

30к-2
58

70 64 144

ВЕСЦІ

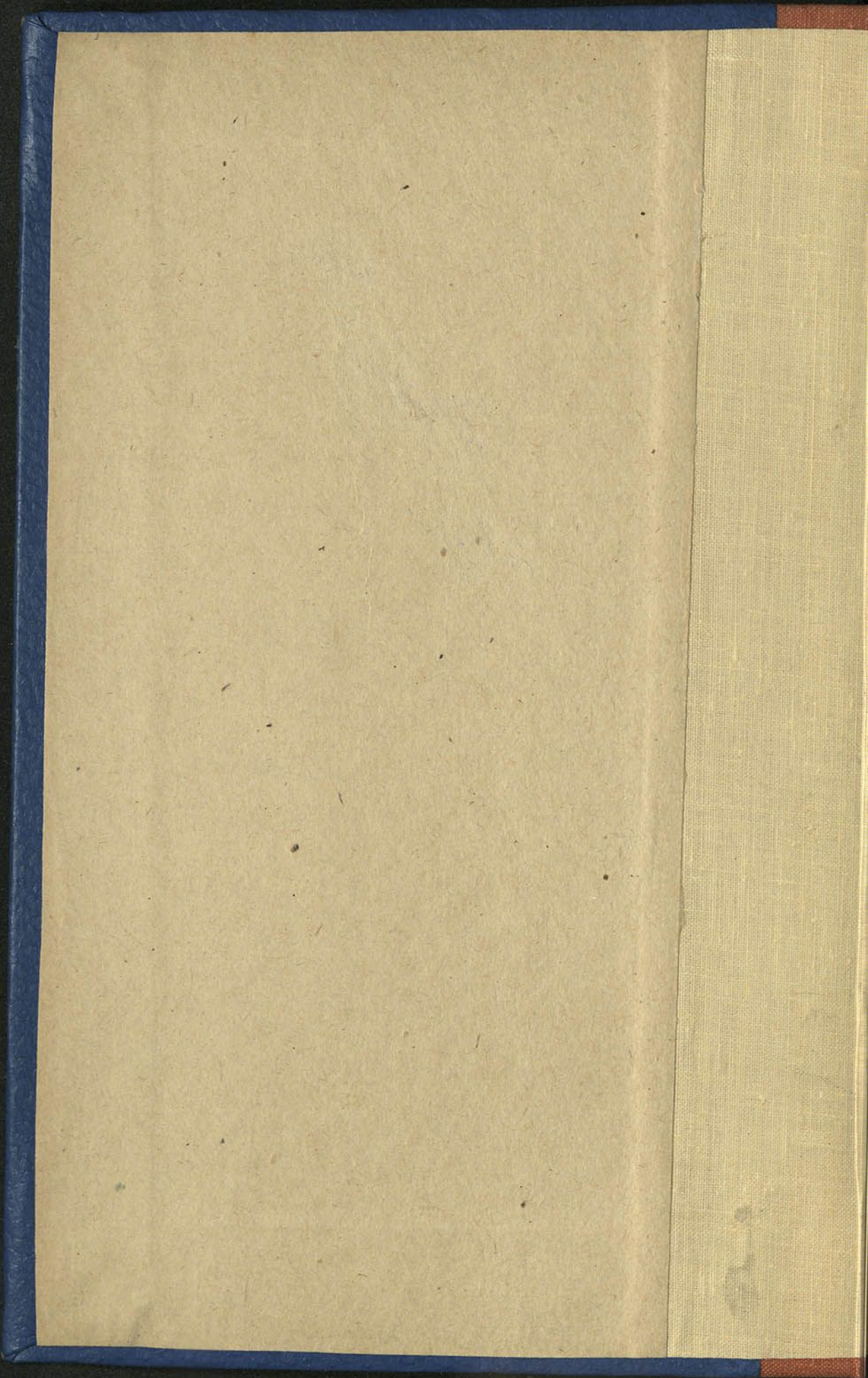
АКАДЭМІІ НАВУК БССР

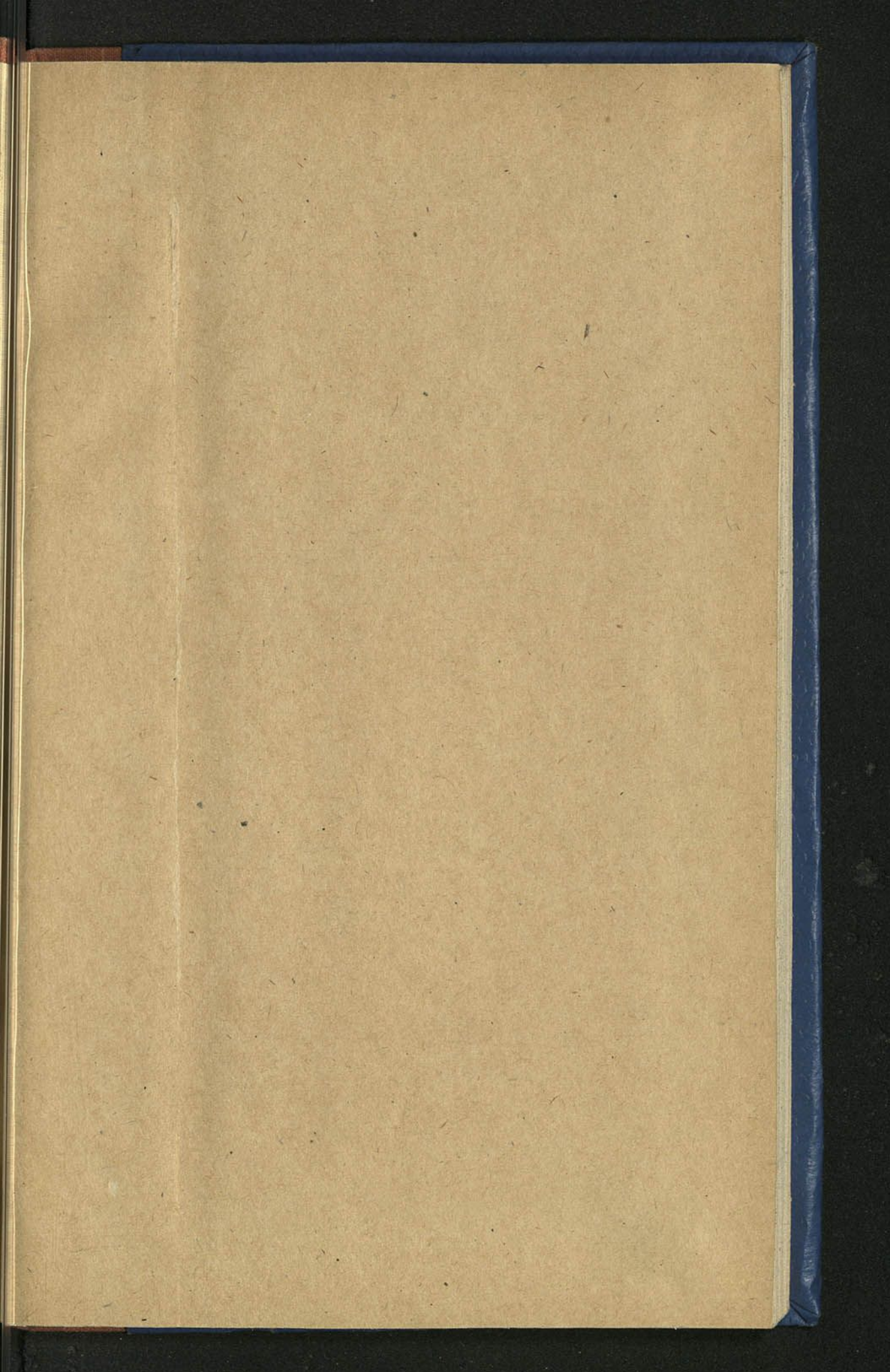
СЕРЫЯ
ФІЗІКА-МАТЭМАТЫЧНЫХ
НАВУК

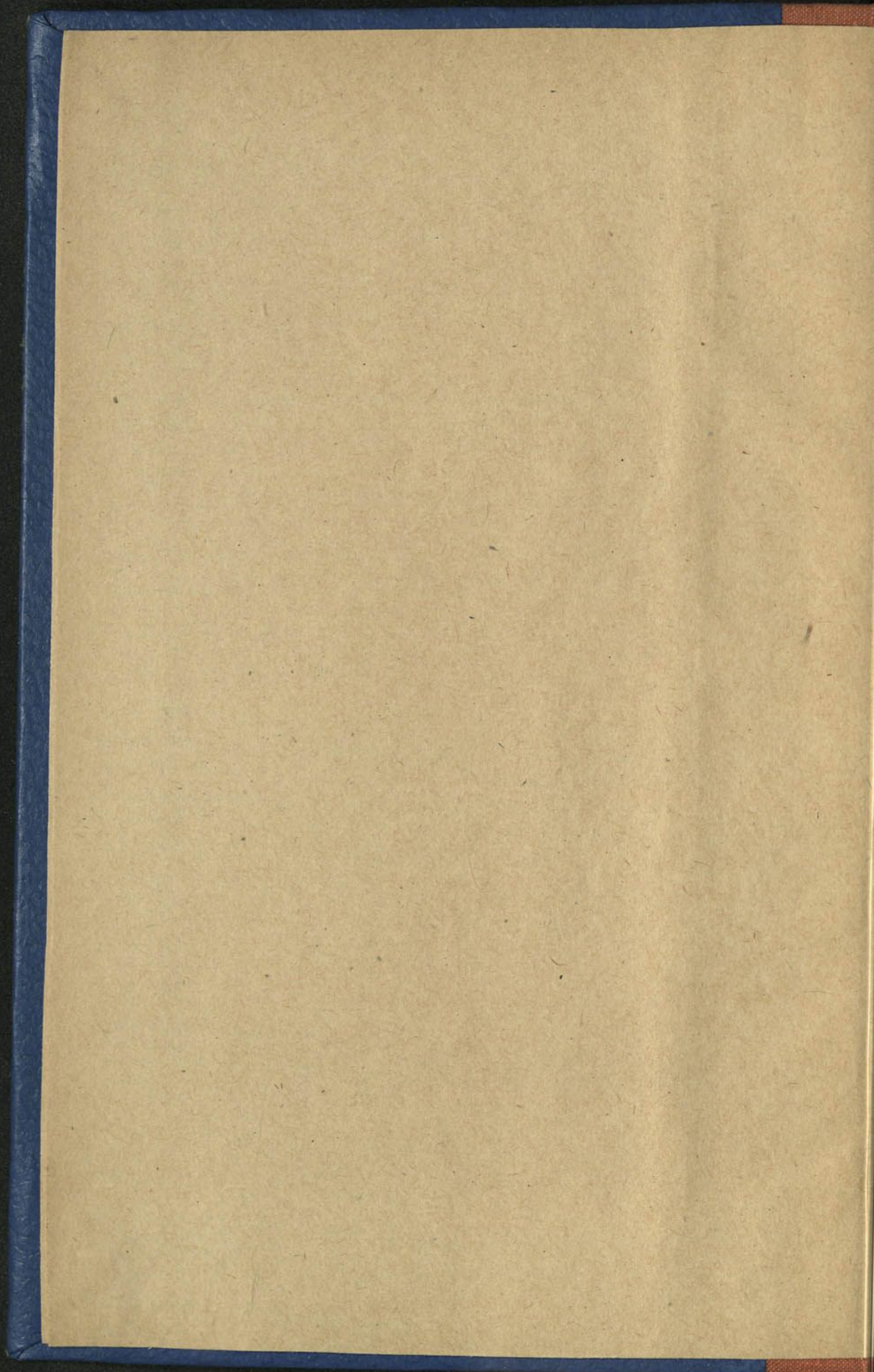
1

ВЫДАВЕЦТВА „НАВУКА І ТЭХНІКА“

МІНСК 1970







101



ИЗВЕСТИЯ

АКАДЕМИИ НАУК БССР

СЕРИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ
НАУК

№ 1

ИЗДАТЕЛЬСТВО „НАУКА И ТЕХНИКА“

МИНСК 1970

70 64, 1445

ВЕСЦІ

АКАДЭМІІ НАВУК БССР

30К-2
58

СЕРЫЯ
ФІЗІКА-МАТЭМАТЫЧНЫХ
НАВУК

№ 1

ВЫДАВЕЦТВА „НАВУКА І ТЭХНІКА“

МІНСК 1970



Ба 4430

Рэдакцыйная калегія:

Ф. І. ФЕДАРАУ (галоўны рэдактар),
Д. А. СУПРУНЕНКА (нам. галоўнага рэдактара),
М. М. АЛЯХНОВІЧ, Ф. Д. ГАХАУ, У. І. КРЫЛОУ,
М. М. СІРАТА, У. Г. СПРЫНДЖУК, Я. І. ФІРСАУ,
С. А. ЧУНІХІН

В. Г. СПРИНДЖУК

**О ПРЕДСТАВЛЕНИИ ЦЕЛЫХ ЧИСЕЛ
 ОГРАНИЧЕННЫМ ЧИСЛОМ СЛУЧАЙНЫХ СЛАГАЕМЫХ**

Пусть A — бесконечная последовательность натуральных чисел. Следуя Л. Г. Шнирельману [5], назовем A базисом натурального ряда чисел, если существует такое g , что каждое натуральное число можно представить суммой не более g слагаемых из A . Например, любое натуральное число можно представить суммой не более четырех квадратов, не более девяти кубов и т. д. Вообще для фиксированного целого $k \geq 2$ существует $g(k)$ такое, что любое натуральное число представляется суммой не более $g(k)$ k -х степеней натуральных чисел. Это известная теорема Гильберта [6], в 1770 г. высказанная Варингом в качестве гипотезы.

В 1956 г. Л. Карлесон [7] доказал следующую теорему. Пусть $D = \{d_1, d_2, \dots\}$ — последовательность натуральных чисел, R — множество всех последовательностей $R = \{r_1, r_2, \dots\}$ натуральных чисел, подчиненных условию $0 \leq r_n < d_n$ ($n = 1, 2, \dots$). Каждой последовательности $R \in R$ поставим в соответствие число $\alpha(R)$:

$$R \rightarrow \alpha(R) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r_n}{d_1 d_2 \dots d_n}, \quad 0 \leq \alpha(R) < 1. \quad (1)$$

Отображение $R \rightarrow \alpha(R)$ индуцирует меру на некоторой σ -алгебре подмножеств R (подмножество R считаем измеримым, если его образ измерим по Лебегу). Карлесон установил, что если $\ln d_n$ — выпуклая функция от $\ln n$, то в случае, когда предел отношения $\ln d_n / \ln n$ ($n \rightarrow \infty$) существует и конечен, почти все последовательности из R — базисы натурального ряда чисел. Если же предел отношения $\ln d_n / \ln n$ бесконечен, то в R почти нет базисов натурального ряда чисел («почти все», «почти нет» — в смысле указанной меры).

В этой статье дается метод доказательства подобных (и других) теорем для множеств последовательностей натуральных чисел, более тонко устроенных, чем множество R Карлесона.

Пусть $A^* = \{a_1^*, a_2^*, \dots\}$ — последовательность возрастающих натуральных чисел, A — множество всех последовательностей $A = \{a_1, a_2, \dots\}$ натуральных чисел a_n , подчиненных условию $a_n = a_n^* + r_n$, $0 \leq r_n < d_n$, где d_n определены равенствами $d_n = a_{n+1}^* - a_n^*$ ($n = 1, 2, \dots$). Отображение (1) индуцирует меру Лебега на некоторой σ -алгебре подмножеств A .

Мы укажем простые условия для A^* , при которых почти все последовательности из A являются базисами натурального ряда чисел (теорема 1), а также приведем асимптотическую формулу для числа представлений натуральных чисел заданным числом слагаемых из «случайно взятой» последовательности $A \in A$ (теорема 2). В частности, если $A^* = \{1, 2^k, 3^k, \dots\}$ — по-

следовательность k -х степеней натуральных чисел, $k \geq 1$ — целое, A — множество последовательностей натуральных чисел a_n вида

$$n^k \leq a_n < (n+1)^k \quad (n = 1, 2, \dots),$$

то для почти всех $A \in A$ число решений уравнения

$$x = x_1 + x_2 + \dots + x_m, \quad x_i \in A \quad (i = 1, 2, \dots, m)$$

равно

$$\frac{\Gamma^m \left(1 + \frac{1}{k} \right)}{\Gamma \left(\frac{m}{k} \right)} x^{\frac{m}{k} - 1} + O \left(x^{\frac{m}{k} - 1 - \frac{1}{2k} + \varepsilon} \right),$$

$\varepsilon > 0$, если только $m \geq 2k + 1$. Этот результат интересно сравнить с известной формулой Харди—Литлвуда—Виноградова [1, 4] о представлении чисел суммой k -х степеней.

Применяемый нами метод основан на использовании тригонометрических сумм в стиле И. М. Виноградова [1, 4], причем основную роль играет лемма 3.

Темы и результаты этой статьи в 1957—1958 гг. были предметом переписки между автором (студентом Белорусского университета) и профессором Й. Кубилюсом, которому автор выражает свою сердечную благодарность за руководство его работой в те годы.

1. Леммы

Лемма 1а. Пусть $f(u)$ — вещественная непрерывная на (a, b) функция с положительной неубывающей кусочно-непрерывной производной. Тогда

$$\left| \int_a^b e^{if(u)} du \right| \leq 2\sqrt{2} \inf_{a < \xi < b} \left(\xi - a + \frac{1}{f'(\xi +)} \right).$$

Доказательство. Для любого ξ , $a < \xi < b$, имеем

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \int_a^b e^{if(u)} du &= \operatorname{Re} \int_a^{\xi} e^{if(u)} du + \operatorname{Re} \int_{\xi}^b e^{if(u)} du, \\ \int_{\xi}^b \cos f(u) du &= \frac{1}{f'(\xi +)} \int_{\xi}^{\xi_1} f'(u) \cos f(u) du = \frac{\sin f(\xi_1) - \sin f(\xi)}{f'(\xi +)}. \end{aligned}$$

Рассматривая аналогично мнимую часть интеграла, приходим к утверждению леммы.

Лемма 1б. Пусть на (a, b) определена неотрицательная функция $f(u)$, удовлетворяющая условиям леммы 1а. Обозначим через $\varphi(v)$ функцию, обратную к $f = f(u)$. Тогда имеем для любого вещественного числа α

$$\left| \int_a^b e^{2\pi i \alpha f(u)} du \right| \leq \begin{cases} b - a, & \text{если } |\alpha| \leq (f(b) - f(a))^{-1}, \\ 4\varphi(|\alpha|^{-1} + f(a)), & \text{если } |\alpha| > (f(b) - f(a))^{-1}. \end{cases}$$

Доказательство. Если

$$|\alpha| > \frac{1}{f(b) - f(a)},$$

то существует ξ , удовлетворяющее уравнению

$$|\alpha| (f(\xi) - f(a)) = 1, \quad a < \xi < b,$$

именно

$$\xi = \varphi \left(\frac{1}{|\alpha|} + f(a) \right).$$

Теперь

$$\frac{1}{2\pi |\alpha| f'(\xi +)} \leq \frac{\xi - a}{2\pi |\alpha| (f(\xi) - f(a))} = \frac{\xi - a}{2\pi}.$$

Далее применяем лемму 1а.

Лемма 2. Для числа $L_q(n)$ решений в целых числах уравнения

$$v_1 + v_2 + \dots + v_n = 2q, \quad v_i \neq 1, \quad v_i \geq 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

имеем оценку

$$L_q(n) < \frac{n^q}{q!} \left(1 + \frac{(2q)^q}{n} \right).$$

Доказательство. Очевидно, $L_q(n)$ равно коэффициенту при x^{2q} в выражении

$$\begin{aligned} (1 + x^2 + x^3 + \dots)^n &= \left(1 + \frac{x^2}{1-x} \right)^n = \sum_{r=0}^n \binom{n}{r} x^{2r} (1-x)^{-r} = \\ &= 1 + \sum_{r=1}^n \binom{n}{r} x^{2r} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-r}{k} x^k \quad (|x| < 1). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} L_q(n) &= \sum_{r=1}^q \binom{n}{r} \binom{2q-r-1}{r-1} < \\ &< \frac{n^q}{q!} + \sum_{r=1}^{q-1} \frac{(2q)^{r-1}}{(r-1)!} \frac{n^{r-q}}{r!} < \frac{n^q}{q!} \left(1 + \frac{(2q)^q}{n} \right). \end{aligned}$$

Лемма 3. Пусть дано n натуральных чисел d_k ($k = 1, 2, \dots, n$) и пусть на интервале (a, b) определены измеримые комплексные функции $f_k(\alpha; r_k)$ переменной α , где r_k — целые числа, $0 \leq r_k < d_k$, при этом пусть $|f_k(\alpha; r_k)| \leq \mu$ для всех α, r_k, k . Пусть далее $F(\alpha)$ — неубывающая функция с ограниченным изменением $V(F)$ на (a, b) . Положим

$$f_k^*(\alpha) = d_k^{-1} \sum_{r=0}^{d_k-1} f_k(\alpha; r),$$

$$\gamma_k(\alpha; r_k) = f_k(\alpha; r_k) - f_k^*(\alpha).$$

При заданном вещественном числе $\psi > 0$ определим для данного множества (r_1, r_2, \dots, r_n) множество тех $\alpha \in (a, b)$, для которых

$$\left| \sum_{k=1}^n \gamma_k(\alpha; r_k) \right| > \psi \sqrt{n}.$$

Обозначим это множество $\Delta = \Delta_\psi(r_1, \dots, r_n)$ и положим

$$I_\psi(r_1, \dots, r_n) = \int_{\Delta} dF(\alpha).$$

Тогда для произвольного $\lambda > 0$ и любого натурального q имеем

$$(d_1 \dots d_n)^{-1} N \{ I_\psi(r_1, \dots, r_n) > \lambda \} < \frac{V(F)}{\lambda} \left(2\sqrt{q} \frac{\mu}{\psi} \right)^{2q} \left(1 + \frac{(2q)^q}{n} \right), \quad (2)$$

где $N\{\dots\}$ означает число выполнений неравенства, указанного в скобках. Доказательство. Имеем

$$\begin{aligned} & (d_1 \dots d_n)^{-1} n^q \psi^{2q} \sum_{r_1, \dots, r_n} I_\psi(r_1, \dots, r_n) < \\ & < (d_1 \dots d_n)^{-1} \int_a^b \sum_{r_1} \dots \sum_{r_n} \left| \sum_{k=1}^n \gamma_k(\alpha; r_k) \right|^{2q} dF(\alpha). \end{aligned} \quad (3)$$

Далее

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{k=1}^n \gamma_k(\alpha; r_k) \right|^{2q} = \\ & = \sum_{k_1 < n} \dots \sum_{k_q < n} \sum_{l_1 < n} \dots \sum_{l_q < n} \gamma_{k_1}(\alpha; r_{k_1}) \dots \gamma_{k_q}(\alpha; r_{k_q}) \times \\ & \quad \times \bar{\gamma}_{l_1}(\alpha; r_{l_1}) \dots \bar{\gamma}_{l_q}(\alpha; r_{l_q}). \end{aligned}$$

Так как

$$\sum_{r_k < d_k} \gamma_k(\alpha; r_k) = \sum_{r_k < d_k} \bar{\gamma}_k(\alpha; r_k) = 0,$$

то сумма

$$\sum_{r_1} \dots \sum_{r_n} \gamma_{k_1} \dots \gamma_{k_q} \bar{\gamma}_{l_1} \dots \bar{\gamma}_{l_q}$$

будет равна нулю, когда среди чисел $k_1, \dots, k_q, l_1, \dots, l_q$ найдется хотя бы одно, не совпадающее ни с каким из остальных. В противном случае эта сумма не превосходит по абсолютной величине суммы вида

$$\sum_{r_1} \dots \sum_{r_r} |\gamma_{p_1}|^{\lambda_1} \dots |\gamma_{p_r}|^{\lambda_r},$$

где $p_i \neq p_j$ для $i \neq j$, λ_i — целые числа, удовлетворяющие условиям

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_r = 2q, \quad \lambda_i > 1, \quad r \leq q \quad (i, j = 1, 2, \dots, r).$$

Поэтому заключаем, что правая часть (3) не превосходит величины

$$(d_1 \dots d_n)^{-1} \sum_{r_1} \dots \sum_{r_n} \sum' \frac{(2q)!}{v_1! v_2! \dots v_n!} (2\mu)^{2q} V(F), \quad (4)$$

где штрих над знаком суммы указывает, что суммирование распространяется лишь на те v_i , которые удовлетворяют условиям

$$v_1 + v_2 + \dots + v_n = 2q, \quad v_i \neq 1, \quad v_i \geq 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Следовательно, по лемме 2 находим, что (4) не превосходит величины

$$\begin{aligned} & \frac{(2q)!}{2^q} (2\mu)^{2q} V(F) L_q(n) < \\ & < n^q V(F) (2\sqrt{q}\mu)^{2q} \left(1 + \frac{(2q)^q}{n}\right). \end{aligned} \quad (5)$$

Так как

$$\lambda N \{I_\psi(r_1, \dots, r_n) > \lambda\} < \sum_{r_1, \dots, r_n} I_\psi(r_1, \dots, r_n),$$

то из неравенств (3), (5) следует (2).

Лемма 4 а. Пусть $A^* = \{a_n\}$ — последовательность возрастающих натуральных чисел и A — множество, определенное во введении. Пусть $\{\lambda_n\}$, $\{\psi_n\}$ — последовательности положительных вещественных чисел, для которых существует такое натуральное число q , что

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\lambda_n \psi_n^{2q})^{-1} < \infty. \quad (6)$$

Тогда для почти всех последовательностей $A = \{a_n\} \in A$, начиная с некоторого номера $n_0 = n_0(A)$, справедливо соотношение

$$\begin{aligned} \text{mes}_{\alpha \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)} \left\{ \left| \sum_{k < n} e^{2\pi i \alpha a_k} - (\pi \alpha \operatorname{ctg} \pi \alpha - i \pi \alpha) \int_1^{n+1} e^{2\pi i \alpha a^*(u)} du \right| > \right. \\ \left. > \psi_n \sqrt{n} \right\} \leq \lambda_n, \end{aligned} \quad (7)$$

т. е. мера множества тех $\alpha \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, для которых выполняется соотношение, указанное в скобках (7), не превосходит λ_n . Здесь обозначено $a^*(u) = (a_{k+1}^* - a_k^*)(u - k) + a_k^*$ для $k \leq u < k+1$ ($k = 1, 2, \dots, n$).

Доказательство. Применим лемму 3, взяв в качестве (a, b) интервал $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ и полагая $\lambda = \lambda_k$, $\psi = \psi_k$, $d_k = a_{k+1}^* - a_k^*$, $F(\alpha) = \alpha$, $f_k^*(\alpha; r_k) = \exp 2\pi i \alpha (a_k^* + r_k)$.

Тогда замечаем

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n f_k^*(\alpha) &= \sum_{k=1}^n d_k^{-1} \sum_{r_k < d_k} e^{2\pi i \alpha (a_k^* + r_k)} = \\ &= -\left(\frac{1}{2} + \frac{i}{2} \operatorname{ctg} \pi \alpha\right) \sum_{k=1}^n \frac{e^{2\pi i \alpha a_{k+1}^*} - e^{2\pi i \alpha a_k^*}}{a_{k+1}^* - a_k^*} = \\ &= (\pi \alpha \operatorname{ctg} \pi \alpha - i \pi \alpha) \int_1^{n+1} e^{2\pi i \alpha a^*(u)} du. \end{aligned} \quad (8)$$

Пусть \mathfrak{A}_n — множество тех последовательностей из A , для которых (7) не выполняется при данном n . Так как

$$\text{mes } \mathfrak{A}_n = (d_1 \dots d_n)^{-1} N \{ \text{mes } \Delta_{\psi_n}(r_1, \dots, r_n) > \lambda_n \},$$

то, применяя (6) и (2), находим

$$\text{mes} \left(\bigcup_{n > n_0} \mathfrak{A}_n \right) \leq \sum_{n > n_0} \text{mes} \mathfrak{A}_n < c(q) \sum_{n > n_0} (\lambda_n \psi_n^{2q})^{-1} < \varepsilon$$

для любого $\varepsilon > 0$ при достаточно большом $n_0 = n_0(\varepsilon)$.

Лемма 4 б. Если в условиях предыдущей леммы $a_n^* = a(n)$, где $a(u)$ при $u > 1$ имеет положительную неубывающую и непрерывную производную, то соотношение

$$\begin{aligned} \text{mes} \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right) \left\{ \left| \sum_{k < n} e^{2\pi i \alpha a_k} - (\pi \alpha \operatorname{ctg} \pi \alpha - i \pi \alpha) \int_1^{n+1} e^{2\pi i \alpha a(u)} du \right| \right\} > \\ > \psi_n \sqrt{n} + 3S_n \} \leq \lambda_n, \end{aligned} \quad (9)$$

где

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{a'(k+1) - a'(k)}{a(k+1) - a(k)},$$

справедливо для почти всех $A = \{a_n\} \in \mathbf{A}$, начиная с некоторого $n_0 = n_0(A)$.

Доказательство этой леммы аналогично доказательству предыдущей, но вместо (8) замечаем, что

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n f_k^*(\alpha; r_k) &= - \left(\frac{1}{2} + \frac{i}{2} \operatorname{ctg} \pi \alpha \right) \sum_{k=1}^n e^{\frac{2\pi i \alpha a_{k+1}^*}{a_{k+1} - a_k} - \frac{2\pi i \alpha a_k^*}{a_{k+1} - a_k}} = \\ &= (\pi \alpha \operatorname{ctg} \pi \alpha - i \pi \alpha) \sum_{k=1}^n \int_{a(k)}^{a(k+1)} \frac{e^{2\pi i \alpha v}}{a(k+1) - a(k)} dv = \\ &= (\pi \alpha \operatorname{ctg} \pi \alpha - i \pi \alpha) \sum_{k=1}^n \int_k^{k+1} \frac{a'(u)}{a(k+1) - a(k)} e^{2\pi i \alpha a(u)} du. \end{aligned}$$

Следовательно, имеем (9), так как

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=1}^n \int_k^{k+1} e^{2\pi i \alpha a(u)} du - \sum_{k=1}^n \int_k^{k+1} \frac{a'(u)}{a(k+1) - a(k)} e^{2\pi i \alpha a(u)} du \right| \leq \\ \leq \sum_{k=1}^n \int_k^{k+1} \left| 1 - \frac{a'(u)}{a(k+1) - a(k)} \right| du = \sum_{k=1}^n \frac{|a'(k + \xi_k) - a'(k + \eta_k)|}{a(k+1) - a(k)} \leq \\ \leq \sum_{k=1}^n \frac{a'(k+1) - a'(k)}{a(k+1) - a(k)}, \end{aligned}$$

где $0 < \xi_k < 1$, $0 < \eta_k < 1$.

2. Базисы натурального ряда чисел

Теорема 1. Пусть $A^* = \{a_n^*\}$ — последовательность возрастающих натуральных чисел, $N(x)$ — ее числовая функция, т. е. число членов этой последовательности, не превосходящих x . Предположим, что

- а) A^* выпукла ($a_{n+1}^* - 2a_n^* + a_{n-1}^* \geq 0$);
 б) для некоторого натурального числа q

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n^*)^2 n^{-q} < \infty;$$

- в) для $x > 1$

$$\int_1^x \frac{N^{2q}(u)}{u^2} du \ll \frac{N^{2q}(x)}{x}.$$

Тогда почти все последовательности A из множества $\mathbf{A} = \{A\}$,

$$A = \{1, a_1, a_2, \dots\}, a_n^* \leq a_n < a_{n+1}^* (n = 1, 2, \dots),$$

являются базисами натурального ряда чисел.

Доказательство. Положим

$$\lambda_n = (a_n^*)^{-1}, \psi_n = (n^q / a_n^*)^{1/2q}$$

и применим лемму 4а. Тогда в силу условия б) теоремы ряд (6) сходится, и, следовательно, для почти всех последовательностей $A \in \mathbf{A}$ существует такой номер $n_0 = n_0(A)$, что при $n \geq n_0$ выполняется соотношение (7).

Для доказательства теоремы двумя способами оценим интеграл

$$J_n(A) = \int_{-1/2}^{1/2} \left| \sum_{k < n} e^{2\pi i \alpha a_k} \right|^{2q} d\alpha.$$

Пусть Δ_1 — множество тех α , для которых условие в скобках (7) не выполняется, и Δ_2 — множество тех α , для которых, напротив, (7) выполняется. Тогда $\text{mes } \Delta_2 \leq \lambda_n$, и (с очевидным сокращением записей)

$$\int_{\Delta_2} \ll n^{2q} (a_n^*)^{-1}, \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \int_{\Delta_1} &\ll \int_{\Delta_1} \left(|\pi \alpha \operatorname{ctg} \pi \alpha - i\pi \alpha| \left| \int_1^{n+1} e^{2\pi i \alpha a^*(u)} du \right| + \psi_n \sqrt{n} \right)^{2q} d\alpha \ll \\ &\ll \int_{-1/2}^{1/2} \max \left(\left| \int_1^{n+1} e^{2\pi i \alpha a^*(u)} du \right|, \psi_n \sqrt{n} \right)^{2q} d\alpha < \\ &< \int_{-1/2}^{1/2} \left| \int_1^{n+1} e^{2\pi i \alpha a^*(u)} du \right|^{2q} d\alpha + n^{2q} (a_n^*)^{-1}. \end{aligned} \quad (11)$$

По лемме 1в находим

$$\left| \int_1^{n+1} e^{2\pi i \alpha a^*(u)} du \right| \ll \begin{cases} n, & \text{если } |\alpha| < (a_n^*)^{-1}, \\ N \left(\frac{1}{|\alpha|} \right), & \text{если } |\alpha| \geq (a_n^*)^{-1}. \end{cases}$$

Теперь из (11) следует

$$\begin{aligned} \int_{\Delta_1} &\ll \int_{(a_n)^{-1}}^{1/2} N^{2q} \left(\frac{1}{\alpha} \right) d\alpha + n^{2q} (a_n^*)^{-1} = \\ &= \int_2^{a_n^*} \frac{N^{2q}(u)}{u^2} du + n^{2q} (a_n^*)^{-1} \ll n^{2q} (a_n^*)^{-1} \end{aligned}$$

в силу условий теоремы.

Таким образом, из (10), (12) получаем оценку

$$J_n(A) \ll n^{2q} (a_n^*)^{-1} \quad (n \geq n_0(A)). \quad (13)$$

С другой стороны, пусть для натурального $x \leq qa_n$ $R_q(x; A)$ — число решений уравнения $x_1 + x_2 + \dots + x_q = x$, $x_i \in \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$. Тогда

$$J_n(A) = \sum_x R_q^2(x; A).$$

По неравенству Коши—Буняковского

$$N_{qA}(qa_n) \geq \frac{\left(\sum_x R_q(x; A) \right)^2}{\sum_x R_q^2(x; A)}, \quad (14)$$

где $N_{qA}(x)$ — числовая функция множества qA ,

$$qA = A + A + \dots + A \quad (q \text{ раз})$$

суммирование в смысле Шнирельмана). Так как из условия теоремы следует, что

$$\sup_{(n=1, 2, \dots)} \frac{a_{n+1}}{a_n} < \infty$$

и A содержит 1, то из (13), (14) вытекает, что множество qA имеет положительную плотность. В силу основной теоремы Шнирельмана [5] из этого следует теорема.

3. Формула для числа представлений

Теорема 2. Пусть $A^* = \{a_n^*\}$ — последовательность возрастающих натуральных чисел и $N(x)$ — ее числовая функция. Пусть $\Psi = \{\psi_n\}$ — последовательность положительных чисел и $m \geq 2$ — натуральное число. Допустим, что последовательности A^* и Ψ удовлетворяют следующим условиям:

а) $a_n^* = a(n)$, где $a(u)$ при $u > 1$ имеет положительную неубывающую и непрерывную производную;

б) для некоторого натурального числа q

$$\sum_{n=1}^{\infty} n a_n^* \psi_n^{-2q} < \infty;$$

Вместо суммирования только случайных последовательностей можно рассматривать смешанные суммы, содержащие в качестве слагаемых и заранее заданные множества, арифметическая природа которых известна. Например, справедлива следующая теорема, аналогичная теоремам Н. П. Романова [2, 3].

Теорема 3. Пусть $A^* = \{a_n^*\}$ — выпуклая последовательность натуральных чисел,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln a_n^*}{\ln n} < 1,$$

и A — множество последовательностей $A = \{a_n\}$ натуральных чисел a_n , $a_n^* \leq a_n < a_{n+1}^*$ ($n = 1, 2, \dots$). Тогда для почти всех $A \in A$ сумма $A + P$, где P — множество простых чисел, имеет положительную асимптотическую плотность.

Для доказательства этой теоремы применяем лемму 3 и хорошо известную оценку

$$N\{p - q = m; p, q \leq x\} \ll \frac{x}{\ln^2 x} \prod_{p|m} \left(1 + \frac{1}{p}\right),$$

где $N\{\dots\}$ — число решений в простых числах p, q уравнения, указанного в скобках (см. [2], стр. 60).

Ясно, что легкость, с которой получаются указанные результаты, а также многие аналогичные, обусловлена очень сильными оценками тригонометрических сумм для «случайных» последовательностей (леммы 4а и 4б).

Литература

1. Виноградов И. М. Избранные труды. М., 1952.
2. Прахар К. Распределение простых чисел. М., 1967.
3. Романов Н. П. УМН, 7, 47, 1940.
4. Хуа Ло-ген. Метод тригонометрических сумм и его применения в теории чисел. М., 1964.
5. Шнирельман Л. Г. УМН, 7, 7, 1940.
6. Hilbert D. Math. Ann., 67, 281, 1909.
7. Carleson L. Math. Scand., 4, 2, 303, 1956.

Институт математики
АН БССР

Поступило в редакцию
4.VII 1969

Л. Б. ШНЕПЕРМАН

СТРОЕНИЕ ТОПОЛОГИЧЕСКИХ ВПОЛНЕ ПРОСТЫХ ПОЛУГРУПП С ИЗОЛИРОВАННЫМ НУЛЕМ

Хорошо известна конструкция Риса, позволяющая изучить строение вполне простых полугрупп с нулем [1] (см. также [2]). В [3] показано, что эта конструкция может быть использована для бикомпактных вполне простых полугрупп с нулем.

Здесь устанавливается, что теорема Риса справедлива для топологических вполне простых полугрупп с изолированным нулем, и получаются некоторые другие результаты.

§ 1. Топологические вполне простые полугруппы с изолированным нулем матричного типа. 1.1. Пусть G^0 — абстрактная группа с присоединенным нулем и топологическая полугруппа с изолированным нулем; Γ и Δ — топологические пространства; $f: \Gamma \times \Delta \rightarrow G^0$ — такое непрерывное отображение, что для каждого $\xi \in \Gamma$ ($\eta \in \Delta$) существует такое $\eta \in \Delta$ ($\xi \in \Gamma$), что

$$p_{\eta\xi} = f(\xi, \eta) \neq 0.$$

К топологическому пространству $G \times \Gamma \times \Delta$ присоединим 0 как изолированную точку, и на

$$A = G \times \Gamma \times \Delta \cup 0$$

определим операцию умножения: для любых (g, ξ, η) и (h, γ, δ) из A

- 1) $(g, \xi, \eta)(h, \gamma, \delta) = (gp_{\eta\gamma}h, \xi, \delta)$, если $p_{\eta\gamma} \neq 0$;
- 2) $(g, \xi, \eta)(h, \gamma, \delta) = 0$, если $p_{\eta\gamma} = 0$;
- 3) $(g, \xi, \lambda) \cdot 0 = 0 \cdot (g, \xi, \eta) = 0 \cdot 0 = 0$.

Относительно этой операции A является вполне простой полугруппой с нулем матричного типа над G^0 с определяющей матрицей $P = (p_{\eta\xi})_{\xi \in \Gamma, \eta \in \Delta}$. Полугруппа A — топологическая. Это устанавливается непосредственной проверкой. Напомним, что 0 является изолированной точкой этой полугруппы.

Построенную так полугруппу A будем называть топологической вполне простой полугруппой с изолированным нулем матричного типа над G^0 с определяющей матрицей P .

1.2. Пусть A — топологическая вполне простая полугруппа с изолированным нулем. Полугруппа A алгебраически изоморфна вполне простой полугруппе с нулем матричного типа над G^0 с определяющей матрицей P . Таким образом, имеется группа с присоединенным нулем G^0 , два множества индексов Γ и Δ и отображение $f: \Gamma \times \Delta \rightarrow G^0: f(\xi, \eta) = p_{\eta\xi}$, удовлетворяющее условию предыдущего п., и можно считать, что

$$A = G \times \Gamma \times \Delta \cup 0,$$

а умножение на A определено, как в 1.1.

1.3. Лемма. Пусть (ξ, η) , (γ, δ) — две фиксированные точки из $\Gamma \times \Delta$.

Тогда отображение $G \times \xi \times \eta \rightarrow G \times \gamma \times \delta$:

$$(g, \xi, \eta) \rightarrow (g, \gamma, \delta)$$

— гомеоморфизм.

Доказательство. Для данных ξ и η выберем такие α и β , чтобы $p_{\alpha\xi} \neq 0$ и $p_{\eta\beta} \neq 0$. Рассмотрим теперь следующее отображение $\sigma: G \times \xi \times \eta \rightarrow G \times \gamma \times \delta$:

$$\sigma(g, \xi, \eta) = (p_{\alpha\xi}^{-1}, \gamma, \alpha)(g, \xi, \eta)(p_{\eta\beta}^{-1}, \beta, \delta).$$

Отображение σ непрерывно. Непосредственный подсчет показывает, что $\sigma(g, \xi, \eta) = (g, \gamma, \delta)$. Значит, σ — взаимно однозначное отображение. Точно так же, как доказывается непрерывность отображения σ , доказывается непрерывность обратного отображения σ^{-1} . Таким образом, σ — гомеоморфизм.

1.4. Лемма. Пусть $(g, \xi), (h, \gamma)$ — две фиксированные точки из $G \times \Gamma$. Тогда отображение $g \times \xi \times \Delta \rightarrow h \times \gamma \times \Delta$:

$$(g, \xi, \eta) \rightarrow (h, \gamma, \eta)$$

— гомеоморфизм.

Доказательство. Для данного ξ выберем такое $\alpha \in \Delta$, чтобы $p_{\alpha\xi} \neq 0$. Рассмотрим отображение $\mu: g \times \xi \times \Delta \rightarrow h \times \gamma \times \Delta$:

$$\mu(g, \xi, \eta) = (hg^{-1}p_{\alpha\xi}, \gamma, \alpha)(g, \xi, \eta).$$

Отображение μ непрерывно, и $\mu(g, \xi, \eta) = (h, \gamma, \eta)$. Так же, как и в предыдущей лемме, ясно, что μ — гомеоморфизм.

1.5. Совершенно аналогично предыдущему п. доказывается

Лемма. Пусть $(g, \eta), (h, \delta)$ — две фиксированные точки из $G \times \Delta$. Тогда отображение $g \times \Gamma \times \eta \rightarrow h \times \Delta \times \delta$:

$$(g, \xi, \eta) \rightarrow (h, \xi, \delta)$$

— гомеоморфизм.

1.6. Леммы 1.3, 1.4 и 1.5 позволяют ввести топологию на множествах G , Γ и Δ . Именно на множестве G топологию порождает отображение $G \times \xi \times \eta \rightarrow G$:

$$(g, \xi, \eta) \rightarrow g,$$

где (ξ, η) — любая фиксированная точка из $\Gamma \times \Delta$.

Аналогично вводится топология на Γ и на Δ .

Если теперь рассматривать $G \times \Gamma \times \Delta$, с одной стороны, как прямое произведение топологических пространств, наделенных топологией указанным способом, а с другой стороны, как пространство $A \setminus 0$, то в обоих случаях мы, очевидно, имеем дело с одним и тем же топологическим пространством.

1.7. Лемма. На группе G операция умножения непрерывна.

Доказательство. Пусть $(\xi, \eta) \in \Gamma \times \Delta$ — такая точка, что $p_{\eta\xi} \neq 0$. Рассмотрим на топологическом пространстве $G \times \xi \times \eta$ новую операцию \circ :

$$(g, \xi, \eta) \circ (h, \xi, \eta) = (g, \xi, \eta)(p_{\eta\xi}^{-2}, \xi, \eta)(h, \xi, \eta).$$

Ясно, что операция \circ непрерывна на $G \times \xi \times \eta$. А так как

$$(g, \xi, \eta) \circ (h, \xi, \eta) = (gh, \xi, \eta),$$

то множество $G \times \xi \times \eta$, наделенное этой операцией, алгебраически изоморфно группе G . Так как пространство $G \times \xi \times \eta$ гомеоморфно пространству G , то справедливость утверждения леммы становится очевидной.

1.8. Лемма. Отображение $f: \Gamma \times \Delta \rightarrow G^0$:

$$f(\xi, \eta) = p_{\eta\xi}$$

— непрерывно.

Доказательство. Пусть $p_{\eta\xi} \neq 0$ и $V(p_{\eta\xi})$ — окрестность точки $p_{\eta\xi}$ в G . Так как

$$(e, \xi, \eta)^2 = (p_{\eta\xi}, \xi, \eta) \in V(p_{\eta\xi}) \times \Gamma \times \Delta,$$

то существуют такие окрестности $U(\xi)$ и $U(\eta)$, что для $\xi' \in U(\xi)$ и $\eta' \in U(\eta)$

$$(p_{\eta'\xi'}, \xi', \eta') = (e, \xi', \eta')^2 \in V(p_{\eta\xi}) \times \Gamma \times \Delta.$$

Значит,

$$(\xi', \eta') \in U(\xi) \times U(\eta) \rightarrow p_{\eta'\xi'} \in V(p_{\eta\xi}).$$

Пусть теперь $p_{\eta\xi} = 0$. Тогда $(e, \xi, \eta)^2 = 0$, и существуют такие окрестности $U(\xi)$ и $U(\eta)$, что для $\xi' \in U(\xi)$ и $\eta' \in U(\eta)$

$$(e, \xi', \eta')^2 = 0,$$

т. е.

$$(\xi', \eta') \in U(\xi) \times U(\eta) \rightarrow p_{\eta'\xi'} = 0.$$

1.9. Из 1.6 и лемм 1.7 и 1.8 непосредственно следует

Теорема. *Всякая топологическая вполне простая полугруппа с изолированным нулем топологически изоморфна некоторой топологической вполне простой полугруппе с изолированным нулем матричного типа.*

1.10. Если A — локально бикомпактная вполне простая полугруппа с изолированным нулем матричного типа, то G , Γ и Δ — локально бикомпактные пространства, так как они гомеоморфны замкнутым подмножествам пространства A . В этом случае G является топологической группой [4].

1.11. Теорема. Пусть

$$A = G \times \Gamma \times \Delta \cup 0$$

и

$$A' = G' \times \Gamma' \times \Delta' \cup 0'$$

— две топологические вполне простые полугруппы с изолированным нулем матричного типа, G — топологическая группа. Для того чтобы A и A' были топологически изоморфны, необходимо и достаточно, чтобы существовали

- 1) гомеоморфизм μ пространства Γ на Γ' : $\mu(\xi) = \xi'$;
- 2) гомеоморфизм ν пространства Δ на Δ' : $\nu(\eta) = \eta'$;
- 3) топологический изоморфизм σ группы G на G' ;
- 4) элементы $g'_{\xi'} \in G'$ ($\xi \in \Gamma$) и $g'_{\eta'} \in G'$ ($\eta \in \Delta$), такие, что

$$p'_{\eta'\xi'} = g'_{\eta'} \sigma(p_{\eta\xi}) g'_{\xi'} \quad (\xi \in \Gamma, \eta \in \Delta).$$

Доказательство. *Достаточность.* Пусть для полугрупп A и A' выполняются условия теоремы. Тогда отображение $\rho: A \rightarrow A'$:

$$\rho(0) = 0',$$

$$\rho(g, \xi, \eta) = (g'_{\xi'}^{-1} \sigma(g) g'_{\eta'}, \xi', \eta')$$

является алгебраическим изоморфизмом.

Покажем, что отображение $\Gamma' \rightarrow \Gamma$:

$$\xi' \rightarrow g'_{\xi'}$$

непрерывно. Пусть $\xi'_0 \in \Gamma'$. Выберем такое $\eta'_0 \in \Delta'$, чтобы $p'_{\eta'_0 \xi'_0} \neq 0$. Тогда для всех ξ' из некоторой окрестности $V(\xi'_0)$

$$p'_{\eta'_0 \xi'} \neq 0$$

и

$$g'_{\xi'} = \sigma(\rho_{\eta_0\xi}^{-1}) g'_{\eta_0\xi}{}^{-1} \rho'_{\eta_0\xi}$$

Отображения $\Gamma' \rightarrow \Gamma \rightarrow G \rightarrow G \rightarrow G'$:

$$\xi' \rightarrow \xi \rightarrow \rho_{\eta_0\xi} \rightarrow \rho_{\eta_0\xi}^{-1} \rightarrow \sigma(\rho_{\eta_0\xi}^{-1})$$

непрерывны (частично по условию, частично по доказанным ранее леммам). Поэтому непрерывно и отображение $\Gamma' \rightarrow G'$: $\xi' \rightarrow g'_{\xi'}$, в окрестности произвольной точки ξ'_0 .

Из доказанного следует непрерывность отображения $G \times \Gamma \times \Delta \rightarrow G'$:

$$(g, \xi, \eta) \rightarrow g'_{\xi'} \sigma(g) g'_{\eta'}{}^{-1},$$

а вместе с тем и непрерывность отображения ρ .Обратное отображение $\rho^{-1}: A' \rightarrow A$ вычисляется, как показывает непосредственная проверка, так:

$$\rho^{-1}(0') = 0,$$

$$\rho^{-1}(g', \xi', \eta') = (\sigma^{-1}(g'_{\xi'} g'_{\eta'}{}^{-1}), \xi, \eta).$$

Так как непрерывно отображение $G' \times \Gamma' \times \Delta' \rightarrow G$:

$$(g', \xi', \eta') \rightarrow \sigma^{-1}(g'_{\xi'} g'_{\eta'}{}^{-1}),$$

то непрерывно и отображение ρ^{-1} . Значит, ρ — топологический изоморфизм.*Необходимость.* Каждый алгебраический изоморфизм ρ полугруппы A на A' выглядит так:

$$\rho(0) = 0',$$

$$\rho(g, \xi, \eta) = (g'_{\xi'} \sigma(g) g'_{\eta'}{}^{-1}, \xi', \eta'),$$

$$(\xi' = \mu(\xi), \eta' = \nu(\eta)),$$

где $\mu, \nu, \sigma, g'_{\xi'}$ и $g'_{\eta'}$ удовлетворяют условиям теоремы. Значит, так же выглядит каждый топологический изоморфизм.

Итак, пусть ρ — топологический изоморфизм. Зафиксируем ξ и η . Тогда отображение $G \times \Gamma \times \Delta \rightarrow G'$:

$$(g, \xi, \eta) \rightarrow g'_{\xi'} \sigma(g) g'_{\eta'}{}^{-1}$$

непрерывно. Значит, непрерывно и отображение $G \rightarrow G'$:

$$g \rightarrow \sigma(g).$$

Непрерывность отображений μ и ν доказывается аналогично. Например, для доказательства непрерывности μ надо рассмотреть отображение $G \times \Gamma \times \Delta \rightarrow \Gamma'$:

$$(g, \xi, \eta) \rightarrow \xi'$$

при фиксированных $g \in G$ и $\eta \in \Delta$. Непрерывность обратных отображений σ^{-1}, μ^{-1} и ν^{-1} точно так же следует из непрерывности ρ^{-1} .

§ 2. Инверсные и слабо равномерные топологические полугруппы. 2.1. Лемма. Пусть

$$A = G \times \Gamma \times \Delta \cup 0$$

— топологическая вполне простая полугруппа с изолированным нулем матричного типа, G — топологическая группа, и идемпотенты в A коммутируют. Тогда

- 1) на Γ и на Δ топология дискретная;
 2) Γ и Δ равномошны;
 3) для каждого $\gamma \in \Gamma$ ($\delta \in \Delta$) существует единственное $\delta \in \Delta$ ($\gamma \in \Gamma$), такое, что $p_{\delta\gamma} \neq 0$.

Доказательство. 1) Пусть γ — фиксированная точка из Γ . Тогда существует такое $\delta \in \Delta$, что $p_{\delta\gamma} \neq 0$, и потому $e = (p_{\delta\gamma}^{-1}, \gamma, \delta)$ — не равный нулю идемпотент. Так как все ненулевые идемпотенты полугруппы A примитивны, то $ee' = 0$, если e' не равный e идемпотент.

Пусть $U(e)$ — окрестность точки e , не содержащая нуля. Существует такая окрестность $V(e)$, что

$$V(e)V(e) \subset U(e).$$

Поэтому окрестность $V(e)$ не содержит ни одного идемпотента, кроме e .

Рассмотрим отображения $\rho: \Gamma \rightarrow G \times \Gamma \times \delta \cup 0$:

$$\rho(\xi) = \begin{cases} (p_{\delta\xi}, \xi, \delta), & \text{если } p_{\delta\xi} \neq 0, \\ 0, & \text{если } p_{\delta\xi} = 0, \end{cases}$$

и $\nu: G \times \Gamma \times \delta \cup 0 \rightarrow G \times \Gamma \times \delta \cup 0$:

$$\begin{aligned} \nu(g, \xi, \delta) &= (g^{-1}, \xi, \delta), \\ \nu(0) &= 0. \end{aligned}$$

Отображение ρ непрерывно в любой топологической вполне простой полугруппе с изолированным нулем, а непрерывность отображения ν следует из того, что группа G топологическая. Поэтому непрерывно отображение $\nu\rho$.

Таким образом, можно выбрать такую окрестность $V(\gamma)$ в Γ , чтобы для любого $\gamma' \in V(\gamma)$

$$(p_{\delta\gamma'}^{-1}, \gamma', \delta) \in V(e).$$

Но $(p_{\delta\gamma'}^{-1}, \gamma', \delta)$ — идемпотент. Поэтому $\gamma = \gamma'$. Значит, существует такая окрестность $V(\gamma)$, которая содержит единственную точку γ .

2) Каждый левый минимальный ненулевой идеал Ae полугруппы A содержит единственный ненулевой идемпотент e . Поэтому множество Δ , равномошное множеству левых минимальных ненулевых идеалов, равномошно подмножеству ненулевых идемпотентов полугруппы A . То же справедливо и для Γ .

3) Допустим, что $p_{\delta\gamma} \neq 0$ и $p_{\delta\gamma'} \neq 0$. Тогда $(p_{\delta\gamma}^{-1}, \gamma, \delta)$ и $(p_{\delta\gamma'}^{-1}, \gamma', \delta)$ — не равные нулю идемпотенты, и

$$(p_{\delta\gamma}^{-1}, \gamma, \delta)(p_{\delta\gamma'}^{-1}, \gamma', \delta) = (p_{\delta\gamma}^{-1}, \gamma, \delta) \neq 0$$

влечет $\gamma' = \gamma$.

2.2. Предыдущая лемма позволяет считать, что если $A = G \times \Gamma \times \Delta \cup 0$ — топологическая инверсная вполне простая полугруппа с изолированным нулем матричного типа, и G — топологическая группа, то $\Gamma = \Delta$. С учетом этого может быть сформулирована следующая

Теорема. Пусть A — локально бикompактная инверсная вполне простая полугруппа с изолированным нулем. Тогда A топологически изоморфна вполне простой полугруппе с нулем матричного типа, определяющая матрица которой единичная.

Доказательство. Можно считать, что A — топологическая вполне простая полугруппа с изолированным нулем матричного типа. Пусть P — ее определяющая матрица.

Условия 1) и 2) из теоремы 1.11 позволяют менять между собой местами столбцы матрицы P и менять между собой местами строки матрицы P . Воспользовавшись леммой 2.1, это можно сделать так, чтобы на диагонали



и только на ней стояли элементы, отличные от нуля. А затем все эти элементы, воспользовавшись условием 4) из теоремы 1.11, можно преобразовать в единицу группы G . Все перечисленные преобразования являются топологическими изоморфизмами полугруппы A .

