательно, любая вершина имеет n соседних вершин.

Через $Q(X_0)$ мы обозначим множество вершин многогранника D, соседних с вершиной X_0.

Пусть M — некоторое множество вершин многогранника D. Для $X_0 \in M$ через $Q(X_0, M)$ обозначим множество $\{M \setminus X_0\} \cup Q(X_0)$.

3. Опишем алгоритм φ, строящий последовательность вершин многогранника D.

На подготовительном этапе находим оптимальный план X_1 задачи минимизации линейной формы $L(X)$ на множестве D. Через M_1 обозначим множество, состоящее из одной вершины X_1.

k-й шаг ($k = 1, 2, \ldots$) алгоритма φ. Находим план X_k, такой, что

*) Определение вогнутой функции см., например, в [1].

$$L(X_k) = \min_{X \in M_k} L(X).$$

Далее строим множество $M_{k+1} = Q(X_k, M_k) \setminus \{X_1, \ldots, X_{k-1}\}$ и переходим к следующему шагу.

Через m обозначим количество вершин многогранника D.

Лемма 2. *$M_k \neq \varnothing$ для каждого $k \leqslant m$.*

Доказательство. Очевидно, что $M_1 \neq \varnothing$. Пусть существует такое $k \leqslant m$, что $M_i \neq \varnothing$, $i = \overline{1, k-1}$, а $M_k = \varnothing$. Это значит, что алгоритм φ заканчивает построение последовательности вершин на $(k-1)$-м шаге, т. е. строит последовательность, содержащую не все вершины, а лишь $k-1$ вершин многогранника D. Таким образом, имеется вершина X_0 многогранника D, которая не может быть построена с помощью алгоритма φ, т. е.

$$X_0 \bar{\in} N_{k-1} = \{X_1, X_2, \ldots, X_{k-1}\}.$$

С другой стороны, существует последовательность соседних вершин, начинающаяся в X_1 и заканчивающаяся в X_0:

$$X_1 = X^{(1)}, X^{(2)}, \ldots, X^{(p)} = X_0.$$

Здесь $X^{(1)} \in N_{k-1}$, а $X^{(p)} \bar{\in} N_{k-1}$. Очевидно, существует такое число q $(1 \leqslant q \leqslant p-1)$, что $X^{(q)} \in N_{k-1}$, а $X^{(q+1)} \bar{\in} N_{k-1}$. Отсюда следует, что $X^{(q)}$ — это некоторая вершина $X_j \in N_{k-1}$ $(j < k)$, т. е. $X^{(q)} \in M_j$ и $X^{(q)} \bar{\in} M_{j+1}$.

Так как $X^{(q+1)} \in Q(X^{(q)})$ и $X^{(q+1)} \bar{\in} N_j$ $(N_j \subset N_{k-1})$, то по построению множества M_{j+1} (см. k-й шаг алгоритма φ) $X^{(q+1)} \in M_{j+1}$.

Рассмотрим отдельно два случая.

Случай 1. $j+1 = k$. Тогда $M_k \neq \varnothing$, так как $X^{(q+1)} \in M_k$. Но это противоречит предположению.

Случай 2. $j+1 < k$. Так как по предположению $M_k = \varnothing$, то в этом случае $M_{j+1} \subset N_{k-1}$, т. е. $X^{(q+1)} \in N_{k-1}$. Вновь получили противоречие. Лемма 2 доказана.

Из леммы 2 следует

Лемма 3. *Алгоритм φ строит последовательность, состоящую из m вершин многогранника D.*

Непосредственно из определения множества M_k и алгоритма φ следует

Лемма 4. *Если $X_0 \neq X_i$, $i = \overline{1, k-1}$ и $X_0 \bar{\in} M_k$, то $Q(X_0) \cap \{X_1, X_2, \ldots, X_{k-1}\} = \varnothing$.*

Введем обозначение

$$O(X_0) = \{X \mid X \in Q(X_0),\ L(X) \leqslant L(X_0)\}.$$

Ясно, что $O(X_0) \subseteq Q(X_0)$. Поэтому справедлива

Лемма 5. *Если $X_0 \neq X_i$, $i = \overline{1, k-1}$ и $X_0 \bar{\in} M_k$, то $X_i \bar{\in} O(X_0)$, $i = \overline{1, k-1}$.*

Рассмотрим множества вершин

$O_j(X_0) = \bigcup_{X \in O_{j-1}(X_0)} O(X)$, $j = 2, 3, \ldots$, причем $O_1(X_0) = O(X_0)$.

Следующие леммы очевидны.

Лемма 6. *Для любой вершины $X_0 \neq X_1$ многогранника D существует такой номер $j = j(X_0)$, что $X_1 \in O_j(X_0)$.*

Лемма 7. *$L(X_0) \geqslant L(X)$ для каждой вершины $X \in \bigcup_{j=1,2,\ldots} O_j(X_0)$.*

Теорема 1. *Последовательность $X_1, X_2, \ldots$ вершин многогранника D, построенная с помощью алгоритма φ, обладает свойством*

$$L(X_k) = \min_{X \in D_k} L(X),\ k = \overline{1, m}, \tag{1}$$

где $D_k = D_{k-1} \setminus X_{k-1}$, *а* D_1 — *множество всех вершин многогранника* D.

Доказательство проведем от противного. Пусть для некоторого k ($k \geqslant 2$) свойство (1) неверно, т. е. существует вершина $X_0 \in D$, такая, что

$$\min_{X \in D_k} L(X) = L(X_0) < L(X_k). \tag{2}$$

Следовательно, $X_0 \neq X_i$, $i = \overline{1,k}$. Рассмотрим отдельно два случая.

Случай 1. Пусть $X_0 \in M_k$. Тогда

$$L(X_k) = \min_{X \in M_k} L(X) \leqslant L(X_0).$$

Но это противоречит (2).

Случай 2. Пусть $X_0 \bar{\in} M_k$. Из леммы 5 следует, что $X_i \bar{\in} O_1(X_0)$, $i = \overline{1,\ k-1}$. Пусть по предположению индукции $X_i \bar{\in} O_{j-1}(X_0)$, $i = \overline{1,\ k-1}$. Докажем, что тогда $X_i \bar{\in} O_j(X_0)$, $i = \overline{1,\ k-1}$.

Так как на основании леммы 7

$$L(X_0) \geqslant L(X)$$

для всех $X \in O_{j-1}(X_0)$, то в силу (2) получаем

$$\min_{X \in M_k} L(X) = L(X_k) > L(X)$$

для всех $X \in O_{j-1}(X_0)$. Отсюда вытекает, что $M_k \cap O_{j-1}(X_0) = \varnothing$. Таким образом, согласно лемме 5,

$$X_i \bar{\in} O(X),\ i = \overline{1,\ k-1}$$

для всех $X \in O_{j-1}(X_0)$, т. е. $X_i \bar{\in} O_j(X_0)$, $i = \overline{1,\ k-1}$.

Итак, на основании принципа математической индукции для всякого натурального j справедливо утверждение $\{X_1, X_2, \ldots, X_{k-1}\} \cap O_j(X_0) = \varnothing$. Тем самым доказано, что $X_1 \bar{\in} O_j(X_0)$ при всех $j = 1, 2, \ldots$. Однако это противоречит лемме 6.

Таким образом, если X_k — вершина, построенная на k-м шаге алгоритма φ, то в D_k не существует лучшей вершины, чем X_k (по критерию минимума линейной формы $L(X)$). Теперь, учитывая лемму 3, можно заключить, что теорема 1 доказана.

Следствие. Последовательность вершин $X_1, X_2, \ldots$ такова, что $L(X_k) \leqslant L(X_j)$ для $k < j$.

4. Сформулируем теперь критерий оптимальности плана задачи A (ср. с [2]).

Теорема 2. *Если существует такое число* s, *что*

$$L(X_s) \geqslant \min_{i=\overline{1,s}} F(X_i) = F(X_s^*), \tag{3}$$

то X_s^* — *оптимальный план задачи* A.

Доказательство. В силу леммы 1 имеем

$$F(X_{s+j}) \geqslant L(X_{s+j}),\ j = \overline{1,\ m-s}.$$

На основании следствия теоремы 1 справедливы неравенства

$$L(X_{s+j}) \geqslant L(X_s),\ j = \overline{1,\ m-s}.$$

Поэтому, учитывая (3), получаем

$$F(X_s^*) \leqslant F(X_{s+j}),\ j = \overline{1,\ m-s}.$$

Отсюда ввиду (3) имеем

$$F(X_s^*) = \min_{i=\overline{1,m}} F(X_i) = \min_{X \in D} F(X),$$

что и требовалось доказать.

5. Используя критерий оптимальности (3), легко сформулировать алгоритм ψ решения задачи A.

s-й шаг ($s = 1, 2, \ldots$) алгоритма ψ состоит в том, что с помощью алгоритма φ находим план X_s и проверяем, удовлетворяет ли он условию (3). Если да, то X_s^* — оптимальный план задачи A. Если нет, то переходим к следующему шагу.

Замечание 1. В случае, если на s-м шаге работы алгоритма ψ условие (1) не выполняется, можно оценить отклонение лучшей из полученных вершин X_s^* от оптимальной вершины X^*, так как справедливо неравенство [2]

$$F(X_s^*) - F(X^*) \leqslant F(X_s^*) - L(X_s).$$

Таким образом, в этом случае на s-м шаге числа $L(X_s)$ и $F(X_s^*)$ являются границами минимального значения целевой функции в задаче А. Причем с каждым шагом нижняя граница $L(X_s)$ не убывает, а верхняя $F(X_s^*)$ не возрастает.

Замечание 2. Предлагаемый метод применим в частности к задаче транспортного типа с вогнутыми функциями $f_{ij}(x_{ij})$:

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f_{ij}(x_{ij}) \to \min,$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, \quad i = \overline{1, m},$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, \quad j = \overline{1, n},$$

$$x_{ij} \geqslant 0, \quad i = \overline{1, m}, \ j = \overline{1, n},$$

так как в этом случае $0 \leqslant x_{ij} \leqslant \min(a_i, b_j)$, $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$ *).

Для транспортной задачи с фиксированными затратами [4] первый шаг алгоритма ψ есть не что иное, как приближенный метод Балинского [5].

Замечание 3. Очевидно, с помощью изложенного метода можно решать задачу минимизации произвольной вогнутой функции $F(X)$ на произвольном выпуклом многограннике N, если существует такая линейная форма $L(X)$, что $L(X) \leqslant F(X)$ для всех $X \in N$. В недавно появившейся работе [6] получен результат подобного рода для задачи линейного программирования с фиксированными затратами.

Литература

1. Хоанг Туй. ДАН СССР, **159**, № 1, 1964.
2. Емеличев В. А., Комлик В. И. ДАН БССР, **12**, № 10, 1968.
3. Чайко А. Д. Экономика и математические методы, **4**, в. 2, 1968.
4. Хедли Дж. Нелинейное и динамическое программирование. Изд. «Мир», М., 1967.
5. Balinski M. L. Nav. Res. Logist. Quart., **8**, № 1, 1961.
6. Murty K. G. Oper. Res., **16**, № 2, 1968.

Белорусский государственный университет им. В. И. Ленина

Поступило в редакцию 20.III 1969

*) Более точные оценки для x_{ij} можно найти в [3].

ВЕСЦІ АКАДЭМІІ НАВУК БЕЛАРУСКАЙ ССР № 6 1969
СЕРЫЯ ФІЗІКА-МАТЭМАТЫЧНЫХ НАВУК

УДК 517.948.32

И. А. СОКОЛОВ

О КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ТИПА РИМАНА ДЛЯ БИАНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ В СЛУЧАЕ ПРОИЗВОЛЬНОГО КОНТУРА

§ 1. Пусть L — простой кусочно-гладкий замкнутый контур, делящий плоскость на две области: D^+ и D^-. Для определенности начало координат будем считать принадлежащим области D^+.

Рассмотрим следующую задачу: найти кусочно-бианалитическую функцию $F(z, \bar{z})$, исчезающую на бесконечности и удовлетворяющую на контуре L краевым условиям

$$F^+(t, \bar{t}) = G_0(t) F^-(t, \bar{t}),$$
$$\Delta F^+(t, \bar{t}) = G_1(t) \Delta F^-(t, \bar{t}) \qquad (1)$$

(однородная задача)

или

$$F^+(t, \bar{t}) = G_0(t) F^-(t, \bar{t}) + g_0(t),$$
$$\Delta F^+(t, \bar{t}) = G_1(t) \Delta F^-(t, \bar{t}) + 4g_1(t) \qquad (2)$$

(неоднородная задача),

где $G_0(t)$, $G_1(t)$, $g_0(t)$, $g_1(t)$ — функции точек контура L, удовлетворяющие условию Гельдера, причем $G_0(t)$, $G_1(t)$ не обращаются на L в нуль; Δ — оператор Лапласа; множитель 4 введен для удобства.

Замечание 1. Сформулированная задача в случае, когда L—окружность, изучена в [2]. Полученные там результаты в отличие от обычной задачи Римана [1], как это будет видно из дальнейшего, не переносятся полностью на случай произвольного контура.

Напомним, что кусочно-бианалитической функцией $F(z, \bar{z})$ мы называем функцию вида

$$F(z, \bar{z}) = \begin{cases} F^+(z, \bar{z}) = \varphi_0^+(z) + \bar{z}z\varphi_1^+(z) = f_0^+(z) + \bar{z}f_1^+(z), & z \in D^+, \\ F^-(z, \bar{z}) = \varphi_0^-(z) + \bar{z}\,\dfrac{1}{z^2}\,\varphi_1^-(z) = f_0^-(z) + \bar{z}f_1^-(z), & z \in D^-, \end{cases}$$

где $\varphi_0^+(z)$, $\varphi_1^+(z)$ — аналитические в D^+, $\varphi_0^-(z)$, $\varphi_1^-(z)$ — аналитические в D^- функции.

Всюду в дальнейшем будем придерживаться, специально этого не оговаривая, следующих обозначений:

$$\varkappa_k = \operatorname{Ind} G_k(t), \quad \tilde{\varkappa}_k = \varkappa_k - 2k, \quad \Gamma_k(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\ln\left[\tau^{-\varkappa_k} G_k(\tau)\right]}{\tau - z}\, d\tau,$$

$$X_k^+(z) = e^{\Gamma_k^+(z)}, \quad X_k^-(z) = z^{-\varkappa_k} e^{\Gamma_k^-(z)},$$

$$\Psi_k(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{g_k(\tau)}{X_k^+(\tau)}\,\frac{d\tau}{\tau-z},\quad P_{\tilde{\varkappa}_k-1}(z)=\sum_{m=0}^{\tilde{\varkappa}_k-1}C_m^{(k)}z^m$$

— многочлен степени $\tilde{\varkappa}_k-1$ с произвольными коэффициентами, причем при $\tilde{\varkappa}_k\leqslant 0$ следует считать $P_{\tilde{\varkappa}_k-1}(z)\equiv 0$ $(k=0,\ 1)$; $L^+(L^-)$ — произвольная гладкая кривая, принадлежащая $D^+(D^-)$ и соединяющая точки 0 и z (∞ и z).

§ 2. Однородная задача. Так как $\Delta F(z,\ \bar{z})=4[f_1(z)]'$, то, как это видно из последнего условия (1), для определения функции $f_1(z)$ требуется найти кусочно-аналитическую функцию $W_1(z)$, имеющую на бесконечности нуль третьего порядка и удовлетворяющую на L условию

$$W_1^+(t)=G_1(t)\,W_1^-(t),$$

где

$$W_1(z)=[f_1(z)]'. \tag{3}$$

Ее решение:

$$W_1(z)=X_1(z)\,P_{\tilde{\varkappa}_1-1}(z). \tag{4}$$

Из (3) и (4) имеем

$$f_1^{\pm}(z)=\int\limits_{L^{\pm}}\chi_1^{\pm}(\zeta)\,P_{\tilde{\varkappa}_1-1}(\zeta)\,d\zeta. \tag{5}$$

Подставляя предельные значения найденной кусочно-аналитической функции $f_1^{\pm}(z)$ в первое условие (1), мы для нахождения $f_0^{\pm}(z)$ получим задачу Римана

$$f_0^+(t)=G_0(t)\,\overline{f_0^-}(t)+\bar{t}\,[G_0(t)\overline{f_1^-}(t)-f_1^+(t)],$$
$$f_0^-(\infty)=0. \tag{6}$$

Рассмотрим всевозможные случаи.

1°. $\varkappa_0\geqslant 0$, $\tilde{\varkappa}_1$ — произвольное.

Решение задачи (6), как известно [1], дается формулой

$$f_0(z)=X_0(z)\,[\,\Psi_{01}(z)+P_{\varkappa_0-1}(z)\,], \tag{7}$$

где

$$\Psi_{01}(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L\frac{\bar{\tau}\,[G_0(\tau)\,\overline{f_1^-}(\tau)-f_1^+(\tau)]}{X_0^+(\tau)}\,\frac{d\tau}{\tau-z}. \tag{8}$$

Общее решение задачи (1) имеет вид

$$F^{\pm}(z,\ \bar{z})=X_0^{\pm}(z)\big[\Psi_{01}^{\pm}(z)+P_{\varkappa_0-1}(z)\big]+\bar{z}\int\limits_{L^{\pm}}X_1^{\pm}(\zeta)\,P_{\tilde{\varkappa}_1-1}(\zeta)\,d\zeta. \tag{9}$$

Вводя обозначения

$$F_{0m}^{\pm}(z,\ \bar{z})=X_0^{\pm}(z)z^m\quad(m=0,\ 1,\ \ldots,\ \varkappa_0-1;\ \varkappa_0>0),$$

$$F_{1m}^{\pm}(z,\ \bar{z})=\frac{X_0^{\pm}(z)}{2\pi i}\int\limits_L\frac{\bar{\tau}w_m(\tau)}{X_0^+(\tau)}\,\frac{d\tau}{\tau-z}+\bar{z}\int\limits_{L^{\pm}}X_1^{\pm}(\zeta)\,\zeta^m\,d\zeta \tag{10}$$

$$(m=0,\ 1,\ \ldots,\ \tilde{\varkappa}_1-1;\ \tilde{\varkappa}_1>0).$$

где

$$w_m(t) = G_0(t)\int_{\infty}^{t} X_1^-(\zeta)\,\zeta^m d\zeta - \int_{0}^{t} X_1^+(\zeta)\,\zeta^m\,d\zeta$$

$$(m = 0, 1, \ldots, \tilde{\varkappa}_1 - 1;\ \tilde{\varkappa}_1 > 0), \tag{11}$$

мы функцию (9) можем представить в форме

$$F(z,\ \bar{z}) = \sum_{m=0}^{\varkappa_0 - 1} c_m^{(0)} F_{0m}(z, \bar{z}) + \sum_{m=0}^{\tilde{\varkappa}_1 - 1} c_m^{(1)} F_{1m}(z,\ \bar{z}). \tag{12}$$

Таким образом, общее решение задачи (1) линейно зависит от s (см. [2]) произвольных постоянных. При $s=0$, т. е. при $\varkappa_0 = 0$, $\tilde{\varkappa}_1 \leqslant 0$ задача (1) имеет лишь тривиальное решение.

2°. $\varkappa_0 < 0$, $\tilde{\varkappa}_1 \leqslant 0$.

В этом случае $f_1(z) = f_0(z) \equiv 0$ и задача (1) имеет только нулевое решение.

3°. $\varkappa_0 < 0$, $\tilde{\varkappa}_1 > 0$.

Задача (6) разрешима тогда и только тогда, когда выполнены условия

$$\int_L \frac{\bar{\tau}\left[G_0(\tau) f_1^-(\tau) - f_1^+(\tau)\right]}{X_0^+(\tau)}\,\tau^{k-1} d\tau = 0$$

$$(k = 1,\ 2,\ \ldots,\ -\varkappa_0). \tag{13}$$

Условия (13) зависят от произвольных постоянных $c_m^{(1)}$. Если L — окружность, то нетрудно убедиться, используя теорему о вычетах и теорему Коши, что (13) имеют место при произвольных постоянных, входящих в $f_1^{\pm}(t)$. Вообще, в этом случае введением новой вспомогательной функции, как это сделано в [2], задачу (6) можно свести к однородной задаче Римана. Поэтому в дальнейшем будем считать, что L не есть окружность.

Так как

$$G_0(t)\, f_1^-(t) - f_1^+(t) = \sum_{m=0}^{\tilde{\varkappa}_1 - 1} c_m^{(1)} w_m(t),$$

где $w_m(t)$ — функции (11), то условия (13) принимают вид

$$\sum_{m=0}^{\tilde{\varkappa}_1 - 1} c_m^{(1)} \int_L \frac{\bar{\tau} w_m(\tau)}{\chi_0^+(\tau)}\,\tau^{k-1} d\tau = 0 \tag{14}$$

$$(k = 1, \ldots, -\varkappa_0).$$

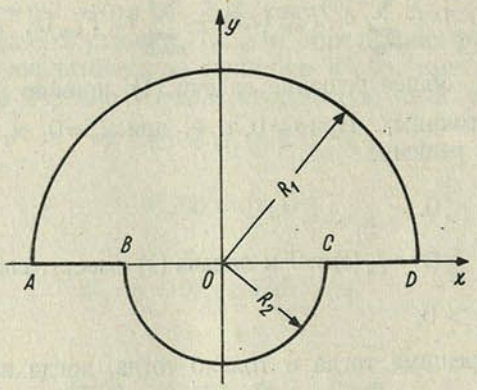
Это линейная однородная система $-\varkappa_0$ уравнений с $\tilde{\varkappa}_1$ неизвестными $c_m^{(1)}$. Очевидно, системе (14) можно удовлетворить нулевыми значениями постоянных $c_m^{(1)}$, но это приводит к тривиальному решению задачи (1). Естественно, возникает вопрос, имеет ли система (14) нетривиальные решения, т. е. существуют ли нетривиальные решения задачи (1).

Пусть r — ранг матрицы системы (14). Очевидно,

$$0 \leqslant r \leqslant \min(-\varkappa_0,\ \tilde{\varkappa}_1).$$

Тогда решение системы (14) линейно зависит от $\tilde{\varkappa}_1 - r$ произвольных постоянных и, следовательно, среди коэффициентов многочлена $P_{\tilde{\varkappa}_1-1}(z)$ лишь $\tilde{\varkappa}_1 - r$ произвольны, а остальные выражаются через них вполне определенным образом. Общее решение задачи (6) дается формулой (7), а задачи (1) — формулой

$$F(z, \bar{z}) = \sum_{m=0}^{\tilde{\varkappa}_1-1} c_m^{(1)} F_{1m}(z, \bar{z}).$$



Частный вид контура

Таким образом, общее решение задачи (1) линейно зависит от $\tilde{\varkappa}_1 - r$ произвольных постоянных. При $r = \tilde{\varkappa}_1$ (что может осуществляться при $\tilde{\varkappa}_1 \leqslant -\varkappa_0$) задача (1) имеет лишь тривиальное решение.

Определение. Назовем число ρ, определяемое равенством

$$\rho = \begin{cases} r \text{ при } \varkappa_0 < 0,\ \tilde{\varkappa}_1 > 0, \\ 0 \text{ во всех остальных случаях,} \end{cases}$$

дефектным числом задачи (1). Так как в случае 2° $s = 0$, а в случае 3° $s = \tilde{\varkappa}_1$, то предыдущие рассмотрения приводят к следующей теореме.

Теорема 1. *Однородная задача (1) при $s - \rho = 0$ имеет лишь тривиальное решение, а при $s - \rho > 0$ общее решение задачи (1) линейно зависит от $s - \rho$ произвольных постоянных.*

Как уже отмечалось выше, задача (1), когда L — окружность, рассматривалась в [2]. Сравнивая результат, полученный в [2], с результатом настоящей работы, видим, что число линейно независимых решений задачи (1) в случаях 1° и 2° не зависит от вида контура L. В случае 3° это уже не так. Если L — окружность, то число линейно независимых решений задачи (1) равно s, если же L — произвольный контур, то $s - r$, где r — ранг системы (14). Из рассматриваемых ниже примеров следует, что этот результат в общем случае нельзя улучшить, так как при одних и тех же $\varkappa_0$, $\varkappa_1$, но при различных контурах L ранг r может быть равен любому из чисел $0, 1, \ldots, \min(-\varkappa_0, \tilde{\varkappa}_1)$. При этом может оказаться, что $r = 0$ даже в случае, когда L не есть окружность.

В самом деле, пусть контур L составлен из верхней полуокружности радиуса R_1, из нижней полуокружности радиуса R_2 и двух отрезков AB и CD действительной оси (см. рисунок).

Пусть требуется определить кусочно-бианалитическую функцию $F(z, \bar{z})$, исчезающую на бесконечности и удовлетворяющую на контуре L условиям

$$F^+(t, \bar{t}) = \frac{1}{t^2} F^-(t, \bar{t}),$$

$$\Delta F^+(t, \bar{t}) = t^4 \Delta F^-(t, \bar{t}). \qquad (1')$$

Здесь

$$\varkappa_0 = -2,\ \varkappa_1 = 4,\ \tilde{\varkappa}_1 = 2,\ X_0^+(z) = X_1^+(z) = 1,\ X_0^-(z) = z^2,\ X_1^-(z) = \frac{1}{z^4}.$$

Из (5) имеем

$$f_1^+(z) = c_0 z + c_1 \frac{z^2}{2},\ f_1^-(z) = -\frac{c_0}{3z^3} - \frac{c_1}{2z^2}.$$

Задача (6) принимает вид

$$f_0^+(t) = \frac{1}{t^2} f_0^-(t) + \bar{t}\left[c_0\left(-\frac{1}{3t^5} - t \right) + c_1\left(-\frac{1}{2t^4} - \frac{t^2}{2} \right)\right],$$

$$f_0^-(\infty) = 0. \qquad (6')$$

Условия разрешимости задачи (6′):

$$c_0 \int_L \bar{\tau}\left(\frac{1}{3\tau^5} + \tau \right) d\tau + c_1 \int_L \bar{\tau}\left(\frac{1}{2\tau^4} + \frac{\tau^2}{2} \right) d\tau = 0,$$

$$c_0 \int_L \bar{\tau}\left(\frac{1}{3\tau^5} + \tau \right) \tau d\tau + c_1 \int_L \bar{\tau}\left(\frac{1}{2\tau^4} + \frac{\tau^2}{2} \right) \tau d\tau = 0,$$

или

$$\frac{4}{3}\left(R_1^3 - R_2^3 \right)\left(\frac{1}{15 R_1^3 R_2^3} - 1 \right) c_0 + 0 \cdot c_1 = 0,$$

$$0 \cdot c_0 + \frac{2}{15}\left[\frac{5(R_1 - R_2)}{R_1 R_2} - \left(R_1^5 - R_2^5 \right) \right] c_1 = 0. \qquad (14')$$

При фиксированном R_1 уравнение $1/15 R_1^3 R_2^3 - 1 = 0$ имеет единственный корень $R_2 = 1/R_1 \sqrt[3]{15}$.

Вставляя $R_2 = 1/R_1 \sqrt[3]{15}$ в выражение $5(R_1 - R_2)/R_1 R_2 - (R_1^5 - R_2^5)$ и приравнивая полученную функцию $\alpha(R_1)$ нулю, мы придем к уравнению

$$\alpha(R_1) \equiv \left(5R_1 + \frac{1}{225 R_1^5} \right) \sqrt[3]{15} - \left(\frac{5}{R_1} + R_1^5 \right) = 0. \qquad (*)$$

Так как

$$\alpha(1) = \left(5 + \frac{1}{225} \right) \sqrt[3]{15} - 6 > \left(5 + \frac{1}{225} \right) 2 - 6 > 0,$$

а при $R_1 \to +\infty$ $\alpha(R_1) \to -\infty$ и функция $\alpha(R_1)$ непрерывна в интервале $(0, +\infty)$, то уравнение (*) имеет по крайней мере один вещественный корень R_1^*, $1 < R_1^* < +\infty$, при этом $R_2^* = 1/R_1^* \sqrt[3]{15} < 1$ и, таким образом, $R_2^* \neq R_1^*$.

Рассмотрим сейчас случаи, которые могут представиться при решении задачи (1′).

Пример 1. Ранг матрицы системы (14′) равен 2 (например, при $R_1 = 2$, $R_2 = 1$). В этом случае система (14′) имеет единственное решение $c_0 = c_1 = 0$. Таким образом, условия (14′) выполняются лишь при $c_0 = c_1 = 0$, что окончательно дает: задача (1′) имеет только тривиальное решение.

Пример 2. Пусть $R_2 = 1/R_1\sqrt[3]{15}$, где R_1 не является корнем уравнения (*). Тогда система (14′) обращается в систему

$$0 \cdot c_0 + 0 \cdot c_1 = 0,$$

$$0 \cdot c_0 + \alpha(R_1) c_1 = 0,$$

ранг которой равен единице, так как заведомо $\alpha(R_1) \neq 0$. Решение этой системы: c_0 — произвольное, $c_1 = 0$.

Следовательно, условием разрешимости задачи (1′) является условие $c_1 = 0$. При его выполнении решение задачи (1′) имеет вид

$$F(z, \bar{z}) = c_0 F_{10}(z, \bar{z}),$$

где $F_{10}(z, \bar{z})$ выражается формулой (10).

Примечание. Можно подобрать R_1, R_2, $R_1 \neq R_2$ таким образом, чтобы система (14′) имела решение $c_0 = 0$, c_1 — произвольное, но это уже не имеет принципиального значения.

Пример 3. Ранг матрицы системы (14′) равен нулю, например при $R_1 = R_2$, т. е. когда L — окружность. Однако гораздо интереснее следующий случай: $R_1 = R_1^*$, $R_2 = R_2^* = 1/R_1^*\sqrt[3]{15}$, где R_1^* — корень уравнения (*). Все члены матрицы (14′) равны нулю и, следовательно, условия (14′) выполняются при произвольных c_0, c_1. Общее решение задачи (1′) зависит от двух произвольных постоянных и дается формулой

$$F(z, \bar{z}) = c_0 F_{10}(z, \bar{z}) + c_1 F_{11}(z, \bar{z}),$$

где $F_{10}(z, \bar{z})$, $F_{11}(z, \bar{z})$ — функции (10).

§ 3. Неоднородная задача. Для нахождения $f_1(z)$ нужно найти кусочно-аналитическую функцию $W_1(z)$ по краевому условию

$$W_1^+(t) = G_1(t) W_1^-(t) + g_1(t) \tag{15}$$

($W_1(z)$ — функция (3)), причем в классе функций, имеющих на бесконечность нуль третьего порядка.

Решение задачи (15) дается формулой

$$W_1(z) = X_1(z)\left[\Psi_1(z) + P_{\tilde{\varkappa}_1 - 1}(z)\right],$$

причем при $\varkappa_1 < 0$ задача (15) разрешима тогда и только тогда, когда выполнены условия

$$\int_L \frac{g_1(\tau)}{X_1^+(\tau)} \tau^{k-1} d\tau = 0 \quad (k = 1, 2, \ldots, -\tilde{\varkappa}_1). \tag{16}$$

Допустим, что задача (15) разрешима. Тогда

$$f_1^{\pm}(z) = \int_{L^{\pm}} X_1^{\pm}(\zeta)[\Psi_1^{\pm}(\zeta) + P_{\tilde{\varkappa}_1 - 1}(\zeta)]\, d\zeta.$$

Для определения же функции $f_0(z)$ имеем задачу

$$f_0^+(t) = G_0(t)\, f_0^-(t) + g_{01}(t) + \tilde{g}_{01}(t),$$

$$f_0^-(\infty) = 0, \tag{17}$$

где

$$g_{01}(t) = \overline{t}\Big[G_0(t) \int_{\infty}^{t} X_1^-(\zeta)\, P_{\tilde{\varkappa}_1-1}(\zeta)\, d\zeta - \int_{0}^{t} X_1^+(\zeta)\, P_{\tilde{\varkappa}_1-1}(\zeta)\, d\zeta \Big] =$$

$$= \sum_{m=0}^{\tilde{\varkappa}_1-1} c_m^{(1)}\, \overline{t} w_m(t), \tag{18}$$

$w_m(t)$ — функции (11),

$$\tilde{g}_{01}(t) = g_0(t) + \overline{t}\Big[G_0(t) \int_{\infty}^{t} X_1^-(\zeta)\, \Psi_1^-(\zeta)\, dz - \int_{0}^{t} X_1^+(\zeta)\, \Psi_1^+(\zeta)\, d\zeta \Big]. \tag{19}$$

Пусть

$$\Psi_{01}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{g_{01}(\tau)}{X_0^+(\tau)} \frac{d\tau}{\tau - z}, \quad \tilde{\Psi}_{01}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\tilde{g}_{01}(\tau)}{X_0^+(\tau)} \frac{d\tau}{\tau - z}. \tag{20}$$

Рассмотрим всевозможные случаи.

1°. $\varkappa_0 \geqslant 0$, $\tilde{\varkappa}_1 \geqslant 0$.

Задачи (15) и (17) безусловно разрешимы. Решение задачи (17) дается формулой

$$f_0(z) = X_0(z) \left\{ \tilde{\Psi}_{01}(z) + \left[\Psi_{01}(z) + P_{\varkappa_0-1}(z) \right] \right\}.$$

Задача (2) также безусловно разрешима. Ее решение:

$$F(z, \overline{z}) = \tilde{F}(z, \overline{z}) + F_0(z, \overline{z}), \tag{21}$$

где

$$\tilde{F}^{\pm}(z, \overline{z}) = X_0^{\pm}(z)\, \tilde{\Psi}_{01}^{\pm}(z) + \overline{z} \int_{L^{\pm}} X_1^{\pm}(\zeta)\, \Psi_1^{\pm}(\zeta)\, d\zeta \tag{22}$$

— частное решение неоднородной задачи (2), а

$$F_0(z, \overline{z}) = \sum_{m=0}^{\varkappa_0-1} c_m^{(0)} F_{0m}(z, \overline{z}) + \sum_{m=0}^{\tilde{\varkappa}_1-1} c_m^{(1)} F_{1m}(z, \overline{z}) \tag{12'}$$

— общее решение соответствующей однородной задачи (1), где $F_{0m}(z, \overline{z})$, $F_{1m}(z, \overline{z})$ — функции (10). При $\varkappa_0 = \tilde{\varkappa}_1 = 0$ задача (2) имеет единственное решение (22).

2°. $\varkappa_0 \geqslant 0$, $\tilde{\varkappa}_1 < 0$.

Условиями разрешимости задачи (2) являются равенства (16). При их выполнении решение дается формулой

$$F(z, \overline{z}) = \tilde{F}(z, \overline{z}) + \sum_{m=0}^{\varkappa_0-1} c_m^{(0)} F_{0m}(z, \overline{z}) \tag{23}$$

(см. (10)), при этом при $\varkappa_0 = 0$ задача (2) имеет единственное решение (22).

3°. $\varkappa_0 < 0$, $\tilde{\varkappa}_1 < 0$.

Условиями разрешимости задачи (2) являются условия (16) и условия

$$\int_L \frac{\tilde{g}_{01}(\tau)}{X_0^+(\tau)} \tau^{k-1}\, d\tau = 0 \quad (k = 1, 2, \ldots, -\varkappa_0). \tag{24}$$

При выполнении (16) и (24) решение задачи (2) единственно и дается формулой (22).

4°. $\varkappa_0 < 0$, $\tilde{\varkappa}_1 = 0$.

Задача (15) безусловно разрешима. Поэтому условиями разрешимости задачи (2) являются условия (24). При их выполнении единственное решение задачи (2) дается формулой (22).

5°. $\varkappa_0 < 0$, $\tilde{\varkappa}_1 > 0$.

Задача (15) безусловно разрешима. Задача же (17), а вместе с ней и задача (2), разрешима тогда и только тогда, когда совместна линейная неоднородная система

$$\sum_{m=0}^{\tilde{\varkappa}_1-1} c_m^{(1)} \int_L \frac{\overline{\tau} w_m(\tau)}{X_0^+(\tau)} \tau^{k-1} d\tau = -\frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\tilde{g}_{01}(\tau)}{X_0^+(\tau)} \tau^{k-1} d\tau \qquad (25)$$

$$(k = 1, 2, \ldots, -\varkappa_0),$$

(где $w_m(t)$ — функции (11)) — $\varkappa_0$ уравнений с $\tilde{\varkappa}_1$ неизвестными $c_m^{(1)}$.

Пусть система (25) совместна, r — ее ранг. Тогда решение $\tilde{c}_0^{(1)}$, $\tilde{c}_1^{(1)}$, …, $\tilde{c}_{\tilde{\varkappa}_1-1}^{(1)}$ системы (25) содержит $\tilde{\varkappa}_1 - r$ произвольных постоянных. Следовательно, число условий разрешимости задачи (2) равно $-\varkappa_0 - r$. Общее решение задачи (2) выражается формулой

$$F(z, \overline{z}) = \tilde{F}(z, \overline{z}) + \sum_{m=0}^{\tilde{\varkappa}_1-1} c_m^{(1)} F_{1m}(z, \overline{z}), \qquad (26)$$

где $\tilde{F}(z, \overline{z})$ — функция (22), $F_{1m}(z, \overline{z})$ $(m = 0, 1, \ldots, \tilde{\varkappa}_1 - 1)$ — функции (10) и линейно зависит от $\tilde{\varkappa}_1 - r$ произвольных постоянных.

Сформулируем окончательный результат. Пусть ρ — дефектное число задачи (1), $\varkappa$ — индекс (см. [2]) задачи, p — число, введенное в [2]. Тогда имеем следующую теорему.

Теорема 2. *Число условий разрешимости неоднородной задачи (2) равно $p - \rho$. При их выполнении общее решение линейно зависит от $s - \rho$ произвольных постоянных. При $s = \rho$ задача (2) имеет единственное решение. В любом случае разность между числом линейно независимых решений и числом условий разрешимости равна индексу $\varkappa$ задачи.*

Пусть L — контур задачи (1′). Рассмотрим

Пример 4. Найти кусочно-бианалитическую функцию $F(z, \overline{z})$, исчезающую на бесконечности и удовлетворяющую на контуре L краевому условию

$$F^+(t, \overline{t}) = \frac{1}{t^2} F^-(t, \overline{t}) + \overline{t}t^2, \qquad (2')$$

$$\Delta F^+(t, \overline{t}) = t^4 \Delta F^-(t, \overline{t}) + 4t.$$

Имеем

$$f_1^+(z) = c_0 z + c_1 \frac{z^2}{2} + \frac{z^2}{2}, \quad f_1^-(z) = -\frac{c_0}{3z^3} - \frac{c_1}{2z^2},$$

$$f_0^+(t) = \frac{1}{t^2} f_0^-(t) - \overline{t}\left[c_0\left(\frac{1}{3t^5} + t\right) + c_1\left(\frac{1}{2t^4} + \frac{t^2}{2}\right)\right] + \frac{1}{2}\overline{t}t^2, \qquad (17')$$

$$f_0^-(\infty) = 0.$$

Система (25) имеет вид

$$\begin{gathered}\frac{4}{3}\left(R_1^3-R_2^3\right)\left(\frac{1}{15R_1^3R_2^3}-1\right)c_0+0\cdot c_1=0,\\ 0\cdot c_0+\frac{2}{15}\left[\frac{5(R_1-R_2)}{R_1R_2}-\left(R_1^5-R_2^5\right)\right]c_1=-\frac{2}{15}\left(R_1^5-R_2^5\right).\end{gathered}\tag{25'}$$

Рассмотрим несколько случаев.

а) $R_1=2,\ R_2=1$.

После подстановки значений R_1 и R_2 в (25′) и решения полученной системы получаем

$$c_0=0,\ c_1=\frac{62}{57}.$$

Решение задачи (2′):

$$F(z,\bar z)=\tilde F(z,\bar z)+\frac{62}{57}F_{11}(z,\bar z),$$

где $\tilde F(z,\bar z)$, $F_{11}(z,\bar z)$ определяются соответственно по формулам (22) и (10).

б) Пусть $R_2=1/R_1\sqrt[3]{15}$, где R_1 не есть корень уравнения (*). Например, $R_1=1$, $R_2=1/\sqrt[3]{15}$. Решая систему (25′), имеем: c_0 — произвольное, $c_1=\dfrac{225-\sqrt[3]{15}}{1350-1126\sqrt[3]{15}}$. Решение задачи (2′):

$$F(z,\bar z)=\tilde F(z,\bar z)+c_0F_{10}(z,\bar z)+\frac{225-\sqrt[3]{15}}{1350-1126\sqrt[3]{15}}F_{11}(z,\bar z).$$

в) При $R_1=R_2$, т. е. когда L — окружность, ранг r матрицы системы (25′) равен нулю, система совместна и удовлетворяется произвольными значениями c_0, c_1. Решение задачи (2′) имеет вид

$$F(z,\bar z)=\tilde F(\bar z,z)+c_0F_{10}(z,\bar z)+c_1F_{11}(z,\bar z).$$

Если $R_1=R_1^*$, $R_2=R_2^*=1/R_1^*\sqrt[3]{15}$, где R_1^* — корень уравнения (*), то ранг матрицы системы (25′) опять равен нулю, но система (25′) уже несовместна и, следовательно, задача (2′) неразрешима.

Замечание 2. При $\varkappa_0<0$, $\varkappa_1>0$ каждая из функций $F_{1m}(z,\bar z)$, определяемая формулой (10), удовлетворяет краевому условию (1), а функция (22) — краевому условию (2). Однако ни $F_{1m}(z)$, ни функция (22) не являются решениями соответственно задачи (1) и (2), так как первые слагаемые, входящие в выражение этих функций, в бесконечно удаленной точке имеют в общем случае полюс порядка $-\varkappa_0-1$. Несовместность системы (25) говорит о том, что ни при каком выборе постоянных $c_0^{(1)},\ \ldots,\ c_{\varkappa_1-1}^{(1)}$ линейная комбинация этих функций не дает решения (2) интересующего нас класса, а совместность системы (25) — что такой выбор возможен.

Замечание 3. Если решения рассмотренных задач (1) и (2) ищутся в классе функций, ограниченных на бесконечности, то число произвольных

постоянных может увеличиться на единицу (при $\varkappa_0 \geqslant 0$), а число условий разрешимости неоднородной задачи — уменьшится на единицу (при $\varkappa_0 < -1$).

В заключение автор выражает искреннюю признательность академику АН БССР Ф. Д. Гахову за ценные советы при выполнении работы.

Литература

1. Гахов Ф. Д. Краевые задачи. М., 1963.
2. Соколов И. А. Весці АН БССР, сер. фіз.-мат. навук, № 5, 1969.

Белорусский государственный университет имени В. И. Ленина

Поступило в редакцию 16.VI 1969

ВЕСЦІ АКАДЭМІІ НАВУК БЕЛАРУСКАЙ ССР № 6 1969
СЕРЫЯ ФІЗІКА-МАТЭМАТЫЧНЫХ НАВУК

УДК 518:517(944)947

В. Н. АБРАШИН

О СХЕМАХ МЕТОДА ПРЯМЫХ ПОВЫШЕННОЙ ТОЧНОСТИ

В работе рассматриваются многослойные схемы метода прямых при решении некоторых краевых задач для уравнений параболического, гиперболического и эллиптического типов. В отличие от схем, исследованных в [1], рассматриваемые ниже схемы дают более высокий порядок погрешности, при этом число прямых, на которых аппроксимируется исходная задача, не меняется.

Пусть требуется решить следующие краевые задачи:

$$\text{I. } a(t)\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + c(t)u + f(x,\ t) \quad (0 \leqslant x \leqslant l,\ 0 \leqslant t \leqslant T);$$

$$u(0,\ t) = \psi_1(t), \quad u(l,\ t) = \psi_2(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant T;$$

$$u(x,\ 0) = \varphi(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant l;$$

где

$$a(t) \geqslant a > 0, \quad c(t) \leqslant 0.$$

$$\text{II. } a_1(t)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + a_2(t)\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + c(t)u + f(x,\ t)$$

$$(0 \leqslant x \leqslant l, \quad 0 \leqslant t \leqslant T);$$

$$u(0,\ t) = \psi_1(t), \quad u(l,\ t) = \psi_2(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant T;$$

$$u(x,\ 0) = \varphi_1(x), \quad \frac{\partial u(x,\ 0)}{\partial t} = \varphi_2(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant l;$$

где

$$a_1(t) \geqslant a_1 > 0, \quad c(t) \leqslant 0.$$

$$\text{III. } \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial}{\partial x}\left(p(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right) - d(x)u = f(x,\ y)$$

$$(0 \leqslant x \leqslant l_1, \quad 0 \leqslant y \leqslant l_2);$$

$$u(x,\ 0) = \varphi_1(x),\ u(x,\ l_2) = \varphi_2(x),\ 0 \leqslant x \leqslant l_1;$$

$$u(0,\ y) = 0, \quad u(l_1,\ y) = 0, \quad 0 \leqslant y \leqslant l_2;$$

где $p(x)$ непрерывно дифференцируема и $p(x) > 0$, $d(x) \geqslant 0$ (для упрощения доказательства сходимости ограничимся рассмотрением задачи Дирихле, однако результаты могут быть получены и для более общих краевых задач [2]).

Функции, заданные в условиях задач I—III, будем предполагать такими, что решение задач существует и единственно.

В [1] для построения схем метода прямых была использована следующая формула численного дифференцирования Стирлинга:

$$h^2 y''(x_n) = \sum_{\nu=1}^{k-1} (-1)^{\nu-1} \frac{2[(\nu-1)!]^2}{(2\nu)!} \Delta^{2\nu} y(x_{n-\nu}) + \tag{1}$$

$$+ (-1)^{k-1} \frac{2[(k-1)!]^2}{(2k)!} \Delta^{2k} y(x_{n-k}) + (-1)^k h^{2(k+1)} \frac{2[k!]^2}{(2(k+1))!} y^{[2(k+1)]}(\xi_n),$$

$$n = 1, 2, \ldots, N-1;\ k \geqslant 2,\ x_n = nh,\ x_0 = 0,\ x_N = 1.$$

Преобразуем эту формулу. Из равенства (1), имея в виду, что

$$\Delta^{2k} y(x_{n-k}) = h^2 \Delta^{2(k-1)} y''(x_{n-k+1}) + h^{2(k+1)} \frac{1}{(2(k-1))!} y^{[2(k+1)]}(\xi_n'),$$

получим

$$h^2 \left[y''(x_n) - (-1)^{k-1} \frac{2[(k-1)!]^2}{(2k)!} \Delta^{2(k-1)} y''(x_{n-k+1}) \right] =$$

$$= \sum_{\nu=1}^{k-1} (-1)^{\nu} \frac{2[(\nu-1)!]^2}{(2\nu)!} \Delta^{2\nu} y(x_{n-\nu}) + h^{2(k+1)} r_n, \tag{2}$$

где

$$r_n = (-1)^{k-1} \frac{2[(k-1)!]^2}{(2k)!\,(2(k-1))!} y^{[2(k+1)]}(\xi_n') +$$

$$+ (-1)^k \frac{2[k!]^2}{(2(k+1))!} y^{[2(k+1)]}(\xi_n).$$

При n близких к 0 и N в формуле (2) значения $x = x_{n\pm\nu}$ могут выйти за границы отрезка [0, 1]. В этом случае функцию $y(x)$ надо продолжить за границы отрезка [0, 1] достаточно гладкой функцией.

