

30к-3
58

ВЕСЦІ

АКАДЭМІІ НАВУК БССР

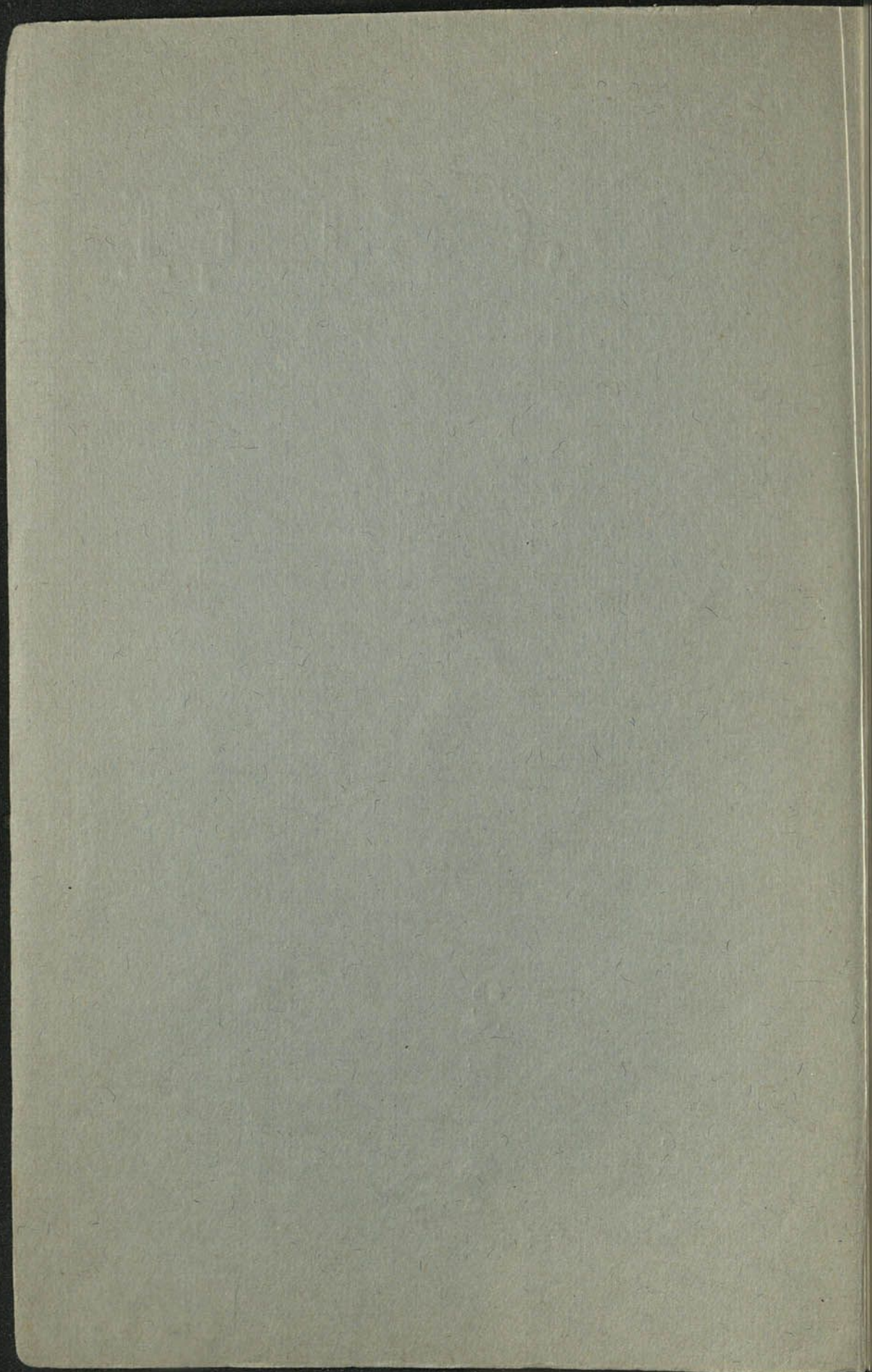
СЕРЫЯ
ФІЗІКА-МАТЭМАТЫЧНЫХ
НАВУК

Ба 05
4431

2

ВЫДАВЕЦТВА „НАВУКА І ТЭХНІКА“

МІНСК 1970





ИЗВЕСТИЯ

АКАДЕМИИ НАУК БССР

СЕРИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ
НАУК

№ 2

ИЗДАТЕЛЬСТВО „НАУКА И ТЕХНИКА“

МИНСК 1970

30K3

58

ВЕСЦІ

АКАДЭМІІ НАВУК БССР

СЕРЫЯ
ФІЗІКА-МАТЭМАТЫЧНЫХ
НАВУК

№ 2

ВЫДАВЕЦТВА „НАВУКА І ТЭХНІКА“

МІНСК 1970

Ба 05
4431



Рэдакцыйная калегія:

Ф. І. ФЕДАРАУ (галоўны рэдактар),
Д. А. СУПРУНЕНКА (нам. галоўнага рэдактара),
М. М. АЛЯХНОВІЧ, Ф. Д. ГАХАУ, У. І. КРЫЛОУ,
М. М. СІРАТА, У. Г. СПРЫНДЖУК, Я. І. ФІРСАУ,
С. А. ЧУНІХІН

И. И. ЖБАНКОВА

В. И. ЛЕНИН И ПРОГРЕСС ФИЗИЧЕСКОЙ НАУКИ

Около половины столетия отделяет нас от времени, когда Лениным были написаны философские работы «Материализм и эмпириокритицизм», «Философские тетради», «О значении воинствующего материализма» и др., давшие гениальное решение основных философских проблем, поставленных наукой того времени. С тех пор прошли годы, насыщенные глубокими социальными, техническими и научными переворотами. Современный этап развития науки характеризуется возрастающей ролью естествознания в развитии производства, все большей взаимосвязью наук, значительным ускорением процесса накопления научной информации. В этих условиях возрастает необходимость в философских обобщениях, обостряется интерес к методологическим проблемам, стимулируется дальнейшее развитие основных идей и принципов научной теории познания.

И сегодня основные принципы решения самых сложных методологических проблем науки мы находим в идейном наследии В. И. Ленина. По самой своей сущности философия диалектического материализма обращена в будущее. Материалистическая диалектика как метод познания и революционного преобразования мира критична и революционна по своей природе. Мастерски владея ею, В. И. Ленин вскрыл глубокие противоречия социального развития и указал пути их разрешения в горниле социалистической революции. Материалистическая диалектика, обращенная к решению вопросов теории познания, закономерностей развития естествознания и других наук, позволила В. И. Ленину сделать глубокие выводы о существенных тенденциях развития естествознания, и прежде всего физики, и высказать научные прогнозы о будущем их развитии, которые блестяще подтвердились в наше время.

Конец XIX и начало XX в. для физики были революционными. На смену классической шла новая физика. Были получены первые результаты, говорящие о сложном строении атома, открыты электрон, рентгеновские лучи, радиоактивность. В новую физику как основополагающие входили статистические и полевые представления. Совершенно явственно обнаружилась ограниченность классической механики и ее основных представлений, на основе которых до тех пор строилось все здание классической физики.

Революция в физике влекла за собой крушение и удаление из науки всякого рода неверных и устаревших идей. Быстрый рост физических знаний, решительное наступление в новую область атомных и субатомных явлений неизбежно приводили к крутому изменению господствовавшего ранее «стиля мышления».

Трудно и болезненно преодолевалась в физике абсолютизация классических принципов — идей об универсальности законов классической механики, об их абсолютной истинности; о неделимости атома, об атоме как последнем, самом простом элементе структуры материи; о непрерывности процесса передачи энергии и т. д. Даже такой революционный

факт, как открытие сложности атома, его «разрушимости», приводил первоначально к попыткам ради сохранения идеи существования самого «простого» и «последнего» структурного элемента материи, наделить предполагавшимися ранее свойствами атома вновь обнаруженный электрон. Но все же результатом революционной ломки основных физических воззрений явилось формирование новых физических представлений о материи и движении, об атомах и элементарных частицах, о пространстве и времени, о причинности и закономерности. Классическая физическая картина мира уступила место новой, построенной на базе основных идей квантовой физики и теории относительности.

Новизна основных физических представлений с необходимостью приводила к пересмотру традиционных философских воззрений. Естественнoнаучный материализм естествоиспытателей, классически охарактеризованный В. И. Лениным как «стихийное, неосознаваемое, неоформленное, философски-бессознательное убеждение подавляющего большинства естествоиспытателей в объективной реальности внешнего мира, отражаемой нашим сознанием»¹, оказался в ряде случаев беспомощным в борьбе против реакционных идеалистических воззрений, и определенная часть физиков сползла на позиции идеализма и агностицизма. Проанализировав состояние физики того времени, В. И. Ленин выявил наличие одновременно с революцией глубокого методологического кризиса физики, суть которого заключалась в конфликте, несоответствии между объективным диалектическим содержанием новых данных физики и старой метафизической философской позицией естествоиспытателей, которая не позволяла правильно философски оценить революционные сдвиги в науке. Воспользовавшись сложившейся ситуацией, сторонники субъективно-идеалистического направления в философии, махисты, объявили решительный поход против материализма в науке. Выдавая недостатки и ограниченность метафизического материализма за общие свойства всякого материализма, они объявили о мнимом крушении идей материализма якобы под давлением данных нового естествознания.

Однако глубокий философский анализ В. И. Лениным гносеологических выводов, вытекавших из новых открытий, полностью разоблачил несостоятельность махистских утверждений. В. И. Ленин писал: «Новейшие открытия естествознания — радий, электроны, превращение элементов — замечательно подтвердили диалектический материализм Маркса, вопреки учениям буржуазных философов с их «новыми» возвращениями к старому и гнилому идеализму»².

В результате выявления гносеологических и классовых корней «физического идеализма» В. И. Ленин прямо указал на единственный путь выхода из сложившегося кризиса — сознательное овладение физиками философией диалектического материализма как единственно верной методологией науки. Творчески применяя идеи материалистической диалектики, В. И. Ленин смог дать правильные ответы на множество сложных вопросов, которые были поставлены развитием физики того времени и с которыми оказались не в состоянии справиться сами естествоиспытатели. Диалектико-материалистическая теория познания была прямо противопоставлена гносеологическим воззрениям «физических» идеалистов. Диалектическое учение об истине разоблачало несостоятельность метафизического релятивизма махистов. В. И. Ленин дал глубокую критику непоследовательности и абсурдных идей махистской теории познания и сформулировал основные принципы марксистской теории познания.

¹ В. И. Ленин. Полн. собр. соч., т. 18, стр. 367.

² В. И. Ленин. Полн. собр. соч., т. 23, стр. 44.

Смелость и прозорливость ленинских идей, выдвинутых на основе конкретного изучения этого сложного и противоречивого этапа в развитии физики, была обусловлена глубочайшим пониманием марксизма, его творческим применением в области теории познания. В. И. Ленин не только вскрыл диалектический и материалистический характер новой физической картины мира, но и показал диалектический характер всего развития науки, человеческого познания, выявил взаимосвязь относительной и абсолютной истины в развитии новых физических идей и теорий. Прямым логическим выводом из этих принципиальных положений явилось утверждение о диалектическом материализме как единственно верной общей методологии физики. В. И. Ленин был твердо убежден, что «материалистический основной дух физики, как и всего современного естествознания, победит все и всяческие кризисы, но только с неприменной заменой материализма метафизического материализмом диалектическим»³. И это ленинское предвидение убедительно подтвердилось жизнью, дальнейшими успехами в развитии физики.

Революция в физике продолжается и сейчас. Физики усиленно работают над созданием единой теории элементарных частиц, интенсивно исследуют их структуру и взаимодействия; ведутся поиски «субэлементарных» материальных образований, выдвигаются новые гипотезы о специфических свойствах пространства и времени в микромире и т. д. И сейчас продолжают оставаться актуальными кардинальные методологические проблемы науки, к которым в свое время обращался В. И. Ленин. В новых модификациях и выражениях в современной физике по-прежнему встает основная философская проблема — об объективном содержании физических теорий, представлений и понятий.

Отражают ли эти теории объективно существующие физические процессы и явления или они только творения человеческого разума? Существуют ли независимо от человеческого сознания физическая реальность, причинность и закономерность, пространство и время? В зависимости от ответа на эти и подобные им вопросы в философском истолковании современных научных открытий как всегда проявляются две тенденции — материализма и идеализма. Как не вспомнить в этой связи пророческие слова В. И. Ленина, что «вопрос о том, принять или отвергнуть понятие материи, есть вопрос о доверии человека к показаниям его органов чувств, вопрос об источнике нашего познания, вопрос, который ставился и обсуждался с самого начала философии, вопрос, который может быть переряжен на тысячи ладов клоунами-профессорами, но который не может устареть...»⁴.

И сейчас еще нет недостатка в высказываниях идеалистического толка, которыми грешат нередко и крупные естествоиспытатели и философы за рубежом. «Современная атомная физика столкнула естествознание с материалистического пути, на котором оно стояло в XIX веке», — провозглашает В. Гейзенберг⁵. «Время материализма прошло», — говорит М. Борн⁶. «Эра материализма длилась до того дня, когда атомная бомба разорвалась над Хиросимой», — утверждает Ф. Франк⁷.

Но в этом хоре голосов все явственнее звучат нотки разочарования в методологической значимости для современной физики идеалистических и агностических философских концепций. Г. Рейхенбах отмечал, что современная физика нанесла тяжелый удар Канту и кантианству,

³ В. И. Ленин. Полн. собр. соч., т. 18, стр. 324.

⁴ В. И. Ленин. Полн. собр. соч., т. 18, стр. 131—132.

⁵ В. Гейзенберг. Физика и философия. ИЛ, 1963, стр. 38.

⁶ М. Борн. Физика в жизни моего поколения. М., 1963, стр. 99.

⁷ Ф. Франк. Философия науки. 1960, стр. 368.

опровергнув представления об априорности понятий пространства, времени, причинности. Все менее удовлетворяет физиков и позитивистская гносеология, о чем наглядно свидетельствуют факты убедительной критики позитивистских концепций самими физиками — М. Борном, А. Эйнштейном, Н. Бором, Луи де Бройлем и другими. Но от отрицания методологической ценности идеалистических и агностических философских идей для современной физики до сознательного следования принципам диалектического материализма для большинства зарубежных ученых еще сохраняется значительное расстояние. Большинство зарубежных физиков, хотя они и стоят на позициях стихийного материализма, незнакомо с философией диалектического материализма, нередко понаслышке отождествляют ее с вульгарным материализмом, рассматривая как враждебную науку. Поддаваясь влиянию буржуазной клеветы на марксизм, например, М. Борн неоднократно писал, что диалектический материализм отрицательно действует на науку, что он угрожает миру и т. д.⁸

Между тем, современный этап развития физики убедительно говорит о том, что материализм и диалектика проникают в науку необходимо, независимо от субъективных желаний и симпатий отдельных ученых. «Слово «диалектика»... срывается теперь с языка у физиков, даже незнакомых с диалектическим материализмом или чуждых, а порой и враждебных ему», — писал С. И. Вавилов⁹. Основные принципы материалистической диалектики живут в развивающемся физическом познании, приобретая соответствующие конкретные черты и особенности.

Экспериментальные данные о наличии у микрообъектов одновременно корпускулярных и волновых свойств не оспариваются сейчас ни одним физиком. Практика физического познания говорит о их несомненной объективности. Но эта ситуация порождает существенные трудности при попытках теоретически осмыслить ее, выразить единство корпускулярных и волновых свойств в диалектике понятий. В классической физике корпускулярные и волновые представления рассматривались как несовместимые, взаимоисключающие. Современная физика стоит перед необходимостью объединить их друг с другом в единой теории, и, решая эту задачу, она выдвигает философский вопрос: соответствуют или не соответствуют этим новым сложным и противоречивым представлениям реальные объекты микромира?

Ф. Франк, например, отрицает объективность электрона. Он утверждает, что понятие электрон выражает только совокупность физических величин, вводимых человеком для установления некоторых принципов, согласно которым мы можем судить о показаниях стрелок измерительных приборов¹⁰. Наряду с подобными утверждениями существует ряд материалистических концепций. Одни из них приписывают фундаментальное значение в структуре материи частицам, а волны представляют чем-то производным (Дж. Дж. Томсон), другие подчеркивают фундаментальную роль волновых представлений, рассматривая дискретные свойства материальных объектов микромира как вторичные (Э. Шредингер). В последние годы Д. Бом, Ж. Вижье и др. авторы предложили концепцию, согласно которой и корпускулы и волны предстают одинаково фундаментальными свойствами микрообъектов, но последние наделяются определенными классическими характеристиками (классиче-

⁸ M. Born. Physik und politik. Vandenhoeck Ruprecht in Gottingen, 1960, S. 51.

⁹ С. И. Вавилов. Собр. соч., т. III. М., Изд. АН СССР, 1956, стр. 76.

¹⁰ Ph. Frank. Foundation of Physics. «International Encyclopedia of United Science», 1, № 7, Chicago, 1946, p. 54.

ская траектория движения и др.). В методологическом отношении этим материалистическим точкам зрения присущ существенный недостаток: новые, квантовые закономерности микромира они пытаются «объяснить» на основе старых классических принципов. Существенно новый подход к решению вопроса содержали в себе идеи, высказанные Н. Бором. В сущности своей они были попыткой применить к анализу сложившейся ситуации диалектическую логику. Физики, сознательные сторонники диалектического материализма (В. А. Фок, Д. И. Блохинцев, И. Е. Тамм и др.), разработав и систематически развив идеи Бора, пришли к выводам, преодолевающим односторонность предложенных ранее решений.

Согласно этой точке зрения, материя, т. е. вещество и физические поля, не представляет собою ни частиц, ни волн в старом классическом смысле, ни их механического объединения. Корпускулярные и волновые свойства едины в своей противоположности, т. е. материя одновременно обладает свойствами и волн, и частиц. Поэтому движение микрообъектов только с определенным приближением можно охарактеризовать как перемещение частиц и распространение волн. Наиболее близки к таким моделям микрообъекты только в определенных, предельных экспериментальных условиях. Иными словами, сложная корпускулярно-волновая природа микрообъектов проявляется по-разному в разных экспериментах, которые реализуют условия проявления этих взаимоисключающих свойств. В силу того, что в действительности микрообъект не является ни частицей, ни волной (в классическом смысле), а чем-то «третьим», обладающим свойствами дискретности и непрерывности, данные об этих его свойствах, полученные в результате различных экспериментов, должны быть объединены как «дополнительные». Только в своем единстве они дают адекватный образ микрообъекта. Таким образом, решая проблему корпускулярно-волнового дуализма микрообъектов, современная физика приходит к представлениям о диалектическом единстве противоположностей — корпускулярных и волновых свойств материи. Универсальная гибкость понятий, которая выявляется в рассмотренном случае, дает убедительное подтверждение диалектичности мышления современной физики, т. к. «раздвоение единого и познание противоречивых частей его... есть *суть*... диалектики»¹¹.

Физика XX в. прошла в своем развитии ряд ступеней. Рождаются новые теории, возникают более общие и глубокие принципы и идеи. С обобщением физических теорий формируются новые понятия, удаляются из науки старые. Так на смену классическим понятиям абсолютной длины и абсолютной продолжительности пришли новые, релятивистские понятия длины и продолжительности, выступающие аспектами одного из инвариантов теории относительности — интервала. Квантовая теория преодолевает абсолютный характер корпускулярных и волновых представлений, становясь на точку зрения корпускулярно-волнового единства. Но старая физика, по словам Луи де Бройля, хотя и является, строго говоря, неверной в области атомных явлений, все же «сохраняет важную направляющую роль и, подобно нити Ариадны, ведет нас к дальнейшему пониманию истинных квантовых законов»¹². Сформировавшийся в физике общий методологический принцип соответствия, говорящий о наличии преемственной связи между новыми и старыми теориями, о их «предельном» переходе друг в друга, дает конкретное воплощение общей диалектико-материалистической концепции развития применительно к эволюции физических теорий.

¹¹ В. И. Ленин. Полн. собр. соч., т. 29, стр. 316.

¹² Луи де Бройль. Революция в физике. М., 1963, стр. 130.

Диалектические выводы рождаются в физике и под воздействием новых экспериментальных исследований. Так, исследования структуры элементарных частиц, законов их взаимодействия и взаимопревращений вносят новое содержание в само понятие «элементарности». Термин «элементарный» оказался относительным, так как на каждом этапе развития физики возникают новые представления об относительно «простейших» частицах, строения которых мы первоначально не знаем. Недавно была выдвинута гипотеза о существовании так называемых «кварков», из которых, как предполагается, состоят все известные элементарные частицы, способные к сильным взаимодействиям, — нуклоны, π -мезоны, K -мезоны. Эта гипотеза пока не подтверждена экспериментом. Но если она окажется истинной, то это будет означать, что физикой выявлен следующий, более глубокий уровень «элементарных» существ, за которым с развитием познания последуют и другие. Гносеологические уроки развития самой физики спустя полвека после В. И. Ленина заставляют ученых повторять, только иными словами, высказанные им идеи. «...«Сущность» вещей или «субстанция» тоже относительны, они выражают только углубление человеческого познания объектов, и если вчера это углубление не шло дальше атома, сегодня — дальше электрона и эфира, то диалектический материализм настаивает на временном, относительном, приблизительном характере всех этих *вех* познания природы прогрессирующей наукой человека. Электрон так же неисчерпаем, как и атом, природа бесконечна...»¹³. Заключительные слова этого важнейшего методологического высказывания В. И. Ленина по сути дела выступают девизом современных исследований в области структуры элементарных частиц. Знаменательно, что слова о бесконечности электрона были произнесены В. И. Лениным в то время, когда весь научный мир склонялся к мысли о существовании неделимых и неизменных частиц. Методологическую ценность этой идеи для современной физики переоценить невозможно.

Важной особенностью прогресса физического знания выступает не только углубление его, но и значительное расширение сферы действия физических представлений и методов в науке. Это обусловлено особой ролью физики в развитии всего современного естествознания.

Физика в целом и особенно физика микромира в двадцатом веке сыграла роль своеобразного познавательного «трамплина» для других отраслей естествознания, прокладывая дорогу в глубины материи, вооружая другие естественные науки новыми методами и экспериментальными установками. Именно под прямым воздействием квантовой механики возникла новая область знания — квантовая химия, раскрывшая сущность химической связи. Гигантский толчок развитию биологии дал электронный микроскоп, позволяющий проникнуть в структуру клетки. Механизмы химических, биохимических и физиологических процессов стали доступны экспериментальному исследованию благодаря использованию радиоактивных изотопов. Электроника и радиоэлектроника вошли как необходимые элементы в основу создания электронно-вычислительных машин и других кибернетических устройств. Создание молекулярных генераторов и усилителей советскими учеными Н. Г. Басовым и А. М. Прохоровым вызвало бурное развитие новой отрасли науки — квантовой электроники. С ее возникновением открылись широкие перспективы для связи и телевидения, создания высокоточных измерителей скорости, для обработки твердых материалов, тугоплавких веществ и т. д.

¹³ В. И. Ленин. Полн. собр. соч., т. 18, стр. 277.

Выполняя свою роль «пионера» в естествознании, физика подготовила базу дальнейшего самостоятельного развития других наук о природе, и теперь она как ведущая входит в группу лидирующих наук, куда помимо физики включаются биология, химия и кибернетика. В этих условиях философские идеи В. И. Ленина позволяют с правильных методологических позиций решать многие сложные проблемы диалектики научных понятий и методов, взаимосвязи наук, формирования и использования универсальных методов в познании.

Но было бы неверным понимать взаимосвязь современной физики и диалектического материализма упрощенно. Развитие физики не только подтверждает глубину и гениальность ленинских философских идей, не только «следует» за ними. Поскольку всякая практика всегда вносит в теоретическое знание элементы нового, не предусмотренного раньше, поэтому и физика (которая по отношению к научной теории познания выступает как своеобразная практика) в своем развитии обнаруживает некоторую недостаточность сложившегося философского знания, ставит перед ним новые теоретико-познавательные проблемы, двигает его вперед.

В. И. Ленин очень хорошо осознавал эту диалектическую связь научной философии и естествознания. Поэтому как важнейшее условие развития не только физики, но и философии диалектического материализма он рассматривал тесный союз философов-марксистов и естествоиспытателей. Глубокое изучение новейших достижений физики приводит к обогащению научного философского мировоззрения, ставит перед теорией познания новые проблемы, побуждает к обновлению и развитию понятийно-категориального аппарата философии. «...Следить за вопросами, которые выдвигает новейшая революция в области естествознания, и привлекать к этой работе... естествоиспытателей — это задача, без решения которой воинствующий материализм не может быть ни в коем случае ни воинствующим, ни материализмом», — писал В. И. Ленин в своем философском завещании, статье «О значении воинствующего материализма»¹⁴.

В свою очередь, овладение методологией диалектического материализма существенно облегчает ученым преодоление гносеологических конфликтов и сложных ситуаций, обусловленных продолжающейся в естествознании революцией. «Мы должны понять, — писал В. И. Ленин, — что без солидного философского обоснования никакие естественные науки, никакой материализм не может выдержать борьбы против натиска буржуазных идей и восстановления буржуазного мирозерцания»¹⁵.

В условиях современной научно-технической революции, при возрастающем сближении естествознания и техники и ускорении темпов технического применения научных результатов идеи В. И. Ленина дают ученым всех специальностей прочную основу для правильной оценки социальной роли науки и определения собственной гражданской, партийной позиции. Раскол современного мира на два больших лагеря — социализма и капитализма — порождает реальные возможности использования результатов науки, и прежде всего физики, в диаметрально противоположных целях: в интересах мира — и в интересах войны, в создании материально-технической базы коммунизма, воспитании нового человека — и для сохранения отживающего свой век капитализма, для упрочения и развития марксизма как революционной идеологии

¹⁴ В. И. Ленин. Полн. собр. соч., т. 45, стр. 29.

¹⁵ В. И. Ленин. Полн. собр. соч., т. 45, стр. 29—30.

пролетариата — и для непримиримой борьбы с ним с позиций буржуазной идеологии. Сейчас, как и полвека назад, социальная ориентация людей науки не может быть безразличной, беспартийной. Принцип партийности философии является одной из важнейших черт диалектического материализма. Согласно этому принципу во всех общих гносеологических выводах ученых, в понимании ими социальной роли науки В. И. Ленин всегда усматривал их определенные классовые позиции.

Советские ученые, сознательные и убежденные сторонники марксизма-ленинизма — революционной идеологии пролетариата, — своими научными достижениями вносят существенный вклад в коммунистическое строительство. Они сознательно ставят свою научную деятельность на службу коммунизму, отдавая ее результаты делу реального практического воплощения гениальных предвидений великого Ленина.

А. Е. ЗАЛЕССКИЙ

О ГРУППОВЫХ КОЛЬЦАХ РАЗРЕШИМЫХ ГРУПП

В теории колец широко известна следующая проблема: будет ли полупросто в смысле Джекобсона групповое кольцо произвольной группы над произвольным полем характеристики 0. Она решена положительно для всех групп для широкого класса полей. Аналогичная ситуация имеет место и в случае полей характеристики $p > 0$ при условии, что группа не имеет элементов порядка p . Картина резко меняется, если группа содержит элементы порядка p . Так, если для (локально конечной) p -группы радикал Джекобсона совпадает с фундаментальным идеалом, то групповое кольцо циклического расширения (абелевой) p -группы может быть полупросто. Отыскание (в групповых терминах) критерия полупростоты группового кольца над характеристическим полем (т. е. полем, характеристика которого равна порядку какого-либо элемента группы) является, по-видимому, трудной задачей. Публикации последних лет [1—6] посвящены частным классам групп. Даже для случая разрешимой группы этот вопрос пока не решен.

В этой статье дается критерий полупростоты группового кольца разрешимой группы, обладающей точным линейным представлением над каким-либо полем (теоремы 4, 4а). Попутно удается решить этот вопрос для случая периодической разрешимой группы (теорема 5), а также разрешимой группы, никакой элемент порядка p которой не содержится в инвариантной подгруппе с конечными классами сопряженных элементов (теорема 3а).

Самостоятельный интерес представляют (для нашей цели вспомогательные) результаты о следах идеалов группового кольца на групповом кольце подходящей подгруппы (при этом важно, чтобы последняя была в некотором смысле малой). Здесь под следом идеала I кольца K на подкольце L мы понимаем пересечение $I \cap L$. В случае нильпотентной группы всякий ненулевой идеал имеет ненулевой след на групповом кольце подгруппы тех элементов, которые имеют конечное число сопряженных (теорема 1). В произвольной разрешимой группе такую подгруппу указать не удалось, однако для 1) расширения нильпотентной с помощью нильпотентной (теорема 2) и 2) разрешимой группы, у которой инвариантные подгруппы с конечными классами не содержат p -элементов (в частности, при $p=0$ для любой разрешимой группы) такую роль играет некоторая инвариантная подгруппа с конечными классами сопряженных элементов (теорема 3). Отметим, что для случая групп без кручения такие результаты были получены автором ранее [7, 8].

§ 1. Перечислим принятые в статье обозначения, известные результаты, которые будут использоваться в дальнейшем, и приведем простейшие факты.

$H \triangleleft G$ — H — нормальный делитель группы G ; (g_i) — группа, порожденная элементами g_i ; p -элемент — элемент порядка p^α , $\alpha > 0$.

$[g, h] = ghg^{-1}h^{-1}$; $[M, N] = (\overline{mnm^{-1}n^{-1}})$, $m \in M$, $n \in N$.

$C_G(H)$ — централизатор H в группе G ;

$D_G(H) = \{d \in G \mid \{hdh^{-1}\}_{h \in H} \text{ — конечное множество}\}$. Эти обозначения будут использоваться и в том случае, когда G и H — подгруппы некоторой большой группы, причем не обязательно $G \supset H$. Если $G = H$, то индекс обычно будет опускаться, т. е. $D(H) = D_H(H)$, и $C(H) = C_H(H)$ — центр группы H .

f_p -группа — конечная группа, содержащая p -элемент; f_c -группа — группа с конечными классами сопряженных элементов.

Элемент g матричной группы G называется унитарным, если $g-1$ — нильпотентная матрица, т. е. $(g-1)^n = 0$ для подходящего n .

Запись $g_i \in G/H$, где $H \triangleleft G$, означает, что g_i — представители различных смежных классов G/H .

PG — групповое кольцо группы G над полем P ; JPG — радикал Джекобсона кольца PG ; $(\alpha)_{PG}$ — двусторонний идеал кольца PG , порожденный элементом $\alpha \in PG$. Все встречающиеся идеалы — двусторонние.

Если H — подгруппа G , I — идеал PG , то $I \cap PH$ называется следом I на PH .

(I) Если H — подгруппа G , то $D_G(H)$ — подгруппа G . Если $H \triangleleft G$, то $D_G(H) \triangleleft G$, $D(H) \triangleleft G$. Если $d_1, \dots, d_n \in D_G(H)$, то $H : C_H(d_1, \dots, d_n) < \infty$.

(II) Если $D(G)$ содержит p -элемент, то G содержит инвариантную f_p -подгруппу [9].

(III) Если G есть конечное объединение смежных классов по некоторым подгруппам G_i , то хотя бы одна из G_i имеет в G конечный индекс [9].

(IV) Линейная группа G над полем удовлетворяет условию минимальности для централизаторов, т. е. если $C_G(X_i) \supset C_G(X_{i+1})$, где X_i — подмножества G , и равенство не имеет места ни для такого i , то $\{i\}$ — конечное множество.

(V) Среди нормальных делителей линейной группы G , состоящих из унитарных элементов, имеется максимальный (унитарный радикал G). G_u нильпотентен, и если G реализуется над полем характеристики $p > 0$, то G_u является p -группой. G/G_u — конечное расширение абелевой группы.

(VI) Пусть G — нильпотентная линейная группа. Тогда G/G_u — конечное расширение своего центра [10].

(VII) Пусть $\Phi(G) = \{\varphi \in G \mid \{g^i \varphi g^{-i}\}, i \text{ пробегает целые числа, конечно для любого } g \in G\}$. Тогда $\Phi(G) \triangleleft G$.

(VIII) Пусть G^0 — подгруппа конечного индекса группы G , $\alpha \in PG$. Если $\alpha x = x\alpha$ для всех $x \in G^0$, то $\alpha \in PD(G)$.

Действительно, если $\alpha = \sum \rho_i g_i$, $\rho_i \in P$, $g_i \in G$, то $\sum \rho_i g_i x = \sum \rho_i x g_i$. Для каждого i найдется $j = j(i, x)$, такое, что $g_i x = x g_j$. Пусть x_{ij} — представитель класса тех $x \in G^0$, для которых $g_i x = x g_j$, если этот класс не пуст. Тогда $G^0 = \cup_j x_{ij} C_{G^0}(g_i)$, т. е. $C_{G^0}(g_i)$ — подгруппа конечного индекса в G^0 .

Отсюда следует, что $g_i \in D(G)$ для каждого i , так что $\alpha \in PD(G)$.

(IX) Если $G \supset H$, то $JPG \cap PH \subset JPH$ ([11], см. также [5]).

(X) Пусть P — поле характеристики $p > 0$. PG тогда и только тогда содержит нильпотентный идеал, когда G содержит инвариантную f_p -подгруппу [9].

(XI) Если G — группа без p -элементов и характеристика P равна p , то PG не содержит нильидеалов [9].

(XII) Предположим, что $H \triangleleft G$, $t \in G$, t — бесконечного порядка в G/H и $\alpha \in JPG \cap PH$. Тогда $\alpha \cdot t \alpha^{-1} \cdot t^2 \alpha^{-2} \dots t^v \alpha t^{-v} = 0$ для подходящего v [1, 2].

(XIII) Если G — f_c -группа, то JPG локально нильпотентен. Если G не содержит p -элементов, P — поле характеристики $p > 0$, то PG полупроста.

Доказательство. Ввиду (IX) утверждение (XIII) достаточно доказать для конечнопорожденной f_c -группы. Последняя является конечным

расширением своего центра и, следовательно, обладает центральным нормальным делителем Z без кручения с конечной факторгруппой. Так как PZ — кольцо без делителей нуля, то PG вкладывается в конечномерную алгебру U над полем частных кольца PZ . U удовлетворяет полиномиальному тождеству над полем P ([12], гл. X, § 6, пр. 1), и, следовательно, PG — PI -алгебра. Амицур показал ([13], th. 5), что JPG — нильдеал, следовательно, JPG локально нильпотентен ([12], гл. X, § 8). Второе утверждение следует теперь из (XI).

§ 2. Следы идеалов групповой алгебры разрешимой группы.

Теорема 1. Пусть $G/D(G)$ — нильпотентная группа, $I \neq 0$ — идеал PG . Тогда $I \cap PD(G) \neq 0$.

Мы будем доказывать индукцией по номеру нижнего центрального ряда следующее утверждение: пусть G_k — k -й член нижнего центрального ряда $G = G_0 \supset G_1 \supset \dots \supset G_n = D(G)$ группы G , $I \neq 0$ — идеал кольца PG_k , $gI g^{-1} = I$, для всех $g \in G$. Тогда $I \cap PD(G) \neq 0$. Тем самым будет доказана теорема 1.

Предположим, что это доказано для номера $k+1$ (при $k=n$ утверждение тривиально), и пусть

$$\tau = \alpha_0 + \sum_{i=1}^s \alpha_i g_i \in I, \quad \alpha_i \in PG_{k+1}, \quad g_i \in G_k/G_{k+1},$$

и предположим, что τ — элемент минимальной длины s такого вида (если $\tau = \alpha_0$, то доказывать нечего). Тогда, очевидно, для любого $\alpha \in PG_{k+1}$ $\alpha\tau$ и $\tau\alpha$ обязаны иметь длину s , если только они отличны от 0. Согласно индуктивному предположению, идеал (α_0) кольца PG_{k+1} имеет нетривиальное пересечение с $PD(G)$. Поэтому можно считать, что $\alpha_0 \in PD(G)$. Согласно (I), G содержит подгруппу G_0 конечного индекса, такую, что $x\alpha_0 = \alpha_0 x$ для всех $x \in G_0$. При $x \in G_0$ имеем

$$x\tau x^{-1} - \tau = \sum_{i=1}^s (x\alpha_i g_i x^{-1} - \alpha_i g_i) = \sum [x\alpha_i x^{-1} (xg_i x^{-1} g_i^{-1}) - \alpha_i] g_i \in I,$$

причем выражения в квадратных скобках принадлежат PG_{k+1} . Из минимальности τ легко следует, что эти выражения равны 0 и $\alpha_i g_i x = x\alpha_i g_i$. Согласно (VIII), $\alpha_i g_i \in PD(G)$, что и требуется.

Следствие. Пусть G — нильпотентная группа. $JPG \neq 0$ тогда и только тогда, когда G не содержит инвариантных f -подгрупп.

$JPG \neq 0$ влечет $JPD(G) \neq 0$, и ввиду (VIII) и (XI) $D(G)$ имеет p -элементы; согласно (II), G имеет инвариантную f -подгруппу. Обратное следует из (X).

Примечание. Отметим два случая, когда $D(G) = C(G)$:

- 1) G — линейная группа, связанная в топологии Зарисского;
- 2) G — нильпотентная группа без кручения. В последнем случае из теоремы 1 статьи [8] следует, что всякий идеал I кольца PG , такой, что $G \rightarrow PG/I$ — мономорфизм и $PC(G)/PC(G) \cap I$ — кольцо без делителей нуля, полностью определяется своим следом на $PC(G)$: $I = PG(PC(G) \cap I)$.

Лемма 1. Пусть H — нильпотентный нормальный делитель группы G , J — идеал PG . Тогда $J \cap PD_G(H) \neq 0$.

Доказательство аналогично доказательству теоремы 1.

Лемма 2. Пусть X — подгруппа группы G , $H \triangleleft G$, $\alpha, \beta \in PH$, $g \in G$. Предположим, что для всех $x \in X$, $\alpha x \beta g = \beta g x \alpha$. Тогда либо $\alpha x \beta = 0$ для всех x из некоторой подгруппы C конечного индекса группы X , либо $g \in HD_G(X)$.

Доказательство. Пусть $\alpha = \sum \rho_i h_i$, $\beta = \sum \rho'_i h'_i$, $\rho_i, \rho'_i \in P$, $h_i, h'_i \in H$. Положим $T_1 = \{x \in X \mid \alpha x \beta = 0\}$, $T_2 = \{x \in X \mid h_i x h'_i g = h'_i g x h_i$ для подходя-

щих i, j, k, l , $T_3 = \{x \in X \mid h_i x h_j' = h_k x h_l'\}$ для подходящих i, j, k, l . Очевидно, $T_1 \subset T_3$, $X = T_2 \cup T_3$. Ясно, что T_2 (соответственно T_3) есть конечная сумма правых смежных классов вида $yC_X(h_j'gh_i^{-1})$ (соответственно $yC_X(h_j'h_i^{-1})$). Согласно (III), хотя бы одна из групп $C_X(h_j'gh_i^{-1})$, $C_X(h_j'h_i^{-1})$ имеет конечный индекс в X . Если $X : C_X(h_j'gh_i^{-1}) < \infty$, то элемент $h_j'gh_i^{-1}$ имеет конечное число X -сопряженных, и лемма доказана. Итак, предположим, что все группы $C_X(h_j'gh_i^{-1})$ имеют в X бесконечный индекс. Пусть C — подгруппа конечного индекса в X , содержащаяся во всех тех подгруппах $C_X(h_j'h_i^{-1})$, которые имеют в X конечный индекс. Если $x \notin T_2$, то условие $\alpha x \beta = \beta g x \alpha$ влечет $\alpha x \beta = 0$. Если $C \subset T_2$, то X — объединение конечного числа смежных классов вида $yC_X(h_j'gh_i^{-1})$, откуда, как мы видели, следует заключение леммы. Итак, предположим, что для некоторого $x_0 \in C$ $\alpha x_0 \beta = 0$. Имеем при $x \in C$

$$\alpha x \beta = (\dots) + \sum \rho_i \rho_j' h_i x h_j' = \beta g x \alpha g^{-1},$$

где в скобки собраны те члены из $\sum \rho_i \rho_j' h_i x h_j'$, для которых при подходящих k, l $h_k x h_l' = h_i x h_j'$ для всех $x \in C$. На самом деле все члены этой суммы попадают в скобки. Действительно, для каждого $x \in C$ $h_i x h_j'$ равно либо $h_k x h_l'$ для подходящих k, l , либо $h_j' g x h_k g^{-1}$, т. е. как и выше, C — объединение конечного числа смежных классов вида $yC_C(h_j'gh_k^{-1})$, $yC_C(h_j'h_i^{-1})$, так что снова либо $C : C_C(h_j'gh_k^{-1}) < \infty$, либо $C : C_C(h_j'h_i^{-1}) < \infty$. Последнее означает, что член $h_i x h_j'$ попадает в скобки. Если имеет место первое, то $h_j'gh_k^{-1}$ имеет конечное число C -сопряженных и, следовательно, X -сопряженных, что доказывает лемму. Итак, все члены $\rho_i \rho_j' h_i x h_j'$ попадают в скобки, и при $x \in C$ $h_i x h_j' = h_k x h_l'$ для любых i, j и подходящих k, l . Но так как $\alpha x_0 \beta = 0$, $x_0 \in T_2 \setminus C$ и ρ_i, ρ_j' не зависят от x , то, учитывая определение C , получаем $\alpha x \beta = 0$ для всех $x \in C$.

Лемма 3. Пусть $H \subset V \subset G_0 \subset G$, $H \triangleleft G$, $[V, G_0] \subset H$, $G : G_0 < \infty$ и $I \neq 0$ — идеал PV , такой, что $gIg^{-1} = I$ для всех $g \in G$. Предположим, что G не содержит инвариантных \mathfrak{p} -подгрупп. Тогда $I \cap PHD_V(G) \neq 0$.

Доказательство. Пусть $\tau = \alpha_0 + \sum \alpha_i g_i \in I$, $\alpha_0, \alpha_i \in PH$, $g_i \in V/H$, $\alpha_1 \neq 0$ и предположим, что τ — элемент, содержащий наименьшее число слагаемых среди элементов такого вида. Вычислим при $x \in G_0$

$$\begin{aligned} x^{-1} \tau x \alpha_0 - x^{-1} \alpha_0 x \tau &= \sum (x^{-1} \alpha_i g_i x \alpha_0 - x^{-1} \alpha_0 x \alpha_i g_i) = \\ &= \sum [x^{-1} \alpha_i x \cdot x^{-1} g_i x g_i^{-1} \cdot g_i \alpha_0 g_i^{-1} - x^{-1} \alpha_0 x \alpha_i] g_i, \end{aligned}$$

причем выражение в квадратных скобках принадлежит PH . Следовательно, ввиду минимальности τ выражения в скобках $= 0$, так что $\alpha_i g_i x \alpha_0 = \alpha_0 x \alpha_i g_i$. Согласно лемме 2, либо все $g_i \in HD(G)$, и тогда доказывать нечего, либо для некоторого i $\alpha_0 x \alpha_i = 0$ для всех x из некоторой подгруппы G_1 конечного индекса группы G . Из минимальности τ следует, что $\alpha_0 x \alpha_0 = 0$ для всех $x \in G_1$. Сошлемся теперь на [9], где при доказательстве теоремы III попутно доказано следующее утверждение.

Если для некоторого $\alpha \in PG$ для всех $x \in G_1$, $G : G_1 < \infty$, $x^{-1} \alpha x \alpha = 0$, то G содержит инвариантную \mathfrak{p} -подгруппу. Отсюда вытекает лемма 3.

Теорема 2. Пусть Γ — разрешимая группа без инвариантных \mathfrak{p} -подгрупп, и предположим, что Γ обладает подгруппой конечного индекса Γ^0 , которая является расширением нильпотентной группы с помощью нильпотентной. Тогда Γ обладает инвариантной подгруппой S с конечными

классами сопряженных элементов, и такой, что если $I \neq 0$ — идеал PG , то $I \cap PS \neq 0$.

Доказательство. Можно считать, что $\Gamma^0 \triangleleft \Gamma$. Применив лемму 3 к ситуации $G_0 = H = \Gamma^0$, $V = G = \Gamma$, получим $I \cap P\Gamma^0 D(\Gamma) \neq 0$. Пусть $= \Gamma^0 \supset \Gamma^1 \supset \dots \supset \Gamma^k = \Gamma^{k+1}$ — нижний центральный ряд группы Γ^0 . Применяя лемму 3 последовательно к ситуациям $H = \Gamma^i D(\Gamma)$, $V = \Gamma^{i-1} D(\Gamma)$, $G_0 = \Gamma^0$, $G = \Gamma$, получим на k -том шаге $I \cap PND(\Gamma) \neq 0$, где $N = \Gamma^k$ — нильпотентная группа. Применяя теперь теорему 1 к ситуации $G = ND(\Gamma)$, получим $I \cap PS \neq 0$, где $S = D(ND(\Gamma))$.

Лемма 4. Пусть Γ^k — ряд коммутантов группы Γ , $\Gamma^0 = \Gamma$, $k = 0, 1, \dots, n$. Положим $Y^k = \Gamma^k L^k$, где $L^k = D(Y^{k-1})$, $k = 1, 2, \dots, n$, $Y^0 = \Gamma^0$. Тогда $Y^k \supset Y^{k+1}$, $Y^k \triangleleft \Gamma$, $L^k \subset L^{k+1}$, $[Y^k, Y^k] \subset Y^{k+1}$.

Доказательство. Из определения $D_G(H)$ следует, что $D(H) = D_{D(H)}(H)$. Имеем $L^{k+1} = D_{Y^k}(Y^k) \supset D_{Y^k}(Y^{k-1}) = D_{\Gamma^k L^k}(Y^{k-1}) \supset D_{L^k}(Y^{k-1}) \supset D_{L^k}(Y^{k-1}) = L^k$. Остальные соотношения леммы очевидны.

Теорема 3. Предположим, что разрешимая группа Γ не имеет содержащих p -элементы инвариантных подгрупп с конечными классами сопряженных элементов, p — характеристика поля P . Тогда в Γ имеется инвариантная подгруппа Δ с конечными классами сопряженных элементов и такая, что если $I \neq 0$ — идеал PG , то $I \cap P\Delta \neq 0$.

Доказательство. В качестве Δ примем группу L^n из леммы 4 и проведем доказательство индукцией по Y^k , т. е., предположив, что $I \cap PY^k \neq 0$, покажем, что $I \cap PY^{k+1} \neq 0$. Так как $Y^n = L^n = \Delta$, теорема будет доказана. Итак, пусть $\tau = \alpha_0 + \sum \alpha_i g_i \in I$, $\alpha_0, \alpha_i \in PY^{k+1}$, $g_i \in Y^k/Y^{k+1}$. Так как $[Y^k, Y^k] \subset Y^{k+1}$, то мы можем использовать лемму 3, положив $V = G = G_0 = Y^k$, $H = Y^{k+1}$ (поясним, что Y^k не может содержать инвариантных p -подгрупп, ибо такие содержатся в $D(Y^k) \triangleleft \Gamma$, $D(Y^k)$ — f -группа). Согласно лемме 3, $I \cap PY^{k+1} D(Y^k) \neq 0$, и так как $Y^{k+1} \supset D(Y^k)$, то $I \cap PY^{k+1} \neq 0$, что и требовалось.

Следствие. Пусть P — не характеристическое поле для разрешимой группы G (в частности, поле нулевой характеристики). Тогда G содержит инвариантную f -подгруппу Δ , такую, что для любого идеала $I \neq 0$ кольца PG $I \cap P\Delta \neq 0$. Кроме того, PG полупроста.

Первое утверждение есть частный случай теоремы 3, второе вытекает из теоремы 3 и (XIII). Тот факт, что $JPG = 0$ в случае поля характеристики 0, доказан также в [2, 5].

Примечание. Если G — разрешимая группа без кручения, а I — такой идеал, что $G \rightarrow PG/I$ — мономорфизм, и $P\Delta/P\Delta \cap I$ — кольцо без делителей нуля, то имеет место более сильный результат [7]: I полностью определяется своим следом на $P\Delta$: $I = PG(I \cap P\Delta)$. Отметим, что полупростота PG в этом случае (факт, доказанный недавно Стоунгвером [6]) — непосредственное следствие теоремы 1 [7].

§ 3. Радикал Джекобсона группового кольца.

Лемма 5. Пусть G — циклическое расширение абелевой группы H экспоненты p , $G = \langle H, t \rangle$, H_0 — конечная подгруппа группы H . Предположим, что для любого $h \in H$, $h \neq 1$, и любого целого m $t^m h_0 \neq h_0 t^m$. Тогда существует целое r , такое, что группа $\langle H_0, t^r H_0 t^{-r}, t^{2r} H_0 t^{-2r}, \dots \rangle$ — прямое произведение групп $t^k H_0 t^{-rk}$.

Доказательство. Группу H (в аддитивной записи) удобно рассматривать как модуль над полем Q из p элементов. Если учесть действие на H автоморфизма $h \rightarrow tht^{-1}$, то H превращается в модуль над кольцом $Q[t]$ полиномов от одной переменной над полем Q . Утверждение леммы означает, что $Q[t]$ -подмодуль $\langle H_0, t^r H_0 t^{-r}, \dots \rangle$ свободен.

Пусть s_1, \dots, s_n — базис H_0 над Q (т. е. s_i — образующие группы H_0). Модуль $Q[t]s_1$ свободен, ибо в противном случае множество тех $\sigma \in Q[t]$, для которых $\sigma s_1 = 0$, есть ненулевой идеал T кольца $Q[t]$ и имеет место изоморфизм $Q[t]$ -модулей $Q[t]s_1$ и $Q[t]/T$. Но для всякого ненулевого идеала T Q -модуль $Q[t]/T$ конечномерен, так что (s_1, ts_1t^{-1}, \dots) — конечная группа. Ясно, что это противоречит условию леммы.

Пусть теперь $k(t^m)$ — наибольший номер, для которого $s_i, 1 \leq i \leq k(t^m)$ — свободные образующие модуля $Q[t^m]$ (s_1, \dots, s_k). Ясно, что $k(t) \leq k(t^m) \leq k(t^{m^l})$ — целые. Следовательно, существует такой номер m , что $k(t^{m^l}) = k(t^m)$ для любого целого l . Обозначим этот номер через k . Без ущерба для общности можно считать, что $m = 1$. Если $k = n$, то доказывать нечего. В противном случае для всякого l имеем

$$\tau_l = P_{1,l}(t^l)s_1 + \dots + P_{k,l}(t^l)s_k + P_{k+1,l}(t^l)s_{k+1} = 0,$$

где $P_{i,l}(t^l)$ — полиномы от t^l , $P_{i,l}(t^l) \in Q[t^l] \subset Q[t]$.

Вычислим $P_{k+1,1}(t)\tau_l - P_{k+1,l}(t^l)\tau_1$; получим

$$[P_{k+1,1}(t)P_{1,l}(t^l) - P_{1,1}(t)P_{k+1,l}(t^l)]s_1 + \dots + \\ + [P_{k+1,1}(t)P_{k,l}(t^l) - P_{k,1}(t)P_{k+1,l}(t^l)]s_k = 0,$$

и так как s_1, \dots, s_k — свободные образующие над $Q[t]$, то все коэффициенты равны 0:

$$P_{k+1,1}(t)P_{i,l}(t^l) = P_{i,1}(t)P_{k+1,l}(t^l).$$

Так как s_1, \dots, s_k — свободные образующие, то $P_{k+1,l}(t^l) \neq 0$ для всех l . Тогда в поле частных $Q(t)$ кольца $Q[t]$ имеем

$$\frac{P_{i,l}(t^l)}{P_{k+1,l}(t^l)} = \frac{P_{i,1}(t)}{P_{k+1,1}(t)},$$

т. е. $P_{i,1}(t)/P_{k+1,1}(t) \in Q(t^l)$ для любого целого l . Это возможно лишь в том случае, если $P_{i,1}(t)/P_{k+1,1}(t) = c_i$, c_i — константа, $c_i \in Q$. Тогда

$$P_{k+1,1}(t)(c_1s_1 + \dots + c_ks_{k+1}) = 0,$$

так что для элемента $s = s_{k+1} + c_1s_1 + \dots + c_ks_k \in H_0$ $P_{k+1,1}(t)s = 0$, причем, очевидно, $s \neq 0$, и рассуждение, проведенное в начале доказательства, показывает, что это невозможно. Лемма доказана.

Лемма 5а. Лемма 5 сохраняется, если H — произвольная абелева р-группа.

Доказательство. Пусть $H_{p^l} = \{h \in H | h^{p^l} = 1\}$. Очевидно, что H_{p^l} — характеристический нормальный делитель H , и $H_0 \subset H_{p^l}$ для подходящего l , так что лемму достаточно доказывать для $H = H_{p^l}$.

Прежде всего отметим, что условие леммы выполняется для группы G/H_p . Действительно, если $t^m h t^{-m} = h \pmod{H_p}$, $h \in H_p$, то $t^m h^p t^{-m} = h^p$ в группе H , что противоречит условию леммы.

Сделаем индуктивное предположение. Пусть $N = n_1 n_2$, где n_1 — номер, для которого

$$(H_0 \cap H_p) \cap \overline{(t^{n_1}(H_0 \cap H_p)t^{-n_1}, \dots, t^{n_1\alpha}(H_0 \cap H_p)t^{-n_1\alpha}}) = 1 \quad (1)$$

для любого целого α , а n_2 — номер, для которого

$$H_0 \cap \overline{(t^{n_2}H_0t^{-n_2}, \dots, t^{n_2\beta}H_0t^{-n_2\beta})} \subset H_p, \quad (2)$$

и предположим, что $h_1 h_2 \dots h_s \in H_0$, $h_i \in t^{N_i} H_0 t^{-N_i}$. Согласно (2), $h_1 h_2 \dots h_s \in H_0 \cap H_p$. Далее из (2) следует, что $h_i \in H_p$ и $t^{-N_i} h_i t^{N_i} \in H_0 \cap H_p$. Согласно (1), все $h_i = 1$. Лемма доказана.

