

30K-3
58

ВЕСЦІ

АКАДЭМІІ НАВУК БССР

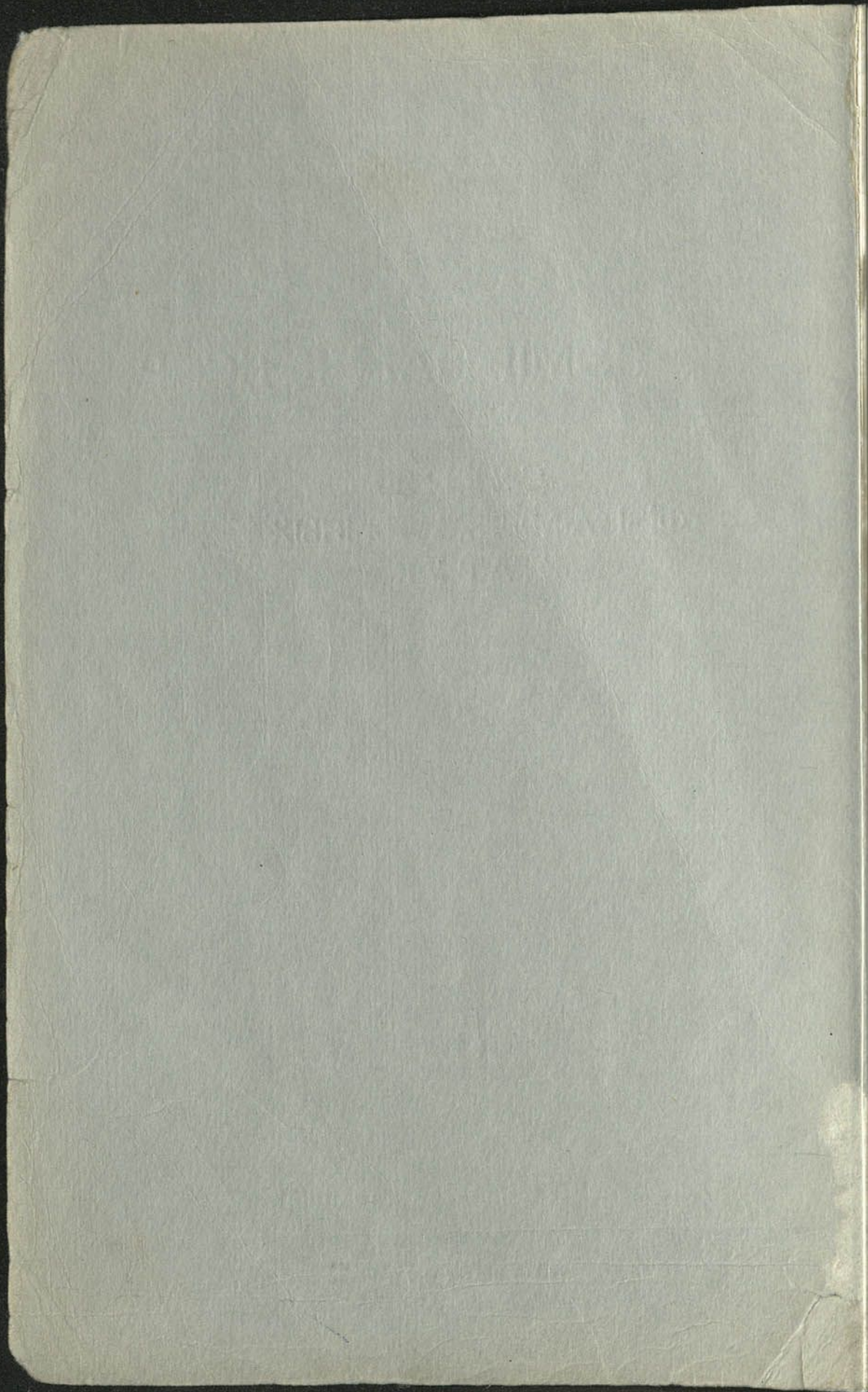
СЕРЫЯ
ФІЗІКА-МАТЭМАТЫЧНЫХ
НАВУК

5

ВЫДАВЕЦТВА „НАВУКА І ТЭХНІКА“

МІНСК 1970

Ба 05
4431





ИЗВЕСТИЯ

АКАДЕМИИ НАУК БССР

СЕРИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ
НАУК

№ 5

ИЗДАТЕЛЬСТВО „НАУКА И ТЕХНИКА“

МИНСК 1970

ВЕСЦІ

30K3
58

АКАДЭМІІ НАВУК БССР

СЕРЫЯ
ФІЗИКА-МАТЭМАТЫЧНЫХ
НАВУК

№ 5

ВЫДАВЕЦТВА „НАВУКА І ТЭХНІКА“

МІНСК 1970



Ба 05
4431

Рэдакцыйная калегія:

Ф. І. ФЕДАРАУ (галоўны рэдактар),
Д. А. СУПРУНЕНКА (нам. галоўнага рэдактара),
М. М. АЛЯХНОВІЧ, Ф. Д. ГАХАУ, У. І. КРЫЛОУ,
М. М. СІРАТА, У. Г. СПРЫНДЖУК, Я. І. ФІРСАУ,
С. А. ЧУНІХІН

А. В. РОМАНОВСКИЙ

СУЩЕСТВОВАНИЕ, СОПРЯЖЕННОСТЬ И ВЛОЖЕНИЕ ПОДГРУПП У КОНЕЧНЫХ ФАКТОРИЗУЕМЫХ ГРУПП

§ 1. Есть пример [1], который показывает, что группа, являющаяся произведением двух π -разложимых подгрупп, не всегда π -отделима. В настоящей статье показывается, что некоторые такие не π -отделимые факторизуемые группы обладают свойствами C_π^s и D_π^s , присущими π -отделимым [2, 3]. Кроме того, здесь доказываются также критерии π -разрешимости и π -отделимости групп с π -разложимыми факторами.

Все результаты формулировались ранее в [1, 4].

§ 2. Приведем используемые в работе определения и обозначения: G — конечная группа, p — простое число, π — некоторое множество простых чисел; π' — дополнение к множеству π во множестве всех простых чисел, если $\pi = \{p\}$, то вместо π' будем просто писать p' ; (B) — порядок группы B ; A_p — силовская p -подгруппа A ; A^G — подгруппа группы G , порожденная всеми сопряженными с A подгруппами в группе G ; πd -подгруппой называется подгруппа, порядок которой делится по крайней мере на одно простое число из π , если $\pi = \{p\}$, то πd -подгруппу будем называть pd -подгруппой; единичную подгруппу E группы G будем считать p -силовской подгруппой для любого простого числа p , не делящего (G) ; собственной подгруппой группы G считаем подгруппу, отличную от G и E ; π -подгруппой называется подгруппа, каждый простой делитель порядка которой содержится в π ; S_π -подгруппой группы G называется π -подгруппа, индекс которой в G не делится ни на одно число из π ; A_π — некоторая S_π -подгруппа из A .

Группа называется p -разложимой, если она разлагается в прямое произведение своих p -силовской подгруппы и p -силовского дополнения [5].

Группа называется π -разложимой, если она p -разложима для каждого $p \in \pi$.

Группа называется дедекиндовой, если она содержит только инвариантные подгруппы. Группа называется метабелевой, если ее фактор-группа по центру абелева.

Будем использовать следующую символику, предложенную Холлом [3]:

E_π^n — группа G имеет по крайней мере одну нильпотентную S_π -подгруппу;

E_π^s — группа G имеет по крайней мере одну разрешимую S_π -подгруппу;

C_π^s — группа G обладает свойством E_π^s и любые две ее S_π -подгруппы сопряжены;

D_π^s — группа G обладает свойством C_π^s и любая ее π -подгруппа содержится в некоторой ее S -подгруппе.

Мы вводим в рассмотрение также следующее свойство:

E_π^{nz} — группа G имеет по крайней мере одну S_π -подгруппу, являющуюся прямым произведением своих холловских подгрупп, одна из которых нильпотентна, а у второй все силовские подгруппы циклические.

Заметим, что если G обладает свойством E_{π}^n либо все силовские подгруппы ее S_{π} -подгруппы циклические, то, по определению, G обладает свойством E_{π}^{nz} .

Остальные определения можно найти в работах [6, 7].

В дальнейшем неоднократно будет использоваться следующая теорема, доказанная нами в работе [8].

Теорема А. Пусть максимальная подгруппа M группы G является непримарной p -разложимой подгруппой. Тогда G имеет инвариантную подгруппу одного из видов:

- а) p -силовская подгруппа из M ,
- б) силовское p -дополнение в M или в G .

§ 3. **Теорема 1.** Пусть $G=AB$, где A есть 2-разложимая подгруппа с дедекндовой 2-силовской, а B — максимальная в G 2-разложимая подгруппа с метабелевой 2-силовской подгруппой. Тогда G разрешима.

Доказательство. Допустим, что среди всех групп, для которых теорема неверна, группа G имеет наименьший порядок.

Если 2 не делит (B) , то G разрешима по теореме из [9]. Противоречие.

Следовательно, 2 делит (B) . Тогда 2 не делит (A) , ибо в силу максимальной B силовская 2-подгруппа P из B была бы инвариантной в G , но тогда $G/P=AP/P \cdot B/P$ разрешима по индукции, а поэтому и G была бы разрешимой.

Если B есть 2-подгруппа, то G разрешима по теореме Дескинса [10]. Противоречие.

Итак, B является непримарной. Тогда, по теореме А и в силу разрешимости групп нечетного порядка, G имеет разрешимый нормальный делитель $K \neq E$. По индукции $G/K=AK/K \cdot BK/K$ разрешима, но тогда и G разрешима. Получается противоречие. Теорема доказана.

Теорема 2. Пусть $G=AB$, где A и B — максимальные и p -разложимые подгруппы G . Если в случае, когда $p=2$, каждая из силовских 2-подгрупп A и B либо инвариантна в G , либо метабелева, то G будет p -разрешимой.