Если в (2) $x_{n+\nu-j} = 1$ ($j = 0, 1, \ldots, \nu-1$), то по аналогии с [1] вычитаем из правой его части

$$\beta(y(x_n)) = \sum_{\nu=\rho}^{k-1} (-1)^{\nu-1} \frac{2[(\nu-1)!]^2}{(2\nu)!} \delta y_{n+\nu-j} \quad (n = N-\rho,$$

$$j = \nu - \rho,\ \rho = 1, 2, \ldots, k-1),$$

где

$$\delta y_{n+\nu-j} = \sum_{\mu=0}^{k} K_{2\mu,j} h^{2\mu} y^{(2\mu)}(x_{n+\nu-j}) + (-1)^j C_{2\nu}^j y(x_{n+\nu-j}) +$$

$$+ R_{n+\nu-j} \quad (n+\nu-j = N,\ \nu = 1, 2, \ldots, k-1;\ j = 0, 1, \ldots, \nu),$$

$$K_{2\mu,j} = j^{2\mu} - (j-1)^{2\mu} C_{2\nu}^1 + \ldots + (-1)^{j-1} C_{2\nu}^{j-1} + (-1)^{j-1} C_{2\nu}^{j-1} + \ldots -$$

$$- (j-1)^{2\mu} C_{2\nu}^1 + j^{2\mu}, \quad R_{n+\nu-j} = O(h^{2(k+1)}),$$

и из левой его части

$$\eta(y(x_n)) = h^2 (-1)^k \frac{2[(k-1)!]^2}{(2k)!} \left[\sum_{\mu=0}^{k-1} K_{2\mu,\,k-1} h^{2\mu} y^{[2(k+1)]}(x_{n+k-1-\mu}) + \right.$$

$$+(-1)^{\mu} C_{2k-2}^{\mu} y''(x_{n+k-1-\mu}) + R^{*}_{n+k-1-\mu}\Big] \quad (n+k-1-\mu = N,$$

$$n = N-\rho,\ \rho = 1,\ 2,\ \ldots,\ k-1),\ R^{*}_{n+k-1-\mu} = O(h^{2k}).$$

Если же $x_{n-\nu+j} = 0$ $(j = \nu-1,\ \nu-2,\ \ldots,\ 0)$, то из правой части (2) следует вычесть равенство [1]

$$\bar{\beta}(y(x_n)) = \sum_{\nu=\rho}^{k-1} (-1)^{\nu-1} \frac{2[(\nu-1)!]^2}{(2\nu)!}\, \bar{\delta} y_{n-\nu+j}$$

$$(n = \rho,\quad j = \nu-\rho,\quad \rho = 1,\ 2,\ \ldots,\ k-1),$$

где

$$\bar{\delta} y_{n-\nu+j} = \sum_{\mu=0}^{k} K_{2\mu,\,j}\, h^{2\mu} y^{(2\mu)}(x_{n-\nu+j}) + (-1)^{j} C_{2\nu}^{j}\, y(x_{n-\nu+j}) +$$

$$+ \bar{R}_{n-\nu+j},\ n-\nu+j = 0,\ \nu = 1,\ 2,\ \ldots,\ k-1;\ j = 0,\ 1,\ \ldots,\ \nu-1;$$

$$\bar{R}_{n-\nu+j} = O(h^{2(k+1)}),$$

а из левой его части равенство вида

$$\bar{\eta}(y(x_n)) = h^2 (-1)^{k} \frac{2[(k-1)!]^2}{(2k)!}\Bigg[\sum_{\mu=0}^{k-1} K_{2\mu,\,k-1}\, h^{2\mu} y^{(2\mu)}(x_{n-k+\mu+1}) +$$

$$+ (-1)^{\mu} C_{2k-2}^{\mu}\, y''(x_{n-k+\mu+1}) + \bar{R}^{*}_{n-k+\mu+1}\Bigg],$$

$$n-k+\mu+1 = 0,\ n = \rho,\ \rho = 1,\ 2,\ \ldots,\ k-1;\ \bar{R}^{*}_{n-k+\mu+1} = O(h^{2k}).$$

Такой подход наиболее удобен для случая $N \geqslant k-1$. Следуя рекомендации из статьи [1], можно рассматривать и случай $N < k-1$. Ниже для упрощения выкладок ограничимся рассмотрением случая $N \geqslant k-1$. Опустим в выражениях $\beta(y(x_n))$, $\bar{\beta}(y(x_n))$, $\eta(y(x_n))$, $\bar{\eta}(y(x_n))$ остаточные члены и обозначим полученные после этого выражения соответственно через $\beta^{*}(y(x_n))$; $\bar{\beta}^{*}(y(x_n))$, $\bar{\eta}(y(x_n))$, $\bar{\eta}^{*}(y(x_n))$. Если в точках $x = 0$, $x = 1$ известны производные $y^{(2\mu)}(x)$ $(\mu = 0,\ 1,\ \ldots,\ k)$, то мы можем достаточно точно найти значения выражений $\beta^{*}(y(x_n))$, $\bar{\beta}^{*}(y(x_n))$, $\eta^{*}(y(x_n))$, $\bar{\eta}^{*}(y(x_n))$.

Ниже для построения многослойных схем метод прямых следует предварительно заменить в случае задач I, II $y(x_n)$ на $u(x_n,\ t)$ и в случае задачи III $y(x_n)$ на $u(x,\ y_n)$.

1. Сначала рассмотрим задачу I.

Предположим, что решение задачи I имеет в $\Pi(0 \leqslant x \leqslant l,\ 0 \leqslant t \leqslant T)$ непрерывную производную порядка $2(k+1)$. Область Π разобьем на N полос прямыми $x = x_n = nh$ $(h > 0,\ n = 0,\ 1,\ \ldots,\ N)$, $x_0 = 0$, $x_N = 1$. На этих прямых с помощью приведенных выше разностных схем построим следующую задачу Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений, которая аппроксимирует исходную задачу I (для упрощения запишем нашу задачу в матричной форме):

$$a(t)\, A_{N-1} U'_{N-1} = -P^{(k)}_{N-1} U_{N-1} + F_{N-1},\ U_{N-1}(0) = \Phi_{N-1},\quad 0 \leqslant t \leqslant T. \quad (3)$$

Здесь

$$A_{N-1} = \left[E_{N-1} - \frac{2[(k-1)!]^2}{(2k)!}\, P^{k-1}_{N-1}\right];$$

$$P_{N-1}^{(k)} = \frac{1}{h^2} \sum_{\nu=1}^{k-1} \frac{2\,[(\nu-1)!]^2}{(2\nu)!}\, P_{N-1}^{\nu} - c(t)\, E_{N-1} + \frac{2\,[(k-1)!]^2}{(2k)!}\, c(t)\, P_{N-1}^{k-1};$$

E_{N-1} — единичная матрица порядка $N-1$;

$$P_{N-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdot & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \cdot & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \cdot & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad U_{N-} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ u_{N-1} \end{bmatrix}, \quad u_n = u_n(t),$$

$$F_{N-1} = F_{N-1}^{(2)} - \frac{2\,[(k-1)!]^2}{(2k)!}\, P_{N-1}^{k-1} F_{N-2}^{(2)},$$

$$F_{N-1}^{(i)} = \begin{bmatrix} f_1^{(i)} \\ f_2^{(i)} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ f_{N-1}^{(i)} \end{bmatrix} \quad (i = 1,\ 2), \quad \Phi_{N-1} = \begin{bmatrix} \varphi(x_1) \\ \varphi(x_2) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \varphi(x_{N-1}) \end{bmatrix},$$

$$f_n^{(1)} = f(x_n,\ t) + \overline{\beta}^*\left(u(x_n,\ t)\right) h^{-2} - \overline{\eta}^*\left(u(x_n,\ t)\right) h^{-2} \quad (n = 1,\ 2,\ \ldots,\ k-1),$$

$$f_n^{(1)} = f(x_n,\ t) \quad (n = k,\ k+1,\ \ldots,\ N-k),$$

$$f_n^{(1)} = f(x_n,\ t) + \beta^*\left(u(x_n\, t)\right) h^{-2} - \eta^*(u(x_n),\ t)\, h^{-2} \quad (n = N-k+1,$$
$$N-k+2,\ \ldots,\ N-1),$$

$$f_n^{(2)} = f(x_n,\ t) \ (n = 1,\ 2,\ \ldots,\ N-1).$$

Используя исходное уравнение и граничные данные на прямых $x = 0$, $x = l$, нетрудно найти производные четного порядка от u по x, а так как $\beta^*(u(x_n,\ t))$, $\eta^*(u(x_n,\ t))$, $\overline{\beta}^*(u(x_n,\ t))$, $\overline{\eta}^*(u(x_n,\ t))$ определяются этими производными, то их можно считать известными.

Теперь докажем сходимость и дадим оценку погрешности предложенной вычислительной схемы. Для погрешности метода $\gamma_n = \gamma_n(t) = u(x_n,\ t) - u_n(t)$ в силу линейности исходной задачи получим следующую задачу Коши:

$$A_{N-1}\,\Gamma'_{N-1} = -\frac{1}{a(t)}\, P_{N-1}^{(k)} \Gamma_{N-1} + \frac{1}{a(t)}\, R_{N-1}^{**}, \quad \Gamma_{N-1}(0) = 0,$$

$$0 \leqslant t \leqslant T, \tag{4}$$

где

$$\Gamma_{N-1} = \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \gamma_{N-1} \end{bmatrix}, \quad R_{N-1}^{**} = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ r_{N-1} \end{bmatrix}, \quad r_n = O(h^{2k}).$$

Задачу (4) перепишем в виде

$$V'_{N-1} = -L_{N-1}^{-1}\frac{1}{a(t)}P_{N-1}^{(k)}L_{N-1}^{-1}V_{N-1} + \frac{1}{a(t)}L_{N-1}^{-1}R_{N-1}^{*}, \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \quad (5)$$

$$V_{N-1}(0) = 0,$$
$$V_{N-1} = L_{N-1}\Gamma_{N-1}.$$

Нетрудно убедиться в том, что матрица

$$A_{N-1} = E_{N-1} - \frac{2[(k-1)!]^2}{(2k)!}P_{N-1}^{k-1} = B_{N-1}\Lambda_{N-1}B_{N-1},$$

где

$$B_{N-1}\{b_{\mu,s}\} = \left\{(-1)^{\mu+s}\sqrt{\frac{2}{N}}\sin\frac{\mu s\pi}{N}\right\} \quad (\mu, s = 1, 2, \ldots, N-1),$$

$$B_{N-1} = B_{N-1}^{-1},$$

$\Lambda_{N-1} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{N-1})$ — диагональная матрица,

$$\alpha_n = 1 - \frac{2[(k-1)!]^2}{(2k)!}\lambda_n^{k-1}, \quad \lambda_n = 2\left(1 + \cos\frac{\pi n}{N}\right),$$
$$\alpha_n > 0,$$

положительно определенная. Известно (см. [3]), что для любого положительно определенного оператора A_{N-1} существует положительно определенный «квадратный корень» $A_{N-1}^{1/2}$, т. е. такой положительно определенный оператор L_{N-1}, что $L_{N-1}^2 = A_{N-1}$.

Очевидно, что и матрица $\frac{1}{a(t)}L_{N-1}^{-1}P_{N-1}^{(k)}L_{N-1}^{-1}$ положительно определенна.

По аналогии с [1] оценим решение задачи (5):

$$\|V_{N-1}\|^{1/2} \leqslant h^{2k-0,5}\frac{1}{a}zt\sqrt{l}\,\frac{1}{\sqrt{\alpha}} \quad (0 \leqslant t \leqslant T), \quad (6)$$

где

$$z = \max_{0<t<T}\max_{1<n<N-1}|z_n(t)|, \quad \alpha = \min_{1<n<N-1}\alpha_n,$$

$\|V_{N-1}\|$ — третья норма матрицы V_{N-1}.

Имея в виду, что $\Gamma_{N-1} = L_{N-1}^{-1}V_{N-1}$, для погрешности метода получим следующую оценку:

$$|\gamma_n(t)| \leqslant h^{2k-0,5}\frac{1}{a}zt\sqrt{l}\,\frac{1}{\alpha} \quad (0 \leqslant t \leqslant T, \ n = 1, 2, \ldots, N-1). \quad (7)$$

Полученная оценка показывает, что решение дифференциально-разностной задачи (3) при $h \to 0$ равномерно со скоростью порядка $h^{2k-0,5}$ сходится к решению задачи I. При получении оценки погрешности необязательно требовать, чтобы $c(t) \leqslant 0$ (см. [1]). В случае $c(t) \leqslant 0$ можно доказать сходимость и получить оценку погрешности в неограниченной области $0 \leqslant x \leqslant l$, $0 \leqslant t \leqslant \infty$ (см. [1]).

2. Задачу II по аналогии с п. 1 при том же требовании гладкости решения на прямых $x = x_n = nh$ заменим аппроксимирующей ее задачей Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$a_1(t)A_{N-1}U''_{N-1} + a_2(t)A_{N-1}U'_{N-1} = -P_{N-1}^{(k)}U_{N-1} + F_{N-1},$$
$$0 \leqslant t \leqslant T, \ U_{N-1}(0) = \Phi_1, \ U'_{N-1}(0) = \Phi_2, \quad (8)$$

где

$$\Phi_i = \begin{bmatrix} \varphi_i(x_1) \\ \varphi_i(x_2) \\ \vdots \\ \varphi_i(x_{N-1}) \end{bmatrix}, \quad i = 1, 2.$$

Для погрешности метода по аналогии с п. 1 получим следующую задачу Коши:

$$A_{N-1}\Gamma''_{N-1} = -\frac{1}{a_1(t)} P^{(k)}_{N-1}\Gamma_{N-1} - \frac{a_2(t)}{a_1(t)} A_{N-1}\Gamma'_{N-1} +$$

$$+ \frac{1}{a_1(t)} R^{**}_{N-1} \quad (0 \leqslant t \leqslant T),\ \Gamma_{N-1}(0) = 0,\ \Gamma'_{N-1}(0) = 0. \tag{9}$$

Обозначив $L_{N-1}\Gamma_{N-1} = V_{N-1}$, из (9) получим

$$V''_{N-1} = -\frac{1}{a_1(t)} L^{-1}_{N-1}P^{(k)}_{N-1}L^{-1}_{N-1}V_{N-1} - \frac{a_2(t)}{a_1(t)} V'_{N-1} +$$

$$+ \frac{1}{a_1(t)} L^{-1}_{N-1}R^{**}_{N-1}\ (0 \leqslant t \leqslant T),\ V_{N-1}(0) = 0,\ V'_{N-1}(0) = 0. \tag{10}$$

По аналогии с [1] для решения задачи (10) нетрудно получить следующую оценку:

$$|\gamma_n(t)| \leqslant h^{2k-0,5} \frac{t^2}{2a_1} \frac{1}{\alpha} \exp \xi \quad (0 \leqslant t \leqslant T,\ n = 1, 2, \ldots, N-1), \tag{11}$$

где

$$\xi = \max_{0 \leqslant t \leqslant T} \max_{1 \leqslant n \leqslant N-1} \left\{ -\frac{a_2(t)}{a_1(t)} t,\ \frac{\left(\alpha_n^{\frac{1}{2}}\right)'}{\alpha_n^{\frac{1}{2}}} \right\}.$$

Из оценки (11) непосредственно следует равномерная сходимость при $h \to 0$ решения задачи (8) к решению исходной задачи II со скоростью порядка $h^{2k-0,5}$.

3. И наконец, рассмотрим задачу III. Предположим, что решение ее в $D\ (0 \leqslant x \leqslant l_1,\ 0 \leqslant y \leqslant l_2)$ имеет непрерывную производную $2(k+1)$ порядка по y и непрерывную производную третьего порядка по x.

Область D разобъем на N полос прямыми $y = y_n = nh$, $h > 0$, $n = 0, 1, \ldots, N$; $y_0 = 0$, $y_N = l_2$. На этих прямых краевую задачу III заменим аппроксимирующей ее краевой задачей для системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$A_{N-1}\left[(p(x)U'_{N-1})' - d(x)\,U_{N-1}\right] -$$

$$-\left(h^{-2} \sum_{\nu=1}^{k-1} \frac{2[(\nu-1)!]^2}{(2\nu)!} P^{\nu}_{N-1}\right) U_{N-1} = F^*_{N-1},$$

$$0 \leqslant x \leqslant l_1,\ U_{N-1}(0) = 0, \quad U_{N-1}(l_1) = 0,$$

где

$$F^*_{N-1} = A_{N-1}F_{N-1} + K_{N-1},$$

$$F_{N-1} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_{N-1} \end{bmatrix}, \quad K_{N-1} = \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \\ \vdots \\ \tau_{N-1} \end{bmatrix},$$

$$f_n = f(x,\ y_n) \quad (n = 1,\ 2,\ \ldots,\ N-1),$$

$$\tau_n = -h^{-2}\,\overline{\beta}^{*}\left(u(x,\ y_n)\right) + h^{-2}\,\overline{\eta}^{*}\left(u(x,\ y_n)\right) \quad (n-1,\ 2,\ \ldots,\ k-1),$$

$$\tau_n = 0 \quad (n = k,\ k+1,\ \ldots,\ N-k),$$

$$\tau_n = -h^{-2}\,\overline{\beta}\left(u(x,\ y_n)\right) + h^{-2}\,\overline{\eta}\left(u(x,\ y_n)\right)$$

$$(n = N-k+1,\ N-k+2,\ \ldots,\ N-1).$$

Эту схему можно реализовать по методу, предложенному в [4].

Для погрешности метода в этом случае получим следующую задачу:

$$A_{N-1}\left[(p(x)\,\Gamma'_{N-1})'_{\cdot} - d(x)\,\Gamma_{N-1}\right] - \left(h^{-2}\sum_{\nu=1}^{k-1}\frac{2\,[(\nu-1)!]^2}{(2\nu)!}\,P^{\nu}_{N-1}\right)\Gamma_{N-1} =$$

$$= R_{N-1},\ 0 \leqslant x \leqslant l_1,\ \Gamma_{N-1}(0) = 0,\ \Gamma_{N-1}(l_1) = 0, \qquad (12)$$

где

$$R_{N-1} = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_{N-1} \end{bmatrix}, \quad r_n = O(h^{2k}).$$

Следуя [1], для решения задачи (12) можно получить следующую оценку:

$$|\gamma_n(x)| \leqslant h^{2k-0,5}\,\sqrt{l_2}\,z^{*}\varphi^{2}\,\frac{l_1^3}{6\alpha p}, \quad 0 \leqslant x \leqslant l_1,\ n = 1,\ 2,\ \ldots, N-1,$$

где $\varphi_n = \max\limits_{0<x<l} |\varphi_n(x)|$, $\varphi_n(x)$ — собственная функция оператора $L(u)$, $u(0) = u(l_1) = 0$.

Отсюда и следует равномерная сходимость метода в случае первой краевой задачи для эллиптического уравнения со скоростью $O(h^{2k-0,5})$.

В случае задачи III на прямых $x = 0$ и $x = l_1$ могут быть заданы и более общие граничные условия

$$\alpha_1 u + \beta_1 u_x|_{x=0} = 0, \quad \alpha_2 u + \beta_2 u_x|_{x=l_1} = 0,$$

$$\alpha_1\beta_1 \leqslant 0,\ \alpha_2\beta_2 \geqslant 0,\ |\alpha_1| + |\beta_1| \neq 0,\ |\alpha_2| + |\beta_2| \neq 0.$$

Из полученных оценок погрешности следует, что предложенные вычислительные схемы метода прямых имеют более высокий порядок сходимости, чем схемы, рассмотренные в [1], при этом каждое из уравнений аппроксимирующих систем связывает то же самое число прямых, что и в схемах из [1]. При $k = 2$ мы получим схемы, исследованные в [2, 6]. В [6] рассмотрена схема метода прямых при $k = 2$ для квазилинейных параболических и гиперболических уравнений.

Замечание 1. Рассмотренные выше схемы реализуются по методу, предложенному в [4]. Однако эти схемы не исчерпывают всех сходящихся схем метода прямых для класса рассматриваемых задач.

Ниже рассмотрим одну из схем метода прямых, которую не включают ни приведенные выше схемы, ни схемы из [1].

Прозводную $y'(x_n)$ заменим следующим разностным выражением [5]:

$$2y''(x_{n+1}) + 11y''(x_n) + 2y''(x_{n-1}) = \frac{3}{4h^2}\left[y(x_{n+2}) + 16y(x_{n+1}) - \right.$$

$$\left. -34y(x_n) + 16y(x_{n-1}) + y(x_{n-2})\right] - \frac{23}{7!}\, h^6 y^{\mathrm{VIII}}(\xi_n), \qquad (13)$$

$$x_{n+2} < \xi_n < x_{n-2},\ n = 1,\ 2,\ \ldots,\ N-1.$$

Из (13) при $n = 1$, имея в виду, что

$$h^{-2}\left[y(x_1) - 2y(x_0) + y(x_{-1})\right] = y''(x_0) +$$

$$+ \frac{2}{4!}\, h^2 y^{\mathrm{IV}}(x_0) + \frac{2}{6!}\, h^4 y^{\mathrm{VI}}(x_0) + \frac{2}{8!}\, h^6 y^{\mathrm{VIII}}(\xi_0^*),$$

получим

$$2y''(x_2) + 11y''(x_1) + 2y''(x_0) = \frac{3}{4}\, h^{-2}\left[y(x_3) + 16y(x_2) - 35y(x_1) + \right.$$

$$\left. +17y(x_0)\right] + \frac{3}{4}\left[y''(x_0) + \frac{2}{4!}\, h^2 y^{\mathrm{IV}}(x_0) + \frac{2}{6!}\, h^4 y^{\mathrm{VI}}(x_0) + \right.$$

$$\left. + \frac{2}{8!}\, h^6 y^{\mathrm{VIII}}(\xi_0^*)\right] - \frac{23}{7!}\, h^6 y^{\mathrm{VIII}}(\xi_1). \qquad (14)$$

Аналогично при $n = N-1$ получим

$$2y''(x_N) + 11y''(x_{N-1}) + 2y''(x_{N-2}) = \frac{3}{4}\, h^{-2}\left[17y(x_N) - 35y(x_{N-1}) + \right.$$

$$\left. + 16y(x_{N-2}) + y(x_{N-3})\right] + \frac{3}{4}\left[y''(x_N) + \frac{2}{4!}\, h^2 y^{\mathrm{IV}}(x_N) + \right. \qquad (15)$$

$$\left. + \frac{2}{6!}\, h^4 y^{\mathrm{VI}}(x_N) + \frac{2}{8!}\, h^6 y^{\mathrm{VIII}}(\xi_N^*)\right] - \frac{23}{7!}\, h^6 y^{\mathrm{VIII}}(\xi_{N-1}).$$

Прежде чем доказать сходимость схем метода прямых, построенных с помощью разностных выражений (13)—(15), покажем, что матрица

$$Z_{N-1} = \begin{bmatrix} 35 & -16 & -1 & 0 & \cdot & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -16 & 34 & -16 & -1 & \cdot & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -16 & 34 & -16 & \cdot & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -16 & 34 & \cdot & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot & 34 & -16 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot & -16 & 34 & -16 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot & -1 & -16 & 34 & -16 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 & -1 & -16 & 35 \end{bmatrix}$$

положительно определенная.

Из вида матрицы Z_{N-1} непосредственно следует, что ее собственные числа неотрицательны.

Покажем, что определитель матрицы Z_{N-1} не равен нулю.

Предположим противное. Тогда найдется ненулевой вектор $\mathbf{X}_{N-1}$ такой, что

$$35x_1 - 16x_2 - x_3 = 0,$$

$$-16x_1 + 34x_2 - 16x_3 - x_4 = 0,$$

$$-x_{i-2} - 16x_{i-1} + 34x_i - 16x_{i+1} - x_{i+2} = 0 \quad (i = 3, 4, \ldots, N-3),$$

$$-x_{N-4} - 16x_{N-3} + 34x_{N-2} - 16x_{N-1} = 0,$$

$$-x_{N-3} - 16x_{N-2} + 35x_{N-1} = 0.$$

Вектор $\mathbf{X}_{N-1}$ всегда можно считать нормированным так, что $\|\mathbf{X}_{N-1}\| = 1$. Тогда можно получить следующие оценки:

$$|x_1| \leqslant \frac{16}{35}|x_2| + \frac{1}{35}|x_3| < 1.$$

$$|x_2| \leqslant \frac{16}{34}|x_1| + \frac{16}{34}|x_3| + \frac{1}{34}|x_4| < 1,$$

$$|x_i| \leqslant \frac{1}{34}|x_{i-2}| + \frac{16}{34}|x_{i-1}| + \frac{16}{34}|x_{i+1}| + \frac{1}{34}|x_{i+2}| < 1$$

$$(i = 3, 4, \ldots, N-3),$$

причем последнее неравенство выполняется, так как

$$|x_{i-2}| < 1, \quad |x_{i-1}| < 1,$$

$$|x_{N-2}| \leqslant \frac{1}{34}|x_{N-4}| + \frac{16}{34}|x_{N-3}| + \frac{16}{34}|x_{N-1}| < 1,$$

$$|x_{N-1}| \leqslant \frac{1}{35}|x_{N-3}| + \frac{16}{35}|x_{N-2}| < 1.$$

Следовательно, $|x_i| < 1$ $(i = 1, 2, \ldots, N-1)$, что противоречит условию $\|\mathbf{X}_{N-1}\| = 1$. Таким образом, мы показали, что определитель матрицы Z_{N-1} отличен от нуля, а так как ее собственные числа неотрицательны, Z_{N-1} положительно определена.

С помощью разностных выражений (13)—(15) построим пятислойные схемы метода прямых для задач I—III и исследуем их сходимость.

Для задачи I запишем аппроксимирующую ее задачу Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$a(t) A^*_{N-1} U'_{N-1} = -\frac{3}{4} h^{-2} Z_{N-1} U_{N-1} + c(t) A^*_{N-1} U_{N-1} + F^*_{N-1}, \quad (16)$$

$$0 \leqslant t \leqslant T, \quad U_{N-1}(0) = \Phi_{N-1},$$

где

$$A_{N-1} = \begin{bmatrix} 11 & 2 & 0 & \cdot & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 11 & 2 & \cdot & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 11 & \cdot & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & 2 & 11 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 & 2 & 11 \end{bmatrix},$$

Имея в виду (13)—(15), нетрудно найти матрицу F^*_{N-1}.

Погрешность метода является решением следующей задачи:

$$(L^*_{N-1}\Gamma_{N-1})' = -\left[\frac{3}{4}\,h^{-2}\,\frac{1}{a(t)}\;L^{*-1}_{N-1}Z_{N-1}L^{*-1}_{N-1} - \frac{c(t)}{a(t)}\right](L^*_{N-1}\Gamma_{N-1}) +$$

$$+ L^{*-1}_{N-1}R_{N-1}\,,$$

$$0 \leqslant t \leqslant T,\ L^*_{N-1}\Gamma_{N-1}(0) = 0,\ L^{*2}_{N-1} = A^*_{N-1}\,,$$

где

$$R_{N-1} = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ r_{N-1} \end{bmatrix},\quad |r_n| \leqslant \frac{187h^6}{2\cdot 8!}\,M_8\,(n = 1,\ 2,\ \ldots,\ N-1),$$

$$M_8 = \max_{0\leqslant x\leqslant l}\ \max_{0\leqslant t\leqslant T}\left|\frac{\partial^8 u}{\partial x^8}\right|.$$

Так как матрица $L^{*-1}_{N-1}Z_{N-1}L^{*-1}_{N-1}$ положительно-определенная, то для погрешности метода по аналогии с [5] нетрудно получить следующую оценку:

$$|\gamma_n(t)| \leqslant h^{5,5}\,t\,\sqrt{l}\;\frac{187}{2\cdot 8!}\;\frac{M_8}{7}\quad (0 \leqslant t \leqslant T),$$

$$n = 1,\ 2,\ \ldots,\ N-1. \tag{17}$$

Задачу II заменим аппроксимирующей ее задачей Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$a_1(t)\,A^*_{N-1}U''_{N-1} + a_2(t)\,A^*_{N-1}U'_{N-1} =$$

$$= \left[-\frac{3}{4}\,h^{-2}Z_{N-1} - c(t)\right]U_{N-1} + F^*_{N-1}\,, \tag{18}$$

$$0 \leqslant t \leqslant T,\quad U_{N-1}(0) = \Phi_{N-1,1},\ U'_{N-1}(0) = \Phi_{N-1,2}.$$

Для погрешности схемы (18) получим следующую задачу Коши:

$$a_1(t)\,(L^*_{N-1}\Gamma_{N-1})'' = -\left[\frac{3}{4}\,h^{-2}L^{*-1}_{N-1}Z_{N-1}L^{*-1}_{N-1} + c(t)\right](L^*_{N-1}\Gamma_{N-1}) -$$

$$- a_2(t)\,(L^*_{N-1}\Gamma_{N-1})' + L^{*-1}_{N-1}R_{N-1}\,,\quad 0 \leqslant t \leqslant T,\ \Gamma_{N-1}(0) = 0,$$

$$\Gamma'_{N-1}(0) = 0. \tag{19}$$

Положив

$$V_{N-1} = L^*_{N-1}\Gamma'_{N-1},\ Y_{N-1} = Z^*_{N-1}\Gamma_{N-1}\,,\ Z^{*2}_{N-1} =$$

$$= \frac{3}{4}\,h^{-2}L^{*-1}_{N-1}Z_{N-1}L^{*-1}_{N-1} + c(t),$$

из 19) получим

$$W'_{N-1} = \left\{K^{*-\frac{1}{2}}_{N-1}\left[-Q_{N-1} + F^{**}_{N-1}\right]K^{*-\frac{1}{2}}_{N-1} + \left(K^{*\frac{1}{2}}_{N-1}\right)'K^{*-\frac{1}{2}}_{N-1}\right\}W_{N-1} +$$

$$+ K^{*-\frac{1}{2}}_{N-1}\bar{R}_{N-1}\,,\quad W_{N-1}(0) = 0,\quad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{20}$$

где

$$W_{N-1} = K^{*\frac{1}{2}}_{N-1} \begin{bmatrix} V_{N-1} \\ Y_{N-1} \end{bmatrix}, \quad K^{*\frac{1}{2}}_{N-1} = \begin{bmatrix} a_1^{\frac{1}{2}}(t)\, E_{N-1} & 0 \\ 0 & E_{N-1} \end{bmatrix},$$

$$Q_{N-1} = \begin{bmatrix} 0 & -Z_{N-1} \\ Z_{N-1} & 0 \end{bmatrix}, \quad F^{**}_{N-1} = \begin{bmatrix} a_2(t)\, E_{N-1} & 0 \\ 0 & (Z^{*}_{N-1})'\, Z^{*-1}_{N-1} \end{bmatrix},$$

$$\bar{R}_{N-1} = \begin{bmatrix} \bar{L}^{*}_{N-1} R_{N-1} \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Из задачи (20) по аналогии с [6] нетрудно получить оценку для погрешности вычислительной схемы (18)

$$|\gamma_n(t)| \leqslant h^{5,5} \sqrt{l}\, t^2 \frac{187}{4 \cdot 8! \cdot 7} M_8 \exp t\alpha,$$

$$0 \leqslant t \leqslant T, \; n = 1, 2, \ldots, N-1, \tag{21}$$

где

$$\alpha = \frac{(a_1)'}{a_1^{\frac{1}{2}}} + \frac{c_1}{a_1 7 q^{\frac{1}{2}}}, \quad c = \max_t |c'(t)|, \quad (a_1)' = \max_{x,t} |(a^{\frac{1}{2}}(t))'|,$$

$$q = \min_{1<n<N-1} \left| \frac{20}{h^2} \left(1 + \cos \frac{\pi n}{N}\right) \right|.$$

3. В случае задачи III разностные выражения (13)—(15) дадут следующую схему метода прямых:

$$A_{N-1} [p(x)\, U'_{N-1})' - d(x)\, U_{N-1}] - \frac{3}{4} h^{-2} Z_{N-1} U_{N-1} = F^{**}_{N-1},$$

$$0 \leqslant x \leqslant l_1, \tag{22}$$

$$U_{N-1}(0) = 0, \quad U_{N-1}(l_1) = 0.$$

Имея в виду (13)—(15), нетрудно найти матрицу F^{**}_{N-1}. Положив $L(\gamma_{n+1}) = (p(x)\, \gamma'_{n+1})' - d(x)\, \gamma_{n+1}$, для погрешности метода получим следующую задачу:

$$11L(\gamma_1) + 2L(\gamma_2) - \frac{3}{4h^2} [35\gamma_1 - 16\gamma_2 - \gamma_3] = r_1,$$

$$2L(\gamma_{n+1}) + 11L(\gamma_n) + 2L(\gamma_{n-1}) - \frac{3}{4h^2} [-\gamma_{n-2} - 16\gamma_{n-1} + 34\gamma_n -$$

$$-16\gamma_{n+1} - \gamma_{n+2}] = r_n \quad (n = 2, 3, \ldots, N-2), \tag{23}$$

$$2L(\gamma_{N-2}) + 11L(\gamma_{N-1}) - \frac{3}{4h^2} [-\gamma_{N-3} - 16\gamma_{N-2} + 35\gamma_{N-1}] = r_{N-1},$$

$$\gamma_n(0) = \gamma_n(l_1) = 0, \; n = 1, 2, \ldots, N-1; \; \gamma_{N-1}(x) = \gamma_0(x) = 0,$$

где

$$|r_n| \leqslant \frac{187 h^6}{2 \cdot 8!} M^*_8, \quad M^*_8 = \max_{x,y} \left| \frac{\partial^8 u(x, y)}{\partial y^8} \right|.$$

Известно, что спектр оператора $L(\gamma)$ при $\gamma(0) = \gamma(l_1) = 0$ действителен и дискретен. Собственные функции можно считать ортонормированными:

$$L(\varphi_l(x)) = -\lambda_l^* \varphi_l(x), \quad l = 1, 2, \ldots, \quad (\varphi_l, \varphi_k) = \int_0^l \varphi_l \varphi_k dx = \delta_{kl},$$

$$\lambda_l^* > 0.$$

Решение задачи (23) будем искать в виде

$$\gamma_n(x) = \sum_{l=1}^{\infty} \alpha_{l\mu} \varphi_l(x), \quad n = 1, 2, \ldots, N-1, \tag{24}$$

где

$$\alpha_{l,n} = \int_0^l \varphi_l(x)\, \gamma_n(x)\, dx.$$

В силу того что $\gamma_n(x)$ дважды непрерывно дифференцируема и удовлетворяет граничным условиям $\gamma_n(0) = \gamma_n(l_1) = 0$, ряд (24) сходится равномерно. Ниже дадим оценку сверху абсолютному значению этого ряда.

Для коэффициентов Фурье $\alpha_{l,n}$ из (23) получим следующее разностное уравнение:

$$\alpha_{l,1}\left(-11\lambda_l^* - \frac{35\cdot 3}{4\cdot h^2}\right) + \alpha_{l,2}\left(-2\lambda_l^* + \frac{3\cdot 16}{4h^2}\right) + \frac{3}{4h^2}\,\alpha_{l,3} = \beta_{l,1},$$

$$\frac{3}{4h^2}\,\alpha_{l,n-2} + \alpha_{l,n-1}\left(-2\lambda_l^* + \frac{3\cdot 16}{4h^2}\right) + \alpha_{l,n}\left(-11\lambda_l^* - \frac{34\cdot 3}{4h^2}\right) +$$

$$+ \alpha_{l,n+1}\left(-2\lambda_l^* + \frac{3\cdot 16}{4\cdot h^2}\right) + \frac{3}{4h^2}\,\alpha_{l,n+2} = \beta_{l,n}, \quad n = 2, 3, \ldots, N-2;$$

$$\frac{3}{4h^2}\,\alpha_{l,N-3} + \alpha_{l,N-2}\left(-2\lambda_l^* + \frac{3\cdot 16}{4h^2}\right) + \alpha_{l,N-1}\left(-11\lambda_l^* - \frac{35\cdot 3}{4h^2}\right) = \beta_{l,N-1},$$

где

$$\alpha_{l,0} = \alpha_{l,N} = 0, \quad \beta_{l,n} = \int_0^{l_1} \varphi_l(x)\, r_n(x)\, dx.$$

Очевидно, что при каком-то $n = n_0 = n_0(l)$, $|\alpha_{l,n_0}| \geqslant |\alpha_{l,n}|$. Пусть n_0 находится среди $n = 2, 3, \ldots, N-2$, тогда для $\alpha_{l,n}$ нетрудно получить оценку

$$|\alpha_{l,n_0}| \leqslant \frac{\beta l_1 n_0}{7\lambda_l^*}, \quad l = 1, 2, \ldots \tag{25}$$

Если же n_0 находится среди $n = 1, N-1$, то оценка будет иметь вид

$$|\alpha_{l,i}| \leqslant \frac{4h^2\beta_{l,i}}{18\cdot 3 + 9h^2\lambda_l^*}, \quad i = 1, N-1;\ l = 1, 2, \ldots \tag{26}$$

Из неравенств (25), (26) для $|\alpha_{l,n}|$ $(n = 1, 2, \ldots, N-1)$ получим следующую оценку:

$$|\alpha_{l,n}| \leqslant \frac{\beta_l}{7\cdot\lambda_l^*}, \quad l = 1, 2, \ldots;\ n = 1, 2, \ldots, N-1.$$

$$\beta_l = \max_{1 \leqslant n \leqslant N-1} |\beta_{l,n}|.$$

Оценим ряд (24)

$$|\gamma_n(x)| \leqslant \frac{1}{7} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{|\varphi_l(x)\,\beta_l|}{\lambda_l^*}, \quad n = 1, 2, \ldots, N-1; \; 0 \leqslant x \leqslant l_1,$$

откуда и получим оценку для погрешности метода

$$|\gamma_n(x)| \leqslant h^6 \frac{187\varphi^2 l_1^3 M_8}{12 \cdot 8!\, p}, \quad n = 1, 2, \ldots, N-1; \; 0 \leqslant x \leqslant l_1. \qquad (27)$$

По аналогии с [1] можно рассмотреть и более общую краевую задачу

$$\alpha_1 u + \beta_1 u_x|_{x=0} = 0, \; \alpha_2 u + \beta_2 u_x|_{x=l_1} = 0, \; u|_{y=0} = \varphi_1(x),$$

$$u|_{y=l_2} = \varphi_2(x), \; \alpha_1\beta_1 \geqslant 0, \; \alpha_2\beta_2 \leqslant 0, \; |\alpha_1| + |\beta_1| \neq 0, \; |\alpha_2| + |\beta_2| \neq 0,$$

при этом сходимость метода прямых будет иметь порядок h^6.

Итак, из оценок (17), (21), (27) следует равномерная сходимость решения схем метода прямых (16), (18), (22) к решению исходных задач I—III соответственно.

Замечание 2. Выше и в [1] мы рассмотрели некоторые конкретные многослойные схемы метода прямых при решении краевых задач для параболического, гиперболического и эллиптического уравнений. Этим мы не исчерпали всех схем такого вида.

Из полученных выше результатов и из [1] непосредственно вытекает следующий критерий, который дает возможность выделить довольно широкий класс сходящихся схем и указать порядок их сходимости.

Следствие. Пусть аппроксимирующая система имеет вид

$$AU^{(k)} = BU + F,$$

и соответственно система для погрешности

$$A\Gamma^{(k)} = B\Gamma + R,$$

где A, B — квадратные матрицы $N-1$ порядка; U, Γ, R, F — $N-1$-мерные векторы; $k=1$—случай параболического уравнения; $k=2$—случай гиперболического и эллиптического уравнений; A — положительно определенная матрица, причем при $N \to 0$ ее собственные числа > 0.

Тогда в случае параболического и гиперболического уравнений для сходимости надо требовать, чтобы матрица B была отрицательно определенной (или полуопределенной); в случае эллиптического уравнения для сходимости надо требовать, чтобы матрица B была положительно определенной (полуопределенной). Порядок сходимости этих схем на полпорядка ниже чем порядок элементов вектора R (этот порядок вообще имеет место для $\sqrt{\sum_{k=1}^{N-1} \gamma_n^2}$, и поэтому естественно предположить, что погрешность имеет порядок элементов вектора R).

Литература

1. Абрашин В. Н. ДУ, 4, № 7, 1968.
2. Абрашин В. Н. ДАН БССР, 11, № 8, 1967.
3. Фаддеев Д. К., Фаддеева В. Н. Вычислительные методы линейной алгебры. ГИФМЛ, 1963.
4. Фаддеева В. Н. Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова, 28, 73, 1949.
5. Коллатц Л. Численные методы решения дифференциальных уравнений. М., 1953.
6. Абрашин В. Н. Весці АН БССР, сер. фіз.-мат. навук, № 2, 1969.

Институт математики АН БССР

Поступило в редакцию 3.IV 1969

ВЕСЦІ АКАДЭМІІ НАВУК БЕЛАРУСКАЙ ССР № 6 1969
СЕРЫЯ ФІЗІКА-МАТЭМАТЫЧНЫХ НАВУК

УДК 517.947.42

О. А. ЛИСКОВЕЦ, Н. П. ФЕДЕНКО

О ПРИБЛИЖЕННОМ РЕШЕНИИ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ ПОТЕНЦИАЛА

1. Значение обратных задач теории потенциала для практики хорошо известно, и потому методы их решения изучались неоднократно. В настоящей статье изложено еще несколько способов, основанных на теории квазирешений В. К. Иванова [1]. К ним близки способы работ [2, 3] (последний особенно близок к методу, изложенному в пп. 2—4), но в отличие от названных и, насколько нам известно, от всех других работ мы не требуем единственности искомого решения, хотя и отмечаем вытекающие из нее упрощения.

Предлагаемые методы, как и вообще теория квазирешений, требуют априорного задания компакта M, содержащего нужные решения, и используют аппроксимацию этого компакта такой системой вложенных конечномерных компактов M_n, $n \geqslant 1$, для которых

$$M_n \subset M_{n+1} \subset M, \quad n \geqslant 1, \tag{1}$$

$$\overline{\bigcup_{n\geqslant 1} M_n} = M. \tag{2}$$

В этих условиях, согласно результатам [1], квазирешения на компакте M_n при больших n аппроксимируют искомые решения (точнее говоря, имеет место β-сходимость), и остается указать способ построения квазирешений на M_n, что сравнительно нетрудно сделать ввиду конечномерности M_n.

Заметим, что хотя известны [4] более общие, чем (1), (2), достаточные условия β-устойчивости квазирешений, не требующие вложенности компактов M_n и сводящиеся к тому, чтобы в M не было «далеких» от M_n элементов и наоборот, однако проверка условий (1), (2) обычно бывает гораздо проще, и мы ограничиваемся именно этим случаем.

В качестве модели будет рассматриваться задача логарифмического потенциала в следующей постановке: нужно определить распределение плотности (или другие характеристики) зарядов $u(Q)$ в круге $D\{x^2+y^2<1\}$ по значениям наведенного ими потенциала $V(P)$ на отрезке $l\{|x| \leqslant a,\ y=H>1\}$. Задача сводится к решению интегрального уравнения 1-го рода

$$V(P) = -\iint_D u(Q) \ln r(PQ)\, dQ, \quad P \in l, \tag{3}$$

с непрерывным ядром $-\ln r(PQ)$, $0 \neq r(PQ) \neq \infty$ ($r(PQ)$ означает расстояние между точками P и Q). Поэтому интегральный оператор в (3) действует вполне непрерывно из пространства $L_2(D)$, а тем более, из пространства $C(\overline{D})$ в пространство $L_2(l)$, которому, как мы будем предполагать, принадлежит потенциал $V(P)$. Для применимости изложенной схемы достаточно одной лишь непрерывности оператора.

НЕПРЕРЫВНАЯ ПЛОТНОСТЬ ЗАРЯДОВ

2. Будем считать, что нас интересуют непрерывные решения (или квазирешения) $U(Q) \in C(\bar{D})$ априорно принадлежащие компакту $M \subset C(\bar{D})$,

$$M = \{u(Q) : |u(Q)| \leqslant B, \quad |D_x u(Q)| \leqslant E, \quad |D_y u(Q)| \leqslant E\},$$

где B, $E > 0$ — фиксированные константы, а $D_x u(Q)$, $D_y u(Q)$ — верхние производные числа функции $u(Q)$ по указанным направлениям, и будем искать соответствующие квазирешения $U(Q)$ уравнения (3).

Вместо непрерывных квазирешений, разыскание которых затруднительно, рассмотрим сеточные. Для этого построим в D систему сгущающихся квадратных сеток $S_n \subset D$, $n \geqslant 0$, состоящих из точек пересечения вертикальных и горизонтальных прямых:

$$S_0 = \{x = \pm 1/2, \ y = \pm 1/2\}, \ h_0 = 1,$$

$$S_n = \{x = i/2^n, \ y = j/2^n, \ |i|, \ |j| \leqslant 2^n - 1\}, \ h_n = 2^{-n}, \ n \geqslant 1.$$

Сеточную функцию на S_n обозначим $u(S_n)$, а ее значение в узле $(x_i, y_j) = Q_{ij}$ обозначим $u(Q_{ij})$.

Введем соответствующие компакту M сеточные (конечномерные) компакты

$$M_n = \{u(S_n) : |u(Q_{ij})| \leqslant B,$$

$$|\Delta_i u(Q_{ij})/h_n| \leqslant E, \ |\Delta_j u(Q_{ij})/h_n| \leqslant E, \ Q_{ij} \in S_n\}$$

(Δ_i, Δ_j — символы первых разностей по i, j) и проверим (1), (2).

Начнем с включения $M_n \subset M_{n+1}$. Оно означает, что функцию $u(S_n) \in M_n$ можно так распространить на сетку S_{n+1}, чтобы $u(S_{n+1}) \in M_{n+1}$. Дадим алгоритм такого доопределения. Значения в узлах S_n известны. В тех, узлах S_{n+1}, которые лежат на прямых, образующих сетку S_n, доопределим функцию так: в промежуточных узлах — средним арифметическим 2 соседних значений, в концевых узлах — значением в ближайшем узле S_n. Во всех прочих узлах S_{n+1} полагаем функцию равной среднему арифметическому значений в ближайших из уже определенных узлов.

Полученная таким образом функция $u(S_{n+1}) \in M_{n+1}$, если $u(S_n) \in M_n$. Чтобы убедиться в этом, достаточно проверить неравенства, задающие компакт M_{n+1}, сначала на прямых сетки S_n, а затем в остальных узлах S_{n+1}.

