

30к-3
58

ВЕСЦІ

АКАДЭМІІ НАВУК БССР

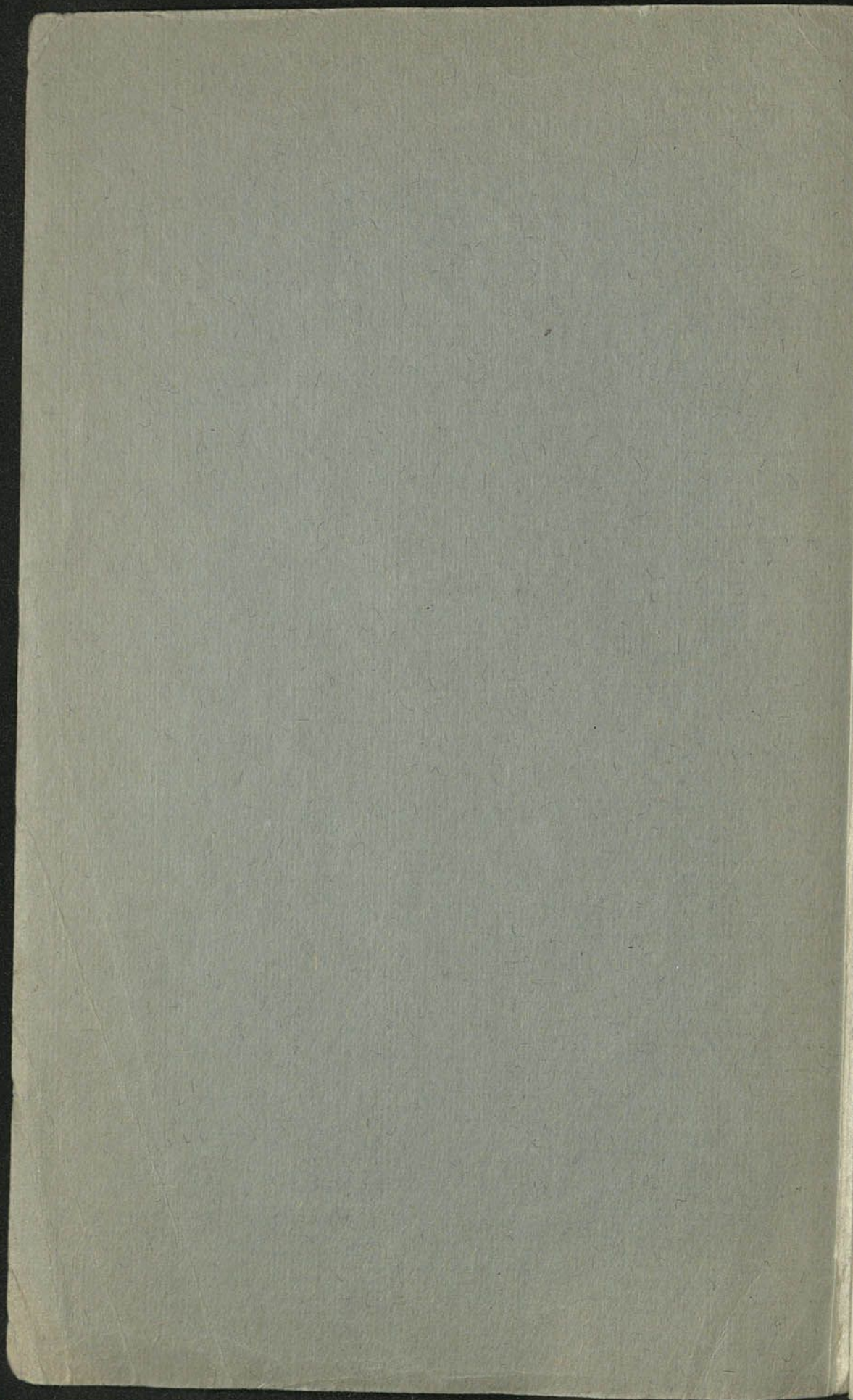
СЕРЫЯ
ФІЗІКА-МАТЭМАТЫЧНЫХ
НАВУК

ба 05
4431

3

ВЫДАВЕЦТВА „НАВУКА І ТЭХНІКА“

МІНСК 1970



3/3



Дзяржаўная
бібліятэка
БССР
Імя У.І. Леніна

ИЗВЕСТИЯ

АКАДЕМИИ НАУК БССР

СЕРИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ
НАУК

№ 3

ИЗДАТЕЛЬСТВО „НАУКА И ТЕХНИКА“

МИНСК 1970

ВЕСЦІ

30кз
58

АКАДЭМІІ НАВУК БССР

СЕРЫЯ
ФІЗІКА-МАТЭМАТЫЧНЫХ
НАВУК

OS
Ba 4434

№ 3

ВЫДАВЕЦТВА „НАВУКА І ТЭХНІКА“

МІНСК 1970

Дзяржаўная
бібліятэка
БССР
Імп. У.І. Леніна

Рэдакцыйная калегія:

Ф. І. ФЕДАРАУ (галоўны рэдактар),
Д. А. СУПРУНЕНКА (нам. галоўнага рэдактара),
М. М. АЛЯХНОВІЧ, Ф. Д. ГАХАУ, У. І. КРЫЛОУ,
М. М. СІРАТА, У. Г. СПРЫНДЖУК, Я. І. ФІРСАУ,
С. А. ЧУНІХІН

И. П. ДОКТОРОВ

КОНЕЧНЫЕ ГРУППЫ С π -СПЕЦИАЛЬНЫМИ ПОДГРУППАМИ

В настоящей работе изучаются свойства групп в зависимости от наличия в них π -специальных подгрупп определенного типа. В теореме 1 показывается условие π -разрешимости группы с π -специальной максимальной подгруппой, обобщающее теорему о разрешимости конечной группы с максимальной нильпотентной подгруппой, у которой 2-силовская подгруппа метабелева (Дескино—Янко—Томпсон, теорема IV. 7.4, [3]; Белоногов В. А. [2]).

В последние годы много работ было посвящено исследованию конечных групп, допускающих факторизацию с определенными факторами. Так, Виландтом и Кегелем [7, 16] был получен выдающийся результат о разрешимости конечной группы, факторизуемой двумя нильпотентными факторами. В работах [8, 10, 13—15] и др. получен ряд важных результатов о разрешимости и обобщенной разрешимости конечных групп, факторизуемых π -разложимыми подгруппами определенного типа. В настоящей работе изучается свойство групп, в которых π -разложимость факторов заменяется более слабым требованием — π -специальностью. Теоремами 3—8 показаны условия π -разрешимости и простоты конечной группы, факторизуемой своими π -специальными подгруппами, причем теоремы 3 и 4 включают в себя соответственно теоремы 2 и 1 из [8]. Теоремы 9, 10 дополняют теорему из [12].

В дальнейшем используются следующие обозначения и определения.

G — всегда конечная группа порядка (G) ; p, q, \dots — простые числа, делящие порядок группы; H_p — p -силовская подгруппа группы H ; $H^g = g^{-1}Hg$, где g — элемент группы G ; π — некоторое пустое или непустое множество простых чисел; π' — дополнение к множеству π во множестве всех простых чисел; $\pi(H)$ — множество простых чисел из π , делящих порядок группы H ; $\pi'(H)$ — множество простых делителей порядка группы H , которые не входят в π ; S_π -подгруппа — π -подгруппа, индекс которой в G не делится ни на одно простое число из π ; $\{A^G\}$ — подгруппа, порожденная всеми сопряженными с A подгруппами группы G ; группа G обладает свойством D_π , если она содержит по крайней мере одну S_π -подгруппу, любые две ее S_π -подгруппы сопряжены и любая ее π -подгруппа содержится в некоторой S_π -подгруппе [1]; E — единичная подгруппа.

Конечная группа, порядок которой делится на простое число p , называется pd -группой [1].

Порядки групп A и B называются π -взаимно простыми, если наибольший общий делитель их порядков не делится на простые числа из π .

Группа, все подгруппы которой инвариантны, называется дедекиндовой.

Группа называется метабелевой, если ее коммутант входит в центр.

Нильпотентная группа, все собственные подгруппы которой нильпотентны, называется группой Шмидта, или группой типа S [1].

Группа называется p -разложимой, если она разлагается в прямое произведение своих p -силовской подгруппы и p -силовского дополнения [1].

Если каждый в отдельности индекс композиционного ряда группы G не делится ни на одно простое число из π или равен некоторому простому числу из π , то G называется π -разрешимой группой [1].

Группа G называется π -специальной, если для каждого простого числа $p \in \pi$ p -силовская подгруппа G_p инвариантна в G [1].

Очевидно, что всякая π -специальная группа имеет инвариантную нильпотентную S_π -подгруппу и что всякая подгруппа и фактор-группа π -специальной группы π -специальны.

Теорема 1. Пусть группа G имеет π -специальную максимальную подгруппу H и $HN_q^g = H_q^g N$ для всех $q \in \pi'$ и $g \in G$. Если 2-силовская подгруппа группы H метабелева, то группа G π -разрешима.

Доказательство. Предположим, что порядок подгруппы H не делится ни на одно простое число из π' . Тогда, согласно определению π -специальной группы, H является нильпотентной максимальной подгруппой группы G , и по теореме Белоногова В. А. из [2] группа G разрешима.

Пусть тогда порядок подгруппы H делится на простые числа из π' . По условию теоремы $HN_q^g = H_q^g N$ для всех $q \in \pi'$ и $g \in G$, где H_q — q -силовская подгруппа группы H . Покажем, что для любого $g \in G$ $HN_q^g = G$ невозможно. Действительно, если в группе G найдется такой элемент g , что $G = HN_q^g$, то g можно представить в виде $g = hh_1^g$, $h \in H$ и $h_1 \in H_q$. $g \notin H$, так как в противном случае $HN_q^g = H \neq G$, что невозможно. Из равенства $g = hh_1^g = hg^{-1}h_1g$ будем иметь $g^{-1} = h^{-1}h_1^{-1}$ или $g = h_1h$. Тогда, так как $h_1 \in H_q$ и $h \in H$, получим, что $g = h_1h \in H_q N = H$, что противоречит выбору элемента g . Таким образом, для любого $g \in G$ $HN_q^g \neq G$. Но так как $HN_q^g \supseteq H$ и H максимальна в G , то $H_q^g \subseteq H$ для всякого $g \in G$, значит и $\{H_q^g\} \subseteq H$. Если q_1, q_2, \dots, q_r — все простые делители порядка H , которые не входят в множество π , то так как $\{H_{q_i}^g\} \subseteq G$ и $\{H_{q_i}^g\} \subseteq H$, $i = 1, 2, \dots, r$, их порождение $\{\{H_{q_1}^g\}, \{H_{q_2}^g\}, \dots, \{H_{q_r}^g\}\}' = N$ является инвариантной подгруппой группы G , заключенной в H , и, следовательно, π -разрешимой группой. Так как H — максимальная подгруппа группы G и все силовские π' -подгруппы из H входят в N , то H/N является нильпотентной максимальной подгруппой группы G/N и, как было показано выше, фактор-группа G/N разрешима. Тогда π -разрешима и группа G . Теорема доказана.

Из доказательства вытекает дополняющая теорему из [6]

Теорема 2. Если в условии теоремы 1 подгруппа H группы G разрешима, то разрешима и группа G .

Теоремы 3 и 4 являются аналогами теорем соответственно 2 и 1 из [8].

Теорема 3. Пусть $G = AB$, где A и B — π -специальные подгруппы группы G , порядки которых π' -взаимно просты. Если любая силовская π -подгруппа каждого множителя перестановочна с любой силовской π' -подгруппой другого множителя, то группа G π -разрешима.

Доказательство. Допустим, что теорема неверна и группа G — контрпример минимального порядка.

Группа G не имеет π -разрешимых инвариантных подгрупп. Действительно, пусть N — π -разрешимая инвариантная подгруппа группы G . Для фактор-группы $G/N = AN/N \cdot BN/N$, где $AN/N \cong A/A \cap N$ и $BN \cong B/B \cap N$, условия теоремы выполняются и, так как $(G/N) < (G)$, то по индукции G/N π -разрешима. Следовательно, π -разрешима и группа G . Противоречие.

Множества $\pi(G)$ и $\pi'(G)$ не могут быть пустыми, так как в противном случае, если множество $\pi(G)$ пусто, то группа G тривиально π -разрешима, а если множество $\pi'(G)$ пусто, то подгруппы A и B будут нильпотентными и по теореме Виландта — Кегеля группа G разрешима.

Следовательно, в подгруппах A и B найдутся силовские подгруппы, соответствующие простым числам p и q , $p \in \pi$ и $q \in \pi'$, причем одна из них будет принадлежать подгруппе A , а другая — B . Не нарушая общности, пусть $A_p \subseteq A$ и $B_q \subseteq B$.

По условию теоремы $A_p B_q^b = B_q^b A_p$ для любого $b \in B$. Так как $G = AB^g$ для $g \in G$ и $g = ba$, то $A_p B_q^g = B_q^g A_p$. $A_p B_q \neq G$, так как в противном случае группа G была бы бипримарной, а следовательно, разрешимой группой. Отсюда следует, что для группы G выполняются условия теоремы Кегеля [7], тогда группа G не проста.

Пусть N — минимальная инвариантная подгруппа группы G . По правилу Дедекинда, $AN = A(AN \cap B) = AD$, где $AN \cap B = D$. Так как $D \subseteq B$ и B — π -специальная группа, то AN есть произведение двух π -специальных подгрупп, порядки которых не имеют общих простых делителей из π' . Если D_q — q -силовская подгруппа из D , а $D_q \subseteq B_q$, то $A_p D_q = A_p (AN \cap B_q) = AN \cap A_p B_q = AN \cap B_q A_p = (AN \cap B_q) A_p = D_q A_p$, т. е. $A_p D_q = D_q A_p$, где $p \in \pi$, $q \in \pi'$. Следовательно, для $AN = AD$ условия теоремы выполняются. Поэтому, если AN является собственной подгруппой группы G , то AN , а вместе с нею и N будут π -разрешимы, что противоречит предыдущему. Отсюда $AN = G$. Аналогично доказывается, что $BN = G$. Значит, $G = AB = AN = BN$. Порядки A и B не могут быть взаимно простыми. В самом деле, обозначив порядки G, A, B и N соответственно малыми буквами, будем иметь $g = \frac{an}{d_1} = \frac{bn}{d_2}$, где d_1 и d_2 — порядки $A \cap N$ и $B \cap N$ соответственно. Отсюда

следует, что $d_1 \leq a$ и $d_2 \leq b$. С другой стороны, из равенства $\frac{an}{d_1} = \frac{bn}{d_2}$

получим $d_2 = \frac{bd_1}{a}$. Если предположить, что $(a, b) = 1$, то d_1 делится на

a , т. е. $d_1 \geq a$. Но это значит, что $d_1 = a$. Отсюда $g = \frac{an}{a_1} = \frac{an}{a} = n$, т. е.

порядок собственной инвариантной подгруппы группы G равен порядку всей группы, что невозможно. Следовательно, $((A), (B)) \neq 1$.

По условию теоремы, подгруппы A и B π' -взаимно просты, тогда порядки A и B одновременно делятся по крайней мере на одно простое число $p \in \pi$. В этом случае для G выполняются условия леммы 2 из [8], если множество π состоит только из одного простого числа p . Тогда G имеет инвариантную p -подгруппу P . Противоречие. Теорема доказана.

Теорема 4. Пусть $G = AB$, где A и B — π -специальные максимальные подгруппы. Если любая силовская π -подгруппа каждого множителя перестановочна с любой силовской π' -подгруппой другого множителя и группа G обладает свойством D_π , то G π -разрешима.

Доказательство. Пусть теорема неверна и группа G — контрпример минимального порядка.

Как и при доказательстве теоремы 3, можно показать, что группа G имеет нетривиальную инвариантную подгруппу.

Пусть N — минимальная инвариантная подгруппа группы G . Если $N \subseteq A$ и $N \subseteq B$, то N , очевидно, будет π -разрешимой группой и фактор-группа $G/N = A/N \cdot B/N$ будет π -разрешимой по индукции. Следовательно, π -разрешимой будет и группа G . Если же $N \subseteq A$, но N не содержит B , то в силу максимальности подгруппы B имеем, что $BN = G$. Из π -разрешимости N и π -разрешимости G/N следует π -разрешимость G . Аналогичный результат получится, если $N \subseteq B$, но N не содержит A . Следовательно, в дальнейшем будем считать, что N не содержит A и N не содержит B .

Рассмотрим следующие возможные случаи.

Случай $A_\pi = B_\pi = E$ невозможен, так как в противном случае группа G будет тривиально π -разрешимой.

Случай $A_{\pi'} = B_{\pi'} = E$ также невозможен, так как в противном случае группа G будет разрешимой по теореме Виландта — Кегеля.

Если $A_{\pi'} = E$ или $B_{\pi'} = E$, то группа G будет π -разрешимой по теореме 3.

Пусть тогда одна из подгрупп A_π или B_π равна единичной подгруппе. Не нарушая общности, пусть $B_\pi = E$. Пусть A_p — силовская p -подгруппа из A , $p \in \pi$. Так как по условию теоремы A_p перестановочна с каждой π' -силовской подгруппой из B и $B_\pi = E$, то A_p перестановочна и с подгруппой B , т. е. $A_p B = B A_p = F$ является подгруппой группы G . $F = G$ невозможно, так как в противном случае из $B_\pi = E$ следует, что $((A_p), (B)) = 1$ и по теореме 3 группа $G = F = A_p B$ будет π -разрешимой. Следовательно, $F \neq G$. Отсюда, по лемме 1 из [8], F содержит собственную инвариантную подгруппу D группы G . $D \subseteq B$ невозможно по предыдущему. Значит, D не содержит B . Тогда из максимальной подгруппы B в G получим $G = BD \subseteq F$, т. е. $G = F$, что противоречит предположению о F .

Пусть, наконец, $A_\pi \neq E$ и $B_\pi \neq E$. Так как по условию теоремы группа G обладает свойством D_π , то по теореме 1 из [15] в G существует S_π -подгруппа $G_\pi = A_\pi B_\pi$ и по теореме Виландта — Кегеля G_π разрешима. Так как N не содержит A и N не содержит B , то из максимальной A и B в G следует $G = AB = AN = BN$. В связи с тем что $A_\pi B_\pi = B_\pi A_\pi = G_\pi$, для G выполняются условия леммы 2 из [8] и поэтому группа G имеет инвариантную π -подгруппу M . Так как M разрешима и $G = AM$, то G/M π -разрешима. Следовательно, π -разрешима и группа G . Противоречие. Теорема доказана.

Теорема 5. Пусть $G = AB$, где A — 2-разложимая $2d$ -группа с дедекиндовой 2-силовской подгруппой, а B — 2-специальная. Тогда группа G не проста.

Доказательство. Если B — подгруппа нечетного порядка, то по теореме 1 из [10] группа G разрешима.

Пусть тогда $B_2 \neq E$. Если $A_2 \cap B_2 = D \neq E$, то так как A 2-разложима и A_2 дедекиндова, то $D \trianglelefteq A$ и по лемме 1 из [4] группа G не проста.

Рассмотрим тогда случай, когда $A_2 \cap B_2 = E$. По теореме 6 из [9] $A_2 B_2 = B_2 A_2$ является 2-силовской подгруппой группы G . Если $K = N_G(B_2)$ — нормализатор B_2 в G , то так как B — 2-специальная группа, то K содержит B как собственную подгруппу и $K_2 \cap A_2 \neq E$. Поэтому $G = AK$ и $A \cap K$ содержит подгруппу, инвариантную в A . Тогда по лемме 1 из [4] группа G не проста. Теорема доказана.

Теорема 6. Пусть $G = AB$, где A — π -специальная подгруппа, а B — дедекиндова. Если $AA_q^g = A_q^g A$ для всех $g \in G$ и $q \in \pi'$, то группа G π -разрешима.

Доказательство. Пусть теорема неверна и группа G — контрпример минимального порядка.

Предположим, что A — максимальная подгруппа группы G . Если порядок A не делится на простые числа из π' , то по теореме Виландта — Кегеля G будет разрешимой группой. Следовательно, в A найдется q -силовская подгруппа A_q , где $q \in \pi'$. По условию теоремы, $AA_q^g = A_q^g A$ для всех $g \in G$. Тогда, как и при доказательстве теоремы 1, мы можем показать, что $N = \{A_{q_i}^g\}$, где q_i , $i = 1, 2, \dots, r$, пробегает все простые делители $\pi'(A)$, является инвариантной подгруппой группы G , заключенной в A . Следовательно, N π -разрешима. Фактор-группа $G/N = A/N \cdot BN/N$. Так как q -силовские подгруппы группы A для всех $q \in \pi'(A)$ входят в N и так как $BN/N \cong B/N \cap N$,

то A/N будет нильпотентной группой и по теореме Виландта—Кегеля фактор-группа G/N будет разрешима. Тогда π -разрешима и группа G . Противоречие.

Значит, A не максимальная подгруппа группы G . Пусть тогда M — максимальная подгруппа группы G , содержащая A . Так как по модулярному тождеству $M = A(M \cap B)$ и $(M) < (G)$, то по индукции M — π -разрешимая группа. Теперь имеем $G = MB$ и $M \cap B \neq E$. Тогда по лемме 1 из [4] в группе G имеется отличная от единичной инвариантная подгруппа N , заключенная в M . Для фактор-группы $G/N = AN/N \cdot BN/N$, где $AN/N \cong A/A \cap N$ и $BN/N \cong B/B \cap N$, все условия теоремы выполняются, и так как $(G/N) < (G)$, то по индукции G/N π -разрешима. Тогда из π -разрешимости N следует π -разрешимость группы G . Противоречие. Теорема доказана.

Из доказательства теоремы 6 вытекают и следующие утверждения.

Теорема 7. *Если в условии теоремы 6 подгруппа A разрешима, то разрешима и группа G .*

Теорема 8. *Пусть $G = AB$, где A — π -специальная максимальная подгруппа группы G , а B — нильпотентная. Если $AA_q^g = A_q^g A$ для всех g из G и q из π' , то группа G π -разрешима. Кроме того, если A — разрешима, то разрешима и группа G .*

Как показано в [12], группа, факторизуемая нильпотентным фактором и минимальной ненильпотентной группой (группой Шмидта), в общем случае неразрешима. Там же дан критерий разрешимости групп из данного класса.

В теоремах 9, 10 даются другие критерии разрешимости факторизуемых групп с нильпотентным и минимальным ненильпотентным факторами, дополняющие результат из [12].

Теорема 9. *Пусть $G = AB$, где A — нильпотентная подгруппа, а B — группа Шмидта. Тогда группа G разрешима, если выполняется одно из следующих требований:*

а) A — максимальная подгруппа группы G , порядок которой не делится на p и $\alpha > 1$, где p^α — порядок неинвариантной силовской подгруппы группы B ;

б) порядки A и B взаимно просты и всякая силовская подгруппа из B перестановочна с подгруппой A .

Доказательство. Пусть теорема неверна и группа G — контрпример минимального порядка.

Предположим сперва, что для G выполняются условия а). Тогда, если G обладает отличной от единичной инвариантной подгруппой N , содержащейся в A , то фактор-группа $G/N = AN/N \cdot BN/N$, где $BN/N \cong B/B \cap N$, будет либо нильпотентной группой, либо группой Шмидта. Так как по а) порядок A не делится на p , то по теореме Виландта—Кегеля или по индукции фактор-группа G/N разрешима. Тогда из разрешимости N следует разрешимость группы G . Противоречие.

Так как группа G не содержит инвариантных подгрупп, заключенных в A , то по теореме Янко [11] A является примарной группой. Тогда по теореме из [12] группа G разрешима. Противоречие.

Пусть теперь выполняются условия б). Если B_p и B_q , $p \neq q$, — силовские подгруппы группы B , то $AB_p = B_p A$ и $AB_q = B_q A$ являются подгруппами группы G . Они разрешимы по теореме Виландта—Кегеля. B — группа Шмидта, следовательно, разрешима. Так как порядки A и B взаимно просты, то индексы этих трех разрешимых подгрупп в группе G взаимно просты. Тогда по теореме VI. 1. 9 из [3] группа G разрешима. Противоречие. Теорема доказана.

Теорема 10. Пусть $G = AB$, где A и B — группы Шмидта взаимно простых порядков, и пусть все силовские подгруппы одного из факторов, например B , перестановочны с подгруппой A . Если показатель степени порядка неизменной силовской подгруппы группы A больше единицы, то группа G разрешима.

Доказательство. Как и в теореме 9, справедливость этого утверждения вытекает из [3] (VI. 1. 9), так как подгруппы AB_p и AB_q , где $p \neq q$, разрешимы по теореме из [12], и B — группа Шмидта. Взаимная простота индексов этих разрешимых подгрупп группы G очевидна.

В заключение выражаю глубокую благодарность профессору Чунихину С. А. за внимание к данной работе.

Литература

1. Чунихин С. А. Подгруппы конечных групп. Минск, 1964.
2. Белоногов В. А. В сб. «V Всесоюзный colloквиум по общей алгебре». Новосибирск, 8, 1963.
3. Huppert B. Endliche Gruppen, I. Berlin—Heidelberg—New-Jork, 1967.
4. Чунихин С. А. Тр. семинара по теории групп, 106, 1038. М.—Л.
5. Thompson D. Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 45, 578, 1959.
6. Белоногов В. А. Сиб. мат. журн., 7, № 2, 658, 1966.
7. Kegel O. Arch. Math., 12, 90, 1961.
8. Черток В. Д. В сб. «Конечные группы». Минск, 1966.
9. Wielandt H. Math. Z., 55, 1, 1951.
10. Ведерников В. А. Мат. заметки, 3, 2, 201, 1968.
11. Janko Z. Glasnik mat.-fiz. i astron., 16, № 3—4, 167, 1961.
12. Докторов И. П. ДАН БССР, 13, 2, 1969.
13. Романовский А. В. ДАН БССР, 13, 2, 1969.
14. Беркович Я. Г. ДАН СССР, 171, 4, 1966.
15. Сергиенко В. И. ДАН БССР, 5, 2, 1961.
16. Wielandt H. Illinois Journ. Math., 2, 46, 611, 1958.

Гомельский государственный
университет

Поступило в редакцию
17.X 1969

Э. М. ПАЛЬЧИК

О МАКСИМАЛЬНЫХ ПОДГРУППАХ КОНЕЧНЫХ ГРУПП

§ 1. В теории конечных групп хорошо известна следующая теорема Р. Бэра [1]: если в группе G имеется максимальная подгруппа с единичным ядром и если каждая такая подгруппа нильпотентна, то группа G разрешима. Напомним, что ядром подгруппы H в группе G называется наибольший нормальный делитель группы G , заключенный в H .

Как видно, Р. Бэр использовал в этой теореме и внутренние и внешние свойства подгрупп. Под внутренними свойствами подгруппы T группы G мы понимаем те свойства, которые присущи T как группе. Примерами внутренних свойств могут служить нильпотентность, обладание нормальным делителем, p -разрешимость и т. д. Под внешними свойствами подгруппы T группы G понимается ее отношение к элементам и подгруппам группы G , не входящим в T (например, максимальность T в группе G , инвариантность T в G , перестановочность T с определенной совокупностью подгрупп или элементов группы G , не обязательно входящих в T , и т. д.).

В настоящей работе нам удалось заменить условие нильпотентности (внутреннее свойство) максимальных подгрупп с единичным ядром условием их перестановочности с определенной совокупностью подгрупп группы (внешним свойством) и получить утверждения, аналогичные теореме Р. Бэра.

§ 2. Обозначения, определения и используемые результаты.

$|G|$ — порядок группы G ; группа типа S — минимальная ненильпотентная группа; группа G называется pd -группой, если p делит $|G|$; группа G называется (p -замкнутой) p' -замкнутой, если в ней инвариантно (p -силовская подгруппа) силовское p -дополнение; H_G — ядро подгруппы H в группе G ; $\Sigma'_p(T)$ ($\Sigma_p(T)$) — множество всех p' -замкнутых (p -замкнутых) pd -подгрупп типа S в группе T ; условимся писать просто Σ'_p и Σ_p , если $T = G$; G_p — p -силовская подгруппа группы G ; $|G:H|$ — индекс подгруппы H в группе G ; будем говорить, что множество подгрупп пусто, если оно состоит только из единичных подгрупп; группа называется p -разложимой, если она есть прямое произведение p -силовской подгруппы и силовского p -дополнения; $\Phi(G)$ — подгруппа Фраттини группы G ; группа типа A — группа типа S , у которой каждая подгруппа имеет порядком степень простого числа; $H^g = g^{-1}Hg$.

Теорема (i). Пусть подгруппа H перестановочна с каждой подгруппой из класса сопряженных максимальных подгрупп, порядок которых делится на $|H|$. Тогда $H \subseteq M_G$, где M — любая подгруппа из указанного класса [2].

Теорема (ii). Группа G 2-замкнута, если множество Σ'_2 пусто [3].

Теорема (iii). Пусть группа G имеет максимальную подгруппу с единичным ядром. Если каждая такая подгруппа имеет в G индексом простое число, то G — разрешимая группа [4].

Теорема (iv). Пусть H — произвольная подгруппа группы G . Среди подгрупп, порождающих вместе с H группу G , выберем наименьшую (относительно теоретико-множественного включения) L . Тогда $H \cap L \subseteq \Phi(L)$ [5].

Теорема (v). Пусть H — нормальный делитель G . Если $H \subseteq \Phi(G)$, то $\Phi(G/H) = \Phi(G)/H$ [6].

Теорема (vi). Пусть H — нормальный делитель G . H тогда и только тогда нильпотентна, когда $H/H \cap \Phi(G)$ нильпотентна [6].

Теорема (vii). Если H — группа типа S , то $H/\Phi(H)$ — группа типа A [7].

Теорема (viii). Пусть A, B, H — подгруппы группы G . Если $AH = HA, BH = HB$, то и $\{A, B\} \cdot H = H \cdot \{A, B\}$ [8].

Теорема (ix). Если $AB = BA$, где A и B — подгруппы группы G , и φ — гомоморфизм G в G^φ , то и $A^\varphi B^\varphi = B^\varphi A^\varphi$ [9].

Теорема (x). Пусть в группе G существует p -разложимая максимальная подгруппа T , порядок которой делится по меньшей мере на два различных простых числа. Тогда в G имеется нормальный делитель одного из следующих видов: а) p -силовская подгруппа из T ; б) силовское p -дополнение из T ; в) силовское дополнение в G .

Теорема (x) доказана в [10].

§ 3. Простым следствием теоремы Р. Бэра (§ 1) является следующее утверждение: если в группе G имеется максимальная подгруппа с ядром C и если каждая такая подгруппа нильпотентна, то группа G/C разрешима. Учитывая разрешимость подгруппы C , получаем, что даже группа G разрешима.

Основным содержанием этого параграфа является доказательство нескольких утверждений, аналогичных указанным в § 1 и 3.

Приведем сначала несколько вспомогательных предложений, представляющих и самостоятельный интерес.

Лемма 1. Если подгруппа H группы G перестановочна со всеми сопряженными с F подгруппами, то и F перестановочна со всеми сопряженными с H подгруппами.

Доказательство. Пусть $h, h_1 \in H$; $f, f_1 \in F$. По условию $hg^{-1}fg = g^{-1}f_1gh_1$. Пусть $x, y \in G$. Полагаем $yx^{-1} = g$. Тогда $hxy^{-1}f_1yx^{-1} = xy^{-1}f_1yx^{-1}h_1$. Умножая слева на x^{-1} , а справа на x , получаем утверждение.

Лемма 2. Если подгруппа H перестановочна со всеми подгруппами из Σ_p и T — нормальный делитель G , то также подгруппа HT/T перестановочна со всеми подгруппами из $\Sigma_p(G/T)$.

Доказательство. Пусть $F/T \in \Sigma_p(G/T)$. Пусть F_1 — наименьшая подгруппа из F , порождающая вместе с T группу F . По теоремам (iv) и (v) $F/T/\Phi(F/T) = F_1T/T/\Phi(F_1T/T) \cong F_1/F_1 \cap T/\Phi(F_1/F_1 \cap T) \cong F_1/F_1 \cap T/\Phi(F_1)/F_1 \cap T \cong F_1/\Phi(F_1)$. По теореме (vii) $F/T/\Phi(F/T)$ есть группа типа A . Поэтому любой нормальный делитель $K/\Phi(F_1)$ группы $F_1/\Phi(F_1)$ нильпотентен. Тогда по теореме (vi) и K есть нильпотентная группа. Значит, F_1 порождается своими p -замкнутыми pd -подгруппами типа S , ибо в противном случае их порождение было бы, как уже сказано, нильпотентным нормальным делителем, что невозможно, так как группы типа S ненильпотентны (если бы F_1 не содержала подгрупп из $\Sigma_p(F_1)$, то по теореме 4.3.1 из [16] F_1 была бы p' -замкнутой, но тогда и фактор-группа $F_1/F_1 \cap T$ была бы p' -замкнутой, что противоречило бы выбору подгруппы $F/T (= F_1T/T \cong F_1/F_1 \cap T)$). По теореме (viii) тогда $HF_1 = F_1H$. Но в таком случае, очевидно, и $HT \cdot F_1T = F_1T \cdot HT$. Но тогда и гомоморфные образы HT/T и $F/T (= F_1T/T)$ перестановочны по теореме (ix). Лемма доказана.

Лемма 3. Пусть M — порождение всех pd -подгрупп типа S группы G . Тогда группа G/M p -разложима.

Доказательство. Если в G нет pd -подгрупп типа S , то даже группа G p -разложима по теореме 1.12.2 из [16]. Поэтому пусть $M \neq 1$. Предположим, что G/M имеет pd -подгруппу H/M типа S . Выберем в H такую наименьшую подгруппу H_1 , которая вместе с M порождает H . По теореме (iv) имеем, что $H_1 \cap M \subseteq \Phi(H_1)$. По теореме об изоморфизме $H/M = H_1M/M \cong H_1/H_1 \cap M$. Так как H/M либо p -замкнута, либо p' -замкнута [12], то также H_1 соответственно либо p -замкнута, либо p' -замкнута ([17], § 2) ввиду $H_1 \cap M \subseteq \Phi(H_1)$. Возьмем теперь в H_1 pd -подгруппу F типа S . Если бы такой не существовало в H_1 , то по теореме 1.12.2 из [16] H_1 была бы p -разложимой, что противоречило бы выбору $H/M \cong H_1/H_1 \cap M$. Так как F ненильпотентная группа, то F не принадлежит $H_1 \cap M \subseteq \Phi(H_1)$. Это значит, что F не принадлежит M . Противоречие с выбором M показывает, что G/M не может содержать pd -подгрупп типа S и, следовательно, p -разложима по теореме 1.12.2 из [16]. Лемма доказана.

Лемма 3 дополняет теорему 1.12.2 из [16].

Теорема 1. Пусть группа G обладает максимальной подгруппой с единичным ядром, и пусть каждая такая подгруппа перестановочна со всеми подгруппами из Σ_2 . Тогда группа G разрешима.

Доказательство. В силу теоремы (ii) и разрешимости групп нечетного порядка [11] можно считать, что множество Σ_2 не пусто. Пусть H — максимальная подгруппа с единичным ядром. По теореме (i) следует, что H не может содержать $2'$ -замкнутых $2d$ -подгрупп типа S . Из теоремы (ii) следует 2-замкнутость группы H . Пусть F — произвольная подгруппа из Σ_2 . Из свойств групп типа S следует [7], что $|F| = 2^\alpha q$. Покажем, что $|G:H| = q$. В самом деле, так как F не принадлежит H и $HF = FH$, то ввиду максимальной $H HF = G$. Значит, $|G:H| \leq |F|$. Предположим, что 2 делит $|G:H|$. Тогда 2-силовская подгруппа H_2 группы H содержится собственно в G_2 . Пусть P — минимальная надгруппа над H_2 , содержащаяся в G_2 . Тогда H_2 инвариантна в $\{P, H\} = G$. Противоречие с предположением, что $H_G = 1$. Итак, каждая максимальная $2d$ -подгруппа с единичным ядром имеет в G индексом простое число. Остается показать, что любая максимальная подгруппа M с единичным ядром является $2d$ -подгруппой. В самом деле, если 2 не делит $|M|$, то $MF = FM = G$ и $|G:M|$ делится на 2^α , но не на $2^{\alpha+1}$, т. е. $F_2 = G_2$. Из свойств групп типа S [12] следует, что F_2 — циклическая подгруппа. Из теорем Бернсайда ([14], § 128) и Томпсона—Фейта [11] вытекала бы разрешимость группы G . Итак, любая максимальная подгруппа с единичным ядром является $2d$ -подгруппой и, как показано выше, имеет в G индексом простое число. Разрешимость группы G следует в этом случае по теореме (iii). Теорема доказана. Эта теорема сформулирована в [15] (теорема 1) без доказательства.

З а м е ч а н и е. Лемма 2 остается справедливой, если в ее формулировке множество Σ_p заменить на Σ_2 . Достаточно провести дословно те же самые рассуждения, что и в доказательстве леммы 2, только в соответствующих местах использовать вместо теоремы 4.3.1 из [16] теорему (ii).

Это замечание позволяет получить из теоремы 1 следующее

С л е д с т в и е 1. Пусть группа G обладает максимальной подгруппой с ядром C . Если каждая максимальная подгруппа с ядром C перестановочна со всеми подгруппами из Σ_2 , то группа G/C разрешима.

Доказательство. В силу теоремы 1 можно считать, что $C \neq 1$. Рассмотрим группу G/C . Пусть M/C — максимальная подгруппа с единичным ядром в группе G/C . Тогда M имеет ядро C в группе G . По условию и в силу приведенного выше замечания следует, что группа G/C

удовлетворяет условию теоремы 1. Отсюда следует утверждение. Следствие доказано.

Теорема 2. Пусть в группе G имеется максимальная подгруппа с единичным ядром. Если каждая такая подгруппа перестановочна со всеми p -замкнутыми pd -подгруппами типа S из G , то группа G p -разрешима.

Доказательство. Из теорем (i) и 4.3.1 из [16] следует p' -замкнутость каждой максимальной подгруппы с ядром 1. Из теоремы Янко—Ньюмена [20] следует, что группа G не проста. Пусть M — минимальный нормальный делитель группы G . Можно считать, что M — единственный нормальный делитель группы G , который является минимальным. В противном случае, если M_1 — другой минимальный нормальный делитель группы G , то ввиду $M \cong MM_1/M_1 \subseteq G/M_1 = HM_1/M_1 \cong H/H \cap M_1$, где H — максимальная подгруппа с единичным ядром, следовала бы p -разрешимость M , так как по сказанному выше H , а значит и $H/H \cap M_1$, p -разрешимы. Тогда из p -разрешимости группы $G/M \cong H/H \cap M_1$ следовала бы и p -разрешимость G . Пусть M_p — p -силловская подгруппа из M . Ясно, что p делит $|M|$, ибо в противном случае M оказался бы тривиально p -разрешимым. По известному рассуждению Фраттини, $G = N(M_p) \cdot M$. Так как $G_p \cap M$ инвариантно в G_p , то $G_p \subseteq N(M_p)$. Пусть T — та максимальная подгруппа из G , которая содержит $N(M_p)$. Ясно, что $N(M_p) \neq G$, ибо в G нашелся бы p -разрешимый нормальный делитель. Так как M — единственный минимальный нормальный делитель группы G , то T не принадлежит M и $T_G = 1$. Так как M не p -разрешимый нормальный делитель, то по теореме 4.3.1 из [16] в M имеется p -замкнутая pd -подгруппа F типа S . Из условия теоремы и леммы 1 следует, что $T^g F = FT^g$ для всех $g \in G$. Но выше показано, что $G_p \subseteq T$. Учитывая, что F_p единственная в F и что порядок произведения $T \cdot F$ может делиться самое большее на $|G_p|$, заключаем, что F_p содержится и во всех сопряженных с T подгруппах. Получили противоречие с условием, что $T_G = 1$. Полученное противоречие показывает, что множество $\Sigma_p(M)$ пусто. Из теоремы 4.3.1 [16] следует p -разрешимость M , а вместе с этим доказывается и теорема.

Следствие 2. Пусть в группе G имеется максимальная подгруппа с ядром C . Если каждая максимальная подгруппа с ядром C перестановочна со всеми подгруппами из Σ_p , то группа G/C p -разрешима.

Доказательство. В силу леммы 2 следует, что группа G/C удовлетворяет условию теоремы 2. Этим следствие доказано.

§ 4. Исследуем влияние внешних свойств фиксированной максимальной подгруппы на внутренние свойства ее самой и всей группы. Предварительно докажем следующий факт.

Лемма 4. Пусть в группе G имеется π -разрешимая подгруппа H , такая, что ее π -холловская подгруппа H_π является π -холловской в G . Если H перестановочна со всеми p -замкнутыми pd -подгруппами типа S группы G , где p пробегает все множество π , то группа G π -разрешима.

Доказательство. Если ни для какого $p \in \pi$ в G нет p -замкнутых pd -подгрупп типа S , то по теореме 4.3.1 из [16] в G имеются инвариантные силовские p -дополнения для каждого $p \in \pi$. Тогда и пересечение D этих дополнений также будет, очевидно, инвариантным холловским π -дополнением. Ввиду $DH = G$ следовала бы π -разрешимость G . Поэтому пусть по меньшей мере для одного $p \in \pi$ в G имеется p -замкнутая pd -подгруппа F типа S . По условию и лемме 1 $H^g F = FH^g$ для всех $g \in G$. Как известно, $|H^g F| = \frac{|H^g| \cdot |F|}{|H^g \cap F|}$. Так как по условию $|H|$ делится на наиболь-

шую степень p , то F_p должно делить $|H^g \cap F|$, т. е. $F_p \subseteq H^g$. Так как g пробегает всю группу G , то F_p принадлежит пересечению T всех сопряженных с H в G подгрупп. Ввиду инвариантности T в G и $T \subseteq H$ следует рассмотреть два случая. Во-первых, если $T=H$, то ввиду того что $|G/T|$ не делится ни на одно простое число из π , следует тривиальная π -разрешимость [16] группы G/T . Отсюда следует и π -разрешимость G . Во-вторых, пусть $T \subset H$. По лемме 2 следует, что подгруппа H/T удовлетворяет условию теоремы в группе G/T . По индукции относительно порядка группы заключаем, что группа G/T π -разрешима. T тоже π -разрешима как подгруппа π -разрешимой группы H . Значит, и G π -разрешима как расширение π -разрешимой группы с помощью π -разрешимой же группы. Лемма полностью доказана.

Из этой леммы вытекают два заслуживающих внимания следствия.

Следствие 3. Если холловская разрешимая π -подгруппа перестановочна со всеми подгруппами из $\Sigma_\pi = \bigcup_{p \in \pi} \Sigma_p$, то группа G π -разрешима.

Особый интерес представляет случай, когда π состоит из одного простого числа p , так как тогда в группе G , по теореме Силова, существует p -силовская подгруппа G_p .

Следствие 4. Если G_p перестановочна со всеми подгруппами из Σ_p , то группа G p -разрешима.

Следствие 4 представляет собой теорему 6 из [5].

Теорема 3. Пусть H — максимальная подгруппа группы G , надстроенная над p -силовской подгруппой G_p . Если H перестановочна со всеми pd -подгруппами типа S из G , то группа H/H_G p -разложима, а G/H_G p -разрешима.

Доказательство. Если множество $\Sigma_p(H)$ пусто, то по теореме 1.12.2 из [16] даже H p -разложима. Если при этом $H=G_p$, то второе утверждение следует по следствию 4. Если $|H|$ делится по меньшей мере на два различных простых числа, то в случаях а) и в) из заключения теоремы (x) p -разрешимость G (а значит и G/H_G) следует сразу, а в случае б) заключения этой же теоремы p -разрешимость G/H_G следует после применения леммы 2 и следствия 4. Поэтому пусть L — неединичная pd -подгруппа типа S из H . По условию и лемме 1 следует, что $LH^g = H^gL$ для всех $g \in G$. По теореме (i) $L \subseteq H_G$. Итак, H_G содержит все pd -подгруппы типа S из H . По лемме 3 следует p -разложимость H/H_G . Если p не делит $|H/H_G|$, то p не делит и $|G/H_G|$, ибо по условию $|G_p|$ делит $|H_G|$. Отсюда следует, что G/H_G тривиально p -разрешима. Если же p делит $|H/H_G|$, то если H/H_G есть p -группа, то ввиду максимальности H/H_G в G/H_G ясно, что H/H_G является p -силовской в G/H_G , когда G/H_G не p -группа. По лемме 2 и следствию 4 получаем и в этом случае p -разрешимость G/H_G . Если же $|H/H_G|$ делится по меньшей мере на два различных простых числа, то ввиду того факта, что ядро подгруппы H/H_G в группе G/H_G равно 1, получаем по теореме (x), что в G/H_G имеется инвариантное силовское p -дополнение, откуда следует и p -разрешимость группы G/H_G . Теорема доказана.

Следствие 5. Если каждая максимальная подгруппа группы G , порядок которой делится на $|G_p|$, перестановочна со всеми pd -подгруппами типа S из G , то группа G p -разрешима.

Доказательство. По теореме 3 фактор-группа G/H_G p -разрешима для каждой максимальной подгруппы H , порядок которой делится на наивысшую степень p , делящую $|G|$. Но тогда p -разрешима и фактор-группа G/D , где D — пересечение всех ядер максимальных подгрупп, порядок ко-

торых делится на $|G_p|$ (см. [18], п. (6)). Но, очевидно, D есть обобщенная подгруппа Фраттини $\Phi_p(G)$ группы G в смысле определения Дескина [19]. Из [19] известно, что $\Phi_p(G)$ является расширением своей p -силовой подгруппы с помощью нильпотентной группы. Таким образом, получили p -разрешимость группы G . Следствие доказано.

Следствие 6. Пусть каждая максимальная подгруппа H группы G , порядок которой делится на $|G_p|$, $p > 2$, содержит в своем ядре все pd -подгруппы типа S из H . Тогда группа G p -разрешима.

Доказательство. По лемме 3 для каждой подгруппы H факторгруппа H/H_G p -разложима. Если p не делит $|H/H_G|$, то $|G_p|$ делит $|H_G|$ и G/H_G тривиально p -разрешима. Если p делит $|H/H_G|$, то если H/H_G есть p -группа, то G/H_G даже разрешима по теореме Томпсона [13]. Если же $|H/H_G|$ делится по меньшей мере на два различных простых числа, то по теореме (x) G/H_G p -разрешима, так как ядро подгруппы H/H_G в группе G/H_G равно 1. Далее рассуждения проводятся как и при доказательстве следствия 5.

Литература

1. Ваер R. Illinois. J. Math., 1, № 2, 115, 1957.
2. Поляков Л. Я. Сб. «Конечные группы». Минск, 1966.
3. Беркович Я. Г. Там же.
4. Pasderski H. Math. Nachr., 26, № 6, 307, 1964.
5. Беркович Я. Г., Пальчик Э. М. Сибирск. матем. журн., 8, № 4, 743, 1967.
6. Gaschütz W. Math. Z., 58, 160, 1953.
7. Гольфанд Ю. А. ДАН СССР, 60, № 8, 1948.
8. Ore O. Duke Math. J., 5, 431, 1939.
9. Deskins W. E. Math. Z., 82, 125, 1963.
10. Романовский А. В. Сб. «Конечные группы». Минск, 1966.
11. Feit W., Thompson J. Pacific J. Math., 13, № 3, 775, 1963.
12. Шмидт О. Ю. Матем. сб., 31, 366, 1924.
13. Thompson J. Proc. Nat. Acad. Sci., USA, 45, № 4, 578, 1959.
14. Burnside W. E. Theory of groups of finite order, sec. ed. Cambridge, 1911.
15. Пальчик Э. М. ДАН БССР, 11, № 5, 391, 1967.
16. Чунихин С. А. Подгруппы конечных групп. Минск, 1964.
17. Ваер R. Amer. J. Math., 75, № 3, 633, 1953.
18. Wielandt H. Math. Z., 45, № 2, 209, 1939.
19. Deskins W. E. J. Math., 5, № 2, 306, 1961.
20. Janko Z., Newman M. F. Math. Z., 82, 104, 1963.

Могилевский машиностроительный институт

Поступило в редакцию
25.VIII 1969

УДК 519.44

Н. Г. ДУКА, Т. Т. ОГАРКОВ

КОНЕЧНЫЕ ГРУППЫ С p -СУБНОРМАЛЬНЫМИ ПОДГРУППАМИ

В последние годы в теории конечных групп очень много работ было посвящено изучению строения группы в зависимости от свойств ее i -х максимальных подгрупп. Так, в [1—6] исследовались конечные группы, все i -е максимальные подгруппы которых инвариантны в группе. В дальнейшем появился ряд работ, в которых вместо условия инвариантности i -х максимальных подгрупп используются условия их достижимости [7], квазидостижимости [8, 9], перестановочности с некоторой силовской подгруппой группы [9] и др.

Более общим подходом является исследование конечных групп, все i -е максимальные подгруппы которых p -субнормальны (см. определение ниже) в группе. С таким внешним свойством, налагаемым на i -е максимальные подгруппы группы, связаны все результаты настоящей работы.

Отметим, что частными случаями теорем 1—4 являются теоремы 2.1, 2.2 и 3.6 из [9] и теоремы 1—4 из [8], а теорема 5 усиливает теорему из [4].

В работе приняты следующие обозначения и определения: G — всегда конечная группа порядка $|G|$; $N_G(H)$ и $C_G(H)$ — соответственно нормализатор и централизатор подгруппы H в группе G ; H_G — ядро подгруппы H в группе G , т. е. произведение всех тех инвариантных подгрупп группы G , которые содержатся в H ; G_p — силовская p -подгруппа группы G ; $\langle g \rangle$ — подгруппа, порожденная элементом g из группы G ; $\lambda(G)$ — сумма показателей канонического разложения $|G|$; $|G:H|$ — индекс подгруппы H в группе G ; E — единичная подгруппа группы G .

Конечная группа, порядок которой делится на простое число p , называется pd -группой [10].

Пусть p — фиксированное простое число, делящее $|G|$.

Подгруппа H группы G называется p -субнормальной в G , если для любой силовской p -подгруппы P группы G пересечение $H \cap P$ является силовской p -подгруппой H [11].

Если $G \neq E$, то ряд подгрупп

$$G = G_0 \supset G_1 \supset \dots \supset G_k, \quad k \geq 1$$

называется максимальным рядом группы G , если G_i ($i = 1, 2, \dots, k$) является максимальной подгруппой предыдущего члена ряда G_{i-1} .

Под i -й максимальной подгруппой группы G ($i \geq 1$) понимается i -й член некоторого максимального ряда группы G .

Определения p -специальной и p -разрешимой групп можно найти в [10].

В дальнейшем часто используются следующие известные утверждения.

Лемма 1. Если подгруппы R и H группы G перестановочны и H p -субнормальна в G , то $H \cap R$ p -субнормальна в R [11].

Лемма 2. Если подгруппа R группы G содержит p -субнормальную в группе G подгруппу H , то H будет p -субнормальной подгруппой в подгруппе R [11].

Лемма 3. Если σ — эпиморфизм группы G на группу \bar{G} , то подгруппа H тогда и только тогда p -субнормальна в G , когда H^σ p -субнормальна в $\bar{G} = G^\sigma$ [11].

Лемма 4. Пусть S и S_1 — некоторые подгруппы группы G , и пусть для каждого $x \in G$ выполняется условие: $x^{-1}S_1x = y^{-1}S_1y$, где $y \in S$. Тогда $G = N_G(S_1) \cdot S$ [10].

Перейдем теперь к изложению полученных результатов.

Теорема 1. Пусть K — такая инвариантная подгруппа группы G , что каждая, не содержащая K максимальная подгруппа группы G p -субнормальна в G . Тогда K — p -специальная группа.

Доказательство. Пусть K_p — произвольная силовская p -подгруппа группы K . Предположим, что K_p не инвариантна в группе G . Тогда по лемме 4 $G = K \cdot N_G(K_p)$. Поэтому в группе G существует максимальная подгруппа M такая, что $M \cong N_G(K_p)$. Так как M не содержит K , то $M \cap K$ p -субнормальна в G . По лемме 1, $M \cap K$ p -субнормальна в K , т. е. $M \cap K$ содержит все силовские p -подгруппы группы K . Кроме того, $M \cap K \cong N_G \times (K_p) \cap K = N_K(K_p)$. Поэтому $|K : N_K(K_p)| = |M \cap K : N_K(K_p)|$, чего быть не может. Полученное противоречие показывает, что K_p инвариантна в G . Теорема доказана.

Следствие 1. Пусть K — инвариантная подгруппа группы G . Если все максимальные подгруппы группы G , не содержащие K , p -субнормальны в G для всех p , делящих $|G|$, то K — нильпотентная группа.

Из следствия 1 при $K = G$ получаем теорему 1 из [8].

Теорема 2. Пусть K — инвариантная подгруппа группы G . Если все вторые максимальные подгруппы группы G , не содержащие K , p -субнормальны в G , то K либо p -специальна, либо группа Миллера—Морено (нильпотентная группа, все подгруппы которой абелевы).

Доказательство. Пусть $K \subset G$ и K_p — произвольная силовская p -подгруппа группы K .

Предположим, что K_p неинвариантна в группе G . Тогда по лемме 4 $G = K \cdot N_G(K_p)$ и, следовательно, в группе G существует максимальная подгруппа M_1 такая, что $M_1 \cong N_G(K_p)$. Очевидно, M_1 не содержит K .

Рассмотрим цепь подгрупп группы G

$$G \supset M_1 \cong N_G(K_p) \cong \dots \cong N_K(K_p).$$

Возьмем вторую максимальную подгруппу M_2 группы G , такую, что $M_2 \cong N_K(K_p)$. Тогда M_2 p -субнормальна в G , а, по лемме 1, $M_2 \cap K$ p -субнормальна в K , т. е. $M_2 \cap K$ содержит все силовские p -подгруппы K . Кроме того, $M_2 \cap K \cong N_K(K_p)$. Поэтому $|K : N_K(K_p)| = |M_2 \cap K : N_K(K_p)|$, чего быть не может. Полученное противоречие показывает, что K_p инвариантна в G , т. е. K — p -специальная группа.

Рассмотрим теперь случай, когда $K = G$. В данном случае все вторые максимальные подгруппы группы G p -субнормальны в G . По лемме 2, любая вторая максимальная подгруппа группы G будет p -субнормальной в одной из максимальных подгрупп группы G . Поэтому, по теореме 1, все максимальные подгруппы группы G будут p -специальны. Если группа G p -специальна, то теорема верна. Пусть группа G не является p -специальной. Тогда в G существует максимальная подгруппа $H \cong N_G(G_p)$. Допустим, что в группе H существует максимальная подгруппа H_1 такая, что $H_1 \cong N_G(G_p)$. Являясь второй максимальной подгруппой группы G , H_1 будет p -субнор-

мальной в G , т. е. H_1 будет содержать все силовские p -подгруппы группы G . Поэтому $|H_1 : N_G(G_p)| = |G : N_G(G_p)|$, что невозможно. Значит $H = N_G(G_p)$.

Предположим, что G_p содержится в некоторой максимальной подгруппе H_2 из H . Тогда, рассуждая как и выше, получим, что H_2 содержит все силовские p -подгруппы группы G . Так как G_p инвариантна в H_2 , то H_2 содержит единственную силовскую p -подгруппу. Следовательно, G тоже содержит единственную силовскую p -подгруппу, т. е. G_p инвариантна в G . Полученное противоречие показывает, что $G_p = H$.

