

3023  
58

# ВЕСЦІ

АКАДЭМІІ НАВУК БССР

---

СЕРЫЯ  
ФІЗІКА-МАТЭМАТЫЧНЫХ  
НАВУК

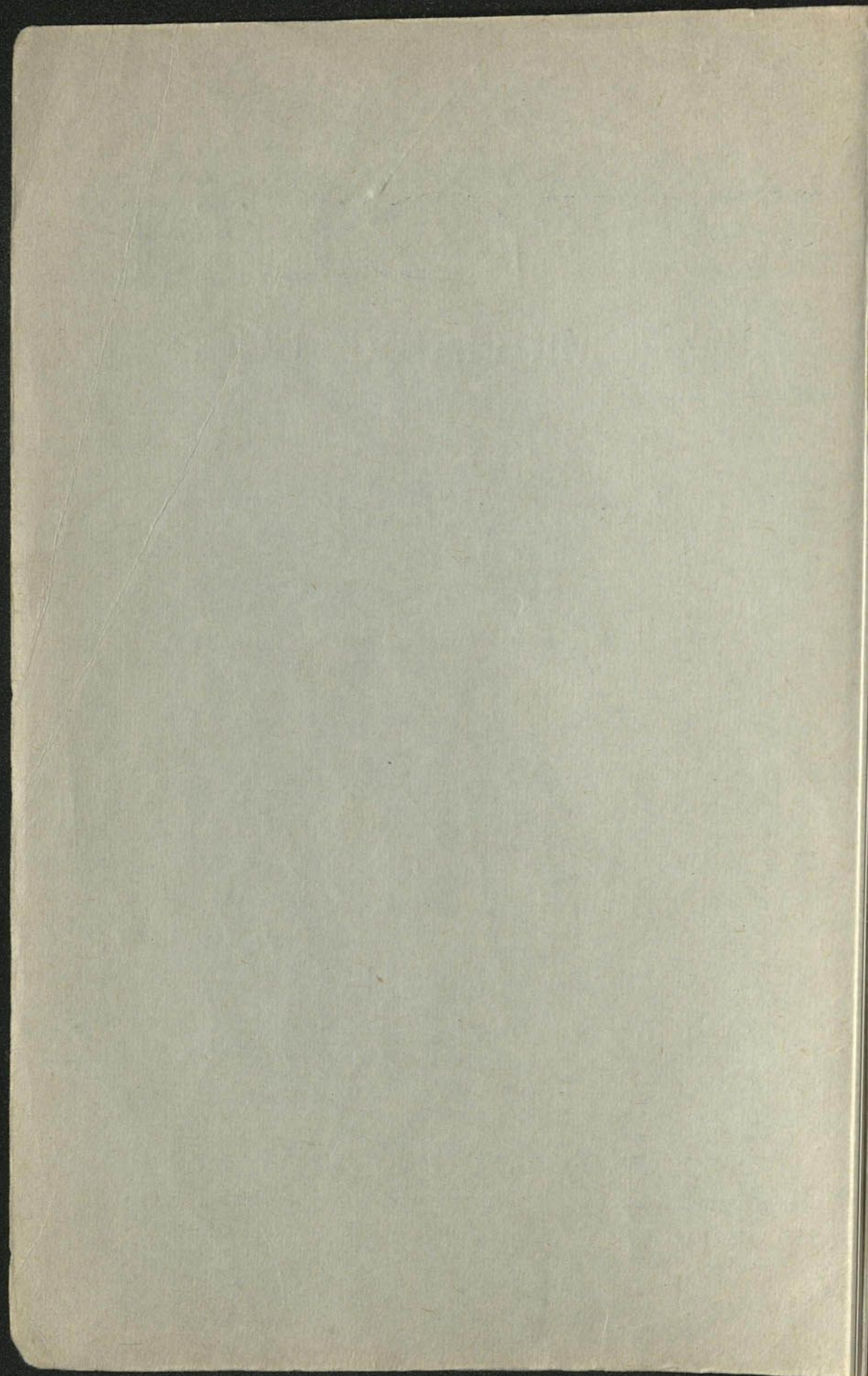
4

ВЫДАВЕЦТВА „НАВУКА І ТЭХНІКА“

---

МІНСК 1970

бар 05  
4437



НАУКА И ТЕХНИКА

СОВЕТСКИЙ СОЮЗ



ИЗДАТЕЛЬСТВО  
НАУКА  
МОСКВА

# ИЗВЕСТИЯ

АКАДЕМИИ НАУК БССР

---

СЕРИЯ  
ФИЗИКА-МАТЕМАТИЧЕСКИХ  
НАУК

№ 4

ИЗДАТЕЛЬСТВО „НАУКА И ТЕХНИКА“

---

МИНСК 1970

# ВЕСЦІ

30113

58

АКАДЭМІІ НАВУК БССР

---

СЕРЫЯ  
ФІЗІКА-МАТЭМАТЫЧНЫХ  
НАВУК

№ 4

ВЫДАВЕЦТВА „НАВУКА І ТЭХНІКА“

---

МІНСК 1970

ber 05  
4431

Рэдакцыйная калегія:

Ф. І. ФЕДАРАУ (галоўны рэдактар),  
Д. А. СУПРУНЕНКА (нам. галоўнага рэдактара),  
М. М. АЛЯХНОВІЧ, Ф. Д. ГАХАЎ, У. І. КРЫЛОУ,  
М. М. СІРАТА, У. Г. СПРЫНДЖУК, Я. І. ФІРСАУ,  
С. А. ЧУНІХІН

М. И. КРАВЧУК

## О НЕКОТОРЫХ КЛАССАХ ФАКТОРИЗУЕМЫХ КОНЕЧНЫХ ГРУПП

§ 1. Одним из важнейших методов изучения конечных групп является разбиение их на составные части. Из основных таких разбиений выделяются два: вложение подгрупп и факторизация группы подгруппами. Имеется довольно много результатов, устанавливающих связь между двумя этими понятиями. Настоящая статья посвящена исследованию таких связей. Используемые определения и обозначения можно найти в монографии [1] и статье [2].

§ 2. Теорема 1. Если группа  $G$  имеет ряд нормальных делителей  $G = G_0 \supset G_1 \supset \dots \supset G_k = E$ ,  $k \geq 1$ , в котором каждый  $\pi'$ -элемент из  $G_{i-1}/G_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, k$ , перестановочен с каждым  $\pi$ -элементом из  $G/G_i$ , то  $G$  является  $\pi$ -замкнутой группой.

Доказательство. Так как каждый  $\pi'$ -элемент из  $G_{i-1}/G_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, k$ , перестановочен с каждым  $\pi$ -элементом из  $G/G_i$ , то каждая факторгруппа  $G_{i-1}/G_i$ , согласно теореме 4 из [3], содержит инвариантную  $S_\pi$ -подгруппу. Значит, на основании следствия Е 2.1 из [4] заключаем, что группа  $G$  обладает свойством  $E_\pi$ . Пусть  $H$  является  $S_\pi$ -подгруппой группы  $G$ . Тогда согласно условию теоремы каждая факторгруппа  $HG_{i-1}/G_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, k$ , является  $\pi$ -замкнутой группой. Теперь мы видим, что для группы  $G$  выполняются все условия теоремы 1 из [5]. На основании этой теоремы и заключаем, что  $G$  является  $\pi$ -замкнутой группой. Теорема доказана.

Если  $\pi' = \{p\}$ , то из теоремы 1 вытекает теорема 14 из работы [6].

Определение 1. Группу  $G$  назовем  $\pi\pi'$ -замкнутой, если она  $\pi$ -замкнута и  $\pi'$ -замкнута (ср. с [3]).

Лемма 1. Для того, чтобы группа  $G$  была  $\pi\pi'$ -замкнутой, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие два условия:

1) каждый  $\pi$ -элемент из  $G$  перестановочен с каждой  $q$ -силовской подгруппой группы  $G$  для всякого  $q \in \pi'$ ;

2) каждый  $\pi'$ -элемент из  $G$  перестановочен с каждой  $p$ -силовской подгруппой группы  $G$  для всякого  $p \in \pi$ .

Доказательство. Необходимость условий вытекает из определения  $\pi\pi'$ -замкнутости группы  $G$ .

Достаточность. Пусть  $(G) = mn$ ,  $(m, n) = 1$ ,  $m$  —  $\pi$ -число,  $n$  —  $\pi'$ -число и группа  $G$  удовлетворяет условиям леммы. Тогда, очевидно, достаточно рассмотреть лишь случай, когда одновременно  $m > 1$  и  $n > 1$ .

Пусть  $a$  является произвольным  $\pi$ -элементом, а  $b$  —  $\pi'$ -элементом группы  $G$ . Тогда элементы  $a$  и  $b$  можем представить в виде  $a = a^{k_1} a^{k_2} \dots a^{k_s}$ , где  $a^{k_i}$ ,  $i = 1, 2, \dots, s$ , имеет порядок  $p_i^{\alpha_i}$ ,  $p_i \in \pi$ ;  $b = b^{l_1} b^{l_2} \dots b^{l_t}$ , где  $b^{l_j}$ ,  $j = 1, 2, \dots, t$ , имеет порядок  $q_j^{\beta_j}$ ,  $q_j \in \pi'$ . Элемент  $a^{k_i} \in P_i$ , где  $P_i$  — некоторая  $p_i$ -силовская подгруппа группы  $G$ , а  $b^{l_j} \in Q_j$ , где  $Q_j$  — некоторая

$q_j$ -силовская подгруппа группы  $G$ . Из условий 1) и 2) леммы следует, что  $P_i Q_j$  является нильпотентной группой. Поэтому элемент  $a^{k_i}$  перестановочен с каждым элементом  $Q_j$ , в частности, и с  $b^{l_j}$ . Отсюда на основании равенства  $b = b^{l_1} b^{l_2} \dots b^{l_t}$  заключаем, что  $a^{k_i}$  перестановочен с  $b$ . Так как  $a = a^{k_1} a^{k_2} \dots a^{k_s}$ , то  $ab = ba$ . Теперь по теореме 4 из [3] группа  $G$  является  $\pi\pi'$ -замкнутой. Лемма доказана.

**Теорема 2.** *Для того чтобы группа  $G$  была  $\pi\pi'$ -замкнутой, необходимо и достаточно, чтобы существовал такой ряд нормальных делителей  $G$ :*

$$G = G_0 \supset G_1 \supset \dots \supset G_k = E, \quad k \geq 1,$$

для каждой факторгруппы  $G_{i-1}/G_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, k$ , которого выполнялись бы два условия:

1) каждый  $\pi$ -элемент из  $G_{i-1}/G_i$  перестановочен с каждой  $q$ -силовской подгруппой группы  $G/G_i$  для всякого  $q \in \pi$ ;

2) каждый  $\pi'$ -элемент из  $G_{i-1}/G_i$  перестановочен с каждой  $p$ -силовской подгруппой группы  $G/G_i$  для всякого  $p \in \pi$ .

**Доказательство. Необходимость.** Если  $G = G_\pi \times G_{\pi'}$ , то ряд  $G \supseteq G_\pi \supseteq E$  или  $G \supseteq G_{\pi'} \supseteq E$  удовлетворяет условиям теоремы.

**Достаточность.** Допустим, что существуют группы, для которых теорема неверна. Выберем тогда среди них группу  $G$ , имеющую наименьший порядок. Значит, для группы  $G$  можно указать непустые множества  $\pi$  и  $\pi'$  и ряд нормальных делителей

$$G = G_0 \supset G_1 \supset \dots \supset G_k = E, \quad k \geq 1,$$

которые удовлетворяют условиям теоремы, но сама  $G$  не является  $\pi\pi'$ -замкнутой. Очевидно, что порядок группы  $G$  должен иметь вид  $(G) = (G)_\pi (G)_{\pi'}$  и  $(G)_\pi > 1$ ,  $(G)_{\pi'} > 1$ . Рассмотрим возможные случаи.

1.  $k = 1$ . Тогда группа  $G$  удовлетворяет всем требованиям леммы 1, а поэтому  $G$  является  $\pi\pi'$ -замкнутой группой. Получилось противоречие.

2.  $k > 1$ . Прежде всего покажем, что каждая факторгруппа  $G_{i-1}/G_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, k$ , является  $\pi\pi'$ -замкнутой группой. Для этого, очевидно, достаточно показать, что  $G_{k-1}$  является  $\pi\pi'$ -замкнутой группой. Действительно, пусть  $P_1, P_2, \dots, P_i$  — все силовские подгруппы группы  $G$  для всех  $p \in \pi$ . Тогда  $P_i \cap G_{k-1} = \bar{P}_i$  по лемме 1 из [4] является  $p$ -силовской подгруппой группы  $G_{k-1}$ . Если  $x$  является произвольным  $\pi'$ -элементом из  $G_{k-1}$ , то  $x^{-1} \bar{P}_i x$  будет некоторой  $p$ -силовской подгруппой группы  $G_{k-1}$ . Но, с другой стороны, из включения  $\bar{P}_i \subseteq P_i$  вытекает, что  $x^{-1} \bar{P}_i x \subseteq x^{-1} P_i x$ . Отсюда заключаем, что  $x^{-1} \bar{P}_i x = G_{k-1} \cap x^{-1} P_i x = G_{k-1} \cap P_i$ , ибо  $x^{-1} P_i x = P_i$  по условию. Итак,  $x^{-1} \bar{P}_i x = \bar{P}_i$  для каждого  $\pi'$ -элемента  $x$  из  $G_{k-1}$ . Это значит, что всякий  $\pi'$ -элемент из  $G_{k-1}$  перестановочен с каждой  $p$ -силовской подгруппой из  $G_{k-1}$  для каждого  $p \in \pi$ . Проведя аналогичные рассуждения, мы покажем, что также всякий  $\pi$ -элемент из  $G_{k-1}$  перестановочен с каждой  $q$ -силовской подгруппой из  $G_{k-1}$  для каждого  $q \in \pi'$ . Следовательно, группа  $G_{k-1}$  удовлетворяет всем условиям леммы 1, а поэтому  $G_{k-1}$  является  $\pi\pi'$ -замкнутой группой.

Так как каждая факторгруппа  $G_{i-1}/G_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, k$ , является  $\pi\pi'$ -замкнутой группой, то группа  $G$  удовлетворяет условиям леммы E 2.1 из [4] относительно  $\pi$  и  $\pi'$ . Отсюда заключаем, что группа  $G$  обладает свойствами  $E_\pi$  и  $E_{\pi'}$ . Теперь мы видим, что группа  $G$  удовлетворяет условиям теоремы 1 из [5]. На основании этой теоремы и заключаем, что группа  $G$  является  $\pi\pi'$ -замкнутой. Опять получили противоречие. Этим теорема доказана полностью.

Если  $\pi = \{p\}$ , то из теоремы 2 вытекает теорема 13 из работы [6].

§ 3. Рассмотрим одно обобщение понятия центрального ряда. Исследуем связь таких рядов с факторизацией групп.

Определение 2. Ряд нормальных делителей группы  $G$

$$G = G_0 \supseteq G_1 \cdots \supseteq G_k = E,$$

в котором каждый  $\pi$ -элемент из  $G/G_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, k$ , перестановочен с каждым элементом из  $G_{i-1}/G_i$  и каждый  $\pi$ -элемент из  $G_{i-1}/G_i$  перестановочен с каждым элементом из  $G/G_i$ , назовем  $\pi\pi'$ -центральным рядом.

Определение 3. Назовем нижним  $\pi\pi'$ -центральным рядом группы  $G$  ряд подгрупп

$$G = F_0 \supseteq F_1 \supseteq \dots, \quad (F)$$

где  $F_i = F_\pi(G, F_{i-1})$ ,  $i = 1, 2, \dots$ , есть подгруппа группы  $G$ , порожденная всеми коммутаторами каждого  $\pi$ -элемента из  $G$  с каждым элементом из  $F_{i-1}$  и каждого  $\pi$ -элемента из  $F_{i-1}$  с каждым элементом из  $G$ .

Из определений видно, что если  $\pi(G) \subseteq \pi$ , то первый ряд обращается в центральный ряд, а второй — в нижний центральный ряд. Заметим, что все члены нижнего  $\pi\pi'$ -центрального ряда группы  $G$  являются характеристическими подгруппами в  $G$ .

Лемма 2. Пусть  $G = G_0 \supseteq G_1 \supseteq \dots \supseteq G_k = E$  —  $\pi\pi'$ -центральный ряд, а  $(F)$  — нижний  $\pi\pi'$ -центральный ряд группы  $G$ . Тогда  $G_i \supseteq F_i$ ,  $i = 0, 1, \dots, k$ .

Доказательство. По определению  $G_0 = G = F_0$ . Поэтому предположим, что  $G_i \supseteq F_i$ . Так как каждый  $\pi$ -элемент из  $G/G_{i+1}$  перестановочен с каждым элементом из  $G_i/G_{i+1}$  и каждый  $\pi$ -элемент из  $G_i/G_{i+1}$  перестановочен с каждым элементом из  $G/G_{i+1}$ , то  $F_\pi(G, G_i) \subseteq G_{i+1}$ . Отсюда  $F_{i+1} = F_\pi(G, F_i) \subseteq F_\pi(G, G_i) \subseteq G_{i+1}$ , т. е.  $F_{i+1} \subseteq G_{i+1}$ . Этим доказано, что  $G_i \supseteq F_i$  для всех  $i$ .

Из леммы 2 вытекает, что существование  $\pi\pi'$ -центрального ряда эквивалентно условию, что пересечение  $F^*$  всех членов нижнего  $\pi\pi'$ -центрального ряда равно  $E$ .

Лемма 3. Пусть  $F^*$  является пересечением всех членов нижнего  $\pi\pi'$ -центрального ряда  $(F)$  группы  $G$ . Группа  $G$  тогда и только тогда  $\pi$ -разложима, когда  $F^* = E$ .

Доказательство. Из определения нижнего  $\pi\pi'$ -центрального ряда  $(F)$  группы  $G$  вытекает, что каждый  $p$ -элемент из  $F_{i-1}/F_i$ ,  $i = 1, 2, \dots$ , для всякого  $p \in \pi$  перестановочен с каждым  $p'$ -элементом из  $G/F_i$  и каждый  $p'$ -элемент из  $F_{i-1}/F_i$  перестановочен с каждым  $p$ -элементом из  $G/F_i$ . Следовательно, ряд  $(F)$  удовлетворяет всем условиям теоремы 2 для каждого  $p \in \pi$ . Поэтому группа  $G$  на основании этой теоремы является  $pp'$ -замкнутой, т. е.  $G$   $\pi$ -разложима. Необходимость условия очевидна. Лемма доказана.

Следствие. Если  $F^*$  является пересечением всех членов нижнего  $\pi\pi'$ -центрального ряда  $(F)$  группы  $G$ , то факторгруппа  $G/F^*$   $\pi$ -разложима.

Лемма 4. Пусть  $F^*$  является пересечением всех членов нижнего  $\pi\pi'$ -центрального ряда  $(F)$  группы  $G$ . Если  $H \subseteq F^*$  и  $H$  инвариантна в  $G$ , то  $(G/H)^* = F^*/H$ .

Доказательство. Пусть  $(F)$  является нижним  $\pi\pi'$ -центральным рядом группы  $G$ , а  $G/H = F'_0/H \supseteq F'_1/H \supseteq \dots$  — нижний  $\pi\pi'$ -центральный ряд группы  $G/H$ . Очевидно включение  $F_i/H \subseteq F'_i/H$ ,  $i = 0, 1, \dots$ . С другой стороны, имеем равенство  $F'_0/H = F_0/H$ . Поэтому предположим, что для всех  $k < i$  выполняется включение  $F'_k/H \subseteq F_k/H$ . Тогда  $F'_i/H = F_\pi(G/H, F'_{i-1}/H) \subseteq F_\pi(G/H, F_{i-1}/H) = F_\pi(G, F_{i-1})/H = F_i/H$ . Значит,

$F'_i/H = F_i/H$  для всех  $i = 0, 1, \dots$ . Отсюда следует, что  $(G/H)^* = F^*/H$ . Лемма доказана.

Лемма 5. Пусть  $B$  является произвольной подгруппой, а  $F^*$  — пересечение всех членов нижнего  $\pi'$ -центрального ряда группы  $G$ . Если  $F_\pi(B, B \cap F^*) = B \cap F^*$ , то тогда  $B \cap F^* = B^*$ , где  $B^*$  есть пересечение всех членов нижнего  $\pi'$ -центрального ряда подгруппы  $B$ .

Доказательство. Пусть  $(F)$  является нижним  $\pi'$ -центральным рядом группы  $G$ , а  $B = F'_0 \supseteq F'_1 \supseteq \dots$  — нижним  $\pi'$ -центральным рядом подгруппы  $B$ . Так как  $F'_0 \subseteq F_0$ , то с помощью индукции по  $i$  получаем  $F'_{i+1} = F_\pi(B, F'_i) \subseteq F_\pi(G, F_i) = F_{i+1}$ . Отсюда выводим, что  $F'_i \subseteq B \cap F_i$  для всех  $i$  и поэтому  $B^* \subseteq B \cap F^*$ . Но из условия  $F_\pi(B, B \cap F^*) = B \cap F^*$  следует, что  $B^* \supseteq B \cap F^*$ . Значит,  $B \cap F^* = B^*$ . Лемма доказана.

Теорема 3. Пусть  $F^*$  есть пересечение всех членов нижнего  $\pi'$ -центрального ряда группы  $G$ . Если  $F^*$  является  $\pi'$ -замкнутой группой с абелевой  $S_\pi$ -подгруппой, то в  $G$  существует подгруппа  $H$  со следующими свойствами:

- 1)  $G = F^*H$ ;
- 2)  $F^* \cap H = F_{\pi'}$ ;
- 3)  $H/F_{\pi'}$  является  $\pi$ -разложимой группой.

Доказательство. Предположим, что теорема неверна. Пусть группа  $G$  выбрана так, что ее порядок является наименьшим среди групп, для которых теорема не выполняется.

Если  $F^* = E$ , то по лемме 3 группа  $G$  является  $\pi$ -разложимой. Поэтому предположим, что  $F^* \neq E$ . Кроме того, если  $F_{\pi'} \neq E$ , то для факторгруппы  $G/F_{\pi'}$  по лемме 4 имеем  $(G/F_{\pi'})^* = F^*/F_{\pi'}$ , где группа  $F^*/F_{\pi'}$  абелева. По нашему предположению, для  $G/F_{\pi'}$  теорема верна, а отсюда вытекает справедливость теоремы для самой  $G$ . Следовательно, можно предположить, что  $F$  является абелевой  $\pi$ -группой. Рассмотрим дальше возможные случаи.

1.  $F^*$  является минимальным нормальным делителем группы  $G$ . Пусть  $M$  — некоторая максимальная подгруппа группы  $G$ . Тогда возможно, что  $MF^* = G$  или  $MF^* = M$ . Если  $MF^* = G$ , то ввиду абелевости и минимальности  $F^*$  в  $G$  следует, что  $M \cap F^* = E$ . Так как  $G/F^*$  по следствию из леммы 3 является  $\pi$ -разложимой группой, то из изоморфизма  $G/F^* \cong M$  вытекает  $\pi$ -разложимость подгруппы  $M$ . Это означает, что  $M$  — искомая подгруппа группы  $G$ . Если же для каждой максимальной подгруппы  $M$  группы  $G$  выполняется равенство  $MF^* = M$ , то  $F^*$  содержится в подгруппе Фраттини группы  $G$ . Но факторгруппа  $G/F^*$  является  $\pi$ -разложимой группой. Поэтому по теореме 3.8 из [7] группа  $G$  должна быть сама  $\pi$ -разложимой. Следовательно, по лемме 3 тогда будет  $F^* = E$ , что противоречит предположению  $F^* \neq E$ . Получилось противоречие.

2.  $F^*$  не является минимальным нормальным делителем группы  $G$ . Прежде всего покажем, что в  $F^*$  имеется нормальный делитель  $A$  группы  $G$ , такой, что  $F_\pi(G, A) = A$ . С этой целью рассмотрим следующие возможности.

а)  $F^*$  не является примарной подгруппой. Пусть  $q$  делит порядок  $(F^*)$ . Тогда  $F^* = F_q^* \times F_{q'}^*$ . Отсюда заключаем, что  $F_q^*$  инвариантна в  $G$  и  $F_\pi(G, F_q^*) = F_q^*$ , так как в противном случае было бы  $F_\pi(G, F_q^*) \neq F_q^*$ .

б)  $F^*$  является примарной подгруппой, т. е.  $(F^*) = p^\alpha$ ,  $p \in \pi$ . Так как  $F^* \neq E$ , то группа  $G$   $\pi$ -неразложима, а факторгруппа  $G/F^*$   $\pi$ -разложима. Поэтому в  $G$  имеется либо неинвариантная  $q$ -силовская подгруппа для  $q \in \pi$ ,  $q \neq p$ , либо неинвариантная  $S_{\pi'}$ -подгруппа. Обозначим ее через  $Q$ . Тогда

подгруппа  $B = QF^*$  является  $p$ -неразложимой инвариантной подгруппой группы  $G$ . Следовательно,  $B/F^*$  является либо  $q$ -группой,  $q \in \pi$ , либо  $\pi'$ -группой. Рассмотрим обе возможности в отдельности.

Пусть  $B/F^*$  является  $q$ -группой. Тогда в группе  $G$  имеется элемент, порядок которого есть степень  $q$ , не принадлежащий централизатору  $C(F^*)$ . Так как  $C(F^*)$  инвариантна в  $G$  и факторгруппа  $G/C(F^*)$   $\pi$ -разложима, то можно выбрать элемент из центра группы  $G/C(F^*)$ , порядок которого равен степени  $q$ . Следовательно, в группе  $G$  имеется инвариантная подгруппа  $L$ , порожденная централизатором  $C(F^*)$  и элементом  $x$ , порядок которого есть степень  $q$ , и  $x \notin C(F^*)$ . Отсюда заключаем, что  $L$  не является  $\pi$ -разложимой группой, а поэтому пересечение  $L^*$  всех членов нижнего  $\pi\pi'$ -центрального ряда подгруппы  $L$  не равно  $E$ , т. е.  $L^* \neq E$ . Кроме того, ясно, что  $L^* \subseteq F^*$ . Из характеристичности  $L^*$  в  $L$  вытекает, что  $L^*$  инвариантна в  $G$ . Если  $L^* \neq F^*$ , то  $L^*$  и является искомым нормальным делителем группы  $G$ , заключенным в  $F^*$ . Поэтому можем предположить, что  $L^* = F^*$ . Тогда рассмотрим подгруппу  $L_1$ , порожденную  $L^*$  и элементом  $x$ . Так как элементы  $L_1$  имеют вид  $x^r c$ , где  $r$  — целое число и  $c \in C(F^*)$ , то для любого элемента  $y \in F^*$  имеем  $(x^r c, y) = (x^r, y)$ . Отсюда заключаем, что пересечение  $L_1^*$  всех членов нижнего  $\pi\pi'$ -центрального ряда группы  $L_1$  равно  $L^*$ , ибо в противном случае  $L_1^*$  будет искомым нормальным делителем.

Итак,  $L_1^* = L^* = F^*$ . По лемме Шенкмана из [8] вытекает, что любой нормальный делитель группы  $G$ , заключенный в  $F^*$ , будет искомым. Итак, если  $B/F^*$  является  $q$ -группой для некоторого  $q \in \pi$ , то в  $F^*$  существует нормальный делитель  $A$  группы  $G$ , такой, что  $F_\pi(G, A) = A$ .

Пусть теперь  $B/F^*$  является  $\pi'$ -группой. Это значит, что любой  $\pi'$ -элемент группы  $G$  принадлежит нормальному делителю  $B$ , а  $S_\pi$ -подгруппа  $G_\pi$  инвариантна в  $G$  и является нильпотентной группой. По теореме Шура (см. [9]) для группы  $B$  имеем  $B = F^*G_{\pi'}$ . Следовательно, из определения  $F^*$  получаем

$$F^* = F_\pi(G, F^*) = F_\pi(B, F^*) = F_\pi(F^*G_{\pi'}, F^*) = F_\pi(G_{\pi'}, F^*). \quad (1)$$

Так как  $F^*$  не является минимальным нормальным делителем группы  $G$ , то пусть  $A$  является минимальным нормальным делителем группы  $G$ , заключенным в  $F^*$ . Тогда возможно, что  $F_\pi(G, A) = A$  или  $F_\pi(G, A) = E$ . Предположим, что  $F_\pi(G, A) = E$ . Так как  $F^*$  — абелева  $p$ -группа, а  $G_{\pi'}$  по (1) является ее  $p$ -группой операторов, то по лемме Хигмэна из [10] имеем

$$F^* = F_1^* \times F_2^*, \quad (2)$$

где  $F_1^*$  состоит из всех таких элементов, которые поэлементно перестановочны с элементами из  $G_{\pi'}$ , а  $F_2^*$  является допустимой подгруппой относительно группы операторов  $G_{\pi'}$ . По нашему предположению  $F_\pi(G, A) = E$ . А это означает, что  $F_1^* \neq E$ . Из (1) и (2) имеем

$$F^* = F_\pi(G_{\pi'}, F^*) = F_\pi(G_{\pi'}, F_1^*F_2^*) = F_\pi(G_{\pi'}, F_2^*) \subseteq F_2^*.$$

Но так как  $F^* = F_1^* \times F_2^*$  и  $F_1^* \neq E$ , то  $F^* \neq F_2^*$ . Полученное противоречие показывает, что

$$F_\pi(G, A) = A.$$

Итак, мы показали, что в  $F^*$  существует нормальный делитель  $A$  группы  $G$ , такой, что  $F_\pi(G, A) = A$ .

Рассмотрим факторгруппу  $G/A$ . По лемме 4 имеем  $(G/A)^* = F^*/A$ . Так как  $(G/A) < (G)$ , то по нашему предположению для группы  $G/A$  теорема

верна, а поэтому  $G/A = F^*/A \cdot H_1/A$ , где  $F^*/A \cap H_1/A = A/A$ . Отсюда выводим, что  $G = F^*H_1$  и  $F^* \cap H_1 = A$ . Так как  $F_\pi(G, A) = A$ , то  $F_\pi(G, A) = F_\pi(F^*H_1, A) = F_\pi(H_1, A) = A$ . Следовательно, по лемме 5 получаем, что  $H_1 = A$ . Вследствие того, что  $(H_1) < (G)$ , для  $H_1$  теорема верна, а поэтому  $H_1 = AH$  и  $A \cap H = E$ . Следовательно,  $G = F^*H_1 = F^*HA = F^*H$  и  $F^* \cap H = E$ , ибо из включения  $F^* \cap H \subseteq F^* \cap H_1 = A$  вытекает, что  $F^* \cap H \subseteq A \cap H = E$ . Из изоморфизма  $G/F^* \cong H$  вытекает  $\pi$ -разложимость подгруппы  $H$ . Получили противоречие. Этим теорема доказана полностью.

Следствие. Если пересечение  $F^*$  всех членов нижнего  $\pi\pi'$ -центрального ряда ( $F$ ) группы  $G$  является абелевой  $\pi$ -подгруппой, то  $F^*$  дополняема в  $G$  при помощи  $\pi$ -разложимой подгруппы  $H$ , т. е.  $G = F^*H$ ,  $F^* \cap H = E$ . Если  $\pi(G) \subseteq \pi$ , то из теоремы 3 можно получить теорему 1 из [8].

Теорема 4. Пусть  $F^*$  есть пересечение всех членов нижнего  $\pi\pi'$ -центрального ряда группы  $G$ . Если  $F^*$  является  $\pi'$ -замкнутой группой с абелевой  $S_\pi$ -подгруппой и если  $H$  и  $K$  являются произвольными подгруппами группы  $G$ , удовлетворяющими условиям 1—3 теоремы 3, то они сопряжены в  $G$ .

Доказательство. Рассмотрим вначале случай, когда  $F_{\pi'}^* = E$ . Тогда  $\pi$ -разложимые подгруппы  $H$  и  $K$  являются дополнениями к  $F^*$  в группе  $G$ . Как и при доказательстве теоремы 3, могут быть следующие возможности.

1)  $F^*$  является минимальным нормальным делителем группы  $G$ . Так как  $F^*$  является  $\pi$ -группой и факторгруппа  $G/F^*$   $\pi$ -разложима, то  $S_\pi$ -подгруппа  $G_\pi$  группы  $G$  инвариантна в  $G$ . Если  $S_{\pi'}$ -подгруппа  $G_{\pi'}$  группы  $G$  инвариантна в  $G$ , то любой  $\pi$ -элемент группы  $G$  перестановочен с любым  $\pi'$ -элементом из  $G$ . Следовательно,  $F^*$  является пересечением всех членов нижнего центрального ряда разрешимой группы  $G_\pi$ . (Разрешимость подгруппы  $G_\pi$  вытекает из теоремы 2 из [11]). Поэтому по теореме 1 и 2 из [8] в  $G_\pi$  существует нильпотентное дополнение к  $F^*$  и любые два таких дополнения сопряжены в  $G_\pi$ . Так как  $G_\pi H = G$  и  $G_\pi K = G$ , то  $G_\pi \cap H = H_\pi$  и  $G_\pi \cap K = K_\pi$ . Тогда  $H = H_\pi G_{\pi'}$  и  $K = K_\pi G_{\pi'}$ . Подгруппы  $H_\pi$  и  $K_\pi$  являются дополнениями в  $F^*$  в  $G_\pi$ . Поэтому  $H_\pi = x^{-1} K_\pi x$ , где  $x \in G_\pi$ . Ввиду инвариантности  $G_{\pi'}$  в группе  $G$  получаем, что  $H = x^{-1} K x$ . Если же  $G_{\pi'}$  неинвариантна в группе  $G$ , то в  $G$  существует инвариантная подгруппа  $G_1$ , такая, что  $G_1/F^*$  является инвариантной  $S_{\pi'}$ -подгруппой  $\pi$ -разложимой группы  $G/F^*$ . Так как  $F^*$  является инвариантной  $S_\pi$ -подгруппой группы  $G_1$ , то по теореме Шура (см. [9]) имеем  $G_1 = F^* G_{\pi'}$ . Мы видим, что  $F^*$  и  $G_{\pi'}$  удовлетворяют условиям теоремы 1 из [10]. Поэтому на основании этой теоремы заключаем, что подгруппы  $H$  и  $K$  сопряжены в  $G$ .

2)  $F^*$  не является минимальным нормальным делителем группы  $G$ . Как показано в теореме 3, тогда существует нормальный делитель  $A$  группы  $G$ , содержащийся в  $F^*$ , такой, что  $F_\pi(G, A) = A$ . Поэтому по индуктивному предположению пересечение  $F^*/A$  всех членов нижнего  $\pi\pi'$ -центрального ряда группы  $G/A$  дополняемо в  $G/A$  и любые два таких дополнения сопряжены. Пусть  $H_1/A$  и  $K_1/A$  являются такими дополнениями к  $F^*/A$  в  $G/A$ . Тогда  $H_1/A = (x A)^{-1} K_1/A (x A)$ . Отсюда  $H_1 = x^{-1} K_1 x$ ,  $x \in G$ . Кроме того,  $F_\pi(G, A) = F_\pi(H_1 F^*, A) = F_\pi(H_1, A) = A$ . Это значит, что  $H_1 = AH$ ,  $A \cap H = E$ . Аналогично получаем  $K_1 = AK$ ,  $A \cap K = E$ . Следовательно,  $H$  и  $x^{-1} K x$  являются дополнениями к  $A$  в  $H_1$ . По индуктивному предположению любые два дополнения к  $A$  в  $H_1$  сопряжены, а поэтому  $H = h^{-1} x^{-1} K x h$ , т. е.  $H = y^{-1} K y$ ,  $y \in G$ .

Пусть теперь  $F_{\pi'}^* \neq E$ . Тогда, как показано выше,  $H/F_{\pi'}^*$  и  $K/F_{\pi'}^*$  сопряжены в  $G/F_{\pi'}^*$ , т. е.  $H/F_{\pi'}^* = (x F_{\pi'}^*)^{-1} K/F_{\pi'}^* (x F_{\pi'}^*)$ . Отсюда заключаем, что  $H = x^{-1} K x$ ,  $x \in G$ . Теорема доказана.

Если  $\pi(G) \cong \pi$ , то из теоремы 4 можно получить теорему 2 из [8].

Действительно, если  $\pi(G) \cong \pi$ , то группа  $G$  будет разрешимой и ее нижний лл'-центральный ряд  $(F)$  обратится в нижний центральный ряд. А это значит, что  $F^* = G^*$  и  $H$  и  $K$  являются нильпотентными сопряженными дополнениями к  $G^*$  в  $G$ .

### Литература

1. Чунихин С. А. Подгруппы конечных групп. Минск, 1964.
2. Кравчук М. И. ДАН БССР, II, № 2, 97, 1967.
3. Русаков С. А., Сафонов С. А. Весті АН БССР, серія фізика-тэхнічных навук, 3, 1962.
4. Hall P. Proc. London Math. Soc., 6, 286, 1956.
5. Кравчук М. И. Конечные группы. Минск, 1966.
6. Чунихин С. А. Матем. сб., 25, № 3, 321, 1949.
7. Чунихин С. А. Матем. сб., 62, № 1, 76, 1963.
8. Schenkman E. Proc. Amer. Math. Soc., 6, № 2, 286, 1955.
9. Zassenhaus H. Lehrbuch der Gruppentheorie, I, 1937.
10. Higman G. Publ. Math. Debrecen, 4, 455, 1956.
11. Чунихин С. А. ДАН СССР, 73, № 1, 29, 1950.

Институт математики  
АН БССР

Поступило в редакцию  
I.XII 1969

Л. Я. ПОЛЯКОВ

### АНАЛОГ ГРУПП О. Ю. ШМИДТА

Группой Шмидта (группа типа  $S$  по терминологии С. А. Чунихина) называется минимальная ненильпотентная конечная группа. Когда мы говорим об аналогах групп Шмидта, то имеем в виду такую постановку задачи: исследовать строение конечной группы  $G$ , если некоторое множество  $M$  ее собственных подгрупп является  $\Theta$ -группами, а сама группа  $G$  теоретико-групповым свойством  $\Theta$  не обладает.

Так, С. А. Чунихин [1] полностью исследовал класс ненильпотентных конечных групп, все собственные  $pd$ -подгруппы которых нильпотентны. (Подгруппа, порядок которой делится на простое число  $p$ , называется  $pd$ -подгруппой). Оказалось, что класс указанных групп исчерпывается группами Шмидта и группами, являющимися прямым произведением группы порядка  $p$  на группу Шмидта, порядок которой на  $p$  не делится. Этот результат С. А. Чунихина привел к открытию нового класса групп — так называемых групп типа  $S_p$ , нашедших достаточно большое приложение в различных разделах теории конечных групп, особенно в построении комплектов подгрупп группы.

Естественно решить такую же задачу, заменив свойство нильпотентности более слабым свойством сверхразрешимости. Это и является целью настоящей работы, но лишь с тем ограничением, что в качестве  $p$  мы выбираем наименьший простой делитель порядка  $|G|$  конечной группы  $G$ . Заметим, что при произвольно выбранном простом числе  $p$  среди групп, все собственные  $pd$ -подгруппы которых сверхразрешимы, имеются и простые группы.

При решении поставленной здесь задачи существенным оказывается следующий факт:

- (А) { минимальная несверхразрешимая конечная группа разрешима и ее порядок делится не более чем на три различных простых числа [2].  
Определение. Минимальная несверхразрешимая конечная группа называется  $H$ -группой.

Основной результат данной работы составляет

*Теорема. Если  $p$  — наименьший простой делитель порядка несверхразрешимой группы  $G$  и все собственные  $pd$ -подгруппы группы  $G$  сверхразрешимы, то имеет место одно из следующих утверждений:*

- 1)  $G$  является  $H$ -группой;
- 2)  $G$  есть прямое произведение циклической группы порядка  $p$  и  $H$ -группы, порядок которой на  $p$  не делится;
- 3)  $G/\Phi(G)$  есть расширение элементарной абелевой  $q$ -силовской подгруппы ( $q \neq p$ ) при помощи группы с циклическими силовскими подгруппами, и при этом  $\tau(G) \leq 4$ .

Примеры групп из п. п. 1 и 2 хорошо известны (хотя бы пример из [2] на стр. 430 и несверхразрешимые группы типа  $S$  и типа  $S_p$  соответственно). Приведем пример группы из п. 3, удовлетворяющий условию теоремы. Пусть  $G$  задана определяющими соотношениями вида

$$a^5 = b^5 = c^6 = 1, \quad ab = ba, \\ c^{-1}ac = b, \quad c^{-1}bc = a^4b.$$

Порядок этой группы равен  $2 \cdot 3 \cdot 5^2$ . Все ее собственные  $2d$ -подгруппы сверхразрешимы. В то же время  $G$  содержит несверхразрешимую подгруппу порядка  $3 \cdot 5^2$ . Тем самым показано отличие приведенной группы от групп, указанных в п. п. 1 и 2 теоремы.

(Б)  $\left\{ \begin{array}{l} \text{Всюду в дальнейшем (кроме леммы 2) } G \text{ — это группа, удовлетворяю-} \\ \text{щая условию теоремы.} \end{array} \right.$

Используем следующие обозначения и определения.

$E$  — единичная группа;  $p, q, r, s$  — различные простые числа;  $\tau(G)$  — число различных простых делителей порядка  $|G|$  группы  $G$ ;  $G_p$  —  $p$ -силовская подгруппа  $G$ ;  $pG$  —  $p$ -силовское дополнение группы  $G$ ;  $|G:A|$  — индекс подгруппы  $A$  в  $G$ ;  $A'$  — коммутант подгруппы  $A$ ;  $G_G(A)$  и  $N_G(A)$  — соответственно централизатор и нормализатор подгруппы  $A$  в  $G$ ;  $\Phi(G)$ -подгруппа Фраттини группы  $G$  — пересечение максимальных подгрупп группы  $G$ ;  $F(G)$ -подгруппа Фиттинга — наибольшая нильпотентная инвариантная подгруппа группы  $G$ .

Понятие  $p$ -специальной,  $p$ -нильпотентной и  $p$ -разложимой групп можно найти в работе [3].

*Лемма 1. Группа  $G$  либо  $p$ -нильпотентна, либо типа  $S$ .*

*Доказательство.* Пусть  $G$  не является  $p$ -нильпотентной группой. По теореме 4.3.1 из [3],  $G$  содержит тривиальную или нетривиальную  $p$ -специальную  $pd$ -подгруппу  $K$  типа  $S$ . Пусть  $|K| = p^\alpha q^\beta$  и пусть  $K \neq G$ . Так как по условию  $K$  сверхразрешима и к тому же  $p < q$ , то  $q$ -силовская подгруппа в  $K$  является инвариантной подгруппой, т. е. получается, что  $K$  нильпотентна. Полученное противоречие доказывает лемму.

*Лемма 2. Пусть конечная группа  $G = MK$ ,  $(|M|, |K|) = 1$  и  $M$  — нильпотентная максимальная подгруппа группы  $G$ , не содержащая собственных инвариантных подгрупп  $G$ , а  $K$  — инвариантная силовская подгруппа группы  $G$ . Тогда  $G$  является группой Фробениуса.*

*Доказательство.* Для доказательства леммы достаточно показать, что  $M \cap x^{-1}Mx = E$  для всех  $x \in G - M$ . Итак, допустим, что  $M \cap x^{-1}Mx = D \neq E$ . Без ограничения общности наших рассуждений можно считать, что  $D$  — наибольшее среди рассматриваемых пересечений. Как следует из условия,  $|G:M| = r^\alpha$  и порядок  $D$  не делится на  $r$ . Из условия леммы следует также, что  $D$  неинвариантна в  $G$ , т. е.  $N_G(D) \neq G$ . Пусть  $L$  — некоторое  $r$ -силовское дополнение группы  $N_G(D)$  (такое  $L$  существует в  $N_G(D)$  в силу разрешимости последней). По теореме о разрешимых группах [4], подгруппа  $L$  входит в некоторую подгруппу  $y^{-1}My$ , отличную по крайней мере от одной из двух подгрупп  $M$  и  $x^{-1}Mx$ . Пусть  $y^{-1}My \neq M$ . Из нормализаторного свойства нильпотентных групп следует, что  $N_G(D) \cap M \supset D$ . Но поскольку  $r$  не делит  $|M|$ , то из предыдущего включения получаем

$$L \cap M \supset D \text{ или } y^{-1}My \cap M \supset D.$$

Получили противоречие с выбором  $D$ . Значит,  $D = E$ , т. е.  $G$  является группой Фробениуса. Лемма 2 доказана.

*Лемма 3. Если в группе  $G$   $p$ -силовская подгруппа неинвариантна, имеет простой порядок и  $\Phi(G) = E$ , то  $G$  является расширением элементарной абелевой  $q$ -силовской подгруппы группы  $G$  при помощи группы с циклическими силовскими подгруппами и  $\tau(G) \leq 4$ .*

*Доказательство.* Группа типа  $S$ , удовлетворяющая условию леммы 3, удовлетворяет и ее заключению [5]. Поэтому в дальнейшем, согласно лемме 1, считаем, что  $G$   $p$ -нильпотентна. Так как  $p$  — наименьший простой делитель порядка группы  $G$ , то по теореме Фейта — Томпсона [6] группа  $G$  разрешима. Пусть  $K$  — минимальная инвариантная подгруппа  $G$ . Оче-

видно,  $|K|$  не делится на  $p$ . Пусть  $|K| = q^\alpha$ . Так как  $\Phi(G) = E$ , то в  $G$  найдется максимальная подгруппа  $M$ , не содержащая  $K$ . Тогда

$$G = MK \text{ и } M \cap K = E, \quad (1)$$

ибо если  $M \cap K = L \neq E$ , то в силу абелевости  $K$  получили бы, что  $L$  инвариантна в  $G$ , а это противоречило бы минимальности  $K$ . Поскольку  $|K| = q^\alpha$ , то  $M$  является  $pd$ -группой, т. е. по условию сверхразрешимой. Значит,  $G/K \cong M$  сверхразрешима. Отсюда можно заключить, что  $K$  — единственная минимальная инвариантная подгруппа группы  $G$ , иначе  $G$  была бы сверхразрешимой группой, что невозможно по условию леммы. Покажем, что  $K = G_q$ . Допустим, что  $K \neq G_q$ , и пусть сначала  $q \neq r$ , где  $r$  — наибольшее простое число, делящее  $|G|$ . Тогда в сверхразрешимой группе  $G/K$  инвариантна  $r$ -силовская подгруппа  $G_r K/K$ . Так как  $K \neq G_q$ , то  $R = G_r K$  — собственная инвариантная подгруппа в  $pG$ . Образовав подгруппу  $RG_p \subset G$ , заключаем, что  $R$  сверхразрешима как подгруппа  $pd$ -подгруппы  $RG_p$  группы  $G$ . Но из сверхразрешимости  $R = G_r K$  следует, что  $G_r$  инвариантна в  $R$  и, более того,  $G_r$  характеристична в  $R$ . А так как  $R$  инвариантна в  $G$ , то получается, что и  $G_r$  инвариантна в  $G$ , что противоречит единственности в  $G$  минимальной инвариантной подгруппы  $K$ , являющейся  $q$ -группой. Пусть теперь  $q = r$ . Из равенств (1) следует, что  $|G| = |M| \cdot |K|$ , но тогда при  $K \neq G_q$  порядок  $M$  должен делиться на  $q$ . Подгруппа  $M$  по условию теоремы сверхразрешима, значит, ее  $q$ -силовская подгруппа  $M_q$  инвариантна в  $M$ , т. е.  $M \subseteq N_G(M_q)$ . В силу тех же равенств (1) подгруппа  $M_q$  не является силовской в самой группе  $G$ . По теореме Силова, в  $G$  найдется такая  $q$ -подгруппа  $Q$ , что  $M_q \subset Q$ . Из свойств  $p$ -групп имеем:  $M_q \subset N_Q(M_q) \subseteq Q$ . Поэтому  $N_G(M_q)$  вместе с подгруппой  $M$  содержит и  $N_Q(M_q)$ . Но поскольку  $M_q$  — силовская подгруппа в  $M$ , то  $N_Q(M_q)$  не может целиком входить в  $M$ . В силу максимальности последней получаем  $G = \{M, N_Q(M_q)\} \subseteq N_G(M_q)$ , т. е.  $M_q$  инвариантна в  $G$ . Но из равенств (1) (с учетом единственности минимальной инвариантной подгруппы  $K$ ) следует, что подгруппа  $M$  не может содержать собственных инвариантных подгрупп группы  $G$ .

Полученное противоречие окончательно показывает, что  $K = G_q$ . Следовательно,  $G_q$  — элементарная абелева подгруппа.

Рассмотрим теперь строение подгруппы  $qG$ . Пусть  $A$  — любая собственная  $pd$ -подгруппа из  $qG$ . По условию подгруппа  $AG_q$  сверхразрешима и по известной теореме Венда имеет нильпотентный коммутант. К группе  $AG_q$  применима теорема 4 работы [2]. По этой теореме  $A'$  — инвариантная подгруппа в  $AG_q$ . Очевидно,  $A'$  и  $G_q$  поэлементно перестановочны, т. е.  $A' \subseteq C_G(G_q)$ . Но поскольку  $K = G_q$  — единственная инвариантная подгруппа  $G$ , то  $G_q = F(G)$ . По теореме Фиттинга [7] тогда  $C_G(G_q) \subseteq G_q$ . Таким образом,  $A' \subseteq A \cap G_q = E$ . В силу произвольного выбора подгруппы  $A$  отсюда заключаем, что все собственные  $pd$ -подгруппы из  $qG$  абелевы. Рассмотрим два случая.

1. Подгруппа  $qG$  нильпотентна. Легко видеть, что  $qG$  — максимальная подгруппа группы  $G$ . Допустим противное, и пусть  $F$  — максимальная подгруппа  $G$ , причем  $qG \subset F$ . Так как  $G = qG \cdot G_q$ , то и  $G = FG_q$ . Если  $F \cap G_q = L \neq E$ , то в силу абелевости  $G_q$  получаем, что  $L$  инвариантна в  $G$ , но это противоречит минимальности  $G_q$ . Следовательно,  $F \cap G_q = E$ , а значит,  $|G| = |qG| \cdot |G_q| = |F| \cdot |G_q|$ , откуда  $|F| = |qG|$ , т. е. действительно  $qG$  максимальна в группе  $G$ . Из того, что  $G_q = K$  — единственная инвариантная подгруппа в группе  $G$ , следует, что  $qG$  не содержит собственных инвариантных подгрупп из  $G$ . Теперь по лемме 2 получаем, что  $G = qG \cdot G_q$  является группой Фробениуса. Из свойств последних и из того, что  $p^2$  не делит  $|qG|$  по условию, следует цикличность всех силовских подгрупп в  $qG$ . Доказательство леммы для рассматриваемого случая будет завершено, если мы покажем,

что  $\tau(G) \leq 4$ . Пусть  $\tau(G) > 4$ . По теореме Ф. Холла о разрешимых группах ([4], теорема 9.3.1) в  $G$  можно выбрать четыре  $pd$ -подгруппы (т. е. по условию сверхразрешимые) со взаимно простыми индексами. По теореме из [8] группа  $G$  тогда сверхразрешима. Полученное противоречие показывает, что  $\tau(G) \leq 4$ .

2. Подгруппа  $qG$  ненильпотентна. По теореме С. А. Чунихина [1]  $qG$  является либо  $pd$ -группой типа  $S$ , либо прямым произведением группы порядка  $p$  на группу типа  $S$ , порядок которой на  $p$  не делится.

По условию любая подгруппа из  $qG$  сверхразрешима. Но сверхразрешимая группа типа  $S$  имеет циклические силовские подгруппы. В самом деле, пусть  $K = PQ$ —группа типа  $S$  порядка  $p^\alpha q^\beta$ , где подгруппа  $P$  порядка  $p^\alpha$  циклическая, а подгруппа  $Q$  порядка  $q^\beta$  инвариантна в  $K$ , и пусть  $b$ —показатель числа  $q$  по модулю  $p$ . Из строения главного ряда  $K$  следует, что  $b = 1$  [9]. Но тогда  $Q/\Phi(Q)$  имеет простой порядок, ибо  $|\Phi(Q)| = q^{\beta-1}$  [5]. Значит, подгруппа  $Q$  циклическая, что и требовалось.

Выполнимость же условия  $\tau(G) \leq 4$  в случае 2 очевидна. Лемма 3 полностью доказана.

Доказательство теоремы. Если  $G$ —группа типа  $S$ , то она, очевидно, будет и  $H$ -группой. Поэтому, согласно лемме 1, считаем, что  $G$   $p$ -нильпотентна. Рассмотрим следующие случаи.

1.  $G_p$  инвариантна в  $G$ , т. е.  $G$   $p$ -разложима. Пусть  $|G_p| = p^\alpha$ . Допустим, что  $\alpha > 1$ . Тогда  $pG \cdot P$ —собственная подгруппа группы  $G$ , если  $P$ —подгруппа порядка  $p^{\alpha-1}$ . По условию подгруппа  $pG \cdot P$  сверхразрешима, следовательно, и  $pG$  сверхразрешима. Но тогда  $G = pG \times G_p$  сверхразрешима, что противоречит условию. Поэтому  $\alpha = 1$ .

Пусть теперь  $K$ —любая собственная подгруппа из  $pG$ . По условию подгруппа  $K \cdot G_p$  сверхразрешима, чем показано, что все собственные подгруппы из  $pG$  сверхразрешимы. Сама же группа  $pG$ , как следует из рассмотрения случая  $\alpha > 1$ , не может быть сверхразрешимой, т. е.  $pG$  является  $H$ -группой. Следовательно,  $G$  есть группа из пункта 2 теоремы.

2.  $G_p$  неинвариантна в  $G$ . Пусть опять  $|G_p| = p^\alpha$  и допустим, что  $\alpha > 1$ . Тогда подгруппа  $pG \cdot P$  сверхразрешима, где  $P$ —подгруппа порядка  $p^{\alpha-1}$ . Нетрудно поэтому заметить, что в этом случае все собственные подгруппы в  $G$  сверхразрешимы. Так как  $G$  по условию несверхразрешима, то  $G$  является  $H$ -группой. Положим  $\alpha = 1$ . Рассмотрим группу  $G/\Phi(G)$ . Из свойств подгруппы  $\Phi(G)$  следует, что  $p$ -силовская подгруппа в  $G/\Phi(G)$  имеет также порядок  $p$  и она неинвариантна в  $G/\Phi(G)$ , так как тогда по теореме С. А. Чунихина ([10], теорема 8.3)  $G_p$  была бы инвариантна в  $G$ , что невозможно по допущению. Таким образом, к  $G/\Phi(G)$  применима лемма 3, из которой следует утверждение теоремы.

Автор признателен В. И. Сергиенко за внимание и обсуждение результатов.

### Литература

1. Tschounikhin S. A. Мат. сб., 4, 521, 1938.
2. Huppert B. Math. Z., 60, № 4, 409, 1954.
3. Чунихин С. А. Труды семинара по теории групп. Минск, 1964.
4. Холл М. Теория групп. М., 1962.
5. Чунихин С. А. Труды семинара по теории групп. М.—Л., 1938, стр. 106.
6. Feit W., Thompson J. G., Pacific. J. Math., 13, № 3, 775, 1963.
7. Fitting H. J. D. Math., 48, 77, 1938.
8. Klaus D. Math. Z., 91, № 3, 198, 1966.
9. Шмидт О. Ю. Мат. сб., 31, 366, 1924.
10. Чунихин С. А. Мат. сб., 62, № 1, 76, 1961.

А. Ф. ОРЕЩЕНКО

**ДВУМЕРНЫЕ ПОВЕРХНОСТИ КЛАССА [11], [11] В  ${}^lE_4$**

В четырехмерном псевдоевклидовом пространстве  ${}^lE_4$  ( $l = 1, 2$ ) изучаются двумерные поверхности (A), касательная плоскость которых псевдоевклидова, т. е. метрика которых знаконеопределенная.

Уравнения инфинитезимального смещения репера  $R(A, e_i)$  в  ${}^lE_4$  имеют вид

$$dA = \omega^I e_I,$$

$$de_J = \omega^I e_{IJ}, \quad (1)$$

$$(I, J, K = 1, 2, 3, 4)$$

( $\omega^I, \omega^J$  — формы Пфаффа). Условия интегрируемости [1] системы (1) даются уравнениями структуры

$$D\omega^I = \omega^K \wedge \omega_K^I, \quad (2)$$

$$D\omega_J^I = \omega_K^I \wedge \omega_K^J.$$

В реперах первого порядка поверхности (A) векторы  $e_i$  считаем тангенциальными, а  $e_a$  ( $i, j = 1, 2; a = 3, 4$ ) — нормальными. Эти реперы выделяются уравнениями Пфаффа

$$\omega^a = 0, \quad (3)$$

$$\omega_i^a = b_{ij}^a \omega^j \quad (b_{ij}^a = b_{ji}^a). \quad (4)$$

Вторые фундаментальные тензоры  $b_{ij}^a$  поверхности (A) могут иметь каждый следующие характеристики Сегре: [11], [11], [2], соответственно чему все тензоры  $b_{ij}^a$  двумерных поверхностей в  ${}^lE_4$  подразделяются на шесть классов и в каждом из шести классов (по теореме А. З. Петрова [2] существуют (вообще говоря неортогональные) реперы  $R^a$ , в которых эти тензоры принимают канонический вид. Ниже рассматривается геометрия поверхности, индуцированная тензорами  $b_{ij}^a$ , имеющими характеристику Сегре [11] (кратко поверхности класса [11], [11]).

Тензоры  $'g_{ij}$  и  $'b_{ij}^a$  в реперах  $'R^a$  имеют вид [2]

$$'g_{ij}^a = \begin{bmatrix} \varepsilon_1^a & 0 \\ 0 & \varepsilon_2^a \end{bmatrix}, \quad 'b_{ij}^3 = \begin{bmatrix} \varepsilon_1^3 \rho_1 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2^3 \rho_2 \end{bmatrix}, \quad 'b_{ij}^4 = \begin{bmatrix} \varepsilon_1^4 \lambda_1 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2^4 \lambda_2 \end{bmatrix}, \quad (5)$$

$\varepsilon_i^a = \pm 1$ ,  $\rho_i, \lambda_i$  — собственные значения тензоров  $b_{ij}^a$ . Не ограничивая общности, положим  $\varepsilon_1^a = 1, \varepsilon_2^a = -1$ . Поскольку  $R^a$  — ортореперы, то, воспользовавшись преобразованием

$$e_j = A_j^{i'} e_{i'}, \quad A_j^{i'} = \begin{bmatrix} \tau_1 \operatorname{ch} \varphi & \tau_1 \operatorname{sh} \varphi \\ \tau_2 \operatorname{sh} \varphi & \tau_2 \operatorname{ch} \varphi \end{bmatrix}, \quad (\det |A_j^{i'}| = \tau), \quad (6)$$

приведем тензоры (5) к виду

$$g_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad b_{ij}^3 = \begin{bmatrix} \rho_1 & 0 \\ 0 & -\rho_2 \end{bmatrix},$$

$$b_{ij}^4 = \begin{bmatrix} \lambda_1 \operatorname{ch}^2 \varphi - \lambda_2 \operatorname{sh}^2 \varphi & \tau(\lambda_1 - \lambda_2) \operatorname{ch} \varphi \operatorname{sh} \varphi \\ \tau(\lambda_1 - \lambda_2) \operatorname{ch} \varphi \operatorname{sh} \varphi & \lambda_1 \operatorname{sh}^2 \varphi - \lambda_2 \operatorname{ch}^2 \varphi \end{bmatrix}, \quad (7)$$

где  $\varphi$  — псевдоевклидов угол, вращение на который совмещает оси репера  $R_4$  с осями репера  $R^3$ ;  $\tau_i = \pm 1$ , судя по тому, является ли это вращение собственным или несобственным;  $\tau = \tau_1 \tau_2$ .