Нетрудно распространить $u(S_n) \in M_n$ и на весь круг D так, чтобы $u(Q) \in M$*). Берем 3 соседних узла S_n, образующих треугольник, и определим на нем $u(Q)$ как часть плоскости, проходящей через значения $u(S_n)$ в этих узлах. С помощью этого правила постепенно, треугольник за треугольником, зададим $u(Q)$ на всей центральной части D. Вблизи границы D, в криволинейных четырехугольниках, содержащих 2 узла S_n — катет прилежащего треугольника, определяем $u(Q)$ как часть плоскости, проходящей через значения в этих узлах параллельно другому катету, а в криволинейных четырехугольниках, содержащих 2 узла S_n — гипотенузу прилежащего треугольника,— как кусок плоскости, симметричной уже построенной по другую сторону гипотенузы относительно вертикальной плоскости, проходящей через эту гипотенузу. Остались криволинейные треугольники с одним узлом из S_n. Но на их прямолинейных сторонах $u(Q)$ определена ранее, и достаточно через соответствующие пары отрезков провести плоскости.

*) Соответствующее гладкое продолжение $u(S_n) \in M_n$ на круг D при больших n может не существовать. В этом убеждают тривиальные примеры. Поэтому брать компакт M в виде $\{u(Q) : |u| < B, \ |u_x| < E, \ |u_y| < E\}$ нельзя. То же справедливо и в одномерном случае, вопреки мнению [3].

Построенная функция $u(Q)$, очевидно, непрерывна и принадлежит M. Тем самым проверено (1), а (2) выполнено в силу того, что сетка S_n при $n \to \infty$ сколь угодно плотна в D. Это означает, что теория п. 1 приложима к описанной задаче и каждое квазирешение $U(S_n)$ на M_n приближает в равномерной метрике некоторое квазирешение $U(Q)$ на M.

3. Остается указать алгоритм отыскания $U(S_n)$. Для этого нужно, задавшись каким-либо (например, описанным выше) способом доопределения сеточной функции $u(S_n) \in M_n$ до непрерывной функции $u_n(Q) \in M$, выразить явно соответствующий потенциал

$$V_n(P) = -\iint_D u_n(Q) \ln r(PQ)\, dQ, \quad P \in l, \tag{4}$$

через значения $u(Q_{ij})$, $Q_{ij} \in S_n$ и, согласно определению квазирешения, минимизировать функционал $f(u(S_n)) = \| V(P) - V_n(P) \|^2_{L_2(l)}$ по всем $u(S_n) \in M_n$.

Не отрицая принципиальной осуществимости такого метода, мы предлагаем другой, приближенный, но зато более простой и естественный алгоритм. Заменим в (4) точное значение интеграла его римановой суммой

$$\widetilde{V}_n(P) = -\frac{\pi}{m} \sum_{S_n} u(Q_{ij}) \ln r(PQ_{ij}), \quad P \in l, \tag{5}$$

считая площади ячеек равными π/m, где $m = m_n$ — число узлов сетки S_n, и будем минимизировать на M_n функционал

$$\widetilde{f}(u(S_n)) = \| V(P) - \widetilde{V}_n(P) \|^2_{L_2(l)}.$$

Переход от интеграла (4) к сумме (5) означает замену оператора в уравнении (3), сколь угодно точную при больших n. Как показано в работе [4], к такой замене квазирешения остаются β-устойчивыми, так что минимизация на M_n приближенного функционала $F(u(S_n))$ дает результаты, близкие к квазирешениям $U(S_n)$*).

Сформулируем явно полученную экстремальную задачу. Величины $g(Q_{ij}) = u(Q_{ij})\, \pi/m$ физически можно трактовать как точечные заряды в Q_{ij}, которые и подлежат определению. Имеем

$$\widetilde{V}_n(x, H) = -\sum_{S_n} g(Q_{ij}) \ln r_{ij}(x), \quad |x| \leqslant a,$$

$$r_{ij} = \sqrt{(x - x_i)^2 + (H - y_i)^2},$$

$$\widetilde{f}(g(S_n)) = -\int_{-a}^{a} (V(x, H) - \widetilde{V}_n(x, H))^2\, dx = \tag{6}$$

$$= \int_{-a}^{a} V^2(x, H)\, dx + 2 \sum_{S_n} b_{ij} g(Q_{ij}) + \sum_{S_n} \sum_{S_n} a^{kt}_{ij}\, g(Q_{ij})\, g(Q_{kt}),$$

$$a^{kt}_{ij} = a^{ij}_{kt} = \int_{-a}^{a} \ln r_{ij}(x) \ln r_{kt}(x)\, dx, \quad b_{ij} = \int_{-a}^{a} V(x, H) \ln r_{ij}(x)\, dx.$$

Следовательно, минимизировать нужно функцию m переменных

$$\widetilde{F}(g(S_n)) = \sum_{S_n} \sum_{S_n} a^{kt}_{ij}\, g(Q_{ij})\, g Q_{kt}) + 2 \sum_{S_n} b_{ij} g(Q_{ij}) \tag{7}$$

---

* Последнее звено рассуждений отсутствует в работах [3, 5], что делает их недостаточно строгими.

на выпуклом многообразии

$$\{g(Q_{ij}) : |g(Q_{ij})| \leqslant \frac{\pi}{m} B, \quad |\Delta_i g(Q_{ij})/h_n| \leqslant \frac{\pi}{m} E,$$

$$|\Delta_j g(Q_{ij})/h_n| \leqslant \frac{\pi}{m} E\Big\}. \tag{8}$$

Функция $\widetilde{F}(g(S_n))$ строго выпукла вниз, так как матрица A_m ее квадратичной формы, являясь матрицей Грама линейно независимых функций, положительно определенна.

Таким образом, отыскание квазирешения $\widetilde{G}(S_n)$ сводится к следующим этапам: 1) вычисление коэффициентов (6), из которых лишь m коэффициентов b_{ij} зависят от исходных данных $V(P)$, а остальные $(m+1)m/2$ коэффициентов a_{ij}^{kt} могут быть определены заранее по заданной сетке S_n и отрезку l, 2) условная минимизация (7), (8), для чего можно использовать методы квадратичного или выпуклого программирования (см., например, [6, 7]).

Квазирешение $\widetilde{G}(S_n)$ заведомо существует и притом в силу строгой выпуклости вниз функции (7) единственно. Значение $\widetilde{f}(\widetilde{G}(S_n))$ дает квадратичную невязку потенциала $\widetilde{V}_n(x, H)$ сеточного квазирешения с заданным потенциалом $V(P)$. По значениям $\widetilde{G}(s_n)$ легко вычислить сеточное распределение плотности $\widetilde{U}(S_n) = \widetilde{G}(S_n)\, m/\pi$ и при необходимости доопределить его до $\widetilde{U}_n(Q) \in M$, которое при больших n, согласно предыдущему, аппроксимирует одно из точных решений.

4. Если, как это обычно бывает на практике, вместо точного потенциала $V(P)$ известно его δ-приближение $V^\delta(P)$, $\|V - V^\delta\|_{L_2(l)} \leqslant \delta$, то описанный алгоритм дает квазирешения $\widetilde{U}^\delta(S_n)$, близкие к некоторым из квазирешений $U^\delta(Q)$. Последние в силу β-устойчивости квазирешений к входным данным (см. [1, 4]) при $\delta \to 0$ близки к каким-либо из квазирешений $U(Q)$ точного уравнения (3), так что $\widetilde{U}^\delta(S_n)$ равномерно аппроксимируют при $\delta \to 0$, $n \to \infty$ некоторую часть искомых квазирешений $U(Q) \in M$.

Погрешности округления при практическом вычислении b_{ij} и минимизации (7), (8) можно, очевидно, отнести на счет δ, поэтому метод устойчив относительно этих погрешностей. Так как минимизируемая функция (7) зависит от коэффициентов a_{ij}^{kt} непрерывно, то минимизирующие функции β-устойчивы и к погрешностям в этих коэффициентах (см. [4]), а пользуясь β-устойчивостью квазирешений к вариациям компакта [4], можно утверждать, что они устойчивы к погрешностям в константах B, E. Следовательно, предлагаемый метод устойчив не только к измерительным, но и ко всевозможным вычислительным погрешностям. Однако если желательно воспользоваться именно методами квадратичного или выпуклого программирования, то необходимо проверить, обладает ли приближенная матрица $\widetilde{A}_m$ хотя бы положительной полуопределенностью.

Можно иначе, чем было сделано, задавать компакт M, например, сдвинув прежний компакт на фиксированную функцию из $C(\overline{D})$ или заменив ограничение $|u| \leqslant B$ неравенствами $B_1 \leqslant u \leqslant B_2$. Скажем, в гравитационных задачах ввиду отсутствия отрицательных масс естественно брать $0 = B_1 < B_2$. Иной может быть и область D. Если она, к примеру, прямоугольна, то и сетки естественнее строить прямоугольными и допустимы разные ограничения на производные числа по x и y: $|D_x u| \leqslant E_1$, $|D_y u| \leqslant E_2$. Соответственно следует изменить и компакты M_n.

Часто бывает нужна не сама неизвестная плотность зарядов $U(Q)$, а некоторые ее характеристики, такие, как суммарная величина зарядов, их моменты различных порядков, центр тяжести и др. Разумеется, их нетрудно вычислить, проинтегрировав найденное приближение $\widetilde{U}_n^\delta(Q)$ с соответствующими ядрами, однако гораздо проще определять нужные характеристики для сеточного распределения зарядов $\widetilde{G}^\delta(S_n)$, так как при этом получаются римановы суммы требуемых интегралов. Фактически здесь используется лишь слабая сходимость $\widetilde{U}_n^\delta(Q)$ к $U(Q)$.

Потенциал $\widetilde{V}_n^\delta(x, y)$ квазирешения $\widetilde{G}^\delta(S_n)$ приближенно реализует гармоническое продолжение заданного потенциала $V(P)$.

Изложенным способом можно искать распределение плотностей зарядов и по другим данным, например по производным потенциала. Все сказанное выше остается справедливым для обратных задач метагармонического потенциала, если только известно фундаментальное (сингулярное) решение метагармонического уравнения — ядро интегрального оператора. Больше того, метод позволяет решать любые интегральные уравнения 1-го рода с непрерывно действующим из $C(\overline{D})$ в $L_2(l)$ интегральным оператором. При этом ограниченные квадрируемые области D и l могут иметь любые конечные размерности и единственность решения не предполагается.

Отметим, что при произвольном интегральном ядре его значения в узлах сетки S_n не обязаны быть линейно независимыми на l. Поэтому и матрица Грама A_m будет, вообще говоря, лишь полуопределенной положительно, что может привести к неединственности квазирешений на M_n. Аналогичное обстоятельство имеет место и при отсутствии положительной определенности у приближенной матрицы $\tilde{A}_m$. Но если (квази)решение $U(Q)$ заведомо единственно, то в любом случае достаточно найти только одно какое-нибудь квазирешение на M_n.

КВАДРАТИЧНО СУММИРУЕМАЯ ПЛОТНОСТЬ ЗАРЯДОВ

5. В этом параграфе нас будут интересовать плотности зарядов, принадлежащие пространству $L_2(D)$. Помещенное в заметке [5] краткое описание предлагаемого алгоритма не вполне точно.

Пусть искомые (квази)решения $U(Q)$ априорно принадлежат слабому компакту

$$M = \{u(Q) : \|u\|_{L_2(D)} \leqslant B\}, \quad B > 0.$$

Возьмем плотное в круге D счетное множество точек $Q_i \in D$, $i = 1, 2, \ldots$, образуем из них подмножества

$$S_n = \{Q_i, \quad 1 \leqslant i \leqslant n\}$$

и для сеточных функций $u(S_n)$ построим компакты

$$M_n = \left\{ u(S_n) : \|u(S_n)\|^2 \equiv \frac{\pi}{n} \sum_{i=1}^{n} u_i^2 \leqslant B^2 \right\},$$

где $u_i = u(Q_i)$ — значение сеточной функции в узле Q_i.

Проверим теперь соотношения (1), (2). Включение $M_n \subset M_{n+1}$ тривиально. Доопределяя функцию $u(S_n) \in M_n$ на всем круге D в виде ступенчатой функции $u_n(Q)$, принимающей значения $u(Q_i)$ на непересекающихся множествах $D_i = D_i^{(n)}$ меры π/n, убеждаемся, что $M_n \subset M$. Остается установить, что множество $M_\infty = \bigcup_n M_n \subset M$ плотно в M, т. е. что $\overline{M}_\infty \supset M$.

Будем строить по функции $u(Q) \in M$ сеточные функции $u(S_n)$, определяя их значения:

$$u_i = \frac{n}{\pi} \iint\limits_{D_i} u(Q)\, dQ, \qquad D_i \ni Q_i,$$

как среднее арифметическое по множеству $D_i = D_i^{(n)}$ меры π/n (множества $D_i \subset D$ считаются попарно непересекающимися). Построенная таким образом функция $u(S_n)$ принадлежит компакту M_n, поскольку

$$\|u(S_n)\|^2 = \frac{n}{\pi} \sum_{i=1}^{n} \left(\iint\limits_{D_i} u(Q)\, dQ \right)^2 \leqslant$$

$$\leqslant \frac{n}{\pi} \sum_{i=1}^{n} \iint\limits_{D_i} 1 \cdot dQ \cdot \iint\limits_{D_i} u^2(Q)\, dQ = \iint\limits_{D} u^2(Q)\, dQ \leqslant B^2.$$

Покажем сначала, что функцию $u(Q) \in M \cap C(\bar{D})$ можно приблизить такими сеточными (точнее говоря, соответствующими им ступенчатыми) функциями. Из непрерывности на $\bar{D}$ следует равномерная непрерывность функции $u(Q)$, т. е. для $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что из соотношений $Q, Q' \in \bar{D}$, $r(Q, Q') < 2\delta$ вытекает неравенство $|u(Q) - u(Q')| < \varepsilon$. Возьмем n настолько большим, чтобы δ-окрестности точек Q_i, $1 \leqslant i \leqslant n$, покрывали $\bar{D}$, и выберем требуемые множества D_i из названных δ-окрестностей. Тогда по теореме о среднем $|u(Q) - u_i| < \varepsilon$ для всех $Q \in D_i$ и, следовательно,

$$\|u(Q) - u_n(Q)\|^2_{L_2(D)} = \sum_{i=1}^{n} \iint\limits_{D_i} (u(Q) - u_i)^2\, dQ < \varepsilon^2 \pi,$$

чем утверждение доказано, ввиду произвольной малости ε. Это значит, что $\bar{M}_\infty \supset M \cap C(\bar{D})$.

Но $M \cap C(\bar{D})$ плотно в M. Действительно, если $\|u\|_{L_2(D)} < B$, то приблизив $u(Q)$ достаточно хорошо функцией $\tilde{u}(Q) \in C(\bar{D})$, мы убедимся, что $\tilde{u}(Q) \in M$. А если $\|u\|_{L_2(D)} = B$, то функцию предварительно можно аппроксимировать функцией $\alpha u(Q)$, где α меньше 1, но сколь угодно близка к ней. Итак, $\bar{M}_\infty \supset M$, и равенство (2) проверено.

Так как M является компактом в слабой топологии $L_2(D)$, то именно с этой топологией нам и придется иметь дело. Поэтому в (2) нужно было бы рассматривать слабое, а не сильное замыкание множества M_∞, но из-за его выпуклости оба замыкания совпадают. Интегральный оператор в (3) линеен и вполне непрерывен, и потому он действует непрерывно из слабой топологии пространства $L_2(D)$ в сильную топологию $L_2(l)$, так что приложима изложенная в п. 1 схема и каждое квазирешение $U(S_n)$ на M_n при больших n аппроксимирует некоторое искомое квазирешение $U(Q)$ на M в слабой топологии.

6. Укажем вычислительный алгоритм для нахождения $U(S_n)$. Как и в п. 3, вместо точного потенциала сеточной (ступенчатой) функции вида (4) будем использовать соответствующую интегральную сумму, при больших n близкую к точному значению. Поэтому полученное квазирешение $\tilde{U}(S_n)$ будет близко к искомому. Снова по аналогии с п. 3 вместо плотностей

$u(S_n)$ введем систему зарядов $g(S_n) = u(S_n)\,\pi/n$, которую и будем определять.

Минимизируемый функционал

$$\tilde{f}\left(g(S_n)\right) = \left\| V(P) + \sum_{i=1}^{n} g_i \ln r(PQ_i) \right\|^2_{L_2(l)}$$

приводится к виду

$$\tilde{f}\left(g(S_n)\right) = \int_{-a}^{a} V^2(x,\ H)\,dx + 2\sum_{i=1}^{n} b_i g_i + \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} g_i g_j,$$

$$a_{ij} = a_{ji} = \int_{-a}^{a} \ln r_i(x) \ln r_j(x)\,dx, \quad b_i = \int_{-a}^{a} V(x,\ H) \ln r_i(x)\,dx,$$

где $r_i(x)$ — расстояние от точки с координатами $(x,\ H)$ до точки Q_i, так что минимизации подлежит фактически функция n переменных

$$\tilde{F}\left(g(S_n)\right) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} g_i g_j + 2\sum_{i=1}^{n} b_i g_i \tag{9}$$

на выпуклом компакте, определяемом неравенством

$$K\left(g(S_n)\right) \equiv \sum_{i=1}^{n} g_i^2 \leqslant \frac{\pi}{n} B^2. \tag{10}$$

Как и прежде, функция (9) строго выпукла вниз, следовательно, квазирешение $\tilde{G}(S_n)$ единственно и его можно искать методами выпуклого программирования.

Но в данном случае проще воспользоваться методом Лагранжа неопределенных множителей. Обозначая

$$A_n = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}, \quad g = \begin{pmatrix} g_1 \\ \dots \\ g_n \end{pmatrix}$$

и приравнивая нулю производные $\partial\left[\tilde{F}\left(g(S_n)\right) + \lambda K\left(g(S_n)\right)\right]/\partial g_i$, $1 \leqslant i \leqslant n$, придем к линейной системе уравнений

$$(A_n + \lambda E_n)\, g = b, \tag{11}$$

где E_n — единичная матрица порядка n. Поэтому соответствующий алгоритм минимизации (9), (10) можно описать следующим образом.

Если решение $g(0)$ системы (11) при $\lambda = 0$ удовлетворяет неравенству (10), то искомое квазирешение $\tilde{G}(S_n)$ совпадает с $g(0)$ (случай безусловного минимума). Если же для $g(0)$ неравенство (10) не выполняется (минимум условный), то систему (11) нужно решать при таком λ, для которого решение $g(\lambda)$ удовлетворяет равенству

$$K\left(g(\lambda)\right) \equiv \sum_{i=1}^{n} g_i^2(\lambda) = \frac{\pi}{n} B^2. \tag{12}$$

Поскольку разыскивается минимум, это значение λ должно быть положительным. Оно заведомо существует, так как $g(\lambda)$ и, следовательно,

$K(g(\lambda))$ непрерывно зависят от $\lambda \geqslant 0$ и при этом $K(g(0)) > B^2\pi/n$, $K(g(+\infty)) = 0 < B^2\pi/n$. Нетрудно видеть, кроме того, что величина $K(g(\lambda))$ строго убывает для $\lambda \geqslant 0$, из чего вытекает единственность требуемого значения λ. Это значение легко определить численно, заключив его в сужающуюся «вилку». Отвечающее ему решение $g(\lambda)$ и является искомым квазирешением $\tilde{G}(S_n)$. Вместо точного значения λ достаточно найти такое λ, при котором равенство (12) выполняется с хорошей точностью.

Замечания п. 4 в большинстве своем верны и здесь. Это, в частности, относится к вопросу об устойчивости найденных квазирешений относительно измерительных и вычислительных погрешностей. Но сходимость квазирешений в данном случае слабая, так что надежно аппроксимируются лишь значения линейных функционалов, например суммарного заряда, моментов и т. п. Как и прежде, для их вычисления неразумно переходить от найденной системы зарядов к ступенчатой плотности, а следует вычислить нужный функционал прямо для системы точечных зарядов, что не составляет никакого труда.

Литература

1. Иванов В. К. Матем. сб., **61**, № 2, 1963.
2. Иванов В. К. ДАН СССР, **142**, № 5, 1962.
3. Домбровская И. Н. Мат. зап. Уральск. ун-та, 4, № 4, 1964.
4. Лисковец О. А. Сиб. мат. ж., **10**, № 2, 1969.
5. Лисковец О. А. ДАН БССР, **11**, № 2, 1967.
6. Зойтендейк Г. Методы возможных направлений. ИЛ, 1963.
7. Кюнци Г. П., Крелле В. Нелинейное программирование. Изд. «Советское радио», М., 1965.

Институт математики
АН БССР

Поступило в редакцию
4.II 1969

ВЕСЦІ АКАДЭМІІ НАВУК БЕЛАРУСКАЙ ССР № 6 1969
СЕРЫЯ ФІЗІКА-МАТЭМАТЫЧНЫХ НАВУК

УДК 518 : 517(944)947

Н. П. КЕДА

О ВОЗМОЖНОСТИ ПРИМЕНЕНИЯ ВАРИАЦИОННЫХ ПРИНЦИПОВ ДЛЯ ПРИБЛИЖЕННОГО РЕШЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА С НЕСКОЛЬКИМИ ПРОСТРАНСТВЕННЫМИ ПЕРЕМЕННЫМИ

В [1, 2] показана возможность использования вариационных принципов для понижения размерности задач для гиперболических уравнений с двумя независимыми переменными. В настоящей заметке приведен один из вариантов их применения при решении задач для гиперболических уравнений с числом независимых переменных больше двух.

Для определенности рассмотрим следующую задачу. Пусть в области D $[0 \leqslant x \leqslant p, \quad 0 \leqslant y \leqslant q, \quad 0 \leqslant t \leqslant T]$ требуется найти решение уравнения

$$u_{tt} = (a(x, y) u_x)_x + (b(x, y) u_y)_y + f(x, y, t), \tag{1}$$

$$a(x, y) > 0, \quad b(x, y) > 0,$$

с начальными условиями

$$\begin{aligned} &u(x, y, 0) = \varphi_0(x, y), \\ &u_t(x, y, 0) = \varphi_1(x, y), \\ &0 \leqslant x \leqslant p, \quad 0 \leqslant y \leqslant q \end{aligned} \tag{2}$$

и граничными условиями

$$\begin{aligned} &u(0, y, t) = \psi_0(y, t), \quad u(p, y, t) = \psi_1(y, t), \\ &u(x, 0, t) = \psi_2(x, t), \quad u(x, q, t) = \psi_3(x, t), \\ &\psi_0(y, 0) = \varphi_0(0, y), \quad \psi_1(y, 0) = \varphi_0(p, y), \\ &\psi_2(x, 0) = \varphi_0(x, 0), \quad \psi_3(x, 0) = \varphi_0(x, q). \end{aligned} \tag{3}$$

Предположим, что существуют ограниченные частные производные четвертого порядка от искомой функции u и коэффициентов $a(x, y)$ и $b(x, y)$ и второго порядка от функции f. Предположим еще, что существует единственное решение задачи (1) — (3), и будем заниматься приближенным его нахождением.

Рассмотрим функционал

$$I(u) = \frac{1}{2} \int_0^t \int_0^p \int_0^q [u_t^2 - a(x, y) u_x^2 - b(x, y) u_y^2 + 2f(x, y, t)\, dxdydt. \tag{4}$$

Уравнение (1) является для него уравнением Эйлера. Введем в рассмотрение $(N + 2)(L + 2) - 4$ функций $u_{nm}(t)$ $(n = -1, 0, 1, \ldots, N + 1; \ m =$

$= -1, 0, 1, \ldots, L+1$; при $n = -1, N+1, m \neq -1, L+1$). Предположим, что

$$u_{0m}(t) = \psi_0(y_m, t), \quad u_{Nm}(t) = \psi_1(y_m, t),$$
$$u_{n0}(t) = \psi_2(x_n, t), \quad u_{nL}(t) = \psi_3(x_n, t), \tag{5}$$
$$u_{nm}(0) = \varphi_0(x_n, y_m), \quad u'_{nm}(0) = \varphi_1(x_n, y_m),$$
$$n = 0, 1, \ldots, N; \quad m = 0, 1, \ldots, L,$$

где

$$x_k = kh, \quad y_i = il, \quad h = p/N, \quad l = q/L.$$

Построим функцию $\bar{u}(x, y, t)$, совпадающую на прямоугольнике $\left[x_n - \frac{h}{2}, x_n + \frac{h}{2}; y_m - \frac{l}{2}, y_m + \frac{l}{2}\right]$ $(n = 0, 1, \ldots, N; \quad m = 0, 1, \ldots, L)$ с интерполяционным многочленом второй степени от переменных x и y вида

$$P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 y + a_3 x^2 + a_4 y^2,$$

удовлетворяющим условиям

$$\bar{u}(x_i, y_j, t) = u_{ij}(t),$$
$$i = n \quad \text{при} \quad j = m-1, m, m+1;$$
$$i = n-1, n+1 \quad \text{при} \quad j = m.$$

Будем предполагать, что отношение h/l ограничено.

Если внести $\bar{u}$ вместо u в (4), увеличивая при этом область интегрирования по переменным x и y до $\left[-\frac{h}{2}, p + \frac{h}{2}; -\frac{l}{2}, q + \frac{l}{2}\right]$, то получится функционал $J(\bar{u})$, зависящий от функций $u_{ij}(t)$ $(i = -1, 0, 1, \ldots, N+1; \quad j = -1, 0, 1, \ldots, L+1)$.

Для определения этих функций мы получили вариационную задачу, непрерывную по переменной t. Выберем $u_{ij}(t)$ так, чтобы для $J(\bar{u})$ выполнялась система уравнений Эйлера. В эту систему будут входить функции $u_{-1\,j}(t)$, $u_{N+1\,j}(t)$, $u_{i,\,-1}(t)$, $u_{i\,L+1}(t)$ $(i = 1, 2, \ldots, N-1; \quad j = 1, 2, \ldots, L-1)$ и их вторые производные. Заменим их с помощью выражений, отбрасывая величины 4-го порядка:

$$u_{-1\,j}(t) = 2\alpha^{+}_{0j}\psi_0(y_j, t) - \rho_{0j}u_{1j}(t) - h^2\gamma^{+}_{0j} + O(h^4),$$

$$u_{N+1\,j}(t) = 2\alpha^{-}_{0j}\psi_1(y_j, t) - \frac{u_{N-1\,j}(t)}{\rho_{Nj}} - h^2\gamma^{-}_{Nj} + O(h^4),$$

$$u_{i,\,-1}(t) = 2\beta^{-}_{i0}\psi_2(x_i, t) - s_{i0}u_{i1}(t) - l^2\delta^{-}_{i0} + O(l^4),$$

$$u_{i\,L+1}(t) = 2\beta^{+}_{i0}\psi_3(x_i, t) - \frac{u_{i\,L-1}(t)}{s_{iL}} - l^2\delta^{+}_{iL} + O(l^4),$$

где

$$\alpha^{\pm}_{ij} = \frac{a(x_i, y_j)}{a(x_i, y_j) \pm \frac{h}{2}a'_x(x_i, y_j)},$$

$$\rho_{ij} = \frac{a(x_i, y_j) - \frac{h}{2} a'_x(x_i, y_j)}{a(x_i, y_j) + \frac{h}{2} a'_x(x_i, y_j)},$$

$$\gamma_{ij}^{\pm} = \frac{(a(x, y) u_x)_x \Big|_{\substack{x=x_i \\ y=y_j}}}{a(x_i, y_j) \pm \frac{h}{2} a'_x(x_i, y_j)}.$$

Выражения для β_{ij}, s_{ij}, δ_{ij} получаются из соответствующих выражений для α_{ij}, ρ_{ij}, γ_{ij} заменой коэффициента $a(x, y)$ на $b(x, y)$, a'_x на b'_y, $(au_x)_x$ на $(bu_y)_y$ и h на l.

После этого система уравнений Эйлера для функционала $J(\bar{u})$ в матричном виде может быть записана так:

$$AU'' = -PU + F, \tag{6}$$

где

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & B & C & O & \cdot & O & O & O \\ B & A_2 & B & C & \cdot & O & O & O \\ C & B & A_3 & B & \cdot & O & O & O \\ O & C & B & A_4 & \cdot & O & O & O \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdot & \cdots & \cdots & \cdots \\ O & O & O & O & \cdot & C & B & A_{N-1} \end{bmatrix},$$

$$A_i = \begin{bmatrix} 2308+51s_{i0} & 184 & -51 & 0 & \cdot & 0 & 0 & 0 \\ 184 & 2308 & 184 & -51 & \cdot & 0 & 0 & 0 \\ -51 & 184 & 2308 & 184 & \cdot & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -51 & 184 & 2308 & \cdot & 0 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdot & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot & 184 & 2308 & 184 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot & -51 & 184 & 2308 + \frac{51}{s_{iL}} \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} 184 & 10 & 0 & \cdot & 0 & 0 \\ 10 & 184 & 10 & \cdot & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 184 & \cdot & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdot & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & 10 & 184 \end{bmatrix}, \qquad C = -51E,$$

$$P = \begin{bmatrix} P_1 & D_1 & Q_2 & O & \cdot & O & O & O \\ D_1 & P_2 & D_2 & Q_3 & \cdot & O & O & O \\ Q_2 & D_2 & P_3 & D_3 & \cdot & O & O & O \\ O & Q_3 & D_3 & P_4 & \cdot & O & O & O \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdot & \cdots & \cdots & \cdots \\ O & O & O & O & \cdot & Q_{N-2} & D_{N-2} & P_{N-1} \end{bmatrix},$$

$$P_i = \begin{bmatrix} \xi_{i1} - z_{i0}s_{i0} & -\omega_{i1} & z_{i2} & 0 & . & 0 & 0 & 0 \\ -\omega_{i1} & \xi_{i2} & -\omega_{i2} & z_{i3} & . & 0 & 0 & 0 \\ z_{i2} & -\omega_{i2} & \xi_{i3} & -\omega_{i3} & . & 0 & 0 & 0 \\ 0 & z_{i3} & -\omega_{i3} & \xi_{i4} & . & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & . & -\omega_{i,\,L-3} & \xi_{i,\,L-2} & -\omega_{i,\,L-2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & . & z_{i,\,L-2} & -\omega_{i,\,L-2} & \xi_{i,\,L-1} - \dfrac{z_{iL}}{s_{iL}} \end{bmatrix},$$

$$D_i = \begin{bmatrix} k_{i1} & 0 & . & 0 \\ 0 & k_{i2} & . & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & . & k_{i,\,L-1} \end{bmatrix}, \qquad Q_i = \begin{bmatrix} \chi_{i1} & 0 & . & 0 \\ 0 & \chi_{i2} & . & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & . & \chi_{i,\,L-1} \end{bmatrix}$$

$$(i = 1,\ 2,\ \dots,\ N-1),$$

$$F = (f_{11},\ f_{12},\ \dots,\ f_{1,\,L-1};\ \ f_{21},\ f_{22},\ \dots,\ f_{2,\,L-1};\ \dots;$$

$$f_{N-1,\,1},\ f_{N-1,\,2},\ \dots,\ f_{N-1,\,L-1})',$$

$$U = (u_{11},\ u_{12},\ \dots,\ u_{1,\,L-1};\ \ u_{21},\ u_{22},\ \dots,\ u_{2,\,L-1};\ \dots;$$

$$u_{N-1,\,1},\ u_{N-1,\,2},\ \dots,\ u_{N-1,\,L-1})'.$$

В матрицах A_i при $i = 1$ к элементам главной диагонали нужно прибавить $51\rho_{0j}$, при $i = N-1$ — значение $51/\rho_{Nj}$ $(j = 1,\ 2,\ \dots,\ L-1)$. В матрицах P_i при $i = 1$ из элементов главной диагонали нужно вычесть $\chi_{0j}\rho_{0j}$, а при $i = N-1$ — значение χ_{Nj}/ρ_{Nj}.

Выше введены следующие обозначения:

$$k_{ij} = \frac{360}{h^2}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\tau\left[(\tau+1)\,a_{ij} + (\tau-1)\,a_{i+1,\,j}\right]d\tau d\theta,$$

$$\chi_{ij} = \frac{180}{h^2}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}(\tau^2-1)\,a_{ij}\,d\tau d\theta,$$

$$\omega_{ij} = \frac{360}{l^2}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\theta\left[(\theta+1)\,b_{ij} + (\theta-1)\,b_{i,\,j+1}\right]d\tau d\theta,$$

$$z_{ij} = \frac{180}{l^2}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}(\theta^2-1)\,b_{ij}\,d\tau d\theta,$$

$$\xi_{ij} = \frac{180}{hl}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\left\{\frac{l}{h}\left[(\tau+1)^2 a_{i-1,\,j} + 4\tau^2 a_{ij} + (\tau-1)^2 a_{i+1,\,j}\right] + \right.$$

$$\left. + \frac{h}{l}\left[(\theta+1)^2 b_{i,\,j-1} + 4\theta^2 b_{ij} + (\theta-1)^2 b_{i,\,j+1}\right]\right\}d\tau d\theta,$$

E — единичная матрица,

$$f_{ij} = F_{ij} + p_{ij} + t_{ij} + w_{ij},$$

$$F_{ij} = 180 \int_{-1}^{1} \int_{-1}^{1} \left[\tau \left(\frac{\tau}{2} - 1 \right) f_{i+1,\,j} + \theta (\theta/2 - 1) f_{i,\,j+1} + \right.$$

$$\left. + (4 - \tau^2 - \theta^2) f_{ij} + \theta \left(\frac{\theta}{2} + 1 \right) f_{i,\,j-1} + \tau \left(\frac{\tau}{2} + 1 \right) f_{i-1,\,j} \right] d\tau d\theta,$$

$$p_{ij} = \begin{cases} d_{i0} + g_{i0}, & j = 1, \\ 51u''_{i0} - \dfrac{2880}{hl} z_{i1} u_{i0}, & j = 2, \\ 0, \quad j = 3, \ \ldots, \ L-3, & i = 1, \ 2, \ \ldots, \ N-1. \\ 51u''_{iL} - \dfrac{2880}{hl} z_{i,\,L-1} u_{iL}, & j = L-2, \\ d_{iL} + g_{iL}, & j = L-1, \end{cases}$$

$$t_{ij} = \begin{cases} c_{0j} + \eta_{0j}, & i = 1, \\ 51u''_{0j} - \dfrac{2880}{hl} \chi_{1j} u_{0j}, & i = 2, \\ 0, \quad i = 3, \ \ldots, \ N-3, & j = 1, \ 2, \ \ldots, \ L-1, \\ 51u''_{Nj} - \dfrac{2880}{hl} \chi_{N-1,\,j} u_{Nj}, & i = N-2, \\ c_{Nj} + \eta_{Nj}, & i = N-1, \end{cases}$$

$$w_{ij} = \begin{cases} 10u''_{00}, & i = j = 1, \\ 10u''_{0L}, & i = 1, \quad j = L-1, \\ 10u''_{N0}, & i = N-1, \quad j = 1, \\ 10u''_{NL}, & i = N-1, \quad j = L-1, \\ 0 \quad \text{во всех остальных случаях,} \end{cases}$$

$$a_{ij} = a \left(x_i + \frac{h}{2} \tau, \quad y_j + \frac{l}{2} \theta \right),$$

$$b_{ij} = b \left(x_i + \frac{h}{2} \tau, \quad y_j + \frac{l}{2} \theta \right),$$

$$f_{ij} = f \left(x_i + \frac{h}{2} \tau, \quad y_j + \frac{l}{2} \theta \right),$$

$$d_{ij} = - \left[10 (u_{i-1,\,j} + u_{i+1,\,j}) + (184 - 102\beta_{ij}^{\mp}) u_{ij} + \right.$$

$$\left. + \frac{2880}{hl} (2\beta_{ij}^{\mp} z_{ij} u_{ij} + l^2 \delta_{ij}^{\mp} z_{ij}) \right],$$

$$c_{ij} = -\left[10\,(u_{i,\,j-1} + u_{i,\,j+1}) + (184 - 102\alpha_{ij}^{\mp})\,u_{ij} + \right.$$

$$\left. + \frac{2880}{hl}\,(2\alpha_{ij}^{\mp}\,\chi_{ij}u_{ij} + h^2\gamma_{ij}^{\mp}\,\chi_{ij})\right].$$

Выше знак минус берется, когда $i = 0$ или $j = 0$, плюс — когда $i = N$ или $j = L$.

$$g_{i0} = \frac{2880}{hl}\,\omega_{i0}u_{i0}, \quad g_{iL} = \frac{2880}{hl}\,\omega_{i,\,L-1}\,u_{iL},$$

$$\eta_{0j} = \frac{2880}{hl}\,k_{0j}u_{0j}, \quad \eta_{Nj} = \frac{2880}{hl}\,k_{N-1,\,j}\,u_{Nj}.$$

За приближенное значение решения $u(x, y, t)$ задачи (1) — (3) на прямой $x = x_k$, $y = y_m$ примем значения функции $u_{km}(t)$ $(k = 1, 2, \ldots, N - 1;\ m = 1, 2, \ldots, L - 1)$, найденные из системы (6) с начальными условиями (2).

Обозначим $e_{nm}(t) = u(x_n, y_m, t) - u_{nm}(t)$. Для погрешности $e_{nm}(t)$ получим следующую задачу Коши:

$$A\Gamma'' = -P\Gamma + R,$$

$$\Gamma(0) = O, \quad \Gamma'(0) = O,$$

где

$$\Gamma = (e_{11}, e_{12}, \ldots, e_{1,\,L-1}, \ldots, e_{N-1,\,1}, e_{N-1,\,2}, \ldots, e_{N-1,\,L-1})',$$

$$R = (r_{11}, r_{12}, \ldots, r_{1,\,L-1}, \ldots, r_{N-1,\,1}, r_{N-1,\,2}, \ldots, r_{N-1,\,L-1})',$$

$$r_{ij} = O(h^2 + l^2).$$

Так как матрицы A и P положительно определенные, то аналогично [2, 3] можно показать, что

$$|e_{nm}(t)| < O(h + l),$$

т. е. что величина $u_{nm}(t)$ при $h \to 0$ и $l \to 0$ стремится к $u(x_n, y_m, t)$ равномерно со скоростью порядка $h + l$.

Аналогичный подход может быть использован при решении задач для гиперболических уравнений с большим числом независимых переменных.

Литература

1. Крылов В. И., Кеда Н. П. ДАН БССР, 8, № 11, 1964.
2. Кеда Н. П. ДАН БССР, 13, № 4, 1969.
3. Абрашин В. Н. Весці АН БССР, сер. фіз.-мат. навук, № 2, 1969.

Институт математики АН БССР

Поступило в редакцию 30.VI 1969

ВЕСЦІ АКАДЭМІІ НАВУК БЕЛАРУСКАЙ ССР № 6 1969
СЕРЫЯ ФІЗІКА-МАТЭМАТЫЧНЫХ НАВУК

УДК 517.948.32

А. С. МОТКИН

О ЧИСЛЕ РЕШЕНИЙ СИСТЕМЫ ОСОБЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ НА БЕСКОНЕЧНОМ КОНТУРЕ

В настоящей статье дается решение системы интегральных уравнений с ядром Коши

$$\sum_{\beta=1}^{n} A_{\alpha\beta}(t)\,\varphi_\beta(t) + \sum_{\beta=1}^{n} \frac{B_{\alpha\beta}(t)}{\pi i}\int_\Gamma \frac{\varphi_\beta(\tau)}{\tau - t}\,d\tau = f_\alpha(t) \quad \alpha = 1,\ 2,\ \ldots,\ n \qquad (1)$$

на контуре, простирающемся в бесконечность.

В дальнейшем предполагается, что матрицы $A(t) = \|A_{\alpha\beta}(t)\|$, $B(t) = \|B_{\alpha\beta}(t)\|$, $\alpha,\ \beta = 1,\ 2,\ \ldots,\ n$, заданные на Γ, принадлежат H и удовлетворяют условиям $\det[A(t) + B(t)] \neq 0$, $\det[A(t) - B(t)] \neq 0$. Запишем систему (1) в матричной форме

$$A(t)\,\varphi(t) + \frac{B(t)}{\pi i}\int_\Gamma \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t}\,d\tau = f(t). \qquad (2)$$

Пусть заданный вектор $f(t)$ и искомый $\varphi(t)$ принадлежат H, Γ — гладкая замкнутая линия, проходящая через бесконечно-удаленную точку. Обозначим $S(t) = A(t) + B(t)$, $D(t) = A(t) - B(t)$. Предположим для определенности, что точка $z = 0$ принадлежит области D^-.

Аналогично случаю одной неизвестной функции [4] каждому решению уравнения (2) отвечает ограниченное решение

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\varphi(\tau)}{\tau - z}\,d\tau$$

краевой задачи Римана для системы n пар функций

$$\Phi^+(t) = [S(t)]^{-1} D(t)\,\Phi^-(t) + [S(t)]^{-1} f(t). \qquad (3)$$

При выполнении условия

$$\frac{1}{\pi i}\int_\Gamma \frac{\Phi^+(\tau) - \Phi^-(\tau)}{\tau - t}\,d\tau = \Phi^+(t) + \Phi^-(t) \qquad (4)$$

каждому такому решению задачи (3) отвечает по формуле

$$\varphi(t) = \Phi^+(t) - \Phi^-(t) \qquad (5)$$

решение уравнения (2).

Выведем условия, при выполнении которых равенство (4) будет выполняться тождественно. Для этого введем вектор-функцию

$$\Phi_1(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\Phi^+(\tau) - \Phi^-(\tau)}{\tau - z}\,d\tau. \qquad (6)$$

Из формул Сохоцкого получим

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{\Phi^{+}(\tau)-\Phi^{-}(\tau)}{\tau-t}\,d\tau=\Phi_1^{+}(t)+\Phi_1^{-}(t). \tag{7}$$

Преобразовав правую часть (6), выразим $\Phi_1^{\pm}(t)$ через $\Phi^{\pm}(t)$:

$$\Phi_1(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{z\Phi^{+}(\tau)}{\tau(\tau-t)}\,d\tau-\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{z\Phi^{-}(\tau)}{\tau(\tau-t)}\,d\tau+$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{\Phi^{+}(\tau)-\Phi^{-}(\tau)}{\tau}\,d\tau. \tag{8}$$

Применив к (8) формулы Коши [4], получаем

$$\Phi_1^{\pm}(z)=\Phi^{\pm}(z)-\Phi^{-}(0)+\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{\Phi^{+}(\tau)-\Phi^{-}(\tau)}{\tau}\,d\tau. \tag{9}$$

Перейдем в (9) к пределу при $z\to t\in\Gamma$

$$\Phi_1^{\pm}(t)=\Phi^{\pm}(t)-\Phi^{-}(0)+\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{\Phi^{+}(\tau)-\Phi^{-}(\tau)}{\tau}\,d\tau. \tag{10}$$

Подставляя (10) в (7), будем иметь

$$\frac{1}{\pi i}\int_{\Gamma}\frac{\Phi^{+}(\tau)-\Phi^{-}(\tau)}{\tau-t}\,d\tau=\Phi^{+}(t)+\Phi^{-}(\tau)+$$

$$+2\left[\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{\Phi^{+}(\tau)-\Phi^{-}(\tau)}{\tau}\,d\tau-\Phi^{-}(0)\right].$$

Для того чтобы оказалась справедливой формула (4), должно выполняться равенство

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{\Phi^{+}(\tau)-\Phi^{-}(\tau)}{\tau}\,d\tau=\Phi^{-}(0). \tag{11}$$

Итак, справедлива

Теорема 1. *Необходимым и достаточным условием равносильности интегрального уравнения (2) и краевой задачи Римана (3) является выполнение условия (11).*

Имея в виду приложения, дадим как ограниченные, так и исчезающие в точке $z=0$ решения задачи Римана (3).

Пусть $X(z)=\|X_{\alpha}^{\beta}(z)\|$ $\alpha, \beta=1, 2, \ldots, n$ есть каноническая матрица, соответствующая однородной задаче, получаемой из (3) при $f(t)\equiv 0$, для которой исключительной будет точка $z=0$. Тогда $S^{-1}(t)D(t)=X^{+}(t)[X^{-}(t)]^{-1}$. Подставляя это выражение в (3), получим

$$[X^{+}(t)]^{-1}\Phi^{+}(t)-[X^{-}(t)]^{-1}\Phi^{-}(t)=[S(t)X^{+}(t)]^{-1}f(t).$$

Откуда следует, что все решения задачи (3), имеющие конечный порядок в точке $z=0$, даются формулой

$$\Phi(z)=\frac{X(z)}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{[S(\tau)X^{+}(\tau)]^{-1}f(\tau)}{\tau-z}\,d\tau+X(z)R(z), \tag{12}$$

где $R(z) = (R_1, R_2, \ldots, R_n)$, $R_\alpha = R_\alpha(z)$ — произвольные рациональные функции, ограниченные всюду, за исключением, может быть, точки $z = 0$. Второе слагаемое в правой части (12) представляет собой общее решение однородной задачи.

Пусть $\varkappa_\beta$ — частные индексы задачи (3) и $\varkappa_1 \geqslant \varkappa_2 \geqslant \ldots \geqslant \varkappa_p > 0 = \varkappa_{p+1} = \ldots = \varkappa_m > \varkappa_{m+1} = \ldots = \varkappa_{m+l} = -1 > \varkappa_{m+l+1} \geqslant \ldots \geqslant \varkappa_n$, $\lambda = \varkappa_1 + \varkappa_2 + \ldots + \varkappa_m$, $\mu = -\varkappa_{m+1} - \ldots - \varkappa_n$. Введем обозначения $Z(t) = S(t) X^+(t)$, $Z^{-1}(t) f(t) = h(t) = (h_1, h_2, \ldots, h_n)$ и положим

$$R(z) = \left(\frac{P_{\varkappa_1}(z)}{z^{\varkappa_1}}, \frac{P_{\varkappa_2}(z)}{z^{\varkappa_2}}, \ldots, \frac{P_{\varkappa_m}(z)}{z^{\varkappa_m}}, \right.$$

$$\left. \frac{-1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{h_{m+1}(\tau)}{\tau} d\tau, \ldots, \frac{-1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{h_n(\tau)}{\tau} d\tau \right), \tag{13}$$

причем $P_{\varkappa_\beta}(z) = c_0^\beta z^{\varkappa_\beta} + c_1^\beta z^{\varkappa_\beta - 1} + \ldots + c_{\varkappa_\beta}^\beta$; $c_0^\beta, c_1^\beta, \ldots, c_{\varkappa_\beta}^\beta$ — произвольные постоянные. Тогда формулу (12) можно записать так:

$$\Phi(z) = \sum_{\beta=1}^{m} X^\beta(z) \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{h_\beta(\tau)}{\tau - z} d\tau + \frac{P_{\varkappa_\beta}(z)}{z^{\varkappa_\beta}} \right\} +$$

$$+ \sum_{\beta=m+1}^{n} \frac{X^\beta(z)}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{z h_\beta(\tau)}{\tau(\tau - z)} d\tau. \tag{14}$$

Замечая, что в окрестности точки $z = 0$

$$\int_\Gamma \frac{z h_\beta(\tau)}{\tau(\tau - z)} d\tau = \sum_{i=1}^{\infty} z^i \int_\Gamma \frac{h_\beta(\tau)}{\tau^{i+1}} d\tau$$

и оценивая порядки различных слагаемых правой части формулы (13) в точке $z = 0$, заключаем, что для существования ограниченных решений задачи (3) необходимо и достаточно, чтобы вектор-функция $f(t)$ удовлетворяла $\mu - n + m$ условиям

$$\int_\Gamma \tau^i h_\beta(\tau) d\tau = 0, \quad i = -2, -3, \ldots, \varkappa_\beta,$$

$$\beta = m + l + 1, \quad m + l + 2, \ldots, n, \tag{15}$$

и что при соблюдении этих условий общее решение требуемого вида дается формулой (14).