2.3. Пусть A — инверсная полугруппа, $a \in A$. Через a^* будем обозначать элемент из A , регулярно сопряженный элементу a .

Инверсией называется отображение $A \rightarrow A: a \rightarrow a^*$.

2.4. Теорема. Пусть

$$A = G \times \Gamma \times \Delta \cup 0$$

— топологическая вполне простая полугруппа с изолированным нулем матричного типа, $\Gamma = \Delta$, матрица P — единичная, и G — топологическая группа. Тогда A — инверсная полугруппа с непрерывной инверсией.

Доказательство. Непосредственной проверкой убеждаемся, что все ненулевые идемпотенты полугруппы A имеют вид (e_0, γ, γ) , где e_0 — единица группы G . Поэтому произведение двух неравных идемпотентов равно нулю, а значит они коммутируют.

Для элемента $a = (g, \gamma, \delta)$ элемент $a^* = (g^{-1}, \delta, \gamma)$ является регулярно сопряженным.

Инверсия непрерывна, так как она непрерывна на первой проекции: G — топологическая группа и 0 — изолированная точка; а Γ и Δ — дискретны.

2.5. В топологической вполне простой полугруппе с нулем точка 0 не обязательно должна быть изолированной. Однако существует широкий класс таких полугрупп, где 0 — изолированная точка. Это — слабо равномерные полугруппы.

Пусть A — локально бикompактная топологическая полугруппа, $a, b \in A$, $U \subset A$ и W — окрестность в A , замыкание которой бикompактно. Полугруппа A называется слабо равномерной, если всякий раз, когда $\overline{aYb} \subset W$ ($\overline{aYb} \subset \subset A \setminus \overline{W}$) существуют такие окрестности $V(a)$ и $V(b)$, что

$$V(a)YV(b) \subset W \quad (V(a)YV(b) \subset \subset A \setminus \overline{W}).$$

При этом либо a , либо b может быть пустым символом.

Легко видеть, что дискретная и бикompактная полугруппы слабо равномерны.

2.6. Теорема. В слабо равномерной вполне простой полугруппе с нулем точка 0 является изолированной.

Доказательство. Допустим, что полугруппа A удовлетворяет условиям теоремы, а 0 не является изолированной точкой. Тогда любая окрестность $U(0)$ содержит идемпотент. Действительно, из $A \cdot 0 = 0 \subset U(0)$ следует существование такой окрестности $Q(0)$, что $AQ(0) \subset U(0)$. Но если $x \in Q(0)$ и $x \neq 0$, то Ax — левый идеал, а потому содержит какой-нибудь идемпотент.

Пусть теперь $W(0)$ — произвольная окрестность, не совпадающая с A ; $V(0)$ — такая окрестность, что $V(0)V(0) \subset W(0)$; а $U(0)$ — такая окрестность, что $AU(0) \subset V(0)$ и $U(0)A \subset V(0)$. Тогда если e — идемпотент из $U(0)$, то

$$A = AeA \subset AU(0)U(0)A \subset V(0)V(0) \subset W(0).$$

Противоречие.

2.7. Изолированность нуля не является достаточным условием слабой равномерности локально бикompактной вполне простой полугруппы с нулем. Это подтверждает следующий

Пример. Пусть G^0 — мультипликативная группа положительных вещественных чисел с присоединенным изолированным нулем; топология на G — естественная. Γ и Δ — экземпляры группы G , а

$$f(\gamma, \delta) = p_{\delta\gamma} = \gamma^\delta.$$

Ясно, что определенное таким образом отображение $\Gamma \times \Delta \rightarrow G$ непрерывно.

Пусть, далее, $B = \{(r^{-1}, r, 1)\}_{r \in G}$, $a = (1, 1, 1)$. Тогда $aB = (1, 1, 1)$. Выберем произвольный элемент (x, y, z) ($z \neq 1$) из окрестности $V(a)$. Тогда

$$(x, y, z)(r^{-1}, r, 1) = (xr^{z-1}, y, 1).$$

Так как xr^{z-1} при фиксированных x и z не содержится, скажем, в интервале $(0, 2)$ (r пробегает все G), то слабая равномерность отсутствует.

Литература

1. Rees D. Proc. Cambridge Philos. Soc., 36, 387, 1940.
2. Ляпин Е. С. Полугруппы. Физматгиз, М., 1960.
3. Ellis R. Proc. Amer. Math. Soc., 8, 372, 1957.
4. Paalman-de Miranda. Rept. Math. Centrum, № 5, 6 bl, 1964.

Минский государственный педагогический институт
им. А. М. Горького

Поступило в редакцию
14.V 1969

В. С. ҚОЊОХ

**РАЗРЕШИМЫЕ ЛИНЕЙНЫЕ ГРУППЫ
 НАД ПРОИЗВОЛЬНЫМ ПОЛЕМ**

Пусть P — произвольное поле, Γ — максимальная неприводимая примитивная разрешимая подгруппа $GL(n, P)$,

$$\Gamma \supseteq V \supseteq A \supseteq F \supseteq (e) \quad (1)$$

— инвариантный ряд, где F — максимальный абелев нормальный делитель группы Γ , V — централизатор F в Γ , а A/F — максимальная подгруппа среди абелевых нормальных делителей Γ/F , содержащихся в V/F . Приведем необходимые нам в дальнейшем свойства ряда (1).

1) F является мультипликативной группой K^* некоторого расширения K поля P , причем степень $m = K : P$ делит число n [1].

2) Пусть $r = \frac{n}{m} = q_1^{i_1} \dots q_k^{i_k}$ — каноническое разложение, $Q_j/F = q_j$ — подгруппа Силова группы A/F , тогда в подходящем базисе пространства $K^{(r)}$ $Q_j = E_{q_1^{i_1}} \times \dots \times Q^j \times \dots \times E_{q_k^{i_k}}$, где Q^i — абсолютно неприводимая подгруппа группы $GL(q^i, K)$.

$$A = Q^1 \times Q^2 \times \dots \times Q^k. \quad (2)$$

Если N — нормализатор группы A в $GL(r, K)$, то $N = N_1 \times \dots \times N_k$, где N_i — нормализатор группы Q^i в $GL(q^i, K)$ [2].

3) Если Σ — центр линейной P -оболочки $[\Gamma]$ группы Γ , то Γ/V изоморфна группе Галуа $G(K/P)$ поля K над P . Группу Γ можно рассматривать как максимальную абсолютно неприводимую примитивную разрешимую подгруппу

$$\text{в } GL(t, \Sigma), \quad t = \frac{n}{\Sigma : P}.$$

Пусть $n = p_1^{i_1} \dots p_s^{i_s}$ — каноническое разложение. В [2] показано, что в случае, когда $F = P^*$, группа Γ полностью определяется максимальными неприводимыми примитивными разрешимыми подгруппами групп $GL(p_i^{i_i}, P)$. В настоящей заметке доказывается, что при построении максимальных неприводимых примитивных разрешимых подгрупп группы $GL(n, P)$ достаточно ограничиться случаем, когда $\frac{n}{m} = q^l$, q — простое число (см. 1)). Кроме того, изучаются свойства инвариантного ряда

$$\Gamma \supseteq B \supseteq A \supseteq F \supseteq (e), \quad (3)$$

где Γ, A, F — группы ряда (1), а B/F — централизатор группы A/F в Γ/F .

§ 1. В силу 3) в дальнейшем мы будем считать, что $\Gamma/V \cong G(K/P)$.

В базисе пространства $P^{(n)}$, приуроченном к разложению (2), матрицы f группы F имеют вид $f_1 = k \times \frac{E_n}{m}$, $k \in P_m$. Следовательно, если $\tau_1 = e$, τ_2, \dots, τ_m — различные элементы группы $G(K/P)$, а b_1, \dots, b_m — такие матрицы из $GL(n, P)$, что $b_i^{-1} k b_i = \tau_i k$ для любого $k \in K^*$, то мы можем считать, что $b_i = t_i \times \frac{E_n}{m}$. Положим

$$T = \{t_1 \times \frac{E_n}{m}, \dots, t_m \times \frac{E_n}{m}\}. \quad (4)$$

Предложение 1. В базисе пространства $P^{(n)}$, приуроченном к разложению (2), матрицы g группы Γ имеют вид

$$g = t(u_1 \times \dots \times u_n), \quad t \in T, \quad u_j \in GL(q_j^i, K). \quad (5)$$

Доказательство. Пусть g — произвольный элемент группы Γ . Очевидно, $g = tu$, где $t \in T$, $u \in GL(r, K)$, $gQ_jg^{-1} = Q_j$ (см. 2)). Так как

$$\begin{aligned} t^{-1}Q_jt &= t^{-1}(E_{q_1^i} \times \dots \times Q^i \times \dots \times E_{q_k^i})t = \\ &= E_{q_1^i} \times \dots \times \bar{Q}_j \times \dots \times E_{q_k^i}, \quad \text{где } \bar{Q}_j \subset GL(q_j^i, K), \end{aligned}$$

то

$$uQ_ju^{-1} = t^{-1}tuQ_ju^{-1}t^{-1}t = t^{-1}Q_jt = E_{q_1^i} \times \dots \times \bar{Q}_j \times \dots \times E_{q_k^i}. \quad (6)$$

Если $\omega_j, c_j \in Q_j$, $\lambda \in K$, то $u(\omega_j + c_j)u^{-1} = u\omega_ju^{-1} + uc_ju^{-1}$, $u\lambda c_ju^{-1} = \lambda uc_ju^{-1}$. Следовательно, равенство (6) определяет автоморфизм

$$\begin{aligned} \varphi_j : [Q^i] &= K_{q_j^i} \rightarrow K_{q_j^i}, \\ \varphi_j(u_j) &= h_j u_j h_j^{-1}, \quad u_j \in K_{q_j^i}, \quad h_j \in GL(q_j^i, K). \end{aligned}$$

Положим $h = h_1 \times \dots \times h_n$. Очевидно, $hah^{-1} = uau^{-1}$ для любого $a \in A$. Отсюда и из [1] следует, что $h^{-1}u = f \in F$, $u = hf$. Предложение доказано.

Равенство (5) определяет гомоморфизм $\psi_j : \Gamma \rightarrow GL(mq_j^i, P)$ для $g \in \Gamma$:

$\psi_j(g) = \psi_j[t(u_1 \times \dots \times u_n)] = \psi_j[(t_i \times \frac{E_n}{m})(u_1 \times \dots \times u_n)] = (t_i \times E_{q_j^i})u_j$
(см. (4)). Пусть

$$\Gamma_j = \psi_j(\Gamma), \quad F_j = \psi_j(F), \quad V_j = \psi_j(V), \quad n_j = mq_j^i. \quad (7)$$

Очевидно, $\Gamma_j = \{(t_1 \times E_{q_j^i})u_1^1, \dots, (t_m \times E_{q_j^i})u_1^m, V_i\}$, где $u_j^i \in GL(q_j^i, K)$.

Положим $b_i = (t_i \times \frac{E_n}{m})(u_1^1 \times \dots \times u_1^m)$, $V_0 = V_1 \times \dots \times V_n$, $\Phi(\Gamma_1 \dots \Gamma_n) = \{b_1, \dots, b_m, V_0\}$.

Теорема 1. Пусть Γ — максимальная неприводимая примитивная разрешимая подгруппа $GL(n, P)$, а группы F_j, Γ_j и число n_j определяются равенством (7). Тогда 1) группа $\Gamma_j, j = 1, \dots, k$, максимальна среди неприводимых примитивных разрешимых по дугрупп группы $GL(n_j, P)$, содержащих группу F_j в качестве нормального делителя; 2) $\Gamma = \Phi(\Gamma_1, \dots, \Gamma_k)$.

Доказательство. Очевидно, Γ_j — неприводимая группа и $F_j \triangleleft \Gamma_j$. Пусть

$$\Gamma_j \subset B_j \subset GL(n_j, P), \quad (8)$$

где B_j — разрешимая группа, причем $F_j \triangleleft B_j$. Обозначим через V_j' (V_j) централизатор F_j в B_j (Γ_j). Если $\Gamma_j = V_j + x_2 V_j + \dots + x_m V_j$ — разложение группы Γ_j по V_j , то, очевидно, $B_j = V_j + x_2 V_j' + \dots + x_m V_j'$. Отсюда и из (8) следует, что $V_j \subset V_j'$. Положим $V' = V_1 \times \dots \times V_j \times V_{j+1} \times \dots \times V_k$. Нетрудно видеть, что $\Gamma V' = V' \Gamma$ — разрешимая группа. В силу максимальности $\Gamma \Gamma V' = \Gamma$. Следовательно, $V' = V = V_1 \times \dots \times V_k$, $V_j' = V_j$, $\Gamma_j = B_j$.

Пусть теперь $P^{(n_j)} = Q_1 + \dots + Q_\nu$ — разложение пространства $P^{(n_j)}$ на системы непримитивности группы Γ_j . Для $f_1, f_2 \in F_j$, $u_i \in Q_i$, $f_1 u_i = u_s \in Q_s$, $f_2(u_i) = u_j \in Q_j$, $(f_1 + f_2)u_i = f_1 u_i + f_2 u_i = u_s + u_j$. Следовательно, $s = j$, $F_j Q_i = Q_s$, $Q_i = F_j Q_s$, $F_j(Q_i) = Q_i$. Положим $H_\nu = \{h_\nu | h_\nu \in GL(n_j, P), h_\nu/Q_\nu = f_j/Q_\nu, h_\nu/Q_i = E_{n_j}/Q_i \text{ при } i \neq \nu, \text{ где } h_\nu/Q_\nu \text{ — ограничение } h_\nu \text{ на } Q_\nu, f_j \in F_j\}$. Очевидно, $H^j \Gamma_j = \Gamma_j H^j$ — разрешимая группа, причем $F_j \triangleleft \Gamma_j H^j$. Следовательно, $H^j \Gamma_j = \Gamma_j$, $H^j \subset V^j$. Нетрудно видеть, что группа $H = E_{q_1^{l_1}} \times \dots \times H^j \times \dots \times E_{q_k^{l_k}}$ является нормальным делителем группы Γ с неэквивалентными неприводимыми частями. Последнее противоречит примитивности Γ .

Очевидно, $\Phi(\Gamma_1, \dots, \Gamma_k)$ — разрешимая группа. Отсюда в силу максимальности $\Gamma \Gamma = \Phi(\Gamma_1, \dots, \Gamma_k)$. Теорема доказана.

§ 2. Перейдем теперь к изучению свойств ряда (3). В силу теоремы 1 мы ограничимся случаем, когда $\frac{n}{m} = q^l$, q — простое (см. 1)). Как известно [1], группа A ряда (3) представима в виде

$$A = (a_1) (b_1) \dots (a_l) (b_l) K^*, [A: K^*] = q^{2l} \quad (9)$$

$$(a_j, b_j) = \eta, \eta \in F, \eta^q = E_n, i \neq j \rightarrow (a_i, b_j) = (a_i, a_j) = (b_i, b_j) = E_n.$$

Пусть $N_1(N_2)$ — нормализатор группы $A(F)$ в $GL(n, P)$, $N = N_1 \cap N_2$. Для $g \in N$

$$ga_j g^{-1} = a'_j = \lambda_j a_1^{\alpha_{1j}} \dots a_l^{\alpha_{lj}} b_1^{\beta_{1j}} \dots b_l^{\beta_{lj}}, \quad (10)$$

$$gb_j g^{-1} = b'_j = \mu_j a_1^{\beta_{1j}} \dots a_l^{\beta_{lj}} b_1^{\delta_{1j}} \dots b_l^{\delta_{lj}}.$$

В силу (9) элементы a'_j, b'_j удовлетворяют следующим условиям:

$$(a'_j, b'_j) = \eta^\lambda, i \neq j \rightarrow (a'_i, b'_j) = (a'_i, a'_j) = (b'_i, b'_j). \quad (11)$$

Следуя [1], для $g \in N$ положим

$$\psi(g) = \begin{bmatrix} \alpha_{11} \dots \alpha_{1l} & \beta_{11} \dots \beta_{1l} \\ \dots & \dots \\ \alpha_{l1} \dots \alpha_{ll} & \beta_{l1} \dots \beta_{ll} \\ \gamma_{11} \dots \gamma_{1l} & \delta_{11} \dots \delta_{1l} \\ \dots & \dots \\ \gamma_{l1} \dots \gamma_{ll} & \delta_{l1} \dots \delta_{ll} \end{bmatrix} = h. \quad (12)$$

Из (11) следует, что матрица h удовлетворяет условию

$${}^t h \Phi_l h = \lambda \Phi_l, \quad (13)$$

где ${}^t h$ — транспонированная h , $\lambda \in GF(q)$,

$$\Phi_i = \begin{bmatrix} 0 & E_i \\ -E_i & 0 \end{bmatrix}.$$

Группу $HSp(2l, q)$ всех матриц h из $GL(2l, q)$, удовлетворяющих условию (13), назовем гиперсимплектической группой. Таким образом, равенство (12) определяет гомоморфизм $\psi: N \rightarrow HSp(2l, q)$. Пусть ψ_1 — ограничение ψ на Γ . Очевидно, $\ker \psi_1$ совпадает с группой B ряда (3).

Из предыдущего следует

Теорема 2. Фактор-группа Γ/B изоморфна некоторой разрешимой подгруппе гиперсимплектической группы $HSp(2l, q)$.

Предложение 2. Фактор-группа B/A изоморфна некоторой подгруппе группы $C = \{\tau \mid \tau \in G(K/P), \tau\eta = \eta, \eta \in K, \eta^q = E_n, \eta \neq E_n\}$.

Доказательство. Очевидно, для $b \in B, x \in K, b^{-1}xb = \tau_b x$, где $\tau_b \in G(K/P)$. Последнее равенство определяет гомоморфизм $\varphi: B \rightarrow G(K/P)$. В силу теоремы 4 из [1] $\ker \varphi = A$. Если a_i, b_i — элементы из разложения (9), то $b^{-1}(a_i, b_i)b = b^{-1}\eta b = \tau_b \eta = \eta$. Предложение доказано.

Пусть $\eta = (a_i, b_i)$, где a_i, b_i — элементы из разложения (9). Очевидно, для $g \in \Gamma$

$$g^{-1}\eta g = \eta^{\lambda_g}, \quad \lambda_g \in GF(q). \quad (14)$$

Равенство (14) определяет гомоморфизм $\varphi_1: \Gamma \rightarrow GF(q)$. Для $g \in \Gamma, \varphi_1(g) = \lambda_g$. Пусть $HSp(K)$ — группа всех матриц h из $GL(2l, q)$, удовлетворяющих условию ${}^t h \Phi_i h = \lambda \Phi_i$, где ${}^t h$ — транспонированная h, Φ_i — матрица из (13), а $\lambda \in \text{Im } \varphi_1$. Очевидно, образ отображения ψ , определяемого равенством (12), содержится в группе $HSp(K)$.

Теорема 3. Если в разложении (9) a_i и $b_i, i=1, \dots, l$, — элементы порядка q , то 1) группа B ряда (2) представима в виде полупрямого произведения $B = AC$, где A — группа ряда (3), а C — централизатор элемента $\eta = (a_i, b_i)$ в группе T , определяемой равенством (4); 2) при $q > 2$ отображение $\psi: N \rightarrow HSp(K)$, определяемое формулой (12), является эпиморфизмом, ядром которого служит группа B .

Доказательство. 1. В подходящем базисе пространства $P^{(n)}$ элементы a_i и b_i имеют вид

$$\begin{aligned} a_i &= E_{q^{i-1}} \times c \times E_{q^{l-i}}, \quad b_i = E_{q^{i-1}} \times d \times E_{q^{l-i}}, \\ c &= \text{diag} [1, \eta, \dots, \eta^{q-1}], \quad d = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (15)$$

(см. [1]). Если $b \in \ker \psi$, то, очевидно, $b = tu$, где $t \in T, u \in GL(q^l, K)$. Следовательно, $b^{-1}(a_i, b_i)b = \eta = t^{-1}u^{-1}\eta ut = t^{-1}\eta t$. Отсюда в силу (15) получаем $b^{-1}t b_i t^{-1} b = u^{-1}b_i u = \lambda_i b_i$, аналогично $u^{-1}a_i u = \mu_i a_i, \lambda_i, \mu_i \in K$. Таким образом, $u \in A$ (см. [1]), $b \in AC$. Из последнего и из очевидного включения $AC \subseteq \ker \psi$ получаем $AC = \ker \psi$. Положим $H = \psi(\Gamma), \Gamma_1 = \psi^{-1}(H)$. Из максимальности группы следует, что $\Gamma = \Gamma_1 \supseteq \ker \psi = AC = B$.

2. Пусть теперь $q > 2, h \in HSp(K)$. По формулам (10) построим матрицы $a'_j, b'_j, j=1, \dots, l$, положив $\lambda_j = \mu_j = E_n$. Очевидно, $(a'_j)^q = (b'_j)^q = E_n, (a'_j, b'_j) = \eta^\lambda$. Положим $a''_j = g^{-1}a'_j g, b''_j = g^{-1}b'_j g$, где $g \in \Gamma, g^{-1}\eta^\lambda g = \eta$. Согласно [1], существует такая матрица $x \in GL(q^l, K)$, что $xa_j x^{-1} = a''_j, xb_j x^{-1} = b''_j$.

Если теперь $u = gx$, то $ua_j u^{-1} = a'_j, ub_j u^{-1} = b'_j, j=1, \dots, l$. Очевидно, $u \in N, \psi(u) = h$. Теорема доказана.

Следствие. Пусть в разложении (5) a_i и b_i , $i = 1, \dots, l$, — элементы порядка $q > 2$, H — подгруппа группы $HSp(K)$. $\psi^{-1}(H)$ тогда и только тогда является максимальной разрешимой подгруппой группы N , когда H — максимальная разрешимая подгруппа в $HSp(K)$.

Предложение 3. Если элементы a_i и b_i из разложения (9) такие, что $a_i^q = b_i^q = \pm E_n$, $i = 1, \dots, l$, то $B/A \cong C = \{\tau | \tau \in G(K/P), \tau\eta = \eta, \eta = (a_i, b_i)\}$.

Доказательство. Очевидно, гомоморфизм φ , определяемый предложением 2, можно продолжить до эпиморфизма $\varphi_1: G \rightarrow G(K/P)$ для $g \in G$, $x \in K$, $\varphi_1(g)x = g^{-1}xg$. Пусть теперь $\tau \in G(K/P)$, $\tau\eta = \eta$, $g \in \varphi_1^{-1}(\tau)$. Положим $a'_i = g^{-1}a_i g$, $b'_i = g^{-1}b_i g$. Так как элементы a'_i и b'_i удовлетворяют условиям (11), причем $(a'_i)^q = a_i^q$, $(b'_i)^q = (b_i)^q$, то существует такая матрица $u \in GL(q^l, K)$, что $u^{-1}b'_i u = b_i$, $u^{-1}a'_i u = a_i$. Следовательно, $b = gu^{-1} \in \ker \varphi$ (см. (12)). Нетрудно видеть, что $\ker \varphi$ — разрешимая группа. Отсюда в силу максимальной Γ следует, что $\ker \varphi \subset \Gamma$. Очевидно, $b \in \ker \varphi = B$, $\varphi(b) = \tau$. Предложение доказано.

Следствие. Пусть Γ, V — группы ряда (1), ψ_1 — ограничение (см. (12)) на Γ , $B = \ker \psi_1$, $H = \psi_1(\Gamma)$, $H_1 = H \cap Sp(2l, q)$. Если элементы a_i и b_i из разложения (9) такие, что $a_i^q = b_i^q = \pm E_n$, то $\psi_1^{-1}(H_1) = B \cdot V$.

В заключение автор выражает глубокую благодарность Д. А. Супруненко за обсуждение вопросов, связанных с данной работой, а также за любезно предоставленную возможность ознакомиться в рукописи с работой [2] и книгой «Группы матриц», стимулировавшими эту заметку.

Литература

1. Супруненко Д. А. Разрешимые и нильпотентные линейные группы. Минск, 1958.
2. Супруненко Д. А. ДАН СССР, 184, № 1, 1969.
3. Козел П. Т., Тышкевич Р. И. Известия вузов. Математика, № 6., 1962.

Институт математики
АН БССР

Поступило в редакцию
23.V 1969

В. А. ЕМЕЛИЧЕВ, М. М. КОВАЛЕВ

К «ВЫРОЖДЕННОМУ» СЛУЧАЮ ОДНОЙ МНОГОЭКСТРЕМАЛЬНОЙ ТРАНСПОРТНОЙ ЗАДАЧИ

1. В работах [1, 2] предложен алгоритм построения всех локальных минимумов задачи минимизации функции

$$F(X) = \sum_{i,j} f(x_{ij}) \quad (1)$$

при условиях

$$\sum_j x_{ij} = a_i, \quad \sum_i x_{ij} = b_j, \quad x_{ij} \geq 0, \quad i = \overline{1, m}, \quad j = \overline{1, n}, \quad (2)$$

где a_i, b_j — целые положительные числа, а $f(x_{ij})$ — строго вогнутая функция (ее производная убывает), в предположении, что многогранник, определенный ограничениями (2), «невыврожден». Кроме того, в [1] сформулировано необходимое и достаточное условие локальной минимальности плана. В настоящей статье эти результаты распространены на «вырожденный» случай, а также предложен новый метод построения глобального минимума задачи (1), (2).

В терминологии и обозначениях мы следуем [1, 2].

2. Поскольку задача (1), (2) рассматривается без предположения о невырожденности, то число N элементов $x_{ij}^0 > 0$ произвольного плана $X^0 \in V(A, B)$ удовлетворяет условию

$$\max(m, n) \leq N \leq m + n - 1^*.$$

План $X^0 \in V(A, B)$, не содержащий нормальных троек, будем называть особенным. В противном случае план называется неособенным. Очевидно, что всякий особенный план вырожден.

Лемма 1 [3]. Если $a + c \leq b$ и $c > 0$, то для любой строго вогнутой функции $f(x)$ имеет место неравенство

$$f(a) + f(b) \leq f(a + c) + f(b - c).$$

Последовательность целых положительных чисел назовем идеальной, если любая тройка соседних чисел идеальна**).

Методом от противного легко доказать следующую лемму.

Лемма 2. Среди чисел идеальной последовательности, стоящих на нечетных (четных) местах, существует единственное минимальное число.

Пусть

$$u_1, v_1, u_2, v_2, \dots, u_i, v_i, \dots \quad (3)$$

*) Напомним, что невырожденный план содержит ровно $m + n - 1$ положительных компонент.

**) В частности, идеальной является последовательность чисел Фибоначчи.

— идеальная последовательность, $u_k = \min_i \{u_i\}$ и $v_q = \min_i \{v_i\}$. Заметим, что числа u_k и v_q всегда являются соседними в (3).

Из леммы 2 следует

Лемма 3. Для чисел последовательности (3) справедливы неравенства

$$u_i \geq v_i + u_k, \quad i = \overline{1, k-1},$$

$$u_i \geq v_{i-1} + u_k, \quad i = k+1, k+2, \dots$$

Очевидно, что леммы 2 и 3 справедливы и для конечной идеальной последовательности.

Теорема 1. Неособенный план задачи (1), (2) является локально-минимальным тогда и только тогда, когда он идеальный*).

Доказательство необходимости содержится в [1] (см. теорему 1).

Достаточность. Пусть X^0 — идеальный план, покажем невозможность улучшения плана X^0 путем исправления на циклах.

Известно, что любая незанятая клетка (i, j) образует единственный цикл с занятыми клетками**). Начиная с клетки (i, j) , обходим этот цикл против часовой стрелки. Пусть

$$0, u_1, v_1, u_2, v_2, \dots, u_{p-1}, v_{p-1}, u_p \tag{4}$$

— числа этого цикла. Естественно рассматривать лишь случай, когда $u_i > 0, i = \overline{1, p}$.

Среди чисел v_i могут встречаться равные нулю. Разобьем последовательность (4) на подпоследовательности

$$0, u_1^{(1)}, v_1^{(1)}, \dots, u_{p_1}^{(1)}, p_1 \geq 1, v_i^{(1)} > 0, i = \overline{1, p_1 - 1};$$

$$v_{p_1}^{(1)} = 0, u_1^{(2)}, v_1^{(2)}, \dots, u_{p_2}^{(2)}, p_2 \geq 1, v_i^{(2)} > 0, i = \overline{1, p_2 - 1};$$

.....

$$v_{p_{s-1}}^{(s-1)} = 0, u_1^{(s)}, v_1^{(s)}, \dots, u_{p_s}^{(s)} = u_p, p_s \geq 1, v_i^{(s)} > 0, i = \overline{1, p_s - 1}.$$

Из идеальности плана X^0 следует идеальность каждой подпоследовательности $u_1^{(j)}, v_1^{(j)}, \dots, u_{p_j}^{(j)}, j = \overline{1, s}$, у которой $p_j > 1$.

Пусть $u_{k_j}^{(j)} = \min_i \{u_i^{(j)}\}$. Тогда, согласно лемме 3, справедливы неравенства

$$u_i^{(j)} \geq v_i^{(j)} + u_{k_j}^{(j)}, \quad i = \overline{1, k_j - 1},$$

$$u_i^{(j)} \geq v_{i-1}^{(j)} + u_{k_j}^{(j)}, \quad i = \overline{k_j + 1, p_j},$$

$$u_{k_j}^{(j)} \geq 0 + u_{k_j}^{(j)},$$

или

$$u_i^{(j)} \geq v_i^{(j)} + u, \quad i = \overline{1, k_j - 1},$$

$$u_i^{(j)} \geq v_{i-1}^{(j)} + u, \quad i = \overline{k_j + 1, p_j},$$

$$u_{k_j}^{(j)} \geq 0 + u,$$

*) Напомним (см. [1]), что план называется идеальным, если всякая его нормальная тройка идеальна.

***) Если $N < m + n - 1$, то, как обычно (см. [4]), дополняем набор (i, j) с $x_{ij} > 0$ еще $m + n - 1 - N$ клетками с $x_{ij} = 0$, такими, чтобы весь новый набор «занятых клеток» из $m + n - 1$ клеток не содержал циклов.

где

$$u = \min_j \{u_{k_j}^{(j)}\}.$$

Отсюда в силу леммы 1 вытекают неравенства

$$\begin{aligned} f(0) + f(u_{k_j}^{(j)}) + \sum_{i=1}^{k_j-1} [f(u_i^{(j)}) + f(v_i^{(j)})] + \sum_{i=k_j+1}^{p_j} [f(u_i^{(j)}) + f(v_{i-1}^{(j)})] &\leq \\ &\leq f(0 + u) + f(u_{k_j}^{(j)} - u) + \sum_{i=1}^{k_j-1} [f(u_i^{(j)} - u) + f(v_i^{(j)} + u)] + \\ &+ \sum_{i=k_j+1}^{p_j} [f(u_i^{(j)} - u) + f(v_{i-1}^{(j)} + u)], \quad j = \overline{1, s}, \end{aligned}$$

которые указывают, что при переходе к соседней вершине план X^0 не может быть улучшен. Теорема 1 доказана.

Теперь, учитывая лемму 2, получаем

Следствие 1. У невырожденного идеального плана все соседние вершины невырождены.

Доказательство достаточности теоремы 1 включает случай, когда все $v_i = 0$. Поэтому справедлива

Теорема 2. *Всякий особенный план задачи (1), (2) является локально-минимальным.*

Следствие 2. *Всякий локально-минимальный план является или идеальным, или особенным.*

Следствие 3. Расположение локально-минимальных вершин на многограннике $M(A, B)$ не зависит от поведения строго вогнутой функции $f(x)$.

Очевидна следующая

Лемма 4. Пусть X^0 — особенный или идеальный план и $x_{kr}^0 = \max_{i,j} x_{ij}^0$. Тогда $x_{kr}^0 = \min(a_k, b_r)$.

3. В [1, 2] показано, что множество $R(A, B)$ планов, каждый из которых построен методом Φ^* , содержит все локально-минимальные планы невырожденной задачи (1), (2). Однако и без предположения невырожденности справедлива

Теорема 3. *Всякий локально-минимальный план строится методом Φ^* .*

Принимая во внимание следствие 2 и лемму 4, доказательство теоремы 3 можно провести методом индукции подобно тому, как была доказана теорема 5 в [2].

Следствие 4. Множество $L(A, B)$ всех локально-минимальных планов задачи (1), (2) содержится в $R(A, B)$.

4. Рассмотрим один из методов построения глобального минимума задачи (1), (2). Как и в [5], основная идея предлагаемого метода состоит в построении сети, в которой каждая дуга изображает некоторую компоненту плана $X \in R(A, B)$, а каждый путь из начального узла в конечный соответствует (взаимно однозначно) одному плану $X \in R(A, B)$. Определив соответствующим образом длины дуг, сводим задачу (1), (2) к простой задаче нахождения кратчайшего пути в сети.

Напомним, что построение множества $R(A, B)$ осуществляется на первом этапе алгоритма Φ [2]. Этот этап будем называть алгоритмом Φ_1 . Количество шагов в алгоритме Φ_1 не превосходит $m + n - 1$.

На k -м шаге алгоритма Φ_1 строится множество начал k -го порядка. Каждому такому началу соответствует один из многогранников $M(A_i^{(k+1)})$,

$B_i^{(k+1)}$, $i = \overline{1, s_k}$, где s_k — число начал k -го порядка, а векторы $A_i^{(k+1)}$ и $B_i^{(k+1)}$ вычисляются по правилам (10) из [1]. Множество многогранников, полученных на всех шагах алгоритма ψ_1 , дополненное многогранником $M(A^{(1)}, B^{(1)})$, обозначим через K .

Два многогранника $M(A', B')$ и $M(A'', B'')$ из K считаем равными, если $A' = A''$ и $B' = B''$.

Многогранники $M(A_i^{(k)}, B_i^{(k)})$ и $M(A_i^{(k+1)}, B_i^{(k+1)})$ назовем соседними, если векторы $A_i^{(k+1)}, B_i^{(k+1)}$ получены на k -м шаге алгоритма ψ_1 из векторов $A_i^{(k)}, B_i^{(k)}$ по формулам (10) из [1].

Связь между многогранниками множества K представим в виде сети R следующим естественным образом. Каждому многограннику поставим в соответствие узел, причем равным многогранникам соответствует один узел. Узлы, соответствующие соседним многогранникам, соединим дугой. Заметим, что каждой дуге, так определенной сети R , однозначно соответствует некоторая компонента $x_{ij} = z_k$ (см. формулы (9) и (10) из [1]). Узел $M(A^{(1)}, B^{(1)})$ назовем начальным, а узел $M(A^*, B^*)$, где $A^* = \{0\}_m$, $B^* = \{0\}_n$, конечным.

Очевидно, что между множеством планов $R(A, B)$ и множеством всех путей сети R , ведущих из начального узла в конечный, существует взаимно-однозначное соответствие.

Припишем каждой дуге-компоненте x_{ij} сети R число $c_{ij} = f(x_{ij})$, которое назовем длиной дуги x_{ij} . Теперь, учитывая следствие 4, можно заключить, что задача (1), (2) сводится к задаче отыскания в сети R кратчайшего пути из $M(A^{(1)}, B^{(1)})$ в $M(A^*, B^*)$. Для решения последней задачи существуют эффективные алгоритмы [6].

Замечание 1. Учитывая, что алгоритм φ [1] позволяет строить множество всех вершин $V(A, B)$, подобно предыдущему можно построить сеть V , каждый путь которой взаимно однозначно соответствует вершине многогранника $M(A, B)$. Следовательно, и более общую задачу минимизации функции $\sum_{i,j} f_{ij}(x_{ij})$ при условиях (2), где $f_{ij}(x_{ij})$ — вогнутые функции,

можно свести к задаче отыскания кратчайшего пути в сети V^* .

Замечание 2. Отношение частичной упорядоченности планов, введенное в [2], можно распространить и на случай, когда планы содержат различное число положительных компонент.

Действительно, пусть планы $X', X'' \in V(A, B)$ и $Z' = \{z'_1, z'_2, \dots, z'_{N_1}\}$, $Z'' = \{z''_1, z''_2, \dots, z''_{N_2}\}$ ($N_1, N_2 \leq m+n-1$) — невозрастающие последовательности их положительных компонент.

Рассмотрим последовательности

$$\{z'_1, z'_2, \dots, z'_{m+n-1}\},$$

$$\{z''_1, z''_2, \dots, z''_{m+n-1}\},$$

где

$$z'_{N_1+1} = \dots = z'_{m+n-1} = 0;$$

$$z''_{N_2+1} = \dots = z''_{m+n-1} = 0.$$

Будем писать $X' \rightarrow X''$, если

$$\sum_{\nu=1}^i z'_\nu \geq \sum_{\nu=1}^i z''_\nu, \quad i = \overline{1, m+n-1}.$$

*) Другой подход к решению этой задачи изложен в [7].

В силу теоремы Карамата [2]*) бинарное отношение порядка \rightarrow таково, что из $X' \rightarrow X''$ следует $F(X') \leq F(X'')$. Поэтому глобальный минимум задачи (1), (2) находится среди минимальных планов множества $L(A, B)$.

Если $X' \rightarrow X''$, то, очевидно, $N_1 \leq N_2$. Это может навести на мысль, что глобальный минимум всегда находится среди планов с наименьшим числом положительных компонент, т. е. среди вырожденных планов. Приведем пример, показывающий, что это не так.

Пусть $A = (17, 13, 10)$, $B = (15, 12, 8, 5)$. Очевидно, что многогранник $M(A, B)$ вырожден. Для любой строго вогнутой функции $f(x)$ (см. следствие 3) локально-минимальными планами задачи (1), (2) являются планы

$$X_1 = \{x_{11} = 15, x_{14} = 2, x_{22} = 12, x_{24} = 1, x_{33} = 8, x_{34} = 2\},$$

$$X_2 = \{x_{11} = 15, x_{12} = 2, x_{23} = 8, x_{24} = 5, x_{32} = 10\},$$

$$X_3 = \{x_{12} = 12, x_{14} = 5, x_{21} = 13, x_{31} = 2, x_{33} = 8\},$$

$$X_4 = \{x_{11} = 2, x_{12} = 2, x_{13} = 8, x_{14} = 5, x_{21} = 13, x_{32} = 10\}.$$

Для функции $f(x) = -x^2$ глобальным минимумом является невырожденный план X_1 , а для $f(x) = \sqrt{x}$ — вырожденный план X_2 .

Литература

1. Емеличев В. А. Весті АН БССР, сер. фіз.-мат. навук, № 1, 1969.
2. Емеличев В. А. Весті АН БССР, сер. фіз.-мат. навук, № 4, 1969.
3. Емеличев В. А. Весті АН БССР, сер. фіз.-мат. навук, № 3, 1965.
4. Зуховицкий С. И., Авдеева А. И. Линейное и выпуклое программирование. М., 1964.
5. Зуховицкий С. И., Поляк Р. А., Примак М. Е. ДАН СССР, 179, № 4, 1968.
6. Ермольев Ю. М., Мельник И. М. Экстремальные задачи на графах. Киев, 1968.
7. Емеличев В. А. Весті АН БССР, сер. фіз.-мат. навук, № 6, 1969.
8. Беккенбах Э., Беллман Р. Неравенства. Изд. «Мир», М., 1965.

Белорусский государственный университет
им. В. И. Ленина

Поступило в редакцию
24.IV 1969

*) Теорема Карамата справедлива в данном случае, когда $f(x)$ — функция с убывающей производной, так как к такой функции применима квазилинеаризация [8].

В. И. ЛАДЕС

**КОМБИНАЦИОННЫЕ СХЕМЫ,
 ВЫЧИСЛЯЮЩИЕ ЗНАЧЕНИЯ ЛИНЕЙНЫХ ФУНКЦИЙ**

Канонический метод синтеза переключательных схем [1] позволяет получать комбинационные схемы, вычисляющие значения функций вида

$$W = A_1X + A_2Y + \dots + A_mZ, \quad (1)$$

где A_1, A_2, \dots, A_m — целочисленные коэффициенты произвольного знака, X, Y, \dots, Z — двоичные n -разрядные числа, W — двоичное p -разрядное число.

Первым этапом синтеза является построение канонической таблицы для комбинационной схемы с nm входами и p выходами, где m — число аргументов функции (1).

Выразим функцию (1) через промежуточные аргументы S_i :

$$W = \sum_{i=1}^n 2^{i-1}S_i, \quad (2)$$

$$S_i = A_1x_i + A_2y_i + \dots + A_mz_i, \quad (3)$$

$$i = 1, 2, 3, \dots, n,$$

и будем строить каноническую таблицу из кустов, отрезкам которых соответствуют значения

$$S_i = \{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_h\},$$

$$\sigma_1 < \sigma_2 < \dots < \sigma_h,$$

вычисленные по формуле (3) на всех наборах двоичных переменных x_i, y_i, \dots, z_i .

Построение таблицы начнем с куста значений аргумента S_1 , т. е. от младшего разряда. Вершины кустов обозначим номерами выходов $0, 1, 2, \dots, 2^{p-1}$ и буквами, обозначающими переносы в следующий разряд.

Рассмотрим вначале методику построения канонической таблицы для случая, когда коэффициенты A_1, A_2, \dots, A_m функции (1) неотрицательны.

Из всех возможных значений функции (1) r -й вершине i -го столбца таблицы принадлежат значения, лежащие в интервале [2]:

$$\alpha_r \leq W_r \leq \beta_r,$$

где

$$\alpha_r = \sum_{j=1}^i 2^{j-1}S_j + 2^i\sigma_1(2^{n-i} - 1), \quad (4)$$

$$\beta_r = \sum_{j=1}^i 2^{j-1}S_j + 2^i\sigma_h(2^{n-i} - 1), \quad (5)$$

W_r — значения функции (1), принадлежащие r -й вершине i -го столбца, $r=1, 2, 3, \dots, t$, t — число вершин в данном столбце.

Покажем, что при неотрицательных A_1, A_2, \dots, A_m в i -х разрядах всех двоичных чисел

$$W_r = \sum_{i=1}^p 2^{i-1} \omega_i \quad (6)$$

содержится одна и та же цифра.

При неотрицательных коэффициентах функции (1) $\sigma_1 = 0$, поэтому

$$\alpha_r = \sum_{j=1}^i 2^{j-1} S_j. \quad (7)$$

Согласно выражению (2), любое из $W_r \subset W$ можно представить как

$$W_r = \sum_{j=1}^i 2^{j-1} S_j + 2^i \sum_{j=i}^{n-1} 2^{j-i} S_{j+1}. \quad (8)$$

Сравнивая формулы (7) и (8), имеем

$$W_r = \alpha_r + 2^i \sum_{j=i}^{n-1} 2^{j-i} S_{j+1}. \quad (9)$$

Разложив α_r по степеням двойки

$$\alpha_r = \sum_{j=1}^i 2^{j-1} \omega_j + 2^i \sum_{j=i}^{p-1} 2^{j-i} \omega_{j+1}, \quad (10)$$

где ω_j — двоичная переменная, и подставив это разложение в выражение (9), получим

$$W_r = \sum_{j=1}^i 2^{j-1} \omega_j + 2^i \left[\sum_{j=i}^{p-1} 2^{j-i} \omega_{j+1} + \sum_{j=i}^{n-1} 2^{j-i} S_{j+1} \right]. \quad (11)$$

Так как разложение по степеням двойки выражения, заключенного в скобки, не дает членов с коэффициентами, меньшими чем 2^i , то член $2^{i-1} \omega_i$ выражения (11) является общим для всех W_r , в том числе и для минимального значения $W_{r_{\min}} = \alpha_r$.

Из сказанного следует, что для отыскания номера выхода, которым должна быть обозначена r -я вершина i -го столбца канонической таблицы, на этой вершине по формуле (7) нужно вычислить значение α_r и представить его последовательностью членов разложения по степеням двойки (10). Если $\omega_i = 1$, то номером выхода будет коэффициент разложения 2^{i-1} , если $\omega_i = 0$, то номером выхода будет нуль.

Кроме номера выхода, каждая из вершин кустов канонической таблицы обозначается буквой.

Нетрудно доказать, что если в разложениях по степеням двойки значений α_r и α_v ,

$$\alpha_v = \sum_{j=1}^i 2^{j-1} \varphi_j + 2^i \sum_{j=i}^{p-1} 2^{j-i} \varphi_{j+1},$$

где φ_j — двоичная переменная, $v = 1, 2, 3, \dots, t$, вычисленных соответственно на r -й и v -й вершинах i -го столбца таблицы, члены, старшие i -го, попарно равны между собой, т. е. если

$$\sum_{j=i}^{p-1} 2^{j-i} \omega_{j+1} = \sum_{j=i}^{p-1} 2^{j-i} \varphi_{j+1}, \quad (12)$$

то продолжения канонической таблицы, построенные на r -й и v -й вершинах, будут одинаковыми. Поэтому такие вершины обозначаются одинаковыми буквами и продолжение канонической таблицы строится только на одной из этих вершин.

Если условие (12) не выполняется, то r -я и v -я вершины обозначаются разными буквами и кусты значений аргумента S_{i+1} присоединяются к каждой из них.

Как указывалось выше, построение канонической таблицы начинается с куста значений S_1 . На вершинах этого куста, обозначенных разными буквами, строятся кусты значений S_2 . На вершинах кустов столбца S_2 , обозначенных разными буквами, строятся кусты S_3 и так далее, вплоть до столбца кустов S_n .

Можно показать, что если вершины $(i-1)$ -го и i -го столбцов обозначены одинаковым количеством разных букв, то вершины $(i+1)$ -го столбца будут обозначены тем же количеством разных букв. Поэтому построение канонической таблицы нужно вести только до тех пор, пока не будет получено два соседних столбца с одинаковым количеством разных букв. Все остальные столбцы канонической таблицы, старшие i -го, в том числе и n -й, будут подобны i -му столбцу. Для того чтобы найти номера выходов, которыми следует обозначить вершины n -го столбца, достаточно найти номера выходов на вершинах i -го столбца, считая его последним столбцом канонической таблицы. Разложив по степеням двойки значение α_r , вычисленное на r -й вершине i -го столбца и исключив из разложения члены, младшие i -го, получим номера выходов на r -й вершине. Умножив каждый из этих номеров на 2^{n-i} , получим номера выходов на r -й вершине n -го столбца.

Следующим этапом синтеза является построение структурной схемы.

В структурной схеме отрезки одного куста канонической таблицы, обозначенные одним и тем же номером выхода, заменяются одним отрезком, которому приписываются все значения S_i объединяемых отрезков канонической таблицы. Вершина такого отрезка структурной схемы обозначается только номером выхода.

Отрезки одного куста канонической таблицы, обозначенные одной и той же буквой, также заменяются в структурной схеме одним отрезком, которому приписываются все значения S_i объединяемых отрезков, а вершина обозначается той же буквой. Соответственно, если вершина данного отрезка канонической таблицы обозначена номером выхода 2^{i-1} и буквой, например a , то в структурной схеме данный отрезок заменяется двумя отрезками. Вершина первого из них обозначается номером 2^{i-1} , а второго — буквой a . Вершины кустов одного столбца, обозначенные номером выхода, соединяются между собой и образуют выход схемы. Вершины кустов одного столбца, обозначенные одинаковыми буквами, также соединяются между собой и образуют входы в следующий разряд.

По полученной таким образом структурной схеме способом, описанным, например, в [2] или [3], строится принципиальная схема. Для этого по значениям S_i , приписанным отрезкам структурной схемы, с помощью таблицы соответствия $S_i = f(x_i, y_i, \dots, z_i)$ находятся булевы функции, представленные этими отрезками, которые и реализуются на выбранной системе логических элементов.

Пример 1. Построим комбинационную схему, вычисляющую значения функции

$$W = X + 3Y, \quad (13)$$

где X, Y — двоичные n -разрядные числа.

Заменяя аргументы функции (13) двоичными аргументами, получим промежуточный аргумент

$$S_i = x_i + 3y_i, \quad (14)$$

значения которого вычислим по формуле (14) на строках таблицы соответствия (табл. 1).

Так как $S_i = \{0, 1, 3, 4\}$, то каждый куст канонической таблицы должен иметь по четыре отрезка (рис. 1).

Построим куст значений аргумента S_1 и на его вершинах по формуле (7) вычислим значения α_r . Например, на вершине отрезка $S_1 = 4$

$$\alpha_4 = \sum_{j=1}^i 2^{j-1} S_j = \sum_{j=1}^1 2^{1-1} \cdot 4 = 4.$$

Аналогичным способом находим $\alpha_3 = 3$, $\alpha_2 = 1$, $\alpha_1 = 0$.

Представив значения α_r последовательностями членов разложения по степеням двойки

$$\alpha_1 = \{0, 0, 0\}, \alpha_2 = \{1, 0, 0\}, \alpha_3 = \{1, 2, 0\}, \alpha_4 = \{0, 0, 4\},$$

получим, что на вершинах отрезков $S_1 = 1$ и $S_2 = 3$ первые члены разложений α_2 и α_3 равны единице, следовательно, эти вершины нужно обозначить номером выхода 1. Поскольку в разложении α_1 первый член равен нулю, а нулевой выход не реализуется, то вершину отрезка $S_1 = 0$ обозначим только буквой *a*. Члены разложений α_1 и α_2 , старшие первого, попарно равны между собой, поэтому вершину отрезка $S_1 = 1$, кроме номера выхода, обозначим буквой *a*. Второй и третий члены разложения α_3 отличаются от второго и третьего членов разложений α_1 и α_2 , поэтому вершину отрезка $S_1 = 3$ обозначим буквой, отличной от *a*, например *b*. То же касается и вершины отрезка $S_1 = 4$, которую обозначим буквой *c*.

Так как вершины первого столбца канонической таблицы обозначены тремя разными буквами, то второй столбец должен содержать три куста. Номера выходов на вершинах второго столбца находятся по вторым членам разложений α_r , вычисленных на этих вершинах. Поскольку первый член этих разложений для определения обозначений вершин столбца S_2 не нужен, он в каноническую таблицу не записывается. Например, на вершине ломаной $S_1 = 0$, $S_2 = 3$ значение

$$\alpha_3 = \sum_{j=1}^2 2^{j-1} S_j = S_1 + 2S_2 = 0 + 2 \cdot 3 = 6$$

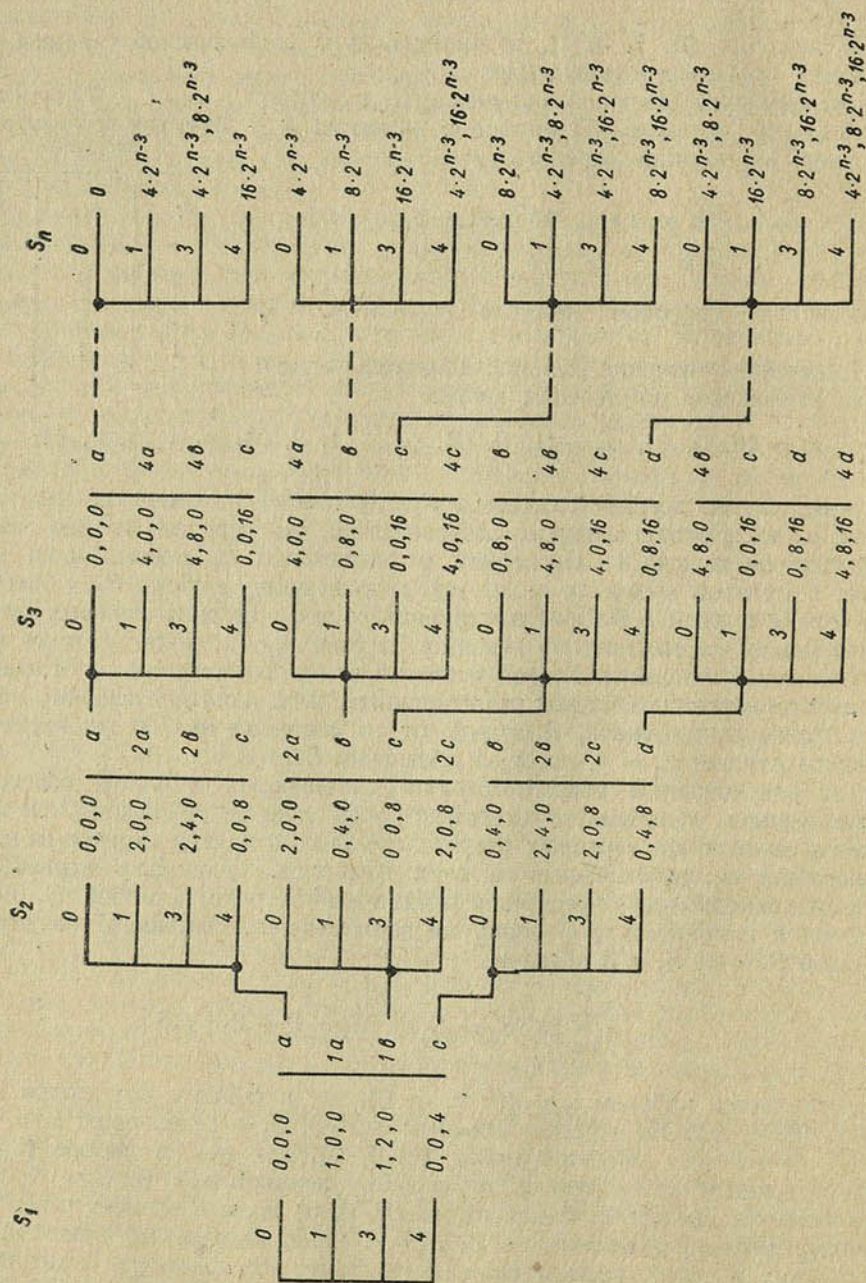
представляется набором $\alpha_3 = \{0, 2, 4, 0\}$, но в таблицу достаточно внести набор $\{2, 4, 0\}$. На вершине ломаной $S_1 = 3$, $S_2 = 1$ значение $\alpha_r = \{1, 0, 4, 0\}$. В таблицу вносится набор $\{0, 4, 0\}$. Так как в наборе $\{2, 4, 0\}$ первый элемент равен двойке, то вершину ломаной $S_1 = 0$, $S_2 = 3$ обозначим номером выхода 2. В наборе же $\{0, 4, 0\}$ первый элемент равен нулю, поэтому вершине ломаной $S_1 = 3$, $S_2 = 1$ номер выхода не приписывается. Поскольку в обоих рассматриваемых наборах все элементы, старшие первого, попарно равны между собой, обе вершины обозначим буквой *b*.

Аналогичным образом находим обозначения на всех остальных вершинах второго и последующих столбцов.

Построив столбец S_3 , убеждаемся, что вершины этого столбца и столбца S_2 обозначены одинаковым количеством разных букв и, следовательно,

Таблица 1
Значения промежуточного аргумента

x_i	y_i	S_i
0	0	0
0	1	3
1	0	1
1	1	4

Рис. 1. Каноническая таблица вычисления значений функции $W = X + 3Y$

можно сразу получить n -й столбец канонической таблицы. Для этого строим столбец аргумента S_n , подобный столбцу аргумента S_3 . Номера выходов на r -й вершине n -го столбца находятся, как произведение каждого из элементов набора, полученного на r -й вершине третьего столбца на коэффициент 2^{n-3} . Например, на вершине ломаной $S_1 = 3$, $S_2 = 1$, $S_3 = 4$ получен набор $\{4, 0, 16\}$. Эта вершина — восьмая сверху в третьем столбце, поэтому восьмую сверху вершину n -го столбца обозначим номерами выходов $4 \cdot 2^{n-3}$ и $16 \cdot 2^{n-3}$.

По канонической таблице рис. 1 строим структурную схему рис. 2. Так как вершины отрезков $S_1 = 1$ и $S_1 = 3$ обозначены номером выхода 1, то в структурной схеме эти значения S_1 представляются одним отрезком $S_1 = \{1, 3\}$, вершине которого приписывается номер выхода 1.

Вершины отрезков $S_1 = 0$ и $S_1 = 1$ канонической таблицы обозначены буквой a . Эти значения S_1 представляются в структурной схеме отрезком $S_1 = \{0, 1\}$, вершина которого обозначается буквой a . Отрезок $S_1 = 3$ канонической таблицы в структурной схеме заменяется отрезком $S_1 = 3$ и его вершина обозначается буквой b . Отрезок $S_1 = 4$ представляется в структурной схеме отрезком $S_1 = 4$ и его вершина обозначается буквой c .