Следствие. Пусть G — циклическое расширение абелевой p -группы H , P — поле характеристики p . PG полупроста тогда и только тогда, когда G не имеет инвариантных fp -подгрупп.

Доказательство. Предположим, что $JPG \neq 0$ и G не имеет инвариантных fp -подгрупп. Пусть $G = \langle H, t \rangle$; по лемме 3 $JPG \cap PHD(G) \neq 0$. Из (1) следует, что $D(G) \subset H$. Согласно (XII), для любого k и $\tau \in JPG \cap PHD(G)$ $\tau^k \tau^{-k} \dots t^{kv} \tau t^{-kv} = 0$ для подходящего v . Если $\tau = \rho_0 + \sum \rho_i h_i$, $h_i \in H$, $\rho_i \in P$, то в этом выражении при $k = r$, r — как в лемме 5а, ρ_0^v не может уничтожиться, — противоречие. Обратное следует из (X).

Лемма 6. Если H — подгруппа линейной группы G , то $H : C_H(D_G(H)) \leq \infty$.

Это следует легко из (I) и (IV).

Лемма 7. Пусть Γ — разрешимая линейная группа над полем характеристики $p > 0$, причем Γ не имеет инвариантных fp -подгрупп. Тогда Γ содержит инвариантную подгруппу S , обладающую следующими свойствами: 1) силовская p -подгруппа S_p группы S абелева и выделяется в S прямым множителем; $S = S_p \times D(\Gamma)$; 2) $\Gamma/C_\Gamma(S)$ — конечное расширение абелевой группы; 3) если $I \neq 0$ — идеал $P\Gamma$, то $I \cap PS \neq 0^*$.

Доказательство. Пусть Γ_p — унипотентный радикал группы Γ . Согласно (V), Γ удовлетворяет условию теоремы 2. Тогда группа $S = D(\Gamma) \cdot JD(\Gamma_p)$ удовлетворяет условию 3). Покажем, что выполняются 1) и 2). Пусть Z — центр группы $D(\Gamma_p)$. По лемме 6 $D(\Gamma_p) : Z < \infty$, так что коммутант группы $D(\Gamma_p)$ — конечная инвариантная подгруппа Γ . Следовательно, $D(\Gamma_p)$ — абелева, и $D(\Gamma_p) \cap D(\Gamma) = 1$, т. е. $S = D(\Gamma_p) \times D(\Gamma)$. Далее, из нильпотентности Γ_p и того факта, что $\Gamma : C_{\Gamma_p}(D(\Gamma_p)) < \infty$ (лемма 6) легко следует, что взаимный коммутант групп Γ_p и $D(\Gamma_p)$ конечен, так что условие леммы влечет $D(\Gamma_p) = C(\Gamma_p)$. Следовательно, $C_\Gamma(D(\Gamma_p)) \supset \Gamma_p$. По лемме 6, $\Gamma : C_\Gamma(D(\Gamma)) < \infty$, откуда вытекает 2), если учесть (V).

Лемма 8. В условиях леммы 7 предположим дополнительно, что $JPG \neq 0$. Тогда группа S_p содержит конечную подгруппу H_0 , такую, что для каждого $t \in \Gamma$ найдется элемент $1 \neq \sigma \in H_0$, такой, что для подходящего m $t^m \sigma t^{-m} = \sigma$.

Доказательство. Согласно лемме 7, $JPG \cap PS \neq 0$; пусть $\tau \in JPG \cap PS$, $\tau = \alpha_0 + \sum \alpha_i g_i$, $\alpha_0, \alpha_i \in D(\Gamma)$, $g_i \in S_p$. Учитывая (XII) для любого k и подходящего v , имеем

$$\tau^k \tau^{-k} \dots t^{kv} \tau t^{-kv} = 0. \tag{3}$$

Так как $\Gamma : C_\Gamma(D(\Gamma)) < \infty$ (лемма 6), то достаточно доказать лемму для $t \in C_\Gamma(D(\Gamma))$. Если $\alpha_i = 0$, то $\alpha_0^v = 0$. Пусть $\alpha_1 \neq 0$. Примем в леммах 5 и 5а в качестве H_0 подгруппу S_p , порожденную g_1 , в качестве H — группу S_p и в качестве G — группу $\langle S_p, t \rangle$. Очевидно, нам нужно рассматривать только тот случай, когда предположения лемм 5 и 5а выполняются. Подставив в (3) выражение $\tau = \alpha_0 + \sum \alpha_i g_i$, на основании леммы 5а заключаем, что член α_0^v не может уничтожиться, следовательно, $\alpha_0^v = 0$. Аналогичный вывод мы можем сделать для любого элемента идеала (α_0) кольца $PD(\Gamma)$. Поэтому (α_0) — нильидеал кольца $PD(\Gamma)$. Согласно (XI), $D(\Gamma)$ обязана содержать p -элементы, что ввиду (II) противоречит условию. Лемма доказана.

*) Здесь P — поле характеристики $p > 0$, вообще говоря, отличное от поля, над которым реализуется линейная группа Γ .



Лемма 9. Пусть T — абелева группа подстановок множества M , M_0 — конечное подмножество M ; предположим, что для любого $t \in T$ найдется элемент $m \in M_0$, такой, что орбита $t^i(m)$ (при переменном i) конечна. Тогда для подходящего $m_0 \in M_0$ орбиты $t^i(m_0)$ конечны для любого $t \in T$.

Доказательство. Мы можем считать, что M_0 не содержит собственных подмножеств, удовлетворяющих условиям леммы. Пусть $N(t) = \{m \in M_0 | t^i(m) \text{ конечна}\}$, $N(t) \neq M_0$, $t_1 \in T$. Ввиду конечности M_0 найдутся такие элементы tt_1^k , tt_1^l , $k \neq l$, что $R = N(tt_1^k) \cap N(tt_1^l) \neq \emptyset$. Пусть $b \in R$; тогда для подходящих α , β $(tt_1^k)^\alpha(b) = b = (tt_1^l)^\beta(b)$ и $t^{\alpha\beta} t_1^{k\alpha\beta}(b) = t^{\alpha\beta} t_1^{\alpha\beta l}(b)$, откуда $t_1^{(k-l)\alpha\beta}(b) = b$, т. е. $b \in N(t_1)$. Аналогично $t^{\alpha\beta} t_1^{k\alpha\beta}(b) = b = t^{\beta k\alpha} t_1^{k\alpha\beta}(b)$, откуда $b \in N(t)$. Таким образом, для любого $t_1 \in T$ $N(t) \cap N(t_1) \neq \emptyset$. Это противоречит минимальности M_0 .

Теорема 4. Если Γ — разрешимая линейная группа над полем характеристики p , P — (другое) поле характеристики $p > 0$, то критерий полупростоты $P\Gamma$ доставляют следующие условия: 1) Γ не имеет инвариантных $\{p$ -подгрупп; 2) Γ не имеет инвариантных p -подгрупп H , таких, что $\Gamma/C_\Gamma(H)$ — локально конечная группа.

Доказательство. Необходимость этих условий очевидна. Пусть $JPG \neq 0$. В соответствии с леммой 7 Γ обладает нормальным делителем конечного индекса Γ_0 , который действует на S_p посредством сопряжения как абелева группа автоморфизмов. Принимая в лемме 9 $M = S_p$, $M_0 = S_0$ (см. лемму 8), заключаем, что для некоторого $s \in S_p$ орбиты $g^i s g^{-i}$ при переменном i конечны для любого $g \in \Gamma$. Обозначим через H минимальный нормальный делитель группы S_p , содержащий s . Тогда $H \subset \Phi(G) \cap S_p$ (см. (VII)). В силу (IV) $C_\Gamma(H) = \bigcap C_\Gamma(h_i)$ для конечного множества элементов $h_i \in H$. Следовательно, $\Gamma/C_\Gamma(H)$ — периодическая группа. Теорема следует теперь из того факта, что периодическая разрешимая группа локально конечна.

Теорема 4а. Пусть Γ — разрешимая линейная группа над полем характеристики $q \neq p$, P — поле характеристики p . Критерий полупростоты кольца PG доставляет условие: Γ не содержит инвариантных $\{p$ -подгрупп.

Доказательство. Пусть Γ_u — унипотентный радикал группы Γ . Согласно (V), Γ удовлетворяет условию теоремы 2, так что $S = D(\Gamma)D(\Gamma_u)$, и $JPG \cap PS \neq 0$. Группа Γ_u , а вместе с ней и группа $D(\Gamma_u)$, не содержит p -элементов; ввиду (II) это верно для группы $D(\Gamma)$; следовательно, S не содержит p -элементов. Далее, S — группа с конечными классами; остается сослаться на (IX), чтобы заключить, что $JPS \neq 0$. Это противоречит (XIII).

Теорема 3а. В условиях теоремы 3 PG полупроста.

Доказательство. Имеем $JPG \cap P\Delta \neq 0$, так что $JP\Delta \neq 0$ (IX). Тогда Δ содержит p -элементы (XI), что противоречит условию.

Лемма 10. Пусть $H \triangleleft G$, причем H — $\{p$ -группа, содержащая p -элементы. Предположим, что $G/C_G(H)$ — локально конечная группа. Тогда PG имеет локально нильпотентный идеал.

Доказательство. В группе H всякий элемент конечного порядка содержится в конечном нормальном делителе; отсюда легко следует, что центр ζ кольца PH содержит нильпотентные элементы. Пусть $\alpha^n = 0$, $\alpha \in \zeta$. Тогда $(\alpha)_{PG}$ — локально нильпотентный идеал PG . В самом деле, всякий элемент β этого идеала можно представить в виде $\beta = \sum \alpha_i g_i$, где $\alpha_i = g \alpha g^{-1}$ для подходящего $g \in G$, $\alpha_i \in \zeta$. Пусть $N = mn$, где m — порядок группы $\{g_i\}$ по модулю $C_G(H)$. Тогда, очевидно, $\beta^N = 0$, ибо каждое слагаемое в разложении $(\sum \alpha_i g_i)^N$ равно 0.

Теорема 5. Пусть G — периодическая разрешимая группа, P — поле характеристики $p > 0$. Тогда критерий полупростоты PG доставляет ус-

ловие: G не имеет содержащих p -элементы инвариантных подгрупп с конечными классами сопряженных элементов.

Доказательство. Необходимость этого условия доказана в лемме 10. Достаточность — частный случай теоремы За.

Литература

1. Wallace D. A. R. Math. Z., **100**, № 4, 1967.
2. Passman D. S. Proc. Amer. Math. Soc., **20**, № 2, 1969.
3. Wallace D. A. R. Math. Z., **108**, № 1, 1968.
4. Wallace D. A. R. Proc. London. Math. Soc. third serie, **19**, № 3, 1969.
5. Green J. A., Stonehewer S. E. J. Algebra, **13**, № 1, 1969.
6. Stonehewer S. E. J. Algebra, **13**, № 1, 1969.
7. Залесский А. Е. Матем. сб., **67**, № 1, 1965.
8. Залесский А. Е. ДАН БССР, **10**, № 10, 1966.
9. Passman D. S. Michigan Math. J., **9**, № 4, 1962.
10. Супруненко Д. А. Разрешимые и нильпотентные линейные группы. Минск, 1958.
11. Amitsur S. A. Michigan Math. J., **6**, № 3, 1959.
12. Джекобсон Н. Строение колец. М., 1961.
13. Amitsur S. A. Proc. Amer. Math. Soc., **8**, № 4, 1957.

Институт математики
АН БССР

Поступило в редакцию 8.X 1969

П. И. СОБОЛЕВСКИЙ, Л. А. ЯНОВИЧ

О ПРИБЛИЖЕННОМ ВЫЧИСЛЕНИИ ИНТЕГРАЛОВ ВИНЕРА

За последние годы появился ряд работ, посвященных приближенному вычислению интегралов Винера. Большинство из имеющихся приближенных формул авторы строили, исходя из требований точности этих формул для функциональных многочленов заданной степени. Наряду с такого рода исследованиями задача аппроксимации винеровских интегралов изучалась также и с некоторых других точек зрения.

В 1951 г. Р. Камерон [1] построил формулу, точную для функциональных многочленов степени не выше третьей. В. С. Владимировым [2] в 1960 г. была получена более высокой точности формула, которая верна для некоторого класса функциональных многочленов четвертой степени.

А. Г. Конхейм и В. Л. Миранкер [3], развивая дальше идеи Р. Г. Камерона и В. С. Владимирова, указали способ нахождения функции $\Theta_n(u, t)$ и меры ν_n при построении формулы $(2n + 1)$ -ой степени точности вида

$$\int_C F(x) d_w x \approx \int F[\Theta_n(u, \cdot)] \nu_n(du), \quad (1)$$

где $\int_C F(x) d_w x$ — интеграл Винера от функционала $F(x)$ по пространству C непрерывных на $[0, 1]$ функций $x(t)$, удовлетворяющих условию $x(0) = 0$, а $\int F[\Theta_n(u, \cdot)] \nu_n(du)$ — n -кратный интеграл (Лебега—Стилтьеса) по всему n -мерному евклидовому пространству или некоторой части его. Из формулы (1) как частный случай получаются формулы Р. Камерона и В. С. Владимирова.

Для континуальных интегралов по условной мере Винера формула вида (1), точная для функциональных многочленов степени $2n + 1$, получена Л. Д. Фосдиком и Г. Ф. Жорданом [4]. Л. Д. Фосдиком также в случае условной меры Винера строится по другому принципу приближенная формула [5] для интегралов от функционалов вида

$$F(x) = \exp \left\{ - \int_0^1 V[x(t)] dt \right\}$$

в виде n -кратного интеграла Римана с ошибкой порядка $O(n^{-2})$.

Наряду с формулами для интегралов Винера с постоянным весовым функционалом возникает естественная необходимость в построении приближенных формул для интегралов вида

$$\int_C p(x) F(x) d_w x,$$

где $\rho(x)$ — некоторый фиксированный, отличный от константы, функционал. В 1966 г. Т. Тобиас [6] обобщил формулу В. С. Владимирова на интеграл с весом

$$\rho_1(x) = \exp \left\{ \lambda \int_0^1 \rho(t) x^2(t) dt \right\},$$

где λ — числовой параметр, а функция $\rho(t) > 0$ и непрерывна на отрезке $[0, 1]$. Формула А. Г. Конхейма и В. Л. Миранкера вида (1) для интегралов с этим же весом обобщается в работе [7].

В настоящей статье дается построение формулы вида (1) для интегралов Винера $\int_C \rho(x) F(x) d_W x$ с весовым функционалом

$$\begin{aligned} \rho(x) &= \exp \left\{ \int_0^1 [\lambda \rho(t) x^2(t) + g(t) x(t)] dt \right\} = \\ &= \rho_1(x) \exp \left\{ \int_0^1 g(t) x(t) dt \right\}, \end{aligned}$$

где $g(t) \in L[0, 1]$, которая включает в себя известные сейчас приближенные формулы, полученные исходя из условий точности их для функциональных многочленов данной степени.

Пусть (C, Ω, W) обозначает вероятностное пространство, состоящее из 1) C — пространства действительных непрерывных на $[0, 1]$ функций $x(t)$, удовлетворяющих условию $x(0) = 0$; 2) Ω — σ -алгебры подмножеств из C , порожденной цилиндрическими множествами функций; 3) W — меры Винера, определенной на Ω .

Пространство интегрируемых по мере Винера функционалов $F(x)$, заданных на C , обозначим через $L(C, \Omega, W)$, а сам интеграл Винера, как и раньше, будем обозначать $\int_C F(x) d_W x$.

Пусть R^n — евклидово n -мерное пространство, $\nu = \nu_1$ — симметричная вероятностная мера на борелевских множествах B^1 из R^1 . Соответственно $\nu_n = \nu \times \nu \times \dots \times \nu$ будет обозначать меру борелевских множеств B^n из R^n при $n > 1$. Через $B_{[0, 1]}^1$ обозначим σ -алгебру борелевских подмножеств отрезка $[0, 1]$.

Обозначим через $\rho(\xi, t)$ функцию, определенную на $R^1 \times [0, 1]$, удовлетворяющую следующим условиям:

$$1) \rho(\xi, t) = -\rho(-\xi, t);$$

$$2) \prod_{i=1}^m \rho(\xi, t_i) \in L(R^1, B^1, \nu), \quad 1 \leq m \leq 2n + 1;$$

$$3) \int \rho(\xi, s) \rho(\xi, t) \nu(d\xi) = \frac{1}{2} G(s, t), \quad (2)$$

где $G(s, t)$ — функция Грина краевой задачи

$$f''(t) + \lambda \rho(t) f(t) = 0, \quad (3)$$

$$f(0) = f'(1) = 0, \quad (4)$$

при этом $\rho(t) > 0$ на $[0, 1]$ и $\rho(t) \in C[0, 1]$.

Пусть далее

$$\Theta_n(u, t) = c_1 \rho(u_1, t) + c_2 \rho(u_2, t) + \dots + c_n \rho(u_n, t),$$

где $\{c_i^2\}$ — корни многочлена

$$P_n(z) = z^n - \frac{z^{n-1}}{1!} + \frac{z^{n-2}}{2!} - \dots + (-1)^n \frac{1}{n!}.$$

Лемма. Пусть λ_0 — наименьшее собственное значение задачи (3), (4), а $f_\lambda(t)$ при $\lambda < \lambda_0$ — любое нетривиальное решение уравнения (3), удовлетворяющее граничному условию $f'_\lambda(1) = 0$. Тогда

$$\int_C \rho(x) F(x) d_w x = A \int_C F \left[f_\lambda(\cdot) \int_0^{(\cdot)} \frac{dx(s)}{f_\lambda(s)} + a(\cdot) \right] d_w x, \quad (5)$$

где

$$A = \left\{ \frac{f_\lambda(1)}{f_\lambda(0)} \right\}^{1/2} \exp \left\{ \frac{1}{4} \int_0^1 x_0^2(t) dt \right\},$$

$$a(t) = \frac{1}{2} f_\lambda(t) \int_0^t \frac{x_0(s)}{f_\lambda(s)} ds, \quad x_0(t) = \frac{1}{f_\lambda(t)} \int_t^1 g(s) f_\lambda(s) ds.$$

Доказательство. Известно [8] следующее равенство:

$$\begin{aligned} & \int_C \exp \left\{ \lambda \int_0^1 \rho(t) x^2(t) \right\} \Phi(x) d_w x = \\ & = \left\{ \frac{f_\lambda(1)}{f_\lambda(0)} \right\}^{1/2} \int_C \Phi \left[x(\cdot) + f_\lambda(\cdot) \int_0^{(\cdot)} \frac{f'_\lambda(s)}{f_\lambda^2(s)} x(s) ds \right] d_w x, \end{aligned}$$

которое справедливо при указанных в лемме предположениях для всех суммируемых по Винеру с этим весом функционалов $\Phi(x)$.

Воспользуемся этим равенством, положив

$$\Phi(x) = \exp \left\{ \int_0^1 g(t) x(t) dt \right\} F(x),$$

сделав затем замену переменной

$$x(t) = y(t) + \frac{1}{2} \int_0^t x_0(s) ds$$

в преобразованном интеграле Винера и некоторые простые вычисления, приходим к соотношению (5).

Теорема 1. При выполнении условий леммы справедлива для любого полиномиального функционала $F(x)$ степени $2n+1$ ($n=0, 1, 2, \dots$) следующая формула:

$$\int_C \rho(x) F(x) d_w x = A \int F[\Theta_n(u, \cdot) + a(\cdot)] v_n(du). \quad (6)$$

Доказательство. Для того чтобы равенство (6) было справедливо для любого полиномиального функционала степени не выше $2n + 1$, очевидно, достаточно, чтобы оно было верным для функционалов

$$F_k(x) = \prod_{i=1}^k x(t_i), \quad (0 < t_i \leq 1; i = 1, 2, \dots, k; k = 1, 2, \dots, 2n + 1).$$

Преобразуем интеграл $I_k = \int_C \rho(x) F_k(x) d_w x$, используя лемму, к следующему виду:

$$\begin{aligned} I_k &= A \int_C \prod_{i=1}^k \left\{ f_{\lambda}(t_i) \int_0^{t_i} \frac{dx(s)}{f_{\lambda}(s)} + a(t_i) \right\} d_w x = \\ &= A \int_C \prod_{i=1}^k \left\{ \int_0^1 \alpha_i(s) dx(s) + a(t_i) \right\} d_w x, \end{aligned} \quad (7)$$

где

$$\alpha_i(s) = \begin{cases} f_{\lambda}(t_i) & \text{при } s < t_i \\ f_{\lambda}(s) & \text{при } s \geq t_i \\ 0 & \text{при } s \geq t_i. \end{cases}$$

Выражение, стоящее справа в (6), для функционала $F_k(x)$ примет вид

$$J_k = A \int \prod_{i=1}^k \{ \Theta_n(u, t_i) + a(t_i) \} v_n(du). \quad (8)$$

Как видно из (7) и (8), а также из свойств функции $\Theta_n(u, t)$ и симметричности меры v_n , при выполнении равенств

$$\int_C \prod_{i=1}^{2p} \left\{ \int_0^1 \alpha_i(s) dx(s) \right\} d_w x = \int \prod_{i=1}^{2p} \Theta_n(u, t_i) v_n(du)$$

для $p = 1, 2, \dots, n$ формула (6) будет иметь место.

Известно [9], что

$$\int_C \prod_{i=1}^{2p} \left\{ \int_0^1 \alpha_i(s) dx(s) \right\} d_w x = \frac{1}{2^p} \sum_{k=1}^p \prod_{i=1}^p \left\{ \int_0^1 \alpha_{i_{2k-1}}(t) \alpha_{i_{2k}}(t) dt \right\},$$

где суммирование ведется по всем различным разбиениям на p пар $\{(i_1, i_2), (i_3, i_4), \dots, (i_{2p-1}, i_{2p})\}$ чисел $(1, 2, \dots, 2p)$.

С другой стороны, при выбранной функции $\Theta_n(u, t)$ имеем

$$\int \prod_{i=1}^{2p} \Theta_n(u, t_i) v_n(du) = \sum_{k=1}^p \prod_{i=1}^p \left\{ \int \rho(u, t_{i_{2k-1}}) \rho(u, t_{i_{2k}}) v(du) \right\},$$

где суммирование производится по тому же множеству, что и в предыдущей сумме.

Так как

$$\int_0^1 \alpha_{i_{2k-1}}(t) \alpha_{i_{2k}}(t) dt = G(t_{i_{2k-1}}, t_{i_{2k}}),$$

где

$$G(s, t) = f_\lambda(s) f_\lambda(t) \int_0^{\min(s, t)} \frac{d\tau}{f_\lambda^2(\tau)}$$

— функция Грина краевой задачи (3), (4) (см. [6]), то при выборе функции $\rho(u, t)$ из условия (2) формула (6) будет справедливой.

При $\rho(t) \equiv 1$, $\lambda = 0$ и $g(t) \equiv 0$ эта теорема доказана в работе [3].

Таким образом, при получении приближенных формул для интегралов вида $\int_C \rho(x) F(x) d_w x$ необходимо уметь строить функции $\rho(u, t)$ с указанными раньше свойствами. Рассмотрим сейчас этот вопрос.

Сначала будем искать решение уравнения

$$\int_0^\infty \rho_+(u, s) \rho_+(u, t) \tilde{\nu}(du) = \frac{1}{4} G(s, t), \quad (9)$$

где $\tilde{\nu}$ — мера борелевских множеств B_+^1 полуоси $R_+^1 = [0, \infty)$, $\tilde{\nu}(R_+^1) = \frac{1}{2}$, а $\rho_+(u, t) \in L^2(R_+^1 \times [0, 1], B_+^1 \times B_{[0, 1]}^1, \tilde{\nu} \times \mu)$ (μ обозначает меру Лебега).

Теорема 2. Решение уравнения (9) определяется формулой

$$\rho_+(u, t) \sim \sum_{j, k=1}^\infty a_{j, k} \Phi_j(t) \Psi_k(u), \quad (10)$$

где $\{\Psi_k(u)\}$ — любая полная ортонормальная система функций в $L^2(R_+^1, B_+^1, \tilde{\nu})$, $\{\Phi_j(t)\}$ и $\{\mu_j\}$ — соответственно ортонормальная система собственных функций и собственных значений интегрального уравнения

$$\frac{1}{4} \int_0^1 G(s, t) \Phi_j(t) dt = \mu_j \Phi_j(s),$$

а коэффициенты $a_{j, k}$ удовлетворяют условию

$$\sum_{k=1}^\infty a_{j_1, k} a_{j_2, k} = \mu_{j_1} \delta_{j_1, j_2},$$

$\delta_{j, k}$ — символ Кронекера.

Доказательство. Подставим ряд (10) в уравнение (9). Используя ортогональность функций $\{\Psi_k(u)\}$ и условия, накладываемые на коэффициенты $a_{j, k}$, получим

$$\int_0^\infty \rho_+(u, s) \rho_+(u, t) \tilde{\nu}(du) = \sum_{j=1}^\infty \mu_j \Phi_j(s) \Phi_j(t).$$

С другой стороны,

$$\frac{1}{4} G(s, t) \sim \sum_{j=1}^\infty \mu_j \Phi_j(s) \Phi_j(t).$$

Отсюда следует доказательство теоремы 2.

Доказательство этой теоремы по существу ничем не отличается от доказательства такой же теоремы, полученной в [3] для случая

$$G(s, t) = \min(s, t).$$

Если сейчас за ν взять четное продолжение меры $\tilde{\nu}$, то в качестве иско- мой функции $\rho(x, t)$ можно взять нечетное (относительно x) продолжение $\rho_+(x, t)$ на $R^1 \times [0, 1]$.

Частные случаи. 1. Пусть ν — нормированная мера Лебега на $[-1, 1]$, (т. е. $\nu(dx) = \frac{1}{2} dx$). Функция Грина краевой задачи (3), (4) задается формулой

$$G(s, t) = f_\lambda(s) f_\lambda(t) \int_0^{\min(s, t)} \frac{du}{f_\lambda^2(u)}.$$

Тогда, как легко проверить, решением уравнения

$$\int_{-1}^1 \rho(x, s) \rho(x, t) dx = G(s, t)$$

будет функция

$$\rho(x, t) = \frac{f_\lambda(t)}{f_\lambda(|x|)} \Theta(x, t),$$

где

$$\Theta(x, t) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{sign} x & \text{при } 0 \leq |x| < t \leq 1, \\ 0 & \text{при } 0 \leq t \leq |x| \leq 1. \end{cases}$$

В этом случае придем к формуле

$$\begin{aligned} & \int_C \exp \left\{ \lambda \int_0^1 \rho(t) x^2(t) dt + \int_0^1 g(t) x(t) dt \right\} F(x) d_w x \approx \\ & \approx \frac{1}{2^n} \left\{ \frac{f_\lambda(1)}{f_\lambda(0)} \right\}^{\frac{1}{2}} \exp \left\{ \frac{1}{4} \int_0^1 x_0^2(t) dt \right\} \times \\ & \times \int_{-1}^1 \dots \int_{-1}^1 F \left[\sum_{k=1}^n c_k \rho(u_k, \cdot) + a(\cdot) \right] du_1 \dots du_n, \end{aligned} \quad (11)$$

где $\{c_k^2\}$ — по-прежнему корни многочлена $P_n(z)$.

В частности, при $g(t) \equiv 0$ получим формулу, построенную в [7].

Пусть $\rho(t) \equiv 1$, а $\lambda = 0$. Тогда формула (11) примет вид

$$\begin{aligned} & \int_C \exp \left\{ \int_0^1 g(t) x(t) dt \right\} F(x) d_w x \approx \\ & \approx \frac{1}{2^n} \exp \left\{ \frac{1}{4} \int_0^1 \left(\int_t^1 g(s) ds \right)^2 dt \right\} \int_{-1}^1 \dots \int_{-1}^1 F \left[\sum_{k=1}^n c_k \Theta(u_k, \cdot) + \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} \int_0^{(\cdot)} \left(\int_\tau^1 g(s) ds \right) d\tau \right] du_1 \dots du_n. \end{aligned} \quad (12)$$

2. Пусть ν — мера на V^1 из R^1 , определяемая равенством

$$\nu\{(-\infty, x]\} = \sum_{\substack{-\infty < k < \infty \\ k < x}} A_k,$$

где A_k — некоторые положительные числа, удовлетворяющие условию

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} A_k = 1, \quad A_k = A_{-k}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Тогда

$$\int \rho(u, s) \rho(u, t) \nu(du) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_k \rho(k, s) \rho(k, t),$$

а $\frac{1}{2} G(s, t)$ может быть разложена по собственным ортонормированным функциям интегрального уравнения

$$\frac{1}{2} \int_0^1 G(s, t) \Phi(t) dt = \mu \Phi(s)$$

в ряд

$$\sum_{j=1}^{\infty} \mu_j \Phi_j(s) \Phi_j(t).$$

Очевидно, что равенство (2) будет иметь место, если положить

$$\rho(u, t) = \begin{cases} 0 & \text{для } -1 < u < 1, \\ \sqrt{\frac{\mu_k}{2A_k}} \Phi_k(t) & \text{для } u \in [k, k+1), \\ -\sqrt{\frac{\mu_k}{2A_k}} \Phi_k(t) & \text{для } u \in (-k-1, -k], \\ & (k = 1, 2, \dots). \end{cases}$$

Тогда для такой функции $\rho(u, t)$ и соответственно указанной выше меры ν получим из равенства (6) формулу

$$\int_C \rho(x) F(x) d_{\mathbb{W}} x \approx \int_C \rho(x) F(x) d_{\mathbb{W}} x \approx \approx A \sum_{k_1, \dots, k_n = -\infty}^{\infty} A_{k_1} \dots A_{k_n} F \left[\sum_{\nu=1}^n c_{\nu} \rho(k_{\nu}, \cdot) + a(\cdot) \right], \quad (13)$$

точную для функциональных многочленов $(2n+1)$ -й степени.

В частности, формула, точная для функциональных многочленов 3-й степени, имеет вид

$$\int_C \rho(x) F(x) d_{\mathbb{W}} x \approx A \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_k F[\rho(k, \cdot) + a(\cdot)], \quad (14)$$

из которой при $g(t) \equiv 0$, а

$$A_k = \mu_k \left[\int_0^1 G(s, s) ds + 4\mu_k \right]^{-1}, \quad A_k = A_{-k}, \quad k = 1, 2, \dots,$$

$$A_0 = 1 - 2 \sum_{k=1}^{\infty} A_k,$$

получаем формулу, установленную в [6].

Как известно, при таком выборе коэффициентов A_k эта формула точна и для некоторого вида функционалов четвертой степени.

Рассмотрим случай $g(t) \equiv 0$, $\rho(t) = 1$.

Нетривиальное решение $f_\lambda(t)$ уравнения

$$f''(t) + \lambda f(t) = 0$$

при условии $f'_\lambda(1) = 0$ есть

$$f_\lambda(t) = \cos \sqrt{\lambda}(t-1),$$

а ортонормальная система собственных функций и собственных значений интегрального уравнения

$$\frac{1}{2} \int_0^1 G(s, t) \Phi(t) dt = \mu \Phi(s)$$

соответственно будет

$$\left\{ \sqrt{2} \sin \left(k - \frac{1}{2} \right) \pi t \right\}, \left\{ \frac{2}{(2k-1)^2 \pi^2 - 4\lambda} \right\} \quad (k = 1, 2, \dots).$$

Тогда формула (14) переписывается следующим образом:

$$\int_C \exp \left\{ \lambda \int_0^1 x^2(t) dt \right\} F(x) d_w x \approx \frac{1}{\cos^{\frac{1}{2}} \lambda} \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_k F[x_k(t)],$$

где

$$x_0(t) \equiv 0, \quad x_k(t) = \sqrt{2} \{A_k [(2k-1)^2 \pi^2 - 4\lambda]\}^{-\frac{1}{2}} \sin \left(k - \frac{1}{2} \right) \pi t,$$

$$x_{-k}(t) = -x_k(t), \quad k = 1, 2, \dots$$

Если в предыдущей формуле положить $\lambda = 0$, а

$$A_k = \frac{4}{(2k-1)^2 \pi^2 + 16}, \quad k = 1, 2, \dots,$$

$$A_0 = 1 - \frac{1}{2} \operatorname{th} 2,$$

придем к формуле В. С. Владимирова [2].

Примеры. 1. Вычислим по формуле (11) интеграл

$$I = \int_C \exp \left\{ \int_0^1 x^2(t) dt \right\} \left[\int_0^1 x(t) dt \right]^{2m} d_w x = \frac{(2m-1)!!}{\cos^{\frac{1}{2}} 1} \left(\frac{\operatorname{tg} 1 - 1}{2} \right)^m.$$

Функционал $\exp \left\{ \int_0^1 x^2(t) dt \right\}$ берем в качестве веса, который является частным случаем рассматриваемого в статье функционала $\rho(x)$, т. е. получается из него при $g(t) \equiv 0$, $\rho(t) \equiv 1$, $\lambda = 1$.

Функция $f_\lambda(t)$ в данном случае будет $f_\lambda(t) = \cos(t-1)$, а

$$\rho(u, t) = \frac{\cos(t-1)}{\cos(|u|-1)} \Theta(u, t).$$

Применяя формулу (11) к данному интегралу, получим

$$I \approx \frac{1}{2^n} \frac{1}{\cos^{\frac{1}{2}} 1} \int_{-1}^1 \dots \int_{-1}^1 \left\{ \int_0^1 \sum_{k=1}^n c_k \rho(u_k, t) dt \right\}^{2m} du_1 \dots du_n =$$

$$= \frac{1}{2^n} \frac{1}{\cos^{\frac{1}{2}} 1} \int_{-1}^1 \dots \int_{-1}^1 \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{v=1}^n c_v \operatorname{sign} u_v \operatorname{tg} (|u_v| - 1) \right\}^{2m} du_1 \dots du_n.$$

Учитывая равенства $s_k = \sum_{i=1}^n c_i^{2k} = 0$, для $1 < k \leq m$ и $s_1 = 1$ будем иметь при $m \leq n$

$$I = \frac{(2m-1)!!}{\cos^{\frac{1}{2}} 1} \left\{ \frac{1}{4} \int_{-1}^1 \operatorname{tg}^2 (|u| - 1) du \right\}^m = \frac{(2m-1)!!}{\cos^{\frac{1}{2}} 1} \left[\frac{\operatorname{tg} 1 - 1}{2} \right]^m.$$

Формула (11) дает в этом случае точный результат, так как $F(x) = \left\{ \int_0^1 x(t) dt \right\}^{2m}$ — функциональный многочлен степени $2m$.

2. Рассмотрим интеграл

$$J = \int_C \exp \left\{ \int_0^1 [\lambda \rho(t) x^2(t) + g(t) x(t)] dt \right\} \left\{ \int_0^1 g(t) x(t) dt \right\}^3 d_w x =$$

$$= \left\{ \frac{f_\lambda(1)}{f_\lambda(0)} \right\}^{\frac{1}{2}} 4b^4 (3 + 2b^2) e^{b^2},$$

где

$$b^2 = \frac{1}{4} \int_0^1 \left[\frac{1}{f_\lambda(t)} \int_t^1 g(s) f_\lambda(s) ds \right]^2 dt.$$

Убедимся, что формула (11) при $n = 1$, которая будет в этом случае иметь вид

$$\int_C p(x) F(x) d_w x \approx \frac{1}{2} \left\{ \frac{f_\lambda(1)}{f_\lambda(0)} \right\}^{\frac{1}{2}} \exp \left\{ \frac{1}{4} \int_0^1 x_0^2(s) ds \right\} \times$$

$$\times \int_{-1}^1 F \left[\frac{f_\lambda(\cdot)}{f_\lambda(|u|)} \Theta(u, \cdot) + a(\cdot) \right] du,$$

примененная к данному примеру, дает точный результат.

В самом деле,

$$\frac{1}{2} \int_{-1}^1 \left\{ \int_0^1 \left[g(t) \frac{f_\lambda(t)}{f_\lambda(|u|)} \Theta(u, t) + g(t) a(t) \right] dt \right\}^3 du =$$

$$= 6b^2 \int_0^1 g(t) a(t) dt + \left\{ \int_0^1 g(t) a(t) dt \right\}^3.$$

А так как

$$\int_0^1 g(t) a(t) dt = 2b^2,$$

где, как и раньше,

$$a(t) = \frac{1}{2} f_\lambda(t) \int_0^t \frac{x_0(s)}{f_\lambda(s)} ds, \quad b^2 = \frac{1}{4} \int_0^1 x_0^2(t) dt,$$

то указанное выше утверждение действительно справедливо.

3. Вычислим еще приближенно интеграл

$$I_3 = \int_C \exp \left[\int_0^1 x(t) dt \right] \left\{ \int_0^1 x(t) dt \right\}^4 d_w x = \frac{145}{6^4} e^{\frac{1}{12}},$$

взяв за вес функционал

$$p(x) = \exp \left[\int_0^1 x(t) dt \right].$$

Используем для этого формулу (12), положив в последней $g(t) \equiv 1$, $n = 1$. Будем иметь

$$\begin{aligned} I_3 &\approx e^{\frac{1}{12}} \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \left[\int_0^1 \left[\Theta(u, t) + \frac{1}{2} \left(t - \frac{t^2}{2} \right) \right] dt \right]^4 du = \\ &= e^{\frac{1}{12}} \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{sign} u (1 - |u|) + \frac{1}{6} \right]^4 du = 101,8 \frac{e^{\frac{1}{12}}}{6^4}. \end{aligned}$$

В этом случае данная формула дает приближенное значение с величиной погрешности

$$\Delta I_3 = \frac{1}{30} e^{\frac{1}{12}}.$$

Литература

1. Cameron R. H. Duke Math. J., 18, № 1, 111, 1951.
2. Владимиров В. С. УМН, 15, в. 4 (94), 1960.
3. Kopheim A. G., Miranker W. L. Math. Comp., 21, № 97, 49, 1967.
4. Fosdick L. D., Jordan H. F. J. Comp. Phys., 3, № 1, 1, 1968.
5. Fosdick L. D. Math. Comp., 19, № 90, 225, 1965.
6. Тобиас Т. Изв. АН ЭССР, сер. физ.-мат. и техн. наук, № 1, 1966.
7. Янович Л. А. ДАН БССР, 13, № 9, 1969.
8. Cameron R. H., Martin W. T. Bull. Amer. Math. Soc., 51, № 2, 73, 1945.
9. Винер Н. Нелинейные задачи в теории случайных процессов. ИЛ, 1961.

Институт математики
АН БССР

Поступило в редакцию 17.X 1969

А. К. ПОКАЛО

**ЛИНЕЙНЫЕ МЕТОДЫ ПРИБЛИЖЕНИЯ ПРОИЗВОДНЫХ
 И ИНТЕГРАЛОВ В СМЫСЛЕ ВЕЙЛЯ
 ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ**

1. Пусть $f(x)$ — 2π -периодическая дифференцируемая функция. Обозначим через $F_\gamma(x)$ производную Вейля функции $f(x)$ порядка γ , если $\gamma > 0$, интеграл Вейля этой функции порядка $-\gamma$, если $\gamma < 0$ и $F_0(x) = f(x)$. Положим

$$f_\gamma(x) = F_\gamma(x) \cos \frac{\gamma\pi}{2} - \bar{F}_\gamma(x) \sin \frac{\gamma\pi}{2}, \quad (*)$$

где $\bar{F}_\gamma(x)$ — функция, сопряженная с $F_\gamma(x)$.

Используя разложение функции $f(x)$ в ряд Фурье, в настоящей работе строим суммы $U_{n,\gamma}(f, x)$, аппроксимирующие функцию $f_\gamma(x)$ и указываем условия, при выполнении которых уклонение функции $f_\gamma(x)$ от указанных сумм представимо в форме

$$U_{n,\gamma}(f, x) - f_\gamma(x) = \sum_{\gamma < \alpha} b_\alpha(n) f_\alpha(x) + o(E_n(f_\gamma) \ln n),$$

где $E_n(f_\gamma)$ — наилучшее приближение функции $f_\gamma(x)$ тригонометрическими полиномами порядка не выше n .

В п. 2 определяются классы рассматриваемых функций $f(x)$ и семейство изучаемых сумм $U_{n,\gamma}(f, x)$. В п. 3 получены оценки, дополняющие доказанную А. В. Ефимовым в работе [2] теорему 4. Пункт 4 посвящен доказательству основной теоремы 1. Там же рассмотрены два частных случая.

Полученные в работе результаты распространяются на классы $W_{\beta}^r M$ и $W_{\beta}^r L (r > 0)$.

Выражаю глубокую благодарность А. Х. Турецкому за внимание к работе и ценные советы.

2. Класс непрерывных 2π -периодических функций $\varphi(x)$, для которых

$$\sup_{|h| < \delta} \max_x |\varphi(x) - \varphi(x+h)| \leq K\omega_1(\delta),$$

где $\delta > 0$ и функция $\omega_1(\delta)$ является модулем непрерывности, обозначим через $KH_1[\omega]$. Аналогично через $KH_2[\omega]$ обозначим класс непрерывных 2π -периодических функций $\varphi(x)$, для которых

$$\sup_{|h| < \delta} \max_x |\varphi(x-h) - 2\varphi(x) + \varphi(x+h)| \leq K\omega_2(\delta),$$

где $\delta > 0$ и функция $\omega_2(\delta)$ является модулем гладкости, удовлетворяющим условию

$$\omega_2(\lambda\delta) \leq (\lambda + 1)\omega_2(\delta) \quad (\lambda > 0).$$

Будем иметь в виду, не оговаривая этого особо, что из условия $\varphi(x) \in KH_i[\omega]$ ($i = 1, 2$) не следуют ни сходимости ряда Фурье функции $\varphi(x)$,

ни существование сопряженной функции. Класс $KH_2[\omega]$ мы будем рассматривать также при дополнительном условии

$$\int_0^{\delta} \frac{\omega_2(t)}{t} dt = O(\omega_2(\delta)), \quad (1)$$

накладываемом на функцию $\omega_2(t)$. Условие (1) достаточно для существования функции $\bar{\varphi}(x)$, сопряженной с функцией $\varphi(x) \in KH_2[\omega]$, и равномерной сходимости рядов Фурье функций $\varphi(x)$ и $\bar{\varphi}(x)$.

Через $KW_{\beta}^r H_i[\omega]$ ($i = 1, 2; r \geq 0; \beta$ — действительное число) обозначим классы непрерывных 2π -периодических функций $f(x)$, представимых в форме

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\pi k^r} \int_0^{2\pi} \varphi(x+t) \cos\left(kt + \frac{\beta\pi}{2}\right) dt, \quad (2)$$

где

$$\varphi(x) \in KH_i[\omega] \quad (i = 1, 2),$$

$$\int_0^{2\pi} \varphi(t) dt = 0.$$

Функция

$$F_{\gamma}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\pi k^{r-\gamma}} \int_0^{2\pi} \varphi(x+t) \cos\left(kt + \frac{\beta+\gamma}{2}\pi\right) dt,$$

где γ — любое действительное число, не превосходящее r , при $0 < \gamma \leq r$ совпадает с производной Вейля функции $f(x)$, при $\gamma < 0$ — интегралом Вейля этой функции и $F_0(x) = f(x)$.

Через $f_{\gamma}(x)$ обозначим функцию, представимую рядом (2), если в нем r заменено на $r - \gamma$ ($\gamma \leq r$, $f_0(x) = f(x)$). Функции $f_{\gamma}(x)$, $F_{\gamma}(x)$ и $\bar{F}_{\gamma}(x)$ ($\gamma \leq r$) удовлетворяют соотношению (*).

Функцию $f_r(x)$ будем рассматривать лишь при выполнении условия (1), достаточного для того, чтобы остаток

$$r_{n,\beta}(\varphi, x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} [\varphi(x) - \varphi(x+t)] \frac{\sin\left(\frac{2n+1}{2}t + \frac{\beta\pi}{2}\right)}{2 \sin \frac{t}{2}} dt$$

частных сумм ряда Фурье ее равномерно относительно всех x и всех функций $\varphi(x) \in KH_2[\omega]$ стремился к нулю при $n \rightarrow \infty$.

Если $\omega_2(\delta) = \delta^{\alpha}$ ($0 < \alpha \leq 1$), то соответствующие классы функций обозначим через KH_2^{α} и $KW_{\beta}^r H_2^{\alpha}$. Для функции $\omega_2(\delta) = \delta^{\alpha}$ условие (1) заведомо выполняется.

Определим теперь семейство обобщенных частных сумм $U_{n,\gamma}(f, x)$ ($n = 0, 1, 2, \dots$). Рассмотрим функцию $\mu_0(k, n)$ двух целых аргументов k и n , представимую в области $0 \leq k \leq n$, $0 \leq n < \infty$ абсолютно сходящимся рядом вида

$$\mu_0(k, n) = 1 + \sum_{m=1}^{\infty} a_m(n) \left(\frac{k}{n}\right)^{\nu_m}, \quad (3)$$

где показатели $\nu_1, \dots, \nu_m, \dots$ образуют строго возрастающую последовательность положительных действительных чисел и коэффициенты $a_m(n)$ ($m = 1, 2, \dots$) удовлетворяют в промежутке $0 \leq n < \infty$ условию

$$\sum_{m=1}^{\infty} \nu_m |a_m(n)| = O(1). \quad (4)$$

Пусть еще $\gamma (\gamma \leq r)$ — произвольное действительное и n — произвольное натуральное числа. Положим при $\gamma \neq 0$

$$\mu_\gamma(k, n) = \begin{cases} k^\gamma \mu_0(k, n), & \text{если } k = 1, 2, \dots, n, \\ 0 & \text{, если } k = 0 \text{ или } k \geq n + 1. \end{cases}$$

При помощи множителей $\mu_\gamma(k, n)$ образуем сумму

$$U_{n,\gamma}(f, x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(x+t) \sum_{k=1}^n \mu_\gamma(k, n) \frac{\cos\left(kt + \frac{\beta\pi}{2}\right)}{k^\gamma} dt. \quad (5)$$

Сумму, сопряженную с $U_{n,\gamma}(f, x)$, обозначим через $\bar{U}_{n,\gamma}(f, x)$.

В работе [7] рассматривались частные случаи аналогичных сумм, определяемых множителями

$$\lambda_\gamma(k, n) = \frac{1}{n^\gamma} \mu_\gamma(k, n).$$

Семейство сумм (5) содержит многие известные методы приближения, в том числе частные суммы ряда Фурье, средние Чезаро, суммы Бернштейна — Рогозинского и некоторые обобщения их, нормальные средние Зигмунда, а также некоторые суммы, рассмотренные Б. Надем [4] и автором [5—7].

3. Для любого действительного β можно подобрать целое число ν , такое, чтобы $\beta' = \beta - 4\nu \in [0, 4]$. Положим

$$\begin{aligned} \delta_1 &= \left[-\frac{3 + \beta'}{2n} \pi, \frac{5 - \beta'}{2n} \pi \right] = \\ &= \left[-\frac{a}{n}, \frac{b}{n} \right], \quad \delta_2 = [-\pi, \pi] - \delta_1, \end{aligned}$$

$$r_{n,\beta}^*(\varphi, x) = \frac{1}{\pi} \int_{\delta_2}^{\delta_1} [\varphi(x) - \varphi(x+t)] \frac{\sin\left(\frac{2n+1}{2} t + \frac{\beta\pi}{2}\right)}{2 \sin \frac{t}{2}} dt,$$

$$h_2^{(n)}(\omega) = \sup_{\varphi \in KH_n[\omega]} \int_{\frac{1}{n}}^{\pi} \frac{|\varphi(x) - \varphi(x+t)|}{t} dt.$$

Пусть α — любое действительное число. Положим еще

$$P_{n,\beta}^{(\alpha)}(\varphi, x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(x+t) \sum_{k=1}^n k^\alpha \cos\left(kt + \frac{\beta\pi}{2}\right) dt.$$

Лемма. Пусть $\varphi(x) \in KH_2[\omega]$. Тогда для любых β и α ($\alpha \geq 0$) равномерно относительно всех функций $\varphi(x) \in KH_2[\omega]$ справедливо равенство

$$P_{n,\beta}^{(\alpha)}(\varphi, x) = \begin{cases} -r_{n,\beta}^*(\varphi, x) + O\left(\left|\sin \frac{\beta\pi}{2}\right| h_2^{(n)}(\omega)\right) + O(1), & \text{если } \alpha = 0, \\ -n^\alpha r_{n,\beta}^*(\varphi, x) + O\left(\alpha n^\alpha \omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\right) + \\ + O\left(\alpha n^\alpha \left|\sin \frac{\beta\pi}{2}\right| \left|\varphi(x) - \varphi\left(x + \frac{1}{n}\right)\right|\right), & \text{если } \alpha > 0. \end{cases}$$

Если же функция $\omega_2(t)$ удовлетворяет условию (1), то для $\alpha > 0$

$$P_{n,\beta}^{(\alpha)}(\varphi, x) = -n^\alpha r_{n,\beta}^*(\varphi, x) + O\left(\alpha n^\alpha \omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

Доказательство. Положим

$$D_{k,\beta}(t) = \begin{cases} \sin\left(\frac{2k+1}{2}t + \frac{\beta\pi}{2}\right) - \sin\frac{\beta\pi}{2} \cos\frac{t}{2}, & \text{если } t \in \delta_1, \\ \sin\left(\frac{2k+1}{2}t + \frac{\beta\pi}{2}\right), & \text{если } t \in \delta_2, \end{cases}$$

$$\rho_{n,\beta}(\varphi, x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\varphi(x) - \varphi(x+t)}{2 \sin \frac{t}{2}} D_{n,\beta}(t) dt,$$

$$J_k = \int_{\delta_1} [\varphi(x) - \varphi(x+t)] \frac{\sin(k+1)t - (k+1)\sin t}{4 \sin^2 \frac{t}{2}} dt,$$

$$A_k = \int_{\delta_2} [\varphi(x) - \varphi(x+t)] \frac{\sin(k+1)t}{4 \sin^2 \frac{t}{2}} dt,$$

$$\Delta(k^\alpha) = k^\alpha - (k+1)^\alpha, \quad \Delta^2(k^\alpha) = \Delta(k^\alpha) - \Delta[(k+1)^\alpha] \\ (\alpha > 0, k = 0, 1, 2, \dots).$$

Через $\sigma_k(\varphi, x)$ обозначим сумму Фейера порядка k функции $\varphi(x)$.

Пусть $\alpha > 0$. При помощи преобразований, аналогичных тем, которые применялись при доказательстве теоремы 4 в работе [2], легко показать, что

$$P_{n,\beta}^{(\alpha)}(\varphi, x) = -n^\alpha \rho_{n,\beta}(\varphi, x) + \frac{\cos \frac{\beta\pi}{2}}{\pi} \Sigma_1 + \frac{\sin \frac{\beta\pi}{2}}{\pi} (\Sigma_2 + \Sigma_3), \quad (6)$$

где

$$\frac{1}{\pi} \Sigma_1 = \sum_{k=0}^{n-2} (k+1) \Delta^2(k^\alpha) [\sigma_k(\varphi, x) - \varphi(x)] + \\ + n \Delta[(n-1)^\alpha] [\sigma_{n-1}(\varphi, x) - \varphi(x)],$$

$$\Sigma_2 = \sum_{k=0}^{n-2} \Delta^2(k^\alpha) J_k + \Delta[(n-1)^\alpha] J_{n-1},$$

$$\Sigma_3 = \sum_{k=0}^{n-2} \Delta^2(k^\alpha) A_k + \Delta[(n-1)^\alpha] A_{n-1}.$$

Применяя теорему 1 работы [1], лемму 1 и теорему 1 работы [2] и элементарно доказываемые для $\alpha > 0$ и $n = 2, 3, \dots$ соотношения

$$\Delta(n^\alpha) = O(\alpha n^{\alpha-1}), \quad \sum_{k=0}^{n-2} \Delta^2(k^\alpha) = O(\alpha n^{\alpha-1}),$$

получаем оценки

$$\Sigma_1 = O\left(\alpha n^\alpha \omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\right),$$

$$\Sigma_2 = O\left(\alpha n^\alpha \left|\varphi(x) - \varphi\left(x + \frac{1}{n}\right)\right|\right) + O\left(\alpha n^\alpha \omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\right),$$

$$\Sigma_3 = O\left(\alpha n^\alpha \left|\varphi(x) - \varphi\left(x + \frac{1}{n}\right)\right|\right) + O\left(\alpha n^\alpha \omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

В работе [2] (стр. 266) показано, что

$$\rho_{n,\beta}(\varphi, x) = r_{n,\beta}^*(\varphi, x) + O\left(\left|\sin \frac{\beta\pi}{2}\right| \left|\varphi(x) - \varphi\left(x + \frac{1}{n}\right)\right|\right) + O\left(\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

Подставляя оценки для $\rho_{n,\beta}(\varphi, x)$, Σ_1 , Σ_2 и Σ_3 в правую часть равенства (6), получим утверждение леммы для $\alpha > 0$.