Пусть $|G_p| = p^\alpha$. Покажем, что G_p — циклическая группа. Так как G_p является максимальной подгруппой группы G , то при $\alpha > 1$ каждая подгруппа порядка $p^{\alpha-1}$ будет p -субнормальна в G , т. е. каждая подгруппа порядка $p^{\alpha-1}$ будет содержаться во всех силовских p -подгруппах группы G . Значит, подгруппы порядка $p^{\alpha-1}$ будут инвариантны в G . Так как G_p не инвариантна в G , то G_p — циклическая. Поэтому группа G разрешима, по теореме Херштейна [12]. Кроме того, по теореме 14.3.1 из [13], в группе G существует инвариантное p -дополнение. Так как G_p максимальна в G , то $|G| = p^\alpha q^b$, причем силовская q -подгруппа группы G будет минимальным нормальным делителем.

Группа G содержит максимальные подгруппы порядков p^α и $p^{\alpha-1}q$, которые являются абелевыми группами. Следовательно, G — группа Миллера—Морено. Теорема доказана.

Следствие 2. Пусть K — инвариантная подгруппа группы G . Если все вторые максимальные подгруппы группы G , не содержащие K , p -субнормальны в G для всех p , делящих $|G|$, то K — нильпотентная группа.

Теорема 3. Пусть K — такая инвариантная подгруппа группы G , что все не содержащие K третьи максимальные подгруппы группы G p -субнормальны в G . Тогда или K p -разрешима или множество третьих максимальных p -подгрупп группы G пусто.

Доказательство. Пусть $K \subset G$ и K_p — любая силовская p -подгруппа группы G . Если K_p инвариантна в группе G , то K p -разрешима.

Пусть K_p неинвариантна в группе G . Тогда, по лемме 4, $G = K \cdot N_G(K_p)$. Значит, в группе G существует максимальная подгруппа $M_1 \cong N_G(K_p)$. Ясно, что M_1 не содержит K .

Рассмотрим цепь подгрупп

$$G \supset M_1 \cong N_G(K_p) \cong \dots \cong N_K(K_p) \cong K_p.$$

Пусть $N_K(K_p)$ содержится в третьей максимальной подгруппе M_3 группы G . Тогда M_3 p -субнормальна в G . По лемме 1, $M_3 \cap K$ p -субнормальна в K , т. е. $M_3 \cap K$ содержит все силовские p -подгруппы K . Поэтому $|K : N_K(K_p)| = |M_3 \cap K : N_K(K_p)|$, чего быть не может. Полученное противоречие показывает, что $N_K(K_p)$ — вторая максимальная подгруппа группы G .

Допустим, что K_p содержится в третьей максимальной подгруппе $M_3 \subset N_K(K_p)$. Тогда M_3 p -субнормальна в G и поэтому, по лемме 1 $M_3 \cap K = M_3$ p -субнормальна в K . Учитывая, что $M_3 \subset N_K(K_p)$, получаем инвариантность K_p в K . Противоречие. Следовательно, $K_p = N_K(K_p)$.

Если $|K_p| = p$, то, по теореме 14.3.1 из [13], группа K имеет инвариантное p -дополнение. Значит, K — p -разрешимая группа.

Пусть $|K_p| = p^\alpha$ ($\alpha > 1$) и H_3 — третья максимальная подгруппа группы G , содержащаяся в K_p . Так как H_3 p -субнормальна в G , то, по лемме 1, $H_3 \cap K = H_3$ p -субнормальна в K . Поэтому H_3 содержится в каждой силовской p -подгруппе группы K и будет, следовательно, инвариантна в K . Так как K_p не инвариантна в K , то K_p — циклическая группа. Следовательно, по Виландту [14] K p -разрешима.



at 05
30012

Пусть теперь $K=G$. Если G_p инвариантна в группе G , то G p -разрешима. Поэтому будем считать, что G_p неинвариантна в G .

Рассмотрим цепь подгрупп

$$G \supset N_G(G_p) \cong G_p.$$

Очевидно, множество третьих максимальных pd -подгрупп группы G не пусто, ибо в противном случае теорема справедлива.

Имеются следующие возможности.

1. $N_G(G_p) = G_p$ — максимальная подгруппа группы G . Если $N_G(G_p) = G_p$ и $|G_p| = p$ или p^2 , то группа G разрешима по теореме Херштейна [12].

Если $N_G(G_p) = G_p$ и $|G_p| = p^\alpha$ ($\alpha > 2$), то в группе G имеется третья максимальная подгруппа R_3 порядка $p^{\alpha-2}$. Являясь p -субнормальной подгруппой группы G , R_3 содержится в каждой силовской p -подгруппе группы G и будет поэтому инвариантна в G . Тогда G_p/R_3 — абелева максимальная подгруппа группы G/R_3 . По предыдущему случаю G/R_3 разрешима. Разрешима поэтому и группа G .

Если $N_G(G_p) \neq G_p$, то G_p максимальна в $N_G(G_p)$, так как в противном случае существовала бы третья максимальная подгруппа F_3 группы G , содержащая G_p , которая была бы p -субнормальной в G , т. е. F_3 содержала бы все силовские p -подгруппы группы G . Учитывая инвариантность G_p в F_3 , мы получили бы, что G_p инвариантна в G . Противоречие.

Значит, G_p максимальна в $N_G(G_p)$ и $|N_G(G_p)| = p^\alpha q$. Так как множество третьих максимальных pd -подгрупп группы G не пусто, то $\alpha > 1$. Поэтому каждая подгруппа порядка $p^{\alpha-1}$ будет p -субнормальна в G и, следовательно, инвариантна в G . Так как G_p неинвариантна в G , то G_p — циклическая группа. Тогда, по теореме Виландта [14], группа G p -разрешима.

2. $N_G(G_p)$ не максимальная в G .

Тогда существует цепь подгрупп

$$G \supset H_1 \supset N_G(G_p) \cong G_p,$$

где H_1 — максимальная подгруппа группы G .

Пусть $N_G(G_p)$ содержится в третьей максимальной подгруппе L_3 группы G . Тогда L_3 , будучи p -субнормальной в G , содержит все силовские p -подгруппы группы G . Значит, $|G : N_G(G_p)| = |L_3 : N_G(G_p)|$. Полученное противоречие показывает, что $N_G(G_p)$ — вторая максимальная подгруппа группы G .

Предположим, что G_p содержится в третьей максимальной подгруппе N_3 группы G . Тогда N_3 содержит все силовские p -подгруппы группы G (так как N_3 p -субнормальна в G). Учитывая, что $N_3 \subset N_G(G_p)$, получаем инвариантность G_p в G . Противоречие.

Следовательно, $N_G(G_p) = G_p$.

Очевидно, $|G_p| = p^\alpha$ ($\alpha > 1$). Покажем, что G_p — циклическая группа. Действительно, все подгруппы порядка $p^{\alpha-1}$ будут p -субнормальны в G , а поэтому и инвариантны в G . Так как G_p не инвариантна в G , то G_p — циклическая группа. Применяя теорему Виландта [14], заключаем, что G p -разрешима.

Теорема доказана.

Следствие 3. Пусть K — инвариантная подгруппа группы G . Если все третьи максимальные подгруппы группы G , не содержащие K , 2-субнормальны в G , то K — разрешимая группа.

Доказательство. Если $K \subset G$, то по теореме 3 K — 2-разрешимая группа. Если $K = G$ и множество третьих максимальных $2d$ -подгрупп груп-

пы G не пусто, то G тоже 2-разрешима. По теореме Томпсона—Фейта [15] в обоих случаях следует разрешимость K .

Пусть $K = G$ и множество третьих максимальных $2d$ -подгрупп группы G пусто.

Будем считать, что силовская 2-подгруппа G_2 группы G не инвариантна в G . Рассмотрим цепь подгрупп

$$G \supset N_G(G_2) \cong G_2.$$

Так же, как и в теореме 3, можно показать, что G_2 — вторая максимальная подгруппа группы G . Значит, $|G_2| = 2$. Тогда, по теореме 14.3.1 из [13], группа G имеет инвариантное 2-дополнение. Теперь из теоремы Томпсона—Фейта [15] следует разрешимость группы G .

Следствие 4. Пусть K — инвариантная подгруппа группы G . Если все третьи максимальные подгруппы группы G , не содержащие K , p -субнормальны в G для всех p , делящих $|G|$, то K — разрешимая группа.

Если положить $K = G$, то отсюда получаем теорему 3 из [8].

Теорема 4. Пусть K — инвариантная подгруппа группы G . Если все четвертые максимальные подгруппы группы G , не содержащие K , 2-субнормальны в G , то K разрешима. Если $K = G$, то группа G или разрешима, или изоморфна одной из следующих групп: 1) $SL(2, p)$, $PSL(2, p)$, где $p = 5, 13$ или $\lambda(p \pm 1) = 3$ и $p \not\equiv \pm 1 \pmod{10}$; 2) $SL(2, 3^n)$, $PSL(2, 3^n)$, где $n > 2$ — простое число и $\lambda(3^n \pm 1) \leq 3$.

Доказательство. Пусть сначала K — собственная подгруппа группы G . Очевидно, $|K|$ — четное число и силовская 2-подгруппа K_2 группы K не инвариантна в группе G , ибо в противном случае K была бы разрешима по теореме Томпсона—Фейта [15]. В силу леммы 1 имеем, что $G = K \cdot N_G(K_2)$. Значит, в группе G существует максимальная подгруппа M , содержащая $N_G(K_2)$ и не содержащая K .

Рассмотрим цепь подгрупп группы G

$$G \supset M \cong N_G(K_2) \cong \dots \cong N_K(K_2) \cong K_2.$$

Предположим, что $N_K(K_2)$ содержится в четвертой максимальной подгруппе M_4 группы G . Тогда M_4 2-субнормальна в G , а вследствие леммы 1 $M_4 \cap K$ 2-субнормальна в K . Значит, $M_4 \cap K$ содержит все силовские 2-подгруппы группы K . Поэтому $|K : N_K(K_2)| = |M_4 \cap K : N_K(K_2)|$, что невозможно.

Подгруппа $N_K(K_2)$ не является максимальной в G , так как $N_K(K_2) \subset K$. Пусть $N_K(K_2)$ — вторая максимальная подгруппа группы G , и пусть $N_K(K_2) = K_2$. Если $|K_2| \leq 4$, то, по теореме 14.3.1 [13], в K существует инвариантное 2-дополнение. Следовательно, K разрешима. Если $|K| > 4$, то опять нетрудно показать разрешимость K . В случае, когда $N_K(K_2) \supset K_2$, тоже легко показывается разрешимость K . Следовательно, $N_K(K_2)$ — третья максимальная подгруппа группы G .

Пусть K_2 содержится в четвертой максимальной подгруппе $M'_4 \subset N_K(K_2)$. Тогда M'_4 2-субнормальна в G , и $M'_4 \cap K = M'_4$ будет 2-субнормальна в K . Значит, M'_4 содержит все 2-силовские подгруппы группы K . Так как $M'_4 \subset N_K(K_2)$, то K_2 инвариантна в K . Противоречие. Следовательно, $N_K(K_2) = K_2$.

Если $|K_2| = 2$, то, по теореме 14.3.1 из [13], группа K имеет инвариантное 2-дополнение и будет поэтому разрешима. Если $|K_2| = 2^\alpha$ ($\alpha > 1$), то все подгруппы порядка $2^{\alpha-1}$ будут 2-субнормальны в G , а поэтому 2-

субнормальны и в K (лемма 2). Значит, подгруппы порядка $2^{\alpha-1}$ будут инвариантны в K . Но так как K_2 не инвариантна в K , то K_2 —циклическая группа. Опять в силу теоремы 14.3.1 из [13] группа K имеет инвариантное 2-дополнение и будет поэтому разрешима, по теореме Томпсона—Фейта [15].

Пусть теперь $K = G$.

В этом случае все четвертые максимальные подгруппы группы G 2-субнормальны в G . Применяя к группе G последовательно лемму 2 и следствие 3, получим, что все собственные подгруппы группы G разрешимы. Если группа G разрешима, то теорема верна.

Пусть G —неразрешимая группа наименьшего порядка, для которой теорема неверна.

Предположим, что G содержит максимальную разрешимую инвариантную подгруппу $R \neq E$. Тогда рассмотрим фактор-группу G/R . По теореме Томпсона—Фейта [15], группа G/R четного порядка. На основании леммы 3 фактор-группа G/R удовлетворяет условиям теоремы. По индукции G/R изоморфна одной из простых групп заключения теоремы. Тогда в G/R существует третья максимальная подгруппа F/R , которая не является 2-субнормальной в G/R , причем $|F/R| = 2$. Допустим, что $|R|$ делится на простое нечетное число. Предположим, что F_2 не инвариантна в F (F_2 —силовская 2-подгруппа из F). Возьмем максимальную подгруппу H из F , такую, что $H \cong N_F(F_2)$. Тогда H будет 2-субнормальна в G , а значит, и в F . Следовательно, $|F : N_F(F_2)| = |H : N_F(F_2)|$. Противоречие. Поэтому F_2 инвариантна в F .

Пусть L —максимальная подгруппа из F , содержащая F_2 . Так как L 2-субнормальна в G , то $F_2 \subseteq P_G$ и $F \subseteq P_G \cdot R$ (здесь P —силовская 2-подгруппа группы G).

Подгруппа $P_G \cdot R$ будет тогда инвариантна в G , что невозможно. Следовательно, F_2 является 2-группой.

Так как все максимальные подгруппы группы F 2-субнормальны в G , то они содержатся в пересечении всех силовских 2-подгрупп группы G . Поэтому все максимальные подгруппы группы G будут достижимы в G . Так как подгруппа F недостижима в G , то F —циклическая 2-группа.

Пусть $G/R \cong PSL(2, p)$ или $G/R \cong PSL(2, 3^n)$ из заключения теоремы. Так как силовская 2-подгруппа P/R группы G/R является элементарной абелевой порядка 4, то в качестве F/R можно взять подгруппу, порожденную любой инволюцией из G/R , т. е. каждое расширение группы R при помощи группы порядка 2 является циклической группой.

Выберем силовскую 2-подгруппу G_2 группы G , такую, что $G_2 \supset F$. Так как фактор-группа G_2/R является элементарной абелевой порядка 4, то G_2 —нециклическая группа. Следовательно, по теореме 12.5.3 из [13], в G_2 содержится максимальная подгруппа S , отличная от F . Тогда $G_2 = S \cdot F$, причем $|S : (S \cap F)| = |F : (S \cap F)| = 2$. Значит, $S \cap F = R$ и S как расширение R при помощи группы порядка 2 является циклической группой, т. е. все максимальные подгруппы группы G_2 являются циклическими группами, содержащими R . Теперь, по теореме 12.5.2 из [13], заключаем, что G_2 —обобщенная группа кватернионов. Так как все максимальные подгруппы из G_2 циклические, то G_2 —обычная группа кватернионов, т. е. $|G_2| = 8$ и $|R| = 2$. Ввиду того что R —единственная подгруппа порядка в группе G , то, по теореме Шура [16], $G \cong SL(2, p)$ или $SL(2, 3^n)$ из заключения теоремы. Получили противоречие.

Следовательно, $R = E$ и G —простая группа.

Четвертая максимальная подгруппа T группы G не может содержать силовскую 2-подгруппу группы G , так как в противном случае T содер-

жала бы все силовские 2-подгруппы группы G и, значит, инвариантную подгруппу группы G , порожденную ими. Кроме того, T не является 2-группой, ибо в противном случае $E \neq T \subseteq P_G$, что противоречит простоте группы G .

Так как G — простая группа, то $\lambda(G_2) \geq 2$. Следовательно, G_2 не содержится ни в одной третьей максимальной подгруппе группы G .

Пусть G_2 является второй максимальной подгруппой группы G . Тогда $|G_2| = 4$. Действительно, при $|G_2| > 4$ в группе G существовала бы четвертая максимальная подгруппа, являющаяся 2-группой, что невозможно. А при $|G_2| = 2$ в группе G существовало бы, по теореме 14.3.1 из [13], инвариантное 2-дополнение, что невозможно. Предположим, что $C_G(G_2) \supset G_2$. Так как G_2 неинвариантна в группе G , то $C_G(G_2) = N_G(G_2)$ и, значит, по теореме 14.3.1 из [13], в группе G существует инвариантное 2-дополнение, что противоречит простоте группы G . Следовательно, $C_G(G_2) = G_2$. Тогда, по следствию теоремы из [17], группа $G \cong PSL(2, p^n)$ и $p^n \equiv \pm 3 \pmod{8}$. Так как все подгруппы $PSL(2, p^n)$ хорошо известны [18], то нетрудно показать, что G изоморфна одной из простых групп из заключения теоремы. Противоречие.

Допустим, что G_2 — максимальная подгруппа в группе G . Так как $|G_2| \leq 8$, то, по теореме Дескинса [19], группа G была бы разрешимой. Получили противоречие.

Теорема доказана.

В частности, из теоремы 4 следует описание неразрешимых конечных групп, все четвертые максимальные $2d$ -подгруппы которых инвариантны.

Теорема 5. Если в простой неабелевой группе G все пятые максимальные подгруппы 2-субнормальны, то группа G изоморфна $PSL(2, p^n)$ для подходящих p и n .

Доказательство. Пусть G — группа наименьшего порядка, для которой теорема неверна.

По теореме из [15] о разрешимости групп нечетного порядка, имеем, что $G_2 \neq E$.

Как и в пункте II работы [4], покажем, что G_2 не является максимальной подгруппой в группе G . Допустим, что G_2 максимальна в группе G . Тогда, по теореме 1 из [19], $|G_2| = 16$ и ее класс нильпотентности равен 3. Следовательно, G_2 может быть диэдральной, обобщенной группой кватернионов или $G_2 = \{x, y | x^8 = y^2 = 1, y^{-1}xy = x^3\}$. По теореме из [20], G^2 не может быть обобщенной группой кватернионов. Допустим, что G^2 — диэдральная группа. Тогда централизатор центральной инволюции из G^2 совпадает с G^2 и, значит, по теореме из [17], группа $G \cong PSL(2, p^n)$. Противоречие. Остается принять, что $G_2 = \{x, y | x^8 = y^2 = 1, y^{-1}xy = x^3\}$.

Пусть \bar{G}_2 — подгруппа из G_2 , порожденная всеми элементами вида $a^{-1}b$, где a и b — элементы из G_2 , сопряженные в группе G . Все элементы порядка 4 из G_2 не могут быть сопряжены в G . Действительно, если бы $g^{-1}x^2g = yx$ для $g \in G$, то $g^{-1}xg = x^4$ и $g \in G_2$. Но x^2 и yx не сопряжены в G_2 .

Пусть x^4 и y не сопряжены в G , тогда $G_2 = \{x^2\}$. Если же x^4 и y сопряжены в G , то $\bar{G}_2 = \{x^2\}\{y\}$. В обоих случаях \bar{G}_2 является собственной подгруппой из G_2 и, значит, по теореме 8 из [21], группа G непростая. Противоречие.

Следовательно, подгруппа G_2 не является максимальной в группе G и поэтому $|G_2| \leq 8$.

Пусть $|G_2| = 8$ и G_2 — неабелева группа. Применяя теорему из [20], заключаем, что G_2 — диэдральная группа. Пусть τ — центральная инволюция из G_2 ; по теореме из [17], централизатор $C_G(\tau)$ имеет инвариантное

2-дополнение U , причем подгруппа U циклическая. По основной теореме из [17], группа G изоморфна $PSL(2, p^n)$. Противоречие.

Значит, G_2 — абелева группа. Пусть τ_1 — произвольная инволюция из G_2 . Покажем, что $C_G(\tau_1)$ разрешим. Достаточно рассмотреть лишь случай, когда G_2 — элементарная абелева группа порядка 4. Так как фактор-группа $C_G(\tau_1)/\langle \tau_1 \rangle$ имеет силовскую 2-подгруппу порядка 2, то, по теореме 14.3.1 из [13], $C_G(\tau_1)$ содержит инвариантное 2-дополнение K . По теореме Томпсона — Фейта [15], $C_G(\tau_1)$ разрешим. Тогда, по теореме 2 из [22], группа $G \cong PSL(2, p^n)$.

Получили противоречие. Теорема доказана.

Литература

1. Шмидт О. Ю. Матем. сб., 33, 161, 1926.
2. Huppert B. Math. Z., 60, 409, 1954.
3. Janko Z. Math. Z., 82, № 1, 1963.
4. Janko Z. Math. Z., 84, № 4, 428, 1964.
5. Беркович Я. Г. Изв. АН СССР, 28, № 3, 1964.
6. Беркович Я. Г. ДАН СССР, 169, № 3, 1966.
7. Mann A. Trans. Amer. Math. Soc., 132, № 2, 395, 1968.
8. Поляков Л. Я. Сб. «Конечные группы». Минск, 1966.
9. Ведерников В. А. ДАН БССР, 11, № 12, 1967.
10. Чунихин С. А. Подгруппы конечных групп. Минск, 1964.
11. Kegel O. Math. Z., 78, № 3, 205, 1962.
12. Herstein I. Proc. Amer. Math. Soc., 9, № 2, 255, 1958.
13. Холл М. Теория групп. М., 1962.
14. Wielandt H. Math. Semin. Univ. Hamburg, 22, 215, 1958.
15. Feit W., Thompson J. Pacif. J. Math., 13, № 3, 775, 1963.
16. Schur I. Z. reine angew. Math., 132, 85, 1907.
17. Gorenstein D., Walter J. Illinois J. Math., 6, № 4, 533, 1962.
18. Dickson L. E. Linear Groups. Leipzig, 1901.
19. Deskins W. E. Illinois J. Math., 5, № 2, 306, 1961.
20. Brauer R., Suzuki M. Proc. Nat. Akad. Sci. USA, 45, № 12, 1757, 1959.
21. Brauer R. Annals of Math., 57, 357, 1953.
22. Gorenstein D. Canad. J. Math., 17, № 6, 860, 1965.

Новозыбковский государственный педагогический институт,
Орский государственный педагогический институт

Поступило в редакцию
2.IX 1969

УДК 519.44

М. И. КРАВЧУК

О ПРИЗНАКАХ РАЗРЕШИМОСТИ КОНЕЧНЫХ ГРУПП

§ 1. Как известно, любая нильпотентная группа обладает тем свойством, что каждая собственная ее подгруппа отлична от своего нормализатора. Естественно возникает задача изучения таких групп, у которых только некоторые подгруппы не совпадают со своим нормализатором, т. е. удовлетворяют нормализаторному условию.

Целью настоящей работы является исследование строения определенных классов конечных групп, у которых пересечение некоторых пар максимальных подгрупп в каждой из них удовлетворяет нормализаторному условию.

Теорема 1 показывает, что, для того чтобы π -отделимая группа была разрешимой, в случае, если π содержит не менее двух различных простых делителей порядка группы, достаточно, чтобы у этой группы максимальные p -подгруппы для произвольного простого делителя p ее порядка образовывали нильпотентные пары. В этой же теореме дается описание строения таких групп.

Из этого результата как частные случаи вытекают теорема 2 из [2] и теорема 2 из [3].

Теорема 2 показывает, что группа G всегда разрешима, если у нее любые две нильпотентные максимальные подгруппы образуют нильпотентную пару.

Теорема 3 устанавливает разрешимость группы G , если G имеет по крайней мере одну максимальную нильпотентную подгруппу и каждая такая подгруппа образует нильпотентную пару с каждой максимальной нильпотентной подгруппой.

Используемые в работе определения и обозначения можно найти в монографии [1] и в статьях [2, 3].

§2. Теорема 1. Если G является Γ -квазинильпотентной и π -отделимой группой, где π содержит более одного простого числа из $\pi(G)$, то G разрешима и относится к одному из следующих двух классов групп: 1) Γ -квазинильпотентные группы; 2) Γ -квазинильпотентные расширения p -группы.

Доказательство. Все нильпотентные группы удовлетворяют условиям теоремы. Поэтому предположим, что G является нильпотентной группой. Все доказательство разобьем на две части.

А. Простое число p принадлежит π . Пусть q , $q \neq p$, является таким простым числом, что $q \in \pi \cap \pi(G)$, а $(G) = p^\alpha q^\beta n$, где $(p, n) = 1$, $(q, n) = 1$, $n \geq 1$. Из π -отделимости группы G вытекает, что G имеет инвариантную подгруппу G_1 , индекс которой делится на степень одного из чисел p и q или не делится ни на p , ни на q . Рассмотрим два возможных случая.

1. Порядок нормального делителя G_1 делится на p . Тогда группа G , по лемме 3 из [3], является либо Γ -квазинильпотентной, либо Γ -квазинильпотентным расширением p -группы.

2. Порядок нормального делителя G_1 не делится на p . Тогда $[G : G_1]$ в силу π -отделимости G делится на p^α , а порядок G_1 делится на q^β . Пусть Q является q -силовой подгруппой G_1 , а ввиду сказанного выше и q -силовой подгруппой группы G . По лемме Фраттини [4], получаем $G = G_1 N(Q)$. Отсюда видно, что $N(Q)$ является pd -группой. Предположим, что $N(Q) \neq G$. Тогда $N(Q) \subseteq M_1 \in \Gamma^p$. Значит, $G = M_1 G_1$. Пусть теперь P является p -силовой подгруппой группы G . Так как G_1 инвариантна в G , то $G_1 P = \bar{G}_1$ является pd -подгруппой группы G . Если $\bar{G}_1 = G$, то G является p -разрешимой группой. Поэтому группа G , по теореме 2 из [2], либо Γ -квазинильпотентна, либо является Γ -квазинильпотентным расширением p -группы. Следовательно, можно положить, что $\bar{G}_1 \neq G$. Тогда $\bar{G}_1 \subseteq M_2 \in \Gamma^p$. Так как $G_1 \not\subseteq M_1$, а $G_1 \subseteq M_2$, то $M_1 \neq M_2$. Рассмотрим пересечение $D = M_1 \cap M_2$. Ввиду того что q -силовая подгруппа Q группы G принадлежит M_2 , а $N(Q) \subseteq M_1$, то $M_1 \cap M_2 \supseteq N(Q) \cap M_2$, т. е. $N(Q) \cap M_2 \subseteq D$. Но по определению Γ^p -квазинильпотентности $N(D) \cap M_1 \neq D \neq N(D) \cap M_2$. Это значит, что нормализатор D в M_2 шире подгруппы D , а D содержит нормализатор q -силовой подгруппы Q группы M_2 . Это противоречит теореме 4.2.4 из [5]. Следовательно, наше предположение при $\bar{G}_1 \neq G$ приводит к противоречию, а поэтому должно быть $N(Q) = G$. Отсюда вытекает, что группа G является q -разрешимой и Γ^p -квазинильпотентной. Тогда, по теореме 2 из [3], группа G является Γ -квазинильпотентной либо Γ -квазинильпотентным расширением p -группы.

Б. Простое число p не принадлежит π . Пусть q и r , $q \neq r$, являются такими простыми числами, что $q \in \pi \cap \pi(G)$ и $r \in \pi \cap \pi(G)$. Тогда $(G) = p^\alpha q^\beta r^\gamma n$, где $(p, n) = 1$, $(q, n) = 1$, $(r, n) = 1$, $n \geq 1$. Как и в предыдущей части доказательства, из π -отделимости группы G вытекает, что G имеет инвариантную подгруппу G_1 , индекс которой делится только на степень q или r или не делится ни на q , ни на r . Кроме того, группа G является Γ^p -квазинильпотентной. Отсюда заключаем, что возможны следующие два случая.

1. Порядок G_1 делится на p . Тогда группа G , по лемме 3 из [3], является Γ -квазинильпотентным расширением p -группы, ибо $\tau(G) \geq 3$.

2. Порядок G_1 не делится на p . С другой стороны, порядок G_1 делится по крайней мере на наивысшую степень одного из чисел q и r . Предположим для определенности, что q^β делит порядок G_1 . Пусть теперь Q является q -силовой подгруппой G_1 , а ввиду сказанного выше и q -силовой подгруппой группы G . По лемме Фраттини [4], имеем $G = G_1 N(Q)$. Отсюда заключаем, что $N(Q)$ является pd -группой. Предположим, что $N(Q) \neq G$, ибо в противном случае теорема верна. Тогда, повторив рассуждения первой части доказательства, мы выводим, что группа G может быть только Γ -квазинильпотентным расширением p -группы, ибо $\tau(G) \geq 3$. Теорема доказана.

Теорема 2. Если в группе G любые две нильпотентные максимальные подгруппы образуют нильпотентную пару, то G разрешима.

Доказательство. Обозначим через Γ_1 множество всех нильпотентных, а через Γ_2 множество всех нильпотентных подгрупп из Γ . Если Γ_2 пусто, то группа G является либо нильпотентной, либо типа S , т. е. разрешима. Поэтому можно в дальнейшем предположить, что множество Γ_2 непусто. С другой стороны, если Γ_1 пусто, то группа G является Γ -квазинильпотентной, а поэтому, по теореме 1 из [2], она разрешима. Следовательно, достаточно рассмотреть случай, когда Γ_1 и Γ_2 одновременно непусты.

Если в Γ_1 имеется подгруппа нечетного порядка, то группа G , по теореме 2 из [6], разрешима. Кроме того, если в Γ_1 имеется инвариантная в G подгруппа H , то группа G разрешима, как расширение нильпотентной подгруппы с помощью нильпотентной. Итак, в Γ_1 все подгруппы неинвариантны в G и четного порядка.

Дальнейшее доказательство проведем по индукции. Пусть группа G выбрана так, что она имеет наименьший порядок среди групп, для которых теорема не выполняется. Пусть $M_1 \in \Gamma_1$. Предположим, что некоторое нечетное простое число p делит (M_1) . Если P является p -силовой подгруппой группы M_1 , то из нильпотентности M_1 вытекает, что P инвариантна в M_1 . Далее могут быть следующие случаи.

1. P инвариантна в G . Тогда фактор-группа G/P удовлетворяет условиям теоремы. А поэтому, по индуктивному предположению, группа G/P разрешима, отсюда и G разрешима.

2. P неинвариантна в G . Отсюда $N(P) = M_1$. Это значит, что P является p -силовой подгруппой группы G . Кроме того, можно предположить, что для любого нормального делителя H группы M_1 выполняется условие $N(H) = M_1$, ибо в противном случае фактор-группа G/H в силу индукционного предположения разрешима, а поэтому и группа G разрешима. Пусть A является группой внутренних автоморфизмов группы G , индуцируемых элементами p -силовой подгруппы P . Отсюда видно, что группы G , A и P удовлетворяют условиям теоремы А из работы [7].

Следовательно, по этой теореме группа G имеет инвариантное p -дополнение. Таким же образом можно найти p -дополнение для всех нечетных простых делителей p порядка группы G , которые делят порядки неинвариантных нильпотентных подгрупп из Γ , а соответствующие p -силовые подгруппы этих подгрупп неинвариантны в G . Далее возможно, что

а) каждый нечетный простой делитель порядка группы G делит порядок по крайней мере одной подгруппы из Γ_1 . Тогда пересечение всех этих p -дополнений будет инвариантной 2-силовой подгруппой группы G . Поэтому, по теореме Томпсона—Фейта из [8], группа G/G_2 разрешима, а значит, и G разрешима;

б) некоторые нечетные простые делители порядка группы G не делят порядок ни одной подгруппы из Γ_1 . Пусть таким простым делителем является p . Тогда все максимальные pd -подгруппы будут принадлежать Γ_2 , т. е. все они попарно образуют нильпотентные пары. Это значит, что группа G является Γ^p -квазинильпотентной. С другой стороны, пусть q является нечетным простым делителем порядка некоторой подгруппы из Γ_1 . Тогда, как и выше, по теореме А из [7], группа G имеет инвариантное q -дополнение. Отсюда заключаем, что группа G является q -разрешимой. Теперь из теоремы 2 из [3] вытекает, что группа G разрешима.

Итак, остается рассмотреть случай, когда нильпотентные максимальные подгруппы группы G исчерпываются ее 2-силовскими подгруппами. Пусть H является 2-силовой подгруппой группы G . Тогда $N(H) = H$. Если ядро H_G отлично от E , то фактор-группа G/H_G по индуктивному предположению разрешима, а отсюда и G разрешима. Поэтому предположим, что $H_G = E$. Если каждая подгруппа из Γ_2 образует нильпотентную пару с каждой подгруппой из Γ_1 , то группа G является Γ -квазинильпотентной, а тогда, по теореме 1 из [2], и разрешимой. Следовательно, в Γ_2 имеется некоторая подгруппа M , такая, что $N(M_2) \cap M = M_2$, где M_2 является 2-силовой подгруппой из M . Кроме того, можно считать, что M неинвариантна в G , ибо в противном случае, по лемме 3

из [3], группа G разрешима, так как она имеет нормальный делитель простого индекса и является Γ^p -квазинильпотентной для любого нечетного простого делителя порядка G . Итак, $N(M) = M$. Но M_2 , по теореме Силова, принадлежит некоторой 2-силовой подгруппе группы G , а поэтому в G имеется неединичный элемент x , такой, что $x \in M$ и $x^{-1}M_2x = M_2$. Отсюда вытекает, что $M_2 \subseteq M \cap x^{-1}Mx$. Пусть $M \cap M' = D \cong M_2$ и M' выбрана так, что пересечение D имеет наибольший возможный порядок. Предположим, что $N(D) \neq G$. Тогда $N(D) \subseteq M_1 \in \Gamma_2$, ибо $N(D) \cap M \neq D$, т. е. $N(D) \cap M$ содержит M_2 и не является p -группой. Отсюда $M \cap M_1$ шире D , что противоречит выбору M и M' . Значит, D инвариантна в G . По индуктивному предположению фактор-группа G/D разрешима. А это значит, что группа G имеет нормальный делитель простого индекса. Так как группа G является Γ^p -квазинильпотентной для любого нечетного простого делителя порядка G , то, по лемме 3 из [3], группа G разрешима. Теорема доказана.

Теорема 3. Пусть группа G имеет по крайней мере одну максимальную нильпотентную подгруппу. Если всякая такая подгруппа образует нильпотентную пару с каждой максимальной ненильпотентной подгруппой, то G разрешима.

Доказательство. Как и в теореме 2, можно предположить, что множество всех максимальных нильпотентных подгрупп Γ_1 не содержит инвариантных подгрупп и подгрупп нечетного порядка. Аналогично, множество всех максимальных ненильпотентных подгрупп Γ_2 непусто. В противном случае теорема верна.

Дальнейшее доказательство проведем индукцией по порядку группы G . Для этого предположим, что G является группой наименьшего порядка, удовлетворяющей условиям теоремы, но G неразрешима. Рассмотрим два возможных случая.

1. Среди пересечений указанных пар максимальных подгрупп имеются неединичные подгруппы. Выберем среди всех пересечений подгрупп наибольшего порядка. Пусть это будет $D = M_1 \cap M_2$, где $M_1 \in \Gamma_1$, $M_2 \in \Gamma_2$. Так как M_1 и M_2 образуют нильпотентную пару, то нормализатор D в каждой из них шире D . Поэтому, если $N(D) \neq G$, то $N(D) \subseteq M_1'$ или $N(D) \subseteq M_2'$. Отсюда следует, что или $D \subseteq M_1' \cap M_2$, или $D \subseteq M_1 \cap M_2'$. Но это противоречит выбору M_1 и M_2 . Полученное противоречие показывает, что D инвариантна в G , причем является нильпотентной подгруппой. Фактор-группа G/D удовлетворяет условиям теоремы, т. е. G/D разрешима, а значит, и группа G разрешима. Получили противоречие.

2. Пересечение всякой максимальной нильпотентной подгруппы с каждой максимальной ненильпотентной подгруппой является единичной подгруппой.

Пусть Q является произвольной 2-подгруппой всякой максимальной нильпотентной подгруппы группы G . Можно предположить, что Q неинвариантна в G , ибо в противном случае по индукции теорема верна. Рассмотрим $N(Q)$. Подгруппа $N(Q)$ не может принадлежать максимальной ненильпотентной подгруппе, так как тогда имелось бы неединичное пересечение максимальной нильпотентной подгруппы с максимальной ненильпотентной. Следовательно, для 2-силовой подгруппы группы G , а также для любой ее подгруппы существуют элементы порядка, не делящегося на 2, которые нормализуют и централизуют ее. Поэтому, по теореме 14.4.7 из [5], группа G имеет инвариантное 2-дополнение. А отсюда, по теореме Томпсона—Фейта из [8], следует разрешимость группы G . Получили противоречие. Этим теорема доказана.

Литература

1. Чунихин С. А. Подгруппы конечных групп. Минск, 1964.
2. Беркович Я. Г., Кравчук М. И. Сибирск. мат. журн., 6, № 3, 1965.
3. Кравчук М. И. Сибирск. мат. журн., 6, № 5, 1965.
4. Baer R. Illinois J. Math., 1, № 2, 115, 1957.
5. Холл М. Теория групп. М., 1962.
6. Thompson J. G. Proc. Nat. As. Sci. USA, 45, № 4, 578, 1959.
7. Thompson J. G. Math. Z., 72, 332, 1960.
8. Feit W., Thompson J. G. Pacific J. Math., 13, № 3, 775, 1963.

Институт математики
АН БССР

Поступило в редакцию
30.X 1969

А. З. САМУИЛОВ, А. И. ЯБЛОНСКИЙ

**О РАЦИОНАЛЬНЫХ РЕШЕНИЯХ НЕЛИНЕЙНОГО
 ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА**

1. Рассмотрим уравнение

$$y' = R_0(z) + R_1(z)y + \dots + R_n(z)y^n, \quad n \geq 3, \quad (1)$$

где z — комплексная переменная, $R_j(z)$ ($j = 0, 1, 2, \dots, n$) — рациональные функции. Пусть $z = z_\mu$ ($\mu = 1, 2, \dots, k$), $z = \infty$ — полюсы $R_j(z)$ и $y = y(z)$ — рациональное решение уравнения (1).

Теорема 1. Рациональные решения уравнения (1) могут иметь полюсы только в полюсах $R_j(z)$ и нулях $R_n(z)$.

Действительно, предположим, что $z = z_0$ отлично от полюсов $R_j(z)$ и нулей $R_n(z)$ и является полюсом $y = y(z)$. Тогда при $z \rightarrow z_0$ $y(z) \rightarrow \infty$. В уравнении (1) сделаем замену

$$y = \frac{1}{t}, \quad (2)$$

получим уравнение

$$-t' = \frac{t^n R_0(z) + t^{n-1} R_1(z) + \dots + R_n(z)}{t^{n-2}}. \quad (3)$$

При $z \rightarrow z_0$ $t \rightarrow 0$, поэтому числитель правой части (3) стремится к $R_n(z)$, когда $z \rightarrow z_0$. Так как $z = z_0$ отлична от нулей $R_n(z)$, то правая часть (3) при $z \rightarrow z_0$ стремится к ∞ , а обратная ей величина стремится к 0, поэтому [1] точка $z = z_0$ для решения (3) является критической алгебраической точкой, а по характеру замены (3) она такой будет и для решения уравнения (1), следовательно, это решение не может быть рациональным.

Теорема 2. Уравнение (1) при $n \geq 3$ имеет конечное число рациональных решений с различными полюсами.

Во-первых, все решения не могут быть рациональными, потому что (1) было бы в этом случае уравнением с однозначными решениями и должно было быть уравнением Риккати [1], что противоречит $n \geq 3$.

Во-вторых, по теореме 1, полюсы решений могут быть лишь в полюсах $R_j(z)$ и нулях $R_n(z)$, число и кратность которых конечны, откуда и вытекает справедливость теоремы 2.

Примечание 1. Если $n < 3$, то все решения могут быть рациональными с различными полюсами и их может быть бесконечное число, например, уравнение $y' = y^2$ имеет общее решение $y = -\frac{1}{z+c}$ с бесконечным числом различных полюсов $z = -c$.

Теорема 3. Если $y(z)$ — любое рациональное решение уравнения (1), то всегда существует полином $P(z)$, такой, что функция

$$U(z) = y(z)P(z) \quad (4)$$

есть полином.

В силу теорем 1 и 2 в качестве $y(z)$ можно взять такое рациональное решение, из которого могут быть получены все другие рациональные решения. При этом полюсы рациональных решений будут в точках $z = z_\mu$ ($\mu = 1, 2, \dots, k$) и $z = z_\nu$ ($\nu = 1, 2, \dots, l$), где z_ν — нули $P_n(z)$. Пусть кратности этих полюсов будут α_μ и β_ν соответственно. Тогда $y(z)$ имеет вид

$$y(z) = \frac{A(z)}{a \prod_{\mu=1}^k \prod_{\nu=1}^l (z - z_\mu)^{\alpha_\mu} (z - z_\nu)^{\beta_\nu}},$$

где $a = \text{const}$, $A(z)$ — полином. Если в качестве $P(z)$ взять $\prod_{\mu=1}^k \prod_{\nu=1}^l (z - z_\mu)^{\alpha_\mu} (z - z_\nu)^{\beta_\nu}$, то $U(z)$ будет полиномом для любого рационального решения $y = y(z)$ уравнения (1).

Теорема 4. Уравнение (1) при $n \geq 3$ имеет конечное число рациональных решений, причем всегда можно указать верхнюю границу их числа.

В (1) сделаем подстановку (4). Получим уравнение

$$P^{n-1}U' = R_0P^n + (R_1P^{n-1} + P^{n-2}P')U + \dots + R_nU^n. \quad (5)$$

Пусть общий знаменатель R_j ($j = 0, 1, \dots, n$) будет \bar{P} , тогда уравнение (5) запишется так:

$$\bar{P}P^{n-1}U' = P_0P^n + (P_1P^{n-1} + P^{n-2}P')U + \dots + P_nU^n. \quad (6)$$

Обозначим старшие показатели степеней полиномов \bar{P} , P , P_1, \dots, P_n через \bar{p} , p , p_1, \dots, p_n . Будем различать два случая. Первый будет при

$$\bar{p} + p(n-1) - 1 = \begin{cases} \text{или } p_1 + p(n-1) \\ \text{или } p(n-2) + p - 1 \end{cases}; \quad (7)$$

второй — когда (7) не выполняется.

В первом случае уравнение (6) может иметь не более $n+1$ полиномиальных решений различных степеней, и не более n^{m+1} решений какой-нибудь из этих степеней [2], где m — степень полиномиального решения, которую всегда можно определить по степеням \bar{p} , p , p_1, \dots, p_n . Таким образом, максимальное число полиномиальных решений будет $(n+1)n^{m+1}$.

Во втором случае может быть не более n полиномиальных решений различных степеней и не более n^{m+1} полиномиальных решений одной из степеней и, следовательно, общее число полиномиальных решений не превосходит $n \cdot n^{m+1} = n^{m+2}$.

Подстановка (4) такова, что всякому рациональному решению уравнения (1) соответствует полиномиальное решение уравнения (6). Поэтому число рациональных решений уравнения (1) определится числом полиномиальных решений уравнения (6). Значит, при $\bar{p}-1 = p_1$ и $\bar{p}=0$ уравнение (1) имеет не более $(n+1)n^{m+1}$ рациональных решений и не более чем n^{m+2} во всех других случаях.

Примечание 2. Если в уравнении (1) коэффициенты $R_j(z)$ имеют по крайней мере не более одного полюса, то в [3] доказано, что оно не может иметь более n рациональных решений с одним полюсом.

Известно [4], что всякое однозначное решение уравнения (1) есть функция рациональная, поэтому справедлива

Теорема 5. Уравнение (1) с рациональными коэффициентами не может иметь более $(n+1)n^{m+1}$ однозначных решений, если $\bar{p}-1 = p_1$ и $\bar{p}=0$, и не больше n^{m+2} во всех других случаях.

В частности, уравнение (9) изучается в [5] в предположении, что $R(z)$ — рациональная функция:

$$R(z) = \frac{P_1(z)}{P_2(z)},$$

где $P_1(z)$ и $P_2(z)$ — взаимно простые полиномы. Если коэффициенты $R(z)$ и решение $\omega(z)$ — функции действительного переменного, $P_1(z)$ и $P_2(z)$ имеют действительные коэффициенты и $P_2(z)$ имеет только действительные нули, то в [5] доказано, что всякое рациональное решение уравнения (1) есть постоянная и не существует никаких рациональных решений с действительными коэффициентами, отличных от постоянной. При этом

$$\omega(z) = c = \text{const} \neq 0 \tag{10}$$

будет решением тогда и только тогда, когда

$$R(z) = -\frac{1}{C}.$$

Однако если отбросить требование, чтобы рациональное решение имело действительные коэффициенты, то уравнение (8), очевидно, всегда имеет решения

$$\omega(z) = i \text{ и } \omega(z) = -i \quad (i = \sqrt{-1}). \tag{11}$$

Методом, предложенным в [3], нельзя выяснить, будут ли рациональные решения, отличные от (10) и (11).

Рассмотрим предварительно два следующих свойства уравнения (1).

Теорема 6. Если в уравнении (1) коэффициент $R_n(z)$ имеет вид $\frac{C}{\bar{P}_n(z)}$, где $C = \text{const}$, $\bar{P}_n(z)$ — полином по крайней мере с одним нулем $z = z_0$, все $R_j(z)$ ($j = 0, 1, 2, \dots, n-1$) — рациональные функции не более чем с одним полюсом $z = z_0$, то уравнение (1) при $n \geq 3$ имеет не более n рациональных решений.

На основании теоремы 1 всякое рациональное решение будет иметь единственный полюс $z = z_0$. Тогда (примечание 2) рациональных решений не может быть более n .

Теорема 7. Если в уравнении (1) коэффициенты $R_j(z)$ ($j = 0, 1, 2, \dots, n-1$) — целые рациональные функции, причем $R_n(z)$ имеет не более одного нуля произвольной кратности, существует точка z^* , в которой $R_j(z^*) = 0$ ($j = 3, \dots, n$), а $R_2(z^*) \neq 0$, то уравнение (1) имеет не более двух рациональных решений.

Теорема эта докажется с учетом теоремы 1 и примечания 2 так же, как аналогичная теорема в [3].

Теперь относительно уравнения (9) может быть доказана следующая

Теорема 8. Уравнение (9) с коэффициентами $R(z) = C = \text{const} \neq 0$ имеет своими рациональными решениями $\omega(z) = -\frac{1}{C}$, $\omega(z) = i$ и $\omega(z) = -i$. Других рациональных решений нет.

Справедливость такого утверждения вытекает из того, что выполнены условия теоремы 6, следовательно, больше трех рациональных решений быть не может.

Примечание 3. При $R(z) = C = \text{const} = 0$ получим уравнение Рикати

$$\omega' = \omega^2 + 1, \tag{12}$$

единственными рациональными решениями которого будут $w(z) = i$ и $w(z) = -i$; все другие решения (12) будут трансцендентными мероморфными функциями, как показывает формула общего решения

$$w = \operatorname{tg}(z + C).$$

Таким образом, рациональные решения оказываются исключительными значениями общего решения.

Теорема 9. Если в уравнении (9) коэффициенты $R(z) = C/P(z)$, где $C = \operatorname{const}$, $P(z)$ — полином с одним нулем произвольной кратности, то единственными его рациональными решениями будут $w(z) = i$, $w(z) = -i$.

По теореме 6, в этом случае уравнение (9) имеет не более трех рациональных решений. Для любых трех рациональных решений (1) выполняется соотношение [3]

$$\frac{y_3(z) - y_1(z)}{y_2(z) - y_1(z)} \equiv C = \operatorname{const}. \quad (13)$$

Допустим, что уравнение (9) имеет три рациональных решения. Пусть ими будут $w_1(z) = i$, $w_2(z) = -i$ и $w_3(z)$, которое необходимо найти. Из (13) имеем

$$\frac{w_3(z) - i}{-2i} = C.$$

Для определения C $w(z)$ подставим в (8), откуда

$$w_3(z) = \pm i.$$

Таким образом, рациональных решений, отличных от $w_1(z) = i$ и $w_2(z) = -i$, не существует.

Теорема 10. Уравнение (9) с целыми рациональными коэффициентами, отличными от постоянной и имеющими не более одного нуля произвольной кратности, не может иметь рациональных решений, кроме

$$w(z) = i, \quad w(z) = -i.$$

По условию, $R(z)$ отлична от постоянной и является целой рациональной функцией, поэтому всегда существует точка z^* , такая, что $R(z^*) = 0$. В то же время коэффициент при w^2 в нуль не может обращаться, поэтому, по теореме 7, существует не более двух рациональных решений.

Примечание 4. Так же, как это было сделано в теореме 5, теоремы 6 — 10 можно сформулировать, заменив «рациональность» «однозначностью».

Литература

1. Голубев В. В. Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений. М., 1950.
2. Bhargava M., Kaufman H. Collect. math., 16, № 2—3, 1964.
3. Костин А. В. Укр. мат. журн., 16, № 1, 1964.
4. Malmquist J. Acta math., 36, 1913.
5. Keiser H. Wiss. Z. Humboldt-Univ., Berlin, Math.-naturwissen Reihe, 10, № 5, 1961.

Институт математики
АН БССР

Поступило в редакцию
24.XI 1969

УДК 517.943.2

Э. И. ГРУДО

О РЕШЕНИЯХ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ В ПОЛНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛАХ

Пусть дана система уравнений в полных дифференциалах

$$dx = [A_1x + P_1(x, t_1, \dots, t_m)] dt_1 + \dots + [A_mx + P_m(x, t_1, \dots, t_m)] dt_m, \quad (1)$$

где вектор-столбец x имеет координаты x_1, \dots, x_n , а векторы-столбцы $P_j(x, t_1, \dots, t_m)$ имеют соответственно координаты $P_j^{(q)}(x_1, \dots, x_n, t_1, \dots, t_m)$ ($q=1, \dots, n$), являющиеся голоморфными функциями в окрестности $x_1 = \dots = x_n = 0$ и начинающиеся с членов порядка выше первого, причем их коэффициенты являются дифференцируемыми периодическими функциями аргументов t_1, \dots, t_m соответственно с периодами $\omega_1, \dots, \omega_m$. Матрицы A_j постоянны и имеют размерность $n \times n$. По сказанному выше, $P_j^{(q)}(0, \dots, 0, t_1, \dots, t_m) \equiv 0$.

Как известно [1], если матрицы A_j будут периодическими по t_1, \dots, t_m с периодами $\omega_1, \dots, \omega_m$, то такая система с помощью неособого линейного преобразования с периодическими коэффициентами приводится к системе вида (1) с постоянными матрицами.

Условия полной интегрируемости запишем в виде

$$\frac{D(A_jx + P_j)}{D(x)} (A_kx + P_k) + \frac{\partial P_j}{\partial t_k} \equiv \frac{D(A_kx + P_k)}{D(x)} (A_jx + P_j) + \frac{\partial P_k}{\partial t_j}, \quad (2)$$

причем $\frac{D(A_jx + P_j)}{D(x)}$ означает матрицу функционального определителя

по x_1, \dots, x_n системы функций, состоящей из координат вектора $A_jx + P_j$. Из (2) следует, что A_1, \dots, A_m попарно перестановочны. Поэтому так же, как и в [2], мы без ограничения общности будем считать, что матрицы A_j имеют либо диагональную, либо нижнюю треугольную форму.

Обозначим через $\lambda_j^{(1)}, \dots, \lambda_j^{(n)}$ собственные значения (диагональные элементы матрицы A_j , а через $\alpha_{qk}^{(j)}$ ($q > k, q=1, \dots, n; k=1, \dots, n-1$) элементы A_j , стоящие ниже главной диагонали.

Сделаем теперь формальное преобразование системы (1):

$$x = \Phi(u, t_1, \dots, t_m), \quad (3)$$

где вектор-столбец Φ имеет координаты

$$\Phi_q(u_1, \dots, u_n, t_1, \dots, t_m) = u_q + \sum_{j_1 + \dots + j_n = 2}^{\infty} b_{j_1 \dots j_n}^{(q)} u_1^{j_1} \dots u_n^{j_n} \quad (4)$$

$(q = 1, \dots, n)$

с периодическими по t_1, \dots, t_m функциями $b_{j_1 \dots j_n}^{(q)}$, имеющими соответственно периоды $\omega_1, \dots, \omega_m$. Вектор u будет удовлетворять системе

$$du = [A_1 u + F_1(u, t_1, \dots, t_m)] dt_1 + \dots + [A_m u + F_m(u, t_1, \dots, t_m)] dt_m, \quad (5)$$

причем координаты $F_j^{(1)}, \dots, F_j^{(n)}$ вектор-столбца F_j являются формальными степенными рядами по u_1, \dots, u_n , начинающимися с членов порядка не ниже второго, коэффициенты которых будут периодическими по t_1, \dots, t_m периодов $\omega_1, \dots, \omega_m$. Пусть

$$F_j^{(q)} = \sum_{i_1 + \dots + i_n = 2}^{\infty} a_{j_1 \dots j_n}^{(qi)}(t_1, \dots, t_m) u_1^{i_1} \dots u_n^{i_n}.$$

Подставляя (3) в (1) и учитывая (5), получаем

$$\frac{D(\Phi)}{D(u)} [A_j u + F_j(u, t_1, \dots, t_m)] + \frac{\partial \Phi}{\partial t_j} = A_j \Phi + P_j(\Phi, t_1, \dots, t_m) \quad (6)$$

$$(j = 1, \dots, m).$$

Каждую систему (6) можно записать так:

$$\sum_{s=1}^n \left(\sum_{k=1}^{s-1} \alpha_{sk}^{(j)} u_k + \lambda_j^{(s)} u_s + F_j^{(s)} \right) \frac{\partial \Phi_q}{\partial u_s} + \frac{\partial \Phi_q}{\partial t_j} =$$

$$= \sum_{\sigma=1}^{q-1} \alpha_{q\sigma}^{(j)} \Phi_{\sigma} + \lambda_j^{(q)} \Phi_q + P_j^{(q)}(\Phi_1, \dots, \Phi_n, t_1, \dots, t_m) \quad (7)$$

$$(q = 1, \dots, n).$$

Подставляя (4) в (7), получаем

$$\frac{\partial b_{j_1 \dots j_n}^{(q)}}{\partial t_j} + \left(\sum_{s=1}^n \lambda_j^{(s)} j_s - \lambda_j^{(q)} \right) b_{j_1 \dots j_n}^{(q)} + \sum_{s=1}^n (j_s + 1) \times$$

$$\times \sum_{k=1}^{s-1} \alpha_{sk}^{(j)} b_{j_1 \dots j_k - 1 \dots j_s + 1 \dots j_n}^{(q)} + a_{j_1 \dots j_n}^{(qi)} + \Sigma' \sum_{s=1}^n \alpha_{i_1' \dots i_n'}^{(sj)} b_{i_1' \dots i_n'}^{(q)} =$$

$$= \sum_{\sigma=1}^{q-1} \alpha_{q\sigma}^{(j)} b_{j_1 \dots j_n}^{(\sigma)} + R_{j_1 \dots j_n}^{(qi)} \quad (8)$$

$$(q = 1, \dots, n),$$

где в Σ' суммируем по тем j_1', \dots, j_n' и j_1'', \dots, j_n'' , для которых $j_1' + j_1'' = j_1, \dots, j_s' + j_s'' - 1 = j_s, \dots, j_n' + j_n'' = j_n$, а $R_{j_1 \dots j_n}^{(qi)}$ являются полиномами относительно тех $b_{j_1' \dots j_n'}^{(q)}$, для которых $j_1' + \dots + j_n' < j_1 + \dots + j_n$, $j_1' \leq j_1, \dots, j_n' \leq j_n$, $q' = 1, \dots, n$. Эти $R_{j_1 \dots j_n}^{(qi)}$ получаются как коэффициенты при $u_1^{i_1} \dots u_n^{i_n}$ при подстановке рядов (4) в $P_j^{(q)}(\Phi_1, \dots, \Phi_n, t_1, \dots, t_m)$.