В репере  $R(A, e_j)$  полагаем  $e_3^2 = 1$ ,  $e_4^2 = \varepsilon_4 = \pm 1$  (в зависимости от  $l$ ). Таким образом, формы  $\omega_j^l$  удовлетворяют условиям псевдоортогональности

$$\omega_1^l = 0, \quad \omega_2^1 = \omega_1^2, \quad \omega_3^2 = \omega_2^3, \quad \omega_4^2 = \varepsilon_4 \omega_2^4, \quad (8)$$

$$\omega_3^1 = -\omega_1^3, \quad \omega_4^1 = -\varepsilon_4 \omega_1^4, \quad \omega_4^3 = -\varepsilon_4 \omega_3^4.$$

1. Выбор канонического репера поверхности  $(A)$ . Дифференцируем внешние соотношения (4), используя (2) — (4). Применяя лемму Картана и полагая при этом  $b_{ij}^a$ , согласно (7), в фиксированной точке поверхности  $(A)$  имеем

$$\delta \rho_1 - \varepsilon_4 (\lambda_1 \operatorname{ch}^2 \varphi - \lambda_2 \operatorname{sh}^2 \varphi) \pi_3^4 = 0,$$

$$(\rho_1 - \rho_2) \pi_1^2 + \varepsilon_4 \tau (\lambda_1 - \lambda_2) \operatorname{ch} \varphi \operatorname{sh} \varphi \pi_3^4 = 0,$$

$$\delta \rho_2 + \varepsilon_4 (\lambda_1 \operatorname{sh}^2 \varphi - \lambda_2 \operatorname{ch}^2 \varphi) \pi_3^4 = 0, \quad (9)$$

$$\delta (\lambda_1 \operatorname{ch}^2 \varphi - \lambda_2 \operatorname{sh}^2 \varphi) - \tau (\lambda_1 - \lambda_2) \operatorname{sh} 2\varphi \pi_1^2 + \rho_1 \pi_3^4 = 0,$$

$$\tau \delta (\lambda_1 - \lambda_2) \operatorname{sh} \varphi \operatorname{ch} \varphi - (\lambda_1 - \lambda_2) \operatorname{ch} 2\varphi \pi_1^2 = 0,$$

$$\delta (\lambda_1 \operatorname{sh}^2 \varphi - \lambda_2 \operatorname{ch}^2 \varphi) - \tau (\lambda_1 - \lambda_2) \operatorname{sh} 2\varphi \pi_1^2 - \rho_2 \pi_3^4 = 0,$$

$\delta, \pi_j^l$  — соответственно оператор дифференцирования и дифференциальные формы, соответствующие вторичным параметрам.

Для канонизации репера необходимо фиксировать оставшийся вторичный параметр. Естественно, следуя [3], сделать эту фиксацию за счет значения угла  $\varphi$ .

Радиус-вектор  $U$  индикатрисы кривизны может быть представлен в виде [4]

$$U = \frac{\varphi^a e_a}{ds^2} = x^a e_a, \quad \varphi^a = b_{ij}^a \omega^i \omega^j, \quad ds^2 = dA^2 = \omega^{1^2} - \omega^{2^2}. \quad (10)$$

Полагая  $\omega^1 = \operatorname{ch} \psi ds$ ,  $\omega^2 = \operatorname{sh} \psi ds$ , где  $\psi$  — параметр, и подставляя в (10), получим параметрические уравнения индикатрисы кривизны:

$$x^3 = \rho_1 \operatorname{ch}^2 \psi - \rho_2 \operatorname{sh}^2 \psi, \quad (11)$$

$$x^4 = (\lambda_1 \operatorname{ch}^2 \varphi - \lambda_2 \operatorname{sh}^2 \varphi) \operatorname{ch}^2 \psi + \tau (\lambda_1 - \lambda_2) \operatorname{sh} 2\varphi \operatorname{sh} \psi \operatorname{ch} \psi +$$

$$+ (\lambda_1 \operatorname{sh}^2 \varphi - \lambda_2 \operatorname{ch}^2 \varphi) \operatorname{sh}^2 \psi.$$

В общем случае индикатриса кривизны является кривой второго порядка. Метрика нормальной плоскости может быть и закононеопределенной, а следовательно, главных направлений индикатриса кривизны может не

иметь: в  ${}^2E_4$  асимптотические направления индикатрисы кривизны и изотропные направления могут разделяться и тогда вещественных главных направлений не будет. Поэтому отнести векторы  $e_a$  репера  $R(A, e_j)$  к главным направлениям индикатрисы кривизны, не теряя общности, нельзя.

Из уравнений (11) непосредственно усматривается, что вектор  $e_3$  можно отнести к асимптотическому направлению индикатрисы кривизны. Однако сделать это отнесение за счет значения угла  $\varphi$  нельзя, так как из аналитических соображений для этого нужно, чтобы  $\operatorname{ch} 2\varphi + \tau \operatorname{sh} 2\varphi = 0$ , что невозможно.

Относительно фокальной кривой [3] можно провести рассуждения, аналогичные проведенным выше для индикатрисы кривизны.

Фиксация  $\varphi = 0$ , т. е. когда главные оси тензоров  $b_{ij}^a$  совпадают, ведет к ограничению на поверхности. Положим

$$\varphi = \ln(\sqrt{2} + 1). \quad (12)$$

Тензор  $b_{ij}^4$  в силу (12) примет вид

$$b_{ij}^4 = \begin{bmatrix} 2\lambda_1 - \lambda_2 & \tau\sqrt{2}(\lambda_1 - \lambda_2) \\ \tau\sqrt{2}(\lambda_1 - \lambda_2) & \lambda_1 - 2\lambda_2 \end{bmatrix}. \quad (13)$$

Последние 3 уравнения системы (9) в силу (12), (13) дают конечное соотношение, которое вместе со вторым уравнением системы (9) дает  $\pi_1^2 = \pi_3^2 = 0$ , т. е. канонизацию репера. Исключения составляют поверхности, у которых собственные значения каждого тензора  $b_{ij}^a$  равны, т. е.

$$\rho_1 = \rho_2 = \rho, \quad \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda. \quad (14)$$

Отметим, что из указанных выше уравнений системы (9) в  ${}^1E_4$  получается еще одно исключение  $\rho_1 - \rho_2^4 = \pm(\lambda_1 - \lambda_2)$ , которое, однако, не является существенным, так как из всех уравнений системы (9) формы  $\pi_1^2 = \pi_3^2 = 0$  и репер канонизируется. Эти поверхности обладают тем свойством, что нормали  $e_3, e_4$  направлены по биссектрисам углов между главными направлениями индикатрисы кривизны.

Полагая  $b_{ij}^3$ , согласно (7), а  $b_{ij}^4$ , согласно (13), имеем

$$\omega_1^3 = \rho_1 \omega^1, \quad \omega_2^3 = -\rho_2 \omega^2, \quad (15)$$

$$\omega_1^4 = (2\lambda_1 - \lambda_2) \omega^1 + \tau\sqrt{2}(\lambda_1 - \lambda_2) \omega^2, \quad \omega_2^4 = \tau\sqrt{2}(\lambda_1 - \lambda_2) \omega^1 + (\lambda_1 - 2\lambda_2) \omega^2.$$

Положим

$$\omega_1^2 = q_i \omega^i, \quad \omega_3^4 = r_i \omega^i. \quad (16)$$

Уравнения инфинитезимального смещения (1) канонического репера  $R(A, e_j)$  в силу (15), (16) принимают вид

$$dA = \omega^1 e_1 + \omega^2 e_2,$$

$$de_1 = (q_1 \omega^1 + q_2 \omega^2) e_2 + \rho_1 \omega^1 e_3 + [(2\lambda_1 - \lambda_2) \omega^1 + \tau\sqrt{2}(\lambda_1 - \lambda_2) \omega^2] e_4,$$

$$de_2 = (q_1 \omega^1 + q_2 \omega^2) e_1 - \rho_2 \omega^2 e_3 + [\tau\sqrt{2}(\lambda_1 - \lambda_2) \omega^1 + (\lambda_1 - 2\lambda_2) \omega^2] e_4, \quad (17)$$

$$de_3 = -\rho_1 \omega^1 e_1 - \rho_2 \omega^2 e_2 + (r_1 \omega^1 + r_2 \omega^2) e_4,$$

$$de_4 = -\varepsilon_4 \{ [(2\lambda_1 - \lambda_2) \omega^1 + \tau\sqrt{2}(\lambda_1 - \lambda_2) \omega^2] e_1 - [\tau\sqrt{2}(\lambda_1 - \lambda_2) \omega^1 + (\lambda_1 - 2\lambda_2) \omega^2] e_2 + (r_1 \omega^1 + r_2 \omega^2) e_3 \},$$

где  $\rho_i, \lambda_i, q_i, r_i$  — инварианты поверхности.

Напомним, что нормали  $X^3, X^4$  фиксированы так, что главные направления одного второго фундаментального тензора образуют с главными направлениями другого угол  $\varphi = \ln(\sqrt{2} + 1)$  и что оси  $X^1, X^2$  канонического репера имеют главные направления одного из фундаментальных тензоров  $b_{ij}^a$ .

Соответствующие системе (17) уравнения структуры получаются дифференцированием (15), (16) с учетом (3), (15), (16) в виде

$$D\omega^1 = -q_1\omega^1 \wedge \omega^2, \quad D\omega^2 = q_2\omega^1 \wedge \omega^2,$$

$$d\rho_1 \wedge \omega^1 + \{\varepsilon_4[r_2(2\lambda_1 - \lambda_2) - \tau\sqrt{2}(\lambda_1 - \lambda_2)r_1] - (\rho_1 - \rho_2)q_1\} \omega^1 \wedge \omega^2 = 0,$$

$$d\rho_2 \wedge \omega^2 - \{q_2(\rho_1 - \rho_2) + \varepsilon_4[\tau\sqrt{2}(\lambda_1 - \lambda_2)r_2 - (\lambda_1 - 2\lambda_2)r_1]\} \omega^1 \wedge \omega^2 = 0,$$

$$d(2\lambda_1 - \lambda_2) \wedge \omega^1 + \tau\sqrt{2}d(\lambda_1 - \lambda_2) \wedge \omega^2 + [2\sqrt{2}\tau(\lambda_1 - \lambda_2)q_2 - \rho_1r_2 - 3(\lambda_1 - \lambda_2)q_1] \omega^1 \wedge \omega^2 = 0, \quad (18)$$

$$\tau\sqrt{2}d(\lambda_1 - \lambda_2) \wedge \omega^1 + d(\lambda_1 - 2\lambda_2) \wedge \omega^2 + [3(\lambda_1 - \lambda_2)q_2 - 2\sqrt{2}\tau(\lambda_1 - \lambda_2)q_1 - \rho_2r_1] \omega^1 \wedge \omega^2 = 0,$$

$$dq_1 \wedge \omega^1 + dq_2 \wedge \omega^2 + [q_2^2 - q_1^2 + \rho_1\rho_2 - \varepsilon_4(2\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_1 - 2\lambda_2) + 2\varepsilon_4(\lambda_1 - \lambda_2)^2] \omega^1 \wedge \omega^2 = 0,$$

$$dr_1 \wedge \omega^1 + dr_2 \wedge \omega^2 + [r_2q_2 - r_1q_1 + \tau\sqrt{2}(\lambda_1 - \lambda_2)(\rho_1 - \rho_2)] \omega^1 \wedge \omega^2 = 0.$$

В силу (19), (20) поверхности класса [11], [11] существуют с произвольным числом функций двух аргументов.

2. Сопряженная сеть поверхности определяется соотношением

$$\omega_1^3 \omega_2^4 - \omega_2^3 \omega_1^4 = 0, \quad (19)$$

которое в силу (15) принимает вид

$$\tau\sqrt{2}\rho_1(\lambda_1 - \lambda_2)\omega^1 + [\rho_1(\lambda_1 - 2\lambda_2) + \rho_2(2\lambda_1 - \lambda_2)]\omega^1\omega^2 + \tau\sqrt{2}\rho_2(\lambda_1 - \lambda_2)\omega^2 = 0. \quad (20)$$

Из уравнения (20) при

$$|\rho_1| + |\rho_2| \neq 0, \quad (|\lambda_1| + |\lambda_2| \neq 0) \quad (21)$$

находим сопряженные направления  $(\omega^1 : \omega^2)_j$  ( $j = 1, 2$ ). Подсчитывая сложное отношение  $W$  координатных и сопряженных прямых, находим, что при  $\rho_1\rho_2 > 0$   $W > 0$  (т. е. координатная и сопряженная сети не разделяются), а при  $\rho_1\rho_2 < 0$   $W < 0$  (т. е. координатная и сопряженная сети разделяются).

**Теорема 1.** *Чтобы главные направления одного из тензоров  $b_{ij}^a$  разделяли сопряженные направления, необходимо и достаточно, чтобы собственные значения этого тензора имели разные знаки.*

Если не выполняется одно из условий (21), то поверхность имеет бесконечно много сопряженных направлений. Это связано с тем, что она лежит в  $E_3$  (так как если один из тензоров  $b_{ij}^a$  нулевой, то поверхность вложена в  $E_3$ ).

3. Уравнение фокальной кривой [3] может быть записано в виде

$$(\omega^1 - \omega_1^3x^3 - \omega_1^4x^4) \wedge (\omega^2 + \omega_2^3x^3 + \omega_2^4x^4) = 0.$$

В силу (15) из него вытекает

$$\begin{aligned} \rho_1 \rho_2 x^3 + \varepsilon_4 [\rho_2 (2\lambda_1 - \lambda_2) - \rho_1 (\lambda_1 - 2\lambda_2)] x^3 x^4 + \lambda_1 \lambda_2 x^4^2 - \\ - (\rho_1 + \rho_2) x^3 - \varepsilon_4 (\lambda_1 + \lambda_2) x^4 + 1 = 0, \end{aligned} \quad (22)$$

т. е. фокальная кривая является кривой второго порядка. С осью  $X^4$  фокальная кривая пересекается в точках  $F_1 \left( 0, \frac{\varepsilon_4}{\lambda_1} \right)$  и  $F_2 \left( 0, \frac{\varepsilon_4}{\lambda_2} \right)$ , а с осью  $X^3$  в точках  $\Phi^1 \left( \frac{1}{\rho_1}, 0 \right)$ ,  $\Phi^2 \left( \frac{1}{\rho_2}, 0 \right)$ . Если же  $\rho_1 = \rho_2$  (или  $\lambda_1 = \lambda_2$ ), то ось  $X^3$  (или  $X^4$ ) касается фокальной кривой в точке  $\Phi' \left( \frac{1}{\rho_1}, 0 \right)$  (или  $F' \left( 0, \frac{\varepsilon_4}{\lambda_1} \right)$ ).

4. Исключение параметра  $\psi$  из уравнений (11) в силу (12) дает явное уравнение индикатрисы кривизны поверхности (A):

$$\begin{aligned} (\lambda_1 - \lambda_2)^2 x^3^2 - 6(\lambda_1 - \lambda_2)(\rho_1 - \rho_2) x^3 x^4 + (\rho_1 - \rho_2)^2 x^4^2 + 2(\lambda_1 - \lambda_2) [\rho_1 (\lambda_1 + \\ + 2\lambda_2) - \rho_2 (2\lambda_1 + \lambda_2)] x^3 + 2(\rho_1 - \rho_2) [\rho_1 (\lambda_1 - 2\lambda_2) + \rho_2 (2\lambda_1 - \lambda_2)] x^4 + \\ + \rho_1^2 (\lambda_1 - 2\lambda_2)^2 + \rho_2^2 (2\lambda_1 - \lambda_2)^2 - 2\rho_1 \rho_2 (2\lambda_1^2 - 3\lambda_1 \lambda_2 + 2\lambda_2^2) = 0. \end{aligned} \quad (23)$$

Если  $(\lambda_1 - \lambda_2)(\rho_1 - \rho_2) \neq 0$ , то уравнение (23) является уравнением кривой гиперболического типа с центром в точке  $O \left( \frac{1}{2}(\rho_1 + \rho_2), \frac{1}{2}(\lambda_1 + \lambda_2) \right)$ .

Конец вектора средней кривизны

$$\mathbf{M} = \frac{1}{2} g^{ij} b_{ij}^a \mathbf{e}_a = \frac{1}{2} \{(\rho_1 + \rho_2) \mathbf{e}_3 + (\lambda_1 + \lambda_2) \mathbf{e}_4\} \quad (24)$$

лежит в центре индикатрисы кривизны [4].

Средняя кривизна поверхности в силу (24) равна  $|\mathbf{M}| = \frac{1}{2} \sqrt{(\rho_1 + \rho_2)^2 + \varepsilon_4 (\lambda_1 + \lambda_2)^2}$ . Отсюда следует, что поверхности нулевой средней кривизны получаются при  $\rho_1 + \rho_2 = \lambda_1 + \lambda_2 = 0$ , а в  ${}^2E_4$  также и при  $\rho_1 + \rho_2 = \pm (\lambda_1 + \lambda_2)$ .

Гауссова кривизна и кручение соответственно равны

$$K_h = -(\rho_1 \rho_2 + \varepsilon_4 \lambda_1 \lambda_2), \quad K_\kappa = \tau \sqrt{2} (\rho_1 - \rho_2) (\lambda_1 - \lambda_2). \quad (25)$$

На основании (25) имеет место

**Теорема 2.** *Для того чтобы поверхность (A) имела нулевое гауссово кручение, необходимо и достаточно, чтобы один из тензоров  $b_{ij}^a$  имел равные собственные значения.*

Если оба тензора  $b_{ij}^a$  ранга один, то поверхность имеет нулевую гауссову кривизну.

5. Подсчитывая геодезическую кривизну  $k_g$  координатных линий  $\omega^i$  поверхности, получаем

$$k_{g_1} = |\mathbf{g}_1| = |q_1| i, \quad k_{g_2} = |\mathbf{g}_2| = |q_2|. \quad (26)$$

Наличие мнимой единицы  $i$  связано с тем, что вектор  $\mathbf{g}_1$  геодезической кривизны линии  $\omega^1$  имеет направление вектора  $\mathbf{e}_2$ .

Нормальные кривизны  $k_n$  координатных линий  $\omega^i$

$$k_{n_1} = \sqrt{\rho_1^2 + \varepsilon_4(2\lambda_1 - \lambda_2)^2}, \quad k_{n_2} = \sqrt{\rho_2^2 + \varepsilon_4(\lambda_1 - 2\lambda_2)^2}. \quad (27)$$

Из (27) следует

Теорема 3. Для того чтобы на поверхности (A)  $j$ -ая ( $j = 1, 2$ ) главная линия одного из тензоров  $b_{ij}^a$  (линия, огибающая главные направления этого тензора) была асимптотической, необходимо и достаточно, чтобы в репере  $R(A, \mathbf{e}_j)$   $b_{jj}^a = 0$  ( $a = 3, 4$ ), а в  ${}^2E_4$   $b_{jj}^3 = \pm b_{jj}^4$ .

Если поверхность не является плоскостью, то ее главные линии одновременно не могут быть асимптотическими.

6. Эволютная поверхность (Ф) как огибающая нормальных плоскостей поверхности (A) выделяется условиями

$$\Phi = \mathbf{A} + f^a \mathbf{e}_a, \quad (28)$$

$$d\Phi = \Omega^a \mathbf{e}_a, \quad \Omega^a = df^a + f^b \omega_b^a \quad (b = 3, 4).$$

В силу (17) (при независимых  $\omega^j$ ) из (28) получаем

$$1) \quad f^3 = \frac{1}{\rho}, \quad (\rho_1 = \rho_2 = \rho), \quad f^4 = 0 \quad (\text{при } \lambda_1 \neq \lambda_2), \quad (29)$$

$$2) \quad f^3 = 0, \quad f^4 = \frac{\varepsilon_4}{\lambda}, \quad (\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda) \quad (\text{при } \rho_1 \neq \rho_2).$$

Таким образом, при выполнении одного из равенств (29) семейство нормалей  $\mathbf{e}_3$  ( $\mathbf{e}_4$ ) поверхности (4) имеет фокальную поверхность (Ф), которая в данном случае является и эволютной. При этом линия

$$r_1 \omega^1 + r_2 \omega^2 = 0 \quad (30)$$

является линией кривизны, т. е. вдоль нее нормали  $\mathbf{e}_3$  (или  $\mathbf{e}_4$ ) образуют торс. В частности, чтобы координатная линия  $\omega^j$  была линией кривизны, надо, чтобы наряду с (29) было  $r_j = 0$ .

Поверхности, любая линия которых является относительно семейства нормалей  $\mathbf{e}_3$  (или  $\mathbf{e}_4$ ) линией кривизны, получаются в силу (28)—(30) при

$$\rho_1 = \rho_2 = \rho \quad (\text{или } \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda), \quad r_1 = r_2 = 0. \quad (31)$$

Уравнения структуры (18) в силу (29), (31) дают

$$\rho = \text{const} \quad (\text{соответственно } \lambda = \text{const}). \quad (32)$$

Последние два уравнения системы (28) в силу (30)—(32) показывают, что  $\Omega^a \equiv 0$ , а следовательно,  $d\Phi \equiv 0$ , т. е. эволютная поверхность вырождается в точку. Это позволяет сформулировать характерный признак рассматриваемых поверхностей.

Теорема 4. Условия  $r_1 = r_2 = 0$  и равенство собственных значений  $\mu$  одного из тензоров  $b_{ij}^a$  поверхности (A) являются необходимыми и достаточными для того, чтобы 1) любая линия этих поверхностей была линией кривизны, 2) нормальные плоскости поверхности проходили через одну точку.

7. Семейство нормалей  $\mathbf{e}_3$  поверхности (A) допускает огибающую  $\mathbf{M} = \mathbf{A} + \mu \mathbf{e}_3$  вдоль координатной линии  $\omega^1$  (соответственно  $\omega^2$ ) при условиях, что  $\mu = \frac{1}{\rho_1}$ ,  $r_1 = 0$  (соответственно  $\mu = \frac{1}{\rho_2}$ ,  $r_2 = 0$ ). Если же  $r_1 = r_2 = 0$ , то огибающая существует вдоль каждой из координатных линий,

Аналогично семейство нормалей  $e_4$  допускает огибающую  $M = A + \mu e_4$  вдоль линии  $\omega^1 - k\omega^2 = 0$ , где  $\mu$  и  $k$  определяются системой

$$\begin{aligned} k - \varepsilon_4 [(2\lambda_1 - \lambda_2)k + \tau\sqrt{2}(\lambda_1 - \lambda_2)]\mu &= 0, \\ 1 + \varepsilon_4 [\tau\sqrt{2}(\lambda_1 - \lambda_2)k + (\lambda_1 - 2\lambda_2)]\mu &= 0, \\ (r_1k + r_2)\mu &= 0, \end{aligned} \quad (33)$$

из которой следует, что при  $r_2 = \tau\sqrt{2}r_1$  существует огибающая  $M = A + \frac{\varepsilon_4}{\lambda_1}e_4$  вдоль линии  $\omega^1 : \omega^2 = -\tau\sqrt{2}$ , а при  $r_1 = \tau\sqrt{2}r_2$  огибающая  $M = A + \frac{\varepsilon_4}{\lambda_2}e_4$  вдоль линии  $\omega^1 : \omega^2 = -\tau\frac{\sqrt{2}}{2}$ . Если же  $r_1 = r_2 = 0$ , то огибающие  $M = A + \mu e_4$  будут вдоль обеих этих линий.

Заметив, что линии, вдоль которых нормали  $e_3$  ( $e_4$ ) допускают огибающие, являются главными линиями тензоров  $b_{ij}^a$ , имеет место

**Теорема 5.** *Нормаль  $e_3$  (соответственно  $e_4$ ) может допускать огибающую вдоль одной из главных линий тензора  $b_{ij}^3$  (соответственно  $b_{ij}^4$ ) при условии, что  $r_1r_2 = 0$  (соответственно  $r_i = \tau\sqrt{2}r_j$ ,  $i \neq j$ ,  $i, j = 1, 2$ ), а при условии  $r_1 = r_2 = 0$  — вдоль обеих главных линий тензора  $b_{ij}^3$  ( $b_{ij}^4$ ).*

Кроме того, семейство нормалей ( $e_3 + te_4$ ) поверхности ( $A$ ) допускает огибающую вдоль линии  $\omega^1 - k\omega^2 = 0$ , где  $t$  и  $k$  являются решениями уравнений

$$dt + (r_1k + r_2)(\varepsilon_4 t^2 + 1) = 0,$$

$\varepsilon_4 \tau \sqrt{2} (\lambda_1 - \lambda_2) tk^2 + [(\rho_1 - \rho_2) + \varepsilon_4 3(\lambda_1 - \lambda_2)t]k + \varepsilon_4 \tau \sqrt{2} (\lambda_1 - \lambda_2)t = 0$ ,  
полученных из системы, аналогичной (33).

Таким образом, конгруэнция нормалей любой поверхности ( $A$ )  $\infty^1$  способами расслаивается в семейство торсов.

Подсчитывая характеристики гиперплоскостей  $X^3 = 0$  ( $X^4 = 0$ ) вдоль линий  $\omega^i$  и беря пересечения их с различными координатными плоскостями, получим геометрическое истолкование инвариантов  $r_j$ , ( $\rho_j$ ,  $\lambda_j$ ).

8. Некоторые частные случаи.

а) Поверхности с равными собственными значениями одного из тензоров  $b_{ij}^a$ . Пусть

$$\rho_1 = \rho_2 = \rho (\neq 0). \quad (34)$$

В силу (14) имеем  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ . Очевидно, главные направления тензора  $b_{ij}^3$  неопределенные. Из уравнений структуры (18) с учетом (34) вытекает, что эти поверхности существуют с произволом одной функции двух аргументов.

Для сопряженных направлений (20) в этом случае получаем  $(\omega^1 : \omega^2)_1 = -\tau\sqrt{2}$ ,  $(\omega^1 : \omega^2)_2 = -\tau\frac{\sqrt{2}}{2}$ . Они ортогональны и в силу (12) являются главными направлениями тензора  $b_{ij}^4$ .

Фокальная кривая (22) в силу (34) будет гиперболой. Ось  $X^3$  касается ее в точке  $T\left(\frac{1}{\rho}, 0\right)$ . Если вместе с (34)  $\lambda_1 + \lambda_2 = 0$ , то нормали  $e_a$  имеют главные направления фокальной кривой.

Уравнение индикатрисы кривизны (23) в силу (34) принимает вид  $(x^3 - \rho)^2 = 0$ , т. е. индикатриса кривизны является прямой, параллельной нормали  $e_4$  и отстоящей от нее на расстояние  $\rho$ .

Если вместо (34) имеет место равенство  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ , то поверхность обладает аналогичными свойствами и имеет место

**Теорема 6.** *Чтобы собственные значения у одного из тензоров  $b_{ij}^a$  поверхности (A) были равны, необходимо и достаточно выполнения любого из следующих условий: 1) главные оси второго тензора сопряжены; 2) индикатриса кривизны — прямая, параллельная нормали, соответствующей второму тензору; 3) гауссово кручение равно нулю; 4) поверхность допускает эволютную поверхность (последняя при  $r_1 = r_2 = 0$  вырождается в точку).*

б) Поверхности, у которых одно из семейств главных линий тензора  $b_{ij}^a$  является асимптотическим. Пусть

$$\rho_1 = 2\lambda_1 - \lambda_2 = 0. \quad (35)$$

На основании теоремы 3 и соотношений (20) в силу (35) заключаем, что линия  $\omega^1$  поверхности (A) является асимптотической (но не прямой).

Фокальная кривая (22) с учетом (35) будет параболой с осью параллельной нормали  $e_3$ . Ось  $X^4$  с фокальной кривой всегда имеет две различные общие точки.

Индикатриса кривизны (23) в силу (35) является гиперболой, проходящей через точку A. Гауссова кривизна имеет определенный знак (в зависимости от  $l$ ). Эти поверхности существуют с произволом четырех функций одного аргумента.

9. Рассмотрим, наконец, поверхности, исключенные при канонизации репера  $R(A, e_i)$ .

I. Случай равных собственных значений у обоих тензоров  $b_{ij}^a$ . В силу (14) тензоры  $b_{ij}^a$  пропорциональны:

$$b_{ij}^a = \mu b_{ij}^3, \quad \mu = \frac{\lambda}{\rho} \quad (\rho \neq 0). \quad (36)$$

Формы Пфаффа (15) с учетом (36) имеют вид

$$\omega_1^3 = \rho\omega^1, \quad \omega_2^3 = -\rho\omega^2, \quad \omega_1^4 = \mu\rho\omega^1, \quad \omega_2^4 = -\mu\rho\omega^2. \quad (37)$$

После внешнего дифференцирования форм (37) в силу (3), (37) заключаем, что

$$\begin{aligned} d\rho - \varepsilon_4 \lambda \omega_3^4 &= 0, & d\lambda + \rho \omega_3^4 &= 0, \\ d\mu + (1 + \varepsilon_4 \mu^2) \omega_3^4 &= 0. \end{aligned} \quad (38)$$

Так как  $D\omega_3^4 = 0$  в силу (37), то гауссово кручение этих поверхностей равно нулю, а  $\omega_3^4 = dt$ .

При выполнении (37) и последнего из уравнений (38)  $d^2A$  (и  $d^3A$ ) разлагаются по векторам  $e_1, e_2, (e_3 + \mu e_4)$ , т. е. поверхность лежит в  ${}^1E_3$  (вообще, если тензоры  $b_{ij}^a$  поверхности (A) пропорциональны, то поверхность (A) вкладывается в  ${}^1E_3$ ).

Из первых двух уравнений системы (38) имеем также, что  $\rho^2 + \varepsilon_4 \lambda^2 = \text{const}$ . В силу (37)

$$D\omega_1^2 = -(\rho^2 + \varepsilon_4 \lambda^2) \omega^1 \wedge \omega^2.$$

Отсюда следует, что эти поверхности имеют постоянную гауссову кривизну.

В итоге имеет место

Теорема 7. Если собственные значения у обоих тензоров  $b_{ij}^a$  равны, то эта поверхность лежит в  ${}^1E_3$  и имеет постоянную гауссову кривизну.

В частности, если  $\mu = \text{const}$ , то из системы (38) следует, что  $\rho, \lambda$  постоянные (за исключением  $\mu = \pm 1$  в  ${}^2E_4$ ) и  $d\left(A + \frac{1}{2\rho}\left(e_3 + \frac{\varepsilon_4}{\mu}e_4\right)\right) \equiv 0$  в силу (37), т. е. поверхности (A) в этом случае будут сферами радиуса  $\frac{1}{2|\rho\lambda|}\sqrt{\rho^2 + \lambda^2}$ .

II. Оба тензора  $b_{ij}^a$  имеют общие главные направления, что дает  $\varphi = 0$ . Система (9) показывает, что репер этим не канонизируется. Однако форма  $\pi_1^2$  исчезает независимо от  $\pi_3^4$ , если только собственные значения у одного из тензоров  $b_{ij}^a$  различны. Таким образом, выбор нормали не влияет на положение осей  $X^1, X^2$  (они имеют главные направления тензоров  $b_{ij}^a$ ). Положение нормали, например  $e_4$ , можно доопределить за счет фиксации оставшегося вторичного параметра.

Уравнения (II) индикатрисы кривизны поверхности (A) в силу  $\varphi = 0$  имеют вид

$$\begin{aligned}x^3 &= \rho_1 \text{ch}^2 \psi - \rho_2 \text{sh}^2 \psi, \\x^4 &= \lambda_1 \text{ch}^2 \psi - \lambda_2 \text{sh}^2 \psi.\end{aligned}\tag{39}$$

Исключение параметра  $\psi$  из системы (39) показывает, что индикатриса кривизны является прямой  $(\lambda_1 - \lambda_2)x^3 - (\rho_1 - \rho_2)x^4 + (\rho_1\lambda_2 - \rho_2\lambda_1) = 0$ .

Выбирая направление нормали  $e_4$  параллельно индикатрисе кривизны, мы полагаем  $\rho_1 = \rho_2 = \rho$ , репер  $R(A, e_j)$  канонизируется и имеет место случай 8, а).

### Литература

1. Фиников С. П. Метод внешних форм Картана. М.—Л., 1949.
2. Петров А. З. Известия Казанского физ.-мат. общ-ва, сер. 3, 14, 37, 1949.
3. Картан Э. Риманова геометрия в ортогональном репере. МГУ, 1961.
4. Схоутен И. А., Стройк Д. Дж. Введение в новые методы дифференциальной геометрии, т. 2. ИЛ, 1948.

Белорусский государственный университет  
им. В. И. Ленина

Поступило в редакцию  
28.XI 1969

УДК 513.88:513.83

Я. В. РАДЫНО

### ОБ УСТОЙЧИВОСТИ НЕТЕРОВСКИХ ОПЕРАТОРОВ И ИХ ИНДЕКСОВ В ЛОКАЛЬНО ВЫПУКЛЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

Пусть  $E$  и  $F$  — локально выпуклые пространства (везде будем предполагать, что они отделимы). Как известно, непрерывный линейный оператор  $T: E \rightarrow F$  называют нетеровским оператором, если  $\dim T^{-1}(0) < \infty$ ,  $T(E)$  замкнуто в  $F$  и  $\dim F/T(E) < \infty$ . Если  $T$  — нетеровский оператор, то его индекс определяется формулой  $\text{ind } T = \dim T^{-1}(0) - \dim F/T(E)$ . Возникает задача, когда оператор  $T + C$ , где  $C: E \rightarrow F$ , компактный, будет нетеровским и, если это так, будет ли справедливо равенство  $\text{ind}(T + C) = \text{ind } T$ ? Другими словами, обладает ли нетеровский оператор и его индекс устойчивостью по отношению к возмущению его компактными операторами?

Решение этой задачи в случае банаховых пространств  $E$  и  $F$  хорошо известно (см. [1], [2]). Решалась также задача об устойчивости так называемых  $\Phi_+$ -,  $\Phi_-$ -операторов ([3], [4]) в локально выпуклых пространствах. В п. 1 настоящей работы исследуются соотношения между нетеровскими операторами и операторами, имеющими непрерывные регуляризаторы. Строится пример, показывающий, что нетеровский оператор может не быть ни  $\Phi_+$ -, ни  $\Phi_-$ -оператором. В п. 2 решается поставленная задача для любых локально выпуклых пространств  $E$  и  $F$ , таких, что пара  $(E, F)$  удовлетворяет некоторому условию (условие  $h$ ). В п. 3 устанавливаются необходимые и достаточные условия для того, чтобы гомоморфизм был нетеровским оператором. В п. 4 изучается условие  $(h)$  и получены конкретные утверждения (следствия 4 и 5), обобщающие результаты работ [3] и [4].

1. Пусть  $E$  и  $F$  — локально выпуклые пространства,  $T: E \rightarrow F$  — непрерывный линейный оператор. Непрерывный линейный оператор  $R_1: F \rightarrow E$  ( $R_2: F \rightarrow E$ ) называют левым (правым) регуляризатором для  $T$ , если  $R_1 T = I_1 + K_1$  ( $T R_2 = I_2 + K_2$ ), где  $I_1$  и  $K_1$  ( $I_2$  и  $K_2$ ) — тождественный и компактный операторы в  $E$  ( $F$ ) соответственно. Если оператор  $T$  обладает левым регуляризатором  $R_1$  и правым регуляризатором  $R_2$ , то в этом случае каждый из операторов  $R_1$  и  $R_2$  будет одновременно правым и левым регуляризатором для  $T$ .

**Теорема 1.** Пусть  $E$  и  $F$  — локально выпуклые пространства и  $T: E \rightarrow F$  — непрерывный линейный оператор. Тогда 1) если  $T$  обладает левым регуляризатором, то  $\dim T^{-1}(0) < \infty$ ,  $T(E)$  замкнуто в  $F$  и  $T$  — гомоморфизм  $E$  в  $F$ ; 2) если  $T$  обладает правым регуляризатором, то  $\dim F/T(E) < \infty$ ,  $T(E)$  замкнуто в  $F$ ,  $T$  — слабый гомоморфизм  $E$  в  $F$ .

В частности, если  $T$  обладает регуляризатором  $R$ , то  $T$  — нетеровский оператор.

**Доказательство.** Справедливость 1) устанавливается аналогично предложению 1 гл. VIII из [6] (стр. 207), поэтому соответствующее доказательство мы опускаем.

2) Пусть  $T$  обладает правым регуляризатором  $R_2$ . Символом  $\xi$  будем обозначать топологии равномерной сходимости в  $E'$  и  $F'$  на абсолютно

выпуклых компактных подмножествах из  $E$  и  $F$  соответственно. Базисы замкнутых окрестностей нуля  $\xi$ -топологий образуют множества вида  $K^0$ , где  $K$  абсолютно выпукло и компактно в соответствующем пространстве. Согласно лемме 5 из [6] (стр. 217), оператор  $K'_2: F' \rightarrow F'$  является компактным при  $\xi$ -топологиях в  $F'$ . Операторы  $R'_2$  и  $T'$  непрерывны при  $\xi$ -топологиях, так как  $R_2$  и  $T$  непрерывны при исходных топологиях в  $E$  и  $F$ , а  $T'^{-1}(K^0) = T(K^0)^0$ . Поскольку  $R'_2 T' = T'_2 + K'_2$ , оператор  $T'$  обладает левым регуляризатором  $R'_2$  при  $\xi$ -топологиях. Следовательно, в силу 1)  $\dim T'^{-1}(0) < \infty$ ,  $T'(F')$   $\xi$ -замкнуто в  $E'$  и  $T'$  — гомоморфизм при  $\xi$ -топологиях в  $F'$  и  $E'$ . Так как, согласно теореме Макки,  $\xi$ -топология согласуется с двойственностью между  $E'$  и  $E$ ,  $F'$  и  $F$ , то  $T'(F')$  слабо замкнуто в  $E'$ . Поэтому в силу предложения 4 из [5] (стр. 253)  $T'$  — гомоморфизм при слабых топологиях в  $E$  и  $F$ . Далее, так как  $T'$  есть гомоморфизм при  $\xi$ -топологиях, то на основании предложения 9 из [5] (стр. 256) заключаем, что  $T'$  есть также гомоморфизм при слабых топологиях, а поэтому  $T(E)$  замкнуто в  $F$  [4]. Наконец,  $\dim(F/T(E))' = \dim(T(E))^0 = \dim T'^{-1}(0)$ , так что  $\dim F/T(E) = \dim T'^{-1}(0) < \infty$ .

Замечание 1. Таким образом, непрерывный оператор, обладающий регуляризатором, — нетеровский. Обратное утверждение, вообще говоря, неверно, т. е. не каждый нетеровский оператор обладает регуляризатором. Например, пусть  $E$  — векторное пространство. Введем в нем отдельные локально выпуклые топологии  $t_1$  и  $t_2$ , согласующиеся со структурой векторного пространства, причем  $t_1$  сильнее  $t_2$ . Пространство  $E$  с топологией  $t_1$  обозначим  $E_1$  ( $i = 1, 2$ ). Тогда тождественное отображение  $I: E_1 \rightarrow E_2$  будет нетеровским оператором, но не будет гомоморфизмом, а значит, не будет обладать регуляризатором. Этот пример показывает, что существуют нетеровские операторы, которые не являются ни  $\Phi_-$ , ни  $\Phi_+$ -операторами.

2. Лемма 1. Пусть  $E$  и  $F$  — локально выпуклые пространства,  $T: E \rightarrow F$  — нетеровский оператор,  $E = T^{-1}(0) \oplus E_1$ ,  $F = T(E) \oplus F_1$  (топологические прямые суммы). Тогда существует оператор  $\tilde{T}: F \rightarrow E_1$ , такой, что а)  $\tilde{T}$  обращается в 0 на  $F_1$ , б)  $\tilde{T}T = I$  на  $E_1$ , в)  $\tilde{T}\tilde{T} = I$  на  $T(E)$ .

Доказательство. Через  $T|_{E_1}$  будем обозначать сужение оператора  $T$  на  $E_1$ . Отображение  $T|_{E_1}: E_1 \rightarrow T(E)$  биективно, поэтому существует  $T|_{E_1}^{-1}: T(E) \rightarrow E_1$ . Отсюда полагаем  $\tilde{T} = T|_{E_1}^{-1} P_{T(E)}$ , где  $P_{T(E)}: F \rightarrow T(E)$  — непрерывный проектор, который существует в силу предложения 30 из [6] (стр. 143).  $\tilde{T}$  удовлетворяет требуемым условиям.

Замечание 2. Будем говорить, что пара пространств  $(E, F)$  удовлетворяет условию (h), если всякий нетеровский оператор  $T: E \rightarrow F$  является гомоморфизмом  $E$  на  $T(E)$ . Таким образом, если пара  $(E, F)$  удовлетворяет условию (h), то  $T|_{E_1}^{-1}$  непрерывен, а значит,  $\tilde{T}$  — непрерывен.

Лемма 2. Если пара  $(E, F)$  удовлетворяет условию (h), тогда оператор  $\tilde{T}$  удовлетворяет равенствам

$$\tilde{T}T = I_1 + T_1 \text{ на } E,$$

$$T\tilde{T} = I_2 + T_2 \text{ на } F,$$

где  $T_1, T_2$  — непрерывные операторы конечного ранга.

Доказательство. Положим  $T_1 = -I_{T^{-1}(0)} P_{T^{-1}(0)}$ , где  $I_{T^{-1}(0)}$  — тождественный оператор в  $T^{-1}(0)$ , а  $P_{T^{-1}(0)}: E \rightarrow T^{-1}(0)$  — непрерывный проектор. Нетрудно проверить, что  $\tilde{T}T - T_1 = I_1$ . Действительно, любой  $x \in E$  можно представить  $x = x_0 + x_1$ ,  $x_0 \in T^{-1}(0)$ ,  $x_1 \in E_1$ . Покажем, что

$(\tilde{T}T - T_1)(x) = x$ :  $(\tilde{T}T - T_1)(x) = (T|_{E_1}^{-1} P_{T(E)} T + I_{T^{-1}(0)} P_{T^{-1}(0)}) (x) =$   
 $= T|_{E_1}^{-1} P_{T(E)} (Tx) + I_{T^{-1}(0)} (P_{T^{-1}(0)} x) = T|_{E_1}^{-1} (Tx_1) + I_{T^{-1}(0)} x_0 = x_1 + x_0 = x$ .  
 Аналогично  $T_2 = -I_{F_1} P_{F_1}$ , где  $I_{F_1}$  — тождественный оператор на  $F_1$ , а  $P_{F_1} : F \rightarrow F_1$  — проектор. К тому же  $T_1(E) \subset T^{-1}(0)$ ,  $T_2(F) \subset F_1$ .

Из леммы 2 и теоремы 1 немедленно получается следующий результат.

Следствие 1. Оператор  $T$  обладает непрерывным регуляризатором тогда и только тогда, когда  $T$  — нетеровский гомоморфизм.

Теорема 2. Пусть  $E, F, G$  — локально выпуклые пространства,  $T : E \rightarrow F$ ,  $L : F \rightarrow G$  — нетеровские операторы. Тогда  $\text{ind}(LT) = \text{ind} L + \text{ind} T$ .

Доказательство. Покажем, что  $\alpha(LT) \equiv \dim(LT)^{-1}(0) < \infty$  и  $\beta(LT) = \dim G/(LT)(E) < \infty$ .

Положим

$$F_0 = T(E) \cap L^{-1}(0),$$

$$T(E) = F_0 \oplus F_1,$$

$$L^{-1}(0) = F_0 \oplus F_2,$$

$$F = T(E) \oplus F_2 \oplus F_3.$$

В силу нетеровости операторов  $L$  и  $T$  имеем:

$$F_0 \subset L^{-1}(0) \text{ конечномерно,}$$

$$F_2 \subset L^{-1}(0) \text{ конечномерно,}$$

$$F_3 \text{ конечномерно,}$$

$$F_1 \text{ замкнуто в } F.$$

Обозначим  $d_i$  размерность пространства  $F_i$ ,  $i = 0, 2, 3$ . Нетрудно видеть, что  $\dim(LT)^{-1}(0) = \dim T^{-1}(0) + d_0$ . Так как  $L(T(E)) = L(F_0 \oplus F_1) = L(F_1)$  и  $F_1 \cap L^{-1}(0) = \{0\}$ , то  $L$  устанавливает алгебраический изоморфизм  $F_1$  на  $(LT)(E)$ . Ввиду того что  $F = L^{-1}(0) \oplus F_1 \oplus F_3$ ,  $L$  устанавливает алгебраический изоморфизм между  $L(F)$  и  $F_1 \oplus F_3$ .  $L(F) = L(F_1) + L(F_3)$  (алгебраическая прямая сумма), т. е.  $L(F) = (LT)(E) + L(F_3)$ . Отсюда  $\dim L(F_3) = d_3$ . Положим  $G = L(F) \oplus G'$  и  $G = (LT)(E) + G''$ , тогда  $G' = G' + L(F_3)$ . Таким образом,  $\beta(LT) = \beta(L) + d_3$ ,  $\alpha(LT) = \alpha(T) + d_0$ ,  $\alpha(L) = d_0 + d_2$ ,  $\beta(T) = d_2 + d_3$ . Отсюда получаем, что  $\text{ind}(LT) = \text{ind} L + \text{ind} T$ .

Теорема 3. Пусть  $E$  и  $F$  — локально выпуклые пространства,  $T : E \rightarrow F$  — нетеровский оператор. Если пара  $(E, F)$  удовлетворяет условию (h), то  $T + K$  — нетеровский и  $\text{ind}(T + K) = \text{ind} T$  для любого компактного оператора  $K : E \rightarrow F$ .

Доказательство. По лемме 2 существует непрерывный оператор  $\tilde{T} : F \rightarrow E_1$ , такой, что имеют место равенства

$$\tilde{T}T = I_1 + T_1 \text{ на } E,$$

$$T\tilde{T} = I_2 + T_2 \text{ на } F.$$

Из теоремы 1 следует, что  $\tilde{T}$  — нетеровский,  $\tilde{T}(T + K) = I_1 + T_1 + \tilde{T}K$  на  $E$  и  $(T + K)\tilde{T} = I_2 + T_2 + K\tilde{T}$  на  $F$ . Поскольку  $\tilde{T}$  непрерывен, операторы  $\tilde{T}K$  и  $K\tilde{T}$  компактны. Следовательно, по теореме 1  $T + K$  — нетеровский. В силу теоремы 2  $\text{ind} T + \text{ind} \tilde{T} = \text{ind}(I_2 + T_2) = 0$  и  $\text{ind}(T + K) + \text{ind} \tilde{T} = \text{ind}(I_2 + T_2 + K\tilde{T}) = 0$ . Равенство нулю следует из теории Рисса—Шаудера. Отсюда  $\text{ind}(T + K) = \text{ind} T$ . Теорема доказана.

3. Пусть  $E, F, E_0$  — локально выпуклые пространства,  $E$  полно и  $P, Q, P_0$  — фильтрующиеся семейства полунорм в этих пространствах соответственно. Предположим, что  $T: E \rightarrow T(E) \subset F$  гомоморфизм и  $E$  компактно вложено в  $E_0$ . Пусть  $S: E_0 \times F \supset G(T) \rightarrow E$  — линейное отображение, заданное формулой  $S(u, Tu) = u$ , для всех  $u \in E$ .

Теорема 4. Следующие условия эквивалентны:

$$(I) \text{ а) } \dim T^{-1}(0) < \infty,$$

$$\text{б) } T(E) \text{ замкнуто в } F,$$

$$(II) S: E_0 \times F \supset G(T) \rightarrow E \text{ непрерывно.}$$

Доказательство. (II)  $\Rightarrow$  (I). а) Так как  $S$  непрерывно, то и его сужение на подпространство  $\{(u, 0) \in G(T) : u \in T^{-1}(0)\} \subset G(T)$  будет непрерывно. Это значит, что  $S(u, 0) = u$  для любых  $u \in T^{-1}(0)$  непрерывно из  $E_0 \times F$  в  $E$ . Но так как  $S_1: E_0 \ni u \rightarrow (u, 0) \in E_0 \times \{0\}$  непрерывно для всех  $u \in E_0$ , то  $SS_1: E_0 \supset T^{-1}(0) \rightarrow T^{-1}(0) \subset E$  непрерывно и равно тождественному отображению в  $T^{-1}(0)$ . Учитывая, что  $I: E \rightarrow E_0$  — компактный оператор, получим, что в  $T^{-1}(0)$  имеется относительно компактная окрестность нуля, т. е.  $T^{-1}(0)$  конечномерно.

б) Разложим  $E$  в топологическую сумму, т. е.  $E = T^{-1}(0) \oplus M$ . Так как  $E$  полно, то  $M$  полно.  $M$  изоморфно  $T(E)$ , следовательно,  $T(E)$  полно, а значит, замкнуто.

(I)  $\Rightarrow$  (II). Пусть  $E = T^{-1}(0) \oplus M$ . Условие  $T$  — гомоморфизм эквивалентно тому, что для каждой полунормы  $p \in P$  существует константа  $C > 0$  и полунорма  $q \in Q$ , что

$$p(u) \leq Cq(Tu) \text{ для любых } u \in M. \quad (1)$$

Так как конечномерное векторное подпространство отделимого локально выпуклого пространства замкнуто, а индуцированная в нем топология евклидова [6] (стр. 60), то  $I: E_0 \supset T^{-1}(0) \rightarrow T^{-1}(0) \subset E$  непрерывно, т. е. для каждой полунормы  $p \in P$  существуют полунорма  $p_0 \in P_0$  и константа  $C > 0$ , что

$$p(u) \leq Cp_0(u) \text{ для любых } u \in T^{-1}(0). \quad (2)$$

Пусть  $u$  — произвольный элемент из  $E$ ,  $u = u_1 + u_2$ ,  $u_1 \in M$ ,  $u_2 \in T^{-1}(0)$ . Тогда для всякого  $p \in P$  существует  $q \in Q$  и  $C > 0$ , что

$$p(u_1) \leq Cq(Tu_1) = Cq(Tu). \quad (3)$$

И какова бы ни была  $p \in P$ , найдутся  $p_0 \in P_0$  и  $C_1 > 0$ , при которых

$$p(u_2) \leq C_1 p_0(u_2) = C_1 p_0(u - u_1) \leq C_1 [p_0(u) + p_0(u_1)].$$

Для такого  $p_0$  в силу того, что  $I: E \rightarrow E_0$  компактно, найдется  $p \in P$  и  $C_2 > 0$ , что  $p_0(u_1) \leq C_2 p(u_1)$ , и в силу (3) для  $p$  существует некоторая  $q' \in Q$ , что  $p(u_1) \leq Cq'(Tu)$ . Таким образом,

$$p(u_2) \leq C_1 p_0(u) + C_1 \cdot C_2 \cdot Cq'(Tu) \leq C_3 [p_0(u) + q'(Tu)]. \quad (4)$$

Отсюда

$$\begin{aligned} p(u) &\leq p(u_1) + p(u_2) \leq C_4 [p_0(u) + q'(Tu) + q'(Tu)] \leq \\ &\leq C_5 [p_0(u) + q(Tu) + q(Tu)], \end{aligned}$$

так как  $Q$  фильтрующееся. Наконец, какова бы ни была полунорма  $p \in P$ , найдутся такие  $p_0 \in P_0$ ,  $q \in Q$  и  $C_6 > 0$ , при которых справедливо для всех  $u \in E$  неравенство

$$p(u) \leq C_6 [p_0(u) + q(Tu)], \quad (5)$$

что эквивалентно непрерывности  $S$ . Теорема доказана.

Следствие 2. Гомоморфизм  $T: E \rightarrow F$  будет  $\Phi_+$ -оператором тогда и только тогда, когда  $S: E_0 \times F \rightarrow E$  непрерывно.

Пусть  $E', F'$  — сопряженные к  $E, F$  и  $F'_0$  — такое пространство, что  $I: F' \rightarrow F'_0$  компактно,  $F' \subset F'_0$ ,  $E', F'$  наделены слабыми топологиями,  $F'_0$  — отделимой топологией, заданной семейством полунорм  $P'_0$ . В силу того что условие  $T: E \rightarrow F$  — слабый гомоморфизм эквивалентно условию  $T'(F')$  слабо замкнуто в  $E'$  [5] (стр. 253, предложение 4) и того, что слабые топологии в  $E'$  и  $F'$  согласуются с двойственностью между  $E'$  и  $E$ ,  $F'$  и  $F$ , к отображению  $T': F' \rightarrow E'$  применима теорема 4. Таким образом, справедлива следующая

Теорема 5. Пусть  $E, F, E_0, F'_0$  — локально выпуклые пространства с фильтрующимися семействами полунорм  $P, Q, P_0, P'_0$  соответственно.  $E', F'$  — сопряженные к  $E$  и  $F$ , наделенные слабыми топологиями,  $E \subset E_0, F' \subset F'_0$  и вложения их компактны. Пусть  $T: E \rightarrow T(E) \subset F$  — гомоморфизм,  $T': F' \rightarrow T'(F') \subset E'$  — сопряженный оператор. Для того чтобы  $T$  был нетеровским оператором, необходимо и достаточно, чтобы

$$S: E_0 \times F \supset G(T) \ni (u, Tu) \rightarrow u \in E$$

и

$$S': F'_0 \times E' \supset G(T') \ni (v', T'v') \rightarrow v' \in F'$$

были непрерывны. Другими словами, для того чтобы гомоморфизм  $T$  был нетеровским оператором, необходимо и достаточно, чтобы для каждой  $p \in P$ , каждого натурального и некоторых  $C_1 > 0, C_2 > 0$ , натурального  $l, q \in Q, p_0 \in P_0, p'_0 \in P'_0$  были справедливы неравенства

$$p(u) \leq C_1 [q(Tu) + p_0(u)], \quad u \in E,$$

$$\sup_{1 < i < n} | \langle v_i, v' \rangle | \leq C_2 [ \sup_{1 < i < l} | \langle u_i, T'v' \rangle | + p'_0(v') ], \quad v' \in F'.$$

4. Пусть  $E, F$  — локально выпуклые пространства. Говорят, что пара пространств  $(E, F)$  удовлетворяет теореме об открытом отображении, если каждое непрерывное отображение  $T: E$  на  $F$  будет гомоморфизмом. Для того чтобы пара  $(E, T(E))$  удовлетворяла этому условию, на  $F$  необходимо наложить некоторые ограничения. Естественно ожидать, что условие (h) (замечание 2) на пару пространств  $(E, F)$  является более слабым ограничением, чем условия теоремы об открытом отображении для пары  $(E, T(E))$ . Действительно, ответ на этот вопрос дает следствие 3.

Теорема 6. Пусть  $(F_{\alpha\beta})_{\beta \in B, \alpha \in A}$  — семейство локально выпуклых пространств,  $(F_\alpha)_{\alpha \in A}$  — семейство их индуктивных пределов относительно отображений  $v_{\alpha\beta}: F_{\alpha\beta} \rightarrow F_\alpha$ . Тогда если  $F$  есть индуктивный предел  $F_\alpha$  относительно отображений  $u_\alpha: F_\alpha \rightarrow F$ , то  $F$  есть также индуктивный предел  $(F_{\alpha\beta})_{\alpha \in A, \beta \in B}$  относительно отображений  $u_\alpha v_{\alpha\beta}: F_{\alpha\beta} \rightarrow F$ .

Доказательство. Обозначим  $t_0$  — топологию индуктивного предела в  $F$  пространств  $(F_\alpha)_{\alpha \in A}$  относительно отображений  $u_\alpha$ , где  $F_\alpha$  — индуктивный предел пространств  $(F_{\alpha\beta})_{\beta \in B}$ . Ясно, что  $u_\alpha v_{\alpha\beta}: F_{\alpha\beta} \rightarrow F$  непрерывно при такой топологии в  $F$ . Покажем, что  $t_0$  — сильнейшая топология в  $F$ , обладающая этим свойством. Действительно, пусть  $t$  — топология в  $F$ , такая, что отображения  $u_\alpha v_{\alpha\beta}: F_{\alpha\beta} \rightarrow F$  непрерывны. Так как  $F_\alpha$  — индуктивный предел, то непрерывность отображений  $u_\alpha v_{\alpha\beta}$  эквивалентна непрерывности  $u_\alpha: F_\alpha \rightarrow F$  для  $\alpha \in A$ . В силу того что  $t_0$  — сильнейшая из всех топологий в  $F$ , при которых  $u_\alpha$  непрерывны, имеем  $t \subset t_0$ . Этим доказано, что  $t_0$  является также топологией индуктивного предела пространств  $(F_{\alpha\beta})_{\alpha \in A, \beta \in B}$ .

Если  $T: E \rightarrow F$  — нетеровский оператор,  $E = T^{-1}(0) \oplus M, F = T(E) \oplus P$  — топологические суммы, тогда  $T(E)$  изоморфно  $F/P, P$  — конечномерное под-

пространство в  $F$ . Таким образом,  $F$  ультраборнологично (бочечно) тогда и только тогда, когда  $T(E)$  ультраборнологично (бочечно).

Следствие 3. Пара пространств  $(E, F)$  удовлетворяет теореме об открытом отображении де Вильде [7] (Птака [8]) тогда и только тогда, когда эта пара пространств удовлетворяет условию  $(h)$  соответственно.

Благодаря следствию 3 и теореме 3 легко получить результаты, обобщающие результаты Ю. Владимирского [3] и Ф. Браудера [4].

Следствие 4. Пусть  $E, F$  — локально выпуклые пространства,  $T: E \rightarrow F$  — нетеровский оператор. Если  $E$  обладает поглощающей сетью, а  $F$  ультраборнологично, то  $T+K$  — нетеровский и  $\text{ind}(T+K) = \text{ind} T$  для любого компактного оператора  $K: E \rightarrow F$ .

Следствие 5. Пусть  $E, F$  — локально выпуклые пространства,  $T: E \rightarrow F$  — нетеровский оператор. Если  $E$  — совершенно полное пространство,  $F$  — бочечное, то  $T+K$  — нетеровский и  $\text{ind}(T+K) = \text{ind} T$  для любого компактного оператора  $K: E \rightarrow F$ .

Замечание при корректуре.

Как недавно автору стало известно, теорема 2 настоящей работы была доказана в монографии D. Przeworska-Rolewicz and S. Rolewicz, Equations in linear spaces. Warszawa, 1968, p. 185.

### Литература

1. Гохберг И. Ц., Крейн М. Г. УМН, 12, № 2, 43, 1957.
2. Schechter M. Ann. Scuola norm. super. Pisa, sci. fis. e mat., 21, № 2, 261, 1967.
3. Владимирский Ю. Н. ДАН СССР, 184, № 3, 514, 1969.
4. Browder F. E., Math. Ann., 138, 55, 1959.
5. Бурбаки Н. Топологические векторные пространства. М., 1959.
6. Робертсон А., Робертсон В. Топологические векторные пространства. М., 1967.
7. De Wilde M. Bull. math. Soc. sci. math. RSR, 11, № 2, 225, 1967.
8. Ptak V. Bull. Soc. math. France, 86, 47, 1958.

Белорусский государственный университет  
им. В. И. Ленина

Поступило в редакцию  
29.XII 1969

И. А. ПРУСОВ

ОБ ОДНОМ ПРЕДСТАВЛЕНИИ  
 ОСНОВНЫХ ФОРМУЛ ТЕРМОУПРУГОСТИ  
 ДЛЯ АНИЗОТРОПНОЙ ПОЛУПЛОСКОСТИ  
 И АНИЗОТРОПНОЙ ПЛОСКОСТИ С РАЗРЕЗАМИ

Рассмотрим анизотропное тело, находящееся в плоском деформированном состоянии, для которого закон Гука имеет форму [1]

$$\begin{aligned} a_{11}\sigma_x + a_{12}\sigma_y + a_{13}\sigma_z + a_{16}\tau_{xy} + k_1' T &= \frac{\partial u}{\partial x}, \\ a_{12}\sigma_x + a_{22}\sigma_y + a_{23}\sigma_z + a_{26}\tau_{xy} + k_2' T &= \frac{\partial v}{\partial y}, \\ a_{13}\sigma_x + a_{23}\sigma_y + a_{33}\sigma_z + a_{36}\tau_{xy} + k_3' T &= 0, \\ a_{16}\sigma_x + a_{26}\sigma_y + a_{36}\sigma_z + a_{66}\tau_{xy} + k_6' T &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}$  и  $u, v$  — компоненты напряжения и перемещения, зависящие только от координат  $x, y$ ;  $T = T(x, y)$  — температура тела, удовлетворяющая уравнению теплопроводности

$$k_{11} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + 2k_{12} \frac{\partial^2 T}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0, \quad (2)$$

$a_{ij}, k_j', k_{ij}$  — известные вещественные коэффициенты.