Умножая равенства (15) на произвольные постоянные и складывая, получим

$$\int_\Gamma Q(t) h(t) dt = 0, \tag{16}$$

причем

$$Q(t) = \left(0, \ldots, 0, t^{\varkappa_{m+l+1}} P_{-\varkappa_{m+l+1}-2}(t), \ldots, t^{\varkappa_n} P_{-\varkappa_n - 2}(t)\right), \tag{17}$$

$P_\alpha(t)$ — полином степени не выше α с произвольными коэффициентами.

Сформулируем результат.

Теорема 2. *Для существования ограниченного решения задачи (3) необходимо и достаточно, чтобы ее свободный член* $S^{-1}(t) f(t)$ *удовлетворял условию*

$$\int_\Gamma Q(t) [X^+(t)]^{-1} S^{-1}(t) f(t)\, dt = 0, \tag{18}$$

где $Q(t)$ *— произвольный вектор вида* (17), *при соблюдении этого условия общее ограниченное решение дается формулой* (12), *где* $R(z)$ *определяется формулой* (13).

Аналогично предыдущей доказывается

Теорема 3. *Для существования решения задачи* (3), *исчезающего в точке* $z = 0$, *необходимо и достаточно, чтобы свободный член* $S^{-1}(t) f(t)$ *удовлетворял условию* (18), *где* $Q(t) = \left(0, \ldots, 0, t^{\varkappa_{m+1}-1} P_{-\varkappa_{m+1}-1}(t), \ldots, t^{\varkappa_n-1} P_{-\varkappa_n-1}(t)\right)$, $P_\alpha(t)$ *— полином степени не выше* α *с произвольными коэффициентами. При соблюдении этого условия общее решение требуемого вида дается формулой* (12), *где*

$$R(z) = \left(\frac{P_{\varkappa_1-1}(z)}{z^{\varkappa_1-1}}, \ldots, \frac{P_{\varkappa_p-1}(z)}{z^{\varkappa_p-1}}, \right.$$

$$\left. \frac{-1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{h_{p+1}(\tau)}{\tau}\, d\tau, \ldots, \frac{-1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{h_n(\tau)}{\tau}\, d\tau \right).$$

Вводя обозначения

$$\lim_{z\to 0} z^{-\varkappa_\beta} X_\alpha^\beta(z) = a_\alpha^\beta,$$

$$\lim_{z\to 0} \left[\sum_{\beta=1}^{m} \frac{X^\beta(z)}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{h_\beta(\tau)\, d\tau}{\tau - z} + \right.$$

$$\left. + \sum_{\beta=m+1}^{n} \frac{X^\beta(z)}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{z h_\beta(\tau)}{\tau(\tau - z)}\, d\tau \right] = b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_n \end{pmatrix},$$

$$A^*(t) = \frac{1}{2} [S^{-1}(t) + D^{-1}(t)], \qquad B^*(t) = \frac{-1}{2} [S^{-1}(t) - D^{-1}(t)],$$

из решения (12) краевой задачи (3) получаем

$$\Phi_\alpha^-(0) = \sum_{\beta=1}^{n} c_{\varkappa_\beta}^\beta a_\alpha^\beta + b_\alpha, \quad \alpha = 1, 2, \ldots, n, \tag{19}$$

и

$$\varphi(t) = \Phi^+(t) - \Phi^-(t) = A^*(t) f(t) - \frac{B^*(t) Z(t)}{\pi i} \times$$

$$\times \int_\Gamma \frac{Z^{-1}(\tau) f(\tau)}{\tau - t}\, d\tau - 2B^*(t) Z(t) R(t), \tag{20}$$

где $R(t)$ определяется формулой (13).

Учитывая выражения (19) и (20), условие (11) равносильности системы интегральных уравнений (2) и краевой задачи (3) можно записать в виде

$$\sum_{\beta=1}^{m}\sum_{k=0}^{\varkappa_\beta} d_{\alpha k}^{\beta} c_k^{\beta} = e_\alpha, \quad \alpha = 1, 2, \ldots, n. \tag{21}$$

Числа e_α и $d_{\alpha k}^{\beta}$ определяются равенствами

$$\begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \ldots \\ e_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_n \end{pmatrix} - \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \left[\frac{A^*(t) f(t)}{t} - \right.$$

$$\left. - \frac{B^*(t) Z(t)}{t\pi i}\int_\Gamma \frac{Z^{-1}(\tau) f(\tau)}{\tau - t}\, d\tau \right] dt,$$

$$d_{\alpha k}^{\beta} = \frac{-1}{\pi i}\int_\Gamma t^{-k-1} K_{\alpha\beta}(t)\, dt + 0{,}5\left\{ (-1)^{\left[\frac{k}{\varkappa_\beta}\right]} - 1 \right\} a_\alpha^{\beta},$$

где $K_{\alpha\beta}(t)$ — элементы матрицы $B^*(t) Z(t)$, $\left[\frac{k}{\varkappa_\beta}\right]$ — целая часть числа $k/\varkappa_\beta$.

Пусть r — ранг матрицы системы (21). Если выполняются $\mu + m$ условий (15) и (21), то формула (20) дает общее решение уравнения (2) в H, содержащее линейным образом $\lambda + m - r$ произвольных постоянных. Покажем, что для числа d отличных от нуля решений однородной ($f(t) \equiv 0$) системы (2) справедлива оценка $\lambda \leqslant d \leqslant \lambda + m$.

Из $r \geqslant 0$ следует $d \leqslant \lambda + m$. Число решений однородной системы не меньше λ, так как справедливо утверждение: если $f(t) \in H^{*)}(-1)$, то общее решение в $H(-1)$ системы (2) содержит линейным образом λ произвольных постоянных.

Действительно, с помощью замены $\varphi_0(t) = t\varphi(t)$ систему (2) можно преобразовать к виду

$$A(t)\varphi_0(t) + \frac{B(t)}{\pi i}\int_\Gamma \frac{t\varphi_0(t)}{\tau(\tau - t)}\, d\tau = tf(t) = f_0(t) \tag{22}$$

и установить взаимно-однозначное соответствие между решениями системы (2) в $H(-1)$ и решениями системы (22) в H. Поэтому условия разрешимости уравнения (22) в H будут вместе с тем и условиями разрешимости уравнения (2) в $H(-1)$.

Используя известную схему, можно доказать равносильность уравнения (22) и краевой задачи Римана (3) при дополнительном условии $\Phi^-(0) = 0$. Следовательно, при выполнении необходимых и достаточных условий разрешимости (см. теорему 3)

$$\int_\Gamma Q(t) Z^{-1}(t) f_0(t)\, dt = 0,$$

или, что то же, μ соотношений

$$\int_\Gamma \tau^i h_\beta(\tau)\, d\tau = 0, \quad i = -1, -2, \ldots, \varkappa_\beta, \quad \beta = m+1, m+2, \ldots, n, \tag{23}$$

*) $f(t) \in H(-1)$, если $tf(t) \in H$.

общее решение системы (22) в H содержит линейным образом λ произвольных постоянных. Общее решение соответствующей системы (2) в $H(-1)$ дается формулой

$$\varphi(t) = A^*(t) f(t) - \frac{B^*(t) Z(t)}{t\pi i} \int_\Gamma \frac{\tau Z^{-1}(\tau) f(\tau)}{\tau - t} d\tau - 2B^*(t) Z(t) R_1(t), \quad (24)$$

где

$$R_1(t) = \left(\frac{P_{\varkappa_1 - 1}(t)}{t^{\varkappa_1}}, \ \ldots, \ \frac{P_{\varkappa_p - 1}(t)}{t^{\varkappa_p}}, \right.$$

$$\left. \frac{-1}{2\pi i t} \int_\Gamma h_{p+1}(\tau) d\tau, \ \ldots, \ \frac{-1}{2\pi i t} \int_\Gamma h_n(\tau) d\tau \right),$$

$P_\alpha(t)$ — произвольный многочлен степени не выше α.

Для однородной системы условия разрешимости выполняются, и она имеет ровно λ линейно-независимых решений. Так как $H(-1) \subset H$, то $\lambda \leqslant d$.

Полученная формула $\lambda \leqslant d \leqslant \lambda + m$ является точной в том смысле, что случаи $d = \lambda$ и $d = \lambda + m$ реализуются. Покажем это на примерах.

Пример 1. Положим, что $i \in D^+$, $-i$, $0 \in D^-$.

Системе интегральных уравнений

$$\begin{pmatrix} \frac{i}{t} & 0 \\ 0 & \frac{i}{t} \end{pmatrix} \varphi(t) + \frac{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}{\pi i} \int_\Gamma \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t} d\tau = 0 \quad (25)$$

с $\varkappa_1 = \varkappa_2 = 1$, $\lambda = m = 2$ соответствует краевая задача Римана

$$\Phi^+(t) = \begin{pmatrix} \frac{i-t}{i+t} & 0 \\ 0 & \frac{i-t}{i+t} \end{pmatrix} \Phi^-(t), \quad (26)$$

имеющая ограниченное решение

$$\Phi^+(z) = c_0 \begin{pmatrix} \frac{1}{z+i} \\ 0 \end{pmatrix} + c_1 \begin{pmatrix} \frac{z}{z+i} \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{z+i} \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{z}{z+i} \end{pmatrix},$$

$$\Phi^-(z) = -c_0 \begin{pmatrix} \frac{1}{z-i} \\ 0 \end{pmatrix} - c_1 \begin{pmatrix} \frac{z}{z-i} \\ 0 \end{pmatrix} - c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{z-i} \end{pmatrix} - c_3 \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{z}{z-i} \end{pmatrix}.$$

Условие равносильности в классе ограниченных функций системы (25) и задачи (26)

$$0 \cdot c_0 + 0 \cdot c_1 + 0 \cdot c_2 + 0 \cdot c_3 = 0,$$

$$0 \cdot c_0 + 0 \cdot c_1 + 0 \cdot c_2 + 0 \cdot c_3 = 0$$

выполняется при произвольных значениях постоянных c_i, и система (25) имеет $\lambda + m = 4$ линейно независимых решений:

$$\varphi_1(t)=\begin{pmatrix}\dfrac{t}{t^2+1}\\ 0\end{pmatrix},\quad \varphi_2(t)=\begin{pmatrix}\dfrac{t^2}{t^2+1}\\ 0\end{pmatrix},$$

$$\varphi_3(t)=\begin{pmatrix}0\\ \dfrac{t}{t^2+1}\end{pmatrix},\quad \varphi_4(t)=\begin{pmatrix}0\\ \dfrac{t^2}{t^2+1}\end{pmatrix}.$$

Пример 2.

$$\begin{pmatrix}\dfrac{3t}{t-2i} & 0\\ 0 & \dfrac{3t}{t-2i}\end{pmatrix}\varphi(t)-\frac{\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}}{\pi i}\int_\Gamma\frac{\varphi(\tau)}{\tau-t}\,d\tau=0. \qquad (27)$$

Положим, что $\frac{i}{2}\in D^+$, $-i,\ 0\in D^-$. Тогда $\varkappa_1=\varkappa_2=1$, $\lambda=m=2$. Соответствующая краевая задача Римана

$$\Phi^+(t)=\begin{pmatrix}\dfrac{2t-i}{t+i} & 0\\ 0 & \dfrac{2t-i}{t+i}\end{pmatrix}\Phi^-(t)$$

имеет ограниченное решение

$$\Phi^+(z)=c_0\begin{pmatrix}\dfrac{1}{z+i}\\ 0\end{pmatrix}+c_1\begin{pmatrix}\dfrac{z}{z+i}\\ 0\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}0\\ \dfrac{1}{z+i}\end{pmatrix}+c_3\begin{pmatrix}0\\ \dfrac{z}{z+i}\end{pmatrix},$$

$$\Phi^-(z)=c_0\begin{pmatrix}\dfrac{1}{2z-i}\\ 0\end{pmatrix}+c_1\begin{pmatrix}\dfrac{z}{2z-i}\\ 0\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}0\\ \dfrac{1}{2z-i}\end{pmatrix}+c_3\begin{pmatrix}0\\ \dfrac{z}{2z-i}\end{pmatrix}.$$

Из условия равносильности

$$0\cdot c_0-\frac{3}{4}c_1+0\cdot c_2+0\cdot c_3=0,$$

$$0\cdot c_0+0\cdot c_1+0\cdot c_2-\frac{3}{4}c_3=0$$

следует $c_1=c_3=0$.

Таким образом, система (27) имеет только 2 (случай $d=\lambda$) линейно независимых решения:

$$\varphi_1(t)=\begin{pmatrix}\dfrac{t-2i}{(t+i)(2t-i)}\\ 0\end{pmatrix}\quad\text{и}\quad \varphi_2(t)=\begin{pmatrix}0\\ \dfrac{t-2i}{(t+i)(2t-i)}\end{pmatrix}.$$

Сформулируем полученный результат.

Теорема 4. *Для разрешимости системы (2) в ограниченных функциях необходимо и достаточно, чтобы: а) выполнялись* $\mu - n + m$ *условий (15), б) ранг расширенной матрицы системы (21) равнялся рангу r матрицы. При соблюдении этих условий общее решение дается формулой (20), содержащей линейным образом* $\lambda + m - r$ *произвольных постоянных. Для числа решений однородной системы имеет место точная оценка* $\lambda \leqslant d \leqslant \lambda + m$.

Замечание 1. В отличие от случая конечного контура [1, 2] число решений однородной системы, получающейся из (2) при $f(t) \equiv 0$, не определяется однозначно числом λ, а неоднородная может не иметь решений и при $\mu = 0$.

Пример 3. Пусть $i \in D^+$, $-i$, $0 \in D^-$. Условие равносильности

$$0 \cdot c_0 + 0 \cdot c_1 + 0 \cdot c_2 + 0 \cdot c_3 = i\pi,$$

$$0 \cdot c_0 + 0 \cdot c_1 + 0 \cdot c_2 + 0 \cdot c_3 = 0$$

системы интегральных уравнений

$$\begin{pmatrix} \frac{i}{t} & 0 \\ 0 & \frac{i}{t} \end{pmatrix} \varphi(t) + \frac{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}{\pi i} \int_\Gamma \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t} d\tau = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (28)$$

и соответствующей краевой задачи Римана

$$\Phi^+(t) = \begin{pmatrix} \frac{i-t}{i+t} & 0 \\ 0 & \frac{i-t}{i+t} \end{pmatrix} \Phi^-(t) + \begin{pmatrix} \frac{t}{t+i} \\ 0 \end{pmatrix}$$

не выполняется ни при каких значениях постоянных c_0, c_1, c_2, c_3. Поэтому система (28) не имеет решений, в то время как $\lambda = 2$, $\mu = 0$.

Замечание 2. Условия разрешимости (23) и формула (24) общего решения системы (2) в $H(-1)$ верны и в случае, когда заданный вектор $f(t)$ и искомый $\varphi(t)$ принадлежат одному из пространств L_p, $H \cap L_p$, контур $\Gamma \in H^q$ [3], $p > 1$, $q = \frac{p}{p-1}$.

Приношу благодарность академику АН БССР Ф. Д. Гахову за руководство работой.

Литература

1. Векуа Н. П. Системы сингулярных интегральных уравнений. М., 1950.
2. Мусхелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения. М., 1968.
3. Пааташвили В. А. Сообщ. АН ГрузССР, 47, № 1, 1967.
4. Моткин А. С. Весці АН БССР, серыя фіз.-мат. навук, № 4, 1967.

Белорусский государственный университет им. В. И. Ленина

Поступило в редакцию 30.VI 1969

ВЕСЦІ АКАДЭМІІ НАВУК БЕЛАРУСКАЙ ССР № 6 1969
СЕРЫЯ ФІЗІКА-МАТЭМАТЫЧНЫХ НАВУК

УДК 517.946

О. И. МАРИЧЕВ

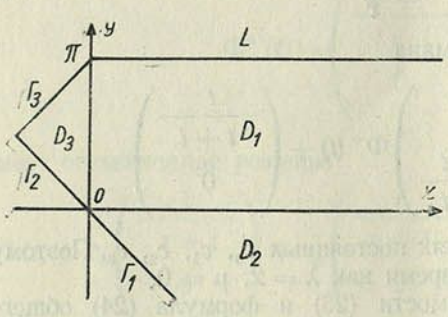
ОБ УРАВНЕНИИ СМЕШАННОГО ТИПА С ДВУМЯ ЛИНИЯМИ ВЫРОЖДЕНИЯ В НЕСИММЕТРИЧНОЙ ОБЛАСТИ

В [3] и [4] было изучено простейшее уравнение смешанного типа с пересекающимися линиями вырождения

$$u_{xx} + \operatorname{sign}(xy)\, u_{yy} = 0 \tag{1}$$

соответственно в бесконечной и конечной симметричных областях.

В настоящей работе исследуется это же уравнение в случае несимметричной полубесконечной области $D = D_1 + D_2 + D_3$ (см. рисунок), которая в эллиптической части является полубесконечной полосой D_1 ($x > 0$, $0 < y < \pi$), ограниченной сверху полупрямой L ($y = \pi$, $x > 0$), а в гиперболических частях D_2 ($x > 0$, $-x < y < 0$), D_3 $\left(-\frac{\pi}{2} < x < 0\right)$ ограничена характеристиками Γ_1 ($x + y = 0$, $x \geqslant 0$), Γ_2 $\left(x + y = 0,\ -\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant 0\right)$, Γ_3 $\left(y - x = \pi,\ -\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant 0\right)$.



Область, в которой ищется решение $u(x, y)$

Задача: найти функцию $u(x, y)$, являющуюся решением уравнения (1) в области D при $x \neq 0$, $y \neq 0$ и обладающую следующими свойствами: 1) $u(x, y) \in C(\bar{D}) \cap C^1(D)$, $u(x, y)$ исчезает на бесконечности; 2) частные производные u_x, u_y вблизи точки (0, 0) допускают обращение в бесконечность порядка не выше 1/2, вблизи $(0, \pi)$ — не выше 1 и вблизи $(\infty, 0)$ должна исчезать; 3) $u(x, y)$ удовлетворяет граничным условиям

$$u|_L = \varphi(x), \qquad 0 \leqslant x < \infty, \tag{2}$$

$$u|_{\Gamma_1} = \psi_1(x), \qquad 0 \leqslant x < \infty, \tag{3}$$

$$u|_{\Gamma_2} = \psi_2(y), \qquad 0 \leqslant y \leqslant \frac{\pi}{2}, \tag{4}$$

где $\varphi(x)$, $\psi_1(x)$ и $\psi_2(y)$ — заданные функции, $\varphi(x) \in C[0, \infty)$, $\varphi(\infty)$ исчезает, $\psi_1(x) \in C[0, \infty) \cap C^{(1,\alpha)}(0, \infty)$, $\alpha > \frac{1}{4}$, $\psi_2(y) \in C[0, \frac{\pi}{2}] \cap C^{(1,\beta)}(0, \frac{\pi}{2})$, $\beta > \frac{1}{4}$, а $\psi_i'(x)$, $i = 1, 2$ при $x \to 0$ могут иметь особенности порядка ниже

$\frac{1}{2}$, при $x\to\infty$ $\psi_1'(x)=O(\exp\gamma x)$, $\gamma<-\frac{1}{4}$; $\psi_2'(y)$ при $y\to\frac{\pi}{2}$ допускает интегрируемую бесконечность, причем $\psi_1(0)=\psi_2(0)$.

При этих условиях существует единственное решение задачи. Единственность следует из рассуждений, подобных приведенным в [2] (§ 2, гл. II), устанавливающих принцип экстремума: положительный максимум и отрицательный минимум решения $u(x, y)$ в области $\overline{D}$ достигаются на полупрямой L, если $\psi_1=\psi_2\equiv 0$.

Докажем существование решения и получим его в замкнутой форме. Вводя обозначения $\nu(x)=u_y(x, 0)$, $0<x<\infty$ и $\mu(y)=u_x(0, y)$, $0<y<\pi$, рассмотрим задачи Коши—Гурса

$$u_{xx}-u_{yy}=0,\quad x>0,\quad -x<y<0,$$
$$u_y(x, 0)=\nu(x),\quad 0<x<\infty,\quad u|_{\Gamma_1}=\psi_1(x),\quad 0<x<\infty, \tag{5}$$

$$u_{xx}-u_{yy}=0,\quad y>0,\quad \left|y-\frac{\pi}{2}\right|<x+\frac{\pi}{2}<\frac{\pi}{2}, \tag{6}$$
$$u_x(0, y)=\mu(y),\quad 0<y<\pi,\quad u|_{\Gamma_2}=\psi_2(y),\quad 0<y<\frac{\pi}{2}$$

и смешанную задачу Неймана—Дирихле для полуполосы

$$u_{xx}+u_{yy}=0,\quad x>0,\quad 0<y<\pi,$$
$$u_y(x, 0)=\nu(x),\quad 0<x<\infty;\quad u_x(0, y)=\mu(y),\quad 0<y<\pi, \tag{7}$$
$$u(x, \pi)=\varphi(x),\quad 0<x<\infty$$

с непрерывным в области $\overline{D}_1$ и исчезающим на бесконечности решением, обладающим непрерывной при $x=0$ производной по x и непрерывной при $y=0$ производной по y.

Решая задачи (5), (6), находим соответственно

$$u(x, y)=-\psi_1(0)+\psi_1\left(\frac{x+y}{2}\right)+\psi_1\left(\frac{x-y}{2}\right)+\int_0^{x+y}\nu(t)\,dt; \tag{8}$$

$$u(x, y)=-\psi_2(0)+\psi_2\left(\frac{y+x}{2}\right)+\psi_2\left(\frac{y-x}{2}\right)+\int_0^{y+x}\mu(t)\,dt. \tag{9}$$

Задачу (7) решаем методом разделения переменных Фурье, в результате вычислений находим

$$u(x, y)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\mu(t)\ln\frac{\left[\exp(-x)-2\exp\left(-\frac{x}{2}\right)\cos\frac{y+t}{2}+1\right]}{\left[\exp(-x)+2\exp\left(-\frac{x}{2}\right)\cos\frac{y+t}{2}+1\right]}\times$$
$$\times\frac{\left[\exp(-x)-2\exp\left(-\frac{x}{2}\right)\cos\frac{y-t}{2}+1\right]}{\left[\exp(-x)+2\exp\left(-\frac{x}{2}\right)\cos\frac{y-t}{2}+1\right]}\,dt+$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty \nu(t)\ln\frac{\left(\operatorname{ch}\frac{t+x}{2}-\cos\frac{y}{2}\right)\left(\operatorname{ch}\frac{t-x}{2}-\cos\frac{y}{2}\right)}{\left(\operatorname{ch}\frac{t+x}{2}+\cos\frac{y}{2}\right)\left(\operatorname{ch}\frac{t-x}{2}+\cos\frac{y}{2}\right)}dt+$$

$$+\frac{\cos\frac{y}{2}}{\pi}\int_0^\infty \varphi(t)\left[\frac{\operatorname{ch}\frac{t+x}{2}}{\operatorname{ch}(t+x)+\cos y}+\frac{\operatorname{ch}\frac{t-x}{2}}{\operatorname{ch}(t-x)+\cos y}\right]dt. \qquad (10)$$

Воспользовавшись непрерывностью решения при переходе через линии вырождения типа, после дифференцирования соответствующих тождеств получим систему сингулярных интегральных уравнений:

$$\mu(y)-\frac{2\sin\frac{y}{2}}{\pi}\int_0^\pi \frac{\cos\frac{t}{2}\,\mu(t)\,dt}{\cos t-\cos y}-$$

$$-\frac{2\sin\frac{y}{2}}{\pi}\int_0^\infty \frac{\operatorname{ch}\frac{t}{2}\,\nu(t)\,dt}{\operatorname{ch} t-\cos y}=F_1(y),\quad 0<y<\pi, \qquad (11)$$

$$\nu(x)+\frac{2\operatorname{sh}\frac{x}{2}}{\pi}\int_0^\pi \frac{\cos\frac{t}{2}\,\mu(t)\,dt}{\cos t-\operatorname{ch} x}+$$

$$+\frac{2\operatorname{sh}\frac{x}{2}}{\pi}\int_0^\infty \frac{\operatorname{ch}\frac{t}{2}\,\nu(t)\,dt}{\operatorname{ch} t-\operatorname{ch} x}=F_2(x),\quad 0<x<\infty,$$

где

$$F_1(y)=-\psi_2'\left(\frac{y}{2}\right)-\frac{2\sin\frac{y}{2}}{\pi}\int_0^\infty \frac{\operatorname{ch}\frac{t}{2}\left(\operatorname{sh}^2\frac{t}{2}-\cos^2\frac{y}{2}\right)}{(\operatorname{ch} t+\cos y)^2}\varphi(t)\,dt,$$

$$F_2(x)=-\psi_1'\left(\frac{x}{2}\right)+\frac{2\operatorname{sh}\frac{x}{2}}{\pi}\int_0^\infty \frac{\operatorname{ch}\frac{t}{2}\left(\operatorname{sh}^2\frac{t}{2}-\operatorname{ch}^2\frac{x}{2}\right)}{(\operatorname{ch} t+\operatorname{ch} x)^2}\varphi(t)\,dt. \qquad (12)$$

Система (11) симметрична в следующем смысле: интегральные операторы ее уравнений переходят друг в друга, приобретая множитель i, при формальной замене аргумента, например x на ix.

Решение системы будем искать в классе функций, допускающих в (0, 0) бесконечность порядка не выше $\frac{1}{2}$, в $(0, \pi)$ $\mu(y)$ может допускать интегрируемую бесконечность порядка ниже 1, а при $x\to\infty$ $\nu(x)$ должна исчезать.

Вначале изучим более общую, чем (11), систему

$$a\mu(y)+\frac{2b\sin\frac{y}{2}}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\cos\frac{t}{2}\,\mu(t)\,dt}{\cos t-\cos y}+$$

$$+\frac{2d\sin\frac{y}{2}}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\operatorname{ch}\frac{t}{2}\,\nu(t)\,dt}{\operatorname{ch}t-\cos y}=f_1(y),\quad 0<y<\pi,$$

$$c\nu(x)+\frac{2b\operatorname{sh}\frac{x}{2}}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\cos\frac{t}{2}\,\mu(t)\,dt}{\cos t-\operatorname{ch}x}+ \tag{13}$$

$$+\frac{2d\operatorname{sh}\frac{x}{2}}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\operatorname{ch}\frac{t}{2}\,\nu(t)\,dt}{\operatorname{ch}t-\operatorname{ch}x}=f_2(x),\quad 0<x<\infty$$

с постоянными действительными коэффициентами a, b, c, d, которая при

$$-a=b=c=d=-\frac{\sqrt{2}}{2},\quad f_1(y)=\frac{\sqrt{2}}{2}F_1(y),\quad f_2(x)=-\frac{\sqrt{2}}{2}F_2(x) \tag{14}$$

переходит в систему (11). Класс решений системы (13) будет зависеть от коэффициентов и будет определен ниже. Из системы (13) заменой переменных и функций

$$\mu(y)=\sin\frac{y}{2}\cdot\tilde{\mu}\left(\cos^2\frac{y}{2}\right),\quad \nu(x)=\operatorname{sh}\frac{x}{2}\cdot\tilde{\nu}\left(\operatorname{ch}^2\frac{x}{2}\right),$$

$$f_1(y)=\sin\frac{y}{2}\cdot\tilde{f}_1\left(\cos^2\frac{y}{2}\right),\quad f_2(x)=\operatorname{sh}\frac{x}{2}\cdot\tilde{f}_2\left(\operatorname{ch}^2\frac{x}{2}\right), \tag{15}$$

$$\cos^2\frac{t}{2}=\tau,\quad \cos^2\frac{y}{2}=x,\quad \operatorname{ch}^2\frac{t}{2}=\xi \text{ и т. п.}$$

получим

$$a\tilde{\mu}(x)+\frac{b}{\pi}\int_0^1\frac{\tilde{\mu}(\tau)\,d\tau}{\tau-x}+\frac{d}{\pi}\int_1^{\infty}\frac{\tilde{\nu}(\tau)\,d\tau}{\tau-x}=\tilde{f}_1(x),\quad 0<x<1,$$

$$c\tilde{\nu}(x)+\frac{b}{\pi}\int_0^1\frac{\tilde{\mu}(\tau)\,d\tau}{\tau-x}+\frac{d}{\pi}\int_1^{\infty}\frac{\tilde{\nu}(\tau)\,d\tau}{\tau-x}=\tilde{f}_2(x),\quad 1<x<\infty. \tag{16}$$

Эта операция законна ввиду однозначности и монотонности внутренней функции $\cos^2\frac{y}{2}$ при $0<y<\pi$, а замена проведена так, чтобы получились

сингулярные интегралы с ядром Коши, зависящие от новых переменных в других промежутках изменения.

Систему (16) будем решать методом аналитического продолжения в комплексную плоскость. Введем аналитическую функцию

$$\Phi(z) = \frac{b}{2\pi i}\int_0^1 \frac{\tilde{\mu}(\tau)\,d\tau}{\tau - z} + \frac{d}{2\pi i}\int_1^\infty \frac{\tilde{\nu}(\tau)\,d\tau}{\tau - z},\quad \Phi(\infty) = 0. \tag{17}$$

В рассматриваемом случае формулы Сохоцкого имеют вид

$$\Phi^+(x) - \Phi^-(x) = \begin{cases} b\tilde{\mu}(x), & 0 < x < 1, \\ d\tilde{\nu}(x), & 1 < x < \infty, \end{cases} \tag{18}$$

$$\Phi^+(x) + \Phi^-(x) = \frac{b}{\pi i}\int_0^1 \frac{\tilde{\mu}(\tau)\,d\tau}{\tau - x} + \frac{d}{\pi i}\int_1^\infty \frac{\tilde{\nu}(\tau)\,d\tau}{\tau - x},\quad 0 < x < \infty,\ x \neq 1.$$

Вставляя из последних формул в уравнения (16) выражения для $\tilde{\mu}(x)$, $\tilde{\nu}(x)$ и особых интегралов, приведем эту систему к задаче Римана с разрывными коэффициентами

$$\Phi^+(x) = G(x)\,\Phi^-(x) + g(x), \tag{19}$$

где

$$G(x) = \begin{cases} \dfrac{a - ib}{a + ib} = \exp(-2\alpha\pi i), & 0 < x < 1, \\ \dfrac{c - id}{c + id} = \exp(-2\beta\pi i), & 1 < x < \infty, \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{b\tilde{f}_1(x)}{a + ib}, & 0 < x < 1, \\ \dfrac{d\tilde{f}_2(x)}{c + id}, & 1 < x < \infty. \end{cases}$$

В силу (17) решение нужно искать в классе функций, исчезающих на бесконечности, а в точках 0 и 1 класс решения определяется постановкой задачи. Согласно условиям задачи, решение системы (11) ищется в самом широком классе, поэтому систему (13) решаем в классе функций, допускающих интегрируемую особенность в точках 0 и 1 и исчезающих на бесконечности.

Можно убедиться, что функция

$$X(z) = z^\alpha\,(1 - z)^{\beta - \alpha} \tag{20}$$

при условиях $-1 < \alpha = \operatorname{arctg}\dfrac{b}{a} < 0$ и $-1 < \beta - \alpha < 0$, где $\beta = \operatorname{arctg}\dfrac{d}{c}$ (см. обозначения (19)), является решением однородной задачи (19) в описанном классе, т. е. канонической функцией, так как ее предельные значения при фиксированной ветке выражаются формулами:

$$X^+(x) = \begin{cases} x^\alpha (1 - x)^{\beta - \alpha}, & 0 < x < 1, \\ x^\alpha (x - 1)^{\beta - \alpha} \exp\left[(\alpha - \beta)\,\pi i\right], & 1 < x < \infty, \end{cases} \tag{21}$$

$$X^-(x) = \begin{cases} x^\alpha (1 - x)^{\beta - \alpha} \exp 2\alpha\pi i, & 0 < x < 1, \\ x^\alpha (x - 1)^{\beta - \alpha} \exp\left[(\alpha + \beta)\,\pi i\right], & 1 < x < \infty. \end{cases}$$

Индекс задачи $\varkappa = 1$. Общее решение (19) имеет вид

$$\Phi(z) = X(z)\left[\frac{1}{2\pi i}\int_0^\infty \frac{g(\tau)\,d\tau}{X^+(\tau)(\tau - z)} + C_1\right]. \tag{22}$$

Воспользовавшись первой из формул (18) и значениями (19), (21), получим решение системы (16) в виде

$$\tilde{\mu}(x) = a\tilde{f}_1(x) - \frac{bX^+(x)}{\pi}\int_0^1 \frac{\tilde{f}_1(\tau)\,d\tau}{X^+(\tau)(\tau - x)} -$$

$$- \frac{dX^+(x)}{\pi}\int_1^\infty \frac{\tilde{f}_2(\tau)\,d\tau}{|X^+(\tau)|(\tau - x)} + CX^+(x),\ 0 < x < 1,$$

$$\tilde{\nu}(x) = c\tilde{f}_2(x) - \frac{b|X^+(x)|}{\pi}\int_0^1 \frac{\tilde{f}_1(\tau)\,d\tau}{X^+(\tau)(\tau - x)} - \tag{23}$$

$$- \frac{d|X^+(x)|}{\pi}\int_1^\infty \frac{\tilde{f}_2(\tau)\,d\tau}{|X^+(\tau)|(\tau - x)} + C|X^+(x)|,\quad 1 < x < \infty,$$

последнее заменой из (15) переходит в искомое решение системы (13)

$$\mu(y) = af_1(y) - \frac{2b\sin\frac{y}{2}R(y)}{\pi}\int_0^\pi \frac{\cos\frac{t}{2}f_1(t)\,dt}{R(t)(\cos t - \cos y)} -$$

$$- \frac{2d\sin\frac{y}{2}R(y)}{\pi}\int_0^\infty \frac{\operatorname{ch}\frac{t}{2}f_2(t)\,dt}{S(t)(\operatorname{ch} t - \cos y)} + CR(y),\quad 0 < y < \pi, \tag{24}$$

$$\nu(x) = cf_2(x) - \frac{2b\operatorname{sh}\frac{x}{2}S(x)}{\pi}\int_0^\pi \frac{\cos\frac{t}{2}f_1(t)\,dt}{R(t)(\cos t - \operatorname{ch} x)} -$$

$$- \frac{2d\operatorname{sh}\frac{x}{2}S(x)}{\pi}\int_0^\infty \frac{\operatorname{ch}\frac{t}{2}f_2(t)\,dt}{S(t)(\operatorname{ch} t - \operatorname{ch} x)} + CS(x),\quad 0 < x < \infty,$$

где

$$R(y) = \left(\sin\frac{y}{2}\right)^{2(\beta-\alpha)}\cos^{2\alpha}\frac{y}{2},$$

$$S(x) = \left(\operatorname{sh}\frac{x}{2}\right)^{2(\beta-\alpha)}\operatorname{ch}^{2\alpha}\frac{x}{2}.$$

Воспользовавшись (14), находим решение исходной системы (11)

$$\mu(y)=\frac{F_1(y)}{2}+\frac{\sin\frac{y}{2}\,R(y)}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\cos\frac{t}{2}\,F_1(t)\,dt}{R(t)(\cos t-\cos y)}-$$

$$-\frac{\sin\frac{y}{2}\,R(y)}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\operatorname{ch}\frac{t}{2}\,F_2(t)\,dt}{S(t)(\operatorname{ch}t-\cos y)},\quad 0<y<\pi,$$

$$\nu(x)=\frac{F_2(x)}{2}+\frac{\operatorname{sh}\frac{x}{2}\,S(x)}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\cos\frac{t}{2}\,F_1(t)\,dt}{R(t)(\cos t-\operatorname{ch}x)}-$$

$$-\frac{\operatorname{sh}\frac{x}{2}\,S(x)}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\operatorname{ch}\frac{t}{2}\,F_2(t)\,dt}{S(t)(\operatorname{ch}t-\operatorname{ch}x)},\qquad 0<x<\infty,\qquad (25)$$

где

$$R(y)=\left(\sin\frac{y}{2}\sqrt{\cos\frac{y}{2}}\right)^{-1},\quad S(x)=\left(\operatorname{sh}\frac{x}{2}\sqrt{\operatorname{ch}\frac{x}{2}}\right)^{-1}.$$

Формулы (8), (9), (10) со значениями $\mu(y)$, $\nu(x)$ по формулам (25) выражают решение исходной задачи (ввиду исчезновения решения $u(x, y)$ на бесконечности постоянную C взяли равной нулю). Нетрудно убедиться, что условия, налагаемые в формулировке задачи на функции $\varphi(x)$ и $\psi_i(x)$, $i=1, 2$, не могут быть расширены, так как в противном случае интегралы типа Коши не будут существовать.

Методом аналитического продолжения аналогично можно решать более общие, чем (16), системы вида

$$a_i(x)\,\mu_i(x)+\frac{b_i(x)}{\pi}\sum_{k=1}^{n}c_k\int_{\alpha_k}^{\beta_k}\frac{\mu_k(\tau)\,d\tau}{\tau-x}=f_i(x),\quad \alpha_i<x<\beta_i,\quad i=1, 2, \ldots, n,$$

при неналегающих отрезках $[\alpha_i, \beta_i]$, $i=1, 2, \ldots, n$, и постоянных c_i. Тогда получится задача Римана с разрывными переменными коэффициентами, решение которой в случае конечных контуров подробно изложено в книге Ф. Д. Гахова [1]. Подобным методом можно решать и систему (9), полученную в работе [3].

Выражаю глубокую благодарность профессору Ф. Д. Гахову за помощь в работе.

Литература

1. Гахов Ф. Д. Краевые задачи. Физматгиз, М., 1963.
2. Бицадзе А. В. К проблеме уравнений смешанного типа. Тр. мат. ин-та им. В. А. Стеклова, **41**, 1953.
3. Флайшер Н. М. Rev. roumaine de mathem. pures et appl., **11**, № 6, 699, 1966.
4. Зайнулабидов М. М. ДУ, **5**, № 1, 1969.

Белорусский государственный университет им. В. И. Ленина

Поступило в редакцию 14.V 1969

ВЕСЦІ АКАДЭМІІ НАВУК БЕЛАРУСКАЙ ССР № 6 1969
СЕРЫЯ ФІЗІКА-МАТЭМАТЫЧНЫХ НАВУК

УДК 539.12

Ф. И. ФЕДОРОВ, В. А. ПЛЕТЮХОВ

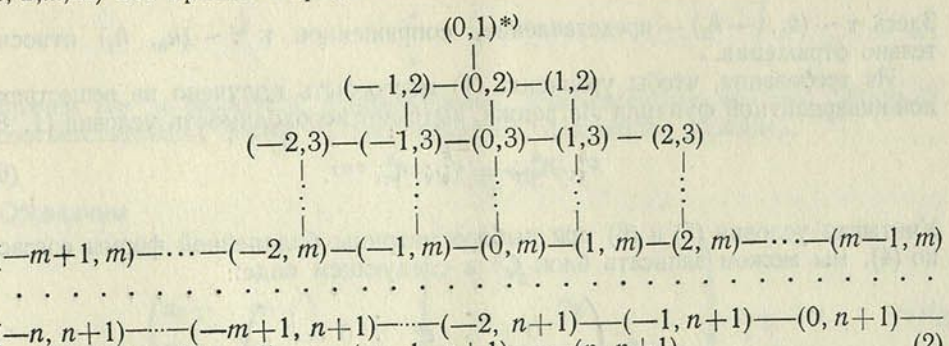
ВОЛНОВЫЕ УРАВНЕНИЯ С КРАТНЫМИ ПРЕДСТАВЛЕНИЯМИ ГРУППЫ ЛОРЕНЦА. ЦЕЛЫЙ СПИН

Теории релятивистских волновых уравнений

$$(\gamma^k \partial_k + m)\,\psi = 0, \tag{1}$$

описывающих элементарные частицы, посвящена обширная литература. При построении таких уравнений (см. например, [1]) исходят из некоторого набора представлений группы Лоренца, причем обычно ограничиваются различными представлениями. Уравнения, построенные с использованием повторяющихся или кратных представлений, исследованы сравнительно мало [2—6]. Между тем применение кратных представлений существенно расширяет возможности построения различных уравнений. Настоящая работа посвящена рассмотрению этого вопроса для случая целого спина.

Самая полная схема зацеплений для частицы с целым спином ($s=0, 1, 2, \ldots, n$) без кратных представлений может быть написана в виде



(2)

Матрица γ^0 в уравнении (1) имеет вид [1, 7]

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} C^0 \times E_0 & & & & \\ & C^1 \times E_1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & C^k \times E_k & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & C^n \times E_n \end{pmatrix},$$

*) Мы пользуемся здесь обозначением представлений группы Лоренца, принятым в [1].

где C^k — квадратные блоки, относящиеся к спину k, E_k — единичная матрица порядка $2k+1$, знак $\times$ обозначает прямое произведение в смысле Кронекера.

Рассмотрим случай, когда к схеме (2) добавляется представление $(0,\ m+1)'$, причем $0<m<n$. Блоки C^k матрицы γ^0, где $k>m$, при этом не изменятся. Исследуем блок $C^k\ (0<k<m)$. Введем следующие обозначения для представлений:

$$(0,\ m+1)' \sim 1',\quad (0,\ m+1) \sim 1,\quad (0,\ m+2) \sim 2,\quad (0,\ m) \sim 3,$$
$$(1,\ m+1) \sim 4,\quad (-1,\ m+1) \sim 5. \tag{3}$$

Здесь существует несколько несводимых друг к другу возможностей выбора матрицы билинейной формы. Мы ограничимся рассмотрением следующих двух возможностей *):

$$\begin{aligned} &1)\ \eta^k_{1'1'} = \eta^k_{11} = \eta^k_{22} = \eta^k_{33} = \pm\,\eta^k_{45} = 1,\\ &2)\ \eta^k_{1'1'} = \eta^k_{11} = -\,\eta^k_{22} = -\,\eta^k_{33} = \mp\,\eta^k_{45} = 1. \end{aligned} \tag{4}$$

Из инвариантности волнового уравнения (1) относительно полной группы Лоренца вытекают следующие условия, налагаемые на элементы $c^k_{\tau\tau'}$ матрицы C^k [1]:

$$\begin{aligned} &c_{\tau\tau'} = c_{\dot\tau\dot\tau'},\quad \text{если}\quad \dot\tau \neq \tau,\ \dot\tau \neq \tau',\\ &c_{\tau\tau'} = \pm\, c_{\dot\tau\dot\tau'},\quad \text{если}\quad \dot\tau = \tau,\ \dot\tau' \neq \tau',\\ &c_{\tau\tau'} = \pm\, c_{\dot\tau\dot\tau'},\quad \text{если}\quad \dot\tau \neq \tau,\ \dot\tau' = \tau'. \end{aligned} \tag{5}$$

Здесь $\dot\tau \sim (k_0,\ -k_1)$ — представление, сопряженное к $\tau \sim (k_0,\ k_1)$ относительно отражения.

Из требования, чтобы уравнение (1) могло быть получено из вещественной инвариантной функции Лагранжа, вытекает необходимость условия [1, 8]

$$c^k_{\tau\tau'}\,\eta^k_{\tau'\dot\tau'} = \overline{c}^{\,k}_{\dot\tau'\dot\tau}\,\eta^k_{\dot\tau\dot\tau}\ **). \tag{6}$$

Учитывая условия (5) и (6) при выборе матрицы билинейной формы согласно (4), мы можем записать блок C^k в следующем виде:

$$C^k = \begin{pmatrix} 0 & \vdots & c^k & \vdots & 0\cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \pm\,(c^k)^+ & \vdots & & & \\ \cdots & \cdots & & B^k & \\ 0 & \vdots & & & \\ \vdots & \vdots & & & \end{pmatrix} \tag{7}$$

Здесь знак $+$ ($-$) соответствует I (II) варианту выбора матрицы билинейной формы η^k:

*) В остальных случаях анализ проводится аналогичным образом, хотя расчеты заметно усложняются.

**) Черта означает комплексное сопряжение.

$$c^k = \begin{pmatrix} c^k_{1'2} & c^k_{1'3} & c^k_{1'4} & \pm c^k_{1'4} \\ c^k_{12} & c^k_{13} & c^k_{14} & \pm c^k_{14} \end{pmatrix}.$$

B^k — матрица, относящаяся к представлениям, не указанным в (3).