Условия полной интегрируемости для системы (5) запишем в виде

$$\frac{\partial F_p^{(\sigma)}}{\partial t_j} + \sum_{s=1}^n \left(\sum_{k=1}^{s-1} \alpha_{sk}^{(j)} u_k + \lambda_j^{(s)} u_s + F_j^{(s)} \right) \times \quad (9)$$

$$\begin{aligned} & \times \frac{\partial \left(\sum_{k=1}^{\sigma-1} \alpha_{\sigma k}^{(p)} u_k + \lambda_p^{(\sigma)} u_\sigma + F_p^{(\sigma)} \right)}{\partial u_s} = \frac{\partial F_j^{(\sigma)}}{\partial t_p} + \\ & + \sum_{s=1}^n \left(\sum_{k=1}^{s-1} \alpha_{sk}^{(p)} u_k + \lambda_p^{(s)} u_s + F_p^{(s)} \right) \frac{\partial \left(\sum_{k=1}^{\sigma-1} \alpha_{\sigma k}^{(j)} u_k + \lambda_j^{(\sigma)} u_\sigma + F_j^{(\sigma)} \right)}{\partial u_s} \quad (9) \end{aligned}$$

(j, p = 1, ..., m; \sigma = 1, ..., n).

Из (9) получаем

$$\begin{aligned} & \frac{\partial a_{j_1 \dots j_n}^{(\sigma p)}}{\partial t_j} + \left(\sum_{s=1}^n \lambda_j^{(s)} j_s - \lambda_j^{(\sigma)} \right) a_{j_1 \dots j_n}^{(\sigma p)} + \\ & + \sum_{s=1}^n \sum_{k=1}^{s-1} \alpha_{sk}^{(j)} (j_s + 1) a_{j_1 \dots j_{k-1} \dots j_{s+1} \dots j_n}^{(\sigma p)} + \sum_{k=1}^{\sigma-1} \alpha_{\sigma k}^{(p)} a_{j_1 \dots j_n}^{(kj)} + \\ & + \Sigma' \sum_{s=1}^n a_{j_1' \dots j_n}^{(sj)} a_{j_1'' \dots j_n}^{(\sigma p)} j_s'' = \frac{\partial a_{j_1 \dots j_n}^{(\sigma j)}}{\partial t_p} + \left(\sum_{s=1}^n \lambda_p^{(s)} j_s - \lambda_p^{(\sigma)} \right) a_{j_1 \dots j_n}^{(\sigma j)} + \\ & + \sum_{s=1}^n \sum_{k=1}^{s-1} \alpha_{sk}^{(p)} (j_s + 1) a_{j_1 \dots j_{k-1} \dots j_{s+1} \dots j_n}^{(\sigma j)} + \sum_{k=1}^{\sigma-1} \alpha_{\sigma k}^{(j)} a_{j_1 \dots j_n}^{(kp)} + \\ & + \Sigma' \sum_{s=1}^n a_{j_1' \dots j_n}^{(sp)} a_{j_1'' \dots j_n}^{(\sigma j)} j_s'' \quad (10) \end{aligned}$$

причем в \Sigma' суммируем так же, как в соответствующей сумме в (8).

Обозначим через S_j^{(q)} множество систем (j_1, ..., j_n) из целых неотрицательных чисел с j_1 + ... + j_n > 1, таких, что

$$\lambda_j^{(1)} j_1 + \dots + \lambda_j^{(n)} j_n - \lambda_j^{(q)} \equiv 0 \pmod{\frac{2\pi_i}{\omega_j}} \quad (11)$$

Пусть далее S^{(q)} = \bigcap_{j=1}^m S_j^{(q)}.

Так же, как и в [2], величину r_{j_1 \dots j_n} = nj_1 + (n-1)j_2 + \dots + 2j_{n-1} + j_n будем называть рангом системы (j_1, ..., j_n) или также любого коэффициента с такими нижними индексами.

Множество всех (j_1, ..., j_n) с целыми неотрицательными числами, для которых j_1 + \dots + j_n = M, обозначим \sigma_M. Аналогично [2] можно построить множества \bar{H}_q^{(M)} и R_M^{(q)} (\bar{H}_q^{(M)} \cup R_M^{(q)} = \sigma_M). Однако здесь мы поступим другим образом. Пусть r_1, \dots, r_\delta - ранги всех (j_1, \dots, j_n) \in \sigma_M \cap S^{(q)}, расположенные в порядке возрастания. Построим множества \bar{H}_q^{(M)}, состоящие из некоторых (j_1, \dots, j_n) \in \sigma_M. Отнесем прежде всего к \bar{H}_q^{(M)} те из (j_1, \dots, j_n) \in S^{(q)} \cap \sigma_M, для которых r_{j_1 \dots j_n} = r_1. Если из всех (j_1, \dots, j_n), для

которых $r_1 \leq r_{j_1 \dots j_n} < \tilde{r} < r_2$, мы уже отнесли подходящие к $\bar{H}_q^{(M)}$, то с $(j_1, \dots, j_n) \in \sigma_M$, для которых $r_{j_1 \dots j_n} = \tilde{r}$, поступаем так. Каждую (j_1, \dots, j_n) отнесем к $\bar{H}_q^{(M)}$, если $\bigcup_{s=2} \bigcup_{k=1} (j_1, \dots, j_k - 1, \dots, j_s + 1, \dots, j_n) \delta_{sk}$ не пустое, причем $\delta_{sk} = 1$, если вектор $\{\alpha_{sk}^{(1)}, \dots, \alpha_{sk}^{(m)}\}$ ненулевой, и $\delta_{sk} = 0$ в противном случае, а умножение на 1 означает, что соответствующая система входит в объединение, умножение же на нуль — что не входит. В это объединение не включаем и те системы, которые не принадлежат $\bar{H}_q^{(M)}$. Систему $(j_1, \dots, j_n) \in \sigma_M$, для которой $r_{j_1 \dots j_n} = r_2$, отнесем к $\bar{H}_q^{(M)}$, если либо $(j_1, \dots, j_n) \in S^{(q)}$, либо указанное выше объединение не пустое. Аналогично поступаем и с остальными $(j_1, \dots, j_n) \in \sigma_M$. Пусть $(j'_1, \dots, j'_n) \in \bar{H}_q^{(M')}$, $(j''_1, \dots, j''_n) \in \bar{H}_q^{(M'')}$, причем $M' + M'' = M + 1$. Тогда систему $(j'_1 + j''_1, \dots, j'_n + j''_n - 1, \dots, j'_n + j''_n)$ относим к $\bar{H}_q^{(M)}$. Определим

$$H_q^{(M)} = \left(\bigcup_{k=1}^{q-1} H_k^{(M)} \delta_{qk} \right) \cup \bar{H}_q^{(M)}.$$

Очевидно, $H_q^{(M)} \subseteq \tilde{H}_q^{(M)}$.

В силу того что если $(j'_1, \dots, j'_n) \in S^{(p)}$, $(j''_1, \dots, j''_n) \in S^{(q)}$, то $(j'_1 + j''_1, \dots, j'_n + j''_n - 1, \dots, j'_n + j''_n) \in S^{(q)}$ (это легко видно из (11)), из предыдущего следует, что в случае диагональных A_j ($j = 1, \dots, m$) имеем $H_q^{(M)} = \sigma_M \cap S^{(q)}$.

Обозначим $R_M^{(q)} = \sigma_M \setminus H_q^{(M)}$. Аналогично [2] каждое множество $R_M^{(q)}$ разобьем на прямую сумму множеств $G_{qj}^{(\alpha)}(M_q)$ ($\alpha = 1, \dots, v_{M_q}$), где v_{M_q} некоторое целое число и $j_{M_q}^{(\alpha)}$ принимает целые значения в некоторой последовательности из $1, \dots, m$. Так же каждое множество $H_q^{(M)} \setminus (\sigma_M \cap S^{(q)})$ разобьем на прямую сумму множеств $\Gamma_{qj}^{(\beta)}(M_q)$ ($\beta = 1, \dots, \mu_{M_q}$). Каждое из множеств $G_{qj}^{(\alpha)}(M_q)$ и $\Gamma_{qj}^{(\beta)}(M_q)$ характеризуется тем, что при $(j_1, \dots, j_n) \in G_{qj}^{(\alpha)}(M_q)$ или при $(j_1, \dots, j_n) \in \Gamma_{qj}^{(\beta)}(M_q)$ имеем

$$\sum_{s=1}^n \lambda_j^{(s)} j_s - \lambda_j^{(q)} \neq 0 \pmod{\frac{2\pi i}{\omega_j}} \quad (12)$$

при $j = j_{M_q}^{(\alpha)}$ и соответственно при $j = j_{M_q}^{(\beta)}$.

Для $(j_1, \dots, j_n) \in S^{(q)}$ в силу (11) имеем

$$\lambda_j^{(1)} j_1 + \dots + \lambda_j^{(n)} j_n - \lambda_j^{(q)} = k_{j_1 \dots j_n}^{(qj)} \frac{2\pi i}{\omega_j} \quad (j = 1, \dots, m), \quad (13)$$

где k с индексами — целые числа.

Каждой системе $(j_1, \dots, j_n) \in H_q^{(M)}$ поставим в соответствие множество $Q_{j_1 \dots j_n}^{(q)}$ векторов с целочисленными координатами. В силу (13) каждой системе $(j_1, \dots, j_n) \in H_q^{(M)}$, для которой $r_{j_1 \dots j_n} = r_1$, будет соответствовать вектор с координатами $k_{j_1 \dots j_n}^{(qj)}$ ($j = 1, \dots, m$). Для такой системы (j_1, \dots, j_n) полагаем $\bar{Q}_{j_1 \dots j_n}^{(q)}$ равным одному вектору с координатами $k_{j_1 \dots j_n}^{(qj)}$ ($j = 1, \dots,$

m). Определим $\bar{Q}_{j_1 \dots j_n}^{(q)}$ для $(j_1, \dots, j_n) \in H_q^{(M)}$, для которых $r_1 < r_{j_1 \dots j_n} < r_2$, в порядке возрастания ранга (j_1, \dots, j_n) как

$$\bar{Q}_{j_1 \dots j_n}^{(q)} = \prod_{s=2}^n \prod_{k=1}^{s-1} \bar{Q}_{j_1 \dots j_{k-1} \dots j_{s+1} \dots j_n}^{(q)} \delta_{sk}, \quad (*)$$

причем \bar{Q} с нижними индексами, которые не принадлежат $H_q^{(M)}$, считаются пустыми. Положим

$$\bar{Q}_{j_1 \dots j_n}^{(q)} = \left(\prod_{s=2}^n \prod_{k=1}^{s-1} \bar{Q}_{j_1 \dots j_{k-1} \dots j_{s+1} \dots j_n}^{(q)} \delta_{sk} \right) \cup \{k_{j_1 \dots j_n}^{(q1)}, \dots, k_{j_1 \dots j_n}^{(qm)}\}, \quad (**)$$

если $r_{j_1 \dots j_n} = r_2$. Далее определяем $\bar{Q}_{j_1 \dots j_n}^{(q)}$, если $r_{\beta-1} < r_{j_1 \dots j_n} < r_\beta$, по формуле (*), а если $r_{j_1 \dots j_n} = r_\beta$, то по формуле (**).

Определим теперь множества $\bar{Q}_{j_1 \dots j_n}^{(q)}$. Пусть $\bar{Q}_{j'_1 \dots j'_n}^{(s)}$, $\bar{Q}_{j''_1 \dots j''_n}^{(a)}$ — такие множества, что $j'_1 + j''_1 = j_1, \dots, j'_s + j''_s - 1 = j_s, \dots, j'_n + j''_n = j_n$. Обозначим $\bar{Q}_{j'_1 \dots j'_n}^{(s)} + \bar{Q}_{j''_1 \dots j''_n}^{(a)}$ множество, состоящее из не равных друг другу векторов, полученных сложением каждого вектора одного множества с каждым вектором другого множества. Тогда $\bar{Q}_{j_1 \dots j_n}^{(q)} = \cup'_{s=1}^n (\bar{Q}_{j'_1 \dots j'_n}^{(s)} + \bar{Q}_{j''_1 \dots j''_n}^{(a)})$, где \cup' означает объединение по всем (j'_1, \dots, j'_n) и (j''_1, \dots, j''_n) , для которых $j'_1 + j''_1 = j_1, \dots, j'_s + j''_s - 1 = j_s, \dots, j'_n + j''_n = j_n$. Определим

$$Q_{j_1 \dots j_n}^{(q)} = \left(\prod_{k=1}^{q-1} Q_{j_1 \dots j_n}^{(k)} \delta_{qk} \right) \cup \bar{Q}_{j_1 \dots j_n}^{(q)} \cup \bar{Q}_{j_1 \dots j_n}^{(a)}.$$

Обозначим число различных векторов во множестве $Q_{j_1 \dots j_n}^{(q)}$ через $v_{j_1 \dots j_n}^{(q)}$ и занумеруем их в каком-либо порядке, обозначая $k_{\beta j_1 \dots j_n}^{(q)}$ ($\beta = 1, \dots, v_{j_1 \dots j_n}^{(q)}$).

Отметим, что каждый вектор, принадлежащий множеству $\bar{Q}_{j_1 \dots j_n}^{(q)}$ принадлежит и множеству $\bar{Q}_{j_1 \dots j_n}^{(q')}$ при некотором $q' \leq q$. Для этого достаточно заметить, что если $k' = \{k_{j'_1 \dots j'_n}^{(s1)}, \dots, k_{j'_1 \dots j'_n}^{(sm)}\} \in (j'_1, \dots, j'_n) \in H_s^{(M')}$, $k'' = \{k_{j''_1 \dots j''_n}^{(a1)}, \dots, k_{j''_1 \dots j''_n}^{(am)}\} \in (j''_1, \dots, j''_n) \in H_q^{(M'')}$, причем $M' + M'' = M + 1$, то, как следует из (13), $(j'_1 + j''_1, \dots, j'_s + j''_s - 1, \dots, j'_n + j''_n) \in H_q^{(M)} \cap \cap S^{(q')}$ соответствует вектор $k' + k''$. Так что координаты всякого вектора из каждого множества $Q_{j_1 \dots j_n}^{(q)}$ будут удовлетворять соотношениям вида (13).

В случае диагональных A_j ($j = 1, \dots, m$) каждое $Q_{j_1 \dots j_n}^{(q)}$ состоит из одного вектора с координатами $k_{j_1 \dots j_n}^{(qi)}$ ($j = 1, \dots, m$).

Пусть \bar{M} есть первое число из $2, 3, \dots$, для которого $\sigma_{\bar{M}} \cap S^{(q)}$ не пусто при некоторых q . Положим $a_{j_1 \dots j_n}^{(qi)} = 0$ при $j = j_{Mq}^{(\alpha)}$ для $(j_1, \dots, j_n) \in G_{qj_{Mq}^{(\alpha)}}^{(M)}$ ($M = 2, 3, \dots, \bar{M}$). Определим $b_{j_1 \dots j_n}^{(q)}$ для $(j_1, \dots, j_n) \in R_M^{(q)}$ при $M = 2, 3, \dots, \bar{M}$ следующим образом. Если $(j_1, \dots, j_n) \in G_{qj_{Mq}^{(\alpha)}}^{(M)}$, то $b_{j_1 \dots j_n}^{(q)}$ определяем из уравнений (8) при $j = j_{Mq}^{(\alpha)}$, при этом в такой последователь-

ности: сначала для $M=2$, затем для $M=3$ и т. д. Определение же $b_{j_1 \dots j_n}^{(q)}$ при фиксированном M происходит в последовательности $q=1, q=2, \dots$. При фиксированных M и q определяем $b_{j_1 \dots j_n}^{(q)}$ сначала для $(j_1, \dots, j_n) \in G_{qj_{Mq}}^{(M)}$, затем для $(j_1, \dots, j_n) \in G_{qj_{Mq}}^{(M)}$ и т. д. При фиксированных M, q и α (т. е. при $(j_1, \dots, j_n) \in G_{qj_{Mq}}^{(M)}$) определяем $b_{j_1 \dots j_n}^{(q)}$ в последовательности от меньшего ранга к большему. Коэффициенты $b_{j_1 \dots j_n}^{(q)}$, имеющие один и тот же ранг, определяются в любой последовательности. Описанный процесс определения $b_{j_1 \dots j_n}^{(q)}$ для $(j_1, \dots, j_n) \in R_M^{(q)}$ ($M=2, 3, \dots, \bar{M}$) всегда проходит в силу (12), и $b_{j_1 \dots j_n}^{(q)}$ получаются периодическими функциями, притом они определяются единственным образом.

Из (10) в такой же последовательности, как при определении $b_{j_1 \dots j_n}^{(q)}$, получаем, что $a_{j_1 \dots j_n}^{(qj)} = 0$ для $(j_1, \dots, j_n) \in G_{qj_{Mq}}^{(M)}$ при всех j . Значит, $a_{j_1 \dots j_n}^{(qj)} = 0$ для $(j_1, \dots, j_n) \in R_M^{(q)}$ ($M=2, 3, \dots, \bar{M}$; $j=1, \dots, m$; $q=1, \dots, n$).

Приступим теперь к определению $b_{j_1 \dots j_n}^{(q)}$ для $(j_1, \dots, j_n) \in H_q^{(\bar{M})}$. Пусть q_1 есть первое число из $1, \dots, n$, для которого $H_{q_1}^{(\bar{M})}$ не пусто, а $\tilde{r}_1, \dots, \tilde{r}_s$ ранги $(j_1, \dots, j_n) \in H_{q_1}^{(\bar{M})} \cap S^{(q_1)}$, расположенные в порядке возрастания. Определим прежде всего $b_{j_1 \dots j_n}^{(q_1)}$ для $(j_1, \dots, j_n) \in H_{q_1}^{(\bar{M})}$, для которых $r_{j_1 \dots j_n} = \tilde{r}_1$. Так как в этом случае выполняются соотношения (13), то из уравнений (8) при любом фиксированном j видим, что если взять

$$a_{j_1 \dots j_n}^{(q_1 j)} = f_{j_1 \dots j_n}^{(q_1 j)}(t_1, \dots, t_{j-1}, t_{j+1}, \dots, t_m) \exp \left[-k_{j_1 \dots j_n}^{(q_1 j)} \frac{2\pi i}{\omega_j} t_j \right], \quad (14)$$

где $f_{j_1 \dots j_n}^{(q_1 j)}$ — известные периодические функции своих аргументов, определяемые через известные функции уравнений (8), явный вид которых легко виден, то $b_{j_1 \dots j_n}^{(q_1)}$ получаются в виде

$$b_{j_1 \dots j_n}^{(q_1)} = \Phi_{j_1 \dots j_n}^{(q_1)} + C_{j_1 \dots j_n}^{(q_1)}(t_1, \dots, t_{j-1}, t_{j+1}, \dots, t_m) \exp \left[-k_{j_1 \dots j_n}^{(q_1 j)} \frac{2\pi i}{\omega_j} t_j \right]. \quad (15)$$

Здесь $\Phi_{j_1 \dots j_n}^{(q_1)}$ — периодическая функция t_1, \dots, t_m ; $C_{j_1 \dots j_n}^{(q_1)}$ — произвольная периодическая функция своих аргументов.

Из условий полной интегрируемости (10) получаем для $p \neq j$

$$\frac{\partial a_{j_1 \dots j_n}^{(q_1 p)}}{\partial t_j} + a_{j_1 \dots j_n}^{(q_1 p)} \left(\sum_{s=1}^n \lambda_j^{(s)} j_s - \lambda_j^{(q_1)} \right) = \left[\frac{\partial f_{j_1 \dots j_n}^{(q_1 j)}}{\partial t_p} + f_{j_1 \dots j_n}^{(q_1 j)} \left(\sum_{s=1}^n \lambda_p^{(s)} j_s - \lambda_p^{(q_1)} \right) \right] \exp \left[-k_{j_1 \dots j_n}^{(q_1 j)} \frac{2\pi i}{\omega_j} t_j \right].$$

Отсюда следует:

$$\frac{\partial f_{j_1 \dots j_n}^{(q_1 i)}}{\partial t_p} + \left(\sum_{s=1}^n \lambda_p^{(s)} j_s - \lambda_p^{(q_1 i)} \right) f_{j_1 \dots j_n}^{(q_1 i)} = 0,$$

$$\frac{\partial a_{j_1 \dots j_n}^{(q_1 p)}}{\partial t_j} + \left(\sum_{s=1}^n \lambda_j^{(s)} j_s - \lambda_j^{(q_1 i)} \right) a_{j_1 \dots j_n}^{(q_1 p)} = 0$$

($p = 1, \dots, m; p \neq j$).

Поэтому

$$a_{j_1 \dots j_n}^{(q_1 p)} = \gamma_{j_1 \dots j_n}^{(q_1 i)} \exp(-k_{j_1 \dots j_n}^{(q_1 i)} t), \quad (16)$$

где $\gamma_{j_1 \dots j_n}^{(q_1 i)} = \text{const}$; t — вектор с координатами $\frac{2\pi i}{\omega_1} t_1, \dots, \frac{2\pi i}{\omega_m} t_m$, а также

$$a_{j_1 \dots j_n}^{(q_1 p)} = f_{j_1 \dots j_n}^{(q_1 p)}(t_1, \dots, t_{j-1}, t_{j+1}, \dots, t_m) \exp \left[-k_{j_1 \dots j_n}^{(q_1 i)} \frac{2\pi i}{\omega_j} t_j \right]$$

($p = 1, \dots, m; p \neq j$),

где $f_{j_1 \dots j_n}^{(q_1 p)}$ — некоторые периодические функции своих аргументов.

Подставляя теперь (15) в уравнения (8) при $j = p$ (p фиксировано), получаем

$$\left[\frac{\partial C_{j_1 \dots j_n}^{(q_1 i)}}{\partial t_p} + \left(\sum_{s=1}^n \lambda_p^{(s)} j_s - \lambda_p^{(q_1 i)} \right) C_{j_1 \dots j_n}^{(q_1 i)} + f_{j_1 \dots j_n}^{(q_1 p)} \right] \times$$

$$\times \exp \left[-k_{j_1 \dots j_n}^{(q_1 i)} \frac{2\pi i}{\omega_j} t_j \right] = F_{j_1 \dots j_n}^{(q_1 i)},$$

где $F_{j_1 \dots j_n}^{(q_1 i)}$ — известные периодические функции t_1, \dots, t_m . Из этих уравнений видно, что $C_{j_1 \dots j_n}^{(q_1 i)}$ можно взять так, чтобы

$$f_{j_1 \dots j_n}^{(q_1 p)} = \tilde{f}_{j_1 \dots j_n}^{(q_1 p)} \exp \left[-k_{j_1 \dots j_n}^{(q_1 p)} \frac{2\pi i}{\omega_p} t_p \right],$$

где $\tilde{f}_{j_1 \dots j_n}^{(q_1 p)}$ — зависящие только от t_k ($k = 1, \dots, m; k \neq p, k \neq j$) периодические функции, определяемые очевидным образом через $F_{j_1 \dots j_n}^{(q_1 i)}$. Функции $C_{j_1 \dots j_n}^{(q_1 i)}$, очевидно, имеют вид

$$C_{j_1 \dots j_n}^{(q_1 i)} = \psi_{j_1 \dots j_n}^{(q_1 i)}(t_1, \dots, t_{j-1}, t_{j+1}, \dots, t_m) +$$

$$+ \tilde{C}_{j_1 \dots j_n}^{(q_1 i)} \exp \left[-k_{j_1 \dots j_n}^{(q_1 p)} \frac{2\pi i}{\omega_p} t_p \right],$$

где ψ и \tilde{C} с индексами — периодические функции своих аргументов, причем \tilde{C} является произвольной и не зависит от t_p и t_j .

Таким образом, при фиксированном $p \neq j$ путем выбора произвольной функции в (15) получаем

$$a_{j_1 \dots j_n}^{(q_1 p)} = \tilde{f}_{j_1 \dots j_n}^{(q_1 p)} \exp \left[-k_{j_1 \dots j_n}^{(q_1 p)} \frac{2\pi i}{\omega_p} t_p - k_{j_1 \dots j_n}^{(q_1 i)} \frac{2\pi i}{\omega_j} t_j \right].$$

Используя теперь, как и выше, условия (10), найдем

$$a_{j_1 \dots j_n}^{(q_1 r)} = \tilde{f}_{j_1 \dots j_n}^{(q_1 r)} \exp \left[-k_{j_1 \dots j_n}^{(q_1 p)} \frac{2\pi i}{\omega_p} t_p - k_{j_1 \dots j_n}^{(q_1 i)} \frac{2\pi i}{\omega_j} t_j \right] \\ (r=1, 2, \dots, m; \quad r \neq p, \quad r \neq j),$$

где \tilde{f} с индексами—некоторые зависящие только от t_r ($r=1, \dots, m; \quad r \neq p, \quad r \neq j$) периодические функции. Функция же $a_{j_1 \dots j_n}^{(q_1 p)}$ имеет вид (16) при $j=p$. Используя уравнения (8) при $j=r$, далее определяем $\tilde{C}_{j_1 \dots j_n}^{(q_1)}$. Применяя указанный выше процесс и далее, мы видим, что можно так определить произвольную функцию в (15), чтобы имели место равенства (16) для всех $j=1, \dots, m$, при этом функция $C_{j_1 \dots j_n}^{(q_1)}$ будет зависеть от произвольной постоянной.

Теперь определяем $b_{j_1 \dots j_n}^{(q_1)}$ для $(j_1, \dots, j_n) \in H_{q_1}^{(\tilde{M})}$, для которых $\tilde{r}_1 < r_{j_1 \dots j_n} < \tilde{r}_2$. Так как при этих условиях каждая (j_1, \dots, j_n) будет принадлежать одному из $\Gamma_{q_1 \tilde{M} q_1}^{(\tilde{M})}$, то эти $b_{j_1 \dots j_n}^{(q_1)}$ определяем так же, как $b_{j_1 \dots j_n}^{(q)}$ при $(j_1, \dots, j_n) \in R_{\tilde{M}}^{(q)}$. При этом $a_{j_1 \dots j_n}^{(q_1 i)} = 0$ при $j = \tilde{j}_{\tilde{M} q_1}^{(\beta)}$ для $(j_1, \dots, j_n) \in \Gamma_{q_1 \tilde{M} q_1}^{(\tilde{M})}$. Затем из (10) получим, что

$$a_{j_1 \dots j_n}^{(q_1 i)} = \sum_{\beta=1}^{v_{j_1 \dots j_n}^{(q_1)}} \gamma_{j_1 \dots j_n}^{(q_1 \beta)} \exp \left[-k_{\beta j_1 \dots j_n}^{(q_1)} t \right] \quad (j=1, \dots, m), \quad (17)$$

где γ с индексами—постоянные.

Далее определяем $b_{j_1 \dots j_n}^{(q_1)}$ для $(j_1, \dots, j_n) \in H_{q_1}^{(\tilde{M})}$, для которых $r_{j_1 \dots j_n} = \tilde{r}_2$. Из уравнений (8), как и для случая $(j_1, \dots, j_n) \in H_{q_1}^{(\tilde{M})}$, $r_{j_1 \dots j_n} = \tilde{r}_1$, получаем $b_{j_1 \dots j_n}^{(q_1)}$ в виде (15), а $a_{j_1 \dots j_n}^{(q_1 i)}$ при фиксированном j в виде (14). Из условий (10) для $p \neq j$ получаем

$$\frac{\partial a_{j_1 \dots j_n}^{(q_1 p)}}{\partial t_j} + a_{j_1 \dots j_n}^{(q_1 p)} \left(\sum_{s=1}^n \lambda_j^{(s)} j_s - \lambda_j^{(q_1)} \right) = \left[\frac{\partial f_{j_1 \dots j_n}^{(q_1 i)}}{\partial t_p} + \right. \\ \left. + \left(\sum_{s=1}^n \lambda_p^{(s)} j_s - \lambda_p^{(q_1)} \right) f_{j_1 \dots j_n}^{(q_1 i)} \right] \exp \left[-k_{j_1 \dots j_n}^{(q_1 i)} \frac{2\pi i}{\omega_j} t_j \right] + \\ + \sum_{\beta=1}^{v_{j_1 \dots j_n}^{(q_1)} - 1} \tilde{\gamma}_{j_1 \dots j_n}^{(q_1 p \beta)} \exp \left[-k_{\beta j_1 \dots j_n}^{(q_1)} t \right],$$

где $\tilde{\gamma}$ с индексами—постоянные. Отсюда аналогично случаю $(j_1, \dots, j_n) \in H_{q_1}^{(\tilde{M})}$, $r_{j_1 \dots j_n} = \tilde{r}_1$ получаем $a_{j_1 \dots j_n}^{(q_1 i)}$ в виде (17),

$$a_{j_1 \dots j_n}^{(q_1 p)} = f_{j_1 \dots j_n}^{(q_1 p)}(t_1, \dots, t_{j-1}, t_{j+1}, \dots, t_m) \exp \left[-k_{j_1 \dots j_n}^{(q_1 i)} \frac{2\pi i}{\omega_j} t_j \right] + \\ + \sum_{\beta=1}^{v_{j_1 \dots j_n}^{(q_1)} - 1} \delta_{j_1 \dots j_n}^{(q_1 p \beta)} \exp \left[-k_{\beta j_1 \dots j_n}^{(q_1)} t \right] \quad (p=1, \dots, m; \quad p \neq j),$$

где δ с индексами—постоянные, f —периодические функции своих аргументов. Продолжая и далее аналогично случаю $(j_1, \dots, j_n) \in H_{q_1}^{(\tilde{M})}$, $r_{j_1 \dots j_n} = \tilde{r}_1$, видим, что имеем $a_{j_1 \dots j_n}^{(q, j)}$ в виде (17) для всех $j = 1, \dots, m$.

Затем определяем по указанному выше процессу все остальные $b_{j_1 \dots j_n}^{(q, j)}$ для $(j_1, \dots, j_n) \in H_{q_1}^{(\tilde{M})}$, определяя одновременно и $a_{j_1 \dots j_n}^{(q, j)}$. После этого приступаем к определению $b_{j_1 \dots j_n}^{(q_1+1)}$ для $(j_1, \dots, j_n) \in H_{q_1+1}^{(\tilde{M})}$ и т. д. Затем определяем $b_{j_1 \dots j_n}^{(q)}$ для $(j_1, \dots, j_n) \in \sigma_M$ ($M = \tilde{M} + 1, \dots$), одновременно определяя $a_{j_1 \dots j_n}^{(q, j)}$. Очевидно, получим $a_{j_1 \dots j_n}^{(q, j)} = 0$ при $(j_1, \dots, j_n) \in R_M^{(q)}$ ($M = 2, 3, \dots$; $j = 1, \dots, m$; $q = 1, \dots, n$), а при $(j_1, \dots, j_n) \in H_q^{(M)}$ $a_{j_1 \dots j_n}^{(q, j)}$ имеют вид (17).

Таким образом, справедлива

Теорема 1. С помощью формального преобразования (3), (4) с подходящими периодическими коэффициентами система (1) приводится к системе (5) с

$$F_j^{(q)} = \sum_{(i_1, \dots, i_n) \in S_q} a_{j_1 \dots j_n}^{(q, i)} u_1^{i_1} \dots u_n^{i_n},$$

где $S_q = \bigcup_{M=2}^{\infty} H_q^{(M)}$ и $a_{j_1 \dots j_n}^{(q, i)}$ имеют вид (17).

Установим сейчас один признак сходимости преобразования (3), (4). Очевидно, преобразование (3), (4) можно рассматривать как преобразование системы

$$\frac{dx}{dt_j} = A_j x + P_j(x, t_1, \dots, t_m)$$

при любом j и при фиксированных t_k ($k = 1, \dots, m$; $k \neq j$) в систему

$$\frac{du}{dt_j} = A_j u + F_j(u, t_1, \dots, t_m).$$

Если использовать это и применить результаты [3], то аналогично соответствующему случаю в [2] доказывается

Теорема 2. Если собственные числа хотя бы одной матрицы A_j расположены с одной стороны прямой, проходящей через начало в комплексной плоскости, то ряды (4) сходятся в окрестности $u = 0$, а $F_j^{(q)}$ являются полиномами относительно u_1, \dots, u_n .

При выполнении условий теоремы 2 система (5) интегрируется в элементарных функциях. Считая, что $\lambda_j^{(i)}$ ($i = 1, \dots, n$) так упорядочены, что при возрастании индекса i расстояние точки $\lambda_j^{(i)}$ от прямой, упомянутой в теореме 2, не уменьшается, получаем

$$u_1 = v_1, u_k = v_k + Q_k(v_1, \dots, v_{k-1}, t_1, \dots, t_m) \quad (k = 2, \dots, n),$$

где $v_k = C_k \exp[\lambda_1^{(k)} t_1 + \dots + \lambda_m^{(k)} t_m]$, C_k —произвольные постоянные, Q_k —полиномы своих аргументов с коэффициентами вида (17), $Q_k(0, \dots, 0, t_1, \dots, t_m) \equiv 0$.

Пусть теперь какое бы j ни взяли, не существует прямой, проходящей через начало комплексной плоскости, с одной стороны которой располагались бы $\lambda_j^{(i)}$ ($i = 1, \dots, n$). Но если не все собственные значения матрицы

A_j равны нулю, то найдется прямая, с одной стороны которой будут расположены p собственных чисел матрицы A_j , скажем, $\lambda_j^{(n-p+1)}, \dots, \lambda_j^{(n)}$, $p < n$. Тогда аналогично теореме 2 устанавливается

Теорема 3. Если p собственных чисел $\lambda_j^{(n-p+1)}, \dots, \lambda_j^{(n)}$ некоторой матрицы A_j расположены с одной стороны прямой, проходящей через начало в комплексной плоскости, то система (1) имеет p -параметрическое семейство решений, представимых сходящимися рядами, полученными из рядов (4), полагая $u_1 = \dots = u_{n-p} = 0$, $u_k = v_k + Q_k(0, \dots, 0, v_{n-p+1}, \dots, v_{k-1}, t_1, \dots, t_m)$ ($k = n-p+1, \dots, n$). Ряды сходятся при $|v_k|$ достаточно малых.

Литература

1. Gérard R. Ann. Scuola norm. super. Pisa., Sci. fis. e mat., 20, № 3, 1966.
2. Грудо Э. И. Весті АН БССР, сер. фіз.-мат. навук, № 1, 1970.
3. Sibuya Y. Tunkcialaj Ekvacioj, 1, 1958.

Институт математики
АН БССР

Поступило в редакцию
4.XII 1969

А. К. ПОКАЛО

**АППРОКСИМАТИВНЫЕ СВОЙСТВА ПРОИЗВОДНЫХ
 И ИНТЕГРАЛОВ В СМЫСЛЕ ВЕЙЛЯ ЛИНЕЙНЫХ СРЕДНИХ**

1. В настоящей работе мы используем обозначения и определения, введенные в работе [5]. В п. 2 рассматриваются аппроксимативные свойства сумм

$$U_{n,\gamma}^{(\delta)}(f, x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(x+t) \sum_{k=1}^n \mu_0(k, n) \frac{\cos\left(kt + \frac{\beta + \delta}{2}\pi\right)}{k^{r-\gamma-\delta}} dt,$$

где

$$\mu_0(k, n) = 1 + \sum_{m=1}^{\infty} a_m(n) \left(\frac{k}{n}\right)^{\nu_m} \quad (k=0, 1, \dots, n; n=0, 1, \dots) \quad (1)$$

и $\nu_1 < \dots < \nu_m < \dots$. При $\delta > 0$ сумма $U_{n,\gamma}^{(\delta)}(f, x)$ является производной Вейля по x порядка δ суммы $U_{n,\gamma}(f, x) = U_{n,\gamma}^{(0)}(f, x)$, при $\delta < 0$ — интегралом Вейля порядка $-\delta$ этой суммы. В п. 3 указываются условия, при выполнении которых суммы $U_{n,\gamma}^{(\delta)}(f, x)$ осуществляют приближение порядка наилучшего. В п. 4 построены обобщения нормальных средних Зигмунда и сумм Бернштейна—Рогозинского.

2. Через $f_{\nu}^{(\delta)}(x)$ обозначим производную Вейля функции $f_{\nu}(x)$ порядка δ , если $\delta > 0$, и интеграл Вейля этой функции порядка $-\delta$, если $\delta < 0$.

Точно так же, как теорема 1 работы [5], доказывается следующее более общее утверждение.

Теорема 1. Пусть функция $f(x) \in KW_{\beta}^r H_2[\omega]$. Тогда если множители (1) удовлетворяют условию

$$\sum_{m=1}^{\infty} \nu_m |a_m(n)| = O(1), \quad (2)$$

то для любых конечных r, γ и δ равномерно относительно всех функций $f(x) \in KW_{\beta}^r H_2[\omega]$ справедливо равенство

$$U_{n,\gamma}^{(\delta)}(f, x) = \sum_{m=0}^{s-1} \frac{a_m(n)}{n^{\nu_m}} f_{\nu+\nu_m}^{(\delta)}(x) + Q_{n,\gamma}^{(\delta)}(\varphi, x),$$

где s определяется из неравенства $\nu_{s-1} < r - \gamma - \delta \leq \nu_s$,

$$Q_{n,\gamma}^{(\delta)}(\varphi, x) = -\frac{\mu_0(n, n)}{n^{r-\gamma-\delta}} r_{n,\beta+\delta}^*(\varphi, x) +$$

$$\begin{aligned}
& + O\left(\frac{|a_s(n)|}{n^{r-\gamma-\delta}} \left| \sin \frac{\beta+\delta}{2} \pi \right| h_2^{(n)}(\omega)\right) + O\left(\frac{|a_s(n)|}{n^{r-\gamma-\delta}}\right) + \\
& + O\left(\frac{\left| \sin \frac{\beta+\delta}{2} \pi \right|}{n^{r-\gamma-\delta}} \left| \varphi(x) - \varphi\left(x + \frac{1}{n}\right) \right|\right) + O\left(\frac{\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)}{n^{r-\gamma-\delta}}\right), \\
& h_2^{(n)}(\omega) = \int_{1/n}^{\pi} \frac{\omega_2(t)}{t} dt.
\end{aligned}$$

Если же функция $\omega_2(t)$ удовлетворяет условию

$$\int_0^{\delta} \frac{\omega_2(t)}{t} dt = O(\omega_2(\delta)), \quad (3)$$

то

$$\begin{aligned}
U_{n,\gamma}^{(\delta)}(f, x) &= \sum_{m=0}^s \frac{a_m(n)}{n^{\nu_m}} f_{\nu+\nu_m}^{(\delta)}(x) - \\
& - \frac{\mu_0(n, n)}{n^{r-\gamma-\delta}} r_{n,\beta+\delta}(\varphi, x) + O\left(\frac{\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)}{n^{r-\gamma-\delta}}\right).
\end{aligned}$$

Легко сформулировать аналогичные обобщения теорем 2 и 3 работы [5].
3. Из теоремы 1 и оценки (см. [2])

$$r_{n,\beta}^*(\varphi, x) = O\left(\omega_2\left(\frac{1}{n}\right) \ln n\right),$$

справедливой для $\varphi(x) \in KH_2[\omega]$, следует

Теорема 2. Пусть множители (1) удовлетворяют условиям (2),

$$\text{а) } \mu_0(n, n) = O\left(\frac{1}{\ln n}\right); \text{ б) } \nu_1 \geq r - \gamma - \delta; \text{ в) } a_1(n) = O\left(\frac{\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)}{h_2^{(n)}(\omega)}\right). \quad (4)$$

Тогда если функция $f(x) \in KW_{\beta}^r H_2[\omega]$, то для $\gamma + \delta < r$ ($r > 0$) равномерно относительно всех функций $f(x) \in KW_{\beta}^r H_2[\omega]$ справедливо равенство

$$\begin{aligned}
& U_{n,\gamma}^{(\delta)}(f, x) - f_{\gamma}^{(\delta)}(x) = \\
& = O\left(\frac{\left| \sin \frac{\beta+\delta}{2} \pi \right|}{n^{r-\gamma-\delta}} \left| \varphi(x) - \varphi\left(x + \frac{1}{n}\right) \right|\right) + O\left(\frac{\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)}{n^{r-\gamma-\delta}}\right).
\end{aligned}$$

Если же $\gamma + \delta > r$, то

$$\begin{aligned}
U_{n,\gamma}^{(\delta)}(f, x) &= O\left(n^{\gamma+\delta-r} \left| \sin \frac{\beta+\delta}{2} \pi \right| \left| \varphi(x) - \varphi\left(x + \frac{1}{n}\right) \right|\right) + \\
& + O\left(n^{\gamma+\delta-r} \omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\right).
\end{aligned}$$

Следствие. При выполнении условий теоремы 2 для $\delta < r - \gamma$

$$U_{n,\gamma}^{(\delta)}(f, x) - f_{\gamma}^{(\delta)}(x) = o\left(\frac{1}{n^{r-\gamma-\delta}}\right).$$

Теорема 3. Пусть множители (1) удовлетворяют условиям (2), (4) а) и б) и

$$a_1(n) = O\left(\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\right). \quad (5)$$

Тогда если функция $\omega_2(t)$ удовлетворяет условию (3), то для $f(x) \in KW_{\beta}^r H_2[\omega]$ и любых конечных r, γ и δ ($\gamma + \delta < r, r > 0$) равномерно относительно всех функций $f(x) \in KW_{\beta}^r H_2[\omega]$ справедливо равенство

$$U_{n,\gamma}^{(\delta)}(f, x) - f_{\gamma}^{(\delta)}(x) = O\left(\frac{\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)}{n^{r-\gamma-\delta}}\right).$$

Следствие. Если $\omega_2(t) = t^{\alpha}$ ($0 < \alpha < 1$), то при выполнении условий теоремы 3 для любых конечных r, γ и δ ($\gamma + \delta \leq r, r > 0$) равномерно относительно всех функций $f(x) \in KW_{\beta}^r H_2^{\alpha}$ справедливо равенство

$$U_{n,\gamma}^{(\delta)}(f, x) - f_{\gamma}^{(\delta)}(x) = O\left(\frac{1}{n^{r-\gamma+\alpha}}\right).$$

Теорема 4. Пусть множители (1) удовлетворяют условиям (2), (4) а) и б) и

$$a_1(n) = O\left(\frac{\omega_1\left(\frac{1}{n}\right)}{h_1^{(n)}(\omega)}\right), \quad (6)$$

где $h_1^{(n)}(\omega) = \int_{\frac{1}{n}}^{\pi} \frac{\omega_1(t)}{t} dt$. Тогда если функция $f(x) \in KW_{\beta}^r H_1[\omega]$, то для любых конечных r, γ и δ ($\gamma + \delta < r, r > 0$) равномерно относительно всех функций $f(x) \in KW_{\beta}^r H_1[\omega]$ справедливо равенство

$$U_{n,\gamma}^{(\delta)}(f, x) - f_{\gamma}^{(\delta)}(x) = O\left(\frac{\omega_1\left(\frac{1}{n}\right)}{n^{r-\gamma}}\right).$$

Каждое из условий (2), (4) а), б) и в), (5) и (6) существенно для того, чтобы суммы $U_{n,\gamma}^{(\delta)}(f, x)$ осуществляли приближение порядка наилучшего на соответствующем классе функций.

Теоремы 2—4 дополняют некоторые результаты [3] и [8].

В [6] (см. также [7]) показано, что условие

$$\sum_{k=1}^n \frac{1 - \mu_0(k, n)}{k^r (n - k + 1)} = \frac{\ln n}{n^r} + O\left(\frac{1}{n^r}\right) \quad (7)$$

необходимо для того, чтобы суммы $U_{n,0}(f, x)$ осуществляли приближение порядка наилучшего на классах $KW_{\beta}^r H_1[\omega]$, если $\beta = r$ или $\beta = r + 1$. При

$r \leq v_1$ условие (7) является следствием условий (2) и (4) а). Можно подобрать также числа α_n так, чтобы для множителей $\mu_0(k, n) = \cos \frac{k\alpha_n}{n}$ не выполнялось одно из условий (2) или (4) а). Тогда для $r \leq 2$ условие (7) также не будет выполняться.

4. Примеры. Нормальные средние Зигмунда определяются множителями $\mu_0(k, n) = 1 - \left(\frac{k}{n}\right)^p$ ($0 \leq k \leq n$; $n = 0, 1, \dots$; $p > 0$). Для них выполняются условия (2) и (4) а). Рассмотрим более широкое семейство сумм $Z_{n,\gamma}(f, x)$, определяемых множителями (γ — любое действительное число)

$$\mu_\gamma(k, n) = k^\gamma \left[1 - \left(\frac{k}{n}\right)^p \right] \quad (1 \leq k \leq n; n = 1, 2, \dots; p > 0).$$

Для этих сумм из первой части теоремы 1 работы [5] следует

Теорема 5. Для любых конечных r, γ ($\gamma < r, r > 0$) и p ($p > 0$) равномерно относительно всех функций $f(x) \in KW_{\beta}^r H_2[\omega]$ справедливо равенство

$$Z_{n,\gamma}(f, x) - f_\gamma(x) = \begin{cases} -\frac{1}{n^p} f_{p+\gamma}(x) + O\left(\frac{\left|\sin \frac{\beta\pi}{2}\right|}{n^{r-\gamma}} \left| \varphi(x) - \varphi\left(x + \frac{1}{n}\right) \right| \right) + \\ + O\left(\frac{\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)}{n^{r-\gamma}}\right), & \text{если } p < r - \gamma, \\ O\left(\frac{h_2^{(n)}(\omega)}{n^{r-\gamma}} \left| \sin \frac{\beta\pi}{2} \right| \right) + O\left(\frac{1}{n^{r-\gamma}}\right), & \text{если } p = r - \gamma, \\ O\left(\frac{\left|\sin \frac{\beta\pi}{2}\right|}{n^{r-\gamma}} \left| \varphi(x) - \varphi\left(x + \frac{1}{n}\right) \right| \right) + O\left(\frac{\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)}{n^{r-\gamma}}\right), & \text{если } p > r - \gamma. \end{cases}$$

В заключение рассмотрим множители

$$\mu_0(k, n) = \sum_{v=0}^N A_v(n) \cos\left(\frac{2v+1}{n} k\alpha_n\right) \quad (8)$$

$$(k = 0, 1, \dots, n; n = 0, 1, \dots),$$

где N — фиксированное натуральное число,

$$A_v(n) = O(1) \quad (v = 0, 1, \dots, N), \quad \sum_{v=0}^N A_v(n) = 1 \quad \text{и} \quad \alpha_n = O(1).$$

Множители (8) удовлетворяют условиям (1), (2) и при $\alpha_n = \frac{\pi}{2} q_n + O\left(\frac{1}{\ln n}\right)$, где q_n — ограниченные нечетные числа, также условию (4) а).

Суммы $B_{n,\gamma}(f, x)$, определяемые при помощи множителей (8), являются обобщением классических сумм Бернштейна—Рогозинского. Из теоремы 1 работы [5] получаем для этих сумм следующее утверждение.

Теорема 6. Для любых конечных r и γ ($\gamma < r$, $r > 0$) равномерно относительно всех функций $f(x) \in KW_{\beta}^r H_2[\omega]$ справедливо равенство

$$B_{n,\gamma}(f, x) - f_{\gamma}(x) = \sum_{m=1}^{s-1} (-1)^m \frac{\alpha_n^{2m}}{(2m)! n^{2m}} \left[\sum_{\nu=0}^N (2\nu+1)^{2m} A_{\nu} \right] f_{\gamma+2m}(x) + Q_n,$$

где s определяется из неравенства $2s - 2 < r - \gamma \leq 2s$,

$$Q_n = - \frac{r_{n,\beta}^*(\varphi, x)}{n^{r-\gamma}} \mu_0(n, n) +$$

$$+ \begin{cases} O\left(\frac{\left|\sin \frac{\beta\pi}{2}\right|}{n^{r-\gamma}} \left| \varphi(x) - \varphi\left(x + \frac{1}{n}\right) \right| \right) + O\left(\frac{\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)}{n^{r-\gamma}}\right), \\ \text{если } 2s - 2 < r - \gamma < 2s, \\ O\left(\frac{\left|\sin \frac{\beta\pi}{2}\right|}{n^{r-\gamma}} h_2^{(n)}(\omega)\right) + O\left(\frac{1}{n^{r-\gamma}}\right), \text{ если } r - \gamma = 2s. \end{cases}$$

Для сумм Бернштейна—Рогозинского $B_{n,0}^*(f, x)$, определяемых множествами $\mu_0(k, n) = \cos \frac{k\pi}{2n+1}$, справедливо

Следствие. При выполнении условий теоремы 6

$$B_{n,0}^*(f, x) - f(x) = \sum_{m=1}^{s-1} \frac{1}{(2m)!} \left(\frac{\pi}{2n+1}\right)^{2m} f^{(2m)}(x) + Q_n,$$

где $f^{(2m)}(x)$ — производная порядка $2m$ функции $f(x) \in KW_{\beta}^r H_2[\omega]$,

$$Q_n = \begin{cases} O\left(\frac{\left|\sin \frac{\beta\pi}{2}\right|}{n^r} \left| \varphi(x) - \varphi\left(x + \frac{1}{n}\right) \right| \right) + O\left(\frac{\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)}{n^r}\right), \\ \text{если } 2s - 2 < r < 2s, \\ O\left(\frac{\left|\sin \frac{\beta\pi}{2}\right|}{n^r} h_2^{(n)}(\omega)\right) + O\left(\frac{1}{n^r}\right), \text{ если } r = 2s. \end{cases}$$

Литература

1. Ефимов А. В. Известия АН СССР, сер. матем., 22, 81, 1958.
2. Ефимов А. В. Известия АН СССР, сер. матем., 23, 115, 1959.
3. Гаркави А. Л. Известия АН СССР, сер. матем., 24, 103, 1960.
4. Покало А. К. Весті АН БССР, сер. фіз.-мат. навук, № 2, 1969.
5. Покало А. К. Весті АН БССР, сер. фіз.-мат. навук, № 2, 1970.
6. Тиман А. Ф. Известия АН СССР, сер. матем., 17, 99, 1953.
7. Тиман А. Ф. Теория приближения функций действительного переменного. Физматгиз, М., 1960.
8. Тиман А. Ф. Известия АН СССР, сер. матем., 24, 421, 1960.

Минский педагогический институт
им. А. М. Горького

Поступило в редакцию
10.VII 1969

Я. В. КОНСТАНТИНОВА

**О СХОДИМОСТИ И УСТОЙЧИВОСТИ МНОГОСЛОЙНОГО
 И МНОГОСТОЛБЦОВОГО РАЗНОСТНОГО ПРАВИЛА
 РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ**

В статье рассматриваются явные многослойные и многостолбцовые схемы для решения задачи Коши в случае уравнения теплопроводности.

Как и в работе [1], исследуются не конкретные, а общего вида схемы с произвольными коэффициентами. Такая общность схем требует выделить из них устойчивые, т. е. сходящиеся при определенных условиях схемы.

Рассматривается задача Коши для уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (1)$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad -\infty < x < \infty. \quad (2)$$

Поставленную задачу решаем методом сеток. Уравнение (1) с начальными значениями (2) заменяем следующей конечно-разностной задачей:

$$u_{i,j+1} = \sum_{p=-s}^s \sum_{q=0}^m a_{pq} u_{i-p,j-q}, \quad (3)$$

$$u_{i,0} = \varphi(x_i) = \varphi_i,$$

где $a_{i,j} = a_{-i,j}$.

Уравнение (3) позволит последовательно вычислить все значения сеточной функции $u_{i,j}$, если известны уже значения на $m+1$ слоях

$$u_{i0}, u_{i1}, \dots, u_{im} \quad (i = \dots -1, 0, 1, 2, \dots).$$

Как и в работе [1], для погрешности получим уравнение

$$\varepsilon_{i,j+1} = \sum_{p=-s}^s \sum_{q=0}^m a_{pq} \varepsilon_{i-p,j-q} + \delta_{i,j} + r_{i,j},$$

$$\varepsilon_{i,j} = \varepsilon_{i,j}^*$$

$$(i = \dots -2, -1, 0, 1, \dots; j = 0, 1, \dots, m).$$

Начальные значения погрешности, отвечающие приближенному заданию $u(x_i, t_j)$, будем считать известными.

Погрешность $\varepsilon_{i,j}$ обычно представляется в виде суммы трех слагаемых:

$$\varepsilon_{i,j} = E_{i,j} + E'_{i,j} + E''_{i,j}.$$

Здесь $E''_{i,j}$ — погрешность от замены дифференциального уравнения разностным, $E'_{i,j}$ — за счет погрешностей округления, $E_{i,j}$ определяется начальными значениями.

Для $E_{i,j}$ получаем однородное уравнение с ненулевыми начальными значениями $\varepsilon_{i,j}^*$ ($i = \dots -1, 0, 1, \dots$; $j = 0, 1, \dots, m$), для $E'_{i,j}$ и $E''_{i,j}$ — неоднородное уравнение с нулевыми начальными значениями.

Сходимость и устойчивость вычислительного процесса. Аналогично статье [1] будем рассматривать равномерную сходимость. Как и раньше, будем требовать, чтобы при $\Delta x \rightarrow 0$ стремились бы к нулю в принятой метрике каждая из трех указанных выше погрешностей, иначе говоря, выполнялись бы следующие условия:

$$E_{i,j} \xrightarrow{\Delta x \rightarrow 0} 0, \quad E'_{i,j} \xrightarrow{\Delta x \rightarrow 0} 0, \quad E''_{i,j} \xrightarrow{\Delta x \rightarrow 0} 0.$$

Запишем уравнения для погрешностей:

$$E_{i,j} = \sum_{p=-s}^s \sum_{q=0}^m a_{pq} E_{i-p, j-q}, \quad (5)$$

$$E_{i,j} = \varepsilon_{i,j}^* \quad (i = \dots -1, 0, 1, \dots; j = 0, 1, \dots, m), \quad (5')$$

$$E'_{i,j} = \sum_{p=-s}^s \sum_{q=0}^m a_{pq} E'_{i-p, j-q} + \delta_{i,j}, \quad (6)$$

$$E'_{i,j} = 0 \quad (i = \dots -1, 0, 1, \dots; j = 0, 1, \dots, m), \quad (6')$$

$$E''_{i,j} = \sum_{p=-s}^s \sum_{q=0}^m a_{pq} E''_{i-p, j-q} + r_{i,j}, \quad (7)$$

$$E''_{i,j} = 0 \quad (i = \dots -1, 0, 1, \dots; j = 0, 1, \dots, m). \quad (7')$$

Рассмотрим решение уравнения (5) с начальными условиями (5'). Для этого введем функцию Грина.

Назовем функцией Грина решение однородного уравнения (5) с нулевыми начальными значениями во всех точках, кроме одной, где оно равно единице.