4. Теорема 1. Пусть функция $f(x) \in KW_{\beta}^r H_2[\omega]$. Тогда, если $\mu_0(k, n)$ удовлетворяет условиям (3) и (4), то для любых конечных r и γ ($\gamma < r$, $r > 0$) равномерно относительно всех функций $f(x) \in KW_{\beta}^r H_2[\omega]$ справедливо равенство

$$U_{n,\gamma}(f, x) - f_\gamma(x) = \sum_{m=1}^{s-1} \frac{a_m(n)}{n^{\nu_m}} f_{\gamma+\nu_m}(x) + Q_{n,\gamma}(\varphi, x),$$

где s определяется из неравенства

$$\nu_{s-1} < r - \gamma \leq \nu_s, \quad (7)$$

$$\begin{aligned} Q_{n,\gamma}(\varphi, x) = & -\frac{\mu_0(n, n)}{n^{r-\gamma}} r_{n,\beta}^*(\varphi, x) + \\ & + O\left(\frac{|a_s(n)|}{n^{r-\gamma}} \left|\sin \frac{\beta\pi}{2}\right| h_2^{(n)}(\omega)\right) + O\left(\frac{|a_s(n)|}{n^{r-\gamma}}\right) + \\ & + O\left(\frac{1}{n^{r-\gamma}} \left|\sin \frac{\beta\pi}{2}\right| \left|\varphi(x) - \varphi\left(x + \frac{1}{n}\right)\right|\right) + \\ & + O\left(\frac{1}{n^{r-\gamma}} \omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\right). \end{aligned}$$

Если же функция $\omega_2(t)$ удовлетворяет условию (1), то при $\gamma \leq r$

$$U_{n,\gamma}(f, x) - f_\gamma(x) = \sum_{m=1}^s \frac{a_m(n)}{n^{\nu_m}} f_{\gamma+\nu_m}(x) - \frac{\mu_0(n, n)}{n^{r-\gamma}} r_{n,\beta}(\varphi, x) + O\left(\frac{1}{n^{r-\gamma}} \omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

Замечание. Ослабив условие (4), мы расширим семейство сумм $U_{n,\gamma}(f, x)$, однако при этом ухудшится порядок убывания последних двух слагаемых остаточного члена $Q_{n,\gamma}(\varphi, x)$.

Доказательство. Подставив ряд (3) в правую часть равенства (5) и поменяв порядок суммирования, получим, что

$$\begin{aligned} U_{n,\gamma}(f, x) &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{a_m(n)}{n^{\nu_m}} V_m(x) = \sum_{m=0}^{s-1} \frac{a_m(n)}{n^{\nu_m}} V_m(x) + \\ &+ \frac{a_s(n)}{n^{\nu_s}} V_s(x) + \sum_{m=s+1}^{\infty} \frac{a_m(n)}{n^{\nu_m}} V_m(x) = \\ &= S_1 + \frac{a_s(n)}{n^{\nu_s}} V_s(x) + S_2, \end{aligned}$$

где

$$V_m(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(x+t) \sum_{k=1}^n \frac{\cos\left(kt + \frac{\beta\pi}{2}\right)}{k^{r-\gamma-\nu_m}} dt \quad (m=0, 1, 2, \dots).$$

Если $m=0, 1, 2, \dots, s-1$, то сумма $V_m(x)$ является частной суммой ряда Фурье функции $f_{\gamma+\nu_m}(x) \in KW_\beta^{r-\gamma-\nu_m} H_2[\omega]$ и для нее справедливо соотношение (см. [2], первая часть теоремы 4)

$$\begin{aligned} V_m(x) &= f_{\gamma+\nu_m}(x) - \frac{r_{n,\beta}^*(\varphi, x)}{(n+1)^{r-\gamma-\nu_m}} + \\ &+ O\left(\left|\frac{\sin \frac{\beta\pi}{2}}{n^{r-\gamma-\nu_m}} \left|\varphi(x) - \varphi\left(x + \frac{1}{n}\right)\right|\right|\right) + \\ &+ O\left(\frac{1}{n^{r-\gamma}} \omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\right). \end{aligned}$$

Из последнего соотношения, оценки

$$\frac{1}{n} r_{n,\beta}^*(\varphi, x) = O\left(\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

и условия (4) следует, что

$$S_1 = \sum_{m=0}^{s-1} \frac{a_m(n)}{n^{\nu_m}} f_{\gamma+\nu_m}(x) + R_1(x), \tag{8}$$

где $(a_0(n) = 1)$,

$$R_1(x) = -\frac{r_{n,\beta}^*(\varphi, x)}{n^{r-\gamma}} \sum_{m=1}^{s-1} a_m(n) + \\ + O\left(\frac{\left|\sin \frac{\beta\pi}{2}\right|}{n^{r-\gamma}} \left|\varphi(x) - \varphi\left(x + \frac{1}{n}\right)\right|\right) + O\left(\frac{\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)}{n^{r-\gamma}}\right).$$

Если $r - \gamma = \nu_s$, то $a_s(n) \neq 0$, $V_s(x) = P_{n,\beta}^{(0)}(\varphi, x)$ и из леммы следует, что

$$V_s(x) = -r_{n,\beta}^*(\varphi, x) + O\left(\left|\sin \frac{\beta\pi}{2}\right| h_2^{(n)}(\omega)\right) + O(1). \quad (9)$$

Если $m > s$, то $V_m(x) = P_{n,\beta}^{(\nu_m + \nu - r)}(\varphi, x)$. Тогда из леммы и условия (4) получим, что

$$S_2 = -\frac{r_{n,\beta}^*(\varphi, x)}{n^{r-\gamma}} \sum_{m=s+1}^{\infty} a_m(n) + \\ + O\left(\frac{\left|\sin \frac{\beta\pi}{2}\right|}{n^{r-\gamma}} \left|\varphi(x) - \varphi\left(x + \frac{1}{n}\right)\right|\right) + O\left(\frac{\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)}{n^{r-\gamma}}\right). \quad (10)$$

Из соотношений (8) — (10) следует первая часть теоремы 1.

Приступая к доказательству второй части теоремы 1 заметим, что при выполнении условия (1) сумма $V_s(x)$ является частной суммой равномерно сходящегося ряда Фурье функции $f_{r-\gamma}(x)$ и, как отмечалось выше, в этом случае справедливо равенство

$$V_s(x) = f_{r-\gamma}(x) - r_{n,\beta}^*(\varphi, x).$$

Из этого замечания, а также из второй части доказанной А. В. Ефимовым в работе [2] теоремы 4 и из второй части леммы следует вторая часть теоремы 1.

Теорема 2. Пусть функция $f(x) \in KW_{\beta}^r H_1[\omega]$. Тогда, если $\mu_0(k, n)$ удовлетворяет условиям (3) и (4), то для любых конечных r и γ ($\gamma < r$, $r > 0$) равномерно относительно всех функций $f(x) \in KW_{\beta}^r H_1[\omega]$ справедливо равенство

$$U_{n,\gamma}(f, x) - f_{\gamma}(x) = \sum_{m=1}^{s-1} \frac{a_m(n)}{n^{\nu_m}} f_{\gamma+\nu_m}(x) + Q'_{n,\gamma}(\varphi, x),$$

где s определяется из неравенства (7),

$$Q'_{n,\gamma}(\varphi, x) = -\frac{\mu_0(n, n)}{n^{r-\gamma}} r_{n,\beta}^*(\varphi, x) + O\left(\frac{|a_s(n)|}{n^{r-\gamma}}\right) + \\ + O\left(\frac{|a_s(n)|}{n^{r-\gamma}} \left|\sin \frac{\beta\pi}{2}\right| h_1^{(n)}(\omega)\right) + O\left(\frac{1}{n^{r-\gamma}} \omega_1\left(\frac{1}{n}\right)\right),$$

$$h_1^{(n)}(\omega) = \int_{\frac{1}{n}}^{\pi} \frac{\omega_1(t)}{t} dt. \quad (8)$$

Доказательство. Так как $KH_1[\omega] \subset 2KH_2[\omega]$ и $\varphi(x) - \varphi\left(x + \frac{1}{n}\right) = O\left(\omega_1\left(\frac{1}{n}\right)\right)$, то теорема 2 следует из первой части теоремы 1.

Из второй части теоремы 1 получаем следующее утверждение.

Теорема 3. Пусть функция $f(x) \in KW'_\beta H_2^\alpha$ ($0 < \alpha < 1$). Тогда, если $\mu_0(k, n)$ удовлетворяет условиям (3) и (4), то для любых конечных r и γ ($\gamma \leq r$, $r > 0$) равномерно относительно всех функций $f(x) \in KW'_\beta H_2^\alpha$ ($0 < \alpha < 1$) справедливо равенство

$$U_{n,\gamma}(f, x) - f_\gamma(x) = \sum_{m=1}^s \frac{a_m(n)}{n^{\gamma_m}} f_{\gamma+\gamma_m}(x) - \frac{\mu_0(n, n)}{n^{r-\gamma}} r_{n,\beta}(\varphi, x) + O\left(\frac{1}{n^{r-\gamma+\alpha}}\right),$$

где s определяется из неравенства (7).

Литература

1. Ефимов А. В. Изв. АН СССР, сер. мат., 22, 81, 1958.
2. Ефимов А. В. Изв. АН СССР, сер. мат., 24, 243, 1960.
3. Зигмунд А. Тригонометрические ряды, 11, Изд. «Мир», М., 1965.
4. Nagy V. Hungarica acta Math., 1, № 3, 14, 1948.
5. Покало А. К. Уч. зап. Минского гос. пед. ин-та, сер. физ.-мат., в. 7, 51, 1957.
6. Покало А. К. Весті АН БССР, сер. фіз.-тэхн. навук, № 1, 1962.
7. Покало А. К. Весті АН БССР, сер. фіз.-мат. навук, № 2, 1969.

Минский педагогический институт
им. А. М. Горького

Поступило в редакцию 10.VII 1969

Я. В. КОНСТАНТИНОВА

О СХОДИМОСТИ И УСТОЙЧИВОСТИ МНОГОСЛОЙНОГО РАЗНОСТНОГО ПРАВИЛА РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

В статье рассматриваются явные трехстолбцовые, многослойные схемы для решения смешанной задачи 1-го рода в случае уравнения теплопроводности.

Существенным отличием от предшествующих работ [1—6] является то, что исследуются не конкретные, а общего вида схемы с произвольными действительными коэффициентами. Такая общность схемы, естественно, потребовала выделить из них устойчивые, т. е. сходящиеся при определенных условиях схемы, что и было выполнено.

Рассматривается 1-я смешанная задача для уравнения теплопроводности:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (1)$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad (2)$$

$$u(t, 0) = \psi_1(t), \quad u(t, 1) = \psi_2(t). \quad (3)$$

Поставленную задачу решаем методом сеток. В области G ($0 \leq x \leq 1$, $0 \leq t \leq T$) строим прямоугольную сетку $x_i = i \Delta x$, $t_j = j \Delta t$, где $\Delta x = \frac{1}{n}$, $\Delta t = \frac{T}{l}$. В узлах сетки уравнение (1) заменим следующим разностным уравнением:

$$u_{i,j+1} = \sum_{p=-1}^1 \sum_{q=0}^m a_{pq} u_{i-p, j-q}, \quad (4)$$

где $a_{-1q} = a_{1q}$.

Начальные и граничные условия переписуются в виде

$$u_{i,0} = \varphi(i \Delta x), \quad (5)$$

$$u_{0,j} = \psi_{1j}, \quad u_{n,j} = \psi_{2j}. \quad (6)$$

Уравнение (4) позволит последовательно вычислить все значения сеточной функции u_{ij} , используя условия (5) и (6), если известны уже значения на $m+1$ слое $u_{i,0}, \dots, u_{i,m}$ ($i = 1, \dots, n-1$).

Если вместо приближенных значений u_{ij} подставить в расчетную формулу (4) точные значения функции $u(x_i, t_j)$, равенство выполняться не будет и для точного его выполнения в правую часть необходимо ввести дополнительный член

$$u(x_i, t_{j+1}) = \sum_{p=-1}^1 \sum_{q=0}^m a_{pq} u(x_{i-p}, t_{j-q}) + r_{ij}, \quad (7)$$

r_{ij} в дальнейшем будем называть погрешностью формулы. При написании формулы (4) предполагалось, что вычисления ведутся с неокругленными числами, что бывает весьма редко. Формула должна быть дополнена указанием правила округления, т. е. вместо формулы (4) получим

$$u_{i,j+1} = \sum_{p=-1}^1 \sum_{q=0}^m a_{pq} u_{i-p, j-q} - \delta_{ij}. \quad (8)$$

Величины u_{ij} ($i = 1, \dots, n-1; j = 0, 1, \dots, m$), знание которых требуется для применения (4), в дальнейшем будем считать известными.

Рассмотрим погрешность приближенного значения

$$\varepsilon_{i,j} = u(x_i, t_j) - u_{ij}$$

и составим для нее разностное уравнение. Почленно вычитая (8) из (7), получим

$$\varepsilon_{i,j+1} = \sum_{p=-1}^1 \sum_{q=0}^m a_{pq} \varepsilon_{i-p, j-q} + \delta_{i,j} + r_{i,j}.$$

Начальные значения погрешности $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^*$ ($i = 1, \dots, n-1, j = 0, 1, \dots, m$), отвечающие приближенному заданию $u(x_i, t_j)$, образующие начало таблицы, будем считать известными.

Так как на погрешность оказывают влияние, во-первых, начальные значения, во-вторых, погрешность округлений и, наконец, погрешность формулы, то для анализа погрешности полезно разделить влияние на $\varepsilon_{i,j}$ всех этих величин. Для достижения этой цели $\varepsilon_{i,j}$ обычно представляют в виде суммы трех слагаемых

$$\varepsilon_{i,j} = E_{i,j} + E'_{i,j} + E''_{i,j},$$

которые определяются следующими условиями: $E_{i,j}$ — погрешность, определяемая начальными условиями, $E'_{i,j}$ — погрешность, возникающая за счет погрешностей округления, $E''_{i,j}$ — от замены дифференциального уравнения разностным.

Для E_{ij} получаем однородное разностное уравнение с ненулевыми начальными значениями E_{ij} ($i = 1, \dots, n-1, j = 0, 1, \dots, m$), для E'_{ij} и E''_{ij} — неоднородное уравнение с нулевыми начальными значениями.

Здесь и в дальнейшем мы предполагаем, что граничные условия аппроксимируются точно, следовательно, для этих уравнений получаем нулевые граничные значения.

Сходимость и устойчивость вычислительного процесса. Ближайшей нашей целью будет выяснение некоторых понятий, связанных с проблемой сходимости.

За расстояние $\rho(u(x_i, t_j), u_{ij})$ между точным значением и приближенным примем, имея в виду равномерную сходимость, наибольшую абсолютную величину погрешности $\varepsilon_{ij} = u(x_i, t_j) - u_{ij}$

$$\rho(u(x_i, t_j), u_{ij}) = \max_{ij} |u(x_i, t_j) - u_{i,j}|.$$

Условимся говорить, что вычислительный процесс сходится, если при $\Delta t, \Delta x \rightarrow 0$ будет $\rho(u, u_{ij}) \rightarrow 0$. Так как мы рассматриваем уравнение параболического типа, то в дальнейшем будем предполагать, что $\Delta t = o(\Delta x)$, что является необходимым условием для простейших явных разностных схем.

При выяснении условий сходимости вычислительного процесса ввиду независимости величин $\varepsilon_{i,j}^*, r_{i,j}, \delta_{i,j}$ мы должны требовать, чтобы при $\Delta x \rightarrow 0$

стремились бы к нулю в принятой метрике каждая из трех указанных выше частей погрешности $\varepsilon_{i,j}$, иначе говоря, выполнялись бы следующие условия:

$$E_{i,j} \xrightarrow{\Delta x \rightarrow 0} 0, \quad E'_{ij} \xrightarrow{\Delta x \rightarrow 0} 0, \quad E''_{ij} \xrightarrow{\Delta x \rightarrow 0} 0.$$

Запишем уравнения для погрешностей:

$$E_{i,j+1} = \sum_{p=-1}^1 \sum_{q=0}^m a_{pq} E_{i-p, j-q}, \quad (9)$$

$$E_{i,j} = \varepsilon_{ij}^*, \quad E_{0,j} = E_{n,j} = 0 \quad (i=1, \dots, n-1, j=0, 1, \dots, m); \quad (9')$$

$$E'_{i,j+1} = \sum_{p=-1}^1 \sum_{q=0}^m a_{pq} E'_{i-p, j-q} + \delta_{i,j}, \quad (10)$$

$$E'_{i,j} = 0, \quad E'_{0,j} = E'_{n,j} = 0 \quad (i=1, \dots, n-1, j=0, 1, \dots, m); \quad (10')$$

$$E''_{i,j+1} = \sum_{p=-1}^1 \sum_{q=0}^m a_{pq} E''_{i-p, j-q} + r_{i,j}, \quad (11)$$

$$E''_{i,j} = 0, \quad E''_{0,j} = E''_{n,j} = 0 \quad (i=1, \dots, n-1, j=0, 1, \dots, m). \quad (11')$$

Назовем функцией Грина решение однородного уравнения (9) с нулевыми начальными значениями во всех точках, кроме одной, где оно равно единице.

Пусть $G_{i,j}^{(s,p)}$ — решение уравнения (9) в точке (i, j) с начальным значением, равным 1 в точке (s, p) . Так, введенная функция Грина обладает таким свойством, что $\alpha G_{i,j}^{(r,s)} + \beta G_{i,j}^{(p,t)}$ будет решением уравнения (9) со значением α в точке (r, s) и β в точке (p, t) . С помощью так введенной функции Грина решение разностного уравнения (9) с условиями (9') можно записать в следующем виде:

$$E_{i,j} = \sum_{s=1}^{n-1} \sum_{p=0}^m G_{i,j}^{(s,p)} \varepsilon_{s,p}^*. \quad (12)$$

Получим оценку функции Грина через коэффициенты уравнения (9). Для этого решим следующую задачу:

$$G_{i,j+1}^{(s,r)} = \sum_{p=-1}^1 \sum_{q=0}^m a_{pq} G_{i-p, j-q}^{(s,r)}, \quad (13)$$

$$G_{i,j}^{(s,r)} = \delta_{is} \delta_{jr} \quad (i=1, \dots, n-1, j=0, 1, \dots, m), \quad (13')$$

$$\delta_{kl} = \begin{cases} 0 & k \neq l \\ 1 & k = l. \end{cases}$$

Частное решение нашей задачи будем искать в виде

$$v_{i,j}^{(k,\alpha)} = \lambda_{k\alpha}^j \sin \frac{k\pi i}{n},$$

$\lambda_{k\alpha}$ должны быть корнями характеристического уравнения

$$\lambda_{k\alpha}^{m+1} = \sum_{q=0}^m \lambda_{k\alpha}^{m-q} \left(2a_{-1q} \cos \frac{k\pi}{n} + a_{0q} \right). \quad (14)$$

1 случай. Корни характеристического уравнения при всяких k, α простые. Нужное нам решение в этом случае можно записать в виде

$$G_{i,j}^{(s,p)} = \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{\alpha=0}^m b_{k,\alpha}^{(s,p)} \lambda_{k\alpha}^j \sin \frac{k\pi i}{n}.$$

Воспользовавшись начальными условиями и ортогональностью $\sin \frac{k\pi i}{n}$ для определения $b_{k,\alpha}^{(s,p)}$, получим систему уравнений

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha=0}^m b_{k,\alpha}^{(s,m)} \lambda_{k\alpha}^m &= 0, \\ &\dots \dots \dots \\ \sum_{\alpha=0}^m b_{k,\alpha}^{(s,p+1)} \lambda_{k\alpha}^{p+1} &= 0, \\ \sum_{\alpha=0}^m b_{k,\alpha}^{(s,p)} \lambda_{k\alpha}^p &= \frac{2}{n} \sin \frac{k\pi s}{n}, \\ \sum_{\alpha=0}^m b_{k,\alpha}^{(s,p-1)} \lambda_{k\alpha}^{p-1} &= 0, \\ &\dots \dots \dots \\ \sum_{\alpha=0}^m b_{k,\alpha}^{(s,0)} \lambda_{k\alpha}^0 &= 0. \end{aligned}$$

Отсюда

$$b_{k,\alpha}^{(s,p)} = (-1)^{p+i} \frac{2}{n} A_{pi}^{(k)} \sin \frac{k\pi s}{n},$$

где

$$A_{pi}^{(k)} = \frac{B_{pi}^{(k)}}{C_{pi}^k},$$

$$B_{pi}^{(k)} = \begin{vmatrix} \lambda_{k0}^m & \dots & \lambda_{k,i-1}^m & \lambda_{k,i+1}^m & \dots & \lambda_{km}^m \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_{k0}^{p+1} & \dots & \lambda_{k,i-1}^{p+1} & \lambda_{k,i+1}^{p+1} & \dots & \lambda_{km}^{p+1} \\ \lambda_{k0}^{p-1} & \dots & \lambda_{k,i-1}^{p-1} & \lambda_{k,i+1}^{p-1} & \dots & \lambda_{km}^{p-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_{k,0} & \dots & \lambda_{k,i-1} & \lambda_{k,i+1} & \dots & \lambda_{km} \\ 1 & \dots & 1 & 1 & \dots & 1 \end{vmatrix},$$

$$C_{pi}^k = \begin{vmatrix} \lambda_{k0}^m & \lambda_{k1}^m & \dots & \lambda_{km}^m \\ \lambda_{k0}^{m-1} & \lambda_{k1}^{m-1} & \dots & \lambda_{km}^{m-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_{k0}^i & \lambda_{k1}^i & \dots & \lambda_{km}^i \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{vmatrix}.$$

Так как, по предположению, все корни характеристического уравнения различны, то знаменатель в нуль не обращается. Если $\lambda \leq 1 + c\Delta t$ при $\Delta t \rightarrow 0$, то, применяя к числителю неравенство Адамара, получим ограниченность $|A_{pi}^{(k)}|$. Отсюда будет следовать ограниченность функции Грина

$$G_{i,j}^{(s,p)} = \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{\alpha=0}^m (-1)^{p+\alpha} \frac{2}{n} A_{p\alpha}^{(k)} \sin \frac{k\pi s}{n} \sin \frac{k\pi i}{n} \lambda_{k\alpha}^j.$$

Поэтому из (12) следует

$$|E_{il}| \leq M n \varepsilon, \quad \varepsilon = \max_{ij} |e_{ij}^*|,$$

M — величина, не зависящая от n .

Рассмотрим уравнение (10) с начальными и граничными условиями (10'). В этом случае функцию Грина определим как решение соответствующего однородного уравнения с нулевыми граничными условиями, единицей в произвольной точке верхнего слоя и нулями на всех нижних m слоях. С помощью так введенной функции Грина решение уравнения (10) можно записать в виде

$$E'_{il} = \sum_{s=1}^i \sum_{p=m+1}^{l-i+s} G_{i,l}^{(s,p)} \delta_{s,p-1} + \sum_{s=i+1}^{n-1} \sum_{p=m+1}^{l+i-s} G_{i,l}^{(s,p)} \delta_{s,p-1}, \quad (15)$$

где $G_{i,j}^{(s,p)}$ — решение следующей задачи:

$$G_{i,j+1}^{(s,p)} = \sum_{r=1}^i \sum_{q=0}^m a_{rq} G_{i-r,j-q}^{(s,p)},$$

$$G_{s,p}^{(s,p)} = 1, \quad G_{i,p}^{(s,p)} = 0 \quad (i \neq s, i = 1, 2, \dots, n-1, s = 1, 2, \dots, n-1),$$

$$G_{i,j}^{(s,p)} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n-1; j = p-1, \dots, p-m),$$

$$G_{0,j}^{(s,p)} = G_{n,j}^{(s,p)} = 0.$$

Общее решение можно записать в виде

$$G_{i,j}^{(s,p)} = \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{\alpha=0}^m b_{k\alpha}^{(s,p)} \lambda_{k\alpha}^j \sin \frac{k\pi i}{n}.$$

Аналогично предыдущему для коэффициентов получим выражение

$$b_{k\alpha}^{(s,p)} = \frac{2}{n} \sin \frac{k\pi s}{n} \frac{1}{\lambda_{k\alpha}^{p-m} \omega'(\lambda_{k\alpha})},$$

где $\omega(\lambda) = (\lambda - \lambda_{k0})(\lambda - \lambda_{k1}) \dots (\lambda - \lambda_{km})$. Из этого выражения для коэффициентов следует, что функция Грина будет ограничена. Следовательно,

$$|E'_{il}| \leq \frac{1}{2} \left[(2l - 2m + 1)(n-1) - \frac{n^2}{2} + 1 \right] c\delta,$$

$$\delta = \max_{s,p} |\delta_{s,p}|.$$

Ввиду предположения $\frac{\Delta t}{\Delta x} \rightarrow 0$ мы можем записать

$$|E'_{il}| \leq M_1 \ln \delta.$$

В случае разностного уравнения для E''_{il} получаем аналогичную оценку:

$$|E''_{il}| \leq M_1 \ln r.$$

2 случай. Корни характеристического уравнения кратные. В этом случае $\lambda^j_{ka} \sin \frac{k\pi i}{n}$ не дает полного числа линейно независимых решений. Если λ — корень характеристического уравнения кратности s , то $\lambda^j \sin \frac{k\pi i}{n}$, $j\lambda^j \sin \frac{k\pi i}{n}$, ..., $j^{s-1} \lambda^j \sin \frac{k\pi i}{n}$ будут решениями уравнения (9). Все эти решения будут линейно независимыми.

Пусть характеристическое уравнение, записанное для уравнения (9), имеет r различных корней $\lambda_{k1}, \lambda_{k2}, \dots, \lambda_{kr}$ кратностей соответственно s_1, s_2, \dots, s_r . Очевидно, что $s_1 + s_2 + \dots + s_r = m + 1$, функция Грина уравнения (9) в этом случае может быть записана в виде

$$G_{i,j}^{(s,p)} = \sum_{k=1}^{n-1} [b_{k1,1} \lambda_{k1}^j + b_{k2,1} j \lambda_{k1}^j + \dots + b_{ks_1,1} j^{s_1-1} \lambda_{k1}^j + \\ + b_{k1,2} \lambda_{k2}^j + b_{k2,2} j \lambda_{k2}^j + \dots + b_{ks_2,2} j^{s_2-1} \lambda_{k2}^j + \dots + \\ + b_{k1,r} \lambda_{kr}^j + b_{k2,r} j \lambda_{kr}^j + \dots + b_{ks_r,r} j^{s_r-1} \lambda_{kr}^j] \sin \frac{k\pi i}{n}.$$

Аналогично предыдущему, воспользовавшись линейной независимостью $\lambda^j, j\lambda^j, \dots, j^{s-1} \lambda^j$, получим ограниченность функции Грина, а следовательно, те же оценки, но с другими константами.

Как и в [7], будем рассматривать следующие определения устойчивости.

1. Уравнение называется устойчивым относительно погрешностей округлений, если существует такое число M_1 , не зависящее от Δt и Δx , что при всех $l > m$ и при любом n будет выполняться неравенство

$$|E'_{il}| \leq M_1 n l \delta,$$

если только $|\delta_{ij}| \leq \delta$.

2. Уравнение называется устойчивым относительно погрешностей начальных данных ϵ_{ij}^* ($i = 1, \dots, n - 1; j = 0, 1, \dots, m$), если существует такое число M_2 , не зависящее от Δx , что $|E_{ij}| \leq M_2 n \epsilon$, если только $|\epsilon_{ij}^*| \leq \epsilon$.

Величины E_{ij}, E'_{ij} зависят от точности вычисления начальных данных и погрешностей округления. Увеличивая эту точность, мы можем сделать E_{ij} и E'_{ij} по модулю меньше любой наперед заданной величины при всяких $1 \leq i \leq n - 1, j \leq L$.

Рассмотрим последнюю часть погрешности E''_{ij} . Разностное уравнение для нее получается из разностного уравнения для E'_{ij} заменой свободного члена δ_{ij} на r_{ij} . Начальные значения для E'_{ij} и E''_{ij} совпадают, поэтому для E''_{ij} должно быть верным представление (15) с заменой δ_{ij} на r_{ij} .

E''_{ij} зависит исключительно от свойств расчетной формулы или, если говорить более точно, от ее погрешности r_{ij} , коэффициентов и числа шагов по времени и пространству.

Ошибка ε_{ij} будет совпадать с E''_{ij} , если вычисления выполнять с точными начальными значениями и без округлений.

Будем говорить, что разностная схема допускает сходящийся вычислительный процесс, если $\max_{ij} |E''_{ij}| \rightarrow 0$ при $\Delta x \rightarrow 0$ и $\Delta t \rightarrow 0$.

На основании изложенного условия, достаточные для сходимости при $\Delta x \rightarrow 0$ вычислительного процесса к точному решению, могут быть сформулированы в виде следующей теоремы.

Теорема сходимости. Пусть решение $u(x, t)$ обладает ограниченными производными $\left| \frac{\partial^p u}{\partial t^p} \right| \leq M_p$, $\left| \frac{\partial^{2p} u}{\partial x^{2p}} \right| \leq N_p$, M_p, N_p — постоянные в области $G(0 \leq x \leq 1, 0 \leq t \leq T)$, и пусть $\Delta x \rightarrow 0$, $\Delta t = A\Delta x^\alpha$, $\alpha > 1$. Если выполняются условия

а) корни уравнения

$$\lambda_k^{m+1} - \sum_{q=0}^m \lambda_k^{m-q} \left(2a_{-1q} \cos \frac{k\pi}{n} + a_{0q} \right) = 0$$

по модулю меньше, чем $1 + c_0\Delta t$ при $\Delta t \rightarrow 0$, корни, равные или больше единицы по модулю, простые,

$$\text{б) } \frac{\delta}{\Delta x \Delta t} \rightarrow 0, \quad \frac{\varepsilon}{\Delta x} \rightarrow 0, \quad \frac{r}{\Delta x \Delta t} \rightarrow 0,$$

тогда сеточная функция равномерно в области G будет сходиться к точному решению.

Рассмотрим частный случай, когда все коэффициенты схемы положительны. В этом случае может быть доказана следующая

Теорема. Если коэффициенты схемы положительны, то функция Грина будет положительной и $\sum_{s=1}^{n-1} G_{il}^{(s,m)} \leq 1$.

Положительность следует из определения, а второе условие доказывается по индукции с учетом того, что $\sum_{p=-1}^1 \sum_{q=0}^m a_{pq} = 1$.

Таким образом, в этом случае получаем оценки, где не будет фигурировать n , т. е. в теореме сходимости получим условия, аналогичные простейшей схеме.

Теорема сходимости в случае положительных коэффициентов. Пусть решение $u(x, t)$ обладает ограниченными производными $\left| \frac{\partial^p u}{\partial t^p} \right| \leq M_p$, $\left| \frac{\partial^{2p} u}{\partial x^{2p}} \right| \leq N_p$, M_p, N_p — постоянные в области $G(0 \leq x \leq 1, 0 \leq t \leq T)$, и пусть $\Delta x \rightarrow 0$, $\Delta t = A\Delta x^\alpha$, $\alpha > 1$. Если выполняются условия

а) корни уравнения

$$\lambda_k^{m+1} - \sum_{q=0}^m \lambda_k^{m-q} \left(2a_{-1q} \cos \frac{k\pi}{n} + a_{0q} \right) = 0$$

по модулю меньше, чем $1 + c_0\Delta t$ при $\Delta t \rightarrow 0$, корни, равные или больше единицы по модулю, простые,

$$б) \frac{\delta}{\Delta t} \rightarrow 0, \varepsilon \rightarrow 0, \frac{r}{\Delta t} \rightarrow 0,$$

тогда сеточная функция равномерно в области G будет сходиться к точному решению.

Литература

1. Albrecht I. Z. angew. Math. und Mech., 37, № 5—6, 202, 1957.
2. Blanc S. Z. angew. Math. und Mech., 7, № 2, 146, 1957.
3. Peaceman D. W., Rachford H. H. J. Soc. Industr. and Appl. Math., 3, № 1, 28, 1953.
4. Саульев В. К. ДАН СССР, 115, № 6, 1077, 1957.
5. Юшков П. П. ДАН БССР, 1, № 3, 1957.
6. Юань Чжао-дин. Вестн. Моск. университета, сер. мат., механ., астр., физ., хим., № 2, 9, 1958.
7. Крылов В. И. ДАН БССР, 4, № 5, 1960.

Белорусский государственный университет
им. В. И. Ленина

Поступило в редакцию 3.VII 1969

Л. Г. КРУГЛИКОВА

**МЕТОД НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ
В ПРЕОБРАЗОВАНИИ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ**

1. Преобразование по произвольной координатной системе функций. Назовем систему функций целочисленного аргумента n

$$\omega_0(n), \omega_1(n), \dots, \omega_m(n), \dots \quad (1)$$

координатной, если она удовлетворяет следующим требованиям:

1) предел каждой функции при неограниченном росте n существует и конечен:

$$\lim \omega_m(n) = \omega_m < \infty; \quad (2)$$

2) функции $\{\omega_m(n)\}$ образуют систему Чебышева и, следовательно, при любых $m+1$ различных между собой значениях аргумента n_j ($j=0, 1, \dots, m$)

$$\begin{vmatrix} \omega_0(n_0) & \omega_1(n_0) & \dots & \omega_m(n_0) \\ \omega_0(n_1) & \omega_1(n_1) & \dots & \omega_m(n_1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \omega_0(n_m) & \omega_1(n_m) & \dots & \omega_m(n_m) \end{vmatrix} \neq 0; \quad (3)$$

3) система функций $\{\omega_m(n)\}$ полна в том смысле, что дает возможность равномерно и сколь угодно точно приближать любую сходящуюся переменную S_n ($n=1, 2, \dots$), с помощью линейных комбинаций этих функций.

Поставим задачу: для произвольной заданной последовательности S_n ($n=1, 2, \dots$) подобрать такие коэффициенты a_i ($i=0, 1, \dots, m$) линейной комбинации

$$P_m(n) = a_0\omega_0(n) + a_1\omega_1(n) + \dots + a_m\omega_m(n),$$

чтобы при некотором произвольном числе $p+1 \geq m+1$ значений аргумента $S_{n_0}, S_{n_1}, \dots, S_{n_p}$ сумма

$$\sum_{k=0}^p [P_m(n_k) - S_{n_k}]^2$$

была наименьшей. В этом состоит метод наименьших квадратов. Приравняв нулю частные производные от суммы по каждому из коэффициентов a_i , получим систему линейных уравнений относительно a_0, a_1, \dots, a_m :

$$\frac{1}{2} \frac{\partial \Sigma}{\partial a_i} \equiv \sum_{k=0}^p [P_m(n_k) - S_{n_k}] \omega_i(n_k) = 0, \\ i = 0, 1, 2, \dots, m,$$

или

$$\sum_{j=0}^m c_{ij} a_j = b_i, \quad i = 0, 1, \dots, m. \quad (4)$$

где

$$c_{ij} = \sum_{k=0}^p \omega_i(n_k) \omega_j(n_k), \quad (5)$$

$$b_i = \sum_{k=0}^p S_{n_k} \omega_i(n_k).$$

Система (4) разрешима единственным образом, так как соответствующая ей однородная система имеет только нулевое решение. В самом деле, умножим

$\sum_{j=0}^m c_{ij} a_j = 0, i=0, 1, \dots, m$, на a_i и просуммируем по i от 0 до m :

$$\sum_{i,j=0}^m c_{ij} a_j a_i = 0.$$

С другой стороны, используя (5), получим

$$\sum_{i,j=0}^m c_{ij} a_j a_i = \sum_{k=0}^p \sum_{i,j=0}^m a_i \omega_i(n_k) a_j \omega_j(n_k) = \sum_{k=0}^p [P_m(n_k)]^2.$$

Следовательно, $P_m(n_k) = 0$ при $k=0, 1, \dots, p$, и так как функции $\omega_i(n)$ образуют систему Чебышева, все коэффициенты $P_m(n)$ равны нулю: $a_0 = a_1 = \dots = a_m = 0$.

В общем случае коэффициенты a_i определяются в виде функций $p+1$ значения последовательности S_n :

$$a_i(S_{n_0}, S_{n_1}, \dots, S_{n_p}) = \frac{1}{D} \begin{vmatrix} c_{00} & \dots & c_{0,i-1} & b_0 & c_{0,i+1} & \dots & c_{0m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{m0} & \dots & c_{m,i-1} & b_m & c_{m,i+1} & \dots & c_{mm} \end{vmatrix}, \quad (6)$$

где

$$D = \begin{vmatrix} c_{00} & c_{01} & \dots & c_{0m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{m0} & c_{m1} & \dots & c_{mm} \end{vmatrix}.$$

Тогда

$$P_m(n) = \sum_{i=0}^m a_i(S_{n_0}, S_{n_1}, \dots, S_{n_p}) \omega_i(n) =$$

$$= \sum_{i=0}^m \frac{\omega_i(n)}{D} \begin{vmatrix} c_{00} & \dots & c_{0,i-1} & b_0 & c_{0,i+1} & \dots & c_{0m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{m0} & \dots & c_{m,i-1} & b_m & c_{m,i+1} & \dots & c_{mm} \end{vmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{D} \begin{vmatrix} 0 & \omega_0(n) & \dots & \omega_m(n) \\ b_0 & \dots & \dots & \dots \\ \vdots & \dots & \dots & \dots \\ b_m & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} \quad (7)$$

можно рассматривать как приближение по методу наименьших квадратов к заданной последовательности S_n , зависящее от $p+1$ избранных значений.

Пусть $n \rightarrow \infty$. Естественно считать

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_m(n) = -\frac{1}{D} \begin{vmatrix} 0 & \omega_0 & \dots & \omega_m \\ b_0 & & & \\ \vdots & & & \\ \vdots & & D & \\ b_m & & & \end{vmatrix} = \sigma(S_{n_0}, S_{n_1}, \dots, S_{n_p}) \quad (8)$$

приближением к пределу переменной S_n , если он существует.

Мы получим последовательность приближений $\sigma_l (l=1, 2, \dots)$ к пределу S_n , если на каждом шаге будут изменяться как узлы n_k , причем может изменяться и число их $p_l (l=1, 2, \dots)$, так и число $m_l (l=1, 2, \dots)$ функций $\omega_i(n)$, определяющее степень обобщенного многочлена $P_{m_l}(n)$, причем $p_l \geq m_l^*$.

Подставляя значения b_i и c_{ij} в (8), получаем преобразование последовательности S_n в последовательность σ_l :

$$\sigma_l = \sum_{k=0}^{p_l} \alpha_k^l S_{n_k^l}, \quad (9)$$

где

$$\alpha_k^l = -\frac{1}{D_l} \begin{vmatrix} 0 & \omega_0 & \dots & \omega_{m_l} \\ \omega_0(n_k^l) & & & \\ \vdots & & & \\ \omega_{m_l}(n_k^l) & & D_l & \end{vmatrix},$$

$$D_l = \begin{vmatrix} \sum_{k=0}^{p_l} \omega_0(n_k^l) \omega_0(n_k^l) & \dots & \sum_{k=0}^{p_l} \omega_0(n_k^l) \omega_{m_l}(n_k^l) \\ \dots & \dots & \dots \\ \sum_{k=0}^{p_l} \omega_{m_l}(n_k^l) \omega_0(n_k^l) & \dots & \sum_{k=0}^{p_l} \omega_{m_l}(n_k^l) \omega_{m_l}(n_k^l) \end{vmatrix}.$$

Преобразование (9) линейно. Если существует $\lim_{l \rightarrow \infty} \sigma_l = \sigma$, то его можно назвать обобщенным пределом последовательности S_n .

II. Линейные преобразования по системе алгебраических многочленов от $1/n$. Наиболее часто в практике вычислений встречаются приближения с помощью алгебраических многочленов от $1/n$. В качестве координатной системы функций здесь служит система обратных степеней n :

$$\omega_0(n) = 1, \quad \omega_1(n) = \frac{1}{n}, \quad \dots, \quad \omega_m(n) = \frac{1}{n^m}, \quad \dots$$

* Так как случай $p_l = m_l (l=1, 2, \dots)$ соответствует интерполяционным преобразованиям (1), в дальнейшем будем считать $p_l > m_l$.

Пусть число узлов n_k постоянно, $p_l = p$ ($l = 1, 2, \dots$), и степень обобщенного многочлена $m_l = m$ ($l = 1, 2, \dots$) не изменяется с изменением шага ($m < p$). Тогда, выбирая узлы преобразования на шаге номера n последовательно возрастающими $n, n + 1, \dots, n + p$, что естественно, из (9) получаем

$$\sigma_n(p, m) = \frac{1}{D} \begin{vmatrix} \sum_{k=0}^p S_{n+k} & \sum_{k=0}^p \frac{1}{n+k} & \dots & \sum_{k=0}^p \frac{1}{(n+k)^m} \\ \sum_{k=0}^p \frac{S_{n+k}}{n+k} & \sum_{k=0}^p \frac{1}{(n+k)^2} & \dots & \sum_{k=0}^p \frac{1}{(n+k)^{m+1}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sum_{k=0}^p \frac{S_{n+k}}{(n+k)^m} & \sum_{k=0}^p \frac{1}{(n+k)^{m+1}} & \dots & \sum_{k=0}^p \frac{1}{(n+k)^{2m}} \end{vmatrix}, \quad (10)$$

где

$$D = \begin{vmatrix} p+1 & \sum_{k=0}^p \frac{1}{n+k} & \dots & \sum_{k=0}^p \frac{1}{(n+k)^m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sum_{k=0}^p \frac{1}{(n+k)^m} & \sum_{k=0}^p \frac{1}{(n+k)^{m+1}} & \dots & \sum_{k=0}^p \frac{1}{(n+k)^{2m}} \end{vmatrix}$$

Из (10) с очевидностью следует, что преобразование линейное с переменными коэффициентами. Сумма коэффициентов равна единице, и если $S_n = S$ ($n = 1, 2, \dots$), то $\sigma_n = S$ ($n = 1, 2, \dots$). Кроме того, если $S_n = n^{-i}$ ($i = 1, 2, \dots, m$), то $\sigma_n = 0$ ($n = 1, 2, \dots$). Перепишем преобразование (10) в другом виде:

$$\sigma_n(p, m) = \frac{\sum_{k_1=0}^p S_{n+k_1} A(k_1)}{\sum_{k_1=0}^p A(k_1)}, \quad (11)$$

где

$$A(k_1) = \frac{1}{(n+k_1)^m} \sum_{k_2=0}^p \frac{k_1 - k_2}{(n+k_2)^{m+1}} \dots \sum_{k_{m+1}=0}^p \frac{(k_1 - k_{m+1}) \dots (k_m - k_{m+1})}{(n+k_{m+1})^{2m}}.$$

Теорема 1. Преобразование по методу наименьших квадратов (10), (11) при $m > 0$ не регулярно.

Всю сумму $\sum_{k_1=0}^p A(k_1)$ в (11) разобьем на C_{p+1}^{m+1} групп слагаемых, так

чтобы в каждой группе слагаемые отличались бы друг от друга лишь перестановками $m+1$ значений k_i , таких слагаемых в каждой группе $(m+1)!$. Возьмем одну такую группу слагаемых. С помощью метода индукции можно подсчитать ее сумму:

$$\sum_{(k_1, \dots, k_{m+1})} \frac{1}{(n+k_1)^m} \frac{k_1-k_2}{(n+k_2)^{m+1}} \dots \frac{(k_1-k_{m+1}) \dots (k_m-k_{m+1})}{(n+k_{m+1})^{2m}} =$$

$$= \frac{(k_1-k_2)^2 (k_1-k_3)^2 \dots (k_m-k_{m+1})^2}{(n+k_1)^{2m} (n+k_2)^{2m} \dots (n+k_{m+1})^{2m}}. \quad (12)$$

Тогда $\sum_{k_1=0}^p A(k_1)$ представляет собой сумму C_{p+1}^{m+1} числа положительных слагаемых вида (12), следовательно, $\sum_{k_1=0}^p A(k_1) > 0$ при любых n, m, p и преобразование (10), (11) всегда возможно. Аналогично получаем, что $A(k_1)$ из (11) представляет собой сумму C_p^m числа слагаемых вида

$$\frac{1}{(n+k_1)^m} \frac{(k_1-k_2) \dots (k_1-k_{m+1}) (k_2-k_3)^2 \dots (k_m-k_{m+1})^2}{(n+k_2)^{2m} \dots (n+k_{m+1})^{2m}}. \quad (13)$$

При больших n они будут величинами порядка $n^{-(2m^2+m)}$. Заметим также, что при $k_1=0$ и $k_1=p$ все слагаемые будут иметь одинаковые знаки.

Из (12) следует, что

$$\sum_{k_1=0}^p A(k_1) = O\left(\frac{1}{n^{2m(m+1)}}\right),$$

при этом порядок малости здесь указан точно.

Аналогично из (13) вытекает, что

$$A(k_1) = O\left(\frac{1}{n^{2m^2+m}}\right),$$

причем при $k_1=0$ и $k_1=p$ порядок малости указывается точно.

Для коэффициентов преобразования отсюда получается следующая оценка их роста:

$$\frac{A(k_1)}{\sum_{k_1=0}^p A(k_1)} = O(n^m).$$

Если $k_1=0$ и $k_1=p$, указанная оценка роста является точной и $A(0) \left/ \sum_{k_1=0}^p A(k_1) \right.$ и $A(p) \left/ \sum_{k_1=0}^p A(k_1) \right.$ неограниченно растут при $m > 0$, следовательно, при $m > 0$ преобразование (10), (11) не регулярно при любом p . Если $m=0$, преобразование (10), (11) регулярно.

Теорема 2. Преобразование (10), (11) по методу наименьших квадратов представляет собой линейную комбинацию интерполяционных преобразований [1] вида

$$\sigma_n(m) = \frac{1}{m!} \sum_{k=0}^m (-1)^{m+k} C_m^k (n+k)^m S_{n+k}, \quad C_m^k = \frac{m!}{k!(m-k)!}. \quad (14)$$

Преобразование (10), (11) будем [рассматривать в немного измененном виде:

$$\sigma_n(p, m) = \frac{1}{D} \sum_{k=0}^p (n+k)^m S_{n+k} B(k), \tag{15}$$

где

$$B(k) = \frac{1}{(n+k)^m} \begin{vmatrix} 1 & \sum_{k=0}^p \frac{1}{n+k} & \dots & \sum_{k=0}^p \frac{1}{(n+k)^n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{1}{(n+k)^m} & \sum_{k=0}^p \frac{1}{(n+k)^{m+1}} & \dots & \sum_{k=0}^p \frac{1}{(n+k)^{2m}} \end{vmatrix}$$

Очевидны равенства

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^p B(k) &= 0, \\ \sum_{k=0}^p (n+k) B(k) &= 0, \\ \dots & \dots \\ \sum_{k=0}^p (n+k)^{m-1} B(k) &= 0. \end{aligned} \tag{16}$$

Нам нужно показать, что существуют и единственны коэффициенты $\alpha_i(n)$, $i = 0, 1, \dots, p-m$, при которых для любых последовательностей S_n справедливо тождество

$$\begin{aligned} & \frac{1}{D} \sum_{k=0}^p (n+k)^m S_{n+k} B(k) \equiv \\ & \equiv \sum_{i=0}^{p-m} \alpha_i(n) \frac{1}{m!} \sum_{k=0}^m (-1)^{m+k} C_m^k (n+k+i)^m S_{n+k+i}. \end{aligned} \tag{17}$$

Приравниваем коэффициенты в обеих частях тождества при одинаковых выражениях $(n+l)^m S_{n+l}$ ($l=0, 1, \dots, p$), получаем систему $p+1$ уравнений для $p-m+1$ неизвестных $\alpha_0(n), \alpha_1(n), \dots, \alpha_{p-m}(n)$:

$$\begin{aligned} (-1)^m \frac{1}{m!} \alpha_0(n) &= \frac{1}{D} B(0), \\ (-1)^m \frac{1}{m!} [\alpha_1(n) - C_m^1 \alpha_0(n)] &= \frac{1}{D} B(1), \\ \dots & \dots \\ (-1)^m \frac{1}{m!} [\alpha_{p-m}(n) - \dots] &= \frac{1}{D} B(p-m), \end{aligned}$$

$$(-1)^m \frac{1}{m!} [-C_m^1 \alpha_{p-m}(n) + \dots] = \frac{1}{D} B(p-m+1),$$

.....

$$\frac{1}{m!} \alpha_{p-m}(n) = \frac{1}{D} B(p).$$

Из первых $p-m+1$ уравнений $\alpha_0(n), \dots, \alpha_{p-m}(n)$ определяются единственным образом, так как определитель системы этих уравнений отличен от 0 (треугольная матрица) и равен $\left[(-1)^m \frac{1}{m!}\right]^{p-m+1}$. Оставшиеся m уравнений линейно зависят от первых $p-m+1$, чтобы убедиться в этом, достаточно сложить все уравнения m раз, умножая каждое уравнение на $(n+k)^i, i=0, 1, \dots, m-1$, где k — номер уравнения. Тогда в левой части получаются суммы вида

$$\sum_{k=0}^m (n+k)^i (-1)^k C_m^k \quad (i=0, 1, \dots, m-1),$$

которые всегда равны нулю, а в правой части — соотношения (16). Итак,

$$\alpha_i(n) = \frac{(-1)^m m!}{D} \begin{vmatrix} p-m & \dots & i & \dots & 1 & 0 \\ 0 & \dots & B(0) & \dots & 0 & 1 \\ 0 & \dots & B(1) & \dots & 1 & -C_m^1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \dots & B(p-m) & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}, \quad (18)$$

$$i = 0, 1, \dots, p-m.$$

Следствия:

$$1. B(k) = \frac{1}{(n+k)^m} A(k) \text{ и, как было показано раньше, } A(k)/D = O(n^m).$$

Поэтому $\alpha_i(n)$ — ограниченная величина, $|\alpha_i(n)| \leq M, i=0, 1, \dots, p-m$.

2. Так как преобразование по методу наименьших квадратов не изменяет постоянной и интерполяционное преобразование также не изменяет постоянной, т. е.

$$\frac{1}{m!} \sum_{k=0}^m (-1)^{m+k} C_m^k (n+k+i)^m = 1,$$

то

$$\sum_{i=0}^{p-m} \alpha_i(n) = 1$$

при любых n .

3. Обозначим

$$\frac{1}{m!} \sum_{k=0}^m (-1)^{m+k} C_m^k (n+k+i)^m S_{n+k+i} = U_{n+i}. \quad (19)$$

Тогда из (17) следует, что

$$\sigma_n(p, m) = \sum_{i=0}^{p-m} \alpha_i(n) U_{n+i}. \quad (20)$$

Из следствий 1 и 2 по теореме о регулярности линейных преобразований [2, 3] получаем, что преобразование (20) является регулярным. Это последнее следствие приводит к теореме.

Теорема 3. *Для того чтобы преобразованная (10), (11) последовательность сходилась, достаточно, чтобы сходилась интерполяционная преобразование порядка m исходной последовательности [1].*

Пусть в (20) последовательность U_n сходится, т. е. при больших n $U_n = S + \delta_n$, где $\delta_n \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$). Из регулярности (20) следует, что

$$\sigma_n(p, m) = S + \sum_{i=0}^{p-m} \alpha_i(n) \delta_{n+i},$$

$$\sum_{i=0}^{p-m} \alpha_i(n) \delta_{n+i} \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty$$

и

$$|\sigma_n(p, m) - S| \leq M \max_{0 \leq i < p-m} |\delta_{n+i}|.$$

А так как в (20) участвует лишь конечное число членов исходной последовательности U_n , то преобразование (20) не ухудшает скорости сходимости последовательности к пределу. С помощью теоремы 2 отсюда получаем достаточное условие улучшения сходимости.

Теорема 4. *Если интерполяционное преобразование порядка m (14) улучшает сходимость последовательности S_n , то и преобразование (10), (11) со степенью приближения m и с любым числом узлов p улучшает сходимость этой последовательности, причем скорость сходимости при преобразовании (10), (11) не меньше, чем при интерполяционном.*

Литература

1. Кругликова Л. Г., Крылов В. И. Вестн. АН БССР, сер. физ.-мат. наук, № 1, 1969.
2. Харди Г. Расходящиеся ряды. ИЛ, 1951.
3. Кук Р. Бесконечные матрицы и пространства последовательностей. ГИФМЛ, 1960.

Институт математики
АН БССР

Поступило в редакцию 12.XII 1969

В. Н. ЛАПТИНСКИЙ, Ю. Д. ГОРОДЕЦКИЙ, В. В. СЕРОВ
**К ПРИБЛИЖЕННОМУ РЕШЕНИЮ НЕЛИНЕЙНЫХ
 ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ**

В излагаемой заметке исследуется метод построения приближенного аналитического решения уравнения

$$\varphi(t) = \int_a^b K[t, s, \varphi(s)] ds + \psi(t), \quad (1)$$

где $\varphi, \psi, K(t, s, u)$ суть n -мерные векторы, непрерывные соответственно при $a \leq t \leq b; a \leq t, s \leq b, |u_i| < \infty, i = 1, 2, \dots, n$.

Метод основан на использовании ставшего уже классическим способа расщепления оператора на два так, что полученное затем укороченное уравнение решается точно. Исходя из этого вводится итерационная схема, причем приближения для исходного уравнения строятся по непосредственно предшествующим. Этим характерны методы, рассматриваемые в [1—3]. Предлагаемый метод дает более высокую скорость сходимости, чем известный метод последовательных приближений Пикара—Линделефа.

Вначале приведем ряд фактов из теории интегральных неравенств.

Лемма. Пусть даны скалярное неравенство

$$z(t) \leq \int_a^b K(t, s) z(s) ds + h(t) \quad (2)$$

и уравнение

$$u(t) = \int_a^b K(t, s) u(s) ds + h(t),$$

для которого имеет место первый случай альтернативы Фредгольма с неотрицательной при $a \leq t, s \leq b$ резольвентой $\Gamma(t, s)$ ядра $K(t, s)$. Тогда $z(t) \leq u(t), a \leq t \leq b$.

Доказательство. Из неравенства (2) имеем

$$z(t) = h(t) - \varepsilon(t) + \int_a^b K(t, s) z(s) ds,$$

где

$$\varepsilon(t) \geq 0.$$

Отсюда

$$\begin{aligned} z(t) &= h(t) + \int_a^b \Gamma(t, s) h(s) ds - \varepsilon(t) - \int_a^b \Gamma(t, s) \varepsilon(s) ds \leq \\ &\leq h(t) + \int_a^b \Gamma(t, s) h(s) ds = u(t), \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

Приведенная лемма справедлива, например, если ядро $K(t, s)$ неотрицательно при $a \leq t, s \leq b$.

Эта лемма фактически распространяет неравенство Гронуолла—Беллмана ([4], стр. 188) на случай неравенств типа (2).