Матрица допустимых преобразований (т. е. таких, которые не меняют вида инфинитезимальных операторов представления I^{ki}) имеет в данном случае вид

$$A_0 = \begin{pmatrix} A \times E_0 & & & & \\ & A \times E_1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & A \times E_k & \\ & & & & \ddots \\ & & & & A \times E_n \end{pmatrix}, \tag{8}$$

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{1'1'} & \alpha_{1'1} & \vdots & & 0 & & & \\ \alpha_{11'} & \alpha_{11} & \vdots & & & & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ & & \vdots & \alpha_2 & & & & \\ & & \vdots & & \alpha_3 & & & \\ & & \vdots & & & \alpha_4 & & \\ & 0 & \vdots & & & & \alpha_5 & \\ & & \vdots & & & & & \ddots \\ & & \vdots & & & & & \end{pmatrix}, \tag{9}$$

причем все α являются произвольными комплексными числами. Блок C^k, соответствующий спину k, преобразуется следующим образом:

$$C^{k'} = AC^kA^{-1}.$$

Обозначим

$$\begin{pmatrix} \alpha_{1'1'} & \alpha_{1'1} \\ \alpha_{11'} & \alpha_{11} \end{pmatrix} = \alpha, \quad \begin{pmatrix} \alpha_2 & & 0 & \\ & \alpha_3 & & \\ & & \alpha_4 & \\ & 0 & & \alpha_5 \\ & & & \ddots \end{pmatrix} = \alpha_0. \tag{10}$$

Подставляя (7) и (9) в (10), получим

$$C^{k'} = \begin{pmatrix} 0 & \vdots & \alpha c^k \alpha_0^{-1} & \vdots & 0 \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \pm \alpha_0 (c^k)^+ \alpha^{-1} & \vdots & & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \alpha_0 B^k \alpha_0^{-1} \\ 0 & \vdots & & & \end{pmatrix}. \tag{11}$$

Условие получения уравнения (1) из инвариантной функции Лагранжа накладывает следующие ограничения на элементы матрицы A:

$$(\alpha_0 (C^k)^+ \alpha^{-1})^+ = \alpha C^k \alpha_0^{-1}. \tag{12}$$

Из (12) вытекает, во-первых,

$$\alpha^+ \alpha = E, \text{ или } \alpha^+ = \alpha^{-1}, \tag{13}$$

и, во-вторых,

$$|\alpha_2|^2 = |\alpha_3|^2 = |\alpha_4|^2 = |\alpha_5|^2 = 1. \tag{14}$$

Из (13) следует, что комплексная унитарная матрица второго порядка α имеет вид

$$\alpha = \begin{pmatrix} \alpha_{1'1'} & \alpha_{1'1} \\ -e^{i\varphi}\bar{\alpha}_{1'1} & e^{i\varphi}\bar{\alpha}_{1'1'} \end{pmatrix}, \tag{15}$$

причем

$$|\alpha_{1'1'}|^2 + |\alpha_{1'1}|^2 = 1. \tag{16}$$

Окончательно матрица допустимых преобразований координат, не меняющая вида оператора отражения T и билинейной инвариантной формы, имеет вид (8), где

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{1'1'} & \alpha_{1'1} & \vdots & & & 0 & & \\ -e^{i\varphi}\bar{\alpha}_{1'1} & e^{i\varphi}\bar{\alpha}_{1'1'} & \vdots & & & & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ & & \vdots & \alpha_2 & & & & \\ & & \vdots & & \alpha_3 & & & \\ & & \vdots & & & \alpha_4 & & \\ & 0 & \vdots & & & & \alpha_5 & \\ & & \vdots & & & & & \ddots \\ & & \vdots & & & & & \end{pmatrix}, \tag{17}$$

причем ее элементы удовлетворяют условиям (14) и (16).

Оставшийся произвол в выборе A можно использовать для упрощения блоков $C^{k'}$. Подставляя (17) в (11), получаем

$$\begin{aligned} c^{k'}_{1'2} &= \alpha_{1'1'} c^k_{1'2} \alpha_2^{-1} + \alpha_{1'1} c^k_{12} \alpha_2^{-1}, \\ c^{k'}_{1'3} &= \alpha_{1'1'} c^k_{1'3} \alpha_3^{-1} + \alpha_{1'1} c^k_{13} \alpha_3^{-1}, \\ c^{k'}_{1'4} &= \alpha_{1'1'} c^k_{1'4} \alpha_4^{-1} + \alpha_{1'1} c^k_{14} \alpha_4^{-1}. \end{aligned} \tag{18}$$

Здесь $c^k_{1'2}$, $c^k_{1'3}$, $c^k_{1'4}$ — элементы, возникшие после добавления к исходной схеме зацеплений (2) представления $(0, m+1)'$. Из (18) следует, что надлежащим выбором чисел $\alpha_{1'1'}$ и $\alpha_{1'1}$ один из этих элементов всегда можно обратить в нуль. Например, $c^k_{1'2} = 0$, если $\dfrac{\alpha_{1'1'}}{\alpha_{1'1}} = -\dfrac{c^k_{12}}{c^k_{1'2}}$. Одновременно обратить в нуль все новые элементы можно только при выполнении условия

$$\frac{c^k_{12}}{c^k_{1'2}} = \frac{c^k_{13}}{c^k_{1'3}} = \frac{c^k_{14}}{c^k_{1'4}}. \tag{19}$$

Используя известные формулы [1]

$$\begin{aligned} \frac{c^k_{\tau\tau'}}{c_{\tau\tau'}} &= \frac{c^k_{\tau'\tau}}{c_{\tau'\tau}} = \sqrt{(k+k_1+1)(k-k_1)}, \quad (k_0' = k_0, \ k_1' = k_1 + 1), \\ \frac{c^k_{\tau\tau'}}{c_{\tau\tau'}} &= \frac{c^k_{\tau'\tau}}{c_{\tau'\tau}} = \sqrt{(k+k_0+1)(k-k_0)}, \quad (k_1' = k_1, \ k_0' = k_0 + 1), \end{aligned} \tag{20}$$

не трудно показать, что если условие (19) выполняется для блока C^k, то оно выполняется и для всех остальных блоков при $0<k<m$. Таким образом, условием распадения рассматриваемого уравнения является

$$\frac{c_{12}}{c_{1'2}} = \frac{c_{13}}{c_{1'3}} = \frac{c_{14}}{c_{1'4}}. \tag{21}$$

Для блоков C^0 и C^m это условие соответственно принимает вид

$$\frac{c_{12}}{c_{1'2}} = \frac{c_{13}}{c_{1'3}}, \quad \frac{c_{12}}{c_{1'2}} = \frac{c_{14}}{c_{1'4}}. \tag{22}$$

Итак, при добавлении к схеме зацеплений (2) представления $(0,\ m+1)'$ $(0<m<n)$ получается новое уравнение, которое распадается при условии (21). Если же (21) не имеет места, то собственные значения каждого блока C^k $(0\leqslant k\leqslant m)$, вообще говоря, изменяются, т. е. изменяется спектр масс, соответствующий каждому значению спина частицы. Здесь возможны следующие частные случаи.

1. Все собственные значения некоторого блока C^k для схемы (2) равны нулю, а при добавлении представления $(0,\ m+1)'$ становятся отличными от нуля. Это означает, что новое уравнение описывает частицу, имеющую спиновые состояния, которые отсутствуют у частицы, описываемой уравнением со схемой зацеплений (2).

2. Возможен и обратный случай, когда в новом уравнении пропадают спиновые состояния, имевшиеся в уравнении со схемой зацеплений (2).

3. Вид блоков C^k (по крайней мере одного из них) меняется, но набор собственных значений, отличных от нуля, для каждого блока остается неизменным. При этом получается уравнение, описывающее частицу с тем же набором спиновых и массовых состояний, но отличное от исходного уравнения.

Теперь рассмотрим случай, когда к схеме (2) добавляется представление $(0,\ n+1)'$. Снова обозначим

$$(0,\ n+1)'\sim 1',\quad (0,\ n+1)\sim 1,\quad (0,\ n)\sim 2,$$
$$(1,\ n+1)\sim 3,\quad (-1,\ n+1)\sim 4.$$

Для промежуточных спиновых состояний $(0<k<n)$ спектр масс становится, вообще говоря, другим. И только при выполнении условия, аналогичного (22),

$$\frac{c_{12}}{c_{1'2}} = \frac{c_{13}}{c_{1'3}} \tag{23}$$

можно обратить в нуль все новые зацепления $(c'_{1'2}=c'_{1'3}=0)$ одновременно. При этом имеет место распадение получившегося волнового уравнения.

И наконец, если к исходной схеме зацеплений добавляется представление $(0,\ 1)'$, то полученное уравнение всегда распадается.

Теперь рассмотрим, как изменится волновое уравнение (1) со схемой зацеплений (2) при добавлении представлений $(p,\ m+1)'$ и $(-p,\ m+1)'$, где $1<p<m<n$. Обозначим

$$(p,\ m+1)'\sim 1',\quad (p,\ m+1)\sim 1,\quad (-p,\ m+1)'\sim 2',\quad (-p,\ m+1)\sim 2,$$
$$(p+1,\ m+1)\sim 3,\quad (-p-1,\ m+1)\sim 4,\quad (p-1,\ m+1)\sim 5,$$
$$(-p+1,\ m+1)\sim 6,$$
$$(p,\ m+2)\sim 7,\ (-p,\ m+2)\sim 8,\quad (p,\ m)\sim 9,\quad (-p,\ m)\sim 10.$$

При добавлении указанных представлений меняется только вид блоков C^k, где $p \leqslant k \leqslant m$.

Возьмем сначала блок C^k $(p < k < m)$. Матрицу билинейной формы выбираем одним из следующих способов:

$$1)\ \eta^k_{1'2'} = \eta^k_{12} = \eta^k_{34} = \eta^k_{56} = \eta^k_{78} = \eta^k_{9,10} = 1,$$

$$2)\ \eta^k_{1'2'} = \eta^k_{12} = -\eta^k_{34} = -\eta^k_{56} = -\eta^k_{78} = -\eta^k_{9,10} = 1.$$

Тогда

$$C^k = \begin{pmatrix} 0 & \vdots & c^k & \vdots & 0\ldots \\ & \vdots & & \vdots & \\ \ldots & \vdots & \ldots & \vdots & \ldots \\ \pm (c^k)^+ & \vdots & & & \\ & \vdots & & B^k & \\ \ldots & \vdots & \ldots & \vdots & \ldots \\ & 0 & & \vdots & \\ & \vdots & & \vdots & \end{pmatrix}, \tag{24}$$

где

$$c^k = \begin{pmatrix} c^k_{1'3} & 0 & c^k_{1'5} & 0 & c^k_{1'7} & 0 & c^k_{1'9} & 0 \\ c^k_{13} & 0 & c^k_{15} & 0 & c^k_{17} & 0 & c^k_{19} & 0 \\ 0 & c^k_{1'3} & 0 & c^k_{1'5} & 0 & c^k_{1'7} & 0 & c^k_{1'9} \\ 0 & c^k_{13} & 0 & c^k_{15} & 0 & c^k_{17} & 0 & c^k_{19} \end{pmatrix}.$$

Матрица допустимых преобразований координат (т. е. таких преобразований, которые не меняют вида инфинитезимальных операторов представления I^{ki}, оператора отражения T и матрицы билинейной формы) имеет в данном случае вид (8), где

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{1'1'} & \alpha_{1'1} & \vdots & & & & & & & & & & & & \\ -e^{i\varphi}\bar{\alpha}_{1'1} & e^{i\varphi}\bar{\alpha}_{1'1'} & \vdots & & & & & & & & & & & & \\ \ldots & \ldots & \ldots & & & & & & & & & & & & \\ & & \vdots & \alpha_{1'1'} & \alpha_{1'1} & \vdots & & & & & & & & & \\ & & \vdots & -e^{i\varphi}\bar{\alpha}_{1'1} & e^{i\varphi}\bar{\alpha}_{1'1'} & \vdots & & & & & & & & & \\ & & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ & & & & & & \alpha_3 & & & & & & & & \\ & & & & & & & \alpha_4 & & & & & & & \\ & & & & & & & & \ddots & & & & & & \\ & & & & & & & & & \alpha_9 & & & & & \\ & & & & & & & & & & \alpha_{10} & & & & \\ & & & & & & & & & & & \ddots & & & \\ & & & & & & & & & & & & \ddots & & \end{pmatrix}. \tag{25}$$

Элементы матрицы A удовлетворяют условиям, аналогичным (14) и (16). При помощи преобразования (25) всегда можно обратить в нуль один из 4 новых элементов $c^k_{1'3}$, $c^k_{1'5}$, $c^k_{1'7}$, $c^k_{1'9}$ блока C^k (причем, для всех рассматриваемых значений k одновременно), т. е. можно разорвать одно вновь возникшее зацепление. Если же выполняется условие

$$\frac{c_{1'3}}{c_{13}} = \frac{c_{1'5}}{c_{15}} = \frac{c_{1'7}}{c_{17}} = \frac{c_{1'9}}{c_{19}}, \tag{26}$$

то можно разорвать все новые зацепления, и такое уравнение будет распадаться.

Для блоков C^p и C^m условие (26) соответственно принимает вид

$$\frac{c_{1'5}}{c_{15}} = \frac{c_{1'7}}{c_{17}} = \frac{c_{1'9}}{c_{19}},$$

$$\frac{c_{1'3}}{c_{13}} = \frac{c_{1'5}}{c_{15}} = \frac{c_{1'7}}{c_{17}}. \qquad (27)$$

Таким образом, при добавлении к схеме зацеплений (2) представлений $(p,\ m+1)'$ и $(-p,\ m+1)'$ $(1<p<m<n)$ получается волновое уравнение, которое распадается при выполнении условия (26). Если же (26) не выполняется, то вид блоков C^k $(p \leqslant k \leqslant m)$, вообще говоря, изменяется, т. е. изменяется набор массовых состояний для всех значений спина k в промежутке $p \leqslant k \leqslant m$. Набор масс для спинов $k>m$ и $k<p$ остается неизменным.

При добавлении к схеме (2) представлений $(m,\ m+1)'$ и $(-m,\ m+1)'$ $(0<m<n)$ меняется только вид блока C^m. Условие распадения получающегося при этом волнового уравнения (т. е. условие обращения в нуль новых элементов блока C^m) имеет вид

$$\frac{c_{1'3}}{c_{13}} = \frac{c_{1'5}}{c_{15}}.$$

Добавление представлений $(p,\ n+1)'$ и $(-p,\ n+1)'$ $(0<p<n)$ приводит к изменению блоков C^p, C^{p+1}, ..., C^n. Условие распадения получающегося уравнения следующее:

$$\frac{c_{1'3}}{c_{13}} = \frac{c_{1'5}}{c_{15}} = \frac{c_{1'7}}{c_{17}}.$$

И наконец, при добавлении к схеме (2) представлений $(n,\ n+1)'$ и $(-n,\ n+1)'$ всегда имеет место распадение.

Выше были рассмотрены случаи, когда к исходной схеме зацеплений (2) добавлялось не более одного кратного представления полной группы Лоренца. Если добавить несколько различающихся между собой представлений из числа входящих в (2), то мы получим соответственно не одно, а несколько двукратных представлений. При этом добавляемые представления могут либо зацепляться, либо не зацепляться между собой. В таком случае анализ проводится следующим образом. Матрица допустимых преобразований A будет иметь столько различных блоков вида (15), сколько представлений полной группы Лоренца добавляется к схеме (2). Как было показано выше, при помощи одного блока вида (15) всегда можно обратить в нуль одно новое зацепление. Следовательно, при помощи матрицы допустимых преобразований можно обратить в нуль столько новых элементов матрицы γ^0 одновременно (т. е. разорвать столько новых связей в полученной схеме зацеплений), сколько представлений было добавлено к исходной схеме (2). Отсюда, например, сразу вытекает, что волновое уравнение со схемой зацеплений (см. [9])

$$(0,\ 1) \overset{\times}{-} (0,\ 2)$$
$$(0,\ 1) \overset{\times}{=} (0,\ 2)$$

всегда распадается на два уравнения, каждое из которых описывает частицу со спином 0.

Литература

1. Гельфанд И. М. и др. Представления группы вращений и группы Лоренца. Физматгиз, М., 1958.
2. Гинзбург В. Л. ЖЭТФ, **13**, 32, 1943.
3. Гинзбург В. Л. ДАН СССР, **31**, 857, 1941.
4. Фрадкин Е. С. ЖЭТФ, **20**, 1, 1950.
5. Файнберг В. Я. Тр. ФИАН СССР, **6**, 269, 1955.
6. Лобко С. И. Канд. дисс. Минск, 1965.
7. Федоров Ф. И. ДАН СССР, **79**, 787, 1951.
8. Федоров Ф. И. Уч. зап. БГУ, в. 12, сер. физ.-мат. Минск, 1951.
9. Гинзбург В. Л. ЖЭТФ, **13**, 274, 1943.

Институт физики
АН БССР

Поступило в редакцию
20.VIII 1969

ВЕСЦІ АКАДЭМІІ НАВУК БЕЛАРУСКАЙ ССР № 6 1969
СЕРЫЯ ФІЗІКА-МАТЭМАТЫЧНЫХ НАВУК

УДК 539.55+539.6

В. Б. НЕМЦОВ, Э. Т. БРУК-ЛЕВИНСОН

К СТАТИСТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ВЯЗКОСТИ АСИММЕТРИЧНЫХ СРЕД

За последние годы широкое развитие получили феноменологические исследования сплошных сред с моментными напряжениями (асимметричных сред) (см., например, [1]). Одной из важных особенностей теории является учет вращательных степеней свободы частиц. В соответствии с этим в кинематику сплошной среды наряду с полем трансляционных скоростей вводится поле угловых скоростей собственного вращения частиц и постулируется существование двух тензоров скоростей деформаций (или тензоров деформаций). Напряженное состояние среды характеризуется асимметричными в общем случае тензорами обычных и моментных напряжений.

Вместе с тем многие важные характеристики вязко-упругого поведения сплошных сред с моментными напряжениями не могут быть определены в рамках феноменологической теории. Законы сохранения также должны получить последовательное физическое обоснование. При этом главным остается необходимость установления связи между макроскопическими свойствами (параметрами) системы и характером межмолекулярного взаимодействия.

Ранее статистически были обоснованы законы сохранения и особенности кинематики сплошной среды [2—4]. Получены статистические выражения для тензоров напряжений и моментных напряжений, что дало возможность установить условия существования асимметричности тензора напряжений и наличия моментных напряжений.

Необходимым условием асимметричности тензора напряжений является нецентральность сил межмолекулярного взаимодействия, а аналогичное условие существования моментных напряжений связано с наличием пар сил, действующих на молекулы. Достаточные условия определяются свойствами функции распределения (отсутствием центра симметрии у системы частиц).

Ниже в рамках формализма Кубо получены выражения через временные корреляционные функции для четырех тензоров коэффициентов вязкости произвольной анизотропной среды с моментными напряжениями.

Рассмотрим систему из несферических молекул. Состояние отдельной молекулы характеризуется радиус-вектором $\mathbf{q}$ ее центра инерции, сопряженным импульсом $\mathbf{p}$, углами Эйлера α_i, определяющими ориентацию молекулы, и собственным моментом импульса $\mathbf{s}$. Предположим, что взаимодействие молекул описывается парным потенциалом $\Phi(\mathbf{r}^{\nu\mu}, \alpha_i^{\nu}, \alpha_i^{\mu})$, зависящим от расстояния между их центрами инерции и от взаимной ориентации молекул (нецентральные силы). Для системы из N частиц гамильтониан имеет вид

$$H = \frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{N}\left[\frac{(p^{\nu})^2}{m} + \sum_{k=1}^{3}\frac{\left(\sum_{i=1}^{3} B_{ki}s_i'^{\nu}\right)^2}{I_k}\right] + \frac{1}{2}\sum_{\nu,\mu}^{N}\Phi(\mathbf{r}^{\nu\mu}, \alpha_i^{\mu}, \alpha_i^{\nu}). \quad (1)$$

Здесь $\mathbf{r}^{\nu\mu} = \mathbf{q}^{\mu} - \mathbf{q}^{\nu}$ — расстояние между частицами ν и μ, s_i' — обобщенные импульсы, канонически сопряженные углам Эйлера α_i, B_{ki} — матрица перехода от обобщенных импульсов к проекциям момента импульса на главные оси инерции молекулы, I_k — главные моменты инерции молекулы, m—ее масса.

Пусть система подвержена действию малого механического возмущения, при котором ее гамильтониан H изменяется на $\Delta H = -AF(t)$. Тогда среднее изменение $\Delta B(t)$ динамической величины $B(t)$ определяется, согласно [5], соотношением

$$\Delta B(t) = -\theta^{-1} \int_0^{\infty} \langle A(0)\dot{B}(s)\rangle F(t-s)\,ds, \tag{2}$$

где $\theta = kT$, k — постоянная Больцмана, T — абсолютная температура, $\dot{B} = \frac{dB}{dt}$, а угловые скобки означают усреднение по равновесному каноническому ансамблю.

Для определения вида величины A поступим аналогично [6]. Наложим на систему малую деформацию и найдем приращение гамильтониана.

Изменения взаимного расстояния между центрами инерции двух частиц определяется уравнением

$$\tilde{x}_n = x_n + \varepsilon_{nm}x_m, \tag{3}$$

где x_n — составляющие радиус-вектора $\mathbf{r}$ до деформации, а $\tilde{x}_n$ — после деформации; $\varepsilon_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial q_j} - \delta_k e_{kji}$ — тензор деформаций, u_i — вектор смещения частицы, δ_k — вектор бесконечно малого поворота частицы, e_{ijk} — тензор Леви-Чивитта.

При наложении деформации одна из частиц повернется относительно второй на малый угол $\theta_i = \delta_i(\mathbf{q}+\mathbf{r}) - \delta_i(\mathbf{q})$. В линейном приближении

$$\theta_i = \gamma_{ik}x_k, \tag{4}$$

где $\gamma_{ik} = \frac{\partial \delta_i}{\partial q_k}$ — второй тензор деформации.

Подчеркнем, что вид тензоров деформаций ε_{ik} и γ_{ik} статистически обоснован ранее в [3] на основании выражения для работы деформирования среды.

Пусть β_i — углы Эйлера, описывающие ориентацию одной из частиц, относительно системы координат, связанной с другой частицей. Тогда изменение углов β_i, обусловленное малой деформацией, можно в линейном приближении представить в виде

$$\tilde{\beta}_i = \beta_i + A_{ik}\gamma_{kj}x_j. \tag{5}$$

Здесь $A_{ik}(\beta_j)$ — матрица перехода от составляющих вектора малого поворота по осям системы координат, относительно которой изучается движение среды, к соответствующим приращениям углов Эйлера [7].

При указанном преобразовании пространственных и угловых координат обобщенные импульсы частиц преобразуются следующим образом:

$$\begin{aligned} p_n &= \tilde{p}_m\frac{\partial\tilde{x}_m}{\partial x_n} + \tilde{s}_m'\frac{\partial\tilde{\beta}_m}{\partial x_n}, \\ s_n' &= \tilde{p}_m\frac{\partial\tilde{x}_m}{\partial\beta_n} + \tilde{s}_m'\frac{\partial\tilde{\beta}_m}{\partial\beta_n}. \end{aligned} \tag{6}$$

В линейном по деформации приближении на основании (3), (5) и (6) можно записать

$$\tilde{p}_i = p_i - \varepsilon_{ki} p_k - A_{jk} \gamma_{ki} s_j'.$$

Подобным же образом для импульсов, канонически сопряженных углам Эйлера, устанавливается соотношение

$$\tilde{s}_i' = s_i' - \frac{\partial A_{nk}}{\partial \beta_i} \gamma_{kj} x_j s_n'.$$

Теперь, используя для H выражение (1), после простых преобразований найдем выражение для $\Delta H = \tilde{H} - H$ в форме

$$\Delta H = \hat{\Pi}_{ik} \varepsilon_{ik} + \hat{P}_{ik} \gamma_{ik}. \tag{7}$$

Здесь

$$\hat{\Pi}_{ik} = -\sum_{\nu=1}^{N} \frac{p_i^\nu p_k^\nu}{m} + \frac{1}{2} \sum_{\nu,\mu}^{N} F_i^{\nu\mu} x_k^{\nu\mu}, \tag{8}$$

$$\hat{P}_{ik} = -\sum_{\nu=1}^{N} \frac{p_i^\nu s_k^\nu}{m} + \frac{1}{2} \sum_{\nu,\mu}^{N} M_i^{\nu\mu} x_k^{\nu\mu} -$$

$$- \sum_{\nu=1}^{N} \sum_{n=1}^{3} \frac{1}{I_n} \left[B_{nj} B_{nm} \frac{\partial A_{li}}{\partial \beta_m} + B_{nj} \frac{\partial B_{nl}}{\partial \beta_m} A_{mi} \right] s_j'^\nu s_l'^\nu x_k^{\nu\mu}$$

(в последнем члене μ фиксировано); $F_i^{\nu\mu}$ и $M_i^{\nu\mu}$ — составляющие в неподвижной системе координат силы и момента пары сил, действующих со стороны молекулы ν на молекулу μ, s_k — составляющие собственного момента импульса частицы относительно неподвижной системы координат.

Как следует из законов сохранения импульса и момента импульса [3, 4], средние величины $\frac{\langle \hat{\Pi}_{ik} \rangle}{V}$ и $\frac{\langle \hat{P}_{ik} \rangle}{V}$ представляют соответственно тензор напряжений и тензор моментных напряжений (тензор поверхностных моментов). В законе сохранения момента импульса член в квадратных скобках в выражении для $\hat{P}_{ik}$ отсутствует. Действительно, если произвести требуемое для получения тензора моментных напряжений усреднение, включающее усреднение и по угловым переменным, то этот член исчезнет. Поэтому в дальнейшем используется следующее выражение для $\hat{P}_{ik}$:

$$\hat{P}_{ik} = -\sum_{\nu=1}^{N} \frac{p_i^\nu s_k^\nu}{m} + \frac{1}{2} \sum_{\nu,\mu}^{N} M_i^{\nu\mu} x_k^{\nu\mu}. \tag{9}$$

Сопоставляя (7) с выражением $\Delta H = -AF(t)$, найдем, что в данном случае $\Delta H = -A_1 F_1(t) - A_2 F_2(t)$, где

$$A_1 = -\hat{\Pi}_{ik}, \quad A_2 = -\hat{P}_{ik}, \quad F_1(t) = \varepsilon_{ik}, \quad F_2(t) = \gamma_{ik}.$$

Тогда, выбрав $B_1 = \frac{1}{V} \int_{-\infty}^{t} \hat{\Pi}_{mn}(s)\, ds$ (V — объем системы), $B_2 = \frac{1}{V} \int_{-\infty}^{t} \hat{P}_{mn}(s)\, ds$, на основании (2) получим

$$\Delta B_1 = \frac{1}{\theta V}\int_0^\infty \langle \hat{\Pi}_{ik}(0)\,\hat{\Pi}_{mn}(s)\rangle \varepsilon_{mn}(t-s)\,ds + $$

$$+ \frac{1}{\theta V}\int_0^\infty \langle \hat{P}_{ik}(0)\,\hat{\Pi}_{mn}(s)\rangle \gamma_{mn}(t-s)\,ds,$$

$$\Delta B_2 = \frac{1}{\theta V}\int_0^\infty \langle \hat{\Pi}_{ik}(0)\,\hat{P}_{mn}(s)\rangle \varepsilon_{mn}(t-s)\,ds + $$

$$+ \frac{1}{\theta V}\int_0^\infty \langle \hat{P}_{ik}(0)\,\hat{P}_{mn}(s)\rangle \gamma_{mn}(t-s)\,ds.$$

Рассмотрим поведение среды при наложении циклической деформации с частотой ω

$$\varepsilon_{mn}(t) = \varepsilon_{mn}(0)\,e^{i\omega t},$$
$$\gamma_{mn}(t) = \gamma_{mn}(0)\,e^{i\omega t}.$$

В этом случае величины ΔB_1 и ΔB_2 приобретают вид

$$\Delta B_1 = \left[\frac{1}{\theta V}\int_0^\infty e^{-i\omega s}\langle \hat{\Pi}_{ik}(0)\,\hat{\Pi}_{mn}(s)\rangle\,ds\right]\varepsilon_{mn}(t) +$$

$$+ \left[\frac{1}{\theta V}\int_0^\infty e^{-i\omega s}\langle \hat{P}_{ik}(0)\,\hat{\Pi}_{mn}(s)\rangle\,ds\right]\gamma_{mn}(t),$$

$$\Delta B_2 = \left[\frac{1}{\theta V}\int_0^\infty e^{-i\omega s}\langle \hat{\Pi}_{ik}(0)\,\hat{P}_{mn}(s)\rangle\,ds\right]\varepsilon_{mn}(t) +$$

$$+ \left[\frac{1}{\theta V}\int_0^\infty e^{-i\omega s}\langle \hat{P}_{ik}(0)\,\hat{P}_{mn}(s)\rangle\,ds\right]\gamma_{mn}(t).$$

Сравним эти выражения с соответствующими феноменологическими выражениями

$$\int_{-\infty}^{t}\sigma_{ik}ds = a_{ikmn}\varepsilon_{mn} + b_{ikmn}\gamma_{mn},$$

$$\int_{-\infty}^{t}\pi_{ik}ds = c_{ikmn}\varepsilon_{mn} + d_{ikmn}\gamma_{mn}.$$

Здесь σ_{ik} и π_{ik} — тензоры вязких обычных и моментных напряжений (предполагается, что при $t \to -\infty$ $\sigma_{ik} \to 0$ и $\pi_{ik} \to 0$).

В результате сравнения получаются искомые выражения для четырех тензоров коэффициентов вязкости среды с моментными напряжениями

$$a_{ikmn}(\omega) = \frac{1}{\theta V}\int_0^\infty e^{-i\omega s}\langle \hat{\Pi}_{ik}(0)\,\hat{\Pi}_{mn}(s)\rangle\,ds,$$

$$b_{ikmn}(\omega) = \frac{1}{\theta V}\int_0^\infty e^{-i\omega s} \langle \hat{P}_{ik}(0)\,\hat{\Pi}_{mn}(s)\rangle\, ds,$$

$$c_{ikmn}(\omega) = \frac{1}{\theta V}\int_0^\infty e^{-i\omega s} \langle \hat{\Pi}_{ik}(0)\,\hat{P}_{mn}(s)\rangle\, ds, \qquad (10)$$

$$d_{ikmn}(\omega) = \frac{1}{\theta V}\int_0^\infty e^{-i\omega s} \langle \hat{P}_{ik}(0)\,\hat{P}_{mn}(s)\rangle\, ds.$$

Необходимо отметить, что потоки $\hat{\Pi}_{ik}$ и $\hat{P}_{ik}$ определены с точностью до величин, дивергенция которых равна нулю. Для устранения этой неоднозначности, согласно Мак-Леннану [8], необходимо в (10) $\hat{\Pi}_{ik}$ заменить на $\hat{\Pi}_{ik} - \overline{\Pi}_{ik}$, а $\hat{P}_{ik}$ на $\hat{P}_{ik} - \overline{P}_{ik}$; аналогично преобразуются величины $\hat{\Pi}_{mn}$ и $\hat{P}_{mn}$.

Здесь

$$\overline{\Pi}_{ik} = \sigma^0_{ik} V + \frac{\partial \sigma^0_{ik} V}{\partial E}(H - E);$$

σ^0_{ik} — средний равновесный тензор напряжений; E — среднее значение энергии;

$$\overline{P}_{ik} = P^0_{ik} V + \frac{\partial P^0_{ik} V}{\partial E}(H - E);$$

P^0_{ik} — средний равновесный тензор моментных напряжений.

Для изотропной среды каждый из тензоров коэффициентов вязкости приобретает вид

$$a_{ikmn} = a_1\delta_{ik}\delta_{mn} + a_2\delta_{im}\delta_{kn} + a_3\delta_{in}\delta_{km},$$

и среда характеризуется двенадцатью коэффициентами вязкости.

Рассмотрим среду, обладающую центром симметрии. Функции распределения, применяемые для усреднения при вычислении коэффициентов вязкости, инвариантны относительно инверсии.

Так как выражения для величин b_{ikmn} и c_{ikmn} пропорциональны комбинациям $F_i x_k M_m x_n$, в которых M_m — псевдовектор, то при усреднении величины b_{ikmn} и c_{ikmn} обращаются в нуль. Вязкость анизотропной среды характеризуется в этом случае двумя тензорами a_{ikmn} и d_{ikmn}, а при переходе к изотропной среде — шестью коэффициентами вязкости.

Отметим, что равновесный тензор моментных напряжений негиротропной среды также обращается в нуль в силу того, что он включает произведение псевдовектора M_i на вектор x_k.

Авторы выражают искреннюю благодарность Л. А. Ротту и В. С. Вихренко за ценное обсуждение.

Литература

1. Аэро Э. Л., Булыгин А. Н., Кувшинский Е. В. ПММ, **29**, в. 2, 1965.
2. Покровский Л. А. ДАН СССР, **177**, № 5, 1967.
3. Немцов В. Б., Ротт Л. А., Вихренко В. С. Докл. на III Всес. съезде по теор. и прикл. механике. Анн. докл. Изд. АН СССР, 1968.
4. Немцов В. Б., Ротт Л. А., Вихренко В. С. ДАН БССР, **13**, № 1, 1969.
5. Кубо Р. Сб. «Термодинамика необратимых процессов». ИЛ, 1962.
6. Вихренко В. С., Немцов В. Б., Ротт Л. А. ПММ, **32**, в. 5, 1968.
7. Лурье А. И. Аналитическая механика. М., 1961.
8. McLennan I. A. Progr. Theor. Phys., **30**, № 3, 1963.

Белорусский технологический институт

Поступило в редакцию 14.V 1969

ВЕСЦІ АКАДЭМІІ НАВУК БЕЛАРУСКАЙ ССР № 6 1969
СЕРЫЯ ФІЗІКА-МАТЭМАТЫЧНЫХ НАВУК

УДК 530.12

А. П. РЯБУШКО, К. С. ФИЛИПОВИЧ

ТРЕУГОЛЬНАЯ ЛАГРАНЖЕВА ЗАДАЧА ДЛЯ ВРАЩАЮЩИХСЯ ТЕЛ В ОБЩЕЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

1. Уравнения движения. В следующем за ньютоновым приближении уравнения поступательного движения для трех вращающихся тел можно записать в виде

$$\begin{aligned} m_i\ddot{\tilde{x}}_i - \tilde{U}_{,\tilde{x}_i} &= X_i + X_i^{(\sigma)}, \\ m_i\ddot{\tilde{y}}_i - \tilde{U}_{,\tilde{y}_i} &= Y_i + Y_i^{(\sigma)}, \\ m_i\ddot{\tilde{z}}_i - \tilde{U}_{,z_i} &= Z_i + Z_i^{(\sigma)}, \\ \tilde{U} &\equiv k\left(\frac{m_1m_2}{\tilde{r}_{12}} + \frac{m_2m_3}{\tilde{r}_{23}} + \frac{m_3m_1}{\tilde{r}_{31}}\right), \end{aligned} \tag{1.1}$$

$$\tilde{r}_{ij} \equiv \sqrt{(\tilde{x}_j - \tilde{x}_i)^2 + (\tilde{y}_j - \tilde{y}_i)^2 + (\tilde{z}_j - \tilde{z}_i)^2},$$

где $i, j = 1, 2, 3$; $\tilde{x}_i$, $\tilde{y}_i$, $\tilde{z}_i$ обозначают координаты материальных точек (тел) A_i с ньютоновыми массами m_i в посленьютоновом приближении; k — ньютонова постоянная тяготения; точка над буквой обозначает производную по времени t, а запятая после буквы — частную производную; X_i, Y_i, Z_i суть известные (см., например, [1—3]) релятивистские поправки к ньютоновой силе тяготения без учета собственных вращений тел, а $X_i^{(\sigma)}$, $Y_i^{(\sigma)}$, $Z_i^{(\sigma)}$ возникают в посленьютоновом приближении как поправки на собственное вращение. Эти последние разными авторами определяются по-разному (см., например, [4—8]). Это объясняется тем, что при выводе поправок на вращение используются разные добавочные условия, которые обычно связывают с выбором центров тяжести вращающихся тел. Отметим, однако, что эти различия не сказываются на качественной картине поступательного движения тел, а влияют только на ее количественную оценку. В настоящей работе мы воспользуемся поправкой на вращение, выведенной в [5]. Внутренняя структура и асимметрия тел в рассматриваемой задаче не будет учитываться. Поэтому в фоковской поправке мы переходим к центрально-симметрическим телам бесконечно малых размеров (материальным точкам), что приводит к ее значительному упрощению.

В ньютоновом приближении возьмем точное решение Лагранжа, в котором два тяжелых тела с массами m_1 и m_2 и третье легкое тело с массой m_3 (впоследствии полагаем $m_3 = 0$) образуют равносторонний жесткий треугольник, вращающийся в плоскости xOy с постоянной угловой скоростью ω около общего центра тяжести, находящегося в начале координат O. Решение в посленьютоновом приближении можно искать в виде

$$\tilde{x}_i = (x_i^0 + x_i)\cos\omega t - (y_i^0 + y_i)\sin\omega t,$$
$$\tilde{y}_i = (x_i^0 + x_i)\sin\omega t + (y_i^0 + y_i)\cos\omega t, \qquad (1.2)$$
$$\tilde{z}_i = z_i^0 + z_i,$$

где x_i^0, y_i^0, z_i^0 — координаты центров тяжести тел A_i в ньютоновой теории, которые являются постоянными, так как определяются во вращающейся с угловой скоростью ω декартовой прямоугольной системе координат; x_i, y_i, z_i являются релятивистскими поправками к x_i^0, y_i^0, z_i^0. В силу лагранжева решения ньютоновы величины связаны соотношениями [9, 10]

$$x_1^0 = -\frac{m_2}{m} r_0, \quad x_2^0 = \frac{m_1}{m} r_0, \quad x_3^0 = \frac{m_1 - m_2}{2m} r_0;$$
$$y_1^0 = 0, \quad y_2^0 = 0, \quad y_3^0 = \pm \frac{\sqrt{3}}{2} r_0;$$
$$z_1^0 = 0, \quad z_2^0 = 0, \quad z_3^0 = 0; \qquad (1.3)$$
$$\omega^2 = \frac{km}{r_0^3}, \quad m \equiv m_1 + m_2,$$
$$r_0 \equiv r_{ij}^0 \equiv \sqrt{(x_j^0 - x_i^0)^2 + (y_j^0 - y_i^0)^2 + (z_j^0 - z_i^0)^2}.$$

Знак плюс у y_3^0 и в дальнейшем в других выражениях берется для точки либрации L_4, знак минус — для L_5.

Учитывая ньютоново приближение (1.3) и заменяя $\tilde{x}_i$, $\tilde{y}_i$, $\tilde{z}_i$ в (1.1) их выражениями из (1.2), после довольно громоздких и утомительных вычислений получаем систему, из которой находятся искомые функции x_i, y_i, z_i:

$$\ddot{x}_1 - 2\omega\dot{y}_1 - \omega^2 x_1 - 2\frac{km_2}{r_0^3}(x_1 - x_2) + a =$$
$$= -\frac{km_2\omega}{2c^2 m r_0^2}\left[(5m_1 + 3m_2)\sigma_1^3 + (2m_1 + 4m_2)\sigma_2^3\right],$$
$$\ddot{y}_1 + 2\omega\dot{x}_1 - \omega^2 y_1 + \frac{km_2}{r_0^3}(y_1 - y_2) = 0,$$
$$\ddot{z}_1 + \frac{km_2}{r_0^3}(z_1 - z_2) = -\frac{km_2\omega}{2c^2 m r_0^2}\left\{\left[(7m_1 + 6m_2)\sigma_1^1 + (7m_1 + 8m_2)\sigma_2^1\right]\cos\omega t + \right.$$
$$\left. + \left[(7m_1 + 6m_2)\sigma_1^2 + (7m_1 + 8m_2)\sigma_2^2\right]\sin\omega t\right\}; \qquad (1.4)$$
$$\ddot{x}_2 - 2\omega\dot{y}_2 - \omega^2 x_2 + 2\frac{km_1}{r_0^3}(x_1 - x_2) + b =$$
$$= \frac{km_1\omega}{2c^2 m r_0^2}\left[(4m_1 + 2m_2)\sigma_1^3 + (3m_1 + 5m_2)\sigma_2^3\right],$$
$$\ddot{y}_2 + 2\omega\dot{x}_2 - \omega^2 y_2 - \frac{km_1}{r_0^3}(y_1 - y_2) = 0, \qquad (1.5)$$

$$\ddot{z}_2 - \frac{km_1}{r_0^3}(z_1 - z_2) = \frac{km_1\omega}{2c^2mr_0^2} \times$$
$$\times \{[(8m_1 + 7m_2)\sigma_1^1 + (6m_1 + 7m_2)\sigma_2^1]\cos\omega t +$$
$$+ [(8m_1 + 7m_2)\sigma_1^2 + (6m_1 + 7m_2)\sigma_2^2]\sin\omega t\}; \qquad (1.5)$$

$$\ddot{x}_3 - 2\omega\dot{y}_3 - \frac{3}{4}\omega^2 x_3 \mp \frac{3\sqrt{3}}{4}\omega^2\frac{m_1 - m_2}{m}y_3 + V_1 + a_0 =$$
$$= \frac{3k\omega}{4c^2r_0^2}(m_1 - m_2)\sigma_3^3 + \frac{k\omega}{8c^2mr_0^2}[(8m_1 + 9m_2)m_1\sigma_1^3 - (9m_1 + 8m_2)m_2\sigma_2^3],$$

$$\ddot{y}_3 + 2\omega\dot{x}_3 \mp \frac{3\sqrt{3}}{4}\omega^2\frac{m_1 - m_2}{m}x_3 - \frac{9}{4}\omega^2 y_3 + V_2 + b_0 =$$
$$= \pm\frac{\sqrt{3}}{8}\frac{k\omega}{c^2mr_0^2}[(8m_1 + 5m_2)m_1\sigma_1^3 +$$
$$+ (5m_1 + 8m_2)m_2\sigma_2^3 + 6(m_1^2 + 3m_1m_2 + m_2^2)\sigma_3^3], \qquad (1.6)$$
$$\ddot{z}_3 + \omega^2 z_3 - kr_0^{-3}(m_1z_1 + m_2z_2) = A\cos\omega t + B\sin\omega t,$$

где

$$A = \frac{k\omega}{2c^2r_0^2}\left[(4m_1 + 3m_2)\frac{m_1}{m}\sigma_1^1 \pm 4\sqrt{3}m_1\sigma_1^2 - \right.$$
$$\left. - (3m_1 + 4m_2)\frac{m_2}{m}\sigma_2^1 \pm 4\sqrt{3}m_2\sigma_2^2 + 3(m_1 - m_2)\sigma_3^1 \pm 3\sqrt{3}m\sigma_3^2\right],$$

$$B = \frac{k\omega}{2c^2r_0^2}\left[\mp 4\sqrt{3}m_1\sigma_1^1 + (4m_1 + 3m_2)\frac{m_1}{m}\sigma_1^2 \mp 4\sqrt{3}m_2\sigma_2^1 - \right.$$
$$\left. - (3m_1 + 4m_2)\frac{m_2}{m}\sigma_2^2 \mp 3\sqrt{3}m\sigma_3^1 + 3(m_1 - m_2)\sigma_3^2\right].$$

Здесь c — скорость света. Справа в уравнениях (1.4) — (1.6) стоят зависящие от собственного вращения поправки, так как $\vec{\sigma}_i = \{\sigma_i^1, \sigma_i^2, \sigma_i^3\}$ обозначают ньютоновые удельные собственные угловые моменты импульса тел A_i, которые для сферически симметричных тел остаются постоянными. Если ими пренебречь, то возвращаемся к выведенным в работе [11] уравнениям (6), (7). В [11] также указаны выражения для функций V_1, V_2 и значения постоянных a и b:

$$V_1 = \frac{k}{4r_0^3}(-m_1x_1 - m_2x_2 \pm 3\sqrt{3}m_1y_1 \mp 3\sqrt{3}m_2y_2),$$

$$V_2 = \frac{k}{4r_0^3}(\pm 3\sqrt{3}m_1x_1 \mp 3\sqrt{3}m_2x_2 + 5m_1y_1 + 5m_2y_2),$$

$$m_1a + m_2b = 0, \quad a = \frac{k^2m_2}{c^2mr_0^3}(3m_1^2 + 5m_1m_2 + 3m_2^2).$$

2. Интегрирование уравнений движения. Интегрирование системы (1.4) — (1.6) не представляет каких-либо принципиальных трудностей, ибо это система обыкновенных линейных неоднородных дифференци-

альных уравнений 2-го порядка с постоянными коэффициентами. Сначала интегрируем системы (1.4) и (1.5) для двух тяжелых тел. Применяя стандартную процедуру интегрирования, получаем следующее общее решение:

$$x_1 = \frac{2}{3}\,\frac{m_2}{\omega}\,c_2 + \left(c_3 + c_5 t - \frac{2m_1 + m_2}{2m}\,c_8\right)\cos\omega t + \left(c_4 + c_6 t + \frac{2m_1 + m_2}{2m}\,c_7\right)\sin\omega t + \frac{km_2}{3c^2m^2}\,(3m_1^2 + 5m_1m_2 + 3m_2^2) + \frac{m_2 r_0\omega}{6c^2m^2}\,\left[(5m_1 + 3m_2)\,\sigma_1^3 + (2m_1 + 4m_2)\,\sigma_2^3\right],$$

$$y_1 = -m_2c_1 - m_2c_2t + \left(c_7 + c_6 t + \frac{m_1 + 2m_2}{m}\,c_4\right)\cos\omega t + \left(c_8 - c_5 t - \frac{m_1 + 2m_2}{m}\,c_3\right)\sin\omega t,$$

$$z_1 = m_2\,(c_9\cos\omega t + c_{10}\sin\omega t) + c_{11}t + c_{12} + \frac{km_2}{2c^2mr_0^2}\,\{\left[(4m_1 + 3m_2)\,\sigma_1^2 + (3m_1 + 4m_2)\,\sigma_2^2\right]\,t\cos\omega t - \left[(4m_1 + 3m_2)\,\sigma_1^1 + (3m_1 + 4m_2)\,\sigma_2^1\right]\,t\sin\omega t\}\,; \qquad (2.1)$$

$$x_2 = -\frac{2}{3}\,\frac{m_1}{\omega}\,c_2 + \left(c_5 t - \frac{m_1}{2m}\,c_8\right)\cos\omega t + \left(c_6 t + \frac{m_1}{2m}\,c_7\right)\sin\omega t - \frac{km_1}{3c^2m^2}\,(3m_1^2 + 5m_1m_2 + 3m_2^2) - \frac{m_1 r_0\omega}{6c^2m^2}\,\left[(4m_1 + 2m_2)\,\sigma_1^3 + (3m_1 + 5m_2)\,\sigma_2^3\right],$$

$$y_2 = m_1c_1 + m_1c_2t + \left(\frac{m_1}{m}\,c_3 - c_5 t\right)\sin\omega t + \left(-\frac{m_1}{m}\,c_4 + c_6 t\right)\cos\omega t,$$

$$z_2 = -m_1\,(c_9\cos\omega t + c_{10}\sin\omega t) + c_{11}t + c_{12} - \qquad (2.2)$$

$$-\frac{km_1}{2c^2r_0^2\omega}\,\left[(\sigma_1^1 - \sigma_2^1)\cos\omega t + (\sigma_1^2 - \sigma_2^2)\sin\omega t\right] + \frac{km_1}{2c^2mr_0^2}\,\{\left[(4m_1 + 3m_2)\,\sigma_1^1 + (3m_1 + 4m_2)\,\sigma_2^1\right]\,t\sin\omega t - \left[(4m_1 + 3m_2)\,\sigma_1^2 + (3m_1 + 4m_2)\,\sigma_2^2\right]\,t\cos\omega t\}.$$

Прежде чем отыскивать решение системы (1.6), исключим равномерное прямолинейное движение определенного в ньютоновом смысле центра тяжести системы двух тяжелых тел и его постоянное смещение относительно ньютонова центра тяжести. Для этого следует некоторым постоянным интегрирования придать определенные значения, именно:

$$c_5 = c_6 = c_{11} = c_{12} = 0, \quad c_3 = c_8, \quad c_4 = -c_7. \qquad (2.3)$$

Теперь подставим x, y, z из (2.1) и (2.2) при условии (2.3) в (1.6). Уравнения (1.6) в своей однородной части совпадают с уравнениями (7) работы [11]. Поэтому имеем те же три типа фундаментальных решений в зависимости от значения m: $m^2 > 27m_1m_2$, $m^2 = 27m_1m_2$ или $m^2 < 27m_1m_2$ (см. [11], (15), (15′), (15″)).