Пусть $g_{i,j}^{(s,p)}$ — решение уравнения (5) в точке (i, j) с начальным значением, равным единице в точке (s, p) . Так, введенная функция Грина обладает следующим свойством: $\alpha g_{i,j}^{(r,s)} + \beta g_{i,j}^{(p,t)}$ будет решением уравнения (5) со значением α в точке (r, s) и β в точке (p, t) . С помощью так введенной функции Грина решение разностного уравнения (5) с начальными значениями (5') можно записать в виде

$$E_{i,j} = \sum_{n=-(j-m)s}^{(j-m)s} \sum_{k=0}^m g_{i,j}^{(i-n,k)} \varepsilon_{i-n,k}^* = \sum_{n=-(j-m)s}^{(j-m)s} \sum_{k=0}^m g_{n,j}^{(0,k)} \varepsilon_{i-n,k}^*. \quad (8)$$

Получим оценку функции Грина через коэффициенты уравнения (5). Для этого решим следующую задачу:

$$g_{n,j+1}^{(0,k)} = \sum_{p=-s}^s \sum_{q=0}^m a_{pq} g_{n-p, j-q}^{(0,k)}, \quad (9)$$

$$g_{0,k}^{(0,k)} = 1, \quad g_{n,j}^{(0,k)} = 0, \quad n \neq 0 \quad \text{или} \quad j \neq k \quad (k = 0, 1, \dots, m).$$

Предполагая возможным продолжение и на отрицательную область по времени, мы можем свести ее к задаче

$$g_{n,j+1}^{(0,0)} = \sum_{p=-s}^s \sum_{q=0}^m a_{pq} g_{n-p, j-q}^{(0,0)}, \quad (10)$$

$$g_{0,0}^{(0,0)} = 1, \quad g_{n,j}^{(0,0)} = 0, \quad n \neq 0 \quad \text{или} \quad j \neq 0.$$

В дальнейшем решение будем искать на отрезке $[-X, X]$ при $X \rightarrow \infty$. На этом отрезке система функции $e^{i \frac{2\pi r x}{X}}$, где $x = \frac{nX}{k}$, будет ортогональной и полной, т. е. любая периодическая функция, заданная на отрезке, может быть представлена в виде

$$f(x) = \sum_{r=-(k-1)}^{k-1} a_r e^{i \frac{2\pi r x}{X}},$$

$$x = \frac{nX}{k}, \quad n = -(k-1), \dots, 0, 1, \dots, (k-1).$$

Частное решение разностного уравнения (10) будем искать в виде

$$v_{n,j}^{\alpha} = \xi_{r,\alpha}^j e^{i \frac{2\pi r x}{X}}, \quad x = \frac{nX}{k}.$$

$\xi_{r,\alpha}$ должны быть корнями характеристического уравнения

$$\xi^{m+1} = \sum_{p=-s}^s \sum_{q=0}^m a_{pq} \xi^{m-q} e^{i \frac{2\pi r p}{k}}.$$

Умножая общее решение на $e^{i \frac{2\pi(k-r)n}{k}}$, суммируя и учитывая ортогональность, получим

$$\sum_{\alpha=0}^m b_{r,\alpha} \xi_{r,\alpha}^j = \frac{1}{2k} \left(\sum_{n=-(k-1)}^0 g_{n,j}^{(0,0)} e^{i \frac{2\pi(k-r)n}{k}} + \sum_{n=0}^{k-1} g_{n,j}^{(0,0)} e^{i \frac{2\pi(k-r)n}{k}} \right).$$

Отсюда, придавая j значения $0, -1, \dots, -m$, получим систему уравнений для определения $b_{r,0}, b_{r,1}, \dots, b_{r,m}$.

Аналогично работе [1] отсюда будет следовать ограниченность функции Грина, а следовательно, для $E_{i,j}$ получим оценку

$$|E_{i,j}| \leq C_3(2sN + 1)\varepsilon = C_3(2sN\Delta t + \Delta t) \frac{\varepsilon}{\Delta t} \leq C_3(2sT + \Delta t) \frac{\varepsilon}{\Delta t},$$

где $\varepsilon \gg |\varepsilon_{ij}|$ при условии $0 \leq t \leq T$, $\left[\frac{T}{\Delta t} \right] = N$.

Для погрешностей $E'_{i,j}$ и $E''_{i,j}$ получим уравнения

$$E'_{i,j+1} = \sum_{p=-s}^s \sum_{q=0}^m a_{pq} E'_{i-p, j-q} + \delta_{i,j},$$

$$E'_{i,0} = E'_{i,1} = \dots = E'_{i,m} = 0 \quad (i = \dots -1, 0, 1, \dots),$$

$$E''_{i,j+1} = \sum_{p=-s}^s \sum_{q=0}^m a_{pq} E''_{i-p, j-q} + r_{i,j},$$

$$E''_{i,0} = E''_{i,1} = \dots = E''_{i,m} = 0 \quad (i = \dots -1, 0, 1, \dots).$$

Решения этих уравнений с помощью функции Грина можно записать в виде

$$E'_{i,l} = \sum_{p=m}^{l-1} \sum_{k=i-(l-p-1)s}^{i+(l-p-1)s} g_{i,l}^{(k,p+1)} \delta_{k,p} = \sum_{p=m}^{l-1} \sum_{k=i-(l-p-1)s}^{i+(l-p-1)s} g_{i-k, l-p-1}^{(0,0)} \delta_{k,p},$$

$$E''_{i,l} = \sum_{p=m}^{l-1} \sum_{k=i-(l-p-1)s}^{i+(l-p-1)s} g_{i,l}^{(k,p+1)} r_{k,p} = \sum_{p=m}^{l-1} \sum_{k=i-(l-p-1)s}^{i+(l-p-1)s} g_{i-k, l-p-1}^{(0,0)} r_{k,p}.$$

Сделаем замену $l-p-1 = t$, получим

$$E'_{i,l} = \sum_{t=0}^{l-m-1} \sum_{k=i-ts}^{i+ts} g_{i-k,t}^{(0,0)} \delta_{k,l-t-1},$$

$$E''_{i,l} = \sum_{t=0}^{l-m-1} \sum_{k=i-ts}^{i+ts} g_{i-k,t}^{(0,0)} r_{k,l-t-1}.$$

Пользуясь ограниченностью функции Грина, в этом случае получаем оценки

$$|E'_{i,j}| \leq C_4 (T^2 - sT\Delta t) \frac{\delta}{\Delta t^2}, \quad \delta \geq |\delta_{i,j}|,$$

$$|E''_{i,j}| \leq C_4 (T^2 - sT\Delta t) \frac{r}{\Delta t^2}, \quad r \geq |r_{i,j}|.$$

Как и в [2], будем рассматривать следующие определения устойчивости.

1. Уравнение называется устойчивым относительно начальных данных ε_{ij}^* ($i = \dots -1, 0, 1, \dots$; $j = 0, 1, \dots, m$), если существует такое число M_1 , не зависящее от Δx и Δt , что при всех $j > m$ и при любом i будет выполняться оценка

$$|E_{i,j}| \leq M_1 \frac{\varepsilon}{\Delta t}. \quad (11)$$

2. Уравнение называется устойчивым относительно погрешностей округления $\delta_{i,j}$, если существует такое число M_2 , не зависящее от Δx и Δt , что при всех $j > m$ и при любом i будет выполняться оценка

$$|E'_{i,j}| \leq M_2 \frac{\delta}{\Delta t^2}. \quad (12)$$

Величины E_{ij} , $E'_{i,j}$ зависят от точности вычисления начальных данных и погрешностей округления. Увеличивая эту точность, мы можем сделать $E_{i,j}$ и $E'_{i,j}$ по модулю меньше любой наперед заданной величины при (i, j) .

Рассмотрим последнюю часть погрешности $E''_{i,j}$. Разностное уравнение для нее получается из разностного уравнения для $E'_{i,j}$ заменой свободного члена $\delta_{i,j}$ на $r_{i,j}$. Начальные значения для $E'_{i,j}$ и $E''_{i,j}$ совпадают, поэтому для $E''_{i,j}$ должно быть верным представление (12) с заменой δ на r .

$E''_{i,j}$ зависит исключительно от свойств расчетной формулы, или, если говорить более точно, от ее погрешности $r_{i,j}$, коэффициентов и числа шагов по времени и пространству.

Будем говорить, что разностная схема допускает сходящийся вычислительный процесс, если $\max_{ij} |E''_{i,j}| \rightarrow 0$ при $\Delta x \rightarrow 0$, $\Delta t \rightarrow 0$.

На основании изложенного можно сформулировать следующую теорему сходимости.

Теорема. Пусть решение $u(x, t)$ обладает ограниченными производными в области $g(-\infty < x < +\infty, 0 \leq t \leq T)$, $\left| \frac{\partial^p u}{\partial t^p} \right| \leq M_p$, $\left| \frac{\partial^{2p} u}{\partial x^{2p}} \right| \leq N_p$, M_p, N_p — постоянные и пусть $\Delta x \rightarrow 0$, $\Delta t \rightarrow 0$, $\Delta t = A\Delta x^\alpha$, $\alpha > 1$. Если выполняются следующие условия:

а) корни уравнения

$$\xi^{m+1} - \sum_{p=-s}^s \sum_{q=0}^m a_{pq} e^{i \frac{2\pi r p}{k}} \xi^{m-q} = 0$$

по модулю меньше, чем $1 + c_0 \Delta t$, при $\Delta t \rightarrow 0$, корни, равные единице, по модулю простые;

$$b) \frac{\delta}{\Delta t^2} \rightarrow 0, \quad \frac{\varepsilon}{\Delta t} \rightarrow 0, \quad \frac{r}{\Delta t^2} \rightarrow 0,$$

то сеточная функция равномерно в области g будет сходиться к точному решению.

Литература

1. Константинова Я. В. Весті АН БССР, сер. фіз.-мат. навук, № 2, 1970.
2. Крылов В. И. ДАН БССР, 4, № 5, 1960.

Белорусский государственный университет
им. В. И. Ленина

Поступило в редакцию
3.VII 1969

УДК 518 : 517.944/947

В. А. БАСИК

ОБ ОДНОЙ СХЕМЕ МЕТОДА МАТРИЧНОЙ ПРОГОНКИ В СЛУЧАЕ МНОГОМЕРНЫХ РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ

В [1] указан вариант метода матричной прогонки, применимый к решению систем алгебраических уравнений, аппроксимирующих краевые задачи для уравнения Пуассона. Алгоритм этого метода требует обращения диагональных матриц вместо обращения полных матриц, как это имеет место в обычной схеме метода прогонки (см. [2], [3]). При этом существенно используется то обстоятельство, что рассматриваемое уравнение является уравнением Пуассона. Идеи [1] были развиты на случай более общих дифференциальных уравнений эллиптического типа с двумя независимыми переменными [4].

В настоящей заметке доказывается, что упомянутый вариант метода матричной прогонки может быть применен также к решению некоторого специального класса краевых задач для трехмерного уравнения эллиптического типа.

Пусть требуется найти решение $u(x, y, z)$ уравнения

$$a(x)u_{xx} + b(y)u_{yy} + c(z)u_{zz} + d(x)u_x + e(y)u_y + \\ + g(z)u_z - 2(s(x) + p(y) + r(z))u = f(x, y, z), \quad (1)$$

заданного в прямоугольной области $D = \{0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1\}$, удовлетворяющее краевому условию

$$\alpha \frac{\partial u}{\partial n} + \beta u \Big|_{M \in \Gamma} = \varphi(M), \quad (2)$$

где $\frac{\partial u}{\partial n}$ — производная по внешней нормали к границе Γ области D , α и β — постоянные величины. Кроме того, полагаем, что выполнены условия

$$a(x) > 0, b(y) > 0, c(z) > 0, s(x) + p(y) + \\ + r(z) \geq 0, \alpha\beta \geq 0, \alpha + \beta \neq 0. \quad (3)$$

В качестве расчетной сетки возьмем совокупность узлов (x_i, y_j, z_k) ($i = 0, 1, \dots, N_1, j = 0, 1, \dots, N_2, k = 0, 1, \dots, N_3$), координаты которых суть числа $x_i = \left(i + \frac{1}{2}\right) h_1, y_j = \left(j + \frac{1}{2}\right) h_2, z_k = \left(k + \frac{1}{2}\right) h_3$, где $h_1 = \frac{1}{N_1 + 1}, h_2 = \frac{1}{N_2 + 1}, h_3 = \frac{1}{N_3 + 1}$. Значение какой-либо функции $\psi(x, y, z)$ в точке (x_i, y_j, z_k) будем обозначать через $\psi_{i,j,k}$.

Заменим дифференциальную задачу (1), (2) следующей системой линейных алгебраических уравнений:

$$\hat{b}_i^{(1)} U_{j-1,k} + \hat{b}_i^{(2)} U_{j+1,k} + \hat{c}_k^{(1)} U_{j,k-1} + \hat{c}_k^{(2)} U_{j,k+1} - (B + 2(\hat{p}_j + \hat{r}_k) E) U_{j,k} = F_{j,k}, \quad (4)$$

$$U_{-1,k} - \rho_2 U_{0,k} = \omega_2 \vec{\Phi}(0, z_k), \quad U_{N_2+1,k} - \rho_2 U_{N_2,k} = \omega_2 \vec{\Phi}(1, z_k), \quad (5)$$

$$U_{j,-1} - \rho_3 U_{j,0} = \omega_3 \vec{\Phi}(y_j, 0), \quad U_{j,N_3+1} - \rho_3 U_{j,N_3} = \omega_3 \vec{\Phi}(y_j, 1), \quad (6)$$

где

$$\hat{a}_i^{(1)} = a_i - \frac{1}{2} h_1 d_i, \quad \hat{a}_i^{(2)} = a_i + \frac{1}{2} h_1 d_i, \quad \hat{s}_i = a_i + h_1^2 s_i,$$

$$\hat{b}_j^{(1)} = b_j \delta^2 - \frac{1}{2} h_1 \delta e_j, \quad \hat{b}_j^{(2)} = b_j \delta^2 + \frac{1}{2} h_1 \delta e_j, \quad \hat{p}_j = b_j \delta^2 + h_1^2 p_j,$$

$$\hat{c}_k^{(1)} = c_k \gamma^2 - \frac{1}{2} h_1 \gamma g_k, \quad \hat{c}_k^{(2)} = c_k \gamma^2 + \frac{1}{2} h_1 \gamma g_k, \quad \hat{r}_k = c_k \gamma^2 + h_1^2 r_k,$$

$$\delta = \frac{h_1}{h_2}, \quad \gamma = \frac{h_1}{h_3}, \quad \rho_m = \frac{2\alpha - \beta h_m}{2\alpha + \beta h_m}, \quad \omega_m = \frac{2h_m}{2\alpha + \beta h_m} \quad (m = 1, 2, 3).$$

$$U_{j,k} = (u_{0,j,k}, u_{1,j,k}, \dots, u_{N_1,j,k})^T,$$

$$F_{j,k} = (h_1^2 f_{0,j,k} - \hat{a}_j^{(1)} \omega_1 \varphi(0, y_j, z_k), h_1^2 f_{1,j,k}, \dots, h_1^2 f_{N_1,j,k} - \hat{a}_j^{(2)} \omega_1 \varphi(1, y_j, z_k))^T,$$

$$\vec{\Phi}(y, z) = (\varphi(x_0, y, z), \varphi(x_1, y, z), \dots, \varphi(x_{N_1}, y, z))^T,$$

$$B = \begin{pmatrix} 2\hat{s}_0 - \rho_1 \hat{a}_0^{(1)} & -\hat{a}_0^{(2)} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -\hat{a}_1^{(1)} & 2\hat{s}_1 & -\hat{a}_1^{(2)} & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -\hat{a}_2^{(1)} & 2\hat{s}_2 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2\hat{s}_{N_1-1} & -\hat{a}_{N_1-1}^{(2)} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -\hat{a}_{N_1}^{(1)} & 2\hat{s}_{N_1} - \rho_1 \hat{a}_{N_1}^{(2)} \end{pmatrix}.$$

Будем полагать h_1, h_2, h_3 настолько малыми, что выполнены условия

$$\hat{a}_i^{(m)} > 0, \quad \hat{b}_j^{(m)} > 0, \quad \hat{c}_k^{(m)} > 0 \quad (m = 1, 2).$$

Тогда B — якобиева нормальная матрица, для которой имеет место (см. [5]) представление

$$B = T \Lambda T^{-1}, \quad (7)$$

где $\Lambda = \{\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{N_1}\}$ — диагональная матрица собственных значений B .

Элементы $t_{i,j}$ и $\tau_{m,n}$ матриц T и T^{-1} определяются по соотношениям (см. [4])

$$t_{0,j} = C_j, \quad t_{i,j} = \frac{C_j D_{i-2}(\lambda_j)}{\hat{a}_0^{(2)} \hat{a}_1^{(2)} \dots \hat{a}_{i-2}^{(2)}} \quad (i = 1, 2, \dots, N_1, j = 0, 1, \dots, N_1), \quad (8)$$

$$\tau_{m,0} = \bar{\sigma}_m, \quad \tau_{m,n} = \frac{\bar{\sigma}_m D_{n-1}(\lambda_m)}{\hat{a}_1^{(1)} \hat{a}_2^{(1)} \dots \hat{a}_{n-1}^{(1)}} \quad (m = 0, 1, \dots, N_1, n = 1, 2, \dots, N_1), \quad (9)$$

где $D_k(\lambda)$ — верхний левый угловой минор $k+1$ -го порядка матрицы $\lambda E - B$, C_j — произвольные числа, отличные от нуля, а $\bar{\sigma}_i$ находятся по формуле

$$\bar{\sigma}_i = \frac{1}{C_i} \left(1 + \sum_{k=1}^{N_1} \frac{D_{k-1}^2(\lambda_i)}{\prod_{s=1}^{k-1} \hat{a}_s^{(1)} \hat{a}_{s-1}^{(2)}} \right)^{-1}.$$

Умножим обе части уравнений (4) — (6) слева на T^{-1} . Учитывая (7), получим

$$\hat{b}_j^{(1)} \hat{U}_{j-1,k} + \hat{b}_j^{(2)} \hat{U}_{j+1,k} + \hat{c}_k^{(1)} \hat{U}_{j,k-1} + \hat{c}_k^{(2)} \hat{U}_{j,k+1} - (\Lambda + 2(\hat{p}_j + \hat{r}_k) E) \hat{U}_{j,k} = \hat{F}_{j,k}, \quad (10)$$

$$\hat{U}_{-1,k} - \rho_2 \hat{U}_{0,k} = \omega_2 \hat{\Phi}(0, z_k), \quad \hat{U}_{N_s+1,k} - \rho_2 \hat{U}_{N_s,k} = \omega_2 \hat{\Phi}(1, z_k), \quad (11)$$

$$\hat{U}_{j,-1} - \rho_3 \hat{U}_{j,0} = \omega_3 \hat{\Phi}(y_j, 0), \quad \hat{U}_{j,N_s+1} - \rho_3 \hat{U}_{j,N_s} = \omega_3 \hat{\Phi}(y_j, 1), \quad (12)$$

где

$$\hat{U}_{j,k} = T^{-1} U_{j,k}, \quad \hat{F}_{j,k} = T^{-1} F_{j,k}, \quad \hat{\Phi}(y, z) = T^{-1} \vec{\Phi}(y, z).$$

Обозначим

$$\mathbf{V}_k = (\hat{u}_{0,0,k}, \hat{u}_{0,1,k}, \dots, \hat{u}_{0,N_s,k}, \hat{u}_{1,0,k}, \dots, \hat{u}_{N_1,N_s,k})^T,$$

$$\mathbf{G}_k = (\hat{f}_{0,0,k} - \hat{b}_0^{(1)} \omega_2 \hat{\Phi}_0(0, z_k), \hat{f}_{0,1,k}, \dots, \hat{f}_{0,N_s,k} - \hat{b}_{N_s}^{(2)} \omega_2 \hat{\Phi}_0(1, z_k),$$

$$\hat{f}_{1,0,k} - \hat{b}_0^{(1)} \omega_2 \hat{\Phi}_1(0, z_k), \dots, \hat{f}_{N_1,N_s,k} - \hat{b}_{N_s}^{(2)} \omega_2 \hat{\Phi}_{N_1}(1, z_k))^T,$$

$$\vec{\Psi}(z) = (\hat{\Phi}_0(y_0, z), \hat{\Phi}_0(y_1, z), \dots, \hat{\Phi}_0(y_{N_s}, z), \hat{\Phi}_1(y_0, z), \dots, \hat{\Phi}_{N_1}(y_{N_s}, z))^T.$$

Здесь числа $\hat{u}_{i,j,k}$, $\hat{f}_{i,j,k}$, $\hat{\Phi}_i(y, z)$ являются i -ми координатами векторов $\hat{U}_{j,k}$, $\hat{F}_{j,k}$, $\vec{\Phi}(y, z)$.

Таким образом, систему (10) — (12) можно записать в виде

$$\hat{c}_k^{(1)} \mathbf{V}_{k-1} - (A + H + 2\hat{r}_k E) \mathbf{V}_k + \hat{c}_k^{(2)} \mathbf{V}_{k+1} = \mathbf{G}_k, \quad (13)$$

$$\mathbf{V}_{-1} = \rho_3 \mathbf{V}_0 + \vec{\Psi}(0), \quad (14)$$

$$\mathbf{V}_{N_s+1} = \rho_3 \mathbf{V}_{N_s} + \vec{\Psi}(1), \quad (15)$$

где H — диагональная матрица, по диагонали которой стоят $N_1 + 1$ блоков размерности $N_2 + 1$ вида $\lambda_i E$, A — блочно-диагональная матрица, состоящая из $N_1 + 1$ блоков вида

$$P = \begin{pmatrix} 2\hat{\rho}_0 - \hat{b}_0^{(1)}\rho_2 & -\hat{b}_0^{(2)} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -\hat{b}_1^{(1)} & 2\hat{\rho}_1 & -\hat{b}_1^{(2)} & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \hat{b}_2^{(1)} & -2\hat{\rho}_2 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2\hat{\rho}_{N_2-1} & -\hat{b}_{N_2-1}^{(2)} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -\hat{b}_{N_2}^{(1)} & 2\hat{\rho}_{N_2} - \rho_2\hat{b}_{N_2}^{(2)} \end{pmatrix}.$$

Матрица P аналогично B представима в виде

$$P = SMS^{-1}, \quad (16)$$

где $M = \{\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_{N_2}\}$ — диагональная матрица собственных значений P , а элементы матриц S и S^{-1} определяются по соотношениям типа (8), (9).

Следовательно,

$$A = Q\Omega Q^{-1}, \quad (17)$$

где Q и Ω — блочно-диагональная и диагональная матрицы, главные диагонали которых составлены из $N_1 + 1$ матриц S и M .

Заметим, что матрицы H и Q перестановочны. Умножим (13) — (15) слева на Q^{-1} . Учитывая (17), получим

$$\hat{c}_k^{(1)}\hat{V}_{k-1} - (\Omega + H + 2\hat{r}_k E)\hat{V}_k + \hat{c}_k^{(2)}\hat{V}_{k+1} = \hat{G}_k, \quad (18)$$

$$\hat{V}_{-1} = \rho_3\hat{V}_0 + \hat{\Psi}(0), \quad (19)$$

$$\hat{V}_{N_2+1} = \rho_3\hat{V}_{N_2} + \hat{\Psi}(1), \quad (20)$$

где

$$\hat{V}_k = Q^{-1}V_k, \quad \hat{G}_k = Q^{-1}G_k, \quad \hat{\Psi}(z) = Q^{-1}\Psi(z).$$

Решение полученной системы будем искать методом прогонки. Пусть

$$\hat{V}_{k-1} = X_k\hat{V}_k + Y_k. \quad (21)$$

Подставив в (18) вместо \hat{V}_{k-1} правую часть (21), получим

$$-(\Omega + H + 2\hat{r}_k E - \hat{c}_k^{(1)}X_k)\hat{V}_k + \hat{c}_k^{(2)}\hat{V}_k = \hat{G}_k - \hat{c}_k^{(1)}Y_k. \quad (22)$$

Если

$$\det(\Omega + H + 2\hat{r}_k E - \hat{c}_k^{(1)}X_k) = 0, \quad (23)$$

то, умножив (22) слева на $(\Omega + H + 2\hat{r}_k E - \hat{c}_k^{(1)}X_k)^{-1}$, а затем, сравнив полученное выражение с (21), найдем рекуррентные соотношения для вычисления X_k и Y_k :

$$X_{k+1} = \hat{c}_k^{(2)}(\Omega + H + 2\hat{r}_k E - \hat{c}_k^{(1)}X_k)^{-1}, \quad (24)$$

$$Y_{k+1} = \frac{1}{\hat{c}_k^{(2)}} X_{k+1}(\hat{c}_k^{(1)}Y_k - \hat{G}_k). \quad (25)$$

Начальные значения для матрицы и вектора получим, сравнивая (19) и (21):

$$X_0 = \rho_3 E, Y_0 = \hat{\Psi}(0). \quad (26)$$

По соотношениям (24) — (26) мы сможем последовательно вычислить $X_1, X_2, \dots, X_{N_3+1}, Y_1, Y_2, \dots, Y_{N_3+1}$. Далее из системы

$$\begin{cases} \hat{V}_{N_3} = X_{N_3+1} \hat{V}_{N_3+1} + Y_{N_3+1} \\ \hat{V}_{N_3+1} = \rho_3 \hat{V}_{N_3} + \hat{\Psi}(1) \end{cases}$$

находим

$$\hat{V}_{N_3+1} = (E - \rho_3 X_{N_3+1})^{-1} (\rho_3 \hat{V}_{N_3+1} + \hat{\Psi}(1))$$

при условии, что

$$\det(E - \rho_3 X_{N_3+1}) \neq 0. \quad (27)$$

Затем по (21) находим значения векторов $\hat{V}_{N_3}, \hat{V}_{N_3-1}, \dots, \hat{V}_0$. Наконец, по соотношениям $V_k = Q\hat{V}_k, U_{j,k} = T\hat{U}_{j,k}$ находим значения искомой сеточной функции.

Устойчивость соотношений (21), (24), (25) и справедливость (23), (27) исследуются так же, как устойчивость и справедливость аналогичных выражений в [4]. Для устойчивости (21), (24), (25) и выполнения (23) условия (3) являются достаточными. Для выполнения (27), кроме (3), необходимо и достаточно выполнения условия

$$|s(x) + p(y) + r(z)| + |\beta| \neq 0.$$

В заключение заметим, что предлагаемый алгоритм требует $\approx 6N_1N_2N_3 \times (N_1 + N_2)$ операций сложения и умножения и хранения $\approx 2(N_1^2 + N_2^2 + N_1N_2N_3)$ чисел, тогда как обычный вариант метода прогонки при решении задачи (1), (2) (см. [6]) требует выполнения $\approx CN_1^3N_2^3N_3$ аналогичных операций (C — постоянная, зависящая от выбора метода обращения матриц) и хранения $N_1^2N_2^2N_3$ чисел.

Литература

1. Лященко І. М. Доповіді АН УРСР, № 4, 1964.
2. Годунов С. К., Рябенский В. С. Введение в теорию разностных схем. ФМ, М., 1962.
3. Гельфанд И. М., Локуциевский С. В. Дополнение к [2], стр. 283.
4. Басик В. А. Весті АН БССР, сер. фіз.-мат. наук, № 5, 1969.
5. Гантмахер Ф. Р., Крейн М. Г. Осцилляционные матрицы и ядра и малые колебания механических систем. ГИТТЛ, М.—Л., 1950.
6. Монастырный П. И., Басик В. А. Весті АН БССР, сер. фіз.-мат. наук, № 4, 1968.

Белорусский государственный университет
им. В. И. Ленина

Поступило в редакцию
14.XI 1969

В. В. БОБКОВ, В. А. ШКЕЛЬ

**ОДНОШАГОВЫЕ ПРАВИЛА ПРИБЛИЖЕННОГО РЕШЕНИЯ
 ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ $y' = f(x, y)$
 ПО ЗНАЧЕНИЯМ ПРАВОЙ ЧАСТИ УРАВНЕНИЯ
 И ПРОИЗВОДНЫХ ОТ НЕЕ**

В работе метод построения одношаговых правил приближенного решения дифференциальных уравнений, основанный на многократном использовании квадратурных формул понижающейся алгебраической степени точности [1], распространяется на тот случай, когда соответствующие квадратурные формулы строятся не только по значениям интегрируемой функции, но и по значениям производных до некоторого фиксированного порядка от нее. Здесь в случае задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка рассматривается общий подход к построению подобных правил, даются конкретные примеры правил, приводятся предсказывающе-исправляющие правила итерационного типа, построенные указанным способом, а также проводится исследование предлагаемых правил на сходимость.

Рассмотрим на отрезке $[x_0, X]$ задачу Коши

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0. \quad (1)$$

Будем считать функцию $f(x, y)$ достаточно гладкой и станем искать решение поставленной задачи на следующей сетке (не обязательно равноотстоящих) точек x_i ($i = 0, 1, \dots, N$):

$$x_0 < x_1 < \dots < x_N \leq X.$$

Пусть вычисления доведены до точки x_n ($0 \leq n < N$). В очередной точке $x_{n+1} = x_n + h$ значение решения задачи (1) зададим формулой

$$\begin{aligned} y(x_n + h) &= y(x_n) + \int_{x_n}^{x_{n+1}} y'(x) dx = y(x_n) + h \int_0^1 y'(x_n + \alpha h) d\alpha = \\ &= y(x_n) + h \int_0^1 f[x_n + \alpha h, y(x_n + \alpha h)] d\alpha = y(x_n) + h \int_0^1 z_n(\alpha) d\alpha, \end{aligned}$$

при этом последний интеграл станем искать приближенно в виде

$$\begin{aligned} \int_0^1 z_n(\alpha) d\alpha &\approx \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^{q_j} a_i^{(j)} z_n^{(j-1)}(\alpha_i^{(j)}) = \\ &= \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^{q_j} h^{j-1} a_i^{(j)} f^{(j-1)}[x_n + \alpha_i^{(j)} h, y(x_n + \alpha_i^{(j)} h)] = \\ &= \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^{q_j} h^{j-1} a_i^{(j)} y^{(j)}(x_n + \alpha_i^{(j)} h), \end{aligned}$$

где

$$f^{(i)}(x, y) = \frac{d^i}{dx^i} f(x, y).$$

Разложив величины $\Delta y(x_n) = y(x_n + h) - y(x_n)$ и $y^{(i)}(x_n + \alpha_i^{(j)}h)$ ($i = 1, 2, \dots, q_j; j = 1, 2, \dots, k$) по формуле Тейлора в окрестности точки x_n и потребовав совпадения таких представлений для $\Delta y(x_n)$ и для $\sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^{q_j} h^{i-1} \alpha_i^{(j)} y^{(i)}(x_n + \alpha_i^{(j)}h)$ до членов с h^{p+1} ($k \leq p+1 \leq 2 \sum_{j=1}^k q_j$) включительно, мы получим для определения параметров $\alpha_i^{(j)}$ и $\alpha_i^{(j)}$ ($i = 1, 2, \dots, q_j; j = 1, 2, \dots, k$) следующую систему $p+1$ уравнений:

$$\sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^{q_j} \alpha_i^{(j)} \frac{\alpha_i^{(j)D(l-j)} D(l-j)}{[D(l-j)]!(l-j)} = \frac{1}{l!}; \quad l = 1, 2, \dots, p+1, \quad \text{где } D(x) = \begin{cases} x & \text{при } x \geq 0, \\ 0 & \text{при } x < 0. \end{cases} \quad (2)$$

К системе (2) можно прийти также, если потребовать, чтобы избранное квадратурное правило было точным для всех алгебраических полиномов степени до p ($p \leq 2 \sum_{j=1}^k q_j - 1$) включительно.

Для остаточного члена $r_{n+1}^{(k)}$ при этом можно дать представление

$$r_{n+1}^{(k)} = h^{p+2} \left[\frac{y^{(p+2)}(x_n + \theta_0 h)}{(p+2)!} - \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^{q_j} \alpha_i^{(j)} \frac{\alpha_i^{(j)p+2-j}}{(p+2-j)!} y^{(p+2)}(x_n + \theta_i^{(j)} \alpha_i^{(j)} h) \right],$$

$0 < \theta_0, \theta_i^{(j)} < 1; i = 1, 2, \dots, q_j; j = 1, 2, \dots, k.$

Выбирая значения параметров $\alpha_i^{(j)}$ и $\alpha_i^{(j)}$ ($i = 1, 2, \dots, q_j; j = 1, 2, \dots, k$) удовлетворяющими системе (2), для приближенного решения $y_{n+1} \approx y(x_{n+1})$ исходной задачи (1) получим

$$y_{n+1} = y_n + \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^{q_j} h^i \alpha_i^{(j)} f^{(i-1)}(x_n + \alpha_i^{(j)}h, y_{n+\alpha_i^{(j)}}),$$

где

$$y_{n+\alpha_i^{(j)}} \approx y(x_n + \alpha_i^{(j)}h).$$

Для величин $y_{n+\alpha_i^{(j)}}$ ($i = 1, 2, \dots, q_j; j = 1, 2, \dots, k$) можно записать подобные же равенства с погрешностью аппроксимации порядка h^{p+2-i} :

$$y_{n+\alpha_i^{(j)}} = y_n + \sum_{v=1}^{k_1} \sum_{s=1}^{q_{v1}} (\alpha_i^{(j)}h)^v \alpha_s^{(v1)} f^{(v-1)}(x_n + \alpha_i^{(j)}\alpha_s^{(v1)}h, y_{n+\alpha_i^{(j)}\alpha_s^{(v1)}}).$$

Здесь $\alpha_s^{(v1)}$ и $\alpha_s^{(v1)}$ ($s = 1, 2, \dots, q_{v1}$; $v = 1, 2, \dots, k_1$) являются одним из решений системы вида (2), у которой отсутствуют последние j уравнений. Поступая аналогично и далее, мы придем, наконец, к формулам

$$y_{n+\alpha_i^{(j)}\alpha_s^{(v1)} \dots \alpha_i^{(lm)}} = y_n + \sum_{r=1}^{k_m} \frac{[\alpha_i^{(j)}\alpha_s^{(v1)} \dots \alpha_i^{(lm)} h]^r}{r!} f^{(r-1)}(x_n, y_n), \quad (3)$$

которые имеют погрешность аппроксимации порядка h^{k_m+1} и позволяют построить (если идти сейчас в обратном направлении) расчетные правила, дающие с погрешностью порядка h^{p+2} интересующее нас следующее значение y_{n+1} приближенного решения исходной задачи через предшествующее значение y_n . При этом по ходу вычислений мы получаем также и некоторую дополнительную информацию о приближенном решении в промежуточных точках.

Заметим, что формула (3) реализует метод разложения решения дифференциального уравнения в ряд [2].

Рассмотрим несколько конкретных примеров одношаговых правил, построенных по предлагаемому способу. При этом для простоты записи будем использовать обозначения

$$f^{(j-1)}(x_n + \alpha_i^{(j)}h, y_{n+\alpha_i^{(j)}}) = f_{n+\alpha_i^{(j)}}^{(j-1)}.$$

При $q_1 = q_2 = 1$, например, можно построить расчетное правило с локальной погрешностью порядка h^3 , эквивалентное правилу, получаемому методом разложения решения в ряд

$$y_{n+1} = y_n + hf_n + \frac{h^2}{2} f_n^{(1)}, \quad n = 0, 1, \dots, N-1.$$

Правила, эквивалентные методу разложения решения в ряд, получаются всякий раз при $p = k - 1$.

Рассмотрим далее правила с погрешностью порядка h^4 . Например, при $q_1 = q_2 = 1$ получаем

$$y_{n+1} = y_n + hf_n + \frac{h^2}{2} f_{n+\frac{1}{3}}^{(1)},$$

$$y_{n+\frac{1}{3}} = y_n + \frac{h}{3} f_n, \quad n = 0, 1, \dots, N-1.$$

Укажем здесь еще на два правила, получаемые при 1) $q_1 = 2, q_2 = 1$ и при 2) $q_1 = 1, q_2 = 2$:

$$1) \quad y_{n+1} = y_n + \frac{h}{3} (2f_n + f_{n+1}) + \frac{h^2}{6} f_n^{(1)},$$

$$2) \quad y_{n+1} = y_n + hf_n + \frac{h^2}{6} (2f_n^{(1)} + f_{n+1}^{(1)}), \quad n = 0, 1, \dots, N-1.$$

Последние два правила имеют неявный характер и требуют при переходе к следующей точке решения численных уравнений, что удобнее всего сде-

вать итерационно, так как выбором h можно надеяться обеспечить быструю сходимость соответствующего итерационного процесса.

Порядок локальной погрешности правил можно повышать и далее. При $q_1 = 2, q_2 = 1$, к примеру, получаем следующее правило с погрешностью порядка h^5 :

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{27} (11f_n + 16f_{n+\frac{3}{4}}) + \frac{h^2}{18} f_n^{(1)},$$

$$y_{n+\frac{3}{4}} = y_n + \frac{3}{4} hf_{n+\frac{\sqrt{3}}{4}} + \frac{3}{32} (3-2\sqrt{3}) h^2 f_n^{(1)},$$

$$y_{n+\frac{\sqrt{3}}{4}} = y_n + \frac{\sqrt{3}}{4} hf_n + \frac{3}{32} h^2 f_n^{(1)}, \quad n=0, 1, \dots, N-1.$$

Привлекая еще одну производную, имеем

$$y_{n+1} = y_n + hf_n + \frac{h^2}{2} f_n^{(1)} + \frac{h^3}{6} f_{n+\frac{1}{4}}^{(2)},$$

$$y_{n+\frac{1}{4}} = y_n + \frac{h}{4} f_n, \quad n=0, 1, \dots, N-1.$$

Среди правил с погрешностью аппроксимации порядка h^6 укажем, например, на следующее:

$$y_{n+1} = y_n + hf_n + \frac{h^2}{36} \times$$

$$\times \left[(9 - \sqrt{6}) f_{n+\frac{4+\sqrt{6}}{10}}^{(1)} + (9 + \sqrt{6}) f_{n+\frac{4-\sqrt{6}}{10}}^{(1)} \right],$$

$$y_{n+\frac{4\pm\sqrt{6}}{10}} = y_n + \frac{4\pm\sqrt{6}}{10} hf_n + \frac{11\pm 4\sqrt{6}}{300} h^2 (2f_n^{(1)} + f_{n+\frac{4\pm\sqrt{6}}{10}}^{(1)}),$$

$$n=0, 1, \dots, N-1.$$

Правило с погрешностью порядка h^7 :

$$y_{n+1} = y_n + hf_n + \frac{h^2}{2} f_n^{(1)} +$$

$$+ \frac{h^3}{36} \left[(8 - \sqrt{10}) f_{n+\frac{5+\sqrt{10}}{15}}^{(2)} + (8 + \sqrt{10}) f_{n+\frac{5-\sqrt{10}}{15}}^{(2)} \right],$$

$$y_{n+\frac{5\pm\sqrt{10}}{15}} = y_n + \frac{5\pm\sqrt{10}}{15} hf_n + \frac{7\pm 2\sqrt{10}}{90} h^2 f_n^{(1)} +$$

$$+ \frac{55\pm 17\sqrt{10}}{4050} h^3 f_n^{(2)}, \quad n=0, 1, \dots, N-1.$$

Среди правил с погрешностью порядка h^8 можно отметить

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2} (f_n + f_{n+1}) + \frac{h^2}{14} (f_n^{(1)} - f_{n+1}^{(1)}) +$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{h^3}{280} \left(f_n^{(2)} + f_{n+1}^{(2)} - \frac{16}{3} f_{n+\frac{1}{2}}^{(2)} \right), \\
y_{n+\frac{1}{2}} & = y_n + \frac{h}{2} f_n + \frac{h^2}{8} f_n^{(1)} + \\
& + \frac{h^3}{192} \left(3f_n^{(2)} + f_{n+\frac{1}{2}}^{(2)} \right), \quad n=0, 1, \dots, N-1.
\end{aligned}$$

Предлагаемый здесь способ построения одношаговых правил очевидным образом переносится и на случай задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка нормального вида, т. е. приложим и к уравнениям высших порядков.

Следует отметить возможность построения по предлагаемому способу предсказывающе-исправляющих правил итерационного типа, которые по ходу вычислений позволяют непосредственно судить о точности полученного результата. Приведем здесь пример правил такого типа:

$$\begin{aligned}
y_{n+1}^{(2)} & = y_n + hf(x_n, y_n), \\
y_{n+1}^{(3)} & = y_n + \frac{h}{2} [f(x_n, y_n) + f(x_n + h, y_{n+1}^{(2)})], \\
y_{n+1}^{(4)} & = y_n + \frac{h}{3} [2f(x_n, y_n) + f(x_n + h, y_{n+1}^{(3)})] + \frac{h^2}{6} f^{(1)}(x_n, y_n), \\
y_{n+1}^{(5)} & = y_n + \frac{h}{2} [f(x_n, y_n) + f(x_n + h, y_{n+1}^{(4)})] + \\
& + \frac{h^2}{12} [f^{(1)}(x_n, y_n) - f^{(1)}(x_n + h, y_{n+1}^{(4)})], \\
y_{n+1}^{(6)} & = y_n + \frac{h}{5} [3f(x_n, y_n) + 2f(x_n + h, y_{n+1}^{(5)})] + \\
& + \frac{h^2}{20} [3f^{(1)}(x_n, y_n) - f^{(1)}(x_n + h, y_{n+1}^{(5)})] + \frac{h^3}{60} f^{(2)}(x_n, y_n), \\
y_{n+1}^{(7)} & = y_n + \frac{h}{2} [f(x_n, y_n) + f(x_n + h, y_{n+1}^{(6)})] + \\
& + \frac{h^2}{10} [f^{(1)}(x_n, y_n) - f^{(1)}(x_n + h, y_{n+1}^{(6)})] + \\
& + \frac{h^3}{120} [f^{(2)}(x_n, y_n) + f^{(2)}(x_n + h, y_{n+1}^{(6)})], \\
y_{n+1}^{(8)} & = y_n + \frac{h}{7} [4f(x_n, y_n) + 3f(x_n + h, y_{n+1}^{(7)})] + \\
& + \frac{h^2}{14} [2f^{(1)}(x_n, y_n) - f^{(1)}(x_n + h, y_{n+1}^{(7)})] + \\
& + \frac{h^3}{210} [4f^{(2)}(x_n, y_n) + f^{(2)}(x_n + h, y_{n+1}^{(7)})] + \frac{h^4}{840} f^{(3)}(x_n, y_n), \\
y_{n+1}^{(9)} & = y_n + \frac{h}{2} [f(x_n, y_n) + f(x_n + h, y_{n+1}^{(8)})] +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{3h^2}{28} [f^{(1)}(x_n, y_n) - f^{(1)}(x_n + h, y_{n+1}^{(8-i_1)})] + \\
 & + \frac{h^3}{84} [f^{(2)}(x_n, y_n) + f^{(2)}(x_n + h, y_{n+1}^{(8-i_2)})] + \\
 & + \frac{h^4}{1680} [f^{(3)}(x_n, y_n) - f^{(3)}(x_n + h, y_{n+1}^{(8-i_3)})]
 \end{aligned}$$

и так далее, где $i_k = 0, 1, \dots, k$. Здесь верхний индекс у вычисляемого значения приближенного решения означает порядок локальной погрешности его.

Аналогично можно строить и r -шаговые правила любой точности подобного итерационного типа. В этом случае можно понизить порядок используемых производных.

Остановимся сейчас на исследовании сходимости одношаговых правил, получаемых по предлагаемому здесь способу. Будем считать для простоты изложения, что шаг постоянен на каждом этапе вычислений, т. е.

$$x_n = x_0 + nh, \quad n = 0, 1, \dots, N, \quad N = \left[\frac{X - x_0}{h} \right].$$

Запишем расчетные формулы, связывающие точные значения решения в точках x_n и x_{n+1} :

$$\begin{aligned}
 & y(x_n + h) = y(x_n) + \\
 & + \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^{q_j} h^j a_i^{(j)} f^{(j-1)} [x_n + \alpha_i^{(j)} h, y(x_n + \alpha_i^{(j)} h)] + r_{n+1}^{(k)}, \\
 & y(x_n + \alpha_i^{(j)} h) = y(x_n) + \\
 & + \sum_{v=1}^{k_1} \sum_{s=1}^{q_{v1}} (\alpha_i^{(j)} h)^v a_s^{(v1)} f^{(v-1)} [x_n + \alpha_i^{(j)} \alpha_s^{(v1)} h, y(x_n + \alpha_i^{(j)} \alpha_s^{(v1)} h)] + r_{n+\alpha_i^{(j)}}^{(k_1)}, \\
 & \dots \dots \dots \\
 & y(x_n + \alpha_i^{(j)} \alpha_s^{(v1)} \dots \alpha_i^{(lm)} h) = y(x_n) + \\
 & + \sum_{r=1}^{k_m} \frac{[\alpha_i^{(j)} \alpha_s^{(v1)} \dots \alpha_i^{(lm)} h]^r}{r!} f^{(r-1)} [x_n, y(x_n)] + r_{n+\alpha_i^{(j)} \alpha_s^{(v1)} \dots \alpha_i^{(lm)}}^{(k_m)},
 \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
 r_{n+1}^{(k)} &= O(h^{p+2}), \\
 r_{n+\alpha_i^{(j)}}^{(k_1)} &= O(h^{p+2-j}), \\
 &\dots \dots \dots \\
 r_{n+\alpha_i^{(j)} \alpha_s^{(v1)} \dots \alpha_i^{(lm)}}^{(k_m)} &= O(h^{k_m+1}).
 \end{aligned}$$

Пусть в плоскости (x, y) существует конечная область D , удовлетворяющая следующим требованиям:

- 1) точное решение задачи $y(x)$, $x_0 \leq x \leq X$, лежит внутри области D ;
- 2) при достаточно малых $h \leq h^*$ приближенное решение y_n , $n = 0, 1, \dots, N$, также принадлежит этой области;

3) область D выпукла в направлении по y ;

4) функции $\frac{\partial f^{(i)}(x, y)}{\partial y}$ непрерывны в замкнутой области \bar{D} и удовлетворяют там условиям

$$\left| \frac{\partial f^{(i)}(x, y)}{\partial y} \right| \leq L_i, \quad i = 0, 1, \dots, k-1.$$

Если из формул, дающих точные значения решения, вычсть соответственно расчетные правила, воспользовавшись при этом теоремой Лагранжа о конечном приращении по аргументу y , то для погрешности метода $\varepsilon_i = y(x_i) - y_i$ будем иметь

$$\begin{aligned} \varepsilon_{n+1} &= \varepsilon_n + \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^{q_j} h^j a_i^{(j)} \varepsilon_{n+\alpha_i^{(j)}} \left[\frac{\partial f^{(j-1)}}{\partial y} \right]_{n+\alpha_i^{(j)}} + r_{n+1}^{(k)}, \\ \varepsilon_{n+\alpha_i^{(j)}} &= \varepsilon_n + \sum_{v=1}^{k_1} \sum_{s=1}^{q_{v1}} (\alpha_i^{(j)} h)^v a_s^{(v1)} \varepsilon_{n+\alpha_i^{(j)} \alpha_s^{(v1)}} \times \\ &\quad \times \left[\frac{\partial f^{(v-1)}}{\partial y} \right]_{n+\alpha_i^{(j)} \alpha_s^{(v1)}} + r_{n+\alpha_i^{(j)}}^{(k_1)}, \\ &\quad \dots \dots \dots \\ \varepsilon_{n+\alpha_i^{(j)} \alpha_s^{(v1)} \dots \alpha_t^{(lm)}} &= \varepsilon_n + \\ &+ \sum_{r=1}^{k_m} \frac{[\alpha_i^{(j)} \alpha_s^{(v1)} \dots \alpha_t^{(lm)} h]^r}{r!} \varepsilon_n \left[\frac{\partial f^{(r-1)}}{\partial y} \right]_n + r_{n+\alpha_i^{(j)} \alpha_s^{(v1)} \dots \alpha_t^{(lm)}}^{(k_m)}, \end{aligned}$$

где

$$\left[\frac{\partial f^{(m)}}{\partial y} \right]_{n+\theta} = \frac{\partial}{\partial y} f^{(m)}(x_n + lh, y_{n+\theta} + \theta \varepsilon_{n+\theta}), \quad 0 < \theta < 1.$$

Перейдем к следующим очевидным оценкам:

$$\begin{aligned} |\varepsilon_{n+1}| &\leq |\varepsilon_n| + \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^{q_j} h^j |a_i^{(j)}| |\varepsilon_{n+\alpha_i^{(j)}}| L_{j-1} + O(h^{p+2}), \\ &\quad |\varepsilon_{n+\alpha_i^{(j)}}| \leq |\varepsilon_n| + \\ &+ \sum_{v=1}^{k_1} \sum_{s=1}^{q_{v1}} |\alpha_i^{(j)} h|^v |a_s^{(v1)}| |\varepsilon_{n+\alpha_i^{(j)} \alpha_s^{(v1)}}| L_{v-1} + O(h^{p+2-j}), \\ &\quad \dots \dots \dots \\ &\quad |\varepsilon_{n+\alpha_i^{(j)} \alpha_s^{(v1)} \dots \alpha_t^{(lm)}}| \leq |\varepsilon_n| + \\ &+ \sum_{r=1}^{k_m} \frac{|\alpha_i^{(j)} \alpha_s^{(v1)} \dots \alpha_t^{(lm)} h|^r}{r!} |\varepsilon_n| L_{r-1} + O(h^{k_m+1}). \end{aligned}$$

Если эти неравенства учесть последовательно, то получим

$$|\varepsilon_{n+1}| \leq |\varepsilon_n| + |\varepsilon_n| h\varphi(h) + R = |\varepsilon_n| Q + R, \quad n=0, 1, \dots, N-1,$$

где

$$R = O(h^{p+2}), \quad \varphi(h) \xrightarrow{h \rightarrow 0} \varphi \geq 0.$$

Учитывая, что $\varepsilon_0 = 0$, из этих неравенств находим

$$|\varepsilon_1| \leq R,$$

$$|\varepsilon_2| \leq |\varepsilon_1| Q + R \leq (1 + Q) R,$$

$$|\varepsilon_n| \leq R(1 + Q + Q^2 + \dots + Q^{n-1}).$$

Если $\varphi(h) \neq 0$, то теперь можно записать следующую оценку погрешности метода:

$$|\varepsilon_n| \leq R \frac{Q^n - 1}{Q - 1} = \frac{R}{h\varphi(h)} \{ [1 + h\varphi(h)]^n - 1 \}, \quad n=1, 2, \dots, N$$

(в случае $\varphi(h) \equiv 0$ интересующая нас оценка может быть записана в виде

$$|\varepsilon_n| \leq Rn \leq R \frac{X - x_0}{h}, \quad n=1, 2, \dots, N).$$

Принимая во внимание очевидные неравенства

$$1 + u \leq e^u, \quad e^u - 1 \leq ue^u,$$

полученную априорную оценку погрешности метода можно привести к виду

$$|\varepsilon_n| \leq \frac{R}{h\varphi(h)} [e^{(x_n - x_0)\varphi(h)} - 1], \quad n=1, 2, \dots, N,$$

или к виду

$$|\varepsilon_n| \leq R \frac{X - x_0}{h} e^{(X - x_0)\varphi(h)}, \quad n=1, 2, \dots, N$$

(последняя справедлива и в случае $\varphi(h) \equiv 0$).

Если учесть, что $R = O(h^{p+2})$, то из полученной оценки следует утверждение о равномерной сходимости метода со скоростью порядка h^{p+1} .

Литература

1. Бобков В. В. Весті АН БССР, сер. фіз.-мат. навук, № 4, 1967.
2. Михлин С. Г., Смолицкий Х. Л. Приближенные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений. М., 1965.

Белорусский государственный университет
им. В. И. Ленина

Поступило в редакцию
15.X 1969

Э. М. ШАЦ

ОБ ОДНОЙ НАИЛУЧШЕЙ КУБАТУРНОЙ ФОРМУЛЕ,
 СОДЕРЖАЩЕЙ ЧАСТНЫЕ ПРОИЗВОДНЫЕ ОТ ФУНКЦИИ

Рассмотрим задачу, общая постановка которой дана С. М. Никольским в [1].

Через $W_{0L_2}^{(r,s)}(M)$ обозначим класс функций $f(x, y)$, у которых на квадрате $[0, 1; 0, 1]$ производные

$f_{x^i y^j}^{(i+j)}(x, y)$ ($i = 0, 1, \dots, r; j = 0, 1, \dots, s; i + j \leq r + s - 1$) абсолютно непрерывные,

$$f_{x^i}^{(i)}(0, y) \equiv f_{y^j}^{(j)}(x, 0) \equiv 0$$

$$(i = 0, 1, \dots, r-1; j = 0, 1, \dots, s-1)$$

и

$$\left\{ \int_0^1 \int_0^1 [f_{x^r y^s}^{(r+s)}(x, y)]^2 dx dy \right\}^{\frac{1}{2}} \leq M.$$

Для этого класса функций рассмотрим формулу

$$\int_0^1 \int_0^1 f(x, y) dx dy = \frac{1}{r!s!} \sum_{k=0}^{m-1} \sum_{l=0}^{n-1} \sum_{\mu=0}^{r-2} \sum_{\nu=0}^{s-2} A_{kl}^{(\mu\nu)} (r-\mu-1)! \times$$

$$\times (s-\nu-1)! f_{x^\mu y^\nu}^{(\mu+\nu)}(x_k, y_l) + R_{mn}(f). \quad (1)$$

Обычным методом, как это делается в [1,2], получаем

$$\sup_{f \in W_{0L_2}^{(r,s)}(M)} |R_{mn}(f)| = \frac{M}{r!s!} \left\{ \int_0^1 \int_0^1 [\bar{K}(u, v)]^2 du dv \right\}^{\frac{1}{2}}, \quad (2)$$

где

$$\bar{K}(u, v) = (1-u)^r (1-v)^s - \sum_{k=0}^{m-1} \sum_{l=0}^{n-1} \sum_{\mu=0}^{r-2} \sum_{\nu=0}^{s-2} A_{kl}^{(\mu\nu)} \times$$

$$\times E(x_k - u) E(y_l - v) (x_k - u)^{r-\mu-1} (y_l - v)^{s-\nu-1},$$

$$E(u) = \begin{cases} 0, & \text{при } u \leq 0, \\ 1, & \text{при } u > 0. \end{cases}$$

Рассмотрим следующую экстремальную задачу.

Среди кубатурных формул (1), где m, n, r и s (r и s — четные) — заданные натуральные числа, найти наилучшую для класса $W_{0L_2}^{(r,s)}(M)$, т. е. найти

такую кубатурную формулу, для которой величина (2) принимает наименьшее значение.

Поставленная выше задача сводится к минимизации интеграла

$$U = \int_0^1 \int_0^1 [\bar{K}(u, v)]^2 dudv.$$

Положив для удобства

$$1 - u = t, \quad 1 - v = w, \quad t_k = 1 - x_{m-k-1}, \\ \omega_l = 1 - y_{n-l-1}, \quad A_{kl}^{(\mu\nu)} = \rho_{m-k-1, n-l-1}^{(r-\mu-1, s-\nu-1)},$$

получим

$$U = \int_0^1 \int_0^1 [K(t, w)]^2 dt dw, \quad (3)$$

где

$$K(t, w) = t^r w^s - \sum_{k=0}^{m-1} \sum_{l=0}^{n-1} \sum_{\mu=1}^{r-1} \sum_{\nu=1}^{s-1} \rho_{kl}^{(\mu\nu)} E(t - t_k) \times \\ \times E(w - \omega_l) (t - t_k)^\mu (w - \omega_l)^\nu.$$

Далее используем легко доказуемое с учетом ортогональности многочленов Лежандра утверждение, что среди всех многочленов вида

$$P_{r,s}(t, w) = t^r w^s + \sum_{k=0}^{r-1} \sum_{l=0}^{s-1} a_{kl} t^k w^l \quad (4)$$

наименьшее значение интегралу

$$\int_{a-h}^{a+h} \int_{b-g}^{b+g} [P_{r,s}(t, w)]^2 dt dw$$

доставляет единственный многочлен

$$R_{r,s}(t, w) = t^r g^s X_s \left(\frac{w-b}{g} \right) + w^s h^r X_r \left(\frac{t-a}{h} \right) - \\ - h^r g^s X_r \left(\frac{t-a}{h} \right) X_s \left(\frac{w-b}{g} \right), \quad (5)$$

где $X_n(x)$ — многочлен Лежандра для отрезка $[-1, 1]$ степени n с коэффициентом при x^n , равным единице.

Учитывая, что функция $K(t, w)$ на каждом из прямоугольников $[t_i, t_{i+1}; w_j, w_{j+1}]$ ($i = 0, 1, \dots, m-1; t_m = 1; j = 0, 1, \dots, n-1; w_n = 1$) есть многочлен вида (4), заменим ее на каждом из приведенных выше прямоугольников многочленом наименьшего уклонения (5).