Учитывая, что

$$\sigma_z = -\frac{1}{a_{33}} (a_{13}\sigma_x + a_{23}\sigma_y + a_{36}\tau_{xy} + k_3' T),$$

остальные из выражений (1) запишем в виде

$$\begin{aligned} \beta_{11}\sigma_x + \beta_{12}\sigma_y + \beta_{16}\tau_{xy} + k_1^0 T &= \frac{\partial u}{\partial x}, \\ \beta_{12}\sigma_x + \beta_{22}\sigma_y + \beta_{26}\tau_{xy} + k_2^0 T &= \frac{\partial v}{\partial y}, \\ \beta_{16}\sigma_x + \beta_{26}\sigma_y + \beta_{66}\tau_{xy} + k_6^0 T &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}. \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь  $\beta_{ij}, k_j^0$  — известные вещественные постоянные.

В случае обобщенного плоского напряженного состояния выражения закона Гука получаются на основании (3) заменой коэффициентов  $\beta_{ij}$  и  $k_j^0$  на  $a_{ij}$  и  $k_j'$ . При этом, как и в случае плоской деформации, будем считать, что теплообмен с внешней средой тела осуществляется только через поверхность на контуре области, занимаемой телом. В обоих этих случаях компоненты напряжения должны удовлетворять уравнениям равновесия

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0. \quad (4)$$

Положим, что

$$\sigma_x = 2 \operatorname{Re} [\mu_1^2 \Phi(z_1) + \mu_2^2 \Psi(z_2)], \quad (5)$$

$$\sigma_y = 2 \operatorname{Re} [\Phi(z_1) + \Psi(z_2)], \quad (6)$$

$$\tau_{xy} = -2 \operatorname{Re} [\mu_1 \Phi(z_1) + \mu_2 \Psi(z_2)], \quad (7)$$

$$u = 2 \operatorname{Re} [p_1 \Phi(z_1) + p_2 \Psi(z_2) + \alpha_1 \Psi_0(\xi)], \quad (8)$$

$$v = 2 \operatorname{Re} [q_1 \Phi(z_1) + q_2 \Psi(z_2) + \beta_1 \Psi_0(\xi)], \quad (9)$$

$$T = \Psi_0(\xi) + \overline{\Psi_0(\xi)}, \quad (10)$$

где  $z_h = x + y\mu_h$ ,  $\xi = x + \lambda y$ ;  $\mu_h$  и  $\lambda$  — корни характеристических уравнений

$$\beta_{11}\mu^4 - 2\beta_{16}\mu^3 + (2\beta_{12} + \beta_{66})\mu^2 - 2\beta_{26}\mu + \beta_{22} = 0, \quad (11)$$

$$\lambda^2 + 2k_{12}\lambda + k_{11} = 0 \quad (12)$$

(а именно те, для которых  $\operatorname{Im} \mu_h > 0$ ,  $\operatorname{Im} \lambda > 0$ );  $\Phi(z_1) = \int \Phi(z_1) dz_1$ ,  $\Psi(z_2) = \int \Psi(z_2) dz_2$ ,  $\Psi_0(\xi) = \int \Psi_0(\xi) d\xi$ ;  $\Phi(z_1)$ ,  $\Psi(z_2)$ ,  $\Psi_0(\xi)$  — произвольные аналитические функции;  $p_j$ ,  $q_j$  — произвольные комплексные постоянные.

Требуя, чтобы выражения (3), (4) с учетом (5) — (12) обратились в тождества, получим

$$p_j = \beta_{11}\mu_j^2 + \beta_{12} - \beta_{16}\mu_j, \quad \alpha_1 = k_1^0,$$

$$\mu_j q_j = \beta_{12}\mu_j^2 + \beta_{22} - \beta_{26}\mu_j, \quad \lambda \beta_1 = k_2^0.$$

Кроме того, коэффициенты  $k_j^0$  должны удовлетворять условию

$$k_1^0 \lambda^2 - k_6^0 \lambda + k_2^0 = 0,$$

на основании которого с учетом (12) имеем

$$k_{11} = k_2^0 (k_1^0)^{-1}, \quad k_{12} = -k_6^0 (2k_1^0)^{-1}. \quad (13)$$

Соотношения (13) показывают, что коэффициенты уравнения (2) вполне определяются через коэффициенты  $k_j^0$  закона Гука.

Преобразование общих формул для полуплоскости. Пусть анизотропное тело занимает область  $y < 0$  ( $S^-$ ). Исключим в формулах (6), (7) функцию  $\Psi(z_2)$  и положим, что для  $z_2 \in S^+$  ( $y > 0$ )

$$(\mu_2 - \mu_1) \Phi(z_2) + (\mu_2 - \bar{\mu}_1) \bar{\Phi}(z_2) + (\mu_2 - \bar{\mu}_2) \bar{\Psi}(z_2) = 0. \quad (14)$$

Тогда на основании формул (5) — (10) получим

$$\Phi(z_1) - \Phi(\bar{z}_2) + k_1 [\bar{\Phi}(z_1) - \bar{\Phi}(z_2)] = f, \quad (15)$$

$$\kappa\Phi(z_1) + \Phi(\bar{z}_2) + k_2\overline{\Phi(z_1)} + k_1\overline{\Phi(z_2)} = g', \quad (16)$$

$$\sigma_x = 2 \operatorname{Re} [\mu_1^2\Phi(z_1) - \mu_2^2\Phi(z_2) + k_3(\mu_2^2\Phi(z_2) - \bar{\mu}_2^2\overline{\Phi(z_2)})], \quad (17)$$

где

$$f = \frac{\mu_2\sigma_y + \tau_{xy}}{\mu_2 - \mu_1}, \quad g = \frac{1}{\kappa_2} (uq_2 - vp_2) + g_0,$$

$$g_0 = q_3\Psi_0(\xi) + q_4\overline{\Psi_0(\xi)}, \quad g' = \frac{\partial}{\partial x} g,$$

$$\kappa = \frac{\rho_1q_2 - \rho_2q_1}{\kappa_2'}, \quad \kappa_2' = \frac{\mu_1 - \mu_2}{\mu_2 - \mu_1} (q_2\bar{\rho}_2 - \rho_2\bar{q}_2),$$

$$k_1 = \frac{\mu_2 - \bar{\mu}_1}{\mu_2 - \mu_1}, \quad k_2 = \frac{\rho_2\bar{q}_1 - q_2\bar{\rho}_1}{q_2\rho_2 - \rho_2q_2} \cdot \frac{1}{k_3}, \quad k_3 = \frac{\mu_2 - \mu_1}{\mu_2 - \mu_2},$$

$$q_3 = \frac{\alpha_1q_2 - \beta_1\rho_2}{\kappa_2'}, \quad q_4 = \frac{\bar{\alpha}_1q_2 - \bar{\beta}_1\rho_2}{\kappa_2'}.$$

Приведем еще две важные для приложений формулы:

$$X + Y\mu_2 = (\mu_1 - \mu_2) [\varphi(z_1) - \varphi(\bar{z}_2) + k_1(\overline{\varphi(z_1)} - \overline{\varphi(z_2)})], \quad (18)$$

$$uq_2 - vp_2 = \kappa_2' [\kappa\varphi(z_1) + \varphi(\bar{z}_2) + k_2\overline{\varphi(z_1)} + k_1\overline{\varphi(z_2)} - g_0], \quad (19)$$

где  $X, Y$  — проекции главного вектора сил, действующих с внешней стороны на замкнутую цилиндрическую поверхность, пересекающую по контуру  $C$  область, занимаемую телом. Символ справа у скобки формулы (18) обозначает приращения выражения в скобках при обходе контура против вращения часовой стрелки.

Для определения температуры  $T$  и функции  $\Psi_0(\xi)$  воспользуемся выражениями

$$F_0(\xi) + \varepsilon F_0(\bar{\xi}) = T + i\eta, \quad (20)$$

$$F(\xi) + \varepsilon F(\bar{\xi}) = \frac{\partial}{\partial x} (T + i\eta), \quad (21)$$

$$\lambda F(\xi) + \bar{\lambda}\varepsilon F(\bar{\xi}) = \frac{\partial}{\partial y} (T + i\eta), \quad (22)$$

два последних из которых получены дифференцированием первого по  $x$  и  $y$ . Здесь  $\varepsilon = \pm 1$ ,  $F(\xi) = F_0'(\xi)$ ,  $\xi = x + \lambda y$ ,  $T(x, y)$  и  $\eta(x, y)$  — вещественные функции, каждую из которых оператор

$$k_{11} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2k_{12} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

обращает в тождество всюду в области  $S^-$ ;  $F(\xi)$  — голоморфная функция в областях  $S^-$  и  $S^+$ .

На границе области  $L$  функция  $T(x, y)$ , а также вспомогательная функция  $\eta(x, y)$ , гармонически не сопряженная с  $T(x, y)$ , должны удовлетворять условию

$$T = f_1(t) \text{ на } L' \text{ и } \frac{\partial T}{\partial y} = f_2(t) \text{ на } L'', \quad (23)$$

$$\eta = 0 \text{ на } L' \text{ и } \frac{\partial}{\partial y} \eta = 0 \text{ на } L'', \quad (23)$$

где  $L'$  — часть контура  $L$ ;  $L'' = L - L'$  — остальная его часть.

При больших  $|z_j|$  и  $|\xi|$  для простоты будем считать, что

$$\Phi(z_j) = \frac{a'_j}{z_j} + O(1/z_j^2), \quad F(\xi) = O(1/\xi^2) \quad (24)$$

и что эти функции в окрестности конечного числа точек на  $L$  имеют интегрируемые особенности.

Воспользовавшись формулами (20) — (22) и условиями (23), можно найти функцию  $F_0(\xi)$ . Затем на основании (10), (20) получим с точностью до мнимой постоянной следующее выражение для функции  $\Psi_0(\xi)$ :

$$\Psi_0(\xi) = \frac{1}{2} [F_0(\xi) + \varepsilon \bar{F}_0(\xi)]. \quad (25)$$

Зная функцию  $\Psi_0(\xi)$ , упругое состояние тела в области  $S^-$  найдем на основании формул (15) — (17).

Общие формулы для плоскости, разрезанной на отрезках прямой. Пусть анизотропный материал занимает всю плоскость  $xy$ , разрезанную на  $n$  отрезках  $L_k = a_k b_k$  оси  $y = 0$ . И пусть  $L = \Sigma L_k$  — совокупность отрезков  $L_k$ ;  $D$  — вся плоскость  $xy$ , кроме точек  $t$  на  $L$ ;  $L^+$  и  $L^-$  — края разреза  $L$  со стороны  $y > 0$  и  $y < 0$ .

В этом случае, полагая, что для  $z_2$  области  $D$

$$(\mu_2 - \mu_1) \Omega(z_2) + (\mu_2 - \bar{\mu}_1) \bar{\Phi}(z_2) + (\mu_2 - \bar{\mu}_2) \bar{\Psi}(z_2) = 0,$$

получим такие формулы для определения термоупругого состояния в области  $D$ :

$$\Phi(z_1) - \Omega(\bar{z}_2) + k_1 [\bar{\Phi}(z_1) - \bar{\Phi}(z_2)] = f, \quad (26)$$

$$\kappa \Phi(z_1) + \Omega(\bar{z}_2) + k_2 \bar{\Phi}(z_1) + k_2 \bar{\Phi}(z_2) = g', \quad (27)$$

$$\sigma_x = 2 \operatorname{Re} [\mu_1^2 \Phi(z_1) - \mu_2^2 \Phi(z_2) + k_3 (\mu_2^2 \Phi(z_2) - \bar{\mu}_2^2 \Omega(\bar{z}_2))], \quad (28)$$

$$X + Y \mu_2 = (\mu_1 - \mu_2) [\varphi(z_1) - \omega(\bar{z}_2) + k_1 (\bar{\varphi}(z_1) - \bar{\varphi}(z_2))]_c, \quad (29)$$

$$u q_2 - v p_2 = \kappa'_2 [\kappa \varphi(z_1) + \omega(\bar{z}_2) + k_2 \bar{\varphi}(z_1) + k_1 \bar{\varphi}(z_2) - g_0]. \quad (30)$$

Здесь  $\omega(z) = \int \Omega(z) dz$ . Остальные обозначения сохраняем в прежнем виде, считая, однако, что

$$\Psi_0(\xi) = \frac{1}{2} [F_0(\xi) + \varepsilon \bar{Q}_0(\xi)]$$

и что температурное поле  $T$  в области  $D$  определяется с помощью двух комплексных потенциалов на основании формул

$$F_0(\xi) + \varepsilon Q_0(\bar{\xi}) = T + i\eta, \quad (31)$$

$$F(\xi) + \varepsilon Q(\bar{\xi}) = \frac{\partial}{\partial x} (T + i\eta), \quad (32)$$

$$\lambda F(\xi) + \bar{\lambda} \varepsilon Q(\bar{\xi}) = \frac{\partial}{\partial y} (T + i\eta), \quad (33)$$

где  $Q_0(\xi) = \int Q(\xi) d\xi$ ;  $\varepsilon$ ,  $\lambda$ ,  $\bar{\xi}$  — то же, что и в формулах (20) — (22).

Граничное условие для функций  $T$  и  $\eta$  также будем задавать в виде (23), понимая под  $L'$  и  $L''$  части границы разрезов  $L^+ + L^-$ , на которых соответственно заданы температура  $T$  и ее производная по нормали.

В этих формулах  $\Phi$ ,  $\Omega$  и  $F$ ,  $Q$  — голоморфные функции своих аргументов, имеющие интегрируемые особенности в точках  $a_k$  и  $b_k$  и удовлетворяющие условию на бесконечности

$$\Phi(z_j) = a + 0(1/z_j) \text{ и } \Omega(z_2) = b + 0(1/z_2) \text{ при } |z_j| \rightarrow \infty,$$

$$F(\xi) = a_0 + 0(1/\xi^2) \text{ и } Q(\xi) = \varepsilon \bar{a}_0 + 0(1/\xi^2) \text{ при } |\xi| \rightarrow \infty,$$

где  $a_0$ ,  $a$  и  $b$  — известные комплексные постоянные.

Общие формулы для аэлотропной пластинки. Положим в формулах (1), (2), (3)

$$a_{j6} = \beta_{i6} = k'_6 = k''_6 = 0$$

и предположим, что корни характеристического уравнения являются чисто мнимыми и кратными.

В этом случае, принимая, что

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}, \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y},$$

$$u = 2 \operatorname{Re} [p_1 \varphi(z) + p_2 z \overline{\Phi(z)} + p_3 \psi(z) + \alpha_1 \psi_0(\xi)],$$

$$v = 2 \operatorname{Im} [q_1 \varphi(z) + q_2 z \overline{\Phi(z)} + q_3 \psi(z) + \beta_1 \psi_0(\xi)],$$

где

$$U = \operatorname{Re} [z \overline{\varphi(z)} + \chi(z)], \quad T = 2 \operatorname{Re} \Psi_0(\xi),$$

$$z = x + i\mu_0 y, \quad \xi = x + i\lambda y,$$

$$\Phi(z) = \varphi'(z), \quad \Psi(z) = \psi'(z), \quad \Psi_0(\xi) = \psi'_0(\xi).$$

$p_j, q_j, \alpha_1, \beta_1$  — вещественные параметры,  $\mu_0$  и  $\lambda$  — положительные корни уравнений

$$\beta_{11}\mu^4 - (2\beta_{12} + \beta_{66})\mu^2 + \beta_{22} = 0, \quad \lambda^2 - k_{11} = 0,$$

получим формулы

$$\sigma_y + \alpha^2 \sigma_x = 2 [\Phi(z) + \overline{\Phi(z)}], \quad (34)$$

$$\sigma_y - i\alpha \tau_{xy} = \Phi(z) + \overline{\Phi(z)} + z \overline{\Phi'(z)} + \overline{\Psi(z)}, \quad (35)$$

$$2\mu(u + i\alpha v) = \kappa \varphi(z) - z \overline{\Phi(z)} - \overline{\psi(z)} + g_0, \quad (36)$$

$$Y - i\alpha X = [\varphi(z) + z \overline{\Phi(z)} + \overline{\psi(z)}]_c. \quad (37)$$

Здесь

$$g_0 = \alpha_2 \psi_0(\xi) + \beta_2 \overline{\psi_0(\xi)},$$

$$\mu = \frac{1}{\beta_{66}}, \quad \kappa = \frac{8\sqrt{\beta_{11}\beta_{22}}}{\beta_{66}} - 1, \quad \alpha = \frac{1}{\mu_0},$$

$$\alpha_2 = 2\mu(k_1^0 + \alpha\sqrt{k_1^0 k_2^0}), \quad \beta_2 = 2\mu(k_1^0 - \alpha\sqrt{k_1^0 k_2^0}).$$

При этом предполагается, что между коэффициентами  $\beta_{ij}$  существуют зависимости

$$2\beta_{12} + \beta_{66} = 2\sqrt{\beta_{11}\beta_{22}}, \quad \beta_{11} = \beta_{22}\alpha^4$$

и что коэффициенты уравнения теплопроводности (2) равны

$$k_{11} = k_2^0 (k_1^0)^{-1}, \quad k_{12} = 0.$$

Предположим теперь, что материал занимает область  $D$ , представляющую собою плоскость  $xy$ , разрезанную на отрезках оси  $y = 0$ . Вводя в рассмотрение соотношение

$$\Omega(z) + \bar{\Phi}(z) + z\bar{\Phi}'(z) + \bar{\Psi}(z) = 0,$$

формулы (34) — (37) преобразуем к виду

$$\sigma_y + \alpha^2 \sigma_x = 2 [\Phi(z) + \bar{\Phi}(\bar{z})], \quad (38)$$

$$\sigma_y - i\alpha\tau_{xy} = \Phi(z) - \Omega(\bar{z}) + (z - \bar{z})\bar{\Phi}'(\bar{z}), \quad (39)$$

$$2\mu \frac{\partial}{\partial x} (u + i\alpha v) = \kappa\Phi(z) + \Omega(\bar{z}) - (z - \bar{z})\bar{\Phi}'(\bar{z}) + g', \quad (40)$$

$$2\mu (u + i\alpha v) = \kappa\varphi(z) + \omega(\bar{z}) - (z - \bar{z})\bar{\Phi}(\bar{z}) + g, \quad (41)$$

$$Y - i\alpha X = [\varphi(z) - \omega(\bar{z}) + (z - \bar{z})\bar{\Phi}(\bar{z})]_c, \quad (42)$$

где

$$\Phi(z) = \varphi'(z), \quad \Omega(z) = \omega'(z), \quad \Psi_0(\xi) = \psi_0'(\xi), \quad g' = \frac{\partial}{\partial x} g,$$

$$\Psi_0(\xi) = \frac{1}{2} [F_0(\xi) + \varepsilon Q_0(\xi)], \quad (43)$$

$F_0(\xi)$  и  $Q_0(\xi)$  — аналитические функции, определяемые указанным выше способом на основании выражений

$$F_0(\xi) + \varepsilon Q_0(\bar{\xi}) = T + i\eta, \quad (44)$$

$$F(\xi) + \varepsilon Q(\bar{\xi}) = \frac{\partial}{\partial x} (T + i\eta), \quad (45)$$

$$F(\xi) - \varepsilon Q(\bar{\xi}) = -i \frac{\partial}{\partial y} (T + i\eta)\lambda^{-1}. \quad (46)$$

Заменяя в формулах (38) — (46) символы функций  $\Omega$ ,  $\omega$ ,  $Q$  на  $\Phi$ ,  $\varphi$ ,  $F$  соответственно, получим основные формулы для определения термоупругого состояния в полуплоскости  $S^-(y < 0)$  или  $S^+(y > 0)$ .

Используя полученные выше формулы, можно найти в рассматриваемых областях распределение температуры и температурных напряжений методом сопряжения [2]. При  $\Psi_0(\xi) = 0$  эти формулы полностью совпадают с общими формулами, полученными в работах [3, 4] без учета влияния температуры на напряженное состояние тела.

### Литература

1. Лехницкий С. Г. Анизотропные пластинки. М., 1957.
2. Мухелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М., 1954.
3. Савин Г. М., Прусов И. О. ДАН УССР, А, № 11, 1968.
4. Прусов И. А., Лунская Л. И. Прикладная механика, V, вып. 8, 1969.
5. Уздалев А. И. Некоторые задачи термоупругости анизотропного тела. Саратов, 1967.

Белорусский государственный университет  
им. В. И. Ленина

Поступило в редакцию  
5.1 1970

Л. Т. ШУЛЬГИНА

**ОБ ИНТЕРПОЛЯЦИОННОМ УЛУЧШЕНИИ СХОДИМОСТИ  
 К ПРЕДЕЛУ ФУНКЦИИ ДВУХ АРГУМЕНТОВ**

В работах [1—3] изучались вопросы теории улучшения сходимости последовательности  $S_n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) и равносильной задачи о сходимости однократного ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  при помощи интерполяционных преобразований.

В настоящей заметке рассматриваются некоторые сходные вопросы для двойных рядов и для связанных с ними переменных с двумя индексами.

Интерполирование предельного значения функции двух аргументов и соответствующие линейные преобразования значений такой функции. Будем считать заданной функцию  $S_{m,n}$  двух целочисленных аргументов  $m, n$  ( $m, n = 1, 2, \dots$ ). В приложениях с такими функциями особенно часто приходится иметь дело, например, при

вычислении сумм двойных рядов  $\sum_{i,j=1}^{\infty} u_{i,j}$  как предела частичных сумм вида

$$S_{m,n} = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n u_{i,j} \text{ при условии независимого неограниченного роста } m, n$$

или при вычислении двойных интегралов  $\int_0^{\infty} \int_0^{\infty} f(x, y) dx dy$  как предела ин-

тегралов по прямоугольникам  $\int_0^{x_m} dx \int_0^{y_n} f(x, y) dy$  при условиях  $x_m \rightarrow \infty$

( $m \rightarrow \infty$ ) и  $x_n \rightarrow \infty$  ( $n \rightarrow \infty$ ).

Предположим, что  $S_{m,n}$  стремится к конечному пределу  $S$  при неограниченном возрастании  $m$  и  $n$ . Если сходимость  $S_{m,n} \rightarrow S$  медленная, то для ее улучшения  $S_{m,n}$  обычно преобразуют в новую функцию  $\sigma_{m,n} = f_{m,n}(S_{1,1}; S_{1,2}; \dots)$ , так, чтобы при  $m, n \rightarrow \infty$  было  $\sigma_{m,n} \rightarrow S$ , при этом последняя сходимость должна быть более быстрой, чем сходимость  $S_{m,n}$  к  $S$ .

В настоящей статье будет рассматриваться преобразование, основанное на идее наиболее простого алгебраического интерполирования предельного значения  $S$ . Оно, как будет видно ниже, является частным случаем линейного преобразования

$$\sigma_{m,n} = \sum_{\alpha=1}^{\infty} \sum_{\beta=1}^{\infty} a_{m,n}^{\alpha,\beta} S_{\alpha,\beta}. \quad (1)$$

Построим интерполяционный многочлен Лагранжа от двух переменных  $\sigma_{m,n} \left( \frac{1}{p}, \frac{1}{r} \right)$  степени  $l$  и  $k$  по первой и второй переменной соответ-

венно, по узлам, лежащим в плоскости переменных  $p$  и  $r$  на пересечении прямых  $p = m + i$ ,  $r = n + j$ , и по значениям  $S_{m+i, n+j}$  ( $i = 0, 1, \dots, l$ ;  $j = 0, 1, \dots, k$ ):

$$\begin{aligned} \sigma_{m,n} \left( \frac{1}{p}, \frac{1}{r} \right) &= \sum_{i=0}^l \sum_{j=0}^k (-1)^{i+j} \times \\ &\times \frac{(m-p)(m-p+1) \dots (m-p+i-1)(m-p+i+1) \dots (m-p+l)}{i! (l-i)! p^l} \times \\ &\times \frac{(n-r)(n-r+1) \dots (n-r+j-1)(n-r+j+1) \dots (n-r+k)}{j! (k-j)! r^k} \times \\ &\times (m+i)^l (n+j)^k S_{m+i, n+j}. \end{aligned} \quad (2)$$

$\lim_{p, r \rightarrow \infty} \sigma_{m,n} \left( \frac{1}{p}, \frac{1}{r} \right)$  будем считать новой последовательностью  $\sigma_{m,n}$ .

$$\begin{aligned} \sigma_{m,n} &= L(S_{m,n}) = \lim_{p, r \rightarrow \infty} \sigma_{m,n} \left( \frac{1}{p}, \frac{1}{r} \right) = \\ &= \sum_{i=0}^l \sum_{j=0}^k (-1)^{i+k+i+j} \frac{(m+i)^l (n+j)^k}{i! (l-i)! j! (k-j)!} S_{m+i, n+j}. \end{aligned} \quad (3)$$

Полученное преобразование будет линейным, и его можно записать в виде (1).

Некоторые свойства интерполяционного преобразования и его обращения. Относительно функции  $\sigma_{m,n}$ , полученной по формуле (3), можно поставить 2 следующих вопроса.

1) Какой должна быть исходная функция  $S_{m,n}$ , чтобы  $\sigma_{m,n}$  имела предел при  $m, n \rightarrow \infty$ ?

2) Если  $\sigma_{m,n} \rightarrow \sigma$  и  $S_{m,n} \rightarrow S$ , то при каких условиях  $\sigma = S$ ?

Чтобы ответить на эти вопросы, обратим преобразование (3). При обращении воспользуемся тем фактом, что выполненное выше преобразование функции  $S_{m,n}$  можно рассматривать как два последовательных одномерных преобразования:

$$\sigma_{m,n} = \sum_{i=0}^l \frac{(-1)^{l-i} (m+i)^l}{i! (l-i)!} U_{m+i, n}, \quad (4)$$

где

$$U_{m+i, n} = \sum_{j=0}^k \frac{(-1)^{k-j} (n+j)^k}{j! (k-j)!} S_{m+i, n+j}. \quad (5)$$

Обратив преобразования (5) и (4) и выполнив некоторые подстановки, получим

$$\begin{aligned} S_{m,n} &= \sum_{q=1}^k \Gamma_n(q, k) S_{m,q} + \sum_{p=1}^l \Gamma_m(p, l) S_{p,n} - \\ &- \sum_{p=1}^l \sum_{q=1}^k \Gamma_m(p, l) \Gamma_n(q, k) S_{p,q} + \sum_{p=1}^{m-l} \sum_{q=1}^{n-k} G_m(p, l) G_n(q, k) \sigma_{p,q}. \end{aligned} \quad (6)$$

Здесь  $S_{m,q}$  ( $q=1, 2, \dots, k$ ),  $S_{p,n}$  ( $p=1, 2, \dots, l$ ) играют роль начальных данных, и в дальнейших рассуждениях мы их будем считать ограниченными.

Входящие в формулу (6) функции Грина имеют следующий вид:

$$\Gamma_m(p, l) = \frac{1}{D_1} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 2^{-1} & 2^{-2} & \dots & 2^{-l} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (p-1)^{-1} & (p-1)^{-2} & \dots & (p-1)^{-l} \\ m^{-1} & m^{-2} & \dots & m^{-l} \\ (p+1)^{-1} & (p+1)^{-2} & \dots & (p+1)^{-l} \\ l^{-1} & l^{-2} & \dots & l^{-l} \end{vmatrix},$$

$$\Gamma_n(q, k) = \frac{1}{D_2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 2^{-1} & 2^{-2} & \dots & 2^{-k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (q-1)^{-1} & (q-1)^{-2} & \dots & (q-1)^{-k} \\ n^{-1} & n^{-2} & \dots & n^{-k} \\ (q+1)^{-1} & (q+1)^{-2} & \dots & (q+1)^{-k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ k^{-1} & k^{-2} & \dots & k^{-k} \end{vmatrix},$$

где

$$D_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 2^{-1} & 2^{-2} & \dots & 2^{-l} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ l^{-1} & l^{-2} & \dots & l^{-l} \end{vmatrix},$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 2^{-1} & 2^{-2} & \dots & 2^{-k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ k^{-1} & k^{-2} & \dots & k^{-k} \end{vmatrix}.$$

$$G_m(p, l) = \frac{1}{\Delta_{p,l} A_{p,l}} \begin{vmatrix} m^{-1} & m^{-2} & \dots & m^{-l} \\ (p+l-1)^{-1} & (p+l-1)^{-2} & \dots & (p+l-1)^{-l} \\ (p+l-2)^{-1} & (p+l-2)^{-2} & \dots & (p+l-2)^{-l} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (p+1)^{-1} & (p+1)^{-2} & \dots & (p+1)^{-l} \end{vmatrix},$$

где

$$\Delta_{p,l} = \begin{vmatrix} (p+l)^{-1} & (p+l)^{-2} & \dots & (p+l)^{-l} \\ (p+l-1)^{-1} & (p+l-1)^{-2} & \dots & (p+l-1)^{-l} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (p+1)^{-1} & (p+1)^{-2} & \dots & (p+1)^{-l} \end{vmatrix}$$

и

$$A_{p,l} = \frac{(l+p)^l}{l!};$$

$$G_n(q, k) = \frac{1}{\Delta_{q,k} B_{q,k}} \begin{vmatrix} n^{-1} & n^{-2} & \dots & n^{-k} \\ (q+k-1)^{-1} & (q+k-1)^{-2} & \dots & (q+k-1)^{-k} \\ (q+k-2)^{-1} & (q+k-2)^{-2} & \dots & (q+k-2)^{-k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (q+1)^{-1} & (q+1)^{-2} & \dots & (q+1)^{-k} \end{vmatrix},$$

где

$$\Delta_{q,k} = \begin{vmatrix} (q+k)^{-1} & (q+k)^{-2} & \dots & (q+k)^{-k} \\ (q+k-1)^{-1} & (q+k-1)^{-2} & \dots & (q+k-1)^{-k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (q+1)^{-1} & (q+1)^{-2} & \dots & (q+1)^{-k} \end{vmatrix}$$

и

$$B_{q,k} = \frac{(k+q)^k}{k!}.$$

Для дальнейшего полезны легко получающиеся соотношения

$$G_m(p, l) = \frac{l}{m} \left(1 - \frac{p+1}{m}\right) \left(1 - \frac{p+2}{m}\right) \dots \left(1 - \frac{p+l-1}{m}\right);$$

$$G_n(q, k) = \frac{k}{n} \left(1 - \frac{q+1}{n}\right) \left(1 - \frac{q+2}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{q+k-1}{n}\right); \quad (7)$$

$$\Gamma_n(q, k) = O\left(\frac{1}{n}\right); \quad \Gamma_m(p, l) = O\left(\frac{1}{m}\right);$$

$$G_m(p, l) > 0 \text{ для } m \geq p + l;$$

$$G_n(q, k) > 0 \text{ для } n \geq q + k;$$

$$G_m(p, l) = O\left(\frac{1}{m}\right); \quad G_n(q, k) = O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Рассмотрим обратное преобразование (6) более подробно.

$$I. \sum_{p=1}^{m-l} \sum_{q=1}^{n-k} G_m(p, l) G_n(q, k) \rightarrow 1, \text{ если } m, n \rightarrow \infty.$$

Это утверждение следует из тех фактов, что  $L(S) = S$  и  $\Gamma_n(q, k) \rightarrow 0$ ,  $\Gamma_m(p, l) \rightarrow 0$  при  $m, n \rightarrow \infty$ .II. Если  $\sigma_{m,n} = \sigma$ , то соответствующая функция  $S_{m,n} \rightarrow \sigma$  при  $m, n \rightarrow \infty$ .

По формуле (6) запишем

$$S_{m,n} = \sum_{p=1}^l \Gamma_m(p, l) S_{p,n} + \sum_{q=1}^k \Gamma_n(q, k) S_{m,q} -$$

$$- \sum_{p=1}^l \sum_{q=1}^k \Gamma_m(p, l) \Gamma_n(q, k) S_{p,q} + \sigma \sum_{p=1}^{m-l} \sum_{q=1}^{n-k} G_m(p, l) G_n(q, k).$$

Первые 3 слагаемых при  $m, n \rightarrow \infty$  стремятся к нулю вследствие ограниченности начальных данных и характера поведения  $\Gamma_m(p, l)$ ,  $\Gamma_n(q, k)$ .

$$\sum_{p=1}^{m-l} \sum_{q=1}^{n-k} G_m(p, l) G_n(q, k) \rightarrow 1 \text{ по свойству I.}$$

Утверждение II справедливо.

III. Если  $\sigma_{m,n} \rightarrow 0$ , то  $S_{m,n} \rightarrow 0$ .

Доказывается это на основании формулы (6) и некоторых из соотношений (7).

Используя выше рассмотренные свойства обратного преобразования, докажем теорему.

*Теорема. Чтобы функция  $\sigma_{m,n}$  имела предел при  $m, n \rightarrow \infty$ , необходимо, чтобы исходная функция  $S_{m,n}$  тоже имела предел при  $m, n \rightarrow \infty$ , причем, если  $\sigma_{m,n} \rightarrow \sigma$ , то  $S_{m,n} \rightarrow \sigma$ .*

*Доказательство.* Пусть  $\sigma_{m,n}$  имеет предел и  $\sigma_{m,n} = \sigma + \delta_{m,n}$ , где  $\delta_{m,n} \rightarrow 0$ , если  $m, n \rightarrow \infty$ .

По формуле (6) имеем

$$\begin{aligned} S_{m,n} &= \sum_{p=1}^l \Gamma_m(p, l) S_{p,n} + \sum_{q=1}^k \Gamma_n(q, k) S_{m,q} - \\ &- \sum_{p=1}^l \sum_{q=1}^k \Gamma_m(p, l) \Gamma_n(q, k) S_{p,q} + \\ &+ \sum_{p=1}^{m-l} \sum_{q=1}^{n-k} G_m(p, l) G_n(q, k) \delta_{m,n} + \sigma \sum_{p=1}^{m-l} \sum_{q=1}^{n-k} G_m(p, l) G_n(q, k). \end{aligned}$$

Используя свойство III и учитывая ограниченность начальных данных, получаем

$$\lim_{m, n \rightarrow \infty} S_{m,n} = \sigma.$$

Вопрос улучшения сходимости. Выясним теперь условия, при которых вновь полученная функция  $\sigma_{m,n} = L(S_{m,n})$  будет стремиться к пределу быстрее, чем  $S_{m,n}$ . Так как на решение этого вопроса будет существенно влиять вид функции, то мы сейчас определим некоторые классы функций, которые рассмотрим дальше.

**Определение 1.** Функция  $S_{m,n}$  имеет алгебраический тип сходимости степени  $\alpha$  и  $\beta$  по первому и второму индексам соответственно, если она представима в виде

$$\begin{aligned} S_{m,n} &= c_0 + c_{1,0} m^{-1} + c_{0,1} n^{-1} + c_{1,1} m^{-1} n^{-1} + \dots + \\ &+ (c_{\alpha,\beta} + \eta_{m,n}) m^{-\alpha} n^{-\beta}, \end{aligned} \quad (8)$$

где  $\eta_{m,n} \rightarrow 0$ , если  $m, n \rightarrow \infty$ .

**Определение 2.** Если для  $S_{m,n}$  справедливо представление (8) при любых  $\alpha$  и  $\beta$ , то будем говорить, что  $S_{m,n}$  принадлежит асимптотическому степенному типу сходимости.

**Определение 3.** Будем считать, что  $S_{m,n}$  принадлежит аналитическому типу сходимости, если

$$S_{m,n} = c_0 + c_{1,0} m^{-1} + c_{0,1} n^{-1} + c_{1,1} m^{-1} n^{-1} + \dots$$

для всех  $m > M$  и  $n > N$ , где  $M$  и  $N$  некоторые числа.

Будем применять теперь наше преобразование к описанным выше функциям  $S_{m,n}$ . Предварительно отметим некоторые свойства преобразования  $L$ .

- 1)  $L(C) = C$ .
- 2)  $L\left(\frac{1}{m^\alpha n^\beta}\right) = 0$ , если  $\alpha \leq l$  или  $\beta \leq k$ .
- 3)  $L\left(\frac{1}{m^\alpha n^\beta}\right) = (-1)^{l+k} \frac{\mu_{\alpha-l-1} \nu_{\beta-k-1}}{m(m+1) \dots (m+l) n(n+1) \dots (n+k)}$ , если  $\alpha > l$  и  $\beta > k$ .

Здесь

$$\mu_{\alpha-l-1} = \sum_{\alpha_0 + \alpha_1 + \dots + \alpha_l = \alpha-l-1} \frac{1}{m^{\alpha_0} (m+1)^{\alpha_1} \dots (m+l)^{\alpha_l}},$$

$$\nu_{\beta-k-1} = \sum_{\beta_0 + \beta_1 + \dots + \beta_k = \beta-k-1} \frac{1}{n^{\beta_0} (n+1)^{\beta_1} \dots (n+k)^{\beta_k}}.$$

Полезно заметить, что

$$\mu_{\alpha-l-1} = O\left(\frac{1}{m^{\alpha-l-1}}\right),$$

$$\nu_{\beta-k-1} = O\left(\frac{1}{n^{\beta-k-1}}\right).$$

Справедливость свойств 1 и 2 вытекает из того факта, что наше преобразование интерполяционное, и степень интерполирования равна  $l$  и  $k$  по первой и второй переменной соответственно. Свойство 3 можно доказать, основываясь на соответствующих рассуждениях для одномерного случая [3] и на том факте, что преобразование  $L$  можно получить, последовательно интерполируя и переходя к пределу сначала по первому индексу, потом по второму.

Применим теперь преобразование  $L$  к функции  $S_{m,n}$  вида (8). Учитывая свойства 1—3, имеем

$$\begin{aligned} L(S_{m,n}) &= c_0 + \sum_{i=l+1}^{\alpha-1} \sum_{j=k+1}^{\beta-1} c_{i,j} \frac{(-1)^{l+k}}{m \dots (m+l) n \dots (n+k)} \mu_{i-l-1} \nu_{j-k-1} + \\ &+ \sum_{i=l+1}^{\alpha-1} c_{i,\beta} \frac{\mu_{i-l-1}}{n^\beta m (m+1) \dots (m+l)} + \\ &+ \sum_{j=k+1}^{\beta-1} c_{\alpha,j} \frac{\nu_{j-k-1}}{m^\alpha n (n+1) \dots (n+k)} + \\ &+ c_{\alpha,\beta} \frac{\mu_{\alpha-l-1} \nu_{\beta-k-1}}{m (m+1) \dots (m+l) n (n+1) \dots (n+k)} + L\left(\frac{\eta_{m,n}}{m^\alpha n^\beta}\right) = \\ &= c_0 + O\left(\frac{1}{m^{l+1} n^{k+1}}\right) + O\left(\frac{1}{m^{l+1} n^\beta}\right) + O\left(\frac{1}{m^\alpha n^{k+1}}\right) + \\ &+ O\left(\frac{1}{m^\alpha n^\beta}\right) + o\left(\frac{1}{m^{\alpha-l} n^{\beta-k}}\right) = c_0 + O\left(\frac{1}{m^{l+1} n^{k+1}}\right) + \\ &+ o\left(\frac{1}{m^{\alpha-l} n^{\beta-k}}\right). \end{aligned}$$

Отсюда следует

**Теорема.** Если исходная функция  $S_{m,n}$  имеет вид (9), то улучшение сходимости происходит при условии  $\alpha > l$ ,  $\beta > k$  независимо от характера стремления к нулю поправки  $\eta_{m,n}$ .

**Замечание 1.** Пусть исходная функция  $S_{m,n}$  имеет вид

$$S_{m,n} = c_0 + \frac{c_{r,q}}{m^r n^q} + \frac{c_{r+1,q}}{m^{r+1} n^q} + \dots + (c_{\alpha,\beta} + \eta_{m,n}) \frac{1}{m^\alpha n^\beta}, \quad (9)$$

тогда

$$L(S_{m,n}) = c_0 + O\left(\frac{1}{m^{l+1}n^{k+1}}\right) + o\left(\frac{1}{m^{\alpha-l}n^{\beta-k}}\right),$$

т. е. если  $r \leq l \leq \alpha - r$  и  $q \leq k \leq \beta - q$ , то произойдет улучшение сходимости независимо от способа стремления к бесконечности  $m$  и  $n$ .

Замечание 2. Пусть исходная функция  $S_{m,n}$  имеет вид (9), где  $\alpha$  и  $\beta$  могут быть любыми, т. е. мы считаем, что исходная функция имеет асимптотический степенной тип сходимости. Тогда при условии  $r \leq l$ ,  $q \leq k$  вновь полученная функция будет сходиться быстрее.

### Литература

1. Крылов В. И. ДАН БССР, № 5, 1965.
2. Крылов В. И. ДАН БССР, № 7, 1965.
3. Кругликова Л. Г., Крылов В. И. Весті АН БССР, сер. фіз.-мат. наук, № 1, 1969.

Институт математики:  
АН БССР

Поступило в редакцию  
17.XII 1969

И. М. КУНЦЕВИЧ

**ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ АСПЕКТЫ ЗАДАЧИ НАХОЖДЕНИЯ  
 ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ЗНАЧЕНИЙ ЛИНЕЙНОЙ ФОРМЫ  
 НА МНОЖЕСТВЕ ВСЕХ  $n$ -ЧЛЕННЫХ ЦИКЛОВ ИЗ  $S_n$**

В работах [1—5] изучалась следующая задача. Пусть  $\pi = \langle c, b \rangle$  — пара вещественных векторов,  $c = (c_1, c_2, \dots, c_n)$ ,  $b = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ ,  $\tau$  — подстановка из симметрической группы  $S_n$ ,  $\tau(i) = \tau_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) и

$$f_\pi(\tau) = \sum_{i=1}^n c_i b_{\tau_i}. \quad (1)$$

Требуется найти подстановку  $t_0 \in H$ , такую, что

$$f_\pi(t_0) = \min_{t \in H} f_\pi(t), \quad (2)$$

где  $H$  — множество всех  $n$ -членных циклов из  $S_n$ .

Задача рассматривалась для таких  $\pi$ , что подстановка  $\tau_0$ , минимизирующая значение формы (1) на всей симметрической группе  $S_n$ , имеет определенный вид. В данной статье делается попытка рассмотреть эту задачу для произвольной подстановки  $\tau_0$ .

Пусть  $\tau \in S_n$  — подстановка, содержащая циклы  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_p$ ,  $\bar{\tau} = \tau a_{ij}$ , где  $a_{ij}(i) = j$ ,  $a_{ij}(j) = i$ ,  $a_{ij}(k) = k$ ,  $k \neq i, j$ ,  $i, j = 1, 2, \dots, n$ . Если  $i$  и  $j$  принадлежат различным циклам  $\varphi_v$ ,  $v = 1, 2, \dots, p$ , то  $\bar{\tau}$  содержит те же циклы, что и  $\tau$ , кроме циклов, содержащих  $i$  и  $j$ , объединенных в один. Если же  $i$  и  $j$  принадлежат одному и тому же циклу  $\varphi_r$ , то в подстановке  $\bar{\tau}$  сохраняются все циклы, кроме  $\varphi_r$ , который распадется на два (см. [5]). Поэтому, если подстановка  $\tau$  состоит из циклов, то с помощью различных последовательностей «транспозиций» вида

$$\sigma = [a_{i_1 j_1}, a_{i_2 j_2}, \dots, a_{i_k j_k}] \quad (3)$$

можно найти все  $n$ -членные циклы из  $S_n$ , т. е.

$$\tau_k = \tau a_{i_1 j_1} a_{i_2 j_2} \dots a_{i_k j_k}.$$

Если подстановка  $\tau$  состоит из  $p$  циклов, то, очевидно,  $k \geq p - 1$ . Множество  $M^{p-1}(\tau)$  всех  $n$ -членных циклов, образованных из  $\tau$  последовательностями «транспозиций» вида (3) длины  $p - 1$ , назовем минимально допустимым подмножеством, соответствующим подстановке  $\tau$ .

Если  $\tau' \in M^{p-1}(\tau)$ , то

$$\tau' = \tau a_{i_1 j_1} a_{i_2 j_2} \dots a_{i_{p-1} j_{p-1}}. \quad (4)$$

В дальнейшем будем считать, что в  $a_{ij}$   $i < j$ .

Рассмотрим отображение

$$\gamma: \tau \rightarrow G_\tau, \quad (5)$$

где  $G_\tau$  — граф с  $n$  вершинами и ненаправленными дугами, связывающими вершины  $i$  и  $\tau(i)$ ,  $i=1, 2, \dots, n$ . Очевидно, что отображение (5) определяет соответствие между циклами подстановки  $\tau$  и компонентами связности графа  $G_\tau$ .

В силу (5) имеем, что соответствие между циклами подстановки  $\bar{\tau}=\tau a_{ij}$  и компонентами связности графа  $G_{\bar{\tau}}$  сохраняется.

Действительно, если  $i$  и  $j$  принадлежат разным циклам подстановки  $\tau$ , то  $\bar{\tau}$  имеет циклов на единицу меньше, чем  $\tau$ . Следовательно, у графа  $G_{\bar{\tau}}$  число компонент связности будет меньше на единицу, чем у  $G_\tau$ , так как граф  $G_{\bar{\tau}}$  будет содержать дугу  $(i, j)$ . Поэтому, если  $G_\tau$  имеет  $p$  компонент связности, то с помощью  $p-1$  дуг нетрудно получить связный граф  $G_{\tau'}$ .

Минимальное множество добавляемых дуг, которые связывают граф  $G_\tau$ , называют связывающим деревом или деревом-остовом, вершинами которого выбраны компоненты связности графа  $G_\tau$  (см. [6], стр. 660). Следовательно, «минимально допустимое» подмножество  $M^{p-1}(\tau_0)$  состоит из  $n$ -членных циклов вида

$$\tau' = \tau_0 a_{i_1 j_1} a_{i_2 j_2} \dots a_{i_{p-1} j_{p-1}},$$

где  $a_{i_k j_k}$  — «транспозиции», соответствующие дугам дерева-остова графа  $G_{\tau_0}$ . Результаты работ [1 — 5] подтверждают зависимость структуры  $n$ -членного цикла  $t_0$ , являющегося решением задачи (1), (2) от вида подстановки  $\tau_0$ . Все это позволяет представить функцию — критерий задачи (1), (2) в виде суммы весов дуг дерева-остова.

Пусть  $\tau_0$  — произвольная подстановка,  $G_{\tau_0}$  — соответствующий ей граф. Каждой дуге  $(i_k, j_k)$ , соответствующей «транспозиции»  $a_{i_k j_k}$ , припишем вес (длину)

$$l_{i_k j_k} = \pi_{i_k j_k}(\tau_{k-1}) = (c_{j_k} - c_{i_k})(b_{\tau_{k-1}(i_k)} - b_{\tau_{k-1}(j_k)}), \quad (6)$$

$$i_k, j_k \in N_+ = \{1, 2, \dots, n\}, \tau_{k-1} = \tau_{k-2} a_{i_{k-1} j_{k-1}}, k=1, 2, \dots, p-1.$$

Тогда сумма весов дуг дерева-остова, соответствующего циклу  $\tau'$ , будет равна

$$\pi(\tau') = \sum_{(i_k, j_k)} \pi_{i_k j_k}(\tau_{k-1}) = \sum_{(i_k, j_k)} (c_{j_k} - c_{i_k})(b_{\tau_{k-1}(i_k)} - b_{\tau_{k-1}(j_k)}), \quad (7)$$

где  $i_k, j_k$  в каждом слагаемом выбираются из различных компонент связности графов  $G_{\tau_0}, G_{\tau_1}, \dots, G_{\tau_{k-1}}$ .

Будем считать, что

$$c_1 \leq c_2 \leq \dots \leq c_n, \quad (8)$$

$$b_{\tau_1} \geq b_{\tau_2} \geq \dots \geq b_{\tau_n}. \quad (9)$$

Лемма. Пусть  $a_{ij}$  и  $a_{pq}$  — «транспозиции», у которых  $p < q$  и  $i < j$ ,  $\tau = \tau_0 a_{ij}$ ,  $\tau_1 = \tau_0 a_{pq}$ . Тогда в каждом из случаев а)  $p > j$ , б)  $q < i$ , в)  $i < p < j \neq q$ , г)  $p < i < q \neq j$  имеют место равенства

$$\pi_{ij}(\tau_0) + \pi_{pq}(\tau) = \pi_{pq}(\tau_0) + \pi_{ij}(\tau_1).$$

При этом  $\pi_{ij}(\tau_0)$ ,  $\pi_{pq}(\tau)$ ,  $\pi_{pq}(\tau_0)$ ,  $\pi_{ij}(\tau_1)$  неотрицательны. А в каждом из случаев д)  $p = i$ , е)  $p = j$ , ж)  $q = i$ , з)  $q = j$  суммы

$$\pi_{ij}(\tau_0) + \pi_{pq}(\tau) \text{ и } \pi_{pq}(\tau_0) + \pi_{ij}(\tau_1)$$

неравны, но обладают следующими свойствами:

$$(\partial) \pi_{ij}(\tau_0) + \pi_{iq}(\tau) = \pi_{iq}(\tau_0) + \pi_{jq}(\tau_2) = \pi_{jq}(\tau_0) + \pi_{ij}(\tau_3),$$

$$\pi_{iq}(\tau_0) + \pi_{ij}(\tau_1) = \pi_{jq}(\tau_0) + \pi_{iq}(\tau_3) = \pi_{ij}(\tau_0) + \pi_{jq}(\tau),$$

где

$$\tau_2 = \tau_0 a_{iq}, \quad \tau_3 = \tau_0 a_{jq};$$

$$(e) \quad \pi_{ij}(\tau_0) + \pi_{jq}(\tau) = \pi_{jq}(\tau_0) + \pi_{iq}(\tau_1) = \pi_{iq}(\tau_0) + \pi_{ij}(\tau_2),$$

$$\pi_{jq}(\tau_0) + \pi_{ij}(\tau_1) = \pi_{ij}(\tau_0) + \pi_{iq}(\tau) = \pi_{iq}(\tau_0) + \pi_{jq}(\tau_2),$$

где

$$\tau_2 = \tau_0 a_{iq};$$

$$(ж) \quad \pi_{iq}(\tau_0) + \pi_{pi}(\tau) = \pi_{pj}(\tau_0) + \pi_{ij}(\tau_2) = \pi_{pi}(\tau_0) + \pi_{pj}(\tau_3),$$

$$\pi_{pi}(\tau_0) + \pi_{ij}(\tau_1) = \pi_{ij}(\tau_0) + \pi_{pj}(\tau) = \pi_{pj}(\tau_0) + \pi_{pi}(\tau_2),$$

где

$$\tau_2 = \tau_0 a_{pj}, \quad \tau_3 = \tau_0 a_{pq};$$

$$(з) \quad \pi_{ij}(\tau_0) + \pi_{pj}(\tau) = \pi_{pj}(\tau_0) + \pi_{ip}(\tau_2) = \pi_{ip}(\tau_0) + \pi_{ij}(\tau_3),$$

$$\pi_{pj}(\tau_0) + \pi_{ij}(\tau_1) = \pi_{ip}(\tau_0) + \pi_{pj}(\tau_3) = \pi_{ij}(\tau_0) + \pi_{ip}(\tau),$$

где

$$\tau_2 = \tau_0 a_{pj}, \quad \tau_3 = \tau_0 a_{ip}.$$

Доказательство. В силу того, что в случаях а) — г)  $\bar{\tau}(i) = \tau(i)$ ,  $\bar{\tau}(j) = \tau(j)$  и  $\bar{\tau}_1(p) = \tau_1(p)$ ,  $\bar{\tau}_1(q) = \tau_1(q)$ , имеем

$$\pi_{ij}(\tau_0) + \pi_{pq}(\tau) = \pi_{pq}(\tau_0) + \pi_{ij}(\tau_1).$$

Из условий  $i < j$  и  $p < q$  и соотношений (8), (9) следует, что  $\pi_{ij}(\tau_0)$ ,  $\pi_{pq}(\tau)$ ,  $\pi_{pq}(\tau_0)$ ,  $\pi_{ij}(\tau_1)$  неотрицательны.

Для доказательства второй части леммы рассмотрим случай д), которому соответствуют два варианта:

$$p = i < j < q, \quad p = i < q < j.$$

В первом варианте будем иметь

$$\begin{aligned} \pi_{ij}(\tau_0) + \pi_{iq}(\tau) &= (c_j - c_i)(b_{\tau_0(i)} - b_{\tau_0(j)}) + (c_q - c_i)(b_{\tau(i)} - b_{\tau(q)}) = \\ &= (c_j - c_i)(b_{\tau_0(i)} - b_{\tau_0(j)}) + (c_q - c_i)(b_{\tau_0(j)} - b_{\tau_0(q)}) = \\ &= (c_j - c_i)(b_{\tau_0(i)} - b_{\tau_0(j)}) + (c_q - c_j + c_j - c_i)(b_{\tau_0(i)} - b_{\tau_0(q)}) = \\ &= (c_q - c_j)(b_{\tau_0(i)} - b_{\tau_0(q)}) + (c_j - c_i)(b_{\tau_0(i)} - b_{\tau_0(q)}) = \\ &= \pi_{jq}(\tau_0) + \pi_{ij}(\tau_0 a_{jq}) = \pi_{jq}(\tau_0) + \pi_{ij}(\tau_3), \\ \pi_{ij}(\tau_0) + \pi_{iq}(\tau) &= (c_j - c_i)(b_{\tau_0(i)} - b_{\tau_0(j)}) + \\ &+ (c_q - c_i)(b_{\tau_0(j)} - b_{\tau_0(i)} + b_{\tau_0(i)} - b_{\tau_0(q)}) = (c_q - c_i)(b_{\tau_0(i)} - b_{\tau_0(q)}) + \\ &+ (c_q - c_i)(b_{\tau_0(i)} - b_{\tau_0(i)}) = \pi_{iq}(\tau_0) + \pi_{jq}(\tau_0 a_{iq}) = \pi_{iq}(\tau_0) + \pi_{jq}(\tau_2). \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} \pi_{ij}(\tau_0) + \pi_{iq}(\tau) &= \pi_{iq}(\tau_0) + \pi_{jq}(\tau_2) = \pi_{jq}(\tau_0) + \pi_{ij}(\tau_3), \\ \pi_{iq}(\tau_0) + \pi_{ij}(\tau_1) &= (c_q - c_i)(b_{\tau_0(i)} - b_{\tau_0(q)}) + (c_j - c_i)(b_{\tau_1(i)} - b_{\tau_1(j)}) = \\ &= (c_q - c_i)(b_{\tau_0(i)} - b_{\tau_0(q)}) + (c_j - c_i)(b_{\tau_0(q)} - b_{\tau_0(j)}) = \\ &= (c_q - c_j + c_j - c_i)(b_{\tau_0(i)} - b_{\tau_0(q)}) + (c_j - c_i)(b_{\tau_0(q)} - b_{\tau_0(j)}) = \\ &= (c_j - c_i)(b_{\tau_0(i)} - b_{\tau_0(j)}) + (c_q - c_j)(b_{\tau_0(i)} - b_{\tau_0(q)}) = \pi_{ij}(\tau_0) + \pi_{jq}(\tau), \\ \pi_{iq}(\tau_0) + \pi_{ij}(\tau_1) &= (c_q - c_i)(b_{\tau_0(i)} - b_{\tau_0(q)}) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &+ (c_j - c_q + c_q - c_i)(b_{\tau_0(q)} - b_{\tau_0(i)}) = (c_q - c_j)(b_{\tau_0(i)} - b_{\tau_0(q)}) + \\
 &+ (c_q - c_i)(b_{\tau_0(i)} - b_{\tau_0(j)}) = \pi_{jq}(\tau_0) + \pi_{iq}(\tau_0 a_{jq}) = \pi_{jq}(\tau_0) + \pi_{iq}(\tau_3).
 \end{aligned}$$

Отсюда имеем

$$\pi_{iq}(\tau_0) + \pi_{ij}(\tau_1) = \pi_{jq}(\tau_0) + \pi_{iq}(\tau_3) = \pi_{ij}(\tau_0) + \pi_{jq}(\tau).$$

Аналогичными построениями можно показать, что подобные соотношения имеют место при  $p=i < q < j$  и в случаях е), ж) и з). Заметим, что случаю з), так же как и д), соответствуют два варианта:  $i < p < j = q$  и  $p < i < j = q$ . Лемма доказана.

Следствие 1. В случаях а) — г) структура  $n$ -членного цикла  $\tau'$  не зависит от порядка выполнения «транспозиций»  $a_{i_k j_k}$  в (4) и

$$f_{\pi}(\tau') = f_{\pi}(\tau) + \sum_{(i_k, j_k)} \pi_{i_k j_k}(\tau_{k-1}),$$

где суммирование ведется по  $i_k, j_k$ , одновременно не входящих в компоненты связности графов  $G_{\tau_0}, G_{\tau_1}, \dots, G_{\tau_{k-1}}, k=1, 2, \dots, p-1$ .

Следствие 2. В каждом из случаев д) — з) порядок следования двух «транспозиций»  $a_{i_k j_k}$  может быть выбран либо не по убыванию первых и возрастанию вторых индексов, либо по убыванию первых и не возрастанию вторых. При таком порядке  $\pi_{i_k j_k}(\tau_{k-1}) \geq 0$ . Используя лемму и следствия 1, 2, можно доказать, что верна следующая

Теорема. Если  $\tau_0$  — подстановка, содержащая циклы  $\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_p$ , то в «минимально допустимом» подмножестве  $n$ -членных циклов  $M^{p-1}(\tau_0)$ , соответствующем  $\tau_0$ , есть  $n$ -членный цикл, являющийся решением задачи (1) — (2).

Изложенное выше позволяет сделать следующие выводы.

1. Задача нахождения экстремума значений линейной формы на множестве всех  $n$ -членных циклов из  $S_n$  эквивалентна задаче построения дерева-остова минимальной (максимальной) длины множества графов, длины дуг которых вычисляются по формуле (6), а вершинами являются компоненты связности графа  $G_{\tau_0}$ . Очевидно, что число графов, входящих в это множество, зависит от числа компонент связности графа  $G_{\tau_0}$  и количества вершин, принадлежащих каждой из них, и может быть очень велико. Поэтому метод Краскала [7], весьма эффективный при построении дерева-остова минимальной (максимальной) длины связного графа, может оказаться в некоторых случаях неприемлемым для решения задачи (1), (2).

2. Функция-критерий задачи (1), (2) может быть представлена в виде (7).

Представление функции-критерия задачи (1), (2) в виде (7) позволит, на наш взгляд, успешно использовать методы динамического программирования, в частности, метод последовательного конструирования и анализа вариантов для решения этой задачи при произвольном  $\tau_0$ . Уравнение Беллмана для задачи (1), (2) при критерии минимизации  $\pi(\tau')$  запишется в виде

$$\pi(\tau_0) = \min_{(i_k, j_k)} [\pi(\tau_{k-1}) + \pi_{i_k j_k}(\tau_{k-1})],$$

где

$$\pi(\tau_{k-1}) = \sum_{(i_{k-1}, j_{k-1})} \pi_{i_{k-1} j_{k-1}}(\tau_{k-2}),$$

$$\tau_{k-1} = \tau_{k-2} a_{i_{k-1} j_{k-1}}, \quad k=1, 2, \dots, p-1, \quad i_{k-1} < j_{k-1},$$

и одновременно не принадлежат одним и тем же компонентам связности графов  $G_{\tau_0}, G_{\tau_1}, \dots, G_{\tau_{p-2}}$ .

Рассмотрим теперь схему последовательного конструирования, анализа и отсеивания вариантов на решении задачи (1), (2) при критерии минимизации  $\pi(\tau')$ .