Что касается частного решения, то его можно выбрать следующим:

$$x_3^* = p_0 + p_1 t + p_2 \cos\omega t + p_3 \sin\omega t,$$

$$y_3^* = q_0 + q_1 t + q_2 \cos\omega t + q_3 \sin\omega t, \tag{2.4}$$

$$z_3^* = \left[\frac{km_1m_2}{4c^2mr_0^2}(\sigma_1^2 - \sigma_2^2) - \frac{B}{2\omega}\right] t\cos\omega t +$$

$$+ \left[\frac{km_1m_2}{4c^2mr_0^2}(\sigma_2^1 - \sigma_1^1) + \frac{A}{2\omega}\right] t\sin\omega t,$$

где $p_1 = \mp \frac{\sqrt{3}}{2} mc_2$, $q_1 = \frac{1}{2}(m_1 - m_2)c_2$, а остальные p и q — конкретные постоянные, значения которых нас не интересуют.

3. Обсуждение результатов интегрирования. Поправки x_i, y_i, z_i к x_i^0, y_i^0, z_i^0 содержат, кроме постоянных и периодических членов, также и вековые. Выясним, к каким изменениям по сравнению с ньютоновым движением приводят эти поправки. Подсчеты будем проводить при выполнении условий (2.3).

Так как третье легкое тело не влияет на движение двух тяжелых тел, то рассмотрим сначала закономерности их движения. Для координат центра тяжести, определенного в ньютоновом смысле, имеем

$$\tilde{x} \equiv m^{-1}(m_1\tilde{x}_1 + m_2\tilde{x}_2) = 0, \quad \tilde{y} \equiv m^{-1}(m_1\tilde{y}_1 + m_2\tilde{y}_2) = 0,$$

$$\tilde{z} \equiv m^{-1}(m_1\tilde{z}_1 + m_2\tilde{z}_2) = \frac{km_1m_2}{2c^2mr_0^2\omega}\left[(\sigma_2^1 - \sigma_1^1)\cos\omega t + (\sigma_2^2 - \sigma_1^2)\sin\omega t\right]. \tag{3.1}$$

Отсюда следует, что никаким выбором произвольных постоянных интегрирования невозможно добиться точного совпадения центра тяжести вращающихся тел с началом координат O. При усреднении $\tilde{z}$ по ньютоновому периоду $T = 2\pi/\omega$ получаем

$$\tilde{z}_{\text{ср}} \equiv \frac{1}{T}\int_0^T \tilde{z}\,dt = 0.$$

Релятивистские взаимное расстояние между телами A_1 и A_2 $\tilde{r}_{12}$ и их расстояния до начала координат $\tilde{r}_1 \equiv \sqrt{\tilde{x}_1^2 + \tilde{y}_1^2 + \tilde{z}_1^2}$ и $\tilde{r}_2 \equiv \sqrt{\tilde{x}_2^2 + \tilde{y}_2^2 + \tilde{z}_2^2}$, как нетрудно подсчитать, отличаются от ньютоновых $r_0 = r_{12}^0$ и r_1^0, r_2^0 только постоянными и периодическими членами порядка c^{-2}. Следовательно, $\tilde{r}_{12}$, $\tilde{r}_1$, $\tilde{r}_2$ не испытывают вековых изменений, они могут только испытывать небольшие постоянные и периодические отклонения от своих ньютоновых значений. Траекториями движения тел A_1 и A_2 в посленьютоновом приближении будут слегка деформированные окружности. Но, как мы сейчас увидим, вековые отклонения имеются у других величин. Прежде всего отметим вековое изменение угла поворота стороны A_1A_2 лагранжевого треугольника. Справедлива формула

$$\tilde{\varphi} = \omega t + \frac{m}{r_0} c_2 t, \tag{3.2}$$

где $\frac{m}{r_0} c_2 t$ определяет релятивистскую поправку к ньютонову углу ωt. Отсюда следует, что угловая скорость вращения стороны A_1A_2 изменяется на постоянную величину $\frac{m}{r_0} c_2$. В зависимости от начальных условий движения c_2 может принимать отрицательные, нулевое и положительные значения, т. е. движение тел A_1 и A_2 по круговой орбите может происходить в посленьютоновом приближении с угловой скоростью меньшей, равной или большей ньютоновой угловой скорости ω. Этот вековой эффект существует также и для невращающихся тел ($\vec{\sigma}_i = 0$), что отмечалось в работе [11], только его количественная оценка будет несколько иная. Наличие собственных вращений тел приводит к появлению другого векового эффекта — к прецессии плоскости ньютоновых орбит тел. Отметим, что для случая двух вращающихся тел сравнимых масс, движущихся по эллипсам, этот эффект, по-видимому, впервые и независимо был обнаружен и обсужден в работах [12, 7]. Определяя релятивистский удельный орбитальный момент импульса тела A_i как

$$\widetilde{\mathbf{M}}_i \equiv [\tilde{\mathbf{r}}_i \dot{\tilde{\mathbf{r}}}_i] = [\mathbf{r}_i^0 \dot{\mathbf{r}}_i^0] + [\mathbf{r}_i \dot{\mathbf{r}}_i^0] + [\mathbf{r}_i^0 \dot{\mathbf{r}}_i] = \mathbf{M}_i^0 + \mathbf{M}_i, \tag{3.3}$$

где $\tilde{\mathbf{r}}_i \equiv \mathbf{r}_i^0 + \mathbf{r}_i$ является релятивистским радиус-вектором тела A_i в неподвижной системе координат, а квадратные скобки обозначают векторное произведение, после несложных подсчетов получаем с точностью до вековых членов

$$\mathbf{M}_1^0 = \frac{m_2^2}{m^2} r_0^2 \omega \mathbf{e}_3, \quad \mathbf{M}_1 = [\mathbf{s}\mathbf{M}_1^0]\, t - \frac{m_2^2}{2m} r_0 \omega c_2 t \sin 2\omega t \mathbf{e}_3,$$

$$\mathbf{M}_2^0 = \frac{m_1^2}{m^2} r_0^2 \omega \mathbf{e}_3, \quad \mathbf{M}_2 = [\mathbf{s}\mathbf{M}_2^0]\, t - \frac{m_1^2}{2m} r_0 \omega c_2 t \sin 2\omega t \mathbf{e}_3, \tag{3.4}$$

$$\dot{\widetilde{\mathbf{M}}}_1 = [\mathbf{s}\mathbf{M}_1^0] - \frac{m_2^2}{m} r_0 \omega^2 c_2 t \cos 2\omega t \mathbf{e}_3,$$

$$\dot{\widetilde{\mathbf{M}}}_2 = [\mathbf{s}\mathbf{M}_2^0] - \frac{m_1^2}{m} r_0 \omega^2 c_2 t \cos 2\omega t \mathbf{e}_3, \tag{3.5}$$

где $\mathbf{s} \equiv \frac{k}{2c^2 r_0^3} [(4m_1 + 3m_2)\vec{\sigma}_1 + (3m_1 + 4m_2)\vec{\sigma}_2]$; $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ — единичные векторы соответственно по осям x, y, z.

Получающиеся формально вековые члены в (3.4) и (3.5) обязаны следующему обстоятельству. Решение уравнений (1.1) мы искали в виде (1.2). Но можно было искать решение и в виде

$$\tilde{x}_i = (x_i^0 + x_i^*) \cos(\omega + \omega^*) t - (y_i^0 + y_i^*) \sin(\omega + \omega^*) t,$$

$$\tilde{y}_i = (x_i^0 + x_i^*) \sin(\omega + \omega^*) t + (y_i^0 + y_i^*) \cos(\omega + \omega^*) t, \tag{3.6}$$

$$\tilde{z}_i = z_i^0 + z_i,$$

т. е. можно явно предусматривать релятивистскую поправку ω^* к ньютоновой угловой скорости ω. В посленьютоновом приближении (3.6) совпадает с (1.2), если $x_i = x_i^* - y_i^0 \omega^* t$, $y_i = y_i^* + x_i^0 \omega^* t$, т. е. члены $-m_2 c_2 t$ и

m_1c_2t в (2.1) и (2.2) связаны с ω^*. Поэтому вековые члены в (3.4) и (3.5) не должны фигурировать. Окончательно находим

$$\widetilde{\mathbf{M}}_1 = \mathbf{M}_1^0 + \mathbf{M}_1 = \frac{m_2^2}{m^2} r_0^2 \omega \mathbf{e}_3 + [\mathbf{s}\mathbf{M}_1^0]\, t, \quad \dot{\widetilde{\mathbf{M}}}_1 = [\mathbf{s}\mathbf{M}_1^0],$$

$$\widetilde{\mathbf{M}}_2 = \mathbf{M}_2^0 + \mathbf{M}_2 = \frac{m_1^2}{m^2} r_0^2 \omega \mathbf{e}_3 + [\mathbf{s}\mathbf{M}_2^0]\, t, \quad \dot{\widetilde{\mathbf{M}}}_2 = [\mathbf{s}\mathbf{M}_2^0]. \tag{3.7}$$

Последние равенства показывают [13], что векторы $\widetilde{\mathbf{M}}_1$ и $\widetilde{\mathbf{M}}_2$ прецессируют около постоянного вектора $\mathbf{s}$ с угловой скоростью, равной по величине $|\mathbf{s}|$. Это приводит, как упоминалось выше, к прецессии плоскости ньютоновых орбит тел A_1 и A_2 с угловой скоростью $\mathbf{s}$. Прецессия исчезает только в случае параллельности векторов $\mathbf{s}$ и $\mathbf{e}_3$. Но вековой эффект в изменении угла поворота (3.2) остается.

Легко показать, что для относительной орбиты тел A_1 и A_2, определяемой вектором $\tilde{\mathbf{r}} \equiv \tilde{\mathbf{r}}_2 - \tilde{\mathbf{r}}_1$, релятивистский удельный орбитальный момент импульса $\widetilde{\mathbf{M}} \equiv [\tilde{\mathbf{r}}\dot{\tilde{\mathbf{r}}}]$ и его величина $|\widetilde{\mathbf{M}}|$ не содержат релятивистской вековой добавки, что находится в согласии с [12]. Имеется только прецессия плоскости относительной орбиты с угловой скоростью $\mathbf{s}$. Отметим, что полные орбитальные моменты импульсов $\tilde{m}_1\widetilde{\mathbf{M}}_1$ и $\tilde{m}_2\widetilde{\mathbf{M}}_2$ подчиняются тем же закономерностям, что и $\widetilde{\mathbf{M}}_1$ и $\widetilde{\mathbf{M}}_2$, так как релятивистские массы $\tilde{m}_1$ и $\tilde{m}_2$ не содержат вековых членов [12].

Переходим к рассмотрению движения третьего легкого тела. Здесь следует различать три случая.

а). Пусть $m^2 > 27m_1m_2$. Тогда общее решение системы (1.6) определяется суммой фундаментального решения однородной части системы (1.6), которое найдено в [11], формулы (15) и частного решения (2.4). Вековые члены содержатся только в частном решении. Производя подсчет расстояний $\tilde{r}_{13}$ и $\tilde{r}_{23}$, убеждаемся, что с точностью до вековых членов $\tilde{r}_{13} = \tilde{r}_{23} = r_0$. Иными словами, стороны лагранжевого треугольника не испытывают вековых изменений. Отсюда следует, что для треугольника как целого справедлив вековой эффект (3.2), если $c_2 \neq 0$. Для орбитального момента $\widetilde{\mathbf{M}}_3$, определенного согласно (3.3), его производной по времени и модуля получаем выражения (взята точка либрации L_4)

$$\widetilde{\mathbf{M}}_3 = \mathbf{M}_3^0 + \mathbf{M}_3 = \left[(x_3^0)^2 + (y_3^0)^2\right] \omega \mathbf{e}_3 + [\vec{\Omega}\mathbf{M}_3^0]\, t,$$

$$\dot{\widetilde{\mathbf{M}}}_3 = [\vec{\Omega}\mathbf{M}_3^0], \quad |\dot{\widetilde{\mathbf{M}}}_3| = |\mathbf{M}_3^0| = \text{const}, \tag{3.8}$$

где

$$\vec{\Omega} \equiv \Big\{ 3\sqrt{3}\, m_1m_2 \left[(\sigma_1^1 - \sigma_2^1)\,\mathbf{e}_2 - (\sigma_1^2 - \sigma_2^2)\,\mathbf{e}_1\right] +$$

$$+ (8m_1^2 + 11m_1m_2 + 5m_2^2)\, \frac{m_1}{m}\, \vec{\sigma}_1 + (5m_1^2 + 11m_1m_2 + 8m_2^2) \times$$

$$\times \frac{m_2}{m}\, \vec{\sigma}_2 + 12\,(m_1^2 + m_1m_2 + m_2^2)\, \vec{\sigma}_3 \Big\}\, \frac{k\omega |\mathbf{M}_3^0|^{-1}}{4c^2 m r_0}.$$

Таким образом, третье легкое тело A_3 движется в плоскости, которая прецессирует с постоянной угловой скоростью $\vec{\Omega}$. Прецессия исчезает лишь в случае параллельности векторов $\vec{\Omega}$ и $\mathbf{e}_3$. Так как векторы $\mathbf{s}$ и $\vec{\Omega}$ не равны, то прецессии плоскостей, в которых движутся тяжелые тела A_1 и A_2 и

легкое тело A_3, происходят по-разному (это обстоятельство уже отмечалось в [14]). Например, тяжелые тела могут не вращаться ($\vec{\sigma}_1 = \vec{\sigma}_2 = 0$). Тогда $\mathbf{s} = 0$ и плоскость относительной орбиты тел A_1 и A_2 вовсе не будет прецессировать, а $\vec{\Omega} = \frac{3km}{c^2 r_0^3} \vec{\sigma}_3$, т. е. плоскость орбиты легкого тела прецессию совершает. Итак, в случае а) лагранжев треугольник, не меняя своих размеров, определенным образом поворачивается в пространстве.

б). Пусть $m^2 = 27m_1m_2$. Пользуясь фундаментальным решением (15′) из [11] и (2.4), находим, что $\widetilde{\mathbf{M}}_3$, $|\widetilde{\mathbf{M}}_3|$, $\tilde{r}_{13}$, $\tilde{r}_{23}$ изменяются вековым образом:

$$\begin{aligned}
\widetilde{\mathbf{M}}_3 &= \mathbf{M}_3^0 + [\Omega \mathbf{M}_3^0]\, t + \left(\alpha_0 \cos \frac{\omega t}{\sqrt{2}} + \beta_0 \sin \frac{\omega t}{\sqrt{2}}\right) t \cdot \mathbf{e}_3, \\
|\widetilde{\mathbf{M}}_3| &= |\mathbf{M}_3^0| + \left(\alpha_0 \cos \frac{\omega t}{\sqrt{2}} + \beta_0 \sin \frac{\omega t}{\sqrt{2}}\right) t, \\
\tilde{r}_{13} &= r_0 + \left(\alpha_1 \cos \frac{\omega t}{\sqrt{2}} + \beta_1 \sin \frac{\omega t}{\sqrt{2}}\right) t, \\
\tilde{r}_{23} &= r_0 + \left(\alpha_2 \cos \frac{\omega t}{\sqrt{2}} + \beta_2 \sin \frac{\omega t}{\sqrt{2}}\right) t,
\end{aligned} \tag{3.9}$$

где α и β с индексами являются некоторыми постоянными, пропорциональными постоянным интегрирования в (15′) из [11]. Две стороны треугольника медленно изменяют свою длину и сам он медленно поворачивается в пространстве.

в). Наконец, возможен случай $m^2 < 27m_1m_2$. Тогда на основе (15″) [11] и (2.4) находим

$$\begin{aligned}
\widetilde{\mathbf{M}}_3 &= \mathbf{M}_3^0 + [\vec{\Omega} \mathbf{M}_3^0]\, t + e^{\alpha_1 \omega t}(\gamma_0 \cos \beta_1 \omega t + \varkappa_0 \sin \beta_1 \omega t)\, \mathbf{e}_3, \quad \alpha_1 > 0, \\
|\widetilde{\mathbf{M}}_3| &= |\mathbf{M}_3^0| + e^{\alpha_1 \omega t}(\gamma_0 \cos \beta_1 \omega t + \varkappa_0 \sin \beta_1 \omega t), \\
\tilde{r}_{13} &= r_0 + e^{\alpha_1 \omega t}(\gamma_1 \cos \beta_1 \omega t + \varkappa_1 \sin \beta_1 \omega t), \\
\tilde{r}_{23} &= r_0 + e^{\alpha_1 \omega t}(\gamma_2 \cos \beta_1 \omega t + \varkappa_2 \sin \beta_1 \omega t),
\end{aligned} \tag{3.10}$$

где α_1, β_1, γ и $\varkappa$ с индексами — некоторые константы. В этом случае при медленной прецессии плоскости орбиты тела A_3 происходят довольно быстрые изменения длин двух сторон лагранжевого треугольника.

Для конкретных тел нетрудно дать численные оценки указанных эффектов.

Полученные результаты могут найти применение в небесной механике и астрофизике.

Литература

1. Papapetrou A. Proc. Phys. Soc., **A64**, 57, 1951.
2. Инфельд Л., Плебаньский Е. Движение и релятивизм. ИЛ, 1962.
3. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теория поля. Изд. «Наука», М., 1967.
4. Papapetrou A. Proc. Roy. Soc., **A209**, 248, 1951.
5. Фок В. А. Теория пространства, времени и тяготения. ГИТТЛ, М., 1955; 2-е изд. ГИФМЛ, 1961.
6. Рябушко А. П. ЖЭТФ, **33**, 1387, 1957; Изв. вузов, Физика, в. 6, 1961.
7. Tulczyjew W. Acta Phys. Polon., **18**, 37, 1959.

8. Michalska R. Bull. Acad. Polon. Sci., ser. sci. math., astr. et phys., 8, 233, 237, 247, 1960.
9. Субботин М. Ф. Курс небесной механики, 2. ОНТИ, М.—Л., 1937.
10. Дубошин Г. Н. Небесная механика. Аналитические и качественные методы. Изд. «Наука», М., 1964.
11. Рябушко А. П., Филипович К. С. Весці АН БССР, сер. фіз.-мат. навук, № 5, 1968.
12. Рябушко А. П., Фишер И. З. ЖЭТФ, 34, 1189, 1958; Изв. вузов, Физика, в. 1, 1962.
13. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика. Изд. «Наука», М., 1965.
14. Рябушко А. П., Филипович К. С. Тез. докл. IV Всес. межвузовской конф. по геометрии. Тбилиси, 1969.

Белорусский государственный университет им. В. И. Ленина

Поступило в редакцию 23.V 1969

ВЕСЦІ АКАДЭМІІ НАВУК БЕЛАРУСКАЙ ССР № 6 1969
СЕРЫЯ ФІЗІКА-МАТЭМАТЫЧНЫХ НАВУК

УДК 539.19

К. М. САЛАЎЕЎ, Ю. Я. СПІРЫЧАЎ

МАЛЕКУЛЯРНА-АРБІТАЛЬНЫ РАЗЛІК ПАРФІНУ МЕТАДАМ ЛКАА

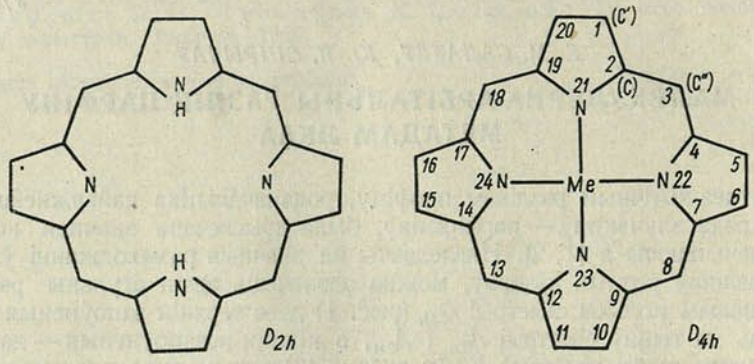
Квантава-хімічным разлікам парфіну, роданачальніка найважнейшага для біялогіі рада злучэнняў — парфірынаў, была прысвечана значная колькасць работ, пачынаючы з [1, 2]. Нягледзячы на значныя разыходжанні ў рэзультатах разлікаў розных аўтараў, можна адзначыць адзін агульны рэзультат: у парфінавым кольцы сіметрыі D_{4h} (рыс. 1) дзве верхнія запоўненыя арбіталі належаць да тыпаў сіметрыі A_{1u} і A_{2u}, а ніжнія незапоўненыя — да двойчы выраджанага тыпу сіметрыі E_g (у рабоце [3] атрыманы эксперыментальныя даныя, якія пацвярджаюць гэта палажэнне). Гоутэрманам паказана, што рад спектральных уласцівасцей парфірынаў можа быць вытлумачан з дапамогай спрошчанай мадэлі, у якой улічваецца ўзаемадзеянне толькі дзвюх узбуджаных канфігурацый: $(a_{1u}\, e_g)$ і $(a_{2u}\, e_g)$ [4] (гл. таксама [5, 6]). Квазізабаронены характар першага электроннага пераходу ў незамешчаным парфінавым кольцы натуральна вытлумачваецца з дапамогай гэтай чатырохарбітальнай мадэлі, калі прыняць, што арбіталі $1a_{1u}$ і $3a_{2u}$ маюць аднолькавую энергію. Дадзенае палажэнне можа служыць некаторым крытэрыем правільнасці малекулярна-арбітальнага разліку, які можна назваць крытэрыем выпадковага выраджэння.

Пры разліках паўэмпірычным метадам ЛКАА выкарыстоўваюцца два тыпы параметраў: кулонаўскія інтэгралы α_r і рэзанансныя інтэгралы β_{rs} [7, 8]. У найпрасцейшым варыянце метаду ЛКАА — метадзе Хюкеля ўсе значэнні α_C прымаюцца аднолькавымі і роўнымі α, усе значэнні β_{CC} для звязаных атамаў — аднолькавымі і роўнымі β, для астатніх пар атамаў — роўнымі 0. Пры наяўнасці гетэраатамаў уводзяцца дадатковыя параметры δ і η: $\alpha_X = \alpha + \delta_X \beta$; $\beta_{CX} = \eta_{CX}\beta$. Натуральным удасканаленнем метаду Хюкеля з'яўляецца ўлік залежнасці β_{rs} ад даўжыні сувязі (напрыклад, па [9]), што, у прыватнасці, дазваляе палепшыць адпаведнасць разлічаных парадкаў сувязей і эксперыментальных даўжынь сувязей [7] (пры гэтым таксама зручна запісваць $\beta_{rs} = \eta_{rs}\beta$).

У [10] была зроблена першая спроба прывесці ў адпаведнасць рэзультаты ЛКАА-разліку і чатырохарбітальную мадэль. Каб задаволіць крытэрыю выпадковага выраджэння, аўтары вар'іравалі параметры δ_N і η_{CN}. Аднак аўтары [10] атрымалі выпадковае выраджэнне арбіталей пры такіх значэннях параметраў δ і η, якія абазначалі практычна поўнае адключэнне атамаў азоту ад спалучанай сістэмы, а асноўным ланцугом спалучэння аказвалася 20-членнае кольца С — С-сувязей. У [6] намі паказана, што гэты вывад не ўзгадняецца з асноўнымі ўласцівасцямі парфінавага кольца, дзе дамінуе ўнутранае 16-членнае кольца (гл. таксама [11]). Такім чынам, правільныя значэнні параметраў павінны «адключаць» С′—С′-сувязі, якія па характару прыбліжаюцца да двайных, як вынікае з рэнтгенаструктурных даных. Манаграфія [6] знаходзілася ў друку, калі з'явілася работа Чэна [12], у якой

такая думка была ажыццёўлена. Аднак значэнне η для сувязі C — C′, якое дае выпадковае выраджэнне ў [12], здаецца ўсё ж занадта малым (0,6); акрамя таго, гэта значэнне залежыць ад выбару параметра δ_N .

Таму мы паставілі задачу інакш: ці можна задаволіць крытэрыю выпадковага выраджэння, калі знайсці значэнні β_{rs} па рэнтгенаструктурных даных (па Малікену) і ўзяць стандартныя значэнні δ_N па [7] або [8]. Такі выбар параметраў здаецца найбольш разумным для метаду Хюке-



Рыс. 1. Структура парфіну і металапарфіну. Абазначэнні C, C′ і C″ выкарыстоўваюцца ў тэксце, лічбавыя абазначэнні — у табліцах

ля, і магчымасць атрымання пры гэтым выпадковага выраджэння верхніх запоўненых арбіталей будзе служыць довадам у карысць чатырохарбітальнай мадэлі.

Малекулярныя арбіталі парфіну. У адпаведнасці з метадам МА ЛКАА адначасцінкавую хвалевую функцыю (ψ_i) шукаем у выглядзе лінейнай камбінацыі атамных арбіталей (ЛКАА), г. зн.

$$\psi_i = \sum_{r=1}^{n} c_{ir}\,\varphi_r\,, \tag{1}$$

дзе φ_r — хвалевая функцыя p_z-электрона атама r. Энергія электрона ε_i на i-й малекулярнай арбіталі вызначаецца рашэннем секулярнага ўраўнення, якое атрымліваецца з варыяцыйнага прынцыпу [7, 8]:

$$\sum_r c_r\,(H_{rs} - \varepsilon\,S_{rs}) = 0. \tag{2}$$

Тут

$$H_{rs} = \int \varphi_r\,H\,\varphi_s\,d\tau = \begin{cases} \alpha_r & \text{пры } r = s, \\ \beta_{rs} & \text{пры } r \neq s, \end{cases}$$

$$S_{rs} = \int \varphi_r\,\varphi_s\,d\tau\,. \tag{3}$$

Увогуле кулонаўскія і рэзанансныя інтэгралы залежаць ад выгляду ψ_i у асноўным стане малекулы, і іх трэба шукаць самаўзгодненым шляхам. Аднак для нашых мэт дастаткова правесці разлік у прыбліжэнні Хюкеля, мяркуючы, што $S_{rs} = \delta_{rs}$ (што эквівалентна меркаванню аб артанарміраванасці атамных хвалевых функцый), а для інтэгралаў α_r і β_{rs} выкарыстаць эмпірычныя значэнні.

Для канкрэтных разлікаў парфінавага кольца сіметрыі D_{4h} былі выбраны наступныя значэнні параметраў: $\delta_N = 0{,}7$; $\eta_{CN} = 0{,}85$; $\eta_{CC'} = 0{,}75$; $\eta_{CC'} = 1{,}0$; $\eta_{C'C'} = 1{,}1$ (гл. рыс. 1). Усе α_C прымаліся роўнымі α. Параметры бы-

лі выбраны наступным чынам. Велічыня $\delta_N = 0{,}7$ была ўзята як сярэдняе паміж значэннямі δ_N для трацічнага (0,4) і іміннага (1,0) азоту, якія рэкамендуюцца ў [7]. Велічыні η_{rs} былі вызначаны па эксперыментальных значэннях даўжынь сувязей, атрыманых у [13, 14] для тэтрафенілпарфіну, з дапамогай крывой Малікена і інш. [9]. Для гэтага мы перабудавалі дадзеную крывую ў каардынатах η і n, дзе n — разовасць сувязі, і выкарысталі значэнні, вызначаныя па даных [13, 14] у рабоце [11], з адпаведным усярэдненнем*). Такім чынам, значэнні η для сувязей C — C і C — N былі вызначаны аднастайна. Паколькі разлік праводзіўся для няўзрушанага парфінавага кольца сіметрыі D_{4h}, г. зн. для слабых металакомплексаў, узаемадзеянне металу з кольцам не ўлічвалася.

Як вядома [2, 7, 8], арбіталі π-электронаў антысіметрычныя ў адносінах да плоскасці малекулы і належаць у выпадку сіметрыі D_{4h} да непрыводзімых прадстаўленняў A_{2u}, B_{2u}, A_{1u}, B_{1u} і E_g. У адпаведнасці з гэтым дэтэрмінант секулярнага ўраўнення разбіваецца на блок-формы меншай размернасці. Рашаючы звычайным спосабам секулярныя ўраўненні для кожнага непрыводзімага прадстаўлення, знаходзім энергетычны спектр і нарміраваныя каэфіцыенты c_{ir} пры атамных арбіталях для кожнай МА. Рэзультаты вылічэнняў прыведзены ў табл. 1.

Табліца 1

Лікі Хюкеля $\left(x = \frac{\alpha - \varepsilon}{\beta}\right)$ **і каэфіцыенты пры атамных хвалевых функцыях**

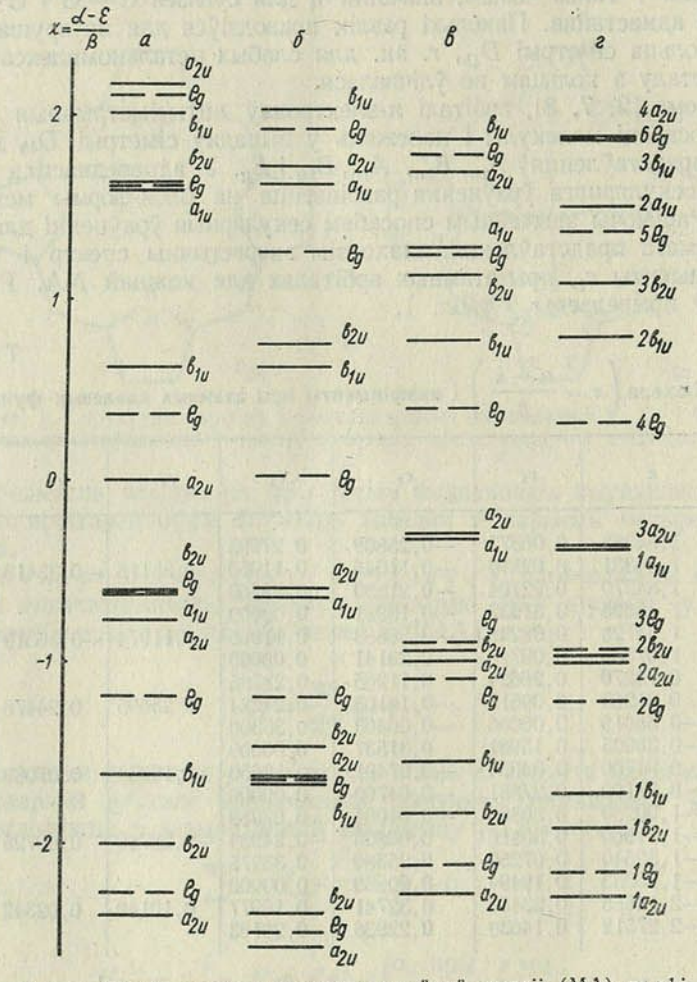
МА	x	c_1	c_2	c_3	c_4	c_5	c_{21}
$4a_{2u}$	1,84385	0,06577	—0,25809	0,27995			0,17248
$6e_g$	1,84331	0,02816	—0,11046	0,11950	0,33116	—0,33413	0,05221
$3b_{1u}$	1,84270	0,22104	—0,21890	0,23760			0,00000
$2a_{1u}$	1,48005	0,31537	—0,15981	0,00000			0,00000
$5e_g$	1,34728	0,08238	—0,26883	0,11065	0,11974	—0,36319	0,15784
$3b_{2u}$	1,07356	0,09711	—0,28141	0,00000			0,26974
$2b_{1u}$	0,78270	0,26624	0,11265	—0,28785			0,00000
$4e_g$	0,31263	0,09611	—0,18103	—0,24284	0,25695	0,24476	0,21490
$3a_{2u}$	—0,36619	0,06606	—0,06463	—0,35300			0,32913
$1a_{1u}$	—0,38005	0,15981	0,31537	0,00000			0,00000
$3e_g$	—0,93700	0,34054	—0,07401	0,12650	0,19254	0,07089	—0,37539
$2b_{2u}$	—0,97100	0,27851	—0,04790	0,00000			—0,30046
$2a_{2u}$	—1,00250	0,30803	—0,04004	—0,07989			—0,22504
$2e_g$	—1,11960	0,30816	0,00805	—0,24984	—0,28780	0,09725	0,02461
$1b_{1u}$	—1,52540	0,07250	0,25380	0,33275			0,00000
$1b_{2u}$	—1,90253	0,19494	0,20860	0,00000			0,29490
$1e_g$	—2,14655	0,23463	0,32741	0,19977	0,10140	0,02342	0,27208
$1a_{2u}$	—2,27512	0,14638	0,22936	0,20163			0,24755

Заўвага. У выпадку арбіталей e_g значэнні c_{ir} прыведзены для адной кампаненты выраджанай пары.

З табл. 1 відаць, што пры выбраных значэннях параметраў крытэрый выпадковага выраджэння задавальняецца: адлегласць паміж арбіталямі $1a_{1u}$ і $3a_{2u}$ складае ўсяго 0,014 β, г. зн. каля 300 $см^{-1}$ пры значэнні $\beta = -23000$ $см^{-1}$, якое прымаецца звычайна. На рыс. 2 для параўнання прыведзены энергіі малекулярных арбіталей парфіну, разлічаныя аўтарамі [2, 10, 12] і ў дадзенай рабоце.

*) Падставай для ўсярэднення велічынь δ і η служыць эквівалентнасць пірольных кольцаў пры сіметрыі D_{4h}. Мы мяркуем, што значэнні n, усярэднёныя па даных, атрыманых для сіметрыі D_{2h}, лепш адпавядаюць уласцівасцям няўзрушанага парфінавага кольца сіметрыі D_{4h}, чым эксперыментальныя даныя для металапарфірынаў, паколькі даследаваны комплексы з моцнымі комплексаўтваральнікамі, здольнымі сказіць геаметрыю макрацыкла (гл. [11]).

Шчыльнасць π-электронаў і парадкі рухомых сувязей. На падставе малекулярна-арбітальнага разліку можна вызначыць рад характарыстык спалучанай сістэмы, у прыватнасці так званыя π-электронныя зарады q_r і парадкі рухомых сувязей p_{rs}. Велічыня $q_r = 2\sum_i c_{ir}^2$ характарызуе размеркаванне π-электроннай шчыльнасці па атамах, складаючых



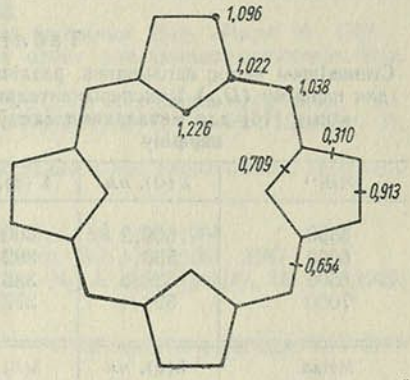
Рыс. 2. Схема аднаэлектронных узроўняў энергіі (МА) парфінавага кольца сіметрыі D_{4h}:

а — рэзультаты [2]; *б* — [10]; *в* — [12]; *г* — рэзультаты дадзенай работы

спалучаную сістэму. Велічыня $p_{rs} = 2\sum_i c_{ir}c_{is}$ характарызуе ступень удзелу π-электронаў у звязванні атамаў r і s: для двайной сувязі $p_{rs} = 1$, для простай $p_{rs} = 0$, а для «паўтарачнай» сувязі тыпу бензольнай С—С-сувязі $p_{rs} = 0{,}67$.

Па даных выкананых разлікаў былі вызначаны значэнні q_r і p_{rs} для парфінавага кольца сіметрыі D_{4h}. Рэзультаты прыведзены на рыс. 3. У табл. 2 робіцца супастаўленне гэтых рэзультатаў з данымі іншых аўтараў, атрыманымі метадам Хюкеля пры іншых значэннях параметраў [2, 10, 12] і метадам Парызера — Пара — Попла [15]. Нашы значэнні p_{rs} даюць боль-

шую, чым у іншых разліках, ступень ізаляцыі C′—C′-сувязей ад унутранага 16-членнага кольца, што якасна ўзгадняецца з рэнтгенаструктурнымі і спектраскапічнымі данымі [6, 11] (ацэнка па рэнтгенаструктурных даных [13, 14] дае $p_{C'C'}=0{,}92$, а $p_{CC'}=0{,}40$). Некалькі горш абстаіць справа з велічынямі q_r, якія, між іншым, адрозніваюцца ад рэзультатаў метаду ППП у сярэднім на 7% для атамаў вугляроду. Згодна даных дэйтэраабмену і ЯМР, мезастановішчы C″ у парфінавым кольцы падвержаны нуклеафільнай атацы (гл. [6]), г. зн. $q_{C''}$ павінна быць менш 1, што звычайна і атрымліваецца ў МА-разліках. Намі быў выканан таксама разлік для $\eta_{C'C'}=1{,}2$, які даў $q_{C''}=0{,}942$ (крытэрый выпадковага выраджэння задавальняўся з дакладнасцю 200 $см^{-1}$). Аднак у гэтым выпадку значэнне p_{rs} для сувязі C′—C′ аказвалася залішне вялікае, а велічыня q_r для атамаў азоту — залішне малая (1,019). У асноўным разліку атрыманая велічыня q_N таксама, відаць, заніжана. Магчыма, выкарыстанне значэнняў δ_N, якія рэкамендуюцца ў [8], дазволіць лепш апісаць электронную структуру парфінавага кольца.



Рыс. 3. Дыяграма электроннай шчыльнасці і парадкаў сувязей

Табліца 2

Шчыльнасць π-электронаў і парадкі сувязей у парфінавым кольцы

Крыніца, параметры разліку	q_1	q_2	q_3	q_{21}	$p_{20\text{-}1}$	$p_{1\text{-}2}$	$p_{2\text{-}3}$	$p_{2\text{-}21}$
[2], $\alpha_N=\alpha_C$, $\eta_{CN}=1$	1,085	1,071	0,966	1,223	0,785	0,472	0,575	0,579
[10], $\delta_N=2$, $\eta_{CN}=0{,}5$	0,932	0,901	0,911	1,923	0,622	0,609	0,623	0,218
[12], $\delta_N=0{,}5$, $\eta_{CN}=0{,}9$, $\eta_{CC'}=0{,}6$	1,035	1,005	1,038	1,383	0,888	0,343	0,629	0,564
Даныя ППП-разліку [15]	1,019	0,938	0,988	1,599	0,806	0,468	0,605	0,490
Даныя гэтай работы	1,096	1,022	1,038	1,226	0,913	0,311	0,654	0,709

Электронны спектр паглынання. Часта простыя метады МА ЛКАА дазваляюць здавальняюча апісваць электронныя спектры паглынання малекул са спалучанымі сувязямі як вынік пераходаў электронаў з запоўненых арбіталей на незапоўненыя [8], нягледзячы на яўную некарэктнасць такога падыходу, які не ўлічвае шматэлектронны характар задачы. Некалькі больш здавальняючай працэдурай з'яўляецца ўлік канфігурацыйнага ўзаемадзеяння паміж канфігурацыямі, узнікаючымі пры аднаэлектронных пераходах. Як ужо гаварылася, для парфіну і яго вытворных можна абмежавацца толькі дзвюма ўзбуджанымі канфігурацыямі $(a_{1u}e_g)$ і $(a_{2u}e_g)$. Гоутэрманам атрыманы суадносіны, якія звязваюць энергіі аптычных пераходаў у парфінавым кольцы са значэннямі энергіі малекулярных арбіталей [10, 4]:

$$\Delta E(Q)=\Delta\varepsilon+D-[\delta^2+C^2]^{1/2},$$
$$\Delta E(B)=\Delta\varepsilon+D+[\delta^2+C^2]^{1/2}, \qquad (4)$$

дзе

$$\Delta\varepsilon = \frac{1}{2}[\varepsilon(c_1) - \varepsilon(b_1) + \varepsilon(c_2) - \varepsilon(b_2)];$$

$$\delta = \frac{1}{2}[\varepsilon(c_1) - \varepsilon(b_1) - \varepsilon(c_2) + \varepsilon(b_2)];$$

Табліца 3

Становішчы палос паглынання, разлічаныя для парфіну (D_{4h}) і эксперыментальныя даныя [16] для металакомплексаў парфіну

D, $см^{-1}$	$\lambda(Q)$, нм	$\lambda(B)$, нм
5500	569,2	400,4
6000	553,4	392,5
6500	538,5	385
7000	524,4	377,4
Метал	**$\lambda(Q)$, нм**	**$\lambda(B)$, нм**
Магній	573	402
Цынк	557	396
Медзь	550	387
Паладый	536	385

$\varepsilon(b_1)$, $\varepsilon(b_2)$ і $\varepsilon(c_1)$, $\varepsilon(c_2)$ — энергіі дзвюх верхніх запоўненых і дзвюх ніжніх незапоўненых арбіталей. Тут C і D — параметры канфігурацыйнага ўзаемадзеяння, якія можна вызначыць па эксперыментальных спектрах паглынання. Велічыня C вызначаецца проста як паўрознасць частот першага і другога электронных пераходаў (паласы I, або Q-паласы, і паласы Сарэ, або B-паласы). Велічыня D вызначаецца праз паўсуму тых жа частот, але гэта вызначэнне не адназначнае, паколькі патрабуе прыцягнення яшчэ аднаго параметра. У рабоце [10] па абсарбцыйнаму спектру Zn-тэтрафенілпарфіну былі атрыманы значэнні $C = 3600\ см^{-1}$; $D = 5400\ см^{-1}$. Мы вызначылі гэтыя велічыні аналагічным спосабам па даных для Mg-парфіну [16] і атрымалі значэнні $C = 3700\ см^{-1}$; $D = 7000\ см^{-1}$. У сувязі з гэтым адрозненнем у значэннях D мы правялі разлік частот аптычных пераходаў для D, якія вар'іраваліся ад 5500 да 7000 $см^{-1}$ пры $C = 3700\ см^{-1}$. Рэзультаты (у даўжынях хваль) прыведзены ў табл. 3. Тут жа для параўнання прыведзены даныя аб спектрах паглынання розных металакомплексаў парфіну.

З табліцы відаць, што рэзультаты нашага МА-разліку здавальняюча ўзгадняюцца з эксперыментальна назіраемымі спектрамі металапарфінаў. Цікава, што лепшае ўзгадненне з эксперыментам атрымліваецца пры значэнні D, блізкім да атрыманага для Zn-тэтрафенілпарфіну, а не пры $D = 7000\ см^{-1}$, хоць відавочна, што Mg-парфін бліжэй да няўзрушанага парфінавага кольца, чым Zn-тэтрафенілпарфін. Гэта можа быць звязана і з прыбліжаным характарам метаду МА ЛКАА і з нястрогасцю метаду ацэнкі велічыні D. Супастаўленне тэарэтычных і эксперыментальных значэнняў λ_Q і λ_B паказвае таксама, што адрозненне ў абсарбцыйных спектрах металакомплексаў парфірынаў можа быць часткова абумоўлена адрозненнямі ў значэннях параметра D, а не толькі стабілізацыяй арбіталі $3a_{2u}$ па [4].

Нягледзячы на шырокае развіццё разліковых метадаў квантавай хіміі, просты метад ЛКАА МАХ працягвае паспяхова прымяняцца для вырашэння самых разнастайных задач. Нашы рэзультаты для парфіну паказваюць, што нават для такіх складаных сістэм, як парфінавае кольца, пры разумным выбары параметраў гэтым метадам удаецца атрымаць правільнае апісанне малекулярных арбіталей, π-электроннай шчыльнасці і парадкаў рухомых сувязей. З улікам канфігурацыйнага ўзаемадзеяння можна разлічваць з ядрэннай дакладнасцю і становішча ўзбуджаных электронных узроўняў малекулы. Магчымасць атрымання выпадковага выраджэння арбіталей $1a_{1u}$ і $3a_{2u}$ пры натуральным выбары параметраў можа служыць некаторым абгрунтаваннем прымянімасці чатырохарбітальнай мадэлі.

Літаратура

1. Simpson W. T. J. Chem. Phys., **17**, 1218, 1949.
2. Longuet-Higgins H. C., Rector C. W., Platt J. R. J. Chem. Phys., **18**, 1174, 1950.
3. Машенков В. А., Соловьев К. Н., Егорова Г. Д. ЖПС, **5**, 202, 1966.
4. Gouterman M. J. Chem. Phys., **30**, 1139, 1959.
5. Platt J. R. Radiation Biology, **3**, 71, N. Y., 1956.
6. Гуринович Г. П., Севченко А. Н., Соловьев К. Н. Спектроскопия хлорофилла и родственных соединений. Минск, 1968.
7. Пюльман Б., Пюльман А. Квантовая биохимия. Изд. «Мир», М., 1965.
8. Стрейтвизер Э. Теория молекулярных орбит для химиков-органиков. Изд. «Мир», М., 1965.
9. Mulliken R. S., Rieke C. A., Brown W. G. J. Am. Chem. Soc., **63**, 41, 1941.
10. Gouterman M., Wagniere G. H., Snyder L. C. J. Mol. Spectry, **11**, 108, 1963.
11. Соловьев К. Н. О строении молекул порфина и его производных. Препринт Института физики АН БССР. Минск, 1969.
12. Chen I. J. Mol. Spectry, **23**, 144, 1967.
13. Silvers S., Tulinsky A. J. Am. Chem. Soc., **86**, 927, 1964.
14. Silvers S. J., Tulinsky A. J. Am. Chem. Soc., **89**, 3331, 1967.
15. Weiss C., Kobayashi H., Gouterman M. J. Mol. Spectry, **16**, 415, 1965.
16. Машенков В. А. Канд. дисс. Минск, 1969.

Институт физики АН БССР

Поступило в редакцию 5.VI 1969

КАРОТКІЯ ПАВЕДАМЛЕННІ

УДК 513.015.2

Л. Ф. БАБАЕВА

К ТЕОРИИ ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНОЙ ИНВОЛЮЦИИ

Рассматриваем общую проективную плоскость со следующей аксиоматикой:

1. Любые две различные точки инцидентны только с одной прямой.
2. Любые две прямые инцидентны по крайней мере с одной точкой.
3. Существуют 4 точки, из которых никакие 3 не коллинеарны.
4. Три диагональные точки полного четырехугольника не коллинеарны.
5. Пусть $A_1A_2A_3A_4$ и $B_1B_2B_3B_4$ — два полных четырехугольника, l — прямая, не проходящая через вершины. Если $A_iA_j \cap l = B_iB_j \cap l = P_{ij} \in l$ для $(i, j) = (1, 2); (1, 3); (1, 4); (2, 3); (2, 4)$ и если $A_3A_4 \cap l = P_{34}$, то $B_3B_4 \cap l = P_{34}$ (рис. 1, *а*).