Доказательство. Допустим, что среди всех групп, для которых теорема неверна, группа G имеет наименьший порядок.

Пусть $N \neq E$ есть p -разрешимый нормальный делитель группы G . Так как $G/N=AN/N \cdot BN/N$ по индукции p -разрешима, то и G p -разрешима. Противоречие.

Следовательно, G не содержит p -разрешимого нормального делителя, отличного от E .

Если (A) и (B) не делятся на p , то G p -разрешима. Поэтому можем считать, что порядок A делится на p . Если A является примарной, тогда при $p \neq 2$ группа G разрешима по теореме Томпсона [11], а при $p=2$ — по теореме Дескинса [10]. Следовательно, A есть непримарная подгруппа. Если (B) не делится на p , то, по теореме А, G имеет p -разрешимый нормальный делитель, отличный от E . Противоречие. Если (B) делится на p , то в силу максимальной A группа G имеет инвариантную p -подгруппу. Получается противоречие. Теорема доказана.

В теореме 2 условие максимальной существенно для обоих факторов A и B , что показывает пример простой группы 60-го порядка, рассматриваемый по отношению к $\pi=\{5\}$.

На примере группы $PSL(2,31)$, являющейся произведением своих максимальных подгрупп порядков 2^5 и $31 \cdot 5 \cdot 3$, видно, что условие для 2-силовской подгруппы либо из A , либо из B в теоремах 1 и 2 опустить нельзя.

Следствие 1. Пусть $G=AB$, где A и B — максимальные и 2-разложимые подгруппы с метабелевыми 2-силовскими подгруппами. Тогда G разрешима.

Теорема 3. Пусть $G=AB$, где A и B — максимальные и π -разложимые подгруппы G . Тогда G будет π -отделимой.

Доказательство. Если 2 не принадлежит π , то по теореме 2 группа G π -разрешима. Если $2 \in \pi$, то по теореме 2 G будет σ -разрешимой для $\sigma = \pi \setminus 2$ и, следовательно, π -отделимой.

В теореме 3 условие максимальной существенно для обоих факторов A и B , что показывает пример простой группы $PSL(2, 2^5)$, являющейся произведением максимальной подгруппы порядка $2^5 \cdot 31$ и циклической подгруппы порядка $3 \cdot 11$, рассматриваемый по отношению к $\pi = \{3, 11\}$.

Теорема 4. Пусть $G=AB$, где A есть r -разложимая, а B — дедекиндова r' -подгруппа. Тогда G r -разрешима.

Доказательство. Допустим, что существуют группы, для которых теорема неверна. Выберем тогда среди них группу G , имеющую наименьший порядок.

Пусть G имеет r -разрешимый нормальный делитель $N \neq E$. Так как для $G/N = AN/N \cdot BN/N$ условие теоремы выполняется и так как $(G/N) < (G)$, то G/N будет r -разрешимой, а поэтому и G r -разрешима. Противоречие.

Следовательно, G не имеет отличного от E r -разрешимого нормального делителя.

Допустим, что A не является максимальной подгруппой G . Обозначим через H ту максимальную подгруппу группы G , которая содержит A . Из $H = A[B \cap H]$ получаем r -разрешимость H . Так как $H \cap B$ инвариантна в B , то по лемме 1 работы [12] группа G имеет нормальный делитель N , содержащийся в H , который так же как и H r -разрешим. Противоречие.

Итак, A — максимальная подгруппа G . (A) делится на r , ибо в противном случае теорема для G была бы верна. Если A — примарная, то индекс нормализатора элемента b из центра B есть степень r , и поэтому по теореме Бернсайда G имеет нормальный делитель N . Так как N не принадлежит A , то ввиду $AN = G$ индекс N в G есть степень r , поэтому $B \subseteq N$. Из $N = [N \cap A]B$ следует r -разрешимость N . Противоречие.

Итак, A является непримарной подгруппой G . Тогда, по теореме A , G имеет r -разрешимый нормальный делитель, отличный от E . Получается противоречие. Теорема доказана.

Следствие 2. Пусть $G = AB$, где A есть π -разложимая подгруппа, а B дедекиндова. Если (B) делится на некоторую степень только одного числа r из π , то G будет π -отделимой.

Доказательство. По теореме 4 группа G будет σ -разрешимой, где $\sigma = \pi \setminus r$, и следовательно, π -отделимой.

Пример простой группы $PSL(2, 2^5)$, рассматриваемый по отношению к множествам $\{3\}$ и $\{3, 11\}$, показывает, что в теореме 4 и следствии 2 условие для (B) существенно.

Теорема 5. Пусть $G = AB$, $((A), (B)) = 1$, где A есть π -разложимая, а B — дедекиндова подгруппа. Тогда G обладает свойством S_π .

Доказательство. Допустим, что существуют группы, для которых теорема неверна. Выберем тогда среди них группу G , имеющую наименьший порядок.

Если A не πd -подгруппа, то тогда теорема для G верна по теореме Виландта [13]. Следовательно, A есть πd -подгруппа.

Покажем, что группа G имеет собственный нормальный делитель N .

Если A не максимальная в G , то, обозначив через M максимальную подгруппу G , содержащую A , и применяя лемму 1 работы [12] по отношению к подгруппам M и B группы G , получаем, что G не проста.

Пусть теперь A есть максимальная подгруппа G . Если (A) есть степень простого числа, то G не проста по теореме Бернсайда, а если A будет непримарной подгруппой, то G не проста по теореме A .

Нормальный делитель N группы G ввиду $((A), (B))=1$ факторизуем, т. е. $N=[N \cap A][N \cap B]$, и следовательно, по индукции, обладает свойством C_π^s . По индукции группа $G/N = AN/N \cdot BN/N$ также обладает свойством G_π^s . Тогда, по теореме Чунихина [14], группа G обладает свойством C_π^s . Противоречие. Теорема доказана.

Из теоремы 5 и леммы 10 из [15] вытекает следующее

Следствие 3. Пусть $G=AB$, $((A), (B))=1$, где A есть π -разложимая, а B — дедекиндова подгруппа. Тогда любая холловская π -подгруппа A перестановочна с любой холловской подгруппой B .

Теорема 6. Пусть $G=AP$, где A — π -разложимая подгруппа, а P есть r -подгруппа. Если $r \in \pi$, то G будет π -отделимой, а если $r \notin \pi$ и A r -разрешима, то G будет π -разрешимой группой.

Доказательство. Допустим, что существуют группы, для которых теорема неверна. Выберем тогда среди них группу G , имеющую наименьший порядок.

Если $r \in \pi$, то G не может иметь π -отделимого нормального делителя, отличного от E , а если $r \notin \pi$, то G не может иметь отличного от E π -разрешимого нормального делителя. Действительно, если G имеет такой нормальный делитель $N \neq E$, то для $G/N = AN/N \cdot PN/N$ условие теоремы выполняется, а так как $(G/N) < (G)$, то теорема для G/N верна, и, следовательно, G будет π -отделимой или π -разрешимой, соответственно тому $r \in \pi$ или $r \notin \pi$. Противоречие.

Порядок A делится по крайней мере на одно число q из π , ибо в противном случае для G теорема была бы верна. Поэтому существует отличный от единицы элемент a , принадлежащий центру A . Очевидно, индекс нормализатора a в G равен степени r , поэтому, по теореме Бернсайда, G имеет нормальный делитель N . Если $PN \neq G$, то $PN=[PN \cap A]P$. Так как для PN условие теоремы выполняется и $(PN) < (G)$, то для PN теорема верна. Тогда, если $r \in \pi$, то N π -отделим, а если $r \notin \pi$, то N π -разрешим. Имеем противоречие.

Следовательно, $PN=G$. Тогда индекс N в G есть степень r . Силовское r -дополнение подгруппы A существует при $r \in \pi$ ввиду r -разложимости A , а при $r \notin \pi$ — ввиду r -разрешимости A . Тогда $A_{r'} \subseteq N$ и $N=A_{r'}N_{r'}$. Для N условие теоремы выполняется. Так как $(N) < (G)$, то для N теорема верна, т. е. нормальный делитель N π -отделим или π -разрешим, соответственно тому $r \in \pi$ или $r \notin \pi$. Получилось противоречие. Теорема доказана.

Следствие 4. Пусть $G=AP$, где A — 2-разложимая подгруппа, а P есть r -подгруппа для $r \neq 2$. Тогда G разрешима.

§ 4. Теорема 7. Пусть $G=AB$, где A и B есть π -разложимые подгруппы и A — максимальная подгруппа G . Тогда G обладает свойством D_π^s .

Доказательство. Допустим, что существуют группы, для которых теорема неверна. Выберем тогда среди них группу G , имеющую наименьший порядок.

Пусть G имеет нормальный делитель $N \neq E$ со свойством E_π^n . Так как для $G/N = AN/N \cdot BN/N$ условие теоремы выполняется, то G/N обладает свойством D_π^s по индукции. Тогда по теореме D5 работы [3] G обладает свойством D_π^s . Получается противоречие.

Следовательно, G не имеет отличного от E нормального делителя со свойством E_π^n .

Если A не π -подгруппа, то G обладает свойством D_π^s по теореме Виландта [13], а если A — примарная, то G π -отделима по теореме 6 и, следовательно, обладает свойством D_π^s [3]. Получается противоречие.

Итак, A является непримарной πd -подгруппой. Так как G не имеет отличного от E нормального делителя со свойством E_π^n , то по теореме A G имеет для любого $p \in \pi$, делящего (A) , инвариантное силовское p -дополнение. Пересечение всех этих p -дополнений будет отличным от E нормальным делителем K , который, очевидно, будет обладать свойством E_π^n . Получается противоречие. Теорема доказана.

Теорема 8. Пусть максимальная подгруппа M группы G является π -разложимой, и в случае, когда $2 \in \pi$, силовская 2-подгруппа M либо инвариантна в G , либо метабелева. Если $G = AM$ и подгруппа A обладает свойством E_π^{nz} , то тогда G обладает свойством D_π^s .