Аналогичным образом строятся и остальные кусты структурной схемы.

В последнем, n -м, столбце канонической таблицы буквенных обозначений вершин нет, поэтому объединение значений S_n производится только по номерам выходов. Например, в нижнем кусте последнего столбца канонической таблицы рис. 1 номером $16 \cdot 2^{n-3}$ обозначены вершины отрезков $S_n = 1$, $S_n = 3$, $S_n = 4$, следовательно, в структурной схеме эти три значения S_n представляются отрезком $S_n = \{1, 3, 4\}$, вершине которого приписывается номер выхода $16 \cdot 2^{n-3}$.

После того как все обозначения вершин отрезков структурной схемы найдены, вершины, обозначенные одинаковыми буквами или номерами, соединяются между собой.

Каждому из отрезков структурной схемы соответствует булева функция, которая обращается в единицу на тех наборах двоичных переменных x_i, y_i , на которых S_i принимает значения, приписанные данному отрезку [2]. Эти функции приведены в табл. 2.

Во второй строке таблицы приведены наборы значений S_i каждого из различающихся отрезков схемы рис. 2.

Положим теперь, что коэффициенты A_1, A_2, \dots, A_m имеют различные знаки, но комбинационная схема вычисляет только неотрицательные значения функции (1).

В этом случае можно принять, что в i -м разряде всех W_r содержится та же двоичная цифра, что и в i -м разряде β_r .

Действительно, из выражений (5) и (8) следует, что

$$W_r = \beta_r + 2^i \left[\sum_{j=i}^{n-1} 2^{j-i} S_{j+1} - \sigma_k (2^{n-i} - 1) \right]. \quad (15)$$

Разложив β_r по степеням двойки,

$$\beta_r = \sum_{j=1}^i 2^{j-1} \omega_j + 2^i \sum_{j=i}^{n-1} 2^{j-i} \omega_j, \quad (16)$$

и подставив это разложение в выражение (15), получим

$$\begin{aligned} W_r &= \sum_{j=1}^i 2^{j-1} \omega_j + 2^i \left[\sum_{j=i}^{n-1} 2^{j-i} \omega_{j+1} + \sum_{j=i}^{n-1} 2^{j-i} S_{j+1} - \sigma_k (2^{n-i} - 1) \right] = \\ &= \sum_{j=1}^i 2^{j-1} \omega_j + 2^i \Omega. \end{aligned} \quad (17)$$

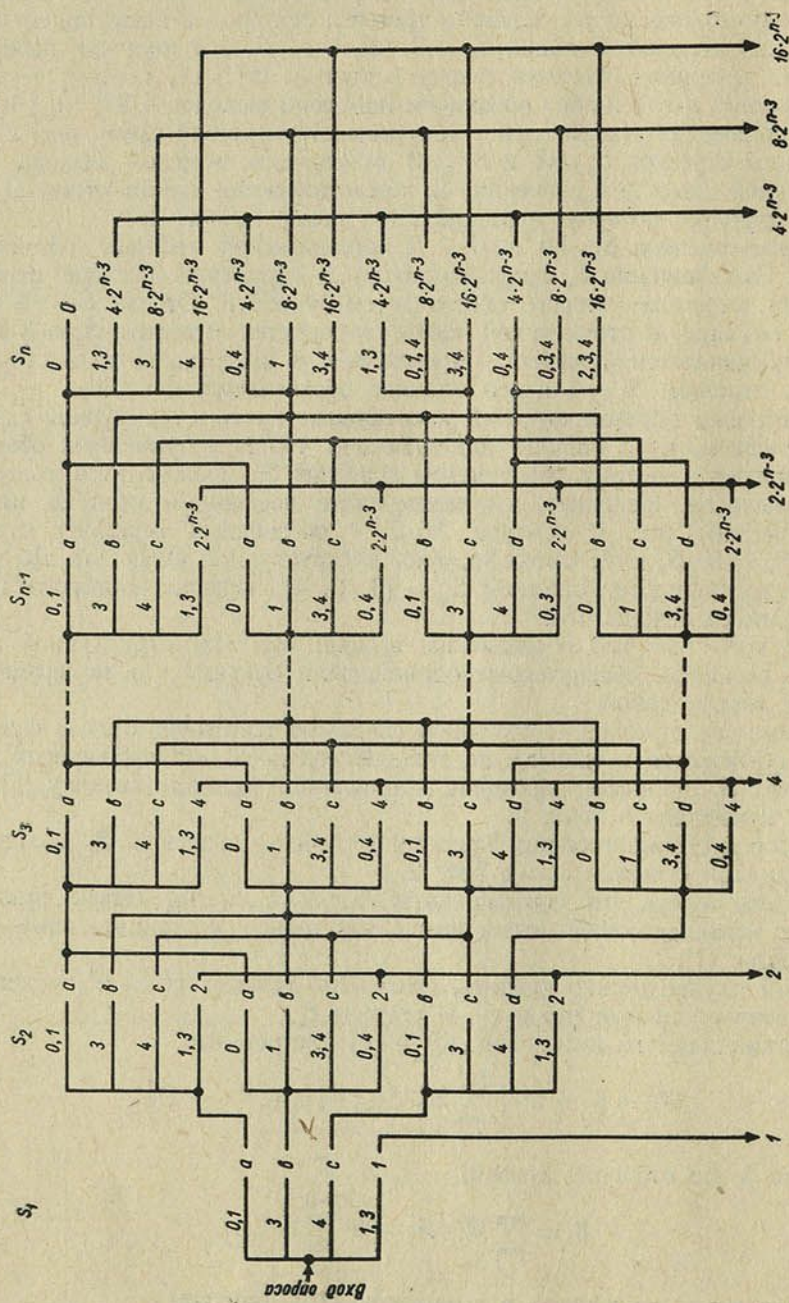


Рис. 2. Структурная схема вычисления значений функции $W = X + 3U$

ВЫХОДЫ

Таблица 2

Реализуемые булевы функции

Таблица соответствия			Булевы функции										
x_i	y_i	S_i	0,1	3	4	1,3	0	1	3,4	0,4	0,1,4	0,3,4	1,3,4
0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	1	1	1	0
0	1	3	0	1	0	1	0	0	1	0	0	1	1
1	0	1	1	0	0	1	0	1	0	0	1	0	1
1	1	4	0	0	1	0	0	0	1	1	1	1	1

Возможны три случая.

1. $\Omega < 0$. Поскольку

$$\sum_{j=1}^i 2^{j-1} < 2^i,$$

то все $W_r < 0$. Так как значений $W < 0$ схема не вычисляет, то i -й член разложения по степеням двойки любого из $W_r < 0$ можно принять равным i -му члену разложения β_r .

2. $\Omega = 0$. Как следует из выражений (16) и (17), i -й член разложения по степеням двойки любого из W_r равен i -му члену разложения β_r .

3. $\Omega > 0$. Поскольку в разложении по степеням двойки 2^Ω не содержится членов, меньших, чем 2^i , то i -й член разложения по степеням двойки любого из W_r равен i -му члену разложения β_r .

Таким образом, для отыскания номера выхода, которым следует обозначить r -ю вершину i -го столбца канонической таблицы, нужно по формуле (5) вычислить на этой вершине значение β_r и представить его последовательностью членов разложения по степеням двойки (16).

Если $\omega_i = 1$, то номером выхода будет 2^{i-1} , если $\omega_i = 0$, то номером выхода будет нуль. Если $\beta_r < 0$, то r -ю вершину можно обозначить любым номером, например нулем.

Аналогично случаю неотрицательных коэффициентов A_1, A_2, \dots, A_m r -я и v -я вершины i -го столбца обозначаются одинаковыми буквами, если члены разложения по степеням двойки $\beta_r > 0$ и $\beta_v > 0$, старшие i -го, попарно равны между собой, и разными буквами, если это условие не выполняется.

Для вычисления β_r нужно знать n , однако при больших n целесообразно задаться некоторым $q < n$ и строить таблицу до тех пор, пока количество разных букв в $(j-1)$ -м и j -м столбцах ($j = 1, 2, 3, \dots, q$) не окажется одинаковым. После этого можно сразу построить n -й столбец, подобный j -му. Вычислив на r -й вершине j -го столбца

$$W_r = \sum_{i=1}^j 2^{i-1} S_i \tag{18}$$

и умножив члены разложения по степеням двойки W_r , старшие $(j-1)$ -го, на 2^{n-i} , получим номера выходов на r -й вершине n -го столбца канонической таблицы.

По канонической таблице тем же способом, что и при неотрицательных коэффициентах функции (1), строится структурная схема и находится ее техническая реализация.

Пример 2. Построим комбинационную схему, вычисляющую значения функции

$$W = X - Y + Z,$$

где $X + Z \geq Y$, X, Y, \dots, Z — двоичные n -разрядные числа.

Значения промежуточного аргумента

$$S_i = x_i - y_i + z_i$$

вычислим на строках таблицы соответствия (табл. 3).

Так как $S_i = \{-1, 0, 1, 2\}$, то кусты канонической таблицы должны содержать по четыре отрезка (рис. 3).

Зададимся числом столбцов $q = 3$. Вычислив по формуле (5) на вершинах столбца S_1 , а затем столбца S_2 значения β_r и обозначив вершины тем

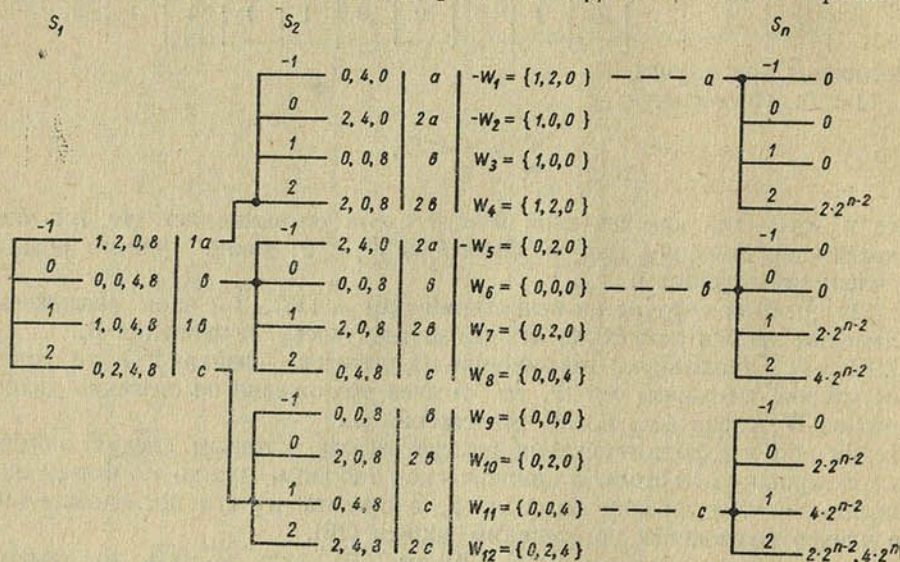


Рис. 3. Каноническая таблица вычисления значений функции $W = X - Y + Z$

же способом, что и в примере 1, убеждаемся, что столбцы S_1 и S_2 содержат одинаковое число разных букв, вследствие чего строить столбец S_3 нет необходимости (табл. 3).

По формуле (18) на вершинах столбца S_3 вычисляем значения W_r . Вершины, на которых $W_r \leq 0$, обозначаем нулем. На вершинах, где $W_r > 0$, по наборам членов разложения находим номера выходов. Например, на вершине ломаной $S_1 = -1, S_2 = -1$

Таблица 3
Значения промежуточного аргумента

x_i	y_i	z_i	S_i
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	-1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	2
1	1	0	0
1	1	1	1

$$W_r = \sum_{i=1}^2 2^{i-1} S_i = -1 + 2 \cdot (-1) = -3,$$

поэтому вершину этой ломаной обозначаем нулем. На вершине ломаной $S_1 = 2, S_2 = 2$

$$W_r = 2 + 2 \cdot (2) = 6.$$

Так как $W_r = \{0, 2, 4\}$, то вершину обозначаем номерами выходов 2 и 4. Значения номеров выходов на вершинах n -го столбца находим, умножив номера выходов столбца S_2 на 2^{n-2} .

По канонической таблице (рис. 3) тем же способом, что и в предыдущем примере, строим структурную схему, находим булевы функции, представленные отрезками этой схемы, и их техническую реализацию (рис. 4).

Обратимся к случаю, когда коэффициенты A_1, A_2, \dots, A_m имеют разные знаки, но комбинационная схема вычисляет только отрицательные значения функции (1).

Легко показать, что для отыскания номера выхода, которым следует обозначить r -ю вершину i -го столбца канонической таблицы, нужно по формуле (4) вычислить значение α_r и представить его последовательностью членов разложения по степеням двойки.

Если i -й член этого разложения не равен нулю, то номером выхода будет 2^{i-1} . В противном случае номером выхода будет нуль.

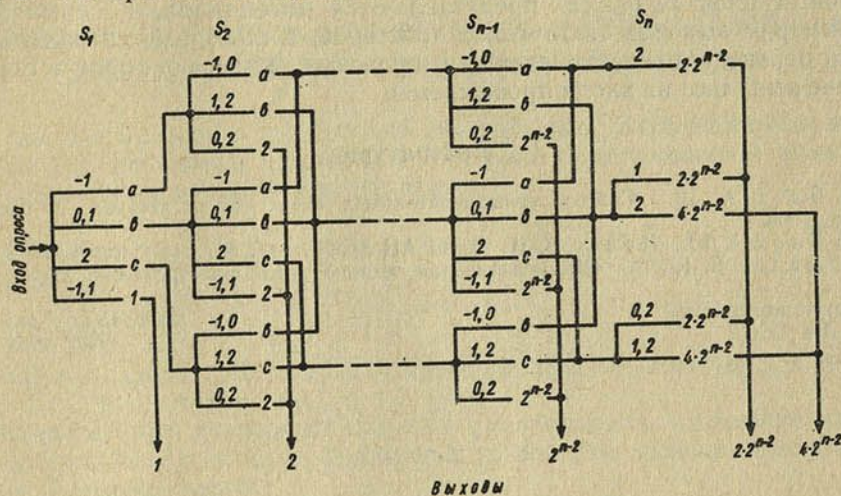


Рис. 4. Структурная схема вычисления значений функции $W = X - Y + Z$

Если члены разложений α_r и α_v , старшие i -го, попарно равны между собой, то r -ю и v -ю вершины i -го столбца следует обозначить одинаковыми буквами. В противном случае r -я и v -я вершины обозначаются разными буквами. Вершину, на которой $\alpha_r > 0$, можно обозначить любым номером, например нулем.

Выше был рассмотрен метод синтеза схем, которые при разных знаках коэффициентов A_1, A_2, \dots, A_m вычисляют только неотрицательные или только отрицательные значения функции (1). Используя дополнительно комбинационную схему, сравнивающую значения функции (1) с нулем [2], легко получить схему, вычисляющую любые значения этой функции и вырабатывающую признак знака (рис. 5).

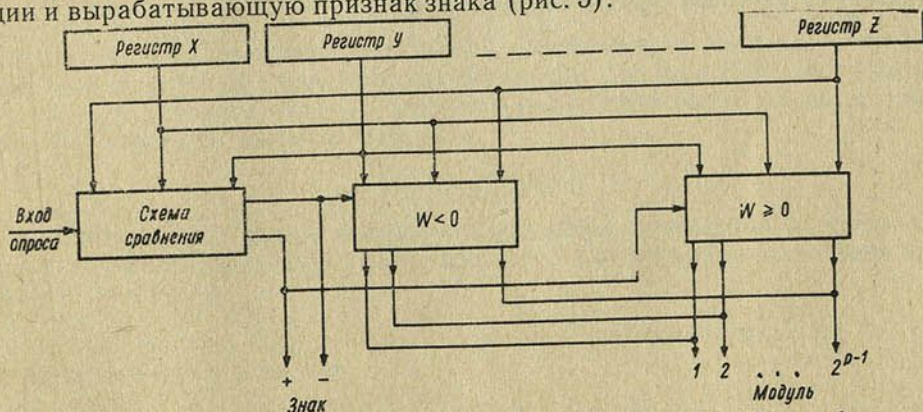


Рис. 5. Блок-схема вычисления значений функции $W = A_1X + A_2Y + \dots + A_mZ$

Значения аргументов функции (1) заносятся на регистры X, Y, \dots, Z . Если $W < 0$, то сигнал опроса проходит через схему сравнения на выход «минус» и на вход схемы $W < 0$, которая выдает отрицательные значения функции (1). Если $W \geq 0$, то сигнал опроса проходит через схему сравнения на выход «плюс» и на вход схемы $W \geq 0$, которая выдает неотрицательные значения функции (1).

Описанный выше метод синтеза позволяет получать структурные схемы, реализуемые как на элементах потенциального типа, так и на импульсно-потенциальных элементах. В последнем случае значения двоичных цифр x_i, y_i, \dots, z_i представляются потенциалами, снимаемыми, например, с выходов статических триггеров, а выходные сигналы и сигналы переноса представляются импульсами, которые образуются при подаче импульса на вход опроса схемы.

Литература

1. Блох А. Ш. Синтез переключательных схем. Изд. «Наука и техника», Минск, 1966.
2. Блох А. Ш., Ладес В. И. Весті АН БССР, сер. фіз.-тэхн. навук, № 3, 1966.
3. Ладес В. И. Сб. «Вычислительная техника в машиностроении». Минск, 1968.

*Институт математики
АН БССР*

*Поступило в редакцию
14.V 1969*

УДК 517.934

В. М. ЗУБОВ

К ВОПРОСУ О СУЩЕСТВОВАНИИ РЕШЕНИЯ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ n -ГО ПОРЯДКА

В настоящей работе продолжены исследования, опубликованные в [8], получен ряд обобщений, предлагаются условия существования и единственности решения нелинейной краевой задачи

$$Fy \equiv y^{(n)} + f(t, y, y', \dots, y^{(n-1)}) = 0, \quad (1)$$

$$\sum_{j=0}^{n-1} (m_{ij}y^{(j)}(\alpha) + n_{ij}y^{(j)}(\beta)) = 0 \quad (i = 0, 1, \dots, n-1), \quad (2)$$

где $m_{ij}, n_{ij} - \text{const}$, $f(t, y, u, \dots, v)$ определена и непрерывна в области $R: \alpha \leq t \leq \beta, -\infty < y, u, \dots, v < +\infty$.

Предварительно приводятся критерии существования, сохранения знака и оценки функции Грина и ее производных до $n-1$ -го порядка включительно линейной краевой задачи

$$y^{(n)} + \sum_{k=0}^{n-1} a_k(t)y^{(k)} = \varphi(t), \quad (3)$$

$$\sum_{j=0}^{n-1} (m_{ij}y^{(j)}(\alpha) + n_{ij}y^{(j)}(\beta)) = 0 \quad (i = 0, \dots, n-1)$$

с непрерывными $a_k(t), \varphi(t)$ на $[\alpha, \beta]$.

Ниже используются следующие определения и обозначения.

1. Промежуток $[\alpha, T_0)$, $\alpha < T_0$, называется промежутком однозначной разрешимости задачи (3), если она имеет единственное решение для всех $\beta, \alpha < \beta < T_0$, и любой непрерывной функции $\varphi(t)$.

2. Под $\max_{t \in [\alpha, \beta]} B(t)$ ($B(t) - n \times n$ -матрица) будем понимать постоянную матрицу того же измерения, что и $B(t)$, элементами которой являются наибольшие значения соответствующих элементов матрицы $B(t)$ при $t \in [\alpha, \beta]$.

Модуль матрицы $B(t)$ — это матрица, образованная из абсолютных величин элементов матрицы $B(t)$, т. е.

$$|B(t)| = \||b_{ij}(t)|\|_1^2.$$

3. Неравенства между матрицами (векторами) понимаются в смысле выполнения аналогичных неравенств между соответствующими элементами этих матриц (векторов).

1°. Обозначив $y = y_1, y_1' = y_2, \dots, y_{n-1}' = y_n$ и введя вектор $y = (y_1, \dots, y_n)$, сведем задачу (3) к задаче

$$y' + A(t)y = f(t), My(\alpha) + Ny(\beta) = 0, \quad (1.1)$$

где

$$f(t) = (0, \dots, 0, \varphi(t)), \quad M = \|m_{ij}\|_0^{n-1}, \quad N = \|n_{ij}\|_0^{n-1},$$

$$A(t) = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ \dot{0} & \dot{0} & \dot{0} & \dot{-1} \\ a_0(t) & a_1(t) & a_2(t) & a_{n-1}(t) \end{vmatrix}.$$

Пусть $G(t, s) = \|G_{ij}(t, s)\|_1^n$ — матрица Грина задачи (1.1); $\Gamma(t, s)$ — функция Грина задачи (3).

Замечание 1. Между элементами матрицы $G(t, s)$ и производными функции $\Gamma(t, s)$ имеют место соотношения: $\frac{\partial^k}{\partial t^k} \Gamma(t, s) = G_{k+1, n}(t, s)$ ($k = 0, 1, \dots, n-1$).

Введем в рассмотрение вспомогательную краевую задачу

$$y' + A_0(t)y = f(t), \quad My(\alpha) + Ny(\beta) = 0, \quad (1.2)$$

где $A_0(t)$ — непрерывная на $[\alpha, \beta]$ $n \times n$ -матрица. Для дальнейшего требуется очевидная

Лемма 1. Пусть в квадрате $t, s \in [\alpha, \beta]$ существует матрица Грина $G_0(t, s)$ задачи (1.2). Тогда для того чтобы задача (1.1) была однозначно разрешима на $[\alpha, \beta]$, необходимо и достаточно, чтобы система интегральных уравнений

$$u(t) = \int_{\alpha}^{\beta} G_0(t, s) (A_0(s) - A(s)) u(s) ds + \psi(t), \quad (1.3)$$

где

$$\psi(t) = \int_{\alpha}^{\beta} G_0(t, s) f(s) ds,$$

была однозначно разрешима на $[\alpha, \beta]$. Причем решение $u(t)$ (1.3) будет являться решением и задачи (1.1)

Замечание 2. Система интегральных уравнений (1.3) однозначно разрешима, если матрица

$$P = \max_t \int_{\alpha}^{\beta} |G_0(t, s) (A_0(s) - A(s))| ds$$

является a -матрицей [5] или, что то же, если модули характеристических чисел матрицы P меньше единицы.

Лемма 1 и замечание 2 позволяют высказать утверждение.

Теорема 1. Пусть в квадрате $t, s \in [\alpha, \beta]$ существует матрица Грина $G_0(t, s)$ задачи (1.2), такая, что матрица P — a -матрица. Тогда в квадрате $t, s \in [\alpha, \beta]$ существует функция Грина $\Gamma(t, s)$ задачи (3).

Следствие. Пусть выполнены условия теоремы 1 и $A_0(t) - A(t) \geq 0$ (≤ 0), $G_0(t, s) \geq 0$ (≤ 0) при $t, s \in [\alpha, \beta]$. Тогда

$$\frac{\partial^k}{\partial t^k} \Gamma(t, s) \geq 0$$
 (≤ 0) ($k = 0, 1, \dots, n-1$)

в квадрате $t, s \in [\alpha, \beta]$.

Действительно, согласно лемме 1, существует матрица Грина $G(t, s)$ задачи (1.1), и потому решение $y(t)$ этой задачи может быть записано формулой

$$y(t) = \int_{\alpha}^{\beta} G(t, s) f(s) ds. \quad (1.4)$$

С другой стороны, в силу условий следствия резольвента $R(t, s)$ интегрального уравнения (1.3) существует и неотрицательна, причем

$$y(t) = \int_{\alpha}^{\beta} G_0(t, s) f(s) ds + \int_{\alpha}^{\beta} R(t, s) \left(\int_{\alpha}^{\beta} G_0(s, \tau) f(\tau) d\tau \right) ds.$$

Отсюда и из (1.4) ввиду произвольности $f(t)$ получим

$$G(t, s) = G_0(t, s) + \int_{\alpha}^{\beta} R(t, \tau) G_0(\tau, s) d\tau. \quad (1.5)$$

Так как $G_0(t, s) \geq 0$ (≤ 0), $R(t, s) \geq 0$, то из последнего соотношения имеем: $G(t, s) \geq 0$ (≤ 0). Но тогда, согласно замечанию 1,

$$\frac{\partial^k}{\partial t^k} \Gamma(t, s) \geq 0 \text{ (} \leq 0 \text{)} \quad (k = 0, 1, \dots, n-1)$$

в квадрате $t, s \in [\alpha, \beta]$.

Лемма 2. Пусть $[\alpha, \beta]$ — промежуток однозначной разрешимости задач

$$y^{(n)} + \sum_{k=0}^{n-1} q_k(t) y^{(k)} = \varphi(t), \quad \sum_{j=0}^{n-1} (m_{ij} y^{(j)}(\alpha) + n_{ij} y^{(j)}(\beta)) = 0 \quad (i = 0, 1, \dots, n-1) \quad (1.6)$$

$$x^{(n)} + \sum_{k=0}^{n-1} g_k(t) x^{(k)} = \varphi(t), \quad \sum_{j=0}^{n-1} (m_{ij} x^{(j)}(\alpha) + n_{ij} x^{(j)}(\beta)) = 0 \quad (i = 0, 1, \dots, n-1) \quad (1.7)$$

и $q_k \geq g_k$, $\varphi(t) \geq 0$ ($\neq 0$) на $[\alpha, \beta]$. Если функции Грина $\Gamma_q(t, s)$, $\Gamma_g(t, s)$ и их производные по t до $n-1$ -го порядка включительно задач (1.6), (1.7) одновременно неотрицательны (неположительны) в квадрате $t, s \in [\alpha, \beta]$, то решения $y(t)$, $x(t)$ задач (1.6), (1.7) удовлетворяют неравенствам $y^{(i)}(t) \leq x^{(i)}(t)$ при $t \in [\alpha, \beta]$ ($i = 0, 1, \dots, n-1$).

Доказательство. Из (1.6) и (1.7) следует, что разность $\eta = y - x$ удовлетворяет краевой задаче

$$\eta^{(n)} + \sum_{k=0}^{n-1} q_k(t) \eta^{(k)} = \sum_{k=0}^{n-1} (g_k(t) - q_k(t)) x^{(k)},$$

$$\sum_{j=0}^{n-1} (m_{ij} \eta^{(j)}(\alpha) + n_{ij} \eta^{(j)}(\beta)) = 0 \quad (i = 0, 1, \dots, n-1).$$

Тогда, согласно представлению решения через функцию Грина, получаем

$$\eta^{(i)} = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{\partial^i}{\partial t^i} \Gamma_q(t, s) \sum_{k=0}^{n-1} (g_k(s) - q_k(s)) x^{(k)}(s) ds \leq 0 \quad (i = 0, 1, \dots, n-1),$$

т. е. $y^{(i)}(t) \leq x^{(i)}(t)$ на $[\alpha, \beta]$ ($i = 0, 1, \dots, n-1$).

Следствие. При выполнении условий леммы 2 функции Грина и их производные до $n-1$ -го порядка включительно задач (1.6), (1.7) удовлетворяют неравенству

$$\frac{\partial^i}{\partial t^i} \Gamma_q(t, s) \leq \frac{\partial^i}{\partial t^i} \Gamma_g(t, s) \quad (i = 0, 1, \dots, n-1)$$

при $t, s \in [\alpha, \beta]$.

2°. Пусть $A_0(t) \equiv 0$. Используя известные методы построения матриц Грина краевых задач (см. например, [4]), нетрудно убедиться, что матрица $G_0(t, s)$ задачи (1.2) существует тогда и только тогда, когда $\det(M + N) \neq 0$. Заметим при этом, что

$$G_0(t, s) = \begin{cases} E - (M + N)^{-1}N & \text{при } t \geq s, \\ -(M + N)^{-1}N & \text{при } t < s, \end{cases} \quad (*)$$

где E — единичная $n \times n$ -матрица.

Обозначим

$$G_0(t, s) = \|g_{ij}(t, s)\|_1^n.$$

Отметим, что элементы

$$a \quad g_{ik}(t, s) = \text{const} = g_{ik} \quad \text{при } i \neq k,$$

$$g_{ii}(t, s) = \begin{cases} 1 - g_{ii}^1 & \text{при } t \geq s, \\ -g_{ii}^1 & \text{при } t < s, \end{cases}$$

где

$$g_{ii}^1 = \text{const} \quad (i = 1, \dots, n).$$

Пусть

$$g_{nn} = \max \{ |1 - g_{nn}^1|, |g_{nn}^1| \},$$

A_{ij} — алгебраическое дополнение элемента a_{ij} матрицы $E - P$.

Теорема 2. Пусть $\det(M + N) \neq 0$ и матрица

$$P = \max_t \int_{\alpha}^{\beta} |G_0(t, s) A(s)| ds$$

— a -матрица. Тогда существует функция Грина $\Gamma(t, s)$ задачи (3) и справедливы оценки

$$\left| \frac{\partial^{j-1}}{\partial t^{j-1}} \Gamma(t, s) \right| \leq \det(E - P)^{-1} \sum_{i=1}^n A_{ij} |g_{in}| \quad (j = 1, \dots, n). \quad (2.1)$$

Доказательство. Так как P — a -матрица, то существует резольвента $R(t, s)$ системы интегральных уравнений (1.3),

$$R(t, s) = -G_0(t, s) A(s) + \int_{\alpha}^{\beta} G_0(t, s_1) A(s_1) G_0(s_1, s) A(s) ds_1 - \\ - \int_{\alpha}^{\beta} G_0(t, s_2) A(s_2) \left(\int_{\alpha}^{\beta} G_0(s_2, s_1) A(s_1) G_0(s_1, s) A(s) ds_1 \right) ds_2 + \dots,$$

а также матрица Грина $G(t, s)$ задачи (1.1), которую можно представить формулой (1.5). Из (1.5) с учетом разложения $R(t, s)$ следует неравенство

$$|G(t, s)| \leq (E - P)^{-1} \max_t |G_0(t, s)| \quad (**)$$

которое, согласно замечанию 1, включает оценки (2.1).

Следствие. Если выполнены условия теоремы 2 и $a_i(t) \leq 0$ при $t \in [\alpha, \beta]$, $(M + N)^{-1}N \leq 0$, то $\frac{\partial^i}{\partial t^i} \Gamma(t, s) \geq 0$ ($i = 0, 1, \dots, n - 1$) в квадрате $t, s \in [\alpha, \beta]$.

Рассмотрим далее матрицу

$$B = \begin{vmatrix} 0 & \gamma_1 & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \gamma_{n-1} \\ b_0 & b_1 & b_2 & \dots & b_{n-1} \end{vmatrix},$$

где

$$\gamma_j \geq 0 \quad (j = 1, 2, \dots, n-1), \quad b_i \geq 0 \quad (i = 0, 1, \dots, n-1).$$

Лемма 3. Матрица B будет α -матрицей тогда и только тогда, когда $\det(E - B) > 0$.

Доказательство леммы следует, например, из работы [6] (стр. 377), если заметить, что неравенство

$$\det(E - B) = 1 - b_{n-1} - b_{n-2}\gamma_{n-1} - \dots - b_0\gamma_1\gamma_2 \dots \gamma_{n-1} > 0$$

гарантирует отсутствие вырожденной матрицы T , удовлетворяющей неравенствам $E - B \leq T \leq E$.

Рассмотрим задачу

$$y^{(n)} + \sum_{k=0}^{n-1} a_k(t) y^{(k)} = 0, \quad (2.2)$$

$$m_i y^{(i)}(\alpha) + n_i y^{(i)}(\beta) = 0 \quad (i = 0, 1, \dots, n-1),$$

которую можно представить в виде (1.1) ($f(t) \equiv 0$).

Пусть $m_i + n_i \neq 0$ ($i = 0, 1, \dots, n-1$). Матрица Грина $G_0(t, s)$ вспомогательной задачи (1.2) при $A_0(t) \equiv 0$ определяется, как отмечалось выше, соотношением (*), причем $g_{ik} \equiv 0$ при $i \neq k$, а

$$g_{ii}(t, s) = \begin{cases} m_i(m_i + n_i)^{-1} & \text{при } t \geq s, \\ -n_i(m_i + n_i)^{-1} & \text{при } t < s \quad (i = 0, 1, \dots, n-1). \end{cases}$$

Пусть

$$c_i = \max\{|m_i|, |n_i|\} \quad (i = 0, 1, \dots, n-1).$$

Простым счетом легко убедиться, что матрица

$$P = \max_t \int_{\alpha}^{\beta} |G_0(t, s) A(s)| ds = B,$$

где

$$\gamma_{j+1} = c_j \omega |m_j + n_j|^{-1}, \quad b_i = c_{n-1} \int_{\alpha}^{\beta} |a_i(s)| ds |m_{n-1} - n_{n-1}|^{-1}$$

$$(i, j = 0, 1, \dots, n-1), \quad \omega = \beta - \alpha.$$

Теорема 3. Пусть $m_i + n_i \neq 0$ ($i = 0, 1, \dots, n+1$) и

$$\prod_{k=0}^{n-1} |m_k + n_k| - \omega^{n-1} \int_{\alpha}^{\beta} |a_0(s)| ds \prod_{p=0}^{n-1} c_p > \sum_{i=1}^{n-1} \omega^{n-i-1} \int_{\alpha}^{\beta} |a_i(s)| ds \prod_{j=i}^{n-1} c_j \prod_{l=0}^{i-1} |m_l + n_l|. \quad (2.3)$$

Тогда существует функция Грина $\Gamma(t, s)$ задачи (2.2) и справедливы оценки

$$\left| \frac{\partial^i}{\partial t^i} \Gamma(t, s) \right| \leq \omega^{n-i-1} \Delta^{-1} \prod_{k=i}^{n-1} c_k |m_k + n_k|^{-1},$$

где

$$\Delta = 1 - \left(\omega^{n-1} \int_{\alpha}^{\beta} |a_0(s)| ds \prod_{p=0}^{n-1} c_p + \sum_{i=1}^{n-1} \omega^{n-i-1} \int_{\alpha}^{\beta} |a_i(s)| ds \prod_{j=i}^{n-1} c_j \prod_{l=0}^{i-1} |m_l + n_l| \right) \prod_{k=0}^{n-1} |m_k + n_k|^{-1}.$$

Доказательство. При выполнении неравенства (2.3) матрица $P = B$ в силу леммы 3 есть a -матрица, и теорема 3 теперь следует из теоремы 2.

Следствие. Если выполнены условия теоремы 3 и $a_k(t) \leq 0$ при $t \in [\alpha, \beta]$, $-m_i < n_i < 0$, или $0 < n_i < -m_i$, то функция Грина и ее производные до $n-1$ -го порядка включительно задачи (2.2) неотрицательны в квадрате $t, s \in [\alpha, \beta]$.

3°. Результаты, полученные выше, позволяют получить критерии существования и единственности решения нелинейной краевой задачи (1), (2).

Обозначим через H квадратную матрицу n -го порядка, у которой элементы первой наддиагонали (см. [2] стр. 25) равны -1 , а все остальные элементы равны нулю.

Ниже всюду за $G_0(t, s)$ будем брать матрицу, определенную соотношением (*).

Теорема 4. Пусть $\det(M + N) \neq 0$, $(M + N)^{-1}N \leq 0$ и $f(t, y, u, \dots, v)$ в области R удовлетворяет условию $L_2[1]$ с коэффициентами $g_k(t) \leq 0$ ($k = 0, 1, \dots, n-1$).

Если матрица

$$P_n = \max_t \int_{\alpha}^{\beta} |G_0(t, s) H| ds$$

— a -матрица и существуют n раз непрерывно-дифференцируемые на $[\alpha, \beta]$ функции $z(t)$, $u(t)$, удовлетворяющие неравенствам

$$Fu \leq 0, Fz \geq 0, \quad (3.1)$$

$z^{(i)}(t) \geq u^{(i)}(t)$ при $t \in [\alpha, \beta]$ ($i = 0, 1, \dots, n-1$) и краевым условиям (2), то существует по крайней мере одно решение $y(t)$ задачи (1), (2), такое, что $u^{(i)}(t) \leq y^{(i)}(t) \leq z^{(i)}(t)$ ($i = 0, 1, \dots, n-1$).

Доказательство. Из условий теоремы следует существование неотрицательной матрицы Грина $G(t, s)$ задачи $y' + Hy = 0$, $My(\alpha) + Ny(\beta) = 0$. Это позволяет задачу (1), (2), представленную в векторной форме

$$y' + Hy + f(t, y) = 0, My(\alpha) + Ny(\beta) = 0, \quad (3.2)$$

где $f(t, y) = (0, \dots, 0, f(t, y, y', \dots, y^{(n-1)}))$, свести к системе интегральных уравнений

$$x(t) = - \int_{\alpha}^{\beta} G(t, s) f(s, x(s)) ds \equiv Gx, \quad (3.3)$$

а неравенства (3.1) — к системе интегральных неравенств

$$z_0 \geq Gz_0, u_0 \leq Gu_0, \quad (3.4)$$

где

$$z_0 = (z, z', \dots, z^{(n-1)}), u_0 = (u, u', \dots, u^{(n-1)}).$$

Пусть $x \in [u_0, z_0]$ и пусть $\omega_0 = Gx$.Тогда из (3.4) с учетом условия L_2 следуют неравенства

$$\begin{aligned} \omega_0 - z_0 &\leq Gx - Gz_0 \leq 0, \\ \omega_0 - u_0 &\geq Gx - Gu_0 \geq 0, \end{aligned}$$

показывающие, что вполне непрерывный оператор G отображает замкнутое множество $[u_0, z_0]$ в себя.Согласно принципу Шаудера [7], существует решение системы интегральных уравнений (3.3) и, значит, задачи (1), (2). При этом $u^{(i)}(t) \leq y^{(i)}(t) \leq z^{(i)}(t)$ ($i = 0, 1, \dots, n-1$).Обозначим через $M(t)$ матрицу в которую переходит $A(t)$ при замене $a_h(t)$ на непрерывные функции $m_h(t)$.Теорема 5. Пусть $\det(M+N) \neq 0$ и в области R

$$|f(t, y, y_1, \dots, y_{n-1})| \leq \sum_{i=0}^{n-1} m_i(t) |y_i| + \varphi(t), \quad m_i(t) \geq 0, \quad \varphi(t) \geq 0.$$

Если матрица

$$P_m = \max_t \int_{\alpha}^{\beta} |G_0(t, s)| |M(s)| ds$$

— a -матрица, то задача (1), (2) имеет решение.Доказательство. Из условий теоремы следует существование а) матрицы $G_0(t, s)$, б) решения интегрального уравнения

$$x(t) = \int_{\alpha}^{\beta} |G_0(t, s)| |M(s)| x(s) ds + \int_{\alpha}^{\beta} |G_0(t, s)| f(s) ds.$$

Следовательно, выполнены условия леммы 1 работы [3], откуда и следует утверждение теоремы.

Столь же просто доказывается следующая теорема, где от матрицы P_m требуются менее жесткие условия.Теорема 6. Пусть $\det(M+N) \neq 0$ и

$$\sum_{i=0}^{n-1} m_i(t) y_i - \varphi(t) \leq f(t, y, y_1, \dots, y_{n-1}) \leq \sum_{i=0}^{n-1} m_i(t) y_i + \varphi(t).$$

Если матрица

$$P_n = \max_t \int_{\alpha}^{\beta} |G_0(t, s)| M(s) ds$$

— a -матрица, то задача (1), (2) имеет решение.

4°. Рассмотрим условие единственности решения задачи (3.2).

Пусть $\det(M+N) \neq 0$ и матрица

$$P_n = \max_t \int_{\alpha}^{\beta} |G_0(t, s)| H ds$$

— a -матрица. Тогда задача $y' + Hy = 0$, $My(\alpha) + Ny(\beta) = 0$ в квадрате $t, s \in [\alpha, \beta]$ имеет матрицу Грина $G(t, s)$ и согласно соотношению(**)

$$|G(t, s)| \leq (E - P_n)^{-1} \max_t |G_0(t, s)|.$$

Теорема 7. Пусть $f(t, y)$ удовлетворяет в R условию Липшица с матрицей $L(t)$ и пусть матрица

$$P_t = \max_t (E - P_n)^{-1} |G_0(t, s)| \int_{\alpha}^{\beta} |L(s)| ds$$

— α -матрица. Тогда задача (3.2) имеет не более одного решения.

Доказательство. Допустим, что $y^1(t)$, $y^2(t)$ — два решения задачи (3.2). Тогда

$$|y^1(t) - y^2(t)| \leq \int_{\alpha}^{\beta} |G(t, s) L(s)| |y^1(s) - y^2(s)| ds.$$

Обозначив $\theta = \max_{t \in [\alpha, \beta]} |y^1 - y^2|$, из последнего неравенства получим

$$\theta \leq \max_t (E - P_n)^{-1} |G_0(t, s)| \int_{\alpha}^{\beta} |L(s)| ds \theta$$

или

$$(E - \max_t (E - P_n)^{-1} |G_0(t, s)| \int_{\alpha}^{\beta} |L(s)| ds) \theta \leq 0.$$

Но так как P_t — α -матрица, то $\theta \leq 0$, откуда следует $y^1(t) \equiv y^2(t)$.

Замечание 3. Если выполнены условия одной из теорем 4, 5, 6 и в то же время условия теоремы 7, то задача (3.2) (а значит, и (1), (2)) имеет единственное решение.

Автор признателен А. А. Хохрякову за внимание к работе.

Литература

1. Азбелев Н. В., Цалюк З. Б. УМЖ, 10, № 1, 1958.
2. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. М., 1967.
3. Жевлаков Г. Н., Комленко Ю. В., Тонков Е. Л. ДУ, 4, № 10, 1968.
4. Коддингтон Э. А., Левинсон Н. Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. М., 1958.
5. Перов А. И., Кибенко А. В. Изв. АН СССР, 30, № 2, 1966.
6. Хохряков А. Я. ДУ, 2, № 3, 1966.
7. Канторович Л. В., Акилов Г. П. Функциональный анализ в нормированных пространствах. М., 1959, стр. 574.
8. Хохряков А. Я., Зубов В. М. ДАН БССР, 12, № 9, 1968.

Институт математики
АН БССР

Поступило в редакцию
28.XI 1968

Т. М. БЫКОВА

**КУБАТУРНАЯ ФОРМУЛА
 ДЛЯ ВЫЧИСЛЕНИЯ ТРОЙНОГО ИНТЕГРАЛА,
 ТОЧНАЯ ДЛЯ МНОГОЧЛЕНОВ ЧЕТВЕРТОЙ
 СТЕПЕНИ И ИМЕЮЩАЯ ОДИННАДЦАТЬ УЗЛОВ**

Указанная в заглавии формула

$$\iiint_{\Omega} p(x, y, z) f(x, y, z) dx dy dz \cong \sum_{j=1}^{11} a_j f(x_j, y_j, z_j), \quad (1)$$

где весовая функция $p(x, y, z) \geq 0$ и имеет требуемые моменты относительно Ω , строится при двух упрощающих предположениях. Первое касается области интегрирования и веса: Ω — считается симметричной относительно координатных плоскостей и такой же симметрией обладает $p(x, y, z)$. Второе предположение касается кубатурной формулы, будем считать, что начало координат является ее узлом. Таким образом, здесь ставится задача получить одну кубатурную формулу, точную для многочленов четвертой степени, а не полную их совокупность. Аналогичную задачу рассматривал И. П. Мысовских [1] для двойных интегралов.

Известно [2], что нижняя граница для числа узлов в рассматриваемом случае равна 10. Кубатурную формулу с числом узлов, равным 10, построить не удалось. Возможно, что в данном случае наименьшее число узлов равно 11.

Воспользуемся следующим результатом И. П. Мысовских [1]. Если точка $M = (a_1, a_2, a_3)$ — узел кубатурной формулы (1), то остальные ее узлы лежат на алгебраической поверхности

$$\sum_{j=1}^{10} F_j(a_1, a_2, a_3) F_j(x, y, z) = 0, \quad (2)$$

где $\{F_j(x, y, z)\}_{j=1}^{10}$ (3)

представляет собой ортонормированную систему, построенную по линейно-независимой системе функций $1, x, y, z, xy, xz, yz, x^2, y^2, z^2$. Строго говоря, этот результат применим, если число узлов в (1) равно 10. Тем не менее, он позволяет построить требуемую формулу.

Так как $M_1 = (0, 0, 0)$, по предположению, является узлом кубатурной формулы (1), то получаем отвечающую этому узлу поверхность (2):

$$Q_1 \equiv ax^2 + by^2 + cz^2 - d = 0, \quad (4)$$

где a, b, c, d выражаются через моменты весовой функции относительно области Ω , при этом $d > 0$ как определитель Грама линейно-независимой системы функций x^2, y^2, z^2 .

Можно показать, что многочлен xQ_1 ортогонален ко всем одночленам первой степени, в частности к x :

$$a\mu_{400} + b\mu_{220} + c\mu_{202} = d\mu_{200}.$$

Так как $d > 0$, то из последнего равенства следует, что хотя бы одно из чисел a , b или c положительно. Пусть $a > 0$. В качестве второго узла формулы на поверхности (4) возьмем точку $M_2 = \left(\sqrt{\frac{d}{a}}, 0, 0 \right)$. По ней построим вторую поверхность $Q_2 = 0$, где

$$Q_2 \equiv A_1x^2 + B_1y^2 + C_1z^2 + D_1x. \quad (5)$$

Выражения для коэффициентов A_1 , B_1 , C_1 , D_1 приводить не будем.

Теперь на кривой L , получающейся в результате пересечения поверхностей $Q_1 = 0$ и $Q_2 = 0$, надо выбрать точку, которая определит третью поверхность. Для этого рассмотрим точки пересечения кривой L с плоскостью $y = 0$ (можно было рассмотреть точки пересечения кривой L с плоскостью $z = 0$). Координаты этих точек удовлетворяют уравнениям

$$\begin{aligned} ax^2 + cz^2 - d &= 0, \\ A_1x^2 + C_1z^2 + D_1x &= 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Предполагая, что

$$cC_1 \neq 0, \quad (7)$$

и исключая из этих уравнений z , приходим к квадратному уравнению для определения x :

$$(\mu_{002}\mu_{040} - \mu_{020}\mu_{022})x^2 + \frac{c\sqrt{ad}}{d\mu_{200}}x + (\mu_{022}\mu_{220} - \mu_{040}\mu_{202}) = 0. \quad (8)$$

Будем считать, что

$$q = (\mu_{002}\mu_{040} - \mu_{020}\mu_{022})(\mu_{022}\mu_{220} - \mu_{040}\mu_{202}) \neq 0 \quad (9)$$

и

$$t = ac^2 - 4d\mu_{200}^2q > 0. \quad (10)$$

Тогда уравнение (8) имеет вещественные корни. Запишем один из корней:

$$x_1 = \frac{-c\sqrt{a} + \sqrt{t}}{2\sqrt{d}\mu_{200}(\mu_{002}\mu_{040} - \mu_{020}\mu_{022})}. \quad (11)$$

Из (6) находим

$$z_1 = \frac{\sqrt{2r}}{2\sqrt{d}\mu_{200}(\mu_{002}\mu_{040} - \mu_{020}\mu_{022})}.$$

При этом делаем еще одно предположение:

$$r = 2d\mu_{200}^2(\mu_{002}\mu_{040} - \mu_{020}\mu_{022})(\mu_{004}\mu_{040} - \mu_{022}^2) - a(ac - \sqrt{at}) > 0. \quad (12)$$

Предположения (7), (9), (10) и (12) накладывают дополнительные ограничения на область интегрирования и весовую функцию. Отметим, что они выполняются для куба и шара и весовой функции, равной единице.

Таким образом, найдена третья точка

$$M_3 = \left(\frac{\sqrt{t} - c\sqrt{a}}{2\sqrt{d}\mu_{200}(\mu_{002}\mu_{040} - \mu_{020}\mu_{022})}, 0, \frac{\sqrt{2r}}{2\sqrt{d}\mu_{200}(\mu_{002}\mu_{040} - \mu_{020}\mu_{022})} \right).$$

Определяемая этой точкой поверхность имеет вид

$$Q_3 \equiv A_2x^2 + B_2y^2 + C_2z^2 + D_2xz + L(x, z) = 0, \quad (13)$$

где $L(x, z)$ — однородный многочлен первой степени, а из коэффициентов приведем только выражение для D_2 :

$$D_2 = \frac{\sqrt{2r}(\sqrt{t} - c\sqrt{a})(\lambda m + \delta n + \varepsilon p)}{2\mu_{000}\mu_{202}}.$$

Здесь $\lambda m + \delta n + \varepsilon p$ выражается через моменты весовой функции.

Следует отметить, что

$$D_2 \neq 0, \quad (14)$$

так как $r > 0$ по (12), и, как можно показать, $\lambda m + \delta n + \varepsilon p > 0$. Докажем, что $\sqrt{t} - c\sqrt{a} \neq 0$. Если бы $\sqrt{t} - c\sqrt{a} = 0$, то из (11) получили бы, что $x_1 = 0$, а это невозможно ввиду (9).

Теорема. Пусть выполняются следующие условия: 1) поверхности $Q_1 = 0$, $Q_2 = 0$ и $Q_3 = 0$ пересекаются точно в восьми вещественных и различных точках; 2) имеет место неравенство

$$D_2^2(\mu_{002}\mu_{022} - \mu_{004}\mu_{020})(\mu_{020}\mu_{202} - \mu_{002}\mu_{220}) + \frac{r^2\mu_{020}^2(\lambda m + \delta n + \varepsilon p)^2}{\mu_{000}^2} \neq 0.$$

Тогда существует кубатурная формула (1), точная для многочленов четвертой степени и имеющая 11 узлов: восемь точек пересечения поверхностей $Q_1 = 0$, $Q_2 = 0$, $Q_3 = 0$ и точки M_1 , M_2 и M_3 .

Доказательство. Предположим, что первое условие теоремы выполнено и у нас имеются все 11 точек. Подберем коэффициенты a_j , $j = 1, \dots, 11$ формулы (1) таким образом, чтобы она была точна для всех (десяти) одночленов второй степени и для *хуз*. Такой выбор коэффициентов a_j можно осуществить ввиду того, что определитель D соответствующей алгебраической системы отличен от нуля. Последнее следует из равенства

$$D = Q_1(M_1)Q_2(M_2)Q_3(M_3) \begin{vmatrix} 1 & x_4 & y_4 & z_4 & x_4y_4 & x_4z_4 & y_4z_4 & x_4y_4z_4 \\ 1 & x_5 & y_5 & z_5 & x_5y_5 & x_5z_5 & y_5z_5 & x_5y_5z_5 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & x_{11} & y_{11} & z_{11} & x_{11}y_{11} & x_{11}z_{11} & y_{11}z_{11} & x_{11}y_{11}z_{11} \end{vmatrix}.$$

так как $Q_i(M_i) \neq 0$ ($i = 1, 2, 3$) и определитель восьмого порядка, как можно показать, отличен от нуля.

Доказательство того, что формула (1) точна для многочленов третьей и четвертой степеней, проводится аналогично тому, как это сделано в [3].

Для куба и шара вычислены значения узлов и коэффициентов рассматриваемой кубатурной формулы с восемью значащими цифрами.

Автор благодарит профессора И. П. Мысовских за постоянное внимание к настоящей работе.

Литература

1. Мысовских И. П. ДАН СССР, 178, № 6, 1968.
2. Крылов В. И. Приближенное вычисление интегралов. Изд. «Наука», М., 1967.
3. Быкова Т. М. Вестник ЛГУ, в. 2, № 7, 1969.

*Ленинградский государственный университет
им. А. А. Жданова*

*Поступило в редакцию
30.VI 1969*

Э. И. ГРУДО.

О РЕШЕНИЯХ АВТОНОМНОЙ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ В ПОЛНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛАХ

Рассмотрим систему уравнений в полных дифференциалах

$$dx = [A_1x + P_1(x)] dt_1 + \dots + [A_mx + P_m(x)] dt_m, \quad (1)$$

где вектор-столбец x имеет координаты x_1, \dots, x_n , а векторы-столбцы $P_j(x)$ ($j = 1, \dots, m$) имеют соответственно координаты $P_j^{(i)}(x_1, \dots, x_n)$ ($i = 1, \dots, n$), являющиеся голоморфными функциями своих аргументов в окрестности $x_1 = \dots = x_n = 0$, разложения которых в степенные ряды по x_1, \dots, x_n начинаются с членов не ниже второго порядка. Матрицы A_j являются постоянными и имеют размерность $n \times n$.

Считаем, что система (1) вполне интегрируема. Условия полной интегрируемости можно записать в виде

$$\frac{D(A_jx + P_j)}{D(x)} (A_kx + P_k) \equiv \frac{D(A_kx + P_k)}{D(x)} (A_jx + P_j), \quad (2)$$

причем $\frac{D(A_jx + P_j)}{D(x)}$ обозначает матрицу функционального определителя

по x_1, \dots, x_n системы функций, состоящей из координат вектора $A_jx + P_j$. Из (2) следует, что матрицы A_1, \dots, A_m попарно перестановочны. В силу [1] существует неособая матрица S , такая, что сразу все матрицы A_1, \dots, A_m с помощью этой матрицы можно привести либо к диагональному виду, если элементарные делители матриц A_1, \dots, A_m простые, либо к треугольному виду в противном случае. Тогда преобразование $x \rightarrow Sx$ переведет систему (1) в такую систему, где все матрицы A_1, \dots, A_m будут иметь либо диагональный, либо треугольный вид. Для простоты будем считать, что уже в системе (1) матрицы A_j либо диагональные, либо имеют нижнюю треугольную форму.

Система (1) при $n=3, m=2$ с качественной точки зрения рассматривалась в [2]. Линейные системы вида (1) рассматривались в [3—5]. Частные случаи системы (1) рассматривались также в [9].

Мы будем рассматривать систему (1) с аналитической точки зрения, т. е. с точки зрения изучения функций, определяемых этой системой. Поэтому x_1, \dots, x_n являются комплексными переменными. Функции $P_j^{(i)}$ и матрицы A_j также комплексные. Независимые переменные t_1, \dots, t_m также могут принимать комплексные значения. С указанной точки зрения два частных случая системы (1) мы уже рассмотрели в [6]. Теперь рассмотрим общий случай.

Система (1) является естественным обобщением автономной системы n обыкновенных дифференциальных уравнений. Поэтому систему (1) можно назвать автономной системой в полных дифференциалах.

Обозначим через $\lambda_j^{(1)}, \dots, \lambda_j^{(n)}$ собственные значения (диагональные элементы) матрицы A_j , а через $\alpha_{ik}^{(j)}$ ($i > k; i = 1, \dots, n, k = 1, \dots, n-1$) элементы A_j , стоящие ниже главной диагонали. Обозначим далее через $S_j^{(i)}$ множество систем из целых неотрицательных чисел (j_1, \dots, j_n) с $j_1 + \dots + j_n > 1$, таких, что

$$\lambda_j^{(1)} j_1 + \dots + \lambda_j^{(n)} j_n - \lambda_j^{(i)} = 0. \quad (3)$$

Пусть

$$S^{(i)} = \prod_{j=1}^m S_j^{(i)}.$$

Два частных случая, которые мы рассмотрели в [6], характеризуются тем, что либо все A_j имеют диагональный вид, либо в противном случае все $S^{(i)}$ пусты. Здесь мы не будем удерживать эти ограничения.