Пусть вектор-функция $K(t, s, u)$ имеет вид

$$K(t, s, u) = K_1(t, s, u) + K_2(t, s, u),$$

причем уравнение

$$x(t) = \int_a^b K_1[t, s, x(s)] ds + f(t) \quad (3)$$

для любой непрерывной на $[a, b]$ вектор-функции $f(t)$ имеет единственное решение. Резольвенту оператора A_1

$$A_1 x = \int_a^b K_1[t, s, x(s)] ds$$

обозначим через R , то есть $x(t) = Rf$ (см. [5], стр. 149).

Исходя из этого, для решения уравнения (1) строим итерационную схему

$$\varphi_m(t) = \int_a^b K_1[t, s, \varphi_m(s)] ds + \int_a^b K_2[t, s, \varphi_{m-1}(s)] ds + \psi(t). \quad (4)$$

Вводя обозначение

$$\int_a^b K_2[t, s, \varphi_{m-1}(s)] ds + \psi(t) = f_{m-1}(t),$$

получим

$$\varphi_m(t) = \int_a^b K_1[t, s, \varphi_m(s)] ds + f_{m-1}(t). \quad (5)$$

А это есть уравнение типа (3) относительно $\varphi_m(t)$. Поэтому

$$\varphi_m(t) = Rf_{m-1}, \quad m = 1, 2, \dots \quad (6)$$

Переходим к исследованию скорости сходимости предложенного метода. Для этого введем дополнительные ограничения на вектор-функции K_1, K_2 . Пусть эти вектор-функции удовлетворяют условиям

$$\begin{aligned} \|K_1(t, s, u_1) - K_1(t, s, u_2)\| &\leq \alpha \|u_1 - u_2\|, \\ \|K_2(t, s, u_1) - K_2(t, s, u_2)\| &\leq \beta \|u_1 - u_2\|, \end{aligned} \quad (7)$$

где α, β — положительные числа; u_1, u_2 — векторы; $a \leq t, s \leq b$, причем $(\alpha + \beta)(b - a) < 1$.

Здесь под нормой вектора $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ понимаем евклидову норму этого вектора, то есть

$$\|y\| = (y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_n^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Вначале оценим разность $\varphi_1 - \varphi_0$. Имеем

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \int_a^b K_1(t, s, \varphi_1) ds + \int_a^b K_2(t, s, \varphi_0) ds + \psi(t) = \\ &= \int_a^b [K_1(t, s, \varphi_1) - K_1(t, s, \varphi_0)] ds + \int_a^b K(t, s, \varphi_0) ds + \psi(t). \end{aligned}$$

Отсюда

$$\|\varphi_1 - \varphi_0\| \leq \int_a^b \alpha \|\varphi_1 - \varphi_0\| ds + \gamma, \quad (8)$$

где

$$\left\| \int_a^b K(t, s, \varphi_0) ds + \psi(t) - \varphi_0 \right\| \leq \gamma = \text{const.}$$

Опираясь на приведенную выше лемму, получим из (8)

$$\|\varphi_1 - \varphi_0\| \leq \frac{\gamma}{1 - \alpha(b-a)}. \quad (9)$$

Теперь

$$\begin{aligned} \varphi_m &= \int_a^b K_1(t, s, \varphi_m) ds + \int_a^b K_2(t, s, \varphi_{m-1}) ds + \psi(t), \\ \varphi_{m+1} &= \int_a^b K_1(t, s, \varphi_{m+1}) ds + \int_a^b K_2(t, s, \varphi_m) ds + \psi(t). \end{aligned}$$

Отсюда, используя условия (7), получим

$$\|\varphi_{m+1} - \varphi_m\| \leq \int_a^b \alpha \|\varphi_{m+1} - \varphi_m\| ds + \int_a^b \beta \|\varphi_m - \varphi_{m-1}\| ds. \quad (10)$$

На основании нашей леммы имеем из (10)

$$\|\varphi_{m+1} - \varphi_m\| \leq \frac{\beta}{1 - \alpha(b-a)} \int_a^b \|\varphi_m - \varphi_{m-1}\| ds. \quad (11)$$

Полагая в (11) $m=1$, получим

$$\|\varphi_2 - \varphi_1\| \leq \frac{\gamma}{1 - \alpha(b-a)} \frac{\beta}{1 - \alpha(b-a)}.$$

Легко видеть теперь, что

$$\|\varphi_{m+1} - \varphi_m\| \leq \gamma_1 q^m, \quad (12)$$

где

$$\gamma_1 = \frac{\gamma}{1 - \alpha(b-a)}, \quad q = \frac{\beta(b-a)}{1 - \alpha(b-a)}.$$

Это можно показать индукцией по m .

Отметим, что из условия $(\alpha + \beta)(b-a) < 1$ следует $q < 1$.

Оценим приближение $\varphi_{m+1}(t)$.

Имеем

$$\varphi_{m+1} = \varphi_0 + (\varphi_1 - \varphi_0) + \dots + (\varphi_{m+1} - \varphi_m).$$

Отсюда

$$\|\varphi_{m+1}\| \leq \|\varphi_0\| + \|\varphi_1 - \varphi_0\| + \dots + \|\varphi_{m+1} - \varphi_m\| \leq \delta + \gamma_1 \sum_{r=1}^m q^r,$$

где $\|\varphi_0\| \leq \delta$, $a \leq t \leq b$.

Оценка для точного решения $\varphi(t)$ имеет следующий вид:

$$\|\varphi(t)\| \leq \delta + \gamma_1 \sum_{r=1}^{\infty} q^r = \delta + \gamma_1 \frac{1}{1-q}.$$

Или

$$\|\varphi(t)\| \leq \frac{\gamma}{1 - (\alpha + \beta)(b - a)}. \quad (13)$$

Получим оценку отклонения приближения $\varphi_m(t)$ от точного решения $\varphi(t)$:

$$\begin{aligned} \|\varphi - \varphi_m\| &\leq \|\varphi_{m+1} - \varphi_m\| + \|\varphi_{m+2} - \varphi_{m+1}\| + \dots \leq \\ &\leq \gamma_1 q^m \frac{1 - \alpha(b - a)}{1 - (\alpha + \beta)(b - a)}. \end{aligned}$$

Окончательно имеем

$$\|\varphi - \varphi_m\| \leq \gamma_2 q^m, \quad (14)$$

где

$$\gamma_2 = \frac{\gamma}{1 - (\alpha + \beta)(b - a)}.$$

Если уравнение (1) решать методом Пикара—Линделефа со схемой

$$\varphi_{m+1} = \int_a^b [K_1(t, s, \varphi_m) + K_2(t, s, \varphi_m)] ds + \psi(t),$$

то оценка нормы разности $\varphi - \varphi_m$ имеет вид

$$\begin{aligned} \|\varphi - \varphi_m\| &\leq \gamma_2 p^m, \\ p &= (\alpha + \beta)(b - a). \end{aligned} \quad (15)$$

Теперь отметим следующий факт:

$$p - q = (\alpha + \beta)(b - a) - \frac{\beta(b - a)}{1 - \alpha(b - a)} = \frac{\alpha(b - a)(1 - p)}{1 - \alpha(b - a)} > 0.$$

Отсюда убеждаемся, что рассматриваемый метод дает более высокую скорость сходимости для некоторых классов уравнения (1).

Иллюстрацией метода может служить линейное векторно-матричное уравнение

$$\varphi(t) = \int_a^b K(t, s) \varphi(s) ds + \psi(t). \quad (16)$$

Здесь $K(t, s)$ — $n \times n$ -матрица, причем $K(t, s) = K_1(t, s) + K_2(t, s)$. Итерационная схема (4) для этого уравнения имеет вид

$$\varphi_m = \int_a^b K_1(t, s) \varphi_m ds + \int_a^b K_2(t, s) \varphi_{m-1} ds + \psi(t),$$

причем

$$\|K_1(t, s)\| \leq \alpha, \quad \|K_2(t, s)\| \leq \beta.$$

Отметим еще, что оценки матриц K_1, K_2 могут быть и такими:

$$\|K_1(t, s)\| \leq \alpha(t, s), \quad \|K_2(t, s)\| \leq \beta(t, s),$$

где $\alpha(t, s), \beta(t, s)$ — непрерывные положительные функции при $a \leq t, s \leq b$. Как и прежде, для получения оценок типа (12) следует опираться на приведенную в начале заметки лемму. При этом, естественно, усложнятся выкладки.

Как видно из процесса вычислений, мы решили заодно и задачу существования и единственности решения уравнения (1).

Если же рассматривать уравнение

$$\varphi(t) = \int_a^b K[t, s, \varphi(s)] ds \quad (17)$$

при

$$\|K(t, s, \varphi)\| \leq \rho(t, s) \|\varphi\|, \quad t, s \in [a, b], \quad \|\varphi\| < \infty,$$

причем для уравнения

$$u(t) = \int_a^b \rho(t, s) u(s) ds + \psi(t)$$

имеет место первый случай альтернативы Фредгольма [6] с резольвентой $\Gamma_1(t, s)$ ядра $\rho(t, s)$, то можно показать, опираясь на лемму, что уравнение (17) имеет лишь тривиальное решение. В частности, так будет, если $\rho(t, s) \leq \mu$, $\mu(b-a) < 1$.

Литература

1. Bajcsay P. Periodica Polytechnica, 3, № 3, 217, 1959.
2. Еругин А. Н. ИФЖ, 4, № 5, 111, 1961.
3. Лаптинский В. Н. ДАН БССР, 10, № 10, 1966.
4. Беккенбах Э., Беллман Р. Неравенства. Изд-во «Мир», М., 1965.
5. Красносельский М. А. Топологические методы в теории нелинейных интегральных уравнений. ГИТТЛ, М., 1956.
6. Петровский И. Г. Лекции по теории интегральных уравнений. Изд-во «Наука», М., 1965.

Могилевский машиностроительный институт,
Минский радиотехнический институт,
Белорусский государственный университет
им. В. И. Ленина

Поступило в редакцию 6.III 1969

Г. Н. ПЫХТЕЕВ

**О ПОСТРОЕНИИ КВАДРАТУРНЫХ ФОРМУЛ
 ДЛЯ ИНТЕГРАЛОВ ТИПА КОШИ
 ПО ПРЯМОЛИНЕЙНОМУ РАЗОМКНУТОМУ КОНТУРУ**

В работе [1] рассмотрены приближенные формулы для интегралов типа Коши

$$\Omega(z) = \frac{\omega(z)}{\pi i} \int_{-1}^1 \frac{1}{\omega(t)} \frac{f(t)}{t-z} dt, \quad z \notin [-1, 1], \quad (1)$$

и их главных значений

$$T(x) = \frac{\omega(x)}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{1}{\omega(t)} \frac{f(t)}{t-x} dt, \quad x \in (-1, 1). \quad (2)$$

Здесь $\omega(x)$ — фиксированная действительная функция, $\omega(z)$ — функция, аналитическая в верхней полуплоскости всюду, за исключением, может быть, бесконечно-удаленной точки, в которой для нее допустим полюс, и удовлетворяющая условию $\lim_{z \rightarrow x} \omega(z) = \omega(x)$, $z \rightarrow x \in [-1, 1]$, $z \in D$, где D — верхняя полуплоскость, а $f(x)$ — функция, принадлежащая достаточно гладкому классу, по крайней мере она удовлетворяет условию Гельдера. Приближенные формулы, рассмотренные в [1] и имеющие вид

$$\Omega(z) \approx \mathcal{Q}(f|z) \equiv \sum_{k=0}^{n-1} \mathfrak{A}_k(z) L_k(f), \quad (3)$$

$$T(x) \approx L(f|x) \equiv \sum_{k=0}^{n-1} A_k(x) L_k(f), \quad (4)$$

где $\mathfrak{A}_k(z)$, $A_k(x)$ — заданные функции, а $L_k(f)$ — заданные линейные функционалы, названы квадратурными формулами. Для случая, когда остаточный член квадратурной формулы (3) представим в виде

$$E_{\Omega}(f|z) = \Omega(z) - \mathcal{Q}(f|z) = \int_{-1}^1 \frac{1}{\rho(t)} \gamma_r(z, t) f_{\rho}^{(r)}(t) dt, \quad (5)$$

где $\gamma_r(z, t)$ — непрерывная функция двух переменных и в замкнутой области $D^* = \bar{D} + [-1, 1]$ ($z \in \bar{D}$, $t \in [-1, 1]$, \bar{D} — верхняя полуплоскость вместе с действительной осью), а $f_{\rho}^{(r)}(x)$ — производная порядка r от $f(x)$

с заданной плотностью $\rho = \rho(x)$, определяемая при помощи рекуррентных равенств

$$f_{\rho}^{(1)}(x) = \rho f'(x), \quad f_{\rho}^{(2)}(x) = \rho \frac{d}{dx} (f_{\rho}^{(1)}(x)), \dots,$$

$$f_{\rho}^{(r)}(x) = \rho \frac{d}{dx} (f_{\rho}^{(r-1)}(x)),$$

в работе [1] получены соотношения, которые можно положить в основу методов определения погрешности квадратурных формул в классе $\omega_{\rho}^r(M)$, т. е. в классе функций, заданных на отрезке $[-1, 1]$, непрерывных и имеющих непрерывные производные $f_{\rho}^{(s)}(x)$ до $(r-1)$ -го порядка включительно и непрерывную или кусочно-непрерывную производную $f_{\rho}^{(r)}(x)$, удовлетворяющую неравенству

$$|f_{\rho}^{(r)}(x)| \leq M. \quad (6)$$

Из этих соотношений следует, что если остаточный член квадратурной формулы (3) есть линейный оператор от $f_{\rho}^{(r)}(x)$ вида (5), то определение ее погрешности сведется к вычислению максимальных значений функций $\alpha_r(x)$, $\beta_r(x)$, $\gamma_r(x)$, определяемых равенствами

$$\alpha_r(x) = \int_{-1}^1 \frac{1}{\rho(t)} |\alpha_r(x, t)| dt,$$

$$\beta_r(x) = \int_{-1}^1 \frac{1}{\rho(t)} |\beta_r(x, t)| dt, \quad (7)$$

$$\gamma_r(x) = \int_{-1}^1 \frac{1}{\rho(t)} |\gamma_r(x, t)| dt,$$

в которых $\gamma_r(x, t)$ — предельное значение функции $\gamma_r(z, t)$ на отрезке $[-1, 1]$ при $z \rightarrow x$, $z \in D$, а $-\alpha_r(x, t)$ и $\beta_r(x, t)$ — мнимая и действительная части $\gamma_r(x, t)$, т. е. $\beta_r(x, t) - i\alpha_r(x, t) = \gamma_r(x, t)$, $x \in [-1, 1]$. Очевидно, возникает вопрос о способах построения таких квадратурных формул. В настоящей работе предлагаются три способа построения квадратурных формул, у которых остаточный член представим в виде (5). При изложении данной работы используются обозначения, принятые в [1].

1. Образующая система в классе ω_{ρ}^r . Следуя [1], будем обозначать через ω_{ρ}^r класс функций, определенных на отрезке $[-1, 1]$, непрерывных и имеющих непрерывные производные $f_{\rho}^{(s)}(x)$ до $(r-1)$ -го порядка включительно и непрерывную или кусочно-непрерывную производную $f_{\rho}^{(r)}(x)$ (класс $\omega_{\rho}^r(M)$ есть множество функций класса ω_{ρ}^r , удовлетворяющих неравенству (6)). Пусть в классе ω_{ρ}^r имеется система заданных функций

$$u_0(x), u_1(x), \dots, u_n(x), \dots, \quad (8)$$

принадлежащих этому классу, полная (в том смысле, что для каждой функции $f(x) \in \omega_{\rho}^r$ и любого $\varepsilon > 0$ существует линейная комбинация

$$\sigma(x) = \sum_{k=0}^{n-1} c_k u_k(x),$$

для которой $|f(x) - \sigma(x)| < \varepsilon$ и такая, что любую функцию $f(x) \in \omega_\rho^r$ можно представить в виде равенства

$$f(x) = \sum_{k=0}^{m-1} a_k u_k(x) + R_r(x), \quad (9)$$

в котором $R_r(x)$ есть линейный оператор от $f_\rho^{(r)}(x)$

$$R_r(x) = \int_{-1}^1 \frac{1}{\rho(t)} K_r(x, t) f_\rho^{(r)}(t) dt \quad (10)$$

с ядром $K_r(x, t)$, зависящим от r , а a_k — постоянные, являющиеся функционалами от $f(x)$, причем число m , вообще говоря, зависит от r . Тогда систему (8) будем называть образующей системой класса ω_ρ^r , а равенство (9) — структурной формулой класса ω_ρ^r . В случае, когда m не зависит от r , ядро $K_r(x, t)$ будет, вообще говоря, зависеть от r и m .

Приведем примеры образующих систем, существующих в любом классе ω_ρ^r , у которого $\frac{1}{\rho(x)}$ есть функция, интегрируемая на отрезке $[-1, 1]$.

1. *Обобщенная алгебраическая система.* Так назовем систему

$$1, \theta(x), \theta^2(x), \dots, \theta^n(x), \dots, \quad (11)$$

где

$$\theta(x) = \pm \int_{x_0}^x \frac{1}{\rho(t)} dt. \quad (12)$$

Легко показать, что для функции $f(x) \in \omega_\rho^r$ имеет место представление

$$f(x) = \sum_{k=0}^{r-1} \frac{1}{k!} (\theta(x) - \theta(-1))^k f_\rho^{(k)}(-1) + R_r(x), \quad (13)$$

если в равенстве (12) берется положительный знак, и

$$f(x) = \sum_{k=0}^{r-1} \frac{(-1)^k}{k!} (\theta(x) - \theta(1))^k f_\rho^{(k)}(1) + R_r(x), \quad (14)$$

если в равенстве (12) берется отрицательный знак. В этих равенствах $R_r(x)$ есть оператор (10), в котором

$$K_r(x, t) = \frac{(\pm 1)^r}{(r-1)!} K_r(\theta(x) - \theta(t)),$$

$$K_r(u) = \begin{cases} u^{r-1}, & \text{если } u \geq 0, \\ 0, & \text{если } u < 0. \end{cases} \quad (15)$$

При $\rho(x) \equiv 1$ система (11) будет обычной алгебраической системой. Таким образом, (13), (14) есть структурные формулы для системы (11) и, следовательно, последняя является образующей в классе ω_ρ^r .

2. Ортогональная с плотностью $\frac{1}{\rho(x)}$ система функций. Здесь имеется в виду полная система функций

$$u_0(x), u_1(x), \dots, u_n(x), \dots, \quad (16)$$

удовлетворяющих соотношениям

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{\rho(t)} u_m(t) u_n(t) dt = 0, \quad \text{если } m \neq n;$$

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{\rho(t)} u_n^2(t) dt = \lambda_n \neq 0.$$

Если функция $f(x) \in \omega_\rho^r$ удовлетворяет $2r$ условиям

$$f(\pm 1) = f_\rho^{(1)}(\pm 1) = \dots = f_\rho^{(r-1)}(\pm 1) = 0, \quad (17)$$

то для нее можно установить представление

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k u_k(x) + R_r(x),$$

$$a_k = \frac{1}{\lambda_k} \int_{-1}^1 \frac{1}{\rho(t)} f(t) u_k(t) dt, \quad (18)$$

где $R_r(x)$ — оператор (10), в котором

$$K_r(x, t) = (-1)^r \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k} u_k(x) u_{kr}(t), \quad (19)$$

где $u_{kr}(x)$ — функции, определяемые рекуррентными соотношениями

$$u_{k1}(x) = \int_{x_{k1}}^x \frac{1}{\rho(t)} u_k(t) dt, \dots,$$

$$u_{kr}(x) = \int_{x_{kr}}^x \frac{1}{\rho(t)} u_{k(r-1)}(t) dt. \quad (20)$$

Числа x_{k1}, \dots, x_{kr} , входящие в соотношения (20), произвольны, и их можно выбирать так, как удобно для данной системы (16). Отсюда следует, что система (16) является образующей в классе, который состоит из функций, принадлежащих классу ω_ρ^r и удовлетворяющих условиям (17). Равенство (18) есть структурная формула в названном классе.

Замечание. Условия (17), число которых равно $2r$, являются достаточными для того, чтобы имело место представление (18). В некоторых случаях нет необходимости требовать выполнения всех условий (17). Число условий (17) зависит от поведения функций (20) на концах отрезка $[-1, 1]$. Если, например, какие-нибудь из функций $u_{k1}(x), \dots, u_{kr}(x)$ при любом $k \geq n$

обращаются в нуль в точке $x = 1$ или $x = -1$ или в обеих этих точках, причем число всех нулей равно p , то для того чтобы имело место представление (18), на функцию $f(x)$ нужно наложить только $2r - p$ условий вида (17).

3. *Обобщенная ортогональная система.* Так назовем систему функций

$$u_1(n, x), u_1^*(n, x), \dots, u_r(n, x), u_r^*(n, x), u_0(x), u_1(x), \dots, \quad (21)$$

где $u_k(x)$ ($k = 0, 1, \dots$) — функция ортогональной системы (16), а $u_m(n, x)$, $u_m^*(n, x)$ ($m = 1, 2, \dots, r$) — функции, определяемые рядами

$$u_m(n, x) = \frac{1}{\mu_m} \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k} u_{km}(1) u_k(x),$$

$$u_m^*(n, x) = \frac{1}{\mu_m^*} \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k} u_{km}(-1) u_k(x). \quad (22)$$

Здесь μ_m, μ_m^* — произвольные числа, выбираемые для каждой системы (16) удобным образом; $u_{km}(x)$ — функции, определяемые рекуррентными соотношениями (20), в которых нужно положить $r = m$. Можно показать, что для любой функции $f(x) \in \omega_p^r$ имеет место представление

$$f(x) = \sum_{s=0}^{r-1} (-1)^s [\mu_{s+1} u_{s+1}(n, x) f_p^{(s)}(1) - \mu_{s+1}^* u_{s+1}^*(n, x) f_p^{(s)}(-1)] +$$

$$+ \sum_{k=0}^{n-1} a_k u_k(x) + R_r(x). \quad (23)$$

Постоянные a_k ($k = 0, 1, \dots, n-1$) и $R_r(x)$, входящие в это представление, — те же самые, что и в представлении (18). Таким образом, система (21) является образующей системой в классе ω_p^r . Структурная формула для нее имеет вид (23). Эта формула в отличие от структурной формулы (18), которая имеет место при выполнении $2r$ условий (17), справедлива для любой функции $f(x) \in \omega_p^r$.

2. *Интерполяционные квадратурные формулы.* Первый способ построения, предлагаемый здесь, состоит в том, что берется интерполяционный полином, состоящий из конечного числа первых функций системы (8) и совпадающий с функцией $f(x)$ или с $f(x)$ и ее производными $f_p^{(s)}(x)$ на заданной системе точек отрезка $[-1, 1]$, и выражения, получающиеся в результате подстановки этого полинома в интегралы (1) и (2), принимаются за их приближенные значения $\mathcal{Q}(f|z)$ и $L(f|x)$. Полученные таким образом приближенные формулы естественно называть интерполяционными квадратурными формулами. Очевидно, интерполяционная квадратурная формула является точной для некоторого произвольного многочлена системы (8). Если квадратурная формула (3) является точной для любого произвольного многочлена, составленного из первых m функций системы (8), то число m мы будем называть степенью точности данной квадратурной формулы относительно системы (8). В случае, когда квадратурная формула (3) имеет степень точности m относительно системы (8), то

$$E_{\Omega} \left(\sum_{k=0}^{m-1} c_k u_k | z \right) \equiv 0, \quad (24)$$

где c_k — произвольные постоянные. Используя этот факт, нетрудно убедиться в справедливости следующей теоремы.

Теорема 1. Пусть интерполяционная квадратурная формула (3) имеет точность относительно образующей системы (8) данного класса ω_ρ^r , равную $n \geq m$, где m — число в представлении (9), и пусть выполнены следующие условия: 1) ядро $K_r(x, t)$, входящее в оператор (10), есть непрерывная функция двух переменных в квадрате $-1 \leq x, t \leq 1$, 2) имеют место формулы перестановки

$$L_k(R_r) = \int_{-1}^1 \frac{1}{\rho(t)} L_k(K_r|t) f_\rho^{(r)}(t) dt \quad (k = 0, 1, \dots, n-1), \quad (25)$$

где $L_k(f)$ — функционалы, входящие в формулу (3), а $R_r(x)$ — оператор (10). Тогда для остаточного члена квадратурной формулы (3) имеет место представление (5), в котором

$$\gamma_r(z, t) = E_\Omega(K_r|z, t). \quad (26)$$

Доказательство. В силу того, что квадратурная формула (3) имеет точность относительно системы (8) не ниже, чем m , справедливо тождество (24). Используя представление (9) и учитывая тождество (24), находим $E_\Omega(f|z) = E_\Omega(R_r|z)$. Подставим вместо $R_r(x)$ его значение (10), а затем, учитывая первое и второе условия теоремы, изменим в двойном интеграле $\Omega(R_r|z)$, который входит в правую часть $E_\Omega(R_r|z)$, порядок интегрирования и воспользуемся формулами перестановки (25). В результате всех преобразований получим представление (5), в котором $\gamma_r(z, t)$ определяется равенством (26).

Рассмотрим соответственно двум первым образующим системам п. 1 две группы интерполяционных квадратурных формул.

Пусть интерполяционный полином состоит из первых n функций системы (11) и совпадает с $f(x)$ в точках x_k ($k = 0, 1, \dots, n-1$) отрезка $[-1, 1]$. В этом случае, когда в равенстве (12) берется знак $+$, интерполяционный полином является обобщенным многочленом Лагранжа

$$Q_n(f|x) = \sum_{k=0}^{n-1} Q_n^k(x) f(x_k), \quad (27)$$

где

$$Q_n^k(x) = \frac{\omega_n(x)}{(\theta(x) - \theta(x_k)) \omega_n'(x_k)}, \quad \omega_n(x) = \prod_{k=0}^{n-1} (\theta(x) - \theta(x_k)).$$

Соответствующие интерполяционные квадратурные формулы, следовательно, имеют вид

$$\Omega(z) \approx \Omega(f|z) \equiv \sum_{k=0}^{n-1} \Omega(Q_n^k|z) f(x_k),$$

$$T(x) \approx L(f|x) \equiv \sum_{k=0}^{n-1} T(Q_n^k|x) f(x_k).$$

Эти формулы имеют точность относительно системы (11), не меньшую, чем n . Легко видеть, что ядро (15) и операторы $L_k(f) = f(x_k)$ удовлетворяют условиям теоремы 1, а поэтому остаточный член этих формул представим в виде (5), где $\gamma_r(z, t)$ определяется равенством (26), в котором $K_r(x, t)$ есть ядро (15). Используя последнее, нетрудно установить, что

функции $\alpha_r(x, t)$, $\beta_r(x, t)$, $\gamma_r(x, t)$, входящие в (7), для рассматриваемых квадратурных формул в случае, когда $\theta(x)$ удовлетворяет условию Гельдера, определяются равенствами

$$\alpha_r(x, t) = \frac{(\pm 1)^r}{(r-1)!} \left[T(K_r(\theta - \theta(t)) | x) - \sum_{k=0}^{n-1} T(Q_n^k | x) K_r(\theta(x_k) - \theta(t)) \right],$$

$$\beta_r(x, t) = \frac{(\pm 1)^r}{(r-1)!} \left[K_r(\theta(x) - \theta(t)) - \sum_{k=0}^{n-1} Q_n^k(x) K_r(\theta(x_k) - \theta(t)) \right],$$

$$\gamma_r(x, t) = \frac{(\pm 1)^r}{(r-1)!} \left[\Omega(K_r(\theta - \theta(t)) | z) - \sum_{k=0}^{n-1} \Omega(Q_n^k | z) K_r(\theta(x_k) - \theta(t)) \right],$$

причем число r может принимать значения $r = 0, 1, \dots, n$.

Пусть задана система точек x_0, x_1, \dots, x_n отрезка $[-1, 1]$ и пусть в этих точках для первых n функций системы (16) имеют место соотношения

$$\sum_{s=0}^{n-1} u_s(x_k) u_s(x_m) = 0, \text{ если } x_k \neq x_m; \quad u_s(x_k) \neq 0.$$

Тогда многочлен

$$Q_n(f | x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\rho_k} \left(\sum_{s=0}^{n-1} u_s(x_k) u_s(x) \right) f(x_k), \quad \rho_k = \sum_{s=0}^{n-1} u_s^2(x_k), \quad (27)$$

будет интерполяционным, так как $Q_n(f | x_m) = f(x_m)$ ($m = 0, 1, \dots, n-1$). После подстановки его в интегралы (1), (2) вместо $f(x)$ получим квадратурные формулы

$$\Omega(z) \approx \Omega(f | z) \equiv \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\rho_k} \left(\sum_{s=0}^{n-1} u_s(x_k) \Omega(u_s | z) \right) f(x_k), \quad (28)$$

$$T(x) \approx L(f | x) \equiv \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\rho_k} \left(\sum_{s=0}^{n-1} u_s(x_k) T(u_s | x) \right) f(x_k).$$

Их степень относительно системы (16) не меньше, чем n . Если ряд (19), образованный из функций системы (16) класса ω_ρ , сходится равномерно и выполнены условия леммы работы [1], используя представление (18), нетрудно установить при помощи теоремы 1, что если $f \in \omega_\rho$ удовлетворяет условиям (17), то функции $\alpha_r(x, t)$, $\beta_r(x, t)$, $\gamma_r(x, t)$, входящие в (7), для рассмотренных квадратурных формул будут определяться равенствами

$$\alpha_r(x, t) = (-1)^r \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k} (T(u_k | x) - L(u_k | x)) u_{kr}(t),$$

$$\beta_r(x, t) = (-1)^r \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k} (u_k(x) - Q_n^k(u_k | x)) u_{kr}(t),$$

$$\gamma_r(x, t) = (-1)^r \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k} (\Omega(u_k | x) - \mathfrak{L}(u_k | x)) u_{kr}(t),$$

в которых $Q_n(f | x)$ и $\mathfrak{L}(f | x)$, $L(f | x)$ даются формулами (27) и (28).

3. Структурные квадратурные формулы. Вторым способом построения, который предлагается здесь, состоит в получении приближенных формул для интегралов (1), (2) при помощи структурной формулы (9). Для этого нужно в равенстве (9) отбросить $R_r(x)$ и подставить оставшееся выражение в интегралы (1), (2). Такие приближенные формулы естественно называть структурными квадратурными формулами. Теорема 1 верна и для структурных квадратурных формул, так как они также являются точными относительно образующей системы. Однако для этих формул справедливо более простое утверждение.

Теорема 2. Пусть структурная квадратурная формула (3) получена при помощи образующей системы (8) и пусть выполнено первое условие теоремы 1. Тогда для остаточного члена квадратурной формулы (1) имеет место представление (5), в котором

$$\gamma_r(z, t) = \Omega(K_r | z, t). \quad (29)$$

Доказательство. Легко видеть, что для квадратурной формулы (1) $E_{\Omega}(f | z) = \Omega(R_r | z)$. Подставим вместо $R_r(x)$ его значение (10), а затем, учитывая первое условие теоремы 1, изменим в двойном интеграле $\Omega(R_r | z)$ порядок интегрирования. В результате после преобразований получим представление (5), в котором $\gamma_r(z, t)$ определяется равенством (29).

В качестве примера рассмотрим группу структурных квадратурных формул, полученных при помощи представления (23). Эти формулы имеют вид

$$\begin{aligned} \Omega(z) \approx \mathfrak{L}(f | z) \equiv & \sum_{s=0}^{r-1} (-1)^s [\mu_{s+1} \Omega(u_{s+1} | z, n) f_{\rho}^{(s)}(1) - \\ & - \mu_{s+1}^* \Omega(u_{s+1}^* | z, n) f_{\rho}^{(s)}(-1)] + \sum_{k=0}^{n-1} a_k \Omega(u_k | z), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T(x) \approx L(f | x) \equiv & \sum_{s=0}^{r-1} (-1)^s [\mu_{s+1} T(u_{s+1} | x, n) f_{\rho}^{(s)}(1) - \\ & - \mu_{s+1}^* T(u_{s+1}^* | x, n) f_{\rho}^{(s)}(-1)] + \sum_{k=0}^{n-1} a_k T(u_k | x), \end{aligned}$$

где $\Omega(u_{s+1} | z, n)$, $\Omega(u_{s+1}^* | z, n)$, $T(u_{s+1} | x, n)$, $T(u_{s+1}^* | x, n)$ — интегралы от $u_{s+1}(n, x)$, $u_{s+1}^*(n, x)$, которые определяются равенствами (22). Если ряд (19), образованный из функций системы (16) класса ω_{ρ}^r , сходится равномерно и выполнены условия леммы работы [1], то, как легко установить при помощи теоремы 2, функции $\alpha_r(x, t)$, $\beta_r(x, t)$, $\gamma_r(x, t)$, входящие в (7), для этих квадратурных формул будут

$$\alpha_r(x, t) = (-1)^r \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k} T(u_k | x) u_{kr}(t),$$

$$\beta_r(x, t) = (-1)^r \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k} u_k(x) u_{kr}(t),$$

$$\gamma_r(x, t) = (-1)^r \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k} \Omega(u_k | x) u_{kr}(t).$$

4. Упрощенные квадратурные формулы. Может оказаться, что полученные интерполяционные или структурные квадратурные формулы дают хорошую точность, но часть функций $\mathfrak{A}_k(z)$, $A_k(x)$ и функционалов $L_k(f)$ такова, что их вычисление связано с большими трудностями. В таком случае полученные формулы имеет смысл упростить. Это можно сделать следующим образом.

Пусть квадратурные формулы

$$\Omega(z) \approx \mathfrak{L}^*(f|z) \equiv \sum_{k=0}^{\nu-1} \mathfrak{A}_k^*(z) L_k(f) + \sum_{k=\nu}^{n-1} \mathfrak{A}_k(z) L_k^*(f), \quad (30)$$

$$T(x) \approx L_k^*(f|x) \equiv \sum_{k=0}^{\nu-1} A_k^*(x) L_k(f) + \sum_{k=\nu}^{n-1} A_k(x) L_k^*(f)$$

имеют малую погрешность, но вычисление функций $\mathfrak{A}_k^*(z)$, $A_k^*(x)$ ($k=0, 1, \dots, \nu-1$) и функционалов $L_k^*(f)$ ($k=\nu, \nu+1, \dots, n-1$), входящих в эти формулы, связано с большими трудностями. Пусть далее имеются функции $\mathfrak{A}_k(z)$, $A_k(x)$ ($k=0, 1, \dots, \nu-1$) и функционалы $L_k(f)$ ($k=\nu, \nu+1, \dots, n-1$), которые достаточно хорошо аппроксимируют соответственно $\mathfrak{A}_k^*(z)$, $A_k^*(x)$ ($k=0, 1, \dots, \nu-1$) и $L_k^*(f)$ ($k=\nu, \nu+1, \dots, n-1$) и просты для вычислений. Заменяем $\mathfrak{A}_k^*(z)$, $A_k^*(x)$ на $\mathfrak{A}_k(z)$, $A_k(x)$ ($k=0, 1, \dots, \nu-1$) и $L_k^*(f)$ на $L_k(f)$ ($k=\nu, \nu+1, \dots, n-1$). Тогда получим новые, упрощенные квадратурные формулы

$$\Omega(z) \approx \mathfrak{L}(f|z) \equiv \sum_{k=0}^{n-1} \mathfrak{A}_k(z) L_k(f), \quad T(x) \approx L(f|x) \equiv \sum_{k=0}^{n-1} A_k(x) L_k(f). \quad (31)$$

Можно показать, что, если остаточный член первой квадратурной формулы (30) можно представить в виде (5), а функционалы $L_k(f)$ ($k=0, 1, \dots, \nu-1$) и разности функционалов $L_k^*(f) - L_k(f)$ ($k=\nu, \nu+1, \dots, n-1$) есть линейные функционалы от $f_{\nu}^{(r)}(x)$ вида

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{\rho(t)} \alpha_{rk}(t) f_{\nu}^{(r)}(t) dt \quad (k=0, 1, \dots, n-1),$$

то остаточный член первой упрощенной формулы (31) также можно представить в виде (5).

Литература

1. Пыхтеев Г. Н. Весті Академії наук БССР, сер. фіз.-мат. наук, № 5, 1969.
 Інститут ядерної енергетики АН БССР

Поступило в редакцію 18.VI 1969

М. Э. ТОЛОЧКО

О КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ РИМАНА
 ДЛЯ БЕСКОНЕЧНО СВЯЗНОЙ ОБЛАСТИ

В работе [3] рассматривается задача Римана

$$\Phi^+(t) = G(t)\Phi^-(t) + g(t) \quad (1)$$

для случая, когда контур, на котором задано краевое условие (1), состоит из некоторой счетной совокупности гладких замкнутых кривых. При этом существенно используется то обстоятельство, что индекс коэффициента $G(t)$ отличен от нуля лишь на конечном множестве указанных кривых.

Настоящее исследование, в основу которого положен метод непосредственного решения задачи Римана ([1], стр. 496), ставит целью изучить эту же задачу в случае, когда индекс $G(t)$ отличен от нуля, вообще говоря, на бесконечном множестве замкнутых контуров.

1. Пусть контур C , на котором задано краевое условие (1), состоит из счетного множества простых гладких замкнутых, лежащих вне друг друга кривых C_n , удовлетворяющих следующим условиям: 1) диаметры всех кривых C_n ограничены в совокупности, т. е. $\max_{\tau_1, \tau_2 \in C_n} |\tau_1 - \tau_2| < \text{const}$; 2) для всех

C_n существует такая постоянная $\alpha > 0$, что длина $s(\tau_1, \tau_2)$ меньшей из двух дуг C_n с концами в точках τ_1 и τ_2 допускает оценку $s(\tau_1, \tau_2) \leq \alpha |\tau_1 - \tau_2|$; 3) если ρ_{kn} — расстояние между кривыми C_k и C_n , то $\sup_{\{n\}} \left\{ \sum_{k \neq n} \rho_{kn}^{-1} \right\} < \infty$.

Скажем, что определенная на контуре C функция $\varphi(t) \in H(C)$, если $\varphi(t)$ на каждой кривой C_n удовлетворяет условию Гельдера с показателем и постоянной, не зависящими от n , и, кроме того, $\sup_{t \in C} |\varphi(t)| < \infty$.

Пусть, далее, D_n^- — конечная часть плоскости, ограниченная C_n . Областью D^- назовем $\bigcup_{n=1}^{\infty} D_n^-$, а D^+ — дополнение $D^- + C$ до полной плоскости. Положительным, как обычно, считаем то направление обхода на C_n , при котором бесконечно связная область D^+ остается слева.

Кусочно-аналитической функцией $\Phi(z)$ назовем пару функций $\Phi^\pm(z)$, аналитических соответственно в областях D^\pm и непрерывно продолжимых на контур C . Будем обозначать через B класс таких кусочно-аналитических функций, которые ограничены во всей плоскости и на контуре принадлежат $H(C)$.

Выясним условия существования функций $\Phi(z) \in B$, предельные значения которых $\Phi^\pm(t)$ удовлетворяют на контуре C краевому условию (1), где $G(t), g(t) \in H(C), \inf_{t \in C} |G(t)| > 0$.

2. Исследование задачи (1) проведем по следующей схеме. Сначала установим необходимые и достаточные условия разрешимости неоднородной задачи (при $g(t) \neq 0$) в классе B , а затем, используя эти условия, перейдем к изучению однородной задачи (при $g(t) \equiv 0$). Кроме того, покажем, как при некоторых дополнительных ограничениях на контур C можно оценить число линейно независимых решений рассматриваемой задачи в классе B .

При выводе окончательных результатов используется некоторая кусочно-аналитическая функция $X(z)$, удовлетворяющая на контуре C краевому условию однородной задачи

$$\Phi^+(t) = G(t)\Phi^-(t) \quad (2)$$

и отличная от нуля всюду в конечной части плоскости. Для построения такой функции и дальнейших рассуждений понадобятся вспомогательные утверждения.

Пусть $G(t) \in H(C)$, $\inf_{t \in C} |G(t)| > 0$ и t_j — произвольно фиксированные точки тех кривых C_j , для которых $\text{Ind}_{C_j} G(t) \neq 0$. Выделим некоторую однозначную ветвь $\ln G(t)$, разрывную в указанных точках t_j , под условием $\sup_{\{j\}} |\arg G(t_j+0)| < \infty$. Пусть, далее, $\delta > 0$ и $D_\delta = \bigcap_j |z - t_j| > \delta$. Тогда

справедлива

Лемма 1. *Функция*

$$\Gamma(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\ln G(\tau)}{\tau - z} d\tau \quad (3)$$

является аналитической вне контура C , и, кроме того, $\sup_{z \in D_\delta} |\Gamma(z)| < M_\delta = \text{const}$.

Действительно, для произвольной точки z , не лежащей на контуре C , найдется такая точка t_z контура (лежащая, скажем, на кривой C_{n_0}), что $|t_z - z| = \inf_{t \in C} |t - z|$. Тогда рассмотрим представление

$$\Gamma(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_{n_0}} \frac{\ln G(\tau)}{\tau - z} d\tau + \frac{1}{2\pi i} \int_{C - C_{n_0}} \frac{\ln G(\tau)}{\tau - t_z} \cdot \frac{\tau - t_z}{\tau - z} d\tau. \quad (4)$$

Из свойств $G(t)$ и ограничений 1), 2) на контур C следует, что $\sup_{\{n\}} |\text{Ind}_{C_n} G(t)| < \infty$. Поэтому для выбранной ветви $\ln G(t)$ верно:

$\sup_{t \in C} |\ln G(t)| < \infty$. Если теперь учесть, что для всех $\tau \in C_{n_0} |(\tau - t_z)(\tau - z)^{-1}| \leq 2$, то, воспользовавшись условием 3) на контур C и произведя соответствующие оценки во втором слагаемом правой части (4), получим, что интеграл типа Коши $\Gamma(z)$ сходится для всех z , не лежащих на контуре C , что и доказывает первую часть леммы.

Для доказательства оставшейся части утверждения заметим, что второе слагаемое в (4) допускает оценку, равномерную по всем $z \in D_\delta$. Используя свойства $G(t)$ и контура, такую же оценку можно установить и для первого слагаемого, если $\text{Ind}_{C_{n_0}} G(t) = 0$. В противном случае это слагаемое имеет логарифмическую особенность в окрестности точки $t_{n_0} \in C_{n_0}$ ([1], стр. 73). Учитывая, что эта точка вырезана кружком радиуса δ , получаем окончательно утверждение леммы.

Замечание 1. Для предельных значений $\Gamma^\pm(t)$ во всех точках контура C , отличных от t_j , справедливы обычные формулы Сохоцкого ([1], стр. 42).

Замечание 2. Аналогичным рассуждением можно показать, что интеграл типа Коши с плотностью из класса $H(C)$ по контуру рассматриваемого вида есть функция класса B .

Если $G(t)$ — функция описанных выше свойств, то $\Gamma(z)$ имеет логарифмическую особенность в окрестности точек $t_j \in C_j$ ($\text{Ind}_{C_j} G(t) = \kappa_j \neq 0$). Исследуем теперь свойства функций $\chi_j(z) = (z - t_j)^{-\kappa_j} \exp \{ \Gamma(z) \}$ на кривых C_j и в некоторой окрестности точек t_j . Из свойств контура C и функции $G(t)$ следует существование такого $\Delta > 0$, что для всех C_j $\max_{\tau_1, \tau_2 \in C_j} |\tau_1 - \tau_2| > \Delta$.

Поэтому, если взять положительное число $\delta < \Delta/8$, то ни одна из кривых C_j не лежит целиком внутри кружка $|z - t_j| \leq 4\delta$. На основании условия 3) на контур C выбранное δ можно считать настолько малым, что любая из точек $z: |z - t_j| \leq \delta$, расположена к C_j ближе, чем к $C - C_j$. Тогда справедлива

Лемма 2. При $|z - t_j| \leq \delta$ для функций $\chi_j(z)$ верно: $\sup_{\{j\}} |\ln |\chi_j(z)|| < \infty$. Кроме того, предельные значения $\chi_j^\pm(t)$ на кривой C_j удовлетворяют условию Гельдера с показателем и постоянной, не зависящими от j , и $\sup_{\{j\}} |\ln |\chi_j^\pm(t)|| < \infty$.

Доказательство. Для произвольного C_j имеем

$$\begin{aligned} |\ln \chi_j(z)| \leq & \left| -\kappa_j \ln(z - t_j) + \frac{1}{2\pi i} \int_{C_j} \frac{\ln G(\tau)}{\tau - z} d\tau \right| + \\ & + \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{C - C_j} \frac{\ln G(\tau)}{\tau - z} d\tau \right|. \end{aligned} \quad (5)$$

Так же, как и при доказательстве леммы 1, устанавливаем, что при выбранном δ и $|z - t_j| \leq \delta$ второе слагаемое в правой части (5) допускает оценку, равномерную по всем j . Из свойств интеграла типа Коши с разрывной плотностью ([1], стр. 73) следует, что в выбранной окрестности точки t_j справедливо представление

$$\Gamma_j(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_j} \frac{\ln G(\tau)}{\tau - z} d\tau = \kappa_j \ln(z - t_j) + \gamma_j(z), \quad (6)$$

где $\gamma_j(z)$ ограничена в окрестности точки t_j . Можно показать, что и для $\gamma_j(z)$ справедлива при рассматриваемых z оценка, равномерная по всем j . А тогда из (5) следует первая часть леммы.

Можно, далее, установить, что если $G(t) \in H(C)$, $\inf_{t \in C} |G(t)| > 0$, и $C_j^{(\delta)}$ — те участки кривых C_j , которые лежат вне кружков $|z - t_j| < \delta$, то $\ln G(t)$ удовлетворяет $C_j^{(\delta)}$ условию Гельдера с показателем и постоянной, не зависящими от j . Но тогда ([2], стр. 58) функции $\Gamma_j^\pm(t)$ (а вместе с ними и $\chi_j^\pm(t)$) удовлетворяют условию Гельдера с показателем и постоянной, не зависящими от j , на тех участках кривых C_j , которые лежат вне кружков $|z - t_j| < 2\delta$.

Вместе с тем в равенстве (6) для $\psi_j(z)$ можно доказать представление

$$\psi_j(z) = -\kappa_j \ln(z - t_j') + \frac{1}{2\pi i} \int_{C_j} \frac{\psi(\tau) d\tau}{\tau - z},$$

где t_j' — некоторые точки C_j , лежащие вне кружков $|z - t_j| \leq 4\delta$ (по выбору δ такие точки существуют на всех C_j), а $\psi(t)$ — функция, обладающая на C_j теми же свойствами, что и $\ln G(t)$ (с заменой точек t_j на t_j'). Но тогда в силу указанного функции $\psi_j^\pm(t)$ (а вместе с ними и $\chi_j^\pm(t)$) удовлетворяют условию Гельдера с показателем и постоянной, не зависящими от j , на тех участках C_j , которые лежат вне кружков $|z - t_j'| < 2\delta$, а следовательно, и на участках C_j , лежащих внутри кружков $|z - t_j| \leq 2\delta$. Учитывая теперь, что $\chi_j^\pm(t)$ непрерывны на всем C_j , получаем окончательно утверждение леммы.

Замечание. Если C^0 — множество тех кривых совокупности C , на которых $\text{Ind } G(t) = 0$, то нетрудно установить, что $\ln G(t) \in H(C^0)$. Поэтому из замечания 2 к лемме 1 следует справедливость леммы 2 и для кривых множества C^0 .

Теперь нетрудно построить упомянутую выше функцию $X(z)$. Действительно, пусть C_s и C_k — такие кривые совокупности C , для которых $\text{Ind}_{C_s} G(t) = \kappa_s > 0$, $\text{Ind}_{C_k} G(t) = \kappa_k < 0$. Пусть, далее, точки $t_s \in C_s$ и $t_k \in C_k$ для определенности таковы, что $|t_s| = \min_{t \in C_s} |t|$, $|t_k| = \max_{t \in C_k} |t|$. Как уже отмечалось,

$\sup | \text{Ind}_{C_n} G(t) | < \infty$, поэтому из свойств контура C следует сходимость

произведений $\prod_s (1 - z/t_s)^{\kappa_s}$, $\prod_k (1 - z/t_k)^{-\kappa_k}$. Тогда на основании лемм 1 и 2

заключаем, что функция

$$X(z) = \prod_k \left(1 - \frac{z}{t_k}\right)^{-\kappa_k} \prod_s \left(1 - \frac{z}{t_s}\right)^{\kappa_s} \exp \{ \Gamma(z) \}, \quad (7)$$

где $\Gamma(z)$ определена формулой (3), является кусочно-аналитической, отличной от нуля в конечной части плоскости, и удовлетворяет краевому условию (2).

3. Выясним теперь условия разрешимости неоднородной задачи (1) в классе B . Для этого сначала, используя $X(z)$, построим функцию $\Phi_0(z)$, аналитическую в областях D^\pm за исключением, возможно, отдельных точек, где она имеет полюсы заданных порядков, и удовлетворяющую на C краевому условию (2). С этой целью зафиксируем положительное число δ , определенное условиями леммы 2, и выберем последовательности точек $\{z_s\}$ и $\{z_k\}$ так, чтобы $\arg z_s = \arg t_s$, $|z_s| = |t_s| - \delta/3$, $\arg z_k = \arg t_k$, $|z_k| = |t_k| + \delta/3$. Положим

$$\Phi_0(z) = \prod_s \left(1 - \frac{z}{z_s}\right)^{\kappa_s} \prod_k \left(1 - \frac{z}{z_k}\right)^{\kappa_k} X(z), \quad (8)$$

где $X(z)$ определена (7). Не приводя подробных выкладок, занимающих много места, отметим лишь, что, используя результаты п. 3, свойства контура C и близость точек z_s и z_k к t_s и t_k , можно установить, что справедлива

Лемма 3. Функция $\Phi_0(z)$ удовлетворяет краевому условию (2) и, кроме того,

$$1) \Phi_0^\pm(t), [\Phi_0^\pm(t)]^{-1} \in H(C);$$

$$2) |\Phi_0(z)| < M_\sigma = \text{const}, \text{ если } z \in D_\sigma = \bigcap_k |z - z_k| \geq \sigma = \delta/4.$$

Замечание. Если для всех кривых C_n $\text{Ind}_{C_n} G(t) \geq 0$, то $\Phi_0(z) \in B$.

Сформулируем теперь основной результат о разрешимости неоднородной задачи.

Теорема 1. Для разрешимости неоднородной задачи (1) (где $G(t)$, $g(t) \in H(C)$, $\inf_{t \in C} |G(t)| > 0$) в классе B необходимо и достаточно, чтобы функция

$$\Psi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{g(\tau)}{\Phi_0^+(\tau)} \frac{d\tau}{\tau - z}$$

обращалась в точках z_k , являющихся полюсами $\Phi_0(z)$, в нуль порядка не менее $|\kappa_k|$.

Доказательство. Из леммы 3 и заключения 2 к лемме 1 следует, что $\Psi(z) \in B$. С другой стороны, следуя методу Ф. Д. Гахова ([1], стр. 117) можно установить, что функция $\Phi(z) = \Phi_0(z)\Psi(z)$ удовлетворяет на контуре C краевому условию (1). На основании той же леммы 3 и условия теоремы функция $\Phi(z)$ является кусочно-аналитической и ограниченной в D_σ . Из равномерной ограниченности $\Phi(z)$ на окружностях $|z - z_k| = \sigma$ на основании принципа максимума модуля аналитической функции ([4], стр. 309) следует, что $\Phi(z) \in B$.

Обратно, если $\Phi(z)$ — любое решение неоднородной задачи в классе B , то на контуре справедливо

$$\frac{\Phi^+(t)}{\Phi_0^+(t)} - \frac{\Phi^-(t)}{\Phi_0^-(t)} = \frac{g(t)}{\Phi_0^+(t)},$$

откуда $\Phi(z) = \Phi_0(z)[\Psi(z) + U(z)]$, где $U(z)$ — некоторая мероморфная функция, определяемая свойствами функции $\Phi(z)[\Phi_0(z)]^{-1}$. Очевидно, $U(z)$ имеет в точках z_s полюса порядка не более κ_s , а в точках z_k — нули порядка не менее $|\kappa_k|$, т. е. $U(z) = \prod (1 - z/z_k)^{-\kappa_k} \prod (1 - z/z_s)^{\kappa_s} F(z)$, где $F(z)$ —

некоторая целая функция. Тогда $\Phi(z) = \Phi_0(z)\Psi(z) + X(z)F(z)$. Но в окрестности точек z_k $\Phi(z)$ и $X(z)F(z)$ ограничены, поэтому ограничена и функция $\Phi_0(z)\Psi(z)$, что и доказывает окончательно теорему.

Общее решение неоднородной задачи (1) представимо в виде суммы частного ее решения и общего решения однородной задачи. Поэтому перейдем теперь к изучению задачи (2).

4. Легко установить, что любое решение $\Phi(z)$ однородной задачи в классе B представляется в виде: $\Phi(z) = X(z)F(z)$, где $F(z)$ — такая целая функция, что 1) $X^\pm(t)F(t) \in H(C)$; 2) для всех z $|X(z)F(z)| < A_F = \text{const}$. Покажем, используя результат теоремы 1, что выполнимость второго соотношения для функции $F(z)$ можно обеспечить, если подчинить ее контурное значение $F(t)$ определенным условиям.