Доказательство. Допустим, что существуют группы, для которых теорема неверна. Выберем тогда среди них группу G , имеющую наименьший порядок.

(M) делится хотя бы на одно число из π , ибо в противном случае G обладала бы свойством E_π^{nz} , а значит и свойством D_π^s .

Пусть G имеет нормальный делитель $K \neq E$.

Очевидно, что условие теоремы выполняется для $G/K = AK/K \cdot MK/K$. Так как $(G/K) < (G)$, то G/K обладает свойством D_π^s .

(1) Следовательно, G не имеет нормального делителя $K \neq E$, который обладает свойством E_π^n , так как в противном случае G обладала бы свойством D_π^s по теореме $D5$ работы [3].

Допустим, что M является примарной. Если M нечетного порядка, то G разрешима по теореме Томпсона [11] и, следовательно, обладает свойством D_π^s . Тогда из (1) и условия теоремы следует, что M является метабелевой 2-подгруппой, что влечет разрешимость G по теореме Дескинса [10], т. е. G обладает свойством D_π^s . Получается противоречие.

Следовательно, M является непримарной подгруппой. Из (1) и теоремы A группа G для каждого $p \in \pi$, делящего (M) , имеет инвариантное силовское p -дополнение. Пересечение их будет холловским нормальным делителем K группы G , для которого некоторая холловская π -подгруппа из A будет его S_π -подгруппой. Следовательно, K обладает свойством E_π^{nz} . Тогда по теореме из [16] группа G обладает свойством D_π^s . Получается противоречие. Теорема доказана.

Условие для 2-силовской подгруппы в теореме 8 опустить нельзя, так как, например, группа $PSL(2, 31)$, удовлетворяющая условию теоремы относительно $\pi = \{2, 3\}$, не обладает даже свойством E_π . Рассматривая простую группу 60-го порядка относительно множества $\pi = \{3, 5\}$, убеждаемся также, что в теореме 8 нельзя опустить и условие максимальности для M .

На примере простой группы $PSL(2, 2^s)$, рассматриваемом по отношению к $\pi = \{3, 11\}$, видим, что при условии теорем 5, 7 и 8 группа G может не быть π -отделимой.

§ 5. Лемма. Пусть $G = AB$, где A и B такие подгруппы, что $A \cap B = E$ и $(A) = 2 \cdot s$, $(2, s) = 1$. Тогда группа G имеет нормальный делитель индекса 2.

Доказательство.

(1) Пусть B не содержит отличных от E инвариантных подгрупп G .

Представляя G подстановками левых смежных классов по B , получим точное представление G , при этом ввиду $A \cap B = E$ подгруппа A будет иметь регулярное представление. Так как порядок подстановки равен наименьшему общему кратному длин ее циклов, то элемент порядка 2 из A разлагается в произведение циклов длины 2. Но степень подстановки равна (A) , поэтому ввиду $(A) = 2 \cdot s$, $(2, s) = 1$ элемент порядка 2 из A разлагается в произведе-

ние нечетного числа циклов длины 2, т. е. представляется нечетной подстановкой. Так как любая группа подстановок, содержащая нечетную подстановку, имеет нормальный делитель индекса 2, то и G имеет такой нормальный делитель.

(2) Пусть K — наибольший нормальный делитель G , содержащийся в B . Тогда ввиду (1) группа $G/K = AK/K \cdot B/K$ имеет нормальный делитель H/K индекса 2, следовательно, группа G имеет нормальный делитель H индекса 2.

Теорема 9. Пусть $G = AB$, где A — p -разложимая подгруппа нечетного порядка, а B есть p' -подгруппа и содержит такую подгруппу H индекса 2, что каждая подгруппа H является нормальным делителем B . Тогда G p -разрешима.

Доказательство. Допустим, что существуют группы, для которых теорема неверна. Выберем тогда среди них группу G , имеющую наименьший порядок.

(1) Группа G не имеет p -разрешимого нормального делителя, отличного от E .

Допустим, что такой нормальный делитель K в группе G существует. Так как BK/K будет либо дедекиндовой, либо такого типа, как и B , то, по индукции и по теореме 4, $G/K = AK/K \cdot BK/K$ будет p -разрешимой. Тогда G p -разрешима. Получается противоречие.

(2) Подгруппа A является максимальной в G .

Пусть M есть максимальная подгруппа G , содержащая A . Если $M \cap H \neq E$, то

$$[M \cap H]^G = [M \cap H]^{BA} = [M \cap H]^A \cong M.$$

Так как подгруппа $M = A[M \cap B]$, по индукции, p -разрешима, то нормальный делитель $[M \cap H]^G \neq E$ группы G является p -разрешимым. Противоречие.

Пусть теперь $M \cap H = E$. Если $D = M \cap B \neq E$, то $B = DH$, $G = AB = ADH = MH$ и $(D) = 2$ и, по лемме, G имеет нормальный делитель L индекса 2. Очевидно, $L = A[L \cap B]$, следовательно, по индукции, L p -разрешим. Противоречие. Если $M \cap B = E$, то ввиду $M \cong A$ и $G = AB$ $M = A$.

(3) Подгруппа A непримарная. Допустим противное. Если 2 не делит (H) , то 2^2 не делит (G) и, по теореме Бернсайда, G имеет нормальный делитель индекса 2, который, по индукции, p -разрешим. Противоречие. Следовательно, 2 делит (H) . Тогда в H существует элемент x порядка 2, который по условию для B будет содержаться в центре B . Тогда, по теореме Бернсайда, G проста. Из (1) и ввиду максимальнойности A получаем $((A), (B)) = 1$. Следовательно, нормальный делитель факторизуем и, по индукции и по теореме 4, p -разрешим. Получается противоречие.

Если A не pd -подгруппа, то G p -разрешима. Следовательно, A является pd -подгруппой и ввиду (2) и (3), по теореме 4, имеет p -разрешимый нормальный делитель, что противоречит (1). Теорема доказана.

Следствие 5. Пусть $G = AB$, где A — π -разложимая подгруппа нечетного порядка, а B содержит такую подгруппу H индекса 2, что каждая подгруппа H является нормальным делителем B . Если (B) делится на некоторую степень только одного числа из π , то G π -отделима.

Из доказательства теоремы 9 вытекает

Следствие 6. Пусть $G = AB$, где A — p -разложимая pd -подгруппа нечетного порядка, а B содержит такую подгруппу H индекса 2, что каждая подгруппа H является нормальным делителем B . Тогда G проста.

Теорема 10. Пусть $G = AB$, $((A), (B)) = 1$, где A есть π -разложимая подгруппа, а подгруппа B содержит такую подгруппу H индекса 2, что каждая подгруппа H является нормальным делителем B . Тогда G обладает свойством E_π^s и C_σ^s , где σ есть любое подмножество π без числа 2.

Доказательство. Допустим, что существуют группы, для которых теорема неверна. Выберем среди них группу G , имеющую наименьший порядок.

Если A не πd -подгруппа, то тогда G обладает свойством C_σ^s по теореме Виландта [13] и, очевидно, также свойством E_π^s .

Следовательно, A есть πd -подгруппа. Тогда, по следствию 6, группа G имеет нормальный делитель $N \neq E$. По индукции, очевидно, группа $G/N = AN/N \cdot BN/N$ обладает свойством E_π^s и C_σ^s . По лемме 1 работы [3], $B \cap N$ будет S_π -подгруппой N , а $B_\sigma \cap N$ — S_σ -подгруппой N . По теореме Виландта [13], N обладает свойством C_σ^s и тогда, по теореме Чунихина [14], G обладает свойством C_σ^s . Ввиду сильной разрешимости B , по теореме A1 работы [3], любая подгруппа, сопряженная с $B \cap N$ в группе G , будет сопряжена с ней и в N . Поэтому, по теореме 1 работы [17], группа G имеет разрешимую S_π -подгруппу, т. е. обладает свойством E_π^s . Получается противоречие. Теорема доказана.

Гомельский государственный
университет

Поступило в редакцию
19. I 1970

Литература

1. Романовский А. В. ДАН БССР, 13, 2, 103, 1969.
2. Чунихин С. А. ДАН СССР, 59, 3, 443, 1948.
3. Hall Ph. Proc. London Math. Soc., (3)6, 22, 286, 1956.
4. Романовский А. В. ДАН СССР, 152, 4, 831, 1963.
5. Чунихина И. К., Чунихин С. А. Матем. сб., 15(57), 2, 325, 1944.
6. Чунихин С. А. Подгруппы конечных групп. Минск, 1964.
7. Сб. «Конечные группы». Минск, 1966.
8. Романовский А. В. Сб. «Конечные группы». Минск, 1966, стр. 98.
9. Ведерников В. А. Матем. заметки, 3, 2, 201, 1968.
10. Deskins W. E. Illinois J. Math., 5, 306, 1961.
11. Thompson J. G. Proc. Nat. Acad. Sci., USA, 45, 578, 1959.
12. Чунихин С. А. Труды семинара по теории групп. М.—Л., 1938, стр. 106.
13. Wielandt H. Math. Z., 60, 407, 1954.
14. Чунихин С. А. ДАН СССР, 66, 2, 165, 1949.
15. Wielandt H. Illinois J. Math., 2, 611, 1958.
16. Шеметков Л. А. ДАН СССР, 160, 2, 290, 1965.
17. Чунихин С. А. ДАН СССР, 126, 2, 284, 1959.

В. Д. ЧЕРТОК

О p -ДЛИНЕ p -РАЗРЕШИМЫХ ГРУПП

Холл и Хигмэн [1] изучали p -длину p -разрешимой группы в зависимости от строения силовой p -подгруппы. Дальнейшее улучшение некоторых из этих результатов представляется возможным лишь за счет учета способа вложения силовой p -подгруппы в группу.