Если преобразуем систему (1) с помощью формального преобразования

$$x = \Phi(u), \quad (4)$$

где вектор-столбец u имеет координаты u_1, \dots, u_n , а вектор-столбец Φ имеет координаты

$$\Phi_i(u_1, \dots, u_n) = u_i + \sum_{i_1 + \dots + i_n = 2}^{\infty} b_{i_1 \dots i_n}^{(i)} u_1^{i_1} \dots u_n^{i_n} \quad (i = 1, \dots, n) \quad (5)$$

с постоянными коэффициентами $b_{i_1 \dots i_n}^{(i)}$, то для u получаем систему

$$du = [A_1 u + F_1(u)] dt_1 + \dots + [A_m u + F_m(u)] dt_m, \quad (6)$$

причем координаты $F_j^{(1)}, \dots, F_j^{(n)}$ вектор-столбца $F_j(u)$ являются формальными степенными рядами по u_1, \dots, u_n , начинающимися с членов порядка не ниже второго. Пусть

$$F_j^{(i)} = \sum_{i_1 + \dots + i_n = 2}^{\infty} a_{i_1 \dots i_n}^{(ij)} u_1^{i_1} \dots u_n^{i_n}.$$

Подставляя (4) в (1) и учитывая (6), получаем

$$\begin{aligned} \frac{D(\Phi)}{D(u)} [(A_1 u + F_1) dt_1 + \dots + (A_m u + F_m) dt_m] = \\ = [A_1 \Phi + P_1(\Phi)] dt_1 + \dots + [A_m \Phi + P_m(\Phi)] dt_m. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\frac{D(\Phi)}{D(u)} [A_j u + F_j(u)] = A_j \Phi + P_j(\Phi) \quad (j = 1, \dots, m). \quad (7)$$

Каждую систему (7) можно записать так:

$$\begin{aligned} \sum_{s=1}^n \left(\sum_{k=1}^{s-1} \alpha_{sk}^{(j)} u_k + \lambda_j^{(s)} u_s + F_j^{(s)} \right) \frac{\partial \Phi_i}{\partial u_s} = \\ = \sum_{\sigma=1}^{i-1} \alpha_{i\sigma}^{(j)} \Phi_{\sigma} + \lambda_j^{(i)} \Phi_i + P_j^{(i)}(\Phi) \quad (i = 1, \dots, n). \end{aligned} \quad (8)$$

Подставляя (5) в (8), получаем

$$\begin{aligned} & \left(\sum_{s=1}^n \lambda_j^{(s)} j_s - \lambda_j^{(i)} \right) b_{j_1 \dots j_n}^{(i)} + \sum_{s=1}^n (j_s + 1) \sum_{k=1}^{s-1} \alpha_{sk}^{(j)} b_{j_1 \dots j_{k-1} \dots j_{s+1} \dots j_n}^{(i)} + \\ & + a_{j_1 \dots j_n}^{(ij)} + \sum' \sum_{s=1}^n a_{j_1' \dots j_n'}^{(sj)} b_{j_1'' \dots j_n''}^{(i)} j_s'' = \sum_{\sigma=1}^{i-1} \alpha_{i\sigma}^{(j)} b_{j_1 \dots j_n}^{(\sigma)} + R_{j_1 \dots j}^{(ii)} \end{aligned} \quad (9)$$

$$(i = 1, \dots, n),$$

где в Σ' суммируем по тем j_1', \dots, j_n' и j_1'', \dots, j_n'' , для которых $j_1' + j_1'' + \dots + j_n' + j_n'' = j_1 + \dots + j_n + 1$, а $R_{j_1 \dots j}^{(ii)}$ является полиномом относительно тех $b_{j_1' \dots j_n'}^{(i)}$, для которых $j_1' + \dots + j_n' < j_1 + \dots + j_n$, $j_1' \leq j_1, \dots, j_n' \leq j_n$, $i' = 1, \dots, n$. Эти $R_{j_1 \dots j}^{(ii)}$ получаются как коэффициенты при $u_1^{j_1} \dots u_n^{j_n}$ при подстановке рядов (5) в $P_j^{(i)}(\Phi)$.

Условия полной интегрируемости для системы (6) запишем в виде

$$\begin{aligned} & \sum_{s=1}^n \left(\sum_{k=1}^{s-1} \alpha_{sk}^{(j)} u_k + \lambda_j^{(s)} u_s + F_j^{(s)} \right) \frac{\partial \left[\sum_{k=1}^{\sigma-1} \lambda_{\sigma k}^{(p)} u_k + \lambda_p^{(\sigma)} u_\sigma + F_p^{(\sigma)} \right]}{\partial u_s} = \\ & = \sum_{s=1}^n \left(\sum_{k=1}^{s-1} \alpha_{sk}^{(p)} u_k + \lambda_p^{(s)} u_s + F_p^{(s)} \right) \frac{\partial \left[\sum_{k=1}^{\sigma-1} \alpha_{\sigma k}^{(j)} u_k + \lambda_j^{(\sigma)} u_\sigma + F_j^{(\sigma)} \right]}{\partial u_s} \end{aligned} \quad (10)$$

$$(j, p = 1, \dots, m; \sigma = 1, \dots, n).$$

Из (10) получаем

$$\begin{aligned} & a_{j_1 \dots j_n}^{(\sigma p)} \left(\sum_{s=1}^n \lambda_j^{(s)} j_s - \lambda_j^{(\sigma)} \right) + \sum_{s=1}^n \sum_{k=1}^{s-1} \alpha_{sk}^{(j)} (j_s + 1) a_{j_1' \dots j_{k-1}' \dots j_{s+1}' \dots j_n'}^{(\sigma p)} + \\ & + \sum_{k=1}^{\sigma-1} \alpha_{\sigma k}^{(p)} a_{j_1' \dots j_n'}^{(kj)} + \sum' \sum_{s=1}^n a_{j_1' \dots j_n'}^{(sj)} a_{j_1'' \dots j_n''}^{(\sigma p)} j_s'' = \\ & = a_{j_1 \dots j_n}^{(\sigma j)} \left(\sum_{s=1}^n \lambda_p^{(s)} j_s - \lambda_p^{(\sigma)} \right) + \sum_{s=1}^n \sum_{k=1}^{s-1} \alpha_{sk}^{(p)} (j_s + 1) a_{j_1' \dots j_{k-1}' \dots j_{s+1}' \dots j_n'}^{(\sigma j)} + \\ & + \sum_{k=1}^{\sigma-1} \alpha_{\sigma k}^{(j)} a_{j_1' \dots j_n'}^{(kp)} + \sum' \sum_{s=1}^n a_{j_1' \dots j_n'}^{(sp)} a_{j_1'' \dots j_n''}^{(\sigma j)} j_s'' \end{aligned} \quad (11)$$

причем в Σ' суммирование производится так же, как в соответствующей сумме в (9).

Величину

$$nj_1 + (n-1)j_2 + \dots + 2j_{n-1} + j_n = r_{j_1 \dots j_n}$$

будем называть рангом системы (j_1, \dots, j_n) или также любого коэффициента $a_{j_1 \dots j_n}$ с такими нижними индексами. Если $j_1 + \dots + j_n = M$, то ранг (j_1, \dots, j_n) удовлетворяет неравенству $M \leq r_{j_1 \dots j_n} \leq nM$.

Множество (j_1, \dots, j_n) с $j_1 + \dots + j_n = M$ обозначим σ_M . Пусть $i_1^{(M)}, \dots, i_{q_M}^{(M)}$ — возрастающая последовательность чисел из $1, \dots, n$, для которых $\sigma_M \cap S^{(i_\mu)} (i_\mu = 1, \dots, q_M)$ не пустые. Обозначим наименьший ранг $(j_1, \dots, j_n) \in (\sigma_M \cap S^{(i_\mu)})$ через $\rho_{i_\mu}^{(M)}$. Пусть далее $r_{i_1^{(M)}, \dots, i_\mu^{(M)}}^{(M)} = \min \{\rho_{i_1}^{(M)}, \dots, \rho_{i_\mu}^{(M)}\}$. Множество $(j_1, \dots, j_n) \in \sigma_M$, для которых $r_{j_1 \dots j_n} \geq r_{i_1^{(M)}, \dots, i_\mu^{(M)}}^{(M)}$, обозначим через $H_{i_\mu}^{(M)}$. Положим $H_i^{(M)} = H_{i_\mu}^{(M)}$ для $i_\mu^{(M)} < i < i_{\mu+1}^{(M)}$. Для $i_{q_M}^{(M)} < i \leq n$ полагаем $H_i^{(M)} = H_{i_{q_M}}^{(M)}$, и для $1 \leq i < i_1^{(M)}$ полагаем $H_i^{(M)} = \emptyset$.

В случае, если $A_j (j=1, \dots, m)$ имеют диагональную форму, полагаем $H_i^{(M)} = \sigma_M \cap S^{(i)}$. Эти множества пусты при $i \neq i_\mu (\mu = 1, \dots, q_M)$.

Рассматриваем теперь множества $R_M^{(i)} = \sigma_M \setminus H_i^{(M)}$. Пусть $\rho_{ij}^{(i)}$ есть наименьший ранг $(j_1, \dots, j_n) \in (R_M^{(i)} \cap S_j^{(i)})$. Если $R_M^{(i)} \cap S_j^{(i)}$ пусто, то полагаем $\rho_{ij}^{(i)}$ равным числу, на единицу большему наибольшему рангу $(j_1, \dots, j_n) \in R_M^{(i)}$. Пусть далее $\rho_{ij}^{(M)} = \max_j \rho_{ij}^{(i)}$. Множество всех $(j_1, \dots, j_n) \in R_M^{(i)}$, ранги которых меньше $\rho_{ij}^{(M)}$, обозначим $G_{ij}^{(M)}$. Если множество $R_M^{(i)} \setminus G_{ij}^{(M)}$ не пусто, то с ним поступаем так же, как и с $R_M^{(i)}$. В конце концов множество $R_M^{(i)}$ будет разбито на прямую сумму множеств $G_{ij}^{(M, \alpha)}$ ($\alpha = 1, \dots, v_{Mi}$). Каждое из этих множеств характеризуется тем, что при $(j_1, \dots, j_n) \in G_{ij}^{(M, \alpha)}$ имеем

$$\sum_{s=1}^n \lambda_{j_{Mi}^{(\alpha)}}^{(s)} j_s - \lambda_{j_{Mi}^{(i)}}^{(i)} \neq 0. \quad (12)$$

Определим теперь $b_{j_1 \dots j_n}^{(i)}$ в (5) следующим образом. При $(j_1, \dots, j_n) \in H_i^{(M)}$ ($M=2, 3, \dots$) полагаем $b_{j_1 \dots j_n}^{(i)} = 0$. Впрочем, мы можем их положить равными любым постоянным. Коэффициенты $b_{j_1 \dots j_n}^{(i)}$ для $(j_1, \dots, j_n) \in R_M^{(i)}$ определяем из уравнений

$$\begin{aligned} & \left(\sum_{s=1}^n \lambda_{j_{Mi}^{(\alpha)}}^{(s)} j_s - \lambda_{j_{Mi}^{(i)}}^{(i)} \right) b_{j_1 \dots j_n}^{(i)} + \sum_{s=1}^n (j_s + 1) \sum_{k=1}^{s-1} \alpha_{sk}^{(i, Mi)} b_{j_1 \dots j_{k-1} \dots j_{s+1} \dots j_n}^{(i)} + \\ & + \sum_{s=1}^n \sum_{j_1' \dots j_n'} \alpha_{j_1' \dots j_n'}^{(s, Mi)} b_{j_1' \dots j_n'}^{(i)} j_s = \sum_{\sigma=1}^{i-1} \alpha_{i\sigma}^{(i, Mi)} b_{j_1 \dots j_n}^{(\sigma)} + R_{j_1 \dots j_n}^{(i, Mi)} \end{aligned} \quad (13)$$

$$(i = 1, \dots, n; \alpha = 1, \dots, v_{Mi}; M = 2, 3, \dots)$$

при $(j_1, \dots, j_n) \in G_{ij}^{(M, \alpha)}$. При этом сначала определяем $b_{j_1 \dots j_n}^{(i)}$ для $M=2$, затем для $M=3$ и т. д. Определение же $b_{j_1 \dots j_n}^{(i)}$ при фиксированном M происходит в такой последовательности: $i=1, i=2, \dots$. При фиксированных M и i определяем $b_{j_1 \dots j_n}^{(i)}$ сначала для $\alpha=1$, затем для $\alpha=2$ и т. д. При фиксированных M, i и α (т. е. для $(j_1, \dots, j_n) \in G_{ij}^{(M, \alpha)}$) определяем $b_{j_1 \dots j_n}^{(i)}$

в последовательности от меньшего ранга к большему, ибо если ранг $b_{j_1 \dots j_n}^{(i)}$ есть r , то ранг $b_{j_1 \dots j_{k-1} \dots j_{s+1} \dots j_n}^{(i)}$ есть $r+k-s < r$, так как $k < s$. Описанный процесс определения $b_{j_1 \dots j_n}^{(i)}$ для $(j_1, \dots, j_n) \in R_M^{(i)}$ в силу (12) всегда проходит. После определения $b_{j_1 \dots j_n}^{(i)}$ для $(j_1, \dots, j_n) \in \sigma_M$ определяем сразу же из (9) $a_{j_1 \dots j_n}^{(ij)}$ для $(j_1, \dots, j_n) \in \sigma_M$. В силу (13) $a_{j_1 \dots j_n}^{(ij)} = 0$ для $(j_1, \dots, j_n) \in G_{ijMi}^{(M)}$.

Рассмотрим теперь соотношения (11). Заметим прежде всего, что если имеем $(j'_1, \dots, j'_n) \in H_s^{(M')}$, $(j''_1, \dots, j''_n) \in H_{\sigma'}^{(M'')}$, то

$$(j'_1 + j''_1, \dots, j'_s + j''_s - 1, \dots, j'_n + j''_n) \in H_{\sigma}^{(M'+M''-1)}. \quad (14)$$

Действительно, при наших условиях найдутся $s' \leq s$, $\sigma' \leq \sigma$, $(\bar{j}'_1, \dots, \bar{j}'_n) \in H_{s'}^{(M')}$, $(\bar{j}''_1, \dots, \bar{j}''_n) \in H_{\sigma'}^{(M'')}$, что имеем

$$\sum_{k=1}^n \lambda_j^{(k)} \bar{j}'_k - \lambda_j^{(s')} = 0, \quad \sum_{k=1}^n \lambda_j^{(k)} \bar{j}''_k - \lambda_j^{(\sigma')} = 0$$

для всех $j=1, \dots, m$, причем $r_{\bar{j}'_1 \dots \bar{j}'_n} \leq r_{j'_1 \dots j'_n}$, $r_{\bar{j}''_1 \dots \bar{j}''_n} \leq r_{j''_1 \dots j''_n}$. В силу последних равенств легко видеть, что $(\bar{j}'_1 + \bar{j}''_1, \dots, \bar{j}'_{s'} + \bar{j}''_{s'} - 1, \dots, \bar{j}'_n + \bar{j}''_n) \in H_{\sigma}^{(M'+M''-1)}$. Так как, очевидно, ранг $(j'_1 + j''_1, \dots, j'_{s'} + j''_{s'} - 1, \dots, j'_n + j''_n)$ не меньше ранга $(\bar{j}'_1 + \bar{j}''_1, \dots, \bar{j}'_{s'} + \bar{j}''_{s'} - 1, \dots, \bar{j}'_n + \bar{j}''_n)$, то отсюда в силу определения $H_i^{(M)}$ следует (14).

Из (11) для $(j_1, \dots, j_n) \in G_{ijMi}^{(M)}$ получим

$$\begin{aligned} & a_{j_1 \dots j_n}^{(ip)} \left(\sum_{s=1}^n \lambda_{j(\alpha)}^{(s)} j_s - \lambda_{j(\alpha)}^{(i)} \right) + \sum_{s=1}^n \sum_{k=1}^{s-1} \alpha_{sk}^{(jMi)} (j_s + 1) a_{j_1 \dots j_{k-1} \dots j_{s+1} \dots j_n}^{(ip)} + \\ & + \sum_{k=1}^{i-1} \alpha_{ik}^{(p)} a_{j_1 \dots j_n}^{(kiMi)} + \sum_{s=1}^n a_{j'_1 \dots j'_n}^{(sjMi)} a_{j''_1 \dots j''_n}^{(ip)} j''_s = \sum_{k=1}^{i-1} \alpha_{ik}^{(jMi)} a_{j_1 \dots j_n}^{(kp)} + \\ & + \sum_{s=1}^n \sum_{k=1}^{s-1} \alpha_{sk}^{(p)} (j_s + 1) a_{j_1 \dots j_{k-1} \dots j_{s+1} \dots j_n}^{(ijMi)} + \sum_{s=1}^n a_{j'_1 \dots j'_n}^{(sp)} a_{j''_1 \dots j''_n}^{(ijMi)} j''_s \end{aligned} \quad (15)$$

$(p = 1, \dots, m).$

В силу (12) и замечания, приведенного в предыдущем абзаце, в такой же последовательности, как при определении $b_{j_1 \dots j_n}^{(i)}$ из (13), получим из (15), что $a_{j_1 \dots j_n}^{(ij)} = 0$ для $(j_1, \dots, j_n) \in G_{ijMi}^{(M)}$ при всех j . Значит, $a_{j_1 \dots j_n}^{(ij)} = 0$ для $(j_1, \dots, j_n) \in R_M^{(i)}$ ($M=2, 3, \dots$). Отличными от нуля могут быть лишь те $a_{j_1 \dots j_n}^{(ij)}$, для которых $(j_1, \dots, j_n) \in H_i^{(M)}$.

Обозначим

$$\tilde{S}^{(i)} = \bigcup_{M=2}^{\infty} H_i^{(M)}.$$

В случае диагональных A_j , очевидно, имеем $\tilde{S}^{(i)} = \tilde{S}^{(i)}$.

Теорема 1. Всегда можно так определить коэффициенты $b_{j_1 \dots j_n}^{(i)}$ в (5), что система (1) с помощью формального преобразования (4), (5) приведет к системе (6) с

$$F_j^{(i)} = \sum_{(j_1 \dots j_n) \in \tilde{S}^{(i)}} a_{j_1 \dots j_n}^{(i)} u_1^{j_1} \dots u_n^{j_n} \quad (j=1, \dots, m; i=1, \dots, n). \quad (16)$$

Систему (6), (16) будем называть нормальной формой системы (1).

В силу (8) преобразование (4), (5) можно рассматривать как преобразование систем

$$\frac{dx}{dt} = A_j x + P_j(x) \quad (17)$$

при любом j в систему

$$\frac{du}{dt} = A_j u + F_j(u). \quad (18)$$

Сейчас мы установим один признак сходимости преобразования (4), (5).

Теорема 2. Если собственные числа матрицы A_j при некотором j расположены с одной стороны прямой, проходящей через начало в комплексной плоскости, то ряды (5) сходятся в окрестности $u=0$.

Доказательство простое. Прежде всего можно считать, что $\lambda_j^{(i)}$ ($i=1, \dots, n$) так упорядочены, что при возрастании индекса i расстояние точки $\lambda_j^{(i)}$ от прямой, упомянутой в теореме 2, не уменьшается. Из этого следует, что соотношения (3) для данного j запишутся в виде

$$\lambda_j^{(i)} = \lambda_j^{(1)} j_1 + \dots + \lambda_j^{(i-1)} j_{i-1} \quad (19)$$

и что поэтому эти соотношения могут выполняться лишь при конечном числе систем (j_1, \dots, j_n) . Значит, $\tilde{S}^{(i)}$ состоят из конечного числа систем (j_1, \dots, j_n) . Другими словами, $F_j^{(i)}$ из (16) будут полиномами.

Пусть теперь

$$x = \Psi(z) \quad (20)$$

будет голоморфное обратимое преобразование, приводящее систему (17) к нормальной форме [7, 8]

$$\frac{dz}{dt} = J_j z + K_j(z), \quad (21)$$

где J_j — жорданова форма матрицы A_j , причем в силу условия теоремы 2 координаты вектора K_j будут полиномами по z_1, \dots, z_n . По [7], такое преобразование существует. Из (4) и (20) найдем

$$u = N(z). \quad (22)$$

Ясно, что (22) есть обратимое преобразование системы (18) к системе (21), которая к тому же является нормальной формой для системы (18). Всякое формальное преобразование, приводящее (17) и (18) к соответствующей нормальной форме, при условии теоремы 2 является сходящимся [7]. Значит, преобразование (22) сходится. Так как оно определяется из уравнения $\Phi(u) = \Psi(z)$, то из этого следует сходимость $\Phi(u)$ в окрестности $u=0$.

При выполнении условия теоремы 2 система (6), (16) интегрируется в элементарных функциях. Считая, что имеет место (19), полиномы $F_j^{(i)}$ запишем в виде

$$F_j^{(i)} = \sum_{(i_1 \dots i_{i-1}) \in \tilde{S}^{(i)}} a_{i_1 \dots i_{i-1}}^{(i)} u_1^{i_1} \dots u_{i-1}^{i_{i-1}}. \quad (23)$$

Тогда последовательное интегрирование системы (6), (23) дает

$$\begin{aligned} u_1 &= v_1, \\ u_k &= v_k + Q_k(v_1, \dots, v_{k-1}, t_1, \dots, t_m) \\ (k &= 2, \dots, n), \end{aligned} \quad (24)$$

где положено $v_k = C_k e^{\lambda_1^{(k)} t_1 + \dots + \lambda_m^{(k)} t_m}$, C_k — произвольные постоянные, Q_k — полином своих аргументов, $Q_k(0, \dots, 0, t_1, \dots, t_m) \equiv 0$.

Предположим, что t_j в системе (1) вещественны. Тогда из теоремы 2 и (24) получаем

Следствие 1. Если $\operatorname{Re}(\lambda_j^{(i)}) < 0$ ($i = 1, \dots, n$; $j = 1, \dots, m$), то нулевое решение системы (1) асимптотически устойчиво.

Пусть теперь условие теоремы 2 не выполняется. Тогда какое бы j мы ни взяли, не существует прямой, проходящей через начало комплексной плоскости, с одной стороны которой располагались бы $\lambda_j^{(i)}$ ($i = 1, \dots, n$). Но если не все собственные значения матрицы A_j равны нулю, то найдется прямая, с одной стороны которой будут расположены p собственных чисел матрицы A_j , скажем, $\lambda_j^{(n-p+1)}, \dots, \lambda_j^{(n)}$, $p < n$. Полагая в (5) $u_1 = \dots = u_{n-p} = 0$, имеем

$$\begin{aligned} x_k &= \sum_{j_{n-p+1} + \dots + j_n = 2}^{\infty} b_{0 \dots 0 j_{n-p+1} \dots j_n}^{(k)} u_{n-p+1}^{j_{n-p+1}} \dots u_n^{j_n} \\ (k &= 1, \dots, n-p), \\ x_k &= u_k + \sum_{j_{n-p+1} + \dots + j_n = 2}^{\infty} b_{0 \dots 0 j_{n-p+1} \dots j_n}^{(k)} u_{n-p+1}^{j_{n-p+1}} \dots u_n^{j_n} \\ (k &= n-p+1, \dots, n). \end{aligned} \quad (25)$$

Система же (6), (16) при $u_1 = \dots = u_{n-p} = 0$ дает

$$\begin{aligned} d\tilde{u} &= [\tilde{A}_1 \tilde{u} + \tilde{F}_1(\tilde{u})] dt_1 + \dots + [\tilde{A}_m \tilde{u} + \tilde{F}_m(\tilde{u})] dt_m, \\ \tilde{F}_i^{(i)} &= \sum_{(j_{n-p+1}, \dots, j_n) \in \tilde{S}^{(i)}} a_{0 \dots 0 j_{n-p+1} \dots j_n}^{(i)} u_{n-p+1}^{j_{n-p+1}} \dots u_n^{j_n} \\ (i &= n-p+1, \dots, n), \end{aligned} \quad (26)$$

где вектор-столбец \tilde{u} имеет координаты u_{n-p+1}, \dots, u_n , а $\tilde{F}_j^{(i)}$ являются координатами вектор-столбца \tilde{F}_j . Матрицы \tilde{A}_j получены из матриц A_j путем вычеркивания $n-p$ первых строк и столбцов.

Имеет место

Теорема 3. Если p собственных чисел $\lambda_j^{(n-p+1)}, \dots, \lambda_j^{(n)}$ некоторой матрицы A_j расположены с одной стороны прямой, проходящей через начало в комплексной плоскости, то система (1) имеет p -параметрическое семейство решений, представимых сходящимися рядами (25), в которых u_{n-p+1}, \dots, u_n представляют общее решение системы (26).

Доказательство теоремы основывается на соображениях, аналогичных тем, которые были применены при доказательстве теоремы 2, и проводится вполне аналогично. Отметим, что система (26) интегрируется аналогично системе (6), (23).

Пусть теперь q собственных чисел $\lambda_j^{(1)}, \dots, \lambda_j^{(q)}$ матрицы A_j расположены с одной стороны прямой, указанной в теореме 3. Чтобы применить в

этом случае теорему 3, необходимо в общем случае так преобразовать систему (1), чтобы числа $\lambda_j^{(1)}, \dots, \lambda_j^{(q)}$ на главной диагонали матрицы A_j стояли соответственно на местах $n - q + 1, \dots, n$. Это достигается путем изменения нумерации переменных и затем линейным преобразованием.

Если t_j вещественны, то из теоремы 3 получаем

Следствие 2. Если хотя бы одна матрица A_j имеет собственные числа с положительными вещественными частями, то нулевое решение системы (1) неустойчиво.

В заключение отметим, что можно рассматривать условия асимптотической устойчивости нулевого решения системы (1) относительно группы независимых переменных, считая, что переменные, не входящие в эту группу, изменяются в ограниченной области. Эти условия заключаются в том, чтобы вещественные части собственных значений, соответствующих этой группе переменных, были отрицательными.

Отметим еще, что в упомянутой статье [9] рассматривалось при некоторых ограничениях на собственные числа матриц A_j приведение системы (1) с помощью преобразования вида (4) к линейной системе (6) (т. е. когда $F_j \equiv 0$).

Литература

1. Супруненко Д. А., Тышкевич Р. И. Перестановочные матрицы. Минск, 1966.
2. Pini V. Ann. mat. pura et appl., ser. 4, 34, 1953.
3. Рейзинь А. И. ДУ, 3, № 8, 1967.
4. Дыманов Р. Г. ДУ, 4, № 2, 1968.
5. Дыманов Р. Г. ДУ, 4, № 10, 1968.
6. Грудо Э. И. ДАН БССР, № 9, 1969.
7. Dulac H. Bull. Soc. Math. France, 40, 1912.
8. Брюно А. Д. ДАН СССР, 174, № 5, 1967.
9. Перов А. И. ДАН СССР, 166, № 3, 1966.

Институт математики
АН БССР

Поступило в редакцию
20.VI 1969

М. И. УРБАНОВИЧ

К ТЕОРИИ МАТРИЦ КОШИ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Вопрос о свойствах матрицы Коши занимает одно из центральных мест в теории краевых задач для систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений.

Под матрицей Коши матричного уравнения

$$\frac{d^m Y}{dt^m} + \sum_{i=0}^{m-1} \left[A_{m-i}(t) \frac{d^i Y}{dt^i} + \frac{d^i Y}{dt^i} B_{m-i}(t) \right] = O,$$

где $Y = Y(t)$, $A_j(t)$, $B_j(t)$ ($j = 0, \dots, m$; $m \geq 1$) — вещественные $n \times n$ -матрицы ($n > 1$), O — нулевая $n \times n$ -матрица, $A_j(t)$, $B_j(t)$ суммируемы (по Лебегу) на $[\alpha, \beta]$ ($\alpha < \beta$), будем понимать $n \times n$ -матрицу $K(t, s)$, являющуюся решением в смысле Каратеодори по аргументу t (при любом фиксированном $s \in [\alpha, \beta]$) последнего уравнения и удовлетворяющую условиям

$$K(s, s) = \frac{\partial K(s, s)}{\partial t} = \dots = \frac{\partial^{m-2} K(s, s)}{\partial t^{m-2}} = O, \quad \frac{\partial^{m-1} K(s, s)}{\partial t^{m-1}} = E,$$

где E — единичная $n \times n$ -матрица.

В данной работе устанавливается треугольный вид матрицы Коши уравнения

$$Y^m + A_1(t)Y^{m-1} + \dots + A_m(t)Y = O, \quad (1)$$

где $m \geq 1$, $A_i(t)$ ($i = 1, \dots, m$) — верхние треугольные $n \times n$ -матрицы*), $Y^{(p)} = d^{(p)}Y/dt^{(p)}$ ($p = 1, \dots, m$), а также рассматриваются условия неотрицательности матрицы Коши $K(t, s)$ при $\alpha \leq s \leq t \leq \beta$ (в основном треугольнике) уравнения

$$Y^{(m)} + A(t)Y = O \quad (2)$$

с верхней треугольной $n \times n$ -матрицей $A(t)$.

Отдельные результаты (теоремы 4, 5), касающиеся знака матрицы Коши, не связаны с треугольностью матриц $A_i(t)$, $A(t)$.

В заключительной части работы приводится формула, выражающая решение задачи Коши

$$Y^{(m)} + \sum_{i=0}^{m-1} A_{m-i}(t)Y^{(i)} = F(t), \quad (3)$$

$$Y^{(i)}(\alpha) = C_i \quad (i = 0, \dots, m-1) \quad (4)$$

через матрицу Коши и матрицы $A_j(t)$ ($j = 2, \dots, m$), $F(t)$.

*) В случае нижних треугольных матриц все результаты формулируются и доказываются аналогично.

При этом в целях упрощения формулировок и выкладок мы везде в дальнейшем считаем все матрицы, определяющие рассматриваемые уравнения, непрерывными на $[\alpha, \beta]$, в связи с чем решение этих уравнений будут пониматься в обычном (классическом) смысле.

1. Отправным пунктом нашего исследования является

Теорема 1. Если $A_i(t)$ ($i=1, \dots, m$) — непрерывные на $[\alpha, \beta]$ верхние треугольные $n \times n$ -матрицы, то и матрица Коши уравнения (1) имеет верхне-треугольную структуру.

Доказательство проведем индукцией по числу m .

При $m=1$ справедливость данного утверждения установлена в [6] (см. доказательство теоремы 4).

Допустим, что матрица Коши $K_{r-1}(t, s)$ ($r > 2$) уравнения

$$Y^{(r-1)} + A_1(t)Y^{(r-2)} + \dots + A_{r-1}(t)Y = 0$$

имеет верхне-треугольный вид. Запишем уравнение (1) при $m=r$ в виде

$$Y^{(r)} + A_1(t)Y^{(r-1)} + \dots + A_{r-1}(t)Y' = -A_r(t)Y.$$

Тогда, как нетрудно проверить,

$$K_r(t, s) = \tilde{K}_r(t, s) - \int_s^t \tilde{K}_r(t, \tau) A_r(\tau) K_r(\tau, s) d\tau, \quad (5)$$

где

$$\tilde{K}_r(t, s) = \int_s^t K_{r-1}(\tau, s) d\tau$$

— верхняя треугольная матрица.

Отсюда следует, что резольвента $R(\tau, s)$ уравнения (5), а, значит, и

$$K_r(t, s) = \tilde{K}_r(t, s) - \int_s^t \tilde{K}_r(t, \tau) R(\tau, s) d\tau$$

имеют верхне-треугольную структуру.

Тем самым теорема доказана для любого натурального $m \geq 1$.

Рассмотрим теперь случай, когда в уравнении (1) все матрицы-коэффициенты являются правильными верхними треугольными $n \times n$ -матрицами ([4], стр. 180), т. е. матрицами вида

$$\left\| \begin{array}{cccccc} a_1(t) & a_2(t) & a_3(t) & \dots & a_{n-1}(t) & a_n(t) \\ 0 & a_1(t) & a_2(t) & \dots & a_{n-2}(t) & a_{n-1}(t) \\ 0 & 0 & a_1(t) & \dots & a_{n-3}(t) & a_{n-2}(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_1(t) & a_2(t) \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a_1(t) \end{array} \right\|. \quad (6)$$

Матрицу (6) будем записывать кратко в виде

$$[a_1(t), \dots, a_n(t)]_B.$$

Множество всех правильных верхних треугольных матриц данного порядка n обозначим через $\{BTP(n \times n)\}$.

Легко видеть, что

1) множество $\{B\Pi(n \times n)\}$ является абелевой группой относительно операции сложения матриц и

2) множество всех невырожденных матриц из $\{B\Pi(n \times n)\}$ образует абелеву группу относительно операции умножения матриц.

Лемма 1. Если в уравнении

$$Y' + A(t)Y = 0 \quad (7)$$

$$A(t) \in \{B\Pi(n \times n)\}, \text{ то и } K(t, s) \in \{B\Pi(n \times n)\},$$

где $K(t, s)$ — матрица Коши уравнения (7).

Доказательство. Обозначая $A(t) = \|a_{ij}(t)\|_1^n$, $K(t, s) = \|k_{ij}(t, s)\|_1^n$, будем иметь:

$$k_{ij}(t, s) \equiv 0 \quad \text{при } 1 \leq j < i \leq n, \quad t, s \in [\alpha, \beta];$$

$$k_{ii}(t, s) = \exp \left[- \int_s^t a_{ii}(t_1) dt_1 \right] \quad (i=1, \dots, n);$$

$$\begin{aligned} k_{ij}(t, s) = & - \exp \left[- \int_s^t a_{ii}(t_1) dt_1 \right] \times \\ & \times \int_s^t \left\{ \left[\exp \int_s^{t_1} a_{ii}(t_2) dt_2 \right] [a_{ij}(t_1) k_{jj}(t_1, s) + \right. \\ & \left. + a_{i,j-1}(t_1) k_{j-1,j}(t_1, s) + \dots + a_{i,i+1}(t_1) k_{i+1,j}(t_1, s)] \right\} dt_1 \end{aligned} \quad (8)$$

при $1 \leq i < j \leq n$ (полагая здесь $i = j-1, j-2, \dots, 1$, мы найдем последовательно все $k_{ij}(t, s)$ с условием $1 \leq i < j \leq n$).

По условию все элементы $a_{ij}(t)$, для которых $j-i = r = \text{const}$ ($r = 0, \dots, n-1$), равны между собой. Поэтому

$$k_{11}(t, s) = \dots = k_{nn}(t, s) \quad (j-i=0).$$

Предполагая далее, что для каждого p , $1 \leq p < m \leq n-1$, все элементы $k_{ij}(t, s)$ с условием $j-i = p$ (элементы $(p-1)$ -й наддиагонали) равны между собой, при $p = m$ также будем иметь (в свою очередь используя индукцию по первому индексу)

$$k_{1m}(t, s) = k_{2m+1}(t, s) = \dots = k_{n-m+1n}(t, s).$$

Следовательно, $K(t, s) \in \{B\Pi(n \times n)\}$.

Замечание 1. При $A(t) = [a_1(t), \dots, a_n(t)]_B$ элементы матрицы Коши $K(t, s) = [k_1(t, s), \dots, k_n(t, s)]_B$ уравнения (7) связаны рекуррентным соотношением

$$\begin{aligned} k_j(t, s) = & - k_1(t, s) \int_s^t k_1^{-1}(t_1, s) [a_j(t_1) k_1(t_1, s) + \\ & + a_{j-1}(t_1) k_2(t_1, s) + \dots + a_2(t_1) k_{j-1}(t_1, s)] dt_1 \quad (j=2, \dots, n). \end{aligned} \quad (9)$$

Замечание 2. Как отмечено в [7], матрица Коши $K(t, s)$ матричного уравнения

$$Y' + A(t)Y + YB(t) = 0 \quad (10)$$

имеет вид

$$K(t, s) = K_A(t, s) [K_{B^*}(t, s)]^*, \quad (11)$$

где звездочкой (*) обозначена операция транспонирования матрицы, а $K_C(t, s)$ есть матрица Коши уравнения

$$Y' + C(t)Y = 0.$$

Поэтому матрица (11) будет верхней треугольной (в частности, правильной верхней треугольной), если указанную структуру имеют матрицы $A(t)$ и $B(t)$.

Заметим также, что при $A(t) \in \{BTP(n \times n)\}$ и $B(t) \in \{BTP(n \times n)\}$ матрицу (11) можно записать в виде

$$\begin{aligned} K(t, s) &= K_A(t, s) \times K_B(t, s) = \\ &= K_{A+B}(t, s) = \exp \left\{ - \int_s^t [A(\tau) + B(\tau)] d\tau \right\}. \end{aligned} \quad (12)$$

Теорема 1'. Если непрерывные на $[\alpha, \beta]$ матрицы $A_i(t) \in \{BTP(n \times n)\}$ ($i = 1, \dots, m$), то и матрица Коши уравнения (1) принадлежит множеству $\{BTP(n \times n)\}$.

Чтобы убедиться в справедливости этой теоремы, достаточно с учетом леммы 1 повторить доказательство теоремы 1.

Замечание 3. Теоремы 1, 1' сохраняют свою силу и для уравнений вида

$$Y^{(m)} + \sum_{i=0}^{m-1} Y^{(i)} A_{m-i}(t) = 0.$$

2. При выяснении условий неотрицательности матрицы Коши уравнения (2) в основном треугольнике мы будем опираться на следующую лемму, аналогичную теореме сравнения работы [1].

Лемма 2. Пусть непрерывные на $[\alpha, \beta]$ $n \times n$ -матрицы $A_i(t)$, $B_i(t)$ удовлетворяют неравенствам $A_i(t) \leq B_i(t)$ ($i = 1, \dots, m$; $\alpha \leq t \leq \beta$). Пусть, далее, $K_1^{(p)}(t, s) \geq 0$ при $\alpha \leq s \leq t \leq \beta$ ($p = 0, \dots, m-1$), где $K_1(t, s)$ — матрица Коши уравнения

$$X^{(m)} + B_1(t)X^{(m-1)} + \dots + B_m(t)X = 0.$$

Тогда имеют место неравенства

$$K^{(p)}(t, s) \geq K_1^{(p)}(t, s) \quad (\alpha \leq s \leq t \leq \beta, \quad p = 0, \dots, m-1),$$

где $K(t, s)$ — матрица Коши уравнения (1).

Приводимая ниже теорема (2) выражает необходимое условие неотрицательности матрицы Коши уравнения (2) при $\alpha \leq s \leq t \leq \beta$.

Теорема 2. Пусть $A(t) = \|a_{ik}(t)\|_1^n$ — непрерывная на $[\alpha, \beta]$ верхняя треугольная $n \times n$ -матрица и матрица Коши $K(t, s) = \|k_{ij}(t, s)\|_1^n$ уравнения (2) неотрицательна в треугольнике $\alpha \leq s \leq t \leq \beta$. Тогда

$$a_{ik}(t) \leq 0 \quad \text{на } [\alpha, \beta] \quad \text{при } 1 \leq i < k \leq n. \quad (13)$$

Доказательство. При $m = 1$ неравенства (13) получаем из (8) рассуждением от противного.

Пусть $m = 2$. Учитывая лемму 2, без ограничения общности можем считать $a_{ii}(t) = a_{ii} = \text{const} < 0$ ($i = 1, \dots, n$).

При этом элементы главной диагонали матрицы $K(t, s)$ имеют вид

$$k_{ii}(t, s) = \frac{1}{\sqrt{-a_{ii}}} \text{sh} \sqrt{-a_{ii}}(t-s) \quad (i = 1, \dots, n) \quad (14)$$

и, очевидно, не убывают с возрастанием $t - s$,

$$k_{ii}(s, s) = 0, \quad k_{ii}(t, s) > 0 \quad \text{при } \alpha \leq s < t \leq \beta.$$

Далее, элементы $k_{ii+1}(t, s)$ ($i = 1, \dots, n-1$) первой наддиагонали матрицы $K(t, s)$ удовлетворяют скалярному соотношению (дифференцирование по первому аргументу)

$$k'_{ii+1}(t, s) + a_{ii}k_{ii+1}(t, s) = -a_{ii+1}(t)k_{i+1, i+1}(t, s),$$

откуда

$$k_{ii+1}(t, s) = - \int_s^t k_{ii}(t, \tau) a_{ii+1}(\tau) k_{i+1, i+1}(\tau, s) d\tau \quad (15)$$

и, следовательно, с учетом условий теоремы и свойств $k_{jj}(t, s)$ имеем

$$a_{ii+1}(t) \leq 0 \quad (\alpha \leq t \leq \beta; \quad i = 1, \dots, n-1). \quad (16)$$

Переходя к элементам $k_{ii+2}(t, s)$ ($i = 1, \dots, n-2$) второй наддиагонали матрицы $K(t, s)$, аналогично найдем

$$k_{ii+2}(t, s) = - \int_s^t k_{ii}(t, \tau) f(\tau, s) d\tau, \quad (17)$$

где

$$f(t, s) = a_{ii+1}(t)k_{i+1, i+2}(t, s) + a_{i, i+2}k_{i+2, i+2}(t, s). \quad (18)$$

Допуская (от противного), что $a_{ii+2}(t_0) > 0$ при некотором t_0 ($\alpha \leq t_0 \leq \beta$) и считая $t > s$, возьмем в (17) $s = t_0$ при $t_0 < \beta$ и $t = t_0$ при $t_0 = \beta$.

В первом случае, используя (16), (15) и свойства $k_{jj}(t, s)$, получаем

$$\begin{aligned} f(\tau, t_0) &\geq -|a_{ii+1}(\tau)|k_{i+1, i+1}(\tau, t_0)k_{i+2, i+2}(\tau, t_0) \times \\ &\times \int_{t_0}^{\tau} |a_{i+1, i+2}(\tau_1)| d\tau_1 + a_{ii+2}(\tau)k_{i+2, i+2}(\tau, t_0) \geq \\ &\geq k_{i+2, i+2}(\tau, t_0) \{ a_{i, i+2}(\tau) - |a_{i, i+1}(\tau)|k_{i+1, i+1}(\tau, t_0) \times \\ &\times \int_{t_0}^{\tau} |a_{i+1, i+2}(\tau_1)| d\tau_1 \} > 0 \end{aligned}$$

при достаточно малом $t - t_0 > 0$, а тогда $k_{ii+2}(t, t_0) < 0$ при тех же t , вопреки условию.

Аналогично приходим к противоречию и в случае $t_0 = \beta$.

Таким образом, все элементы второй наддиагонали матрицы $A(t)$ также неположительны на $[\alpha, \beta]$.

С помощью подобных же рассуждений доказательство (при $m = 2$) завершается индукцией по числу r , где r — порядковый номер наддиагонали (из допущения, что $a_{i, i+r}(t) \leq 0$ ($i = 1, \dots, n-r$) на $[\alpha, \beta]$ для всех r , $1 \leq r < p \leq n-2$, следует: $a_{i, i+p}(t) \leq 0$ ($i = 1, \dots, n-p$) на $[\alpha, \beta]$).

Приведенная выше схема доказательства применима и к случаю $m > 2$, если заметить, что $k_{ii}(t, s)$ ($i = 1, \dots, n$) — функции Коши [1, 2, 5] скалярных уравнений $x^{(m)} + a_{ii}x = 0$, в силу чего (при $a_{ii} < 0$, $i = 1, \dots, n$)

$$k_{ii}^{(p)}(t, s) \geq 0 \quad (p = 0, \dots, m-2), \quad k_{ii}^{(m-1)}(t, s) \geq 1$$

в треугольнике $\alpha \leq s \leq t \leq \beta$, так что функции $k_{ii}(t, s)$ не убывают с возрастанием $t - s > 0$ и положительны при $\alpha \leq s < t \leq \beta$.

Теорема полностью доказана.

Замечание 4. Неположительность наддиагональных элементов верхней треугольной $n \times n$ -матрицы $A(t)$ при $m=1$ является не только необходимым, но и достаточным условием неотрицательности матрицы Коши уравнения (2) в треугольнике $\alpha \leq s \leq t \leq \beta$ (это вытекает, например, из результатов работы [3]).

При $m > 1$ в силу леммы 2 и теоремы 2 справедлива

Теорема 3. Пусть $A(t) = \|a_{ik}(t)\|_1^n$ — непрерывная на $[\alpha, \beta]$ верхняя треугольная $n \times n$ -матрица и $K(t, s)$ — матрица Коши уравнения (2).

Тогда для выполнения неравенства $K(t, s) \geq 0$ в треугольнике $\alpha \leq s \leq t \leq \beta$ необходимо и достаточно, чтобы $a_{ik}(t) \leq 0$ ($1 \leq i < k \leq n$) на $[\alpha, \beta]$ и функции Коши $c_{ii}(t, s)$ ($i=1, \dots, n$) скалярных уравнений $x^{(m)} + a_{ii}(t)x = 0$ были неотрицательны при $\alpha \leq s \leq t \leq \beta^*$.

Из теоремы 3 с учетом леммы 2 вытекает

Теорема 4. Пусть матрица $A(t) = \|a_{ik}(t)\|_1^n$ непрерывна на $[\alpha, \beta_1]$ и $a_{ik}(t) \leq 0$ ($i \neq k$) на $[\alpha, \beta_1]$. Тогда матрица Коши уравнения

$$Y'' + A(t)Y = 0 \quad (19)$$

неотрицательна при $\alpha \leq s \leq t \leq \beta$, где

$$\beta - \alpha = \min \left\{ \beta_1 - \alpha, \pi \sqrt{\max_{1 \leq i < n} [\max_{\alpha < t < \beta_1} (a_{ii}(t))_+]} \right\}, \quad (20)$$

$$(a_{ii}(t))_+ = 2^{-1} (|a_{ii}(t)| + a_{ii}(t)).$$

При этом следует считать $\beta = \beta_1$, если все $a_{ii}(t) \leq 0$ на $[\alpha, \beta]$.

Аналогично доказывается и

Теорема 5. Пусть $K(t, s)$ — матрица Коши уравнения (1) с непрерывными на $[\alpha, \beta]$ $n \times n$ -матрицами $A_j(t)$ ($j=1, \dots, m$) и $c_{ii}(t, s)$ — функции Коши скалярных уравнений

$$x^{(m)} + (A_1(t))_{ii} x^{(m-1)} + \dots + (A_m(t))_{ii} x = 0 \\ (i=1, \dots, n).$$

Если при этом $(A_j(t))_{ik} \leq 0$ ($j=1, \dots, m$) на $[\alpha, \beta]$ для $i \neq k$ ($i, k=1, \dots, n$) и $\partial^{(p)} c_{ii}(t, s) / \partial t^{(p)} \geq 0$ в треугольнике $\alpha \leq s \leq t \leq \beta$ ($p=0, \dots, m-1$; $i=1, \dots, n$), то

$$K^{(p)}(t, s) \geq \text{diag} \{ c_{11}^{(p)}(t, s), \dots, c_{nn}^{(p)}(t, s) \} \\ (p=0, \dots, m-1) \quad (21)$$

в том же треугольнике.

Замечание 5. Теоремы 2—5 остаются справедливыми, если уравнения (2), (19) и (1) заменить соответственно уравнениями

$$Y^{(m)} + YA(t) = 0, \quad Y'' + YA(t) = 0,$$

$$Y^{(m)} + \sum_{i=0}^{m-1} Y^{(i)} A_{m-i}(t) = 0.$$

3. В заключение приведем следующее утверждение:

* Некоторые из критериев неотрицательности функции Коши скалярного уравнения в основном треугольнике приведены в работах [1, 2, 5].

Решение задачи (3) — (4), где $A_j(t)$ ($j = 1, \dots, m$), $F(t)$ — непрерывные на $[\alpha, \beta]$ $n \times n$ -матрицы, C_i — постоянные $n \times n$ -матрицы, дается формулой

$$Y(t) = \int_{\alpha}^t K(t, s) F(s) ds + K(t, \alpha) C_{m-1} + \quad (22)$$

$$\times \sum_{p=0}^{m-2} \left\{ \frac{(t-\alpha)^p}{p!} E - \int_{\alpha}^t \left[K(t, s) \sum_{r=0}^p A_{m-r}(s) \frac{(s-\alpha)^{p-r}}{(p-r)!} \right] ds \right\} C_p,$$

где $K(t, s)$ — матрица Коши уравнения (1).

Эта формула, в справедливости которой убеждаемся непосредственной проверкой, может оказаться полезной при изучении краевой задачи для матричного уравнения (3) с линейными краевыми условиями.

Литература

1. Азбелев Н. В., Цалюк З. Б. УМЖ, 10, № 1, 1958.
2. Азбелев Н. В., Смолин И. М., Цалюк З. Б. ДАН СССР, 135, № 3, 1960.
3. Азбелев Н. В. Научн. докл. высш. школы, физ.-мат. науки, № 6, 1958.
4. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. М., 1954.
5. Комленко Ю. В. Изв. вузов, Математика, № 1, (50), 1966.
6. Урбанович М. И. ДУ, 2, № 8, 1966.
7. Урбанович М. И. Сб. мат. V науч.-техн. конф. Могилевск. машиностроит. ин-та, 177, 1968.

Могилевский педагогический институт

Поступило в редакцию
9.IV 1969

Н. П. ФЕДЕНКО

ЗАМЕЧАНИЕ О МЕТОДЕ СЕКУЩИХ

Для решения нелинейного уравнения

$$f(x) = 0 \tag{1}$$

рассмотрим метод секущих прямых, когда по известным приближениями x_{n-1} и x_n к корню x^* уравнения (1) следующее приближение находится по правилу

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)(x_n - x_{n-1})}{f(x_n) - f(x_{n-1})}. \tag{2}$$

Для начала вычислений этот метод требует знания двух приближений x_0 и x_1 к корню x^* . Геометрический смысл его состоит в том, что через две точки $A_0[x_0, f(x_0)]$ и $A_1[x_1, f(x_1)]$ проводится секущая прямая линия и за x_2 принимается абсцисса точки пересечения секущей с осью x . Далее за исходные точки берутся x_1 и x_2 , процесс повторяется и т. д. Очевидно, для осуществления алгоритма (2) достаточно выполнения условий: 1) принадлежность всех x_n области определения $f(x)$ и 2) выполнение неравенств $f(x_n) - f(x_{n-1}) \neq 0$ ($n = 1, 2, \dots$). Относительно существования корня уравнения (1), осуществимости метода секущих и сходимости x_n верна

Теорема. Пусть для уравнения $f(x) = 0$ и исходных приближений x_0 и x_1 выполняются условия:

1) *$f(x)$ определена на отрезке $|x - x_0| \leq \delta$ и дважды непрерывно дифференцируема там;*

2) $f'(x_0) \neq 0$ и $\frac{1}{|f'(x_0)|} \leq B$;

3) $\left| \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \right| \leq \eta$;

4) *Вторая производная $f''(x)$ на отрезке $|x - x_0| \leq \delta$ ограничена по модулю числом K ,*

$$|f''(x)| \leq K;$$

5) *Для чисел B, η, K выполняется неравенство*

$$h = B\eta K \leq \frac{1}{2}.$$

6) $|f(x_1)| \leq P(|x_1 - x_0|)$, $P(t) = \frac{1}{2} Kt^2 - \frac{1}{B} t + \frac{\eta}{B}$ и $|x_1 - x_0| < \frac{1 - \sqrt{1 - 2h}}{h}$ $\eta \leq \delta$.

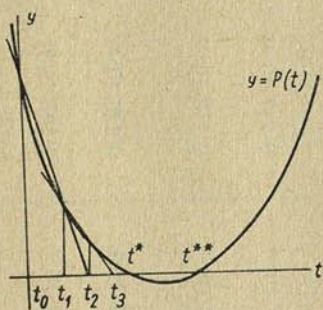
Тогда уравнение (1) на отрезке $|x - x_0| \leq \delta$ имеет корень x^ и приближения x_n , определяемые формулой (2), либо приведут к решению x^* за*

конечное число шагов N : $x_N = x^*$, либо могут быть построены при всяком n и образуют сходящуюся последовательность к решению x^* уравнения (1):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x^*.$$

Оценка погрешности характеризуется неравенством

$$|x_n - x^*| \leq t^* - t_n, \quad (3)$$



К сходимости последовательности t_n

где t_n — последовательные приближения метода секущих к наименьшему корню t^* квадратного уравнения

$$P(t) = 0 \quad (4)$$

при $t_0 = 0$, $t_1 = |x_1 - x_0|$.

Доказательство. Ввиду $0 \leq h \leq \frac{1}{2}$ корни $t^* = \frac{1 - \sqrt{1 - 2h}}{h}$ и $t^{**} = \frac{1 + \sqrt{1 - 2h}}{h}$ и многочлена $P(t)$ действительны и неотрицательны.

Условие $t_1 = |x_1 - x_0| < \frac{1 - \sqrt{1 - 2h}}{h}$ означает, что t_1 лежит между $t_0 = 0$ и t^* . Последовательные приближения t_n (см. рисунок) образуют возрастающую последовательность, сходящуюся к t^* .

Докажем теперь, что для последовательности x_n верны неравенства

$$|x_{n+1} - x_n| \leq t_{n+1} - t_n. \quad (5)$$

Применим метод индукции. Для $n = 1$ неравенство (5) выполняется. Допустим, что (5) выполняется для x_0, x_1, \dots, x_n , и проверим его выполнение для пары x_n, x_{n+1} . Сначала оценим $f(x_n)$. Обозначим $L(f, x_n)$ значение в точке x_n линейного многочлена, интерполирующего функцию $f(x)$ в узлах x_{n-2}, x_{n-1} . Очевидно, что $L(f, x_n) = 0$. Используя выражение для остатка интерполирования функции, имеем

$$f(x_n) = f(x_n) - L(f, x_n) = \frac{1}{2} (x_n - x_{n-2})(x_n - x_{n-1}) f''(\xi),$$

где $\xi \in [x_n, x_{n-1}, x_{n-2}]$. На основании формулы Тейлора

$$f(x_n) - f(x_{n-1}) = (x_n - x_{n-1}) f'(x_{n-1}) + \frac{1}{2} (x_n - x_{n-1})^2 f''(\eta),$$

где

$$\eta \in [x_{n-1}, x_n],$$

$$x_{n+1} - x_n = - \frac{(x_n - x_{n-1}) f(x_n)}{f(x_n) - f(x_{n-1})} = - \frac{\frac{1}{2} f''(\xi) (x_n - x_{n-2})(x_n - x_{n-1})}{f'(x_{n-1}) + \frac{1}{2} (x_n - x_{n-1}) f''(\eta)}. \quad (6)$$

Таблица
 Величины погрешностей $\tau^* - \tau_n$ при различных τ_1 и h

τ_1	Значения $\tau^* - \tau_n$ при n						
	1	2	3	4	5	6	7
При $h = 0,05$, $\tau^* = 1,026$							
$\frac{1}{5} \tau^*$	0,821	$0,212 \cdot 10^{-1}$	$0,448 \cdot 10^{-3}$	$0,250 \cdot 10^{-6}$	$0,295 \cdot 10^{-11}$	$0,195 \cdot 10^{-19}$	$0,151 \cdot 10^{-32}$
$\frac{2}{5} \tau^*$	0,616	$0,160 \cdot 10^{-1}$	$0,255 \cdot 10^{-3}$	$0,107 \cdot 10^{-6}$	$0,720 \cdot 10^{-12}$	$0,203 \cdot 10^{-20}$	$0,385 \cdot 10^{-34}$
$\frac{3}{5} \tau^*$	0,410	$0,107 \cdot 10^{-1}$	$0,114 \cdot 10^{-3}$	$0,323 \cdot 10^{-7}$	$0,973 \cdot 10^{-13}$	$0,827 \cdot 10^{-22}$	$0,212 \cdot 10^{-36}$
$\frac{4}{5} \tau^*$	0,205	$0,538 \cdot 10^{-2}$	$0,289 \cdot 10^{-4}$	$0,410 \cdot 10^{-8}$	$0,312 \cdot 10^{-14}$	$0,337 \cdot 10^{-24}$	$0,278 \cdot 10^{-40}$
При $h = 0,15$, $\tau^* = 1,089$							
$\frac{1}{5} \tau^*$	0,871	$0,723 \cdot 10^{-1}$	$0,521 \cdot 10^{-2}$	$0,335 \cdot 10^{-4}$	$0,156 \cdot 10^{-7}$	$0,470 \cdot 10^{-13}$	$0,660 \cdot 10^{-22}$
$\frac{2}{5} \tau^*$	0,653	$0,552 \cdot 10^{-1}$	$0,304 \cdot 10^{-2}$	$0,149 \cdot 10^{-4}$	$0,407 \cdot 10^{-8}$	$0,545 \cdot 10^{-14}$	$0,199 \cdot 10^{-23}$
$\frac{3}{5} \tau^*$	0,436	$0,374 \cdot 10^{-1}$	$0,140 \cdot 10^{-2}$	$0,468 \cdot 10^{-5}$	$0,588 \cdot 10^{-9}$	$0,247 \cdot 10^{-15}$	$0,130 \cdot 10^{-25}$
$\frac{4}{5} \tau^*$	0,218	$0,190 \cdot 10^{-1}$	$0,364 \cdot 10^{-3}$	$0,620 \cdot 10^{-6}$	$0,202 \cdot 10^{-10}$	$0,112 \cdot 10^{-17}$	$0,203 \cdot 10^{-29}$
При $h = 0,25$, $\tau^* = 1,172$							
$\frac{1}{5} \tau^*$	0,937	0,141	$0,197 \cdot 10^{-1}$	$0,478 \cdot 10^{-3}$	$0,166 \cdot 10^{-5}$	$0,140 \cdot 10^{-9}$	$0,410 \cdot 10^{-16}$
$\frac{2}{5} \tau^*$	0,703	0,109	$0,119 \cdot 10^{-1}$	$0,225 \cdot 10^{-3}$	$0,471 \cdot 10^{-6}$	$0,187 \cdot 10^{-10}$	$0,156 \cdot 10^{-17}$
$\frac{3}{5} \tau^*$	0,469	$0,752 \cdot 10^{-1}$	$0,569 \cdot 10^{-2}$	$0,746 \cdot 10^{-4}$	$0,749 \cdot 10^{-7}$	$0,987 \cdot 10^{-12}$	$0,131 \cdot 10^{-19}$
$\frac{4}{5} \tau^*$	0,234	$0,389 \cdot 10^{-1}$	$0,154 \cdot 10^{-2}$	$0,105 \cdot 10^{-4}$	$0,284 \cdot 10^{-8}$	$0,527 \cdot 10^{-14}$	$0,265 \cdot 10^{-23}$

При $h = 0,35$, $\tau^* = 1,292$

$\frac{1}{5} \tau^*$	1,034	0,245	$0,574 \cdot 10^{-1}$	$0,410 \cdot 10^{-2}$	$0,737 \cdot 10^{-4}$	$0,963 \cdot 10^{-7}$	$0,227 \cdot 10^{-11}$
$\frac{2}{5} \tau^*$	0,775	0,193	$0,365 \cdot 10^{-1}$	$0,209 \cdot 10^{-2}$	$0,241 \cdot 10^{-4}$	$0,161 \cdot 10^{-7}$	$0,124 \cdot 10^{-12}$
$\frac{3}{5} \tau^*$	0,517	0,135	$0,185 \cdot 10^{-1}$	$0,761 \cdot 10^{-3}$	$0,447 \cdot 10^{-5}$	$0,109 \cdot 10^{-8}$	$0,155 \cdot 10^{-14}$
$\frac{4}{5} \tau^*$	0,258	$0,714 \cdot 10^{-1}$	$0,533 \cdot 10^{-2}$	$0,119 \cdot 10^{-3}$	$0,202 \cdot 10^{-6}$	$0,764 \cdot 10^{-11}$	$0,492 \cdot 10^{-18}$

При $h = 0,45$, $\tau^* = 1,520$

$\frac{1}{5} \tau^*$	1,216	0,446	0,177	$0,389 \cdot 10^{-1}$	$0,424 \cdot 10^{-2}$	$0,114 \cdot 10^{-3}$	$0,342 \cdot 10^{-6}$
$\frac{2}{5} \tau^*$	0,912	0,361	0,123	$0,235 \cdot 10^{-1}$	$0,186 \cdot 10^{-2}$	$0,305 \cdot 10^{-4}$	$0,404 \cdot 10^{-7}$
$\frac{3}{5} \tau^*$	0,608	0,261	$0,699 \cdot 10^{-1}$	$0,105 \cdot 10^{-1}$	$0,494 \cdot 10^{-3}$	$0,367 \cdot 10^{-5}$	$0,129 \cdot 10^{-8}$
$\frac{4}{5} \tau^*$	0,304	0,143	$0,235 \cdot 10^{-1}$	$0,214 \cdot 10^{-2}$	$0,350 \cdot 10^{-4}$	$0,531 \cdot 10^{-7}$	$0,132 \cdot 10^{-11}$

При $h = 0,50$, $\tau^* = 2,0$

$\frac{1}{5} \tau^*$	1,600	0,889	0,571	0,348	0,216	0,133	$0,825 \cdot 10^{-1}$
$\frac{2}{5} \tau^*$	1,200	0,750	0,462	0,286	0,176	0,109	$0,674 \cdot 10^{-1}$
$\frac{3}{5} \tau^*$	0,800	0,571	0,333	0,211	0,129	$0,800 \cdot 10^{-1}$	$0,494 \cdot 10^{-1}$
$\frac{4}{5} \tau^*$	0,400	0,333	0,182	0,118	$0,714 \cdot 10^{-1}$	$0,444 \cdot 10^{-1}$	$0,274 \cdot 10^{-1}$

По индуктивному предположению, $|x_n - x_{n-1}| \leq t_n - t_{n-1}$ и $|x_n - x_{n-2}| \leq |x_n - x_{n-1}| + |x_{n-1} - x_{n-2}| \leq (t_n - t_{n-1}) + (t_{n-1} - t_{n-2}) = t_n - t_{n-2}$. Числитель в последней части (6) оценивается величиной $\frac{1}{2} K (t_n - t_{n-1})(t_n - t_{n-2})$.