Полагая

$$h_i = \frac{t_{i+1} - t_i}{2}, \quad a_i = \frac{t_{i+1} + t_i}{2},$$

$$g_j = \frac{w_{j+1} - w_j}{2}, \quad b_j = \frac{w_{j+1} + w_j}{2},$$

получим

$$\begin{aligned}
 U \geq & \frac{t_0^{2r+1} + \omega_0^{2s+1} - t_0^{2r+1} \omega_0^{2s+1}}{(2r+1)(2s+1)} + \\
 & + \frac{(1 - t_0^{2r+1})(s!)^4}{[(2s)!]^2(2r+1)(2s+1)} \sum_{j=0}^{n-1} (\omega_{j+1} - \omega_j)^{2s+1} + \\
 & + \frac{(1 - \omega_0^{2s+1})(r!)^4}{[(2r)!]^2(2r+1)(2s+1)} \sum_{i=0}^{m-1} (t_{i+1} - t_i)^{2r+1} - \\
 & - \frac{(r!)^4 (s!)^4}{[(2r)!]^2 [(2s)!]^2 (2r+1)(2s+1)} \sum_{i=0}^{m-1} \sum_{j=0}^{n-1} (t_{i+1} - t_i)^{2r+1} (\omega_{j+1} - \omega_j)^{2s+1}. \quad (6)
 \end{aligned}$$

Далее, минимизируя (6) по аналогии с [2] (стр. 222—224), получаем

$$\begin{aligned}
 h_{i*} &= \frac{t_{i+1}^* - t_i^*}{2} = h_* = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{(2r)!}{(r!)^2}} \left(1 + m \sqrt{\frac{(2r)!}{(r!)^2}} \right)^{-1}; \\
 g_{j*} &= \frac{\omega_{j+1}^* - \omega_j^*}{2} = g_* = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{(2s)!}{(s!)^2}} \left(1 + n \sqrt{\frac{(2s)!}{(s!)^2}} \right)^{-1}; \quad (7) \\
 t_k^* &= \frac{1 + k \sqrt{(2r)!/(r!)^2}}{1 + m \sqrt{(2r)!/(r!)^2}}; \quad \omega_l^* = \frac{1 + l \sqrt{(2s)!/(s!)^2}}{1 + n \sqrt{(2s)!/(s!)^2}} \\
 & (k = 0, 1, \dots, m-1; l = 0, 1, \dots, n-1).
 \end{aligned}$$

Через $K^*(t, \omega)$ обозначим функцию, которая на каждом прямоугольнике $[t_k^*, t_{k+1}^*; \omega_l^*, \omega_{l+1}^*]$ ($k = 0, 1, \dots, m-1; t_m^* = 1; l = 0, 1, \dots, n-1; \omega_n^* = 1$) есть многочлен (5), приведенный к этому прямоугольнику, а на прямоугольниках $[0, t_0^*; 0, \omega_0^*]$, $[0, t_0^*; \omega_l^*, \omega_{l+1}^*]$, $[t_k^*, t_{k+1}^*; 0, \omega_0^*]$ ($k = 0, 1, \dots, m-1; t_m^* = 1; l = 0, 1, \dots, n-1; \omega_n^* = 1$) равна $t^r \omega^s$.

Так как функция $K^*(t, \omega)$ непрерывна на квадрате $[0, 1; 0, 1]$, то она есть функция вида $K(t, \omega)$, доставляющая наименьшее значение интегралу (3).

Поэтому из (6) при узлах (7) имеем

$$\begin{aligned}
 \min U &= \frac{1}{(2r+1)(2s+1)} \left[\frac{1}{\left(1 + m \sqrt{(2r)!/(r!)^2} \right)^{2r}} + \right. \\
 & \left. + \frac{1}{\left(1 + n \sqrt{(2s)!/(s!)^2} \right)^{2s}} - \frac{1}{\left(1 + m \sqrt{(2r)!/(r!)^2} \right)^{2r} \left(1 + n \sqrt{(2s)!/(s!)^2} \right)^{2s}} \right].
 \end{aligned}$$

Отсюда по (2)

$$\min_{f \in \mathcal{W}_{0L_2}^{(r,s)}(M)} \sup |R_{mn}(f)| = \frac{M}{r!s!} \sqrt{(\min U)^2}. \quad (8)$$

Перейдем теперь к вычислению коэффициентов, соответствующих минимуму интеграла (5).

Если обозначить через $K_{k,l}^*(t, \omega)$ функцию $K^*(t, \omega)$ на прямоугольнике $[t_k^*, t_{k+1}^*; \omega_l^*, \omega_{l+1}^*]$ ($k=0, 1, \dots, m-1; l=0, 1, \dots, n-1$), то

$$K_{k,l}^*(t, \omega) - K_{k-1,l}^*(t, \omega) - K_{k,l-1}^*(t, \omega) + \\ + K_{k-1,l-1}^*(t, \omega) = \sum_{\mu=1}^{r-1} \sum_{\nu=1}^{s-1} \rho_{kl}^{*(\mu\nu)} (t - t_k^*)^\mu (\omega - \omega_l^*)^\nu.$$

С другой стороны, учитывая, что $K_{k,l}^*(t, \omega)$ есть функция (5) при $k=1, \dots, m-1; l=1, \dots, n-1$ и равна $t^r \omega^s$ при $k=0$ или $l=0$, нетрудно, поступая по аналогии с [1] (стр. 102—103), найти коэффициенты $\rho_{kl}^{*(\mu\nu)}$.

Пересчет на исходные узлы (x_k^*, y_l^*) и коэффициенты $A_{kl}^{*(\mu\nu)}$ приводит к следующим результатам:

$$x_k^* = 2(k+1)h_*; \quad y_l^* = 2(l+1)g_* \\ (k=0, 1, \dots, m-1; l=0, 1, \dots, n-1),$$

$$h_* \text{ и } g_* \text{ определяются по (7);} \quad (9)$$

$$A_{kl}^{*(\mu\nu)} = B_k^{*(\mu)} C_l^{*(\nu)}$$

$$(k=0, 1, \dots, m-1; l=0, 1, \dots, n-1;$$

$$\mu=0, 1, \dots, r-2; \nu=0, 1, \dots, s-2),$$

где

$$B_k^{*(2i+1)} = 0 \left(k=0, 1, \dots, m-2; i=0, 1, \dots, \frac{r-4}{2} \right),$$

$$B_k^{*(2i)} = \frac{2h_*^{2i+1}}{(r-2i-1)!} X_r^{(r-2i-1)}(1)$$

$$\left(k=0, 1, \dots, m-2; i=0, 1, \dots, \frac{r-2}{2} \right);$$

$$B_{m-1}^{*(\mu)} = \frac{h_*^{\mu+1}}{(r-\mu-1)!} \left\{ \frac{r!}{(\mu+1)!} [X_r(1)]^{\frac{\mu+1}{r}} - X_r^{(r-\mu-1)}(-1) \right\},$$

$$(\mu=0, 1, \dots, r-2);$$

$$C_l^{*(2j+1)} = 0 \left(l=0, 1, \dots, n-2; j=0, 1, \dots, \frac{s-4}{2} \right),$$

$$C_l^{*(2j)} = \frac{2g_*^{2j+1}}{(s-2j-1)!} X_s^{(s-2j-1)}(1)$$

$$\left(l=0, 1, \dots, n-2; j=0, 1, \dots, \frac{s-2}{2} \right);$$

$$C_{n-1}^{*(\nu)} = \frac{g_*^{\nu+1}}{(s-\nu-1)!} \left\{ \frac{s}{(\nu+1)!} [X_s(1)]^{\frac{\nu+1}{s}} - X_s^{(s-\nu-1)}(-1) \right\}$$

$$(\nu=0, 1, \dots, s-2).$$

Таким образом, мы доказали следующую теорему.

Теорема. Среди кубатурных формул вида (1), определяемых при фиксированных t, n, r и s (r и s — четные) произвольными коэффициентами $A_{kl}^{(uv)}$ и узлами (x_k, y_l) , где $0 \leq x_0 < \dots < x_{m-1} \leq 1, 0 \leq y_0 < \dots < y_{n-1} \leq 1$, наилучшей для класса функций $W_{0L_2}^{(r,s)}(M)$ является формула с коэффициентами $A_{kl}^{*(uv)}$ и узлами (x_k^*, y_l^*) , определяемыми при помощи равенств (9) и с мерой уклонения, определяемой (8).

Найденная кубатурная формула является обобщением на двумерный случай формулы из [3] в метрике L_2 . При $r=2, s=2$ получающаяся кубатурная формула обобщает на двумерный случай формулу из [4].

Литература

1. Никольский С. М. Квадратурные формулы. М., 1958.
2. Крылов В. И. Приближенные вычисления интегралов. М., 1967.
3. Алиев Р. И. Автореф. канд. дисс. Минск, 1965.
4. Доронин Г. Я. Сб. тр. Днепропетровск. инж.-стр. ин-та, № 1—2, 1955, стр. 210.

Таллинский политехнический институт

Поступило в редакцию
10.XII 1969

В. С. КРИСЕВИЧ

ОЦЕНКИ ЭФФЕКТИВНОСТИ МЕТОДОВ СОРТИРОВКИ

1. При решении задач обработки данных на электронных вычислительных машинах (ЭВМ) возникает необходимость сортировки исходной информации, представленной в виде массивов (списков) документов. Документ, являющийся единицей массива, состоит из последовательности символов (букв, цифр, различных знаков и пробела). Группа символов документа, которая определяет документ при решении поставленной задачи, называется признаком или ключом. В ЭВМ признаки представлены в виде чисел. Поэтому можно говорить о величине признака и оперировать с признаками количественно.

Под сортировкой понимают расположение документов массива в определенном порядке в зависимости от величины их признаков.

Предполагается, что массив документов расположен на магнитных лентах (МЛ). Тогда процесс сортировки разбивается на этапы: а) внутренняя сортировка, т. е. сортировка документов группы, помещающейся в оперативном запоминающем устройстве (ОЗУ), б) слияние всех упорядоченных групп, записанных на МЛ, в один упорядоченный список.

2. Сравним затраты машинного времени на внутреннюю сортировку, реализуемую различными методами.

Метод Шелла [2]. Список, состоящий из D документов, разбивается на 2^α групп по $d = [D/2^\alpha]$ *¹ документов в каждой ($\alpha = 1, 2, \dots$) до тех пор, пока $d \geq 1$. Причем, если $D/2^\alpha$ — не целое, то количество групп берется $[D/2^\alpha]$ **¹). После каждого разбиения сравниваются признаки соответственно первых документов из групп, вторых и т. д. по всей длине группы. Если величина признака документа из нижней группы меньше величины признака документа из верхней группы, а сортировка ведется по возрастанию величин признаков, то документы меняются местами.

В [2] показано, что число сравнений при этом методе

$$N_{\text{ср}} = D [\log_2 D]_1,$$

число случаев перемены документов местами

$$N_{\text{зам}} = 0,5D [\log_2 D]_1.$$

Определим затраты времени на сортировку D документов методом Шелла. Если $t_{\text{ср}}$ — затраты времени на сравнение признаков двух документов, $t_{\text{зам}}$ — затраты времени на перемену местами двух документов, то

$$T_{\text{ш}} = t_{\text{ср}} D [\log_2 D]_1 + t_{\text{зам}} \cdot 0,5 D [\log_2 D]_1,$$

или

$$T_{\text{ш}} = (t_{\text{ср}} + 0,5t_{\text{зам}}) D [\log_2 D]_1. \quad (1)$$

*¹) $[X]$ показывает, что берется целая часть величины X .

**¹) $[x]_1 = \begin{cases} x, & \text{если } x \text{ — целое,} \\ [x] + 1, & \text{если } x \text{ — не целое.} \end{cases}$

Метод слияния. Рассмотрим этот метод на примере слияния по двум путям. Весь список разбивается на группы по 2 документа в каждой. Эти группы упорядочиваются сравнением признаков и заменой, если нужно, документов внутри каждой пары. При втором просмотре упорядочиваются группы по 4 документа в каждой: сравниваются признаки первых документов из каждой пары. Документ с меньшим признаком пересылается в рабочее поле. Вместо него в следующем сравнении участвует признак следующего документа из той же подгруппы. Документ с меньшей величиной признака ставится в рабочее поле вслед за первым и т. д., пока не будет упорядочена вся четверка. Далее таким же способом упорядочиваются группы, состоящие из 8, 16, 32, ..., D документов.

Необходимый объем рабочего поля должен вмещать $D/2$ документов. Число сравнений при этом методе

$$M = D [\log_2 D]_1,$$

число пересылок

$$N = D [\log_2 D]_1.$$

Затраты времени при сортировке D документов методом слияния по двум путям определим следующей формулой:

$$T_{\text{сл}} = (t_{\text{ср}} + t_{\text{п}}) D [\log_2 D]_1, \quad (2)$$

где $t_{\text{п}}$ — время перезаписи документа из одного рабочего поля в другое.

Метод введения. Признак каждого документа начиная со второго сравнивается с признаками документов, стоящих выше. Таким образом, документ находит свое место в упорядоченной последовательности. Документы со старшими признаками сдвигаются вниз.

Количество сравнений при данном методе ([1]) в среднем равно $D(D-1)/4$, среднее число пересылок — $D(D-1)/4$.

Затраты времени на сортировку D документов этим методом будут вычисляться по формуле

$$T_{\text{вв}} = (t_{\text{ср}} + t_{\text{п}}) \frac{D(D-1)}{4}. \quad (3)$$

Метод сортировки по основаниям систем счисления. При сортировке этим методом количество цифр в системе счисления определяет количество рабочих полей («карманов»). При первом просмотре списка выбирается старшая цифра в признаке документов и в зависимости от ее величины документ отправляется в определенный «карман». При втором просмотре происходит сортировка в каждом отдельном кармане, причем документы каждого кармана упорядочиваются по величине второй цифры признака и так столько раз, сколько цифр в признаке. Количество просмотров списка документов также зависит от системы счисления, по которой проводится сортировка.

Если через z обозначить количество цифр (выбранной для сортировки системы счисления) в признаке, то количество сравнений при этом методе будет zD , число пересылок документов — zD .

Время, необходимое для сортировки D документов, выразится формулой

$$T_{0,c} = (t_{\text{ср}} + t_{\text{п}}) zD. \quad (4)$$

Сравним затраты времени при сортировке по различным методам.

В связи с тем что $t_{\text{зам}} = 3t_{\text{п}}$ (чтобы поменять два документа местами, нужно выполнить три пересылки), формула (1) принимает вид

$$T_{\text{ш}} = (t_{\text{ср}} + 1,5t_{\text{п}}) D [\log_2 D]_1.$$

Сравнивая ее с формулой (2), видим, что время, затраченное на сортировку методом слияния по двум путям, меньше, чем время, затраченное на сортировку по методу Шелла.

Сравним метод слияния и метод введения. Рассмотрим, при каких условиях $T_{\text{вв}}$ может быть меньше $T_{\text{сл}}$, т. е. когда выполняется

$$0,25(t_{\text{cp}} + t_{\text{n}})D(D-1) < (t_{\text{cp}} + t_{\text{n}})D[\log_2 D]_1$$

или

$$0,25(D-1) < [\log_2 D]_1.$$

Очевидно, что это верно при $D \leq 16$.

Сортировка методом введения дает меньшие затраты времени по сравнению с сортировкой методом слияния для списков, количество документов в которых не превышает 16.

Сравним временные характеристики метода сортировки по основаниям системы счисления и метода слияния, т. е. выражения (4) и (2):

$$(t_{\text{cp}} + t_{\text{n}})zD < (t_{\text{cp}} + t_{\text{n}})D[\log_2 D]_1$$

или

$$z < [\log_2 D]_1.$$

Метод сортировки по основаниям системы счисления предпочтительнее метода слияния при небольшой величине (длине) признака.

3. Затраты времени на сортировку можно сократить, если применять комбинацию каких-либо методов. Анализируя результаты сравнения методов, можно заметить, что интерес в этом смысле представляют методы введения и слияния.

Список из D документов разобьем на группы, содержащие $d \leq 16$ документов. Каждую из этих групп упорядочим методом введения. Затем применим метод слияния. Найдем такое d , при котором получится наибольшая экономия времени.

При этом заметим, что время работы циклов сравнения и пересылки документов при методах введения и слияния может быть различным. Предположим, что t'_{cp} , t'_{n} — время сравнения признаков и пересылки документа при сортировке методом введения, t_{cp} , t_{n} — время сравнения признаков и пересылки документа при сортировке методом слияния. Найдем время, необходимое для упорядочивания D/d групп по d документов в каждой методом введения. Формула (3) примет вид

$$T_{\text{вв}} = 0,25(t'_{\text{cp}} + t'_{\text{n}})d(d-1) \frac{D}{d} = 0,25(t'_{\text{cp}} + t'_{\text{n}})D(d-1).$$

Для выполнения слияния D/d групп необходимо, согласно (2), время

$$T_{\text{сл}} = (t_{\text{cp}} + t_{\text{n}})D \left[\log_2 \frac{D}{d} \right].$$

Рассмотрим, при каких целочисленных значениях d ($3 \leq d \leq 16$) выражение

$$T(d) = T_{\text{вв}} + T_{\text{сл}}$$

является минимальным:

$$T(d) = 0,25(t'_{\text{cp}} + t'_{\text{n}})D(d-1) + (t_{\text{cp}} + t_{\text{n}})D \left[\log_2 \frac{D}{d} \right].$$

Функция $T(d)$ является кусочно-непрерывной и достигает минимума при тех же d , что и функция

$$T'(d) = 0,25A(d-1) + \left[\log_2 \frac{D}{d} \right],$$

где

$$A = \frac{t'_{cp} + t'_n}{t_{cp} + t_n}$$

Коэффициент A можно определить при составлении программы для конкретной ЭВМ. После этого можно найти минимум функции $T'(d)$ при значениях $d=4, 8, 16$, так как видно, что при $4 \leq d < 8$ и $8 \leq d < 16$ $T'(d)$ принимает минимальное значение соответственно при $d=4$ и $d=8$. Найденное значение d будет определять количество документов в группах для сортировки методом введения. Далее, список, состоящий из D/d групп, следует упорядочить методом слияния. В этом случае затраты времени на внутреннюю сортировку будут меньше по сравнению с сортировкой по одному из описанных выше методов.

4. Описанный выше комбинированный вариант внутренней сортировки запрограммирован для ЭВМ «Минск-22». Для объединения упорядоченных групп (внешней сортировки) применялся метод слияния по двум путям с использованием четырех рабочих МЛ [1]. При его реализации группы документов, считанные с исходной МЛ и упорядоченные методами внутренней сортировки, записываются на первую и вторую рабочие МЛ. На первую МЛ записываются группы с нечетными порядковыми номерами, на вторую — с четными. Затем 1-я группа с 1-й рабочей МЛ сливается с 1-й группой 2-й рабочей МЛ и новая группа документов, уже в два раза большая прежней, записывается на 3-ю рабочую МЛ. Вторые группы с 1-й и 2-й рабочих МЛ после слияния записываются на 4-ю рабочую МЛ, третьи — опять на 3-ю МЛ и т. д. После окончания этой фазы группы, находящиеся на 3-й и 4-й рабочих МЛ, попарно сливаются и записываются на 1-ую и 2-ую рабочие МЛ и так до тех пор, пока весь список не будет записан на одну МЛ.

При работе с МЛ используется блочная запись информации:

а) информация на МЛ записывается не непрерывным массивом, а зонно, причем каждая зона заполняется таким образом, чтобы после считывания этой зоны была подведена для считывания следующая зона (экспериментально найдено, что для этого в зону необходимо записывать не 2048 слов, а не более 1801);

б) при записи информации на МЛ в конце массива, записываемого в зону, должно стоять дополнение контрольной суммы массива до какого-либо постоянного для данного списка числа (например, таким числом может быть — 7777 7777 7777).

При такой записи уменьшаются затраты времени на подвод следующей зоны, а правильность считывания с МЛ достаточно проверять сравнением с постоянным числом, не производя контроль фиктивным считыванием.

Определим общие затраты времени T на сортировку описанным методом.

Время попарного слияния групп складывается из времени одного прогона МЛ по всей длине информации при считывании, времени слияния групп внутри ОЗУ и времени трех прогонов МЛ при записи (запись, обратный подвод зоны, контрольное считывание).

Кроме этого, для каждого следующего этапа сортировки необходимо подводить в начальное положение рабочие МЛ, что равносильно двум прогонам МЛ по всей длине информации. В итоге

$$T = 0,25D(d-1)(t'_{cp} + t'_n) + D(t_{cp} + t_n) \left[\log_2 \frac{D}{d} \right]_1 + 6T_{мл}(1 + [\log_2 N]_1),$$

где D — количество документов в списке; t'_{cp} — время сравнения двух документов при реализации метода введения; $t'_{п}$ — время пересылки одного документа при реализации метода введения; t_{cp} — время сравнения двух документов при реализации метода слияния; $t_{п}$ — время пересылки одного документа при реализации метода слияния; $T_{мл}$ — время прогона МЛ по всей длине информации; N — количество групп, упорядоченных при первом просмотре информации.

Первые два слагаемых представляют собой время, затраченное на реализацию методов введения и слияния на всех этапах сортировки. Последнее слагаемое определяет время, необходимое для работы с магнитными лентами.

Литература

1. Трахтенгерц Э. А. Научно-техническая информация, № 1, 1964.
2. Chel D. L. Communication ACM, № 9, 1959.

Институт математики
АН БССР

Поступило в редакцию
22.VII 1969

Ф. И. ФЕДОРОВ, В. А. ПЛЕТЮХОВ

ВОЛНОВЫЕ УРАВНЕНИЯ С КРАТНЫМИ ПРЕДСТАВЛЕНИЯМИ
 ГРУППЫ ЛОРЕНЦА. ПОЛУЦЕЛЫЙ СПИН

В работе [1] были рассмотрены релятивистские волновые уравнения

$$(\gamma^k \partial_k + m) \psi = 0 \quad (1)$$

для частиц с целым спином, построенные с использованием повторяющихся, или кратных, представлений группы Лоренца. В настоящей работе рассматривается случай полуцелого спина.

Наиболее полную схему зацеплений для частицы с полуцелым спином ($S = 1/2, 3/2, \dots, 2n - 1/2$) без кратных представлений можно написать в виде

$$\begin{array}{c} \left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right) - \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right) \\ \vdots \\ \left(-\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right) - \left(-\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right) - \left(\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right) - \left(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right) \\ \vdots \\ \left(-\frac{2m-1}{2}, \frac{2m+1}{2}\right) - \dots - \left(-\frac{1}{2}, \frac{2m+1}{2}\right) - \left(\frac{1}{2}, \frac{2m+1}{2}\right) - \dots - \left(\frac{2m-1}{2}, \frac{2m+1}{2}\right) \\ \vdots \\ \left(-\frac{2n-3}{2}, \frac{2n-1}{2}\right) - \dots - \left(-\frac{1}{2}, \frac{2n-1}{2}\right) - \left(\frac{1}{2}, \frac{2n-1}{2}\right) - \dots - \left(\frac{2n-3}{2}, \frac{2n-1}{2}\right) \\ \vdots \\ \left(-\frac{2n-1}{2}, \frac{2n+1}{2}\right) - \dots - \left(-\frac{1}{2}, \frac{2n+1}{2}\right) - \left(\frac{1}{2}, \frac{2n+1}{2}\right) - \dots - \left(\frac{2n-1}{2}, \frac{2n+1}{2}\right) \end{array} \quad (2)$$

Рассмотрим случай, когда к исходной схеме (2) добавляются зацепляющиеся между собой представления собственной группы Лоренца

$$\left(-\frac{1}{2}, \frac{2m+1}{2}\right)' - \left(\frac{1}{2}, \frac{2m+1}{2}\right)' \quad (0 < m \leq n). \quad (3)$$

$$\begin{aligned}
(c_{12}^p)' &= e^{i\varphi} \{ \bar{\alpha}_{1'1}^2 \bar{c}_{1'2}^p - \bar{\alpha}_{1'1}^2 c_{1'2}^p \cdot \bar{\alpha}_{1'1} \bar{\alpha}_{1'1} \cdot (\bar{c}_{12}^p - \bar{c}_{1'2}^p) \}, \\
(c_{12}^p)' &= |\alpha_{1'1}|^2 c_{1'2}^p + |\alpha_{1'1}|^2 c_{12}^p - \alpha_{1'1} \bar{\alpha}_{1'1} c_{1'2}^p - \alpha_{1'1} \bar{\alpha}_{1'1} c_{12}^p, \\
(c_{13}^p)' &= (\alpha_{1'1} c_{1'3}^p + \alpha_{1'1} c_{13}^p) \alpha_3^{-1}, \\
(c_{15}^p)' &= (\alpha_{1'1} c_{1'5}^p + \alpha_{1'1} c_{15}^p) \alpha_5^{-1}, \\
(c_{17}^p)' &= (\alpha_{1'1} c_{1'7}^p + \alpha_{1'1} c_{17}^p) \alpha_7^{-1}, \\
(c_{13}^p)' &= (\bar{\alpha}_{1'1} c_{13}^p - \bar{\alpha}_{1'1} c_{1'3}^p) \alpha_3^{-1} e^{i\varphi}, \\
(c_{15}^p)' &= (\bar{\alpha}_{1'1} c_{15}^p - \bar{\alpha}_{1'1} c_{1'5}^p) \alpha_5^{-1} e^{i\varphi}, \\
(c_{17}^p)' &= (\bar{\alpha}_{1'1} c_{17}^p - \bar{\alpha}_{1'1} c_{1'7}^p) \alpha_7^{-1} e^{i\varphi}.
\end{aligned} \tag{17}$$

Имеющийся произвол в выборе матрицы допустимых преобразований можно использовать для обращения в нуль зацеплений $(c_{1'2}^p)' = (\bar{c}_{1'2}^p)'$, причем для всех рассматриваемых значений спина p одновременно. Искомое преобразование A имеет вид

$$\alpha_{1'1} = \frac{1}{2c_{1'2}} \{ c_{12} - c_{1'2} \pm \sqrt{(c_{12} - c_{1'2})^2 + 4|c_{1'2}|^2} \} \alpha_{1'1}. \tag{18}$$

Здесь c_{12} и $c_{1'2}$, не уменьшая общности, можно считать вещественными.

Из (17) следует, что зацепления $c_{1'3}^p, c_{1'5}^p, c_{1'7}^p$ можно обратить в нуль (одновременно с $c_{1'2}^p$) только при выполнении условия

$$\frac{c_{1'3}}{c_{13}} = \frac{c_{1'5}}{c_{15}} = \frac{c_{1'7}}{c_{17}} = - \frac{c_{1'7}}{2c_{1'2}} \{ c_{12} - c_{1'2} \pm \sqrt{(c_{12} - c_{1'2})^2 + 4|c_{1'2}|^2} \}. \tag{19}$$

Это есть условие распада волнового уравнения (1) со схемой зацеплений (2) + (3) на уравнения со схемами зацеплений (2) и (3). Если же (19) не выполняется, то полученное волновое уравнение не распадается и, следовательно, описывает частицу, вообще говоря, с новым набором массовых и спиновых состояний.

Рассмотрим в качестве примера волновое уравнение со схемой зацеплений

$$\begin{aligned}
& \left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2} \right) - \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2} \right) \\
& \quad \quad \quad \times \\
& \left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2} \right) - \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2} \right).
\end{aligned} \tag{20}$$

Из сказанного выше сразу следует, что оно распадается на два уравнения со схемой зацеплений $\left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2} \right) - \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2} \right)$, каждое из которых описывает частицу со спином $1/2$.

Если к схеме (2) добавляется два и более зацепляющихся между собой представлений полной группы Лоренца вида (3), то при помощи допустимых преобразований координат всегда можно разорвать только зацепления между кратными представлениями полной группы. Распадение получающейся составной схемы зацеплений на исходные имеет место лишь при выполнении условий, аналогичных (19).

Добавим к схеме (2) незацепляющиеся между собой представления собственной группы Лоренца $\left(-\frac{2k+1}{2}, \frac{2m+1}{2}\right)$, $\left(\frac{2k+1}{2}, \frac{2m+1}{2}\right)$ ($0 < k < m \leq n$). При этом зацепления между кратными представлениями полной группы отсутствуют, и, следовательно, анализ получающихся волновых уравнений принципиально ничем не отличается от соответствующего случая для целого спина [1]. Условие распада имеет вид

$$\frac{c_{1'3}}{c_{13}} = \frac{c_{1'5}}{c_{15}} = \frac{c_{1'7}}{c_{17}} = \frac{c_{1'9}}{c_{19}}, \quad (21)$$

где $c_{1'i}$, c_{ii} — зацепления кратных представлений полной группы с остальными, входящими в (2). В случае невыполнения условия (21) полученное волновое уравнение, вообще говоря, отличается от исходного со схемой зацеплений (2).

Литература

1. Федоров Ф. И., Плетюхов В. А. Вестн АН БССР, серия физика-математических наук, № 2, 1970.
2. Гельфанд И. М. и др. Представления группы вращений и группы Лоренца. М., 1958.
3. Федоров Ф. И. ДАН СССР, 79, 737, 1951.
4. Федоров Ф. И. Ученые записки БГУ им. В. И. Ленина, вып. 12, серия физ.-мат. Минск, 1951.
5. Файнберг В. Я. Труды ФИАН СССР, т. VI, 277, 1955.

Белорусский государственный университет
им. В. И. Ленина

Поступило в редакцию
23.XII 1969

В. А. ПЛЕТЮХОВ, Ф. И. ФЕДОРОВ

ВОЛНОВОЕ УРАВНЕНИЕ С КРАТНЫМИ ПРЕДСТАВЛЕНИЯМИ ДЛЯ ЧАСТИЦЫ СО СПИНОМ 1

В работе [1] была рассмотрена общая схема построения релятивистских уравнений для частиц с целым спином, использующая кратные представления группы Лоренца. В [2] на этой основе было получено уравнение для частицы со спином 0, отличное от уравнения Даффина—Кеммера, и рассмотрены рассеяние этой частицы кулоновским полем и комптон-эффект. В настоящей работе получены уравнения для векторного мезона, отличные от известных уравнений Прока.

Будем исходить из следующей схемы зацепления представлений *):

$$(0, 1) \begin{cases} (0, 2) - (1, 2) \\ (0, 2)' - (-1, 2) \end{cases} \quad (1)$$

(Заметим, что эта же схема была использована в [2] для уравнений, описывающих частицу с нулевым спином). Допустимым преобразованием базиса пространства волновой функции ψ схему (1) можно преобразовать к виду (см. [1])

$$(0, 2)' - (0, 1) - (0, 2) \begin{cases} (1, 2) \\ (-1, 2) \end{cases} \quad (2)$$

Пронумеруем входящие сюда представления следующим образом:

$$(0, 2)' \sim 1', \quad (0, 2) \sim 1, \quad (0, 1) \sim 2, \quad (-1, 2) \sim 3, \quad (1, 2) \sim 4.$$

Тогда матрица γ_0 волнового уравнения

$$(\gamma_k \partial_k + m) \psi = 0 \quad (3)$$

со схемой зацеплений (2) имеет вид ([3], [4])

$$\gamma_0 = \begin{pmatrix} C^0 \times E_0 & \\ & C^1 \times E_1 \end{pmatrix}, \quad (4)$$

где C^0 и C^1 — квадратные ящики, относящиеся к спинам 0 и 1 соответственно, причем

$$C^0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & c_{1,2}^0 \\ 0 & 0 & c_{12}^0 \\ c_{21}^0 & c_{21}^0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_{13}^1 & c_{14}^1 \\ 0 & c_{31}^1 & 0 & 0 \\ 0 & c_{41}^1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

*) Здесь используются обозначения представлений группы Лоренца, принятые в [3].

Потребуем, чтобы все собственные значения блока C^0 были равны 0, а блок C^1 имел одно вещественное ненулевое собственное значение. Это дает

$$c_{1'2}^0 c_{21'}^0 + c_{12}^0 c_{21}^0 = 0, \quad c_{13}^1 c_{31}^1 + c_{14}^1 c_{41}^1 \neq 0. \quad (5)$$

Условие получения уравнения (3) из вещественной инвариантной функции Лагранжа налагает следующие ограничения на элементы матрицы γ_0 (см. [5]):

$$c_{1'2}^0 \eta_{22}^0 = \bar{c}_{21'}^0 \eta_{1'1'}^0, \quad c_{12}^0 \eta_{22}^0 = \bar{c}_{21}^0 \eta_{11}^0, \quad c_{13}^1 \eta_{34}^1 = \bar{c}_{41}^1 \eta_{11}^1. \quad (6)$$

Наконец, из требования инвариантности рассматриваемого волнового уравнения относительно отражений следует:

$$c_{13}^1 = \pm c_{14}^1, \quad c_{31}^1 = \pm c_{41}^1. \quad (7)$$

Не уменьшая общности, можно считать $c_{1'2}^0$, c_{12}^0 , c_{13}^1 вещественными положительными числами [3]. Тогда условия (5) — (7) однозначно приводятся к следующему выбору матрицы билинейной формы:

$$\eta_{1'1'}^0 = -\eta_{11}^0 = \eta_{22}^0 = \eta_{11}^1 = \pm \eta_{34}^1 = \pm \eta_{43}^1 = 1. \quad (8)$$

Кроме того, из (5), (6), (8) получаем

$$c_{1'2}^0 = c_{21'}^0, \quad c_{12}^0 = -c_{21}^0, \quad c_{1'2}^0 = c_{12}^0, \quad c_{13}^1 = c_{31}^1.$$

Положим $c_{1'2}^0 = c_{13}^1 = 1$. Тогда

$$C^0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad C^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \pm 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \pm 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (9)$$

и уравнение (3) с матрицей γ_0 (4), (9) будет описывать частицу со спином 1 и одной массой покоя. При этом матрица γ_0 неприводима к диагональному виду, так как $(C^0)^3 = 0$.

Минимальное уравнение для γ_0 (4), (9) имеет вид

$$\gamma_0^3 (\gamma_0^2 - 1) = 0. \quad (10)$$

Следовательно, согласно [6], для положительной определенности энергии необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие

$$(-1)^4 [(\gamma_0^4 \eta_c)^2 - (\gamma_0^3 \eta_c)^2] > 0. \quad (11)$$

Матрица билинейной формы η имеет вид

$$\eta = \begin{pmatrix} \eta^0 \times E_0 & \\ & \eta^1 \times E_1 \end{pmatrix}, \quad (12)$$

где, согласно (8),

$$\eta^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \eta^1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \pm 1 \\ 0 & 0 & \pm 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (13)$$

С помощью (4), (9), (12), (13) легко показать, что $(\gamma_0^3 \eta)_c = 0$, а $(\gamma_0^4 \eta)_c \neq 0$, и, следовательно, условие (11) выполняется — энергия дефинитна*).

Чтобы получить тензорную форму рассматриваемого уравнения, обозначим представления, входящие в (2), следующим образом: $(0, 1) \sim \psi_0$, $(0, 2) \sim \varphi_{k'}$, $(0, 2) \sim \psi_k$, $[(1, 2), (-1, 2)] \sim \psi_{[kl]}$. Нетрудно убедиться, что в таком базисе уравнение (3) с матрицей γ_0 (4), (9) имеет вид

$$\begin{aligned} \partial_{k'} \varphi_{k'} + \partial_k \psi_k + m \psi_0 &= 0, \\ \partial_{k'} \psi_0 + m \varphi_{k'} &= 0, \\ \partial_l \psi_{[kl]} - \partial_k \psi_0 + m \psi_k &= 0, \\ \partial_k \psi_l - \partial_l \psi_k + m \psi_{[lk]} &= 0, \end{aligned} \quad \psi = \begin{pmatrix} \psi_0 \\ \varphi_{k'} \\ \psi_k \\ \psi_{[kl]} \end{pmatrix}. \quad (14)$$

Здесь индексы k и k' пробегает значения 1, 2, 3, 4 одновременно. Штрих указывает на принадлежность ψ_k и $\varphi_{k'}$ к разным, хотя и эквивалентным, представлениям.

Аналогично уравнениям, рассмотренным в [2], в отсутствие внешнего поля система (14) сводится к уравнениям Даффина—Кеммера для частицы со спином 1; при этом ψ_0 и $\varphi_{k'}$ обращаются в нуль. Если же в (14) ввести взаимодействие с внешним полем, то полученная система будет отличаться от соответствующей даффин-кеммеровской не только по виду, но и по своим физическим свойствам, т. е. она описывает частицу со спином 1, неэквивалентную даффин-кеммеровской.

Аналогичная ситуация встречается в [8, 9]. В этих работах показано, что можно построить множество различных уравнений для частиц со спином, большим единицы, которые в отсутствие внешнего поля все совпадают, а при наличии последнего, вообще говоря, отличаются друг от друга, а следовательно, описывают разные частицы (хотя и имеющие одинаковый спин).

Введем в пространстве волновой функции $\psi \equiv \psi_B$ обобщенные элементы матричной алгебры e^{AB} , определяемые соотношениями (см. [10])

$$(e^{AB})_{CD} = \delta_{AC} \delta_{BD}, \quad e^{AB} e^{CD} = \delta_{BC} e^{AD}, \quad (15)$$

где собирательный индекс B принимает значения $(0, k', k, [kl])$. При этом используем следующую нумерацию: $0 \rightarrow 1$, $k' \rightarrow 2-5$, $k \rightarrow 6-9$, $[kl] \rightarrow 10-15$. Поступая аналогично [2], получим следующее выражение для матриц γ_k через элементы e^{AB} :

$$\gamma_k = e^{0k'} + e^{k'0} + e^{0k} - e^{k0} + e^{[lk]} + e^{[lk]l}. \quad (16)$$

Используя (15) и (16), можно показать, что $\gamma_k^3 = e^{[lk]} + e^{[lk]l}$, т. е. в рассматриваемом тензорном базисе

$$\gamma_k^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \alpha_k \end{pmatrix} \equiv \Gamma_k,$$

где α_k — обычные матрицы Даффина—Кеммера для частицы со спином 1. Матрицы γ_k удовлетворяют соотношению

$$\sum_p \gamma_i \gamma_j \gamma_k = 2\delta_{ij} \Gamma_k + 2\delta_{ik} \Gamma_j + 2\delta_{jk} \Gamma_i,$$

где суммирование ведется по всем перестановкам индексов i, j, k .

* Заметим, что в [7] было построено релятивистское волновое уравнение для частицы с переменным спином 0—1 и двумя различными массами покоя, причем использовался набор представлений (1). Можно показать, что, исходя из (1), волновое уравнение для «би-частицы» 0—1, которое удовлетворяло бы требованию дефинитности энергии, построить нельзя, так как в двух различных массовых состояниях знаки энергии для этой частицы всегда различны.

Рассмотрим процесс рассеяния исследуемой векторной частицы в кулоновском поле. Вероятность перехода частицы из состояния с импульсом $p = (p, i\varepsilon)$ в состояние с импульсом $p' = (p', i\varepsilon')$, усредненная по начальным и просуммированная по конечным значениям проекции спина, в случае нормировки по заряду имеет вид [6]

$$W = \frac{c}{2s+1} \frac{m_2}{\varepsilon\varepsilon'} \text{Sp} \{ \gamma_0 \tau(\hat{p}) \gamma_0 \tau(\hat{p}') \} \delta(\varepsilon - \varepsilon'),$$

где $c = \frac{2\pi z^2 e^4}{|p' - p|^4}$ (см. [11]), $s = 1$ — спин частицы, а проективный оператор $\tau(\hat{p})$ равен

$$\tau(\hat{p}) = \frac{i\hat{p}^3 (i\hat{p} - m)}{2m^4}, \quad \hat{p} = p_\mu \gamma_\mu. \quad (16a)$$

Учитывая, что след произведения нечетного числа матриц γ_k равен нулю, получаем

$$W = \frac{z^2 e^4}{12|p' - p|^4 \varepsilon \varepsilon' m^6} \text{Sp} (\gamma_0 \hat{p}'^4 \gamma_0 \hat{p}^4 - m^2 \gamma_0 \hat{p}'^3 \gamma_0 \hat{p}^3) 2\pi \delta(\varepsilon - \varepsilon'). \quad (17)$$

Вычисление следов, входящих в (17), дает

$$\text{Sp} (\gamma_0 \hat{p}'^4 \gamma_0 \hat{p}^4) = m^4 [3(\varepsilon^2 + \varepsilon'^2) m^2 + 2(\varepsilon^2 - m^2)(\varepsilon'^2 - m^2) \sin^2 \alpha], \quad (18)$$

$$\text{Sp} (\gamma_0 \hat{p}'^3 \gamma_0 \hat{p}^3) = -6m^4 \varepsilon \varepsilon', \quad (19)$$

где α — угол рассеяния. После подстановки в (17) получим следующее выражение для W :

$$W = \frac{z^2 e^4}{12|p' - p|^4 \varepsilon \varepsilon' m^2} [3(\varepsilon + \varepsilon')^2 + 2(\varepsilon^2 - m^2)(\varepsilon'^2 - m^2) \sin^2 \alpha] 2\pi \delta(\varepsilon - \varepsilon'). \quad (20)$$

Соответствующая вероятность перехода для частицы Даффина—Кеммера определяется так:

$$W_1 = \frac{z^2 e^4}{12|p' - p|^4 \varepsilon \varepsilon' m^2} \text{Sp} (\alpha_0 \hat{p}'^2 \alpha_0 \hat{p}^2 - m^2 \alpha_0 \hat{p} \alpha_0 \hat{p}') 2\pi \delta(\varepsilon - \varepsilon'). \quad (21)$$

Следы, входящие в (21), с точностью до множителя m^4 совпадают со следами (18) и (19), и, следовательно, $W = W_1$. Таким образом, рассеяние векторной частицы, описываемой системой (14), и векторной частицы Даффина—Кеммера в кулоновском поле происходит одинаковым образом. То же самое и по аналогичной причине имело место для частицы со спином 0 [2].

Обратимся к комптон-эффекту на векторной частице (14). При этом мы используем метод, развитый в [12]—[14], позволяющий вычислять вместо квадрата модуля матричного элемента рассеяния $|M|^2$ непосредственно сам матричный элемент $M = \bar{\psi}'(p') Q \psi(p)$, где $\psi(p)$ и $\psi'(p')$ — амплитуды волновых функций частицы в начальном и конечном состояниях с 4-импульсами p и p' и проекциями спина на направление движения r и r' . Для облегчения расчетов будем считать $p = 0$, т. е. использовать систему отчета, в которой частица до рассеяния покоилась. В этом случае направление, на которое проектируется спин начального состояния, можно выбирать произ-

$$+ \hat{e} \left\{ \frac{i \hat{f}'^3 (i \hat{f}' - m) - i \hat{f}' (i \hat{f}' - m) (f'^2 + m^2) - m^2 (f'^2 + m^2)}{m^3 (f'^2 + m^2)} \right\} \hat{e}'. \quad (29)$$

Здесь

$$\left. \begin{aligned} f &= p + k = p' + k', \quad f' = p - k' = p' - k, \\ \hat{f} &= \hat{f}_\mu \gamma_\mu, \quad \hat{e} = e_\mu \gamma_\mu \end{aligned} \right\}, \quad (30)$$

$e_\mu = (\mathbf{e}, 0)$, $e'_\mu = (\mathbf{e}', 0)$ — поляризация падающего и рассеянного фотонов, причем $\mathbf{e}\mathbf{k} = \mathbf{e}'\mathbf{k}' = 0$.

При рассеянии фотона на векторной частице возможны 9 различных процессов, соответствующих трем начальным и трем конечным спиновым состояниям частицы. Рассмотрим некоторые из них.

$$1. \quad r = +1, \quad r' = +1.$$

Усеченный минимальный полином оператора σ в этом случае имеет вид (см. [6]).

$$\beta_{+1} = \frac{1}{2} \sigma(\sigma + 1). \quad (31)$$

Поскольку спиновое состояние векторной частицы не меняется ($r = r'$), то оператор $K^{r' \rightarrow r} = 1$.

Подставляя значения Q (29), (30), $\tau(\hat{p})$ (16), β_{+1} (31), S^{-1} (25), (26) в выражение для матричного элемента (22), получим

$$\begin{aligned} M_{p \rightarrow p'}^{+1 \rightarrow +1} &= M_R + iM_i, \\ M_R &= \frac{\omega - \omega'}{8m^2} \left\{ \left[(m + \varepsilon') \left(\frac{1}{\omega'} - \frac{1}{\omega} \right) + \frac{\varepsilon'^2}{m^2} - 5 \right] \mathbf{e}\mathbf{p}_i \cdot \mathbf{e}'\mathbf{p}_i + \right. \\ &+ \left[(\omega' - \omega) \left(\frac{m}{\omega\omega'} + \frac{2}{m} \right) + \frac{4(\omega^2 + \omega'^2)}{m^2} + 11 \right] \mathbf{e}\mathbf{e}' - \\ &\left. - \frac{\omega}{\omega'} [\mathbf{e}\mathbf{k}_1]\mathbf{p}_i \cdot [\mathbf{e}'\mathbf{k}_1]\mathbf{p}_i \right\}, \\ M_i &= \frac{\omega - \omega'}{8m^2} \left\{ \left[\frac{(m + 2\varepsilon')(\omega + \omega')}{m^2} - \frac{2(m + \omega)}{\omega'} \right] \mathbf{p}_i [\mathbf{e}\mathbf{e}'] + \right. \\ &+ \left. \frac{1}{\omega'|\mathbf{p}'|} [(\omega^2 + \omega'^2) + m(\omega - \omega')] \mathbf{k}_1 [\mathbf{e}\mathbf{e}'] \right\} + \\ &+ \frac{|\mathbf{p}'|}{8m^4} \left\{ [\omega^2 - 2m(m + \omega)] \mathbf{e}'\mathbf{p}_i \cdot [\mathbf{e}\mathbf{k}_1]\mathbf{p}_i + \left[\omega'^2 - 2m\frac{\omega}{\omega'}(m - \omega') \right] \times \right. \\ &\left. \times \mathbf{e}\mathbf{p}_i \cdot [\mathbf{e}'\mathbf{k}_1]\mathbf{p}_i \right\}, \quad (32) \end{aligned}$$

где ω и ω' — энергии первоначального и рассеянного фотонов, $\mathbf{k}_1 = \frac{\mathbf{k}}{\omega}$ — единичный вектор в направлении первоначального фотона.

Для сравнения приведем выражение соответствующего матричного элемента, рассчитанного тем же методом, для обычной векторной частицы Даффина—Кеммера:

$$\begin{aligned}
 M_R &= \frac{\omega - \omega'}{8m^2} \left\{ \left[(m + \varepsilon') \left(\frac{1}{\omega'} - \frac{1}{\omega} \right) + \frac{\varepsilon'}{m} \right] \mathbf{e} \mathbf{p}'_i \cdot \mathbf{e}' \mathbf{p}'_i + \right. \\
 &+ \left. \left[(\omega' - \omega) \left(\frac{m}{\omega \omega'} + \frac{2}{m} \right) + 5 \right] \mathbf{e} \mathbf{e}' - \frac{\omega}{\omega'} [\mathbf{e} \mathbf{k}_1] \mathbf{p}'_i \cdot [\mathbf{e}' \mathbf{k}_1] \mathbf{p}'_i \right\}, \\
 M_i &= \frac{\omega' - \omega}{8m^2} \left\{ \left[\frac{2(m + \varepsilon')}{\omega'} + \frac{2\omega}{m} + \frac{m + \omega}{\omega} \right] \mathbf{p}'_i [\mathbf{e} \mathbf{e}'] + \right. \\
 &+ \frac{1}{\omega' |\mathbf{p}'|} [(m + 2\varepsilon')(\omega + \omega') + 2\omega'(m + \omega)] \mathbf{k}_1 [\mathbf{e} \mathbf{e}'] + \\
 &+ \left. \frac{|\mathbf{p}'|}{8m^3} \left\{ \frac{\omega}{\omega'} (m - \omega') \mathbf{e}' \mathbf{p}'_i \cdot [\mathbf{e} \mathbf{k}_1] \mathbf{p}'_i - (m + \omega) \mathbf{e} \mathbf{p}'_i \cdot [\mathbf{e}' \mathbf{k}_1] \mathbf{p}'_i \right\} \right\}. \quad (33)
 \end{aligned}$$

Выражения (32) и (33) отличаются друг от друга*, и, следовательно, векторная частица, описываемая уравнениями (3), (9) или в тензорном базисе системой (14), неэквивалентна даффин-кеммеровской.

$$\text{II. } r = +1, r' = 0.$$

Так как спиновое состояние частицы при данном переходе изменяется на единицу (причем $r > r'$), то оператор $K^{r' \rightarrow r}$ с точностью до постоянного коэффициента $b_0^{(+)**}$ совпадает с оператором K_+ (28). Остальные величины, входящие в (22), остаются такими же, как и в случае I.

Вычисляя матричный элемент, получим

$$M_{p \rightarrow p'}^{+1 \rightarrow 0} = M_R + iM_i = g\mathbf{n}_1 + i g\mathbf{n}_2, \quad (34)$$

где \mathbf{n}_1 и \mathbf{n}_2 — единичные векторы, входящие в (28),

$$\begin{aligned}
 g &= \frac{1}{8\sqrt{2}m^2} \left\{ (m + \varepsilon') \left[\left(\frac{2\omega + \omega'}{m} + \frac{\omega'}{\omega} - 4 \right) \mathbf{e}' \mathbf{p}'_i \cdot \mathbf{e} + \right. \right. \\
 &+ \left. \left. \left(\frac{\omega' - \omega}{m + \varepsilon'} - \frac{3\omega'}{m} - \frac{\omega}{\omega'} + 4 \right) \mathbf{e} \mathbf{p}'_i \cdot \mathbf{e}' \right] - \right. \\
 &- \frac{|\mathbf{p}'|}{m} \left[\left(m \frac{\omega' - \omega}{\omega} + \frac{\varepsilon' \omega (\omega + \omega')}{m^2} + 2\omega \right) \mathbf{e} \mathbf{e}' \cdot \mathbf{k}_1 + \right. \\
 &+ \left. \frac{\varepsilon' \omega}{\omega'} [\mathbf{e} \mathbf{k}_1] \mathbf{p}'_i \cdot [\mathbf{e}' \mathbf{p}'_i] \right] + \\
 &+ \left. \frac{\varepsilon' \omega}{m} \left(\frac{\omega}{\omega'} [\mathbf{e} \mathbf{k}_1] \mathbf{p}'_i \cdot [\mathbf{e}' \mathbf{k}_1] - [\mathbf{e}' \mathbf{k}_1] \mathbf{p}'_i \cdot [\mathbf{e} \mathbf{k}_1] \right) \right\}. \quad (35)
 \end{aligned}$$

*) На частных примерах нетрудно убедиться, что отличаются и квадраты модулей $|M|^2 = M_R^2 + M_i^2$ матричных элементов (32) и (33).

**) В случае, когда в выражении (27) $p=0$, коэффициент $b_r^{(\pm)}$ имеет вид (см. [14])

$$b_r^{(-)} = b_{r-1}^{(+)} = [(l+r)(l-r+1)]^{1/2},$$

где l — спин частицы.

Заметим, что квадрат модуля матричного элемента (34), (35) $|M|^2 = (\mathbf{g}\mathbf{n}_1)^2 + (\mathbf{g}\mathbf{n}_2)^2$ не зависит от векторов \mathbf{n}_1 и \mathbf{n}_2 (он равен квадрату проекции вектора \mathbf{g} на плоскость $(\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2)$, ортогональную к \mathbf{p}_1), как и должно быть из физических соображений.

$$\text{III. } r = +1, r' = -1.$$

Оператор $K^{r' \rightarrow r}$ в этом случае равен $\frac{1}{b_{-1}^{(+)} b_0^{(+)}} K_{+}^2$. Как и раньше, $|M|^2$ является инвариантом относительно вращений в плоскости $(\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2)$. Явный вид $M_{p \rightarrow p'}^{+1 \rightarrow -1}$ мы не приводим ввиду его громоздкости.

Рассмотренные выше переходы связаны с изменением спинового состояния частицы на 0, 1, 2, причем начальное значение проекции спина r равно +1. Все остальные случаи комптоновского рассеяния фотона на векторной частице сводятся к одному из этих трех с той лишь разницей, что другому значению r будет соответствовать другой вид минимального полинома β_r .

Литература

1. Федоров Ф. И., Плетюхов В. А. Весті АН БССР, серия фіз.-мат. навук, № 6, 1969.
2. Плетюхов В. А., Федоров Ф. И. Весті АН БССР, серия фіз.-мат. навук, № 2, 1970.
3. Гельфанд И. М. и др. Представления группы вращений и группы Лоренца. М., 1958.
4. Федоров Ф. И. ДАН СССР, 79, 787, 1951.
5. Федоров Ф. И. Уч. записки БГУ им. В. И. Ленина, вып. 12, серия физ.-мат. Минск, 1951.
6. Федоров Ф. И. ЖЭТФ, 35, 493, 1958.
7. Гинзбург В. Л. ДАН СССР, 31, 857, 1941.
8. Фрадкин Е. С. ЖЭТФ, 20, 1, 1950.
9. Fierz M., Pauli W. Proc. Roy. Soc. A 173, 211, 1939.
10. Богуш А. А., Федоров Ф. И. ДАН БССР, 12, 21, 1968.
11. Ахнезер А. И., Берестецкий В. Б. Квантовая электродинамика. Физматгиз, М., 1959.
12. Богуш А. А., Федоров Ф. И. Весті АН БССР, серия фіз.-техн. навук, № 2, 1962.
13. Федоров Ф. И., Богуш А. А. ДАН БССР, 6, 690, 1962.
14. Федоров Ф. И., Тхарев Е. Е. ЯФ, 7, 189, 1968.

Белорусский государственный университет
им. В. И. Ленина

Поступило в редакцию
4.11 1970

Е. Е. ТХАРЕВ

ОПИСАНИЕ ФАЗОВЫХ СДВИГОВ С ПОМОЩЬЮ ВЕКТОР-ПАРАМЕТРА

Состояние свободной частицы задается значением ее импульса и величиной проекции спина на выделенное направление. Нормированная волновая функция этого состояния определена с точностью до произвольного фазового множителя $e^{i\alpha}$, который является несущественным при использовании инвариантных билинейных форм, составленных из волновых функций одного и того же состояния. Однако при рассмотрении процессов взаимодействия, приводящих к изменению состояния частицы, приходится вычислять сдвиг фаз между начальным и конечным состояниями. Ниже этот вопрос рассматривается на основе комплексной векторной параметризации группы Лоренца.

Как известно, ковариантное описание спиновых свойств частицы может быть дано на основе рассмотрения представлений малой группы Лоренца. В пространстве параметров малой группы, связанной с импульсом частицы $p = (p, p_0)$, можно ввести три ортонормированных комплексных вектора, определяемых соотношением

$$q_i = c_i + i \frac{[c_i p]}{p_0} \quad (i = 1, 2, 3), \quad (1)$$

где c_i — три вещественных вектора, ограниченные условием

$$q_i q_k = \delta_{ik}. \quad (2)$$

Один из векторов (1) (например, q_3) определяет ось спиновых проекций (см. [1]), а векторы q_1 и q_2 могут быть использованы для построения операторов, меняющих величину проекции спина на заданное направление [2, 3]. Очевидно, любое преобразование малой группы задается вектор-параметром q' , являющимся линейной комбинацией векторов q_i (1).