В настоящей работе даются оценки p -длины p -разрешимой группы в зависимости от перестановочности ее подгрупп: с одной стороны, p -дополнения, с другой, — членов верхнего, нижнего центрального ряда и ряда коммутантов силовой p -подгруппы. Краткое сообщение о результатах данной работы было опубликовано в заметке [7].

Используются следующие обозначения и определения: G — конечная группа, E — единичная подгруппа G , p — простое число, p' — множество всех отличных от p простых чисел.

Конечная группа G называется, согласно Чунихину [2], p -разрешимой, если G обладает композиционным рядом, каждый индекс которого либо равен простому числу p , либо не делится на p .

Пусть

$$1 = P_0 \subseteq N_0 \subset P_1 \subset N_1 \subset \dots \subset P_l \subseteq N_l = G \quad (*)$$

— верхний инвариантный p -ряд p -разрешимой группы G , т. е. такой ряд, в котором N_i/P_i ($i = 0, 1, \dots, l$) является наибольшей инвариантной p' -подгруппой в G/P_i , а P_i/N_{i-1} — наибольшей инвариантной p -подгруппой в G/N_{i-1} ($i = 1, 2, \dots, l$).

Минимальное число l , для которого $N_l = G$, мы называем, следуя Холлу и Хигмэну [1], p -длиной p -разрешимой группы G и обозначаем $l_p(G)$.

Пусть P — силовая p -подгруппа группы G и

$$P = \Gamma_0(P) \supseteq \Gamma_1(P) \supseteq \dots \supseteq \Gamma_n(P) = E$$

— ее нижний центральный ряд.

Теорема 1. Пусть G — p -разрешимая группа с силовой p -подгруппой P и p -дополнением Q . Если k -тый член ($1 \leq k \leq n$) $\Gamma_k(P)$ нижнего центрального ряда силовой p -подгруппы P перестановочен с Q , то $l_p(G) \leq k$.

Доказательство. Допустим, что теорема неверна. Выберем тогда среди групп, для которых теорема не выполняется, группу G , имеющую наименьший порядок.

Так как $\Gamma_k(PN/N) = \Gamma_k(P)N/N$, где N — нормальная подгруппа из G , то нетрудно видеть, условие теоремы выполняется для всех гомоморфных образов группы G .

Рассмотрим верхний p -ряд (*) группы G . Предположим, что $N_0 \neq E$. Теорема для G/N_0 верна. Так как $l_p(G/N_0) = l_p(G)$, то для G теорема также верна. Поэтому $N_0 = E$ и любая нетривиальная минимальная нормальная подгруппа N является p -группой.

Если группа G имеет нетривиальную минимальную нормальную подгруппу N_1 , отличную от N , то отображение $g \rightarrow (gN_1, gN)$ является изоморфизмом между G и некоторой подгруппой прямого произведения $R = G/N_1 \times G/N$. Так как $l_p(R) = \max\{l_p(G/N_1), l_p(G/N)\}$, то $l_p(R) \leq k$. Отсюда следует, что $l_p(G) \leq k$. Итак, N — единственная минимальная нормальная подгруппа группы G .

Установим справедливость следующего утверждения: N обладает дополнением K в группе G .

Пусть M/N — максимальная нормальная p' -подгруппа фактор-группы G/N .

Допустим вначале, что $M = N$. Так как $l_p(G/N) \leq k$ и G/N не содержит нетривиальных нормальных p' -подгрупп, то $l_p(G) \leq k$.

Пусть теперь N — собственная подгруппа M . По теореме Шура — Цасенхауза [5], M имеет подгруппу H , такую, что $M = NH$, $N \cap H = E$, и в силу разрешимости N все такие подгруппы H сопряжены в M . Поэтому для каждого $g \in G$ имеем $g^{-1}Hg \subset M$. Следовательно, $g^{-1}Hg = m^{-1}Hm$ для некоторого элемента $m \in M$. По лемме 2.2.1 из [5], $G = N_G(H)N$. Если $N_G(H) = G$, то G имеет нетривиальную минимальную нормальную подгруппу из H , отличную от N . Это противоречит единственности минимальной нормальной подгруппы N . Следовательно, $N_G(H)$ — собственная подгруппа группы G .

Пусть $D = N \cap N_G(H)$. Так как N — абелева группа и D — нормальная подгруппа $N_G(H)$, то D — нормальная подгруппа группы G . Поэтому либо $D = N$, либо $D = E$. Если $D = N$, то $G = N_G(H)N = N_G(H)$. Но мы установили, что $N_G(H) \neq G$. Значит, $D = E$ и $N_G(H) = K$ — дополнение к N в G .

Пусть $C(N)$ — централизатор N в G . Тогда $C(N) = N \times L$, где $L = C(N) \cap K$. Из инвариантности $C(N)$ в $G = NK$ следует, что подгруппа L нормальна в G . Так как N — единственная минимальная нормальная подгруппа группы G , то $L = E$. Итак, N совпадает с собственным централизатором в G .

Допустим, $N \subseteq \Phi(G)$. Тогда $G = NK = \Phi(G)K = K$, что противоречит $N \cap K = E$. Значит, N не содержится в $\Phi(G)$.

По условию $\Gamma_k(P)Q$ — подгруппа группы G . Как известно, подгруппа пересечения $N \cap \Gamma_k(P)Q = N \cap \Gamma_k(P)$ нормальна в $\Gamma_k(P)Q$ и в P . Таким образом, подгруппа $N \cap \Gamma_k(P)$ нормальна в G . Так как N — минимальная нормальная подгруппа G , то либо $N \cap \Gamma_k(P) = E$, либо $N \cap \Gamma_k(P) = N$. Пусть $N \cap \Gamma_k(P) = E$. Тогда взаимный коммутант $(N, \Gamma_k(P)) \subseteq N \cap \Gamma_k(P) = E$. Отсюда имеем $\Gamma_k(P) \subseteq C(N) = N$ и, следовательно, $\Gamma_k(P) = E$. По теореме 1.2.6 работы [1], $l_p(G) \leq k$, что противоречит допущению. Значит, $N \cap \Gamma_k(P) = N$.

Подгруппа $\Gamma_k(P)$ как член нижнего центрального ряда подгруппы P принадлежит коммутанту подгруппы P . По теореме 10.4.3 [8], $\Gamma_k(P) \subseteq \Phi(P)$. Теперь, согласно теореме 5 из [6], $N \subseteq \Phi(G)$. Получили противоречие с тем, что N не содержится в $\Phi(G)$.

Теорема доказана.

В частном случае $k = 1$ результат теоремы 1 был установлен Инагаки [4].

Почти дословно с очевидными изменениями, повторяя доказательство теоремы 1 и применяя в заключительной части его вместо теоремы 1.2.6 [1] теорему А [1], получаем следующий результат.

Теорема 2. Пусть G — p -разрешимая группа с силовской p -подгруппой P и p -дополнением Q . Если k -тый член $(1 \leq k \leq n) K^{(k)}(P)$ ряда коммутантов силовской p -подгруппы P перестановочен с Q и $p > 2$, то $l_p(G) \leq k$.

В теореме 1 член $\Gamma_k(P)$ нижнего центрального ряда, если он не центр, нельзя заменить членом верхнего центрального ряда. Это невозможно из-за плохо передающегося свойства центра. Пример можно найти в работе [3].

Однако если потребовать перестановочности всех первых k , отличных от E , членов верхнего центрального ряда силовской p -подгруппы $Z_0 = 1 \subseteq Z_1(P) \subseteq$

$\subseteq Z_2(P) \subseteq \dots \subseteq Z_{c_p}(P) = P$ с p -дополнением Q , то справедливо следующее предложение.

Теорема 3. Пусть G — p -разрешимая группа с силовской p -подгруппой P и p -дополнением Q . Если члены верхнего центрального ряда $Z_i(P)$, $i = 1, 2, \dots, k$, $k < c_p$ силовской p -подгруппы P перестановочны с Q , то $l_p(G) \leq c_p - k$.

Доказательство. Допустим, что теорема неверна. Выберем тогда среди групп, для которых теорема не выполняется, группу G , имеющую наименьший порядок.

Пусть G содержит нетривиальную нормальную подгруппу N , которая является p' -группой. Для фактор-группы G/N выполняется предположение индукции и, так как $(G/N) < (G)$, то $l_p(G/N) \leq c_p - k$. Отсюда следует, что $l_p(G) \leq c_p - k$. Противоречие.

Ввиду отсутствия в G нормальных p' -подгрупп заключаем, что порядок любой нетривиальной нормальной подгруппы из G делится на p .

Допустим, что G содержит нормальную подгруппу $H = PQ'$, где Q' — собственная подгруппа Q , индекса взаимно простого с p . Тогда пересечение $H \cap Z_i(P)Q = Z_i(P)Q'$, где $i = 1, 2, \dots, k$, является подгруппой в H . Теперь имеем, что для H выполняется условие теоремы. По индуктивному предположению, $l_p(H) \leq c_p - k$. Отсюда $l_p(G) \leq c_p - k$.

Следовательно, индекс собственной нормальной подгруппы делится на p .

Пусть M — максимальная нормальная p -подгруппа из G . Так как G не содержит нормальных p' -подгрупп, то, по лемме 1.2.3 работы [1], централизатор $C(M) \subseteq M$. Имеем, что центр $Z_1(P) \subseteq C(M) \subseteq M$. Подгруппа пересечения $M \cap Z_1(P)Q = Z_1(P)$ нормальна в $Z_1(P)Q$ и, очевидно, центр $Z_1(P)$ нормален в G . Отсюда получаем, что централизатор $C(Z_1(P))$ содержит P и нормален в G . В силу того, что G не содержит собственных нормальных подгрупп индекса взаимно простого с p , то $C(Z_1(P)) = G$ и, кроме того, $Z_1(P) \subseteq Z(G)$.