Пошаговое конструирование решения в данной задаче состоит в следующем: на  $k$ -ом шаге выбирается «транспозиция»  $a_{i_k j_k}$ , соответствующая дуге  $(i_k, j_k)$ , которая объединяет две компоненты связности графа  $G_{\tau_{k-1}}$ .

Правило доминирования для двух последовательностей «транспозиций» вида (3)

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= [a_{i_1 j_1}, a_{i_2 j_2}, \dots, a_{i_k j_k}], \\ \sigma_2 &= [a_{v_1 \mu_1}, a_{v_2 \mu_2}, \dots, a_{v_k \mu_k}],\end{aligned}$$

у которых  $v_s = i_t, j_t, \mu_s = i_t, j_t$  ( $s, t = 1, 2, \dots, k$ ), определим таким образом:  $\sigma_1$  лучше  $\sigma_2$ , если

$$\pi(\tau_k(\sigma_1)) \leq \pi(\tau'_k(\sigma_2)), \quad (10)$$

где  $\pi(\tau_k(\sigma_2)) = \sum_{(i_k, j_k)} \pi_{i_k j_k}(\tau_{k-1})$ .

Используя лемму и следствия 1, 2, а также вид  $\tau_0$ , определим на  $k-1$ -шаге множество «перспективных» последовательностей

$$\Pi_{k-1} = \{\sigma = [a_{i_1 j_1}, a_{i_2 j_2}, \dots, a_{i_{k-1} j_{k-1}}]\}.$$

Затем тем же способом построим множество

$$\Pi_k = \{\sigma = [a_{i_1 j_1}, a_{i_2 j_2}, \dots, a_{i_{k-1} j_{k-1}}, a_{i_k j_k}]\}.$$

Сгруппируем последовательности из  $\Pi_k$  с одинаковыми значениями

$$\pi_{i_k j_k}(\tau_{k-1}) = (c_{i_k} - c_{j_k})(b_{\tau_{k-1}(i_k)} - b_{\tau_{k-1}(j_k)}).$$

Согласно правилу доминирования (10), в каждой группе выделим по одной, доминирующей над другими, последовательности. Оставшееся множество и составит множество перспективных последовательностей  $\bar{\Pi}_k$ . Из множества  $\bar{\Pi}_{p-1}$  остается выбрать последовательность

$$\sigma_0 = [a_{i_1 j_1}, a_{i_2 j_2}, \dots, a_{i_{p-1} j_{p-1}}],$$

такую, что

$$\pi(\tau_{p-1}(\sigma_0)) \leq \pi(\tau_{p-1}(\sigma)).$$

Тогда

$$t_0 = \tau_0 a_{i_1 j_1} a_{i_2 j_2} \dots a_{i_{p-1} j_{p-1}}.$$

Проиллюстрируем эту схему в случае  $\tau_0 = e$ . Пусть  $\tau_0 = e$ . Известно [2], что в этом случае подстановка  $t_0$ , доставляющая минимум значению линейной формы  $f$  на множестве всех  $n$ -членных циклов из  $S_n$ , имеется среди множества  $2^{n-2}$  циклов вида

$$(1, v_2, v_3, \dots, v_n),$$

элементы которых удовлетворяют условиям

$$1 < v_2 < v_3 < \dots < v_k = n > \dots > v_{n-1} > v_n.$$

В силу леммы и следствия 2 это множество описывается последовательностями «транспозиций», соответствующими ветвям граф-схемы (рис. 1). «Транспозициям», входящим в эти последовательности, соответствуют следующие значения  $\pi_{i_k j_k}(\tau_{k-1})$ :

$$\begin{aligned}\pi_{12}(1, 2), \pi_{k-1, k}(i, k), \pi_{i, k}(k-1, k), k=3, 4, \dots, n, \\ i=1, 2, \dots, k-2.\end{aligned}$$

Очевидно, что число их равно  $(n-2)(n-1)+1$  и они могут быть вычислены по формуле (6).

В качестве множества «перспективных» последовательностей  $\Pi_{k-1}$  возьмем последовательности, соответствующие ветвям граф-схемы (рис. 2). Заметим, что в случае  $\tau_0=e, k-1 \geq 4$ , так как при  $k-1=4$  все  $\pi_{ij}$ , соответствующие «транспозициям»  $a_{14}, a_{24}, a_{34}$ , различны. Затем построим множество  $\Pi_k$  и сгруппируем последовательности с одинаковыми значениями  $\pi_{k-i,k}(\tau_{k-1}), i=1, 2, \dots, k-1$ . Согласно правилу доминирования (10), в каждой группе

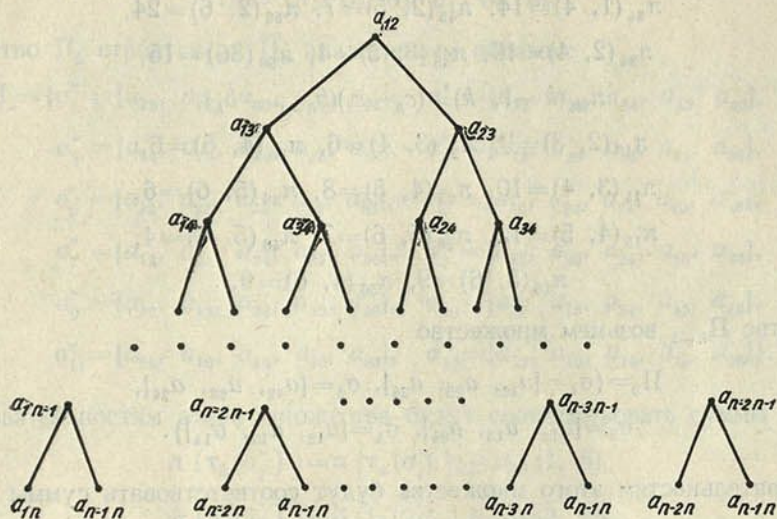


Рис. 1. Граф-схема, соответствующая множеству  $n$ -членных циклов вида  $(1, v_2, \dots, v_n)$

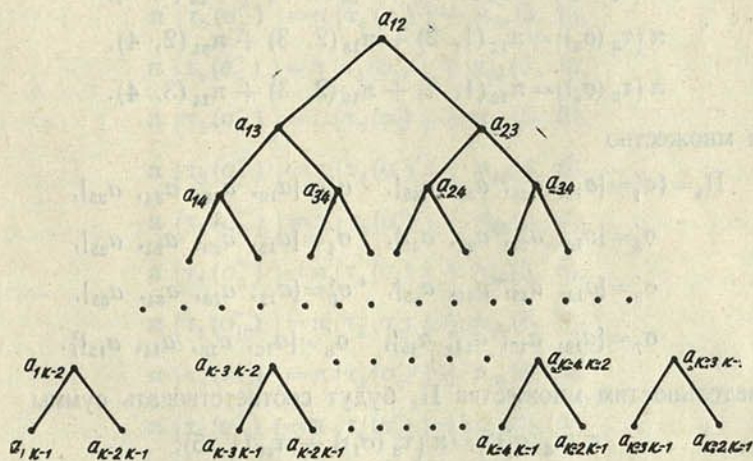


Рис. 2. Граф-схема, соответствующая множеству подстановок, порожденных перспективными последовательностями  $\Pi_{k-1}$

выделим по одной, доминирующей над другими, последовательности. Оставшееся множество и составит множество перспективных последовательностей  $\bar{\Pi}_k$ . Из множества  $\bar{\Pi}_{n-1}$  остается выбрать последовательность  $\sigma_0$ , доминирующую над остальными последовательностями из  $\bar{\Pi}_{n-1}$ . Произведение «транспозиций» последовательности  $\sigma_0$  и дает искомым  $n$ -членным цикл.

Пример. Пусть  $c=(1, 3, 4, 6, 7, 10)$ ,  $b=(12, 10, 7, 5, 3, 2)$ . Тогда  $\tau_0=c$ . Определим  $\pi_{k-1k}(i, k)$ ,  $\pi_{ik}(k-1, k)$ ,  $k=3, 4, \dots, 6$ ,  $i=1, 2, \dots, k-2$  и  $\pi_{12}(1, 2)$ .

$$\pi_{12}(1, 2)=(c_2-c_1)(b_1-b_2)=4,$$

$$\pi_{k-1k}(i, k)=(c_k-c_{k-1})(b_i-b_k),$$

$$\pi_{23}(1, 3)=5, \pi_{45}(1, 5)=9, \pi_{56}(1, 6)=30,$$

$$\pi_{34}(1, 4)=14, \pi_{45}(2, 5)=7, \pi_{56}(2, 6)=24,$$

$$\pi_{34}(2, 4)=10, \pi_{45}(3, 5)=4, \pi_{56}(3, 6)=15,$$

$$\pi_{ik}(k-1, k)=(c_k-c_i)(b_{k-1}-b_k),$$

$$\pi_{13}(2, 3)=9, \pi_{24}(3, 4)=6, \pi_{35}(4, 5)=6,$$

$$\pi_{14}(3, 4)=10, \pi_{25}(4, 5)=8, \pi_{36}(5, 6)=6,$$

$$\pi_{15}(4, 5)=12, \pi_{26}(5, 6)=7, \pi_{46}(5, 6)=4,$$

$$\pi_{16}(5, 6)=9, \pi_{56}(4, 6)=9.$$

В качестве  $\Pi_{k-1}$  возьмем множество

$$\Pi_3=\{\sigma_1=[a_{12}, a_{23}, a_{34}], \sigma_2=[a_{12}, a_{23}, a_{24}],$$

$$\sigma_3=[a_{12}, a_{13}, a_{34}], \sigma_4=[a_{12}, a_{13}, a_{14}]\}.$$

Последовательностям этого множества будут соответствовать суммы

$$\pi(\tau_3(\sigma_1))=\pi_{12}(1, 2)+\pi_{23}(1, 3)+\pi_{34}(1, 4),$$

$$\pi(\tau_3(\sigma_2))=\pi_{12}(1, 2)+\pi_{23}(1, 3)+\pi_{24}(3, 4),$$

$$\pi(\tau_3(\sigma_3))=\pi_{12}(1, 2)+\pi_{13}(2, 3)+\pi_{34}(2, 4),$$

$$\pi(\tau_3(\sigma_4))=\pi_{12}(1, 2)+\pi_{13}(2, 3)+\pi_{14}(3, 4).$$

Построим множество

$$\Pi_4=\{\sigma'_1=[a_{12}, a_{23}, a_{34}, a_{45}], \sigma'_2=[a_{12}, a_{23}, a_{34}, a_{35}],$$

$$\sigma'_3=[a_{12}, a_{23}, a_{24}, a_{45}], \sigma'_4=[a_{12}, a_{23}, a_{24}, a_{25}],$$

$$\sigma'_5=[a_{12}, a_{13}, a_{34}, a_{45}], \sigma'_6=[a_{12}, a_{13}, a_{34}, a_{35}],$$

$$\sigma'_7=[a_{12}, a_{13}, a_{14}, a_{45}], \sigma'_8=[a_{12}, a_{13}, a_{14}, a_{15}]\}.$$

Последовательностям множества  $\Pi_4$  будут соответствовать суммы

$$\pi(\tau_4(\sigma'_1))=\pi(\tau_3(\sigma_1))+\pi_{45}(1, 5),$$

$$\pi(\tau_4(\sigma'_2))=\pi(\tau_3(\sigma_1))+\pi_{35}(4, 5),$$

$$\pi(\tau_4(\sigma'_3))=\pi(\tau_3(\sigma_2))+\pi_{45}(3, 5),$$

$$\pi(\tau_4(\sigma'_4))=\pi(\tau_3(\sigma_2))+\pi_{25}(4, 5),$$

$$\pi(\tau_4(\sigma'_5))=\pi(\tau_3(\sigma_3))+\pi_{45}(2, 5),$$

$$\pi(\tau_4(\sigma'_6))=\pi(\tau_3(\sigma_3))+\pi_{35}(4, 5),$$

$$\pi(\tau_4(\sigma'_7)) = \pi(\tau_3(\sigma_4)) + \pi_{45}(3, 5),$$

$$\pi(\tau_4(\sigma'_8)) = \pi(\tau_3(\sigma_4)) + \pi_{15}(4, 5).$$

Сгруппировав суммы с одинаковыми значениями  $\pi_{15}$ ,  $\pi_{25}$ ,  $\pi_{35}$ ,  $\pi_{45}$  и выбрав в каждой группе последовательность, доминирующую над другими, получим множество последовательностей

$$\bar{\Pi}_4 = \{\sigma'_1, \sigma'_2, \sigma'_3, \sigma'_4, \sigma'_5, \sigma'_6\}.$$

Множество  $\Pi_5$  строится из  $\bar{\Pi}_4$  аналогичным образом:

$$\begin{aligned} \Pi_5 = \{ & \sigma''_1 = [a_{12}, a_{23}, a_{34}, a_{45}, a_{56}], \quad \sigma''_2 = [a_{12}, a_{23}, a_{34}, a_{45}, a_{46}], \\ & \sigma''_3 = [a_{12}, a_{23}, a_{34}, a_{35}, a_{56}], \quad \sigma''_4 = [a_{12}, a_{23}, a_{34}, a_{35}, a_{36}], \\ & \sigma''_5 = [a_{12}, a_{23}, a_{24}, a_{45}, a_{56}], \quad \sigma''_6 = [a_{12}, a_{23}, a_{24}, a_{45}, a_{46}], \\ & \sigma''_7 = [a_{12}, a_{23}, a_{24}, a_{25}, a_{56}], \quad \sigma''_8 = [a_{12}, a_{23}, a_{24}, a_{25}, a_{26}], \\ & \sigma''_9 = [a_{12}, a_{13}, a_{34}, a_{45}, a_{56}], \quad \sigma''_{10} = [a_{12}, a_{13}, a_{34}, a_{45}, a_{46}], \\ & \sigma''_{11} = [a_{12}, a_{13}, a_{14}, a_{15}, a_{56}], \quad \sigma''_{12} = [a_{12}, a_{13}, a_{14}, a_{15}, a_{16}]\}. \end{aligned}$$

Последовательностям этого множества будут соответствовать суммы

$$\pi(\tau_5(\sigma''_1)) = \pi(\tau_4(\sigma'_1)) + \pi_{56}(1, 6),$$

$$\pi(\tau_5(\sigma''_2)) = \pi(\tau_4(\sigma'_1)) + \pi_{46}(5, 6),$$

$$\pi(\tau_5(\sigma''_3)) = \pi(\tau_4(\sigma'_2)) + \pi_{56}(4, 6),$$

$$\pi(\tau_5(\sigma''_4)) = \pi(\tau_4(\sigma'_2)) + \pi_{36}(5, 6),$$

$$\pi(\tau_5(\sigma''_5)) = \pi(\tau_4(\sigma'_3)) + \pi_{56}(3, 6),$$

$$\pi(\tau_5(\sigma''_6)) = \pi(\tau_4(\sigma'_3)) + \pi_{46}(5, 6),$$

$$\pi(\tau_5(\sigma''_7)) = \pi(\tau_4(\sigma'_4)) + \pi_{56}(4, 6),$$

$$\pi(\tau_5(\sigma''_8)) = \pi(\tau_4(\sigma'_4)) + \pi_{26}(5, 6),$$

$$\pi(\tau_5(\sigma''_9)) = \pi(\tau_4(\sigma'_5)) + \pi_{56}(2, 6),$$

$$\pi(\tau_5(\sigma''_{10})) = \pi(\tau_4(\sigma'_5)) + \pi_{46}(5, 6),$$

$$\pi(\tau_5(\sigma''_{11})) = \pi(\tau_4(\sigma'_6)) + \pi_{56}(4, 6),$$

$$\pi(\tau_5(\sigma''_{12})) = \pi(\tau_4(\sigma'_6)) + \pi_{16}(5, 6).$$

Сгруппировав суммы с одинаковыми значениями  $\pi_{16}$ ,  $\pi_{26}$ ,  $\pi_{36}$ ,  $\pi_{46}$ ,  $\pi_{56}$  и выбрав в каждой из групп последовательность, доминирующую над другими, получим множество

$$\bar{\Pi}_5 = \{\sigma''_1, \sigma''_3, \sigma''_4, \sigma''_5, \sigma''_6, \sigma''_8, \sigma''_9, \sigma''_{12}\}.$$

Определим величины

$$\pi(\tau_5(\sigma''_1)) = \pi(\tau_4(\sigma'_1)) + \pi_{56}(1, 6) = 62,$$

$$\pi(\tau_5(\sigma''_3)) = \pi(\tau_4(\sigma'_2)) + \pi_{46}(5, 6) = 28,$$

$$\pi(\tau_5(\sigma_4'')) = \pi(\tau_4(\sigma_2')) + \pi_{56}(4, 6) = 35,$$

$$\pi(\tau_5(\sigma_5'')) = \pi(\tau_4(\sigma_3')) + \pi_{56}(3, 6) = 34,$$

$$\pi(\tau_5(\sigma_6'')) = \pi(\tau_4(\sigma_3')) + \pi_{46}(5, 6) = 23,$$

$$\pi(\tau_5(\sigma_8'')) = \pi(\tau_4(\sigma_4')) + \pi_{26}(5, 6) = 30,$$

$$\pi(\tau_5(\sigma_9'')) = \pi(\tau_4(\sigma_5')) + \pi_{56}(2, 6) = 54,$$

$$\pi(\tau_5(\sigma_{12}'')) = \pi(\tau_4(\sigma_6')) + \pi_{16}(5, 6) = 44.$$

Отсюда вытекает, что последовательность  $\sigma_6''$  — доминирующая над остальными из  $\bar{\Pi}_5$ , а  $t_0 = a_{12}a_{23}a_{24}a_{45}a_{56} = (1, 2, 4, 6, 5, 3)$ ,  $f_\pi(t_0) = 164$ .

### Литература

1. Супруненко Д. А. Кибернетика, К, № 2, 1968.
2. Айзенштат В. С., Кравчук Д. Н. Кибернетика, К, № 2, 1968.
3. Айзенштат В. С., Кравчук Д. Н. Кибернетика, К, № 6, 1968.
4. Кунцевич И. М. Весті АН БССР, №№ 1, 2, 3, 1968.
5. Кунцевич И. М., ДАН БССР, т. XII, № 8, 1968.
6. Gilmore P. S., Gomory R. E. Oper. Res., № 5, 655, 1964.
7. Kruskal J. B. J. Soc. Indust. and Appl. Math., 5, 32, 1957.

Институт математики  
АН БССР

Поступило в редакцию  
20.VI 1969

И. ШОКАМОЛОВ

### ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫЕ КВАДРАТУРНЫЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ ИНТЕГРАЛОВ ТИПА КОШИ И ИХ ГЛАВНЫХ ЗНАЧЕНИЙ

При решении задач механики сплошной среды часто приходится иметь дело с вычислением интегралов

$$\Psi(z) = \Psi(f|z) = -\frac{\sqrt{z^2-1}}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{f(t) dt}{t-z\sqrt{1-t^2}}, \quad z \in [-1, 1], \quad (0.1)$$

$$I(x) = I(f|x) = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{f(t) dt}{t-x\sqrt{1-t^2}}, \quad x \in [-1, 1]. \quad (0.2)$$

Первый из них является интегралом типа Коши, у которого линия интегрирования есть отрезок  $[-1, 1]$  действительной оси, умноженный на  $\sqrt{z^2-1}$ , причем для корня берется ветвь, аналитическая в плоскости с разрезом вдоль отрезка  $[-1, 1]$  оси  $x$  и такая, что  $\sqrt{z^2-1} = z + 0\left(\frac{1}{z}\right)$ . Вторым является сингулярный интеграл, понимаемый в смысле главного значения по Коши, который далее будет называться главным значением интеграла (0.1). Обозначением  $\Psi(f|z)$  или  $I(f|x)$  подчеркивается, что данные интегралы являются операторами от  $f(x)$  и функциями точек  $z$  и  $x$ . В настоящее время имеется несколько приближенных формул для вычисления интегралов (0.1), (0.2) [1-4].

В работах [5, 6] рассмотрен вопрос об общих методах оценки погрешности и способах построения приближенных формул для интегралов типа Коши и их главных значений более общего вида, чем (0.1), (0.2), которые имеют некоторую аналогию с квадратурными формулами для обычных римановых интегралов, а именно — приближенное значение интеграла представляется в форме линейной комбинации конечного числа произведений заданных функций на заданные линейные функционалы. Частным случаем приближенных формул, рассмотренных в работе [6], являются интерполяционные квадратурные формулы, полученные путем замены плотности интеграла типа Коши некоторым интерполяционным полиномом.

В данной работе рассматриваются интерполяционные квадратурные формулы для интегралов (0.1), (0.2), построенные при помощи интерполяционного полинома Лагранжа. Даются методы вычисления коэффициентов рассматриваемых формул и указываются различные способы оценки их остаточных членов.

1. Построение интерполяционных квадратурных формул. Методы вычисления коэффициентов. Зададимся системой точек  $x_0, x_1, \dots, x_{n-1}$  отрезка  $[-1, 1]$ , причем  $x_0 \leq x_1 \leq \dots \leq x_{n-1}$ , и

построим интерполяционный полином Лагранжа  $L^n(f|x)$ , совпадающий с плотностью  $f(x)$  интегралов (0.1) и (0.2) в этих точках. Тогда будем иметь для  $f(x)$  приближенную формулу

$$f(x) \approx L_n(f|x) \equiv \sum_{k=0}^{n-1} B_k^n(x) f(x_k), \quad (1.1)$$

где

$$B_k^n(x) = \frac{\omega_n(x)}{(x-x_k)\omega_n'(x_k)}, \quad \omega_n(x) = \prod_{m=0}^{n-1} (x-x_m). \quad (1.2)$$

Заменим в интегралах (0.1), (0.2)  $f(x)$  интерполяционным полиномом согласно (1.1). В результате получим приближенные формулы

$$\Psi(z) \approx \mathcal{Q}^n(f|z) \equiv \sum_{k=0}^{n-1} \mathfrak{A}_k^n(z) f(x_k), \quad (1.3)$$

$$I(x) \approx L^n(f|x) \equiv \sum_{k=0}^{n-1} A_k^n(x) f(x_k), \quad (1.4)$$

которые, следуя терминологии, принятой в [5, 6], будем называть интерполяционными квадратурными формулами, а  $\mathfrak{A}_k^n(z)$ ,  $A_k^n(x)$  — их коэффициентами. Последние имеют вид

$$\mathfrak{A}_k^n(z) = \Psi(B_k^n|z), \quad A_k^n(x) = I(B_k^n|x). \quad (1.5)$$

Операторы

$$E_\Psi^n(f|z) = \Psi(z) - \mathcal{Q}^n(f|z), \quad (1.6)$$

$$E_I^n(f|x) = I(x) - L^n(f|x) \quad (1.7)$$

будем называть остаточными членами квадратурных формул [(1.3) и (1.4), а оператор

$$E^n(f|x) = f(x) - L_n(f|x) \quad (1.8)$$

— остаточным членом приближенной формулы (1.1). Очевидно, операторы (1.6), (1.7) и (1.8) представляют собой погрешности квадратурных формул (1.3), (1.4) и приближенной формулы (1.1) в точках  $z$  и  $x$ . При исследовании интерполяционных квадратурных формул для обычных римановых интегралов основное внимание уделяется оценке остаточного члена в различных классах, т. к. коэффициенты их вычисляются просто. Коэффициенты же квадратурных формул (1.3), (1.4) при большом количестве точек имеют довольно сложный вид. Поэтому, прежде чем переходить к оценке остаточных членов квадратурных формул (1.3), (1.4), рассмотрим два метода вычисления коэффициентов этих формул.

Первый метод основывается на известных точных формулах (см., например, [7])

$$\Psi(T_m|z) = \zeta^m(z), \quad \zeta(z) = z - \sqrt{z^2 - 1}, \quad (1.9)$$

$$I(T_m|x) = U_m(x), \quad U_m(x) = \sin m \arccos x, \quad (1.10)$$

где  $T_m(x)$  — полиномы Чебышева первого рода, и состоит в том, что  $B_k^n(x)$  записывается в виде

$$B_k^n(x) = \sum_{m=1}^{n-1} c_m^{nk} T_m(x) + \frac{1}{2} c_0^{nk}$$

и подставляется в равенство (1.5), в результате чего для коэффициентов  $\mathfrak{A}_k^n(z)$  и  $A_k^n(x)$  получаются простые выражения

$$\mathfrak{A}_k^n(z) = \sum_{m=1}^{n-1} c_m^{nk} \zeta^m(z) + c_0^{nk},$$

$$A_k^n(x) = \sum_{m=1}^{n-1} c_m^{nk} U_m(x).$$

Этот метод вычисления коэффициентов удобен тем, что для постоянных  $c_m^{nk}$  в силу ортогональности полиномов  $T_m(x)$  с плотностью  $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$  имеют место соотношения

$$c_m^{nk} = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 T_m(x) B_k^n(x) \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \quad (m = 0, 1, \dots, n-1). \quad (1.11)$$

При помощи этих соотношений для заданной системы точек  $x_0, x_1, \dots, x_{n-1}$  можно составить таблицу для определения  $c_m^{nk}$ , а затем стандартную программу для вычисления коэффициентов  $\mathfrak{A}_k^n(z)$  и  $A_k^n(x)$  в любой точке  $z$  и  $x$ .

В основе второго метода лежат формулы для точного вычисления интегралов (0.1), (0.2), полученные в работе [7]. Введем функцию

$$F_k^n(\zeta) = \frac{2\zeta}{(\zeta^2 + 1 - 2\zeta x_k) \omega_n'(x_k)} \omega_n \left( \frac{\zeta^2 + 1}{2\zeta} \right). \quad (1.12)$$

Эта функция, как легко видеть, является мероморфной в круге  $|\zeta| \leq 1$ , имеет единственный полюс  $(n-1)$ -го порядка в точке  $\zeta = 0$ , и ее мнимая часть равна нулю на действительной оси. Согласно терминологии, принятой в работе [7], она является изображающей мероморфной функцией в круге  $|\zeta| \leq 1$  для интегралов (1.5). Учитывая это, воспользуемся указанными формулами работы [7]. В результате получим следующие формулы для интегралов (1.5):

$$\begin{aligned} \mathfrak{A}_k^n(z) &= F_k^n[\zeta(z)] - R[\zeta(z)] + R[\zeta^{-1}(z)], \quad z \in [-1, 1], \\ A_k^n(x) &= -\operatorname{Im} F_k^n[\zeta(x)] + 2\operatorname{Im} R[\zeta(x)], \quad x \in [-1, 1], \end{aligned} \quad (1.13)$$

где  $R(\zeta)$  — главная часть разложения  $F_k^n(\zeta)$  в окрестности точки  $\zeta = 0$ , а  $\zeta(z)$  — функция, входящая в (1.9).

Таким образом, второй метод состоит в том, что строится функция (1.12) и ищется ее главная часть в окрестности точки  $\zeta = 0$ , после чего коэффициенты (1.5) находятся по формулам (1.13).

2. Оценка погрешности интерполяционных квадратурных формул в классе  $W^r(M)$ . Введем, следуя С. М. Никольскому [8—10], класс функций  $f(x)$ , заданных на отрезке  $[-1, 1]$ , непрерывных и имеющих непрерывные производные до  $(r-1)$ -го порядка включительно и кусочно-непрерывную производную  $r$ -го порядка и удовлетворяющую неравенству

$$|f^{(r)}(x)| \leq M,$$

и обозначим этот класс через  $W^r(M)$ . В этом классе, используя результаты работы [6], можно найти оценку сверху для остаточного члена квадратурной формулы (1.3), равномерную по  $z$ , и точную оценку для остаточного

члена квадратурной формулы (1.4), если только известны наибольшие значения функций

$$\alpha_r(x) = \int_{-1}^1 |\alpha_r(x, t)| dt, \quad \beta_r(x) = \int_{-1}^1 |\beta_r(x, t)| dt, \quad (2.1)$$

где

$$\alpha_r(x, t) = \frac{1}{(r-1)!} \left[ I_r(x, t) - \sum_{k=0}^{n-1} A_k^n(x) K_r(x_k - t) \right],$$

$$\beta_r(x, t) = \frac{1}{(r-1)!} \left[ K_r(x-t) - \sum_{k=0}^{n-1} B_k^n(x) K_r(x_k - t) \right], \quad (2.2)$$

$$K_r(u) = u^{r-1} \text{ при } u \geq 0, \quad K_r(u) = 0 \text{ при } u < 0,$$

$$I_r(x, t) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{K_r(\tau-t)}{\tau-x} \frac{d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}}.$$

**Теорема 1.** Пусть  $f(x) \in W^r(M)$  и  $r \leq n$ . Тогда для остаточных членов квадратурных формул (1.3), (1.4) имеют место неравенства

$$|E_{\Psi}^n(f|z)| \leq \sqrt{\alpha_r^2 + \beta_r^2} M, \quad z \in \bar{D}, \quad (2.3)$$

$$|E_I^n(f|x)| \leq \alpha_r M, \quad (2.4)$$

где

$$\alpha_r = \max_{-1 < x < 1} \alpha_r(x), \quad \beta_r = \max_{-1 < x < 1} \beta_r(x),$$

$\bar{D}$  — верхняя или нижняя полуплоскости вместе с действительной осью. При этом неравенство (2.4) является точным в классе  $W^r(M)$ .

**Доказательство.** Квадратурные формулы (1.3), (1.4) принадлежат к группе интерполяционных алгебраических квадратурных формул класса  $W_\rho^r(M)$ , более общего, чем  $W^r(M)$ , рассмотренных в работе [6], и, кроме того, остаточный член квадратурной формулы (1.3), как легко видеть, удовлетворяет условию  $\text{Im } E_{\Psi}^n(f|x) = 0$ ,  $1 < |x| < \infty$ , откуда следует, что для квадратурных формул (1.3), (1.4) выполнены все условия теорем 1 и 2 работы [5]. Применяя указанные теоремы, получим оценку сверху (2.3) для  $|E_{\Psi}^n(f|z)|$  и оценку (2.4) для  $|E_I^n(f|x)|$ , точную в классе  $W^r(M)$  в том смысле, что существует функция  $f_0(x) \in W^r(M)$ , для которой

$$|E_I^n(f_0|x)| = \alpha_r M.$$

Вычисление величин  $\alpha_r, \beta_r$  в общем случае представляет большие трудности, связанные, в основном, с определением нулей функций (2.2). Поэтому определение погрешности каждой конкретной квадратурной формулы (1.3), (1.4) требует трудоемкой вычислительной работы. Однако это компенсируется тем, что мы получаем оценки в достаточно широком для приложений классе  $W^r(M)$ , справедливые для любой функции этого класса, что имеет большое значение для приближенных методов решений различных краевых задач и соответствующих им сингулярных уравнений, в которые входят интегралы вида (0.2).

3. Оценки погрешности интерполяционных квадратурных формул для функций класса  $C^n$ . Предположим, что плотность  $f(x)$  интегралов (0.1), (0.2) является  $n$  раз непрерывно дифференцируемой функцией и воспользуемся известным представлением остаточ-

ного члена интерполяционной формулы (1.1) в форме Коши [11]. Тогда, вводя функцию

$$f(x, x_0, x_1, \dots, x_{n-1}) = \int_0^1 dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \dots \int_0^{t_{n-1}} f^{(n)}((1-t_1)x + \theta) dt_n, \quad (3.1)$$

где

$$\theta(x) = t_1 x_0 + \sum_{v=0}^{n-1} t_{v+1}(x_v - x_{v-1}), \quad x_{-1} = x,$$

будем иметь

$$E^n(f|x) = \omega_n(x) f(x, x_0, x_1, \dots, x_{n-1}). \quad (3.2)$$

Используя представление остаточного члена приближенной формулы (1.1) в виде (3.2), можно получить два представления для остаточного члена квадратурной формулы (1.4). При выводе первого на них воспользуемся известным тождеством

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{t-x} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} \equiv 0$$

и запишем  $E_I^n(f|x)$ , для которого, очевидно, имеет место равенство

$$E_I^n(f|x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\omega_n(t) f(t, x_0, x_1, \dots, x_{n-1})}{t-x} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}, \quad (3.3)$$

в виде

$$E_I^n(f|x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\omega_n(t) f(t, x_0, x_1, \dots, x_{n-1}) - \omega_n(x) f(x, x_0, x_1, \dots, x_{n-1})}{t-x} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}},$$

а затем в числителе дроби, стоящей под знаком последнего интеграла, добавим и вычтем  $\omega_n(x) f(t, x_0, x_1, \dots, x_{n-1})$  и воспользуемся интегральным представлением

$$\frac{f^{(n)}((1-t_1)t + \theta) - f^{(n)}((1-t_1)x + \theta)}{t-x} = \int_0^1 (1-t_1) f^{(n+1)} [x(1-t_1) + \tau(1-t_1)(t-x)] d\tau.$$

В результате получим

$$E_I^n(f|x) = \int_{-1}^1 \gamma_n(x, t) f(t, x_0, x_1, \dots, x_{n-1}) dt + \frac{1}{\pi} \omega_n(x) \sqrt{1-x^2} \int_{-1}^1 f_1(t, x, x_0, \dots, x_{n-1}) \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}, \quad (3.4)$$

где

$$\gamma_n(x, t) = \frac{1}{\pi} \frac{\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-t^2}} \frac{\omega_n(t) - \omega_n(x)}{t-x},$$

$$f_1(t, x, x_0, x_1, \dots, x_{n-1}) =$$

$$= \int_0^1 (1-t_1) dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \dots \int_0^{t_{n-1}} f^{(n+1)} [x(1-t_1) + \tau(1-t_1)(t-x)] d\tau dt_n.$$

Для того чтобы получить второе представление, введем функции

$$\delta_n(x, t) = -\omega_n(x)H(x, t) + \delta_n^*(x, t),$$

$$\delta_n^*(x, t) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{\pi} \int_{-1}^t \frac{\omega_n(\tau) - \omega_n(x)}{\tau - x} \frac{d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}},$$

$$H(x, t) = \frac{1}{\pi} \ln \frac{1 - xt + \sqrt{(1-x^2)(1-t^2)}}{|t-x|}$$

и, замечая, что

$$\frac{\partial \delta_n}{\partial t} = \sqrt{1-x^2} \omega_n(t) / \pi (t-x) \sqrt{1-t^2}, \quad t \neq x, \quad -1 < x < 1,$$

применим к интегралу, стоящему в правой части равенства (3.3), формулу интегрирования по частям. После преобразования будем иметь

$$E_l^n(f|x) = f(1, x_0, x_1, \dots, x_{n-1}) \delta_n^*(x, 1) - \int_{-1}^1 f_1^*(t, x_0, x_1, \dots, x_{n-1}) \delta_n(x, t) dt, \quad (3.5)$$

где

$$f_1^*(x, x_0, x_1, \dots, x_{n-1}) = \int_0^1 (1-t_1) dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \dots \int_0^{t_{n-1}} f^{(n+1)}((1-t_1)x + \theta) dt_n.$$

Представления (3.4), (3.5) могут быть использованы для получения различных оценок погрешности интерполяционных квадратурных формул. В частности, если  $f(x) \in C^{n+1}$  и

$$M_n = \max_{-1 < x < 1} |f^{(n)}(x)|, \quad M_{n+1} = \max_{-1 < x < 1} |f^{(n+1)}(x)|, \quad (3.6)$$

то из представлений (3.4), (3.5) вытекают оценки

$$|E_l^n(f|x)| \leq \frac{1}{n!} \gamma_n(x) M_n + \frac{1}{(n+1)!} \gamma_n^*(x) M_{n+1} \quad (3.7)$$

и

$$|E_l^n(f|x)| \leq \frac{1}{n!} \delta_n(x) M_n + \frac{1}{(n+1)!} \delta_n^*(x) M_{n+1}, \quad (3.8)$$

где функции  $\gamma_n(x)$ ,  $\gamma_n^*(x)$ ,  $\delta_n(x)$  и  $\delta_n^*(x)$  определяются равенствами

$$\gamma_n(x) = \int_{-1}^1 |\gamma_n(x, t)| dt, \quad \gamma_n^*(x) = \sqrt{1-x^2} |\omega_n(x)|,$$

$$\delta_n(x) = |\delta_n^*(x, 1)| = \frac{\sqrt{1-x^2}}{\pi} \left| \int_{-1}^1 \frac{\omega_n(t) - \omega_n(x)}{t-x} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} \right|,$$

$$\delta_n^*(x) = \int_{-1}^1 |\delta_n(x, t)| dt.$$

Действительно, если  $f(x) \in C^{n+1}$ , то, очевидно, имеют место неравенства

$$|f(x, x_0, x_1, \dots, x_{n-1})| \leq \frac{1}{n!} M_n, \quad x \in [-1, 1], \quad (3.9)$$

$$|f_1(x, x_0, x_1, \dots, x_{n-1})| \leq \frac{1}{(n+1)!} M_{n+1}, \quad x \in [-1, 1],$$

$$|f_1^*(x, x_0, x_1, \dots, x_{n-1})| \leq \frac{1}{(n+1)!} M_{n+1}, \quad x \in [-1, 1], \quad (3.10)$$

из которых и следуют оценки (3.7) и (3.8). Эти оценки устанавливают погрешность квадратурной формулы (1.4) в зависимости от точки  $x$ . Если ввести величины

$$\omega_n = \max_{-1 < x < 1} |\omega_n(x)|, \quad \gamma_n = \max_{-1 < x < 1} \gamma_n(x), \quad \gamma_n^* = \max_{-1 < x < 1} \gamma_n^*(x), \\ \delta_n = \max_{-1 < x < 1} \delta_n(x), \quad \delta_n^* = \max_{-1 < x < 1} \delta_n^*(x),$$

то можно получить для погрешности квадратурной формулы (1.4), а также и (1.3) оценки, равномерные по  $x$  и по  $z$ .

**Теорема 2.** Пусть  $f(x) \in C^{n+1}$  и пусть  $M_n, M_{n+1}$  есть числа, определяемые равенствами (3.6). Тогда имеют место оценки

$$|E_{\Psi}^n(f|z)| \leq \frac{1}{n!} \sqrt{\omega_n^2 M_n^2 + \left( \gamma_n M_n + \frac{1}{n+1} \gamma_n^* M_{n+1} \right)^2}, \quad z \in \bar{D}, \quad (3.11)$$

$$|E_I^n(f|x)| \leq \frac{1}{n!} \gamma_n M_n + \frac{1}{(n+1)!} \gamma_n^* M_{n+1}, \quad x \in [-1, 1], \quad (3.12)$$

и

$$|E_{\Psi}^n(f|z)| \leq \frac{1}{n!} \sqrt{\omega_n^2 M_n^2 + \left( \delta_n M_n + \frac{1}{n+1} \delta_n^* M_{n+1} \right)^2}, \quad z \in \bar{D}, \quad (3.13)$$

$$|E_I^n(f|x)| \leq \frac{1}{n!} \delta_n M_n + \frac{1}{(n+1)!} \delta_n^* M_{n+1}, \quad (3.14)$$

где  $\bar{D}$  — верхняя или нижняя полуплоскость вместе с действительной осью.

**Доказательство.** Оценки (3.12) и (3.14) следуют из неравенств (3.7), (3.8) в силу того, что функции  $\gamma_n(x)$ ,  $\gamma_n^*(x)$ ,  $\delta_n(x)$ ,  $\delta_n^*(x)$  непрерывны на отрезке  $[-1, 1]$ . Для того чтобы получить неравенства (3.11), (3.13), обратимся сначала к соотношениям (3.2), (3.6) и неравенству (3.8), из которых видно, что

$$|E^n(f|x)| \leq \frac{1}{n!} |\omega_n(x)| M_n \leq \frac{1}{n!} \omega_n M_n. \quad (3.15)$$

Затем обратимся к неравенству

$$|E_{\Psi}^n(f|z)| \leq \sqrt{(E^n(f|x))^2 + (E_I^n(f|x))^2}, \quad z \in \bar{D}, \quad x \in [-1, 1], \quad (3.16)$$

которое следует из аналогичного неравенства, полученного в процессе доказательства теорем 1 и 2 работы [5] для более общих квадратурных формул, чем (1.3), (1.4). Оценивая правую часть (3.16) при помощи неравенств (3.12), (3.14), (3.15), получим оценки (3.11) и (3.13).

Автор выражает благодарность Г. Н. Пыхтеву за постоянное внимание и руководство при выполнении данной работы.

## Литература

1. Multhopp H. Luftfahrtforschung, XV, № 4, 1938.
2. Каландия А. И. ДАН СССР, 125, № 4, 715, 1959.
3. Пыхтеев Г. Н. ПММ, 23, в. 6, 1074, 1959.
4. Пыхтеев Г. Н. ПММ, 24, в. 6, 1114, 1960.
5. Пыхтеев Г. Н. Вестн АН БССР, сер. физ.-мат. наук, № 5, 1969.
6. Пыхтеев Г. Н. Вестн АН БССР, сер. физ.-мат. наук, № 2, 1970.
7. Пыхтеев Г. Н. Aplikace matematiky, 10, № 4, 351, 1965.
8. Никольский С. М. Успехи матем. наук, т. V, в. 2(36), 165, 1950.
9. Никольский С. М. Известия АН СССР, сер. мат., 16, 181, 1952.
10. Никольский С. М. Квадратурные формулы. М., 1958.
11. Крылов В. И. Приближенное вычисление интегралов. М., 1967.

Институт ядерной энергетики  
АН БССР

Поступило в редакцию  
29.XII 1969

Л. М. БРУТМАН

**ОБ ЭФФЕКТИВНОМ ВЫЧИСЛЕНИИ ОСТАТОЧНОГО ЧЛЕНА  
 КВАДРАТУРНЫХ ФОРМУЛ, ТОЧНЫХ ДЛЯ  
 АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ПОЛИНОМОВ**

Квадратурный процесс, построенный на асимптотических полиномах И. И. Этермана, и некоторые его применения рассматривались в работах [1 — 3]. В [3], в частности, отмечалась связь формул приближенного интегрирования, основанных на аппроксимации подынтегральной функции асимптотическим полиномом с квадратурной схемой Кленшоу — Куртиса [4]. Важной особенностью указанных формул является возможность представления остаточного члена в виде разложения в ряд, обеспечивающий эффективное вычисление интеграла с требуемой точностью. В настоящей статье аналогичные разложения остаточного члена строятся для любых квадратурных формул алгебраической степени точности.

Рассмотрим некоторую квадратурную формулу

$$I[f] = \int_{-1}^1 p(x) f(x) dx \approx I_n[f] = \sum_{k=1}^n A_k^{(n)} f(x_k^{(n)}), \quad (1)$$

точную для алгебраических многочленов степени  $\leq m$ .

В отношении весовой функции  $p(x)$  будем предполагать, что она отлична от тождественного нуля и удовлетворяет условию абсолютной интегрируемости  $\int_{-1}^1 |p(x)| dx < \infty$ . Представим остаточный член формулы (1) в виде

$$R_n[f] = I[f] - I_n[f] = \int_{-1}^1 p(x) [f(x) - Q_m(x)] dx - \sum_{k=1}^n A_k^{(n)} [f(x_k^{(n)}) - Q_m(x_k^{(n)})], \quad (2)$$

где через  $Q_m(x)$  обозначен асимптотический полином степени  $m$ , аппроксимирующий интегрируемую функцию  $f(x)$ .

Будем далее опираться на полученное в [2] представление погрешности аппроксимации функции асимптотическим полиномом

$$f(x) - Q_m(x) = \sum_{r=m}^{\infty} L_r[f] \Psi_{r+1}^{(m)}(x), \quad (3)$$

где функционал  $L_n[f]$ , который мы, следуя И. И. Этерману, будем называть параметром точности, определяется соотношением

$$L_n[f] = \frac{1}{n+1} \left[ \frac{1}{2} f(1) + \sum_{k=1}^n (-1)^{kf} \left( \cos \frac{k\pi}{n+1} \right) + \frac{1}{2} (-1)^{n+1} f(-1) \right], \quad (4)$$

а через  $\Psi_{r+1}^{(m)}(x)$  обозначена конечная сумма

$$\Psi_{r+1}^{(m)}(x) = \sum_{p_j} \mu(2s_j + 1) B_{p_j}^{(m)}(x), \quad (5)$$

распространенная на все делители  $p_j$  целого числа  $r+1$ , удовлетворяющие условиям: а)  $p_j \geq m+1$ ; б)  $r+1 = (2s_j + 1)p_j$ . В правой части равенства (5)  $\mu(d)$  — теоретико-числовая функция Мебиуса, а полином  $B_{p_j}^{(m)}(x)$  имеет вид

$$B_{p_j}^{(m)}(x) = \begin{cases} T_{p_j}(x) & \text{при } p_j = (2\lambda + 1)(m + 1), \\ T_{p_j}(x) - T_{|q|}(x) & \text{при } p_j = 2\lambda(m + 1) + q, \quad 0 \leq |q| \leq m, \end{cases} \quad (6)$$

$$T_n(x) = \cos n \arccos x.$$

Абсолютная и равномерная сходимость бесконечного ряда (3) гарантирована в случае принадлежности  $f(x)$  классу  $L$  функций, коэффициенты Фурье — Чебышева которых удовлетворяют условию  $A_n = O\left(\frac{1}{n^{1+\alpha}}\right)$ ,  $\alpha > 0$ . В дальнейшем будем считать это условие выполненным.

После подстановки выражения (3) в (2) и простых преобразований получим

$$R_n[f] = \sum_{r=m}^{\infty} b_{r+1}^{(m)} L_r[f]. \quad (7)$$

Коэффициенты  $b_{r+1}^{(m)}$  определяются равенством

$$b_{r+1}^{(m)} = R_n[\Psi_{r+1}^{(m)}] = I[\Psi_{r+1}^{(m)}] - I_n[\Psi_{r+1}^{(m)}] \quad (8)$$

и не зависят от вида интегрируемой функции. Они могут быть заранее вычислены для конкретных квадратурных формул. В таблице приведены значения коэффициентов  $b_{r+1}^{(m)}$  для квадратуры Гаусса, соответствующие  $n = 2, 3, 4, 5, 6$  и  $r+1 = 2n, 2n+2, \dots, 2n+18$ . Разложение разности  $I[f] - I_n[f]$  в ряд дает эффективное представление погрешности квадратур и весьма удобно в практических приложениях. Иллюстрируем сказанное примером:

$$\int_{-1}^1 \sqrt{2+x} dx = 2,79743495.$$

Приближенное значение интеграла, вычисленное с помощью формулы Гаусса при  $n=3$ , равно 2,79746286 и, следовательно, ошибка составляет  $R_3 = -0,00002791$ . Оценивая погрешность по формуле (7) и ограничиваясь двумя отличными от нуля членами разложения, получим

$$R_3 \approx -0,00002940 + 0,00000156 = -0,00002784.$$

Расчеты дают характерную картину: удовлетворительная для практических целей точность обеспечивается несколькими членами бесконечного ряда (7), в то время как порядок погрешности хорошо передается первым членом разложения.

Представляет интерес поведение коэффициентов  $b_{r+1}^{(m)}$  для различных формул приближенного интегрирования. Рассмотрим, например, формулу квадратур Гаусса с  $n$  узлами. Как известно [6], остаточный член этой формулы может быть представлен в виде

$$R_n[f] = \frac{2^{2n+1} [n!]^4}{(2n+1)! [(2n)!]^2} f^{(2n)}(\xi), \quad (-1 < \xi < 1). \quad (9)$$

Таблица

Значения коэффициентов  $b_{r+1}^{(2n-1)}$  для квадратурной формулы Гаусса

$r+1$	$b_{r+1}^{(2n-1)}$ при $n$ , равных				
	2	3	4	5	6
4	1,4222 2222				
6	-1,7608 4656	1,4628 5714			
8	-0,4514 9912	-1,6904 1270	1,4860 7710		
10	1,9633 3707	-0,0703 3535	-1,6597 7442	1,5010 8798	
12	-2,3388 1455	-0,5087 0601	-0,0236 6865	-1,6422 1591	1,5115 8510
14	-1,3920 5796	1,9753 2226	-0,0859 8517	-0,0103 0458	-1,6306 7968
16	1,8159 6421	-0,8522 2500	-0,5405 1453	-0,0316 7216	-0,0050 9496
18	1,9205 8460	-1,6590 4717	1,9822 4326	-0,0944 9024	-0,0151 9693
20	-3,3616 6209	-1,3699 6323	-0,8143 5972	-0,5613 0567	-0,0360 7469
22	1,1195 4745	1,7732 1035	-0,1841 6808	1,9865 6157	-0,1000 6999
24		1,6294 9226	-1,5740 2422	-0,7891 8920	-0,5760 8886
26			-1,3880 6068	-0,1766 2527	1,9894 3853
28				-0,0825 3062	-0,7712 3060
30					-0,1711 4820

Примечание. Для нечетных значений  $r+1$  коэффициенты  $b_{r+1}^{(2n-1)} = 0$ .

Поскольку

$$b_{2n}^{(2n-1)} = R_n[\Psi_{2n}^{(2n-1)}] = R_n[T_{2n}], \quad (10)$$

а производная порядка  $2n$  от полинома Чебышева  $T_{2n}(x)$  равна

$$T_{2n}^{(2n)}(x) = 2^{2n-1}(2n)!,$$

получаем

$$b_{2n}^{(2n-1)} = \frac{2^{4n}[n!]^4}{(2n+1)!(2n)!} \sim \frac{\pi}{2}. \quad (11)$$

Далее имеет место рекуррентное соотношение

$$b_{2n+2}^{(2n+1)} = \frac{2^4(n+1)^4}{(2n+2)^2(2n+1)(2n+3)} b_{2n}^{(2n-1)}, \quad (12)$$

из которого следует, что  $b_{2n+2}^{(2n+1)} > b_{2n}^{(2n-1)}$  и, таким образом,

$$b_{2n}^{(2n-1)} < \frac{\pi}{2}. \quad (13)$$

Займемся исследованием коэффициентов  $b_{2n+\tau}^{(2n-1)}$  ( $\tau=1, 2, \dots$ ). Легко видеть, что  $b_{2n+\tau}^{(2n-1)} = 0$ , если  $\tau = 2s - 1$  ( $s=1, 2, \dots$ ). В случае четных значений  $\tau$ , используя выражения (5), (6) и имея в виду, что формула Гаусса точна для многочленов степени  $\leq 2n - 1$ , получаем

$$b_{2n+2s}^{(2n-1)} \leq \frac{8n^2}{4n^2 - 1} \chi(2n + 2s). \quad (14)$$

Через  $\chi(2n + 2s)$  в (14) обозначено число делителей  $p_j$  целого числа  $2n + 2s$ , больших либо равных  $2n$  и допускающих представление  $2n + 2s = (2\lambda_j + 1)p_j$ .

Таким образом, верхняя граница погрешности квадратуры Гаусса может быть оценена с помощью формулы

$$R_n [f] \leq \frac{\pi}{2} L_{2n-1} [f] + \frac{8n^2}{4n^2-1} \sum_{s=1}^{\infty} \chi(2n+2s) L_{2n+2s-1} [f]. \quad (15)$$

Из неравенства (15) путем мажорирования по методу И. И. Этермана теоретико-числовой функции  $\chi(n)$  можно получить следующую, более удобную для применения оценку:

$$R_n [f] \leq \frac{\pi}{2} L_{2n-1} [f] + \frac{8n^2}{4n^2-1} \sum_{s=1}^{\infty} (2n+2s)^{\frac{1,63}{\ln(2n+2s)}} L_{2n+2s-1} [f]. \quad (16)$$

Кроме того, можно показать, используя, например, асимптотическое представление полиномов Лежандра, что (по крайней мере для достаточно больших  $n$ )

$$b_{2n+2}^{(2n-1)} \approx -\frac{\pi}{2}, \quad b_{2n+4}^{(2n-1)} \approx 0, \quad (17)$$

и таким образом величина остаточного члена квадратуры Гаусса (во многих случаях с достаточной для практики степенью точности) может быть определена с помощью приближенной формулы

$$R_n [f] \approx \frac{\pi}{2} \{L_{2n-1} [f] - L_{2n+1} [f]\}. \quad (18)$$

Для некоторых весовых функций удается получить явное аналитическое выражение остаточного члена через параметры  $L_n [f]$ . Так, например, в случае квадратурной формулы Мелера (см. [6], стр. 132) имеет место разложение

$$R_n [f] = \pi \{L_{2n-1} [f] - \sum_{s=0}^{\infty} L_{2s+2n-1} [f]\}. \quad (19)$$

Установим справедливость формулы (19). Доказательству предположим следующую простую лемму.

*Лемма. Для любого натурального  $n$  имеет место равенство*

$$\sum_{\substack{d/n \\ d=2t+1}} \mu(d) = \begin{cases} 1, & \text{если } n=2^{\alpha_1} (\alpha_1=0, 1, 2, \dots), \\ 0 & \text{в остальных случаях,} \end{cases} \quad (20)$$

где суммирование проводится по всем нечетным делителям числа  $n$ .

Положим сначала  $n$  четным и пусть в каноническом разложении числа  $n$  на простые множители  $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$ ,  $p_1 = 2$ . Обозначая произведение  $p_2 p_3 \dots p_k$  через  $m$  и используя определение функции Мебиуса, имеем

$$\sum_{\substack{d/n \\ d=2t+1}} \mu(d) = \sum_{\substack{d/2m \\ d=2t+1}} \mu(d) = \sum_{d/m} \mu(d). \quad (21)$$

Теперь утверждение леммы вытекает из (21), если воспользоваться известным свойством функции  $\mu(d)$  [5]:

$$\sum_{d/m} \mu(d) = \begin{cases} 1, & \text{если } m=1, \\ 0, & \text{если } m \neq 1. \end{cases} \quad (22)$$

В случае нечетного  $n$  требуемое сразу следует из (22).

Перейдем к выводу разложения (19). На основании равенства (5) имеем

$$I[\Psi_{r+1}^{(2n-1)}] = \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \Psi_{r+1}^{(2n-1)}(x) dx = \sum_{p_j} \mu(2s_j+1) d_{p_j}^{(2n-1)}, \quad (23)$$

где через  $d_{p_j}^{(2n-1)}$  обозначен интеграл

$$d_{p_j}^{(2n-1)} = \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} B_{p_j}^{(2n-1)}(x) dx, \quad (24)$$

который, как нетрудно непосредственно проверить, равен

$$d_{p_j}^{(2n-1)} = \begin{cases} -\pi, & \text{если } p_j = \lambda \cdot 4n \ (\lambda = 1, 2, \dots), \\ 0 & \text{в остальных случаях,} \end{cases} \quad (25)$$

и, следовательно, отличными от нуля могут быть лишь  $I[\Psi_{r+1}^{(2n-1)}]$ , для которых  $r+1 = \nu \cdot 4n$  ( $\nu = 1, 2, \dots$ ). Далее из (23) с учетом (25) получаем

$$I[\Psi_{\nu \cdot 4n}^{(2n-1)}] = -\pi \sum_{\substack{d/v \\ d=2l+1}} \mu(d), \quad (26)$$

и применение леммы дает

$$I[\Psi_{r+1}^{(2n-1)}] = \begin{cases} -\pi, & \text{если } r+1 = 2^\alpha \cdot 2n \ (\alpha = 1, 2, \dots), \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \quad (27)$$

Займемся вычислением квадратурной суммы

$$I_n[\Psi_{r+1}^{(2n-1)}] = \frac{\pi}{n} \sum_{k=1}^n \Psi_{r+1}^{(2n-1)}(x_k^{(n)}); \quad x_k^{(n)} = \cos \frac{(2k-1)\pi}{2n}. \quad (28)$$

В соответствии с (5) она может быть представлена в виде

$$I_n[\Psi_{r+1}^{(2n-1)}] = \frac{\pi}{n} \sum_{p_j} \mu(2s_j+1) \sum_{k=1}^n B_{p_j}^{(2n-1)}(x_k^{(n)}). \quad (29)$$

Поскольку

$$\sum_{k=1}^n B_{p_j}^{(2n-1)}(x_k^{(n)}) = \begin{cases} -n & \text{при } p_j = (2\lambda+1) \cdot 2n, \\ 0 & \text{в остальных случаях,} \end{cases} \quad (30)$$

приходим к заключению, что  $I_n[\Psi_{r+1}^{(2n-1)}]$  может быть отличной от нуля лишь для тех значений  $r+1$ , которые нечетнократны  $2n$ . Использование равенства (22) дает

$$I_n[\Psi_{r+1}^{(2n-1)}] = \begin{cases} -\pi & \text{при } r+1 = 2n, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \quad (31)$$

Сопоставление (27) и (31) с формулой (8) приводит окончательно к разложению (19).

Проиллюстрируем эффективность этого разложения на примере интеграла

$$I[|x|] = \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} |x| dx. \quad (32)$$

Для  $f(x) = |x|$  имеем

$$L_{2s-1}[|x|] = \frac{(-1)^{s-1}}{2s} \operatorname{tg} \frac{\pi}{4s}. \quad (33)$$

После подстановки выражения (33) в (19) и мажорирования бесконечного ряда получаем для остаточного члена двустороннее неравенство

$$C_1 L_{2n-1}[|x|] < R_n[|x|] < C_2 L_{2n-1}[|x|], \quad (34)$$

$$C_1 = \pi, \quad C_2 = \begin{cases} 4\pi/3 & \text{при } n \text{ нечетном,} \\ 2\pi/3 & \text{при } n \text{ четном.} \end{cases}$$

Из (34) непосредственно следует, что  $R_n[|x|] = O(1/n^2)$  и этот порядок передается первым членом разложения (19). В то же время оценка остаточного члена формулы Мелера через величину наилучшего приближения (см. [7], стр. 263) для рассматриваемого примера дает

$$R_n[|x|] \leq 2\pi E_{2n-1}[|x|] \sim \frac{1}{n}.$$

Небезынтересно отметить, что, используя методы теории функций комплексного переменного, В. А. Фок в работе [8] получил для остаточного члена формулы квадратур Мелера следующее разложение:

$$R_n[f] = \pi [A_{2n} - A_{4n} + A_{6n} - A_{8n} + \dots]. \quad (35)$$

Здесь через  $A_n$ , как и ранее, мы обозначаем коэффициенты Фурье—Чебышева интегрируемой функции.

Эквивалентность представлений (19) и (35) (по крайней мере в классе  $\mathcal{L}$ ) может быть легко установлена, если учесть соотношения, связывающие параметры точности  $L_n[f]$  с коэффициентами  $A_n$  [2]. Следует, между тем, указать, что с точки зрения приложений представление остаточного члена через величины  $L_n[f]$  более удобно, поскольку их вычисление, требующее лишь выполнения операций сложения дискретных значений ординат интегрируемой функции, значительно проще, чем нахождение коэффициентов Фурье—Чебышева, связанное с применением формул квадратур повышенной точности.

Аналогично проводится исследование других формул приближенного интегрирования, точных для алгебраических многочленов.

В заключение покажем, что изложенный метод оценки погрешности квадратур может быть распространен на случай интегрирования в бесконечном промежутке. С этой целью рассмотрим, например, предложенную в [9] квадратурную формулу

$$\int_0^{\infty} e^{-z} z^s f(z) dz = \sum_{k=1}^n A_k^{(n)} f(z_k^{(n)}) + R_n[f], \quad (36)$$

основанную на использовании рациональной аппроксимации интегрируемой функции  $f(z)$ .

Заметим, что соотношения (3) — (5), дающие возможность оценить погрешность аппроксимации функции асимптотическим полиномом переносятся на случай бесконечного промежутка  $[0, \infty]$  путем подстановки  $x = \frac{2}{1+z} - 1$ . Сохраняя для асимптотического агрегата, приближающего

функцию в бесконечном промежутке  $[0, \infty]$  и параметра точности обозначения статьи [10], можем записать:

$$f(z) - Q_m^*(z) = \sum_{r=m}^{\infty} L_r^*[f] \Psi_{r+1}^{(m)} \left( \frac{2}{1+z} - 1 \right). \quad (37)$$

Далее, поскольку формула (36) точна для любого рационального агрегата вида  $C_0 + C_1(z+1)^{-1} + \dots + C_{2n-1}(z+1)^{-(2n-1)}$ , имеем

$$R_n[f] = \sum_{r=2n-1}^{\infty} b_{r+1}^{(2n-1)} L_r^*[f], \quad (38)$$

где коэффициенты  $b_{r+1}^{(2n-1)}$  не зависят от интегрируемой функции и могут быть заранее вычислены.