Понятие фазы состояния частицы также связано с анализом представлений малой группы. Пусть имеется некоторое состояние свободной частицы $|p, q_3, s\rangle$, определяемое импульсом $p = (p, p_0)$ и величиной проекции спина s на ось q_3 . При заданном векторе q_3 остается произвол в выборе векторов q_1 и q_2 ; в дальнейшем состоянии $|p, q_3, s\rangle$ будем связывать с некоторым произвольно выбранным репером трех комплексных векторов q_i (1). Рассмотрим изменение состояния $|p, q_i, s\rangle$ при преобразованиях малой группы, определяемых вектор-параметром q' . В результате такого преобразования импульс частицы не изменится, а исходный репер q_i перейдет в некоторый другой q'_i . Закон преобразования реперных векторов имеет вид [1]

$$q'_i = \langle q', q_i, -q' \rangle = O(q') q_i, \quad (3)$$

где $O(q^l)$ — матрица вращения в трехмерном комплексном пространстве

$$O(q) = \frac{1}{1+q^2} (1 - q^2 + 2q \cdot q + 2q^x). \quad (4)$$

Таким образом, любое преобразование малой группы может рассматриваться как комплексное преобразование вращения в пространстве параметров этой группы. Отметим, что произвольный вектор-параметр малой группы может быть представлен композицией $q^l = \langle aq_3, bq_2, cq_3 \rangle$, где a, b, c — некоторые постоянные.

Понятие сдвига фаз естественным образом возникает при рассмотрении волновых функций состояний, зависящих от одного и того же импульса $p = (p, p_0)$ и имеющих одну и ту же проекцию спина s на одно и то же направление q_3 . Проследим, как будет изменяться состояние свободной частицы при преобразованиях малой группы в случае, когда $q^l = cq_3$. Очевидно, в результате такого преобразования импульс, величина проекции и направление проекции спина не изменятся; однако волновая функция, описывающая это состояние, приобретает при этом фазовый множитель, который находится из закона преобразования волновой функции

$$|p, q_3, s\rangle' = T(cq_3) |p, q_3, s\rangle. \quad (5)$$

Используя экспоненциальную форму представления $T = e^{2i\sigma_3 \arctg c}$ [5], где $\sigma_3 = -i(\hat{q}_{3(+)} + \hat{q}_{3(-)})$, и учитывая, что

$$\sigma_3 |p, q_3, s\rangle = s |p, q_3, s\rangle, \quad (6)$$

будем иметь

$$|p, q_3, s\rangle' = e^{2is \arctg c} |p, q_3, s\rangle. \quad (7)$$

Следовательно, состояние свободной частицы описывается волновой функцией, определенной с точностью до произвольного фазового множителя, который в конечном счете определяется параметром c , т. е. ориентацией реперных векторов q_1 и q_2 .

Любое состояние свободной частицы ($m \neq 0$) может быть получено из некоторого исходного состояния, заданного в системе покоя, путем применения соответствующего преобразования Лоренца. Исходное состояние $|p, s\rangle$, которому припишем фазу, равную нулю, будем связывать с произвольно выбранным начальным репером e_i трех действительных векторов; в качестве направления проектирования спина выберем вектор e_3 . Поскольку в общем случае преобразование Лоренца связано с изменением импульса частицы, то возникает необходимость определения сдвига фаз при переходе от системы покоя к движущейся системе. Применение преобразования Лоренца, соответствующего чистому движению вдоль произвольного направления $\left(q = -\frac{ip}{p_0 + m} \right)$, дает новое состояние без изменения фазы, так как такое преобразование не сопровождается поворотом пространственных осей,

$$T(q) |p, e_i, s\rangle = |p, q_i, s\rangle. \quad (8)$$

При этом начальный репер e_i , заданный в системе покоя, перейдет в репер

$$q_i^0(p) = O\left(-\frac{ip}{p_0 + m}\right) e_i = c_i^0 + i \frac{[c_i^0 p]}{p_0}, \quad (9)$$

где

$$c_i^0 = \frac{1}{m} \left(p_0 e_i - \frac{p_i p}{p_0 + m} \right). \quad (10)$$

Назовем репер $q_i^0(p)$, определяемый соотношениями (9) и (10), начальным репером соответствующего импульсного состояния; таким образом состояние частицы $|p, q_i^0, s\rangle$, отнесенное к реперу $q_i^0(p)$, имеет нулевую фазу по отношению к исходному состоянию в системе покоя. Очевидно, что любое состояние $|p, q_i, s\rangle$ может быть получено из начального состояния $|p, q_i^0, s\rangle$ путем применения преобразования малой группы, которое в общем случае приведет к изменению фазы.

Рассмотрим более подробно изменение фазы при преобразованиях малой группы. Если некоторое состояние $|p, q_i^0, s\rangle$ преобразованием малой группы, определяемым вектор-параметром вида $q^l = \langle aq_3^0, bq_2^0, cq_3^0 \rangle$, переводится в состояние $|p, q_i, s\rangle$, то будем определять сдвиг фаз между этими состояниями, как сдвиг фаз между состоянием $|p, q_i, s\rangle$ и состоянием, полученным из $|p, q_i^0, s\rangle$ преобразованием малой группы при $q^{l(0)} = \langle aq_3^0, bq_2^0 \rangle$, $|p, q_i, s\rangle^{(0)} = T(q^{l(0)})|p, q_i^0, s\rangle$. Заметим, что такой выбор преобразования в случае системы покоя соответствует преобразованиям вращения, переводящим репер e_i , заданный на полюсе сферы, в репер e'_i , для которого векторы e_1 и e_2 направлены по касательным к параллели и меридиану в соответствующей точке сферы [6]. Тогда преобразование, определяемое вектор-параметром $q^l = \langle aq_3^0, bq_2^0, cq_3^0 \rangle$, переводит начальное состояние $|p, q_i^0, s\rangle$ в состояние, которое сдвинуто по фазе по отношению к начальному состоянию

$$\begin{aligned} T(q^l)|p, q_i^0, s\rangle &= T(q^{l(0)})T(cq_3^0)|p, q_i^0, s\rangle = \\ &= e^{2i \arctg c} |p, q_i, s\rangle^{(0)}. \end{aligned} \quad (11)$$

Из закона преобразования (11) видно, что величина фазового множителя определяется постоянной c :

$$c = 2 \arctg c. \quad (12)$$

Определим репер $q_i(p)$, соответствующий нулевой фазе, если задан вектор $q_3(p)$, на который проектируется спин. Для этого достаточно определить вектор $q_2(p)$, поскольку $q_1 = [q_2, q_3]$. Из закона преобразования (3) реперных векторов следует выражение для $q_2(p)$:

$$q_2(p) = O(\langle aq_3^0, bq_2^0 \rangle) q_2^0(p) = O(aq_3^0) q_2^0(p). \quad (13)$$

С другой стороны, вектор-параметр v плоского поворота, переводящего q_3^0 в q_3 , может быть записан в виде

$$v = \frac{[q_3^0, q_3]}{1 + q_3^0 q_3} = v \sqrt{v^2} O(aq_3^0) q_2^0. \quad (14)$$

Из соотношений (13) и (14) непосредственно следует окончательное выражение для $q_2(p)$:

$$q_2(p) = \frac{v}{\sqrt{v^2}} = \frac{[q_3^0(p), q_3(p)]}{\sqrt{1 - (q_3^0(p) q_3(p))^2}}. \quad (15)$$

В частности, в том случае, когда спин проектируется на направление импульса (состояние спиральности) $q_3 = \frac{p}{|p|}$, получим

$$q_2(p) = \frac{p_0 [e_3 p] + i [e_3 p] p}{\sqrt{p^2 - p_3^2}}. \quad (16)$$

В связи с изложенным выше не представляет трудностей вычислить сдвиг фаз при произвольном преобразовании Лоренца. Задача состоит в следующем: пусть задано начальное состояние свободной частицы $|p, q_i, s\rangle$, которое под действием преобразования Лоренца переходит в некоторое другое $|p', q_i(p')s\rangle = T(q)|p, q_i(p)s\rangle$; требуется определить сдвиг фаз между начальным и конечным состояниями. Поскольку состояние свободной частицы определено с точностью до фазового множителя, исходному состоянию $|p, q_i, s\rangle$ припишем фазу, равную нулю, т. е. определим его в репере $q_i(p)$, заданном соотношением (15). В результате преобразования Лоренца этот репер перейдет в репер

$$q'_i(p') = O(q)q_i(p). \quad (17)$$

Направлению проекции спина $q'_3(p')$ можно привести в соответствие репер, по отношению к которому фаза состояния равна нулю; тогда, очевидно, фаза конечного состояния определится поворотом вектора $q_2(p')$ (15) к вектору $q'_2(p')$ (17):

$$q'_2(p') = O(cq'_3(p'))q_2(p'). \quad (18)$$

После простых преобразований из выражений (15) и (18) получим значение постоянной c :

$$c = \frac{q'_2(p')q'_3(p')}{\sqrt{1 - (q'_3(p')q'_3(p'))^2 - q'_1(p')q'_3(p')}}. \quad (19)$$

Выражением (19) окончательно определяется сдвиг фаз между начальным и конечным состояниями.

Литература

1. Федоров Ф. И. ТМФ, № 2, 342, 1970.
2. Федоров Ф. И., Тхарев Е. Е. ЯФ, 6, 189, 1968.
3. Тхарев Е. Е., Федоров Ф. И. ДАН БССР, № 3, 1970.
4. Федоров Ф. И. ДАН БССР, 3, 101, 1961.
5. Тхарев Е. Е., Федоров Ф. И. ЯФ, 5, 1112, 1967.
6. Гельфанд И. М., Минлос Р. А., Шапиро З. Я. Представления группы вращений и группы Лоренца, 1958.

Минский радиотехнический институт

Поступило в редакцию
29.1 1970

А. М. САМСОН

**КОЭФФИЦИЕНТ УСИЛЕНИЯ В ПРЕДГЕНЕРАЦИОННЫЙ ПЕРИОД
 И ПОРОГОВЫЕ УСЛОВИЯ ГЕНЕРАЦИИ КРАСИТЕЛЕЙ
 С КОНЕЧНЫМ ВРЕМЕНЕМ НАРАСТАНИЯ ИМПУЛЬСА НАКАЧКИ**

1. В [1—4] подробно рассмотрены кинетика формирования коэффициента усиления и пороговые условия генерации красителей для случая прямоугольной формы импульса накачки. Расчеты показали, что процесс образования инверсной заселенности длится очень малый промежуток времени. Время разгорания генерации, как правило, определяется наносекундами. Между тем реальные источники накачки, в особенности импульсные лампы, имеют весьма пологий передний фронт импульса излучения. Поэтому имеет смысл оценить влияние формы импульса накачки на кинетику предгенерационного режима и пороговые условия генерации. В частности, представляет интерес выяснить роль крутизны переднего фронта импульса.

В [5] поставленная выше задача решена на электронной вычислительной машине для нескольких конкретных случаев в предположении отсутствия вынужденных накачкой переходов с лабильного уровня и ухода частиц с метастабильного уровня. В [6] исследованы коэффициент усиления и пороговые условия генерации при допущении, что отношение населенностей лабильного и основного уровней пропорционально мощности накачки, что не всегда справедливо. В данной работе эта же задача в рамках принятой модели красителя решена строго в аналитическом виде для случая накачки, линейно возрастающей со временем. Учитывая, что эта же задача решается в аналитическом виде и для постоянной накачки [4], можно сказать, что тем самым решена задача для импульса произвольного вида, поскольку любую форму импульса можно моделировать набором ломаных линий. Аналитические расчеты проиллюстрированы решением на ЭВМ для случая линейной и гауссовой форм импульса накачки.

2. Система уравнений для определения коэффициента усиления и населенности метастабильного уровня $k(t)$ для случая линейновозрастающей накачки имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{dk}{dt} = & -k \left[\gamma_n \beta t + p_{31} + p_{32} - \frac{p_{32}}{\gamma_r} \right] - \\ & - k_0 y_2 \left[(\gamma_r - \gamma_n) \beta t - p_{31} - p_{32} + p_{21} + \frac{p_{32}}{\gamma_r} \right] + \\ & + k_0 \left[(\gamma_r - \gamma_n) \beta t - p_{31} - p_{32} + \frac{p_{32}}{\gamma_r} \right], \end{aligned} \quad (1)$$

$$\frac{dy_2}{dt} = -\frac{p_{32}}{\gamma_r} \left(\frac{k}{k_0} + 1 - y_2 \right) + p_{21} y_2. \quad (2)$$

Уравнения (1), (2) написаны для модели молекулы красителя с одним основным (1), одним синглетным лабильным (3) и двумя триплетными уровнями (2) и (4), один из которых метастабилен (2). Населенность четвертого уровня предполагается очень малой ($y_4 \sim 0$). Здесь обозначено: p_{ij} — вероятности переходов с уровня i на уровень j , k_0 — коэффициент поглощения невозбужденного красителя в частоте генерации ν_r . Скорость накачки характеризуется членом

$$\int B_{13}(\nu_H) u(\nu_H, t) d\nu_H = \beta t. \quad (3)$$

Значения γ_H и γ_r определяются через спектральные коэффициенты Эйнштейна $B_{13}(\nu)$ и $B_{31}(\nu)$:

$$\gamma_r = 1 + \frac{B_{31}(\nu_r)}{B_{13}(\nu_r)}, \quad \gamma_H = 1 + \frac{\int B_{31}(\nu_H) u(\nu_H) d\nu_H}{\int B_{13}(\nu_H) u(\nu_H) d\nu_H}. \quad (4)$$

Уравнения (1), (2) следует решать при начальных условиях

$$k(0) = -k_0, \quad y_2(0) = 0. \quad (5)$$

В дальнейшем будем рассматривать несколько более простой случай, сильно упрощающий конечное решение. Допустим, что $p_{21} = 0$. Чаще всего это дает правильные результаты. При $p_{21} \neq 0$ решение (1), (2) может быть получено в квадратурах.

3. Решение (1), (2) при $p_{21} = 0$ может быть получено следующим образом. Введем новые функции

$$\psi = k_0 + k - k_0 y_2, \quad v = \gamma_r (k_0 - k_0 y_2). \quad (6)$$

Тогда система (1), (2) переписется в виде

$$\frac{d\psi}{dt} = -\psi(\gamma_H \beta t + p_{31} + p_{32}) + v \beta t, \quad \frac{dv}{dt} = -p_{32} \psi. \quad (7)$$

Система уравнений (7) может быть сведена к дифференциальному уравнению второго порядка

$$v'' + v'(\gamma_H \beta t + p_{31} + p_{32}) + v p_{32} \beta t = 0. \quad (8)$$

Начальные условия (5) принимают вид

$$v(0) = \gamma_r k_0, \quad v'(0) = 0. \quad (9)$$

В уравнении (8) сделаем еще одну замену переменных:

$$v(t) = e^{\frac{-p_{32}}{\gamma_H} t} y(x), \quad (10)$$

где

$$x = \sqrt{\gamma_H \beta} \left(t + \frac{p_{32} + p_{31}}{\gamma_H \beta} - \frac{2p_{32}}{\gamma_H^2 \beta} \right) = \sqrt{\gamma_H \beta} t + x_0. \quad (11)$$

В результате (8) сводится к уравнению

$$y'' + y'x - by = 0, \quad b = \frac{p_{32}}{\gamma_H^2 \beta} \left(p_{31} + p_{32} - \frac{p_{32}}{\gamma_r} \right) \quad (12)$$

с начальными условиями

$$y(x_0) = \gamma_r k_0, \quad y'(x_0) = \gamma_r k_0 \frac{p_{32}}{\gamma_H \sqrt{\gamma_H \beta}}. \quad (13)$$

Уравнению (12) удовлетворяет решение [7]

$$y(x) = x^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{x^2}{4}} \left[C_1 W_{\frac{b}{2} + \frac{1}{4}, \frac{1}{4}} \left(-\frac{x^2}{4} \right) + C_2 W_{-\frac{b}{4} - \frac{1}{4}, \frac{1}{4}} \left(\frac{x^2}{4} \right) \right]. \quad (14)$$

Здесь

$$W_{k,m}(z) = \frac{e^{-\frac{z}{2}} z^k}{\Gamma(1-\mu)} \int_0^\infty t^{-\mu} \left(1 + \frac{t}{z} \right)^{2m+\mu-1} e^{-dt} dt, \quad \mu = k + \frac{1}{2} - m, \quad (15)$$

— функция Уиттекера, имеющая асимптотическое разложение

$$W_{k,m}(z) = e^{-\frac{z}{2}} z^k \left\{ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n! z^n} \prod_{v=1}^n \left[m^2 - \left(k + \frac{1}{2} - v \right)^2 \right] \right\}. \quad (16)$$

Значения C_1 и C_2 определяются из начальных условий (13).

Если $k - 1/2 \pm m$ — натуральное число, то ряд (16) обрывается и разложение является точным. При необходимости функция $W_{k,m}(z)$ может быть выражена через гипергеометрическую функцию.

Значение $k - 1/2 \pm m$ является натуральным числом, когда b натуральное. Тогда, пользуясь рядом (16), нетрудно получить решение (12) в виде

$$y = C_1' e^{-\frac{x^2}{2}} \frac{d^n}{dx^n} e^{-\frac{x^2}{2}} + C_2' e^{-\frac{x^2}{2}} \frac{d^n}{dx^n} e^{\frac{x^2}{2}} \Phi(x), \quad b = n = 1, 2, 3, \dots, \quad (17)$$

где

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{1}{2}\xi^2} d\xi. \quad (18)$$

Проделив процедуру перехода от $y(x)$ обратно к $k(t)$ и $y_2(t)$, получим

$$y_2(t) = 1 - \frac{e^{-\frac{p_{32} t}{\gamma_H}}}{\gamma_H} y[x(t)], \quad (19)$$

$$k(t) = \left\{ \frac{\gamma_H - \gamma_H}{\gamma_H \gamma_H} y[x(t)] - \frac{\sqrt{\gamma_H \beta}}{p_{32}} y'_x[x(t)] \right\} e^{-\frac{p_{32} t}{\gamma_H}}, \quad (20)$$

где

$$y'_x(x, b) = bx^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{x^2}{4}} \left[C_1 W_{\frac{b-1}{2} + \frac{1}{4}, \frac{1}{4}} \left(-\frac{x^2}{2} \right) + C_2 W_{-\frac{b-1}{2} - \frac{1}{4}, \frac{1}{4}} \left(\frac{x^2}{2} \right) \right]. \quad (21)$$

Приведенные формулы позволяют рассчитывать значения y_2 и k при любых β , тем более, что функции Уиттекера или родственные им гипергеометрические функции табулированы [8].

Иногда вместо сложных формул (19), (20) можно получить более простые выражения. Например, при малых β значения b и x_0 велики. Используя асимптотическое разложение (16) для функции Уиттекера, получим

$$y(x) \approx C_1' \left[x^b + x^{b-2} \frac{b(b-1)}{2} + \dots + \frac{b(b-1)(b-2)\dots(b-n)(b-n-1)(b-n-2)}{n! 2^n} + \dots \right]. \quad (22)$$

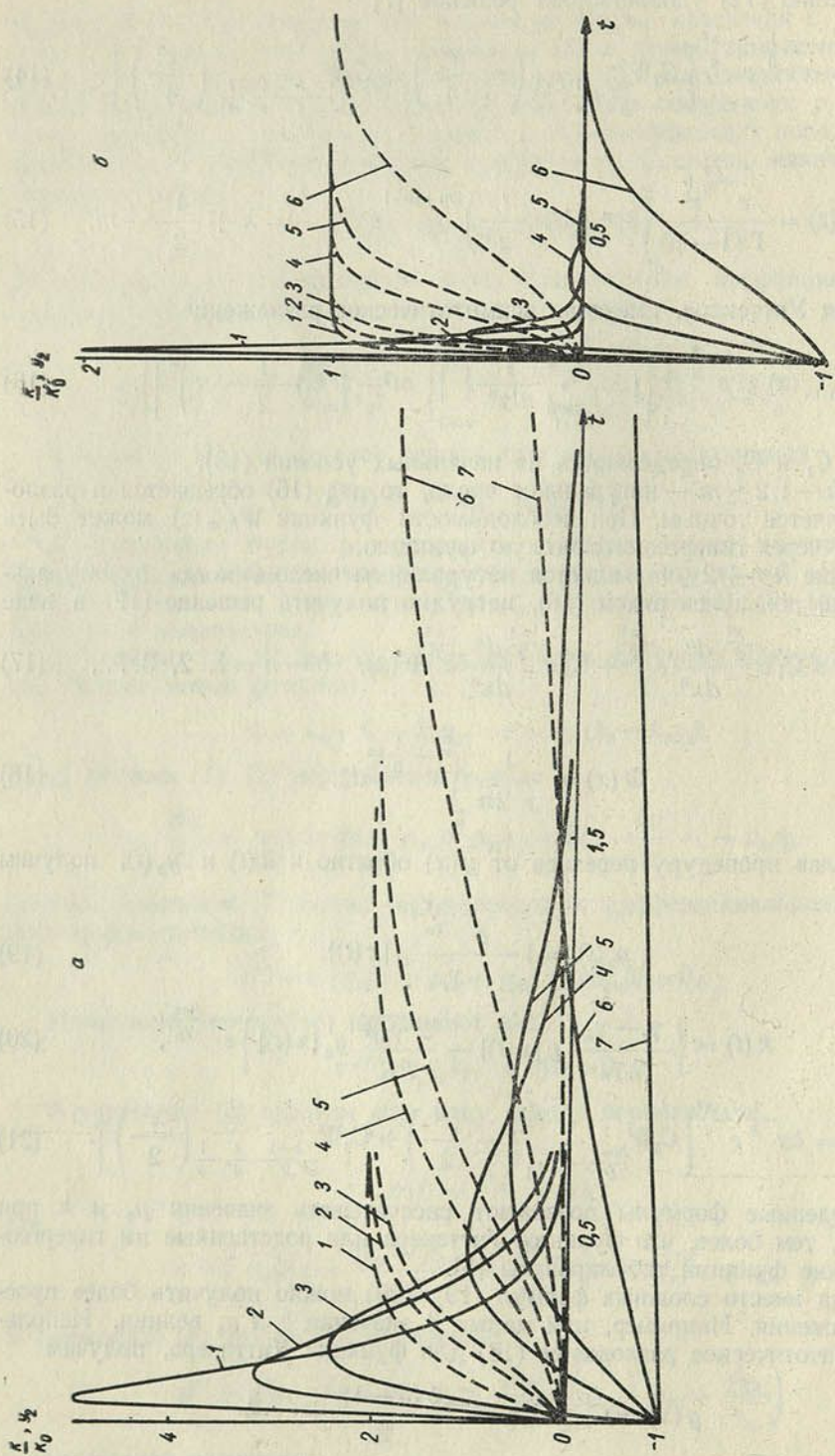


Рис. 1. Зависимость коэффициента усиления k (сплошные линии) и населенности метастабильного уровня y_2 (пунктир) от времени t , максек при $p_{22} = 10^7$ (а) и 10^8 (б), $p_{21} = 0$, $p_{31} = 10^8$ сек $^{-1}$, $\gamma_r = 11$, $\gamma_n = 1, 1$. Значения β равны:
 1— $5 \cdot 10^{13}$; 2— 10^{13} ; 3— $5 \cdot 10^{14}$; 4— 10^{14} ; 5— $5 \cdot 10^{13}$; 6— 10^{13} ; 7— 10^{13} сек $^{-2}$

Если $\beta \rightarrow 0$ (накачка возрастает до бесконечной величины в чрезвычайно короткий промежуток времени), то на третий уровень практически мгновенно переводится предельное число частиц. После этого n_3 и, следовательно, k могут только уменьшаться. Значения k и y_2 в этом случае:

$$k(t) = \frac{\gamma_r - \gamma_n}{\gamma_n} k_0 e^{-\frac{\rho_{32}}{\gamma_n} t}, \quad y_2(t) = 1 - e^{-\frac{\rho_{32}}{\gamma_n} t}. \quad (23)$$

Таблица

Значения k_{\max}/k_0 , $y_2(t_{\max})$, t_{\max} и $dk(t=t_{\text{разг}})/dt$ при $\gamma_n=1,1$, $\gamma_r=11$, $\rho_{31}=10^8 \text{ сек}^{-1}$ для разных β , ρ_{32} и ρ_{21}

$\beta \cdot 10^{-13}$, сек $^{-2}$	$\frac{k_{\max}}{k_0}$	$y_2(t_{\max})$	t_{\max} миксек	$\frac{dk}{dt} \cdot 10^{-6}$, см $^{-1} \cdot \text{сек}^{-1}$	$\frac{k_{\max}}{k_0}$	$y_2(t_{\max})$	t_{\max} миксек
При $\rho_{32}=10^7$, $\rho_{21}=0$				При $\rho_{32}=10^7$, $\rho_{21}=10^5$			
1	0,14	0,73	1,79	0,003	0,16	0,73	1,90
5	0,61	0,53	0,67	0,030	0,62	0,53	0,69
10	0,98	0,46	0,45	0,065	0,99	0,46	0,45
50	2,41	0,34	0,17	0,140	2,42	0,34	0,17
100	3,16	0,29	0,12	0,75	3,16	0,29	0,12
500	5,05	0,20	0,054	2,40	5,05	0,20	0,054
При $\rho_{32}=10^8$, $\rho_{21}=0$				При $\rho_{32}=10^8$, $\rho_{21}=10^5$			
5	0,010	0,95	0,54	—	0,011	0,95	0,55
10	0,051	0,85	0,31	—	0,053	0,85	0,31
50	0,46	0,58	0,092	0,18	0,46	0,58	0,092
100	0,79	0,52	0,062	0,42	0,79	0,51	0,061
500	2,02	0,40	0,027	1,90	2,02	0,40	0,027

4. Расчет зависимости $k(t)$ и $y_2(t)$ по приведенным выше формулам прост, если b равно целому числу. В общем случае расчет сравнительно громоздок. Поскольку нас интересовало также поведение $k(t)$ и $y_2(t)$ и при $\rho_{21} \neq 0$, то было выполнено непосредственное решение (1), (2) на электронной вычислительной машине. Это дало возможность проверить также справедливость формул, приведенных в предыдущем разделе.

На рис. 1 приведены графики зависимостей $k(t)$ и $y_2(t)$ при двух значениях ρ_{32} . Из рисунка видно, что, как и в случае прямоугольной накачки [4], кривые $k(t)$ имеют максимум, а $y_2(t)$ стремится к своему предельному значению плавно. Предельные значения $k(t)$ и $y(t)$ соответственно равны

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{k(t)}{k_0} = \frac{\gamma_r - \gamma_n}{\gamma_n + \rho_{32}/\rho_{21}}, \quad (24)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y_2(t) = \frac{1}{1 + \gamma_n \rho_{21}/\rho_{32}}. \quad (25)$$

Если $\rho_{21} \rightarrow 0$, то предельное значение коэффициента усиления равно нулю, а населенность метастабильного уровня — единице.

Во всех случаях с уменьшением крутизны фронта накачки (уменьшением β) максимум коэффициента усиления падает. Сравнение расчетов, соответствующих значениям $\rho_{21}=0$ и $\rho_{21}=10^5 \text{ сек}^{-1}$, показывает, что различия в кривых не наблюдается (поэтому кривые при $\rho_{21}=10^5 \text{ сек}^{-1}$ не приведены).

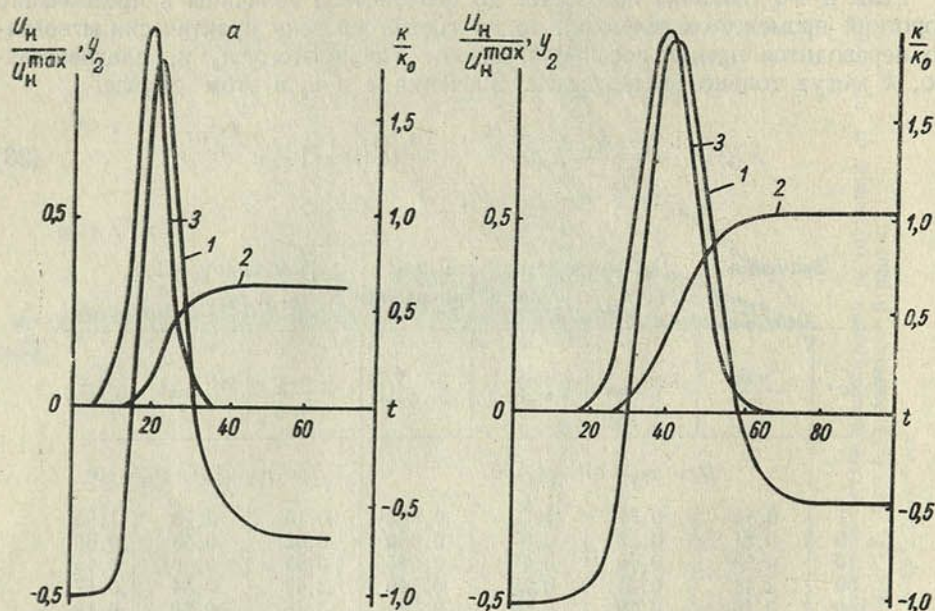


Рис. 2. Зависимость коэффициента усиления k (1), населенности y_2 (2) для гауссовой формы импульса накачки $u_N = u_N^{\max} \exp[-\alpha(t-t_{\max})^2]$ (3) от времени t , нсек при $p_{31} = p_{32} = 10^8$, $p_{21} = 10^5 \text{ сек}^{-1}$, $\gamma_N = 1,1$, $\gamma_T = 11$, $u_N^{\max} = 10^8 \text{ сек}^{-1}$:
 $a - t_{\max} = 20 \text{ нсек}$, $\alpha = 4 \cdot 10^{16} \text{ сек}^{-2}$; $b - 40 \text{ нсек}$, 10^{16} сек^{-2}

Это значит, что при таких вероятностях перехода можно рассчитывать $k(t)$ и $y_2(t)$ по формулам предыдущего раздела, при выводе которых сразу же положено $p_{21} = 0$.

Сравнение рис. 1, а и б показывает, что увеличение вероятности p_{32} на порядок приводит к снижению максимума $k(t)$. Снижение максимумов сравнительно невелико для крутых фронтов накачки и весьма значительно для пологих фронтов. Это объясняется тем, что при больших p_{32} значительная часть частиц уходит на метастабильный уровень. Время возникновения максимума коэффициента усиления t_{\max} по мере роста β и p_{32} уменьшается. Населенность $y_2(t_{\max})$ с ростом β уменьшается, с ростом p_{32} увеличивается.

Указанные выше закономерности в поведении $k(t)$ и $y_2(t)$ следуют также и из таблицы.

Таким образом, как и в случае прямоугольной накачки, коэффициент усиления имеет ярко выраженный максимум. Вид кривой $k(t)$ при других формах накачки аналогичен. На рис. 2 представлены графики зависимости $k(t)$ и $y_2(t)$ для гауссовой формы импульса накачки (кривая 3).

Из рис. 2 видно, что величина коэффициента усиления достигает максимума в момент, когда $u_N(t)$ начинает падать, затем $k(t)$ постепенно уменьшается, несмотря на наличие еще интенсивной накачки. Число частиц на метастабильном уровне насыщается и после прекращения действия импульса накачки остается практически постоянным.

5. При линейном возрастании мощности накачки пороговые условия неудобно характеризовать мощностью накачки. Более удобными характеристиками являются крутизна фронта накачки и начальная энергия накачки, определяемая количеством энергии, необходимой для возбуждения системы до уровня, когда максимальный коэффициент усиления сравнивается с пол-

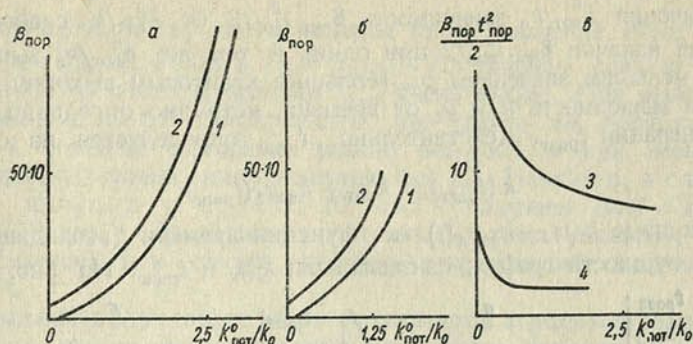


Рис. 3. Зависимость $\beta_{\text{пор}} \text{сек}^{-2}$ (а и б) и $\beta_{\text{пор}}^2 t_{\text{пор}}^2 / 2$ (в) от $k_{\text{пот}}^0 / k_0$ при $p_{31} = 10^8$, $p_{21} = 10^5 \text{сек}^{-1}$, $\gamma_{\Gamma} = 11$, $\gamma_{\text{H}} = 1, 1$:
 а — $p_{32} = 10^7 \text{сек}^{-1}$; б — 10^8 ; 1 — $k_{20}/k_0 = 0$; 2 — 1; в — $p_{32} = 10^7$ (3) и 10^8 (4)

ным коэффициентом потерь $k_{\text{пот}}(t) = k_{\text{пот}}^0 + k_{20}y_2(t)$, где $k_{\text{пот}}^0$ — коэффициент потерь без учета поглощения с метастабильного уровня, k_{20} — коэффициент поглощения, соответствующий переходу $2 \rightarrow 4$ при $y_2 \equiv 1$.

При малых β генерация возможна только в случае, когда вероятность ухода частиц с метастабильного уровня p_{21} не равна нулю. Тогда из (24) и (25) следует

$$\frac{\gamma_{\Gamma} - \gamma_{\text{H}}}{\gamma_{\text{H}} + p_{32}/p_{21}} \geq \frac{k_{\text{пот}}^0}{k_0} + \frac{k_{20}p_{32}/p_{21}k_0}{\gamma_{\text{H}} + p_{32}/p_{21}} \quad (26)$$

Соотношение (26) является в сущности условием получения стационарной генерации при бесконечно большой накачке. При малых p_{21}/p_{32} условию (26) очень трудно удовлетворить.

При не слишком медленно возрастающей накачке кривые $k(t)$ имеют максимум. Пороговое условие, очевидно, будет иметь вид

$$[k(t) - k_{\text{пот}}(t)]_{\text{max}} \geq 0. \quad (27)$$

Если коэффициент потерь $k_{20}y_2(t)$, обусловленный поглощением в полосе, соответствующей триплет-триплетному поглощению, не слишком быстро изменяется в области максимума коэффициента усиления (т. е. если $k_{20}dy_2/dt \sim 0$), то соотношение (27) можно переписать в виде

$$k_{\text{max}} \geq k_{\text{пот}}^0 + k_{20}y_2(t_{\text{max}}). \quad (28)$$

Решая равенство (28) совместно с условием максимума коэффициента усиления, можно определить значение $\beta_{\text{пор}}$ и время $t_{\text{пор}}$, а следовательно, и величину $W_{\text{гор}} \sim \beta_{\text{пор}} t_{\text{пор}}^2 / 2$.

На рис. 3 представлены зависимости $\beta_{\text{пор}}$ от $k_{\text{пот}}^0/k_0$ при двух значениях $k_{20}/k_0 = B_{24}(\nu_{\Gamma})/B_{13}(\nu_{\Gamma})$. Из рисунка видно, что с увеличением коэффициента потерь или уменьшением концентрации красителя пороговое значение крутизны фронта накачки $\beta_{\text{пор}}$ возрастает. Если существует поглощение с метастабильного уровня ($k_{20} \neq 0$), то кривая $\beta_{\text{пор}}(k_{\text{пот}}^0/k_0)$ проходит выше. При малых $k_{\text{пот}}^0/k_0$ значение $\beta_{\text{пор}}$ возрастает при увеличении k_{20}/k_0 от 0 до 1 весьма существенно, при больших $k_{\text{пот}}^0/k_0$ — относительно слабо.

Сравнение рис. 3, а и б показывает, что увеличение вероятности p_{32} (уменьшение квантового выхода) приводит при одних и тех же $k_{\text{пот}}^0/k_0$ к значительному повышению $\beta_{\text{пор}}$. Из рис. 3, в видно, что при малых $k_{\text{пот}}^0/k_0$ значение $\beta_{\text{пор}}^2 t_{\text{пор}}^2 / 2$ уменьшается с ростом $k_{\text{пот}}^0/k_0$ весьма существенно, но по

мере увеличения $k_{\text{пот}}^0/k_0$ зависимость $\beta_{\text{пор}} t_{\text{пор}}^2/2$ от $k_{\text{пот}}^0/k_0$ слабеет. Пороговая энергия накачки $\beta_{\text{пор}} t_{\text{пор}}^2/2$ при одних и тех же $k_{\text{пот}}^0/k_0$ выше для красителей с меньшим значением ρ_{32} (большим квантовым выходом).

6. Зная зависимость k и y_2 от времени, нетрудно определить время разгорания генерации $t_{\text{разг}}$. Действительно, $t_{\text{разг}}$ определяется из соотношения

$$k(t_{\text{разг}}) = k_{\text{пот}}^0 + k_{20} y_2(t_{\text{разг}}). \quad (29)$$

Построив кривые $k(t) - k_{20} y_2(t)$ как функции времени (восходящую ветвь), получим в сущности график, связывающий $k_{\text{пот}}^0$ и $t_{\text{разг}}$. На рис. 4 постро-

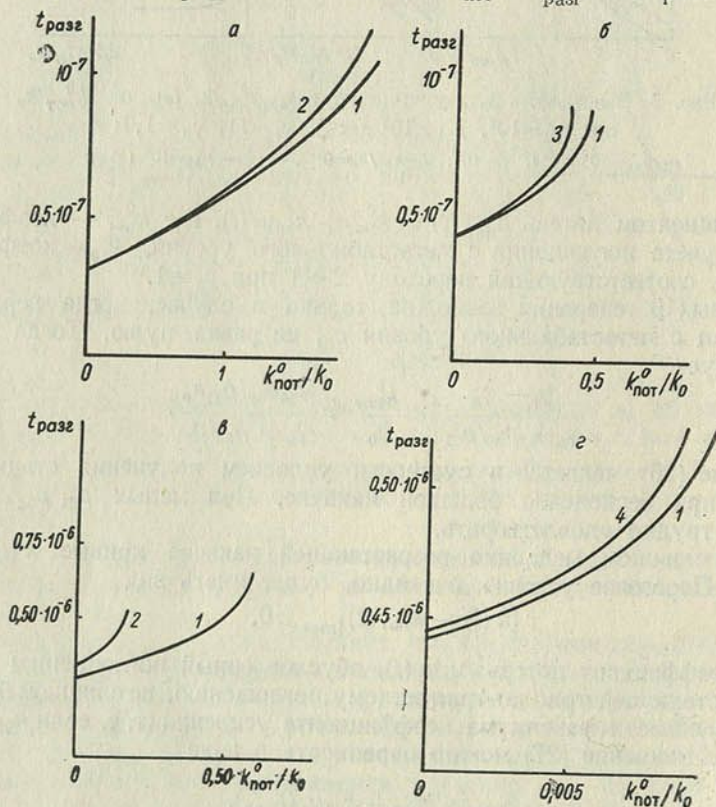


Рис. 4. Зависимость $t_{\text{разг}}$, сек от $k_{\text{пот}}^0/k_0$ при $\rho_{21}=0$, $\rho_{31} = 10^8 \text{ сек}^{-1}$, $\gamma_{\Gamma}=11$, $\gamma_{\text{H}}=1,1$:

$a-\beta=5 \cdot 10^{14} \text{ сек}^{-2}$ и $\rho_{32}=10^7 \text{ сек}^{-1}$; $б-5 \cdot 10^{14} \text{ сек}^{-2}$ и 10^8 сек^{-1} ; $в-5 \cdot 10^{13}$ и 10^7 ; $г-5 \cdot 10^{13}$ и 10^8 ; 1— $k_{20}/k_0=0$; 2—0,1; 4—0,001

ено несколько таких графиков при $\rho_{21}=0$ и двух значениях ρ_{32} . Из рисунка видно, что, как и обычно, существует весьма существенная зависимость $t_{\text{разг}}$ от $k_{\text{пот}}^0/k_0$. При увеличении $k_{\text{пот}}^0/k_0$ значение $t_{\text{разг}}$ растет. То же самое происходит и при уменьшении крутизны фронта накачки.

Наличие поглощения с метастабильного уровня приводит к возрастанию $t_{\text{разг}}$. В тех случаях, когда $\rho_{32} = \rho_{31}$ (рис. 5, б, г), даже небольшое поглощение $k_{20} y_2(t)$ приводит к резкому увеличению $t_{\text{разг}}$.

При расчетах кинетики генерации в первые моменты ее возникновения важно знать не только $t_{\text{разг}}$, но и наклон кривой $k(t)$. Как показано в [9], знание dk/dt позволяет оценить величину «затравочной» плотности излучения, возникающего за счет люминесценции, и тем самым максимальную

плотность излучения. В таблице приведены также значения dk/dt для моментов $t_{\text{разг}}$ при $k_{\text{пот}}^0/k_0=0,08$ и $k_{20}=p_{21}=0$. Из таблицы следует, что наклон кривых $k(t)$ в моменты времени $t_{\text{разг}}$ очень высок. При этом следует обратить внимание на то обстоятельство, что такого же порядка наклон кривых $k(t)$ в моменты разгорания можно получить и при возбуждении красителя прямоугольным импульсом накачки [4]. Например, в случае прямоугольного импульса с $u_n=0,35 \cdot 10^8 \text{ сек}^{-1}$ получаем $dk(t=t_{\text{разг}})/dt = 2,35 \cdot 10^8 \text{ см}^{-1} \cdot \text{сек}^{-1}$. Такой же наклон коэффициента усиления получаем (согласно таблице) и в случае линейно возрастающей накачки с $\beta = 5 \cdot 10^{15} \text{ сек}^{-2}$.

Сопоставление полученных здесь результатов с результатами работы [4] показывает, что свойства предгенерационного периода и пороговые условия генерации при возбуждении красителя реальными импульсами накачки качественно имеют такой же характер, как и при возбуждении его прямоугольными импульсами. Сильное различие может наблюдаться, если реальные импульсы имеют очень пологий передний фронт. Следовательно, при полуколичественных оценках можно использовать иногда более простые формулы работ [1—4].

В заключение автор приносит глубокую благодарность Б. И. Степанову за ценные советы.

Литература

1. Степанов Б. И., Рубинов А. Н., Мостовников В. А. ЖПС, 6, 700, 1967.
2. Степанов Б. И., Рубинов А. Н. ЖПС, 7, 505, 1967; УФН, 95, 45, 1968.
3. Степанов Б. И. ЖПС, 9, 386, 1968.
4. Самсон А. М. Методы расчета оптических квантовых генераторов на органических красителях, ч. II, Нестационарный режим. Препринт Ин-та физики АН БССР, 1970.
5. Schmidt W., Schäfer F. Naturforsch. Z., 22a, 1563, 1967.
6. Рубинов А. Н. ЖПС, 11, 436, 1969.
7. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М., 1965.
8. Слейтер Л. Дж. Вырожденные гипергеометрические функции. М., 1966.
9. Методы расчета оптических квантовых генераторов, 11. Минск, 1969.

Институт физики АН БССР

Поступило в редакцию 21.I 1970

М. М. АЛЯХНОВІЧ

**АБ ЗАЛЕЖНАСЦІ УДЗЕЛЬНАЙ ІНТЭНСІЎНАСЦІ АДБІЦЦЯ
 АД ВУГЛА РАСХАДЗІМАСЦІ ПАДАЮЧАГА ПУЧКА
 ДЛЯ ФАКУСІРУЮЧЫХ РЭНТГЕНАЎСКІХ МАНАХРАМАТАРАЎ**

Як вядома [1], выкарыстанне факусіруючых манахраматараў прыводзіць да значнага выйгрышу ў інтэнсіўнасці ў параўнанні з плоскім манахраматарам. Інтэнсіўнасць манахраматычнага пучка, яго геаметрыя і спектральны састаў залежаць ад многіх фактараў, якія характарызуюць уласцівасці крышталю-манахраматара, яго форму, а таксама вуглавы размер крыніцы выпраменьвання. Велічыня магчымага выйгрышу ў інтэнсіўнасці манахраматычнага пучка пры выкарыстанні факусіруючых манахраматараў можа быць вызначана, калі вядома залежнасць удзельнай інтэнсіўнасці адбіцця $i(\psi)$ (інтэнсіўнасць адбіцця адзінкай паверхні крышталю-манахраматара) ад вугла расхадзімасці падаючага пучка. Вызначым $i(\psi)$ для выпадку факусіруючых манахраматараў па Іагану [2] і па Іагансону [3], калі крыніца рэнтгенаўскага выпраменьвання мае некаторую працягласць. Правядзём супастаўленне атрыманых рэзультатаў з данымі для плоскага манахраматара і ацэнім каэфіцыент магчымага павелічэння інтэнсіўнасці манахраматычнага пучка ад факусіруючых манахраматараў у параўнанні з плоскім.

Схемы факусіроўкі па Іагану і Іагансону прадстаўлены на рыс. 1 і 2 адпаведна.

Для прастаты расхадзімасць падаючага пучка будзем характарызаваць, згодна з рыс. 1 і 2, вуглом ψ , які неістотна адрозніваецца ад сапраўднага вугла расхадзімасці ϑ , ψ — вуглавая апертура крышталю-манахраматара.

Будзем лічыць, што размеркаванне інтэнсіўнасці крыніцы рэнтгенаўскага выпраменьвання характарызуецца функцыяй $G(\alpha)$, а адбівальная здольнасць крышталю-манахраматара — $R(\vartheta, \alpha, \lambda)$. Паколькі нас цікавіць толькі характарыстычнае выпраменьванне λ_0 , то інтэнсіўнасць адбіцця адзінкай паверхні манахраматара пры ўстаноўцы яго цэнтральнай часткі пад вуглом Вульфа—Брэга ($\vartheta = \vartheta_0$) будзе прапарцыянальная выразу [4, 5]

$$i(\psi) = \int_{-\infty}^{\infty} G(\alpha) R[\alpha + \Delta\vartheta(\psi)] d\alpha, \quad (1)$$

дзе $\Delta\vartheta(\psi) = \vartheta - \vartheta_0$ — адхіленне вугла слізгацення рэнтгенаўскага праменя адносна адбіваючай плоскасці ад вугла Вульфа—Брэга ў залежнасці ад становішча адбіваючага пункта на паверхні манахраматара.

Дапусцім, што функцыі $G(\alpha)$ і $R(\alpha, \vartheta)$ маюць гаусаўскі выгляд $G(\alpha) = G_0 \exp[-\pi\alpha^2/\omega_g^2]$ пры агульнай магутнасці выпраменьвання $P = \int G(\alpha) d\alpha = G_0\omega_g$. Велічыня $\omega_g = d_0/l_1$ — эфектыўная вуглавая шырыня

крыніцы (d_0 — яе лінейная шырыня, l_1 — адлегласць ад крыніцы да крышталю). Функцыя

$$R(\alpha, \vartheta) = R_0 \exp \left[- \frac{\pi (\alpha + \Delta\vartheta(\psi))^2}{\omega_r^2} \right].$$

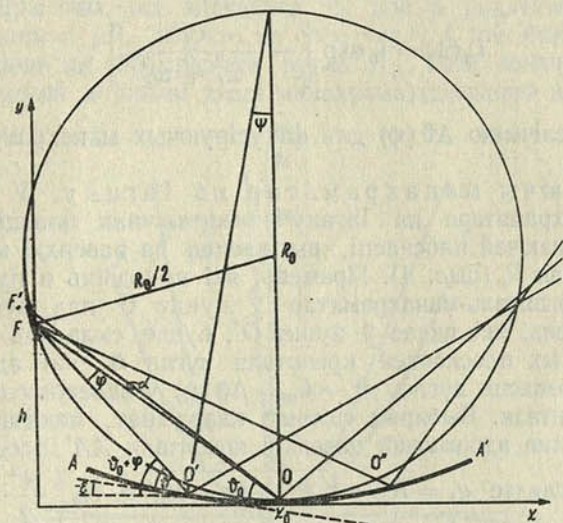


Рис. 1. Схема факусіроўкі крышталю-манахраматарам па Іагану

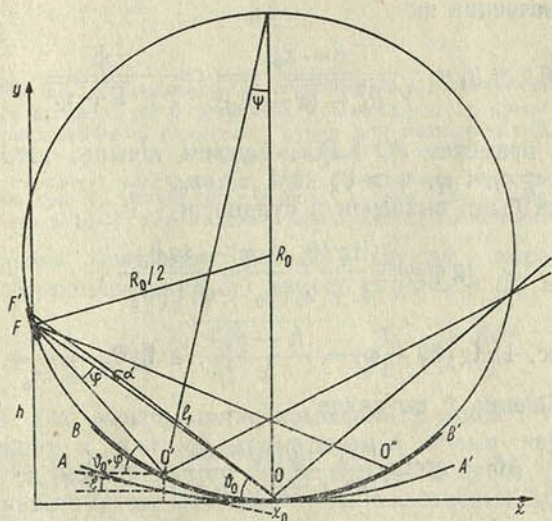


Рис. 2. Схема факусіроўкі крышталю-манахраматарам па Іагансону

Інтэгральнае адбіццё $\rho = R_0 \omega_r$, дзе ω_r — інтэгральная шырыня крывой адбіцця. Падстаўляючы значэнне G і R у (1) і праводзячы інтэграванне, атрымаем

$$i(\psi) = i_0 \exp \left[- \frac{\pi (\Delta\vartheta(\psi))}{\omega_r^2 + \omega_g^2} \right]. \quad (2)$$

Велічыня $\Delta\vartheta(\psi)$ залежыць ад геаметрыі манахраматара. У выпадку, напрыклад, плоскага манахраматара

$$\Delta\vartheta(\psi) = \psi \quad (3)$$

і ўдзельная інтэнсіўнасць адбіцця ў гэтым выпадку будзе вызначацца выразам

$$i_{\text{п}}(\psi) = i_0 \exp \left[-\frac{\pi\psi^2}{\omega_r^2 + \omega_g^2} \right]. \quad (4)$$

Вызначым велічыню $\Delta\vartheta(\psi)$ для факусіруючых манахраматараў па Іагану і Іагансону.

Факусіруючы манахраматар па Іагану. У выпадку факусіруючага манахраматара па Іагану крышталічная пласцінка, выразаная паралельна адбіваючай плоскасці, выгінаецца па паверхні кругавога цыліндра AA' радыусам R_0 (рыс. 1). Прамень, які выходзіць з пункта F крыніцы, падае на крышталі-манахраматар у пункт O пад вуглом Вульфа—Брэга ϑ_0 . Прамень, які падае ў пункт O' , будзе складаць з датычнай да паверхні выгнутых плоскасцей крышталю вугал ϑ , які адрозніваецца ад ϑ_0 . Знайдзем рознасць вуглоў $\vartheta - \vartheta_0 = \Delta\vartheta(\psi)$ у залежнасці ад каардынаты пункта крышталю. Выбарэм сістэму каардынат, паказаную на рыс. 1. Ураўненне сячэння адбіваючай паверхні крышталю AA' плоскасцю чарцяжа запішацца ў выглядзе $y_1 = R_0 - \sqrt{R_0^2 - (x - x_0)^2} \simeq R_0 \left(\frac{\psi^2}{2} + \frac{\psi^4}{8} \right)$. Датычная да крывой AA' у пункце O' складае некаторы вугал ε з воссю x .

Тады

$$\vartheta - \vartheta_0 = \varphi + \varepsilon, \quad (5)$$

дзе вугал ε вызначаецца як

$$\text{tg } \varepsilon = y_1' = \frac{x - x_0}{\sqrt{R_0^2 - (x - x_0)^2}} \simeq \frac{\psi}{\sqrt{1 - \psi^2}},$$

φ — вугал паміж праменем FO і FO' . Будзем лічыць, што φ , $\psi < 0$ для выпадку, калі $x < x_0$, і φ , $\psi > 0$, калі $x > x_0$.

Вугал φ можа быць вызначан з суадносін

$$\text{tg } \varphi = \frac{\text{tg } (\vartheta_0 + \varphi) - \text{tg } \vartheta_0}{1 + \text{tg } (\vartheta_0 + \varphi) \text{tg } \vartheta_0}, \quad (6)$$

дзе (згодна з рыс. 1) $\text{tg } (\vartheta_0 + \varphi) = \frac{h - y_1}{x}$, а $\text{tg } \vartheta_0 = \frac{h}{x_0}$.

Тады (5) запішацца ў выглядзе

$$\Delta\vartheta = \text{arctg} \frac{hx_0 - y_1x_0 - hx}{h^2 + xx_0 - y_1h} + \text{arctg } y_1' \quad (7)$$

або

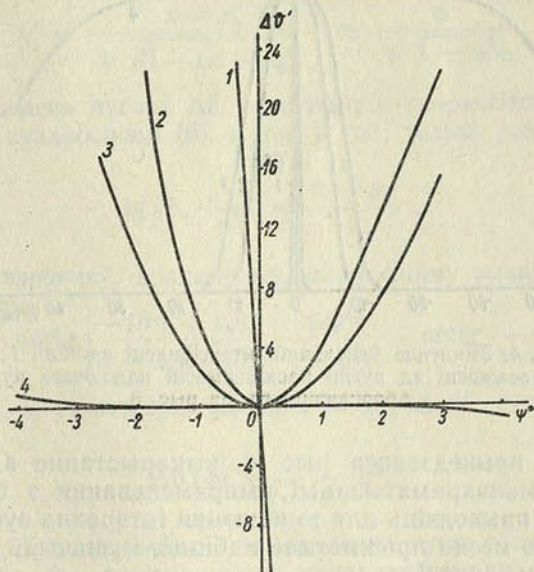
$$\Delta\vartheta = \text{arctg} \frac{-\left[h\psi + \frac{x_0}{2}\psi^2 + \frac{x_0}{8}\psi^4 \right]}{\left[h + x_0\psi - \frac{h}{2}\psi^2 - \frac{h}{8}\psi^4 \right]} + \text{arctg} \frac{\psi}{\sqrt{1 - \psi^2}}, \quad (7a)$$

дзе $\psi = \frac{x - x_0}{R_0}$.

Паколькі $\psi \ll 1$, раскладзем (7а) у рад па ступенях ψ і атрымаем

$$\Delta\theta(\psi) = \frac{1}{2} \psi^2 \operatorname{ctg} \theta_0 - \frac{1}{2} \psi^3 \operatorname{ctg}^2 \theta_0. \quad (8)$$

З (8) вынікае, што велічыня $\Delta\theta(\psi)$ дадатная незалежна ад знака ψ . Аднак па абсалютнай велічыні $\Delta\theta(\psi)$ заўсёды большая пры адмоўных значэннях ψ , чым пры тых жа значэннях ψ , але з дадатным знакам, што ўзгадняецца з данымі [6]. Звяртае на сябе ўвагу і той факт, што велічыня $\Delta\theta(\psi)$ залежыць ад брэгаўскага вугла θ_0 . Гэта азначае, што $\Delta\theta(\psi)$ з'яўляецца функцыяй даўжыні хвалі манахраматызаванага выпраменьвання.



Рыс. 3. Адхіленне вугла слізгацця рэнтгенаўскага прамяня ад брэгаўскага ў залежнасці ад вугла расхадзімасці падаючага пучка для розных тыпаў манахраматараў:

1 — плоскі манахраматар; 2, 3 — факусіруючыя манахраматы на Іагану (2 — для $\text{MoK}\alpha$, 3 — для $\text{CuK}\alpha$ -выпраменьванняў); 4 — факусіруючы манахраматар па Іагансону

Выкарыстоўваючы ўраўненне Вульфа — Брэгаў, выразім $\operatorname{ctg} \theta_0$ праз даўжыню хвалі выпраменьвання λ і замест суадносін (8) атрымаем

$$\Delta\theta(\psi) = \frac{1}{2} \psi^2 \sqrt{\frac{4d^2}{\lambda^2} - 1} - \frac{1}{2} \psi^3 \left(\frac{4d^2}{\lambda^2} - 1 \right). \quad (9)$$

З (9) вынікае, што выкарыстанне крышталю з адной і той жа міжплоскаскай адлегласцю d для манахраматызацыі больш кароткіх даўжынь хваль прывядзе да больш крутога росту $\Delta\theta(\psi)$ ад вугла ψ .