Оценим знаменатель:

$$\begin{aligned} & |f'(x_{n-1})| \geq |f'(x_0)| - |f'(x_{n-1}) - f'(x_0)| \geq \\ & \geq \frac{1}{B} - K|x_{n-1} - x_0| \geq \frac{1}{B} - K[|x_{n-1} - x_{n-2}| + \dots + |x_1 - x_0|] \geq \\ & \geq \frac{1}{B} - K[(t_{n-1} - t_{n-2}) + \dots + (t_1 - t_0)] = \frac{1}{B} - Kt_{n-1}, \\ & \left| f'(x_{n-1}) + \frac{1}{2}(x_n - x_{n-1})f''(\eta) \right| \geq \frac{1}{B} - Kt_{n-1} - \frac{1}{2} K(t_n - t_{n-1}) = \\ & = \frac{1}{B} - K \frac{t_n + t_{n-1}}{2} = -P' \left(\frac{t_n + t_{n-1}}{2} \right) > 0. \end{aligned}$$

Окончательно имеем

$$|x_{n+1} - x_n| \leq \frac{\frac{1}{2} K (t_n - t_{n-1})(t_n - t_{n-2})}{\frac{1}{B} - \frac{1}{2} K (t_n + t_{n-1})}. \quad (7)$$

Если проделать аналогичные вычисления для приближений t_n , получим

$$t_{n+1} - t_n = \frac{\frac{1}{2} K (t_n - t_{n-1})(t_n - t_{n-2})}{\frac{1}{B} - \frac{1}{2} K (t_n + t_{n-1})}.$$

Сравнение этого результата с (7) приводит к нужному неравенству

$$|x_{n+1} - x_n| \leq t_{n+1} - t_n.$$

Рассматривая всю последовательность приближений x_n , построенных по формуле (2), остановимся сначала на случае, когда последовательность содержит конечное число членов x_0, x_1, \dots, x_N . Так как мы предполагаем, что x_N может быть построено, мы должны считать, что x_0, x_1, \dots, x_{N-1} различны и лежат на отрезке $|x - x_0| \leq \delta$. Из неравенств

$$|x_N - x_0| \leq t_N - t_0 < t^* = \frac{1 - \sqrt{1 - 2h}}{h} \eta \leq \delta$$

следует, что x_N также принадлежит этому отрезку. Поэтому приближение x_{N+1} не может быть построено только по причине равенства $f(x_N) - f(x_{N-1}) = 0$. Рассмотрим разность

$$f(x_N) - f(x_{N-1}) = (x_N - x_{N-1}) \left[f'(x_{N-1}) + \frac{1}{2}(x_N - x_{N-1})f''(\eta) \right].$$

Выше было показано, что величина, стоящая в квадратных скобках, будет по модулю больше $\frac{1}{B} - \frac{1}{2} K (t_N - t_{N-1}) = -P' \left[\frac{1}{2} (t_N + t_{N-1}) \right]$.

Производная $P' \left[\frac{1}{2} (t_{N-1} + t_N) \right]$ отлична от нуля, так как $\frac{1}{2} (t_{N-1} + t_N) < t^*$.

Ввиду этого изучаемая разность может равняться нулю только в том случае, когда $x_N = x_{N-1}$. Но тогда из формулы (2) для x_N следует, что $f(x_{N-1}) = 0$ и x_{N-1} есть решение заданного уравнения $x_{N-1} = x^*$.

Перейдем к случаю, когда последовательность x_N является бесконечной. Проверим ее сходимость:

$$\begin{aligned} |x_{n+p} - x_n| &= |(x_{n+p} - x_{n+p-1}) + (x_{n+p-1} - x_{n+p-2}) + \dots + \\ &+ (x_{n+1} - x_n)| \leq (t_{n+p} - t_{n+p-1}) + (t_{n+p-1} - t_{n+p-2}) + \dots + (t_{n+1} - t_n) = \\ &= t_{n+p} - t_n. \end{aligned}$$

Последовательность t_n сходится, и для нее выполняется признак Больцано — Коши. Из полученного неравенства следует, что признак будет выполняться и для x_n и последовательность x_n также будет сходящейся: $x_n \rightarrow x$.

Неравенство (3), характеризующее скорость сходимости, сразу же получается, если в неравенстве $|x_{n+p} - x_n| \leq t_{n+p} - t_n$ перейти к пределу при $p \rightarrow \infty$. Переходя к пределу при $n \rightarrow \infty$ в формуле (2), получим, что \bar{x} — решение уравнения (1): $x = x^*$.

Сделаем еще дополнение к теореме. Оценка (3) говорит о том, что сходимость $x_n \rightarrow x^*$ будет происходить не медленнее, чем сходимость $t_n \rightarrow t^*$. Чтобы охарактеризовать быстроту стремления $t_n \rightarrow t^*$, мы составили небольшую вспомогательную таблицу, которая позволяет получить достаточно полное представление о том, как скорость убывания разности $t^* - t_n$ зависит от параметров h , $t_1 = |x_1 - x_0|$ и η . В сокращенной форме эта таблица приведена ниже. Из нее видно, что при малых h сходимость $t_n \rightarrow t^*$ будет весьма быстрой. С ростом h она будет замедляться, и такое замедление заметно усиливается при приближении h к $\frac{1}{2}$. При $h = \frac{1}{2}$ сходимость $t_n \rightarrow t^*$ становится медленной.

Сделав замену $t = \eta\tau$ в уравнении (4), получим

$$P(\eta\tau) = \frac{\eta}{B} \left(\frac{1}{2} h\tau^2 - \tau + 1 \right) = \frac{\eta}{B} \varphi(\tau).$$

Для уравнения

$$\varphi(\tau) \equiv \frac{1}{2} h\tau^2 - \tau + 1 = 0 \quad (8)$$

последовательные приближения τ_n метода секущих связаны с t_n формулами

$$t_n = \eta\tau_n, \quad t^* - t_n = \eta(\tau^* - \tau_n), \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

где τ^* — наименьший положительный корень уравнения (8).

В таблице приведены значения $\tau^* - \tau_n$ для начальных значений $\tau_0 = 0$, $\tau_1 = \frac{1}{5} \tau^*$, $\frac{2}{5} \tau^*$, $\frac{3}{5} \tau^*$, $\frac{4}{5} \tau^*$, для значений параметра $h = 0,05(0,1)$ 0,45, 0,5 и для $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$.

Литература

1. Мысовских И. П. Лекции по методам вычислений. Физматгиз, 1962.
2. Островский А. М. Решение уравнений и систем уравнений. ИЛ, 1963.

С. А. БАРКАН, В. С. ТАНАЕВ

О ПОСТРОЕНИИ РАСПИСАНИИ УЧЕБНЫХ ЗАНЯТИИ

Стремление автоматизировать процесс построения расписаний, использовать для выполнения этой трудоемкой работы вычислительную технику вполне естественно. Эта задача в целом является комплексной и для своего решения требует объединения усилий различных специалистов: педагогов, психологов, медиков, математиков, специалистов в области вычислительной техники и т. д.

В дальнейшем мы будем касаться в основном математических аспектов проблемы, сделав соответствующие допущения и тем самым несколько упростив рассматриваемые ситуации. Детализация вопросов, связанных с построением недельных расписаний учебных занятий, объясняется тем, что эта задача носит массовый характер и отражает основные трудности планирования учебного процесса.

1. Планирование процесса обучения включает в себя взаимосвязанные задачи структурного анализа и синтеза учебных программ, определение продолжительности и календарных сроков изучения различных включенных в программу вопросов [1—3].

Структурный анализ существующих учебных программ преследует в основном две цели — выявление отдельных тем, изучение которых не является необходимым для достижения поставленных перед процессом обучения целей, и выявление с последующим устранением циклической очерочности в изучении отдельных тем программы [4, 5], что особенно важно.

С формальной точки зрения структурный синтез учебных программ заключается в устранении из программы устаревших тем и введении в нее новых.

Аналогичные вопросы в равной мере возникают при календарном планировании любых сложных комплексов взаимосвязанных операций, являются предметом исследования специалистов в области сетевого планирования и могут быть эффективно разрешены разработанными к настоящему времени методами [6—8].

Календарное планирование учебного процесса заключается в упорядочении во времени комплекса взаимосвязанных операций. Понятие операции является достаточно общим и допускает различные интерпретации.

Так, в задаче планирования процесса обучения во времени в качестве операций выступают разделы программы, связанные темы, экзамены, отдельные занятия и т. д.

Решение задачи календарного планирования непосредственно для всего периода обучения крайне затруднительно ввиду большого объема информации. К тому же такой подход не позволяет учесть динамику условий конкретного учебного заведения и уровня требований, предъявляемых к организации учебного процесса в целом. Естественно про-

вести разбиение задачи на последовательный ряд подзадач, в котором решение каждой предыдущей входит как составная часть в исходные данные для следующей задачи. Для всех задач календарного планирования учебного процесса необходим учет ограниченности временных, людских и материальных ресурсов.

II. При календарном планировании учебного процесса в рамках рабочей недели в качестве исходной документации выступают график недельного прохождения занятий (список лекционных, практических и лабораторных занятий, проведение которых планируется в течение данной недели) и перечень предъявляемых к расписанию организационно-методических требований как общих, так и специальных, отражающих условия данного учебного заведения [9—31].

Множество N занятий, перечисленных в графике недельного прохождения, в дальнейшем отвлекаясь от их специфики, условимся называть операциями. Общее количество операций n , и все они последовательно пронумерованы числами $1, 2, \dots, n$. Длительность каждой операции i предполагается известной величиной, равной t_i . За единицу измерения времени (условно назовем ее часом) примем обычную для данного учебного заведения среднюю продолжительность занятий (академический час для школ, 2 академических часа для вуза и т. д.). Будем считать, что рабочий день имеет постоянную продолжительность λ час. Все учебные дни последовательно занумеруем числами $1, 2, \dots$, а часы — соответственно $1, 2, \dots, \lambda, \lambda+1, \dots$

Исходная информация сравнительно полно аппроксимируется заданием таких бинарных временных отношений между операциями, которые могут быть описаны заданием для каждой пары операций i и j неотрицательных величин $\theta_{ij}, \tau_{ij}, \theta_{ji}, \tau_{ji}$. Здесь θ_{ij} — наименьший измеренный в днях промежуток между днями проведения операции i и j при условии, что операция i выполняется первой, а τ_{ij} — минимальный промежуток времени (в часах), спустя который после начала операции i может быть начато выполнение операции j при условии их выполнения в один и тот же день. Для упорядоченной пары операций (i, j) хотя бы одна из величин θ_{ij} и τ_{ij} равна нулю.

Пусть при выполнении операций i и j в один и тот же день операция j должна выполняться после операции i по меньшей мере через $s < \lambda$ часов. Естественно полагать $\theta_{ij} = 0, \tau_{ij} = s, \theta_{ji} \neq 0, \tau_{ji} = 0$. В случае, когда указанное условие является единственным, $\theta_{ji} = 1$.

Требование безусловного следования операции j за операцией i во времени (в дальнейшем будем его называть просто следованием) описывается заданием θ_{ji} , равным достаточно большому числу D .

Обозначим через θ_{0i} и τ_{0i} — минимальные возможные день и час проведения операции i .

Расписание, т. е. указание для каждой i -ой операции дня θ_i и часа τ_i ее начала, назовем допустимым, если для любого i $\theta_i \geq \theta_{0i}, \tau_i \geq \tau_{0i}$,

$$\tau_i + t_i \leq \lambda \theta_i + 1,$$

а для каждой пары операций i и j выполняются условия, налагаемые заданием величин $\theta_{ij}, \tau_{ij}, \theta_{ji}, \tau_{ji}$.

Имея список операций и перечень указанных бинарных временных межоперационных отношений, можно предложить следующую схему построения допустимого расписания.

1. Каждой операции i припишем в качестве дня θ_i и часа τ_i ее начала соответственно величины θ_{0i} и τ_{0i} .

2. Выберем одну из операций, не следующих ни за одной операцией списка. Пусть это будет операция с номером k .

Скорректируем время начала каждой операции списка i , для которой отлична от нуля одна из величин θ_{ki} , τ_{ki} . Корректировка проводится согласно имеющимся значениям θ_k , τ_k , θ_i , τ_i , t_i , θ_{ki} и τ_{ki} с тем, чтобы операция i выполнялась после операции k . Операцию k удалим из списка операций.

Если список операций исчерпан, расписание построено. В противном случае повторяем процедуру.

Легко видеть, что при отсутствии в исходных данных противоречий, эта схема действительно реализует допустимое расписание.

Так как каждый раз выбор одной из операций списка, вообще говоря, неоднозначен, путем многократного применения такой схемы может быть получено все множество допустимых расписаний.

III. Задача, очевидно, заключается в построении оптимального расписания, т. е. допустимого расписания, наилучшим образом удовлетворяющего совокупности предъявленных организационно-методических требований. Число допустимых расписаний, как правило, настолько велико, что последовательное их генерирование [32] с последующим выделением оптимального за практически приемлемое время не представляется возможным. Лучшее же из ограниченного множества допустимых расписаний может оказаться достаточно далеким от оптимального.

Одно из возможных направлений построения оптимальных расписаний заключается в стремлении построить адекватную математическую модель и использовать существующие регулярные методы математического программирования [27—31]. Подобный подход наталкивается на известные трудности, вызванные большей размерностью, нелинейностью и дискретностью многих компонент моделей. Линеаризация же, как правило, сопряжена с чрезмерной идеализацией рассматриваемых ситуаций планирования.

Построение всех допустимых расписаний можно осуществлять, принимая на каждом шаге предложенной схемы все возможные решения.

Зная метод построения всех возможных вариантов и умея оценить полные и частично построенные расписания, для построения оптимального расписания можно использовать известные приемы последовательного анализа вариантов.

Существенного уменьшения объема вычислений можно добиться использованием методов эвристического программирования, в частности, так называемых правил (функций) приоритета для выбора решения на каждом шаге построения допустимого расписания. От того, насколько правильно осуществляется этот выбор, зависит качество соответствующего расписания. Поскольку анализ всех возможных последствий принятия того или иного решения на каждом шаге практически невозможен, эти правила строятся так, чтобы по каким-либо, вообще говоря, интуитивным соображениям можно было с большой степенью вероятности рассчитывать на получение оптимального, либо близких к нему вариантов. Эффективность предложенных правил приоритета выясняется в процессе эксперимента.

IV. В рассматриваемой ситуации представляется естественным в первую очередь выбирать претендентов с минимальным возможным временем начала. Этот принцип известен в теории расписаний как принцип «первый пришел — первый обслуживается». При наличии нескольких таких претендентов следует стремиться к первоочередному выбору тех из них, которые представляются нам наиболее влияющими на возможные сроки начала оставшихся операций списка. Это соответствует правилу первоочередного определения времени проведения «узловых» занятий при составлении расписаний вручную. В литературе подобные

методы получили название принципа «минимального ожидания конфликтов» [10, 21, 24].

Пусть N_k — подмножество множества всех операций N , полученное в результате удаления из N произвольных k операций. Степень влияния данной операции i из N_k на сроки начала других операций этого множества будем оценивать значением «веса» $P_k(i)$, определяемого следующим образом:

$$P_k(i) = \sum_{j \in R_k(i)} \max(t_i, \tau_{ij}) + \nu \sum_{j \in S_k(i)} \theta_{ij}, \quad \nu \geq \lambda,$$

где $R_k(i)$ — множество операций j из N_k , для которых

$$\max(\tau_{ij}, \theta_{ij}) > 0 \text{ и } \min(\theta_{ij}, \theta_{ji}) = 0;$$

$S_k(i)$ — множество операций j из N_k , для которых отлично от нуля $\min(\theta_{ij}, \theta_{ji})$. Значение коэффициента ν зависит от исходных данных и уточняется в процессе эксперимента.

Пусть $X_k(i)$ и $Y_k(i)$ — подмножества N_k такие, что для $j \in X_k(i)$ $\tau_{ij} \neq 0$ и для $j \in Y_k(i)$ $\theta_{ij} \neq 0$; $\alpha_{ij} = \tau_i + \max(t_i, \tau_{ij})$; β_i — ближайшее к τ_i/λ справа целое число.

Расписание строится следующим образом.

1. Положить $k = 0$. Для всех $j \in N_0$ положить $\theta_j = \theta_{0j}$, $\tau_j = \tau_{0j}$.

2. Из операций, не следующих ни за одной операцией N_k , выделить операции i с минимальным значением τ_i . Определить для них значение $P_k(i)$ и выделить те из операций, для которых значение $P_k(i)$ максимально. Обозначить полученное множество операций через \tilde{N}_k .

3. Отметить произвольно операцию $\omega \in \tilde{N}_k$. Положить для $i \in X_k(\omega)$

$$\tau_i = \begin{cases} \tau_i, & \text{если } \tau_i \geq \alpha_{\omega i}; \\ \alpha_{\omega i}, & \text{если } \tau_i < \alpha_{\omega i}, \quad \lambda\beta_\omega + 1 - \alpha_{\omega i} \geq t_i; \\ \lambda\beta_\omega + 1, & \text{если } \tau_i < \alpha_{\omega i}, \quad \lambda\beta_\omega + 1 - \alpha_{\omega i} < t_i, \end{cases}$$

для $i \in Y_k(\omega)$

$$\theta_i = \max(\theta_i, \theta_\omega + \theta_{\omega i});$$

$$\tau_i = \lambda(\theta_i - 1) + 1.$$

4. Удалить операцию ω из множества N_k . Если полученное в результате множество окажется пустым, процедура окончена. В противном случае перейти к п. 2, заменив значение k на $k+1$.

Легко видеть, что при построении расписаний по этому алгоритму на каждом шаге не исключается неоднозначность принимаемого решения, и тем самым возможно последовательное генерирование расписаний с выделением в дальнейшем лучшего из них.

V. По алгоритму составлена экспериментальная программа для ЭЦВМ «Минск-22». Выбор операций ω из \tilde{N}_k осуществлялся равновероятно. Результаты оказались в значительной мере зависящими от значения коэффициента ν . В программе предусматривалась автоматическая настройка этого коэффициента.

Организационно-методические требования, предъявляемые к расписанию, могут быть, согласно их значимости, разделены на основные и дополнительные. В эксперименте при полученном в результате настройки значении коэффициента ν 75—80% расписаний удовлетворяли всем основным и ряду дополнительных требований. В табл. 1 приводится один из результатов автоматического построения описанным методом расписания по графику недельного прохождения, приведенному в табл. 2.

Таблица 1

Расписание			
Дни недели	1	2	3
Поне- дельник	Электроприборы		Федоров
	Математика		Иванова
	Физика Петров	Физкультура Васильев, Семенов	Электроприборы Кондратьев
Вторник	Физика		Петров
	Математика Кузнецов	Электроприборы Кондратьев	Диамат Антонов
	Электроприборы Кондратьев	Математика Кузнецов	
Среда	Спецподготовка		Сергеев, Дронин
Четверг	Электроприборы		Федоров
	Электроприборы Кондратьев	Диамат Антонов	Математика Кузнецов
	Ин. яз. Павлова, Озеров		Физкультура Васильев, Семенов
Пятница	Математика		Иванова
	Тэмп		Воробьев
	Физкультура Воробьев, Семенов	Ин. яз. Павлова, Озеров	Электроприборы Кондратьев
Суббота	Электроизмерения		Степанов
	Диамат Антонов	Электроприборы Кондратьев	Физика Сидоров
		Физика Сидоров	Ин. яз. Павлова, Озеров

В случае, когда лучший из полученных результатов нас по каким-либо соображениям не устраивает, допускается его полуавтоматическая корректировка, а в случае необходимости — направленное смягчение исходных требований.

Без увеличения объема вычислений, связанных с построением одного варианта расписания, качество его может быть значительно повышено в результате некоторой модификации определения «веса» операций. Так, при наличии непротиворечивых требований фиксированного времени проведения определенных операций можно существенно увеличить вероятность их удовлетворения, приписывая таким операциям достаточно большое значение «веса».

Как уже отмечалось, при составлении расписания использовалась лишь основная часть исходной информации. Некоторым расширением

Таблица 2

График недельного прохождения занятий

Преподаватель	Предмет	Вид занятия	Группы	Длительность	К-во занятий	Аудитория	Начало	
							не ранее	стро-го
Иванова	математика	лекция	1, 2, 3	2	2	большая	1	—
Кузнецов	математика	практика	1	2	1	малая	2	—
Кузнецов	математика	практика	2	2	1	малая	2	—
Кузнецов	математика	практика	3	2	1	малая	2	—
Петров	физика	лекция	1, 2, 3	2	1	большая	1	—
Петров	физика	практика	1	2	1	малая	2	—
Петров	физика	практика	2	2	1	малая	2	—
Сидоров	физика	практика	3	2	1	малая	2	—
Сидоров	физика	практика	3	2	1	малая	2	—
Федоров	электроприборы	лекция	1, 2, 3	2	2	большая	1	—
Кондратьев	электроприборы	практика	1	2	2	малая	2	—
Кондратьев	электроприборы	практика	2	2	2	малая	2	—
Кондратьев	электроприборы	практика	3	2	2	малая	2	—
Антонов	диамат	семинар	1	4	1	малая	5	—
Антонов	диамат	семинар	2	4	1	малая	5	—
Антонов	диамат	семинар	3	4	1	малая	5	—
Антонов	диамат	семинар	3	4	1	малая	5	—
Степанов	электроизмерения	лекция	1, 2, 3	2	1	большая	1	—
Степанов	электроизмерения	лекция	1, 2, 3	2	1	большая	1	—
Воробьев	ТЭМП	практика	1	2	1	2 малых	5	—
Павлова, Озеров	ин. яз.	практика	1	2	1	2 малых	5	—
Павлова, Озеров	ин. яз.	практика	2	2	1	2 малых	5	—
Павлова, Озеров	ин. яз.	практика	3	2	1	2 малых	5	—
Павлова, Озеров	ин. яз.	практика	3	2	1	2 малых	5	—
Васильев, Семенов	физкультура	практика	1	2	1	зал	2	—
Васильев, Семенов	физкультура	практика	2	2	1	зал	2	—
Васильев, Семенов	физкультура	практика	3	2	1	зал	2	—
Васильев, Семенов	физкультура	практика	3	2	1	зал	2	—
Сергеев, Дронин	спецподготовка		1, 2, 3	6	1		1	—

ее можно также существенно повысить эффективность алгоритма без его принципиального усложнения. Например, введением в алгоритм соответствующей проверки удовлетворяется требование не выполнять одновременно больше, чем заданное число операций определенной группы, и тем самым учитываются ограниченные возможности имеющихся в данном учебном заведении помещений.

Предложенный метод решения задачи построения недельного расписания учебных занятий может быть без принципиальных усложнений применен к решению других задач календарного планирования учебного процесса.

Авторы благодарны Л. П. Матюшкову и Г. Ф. Хорошавиной за разработку экспериментальной программы.

Литература

1. Овчинников А. А., Пучинский В. С. Известия АН СССР, сер. техн. кибернетика, № 3, 1964.
2. Овчинников А. А., Пучинский В. С. Сб. «Применение технических средств — одна из форм программированного обучения в средней спец. и высшей школе». Изд. «Советское радио», М., 1965.
3. Овчинников А. А., Пучинский В. С. Сетевые методы планирования и организации учебного процесса. М., ВИА им. Жуковского, 1965.
4. Моргунов И. Б. Известия вузов, сер. электромеханика, № 12, 1965.
5. Моргунов И. Б. Советская педагогика, № 3, 1966.
6. Зуховицкий И. А., Радчик И. А. Математические методы сетевого планирования. Изд. «Наука», М., 1960.
7. Модер Дж., Филлипс С. Метод сетевого планирования в организации работ. Изд. «Энергия», М., 1966.
8. Шкурба В. В. и др. Задачи календарного планирования и методы их решения. Изд. «Наукова думка», Киев, 1966.
9. Almond Marie. Computer J., 8, No 4, 1966.
10. Appleby J. S., Blake D. V., Hergan E. A. Computer J., 3, 1961.

11. Akkerman F. J. for Swedish High Schools, No 5, 1962.
12. Berghuis J. 23-eme Reunion des Utilisateurs de Calculeteurs Gamma-Tambour. Bologna, 14—15 April, 1961.
13. Broder S. Communications of the ACM, 7, No 8, 1964.
14. Busam Vincent A. Communications of the ACM, 10, No 9, 1967.
15. Cole A. J. Computer J., 7, No 2, 1964.
16. Churchman C. M., Ackoff R. L., Arnoff E. L. Operations Research-Eine Einfuhrung in die Unternehmensforschung, Wien und München, 1961, 314.
17. Gotlieb C. The Constraction of Class-Teacher Timetables, Computations Centre, University of Toronto, Canada. Proceeding of the IFIP Congress, 1962, 22—25.
18. Gotlieb C. Bibliographie zur maschinellen stundenplanerzeugung Institute of Computer Science, University of Toronto (Oktober, 63) und reviedirte Ausgabe, Desember, 1964.
19. Csimat J., Gotlieb C. Communications of the ACM, 7, No 3, 1964.
20. Gunzenhauser R., Junginger W. Elektron. Datenverarb., 6, No 5, 1964.
21. Lazak D. Elektron. Datenverarb., 8, No 3, 102, 1966.
22. Lazak D. Elektron. Datenverarb., 8, No 3, 112, 1966.
23. Stahlknecht P. Elektron. Datenverarb., 6, No 2, 1964.
24. Carl August Zehnder. Diss. dokt. der mathematik. Zurich, 1965.
25. Kirchgassner. Über zuteilungsprobleme einer universitat, Referat auf der Jahrestagung der DGU, Braunschweig, 1963.
26. Sherman G. K. J. of the Tennessee Academy of Sci., 38, No 3, 1963.
27. Hers J. C. 13-e Congr. calcul et traitement inform. AFGAITJ, Toulouse, Paris, 1965, 291.
28. Lawrie N. L. Brit. Joint Computer Conf. London, 1966, 16.
29. Mihoc Gh., Balas E. Studii si cercetari mat Acad. RPR, 17, No 4, 1965.
30. Максименко Б. Ф., Ляшенко Т. М. Вычислительная математика и техника. Изд. АН УССР, Киев, 1963.
31. Португалл В. М. Кибернетика, № 4, 1966.
32. Матюшков Л. П., Танаев В. С. Вычислительная техника в машиностроении, Минск, ИТК АН БССР, июль 1967, февраль 1968.

*Институт технической кибернетики
АН БССР*

*Поступило в редакцию
26.IX 1968*

И. С. СЯГЛО

О ПЕРЕФОРМУЛИРОВКЕ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ К НАБЛЮДАЕМЫМ ВЕЛИЧИНАМ

Общая теория относительности (ОТО) содержит четырехмерные величины, задаваемые своими компонентами относительно произвольных криволинейных координатных систем. Однако для сравнения ОТО с опытом необходимо интерпретировать ее уравнения с помощью других, наблюдаемых трехмерных величин, введенных относительно некоторой неинерциальной системы отсчета. Разработаны два метода их выделения: в теории хронометрических инвариантов [1—6], и в тетрадной формулировке ОТО (ТФ ОТО). Общим для них является закон локального расщепления пространства — времени. Сравнение определений и преобразований неинерциальных систем отсчета в ТФ ОТО и теории хронометрических инвариантов произведено в [7]. В данной работе это тетрадное определение развивается введением дополнительной связности, позволяющей записать уравнения движения в форме уравнений Ньютона в терминах наблюдаемых величин ОТО.

Примем, что система отсчета задана, если в каждой точке задан орторефер e_k , трактуемый как эталоны длины и времени. Проекция его на оси криволинейных координат (тетрады) обозначим h^{ρ}_k . Согласно [7] положим, что реперы, отличающиеся только ориентацией векторов e_a , задают системы отсчета, эквивалентные в динамическом отношении. Из произвольного локального вектора A_k выделим следующие наблюдаемые величины: пространственный трехмерный вектор A_a и четвертую компоненту $A_{(4)}$. Их можно рассматривать как самостоятельные четырехмерные векторы \dot{A}_k и \ddot{A}_k , лежащие соответственно в локальном трехмерном пространстве и вдоль локальной оси времени:

$$\dot{A}_k = (A_a, 0), \quad \ddot{A}_k = (0, 0, 0, A_{(4)}). \quad (1)$$

Мировые компоненты наблюдаемых определяются соотношениями

$$\dot{A}_\rho = h^{\rho k} \dot{A}_k = \dot{g}_\rho{}^\tau A_\tau, \quad (2)$$

$$\ddot{A}_\rho = h^{\rho k} \ddot{A}_k = \ddot{g}_\rho{}^\tau A_\tau,$$

где $\dot{g}_\rho{}^\tau$ и $\ddot{g}_\rho{}^\tau$ — проективные операторы:

$$\dot{g}_\rho{}^\tau = h^{\rho a} h_a{}^\tau, \quad \dot{g}_\rho{}^\tau g_\tau{}^\omega = \dot{g}_\rho{}^\omega; \quad (3)$$

$$\ddot{g}_\rho{}^\tau = h^{\rho(4)} h_{(4)}{}^\tau, \quad \ddot{g}_\rho{}^\tau g_\tau{}^\omega = \ddot{g}_\rho{}^\omega.$$

*) Греческие индексы относятся к криволинейным координатам, латинские — к локальным псевдодекартовым. Численные значения латинских индексов берутся в скобки. Начальные буквы обоих алфавитов принимают значения 1, 2, 3; конечные, начиная с k и κ , принимают значения 1, 2, 3, 4.

Последние позволяют вводить наблюдаемые величины, не прибегая непосредственно к их локальным компонентам, выделенным по законам специальной теории относительности. Проективные операторы (3) можно использовать и как метрические тензоры соответственно для величин \dot{A}_ρ и \ddot{A}_ρ . При калибровке тетрад $h^\alpha_{(4)} = 0$ они совпадают с проективными операторами Каттанео [4], а величины $A_{(4)}$ и \dot{A}_ρ — с хронометрически инвариантными и ковариантными величинами, введенными Зельмановым [1, 2].

Локальные трехмерные пространства, определяемые параллельно перенесенным из бесконечно близкой точки и заданным в данной точке ортореперами, в общем случае не совпадают. Вследствие этого абсолютный дифференциал наблюдаемой величины не будет наблюдаемой величиной. Поэтому для записи ковариантных дифференциальных уравнений непосредственно в терминах наблюдаемых введем аффинную связность $\tilde{\Gamma}^\lambda_{\rho\tau}$, сохраняющую характер наблюдаемых при параллельном переносе. Определим ее через проективные операторы согласно [8]:

$$\tilde{D}\dot{A}^\rho = g^{\rho\tau} D\dot{A}^\tau, \quad (4)$$

$$\tilde{D}\ddot{A}^\rho = g^{\rho\tau} D\ddot{A}^\tau,$$

где \tilde{D} и D — соответственно абсолютные дифференциалы относительно коэффициентов связности $\tilde{\Gamma}^\lambda_{\rho\tau}$ и $\Gamma^\lambda_{\rho\tau}$. Из (4) получим

$$\Gamma^\rho_{\nu\tau} - \tilde{\Gamma}^\rho_{\nu\tau} = B^\rho_{\nu\tau}, \quad (5)$$

$$B_{\rho\nu\tau} = h_\rho^{(4)} \nabla_\tau h_\nu^{(4)} - h_\nu^{(4)} \nabla_\tau h_\rho^{(4)}. \quad (6)$$

Также найдем, что

$$\tilde{\nabla}_\rho g_{\nu\tau} = \tilde{\nabla}_\rho g^*_{\nu\tau} = \tilde{\nabla}_\rho h_\nu^{(4)} = 0. \quad (7)$$

Для смешанных компонент тензора кривизны, построенного из коэффициентов связности $\tilde{\Gamma}^\lambda_{\rho\tau}$, имеем

$$\tilde{R}^a_{(4)\mu\nu} = 0, \quad \tilde{R}_{ab\mu\nu} = R_{ab\mu\nu} + 2h_{a\rho} h_{b\tau} \nabla_{[\mu} h^{\rho(4)} \nabla_{\nu]} h^\tau_{(4)}. \quad (8)$$

Следовательно, связность $\tilde{\Gamma}^\lambda_{\rho\tau}$ обеспечивает абсолютный параллелизм вектора $e_{(4)}$. Поэтому доопределим систему отсчета в ОТО заданием параллельного переноса в смысле коэффициентов связности $\tilde{\Gamma}^\lambda_{\rho\tau}$ вместо римановой связности. Такое определение неинерциальной системы отсчета является естественным обобщением понятия инерциальной системы отсчета специальной теории относительности.

Переход от одной системы отсчета к другой, неэквивалентной ей в динамическом отношении, осуществляется применением к ортореперу локального преобразования Лоренца гиперболического вращения. Запишем матрицу его коэффициентов в следующей форме:

$$L_{k'}^n = \left(\begin{array}{c|c} L_{a'b} & \kappa u_a \\ \hline \kappa u_a & \kappa \end{array} \right), \quad \kappa = (1 - u_a u^a)^{-\frac{1}{2}}, \quad (9)$$

где u_a — относительная скорость двух систем отсчета. Применяя это преобразование к тетрадам, получим

$$h^{\rho(4')} = \kappa (h^{\rho(4)} + \dot{u}^\rho), \quad \dot{u}^\rho = h^\rho_a u^a. \quad (10)$$

Подставляя $h^{\rho}_{(4)}$ из (10) в (2) и (6), находим

$$\dot{g}'_{\rho\tau} = \dot{g}_{\rho\tau} + \kappa^2 (h_{\rho}^{(4)} h_{\tau}^{(4)} \dot{u}_{\rho} \dot{u}_{\tau} + \dot{u}_{\rho} \dot{u}_{\tau} - 2\dot{u}_{(\rho} h_{\tau)}^{(4)}), \quad (11)$$

$$\ddot{g}'_{\rho\tau} = \kappa^2 (\ddot{g}_{\rho\tau} - \dot{u}_{\rho} \dot{u}_{\tau} + 2\dot{u}_{(\rho} h_{\tau)}^{(4)}), \quad (12)$$

$$B'_{\tau\mu\nu} = \kappa^2 [B_{\tau\mu\nu} + 2(\dot{u}_{[\tau} \nabla_{|\nu|} \dot{u}_{\mu]} - h^{(4)}_{[\tau} \nabla_{|\nu|} \dot{u}_{\mu]} - \dot{u}_{[\tau} \nabla_{|\nu|} h_{\mu]}^{(4)})]. \quad (13)$$

Закон преобразования наблюдаемых величин при преобразовании системы отсчета следует из (11), (12) и их определения (2) через проективные операторы.

Преобразование (9) меняет калибровку тетрады. Однако можно частично сохранить ее одновременным применением координатных и лоренцевых преобразований, т. е. за счет определенной связи между этими преобразованиями. В частности, как показано в [7], сохранение условий $h^{\alpha}_{(4)}$ ведет к соответствию антихронометрических преобразований координат и локальных гиперболических преобразований Лоренца. В этом случае соотношения (10) — (12) приводят к закону преобразования хронометрически инвариантных и ковариантных величин, полученному в [9].

Свободное пробное тело в поле тяготения движется по геодезической линии. Для того чтобы переформулировать его уравнения движения к неинерциальной системе отсчета в вышеуказанном определении, перейдем в уравнении геодезической к абсолютному дифференцированию относительно коэффициентов связности $\tilde{\Gamma}^{\lambda}_{\rho\tau}$ и по собственному времени $dx^{(4)}$ системы отсчета. Тогда

$$\frac{\tilde{D}p^{\rho}}{dx^{(4)}} = G^{\rho}, \quad G^{\rho} = -B^{\rho}_{\nu\tau} p^{\tau} v^{\nu}, \quad (14)$$

$$p^{\tau} = m_0 \frac{dx^{\tau}}{ds} = m \frac{dx^{\tau}}{dx^{(4)}} = mv^{\tau}.$$

Свертывая выражения (14) с \dot{g}_{ρ}^{τ} и $h_{\rho}^{(4)}$ и используя (7), придем к уравнениям движения, выраженным через наблюдаемые:

$$\frac{\tilde{D}\dot{p}^{\tau}}{dx^{(4)}} = \dot{G}^{\tau}, \quad \frac{dp_{(4)}}{dx^{(4)}} = \dot{G}_{\rho} v^{\rho}, \quad (15)$$

$$\dot{G}^{\tau} = -p^{\rho} \nabla_{\rho} h^{\tau}_{(4)}.$$

Первое из уравнений (15) имеет форму второго закона Ньютона и связывает величины, отнесенные к локальному трехмерному пространству. Величина \dot{G}^{τ} имеет смысл силы, действующей на пробные тела в неинерциальной системе отсчета. Она является вектором относительно преобразований криволинейных координат, но имеет более сложные трансформационные свойства при преобразованиях систем отсчета. Из (6), (13) и (15) следует, что

$$\dot{G}'_{\tau} = \kappa [\dot{G}_{\tau} + (\kappa^{-2} h_{\tau}^{(4)} \partial_{\sigma} \kappa - \nabla_{\sigma} \dot{u}_{\tau}) p^{\sigma}]. \quad (16)$$

В качестве иллюстрации приведем примеры \dot{G}_r для поля Шварцшильда:

$$g_{\mu\nu} = \text{diag} \left(a^2, r^2, r^2 \sin^2 \theta, -\frac{1}{a^2} \right), \quad a = \left(1 - \frac{2M}{r} \right)^{-\frac{1}{2}}. \quad (17)$$

При диагональных тетрадах получим

$$\dot{G}_1 = -\frac{mM}{R^2}, \quad R = \frac{r}{a}, \quad \dot{G}_2 = \dot{G}_3 = 0. \quad (18)$$

Четвертая компонента следует из условия $\dot{G}_\mu h^\mu_{(4)} = 0$. В новой системе отсчета, соответствующей движению по радиусу со скоростью $u_1(r, t) = \text{th } \alpha$, имеем

$$\dot{G}_1 = -a \left[p^1 \partial_1 \alpha + \left(\partial_4 \alpha + \frac{M}{r^2} \right) p^4 \right] \text{ch } \alpha, \quad (19)$$

$$\dot{G}_2 = -\frac{p^2 r}{a} \text{sh } \alpha, \quad \dot{G}_3 = -\frac{p^3 r}{a} \sin^2 \theta \text{sh } \alpha.$$

Если в этой системе частица покоится, то

$$p_\mu = 0, \quad p_\mu = h_{\mu(4)}, \quad \dot{G}_2 = \dot{G}_3 = 0, \\ \dot{G}_1 = -m \left[\text{sh } \alpha \partial_1 \alpha + \left(\partial_4 \alpha + \frac{M}{r^2} \right) a^2 \text{ch } \alpha \right] \text{ch } \alpha. \quad (20)$$

Если, в частности, $\text{ch } \alpha = a$, то преобразованную систему отсчета можно рассматривать как свободно падающую, поскольку в ней $\dot{C}_\mu = 0$.

Выражения для связности (6), (13), а также (16) зависят лишь от компонент тетрад $h^\lambda_{(4)}$. Это согласуется с теорией хронометрических инвариантов, согласно которой для задания системы отсчета достаточно поля вектора γ^μ такого, что

$$\gamma^\mu = \frac{dx^\mu}{ds} = \left. \frac{dx^\mu}{dx^{(4)}} \right|_{dx^a=0} = h^\mu_{(4)}. \quad (21)$$

Для задания этого вектора достаточно фиксировать только три калибровочных условия. Необходимость в остальных трех появляется при переходе к локальным псевдодекартовым компонентам наблюдаемых.

Приношу благодарность О. С. Иваницкой за постоянное внимание к работе.

Литература

1. Зельманов А. Л. ДАН СССР, **107**, 815, 1956.
2. Зельманов А. Л. Тр. 6-го совещ. по вопр. космогонии. М., 1959.
3. Cattaneo C. Nuovo Cimento, **10**, 318, 1958; **11**, 733, 1959.
4. Cattaneo C. C. r. Acad. Sci., **256**, 3974, 1963.
5. Schmutzer E. Z. Naturf., **19a**, 665, 1964.
6. Salié N. Wiss. Z. d. Univ. Jena, Math.-nat., **15**, 45, 1966.
7. Иваницкая О. С. Весті АН БССР, сер. фіз.-мат. навук, № 3, 1969.
8. Cattaneo-Gasparini J. C. r. Acad. Sci., **252**, 3722, 1961.
9. Захаров В. Н., Мицкевич Н. В. Тез. 5-й Международн. конф. по гравитации и теории относительности. Тбилиси, 1968.

Белорусский государственный университет
им. В. И. Ленина

Поступило в редакцию
1.VII 1969

УДК 539.12.01+125.5+173.4

А. С. ПОТУПА, В. Н. ТРЕТЬЯКОВ

ОБ ЭФФЕКТАХ СТРУКТУРНОСТИ ЯДЕРНОЙ ПОВЕРХНОСТИ В НЕЙТРОННОМ РАССЕЯНИИ НА МАЛЫЕ УГЛЫ

1. Введение. Изучение механизмов нуклон-ядерного рассеяния исключительно важно для построения самосогласованной теории сильных взаимодействий во всей области их проявления. Моделирование ядра оптическим потенциалом (ОП) является в настоящее время основным методом, позволяющим феноменологически описать, в частности, нейтрон-ядерное рассеяние. Однако с 1957 г. стали появляться экспериментальные указания на недостаточность такого подхода при описании упругого рассеяния нейтронов тяжелыми ядрами на малые углы [1—3].

Первоначально [4, 5] предполагалось, что аномалия в угловом распределении может быть отождествлена с дополнительным рассеянием наведенного дипольного момента нейтрона в кулоновском поле ядра. Однако для численного согласования с экспериментом приходилось выбирать поляризуемость нейтрона $\alpha_n \simeq (0,8 \pm 0,35) \cdot 10^{-40} \text{ см}^3$ [1] и даже $\alpha_n > 5 \cdot 10^{-40} \text{ см}^3$ [6], что находилось в резком противоречии с другими оценками нуклонной поляризуемости [7, 8]. В связи с этим появилось много попыток «неполяризационного» объяснения этой аномалии (некоторые из них приведены в [7, 9]). Однако ни одна из них не дала удовлетворительного согласия с экспериментальными данными.

Цель настоящей работы — показать, что в рамках дисперсионного подхода при некоторых разумных допущениях учет нуклонной структуры ядерной поверхности дает непротиворечивое полуколичественное описание аномальной анизотропии в нейтрон-ядерном рассеянии.

П. 2 настоящей работы посвящен выяснению некоторых вопросов о соотношении оптически-потенциального и диаграммного подходов, а также особой роли треугольной диаграммы, вклад которой в рассматриваемый процесс оценивается в следующем п. 3. В дискуссию (п. 4) вынесены соображения в пользу «частичной дополнительной» треугольной диаграммы, а в п. 5 приведены основные выводы, следующие из модели.

2. Диаграммный подход и оптический потенциал. Рассмотрим одну из возможностей восполнения недостаточности оптически-потенциального описания в области малых углов рассеяния нейтронов на тяжелых ядрах.

Примем, что амплитуда нейтрон-ядерного рассеяния эффективно учитывает*) следующие классы диаграмм (рис. 1).

Диаграммы *a* и *b* описывают рассеяние аномального магнитного момента нейтрона в кулоновском поле ядра, диаграмма *в* представляет вклад механизма поляризуемости нейтрона, а диаграммы *г* и *д* относятся к чисто ядерным взаимодействиям: рассеянию через компаунд-ядро и всевозможным прямым реакциям соответственно.

*) хотя и не исчерпывает

При изучении экспериментальных данных по нейтрон-ядерному рассеянию на малые углы обычно отделяют вклад швингеровского рассеяния (диаграммы *a* и *б*), поскольку для него существует хорошая теоретическая модель [10]. Оценка, проведенная в [9] в Приложении 1, показывает, что при значении поляризуемости нейтрона [8]

$$\alpha_n = (11,5 \pm 2,5) \cdot 10^{-43} \text{ см}^3,$$

т. е. при $\alpha_n \sim 10^{-42} \text{ см}^3$, величина вклада диаграммы *c* мала по сравнению с погрешностью эксперимента. Что же касается диаграммы *г*, то ее имеет смысл учитывать лишь в области дифракционных минимумов [11]; при малых углах она несущественна.

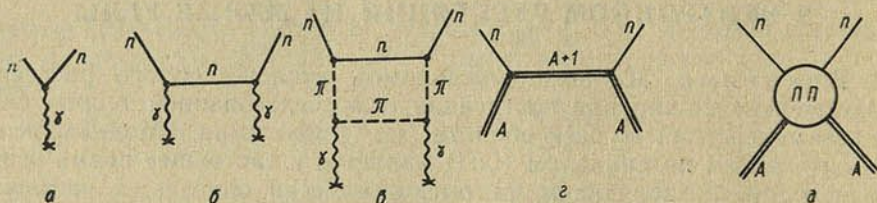


Рис. 1

Из класса диаграмм *д*, эффективно включающихся в ОП, выделим простейшие (рис. 2), для которых усреднение по энергии несущественно. Эффективное включение этих диаграмм фактически эквивалентно перепределению ОП (экстраполированного из области углов $10-20^\circ$ на малые углы) за счет более полного рассмотрения эффектов ядерной поверхности. Построение соответствующей физической модели процесса сводится, таким образом, к последовательному учету многократного рассеяния на компонентах тяжелого ядра, причем не исключается возможность взаимодействия с квазичастичными возбуждениями (что может быть важно в случае рассеяния многонуклонных ядер *).

Естественно ожидать, что в области малых углов доминирует однократное рассеяние (диаграмма *a* рис. 2). В самом деле, из принципа Паули, формирующего структуру ядерных оболочек, следует, что большая часть избытка нейтронов в тяжелых ядрах концентрируется на поверхности [12]. С другой стороны, оценка размеров эффективной области взаимодействия по формуле

$$R_{eff} = \frac{1}{v t_{\Delta}} = \frac{1}{\sqrt{8 \frac{m_a}{m_b} (m_a + m_b) \varepsilon}}$$

(см. также (3)) показывает, что максимальная периферичность, т. е. наибольшее R_{eff} , достигается в случае однонуклонных промежуточных состояний. Совместный учет этих соображений позволяет статистически выделить треугольную диаграмму с нейтронными промежуточными линиями.

Таким образом, рассматриваемый эффект аномальной анизотропии связывается с **поверхностным** рассеянием нейтронов с определяющим вкладом диаграмм *a* рис. 2, тогда как рассмотрение многонуклонных промежуточных состояний (сумма 2) и многократного рассеяния (сумма 3) означает учет **объемных** прямых процессов **).

*) Отметим, что в связи с малостью свободного пробега составных систем относительно диссоциации [13] вклад диаграмм с многонуклонными промежуточными состояниями, по-видимому, незначителен.

**) Например, эффективный радиус взаимодействия с дейтронными промежуточными состояниями примерно в 1,7 раза меньше, чем с нуклонными.

С физической точки зрения выделение диаграмм типа *a* рис. 2 связывается с учетом влияния нуклонной структуры ядерной периферии в нейтрон-ядерном рассеянии. Этот эффект не может быть последовательно рассмотрен в рамках оптической модели, элиминирующей структуру ядра. С другой стороны, разумно считать, что в области средних энергий (1—10 Мэв) нуклонная структура ядра играет гораздо большую роль, чем мезонная структура нуклонов. Это означает, что из двух возможностей раскрытия общей вершины «чисто ядерного» взаимодей-

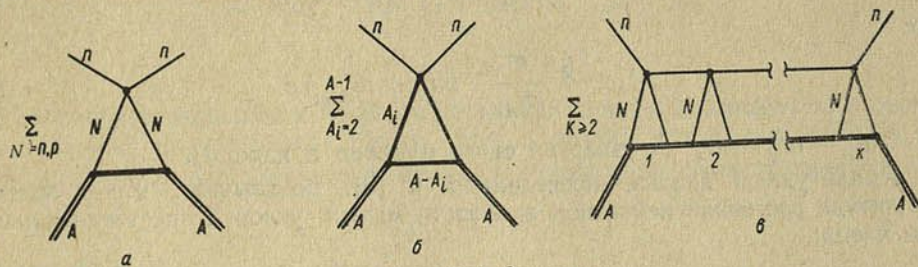


Рис. 2

ствия нейтронов (рис. 3) мы должны отдать предпочтение второй, и подтверждается самим фактом неудачи попыток объяснения аномальной анизотропии с помощью поляризуемости нейтрона.

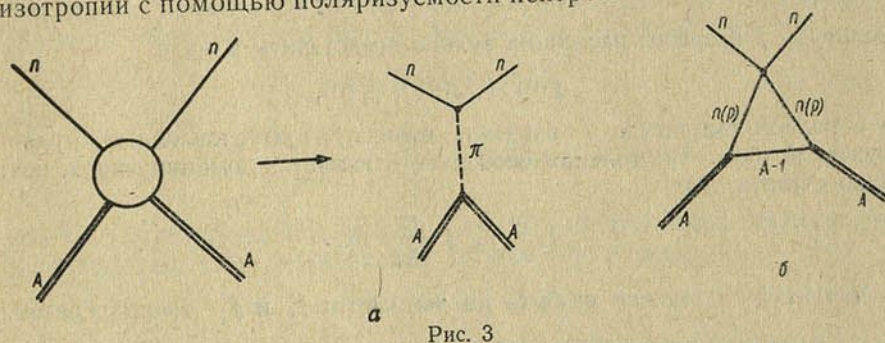


Рис. 3

3. Оценка роли треугольной диаграммы в нейтрон-ядерном рассеянии. Амплитуда M процесса $n + {}^A_1A \rightarrow n + {}^A_1A$ связана с дифференциальным сечением в с.ц.и. формулой [14]

$$\sigma(\theta) = \frac{m_{nA}^2}{4\pi^2} |M(s, t)|^2 \equiv |a(\theta)|^2,$$

где $m_{nA} \approx m$ — приведенная масса нейтрона, s и t — нерелятивистские мандельштамовские переменные.

Поскольку процесс имеет одинаковые по квантовым числам частицы в начальном и конечном состояниях, то наиболее простой диаграммой, включающей в себя эффекты нуклонной структуры ядра, будет треугольная (диаграмма *a* рис. 2).

Амплитуда, соответствующая этой диаграмме, зависит только от t [14]:

$$M_{\Delta}(t) = -\frac{i}{4\pi} \frac{m_{A-1} m_N^2}{m_A} G \frac{1}{\sqrt{t}} \ln \frac{\sqrt{t_{\Delta}} + \sqrt{t}}{\sqrt{t_{\Delta}} - \sqrt{t}}, \quad (1)$$

где $G = M_{AN} M_{AN}^+ M_{nN}$, а M_{AN} и M_{nN} — амплитуда реакций $(A-1) + N \rightarrow A$ и $N + n \rightarrow N + n$ соответственно. При этом предполагается, что особенности амплитуд M_{AN} и M_{nN} являются далекими, и потому M_{AN} и M_{nN} могут быть

аппроксимированы константами (обычное предположение теории прямых ядерных реакций).

Заметим, что диаграмма б рис. 3 содержит только свою собственную особенность, так как ужатая по линии $(A-1)$ диаграмма является одно-контурной и потому вклада не дает. В косинус-плоскости положение этой особенности определяется формулой

$$\cos \theta_{\Delta} = 1 + \frac{t_{\Delta}}{4E}, \quad (2)$$

где

$$t_{\Delta} = 8 \frac{m_N}{m_{A-1}} (m_N + m_{A-1}) \varepsilon \quad (3)$$

($\varepsilon = |m_A - m_N - m_{A-1}|$ — энергия связи нуклона в ядре A).