Фактор-группа $G/Z_1(P)$ удовлетворяет условию теоремы и поэтому $l_p(G/Z_1(P)) \leq c_p - k$. Пусть $R/Z_1(P)$ — наибольшая нормальная p' -подгруппа из $G/Z_1(P)$. По теореме Шура, $Z_1(P)$ обладает в R дополнением σ и ввиду того, что $Z_1(P) \subseteq Z(G)$, имеем $R = \sigma \times Z_1(P)$. Так как G не содержит нормальных p' -подгрупп, то $\sigma = E$. Из $l_p(G/Z_1(P)) \leq c_p - k$ следует, что $l_p(G) \leq c_p - k$. И в этом случае пришли к противоречию.

Теорема доказана.

В частном случае, когда все члены верхнего центрального ряда силовской p -подгруппы P перестановочны с p -дополнением Q , $l_p(G) = 1$. Этот случай теоремы 3 был рассмотрен Хуппертом [3].

Гомельский государственный
университет

Поступило в редакцию
26.1 1970

Литература

1. Hall P., Higman G. Proc. London Math. Soc. (3)6, № 21, 1, 1956.
2. Чунихин С. А. ДАН СССР, 55, 6, 481, 1947.
3. Huppert B. Archiv der Math., 12, 161, 1961.
4. Inagaki N. Nagoya Math. J., 25, 205, 1965.
5. Чунихин С. А. Подгруппы конечных групп. Минск, 1964.
6. Gaschütz W. Math. Z., 58, 160, 1953.
7. Черток В. Д. ДАН СССР, 173, 2, 282, 1967.
8. Холл М. Теория групп. М., 1962.

А. Ф. ОРЕЩЕНКО

ЛИНЕЙЧАТЫЕ ПОВЕРХНОСТИ
 С ИЗОТРОПНОЙ ОБРАЗУЮЩЕЙ В lE_n

В n -мерном псевдоевклидовом пространстве lE_n индекса l ($l=1, 2, \dots, \left[\frac{n}{2} \right]$) рассматриваются двумерные регулярные поверхности $A = A(u^i)$ ($i, j, k=1, 2$), касательная плоскость которых псевдоевклидова.

Уравнения инфинитезимального смещения произвольного репера $R(A, \mathbf{e}_I)$ имеют вид [1]

$$dA = \omega^I \mathbf{e}_I, \quad d\mathbf{e}_I = \omega^J \mathbf{e}_J \quad (I, J, K = 1, 2, \dots, n). \quad (1)$$

Формы Пфаффа ω^I, ω^J удовлетворяют уравнениям структуры

$$D\omega^I = \omega^J \wedge \omega^I, \quad D\omega^J = \omega^I \wedge \omega^K. \quad (2)$$

Относительно поверхности (A) координатные векторы \mathbf{e}_i репера R считаем тангенциальными, а векторы \mathbf{e}_a ($a, b=3, 4, \dots, n$) — ортогональными в нормальном ${}^lE_{n-2}$ ($l_1=l-1$). Реперы первого порядка поверхности (A) выделяются уравнениями

$$\omega^a = 0, \quad \omega^a = b_{ij}^a \omega^j \quad (b_{ij}^a = b_{ji}^a). \quad (3)$$

Метрический тензор g_{ij} — знаконеопределенный.

1. Пусть вторые фундаментальные тензоры b_{ij}^a имеют каждый кратные собственные значения и непростые элементарные делители, т. е. все тензоры b_{ij}^a характеристики [2].

По теореме А. З. Петрова [2], тензоры g_{ij}^a и b_{ij}^a для каждого a в своем репере R^a принимают следующий канонический вид:

$$g_{ij}^a = \begin{bmatrix} 0 & \varepsilon_{a_1} \\ \varepsilon_{a_1} & 0 \end{bmatrix}, \quad b_{ij}^a = \begin{bmatrix} 0 & \varepsilon_{a_1} \rho_{a_1} \\ \varepsilon_{a_1} \rho_{a_1} & \varepsilon_{a_1} \end{bmatrix} \quad (a_1, b_1 = 1, 2, \dots, n-2), \quad (4)$$

где $\varepsilon_{a_1} = \pm 1, \rho_{a_1}$ — собственные значения тензоров b_{ij}^a .

Преобразованием

$$\mathbf{e}_i = A_i^{i'} \mathbf{e}_{i'}, \quad A_i^{i'} = \begin{bmatrix} \gamma_{a_1}^{-1} & 0 \\ 0 & \varepsilon_{a_1} \gamma_{a_1} \end{bmatrix} \quad (5)$$

реперов R^a приведем их в совпадение, например, с репером $R^3 \equiv R$ (тогда $\gamma_{a_1} = \pm 1$). Тензоры (4) после преобразований (5) примут вид

$$g_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad b_{ij}^a = \begin{bmatrix} 0 & \rho_{a_1} \\ \rho_{a_1} & \varepsilon_{a_1} \gamma_{a_1}^2 \end{bmatrix}. \quad (6)$$

Каждый из тензоров b_{ij}^a имеет в силу (4) одно изотропное главное направление. Считаем, что главные направления всех тензоров b_{ij}^a поверхности (A) совпадают.

Векторы e_i репера R изотропны, нормированы они так, что $e_i e_j = 1$ ($i \neq j$), $e_p^2 = \varepsilon_p = 1$, $e_q^2 = \varepsilon_q = \pm 1$ в зависимости от индекса l_1 ($p + q = n$, $p \geq \left[\frac{n}{2} \right]$), $e_a e_b = 0$ ($a \neq b$), поэтому формы ω_i^j удовлетворяют соотношениям

$$\begin{aligned} \omega_1^2 = \omega_2^1 = 0, \quad \omega_2^2 = -\omega_1^1, \quad \omega_i^j = -\omega_j^i, \quad \omega_q^i = -\varepsilon_q \omega_j^q, \\ (i \neq j), \quad \omega_a^a = 0, \quad \omega_b^a = -\varepsilon_b \varepsilon_a \omega_a^b. \end{aligned} \quad (7)$$

Полагая в (3) b_{ij}^a согласно (6), получим

$$\omega_1^a = \rho_{a_1} \omega^2, \quad \omega_2^a = \rho_{a_1} \omega^1 + \varepsilon_{a_1} \gamma_{a_1}^2 \omega^2. \quad (8)$$

1°. В силу (3), (7), (8)

$$d\mathbf{A} = \omega^i e_i, \quad d^2\mathbf{A} = (d\omega^i + \omega^k \omega_k^i) e_i + \sum_{a=3}^n (2\rho_{a_1} \omega^1 \omega^2 + \varepsilon_{a_1} \gamma_{a_1}^2 \omega^2) e_a. \quad (9)$$

Из соотношений (9) следует, что вдоль линии $\omega^1 d_1 \mathbf{A} \parallel d_1^2 \mathbf{A} \parallel e_1$, т. е. главная линия всех тензоров b_{ij}^a (линия, огибающая главные направления тензоров b_{ij}^a) является прямой (изотропной), а значит, рассматриваемые поверхности линейчатые с изотропной образующей.

Вторая изотропная линия ω^2 в силу (9) быть прямой не может, т. к. все $\gamma_{a_1}^2 \neq 0$.

2°. Формы кручения и кривизны в репере R определим по аналогии с [3] в виде $\omega_a^i \wedge \omega_i^b$ и $\omega_a^i \wedge \omega_j^a$, откуда в силу (3), (7—8) имеем

$$\begin{aligned} \omega_1^i \wedge \omega_i^b + \omega_2^a \wedge \omega_b^2 &= -\varepsilon_a (\omega_2^a \wedge \omega_1^b + \omega_1^a \wedge \omega_2^b) = \\ &= -\varepsilon_a [(\rho_{a_1} \omega^1 + \varepsilon_{a_1} \gamma_{a_1}^2 \omega^2) \wedge \rho_{b_1} \omega^2 + \rho_{a_1} \omega^2 \wedge (\rho_{b_1} \omega^1 + \varepsilon_{b_1} \gamma_{b_1}^2 \omega^2)] = 0, \end{aligned}$$

т. е. поверхности (A) имеют нулевое гауссово кручение.

Форма кривизны с учетом (7—8) принимает вид

$$\omega_1^a \wedge \omega_a^1 = -\sum_{a=3}^n \varepsilon_a \omega_1^a \wedge \omega_2^a = \sum_{a=3}^n \varepsilon_a \rho_{a_1}^2 \omega^1 \wedge \omega^2,$$

$$\omega_i^a \wedge \omega_a^i = -\sum_{a=3}^n \varepsilon_a \omega_i^a \wedge \omega_i^a = 0 \quad (i \neq j).$$

Поэтому гауссова кривизна (с точностью до знака) поверхности (A) равна

$$K = \sum_{a=3}^n \varepsilon_a \rho_{a_1}^2, \quad (a_1 = 1, 2, \dots, n-2). \quad (10)$$

3°. Вектор средней кривизны [4] поверхности (A) в силу (3), (6) равен

$$\mathbf{M} = \frac{1}{2} g^{ij} b_{ij}^a e_a = b_{12}^a e_a = \sum_{a=3}^n \rho_{a_1} e_a,$$

а его модуль определяет среднюю кривизну поверхности

$$|\mathbf{M}| = \sqrt{\sum_{a=3}^n \varepsilon_a \rho_{a_1}^2}. \quad (11)$$

Выражение $|\mathbf{M}|^2 - K$ назовем эйлеровой разностью. В силу (10) — (11) она нулевая.