На рыс. 3 прадстаўлены змяненні вугла слізгацця $\Delta\theta$ для двух значэнняў даўжынь хваляў ($\text{CuK}\alpha$ - і $\text{MoK}\alpha$ -выпраменьванні) пры $d = 3,336 \text{ \AA}$.

Падстаўляючы атрыманае значэнне $\Delta\theta(\psi)$ у формулу (2), атрымаем выраз для змянення ўдзельнай інтэнсіўнасці адбіцця ў залежнасці ад вугла ψ

$$i(\psi) = i_0 \exp \left[- \frac{\pi \left[\frac{1}{2} \psi^2 \sqrt{\frac{4d^2}{\lambda^2} - 1} - \frac{1}{2} \psi^3 \left(\frac{4d^2}{\lambda^2} - 1 \right) \right]^2}{\omega_r^2 + \omega_g^2} \right]. \quad (10)$$

На рис. 4 (крывыя 2 і 3) прадстаўлены графікі залежнасці $i(\psi)$, згодна з (10), для дзвюх даўжынь хваль у адпаведнасці з рис. 3. Для параўнання на рис. 4 (крывая 1) прадстаўлена залежнасць $i(\psi)$ для плоскага манахраматара (4). Пры гэтым меркавалася, што ω_r і ω_g для ўсіх выпадкаў аднолькавыя, прычым велічыня $\sqrt{\omega_r^2 + \omega_g^2}$ была прынята роўнай $10'$, што з'яўляецца бліжэй для рэальных умоў (фокус трубка $y \sim 0,2$ мм, які знаходзіцца на адлегласці 70 мм ад крышталю, складае вуглавую шырыню $\sim 10'$).

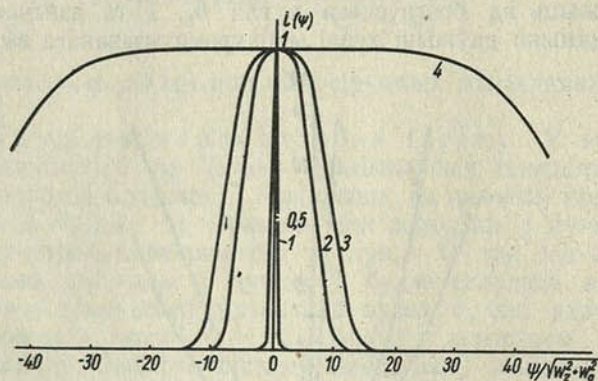


Рис. 4. Змяненне ўдзельнай інтэнсіўнасці адбicia $I(\psi)$ у залежнасці ад вугла расхадзімасці падаючага пучка. Абзначэнні гл. на рис. 3

Як відаць з прыведзенага рис. 4, выкарыстанне аднаго і таго ж крышталю для манахраматызацыі выпраменьвання з больш кароткай даўжынёй хвалі прыводзіць для змяншэння інтэрвала вуглоў ψ , у межах якога будзе мець месца прыкметнае адбicia, і, значыць, да змяншэння выйгрышу ў інтэнсіўнасці.

Факусіруючы манахраматар па Іагану з косым зрэзам крышталю. З мэтай змянення геаметрыі факусіроўкі часам пры вырабе манахраматара па Іагану пласцінкі крышталю выразаюць пад некаторым вуглом β да крышталаграфічных плоскасцей. Затым робіцца выгіб на паверхні кругавога цыліндра з радыусам R_0 . У гэтым выпадку вугал слізгацця рэнтгенаўскага прамяня адносна паверхні крышталю будзе $\theta + \beta$. Разлік для выпадку, аналагічнага папярэдняму, паказвае, што змяненне вугла слізгацця прамяня ў залежнасці ад вугла расхадзімасці падаючага пучка ψ апісваецца выразам.

$$\Delta\theta(\psi) = \frac{1}{2} \psi^2 \operatorname{ctg}(\theta_0 + \beta) - \frac{1}{2} \psi^3 \operatorname{ctg}^2(\theta_0 + \beta). \quad (11)$$

З гэтых суадносін вынікае, што скорасць змянення $\Delta\theta(\psi)$ у функцыі ад ψ залежыць ад знака вугла β . Эфект змянення $\Delta\theta$ за кошт β аналагічны эфекту пры змяненні даўжыні хвалі манахраматызаванага выпраменьвання. Пры аналізе функцыі ўдзельнай інтэнсіўнасці адбicia манахраматара з косым зрэзам неабходна ўлічваць змяненне фактару паглынання $(1 - \operatorname{tg} \beta \operatorname{ctg} \theta_0)$ [7].

Выпадак факусіруючага манахраматара па Іагансону. Для факусіруючага манахраматара па Іагансону крысталічная пласцінка, выразаная паралельна адбіваючай плоскасці, выгінаецца па паверхні кругавога цыліндра AA' радыусам R_0 , затым вышліфоўваецца па цыліндрычнай паверхні BB' радыусам $R_0/2$ (рис. 2). У сістэме каар-

дынат, прадстаўленай на рыс. 2, ураўненне сячэння плоскасцю чарцяжа паверхні крышталю-манахраматара BB' запішацца як

$$y_2 = \frac{R_0}{2} - \sqrt{\frac{R_0^2}{4} - (x - x_0)^2} \simeq R_0(\psi^2 + \psi^4),$$

а паверхня выгібу адбіваючых плоскасцей AA' як

$$y_1 = R_0 - \sqrt{R_0^2 - (x - x_0)^2} \simeq R_0 \left(\frac{\psi^2}{2} + \frac{\psi^4}{8} \right)$$

і вытворная

$$y_1' = \frac{x - x_0}{\sqrt{R_0^2 - (x - x_0)^2}} \simeq \frac{\psi}{\sqrt{1 - \psi^2}}.$$

Шукаемая рознасць вуглоў $\Delta\theta$ вызначыцца па-ранейшаму суадносінамі (5), а вугал φ — суадносінамі (6), аднак з той толькі розніцай, што ў гэтым выпадку

$$\operatorname{tg}(\theta_0 + \varphi) = \frac{h - y_2}{x}.$$

Пасля пераўтварэнняў, аналагічных папярэдняму выпадку, атрымаем

$$\Delta\theta(\psi) = \operatorname{arctg} \frac{-[h\psi + x_0\psi^2 + x_0\psi^4]}{[h + x_0\psi - h\psi^2 - h\psi^4]} + \operatorname{arctg} \frac{\psi}{\sqrt{1 - \psi^2}}.$$

Паколькі $\psi \ll 1$, гэты выраз раскладзём у рад па ступенях ψ і атрымаем

$$\Delta\theta(\psi) = -\frac{1}{2}\psi^3. \quad (12)$$

Суадносіны (12) паказваюць, што адхіленне вугла слізгацення θ ад брэгаўскага вугла θ_0 для факусіруючага манахраматара па Ігансону вельмі слаба змяняецца ў залежнасці ад вугла расхадзімасці падаючага пучка (рыс. 3, крывая 4). Акрамя таго, $\Delta\theta(\psi)$ не залежыць ад даўжыні хвалі выпраменьвання. Падстаўляючы атрыманае значэнне $\Delta\theta(\psi)$ (12) у выраз для ўдзельнай інтэнсіўнасці адбіцця (2), атрымаем

$$i(\psi) = i_0 \exp \left[-\frac{\frac{\pi}{4}\psi^6}{\omega_r^2 + \omega_g^2} \right]. \quad (13)$$

Графік залежнасці інтэнсіўнасці $i(\psi)$ ад вугла расхадзімасці прадстаўлен на рыс. 4 (крывая 4). Як відаць з прыведзенага графіка, удзельная інтэнсіўнасць адбіцця для манахраматара па Ігансону ў шырокім інтэрвале вуглоў ψ застаецца практычна пастаяннай велічынёй.

Праведзеныя разлікі дазваляюць ацаніць каэфіцыент выйгрышу інтэнсіўнасці K манахраматычнага пучка пры выкарыстанні факусіруючых манахраматараў у параўнанні з плоскім манахраматарам

$$K = \frac{\int_{\psi_{\min}}^{\psi_{\max}} i_{\phi}(\psi) d\psi}{\int_{-\infty}^{\infty} i_{\pi}(\psi) d\psi}, \quad (14)$$

дзе $i_{\phi}(\psi)$ вызначаецца па (10) альбо (12).

Велічыня каэфіцыента павелічэння інтэнсіўнасці залежыць ад выбіральной апертуры, а таксама ад сумы квадратаў інтэгральнай шырыні адбіцця крыштал-манахраматара (ω_r) і сярэдняй вуглавой шырыні крыніцы выпраменьвання ω_g . Чым большая сума $\omega_r^2 + \omega_g^2$, тым меншы каэфіцыент выйгрышу інтэнсіўнасці.

Аналіз рыс. 4 паказвае, што каэфіцыент K для факусіруючага манахраматара па Іагансону пры дастаткова вялікай апертуры можа дасягаць парадку 70. Ацэнка K для манахраматара тыпу Іагана для выпадку $\sqrt{\omega_r^2 + \omega_g^2} = 10'$ пры апертуры ў $1,5^\circ$ складае велічыню для $\text{Cu } K_\alpha$ -выпраменьвання $\sim 8,5$, а для $\text{Mo } K_\alpha$ -выпраменьвання $\sim 7,5$, што звычайна і назіраецца на практыцы.

Такім чынам, магчымы выйгрыш у інтэнсіўнасці пры выкарыстанні факусіруючых манахраматараў па Іагану ў параўнанні з плоскім манахраматам залежыць ад даўжыні хвалі манахраматызаванага выпраменьвання і вуглавой шырыні крыніцы і для рэальных размераў крыніцы не перавышае 10—15 разоў, у той час як для пунктавай крыніцы выйгрыш складае некалькі дзесяткаў разоў.

У заключэнне лічу абавязкам выказаць глыбокую ўдзячнасць акадэміку АН БССР М. М. Сіраце за ўвагу да гэтай работы і каштоўныя парады пры яе пастаноўцы.

Літаратура

1. Блохин М. А. Методы рентгеноспектральных исследований. М., 1959.
2. Johann H. H. Z. Phys., **69**, 185, 1931.
3. Johansson T. Z. Phys., **82**, 507, 1933.
4. Сермак J. Czech. j. Phys., **V12**, 602, 1962.
5. Олехнович Н. М. Зб. «Химическая связь в полупроводниках». Минск, 1969.
6. Сермак J. Czech. j. Phys., **V17**, 1073, 1967.
7. Джеймс Р. Оптические принципы дифракции рентгеновских лучей. М., 1950.

Институт физики твердого тела
и полупроводников АН БССР

Поступило в редакцию
27.1 1970

М. Я. КОСТКА

ФЛУАРАМЕТРЫЧНАЕ ДАСЛЕДАВАННЕ СПЕКТРАЛЬНАЙ ЗАЛЕЖНАСЦІ ЗАТУХАННЯ СВЯЧЭННЯ ФЛУАРЭСЦЭНЦЫІ

Змяненне працягласці свячэння па спектру флуарэсцэнцыі ў складаных малекул упершыню выяўлена і вытлумачана ў [1, 2] на вытворных антрацэну. Пазней у [2] і [3] былі прадстаўлены новыя рэзультаты аб залежнасці працягласці свячэння па спектру флуарэсцэнцыі ў фталімідаў. У [4] быў выкананы тэарэтычны разлік крывых затухання па спектру флуарэсцэнцыі.

Узнікненне залежнасці $\tau = f(\nu_{\text{фл}})$ у дыпольных шклюючыхся растваральніках звязана з рэлаксацыйнымі эфектамі арыентацыйнага ўзаемадзеяння. Змяненне пастаяннага дыпольнага моманту ў малекулы пасля паглынання кванта святла парушае раўнаважны стан яе з асяроддзем. У залежнасці ад працягласці рэлаксацыі малекул растваральніку для ўзбуджаных малекул люмінафору да пачатку акта вылучэння святла можа ўстанаўлівацца альбо не ўстанаўлівацца новы раўнаважны стан з асяроддзем. Ступень устанаўлення раўнавагі вызначае і ступень узаемадзеяння ўзбуджаных малекул з растваральнікам. Гэта прыводзіць да таго, што малекулы, якія высвечваюцца ў розны час, знаходзяцца ў розных умовах узаемадзеяння з растваральнікам. Па гэтай прычыне такія малекулы будуць выпраменьваць розныя частоты, што і прывядзе да залежнасці працягласці свячэння па спектру флуарэсцэнцыі.

Ва ўсіх памянёных вышэй даследаваннях (не лічачы некаторых прыкладаў з [2]) аналіз з'явы праводзіўся толькі на падставе так званай флуараметрычнай фазы. Вядома, што ў выпадку экспаненцыяльнага затухання свячэння флуараметрычная фаза φ адназначна вызначае працягласць свячэння. У выпадку неэкспаненцыяльнага затухання характарыстыка працягласці свячэння, вызначаемая па флуараметрычнай фазе, вельмі ўмоўная. Для высвятлення пытання аб характары затухання неабходна альбо вымярэнне фазы пры дзвюх частотах мадуляцыі ўзбуджаючага святла, альбо дадатковае вымярэнне так званай адноснай глыбіні мадуляцыі свячэння $M = m_{\text{л}}/m_{\text{узб}}$, дзе $m_{\text{л}}$ і $m_{\text{узб}}$ — глыбіні мадуляцыі люмінесцэнцыі і ўзбуджальнага святла [5]. У выпадку экспаненцыяльнага характару затухання разлік τ па зруху фазы

$$\tau_{\varphi} = \frac{1}{\omega} \operatorname{tg} \varphi \quad (1a)$$

і па адноснай глыбіні мадуляцыі

$$\tau_M = \frac{1}{\omega} \sqrt{M^2 - 1} \quad (16)$$

прыводзіць да аднолькавых значэнняў.

Несупадзенне значэнняў τ , вызначаемых двума гэтымі метадамі, даказвае неэкспаненцыяльнасць затухання. Гэта пытанне часта рашаецца

па ацэнцы значэння велічыні $M/\cos\varphi$. Калі адносіны $M/\cos\varphi=1$, затуханне экспаненцыяльнае, калі $M/\cos\varphi \neq 1$, затуханне неэкспаненцыяльнае.

Гэта работа прысвечана высвятленню характару затухання флуарэсцэнцы для злучэнняў, у якіх пры змяненні тэмпературы праяўляецца залежнасць флуараметрычнай фазы па спектру выпраменьвання. З гэтай мэтай выкананы адначасовыя сістэматычныя вымярэнні зруху фазы і адноснай глыбіні мадуляцыі па спектру флуарэсцэнцы для раствораў фталімідаў у шырокім інтэрвале тэмператур.

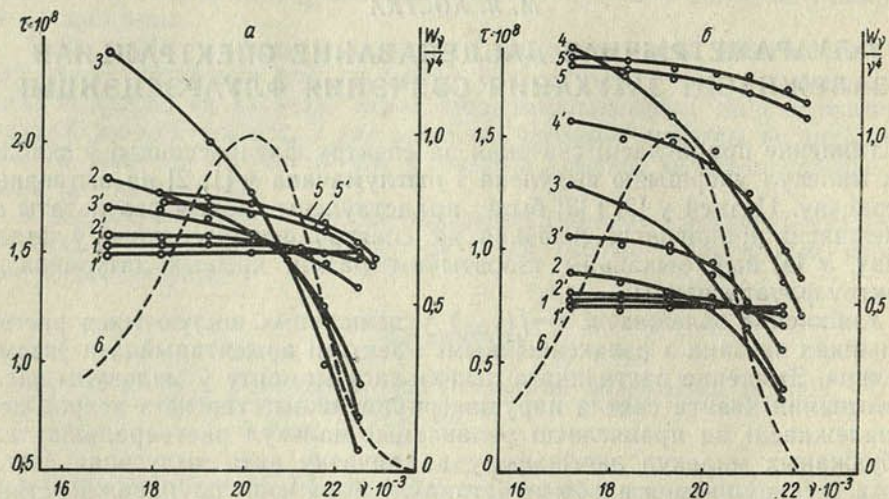


Рис. 1. Залежнасць τ_φ (1—5) і τ_M (1'—5') (сек) ад частаты спектра флуарэсцэнцы (см^{-1}) 3-аміна-N-метылфталіміду (а) і 3-монаметыламіна-N-метылфталіміду (б) у ізобутаноле пры розных тэмпературах:

1 і 1' — +20; 2 і 2' — -40; 3 і 3' — -80; 4 і 4' — -110; 5 і 5' — -160; 6 — спектр пры $t = -80$ (а) і -70 (б)

Вымярэнні выкананы на флуарометры Інстытута фізікі АН БССР. Узбуджэнне люмінесцэнцы рабілася праз манахраматар ДМР-4. У якасці крыніцы святла выкарыстоўвалася лампа ДРШ-1000.

З мэтай паляпшэння суадносін сігнал/шум паласа рэгістрацыі прыбора $\Delta f_{0,7}$ даведзена да 80 Гц з дапамогай аднакрышталнага кварцавага фільтра. Далейшае звужэнне паласы пагаршала дакладнасць вымярэння фазы. Пастаянная вымярэння фазавога дэтэктара выбіралася да 15 сек. Анодны ток ФЭУ-18А вымяраўся адліковай прыладай УФ-206, пастаянная вымярэння якой усталявалася паралельным падключэннем ёмкасці, што не пагаршала адчувальнасці з павелічэннем пастаяннай вымярэння. Прынятыя меры павысілі адчувальнасць і дакладнасць вымярэння адноснай глыбіні мадуляцыі.

Пяройдзем да разгляду атрыманых рэзультатаў. На прадстаўленых ніжэй рысунках для зручнасці супастаўлення рэзультатаў вымярэння ў адзінай сістэме параметры φ і M пералічаны ў значэнні τ . Як ужо адзначалася, гэтыя значэнні τ_φ і τ_M носяць умоўны характар і абмяркоўваюцца перш за ўсё з пункту погляду іх адрознення, г. зн. характары-зуючы ступень парушэння экспаненцыяльнасці.

Як відаць з рис. 1, а, значэнні τ_φ і τ_M пры хатняй тэмпературы блізкія адзін да аднаго. Такім чынам, затуханне свячэння па спектру флуарэсцэнцы экспаненцыяльнае. Пры $t = -40^\circ\text{C}$ ужо назіраецца рэзкае адрозненне значэнняў τ_φ і τ_M па ўсім спектры, за выключэннем невялікага інтэрвалу частот. Пры паніжэнні тэмпературы да -80°C ступень ад-

рознення τ_{ϕ} і τ_M на караткахвалевым краі змяншаецца, а на даўгахвалевым яшчэ ўзмацняецца. Далейшае ахаладжэнне раствору прыводзіць да змяншэння залежнасці абодвух параметраў ад частаты спектра флуарэсцэнцыі, а таксама і да змяншэння ступені іх адрознення. Пры $t = -160^\circ\text{C}$ назіраецца практычна супадзенне значэнняў τ_{ϕ} і τ_M . Разгледжаны рысунак адносіцца да рэчыва з групы фталімідаў, у якіх сумарная працягласць усёй паласы не залежыць або слаба залежыць ад тэмпературы, г. зн. значэнні τ пры хатняй і нізкай тэмпературах роўныя альбо маюць нязначнае адрозненне.

На рыс. 1, б прадстаўлены тыя ж залежнасці для 3-монаметыламіна-N-метылфталіміду ў ізабутаноле. Гэта рэчыва з'яўляецца прадстаўніком групы фталімідаў, у якіх сумарная працягласць усёй паласы значна змяняецца з тэмпературай.

Як відаць з рысунка, кінетыка спектральнай залежнасці τ_{ϕ} і τ_M пры розных тэмпературах такая ж, як і ў першым выпадку. Пры хатняй тэмпературы значэнні τ_{ϕ} і τ_M практычна супадаюць. З паніжэннем тэмпературы з'яўляецца залежнасць па спектру выпраменьвання τ_{ϕ} і τ_M і іх узаемныя адрозненні. З далейшым зніжэннем тэмпературы адрозненне τ_{ϕ} і τ_M на караткахвалевым краі скарачаецца, на даўгахвалевым — узрастае. Пры $t = -160^\circ\text{C}$ адрозненні τ_{ϕ} і τ_M нязначныя.

Такім чынам, у дастаткова шырокім інтэрвале тэмператур затуханне свячэння неэкспаненцыяльнае.

На аснове атрыманых эксперыментальных даных і некаторых меркаванняў можна разлічыць крывыя затухання флуарэсцэнцыі розных частот спектра. Як было відаць з прыведзеных рысункаў, у агульным выпадку назіраецца наступны характар змянення працягласці свячэння па спектру. Узрастанне працягласці свячэння пры пераходзе ад большых частот да меншых сведчыць аб тым, што акрамя ўласнага высвечвання малекул на дадзенай частаце існуе перавод малекул растваральнікам з караткахвалевага ўчастка спектра на даўгахвалевы. Інакш кажучы, у працэсе затухання назіраецца ссоўванне паласы флуарэсцэнцыі ў бок меншых частот [4].

Такім чынам, у мяркуемым законе затухання інтэнсіўнасці дадзенай частаты павінны быць адлюстраваны наступныя асноўныя моманты:

- спад малекул па прычыне ўласнага затухання (альбо пераход з узбуджанага ўзроўню на асноўны);
- спад малекул за кошт пераводу іх растваральнікам у станы, якія адпавядаюць вылучэнням меншых частот;
- прыход малекул пад дзеяннем растваральніку на ўзбуджаны ўзроўні, якія адпавядаюць вылучэнню пэўнай частаты з больш высокіх узроўняў.

На падставе адзначаных меркаванняў закон змянення колькасці малекул для любой частаты спектра мае выгляд

$$n_v(t) = n_v'(t) e^{-\frac{t}{\tau_L}} = \left[k_{1v} e^{-\frac{t}{\tau_p}} + k_{2v} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau_p}} \right) \right] e^{-\frac{t}{\tau_L}}, \quad (2)$$

дзе τ_L — працягласць узбуджанага стану*); τ_p — час устанаўлення арыентацыйнага ўзаемадзеяння; k_{1v} і k_{2v} — параметры, якія абазначаюць колькасць часцінак у пачатковы момант. Член $k_{1v} e^{-\frac{t}{\tau_p}}$ адпавядае знікненню малекул (п. б)), член $k_{2v} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau_p}} \right)$ — прыходу малекул (п. в)). Інтэнсіўнасць люмінесценцыі $I(t)$ вынікае з (1) як $-dn/dt$

*) Значэнні τ_L для кожнай тэмпературы вызначаюцца з умоў роўнасці $\tau_{\phi} = \tau_M = \tau_L$

$$I(t) = k_{1v} \left[\frac{(1-k_v)}{\tau_c} e^{-\frac{t}{\tau_c}} + \frac{k_v}{\tau_{\text{л}}} e^{-\frac{t}{\tau_{\text{л}}}} \right], \quad (3)$$

$$\text{дзе } \tau_c = \frac{\tau_{\text{л}}\tau_p}{\tau_{\text{л}} + \tau_p}; \quad k_v = \frac{k_{2v}}{k_{1v}}.$$

Выраз (3) ёсць мяркуемы закон затухання інтэнсіўнасці свячэння любой частаты ў спектры флуарэсцэнцыі*).

Пры вымярэнні працягласці свячэння на фазавых флуарометрах узбуджэнне люмінесцэнцыі звычайна праводзіцца сінусаідальна маду-

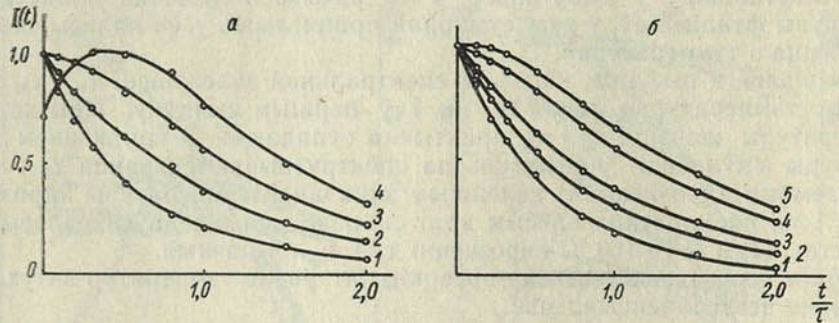


Рис. 2. Кривые затухания на спектре флуорэсценцыі:

а—для 3-аміна-N-метылфталіміду пры $t = -80^\circ\text{C}$ ($1-22\,500\text{ см}^{-1}$, $2-21\,750$, $3-20\,130$, $4-18\,150$) і б—для 3-монаметыламіна-N-метылфталіміду пры $t = -110^\circ\text{C}$ ($1-22\,000\text{ см}^{-1}$, $2-20\,970$, $3-20\,130$, $4-18\,150$, $5-17\,000$)

ліраваным святлом. Змяненне інтэнсіўнасці люмінесцэнцыі пры сінусаідальным узбуджэнні з улікам адзначанага закона затухання можна знайсці з рашэння ўраўнення [5].

$$A(t) = \int_0^\infty S(t-\theta) I(\theta) d\theta,$$

дзе $S(t-\theta)$ — закон змянення інтэнсіўнасці ўзбуджальнага святла; $I(\theta)$ — закон затухання люмінесцэнцыі. Для нашага выпадку пры

$$S(t-\theta) = S_0 [1 + m_{\text{взб}} \cos \omega(t-\theta)]$$

і

$$I(\theta) = \frac{1-k_v}{\tau_c} e^{-\frac{\theta}{\tau_c}} + \frac{k_v}{\tau_{\text{л}}} e^{-\frac{\theta}{\tau_{\text{л}}}}$$

змяненне інтэнсіўнасці люмінесцэнцыі мае выгляд

$$A(t) = S [1 + m_{\text{л}} \cos(\omega t + \varphi)], \quad (4)$$

прычым

$$\text{tg } \varphi = \frac{(1-k_v) \cos \varphi_c \sin \varphi_{\text{л}} + k_v \cos \varphi_{\text{л}} \sin \varphi_{\text{л}}}{(1-k_v) \cos^2 \varphi_c + k_v \cos^2 \varphi_{\text{л}}},$$

$$m_{\text{л}} = m_{\text{взб}} [(1-k_v)^2 \cos^2 \varphi_c + k_v^2 \cos^2 \varphi_{\text{л}} + 2(k_v - k_v^2) \cos \varphi_{\text{л}} \cos \varphi_c \cos(\varphi_{\text{л}} - \varphi_c)]^{-1/2},$$

дзе $\varphi_{\text{л}}$ — затрымка фазы святла люмінесцэнцыі адносна ўзбуджальнага святла; φ_c — затрымка фазы свячэння люмінесцэнцыі адносна ўзбуджальнага святла пры ўплыве арыентацыйнага ўзаемадзеяння.

* У далейшым выраз (3) ужываецца без каэфіцыента k_{1v} .

Як відаць з (4), свячэнне люмінесценцыі і ў гэтым выпадку змяняецца па сінусаідальнаму закону. Аднак фаза і дэмадуляцыя свячэння вызначаюцца не толькі працягласцю затухання, але і параметрамі τ_p і k_v . Эксперыментальныя значэнні $\tau_\phi(\nu)$ і $\tau_M(\nu)$ дазваляюць знайсці гэтыя параметры ў лікавым выглядзе. Неабходна адзначыць, што параметр τ_p з'яўляецца спектральна незалежным і залежыць толькі ад тэмпературы, параметр k_v залежыць ад тэмпературы і частаты. Веданне лікавых значэнняў τ_p і k_v дазваляе пабудавать па выразу (3) крывая затухання па спектру. Як ві-

Табліца

Значэнні τ_ϕ , τ_M і $\bar{\tau}$, сек у 3-аміна-N-метыл-фталіміду ў ізобутаноле пры $t = -80^\circ\text{C}$

$\nu \text{ см}^{-1}$	$\tau_\phi \cdot 10^8$	$\tau_M \cdot 10^8$	$\bar{\tau} \cdot 10^8$
22500	0,6	0,75	0,6
21750	2,0	1,20	1,10
20970	1,50	1,50	1,50
20130	1,76	1,60	1,50
19200	2,00	1,60	1,6
18150	2,3	1,70	1,7
17000	2,4	1,70	1,7

даць з рыс. 2, караткахвалевы край спектра затухае больш хутка, чым экспанента. Даўгахвалевы край затухае больш павольна, нават існуе вобласць невялікага разгарання свячэння. На магчымасць такога эфекту ўказана ў [4].

Сярэдняю працягласць свячэння ў разглядаемых выпадках неэкспаненцыяльнага затухання можна вызначыць наступным чынам:

$$\bar{\tau} = \frac{\int_0^{\infty} t I(t) dt}{\int_0^{\infty} I(t) dt} = \frac{\frac{(1-k_v)}{\tau_c} \int_0^{\infty} t e^{-\frac{t}{\tau_c}} dt + \frac{k_v}{\tau_{II}} \int_0^{\infty} t e^{-\frac{t}{\tau_{II}}} dt}{\frac{(1-k_v)}{\tau_c} \int_0^{\infty} e^{-\frac{t}{\tau_c}} dt + \frac{k_v}{\tau_{II}} \int_0^{\infty} e^{-\frac{t}{\tau_{II}}} dt} = \tau_c + k(\tau_{II} - \tau_c).$$

Як відаць з табліцы, значэнні $\bar{\tau}$, вылічаныя па праведзеных суадносінах, у караткахвалевай вобласці частот набліжаюцца да значэнняў τ_ϕ , у даўгахвалевай — да значэнняў τ_M .

Літаратура

1. Черкасов А. С. Опт. и спектр., 12, 73, 1962.
2. Веселова Т. В., Лиморева Л. А., Черкасов А. С., Широков В. И. Изв. АН СССР, сер. физ., 24, 1340, 1965.
3. Костко М. Я., Пикулик Л. Г., Яковенко В. А. ЖПС, 6, 746, 1967.
4. Бахшиев Н. Г., Мазуренко Ю. Т., Питерская И. В. Опт. и спектр., 21, 550, 1966.
5. Тумерман Л. А. ЖЭТФ, 11, 515, 1941.

Н. Н. СИРОТА, И. В. БОДНАР, Ц. З. ВИТКИНА

ПЕРИОД ИДЕНТИЧНОСТИ КРИСТАЛЛИЧЕСКОЙ РЕШЕТКИ И МАГНИТНАЯ ВОСПРИИМЧИВОСТЬ СПЛАВОВ ФОСФИДА ГАЛЛИЯ И АРСЕНИДА ИНДИЯ

До настоящего времени в литературе практически отсутствуют сведения о квазибинарной системе GaP—InAs. В [1] отмечается возможность существования непрерывных твердых растворов в этой системе на основании исследования пленок четырех составов.

Целью настоящего исследования являлось систематическое изучение границ растворимости твердых растворов, структуры, периода идентичности кристаллической решетки, плотности и магнитной восприимчивости сплавов системы GaP—InAs.

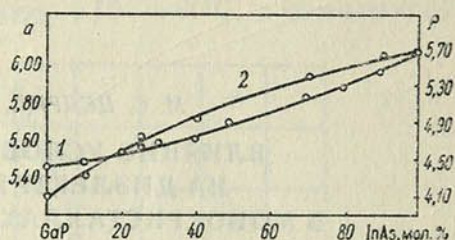
Были получены десять составов сплавов системы GaP—InAs. Образцы представляли собой монокристаллы размерами до 8 мм. Составы исследованных сплавов брались через десять молярных процентов. Выращивание монокристаллов производилось методом газотранспортных реакций. Транспортирующим агентом служил йод. Контроль состава определялся по данным химического анализа. В качестве исходных материалов использовали бинарные соединения InAs и GaP.

На основании микроструктурного, химического и рентгеновского анализов установлено, что в исследуемой системе GaP—InAs образуется непрерывный ряд твердых растворов. Структура и параметр кристаллической решетки системы определялись рентгеновским методом. Съемка рентгенограмм производилась на аппарате УРС-50ИМ в $\text{CuK}\alpha$ -излучении с никелевым фильтром. Все исследованные составы обладают кристаллической решеткой сфалерита. Период идентичности возрастает от $5,451 \pm 0,005$ Å для GaP до $6,057 \pm 0,005$ Å для InAs с небольшим отклонением от закона Вегарда (рис. 1, а). Полученные нами значения периодов идентичности для GaP и InAs близки к данным, приведенным в [2]. Указанные отклонения периода идентичности от прямой можно рассматривать как свидетельство образования твердых растворов с отрицательным тепловым эффектом по отношению к компонентам.

Для системы сплавов GaP—InAs была определена плотность исследуемых образцов. Определение плотности кристаллов производилось методом гидростатического взвешивания на весах типа ВМ-20 с чувствительностью 10^{-5} г/дел. Кристаллы подвешивались на нейлоновой нити $\varnothing \sim 5$ мк. Взвешивание производилось на воздухе и в бидистиллированной воде. При расчете плотности учитывались необходимые поправки [3]. Зависимость изменения плотности от состава для твердых растворов GaP—InAs приведена на рис. 1, б. Значения рентгеновской плотности несколько превышают значения плотности, непосредственно определенные гидростатическим взвешиванием.

Диамagnetная восприимчивость определялась методом Гуи в вакууме в магнитных полях до 7700 э на установке, описанной в [4]. На рис. 2 приведена концентрационная зависимость молярной магнитной восприимчивости твердых растворов GaP—InAs. Как видно из рисунка, все сплавы диамagnetны.

Рис. 1. Зависимость периода идентичности a , Å (1) и изменения плотности ρ , г/см³ (2) от состава системы твердых растворов GaP—InAs



Кривая магнитной восприимчивости в зависимости от состава характеризуется небольшим отклонением от аддитивной прямой в сторону меньших значений $\chi_{\text{мол}}$ в средней части системы.

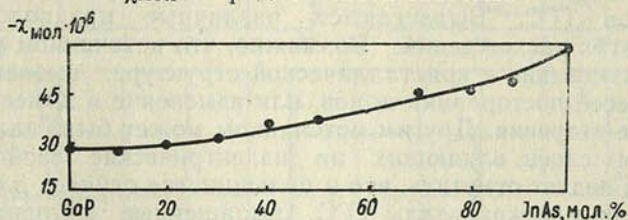


Рис. 2. $\chi_{\text{мол}}$ в зависимости от состава сплавов системы GaP—InAs. $T=300^\circ\text{K}$, $H=7700$ э

Полученные нами данные об изменении периода идентичности решетки и диамagnetной восприимчивости сплавов GaP—InAs подтверждают существование в исследованной системе непрерывных твердых растворов. Отклонение диамagnetной восприимчивости от аддитивной прямой согласуется с отклонением периода идентичности от прямой Vegarda.

Литература

1. Müller E. K., Richards J. L. J. Appl. Phys., 35, 4, 1233, 1964.
2. Sirota N. N. Semiconductors and semimetals, v. 4. New York, 1968.
3. Кей Дж., Лэби Т. Таблицы физических и химических постоянных. М., 1962.
4. Сирота Н. Н., Маковецкая Л. А., Розов В. В., Виткина Ц. З. ДАН БССР, 12, 1085, 1968.

Институт физики твердого тела
и полупроводников АН БССР

Поступило в редакцию
30.1 1970

УДК 537.266 + 537.311.33]: [537 + 535

М. С. ЦЕДРИК, Л. Н. МАРГОЛИН

ВЛИЯНИЕ УСЛОВИЙ ВЫРАЩИВАНИЯ НА ДИЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ПОТЕРИ В МОНОКРИСТАЛЛАХ ТРИГЛИЦИНСУЛЬФАТА

Диэлектрические свойства триглицинсульфата (ТГС) изучались многими авторами [1—11]. Однако в ряде случаев не были объяснены расхождения численных значений величин, характеризующих диэлектрические свойства ТГС. Выдвигаются различные предположения для объяснения этих расхождений. Возможно, что источником расхождений могут быть изменения в кристаллической структуре, вызванные присутствием примесей посторонних ионов, или изменение в доменной структуре вследствие старения. Другим источником может быть наличие тонких поверхностных слоев, влияющих на диэлектрические свойства сегнетоэлектриков. Следует отметить, что в большинстве случаев для измерения использовались монокристаллы ТГС, выращенные методом снижения температуры. Очевидно, что диэлектрические свойства сегнетоэлектриков также в значительной мере зависят от условий выращивания кристаллов. В литературе отсутствуют сведения о влиянии условий выращивания на диэлектрические потери в монокристаллах ТГС.

В связи с изложенным нами проведены исследования тангенса диэлектрических потерь в кристаллах ТГС, выращенных как в сегнетоэлектрической области, так и в параэлектрической. Особое внимание уделялось характеру изменения тангенса диэлектрических потерь вблизи точки Кюри.

Таблица

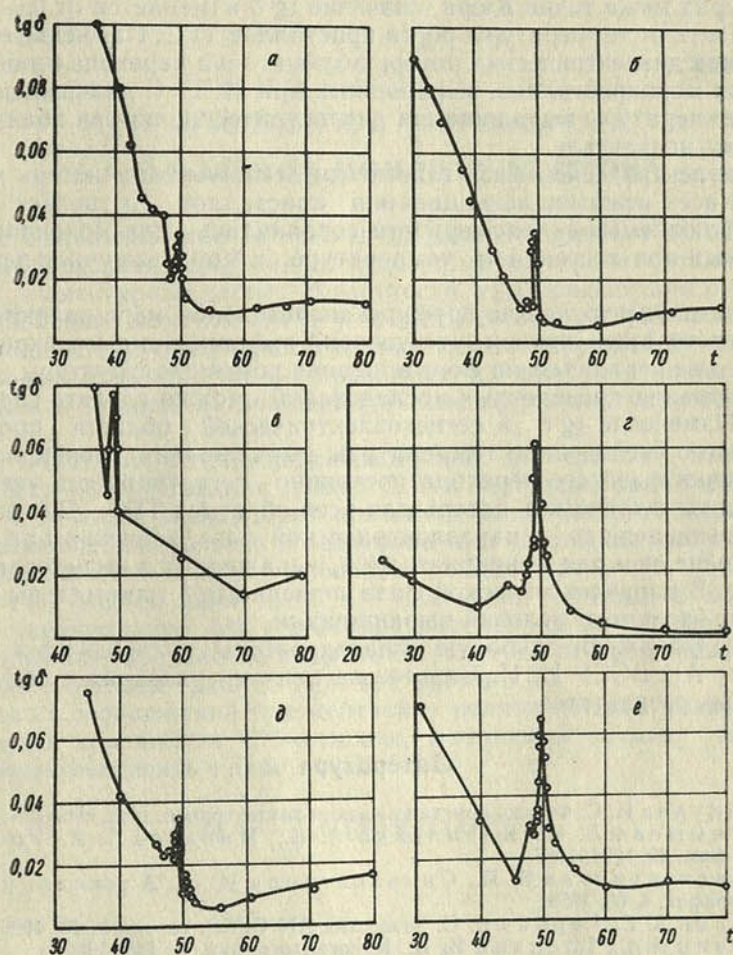
Режимы выращивания монокристаллов ТГС

Температура выращивания монокристал- лов, °С	Относительное пересыщение раствора $\Delta n/n$, %			
12	0,166	0,283	0,500	0,648
22	0,114	0,198	0,488	0,735
32	0,147	0,381	0,662	0,801
42	0,144	0,360	0,582	0,726
49,6		0,332		
52	0,219	0,323		

Монокристаллы ТГС выращивались из водных растворов при постоянной температуре и постоянном пересыщении. Режимы выращивания кристаллов представлены в таблице. Выращивание длилось от 5 до 40 дней в зависимости от температуры роста и пересыщения.

Измерения тангенса диэлектрических потерь проводились на образцах. Образцы представляли собой пластинки, вырезанные перпендику-

лярно полярной оси Y . Пластинки имели толщину 1,4—1,5 мм и форму прямоугольников площадью 0,6—1,2 см². Все отобранные пластинки не имели макродефектов, внутренних напряжений и не подвергались никаким электрическим и механическим воздействиям. На образцы наносились серебряные электроды. Термостатирование их осуществлялось в ультратермостате в интервале температур +15—+80°C с точностью до



Температурная зависимость тангенса диэлектрических потерь от условий выращивания монокристаллов ТГС:

$a-t=52^\circ\text{C}$, $\Delta n/n=0,219\%$; $b-49,6$ и $0,332$; $c-42$ и $0,144$; $d-32$ и $0,147$; $e-22$ и $0,114$; $f-12$ и $0,166$

0,02°. Перед каждым измерением образцы выдерживались при постоянной температуре не менее 30—45 мин. Все измерения проведены по мостовой схеме на частоте 1 кГц. На рисунке представлены температурные зависимости тангенса диэлектрических потерь монокристаллов ТГС, выращенных в динамическом режиме при разных температурах и пересыщениях. Анализ приведенных кривых показывает, что в сегнетоэлектрической области значения $\text{tg } \delta$ значительно выше, чем в параэлектрической независимо от условий выращивания. С повышением температуры выращивания монокристаллов ТГС изменение $\text{tg } \delta$ в сегнетоэлектрической области происходит более резко. Значительное увеличение тангенса диэлектрических потерь наблюдается вблизи температуры фазового

перехода. Однако это увеличение значений $\text{tg } \delta$ различно для монокристаллов, выращенных в сегнетоэлектрической и параэлектрической фазах. Для сравнения на рисунке (б) показана зависимость $\text{tg } \delta$ от температуры для монокристаллов, выращенных вблизи точки Кюри. Для монокристаллов, выращенных при 52°C , величина $\text{tg } \delta$ вблизи точки перехода составляет 0,03—0,035, а для монокристаллов, выращенных при температурах ниже точки Кюри, значение $\text{tg } \delta$ изменяется от 0,04 до 0,08 в зависимости от температуры роста кристаллов ТГС. Наименьшее значение тангенса диэлектрических потерь вблизи точки перехода нами наблюдалось для монокристаллов, выращенных при 22°C . С дальнейшим понижением температуры выращивания диэлектрические потери вблизи точки Кюри вновь возрастали.

В параэлектрической фазе тангенс диэлектрических потерь минимален и для всех режимов выращивания кристаллов составляет 0,007—0,012. Наблюдаемые закономерности сохранялись для монокристаллов, выращенных при постоянной температуре и при различных пересыщениях.

Так как диэлектрические потери в значительной мере являются потерями на гистерезис, считаем, что условия выращивания монокристаллов ТГС существенно влияют на формирование доменной структуры.

На основании проведенных исследований можно сделать следующие выводы. Изменение $\text{tg } \delta$ в сегнетоэлектрической области происходит более резко с увеличением температуры выращивания монокристаллов. Вблизи точки фазового перехода постоянно регистрируется увеличение тангенса диэлектрических потерь для всех образцов ТГС. Для монокристаллов, выращенных в параэлектрической фазе, значения $\text{tg } \delta$ в точке Кюри меньше, чем для монокристаллов, выращенных в сегнетоэлектрической фазе. В параэлектрической фазе значения $\text{tg } \delta$ минимальны и существенно не зависят от условий выращивания.

Авторы выражают глубокую благодарность руководителю работы академику АН БССР Н. Н. Сироте за ценные указания и обсуждение полученных результатов.

Литература

1. Желудев И. С. Физика кристаллических диэлектриков. Изд. «Наука», М., 1968.
2. Камышева Л. Н., Коваленко А. Н., Минаева Т. А. Известия АН СССР, сер. физ., **29**, 1994, 1965.
3. Константинова В. П., Сильвестрова И. М., Александров К. С. Кристаллография, **4**, 69, 1959.
4. Сонин А. С., Горбач С. С. Известия АН СССР, сер. физ., **29**, 1996, 1965.
5. Сонин А. С., Гладкий В. В. Кристаллография, **5**, 145, 1960.
6. Hoshino S., Mitsui T., Jona F., Pepinsky R. Phys. Rev., **107**, 1255, 1957.
7. Krajewski T., Nawrociak W., Szczepaniak B. Acta Phys. Polon., **34**, 929, 1968.
8. Nishioka A., Takeuchi M. J. Phys. Soc. Japan, **14**, 971, 1959.
9. Stankowska J., Stankowski J. Acta Phys. Polon., **19**, 217, 1960.
10. Stankowska J. Fiz. Diel. i Radiospekt., **3**, 169, 1966.
11. Stankowska J. Acta Phys. Polon., **31**, 527, 1967.

Институт физики твердого тела
и полупроводников АН БССР,
Минский педагогический институт
им. А. М. Горького

Поступило в редакцию
3.II 1970

Л. Ф. ЖИРКОВ, И. С. САЦУНКЕВИЧ

ОБ АНАПОЛЬНОМ МОМЕНТЕ ДЕЙТРОНА

Слабое взаимодействие за счет специфичности свойств относительно S - и P -преобразований индуцирует необычные электромагнитные характеристики элементарных частиц. В частности, в [1] предсказано существование анапольного момента (АМ) у частицы со спином $1/2$. Этот момент при взаимодействии с электромагнитным полем нарушает S - и P -инвариантность, но сохраняет комбинированную CP -инвариантность. Он может оказывать влияние на поляризационные эффекты в упругом ep -рассеянии.

Ввиду отсутствия схемы перенормировок для слабого взаимодействия строгая количественная оценка АМ в настоящее время невозможна [2]. Тем не менее эксперимент позволяет дать феноменологическую оценку величины АМ протона и электрона при использовании измерения поляризации протона отдачи в плоскости реакции $ep \rightarrow ep$ [2, 3].

Следуя [1], введем понятие об АМ векторной частицы. В предположении о существовании АМ у дейтрона рассмотрим экспериментальные возможности его определения в процессе упругого ed -рассеяния, используя данные о верхней границе для АМ протона [3].

Исходя из соображений градиентной и релятивистской инвариантности, а также сохранения CP -четности, матричный элемент процесса $ed \rightarrow ed$ можно написать в виде

$$M = \frac{ie}{q^2} \bar{U}(k') \gamma_\mu U(k) J_\mu, \quad (1)$$

где

$$J_\mu = a_\alpha^* \left\{ f_1 \delta_{\alpha\beta} p_\mu + f_2 (q_\beta \delta_{\mu\alpha} - q_\alpha \delta_{\mu\beta}) + \frac{f_3}{\kappa^2} q_\alpha q_\beta p_\mu + \right. \\ \left. + \frac{f_4}{\kappa^2} \varepsilon_{\alpha\beta\rho\sigma} (\delta_{\mu\rho} q^2 - q_\mu q_\rho) p_\sigma \right\} a'_\beta. \quad (2)$$

Здесь a_α^* , a'_β — 4-векторы спина дейтрона в конечном и начальном состояниях, $q = p'' - p'$, $p = p'' + p'$, а p'' , p' , k' , k — 4-импульсы конечного и начального дейтрона и электрона соответственно. Функции $f_i \equiv f_i(q^2)$ описывают электромагнитные формфакторы дейтрона, причем $f_4(q^2)$ характеризует распределение АМ дейтрона ($f_4(0)$ — АМ), κ — масса дейтрона.

Из выражения (2) вытекает, что влияние АМ должно сильно зависеть от величины импульса передачи q . Кроме того, как и при исследовании любого нарушения P -симметрии, для обнаружения АМ при анализе угловых распределений электронов или дейтронов отдачи нельзя обойтись без измерения поляризации частиц.

Поляризационные характеристики дейтрона в общем виде удобно описывать матрицей плотности следующего вида [4]:

$$\Lambda_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta} + \frac{p'_\alpha p'_\beta}{\kappa^2} + \frac{3}{2\kappa} \varepsilon_{\alpha\beta\rho\sigma} s'_\rho p'_\sigma - \frac{3}{2} D_{\alpha\beta},$$

где s' — 4-вектор поляризации дейтрона, $D_{\alpha\beta}$ — тензор квадрупольной поляризации. Дифференциальное сечение рассеяния электрона на дейтроне, когда начальный дейтрон поляризован, в лабораторной системе координат имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{d\Omega} / \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_0 &= A + B \operatorname{tg}^2 \vartheta/2 + 9 \frac{\operatorname{tg}^2 \vartheta/2}{\kappa^5} f_4 \left\{ (kp) [(1 + \eta) f_1 + \right. \\ &+ \eta f_2 - 2\eta(1 + \eta) f_3] \left[(s'p'')(p'k + p'k') - \frac{p^2}{2} (s'k + s'k') \right] - \\ &\left. - f_2(s'p'') \left[2\kappa^4 \eta(\eta - 1) - \frac{1}{2} (kp)(p'k + p'k') \right] \right\}. \end{aligned} \quad (3)$$

(Использовано приближение $k_0 \gg m$, где k_0 , m — энергия и масса покоя электрона).

$$A = F_E^2 + \frac{8}{9} \eta^2 F_Q^2 + \frac{2}{3} \eta(1 + \eta) F_M^2 + \frac{32}{3} \eta^2(1 + \eta) f_4^2,$$

$$B = \frac{4}{3} \eta(1 + \eta)^2 (F_M^2 + 16\eta f_4^2),$$

$$F_E = f_1 + \frac{2}{3} \eta F_Q, \quad F_Q = f_1 + f_2 + 2(1 + \eta) f_3, \quad (4)$$

$$F_M = -(1 + \eta)^{-1/2} f_2,$$

$$\eta = \frac{q^2}{4\kappa^2}, \quad \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_0 = \frac{\alpha^2 \cos^2 \vartheta/2}{4k_0^2 \sin^4 \vartheta/2 \left(1 + \frac{2k_0}{\kappa} \sin^2 \vartheta/2 \right)},$$

ϑ — угол между k и k' .

При $s = 0$ и $f_4 = 0$ формула (3) совпадает с соответствующим выражением для дифференциального сечения из работы [5, 6].

Из полученной формулы следует, что интерференционные члены $f_1 f_4$, $f_2 f_4$ и $f_3 f_4$ отсутствуют в неполяризованном сечении, а входят лишь в поляризационную поправку. Таким образом, мы приходим к следующим двум экспериментальным возможностям поиска АМ дейтрона в рассматриваемом процессе. В первом случае необходимо измерение поляризации дейтрона отдачи в плоскости реакции. При этом формулу для сечения легко получить из (3) заменой $p' \leftrightarrow p''$, $s' \rightarrow s''$, где s' и s'' — 4-векторы поляризации дейтрона.

Вторая возможность связана с измерением асимметрии углового распределения электронов, рассеянных на дейтроне, поляризованном в плоскости реакции. Нетрудно дать примерную оценку величины этой асимметрии. Положим, что вектор поляризации дейтрона направлен под углом α к вектору k , степень поляризации пусть равна s , тогда из (3) и (4) получаем

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} / \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_0 = A + B \operatorname{tg}^2 \vartheta/2 - 18s\eta (D \cos \alpha + C \sin \alpha) f_4,$$

$$D = 2 \left[\lambda + \rho f_2 \left(1 + \frac{\alpha}{k_0} \right) \operatorname{tg}^2 \vartheta/2 \right],$$

$$C = \left[\lambda \left(1 + \frac{k_0}{\alpha} \right) - f_2 \frac{\alpha}{k_0} \rho \right] \operatorname{tg}^2 \vartheta/2, \quad (5)$$

$$\lambda = \left(1 + \frac{k_0'}{k_0} \right) [(1 + \eta) f_1 + \eta f_2 - 2\eta(1 + \eta) f_3],$$

$$\rho = \eta(\eta - 1) - \frac{(k_0 + k_0')^2}{4\alpha^2}.$$

Согласно данным, приведенным в [3], при $\eta = 0,2$ формфактор АМ протона $f_4^P(\eta)$ меньше 10^{-2} . Предполагая, что АМ нейтрона $f_4^N(\eta) \leq f_4^P(\eta)$, находим для асимметрии

$$R \leq -10^{-2} \{0,45 \cos \alpha + 0,08 \sin \alpha\}. \quad (6)$$

Отсюда видно, что асимметрия при дейтроне, поляризованном вдоль k , почти на порядок превышает асимметрию в случае поляризации дейтрона под углом $\pi/2$ к вектору k .

Согласно (5), асимметрия должна расти с ростом η , если f_4 не слишком быстро убывает при увеличении η . Поэтому обнаружить указанную асимметрию значительно легче при больших импульсах передачи.

Более реалистическая оценка формфактора АМ дейтрона на основе релятивистской модели дейтрон-нуклонной вершины позволила бы на основе экспериментальных границ АМ дейтрона и протона судить об АМ нейтрона.

Литература

1. Зельдович Я. Б. ЖЭТФ, **33**, 1531, 1957.
2. Зельдович Я. Б., Переломов А. М. ЖЭТФ, **39**, 1115, 1960.
3. Margolis V., Robertson D. Nuovo Cim., **51**, 736, 1964.
4. Борков А. В., Никитин Ю. П., Терентьев М. В. ЖЭТФ, **46**, 2202, 1964.
5. Glaser V., Jaksič V. Nuovo Cim., **5**, 1197, 1957.
6. Gourdin M. Nuovo Cim., **28**, 533, 1963.

Институт физики АН БССР

Поступило в редакцию 12.I 1970

ХРОНІКА

ГАДАВЫ АГУЛЬНЫ СХОД АКАДЭМІІ НАВУК БССР

18—19 сакавіка 1970 г. адбыўся Гадавы агульны сход Акадэміі навук БССР. 18 сакавіка на пасяджэннях агульных сходаў аддзяленняў былі заслуханы і абмеркаваны даклады акадэмікаў-сакратароў аддзяленняў аб важнейшых выніках работы за 1969 г.

19 сакавіка Гадавы агульны сход АН БССР адкрыў прэзідэнт АН БССР акадэмік АН БССР М. А. Барысевіч.

Ва ўступным слове тав. Барысевіч сказаў, што ў 1969 годзе, годзе падрыхтоўкі да гістарычнай падзеі — 100-годдзя з дня нараджэння У. І. Леніна, — вучоныя Акадэміі працавалі з вялікім творчым натхненнем, дасягнулі значных поспехаў. М. А. Барысевіч адзначыў, што многія акадэмічныя ўстановы сталі вядучымі ў краіне па распрацоўваемых праблемах.

З дакладам «Аб навуковай і навукова-арганізацыйнай дзейнасці Акадэміі навук БССР у 1969 г.» выступіў галоўны вучоны сакратар Прэзідыума АН БССР член-карэспандэнт АН БССР А. С. Махнач. Докладчык паведаміў, што ў 1969 г. навуковыя ўстановы АН БССР вялі даследаванні па важнейшых навукова-тэхнічных праблемах, праблемах у галіне прыродазнаўчых і грамадскіх навук, а таксама праводзілі работу па практычнай рэалізацыі рэзультатаў фундаментальных даследаванняў. У докладе былі адзначаны найбольш істотныя рэзультаты навуковых даследаванняў, атрыманых ўстановамі Акадэміі навук БССР.

У галіне матэматыкі атрыманы важныя прынцыпова новыя рэзультаты па класіфікацыі нелінейных ураўненняў, а таксама вельмі дакладныя прыбліжэнняў да алгебраічных лікаў, дадзена новае дастасаванне метаду трыганаметрычных сум да метрычнай тэорыі дыяфантавых прыбліжэнняў, апісаны ўласцівасці інварыянтных радоў вырашальных матрычных груп. Вялікая работа выканана Інстытутам матэматыкі сумесна з Мінскім практным бюро завода імя Арджанікідзе па распрацоўцы, стварэнню і ўкараненню матэматычнага забеспячэння ЭВМ серыі «Мінск».

Працягвалася паспяховае развіццё навуковых даследаванняў па асноўных напрамках фізікі і фізіка-тэхнічных навук.

Створана тэорыя нестацыянарнай генерацыі складаных малекул і распрацаван метады значнага павышэння магутнасці і ка-

эфіцыента карыснага дзеяння аптычных квантавых генератараў.

Распрацаваны метады і апаратура атрымання маналітных полікрышталічных вырабаў заданай формы са звышшвёргага матэрыялу — баразону.

Атрыманы новыя даныя аб развіцці дэфармацыі на пачатковай стадыі пластычнага цяжэння і аб кінетыцы ўтварэння двайнікоў пры розных схемах напружанага стану і ўмовах дэфармавання.