Амплитудный анализ, проведенный в [9], показывает, что в полной амплитуде рассеяния нейтронов в области малых углов существенны лишь два члена:

$$a(\theta) = f(\theta) + f_s(\theta) \vec{\sigma} \vec{n},$$

поэтому за вычетом швингеровского рассеяния

$$\sigma(\theta) - |f_s|^2 = |f(\theta)|^2 \equiv \sigma(\theta).$$

Амплитуду f ядерного рассеяния можно представить в виде

$$f(\theta) = f_0(\theta) + f_1(\theta),$$

где в полной амплитуде f выделен вклад f_1 , обусловленный нуклонной структурой ядра. Треугольная особенность является доминирующей, поэтому можно считать, что

$$f_1 = f_{\Delta} \equiv \frac{m}{2\pi} M_{\Delta}.$$

Амплитуду f_{Δ} можно разбить на две части: f'_{Δ} и f''_{Δ} таким образом, что

$$f = f_0 + f_{\Delta} = f_{OP} + f'_{\Delta}, \quad (4)$$

где f''_{Δ} будет ответственная за эффекты, выходящие за рамки потенциального описания.

Покажем, что предложенная схема объяснения аномальной анизотропии может быть подтверждена количественной оценкой.

Учет влияния процесса, описываемого амплитудой f''_{Δ} , изменяет дифференциальное сечение на величину*)

$$-\sigma_{OP} + \sigma_{exp} \equiv \Delta\sigma = 2 \operatorname{Re}(f'_{OP} f''_{\Delta}) + |f''_{\Delta}|^2.$$

Так как $|f''_{\Delta}| \ll |f_{OP}|$, а отношение $\frac{\operatorname{Re} f_{OP}}{\operatorname{Im} f_{OP}} \ll 1$ для рассеяния на тяжелых ядрах [15], то

$$\Delta\sigma \simeq 2 \operatorname{Im} f_{OP} |f''_{\Delta}| \lesssim 2 |f_{OP}| \cdot |f''_{\Delta}|. \quad (5)$$

Проведем оценку для случая рассеяния вперед нейтронов с энергией 14 Мэв на уране.

*) В предположении о наличии интерференции между f_{OP} и f''_{Δ} . Заметим, что формула (4) никак не связана с обычным для метода ОП выделением резонансной части.

Поскольку сечение чисто ядерного рассеяния линейно по $x = \cos \theta$ в области углов от ~ 5 до 20° [3], то достаточно учесть квадратичный член в разложении $\Delta\sigma$ по $\cos \theta$. Итак,

$$\sigma_{OP} = A - Bx,$$

т. е.

$$f_{OP} = a + bx,$$

причем

$$A = |a|^2, \quad B = -2 \operatorname{Re} a^* b, \quad |b| \ll |a|.$$

Если

$$f_{\Delta} = c_0 + c_1 x + c_2 x^2,$$

то сохранение экспериментально наблюдаемой линейной зависимости в диапазоне $5-20^\circ$ гарантировано лишь при условии, что $f_{\Delta}'' = c_2 x^2$, $|c_2| \ll |a|$, а $f_{\Delta}' = c_0 + c_1 x$ представляет собой часть амплитуды, соответствующей ОП:

$$f_{OP} = f_0 + f_{\Delta}'.$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} \Delta\sigma &= 2 \operatorname{Re}(f^* f_{\Delta}'') + |f_{\Delta}''|^2 = \\ &= 2 \operatorname{Re}(a^* c_2) x^2 + 2 \operatorname{Re}(b^* c_2) x^3 + |c_2|^2 x^4. \end{aligned} \quad (6)$$

Для оценки эффекта существен лишь первый член в (6). Непосредственный расчет показывает, что при 14 Мэв и при рассеянии вперед

$$|c_2| \simeq 0,2 |f_{\Delta}'(x=1)|.$$

Так как

$$|f_{\Delta}'| = \frac{m^3}{8\pi^2} \frac{F(1)}{v t_{\Delta}} = 0,25g \cdot 10^{-14} \text{ см}$$

($g = Gm^3$ — параметр оценки, а $F(1) = 2$), то для того, чтобы $\Delta\sigma$ было равно 3—4 стандартам), т. е. 3—4 бн при 14 Мэв [3], нужно

$$g \sim (3 \div 5) \cdot 10^2, \quad (7)$$

что имеет разумный порядок с точки зрения произведения констант сильных взаимодействий в вершинах диаграммы б рис. 3.

4. Дискуссия. Главным пунктом, нуждающимся в объяснении и обосновании, является гипотеза частичной дополненности треугольной диаграммы (см. формулу (4)), в более общем плане — соответствие между оптически-потенциальным и диаграммным методами.

Обычно используемый в настоящее время ОП для нейтронов имеет форму

$$U(r) = Vf(r) + iWg(r) + V_{so} h(r) \vec{\sigma} \vec{l} \quad (8)$$

и содержит до 10 параметров [16, 12], являющихся в общем случае функциями энергии возбуждения и характеристических чисел ядра. Он удовлетворительно описывает всю совокупность экспериментальных данных по угловым распределениям в области углов $10-170^\circ$ и по полным сечениям [17].

Известно (см., например, [16]), что нижняя граница применимости ОП в целом для ядер приходится \sim на 15 Мэв. Однако, поскольку для тяжелых ядер приближение бесструктурной непрерывной материи наиболее оправдано, то нижнюю границу применимости ОП для них можно опустить до ~ 1 Мэв. В области малых углов рассеяния ($\theta < 10^\circ$) применение ОП для нейтронов с энергией ~ 1 Мэв дополнительно оправ-

дано еще тем, что эффект неупругого (экспериментально невыделяемого) рассеяния проявляется заметно лишь в области дифракционных минимумов [11], первый из которых достигается \sim при 25° .

Тем не менее именно в области малых углов и для случая тяжелых ядер-мишеней проявляется недостаточность оптически-потенциального описания (см. [1—3, 6, 18, 19]). В суммарном виде экспериментальную информацию об аномальном рассеянии нейтронов тяжелыми ядрами на малые углы можно представить в виде таблицы отношений

$$\frac{\text{Сколько раз наблюдался эффект}}{\text{Сколько раз не наблюдался}}$$

(табл. 1) для разных ядер-мишеней (составлена по данным работы [17]; $1/2$ означает неопределенный результат).

Таким образом, статистика экспериментов по нейтрон-ядерному рассеянию указывает на существование эффекта аномальной анизотропии для некоторых тяжелых ядер, и даже самая современная модель ядра — ОП — в общем не может вобрать его в себя.

Таблица 1

Ядра	Наблюдаемость эффекта								
	Cu	In	Sn	W	Pb	Bi	Th	U	Pu
Анализ по всевозможным моделям	0:7	0:1	0:2	0:1	$5\frac{1}{2}:2\frac{1}{2}$	0:3	2:1	$9\frac{1}{2}:4\frac{1}{2}$	1:0
Только по ОП	0:4	0:1	0:1	—	$4\frac{1}{2}:1\frac{1}{2}$	0:1	—	$6\frac{1}{2}:3\frac{1}{2}$	—

Можно указать на следующие причины нестабильности в обнаружении эффекта, благодаря которым становится возможной в отдельных случаях подгонка параметров ОП в области малых углов [11, 17]: 1) малость эффекта в сравнении с (значительной) погрешностью измерений в области малых углов рассеяния, 2) неопределенность оптически-потенциального описания (хотя она и проявляется в области малых углов слабее всего [20]).

Поэтому разумно предположить существование некоторого механизма, дополнительного к общепринятому механизму ОП, позволяющего включить аномальную анизотропию в теорию. Из анализа взаимодействия нуклонов с легкими ядрами известно, что резкая угловая анизотропия является характерным признаком существенности прямых поверхностных процессов. Выбор механизма поверхностного взаимодействия оправдан также особой чувствительностью рассеяния на малые углы к параметрам «хвоста» ядерного потенциала^{*}). В пользу модели прямых процессов для тяжелых ядер говорит также известная недостаточность схемы ОП при описании обменных реакций с участием легких ядер [16].

5. **Заключительные замечания.** 1) Предлагаемая модель связывает эффект аномальной анизотропии с влиянием структуры ядерной поверхности и обеспечивает экспериментально наблюдаемую величину отклонения.

2) Изложенный подход не разграничивает делящиеся и неделяющиеся ядра (что соответствует экспериментальной ситуации: эффект наблюдался не только на U, Th и Pu, но и на Pb).

^{*}) В работе [21] показано, что, например, в случае реакции (n, n) с «хвостом» ядерного потенциала на самом деле длиннее, чем «хвост» потенциала Саксона—Вудса.

Таблица 2

Некоторые характеристики элементов ($A \geq 63$), существенные для
нейтрон-ядерного рассеяния* (по данным [22—24])

Ядро-мишень	$P, \%$	$\epsilon, \text{ Мэв}$	$t_{\Delta}, \text{ Мэв} \cdot \text{а. е. м.}$	$\text{Im } a (0^\circ)$		
				1 Мэв	14 Мэв	
Cu {	63	69,1	10,8	87	3,2	35,5
	65	30,1	9,9	79	3,2	35,5
In {	113	4,3	9,34	76,2	5,2	51,4
	115	95,7	9,03	72,8	5,2	51,4
Sn {	116	14,3	9,39	75,7	5,2	51,4
	117	7,61	6,95	56,1	5,2	51,4
	118	24	9,34	76,2	5,2	51,4
	119	8,6	6,49	52,3	5,2	51,4
	120	32,8	9,1	73,4	5,2	51,4
W {	183	14,4	6,24	50,3	5,55	55,2
	182	26,4	7,99	64,2	5,55	55,2
	184	30,6	7,46	60	5,55	55,2
	186	18,4	7,08	57	5,55	55,2
Pb {	204	1,4	8,38	67,4	5,3	56,4
	208	52,4	7,39	59,4	5,3	56,4
	207	21,2	6,73	54,2	5,3	56,4
	206	25	8,12	65,3	5,3	56,4
Bi	209	100	7,43	59,7	5,3	56,4
Th	232	100	6,34	51,2	5,36	58,8
U {	235	0,72	5,25	42,5	5,36	58,8
	238	99,28	6,04	48,7	5,36	58,8
Pu	242	—	6,2	50,1	5,36	58,8
Cd {	111	12,7	6,97	56,3	5,2	51,4
	113	12,2	6,42	51,8	5,2	51,4
Xe {	129	26,4	6,91	55,7	—	—
	131	21,2	6,6	53,2	—	—
Nd {	143	12,2	6,07	49	5,2	52,7
	145	8,3	5,97	48	5,2	52,7
Sm {	147	15	6,58	52,9	5,55	55,2
	149	13,8	5,86	47,1	5,55	55,2
Gd {	155	15,1	6,41	51,6	—	—
	157	15,7	6,36	51,6	—	—
Dy {	161	18,9	6,46	51,9	—	—
	163	25	6,3	50,7	—	—
Hf {	177	18,5	6,36	51,3	5,55	55,2
	179	17,75	6,11	49,2	5,55	55,2
Pt	195	33,8	6,09	49,1	5,3	56,4

* Элементы до кадмия изучались экспериментально.

3) Критериями отбора ядер, удобных для изучения аномальной анизотропии, служат величина мнимой части амплитуды рассеяния в области малых углов, а также положение особенности при рассеянии на каждом изотопе естественной смеси и его распространенность. Тогда таблица 2: а) позволяет понять, чем выделены по отношению к эффекту тяжелые ядра-мишени (малостью энергии связи, т. е. близостью особенности t_{Δ} к физической области); б) объясняет отрицательный результат экспериментов по обнаружению аномальной анизотропии в рассеянии на ядрах Cu, In, Sn, W и Bi (малая распространенность изотопов, для которых t_{Δ} являются ближайшими, или далекое расположение t_{Δ} для наиболее распространенных изокомпонент); в) позволяет сделать предсказание о возможности наблюдения эффекта на ядрах элементов Cd, Xe, Nd, Sm, Gd, Dy, Hf и Pt (имеющих изотопический состав не «хуже», чем Pb).

4) Из модели следует определенный вывод о росте величины эффекта с энергией (что подтверждается теми экспериментами, в которых эффект наблюдался: десятые доли бн при 0,83—2,8 Мэв [18, 1, 2]), несколько бн при 14 Мэв [3]. Однако возможность наблюдения эффекта связывается с выполнением условия $\Delta\sigma/\delta\sigma > 1$ ($\delta\sigma$ — погрешность эксперимента); поскольку закон возрастания $\delta\sigma$ с энергией неизвестен, то предсказать наиболее удобную для изучения область энергий затруднительно.

Авторы благодарны Л. Г. Морозу за полезные советы.

Литература

1. Александров Ю. А. ЖЭТФ, 33, 294, 1957.
2. Александров Ю. А., Аникин Г. В., Солдатов А. С. ЖЭТФ, 40, 1878, 1961.
3. Дукаревич Ю. В., Дюмин А. Н. ЖЭТФ, 44, 130, 1963.
4. Александров Ю. А., Бондаренко П. И. ЖЭТФ, 31, 726, 1956.
5. Барашенков В. С., Стаханов И. П., Александров Ю. А. ЖЭТФ, 32, 154, 1957.
6. Walt M., Fossan D. V. Phys. Rev., 137B, 629, 1965.
7. Barashenkov V. S., Keizer H. I. Forsch. Phys., 10, 33, 1962.
8. Мороз Л. Г., Третьяков В. Н. ДАН БССР, 8, 575, 1964.
9. Потупа А. С., Третьяков В. Н. О механизмах рассеяния нейтронов тяжелыми ядрами на малые углы. Изд. Ин-та физики АН БССР, 1968.
10. Schwinger I. Phys. Rev., 73, 407, 1948.
11. Адам А., Дик Ф., Еки Л. и др. ЯФ, 8, 439, 1968.
12. Аверьянов И. К., Пурцеладзе З. З. ЯФ, 6, 293, 1967.
13. Остерн Н. Физика быстрых нейтронов, 2. Атомиздат, 1966.
14. Шапиро И. С. Теория прямых ядерных реакций. АИ, 1963.
15. Горлов Г. В., Лебедева Н. С., Морозов В. М. ДАН СССР, 174, 60, 1967.
16. Ходгсон П. Е. Оптическая модель упругого рассеяния. АИ, 1966.
17. Горлов Г. В., Лебедева Н. С., Морозов В. М. ЯФ, 8, (6), 1086, 1968.
18. Elwyn A. et al. Phys. Rev., 142, 758, 1966.
19. Александров Ю. А., Самосват Г. С. Препринт Р-2495. Дубна, 1965.
20. Тищенко Б. И., Инопин Е. В. ЯФ, 7 (5), 1029, 1968.
21. Fox R. Nucl. Phys., 43, 110, 1963.
22. Гордеев И. В., Кордашев Д. А., Малышев А. В. Ядерно-физические константы. АИ, 1963.
23. Джелепов Б. С., Пекер Л. К. Схема распада радиоактивных ядер ($A \geq 100$). Изд. «Наука», 1966.
24. Джелепов Б. С., Пекер Л. К., Сергеев В. О. Схемы распада радиоактивных ядер ($A < 100$). Изд. АН СССР, 1963.

Институт физики
АН БССР

Поступило в редакцию
9.VII 1969

УДК 539.17

Э. А. РУДАК, Я. І. ФІРСАУ, А. М. ХІЛЬМАНОВІЧ

**СПЕКТРЫ γ -ПРАМЕННЯЎ З РЭАКЦЫІ (n, γ)
НА ЦЕПЛАВЫХ НЕЙТРОНАХ НА ЯДРАХ
 Ge^{70} , Ge^{72} і Ge^{73}**

1. Уводзіны. Спектры γ -праменняў з рэакцыі (n, γ) на ізатопах германію раней не вывучаліся. У апошнія гады ў сувязі са з'яўленнем паўправадніковых дэтэктараў праведзены даследаванні рэакцыі $Ge^{70}(n, \gamma) Ge^{71}$ [1] і $Ge^{73}(n, \gamma) Ge^{74}$ [2]. У [3] праведзена даследаванне мяккай часткі спектра γ -праменняў з (n, γ)-рэакцыі на натуральнай сумесі ізатопаў германію. Узорам з'яўляўся сам дэтэктар.

У гэтай рабоце прыводзяцца рэзультаты даследавання спектраў γ -праменняў з рэакцыі (n, γ) на цеплавых нейтронах на ўзорах з раздзеленых ізатопаў Ge^{70} , Ge^{72} і Ge^{73} (табл. 1) з дапамогай магнітнага камптонаўскага спектрометра з вызначэннем 2%. Методыка эксперымента прыведзена ў [4].

2. Эксперыментальныя рэзультаты. Апаратурныя спектры γ -праменняў з рэакцыі (n, γ) на ізатопах Ge^{70} , Ge^{72} і Ge^{73} прыведзены на рыс. 1.

Табліца 1

Асноўныя характарыстыкі ўзораў

Узор	Хімічнае злучэнне	Вага ўзору, %	Колькасць ізатопаў, %					Уклад у сячэнне рэакцыі, %				
			Ge^{70}	Ge^{72}	Ge^{73}	Ge^{74}	Ge^{76}	Ge^{70}	Ge^{72}	Ge^{73}	Ge^{74}	Ge^{76}
Ge^{70}	GeO_2	27,2	90,0	3,9	1,2	4,2	0,7	92,8	1,1	5,2	0,8	0,1
Ge^{72}	GeO_2	97,1	2,3	88,7	2,6	4,8	1,6	5,8	64,3	27,2	2,2	0,5
Ge^{73}	GeO_2	6,5	3,9	8,1	71,0	14,3	2,7	1,3	0,8	97,0	0,8	0,1

Паслядоўная апрацоўка рэзультатаў ад ізатопа з найбольшым укладам у сячэнне (n, γ) да ізатопа з меншым укладам дазволіла ідэнтыфікаваць большасць выдзеленых γ -ліній.

Рэзультаты даследавання прыведзены ў табл. 2. Прыводзяцца таксама велічыні сярэдняй колькасці квантаў на адзін захоплены нейтрон.

3. Абмеркаванне эксперыментальных рэзультатаў. Ge^{71} . Узроўні ядра Ge^{71} вывучаліся пры дапамозе (d, p)-рэакцыі ў работах [5, 6]. У гэтай рабоце ўдалося выявіць пераходы Ge^{71} з энергіяй 7,42; 6,92; 6,70; 6,55; 6,30; 5,81; 5,46 Мэв з зыходнага стану ў рэакцыі (n, γ) на ўзроўні з энергіяй 0; 0,48; 0,70; 0,89; 1,09; 1,60 і 1,95 Мэв. Усе яны з'яўляюцца p -ўзроўнямі, за выключэннем 1,60 і 1,95 Мэв, квантавыя характарыстыкі якіх дакладна не ўстаноўлены. Узроўні Ge^{71} , узбуджаемыя пры радыеактыўным распадзе, ляжаць ніжэй 0,52 Мэв [7]. Таму схема пераходаў ядра Ge^{71} з зыходнага стану складзена толькі па рэзультатах гэтай работы і работы [6] (рыс. 2, а). γ -Лінія № 2 з энергіяй 7,25 Мэв аднесена

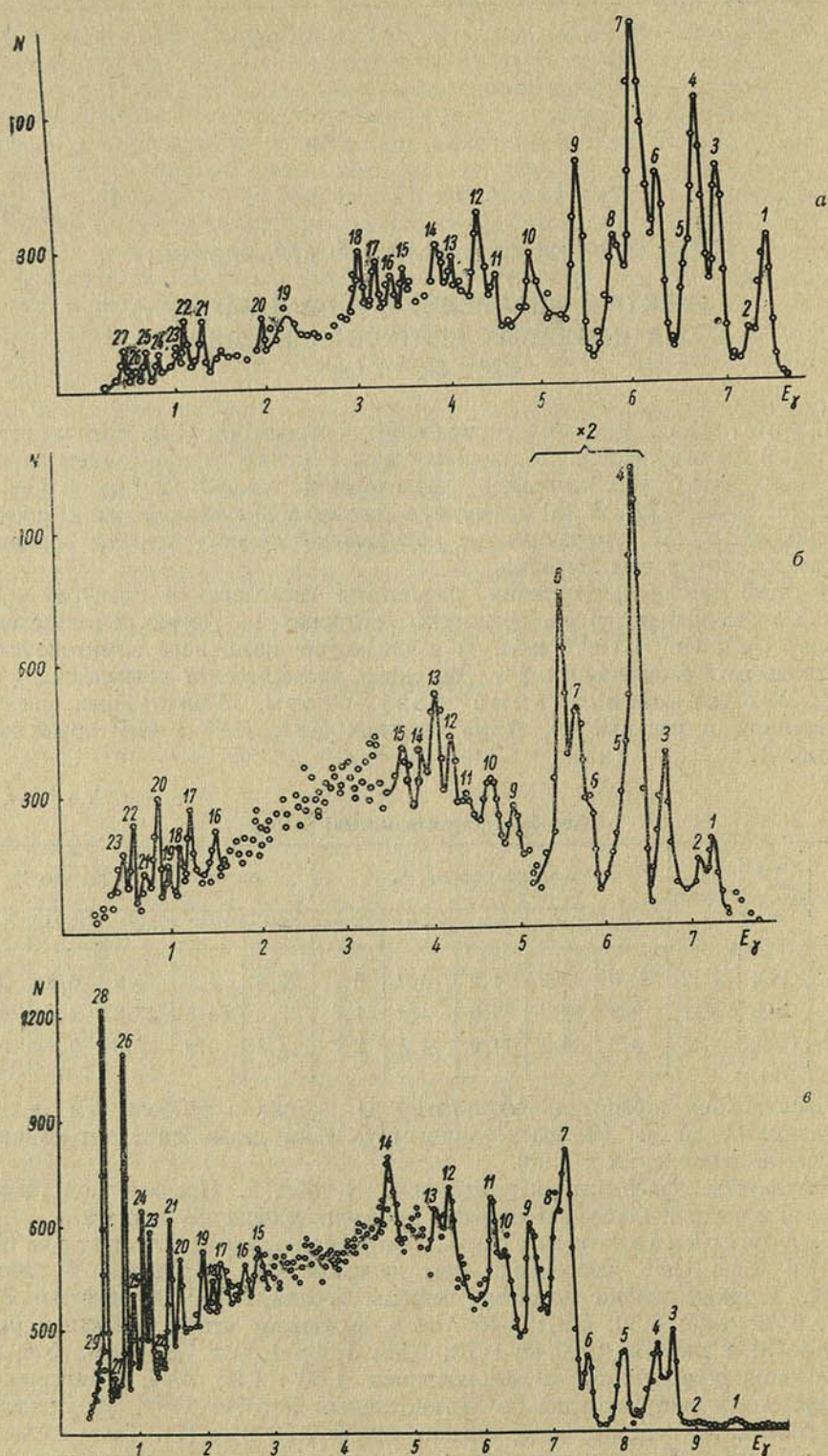


Рис. 1. Спектры γ -прямлення з реакції $\text{Ge}^{70}(n, \gamma)\text{Ge}^{71}$ —а; $\text{Ge}^{72}(n, \gamma)\text{Ge}^{73}$ —б і $\text{Ge}^{73}(n, \gamma)\text{Ge}^{74}$ —в

Табліца 2

Энергіі, інтэнсіўнасці і прыналежнасць выпраменьваючага ізатопу даследаваных γ -праменьняў

N γ -лініі	Выпрамень- ваючы ізатоп германію	$E_\gamma, \text{Мэв}$	$I_\gamma, \%$	N γ -лініі	Выпрамень- ваючы ізатоп германію	$E_\gamma, \text{Мэв}$	$I_\gamma, \%$
$\text{Ge}^{70} (n, \gamma) \text{Ge}^{71}$							
1	71	7,42	3,3	15	71	3,52	0,9
2	74	7,25	0,4	16	71	3,40	0,6
3	71	6,92	4,4	17	71	3,24	1,0
4	71	6,70	6,3	18*	71	3,05	1,8
5	71	6,55	1,7	19*	71	2,24	2,3
6	71	6,30	4,8	20	71	2,00	1,8
7*	71	6,06	11,5	21	71	1,31	5,2
8	71	5,81	2,9	22*	71	1,12	8,3
9	71	5,46	4,0	23	71	1,04	5,1
10*	71	4,90	2,6	24*	71, 74	0,84	1,7; 5,1
11	71	4,52	0,9	25	71	0,69	9,6
12	71	4,34	2,4	26	74	0,60	3,8
13	71	4,03	0,5	27	анніг.	0,51	—
14	71	3,88	1,1				
$\text{Ge}^{72} (n, \gamma) \text{Ge}^{73}$							
1	74	7,25	1,1	13*	73	4,04	2,4
2	74	7,09	0,7	14	73	3,86	0,7
3	73, 74	6,72	1,3; 0,5	15*	73	3,66	1,2
4	73	6,40	32,0	16	74	1,48	2,0
5	73	6,25	2,4	17*	73, 74	1,20	3,2; 2,3
6	73	5,88	2,9	18	74	1,10	3,2
7	73	5,69	6,1	19	73, 74	0,96	0,2; 1,9
8	73	5,52	8,8	20*	73, 74	0,86	6,5; 9,0
9	73	4,92	0,6	21*	73, 74	0,73	6,9; 0,8
10*	73, 74	4,66	0,8; 0,4	22	74	0,60	18,8
11	73	4,37	0,4	23	анніг.	0,51	—
12	73	4,20	1,1				
$\text{Ge}^{73} (n, \gamma) \text{Ge}^{74}$							
1	74	9,60	0,1	16	74	2,58	1,0
2	74	9,01	0,1	17*	74	2,23	2,4
3	74	8,73	1,6	18	74	2,08	1,1
4	74	8,50	1,2	19	74	1,95	1,9
5	74	8,03	1,4	20*	74	1,63	4,0
6	74	7,50	1,2	21	74	1,48	7,6
7	74	7,26	4,2	22	74	1,33	1,2
8	74	7,09	2,5	23	74	1,20	8,3
9*	74	6,71	1,9	24	74	1,10	12,0
10*	74	6,37	1,8	25	74	0,96	6,9
11*	74	6,18	1,6	26	74	0,87	33,0
12	74	5,55	1,4	27	74	0,70	2,8
13	74	5,36	1,2	28	74	0,60	69,0
14	74	4,72	1,5	29	анніг.	0,51	—
15	74	2,79	1,5				

Заўвагі. 1. Зорачкай абазначана група ліній. 2. Памылкі ў вызначэннях энергіі ~ 20 кэВ і інтэнсіўнасці $\sim 20\%$.

7. Весті АН БССР № 1 (фіз.-мат.)

да выпраменьваючага ізатопа Ge^{74} , што якраз адпавядае ўкладу прымесі Ge^{73} ва ўзор Ge^{70} . У адваротным выпадку γ -лінія 7,25 Мэв адпавядала б пераходу на ўзровень 0,175 Мэв ядра Ge^{71} з квантавай характарыстыкай $5/2^-$. Тып пераходу быў бы $M2 + E3$, што малаверагодна. Сярэдняя колькасць γ -квантаў на адзін захоплены нейтрон Ge^{70} роўна 2,3.

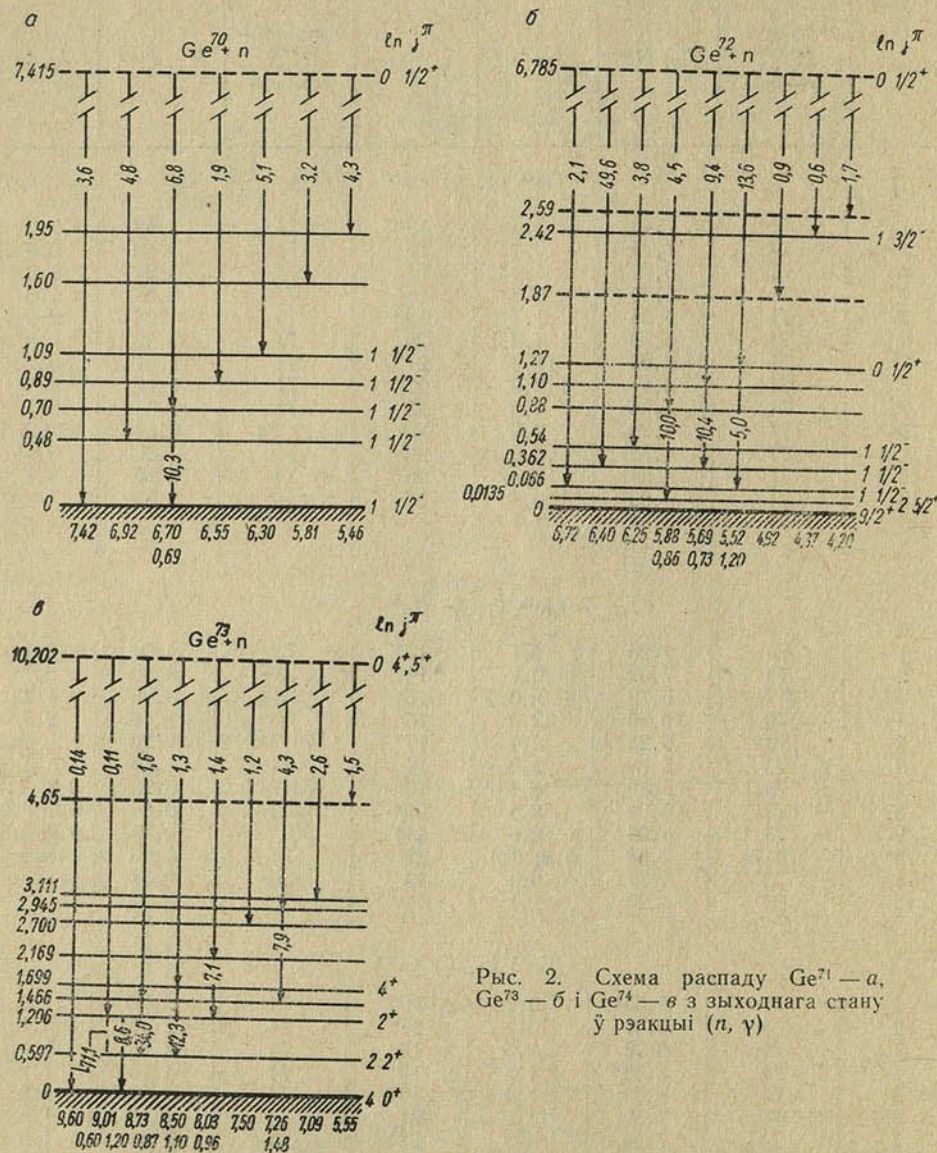


Рис. 2. Схема распада Ge^{71} — а, Ge^{73} — б і Ge^{74} — в з зыходнага стану ў рэакцыі (n, γ)

Ge^{73} . Рэакцыя $\text{Ge}^{72} (n, \gamma) \text{Ge}^{73}$ раней не вывучалася. Даньня па (d, p)-рэакцыі на Ge^{72} прыводзяцца ў работах [5, 7]. У гэтай рабоце былі выяўлены пераходы Ge^{73} з энергіяй 6,72; 6,40; 6,25; 5,88; 5,69; 5,52; 4,92; 4,37 і 4,20 Мэв з зыходнага стану ў рэакцыі (n, γ) на ўзроўні з энергіяй 0,066; 0,362; 0,54; 0,88; 1,10; 1,27; 1,87; 2,42 і 2,59 Мэв. Узроўні 1,87 і 2,59 Мэв уведзены намi. На аснове нашых даньняў, а таксама даньняў работ [5, 7] складзена схема пераходаў ядра Ge^{73} з зыходнага стану (рис. 2, б). Вялікі ўклад у сячэнне прымесі Ge^{73} ва ўзоры Ge^{72} не дазволіў надзейна ўста-

навіць γ -пераходы малой энергіі ядра Ge^{73} . Пры распадзе зыходнага стану ядра Ge^{73} каскады γ -квантаў у асноўным праходзяць праз узровень 0,0135 Mэв з характарыстыкай $5/2^+$. Паколькі ніжняя мяжа даследуемых γ -праменняў роўна 0,3 Mэв , то да атрыманай з спектра велічыні ліку квантаў на адзін захоплены нейтрон, роўнай 3,0, трэба дадаць яшчэ 1,0. Такім чынам, сярэдняя колькасць γ -квантаў на адзін захоплены нейтрон павінна быць роўна $\sim 4,0$.

Ge^{74} . Узроўні ядра Ge^{74} вивучаліся ў работах [7—9]. Рэакцыя (d, p) даследавалася ў [10]. Рэакцыя $\text{Ge}^{73}(n, \gamma)\text{Ge}^{74}$ вивучалася ў рабоце [2], у якой устаноўлены энергіі ўзроўняў і γ -пераходы паміж імі. Намі выяўлены пераходы з энергіяй 9,60; 9,01; 8,73; 8,50; 8,03; 7,50; 7,26; 7,09 і 5,55 Mэв на ўзроўні 0,597; 1,206; 1,466; 1,699; 2,169; 2,700; 2,945; 3,111 і 4,65 Mэв . Узровень 4,65 Mэв уведзен намі.

Па рэзультатах гэтай работы, а таксама работ [2, 12] складзена схема γ -пераходаў ядра Ge^{74} (рыс. 2, в). Сярэдняя колькасць γ -квантаў на адзін захоплены нейтрон ядром Ge^{73} роўна 4,6.

Вывады

Пры пераходзе ад ізатопаў цынку да ізатопаў германію і селену адбываецца запаўненне $2p_{1/2}$ -нейтроннай падабалонкі і пачынаецца запаўненне $1g_{9/2}$ — падабалонкі. Гэта накладвае асаблівасць на сістэму ўзроўняў ядзер у гэтай вобласці масавых лікаў і на іх схему распаду. Побач з узроўнямі, спіны якіх маюць малую велічыню, з'яўляюцца ўзроўні з вялікімі велічынямі спінаў. Так, напрыклад, асноўны стан Ge^{73} мае характарыстыку $9/2^+$, а зыходны стан пры захопе цеплавога нейтрона $1/2^+$. Аналагічна пры захопе цеплавога нейтрона ядром Ge^{73} утвараецца зыходны стан са спінам і цотнасцю 4^+ , 5^+ . Вялікая розніца спінаў асноўнага і зыходнага стану прыводзіць да павелічэння сярэдняй колькасці γ -квантаў на адзін захоплены нейтрон (4,0 у ядры Ge^{73} і 4,6 у ядры Ge^{74}).

Неабходна адзначыць вялікае падабенства спектраў Ge^{71} і Se^{77} [11]. Гэтыя ядры адрозніваюцца на 2 пратоны і 4 нейтроны. Энергія сувязі нейтрона ў іх аднолькавая — 7,415 Mэв . Роўныя, прыблізна, і сярэднія колькасці γ -квантаў на адзін захоплены нейтрон — 2,3 і 2,2 для Ge^{71} і Se^{77} адпаведна.

У раёне масавых лікаў $A \sim 70$ адбываецца падзенне нейтроннай сілавой функцыі. Хаця γ -пераходы ядзер і ідуць у асноўным пасля захопу цеплавога нейтрона на p -узроўні, доля прамого захопу нейтронаў значна змяншаецца ў параўнанні з вобласцю ядзер $A \sim 50$. Аб гэтым сведчыць змяншэнне інтэнсіўнасцей γ -ліній высокай энергіі ў ядрах Ge^{71} , Ge^{73} , а таксама Se^{75} і Se^{77} [11], даследаваных намі раней. Параўнанне імавернасцей γ -пераходаў з зыходнага стану ў рэакцыі (n, γ) з прыведзенымі нейтроннымі шырынямі адпаведных узроўняў ядзер Ge^{71} , Ge^{73} і Se^{77} паказвае адсутнасць карэляцыі. Як відаць, у гэтай вобласці ядзер пачынае адыгрываць ролю захоп нейтронаў праз уваходныя станы.

Літаратура

1. Барчук И. Ф., Базавов Д. А., Бельх Г. В., Гольшкин В. И., Мурзин А. В., Огородник А. Ф. Прогр. и тез. докл. XIX ежегодн. совещ. по ядерной спектроскопии и структуре атомного ядра. Изд. «Наука», 1969.
2. Weitzkamp C., Michaelis W., Schmidt H., Fanger U. Z. Phys., 192, 423, 1966.
3. Dorgioman D. I., Popa M. S., Cristu M. I. Rev. Roumn. Phys., 12, 561, 1967.
4. Рудак Э. А., Фирсов Е. И. А. Э., 18, 285, 1965.

5. Литвин В. Ф., Немилов Ю. А., Гриднев К. А., Жеребцова К. И., Краснов Л. В., Комаров В. А., Лакомкин Ю. А., Орлова Т. В., Бочин В. П., Романов В. С., Репин С. А., ЯФ, **6**, 4, 688, 1967.
6. Goldman L. H. Phys. Rev., **165**, 1203, 1968.
7. Дзелепов Б. С., Пекер Л. К. Схемы распада радиоактивных ядер $A < 100$. Изд. «Наука», М.—Л., 1966.
8. Darsey W. Comp. Rend. Congr. Int. de Physique nucl., **2**, 456, Paris, 1964.
9. Brown G., Haigh I. G. B., Hundson F. R., Macgregor A. E. Nucl. Phys., **A 101**, № 1, 1967.
10. Заика Н. И., Немец О. Ф., Ясногородский А. М. Изв. АН СССР, сер. физ., **38**, № 7, 1964.
11. Рудак Э. А., Фирсов Е. И., Хильманович А. М. Прогр. и тез. докл. XVIII ежегодн. совещ. по ядерной спектроскопии и структуре атомного ядра. Изд. «Наука», 1968.

*Институт физики
АН БССР*

*Поступило в редакцию
9.VII 1969*

УДК 539.101

Л. А. БАРЫСАГЛЕБСКІ, В. Ф. ТРУСАУ, Г. С. ШУЛЯКОУСКИ

**КАЭФІЦЫЕНТЫ УНУТРАНАЙ КАНВЕРСІІ
НА M_{I-III} ПАДАБАЛОНКАХ АТАМА ($Z=94$)
З УЛІКАМ ЭКРАНАВАННЯ ПА ГАШПАРУ
З ПАЎЭМПІРЫЧНЫМІ ПАПРАЎКАМІ**

Унутраная канверсія на M -абалонцы атама адносіцца да тых працэсаў, у якіх эфект экраніроўкі ядра атамнымі электронамі адыгрывае істотную ролю. Каэфіцыенты ўнутранай канверсіі (КУК) на M -абалонцы, вылічаныя з улікам экранавання, аказаліся меншыя за КУК, вылічаныя пры дапушчэнні неэкранаванага ядра, на 50—200% і знаходзяцца ў добрай адпаведнасці з эксперыментам. У работах [1, 2] для разлікаў КУК на M -абалонцы ($Z=65$) быў паспяхова выкарыстаны метадаўліку экраніроўкі па Гашпару [3] з паўэмпірычнымі папраўкамі. Паколькі ён там падрабязна разгледжан, на апісанні яго мы не будзем спыняцца. Натуральным было выкарыстаць гэты метадаўліку экраніроўкі на M -абалонцы для цяжкіх элементаў, што і зроблена ў гэтай рабоце.

Разлікі КУК намі праводзіліся некалькі інакш, чым у работах [1, 2]. Тая акалічнасць, што ўклад аднаго M -электрона ў агульны эфектыўны патэнцыял поля ядра і электронаў зніжаецца з узростаннем Z , дазваляе некалькі спрасціць вылічэнні. А іменна, калі ўзяць патэнцыял Гашпара ў мадыфікацыі для іона

$$V(r) = \frac{-Z}{r} + \frac{Z-1}{r} \left\{ 1 - \frac{e^{-\frac{\lambda r}{\mu\omega}}}{1 + \frac{A'r}{\mu\omega}} \right\}, \quad (1)$$

дзе Z — зарад ядра; $\mu = 0,8853Z^{-1/3}$; $A' = 1,05$; $\lambda = 0,1837$; ω — паўэмпірычны лінейны параметр дэфармацыі, то адпадае неабходнасць уліку патэнцыялу поля самадзейнасці M -электрона, якая мела месца ў работах [1, 2].

Пры разліках сапраўдных КУК прымаўся пад увагу толькі статычны эфект канечных памераў ядра на аснове эквівалентнага аднароднага размеркавання зарада па аб'ёму ядра сферы радыуса

$$R = \{1,123A^{1/3} + 2,352A^{-1/3} - 2,070A^{-1}\} \cdot 10^{-13} \text{ см}, \quad (2)$$

паколькі пры такім радыусе ўлічваецца ў некаторай ступені неаднароднасць размеркавання зараду каля паверхні ядра [4].

Разлік электрычных ($\alpha^{(L)}$) і магнітных ($\beta^{(L)}$) КУК праводзіўся па формулах

$$\alpha_{\kappa_0}^{(L)} = \frac{2\pi\alpha k}{L(L+1)(2L+1)} \sum_{\kappa} B_{\kappa}^2 |R_{\kappa}^{(L)}(e)|^2, \quad (3)$$

$$\beta_{\kappa_0}^{(L)} = \frac{2\pi\alpha k}{L(L+1)(2L+1)} \sum_{\kappa} \bar{B}_{\kappa}^2 (\kappa + \kappa_0)^2 |R_{\kappa}^{(L)}(m)|^2. \quad (4)$$

Тут κ_0, κ — рэлятывісцкія квантавыя лікі, якія вызначаюць пачатковыя звязаны і канечныя свабодныя станы M -электрона; α — пастаянная тонкай структуры; L — мультыпольнасць; k — энергія пераходу; $R_{\kappa}^{(L)}(e)$, $R_{\kappa}^{(L)}(m)$ — асноўныя радыяльныя інтэгралы;

$$B_{\kappa}^2 = \frac{1}{2} (2j_0 + 1) (2l_0 + 1) (2j + 1) (2l + 1) [C_{l_0 0 l_0}^{L 0}]^2 W^2 \left(j l j_0 l_0; \frac{1}{2} L \right), \quad (5)$$

$$\bar{B}_{\kappa}^2 = \frac{1}{2} (2j_0 + 1) (2l_0 + 1) (2j + 1) (2\bar{l} + 1) [C_{l_0 0 l_0}^{L 0}]^2 W^2 \left(j \bar{l} j_0 l_0; \frac{1}{2} L \right), \quad (6)$$

дзе l_0, l і j_0, j — пачатковыя і канечныя арбітальныя і поўныя моманты, колькасці руху M -электрона; $C_{l_0 0 l_0}^{L 0}$ і $W \left(j l j_0 l_0; \frac{1}{2} L \right)$ — каэфіцыенты Клеб-

ша — Гордаца і Рака; $\bar{l} = l - \frac{\kappa}{|\kappa|}$.

Інтэгралы $R_{\kappa}^{(L)}(m)$ і $R_{\kappa}^{(L)}(e)$ разбіваюцца на больш простыя інтэгралы ($R_{1 \div 6}^{(L)} \kappa$) згодна з формуламі

$$R_{\kappa}^{(L)}(m) = (R_1)_{\kappa} + (R_2)_{\kappa}, \quad (7)$$

$$R_{\kappa}^{(L)}(e) = (\kappa_0 - \kappa) (R_5 + R_6)_{\kappa} + L (R_6 - R_5 + R_3 + R_4)_{\kappa}. \quad (8)$$

Апошнія ж роўныя

$$(R_1)_{\kappa} = \int_0^{\infty} h_L^{(1)}(kr) f_{\kappa} g_{\kappa_0} r^2 dr, \quad (R_2)_{\kappa} = \int_0^{\infty} h_L^{(1)}(kr) g_{\kappa} f_{\kappa_0} r^2 dr, \quad (9)$$

$$(R_3)_{\kappa} = \int_0^{\infty} h_L^{(1)}(kr) r^2 f_{\kappa} f_{\kappa_0} dr, \quad (R_4)_{\kappa} = \int_0^{\infty} h_L^{(1)}(kr) g_{\kappa} g_{\kappa_0} r^2 dr, \quad (10)$$

$$(R_5)_{\kappa} = \int_0^{\infty} h_{L-1}^{(1)}(kr) f_{\kappa} g_{\kappa_0} r^2 dr, \quad (R_6)_{\kappa} = \int_0^{\infty} h_{L-1}^{(1)}(kr) g_{\kappa} f_{\kappa_0} r^2 dr, \quad (11)$$

дзе $f_{\kappa}, f_{\kappa_0}, g_{\kappa}, g_{\kappa_0}$ — радыяльныя функцыі рэлятывісцкага электрона; $h_L^{(1)}(kr)$ — сферычная функцыя Ганкеля 1-га роду.

Унутрыядзерныя часткі інтэгралаў $R_{\kappa}^{(L)}(e)$ і $R_{\kappa}^{(L)}(m)$ (у межах ад 0 да R) вылічваліся з дапамогай функцый $f_{\kappa_0}, g_{\kappa_0}, f_{\kappa}$ і g_{κ} , узятых у выглядзе ступенных радоў

$$f_{\kappa_0} = a_{\kappa_0} f'_{\kappa_0} \equiv a_{\kappa_0} \sum_{\nu=0}^{\infty} C_{\nu} r^{|\kappa_0| - 1 + \nu}, \quad g_{\kappa_0} = a_{\kappa_0} g'_{\kappa_0} \equiv a_{\kappa_0} \sum_{\nu=0}^{\infty} d_{\nu} r^{|\kappa_0| - 1 + \nu}, \quad (12)$$

якія задавальняюць сістэме дыферэнцыяльных ураўненняў Дзірака пры патэнцыяле

$$V(r) = -\frac{\alpha Z}{r} \left\{ \frac{3}{2} - \frac{1}{2} \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right\} \quad (13)$$

па аналітычных формулах, прыведзеных у рабоце [5]. Пазаядзерныя часткі $R_{\kappa}^{(L)}(e)$ і $R_{\kappa}^{(L)}(m)$ вылічаны з дапамогай радыяльных функцый, атрыманых шляхам лікавага інтэгравання сістэмы дыферэнцыяльных ураўненняў Дзірака пры патэнцыяле (1) з паўэмпірычнымі напраўкамі (гл. [2]).

Результаты разлікаў магнітных і электрычных КУК на M_{I-III} -падаблонках, выкананых для пяці першых мультыпольнасцей і васьмі энергій

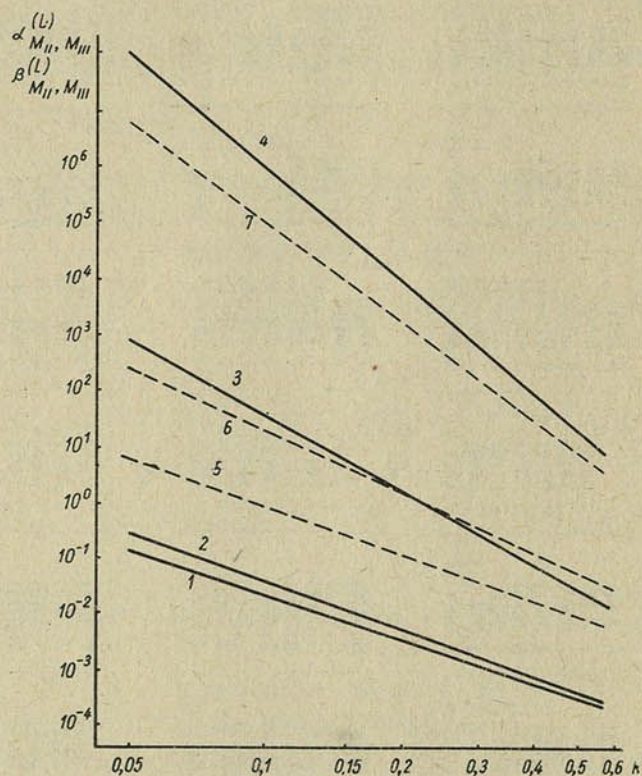
КУК на M -абалонцы ($Z = 94$) *

κ	$\alpha^{(1)}$	$\alpha^{(2)}$	$\alpha^{(3)}$	$\alpha^{(4)}$	$\alpha^{(5)}$	$\beta^{(1)}$	$\beta^{(2)}$	$\beta^{(3)}$	$\beta^{(4)}$	$\beta^{(5)}$
M_I										
0,05	1,69(-1)	4,12(1)	2,23(3)	5,80(4)	2,95(4)	5,89(1)	6,50(3)	2,78(5)	8,25(4)	1,26(6)
0,1	4,45(-2)	2,00(0)	8,41(1)	1,76(3)	2,74(3)	7,59(0)	2,70(2)	5,15(3)	6,46(3)	7,19(4)
0,15	1,92(-2)	3,66(-1)	1,20(1)	2,02(2)	4,35(1)	2,30(0)	4,54(1)	5,67(2)	1,13(3)	1,01(4)
0,2	1,04(-2)	1,21(-1)	3,05(0)	4,35(1)	4,95(2)	9,97(-1)	1,33(1)	1,26(2)	1,08(2)	6,96(2)
0,3	4,33(-3)	3,08(-2)	4,90(-1)	5,19(0)	4,50(1)	3,10(-1)	2,56(0)	1,67(1)	2,20(1)	11,5(2)
0,4	2,35(-3)	1,34(-2)	1,47(-1)	1,23(0)	8,67(0)	1,37(-1)	8,40(-1)	4,29(0)	2,20(1)	2,98(1)
0,5	1,47(-3)	7,46(-3)	6,25(-2)	4,28(-1)	2,54(0)	7,31(-2)	3,65(-1)	1,57(0)	6,81(0)	1,04(1)
0,6	1,01(-3)	4,79(-3)	3,26(-2)	1,90(-1)	9,76(-1)	4,40(-2)	1,89(-1)	7,09(-1)	2,69(0)	
M_{II}										
0,05	2,30(-1)	1,24(3)	1,53(5)	6,91(6)	1,43(6)	7,64(0)	3,67(2)	1,12(4)	6,98(3)	1,11(5)
0,1	4,25(-2)	4,51(1)	2,59(3)	6,99(4)	7,84(4)	1,01(0)	2,28(1)	4,21(8)	8,17(2)	9,87(3)
0,15	1,47(-2)	6,80(0)	2,59(2)	5,08(3)	1,04(4)	3,12(-1)	4,82(0)	6,52(1)	1,82(2)	1,79(3)
0,2	6,73(-3)	1,86(0)	5,27(1)	8,30(2)	6,38(2)	1,37(-1)	1,63(0)	1,78(1)	2,29(1)	1,67(2)
0,3	2,21(-3)	3,03(-1)	6,00(0)	6,87(1)	9,40(1)	4,40(-2)	3,74(-1)	3,00(0)	5,45(0)	3,25(1)
0,4	1,01(-3)	8,80(-2)	1,35(0)	1,24(1)	9,40(1)	1,97(-2)	1,35(-1)	8,80(-1)	1,84(0)	9,45(0)
0,5	5,50(-4)	3,46(-2)	4,42(-1)	3,44(0)	2,22(1)	1,06(-2)	6,23(-2)	3,47(-1)	7,73(-1)	
0,6	3,36(-4)	16,64(-2)	1,81(-1)	1,24(0)	7,03(0)	6,46(-3)	3,34(-2)	1,65(-1)		
M_{III}										
0,05	3,21(-1)	1,24(3)	1,83(3)	5,28(6)	7,91(5)	3,54(-1)	1,23(2)	1,77(6)	8,15(5)	2,44(7)
0,1	4,73(-2)	3,88(1)	1,58(2)	4,39(4)	3,75(4)	4,37(-2)	1,63(1)	1,79(4)	3,90(4)	8,22(5)
0,15	1,44(-2)	5,16(0)	2,83(1)	2,74(3)	4,35(3)	1,29(-2)	3,93(0)	1,32(3)	4,79(3)	7,91(4)
0,2	6,05(-3)	1,25(0)	2,60(0)	3,90(2)	2,14(2)	5,48(-3)	5,35(-1)	2,15(2)	2,74(2)	3,24(3)
0,3	1,74(-3)	1,72(-1)	2,88(-1)	2,57(1)	2,61(1)	1,65(-3)	1,31(-1)	1,77(1)	3,85(1)	3,64(2)
0,4	7,30(-4)	4,29(-2)	4,88(-1)	3,89(0)	5,29(0)	7,09(-4)	4,40(-2)	3,17(0)	8,76(0)	7,02(1)
0,5	3,71(-4)	1,48(-2)	1,37(-1)	9,08(-1)	5,29(0)	3,70(-4)	1,81(-2)	8,58(-1)	2,69(0)	
0,6	2,15(-4)	6,29(-3)	4,91(-3)	2,86(-1)	1,48(0)	2,17(-4)		3,01(-1)		

* Лічба ў дужках азначае ступень дэясціі, на якую трэба памножыць лік перад дужкай.

пераходу ($k = 0,05; 0,1; 0,15; 0,20; 0,30; 0,40; 0,50, 0,60$), прыведзены ў табл. 1.

Як відаць з табліцы, для дадзенай мультыпольнасці КУК растуць са змяншэннем энергіі. $\alpha^{(L)}$ і $\beta^{(L)}$ адваротна прапарцыянальны k^n , дзе n —дадатны лік. Павольней за ўсё ўзрастаюць КУК са змяншэннем k пры $E1$ і $M1$ -пераходах, а хутчэй за ўсё—пры $M5$ - і $E5$ -пераходах. Для пэўнай энергіі пераходу КУК растуць з узростаннем мультыпольнасці. З павелічэннем k розніца паміж КУК розных мультыпольнасцей змяншаецца. У якасці прыкладу на рыс. 1 прыведзены графікі $\alpha_{M_{II}}^{(1)}$, $\alpha_{M_{III}}^{(5)}$ і $\beta_{M_{II}}^{(1)}$, $\beta_{M_{II}}^{(5)}$ як функцый ад k у лагарыфмічным маштабе.



Рыс. 1. Залежнасць КУК ад энергіі пераходу:

$$1-\alpha_{M_{II}}^{(1)}; 2-\alpha_{M_{III}}^{(1)}; 3-\alpha_{M_{II}}^{(2)}; 4-\alpha_{M_{II}}^{(5)};$$

$$5-\beta_{M_{II}}^{(1)}; 6-\beta_{M_{II}}^{(2)}; 7-\beta_{M_{II}}^{(5)}$$

Параўноўваючы магнітныя і электрычныя КУК табл. 1, можна заўважыць наступныя заканамернасці. Для падабалонкі M_I мае месца $\alpha_{M_I}^{(L+2)} > \beta_{M_I}^{(L)} > \alpha_{M_I}^{(L+1)}$. Для падабалонкі M_{II} толькі $\beta_{M_{II}}^{(1)} > \alpha_{M_{II}}^{(1)}$ для ўсіх энергій пераходу. Для $L=2$ гэта няроўнасць мае месца толькі пры малых энергіях пераходу (гл. рыс. 1, графікі 3 і 6), а для $L>2$ заўсёды $\alpha_{M_{II}}^{(L)}(k) > \beta_{M_{II}}^{(L)}(k)$. Што ж датычыць M_{III} -падабалонкі, то тут $\alpha_{M_{III}}^{(L)}(k) > \beta_{M_{III}}^{(L)}(k)$ пры $L>1$. Пры $L=1$ магнітныя і электрычныя КУК на M_{III} -падабалонцы блізкія адзін да аднаго (гл. табл. 1).

Некаторыя характэрныя асаблівасці можна адзначыць і ў адносных КУК $\frac{M_I}{M_{II}}$ і $\frac{M_{II}}{M_{III}}$. Суадносіны $\frac{M_{II}}{M_{III}}$ заўсёды растуць з узростаннем k , а суадносіны $\frac{M_I}{M_{II}}$ растуць для электрычных і зніжаюцца для магнітных пераходаў. Суадносіны $\frac{M_I}{M_{II}}$ заўсёды змяншаюцца з павелічэннем L , затое $\frac{M_{II}}{M_{III}}$ змяншаюцца разам з L толькі для магнітных пераходаў, а для элект-

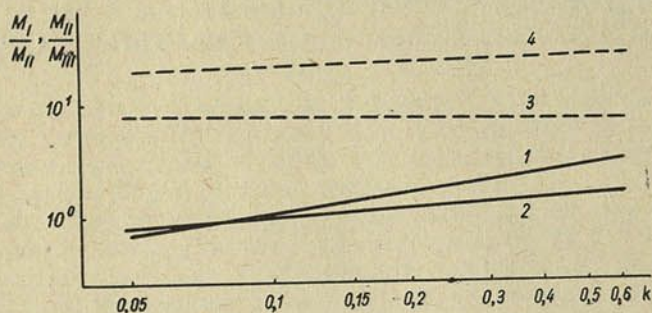


Рис. 2. Залежнасць адносных КУК ад энергіі пераходу:

1— $(M_I/M_{II})_{E1}$; 2— $(M_{II}/M_{III})_{E1}$; 3— $(M_I/M_{II})_{M1}$;
4— $(M_{II}/M_{III})_{M1}$

рычных, хаця і нязначна, але ўсё ж павялічваюцца. Даволі слаба залежаць ад энергіі пераходу адносныя КУК з $L = 1$ (гл. рис. 2).