Рассмотрим пример, заимствованный нами из [9]:

$$\int_0^{\infty} e^{-z} \frac{dz}{0,5+z} = 0,92291064.$$

Пусть  $n = 4$ . Расчеты по формуле (36), проведенные в работе [9], дали  $I_4 = 0,92290948$  и, следовательно, ошибка интегрирования составляет  $R_4 = 0,00000116$ . С другой стороны, поскольку в рассматриваемом случае формула (36) точна для рациональных агрегатов седьмой степени, разложение (38) приводит к оценке

$$R_4 \approx b_8^{(7)} L_7^* \left[ \frac{1}{0,5+z} \right] + b_9^{(7)} L_8^* \left[ \frac{1}{0,5+z} \right] = 0,00000120.$$

Как мы видим, уже два первых члена разложения дают для остаточного члена не только правильный порядок величины, но и два верных знака.

### Литература

1. Этерман И. И. Изв. вузов. Математика, № 4, 1964.
2. Этерман И. И. Изв. вузов. Математика, № 2, 1966.
3. Брутман Л. М. Уч. зап. Пенз. политехн. ин-та. Матем. и мех., в. 1. Пенза, 1969.
4. Clenshaw C. W., Curtis A. R. Numerische Math., 2, № 4, 1960.
5. Прахар К. Распределение простых чисел. М., 1967.
6. Крылов В. И. Приближенное вычисление интегралов. М., 1967.
7. Бернштейн С. Н. Собр. соч., 1. М., 1952.
8. Фок В. А. Изв. АН СССР, отд. матем. и естеств. наук, сер. 7, № 4, 1932.
9. Крылов В. И., Королев Н. И., Скобля Н. С. ДАН БССР, 3, № 1, 1959.
10. Этерман И. И. Изв. вузов. Математика, № 5, 1968.

Центральное проектно-конструкторское бюро  
Всесоюзного проектно-монтажного объединения  
«Автоматика»

Поступило в редакцию  
24.XI 1969

О. А. ЛИСКОВЕЦ

### РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЛАПЛАСА ОБОБЩЕННЫМ МЕТОДОМ СУММИРОВАНИЯ РЯДОВ

1°. Задача Коши для уравнения Лапласа (классический адамаров пример некорректно поставленной задачи) неоднократно подвергалась исследованию с точки зрения устойчивых методов ее решения. И вследствие своей большой прикладной важности, и как модельная задача она служила для выяснения и демонстрации возможностей того или иного способа решения некорректных задач.

М. М. Лаврентьев ([1], гл. 2) предложил решать эту задачу с помощью функций Карлемана либо общими методами решения уравнений 1-го рода с непрерывным оператором после сведения задачи к соответствующей форме. Л. А. Чудов [2, 3] применяет для решения конечно-разностные методы. В. К. Иванов [4] и И. Н. Домбровская и В. К. Иванов [5] после приведения задачи к уравнению с непрерывным оператором используют метод квазиразностей. Этот же метод в предположении, что точное решение принадлежит пространству  $W_2^3$ , применен автором [6]. При том же допущении ранее была показана [7] возможность решения задачи методом регуляризации А. Н. Тихонова. П. С. Бондаренко и А. В. Рылов [12, 13] для решения той же задачи применяют одностороннее преобразование Лапласа.

В настоящей работе будет рассмотрен способ решения, основанный на обобщенном методе суммирования рядов, относящемся к абелеву типу. Мысль об обобщенном суммировании применительно к некорректным задачам высказана А. Н. Тихоновым [8]. А. Г. Рамм [9] использовал метод абелева типа для решения некорректных уравнений с непрерывным самосопряженным оператором. В отличие от него, мы предусматриваем в методе возможность ограничиться конечным числом слагаемых (ср. [8]), что повышает его реальную эффективность.

В работе показана сходимость метода к точному решению, а если последнее принадлежит некоторому компакту определенного вида, то получена оценка погрешности, из которой легко вывести скорость сходимости.

2°. Будем рассматривать задачу из [6] об отыскании в прямоугольнике  $D \{0 < x < \pi, 0 < y < Y\}$  функции  $u(x, y) \in C(\bar{D})$ , удовлетворяющей уравнению

$$\Delta u(x, y) \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad (x, y) \in D \quad (1)$$

и условиям

$$u(0, y) = u(\pi, y) = \frac{\partial u(x, 0)}{\partial y} \equiv 0, \quad 0 \leq x \leq \pi, \quad 0 \leq y \leq Y, \quad (2)$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq \pi. \quad (3)$$

Предполагается, что решение  $u(x, y) \in L_2(D)$  должно обладать выписанными здесь производными хотя бы в обобщенном смысле. Как известно, сформулированная задача некорректна и имеет не более одного решения. Будем считать условие (3) таким, что задача разрешима.

Для получения точного решения введем функцию Грина  $G(x, t, y)$ , удовлетворяющую по переменным  $(x, y)$  равенствам (1), (2) и условию

$$G(x, t, 0) = \delta(x-t), \quad 0 \leq x, t \leq \pi,$$

где  $\delta(x-t)$  — дельта-функция Дирака. В силу равенства

$$\delta(x-t) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \sin nx \sin nt$$

(см. [10], стр. 36) функцию Грина получаем в виде

$$G(x, t, y) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \sin nx \sin nt \operatorname{ch} ny.$$

Решение  $u(x, y)$  очевидным образом выражается через функцию Грина:

$$u(x, y) = \int_0^{\pi} G(x, t, y) \varphi(t) dt,$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \sin nx \operatorname{ch} ny \sin nt \varphi(t) dt = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx \operatorname{ch} ny, \end{aligned} \quad (4)$$

где  $a_n$  — коэффициенты Фурье функции  $\varphi(x)$ ,

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin nt \varphi(t) dt, \quad n \geq 1.$$

Таким образом, метод функции Грина привел нас к такому же представлению решения в виде ряда, которое было получено в работе [6].

3°. Пусть вместо точной функции  $\varphi(x)$  известна приближенная  $\Phi(x)$  с коэффициентами Фурье  $A_n$ ,  $n \geq 1$ , такая, что

$$\|\Phi - \varphi\|_{L_2(0, \pi)}^2 \equiv \int_0^{\pi} (\Phi(x) - \varphi(x))^2 dx \leq \delta^2,$$

или, что то же самое,

$$\sum_{n=1}^{\infty} (A_n - a_n)^2 \leq \delta^2. \quad (5)$$

По аналогии с рядом (4), решение (формальное) можно в этом случае записать в форме

$$U(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin nx \operatorname{ch} ny, \quad (6)$$

однако ввиду некорректности задачи ряд (6), как правило, расходится и потому не дает решения задачи с начальной функцией  $\Phi(x)$ , а тем более не дает приближения к точному решению  $u(x, y)$ .

Для того чтобы все-таки воспользоваться рядом (6), применим к нему обобщенный метод суммирования типа Абеля. Общей теорией метода [11] мы пользоваться не будем, так как нашей целью, помимо прочего, являются оценки погрешности приближения, и их придется получать независимо от общей теории путем. Укажем лишь, что применяемый метод является регулярным (см. также замечание в конце статьи).

Введем суммирующие множители

$$f_n(h) = \exp(-hn^2Y), \quad h > 0, \quad (7)$$

и покажем, что при надлежащем выборе параметров  $h$  и  $N$  в зависимости от точности  $\delta$  начальной функции отрезок ряда

$$U_N(x, y, h) = \sum_{n=1}^N A_n \sin nx \operatorname{ch} ny f_n(h) \quad (8)$$

сколь угодно точно аппроксимирует решение  $u(x, y)$  в норме  $L_2(D)$ , если  $\delta$  произвольно мало. Наряду с суммой (8) рассмотрим бесконечные ряды

$$u(x, y, h) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx \operatorname{ch} ny f_n(h),$$

$$U(x, y, h) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin nx \operatorname{ch} ny f_n(h)$$

и воспользуемся неравенством

$$\|u - U_N(h)\| \leq \|u - u(h)\| + \|u(h) - U(h)\| + \|U(h) - U_N(h)\|. \quad (9)$$

Здесь  $\| \cdot \|$  будет обозначать  $L_2(D)$ -норму. Каждое слагаемое правой части неравенства (9) оценим отдельно.

4°. Начнем оценку со второго слагаемого. При этом мы существенно используем ортогональность синусов.

$$\begin{aligned} \|u(h) - U(h)\|^2 &= \int_0^{\pi} \int_0^Y \left( \sum_{n=1}^{\infty} (a_n - A_n) \sin nx \operatorname{ch} ny f_n(h) \right)^2 dy dx = \\ &= \frac{\pi}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n - A_n)^2 b_n^2 f_n^2(h), \end{aligned}$$

где

$$b_n^2 = \int_0^Y \operatorname{ch}^2 ny dy = \frac{Y}{2} + \frac{\operatorname{sh} 2nY}{4n}, \quad n \geq 1.$$

Очевидно, что

$$b_n^2 < \frac{1}{2} Y + \frac{1}{8n} \exp 2nY < \frac{3}{8n} \exp 2nY, \quad n \geq 1,$$

откуда, в силу определения (7),

$$\begin{aligned} \sup_{n \geq 1} b_n^2 f_n^2(h) &\leq \sup_{n \geq 1} \frac{3}{8n} \exp(2nY - 2hn^2Y) \leq \\ &\leq \frac{3}{8} \exp \left\{ \sup_{n \geq 1} (2nY - 2hn^2Y) \right\} \leq \frac{3}{8} \exp Y/2h. \end{aligned}$$

Теперь на основании неравенства (5) получаем, что

$$\|u(h) - U(h)\| \leq \frac{\sqrt{3\pi}}{4} \delta \exp(Y/4h) < \delta \exp(Y/4h). \quad (10)$$

Переходим к оценке последнего слагаемого в (9). Будем считать, что число  $N$  выбирается таким, чтобы выполнялось неравенство

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} A_n^2 \leq C^2 \delta^2 \quad (11)$$

правую часть этого неравенства можно задавать иначе, но для наших целей удобнее всего именно выписанное неравенство). Так как функцию  $\Phi(x)$  мы считаем квадратично суммируемой, то требуемое  $N$  заведомо существует. Если функция  $\Phi(x)$  задана, например, аналитически, то нужное  $N$  можно найти численно. Очевидно, что

$$\|U(h) - U_N(h)\|^2 = \frac{\pi}{2} \sum_{n=N+1}^{\infty} A_n^2 b_n^2 f_n^2(h)$$

и, следовательно, при условии (11),

$$\|U(h) - U_N(h)\| \leq \frac{\sqrt{3\pi}}{4} C \delta \exp(Y/4h) < C \delta \exp(Y/4h). \quad (12)$$

Оценки (10) и (12) показывают, что при  $h$ , стремящемся к нулю таким образом, чтобы величина  $\delta \exp(Y/4h)$  тоже стремилась к нулю для  $\delta \rightarrow 0$ , последние два слагаемых из (9) бесконечно малы. Требуемому условию удовлетворяют, например, зависимости

$$h = \frac{Y}{4(\ln 1/\delta - m \ln \ln 1/\delta)}, \quad m > 0, \quad (13)$$

при которых правые части неравенств (10) и (12) имеют порядок

$$O\left(\frac{1}{(\ln 1/\delta)^m}\right), \quad \delta \rightarrow 0.$$

Остается показать, что и первое слагаемое в правой части неравенства (9) бесконечно мало вместе с  $h$ . Но это вполне очевидно. Действительно,

$$\|u - u(h)\|^2 = \frac{\pi}{2} \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 b_n^2 (1 - f_n(h))^2,$$

а поскольку ряд  $\frac{\pi}{2} \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 b_n^2 = \|u\|^2$  сходится и  $f_n(h) \rightarrow 1$ ,  $h \rightarrow 0$ ,

для всякого  $n \geq 1$ , то

$$\|u - u(h)\| \rightarrow 0, \quad h \rightarrow 0. \quad (14)$$

Тем самым показана сходимость метода в  $L_2(D)$ -норме при условиях (11) и (13).

5°. Заключение, более точного, чем (14), вообще говоря, сделать нельзя, и поэтому в общем случае получение оценки погрешности невозможно. Такая оценка может быть получена лишь при некотором дополнительном предположении, например, о принадлежности точного решения какому-то фиксированному компакт. Нам будет удобно выражать свойства компакта через коэффициенты Фурье  $a_n$  соответствующей функции и задавать его неравенствами вида

$$\frac{\pi}{2} \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 b_n^2 n^{2r} \leq M^2, \quad M, r > 0. \quad (15)$$

Итак, пусть априори известно, что решение  $u(x, y)$  таково, что удовлетворяется неравенство (15) с заданными  $M, r > 0$ . Установим для этого случая скорость сходимости к нулю в соотношении (14). Перепишем иначе выражение для  $\|u - u(h)\|^2$ :

$$\|u - u(h)\|^2 = \frac{\pi}{2} \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 b_n^2 n^{2r} \left( \frac{1 - f_n(h)}{n^r} \right)^2.$$

Сомножители  $(1 - f_n(h)) n^{-r}$  мы хотим заменить их верхней гранью по всем  $n$ . Приравнявая нулю первую производную по  $n$  и полагая  $\omega = hn^2 Y$ , приходим к уравнению

$$e^{\omega} = 1 + 2\omega/r \quad (16)$$

для определения точки максимума. Отрицательные корни этого уравнения нас, разумеется, не интересуют. Если  $r \geq 2$ , то уравнение (16) не имеет положительных корней, следовательно, интересующие нас сомножители монотонно убывают по  $n \geq 1$ , и потому максимальным из них является первый, то есть отвечающий значению  $n = 1$ . Поэтому

$$\frac{1 - f_n(h)}{n^r} \leq 1 - f_1(h) = 1 - e^{-hY} \leq hY, \quad n \geq 1, \quad r \geq 2.$$

Если же  $0 < r < 2$ , то уравнение (16) имеет, как нетрудно видеть, единственный положительный корень  $\omega(r)$ , который при желании может быть определен численно. Поэтому для мажорирования исследуемых сомножителей достаточно положить в них  $n = \sqrt{\omega(r)/hY}$ . Это приводит к неравенствам

$$\begin{aligned} \left( \frac{1 - f_n(h)}{n^r} \right)^2 &\leq \left( \frac{1 - f_n(h)}{n^r} \right)^2 \Big|_{n=\sqrt{\omega(r)/hY}} = (1 - e^{-\omega(r)})^2 \left( \frac{hY}{\omega(r)} \right)^r = \\ &= \frac{4\omega^{2-r}(r)}{(2\omega(r) + r)^2} Y^r h^r \leq \left( \frac{2-r}{2} \right)^{2-r} Y^r h^r, \quad n \geq 1, \quad 0 < r < 2, \end{aligned}$$

так как

$$\sup_{\omega > 0} \frac{4\omega^{2-r}}{(2\omega + r)^2} = \left(\frac{2-r}{2}\right)^{2-r} = N_r^2, \quad 0 < r < 2.$$

Из сказанного следует, что

$$\|u - u(h)\| \leq MBh^\alpha, \quad (17)$$

где

$$B = B(r) = \begin{cases} N_r Y^{r/2}, & 0 < r < 2, \\ Y, & r \geq 2, \end{cases}$$

$$\alpha = \alpha(r) = \begin{cases} r/2, & 0 < r < 2, \\ 1, & r \geq 2. \end{cases}$$

Следовательно, в предположении, что точное решение принадлежит компакту (15), можно, объединяя неравенства (9), (10), (12) и (17), указать оценку для погрешности предлагаемого метода. Для того чтобы не усложнять запись и выкладки константами, мы укажем лишь порядок получающейся оценки:

$$\|u - U_N(h)\| \leq O(h^\alpha + \delta e^{Y/4h}). \quad (18)$$

Оптимизация этой оценки, то есть отыскание такого закона  $h(\delta)$ , который обеспечивает максимальный порядок убывания правой части (18) при  $\delta \rightarrow 0$ , представляет собой трудную задачу. Поэтому мы ограничимся законами (13), которые при  $m \geq \alpha$  приводят к оценке

$$\|u - U_N(h)\| \leq O\left(\frac{1}{|\ln \delta|^\alpha}\right).$$

Соответствующую константу нетрудно найти из предыдущего.

Сходимость с логарифмической скоростью, хотя ее нельзя назвать быстрой, в данном случае не может быть существенно улучшена. Это видно из того, что закон (13) уже при  $m = 0$  делает величину  $\delta \exp(Y/4h)$  лишь ограниченной, но не бесконечно малой. Отмеченная высокая чувствительность метода к константе  $m$  вызвана, несомненно, присутствием  $h$  в знаменателе экспоненты. Избежать этого можно было, взяв вместо (7) еще более быстро убывающие множители, например

$$F_n(h) = \exp(-hb_n), \quad h > 0,$$

и существенно сузив содержащий решение компакт путем замены в неравенстве (15) множителей  $n^{2r}$  величинами  $b_n^{2r}$ ,  $0 < r \leq 1$ . Тогда вместо оценок (10) и (12) получается

$$\|u(h) - U(h)\| \leq \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\delta}{ch}, \quad \|U(h) - U_N(h)\| \leq \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{C\delta}{ch},$$

а вместо (17) —

$$\|u - u(h)\| \leq M \frac{\omega^{1-r}(2r)}{r + \omega(2r)} h^r, \quad 0 < r \leq 1.$$

Эти неравенства дают в совокупности оценку для погрешности метода, которую легко оптимизировать в указанном выше смысле. Эта оценка уже нечувствительна к константам пропорциональности. Однако чрезвычайно высокая скорость убывания суммирующих множителей  $F_n(h)$ , в которых при-

существует повторная экспонента, делает их практическое применение весьма затруднительным, так как требует ведения счета с огромным числом знаков.

6°. Легко видеть, что если неравенство (15) выполнено с  $r \geq 1$ , то аналогичным способом можно показать сходимость в норме  $L_2(D)$  первых производных приближенного решения  $U_N(x, y, h)$  к соответствующим производным точного решения  $u(x, y)$ . Следовательно, в этом случае имеет место сходимость в норме  $W_2^1(D)$  приближенного решения к точному. Аналогично при  $r \geq 2$  в неравенстве (15) можно утверждать сходимость решений в норме  $W_2^2(D)$ , и вообще, при произвольном  $r > 0$  — сходимость в норме  $W_2^{[r]}(D)$ . Кроме того, если в неравенстве (15)  $r > k$ , то можно так же, как в предыдущем пункте, найти оценку погрешности в норме  $W_2^k(D)$ .

В некоторых случаях можно показать сходимость приближенного решения к точному и в равномерных метриках. Например, если допустимо значение  $r=2$ , то из сходимости в норме  $W_2^2(D)$  в силу теорем вложения вытекает сходимость в метрике  $C(\bar{D})$ . При  $r > 2$  можно указать и оценку погрешности в норме  $C(\bar{D})$ .

Замечание. Использованный выше метод суммирования с множителями  $f_n(h)$  для  $1 \leq n \leq N$  и нулями для всех  $n > N$ , где  $N$  определяется неравенством (11), является некоторым видоизменением метода (А, 2) из [11]. Применительно к определению функции  $\varphi(x)$  по приближенным коэффициентам Фурье  $A_n$  он обладает тем свойством, что для  $\varphi(x) \in W_2^1(0, \pi)$  он дает равномерно сходящиеся приближения при  $h \rightarrow 0$ ,  $\delta/h \rightarrow 0$ ,  $\delta \rightarrow 0$ .

### Литература

1. Лаврентьев М. М. О некоторых некорректных задачах математической физики. Новосибирск, 1962.
2. Чудов Л. А. ДАН СССР, 143, № 4, 798, 1962.
3. Чудов Л. А. Сб. «Вычислительные методы и программирование», в. 8, 34, 1967.
4. Иванов В. К. Матем. сб., 61, № 2, 211, 1963.
5. Домбровская И. Н., Иванов В. К. Сибирский матем. ж., 6, № 3, 499, 1965.
6. Лисковец О. А. ДУ, 4, № 4, 735, 1968.
7. Лисковец О. А. ДУ, 2, № 8, 1128, 1966.
8. Тихонов А. Н. ДАН СССР, 156, № 2, 268, 1964.
9. Рамм А. Г. ДУ, 4, № 11, 2056, 1968.
10. Маделунг Э. Математический аппарат физики. М., 1961.
11. Харди Г. Расходящиеся ряды. М., 1951.
12. Бондаренко П. С., Рылов А. В. ДАН УРСР, сер. А, № 2, 99, 1968.
13. Бондаренко П. С., Рылов А. В. Сб. «Вычислительная и прикладная математика», в. 6, 119, 1968.

Институт математики  
АН БССР

Поступило в редакцию  
13.1 1969

В. М. ЗУБОВ

**О СУЩЕСТВОВАНИИ, ЕДИНСТВЕННОСТИ И ОЦЕНКАХ  
РЕШЕНИЯ ДВУХТОЧЕЧНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ  
ДЛЯ СИСТЕМЫ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ**

Настоящая работа является продолжением исследований, начатых в [4]. В ней получены некоторые обобщения и уточнения результатов названной статьи. Кроме того, на основе оценок матрицы Грина получены критерии существования, единственности и оценки решения краевой задачи

$$y' + A(t)y = f(t, y), My(\alpha) + Ny(\beta) = 0, \quad (1)$$

где  $A(t) = \|a_{ij}(t)\|_1^n$ ,  $M = \|m_{ij}\|_1^n$ ,  $N = \|n_{ij}\|_1^n$ ,  $A(t)$  непрерывна на  $[\alpha, \beta]$ ,  $y$  —  $n$ -мерный вектор,  $f(t, y)$  —  $n$ -мерная вектор-функция, непрерывная в области  $R: \alpha \leq t \leq \beta, |y| < \infty$ .

Неравенства между матрицами (векторами) понимаются в смысле выполнения аналогичных неравенств между соответствующими элементами этих матриц (векторов).

Модуль матрицы  $B(t)$  — это матрица, образованная из абсолютных величин элементов матрицы  $B(t)$ , то есть  $|B(t)| = \| |b_{ij}(t)| \|_1^n$ .

Степень вектора  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  понимаем как  $x^a = (x_1^a, x_2^a, \dots, x_n^a)$ .

Под  $\max_{t \in [\alpha, \beta]} B(t)$  понимаем постоянную матрицу того же измерения, что и  $B(t)$ , элементами которой являются наибольшие значения соответствующих элементов матрицы  $B(t)$  при  $t \in [\alpha, \beta]$ .

1. Рассмотрим линейную краевую задачу

$$y' + A(t)y = f(t), My(\alpha) + Ny(\beta) = 0. \quad (2)$$

Пусть

$$y' + A_0(t)y = f(t), My(\alpha) + Ny(\beta) = 0, \quad (3)$$

некоторая вспомогательная задача с непрерывной  $n$ -мерной матрицей  $A_0(t)$ .

Лемма 1. а) Для существования матрицы Грина  $G(t, s)$  задачи (2) в квадрате  $t, s \in [\alpha, \beta]$  необходимо и достаточно, чтобы в этом квадрате существовала матрица Грина  $G_0(t, s)$  задачи (3), такая, что матрица

$$P = \max_t \int_{\alpha}^{\beta} |G_0(t, s)(A_0(s) - A(s))| ds$$

была бы  $\alpha$ -матрицей [3].

б) Для того чтобы  $G(t, s)$  была неотрицательна (неположительна), необходимо и достаточно, чтобы  $P$  была  $\alpha$ -матрицей,  $G_0(t, s) \geq 0$  ( $\leq 0$ ),  $A_0(t) - A(t) \geq 0$  ( $\leq 0$ ).

в) Если  $P$  —  $\alpha$ -матрица, справедливы оценки

$$|G(t, s)| \leq (E - P)^{-1} \max_t |G_0(t, s)|,$$

$$\int_{\alpha}^{\beta} |G(t, s)| ds \leq (E - P)^{-1} \max_t \int_{\alpha}^{\beta} |G_0(t, s)| ds, \quad (*)$$

где  $E$  — единичная матрица.

Доказательство. а) Достаточность. Так как  $P$  —  $\alpha$ -матрица, то система интегральных уравнений

$$u(t) = \int_{\alpha}^{\beta} G_0(t, s) (A_0(s) - A(s)) u(s) ds + \int_{\alpha}^{\beta} G_0(t, s) f(s) ds, \quad (4)$$

а вместе с ней и задача (2) имеют единственное решение для любой непрерывной вектор-функции  $f(t)$ . Поэтому существует матрица Грина  $G(t, s)$  задачи (2), причем (см. [1])

$$G(t, s) = G_0(t, s) + \int_{\alpha}^{\beta} R(t, \tau) G_0(\tau, s) d\tau, \quad (5)$$

где  $R(t, s)$  — резольвента интегрального уравнения (4), удовлетворяющая уравнению

$$R(t, s) = \int_{\alpha}^{\beta} R(t, \tau) G_0(\tau, s) (A_0(s) - A(s)) d\tau + G_0(t, s) (A_0(s) - A(s)). \quad (5')$$

Необходимость утверждения получаем, полагая  $G_0(t, s) = G(t, s)$ .

б) Если  $G_0(t, s) \geq 0$  ( $\leq 0$ ),  $A_0(t) - A(t) \geq 0$  ( $\leq 0$ ), то  $R(t, s) \geq 0$ , и потому из (5) следует  $G(t, s) \geq 0$  ( $\leq 0$ ).

Для доказательства обратного утверждения достаточно взять  $G_0(t, s) = -G(t, s)$ .

в) Из (5) следует

$$|G(t, s)| \leq \left( E + \int_{\alpha}^{\beta} |R(t, \tau)| d\tau \right) \max_{\tau} |G_0(\tau, s)|,$$

а уравнение (5') приводит к оценке  $\int_{\alpha}^{\beta} |R(t, \tau)| d\tau \leq P (E - P)^{-1}$ . Отсюда и из предыдущего неравенства будем иметь

$$|G(t, s)| \leq (E - P)^{-1} \max_{\tau} |G_0(\tau, s)|.$$

Проинтегрировав последнее неравенство по  $s$ , получим оценку для интеграла от матрицы Грина. Лемма 1 доказана.

Рассмотрим краевую задачу

$$x' + B(t)x = 0, \quad M_1 x(\alpha) + N_1 x(\beta) = 0. \quad (6)$$

Пусть по крайней мере одна из матриц  $M_1, N_1$  неособенная (например,  $M_1$ ) и пусть  $N_1 = N_0 M_0^{-1} M_1$ , а матрицы  $N_0 = \{n_1, n_2, \dots, n_n\}$ ,  $M_0 = \{m_1, m_2, \dots, m_n\}$  диагональные и  $m_i \neq 0$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ). Тогда задача (6) эквивалентна задаче

$$y' + A(t)y = 0, \quad M_0 y(\alpha) + N_0 y(\beta) = 0. \quad (7)$$

Действительно, если  $T = M_0^{-1}M_1$  — невырожденная матрица, то линейное преобразование  $y = Tx$  задачу (6) сводит к задаче (7), где  $A(t) = TB(t)T^{-1}$ . Отметим: из существования матрицы Грина  $G(t, s)$  задачи (7) следует существование матрицы Грина  $G_b(t, s)$  задачи (6), причем

$$G_b(t, s) = T^{-1}G(t, s)T.$$

Введем обозначения:

$$g_i(t, s) = \begin{cases} m_i \left[ m_i + n_i \exp \left( - \int_{\alpha}^{\beta} a_{ii} d\tau \right) \right]^{-1} \exp \left( - \int_s^t a_{ii} d\tau \right) & \text{при } t \geq s, \\ -n_i \left[ n_i + m_i \exp \left( \int_{\alpha}^{\beta} a_{ii} d\tau \right) \right]^{-1} \exp \left( - \int_s^t a_{ii} d\tau \right) & \text{при } t < s, \end{cases} \quad (**)$$

$$g_i(s) = \max_t \begin{cases} |g_i(t, s)| t \geq s, \\ |g_i(t, s)| t < s, \end{cases}$$

$$P_1 = \int_{\alpha}^{\beta} \|g_i(s) | a_{ij}(s) | \delta_{ij}\|^2 ds,$$

$K(t, s)$  — матрица Коши задачи (3),

$$\delta_{ik} = \begin{cases} 1 & \text{при } i \neq k, \\ 0 & \text{при } i = k, \end{cases}$$

$$G^0(s) = \{g_1(s), g_2(s), \dots, g_n(s)\} \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

**Теорема 1.** Пусть  $n_i + m_i \exp \left( \int_{\alpha}^{\beta} a_{ii} d\tau \right) \neq 0$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) и матрица  $P_1$  —  $a$ -матрица. Тогда существует матрица Грина  $G(t, s)$  задачи (7) и справедливы оценки

$$|G(t, s)| \leq (E - P_1)^{-1} G^0(s),$$

$$\int_{\alpha}^{\beta} |G(t, s)| ds \leq (E - P)^{-1} \int_{\alpha}^{\beta} G^0(s) ds.$$

Более того, если  $m_i > 0$  ( $< 0$ ),  $n_i \leq 0$  ( $\geq 0$ ),  $n_i + m_i \exp \left( \int_{\alpha}^{\beta} a_{ii} d\tau \right) > 0$  ( $< 0$ ),  $a_{ij}(t) \leq 0$  ( $ij = 1, 2, \dots, n; i \neq j$ ), то  $G(t, s) \geq 0$  при  $t, s \in [\alpha, \beta]$ , и  $G(t, s) \leq 0$ , если  $m_i \leq 0$  ( $\geq 0$ ),  $n_i > 0$  ( $< 0$ ),  $n_i + m_i \exp \left( \int_{\alpha}^{\beta} a_{ii} d\tau \right) > 0$  ( $< 0$ ),  $a_{ij}(t) \geq 0$  ( $i, j = 1, 2, \dots, n; i \neq j$ ).

**Доказательство.** Рассмотрим вспомогательную краевую задачу (3), где  $A_0(t) = \{a_{11}(t), a_{22}(t), \dots, a_{nn}(t)\}$ . Матрица Грина  $G_0(t, s)$  названной краевой задачи существует, так как  $\det(M_0 + N_0 K(\beta, \alpha)) = \prod_{i=1}^n [m_i + n_i \times$

$\times \exp\left(-\int_{\alpha}^{\beta} a_{ii} d\tau\right) \neq 0$  [5]. Так как  $G_0(t, s)$ —диагональная матрица, то легко видеть, что  $P = P_1$ . Существование и оценки  $G(t, s)$  следуют из леммы 1.

Если, кроме того,  $m_i > 0$  ( $< 0$ ),  $n_i \leq 0$  ( $\geq 0$ ),  $n_i + m_i \exp\left(\int_{\alpha}^{\beta} a_{ii} d\tau\right) > 0$  ( $< 0$ ),  $a_{ij}(t) \leq 0$  ( $i, j = 1, 2, \dots, n; i \neq j$ ), то  $A_0(t) - A(t) \geq 0$ ,  $G_0(t, s) \geq 0$  и, согласно лемме 1,  $G(t, s) \geq 0$  в квадрате  $t, s \in [\alpha, \beta]$ .

Если же  $m_i \leq 0$  ( $\geq 0$ ),  $n_i > 0$  ( $< 0$ ),  $n_i + m_i \exp\left(\int_{\alpha}^{\beta} a_{ii} d\tau\right) > 0$  ( $< 0$ ),  $a_{ij}(t) \geq 0$  ( $i, j = 1, 2, \dots, n; j \neq i$ ), то  $A_0(t) - A(t) \leq 0$ ,  $G_0(t, s) \leq 0$  и  $G(t, s) \leq 0$  при  $t, s \in [\alpha, \beta]$ . Теорема доказана.

Из леммы 1 и теоремы 1 можно получить условия существования, знакопостоянства и оценки функции Грина краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений.

Рассмотрим, например, задачу

$$\begin{aligned} y'' + a_1(t)y' + a_0(t)y &= 0, \\ m_1 y(\alpha) + n_1 y(\beta) &= 0, \\ m_2 y'(\alpha) + n_2 y'(\beta) &= 0, \end{aligned} \quad (8)$$

где  $a_1(t)$ ,  $a_0(t)$  непрерывны на  $[\alpha, \beta]$ .

Пусть  $g_2(s)$  определено, согласно (\*\*), в предположении, что  $a_{22}(t) = -a_1(t)$ ;  $c_i = \max\{|m_i|, |n_i|\}$ ;  $\omega = \beta - \alpha$ .

Теорема 2. Если

$$(m_1 + n_1) \left( m_2 + n_2 \exp\left(-\int_{\alpha}^{\beta} a_1 d\tau\right) \right) \neq 0$$

и

$$\frac{|m_1 + n_1|}{c_1} > \omega \int_{\alpha}^{\beta} g_2(s) |a_0(s)| ds,$$

то существует функция Грина  $\Gamma(t, s)$  задачи (8) и справедливы оценки

$$|\Gamma(t, s)| \leq c_1 \omega g_2(s) |m_1 + n_1|^{-1} \Delta^{-1},$$

$$|\Gamma'_t(t, s)| \leq g_2(s) \Delta^{-1},$$

$$\int_{\alpha}^{\beta} |\Gamma(t, s)| ds \leq \frac{c_1 \omega}{|m_1 + n_1| \Delta} \int_{\alpha}^{\beta} g_2(s) ds,$$

$$\int_{\alpha}^{\beta} |\Gamma'_t(t, s)| ds \leq \int_{\alpha}^{\beta} g_2(s) ds \Delta^{-1},$$

где

$$\Delta = 1 - \frac{\omega c_1}{|m_1 + n_1|} \int_{\alpha}^{\beta} g_2(s) |a_0(s)| ds.$$

Более того, если  $|m_1| > |n_1|$ ,  $m_1 n_1 \leq 0$ ,  $m_2 > 0$  ( $< 0$ ),  $n_2 \leq 0$  ( $\geq 0$ ),  $n_2 + m_2 \exp(\int_{\alpha}^{\beta} a_1 d\tau) > 0$  ( $< 0$ ),  $a_0(t) \leq 0$ , то  $\Gamma(t, s) \geq 0$ ,  $\Gamma'_i(t, s) \geq 0$  в квадрате  $t, s \in [\alpha, \beta]$ .

Полученный критерий существования функции Грина задачи (8) и ее оценки существенно улучшают и дополняют результаты работы [4].

В заключение этого пункта для одного класса краевых задач с вырожденными краевыми условиями [4] укажем на свойство функции Грина, являющееся обобщением хорошо известного свойства для периодической краевой задачи. Отметим, что оно очевидным образом переносится на задачи с произвольными краевыми условиями и может быть применено для получения оценок функции Грина.

Свойство. Для того чтобы функция  $\Gamma(t, s)$  задачи

$$y^{(n)} + \sum_{k=0}^{n-1} a_k(t) y^{(k)} = f(t),$$

$$\sum_{j=0}^{n-1} (m_{ij} y^{(j)}(\alpha) + n_{ij} y^{(j)}(\beta)) = 0 \quad (i = 0, 1, \dots, n-1) \quad (9)$$

удовлетворяла условию  $\int_{\alpha}^{\beta} \Gamma(t, s) a_0(s) ds = 1$ , необходимо и достаточно, чтобы  $m_{i0} = -n_{i0}$  ( $i = 0, 1, \dots, n-1$ ).

Доказательство. Если  $f(t) = a_0(t)$ , то  $y = 1$  есть решение задачи (9). С другой стороны, по формуле Грина,  $y = \int_{\alpha}^{\beta} \Gamma(t, s) a_0(s) ds$ , т. е.

$\int_{\alpha}^{\beta} \Gamma(t, s) a_0(s) ds = 1$ . Наоборот, если  $\int_{\alpha}^{\beta} \Gamma(t, s) a_0(s) ds = 1$ , то  $y = 1$  удовлетворяет краевым условиям (9). Значит,  $m_{i0} = -n_{i0}$  ( $i = 0, \dots, n-1$ ).

2. Перейдем к изучению задачи (1). Пусть  $f(t, y)$  удовлетворяет в области  $R$  линейной оценке

$$|f(t, y)| \leq \Phi(t) |y| + r(t) \quad (10)$$

с матрицей  $\Phi(t) \geq 0$ , вектор-функцией  $r(t) \geq 0$ , непрерывными на  $[\alpha, \beta]$ .

Лемма 2. Пусть в квадрате  $t, s \in [\alpha, \beta]$  существует матрица Грина  $G_0(t, s)$  вспомогательной краевой задачи (3), такая, что матрицы  $P, Q =$

$= (E - P)^{-1} \max_t \int_{\alpha}^{\beta} |G_0(t, s)| \Phi(s) ds$  суть  $\alpha$ -матрицы. Тогда задача (1) имеет в области  $R$  решение  $y(t)$ , такое, что

$$|y| \leq (E - Q)^{-1} \psi, \quad \text{где } \psi = (E - P)^{-1} \max_t \int_{\alpha}^{\beta} |G_0(t, s)| r(s) ds.$$

Доказательство. Из леммы 1 следует существование матрицы Грина  $G(t, s)$  задачи (2), что позволяет (1) представить интегральным уравнением

$$x = \int_{\alpha}^{\beta} G(t, s) f(s, x(s)) ds. \quad (11)$$

Теперь из (10) и (\*) следует

$$|x| \leq \int_{\alpha}^{\beta} (E - P)^{-1} \max_t |G_0(t, s)| \Phi(s) |x(s)| ds + \psi.$$

Так как  $Q$  —  $a$ -матрица, то интегральное уравнение

$$u(t) = \int_{\alpha}^{\beta} (E - P)^{-1} \max_t |G_0(t, s)| \Phi(s) u(s) ds + \psi$$

имеет единственное и притом неотрицательное решение

$$v(t) = \int_{\alpha}^{\beta} R(t, s) \psi ds + \psi,$$

для которого справедлива оценка  $v(t) \leq (E - Q)^{-1} \psi$ .

Ввиду того что  $|x| - v(t) \leq 0$ , согласно принципу Шаудера, заключаем, что система интегральных уравнений (11), а значит, и краевая задача (1), имеют хотя бы одно решение  $y(t)$ , при этом  $|y| \leq (E - Q)^{-1} \psi$ . Лемма 2 доказана.

Пусть  $A_0(t) \equiv 0$ . Если краевые условия невырождены, то есть  $\det(M + N) \neq 0$ , то

$$G_0(t, s) = G_0^0(t, s) = \begin{cases} (M + N)^{-1} M & \text{при } t \geq s, \\ (M + N)^{-1} N & \text{при } t < s, \end{cases}$$

и из леммы 2 непосредственно следует

Теорема 3. Пусть  $\det(M + N) \neq 0$  и матрицы

$$P_0 = \max_t \int_{\alpha}^{\beta} |G_0^0(t, s) A(s)| ds,$$

$$Q_0 = (E - P_0)^{-1} \max_t |G_0^0(t, s)| \int_{\alpha}^{\beta} \Phi(s) ds$$

—  $a$ -матрицы. Тогда задача (1) имеет решение  $y(t)$ , такое, что

$$|y| \leq (E - Q_0)^{-1} \psi_0, \quad \text{где } \psi_0 = (E - P_0)^{-1} \max_t |G_0^0(t, s)| \int_{\alpha}^{\beta} r(s) ds.$$

Следствие. Пусть краевые условия задачи (1) невырождены и

$$|f(t, x)| \leq \Phi(t) |x|^a + r(t), \quad 0 \leq a < 1,$$

в области  $R$ . Тогда краевая задача

$$x' = f(t, x), \quad Mx(\alpha) + Nx(\beta) = 0$$

имеет хотя бы одно решение  $x(t)$ .

Если  $a = 0$ , т. е.  $|f(t, x)| \leq r_1(t)$ , то

$$|x(t)| \leq \max_t |G_0^0(t, s)| \int_{\alpha}^{\beta} r_1(s) ds.$$

Пусть  $l = (1, 1, \dots, 1)$ .

Теорема 4. Если в области  $R: |f(t, x)| \leq \Phi(t) |x|^a + r(t)$ ,  $a > 1$ ,  $\det(M + N) \neq 0$  и

$$l - \max_t \int_{\alpha}^{\beta} |G_0^0(t, s)| (\Phi(s) l + r(s)) \geq 0,$$

то задача (1) ( $A(t) \equiv 0$ ) имеет хотя бы одно решение  $y(t)$  в области  $R$ , такое, что  $|y| \leq l$ .

Доказательство. Так как  $\det(M + N) \neq 0$ , то задача (1) эквивалентна интегральному уравнению

$$x(t) = \int_{\alpha}^{\beta} G_0^0(t, s) f(s, x(s)) ds \quad (12)$$

и

$$|x| \leq \int_{\alpha}^{\beta} |G_0^0(t, s)| (\Phi(s) |x|^a + r(s)) ds.$$

Рассмотрим систему интегральных уравнений

$$z(t) = \max_t \int_{\alpha}^{\beta} |G_0^0(t, s)| (\Phi(s) z^a(s) + r(s)) ds.$$

Утверждаем, что она имеет хотя бы одно решение  $v(t)$ , такое, что  $0 \leq v(t) \leq l$ .

Действительно, неравенство

$$l \geq \max_t \int_{\alpha}^{\beta} |G_0^0(t, s)| (\Phi(s) l + r(s)) ds$$

и теорема о неподвижной точке Шаудера гарантирует существование  $v(t)$ . Пусть  $x \in [0, v]$ . Тогда  $|x| - v \leq 0$  и вновь из теоремы Шаудера следует существование решения  $y(t)$  уравнения (12), а значит, и задачи (1). При этом  $|y(t)| \leq l$ .

Приведем условие единственности решения задачи (1).

Лемма 3. Пусть  $f(t, y)$  в области  $R$  удовлетворяет условию Липшица с матрицей  $L(t)$  и пусть существует матрица Грина  $G_0(t, s)$  вспомогательной краевой задачи (3).

Если  $P, Q_l = (E - P)^{-1} \max_t \int_{\alpha}^{\beta} |G_0(t, s)| L(s) ds$  —  $a$ -матрицы, то задача

(1) имеет в области  $R$  не более одного решения.

Доказательство. Пусть существуют два решения  $y_1, y_2$  задачи (1). Тогда, с учетом (11), получим

$$|y_1 - y_2| \leq \int_{\alpha}^{\beta} |G(t, s)| |f(s, y_1(s)) - f(s, y_2(s))| ds.$$

Пусть  $\theta = \max_{t \in [\alpha, \beta]} |y_1 - y_2|$ . Из последнего неравенства следует  $\theta \leq Q_l \theta$  или  $(E - Q_l) \theta \leq 0$ . Но так как  $Q_l$  —  $a$ -матрица, то  $\theta \leq 0$ , то есть  $y_1 \equiv y_2$ .

Замечание 1. При одновременном выполнении условий леммы 2 и леммы 3 задача (1) имеет единственное решение.

3. Рассмотрим приложение предыдущих результатов к краевой задаче для нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка

$$\begin{aligned} y'' + f(t, y, y') &= 0, \\ m_1 y(\alpha) + n_1 y(\beta) &= 0, \\ m_2 y'(\alpha) + n_2 y'(\beta) &= 0. \end{aligned} \quad (13)$$

Теорема 5. Пусть  $f(t, y, u)$  в области  $R: \alpha \leq t \leq \beta$ ,  $|y|, |u| < \infty$  непрерывна и удовлетворяет неравенству

$$|f(t, y, u)| \leq \alpha(t)|y| + \beta(t)|u| + \gamma(t), \quad (14)$$

где  $\alpha(t), \beta(t), \gamma(t)$  неотрицательны и непрерывны на  $[\alpha, \beta]$ . Если  $m_i + n_i \neq 0$  ( $i = 1, 2$ ) и

$$|m_1 + n_1| |m_2 + n_2| > |m_1 + n_1| c_2 \int_{\alpha}^{\beta} \beta(s) ds + c_1 c_2 \omega \int_{\alpha}^{\beta} \alpha(s) ds,$$

$$\text{где } c_i = \max\{|m_i|, |n_i|\} \quad (i = 1, 2),$$

то задача (13) имеет хотя бы одно решение  $y(t)$ , удовлетворяющее неравенствам

$$|y| \leq \frac{c_1 c_2 \omega}{|m_1 + n_1| |m_2 + n_2|} \int_{\alpha}^{\beta} \gamma(s) ds,$$

$$|y'| \leq \frac{c_2}{|m_2 + n_2|} \int_{\alpha}^{\beta} \gamma(s) ds.$$

Доказательство. Запишем задачу (13) в векторной форме

$$y' + Hy + f(t, y) = 0,$$

$$M_0 y(\alpha) + N_0 y(\beta) = 0,$$

где

$$H = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad f(t, y) = (0, f(t, y, y')). \quad (15)$$

Неравенство (14) перейдет в векторное неравенство

$$|f(t, y)| \leq \Phi(t)|y| + r(t),$$

где

$$\Phi(t) = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ \alpha(t) & \beta(t) \end{vmatrix}, \quad r(t) = \begin{vmatrix} 0 \\ \gamma(t) \end{vmatrix}.$$

При выполнении условий теоремы существует матрица Грина  $G(t, s)$  задачи  $y' + Hy = 0$ ,  $M_0 y(\alpha) + N_0 y(\beta) = 0$  и

$$|G(t, s)| \leq \begin{vmatrix} \frac{c_1}{|m_1 + n_1|} & \frac{c_1 c_2 \omega}{|m_1 + n_1| |m_2 + n_2|} \\ 0 & \frac{c_2}{|m_2 + n_2|} \end{vmatrix}.$$

Кроме того, матрицы  $P, Q$ , введенные в лемме 2, —  $a$ -матрицы. Теперь утверждение о существовании решения и оценки следуют из леммы 2.

Из теоремы 4 для задачи (13) вытекает

Теорема 6. Пусть в области  $R$

$$a) |f(t, y, u)| \leq \alpha(t)|y|^a + \beta(t)|u|^a + \gamma(t), \quad a \geq 0,$$

$$б) |m_1 + n_1| |m_2 + n_2| > c_1 c_2 \omega \int_{\alpha}^{\beta} (\alpha(s) + \beta(s) + \gamma(s)) ds,$$

$$|m_2 + n_2| > c_2 \int_{\alpha}^{\beta} (\alpha(s) + \beta(s) + \gamma(s)) ds, \quad m_i + n_i \neq 0.$$

Тогда задача (13) имеет хотя бы одно решение  $|y| \leq 1, |y'| \leq 1$ .

Замечание 2. Если  $m_i + n_i \neq 0$  и  $|f(t, y, u)| \leq \gamma(t)$  в области  $R$ , то задача (13) имеет хотя бы одно решение  $y(t)$ , удовлетворяющее неравенствам

$$|y| \leq \frac{c_1 c_2 \omega}{|m_1 + n_1| |m_2 + n_2|} \int_{\alpha}^{\beta} \gamma(s) ds;$$

$$|y'| \leq \frac{c_2}{|m_2 + n_2|} \int_{\alpha}^{\beta} \gamma(s) ds.$$

Теорема 7. Пусть

$$а) f(t, y, y') = \alpha(t)y + \beta(t)y' + \gamma(t, y, y'),$$

где  $\alpha(t), \beta(t)$  непрерывны на  $[\alpha, \beta]$ ,  $\gamma(t, y, u)$  непрерывна в области  $R$ ;

$$б) P_k(t) = \sup \{ |\gamma(t, y, u)| : |y| + |u| \leq k (k = 1, 2, \dots) \}$$

и

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \int_{\alpha}^{\beta} p_k(s) ds = 0;$$

$$в) |m_1 + n_1| |m_2 + n_2| > |m_1 + n_1| c_2 \int_{\alpha}^{\beta} |\beta(s)| ds + c_1 c_2 \omega \int_{\alpha}^{\beta} |\alpha(s)| ds,$$

$$m_i + n_i \neq 0 (i = 1, 2).$$

Тогда задача (13) имеет хотя бы одно решение.

Доказательство. Задачу (13) представим в векторной форме

$$y' + A(t)y + F(t, y) = 0, \quad M_0 y(\alpha) + N_0 y(\beta) = 0,$$

где

$$A(t) = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ \alpha(t) & \beta(t) \end{vmatrix}, \quad F(t, y) = \begin{vmatrix} 0 \\ \gamma(t, y, y') \end{vmatrix}.$$

Для непрерывной матрицы

$$B(t) = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ b_1(t) & b_2(t) \end{vmatrix},$$

элементы которой удовлетворяют условиям

$$|b_1(t)| \leq |\alpha(t)|, \quad |b_2(t)| \leq |\beta(t)|,$$

краевая задача

$$x' + B(t)x = f(t), \quad M_0 x(\alpha) + N_0 x(\beta) = 0$$

имеет единственное решение.

Таким образом, выполнены все условия теоремы 1 работы [2], откуда и следует утверждение теоремы о существовании решения.

Замечание 3. Если в области  $R$  выполнены условия

$$\text{а) } |f(t, y_1, u_1) - f(t, y_2, u_2)| \leq l_1(t) |y_1 - y_2| + l_2(t) |u_1 - u_2|,$$

$l_1(t), l_2(t)$  непрерывны на  $[\alpha, \beta]$ ,

$$\text{б) } m_i + n_i \neq 0 \quad (i = 1, 2),$$

$$|m_1 + n_1| |m_2 + n_2| > |m_1 + n_1| c_2 \int_{\alpha}^{\beta} l_2(s) ds + c_1 c_2 \omega \int_{\alpha}^{\beta} l_1(s) ds,$$

то задача (13) не может иметь более одного решения.

При одновременном выполнении условий теорем 5, 6, 7 и замечания 3 задача (13) имеет единственное решение.

Пользуясь случаем, хочу искренне поблагодарить А. Я. Хохрякова за внимание к работе и ряд ценных замечаний.

### Литература

1. Архипов Б. М., Хохряков А. Я. Вестн. АН БССР, сер. физ.-матем. наук, № 4, 1968.
2. Opial Z. J. Different. Equat., 3, № 4, 1967.
3. Перов А. И., Кибенко А. В. Известия АН СССР, 30, № 2, 1966.
4. Хохряков А. Я., Зубов В. М. ДАН БССР, 12, № 9, 1968.
5. Урбанович М. И. Дифференциальные уравнения, 2, № 8, 1043, 1966.

Институт математики  
АН БССР

Поступило в редакцию  
21.II 1969

А. А. БОГУШ, Л. Г. МОРОЗ, Ф. И. ФЕДОРОВ

### ТЕНЗОР-ПАРАМЕТР И ПЛОСКИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛОРЕНЦА

1. В работах [1—3] введена параметризация группы Лоренца с помощью комплексного вектора

$$\mathbf{q} = \mathbf{a} + i \mathbf{b}, \quad (\mathbf{q}^* = \mathbf{a} - i \mathbf{b}). \quad (1)$$

Взаимно однозначное соответствие между вектор-параметрами  $\mathbf{q}$  и собственными ортохронными матрицами Лоренца  $L(x_4 = ict)$  устанавливается с помощью соотношений [1, 2]

$$L = L(\mathbf{q}) = \frac{(1 + \mathbf{q}_+) (1 + \mathbf{q}_-^*)}{|1 + \mathbf{q}^2|} \quad (2)$$

и

$$\hat{\mathbf{q}} = \frac{1}{2} (\mathbf{q}_+ + \mathbf{q}_-^*) = \begin{pmatrix} \mathbf{a} \times i \mathbf{b} \\ -i \mathbf{b} & 0 \end{pmatrix} = \frac{L - \tilde{L}}{L_c}, \quad (3)$$

где

$$\mathbf{q}_\pm = \begin{pmatrix} \mathbf{q}^\times \pm \mathbf{q} \\ \mp \mathbf{q} & 0 \end{pmatrix}, \quad (\mathbf{q}^\times)_{ab} = \varepsilon_{acb} q_c, \quad (4)$$

а  $L_c$  обозначает след матрицы  $L$ .

Для вектор-параметров  $\mathbf{q}$  имеет место закон композиции [3]

$$\mathbf{q}'' = \langle \mathbf{q}', \mathbf{q} \rangle = \frac{\mathbf{q}' + \mathbf{q} + [\mathbf{q}' \mathbf{q}]}{1 - \mathbf{q}' \mathbf{q}}, \quad (L(\mathbf{q}'') = L(\mathbf{q}') L(\mathbf{q})), \quad (5)$$

справедливый также для вещественных вектор-параметров группы трехмерных вращений (см. [4]).

Произвольное бесконечно малое преобразование Лоренца ( $|\mathbf{q}| = \sqrt{\mathbf{q} \mathbf{q}^*} \ll 1$ ), согласно (2), может быть записано в виде (см. [5], [6])

$$L(\mathbf{q}) = 1 + \mathbf{q}_+ + \mathbf{q}_-^* = 1 + 2\hat{\mathbf{q}}, \quad (6)$$

причем  $\hat{\mathbf{q}}$  можно представить следующим образом:

$$\hat{\mathbf{q}} = \frac{1}{2} \hat{\mathbf{q}}_{\mu\nu} I^{\mu\nu} = -\frac{1}{2} \varepsilon_{abc} a_a I^{bc} + i b_a I^{a4}, \quad (7)$$

где

$$I^{\mu\nu} = e^{\mu\nu} - e^{\nu\mu}, \quad (e_{\rho\sigma}^{\mu\nu} = \delta_{\mu\rho} \delta_{\nu\sigma}) \quad (8)$$

—обычные инфинитезимальные операторы группы Лоренца в пространстве Минковского (см., например, [7]).

Матрица  $L(\mathbf{q})$  (2) произвольного конечного преобразования Лоренца может быть записана и в других эквивалентных формах, позволяющих ввести в них явно операторы  $I^{\mu\nu}$ , например,

$$L(\mathbf{q}) = L(\hat{\mathbf{q}}, \hat{\mathbf{q}}^\times) = \frac{(1 + \hat{\mathbf{q}} + i \hat{\mathbf{q}}^\times)(1 + \hat{\mathbf{q}} - i \hat{\mathbf{q}}^\times)}{\left| 1 - \frac{1}{2} (\hat{\mathbf{q}}^2 + i \hat{\mathbf{q}} \hat{\mathbf{q}}^\times)_c \right|}, \quad (9)$$

или

$$L(\hat{\mathbf{q}}) = \frac{1 - \frac{1}{2} (\hat{\mathbf{q}}^2)_c + 2(\hat{\mathbf{q}} + \hat{\mathbf{q}}^2)}{\sqrt{1 - (\hat{\mathbf{q}}^2 - \hat{\mathbf{q}}^4)_c - \frac{1}{4} [(\hat{\mathbf{q}}^2)_c]^2}}. \quad (10)$$

Здесь введен тензор

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{q}}^\times &= -\frac{i}{2} (\mathbf{q}_+ - \mathbf{q}_-) = \begin{pmatrix} \mathbf{b}^\times & -i\mathbf{a} \\ i\mathbf{a} & 0 \end{pmatrix} = \\ &= \frac{i}{2} \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \hat{q}_{\rho\sigma} I^{\mu\nu} = -\frac{1}{2} \varepsilon_{abc} b_a I^{bc} - i a_a I^{a4}, \end{aligned} \quad (11)$$

дуальный тензор-параметру  $\hat{\mathbf{q}}$  (7)  $\left( \hat{q}_{\mu\nu}^\times = \frac{i}{2} \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \hat{q}_{\rho\sigma} \right)$ , и учтено, что

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{q}} \hat{\mathbf{q}}^\times &= \hat{\mathbf{q}}^\times \hat{\mathbf{q}} = \mathbf{ab}, \quad (\hat{\mathbf{q}})^2 - (\hat{\mathbf{q}}^\times)^2 = \frac{1}{2} (\hat{\mathbf{q}}^2)_c, \\ \mathbf{q}^2 &= -\frac{1}{2} (\hat{\mathbf{q}}^2 + i \hat{\mathbf{q}} \hat{\mathbf{q}}^\times)_c. \end{aligned} \quad (12)$$

Из (10), в частности, следует, что при условиях  $\hat{\mathbf{q}} \hat{\mathbf{q}}^\times = 0$  и  $(\hat{\mathbf{q}}^2)_c < 2$  (т. е. когда  $\mathbf{q}^2 = \mathbf{q}^{*2}$  и  $1 + \mathbf{q}^2 > 0$ ) матрица  $L$  принимает вид

$$L(\mathbf{q}) = 1 + 2 \frac{\hat{\mathbf{q}} + \hat{\mathbf{q}}^2}{1 + \mathbf{q}^2}, \quad (13)$$

совпадающий по форме с общим выражением для преобразований трехмерных вращений (см. [4]).

Закон композиции параметров  $\mathbf{q}$  (5) также может быть записан через тензор-параметры  $\hat{\mathbf{q}}$  и  $\hat{\mathbf{q}}^\times$ :

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{q}}'' &= \langle \hat{\mathbf{q}}', \hat{\mathbf{q}} \rangle = \frac{1}{\left| 1 + \frac{1}{2} (\hat{\mathbf{q}} \hat{\mathbf{q}}' + i \hat{\mathbf{q}} \hat{\mathbf{q}}'^\times)_c \right|^2} \times \\ &\times \left\{ \left[ 1 + \frac{1}{2} (\hat{\mathbf{q}} \hat{\mathbf{q}}')_c \right] (\hat{\mathbf{q}}' + \hat{\mathbf{q}} + [\hat{\mathbf{q}}', \hat{\mathbf{q}}]) + \right. \\ &\left. + \frac{1}{2} (\hat{\mathbf{q}} \hat{\mathbf{q}}'^\times)_c (\hat{\mathbf{q}}_1'^\times + \hat{\mathbf{q}}^\times + [\hat{\mathbf{q}}'^\times, \hat{\mathbf{q}}]) \right\}. \end{aligned} \quad (14)$$

Таким образом, параметризацию группы Лоренца можно осуществлять как с помощью комплексного трехмерного вектор-параметра  $\mathbf{q} = (q_a)$ , так и с помощью антисимметричного четырехмерного тензор-параметра  $\hat{\mathbf{q}} = (\hat{q}_{\mu\nu})$ .

2. Выражение для конечных преобразований  $L$  через инфинитезимальные операторы  $J^{\mu\nu}$ , в частности через тензор-параметры  $\hat{q}$  и  $\hat{q}^\times$ , оказывается полезным при построении соответствующих преобразований представлений группы Лоренца.

Так, например, известно, что матрицы  $J^{\mu\nu}(8)$  в пространстве Минковского и инфинитезимальные операторы  $J^{\mu\nu}$  представления группы Лоренца в пространстве Даффина—Кеммера

$$J^{\mu\nu} = \beta^\mu \beta^\nu - \beta^\nu \beta^\mu \quad (15)$$

удовлетворяют одним и тем же перестановочным соотношениям

$$A^a A^b A^c + A^c A^b A^a = \delta_{ab} A^c + \delta_{cb} A^a, \quad (16)$$

где под  $A^a$  подразумеваются  $J^{a4}(J^{a4})$  либо  $\frac{1}{2} \varepsilon_{abc} J^{bc}$  ( $\frac{1}{2} \varepsilon_{abc} J^{bc} = \varepsilon_{abc} \beta^b \beta^c$ ).

Поэтому все  $A^a$  имеют один и тот же минимальный полином  $A(A^2 - 1) = 0$ .

Отсюда следует, что соотношения (9), (10), содержащие инфинитезимальные операторы  $J^{\mu\nu}$  и относящиеся к преобразованиям Лоренца в пространстве Минковского, после замены

$$J^{\mu\nu} = e^{\mu\nu} - e^{\nu\mu} \rightarrow J^{\mu\nu} = \beta^\mu \beta^\nu - \beta^\nu \beta^\mu \quad (17)$$

остаются в силе и для преобразований представления группы Лоренца в пространстве Даффина—Кеммера.

Это означает, что формулы (9), (10) при условии (17) определяют общие выражения  $T(q)$  для конечных преобразований представления группы Лоренца в пространстве Даффина—Кеммера. Нетрудно проверить, что эти выражения совпадают с найденными ранее (см. [5, 8, 9]) для преобразований представления в 5-мерном и 10-мерном пространствах Даффина—Кеммера, используемых для описания частиц со спином 0 и 1.