Вывучана тэмпературнае выпраменьванне метаду ў працэсе стомленасці, што прывяло да важнага вываду, які дазваляе па характару выпраменьвання прадказваць наступленне разбурэння металу, падвергнутага знакаменным нагрузкам.

У галіне ядзернай фізікі і энергетыкі дадзена рашэнне задач рэлятывісцкай кінематыкі, якія звязаны з апісаннем спінавых станаў сістэмы дзвюх часцінак. Распрацаван навукова абгрунтаваны перадэскізны праект энергетычнай устаноўкі з газаахладжаемым ядзерным рэактарам на хуткіх нейтронах з дысацыіруючым цепланосбітам цеплавой магутнасцю 30 тыс. кВт.

У галіне даследавання працэсу пераносу ў рухаючыхся рэалагічных сістэмах для выпадку ступеннага рэалагічнага закону выкананы разлікі канвектыўнага масапераносу пры абцяганні сферы вадкасцямі пры руху ў круглай трубе. Даследаванні па электра-рэалогіі прывялі да стварэння некалькіх новых рэцэптур электравязкіх дысперсных сістэм, што дало магчымасць атрымаць павелічэнне ўяўнай вязкасці ў 500—1000 разоў.

Знойдзена рашэнне сістэмы ўраўненняў пагранічнага слоя ва ўмовах хімічнай раўнавагі з улікам вонкавага і ўнутранага нестацыянарнага цепла- і масаабмену, што асабліва важна для разлікаў працэсаў і апаратаў хімічнай прамысловасці.

Дасягнуты поспехі ў атрыманні тонкіх металапалімерных пакрыццяў і плёнак. Распрацаван спосаб атрымання звыштонкіх металапалімерных пакрыццяў, у якіх метал і палімер могуць знаходзіцца як у выглядзе фізічнай кампазіцыі, так і ў форме металаарганічных злучэнняў. Створаны і адпрацаваны практычныя рэкамендацыі па тэхналогіі атрымання новых антыфрыкцыйных матэрыялаў з высокімі трываласцямі, цеплафізічнымі і антыфрыкцыйнымі ўласцівасцямі.

Рад важных рэзультатаў атрыманы ў галіне аўтаматызацыі інжынернай працы пры праектаванні і канструяванні дэталей машын, механізмаў.

Да важнейшых рэзультатаў даследаванняў у галіне навук аб Зямлі належаць новыя даныя па геахіміі гіпергенезу і асадкавага літагенезу. Выяўлены вызначаючы ўплыў арганічнага рэчыва на гіпергенную міграцыю элементаў і мінералаўтварэнне ва ўмовах гуміднага клімату, упершыню ахарактарызаваны геахімічныя, біягеахімічныя і гідрагеахімічныя правінцыі тэрыторыі Беларусі. Атрыманы таксама новыя важныя рэзультаты па нафтамоснасці і металаноснасці БССР, стратыграфіі і палеагеаграфіі антрапагену і геатэрміі глыбінных зон.

Інстытутам торфу ў справаздачным годзе завершаны работы па ўдакладненню гарфянога фонду Беларускай часткі Палесся.

Рад важных рэзультатаў атрыманы вучонымі-хімікамі ў галіне тэорыі хімічнай будовы, рэакцыйнай здольнасці і каталізу. Завершаны комплексныя даследаванні алюмаплацінавых каталізатараў рэфарміну тафты. Устаноўлена, што сульфат алюмінію тадаўляе каталітычную актыўнасць алюмаплацінавага каталізатара. Паказана магчымасць рэгенерацыі інактывіраванага такім тыпам каталізатара вадародам.

Сінтэзаваны новыя азотзмяшчаючыя гетэрацыклічныя злучэнні, фармакалагічныя выпрабаванні якіх паказалі, што яны валодаюць эфектыўным К-халіналітычным дзеяннем.

Распрацаваны новы метад рэгенерацыі оцна завугляроджаных цэалітных каталізатараў, які заснаваны на ўвядзенні ў зону рэакцыі перакісу вадароду. Метад дазваляе атоўнасцю аднавіць сарбцыйныя і каталітычныя ўласцівасці каталізатара без прыкметнага разбурэння крышталічнай структуры.

Сумесна з Беларускай тэхналагічным інстытутам імя С. М. Кірава распрацаваны «сухі» сарбцыйны спосаб улаўлівання каштоўных ахдодаў сернакіслай вытворчасці—эдуру, селену, мыш'яку, які дазваляе прасціць тэхналогію ачысткі абпальных газаў.

Важныя даследаванні выкананы ў Адазьяленні біялагічных навук.

Вывучаны ахоўны эфект новых радыяхоўных індэнавых прэпаратаў супраць паркоджваючага дзеяння на спадчыныя структуры.

Атрыманы новыя даныя, якія пацвяржаюць меркаванне аб тым, што эфект канцэрагена праяўляецца як у змяненні генаў у клеткі-мішэні (ператварэнне нармальнай клеткі ў ракавую), так і ў падаўленні актыўнасці сістэмы, якая падтрымлівае гетычны гомеастаз арганізма (імунітэту). Гэта мае важнае значэнне для разумення механізма канцэрагенезу.

У галіне нейрафізіялогіі, вышэйшай нервовай дзейнасці і кортыка-вісцэральных земаадносін завершан цыкл даследаванняў нейрагумаральных механізмаў розных кладаных ланцуговых вісцэральных рэак-

цый арганізма. Атрыманыя рэзультаты ўносяць істотныя змены ў разуменне механізмаў розных вісцэральных рэакцый арганізма, якія разглядаліся раней як простыя рэфлексы.

У галіне фотасінтэзу выяўлены асноўныя заканамернасці першаснага функцыянавання рэакцыйных цэнтраў біясінтэзу хларафілу ў пастэтыяліраваных праростках.

Атрыманы рад важных рэзультатаў і па іншых напрамках біялагічнай навукі, такіх, як біяфізіка і радыебіялогія, фізіялогія і біяхімія мікраарганізмаў і раслін, фізіялогія чалавека і жывёлы і г. д.

Заслугоўваюць увагі даследаванні па выяўленню геаграфічнай распаўсюджанасці рачных баброў у Беларусі, па вывучэнню дынамікі лясной і лугавой расліннасці ў сувязі са змяненнем воднага рэжыму тэрыторыі ў выніку меліярацыі лясоў, лугоў і іншых угоддзяў, па ацэнцы ўплыву асушальнай меліярацыі на раўнавагу экалагічнай сістэмы на балотах і прылягаючых сухадлозах Палесся, па метадах селекцыі новых перспектыўных форм кветкава-дэкарэтыўных раслін.

У дзейнасці інстытутаў Адазьялення грамадскіх навук вялікая ўвага была ўдзелена распрацоўцы ленинскай тэарэтычнай спадчыны, падрыхтоўцы мерапрыемстваў, звязаных са стагоддзем з дня нараджэння У. І. Леніна. Выдадзены, знаходзіцца ў друку і падрыхтаваны рад навуковых прац, якія прысвечаны ленинскаму юбілею. Сярод іх манаграфіі: «Праблемы гуманізму ў працах У. І. Леніна», «Ленін і літаратура», «Руска-беларускі слоўнік грамадска-палітычнай тэрміналогіі» і інш.

Атрыманы новыя рэзультаты па тэмах: «Філасофская думка ў Беларусі ў эпоху станаўлення і развіцця капіталізму», «Этнаграфічнае вивучэнне Беларусі ў савецкі перыяд», «Праблемы прававога рэгулявання вытворча-гаспадарчай дзейнасці прамысловых прадпрыемстваў» і інш.

Падрыхтаваны рад манаграфій па актуальных пытаннях: «Рост матэрыяльнага дабрабыту і культуры беларускага народа», «Крыніцы і тэмпы назаплення ў калгасах», «Вартасць ва ўмовах сацыялізма», «Сацыяльна-эканамічныя пераўтварэнні ў Беларускай ССР за гады Савецкай улады», «Беларуская драматургія ў тэатрах народаў СССР», «Беларускае кіно», «Фальклорныя традыцыі ў беларускай дакастрычніцкай паззіі» і інш.

Асабліваасцю работы ўстаноў Акадэміі навук БССР у юбілейным годзе з'яўляецца іх больш цесная сувязь з вытворчасцю. Разам з павышэннем навукова-тэарэтычнага ўзроўню даследаванняў вучоных Акадэміі навук імкнуцца хутчэй выкарыстоўваць рэзультаты навуковых даследаванняў у практыцы гаспадарчага і культурнага будаўніцтва. Адной з форм сувязі навукова-даследчых устаноў Акадэміі навук з вытворчасцю з'яўляюцца гаспадарчыя дагаворы. За 1969 г. устаноўмі АН БССР было распрацавана гаспадарча-дагаворных тэм на суму 5776,9 тыс. руб. пры плане 4276,0 тыс. руб.

Павелічэнне аб'ёму работ па гаспадарча-дагаворнай тэматыцы ў 1969 г. у параўнанні з папярэднім годам складае 1295 тыс. руб. Асноўны аб'ём гаспадарча-дагаворных работ выканалі ўстановы аддзяленняў фізіка-тэхнічных і фізіка-матэматычных навук.

У Інстытуце матэматыкі праводзіліся разлікі на ЭВМ для рада прадпрыемстваў і ўстаноў, а таксама ўкараненне матэматычнага забеспячэння ЭВМ мінскай серыі.

У Інстытуце фізікі праводзіліся даследаванні па стварэнню крыніцы ўзбуджэння для эмісійнага спектральнага аналізу з прымяненнем АКГ у рэжыме свабоднай генерацыі. Распрацаван, зроблен і выпрабаван чатырохканальны спектрометр на інтэрферэнцыйных светафільтрах у інфрачырвонай вобласці, які дазваляе вызначаць сапраўдныя тэмпературы нагрэтых цел з невядомымі каэфіцыентамі чарнаты.

У Інстытуце цепла- і масаабмену распрацавана і зроблена новая канвеерная сушыльная ўстаноўка СКПР-ИЛ, якая прызначана для сушкі рознай тэкстыльнай сыравіны — ільнотрасты, бавоўны, шэрсці. Эканамічная эфектыўнасць прымянення ўстаноўкі адмоўлена паляпшэннем якасці сушкі і павелічэннем выхаду доўгага валакна льнотрасты. Распрацавана і выпрабавана доследна-прамысловая ўстаноўка для атрымання вокіслаў азоту ў плазмавых струменях, ўкараненне якой абяцае вялікі эканамічны эфект.

Рад каштоўных навуковых дасягненняў ўкаранён у народную гаспадарку Фізіка-тэхнічным інстытутам. Гэта метады гарачага гідрадынамічнага выціскання для вырабу канцавога рэжучага інструменту, метады пластычнай дэфармацыі пры вырабе шліцавых валоў і матрыц і рад іншых работ.

Паспяхова прымяняюцца на прадпрыемствах краіны распрацоўкі Інстытута тэхнічнай кібернетыкі. Гэта галіновы стандарт для разліку зубчастых і чарвячных перадач для ЭЛВМ, метады аўтаматызацыі праектавання рэжучага і вымяральнага інструмента з дапамогай ЭЛВМ «Мінск-22».

Атрыман вялікі эканамічны эфект ад ўкаранення ў прамысловасць распрацовак Інстытута механікі металапалімерных сістэм. Палепшылі сувязі з вытворчасцю інстытуты хімічнага профілю.

Штогод Акадэмія навук прадстаўляе на разгляд Дзяржаўнага Камітэта Савета Міністраў СССР па навуцы і тэхніцы і Савета Міністраў БССР прапановы па завершаных навукова-даследчых работах, якія маюць важнае народнагаспадарчае значэнне. Па выніках навуковых даследаванняў 1968 г. было прадстаўлена 28 прапаноў. Пяць з іх, найбольш важных для народнай гаспадаркі, рэкамендаваны адпаведным міністэрствам для ўключэння ў план ўкаранення новай тэхнікі на 1970 г.

Па выніках 1969 г. навуковыя ўстановы АН БССР унеслі 27 прапаноў аб выкарыстанні ў народнай гаспадарцы рэзультатаў навуковых даследаванняў, 20 з якіх перададзены ў АН СССР і Камітэт СМ СССР па навуцы і тэхніцы.

За мінулы год значна палепшылася патэнтна-ліцэнзійная работа. У Камітэт па справах вынаходніцтваў і адкрыццяў пры Саўеце Міністраў СССР пададзена 349 заявак на мяркуемыя вынаходніцтвы і тры заяўкі на адкрыцці, атрымана 126 аўтарскіх пасведчанняў больш, чым у 1968 г.

Добрых рэзультатаў у вынаходніцкай і патэнтнай рабоце дабіліся Інстытут механікі металапалімерных сістэм, Інстытут цепла- і масаабмену, Інстытут тэхнічнай кібернетыкі. Навуковыя ўстановы АН БССР у 1969 г. атрымалі дзевяць патэнтаў на вынаходніцтва з розных краін. Падрыхтаваны і накіраваны ў Камітэт па справах вынаходніцтваў і адкрыццяў пры Саўеце Міністраў СССР матэрыялы на 14 вынаходніцтваў для патэнтавання за граніцай і на 16 вынаходніцтваў для продажу ліцэнзій.

У 1969 г. навуковымі ўстановамі АН БССР апублікавана каля 70 манаграфій, 30 зборнікаў, 20 брашур, 2000 навуковых артыкулаў. Вялікі аб'ём апублікаванай навуковай прадукцыі сведчыць аб разнастайнай і плённай дзейнасці навуковых устаноў АН БССР. Выдавецтва «Навука і тэхніка» ў 1969 г. выканала план выданняў па колькасці назваў на 105,5%, па аб'ёму друкаванай прадукцыі ва ўчотна-выдавецкіх аркушах на 99,7%. Вялікая ўвага ўдзялялася падрыхтоўцы выданняў да 100-годдзя з дня нараджэння У. І. Леніна. У 1969 г. АН БССР выдала 11 перыядычных часопісаў, у якіх апублікавана звыш 2000 навуковых артыкулаў і паведамленняў. Палепшылася агульная культура выданняў, у радзе часопісаў скарочан тэрмін праходжання рукапісаў.

Вялікую работу ў 1969 г. выканаў калектыў Беларускай Савецкай Энцыклапедыі. У снежні выйшаў у свет першы том БелСЭ, падрыхтаван рукапіс другога тома.

Дзеючы фонд фундаментальнай бібліятэкі АН БССР складае 1252939 друк. адз., з іх 330347 адз. замежных выданняў. Фонды бібліятэкі ў 1969 г. павялічыліся на 79786 друк. адз., з іх 21478 замежных выданняў. Вядзецца кнігаабмен з многімі бібліятэкамі Савецкага Саюза і замежных краін.

Вялікая ўвага ўдзялялася прапагандзе за мяжой дасягненняў савецкай навукі і поспехаў камуністычнага будаўніцтва. У справаздачным годзе за мяжу выязджала 90 навуковых супрацоўнікаў, з іх 45 у сацыялістычныя краіны, 46 вучоных АН БССР прынялі ўдзел у 33 міжнародных і нацыянальных навуковых мерапрыемствах за мяжой. АН БССР наведалі 344 вучоных і спецыялістаў з замежных краін.

У 1969 г. АН БССР ажыццяўляла каардынацыю навукова-даследчых работ у рэспубліцы па 33 важнейшых праблемах. Дзейнасць Савета па каардынацыі была накіравана на актывізацыю работы навуковых саветаў па праблемах, умацаванне сувязей з навукова-даследчымі ўстановамі краіны, вуні і навуковымі ўстановамі рэспублікі. У 1969 г. у АН БССР працавала 30 навуковых савец-

таў па праблемах прыродазнаўчых і грамадскіх навук. У снежні 1969 г. была праведзена XIV сесія Савета па каардынацыі навуковай дзейнасці, на якой быў абмеркаван п'яцігадовы план навукова-даследчых работ у галіне прыродазнаўчых і грамадскіх навук Беларускай ССР на 1971—1975 гг., а таксама некаторыя арганізацыйныя пытанні.

На 1 студзеня 1970 г. ва ўстановах АН БССР працавала 7996 чалавек, з іх навуковых супрацоўнікаў 3065, у іх ліку 107 дактароў навук і 814 кандыдатаў навук. У параўнанні з 1968 г. колькасць дактароў навук павялічылася на 17 чалавек, кандыдатаў навук — на 94, навуковых супрацоўнікаў — на 248, агульная колькасць супрацоўнікаў — на 1115 чалавек. У саставе АН БССР 58 акадэмікаў і 53 члены-карэспандэнты, з якіх на штатных пасадах у акадэмічных установах працуюць 34 акадэмікі, (58,6%) і 26 членаў-карэспандэнтаў (45%). У 1969 г. закончылі навучанне 189 аспірантаў, у тым ліку 121 з адрывам і 68 без адрыву ад вытворчасці. З іх толькі 19 закончылі з абаронай дысертацыі (10%), 68 (36%) падрыхтавалі дысертацыі да абароны і 102 аспіранты (54%) выключаны пасля заканчэння тэрміну навучання. У 1969 г. кандыдацкія дысертацыі абаранілі 153 чалавекі, доктарскія — 19. План набору аспірантаў у 1969 г. выканан на 104,4%. Прынята ў аспірантуру 237 чалавек (пры плане 225), у тым ліку з адрывам ад вытворчасці 136 чалавек (пры плане 142), без адрыву ад вытворчасці 101 чалавек (пры плане 83).

Член-карэспандэнт АН БССР А. С. Махнач спыніўся ў сваім дакладзе на пытаннях забеспячэння навуковых даследаванняў. Рост асігнаванняў на 1969 г. у параўнанні з 1968 г. па агульнай суме павялічыўся на 8,3%, у тым ліку па бюджэту на 12,2%. У 1969 г. навуковыя ўстановы выкарысталі права выканання работ па гаспадарчых дагаворах звыш устаноўленага планам аб'ёму. Гэта дазволіла ў цэлым па АН БССР выка-

наць аб'ём гаспадарча-дагаворных работ на 134,8% да плана. Фактычна аб'ём гаспадарча-дагаворных работ у адносінах да агульнага аб'ёму склаў 30,6%. План капітальнага будаўніцтва выканан на 91%, будаўнічымантажных работ — на 96%. У 1969 г. праведзена работа па далейшаму ўмацаванню матэрыяльна-тэхнічнай базы навуковых устаноў АН БССР, больш поўнаму выкарыстанню наяўнага абсталявання і прылад.

Запросы інстытутаў АН БССР па лініі вытворчага эксперыментавання, стварэння і ўкаранення новай тэхнікі ў народную гаспадарку ў 1969 г. забяспечвалі СКБ Інстытута цепла- і масаабмену, СКБ Інстытута механікі металапалімерных сістэм, доследны завод Інстытута цепла- і масаабмену, Біялагічная доследная станцыя, эксперыментальная база «Дукора».

У заключэнне член-карэспандэнт А. С. Махнач адзначыў, што ў Акадэміі прароблена вялікая навукова-арганізацыйная работа. Аднак па-ранейшаму ёсць шмат нявырашаных пытанняў. Прэзідыум АН БССР ажыццявіў рад мер па ўстараненню недахопаў, але прадбачыцца яшчэ вельмі вялікая работа: неабходна ўдасканаліваць структуру навуковых устаноў, павышаць узровень навуковых даследаванняў і г. д.

У абмеркаванні справаздачы аб навуковай дзейнасці АН БССР за 1969 г., а таксама даклада Галоўнага вучонага сакратара Прэзідыума прынялі ўдзел акадэмікі АН БССР А. Н. Сеўчанка, М. А. Дарожкін, Б. В. Ерафееў, П. П. Рагавой, М. В. Турбін, Я. Р. Канавалаў, І. С. Краўчанка, М. С. Казлоў, Г. В. Багамолаў, М. В. Смольскі, члены-карэспандэнты АН БССР К. П. Буслаў, В. М. Трэер, Л. В. Валадзько.

Гадавы агульны сход прыняў настанаву, у якой адобрыў справаздачу аб навуковай дзейнасці Акадэміі навук БССР за 1969 г.

Л. М. ГАРДЗІЕНКА,
П. З. ЕРМАКОЎ

ЮБІЛЕЙНАЯ СЕСІЯ АКАДЭМІІ НАВУК БССР

Працоўныя Савецкага Саюза ўрачыста адзначылі знамянальную дату — 100-годдзе з дня нараджэння Уладзіміра Ільіча Леніна, найвялікшага рэвалюцыянера, заснавальніка Камуністычнай партыі Савецкага Саюза і Савецкай дзяржавы, правадыра сусветнага пралетарыяту, геніяльнага мысліцеля і вучонага.

Гэтай знамянальнай падзеі ў жыцці савецкіх людзей і ўсяго прагрэсіўнага чалавечтва была прысвечана юбілейная сесія Агульнага сходу Акадэміі навук БССР, якая адбылася 16 красавіка 1970 г. у вялікай канферэнц-зале Акадэміі. Сесію адкрыў прэзідэнт АН БССР акадэмік АН БССР М. А. Барысевіч. Сваё выступленне ён прысвяціў У. І. Леніну.

Гісторыя не ведае другога чалавек, з імем якога звязаны такія велізарныя прагрэсіўныя пераўтварэнні ва ўсім сусветным сацыяльным працэсе. Ленін быў вялікім

вучоным у рэвалюцыі і рэвалюцыянерам у навуцы, які адкрыў новы этап у развіцці марксісцкай тэорыі, узбагаціў усе састаўныя часткі марксізма — філасофію, палітычную эканомію і навуковы камунізм. Ён даў бліскучы прыклад прымянення перадавой тэорыі да вырашэння практычных задач перабудовы свету.

Ленін — першы мысліцель веку, які ў дасягненнях сучаснага яму прыродазнаўства ўбачыў пачатак грандыёзнай навуковай рэвалюцыі. Выказаная ім думка аб невычарпальнасці матэрыі стала агульным прынцыпам прыродазнаўча-навуковага пазнання.

Ленін указаў на першараднае значэнне навукі для будаўніцтва камуністычнага грамадства, на неаддзельнасць навукі, тэхнічнага прагрэсу, культуры ад камунізма.

Па ініцыятыве Леніна і пад яго кіраўніцтвам ужо ў першыя гады Савецкай ула-

ды быў прынят рад важнейшых рашэнняў, накіраваных на станаўленне і развіццё маладой савецкай навукі.

Цяпер у Савецкім Саюзе існуе шырокая сетка навуковых устаноў. Толькі ў сістэме Акадэміі навук СССР налічваецца больш 200 арганізацый. У кожнай саюзнай рэспубліцы створаны нацыянальныя акадэміі. У Беларусі працуе 173 навуковыя ўстановы, у тым ліку Акадэмія навук з 29 арганізацыямі, 2 універсітэты, рад галіновых навукова-даследчых інстытутаў. У гэтых арганізацыях працуе звыш 20 тысяч чалавек, у тым ліку каля 6 тысяч дактароў і кандыдатаў навук.

На сесіі выступілі член-карэспандэнт АН БССР К. П. Буслаў з дакладам «Ленінізм і сучаснасць», акадэмік АН БССР Ф. І. Фёдараў — «У. І. Ленін і сучасная фізіка», доктар эканамічных навук А. С. Сітнікаў — «У. І. Ленін і навукова-тэхнічны прагрэс».

Адбыліся таксама юбілейныя навуковыя сесіі аддзяленняў АН БССР.

На сесіі Аддзялення грамадскіх навук былі заслуханы даклады акадэміка АН БССР І. С. Краўчанкі «Ленінскае вучэнне аб Камуністычнай партыі», доктара філасофскіх навук Г. П. Давідзюка «У. І. Ленін аб дзвюх ідэалогіях», кандыдата мастацтвазнаўства А. В. Сабалеўскага «Вобраз У. І. Леніна ў беларускім мастацтве», доктара філалагічных навук Н. С. Перкіна «Ленінскія прынцыпы інтэрнацыяналізму і беларуская савецкая літаратура», кандыдата філалагічных навук М. Р. Судніка «Тэарэтычная спадчына У. І. Леніна і праблемы мовазнаўства».

Агульны сход Аддзялення фізіка-матэматычных навук заслухаў даклады члена-карэспандэнта АН БССР К. І. Шабуні «Ленінскі этап у развіцці марксізма», акадэмі-

ка АН БССР М. А. Ельяшэвіча «У. І. Ленін і развіццё сучаснай фізікі», члена-карэспандэнта АН БССР У. Г. Спрынджука «Матэматыка і рэчаіснасць у святле ленінскіх ідэй».

На юбілейным сходзе Аддзялення фізіка-тэхнічных навук выступілі акадэмік АН БССР І. С. Краўчанка з дакладам «Міжнароднае значэнне ленінскага вучэння аб Камуністычнай партыі», акадэмік АН БССР А. К. Красін — «У. І. Ленін і савецкая энергетыка», член-карэспандэнт АН БССР Г. К. Гаранскі — «Кібернетыка і сацыяльны прагрэс у святле ленінскага вучэння», акадэмік АН БССР В. П. Севярдзенка — «Развіццё машынабудавання ў Беларусі — адзін з этапаў ажыццяўлення ленінскага плана індустрыялізацыі краіны».

На навуковай юбілейнай сесіі Аддзялення хімічных навук былі заслуханы даклады кандыдата філасофскіх навук Д. І. Шыраканова — «Ленінская тэорыя адлюстравання і яе значэнне для развіцця прыродазнаўства», акадэміка АН БССР К. І. Лукашова — «У. І. Ленін аб выкарыстанні і ахове рэсурсаў прыроды», акадэміка АН БССР М. С. Казлова — «У. І. Ленін і навукова-тэхнічны прагрэс».

На навуковай юбілейнай сесіі Аддзялення біялагічных навук былі заслуханы даклады кандыдата філасофскіх навук А. І. Філокова — «Ленінская філасофская спадчына і сучаснае прыродазнаўства», акадэміка АН БССР П. Ф. Ракіцкага — «Філасофская спадчына У. І. Леніна і развіццё сучаснай біялогіі», акадэміка АН БССР А. С. Вечара — «Ленінскія ідэі і навукова-тэхнічная рэвалюцыя ў біяхіміі», члена-карэспандэнта АН БССР М. І. Арынчына — «Ленінская тэорыя развіцця і эвалюцыя жывёльнага свету».

І. У. САКЕВІЧ

СЕСІЯ АГУЛЬНАГА СХОДУ АКАДЭМІІ НАВУК БССР

17 красавіка 1970 г. на сесіі Агульнага сходу Акадэміі навук БССР адбыліся давыбары акадэмікаў і членаў-карэспандэнтаў АН БССР.

АКАДЭМІКАМІ АН БССР ВЫБРАНЫ:

1. Ахрэм Афанасій Андрэевіч — па спецыяльнасці хімія прыродных злучэнняў.
2. Махнач Аляксандр Сямёнавіч — па спецыяльнасці геалогія.
3. Паушкін Яраслаў Міхайлавіч — па спецыяльнасці нафтахімічны аналіз.

ЧЛЕНАМІ-КАРЭСПАНДЭНТАМІ АН БССР ВЫБРАНЫ:

1. Амбросаў Антон Лаўрэнцьевіч — па спецыяльнасці вірусалогія.
2. Борматаў Усевалад Яўстаф'евіч — па спецыяльнасці генетыка.

3. Гурыновіч Георгій Паўлавіч — па спецыяльнасці оптыка.
4. Камароў Уладзімір Сямёнавіч — па спецыяльнасці калодная хімія.
5. Суднік Міхаіл Раманавіч — па спецыяльнасці беларускае мовазнаўства.
6. Шашкоў Анатоль Герасімавіч — па спецыяльнасці цеплафізіка.

Выбраных акадэмікаў і членаў-карэспандэнтаў АН БССР сардэчна павіншавалі прэзідэнт АН БССР акадэмік М. А. Барысевіч і Агульны сход АН БССР.

У рабоце сесіі прынялі ўдзел загадчык аддзела ЦК КПБ А. Ц. Караткевіч, загадчык аддзела Савета Міністраў БССР Я. К. Каспяровіч, намеснік вучонага сакратара Савета па каардынацыі навуковай дзейнасці акадэміі навук саюзных рэспублік Прэзідыума АН СССР У. М. Дваранаў.

І. У. САКЕВІЧ

ЗМЕСТ

МАТЭМАТЫКА

И. П. Докторов. Конечные группы с π -специальными подгруппами	5
Э. М. Пальчик. О максимальных подгруппах конечных групп	11
Н. Г. Дука, Т. Т. Огарков. Конечные группы с p -субнормальными подгруппами	17
М. И. Кравчук. О признаках разрешимости конечных групп	25
А. З. Самуйлов, А. И. Яблонский. О рациональных решениях нелинейного дифференциального уравнения первого порядка	30
Э. И. Грудо. О решениях периодической системы уравнений в полных дифференциалах	35
А. К. Покало. Аппроксимативные свойства производных и интегралов в смысле Вейля линейных средних	45
Я. В. Константинова. О сходимости и устойчивости многослойного и многостолбцового разностного правила решения уравнения теплопроводности	50
В. А. Басик. Об одной схеме метода матричной прогонки в случае многомерных разностных уравнений	55
В. В. Бобков, В. А. Шкель. Одношаговые правила приближенного решения задачи Коши для уравнения $y' = f(x, y)$ по значениям правой части уравнения и производных от нее	60
Э. М. Шац. Об одной наилучшей кубатурной формуле, содержащей частные производные от функции	68
В. С. Кричевич. Оценки эффективности методов сортировки	73

ФІЗІКА

Ф. И. Федоров, В. А. Плетюхов. Волновые уравнения с кратными представлениями группы Лоренца. Полуцелый спин	78
В. А. Плетюхов, Ф. И. Федоров. Волновое уравнение с кратными представлениями для частицы со спином 1	84
Е. Е. Тхарев. Описание фазовых сдвигов с помощью вектор-параметра	93
А. М. Самсон. Коэффициент усиления в предгенерационный период и пороговые условия генерации красителей с конечным временем нарастания импульса накачки	97
М. М. Аляхновіч. Аб залежнасці ўдзельнай інтэнсіўнасці адбіцця ад вугла расхадзімасці падаючага пучка для факсіруючых рэнтгенаўскіх манахраматараў	106
М. Я. Костка. Флуараметрычнае даследаванне спектральнай залежнасці затухання свячэння флуарэсценцыі	113

КАРОТКІЯ ПАВЕДАМЛЕННІ

Н. Н. Сирота, И. В. Боднар, Ц. З. Виткина. Период идентичности кристаллической решетки и магнитная восприимчивость сплавов фосфида галлия и арсенида индия	118
М. С. Цедрик, Л. Н. Марголин. Влияние условий выращивания на диэлектрические потери в монокристаллах триглицинсульфата	120
Л. Ф. Жирков, И. С. Сацункевич. Об анапольном моменте дейтрона	123

ХРОНІКА

Л. М. Гардзіенка, П. З. Ермакоў. Гадавы агульны сход Акадэміі навук БССР	126
І. У. Сакевіч. Юбілейная сесія Акадэміі навук БССР	129
І. У. Сакевіч. Сесія Агульнага сходу Акадэміі навук БССР	130

СОДЕРЖАНИЕ

МАТЕМАТИКА

И. П. Докторов. Конечные группы с π -специальными подгруппами	5
Э. М. Пальчик. О максимальных подгруппах конечных групп	11
Н. Г. Дука, Т. Т. Огарков. Конечные группы с p -субнормальными подгруппами	17
М. И. Кравчук. О признаках разрешимости конечных групп	25
А. З. Самуйлов, А. И. Яблонский. О рациональных решениях нелинейного дифференциального уравнения первого порядка	30
Э. И. Грудо. О решениях периодической системы уравнений в полных дифференциалах	35
А. К. Покало. Аппроксимативные свойства производных и интегралов в смысле Вейля линейных средних	45
Я. В. Константинова. О сходимости и устойчивости многослойного и много-столбцового разностного правила решения уравнения теплопроводности	50
В. А. Басик. Об одной схеме метода матричной прогонки в случае многомерных разностных уравнений	55
В. В. Бобков, В. А. Шкель. Одношаговые правила приближенного решения задачи Коши для уравнения $y' = f(x, y)$ по значениям правой части уравнения и производных от нее	60
Э. М. Шац. Об одной наилучшей кубатурной формуле, содержащей частные производные от функции	68
В. С. Криевич. Оценки эффективности методов сортировки	73

ФИЗИКА

Ф. И. Федоров, В. А. Плетюхов. Волновые уравнения с кратными представлениями группы Лоренца. Полуцелый спин	78
В. А. Плетюхов, Ф. И. Федоров. Волновое уравнение с кратными представлениями для частицы со спином 1	84
Е. Е. Тхарев. Описание фазовых сдвигов с помощью вектор-параметра	93
А. М. Самсон. Коэффициент усиления в предгенерационный период и пороговые условия генерации красителей с конечным временем нарастания импульса накачки	97
Н. М. Олехнович. О зависимости удельной интенсивности отражения от угла расходимости падающего пучка для фокусирующих рентгеновских монохроматоров	106
М. Я. Костко. Флуорометрическое исследование спектральной зависимости затухания свечения флуоресценции	113

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

Н. Н. Сирота, И. В. Боднар, Ц. З. Виткина. Период идентичности кристаллической решетки и магнитная восприимчивость сплавов фосфида галлия и арсенида индия	118
М. С. Цедрик, Л. Н. Марголин. Влияние условий выращивания на диэлектрические потери в монокристаллах триглицинсульфата	120
Л. Ф. Жирков, И. С. Саункевич. Об анапольном моменте дейтрона	123

ХРОНИКА

Л. М. Гордиенко, П. З. Ермаков. Годичное общее собрание Академии наук БССР	126
И. В. Сакевич. Юбилейная сессия Академии наук БССР	129
И. В. Сакевич. Сессия Общего собрания Академии наук БССР	130

АТ 03153. Зладзена ў набор 22/IV-70 г. Падпісана да друку 19/VI-70 г. Фармат 70×108^{1/16}. Друк. арк. 8,75. Ум. друк. арк. 12,25. Уч.-выд. арк. 12,0. Выд. зак. 1136. Друк. зак. 381. Цана 60 кап.

Друкарня імя Францыска (Георгія) Скарыны выдавецтва «Навука і тэхніка» АН БССР і Дзяржкамтэта СМ БССР па друку. Мінск, Ленінскі праспект, 68.

РЕФЕРАТЫ

УДК 519.44

Конечные группы с π -специальными подгруппами.

Докторов И. П. «Весті Акадэміі навук БССР», серия фізіка-матэматычных навук. 1970 г., № 3, 5—10.

Рассматриваются группы с π -специальными подгруппами. В теореме 1 показывается условие π -разрешимости группы с π -специальной максимальной подгруппой. Доказано несколько теорем о π -разрешимости некоторых классов факторизуемых групп с π -специальными факторами. В частности, показано, что конечная факторизуемая группа с помощью факторов A и B π -разрешима, если

1) A и B — π -специальные группы с π' -взаимно простыми порядками и если любая силовская π -подгруппа одного множителя перестановочна с каждой силовской π' -подгруппой другого множителя;

2) A — π -специальная группа, а B — дедекиндова при условии, если $AA_q^g = A_q^g A$ для всех $q \in \pi'$ и $g \in G$.

Кроме этого показаны критерий простоты группы, факторизуемой с помощью 2-разложимой и 2-специальной подгрупп и условия разрешимости группы, факторизуемой с помощью своих нильпотентной подгруппы и группы Шмидта.

Библиографий 16.

УДК 519.44

О максимальных подгруппах конечных групп.

Пальчик Э. М. «Весті Акадэміі навук БССР», серия фізіка-матэматычных навук. 1970 г., № 3, 11—16.

Рассматриваются только конечные группы. Группа называется p -замкнутой (p' -замкнутой), если в ней инвариантна силовская p -подгруппа (силовское p -дополнение). Группа Шмидта — минимальная ненильпотентная группа. Группа G называется pd -группой, если p делит порядок $|G|$ группы G . H_G — бэровское ядро подгруппы H в группе G .

Доказывается ряд результатов.

Пусть группа G обладает максимальной подгруппой с ядром C . Если каждая максимальная подгруппа с ядром C перестановочна со всеми p -замкнутыми pd -подгруппами Шмидта группы G , то группа G/C p -разрешима.

Пусть H — максимальная подгруппа группы G , надстроенная над p -силовской подгруппой G_p . Если H перестановочна со всеми pd -подгруппами Шмидта группы G , то группа H/H_G p -разложима, а G/H_G p -разрешима.

Библиографий 20.

УДК 519.44

Конечные группы с p -субнормальными подгруппами.

Дука Н. Г., Огарков Т. Т. «Весті Акадэміі навук БССР», серия фізіка-матэматычных навук. 1970 г., № 3, 17—24.

Подгруппа H группы G называется p -субнормальной в G (p — фиксированное простое число, делящее порядок группы G), если для любой силовской p -подгруппы P группы G пересечение $H \cap P$ есть силовская p -подгруппа группы H .

Изучается строение конечных групп, в которых i -е ($i=1, 2, 3, 4, 5$) максимальные подгруппы p -субнормальны.

Основные результаты следующие.

1. Если все четвертые максимальные подгруппы группы G 2-субнормальны в G , то группа G или разрешима или изоморфна одной из следующих групп: 1) $SL(2, p)$, $PSL(2, p)$, где $p = 5, 13$ или $\lambda(p \pm 1) = 3$ и $p \not\equiv \pm 1 \pmod{10}$; 2) $SL(2, 3^n)$, $PSL(2, 3^n)$, где $n > 2$ — простое число и $\lambda(3^n \pm 1) \leq 3$.

Здесь $\lambda(m)$ означает сумму показателей канонического разложения числа m .

2. Если в простой неабелевой группе G все пятые максимальные подгруппы 2-субнормальны, то группа G изоморфна $PSL(2, p^n)$ для подходящих p и n .

Библиографий 22.

УДК 519.44

О признаках разрешимости конечных групп. Кравчук М. И. «Весті Академії наук БССР», серия фізика-математичних наук. 1970 г., № 3, 25—29.

Исследуется строение определенных классов конечных групп, у которых пересечение некоторых пар максимальных подгрупп в каждой из них удовлетворяет нормализаторному условию.

Дается описание строения π -отделимой Γ^p -квазинильпотентной группы, если π содержит более одного простого делителя порядка группы.

Доказывается разрешимость группы,

- 1) у которой пересечение любых двух максимальных нильпотентных подгрупп удовлетворяет нормализаторному условию в каждой из них;

- 2) которая имеет по крайней мере одну максимальную нильпотентную подгруппу, и пересечение любой такой подгруппы с каждой максимальной нильпотентной подгруппой удовлетворяет нормализаторному условию в каждой из них.

Библиографий 8.

УДК 517.925.6

О рациональных решениях нелинейного дифференциального уравнения первого порядка. Самуйлов А. З., Яблонский А. И. «Весті Академії наук БССР», серия фізика-математичних наук. 1970 г., № 3, 30—34.

Для уравнения

$$y' = R_0(z) + R_1(z)y + \dots + R_n(z)y^n \quad (1)$$

с рациональными коэффициентами с помощью результатов РЖМат, 1966, 9Б225 устанавливается верхняя граница числа рациональных решений.

Указывается метод построения уравнения вида (1) с заданными рациональными решениями.

Изучаются рациональные решения уравнения

$$y' = R(z)y^3 + y^2 + R(z)y + 1,$$

к которому приводят некоторые геометрические проблемы (РЖМат, 1962, 12Б165).

Библиографий 5.

УДК 517.943.2

О решениях периодической системы уравнений в полных дифференциалах. Грудо Э. И. «Весті Академії наук БССР», серия фізика-математичних наук. 1970 г., № 3, 35—44.

Для вполне интегрируемой системы уравнений в полных дифференциалах

$$dx = \sum_{k=1}^m [A_k x + P_k(x, t_1, \dots, t_m)] dt_k, \quad (1)$$

где A_k — постоянные матрицы порядка $n \times n$, x и P_k — n -мерные вектор-столбцы, причем координаты P_k ($k=1, \dots, m$) являются голоморфными функциями координат вектора x в окрестности $x=0$, начинающимися с членов порядка выше первого и имеющими дифференцируемые периодические коэффициенты по t_1, \dots, t_m , строится обратимое формальное преобразование с периодическими коэффициентами, приводящее систему (1) к нормальной форме (вообще говоря, нелинейной). Если собственные значения одной из матриц A_k расположены с одной стороны прямой, проходящей через начало в комплексной плоскости, то указанное преобразование является голоморфным, а полученная с помощью этого преобразования нормальная форма интегрируется в элементарных функциях.

Если же существует $p < n$ собственных значений матрицы A_k , расположенных с одной стороны упомянутой прямой, то строится p -параметрическое семейство решений системы (1) в виде аналогичных сходящихся рядов.

Библиографий 3.

УДК 517.512.2

Аппроксимативные свойства производных и интегралов в смысле Вейля линейных средних. Покало А. К. «Весті Академії наук БССР», серія фізика-математичних наук. 1970 г., № 3, 45—49.

Выделяется главная часть уклонения производной (интеграла) Вейля непрерывной функции от производных (интегралов) Вейля обобщенных частных сумм ряда Фурье этой функции. Для производных Вейля изучаемых сумм указан порядок роста. Рассматриваются семейства сумм, осуществляющих приближение порядка наилучшего на некоторых классах непрерывных функций. Строится обобщение нормальных средних Зигмунда и сумм Бернштейна — Рогозинского.

Библиографий 8.

УДК 518 : 517.944/947

О сходимости и устойчивости многослойного и многостолбцового разностного правила решения уравнения теплопроводности. Константинова Я. В. «Весті Академії наук БССР», серія фізика-математичних наук. 1970 г., № 3, 50—54.

Рассматриваются явные многослойные и многостолбцовые схемы общего вида с произвольными действительными коэффициентами для решения задачи Коши в случае уравнения теплопроводности.

Доказана теорема сходимости сеточной функции к точному решению. Библиографий 2.

УДК 518 : 517.944/947

Об одной схеме метода матричной прогонки в случае многомерных разностных уравнений. Басик В. А. «Весті Академії наук БССР», серія фізика-математичних наук. 1970 г., № 3, 55—59.

В работе рассматривается один класс краевых задач для дифференциального трехмерного уравнения эллиптического типа, для которого при решении аппроксимирующей системы линейных алгебраических уравнений методом прогонки возможна замена обращения полных матриц обращением диагональных матриц.

Библиографий 6.

УДК 518 : 517.91/94

Одношаговые правила приближенного решения задачи Коши для уравнения $y' = f(x, y)$ по значениям правой части уравнения и производных от нее. Бобков В. В., Шкель В. А. «Весті Академії наук БССР», серия фізика-математичних наук. 1970 г., № 3, 60—67.

В работе метод построения одношаговых правил приближенного решения дифференциальных уравнений, основанный на многократном использовании квадратурных формул понижающейся алгебраической степени точности (РЖМат, 1968, 9Б692), распространяется на тот случай, когда соответствующие квадратурные формулы строятся не только по значениям интегрируемой функции, но и по значениям производных до некоторого фиксированного порядка от нее. В случае задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка рассматривается общий подход к построению подобных правил, даются конкретные примеры правил, приводятся предсказывающе-исправляющие правила итерационного типа, построенные указанным способом, а также проводится исследование предлагаемых правил на сходимость.

Библиографий 2.

УДК 518 : 517.392

Об одной наилучшей кубатурной формуле, содержащей частные производные от функции. Шац Э. М. «Весті Академії наук БССР», серия фізика-математичних наук. 1970 г., № 3, 68—72.

Для класса функций $f(x) \in W_{0L_2}^{(r,s)}(M)$ строится наилучшая кубатурная формула вида

$$\int_0^1 \int_0^1 f(x, y) dx dy = \frac{1}{r!s!} \sum_{k=0}^{m-1} \sum_{l=0}^{n-1} \sum_{\mu=0}^{r-2} \sum_{\nu=0}^{s-2} A_{ke}^{(\mu\nu)} (r-\mu-1)! \times \\ \times (s-\nu-1)! f_{x^\mu y^\nu}^{(\mu+\nu)}(x_k, y_l) + R_{mn}(f),$$

где r и s — четные.

Найдены узлы, коэффициенты и оценка остатка формулы.

Библиографий 4.

УДК 681.142.1.01

Оценки эффективности методов сортировки. Криевич В. С. «Весті Академії наук БССР», серия фізика-математичних наук. 1970 г., № 3, 73—77.

Сопоставляются оценки затрат времени при различных методах сортировки данных. Предлагается комбинированный метод, состоящий из методов введения и слияния. Исследуется вариант, при котором эта комбинация предполагает минимальные затраты времени.

Библиографий 2.

УДК 539.12

Волновые уравнения с кратными представлениями группы Лоренца. Полуцель спин. Федоров Ф. И., Плетухов В. А. «Весті Академії наук БССР», серия фізика-математичних наук. 1970 г., № 3, 78—83.

Рассмотрен вопрос о структуре матриц релятивистских волновых уравнений первого порядка, описывающих частицы с полуцельм спином, для которых набор представлений группы Лоренца содержит кратные представления. Проанализированы случаи распадаения этих уравнений.

Библиографий 5.

УДК 539.12

Волновое уравнение с кратными представлениями для частицы со спином 1. Плетюхов В. А., Федоров Ф. И. «Весті Академії наук БССР», серия фізика-математичних наук. 1970 г., № 3, 84—92.

Построено релятивистское волновое уравнение для частицы со спином 1 с использованием двукратного векторного представления группы Лоренца. Размерность матриц γ_μ равна 15. Минимальное уравнение имеет вид $\gamma^3(\gamma^2-1)=0$. Рассеяние исследуемой векторной частицы в кулоновском поле происходит так же, как и в случае даффин-кеммеровской частицы со спином 1. Матричные элементы комптовского рассеяния отличаются от соответствующих даффин-кеммеровских.

Библиографий 14.

УДК 539.126

Описание фазовых сдвигов с помощью вектор-параметра. Тхарев Е. Е. «Весті Академії наук БССР», серия фізика-математичних наук. 1970 г., № 3, 93—96.

На основе комплексной векторной параметризации группы Лоренца рассматривается изменение фазы состояния частицы при произвольном преобразовании Лоренца. Показано, что сдвиг фаз связан с вращением спинового репера трех ортонормированных комплексных векторов $q_i = c_i + i \frac{[c_i, p]}{p_0}$ (где $p = (p, p_0)$ —

импульс частицы ($m \neq 0$), c_i —три произвольных вещественных вектора) в комплексном пространстве параметров соответствующей малой группы вокруг оси спиновых проекций, определяемой вектором q_3 ; приводится простой и удобный метод расчета сдвига фаз при самом общем преобразовании Лоренца.

Библиографий 6.

УДК 621.378.3

Коэффициент усиления в предгенерационный период и пороговые условия генерации красителей с конечным временем нарастания импульса накачки. Самсон А. М. «Весті Академії наук БССР», серия фізика-математичних наук. 1970 г., № 3, 97—105.

Для красителя, моделируемого набором частиц с двумя синглетными и двумя триплетными уровнями энергии, строго решена задача о зависимости коэффициента усиления и населенностей энергетических уровней при линейно возрастающей накачке. Это позволило более строго оценить влияние крутизны переднего фронта импульса накачки на пороговые характеристики генерации. Показано, в частности, что при длительностях импульса накачки, соответствующих моноимпульсам рубинового и неодимового ОКГ, можно для оценок использовать более простые формулы, получаемые при решении этой задачи с прямоугольным импульсом. Исследовано влияние поглощения с метастабильного уровня на пороговые условия. Аналитические оценки проиллюстрированы решением исходных уравнений на электронной вычислительной машине.

Таблиц 1. Иллюстраций 4. Библиографий 9.

УДК 548.732

О зависимости удельной интенсивности отражения от угла расходимости падающего пучка для фокусирующих рентгеновских монохроматоров. Олехнович Н. М. «Весті Академії наук БССР», серия фізика-математичних наук. 1970 г., № 3, 106—112.

Приводятся результаты расчета удельной интенсивности отражения в зависимости от угла расходимости падающего пучка для случая фокусирующих монохроматоров по Иоганну и Иоганссону при неточечном источнике

излучения. Анализируется зависимость удельной интенсивности отражения от длины монохроматического излучения. Делается сопоставление полученных результатов с данными для плоского монохроматора и оценивается коэффициент возможного увеличения интенсивности монохроматического пучка от фокусирующих монохроматоров по сравнению с плоским. Установлено, что возможный выигрыш в интенсивности при использовании фокусирующего монохроматора по Иоганну по сравнению с плоским монохроматором зависит от длины волны излучения и угловой ширины источника и составляет величину для реальных размеров источника, не превышающую 10—15 вместо нескольких десятков раз в случае точечного источника. Иллюстраций 4. Библиографий 7.

УДК 535.371

Флуорометрическое исследование спектральной зависимости затухания свечения флуоресценции. Костко М. Я. «Весті Академії наук БССР», серия фізика-математичних наук. 1970 г., № 3, 113—117.

На фазовом флуорометре исследован характер затухания флуоресценции по спектру испускания фталимидов в полярных растворителях в температурном интервале 20—180 °С. Полученные данные по изменению относительной глубины модуляции и флуорометрической фазы по спектру испускания позволяют рассмотреть нарушение экспоненциальности затухания. На основании полученных данных построены кривые затухания по спектру, а также указан метод определения τ для рассмотренных неэкспоненциальных процессов.

Таблиц 1. Иллюстраций 2. Библиографий 5.

УДК 537.311.33

Период идентичности кристаллической решетки и магнитная восприимчивость сплавов фосфида галлия и арсенида индия. Сирота Н. Н., Боднар И. В., Виткина Ц. З. «Весті Академії наук БССР», серия фізика-математичних наук. 1970 г., № 3, 118—119.

Получен непрерывный ряд твердых растворов в системе GaP—InAs. Установлено, что период идентичности возрастает от 5,451 ± 0,005 Å для GaP до 6,057 ± 0,005 Å для InAs с незначительным отклонением от закона Вегарда.

Измерены диамагнитная восприимчивость и плотность образцов полученной системы.

Иллюстраций 2. Библиографий 4.

УДК 537.266 + 537.311.33] : [537 + 535

Влияние условий выращивания на диэлектрические потери в монокристаллах триглицинсульфата. Цедрик М. С., Марголин Л. Н. «Весті Академії наук БССР», серия фізика-математичних наук, 1970 г., № 3, 120—122.

Изучены диэлектрические потери в монокристаллах триглицинсульфата в интервале температур +30—+80 °С. Измерения проведены по мостовой схеме на частоте 1 кГц. Показано, что условия выращивания влияют на

диэлектрические потери в кристаллах триглицинульфата.
Таблиц 1. Иллюстраций 1. Библиографий 11.

УДК 539.1.01

Об анапольном моменте дейтрона. Жирков Л. Ф.,
Сацункевич И. С. «Весті Академії наук БССР»,
серия фізика-математычных навук. 1970 г., № 3, 123—125.

Для процесса $ed \rightarrow ed$ рассмотрены следствия, вытекающие из предположения о существовании анапольного момента у дейтрона. Показано, что асимметрия углового распределения электронов, рассеянных на поляризованном в плоскости реакции дейтроне, не превышает величины 10^{-2} .

Библиографий 6.

В издательстве „Наука и техника“

ГОТОВИТСЯ К ПЕЧАТИ КНИГА

М. Н. Бодяко, А. С. Астапчика, Г. Б. Ярошевича

„Возврат — полигонизация“.

Объем 13 л. На русском языке. Цена 1 р. 45 к. (ориентировочно).

В книге освещены вопросы физической природы процессов возврата — полигонизации, дислокационного механизма и кинетики этих процессов при изотермическом и анизотермическом нагревах. Излагаются результаты исследований отечественных и зарубежных авторов, а также собственные результаты о влиянии скорости непрерывного нагрева на процессы формирования субструктуры и ее связи с физико-механическими характеристиками. Рассмотрены вопросы технологического применения дорекристаллизационного отжига, влияние примесей на возврат, а также влияние самого возврата на рекристаллизацию.

Рассчитана на научных работников, инженеров-металловедов и металлофизиков.

Заказы направлять по адресам:

г. Минск, Омский пер., 13. Управление книжной торговли Государственного комитета Совета Министров БССР по печати;

г. Минск, ул. Володарского, 9. Управление книжной торговли Белкоопсоюза;

г. Минск, ул. Энгельса, 22. Белорусское подписное и розничное агентство «Союзпечать».

ПРАВИЛА ДЛЯ АВТОРОВ

1. Статьи должны быть написаны на машинке через два интервала на одной стороне листа и представляться в двух экземплярах.

2. Формулы и буквенные обозначения должны быть аккуратно вписаны от руки чернилами. Для формул, выделенных в отдельную строку, следует оставлять достаточные пробелы в тексте. Греческие буквы должны быть обведены красным карандашом. Буквы, вписанные от руки, в формулах и в тексте должны подчеркиваться простым карандашом: прописные — двумя черточками снизу (напр., \bar{S}), строчные — двумя черточками сверху (напр., \bar{s}). Следует различать буквы O (прописную), o (строчную) и 0 (ноль), для чего буквы O и o подчеркивать двумя черточками, а ноль отмечать квадратной скобкой снизу ($\underline{0}$, \underline{o} , $\underline{0}$). Следует также различать буквы I и J (йот), для чего I писать, как римскую единицу, подчеркивая ее двумя черточками снизу. Векторы подчеркивать чернилами одной чертой снизу. Математические символы \cos , \sin , \lg и др. набираемые прямым шрифтом, и химические символы элементов (H , N , Cl , Fe и т. д.) отмечаются простым карандашом квадратной скобкой снизу ($\underline{\sin}$, $\underline{\lg}$, \underline{N} , \underline{Cl}). Показатели степени и индексы, а также надстрочные знаки отмечаются дугой \frown (для верхнего индекса) или \smile (для нижнего).

3. В связи с введением с 1 января 1963 г. Международной системы единиц измерения (СИ) размерность всех величин, принятых в статьях, должна соответствовать указанной системе единиц измерения.

4. Цитируемая в статье литература должна даваться автором не в виде подстрочных сносок, а общим списком в конце статьи с обозначением ссылки в тексте порядковой цифрой в квадратных скобках. Список литературы должен быть оформлен следующим образом:

а) для книг: фамилия и инициалы автора, полное название книги, номер тома, место и год издания;

б) для журнальных статей: фамилия и инициалы автора, название журнала, номер тома (подчеркнуть), номер выпуска, страница и год.

Ссылки на неопубликованные работы не допускаются.

5. Рисунки должны быть выполнены на белой бумаге тушью размером 15×20 см; надписи на рисунках не делать. Все обозначения указывать в тексте подрисуночных подписей. К статье прилагается список с номерами рисунков и текстом подрисуночных подписей. В тексте на полях обязательно указывается место для рисунков и таблиц.

Таблицы и список литературы печатаются на отдельных листах и прилагаются в конце статьи. Фотографии должны иметь контрастное изображение и быть отпечатаны на хорошей бумаге размером не менее 9×12 см. На обороте рисунков должны быть указаны фамилия автора, название статьи и номер рисунка.

6. В случае представления двух или более статей одновременно необходимо указывать желательный порядок их помещения.

7. Авторы должны избегать повторения одних и тех же данных в таблицах, графиках и в тексте статьи.

8. К статье обязательно прилагается 2 экз. реферата.

9. Корректуры статей авторам, как правило, не посылаются. В случае ссылки корректуры допускается лишь исправление ошибок типографии.

Корректурка должна возвращаться в редакцию не позже, чем на следующий день после получения ее автором. Невозвращение корректуры в срок не приостанавливает печатания статьи.

10. В случае возвращения статьи автору для исправления или при ее сокращении датой представления считается день получения редакцией окончательного текста.

4431-35a



B000000350427 1

60 K.

1484b