Параўноўваючы КУК табл. 1 з адпаведнымі значэннямі КУК табліц Роуза [6], можна ўстанавіць $Z_{эф}$ і адпаведныя эфектыўныя параметры $\sigma_{эф} = Z - Z_{эф}$. У выпадку M_{I-II} -падабалонак велічыня гэтага параметра абумоўлена двума эфектамі: эфектам канечных памераў ядра і эфектам экраніроўкі. Што ж датычыцца M_{III} -падабалонкі, то $(\sigma_{эф})_{M_{III}}$ слаба залежыць

Табліца 2

Лікавыя значэнні эфектыўнага параметра $(\sigma_{эф})_{M_{III}}$

k	$E1$	$E3$	$M1$	$M2$	$M3$
0,05	6,8	—	8,0	—	5,4
0,10	6,3	7,7	7,9	5,8	5,3
0,15	6,4	7,5	7,9	5,9	5,3
0,20	6,4	7,4	7,9	6,0	5,3
0,40	6,5	7,2	7,9	5,9	5,4
0,60	6,6	7,0	8,0	6,1	5,5

ад эфекту канечных памераў ядра (згодна [7], улік эфекту канечных памераў ядра можа змяніць КУК толькі на 1%) і амаль поўнасю абумоўлен эфектам экраніроўкі. У якасці прыкладу ў табл. 2 прыведзена $(\sigma_{эф})_{M_{III}}$ у залежнасці ад k і L .

Як відаць, $\sigma_{эф}$ амаль не залежыць ад k (калі мы ўлічым хібнасць разлікаў КУК табл. 1), але прыкметна залежыць ад L . Для электрычных пераходаў $\sigma_{эф}$ узрастае, а для магнітных — зніжаецца з узростаннем L .

Літаратура

1. Андерсон Э. М., Андерсон Э. К., Трусков В. Ф. ЯФ, 5, 741, 1967.
2. Трусков В. Ф., Борисоглебский Л. А. Изв. вузов, Физика, в. 6, 1968.
3. Gaspar R. Acta Phys. Acad. Sci. Hung., 2, 151, 1952.
4. Элтон Л. Размеры ядер. ИЛ, 1962.
5. Борисоглебский Л. А., Трусков В. Ф. Весті АН БССР, сер. фіз.-мат. навук, № 3, 1968.
6. Rose M. E. Intern. Conversion Coefficients. N.-H., Amsterdam, 1958.
7. O'Connell R. F., Carroll C. O. Phys. Rev., 138, В 1041, 1965.

*Белорусский государственный университет
им. В. И. Ленина
ВЦ Латвийского государственного университета
им. П. Стучки*

*Поступило в редакцию
26.VI 1969*

Э. Д. ОКУНЬ

АБ ЗАЛЕЖНАСЦІ КАЭФІЦЫЕНТА АНАМАЛЬНАГА ПАГЛЫНАННЯ РЭНТГЕНАЎСКІХ ПРАМЕННЯЎ У МОНАКРЫШТАЛЯХ АД ШЧЫЛЬНАСЦІ ДЫСЛАКАЦЫЙ

§ 1. Уводзіны. Першыя даследаванні анамальнага праходжання рэнтгенаўскіх праменняў у недасканалых крышталях паказалі, што каэфіцыент анамальнага паглынання вельмі залежыць ад цеплавых напружанняў [1], дыслакацый і пругкіх дэфармацый [2].

Елістратаў і Яфімаў [3] прапанавалі выкарыстаць для апісання эфекту анамальнага праходжання ў тоўстых крышталях велічыні μ_i і y_i , названыя імі інтэгральным каэфіцыентам паглынання і інтэгральнай характарыстыкай адпаведна. У артыкуле [3] тэарэтычна і эксперыментальна даследавана пытанне аб залежнасці μ_i і y_i ад таўшчыні дасканалага крышталю германію. Для монакрышталю германію ўзгодненасць разлікаў на аснове дынамічнай тэорыі Эвальда — Лауэ з эксперыментальнымі данымі добрая. У работах [3—5] быў эксперыментальна даследаваны ўплыў шчыльнасці дыслакацый у монакрышталях германію на велічыні μ_i і y_i для рэфлексу (220).

Анамальнае праходжанне рэнтгенаўскіх праменняў у монакрышталях германію і арсеніду галію, якія змяшчаюць дыслакацыі і прымесь, эксперыментальна даследаваў Маруяма [6, 7].

§ 2. Мадэль недасканалага крышталю. Для разліку параметраў, характарызуючых анамальнае праходжанне рэнтгенаўскіх праменняў у монакрышталі, які змяшчае дыслакацыі, неабходна выбраць мадэль такога крышталю. У гэтай рабоце мы выкарыстоўваем мадэль мазаічнага крышталю, г. зн. крышталю, што складаецца з асобных дасканалых абласцей (блокі мазаікі), межы якіх утвораны дыслакацыямі, прычым размеры блокаў і вуглы разарыенціроўкі звязаны са шчыльнасцю дыслакацый. Такая мадэль можа разглядацца як прыватны выпадак больш агульнай мадэлі Като [8], якая ўключае не толькі паварот крышталічных пласцін, звязаных з дэфармацыяй крышталю, але і зрушэнне і выгіб апошніх. Наша трактоўка, хаця і не з'яўляецца такой усеабдымнай, дазваляе дасягнуць рашэнне задачы да лікавых значэнняў.

У гэтым артыкуле мы будзем разгледжваць прасцейшы выпадак размеркавання велічынь вуглоў разарыенціроўкі блокаў, а іменна будзем лічыць, што вуглы разарыенціроўкі для ўсіх блокаў мазаікі адносна «сярэдняй» плоскасці ў крышталі роўныя і могуць з аднолькавай імавернасцю прымаць як дадатныя, так і адмоўныя значэнні, г. зн. што шчыльнасць размеркавання можна выразіць праз δ -функцыю Дзірака [9]

$$\rho(\varphi) = \frac{1}{2} [\delta(\varphi - \bar{\varphi}) + \delta(\varphi - (-\bar{\varphi}))], \quad (1)$$

дзе φ — значэнне вугла разарыенціроўкі.

Велічыня вугла разарыенціроўкі (вугла мазаічнасці) звязана з характарам блочнай структуры крышталю. Для параўнання з рэзультатамі работ [3—7] разгледзім мадэль мазаічнага монакрышталю, межы блокаў мазаікі ў якім утвораны дыслакацыямі.

Неабходна падкрэсліць, аднак, што такая мадэль не з'яўляецца адзінай: мазаічная структура крышталю можа быць, як відаць, абумоўлена і іншымі фактарамі, якія вызначаюць наяўнасць субструктуры крышталю.

Сувязь паміж сярэднім вуглом разарыенціроўкі $\bar{\varphi}$ і шчыльнасцю дыслакацый N_D знойдзем з наступных меркаванняў. Калі лічыць, што мяжа кожнага блока ўтворана адной дыслакацыяй, то пры раўнамерным размеркаванні дыслакацый па крышталю адлегласць D паміж суседнімі дыслакацыямі вызначыцца пры дапамозе суадносін

$$D^2 = \frac{2}{N_D},$$

а вугал разарыенціроўкі

$$\bar{\varphi} = \frac{b}{D} = b \sqrt{\frac{N_D}{2}}, \quad (2)$$

дзе b — вектар Бюргерса ў напрамку, перпендыкулярным плоскасці рашоткі, ад якой адлюстроўваюцца рэнтгенаўскія праменні. Калі дапусціць далей, што дыслакацыі размеркаваны ў крышталі па нармальнаму [закону, то сярэдняя шчыльнасць дыслакацый N_D аказваецца звязанай з сярэднеквадратичнай $\sqrt{N_D^2}$, вызначаемай з доследу, суадносінамі

$$\bar{N}_D = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sqrt{N_D^2}.$$

Падстаўляючы апошнія суадносіны ў (2), атрымліваем

$$\bar{\varphi} = b \sqrt[4]{\frac{N_D^2}{2\pi}}. \quad (3)$$

§ 3. Разлік каэфіцыента аномальнага паглынання рэнтгенаўскіх праменняў для недасканалых крышталю. Для асобнай крышталічнай пласціны выкарыстаем дынамічную тэорыю дыфракцыі рэнтгенаўскіх праменняў у дасканалых крышталю [10], згодна з якой каэфіцыент аномальнага паглынання μ вызначаецца выразам

$$\mu = \mu_0 \left[1 - \frac{|P| \varepsilon}{\sqrt{1 + (\eta')^2}} \right], \quad (4)$$

дзе μ_0 — нармальны каэфіцыент паглынання; P — палярызацыйны фактар; ε — адносіны ўяўнай часткі $F''(2\theta)$ структурнага фактару да ўяўнай часткі $F''(0)$ структурнага фактару ў напрамку падзення. Велічыня η' звязана з адхіленнем $\Delta\theta$ ад брэгаўскага вугла θ суадносінамі

$$\eta' = \frac{\Delta\theta \sin 2\theta}{\Gamma |P| |F_H'|}, \quad (4a)$$

дзе

$$\Gamma = \frac{e^2}{4\pi^2 m c^2} \frac{\lambda^2}{\pi V};$$

V — атамны аб'ём; F_H' — сапраўдная частка структурнага фактару.

Спачатку мы разлічым велічыню каэфіцыента аномальнага паглынання μ у напрамку максімуму дыфракцыйнай лініі і параўнаем яе з рэзультата-

мі [6]. У наступным параграфі правядзём больш дэтальны разлік параметраў μ_i і y_i і параўнаем атрыманыя рэзультаты з данымі [4].

Падстаноўка η' (4а) з заменай $\Delta\theta$ на $\Delta\theta + \varphi$ у (4) з улікам размеркавання (1) дае для адноснага каэфіцыента паглынання μ/μ_0 (у далейшым мяркуем $P = 1$)

$$\frac{\mu}{\mu_0} = 1 - \frac{\varepsilon}{2} \left\{ [1 + C^2 (\Delta\theta + \bar{\varphi})^2]^{-\frac{1}{2}} + [1 + C^2 (\Delta\theta - \bar{\varphi})^2]^{-\frac{1}{2}} \right\}, \quad (5)$$

дзе

$$C = \frac{\sin 2\theta}{\Gamma F'_H}. \quad (5a)$$

Падстаноўка (3) у (5) пры $\Delta\theta = 0$ адразу ж дае велічыню адноснага каэфіцыента паглынання \check{y} напрамку максімуму

$$\frac{\mu}{\mu_0} = 1 - \varepsilon [1 + k (N_D^2)^{\frac{1}{2}}]^{-\frac{1}{2}}, \quad (6)$$

дзе

$$k = \left(\frac{\sin 2\theta}{\Gamma F'_H} b \right)^2 \sqrt{\frac{1}{2\pi}}.$$

Велічыні ε і k для германію могуць быць разлічаны, калі выкарыстаць даныя [11]. Для рэфлекса (220) з улікам тэмпературнага множніка пры пакаёвай тэмпературы $\exp(-M) = 0,963$ пры $\lambda = 1,54 \text{ \AA}$ (CuK $_{\alpha}$ -выпраменьванне), $\varepsilon = 0,955$, $F' = 165,3$, $\Gamma = 8,43 \cdot 10^{-8}$.

У напрамку 110 вектар Бюргерса $b = 4 \text{ \AA}$. Такім чынам, для рэфлекса (220) германію формула (6) пераўтвараецца ў

$$\frac{\mu}{\mu_0} = 1 - 0,955 [1 + 1,72 \cdot 10^{-8} (N_D^2)^{\frac{1}{2}}]^{-\frac{1}{2}}. \quad (7)$$

Параўнанне разліковых велічынь, атрыманых з дапамогай формулы (7), з эксперыентам [6] прыведзена на рыс. 1, а і \check{y} пераўтвораных каардынатах на рыс. 1, б.

Як відаць з графікаў, узгодненасць паміж разлікам і эксперыентам трэба лічыць здавальняючай, улічваючы той факт, што велічыня μ/μ_0 вылічана для максімуму лініі, у той час як у рабоце [6] яна вылічвалася па інтэгральнай інтэнсіўнасці.

§ 4. Разлік інтэгральнага каэфіцыента паглынання і інтэгральнай характарыстыкі для анамальнага праходжання рэнтгенаўскіх праменняў у недасканалых крышталях. Спачатку разлічым інтэгральную інтэнсіўнасць пучка рэнтгенаўскіх праменняў, якія прайшлі праз недасканалы крышталі у напрамку Лауэ-адлюстравання.

Пры праходжанні пучка праз тонкі слой крышталю з улікам толькі той палярывацыі, якая захоўваецца ў тоўстым крышталі, атрымаем, згодна з [10], суадносіны інтэнсіўнасці пучка, які прайшоў, і інтэнсіўнасці пучка, які падае:

$$\left(\frac{I_H}{I_0} \right)_1 = \frac{1}{4} [1 + (\eta')^2]^{-1}.$$

Калі тонкі слой складаецца з блокаў мазаікі, якія падпарадкоўваюцца размеркаванню (1), то для такога слоя

$$\left(\frac{I_H}{I_0} \right)_2 = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} \{ [1 + (\eta' + C\bar{\varphi})^2]^{-1} + [1 + (\eta' - C\bar{\varphi})^2]^{-1} \}. \quad (8)$$

Тут η' вызначаецца па формуле (4а), $\bar{\varphi}$ — па формуле (3), C — па формуле (5а).

Калі ўлічыць цяпер паглынне, якое атрымліваецца пры праходжанні рэнтгенаўскага пучка праз усе слаі крышталю, то

$$\frac{I_H}{I_0} = \left(\frac{I_H}{I_0} \right)_2 \exp \left(- \frac{\mu t_0}{\gamma_0} \right), \quad (9)$$

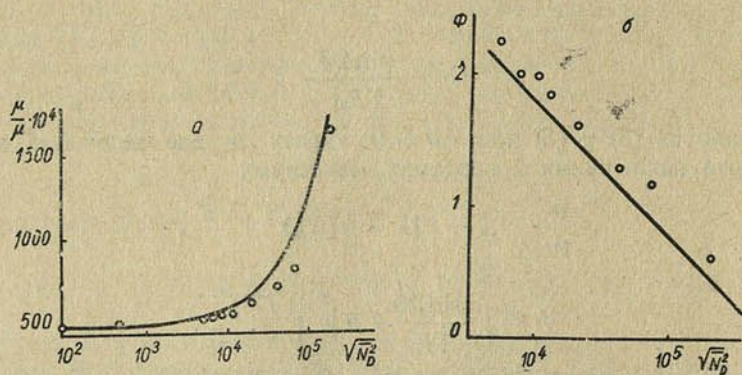


Рис. 1. Залежнасць адноснага каэфіцыента паглынання μ/μ_0 для лініі (220) монакрышталю германію (выпраменьванне $\text{CuK}\alpha$; крывая — разліковыя даныя, пункты — даныя эксперымента [6]) — а і функцыі $\Phi = -\lg(1,72 \cdot 10^{-6} N_D^2)$ (наш разлік, прамая) $\Phi = -\lg \left[\left(\frac{1-\mu/\mu_0}{0,955} \right)^{-2} - 1 \right]$ (даныя эксперымента [6], пункты на графіку) — б ад шчыльнасці дыслакацый $\sqrt{N_D^2}$, см^{-2}

дзе μ — каэфіцыент анамальнага праходжання, вызначаемы формуламі (4) і (4а); t_0 — таўшчыня крышталю; γ_0 — накіроўваючы косінус падаючага пучка.

Раскладзем (8) у рад з дакладнасцю да членаў другога парадку і вышэй $((1+x)^{-1} \approx 1-x)$, а выраз у экспаненце (9) з улікам (4) — з дакладнасцю да членаў трэцяга парадку і вышэй $((1+x)^{-1/2} \approx 1 - \frac{x}{2} + \frac{3}{8}x^2)$.

Не прымаючы пад увагу члены ў паказчыку экспаненты, якія змяшчаюць $(\eta')^4$ і $\bar{\varphi}^4$, інтэгруючы (9) па $\Delta\vartheta = \eta'/C$ і лагарыфмуючы атрыманую велічыню, прыходзім да суадносін

$$\ln \rho_H = \ln \frac{\sqrt{2\pi}}{4C \left(\frac{\varepsilon \mu_0 t_0}{\gamma_0} \right)^{\frac{1}{2}}} + \ln \frac{1 - C^2 \bar{\varphi}^2}{\sqrt{1 - 4,5 C^2 \bar{\varphi}^2}} - \frac{\mu_0 t_0}{\gamma_0} \left[1 - \varepsilon \left(1 - \frac{C^2 \bar{\varphi}^2}{2} \right) \right]. \quad (10)$$

Формула (10) дазваляе разлічыць велічыні параметраў μ_i і y_i пры заданай шчыльнасці дыслакацый $\sqrt{N_D^2}$, якая вызначае велічыню $\bar{\varphi}$. Для гэтага вылічым $y = \ln \rho_H$ па формуле (10) для розных шчыльнасцей дыслакацый $\sqrt{N_D^2}$ пры значэннях $\mu_0 t_0 / \gamma_0$, роўных адпаведна a_1 і a_2 (для выпадку тоўстага крышталю Ge выбіраем a_1 і a_2 роўнымі 30 і 60 адпаведна).

Затим, злучивши відповідні пункти y_1 і y_2 на графіку $y = y(\mu_0 t_0 / \gamma_0)$ (рис. 2) прямою, отримуємо y_i як пересічення цієї прямої з осью ординат, а μ_i — як величину, пропорційну тангенсу кута нахилу цієї прямої. Результати розліку показані на рис. 3 у вигляді суцільних кривих. Тут же для супорядження приведено експериментальні пунк-

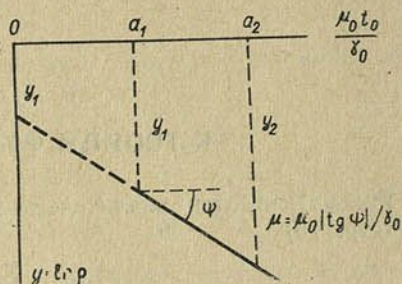


Рис. 2. Схема розліку параметра μ_i і y_i

ти, узяті з роботи [4]. Відповідність розлікових значень μ_i / μ_0 експериментальним даним треба лічати з увагою, улічуючи приблизні характеристики формули (10).

Отримані результати дозволяють зробити висновок, що розаренціровка блоку мазаїки робить істотно вплив на ефект аномального пра-

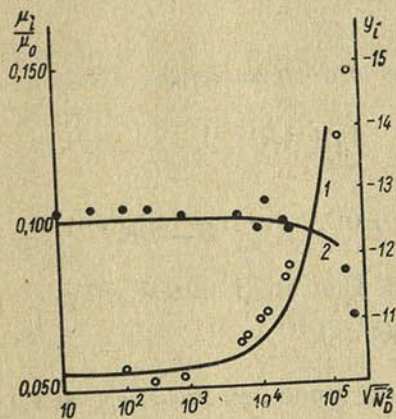


Рис. 3. Залежність параметра μ_i і y_i для лінії (220) монокришталю германію ад щільності дислакацій $\sqrt{N_D^2}$, см^{-2} .

Випромінювання $\text{CuK}\alpha$:

1 і 2 — розлікові дані для μ_i / μ_0 і y_i ; пункти — дані експеримента [5]

ходження рентгеновських променів у монокристалах і, як відомо, називається залежність коефіцієнта поглинання ад щільності дислакацій треба приписати іменню впливу розаренціровки блоку.

Автар виказує вдячність М. М. Сіраце за каштові заваги.

Література

1. Borgmann G., Gildebrandt G. Z. Naturforsch., **11a**, 535, 1956.
2. Hunter L. P. Koninkl. Ned. Acad. Wetenschap. Proc. **B61**, 214, 1958.
3. Ефимов О. Н., Елистратов А. М. ФТТ, **4**, 2908, 2398, 1962.
4. Ефимов О. Н. ФТТ, **5**, 1466, 1963.
5. Ефимов О. Н. ФТТ, **5**, 1869, 1963.
6. Мацуяма С. J. Phys. Soc. Japan, **20**, 1399, 1965.
7. Мацуяма С. J. Phys. Soc. Japan, **21**, 2092, 1966.
8. Kato N. Acta Cryst., **16**, 276, 281, 1963.
9. Окунь Э. Д. ДАН БССР, **10**, 83, 1966.
10. Batterman В., Cole H. Rev. Mod. Phys., **36**, 3, 1964.
11. International Tables for X-ray Crystallography, 3. Kynoch Press, Birmingham, 1962.

Институт физики твердого тела
и полупроводников АН БССР

Поступило в редакцию
25.VII 1969

КАРОТКІЯ ПАВЕДАМЛЕННІ

УДК 517.925

В. Н. ЛАПТИНСКИЙ

К ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ ОТ МАТРИЦ

Рассматриваются аналитические функции от матриц [1], [2] (стр. 84), [3] (стр. 15)

$$f(X) = \sum_{p=0}^{\infty} \alpha_p X^p, \quad \|X\| < \rho, \quad (1)$$

где X — действительная $n \times n$ -матрица,

$$\|X\| \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i,j=1}^n |x_{ij}|.$$

Лемма 1. Пусть A, B — произвольные $n \times n$ -матрицы. Тогда

$$\sum_{p=0}^m B^p A B^{m-p} = \sum_{s=1}^{m+1} C_{m+1}^s B^{m+1-s} K^{(s-1)}, \quad (2)$$

где

$$K^{(0)} = A, \quad K^{(1)} = AB - BA, \quad \dots, \quad K^{(s)} = K^{(s-1)} B - B K^{(s-1)}.$$

Доказательство даем индукцией по m . При $m=1$ имеем

$$AB + BA = 2BA + K^{(1)},$$

т. е. (2) имеет место. Предполагая, что (2) верно при $m=r$, сделаем индуктивный переход от r к $r+1$.

Как видим, левая часть (2) есть однородный матричный полином $R_{1,m} \times \times (A, B)$ степени $m+1$ (первой относительно матрицы A и m -й относительно B) с единичными коэффициентами ([4] стр. 16).

Отметим также, что

$$R_{1,i} B + R_{0,i+1} A = R_{1,i+1}, \quad R_{0,i+1} = B^{i+1}, \quad i = 0, 1, \dots$$

Стало быть,

$$\begin{aligned} R_{1,r+1} &= R_{1,r} B + R_{0,r+1} A = \sum_{s=1}^{r+1} C_{r+1}^s B^{r+1-s} K^{(s-1)} B + B^{r+1} A = \\ &= \sum_{s=1}^{r+1} C_{r+1}^s B^{r+2-s} K^{(s-1)} + \sum_{s=1}^{r+1} C_{r+1}^s B^{r+1-s} K^{(s)} + B^{r+1} A = \\ &= \sum_{s=1}^{r+2} C_{r+2}^s B^{r+2-s} K^{(s-1)}. \end{aligned}$$

Лемма 2. Пусть $X - X_0 = H$, где H — произвольная $n \times n$ -матрица. Тогда

$$X^m = \sum_{i=0}^m C_m^i X_0^{m-i} S_i,$$

$$S_i = \sum_{k=0}^i (-1)^k C_i^k X_0^k X^{i-k}, \quad S_0 = E.$$

Лемма 3. Пусть $X = X_0 + H$. Тогда при целых $m \geq 2$ имеет место тождество

$$X^m = \sum_{s=0}^m C_m^s X_0^{m-s} K^{(s-1)} + \sum_{i=2}^m R_{m-i, i}(X_0, H),$$

где

$$K^{(-1)} = E, \quad K^{(0)} = H, \quad K^{(1)} = HX_0 - X_0H, \quad K^{(i)} = K^{(i-1)}X_0 - X_0K^{(i-1)},$$

$R_{m-i, i}(X_0, H)$ есть однородный матричный полином степени m ($m-i$ -й относительно X_0 и i -й относительно H) с единичными коэффициентами.

Как и лемма 1, эти леммы доказываются индукцией по m .

Теорема. Пусть функция от матрицы

$$f(X) = \sum_{p=0}^{\infty} \alpha_p X^p$$

аналитическая при $\|X\| < \rho$. Тогда для $\|X - X_0\| < \rho_1 < \rho$, $\|X_0\| < \rho$, справедливо представление

$$f(X) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{s!} f^{(s)}(X_0) K^{(s-1)} + R_2, \quad (3)$$

где

$$\|R_2\| \leq \|H\|^2 \sum_{i=2}^{\infty} \frac{1}{i!} \bar{f}^{(i)}(\|X_0\|) \|H\|^{i-2}, \quad \bar{f}(\lambda) = \sum_{m=0}^{\infty} |\alpha_m| \lambda^m.$$

Доказательство. Опираясь на приведенные леммы, имеем

$$\begin{aligned} f(X) &= \sum_{m=0}^{\infty} \alpha_m X^m = \sum_{m=0}^{\infty} \alpha_m \left(\sum_{s=0}^m C_m^s X_0^{m-s} K^{(s-1)} + \sum_{i=2}^m R_{m-i, i} \right) = \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \alpha_m \sum_{s=0}^m \frac{1}{s!} m(m-1) \dots (m-s+1) X_0^{m-s} K^{(s-1)} + R_2 = \\ &= \sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{s!} f^{(s)}(X_0) K^{(s-1)} + R_2, \end{aligned}$$

$$R_2 = \sum_{m=2}^{\infty} \alpha_m \sum_{i=2}^m R_{m-i, i},$$

$$\|R_2\| \leq \sum_{m=2}^{\infty} |\alpha_m| \sum_{i=2}^m C_m^i \|X_0\|^{m-i} \|H\|^i =$$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{i=2}^{\infty} \frac{1}{i!} \|H\|^i \sum_{m=i}^{\infty} m(m-1) \dots (m-i+1) |\alpha_m| \|X_0\|^{m-i} = \\
 &= \|H\|^2 \sum_{i=2}^{\infty} \frac{1}{i!} \tilde{f}^{(i)}(\|X_0\|) \|H\|^{i-2}.
 \end{aligned}$$

Следствие. Пусть $X = TX_0T^{-1}$. Тогда

$$f(X) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{s!} f^{(s)}(X_0) K^{(s)} T^{-1}. \quad (4)$$

Здесь

$$K^{(0)} = T, \quad K^{(1)} = TX_0 - X_0T, \quad \dots, \quad K^{(i)} = K^{(i-1)}X_0 - X_0K^{(i-1)}.$$

Выражение (4) можно рассматривать как обобщение формулы Тейлора. Здесь $f^{(s)}(X_0)$ есть производные по λ функции $f(\lambda)$, вычисленные при $X = X_0$. Матрицы $K^{(s)}T^{-1}$ играют роль приращений $(X - X_0)^s$. При $s=1$ имеем $K^{(1)}T^{-1} = X - X_0$, но при $s=2$ уже получим

$$(X - X_0)^2 = X^2 - X_0X - XX_0 + X_0^2, \quad K^{(2)}T^{-1} = X^2 - 2X_0X + X_0^2.$$

Символически (4) можно записать как обычный ряд Тейлора, т. е.

$$f(X) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{s!} f^{(s)}(X_0) K^{(s)} T^{-1} = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{s!} f^{(s)}(X_0) (X - X_0)^s. \quad (5)$$

Для матриц X , таких, что $XX_0 = X_0X$, (5) является истинным разложением, ибо

$$K^{(s)}T^{-1} = \sum_{i=0}^s (-1)^i X_0^i X^{s-i} = (X - X_0)^s.$$

Литература

1. Лаппо-Данилевский И. А. Применение функций от матриц к теории линейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений. ГИТТЛ, М., 1957.
2. Рантмахер Ф. Р. Теория матриц. ГИТТЛ, М., 1954.
3. Еругин Н. П. Линейные системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Изд. АН БССР, Минск, 1963.
4. Лаптинский В. Н. Разложение решений линейных дифференциальных систем в быстро сходящиеся ряды. Канд. дисс. Минск, 1966.

Могилевский машиностроительный институт

Поступило в редакцию
29.XI 1968

В. М. МАДОРСКИЙ

**О ПРИБЛИЖЕННОМ РЕШЕНИИ
 МЕТОДОМ ОСРЕДНЕНИЯ ОДНОГО КЛАССА
 ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ**

Численному решению уравнения

$$u = \varphi + Tu \quad (1)$$

T — нелинейный оператор, действующий из гильбертова пространства H в H , $\varphi, u \in H$) методом осреднения посвящены многочисленные публикации (см., например, [1—7]).

Рассмотрим случай, когда нелинейный оператор T есть суперпозиция двух операторов: линейного оператора K и оператора Немыцкого f . Покажем, что при выполнении достаточного условия сходимости метода простой итерации вариант метода осреднения функциональных поправок, предложенный автором в работах [5, 6], определяет итерационный процесс, сходящийся к решению уравнения (1). Как показывают примеры, метод осреднения функциональных поправок позволяет находить приближенное решение уравнения (1) даже тогда, когда метод простой итерации дает расходящийся процесс.

Итак, пусть уравнение (1) представимо в виде

$$u = \varphi + Kfu. \quad (2)$$

Для решения уравнения (2) применим вариант метода осреднения функциональных поправок [5, 6], определяя последовательные приближения с помощью формул

$$u_n = \varphi + Kf(u_{n-1} + \alpha_n), \quad (3)$$

$$\alpha_n = P(\tilde{u}_n - u_{n-1}), \quad (4)$$

где

$$\tilde{u}_n = \varphi + Kfu_{n-1}, \quad (5)$$

а P — оператор ортогонального проектирования из H в H .

Введем обозначения

$$z_n = u_{n-1} + \alpha_n,$$

$Q = (J - P)$ — также оператор ортогонального проектирования, J — тождественный оператор, и пусть оператор f удовлетворяет условию Липшица с некоторой константой $L > 0$. Тогда, используя формулы (3)—(5) и ортогональность проекторов P и Q , находим последовательно

$$\begin{aligned} \|\delta z_n\|^2 &= \|z_n - z_{n-1}\|^2 = \|Kfz_{n-1} + PKfu_{n-1} - \\ &- PKfz_{n-1} - Kfz_{n-2} - PKfu_{n-2} + PKfz_{n-2}\|^2 = \\ &= \|QKfz_{n-1} - QKfz_{n-2}\|^2 + \|PKfu_{n-1} - PKfu_{n-2}\|^2 \leq \\ &\leq \|QK\|^2 L^2 \|\delta z_{n-1}\|^2 + \|PK\|^2 L^4 \|K\|^2 \|\delta z_{n-1}\|^2 = \\ &= L^2 (\|QK\|^2 + \|PK\|^2 \|K\|^2 L^2) \|\delta z_{n-1}\|^2. \end{aligned} \quad (6)$$

Пусть проектор P таков, что выполняется соотношение

$$\|PK\|^2 + \|QK\|^2 = \|K\|^2. \quad (7)$$

Если выполняется достаточное условие сходимости метода простой итерации $\bar{\varepsilon} = \|K\| \cdot L < 1$, то тем более будет иметь место неравенство

$$\varepsilon = L \sqrt{\|QK\|^2 + \|PK\|^2} \|K\|^2 L^2 < 1. \quad (8)$$

Следовательно,

$$\|\delta z_n\| \leq \varepsilon \|\delta z_{n-1}\|.$$

Применяя индукцию, имеем

$$\|\delta z_n\| \leq \varepsilon^{n-2} \|\delta z_2\|.$$

Нетрудно проверяется факт фундаментальности последовательности $\{u_n\}$ при $\varepsilon < 1$. В самом деле,

$$\begin{aligned} \|u_{n+p} - u_n\| &\leq \|u_{n+p} - u_{n+p-1}\| + \|u_{n+p-1} - u_{n+p-2}\| + \dots + \|u_{n+1} - u_n\| \leq \\ &\leq \|K\|L \|\delta z_2\| (\varepsilon^{n+p-2} + \varepsilon^{n+p-1} + \dots + \varepsilon^{n-1}) < \|K\|L \|\delta z_2\| \frac{\varepsilon^{n-1}}{1-\varepsilon}. \end{aligned} \quad (9)$$

Таким образом, $\|u_{n+p} - u_n\| \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ и произвольном натуральном p . В силу полноты пространства H последовательность $\{u_n\}$ имеет предел u^* , который, как нетрудно убедиться, является решением уравнения (2).

Оценка погрешности n -го приближения получается из формулы (9) при $p \rightarrow \infty$. Итак, справедлива

Теорема. Для сходимости процесса, определяемого формулами (3)–(5), к единственному в H решению уравнения (2) достаточно выполнения условий

$$\varepsilon = \|K\|L < 1; \quad \|QK\|^2 + \|PK\|^2 = \|K\|^2.$$

Оценка погрешности n -го приближения имеет вид

$$\|u^* - u_n\| \leq \|K\|L \|\delta z_2\| \frac{\varepsilon^{n-1}}{1-\varepsilon}.$$

Рассмотрим нелинейное интегральное уравнение типа Гаммерштейна в пространстве L_2

$$y(x) = \int_a^b K(x, s) f[s, y(s)] ds + \varphi(x).$$

Пусть ядро $K(x, s)$ среднеквадратично интегрируемо в квадрате $[a, b; a, b]$, а функция $f(s, y)$ удовлетворяет условию Липшица по y с некоторой константой $L > 0$. За оператор ортогонального проектирования P примем линейный оператор усреднения

$$Pu = \frac{1}{b-a} \int_a^b u(x) dx.$$

Нетрудно показать, что выбранный таким образом оператор удовлетворяет условию (7). Тогда при

$$\varepsilon = L \sqrt{\int_a^b \int_a^b K^2(x, s) dx ds} < 1$$

мы находимся в условиях теоремы.

Пример. Пусть необходимо решить уравнение

$$y = 2x - 3x \int_0^1 y^2(\xi) d\xi.$$

Это уравнение имеет решение $y = x$.

Как нетрудно проверить, метод простой итерации не дает сходящегося к решению процесса ни с какого сколь угодно близкого к решению приближения. Предложенный выше метод дает сходящийся к решению процесс, причем итерации можно начинать с произвольного, например нулевого, приближения. Уже во втором приближении имеем $y_2(x) = x$, что совпадает с точным решением.

Метод осреднения функциональных поправок Ю. Д. Соколова дает также сходящийся к решению процесс. По этому методу во втором приближении имеем $\tilde{y}_2(x) = 0,983x$, что отличается от точного решения в норме L_2 на 0,0098.

Литература

1. Соколов Ю. Д. Метод осреднения функциональных поправок. Киев, 1967.
2. Курпель Н. С. УМЖ, 15, № 3, 1963.
3. Курпель Н. С. Сб. «Приближенные методы решения дифференциальных уравнений». Киев, 1963.
4. Лучка А. Ю. Теория и применение метода осреднения функциональных поправок. Киев, 1963.
5. Мадорский В. М. Весці АН БССР, сер. фіз.-мат. навук, № 3, 1965.
6. Мадорский В. М. Весці АН БССР, сер. фіз.-мат. навук, № 3, 1966.
7. Мадорский В. М. Весці АН БССР, сер. фіз.-мат. навук, № 3, 1967.

Брестский педагогический институт
им. А. С. Пушкина

Поступило в редакцию
29.1 1969

И. А. СОКОЛОВ

О КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ТИПА ЗАДАЧИ РИМАНА
 СО СДВИГОМ ДЛЯ ПОЛИАНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ
 НА ОКРУЖНОСТИ

§ 1. Пусть L — единичная окружность с центром в начале координат, D^+ — область, внутренняя по отношению к L , D^- — внешняя. На окружности L заданы: функция $\alpha(t)$, отображающая L взаимно-однозначно на себя с сохранением направления, функции $G_k(t) \neq 0$, $g_k(t)$ ($k = 0, 1, \dots, n-1$), $\alpha'(t) \neq 0$, удовлетворяющие условию Гельдера

Сформулируем следующую задачу: найти кусочно-полианалитическую n -го порядка функцию $F(z, \bar{z})$, исчезающую на бесконечности и удовлетворяющую на единичной окружности L условиям

$$\Delta^k F^+ [\alpha(t), \overline{\alpha(t)}] = G_k(t) \Delta^k F^-(t, \bar{t}) \quad (1)$$

$$(k = 0, 1, \dots, n-1)$$

(однородная задача)

или

$$\Delta^k F^+ [\alpha(t), \overline{\alpha(t)}] = G_k(t) \Delta^k F^-(t, \bar{t}) + 4^k k! g_k(t) \quad (2)$$

$$(k = 0, 1, \dots, n-1)$$

(неоднородная задача),

где Δ — оператор Лапласа, множитель $4^k k!$ введен для удобства.

Эта задача представляет собой обобщение задачи, рассмотренной в [2]. Поэтому по поводу некоторых обозначений и понятий (например, понятие кусочно-полианалитической функции, чисел s и p , приведенных индексов, индекса задачи и т. д.) мы отсылаем читателя к упомянутой работе.

Как и в [2], исследование задач (1) и (2) сводится к n задачам Римана со сдвигом. Непосредственное решение задачи Римана со сдвигом в классе функций с полярной особенностью в бесконечно удаленной точке, а также в классе функций, ограниченных или исчезающих на бесконечности, изложено в [1]. Нам же в дальнейшем придется иметь дело с задачей следующего вида: найти кусочно-аналитическую функцию $W_k(z)$, имеющую на бесконечности нуль порядка $2k+1$ и удовлетворяющую на L соотношению

$$W_k^+ [\alpha(t)] = G_k(t) W_k^-(t) \quad (3)$$

(однородная задача)

или

$$W_k^+ [\alpha(t)] = G_k(t) W_k^-(t) + g_k(t) \quad (4)$$

(неоднородная задача).

Задачи (3) и (4) решаются по обычной схеме, изложенной, например, в [1]. Поэтому ограничимся формулировкой окончательных результатов. Пусть $\kappa_k = \text{Ind } G_k(t)$, $\tilde{\kappa}_k = \kappa_k - 2k$ — приведенный индекс коэффициента $G_k(t)$. Тогда

1°. При $\tilde{\kappa}_k \leq 0$ задача (3) имеет лишь тривиальное решение, а при $\tilde{\kappa}_k > 0$ число линейно независимых решений равно $\tilde{\kappa}_k$ и общее решение дается формулой

$$W_k(z) = X_k(z) Q_{\tilde{\kappa}_k-1}(z), \quad (5)$$

где

$$Q_{\tilde{\kappa}_k-1}(z) = \sum_{m=0}^{\tilde{\kappa}_k-1} a_m^{(k)} q_m(z), \quad (6)$$

$a_m^{(k)}$ ($m = 0, 1, \dots, \tilde{\kappa}_k - 1$) — произвольные постоянные, $X_k^\pm(z)$, $q_m^\pm(z)$ ($m = 0, 1, \dots, \tilde{\kappa}_k - 1$) — аналитические соответственно в D^\pm функции, краевые значения $X_k^\pm(t)$, $q_m^\pm(t)$ ($m = 0, 1, \dots, \tilde{\kappa}_k - 1$) которых определяются решением интегрального уравнения Фредгольма.

2°. Задача (4) при $\tilde{\kappa}_k > 0$ безусловно разрешима и имеет $\tilde{\kappa}_k$ линейно независимых решений. Общее решение имеет вид

$$W_k(z) = X_k(z) [\Psi_k(z) + Q_{\tilde{\kappa}_k-1}(z)], \quad (7)$$

где $\Psi_k^\pm(z)$ — аналитические соответственно в D^\pm функции, восстанавливаемые по краевым значениям $\Psi_k^\pm(t)$, которые определяются решением интегрального уравнения Фредгольма.

При $\tilde{\kappa}_k \leq 0$ задача (4) имеет единственное решение (7), где следует положить $Q_{\tilde{\kappa}_k-1}(z) \equiv 0$, при этом задача (4) при $\tilde{\kappa}_k = 0$ безусловно разрешима, а при $\tilde{\kappa}_k < 0$ разрешима тогда и только тогда, когда выполнены $-\tilde{\kappa}_k$ условий разрешимости

$$\int_L [\tilde{g}_k^*(t) + \int_L R(t, \tau) \tilde{g}_k^*(\tau) d\tau] t^{m-1} dt = 0 \quad (8)$$

$$(m = 1, 2, \dots, -\tilde{\kappa}_k)$$

или

$$\int_L [t^{m-1} + \int_L R(\tau, t) \tau^{m-1} d\tau] \tilde{g}_k^*(t) dt = 0 \quad (8')$$

$$(m = 1, 2, \dots, -\tilde{\kappa}_k),$$

где $\tilde{g}_k^*(t)$ — вполне определенная функция, $R(t, \tau)$ — резольвента упомянутого выше интегрального уравнения.

Для сокращения письма в дальнейшем условимся функцию (6) при $\tilde{\kappa}_k \leq 0$ считать тождественно равной нулю.

§ 2. Однородная задача. Пусть (см. [2])

$$W_{n-1}(z) = [f_{n-1}(z)]^{(n-1)}. \quad (9)$$

Для определения кусочно-аналитической функции $W_{n-1}(z)$ требуется решить задачу вида (3) при $k = n-1$. Из (5) и (9) получаем

$$f_{n-1}^\pm(z) = \frac{1}{(n-2)!} \int_{L^\pm} (z-\zeta)^{n-2} X_{n-1}^\pm(\zeta) Q_{\tilde{\kappa}_{n-1}-1}(\zeta) d\zeta, \quad (10)$$

где L^+ (L^-) — произвольная гладкая кривая, принадлежащая D^+ (D^-) и соединяющая точки 0 и z (∞ и z).

Подставляя предельные значения найденных функций $f_{n-1}^{\pm}(z)$ в предпоследнее условие (1), мы для нахождения $f_{n-2}^{\pm}(z)$ опять приходим к задаче вида (3). Допустим сейчас, что функции $f_{h+1}(z), \dots, f_{n-1}(z)$ уже найдены.

Введем (см. [2]) в рассмотрение вспомогательную кусочно-аналитическую функцию

$$W_h(z) = [f_h(z)]^{(k)} + \sum_{p=k+1}^{n-1} C_p^k \frac{1}{z^{p-k}} [f_p(z)]^{(k)}. \quad (11)$$

Так как на единичной окружности $\overline{\alpha(t)} = \frac{1}{\alpha(t)}$, то с помощью функции (11) $k+1$ -е условие (1) принимает вид

$$W_k^+[\alpha(t)] = G_h(t) W_k^-(t).$$

Таким образом, как это следует из (11), для определения $f_h(z)$ нужно решить задачу (3), после чего из (5) и (11) получаем

$$f_k^{\pm}(z) = \frac{1}{(k-1)!} \int_{L^{\pm}} (z-\zeta)^{k-1} \left\{ X_k^{\pm}(\zeta) Q_{\kappa_{k-1}^{\pm}}(\zeta) - \sum_{p=k+1}^{n-1} C_p^k \frac{1}{\zeta^{p-k}} [f_p^{\pm}(\zeta)]^{(k)} \right\} d\zeta \quad (12)$$

$$(k = n-2, \dots, 1).$$

Аналогично

$$f_0(z) = X_0(z) Q_{\kappa_0-1}(z) - \sum_{p=0}^{n-1} \frac{1}{z^p} f_p(z). \quad (13)$$

Общее же решение однородной задачи (1) имеет вид

$$F(z, \bar{z}) = \sum_{k=0}^{n-1} \bar{z}^k f_k(z) \quad (14)$$

или

$$F(z, \bar{z}) = X_0(z) Q_{\kappa_0-1}(z) + \sum_{k=1}^{n-1} \left(\bar{z}^k - \frac{1}{z^k} \right) f_k(z), \quad (14')$$

где функции $f_k(z)$ ($k=0, 1, \dots, n-1$) определяются формулами (13), (12), (10).

Таким образом, так же, как и в случае $\alpha(t) \equiv t$ [2], получаем теорему.
Теорема. Однородная задача (1) при $s > 0$ имеет решение, линейно зависящее от s произвольных постоянных, а при $s = 0$ имеет лишь тривиальное решение.

§ 3. Неоднородная задача. При решении задачи (2) рассуждения проводятся по тому же плану, что и при решении соответствующей задачи типа Римана для полианалитических функций [2]. Поочередно определяются функции $f_k(z)$ ($k = n-1, \dots, 1, 0$), причем на каждом этапе решается неоднородная задача вида (4). Следовательно, если среди приведенных индексов $\tilde{\kappa}_k$ есть отрицательные, но задача (2), вообще говоря, неразрешима. Она разрешима тогда и только тогда, когда выполнены условия разрешимости вида (8) (или (8')) для каждого отрицательного $\tilde{\kappa}_k$. При этом условия разрешимости не зависят от произвольных постоянных и, следова-

тельно, являются условиями, налагаемыми на свободные члены задачи (2). Если условия разрешимости выполнены, то решение задачи (2) дается формулой

$$F(z, \bar{z}) = F_0(z, \bar{z}) + \tilde{F}(z, \bar{z}), \quad (15)$$

где $F_0(z, \bar{z})$ — общее решение соответствующей однородной задачи (1), определяемое формулой (14) (или (14')), а

$$\tilde{F}(z, \bar{z}) = \sum_{k=0}^{n-1} \bar{z}^k \tilde{f}_k(z) \quad (16)$$

— частное решение неоднородной задачи (2), причем в (16) под $\tilde{f}_k(z)$ ($k = 0, 1, \dots, n-1$) понимаются функции, задаваемые формулами (42) работы [2], в которых вместо $\Psi_k(z)$ ($k = 0, 1, \dots, n-1$) нужно подставить функции $\Psi_k(z)$ формулы (7) настоящей работы.

Сформулируем окончательный результат. Аналогично, как и в случае $\alpha(t) \equiv t$, имеет место

Теорема. Если все приведенные индексы задачи (2) неотрицательны, то задача (2) безусловно разрешима при произвольных $g_k(t)$ ($k = 0, 1, \dots, n-1$). Общее решение (15) линейно зависит от s произвольных постоянных, причем, если $s=0$, то задача (2) имеет единственное решение (16). Во всех остальных случаях при выполнении p условий разрешимости задача (2) имеет решение (15), линейно зависящее от s произвольных постоянных, причем при $s=0$ задача (2) имеет единственное решение (16). В любом случае $\kappa = s - p$.

Замечание 1. Если решение задач (1) и (2) ищется в классе функций, ограниченных на бесконечности, то число произвольных постоянных может увеличиться на единицу, а число условий разрешимости задачи (2) — уменьшиться на единицу.

Замечание 2. Можно несколько обобщить постановку задач (1) и (2), а именно: краевые условия (1) и (2) заменить соответственно на

$$\Delta^k F^+ [\alpha_k(t), \overline{\alpha_k(t)}] = G_k(t) \Delta^k F^-(t, \bar{t}) \quad (k = 0, 1, \dots, n-1)$$

$$\Delta^k F^+ [\alpha_k(t), \overline{\alpha_k(t)}] = G_k(t) \Delta^k F^-(t, \bar{t}) + 4^k k! g_k(t) \quad (k = 0, 1, \dots, n-1),$$

где $\alpha_k(t)$ ($k = 0, 1, \dots, n-1$) — функции, отображающие L взаимно-однозначно на себя с сохранением направления, $\alpha_k'(t) \neq 0$ ($k = 0, 1, \dots, n-1$) удовлетворяют условию Гельдера.

Нетрудно показать, что такое обобщение не изменяет числа линейно-независимых решений и числа условий разрешимости.

В заключение автор выражает благодарность академику АН БССР Ф. Д. Гахову за руководство работой.

Литература

1. Гахов Ф. Д. Краевые задачи. М., 1958.
2. Соколов И. А. Весті АН БССР, сер. фіз.-мат. навук, № 5, 1969.

Белорусский государственный университет
им. В. И. Ленина

Поступило в редакцию
24.VI 1969

Н. А. ЗБОЙЧИК

**О СТАЦИОНАРНЫХ ИНТЕГРАЛАХ СИСТЕМЫ
 ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ
 С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ**

1. Рассмотрим систему с постоянными вещественными коэффициентами

$$\dot{X} = XP, \quad P = \|P_{kl}\|. \quad (1)$$

Система

$$\dot{Y} = -PY \quad (2)$$

есть сопряженная по отношению к системе (1).

Известно, что

$$XY = C, \quad (3)$$

т. е. все элементы матрицы XY — постоянные. Рассмотрим первую строку этой матрицы. Пусть x_1, \dots, x_n — элементы первой строки матрицы X , а y_{1k}, \dots, y_{nk} — элементы k -го столбца матрицы Y , имеющие вид $Q_j^{(k)}(t)e^{-\lambda_k t}$, $j = 1, 2, \dots, n$, $Q_j^{(k)}(t)$ — полиномы степени не выше, чем $n_k - 1$, где n_k — кратность корня λ_k характеристического уравнения матрицы P . Следовательно, элементы первой строки c_1, \dots, c_n матрицы C имеют вид

$$x_1 y_{1k} + \dots + x_n y_{nk} = (x_1 Q_1^{(k)}(t) + \dots + x_n Q_n^{(k)}(t)) e^{-\lambda_k t} = c_k, \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (4)$$

Если известна интегральная матрица системы (2), то уравнения (4) дают n независимых интегралов системы (1). Составим из (4) новые интегралы

$$c_{m_1, \dots, m_n} = c_1^{m_1}, \dots, c_n^{m_n} = \prod_{k=1}^n (x_1 Q_1^{(k)}(t) + \dots + x_n \overline{Q_n^{(k)}}(t))^{m_k} e^{-\sum_{k=1}^n m_k \lambda_k t} \quad (5)$$

(m_1, \dots, m_n — постоянные).

Известно, что в каждой группе решений, порождаемой корнем $-\lambda_k$, имеются такие, у которых $Q_j^{(k)}$ — постоянные. Пусть в (5) входят выражения только с постоянными $Q_j^{(k)}$. Выберем такие m_1, \dots, m_n , чтобы

$$\sum_{k=1}^n m_k \lambda_k = 0. \quad (6)$$

Тогда интеграл c_{m_1, \dots, m_n} будет стационарным.

2. Если существует вещественное характеристическое число $\lambda_1 \neq 0$, то стационарные интегралы можно получить, преобразуя систему (1) линейной заменой переменных к новой системе

$$\dot{z}_1 = \lambda_1 z_1, \quad t = 1/\lambda_1 \ln z_1 \quad (7)$$

$$\dot{z}_k = \sum_{l=2}^n p_{kl} z_l, \quad k=2, 3, \dots, n, \quad (8)$$

Из (8) найдем $n-1$ интегралов вида (4) и подставим t из (7). Так получим $n-1$ стационарных интегралов системы (1).

3. Если вещественного $\lambda_1 \neq 0$ нет, то систему (1) можно линейной подстановкой с постоянными коэффициентами преобразовать к виду

$$\frac{dz_j^{(s)}}{dt} = -z_{j-1}^{(s)}, \quad j=2, 3, \dots, n_s; \quad s=1, 2, \dots, m, \quad (9)$$

где n_s — число решений в группе, соответствующей корню $-\lambda_s = 0$, и

$$\begin{aligned} \frac{du_1^{(s)}}{dt} &= \alpha_s u_1^{(s)} - \beta_s v_1^{(s)} & \frac{du_j^{(s)}}{dt} &= \alpha_s u_j^{(s)} - \beta_s v_j^{(s)} - u_{j-1}^{(s)}, \\ \frac{dv_1^{(s)}}{dt} &= \alpha_s v_1^{(s)} + \beta_s u_1^{(s)} & \frac{dv_j^{(s)}}{dt} &= \alpha_s v_j^{(s)} + \beta_s u_j^{(s)} - v_{j-1}^{(s)}, \end{aligned} \quad (10)$$

$$j=2, 3, \dots, v_s, \quad s=1, 2, \dots, k \quad \text{для} \quad \lambda_s = \alpha_s + i\beta_s.$$

Интегрируя последовательно уравнения (9), заменяя t на $t = -z_2^{(s)}/z_1^{(s)}$ ($z_1^{(s)} = c_1$) и разрешая полученные выражения относительно c_1, \dots, c_n ($c_2 = 0$), получим стационарные интегралы для системы (9). Аналогично можно найти стационарные интегралы для системы (10). Можно также найти стационарные интегралы, связывающие переменные разных групп уравнений (9) и (10).

Найдем голоморфные стационарные интегралы системы (1). Пусть голоморфный стационарный интеграл имеет вид

$$\omega = \sum_{k=1}^{\infty} p_k(x_1, \dots, x_n), \quad (11)$$

где p_k — однородный полином степени k . Так как (11) — интеграл, то

$$d\omega = \sum_{k=1}^n \frac{\partial \omega}{\partial x_k} \frac{dx_k}{dt} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial \omega}{\partial x_k} (p_{k1}x_1 + \dots + p_{kn}x_n) \equiv 0. \quad (12)$$

Из (12) следует, что p_1, p_2, \dots, p_n — отдельно интегралы, т. е.

$$\sum_{k=1}^n \frac{\partial p_l}{\partial x_k} (p_{k1}x_1 + \dots + p_{kn}x_n) \equiv 0, \quad l=1, 2, \dots \quad (13)$$

Обозначим в (5)

$$\sum_{k=1}^n m_k \lambda_k = \lambda_{1, \dots, n}. \quad (14)$$

При фиксированном $\lambda_{1, \dots, n}$ может быть несколько наборов m_1, \dots, m_n , для которых имеем (14). Складывая $c_{m_1, \dots, m_n} \cdot d_{m_1, \dots, m_n}$, соответствующие таким m_1, \dots, m_n , получим интеграл

$$A_{m_1, \dots, m_n}^{(\lambda_{1, \dots, n})} = \sum d_{m_1, \dots, m_n} \cdot c_{m_1, \dots, m_n} = \\ = \left[\sum d_{m_1, \dots, m_n} \prod_{k=1}^n (x_1 Q_1^{(k)}(t) + \dots + x_n Q_n^{(k)}(t))^{m_k} \right] e^{-\lambda_{1, \dots, n} t}. \quad (15)$$

Сумма распространяется на те m_1, \dots, m_n , для которых выполнено (14). d_{m_1, \dots, m_n} — постоянные. В частности, можно взять

$$\sum_{k=1}^n m_k \lambda_k = 0. \quad (16)$$

Тогда

$$A_{m_1, \dots, m_n}^{(0)} = \sum d_{m_1, \dots, m_n} \prod_{k=1}^n (x_1 Q_1^{(k)}(t) + \dots + x_n Q_n^{(k)}(t))^{m_k}. \quad (17)$$

d_{m_1, \dots, m_n} необходимо выбрать так, чтобы правая часть (17) не содержала t . Однородные полиномы p_l в (11) получим из (17) при $m_1 + m_2 + \dots + m_n = l$, где m_1, \dots, m_n — целые положительные числа или нули. Сначала возьмем все $m_1 + \dots + m_n = 1$, такие, чтобы выполнялось (16). Если число клеток Жордана для матрицы P с $\lambda_k = 0$ равно m , то имеем независимые стационарные интегралы

$$p_1 = a_1^{(k)} x_1 + \dots + a_n^{(k)} x_n, \quad k = 1, 2, \dots, m. \quad (18)$$

Затем получим стационарные интегралы

$$p_2 = \prod_{k=1}^n (b_1^{(k)} x_1 + \dots + b_n^{(k)} x_n)^{m_k} \quad (19)$$

при условии (16) и $m_1 + \dots + m_n = 2$,

$$p_l = \prod_{k=1}^n (a_1^{(k)} x_1 + \dots + a_n^{(k)} x_n)^{m_k} \quad (20)$$

при условии (16) и $m_1 + \dots + m_n = l$.

Таким образом, полиномиальные интегралы получим в виде (20), т. е. в виде произведения полиномов первой степени, и в виде (17). Если среди $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ нет таких, что $\sum_{k=1}^n m_k \lambda_k = 0$ при целых положительных m_1, \dots, m_n , то нет и стационарных голоморфных интегралов, что следует из предложения Ляпунова [1].

Литература

1. Ляпунов А. М. Собр. соч., 2. Изд. АН СССР, М.—Л., 1956.