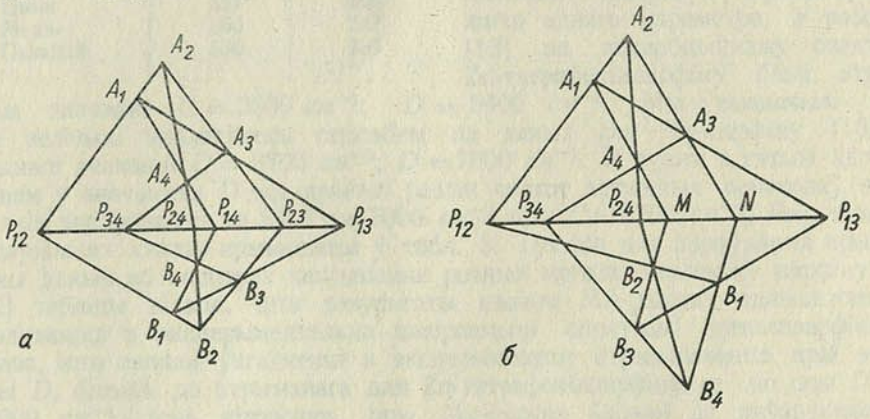


Рис. 1

6. Пусть $A_1A_2A_3A_4$ и $B_1B_2B_3B_4$ — два полных четырехугольника, l — прямая, не проходящая через их вершины. Пусть $A_iA_j \cap l = B_iB_j \cap l = P_{ij}$ для $(i, j) = (1, 2); (1, 3); (2, 4); (3, 4)$. Тогда существует такая пара точек M и N на l, что если $A_1A_4 \cap B_2B_3 = M$ и $A_2A_3 \cap l = N$, то $B_1B_4 \cap l = N$ для любых P_{ij} на l (рис. 1, *б*).

Определение 1. Упорядоченная шестерка точек $[AA'BB'CC']$ называется четырехугольной группой, если эти точки лежат на одной прямой l и в какой-либо плоскости, проходящей через l, существует полный четырехугольник $PQRS$, стороны которого PQ, SR, PS, QR, QS, PR проходят соответственно через точки A, A', B, B', C, C', прямая l не проходит ни через одну вершину четырехугольника.

Примечание. Используя принцип двойственности, можно определить четырехугольные группы прямых и плоскостей в связке и пучке. Из 6 точек можно получить 720 перестановок. Образуют ли точки, взятые в другом порядке, четырехугольную группу?

Далее доказывается, что из шести точек с помощью аксиомы 5 можно получить 24 четырехугольных группы и с помощью аксиомы 6 23 группы, итого 47 различных четырехугольных групп точек.

Существование четырехугольной группы следует из построения. Пусть даны пять точек A, A', B, B', C. Через точку A проведем произвольную прямую 1, через точку A' — произвольную прямую 2, через точку C — произвольную прямую 3. Точку пересечения прямых 1 и 3 обозначим Q, запишем это так: $1 \cap 3 = Q$. Аналогично, $2 \cap 3 = S$; $1 \cap SB = P$; $2 \cap QB' = R$; $l \cap PR = C'$. По аксиоме 5 точка C' определяется единственным образом.

Определение 2. Назовем парой соответствующих точек в четырехугольной группе такие две точки, через которые проходит пара противоположных сторон полного четырехугольника. AA', BB', CC' — пара соответственных точек.

В четырехугольной группе могут совпадать соответственные точки $A \equiv A'$; $B \equiv B'$; $C \equiv C'$, если прямая l проходит соответственно через диагональные точки $PQ \cap RS$; $PS \cap QR$; $QS \cap PR$. Четырехугольная группа $[AA\ BB\ CC']$ называется гармонической.

Определение 3. Две соответственные точки A, A' в четырехугольной группе назовем взаимозаменяемыми, если из существования группы $[AA'BB'CC']$ следует существование группы $[A'ABB'CC']$. Будем говорить коротко, что пара AA' взаимозаменяема.

Определение 4. Две пары соответственных точек AA' и BB' назовем взаимозаменяемыми, если из существования группы $[AA'BB'CC']$ следует существование группы $[BB'AA'CC']$ или из $[CC'AA'BB'] \rightarrow [CC'BB'AA']$.

Теорема 1. *В четырехугольной группе две любые пары соответственных точек взаимозаменяемы.*

Построим сначала по парам AA' и BB' пару CC' указанным выше способом. Затем за исходные пары возьмем AA' и CC', точку $Q' = 1' \cap 3'$ соединим с точкой C', а точку $S' = 2' \cap 3'$ с точкой C, $1' \cap S'C = P'$; $2' \cap Q'C' = R'$. По аксиоме Дезарга 5 о перспективных четырехугольниках $P'R' \cap AA' = B'$. Итак, $[AA'BB'CC'] \rightarrow [AA'CC'BB']$.

Теорема 2. *Если в четырехугольной группе одна пара соответственных точек взаимозаменяема, то и любая другая пара соответственных точек взаимозаменяема.*

Нужно показать, что если $[AA'BB'CC'] \rightarrow [A'ABB'CC']$, то 1) $[AA'BB'CC'] \rightarrow [A'AB'BCC']$ и 2) $[AA'BB'CC'] \rightarrow [A'AB'BC'C]$.

В первом случае, согласно построению, $PQ \cap R'S' = A$; $RS \cap Q'P' = A'$; $PS \cap Q'R' = B$; $QR \cap P'S' = B'$; $QS \cap Q'S' = C$; $PR \cap P'R' = C'$. Переобозначим вершины четырехугольника $P'Q'R'S'$ через $R''S''P''Q''$ (рис. 2, *а*) и применим аксиому 5 о перспективных четырехугольниках.

Во втором случае $PQ \cap R'S' = A$; $RS \cap Q'P' = A'$; $PS \cap Q'R' = B$; $QR \cap P'S' = B'$; $QS \cap P'R' = C$; $PR \cap Q'S' = C'$.

Переобозначим вершины $P'Q'R'S'$ через $Q''P''S''R''$ и увидим, что второй случай будет выполняться тогда, когда выполняется условие $[AA'BB'CC'] \rightarrow [A'ABB'CC']$ (рис. 2, *б*).

Определение 5. Пары точек AA', BB', CC' ..., расположенные на прямой, находятся в четырехугольной инволюции, если через любые три произвольные пары этой совокупности можно провести три противоположные стороны полного четырехугольника, т. е. если каждые три пары этой совокупности образуют четырехугольную группу.

Следствие аксиомы 6. В четырехугольной инволюции одна пара точек взаимозаменяема (свойство инволюционности).

Теорема 3. *Четырехугольная инволюция вполне определяется любыми двумя ее парами соответственных точек.*

Применяя указанное построение, мы можем для произвольной точки прямой найти в четырехугольной инволюции, заданной двумя парами точек AA' и BB', ей соответствующую точку. Покажем, что за исходные пары можно взять любые две пары этой инволюции. Исходя из пар AA' и BB', построим пары CC' и DD'. Из точек A, A' и C проведем произвольные прямые 1, 2, 3. Через точки D и $S = 2 \cap 3$ проведем прямую до пересечения с прямой 1 в точке Q_2. Пусть $1 \cap CS = Q_1$; $1 \cap BS = P$; $2 \cap B'Q_1 = R_1$; $B'Q_2 \cap 2 = R_2$; $PR_2 \cap AA' = D'$ (рис. 3). Исходя из пар AA' и CC', определим точку, соответствующую точке D:

$$2 \cap Q_2C' = M;\ Q_1M \cap AA' = D_*.$$

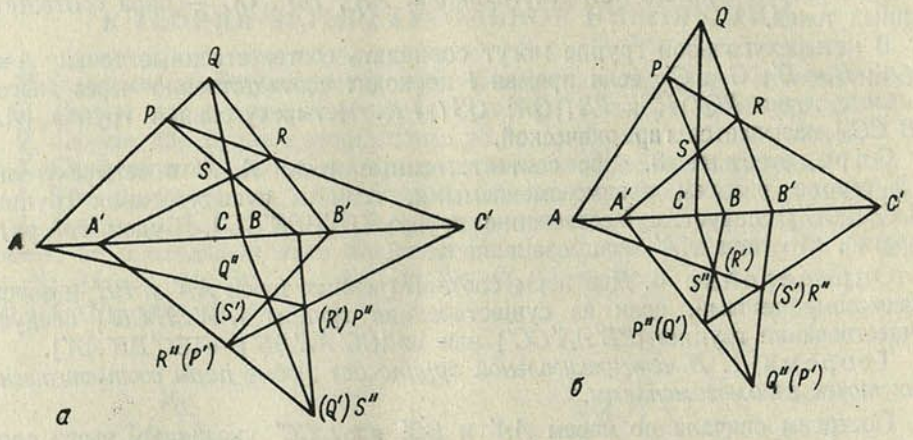


Рис. 2

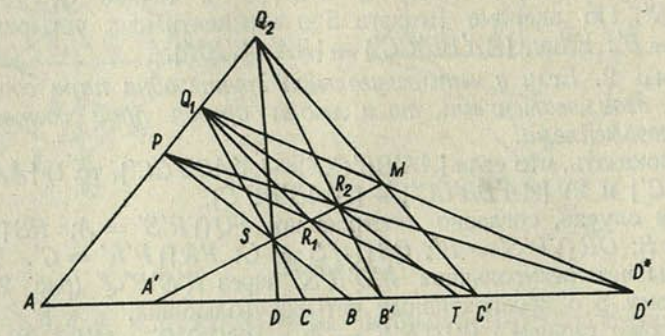


Рис. 3

Докажем, что $D' \equiv D_*$.

Будем считать, что во всех инволюциях на прямой l, имеющих одну общую пару соответственных точек AA', эта пара взаимозаменяема. (Аксиома 6).

Рассмотрим два четырехугольника: $PQ_1R_2R_1$ и $MR_2Q_1Q_2$, у них две пары несоответственных сторон пересекают прямую AA' в точках A и A', а именно: $PQ \cap l \cap Q_1Q_2 = A$; $R_2R_1 \cap l \cap MR_2 = A'$. Три пары соответственных сторон пересекают прямую l в точках $B' = Q_1R_1 \cap Q_2R_2$; $T = Q_1R_2 \cap Q_1R_2$; $C' = PR_1 \cap MQ_2$. По аксиоме 6 из группы $[AA'CTB'D']$ должна следовать группа $[A'ACTB'D']$, а четырехугольники $PQ_1R_2R_1$ и $MR_2Q_1Q_2$ дают группы $[AA'TC'B'D']$ и $[A'AC'TB'D_*]$. Следовательно, $D_* \equiv D'$ в силу единственности шестой точки в четырехугольной группе $[A'ATC'B'D']$. Отсюда следует,

что если пары AA', BB', CC' находятся в инволюции и пары AA', BB', DD' находятся в инволюции, то и пары AA', CC', DD' находятся в инволюции. Если возьмем новую группу $[AA'BB'KK']$, то, очевидно, существует группа $[AA'CC'KK']$. Так как пары в группе взаимозаменяемы, то из существования групп $[CC'AA'DD']$ и $[CC'AA'KK']$ выводим существование группы $[CC'DD'KK']$, а это означает, что исходными парами могут быть любые две пары этой инволюции, например CC' и DD'.

Следствие 1. Две инволюции, помещенные на одном носителе, имеют самое большее одну общую пару.

Следствие 2. Если $A \equiv A'$, $B \equiv B'$ — двойные точки инволюции, то они с любыми двумя соответственными точками этой инволюции образуют гармоническую четверку точек.

Следствие 3. В четырехугольной инволюции любая пара соответственных точек взаимозаменяема.

В самом деле, из аксиомы 6 следует, что одна пара, например AA', взаимозаменяема. Из теоремы 2 следует, что в четырехугольных группах, имеющих AA' своей парой, взаимозаменяемы еще по две пары, а так как вследствие теоремы 3 все пары одной инволюции равнозначны, то каждая пара обладает «свойством инволюционности».

Примечание. Пусть инволюция задана парами AA' и BB', а точка C совпадает с A'. Покажем, что C' совпадает с A. Из точек A и A' проведем прямые 1, 2, 3. Точка S совпадает с точкой A', а точка $P = 1 \cap SB$ совпадает с точкой A. Поэтому $RP \cap AA' = A$.

Литература

1. LePaige C., Deruyts F. Bull. Belg., **15**, 235, 1888.
2. Bachmann F. Aufbau der Geometrie aus dem Spiegelungsbegriff. Berlin, 1959.
3. Бабаева Л. Ф. Уч. зап. МОПИ, **149**, в. 1, 1964.
4. Бабаева Л. Ф. XI научн. сесс. Новосибирск. пед. ин-та, 1968.

Минский педагогический институт им. А. М. Горького

Поступило в редакцию 2.IV 1969

ВЕСЦІ АКАДЭМІІ НАВУК БЕЛАРУСКАЙ ССР № 6 1969
СЕРЫЯ ФІЗІКА-МАТЭМАТЫЧНЫХ НАВУК

УДК 517.948.3

Г. Н. ПЫХТЕЕВ

О ПОВЕДЕНИИ НЕКОТОРЫХ ОСОБЫХ ИНТЕГРАЛОВ НА КОНЦАХ КОНТУРА ИНТЕГРИРОВАНИЯ

Решение многих задач теории струйных течений связано с вычислением и исследованием интегралов вида

$$I(x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{\pi} \int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \frac{f(t)}{t-x}\, dt,\ x \in [-1,1], \tag{1}$$

которые понимаются как особые в смысле главного значения по Коши. На концах отрезка $[-1,1]$ такие интегралы обращаются в нуль. Для обоснования некоторых методов теории струй тяжелой жидкости важно иметь оценки в различных классах функций $f(x)$, учитывающие порядок нуля интеграла (1) в точках $x = \pm 1$. Ниже такие оценки даются для одного класса функций $f(x)$, с которым часто приходится иметь дело в теории струйных течений.

1. Обозначим через α положительное число, меньшее единицы, и соответственно ему введем класс $C_\alpha^{\pm}$ функций $f(x)$, удовлетворяющих следующим условиям: 1) произведение $(1 \pm x)^\alpha f'(x)$ является непрерывной функцией на отрезке $[-1,1]$, 2) существует точка $x \in [-1,1]$, в которой $f(x_0)=0$. Класс $C_\alpha^{\pm}$ будет банаховым пространством, если ввести норму

$$\|f\|_\alpha = \max_x |(1 \pm x)^\alpha f'(x)|,\ x \in [-1,1].$$

Легко показать, что функция $f(x) \in C_\alpha^{\pm}$ удовлетворяет условию Гёльдера с показателем $(1-\alpha)$. Следовательно, если $f(x) \in C_\alpha^{\pm}$, то интеграл (1) существует в смысле главного значения по Коши.

2. Рассмотрим интегралы

$$J_0(x, \lambda) = \pm \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{1} \frac{(1 \pm t)^{-\lambda}}{t-x}\, dt,\ x \in (-1,1),\ 0 < \lambda < 1, \tag{2}$$

$$J_1(x, \lambda) = \pm \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{1} \frac{(1 \pm t)^{1-\lambda}}{t-x}\, dt,\ x \in [-1,1],\ 0 < \lambda < 1. \tag{3}$$

Для этих интегралов имеют место следующие точные формулы:

$$J_0(x, \lambda) = \frac{\operatorname{ctg} \pi\lambda}{(1 \pm x)^\lambda} - \frac{1}{\pi} S\left(\frac{1 \pm x}{2}, \lambda\right)\ (-1 < x < 1), \tag{4}$$

$$J_1(x,\ \lambda) = (1 \pm x)^{1-\lambda} \operatorname{ctg} \pi\lambda - \frac{1}{\pi} S\left(\frac{1 \pm x}{2},\ \lambda\right) +$$

$$+ \frac{2^{1-\lambda}}{\pi(1-\lambda)} \quad (-1 \leqslant x \leqslant 1), \tag{5}$$

где $S(\xi,\ \lambda)$ — функция, которую при $0 \leqslant \xi < 1$ можно представить в виде ряда

$$S(\xi,\ \lambda) = \frac{1}{2^\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k+\lambda}\ \xi^k, \tag{6}$$

а при $0 < \xi < 1$ выразить также через интеграл:

$$S(\xi,\ \lambda) = \frac{1}{(2\xi)^\lambda} \int_0^{\xi^2} \frac{1}{\tau^{1-\lambda}(1-\tau)}\ d\tau. \tag{7}$$

Формула (4) получена в работе [1] для произвольного разомкнутого контура. Формула (5) легко получается из формулы (4).

3. При помощи формул (4), (5) можно получить неравенства, оценивающие модуль интеграла (1) сверху и учитывающие порядок его нуля в случае, когда $f(x) \in C_\alpha^{\pm}$.

Теорема. *Пусть* $f(x) \in C_\alpha^{\pm}$ *и* $\alpha \neq \frac{1}{2}$. *Тогда*

$$|I(x)| \leqslant (1 \pm x)^{1-\alpha} A(\alpha) \|f\|_\alpha, \text{ если } \frac{1}{2} < \alpha < 1, \tag{8}$$

и

$$|I(x)| \leqslant (1 \pm x)^{\frac{1}{2}} A(\alpha) \|f\|_\alpha, \text{ если } 0 < \alpha < \frac{1}{2}, \tag{9}$$

причем

$$A(\alpha) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{2}} \left(B\left(1-\alpha,\ \dfrac{1}{2}\right) \left| \operatorname{ctg} \dfrac{2\alpha-1}{2}\pi \right| + \right. \\ \left. + B\left(\alpha - \dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{2}\right)\right), \quad \dfrac{1}{2} < \alpha < 1, \\ \dfrac{1}{2^\alpha} \left(B\left(1-\alpha,\ \dfrac{1}{2}\right) \left| \operatorname{ctg} \dfrac{2\alpha+1}{2}\pi \right| + \right. \\ \left. + B\left(\alpha + \dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{2}\right) + \dfrac{2}{1-2\alpha}\right), \quad 0 < \alpha < \dfrac{1}{2}, \end{cases}$$

где $B(p,\ q)$ — *бета-функции. Пусть* $f(x) \in C_{1/2}^{\pm}$. *Тогда*

$$|I(x)| \leqslant (1 \pm x)^{\frac{1}{2}-\varepsilon} A(\varepsilon) \|f\|_{\frac{1}{2}}, \quad A(\varepsilon) = \frac{2^{1+\varepsilon}(1-h^2)^\varepsilon}{\pi\varepsilon h}, \tag{10}$$

где ε — *произвольное число, удовлетворяющее неравенству* $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$, *а* h — *корень уравнения* $2\varepsilon y \operatorname{Arth} y = 1$.

Доказательство. Можно показать, что для интеграла (1) в случае, когда производная $f'(x)$ имеет интегрируемые особенности, справедлива следующая формула интегрирования по частям:

$$I(x)=\int_{-1}^{1} H(x,\ t)\,f'(t)\,dt,\quad H(x,\ t)=\frac{1}{\pi}\ \ln\frac{1-xt+\sqrt{(1-x^2)(1-t^2)}}{|t-x|}\ .$$

Используя эту формулу и учитывая, что $H(x,\ t)\geqslant 0$, находим

$$|I(x)|\leqslant\int_{-1}^{1} H(x,\ t)\,|f'(t)|\,dt.$$

Пусть $f(x)\in C_\alpha^+$. Тогда, очевидно,

$$|I(x)|\leqslant E_\alpha(x)\,\|f\|_\alpha,\quad E_\alpha(x)=\int_{-1}^{1}\frac{1}{(1+t)^\alpha}\ H(x,\ t)\,dt \tag{11}$$

и тем более

$$|I(x)|\leqslant G_\alpha(x)\,\|f\|_\alpha,\quad G_\alpha(x)=\int_{-1}^{1}\frac{1}{(1+t)^\alpha\sqrt{1-t}}\ H(x,\ t)\,dt. \tag{12}$$

Рассмотрим отдельно случаи $\alpha\neq 1/2$ и $\alpha=1/2$.

В случае, когда $\alpha\neq 1/2$, воспользуемся неравенством (12). Дифференцируя интеграл $G_\alpha(x)$, входящий в это неравенство, имеем

$$G'_\alpha(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\ J_0(x,\ \lambda),\ \lambda=\alpha-\frac{1}{2}\ \text{при}\ \alpha>\frac{1}{2}$$

и

$$G'_\alpha(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\ J_1(x,\ \lambda),\ \lambda=\alpha+\frac{1}{2}\ \text{при}\ \alpha<\frac{1}{2}\ ,$$

откуда, интегрируя полученные равенства по x' от -1 до x и заменяя $J_0(x,\ \lambda)$ и $J_1(x,\ \lambda)$ выражениями (4) и (5), а затем, произведя замену $x'=2\tau-1$, $x=2\xi-1$, находим

$$G_\alpha(x)=\frac{1}{2^\lambda}\ \operatorname{ctg}\pi\lambda\int_0^{\xi}\frac{d\tau}{\tau^\alpha\sqrt{1-\tau}}-$$

$$-\frac{1}{\pi}\int_0^{\xi} S(\tau,\ \lambda)\ \frac{d\tau}{\sqrt{\tau(1-\tau)}},\ \lambda=\alpha-\frac{1}{2}\ , \tag{13}$$

если $\alpha>\frac{1}{2}$,

$$G_\alpha(x)=2^{1-\lambda}\operatorname{ctg}\pi\lambda\int_0^{\xi}\frac{d\tau}{\tau^\alpha\sqrt{1-\tau}}-$$

$$-\frac{2}{\pi}\int_0^{\xi} S(\tau,\ \lambda)\ \frac{d\tau}{\sqrt{\tau(1-\tau)}}+\frac{2^{1-\lambda}}{\pi(1-\lambda)}\int_0^{\xi}\frac{d\tau}{\sqrt{\tau(1-\tau)}},\ \lambda=\alpha+\frac{1}{2}\ , \tag{14}$$

если $\alpha<\frac{1}{2}$.

Для интегралов, входящих в (13) и (14), имеют место оценки

$$\int_0^{\xi} \frac{d\tau}{\tau^{\alpha}\sqrt{1-\tau}} \leqslant \xi^{1-\alpha} B\left(1-\alpha, \frac{1}{2}\right), \int_0^{\xi} \frac{d\tau}{\sqrt{\tau(1-\tau)}} \leqslant \pi\sqrt{\xi},$$

$$\int_0^{\xi} S(\tau, \lambda) \frac{d\tau}{\sqrt{\tau(1-\tau)}} \leqslant \frac{\pi}{2^{\lambda}}\sqrt{\xi} B\left(\lambda, \frac{1}{2}\right). \tag{15}$$

Первая из этих оценок получается при помощи разложения подынтегральной функции в степенной ряд, вторая следует из неравенства $2\arcsin\sqrt{\xi} \leqslant \pi\sqrt{\xi}$, а при установлении третьей оценки используются представления (4) и (5). Из (13), (14) и (15) следует:

$$G_{\alpha}(x) \leqslant \frac{\xi^{1-\alpha}}{2^{\lambda}} |\operatorname{ctg}\pi\lambda| B\left(1-\alpha, \frac{1}{2}\right) + \frac{\sqrt{\xi}}{2^{\lambda}} B\left(\lambda, \frac{1}{2}\right), \lambda =$$

$$= \alpha - \frac{1}{2} \text{ при } \alpha > \frac{1}{2},$$

$$G_{\alpha}(x) \leqslant 2^{1-\lambda}\xi^{1-\alpha}|\operatorname{ctg}\pi\lambda| B\left(1-\alpha, \frac{1}{2}\right) +$$

$$+ \frac{\sqrt{\xi}}{2^{\lambda}} B\left(\lambda, \frac{1}{2}\right) + \frac{2^{1-\lambda}}{1-\lambda}\sqrt{\xi}, \lambda = \alpha + \frac{1}{2} \text{ при } \alpha < \frac{1}{2}. \tag{16}$$

Заменим интеграл $G_{\alpha}(x)$, входящий в неравенство (12), мажорантными выражениями согласно (16). Тогда, учитывая, что $\sqrt{\xi} \leqslant \xi^{1-\alpha}$, если $\alpha > \frac{1}{2}$ и $\xi^{1-\alpha} \leqslant \sqrt{\xi}$, если $\alpha < \frac{1}{2}$, получим оценки (8) и (9) для $f(x) \in C_{\alpha}^{+}$.

В случае, когда $\alpha = \frac{1}{2}$, интеграл $E_{\alpha}(x)$, входящий в неравенство (11), вычисляется точно:

$$E_{\frac{1}{2}}(x) = \frac{4}{\pi}\sqrt{1+x} \operatorname{Arth}\sqrt{\frac{1-x}{2}}.$$

Вводя функцию $f_{\varepsilon}(y) = 2^{\varepsilon}(1-y^2)^{\varepsilon}\operatorname{Arth} y$, находим

$$E_{\frac{1}{2}}(x) \leqslant \frac{4}{\pi}(1+x)^{\frac{1}{2}-\varepsilon} \max_{0 \leqslant y \leqslant 1} f_{\varepsilon}(y).$$

Но $\max f_{\varepsilon}(y) = f_{\varepsilon}(h)$, $0 \leqslant y \leqslant 1$, где h — корень уравнения $2\varepsilon y \operatorname{Arth} y = 1$, откуда

$$E_{\frac{1}{2}}(x) \leqslant \frac{2^{1+\varepsilon}}{\pi} \frac{(1-h^2)^{\varepsilon}}{\varepsilon h}(1+x)^{\frac{1}{2}-\varepsilon}. \tag{17}$$

Из неравенств (11) и (17) следует оценка (10) для $f(x) \in C_{\frac{1}{2}}^{+}$.

Пусть теперь $f(x) \in C_\alpha^-$. Тогда, поступая таким же образом, как и в случае $f(x) \in C_\alpha^+$, но используя вместо неравенств (11) и (12) другие неравенства, в которых стоит $(1-t)^\alpha$ и $\sqrt{1+t}$ вместо $(1+t)^\alpha$ и $\sqrt{1-t}$, получим оценки (8) — (10) для $f(x) \in C_\alpha^-$.

Литература

1. Иванов В. В. Тр. Новочеркасск. политехн. ин-та, 67 (81), 1958.

Институт ядерной энергетики АН БССР

Поступило в редакцию 24.IV 1969

ВЕСЦІ АКАДЭМІІ НАВУК БЕЛАРУСКАЙ ССР № 6 1969
СЕРЫЯ ФІЗІКА-МАТЭМАТЫЧНЫХ НАВУК

УДК 539.17

А. П. БОГДАНОВ, А. В. СОРОКА, В. Н. ТАДЭУШ, Е. И. ФИРСОВ

ИССЛЕДОВАНИЕ СПЕКТРОВ СОВПАДЕНИЙ γ-ЛУЧЕЙ ИЗ РЕАКЦИИ (*n*, γ) НА ИЗОТОПАХ $Se^{74, 76}$

Возбужденные состояния Se^{75} и Se^{77} исследовались по реакции (*d*, *p*) в работах [1] и [2, 3] соответственно. Некоторые сведения о распаде низколежащих уровней получены из исследования реакции (*p*, *n*γ) [4] и радиоактивного распада изотопов As и Br [5].

Наиболее подробные сведения о спектрах γ-лучей из реакции (*n*, γ) на изотопах $Se^{74,76}$ получены в нашей лаборатории с помощью комптоновского спектрометра [6]. Однако схемы γ-переходов Se^{75} и Se^{77} из захватного состояния в реакции (*n*, γ), составленные на основе имеющихся данных, не являются полными в силу отсутствия сведений о способах разрядки нижних возбужденных состояний. Исследование каскадных переходов, сопровождающих захват тепловых нейтронов ядрами $Se^{74,76}$, предпринятое в настоящей работе, имеет целью устранить указанный пробел.

Измерения производились с помощью сцинтилляционного спектрометра совпадений с двумя кристаллами NaJ(Tl) большого объема, включенными в схему быстро-медленных совпадений с разрешающим временем 5×10^{-8} *сек*. Амплитудное разрешение спектрометров составляло 10%, телесные углы —2,2% от 4π. В качестве образцов использовались разделенные изотопы селена. Их основные характеристики приведены в табл. 1.

Таблица 1

Основные характеристики образцов

Образец	Вес, *г*	Содержание изотопов, %						Вклад в сечение, %					
		74	76	77	78	80	82	74	76	77	78	80	82
Se^{74}	0,10	40,9	8,1	4,7	13,1	27,1	6,1	69,0	23,2	6,7	0,1	0,5	0,4
Se^{76}	0,15	0,4	75,2	3,1	6,0	13,2	2,1	0,3	97,4	2,0	—	0,1	—

Для Se^{75} измерялись спектры совпадений с γ-лучами высокой энергии, соответствующими прямым переходам из исходного состояния на нижние уровни. Для Se^{77} измерялись, кроме того, совпадения с наиболее интенсивными мягкими γ-лучами.

Согласно [6], наиболее интенсивная линия в спектре Se^{75} соответствует прямому переходу 7,74 *Мэв* из исходного состояния на уровень 0,28 *Мэв*. Наши результаты подтверждают эту интерпретацию. Уровень 0,28 *Мэв* распадается прямым переходом на основное состояние. Как показано в [6], существуют прямые переходы 7,44 и 7,18 *Мэв* из исходного состояния Se^{75} в реакции (*n*, γ) на уровни 0,58 и 0,86 *Мэв* соответственно. Поскольку в реакции (*n*, γ) на Se^{76}, примесь которого в исследуемом образце значительна, возникают очень близкие по энергии γ-лучи, этот вывод нуждается в экспериментальной проверке. Нами показано, что переход на уровень 0,86 *Мэв* действительно существует, причем последний распадается каскадными переходами через уровни 0,11 и 0,42 *Мэв*. К сожалению, определенного выво-

да относительно перехода на уровень 0,58 *Мэв* на основе наших измерений сделать не удалось. Получено также подтверждение о существовании введенного авторами [6] уровня 1,59 *Мэв*.

Таблица 2

Каскадные переходы Se^{75} и Se^{77} из исходного состояния в реакции (n, γ)

Исходный переход, *Мэв*	Заселяемый уровень, *Мэв*	Способ разрядки
Излучающий изотоп Se^{75}		
7,74	0,28	0,28
7,44	0,58	не установлен
7,18	0,86	0,75—0,11
		0,44—0,42
7,02	1,01	0,90—0,11
6,44	1,59	1,32—0,28
Излучающий изотоп Se^{77}		
7,18	0,24	0,24
6,88	0,52	0,52
		0,28—0,24
6,58	0,82	0,82
		0,58—0,24
		0,38—0,44
		0,38—0,20—0,24
		0,30—0,52
6,41	1,01	1,01
		0,76—0,25
		0,48—0,52
6,24	1,18	1,18
		0,93—0,24
6,02	1,38	1,38
5,81	1,61	1,38—0,24
5,60	1,83	1,32—0,52

При распаде исходного состояния Se^{77} в реакции (n, γ) возбуждается большое число низколежащих состояний, каждое из которых в свою очередь распадается несколькими способами. Благодаря этому область спектра 0,2—1,0 *Мэв* содержит большое число линий, которые даже в спектрах совпадений полностью не разрешены. Тем не менее, комбинируя результаты измерения совпадений с жесткими и наиболее интенсивными мягкими γ-лучами, удалось установить основные способы распада почти всех состояний Se^{77}, возбуждаемых в реакции (n, γ).

Результаты настоящей работы сведены в табл. 2.

Литература

1. Литвин В. Ф., Немилов Ю. А., Жеребцова К. И., Гриднев К. А., Краснов Л. В., Комаров В. А., Лакомкин Ю. А., Орлова Т. В. Изв. АН СССР, сер. физ., **32**, 276, 1968.

2. Macefield B. E. F., Middleton R., Pullen D. Y. Nucl. Phys., **44**, 309, 1963.

3. Lin E. K. Phys. Rev., **139B**, 340, 1965.

4. Lobkowicz B., Marmier P. Helv. Phys. Acta, **34**, 85, 1961.

5. Джелепов Б. С., Пекер Л. К. Схемы распада радиоактивных ядер $A<100$. Изд. «Наука», М.—Л., 1966.

6. Рудак Э. А., Фирсов Е. И., Хильманович А. М. Весці АН БССР, сер. фіз.-мат. навук, № 4, 1969.

Институт физики АН БССР

Поступило в редакцию 26.VI 1969

ВЕСЦІ АКАДЭМІІ НАВУК БЕЛАРУСКАЙ ССР № 6 1969
СЕРЫЯ ФІЗІКА-МАТЭМАТЫЧНЫХ НАВУК

УДК 539.216.22 : 546.72'74'77

Л. Ф. ИЛЬЮШЕНКО, Л. Г. ГРИБКОВСКАЯ

ЭЛЕКТРООСАЖДЕННЫЕ ПЛЕНКИ ТРОЙНЫХ СПЛАВОВ ЖЕЛЕЗО—НИКЕЛЬ—МОЛИБДЕН

В системе сплавов железо — никель — молибден имеется область составов, характеризующихся высокими значениями магнитной проницаемости и низкой коэрцитивной силой [1, 2]. Большой интерес представляют сплавы этой системы, обладающие одноосной магнитной анизотропией, прямоугольной петлей гистерезиса, а также сплавы с высоким удельным электросопротивлением. Такие сплавы могут служить основой для изготовления магнитных пленок, используемых в вычислительной технике и технике СВЧ.

Большинство работ о свойствах пленок тройной системы Fe—Ni—Mo посвящено пленкам, получаемым вакуумным термическим испарением [3—5]; исследований электроосажденных пленок этой системы очень мало [6]. Это объясняется недостаточным развитием метода электролитического осаждения пленок, а также трудностями, возникающими при электроосаждении сплавов, содержащих молибден. Изучению электроосаждения молибдена с металлами группы железа посвящены, в частности, работы [7—9]. Процесс электролитического осаждения таких сплавов и их свойства сильно зависят от режима осаждения — катодной плотности тока, кислотности и температуры электролита [10]. Однако из-за недостатка сведений о характере этой зависимости выбор режима электроосаждения сплавов системы Fe—Ni—Mo производится в основном экспериментально. Это представляет весьма сложную задачу, особенно в случае получения электролитических осадков малой толщины, в частности пленок.

В настоящей работе определены химический состав Fe—Ni—Mo пленок и их магнитные характеристики в зависимости от состава ванны, pH электролита и катодной плотности тока. Характерной особенностью сплавов рассматриваемой тройной системы является наличие в них сильных внутренних напряжений, оказывающих существенное влияние на физические свойства пленок. Поэтому в работе исследовано также изменение внутренних напряжений пленок в зависимости от их химического состава и толщины.

Пленки толщиною до 3000 Å осаждались на медную электрополированную фольгу из раствора, имеющего следующий состав (в *г/л*): $NiSO_4 \cdot 7H_2O$ — 280, $FeSO_4 \cdot 7H_2O$ — 10, молибдат натрия $Na_2MoO_4 \cdot 2H_2O$ — от 1 до 4, лимоннокислый натрий $C_6H_5O_7Na_3 \cdot nH_2O$ — 66, NaCl — 1,1 и сахарин — 0,8. Получение пленок с различным содержанием молибдена обеспечивалось изменением концентрации молибдата натрия в растворе при постоянном соотношении ионов никеля и железа. В качестве анода использовалась пластинка из чистого никеля. Пленки осаждались в магнитном поле напряженностью 100 *э*. Содержание компонент в пленке определялось фотоколориметрическим методом; магнит-

ные характеристики — осциллографированием петли гистерезиса; внутренние напряжения — методом гибкого катода [11], толщина — с помощью взвешивания.

На рис. 1 показано изменение процентного содержания молибдена, никеля и железа в пленке толщиною 3000 Å в зависимости от концентрации молибдата натрия в растворе при постоянных pH (4) и плотности тока (6 *ма/см²*). С увеличением концентрации $Na_2MoO_4 \cdot 2H_2O$ от 1 до

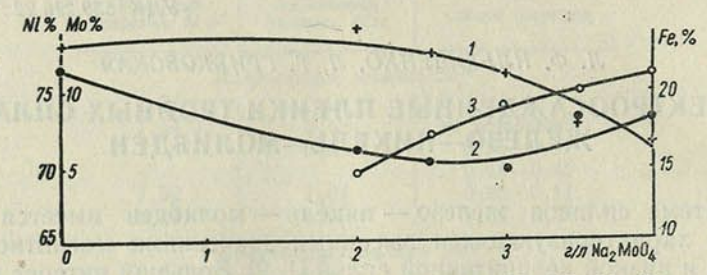


Рис. 1. Зависимость процентного содержания Fe *(1)*, Ni *(2)* и Mo *(3)* в пленке толщиною 3000 Å от концентрации молибдата натрия в растворе (pH 4,0; плотность тока 6 *ма/см²*)

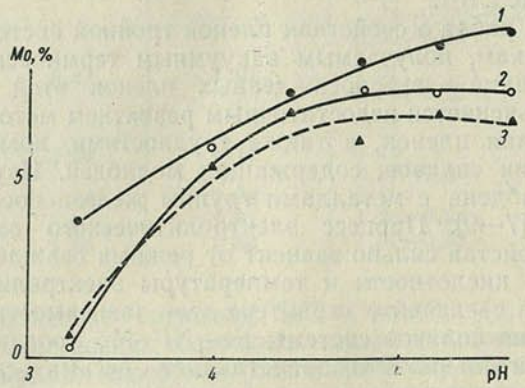


Рис. 2. Зависимость процентного содержания молибдена в пленках толщиною 3000 Å от pH при плотности тока 6 *(1)*, 8 *(2)* и 10 *(3)* *ма/см²*. Концентрация молибдата натрия в растворе — 2 *г/л*

4 *г/л* количество молибдена в пленке растет почти линейно, содержание никеля сначала уменьшается, а затем растет, содержание железа сначала почти не изменяется, а затем падает. При больших концентрациях молибдата натрия в указанных выше условиях электролиза происходит обильное выделение водорода на катоде, препятствующее осаждению пленок. Поэтому для получения пленок с большим содержанием молибдена из того же электролита необходимо изменять условия осаждения.

Изменение процентного содержания молибдена в пленке в зависимости от величины pH раствора показано на рис. 2 для трех различных плотностей тока при содержании молибдата натрия в растворе 2 *г/л*. С увеличением pH от 3 до 4,4 процентное содержание молибдена в пленке сильно растет. Это наблюдается для всех исследованных плотностей тока. При больших pH процентное содержание молибдена в пленке почти

не изменяется с ростом pH. Повышение плотности тока ведет к уменьшению содержания молибдена в пленке для всех значений pH. На основании аналогичных зависимостей, полученных для других концентраций молибдата натрия, производится выбор условий осаждения, обеспечивающих получение пленок необходимого состава системы Fe—Ni—Mo.

Введение в железо-никелевый сплав молибдена вызывает снижение коэрцитивной силы пленок. В исследованном интервале концентраций

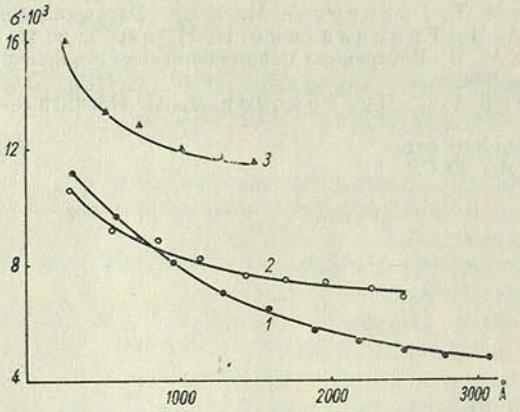


Рис. 3. Изменение внутренних напряжений σ, *кГ/см²* пленок Fe—Ni—Mo в зависимости от толщины и концентрации молибдата натрия (*1*—1 *г/л*; *2*—2; *3*—3). Плотность тока 8 *ма/см²*, pH 3,6

молибдена наименьшей коэрцитивной силой 0,7—1,0 *э* обладали пленки, содержащие около 5% молибдена. Пленки этого состава имеют коэффициент прямоугольности петли гистерезиса, близкий к единице, и поле анизотропии $H_к$ около 3 *э*. Наблюдаемое снижение коэрцитивной силы Fe—Ni—Mo пленок по сравнению с пленками Fe—Ni той же толщины и осажденными в тех же условиях можно отнести за счет того, что пленки тройного сплава имеют более мелкокристаллическую структуру. Вместе с тем коэрцитивная сила пленок тройных сплавов Fe—Ni—Mo по величине значительно выше коэрцитивной силы объемных образцов тех же сплавов [12]. Это, возможно, связано не только с малой толщиной осадка, но и со спецификой процесса электроосаждения, обусловливающей появление в пленках различных неоднородностей и дефектов структуры, посторонних включений (в частности, водорода), сильных внутренних напряжений. Как видно из рис. 3, с увеличением содержания молибдена в пленке внутренние напряжения растут во всем исследованном интервале толщин. Вместе с тем при повышении содержания молибдата натрия в растворе пленки осаждаются с меньшей скоростью, уменьшается выход металла по току. Так, например, при изменении концентрации молибдата натрия от 1 до 3 *г/л* при сохранении одинаковых условий осаждения скорость осаждения уменьшается на 3—4 Å/*сек*. Можно предположить, что увеличение напряжений связано с тем, что при более низких скоростях осаждения повышается вероятность попадания в пленку различных веществ, содержащихся в электролите, которые адсорбируются на поверхности катода. В пользу этого предположения говорит то, что с увеличением толщины пленки внутренние напряжения уменьшаются.

Литература

1. Пузей И. М. Изв. АН СССР, сер. физ., **16**, № 5, 1952.
2. Hove J. H. Electr. Eng., **75**, № 8, 1956.
3. Ahn K. Y. Beam W. R. J. of Appl. Phys., **35**, № 3, pt. 2, 1964.
4. Ивлев В. Ф., Пак Н. Г., Кан С. В. ФММ, **14**, в. 6, 1962.
5. Eckardt. Z. angew. Phys., IV, 14, № 4, 189, 1962.
6. Freitag W. O., Mathias J. S. J. Electrochem. Soc., **112**, № 1, 1965.
7. Ksycki M. J., Yntema L. F. J. Electrochem. Soc., **96**, 48, 1949.
8. Holt M. L., Vaaler L. E. Trans. of the Electrochem. Soc., **94**, 50, 1948.
9. Ваграмян А. Т., Гинберг А. М. и др. Электрохимия, **2**, в. 5, 1966.
10. Лисогор А. И., Грацианский Н. Н. Укр. хим. ж., **31**, № 8, 1965.
11. Поперека М. Я. Внутренние напряжения электролитически осаждаемых металлов. Новосибирск, 1966.
12. Займовский А. С., Чудновская Л. А. Магнитные материалы, 1957.

Институт физики твердого тела и полупроводников АН БССР

Поступило в редакцию 18.VII 1969

ВЕСЦІ АКАДЭМІІ НАВУК БЕЛАРУСКАЙ ССР № 6 1969
СЕРЫЯ ФІЗІКА-МАТЭМАТЫЧНЫХ НАВУК

УДК 548.0 : 535

А. И. КОМЯК, В. П. САМОДУРОВ

ОПТИЧЕСКИЕ ПОСТОЯННЫЕ КРИСТАЛЛОВ УРАНИЛОВЫХ СОЕДИНЕНИЙ

Интерес к кристаллооптическим постоянным ураниловых соединений вызван все более возрастающим в последнее время изучением анизотропии их спектроскопических характеристик. Экспериментальное исследование названных характеристик связано с определенной ориентацией кристалла относительно электрического вектора световой волны.

Из опубликованных данных [1—3] можно получить сведения по кристаллооптическим постоянным далеко не для всех кристаллов ураниловых соединений. Для большинства из них измерены только главные показатели преломления, а значения таких важных характеристик, как углы между оптическими осями, дисперсия осей и др., не приводятся.

Нами было изучено двенадцать искусственно полученных кристаллов ураниловых соединений. Среди них встречаются четыре кристалла, оптические свойства которых частично известны из литературы [2, 3], а оптические постоянные остальных восьми ураниловых соединений определены впервые. Кристаллооптическим исследованиям были подвергнуты следующие соединения.

А. Безводные кристаллы уранилнитратов и хлоридов:

1) цезийуранилнитрат $Cs\,UO_2(NO_3)_3$,
2) рубидийуранилнитрат $Rb\,UO_2(NO_3)_3$
3) аммонийуранилнитрат $NH_4 \cdot UO_2(NO_3)_3$,
4) дирубидийуранилнитрат $Rb_2\,UO_2(NO_3)_4$,
5) калийуранилнитрат $KU\,O_2(NO_3)_3$,
6) тетраметиламмонийуранилхлорид $[(CH_3)_4\,N]_2\,UO_2Cl_4$,
7) цезийуранилхлорид $Cs_2UO_2Cl_4$.

Б. Кристаллы, содержащие кристаллизационную воду:

1) двухводный аммонийуранилнитрат $(NH_4)_2\,(UO_2)\,(NO_3)_4 \cdot 2H_2O$,
2) шестиводный уранилнитрат $UO_2(NO_3)_2 \cdot 6H_2O$,
3) двухводный рубидийуранилхлорид $Rb_2UO_2Cl_4 \cdot 2H_2O$,
4) семиводный цинкуранилацетат $Zn\,[UO_2(CH_3COO)_3]_2 \cdot 7H_2O$,
5) двухводный калийуранилсульфат $K_2UO_2(SO_4)_2 \cdot 2H_2O$.

Кристаллизация ураниловых солей производилась из насыщенных водных и кислотных растворов при постоянной температуре. Рост кристаллов продолжался иногда несколько месяцев и прерывался, когда кристаллы достигали 5—10 *мм* по диагонали. Все кристаллы обладали желтоватым или зеленоватым цветом, были четко огранены и вследствие малой твердости легко поддавались обработке, но при условии осторожного обращения, так как обладали большой хрупкостью.

Для кристаллооптических исследований выбирались кристаллики размером 1—3 *мм*. С помощью поляризационного микроскопа можно в

таких мелких кристаллах с достаточной степенью точности установить все оптические свойства. Изучение кристаллооптических свойств производилось в петрографических шлифах и в иммерсионных средах с помощью поляризационного микроскопа МИН-8. Шлифы приготавливались в виде мелкораздробленного кристаллического порошка с самой различной ориентацией зерен кристалликов. Среди этого многообразия по коноскопическим фигурам всегда можно найти кристаллы с нужной ориентацией оптических осей.

Главные показатели преломления определялись методом сравнения показателя преломления кристалла при определенной его ориентации по отношению к оптической оси микроскопа и иммерсионной жидкости, в которую этот кристалл погружен. Сравнение показателей преломления производилось методом полоски Бекке. Наиболее трудноопределяемой кристаллооптической величиной является угол между оптическими осями двухосного кристалла. Определение этой постоянной производилось с помощью коноскопической фигуры по расстоянию между выходами оптических осей в разрезе, перпендикулярном биссектрисе острого угла [4]. В том случае, когда определение угла между оптическими осями было затруднено ($2V>60°$), использовался пятиосный столик Федорова.

В разрезах, перпендикулярных оптической оси одноосных кристаллов или биссектрисе острого угла двухосных кристаллов, легко определяются осность, оптический знак кристалла, характер дисперсии его осей и другие данные (см. таблицу), необходимые в процессе дальнейших спектральных исследований.