Выберем какую-либо функцию $\tilde{G}(t) \in H(C)$ ($\inf_{t \in C} |\tilde{G}(t)| > 0$), такую, что однородная задача (2) с коэффициентом $\tilde{G}(t)$ не имеет ограниченных решений (примером $\tilde{G}(t)$ может служить любая функция, тождественно равная единице на всех кривых совокупности C , за исключением одной, где она удовлетворяет условию Гельдера, отлична от нуля и имеет отрицательный индекс). Тогда любое фиксированное решение $\Phi(z)$ задачи (2) в классе B является в то же время единственным решением в том же классе неоднородной задачи

$$R^+(t) = \tilde{G}(t)R^-(t) + \tilde{g}(t), \quad (9)$$

где

$$\tilde{g}(t) = [G(t) - \tilde{G}(t)]\Phi^-(t) \in H(C).$$

Это решение, как следует из доказательства теоремы 1, представимо в виде

$$R(z) \equiv \Phi(z) = \frac{\tilde{\Phi}_0(z)}{2\pi i} \int_C \frac{\tilde{g}(\tau)}{\tilde{\Phi}_0^+(\tau)} \frac{d\tau}{\tau - z}, \quad (10)$$

где $\tilde{\Phi}_0(z)$ строится для $\tilde{G}(t)$ по формуле (8). Тогда из теоремы 1 следует, что необходимо

$$\lim_{z \rightarrow \tilde{z}_k} \left[(z - \tilde{z}_k)^{\tilde{\alpha}_k + 1} \int_C \frac{[G(\tau) - \tilde{G}(\tau)] X^-(\tau) F(\tau)}{\tilde{\Phi}_0^+(\tau) (\tau - z)} d\tau \right] = 0, \quad (11)$$

где \tilde{z}_k — полюсы $\tilde{\Phi}_0(z)$ кратности $|\tilde{\alpha}_k|$. Кроме того, на основании (10), $R^-(t) = \Phi^-(t)$, что дает

$$\frac{1}{2} X^-(t) F(t) \left[1 + \frac{G(t)}{\tilde{G}(t)} \right] - \frac{\tilde{\Phi}_0^-(t)}{2\pi i} \int_C \frac{[G(\tau) - \tilde{G}(\tau)] X^-(\tau) F(\tau)}{\tilde{\Phi}_0^+(\tau)} \times \\ \times \frac{d\tau}{\tau - t} = 0 \quad (12)$$

(здесь, а также в (II), $X^-(t)$ — краевое значение функции (7), построенной для $G(t)$).

Обратно, пусть краевое значение $\Phi^-(t)$ некоторой кусочно-аналитической функции $\Phi(z)$, удовлетворяющей краевому условию (2), таково, что $\Phi^-(t) \in H(C)$ и выполняются условия (11) и (12), где следует считать $X^-(t) F(t) \equiv \Phi^-(t)$. Тогда неоднородная задача (9) имеет единственное решение $R(z) \in B$, представимое по формуле (10). Так как $R^-(t) = \Phi^-(t)$, то из краевого условия (9) имеем $R^+(t) = G(t) \Phi^-(t) = \Phi^+(t)$. Но тогда $\Phi(z) \equiv R(z)$, т. е. $\Phi(z)$ — решение однородной задачи в классе B . Таким образом, доказана

Теорема 2. *Общее решение однородной задачи (2) в классе B представимо в виде $\Phi(z) = X(z) F(z)$, где $X(z)$ определена формулой (7), а $F(z)$ — целая функция, контурное значение $F(t)$ которой удовлетворяет условию $X^\pm(t) F(t) \in H(C)$ и, кроме того, условиям (11) и (12), где $\tilde{G}(t)$ — произвольная функция класса $H(C)$ ($\inf_{t \in C} |\tilde{G}(t)| > 0$), для которой однородная задача с коэффициентом $\tilde{G}(t)$ не имеет ограниченных решений, а $\tilde{\Phi}_0(z)$ строится для $\tilde{G}(t)$ по формуле (8).*

Замечание. Существование целой функции $F(z)$, удовлетворяющей условиям теоремы 2, можно рассматривать как необходимое и достаточное условие разрешимости однородной задачи (2) в классе B .

5. Покажем теперь, как при некоторых дополнительных ограничениях на контур C можно оценить число линейно независимых решений, скажем, однородной задачи в классе B . Пусть по-прежнему $G(t) \in H(C)$, $\inf_{t \in C} |G(t)| > 0$, и d_n — расстояние от кривой C_n до начала координат. Обозначим через C^* класс таких контуров C , для которых кроме условий 1) — 3) п. 2 выполняется требование

$$\sup_{\{C_n\}} \left\{ \begin{array}{l} d_n \sum_{k \neq n} \rho_{kn}^{-1} \\ d_n \geq \frac{d_n}{2} \end{array} \right\} < \infty. \quad (13)$$

Ниже будет использована

Лемма 4. Пусть последовательность отличных от нуля комплексных чисел $\{z_k\}_{k=1}^{\infty}$ ($z_k \rightarrow \infty$) такова, что

$$\sup_{n=1,2,\dots} \left\{ \sum_{z_k \neq z_n} \frac{|z_n|}{|z_k - z_n|} \right\} < \infty$$

$$\left\{ |z_k| \geq \frac{|z_n|}{2} \right\}$$

и $f(z) = \prod_{k=1}^{\infty} (1 - z/z_k)$. Тогда в области $D_\delta = \bigcap_{k=1}^{\infty} |z - z_k| \geq \delta = \text{const} > 0$ справедлива при $|z| > \delta$ оценка

$$\ln |f(z)| > \int_0^{\frac{1}{2}|z|} \frac{n(x)}{x} dx - \ln |z| - A_f(\delta),$$

где $A_f(\delta) = \text{const} > 0$, а $n(x)$ — число точек z_k в круге $|z| < x$.

Доказательство. Зафиксируем произвольную точку $z \in D_\delta$ ($|z| > \delta$). Обозначим через z_n ближайший к точке z корень $f(z)$ из тех z_k , для которых $|1 - z/z_k| \leq 1$. (Очевидно, $|z_n| \geq |z|/2$). Пусть, далее, $f(z) = (1 - z/z_n) \times \times f_n(z) = (1 - z/z_n) P_n(z) Q_n(z)$, где $P_n(z)$ — произведение всех сомножителей, входящих в выражение для $f_n(z)$ и больших по абсолютной величине 1, а $Q_n(z)$ — не превосходящих. Если C_z — круг $|\xi| < |z|/2$, то, очевидно,

$$\begin{aligned} \ln |P_n(z)| &\geq \sum_{z_k \in C_z} \ln \frac{|z| - |z_k|}{|z_k|} = \int_0^{\frac{1}{2}|z|} \ln \frac{|z| - x}{x} dn(x) = \\ &= |z| \int_0^{\frac{1}{2}|z|} \frac{n(x)}{x(|z| - x)} dx > \int_0^{\frac{1}{2}|z|} \frac{n(x)}{x} dx. \end{aligned} \quad (14)$$

Далее, учитывая, что при $-1 < u \leq 0$ $\ln(1+u) \geq u(1+u)^{-1}$, имеем

$$\begin{aligned} \ln |Q_n(z)| &= \sum_{\substack{|1 - z/z_k| < 1 \\ z_k \neq z_n}} \ln \left(1 + \frac{|z_k - z| - |z_k|}{|z_k|} \right) \geq \\ &\geq \sum_{\substack{|1 - z/z_k| < 1 \\ z_k \neq z_n}} \frac{|z_k - z| - |z_k|}{|z_k - z|} \geq - \sum_{\substack{|1 - z/z_k| < 1 \\ z_k \neq z_n}} \frac{|z|}{|z_k - z|}. \end{aligned} \quad (15)$$

Но по выбору z_n для всех рассматриваемых z_k , во-первых, $|z_k - z_n| |z_k - z|^{-1} = |1 + (z - z_n)(z_k - z)^{-1}| \leq 2$, и во-вторых, $|z| \cdot |z_n|^{-1} \leq 2$. Поэтому из условия леммы и (15) имеем для любого $z \in D_\delta$

$$0 > \ln |Q_n(z)| \geq - \sum_{\substack{|1 - z/z_k| < 1 \\ z_k \neq z_n}} \frac{|z|}{|z_n|} \frac{|z_n|}{|z_k - z_n|} \frac{|z_k - z_n|}{|z_k - z|} > A_f = \text{const}. \quad (16)$$

Оценим, наконец, снизу $|1 - z/z_n|$ при рассматриваемых z . Если $|z_n| < 2|z|$, то $|1 - z/z_n| > \delta(2|z|)^{-1}$. При $|z_n| \geq 2|z|$ очевидно, $|1 - z/z_n| \geq (|z_n| - |z|)|z_n|^{-1} \geq 1/2 > \delta(2|z|)^{-1}$, так как $|z| > \delta$. Объединяя последнее с (14) и (16), получаем лемму.

Следствие. Если последовательность $\{z_k\}$ удовлетворяет условиям леммы 4, а последовательность натуральных чисел $\{\kappa_k\}$ ограничена, то для

функции $f(z) = \prod_{k=1}^{\infty} (1 - z/z_k)^{\kappa_k}$ при $z \in D_\delta (|z| > \delta)$ справедлива оценка

$$\ln |f(z)| > \int_0^{\frac{1}{2}|z|} \frac{n(x)}{x} dx - K \ln |z| - A_f(\delta),$$

где $A_f(\delta) = \text{const} > 0$, $K = \max_{\{k\}} \{\kappa_k\}$, а $n(x)$ — число точек z_k , взятых с кратностью κ_k в круге $|z| < x$.

Теперь, пользуясь обозначениями п. 3, положим величину $n_+(x)$ равной числу точек t_s , взятых с кратностью κ_s и лежащих в круге $|z| < x$, а $n_-(x)$ — числу точек t_k кратности $|\kappa_k|$ в том же круге. Пусть, далее, $K = \max_{\{s\}} \{\kappa_s\}$. Назовем наибольшее целое число \varkappa , для которого при $r \rightarrow \infty$

$$-\int_0^{\frac{1}{2}r} \frac{n_+(x)}{x} dx + \int_0^r \frac{n_-(x)}{x} dx + r \int_r^{+\infty} \frac{n_-(x)}{x^2} dx + (K + \varkappa) \ln r < \text{const}, \quad (17)$$

индексом однородной задачи (2) в рассматриваемом случае.

Теорема 3. Если контур $C \in C^*$ и индекс \varkappa в смысле определения (17) неотрицателен, то однородная задача (2) допускает не менее $\varkappa + 1$ линейно независимых решений класса B

$$\Phi_k(z) = z^k X(z) \quad (0 \leq k \leq \varkappa),$$

где $X(z)$ определена формулой (7).

Доказательство. Выберем положительное δ , удовлетворяющее условиям леммы 2, и рассмотрим сначала функции $\Phi_k(z)$ ($0 \leq k \leq \varkappa$) в области D_δ , полученной вырезанием из плоскости кружков с центрами в точках t_s, t_k и радиусов δ . На основании (13) для $\prod_s (1 - z/t_s)^{\kappa_s}$ справедливо

следствие из леммы 4. Учитывая, далее, оценку сверху для $\prod_k (1 - z/t_k)^{-\kappa_k}$

([5], стр. 22), а также результат леммы 1, получаем на основании (17), что $\Phi_k(z)$ ограничены в области D_δ .

Аналогичное рассуждение для выброшенных кружков (с использованием теперь уже леммы 2) показывает, что функции $\Phi_k(z)$ ограничены во всей плоскости. Наконец, воспользовавшись опять-таки результатом леммы 2, можно показать, что, кроме того, $\Phi_k^\pm(t) \in H(C)$, если $0 \leq k \leq \varkappa$, что и завершает доказательство.

Отметим, что примером контура $C \in C^*$, как в этом нетрудно убедиться, является счетная совокупность непересекающихся окружностей C_n одного

и того же радиуса с центрами, расположенными на вещественном положительном луче и удаленными от начала координат на 2^n .

В заключение автор выражает благодарность академику АН БССР Ф. Д. Гахову за руководство работой.

Литература

1. Гахов Ф. Д. Краевые задачи. Физматгиз, М., 1963.
2. Мусхелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения. Изд. «Наука», М., 1968.
3. Пааташвили В. А. Тр. Тбилисс. мат. ин-та, **34**, 1968.
4. Маркушевич А. И. Теория аналитических функций. Изд. «Наука», М., 1967.
5. Левин Б. Я. Распределение корней целых функций. Гостехиздат, М., 1956.

Белорусский государственный университет
им. В. И. Ленина

Поступило в редакцию 11.VII 1969

УДК 539:12

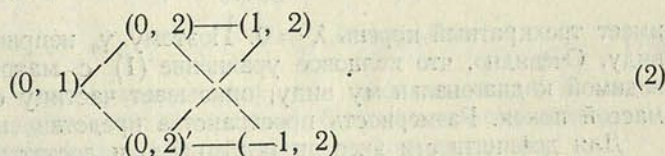
В. А. ПЛЕТЮХОВ, Ф. И. ФЕДОРОВ

**ВОЛНОВОЕ УРАВНЕНИЕ С КРАТНЫМИ ПРЕДСТАВЛЕНИЯМИ
 ДЛЯ ЧАСТИЦЫ СО СПИНОМ 0**

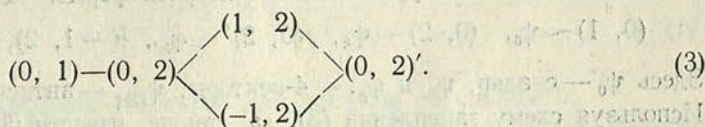
На основе результатов работы [1] рассмотрим релятивистское волновое уравнение:

$$(\gamma_k \partial_k + m)\psi = 0 \quad (1)$$

со схемой зацепления представлений



Допустимым преобразованием базиса пространства волновой функции ψ (т. е. преобразованием, не меняющим вида инфинитезимальных операторов представлений J^{hi} , оператора отражения T и инвариантной билинейной формы) можно разорвать зацепление $(0, 1) \rightarrow (0, 2)'$ и (2) преобразовать к виду [1]



Матрица γ_0 уравнения (1) со схемой зацеплений (3) имеет вид [2]

$$\gamma_0 = \begin{pmatrix} C^0 \times E_0 & 0 \\ 0 & C^1 \times E_1 \end{pmatrix}, \quad (4)$$

где C^0 и C^1 — блоки, соответствующие значениям спина 0 и 1 соответственно, E_k — единичная матрица порядка $2k + 1$.

Пронумеруем представления, входящие в (3), следующим образом: $(0, 1) \sim 1$, $(0, 2) \sim 2$, $(0, 2)' \sim 2'$, $(1, 2) \sim 3$, $(-1, 2) \sim 4$. Тогда

$$C^0 = \begin{pmatrix} 0 & C_{12}^0 & 0 \\ C_{12}^0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad C^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & C_{23}^1 & \pm C_{23}^1 \\ 0 & 0 & C_{2'3}^1 & \pm C_{2'3}^1 \\ C_{32}^1 & C_{32'}^1 & 0 & 0 \\ \pm C_{32}^1 & \pm C_{32'}^1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (5)$$

Матрицу билинейной формы выбираем так:

$$\eta_{11}^0 = \eta_{22}^0 = -\eta_{2'2'}^0 = -\eta_{11}^1 = -\eta_{22}^1 = \eta_{2'2'}^1 = \mp \eta_{34}^1 = \mp \eta_{43}^1 = 1. \quad (6)$$

При этом условии получения уравнения из инвариантной функции Лагранжа приводит к соотношениям (см. [3])

$$C_{12}^0 = \bar{C}_{21}^0, \quad C_{23}^1 = \bar{C}_{32}^1, \quad C_{2'3}^1 = -\bar{C}_{32'}^1. \quad (7)$$

Положим $C_{12}^0 = 1, C_{23}^1 = C_{2'3}^1 = 1$. Тогда

$$C^0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & \pm 1 \\ 0 & 0 & 1 & \pm 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ \pm 1 & \mp 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (8)$$

Собственные значения блока C^1 равны 0, так как $(C^1)^3 = 0$.

Характеристическое уравнение для C^0 имеет вид

$$C^0 ((C^0)^2 - 1) = 0, \quad (9)$$

т. е. собственные значения блока C^0 равны 0, ± 1 .

Минимальное уравнение для матрицы γ_0

$$\gamma_0^3 (\gamma_0^2 - 1) = 0 \quad (10)$$

имеет трехкратный корень $\lambda = 0$. Поэтому γ_0 неприводима к диагональному виду. Очевидно, что волновое уравнение (1) с матрицей γ_0 (4), (8), неприводимой к диагональному виду, описывает частицу со спином 0 и одной массой покоя. Размерность пространства представлений равна 15.

Для дефинитности энергии необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие (см. [4])

$$(-1)^4 [(\gamma_0^4 \eta)_c]^2 - ((\gamma_0^3 \eta)_c)^2 > 0. \quad (11)$$

Легко проверить, что $(\gamma_0^3 \eta)_c = 0$, и следовательно, энергия дефинитна.

Запишем искомое уравнение в тензорной форме. Для этого обозначим:

$$(0, 1) \sim \psi_0, \quad (0, 2) \sim \psi_k, \quad (0, 2)' \sim \varphi_{k'}, \quad [(-1, 2), (1, 2)] \sim \psi_{[lk]}.$$

Здесь ψ_0 — скаляр, ψ_k и $\varphi_{k'}$ — 4-векторы, $\psi_{[lk]}$ — антисимметричный тензор. Используя схему зацеплений (3), а также известный переход от канонического базиса к тензорному для скалярной и векторной частиц Даффина—Кеммера [5], нетрудно убедиться, что уравнение (1) с матрицей γ_0 (8) (для определенности выбираем в (8) верхние знаки) в тензорной форме имеет вид

$$\left. \begin{aligned} \partial_k \psi_k + m \psi_0 &= 0 \\ \partial_k \psi_0 - \partial_l \psi_{[kl]} + m \psi_k &= 0 \\ \partial_l \psi_{[kl]} + m \varphi_{k'} &= 0 \\ \partial_k \psi_l - \partial_l \psi_k + \partial_{k'} \varphi_{l'} - \partial_{l'} \varphi_{k'} + m \psi_{[lk]} &= 0 \end{aligned} \right\}; \quad \psi = \begin{pmatrix} \psi_0 \\ \psi_k \\ \varphi_{k'} \\ \psi_{[lk]} \end{pmatrix}. \quad (12)$$

Здесь индексы k и k' пробегает значения 1, 2, 3, 4 одновременно, т. е. если $k = 1$, то и $k' = 1$ и т. д. Штрих используется для того, чтобы подчеркнуть принадлежность ψ_k и $\varphi_{k'}$ к разным, хотя и эквивалентным, представлениям*).

*) Подставляя $\partial_l \psi_{[kl]}$ из третьего уравнения во второе и сравнивая результат с четвертым уравнением, получим $\psi_{[kl]} = \varphi_{k'} = 0$. Таким образом, система (12) для свободной частицы эквивалентна уравнению Даффина—Кеммера. Однако, как показано ниже, при наличии поля эта эквивалентность не имеет места. Аналогичные свойства, но лишь для частиц со спином, большим единицы, были установлены в [12, 13].

Введем в пространстве волновой функции ψ обобщенные элементы матричной алгебры e^{AB} , определяемые соотношениями (см. [5])

$$(e^{AB})_{CD} = \delta_{AC} \delta_{BD}, \quad e^{AB} e^{CD} = \delta_{BC} e^{AD}, \quad (13)$$

где собирательный индекс B принимает значения $(0, k, k', [lk])$,

$$\psi_0 = \delta_{0B} \psi_B, \quad \psi_k = \delta_{kB} \psi_B, \quad \psi_{k'} = \delta_{k'B} \psi_B, \quad \psi_{[lk]} = \delta_{[lk]B} \psi_B,$$

и выразим матрицы γ_k через элементы e^{AB} .

При переходе от индексов $0, k, k', [lk]$ к индексам A, B, \dots нужно иметь в виду, что имеет место соответствие

$$0 \rightarrow 1, \quad k \rightarrow 2 - 5, \quad k' \rightarrow 6 - 9, \quad [lk] \rightarrow 10 - 15. \quad (14)$$

Умножая каждое из уравнений системы (12) соответственно на $\delta_{0A}, \delta_{kA}, \delta_{k'A}, \delta_{[lk]A}$ и складывая, получим

$$\left(\partial_k \gamma_k + m \left(e^{00} + e^{kk} + e^{k'k'} + \frac{1}{2} e^{[lk][lk]} \right) \right) \psi = 0, \quad (15)$$

где
$$\gamma_k = e^{0k} + e^{k0} + e^{[lk]l'} + e^{l'[lk]} + e^{[lk]l} - e^{l[lk]}. \quad (16)$$

Здесь известное правило суммирования по повторяющимся индексам распространяется и на случай, когда коренные буквы индексов одинаковы, но один из них снабжен штрихом. Таким образом, например,

$$e^{[11]l'} = e^{[21]2} + e^{[31]3} + e^{[41]4} = -e^{12,7} + e^{11,8} - e^{13,9}.$$

Используя (13) и (16), можно показать, что $\gamma_k^3 = e^{0k} + e^{k0}$, т. е. в базе (12)

$$\gamma_k^3 = \begin{pmatrix} \gamma_k^0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \equiv \Gamma_k, \quad (17)$$

где γ_k^0 — матрицы Даффина—Кеммера для частицы со спином 0.

С помощью (16) нетрудно убедиться, что матрицы γ_k удовлетворяют следующему соотношению:

$$\sum_p \gamma_i \gamma_j \gamma_k = 2\delta_{ij} \Gamma_k + 2\delta_{ik} \Gamma_j + 2\delta_{jk} \Gamma_i, \quad (18)$$

где суммирование ведется по всем перестановкам индексов i, j, k .

Из минимального полинома (10) следует, что общие перестановочные соотношения для матриц γ_k должны иметь вид

$$\sum_p \gamma_{\mu_1} \gamma_{\mu_2} \gamma_{\mu_3} \gamma_{\mu_4} \gamma_{\mu_5} = \sum_p \delta_{\mu_1 \mu_2} \gamma_{\mu_3} \gamma_{\mu_4} \gamma_{\mu_5}, \quad (19)$$

где суммирование ведется по всем перестановкам из пяти индексов. Ввиду громоздкости общего соотношения рассмотрим некоторые частные случаи.

Пусть среди пяти матриц γ_{μ} , входящих в левую часть соотношения (19), имеется лишь две различных. Этот случай может реализоваться в двух вариантах: $5 = 1 + 4 = 2 + 3$.

$$I. \quad \sum_p \gamma_i \gamma_j^4 = \gamma_i \gamma_j^2 + \gamma_j \gamma_i \gamma_j + \gamma_j^2 \gamma_i = \gamma_i^3 \quad (20)$$

(см. (18)).

$$\text{II. } \sum_p \gamma_i^2 \gamma_j^3 = \gamma_j^3 + \gamma_i^2 \gamma_j + \gamma_i \gamma_j \gamma_i + \gamma_j \gamma_i^2 = 2\gamma_j^3. \quad (21)$$

Преобразуя левую часть с учетом (20) и учитывая, что $\gamma_j^5 = \gamma_j^3$, получим

$$\gamma_i \gamma_j^2 \gamma_i \gamma_j + \gamma_i \gamma_j^2 \gamma_i + \gamma_j \gamma_i \gamma_j \gamma_i \gamma_j + \gamma_j \gamma_i \gamma_j^2 \gamma_i = 0. \quad (22)$$

Пусть теперь среди матриц γ_k имеется три различных: $5 = 1 + 1 + 3 = 1 + 2 + 2$.

$$\text{I. } \sum_p \gamma_i \gamma_j \gamma_k^3 = \sum_p \gamma_i \gamma_j \gamma_k. \quad (23)$$

Правая часть, согласно (19), равна нулю, т. к. $i \neq j \neq k$. После упрощения левой части с помощью (20) будем иметь

$$\begin{aligned} & \gamma_i \gamma_k^2 \gamma_j \gamma_k + \gamma_j \gamma_k^2 \gamma_i \gamma_k + \gamma_k \gamma_i \gamma_k \gamma_j \gamma_k + \\ & + \gamma_k \gamma_j \gamma_k \gamma_i \gamma_k + \gamma_k \gamma_i \gamma_k^2 \gamma_j + \gamma_k \gamma_j \gamma_k^2 \gamma_i = 0. \end{aligned} \quad (24)$$

$$\text{II. } \sum_p \gamma_i \gamma_j^2 \gamma_k^2 = \sum_p \gamma_i \gamma_j^2 + \sum_p \gamma_i \gamma_k^2. \quad (25)$$

После упрощения левой и правой части получим

$$\gamma_i^3 \gamma_k^2 + \gamma_k^3 \gamma_i \gamma_k + \gamma_k^4 \gamma_i = \gamma_i^3. \quad (26)$$

Наконец, случай, когда имеется 4 различных матрицы, реализуется в одном варианте: $5 = 1 + 1 + 1 + 2$.

$$\sum_p \gamma_i^2 \gamma_j \gamma_k = \sum_p \gamma_i \gamma_j \gamma_k = 0. \quad (27)$$

Используя (18) и (20), можно показать, что левая часть не зависит от матрицы γ_i , и привести (27) к следующему виду:

$$\gamma_i \gamma_j \gamma_k^3 + \gamma_j \gamma_i \gamma_k^3 + \gamma_i \gamma_k \gamma_j^3 + \gamma_k \gamma_i \gamma_j^3 + \gamma_j \gamma_k \gamma_i^3 + \gamma_k \gamma_j \gamma_i^3 = 0. \quad (28)$$

Рассмотрим процесс рассеяния скалярной частицы, описываемой системой (12), в кулоновском поле ядра. В случае нормировки по заряду $\bar{\psi} \gamma_0 \psi = \pm 1$ вероятность перехода частицы из состояния $\psi(p) \equiv \psi(\mathbf{p}, i\epsilon)$ в состояние $\psi(p') \equiv \psi(\mathbf{p}', i\epsilon')$ имеет вид [4]

$$W = c \frac{m^2}{\epsilon \epsilon'} S_p \{ \gamma_0 \tau(\hat{p}) \gamma_0 \tau(\hat{p}') \} \delta(\epsilon - \epsilon'). \quad (29)$$

Здесь $c = \frac{2\pi Z^2 e^4}{|\mathbf{p} - \mathbf{p}'|^4}$ (см. [6]), а $\tau(\hat{p})$ — проективный оператор:

$$\tau(p) = \frac{i\hat{p}^3 (i\hat{p} - m)}{2m^4}, \quad \hat{p} = p_\mu \gamma_\mu. \quad (30)$$

Таким образом,

$$W = \frac{Z^2 e^4}{|\mathbf{p} - \mathbf{p}'|^4 \epsilon \epsilon' m^4} S_p \{ \gamma_0 i\hat{p}^3 (i\hat{p} - m) \gamma_0 i\hat{p}'^3 (i\hat{p}' - m) \} 2\pi \delta(\epsilon - \epsilon'). \quad (31)$$

Учитывая, что след произведения нечетного числа матриц γ_k равен нулю, и используя (16), получим

$$\begin{aligned} & Sp\{\gamma_0 i \hat{p}^3 (i \hat{p} - m) \gamma_0 i \hat{p}'^3 (i \hat{p}' - m)\} = \\ & = Sp(\gamma_0 \hat{p}^4 \gamma_0 \hat{p}'^4) - m^2 Sp(\gamma_0 \hat{p}^3 \gamma_0 \hat{p}'^3) = m^6 (\varepsilon + \varepsilon')^2. \end{aligned} \quad (32)$$

Подставляя это выражение для следа в (31), имеем

$$W = \frac{Z^2 e^4}{|\mathbf{p} - \mathbf{p}'|^4} \frac{(\varepsilon + \varepsilon')^2}{4\varepsilon\varepsilon'} 2\pi \delta(\varepsilon - \varepsilon'). \quad (33)$$

Эта формула полностью совпадает с соответствующим выражением для вероятности рассеяния скалярной частицы Даффина—Кеммера в кулоновском поле ядра [6]. Совпадение имеет место вследствие того, что матрицы γ_k удовлетворяют соотношению (17), которое и приводит к равенству (с точностью до множителя m^4) следа в формуле (31) и соответствующего следа для скалярной частицы Даффина—Кеммера.

Теперь рассмотрим комптоновское рассеяние фотона на скалярной частице. Сечение процесса имеет вид (см. [6], § 59)

$$d\sigma = \frac{e^4}{4\omega\omega'} |\bar{\psi}(p') Q \psi(p)|^2 \frac{d\mathbf{p}' dk'}{(2\pi)^2} \delta(\mathbf{p} + \mathbf{k} - \mathbf{p}' - \mathbf{k}') \delta(\varepsilon + \omega - \varepsilon' - \omega'). \quad (34)$$

Здесь $\psi(p)$ и $\psi(p')$ — амплитуды волновых функций частицы в начальном и конечном состояниях с импульсами p и p' ; k и k' — импульсы фотонов; Q — оператор, соответствующий данному процессу.

Матричный элемент $M \equiv \bar{\psi}(p') Q \psi(p)$ можно представить в виде (см. [7])

$$M = Sp(Q\tau(\hat{p})S^{-1}), \quad (35)$$

где $\tau(\hat{p})$ имеет вид (30), S — матрица преобразования в пространстве представления волновой функции ψ , удовлетворяющая условию

$$\psi(p') = S\psi(p). \quad (36)$$

Из структуры волновой функции ψ (12) следует, что матрица S должна иметь вид

$$S = \begin{bmatrix} 1 & \vdots & & & \\ \cdots & & \ddots & & \\ & & & L & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & L \\ & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & T \\ & & & & & & & & \ddots \end{bmatrix}, \quad (37)$$

где L — матрица Лоренца, T — матрица, осуществляющая преобразование компонент антисимметричного тензора $\psi_{[ik]}$ (см. [7]),

$$T_{[ik][mn]} = \frac{1}{2} (L_{im}L_{kn} - L_{in}L_{km}). \quad (38)$$

Используя векторную параметризацию группы Лоренца ([8]—[10]), матрицу L можно записать в виде

$$L \equiv L_q = \frac{(1 + \mathbf{q}_+)(1 + \mathbf{q}_-^*)}{|1 + \mathbf{q}^2|}, \quad (39)$$

Подставляя значения Q , τ , S^{-1} в (35) и вычисля следы, получим

$$M = \frac{1}{2\varepsilon^2} \left\{ 3(\omega' - \omega)(\mathbf{e}\mathbf{e}') + \frac{2}{\varepsilon} (\mathbf{p}'\mathbf{e}')(\mathbf{p}'\mathbf{e}) \right\}. \quad (47)$$

Здесь $\varepsilon = m$ — энергия скалярной частицы в начальном состоянии; ω , ω' — частоты, \mathbf{e} , \mathbf{e}' — поляризации падающего и рассеянного фотонов.

Таким образом, сечение процесса имеет вид

$$d\sigma = \frac{e^4}{4\varepsilon^4\omega\omega'} \left\{ \frac{3}{2} (\omega' - \omega)(\mathbf{e}\mathbf{e}') + \frac{1}{\varepsilon} (\mathbf{p}'\mathbf{e}')(\mathbf{p}'\mathbf{e}) \right\}^2 \times \\ \times \frac{d\mathbf{p}'d\mathbf{k}'}{(2\pi)^2} \delta(\mathbf{k} - \mathbf{p}' - \mathbf{k}') \delta(\varepsilon + \omega - \varepsilon' - \omega'). \quad (48)$$

Это выражение отличается от соответствующей формулы для скалярной частицы Даффина—Кеммера (см. [6], § 59)

$$d\sigma_1 = \frac{e^4}{4\varepsilon^2\omega\omega'} (\mathbf{e}\mathbf{e}') \frac{d\mathbf{p}'d\mathbf{k}'}{(2\pi)^2} \delta(\mathbf{k} - \mathbf{p}' - \mathbf{k}') \delta(\varepsilon + \omega - \varepsilon' - \omega'). \quad (49)$$

Различие обусловлено видом оператора взаимодействия Q для случая рассеяния фотона на исследуемой скалярной частице и скалярной частице Даффина—Кеммера. Оно является существенным, так как, например, при $\mathbf{e} \perp \mathbf{e}'$ получается $d\sigma \neq 0$, $d\sigma_1 = 0$.

Литература

1. Федоров Ф. И., Плетюхов В. А. Вестн. АН БССР, сер. физ.-мат. наук, № 6, 1969.
2. Федоров Ф. И. ДАН СССР, 79, 787, 1951.
3. Федоров Ф. И. Ученые записки БГУ им. В. И. Ленина, сер. физ.-мат., в. 12. Минск, 1951.
4. Федоров Ф. И. ЖЭТФ, 35, 493, 1958.
5. Богуш А. А., Федоров Ф. И. ДАН БССР, 12, 21, 1968.
6. Ахизер А. И., Берестецкий В. Б. Квантовая электродинамика. Физматгиз, 1959.
7. Богуш А. А., Федоров Ф. И. Вестн. АН БССР, сер. физ.-техн. наук, № 2, 1962.
8. Федоров Ф. И. ДАН БССР, 5, 101, 1961.
9. Федоров Ф. И. ДАН БССР, 5, 194, 1961.
10. Федоров Ф. И. ДАН СССР, 143, 56, 1962.
11. Федоров Ф. И., Богуш А. А. ДАН БССР, 6, 690, 1962.
12. Фрадкин Е. С. ЖЭТФ, 20, 1, 1950.
13. Fierz M., Pauli W. Proc. Roy. Soc. A., 173, 211, 1939.

Белорусский государственный университет им. В. И. Ленина Поступило в редакцию 10.XII.1969

А. П. РЯБУШКО

**О ПОГРЕШНОСТЯХ В ПРИБЛИЖЕННЫХ УРАВНЕНИЯХ
 ДВИЖЕНИЯ ТЕЛ
 В ОБЩЕЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ**

Сходимость аппроксимационного метода, применяемого в общей теории относительности [1—5] при решении уравнений тяготения Эйнштейна и при выводе уравнений движения тел, до сих пор не доказана. Нет полной уверенности в том, что следующее за ньютоновым приближение, использованием которого в настоящее время чаще всего ограничиваются, хорошо описывает точные решения релятивистской теории тяготения. С целью обоснования аппроксимационной процедуры обычно ссылаются на удовлетворительное совпадение теоретически полученных с помощью этой процедуры результатов с экспериментально установленными фактами (например, в случае движения перигелия Меркурия). Недостаток такого нематематического обоснования очевиден. По меньшей мере следует попытаться сделать ряд оценок, указывающих области, где аппроксимационный метод в посленьютоновом приближении дает значения, близкие к точным решениям, и области, где погрешности становятся большими. Сделать это желательно еще и потому, что в последние годы широко ведутся исследования, относящиеся к сверхплотным состояниям материи, гравитационным коллапсу и антиколлапсу. При этом рассматриваются движения тел в близких к гравитационному радиусу областях, где гравитационные поля очень сильные и релятивистские эффекты могут качественно менять картину движения. Получить требуемые оценки было бы легче, если бы были известны соответствующие точные решения (последние, как правило, неизвестны). Поэтому первым шагом в решении поставленной задачи должно быть получение оценок в случае некоторых известных точных решений, чем мы и будем заниматься в настоящей работе. Эти оценки помогут получить определенные рекомендации для оценок приближенных решений в случае, когда соответствующие им точные решения неизвестны. Попутно будут обсуждены некоторые смежные вопросы, представляющие и самостоятельный интерес.

§ 1. Точные решения. Одним из точных и наиболее важных в физическом отношении решений уравнений тяготения Эйнштейна является решение Шварцшильда [6, 7]. Метрика риманова пространства-времени, соответствующего этому решению, в «сферических» координатах r, θ, φ имеет вид

$$ds^2 = \left(1 - \frac{a}{r}\right) c^2 dt^2 - \left(1 - \frac{a}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2), \quad (1.1)$$

где $a \equiv \frac{2km}{c^2}$ — гравитационный радиус центрального тела, k — ньютонова постоянная тяготения, m — масса центрального тела, c — скорость света. Движение легкого тела происходит, как известно (см. например, [7]), по

геодезической риманова пространства-времени, определяемого внешним гравитационным полем. Уравнения геодезической линии следующие:

$$\frac{du^i}{ds} + \Gamma_{jk}^i u^j u^k = 0, \quad u^i \equiv \frac{dx^i}{ds}, \quad g_{ik} u^i u^k = 1, \quad (1.2)$$

где $i, j, k = 0, 1, 2, 3$; x^i — координаты событий, определяющие положение центра тяжести легкого тела; по повторяющимся индексам предполагается суммирование; коэффициенты Γ_{jk}^i определенным образом выражаются через метрический тензор g_{ik} риманова пространства-времени [7]. В случае метрики (1.1) отличными от нуля будут следующие Γ_{jk}^i (x^0, x^1, x^2, x^3 соответствуют ct, r, θ, φ):

$$\begin{aligned} \Gamma_{00}^1 &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{a}{r}\right) \frac{a}{r^2}, \quad \Gamma_{01}^0 = -\Gamma_{11}^0 = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{a}{r}\right)^{-1} \frac{a}{r^2}, \\ \Gamma_{22}^1 &= \Gamma_{33}^1 \sin^{-2} \theta = -r \left(1 - \frac{a}{r}\right), \quad \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{13}^3 = r^{-1}, \\ \Gamma_{33}^2 &= -\sin \theta \cos \theta, \quad \Gamma_{23}^3 = \text{ctg } \theta. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Для нахождения закономерностей движения тела в поле Шварцшильда следует проинтегрировать систему (1.2) с коэффициентами Γ_{jk}^i из (1.3). Рассмотрим здесь радиальные и круговые движения.

В случае радиального движения частицы $u^2 = u^3 = 0$. Система (1.2) приводится к виду

$$\begin{aligned} \frac{du^0}{dr} + \left(1 - \frac{a}{r}\right)^{-1} \frac{a}{r^2} u^0 = 0, \quad \frac{du^1}{dr} u^1 + \frac{1}{2} \frac{a}{r^2} = 0, \\ \left(1 - \frac{a}{r}\right) u^{0^2} - \left(1 - \frac{a}{r}\right)^{-1} u^{1^2} = 1. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Общее решение ее

$$u^0 = c_0 \left(1 - \frac{a}{r}\right)^{-1}, \quad u^1 = \pm \left(c_0^2 - 1 + \frac{a}{r}\right)^{1/2}, \quad (1.5)$$

где c_0 — произвольная отличная от нуля постоянная интегрирования. Она может быть выбрана так, чтобы при $r = r_0$ локальная трехмерная скорость v радиального движения равнялась нулю. Тогда $c_0^2 = 1 - a/r_0$ и

$$v = \pm c \left(1 - \frac{1 - a/r}{1 - a/r_0}\right)^{1/2} \quad (1.6)$$

(ср. [8]). При $r_0 = \infty$ получаем параболическое движение.

Нетрудно найти решение в T -области [8] поля Шварцшильда, в которой $0 \leq r \leq a$. Так как при $r < a$ временной и пространственный характер имеют соответственно координаты r и ct , то, сделав замену $ct \rightarrow \tilde{r}$, $r \rightarrow \tilde{t}$, получаем метрику T -области

$$ds^2 = \left(\frac{a}{\tilde{t}} - 1\right)^{-1} d\tilde{t}^2 - \left(\frac{a}{\tilde{t}} - 1\right) d\tilde{r}^2 - \tilde{t}^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \quad (1.7)$$

и соответствующую ей систему уравнений геодезических, из которой находим общее решение, описывающее радиальное движение частицы в T -области:

$$u^0 = \pm \left(c_1^2 - 1 + \frac{a}{\tilde{t}} \right)^{1/2}, \quad u^1 = c_1 \left(\frac{a}{\tilde{t}} - 1 \right)^{-1}. \quad (1.8)$$

Локальная трехмерная скорость частицы в этом случае

$$v = \pm c c_1 \left(c_1^2 - 1 + \frac{a}{\tilde{t}} \right)^{-1/2}. \quad (1.9)$$

Постоянная интегрирования c_1 может равняться нулю. Это означает, что частица может быть неподвижна ($v = 0$) в системе отсчета T -области. В любой точке T -области $0 \leq \tilde{t} \leq a$. Поэтому координатным временем «жизни» T -области будет $\Delta \tilde{t} = a$, которому будет соответствовать собственное время «жизни» T -области

$$\Delta \tau = \frac{1}{c} \int_0^a \left(\frac{a}{\tilde{t}} - 1 \right)^{-1/2} d\tilde{t} = \frac{\pi}{2} \frac{a}{c}. \quad (1.10)$$

Для радиального движения луча света в T -области находим

$$u^0 = \pm \tilde{c}_0, \quad u^1 = \tilde{c}_0 \left(\frac{a}{\tilde{t}} - 1 \right)^{-1}, \quad \frac{d\tilde{r}}{d\tilde{t}} = \pm \left(\frac{a}{\tilde{t}} - 1 \right)^{-1}, \quad \frac{dl}{d\tau} = \pm c, \quad (1.11)$$

где l — истинное радиальное расстояние, τ — собственное время. Истинный радиус R_g сферы Шварцшильда можно определить с помощью (1.11) как расстояние, которое пройдет луч света, двигаясь по радиусу, за время «жизни» T -области. Тогда

$$R_g = \int_0^a \frac{dl}{d\tilde{t}} d\tilde{t} = \int_0^a \left(\frac{a}{\tilde{t}} - 1 \right)^{-1/2} d\tilde{t} = c \Delta \tau = \frac{\pi}{2} a. \quad (1.12)$$

Переходим к круговым движениям в R -области ($r > a$). Без ограничения общности можно считать $\theta = \pi/2$. Так как $u^1 = u^2 = 0$, то система (1.2) приводится к

$$\begin{aligned} \frac{du^0}{ds} &= 0, \quad \frac{1}{2} \left(1 - \frac{a}{r} \right) \frac{a}{r^2} u^{0^2} - r \left(1 - \frac{a}{r} \right) u^{3^2} = 0, \\ \frac{du^3}{ds} &= 0, \quad \left(1 - \frac{a}{r} \right) u^{0^2} - r^2 u^{3^2} = 1, \end{aligned} \quad (1.13)$$

решением которой будет

$$u^{0^2} = \left(1 - \frac{3}{2} \frac{a}{r} \right)^{-1}, \quad u^{3^2} = \frac{1}{2} \frac{a}{r^3} \left(1 - \frac{3}{2} \frac{a}{r} \right)^{-1}. \quad (1.14)$$

Отсюда получаем зависимость φ от t на круговой орбите:

$$\varphi = \pm \left(\frac{1}{2} \frac{a}{r^3} \right)^{1/2} ct. \quad (1.15)$$

Из (1.14) видно, что круговые орбиты могут существовать в R -области только при $r \geq \frac{3}{2} a$, что было известно еще Эйнштейну. Отметим, что среди

всех круговых орбит в R -области окружность $r = \frac{3}{2} a$ и только она является траекторией, по которой движение происходит с фундаментальной скоростью c . Для доказательства достаточно проинтегрировать уравнения геодезических при условии $ds = 0$, что равносильно замене в последнем уравнении (1.13) единицы нулем.

В T -области существуют орбиты при $\tilde{r} = \text{const}$, которые условно можно назвать «круговыми». Действительно, считая $\theta = \pi/2$, получаем $u^1 = u^2 = 0$ и система (1.2) приводится к виду

$$\begin{aligned} u^0 \frac{du^0}{d\tilde{t}} + \frac{1}{2} \left(\frac{a}{\tilde{t}} - 1 \right)^{-1} \frac{a}{\tilde{t}^2} u^{0^2} + \tilde{t} \left(\frac{a}{\tilde{t}} - 1 \right) u^{3^2} &= 0, \\ \frac{du^3}{d\tilde{t}} + \frac{2}{\tilde{t}} u^3 &= 0, \quad \left(\frac{a}{\tilde{t}} - 1 \right)^{-1} u^{0^2} - \tilde{t}^2 u^{3^2} = 1. \end{aligned} \quad (1.16)$$

Общее решение будет

$$u^{0^2} + \left(1 = \frac{c_3}{\tilde{t}^2} \right) \left(\frac{a}{\tilde{t}} - 1 \right), \quad u^3 = \frac{c_3}{\tilde{t}^2}. \quad (1.17)$$

В частном случае, когда постоянная интегрирования $c_3 = 0$, получаем радиальное движение, совпадающее с (1.8) при $c_1 = 0$. Угловая скорость ω_{π} и линейная скорость движения v_{π} , измеренные по часам локального наблюдателя, равны:

$$\omega_{\pi} = \frac{\pm c c_3}{\tilde{t} \sqrt{\tilde{t}^2 + c_3^2}}, \quad v_{\pi} = \frac{\pm c c_3}{\sqrt{\tilde{t}^2 + c_3^2}}. \quad (1.18)$$

Если $\tilde{t} \rightarrow 0$, то $\omega_{\pi} \rightarrow \pm \infty$, $v_{\pi} \rightarrow \pm c$; при $\tilde{t} \rightarrow a$ имеем

$$\omega_{\pi} \rightarrow \frac{\pm c c_3}{a \sqrt{a^2 + c_3^2}}, \quad v_{\pi} \rightarrow \frac{\pm c c_3}{\sqrt{a^2 + c_3^2}}.$$

Конечно, траектория $\tilde{r} = \text{const}$ не является окружностью, ибо истинные трехмерные расстояния меняются со временем.

В T -области также возможны траектории $\tilde{r} = \text{const}$, вдоль которых движение происходит со скоростью света. В этом случае

$$u^0 = \pm \frac{c_3}{\tilde{t}} \left(\frac{a}{\tilde{t}} - 1 \right)^{1/2}, \quad u^3 = \frac{c_3}{\tilde{t}^2}. \quad (1.19)$$

§ 2. Приближенные решения. Переходим к приближенному интегрированию уравнений движения, пользуясь упоминавшимся аппроксимационным методом [1 — 5]. Уравнения движения легкого тела в посленьютоновом приближении можно получить из уравнений геодезических, вычисляя метрику g_{ih} и Γ_{jk}^i в нужном приближении, либо воспользоваться уже готовыми посленьютоновыми уравнениями движения для тел сравнимых масс, имеющимися, например, в [1, 3, 5], сделав в них предельный переход к легкому телу.

В случае радиального движения, когда в ньютоновом приближении на пространственной бесконечности скорость легкого тела равна нулю, находим в посленьютоновом приближении, что движение также происходит по радиусу, причем радиальная координата ρ следующим образом зависит от ньютонова абсолютного времени t :

$$\rho = r_{\text{H}} + \frac{5}{2} a, \quad r_{\text{H}} = \left(\frac{9}{2} km \right)^{1/3} t^{2/3}, \quad (2.1)$$

где r_n определяет ньютоново радиальное движение, а второе слагаемое дает релятивистскую поправку к нему.

В случае движения в ньютоновом приближении по окружности радиуса r_0 движение в посленьютоновом приближении также происходит по окружности (если пренебречь периодическими малыми членами, дающими отклонения от точной окружности [9, 10]) с координатной угловой скоростью, т. е. скоростью, измеренной относительно ρ и t ,

$$\omega = \omega_0 + \frac{\alpha t}{r_0}, \quad (2.2)$$

где ω_0 — ньютонова угловая скорость, α — постоянная интегрирования порядка c^{-2} . Если, например, потребовать, чтобы в начальный момент времени координаты центра тяжести легкого тела и компоненты его скорости в ньютоновом и посленьютоновом приближениях совпадали, то постоянная α определяется так [9, 10]: $\alpha = -3a\omega_0/m$.

§ 3. Расстояния и промежутки времени. В посленьютоновом приближении пространство и время искривлены, и эта искривленность должна учитываться при нахождении истинных расстояний, промежутков времени, скоростей. Уравнения движения точные и приближенные отнесены к координатам, которые не выражают истинных расстояний и моментов времени. Истинная картина движения выявляется только при пересчете по определенным формулам координатных расстояний и времени в истинные.

Метрика пространства-времени Шварцшильда в посленьютоновом приближении записывается в изотропных декартовых координатах в виде

$$ds^2 = \left(1 - \frac{a}{\rho}\right) c^2 dt^2 - \left(1 + \frac{a}{\rho}\right) (dx^2 + dy^2 + dz^2), \quad \rho^2 = x^2 + y^2 + z^2 \quad (3.1)$$

(см. [7], (106.3)). Метрика Шварцшильда (1.1) в посленьютоновом приближении

$$ds^2 = \left(1 - \frac{a}{r}\right) c^2 dt^2 - \left(1 + \frac{a}{r}\right) dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \quad (3.2)$$

связана с (3.1) следующим преобразованием пространственных координат:

$$x = \left(r - \frac{a}{2}\right) \cos \varphi \sin \theta, \quad y = \left(r - \frac{a}{2}\right) \sin \varphi \sin \theta, \\ z = \left(r - \frac{a}{2}\right) \cos \theta, \quad \rho = r - \frac{a}{2}. \quad (3.3)$$

Приближенные метрики (3.1), (3.2) соответствуют какому-либо гравитационному полю только при ρ и r , больших a . Таким образом, в посленьютоновом приближении в поле Шварцшильда имеет смысл только R -область, а T -область из рассмотрения выпадает. В малом истинное радиальное расстояние dl связано с радиальным «расстоянием» dr формулой

$$dl = \left(1 + \frac{a}{2r}\right) dr. \quad (3.4)$$

Истинное расстояние l в посленьютоновом приближении между точками $M_1(r_1)$ и $M_2(r_2)$ по радиусу выразится формулой

$$l = \int_{r_1}^{r_2} \left(1 + \frac{a}{2r}\right) dr = r_2 - r_1 + \frac{a}{2} \ln \frac{r_2}{r_1} > r_2 - r_1. \quad (3.5)$$

Для сравнения напомним, что в R -области поля Шварцшильда истинное радиальное расстояние L между точками $M_1(r_1)$ и $M_2(r_2)$ выражается так:

$$L = \int_{r_1}^{r_2} \left(1 - \frac{a}{r}\right)^{-1/2} dr = \left\{ r \sqrt{1 - \frac{a}{r}} + \frac{a}{2} \ln \left[\frac{r}{a} \left(1 + \sqrt{1 - \frac{a}{r}}\right)^2 \right] \right\}_{r_1}^{r_2} > r_2 - r_1. \quad (3.6)$$

В частности, при $r_1 = a$, $r_2 = r$ имеем

$$L_g = r \sqrt{1 - \frac{a}{r}} + \frac{a}{2} \ln \left[\frac{r}{a} \left(1 + \sqrt{1 - \frac{a}{r}}\right)^2 \right]. \quad (3.6a)$$

Легко находим разность $L - l$:

$$L - l = r_2 \left(\sqrt{1 - \frac{a}{r_2}} - 1 \right) - r_1 \left(\sqrt{1 - \frac{a}{r_1}} - 1 \right) + a \ln \frac{1 + \sqrt{1 - a/r_2}}{1 + \sqrt{1 - a/r_1}}, \quad (3.7)$$

которая при $r_2 \rightarrow \infty$ стремится к конечному пределу. Наибольшим он получается, когда $r_1 = a$: $\lim_{r_2 \rightarrow \infty} (L - l) = \left(\frac{1}{2} + \ln 2 \right) a \approx 1,19 a$; при $r_1 = 10a$ получаем $\lim_{r_2 \rightarrow \infty} (L - l) \approx 0,02 a$. Погрешности, даваемые при вычислении рас-

стояний по (3.5), будут значительными, если отрезки измеряются вблизи сферы Шварцшильда. Действительно, радиальный отрезок $[a, 2a]$ по (3.5) имеет длину $l \approx 1,35a$, а по (3.6) $L \approx 2,31a$, что дает относительную погрешность $\Delta \equiv (L - l)/L \approx 41,5\%$; отрезок $[a, 5a]$ по (3.5) имеет длину $l \approx 4,81a$, а по (3.6) $L \approx 5,90a$, что дает $\Delta \approx 18,5\%$; для отрезка $[a, 10a]$ имеем $l \approx 10,15a$, $L \approx 11,31a$, $\Delta \approx 10\%$. Для отрезка $[a, 100a]$ Δ составляет всего около 1% . И вообще $\lim_{r_2 \rightarrow \infty} \Delta = 0$. Если измерения проводить не

в окрестности сферы Шварцшильда, то погрешности становятся малы. Например, для радиального отрезка $[10a, 20a]$ $l \approx 10,35a$, $L \approx 10,36a$, $\Delta \approx 0,1\%$. Заметим, что истинные расстояния вдоль координатных линий θ и φ определяются величиной r , т. е. измерения в этих направлениях производятся по законам евклидовой геометрии. Поэтому искажения возникают лишь при смещениях вдоль радиуса. Таким образом, в области $r \gg 10a$ измерения расстояний по приближенной формуле (3.5) приводят к ошибкам, составляющим не более $0,1\%$ относительно их точных значений (3.6). Измерение расстояний по законам евклидовой геометрии (r принимается за истинное расстояние по всем направлениям) в той же области $r \gg 10a$, приводит к ошибкам, составляющим не более $3,5\%$ относительно их точных значений (3.6), а в области $r \gg 100a$ — не более $0,4\%$. Как и Δ , относительная погрешность $[L - (r_2 - r_1)]/L$ стремится к нулю, когда $r_2 \rightarrow \infty$. Однако разности $l - (r_2 - r_1)$ и $L - (r_2 - r_1)$ при $r_2 \rightarrow \infty$ стремятся к бесконечности.

В посленьютоновом приближении связь истинных промежутков времени $\Delta\tau$ и соответствующих координатных промежутков времени Δt (промежутков времени по часам далекого наблюдателя) задается соотношением

$$\Delta\tau = \left(1 - \frac{a}{2r}\right) \Delta t. \quad (3.8)$$

Как и в точном решении Шварцшильда, ход времени при приближении к центральному телу согласно (3.8) замедляется. В точном решении (1.1)

$$\Delta T = \sqrt{1 - \frac{a}{r}} \Delta t. \quad (3.9)$$

Как и при измерении расстояний вблизи сферы Шварцшильда, измерение промежутков собственного времени по Ньютону, по (3.8) и по (3.9) будет приводить к значительным расхождениям. С удалением от сферы Шварцшильда разница между Δt , $\Delta \tau$ и ΔT уменьшается. Например, относительная погрешность $(\Delta \tau - \Delta T)/\Delta T$, которая стремится к нулю при $r \rightarrow \infty$, уже для $r = 10a$ составляет приблизительно 0,1%, а для $r = 100a$ — всего 0,001%. Существенно, что хотя с удалением от сферы Шварцшильда относительная погрешность быстро падает, но разности между Δt , $\Delta \tau$ и ΔT могут быть большими и при значительных r , если далекий наблюдатель оперирует большими промежутками времени Δt .