4°. Радиус-вектор \mathbf{I} индикатрисы кривизны [4] запишем в виде

$$\mathbf{I} = \frac{\varphi^a \mathbf{e}_a}{ds^2} = x^a \mathbf{e}_a, \quad \varphi^a = b_{ij}^a \omega^i \omega^j = 2\rho_{a_1} \omega^1 \omega^2 + \varepsilon_{a_1} \gamma_{a_1}^2 \omega^{2^2}, \quad (12)$$

$$ds^2 = g_{ij} \omega^i \omega^j = 2\omega^1 \omega^2.$$

Полагая $\omega^1 = t ds$, $\omega^2 = (2t)^{-1} ds$, уравнение индикатрисы кривизны представим в виде $x^a = \rho_{a_1} + \varepsilon_{a_1} \gamma_{a_1}^2 (2t)^{-2}$, или

$$\frac{x^3 - \rho_1}{\varepsilon_1} = \frac{x^4 - \rho_2}{\varepsilon_2 \gamma_2^2} = \dots = \frac{x^n - \rho_{n-2}}{\varepsilon_{n-2} \gamma_{n-2}^2}, \quad (13)$$

т. е. индикатриса кривизны — прямая (13), проходящая через точку $M_0(\rho_1, \dots, \rho_{n-2})$ с направляющим вектором $\mathbf{a} \{ \varepsilon_1, \varepsilon_2 \gamma_2^2, \dots, \varepsilon_{n-2} \gamma_{n-2}^2 \}$, что геометрически истолковывает b_{ij}^a . В силу (13) все точки поверхности (A) планарные [4].

5°. Геометрическое место пересечений данной нормальной ($n - 2$)-мерной плоскости со всеми бесконечно близкими к ней ($n - 2$)-мерными нормальными плоскостями назовем фокальной поверхностью. Ее уравнение в силу определения получается из соотношений

$$\left. \begin{aligned} |\mathbf{X} - \mathbf{A}, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3, \dots, \mathbf{e}_n| = 0, \quad d|\mathbf{X} - \mathbf{A}, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3, \dots, \mathbf{e}_n| = 0, \\ |\mathbf{X} - \mathbf{A}, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \dots, \mathbf{e}_n| = 0, \quad d|\mathbf{X} - \mathbf{A}, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \dots, \mathbf{e}_n| = 0 \end{aligned} \right\}$$

и может быть представлено в виде

$$(\omega^1 + \omega_a^1 x^a) \wedge (\omega^2 + \omega_a^2 x^a) = 0.$$

В силу (7—8) оно принимает вид

$$\left[\omega^1 - \sum_{a=3}^n \varepsilon_a (\rho_{a_1} \omega^1 + \varepsilon_{a_1} \gamma_{a_1}^2 \omega^2) x^a \right] \wedge \left(\omega^2 - \sum_{a=3}^n \varepsilon_a \rho_{a_1} \omega^2 x^a \right) = 0.$$

Отсюда следует

$$\left(\sum_{a=3}^n \varepsilon_a \rho_{a_1} x^a - 1 \right)^2 = 0,$$

т. е. фокальная поверхность является двоянной ($n - 3$)-мерной плоскостью, отсекающей на осях X^a отрезки длины $\varepsilon_a \rho_{a_1}^{-1}$.

6°. Линия на поверхности, тангенциальная компонента вариации нормального вектора вдоль которой касается ее, называется линией кривизны (относительно этой нормали). Для существования линий кривизны одновременно относительно всех нормалей \mathbf{e}_a поверхности (A) должны удовлетворяться уравнения

$$\omega^1 \omega_1^a - \omega^2 \omega_2^a = 0. \quad (14)$$

Из (14) в силу (8) имеем $\omega^{2^2} = 0$, т. е. линия ω^1 является двойной изотропной линией кривизны.

Таким образом, в силу $1^\circ - 6^\circ$ имеет место

Теорема 1. Если вторые фундаментальные тензоры b_{ij}^a поверхности (A) в E_n все имеют характеристику Сегре [2] и их главные направления совпадают с одним и тем же изотропным направлением, то а) эти поверхности линейчатые с изотропной образующей общего главного направления всех тензоров b_{ij}^a , б) гауссово кручение равно нулю, в) эйлерова разность — нулевая, г) все точки поверхности (A) планарные (индикатриса кривизны прямая), д) фокальная поверхность — двоякая плоскость ($\dim(n-3)$), е) общая главная линия всех тензоров b_{ij}^a одновременно относительно всех нормалей e_a поверхности (A) является двойной изотропной линией кривизны.

II. Пусть первые p из вторых фундаментальных тензоров b_{ij}^a все имеют характеристику $[(1, 1)]$ (это соответствует тому, что тензоры b_{ij}^a имеют кратные собственные значения и простые элементарные делители), а q оставшихся тензоров b_{ij}^a — по-прежнему характеристики [2] с совпадающими главными направлениями ($p < n-2$, $p+q=n$).

Согласно теореме А. З. Петрова [2], тензоры g_{ij}^p и b_{ij}^p в ортореперах R_0^p имеют вид

$$g_{ij}^p = \begin{bmatrix} \varepsilon_1^p & 0 \\ 0 & \varepsilon_2^p \end{bmatrix}, \quad b_{ij}^p = \begin{bmatrix} \varepsilon_1^p \rho_{p_1} & 0 \\ 0 & \varepsilon_2^p \rho_{p_1} \end{bmatrix} \quad (15)$$

($\varepsilon_i^p = \pm 1$, ρ_{p_1} — собственные значения тензоров b_{ij}^p). Поскольку касательная плоскость псевдоевклидова, то, не теряя общности, положим $\varepsilon_1^p = 1$, $\varepsilon_2^p = -1$. Преобразованием

$$e_i = A_i^{j'} e_{j'}, \quad A_i^{j'} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \quad (16)$$

реперов R_0^p тензоров g_{ij}^p и b_{ij}^p приведем к виду

$$g_{ij}^p = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad b_{ij}^p = \begin{bmatrix} 0 & \rho_{p_1} \\ \rho_{p_1} & 0 \end{bmatrix}. \quad (17)$$

Под действием преобразований (5) вид тензоров (17) не изменяется, поэтому считаем, что все реперы R^p совпадают с общим репером R тензоров b_{ij}^q , в котором последние имеют вид (6).

Формы ω_i^q имеют вид, аналогичный (8), а формы ω_i^p запишем согласно (17)

$$\omega_1^p = \rho_{p_1} \omega^2, \quad \omega_2^p = \rho_{p_1} \omega^1. \quad (18)$$

Тензоры b_{ij}^p в силу (17) пропорциональны:

$$b_{ij}^p = \mu_{p_1} b_{ij}^3, \quad \left(\mu_{p_1} = \frac{\rho_{p_1}}{\rho_1} \right).$$

Поэтому

$$d^2 A = (d\omega^i + \omega^i \omega^j) e_i + 2\omega^1 \omega^2 \sum_{m=3}^p \rho_{m-2} e_m + \omega^i \omega^j e_q, \quad (19)$$

следовательно, соприкасающаяся плоскость второго порядка поверхности (A) может понижать свою размерность.

Из соотношений (14) в силу (18) вытекает, что любая линия на поверхности (A) одновременно относительно всех нормалей e_p является линией кривизны.

Поверхность (A) обладает свойствами, аналогичными свойствам $1^\circ - 6^\circ$ п. I. Например, из (12) имеем

$$\varphi^p = 2\rho_{p_1} \omega^1 \omega^2, \quad \varphi^q = 2\rho_{q_1} \omega^1 \omega^2 + \varepsilon_{q_1} \gamma_{q_1}^2 \omega^2^2$$

и уравнение индикатрисы кривизны принимает вид

$$\frac{x^3 - \rho_1}{0} = \dots = \frac{x^p - \rho_{p_1}}{0} = \frac{x^{p+1} - \rho_{p_1+1}}{\varepsilon_{p_1+1} \gamma_{p_1+1}^2} = \dots = \frac{x^n - \rho_{n-2}}{\varepsilon_{n-2} \gamma_{n-2}^2},$$

т. е. относительно репера R индикатриса кривизны является прямой, ортогональной к каждому из p первых векторов репера R.

III. Пусть все вторые фундаментальные тензоры b_{ij}^a поверхности (A) имеют характеристику Серге [(1, 1)]. Тогда тензоры b_{ij}^a в репере R приводятся к виду (17) ($p = n$), и они пропорциональны:

$$b_{ij}^a = \mu_{a_1} b_{ij}^3.$$

Формы ω_i^a имеют вид

$$\omega_1^a = \rho_{a_1} \omega^2, \quad \omega_2^a = \rho_{a_1} \omega^1 \quad (\rho_{a_1} = \mu_{a_1} \rho_1). \quad (20)$$

В силу (20)

$$d^2 A = (d\omega^i + \omega^k \omega_k^i) e_i + 2\rho_1 \omega^1 \omega^2 \sum_{a=3}^n \mu_{a_1} e_a. \quad (21)$$

Из (21) следует, что соприкасающаяся плоскость второго порядка поверхности (A) понижает свою размерность до трех.

Вдоль линии ω^1 в силу (21) $d_1 A \parallel d_1^2 A \parallel e_1$, аналогично вдоль линии ω^2 $d_2 A \parallel d_2^2 A \parallel e_2$. Поэтому поверхности (A) являются квадраками, причем оба семейства их прямолинейных образующих изотропные.

Уравнения (2) с учетом (20) дают

$$\left(d\rho_{a_1} + \sum_{b=3}^n \rho_{b_1} \omega_b^a \right) \wedge \omega^2 = 0 \quad \left(d\rho_{a_1} + \sum_{b=3}^n \rho_{b_1} \omega_b^a \right) \wedge \omega^1 = 0,$$

или (т. к. формы ω^1, ω^2 — независимые)

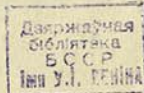
$$d\rho_{a_1} + \sum_{b=3}^n \rho_{b_1} \omega_b^a = 0. \quad (22)$$

Домножив каждое из уравнений системы (22) соответственно на $\varepsilon_a \rho_{a_1}$ ($\varepsilon_a, \varepsilon_b = \pm 1$, в зависимости от индекса l) и просуммировав их, получим

$$d \left(\sum_{a=3}^n \varepsilon_a \rho_{a_1}^2 \right) + \frac{1}{2} \sum_{a,b=3}^n \rho_{a_1} \rho_{b_1} (\varepsilon_a \omega_b^a + \varepsilon_b \omega_a^b) = 0. \quad (23)$$

В силу (7) $\sum_{a,b=3}^n (\varepsilon_a \omega_b^a + \varepsilon_b \omega_a^b) = 0$, поэтому из (23) следует, что

$$\sum_{a_1=1}^{n-2} \varepsilon_a \rho_{a_1}^2 = \text{const.} \quad (24)$$



Подсчитывая гауссову кривизну поверхности (A) согласно 2° с учетом (20), получаем (24), т. е. поверхность (A) имеет постоянную гауссову кривизну.