Таблица

Кристаллооптические постоянные ураниловых соединений

Химическая формула	Осность, оптический знак	Показатели преломления			Угол $2V$	Дисперсия
		N_g	N_m	N_p		
$CsUO_2(NO_3)_3$	Одноосный, —	1,621	—	1,468	—	—
$RbUO_2(NO_3)_3$	Одноосный, —	1,666	—	1,483	—	—
$NH_4UO_2(NO_3)_3$	Одноосный, —	1,650	—	1,480	—	—
$Rb_2UO_2(NO_3)_4$	Двухосный, +	1,662	1,558	1,531	57°	$v>r$
$KUO_2(NO_3)_3$	Двухосный, —	1,638	1,606	1,516	61°	$r>v$
$[(CH_3)_4N]_2UO_2Cl_4$	Одноосный, +	1,523	—	1,519	—	—
$Cs_2UO_2Cl_4$	Двухосный, —	1,702	1,686	1,612	58°	$v>r$
$(NH_4)_2UO_2(NO_3)_4\cdot 2H_2O$	Двухосный, —	1,633	1,615	1,504	37°	$r>v$
$UO_2(NO_3)_2\cdot 6H_2O$	Двухосный, +	1,573	1,492	1,483	44°	$r>v$
$Rb_2UO_2Cl_4\cdot 2H_2O$	Двухосный, —	1,621	1,612	1,552	38°	$r>v$
$Zn[UO_2(CH_3COO)_3]_2\cdot 7H_2O$	Двухосный, —	1,501	1,489	1,471	82°	—
$K_2UO_2(SO_4)_2\cdot 2H_2O$	Двухосный, +	1,573	1,528	1,510	74°	$v>r$

Оптические свойства анизотропных кристаллов характеризуются трехосным эллипсоидом показателей преломления, или оптической индикатрисой. В одноосных кристаллах оптическая индикатриса представляет собой эллипсоид вращения (рис. 1). В двухосных кристаллах индикатриса представляет собой сплюснутый или вытянутый эллипсоид (рис. 2) в зависимости от того, оптически положительным или отрицательным является кристалл. Индикатриса тетраметиламмонийуранилхлорида по своей форме близка к шару, что указывает на малое двупреломление ($\Delta n=0{,}004$), т. е. по оптическим свойствам этот кристалл близок к оптически изотропному веществу. Различие в показателях преломления

оптически одноосных кристаллов нитратов уранила значительно. Показатели преломления могут изменяться по оси N_p от 1,468 до 1,509, по оси N_g — от 1,528 до 1,666 при двупреломлении Δn от 0,019 до 0,183.

Двухосные кристаллы обладают еще более резкими отличиями оптических свойств, чем одноосные. Для кристаллов различного химического состава показатель преломления колеблется в следующих пределах: по

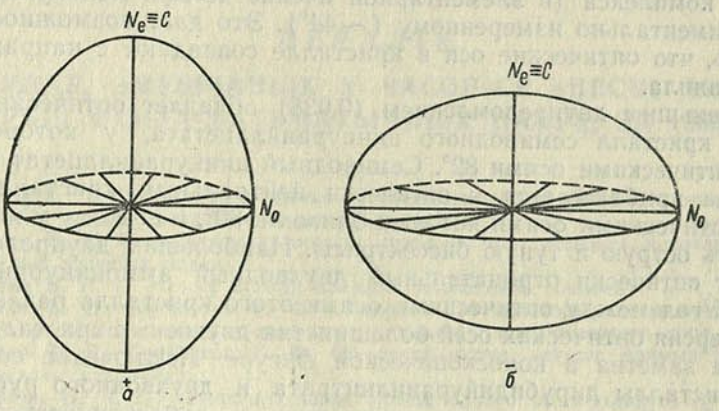


Рис. 1. Оптическая индикатриса одноосных кристаллов:
а — оптически положительного; *б* —отрицательного

оси N_p от 1,471 до 1,552, по оси N_g от 1,501 до 1,702. Величина двупреломления у рассматриваемой группы ураниловых соединений также подвержена значительным колебаниям (0,030—0,131).

Как видно из таблицы, три разновидности двухосных кристаллов ураниловых соединений являются оптически положительными, пять — оптически отрицательными. Угол между оптическими осями двухосных

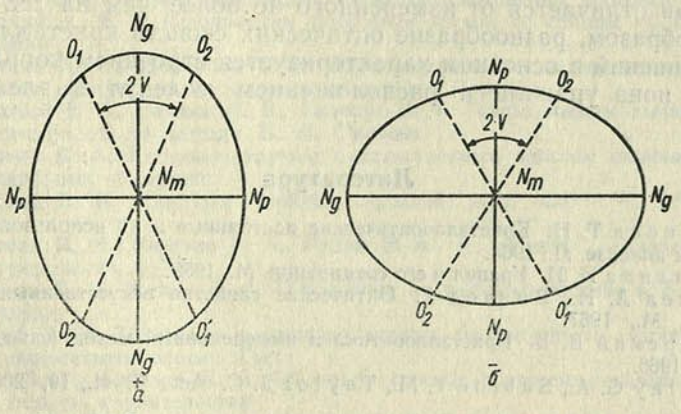


Рис. 2. Оптическая индикатриса двухосных кристаллов:
а — оптически положительного; *б* — отрицательного

положительных кристаллов колеблется в пределах от 44 до 74°, у оптически отрицательных кристаллов — от 38 до 82°. Согласно нейтронографическим данным [5], одноосные кристаллы нитратов уранила содержат две одинаковым образом ориентированные молекулы в элементарной ячейке кристалла. Ионы уранила расположены вдоль оптической оси, а в их экваториальной плоскости — нитратные группы. Вытянутость

индикатрисы совпадает с расположением нитратных групп. Естественно, что скорость распространения электромагнитных волн вдоль ионов уранила и в плоскости нитратных групп будет существенно отличаться, что приводит к значительному двупреломлению.

В двухосном кристалле шестиводного нитрата уранила вычисленный угол между ионами уранила двух различным образом ориентированных молекул комплекса (в элементарной ячейке четыре молекулы) близок к экспериментально измеренному ($\sim 44°$). Это дает возможность предположить, что оптические оси в кристалле совпадают с направлениями ионов уранила.

Наименьшим двупреломлением (0,038) обладает оптически отрицательный кристалл семиводного цинкуранилацетата, у которого угол между оптическими осями 82°. Семиводный цинкуранилацетат по своим свойствам приближается к оптически нейтральным кристаллам, угол между оптическими осями которых близок к 90°, а поэтому у них трудно различить острую и тупую биссектрисы. Наибольшим двупреломлением обладает оптически отрицательный двухводный аммонийуранилнитрат (0,131). Угол между оптическими осями этого кристалла равен 37°.

Дисперсия оптических осей большинства двухосных кристаллов мала, она едва заметна в коноскопической фигуре. Исключение составляют лишь кристаллы дирубидийуранилнитрата и двухводного рубидийуранилхлорида. В первом случае синие лучи в коноскопической фигуре расходятся на большой угол ($v > r$), а во втором случае, наоборот, $r > v$.

Сравнение измеренных нами показателей преломления для кристаллов тетраметиламмонийуранилхлорида, дирубидийуранилхлорида, двухводного аммонийуранилнитрата и шестиводного уранилнитрата с известными литературными данными [2, 3] показало, что погрешность в определении показателей преломления не выходит за пределы 0,005, что вполне приемлемо. При измерении угла между оптическими осями методом Федорова учитывалась разница показателя преломления кристалла и среды. С учетом этого фактора истинный угол между оптическими осями отличается от измеренного не более чем на ± 3—5°.

Таким образом, разнообразие оптических свойств кристаллов ураниловых соединений в основном характеризуется строением координационной сферы иона уранила и расположением молекул в элементарной ячейке.

Литература

1. Буракова Т. Н. Кристаллооптические постоянные и их использование в микрохимическом анализе. Л., 1964.
2. Липилина И. И. Уранил и его соединения. М., 1959.
3. Винчел А. Н., Винчел Г. Оптические свойства искусственных минералов. Изд. «Мир», М., 1967.
4. Татарский В. Б. Кристаллооптика и иммерсионный метод исследования минералов. М., 1965.
5. Barclay G. A., Sabine T. M., Taylor J. C. Acta Cryst., **19**, 205, 1965.

Белорусский государственный университет им. В. И. Ленина

Поступило в редакцию 6.V 1969

ПЕРАЛІК

АРТЫКУЛАЎ, ЗМЕШЧАНЫХ У ЧАСОПІСЕ «ВЕСЦІ АН БССР», СЕРЫЯ ФІЗІКА-МАТЭМАТЫЧНЫХ НАВУК, ЗА 1969 г.

	№	стар.
Абрашин В. Н. Сходимость и оценка погрешности метода сеток для некоторых задач в случае гиперболических уравнений	1	31
Абрашин В. Н. О сходимости метода прямых при решении некоторых квазилинейных краевых задач	2	38
Абрашин В. Н. О схемах метода прямых повышенной точности	6	39
Абрашин В. Н., Горбачева Г. Ф. О сходимости некоторых схем метода прямых при решении краевых задач для уравнения параболического типа	4	66
Абрашин В. Н., Горбачева Г. Ф. Об одной схеме метода прямых для параболического уравнения	5	113
Азаматова В. И. Об исключительном случае одного интегрального уравнения на полуоси	1	49
Андреев А. Д., Некрашевич И. Г., Попко В. И. Вольт-амперные характеристики контакта селен — плазма при наличии металлической сетки на поверхности селена	2	126
Антоневич А. Б., Бронштейн В. И. О нахождении минимального диагностического набора контрольных элементов	4	108
Афанас'еў М. В., Капельян С. Н., Філіпаў Л. П., Марозаў У. А. Аб скорасці плазменных струменяў, узнікаючых пры дзеянні імпульсных цеплавых патокаў на металічныя паверхні	3	87
Бабаева Л. Ф. К теории четырехугольной инволюции	6	110
Барысаглебскі Л. А., Пазойскі С. В. Да тэорыі структурных паправак у каэфіцыентах парнай канверсіі пры $M1$-пераходах ядраў	2	81
Басик В. А. Об одном упрощении алгоритма матричной прогонки	5	17
Бедрицкий А. И. О кулоновском рассеянии частиц со спином $^1/_2$ в пятимерной теории	4	129
Бедрицкий А. И., Данилова С. А. Конечномерные не вполне приводимые представления пятимерной неоднородной группы Лоренца	3	112
Безлюдный Е. Е., Ракова Л. В., Склепус Н. Г. Приближенное вычисление двойных интегралов по методу В. Л. Рвачева	1	129
Белоногов В. А. Конечные группы с единственным классом неинвариантных максимальных подгрупп	3	114
Белоусова В. И. Спектры нижних уровней ядер $Cd^{111, 113}$, $Te^{123, 125}$, $Xe^{127, 129}$	1	124
Белоусова В. И., Кнатько В. А., Рудак Э. А. К расчету радиационных ширин в реакции (n, γ)	4	121
Белоусова В. И., Рудак Э. А. Остаточное n—p-взаимодействие в нечетно-нечетных ядрах	3	94
Бельский З. И. Три-ткани с изотермическими, равнопутными, изогеодезическими и полосатыми сетями Гессе	2	56
Бобков В. В., Бобкова Н. А. Об одном способе построения вычислительных схем метода характеристик	5	33
Богданов А. П., Рудак Э. А., Фирсов Е. И. Реакция $Ca^{48}(n, \gamma)$ Ca^{49} на тепловых нейтронах	3	97
Богданов А. П., Сорока А. В., Тадэуш В. Н., Фирсов Е. И. Спектры совпадений γ-лучей из реакции (n, γ) на изотопах $Fe^{57, 58}$	5	127
Богданов А. П., Сорока А. В., Тадэуш В. Н., Фирсов Е. И. Исследование спектров совпадений γ-лучей из реакции (n, γ) на изотопах $Se^{74, 76}$	6	119
Богданов А. П., Сорока А. В., Тадэуш В. Н., Фирсов Е. И., Хильманович А. М. Спектр γ-лучей из реакции Ni^{64} (n, γ) Ni^{65}	5	130
Бокуть Б. В., Сердюков А. Н. Нелинейное пондеромоторное вращение, вызванное мощным излучением	3	105

Болсун А. И., Власов Р. А., Гронский В. К., Федоров Ф. И. Эффект Вавилова — Черенкова для частиц со спинами в гиротропных средах 1 78
Васіль Феафілавіч Купрэвіч 2 5
Васильев Э. А., Сирота Н. Н. Нейтронографический фазовый анализ сплавов системы MnSb—MnBi 2 111
Вихренко В. С., Немцов В. Б., Ротт Л. А. Уравнения переноса для многокомпонентных систем 1 102
Гадавы Агульны сход Акадэміі навук БССР 3 118
Гайдук С. И., Захаренкова Н. И. Применение метода контурного интеграла к решению одной задачи о поперечных колебаниях релаксирующего стержня 5 78
Дадаян А. А. Ткань Кодацци 1 70
Дрозд А. А., Гасцішчаў В. І. Звышправодны саленоід з моцным магнітным полем 5 101
Емеличев В. А. О локальных минимумах в одной многоэкстремальной задаче. I 1 26
Емеличев В А. О локальных минимумах в одной многоэкстремальной задаче. II 4 87
Емеличев В. А. Вогнутое программирование с сепарабельной функцией цели при линейных ограничениях 6 25
Ерашевская С. П., Пальцев А. А. О вычислении сфероидальных функций и их первых производных на ЭВМ. II 4 37
Жаврид Г. П. Письмо в редакцию 2 133
Загорин Л. Е. О приводимых локально-нильпотентных группах матриц над телом вещественных кватернионов 2 115
Загорин Л. Е. Периодические группы вещественно-кватернионных матриц второй степени 6 5
Залесский А. Е. О сопряженности в классических группах 4 93
Иваницкая О. С. Сопоставление двух способов разграничения систем отсчета и систем координат в эйнштейновой теории гравитации 3 69
Иваницкая О. С., Сягло И. С. К разысканию простых параметров преобразования Лоренца в поле тяготения Шварцшильда 1 83
Иванов Е. А., Мошинский А. В. Дифракция электромагнитных волн на двух эллиптических цилиндрах 3 16
Иванов Е. А., Мошинский А. В., Гельфонд Б. С. К дифракции электромагнитных волн на двух эллиптических цилиндрах 4 5
Ільіч Г. К., Кацаў І. Л., Казлоў У. Д. Некаторыя асаблівасці рэгістрацыі выпраменьвання ў малым цялесным вугле 5 96
Ильюшенко Л. Ф., Грибковская Л. Г. Электроосажденные пленки тройных сплавов железо—никель—молибден 6 121
Ільюшэнка Л. Ф., Касцюк-Кульгаўчук Л. П., Галкоўская М. М. Даследаванне магчымасці зніжэння каэрцытыўнай сілы і павышэння каэфіцыента прамавугольнасці пятлі гістэрэзісу электраасаджаных жалезанікелевых плёнак. II 1 111
Камяк А. І., Валадзько Л. В. Аналіз тонкай структуры абсарбцыйных спектраў крышталяў нітратаў уранілу пры 77 °К 1 115
Карпиловский Г. И. Конечные группы, допускающие точное неприводимое представление степени 5 над полем рациональных чисел 5 9
Кеда Н. П. О возможности применения вариационных принципов для приближенного решения дифференциальных уравнений гиперболического типа с несколькими пространственными переменными 6 60
Комяк А. И. К вопросу о симметрии возбужденных электронных состояний в кристаллах нитратов уранила 2 85
Комяк А. И., Самодуров В. П. Оптические постоянные кристаллов ураниловых соединений 6 125
Конюх В. С. О разрешимых подгруппах симплектической группы . . 5 5
Конюх В. С. О максимальных разрешимых подгруппах вещественно-ортогональной группы 6 12
Корень Н. Н., Сирота Н. Н. Наращивание теллурида цинка на селениде цинка методом реакционной диффузии 4 134
Коробенок Е. В., Орещенко А. Ф. К геометрии поверхностей с изотропными линиями кривизны в пространстве $^1E_3$ 4 29
Кравчук Д. Н. Об экстремуме линейной формы на циклической группе . 3 45
Кругликова Л. Г., Крылов В. И. Интерполяционные преобразования последовательностей и улучшение сходимости 1 5
Кругликова Л. Г., Крылов В. И. Интерполирование предельного значения последовательности и улучшение сходимости. Случай возрастающего числа узлов 3 9

Кунін Н. Ф., **Ратнікаў Э. В., Кадаценка О. Д.** Механічныя эфекты пры каронным разрадзе з падагараваемага вострага краю 3 82
Левашев А. Е., Туняк В. Н. К скалярной модели общей теории относительности 3 73
Лисковец В. А. Подсчет корневых инициально связных ориентированных графов 5 23
Лисковец О. А., Феденко Н. П. О приближенном решении обратных задач теории потенциала 6 52
Лобко С. И. О нелептонном распаде Ω^--гиперона 3 77
Лучко Н. Н. О системах особых интегральных уравнений типа свертки с сопряжением 4 78
М. А. Барысевіч — прэзідэнт Акадэміі навук БССР 3 5
Маковоз Ю. И. Поперечники некоторых функциональных классов в пространстве L 4 19
Маричев О. И. Об уравнении смешанного типа с двумя линиями вырождения в несимметричной области 6 74
Мастоўнікаў В. А., Рубінаў А. М. Энергетычныя характарыстыкі АКГ на растворах арганічных фарбавальнікаў з узбуджэннем ад імпульсных лямп . 4 124
Медведева Р. П. Конечные разрешимые группы с заданным числом неинвариантных подгрупп в композиционных рядах 3 58
Минкевич А. В., Федоров Ф. И. Тензорный вариационный метод и законы сохранения 2 64
Монастырный В. И. О сопряженности разрешимых подгрупп в мультипликативной группе тела 1 59
Мороз Л. Г., Максименко Н. В. Анализ амплитуды одномезонного фоторождения в области энергий второго резонанса 1 97
Моткин А. С. О числе решений сингулярного интегрального уравнения на бесконечном контуре 4 72
Моткин А. С. О числе решений системы особых интегральных уравнений на бесконечном контуре 6 66
Мошинский А. В. К рассеянию плоской электромагнитной волны на двух параллельных радиально неоднородных анизотропных плазменных цилиндрах . 4 12
Мошинский А. В. Дифракция цилиндрической электромагнитной волны на системе щелей в бесконечном идеально проводящем экране 5 41
Наумович Н. Ф. Исключительные случаи обобщенной краевой задачи Римана с сопряжением 4 60
Немцов В. Б., Брук-Левинсон Э. Г. К статистической теории вязкости асимметричных сред 6 89
Орлов Л. Н., Романов Г. С., Рубанов В. С. Влияние температуры газа на резонансную передачу энергии при атомных столкновениях 2 122
Пальцев А. А. О вычислении сфероидальных функций и их первых производных на ЭВМ. I 1 19
Пальчик Э. М., Конторович Н. П. О группах, все i-е максимальные подгруппы которых перестановочны с силовской подгруппой. II 3 51
Пикулик Л. Г., Костко М. Я., Яковенко В. А. О спектральной зависимости затухания свечения флуоресценций сложных молекул 2 89
Платонова В. И. К дифференциальной геометрии составного многообразия M_{32} в аффинном трехмерном пространстве 3 63
Платонова В. И., Тутаев Л. К. К дифференциальной геометрии составного многообразия M_{22} в аффинном трехмерном пространстве 2 51
Покало А. К. Об одном классе линейных методов суммирования рядов Фурье дифференцируемых функций 2 43
Потупа А. С. Узкорезонансная аппроксимация как необходимое условие «ядерной демократии» и адронный спектр масс 5 118
Потупа А. С., Стражев В. И., Томильчик Л. М. К проблеме магнитного заряда в электродинамике 1 89
Примачук Л. П. О разрешимости краевой задачи с обратным сдвигом Карлемана 1 43
Примачук Л. П. О разрешимости некоторых краевых задач со сдвигом Карлемана для системы n пар функций 3 34
Пыхтеев Г. Н. О квадратурных формулах для интегралов типа Коши по прямолинейному разомкнутому контуру и методах оценки их погрешности . 5 55
Пыхтеев Г. Н. О поведении некоторых особых интегралов на концах контура интегрирования 6 114
Пятроўскі І. І., Рэкун С. А., Меляшкевіч М. Ф. Уплыў тэмпературы і некаторых прымесей на электрычныя ўласцівасці германіевых дыёдаў з адмоўным супраціўленнем 2 96
Ратнікаў Э. В. Разліковыя характарыстыкі каранаючага слою . . . 5 106

Резников М. Я., Лапшин В. А., Лобач Н. Г. Установка для измерения электропроводности диэлектриков и полупроводников в сильных электрических полях 2 129
Рудак Э. А., Фирсов Е. И., Хильманович А. М. Спектры γ-лучей из реакции (n, γ) на тепловых нейтронах на ядрах ^{74}Se, ^{76}Se и ^{77}Se . . . 4 116
Русак В. Н. Сопряженные рациональные функции и оценки их производных 3 26
Рыжковский В. М., Сирота Н. Н. Нейтронографическое исследование плавления антимонида галлия 3 102
Рябушко А. П., Филипович К. С. Треугольная лагранжева задача для вращающихся тел в общей теории относительности 6 94
Салаўёў К. М., Спірычаў Ю. Я. Малекулярна-арбітальны разлік парфіну метадам ЛКАА 6 103
Сесія Агульнага сходу Акадэміі навук БССР 3 122
Сірата М. М., Галалобаў Я. М. Эксперыментальнае даследаванне структурных амплітуд у фасфідзе індыю 5 92
Сирота Н. Н., Афонская И. А., Корнилова Н. В. Показатель преломления германиево-свинцовоборатных стекол 5 121
Сирота Н. Н., Варикаш В. М. Диэлектрические свойства γ-облученных кристаллов триглицинселената и триглицинфторбериллата 5 124
Сирота Н. Н., Виткина Ц. З., Матяс Э. Е. Магнитная восприимчивость твердых растворов системы GaSb—GaAs 1 121
Сирота Н. Н., Сухвало С. В. Кривые намагничения и намагниченность насыщения тонких пленок сплавов системы Fe—Ni—Co 2 106
Сирота Н. Н., Шиманская В. П., Виткина Ц. З. Магнитная восприимчивость твердых растворов системы ZnS—CdS 1 123
Соколов И. А. О краевой задаче типа Римана для полианалитических функций на окружности 5 64
Соколов И. А. О краевой задаче типа Римана для бианалитических функций в случае произвольного контура 6 29
Сокольский А. А. Дифференциалы Ли и пробная релятивистская частица . 2 118
Сусурин Г. Э., Иваницкая О. С. К сопоставлению калибровки тетрад Брежнева — Радынова с другими калибровками 2 74
Толочко М. Э. О краевой задаче Римана с бесконечным индексом для полуплоскости 4 52
Третьякова Н. Н. Производящие функции для матричных элементов неприводимых унитарных представлений группы $SO(n)$ вращений n-мерного пространства 3 40
Третьякова Н. Н. Некоторые свойства матричных элементов неприводимых унитарных представлений группы $SO(n)$ 5 110
Урбанович С. И. Времена жизни возбужденных состояний позитрония в среде 3 109
Федоров Ф. И. Основное состояние атома гелия 5 87
Федоров Ф. И., Плетюхов В. А. Волновые уравнения с кратными представлениями группы Лоренца. Целый спин 6 81
Ханох Б. Ю. О расчете светового потока, отраженного тетраэдрической призмой 1 126
Харитонов В. В. К вопросу о решении некоторых задач теплопроводности, сводимых к обобщенному дифференциальному уравнению Бесселя . 5 50
Хоанг Динь Зунг. Об устойчивости обратной краевой задачи для многосвязной области 2 33
Хоанг Динь Зунг. О неустойчивости обратной смешанной краевой задачи . 4 47
Шац Э. М. Наилучшая кубатурная формула для одного класса функций . 5 72
Ширяев В. М. О полугруппе пар внутренних сдвигов полугруппы . . 4 99
Шнеперман Л. Б. Представления слабо равномерной связки групп операторами гильбертова пространства 1 63
Шнеперман Л. Б. Плотно вложенные идеалы топологических полугрупп . 6 19
Штокало И. З. Важные исследования по проблемам дифференциальных уравнений 2 7
Юбілейная сесія АН БССР 1 132
Яцкевіч З. П., Янголь А. У. Агульны сход Акадэміі навук БССР . . 2 135
Яцкевіч З. П., Янголь А. У. Акадэміі навук БССР — 40 год 2 134

ЗМЕСТ

МАТЭМАТЫКА

Л. Е. Загорин. Периодические группы вещественно-кватернионных матриц второй степени 5
В. С. Конюх. О максимальных разрешимых подгруппах вещественно-ортогональной группы 12
Л. Б. Шнеперман. Плотно вложенные идеалы топологических полугрупп . 19
В. А. Емеличев. Вогнутое программирование с сепарабельной функцией цели при линейных ограничениях 25
И. А. Соколов. О краевой задаче типа Римана для бианалитических функций в случае произвольного контура 29
В. Н. Абрашин. О схемах метода прямых повышенной точности . . . 39
О. А. Лисковец, Н. П. Феденко. О приближенном решении обратных задач теории потенциала 52
Н. П. Кеда. О возможности применения вариационных принципов для приближенного решения дифференциальных уравнений гиперболического типа с несколькими пространственными переменными 60
А. С. Моткин. О числе решений системы особых интегральных уравнений на бесконечном контуре 66
О. И. Маричев. Об уравнении смешанного типа с двумя линиями вырождения в несимметричной области 74

ФІЗІКА

Ф. И. Федоров, В. А. Плетюхов. Волновые уравнения с кратными представлениями группы Лоренца. Целый спин 81
В. Б. Немцов, Э. Т. Брук-Левинсон. К статистической теории вязкости асимметричных сред 89
А. П. Рябушко, К. С. Филипович. Треугольная лагранжева задача для вращающихся тел в общей теории относительности 94
К. М. Салаўёў, Ю. Я. Спірычаў. Малекулярна-арбітальны разлік парфіну метадам ЛКАА 103

КАРОТКІЯ ПАВЕДАМЛЕННІ

Л. Ф. Бабаева. К теории четырехугольной инволюции 110
Г. Н. Пыхтеев. О поведении некоторых особых интегралов на концах контура интегрирования 114
А. П. Богданов, А. В. Сорока, В. Н. Тадэуш, Е. И. Фирсов. Исследование спектров совпадений γ-лучей из реакции (n, γ) на изотопах $Se^{74, 76}$ 119
Л. Ф. Ильюшенко, Л. Г. Грибковская. Электроосажденные пленки тройных сплавов железо—никель—молибден 121
А. И. Комяк, В. П. Самодуров. Оптические постоянные кристаллов ураниловых соединений 125
Пералік артыкулаў, змешчаных у часопісе «Весці АН БССР», серыя фізіка-матэматычных навук, за 1969 г. 129

СОДЕРЖАНИЕ

МАТЕМАТИКА

Л. Е. Загорин. Периодические группы вещественно-кватернионных матриц второй степени 5
В. С. Конюх. О максимальных разрешимых подгруппах вещественно-ортогональной группы 12
Л. Б. Шнеперман. Плотно вложенные идеалы топологических полугрупп . 19
В. А. Емеличев. Вогнутое программирование с сепарабельной функцией цели при линейных ограничениях 25
И. А. Соколов. О краевой задаче типа Римана для бианалитических функций в случае произвольного контура 29
В. Н. Абрашин. О схемах метода прямых повышенной точности . . . 39
О. А. Лисковец, Н. П. Феденко. О приближенном решении обратных задач теории потенциала 52
Н. П. Кеда. О возможности применения вариационных принципов для приближенного решения дифференциальных уравнений гиперболического типа с несколькими пространственными переменными 60
А. С. Моткин. О числе решений системы особых интегральных уравнений на бесконечном контуре 66
О. И. Маричев. Об уравнении смешанного типа с двумя линиями вырождения в несимметричной области 74

ФИЗИКА

Ф. И. Федоров, В. А. Плетюхов. Волновые уравнения с кратными представлениями группы Лоренца. Целый спин 81
В. Б. Немцов, Э. Т. Брук-Левинсон. К статистической теории вязкости асимметричных сред 89
А. П. Рябушко, К. С. Филипович. Треугольная лагранжева задача для вращающихся тел в общей теории относительности 94
К. Н. Соловьев, Ю. Е. Спиричев. Молекулярно-орбитальный расчет порфина методом ЛКАО 103

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

Л. Ф. Бабаева. К теории четырехугольной инволюции 110
Г. Н. Пыхтеев. О поведении некоторых особых интегралов на концах контура интегрирования 114
А. П. Богданов, А. В. Сорока, В. Н. Тадэуш, Е. И. Фирсов. Исследование спектров совпадений γ-лучей из реакции (n, γ) на изотопах $Se^{74, 76}$ 119
Л. Ф. Ильюшенко, Л. Г. Грибковская. Электроосажденные пленки тройных сплавов железо—никель—молибден 121
А. И. Комяк, В. П. Самодуров. Оптические постоянные кристаллов ураниловых соединений 125
Перечень статей, опубликованных в журнале «Известия АН БССР», серия физико-математических наук, за 1969 г. 129

АТ 02280. Здадзена ў набор 20/X-69 г. Падпісана да друку 16/XII-69 г. Фармат 70×108¹/₁₆. Друк. арк. 8,75. Ум. друк. арк. 12,25. Уч.-выд. арк. 12,0. Выд. зак. 1090. Друк. зак. 1013. Цана 60 кап.

Друкарня імя Францыска (Георгія) Скарыны выдавецтва «Навука і тэхніка» АН БССР і Дзяржкамітэта СМ БССР па друку. Мінск, Ленінскі праспект, 68

ВЕСЦІ АКАДЭМІІ НАВУК БЕЛАРУСКАЙ ССР № 6 1969
СЕРЫЯ ФІЗІКА-МАТЭМАТЫЧНЫХ НАВУК

РЕФЕРАТЫ

УДК 512.94

Периодические группы вещественно-кватернионных матриц второй степени. Загорин Л. Е. «Весці Акадэміі навук БССР», серыя фізіка-матэматычных навук. 1969 г., № 6, 5—11.

Дается описание всех максимальных периодических подгрупп полной линейной группы второй степени GL (2, Q) над телом вещественных кватернионов Q (с точностью до сопряженности в полной линейной группе). В GL (2, Q) имеется точно 12 попарно несопряженных максимальных периодических подгрупп.

Библиографий 7.

УДК 512.86

О максимальных разрешимых подгруппах вещественно-ортогональной группы. Конюх В. С. «Весці Акадэміі навук БССР», серыя фізіка-матэматычных навук. 1969 г., № 6, 12—18.

Пусть D — поле действительных чисел, а $O(n)$ — группа всех вещественно-ортогональных $n \times n$-матриц. Подгруппу H группы $GL(n, D)$ будем называть OR-подгруппой, если H сопряжена в $GL(n, D)$ с некоторой максимальной разрешимой подгруппой группы $O(n)$.

В заметке показано, что все OR-подгруппы, содержащиеся в максимальной неприводимой разрешимой подгруппе Г группы $GL(n, D)$, сопряжены в Г. Указан способ построения OR-подгруппы, содержащейся в заданной максимальной разрешимой неприводимой погруппе $GL(n, D)$. Найдены необходимые и достаточные условия, которым должна удовлетворять максимальная разрешимая неприводимая подгруппа $GL(n, D)$, содержащая OR-подгруппы.

Библиографий 8.

УДК 519.46

Плотно вложенные идеалы топологических полугрупп. Шнеперман. Л. Б. «Весці Акадэміі навук БССР», серыя фізіка-матэматычных навук. 1969 г., № 6, 19—24.

Основные результаты теории плотно вложенных идеалов, принадлежащие Е. С. Ляпину и Л. М. Глускину, переносятся на топологические полугруппы.

Библиографий 5.

УДК 519.95

Вогнутое программирование с сепарабельной функцией цели при линейных ограничениях. Емеличев В. А. «Весці Акадэміі навук БССР», серыя фізіка-матэматычных навук. 1969 г., № 6, 25—28.

Предлагается метод решения задачи минимизации суммы $F(X) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x_i)$ вогнутых функций $f_i(x_i)$ на выпуклом ограниченном многограннике $D \subset R^{(n)}$.

Идея метода состоит в том, что вершины многогранника D последовательно перебираются в порядке неубывания вспомогательной линейной формы $L(X) \leqslant F(X)$ до выполнения критерия оптимальности.

Библиографий 6.

УДК 517.948.32

О краевой задаче типа Римана для бианалитических функций в случае произвольного контура. Соколов И. А. «Весці Акадэміі навук БССР», серыя фізіка-матэматычных навук. 1969 г., № 6, 29—38.

Рассматривается задача нахождения бианалитической функции по краевому условию

$$\Delta^k F^+(t, \overline{t}) = G_k(t)\Delta^k F^-(t, \overline{t}) + g_k(t) \quad (k = 0, 1)$$

(Δ — оператор Лапласа) на L, где L — произвольный простой кусочно-гладкий замкнутый контур. На основе представления бианалитической функции через аналитические данная задача сводится к двум задачам Римана для аналитических функций. Это позволяет установить, что число линейно независимых решений зависит не только от индексов коэффициентов $G_k(t)$, но и от вида самого контура. Решение дается в замкнутой форме.

Иллюстраций 1. Библиографий 2.

УДК 518 : 517(944)947

О схемах метода прямых повышенной точности. Абрашин В. Н. «Весці Акадэміі навук БССР», серыя фізіка-матэматычных навук. 1969 г., № 6, 39—51.

Работа является продолжением статьи (РЖ Мат, 1969 г., 1Б764). Рассматривается метод прямых в применении к решению некоторых краевых задач для дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка для параболических, гиперболических и эллиптических уравнений. Строятся многослойные схемы метода прямых повышенной точности. Доказывается сходимость и даются оценки погрешности этих схем. Указывается критерий, с помощью которого можно судить о сходимости довольно широкого класса схем метода прямых.

Библиографий 6.

УДК 517.947.42

О приближенном решении обратных задач теории потенциала. Лисковец О. А., Феденко Н. П. «Весці Акадэміі навук БССР», серыя фізіка-матэматычных навук. 1969 г., № 6, 52—59.

Отыскание плотности распределенных на круге зарядов сводится при помощи метода квазирешений к нахождению конечного числа точечных зарядов. Если искомое распределение зарядов непрерывно, то метод обеспечивает сильную аппроксимацию и приводит к задаче выпуклого или квадратичного программирования. При квадратично суммируемом искомом распределении аппроксимация слабая и применим, кроме названных, метод неопределенных множителей (в частности, даны подробные доказательства к работе О. А. Лисковца (РЖМат., 1967, 7Б495). Методы устойчивы к измерительным и вычислительным погрешностям.

Библиографий 7.

УДК 518 : 517(944)947

О возможности применения вариационных принципов для приближенного решения дифференциальных уравнений гиперболического типа с несколькими пространственными переменными. Кеда Н. П. «Весці Акадэміі навук БССР», серыя фізіка-матэматычных навук. 1969 г., № 6, 60—65.

Показана возможность применения вариационных принципов для понижения размерности задач для гиперболических уравнений с числом переменных больше двух на примере смешанной задачи для уравнения

$$u_{t^2} = (au_x)_x + (bu_y)_y + f(x, y, t).$$

Для этой задачи строится дифференциально-разностная схема и доказывается ее сходимость.

Библиографий 3.

УДК 517.948.32

О числе решений системы особых интегральных уравнений на бесконечном контуре. Моткин А. С. «Весці Акадэміі навук БССР», серыя фізіка-матэматычных навук. 1969 г., № 6, 66—73.

Даются условия разрешимости и решение системы особых интегральных уравнений

$$a(t)\,\varphi(t) + \frac{b(t)}{\pi i}\int_{\Gamma}\frac{\varphi(\tau)}{\tau - t}\,d\tau = f(t)$$

на замкнутом контуре, простирающемся в бесконечность.

Библиографий 4.

УДК 517.946

Об уравнении смешанного типа с двумя линиями вырождения в несимметричной области. Маричев О. И. «Весці Акадэміі навук БССР», серыя фізіка-матэматычных навук. 1969 г., № 6, 74—80.

Изучается краевая задача для уравнения

$$u_{xx} + \operatorname{sign}(xy)\,u_{yy} = 0$$

в случае несимметричной полубесконечной области, заключающей внутри себя отрезки линий вырождения $x=0$, $y=0$. Попутно рассматривается метод решения систем сингулярных уравнений, обобщающих полученную в этой задаче систему.

Библиографий 4. Иллюстраций 1.

УДК 539.12

Волновые уравнения с кратными представлениями группы Лоренца. Целый спин. Федоров Ф. И., Плетюхов В. А. «Весці Акадэміі навук БССР», серыя фізіка-матэматычных навук. 1969 г., № 6, 81—88.

Дано общее рассмотрение вопроса о структуре матриц релятивистских волновых уравнений первого порядка для случая целого спина, для которых набор представлений группы Лоренца содержит повторяющиеся представления. Исследуется вопрос о приведении матриц указанных уравнений с помощью допустимых преобразований базиса пространства волновой функции к наиболее простому виду. Проанализированы случаи распадения этих уравнений.

Библиографий 9.

УДК 539.55+539.6

К статистической теории вязкости асимметричных сред. Немцов В. Б., Брук-Левинсон Э. Т. «Весці Акадэміі навук БССР», серыя фізіка-матэматычных навук. 1969 г., № 6, 89—93.

В рамках формализма Кубо развивается статистическая теория вязких свойств произвольной анизотропной среды с моментными напряжениями. Получены выражения через временные корреляционные функции для четырех тензоров коэффициентов вязкости.

Библиографий 8.

УДК 530.12

Треугольная лагранжева задача для вращающихся тел в общей теории относительности. Рябушко А. П., Филипович К. С. «Весці Акадэміі навук БССР», серыя фізіка-матэматычных навук. 1969 г., № 6, 94—102.

Проинтегрированы в посленьютоновом приближении уравнения поступательного движения ограниченной плоской круговой задачи трех вращающихся тел в случае, когда в ньютоновой теории берется треугольное решение Лагранжа. Найденные общие решения показывают, что движение вращающихся тел относительно ряда ньютоновых величин является неустойчивым. Обнаружены новые эффекты, такие, как вековые изменения орбитальных моментов импульса (что приводит к прецессиям плоскостей орбит тел), вековые изменения угла поворота радиус-векторов тел при их движении по орбите и другие.

Полученные результаты могут найти приложения в небесной механике и астрофизике.

Библиографий 14.

УДК 539.19

Молекулярно-орбитальный расчет порфина методом ЛКАО. Соловьев К. Н., Спиричев Ю. Е. «Весці Акадэміі навук БССР», серыя фізіка-матэматычных навук. 1969 г., № 6, 103—109.

Выполнен молекулярно-орбитальный расчет порфинового кольца симметрии D_{4h} методом ЛКАО в приближении Хюккеля с учетом зависимости резонансных интегралов β_{rs} от длины связей (по рентгеноструктурным данным). Показано, что при таком естественном выборе эмпирических параметров имеет место случайное вырождение верхних заполненных МО $1a_{1u}$ и $3a_{2u}$, постулируемое в так называемой четырехорбитальной модели электронных состояний порфинового кольца. Тем самым получено некоторое обоснование упомянутой модели. На основании ЛКАО расчета определены π-электронные заряды и порядки связей; с учетом конфигурационного взаимодействия рассчитано положение полос электронного поглощения. Результаты расчета удовлетворительно согласуются с экспериментальными рентгеноструктурными и спектроскопическими данными.

Таблиц 3. Иллюстраций 3. Библиографий 16.

УДК 513.015.2

К теории четырехугольной инволюции. Бабаева Л. Ф. «Весці Акадэміі навук БССР», серыя фізіка-матэматыч- навук. 1969 г., № 6, 110—113.

Дается аксиоматическое построение теории квадратной инволюции независимо от проективного соответствия.

Иллюстраций 3. Библиографий 4.

УДК 517.948.3

О поведении некоторых особых интегралов на концах контура интегрирования. Пыхтеев Г. Н. «Весці Акадэміі навук БССР», серыя фізіка-матэматычных навук. 1969 г., № 6, 114—118.

Даются оценки сверху абсолютной величины сингулярного интеграла

$$I(x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{\pi} \int_{-1}^{1} \frac{f(t)}{t-x} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}, \quad x \in [-1, 1],$$

учитывающие порядок его нуля в точках $x = \pm 1$, в случае, когда функция $f(x)$ непрерывно дифференцируема с весом $(1 \pm x)^{\alpha}$, $0 < a < 1$. Полученные оценки имеют вид

$$|I(x)| \leqslant A (1 \pm x)^{\sigma} \|f\|_{\alpha},$$

где A, σ — постоянные, зависящие от α, а

$$\|f\|_{\alpha} = \max_{x} |(1 \pm x)^{\alpha} f'(x)|, \quad x \in [-1, 1].$$

Библиографий 1.

УДК 539.17

Исследование спектров совпадений γ-лучей из реакции (n, γ) на изотопах $Se^{74, 76}$. Богданов А. П., Сорока А. В., Тадэуш В. Н., Фирсов Е. И. «Весці Акадэміі навук БССР», серыя фізіка-матэматычных навук. 1969 г., № 6, 119—120.

С помощью сцинтилляционного спектрометра совпадений исследованы каскадные γ-переходы, сопровождающие захват тепловых нейтронов ядрами Se^{74} и Se^{76}.

Таблиц 2. Библиографий 6.

УДК 539.216.22 : 546.72'74'77

Электроосажденные пленки тройных сплавов железо — никель — молибден. Ильюшенко Л. Ф., Грибковская Л. Г. «Весці Акадэміі навук БССР», серыя фізіка-матэматычных навук. 1969 г., № 6, 121—124.

Исследована зависимость химического состава Fe—Ni—Mo электроосажденных пленок и их магнитных характеристик от состава ванны, pH электролита и катодной плотности тока. Пленки толщиною 3000 Å осаждались на медную электрополированную фольгу в магнитном поле напряженностью 100 *э*, при pH ≈ 4 и плотности тока 6 *ма/см²*. С увеличением концентрации молибдата натрия от 1 до 4 *г/л* количество молибдена в пленке растет практически линейно, содержание никеля сначала уменьшается, а затем растет, содержание железа сначала постоянно, а затем уменьшается. Наименьшей коэрцитивной силой 0,7—1,0 *э* обладали пленки, содержащие ~5—6% Mo. Внутренние напряжения увеличиваются с увеличением концентрации $Na_2MoO_4 \cdot 2H_2O$, а с ростом толщины уменьшаются.

Иллюстраций 3. Библиографий 12.

УДК 548.0 : 535

Оптические постоянные кристаллов ураниловых соединений. Комяк А. И., Самодуров В. П. «Весці Акадэміі навук БССР», серыя фізіка-матэматычных навук. 1969 г., № 6, 125—128.

Измерены оптические постоянные двенадцати искусственно полученных кристаллов ураниловых соединений. Измерения произведены иммерсионным методом на поляризационном микроскопе МИН-8. Наблюдается большое разнообразие оптических свойств кристаллов ураниловых соединений. Наибольшим двупреломлением (0,183) обладают кристаллы нитратов уранила, а наименьшим (0,004) кристаллы хлоридов уранила. Среди изученных встречаются как кристаллы средних, так и низших сингоний. Угол между оптическими осями колеблется в больших пределах от 30 до 74°. Дисперсия оптических осей незначительна. Разнообразие свойств кристаллов ураниловых соединений обусловлено строением координационной сферы иона уранила и расположением молекул в элементарной ячейке кристалла.

Таблиц 1. Иллюстраций 2. Библиографий 5.

ПРАВИЛА ДЛЯ АВТОРОВ

1. Статьи должны быть написаны на машинке через два интервала на одной стороне листа и представляться в двух экземплярах.

2. Формулы и буквенные обозначения должны быть аккуратно вписаны от руки чернилами. Для формул, выделенных в отдельную строку, следует оставлять достаточные пробелы в тексте. Греческие буквы должны быть обведены красным карандашом. Буквы, вписанные от руки, в формулах и в тексте должны подчеркиваться простым карандашом: прописные — двумя черточками снизу (напр., $\underline{\underline{S}}$), строчные — двумя черточками сверху (напр., $\overline{\overline{s}}$). Следует различать буквы *O* (прописную), *o* (строчную) и 0 (нуль), для чего буквы *O* и *o* подчеркивать двумя черточками, а нуль отмечать квадратной скобкой снизу ($\underline{\underline{O}}$, $\underline{\underline{o}}$, $\underline{0}$). Следует также различать буквы $\overline{\overline{\text{I}}}$ и J (йот), для чего I писать, как римскую единицу, подчеркивая ее двумя черточками снизу. Векторы подчеркивать чернилами одной чертой снизу. Математические символы cos, sin, lg и др., набираемые прямым шрифтом, и химические символы элементов (H, N, Cl, Fe и т. д.) отмечаются простым карандашом квадратной скобкой снизу ($\underline{\sin}$, $\underline{\lg}$, $\underline{\text{N}}$, $\underline{\text{Cl}}$). Показатели степени и индексы, а также надстрочные знаки отмечаются дугой $\smile$ (для верхнего индекса) или $\frown$ (для нижнего).

3. В связи с введением с 1 января 1963 г. Международной системы единиц измерения (СИ) размерность всех величин, принятых в статьях, должна соответствовать указанной системе единиц измерения.

4. Цитируемая в статье литература должна даваться автором не в виде подстрочных сносок, а общим списком в конце статьи с обозначением ссылки в тексте порядковой цифрой в квадратных скобках. Список литературы должен быть оформлен следующим образом:

а) для книг: фамилия и инициалы автора, полное название книги, номер тома, место и год издания;

б) для журнальных статей: фамилия и инициалы автора, название журнала, номер тома (подчеркнуть), номер выпуска, страница и год.

Ссылки на неопубликованные работы не допускаются.

5. Рисунки должны быть выполнены на белой бумаге тушью размером 15×20 *см*; надписи на рисунках не делать. Все обозначения указывать в тексте подрисуночных подписей. К статье прилагается список с номерами рисунков и текстом подрисуночных подписей. В тексте на полях обязательно указывается место для рисунков и таблиц.

Таблицы и список литературы печатаются на отдельных листах и прилагаются в конце статьи. Фотографии должны иметь контрастное изображение и быть отпечатаны на хорошей бумаге размером не менее 9×12 *см*. На обороте рисунков должны быть указаны фамилия автора, название статьи и номер рисунка.

6. В случае представления двух или более статей одновременно необходимо указывать желательный порядок их помещения.

7. Авторы должны избегать повторения одних и тех же данных в таблицах, графиках и в тексте статьи.

8. К статье обязательно прилагается 2 экз. реферата.

9. Корректуры статей авторам, как правило, не посылаются. В случае посылки корректуры допускается лишь исправление ошибок типографии.

Корректура должна возвращаться в редакцию не позже, чем на следующий день после получения ее автором. Невозвращение корректуры в срок не приостанавливает печатания статьи.

10. В случае возвращения статьи автору для исправления или при ее сокращении датой представления считается день получения редакцией окончательного текста.

2395

60 к.

Индекс
74846