§ 4. Сравнение точных и приближенных решений. Радиальное параболическое движение в гравитационном поле одного центра в ньютоновом приближении описывается формулами

$$r_{\text{н}} = \left(\frac{9}{2} km\right)^{1/3} t^{2/3}, \quad \dot{r}_{\text{н}} \equiv \frac{dr_{\text{н}}}{dt} = c \sqrt{\frac{a}{r_{\text{н}}}}; \quad (4.1)$$

в посленьютоновом приближении — формулами (см. (2.1) и (3.3))

$$\rho = r_{\text{н}} + \frac{5}{2} a, \quad \dot{r} \equiv \frac{dr}{dt} = \dot{r}_{\text{н}}, \quad (4.2)$$

откуда следует, что частица не может совпасть с центром тяжести центрального тела (всегда $\rho \geq \frac{5}{2} a$). Точное параболическое движение определяется выражениями (полагаем в (1.5) $c_0 = 1$, а в (1.6) $r_0 = \infty$):

$$u^0 = \left(1 - \frac{a}{r}\right)^{-1}, \quad u^1 = \pm \sqrt{\frac{a}{r}}, \quad v \equiv \frac{dL}{d\tau} = \pm c \sqrt{\frac{a}{r}}. \quad (4.3)$$

Здесь $r \geq a$ и поэтому $|v| \leq c$. В (4.1) $r_{\text{н}}$, t , $\dot{r}_{\text{н}}$ являются истинными расстоянием, временем и скоростью соответственно в ньютоновой теории тяготения. В (4.2) r , t , \dot{r} имеют другой смысл. Радиальная координата r движущейся частицы связана с истинным расстоянием l формулами (3.4), (3.5). Координатное время t связано с истинным временем τ формулой (3.8). Оно может интерпретироваться как истинное время по часам далекого наблюдателя. Тогда \dot{r} представляет скорость изменения r по часам этого наблюдателя. Скорость по часам локального наблюдателя в посленьютоновом приближении определяется выражением

$$v_{\text{н}} \equiv \frac{dl}{d\tau} = \dot{r}_{\text{н}} \left(1 + \frac{a}{r_{\text{н}}}\right). \quad (4.4)$$

Так как при $t \rightarrow 0$ $\dot{r}_{\text{н}} \rightarrow \infty$, а $r_{\text{н}} \rightarrow 0$, то $v_{\text{н}} \rightarrow \infty$. Чтобы выполнялось $v_{\text{н}} \leq c$, должно быть $t \geq 2,1 \frac{a}{c}$, что приводит к $r_{\text{н}} \geq 2,15a$ и $r \geq 5,15a$. Отметим, что $\dot{r}_{\text{н}} \leq c$ при $t \geq \frac{2}{3} \frac{a}{c}$, т. е. при $r_{\text{н}} \geq a$. Итак, качественного

нарушения в картине радиального движения в ньютоновом и посленьютоновом приближениях по сравнению с точным решением (4.3) не будет в области $r \gg 5,15a$. Количественные расхождения в областях, определяемых большими r , будут незначительными. Соответствующие оценки легко дать на основе формул и оценок § 3. В областях $r \gg (10^2 \div 10^3)a$ закономерности движения, описываемые посленьютоновыми и точными уравнениями движения, также мало отличаются количественно. Например, в этой области при вычислении скорости радиального движения делаются ошибки с относительной погрешностью $(v_{\text{н}} - v)/v \leq (1 \div 0,1) \%$. С точки зрения аппроксимационной процедуры добавочный к $r_{\text{н}}$ член в (4.2) должен быть мал. В областях $r \gg (10^2 \div 10^3)a$ он меньше $r_{\text{н}}$ приблизительно в $40 \div 400$ и более раз.

Переходим к круговым движениям. В ньютоновой теории тяготения

$$r_{\text{н}}^2 \dot{\varphi}_{\text{н}} = \pm \sqrt{kmr_{\text{н}}} = \text{const}, \text{ т. е. } \varphi_{\text{н}} = \pm \sqrt{\frac{1}{2} \frac{a}{r_{\text{н}}^3}} ct. \quad (4.5)$$

В посленьютоновом приближении круговое движение описывает выражение (2.2), откуда

$$\varphi = \varphi_{\text{н}} \left(1 + \frac{\alpha m}{r_{\text{н}} \omega_0} \right). \quad (4.6)$$

Точное решение (1.15) по виду совпадает с (4.5), но смысл входящих в эти уравнения величин разный. В (4.5) $r_{\text{н}}$ и t — истинные ньютоновы расстояния и время. В (1.15) угол φ выражен как функция радиальной координаты r и времени t по часам далекого наблюдателя. Время t связано с истинным временем на круговой орбите соотношением

$$\tau = \sqrt{1 - \frac{a}{r}} t. \quad (4.7)$$

Поэтому по часам далекого наблюдателя t угловая скорость движения по круговой орбите $\omega_{\text{д}}$ будет

$$\omega_{\text{д}} = \pm c \sqrt{\frac{a}{2r^3}}, \quad (4.8)$$

а локальный наблюдатель, пользуясь своими часами, вычислит скорость

$$\omega_{\text{л}} \equiv \frac{d\varphi}{d\tau} = \omega_{\text{д}} \frac{dt}{d\tau} = \omega_{\text{д}} \left(1 - \frac{a}{r} \right)^{-1/2}. \quad (4.9)$$

Всегда $|\omega_{\text{л}}| > |\omega_{\text{д}}|$. Линейные скорости $v_{\text{д}}$ и $v_{\text{л}}$ движения по кругу, измеренные с помощью часов далекого и локального наблюдателей, будут

$$v_{\text{д}} \equiv \frac{dL}{dt} = r \frac{d\varphi}{dt} = \pm \sqrt{\frac{km}{r}}, \quad v_{\text{л}} \equiv \frac{dL}{d\tau} = \pm \sqrt{\frac{km}{r}} \left(1 - \frac{a}{r} \right)^{-1/2}. \quad (4.10)$$

Истинный радиус круговой орбиты R в поле Шварцшильда находится как сумма $R_{\text{г}}$ из (1.12) и $L_{\text{г}}$ из (3.6а):

$$R = R_{\text{г}} + L_{\text{г}} = \frac{\pi}{2} a + \sqrt{1 - \frac{a}{r}} + \frac{a}{2} \ln \frac{r}{a} + a \ln \left(1 + \sqrt{1 - \frac{a}{r}} \right). \quad (4.11)$$

Всегда $R > r$. Это приводит к тому, что на окружности заданного радиуса угловая скорость движения в поле Шварцшильда всегда больше, чем в ньютоновом поле тяготения, т. е. всегда $\dot{\varphi}_H < \dot{\omega}_d < \dot{\omega}_n$. Рассмотрим подробнее этот важный момент. Заметим, что $\dot{\omega}_d$ и $\dot{\omega}_n$ на окружности радиуса R определяются по формулам (4.8), (4.9), в которых значение r совпадает со значением r в (4.11). Ньютонова угловая скорость $\dot{\varphi}_H$ на окружности того же радиуса $R = r_n$ находится из (4.5) и равна

$$\dot{\varphi}_H = \pm \sqrt{\frac{a}{2R^3}} c. \quad (4.12)$$

Прделаем некоторые вычисления. Если $R = r_n = 7,47a$, то $\dot{\varphi}_H \approx \pm 0,035 \frac{c}{a}$, $r \approx 5a$ и $\dot{\omega}_d \approx \pm 0,064 \frac{c}{a}$, $\dot{\omega}_n \approx \pm 0,072 \frac{c}{a}$. Отсюда $\dot{\omega}_d \approx 1,83 \dot{\varphi}_H$, $\dot{\omega}_n \approx 2,06 \dot{\varphi}_H$. Если $R = r_n = 104,06a$, то $r \approx 100a$, $\dot{\varphi}_H \approx \pm 0,666 \cdot 10^{-3} \frac{c}{a}$, $\dot{\omega}_d \approx 1,005 \dot{\varphi}_H$, $\dot{\omega}_n \approx \pm 0,711 \cdot 10^{-3} \frac{c}{a}$. Отсюда $\dot{\omega}_d \approx 1,062 \dot{\varphi}_H$, $\dot{\omega}_n \approx 1,067 \dot{\varphi}_H$. С увеличением

радиуса круговой орбиты различия между $\dot{\varphi}_H$, $\dot{\omega}_d$, $\dot{\omega}_n$ довольно быстро уменьшаются. Но если движение рассматривать за большие промежутки времени, то малое различие в угловых скоростях даст заметную разницу для положений частицы на орбите по ньютоновой и эйнштейновой теориям тяготения. Действительно, взяв $m = 2 \cdot 10^{33} \text{ г}$ и $r = 5,79 \cdot 10^7 \text{ км}$ (что соответствует среднему расстоянию Меркурия до Солнца), находим $R - r \approx 30 \text{ км}$, $(\dot{\omega}_d - \dot{\varphi}_H) \cdot 100 \text{ лет} \approx 420''$, $(\dot{\omega}_n - \dot{\varphi}_H) \cdot 100 \text{ лет} \approx 434''$. Отметим одно обстоятельство. Земной наблюдатель при различных опытах пользуется своими земными часами, которые идут медленнее часов далекого наблюдателя и быстрее часов, скажем, вблизи Меркурия. Поэтому $\dot{\omega}_n > \dot{\omega}_3 > \dot{\omega}_d$, где $\dot{\omega}_3$ — угловая скорость на круговой орбите вблизи Меркурия, измеренная с помощью часов наблюдателя на Земле, который получит $(\dot{\omega}_3 - \dot{\varphi}_H) \cdot 100 \text{ лет} \approx 425''$. Аналогичные вычисления при $r = 10,82 \cdot 10^7 \text{ км}$ (что соответствует среднему расстоянию Венеры до Солнца) дают $R - r \approx 31 \text{ км}$, $(\dot{\omega}_d - \dot{\varphi}_H) \cdot 100 \text{ лет} \approx 91''$, $(\dot{\omega}_n - \dot{\varphi}_H) \cdot 100 \text{ лет} \approx 94''$. При $r = 14,96 \cdot 10^7 \text{ км}$ (что соответствует среднему расстоянию Земли до Солнца) имеем $R - r \approx 32 \text{ км}$, $(\dot{\omega}_d - \dot{\varphi}_H) \cdot 100 \text{ лет} \approx 41''$, $(\dot{\omega}_n - \dot{\varphi}_H) \cdot 100 \text{ лет} \approx 42''$. Отметим, что для не очень далеких искусственных спутников Земли обсуждаемый вековой эффект значительно больше. Например для спутника, движущегося по круговой орбите радиуса $R = 10^4 \text{ км}$, имеем $R - r \approx 11 \text{ см}$, $(\dot{\omega}_d - \dot{\varphi}_H) \cdot 100 \text{ лет} \approx 7000''$.

В приближенных выражениях (2.2) и (4.6) постоянная α определяется выбором радиуса круговой орбиты. Требуя совпадения радиусов орбит в ньютоновом и посленьютоновом приближениях и считая $r_n > 10^3 a$, находим (за истинный радиус сферы Шварцшильда берется $R_g = \frac{\pi}{2} a$) [9, 10]:

$$\alpha \approx \frac{3k\omega_0}{2c^2} \left(1,14 + \ln \frac{r_n}{a} \right), \quad r \approx r_n - a \left(0,57 + \frac{1}{2} \ln \frac{r_n}{a} \right), \quad (4.13)$$

$$\dot{\omega}_d \approx \dot{\omega}_0 + \frac{3a\omega_0}{4r_n} \left(1,14 + \ln \frac{r_n}{a} \right), \quad \dot{\omega}_n \approx \dot{\omega}_n \left(1 + \frac{a}{2r_n} \right).$$

Для сравнения с точным решением подсчитаем r , ω_0 , ω_d , ω_l по (4.13) в случаях: 1) $r_n = 5,79 \cdot 10^7$ км; 2) $r_n = 14,96 \cdot 10^7$ км. Вычисления дают: 1) $r_n - r \approx 27$ км, $(\omega_d - \omega_0) \cdot 100$ лет $\approx 378''$, $(\omega_l - \omega_0) \cdot 100$ лет $\approx 392''$; 2) $r_n - r \approx 28$ км, $(\omega_d - \omega_0) \cdot 100$ лет $\approx 37''$, $(\omega_l - \omega_0) \cdot 100$ лет $\approx 38''$.

Итак, вековые эффекты, подсчитанные на основе точного решения и на основе посленьютонова приближения, отличаются: в случае 1) точное решение дает превышение на $42''$, а в случае 2) — на $4''$.

К смещению перигелия Меркурия рассмотренные вековые эффекты отношения не имеют.

Разумеется, что рассмотренные вековые эффекты существуют (несколько меньшие) и в случае, когда вместо точечного центрального тела берется тело конечных размеров. Это ясно из того, что поле внутри тела обладает теми же основными свойствами, что и R -область поля Шварцшильда [7].

Отметим, что существование описанных эффектов в принципе следует также из предложенного в [5] метода измерений.

Автор благодарит О. С. Иваницкую за полезное обсуждение данной работы.

Литература

1. Einstein A., Infeld L., Hoffman V. *Ann. Math.*, 39, 65, 1938.
2. Фок В. А. *ЖЭТФ*, 9, 375, 1939.
3. Papapetrou A. *Proc. Phys. Soc.*, A 64, 57, 1951.
4. Фок В. А. Теория пространства, времени и тяготения. Гостехиздат, 1955.
5. Инфельд Л., Плебаньский Е. Движение и релятивизм. ИЛ, 1962.
6. Schwarzschild K. *Berl. Ber.*, 1916, стр. 189.
7. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теория поля. Физматгиз, 1967.
8. Зельдович Я. Б., Новиков И. Д. Релятивистская астрофизика. Физматгиз, 1967.
9. Рябушко А. П., Филипович К. С. *Весті АН БССР, сер. фіз.-мат. навук*, № 5, 1968.
10. Рябушко А. П., Филипович К. С. *Весті АН БССР, сер. фіз.-мат. навук*, № 6, 1969.

Белорусский государственный университет
им. В. И. Ленина

Поступило в редакцию 17.XI 1969

А. С. ПОТУПА, В. И. СТРАЖЕВ, Л. М. ТОМИЛЬЧИК

АКСИОМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ КЛАССИЧЕСКОЙ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ

1. Введение. Как известно, модификация основ классической электродинамики так или иначе связана с переопределением уравнений электромагнитного поля и (или) уравнений движения заряженных частиц посредством соответствующего изменения вида лагранжиана.

Иная возможность открылась в связи с попытками введения в электродинамику нового физического объекта — магнитного заряда. Это направление характеризуется стремлением дополнить (в частности, симметризовать) существующую теорию, не прибегая к изменению ее основных принципов, таких, как линейность, локальность и т. д. Однако при этом возникают принципиальные трудности с использованием лагранжева подхода (см., например, [1]).

Следует подчеркнуть, что любая попытка придать физический смысл квантованию некоторой модифицированной электродинамики (определение поля и перестановочных соотношений) с необходимостью требует ее согласования с идеализированными измерительными процедурами типа Бора—Розенфельда [2]. Эти процедуры жестко связаны с формой классической теории и ее модельным фундаментом.

До настоящего времени с системой таких процедур согласована только электродинамика в общепринятой форме [3]. В связи с этим представляются вполне обоснованными попытки такого анализа основ классической электродинамики, в рамках которого можно было бы обосновать связь между характерными чертами ее современной формы: локальность, линейность, «однозарядовость» (наличие лишь одного типа наблюдаемого заряда). Интересна в этом отношении аксиоматическая модель Боппа [4], основанная на использовании уравнения неразрывности для тока при получении уравнений Максвелла. Однако при этом берется лишь одно из возможных линейно-независимых решений уравнений неразрывности, в силу чего оказывается возможным сформулировать лишь одну пару уравнений поля, а для получения полной системы уравнений Максвелла приходится вводить в число постулатов принцип наименьшего действия. Это представляется не вполне последовательным (что фактически отмечается самим автором), поскольку задание лагранжиана системы делает по существу излишней какую бы то ни было дополнительную аксиоматику. В такой схеме фактически снимается проблема второго заряда, т. е. его отсутствие при этом не обосновывается, а просто констатируется, поскольку асимметрия между электрическими и магнитными величинами фиксируется в постулатах*).

В настоящей работе на базе простой аксиоматики, использующей принцип дуальной инвариантности, строится модель классической элек-

*) Отметим, что использование этой асимметрии а priori вообще характерно для существующих аксиоматических схем классической электродинамики [5].

тродинамики, полностью симметричная относительно источников, но исключающая возможность введения второго («магнитного») заряда в качестве наблюдаемого объекта. При этом в отличие от схемы Боппа вариационный принцип не используется ни на одном из этапов вывода.

2. Аксиоматические модели. Будем исходить из обычного для любой схемы классической электродинамики предположения о том, что для пробных тел справедлива ньютоновская механика движущихся масс и связанные с ней алгоритмы идеализации. Сила в определенном классе экспериментов пропорциональна некоторой «силовой характеристике» ε участвующих в этих опытах пробных тел, умноженной на некоторую векторную функцию, зависящую от их пространственно-временной конфигурации, т. е.

$$t = \varepsilon f(x, t, v \dots).$$

Таким образом, мы можем определить заряд ε пробного тела через силовое воздействие других пробных тел. Производя обычную ньютоновскую идеализацию типа пробное тело \rightarrow материальная точка \rightarrow система материальных точек \rightarrow сплошная среда, предположим выполнение следующих аксиом:

I. Аддитивность заряда: т. е. сумма зарядов в двух объемах равна заряду в объединенном объеме.

II. Сохранение заряда: т. е. всегда существует некоторый объем, внутри которого заряд остается постоянным.

Поскольку законы движения относятся к движущимся пробным телам, то, по определению последних, мы должны пренебречь атомизмом электричества (атомистической структурой ньютоновских тел). Тогда на основании постулата II и при учете содержащегося в формализме ньютоновой механики перехода к дифференциально-малым объемам можем ввести величины типа плотности заряда:

$$\rho(x, t) = \lim_{\delta V \rightarrow 0} \frac{\delta \varepsilon(V)}{\delta V}$$

и плотности тока

$$\mathbf{j}(x, t) = \lim_{\delta V \rightarrow 0} \frac{\delta \varepsilon(V)}{\delta V} \mathbf{v},$$

где \mathbf{v} — скорость пробных тел. После этого содержание постулатов I и II исчерпывается заданием уравнения неразрывности

$$\frac{\partial \rho(x, t)}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{j}(x, t) = 0. \quad (1)$$

Поставим следующую задачу: ввести некоторые векторные поля \mathbf{E} и \mathbf{H} , в отличие от ρ и \mathbf{j} не связанные с веществом, таким образом, чтобы тождественно удовлетворить (1). Частные линейно-независимые решения (имеются в виду только локальные решения уравнения (1)) имеют вид

$$\mathbf{j}_1 = \operatorname{rot} \mathbf{H} - \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \quad \rho_1 = \operatorname{div} \mathbf{E}, \quad (2a)$$

$$\mathbf{j}_2 = \operatorname{rot} \mathbf{E} - \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \quad \rho_2 = \operatorname{div} \mathbf{H}, \quad (2б)$$

$$\mathbf{j}_3 = -\operatorname{rot} \mathbf{H} - \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \quad \rho_3 = \operatorname{div} \mathbf{E}, \quad (2B)$$

$$\mathbf{j}_4 = -\operatorname{rot} \mathbf{E} - \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \quad \rho_4 = \operatorname{div} \mathbf{H}. \quad (2г)$$

Из вида частных решений вытекает, что между ними существует два типа связей:

$$\begin{aligned} \mathbf{j}_1 \leftrightarrow \mathbf{j}_4, \rho_1 \leftrightarrow \rho_4 \\ \mathbf{j}_3 \leftrightarrow \mathbf{j}_2, \rho_3 \leftrightarrow \rho_2 \end{aligned} \quad \text{при} \quad \begin{aligned} \mathbf{E} \rightarrow \mathbf{H}, \\ \mathbf{H} \rightarrow -\mathbf{E}, \end{aligned} \quad (\text{A})$$

$$\begin{aligned} \mathbf{j}_1 \leftrightarrow \mathbf{j}_2, \rho_1 \leftrightarrow \rho_2 \\ \mathbf{j}_3 \leftrightarrow \mathbf{j}_4, \rho_3 \leftrightarrow \rho_4 \end{aligned} \quad \text{при} \quad \mathbf{E} \leftrightarrow \mathbf{H}. \quad (\text{B})$$

Нетрудно видеть, что преобразование (B) является чисто дискретным, в то время как (A) может быть рассмотрено как частный случай непрерывных преобразований*). На основании отмеченных свойств симметрии решений уравнения неразрывности (1) система (2) естественным образом разделяется на две подсистемы:

$$\mathbf{j}_1 = \text{rot } \mathbf{H} - \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \quad \rho_1 = \text{div } \mathbf{E}, \quad (3)$$

$$\mathbf{j}_4 = -\text{rot } \mathbf{E} - \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \quad \rho_4 = \text{div } \mathbf{H},$$

$$\mathbf{j}_2 = \text{rot } \mathbf{E} - \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \quad \rho_2 = \text{div } \mathbf{H}, \quad (4)$$

$$\mathbf{j}_3 = -\text{rot } \mathbf{H} - \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \quad \rho_3 = \text{div } \mathbf{E}.$$

Если вектору \mathbf{E} придать смысл электрической (магнитной) напряженности, а вектору \mathbf{H} — магнитной (электрической) напряженности, то систему уравнений (3), (4) можно отождествить с уравнениями Максвелла, содержащими два типа источников. В дальнейшем ограничимся рассмотрением системы (3). Система (3) инвариантна относительно непрерывных преобразований (5) — преобразований дуальности

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \mathbf{E}' \cos \varphi + \mathbf{H}' \sin \varphi, \\ \mathbf{H} &= -\mathbf{E}' \sin \varphi + \mathbf{H}' \cos \varphi. \end{aligned} \quad (5)$$

Аналогичные соотношения имеют место для токов \mathbf{j}_1 и \mathbf{j}_4 и плотностей зарядов ρ_1 и ρ_4 .

Для восстановления полной однозначности и доопределения полученной системы необходимо построить выражение для плотности силы Лоренца. Поскольку общий вид выражения для силы определяется динамической конфигурацией зарядов и их величиной, а сама сила должна, в свою очередь, определять характер взаимодействия между зарядами, мы можем представить ее как некоторую векторную функцию векторов \mathbf{E} , \mathbf{H} , \mathbf{j}_1 и \mathbf{j}_4 и скаляров ρ_1 и ρ_4 . Ее конкретная форма определяется следующими постулатами:

III. Плотность силы является билинейной по электромагнитному полю и полевым компонентам источников.

IV. Плотность силы является инвариантом дуальных преобразований.

Это позволяет записать выражение для плотности силы в следующей форме:

$$\mathbf{F} = \rho_1 \mathbf{E} + \rho_4 \mathbf{H} + \mathbf{j}_1 \times \mathbf{E} - \mathbf{j}_4 \times \mathbf{H}. \quad (6)$$

*) В самом деле, если представить преобразование (A) в плоскости (\mathbf{E}, \mathbf{H}) как частный случай поворота (например, на $\pi/2$), то (B) есть произведение поворота на этот же угол + отражение одной из осей, что, разумеется, несводимо к какому бы то ни было непрерывному преобразованию.

Исходя из вида плотности силы (6) и уравнений поля (3) приходим (см., например, [6]) к отождествлению величин $E^2 + H^2$ с плотностью энергии поля, $E \times H$ — с плотностью импульса поля. Легко видеть, что величины $E^2 + H^2$, $E \times H$ суть инварианты дуальных преобразований. Поэтому постулируем:

V. Наблюдаемые величины являются дуальными инвариантами [7,8]. Из IV, V вытекает, что параметр φ преобразований (5) не связан с наблюдаемыми эффектами. При этом дуальным инвариантом является лишь $\rho = (\rho_1^2 + \rho_4^2)^{1/2}$, где ρ — плотность эффективного заряда, т. е. наблюдаемым является лишь эффективный заряд, для которого и выбирается общепринятое название — электрический. Поэтому систему (3) всегда можно представить в традиционной форме, пользуясь произвольностью выбора параметра φ :

$$\begin{aligned} \mathbf{J} &= \text{rot } \check{\mathbf{H}} - \frac{\partial \check{\mathbf{E}}}{\partial t}, \quad \rho = \text{div } \check{\mathbf{E}}, \\ 0 &= \text{rot } \check{\mathbf{E}} - \frac{\partial \check{\mathbf{H}}}{\partial t}, \quad 0 = \text{div } \check{\mathbf{H}}, \end{aligned} \quad (7)$$

где

$$\mathbf{J} = \rho \mathbf{v}, \quad \rho^2 = \rho_1^2 + \rho_4^2, \quad \varphi = \text{arctg } \frac{\rho_1}{\rho_4},$$

$$\begin{aligned} \check{\mathbf{E}} &= \mathbf{E} \cos \varphi + \mathbf{H} \sin \varphi, \\ \check{\mathbf{H}} &= -\mathbf{E} \sin \varphi + \mathbf{H} \cos \varphi. \end{aligned} \quad (8)$$

Совокупность уравнений (7) и (6') с условиями (8) определяет дуально-инвариантную электродинамику [7]. Переход к системе с одним источником позволяет записать силу Лоренца в виде

$$\mathbf{F} = \rho \check{\mathbf{E}} + \mathbf{J} \times \check{\mathbf{H}}. \quad (6')$$

3. Заключительные замечания. Отметим, что общее решение уравнения (1) имеет вид

$$\mathbf{j} = \sum_{i=1}^4 \mathbf{j}_i + \mathbf{j}_0, \quad \rho = \sum_{i=1}^4 \rho_i + \rho_0,$$

где \mathbf{j}_0 , ρ_0 — некоторые произвольные константы. Учет констант эффективно эквивалентен возможности рассмотрения вместо преобразований (5) однородных дуальных преобразований, расширяющих группу дуальных поворотов до группы движений «евклидовой» плоскости:

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \mathbf{E}' \cos \varphi + \mathbf{H}' \sin \varphi + \mathbf{E}_0, \\ \mathbf{H} &= -\mathbf{E}' \sin \varphi + \mathbf{H}' \cos \varphi + \mathbf{H}_0. \end{aligned} \quad (9)$$

Для формулировки постулатов IV и V достаточно ограничиться использованием только однородных преобразований. Отметим, что в подходе Боппа, когда в качестве решения уравнения (1) рассматривается только система (2а), поля \mathbf{E} и \mathbf{H} не определялись однозначно распределением источников, поскольку подстановка

$$\mathbf{E} \rightarrow \mathbf{E} + \text{rot } \mathbf{A}, \quad \mathbf{H} \rightarrow \mathbf{H} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \nabla \varphi \quad (10)$$

при произвольных \mathbf{A} , φ ведет к одинаковым распределениям зарядов и токов. Однако, если учитывать полную систему решений уравнения (1), эта неоднозначность не возникает.

Мы не рассматриваем здесь релятивистские свойства уравнений Максвелла. Отметим, что используемый прием получения полевых уравнений в виде решения уравнения неразрывности для сплошных материальных сред фактически восходит к методу Эйнштейна [9] (сопоставление величины

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} \text{ с } T_{\mu\nu}, \text{ удовлетворяющим уравнению неразрывности). Смысл}$$

появления второй пары уравнений нуждается в дальнейшем анализе, хотя любопытно отметить аналогию с возможностью записи уравнения Дирака в двух формах *):

$$(\gamma_{\mu} \partial_{\mu} + m)\psi = 0,$$

$$(\gamma_{\mu} \partial_{\mu} - m)\psi = 0.$$

Здесь так же, как и в случае системы (3) и (4) без источников, переход от одной системы к другой возможен при $t \rightarrow -t$ при неизменности полевых величин.

К формулировке двух взаимно дуально-сопряженных систем уравнений можно прийти исходя из системы [7]

$$\frac{\partial \check{E}(x, t, \theta)}{\partial \theta} = k \check{H}(x, t, \theta), \quad \frac{\partial \check{H}(x, t, \theta)}{\partial \theta} = -k \check{E}(x, t, \theta),$$

где θ — некоторый непрерывный параметр, $k = \pm 1$, путем применения к ней полного набора дифференциальных операций первого порядка по пространственно-временным переменным, переводящим вектор в вектор ($\text{rot}, \frac{\partial}{\partial t}$) и вектор в скаляр (div), с последующим образованием из полученных выражений всех допустимых линейных комбинаций. Токи в полученных системах удовлетворяют уравнению непрерывности (1).

Таким образом, удается построить аксиоматическую модель классической электродинамики на основе представления о физических источниках, используя симметрию системы решений уравнений (1) и не прибегая к принципу наименьшего действия, причем указанная выше возможность построения аксиоматики исходя из полевых величин позволяет говорить о достаточной замкнутости предлагаемой модели.

В такой модели второй («магнитный») заряд является фиктивной величиной, возникающей вследствие произвола в выборе определения фазы дуального преобразования (наименования заряда). В свою очередь требование наблюдаемости дуальных инвариантов гарантирует существование фиксированной калибровки.

Авторы благодарны Ф. И. Федорову за внимание к работе и полезные замечания, а также В. Н. Трегьякову, Б. В. Крылову и Л. Г. Морозу за интересные обсуждения.

Литература

1. Томильчик Л. М. ДАН БССР, 8, 379, 1964.
2. Bohr N., Rosenfeld L. Kgl. Danske Vidensk. Selskab., 12, 8, 1933.
3. Тирринг В. Е. Принципы квантовой электродинамики. Изд. «Высшая школа», М., 1964.
4. Ворт Ф. Z. f. Phys., 169, 45, 1962.
5. Яно А. Ф. Am. J. Phys., 36, 599, 1968.
6. Френкель Я. И. Электродинамика, 2. ОНТИ, 1931.
7. Потупа А. С., Стражев В. И., Томильчик Л. М. Дуальная инвариантность в электродинамике. Минск, 1967.
8. Потупа А. С., Стражев В. И., Томильчик Л. М. Весті АН БССР, сер. фіз.-мат. наук, № 3, 1968.
9. Эйнштейн А. Собр. соч., 1. М., 1965, стр. 448.

Институт физики АН БССР

Поступило в редакцию 2.XII 1969

* На эту аналогию указал Ф. И. Федоров.

УДК 612.84

А. А. АФАНАСЬЕВ

ИМПУЛЬСНОЕ ВЫНУЖДЕННОЕ КОМБИНАЦИОННОЕ РАССЕЯНИЕ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

В реальных условиях эксперимента вынужденное комбинационное рассеяние (ВКР), как правило, получается в импульсном режиме. Однако эта особенность протекания процесса ВКР изучена еще недостаточно и часто совершенно не учитывается при интерпретации экспериментальных результатов. Нам известно только несколько работ, в которых рассматриваются вопросы нестационарности ВКР. Так, в работах [1—3] проводится анализ зависимости от условий эксперимента и развиваются методы расчета формы и энергии импульсов ВКР в резонаторе. В работах [4, 5] получены общие формулы, описывающие ВКР-преобразование импульсных потоков излучения без учета потерь и спонтанного рассеяния. Некоторые вопросы теории нестационарного рассеяния затрагиваются также в [6—12]. Прямые экспериментальные исследования временных характеристик ВКР, помимо наблюдений, сделанных в первой работе по ВКР [13], начали проводиться только в самое последнее время [9—12] и пока еще весьма малочисленны.

В настоящей работе рассматриваются некоторые особенности протекания импульсного ВКР первого порядка в слое среды при облучении ее лазерным импульсом прямоугольной формы. В основу расчета положены нестационарные уравнения переноса и предположение, что влиянием рассеяния на первичный поток и процессами рассеяния более высокого порядка можно пренебречь (слабое рассеяние). В результате найдены выражения для импульсов излучения ВКР, развивающихся из спонтанного рассеяния и за счет усиления внешних потоков в направлениях вперед, назад и под углом α к рассеиваемому потоку.

Хотя сделанные предположения на практике часто не выполняются, полученные соотношения могут быть использованы для приближенных оценок параметров импульса ВКР во многих случаях.

Общая теория. Пусть на рассеивающую среду в направлении оси z , ортогональной к поверхности среды, падает узкий импульсный пучок света, мощность которого $I_0(s, t)$ достаточна для возбуждения ВКР. Предполагая рассеяние слабым (пренебрегая влиянием рассеяния на первичный поток), процесс ВКР первого порядка, как известно [2], можно описать уравнением

$$\frac{\partial I_s(s, t)}{\partial s} + \frac{1}{V_p} \frac{\partial I_s(s, t)}{\partial t} = B(s, t) I_s(s, t) + A(s, t), \quad (1)$$

где $I_s(s, t)$ — мощность потока излучения, рассеянного вдоль направления S (s — путь вдоль этого направления),

$$B(s, t) = \frac{\xi}{V_0} I_0(s, t) - \rho, \quad A(s, t) = \frac{V_p}{V_0} \sigma I_0(s, t) \quad (2)$$

— заданные функции координат и времени, ξ и σ — коэффициенты соответственно вынужденного и спонтанного рассеяния, ρ — коэффициент потерь, V_p и V_0 — скорости распространения рассеянного и первичного потоков. Вообще говоря, поток первичного излучения обычно задается на поверхности среды. Поток в любой точке среды легко может быть найден из уравнения

$$\frac{\partial I_0(s, t)}{\partial z} + \frac{1}{V_0} \frac{\partial I_0(s, t)}{\partial t} = -\rho_0 I_0(s, t) \quad (3)$$

и граничных условий $I_0(s, t)|_{z=0} = I_0(x, y, t)$.

Решение уравнения (1) может быть представлено в виде*)

$$I_s(s, \xi, t) = I_s^0\left(0, t - \frac{s}{V_p}\right) \exp\left[\int_0^s B\left(s', t - \frac{s-s'}{V_p}\right) ds'\right] + \int_0^s A\left(s', t - \frac{s-s'}{V_p}\right) \exp\left[\int_0^s B\left(s'', t - \frac{s-s''}{V_p}\right) ds''\right] ds', \quad (4)$$

где $I_s^0(0, t)$ — поток в точках на границе рассеивающего объема.

Таким образом, поток рассеянного излучения $I_s(s, t)$ в точке s и в момент времени t равен сумме потока внешнего излучения $I_s^0(0, t)$, входящего в момент времени $t - \frac{s}{V_p}$ в рассеивающую среду в точке 0 и усиленного на пути s вдоль S , и потока, формирующегося из спонтанного рассеяния, происходящего в точках s в моменты времени $t - \frac{s-s'}{V_p}$ и усиленного на пути $s - s'$.

Воспользуемся теперь решением (4) для оценки параметров импульсного рассеяния в различных направлениях. При этом для простоты будем полагать, что первичный поток излучения имеет вид П-образного импульса длительности T и поперечных размеров R . Пренебрегая потерями, на основании (3) легко найти соотношение

$$I_0(z, t) = \begin{cases} I_0 & \text{при } V_0(t - T) \leq z \leq V_0 t, \quad |x|, |y| \leq R, \\ 0 & \text{во всех других точках,} \end{cases} \quad (5)$$

определяющее поле первичного излучения в любой точке рассеивающего объема. Обозначая через α угол между осью z и направлением S_α , соотношение (5) можно записать в виде

$$I_0(s_\alpha, t) = \begin{cases} I_0 & \text{при } V_0(t - T) \leq z_0 + s_\alpha \cos \alpha \leq V_0 t, \quad s_\alpha |\cos \alpha| \leq l, \\ & R \mp x_0 \geq s_\alpha |\sin \alpha|, \\ 0 & \text{во всех других точках,} \end{cases} \quad (6)$$

где s_α — длина пути, отсчитываемого вдоль S_α от точки (x_0, y_0) на поверхности рассеивающей среды, знаки $-$ и $+$ соответствуют $\alpha > 0$ и $\alpha < 0$, l — толщина рассеивающей среды (рассеяние рассматривается в плоскости $y = 0$).

*) При обычной замене переменных $s = s$, $\tau = t - \frac{s}{V_p}$ интегрирование уравнения (1) не представляет каких-либо затруднений.

Для расчета импульса ВКР в произвольном направлении S_α необходимо знать функции A и B в момент времени $t - \frac{s-s'}{V_p}$. Учитывая (4) и (6), можно заключить, что

$$A\left(s, t - \frac{s-s'}{V_p}\right) = A_0 \equiv \frac{V_p}{V_0} \sigma I_0, \quad B\left(s, t - \frac{s-s'}{V_p}\right) = B_0 \equiv \frac{\xi}{V_0} I_0 - \rho \quad (7)$$

при выполнении неравенств

$$V_0 \left(t - T - \frac{s_\alpha - s'_\alpha}{V_p} \right) \leq z_0 + s'_\alpha \cos \alpha \leq V_0 \left(t - \frac{s_\alpha - s'_\alpha}{V_p} \right), \\ s_\alpha |\cos \alpha| \leq l, \quad s_\alpha |\sin \alpha| \leq R \mp x_0 \quad (8)$$

и равны соответственно нулю и $-\rho$, если (8) не имеют места.

Рассеяние вперед. ВКР вперед определяется формулами (4)–(8) при $\alpha = 0$, $z_0 = 0$ и замене s_α на z . Если среда обладает нормальной дисперсией ($V_p > V_0$), то неравенства (8) для данного случая приводятся к виду

$$\frac{V_0 [V_p(t-T) - z]}{V_p - V_0} \leq z' \leq \frac{V_0(V_p t - z)}{V_p - V_0}, \quad 0 \leq z \leq l. \quad (9)$$

Неравенство (9) определяет границы интегрирования в (4) в любой момент времени. Воспользуемся им и формулой (4) для расчета импульса рассеянного излучения, возникающего при $I_s^0(0, t) = 0$, на выходе из рассеивающей среды. При этом следует различать два случая:

$$1) \frac{l}{V_0} > \frac{l}{V_p} + T; \quad 2) \frac{l}{V_0} < \frac{l}{V_p} + T.$$

Первый случай соответствует такому соотношению длины $V_0 T$ импульса и толщины среды l , при котором излучение рассеяния, возникшее на заднем фронте импульса накачки, успевает за время прохождения в рассеивающей среде опередить передний фронт импульса накачки. В этом случае импульс рассеянного излучения, как легко показать, определяется выражениями (см. рис. 1, а)

$$I_+(l, t) = \frac{A_0}{B_0} \left\{ \begin{array}{l} \left\{ \exp \left[B_0 \frac{V_0(V_p t - l)}{V_p - V_0} \right] - 1 \right\} \exp \left[-\rho \frac{V_p(l - V_0 t)}{V_p - V_0} \right], \\ \quad \frac{l}{V_p} \leq t \leq \frac{l}{V_p} + T, \\ \left\{ \exp \left[B_0 \frac{V_0 V_p T}{V_p - V_0} \right] - 1 \right\} \exp \left[-\rho \frac{V_p(l - V_0 t)}{V_p - V_0} \right], \\ \quad \frac{l}{V_p} + T \leq t \leq \frac{l}{V_0}, \\ \left\{ \exp \left[B_0 \frac{V_p[l - V_0(t - T)]}{V_p - V_0} \right] - 1 \right\}, \quad \frac{l}{V_0} \leq t \leq \frac{l}{V_0} + T, \\ 0, \quad t < \frac{l}{V_p}, \quad t > \frac{l}{V_0} + T. \end{array} \right. \quad (10)$$

Максимальная интенсивность этого импульса при $\rho \ll B_0$ и $B_0 \frac{V_0 V_p T}{V_p - V_0} \gg 1$ определяется величиной $\frac{A_0}{B_0} \exp \left[B_0 \frac{V_0 V_p T}{V_p - V_0} \right]$, т. е. не зависит от толщины рассеивающей среды. Его длительность T_p на уровне, в e раз меньшем максимального значения интенсивности, равна $T_p = \left(l + \frac{2}{B_0} \right) \left(\frac{1}{V_0} - \frac{1}{V_p} \right) - T$.

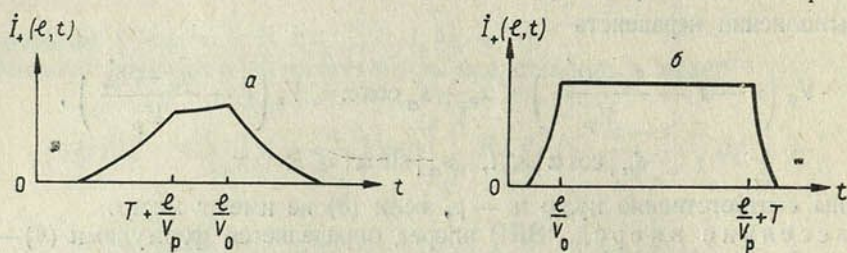


Рис. 1. Форма ВКР импульсов при рассеянии вперед:

$$a-l > \frac{V_0 V_p T}{V_p - V_0}, \quad b-l < \frac{V_0 V_p T}{V_p - V_0}$$

В другом случае, т. е. при $\frac{l}{V_0} < \frac{l}{V_p} + T$, часть рассеянного излучения усиливается на всей толще среды l . В результате импульс ВКР принимает вид (см. рис. 1, б)

$$I_+(l, t) = \frac{A_0}{B_0} \begin{cases} \left\{ \exp \left[B_0 \frac{V_0 (V_p t - l)}{V_p - V_0} \right] - 1 \right\} \exp \left[-\rho \frac{V_p (l - V_0 t)}{V_p - V_0} \right], & \frac{l}{V_p} \leq t \leq \frac{l}{V_0}, \\ \left\{ \exp [B_0 l] - 1 \right\}, & \frac{l}{V_0} \leq t \leq \frac{l}{V_p} + T, \\ \left\{ \exp \left[B_0 \frac{V_p [l - V_0 (t - T)]}{V_p - V_0} \right] - 1 \right\}, & \frac{l}{V_p} + T \leq t \leq \frac{l}{V_0} + T, \\ 0, & t < \frac{l}{V_p}, t > \frac{l}{V_0} + T. \end{cases} \quad (11)$$

В отличие от предыдущего случая при этих условиях в момент времени $t = \frac{l}{V_0}$ устанавливается стационарный режим, который поддерживается затем в течение времени $\Delta t = T + l \left(\frac{1}{V_p} - \frac{1}{V_0} \right)$. Интенсивность ВКР, возникающего на этом промежутке времени, полностью определяется размером среды и равна $\frac{A_0}{B_0} \exp [B_0 l]$. Длительность этого импульса равна

$$T_p = T + \left(\frac{2}{B_0} - l \right) \left(\frac{1}{V_0} - \frac{1}{V_p} \right).$$

Если наряду с мощным лазерным излучением на рассеивающую среду подается поток излучения частоты стоксового рассеяния, то поток ВКР на

выходе из среды будет состоять из суммы потока, определяемого (10) или (11), и потока, возникающего под действием внешнего излучения. Как следует из расчетов, импульс ВКР на выходе из среды при этом будет сильно зависеть как от мощности, так и от формы, длительности T_0 и времени подачи внешнего потока $I_+^0(0, t)$ на рассеивающую среду. Так, например, в случае, когда внешний импульс $I_+^0(0, t)$ имеет П-образную форму, наибольшее усиление можно получить, если его подать на вход системы спустя время $t = l \left(\frac{1}{V_0} - \frac{1}{V_p} \right)$ после начала действия лазерного излучения. Если же внешний импульс подается на среду в момент времени, совпадающий с началом действия лазерного излучения, то при условии $l \gg \frac{V_0 V_p T_0}{V_p - V_0}$ усиление от его заднего фронта к переднему падает по экспоненциальному закону

$$I_+^0 \left(0, t - \frac{l}{V_p} \right) \exp \left[\frac{\xi}{V_0} I_0 \frac{V_0 (V_p t - l)}{V_p - V_0} - \rho l \right], \quad \frac{l}{V_p} \leq t \leq \frac{l}{V_p} + T_0.$$

Подобный анализ рассеяния в среде с аномальной дисперсией ($V_p < V_0$) показывает, что при $\frac{l}{V_p} < \frac{l}{V_0} + T$ максимальная интенсивность выходного импульса определяется размером среды, а при выполнении обратного условия $\frac{l}{V_p} > \frac{l}{V_0} + T$ — величиной $\frac{V_0 V_p T}{V_0 - V_p}$.

ВКР при отсутствии дисперсии ($V_p = V_0$) содержится в (11) при $\frac{l}{V_0} \leq t \leq \frac{l}{V_0} + T$.

Рассеяние назад. Для описания рассеяния назад в (4) и (8) следует положить $\alpha = \pi$, $z_0 = l$ и заменить s на $l - z$. Тогда (8) принимает вид

$$\frac{V_0 [V_p (t - T) + z]}{V_0 + V_p} \leq z' \leq \frac{V_0 (V_p t + z)}{V_0 + V_p}, \quad 0 \leq z \leq l. \quad (12)$$

С учетом (12) и (7) интегрирование в (4) проводится легко, и для импульса ВКР, возникающего на выходе из вещества ($z = 0$), при отсутствии затравочного импульса $I_-^0(l, t) = 0$ и выполнении условия $T > l \left(\frac{1}{V_0} + \frac{1}{V_p} \right)$

получаются выражения (см. рис. 2, а)

$$I_-(0, t) = \frac{A_0}{B_0} \begin{cases} \left\{ \exp \left[B_0 \frac{V_0 V_p t}{V_0 + V_p} \right] - 1 \right\}, & 0 \leq t \leq l \left(\frac{1}{V_0} + \frac{1}{V_p} \right), \\ \left\{ \exp [B_0 l] - 1 \right\}, & l \left(\frac{1}{V_0} + \frac{1}{V_p} \right) \leq t \leq T, \\ \left\{ \exp \left[B_0 \left(l - \frac{V_0 V_p (t - T)}{V_0 + V_p} \right) \right] - 1 \right\} \exp \left[-\rho \frac{V_0 V_p (t - T)}{V_0 + V_p} \right], & T \leq t \leq T + l \left(\frac{1}{V_0} + \frac{1}{V_p} \right), \\ 0, & t < 0, \quad t > T + l \left(\frac{1}{V_0} + \frac{1}{V_p} \right). \end{cases} \quad (13)$$

В данном случае, как видно из (13), в течение времени $\Delta t = T - l\left(\frac{1}{V_0} + \frac{1}{V_p}\right)$ в системе устанавливается стационарный режим рассеяния с максимальной интенсивностью импульса, определяемой толщиной среды l и мощностью накачки $B_0 = \frac{\xi}{V_0} I_0 - \rho$. Длительность этого импульса, на уровне мощности в e раз меньшей максимальной, равна

$$T_p = T + \left(\frac{2}{B_0} - l\right) \left(\frac{1}{V_0} + \frac{1}{V_p}\right).$$

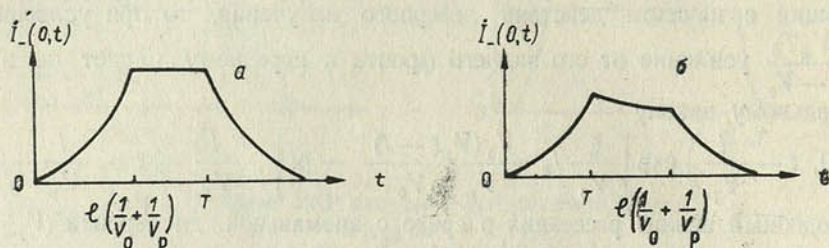


Рис. 2. Форма ВКР импульсов при рассеянии назад:

$$a - T > l\left(\frac{1}{V_0} + \frac{1}{V_p}\right), \quad b - T < l\left(\frac{1}{V_0} + \frac{1}{V_p}\right)$$

При выполнении обратного неравенства $T < l\left(\frac{1}{V_0} + \frac{1}{V_p}\right)$ интегрирование в (4) дает (см. рис. 2, б)

$$I_-(0, t) = \frac{A_0}{B_0} \begin{cases} \left\{ \exp \left[B_0 \frac{V_0 V_p t}{V_0 + V_p} \right] - 1 \right\}, & 0 \leq t \leq T, \\ \left\{ \exp \left[B_0 \frac{V_0 V_p T}{V_0 + V_p} \right] - 1 \right\} \exp \left[-\rho \frac{V_0 V_p (t - T)}{V_0 + V_p} \right], & T \leq t \leq l \left(\frac{1}{V_0} + \frac{1}{V_p} \right), \\ \left\{ \exp \left[B_0 \left(l - \frac{V_0 V_p (t - T)}{V_0 + V_p} \right) \right] - 1 \right\} \exp \left[-\rho \frac{V_0 V_p (t - T)}{V_0 + V_p} \right], & l \left(\frac{1}{V_0} + \frac{1}{V_p} \right) \leq t \leq T + l \left(\frac{1}{V_0} + \frac{1}{V_p} \right), \\ 0, & t < 0, \quad t > T + l \left(\frac{1}{V_0} + \frac{1}{V_p} \right). \end{cases} \quad (14)$$

Максимум мощности импульса в этих условиях достигается при $t = T$ и не зависит от толщины рассеивающей среды. Его длительность определяется формулой $T_p = \left(\frac{2}{B_0} + l\right) \left(\frac{1}{V_0} + \frac{1}{V_p}\right) - T$.

Из сравнения формул (10), (11) и (13), (14) следует, что длительность импульса по основанию при рассеянии вперед всегда меньше длительности импульса, рассеянного назад. Если выполнено условие $T > l\left(\frac{1}{V_0} + \frac{1}{V_p}\right)$, то пиковые мощности ВКР импульсов обоих направлений совпадают и опре-

деляются толщиной рассеивающей среды. Во всех других случаях максимальная мощность излучения вперед больше, чем пиковая мощность рассеяния в обратном направлении.

ВКР назад, возникающее под действием внешнего излучения $I_-^0(l, t)$, также существенно зависит от его характеристик (длительности T_0 , мощности, формы) и от времени подачи на рассеивающую среду ($z = l$). На основании (4) легко показать, что наибольшее усиление внешнего сигнала в $\exp[B_0 l]$ раз возможно только при выполнении условия $T > l \left(\frac{1}{V_0} + \frac{1}{V_p} \right) + T_0$, если подать поток излучения стоксового рассеяния на среду спустя время $t = \frac{l}{V_0}$ после начала действия мощного лазерного излучения. Этот момент времени обеспечивает максимальное усиление переднего фронта внешнего импульса рассеянного излучения независимо от длительности потока накачки. Напротив, момент подачи сигнала на среду, определенный соотношением $t = \frac{l}{V_0} - T_0$, обеспечивает максимальное усиление его заднего фронта.

Рассеяние в произвольном направлении S_α . В области углов $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$ импульс рассеянного излучения $I_{s_\alpha}(s_\alpha, t)$ нетрудно считать по формулам (4) и (8) при $z_0 = 0$, определив размер среды в направлении S_α из геометрических условий соотношением

$$L_\alpha = \begin{cases} \frac{l}{|\cos \alpha|}, & \alpha \leq \alpha_{кр}, \\ \frac{R \mp x_0}{|\sin \alpha|}, & \alpha \geq \alpha_{кр}, \end{cases} \quad (15)$$

$$\alpha_{кр} = \arctg \frac{R \mp x_0}{l}.$$

При расчете рассеянного излучения I_{s_α} необходимо выделять три области углов α , где из неравенств (8) следуют различные условия определения пределов интегрирования в (4): 1) $\alpha < \alpha_0$, $V_p \cos \alpha > V_0$; 2) $\alpha = \alpha_0$, $V_p \cos \alpha = V_0$; 3) $\alpha > \alpha_0$, $V_p \cos \alpha < V_0$, здесь $\alpha_0 = \arccos \frac{V_0}{V_p}$.

Не выписывая аналитических выражений для импульсов ВКР, которые в каждом конкретном случае легко получаются из (4) и (8), отметим лишь некоторые особенности процесса рассеяния в произвольном направлении S_α . Из расчета следует, что в режиме стационарного рассеяния максимально достигаемая мощность импульса ВКР наблюдается под углом $\alpha = \alpha_{кр}$ и определяется величиной $\exp[B_0 \sqrt{l^2 + 4R^2}]$. Очевидно, что чем больше поперечные размеры пучка R , тем более заметно увеличение интенсивности импульса в направлении $S_{\alpha_{кр}}$ по сравнению с интенсивностью потока, рассеянного вперед, $\alpha = 0$.

Для коротких импульсов накачки $T < l \left(\frac{1}{V_0} - \frac{1}{V_p} \right)$ максимальная мощность потока I_{s_α} может значительно превосходить в некоторых углах α пиковую мощность рассеянного излучения вдоль оси z , определяемую в этом случае соотношением $\frac{A_0}{B_0} \exp \left[B_0 \frac{V_0 V_p T}{V_p - V_0} \right]$. Так, например, при $\alpha = \alpha_{кр}$

наибольшая интенсивность импульса ВКР, рассеянного в направлении S_{α_0} , полностью определяется при заданной мощности накачки толщиной среды $\frac{A_0}{B_0} \exp \left[B_0 \frac{l}{|\cos \alpha_0|} \right]$, что, очевидно, в значительной степени превосходит интенсивность импульса излучения, рассеянного вперед (см. рис. 3).