Теорема 2. Если у поверхности (A) в E_n все вторые фундаментальные тензоры b_{ij}^a характеристики Сегре $[(1, 1)]$, то 1) поверхность (A) имеет трехмерную соприкасающуюся плоскость второго порядка, 2) поверхность (A) является квадрикой с двумя изотропными семействами прямолинейных образующих, 3) гауссова кривизна поверхности (A) постоянная.

Литература

1. Фиников С. П. Метод внешних форм Картана. ГИТТЛ, 1948.
2. Петров А. З. Известия Казан. физ.-мат. общ-ва, сер. 3, 14, 37, 1949.
3. Картан Э. Риманова геометрия в ортогональном репере. М., 1960.
4. Схоутен И. А., Стройк Д. Дж. Введение в новые методы дифференциальной геометрии, т. 2. ИЛ, 1948.

Белорусский государственный университет
им. В. И. Ленина

Поступило в редакцию
25.XII 1969

О. И. МАРИЧЕВ

**КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА
 С ДВУМЯ ЛИНИЯМИ ВЫРОЖДЕНИЯ**

Рассмотрим для уравнения смешанного типа

$$Lu = |y|^k u_{xx} + \operatorname{sgn}(xy) |x|^k u_{yy} = 0, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (1)$$

две краевые задачи.

Задача 1. Найти решение уравнения (1) в области $D(x + y > 0, xy \neq 0)$, состоящей из эллиптической $D^+(x, y > 0)$ и гиперболических $D_1^-(-x < y < 0)$, $D_2^-(-y < x < 0)$ ограниченных характеристиками $\Gamma_1(y = -x < 0)$, $\Gamma_2(x = -y < 0)$ частей, обладающее свойствами 1) $u(x, y) \in C(\bar{D}) \cap C^2(D)$, $u(0, 0) = 0$, $u(x, y) \rightarrow 0$ при $r = \sqrt{x^2 + y^2} \rightarrow \infty$, 2) $\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=0}$ и $\frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=0}$ вблизи 0 имеют особенности интегрируемого порядка, а на ∞ они исчезают порядка $O(x^{-1-q})$, $q > 0$, 3) $u(x, y)$ удовлетворяет краевым условиям

$$u(x, -x) = \psi_1(x), \quad 0 \leq x < \infty, \quad (2)$$

$$u(-y, y) = \psi_2(y), \quad 0 \leq y < \infty, \quad (3)$$

где $\psi_i(t) \in C[0, \infty)$, $i = 1, 2$ — заданные функции, причем при $t \rightarrow \infty$ $\psi_i(t) = O(x^{-q})$, $q > 0$, а при $t \rightarrow 0$ $\psi_i(t) = O(x^p)$, $p > 0$.

Решение задачи в случае $k = 0$ получено в работе [3].

Введем функции $v_1(x) = u_y(x, 0)$, $v_2(y) = u_x(0, y)$ и рассмотрим задачи для трех областей D^+ , D_1^- , D_2^- . Начнем с задачи Неймана

$$\begin{aligned} y^k u_{xx} + x^k u_{yy} &= 0, & u_y(x, 0) &= v_1(x), \\ u_x(0, y) &= v_2(y), & 0 < x, y < \infty. \end{aligned} \quad (4)$$

Пользуясь методом разделения переменных и предполагая сначала $v_2(y) \equiv 0$, а затем $v_1(x) \equiv 0$, после некоторых выкладок получим ее решение в виде

$$\begin{aligned} u(x, y) = & -\gamma x^{-k} \left[\int_0^x v_1(t) t^k F_4 \left(2\beta, \beta + \frac{1}{2}; \beta + \frac{1}{2}, \beta + \frac{1}{2}; \left(\frac{t}{x} \right)^{2p} \right. \right. \\ & \left. \left. - \left(\frac{y}{x} \right)^{2p} \right) dt + \int_x^\infty v_1(t) x^k F_4 \left(2\beta, \beta + \frac{1}{2}; \beta + \frac{1}{2}, \beta + \frac{1}{2}; \left(\frac{x}{t} \right)^{2p} \right) \right. \end{aligned}$$

$$-\left(\frac{y}{t}\right)^{2\rho} dt + \int_0^{\infty} v_2(t) t^k F_4\left(2\beta, \beta + \frac{1}{2}; \beta + \frac{1}{2}, \beta + \frac{1}{2}; -\left(\frac{t}{x}\right)^{2\rho}, -\left(\frac{y}{x}\right)^{2\rho}\right) dt \Big], \quad (5)$$

где

$$\gamma = \frac{\Gamma(2\beta)}{\Gamma^2\left(\beta + \frac{1}{2}\right)}, \quad 2\beta = \frac{k}{k+2}, \quad 2\rho = k+2,$$

а F_4 — гипергеометрическая функция Аппеля от двух переменных. При выводе формулы (5) мы пользовались свойством

$$F_4(a, b; \gamma, \gamma'; x, y) = \frac{\Gamma(\gamma')\Gamma(b-a)}{\Gamma(\gamma'-a)\Gamma(b)} (-y)^{-a} F_4\left(a, a+1-\gamma'; \gamma, a+1-b; \frac{x}{y}, \frac{1}{y}\right) + \frac{\Gamma(\gamma')\Gamma(a-b)}{\Gamma(\gamma'-b)\Gamma(a)} (-y)^{-b} F_4\left(b+1-\gamma', b; \gamma, b+1-a; \frac{x}{y}, \frac{1}{y}\right), \quad (6)$$

которое также позволяет установить, что на ∞ $u(x, y)$ имеет порядок k . Используя (6) и свойство вырождения гипергеометрической функции

$$F(a, b; b; x) = (1-x)^{-a}, \quad (7)$$

определяем предельные значения

$$\tau_i(x) = -\gamma \left[\int_0^{\infty} \frac{t^k v_i(t) dt}{|t^{2\rho} - x^{2\rho}|^{2\beta}} + \int_0^{\infty} \frac{t^k v_j(t) dt}{(t^{2\rho} + x^{2\rho})^{2\beta}} \right] \quad (i, j = 1, 2; i \neq j), \quad (8)$$

где $\tau_1(x) = u(x, 0)$, $\tau_2(y) = u(0, y)$, $0 \leq x, y < \infty$.

Приступим теперь к решению задачи Коши — Гурса в области D_1^- :

$$\begin{aligned} (-y)^k u_{xx} - x^k u_{yy} &= 0, & -x < y < 0, \\ u_y(x, 0) &= v_1(x), & u(x, -x) = \psi_1(x), & 0 < x < \infty. \end{aligned} \quad (9)$$

Используя решение задачи Коши для гиперболического уравнения в области $0 < y < x$, полученное в работе [4], выразим решение задачи Коши для уравнения (9) в области $-x < y < 0$:

$$\begin{aligned} u(x, y) &= -2^{3-4\beta} \rho \gamma_1 x y \int_a^{\frac{1}{\rho}} \frac{b^{\frac{1}{\rho}}}{t^{k+1} (t^{2\rho} - a^2)^{-1+\beta} (b^2 - t^{2\rho})^{-1+\beta}} \tau_1(t) dt - \\ &\quad - 2^{4\beta-1} \rho \gamma_2 \int_a^{\frac{1}{\rho}} \frac{b^{\frac{1}{\rho}}}{t^k (t^{2\rho} - a^2)^{-\beta} (b^2 - t^{2\rho})^{-\beta}} v_1(t) dt, \end{aligned} \quad (10)$$

где

$$a = x^\rho - (-y)^\rho, \quad b = x^\rho + (-y)^\rho,$$

$$\gamma_1 = B^{-1}(\beta, \beta), \quad \gamma_2 = B^{-1}(1-\beta, 1-\beta).$$

Используя краевое условие (2), получим уравнение

$$\begin{aligned} \psi_1(x) = & 2^{3-4\beta} \rho \gamma_1 x^{2\beta} \int_0^{\frac{1}{2} \frac{x}{\rho}} t^{\rho-2} (4x^{2\rho} - t^{2\rho})^{-1+\beta} \tau_1(t) dt - \\ & - 2^{4\beta-1} \rho \gamma_2 \int_0^{\frac{1}{2} \frac{x}{\rho}} t^{\rho-1} (4x^{2\rho} - t^{2\rho})^{-\beta} v_1(t) dt. \end{aligned} \quad (11)$$

Затем, введя новые функции и переменные по формулам

$$\tau_1(t) = \tilde{\tau}_1(t^{2\rho}), \quad v_1(t) = \tilde{v}_1(t^{2\rho}), \quad \psi_1(x) = x^{-2} \tilde{\psi}_1(4x^{2\rho}) \quad (12)$$

и решая интегральное уравнение Абеля, находим

$$\tau_1(x) = \psi_1^*(x) + \gamma \sin \pi \beta x^{\rho+1} \frac{d}{dz} \int_0^z \frac{\tau^{2\beta-1} d\tau}{(z-\tau)^\beta} \int_0^\tau \frac{\theta^{-\frac{1}{2}} \tilde{v}_1(\theta) d\theta}{(\tau-\theta)^\beta}, \quad (13)$$

где

$$\psi_1^*(x) = \frac{\sin \pi \beta}{\pi \gamma_1} x^{2-\rho} \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{\tau^{k-1} \psi_1(2^{-\frac{1}{\rho}} \tau) d\tau}{(x^{2\rho} - \tau^{2\rho})^\beta}, \quad z = x^{2\rho}.$$

Упростим повторный интеграл. Используя формулу Дирихле и заменяя переменные $\tau = (z-\theta)\eta + \theta$, представляем его в виде

$$J_1 = \frac{1}{\gamma_2} \frac{d}{dz} \int_0^z \tilde{v}_1(\theta) \theta^{2\beta-\frac{3}{2}} (z-\theta)^{1-2\beta} F\left(1-2\beta, 1-\beta; 2-2\beta; 1-\frac{z}{\theta}\right) d\theta.$$

Далее, воспользовавшись формулами

$$F(a, b, c; x) = (1-x)^{-a} F\left(a, c-b; c; \frac{x}{x-1}\right), \quad (14)$$

$$\frac{d}{dx} [x^a F(a, b, c; x)] = ax^{a-1} F(a+1, b, c; x) \quad (15)$$

и формулой (7), находим

$$J_1 = \frac{z^{\beta-1}}{\gamma_2 \rho} \int_0^z \theta^{\beta-\frac{1}{2}} (z-\theta)^{-2\beta} \tilde{v}_1(\theta) d\theta. \quad (16)$$

Подставив (16) в (13), учитывая (12), получим

$$\tau_1(x) = \psi_1^*(x) + 2\gamma \sin \pi \beta \int_0^x \frac{t^k v_1(t) dt}{(x^{2\rho} - t^{2\rho})^{2\beta}}. \quad (17)$$

Выражения (10), (17) дают решение задачи Коши — Гурса (9). Подобным же образом может быть получено и решение задачи для области D_2^- . Оно отличается от (10), (17) лишь названием переменных.