3. Заметим, что тензор-параметр  $\hat{q}$  (7), отвечающий вектор-параметру малой группы Лоренца [10]

$$q = c + i \frac{[cp]}{p_0}, \quad (18)$$

при наложении на произвольный вещественный вектор  $c$  условия

$$q^2 = c^2 - \left( \frac{[cp]}{p_0} \right)^2 = 1 \quad (19)$$

определяет ковариантный оператор проекции спина

$$\sigma = -i \hat{q} = -\frac{i}{2} \hat{q}_{\mu\nu} J^{\mu\nu} \quad (20)$$

для частицы с 4-импульсом  $p = (p, ip_0)$ , введенный в работах [6], [11], [12].

Между оператором проекции спина, взятым в виде (20), и обычным ковариантным оператором Паули—Любанского (см., например, [7])

$$\sigma = -\frac{1}{2m} \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} p_\mu n_\nu J^{\rho\sigma} = i e_{1\rho} e_{2\sigma} J^{\rho\sigma}, \quad (21)$$

где

$$pn = e_1 e_2 = p e_1 = p e_2 = n e_1 = n e_2 = 0, \quad (22)$$

$$n^2 = e_1^2 = e_2^2 = 1,$$

имеет место взаимно однозначное соответствие. Из сопоставления выражений (20) и (21) следует, что

$$-i \hat{q}_{\mu\nu} = -\frac{1}{m} \varepsilon_{\mu\nu\sigma\rho} p_\sigma n_\rho = i(e_1 \cdot e_2 - e_2 \cdot e_1)_{\mu\nu}, \quad (23)$$

т. е. (см. (18))

$$\mathbf{c} = \frac{1}{m} (p_0 \mathbf{n} - n_0 \mathbf{p}) = [\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2], \quad (24)$$

$$\frac{[\mathbf{c}\mathbf{p}]}{p_0} = \frac{[\mathbf{n}\mathbf{p}]}{m} = i(e_{10} \mathbf{e}_2 - e_{20} \mathbf{e}_1). \quad (25)$$

Это означает, что каждому 4-вектору  $n = (\mathbf{n}, in_0)$ , определяющему при фиксированном  $p$  конкретный выбор оператора  $\sigma$  (21), будет однозначно соответствовать определенный выбор 3-вектора  $\mathbf{c}$ , задающего вид оператора (20). В то время как в случае (21) трехмерное направление, на которое проектируется спин частицы, связано с системой покоя (когда  $n = (\mathbf{n}, in_0) \rightarrow n' = (\mathbf{n}', 0)$ ), для оператора (20) это направление в любой системе отсчета задается трехмерным вектором  $\mathbf{c}$  (см. [11]).

Нетрудно видеть, что из (24) и (25) следуют соотношения

$$\mathbf{c}^2 = \frac{p_0^2}{m^2} - n_0^2, \quad (\mathbf{c}\mathbf{p})^2 = m^2 n_0^2, \quad (26)$$

эквивалентные условию (19).

Следует отметить, что, согласно (19), трехмерный вектор  $\mathbf{c}$  (в отличие от вектора  $\mathbf{n}'$ ) в общем случае не является единичным ( $\mathbf{c}^2 = 1$  при  $\mathbf{p} = 0$  или  $\mathbf{p} \parallel \mathbf{c}$ , т. е. когда  $\mathbf{c} = \mathbf{n}'$  [11]). Благодаря этому обеспечивается ковариантность оператора проекции спина, взятого в виде (20).

4. Использование тензор-параметров  $\hat{q}$  и  $\hat{q}^\times$  оказывается удобным при рассмотрении преобразований, осуществляющих переход от одного 4-вектора к другому,  $Lp = p'$ .

В частности, для простейших плоских преобразований Лоренца (см. [13]) вида ( $p^2 = p'^2 = -m^2 < 0$ )

$$L(p', p) = \left[ 1 - 2 \frac{(p + p') \cdot (p + p')}{(p + p')^2} \right] \left( 1 - 2 \frac{p \cdot p}{p^2} \right) = (1 - 2e' \cdot e')(1 - 2e \cdot e), \quad (27)$$

определяемых вектор-параметром

$$\mathbf{q} = \frac{[\mathbf{p}\mathbf{p}'] + i(p_0 \mathbf{p}' - p_0' \mathbf{p})}{p(p + p')}, \quad (28)$$

в соответствии с (7) (или непосредственно из (3)) будем иметь

$$\hat{q} = \frac{p'_\mu I^{\mu\nu} p_\nu}{p(p + p')} = \frac{p' \cdot p - p \cdot p'}{p(p + p')} = \frac{e' \cdot e - e \cdot e'}{e' e}. \quad (29)$$

Здесь использованы обозначения

$$e = \frac{p}{i|p|}, \quad e' = \frac{p + p'}{i|p + p'|}, \quad (|p|^2 = |p'^2| = -p^2 = m^2), \quad (30)$$

причем  $e^2 = e'^2 = 1$ . Преобразование  $L(p', p) = L(\hat{q})$  (27) может быть записано также в виде (13), поскольку здесь  $\hat{q}\hat{q}^\times = 0$  и (при  $p^2 = p'^2 < 0$ )

$$1 + \mathbf{q}^2 = 1 + \mathbf{q}^{2*} = 1 + \frac{pp'}{p^2} > 0. \quad (31)$$

Рассмотрим произведение двух плоских преобразований типа (27), например  $L(p^0, p) = L(\hat{q}')$  и  $L(p', p^0) = L(\hat{q}'')$ , которые определяются тензор-параметрами (см. (29))

$$\hat{q}' = \frac{p^0 \cdot p - p \cdot p^0}{p(p + p^0)}, \quad \hat{q}'' = \frac{p' \cdot p^0 - p^0 \cdot p'}{p^0(p^0 + p')}, \quad (32)$$

причем  $p^2 = p^{0^2} = p'^2 = -m'$ .

Воспользовавшись законом композиции тензор-параметров (14), который для рассматриваемых плоских преобразований благодаря условию  $\hat{q}' \hat{q}'' \times = 0$  (см. (32) и (11)) принимает простой вид

$$\hat{q} = \langle \hat{q}'', \hat{q}' \rangle = \frac{\hat{q}'' + \hat{q}' + [\hat{q}'', \hat{q}']}{1 + \frac{1}{2} (\hat{q}', \hat{q}'')_c}, \quad (33)$$

легко найти, что преобразованию Лоренца

$$L(p', p^0) L(p^0, p) = L(p', p^0, p) \quad (34)$$

будет соответствовать тензор-параметр (см. (32))

$$\hat{q} = \langle \hat{q}'', \hat{q}' \rangle = \frac{e'' \cdot e' - e' \cdot e''}{e'' e'}, \quad (35)$$

где

$$e' = \frac{p + p^0}{i|p + p^0|}, \quad e'' = \frac{p' + p^0}{i|p' + p^0|}, \quad e'^2 = e''^2 = 1. \quad (36)$$

Отсюда по аналогии с формулами (29) и (27) непосредственно следует, что матрица  $L(p', p^0, p) = L(\langle \hat{q}'', \hat{q}' \rangle)$  (см. (34) (35)) представляет собой плоское преобразование Лоренца и может быть записана в виде

$$L(\hat{q}) = (1 - 2e'' \cdot e'') (1 - 2e' \cdot e'). \quad (37)$$

В силу сказанного выше (см. п. 2) преобразованию Лоренца (37) в пространстве Даффина—Кеммера будет соответствовать преобразование представления [14]

$$T(\hat{q}) = (1 - 2\hat{e}'' \hat{e}'') (1 - 2\hat{e}' \hat{e}'), \quad (38)$$

где использованы обозначения (36), а  $\hat{e} = e_\mu \beta^\mu$ ,  $\beta^\mu$  — матрицы Даффина—Кеммера.

5. Нетрудно установить связь между плоскими преобразованиями и преобразованиями малой группы Лоренца.

Взяв вектор-параметр малой группы (18)

$$\mathbf{q} = \mathbf{c} + i \frac{[\mathbf{c}\mathbf{p}]}{p_0} \quad (39)$$

при  $p = (p, ip_0)$  ( $p^2 = p^2 - p_0^2 < 0$ ) и положив

$$\mathbf{c} = \frac{[\mathbf{nn}']}{1 + nn'}, \quad (40)$$

где 4-векторы  $n$  и  $n'$  удовлетворяют условиям  $pn = n'p = 0$ ,  $n^2 = n'^2 = 1$ , получим (см. (28))

$$q = \frac{[nn'] + i(n_0n' - n'_0n)}{1 + nn'} \quad (41)$$

или (см. (29))

$$\hat{q} = \frac{n' \cdot n - n \cdot n'}{1 + nn'} \quad (42)$$

т. е. выражения для параметров, определяющих плоское преобразование Лоренца.

Аналогичным образом легко видеть, что преобразования малой группы, ось которой (см. [11]) задается пространственно-подобным 4-вектором (например,  $n = (n, in_0)$ ,  $n^2 = n^2 = n_0^2 = 1$ ), при

$$c = \frac{[pp']}{p(p + p')} \quad (43)$$

( $pn = p'n = 0$ ,  $p^2 = p'^2 = -m^2$ ) будет определяться параметрами плоского преобразования, совпадающими с (28) и (29).

Таким образом, произвольное плоское преобразование, связывающее два пространственно-подобных 4-вектора  $n$  и  $n'$  (или два времени-подобных 4-вектора  $p$  и  $p'$ ), можно рассматривать как частный случай преобразования малой группы, осью которой служит любой ортогональный этим векторам времени-подобный 4-вектор  $p$  (или пространственно-подобный 4-вектор  $n$ ).

Очевидно, справедливо и обратное, т. е. любое преобразование малой группы (при любом заданном выборе параметра  $c$ ) всегда может рассматриваться как некоторое плоское преобразование Лоренца соответствующего типа. Это следует из того, что произвольный пространственный поворот, определяемый вектор-параметром  $c$  (см. (37)), всегда может быть отождествлен с соответствующим плоским преобразованием в трехмерном пространстве, которое определяется параметрами типа (40) или (43) (см. [4, 13]).

В частности, выражением указанного соответствия между преобразованиями малой группы и плоскими преобразованиями Лоренца является рассмотренная выше связь между ковариантными операторами проекции спина (20) и (21).

Приведенные соотношения представляют интерес при решении ряда задач релятивистской кинематики и будут использованы в последующих работах.

### Литература

1. Федоров Ф. И. ДАН БССР, 5, 101, 1961.
2. Федоров Ф. И. ДАН БССР, 5, 194, 1961.
3. Федоров Ф. И. ДАН СССР, 143, 56, 1962.
4. Федоров Ф. И. ДАН БССР, 2, 408, 1958.
5. Тхарев Е. Е., Федоров Ф. И. ЯФ, 5, 1112, 1967.
6. Федоров Ф. И., Тхарев Е. Е. ЯФ, 6, 189, 1968.
7. Богуш А. А., Мороз Л. Г. Введение в теорию классических полей. Минск, 1968.
8. Богуш А. А. ДАН БССР, 5, 155, 1961.
9. Богуш А. А., Федоров Ф. И. Весні АН БССР, сер. фіз.-тэхн. навук, № 2, 1962.
10. Федоров Ф. И., Богуш А. А. ДАН БССР, 6, 690, 1962.
11. Федоров Ф. И. Теор. и мат. физика, 2, 342, 1970.
12. Тхарев Е. Е., Федоров Ф. И. ДАН БССР, 14, 212, 1970.
13. Богуш А. А., Федоров Ф. И. ДАН БССР, 5, 241, 1961.
14. Богуш А. А. ДАН БССР, 6, 22, 1962.

Н. В. МАКСИМЕНКО

## АНАЛИТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА АМПЛИТУДЫ КОМПТОН-ЭФФЕКТА НА ДЕЙТРОНЕ

Дейтронному комптон-эффекту на основе представления дейтрона как частицы со спином 1 посвящен ряд работ (см., например, [1—3]). Преимуществом такого подхода является возможность применения теоретико-полевых методов, что позволяет последовательно учесть связанные состояния, дающие вклад в амплитуду дейтронного комптон-эффекта.

В рамках теоретико-полевого подхода в работах [1—3] построена инвариантная спиновая структура амплитуды рассеяния и, кроме того, в работах [2, 3] выписаны одномерные дисперсионные соотношения (при фиксированном угле рассеяния) для 12 скалярных амплитуд, соответствующих независимым спиновым структурам, с помощью которых сделана оценка дифференциального сечения этого процесса.

В настоящей работе исследованы ближайшие особенности амплитуды комптон-эффекта на дейтроне и получены явные выражения для спектральных функций каждой из 12 независимых амплитуд, соответствующих этой диаграмме.

В разделе 1 обсуждается кинематика, амплитуда и сечение дейтронного комптон-эффекта. В разделе 2 исследуются ближайшие особенности амплитуды. Раздел 3 посвящен определению вклада четырехугольной диаграммы в 12 независимых амплитуд комптон-эффекта. В частности, найдены общие выражения для 12 независимых амплитуд, соответствующих треугольной диаграмме, и явный вид этих амплитуд для ее частного случая четырехугольной диаграммы.

1. Кинематика и амплитуда комптон-эффекта на дейтроне. С амплитудой комптон-эффекта на дейтроне тесно связаны следующие три процесса:

$$\text{канал I} \quad \gamma_1 + D_1 \rightarrow \gamma_2 + D_2,$$

$$\text{канал II} \quad \gamma_2 + D_1 \rightarrow \gamma_1 + D_2,$$

$$\text{канал III} \quad \gamma_1 + \gamma_2 \rightarrow \bar{D}_1 + D_2,$$

где  $\gamma_1, \gamma_2$  обозначают фотоны с импульсами  $k_1, k_2$ , а  $D_1, D_2$  — дейтроны с импульсами  $d_1$  и  $d_2$ . Диаграммы этих процессов изображены на рис. 1.

Введем обычные мандельштамовские переменные  $s, t$  и  $u$ , связанные между собой соотношением<sup>\*)</sup>

$$s + t + u = 2D^2, \quad (1)$$

где  $D$  — масса дейтрона.

В лабораторной системе координат для канала I переменные  $s, t$  и  $u$  имеют вид

$$s = D(D + 2k_{10}),$$

<sup>\*)</sup> Метрика  $(ab) = ab + a_4b_4 = ab - a_0b_0$ .

$$t = 2k_{10}k_{20}(\cos \theta - 1), \quad (2)$$

$$u = D(D - 2k_{20}),$$

$$\text{где } k_{20} = \frac{k_{10}}{1 + \frac{k_{10}}{D}(1 - \cos \theta)}$$

Физические области  $s$ ,  $t$  и  $u$  определяются соотношением

$$st \geq -(s - D^2)^2 \quad (3)$$

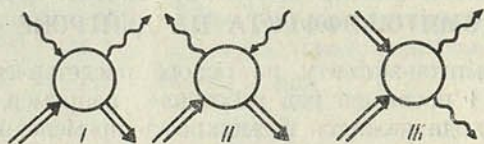


Рис. 1

и, кроме того,

$$\text{для канала I } s > D^2, t \leq 0,$$

$$\text{для канала II } u > D^2, t \leq 0,$$

$$\text{для канала III } t > 4D^2, s < 0, u < 0.$$

Физические области для каждого из трех каналов реакции отмечены на рис. 2 штриховкой.

Запишем  $S$ -матрицу рассматриваемого процесса в виде

$$S = 1 - iT, \quad (4)$$

где

$$T = \frac{1}{(2\pi)^2 \sqrt{16k_{10}k_{20}d_{10}d_{20}}} \delta(k_1 + d_1 - k_2 - d_2) F. \quad (5)$$

Амплитуда  $F$  билинейна по векторам поляризации фотона и дейтрона:

$$\langle \gamma_2 D_2 | F | \gamma_1 D_1 \rangle = e_{2\nu} \varepsilon_{2\sigma} F_{\mu\nu\rho\sigma} \varepsilon_{1\rho} e_{1\mu}, \quad (6)$$

где  $e_2$ ,  $e_1$  — векторы поляризации конечного и начального фотонов

$$(e_2 = \{e^*, ie_0\});$$

$\varepsilon_2$ ,  $\varepsilon_1$  — псевдовекторы поляризации конечного и начального дейтронов

$$(\varepsilon_2 = \{\vec{\varepsilon}^*, ie_0\}).$$

Псевдовектор поляризации дейтрона удовлетворяет следующим соотношениям:

$$d\varepsilon = 0,$$

$$\varepsilon^2 = 1,$$

$$\sum_{\lambda=1}^3 \varepsilon_{\sigma}^{(\lambda)*} \varepsilon_{\rho}^{(\lambda)} = \delta_{\mu\nu} + \frac{d_{\mu} d_{\nu}}{D^2}.$$

В [1, 2] построена матрица  $F_{\mu\nu\rho\sigma}$ , которая удовлетворяет требованиям градиентной инвариантности и инвариантности по отношению к отражению пространства и времени одновременно. Мы будем использовать инвариантную структуру матрицы  $F_{\mu\nu\rho\sigma}$  в виде [2]

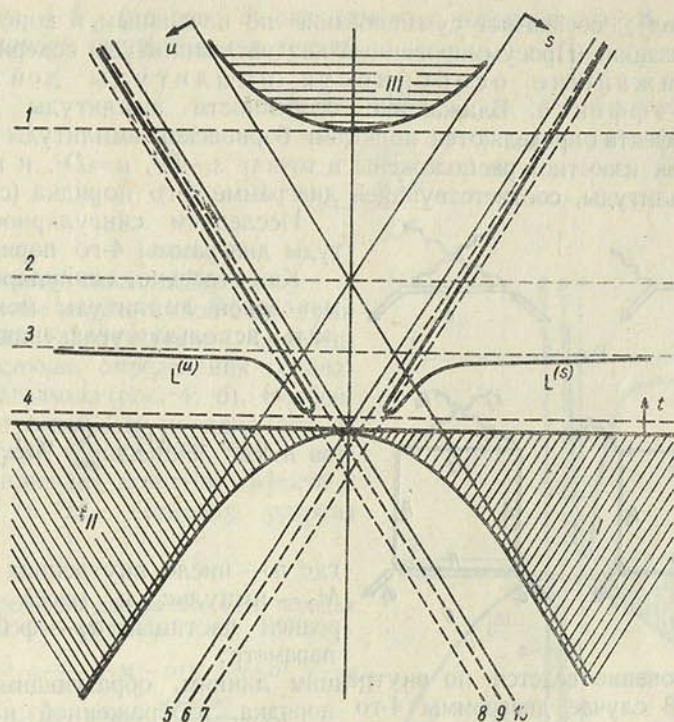


Рис. 2. Плоскость Мандельштама для дейтронного комптон-эффекта:

$$\begin{aligned}
 1-t=4D^2, \quad 2-t=2D^2, \quad 3-t=4M^2, \quad 4-t=\frac{D^2}{M^2}(4M^2-D^2), \quad 5-s=D^2, \quad 6-s= \\
 =4M^2, \quad 7-s=\frac{2M^2D^2}{D^2-2M^2}, \quad 8-u=\frac{2M^2D^2}{D^2-2M^2}, \quad 9-u=4M^2, \quad 10-u=D^2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 F_{\mu\nu\rho\sigma} &= \sum_{i=1}^{12} A_i S_{\mu\nu\rho\sigma}^i = \\
 &= \frac{\Pi_\mu \Pi_\nu}{\Pi^2} [-A_1 \delta_{\rho\sigma} + A_3 Q_\rho Q_\sigma + A_5 K_\rho K_\sigma + A_7 (K_\rho P_\sigma + K_\sigma P_\rho)] + \\
 &+ \frac{L_\mu L_\nu}{L^2} [-A_2 \delta_{\rho\sigma} + A_4 Q_\rho Q_\sigma + A_6 K_\rho K_\sigma + A_8 (K_\rho P_\sigma + K_\sigma P_\rho)] + \quad (7) \\
 &+ \frac{\Pi_\mu L_\nu - \Pi_\nu L_\mu}{\Pi^2 K^2} \left[ A_9 \frac{K_\sigma L_\rho - K_\rho L_\sigma}{Q^2} - A_{10} (P_\sigma L_\rho - L_\sigma P_\rho) \right] + \\
 &+ \frac{\Pi_\mu L_\nu + \Pi_\nu L_\mu}{\Pi^2 K^2} \left[ A_{11} \frac{P_\sigma L_\rho + L_\sigma P_\rho}{Q^2} - A_{12} (L_\rho K_\sigma + K_\rho L_\sigma) \right],
 \end{aligned}$$

где

$$Q = k_1 - k_2 = d_2 - d_1, \quad P = d_1 + d_2, \quad K = k_1 + k_2,$$

$$\Pi = P - \frac{PK}{K^2} K, \quad L_\mu = i \delta_{\mu\nu\rho\sigma} P_\nu K_\rho Q_\sigma.$$

 Дифференциальное сечение для упругого рассеяния неполяризованных  $\gamma$ -квантов на дейтроне в лабораторной системе координат имеет вид

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left( \frac{1}{8\pi D} \right)^2 \left( \frac{k_{20}}{k_{10}} \right)^2 \frac{1}{6} \Sigma |\langle \gamma_2 D_2 | F | \gamma_1 D_1 \rangle|^2. \quad (8)$$

Здесь символ  $\Sigma$  обозначает суммирование по начальным и конечным векторам поляризации. (Просуммированный квадрат амплитуды содержится в [2]).

2. Ближайшие особенности амплитуды дейтронного комптон-эффекта. Ближайшие особенности амплитуды дейтронного комптон-эффекта определяются полюсами борновской амплитуды (см. рис. 3), которые, как известно, расположены в точках  $s=D^2$ ,  $u=D^2$ , и точками ветвления амплитуды, соответствующей диаграмме 4-го порядка (см. рис. 4).

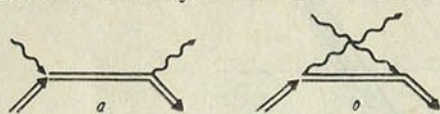


Рис. 3.

Исследуем сингулярности амплитуды диаграммы 4-го порядка.

Как известно, сингулярности фейнмановской амплитуды можно определить, используя уравнения Ландау [4]

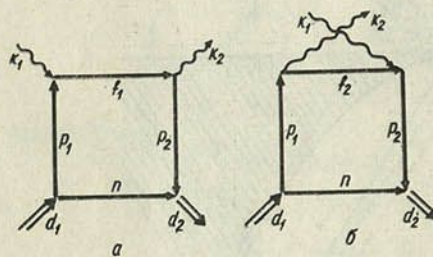


Рис. 4

$$q_i^2 = -M_i^2, \quad \sum_{i=1}^n \alpha_i q_i = 0, \quad (9)$$

где  $n$  — число внутренних линий,  $q_i$  и  $M_i$  — импульс и масса  $i$ -той внутренней частицы;  $\alpha_i$  — фейнмановский параметр.

Суммирование ведется по внутренним линиям, образующим замкнутые контуры. В случае диаграммы 4-го порядка, изображенной на рис. 4, а, уравнения Ландау имеют вид

$$\begin{aligned} p_1^2 = f^2 = p_2^2 = n^2 = -M^2, \\ \alpha_1 p_1 + \alpha_2 f + \alpha_3 p_2 + \alpha_4 n = 0. \end{aligned} \quad (10)$$

Умножая второе из уравнений (10) последовательно на  $p_1$ ,  $f$ ,  $p_2$  и  $n$ , получим систему уравнений для  $\alpha_i$ , необходимым и достаточным условием существования ненулевых решений которой является равенство нулю ее определителя

$$\det q_i q_j = (-1) \frac{t}{16} [ts(s - 4M^2) - 4M^2(s - D^2)^2] = 0, \quad (11)$$

где  $q_i = \{p_1, f, p_2, n\}$ .

Совокупность точек плоскости  $(s, t)$ , удовлетворяющих уравнению (11), образует кривую сингулярностей Ландау (см. рис. 5), задаваемую соотношением

$$t_0 = 4M^2 \frac{(s - D^2)^2}{s(s - 4M^2)}. \quad (12)$$

Асимптотами этой кривой являются прямые  $t=4M^2$  и  $s=4M^2$ .

Кривая сингулярностей Ландау имеет две ветви  $L^{(1)}$  и  $L^{(2)}$ , однако только ветвь  $L^{(1)}$  соответствует физической амплитуде, так как только в этом случае все  $\alpha_i$  удовлетворяют необходимому условию  $0 \leq \alpha_i \leq 1$ . Следует заметить, что  $L^{(1)}$  близко подходит к физической области процесса

$\gamma_1 + D_1 \rightarrow \gamma_2 + D_2$  (на рис. 5 она отмечена штриховкой). В самом деле, минимум кривой расположен в точке

$$t_m \approx 16M\epsilon, \quad (13)$$

$$s_m = \frac{2M^2}{1 - \frac{2M^2}{D^2}},$$

где  $\epsilon$  — энергия связи дейтрона.

Вследствие перекрестной симметрии аналогичные рассуждения справедливы и в случае определения особенностей диаграммы (рис. 4, б). Особенности диаграммы 4-го порядка (рис. 4) соответствуют ближайшим точкам ветвления амплитуды комптон-эффекта в каналах I и II. Поэтому разрезы

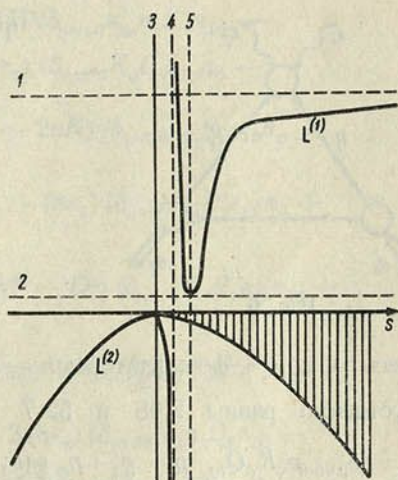


Рис. 5. Особенности диаграммы 4-го порядка  $s$ -канала:

$$1-t=4M^2, \quad 2-t = \frac{D^2}{M^2} (4M^2 - D^2), \quad 3-s=D^2, \quad 4-s = 4M^2, \quad 5-s = \frac{2M^2 D^2}{D^2 - 2M^2}$$

на плоскостях комплексных переменных  $s$ ,  $u$  и  $t$  для вышеуказанной амплитуды начинаются для первого канала (как следует из уравнения Ландау) в точках  $s=4M^2$ ,  $t=t_0(s)$ , а для второго — в точках  $u=4M^2$ ,  $t=t_0(u)$  соответственно. (Особенности прямой и перекрестной диаграмм изображены на рис. 2).

3. Спектральные функции амплитуд  $A_i$ , соответствующие диаграмме 4-го порядка. Как отмечено в работе [2], независимые амплитуды  $A_i$  (см. (7)) кроме динамических сингулярностей содержат также и кинематические. В амплитуде комптон-эффекта на дейтроне, учитывающей диаграммы вплоть до 4-го порядка, можно явно выделить и затем устранить кинематические особенности, если найти в явном виде спектральные функции амплитуд  $A_i$ , соответствующих четырехугольной диаграмме. Кроме того, поведение этих спектральных функций при  $s \rightarrow \infty$  и  $t \rightarrow \infty$  легко устанавливается из их явного вида, а это в свою очередь позволяет судить о поведении амплитуды в целом при  $s \rightarrow \infty$  и  $t \rightarrow \infty$ .

Для определения явного вида независимых амплитуд  $A_i$ , соответствующих четырехугольной диаграмме (см. рис. 4), рассмотрим треугольную диаграмму (см. рис. 6), в которой как частный случай содержится диаграмма 4-го порядка.

Соответствующая ей амплитуда имеет вид

$$T_{VD} = \frac{-i}{(2\pi)^4} \int d^4n \frac{\mathfrak{M}}{D_0 D_1 D_2}. \quad (14)$$

Здесь  $D_0 = n^2 + M^2$ ,  $D_1 = p_1^2 + M^2$ ,  $D_2 = p_2^2 + M^2$ ,

$$\mathfrak{M} = \text{Sp} \{ \Gamma_2 (M - i\hat{p}_2) T_{VN} (M - i\hat{p}_1) \Gamma_1 (M + i\hat{n}) \}, \quad (14a)$$

$\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$  — матричные функции, описывающие  $n-p-d$ -вершины,  $T_{\gamma N}$  — матрица комптон-эффекта на нуклоне,  $\hat{\rho} = \rho_\mu \gamma_\mu$ ,  $\gamma_\mu$  — матрица Дирака.

В дальнейшем нам понадобятся выражения для  $\Gamma_1$ ,  $\Gamma_2$  и  $T_{\gamma N}$  лишь в специальном случае, когда импульсы  $p_1$ ,  $p_2$  и  $n$  лежат на массовой оболочке. Согласно [7, 5], они имеют вид

$$\Gamma_1 = i\hat{\varepsilon}_1 A - (n\varepsilon_1) B, \quad \Gamma_2 = i\hat{\varepsilon}_2 A - (n\varepsilon_2) B, \quad (15)$$

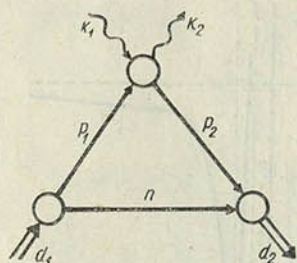


Рис. 6

$$\begin{aligned} T_{\gamma N} = & \frac{(e_2\pi)(e_1\pi)}{\pi^2} \left( T_1 - \frac{1}{2} i\hat{K}T_2 \right) + \\ & + \frac{(e_2N)(e_1N)}{N^2} \left( T_3 - \frac{1}{2} i\hat{K}T_4 \right) - \\ & - \frac{(e_2\pi)(e_1N) - (e_2N)(e_1\pi)}{\sqrt{\pi^2 N^2}} i\gamma_5 T_5 - \\ & - \frac{(e_2\pi)(e_1N) + (e_2N)(e_1\pi)}{\sqrt{\pi^2 N^2}} \frac{1}{2} \gamma_5 \hat{K} T_6. \end{aligned} \quad (16)$$

Здесь  $A$  и  $B$  — формфакторы  $n-p-d$ -вершинных функций, которые соответственно равны 2,08 и 52,7  $(\text{Гэв})^{-1}$ ,  $K = k_1 + k_2$ ,  $\pi = p - \frac{pK}{K^2} K$ ,  $N_\mu = i\delta_{\mu\nu\rho\sigma} p_\nu K_\rho Q_\sigma$ ,  $p = p_1 + p_2 = (d_1 + d_2) - 2n$ ,  $Q = k_1 - k_2$ . Подставив (15) и (16) в формулу (14а) и вычислив след, получим

$$\begin{aligned} \mathfrak{M} = & \frac{(e_2\pi)(e_1\pi)}{\pi^2} \sum_{j=1}^3 \sum_{i=1}^2 C_j T_i R_{ij} + \frac{(e_2N)(e_1N)}{N^2} \sum_{j=1}^3 \sum_{i=3}^4 C_j T_i R_{ij} - \\ & - \frac{(e_2\pi)(e_1N) - (e_2N)(e_1\pi)}{\sqrt{\pi^2 N^2}} T_5 \sum_{j=1}^2 C_j R_{5j} - \\ & - \frac{(e_2\pi)(e_1N) + (e_2N)(e_1\pi)}{\sqrt{\pi^2 N^2}} T_6 \sum_{j=1}^3 C_j R_{6j}. \end{aligned} \quad (17)$$

Здесь  $C_1 = A^2$ ,  $C_2 = AB$ ,  $C_3 = B^2$ , а функции  $R_{ij}$  имеют вид

$$\begin{aligned} R_{11} = R_{31} = & 4M \left\{ - \left( D^2 - \frac{1}{2} K^2 \right) (\varepsilon_2 \varepsilon_1) + 4(n\varepsilon_1)(n\varepsilon_2) - (d_2 \varepsilon_1)(d_1 \varepsilon_2) \right\}, \\ R_{12} = R_{32} = & 4 \left\{ (8M^2 + Q^2)(n\varepsilon_1)(n\varepsilon_2) - \frac{D^2}{2} (d_2 \varepsilon_1)(n\varepsilon_2) - \frac{D^2}{2} (d_1 \varepsilon_2)(n\varepsilon_1) \right\}, \\ R_{13} = R_{33} = & 4M \left[ (4M^2 - D^2) + \frac{1}{2} Q^2 \right] (n\varepsilon_1)(n\varepsilon_2), \\ R_{21} = R_{41} = & D^2 (PK)(\varepsilon_2 \varepsilon_1) - (Q^2 + 2D^2)(nK)(\varepsilon_2 \varepsilon_1) - D^2 (d_2 \varepsilon_1)(K\varepsilon_2) - \\ & - D^2 (d_1 \varepsilon_2)(K\varepsilon_1) + Q^2 (K\varepsilon_2)(n\varepsilon_1) + Q^2 (K\varepsilon_1)(n\varepsilon_2) + 8(nK)(n\varepsilon_1)(n\varepsilon_2) - \\ & - 4(PK)(n\varepsilon_1)(n\varepsilon_2) - 2(nK)(d_2 \varepsilon_1)(d_1 \varepsilon_2) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + (PK) (d_1 \varepsilon_2) (n \varepsilon_1) + (PK) (d_2 \varepsilon_1) (n \varepsilon_2), \\
R_{22} = R_{42} = & 16 (nK) (n \varepsilon_1) (n \varepsilon_2) + Q^2 (n \varepsilon_2) (K \varepsilon_1) + Q^2 (n \varepsilon_1) (K \varepsilon_2) + \\
& + (PK) (d_2 \varepsilon_1) (n \varepsilon_2) + (PK) (d_1 \varepsilon_2) (n \varepsilon_1) - 8 (PK) (n \varepsilon_1) (n \varepsilon_2), \quad (18) \\
R_{23} = R_{43} = & [(4M^2 - D^2) (2nK - PK) - Q^2 (nK)] (n \varepsilon_1) (n \varepsilon_2), \\
R_{51} = & 2Mi \delta_{\mu\nu\rho\sigma} \varepsilon_{2\mu} Q_\nu P_\rho \varepsilon_{1\sigma}, \\
R_{52} = & 2 \{ i \delta_{\mu\nu\rho\sigma} \varepsilon_{1\mu} Q_\nu P_\rho n_\sigma (n \varepsilon_2) - i (n \varepsilon_1) \delta_{\mu\nu\rho\sigma} \varepsilon_{2\mu} Q_\nu P_\rho n_\sigma \}, \\
R_{61} = & 2M^2 i \delta_{\mu\nu\rho\sigma} \varepsilon_{2\mu} P_\nu K_\rho \varepsilon_{1\sigma} - 2M^2 i \delta_{\mu\nu\rho\sigma} \varepsilon_{2\mu} n_\nu K_\rho \varepsilon_{1\sigma} - \\
& - (n \varepsilon_2) i \delta_{\mu\nu\rho\sigma} K_\mu P_\nu \varepsilon_{1\rho} n_\sigma + (n \varepsilon_2) i \delta_{\mu\nu\rho\sigma} K_\mu Q_\nu \varepsilon_{1\rho} n_\sigma - \\
& - (K \varepsilon_2) i \delta_{\mu\nu\rho\sigma} \varepsilon_{1\mu} Q_\nu P_\rho n_\sigma + \frac{1}{2} (PK - 2nK) i \delta_{\mu\nu\rho\sigma} \varepsilon_{2\mu} P_\nu \varepsilon_{1\rho} n_\sigma - \\
& - \frac{1}{2} (PK - 2nK) i \delta_{\mu\nu\rho\sigma} \varepsilon_{2\mu} Q_\nu \varepsilon_{1\rho} n_\sigma + (n \varepsilon_1) i \delta_{\mu\nu\rho\sigma} K_\mu P_\nu \varepsilon_{2\rho} n_\sigma + \\
& + 3 (n \varepsilon_1) i \delta_{\mu\nu\rho\sigma} K_\mu Q_\nu \varepsilon_{2\rho} n_\sigma + \frac{1}{2} (2M^2 - D^2) i \delta_{\mu\nu\rho\sigma} K_\mu P_\nu \varepsilon_{2\rho} \varepsilon_{1\sigma} + \\
& + \frac{1}{2} (2M^2 - D^2) i \delta_{\mu\nu\rho\sigma} K_\mu Q_\nu \varepsilon_{2\rho} \varepsilon_{1\sigma} + (n \varepsilon_1) i \delta_{\mu\nu\rho\sigma} K_\mu Q_\nu P_\rho \varepsilon_{2\sigma}, \\
R_{62} = & M \{ (n \varepsilon_2) i \delta_{\mu\nu\rho\sigma} K_\mu Q_\nu P_\rho \varepsilon_{1\sigma} + 2 (n \varepsilon_2) i \delta_{\mu\nu\rho\sigma} K_\mu n_\nu Q_\rho \varepsilon_{1\sigma} - \\
& - (n \varepsilon_1) i \delta_{\mu\nu\rho\sigma} \varepsilon_{2\mu} Q_\nu P_\rho K_\sigma - 2 (n \varepsilon_1) i \delta_{\mu\nu\rho\sigma} \varepsilon_{2\mu} n_\nu Q_\rho K_\sigma + \\
& + 2 (n \varepsilon_2) i \delta_{\mu\nu\rho\sigma} P_\mu K_\nu \varepsilon_{1\rho} n_\sigma + 2 (n \varepsilon_1) i \delta_{\mu\nu\rho\sigma} \varepsilon_{2\mu} K_\nu P_\rho n_\sigma \}, \\
R_{63} = & 2 (n \varepsilon_1) (n \varepsilon_2) i \delta_{\mu\nu\rho\sigma} Q_\mu K_\nu P_\rho n_\sigma.
\end{aligned}$$

Формулы (17) и (18) справедливы при описании амплитуды комптон-эффекта на нуклоне в любом приближении в частном случае, когда в амплитуде комптон-эффекта на нуклоне учитываются только однонуклонные полюсные диаграммы, амплитуда (14) будет соответствовать сумме диаграмм (см. рис. 7).

В этом случае  $T_i$  имеют вид [5]

$$T_i = r_i \left( \frac{1}{f_1^2 + M^2} + \frac{\eta_i}{f_2^2 + M^2} \right). \quad (19)$$

Здесь индекс  $i$  пробегает значения от 1 до 6, а величины  $r_i$  равны

$$\eta_i = \begin{cases} +1 & \text{для } i=1, 3, 5, 6, \\ -1 & \text{для } i=2, 4, \end{cases}$$

$$r_1 = -2e^2 M \frac{1 + \tau_3}{2},$$

$$r_2 = e^2 \frac{1 + \tau_3}{2},$$

$$r_3 = 0,$$

$$r_4 = e^2 \left[ (1 + \lambda_p)^2 \frac{1 + \tau_3}{2} + \frac{1 - \tau_3}{2} \lambda_n^2 \right],$$

$$r_5 = e^2 M (1 + \lambda_p) \frac{1 + \tau_3}{2},$$

$$r_6 = -e^2 (1 + \lambda_p) \frac{1 + \tau_3}{2},$$

где  $e$  — электромагнитная константа связи,  $\lambda_p = 1,79$ ,  $\lambda_n = -1,91$ .

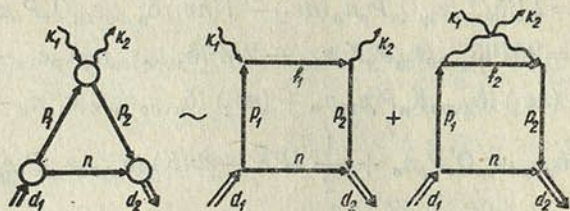


Рис. 7

Рассмотрим амплитуду  $T_{\gamma D}^{(1)}$ , соответствующую первой четырехугольной диаграмме на рис. 7.

$$T_{\gamma D} = \frac{i}{(2\pi)^4} \int d^4 n \frac{\mathfrak{M}^{(1)}}{D_0 D_1 D_2 D_{f_1}}, \quad (20)$$

где  $D_{f_1} = f_1^2 + M^2$ .

Воспользовавшись правилом Кутковского [6], определим мандельштамовскую спектральную функцию амплитуды  $T_{\gamma D}^{(1)}$  (т. е. скачок скачка, обусловленный сингулярностью Ландау). Она задается функцией (20), в которой сделана замена

$$\frac{1}{q_i^2 + M^2} \rightarrow 2\pi i \delta(q_i^2 + M^2),$$

т. е. совершен переход к выражению, в котором все внутренние частицы с импульсами  $n$ ,  $p_1$ ,  $p_2$  и  $f_1$  лежат на массовой оболочке.

Осуществив преобразования

$$d^4 n \rightarrow dn^2 dp_1^2 dp_2^2 df_1^2 \quad (21)$$

с помощью якобиана

$$J = 2^4 \sqrt{\det q_i q_j} \quad (22)$$

и проинтегрировав по  $q_i^2$ , получим

$$\Delta F = -4\rho(s, t) = \begin{cases} (-1) \left[ \frac{\mathfrak{M}^{(1)}}{2^4 \sqrt{\det q_i q_j}} \right]_{q_i^2 = -M^2} & \text{для } t > t_0, s > 4M^2, \\ 0 & \text{для всех других значений } s \text{ и } t. \end{cases} \quad (23)$$

Определитель  $\det q_i q_j$  в точности равен левой части уравнения (11), а  $\mathfrak{M}^{(1)}$  определяется выражением (17), если в нем сделать замену  $T_i \rightarrow r_i$ .

Выразим теперь внутренний импульс  $n$ , содержащийся в  $\Delta F$  (23), через внешние импульсы. Импульс  $n$  является линейной комбинацией взаимно независимых векторов  $P, Q, K$  и  $N$ .

$$n = \alpha K + \beta P + \gamma Q + \delta N, \quad (24)$$

где  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\delta$  и  $\gamma$  — функции переменных  $s$  и  $t$ .

Умножая последовательно выражение (24) на  $K$ ,  $P$  и  $Q$  и решая систему уравнений относительно  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\gamma$ , получим

$$\begin{aligned} \gamma &= 0, \\ \alpha &= \frac{1}{4} \frac{st - 4D^2(s - D^2)}{st + (D^2 - s)^2}, \\ \beta &= \frac{1}{4} \frac{st + 2(D^2 - s)^2}{st + (D^2 - s)^2}. \end{aligned} \quad (25)$$

В частности, когда  $s$  и  $t$  лежат на кривой сингулярностей Ландау, формула (24) дает импульс Ландау для диаграммы 4-го порядка, который следует из уравнения (10). Подставив (24) в формулу (23), выразим спектральную функцию  $\rho_{\mu\nu\rho\sigma}$  только через внешние импульсы  $Q$ ,  $\Pi$ ,  $L$  и  $K$ . Это дает возможность представить ее в виде суммы 12 спектральных функций, соответствующих выбранным выше независимым спиновым структурам:

$$\rho_{\mu\nu\rho\sigma} = \sum_{i=1}^{12} \rho_i S_{\mu\nu\rho\sigma}^i. \quad (26)$$

Здесь (в случае  $\delta = 0$ )

$$\rho_{1,2} = (-1) [r_{1,3} A^2 2M(t - 2D^2) - r_{2,4} A^2 st] \Delta(s, t), \quad (27)$$

$$\begin{aligned} \rho_{3,4} &= \{r_{1,3} A^2 4M(1 - 4\beta^2) + r_{1,3} AB4(\beta D^2 - \beta^2 8M^2 + \beta^2 K^2) - \\ &- r_{1,3} B^2 2M\beta^4 [2(4M^2 - D^2) - t] + r_{2,4} A^2 [-2\beta(PK) + 2(D^2 - s) - 4\beta^2 t] - \\ &- r_{2,4} ABM [2\beta(PK) + 8\beta^2 t] + r_{2,4} B^2 \beta^2 t (s - 4M^2)\} \Delta(s, t), \end{aligned} \quad (28)$$

$$\begin{aligned} \rho_{5,6} &= \{r_{1,3} A^2 16M\alpha^2 + r_{1,3} AB4\alpha^2 (8M^2 - t) + \\ &+ r_{1,3} B^2 2M\alpha_2 [2(4M^2 - D^2) - t] + r_{2,4} A^2 (4\alpha^2 t - 2\alpha t) + \\ &+ r_{2,4} ABM (8t\alpha^2 - 2t\alpha) - r_{2,4} B^2 \alpha^2 t (s - 4M^2)\} \Delta(s, t), \end{aligned} \quad (29)$$

$$\begin{aligned} \rho_{7,8} &= \left\{ r_{1,3} A^2 16M\alpha\beta + r_{1,3} AB4 \left( 8M^2\alpha\beta - \alpha\beta t - \alpha \frac{D^2}{2} \right) + \right. \\ &+ r_{1,3} B^2 2M\alpha\beta [2(4M^2 - D^2) - t] + r_{2,4} A^2 [\alpha(PK) + 4\alpha\beta t - \beta^2 t - D^2] + \\ &\left. + r_{2,4} ABM [\alpha(PK) - \beta t + 8t\alpha\beta] - r_{2,4} B^2 \alpha\beta t (s - 4M^2) \right\} \Delta(s, t), \end{aligned} \quad (30)$$

$$\frac{\rho_9}{Q^2} = \frac{1}{P^2 K^2 - (PK)^2} (\rho_{10}^*(PK) + \rho_9^* P^2), \quad (31)$$

$$\rho_{10} = \frac{1}{P^2 K^2 - (PK)^2} (\rho_9^*(PK) + \rho_{10}^* K^2), \quad (32)$$

$$\frac{\rho_{11}}{K^2} = \left\{ r_6 A^2 \frac{1}{2} (4\beta^2 - \beta) + r_6 ABM (2\beta^2 - \beta) \right\} \Delta(s, t), \quad (33)$$

$$\rho_{12} = \{r_6 A^2 (2\alpha\beta - \alpha) + r_6 ABM (2\alpha\beta - \alpha)\} \Delta(s, t), \quad (34)$$

где

$$\rho_9^* = (-1) \{-r_5 A^2 2M + r_5 2AB(\alpha^2 t + \alpha\beta(PK))\} \Delta(s, t), \quad (35)$$

$$\rho_{10}^* = 2r_5 AB [\alpha^2 (PK) + \alpha\beta P^2] \Delta(s, t), \quad (36)$$

$$\Delta(s, t) = \frac{1}{4} \frac{1}{2^4 \sqrt{\det q_i q_j}}.$$

Так как амплитуда комптон-эффекта на дейтроне инвариантна относительно перекрестной симметрии, то  $\rho_i(u, t)$  получается из  $\rho_i(s, t)$  заменой  $s \rightarrow u$ .

Функции  $\rho_9$  и  $\rho_{10}$  содержат кинематические особенности типа  $\frac{1}{-4[(D^2-s)^2 + t^2]}$ . Для их устранения достаточно структуру, стоящую при  $\frac{\Pi_\mu L_\nu - L_\mu \Pi_\nu}{\sqrt{\Pi^2 L^2}}$ , заменить структурой вида [2]

$$\begin{aligned} & \frac{A_9^*}{K^2 \Pi^2} [P^2 (K_\sigma L_\rho - K_\rho L_\sigma) - (PK) (P_\sigma L_\rho - L_\sigma P_\rho)] + \\ & + \frac{A_{10}^*}{K^2 \Pi^2} [(PK) (K_\sigma L_\rho - K_\rho L_\sigma) - K^2 (P_\sigma L_\rho - L_\sigma P_\rho)]. \end{aligned}$$

При этом амплитудам  $A_9^*$  и  $A_{10}^*$  будут соответствовать не содержащие особенностей спектральные функции  $\rho_9^*$  и  $\rho_{10}^*$ , которые приведены в выражениях (35) и (36).

Автор выражает благодарность участникам семинара лаборатории теоретической физики за полезное обсуждение и ценные замечания.

### Литература

1. Мороз Л. Г. Вестн АН БССР, сер. физ.-мат. наук, № 4, 1967.
2. Rokorski S. Bull. l'Acad. Polon. Sci., 14, 171, 215, 1966.
3. Rokorski S. Acta Physica Polonica, 33, 929, 1968.
4. Ландау Л. Д. ЖЭРФ, 37, 62, 1959.
5. Фильков Л. В. Труды Физ. Института АН СССР, 41, 3, 1968.
6. Cutkosky R. E. J. Math. Phys., 1, 429, 1960.
7. Chahoud J. N. et al. Nuovo Cimento, 56A, 838, 1968.
8. Bellac M. et al. Nuovo Cimento, 33, 594; 34, 450, 1964.

Институт физики  
АН БССР

Поступило в редакцию  
12.III 1970

А. П. ИВАНОВ

### ТЕПЛОВОЙ СТАЦИОНАРНЫЙ РЕЖИМ В ПЛОСКОПАРАЛЛЕЛЬНОМ СВЕТОРАССЕИВАЮЩЕМ СЛОЕ

Анализ теплового режима в рассеивающих средах имеет интерес для различных научных и прикладных дисциплин. Несмотря на ряд публикаций [1—9], данный вопрос остается далеким от разрешения.

Если среда представляет собой совокупность частиц, находящихся в вакууме или любом слаботеплопроводном материале, то процесс переноса тепла, как правило, осуществляется только за счет радиационного механизма. Рассмотрим тепловой режим в плоскопараллельном светорассеивающем и поглощающем слое, осуществляющийся вследствие лучистого теплообмена.

Пусть слой имеет бесконечную ширину, а по толщине  $x_0$  ограничен двумя безгранично протяженными пластинами, нагретыми до температур  $T_1$  и  $T_2$ . Считаем, что оптические характеристики не зависят от температуры и остаются постоянными в любой точке среды. Полагаем также вначале, что процессы рассеяния и поглощения не являются функциями длины волны света, т. е. слои и пластины рассматриваем как серые тела.

Вследствие собственного теплового фона и излучения пластин в слое на любой глубине  $x$  будет существовать определенное световое поле, которое можно характеризовать величиной  $E_1(x) + E_2(x)$ . Здесь  $E_1(x)$  — освещенность на мысленно выделенной площадке, параллельной поверхностям слоя, со стороны, где расположена пластина, нагретая до температуры  $T_1$ , а  $E_2(x)$  — освещенность на той же площадке с противоположной стороны.

Рассмотрим бесконечно тонкий слой толщины  $dx$  на глубине  $x$ . За время  $dt$  в расчете на единицу поверхности им будет поглощена энергия

$$d^2W_{\text{погл}} = (E_1 + E_2) k dx dt \quad (1)$$

и испущена в обе стороны энергия

$$d^2W_{\text{исп}} = 2k\sigma T^4 dx dt, \quad (2)$$

где  $k$  — константа поглощения слоя единичной толщины, а  $\sigma$  — постоянная Стефана—Больцмана. Очевидно, разница между поглощенной и испущенной энергиями перейдет в тепло

$$d^2Q = c\rho dx dT. \quad (3)$$

Здесь  $c$  и  $\rho$  — соответственно удельная теплоемкость и плотность слоя,  $dT$  — изменение температуры в слое  $dx$  за время  $dt$ . Следует подчеркнуть, что  $k$ ,  $c$ ,  $\rho$  представляют собой некие феноменологические характеристики слоя, а не отдельных его компонент (рассеивающих частиц и среды, связующей их).

Учитывая (1), (2), (3), находим

$$\frac{dT}{dt} = \frac{k}{c\rho} (E_1 + E_2 - 2\sigma T^4). \quad (4)$$

Перейдем к рассмотрению светового баланса бесконечно тонкого слоя. Поскольку его коэффициент отражения  $r(dx) = sdx$ , а коэффициент пропускания  $t(dx) = 1 - (s + k) dx$ , где  $s$  — константа отражения слоя единичной толщины, то нетрудно показать, что

$$\begin{aligned} \frac{dE_1}{dx} &= -(s + k) E_1 + sE_2 + k\sigma T^4, \\ \frac{dE_2}{dx} &= -sE_1 + (s + k) E_2 - k\sigma T^4. \end{aligned} \quad (5)$$

В рамках двухпоточкового приближения [10], если считать угловую структуру светового поля неизменной по глубине, параметры  $s$  и  $k$  не зависят от  $x$ . Анализ системы уравнений (4), (5) в совокупности с начальными и граничными условиями позволяет в принципе проследить кинетику температурного и светового режима среды. Однако аналитические решения указанной системы в нестационарном режиме получить не удается.

Целью настоящей работы является исследование стационарного теплового режима, когда  $dT/dt = 0$ .

В этом случае вместо уравнений (4), (5) можно написать

$$\begin{aligned} \text{а) } E_1 + E_2 &= 2\sigma T^4, \\ \text{б) } (E_1 + E_2)'_x &= -(2s + k) (E_1 - E_2), \\ \text{в) } (E_1 - E_2)'_x &= 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Интегрируя (6 б, в), получаем

$$\begin{aligned} E_1 - E_2 &= c_1, \\ E_1 - E_2 &= -(2s + k) c_1 x + c_2. \end{aligned} \quad (7)$$

Постоянные интегрирования  $c_1$  и  $c_2$  могут быть найдены из граничных условий:

при  $x = 0$

$$\sigma T_1^4 (1 - R_1) - E_2(0) (1 - R_1) = c_1,$$

$$\sigma T_1^4 (1 - R_1) + E_2(0) (1 + R_1) = c_2,$$

а при  $x = x_0$

$$E_1(x_0) (1 - R_2) - (1 - R_2) \sigma T_2^4 = c_1,$$

$$E_1(x_0) (1 + R_2) + (1 - R_2) \sigma T_2^4 = -(2s + k) x_0 c_1 + c_2.$$

Здесь  $R_1$  и  $R_2$  — коэффициенты отражения пластин, имеющих соответственно температуры  $T_1$  и  $T_2$ .

Определив  $c_1$  и  $c_2$ , находим

$$\begin{aligned} E_1 + E_2 = 2\sigma T^4 &= \frac{2\sigma (L_1 L_2 - L_1 - L_2) (T_2^4 - T_1^4) x}{L_1 L_2 x_0} + \\ &+ 2\sigma T_1^4 - 2\sigma \frac{T_1^4 - T_2^4}{L_1}. \end{aligned} \quad (8)$$

В (8)

$$L_1 = \gamma_1 (2s + k) x_0 + \gamma_1 / \gamma_2 + 1, \quad L_2 = \gamma_2 (2s + k) x_0 + \gamma_1 / \gamma_2 + 1,$$

$$\gamma_1 = \frac{1 - R_1}{1 + R_1}, \quad \gamma_2 = \frac{1 - R_2}{1 + R_2}. \quad (9)$$

Гершуном [11] было показано, что константы  $s$  и  $k$  выражаются через характеристики элементарного объема, вводимые в теории переноса, следующим образом:

$$s = \frac{\varphi g}{\eta}, \quad k = \frac{\alpha}{\eta}. \quad (10)$$

Здесь  $g$  и  $\alpha$  — показатели рассеяния и поглощения;  $\bar{\eta}$  — средний косинус угла наклона пучков света, падающих на площадку, расположенную на глубине  $x$  и параллельную поверхности слоя;  $\varphi$  — доля света, отраженная назад элементарным слоем при его одностороннем освещении.

Из результатов исследований, опубликованных в [12], вытекает, что если положить  $\bar{\eta} = 0,5$ ,  $\varphi = \frac{3-x_1}{8}$ , где

$$x_1 = \frac{3}{2} \int_{-1}^1 x(\gamma) \cos \gamma d(\cos \gamma)$$

— первый коэффициент в разложении индикатрисы рассеяния  $x(\gamma)$  элементарного объема по полиномам Лежандра ( $\gamma$  — угол рассеяния), то данные двухпоточкового приближения и строгого расчета отличаются друг от друга не более чем на несколько процентов. С такими расхождениями в теплотехнических расчетах можно, как правило, мириться. Поэтому, учитывая сказанное, вместо (9) напишем

$$\begin{aligned} L_1 &= \gamma_1 \tau_0 \frac{4 - \Lambda(x_1 + 1)}{2} + \frac{\gamma_1}{\gamma_2} + 1, \\ L_2 &= \gamma_2 \tau_0 \frac{4 - \Lambda(x_1 + 1)}{2} + \frac{\gamma_1}{\gamma_2} + 1. \end{aligned} \quad (11)$$

В формуле (11)  $\Lambda = \frac{g}{g + \alpha}$  — вероятность выживания фотона, а  $\tau_0 = (g + \alpha) x_0$  — оптическая толщина слоя.

Как видно из (8), плотность излучения светового поля не зависит от удельной теплоемкости и плотности среды. Уравнение  $E_1 + E_2 = f(\tau)$  всегда описывает прямолинейную зависимость.

Соотношение (8) можно использовать также для анализа распределения температуры по слою, если  $\Lambda < 1$ . В случае, когда  $\Lambda = 1$ , среда не поглощает электромагнитное излучение и сохраняет начальное распределение температуры, поскольку теплопроводность и конвекция отсутствуют. Тогда в (8) нельзя говорить о равенстве  $E_1 + E_2$  величине  $2\sigma T^4$  и указанную формулу можно использовать только для определения плотности излучения светового поля, возникшего за счет многократного рассеяния потоков, испускаемых двумя пластинами.

Рассмотрим светимость и температуру слоя у его поверхностей. Нетрудно убедиться, что при  $x = 0$  подходящий к пластине поток характеризуется величиной

$$E_2(0) = \sigma T_1^4 - \frac{c_1}{1 - R_1} = \sigma T_1^4 - \frac{2\sigma(T_1^4 - T_2^4)}{(1 + R_1)L_1}, \quad (12)$$

а температура

$$T^4(0) = T_1^4 - \frac{T_1^4 - T_2^4}{L_1}. \quad (13)$$

При  $x = x_0$

$$E_1(x_0) = \sigma T_2^4 + \frac{c_1}{1 - R_2} + \sigma T_2^4 + \frac{2\sigma(T_1^4 - T_2^4)}{(1 + R_2)L_2}, \quad (14)$$

$$T^4(x_0) = T_2^4 + \frac{T_1^4 - T_2^4}{L_2}. \quad (15)$$

Из формул (13) и (15) видно, что при отсутствии теплопроводности температура слоя у пластин не равна температуре самих пластин. Кроме того, если  $R_1 \neq R_2$ , то  $T^4(0) + T^4(x_0) \neq T_1^4 + T_2^4$ . Это связано с влиянием на плотность излучения светового поля у каждой поверхности слоя потоков радиации, испускаемых обеими пластинами. Если  $\tau_0$  достаточно велико, то указанное взаимное влияние исчезает, и, как следует из (11) и (12),  $T(0) = T_1$ ,  $T(x_0) = T_2$ . При вытягивании индикатрисы рассеяния  $x(\gamma)$  элементарного объема «вперед» (росте  $x_1$ ) или увеличении вероятности выживания фотона разница между температурами пластины и поверхности слоя возрастает.

Характерно, что если одна из пластин абсолютно отражающая ( $R = 1$ ), то, как видно из (8), в любой точке среды установится температура, равная температуре другой пластины.

Когда  $R_1 = R_2$ , то  $L_1 = L_2$  и разница температур пластины и среды у одной поверхности слоя равна разнице температур у другой (поверхности с противоположным знаком).

Если  $R_1 = R_2 = 0$ , то большинство приведенных формул упрощается. В частности, вместо (12)–(15) можно написать

$$E_2(0) = \sigma T_1^4 - \frac{4\sigma(T_1^4 - T_2^4)}{[4 - \Lambda(x_1 + 1)]\tau_0 + 4},$$

$$T^4(0) = T_1^4 - \frac{2(T_1^4 - T_2^4)}{[4 - \Lambda(x_1 + 1)]\tau_0 + 4}, \quad (16)$$

$$E_2(x_0) = \sigma T_2^4 + \frac{4\sigma(T_1^4 - T_2^4)}{[4 - \Lambda(x_1 + 1)]\tau_0 + 4},$$

$$T^4(x_0) = T_2^4 - \frac{2(T_1^4 - T_2^4)}{[4 - \Lambda(x_1 + 1)]\tau_0 + 4}. \quad (17)$$

До сих пор речь шла о температурном и радиационном режиме в среде, которая обладает одинаковой поглощательной способностью при любой длине волны света. Нетрудно рассмотреть случай, когда поглощение в рассеивающем слое происходит в узком спектральном интервале  $\Delta\nu$  при частоте света  $\nu$ . Тогда, независимо от спектрального состава излучения, падающего на среду, в формировании теплового режима будет принимать участие только та доля радиации, которая может поглощаться. Поэтому мы будем говорить о световом поле в среде, соответствующем только спектральному интервалу  $\Delta\nu$  при частоте  $\nu$ . Проводя рассуждения, такие же, как в начале статьи, получим

$$E_{\nu 1} + E_{\nu 2} = 2I_\nu = 2a, \quad (18)$$

где

$$a = \frac{(L_1 L_2 - L_1 - L_2)(I_{\nu 2} - I_{\nu 1})}{L_1 L_2 \tau_0} + I_{\nu 1} - \frac{I_{\nu 1} - I_{\nu 2}}{L_1}. \quad (19)$$

Здесь  $I_{v1}$  и  $I_{v2}$  — значения функции Планка, характеризующей с точностью до коэффициента поглощения испускательную способность пластин, нагретых до температур  $T_1$  и  $T_2$ ;  $E_{v1}$  и  $E_{v2}$  — спектральные плотности освещенностей внутри слоя;  $\tau = (g + \alpha)x$  — оптическая координата.