Для описания рассеяния в обратном направлении $\frac{\pi}{2} < \alpha \leq \pi$ в (4) и (8) следует положить $z_0 = L_{\alpha} |\cos \alpha|$ и заменить s_{α} на $L_{\alpha} |\cos \alpha| - s_{\alpha}$. В силу того, что в этом случае дисперсионные свойства среды не сущест-

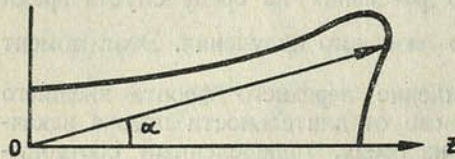


Рис. 3. Пространственное распределение рассеянного излучения при $0 < \alpha \leq \frac{\pi}{2}$

венны (в формулы входит величина $V_p |\cos \alpha| + V_0$), удается получить общие соотношения для импульсов ВКР в зависимости от угла рассеяния α . Определив в данном случае величину L_{α} соотношением

$$L_{\alpha} = \begin{cases} \frac{R \mp x_0}{|\sin \alpha|}, & \alpha \leq \alpha'_{кр}, \\ \frac{l}{|\cos \alpha|}, & \alpha \geq \alpha'_{кр}, \end{cases} \quad (16)$$

$$\alpha'_{кр} = \frac{\pi}{2} + \operatorname{arctg} \frac{l}{R \mp x_0},$$

из (4) и (8) при условии $T > L_{\alpha} \left(\frac{|\cos \alpha|}{V_0} + \frac{1}{V_p} \right)$ для потока рассеянного излучения на выходе из среды будем иметь

$$I_{s_{\alpha}}(0, t) = \frac{A_0}{B_0} \begin{cases} \left\{ \exp \left[B_0 \frac{V_0 V_p t}{V_0 + V_p |\cos \alpha|} \right] - 1 \right\}, & 0 \leq t \leq L_{\alpha} \left(\frac{|\cos \alpha|}{V_0} + \frac{1}{V_p} \right), \\ \left\{ \exp [B_0 L_{\alpha}] - 1 \right\}, & L_{\alpha} \left(\frac{|\cos \alpha|}{V_0} + \frac{1}{V_p} \right) \leq t \leq T, \\ \left\{ \exp \left[B_0 \left(L_{\alpha} - \frac{V_0 V_p (t - T)}{V_0 + V_p |\cos \alpha|} \right) \right] - 1 \right\} \times \\ \quad \times \exp \left[-\rho \frac{V_0 V_p (t - T)}{V_0 + V_p |\cos \alpha|} \right], & T \leq t \leq T + L_{\alpha} \left(\frac{|\cos \alpha|}{V_0} + \frac{1}{V_p} \right), \\ 0, & t < 0, t > T + L_{\alpha} \left(\frac{|\cos \alpha|}{V_0} + \frac{1}{V_p} \right). \end{cases} \quad (17)$$

При выполнении обратного неравенства $T < L_{\alpha} \left(\frac{|\cos \alpha|}{V_0} + \frac{1}{V_p} \right)$ интегрирование в (4) дает

$$I_{s_\alpha}(0, t) = \frac{A_0}{B_0} \left\{ \begin{array}{l} \left\{ \exp \left[B_0 \frac{V_0 V_p t}{V_0 + V_p |\cos \alpha|} \right] - 1 \right\}, \quad 0 \leq t \leq T, \\ \left\{ \exp \left[B_0 \frac{V_0 V_p T}{V_0 + V_p |\cos \alpha|} \right] - 1 \right\} \exp \left[-\rho \frac{V_0 V_p (t-T)}{V_0 + V_p |\cos \alpha|} \right], \\ \quad T \leq t \leq L_\alpha \left(\frac{|\cos \alpha|}{V_0} + \frac{1}{V_p} \right), \\ \left\{ \exp \left[B_0 \left(L_\alpha - \frac{V_0 V_p (t-T)}{V_0 + V_p |\cos \alpha|} \right) \right] - 1 \right\} \times \\ \quad \times \exp \left[-\rho \frac{V_0 V_p (t-T)}{V_0 + V_p |\cos \alpha|} \right], \\ \quad L_\alpha \left(\frac{|\cos \alpha|}{V_0} + \frac{1}{V_p} \right) \leq t \leq T + L_\alpha \left(\frac{|\cos \alpha|}{V_0} + \frac{1}{V_p} \right), \\ 0, \quad t < 0, \quad t > T + L_\alpha \left(\frac{|\cos \alpha|}{V_0} + \frac{1}{V_p} \right). \end{array} \right. \quad (18)$$

Формулы (13), (14) содержатся соответственно в (17) и (18) при $\alpha = \pi$. Очевидно, что в первом случае, при $T > L_\alpha \left(\frac{|\cos \alpha|}{V_0} + \frac{1}{V_p} \right)$, наибольшая интенсивность рассеянного потока наблюдается под углом $\alpha = \alpha'_{кр}$ и равна $\frac{A_0}{B_0} \{ \exp [B_0 \sqrt{l^2 + 4R^2}] - 1 \}$. Для коротких же импульсов накачки, $T < L_\alpha \left(\frac{|\cos \alpha|}{V_0} + \frac{1}{V_p} \right)$, излучение ВКР будет иметь максимальную мощность под углом $\alpha = \arctg \frac{2R}{V_0 T}$.

На рис. 3 приведена иллюстрационная кривая распределения мощности рассеянного излучения при $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$.

В заключение считаю своим долгом выразить искреннюю благодарность П. А. Апанасевичу за стимулирующие дискуссии и помощь в работе.

Литература

1. Hellwarth R. W. Phys. Rev., **130**, 1850, 1963.
2. Апанасевич П. А. Весті АН БССР, серия фіз.-мат. навук, № 4, 89, 1965.
3. Апанасевич П. А. ЖПС, **6**, 183, 1967.
4. Гуревич Г. А., Отмахов Ю. А. Радиотехника и электроника, **11**, № 12, 2226, 1966.
5. Платоненко В. Т. Автореф. канд. дисс. М., 1966.
6. Зубов В. А., Сущинский М. М., Шувалов И. К. УФН, **89**, № 1, 49, 1966.
7. Бломберген Н. Нелинейная оптика. Изд-во «Мир», М., 1966.
8. Потапов С. К., Ковнер М. А. Тезисы 4-го Всесоюзного симпозиума по нелинейной оптике. Киев, 1968.
9. Glass A. J., McMahon J., Weingarten R. Тезисы 3-го Всесоюзного симпозиума по нелинейной оптике. Ереван, 1967.
10. Зубов В. А., Крайский А. В., Прохоров К. А., Сущинский М. М., Шувалов И. К. ЖЭТФ, **55**, 443, 1968.
11. Maier M., Kaiser W., Giordmeine J. A. Phys. Rev., **177**, № 2, 580, 1969.
12. Culver W. H., Vanderslice J. T. A., Townsend V. W. T. Appl. Phys. Lett., **12**, 189, 1968.
13. Woodbury E. J., Ng W. K. Proc. I.R.E., **50**, 2367, 1962.

А. П. КУЗНЕЧЫК

**ЭНЕРГЕТЫЧНАЯ ЯРКАСЦЬ НЕБА
У ВОБЛАСЦІ 1,8—5,2 мкм**

Адным з асноўных фактараў, якасна вызначыўшых новы этап у развіцці сучаснай астраноміі, з'яўляецца выкарыстанне для астранамічных назіранняў акрамя традыцыйнага аптычнага дыяпазону новых участкаў спектра электрамагнітнага выпраменьвання нябесных цел пачынаючы з радыёдыяпазону і канчаючы гама-праменьнямі высокіх энергій. Аднак наземныя тэлескопы могуць улаўліваць толькі тыя хвалі электрамагнітнага спектра, якія праходзяць праз «вокны» ў атмасферы: адно з іх знаходзіцца ў бачнай частцы спектра, другое — у вобласці радыёхваль пэўнай даўжыні, і ўрэшце, ёсць некалькі вузкіх «шчылін» у інфрачырвонай частцы спектра. Хаця ў цяперашні час існуе рад спосабаў, дазваляючых вывесці прыборы за межы атмасферы, аднак не трэба чакаць, што наземныя назіранні будуць спынены. Наадварот, развіццё наземнай, у прыватнасці інфрачырвонай, апаратуры будзе працягвацца, і іменна ад наземных даследаванняў трэба чакаць новых рэзультатаў.

Асноўная крыніца памылак пры наземных вымярэннях абумоўлена пастаяннымі ваганнямі велічыні празрыстасці атмасферы ў адносінах да выпраменьвання і рассеяння ў розных дыяпазонах даўжынь хваль. Каб звесці гэты эфект да нязначнага ўзроўню, неабходна дакладнае вивучэнне ўласцівасцей паглынання, рассеяння і выпраменьвання атмасферы ў розных спектральных інтэрвалах, у розны час сутак, у розныя сезоны і ў розных геаграфічных пунктах.

Радам аўтараў праводзіліся вымярэнні энергетычнай яркасці небасхілу ў сярэдняй інфрачырвонай вобласці. Аднак даныя, якія маюцца ў вядомай нам літаратуры, нельга лічыць вычарпальнымі. У прыватнасці, недастаткова вядома размеркаванне энергетычнай яркасці па небасхілу ў «вокнах празрыстасці» атмасферы ў вобласці 1,8—5,2 мкм. Цікаваць да гэтай вобласці выклікаецца не толькі тым, што яна ўключае ў сябе тры «акны празрыстасці» атмасферы (1,8—2,5, 3,6—4,2 і 4,5—5,2 мкм), якія маюць практычнае значэнне для астранамічных даследаванняў, для разліку цеплавога рэжыму планеты і г. д., але і тым, што энергетычная яркасць неба абумоўлена тут як рассеяным выпраменьваннем Сонца, так і ўласным выпраменьваннем атмасферы. Пры гэтым уплыў рассеянага сонечнага выпраменьвання на спектральную энергетычную яркасць неба ў гэтай вобласці паступова змяншаецца, уплыў уласнага выпраменьвання атмасферы павялічваецца з павелічэннем даўжыні хвалі ад 1,8 да 5,2 мкм, і спектральная энергетычная яркасць неба праходзіць праз рэзка выражаны мінімум каля 3—4 мкм.

У дадзенай рабоце з дапамогай эксперыментальнай радыёметрычнай устаноўкі, дазваляючай сканіраванне неба па азимуту і па вуглу ўзвышэння са скорасцю $0,0096 \text{ рад} \cdot \text{сек}^{-1}$, даследавалася размеркаванне энергетычнай яркасці па яснаму небу, па небу з пераменай воблачнасцю і па воблачнаму небу ў «вокнах празрыстасці» атмасферы 1,8—2,5, 3,9—4,2,

4,5—5,2 мкм і ў вобласці 3,9—5,2 мкм ва ўмовах горада Мінска (вышыня над узроўнем мора 243 м). Цікавае да вобласці 3,9—5,2 мкм была абумоўлена адноснай яе працягласцю (што дазваляе выкарыстоўваць аптычныя сістэмы з невялікімі ўваходнымі апертурамі) і тым, што яна ўключае ў сябе два «акны празрыстасці» атмасферы (3,9—4,2 і 4,5—5,2 мкм), паміж якімі знаходзіцца моцная паласа выпраменьвання вуглякіслага газу (каля 4,3 мкм).

Эксперыментальная ўстаноўка. Для вымярэння энергетычнай яркасці неба выкарыстоўвалася радыёметрычная ўстаноўка [1] з наступнымі тэхнічнымі характарыстыкамі.

Вызначальная здольнасць устаноўкі з прыёмнікам: для сярніста-свіцовага фотасупраціўлення з памерам адчувальнай плошчы 1×1 мм вуглавое вызначэнне 0,00156 рад, лінейнае для далёкасці 500, 1000 і 3000 м — адпаведна 0,78, 1,56 і 4,7 м; для тэлурыста-свіцовага фотасупраціўлення $3,5 \times 3,5$ мм вуглавое вызначэнне 0,00547 рад, лінейнае для той жа далёкасці — 2,74, 5,47 і 16,4 м.

Мінімальная выяўляемая перапады энергетычнай яркасці ў абласцях 1,8—2,5, 3,9—4,2, 4,5—5,2 і 3,9—5,2 мкм адпаведна складаюць $4,8 \cdot 10^{-2}$, $4,0 \cdot 10^{-2}$, $6,9 \cdot 10^{-2}$ і $10,3 \cdot 10^{-2}$ мквт \cdot см $^{-2}$ \cdot стэр $^{-1}$.

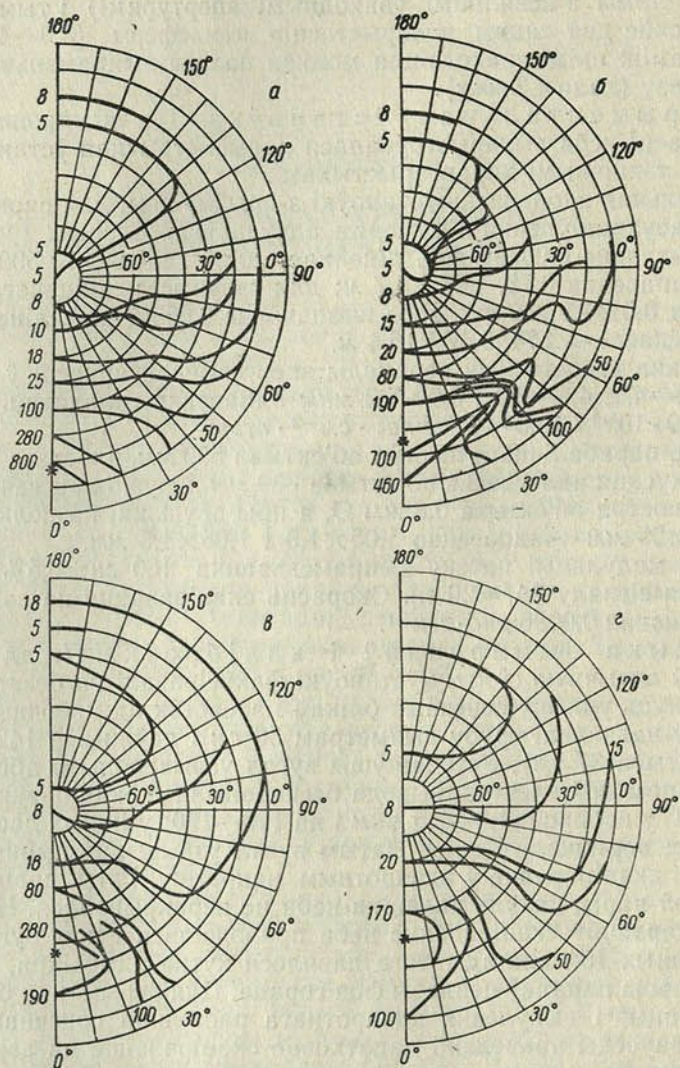
Дыяметр парабалічнага люстра аб'ектыва 500 мм, плоскага люстра — 260 мм. Фокусная адлегласць аб'ектыва 639 мм. Кружок рассеяння парабалічнага люстра аб'ектыва 0,8 мм Ø, а пры зрушэнні па полю ад цэнтра ± 15 і ± 25 мм — адпаведна $1,05 \times 1,3$ і $1,05 \times 1,5$ мм.

Частата мадуляцыі патоку выпраменьвання 160 гц $\pm 0,5\%$. Паласа прапускання сігнала $2\Delta f = 26$ гц. Скорасць сканіравання па азімуту і па вуглу ўзвышэння 0,0096 рад \cdot сек $^{-1}$.

Методыка вымярэнняў і каліброўка. Перад пачаткам вымярэнняў аптычную сістэму ўстаноўкі факусіравалі на бесканечнасць. Каб пазбегнуць уплыву сонечных блікаў і засветак ад пабочных крыніц, на аб'ектыў надзявалі трубу дыяметрам 56 см і даўжынёй 142 см (даўжыня аб'ектыва 37 см). Устанавіўшы вугал узвышэння 10 або 90°, праводзілі з дапамогай электрапрывода бесперапыннае сканіраванне па азімуту на 180° у вобласці 1,8—2,5 мкм і на 120—180° у іншых даследуемых абласцях ад вертыкала Сонца. Затым вугал узвышэння змянялі на 10° і праводзілі сканіраванне ў адваротным напрамку. Гэты працэс паўтараўся да той пары, пакуль палавіна неба не перакрывалася. На першай стадыі вымярэнняў сканіраванне неба праводзілася і пры вуглах узвышэння, меншых 10°, але ад гэтага давялося хутка адмовіцца, бо ў поле зроку аб'ектыва пападаў цеплавы фон горада. Для атрымання больш поўнай інфармацыі і выяўлення адваротнага рассеяння сонечнага выпраменьвання заўсёды праводзілі дадатковае сканіраванне па азімуту пры вугле ўзвышэння, роўным вуглу ўзвышэння Сонца, якое пачыналася ад сонечнага вертыкала ў баку, процілеглым Сонцу. Акрамя таго, у асобных выпадках праводзілі яшчэ і сканіраванне па вуглу ўзвышэння пры трох фіксаваных азімутах, роўных 45, 90 і 180°, калі весці адлік ад Сонца. Выкарыстанне сканіравання ў прамым і адваротным напрамках дало магчымасць звесці да мінімуму памылкі ў размяшчэнні ізафот энергетычнай яркасці. Месцазнаходжанне Сонца вымяралася перад і пасля кожнага паасобнага сканіравання з дакладнасцю $\pm 1/4^\circ$.

Поўнае сканіраванне, г. зн. перакрыццё палавіны неба, праводзілася за 35—48 мін. Зразумела, што на працягу гэтага часу Сонца змяняла сваё месцазнаходжанне як па азімуту, так і па вуглу ўзвышэння. Таму пры складанні карт ізафот энергетычнай яркасці выкарыстоўвалася сярэдняе месцазнаходжанне Сонца. Пры гэтым невыразнасць месцазнаходжання Сонца па вуглу ўзвышэння адзначана ў подпісу да карты, а

неввыразнасць па азимуту заўсёды была меншай $\pm 2^\circ$, бо пасля кожнага паасобнага сканіравання ўводзілася карэктурка ў межы сканіравання па азимуту адносна Сонца.



Рыс. 1. Размеркаванне (у выглядзе ізафот) энергетычнай яркасці, $\text{мквт} \cdot \text{см}^{-2} \cdot \text{стэр}^{-1}$ па яснаму небу ў вобласці 1,8—2,5 мкм па вымярэннях:

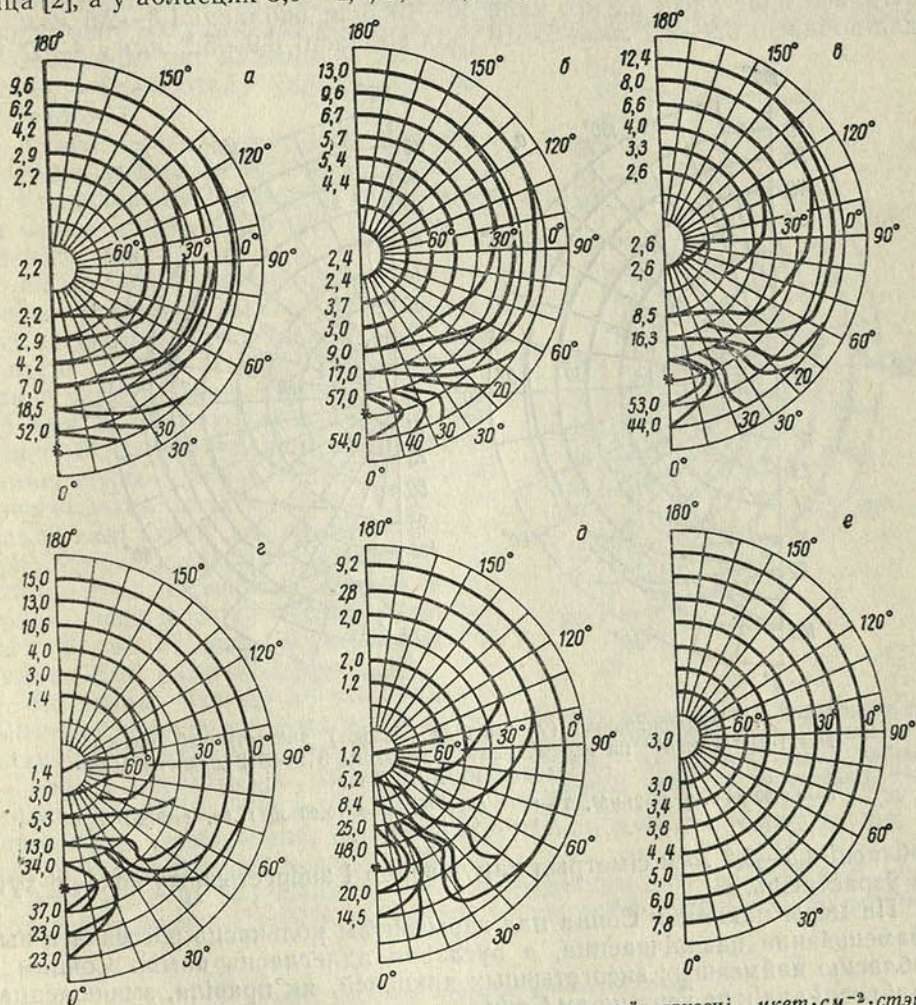
а—9. IX 1967 г., з 17 гадз 20 мін да 18 гадз 10 мін, пры вугле ўзвышэння Сонца $\varepsilon=17 \pm 3,6^\circ$, навакольнай тэмпературы $T=21^\circ\text{C}$, вільготнасці паветра $U=46\%$; б—9. IX 1967, з 16.10 да 17.00, $\varepsilon=25,5 \pm 3,9^\circ$, $T=21^\circ\text{C}$, $U=46\%$; в—4. IX 1967, з 10.45 да 11.25, $\varepsilon=35 \pm 3,3^\circ$, $T=23^\circ\text{C}$, $U=56\%$; г—4. IX 1967, з 11.25 да 11.55, $\varepsilon=40 \pm 1,2^\circ$, $T=23^\circ\text{C}$, $U=56\%$.

Для выяўлення абсалютных значэнняў назіраемай энергетычнай яркасці праводзілася каліброўка радыёметрычнай устаноўкі па чорных целах [1, 2].

Мяркуецца, што адносная памылка пры вымярэннях энергетычнай яркасці ў вобласці 1,8—2,5 мкм не перавышала, як правіла, 6% і заўсёды была меншай 10%, а ў абласцях 3,9—4,2, 4,5—5,2 і 3,9—5,2 мкм заўсёды была меншай 6%.

У пункце назірання вымяралася толькі тэмпература навакольнага паветра, а ўсе астатнія метэаралагічныя даныя паступалі з мясцовага метэацэнтра.

Эксперыментальныя рэзультаты. Энергетычная яркасць неба ў вобласці 1,8—2,5 мкм абумоўлена рассеяным выпраменьваннем Сонца [2], а ў абласцях 3,9—4,2, 3,9—5,2 і 4,5—5,2 мкм — яшчэ і ўласным



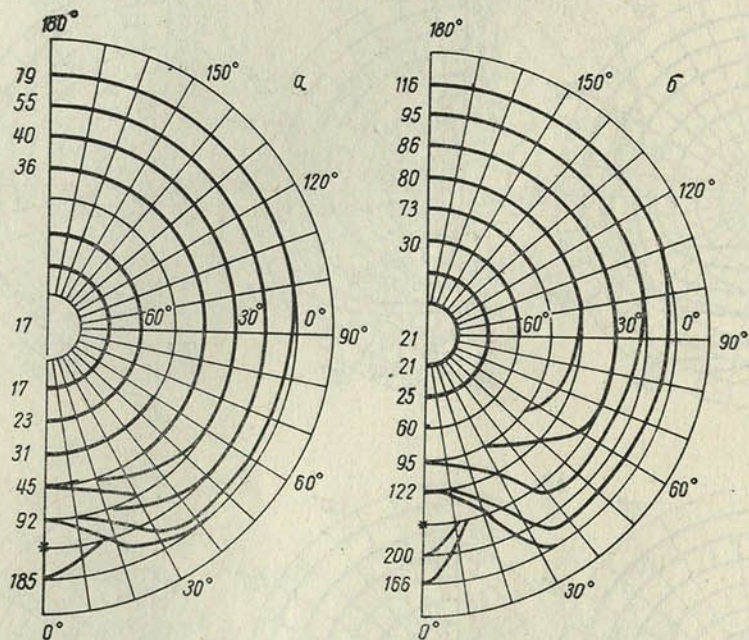
Рыс. 2. Размеркаванне (у выглядзе ізафот) энергетычнай яркасці, $\text{мкВт}\cdot\text{см}^{-2}\cdot\text{стэр}^{-1}$ па яснаму небу ў вобласці 3,9—4,2 мкм па вымярэннях 1. IX 1968 (а, б, в, г, д) і 15. VIII 1968 (е):

а— з 7.10 да 7.50, $\epsilon=11\pm 2,6^\circ$, $T=16,5^\circ\text{C}$, $U=75\%$; б— з 8.30 да 9.10, $\epsilon=22\pm 2,7^\circ$, $T=18,5^\circ\text{C}$, $U=70\%$;
 в— з 10.00 да 10.40, $\epsilon=31,5\pm 2,1^\circ$, $T=22^\circ\text{C}$, $U=58\%$; г— з 11.40 да 12.30, $\epsilon=40\pm 2,7^\circ$, $T=24,5^\circ\text{C}$, $U=39\%$;
 д— з 13.10 да 13.55, $\epsilon=42\pm 0,6^\circ$, $T=25^\circ\text{C}$, $U=30\%$; е— з 0.30 да 1.00, $T=12^\circ\text{C}$, $U=76\%$

выпраменьваннем атмасферы. Пры гэтым уплыў уласнага выпраменьвання атмасферы павялічваецца, а рассеянага выпраменьвання Сонца змяншаецца па меры пераходу ад вобласці 3,9—4,2 да вобласці 3,9—5,2 і, нарэшце, да вобласці 4,5—5,2 мкм [1, 3, 4].

Характар размеркавання энергетычнай яркасці па яснаму небу ў даследуемых абласцях паказан на рыс. 1—4. На першых трох рысунках прадстаўлена паслядоўнасць карт ізафот энергетычнай яркасці для розных вуглоў узвышэння Сонца. На гэтых картах ізафоты энергетычнай яр-

касці распадаюцца на дзве сям'і—тыя, што акружаюць Сонца, і тыя, што акружаюць гарызонт. Пры ўсходзе або заходзе Сонца вобласць найменшых энергетычных яркасцей знаходзіцца ў зеніце, а ізафоты амаль канцэнтрычна размяшчаюцца вакол пункта зеніту як вакол цэнтра, такая ж карціна размеркавання ізафот характэрна і для яснага начнога неба (гл., напрыклад, карту *e* рыс. 2). І толькі ў баку Сонца прыблізна на вуглавой адлегласці ад яго каля $30\text{--}40^\circ$ для вобласці $1,8\text{--}2,5\text{ мкм}$, 20° для вобласці $3,9\text{--}4,2\text{ мкм}$, $5\text{--}10^\circ$ для вобласці $3,9\text{--}5,2\text{ мкм}$ і $4\text{--}7^\circ$ для



Рыс. 3. Размеркаванне (у выглядзе ізафот) энергетычнай яркасці, $\text{квт}\cdot\text{см}^{-2}\cdot\text{стэр}^{-1}$ па яснаму небу ў вобласці $3,9\text{--}5,2\text{ мкм}$ па вымярэннях 16.IX 1967 г.:

a—з 9.00 да 9.40, $\varepsilon=21\pm 2^\circ$, $T=10^\circ\text{C}$, $U=67\%$; *b*—з 10.20 да 11.00, $\varepsilon=31\pm 1^\circ$, $T=13,5^\circ\text{C}$, $U=55\%$

вобласці $4,5\text{--}5,2\text{ мкм}$ сіметрыя парушаецца і энергетычныя яркасці хутка ўзрастаюць.

Па меры падняцця Сонца над гарызонтам колькасць рассеянага выпраменьвання павялічваецца, а вуглавая адлегласць паміж Сонцам і вобласцю найменшых энергетычных яркасцей, як правіла, змяншаецца, калі весці адлік па вертыкалу Сонца.

Колькасць рассеянага выпраменьвання моцна залежыць ад даўжыні шляху рассеяння. Па меры павелічэння шляху праменьняў праз атмасферу энергетычная яркасць узрастае. Гэты фактар і тое, што энергетычная яркасць у даследуемых спектральных інтэрвалах і вугал узвышэння звязаны адваротнай залежнасцю, тлумачаць загібанне ізафот у бок, процілеглы Сонцу, пачынаючы з пэўных вуглавых адлегласцей ад Сонца, характэрных для кожнай з даследуемых абласцей (рыс. 1—4).

На картах відаць, што ізафоты энергетычнай яркасці для яснага неба асіметрычны адносна напрамку, перпендыкулярнага вертыкалу Сонца, хача ў вобласці $4,5\text{--}5,2\text{ мкм}$ гэта асіметрыя найменш выразная. Распльўчатасць асіметрыі тут часткова звязана з цяжкасцю вымярэнняў энергетычнай яркасці непасрэдна ля Сонца, а часткова можа быць вытлумачана тым, што ўплыў Сонца ў гэтай вобласці абумоўлен не толькі

яго рассеяным выпраменьваннем (якое, паводле існуючых літаратурных даных, павінна выяўляцца толькі ў межах самога Сонца), але, як відаць, і ўласным выпраменьваннем больш нагрэтых мас паветра ў баку Сонца.

Некаторыя асаблівасці размеркавання энергетычнай яркасці па яснаму небу могуць быць выяўлены пры сканіраванні па азімуту адносна Сонца пры пастаянным вугле ўзвышэння, роўным вуглу ўзвышэння Сонца (табл. 1).

З табл. 1 відаць, што ўплыў рассеянага выпраменьвання Сонца змяншаецца з павелічэннем вуглавой адлегласці ад Сонца і даўжыні хвалі ў вобласці 1,8—5,2 мкм.

Неабходна адзначыць, што энергетычная яркасць у даследуемых абласцях залежыць таксама ад вільготнасці паветра і навакольнай тэмпературы, аднак уплыў апошняй у вобласці 1,8—2,5 мкм можна не ўлічваць, калі яна менш 40°. З павелічэннем навакольнай тэмпературы і вільготнасці паветра энергетычная яркасць неба ўзрастае. Аднак калі гэтыя два працэсы ідуць у процілеглых напрамках, могуць сустракацца такія варыянты: энергетычная яркасць узрастае (гл., напрыклад, карты а, б рыс. 2), застаецца пастаяннай (карты в, г) і змяншаецца (з, д).

Некаторыя звесткі аб уплыве энергетычнай яркасці асобных кучавых воблакаў на энергетычную яркасць яснага неба ў даследуемых абласцях змешчаны ў табл. 2. Рэзультаты яе атрыманы пры вымярэннях, праведзеных для вобласці 1,8—2,5 мкм 5.X 1968 г. з 12 гадз 30 мін да 13 гадз 00 мін пры тэмпературы паветра $T=7,4^{\circ}\text{C}$, вільготнасці паветра $U=67\%$ і ніжняй мяжы воблачнасці над паверхняй

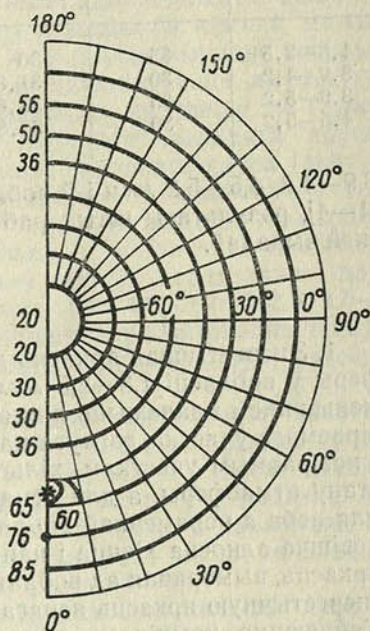


Рис. 4. Размеркаванне (у выглядзе ізафот) энергетычнай яркасці, $\text{мкВт}\cdot\text{см}^{-2}\cdot\text{стэр}^{-1}$ па яснаму небу ў вобласці 4,5—5,2 мкм па вымярэннях 10.X 1968 г. з 11.00 да 11.40, $\epsilon=35,7\pm\pm 0,9^{\circ}$, $T=14,6^{\circ}\text{C}$, $U=53\%$

Табліца 1

Уплыў рассеянага выпраменьвання Сонца на энергетычную яркасць яснага неба

Вобласць, мкм	Дыяпазон уплыву		
	моцны	слабы	не выяўляецца
1,8—2,5	да 30—40°	100—180°	—
3,9—4,2	да 20—30°	да 70—90°	звыш 100°
3,9—5,2	да 5—10°	да 20—30°	звыш 50—70°
4,5—5,2	да 4—6°	да 11—17°	звыш 30—45°

Зямлі $H=1000\text{ м}$; для іншых абласцей — 21.X 1968 г. з 13 гадз 40 мін да 14 гадз 20 мін пры $T=14,2^{\circ}\text{C}$, $U=48\%$, $H=800\text{ м}$.

Размеркаванне энергетычнай яркасці па небу з пераменнай воблачнасцю і па воблачнаму небу ў «вокнах празрыстасці» атмасферы 1,8—2,5,

Табліца 2

Адносіны энергетычнай яркасці B_1 асобных кучавых воблакаў да энергетычнай яркасці B_2 яснага неба ў суседніх участках

Вобласць, мкм	Вугал узвышэння аблакоў, град	Вугал узвышэння Сонца, град	Азімут воблакаў адносна Сонца, град	B_1 , мквт·см ⁻² ·стэр ⁻¹	B_1/B_2
1,8—2,5	35	30	126—136	800	30
3,9—4,2	30	31,8	130—180	19	9
3,9—5,2	25	33,6	130—180	107	2
4,5—5,2	30	34,8	130—180	72	1,5

3,9—4,2, 4,5—5,2 мкм і ў вобласці 3,9—5,2 мкм апісана ў работах аўтара [1—4], рэзультаты гэтых работ таксама ляглі ў аснову прыведзеных ніжэй вывадаў.

Вывады

1. Энергетычная яркасць дзённага неба ў «акне празрыстасці» атмасферы ў вобласці 1,8—2,5 мкм абумоўлена рассеяным сонечным выпраменьваннем і залежыць для яснага неба ад вугла ўзвышэння Сонца і назіраемага ўчастка, азімута назірання, вуглавой адлегласці паміж Сонцам і назіраемым участкам, вільготнасці паветра, канцэнтрацыі аэразолей і стану атмасферы, а для яснага неба пры наяўнасці асобных воблакаў і для неба з пераменнай воблачнасцю — яшчэ і ад тыпу воблакаў, іх становішча адносна Сонца і напрамку назірання. Пры гэтым энергетычная яркасць, вымераная ад воблакаў, вагаецца ў шырокіх межах і перавышае энергетычную яркасць яснага неба ва участках па суседству, бо воблакі з'яўляюцца крыніцамі, рассеіваючымі і адбіваючымі сонечнае выпраменьванне [1—4].

2. Размеркаванне энергетычнай яркасці па воблачнаму небу ў вобласці 1,8—2,5 мкм залежыць ад вугла ўзвышэння закрытага воблакамі Сонца, тыпу воблакаў і шчыльнасці воблачнага покрыва. Яно можа быць падобным размеркаванню энергетычнай яркасці для яснага неба, можа быць выпадковым і можа сумяшчаць рысы першага і другога тыпу з рознай вагой [2].

3. Энергетычная яркасць неба ў «вокнах празрыстасці» атмасферы 3,9—4,2, 4,5—5,2 мкм і ў вобласці 3,9—5,2 мкм абумоўлена ўласным выпраменьваннем атмасферы і рассеяным сонечным выпраменьваннем, роля якога праяўляецца ва ўсё меншай і меншай вобласці вакол Сонца па меры пераходу ад вобласці 3,9—4,2 мкм да вобласці 3,9—5,2 мкм і, нарэшце, да вобласці 4,5—5,2 мкм. Пры гэтым размеркаванне энергетычнай яркасці па яснаму дзённаму небу можна ў першым прыбліжэнні ўявіць як суперпазіцыю дзвюх карцін размеркавання з цэнтральнай сіметрыяй. Першая абумоўлена ўласным выпраменьваннем атмасферы, сіметрычна адносна зеніту, з'яўляецца функцыяй навакольнай тэмпературы, вугла ўзвышэння, канцэнтрацыі ў атмасферы выпраменьваючых часцінак (вадзяная пара, аэразолі і г. д.) і мае максімум ля гарызонта. Другая цэнтравана адносна становішча Сонца і характарызуецца адносна хуткім змяншэннем энергетычнай яркасці з павелічэннем вуглавой адлегласці ад Сонца [1, 3, 4].

4. Размеркаванне энергетычнай яркасці па воблачнаму небу ў абласцях 3,9—4,2, 3,9—5,2 і 4,5—5,2 мкм змяняецца ў сувязі са змяненнем вугла ўзвышэння закрытага воблакамі Сонца, змяненнем шчыльнасці воблачнага слоя і тыпу воблакаў. Пры гэтым сустракаюцца размерка-

ванні энергетычнай яркасці наступных пяці тыпаў: 1) энергетычная яркасць пастаянна і не залежыць ні ад азімута, ні ад вугла ўзвышэння ў межах вуглоў узвышэння ад 10 да 90°; 2) энергетычная яркасць змяншаецца ад гарызонта да зеніту; 3) энергетычная яркасць узрастае ад гарызонта да зеніту; 4) карты ізафот аднатыпны з картамі ізафот яснага неба; 5) энергетычныя яркасці размеркаваны па небу выпадковым чынам [1, 3, 4].

У першым выпадку неба пакрыта суцэльнымі аднароднымі з аднолькавай шчыльнасцю воблакамі ніжняга яруса з вышыняй ніжняй мяжы воблачнасці над паверхняй Зямлі менш 300 м. У другім выпадку шчыльнасць аднародных воблакаў аднолькава або павялічваецца ад зеніту да гарызонта; у трэцім — шчыльнасць змяншаецца ад зеніту да гарызонта; у чацвёртым — неба пакрыта або воблакамі верхняга яруса (асноўная вышыня больш 6 км), або воблакамі сярэдняга яруса (асноўная вышыня 2—6 км), шчыльнасць якіх аднародная і нязначная, і становішча Сонца фіксуецца на небе пэўна. У апошнім выпадку мы маем справу з парушэннем аднароднасці і суцэльнасці воблачнага покрыва.

5. Хаатычнае размеркаванне энергетычнай яркасці характэрна і для неба з пераменнай воблачнасцю ў абласцях 3,9—4,2, 3,9—5,2 і 4,5—5,2 мкм, пры гэтым дыяпазон змяненняў апошняй расшыраецца і абумоўлен уплывам прасветаў, змяненнем шчыльнасці воблакаў і рассеяным і адбітым выпраменьваннем Сонца.

6. Асобныя воблакі абумоўліваюць варыяцыі энергетычнай яркасці на ясным небе ў абласцях 3,9—4,2, 3,9—5,2 і 4,5—5,2 мкм, прычым гэтыя варыяцыі залежаць ад тыпу воблакаў і ад іх становішча адносна Сонца. Наяўнасць у сканіруемай вобласці нават лёгкіх воблакаў прыводзіць да ўзрастання энергетычнай яркасці гэтага ўчастка неба ў параўнанні з суседнімі ўчасткамі яснага неба за кошт ўласнага выпраменьвання воблакаў і рассеянага імі выпраменьвання Сонца [1—4].

7. Ізафоты энергетычнай яркасці на картах для яснага неба ў абласцях 1,8—2,5, 3,9—4,2, 3,9—5,2 і 4,5—5,2 мкм асіметрычны адносна напрамку, перпендыкулярнага вертыкалу Сонца. Праўда, гэта асіметрыя ў вобласці 4,5—5,2 мкм праяўлена найменш выразна. Яна залежыць ад месцазнаходжання Сонца на небе, змяншаецца з даўжынёй хвалі і, магчыма, абумоўлена ў вобласці 1,8—2,5 мкм змяненнем канцэнтрацыі рассеяваючых, а ў астатніх даследуемых абласцях — яшчэ і выпраменьваючых часцінак з вышыняй [1, 3, 4].

У заключэнне аўтар лічыць сваім прыемным абавязкам падзякаваць доктару тэхнічных навук М. М. Мірошнікаву і Р. Н. Івановай за прадастаўленую апаратуру, доктару фізіка-матэматычных навук прафесару У. Г. Вафіадзі за абмеркаванне рэзультатаў вымярэнняў, старшым інжынерам В. В. Далініну, І. А. Кобаку, У. М. Калеснікаву і Т. І. Патапавай за дапамогу пры вымярэннях і супрацоўнікам Мінскай метэаралагічнай абсерваторыі за выкарыстання ў гэтым артыкуле метэаралагічных даных.

Літаратура

1. Кузнечик О. П., Долинин В. В., Кобак И. А. ДАН БССР, № 11, 1967.
2. Кузнечик О. П. Вестні АН БССР, сер. фіз.-мат. навук, № 5, 1968.
3. Кузнечик О. П. ДАН БССР, № 10, 1969.
4. Кузнечик О. П., Колесников В. М. Вестник БГУ, сер. мат., физ., мех., № 2, 1969.

Белорусский государственный университет
им. В. И. Ленина

Поступило в редакцию 31.XII 1969

С. В. ПАЗОЙСКИ

**РОЛЯ СТАТЫЧНАГА ЗАРАДУ ЯДРА
 У ВЫЗНАЧЭННІ ІМАВЕРНАСЦІ ПАРНАЙ E0-КАНВЕРСІІ**

E0-пераходы ядраў з утварэннем электронна-пазітронных пар поўнасю вызначаюцца ўзаемадзеяннем дзіракаўскага фону з нуклонамі ўнутры ядра. Таму, натуральна, паўстае пытанне аб уплыве на гэты працэс формы, памераў і размеркавання ядзернага зараду*). Вывучэнню гэтага пытання і прысвечана дадзеная работа. Імавернасць утварэння электронна-пазітроннай пары пры E0-пераходзе ядра ў рэяты-вісцкай сістэме адзінак згодна з [1, 3, 4, 7] можна прадставіць у наступным выглядзе:

$$W_{\pi}(E0) = \rho^2 \Omega_{\pi}(E0),$$

дзе ρ — прыведзены ядзерны матрычны элемент электрычнага монаполя; $\Omega_{\pi}(E0)$ — прыведзеная імавернасць E0-канверсійнага пераходу.

$\Omega_{\pi}(E0)$ поўнасю вызначаецца хвалевымі функцыямі электрона і пазітрона ўнутры ядра, а яны залежаць ад распаўсюджвання зараду, памераў і формы ядра. Значыць, і прыведзеная імавернасць E0-канверсіі з утварэннем пар павінна ў нейкай ступені залежаць ад гэтых фактараў. Для высвятлення гэтай залежнасці ў дадзенай рабоце, аналагічна таму, як гэта зроблена ў [10], разлічаны (гл. табліцу) суадносіны W

Табліца

Результаты разлікаў

z	β	Размеркаванне зараду ядра		
		эквівалентнае аднароднае	эквівалентнае неаднароднае	трапецьяпадобнае
		$W = \frac{\Omega'_{\pi}(E0)}{\Omega_{\pi}(E0)}$	$W = \frac{\Omega''_{\pi}(E0)}{\Omega_{\pi}(E0)}$	$W = \frac{\Omega'''_{\pi}(E0)}{\Omega_{\pi}(E0)}$
20	0	1,41	2,32	2,48
68	0,289	1,08	1,70	1,35
64	0,46	1,13	1,88	1,29
92	0	0,95	1,38	0,91

прыведзеных імавернасцей E0-канверсіі з утварэннем пар, якія вылічаны 1) пры аднародным эквівалентным размеркаванні статычнага зараду ядра з радыусам [2]; 2) пры эквівалентным неаднародным размеркаванні са шчыльнасцю [6]; 3) пры трапецьяпадобным размеркаванні [10], да ад-

*) На важнасць вывучэння гэтага пытання паказаў, напрыклад, Ломбард у выступленні на міжнароднай канферэнцыі ў Парыжы ў 1964 г.

паведных прыведзеных імавернасцей, атрыманых пры выкарыстанні звычайнага аднароднага размеркавання зараду з радыусам $R=1,20 \times 10^{-13} A^{1/3} \text{ см}$ ($k=4$, $E_1=E_2=2$).

Акрамя таго, у рабоце даследуецца залежнасць адносін імавернасцей E0-канверсіі на абалонках да імавернасцей парнай E0-канверсіі ад размеркавання статычнага ядзернага зараду. З табліцы вынікае:

1. Змяненні прыведзеных імавернасцей парнай E0-канверсіі пры пераходзе да размеркаванняў ядзернага зараду, больш блізкіх да эксперыментальнага, дасягаюць 250%. Улік гэтага прыводзіць да адпаведных змяненняў значэнняў прыведзенага ядзернага матрычнага элемента электрычнага монаполя, знойдзеных з эксперымента.

2. Велічыні адпаведных адносін W для прыведзеных імавернасцей унутранай E0-канверсіі на абалонках і парнай E0-канверсіі для адных і тых жа ядраў і энергій пераходу (k) мала адрозніваюцца адзін ад аднаго (на 5—15%) (гл. [2]).

3. Адносіны W слаба залежаць ад велічыні энергіі пераходу k (павелічэнне апошняй у 2—3 разы для $Z=64$ змяняе W на 2—3%), а пры дадзеным k — ад размеркавання энергіі паміж электронам і пазітронам (для $Z=64$, $k=4$ і $E_1=1$, $E_2=3$, $E_1=3$, $E_2=1$, дзе E_1 , E_2 — энергія пазітрона і электрона адпаведна, W змяняецца на 1—2%).

4. Адносіны імавернасцей E0-канверсіі на абалонках да імавернасцей парнай E0-канверсіі ад размеркавання зараду залежаць слаба (змяненні дасягаюць 1—2%).

Літаратура

1. Борисоглебский Л. А. УФН, 81, 271, 1963.
2. Борисоглебский Л. А. ЖЭТФ, 47, 10, 1964.
3. Гречухин Д. П. ЖЭТФ, 32, 1036, 1957.
4. Зырянова Л. Н., Крутов В. А. Изв. АН СССР, сер. физ., 20, 312, 1956.
5. Борисоглебский Л. А. ЖЭТФ, 46, 1664, 1964.
6. Church E. L., Weneser J. Ann. Rev. Nucl. Sci., 10, 193, 1960.
7. Church E. L., Weneser J. Phys. Rev., 103, 1035, 1956.
8. Слив Л. А., Волчек Б. А. Таблицы кулоновских фаз и амплитуд при учете конечных размеров ядра. Изд. АН СССР, Л., 1956.
9. Meligy A. S. Nucl. Phys., 14, 248, 1956.
10. Борисоглебский Л. А., Позойский С. В. Весті АН БССР, сер. фіз.-мат. навук, № 2, 1969.

Витебский педагогический институт
им. С. М. Кирова

Поступило в редакцию 22.X 1969

В. А. ЕМЕЛИЧЕВ, А. М. КОНОНЕНКО

**ОБ ОДНОЙ КОМБИНАТОРНОЙ
 ПЕРЕЧИСЛИТЕЛЬНОЙ ЗАДАЧЕ**

В настоящей заметке подсчитывается количество базисов*) транспортной задачи линейного программирования порядка $m \times n$. Так как всякому такому базису взаимно однозначно соответствует дуальный граф, являющийся деревом, то соответствующая формула $m^{n-1}n^{m-1}$ доказывалась многими авторами (см., например, [1—4]) при помощи аппарата теории графов и производящих функций. Здесь приводится новое доказательство этой формулы в терминах $(0, 1)$ -матриц, т. е. матриц, элементами которых являются либо 0, либо 1.

1. Термин «линия» в матрице обозначает либо столбец, либо строку матрицы. Мы будем говорить, что линия $(0, 1)$ -матрицы A простая, если она содержит одну единицу. Линию, содержащую более одной единицы, будем называть сложной. Если число сложных столбцов в матрице A равно j , то матрицу A назовем j -сложной. Обозначим через $N(A)$ число всех единиц (или, иначе, занятых клеток) в матрице A .

$(0, 1)$ -матрица A размера $m \times n$ называется регулярной, если выполняются следующие условия: а) $N(A) = m + n - 1$, б) занятые клетки матрицы A не образуют циклов.

Через $Q_{m \times n}$ обозначим множество всех регулярных матриц размера $m \times n$, а через $\mu(Q_{m \times n})$ — число таких матриц. Так как всякой регулярной матрице взаимно однозначно соответствует базис транспортной задачи [5], то $\mu(Q_{m \times n})$ — число таких базисов.

Очевидны следующие леммы.

Лемма 1. *Всякая линия регулярной матрицы либо простая, либо сложная.*

Лемма 2. *Регулярность матрицы не нарушится, если вычеркнуть или вписать простую линию.*

Лемма 3.

$$\mu(Q_{m \times n}) = \mu(Q_{n \times m}).$$

Так как $\mu(Q_{1 \times n}) = 1$ при любом натуральном n , то будем рассматривать лишь случай, когда $m > 1$. В силу этого замечания и леммы 3 в дальнейшем достаточно исследовать множество $Q_{m \times n}$ при $1 < m \leq n$.

Пусть $Q_{m \times n}^j$ — множество регулярных j -сложных матриц размера $m \times n$, причем $1 < m \leq n$. Тогда справедлива

Лемма 4.

$$\mu(Q_{m \times n}) = \sum_{j=1}^{m-1} \mu(Q_{m \times n}^j).$$

*) Под базисом понимается максимальная система линейно независимых столбцов в матрице ограничений.

Зафиксируем некоторое $j = 1, 2, \dots, m-1$. В каждой матрице множества $Q_{m \times n}^j$ вычеркнем все простые столбцы. Множество полученных регулярных матриц размера $m \times j$ обозначим через $\bar{Q}_{m \times n}^j$. Из обобщенного правила произведения [6] и определения множеств $Q_{m \times n}^j$ и $\bar{Q}_{m \times n}^j$ следует

Лемма 5.

$$\mu(Q_{m \times n}^j) = C_n^j m^{n-j} \mu(\bar{Q}_{m \times n}^j) \\ (j = 1, 2, \dots, m-1).$$

2. Зафиксировав некоторое $j (1 \leq j \leq m-1)$, рассмотрим множество $Q_{m \times j}$ регулярных матриц размера $m \times j$.

Пусть P_i — свойство, обозначающее, что i -й столбец ($i = 1, 2, \dots, j$) матрицы $B \in Q_{m \times j}$ простой. Пусть $W^i(P_{i_1}, P_{i_2}, \dots, P_{i_r})$ обозначает число таких матриц множества $Q_{m \times j}$, которые обладают каждым из свойств $P_{i_1}, P_{i_2}, \dots, P_{i_r}$. Введем обозначение

$$W^i(r) = \sum W^i(P_{i_1}, P_{i_2}, \dots, P_{i_r}), \quad (1)$$

где суммирование ведется по всем r -подмножествам множества $P = \{P_1, P_2, \dots, P_j\}$. Распространим (1) на случай $r = 0$ и положим $W^i(0) = \mu(Q_{m \times j})$.

Через $E^i(0)$ обозначим число регулярных матриц размера $m \times j$ ($1 \leq j \leq m-1$), у которых нет простых столбцов, т. е. $E^i(0) = \mu(Q_{m \times j}^i)$ ($j = 1, 2, \dots, m-1$). В этих обозначениях справедлива формула решета [6]

$$E^i(0) = \sum_{r=0}^{j-1} (-1)^r W^i(r) \quad (j = 1, 2, \dots, m-1). \quad (2)$$

Принимая во внимание обобщенное правило произведения и лемму 2, легко доказать следующую лемму.

Лемма 6.

$$W^i(r) = C_j^r m^r \mu(Q_{m \times (j-r)}) \\ (j = 1, 2, \dots, m-1; r = 0, 1, \dots, j-1).$$

Лемма 7.

$$\mu(Q_{m \times n}) = \sum_{j=1}^{m-1} C_n^j m^{n-j} \sum_{r=0}^{j-1} (-1)^r C_j^r m^r \mu(Q_{m \times (j-r)}) \\ (m \leq n). \quad (3)$$

Доказательство. Учитывая, что $Q_{m \times j}^i = \bar{Q}_{m \times n}^j$ ($j = 1, 2, \dots, m-1$), в силу лемм 4 и 5 получаем

$$\mu(Q_{m \times n}) = \sum_{j=1}^{m-1} C_n^j m^{n-j} \mu(Q_{m \times j}^i) \quad (m \leq n). \quad (4)$$

Теперь на основании формулы решета (2) и леммы 6 имеем

$$\mu(Q_{m \times j}^i) = \sum_{r=0}^{j-1} (-1)^r C_j^r m^r \mu(Q_{m \times (j-r)}). \quad (5)$$

Из (4) и (5) вытекает рекуррентная формула (3).

3. Следуя [7], введем обозначение

$$\sum_{r=0}^j (-1)^r C_j^r (j-r)^p = \Delta^j O^p \quad (j = 0, 1, \dots; p = 0, 1, \dots).$$

Лемма 8.

$$\Delta^j O^p = 0 \quad (p = 0, 1, \dots).$$

Лемма 9 [8],

$$\Delta^j O^p = 0 \text{ для } j > p.$$

Лемма 10.

$$\sum_{r=0}^{j-1} (-1)^r C_j^r (j-r)^p = \Delta^j O^p \\ (j = 1, 2, \dots; p = 0, 1, \dots).$$

В новых обозначениях получаем следующее разложение:

$$(e^x - 1)^j = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{x^p}{p!} \Delta^j O^p \quad (j = 0, 1, \dots).$$

Отсюда имеем

$$\sum_{p=0}^{\infty} \frac{x^p}{p!} n^p = ((e^x - 1) + 1)^n = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{x^p}{p!} \sum_{j=0}^n C_n^j \Delta^j O^p.$$

Теперь, принимая во внимание леммы 8—10, получаем

$$n^{m-1} = \sum_{j=1}^n C_n^j \Delta^j O^{m-1} = \sum_{j=1}^{m-1} C_n^j \Delta^j O^{m-1} = \\ = \sum_{j=1}^{m-1} C_n^j \sum_{r=0}^{j-1} (-1)^r C_j^r (j-r)^{m-1} \quad (m \leq n). \quad (6)$$

4. Докажем основную теорему.

Теорема.

$$\mu(Q_{m \times n}) = m^{n-1} n^{m-1}. \quad (7)$$

Доказательство. В силу леммы 3 теорему достаточно доказать лишь для случая $m \leq n$.