Белорусский политехнический институт

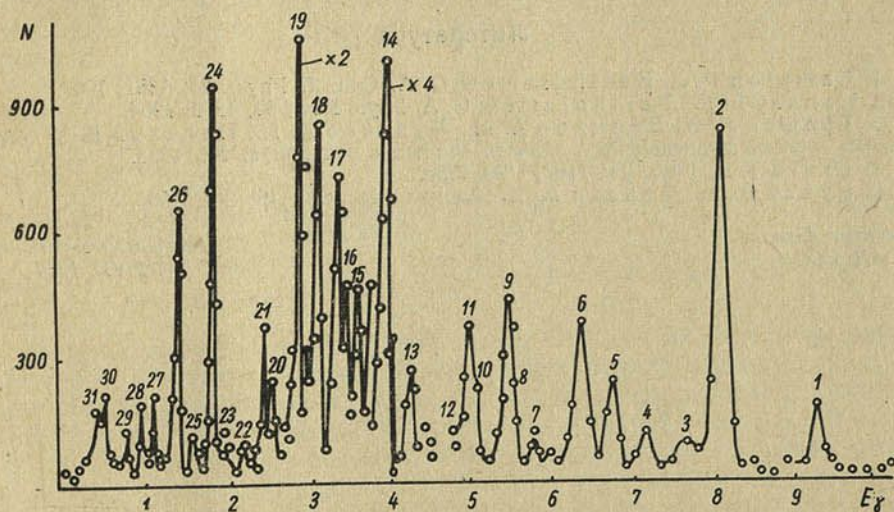
Поступило в редакцию
5.IX 1969

Э. А. РУДАК, Е. И. ФИРСОВ, А. М. ХИЛЬМАНОВИЧ

СПЕКТР γ -ЛУЧЕЙ ИЗ РЕАКЦИИ (n, γ) НА ТЕПЛОВЫХ НЕЙТРОНАХ НА ЕСТЕСТВЕННОЙ СМЕСИ ИЗОТОПОВ МАГНИЯ

Спектры γ -лучей из реакции (n, γ) на естественной смеси изотопов магния изучались ранее Бартоломью [1, 2], Грошевым [3] и Брейдом [4]. Однако во всех этих работах плохо исследована или вовсе не исследована мягкая часть спектра γ -лучей.

В настоящей работе приводятся результаты исследования спектра γ -лучей из реакции (n, γ) на тепловых нейтронах на образце с естественной смесью изотопов магния с помощью магнитного комптоновского спектрометра с разрешением 2%. Методика эксперимента приведена в работе [5]. Образцом являлся цилиндр металлического магния весом



Спектр γ -лучей из реакции (n, γ) на естественной смеси изотопов магния

1700 г. Диаметр образца равнялся 5 см, длина — 50 см. Диаметр был выбран таким, чтобы спектрометр не мог «видеть» алюминиевые полоски фольги, которые прикрепляли образец к держателю.

Аппаратурный спектр γ -лучей из реакции (n, γ) на магнии приведен на рисунке. Энергии, интенсивности в числах квантов на 100 захваченных нейтронов и принадлежность к излучающему изотопу приведены в таблице.

Таблица

Энергии, интенсивности и принадлежность к излучающему изотопу исследованных γ -лучей

Номер γ -линии	Излучающий изотоп	E_{γ} , Мэв	I_{γ} , %	Номер γ -линии	Излучающий изотоп	E_{γ} , Мэв	I_{γ} , %
1	Mg^{26}	9,28	1,1	17	—	3,27	8,5
2	Mg^{26}	8,14	5,4	18	Mg^{25}	3,04	10,9
3*	Mg^{26}	7,66	0,5	19	Mg^{25}	2,81	34,8
4	Mg^{26}	7,16	0,6	20	—	2,51	3,6
5	Mg^{25}	6,74	1,1	21	Mg^{25}	2,41	5,9
6	Mg^{25}	6,36	2,5	22	—	2,16	0,9
7	Mg^{27}	5,77	0,5	23	—	2,00	0,8
8	Mg^{26}	5,54	0,5	24	Mg^{26}	1,78	24,6
9	Mg^{27}	5,44	3,3	25*	—	1,53	5,2
10	—	5,04	0,7	26	Mg^{25}	1,37	31,4
11	—	4,95	0,9	27	Mg^{26}	1,11	10,4
12	$Mg^{25, 27}$	4,79	0,7	28	$Mg^{25, 27} Al^{27}$	0,98	14,9
13	—	4,21	2,3	29	Al^{27}	0,82	15,7
14	Mg^{25}	3,90	51,5	30	Mg^{25}	0,58	60,9
15	—	3,54	5,2	31	аннигиляция	0,51	—
16	Mg^{25}	3,40	4,8				

Примечания. 1. Звездочкой обозначена группа линий. 2. Ошибки в определенных энергиях ~ 20 кэв и интенсивности $\sim 20\%$.

Литература

1. Sampson P. J., Bartholomew G. A. Can. J. Phys., 35, 1361, 1957.
2. Kansey V. V., Bartholomew G. A. Phys. Rev., 93, 1260, 1954.
3. Грошев Л. В., Демидов А. М., Луценко В. Н., Пелехов В. И. Атлас спектров γ -лучей радиационного захвата тепловых нейтронов. М., 1958.
4. Braid T. H. Phys. Rev., 102, 1109, 1956.
5. Рудак Э. А., Фирсов Е. И. Атомная энергия, 18, 285, 1965.

Институт физики
АН БССР

Поступило в редакцию
9.VII 1969

УДК 537.226+537.311.33

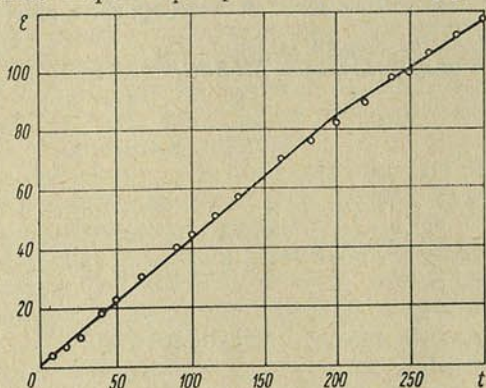
Н. Н. КОРЕНЬ

ТЕРМОЭЛЕКТРОДВИЖУЩАЯ СИЛА ДИФФУЗИОННЫХ СЛОЕВ ZnSb

Как известно, массивные образцы полупроводникового соединения ZnSb применяются в качестве материалов для термогенераторов (*p*-ветвь), например в ТЭГ-50, ТЭГ-300 [1]. Коэффициент термоэлектродвижущей силы полупроводникового поликристаллического материала ZnSb составляет ~ 200 мкв/град [2].

В настоящей работе приведены результаты измерения интегральной термоэлектродвижущей силы тонких диффузионных слоев ZnSb, полученных в результате диффузии цинка из паровой фазы в сурьму. Методика приготовления слоев и основные параметры реакционной диффузии в системе цинк—сурьма описаны в работе [3]. Диффузионные слои ZnSb, как правило, состояли из мелких кристалликов, вытянутых перпендикулярно подложке сурьмы.

Зависимость термоэлектродвижущей силы (мв) диффузионного слоя ZnSb от температуры (°C)



Термоэдс диффузионного слоя измеряли на обычной контактной установке. Медный стержень, нагреваемый электрическим током, на несколько секунд прижимал к слою ZnSb платиновый шарик, представляющий собой «горячий» спай термопары (горячий зонд), а затем нагреватель убирали. В момент контакта производили измерение термоэдс относительно платины и температуру «горячего» спаи термопары. Температура «холодного» спаи ZnSb принималась равной температуре образца сурьмы. Величина термоэдс диффузионного слоя и термопары измерялась потенциометром постоянного тока. Как показали опыты, фактически измерялась интегральная термоэдс, так как за непродолжительное время контакта нагревателя с платиновым шариком термопары и образцом последний заметно не нагревался, его температура оставалась постоянной и составляла около 20 °C. В тех случаях, когда осуществлялся продолжительный контакт, температура образца сурьмы повышалась и интегральная термоэдс снижалась на 5—10%.

На рисунке представлен типичный график температурной зависимости термоэлектродвижущей силы диффузионного слоя ZnSb для интер-

вала температур 20—300 °С. Толщина диффузионных слоев, как правило, составляла 80—100 мк, а толщина подложки сурьмы 1—2 мм. Коэффициент термоэдс в этом интервале температур составляет 400—420 мкв/град, что почти в два раза выше, чем для массивных поликристаллических образцов [2], и несколько ниже, чем для монокристаллов ZnSb [4].

Интересно отметить, что такой же термочувствительностью обладают пленки ZnSb, полученные нами на изолирующей подложке путем напыления сурьмы на подложку с последующим изотермическим отжигом последней в парах цинка в запаянных эвакуированных стеклянных ампулах до полного превращения сурьмы в ZnSb.

Таким образом, проведенные измерения термоэдс диффузионных слоев ZnSb в зависимости от температуры показывают, что на их основе могут быть изготовлены термоэлементы с термочувствительностью не менее 400 мкв/град в интервале температур 20—300 °С.

Литература

1. Иорданошвили Е. К. Термоэлектрические источники питания. Изд. «Сов. радио», М., 1968.
2. Борщевский А. С., Наследов Д. Н. Физический энциклопедический словарь, 4, 1965, стр. 115.
3. Корень Н. Н., Сирота Н. Н. Весті АН БССР, сер. фіз.-мат. навук, № 3, 89, 1967.
4. Авербах Е. М. Автореф. канд. дисс. Воронеж, 1966.

Институт физики твердого тела
и полупроводников АН БССР

Поступило в редакцию
13.III 1969

УДК 533.9+537.525 : 539.216.2

А. Д. АНДРЕЕВ, Л. В. КУЗЬМЕНКО

ПОСТОЯННАЯ РАЗНОСТЬ ПОТЕНЦИАЛОВ В СЛОЕ АМОРФНОГО СЕЛЕНА, ГРАНИЧАЩЕГО С ПЛАЗМОЙ

Обычная модель свободных носителей заряда является недостаточной для селена, хотя этот материал имеет экспоненциальную зависимость электропроводности от температуры, позволяющую отнести его к полупроводникам. Структура слабо разориентированных цепочек аморфного селена изучалась в работе [1]. Можно полагать, что движение носителей заряда вдоль цепочки селена не является свободным и представляет собой скачкообразный процесс преодоления последовательных потенциальных барьеров каждого узла с доминирующим влиянием барьеров на краях цепочки [2]. При наличии уровней захвата полный заряд в селене будет определяться полусвободными и захваченными на ловушки инжектированными носителями заряда.

В данной работе исследовалось влияние тлеющего разряда на постоянное электрическое напряжение, возникающее в слое селена, находящегося в контакте с плазмой положительного столба.

На рис. 1 приведена схема измерений. Тлеющий разряд постоянного тока возбуждался в стеклянной камере с боковыми окнами диаметром 25 мм, обеспечивающими контакт электродов 1, 7 с плазмой. Давление воздуха в камере, которая находилась под непрерывной откачкой, регулировалось с помощью игольчатого натекателя в пределах $2 \cdot 10^{-2}$ — 2 мм рт. ст. Степень проникновения плазмы в боковые окна оценивалась по данным, приведенным в [3].

Концентрация и температура электронов в положительном столбе измерялись лэнгмюровским зондом в области, прилегающей к электроду 1. Определение концентрации производилось приблизительно по средней массе основных компонентов воздуха. Концентрация и температура электронов соответственно $\sim 5 \cdot 10^9$ см⁻³ и $\sim 2 \cdot 10^4$ °К при давлении в камере 0,1 мм рт. ст. С увеличением приложенного к разряду напряжения ток в плазме монотонно возрастает. Температура электронов возрастает с уменьшением давления газа и увеличением приложенного напряжения.

На поверхность слоя селена 2 толщиной ~ 70 мк, нанесенного на висмутированную алюминиевую подложку 1, наклеивался измерительный электрод 4 из алюминиевой фольги толщиной ~ 400 мк и площадью $\sim 0,2$ см². Электрический контакт между слоем селена и этим электродом отсутствовал. В качестве второго измерительного электрода 3 применялась золотая фольга толщиной $\sim 0,2$ мк, накладываемая на поверхность селена. Площадь контакта 3 составляла 0,5 см². Полная площадь селена, соприкасающегося с плазмой, ~ 3 см². Разность потенциалов

между подложкой 1 и электродами 3, 4 измерялась вольтметром типа А4-М2.

На рис. 2 приведены кривые зависимости постоянного напряжения V от давления газа в камере при различных значениях разрядного тока I . Как видно из рис. 2, напряжение уменьшается с увеличением давления газа, возрастает при увеличении разрядного тока и имеет отрицательную полярность на подложке. Возникновение постоянного напряжения в структуре может быть вызвано проникновением части электронов

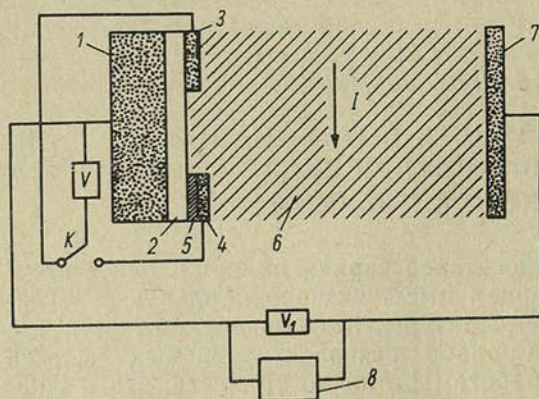


Рис. 1. Схема измерений:

1—алюминиевая подложка, 2—слой аморфного селена, 3—золотой электрод, 4—алюминиевый электрод, 5—диэлектрик, 6—плазма, 7—медный электрод, 8—источник постоянного тока типа УИП-1

плазмы, температура которых порядка нескольких эв, в слой селена. Под влиянием бомбардировки заряженными частицами [4], светового излучения, поглощения части джоулева тепла, выделяющегося при протекании разрядного тока, и диффузии электронов плазмы устанавливается начальная электропроводность слоя. Будем считать, что концентрация термически генерированных носителей заряда, обеспечивающих

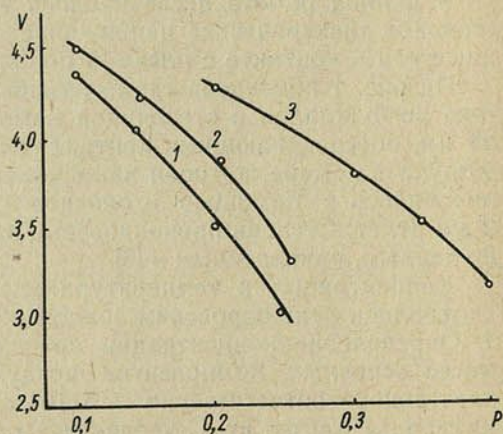


Рис. 2. Зависимость разности потенциалов V , в от давления, мм рт. ст.:
1—0,5 ма, 2—1, 3—1,5; $V_1=0$

начальную электропроводность, мала по сравнению с концентрацией диффундирующих электронов плазмы. Так как тепловые скорости ионов много меньше тепловых скоростей электронов, то диффузию ионов в полупроводник можно не учитывать. В установившемся режиме между поверхностью и подложкой возникает разность потенциалов, которая вызывает дрейфовое движение электронов, и полный ток в структуре будет равен нулю. Для свободных электронов, принимая экспоненциальную зависимость распределения концентрации от диффузионной длины в полупроводнике, можно определить разность потенциалов $V = \frac{eL^2}{\mu^2 m^*}$

[5], где e — заряд электрона, L — толщина слоя, μ — подвижность электронов, m^* — эффективная масса электрона, равная $(2,4+0,5)m_0$ [6, 9]. Знак постоянного напряжения определяется распределением зарядов. Величина подвижности электронов, рассчитанная по измеренному значению V , $\sim 10^5 \text{ см}^2 \cdot \text{в}^{-1} \cdot \text{сек}^{-1}$. Измеренное значение подвижности в аморфном селене составляет $10^{-2} \text{ см}^2 \cdot \text{в}^{-1} \cdot \text{сек}^{-1}$ [7]. Такое различие подвижностей может быть вызвано сравнительно высокой температурой диффундирующих электронов, которые подходят к поверхности слоя, имея тепловые скорости, соответствующие энергии порядка нескольких электрон-вольт. Для электронов с такой энергией потенциальные барьеры

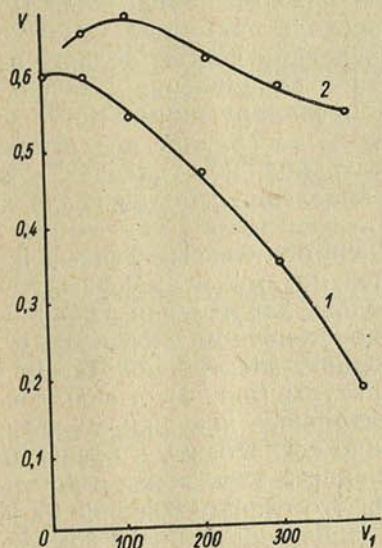


Рис. 3. Зависимость разности потенциалов V , в от напряжения V_1 , в в прямом (1) и обратном (2) направлениях

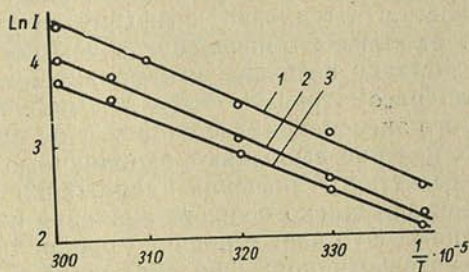


Рис. 4. Температурная зависимость тока в структуре алюминий — аморфный селен — золото:
1—120 в, 2—100; 3—80 в

ры на границе ячеек или на границе отдельных молекулярных цепочек в селене могут не оказать существенного влияния. Движение электронов будет свободным, и они будут испытывать воздействие обычного рассеяния на примесях и тепловых колебаниях. Время релаксации $\tau =$

$$= \frac{m^*}{e} \mu \approx 10^{-10} \text{ сек.}$$

Для тепловой скорости электронов 10^8 см/сек средняя длина свободного пробега составляет 10^{-2} см и сравнима с толщиной пленки селена, т. е. можно предполагать свободную диффузию. Величина разделения зарядов определяется дебаевским радиусом $r = (kT/8\pi n e^2)^{1/2}$. При концентрации заряженных частиц в плазме $n = 10^9 \text{ см}^{-3}$ температуре электронов $T \approx 2 \cdot 10^4 \text{ К}$ $r \approx 300 \text{ мк}$. В этих условиях отрицательный заряд распределяется по толщине полупроводника между подложки. Для измерения разности потенциалов, возникающей между подложкой и поверхностью, в схеме (рис. 1) вместо слоя селена также использовалась пластина слюды толщиной $\sim 400 \text{ мк}$ с отверстиями диаметром $\sim 0,2 \text{ мм}$. При токе разряда 1 ма величина этой разности потенциалов составляла 5 в . Это напряжение может быть вызвано проникновением электронов через отверстия в слюде на металлическую подложку. Отрицательный заряд на подложке и положительный на поверхности пластины создают поле плоского конденсатора. Расчетная разность по-

тенциалов обкладок такого конденсатора составляет 3ϕ , что по порядку величины совпадает с измеренным значением.

На рис. 3 даны зависимости постоянного напряжения в слое селена, измеренного между электродом 4 и подложкой 1, от приложенного напряжения V_1 . Высота расположения электрода 4 над поверхностью превышает размер дебаевского слоя. В этом случае потенциал подложки измерялся относительно слабо возмущенного плазменного слоя на поверхности металлического электрода. Это объясняет значительное снижение величины постоянного напряжения V по сравнению с напряжением, измеренным с помощью электрода 3. Как видно из рис. 3, при протекании тока в цепи электродов 1, 7 в прямом направлении (плюс источника приложен к электроду 1) происходит заметное уменьшение постоянного напряжения за счет его компенсации частью полного падения напряжения на этом участке. В обратном направлении величина тока уменьшается примерно на порядок и преобладающими могут быть эффекты, связанные с поляризацией плазмы на границе под влиянием приложенного поля. При этом число электронов, поступающих в слой селена, будет уменьшаться, что вызовет появление участка спада кривой 2.

Качественный анализ полученных экспериментальных данных показывает, что тепловая диффузия электронов плазмы в аморфный селен может вызывать появление в нем постоянного напряжения, сравнимого по порядку величины с напряжением в пристеночном слое плазмы [8]. Если рассматривать селен как полупроводник, электропроводность которого экспоненциально зависит от температуры (рис. 4), а роль донорных центров выполняют заполненные электронные ловушки, то величину расчетного значения напряжения можно согласовать с измеренной, введя аномально большое значение подвижности электронов в полупроводнике. Это дает основание предполагать, что главное влияние на возникновение напряжения оказывает размывание электронного компонента плазменной оболочки в слой селена. Так как разность потенциалов в оболочке пропорциональна электронной температуре, то возникающее в слое напряжение должно иметь подобную зависимость. Как видно из рис. 2, при уменьшении давления и увеличении тока разряда температура электронов в положительном столбе возрастает, напряжение — увеличивается.

Литература

1. Karlow R., Rowe T. A., Averbach B. L. Phys. Rev., 168, 1068, 1968.
2. Eggert H., Z. Naturforsch., 21a, 658, 1966.
3. Emeleus K. G. Internat. J. Electron., 23, 587, 1967.
4. Андреев А. Д., Некрашевич И. Г., Попко В. И. Весті АН БССР, сер. фіз.-мат. навук, № 2, 126, 1969.
5. Goronkin H. J. Appl. Phys., 38, 4547, 1967.
6. Garben B., Seliger H. Phys. Stat. Sol., 29, k27, 1968.
7. Grunwald H. P., Blakney R. M. Phys. Rev., 165, 1006, 1968.
8. Энгель А. Ионизованные газы. ГИФМЛ, М., 1959.
9. Hartke J. L. Phys. Rev., 125, 1177, 1962.

Белорусский государственный университет
им. В. И. Ленина

Поступило в редакцию
19.VI 1969

ЗМЕСТ

МАТЭМАТЫКА

В. Г. Спринджук. О представлении целых чисел ограниченным числом случайных слагаемых	5
Л. Б. Шнеперман. Строение топологических вполне простых полугрупп с изолированным нулем	15
В. С. Конюх. Разрешимые линейные группы над произвольным полем	22
В. А. Емеличев, М. М. Ковалев. К «вырожденному» случаю одной многоэкстремальной транспортной задачи	27
В. И. Ладес. Комбинационные схемы, вычисляющие значения линейных функций	32
В. М. Зубов. К вопросу о существовании решения одной краевой задачи для нелинейного уравнения n -го порядка	43
Т. М. Быкова. Кубатурная формула для вычисления тройного интеграла, точная для многочленов четвертой степени и имеющая одиннадцать узлов	51
Э. И. Грудо. О решениях автономной системы уравнений в полных дифференциалах	55
М. И. Урбанович. К теории матриц Коши линейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений	63
Н. П. Феденко. Замечание о методе секущих	70
С. А. Баркан, В. С. Танаев. О построении расписаний учебных занятий	76

ФІЗІКА

И. С. Сягло. О переформулировке уравнений движения к наблюдаемым величинам	83
А. С. Потупа, В. Н. Третьяков. Об эффектах структурности ядерной поверхности в нейтронном рассеянии на малые углы	87
Э. А. Рудак, Я. І. Фірсаў, А. М. Хільмановіч. Спектры γ -праменьняў з рэакцыі (n, γ) на цеплавых нейтронах на ядрах Ge^{70} , Ge^{72} і Ge^{73}	95
Л. А. Барысаглебскі, В. Ф. Трусаў, Г. С. Шулякоўскі. Кэфіцыенты ўнутранай канверсіі на M_{1-III} -падабалонках атама ($Z=94$) з улікам экранавання па Гашпару з паўэмпірычнымі папраўкамі	101
Э. Д. Окунь. Аб залежнасці кэфіцыента аномальнага паглынання рэнтгенаўскіх праменьняў у монакрышталях ад шчыльнасці дыслакацый	107

КАРОТКІЯ ПАВЕДАМЛЕННІ

В. Н. Лаптинский. К теории функций от матриц	112
В. М. Мадорский. О приближенном решении методом осреднения одного класса функциональных уравнений	115
И. А. Соколов. О краевой задаче типа задачи Римана со сдвигом для полианалитических функций на окружности	118
Н. А. Збойчик. О стационарных интегралах системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами	122
Э. А. Рудак, Е. И. Фирсов, А. М. Хильманович. Спектр γ -лучей из реакции (n, γ) на тепловых нейтронах на естественной смеси изотопов магния	125
Н. Н. Корень. Термоэлектродвижущая сила диффузионных слоев ZnSb	127
А. Д. Андреев, Л. В. Кузьменко. Постоянная разность потенциалов в слое аморфного селена, граничащего с плазмой	129

СОДЕРЖАНИЕ

МАТЕМАТИКА

В. Г. Спринджук. О представлении целых чисел ограниченным числом случайных слагаемых	5
Л. Б. Шнеперман. Строение топологических вполне простых полугрупп с изолированным нулем	15
В. С. Конюх. Разрешимые линейные группы над произвольным полем	22
В. А. Емеличев, М. М. Ковалев. К «вырожденному» случаю одной многоэкстремальной транспортной задачи	27
В. И. Ладес. Комбинационные схемы, вычисляющие значения линейных функций	32
В. М. Зубов. К вопросу о существовании решения одной краевой задачи для нелинейного уравнения n -го порядка	43
Т. М. Быкова. Кубатурная формула для вычисления тройного интеграла, точная для многочленов четвертой степени и имеющая одиннадцать узлов	51
Э. И. Грудю. О решениях автономной системы уравнений в полных дифференциалах	55
М. И. Урбанович. К теории матриц Коши линейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений	63
Н. П. Феденко. Замечание о методе секущих	70
С. А. Баркан, В. С. Танаев. О построении расписаний учебных занятий	76

ФИЗИКА

И. С. Сягло. О переформулировке уравнений движения к наблюдаемым величинам	83
А. С. Потупа, В. Н. Третьяков. Об эффектах структурности ядерной поверхности в нейтронном рассеянии на малые углы	87
Э. А. Рудак, Е. И. Фирсов, А. М. Хильманович. Спектры γ -лучей из реакции (n, γ) на тепловых нейтронах на ядрах Ge^{70} , Ge^{72} и Ge^{73}	95
Л. А. Борисоглебский, В. Ф. Трусов, Г. С. Шуляковский. Коэффициенты внутренней конверсии на M_{1-III} -подоболочках атома ($Z=94$) с учетом экранирования по Гашпару с полуэмпирическими поправками	101
Э. Д. Окунь. О зависимости коэффициента аномального поглощения рентгеновских лучей в монокристаллах от плотности дислокаций	107

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

В. Н. Лаптинский. К теории функций от матриц	112
В. М. Мадорский. О приближенном решении методом осреднения одного класса функциональных уравнений	115
И. А. Соколов. О краевой задаче типа задачи Римана со сдвигом для полианалитических функций на окружности	118
Н. А. Збойчик. О стационарных интегралах системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами	122
Э. А. Рудак, Е. И. Фирсов, А. М. Хильманович. Спектр γ -лучей из реакции (n, γ) на тепловых нейтронах на естественной смеси изотопов магния	125
Н. Н. Корень. Термоэлектродвижущая сила диффузионных слоев $ZnSb$	127
А. Д. Андреев, Л. В. Кузьменко. Постоянная разность потенциалов в слое аморфного селена, граничащего с плазмой	129

АТ 03059. Здана ў набор 19/1-70 г. Падпісана да друку 27/11-70 г. ФармаТ 70×108^{1/16}. Друк. арк. 8,75.
Ум. друк. арк. 12,2. Уч.-взд. арк. 11,7. Вых. зак. 1204. Друк. зак. 72. Цана 60 к.

Друкарня імя Францыска (Георгія) Скарыны «Навука і тэхніка» АН БССР і Дзяржкамтэта СМ БССР па друку. Мінск, Ленінскі праспект, 68

РЕФЕРАТЫ

УДК 511

О представлении целых чисел ограниченным числом случайных слагаемых. Спринджук В. Г. «Весті Акадэміі навук БССР», серыя фізіка-матэматычных навук. 1970 г., № 1, 5—14.

Пусть $k \geq 1$ — целое число, A — множество последовательностей натуральных чисел $A = \{a_n\}$ вида $n^k \leq a_n < (n+1)^k$ ($n = 1, 2, \dots$). В A выделим σ -алгебру подмножеств, для которых определена мера, индуцированная отображением A на интервал $[0, 1)$:

$$A \rightarrow \alpha(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r_n}{d_1 d_2 \dots d_n},$$

где $d_n = (n+1)^k - n^k$, $r_n = a_n - n^k$ ($n = 1, 2, \dots$). В статье дается метод исследования аддитивных свойств «случайно взятых» последовательностей $A \in A$. В частности, для почти всех последовательностей A число решений уравнения

$$x = x_1 + x_2 + \dots + x_m, \quad x_i \in A \quad (i = 1, 2, \dots, m)$$

равно

$$\frac{\Gamma^m \left(1 + \frac{1}{k}\right)}{\Gamma\left(\frac{m}{k}\right)} x^{\frac{m}{k}-1} + O\left(x^{\frac{m}{k}-1-\frac{1}{2k}+\varepsilon}\right),$$

если только $m \geq 2k + 1$. Метод основан на использовании в стиле И. М. Виноградова оценок тригонометрических сумм для случайных числовых последовательностей.

Библиографий 7.

УДК 519.46

Строение топологических вполне простых полугрупп с изолированным нулем. Шнеперман Л. Б. «Весті Акадэміі навук БССР», серыя фізіка-матэматычных навук. 1970 г., № 1, 15—21.

Известная структурная теорема Сушкевича—Риса переносится на топологические полугруппы.

Библиографий 4.

УДК 512.86

Разрешимые линейные группы над произвольным полем. Конох В. С. «Весті Акадэміі навук БССР», серыя фізіка-матэматычных навук. 1970 г., № 1, 22—26.

Пусть P — произвольное поле, Γ — максимальная неприводимая примитивная разрешимая подгруппа $GL(n, P)$, F — максимальный абелев нормальный делитель Γ , V — централизатор F в Γ , $[F]$ — линейная P -оболочка F , $m = [F]:P$. В заметке показано, что при построении максимальных неприводи-

мых примитивных разрешимых подгрупп $GL(n, P)$ достаточно ограничиться случаем, когда $\frac{n}{m} = q^a$, q — простое. Кроме того, изучаются свойства инвариантного ряда

$$\Gamma \supseteq B \supseteq A \supseteq F \supseteq (e),$$

где A/F — максимальная подгруппа среди абелевых нормальных делителей Γ/F , содержащихся в V/F , B/F — централизатор A/F в Γ/F .

Библиографий 3.

УДК 519.95

К «вырожденному» случаю одной многоэкстремальной транспортной задачи. Емеличев В. А., Ковалев М. М. «Весті Академії наук БССР», серия фізика-математических наук. 1970 г., № 1, 27—31.

Для задачи (S) минимизации функции $F(X) = \sum_{i,j} f(x_{ij})$ при условиях $\sum_j x_{ij} = a_i$, $\sum_i x_{ij} = b_j$, $x_{ij} \geq 0$ ($i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$), где $f(x)$ — строго вогнутая функция, обобщаются результаты работ одного из авторов («Весті АН БССР», сер. фіз.-мат. наук, № 1 и № 4, 1969) на случай, указанный в заголовке. Кроме того, предложен новый метод построения глобального минимума задачи S, состоящий в сведении ее к задаче нахождения кратчайшего пути в сети.

Библиографий 8.

УДК 681.3.001

Комбинационные схемы, вычисляющие значения линейных функций. Ладес В. И. «Весті Академії наук БССР», серия фізика-математических наук. 1970 г., № 1, 32—42.

Описывается метод синтеза комбинационных схем, вычисляющих значения функций вида $W = A_1X + A_2Y + \dots + A_mZ$, где A_1, A_2, \dots, A_m — целочисленные коэффициенты, X, Y, \dots, Z — двоичные n -разрядные числа. Метод позволяет получать структурные схемы, реализуемые как на логических элементах потенциального типа, так и на импульсно-потенциальных логических элементах. В последнем случае значения двоичных цифр x_i, y_i, \dots, z_i ($i = 1, 2, 3, \dots, n$) представляются потенциалами, снимаемыми, например, с выходов статических триггеров, а выходные сигналы и сигналы переноса представляются импульсами, которые образуются при подаче импульса на вход опроса схемы.

Таблиц 3. Иллюстраций 5. Библиографий 3.

УДК 517.934

К вопросу о существовании решения одной краевой задачи для нелинейного уравнения n -го порядка. Зубов В. М. «Весті Академії наук БССР», серия фізика-математических наук. 1970 г., № 1, 43—50.

Получена информация о поведении функции Грина линейной краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения n -го порядка (критерии существования, знакопостоянства, оценки функции Грина и ее производных до $n-1$ -го порядка включительно). На ее основе предлагаются условия существования и единственности решения нелинейного дифференциального уравнения с краевыми условиями

$$\sum_{j=0}^{n-1} (m_{ij}y^{(j)}(\alpha) + n_{ij}y^{(j)}(\beta)) = 0 \quad (i = 0, 1, \dots, n-1).$$

В частности, предлагается эффективный (выраженный через коэффициенты краевой задачи) критерий однозначной разрешимости обыкновенного дифференциального уравнения n -го порядка с краевыми условиями

$$m_{ij}y^{(j)}(\alpha) + n_{ij}y^{(j)}(\beta) = 0, \quad m_i + n_i \neq 0 \quad (i = 0, 1, \dots, n-1).$$

Библиографий 8.

УДК 518

Кубатурная формула для вычисления тройного интеграла, точная для многочленов четвертой степени и имеющая одиннадцать узлов. Быкова Т. М. «Весті Академії наук БССР», серия фізика-математичних наук. 1970 г., № 1, 51—54.

Указанная в заглавии кубатурная формула строится при двух упрощающих предположениях. Первое касается области интегрирования Ω и весовой функции $p(x, y, z)$: считается, что Ω симметрична относительно координатных плоскостей и такой же симметрией обладает $p(x, y, z)$. Второе предположение касается кубатурной формулы: начало координат является ее узлом.

Библиографий 3.

УДК 517.943.2

О решениях автономной системы уравнений в полных дифференциалах. Грудо Э. И. «Весті Академії наук БССР», серия фізика-математичних наук. 1970 г., № 1, 55—62.

Для вполне интегрируемой системы уравнений в полных дифференциалах

$$dx = [A_1x + P_1(x)] dt_1 + \dots + [A_mx + P_m(x)] dt_m, \quad (1)$$

где A_j — матрицы порядка $n \times n$, x и $P_j(x)$ — n -мерные векторы, причем координаты $P_j(x)$ ($j = 1, \dots, m$) являются голоморфными функциями координат вектора x в окрестности $x = 0$, разложения которых в ряды по координатам вектора x начинаются с членов порядка выше первого, строится обратимое формальное преобразование, приводящее систему (1) к нормальной форме (вообще говоря, нелинейной). Если собственные значения одной из матриц A_j расположены с одной стороны прямой, проходящей через начало в комплексной плоскости, то указанное преобразование является голоморфным, а полученная с помощью этого преобразования нормальная система интегрируется в элементарных функциях.

Если же существует $p < n$ собственных значений матрицы A_j , расположенных с одной стороны упомянутой прямой, то строится p -параметрическое семейство решений системы (1) в виде аналогичных рядов.

Библиографий 9.

УДК 517.917

К теории матриц Коши линейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Урбанович М. И. «Весті Академії наук БССР», серия фізика-математичних наук. 1970 г., № 1, 63—69.

Устанавливается треугольная структура матрицы Коши $K(t, s)$ матричного уравнения m -го порядка ($m \geq 1$)

$$\frac{d^m Y}{dt^m} + \sum_{\sigma=0}^{m-1} A_{m-\sigma}(t) \frac{d^\sigma Y}{dt^\sigma} = 0$$

с треугольными (в частности, правильными треугольными) $n \times n$ -матрицами $A_i(t)$ ($i = 1, \dots, m$), приводятся условия (в том числе и необходимое) неотрицательности матрицы $K(t, s)$ в треугольнике $\alpha \leq s \leq t \leq \beta$, а также формула, выражающая решение задачи Коши через матрицу $K(t, s)$ и матрицы, определяющие рассматриваемую систему.

Библиографий 7.

УДК 518.314

Замечание о методе секущих. Феденко Н. П. «Весті Академії наук БССР», серия фізика-математичних наук. 1970 г., № 1, 70—75.

Рассматривается одно из видоизменений метода Ньютона для решения численных уравнений, так называемый метод секущих. Доказывается

сходимость приближений, построенных по этому методу, и изучается скорость сходимости.

Таблиц 1. Иллюстраций 1. Библиографий 2.

УДК 519.8

О построении расписаний учебных занятий. Баркан С. А., Танаев В. С. «Весті Академії наук БССР», серия фізика-математических наук. 1970 г., № 1, 76—82.

Рассматриваются вопросы планирования учебного процесса. Основное внимание уделяется построению недельных расписаний учебных занятий. Приведены результаты построения конкретных расписаний с использованием ЭВМ «Минск-22».

Таблиц 2. Библиографий 32.

УДК 530.12

О переформулировке уравнений движения к наблюдаемым величинам. Сягло И. С. «Весті Академії наук БССР», серия фізика-математических наук. 1970 г., № 1, 83—86.

Производится переформулировка уравнений движения пробного тела к локальному времени и специальной связности, которая определяется лишь компонентами тетрады $h_{(4)}^\alpha$. Выясняются трансформационные свойства силы, определяемой этой связностью, относительно локальных преобразований Лоренца. Дается сравнение с соответствующими результатами теории хронометрических инвариантов.

Библиографий 9.

УДК 539.12.01+125.5+173.4

Об эффектах структурности ядерной поверхности в нейтронном рассеянии на малые углы. Потупа А. С., Третьяков В. Н. «Весті Академії наук БССР», серия фізика-математических наук. 1970 г., № 1, 87—94.

Для объяснения эффекта аномальной анизотропии в рассеянии нейтронов тяжелыми ядрами на малые углы предложена модель, учитывающая влияние прямых поверхностных процессов, вклад которых аппроксимируется треугольной диаграммой. В рамках такой схемы получено удовлетворительное полуквантовое согласие с экспериментом; некоторые ее следствия допускают также независимую экспериментальную проверку.

Таблиц 2. Иллюстраций 3. Библиографий 24.

УДК 539.17

Спектры γ -лучей из реакции (n, γ) на тепловых нейтронах на ядрах Ge^{70} , Ge^{72} и Ge^{73} . Рудак Э. А., Фирсов Е. И., Хильманович А. М. «Весті Академії наук БССР», серия фізика-математических наук. 1970 г., № 1, 95—100.

Спектры γ -лучей из реакции (n, γ) на тепловых нейтронах на ядрах Ge^{70} , Ge^{72} и Ge^{73} исследовались с помощью магнитного комптоновского спектрометра с разрешением 2% на реакторе ИРТ АН БССР.

Таблиц 2. Иллюстраций 2. Библиографий 11.

УДК 539.101

Коэффициенты внутренней конверсии на M_{1-III} -подоболочках атома ($Z=94$) с учетом экранирования по Гашпару с полуэмпирическими поправками. Борисоглебский Л. А., Трусов В. Ф., Шуляковский Г. С. «Весті Академії наук БССР», серия фізика-математических наук. 1970 г., № 1, 101—106.

Приведены и исследованы численные значения коэффициентов внутренней конверсии на M_{1-III} -подоболочках атома для пяти первых мульти-

польностей и различных значений энергии перехода, полученные на основе численного интегрирования системы дифференциальных уравнений Дирака с учетом эффекта конечных размеров ядра и экранирования по Гашпару с полуэмпирическими поправками. Потенциал Гашпара берется в модификации для иона. Сравнением приведенных КВК с соответствующими значениями КВК таблиц Роуза устанавливается соответствующий эффективный параметр экранировки.

Таблиц 2. Иллюстраций 2. Библиографий 7.

УДК 548.55:537.531

О зависимости коэффициента аномального поглощения рентгеновских лучей в монокристаллах от плотности дислокаций. Окунь Э. Д. «Весті Академії наук БССР», серия фізика-математичних наук. 1970 г., № 1, 107—111.

На основе динамической теории Эвальда—Лауэ рассмотрено аномальное прохождение рентгеновских лучей через мозаичный кристалл. Получены формулы для расчета коэффициента аномального прохождения. Приводится сравнение результатов расчета с данными эксперимента.

Иллюстраций 3. Библиографий 11.

УДК 517.925

К теории функций от матриц. Лаптинский В. Н. «Весті Академії наук БССР», серия фізика-математичних наук. 1970 г., № 1, 112—114.

Приводится ряд матричных тождеств. Затем для аналитических функций от матриц обобщается формула Тейлора: если

$$f(X) = \sum_{p=0}^{\infty} a_p X^p, \quad \|X\| < \rho, \quad (1)$$

то

$$f(X) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{s!} f^{(s)}(X_0) K^{(s)} T^{-1}. \quad (2)$$

Здесь $X = TX_0T^{-1}$, $K^{(0)} = T$, $K^{(1)} = TX_0 - X_0T$, ..., $K^{(r)} = K^{(r-1)}X_0 - X_0K^{(r-1)}$. Матрицы $K^{(s)}T^{-1}$ играют роль приращений $(X - X_0)^s$, причем для матриц X таких, что $XX_0 = X_0X$, (2) принимает вид

$$f(X) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{s!} f^{(s)}(X_0) (X - X_0)^s.$$

Библиографий 4.

УДК 518:517.948

О приближенном решении методом осреднения одного класса функциональных уравнений. Мадорский В. М. «Весті Академії наук БССР», серия фізика-математичних наук. 1970 г., № 1, 115—117.

Рассматривается уравнение вида

$$u = Kfu,$$

где K — линейный, а f — оператор Немыцкого. Операторы действуют из гильбертова пространства H в H .

Для нахождения приближенного решения уравнения используется вариант метода осреднения (РЖМат 10Б, 720, 1967).

Доказывается, что при выполнении достаточного условия сходимости метода простой итерации сходится и предлагаемый метод. Обратное, как показано на примере, имеет место не всегда.

Библиографий 7.

УДК 517.948.32

О краевой задаче типа задачи Римана со сдвигом для полианалитических функций на окружности. Соколов И. А. «Весті Академії наук БССР», серия фізика-математичних наук. 1970 г., № 1, 118—121.

Исследуется задача

$$\Delta^k F^+ [\alpha(t), \overline{\alpha(\bar{t})}] = G_k(t) \Delta^k F^-(t, \bar{t}) + g_k(t) \\ (k = 0, 1, \dots, n-1),$$

где Δ — оператор Лапласа, $F(z, \bar{z})$ — искомая кусочно-полианалитическая функция. На основе представления полианалитических функций через аналитические рассматриваемая задача сводится к n задачам Римана со сдвигом для аналитических функций. Установлено, что число линейно независимых решений и число условий разрешимости такие же, как и в случае $\alpha(t) \equiv t$. Решение дается в замкнутой форме.

Библиографий 2.

УДК 517.926.2

О стационарных интегралах системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Збойчик Н. А. «Весті Академії наук БССР», серия фізика-математичних наук. 1970 г., № 1, 122—124.

Даны способы нахождения стационарных интегралов, а также голоморфных стационарных интегралов для системы с постоянными вещественными коэффициентами. Найден вид этих интегралов.

Библиографий 1.

УДК 539.17

Спектр γ -лучей из реакции (n, γ) на тепловых нейтронах на естественной смеси изотопов магния. Рудак Э. А., Фирсов Е. И., Хильманович А. М. «Весті Академії наук БССР», серия фізика-математичних наук. 1970 г., № 1, 125—126.

Спектр γ -лучей из реакции (n, γ) на тепловых нейтронах на естественной смеси изотопов магния исследовался с помощью магнитного комптоновского спектрометра с разрешением 2% на реакторе ИРТ АН БССР. Таблиц 1. Иллюстраций 1. Библиографий 5.

УДК 537.226+537.311.33

Термоэлектродвижущая сила диффузионных слоев ZnSb. Корень Н. Н. «Весті Академії наук БССР», серия фізика-математичних наук. 1970 г., № 1, 127—128.

Измерена термоэлектродвижущая сила диффузионного слоя ZnSb, образованного на монокристалле сурьмы при диффузии цинка из паровой фазы в сурьму. Коэффициент термоэдс диффузионных слоев в интервале температур 20—300 °С составляет около 400 мкВ/град.

Иллюстраций 1. Библиографий 4.

УДК 533.9+537.525:539.216.2

Постоянная разность потенциалов в слое аморфного селена, граничащего с плазмой. Андреев А. Д., Кузьменко Л. В. «Весті Академії наук БССР», серия фізика-математичних наук. 1970 г., № 1, 129—132.

Измерена постоянная разность потенциалов, возникающая между металлической подложкой, на которую нанесен слой аморфного селена (~ 70 мк), и двумя электродами, расположенными на поверхности селена. Алюминиевый (~ 400 мк) электрод изолирован от поверхности, золотой электрод (0,2 мк) накладывается на поверхность селена, которая контактирует с плазмой положительного столба тлеющего разряда. Разность потенциалов имеет такой же порядок, как и напряжение в пристеночном слое плазмы, и может быть вызвана диффузией электронов положительного столба, приводящей к размыванию электронного компонента пристеночного слоя плазмы в селен. Разность потенциалов возрастает при уменьшении давления и увеличении тока разряда.

Иллюстраций 4. Библиографий 9.

ПРАВИЛА ДЛЯ АВТОРОВ

1. Статьи должны быть написаны на машинке через два интервала на одной стороне листа и представляться в двух экземплярах.

2. Формулы и буквенные обозначения должны быть аккуратно вписаны от руки чернилами. Для формул, выделенных в отдельную строку, следует оставлять достаточные пробелы в тексте. Греческие буквы должны быть обведены красным карандашом. Буквы, вписанные от руки, в формулах и в тексте должны подчеркиваться простым карандашом: прописные — двумя черточками снизу (напр., \underline{S}), строчные — двумя черточками сверху (напр., \overline{s}). Следует различать буквы O (прописную), o (строчную) и 0 (нуль), для чего буквы O и o подчеркивать двумя черточками, а нуль отмечать квадратной скобкой снизу (\underline{O} , \underline{o} , $\underline{0}$). Следует также различать буквы I и J (йот), для чего I писать, как римскую единицу, подчеркивая ее двумя черточками снизу. Векторы подчеркивать чернилами одной чертой снизу. Математические символы \cos , \sin , \lg и др., набираемые прямым шрифтом, и химические символы элементов (H , N , Cl , Fe и т. д.) отмечаются простым карандашом квадратной скобкой снизу ($\underline{\sin}$, $\underline{\lg}$, \underline{N} , \underline{Cl}). Показатели степени и индексы, а также надстрочные знаки отмечаются дугой \smile (для верхнего индекса) или \frown (для нижнего).

3. В связи с введением с 1 января 1963 г. Международной системы единиц измерения (СИ) размерность всех величин, принятых в статьях, должна соответствовать указанной системе единиц измерения.

4. Цитируемая в статье литература должна даваться автором не в виде подстрочных сносок, а общим списком в конце статьи с обозначением ссылки в тексте порядковой цифрой в квадратных скобках. Список литературы должен быть оформлен следующим образом:

а) для книг: фамилия и инициалы автора, полное название книги, номер тома, место и год издания;

б) для журнальных статей: фамилия и инициалы автора, название журнала, номер тома (подчеркнуть), номер выпуска, страница и год.

Ссылки на неопубликованные работы не допускаются.

5. Рисунки должны быть выполнены на белой бумаге тушью размером 15×20 см; надписи на рисунках не делать. Все обозначения указывать в тексте подрисуночных подписей. К статье прилагается список с номерами рисунков и текстом подрисуночных подписей. В тексте на полях обязательно указывается место для рисунков и таблиц.

Таблицы и список литературы печатаются на отдельных листах и прилагаются в конце статьи. Фотографии должны иметь контрастное изображение и быть отпечатаны на хорошей бумаге размером не менее 9×12 см. На обороте рисунков должны быть указаны фамилия автора, название статьи и номер рисунка.

6. В случае представления двух или более статей одновременно необходимо указывать желательный порядок их помещения.

7. Авторы должны избегать повторения одних и тех же данных в таблицах, графиках и в тексте статьи.

8. К статье обязательно прилагается 2 экз. реферата.

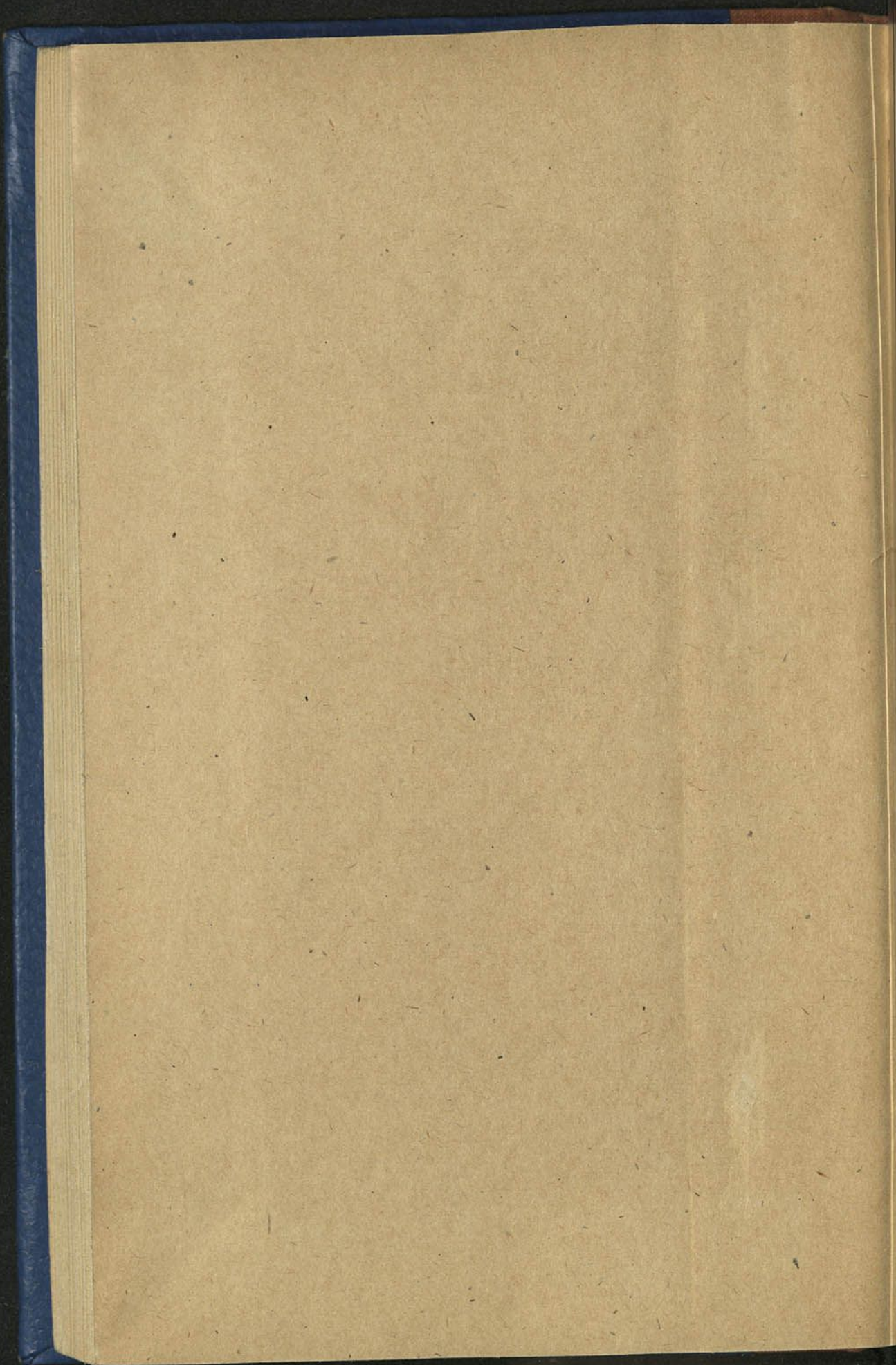
9. Корректуры статей авторам, как правило, не посылаются. В случае ссылки корректуры допускается лишь исправление ошибок типографии.

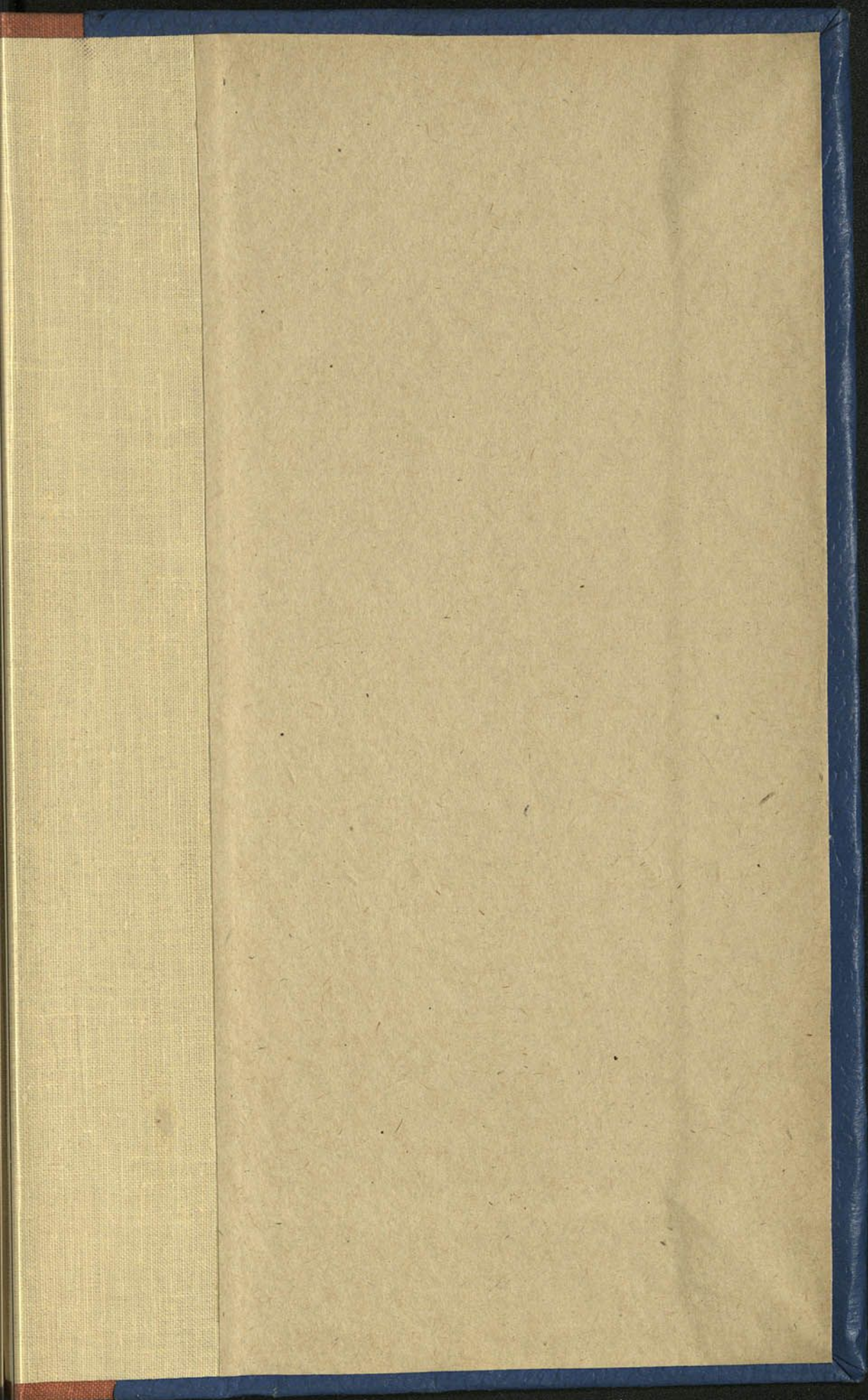
Корректра должна возвращаться в редакцию не позже, чем на следующий день после получения ее автором. Невозвращенные корректуры в срок не приостанавливают печатания статьи.

10. В случае возвращения статьи автору для исправления или при ее сокращении датой представления считается день получения редакцией окончательного текста.

60 к.

Индекс
74846





4430-150



8000000 1422947