Используя (19) и учитывая граничные условия, определим при  $\tau = 0$

$$E_{v2}(0) = I_{v1} - \frac{2(I_{v1} - I_{v2})}{(1 + R_1)L_1}, \quad (20)$$

а при  $\tau = \tau_0$

$$E_{v1}(\tau_0) = I_{v2} - \frac{2(I_{v1} - I_{v2})}{(1 + R_2)L_2}. \quad (21)$$

Воспользуемся соотношением (18) для определения температуры в среде. Поскольку при заданных свойствах среды и условиях освещения функция  $a(\tau)$  известна в любой точке среды и равна функции Планка

$$I_v = \frac{2\pi h\nu^3}{c^2} \frac{1}{\exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right) - 1},$$

где  $h$  и  $k$  — постоянные Планка и Больцмана, то

$$T(\tau) = \frac{h\nu/k}{\ln\left[1 + \frac{2\pi h\nu^3}{c^2 a(\tau)}\right]}. \quad (22)$$

В частности, если формула Планка обращается в формулу Вина (случай  $\frac{h\nu}{kT} \gg 1$ ) или Релея—Джинса (случай  $\frac{h\nu}{kT} \ll 1$ ), то соответственно

$$T(\tau) = \frac{h\nu/k}{\ln \frac{2\pi h\nu^3}{c^2 a(\tau)}}$$

и

$$T(\tau) = \frac{c^2 a(\tau)}{2\pi\nu^3 k}.$$

В заключение автор выражает глубокую благодарность Э. П. Зеге и И. Л. Кацеву за обсуждение полученных результатов.

### Литература

1. Висканта Р., Грош Р. Теплопередача, № 1, 79, 1962.
2. Kellett B. S. J. Opt. Soc. Amer., 42, 339, 1952.
3. Larkin B. K., Churchill S. W. A. I. Ch. E. J., 5, 467, 1959.
4. Oppenheim A. K. Z. für Angew. Math. und Mech., 36, 81, 1956.
5. Van der Held E. M. F. App. Sci. Res., Sec. R, 4, 77, 1953.
6. Висканта Р. Теплопередача, № 1, 171, 1965.
7. Hamaker H. C. Phillips Res. Rep., 2, 44, 103, 112, 420, 1947.
8. Larkin B. K., Churchill S. W. A. I. Ch. E. J., 5, 467, 1959.
9. Viskanta R., Grosh R. J. Appl. Mech. Rev., 17, 91, 1964.
10. Гуревич М. М. Тр. ГОИ, 6, в. 57, 1, 1931.
11. Гершун А. А. Тр. ГОИ, 11, в. 90, 43, 1936.
12. Иванов А. П. Оптика рассеивающих сред. Минск, 1969, стр. 180.

В. К. КОНОНЕНКО

### О ШИРИНЕ ПОЛОСЫ ЛЮМИНЕСЦЕНЦИИ В ЛАЗЕРНЫХ ДИОДАХ

Измерение спектральных характеристик лазерных диодов [1—3] и изучение зависимости пика и ширины полосы люминесценции от тока и температуры [4—10] могут служить для определения распределения плотности состояний, участвующих в генерации. При интерпретации экспериментальных данных обычно считают, что главную роль играют изменения энергетического распределения электронов—неосновных носителей тока в  $p$ -области диода, а основные носители—дырки заполняют сравнительно узкую полосу состояний, которую при расчетах заменяют для простоты вырожденным дискретным уровнем (см., например, [10—14]).

Ниже проводится сравнение спектров испускания для различных моделей хвоста зоны проводимости. Вырождение акцепторного уровня энергии  $E_a$  примем равным  $N_a$ . Распределение носителей по состояниям описывается функциями Ферми—Дирака  $f_e$  для электронов в зоне проводимости и  $f_h$  для дырок на акцепторном уровне. Скорость спонтанных переходов  $r_{сн}(E)$  с испусканием фотонов с энергией  $E$  в единичном интервале равна

$$r_{сн}(E) = \frac{4e^2 n E |M|^2}{m^2 h^2 c^3} N_a f_h \rho_c(E + E_a) f_e(E + E_a). \quad (1)$$

Здесь  $\rho_c$  — плотность состояний в зоне проводимости,  $n$  — показатель преломления,  $e$  — элементарный заряд,  $m$  — масса электрона,  $c$  — скорость света,  $h$  — постоянная Планка, деленная на  $2\pi$ ,  $|M|^2$  — квадрат матричного элемента дипольного перехода.

Пусть хвост зоны проводимости экспоненциальный, т. е.

$$\rho_c(E_c) = \rho_{c0} \exp \frac{E_c - E_{c0}}{E_0}, \quad (2)$$

где  $E_0$  — параметр экспоненты,  $E_{c0}$  — энергия отсчета в зоне проводимости,  $\rho_{c0} = \rho_c(E_{c0})$ . Подставляя (2) в (1) и вводя обозначения

$$\varepsilon = \frac{E - (E_{c0} - E_a)}{kT}, \quad \zeta_e = \frac{F_e - E_{c0}}{kT}, \quad (3)$$

где  $T$  — температура кристалла,  $k$  — постоянная Больцмана,  $F_e$  — электронный квазиуровень Ферми, получаем

$$r_{сн}(E) = r_0 f_h [1 + \exp(\varepsilon - \zeta_e)]^{-1} \exp \frac{kT}{E_0} \varepsilon. \quad (4)$$

Здесь

$$r_0 = \frac{4e^2 n E |M|^2 N_a \rho_{c0}}{m^2 h^2 c^3}, \quad (E \approx E_{c0} - E_n). \quad (5)$$

Рассмотрение данной модели энергетического спектра можно проводить только при  $kT < E_0$ . В противном случае электроны размазываются по состояниям зоны вплоть до бесконечно больших энергий, и поэтому надо учитывать переходную область между хвостом и параболической частью зоны проводимости.

Уравнение для максимальной частоты испускания  $E_M/h$  имеет вид

$$\varepsilon_M = \xi_e - \ln \left( \frac{E_0}{kT} - 1 \right). \quad (6)$$

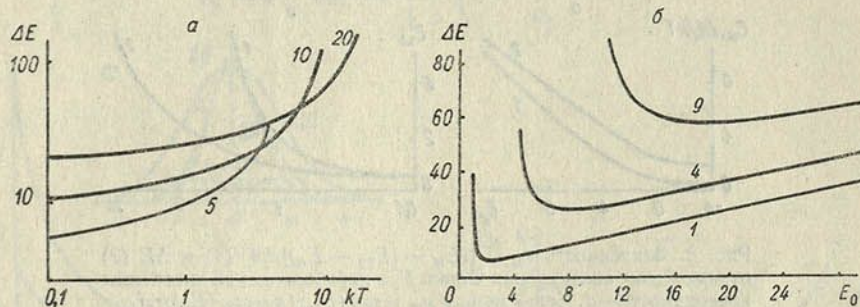


Рис. 1. Зависимость ширины полосы испускания  $\Delta E$ , мэв от  $kT$ , мэв (а) и от параметра экспоненциального хвоста зоны проводимости  $E_0$ , мэв (б). Цифры на кривых—значения  $E_0$  (а) и  $kT$  (б)

Аналогичное выражение описывает положение максимума распределения электронов в зависимости от квазиуровня Ферми  $F_e$  [7, 8]. Видно, что  $E_M$  линейно связано с  $F_e$ . С ростом  $T$  от  $0^\circ\text{K}$  разность  $[E_M - (F_e - E_a)]$  сначала уменьшается от нуля до минимального значения  $E_M - (F_e - E_a) \approx -0,28 E_0$  при  $kT \approx 0,22 E_0$ , а затем монотонно увеличивается и становится положительной при  $kT \geq E_0/2$ . Этот эффект может быть заметным при больших  $E_0$  и, по-видимому, наблюдался в работе [9]. Подставляя (6) в (4), находим максимальное значение  $r_{\text{сп}}(E_M)$ . Если  $f_h \approx \text{const}$ , то  $r_{\text{сп}}(E_M) \sim \exp E_M/E_0$ . Форма полосы испускания определяется лишь отношением  $kT/E_0$  и не зависит от уровня возбуждения. Длинноволновый край полосы спадает как  $\exp(E - E_M)/E_0$ , а коротковолновый—как  $\exp(E_M - E)(1/kT - 1/E_0)$ .

Интегрируя (4) по энергии, получаем полную скорость рекомбинации

$$R_{\text{сп}} = \pi r_0 k T f_h \left( \frac{E_0}{kT} - 1 \right)^{kT/E_0} \text{cosec} \left( \pi \frac{kT}{E_0} \right) \exp \frac{kT}{E_0} \varepsilon_M. \quad (7)$$

При  $f_h \approx \text{const}$  имеем  $R_{\text{сп}} \sim \exp E_M/E_0$ . Условие постоянства  $f_h$  с ростом возбуждения не всегда выполняется. В частности, для компенсированного полупроводника  $f_h \sim \sqrt{R_{\text{сп}}}$ , и поэтому как  $R_{\text{сп}} \sim \exp 2E_M/E_0$ , так и  $r_{\text{сп}}(E_M) \sim \exp 2E_M/E_0$ . Определяя эффективную ширину полосы испускания согласно  $\Delta E = R_{\text{сп}}/r_{\text{сп}}(E_M)$ , находим на основании (7)

$$\Delta E = \pi E_0 \left( \frac{E_0}{kT} - 1 \right)^{kT/E_0 - 1} \text{cosec} \pi \frac{kT}{E_0}. \quad (8)$$

С ростом  $T$  ширина полосы увеличивается, как показано на рис. 1, а, причем  $\Delta E \geq E_0$ . Заметное расширение спектра испускания при  $kT \rightarrow E_0$  наблюдалось на опыте [10]. Ширина полосы на половине интенсивности повторяет ход зависимости  $\Delta E(T)$ , но по величине в  $1,2 \div 1,4$  раза меньше эффектив-

ного значения  $\Delta E$ . Изменение степени легирования диода приводит к изменению  $E_0$  [1]. С увеличением  $E_0$  от значения  $E_0 = kT$  ширина полосы испускания  $\Delta E$  сначала уменьшается, проходит через минимум при  $E_0 = 2kT$ , равный  $\Delta E_{\min} \approx 6,3 kT$ , а затем монотонно увеличивается (рис. 1, б). Расширение спектра испускания обусловлено в основном изменением длинноволнового края полосы. Изменение коротковолнового края полосы испускания приводит при увеличении  $E_0$  от  $kT$  до  $2kT$  к сужению спектра. Полученные результаты по зависимости  $\Delta E$  от  $T$  и  $E_0$  не согласуются с резуль-

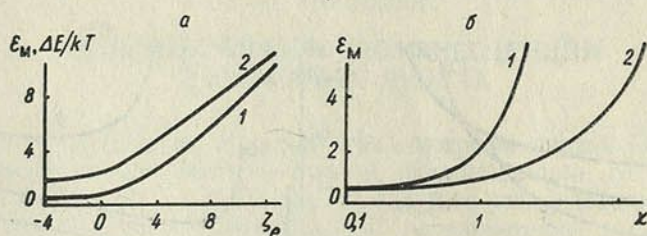


Рис. 2. Зависимость  $\varepsilon_M = [(E_M - (E_{c0} - E_a))/kT]$  (1) и  $\Delta E$  (2) от положения квазиуровня Ферми  $F_e$  в параболической части зоны проводимости—а. Связь между  $\varepsilon_M$  и  $r_{\text{сп}}(E_M)$  ( $x = r_{\text{сп}}(E_M)/r_0 f_h - 1$ ) и  $R_{\text{сп}}$  ( $x = R_{\text{сп}}/r_0 kT f_h - 2$ )—б

татами работ [15, 16], поскольку автор этих работ произвольным образом обошел критическую точку  $kT = E_0$ .

При высоких  $T$  или достаточно сильном возбуждении полупроводника основную роль будут играть переходы из состояний, относящихся к параболической части зоны проводимости, где  $\rho_c(E_c) \sim \sqrt{E_c - E_{c0}}$ . Тогда для  $E > E_{c0} - E_a$

$$r_{\text{сп}}(E) = r_0 f_h \sqrt{\varepsilon} [1 + \exp(\varepsilon - \zeta_e)]^{-1}. \quad (9)$$

Здесь

$$r_0 = \frac{4 \sqrt{2} e^2 n E |M|^2}{\pi^2 \sqrt{m} c^3 h^5} \left(\frac{m_c}{m}\right)^{3/2} \sqrt{kT} N_a, \quad (10)$$

$m_c$  — эффективная масса электронов. Максимум спектра испускания  $E_M$  удовлетворяет уравнению [17]

$$(2\varepsilon_M - 1) \exp \varepsilon_M = \exp \zeta_e. \quad (11)$$

Из (11) следует, что  $E_M \geq E_{c0} - E_a + kT/2$ . При  $\zeta_e < 0$  величина  $E_M$  мало отличается от наименьшего значения. Для  $\zeta_e \geq 1$  выполняется  $\varepsilon_M \leq \zeta_e$ . Характер зависимости разности  $[E_M - (F_e - E_a)]$  от  $T$  определяется величиной  $F_e$ . Если  $F_e \geq E_{c0}$ , то  $E_M$  равняется  $(F_e - E_a)$  при  $kT = F_e - E_{c0}$ , а при меньших  $kT$  разность  $[E_M - (F_e - E_a)]$  отрицательна. Если  $F_e < E_{c0}$ , то  $E_M > F_e - E_a$ . Форма полосы испускания в рассматриваемом случае изменяется с повышением уровня возбуждения полупроводника, спектр расширяется, при этом коротковолновый край полосы определяется лишь температурой и спадает как  $\exp(E_M - E)/kT$ . Зависимость ширины полосы  $\Delta E$  от положения квазиуровня Ферми  $F_e$  показана на рис. 2, а. При  $\zeta_e < -2$  значение  $\Delta E$  близко по величине к  $\Delta E_{\min} \approx 1,8 kT$ . Полная скорость рекомбинации равна

$$R_{\text{сп}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} r_0 kT f_h \mathcal{F}_{1/2}(\zeta_e), \quad (12)$$

где  $\mathcal{F}_{1/2}(\zeta_e)$  — интеграл Ферми индекса 1/2. Как видно на рис. 2, б, зависимости  $r_{сп}(E_M)$  и  $R_{сп}$  от  $E_M$  отличаются друг от друга.

Экспериментальные данные [3, 8, 10] указывают на значительные отклонения в распределении плотности состояний от простой экспоненты в переходной области между хвостом и параболической частью зоны. Плотность состояний может быть немонотонной функцией энергии [18]. Эти особенности переходной области описываются гауссовой функцией [5, 7, 19]

$$\rho_c(E_c) = \rho_{c0} \exp \left[ - \left( \frac{E_c - E_{c0}}{\sigma_c} \right)^2 \right], \quad (13)$$

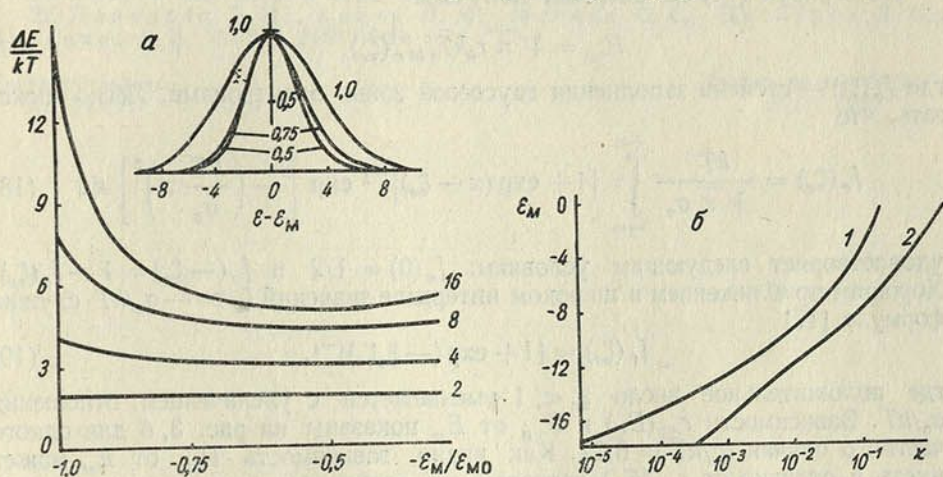


Рис. 3. Ширина  $\Delta E$  и форма полосы испускания в зависимости от уровня возбуждения полупроводника  $\epsilon_M/\epsilon_{M0}$ —а. Связь между  $\epsilon_M$  и  $r_{сп}(E_M)$  ( $x=r_{сп}(E_M)/r_0 f_h - 1$ ) и  $R_{сп}$  ( $x=R_{сп}/r_0 kT f_h - 2$ ) в случае переходов из гауссовой зоны—б. Цифры на кривых (а)—значения  $2 \sqrt{\ln 2} \sigma_c/kT$ . Спектр испускания ( $r_{сп}(\epsilon)/r_{сп}(\epsilon_M)$ ), показанный на вставке, рассчитан для  $2 \sqrt{\ln 2} \sigma_c/kT = 8$ , цифры—значения  $\epsilon_M/\epsilon_{M0}$

где  $\sigma_c$  — параметр гауссиана. В этом случае

$$r_{сп}(E) = r_0 f_h \frac{kT}{\sigma_c} [1 + \exp(\epsilon - \zeta_e)]^{-1} \exp \left[ - \left( \frac{kT}{\sigma_c} \epsilon \right)^2 \right]. \quad (14)$$

Здесь

$$r_0 = \frac{4e^2 n E |M|^2 N_a \rho_{c0} \sigma_c}{m^2 h^2 c^3 kT}. \quad (15)$$

Максимум полосы испускания  $E_M$  удовлетворяет уравнению [8, 17]

$$\left( \frac{\epsilon_{M0}}{\epsilon_M} - 1 \right) \exp \epsilon_M = \exp \zeta_e, \quad (16)$$

где  $\epsilon_{M0} = -(\sigma_c/kT)^2/2$ . Из (16) следует, что  $\epsilon_{M0} \leq \epsilon_M \leq 0$ . При  $\zeta_e \leq \epsilon_{M0}/2$  выполняется  $\epsilon_M \geq \zeta_e$ . Точка  $\epsilon_M = \epsilon_{M0}/2$  служит как бы точкой инверсии зависимости  $\epsilon_M(\zeta_e)$ . С ростом  $\zeta_e$  значение  $\epsilon_M$  приближается к нулю, а  $r_{сп}(E_M)$  — к  $r_0 f_h kT/\sigma_c$ .

Полоса испускания при  $\epsilon_M = \epsilon_{M0}$  и  $\epsilon_M = 0$  имеет гауссов вид. В промежуточном случае форма полосы отличается от гауссовой, а ширина ее меньше, чем  $2 \sqrt{\ln 2} \sigma_c$ . При возбуждении полупроводника (увеличении  $\zeta_e$ ) спектр испускания должен сужаться, а затем расширяться [7]. Наимень-

шая ширина полосы получается в случае  $\xi_e = \varepsilon_M = \varepsilon_{M0}/2$ , при этом полоса испускания симметрична (рис. 3, а). Если  $\sigma_c > 12kT$ , то значение  $\Delta E_{\min} \approx \approx 5,2kT$ . Для больших температур ( $kT > \sigma_c$ ) ширина полосы практически не зависит от уровня возбуждения и близка к наибольшему  $\Delta E_{\max} = = 2\sqrt{\ln 2} \sigma_c$ . Уже при  $kT = 0,7\sigma_c$  различие между  $\Delta E_{\max}$  и  $\Delta E_{\min}$  составляет менее 10%. Форму полосы испускания при  $\varepsilon_M/\varepsilon_{M0} < 1/2$  можно определить, если известен спектр при  $\varepsilon_M/\varepsilon_{M0} = b > 1/2$ . Для этого надо правую и левую ветви полосы для  $b > 1/2$  поменять местами, и мы получим спектр, форма которого соответствует  $\varepsilon_M/\varepsilon_{M0} = 1 - b < 1/2$ .

Интегрируя (14) по энергии, получаем

$$R_{\text{сп}} = \sqrt{\pi} r_0 kT f_e(\xi_e), \quad (17)$$

где  $f_e(\xi_e)$  — степень заполнения гауссовой зоны электронами. Легко показать, что

$$f_e(\xi_e) = \frac{kT}{\sqrt{\pi} \sigma_c} \int_{-\infty}^{+\infty} [1 + \exp(x - \xi_e)]^{-1} \exp\left[-\left(\frac{kT}{\sigma_c} x\right)^2\right] dx \quad (18)$$

удовлетворяет следующим условиям:  $f_e(0) = 1/2$  и  $f_e(-\xi_e) = 1 - f_e(\xi_e)$ . Хорошим приближением в широком интервале значений  $\xi_e > -\sigma_c/kT$  служит формула [17]

$$f_e(\xi_e) = [1 + \exp(-\xi_e/kT)]^{-1}, \quad (19)$$

где положительное число  $\xi_e < 1$  уменьшается с увеличением отношения  $\sigma_c/kT$ . Зависимости  $r_{\text{сп}}(E_M)$  и  $R_{\text{сп}}$  от  $E_M$  показаны на рис. 3, б для одного частного случая  $\sigma_c/kT = 6,24$ . Как видно, зависимость  $R_{\text{сп}}$  от  $E_M$  может иметь в отличие от  $r_{\text{сп}}(E_M)$  характерную особенность, связанную с сужением спектра при возбуждении полупроводника.

Указанные свойства спектра испускания для различных механизмов рекомбинации могут быть использованы для определения энергетического спектра полупроводника на основе модели заполнения хвоста плотности состояний. При интерпретации экспериментальных данных иногда следует учитывать искажения спектра люминесценции из-за влияния поглощения или усиления света в объеме полупроводника [20, 21].

В заключение автор выражает благодарность В. П. Грибковскому за критические замечания к работе.

### Литература

1. Dousmanis G., Nelson H., Staebler D. Appl. Phys. Letters, 5, 174, 1964.
2. Dousmanis G., Staebler D. J. Appl. Phys., 37, 2278, 1966.
3. Елисеев П. Г., Исмаилов И., Красильников А. И., Манько М. А. ФТП, 1, 953, 1967.
4. Nelson D. F., Gershenson M., Ashkin A., D'Asaro L. A., Sarace J. C. Appl. Phys. Letters, 2, 182, 1963.
5. Багаев В. С., Берозашвили Ю. Н., Вул Б. М., Заварицкая Э. И., Келдыш Л. В., Шотов А. П. ФТТ, 6, 1399, 1964.
6. Leite R. C. C., Sarace J. C., Olson D. H., Cohen B. G., Whelan J. M., Yariv A. Phys. Rev., 137, A1583, 1965.
7. Eliseev P. G., Krasilnikov A. I., Manko M. A., Pinsker I. Z. Phys. stat. sol., 23, 587, 1967.
8. Елисеев П. Г., Манько М. А. ФТП, 2, 3, 1968.
9. Hayashi I. IEEE J. Quantum Electron., QE-4, 113, 1968.
10. Елисеев П. Г., Манько М. А. Тр. IX Междунар. конф. по физике полупроводников, Москва, 1968, т. 1. Л., 1969, стр. 119.
11. Dumke W. P. Radiative Recombination in Semiconductors, Paris, 1964. Dunod, Paris, 1965, p. 157.

12. Nathan M. I., Marinace J. C., Rutz R. F., Michel A. E., Lasher G. J. *J. Appl. Phys.*, **36**, 473, 1965.
13. Oraevskii I. N., Popov Yu. M., Strakhovskii G. M. *Phys. stat. sol.* **32**, 55, 1969.
14. Ривлин Л. А. *Изв. вузов, Радиофизика*, **12**, 1796, 1969.
15. Chakravarti A. N. *Int. J. Electron.*, **24**, 197, 1968.
16. Chakravarti A. N. *Int. J. Electron.*, **24**, 283, 1968.
17. Грибковский В. П., Кононенко В. К. *ЖПС*, **12**, 45, 1970.
18. Bogdankevich O. V., Borisov N. A., Krukova I. V., Lavrushin V. M. *Phys. stat. sol.*, **29**, 715, 1968.
19. Lucovsky G. *Physics of Quantum Electron. Conf. Proc., San Juan (Puerto Rico)*, 1965. McGraw-Hill, N. Y., 1966, p. 467.
20. Carr W. N., Biard J. R. *J. Appl. Phys.*, **35**, 2776, 1964.
21. Данилова Т. Н., Коган Л. М., Мескин С. С., Наследов Д. Н., Царенков Б. В. *ФТТ*, **8**, 2462, 1966.

Институт физики  
АН БССР

Поступило в редакцию  
26.III 1970

І. І. ЛАМАНОСАЎ, А. В. САРОКА, Я. І. ФІРСАЎ, М. Р. ЧАРАНДА

**ВЫМЯРЭННЕ ПАТОКАЎ ЭПІЦЕПЛАВЫХ  
 І ХУТКІХ НЕЙТРОНАЎ  
 У ВЕРТЫКАЛЬНЫМ КАНАЛЕ РЭАКТАРА ИРТ-2000**

Вывучэнне радыяцыйных эфектаў, якія ініцыруюцца ядзернымі выпраменьваннямі рэактара ў матэрыялах, патрабуе ведання абсалютнай велічыні нейтроннага патоку і яго спектральнага размеркавання як для аналізу пашкоджанняў, абумоўленых узаемадзеяннем з нейтронамі, так і для ўліку ўкладу  $\gamma$ -кампаненты ў поўную дозу, якая ствараецца змешаным  $n$ - $\gamma$ -полем рэактара.

Мы выкарысталі актывацыйны метада [1—3] для вымярэння патокаў эпіцэплавых і хуткіх нейтронаў у адным з вертыкальных каналаў рэактара ИРТ-2000. Разгледзім у агульных рысах сутнасць метадаў, выкарыстаных для вымярэння патокаў эпіцэплавых і хуткіх нейтронаў.

Метад рэзанансных дэтэктараў. У агульным выпадку актывацыя рэзананснага дэтэктара ў патоку эпіцэплавых нейтронаў вызначаецца выразам

$$C = N \left[ \sigma_a^{1/V}(E) \Phi_{\text{эп}}(E) \frac{dE}{E} + \sum_i \Phi_{\text{эп}}(E) I_{\text{эф}}^i \right], \quad (1)$$

дзе  $N$ —колькасць ядраў у дэтэктары,  $\Phi_{\text{эп}}(E)$ —эпіцэплавы паток,  $\sigma_a^{1/V}(E)$ —сячэнне актывацыі, падпарадкаванае закону  $1/V$ ,  $I_{\text{эф}}^i$ —эфектыўны рэзанансны інтэграл  $i$ -рэзананса, вызначаемы ўраўненнем

$$I_{\text{эф}}^i = \frac{I_{\infty}^i}{\sqrt{1 + 2N\sigma_{a_0}^i}}, \quad (2)$$

прычым  $I_{\infty}^i = \frac{\pi}{2} \sigma_{a_0}^i \frac{\Gamma_i}{E_p^i}$ , а  $\sigma_{a_0}^i$ —значэнне сячэння актывацыі ў максімуме рэзананса пры рэзананснай энергіі  $E_p^i$ .

Калі ёсць дэтэктар з высокім сячэннем актывацыі ў асноўным рэзанансе, малой велічынёй сячэння пабочных рэзанансаў, тады асноўная частка актывацыі звязана з працэсам захопу ў асноўным рэзанансе. З другога боку, з выразу (2) вынікае, што з прычыны моцнага самаэкрывання адносна ўклад актывацыі, якая абумоўлена рэзанансамі, у поўную актывацыю тым меншы, чым таўсцейшы дэтэктар, прычым гэты эфект мацнейшы для вялікіх рэзанансаў. Пры выкарыстанні «бясконца» тонкіх дэтэктараў ( $N\sigma_{a_0} \ll 1$ ) эфект самаэкрывання мізэрна малы [4], што дазваляе пазбегнуць увядзення паправак на памяненны эфект. Неабходна адзначыць, што выкарыстання намі рэзанансных дэтэктараў дазваляюць вызначаць патокі эпіцэплавых нейтронаў пры  $E_p$  без «аднімання ўкладу  $1/V$ », паколькі значная велічыня  $\sigma_{a_0}$  дае асноўны ўклад у актывацыю дэтэктара, блізкі да 1.

Метад парогавых дэтэктараў. Тыповымі парогавымі дэтэктарамі, якія выкарыстоўваюцца для вымярэння патокаў і спектраў хуткіх нейтронаў, з'яўляюцца рэакцыі  $(n, n')$ ,  $(n, p)$ ,  $(n, \alpha)$ . Па наведзенай актыўнасці прадуктаў рэакцыі можна меркаваць аб велічыні патоку хуткіх нейтронаў вышэй парогавай энергіі.

Актывацыя  $i$ -дэтэктара звязана з велічынёй патоку ўраўненнем Фрэдгольма I роду

$$C_i = \int_{E_{is}}^{\infty} \Phi(E) \sigma_i(E) dE, \quad i = 1, \dots, N, \quad (3)$$

дзе  $\Phi(E)$  — паток нейтронаў на адзінкавы інтэрвал энергіі,  $\sigma_i(E)$  — папярочнае сячэнне парогавай рэакцыі,  $C_i$  — актывацыя  $i$ -дэтэктара,  $E_{is}$  — парогавая энергія рэакцыі,  $N$  — колькасць дэтэктараў.

Пры выкарыстанні сцынцыляцыйнага  $\gamma$ -спектрометра для вымярэння актыўнасці выраз для актывацыі мае выгляд

$$C_i = \frac{S_{\phi} \lambda_i e^{\lambda_i t_{\text{п}}}}{N_i k R \epsilon_{\phi} \omega \eta (1 - e^{-\lambda_i t_{\text{аб}}}) (1 - e^{-\lambda_i t_{\text{в}}})}, \quad (4)$$

дзе  $S_{\phi}$  — поўны лік імпульсаў у фотапіку,  $\lambda_i$  — пастаянная распаду радыеактыўных ядраў  $i$ -дэтэктара,  $t_{\text{п}}$  — час, які прайшоў ад канца абпраменьвання да пачатку вымярэння,  $t_{\text{в}}$  — час вымярэння,  $t_{\text{аб}}$  — час абпраменьвання,  $k$  — распаўсюджанасць ізатопу,  $R$  — папраўка на схему распаду,  $\epsilon_{\phi}$  —

Табліца 1

Характарыстыкі выкарыстаных рэзанансных дэтэктараў

Дэтэктар	$T_{1/2}$	Таўшчыня, мг/см <sup>2</sup>	$E_{\text{p}}$	$\int_{0,4}^{\infty} \sigma_a(E) \frac{dE}{E}$ , барн	Эпіцелавы паток, н.см <sup>-2</sup> .сек <sup>-1</sup> .эв <sup>-1</sup>
In	54,12 мін	$0,7 \cdot 10^{-3}$	1,457	3280	$1,29 \cdot 10^{10}$
Au	2,695 дзён	$1,0 \cdot 10^{-3}$	4,9	1558	$2,66 \cdot 10^{10}$
W	24 гадз	$9 \cdot 10^{-3}$	18,8	562	$2,31 \cdot 10^{10}$
La	40,2 гадз	$1,8 \cdot 10^{-2}$	73,5	10,7	$5,86 \cdot 10^9$
Mn	2,586 гадз	$1,4 \cdot 10^{-2}$	337	14,15	$1,38 \cdot 10^9$

Табліца 2

Парогавыя рэакцыі, якія прымяняюцца для вымярэння патоку хуткіх нейтронаў

Рэакцыя	$T_{1/2}$	$E_{\text{эф}}$ , Мэв	$\sigma_{\text{эф}}$ , мбарн	Інтэгральны паток, н.см <sup>-2</sup> .сек <sup>-1</sup>
$\text{In}^{115}(n, n') \text{In}^{115m}$	4,5 гадз	1,5	341	$8,94 \cdot 10^{11}$
$\text{Ni}^{58}(n, p) \text{Co}^{58}$	71,3 дзён	2,6	371	$4,96 \cdot 10^{11}$
$\text{P}^{31}(n, p) \text{Si}^{31}$	2,64 гадз	3,1	141	$4,17 \cdot 10^{11}$
$\text{S}^{32}(n, p) \text{P}^{32}$	14,5 дзён	3,3	354	$3,58 \cdot 10^{11}$
$\text{Zn}^{64}(n, p) \text{Cu}^{64}$	12,8 гадз	4,4	368	$1,41 \cdot 10^{11}$
$\text{Al}^{27}(n, p) \text{Mg}^{27}$	10 мін	5,4	88	$6,46 \cdot 10^{10}$
$\text{Mg}^{24}(n, p) \text{Na}^{24}$	15,05 гадз	6,4	71	$3,86 \cdot 10^{10}$
$\text{Fe}^{56}(n, p) \text{Mn}^{56}$	2,586 гадз	7,5	121	$1,67 \cdot 10^{10}$
$\text{Al}^{27}(n, \alpha) \text{Na}^{24}$	15,05 гадз	8,1	120	$9,08 \cdot 10^9$

фотаэфектыўнасць спектрометра,  $\omega$  — цялесны вугал,  $N_i$  — колькасць ядраў  $i$ -дэтэктара,  $\eta$  — папраўка на мёртвы час апаратуры.

Энергетычнае размеркаванне патоку хуткіх нейтронаў можна знайсці, рашыўшы сістэму ўраўненняў (3). З матэматычнага пункту погляду задача вызначэння спектра нейтронаў  $\Phi(E)$  па актыўнасці абмежаванага ліку дэтэктараў з'яўляецца неакрэсленай, паколькі існуе бясконцае мноства рашэнняў, якія задавальняюць (3). Задача становіцца больш вызначанай, калі

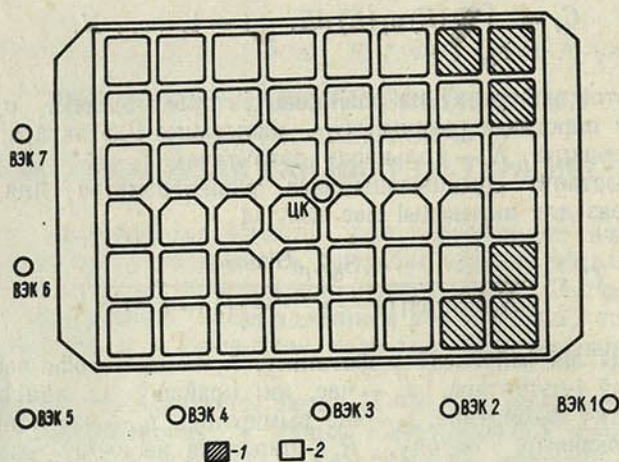


Рис. 1. Канфігурацыя актыўнай зоны і размяшчэнне вертыкальных каналаў рэактара ИРТ-2000:  
1—графіт, 2—актыўны элемент

фізічныя меркаванні зводзяць клас магчымых рашэнняў да мінімуму, г. зн. робяцца прапановы або аб форме спектра [5], або аб сячэнні рэакцыі [6].

Адным з метадаў вызначэння спектра хуткіх нейтронаў з'яўляецца паўэмпірычны метадаў эфектыўных парогавых энергій [7], заснаваны на меркаванні, што даследуемы спектр мала адрозніваецца ад спектра нейтронаў дзялення. Выкарыстоўваючы паняцце эфектыўнай парогавай энергіі, можна вызначыць інтэгральны спектр

$$C_i = \sigma_{эф} \int_{E_{эф}}^{\infty} \Phi(E) dE = \sigma_{i\ эф} F(E_{i\ эф}), \quad (5)$$

дыферэнцыраванне якога па энергіі дае  $\Phi(E)$ .

Эксперыментальная частка. У якасці рэзанансных дэтэктараў выкарыстоўваліся «бясконца» тонкія дэтэктары з In, Au, W, La і Mn (табл. 1). Дэтэктары былі атрыманы шляхам нанясення дакладна ўзважанай кроплі раствору з вядомай колькасцю актывіруемага рэчыва на поліэтыралавую плёнку (таўшчыня 5 мг/см<sup>2</sup>) з наступным высушваннем і герметызацыяй. Таўшчыня такіх дэтэктараў не перавышае 1,8·10<sup>-2</sup> мг/см<sup>2</sup>.

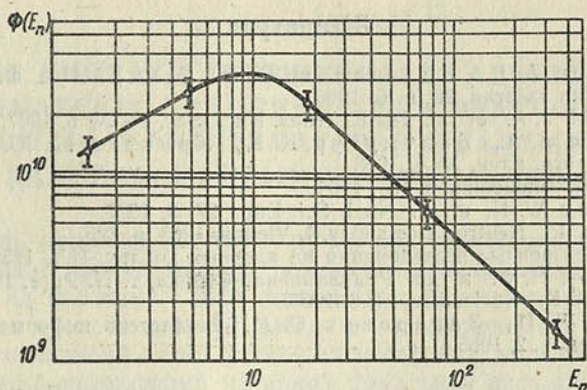
Выкарыстаныя парогавыя рэакцыі прыведзены ў табл. 2.

Абпраменьванне дэтэктараў праводзілі ў вертыкальным канале ВЭК 4 ИРТ-2000 (гл. рис. 1) пры магутнасці рэактара 2 Мвт у кадмевым кантэйнеры (таўшчыня сценак 1 мм).

Актыўнасць  $\gamma$ -выпраменьвальнікаў вымяралі на сцынцыляцыйным  $\gamma$ -спектрометры па характэрных  $\gamma$ -лініях. Выкарыстоўваўся крышталі NaJ (Tl) па-

мерам  $40 \times 40$  мм з ФЭУ-56. Вырашэнне спектрометра для лініі  $Cs^{137}$  ( $E_\gamma = 661$  кэв) складала 10%. Градуіроўка спектрометра па фотаэфектыўнасці і праверка лінейнасці праводзіліся наборам стандартных  $\gamma$ -выпраменьвальнікаў, абсалютная актыўнасць якіх была вядома з дакладнасцю  $\pm 5\%$ .

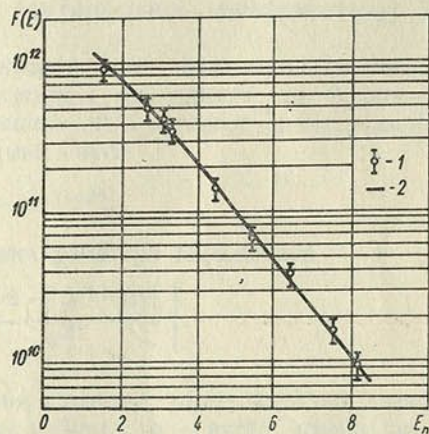
Для вымярэння актыўнасці  $\beta$ -выпраменьвальнікаў выкарыстоўвалі 4 $\beta$ -праточны прапарцыянальны лічыльнік, «бязважкія» мішэні з серы і фосфару рыхтавалі па метадыцы, апісанай у [8].



Рыс. 2. Залежнасць дыферэнцыяльных патокаў эпіцеплавых нейтронаў  $\Phi(E_n)$ ,  $n \cdot cm^{-2} \cdot сек^{-1} \cdot эв^{-1}$  ад энергіі нейтронаў  $E_n$ , эв у ВЭК 4

Рэзультаты вымярэння патокаў эпіцеплавых нейтронаў прадстаўлены ў табл. 1 і на рыс. 2. Выкарыстаныя рэзанансныя інтэгралы бясконцага разбаўлення ўзяты з [9]. Атрыманы рэзультат паказаў, што вымераны спектр адрозніваецца ад спектра  $1/E$ . Завал спектра ў галіне энергіі рэзанансаў індые і золата можна растлумачыць паглыннаннем нейтронаў гэтай энергіі кадміевым кантэйнерам, паколькі спектр у галіне энергіі больш высокіх рэзанансаў апісваецца законам  $1/E$ .

Інтэгральны спектр хуткіх нейтронаў прыведзен на рыс. 3. Выкарыстаныя значэнні  $\sigma_{эф}$  і  $E_{эф}$  узяты з работы [10]. Вымярэнні паказалі, што



Рыс. 3. Залежнасць інтэгральных патокаў хуткіх нейтронаў  $F(E)$ ,  $n \cdot cm^{-2} \cdot сек^{-2}$  ад энергіі нейтронаў  $E_n$ , Мэв у ВЭК 4:

1—эксперыментальныя значэнні, 2—спектр нейтронаў дзялення, нарміраваны пры 8,1 Мэв

спектр нейтронаў у межах памылкі эксперымента супадае з спектрам дзялення.

Памылкі ў вымярэнні патокаў складваюцца з хібнасцей вымярэння актыўнасцей дэтэктараў, вызначэння эфектыўнасці рэгістрацыі, памылкі ў значэнні эфектыўных сячэнняў рэакцыі і рэзанансных інтэгралаў бясконцага разбаўлення. Хібнасці вызначэння вагі дэтэктараў, часу абпраменьвання, канстант распаду з-за іх нязначнай велічыні не ўлічваліся.

Такім чынам, вызначаная максімальная памылка вымярэння складае 18%.

Атрыманы рэзультат не з'яўляецца нечаканасцю, паколькі вымярэнне патокаў праводзілася ў месцы, блізкім да актыўнай зоны рэактара. Найбольшую цяжкасць у вымярэнні патокаў нейтронаў, як вядома, прадстаўляе галіна энергіі спектра  $1\text{ кэв}—1\text{ Мэв}$ , работы па эксперыментальнаму вывучэнню якога намі вядуцца.

У заключэнне аўтары выказваюць падзяку абслугоўваючаму персаналу рэактара за дапамогу ў правядзенні абпраменьванняў.

### Літаратура

1. Звонарев А. В., Колечанов Ю. Ф., Михайлус Ф. Ф., Николаев М. И. Атомная энергия, 20, в. 6, 1966.
2. Halbleib J. A. et al. IEEE. Trans. Nucl. Sci., 14, № 6, 1967.
3. Лапенас А. А., Балтмугур К. К., Криесс Ю. Ю. Изв. АН Латв. ССР, сер. физ. и техн. наук, № 4, 1968.
4. Brose M. Nukleonik, 6, 134, 1964.
5. Mc Erloy W. N. et al. Nucl. Sci. Eng., 27, 3, 1967.
6. Dierckx R. Neutron Dosimetry, I. Vienna, 1963, p. 325.
7. Юз Д. Нейтронные исследования на ядерных котлах. ИЛ, 1954.
8. Правдюк Н. Ф. и др. Радиационная физика, т. II. Рига, 1964.
9. Drake M. K. Nucleonics, 24, 8, 1966.
10. Абагян Л. П., Захарович С. М. Бюллетень информационного центра по ядерным данным, в. 2, 1965.

Институт физики  
АН БССР

Поступило в редакцию  
10.III 1970

М. М. АЛЯХНОВІЧ

АБ УМОВАХ І ІНТЭНСІЎНАСЦІ АДБІЦЦЯ  
РЭНТГЕНАЎСКІХ ПРАМЕННЯЎ ДЛЯ ФАКУСІРУЮЧЫХ  
КРЫШТАЛЬ-МАНАХРАМАТАРАЎ У ЗАЛЕЖНАСЦІ  
АД АДЛЕГЛАСЦІ КРЫНІЦА—МАНАХРАМАТАР

Інтэнсіўнасць манахраматычнага пучка рэнтгенаўскага выпраменьвання пры выкарыстанні факусіруючых крышталі-манахраматараў залежыць у першую чаргу ад фактараў, якія вызначаюць геаметрычныя ўмовы адначасовага адбіцця ад усёй рабочай паверхні манахраматара. Пры пунктавай крыніцы выпраменьвання гэтыя ўмовы аптымальныя, калі крыніца і крышталі-манахраматар знаходзяцца на адной факальнай акружнасці, пры гэтым інтэнсіўнасць манахраматычнага пучка максімальная [1]. У выпадку працяглых крыніц, як паказваюць якасныя разгляды [2], максімальная інтэнсіўнасць манахраматычнага пучка ад цыліндрычна выгнутых манахраматараў дасягаецца пры размяшчэнні крыніцы ўнутры факальнага круга. Аднак крытэрыў выбару аптымальнай адлегласці крыніца—манахраматар адсутнічае, хаця важнасць такога крытэрыю для практычных мэт відавочная.

У дадзенай рабоце была пастаўлена задача высветліць, як змяняюцца ўмовы адначасовага адбіцця ў выпадку працяглых крыніц выпраменьвання ў залежнасці ад адлегласці крыніца—манахраматар і як пры гэтым змяняецца інтэнсіўнасць адбітага пучка для факусіруючых манахраматараў па Іагану і Іагансону.

Няхай крыніца рэнтгенаўскага выпраменьвання знаходзіцца на некотрай адлегласці  $l_1$  ад крышталі-манахраматара і не ляжыць на факальнай акружнасці, радыус якой  $R_0/2$ . Дапусцім, што вуглавое размеркаванне інтэнсіўнасці крыніцы апісваецца функцыяй Гауса

$$G = G_0 \exp[-\pi\alpha^2/\omega_g^2],$$

а функцыя крывой адбіцця крышталі-манахраматара выражаецца

$$R = R_0 \exp\left[-\frac{\pi(\alpha + \Delta\vartheta(\psi))^2}{\omega_r^2}\right].$$

Велічыня  $\omega_g = d_0/l_1$  — вуглавая шырыня крыніцы ( $d_0$  — лінейныя памеры яго),  $\omega_r$  — інтэгральная шырыня крывой адбіцця,  $\alpha$  — вугал паміж двума праменьнямі, якія выходзяць з розных пунктаў крыніцы, і  $\Delta\vartheta(\psi)$  — адхіленне вугла слізгацця променя ад вугла адбіцця Вульфа—Брэга для манахраматара, якое залежыць ад становішча адбіваючага пункта на паверхні манахраматара.

Тады ўдзельная інтэнсіўнасць адбіцця (інтэнсіўнасць адбіцця адзінкай паверхні манахраматара), якая вымяраецца ў непасрэднай блізкасці ад паверхні крышталі-манахраматара, з улікам змянення адлегласці  $l_1$  прадстаўіцца ў выглядзе [3, 4]

$$i(\psi) = \frac{I_0}{l_1} \int GR d\alpha = \frac{i_0 \omega_g}{l_1 \sqrt{\omega_r^2 + \omega_g^2}} \exp \left[ -\frac{\pi (\Delta\vartheta(\psi))^2}{\omega_r^2 + \omega_g^2} \right], \quad (1)$$

дзе вуглавая шырыня крыніцы  $\omega_g$  таксама з'яўляецца функцыяй  $l_1$ . Для ўліку гэтага ўвядзем наступныя абазначэнні. Калі крыніца знаходзіцца на факальнай акружнасці на адлегласці  $l_{01} = R_0 \sin \vartheta_0$  ад манахраматара, яго вуглавая шырыня будзе  $\omega_{0g} = d_0/l_{01}$ . Калі крыніца не знаходзіцца на факальнай акружнасці, яе вуглавую шырыню можна прадставіць у выглядзе

$$\omega_g = \omega_{0g} t, \text{ дзе } t = \frac{l_{01}}{l_1} = \frac{R_0 \sin \vartheta_0}{l_1}.$$

Паколькі для рэальных крыніц, як правіла,  $\omega_r \ll \omega_g$ , то суадносіны (1) з ўлікам уведзеных абазначэнняў зводзяцца да выгляду

$$i(\psi) = i_0 t \exp \left[ -\frac{\pi (\Delta\vartheta(\psi, t))^2}{\omega_{0g}^2 t^2} \right], \quad (2)$$

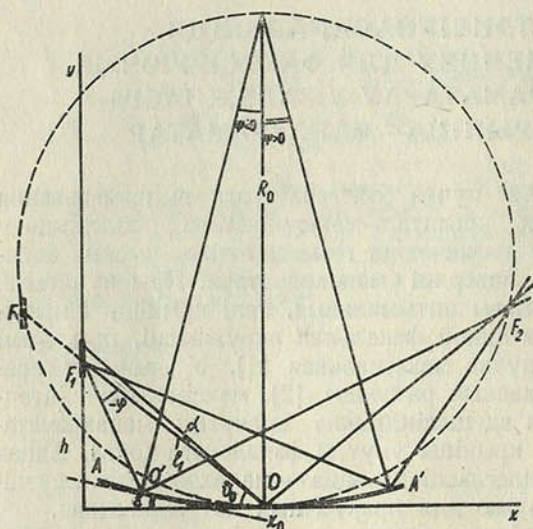


Рис. 1. Схема ходу праменьняў для факсіруючага крыштал-манахраматара па Іагану

дзе  $\Delta\vartheta(\psi, t)$  залежыць ад апертуры манахраматара і ад адлегласці крыніца—манахраматар. Вызначым гэту залежнасць для двух указаных вышэй тыпаў манахраматараў па Іагану і Іагансону. Пачнём з першага. Няхай прамень  $F_1O$  (рис. 1) падзе на крыштал-манахраматар пад вуглом  $\vartheta_0$ . Прамень  $F_1O'$ , які падае ў пункт  $O'$ , складае з адбіваючай паверхняй манахраматара вугал  $\vartheta$ . Тады, як вынікае з рис. 1, рознасць  $\Delta\vartheta = \vartheta - \vartheta_0$  паміж вуглом слізгацця промяня  $F_1O'$  і вуглом Вульфа—Брэга ў пункце  $O'$  выразіцца як

$$\Delta\vartheta = \varphi + \varepsilon, \quad (3)$$

дзе  $\varepsilon$  — вугал нахілу датычнай да следу паверхні крыштал-манахраматара у пункце  $O'$ , а вугал  $\varphi$  вызначаецца з суадносін

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\operatorname{tg}(\vartheta_0 + \varphi) - \operatorname{tg} \vartheta_0}{1 + \operatorname{tg}(\vartheta_0 + \varphi) \operatorname{tg} \vartheta_0}. \quad (4)$$

Выразім  $\varepsilon$  і  $\varphi$  праз вугал  $\psi$ , які вызначае становішча адбіваючага пункта на паверхні манахраматара адносна яго цэнтра. Ураўненне следу паверхні крыштал-манахраматара з радыусам крывізны  $R_0$  у выбранай сістэме каардынат (рис. 1) запішацца

$$y = R_0 - \sqrt{R_0^2 - (x - x_0)^2} \simeq R_0 \left( \frac{\psi^2}{2} + \frac{\psi^4}{8} \right), \quad (5)$$

а

$$\operatorname{tg} \varepsilon = y' = \frac{x - x_0}{\sqrt{R_0^2 - (x - x_0)^2}} = \frac{\psi}{\sqrt{1 - \psi^2}},$$

адкуль 
$$\varepsilon = \psi + \frac{1}{6} \psi^3. \quad (6)$$

Суадносіны (4) таксама лёгка выразіць праз  $\psi$ . Улічваючы, што

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}(\vartheta_0 + \varphi) &= \frac{h-y}{x}, \quad \operatorname{tg} \vartheta_0 = \frac{h}{x_0}, \quad h = l_1 \sin \vartheta_0, \quad x_0 = l_1 \cos \vartheta_0, \\ \operatorname{tg} \varphi &= - \frac{\psi + \frac{\psi^2}{2} \operatorname{ctg} \vartheta_0 + \frac{\psi^4}{8} \operatorname{ctg} \vartheta_0}{1/t + \psi \operatorname{ctg} \vartheta_0 - \frac{\psi^2}{2}}. \end{aligned} \quad (7)$$

Паколькі  $\psi \ll 1$ , з (3) з улікам (6) і (7) знаходзім

$$\Delta\vartheta(\psi, t) = \psi - \frac{\psi + \frac{\psi^2}{2} \operatorname{ctg} \vartheta_0 + \frac{\psi^4}{8} \operatorname{ctg} \vartheta_0}{1/t + \psi \operatorname{ctg} \vartheta_0 - \frac{\psi^2}{2}} + \frac{1}{3} \psi^3 \left( t^3 + \frac{1}{2} \right) \quad (8)$$

або

$$\begin{aligned} \Delta\vartheta(\psi, t) &= (1-t)\psi + \frac{\psi^2}{2} t(2t-1) \operatorname{ctg} \vartheta_0 - \frac{\psi^3}{2} t^2(2t-1) \operatorname{ctg}^2 \vartheta_0 + \\ &+ \frac{\psi^4}{2} t^3(2t-1) \operatorname{ctg}^3 \vartheta_0 \end{aligned} \quad (8a)$$

для  $t$ , якія не вельмі моцна перавышаюць адзінку.

Прааналізуем атрыманы выраз (8).

Пры  $t=1$ , г. зн. калі крыніца знаходзіцца на факальнай акружнасці,  $\Delta\vartheta(\psi)$  прадстаўляе сабой функцыю з мінімумам, роўным нулю пры  $\psi=0$  [5] (рыс. 2, крывая 1). Роўнасць  $\Delta\vartheta(0)=0$  азначае, што ў дадзеным выпадку дакладная ўмова адбіцця ад манахраматара выконваецца толькі ў яго цэнтры. Пры размяшчэнні крыніцы ўнутры факальнага круга ( $t > 1$ ) мінімум функцыі  $\Delta\vartheta$  мае месца пры  $\psi > 0$ , а сама функцыя ў мінімуме адмоўная (рыс. 2, крывая 2). Калі крыніца аддаляецца за межы факальнага круга ( $t < 1$ ), мінімум крывой  $\Delta\vartheta$  мае месца пры адмоўных значэннях  $\psi$  (крывая 3, рыс. 2).

Велічыня  $\psi = \psi_{\min}$ , пры якой  $\Delta\vartheta$  дасягае мінімуму, таксама як і  $\Delta\vartheta_{\min}$ , залежыць ад велічыні адноснага зрушэння крыніцы (рыс. 3). Пры параўнальна невялікіх зрушэннях (для  $t < 1, 2$ ) значэнне  $\psi$ , пры якім  $\Delta\vartheta$  дасягае мінімуму, вызначаецца суадносінамі

$$\psi_{\min} = \frac{1 - \sqrt{1 - \frac{6(t-1)}{2t-1}}}{3t \operatorname{ctg} \vartheta_0}. \quad (9)$$

Разам з тым звяртае на сябе ўвагу і тая акалічнасць, што калі крыніца выпраменьвання не знаходзіцца на факальнай акружнасці ( $t \neq 1$ ), дакладная ўмова адбіцця ад манахраматара выконваецца ў двух яго пунктах—у цэнтры і ў некаторым пункце, які адпавядае вуглу  $\psi_0$ , велічыня якога залежыць ад  $t$ . Для выпадку  $t < 1, 2$

$$\psi_0 = \frac{1 - \sqrt{1 - \frac{8(t-1)}{2t-1}}}{2t \operatorname{ctg} \vartheta_0}. \quad (10)$$

Як відаць з прыведзеных выказаў (9) і (10), велічыні  $\psi_{\min}$  і  $\psi_0$  будуць залежаць ад даўжыні хвалі манахраматычнага выпраменьвання і міжпласкаснай адлегласці манахраматара.

Выкананне дакладнай умовы адбіцця ў двух пунктах манахраматара пры яго зрушэнні адносна факальнай акружнасці ў адзін ці ў другі бок прывядзе да таго, што функцыя ўдзельнай інтэнсіўнасці адбіцця (2) у гэтым выпадку будзе прадстаўляць сабой крывую з двума максімамі (пры  $\psi=0$  і  $\psi=\psi_0$ ) і з адным мінімумам (пры  $\psi=\psi_{\min}$ ). У гэтым лёгка пераканацца,

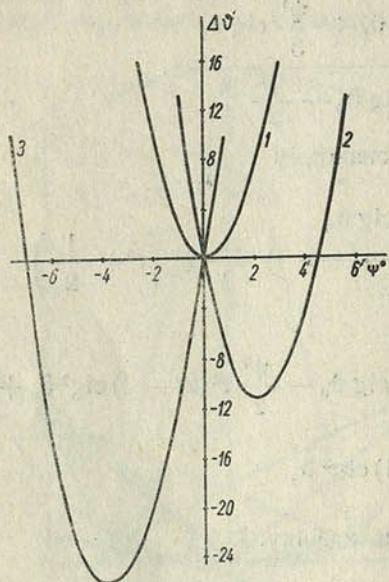


Рис. 2. Адхіленне вугла слізгацця рэнтгенаўскага пучка ад вугла Вульфа—Брэга ў залежнасці ад становішча адбіваючага пункта на паверхні манахраматара:

1— $t=1$ ; 2—1,2; 3—0,8

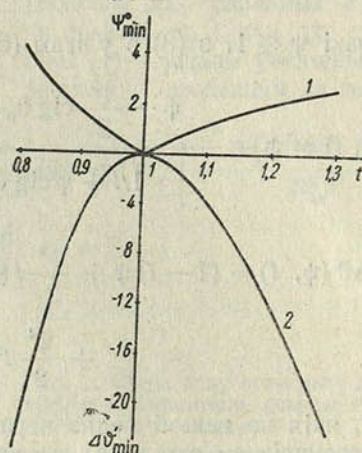
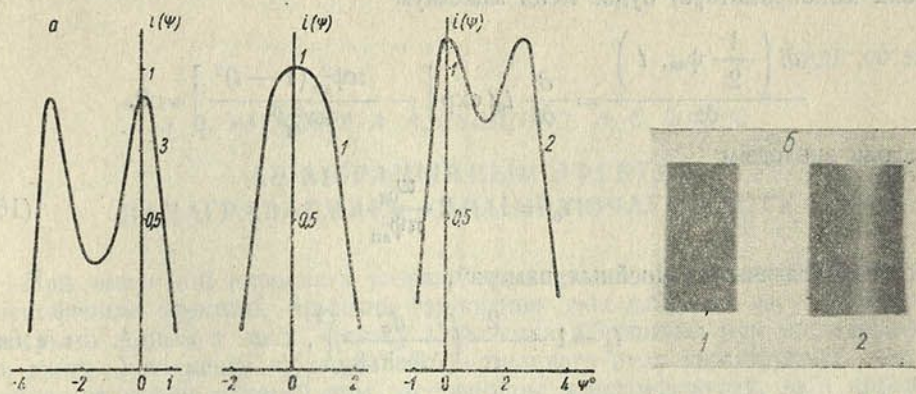


Рис. 3. Залежнасць велічыні каардынаты  $\psi_{\min}$  і мінімальнага значэння  $\Delta\varphi_{\min}$  ад адноснага зрушэння крыніцы

калі падставіць атрыманае значэнне  $\Delta\varphi$  у суадносіны (2). На рис. 4, а для прыкладу прадстаўлена залежнасць  $i(\psi)$  для выпадку  $t=1$  (крывая 1),  $t=1,1$  (крывая 2),  $t=0,9$  (крывая 3). Як відаць з прыведзенага рысунка, прыбліжэнне крыніцы да манахраматара або яго аддаленне прыводзіць да раздваення адбітага пучка, што непасрэдна назіраецца ў доследзе (рис. 4, б). Назіраемая паблізу ад манахраматара два пучкі ў фокусе  $F_2$  перасякаюцца, зліваючыся ў адзін вузкі пучок, які за фокусам зноў раздвойваецца. Значэнне  $t$ , пры якім наступае эфект раздваення адбітага пучка, залежыць ад вуглавой шырыні крыніцы. Чым шырэй крыніца, тым на большую адлегласць патрабуецца яе зрушыць, каб з'явіўся ўказаны эфект. Такім чынам, зрушэнне крыніцы адносна факальнай акружнасці прыводзіць да памяншэння ўдзельнай інтэнсіўнасці адбіцця ў мінімуме  $i(\psi_{\min})$ . Скорасць памяншэння  $i(\psi_{\min})$  са змяненнем  $t$  залежыць ад шырыні крыніцы  $\omega_{0g}$ . Чым вузейшая крыніца, тым большая скорасць памяншэння  $i(\psi_{\min})$ . Пры змяненні адлегласці крыніца—манахраматар у адпаведнасці з (2) будзе мець месца і другі эфект—змяненне інтэнсіўнасці, якое абумоўліваецца вертыкальнай расхадзімасцю пучка. У выпадку прыбліжэння крыніцы да манахраматара ( $t > 1$ ) указаныя два эфекты маюць процілеглы характар залежнасці ад  $t$ . Гэта прывядзе да таго, што пры некаторым значэнні  $t=t_0$  другі эфект будзе прэваліраваць над першым і ў выніку інтэнсіўнасць

адбітага пучка пры  $t = t_0$  будзе максімальнай. Значэнне  $t_0$  можна знайсці з умовы экстрэмальнасці

$$\frac{\partial i(\psi_{\min})}{\partial t} = 0. \quad (11)$$



Рыс. 4. Выгляд функцыі ўдзельнай інтэнсіўнасці адбіцця пры 1— $t=1$ ; 2—1,1; 3—0,9 (а) і форма адбітага пучка паблізу факусіруючага манахраматара, калі крыніца ( $\omega_{0g}=10'$ ,  $\text{Cu } K_{\alpha}$ ) знаходзіцца на факальнай акружнасці (1) і за яе межамі (2) (б)

Выконваючы дыферэнцыраванне з улікам (2), знаходзім ураўненне для вызначэння  $t_0$

$$\omega_{0g}^2 = \frac{2\pi}{t_0^2} \Delta\vartheta_{\min}(t_0) \left[ t_0 \frac{\partial(\Delta\vartheta_{\min})_{t=t_0}}{\partial t} - \Delta\vartheta_{\min}(t_0) \right]. \quad (12)$$

У першым прыбліжэнні рашэнне (12) мае выгляд

$$t_0 = 1 + a \operatorname{ctg} \vartheta_0 \omega_{0g}. \quad (13)$$

Калі  $\omega_{0g}$  вымяраецца ў градусах, каэфіцыент  $a \approx 0,04$ . З атрыманага выразу вынікае, што для пунктавых крыніц ( $\omega_{0g} = 0$ ) аптымальнае значэнне  $t_0 = 1$ , г. зн. крыніца для атрымання максімальнай інтэнсіўнасці павінна размяшчацца на факальнай акружнасці [1]. З (13) таксама вынікае, што велічыня аптымальнага значэння  $t_0$  залежыць не толькі ад вуглавой шырыні крыніцы, але і ад вугла Вульфа—Брэга, г. зн. залежыць ад даўжыні хвалі манахраматычнага выпраменьвання і міжпласкаснай адлегласці ўжываемага манахраматара.