Для любого $n = 1, 2, \dots$ формула (4) верна при $m = 1$. Зафиксируем некоторое $m > 1$. Пусть при всех $i < m$ имеем $\mu(Q_{i \times n}) = i^{n-1} n^{i-1}$ ($n = i, i + 1, \dots$). Докажем, что тогда формула (7) верна для $n = m, m + 1, \dots$

По предположению индукции, с учетом, что $j - r < m$, из лемм 3 и 7 следует

$$\mu(Q_{m \times n}) = m^{n-1} \sum_{j=1}^{m-1} C_n^j \sum_{r=0}^{j-1} (-1)^r C_j^r (j-r)^{m-1} \\ (n = m, m + 1, \dots).$$

Теперь, принимая во внимание (6), заключаем, что при фиксированном m формула (7) справедлива для $n = m, m + 1, \dots$. Теорема доказана.

Литература

1. Austin T. L. Canad. J. Math., 12, N 4, 1960.
2. Scoins H. L. Proc. Cambridge Philos. Soc., 58, 1962.
3. Oláh G. Studia Scient. Math. Hung., 3, 1968.
4. Szwarc W., Wintgen G. Mathematica, 7 (30), № 1, 1965.
5. Зуховицкий С. И., Авдеева Л. И. Линейное и выпуклое программирование. М., 1964.
6. Райзер Г. Дж. Комбинаторная математика. Изд. «Мир», М., 1966.
7. Риордан Дж. Введение в комбинаторный анализ. ИЛ, 1963.
8. Веленкин Н. Я. Комбинаторика. М., 1969.

Белорусский государственный университет
им. В. И. Ленина

Поступило в редакцию 3.IX 1969

*) Заметим, что полученное равенство является известным соотношением для чисел Стирлинга [7].

Э. М. ПАЛЬЧИК

О КОНЕЧНЫХ ГРУППАХ С 2-ЗАМКНУТЫМИ ПОДГРУППАМИ

Теорема С. А. Чунихина (теорема 4.3.1 из [1]) о p' -замкнутости конечной группы, не содержащей p -замкнутых pd -подгрупп Шмидта (обозначения и определения смотри в § 1), допускает симметричное утверждение для p -2, доказанное Я. Г. Берковичем в [2]: конечная группа G тогда и только тогда 2-замкнута, если она не содержит 2'-замкнутых $2d$ -подгрупп Шмидта. Из последней теоремы и из разрешимости групп нечетного порядка [3] получается

Теорема (i). Если все собственные максимальные подгруппы группы G 2-замкнуты, то группа G разрешима.

Целью этой заметки является ослабление условия теоремы (i).

§ 1. Обозначения, определения и используемые результаты. $|G|$ — порядок конечной группы G ; G_p — силовская p -подгруппа группы G ; группа G называется p -замкнутой, если в G инвариантна силовская p -подгруппа; группа называется p' -замкнутой, если в ней инвариантно силовское p -дополнение; группа G называется pd -группой, если p делит $|G|$; группа Шмидта — минимальная ненильпотентная группа; наибольший нормальный делитель группы G , заключенный в подгруппе H , называется ядром подгруппы H ; $H^g = g^{-1}Hg$.

Теорема (ii) [4]. Если группа G содержит максимальную подгруппу с единичным ядром, то следующие свойства группы эквивалентны:

а) в G имеется единственный минимальный нормальный делитель и индексы всех максимальных подгрупп с единичным ядром имеют общий делитель;

б) в G существует нетривиальный разрешимый нормальный делитель.

§ 2. Здесь доказывается следующий результат.

Теорема. Пусть в группе G имеется максимальная подгруппа с ядром.

1. Если все те максимальные подгруппы группы G , порядок которых делится на $|G_2|$ или которые имеют ядро 1, 2-замкнуты, то группа G разрешима.

Доказательство. Если группа G проста, то любая ее максимальная подгруппа имеет, очевидно, единичное ядро и по условию 2-замкнута. Тогда утверждение вытекало бы из теоремы (i). Итак, пусть R — минимальный нормальный делитель группы G . Если R — разрешимый нормальный делитель G , то пусть T — максимальная подгруппа из G , имеющая единичное ядро. Тогда T не содержит R и $TR = G$. Отсюда $G/R = TR/R \cong T/T \cap R$ и G/R оказалась бы разрешимой, ибо T (а значит, и любой гомоморфный образ T) 2-замкнута по условию и, следовательно, разрешима по теореме Фейта—Томпсона [3]. Но отсюда следовала бы разрешимость самой группы G . Таким образом, впредь можно считать, что в G нет разрешимых нормальных делителей. Можно далее считать, что R — единственный минимальный нормальный делитель группы G . В самом деле, если R_1 — другой ми-

нимальный нормальный делитель группы G , то $R \cong RR_1/R_1 \subseteq G/R_1 = TR_1/R_1 \cong T/T \cap R_1$, где ядро T_G подгруппы T равно 1. Ввиду условия и теоремы из [3] T , а значит, и $T/T \cap R_1$ разрешимы. Поэтому и R как подгруппа, изоморфная подгруппе RR_1/R_1 разрешимой группы $G/R_1 (\cong T/T \cap R_1)$, оказалась бы разрешимой, что мы исключили ранее. В силу теоремы из работы [3] можно считать, что 2 делит $|R|$. По известному рассуждению Фраттини имеем $G = N(R_2) \cdot R$. Так как $R_2 = R \cap G_2$ инвариантно в G_2 , то $G_2 \subseteq N(R_2)$. Пусть M — та максимальная подгруппа группы G , которая содержит $N(R_2)$. Тогда $G_2 = M_2$. Кроме того, M не содержит R , поэтому $M_G = 1$, ибо R — единственный минимальный нормальный делитель G . По условию M_2 инвариантна в M . Поэтому в нормализатор $M_2 = G_2$ входит M . Пусть теперь K — произвольная максимальная подгруппа группы G , отличная от M , ядро которой K_G равно 1. Если 2 не делит $|K|$, то ввиду равенства $G = K \cdot R$ следует, что $|G_2|$ делит $|R|$. Но тогда R содержится в некоторой максимальной подгруппе Q , порядок которой делится на $|G_2|$. Так как все те максимальные подгруппы, порядки которых делятся на $|G_2|$, сопряжены с M в группе G (в самом деле, по условию, Q_2 инвариантна в Q , а по теореме Силова, $Q_2 = G_2^x$, то есть M_2 и Q_2 сопряжены в G с помощью элемента x ; из $Q \subseteq N(Q_2)$ следует $xQx^{-1} \subseteq N(xQ_2x^{-1}) = N(G_2)$ и, кроме того, $M \subseteq N(M_2) = N(G_2)$; поэтому $\{xQx^{-1}, M\} \subseteq N(G_2)$, причем $\{xQx^{-1}, M\} \neq G$, ибо тогда в G нашелся бы разрешимый нормальный делитель G_2 , и поэтому ввиду максимальной Q и M следует $M = xQx^{-1}$, то $Q_G = 1$, ибо $M_G = 1$. Противоречие с тем фактом, что $R \subseteq Q$. Поэтому 2 делит $|K|$. Если $|G_2|$ не делит $|K|$, то пусть P — та наименьшая 2-подгруппа из G , которая содержит K_2 и не входит в K . Тогда K_2 инвариантна в группе $\{P, K\} = G$. Это противоречит тому факту, что $K_G = 1$. Значит, $|G_2|$ делит $|K|$. Но, как выше показано, все максимальные подгруппы, порядки которых делятся на $|G_2|$, сопряжены между собой в G . Итак показано, что все максимальные подгруппы с единичным ядром сопряжены между собой в G . Значит, существует общий делитель индексов всех максимальных подгрупп с единичным ядром. Так как в G имеется единственный минимальный нормальный делитель, то по теореме (ii) в G имеется разрешимый нормальный делитель. Этим теорема полностью доказана.

Следствие. Если в группе G имеется максимальная подгруппа с ядром C и если каждая максимальная подгруппа группы G , имеющая ядро C , 2-замкнута, а также если 2-замкнута каждая подгруппа F/C группы G/C , порядок которой делится на наивысшую степень числа 2, делящую $|G/C|$, то группа G/C разрешима.

Литература

1. Чунихин С. А. Подгруппы конечных групп. Изд. «Наука и техника», Минск, 1964.
2. Беркович Я. Г. Конечные группы. Изд. «Наука и техника», Минск, 1966.
3. Feit W., Thompson J. Pacific J. Math., 13, № 3, 775, 1963.
4. Baer R. Illinois J. Math., 1, № 2, 1957.

Могилевский машиностроительный институт

Поступило в редакцию 5.V 1969

А. И. ТУЗИК

К РЕШЕНИЮ ОСОБЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ЯДРОМ КОШИ В ИСКЛЮЧИТЕЛЬНОМ СЛУЧАЕ

1. Пусть Γ — простой гладкий замкнутый контур, делящий плоскость на внутреннюю область D^+ , содержащую начало координат, и внешнюю область D^- . Рассмотрим полное особое интегральное уравнение с ядром Коши

$$K\varphi \equiv a(t)\varphi(t) + \frac{b(t)}{\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\varphi(\tau)}{\tau-t} d\tau + \int_{\Gamma} k(t, \tau)\varphi(\tau) d\tau = f(t), \quad (1)$$

в котором $a(t)$, $b(t)$, $f(t)$, $k(t, \tau)$ — известные функции, удовлетворяющие условию Гёльдера, имеющие вид

$$\begin{aligned} a(t) &= \prod_{j=1}^{\nu} (t-c_j)^{n_j} a_1(t), \quad b(t) = \prod_{j=1}^{\nu} (t-c_j)^{m_j} b_1(t), \\ a(t) - b(t) &= \prod_{j=1}^{\nu} (t-c_j)^{n_j} \prod_{i=1}^{\mu} (t-\alpha_i)^{m_i} r(t), \\ a(t) + b(t) &= \prod_{j=1}^{\nu} (t-c_j)^{n_j} \prod_{k=1}^{\nu} (t-\beta_k)^{p_k} s(t), \end{aligned} \quad (2)$$

где $r(t)$, $s(t)$ нигде на Γ не обращаются в нуль; c_j , α_i , β_k — точки контура Γ . Возможно, что отдельные точки c_j могут совпадать либо с α_i , либо с β_k ; n_j , m_i , p_k — целые неотрицательные числа. Обозначим

$$\sum_{j=1}^{\nu} n_j = n, \quad \sum_{i=1}^{\mu} m_i = m, \quad \sum_{k=1}^{\nu} p_k = p, \quad \kappa = \frac{1}{2\pi} \left[\arg \frac{r(t)}{s(t)} \right]_{\Gamma}.$$

Решение уравнения (1) будем искать в классе функций, удовлетворяющих на Γ условию Гёльдера.

Исключительные случаи особых интегральных уравнений с ядром Коши изучались многими авторами ([2—9] и др.). Первые результаты в этом направлении принадлежат Ф. Д. Гахову [3] и Д. И. Шерману [4, 5]. В дальнейшем более полно исключительные случаи были изучены в [2, 6, 7]. Однако в [2—7] предполагалось, что функции $a(t) \pm b(t)$ не имеют на контуре общих нулей. Случай, когда функции $a(t) \pm b(t)$ могут одновременно обращаться в нуль, рассмотрен автором в [8, 9].

В настоящей заметке предлагается новый подход к исследованию таких уравнений. Как будет показано далее, особое интегральное уравнение с ядром Коши в исключительном случае может быть сведено к хорошо

изученному [1, 2] особому интегральному уравнению с ядром Коши нормального типа и совокупности определенных функциональных соотношений.

2. Введем оператор

$$N\psi \equiv \widetilde{a}(t)\psi(t) + \frac{\widetilde{b}(t)}{\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\psi(\tau)}{\tau - t} d\tau$$

при условии, что

$$\widetilde{a}(t) - \widetilde{b}(t) = t^m \prod_{k=1}^{\nu} (t - \beta_k)^{p_k},$$

$$\widetilde{a}(t) + \widetilde{b}(t) = \prod_{i=1}^{\mu} (t - \alpha_i)^{m_i}.$$

Этот оператор, как легко усмотреть, не имеет собственных функций, а уравнение $N\psi = f$ безусловно и однозначно разрешимо [2]. Следовательно, уравнения $NK\varphi = f$ и $KN\psi = f$ равносильны [1, 2] уравнению (1). Возьмем для определенности уравнение $NK\varphi = Nf$, которое имеет вид

$$NK\varphi \equiv A(t)\varphi(t) + \frac{B(t)}{\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t} d\tau + \int_{\Gamma} K(t, \tau)\varphi(\tau) d\tau = F(t), \quad (3)$$

где

$$A(t) = \prod_{j=1}^{\nu} (t - c_j)^{n_j} \prod_{i=1}^{\mu} (t - \alpha_i)^{m_i} \prod_{k=1}^{\nu} (t - \beta_k)^{p_k} \frac{s(t) + t^m r(t)}{2},$$

$$B(t) = \prod_{j=1}^{\nu} (t - c_j)^{n_j} \prod_{i=1}^{\mu} (t - \alpha_i)^{m_i} \prod_{k=1}^{\nu} (t - \beta_k)^{p_k} \frac{s(t) - t^m r(t)}{2},$$

$$F(t) \equiv Nf.$$

Для регулярного ядра $K(t, \tau)$ также можно выписать явное выражение [2]. Ввиду громоздкости его не приводим.

Будем считать, что функции $\widetilde{F}(t)$, $K(t, \tau)$ в окрестности точек c_j ($j = 1, \dots, \nu$), α_i ($i = 1, \dots, \mu$), β_k ($k = 1, \dots, \nu$) соответственно n_j , m_i , p_k раз непрерывно дифференцируемы по t .

Нетрудно показать, что при этих предположениях уравнение (3) равносильно уравнению

$$A_1(t)\varphi(t) + \frac{B_1(t)}{\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t} d\tau + \int_{\Gamma} K_1(t, \tau)\varphi(\tau) d\tau = F_1(t) \quad (4)$$

совместно с функциональными соотношениями

$$\int_{\Gamma} K^{(\nu_j)}(\sigma_j, \tau)\varphi(\tau) d\tau = F^{(\nu_j)}(\sigma_j),$$

$$j = 1, 2, \dots, \nu + \mu + \nu, \nu_j = 0, 1, \dots, s_j - 1, \quad (5)$$

где

$$A_1(t) = \frac{s(t) + t^m r(t)}{2}, \quad B_1(t) = \frac{s(t) - t^m r(t)}{2},$$

$$\sigma_j(s_j) = \begin{cases} c_j(n_j), & j = 1, \dots, \nu \\ \alpha_{j-\nu}(m_{j-\nu}), & j = \nu + 1, \dots, \nu + \mu \\ \beta_{j-\nu-\mu}(p_{j-\nu-\mu}), & j = \nu + \mu + 1, \dots, \nu + \mu + \nu, \end{cases}$$

$$K_1(t, \tau) = \sum_{j=1}^{\nu+\mu+\nu} \frac{Q_{s_{j-1}}(t)}{(t-\sigma_j)^{s_j}} \left[K(t, \tau) - \sum_{\nu=0}^{s_{j-1}} K^{(\nu)}(\sigma_j, \tau) \frac{(t-\sigma_j)^\nu}{\nu!} \right],$$

$$F_1(t) = \sum_{j=1}^{\nu+\mu+\nu} \frac{Q_{s_{j-1}}(t)}{(t-\sigma_j)^{s_j}} \left[F(t) - \sum_{\nu=0}^{s_{j-1}} F^{(\nu)}(\sigma_j) \frac{(t-\sigma_j)^\nu}{\nu!} \right],$$

$Q_{s_{j-1}}(t)$ — многочлены степени s_{j-1} , определяемые из равенства

$$\frac{1}{\prod_{i=1}^{\nu+\mu+\nu} (t-\sigma_i)^{s_i}} = \sum_{j=1}^{\nu+\mu+\nu} \frac{Q_{s_{j-1}}(t)}{(t-\sigma_j)^{s_j}}.$$

Доказательство сформулированного результата может быть проведено аналогично тому, как это было сделано автором в работе [8].

Уравнение (4) является уравнением нормального типа и для него справедливы теоремы Нётера [1, 2]. Соотношения (5) для уравнения (1) играют роль условий разрешимости — равносильности, так как уравнению (1) будут удовлетворять лишь те решения уравнения (4), для которых выполняются условия (5).

Обозначим через l , λ число линейно независимых решений соответственно уравнений (1), (4). Из [1, 2] следует, что $\lambda \geq \kappa + m$. Подставляя общее решение уравнения (4) в равенство (5), получим для λ произвольных постоянных систему $n + m + p$ уравнений. Пусть ρ — ранг этой системы. Очевидно, $0 \leq \rho \leq \lambda$, $l = \lambda - \rho$.

Из приведенных рассуждений вытекает следующая

Теорема. Если уравнение (1) разрешимо, т. е. система (4), (5) совместна, то $\kappa - \rho - n \leq l \leq \lambda$.

В заключение выражаю глубокую признательность академику АН БССР Ф. Д. Гахову за руководство работой.

Литература

1. Мусхелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения. М., 1968.
2. Гахов Ф. Д. Краевые задачи. М., 1963.
3. Гахов Ф. Д. Изв. Казанск. физ.-мат. о-ва, 14, сер. 3, 75, 1949.
4. Шерман Д. И. ДАН СССР, 59, № 4, 647, 1948.
5. Шерман Д. И. ПММ, 15, в. 1, 75, 1951.
6. Чикин Л. А. Ученые зап. Казанск. ун-та, 113, кн. 10, 57, 1953.
7. Хведелидзе Б. В. Труды Тбилисс. матем. ин-та АН ГрузССР, 23, 3, 1956.
8. Тузик А. И. Вестник БГУ им. В. И. Ленина, сер. мат., физ., мех., № 1, 55, 1969.
9. Тузик А. И. Вестник БГУ им. В. И. Ленина, сер. мат., физ., мех., № 2, 3, 1969.

Белорусский государственный университет
имени В. И. Ленина

Поступило в редакцию 15.IX 1969

С. А. НЕГРЕЙ, Е. И. ФИРСОВ

Ge (Li)-СПЕКТРОМЕТР ДЛЯ ИЗУЧЕНИЯ ГАММА-ЛУЧЕЙ РАДИАЦИОННОГО ЗАХВАТА ТЕПЛОВЫХ НЕЙТРОНОВ

В настоящей статье описывается спектрометр на Ge(Li)-кристалле, установленный на касательном канале реактора ИРТ-2000 АН БССР и используемый для изучения спектров γ -лучей, возникающих при радиационном захвате тепловых нейтронов ядрами.

Установка. Детектор — компенсированный литием германий марки ГДД-10—40, планарного типа, с глубиной компенсации 7 мм и чувствительной площадью 3,8 см². Детектор изготовлен в нашей лаборатории по методике, аналогичной описанной в [1]. После напыления лития в вакууме на поверхность кристалла германия и диффузии лития в течение 10 мин при 420 °С осуществлялся медленный дрейф ионов лития в германий в кипящем пентане. В конце дрейфа, по достижении необходимой глубины компенсации, проводилась диффузия лития. После выравнивания при температуре —30 °С детектор охлаждался до температуры жидкого азота, и снимались его рабочие параметры. Емкость детектора 20 пф при рабочем смещении 800 в, ток утечки при этом меньше чем 10⁻⁸ а. Разрешение для γ -лучей источника Co⁶⁰ (1,173 и 1,333 Мэв) составляет 5,75 и 6,3 Мэв соответственно.

Сигнал с детектора поступает на зарядочувствительный предусилитель, присоединенный для уменьшения входной емкости, непосредственно к криостату, в котором находится детектор. Входной каскад предусилителя собран на лампах 6С3П и 6С4П, включенных по каскадной схеме. Собственный шум предусилителя составляет 3 кэв, при присоединении детектора шум возрастает до 4 кэв. Сигнал с предусилителя по 70-метровому кабелю подается на систему регистрации, включающую несколько модифицированный основной усилитель УШ-2, анализатор импульсов НТА-512 и цифровой стабилизатор коэффициента усиления всего тракта. Для получения оптимального соотношения сигнал/шум используется двойное дифференцирование и однократное интегрирование с равными постоянными времени 1,3 мксек.

Эксперимент. Высокая эффективность Ge(Li)-спектрометра (на несколько порядков выше эффективности других приборов с близкой ему разрешающей способностью) позволяет использовать для изучения реакции (n, γ) внешний нейтронный пучок. Схема опыта показана на рис. 1.

Графитовая пробка диаметром 15 см и длиной 70 см, помещенная в касательный канал реактора вблизи активной зоны, является эффективным рассеивателем нейтронов, идущих из активной зоны и тепловой колонны реактора. При потоке нейтронов в канале (против центра активной зоны) $2 \cdot 10^{12}$ н/см²·сек поток нейтронов на выходе касательного канала, в месте расположения образца, равен 10^8 н/см²·сек. Геометрия вывода пучка нейтронов из касательного канала, в отличие от тепловой

колонны исключает непосредственное попадание γ -лучей из активной зоны реактора на образец. В наружном пучке присутствует лишь мягкое γ -излучение (0,3 Мэв), обусловленное многократным рассеянием. Система внутренних коллиматоров и наружная защита, формирующие нейтронный пучок и сужающие его до диаметра 2,5 см, уменьшают поток тепловых нейтронов на образец до $2 \cdot 10^7$ н/см²·сек. Ge(Li)-детектор расположен на расстоянии 12 см от оси нейтронного пучка и в 10 см от наружной защиты. Детектор защищен от рассеянных на образце нейтронов слоем Li₂O толщиной 0,8 см. Расходимость нейтронного пучка не превышает 1°; соотношение числа тепловых и быстрых нейтронов, измеренное с марганцем, порядка 50. Все измерения параметров нейтронного пучка выполнены при мощности реактора ИРТ-2000 порядка 1500 квт.

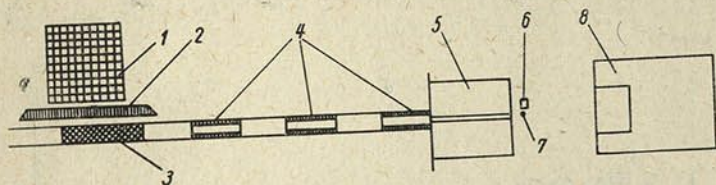


Рис. 1. Схема вывода пучка тепловых нейтронов из касательного канала реактора:

1—активная зона реактора; 2—свинцовый щит; 3—графит; 4—внутренние коллиматоры; 5—наружная защита; 6—Ge(Li)-детектор; 7—исследуемый образец; 8—ловушка

Результаты. На рис. 2 приведен спектр γ -лучей Cl^{36} из реакции $\text{Cl}^{35}(n, \gamma)\text{Cl}^{36}$ на тепловых нейтронах, иллюстрирующий возможности спектрометра. Образец — таблетка NH_4Cl , содержащая 0,15 г хлора, что дает произведение сечения захвата тепловых нейтронов образцом на его вес порядка $5 \text{ г} \cdot \text{барн}$. Отношение эффекта к фону в этом случае в области энергий 0,2—1,5 Мэв равно 6 и возрастает с ростом энергии γ -квантов до 10 для $E_\gamma = 2,5 \text{ Мэв}$ и до 14 для $E_\gamma = 5 \text{ Мэв}$.

Спектр Cl^{36} хорошо изучен в [2] с помощью магнитного спектрометра, и нумерация линий на рис. 2 совпадает с обозначениями, принятыми там. Низкоэнергетическая часть спектра, где преобладающим эффектом является фотопоглощение γ -квантов в материале детектора, изображена на рис. 2, а. Линии, обозначенные о.п., соответствуют регистрации γ -квантов с образованием электрон-позитронных пар, когда оба аннигиляционных кванта ускользают из детектора. Выше 2 Мэв эффект образования пар является преобладающим, и в этой области прибор работает уже как парный спектрометр. Все нумерованные линии на рис. 2, б и в являются парными, и их истинное положение на энергетической шкале должно быть на 1,02 Мэв меньше. Однако, поскольку в этой области эффекты фотопоглощения и полного поглощения (соответствующие линии помечены буквой ф) и образования пар с поглощением одного кванта аннигиляции (линии, помеченные звездочкой) малы, то оказывается более удобным для обработки спектров в этой области обозначать парные линии как истинные.

Выводы. Таким образом, Ge(Li)-спектрометром можно исследовать с высоким разрешением спектры γ -лучей радиационного захвата тепловых нейтронов на образцах с произведением сечения захвата нейтронов на вес образца порядка $5 \text{ г} \cdot \text{барн}$, используя геометрию наружного пучка. Для сравнения укажем, что в [2] для получения спектра с близким разрешением использовался внутренний нейтронный пучок;

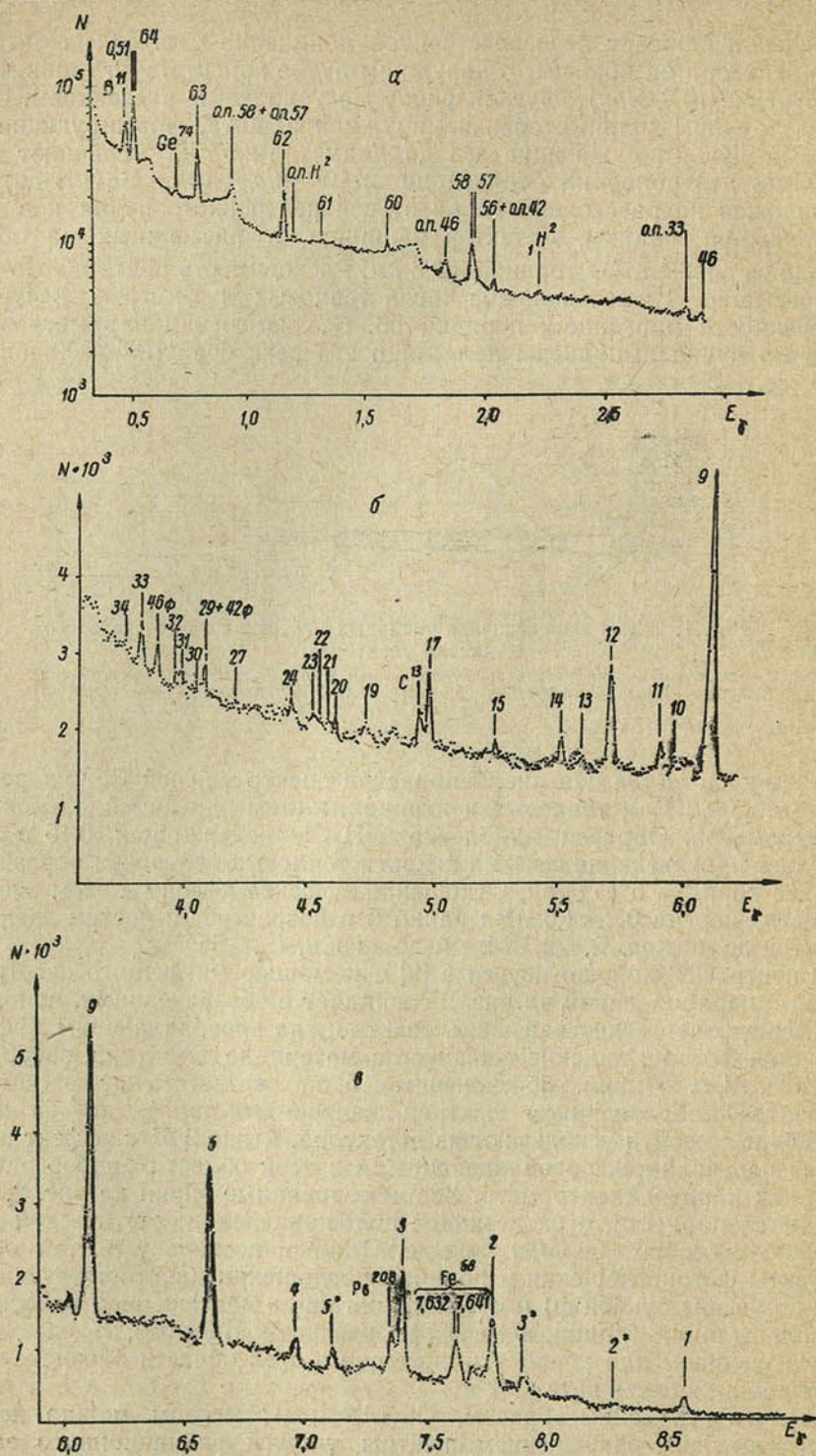


Рис. 2. Спектр γ -лучей радиационного захвата тепловых нейтронов образцом Si^{35} , полученный на касательном канале ИРТ-2000 АН БССР (E_γ Мэв). Детектор — кристалл $\text{Ge}(\text{Li})$ размером $7 \text{ мм} \times 3,8 \text{ см}^2$:

α —6,25 кэв/канал; β —6,1; ν —6,04

используемый образец — 1,3 кг NaCl, что соответствует для хлора 23550 г·барн

Полученные результаты позволяют предполагать, что при дополнительных изменениях в защите, направленных к снижению фона и уменьшению суммарной импульсной загрузки всего спектрометрического тракта, станет возможным исследовать образцы с произведением сечения на вес порядка одного грамма на барн или даже долей грамма на барн.

Литература

1. Carpellani F., Fumagalli W., Henuset M., Restelli J. Nuclear Instruments and Methods, 47, № 1, 121, 1967.
2. Грошев Л. В., Демидов А. М., Луценко В. Н. Изв. АН СССР, сер. физ., 24, № 7, 1960.

Институт физики АН БССР

Поступило в редакцию 12.I 1970

А. М. ГОНЧАРЕНКО

ОБ АНИЗОТРОПНЫХ ОДНОПРЕЛОМЛЯЮЩИХ СРЕДАХ

Ф. И. Федоровым впервые было показано [1], что магнитные кристаллы могут быть однопреломляющими. Для этого симметричные тензоры диэлектрической и магнитной проницаемостей (ϵ , μ) должны быть пропорциональны между собой. Интересно выяснить возможность существования однопреломляющих анизотропных сред, у которых ϵ и μ являются произвольными, в частности несимметричными, тензорами. Наиболее известным примером таких сред являются гироэлектрические и гиромангнитные среды [2].

Пусть в уравнениях Максвелла

$$\text{rot } \mathbf{H} = i\omega\epsilon\mathbf{E}, \quad (1)$$

$$\text{rot } \mathbf{E} = -i\omega\mu\mathbf{H},$$

ϵ и μ — произвольные тензоры. Из (1) следует

$$\text{rot } \mu^{-1} \text{rot } \mathbf{E} = \omega^2\epsilon\mathbf{E}. \quad (2)$$

Полагая $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}}$, получаем

$$\mathbf{k}^x \mu^{-1} \mathbf{k}^x \mathbf{E} + \omega^2 \epsilon \mathbf{E} = 0, \quad (3)$$

где \mathbf{k}^x — антисимметричный тензор, дуальный волновому вектору \mathbf{k} [1]. Используя известные правила перестановки тензоров μ^{-1} и \mathbf{k}^x [1], уравнение (3) преобразуем к виду

$$\frac{1}{|\mu|} \mathbf{k}^x (\tilde{\mu}\mathbf{k})^x \tilde{\mu}\mathbf{E} + \omega^2 \epsilon \mathbf{E} = 0, \quad (4)$$

где $|\mu|$ — определитель тензора μ , $\tilde{\mu}$ — транспонированный тензор.

Предполагая теперь, что μ пропорционален ϵ ,

$$\tilde{\mu} = a\epsilon, \quad (5)$$

из (4) находим

$$\mathbf{k}\epsilon\mathbf{k} = a\omega^2 |\epsilon| \quad \text{или} \quad k^2 = \frac{a\omega^2 |\epsilon|}{n\epsilon n} \quad (\mathbf{k} = n\mathbf{k}). \quad (6)$$

Таким образом, мы получили, что если транспонированный тензор $\tilde{\mu}$ пропорционален тензору ϵ (или наоборот), то постоянная распространения (показатель преломления) волн в анизотропной среде имеет только одно значение и является функцией волновой нормали. Такая среда является однопреломляющей анизотропной средой.

Литература

1. Федоров Ф. И. Оптика анизотропных сред. Минск, 1958.
2. Van Trier M. Appl. Sci. Res., В3, 305, 1953.

Институт физики АН БССР

Поступило в редакцию 21.XI 1969

ЗМЕСТ

И. И. Жбанкова. В. И. Ленин и прогресс физической науки	5
---	---

МАТЭМАТЫКА

А. Е. Залесский. О групповых кольцах разрешимых групп	13
П. И. Соболевский, Л. А. Янович. О приближенном вычислении интегралов	22
Винера	
А. К. Покало. Линейные методы приближения производных и интегралов в	32
смысле Вейля периодических функций	
Я. В. Константинова. О сходимости и устойчивости многослойного разностно-	40
го правила решения уравнения теплопроводности	
Л. Г. Кругликова. Метод наименьших квадратов в преобразовании последо-	48
вательностей	
В. Н. Лаптинский, Ю. Д. Городецкий, В. В. Серов. К приближенному решению	56
нелинейных интегральных уравнений	
Г. Н. Пыхтеев. О построении квадратурных формул для интегралов типа Ко-	61
ши по прямолинейному разомкнутому контуру	
М. Э. Толочко. О краевой задаче Римана для бесконечно связной области	70

ФІЗІКА

В. А. Плетюхов, Ф. И. Федоров. Волновое уравнение с кратными представле-	79
ниями для частицы со спином 0	
А. П. Рябушко. О погрешностях в приближенных уравнениях движения тел в	86
общей теории относительности	
А. С. Потупа, В. И. Стражев, Л. М. Томильчик. Аксиоматическая модель	96
классической электродинамики	
А. А. Афанасьев. Импульсное вынужденное комбинационное рассеяние пер-	101
вого порядка	
А. П. Кузнецык. Энергетичная яркась неба у вобласці 1,8—5,2 мкм	110
С. В. Пазойскі. Роля статычнага зараду ядра у вызначэнні імавернасці пар-	118
най E0-канверсіі	

КАРОТКІЯ ПАВЕДАМЛЕННІ

В. А. Емеличев, А. М. Кононенко. Об одной комбинаторной перечислительной	120
задаче	123
Э. М. Пальчик. О конечных группах с 2-замкнутыми подгруппами	125
А. И. Тузик. К решению особых интегральных уравнений с ядром Коши в	
исключительном случае	128
С. А. Негрей, Е. И. Фирсов. Ge(Li)-спектрометр для изучения гамма-лучей ра-	
диационного захвата тепловых нейтронов	132
А. М. Гончаренко. Об анизотропных однопреломляющих средах	

СОДЕРЖАНИЕ

И. И. Жбанкова, В. И. Ленин и прогресс физической науки	5
МАТЕМАТИКА	
А. Е. Залесский. О групповых кольцах разрешимых групп	13
П. И. Соболевский, Л. А. Янович. О приближенном вычислении интегралов Винера	22
А. К. Покало. Линейные методы приближения производных и интегралов в смысле Вейля периодических функций	32
Я. В. Константинова. О сходимости и устойчивости многослойного разностного правила решения уравнения теплопроводности	40
Л. Г. Кругликова. Метод наименьших квадратов в преобразовании последовательностей	48
В. Н. Лаптинский, Ю. Д. Городецкий, В. В. Серов. К приближенному решению нелинейных интегральных уравнений	56
Г. Н. Пыхтеев. О построении квадратурных формул для интегралов типа Коши по прямолинейному разомкнутому контуру	61
М. Э. Толочко. О краевой задаче Римана для бесконечно связной области	70
ФИЗИКА	
В. А. Плетюхов, Ф. И. Федоров. Волновое уравнение с кратными представлениями для частицы со спином 0	79
А. П. Рябушко. О погрешностях в приближенных уравнениях движения тел в общей теории относительности	86
А. С. Потупа, В. И. Стражев, Л. М. Томильчик. Аксиоматическая модель классической электродинамики	96
А. А. Афанасьев. Импульсное вынужденное комбинационное рассеяние первого порядка	101
О. П. Кузнецик. Энергетическая яркость неба в области 1,8—5,2 мкм	110
С. В. Позойский. Роль статического заряда ядра в определении вероятности парной $E0$ -конверсии	118
КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ	
В. А. Емеличев, А. М. Кононенко. Об одной комбинаторной перечислительной задаче	120
Э. М. Пальчик. О конечных группах с 2-замкнутыми подгруппами	123
А. И. Тузик. К решению особых интегральных уравнений с ядром Коши в исключительном случае	125
С. А. Негрей, Е. И. Фирсов. Ge(Li)-спектрометр для изучения гамма-лучей радиационного захвата тепловых нейтронов	128
А. М. Гончаренко. Об анизотропных однопреломляющих средах	132

АТ 03092. Здадзена ў набор 24/11-70 г. Падпісана да друку 17/IV-70 г. Фармат 70×108^{1/16}. Друк. арк. 8,75. Ум. друк. арк. 12,25. Уч.-выд. арк. 11,8. Выд. зак. 1217. Друк. зак. 163. Цана 60 кап.

Друкарня імя Францыска (Георгія) Скарыны выдавецтва «Навука і тэхніка» АН БССР і Дзяржкамтэта СМ БССР па друку. Мінск, Ленінскі праспект, 68

РЕФЕРАТЫ

УДК 512

О групповых кольцах разрешимых групп. Залесский А. Е. «Весті Акадэміі навук БССР», серыя фізіка-матэматычных навук. 1970 г., № 2, 13—21.

Дается критерий полупростоты в смысле Джекобсона групповой алгебры над полем P 1) разрешимой группы, имеющей точное матричное представление над каким-либо полем; 2) периодической разрешимой группы в том случае, когда группа содержит элементы порядка, делящегося на характеристику поля P .

Библиографий 13.

УДК 518:517.392

О приближенном вычислении интегралов Винера. Соболевский П. И., Янович Л. А. «Весті Акадэміі навук БССР», серыя фізіка-матэматычных навук. 1970 г., № 2, 22—31.

Для приближенного вычисления интеграла Винера $\int_C p(x) F(x) d_W x$ с весовым функционалом

$$p(x) = \exp \left\{ \lambda \int_0^1 \rho(t) x^2(t) dt + \int_0^1 g(t) x(t) dt \right\},$$

где функция $\rho(t) > 0$ и непрерывна на отрезке $[0, 1]$, λ — числовой параметр, а $g(t) \in L[0, 1]$, строится формула вида

$$\int_C p(x) F(x) d_W x \approx A \int F[\Theta_n(u, \cdot) + a(\cdot)] v_n(du), \quad (1)$$

где в правой части стоит n -кратный интеграл Лебега по мере v_n . Константа A и функция $a(t)$ выражаются через известные величины, функция $\Theta_n(u, t)$ и мера v_n взаимосвязаны и находятся из некоторого условия.

Формула (1) является точной, когда $F(x)$ — любой функциональный многочлен степени $2n + 1$. Она включает в себя формулы Р. Камерона (Duke Math. J., 18, № 1, 1951), В. С. Владимирова (РЖМат, 1962, 3В15), А. Г. Конхейма и В. Л. Миранкера (РЖМат, 1967, 12В726), Т. Тобиаса (РЖМат, 1966, 9В616).

Библиографий 9.

УДК 517.512.2

Линейные методы приближения производных и интегралов в смысле Вейля периодических функций. Показло А. К. «Весті Акадэміі навук БССР», серыя фізіка-матэматычных навук. 1970 г., № 2, 32—39.

Строятся суммы; аппроксимирующие функцию $f_\gamma(x)$, линейно выражающуюся через производные Вейля порядка γ , если $\gamma > 0$, или через интегралы Вейля порядка $-\gamma$, если $\gamma < 0$, функции $f(x)$ и сопряженной с ней функции. Выделяется главная часть уклонения построенных сумм от функции $f_\gamma(x)$.

Библиографий 7.

УДК 518:517.944/947

О сходимости и устойчивости многослойного разностного правила решения уравнения теплопроводности. Константинова Я. В. «Весті Академії наук БССР», серия фізика-математичних наук. 1970 г., № 2, 40—47.

Рассматриваются общего вида явные трехстолбцовые, многослойные схемы с произвольными действительными коэффициентами для решения смешанной задачи 1-го рода в случае уравнения теплопроводности.

Доказана теорема сходимости сеточной функции к точному решению. Библиографий 7.

УДК 518

Метод наименьших квадратов в преобразовании последовательностей. Кругликова Л. Г. «Весті Академії наук БССР», серия фізика-математичних наук. 1970 г., № 2, 48—55.

При помощи метода наименьших квадратов построены линейные преобразования последовательностей. Подробно рассмотрено преобразование со степенью приближения m и с фиксированным числом узлов p ($m < p$). Установлены достаточные условия сходимости и улучшения сходимости последовательности при помощи построенного преобразования.

Библиографий 3.

УДК 517.91

К приближенному решению нелинейных интегральных уравнений. Лаптинский В. Н., Городецкий Ю. Д., Серов В. В. «Весті Академії наук БССР», серия фізика-математичних наук. 1970 г., № 2, 56—60.

Для нахождения приближенного аналитического решения векторного уравнения

$$\varphi(t) = \int_a^b K[t, s, \varphi(s)] ds + \psi(t)$$

предлагается итерационный метод, основанный на расщеплении основного оператора на два так, что полученное затем укороченное уравнение решается точно, а стало быть, находятся приближенные решения исходного уравнения. Полученные оценки показывают преимущество в скорости сходимости предложенного метода по сравнению с классическим методом итераций Пикара — Линделефа.

Библиографий 6.

УДК 517.392

О построении квадратурных формул для интегралов типа Коши по прямолинейному разомкнутому контуру. Пыхтеев Г. Н. «Весті Академії наук БССР», серия фізика-математичних наук. 1970 г., № 2, 61—69.

Для интегралов типа Коши

$$\Omega(z) = \frac{\omega(z)}{\pi i} \int_{-1}^1 \frac{1}{\omega(t)} \frac{f(t)}{t-z} dt, \quad z \in \bar{[-1, 1]},$$

и их главных значений

$$T(x) = \frac{\omega(x)}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{1}{\omega(t)} \frac{f(t)}{t-x} dt, \quad x \in (-1, 1)$$

указываются три способа построения приближенных формул, рассмотренных автором ранее («Весті Академії наук БССР», серия фізика-математичных наук. 1969, № 5).

Библиографий 1.

УДК 517.948.32

О краевой задаче Римана для бесконечно связной области. Толочко М. Э. «Весті Академії наук БССР», серия фізика-математичных наук. 1970 г., № 2, 70—78.

Изучается задача

$$\Phi^+(t) = G(t) \Phi^-(t) + g(t) \quad (1)$$

для случая, когда краевое условие (1) определено на некоторой счетной совокупности гладких замкнутых кривых. Устанавливаются условия существования ограниченных решений задачи (1) в предположении, что индекс коэффициента $G(t)$ отличен от нуля, вообще говоря, на бесконечном множестве указанных кривых.

Библиографий 5.

УДК 539:12

Волновое уравнение с кратными представителями для частицы со спином 0. Плетюхов В. А., Федоров Ф. И. «Весті Академії наук БССР», серия фізика-математичных наук. 1970 г., № 2, 79—85.

Построено релятивистское волновое уравнение для частицы со спином 0 с использованием двукратного векторного представления собственной группы Лоренца. Матрицы уравнения 15-го порядка имеют минимальный полином $\gamma^3(\gamma^2-1)$. Сечение рассеяния данной частицы в кулоновском поле совпадает с обычным, в то время как сечение комптон-эффекта отличается от даффин-кеммеровского для частицы с нулевым спином.

Библиографий 13.

УДК 530.12

О погрешностях в приближенных уравнениях движения тел в общей теории относительности. Рябушко А. П. «Весті Академії наук БССР», серия фізика-математичных наук. 1970 г., № 2, 86—95.

В поле Шварцшильда даются оценки погрешностей, совершаемых при использовании вместо точных приближенных (ньютоновых и посленьютоновых) уравнений движения пробных тел. Указываются области, где приближенная теория движения дает результаты, близкие к точным, и области, где погрешности становятся большими или приводят к качественным изменениям. Исследования проводятся с учетом искривленности пространства и изменения хода времени. Попутно определяется истинный радиус сферы Шварцшильда.

Библиографий 10.

УДК 538.3+530.12

Аксиоматическая модель классической электродинамики. Потупа А. С., Стражев В. И., Томильчик Л. М. «Весті Академії наук БССР», серия фізика-математических наук. 1970 г., № 2, 96—100.

На основе анализа измерений в системе пробных тел и уравнения неразрывности для тока построена аксиоматическая модель дуально-инвариантной классической электродинамики. В отличие от схемы Боппа принцип наименьшего действия не использован ни на одном этапе, благодаря явному учету дуальной инвариантности.

Библиографий 9.

УДК 612.84

Импульсное вынужденное комбинационное рассеяние первого порядка. Афанасьев А. А. «Весті Академії наук БССР», серия фізика-математических наук. 1970 г., № 2, 101—109.

На основании нестационарных уравнений переноса проведен расчет импульса слабого вынужденного комбинационного рассеяния (ВКР) в случае, когда влиянием рассеяния на первичный поток можно пренебречь. Получены аналитические выражения, описывающие зависимость формы, положения и величины максимума мощности, а также длительности импульса ВКР от направления рассеяния и параметров первичного излучения. Анализ проведен для случая, когда нестационарный рассеиваемый поток задан в виде прямоугольного импульса конечной длительности.

Иллюстраций 3. Библиографий 13.

УДК 551.51

Энергетическая яркость неба в области 1,8—5,2 мкм. Кузнецик О. П. «Весті Академії наук БССР», серия фізика-математических наук. 1970 г., № 2, 110—117.

С помощью радиометрической установки, допускающей сканирование по азимуту и углу возвышения со скоростью $0,0096 \text{ рад} \cdot \text{сек}^{-1}$, исследовалось распределение энергетической яркости по облачному небу, по небу с переменной облачностью и по ясному небу в «окнах прозрачности» атмосферы 1,8—2,5, 3,9—4,2, 4,5—5,2 мкм и в области 3,9—5,2 мкм. Измерения проводились в условиях города Минска (высота над уровнем моря 243 м).

Описана методика измерений, аппаратура и ее калибровка. Полученные экспериментальные данные приведены в виде карт изофот энергетической яркости. Обсуждаются результаты измерений и приведены основные выводы.

Таблиц 2. Иллюстраций 4. Библиографий 4.

УДК 539.166

Роль статического заряда ядра в определении вероятности парной E_0 -конверсии. Позойский С. В. «Весті Академії наук БССР», серия фізика-математических наук. 1970 г., № 2, 118—119.

Исследуется влияние распределения статического заряда ядра на приведенную вероятность E_0 -конверсии с образованием пар. Расчеты, проведенные для $Z=20, 62, 64, 92$, показывают, что это влияние, как и в случае E_0 -конверсии на оболочках, существенно. Отношение же вероятностей E_0 -конверсии на оболочках к вероятностям парной E_0 -конверсии от распределения заряда зависят слабо.

Таблиц 1. Библиографий 10.

УДК 519.10

Об одной комбинаторной перечислительной задаче.
Емеличев В. А., Кононенко А. М. «Весті Академії наук БССР», серия фізика-математичних наук. 1970 г., № 2, 120—122.

Подсчитывается количество базисов транспортной задачи линейного программирования порядка $m \times n$. Так как всякому такому базису взаимно однозначно соответствует дуальный граф, являющийся деревом, то соответствующая формула $m^{n-1}n^{m-1}$ доказана многими авторами при помощи аппарата теории графов и производящих функций. В работе приводится новое доказательство этой формулы в терминах теории матриц.

Библиографий 8.

УДК 519.44

О конечных группах с 2-замкнутыми подгруппами.
Пальчик Э. М. «Весті Академії наук БССР», серия фізика-математичних наук. 1970 г., № 2, 123—124.

Рассматриваются только конечные группы. Ядром подгруппы H в группе G называется наибольший нормальный делитель G , заключенный в H . Группа G называется 2-замкнутой, если ее 2-силовская подгруппа G_2 инвариантна. $|G|$ — порядок группы G . В заметке доказана следующая

Теорема. Пусть в группе G имеется максимальная подгруппа с ядром I . Пусть, далее, в группе G 2-замкнуты 1) все максимальные подгруппы, имеющие ядро I , 2) все максимальные подгруппы, содержащие G_2 . Тогда группа G разрешима.

Библиографий 4.

УДК 517.948.32

К решению особых интегральных уравнений с ядром Коши в исключительном случае. Тузик А. И. «Весті Академії наук БССР», серия фізика-математичних наук. 1970 г., № 2, 125—129.

В классе гельдеровских функций рассматривается полное особое интегральное уравнение с ядром Коши

$$a(t)\varphi(t) + \frac{b(t)}{\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t} d\tau + \int_{\Gamma} k(t, \tau)\varphi(\tau) d\tau = f(t), \quad (1)$$

в котором

$$a(t) - b(t) = \prod_{j=1}^{\nu} (t - c_j)^{n_j} \prod_{i=1}^{\mu} (t - \alpha_i)^{m_i} r(t),$$

$$a(t) + b(t) = \prod_{j=1}^{\nu} (t - c_j)^{n_j} \prod_{k=1}^{\nu} (t - \beta_k)^{p_k} s(t),$$

где $r(t)$, $s(t)$ нигде на Γ не обращаются в нуль; c_j , α_i , β_k — точки контура Γ ; n_j , m_i , p_k — целые неотрицательные числа.

Устанавливается, что уравнение (1) может быть сведено к полному особому интегральному уравнению с ядром Коши нормального типа и совокупности определенных функциональных соотношений.

Библиографий 9.

УДК 539.1.074.55

Ge(Li)-спектрометр для изучения гамма-лучей радиационного захвата тепловых нейтронов. Негрей С. А., Фирсов Е. И. «Весті Академії наук БССР», серия фізика-математичних наук. 1970 г., № 2, 128—131.

Дается описание спектрометра γ -лучей на Ge(Li)-детекторе с объемом чувствительной области $2,7 \text{ см}^3$, установленного на касательном канале реактора ИРТ-2000 и предназначенного для изучения спектров γ -лучей

из реакции (n, γ) на тепловых нейтронах. Описана методика выведения пучка тепловых нейтронов из касательного канала. Приведен спектр γ -лучей из реакции $Cl^{35}(n, \gamma)Cl^{36}$.

Иллюстраций 2. Библиографий 2.

УДК 535+538.566

Об анизотропных однопреломляющих средах. Гончаренко А. М. «Весті Академії наук БССР», серия фізика-математичних наук. 1970 г., № 2, 132.

Показано, что если транспонированный тензор магнитной проницаемости пропорционален тензору диэлектрической проницаемости, то среда является однопреломляющей анизотропной средой.

Библиографий 2.



ПРАВИЛА ДЛЯ АВТОРОВ

1. Статьи должны быть написаны на машинке через два интервала на одной стороне листа и представляться в двух экземплярах.

2. Формулы и буквенные обозначения должны быть аккуратно вписаны от руки чернилами. Для формул, выделенных в отдельную строку, следует оставлять достаточные пробелы в тексте. Греческие буквы должны быть обведены красным карандашом. Буквы, вписанные от руки, в формулах и в тексте должны подчеркиваться простым карандашом: прописные — двумя черточками снизу (напр., \underline{S}), строчные — двумя черточками сверху (напр., \overline{s}). Следует различать буквы O (прописную), o (строчную) и 0 (нуль), для чего буквы O и o подчеркивать двумя черточками, а нуль отмечать квадратной скобкой снизу (O , \overline{o} , 0). Следует также различать буквы I и J (йот), для чего I писать, как римскую единицу, подчеркивая ее двумя черточками снизу. Векторы подчеркивать чернилами одной чертой снизу. Математические символы \cos , \sin , \lg и др., набираемые прямым шрифтом, и химические символы элементов (H , N , Cl , Fe и т. д.) отмечаются простым карандашом квадратной скобкой снизу ($\underline{\sin}$, $\underline{\lg}$, \underline{N} , \underline{Cl}). Показатели степени и индексы, а также надстрочные знаки отмечаются дугой \smile (для верхнего индекса) или \frown (для нижнего).

3. В связи с введением с 1 января 1963 г. Международной системы единиц измерения (СИ) размерность всех величин, принятых в статьях, должна соответствовать указанной системе единиц измерения.

4. Цитируемая в статье литература должна даваться автором не в виде подстрочных сносок, а общим списком в конце статьи с обозначением ссылки в тексте порядковой цифрой в квадратных скобках. Список литературы должен быть оформлен следующим образом:

а) для книг: фамилия и инициалы автора, полное название книги, номер тома, место и год издания;

б) для журнальных статей: фамилия и инициалы автора, название журнала, номер тома (подчеркнуть), номер выпуска, страница и год.

Ссылки на неопубликованные работы не допускаются.

5. Рисунки должны быть выполнены на белой бумаге тушью размером 15×20 см; надписи на рисунках не делать. Все обозначения указывать в тексте подрисуночных подписей. К статье прилагается список с номерами рисунков и текстом подрисуночных подписей. В тексте на полях обязательно указывается место для рисунков и таблиц.

Таблицы и список литературы печатаются на отдельных листах и прилагаются в конце статьи. Фотографии должны иметь контрастное изображение и быть отпечатаны на хорошей бумаге размером не менее 9×12 см. На обороте рисунков должны быть указаны фамилия автора, название статьи и номер рисунка.

6. В случае представления двух или более статей одновременно необходимо указывать желательный порядок их помещения.

7. Авторы должны избегать повторения одних и тех же данных в таблицах, графиках и в тексте статьи.

8. К статье обязательно прилагается 2 экз. реферата.

9. Корректуры статей авторам, как правило, не посылаются. В случае послышки корректуры допускается лишь исправление ошибок типографии.

Корректурa должна возвращаться в редакцию не позже, чем на следующий день после получения ее автором. Невозвращение корректуры в срок не приостанавливает печатания статьи.

10. В случае возвращения статьи автору для исправления или при ее сокращении датой представления считается день получения редакцией окончательного текста.

4431-28a



80000003504272

60 к.