У выпадку манахраматара з дакладнай факусіроўкай (факусіроўкай па Іагансону), як і ў выпадку факусіроўкі па Іагану, змяненне адлегласці крыніца—манахраматар прывядзе да парушэння ўмоў адначасовага адбіцця. Рашаючы задачу аналагічна папярэдняму выпадку, лёгка атрымаць, што адхіленне вугла слізгацення рэнтгенаўскага промня ад вугла Вульфа—Брэга ў залежнасці ад становішча адбіваючага пункта на паверхні манахраматара выразіцца праз суадносіны

$$\Delta\vartheta(\psi, t) = \psi(1-t) + \psi^2 t(t-1) \operatorname{ctg} \vartheta_0 - \psi^3 \left[ t^2 + t^2(t-1) \operatorname{ctg}^2 \vartheta_0 - \frac{2t^2 + 1}{6} \right]. \quad (14)$$

У першым прыбліжэнні ў (14) можна абмежавацца толькі першым членам. Тады функцыя ўдзельнай інтэнсіўнасці адбіцця (2) запішыцца як

$$i(\psi, t) = i_0 t \exp \left[ - \frac{\pi \psi^2 (1-t)^2}{\omega_{0g}^2 t^2} \right]. \quad (15)$$

Відавочна, што інтэнсіўнасць манахраматычнага пучка, адбітага ад манахраматара з вуглавым ростулам, роўным  $\psi_{\text{ап}}$ , будзе максімальнай пры такім значэнні  $t_0$ , пры якім функцыя  $i(\psi, t)$  у пунктах  $\psi = \pm \frac{1}{2} \psi_{\text{ап}}$  (на краях манахраматара) будзе мець максімум

$$\frac{\partial i\left(\frac{1}{2}\psi_{\text{ап}}, t\right)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} i_0 t \exp\left[-\frac{\pi\psi_{\text{ап}}^2(1-t)^2}{4\omega_{\text{ог}}^2 t^2}\right] = 0.$$

Адсюль знаходзім

$$t_0 = 1 + 2 \frac{\omega_{\text{ог}}^2}{\pi\psi_{\text{ап}}^2} \quad (16)$$

або, пераходзячы да лінейных памераў,

$$t_0 = 1 + \frac{2}{\pi} \left(\frac{d_0}{\Delta S \sin \vartheta_0}\right)^2, \quad (16a)$$

дзе  $\Delta S$  — даўжыня адбіваючай паверхні манахраматара. Паколькі заўсёды  $d_0 \ll \Delta S$ , то  $t_0$  будзе неістотна адрознівацца ад адзінкі.

Такім чынам, для атрымання максімальнай інтэнсіўнасці адбicia ад факусіруючага манахраматара па Іагансону ў выпадку працяглай крыніцы выпраменьвання апошня павінна быць зрушана з факусіруючага круга ў бок манахраматара. Велічыня неабходнага зрушэння, як вынікае з (16a), малая і практычна не перавышае некалькіх працэнтаў нават для дастаткова шырокіх крыніц. Паколькі эффект павелічэння інтэнсіўнасці пры гэтым таксама вельмі малы, такое зрушэнне крыніцы практычна можна разглядаць як меру дапушчальнай дакладнасці ўстаноўкі адлегласці крыніца—манахраматар пры яе юстыроўцы.

У выпадку факусіруючага манахраматара па Іагану для атрымання максімальнай інтэнсіўнасці патрабуецца значна большае адноснае зрушэнне крыніцы выпраменьвання ў бок манахраматара. Напрыклад, згодна з (13), пры  $\text{ctg } \vartheta_0 = 4$  і шырыні крыніцы ў  $1,5^\circ$  адноснае зрушэнне яе складае  $\sim 24\%$ . Чым шырэй крыніца выпраменьвання, тым меншыя патрабаванні прад'яўляюцца да дакладнасці ўстаноўкі адлегласці крыніца—манахраматар.

У заключэнне лічу прыемным абавязкам выказаць глыбокую ўдзячнасць кадэміку АН БССР М. М. Сіраце за каштоўныя парады пры пастаноўцы адеенай работы.

### Літаратура

1. Brogren G. Ark. Fysik., 9, № 3, 287, 1955.
2. Блохин М. А. Методы рентгеноспектральных исследований. М., 1959.
3. Сегтак J. Czech. J. Phys., B12, 602, 1962.
4. Олехнович Н. М. Сб. «Химическая связь в полупроводниках». Минск, 1969.
5. Аляхновіч М. М. «Весті Акадэміі навук БССР», серыя фіз.-мат. навук, № 3, 1970.

Институт физики твердого тела  
и полупроводников АН БССР

Поступило в редакцию  
14.IV 1970

Э. В. РАТНІКАЎ, А. А. СВІНЦІЦКІ, Л. С. ШЧОРС

### АБ ВІБРАЦЫЙНЫМ ЭФЕКТУ ПАДАГРАВАЕМАГА КАРАНІРУЮЧАГА ДРОТУ

Пры вывучэнні кароннага разраду прыходзіцца сутыкацца з некаторымі спецыфічнымі эфектамі, прычыны ўзнікнення якіх да гэтага часу застаюцца няяснымі. Адным з такіх эфектаў з'яўляецца вібрацыйны рух караніруючага дроту. Узнікненне вібрацый або вярчальнага руху караніруючага дроту назіралася радам аўтараў пры распрацоўцы электрафільтраў, якія прызначаюцца для ачысткі дымаў ад узважаных часцінак [1—3]. Аднак сістэматычнага даследавання дадзенай з'явы не праводзілася.

Узнікненне хістальнага руху караніруючага дроту значна ўскладняе, напрыклад, даследаванне тэмпературнага рэжыму кароннага разраду. Калі на распалены і не вельмі тоўсты дрот падаць высокае напружанне, дастатковае для запальвання кароны, то дрот у той жа час перастае святніцца. Пры гэтым ён падвяргаецца тым большаму расхістанню, чым большы патэнцыял яму перадаецца. А як вядома [4, 5], нават пры невялікім змяненні тэмпературы караніруючага электрода ток кароны прыкметна змяняецца, таму пры разліку электрычных страт на карону неабходна лічыцца не толькі з саставам асяроддзя, вільготнасцю, ціскам і г.д., але і з тэмпературай самога караніруючага электрода, якая не застаецца пастаяннай з прычыны яго хістальнага руху. Удадзенай рабоце даследаваўся ўплыў току напалу і патэнцыялу караніруючага дроту на амплітуду яго хістальнага руху.

У якасці караніруючага электрода выбіраўся заземлены праз мікраамперметр ніхромавы дрот даўжынёй 130 і дыяметрам 0,2 мм, размешчаны па восі высакавольтнага цыліндра радыусам 7,5 см. Уключэнне караніруючага дроту ў ланцуг аўтаномнай крыніцы току (рыс. 1) дазваляла ажыццяўляць яго нагрэў у шырокім дыяпазоне тэмператур. Аднак з прычыны вібрацыйнага руху і звязанага з ім ахаладжэння праводзіць вымярэнне тэмпературы дроту ў працэсе разраду вельмі цяжка. У сувязі з гэтым велічыня амплітуды хістанняў караніруючага дроту разглядаецца не ў залежнасці ад змянення яго тэмпературы, а толькі як функцыя току напалу.

Разам са змяненнем тэмпературы дроту змяняюцца некаторыя яго параметры, якія ўплываюць на частату вібрацый. Уласная частата хістанняў струны залежыць галоўным чынам ад яе даўжыні [6] у адпаведнасці з выразам

$$v = \frac{1}{2l} \sqrt{\frac{P}{\rho}}, \quad (1)$$

дзе  $l$  — даўжыня струны,  $P$  — сіла нацяжэння струны,  $\rho$  — шчыльнасць яе рэчыва.

У мэтах стабілізацыі даўжыні караніруючага дроту пры змяненні яго тэмпературы і нацяжэння ён замацоўваўся адным канцом нерухома, другі быў перакінуты праз блок і знаходзіўся пад нацяжэннем, якое стваралася

пастаяннай нагрузкай. Для трансфармацыі механічных хістанняў у электрычныя выкарыстоўваўся электрамагнітны датчык, які рэагаваў на змяненне частаты электрычных сігналаў ажыццяўлялася параўнаннем з эталоннай частатой. Амплітуда электрычнага сігнала вымяралася асцылаграфічным метадам.

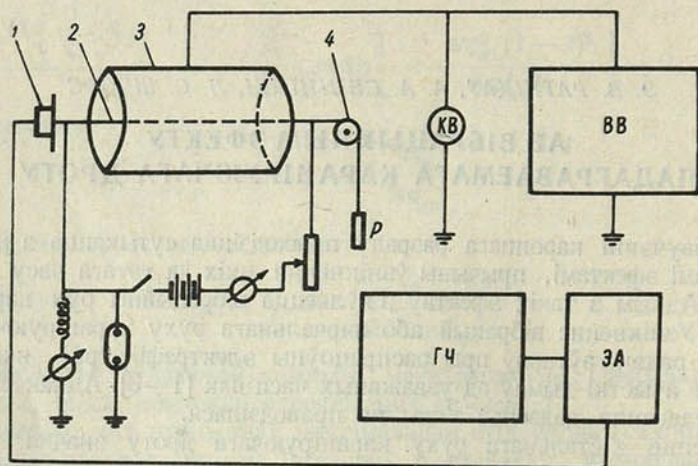


Рис. 1. Схема вымяральной устаноўкі:

1—датчык электрамагнітных хістанняў, 2—караніруючы дрот, 3—высакавольтны цыліндр, 4—блок, ВВ—высакавольтны выпрамнік, КВ—кілавольтметр, ЭА—электронны асцылаграф, ГЧ—генератар эталоннай частаты

На рис. 2 паказаны рэзультаты вымярэнняў амплітуды электрычных сігналаў у залежнасці ад велічыні току напалу і патэнцыялу караніруючага дроту ў выпадку дадатнай кароны. Як і трэба было чакаць, караніруючы дрот генерыруе хістанні з частатой, роўнай частаце ўласных хістанняў.

Устаноўім залежнасць велічыні электрычных сігналаў, якія генерыруюцца ў электрамагнітным датчыку, ад амплітуды механічных хістанняў караніруючага дроту. Для гэтага будзем лічыць адхіленні мембраны электрамагнітнага датчыка

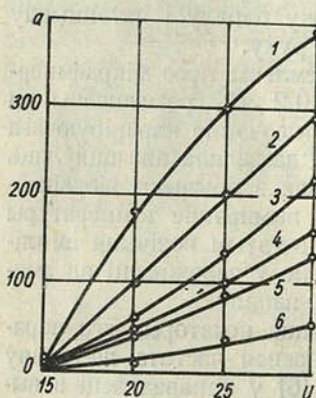


Рис. 2. Залежнасць амплітуды механічных хістанняў караніруючага дроту (у адносных адзінках) ад яго патэнцыялу ( $U$ , кВ) і току напалу (1, 2, 3, 4, 5, 6 — адпаведна 700, 600, 500, 400, 300 і 200 ма) пры нацяжэнні струны 200 Г, ціску паветра 730 мм рт. сл. і адноснай вільготнасці 50%

пры дзеянні на яе пераменнай складаючай сілы нацяжэння караніруючага дроту малымі ў параўнанні з велічынёй паветранага зазору паміж полюсамі пастаяннага магніта і мембранай (рис. 3). У залежнасці ад велічыні паветранага зазору паток магнітнай індукцыі  $\Phi$  будзе змяняцца наступным чынам (7):

$$\Phi = \frac{\varepsilon_M}{\frac{L}{\mu S} + \frac{x + x_0}{\mu_0 S_0}}, \quad (2)$$

дзе  $\varepsilon_M$  — магнітарухаючая сіла,  $L, x_0$  — даўжыня сардэчніка пастаяннага магніта і паветранага зазору,  $\mu, \mu_0$  — магнітная пранікальнасць рэчыва пастаяннага магніта і паветра,  $S, S_0$  — плошча папярочнага сячэння пастаяннага магніта і полюсных наканечнікаў,  $x$  — велічыня змянення паветранага зазору. Тады велічыня ЭРС індукцыі, якая ўзнікае ў здымных шпулях датчыка, будзе роўная

$$E = - \frac{nd\Phi}{dt} = \frac{n\varepsilon_M}{\left(\frac{L}{\mu S} + \frac{x + x_0}{\mu_0 S_0}\right)} \cdot \frac{dx}{dt}, \quad (3)$$

дзе  $n$  — колькасць віткоў у здымнай шпулі датчыка.

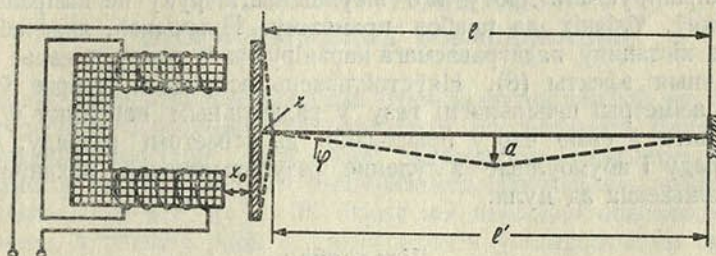


Рис. 3. Залежнасць велічыні прагібу мембраны электрамагнітнага датчыка ад амплітуды механічных хістанняў караніруючага дроту

Паколькі, па меркаванню,  $x \ll x_0$ , выраз (3) прымае выгляд

$$E = c \frac{dx}{dt}, \quad (4)$$

дзе  $c$  — пастаянная, не залежная ад часу. Згодна з рыс. 3,  $x = l - l' = l(1 - \cos \varphi)$ . Раскладваючы  $\cos \varphi$  у рад Маклорэна і абмяжоўваючыся двума членамі раскладання, можам лічыць  $x$  роўным  $l \frac{\varphi^2}{2}$ . Пры малых амплітудах  $a$  механічных хістанняў караніруючага дроту  $\varphi \simeq \frac{2a}{l}$ , тады прыбліжана

$$x = \frac{2a^2}{l}. \quad (5)$$

Паколькі  $a = a_{\max} \sin \omega t$ , то, падстаўляючы выраз (5) ва ўраўненне (3) для амплітуды сігналу, які паступае на асцылограф, атрымаем

$$E = c \frac{2a_{\max}^2 \omega \sin 2\omega t}{l}. \quad (6)$$

Такім чынам,

$$E_{\max} = c \frac{2a_{\max}^2 \omega}{l}, \quad (7)$$

дзе  $E_{\max}$  — максімальнае значэнне амплітуды электрычнага сігналу,  $a_{\max}$  — максімальнае значэнне амплітуды механічнага хістання струны,  $\omega$  — кругавая частата.

Такім чынам, суадносіны паміж амплітудамі механічных хістанняў караніруючага дроту і амплітудамі адпаведных электрычных сігналаў выражацца наступным чынам:

$$\frac{a'_{\max}}{a''_{\max}} = \sqrt{\frac{E'_{\max}}{E''_{\max}}} \quad (8)$$

Візуальныя назіранні пацвердзілі квадратычную залежнасць велічыні электрычнага сігнала ад амплітуды механічнага хістання. Такім чынам, на падставе эксперыментальных даных можна сцвярджаць, што амплітуда механічных хістанняў падаграваемага караніруючага дроту павялічваецца з ростам току нападу. Пры фіксаваным току нападу амплітуда хістанняў расце з павелічэннем патэнцыялу караніруючай струны. У адсутнасць нагрэву караніруючага дроту яго вібрацыйнага руху не назіралася аж да напружанняў, блізкіх да прабоў прамежку. Прычынай, якая абумоўлівае ўзнікненне хістанняў падаграваемага караніруючага дроту, відаць, з'яўляюцца механічныя эфекты (8). Няўстойлівае асяроддзе ўтварае ўмовы для з'яўлення асіметрыі шчыльнасці газу ў радыяльным напрамку ў адносінах да дроту, што ў сваю чаргу прыводзіць да асіметрыі разраду. Асіметрыя току разраду і абумоўлівае з'яўленне рэзультуючай механічнай сілы, якая адрозніваецца ад нуля.

### Літаратура

1. Kunz J. Arch. f. Elektrotechn., 30, 410, 1936.
2. Radonjitsch M., Thoma A. Arch. f. Elektrotechn., 29, 29, 1935.
3. Капцов Н. А. Электрические явления в газах и вакууме. М.—Л., 1950.
4. Ратников Э. В. Вестник БГУ им. В. И. Ленина, сер. 1, № 2, 1969.
5. Цатурян А. Н. Изв. вузов, Физика, № 6, 1968.
6. Морз Ф. Колебания и звук. М.—Л., 1949.
7. Поливанов К. М. Ферромагнетики. М.—Л., 1957.
8. Кунин Н. Ф., Ратников Э. В., Кодатенко О. Д. Вестн. АН БССР, сер. физ.-мат. наук, № 3, 1962.

Белорусский государственный университет  
им. В. И. Ленина

Поступило в редакцию  
10.IV 1970

УДК 539.89:536.45

Н. Н. СИРОТА, А. М. МАЗУРЕНКО, В. Б. ШИПИЛО

### ПОЛУЧЕНИЕ СВЕРХВЫСОКИХ ДАВЛЕНИЙ ПРИ ВЫСОКИХ ТЕМПЕРАТУРАХ ДЛЯ ФИЗИЧЕСКИХ ИССЛЕДОВАНИЙ

Создание аппаратов высокого давления является важной задачей, во многом определяющей возможности физических исследований. Современная техника высоких давлений располагает аппаратами различных конструкций в зависимости от целей и задач эксперимента, необходимых диапазонов давления и температур и т. д. [1, 2]. Ниже мы приводим описание использовавшихся нами в течение ряда лет аппаратов и универсального лабораторного

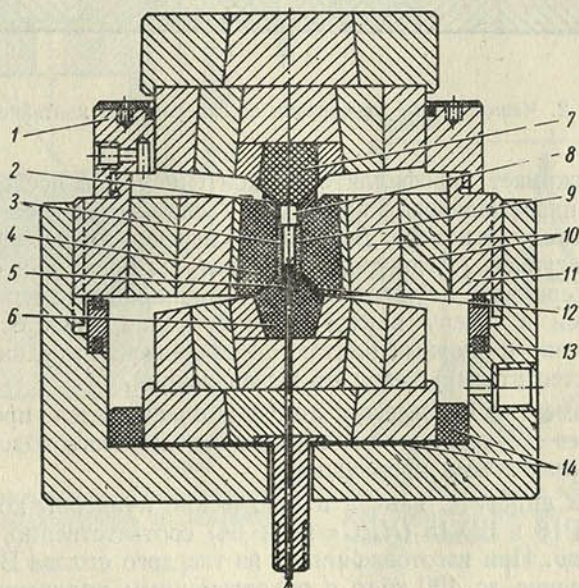


Рис. 1. Аппарат сверхвысокого давления и высокой температуры с коническими пуансонами

гидропресса, которые могут найти широкое применение в научно-исследовательских лабораториях, изучающих физические свойства твердых тел при высоких давлениях.

Рассмотрим два варианта аппаратов сверхвысокого давления. Первый из них — аппарат с коническими пуансонами — отличается несколько большей сложностью, однако позволяет получать температуры до 3000 °К. Второй вариант аппарата — с чашеобразными наковальнями — в отличие от первого более прост, удобен в эксплуатации, но температурный предел его лишь несколько превышает 1000 °К.

На рис. 1 представлен разрез аппарата высокого давления с коническими пуансонами. Рабочая камера 4, усиленная стальными кольцами 10, 11, жестко соединена с нижним пуансоном 6, стягивающей гайкой 13. Пуансон 6, также упрочненный стальными кольцами и электроизолированный от всех частей аппарата слоем слюды (или окиси железа) 12 и текстолитовыми прокладками 14, является одним из токоподводящих контактов к графитовому нагревателю 9. Другим контактом служит активный пуансон 7, который при сжатии аппарата под прессом вдавливает рабочий пуансон 8

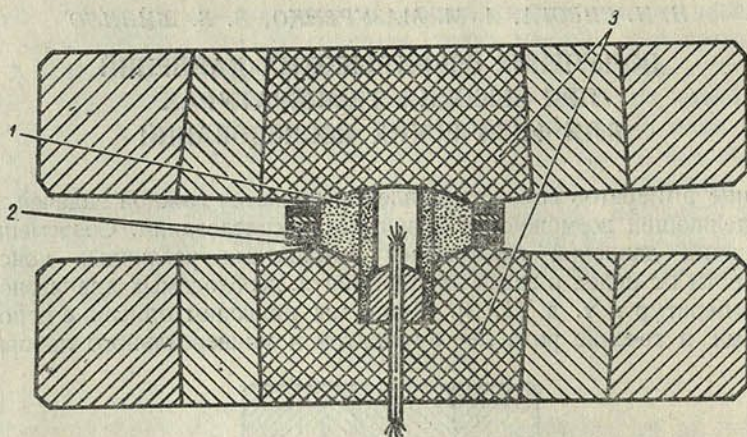


Рис. 2. Чашеобразные наковальни со скрепленным контейнером

в камеру 4 и сжимает пирофиллитовый контейнер 3 с исследуемым образцом. При этом пирофиллитовые прокладки 2 сжимаются и создают торцевую поддержку пуансону и камере. Возможный перекокс пуансона 7 устраняется направляющей втулкой 1. Контроль температуры образца и его параметров в процессе эксперимента осуществляется терморпарой и измерительными зондами, введенными в камеру в керамическом чехле через осевое отверстие в нижнем пуансоне и опорных плитах. Металлическая втулка 5 удерживает керамический (стеотитовый) чехол от выдавливания.

При экспериментах с нагревом аппарат охлаждается проточной водой, подводимой через штуцера, а герметизация заполняемого водой пространства обеспечивается резиновыми прокладками.

В описанном аппарате, камера и конические пуансоны которого изготовлены из стали Р18 и ШХ15 ( $HRC=60 \div 64$ ) соответственно, получены давления до 60 кбар. При изготовлении их из твердого сплава ВК6 могут быть достигнуты давления до 100 кбар с одновременным получением температур 2000—3000 °К. В этом случае нижний пуансон не имеет внутреннего отверстия, а измерительные провода и терморпара выводятся через слюдяные прокладки.

В аппарате, представленном на рис. 2, давление создается за счет сжатия линзообразного контейнера 1 [3] сдвигающимися твердосплавными наковальнями 3. Контейнер 1 скреплен набором чередующихся фторопластовых и стальных колец 2, которые препятствуют хрупкому разрушению контейнера и выдавливанию его в зазор между наковальнями, т. е. обеспечивают рост давления с момента приложения усилия. При последующем сжатии небольшая часть материала контейнера выдавливается между наковальнями и «запирает» рабочий объем, т. к. в тонком слое пирофиллит самоуплотняется. Вытесненные фторопластовые прокладки, имея большую сжимаемость,

поглощают лишь небольшую часть приложенного усилия, поэтому отношение теоретически рассчитанного усилия (при имеющемся внутреннем диаметре камеры) для создания заданного давления к действительному, т. е. к п. д. аппарата, составляет более 90%. Ввод измерительных проводов в камеру сжатия, а также внутренний нагрев осуществляется так же, как и в описанном выше аппарате с коническими пуансонами. Достижимые давления в таком аппарате составляют при комнатной температуре 60—100 кбар в зависимости от высоты чашеобразных углублений наколен,

а температура может меняться в пределах 77°К—1000°К.

В нашей работе используется сконструированный и изготовленный нами лабораторный двухсторонний пресс, разрез которого представлен на рис. 3. Пресс предназначен для работы с различными конструкциями аппаратов высокого давления, в том числе и с аппаратами с жидкой и твердыми средами, передающими давление [4, 5]. Пресс изготовлен из термообработанной стали 40Х и имеет следующие характеристики: усилия нижнего и верхнего прессов при давлении масла в цилиндрах 1000 бар составляют 700 и 400 т

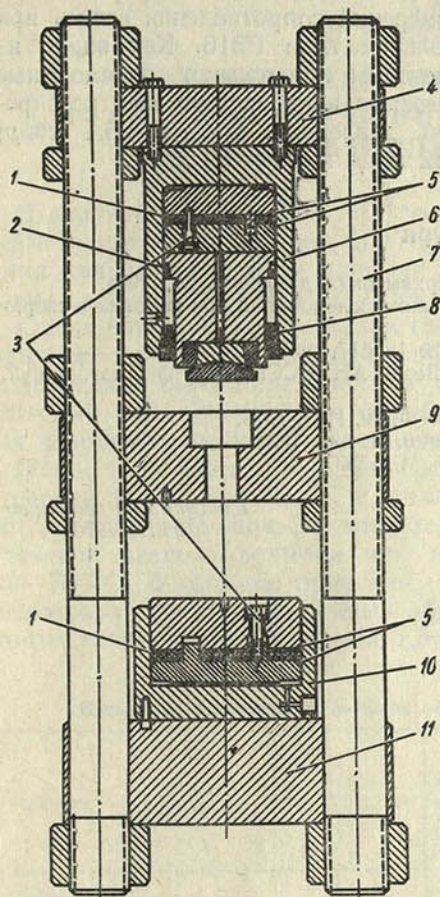


Рис. 3. Универсальный гидравлический пресс для лабораторных исследований

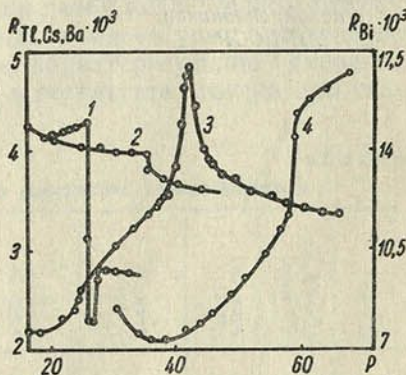


Рис. 4. Зависимость электросопротивления висмута, таллия, цезия и бария (соответственно 1, 2, 3, 4), ом от давления, кбар

соответственно; максимальный ход поршня равен 70 мм для нижнего пресса и 95 мм для верхнего; габариты пресса 610×1900 мм; вес около 3 т.

Работа уплотнений пресса 1, 2, 8 основана на принципе «нескомпенсированной площади» [6], благодаря чему давление прокладок на стенки цилиндров и поршней всегда больше давления масла в цилиндрах. Уплотнения 1 состоят из набора хлорвиниловых и текстолитовых колец, предварительно сжатых тремя затяжными болтами 3. Медные кольца треугольного сечения 5, деформируясь, создают хорошее уплотнение между цилиндром и поршнем. Фланцы 4, 11, к которым прикреплены болтами цилиндры 6, 10, соединены четырьмя тягами 7. Средний фланец 9 дополнительно соединен

с 11 еще двумя тягами. Трапецеидальная резьба, выполненная почти по всей длине тяги, позволяет смещать средний и верхний фланцы в значительных пределах в зависимости от типов применяемых аппаратов.

Приведем результаты исследований зависимости электросопротивления висмута, таллия, цезия и бария от давления (рис. 4) с целью градуировки описанной выше аппаратуры. Образцы металлов брались в виде проволоки диаметром 0,5 мм и помещались по центру цилиндрика, спрессованного из хлористого серебра, который в свою очередь вставлялся во внутреннее отверстие пиррофиллитового контейнера. Измерения сопротивления велись при комнатной температуре мостом сопротивления типа Р316. Как видно из приведенного рисунка, исследованные металлы испытывают полиморфные переходы [7], которые сопровождаются резкими изменениями электросопротивления. Превращения происходят при давлениях:  $Bi_{I-II}$  — 25,4 кбар;  $Bi_{II-III}$  — 27 кбар;  $Tl$  — 37 кбар;  $Cs$  — 42 кбар и  $Ba$  — 59 кбар.

### Литература

1. Уэнторф Р. Современная техника сверхвысоких давлений. М., 1964.
2. Циклис Д. С. Техника физико-химических исследований при высоких и сверхвысоких давлениях. М., 1965.
3. Ballhausen C., VDI-Zeitschrift, 105, № 15, 617, 1963.
4. Сирота Н. Н., Шипило В. Б. Вестн АН БССР, сер. физ.-мат. наук, № 3, 1967.
5. Рябинин Ю. Н., Лившиц Л. Д. ЖТФ, 29, 1167, 1959.
6. Бриджмен П. Физика высоких давлений. М.—Л., 1935.
7. Свенсон К. Физика высоких давлений. М., 1963.

Институт физики твердого тела  
и полупроводников  
АН БССР

Поступило в редакцию  
25.III 1970

УДК 537.312.62 : 546.292.831

Н. Н. СИРОТА, В. Ф. МАЛИШЕВСКИЙ

**ВЛИЯНИЕ ТЕРМИЧЕСКОЙ ОБРАБОТКИ  
 НА СВЕРХПРОВОДЯЩИЕ СВОЙСТВА Zr—V-СПЛАВОВ  
 ЭВТЕКТОИДНОГО СОСТАВА**

В двойной системе Zr—V [1] эвтектоидное равновесие  $\beta_{Zr} \rightleftharpoons \alpha_{Zr} + ZrV_2$  соответствует составу 5 вес. % V при температуре 777 °С. Целью исследования являлось изучение влияния температуры отпуска на сверхпроводящие свойства закаленного эвтектоидного сплава [2].

Сплав эвтектоидного состава готовился в электронно-лучевой печи из йодидного циркония и ванадия зонной очистки (99,95%). Для проведения исследования были приготовлены образцы в виде пластинок сечением  $1,10 \times 1,40$  мм<sup>2</sup>. Термическая обработка образцов проводилась в запаянных кварцевых ампулах, заполненных очищенным аргоном.

После 4 час отжига при температуре 1000 °С образцы выдерживались в течение 30 мин при 850 °С и закалялись путем быстрого раздавливания ампулы в ледяной воде. Закаленные образцы затем подвергались отпуску в течение разного времени при различных температурах в интервале 400—700 °С. В таблице приведены данные, характеризующие изменение физических свойств закаленных образцов в результате отпуска при указанных температурах в течение 1,5 час.

Таблица

Изменение физических свойств образцов в результате термообработки

Образец	Термо-обработка	T, °С	$\tau$ , час	Микротвер- дость $H_K$ , кг/мм <sup>2</sup>	$\rho$ 300 °К, мком·см	$\rho$ 77 °К, мком·см	$\rho_{ост}$ , мком·см	$J_K$ , а/см <sup>2</sup> ( $T=4,2$ °К)	$T_K$ , °К
Эвтектоидный состав	отжиг	1000	4	236	48,09	10,55	—	387	6,3
	закалка	850	—	514	73,8	37,90	—	270	8,1
	отпуск	400	1,5	514	59,60	25,50	18,10	441	8,6
	отпуск	500	1,5	464	60,04	23,04	14,40	423	8,3
	отпуск	600	1,5	383	53,50	14,20	7,55	285	8,1
	отпуск	700	1,5	297	48,75	12,42	5,44	197	7,9
ZrV <sub>2</sub>	отжиг	1000	15	618	58,00	31,70	16,70	427	9,0

Результаты проведенной серии измерений свидетельствуют о том, что с увеличением температуры отпуска от 400 до 700 °С имеет место снижение критической температуры перехода в сверхпроводящее состояние  $T_K$ , понижение  $H_K$  и  $J_K$ , уменьшение удельного электросопротивления. Обращает на себя, однако, внимание то обстоятельство, что отпуск при 400 °С в течение 1,5 час сопровождается повышением критических параметров  $T_K$ ,  $J_K$ ,  $H_K$  по сравнению с закаленным состоянием.

Заметим, что, согласно нашим измерениям, отожженное в атмосфере очищенного аргона при  $1000^{\circ}\text{C}$  в течение 15 час химическое соединение  $\text{ZrV}_2$  имеет критическую температуру  $9^{\circ}\text{K}$ , что близко, но несколько выше значений, полученных другими авторами [3—5].

### Литература

1. Williams J. T. Trans AIME, 203, 345, 1955.
2. Сирота Н. Н., Малишевский В. Ф. Тезисы докладов XV Всесоюзного совещания по физике низких температур. Тбилиси, 1968.
3. Mattias V. T., Compton V. B., Corenzwit E. J. Phys. Chem. Solids, 19, 130, 1961.
4. Алексеевский Н. Е., Гусева Л. Н., Матвеева Н. М. Доклады АН СССР, 178, 5, 1047, 1958.
5. Матвеева Н. М., Малахова Т. О. Сб. «Физико-химия, металловедение и металлофизика сверхпроводников». М., 1969, стр. 28.

*Институт физики твердого тела  
и полупроводников АН БССР*

*Поступило в редакцию  
29.VI 1970*

## ЗМЕСТ

### МАТЭМАТЫКА

М. И. Кравчук. О некоторых классах факторизуемых конечных групп . . .	5
Л. Я. Поляков. Аналог групп О. Ю. Шмидта . . .	12
А. Ф. Орещенко. Двумерные поверхности класса [11], [11] в $E_4$ . . .	16
Я. В. Радыно. Об устойчивости нетеровских операторов и их индексов в локально выпуклых пространствах . . .	25
И. А. Прусов. Об одном представлении основных формул термоупругости для анизотропной полуплоскости и анизотропной плоскости с разрезами . . .	31
Л. Т. Шульгина. Об интерполяционном улучшении сходимости к пределу функции двух аргументов . . .	37
И. М. Кунцевич. Вычислительные аспекты задачи нахождения экстремальных значений линейной формы на множестве всех $n$ -членных циклов из $S_n$ . . .	44
И. Шокамолов. Интерполяционные квадратурные формулы для некоторых интегралов типа Коши и их главных значений . . .	53
Л. М. Брутман. Об эффективном вычислении остаточного члена квадратурных формул, точных для алгебраических полиномов . . .	61
О. А. Лисковец. Решение задачи Коши для уравнения Лапласа обобщенным методом суммирования рядов . . .	68
В. М. Зубов. О существовании, единственности и оценках решения двухточечной краевой задачи для системы обыкновенных дифференциальных уравнений . . .	75

### ФІЗІКА

А. А. Богущ, Л. Г. Мороз, Ф. И. Федоров. Тензор-параметр и плоские преобразования Лоренца . . .	85
Н. В. Максименко. Аналитические свойства амплитуды комптон-эффекта на дейтроне . . .	91
А. П. Иванов. Тепловой стационарный режим в плоскопараллельном светорассеивающем слое . . .	101
В. К. Кононенко. О ширине полосы люминесценции в лазерных диодах . . .	106
Г. Г. Ламаносаў, А. В. Сарока, Я. І. Фірсаў, М. Р. Чаранда. Вымярэнне патокаў эпіцелавых і хуткіх нейтронаў у вертыкальным канале рэактара ІРТ-2000 . . .	112
М. М. Аляхновіч. Аб умовах і інтэнсіўнасці адбіцця рэнтгенаўскіх прамянёў для факсіруючых крыштал-манахраматараў у залежнасці ад адлегласці крыніца — манахраматар . . .	117
Э. В. Ратнікаў, А. А. Свінціцкі, Л. С. Шчорс. Аб вібрацыйным эффекце падаграваемага караніруючага дроту . . .	123

### КАРОТКІЯ ПАВЕДАМЛЕННІ

Н. Н. Сирота, А. М. Мазуренко, В. Б. Шипило. Получение сверхвысоких давлений при высоких температурах для физических исследований . . .	127
Н. Н. Сирота, В. Ф. Малишевский. Влияние термической обработки на сверхпроводящие свойства $Zr-V$ -сплавов эвтектондного состава . . .	131

## СОДЕРЖАНИЕ

## МАТЕМАТИКА

М. И. Кравчук. О некоторых классах факторизуемых конечных групп . . . . .	5
Л. Я. Поляков. Аналог групп О. Ю. Шмидта . . . . .	12
А. Ф. Орещенко. Двумерные поверхности класса [11], [11] в $E_4$ . . . . .	16
Я. В. Радыно. Об устойчивости нетеровских операторов и их индексов в локально выпуклых пространствах . . . . .	25
И. А. Прусов. Об одном представлении основных формул термоупругости для анизотропной полуплоскости и анизотропной плоскости с разрезами . . . . .	31
Л. Т. Шульгина. Об интерполяционном улучшении сходимости к пределу функции двух аргументов . . . . .	37
И. М. Кунцевич. Вычислительные аспекты задачи нахождения экстремальных значений линейной формы на множестве всех $n$ -членных циклов из $S_n$ . . . . .	44
И. Шокамолов. Интерполяционные квадратурные формулы для некоторых интегралов типа Коши и их главных значений . . . . .	53
Л. М. Брутман. Об эффективном вычислении остаточного члена квадратурных формул, точных для алгебраических полиномов . . . . .	61
О. А. Лисковец. Решение задачи Коши для уравнения Лапласа обобщенным методом суммирования рядов . . . . .	68
В. М. Зубов. О существовании, единственности и оценках решения двухточечной краевой задачи для системы обыкновенных дифференциальных уравнений . . . . .	75

## ФИЗИКА

А. А. Богущ, Л. Г. Мороз, Ф. И. Федоров. Тензор-параметр и плоские преобразования Лоренца . . . . .	85
Н. В. Максименко. Аналитические свойства амплитуды комптон-эффекта на дейтроне . . . . .	91
А. П. Иванов. Тепловой стационарный режим в плоскопараллельном светорассеивающем слое . . . . .	101
В. К. Кононенко. О ширине полосы люминесценции в лазерных диодах . . . . .	106
И. И. Ломоносов, А. В. Сорока, Е. И. Фирсов, Н. Г. Черенда. Измерение потоков эпитепловых и быстрых нейтронов в вертикальном канале реактора ИРТ-2000 . . . . .	112
Н. М. Олехнович. Об условиях и интенсивности отражения рентгеновских лучей для фокусирующих кристалл-монокроматоров в зависимости от расстояния источник—монокроматор . . . . .	117
Э. В. Ратников, О. А. Свинтицкий, Л. С. Щорс. О вибрационном эффекте подогреваемой коронирующей проволоки . . . . .	123

## КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

Н. Н. Сирота, А. М. Мазуренко, В. Б. Шипило. Получение сверхвысоких давлений при высоких температурах для физических исследований . . . . .	127
Н. Н. Сирота, В. Ф. Малишевский. Влияние термической обработки на сверхпроводящие свойства $Zr-V$ -сплавов эвтектоидного состава . . . . .	131

## РЕФЕРАТЫ

УДК 519.44

**О некоторых классах факторизуемых конечных групп.**  
Кравчук М. И. «Весті Акадэміі навук БССР», серыя  
фізіка-матэматычных навук. 1970 г., № 4, 5—11.

Исследуется взаимосвязь между различными рядами подгрупп конечной группы и ее факторизацией подгруппами определенного вида. Обобщаются некоторые результаты работы С. А. Чунихина (Матем. сб., 25, № 3, 321—346, 1949).

Строятся обобщенные центральные ряды. Показывается, что такие ряды обладают свойствами, аналогичными свойствам обычных центральных рядов. Доказываются теоремы, обобщающие результаты Е. Шенкмана (РЖМат., 1956, 6411).

Библиографий 11.

УДК 519.44

**Аналог групп О. Ю. Шмидта.** Поляков Л. Я. «Весті  
Акадэміі навук БССР», серыя фізіка-матэматычных на-  
вук. 1970 г., № 4, 12—15.

Исследуется строение конечных групп, у которых каждая максимальная подгруппа с порядком, делящимся на наименьший простой делитель порядка самой группы, сверхразрешима.

Библиографий 10.

УДК 513.735

**Двумерные поверхности класса [11], [11] в  $E_4$ .** Орещенко А. Ф. «Весті Акадэміі навук БССР», серыя фізіка-матэматычных навук. 1970 г., № 4, 16—24.

В четырехмерном псевдоевклидовом пространстве  $E_4$  ( $l = 1, 2$ ) изучается геометрия двумерных поверхностей со знаконеопределенной метрикой, индуцированной вторыми фундаментальными тензорами  $b_{ij}^a$  ( $i, j = 1, 2; a = 3, 4$ ), имеющими характеристику Segre [11]. Рассматриваются особенности индикатрисы кривизны, фокальной кривой, сопряженной и изотропной сети в зависимости от различных условий на собственные значения тензоров  $b_{ij}^a$ . Выделены поверхности с равными собственными значениями у одного из тензоров  $b_{ij}^a$ , а также случай, когда главные направления этих тензоров совпадают (эти поверхности допускают эволютные, индикатриса кривизны у них прямая, гауссово кручение равно нулю). Показано, что если собственные значения обоих тензоров  $b_{ij}^a$  равны, то получается гиперплоская поверхность постоянной кривизны.

Библиографий 4.

УДК 513.88 : 513.83

**Об устойчивости нетеровских операторов и их индексов в локально выпуклых пространствах.** Радыно Я. В. «Весті Акадэміі навук БССР», серыя фізіка-матэматычных навук. 1970 г., № 4, 25—30.

Дается обобщение классической теории нетеровских операторов, действующих в отделимых локально выпуклых пространствах.

Библиографий 8.

УДК 539.3

Об одном представлении основных формул термоупругости для анизотропной полуплоскости и анизотропной плоскости с разрезами. П р у с о в И. А. «Весті Академії наук БССР», серия фізика-математичних наук. 1970 г., № 4, 31—36.

Для рассматриваемых областей дано представление общих формул в виде, позволяющем решать основные краевые задачи термоупругости анизотропного тела методом сопряжения.

Библиографий 5.

УДК 518

Об интерполяционном улучшении сходимости к пределу функции двух аргументов. Ш у л ь г и н а Л. Т. «Весті Академії наук БССР», серия фізика-математичних наук. 1970 г., № 4, 37—43.

В заметке рассматривается интерполяционное преобразование функции  $S_{m,n}$  двух целочисленных аргументов

$$\sigma_{m,n} = \sum_{i=0}^l \sum_{j=0}^k (-1)^{l+k+i+j} \frac{(m+i)!(n+j)^k}{i!j!(l-i)!(k-j)!} S_{m+i, n+j}. \quad (1)$$

Устанавливается, что  $\sigma_{m,n}$  имеет предел при  $m, n \rightarrow \infty$  только в том случае, когда  $S_{m,n}$  имеет предел, причем  $\sigma_{m,n}$  имеет тот же предел, что и  $S_{m,n}$ . Рассматриваются некоторые виды функций  $S_{m,n}$ , сходимость которых при преобразовании (1) улучшается.

Библиографий 3.

УДК 512.25/6+519.15

Вычислительные аспекты задачи нахождения экстремальных значений линейной формы на множестве всех  $n$ -членных циклов из  $S_n$ . К у н ц е в и ч И. М. «Весті Академії наук БССР», серия фізика-математичних наук. 1970 г., № 4, 44—52.

Пусть  $f = \sum_{i=1}^n e_i x_i$  — вещественная линейная форма,  $\pi = \langle c, b \rangle$  — пара вещественных  $n$ -мерных векторов,  $H$  — множество всех  $n$ -членных циклов симметрической группы  $S_n$ .

Требуется найти в  $H$  такой  $n$ -членный цикл  $t_0$ , что

$$f_{\pi}(t_0) = \min_{t \in H} f_{\pi}(t).$$

Задача рассматривается в общем случае, т. е. в предположении, что постановка  $t_0$ , минимизирующая значение линейной формы  $f$  на всей симметрической группе, произвольная. Теоретико-графовый подход позволил функцию-критерий изучаемой задачи записать в другом виде, что дало возможность использовать вычислительные схемы динамического программирования, в частности, метод последовательного конструирования и анализа вариантов для решения задачи нахождения экстремальных значений линейной формы на множестве всех  $n$ -членных циклов из  $S_n$ .

Иллюстраций 2. Библиографий 7.

УДК 517.392

**Интерполяционные квадратурные формулы для некоторых интегралов типа Коши и их главных значений.**  
Ш о к а м о л о в И. «Весті Академії наук БССР», серия фізика-математичних наук. 1970 г., № 4, 53—61.

Рассматриваются интерполяционные квадратурные формулы для вычисления интегралов типа Коши и их главных значений вида

$$\Psi(z) = -\frac{\sqrt{z^2-1}}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{f(t)}{t-z} \cdot \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} (z \in [-1, 1]),$$

$$I(x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{f(t)}{t-x} \cdot \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} (x \in [-1, 1]).$$

Даются методы вычисления коэффициентов рассматриваемых формул и указываются различные способы оценки их остаточных членов.

Библиографий 11.

УДК 518.342

**Об эффективном вычислении остаточного члена квадратурных формул, точных для алгебраических полиномов.**  
Б р у т м а н Л. М. «Весті Академії наук БССР», серия фізика-математичних наук. 1970 г., № 3, 61—67.

Получено представление остаточного члена квадратурных формул, точных для алгебраических многочленов степени  $\leq m$  в форме разложения в ряд

$$R[f] = \sum_{r=m}^{\infty} b_{r+1}^{(m)} L_r[f],$$

где коэффициенты  $b_{r+1}^{(m)}$  не зависят от интегрируемой функции  $f(x)$ , а легко вычисляемые параметры  $L_r[f]$  характеризуют точность аппроксимации функции  $f(x)$  асимптотическим полиномом И. И. Этермана (РЖМат, 1962, 12В202).

Отмечается, что указанное разложение носит эффективный характер и получено в широких предположениях относительно структурных характеристик интегрируемой функции. Для функций, обладающих достаточной гладкостью, последовательность функционалов  $L_r[f]$  быстро убывает (см. РЖМат, 1966, 9В123), так что удовлетворительная для практических целей точность обеспечивается обычно несколькими членами бесконечного ряда, при этом порядок погрешности хорошо передается первым членом разложения.

Указывается, что для некоторых формул приближенного интегрирования коэффициенты  $b_{r+1}^{(m)}$  имеют особенно простой вид.

Так, например, в случае квадратурной формулы Мелера доказана справедливость разложения

$$R_n[f] = \pi \left\{ L_{2n-1}[f] - \sum_{s=0}^{\infty} L_{2^{s+2}n-1}[f] \right\},$$

а для остатка квадратуры Гаусса получена приближенная формула

$$R_n[f] \approx \frac{\pi}{2} \left\{ L_{2n-1}[f] - L_{2n+1}[f] \right\}.$$

Предложенный метод оценки погрешности квадратур распространяется на случай интегрирования в бесконечном промежутке.

Таблиц 1. Библиографий 10.

УДК 518 : 517.947.42 : 517.521.8

**Решение задачи Коши для уравнения Лапласа обобщенным методом суммирования рядов.** Лисковец О. А. «Весті Академії наук БССР», серия фізика-математичних наук. 1970 г., № 4, 68—74.

Для решения названной некорректной задачи предлагается применить конечнострочную модификацию абелева метода суммирования (см. (А, 2) в книге Г. Харди «Расходящиеся ряды». М, 1951). Показана возможность аппроксимировать в квадратическом среднем точное решение приближенными, а если точное решение априорно принадлежит определенному компактному, то и указать оценку погрешности. Возможны обобщения на более сильные, в частности, равномерные метрики.

Библиографий 13.

УДК 517.925

**О существовании, единственности и оценках решения двухточечной краевой задачи для системы обыкновенных дифференциальных уравнений.** Зубов В. М. «Весті Академії наук БССР», серия фізика-математичних наук». 1970 г., № 4, 75—84.

В первой части работы изучаются общие вопросы линейной двухточечной краевой задачи: существование, оценки и условия сохранения знака матрицы Грина. Полученная информация используется для получения критериев существования, единственности и оценок решения системы нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений с общими двухточечными краевыми условиями.

В частности, изучаются перечисленные выше вопросы для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка с двухточечными краевыми условиями.

Библиографий 5.

УДК 539.12

**Тензор-параметр и плоские преобразования Лоренца.** Богуш А. А., Мороз Л. Г., Федоров Ф. И. «Весті Академії наук БССР», серия фізика-математичних наук. 1970 г., № 4, 85—90.

Рассмотрено соответствие между параметризациями группы Лоренца с помощью трехмерного комплексного вектор-параметра и четырехмерного антисимметричного тензор-параметра. Получены соотношения, характеризующие связь между плоскими преобразованиями Лоренца и преобразованиями малой группы.

Библиографий 14.

УДК 539.12

**Аналитические свойства амплитуды комптон-эффекта на дейтроне.** Максименко Н. В. «Весті Академії наук БССР», серия фізика-математичних наук. 1970 г., № 4, 91—100.

В статье исследованы ближайшие особенности амплитуды комптон-эффекта на дейтроне и получены явные выражения для спектральных функций каждой из 12 независимых амплитуд, соответствующих диаграмме 4-го порядка.

Иллюстраций 7. Библиографий 8.

УДК 536.2/3

**Тепловой стационарный режим в плоскопараллельном светорассеивающем слое.** Иванов А. П. «Весті Академії наук БССР», серия фізика-матэматычных навук. 1970 г., № 4, 101—105.

В рамках двухпоточкового приближения сформулированы и решены уравнения, описывающие структуру светового поля и температуру в рассеивающем слое. Считалось, что перенос тепла обусловлен только поглощением лучистой энергии от нагретых пластин с разной отражательной способностью и собственного теплового излучения среды. Рассмотрены случаи, когда среда поглощает радиацию в узком спектральном интервале или является серым телом. Проанализировано влияние оптической толщины, вероятности выживания фотона, формы индикатрисы рассеяния элементарного объема, температуры пластины на температуру в разных участках слоя.

Библиографий 12.

УДК 535.376 : 621.315.592.3

**О ширине полосы люминесценции в лазерных диодах.** Кононенко В. К. «Весті Академії навук БССР», серия фізика-матэматычных навук. 1970 г., № 4, 106—111.

Рассматриваются свойства спектра испускания для различных механизмов рекомбинации в модели заполнения хвоста плотности состояний. Исследована зависимость пика, ширины и формы полосы испускания от степени легирования, уровня возбуждения и температуры полупроводника в случае экспоненциального и гауссового хвоста зоны проводимости, а также для переходов из состояний, относящихся к параболической части зоны проводимости.

Иллюстраций 3. Библиографий 21.

УДК 621.039

**Измерение потоков эпитепловых и быстрых нейтронов в вертикальном канале реактора ИРТ-2000.** Ломоносов И. И., Сорока А. В., Фирсов Е. И., Черенда Н. Г. «Весті Академії навук БССР», серия фізика-матэматычных навук. 1970 г., № 4, 112—116.

Описано измерение потоков эпитепловых и быстрых нейтронов в одном из вертикальных каналов реактора ИРТ-2000 активационными методами. Использовали 5 «бесконечно» тонких резонансных и 9 пороговых детекторов. Наведенные активности измеряли  $\gamma$ -спектрометром по характерным  $\gamma$ -линиям и  $4\pi\beta$ -пропорциональным счетчиком.

Приведен дифференциальный спектр эпитепловых и интегральный спектр быстрых нейтронов. Максимальная ошибка измерения потоков оценена в 18%.

Таблиц 2. Иллюстраций 3. Библиографий 10.

УДК 548-732

**Об условиях и интенсивности отражения рентгеновских лучей для фокусирующих кристалл-монохроматоров в зависимости от расстояния источник—монохроматор.** Олехнович Н. М. «Весті Академії навук БССР», серия фізика-матэматычных навук. 1970 г., № 4, 117—122.

Излагаются результаты количественного анализа условий работы фокусирующих монохроматоров в зависимости от расстояния источник—монохроматор в случае протяженных источников излучения. Получены выражения, определяющие изменение условий отражения в зависимости от положения точки рассеяния на рабочей поверхности монохроматоров типа Иоганна и Иоганссона. Показано, что вид функции интенсивности удельного отражения монохроматора существенно зависит от расстояния

источник—монохроматор. Приводятся выражения, определяющие оптимальное расстояние источник—монохроматор, при котором имеет место максимум интенсивности монохроматического пучка.

Иллюстраций 4. Библиографий 5.

УДК 537.525

**О вибрационном эффекте подогреваемой коронирующей проволоки.** Ратников Э. В., Свинтицкий О. А., Щорс Л. С. «Весті Академії наук БССР», серия фізика-математичних наук. 1970 г., № 4, 123—126.

Получена зависимость амплитуды механических колебаний коронирующей проволоки от тока накала и напряжения. При фиксированном потенциале коронирующей проволоки амплитуда механических колебаний увеличивается с ростом тока накала. Увеличение потенциала коронирующего электрода сопровождается увеличением интенсивности звука.

Иллюстраций 3. Библиографий 8.

УДК 539.89 : 536.45

**Получение сверхвысоких давлений при высоких температурах для физических исследований.** Сирота Н. Н., Мазуренко А. М., Шипило В. Б. «Весті Академії наук БССР», серия фізика-математичних наук. 1970 г., № 4, 127—130.

Описаны два типа аппаратов сверхвысокого давления, которые снабжены вводами в зону давления: с коническими пуансонами и чашеобразными наковальнями. Приведена схема двухстороннего гидравлического пресса. Аппаратура предназначена для физических исследований веществ под давлением до 100 кбар в широком температурном интервале.

Иллюстраций 4. Библиографий 7.

УДК 537.312.62 : 546.292'831

**Влияние термической обработки на сверхпроводящие свойства Zr—V-сплавов эвтектоидного состава.** Сирота Н. Н., Малишевский В. Ф. «Весті Академії наук БССР», серия фізика-математичних наук. 1970 г., № 4, 131—132.

Приведены данные, характеризующие изменение сверхпроводящих свойств в результате отпуска в интервале 400—700 °С в течение 1,5 час закаленных Zr—V-сплавов эвтектоидного состава.

Таблиц 1. Библиографий 5.

## ПРАВИЛА ДЛЯ АВТОРОВ

1. Статьи должны быть написаны на машинке через два интервала на одной стороне листа и представляться в двух экземплярах.

2. Формулы и буквенные обозначения должны быть аккуратно вписаны от руки чернилами. Для формул, выделенных в отдельную строку, следует оставлять достаточные пробелы в тексте. Греческие буквы должны быть обведены красным карандашом. Буквы, вписанные от руки, в формулах и в тексте должны подчеркиваться простым карандашом: прописные — двумя черточками снизу (напр.,  $\underline{\underline{S}}$ ), строчные — двумя черточками сверху (напр.,  $\overline{\overline{s}}$ ). Следует различать буквы  $\underline{O}$  (прописную),  $\underline{o}$  (строчную) и  $0$  (нуль), для чего буквы  $\underline{O}$  и  $\underline{o}$  подчеркивать двумя черточками, а нуль отмечать квадратной скобкой снизу ( $\underline{O}$ ,  $\underline{o}$ ,  $0$ ). Следует также различать буквы  $\underline{I}$  и  $\underline{J}$  (йот), для чего  $\underline{I}$  писать, как римскую единицу, подчеркивая ее двумя черточками снизу. Векторы подчеркивать чернилами одной чертой снизу. Математические символы  $\cos$ ,  $\sin$ ,  $\lg$  и др., набираемые прямым шрифтом, и химические символы элементов ( $\underline{H}$ ,  $\underline{N}$ ,  $\underline{Cl}$ ,  $\underline{Fe}$  и т. д.) отмечаются простым карандашом квадратной скобкой снизу ( $\underline{\underline{\sin}}$ ,  $\underline{\underline{\lg}}$ ,  $\underline{\underline{N}}$ ,  $\underline{\underline{Cl}}$ ). Показатели степени и индексы, а также надстрочные знаки отмечаются дугой  $\frown$  (для верхнего индекса) или  $\smile$  (для нижнего).

3. В связи с введением с 1 января 1963 г. Международной системы единиц измерения (СИ) размерность всех величин, принятых в статьях, должна соответствовать указанной системе единиц измерения.

4. Цитируемая в статье литература должна даваться автором не в виде подстрочных сносок, а общим списком в конце статьи с обозначением ссылки в тексте порядковой цифрой в квадратных скобках. Список литературы должен быть оформлен следующим образом:

а) для книг: фамилия и инициалы автора, полное название книги, номер тома, место и год издания;

б) для журнальных статей: фамилия и инициалы автора, название журнала, номер тома (подчеркнуть), номер выпуска, страница и год.

Ссылки на неопубликованные работы не допускаются.

5. Рисунки должны быть выполнены на белой бумаге тушью размером  $15 \times 20$  см; надписи на рисунках не делать. Все обозначения указывать в тексте подрисовочных подписей. К статье прилагается список с номерами рисунков и текстом подрисовочных подписей. В тексте на полях обязательно указывается место для рисунков и таблиц.

Таблицы и список литературы печатаются на отдельных листах и прилагаются в конце статьи. Фотографии должны иметь контрастное изображение и быть отпечатаны на хорошей бумаге размером не менее  $9 \times 12$  см. На обороте рисунков должны быть указаны фамилия автора, название статьи и номер рисунка.

6. В случае представления двух или более статей одновременно необходимо указывать желательный порядок их помещения.

7. Авторы должны избегать повторения одних и тех же данных в таблицах, графиках и в тексте статьи.

8. К статье обязательно прилагается 2 экз. реферата.

9. Корректуры статей авторам, как правило, не посылаются. В случае ссылки корректуры допускается лишь исправление ошибок типографии.

Корректурa должна возвращаться в редакцию не позже, чем на следующий день после получения ее автором. Невозвращение корректуры в срок не приостанавливает печатания статьи.

10. В случае возвращения статьи автору для исправления или при ее сокращении датой представления считается день получения редакцией окончательного текста.

4431-4892



8000000 1422953

60 н.