Исключая $\tau_i(x)$ из (8) и (17), снова получаем уравнения Абеля относительно $v_i(t)$, $i = 1, 2$. Обращаем их, используя замену (12):

$$v_i(x) = 2 \cos^2 \frac{\pi}{4\rho} F_i(x) - \frac{\cos \pi\beta}{\pi} x \frac{d}{dz} \left[\int_0^\infty \theta^{\beta-\frac{1}{2}} \tilde{v}_i(\theta) d\theta \times \right. \\ \left. \times \int_0^z \frac{d\tau}{|\theta-\tau|^{2\beta}(z-\tau)^{1-2\beta}} + \int_0^\infty \theta^{\beta-\frac{1}{2}} \tilde{v}_j(\theta) d\theta \int_0^z \frac{d\tau}{(\theta+\tau)^{2\beta}(z-\tau)^{1-2\beta}} \right], \\ z = x^{2\rho}, \quad (i, j = 1, 2; i \neq j), \quad (18)$$

где обозначили

$$F_i(x) = -A\psi_i^* = -\frac{2\rho}{\pi\gamma} \operatorname{tg} \frac{\pi}{4\rho} x^{-k} \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{t^{k+1} \psi_i^*(t) dt}{(x^{2\rho} - t^{2\rho})^{1-2\beta}}. \quad (19)$$

Для вычисления производной первого интеграла J_2 применяется метод, изложенный в [1] (стр. 92), в результате получим

$$J_2 = \frac{\pi \operatorname{tg} \pi\beta}{x} v_i(x) + \frac{2\rho}{x^2} \int_0^\infty \frac{t^{2\rho} v_i(t) dt}{t^{2\rho} - x^{2\rho}}, \quad i = 1, 2. \quad (20)$$

Производная второго интеграла J_3 вычисляется способом, использованным при подсчете интеграла J_1 :

$$J_3 = \frac{2\rho}{x^2} \int_0^\infty \frac{t^{2\rho} v_j(t) dt}{t^{2\rho} + x^{2\rho}}, \quad j = 1, 2. \quad (21)$$

Переписываем систему (18) в виде

$$v_i(x) + \frac{2\rho}{\pi} x^{k+1} \operatorname{tg} \frac{\pi}{4\rho} \left[\int_0^\infty \frac{v_i(t) dt}{t^{2\rho} - x^{2\rho}} - \int_0^\infty \frac{v_j(t) dt}{t^{2\rho} + x^{2\rho}} \right] = F_i(x) + \frac{C}{x}, \\ 0 < x < \infty, \quad i, j = 1, 2; i \neq j, \quad (22)$$

где

$$C = -\frac{2\rho}{\pi} \operatorname{tg} \frac{\pi}{4\rho} \int_0^\infty [v_1(t) + v_2(t)] dt.$$

Из формул (13), (19) заключаем, что при $x \rightarrow 0$ $F_i(x) = O(x^{\rho-1})$, а при $x \rightarrow \infty$ $F_i(x) = O(x^{-1-\rho})$. Ввиду исчезновения $u^-(x, 0)$ на ∞ необходимо положить постоянную $C = 0$. Решение системы необходимо искать в классе интегрируемых на ∞ и имеющих в нуле интегрируемую особенность функций.

Складывая и вычитая уравнения (22) и используя замену

$$\mu_1(x^{4\rho}) = x^{1-4\rho} [v_1(x) + v_2(x)], \quad M_1(x^{4\rho}) = x^{1-4\rho} [F_1(x) + F_2(x)], \\ \mu_2(x^{4\rho}) = x^{1-2\rho} [v_1(x) - v_2(x)], \quad M_2(x^{4\rho}) = x^{1-2\rho} [F_1(x) - F_2(x)], \quad (23)$$

получим интегральные уравнения

$$\mu_j(x) + \frac{1}{\pi} \operatorname{tg} \frac{\pi}{4\rho} \int_0^{\infty} \frac{\mu_j(t) dt}{t-x} = M_j(x), \quad 0 < x < \infty, \quad j = 1, 2. \quad (24)$$

Последние решим методом аналитического продолжения. Для этого вводим аналитические функции

$$\Phi_j(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{\infty} \frac{\mu_j(t) dt}{t-z}, \quad \Phi_j(\infty) = 0, \quad j = 1, 2. \quad (25)$$

Используя формулы Сохоцкого

$$\Phi_j^+(x) - \Phi_j^-(x) = \mu_j(x), \quad (26)$$

$$\Phi_j^+(x) + \Phi_j^-(x) = \frac{1}{\pi i} \int_0^{\infty} \frac{\mu_j(t) dt}{t-x}, \quad j = 1, 2,$$

приходим к задачам Римана

$$\Phi_j^+(x) = e^{\frac{4\rho-1}{2\rho}\pi i} \Phi_j^-(x) + e^{-\frac{\pi i}{4\rho}} \cos \frac{\pi}{4\rho} M_j(x), \quad 0 < x < \infty, \quad j = 1, 2, \quad (27)$$

которые необходимо решать в классе функций, исчезающих на ∞ и имеющих в 0 интегрируемую особенность. Решением соответствующих однородных задач в этом классе являются функции

$$X_j(z) = z^{\frac{1}{4\rho} - 1}, \quad j = 1, 2. \quad (28)$$

С их помощью получим аналогично [2] общее решение уравнений (24)

$$\mu_j(x) = \cos^2 \frac{\pi}{4\rho} M_j(x) - \frac{1}{2\pi} \sin \frac{\pi}{2\rho} X_j^+(x) \int_0^{\infty} \frac{M_j(t) dt}{X_j^+(t)(t-x)} + C_j X_j^+(x), \quad (29)$$

$$C_j = \text{const}, \quad j = 1, 2.$$

Совершив замену (23) и воспользовавшись свойством 2) решения задачи, определим окончательно единственное решение уравнений (22)

$$v_i(x) = \cos^2 \frac{\pi}{4\rho} F_i(x) - \frac{\rho}{\pi} \sin \frac{\pi}{2\rho} \left[\int_0^{\infty} \frac{t^{2\rho-1} F_i(t) dt}{t^{2\rho} - x^{2\rho}} + \int_0^{\infty} \frac{t^{2\rho-1} F_j(t) dt}{t^{2\rho} + x^{2\rho}} \right], \quad (30)$$

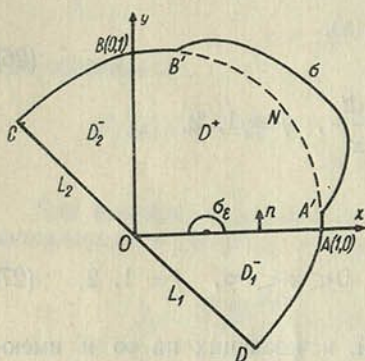
$$0 < x < \infty, \quad i, j = 1, 2; \quad i \neq j.$$

Легко заметить, что полученные функции $v_i(x)$, $i = 1, 2$, того же класса, что и $F_i(x)$, $i = 1, 2$. Выражения (5), (10), (17), (19), (30) дают решение задачи 1 в замкнутой форме.

Для уравнения (1) рассмотрим вторую задачу (см. рисунок). Пусть теперь D — конечная односвязная область, ограниченная простой дугой Жордана σ с концами $A(1, 0)$, $B(0, 1)$, лежащей в первом квадранте и

оканчивающейся сколь угодно малыми дужками AA' , $B'B$ нормального контура ANB ($x^{2\rho} + y^{2\rho} = 1$), и характеристиками BC ($(-x)^\rho + y^\rho = 1$), CD ($x + y = 0$), DA ($x^\rho + (-y)^\rho = 1$). D состоит из эллиптической D^+ и гиперболических D_1^- ($x > 0$), D_2^- ($x < 0$) частей с линиями вырождения OA ($0 < x < 1$) и OB ($0 < y < 1$).

Задача 2. Найти решение уравнения (1) в области D при $xy \neq 0$, обладающее следующими свойствами: 1) $u(x, y) \in C(\bar{D}) \cap C^2(D)$, 2) $\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=0}$ и $\frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=0}$ могут обращаться в ∞ порядка меньше 1 в точке O и меньше $\frac{1}{\rho}$ в точках B и A , 3) $u(x, y)$ удовлетворяет краевым условиям



Область, в которой ищется решение $u(x, y)$

$$u|_\sigma = \varphi(\theta), \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, \quad (31)$$

$$u|_{OD} = \psi_1(x), \quad 0 \leq x \leq 2^{-\frac{1}{\rho}}, \quad (32)$$

$$u|_{OC} = \psi_2(y), \quad 0 \leq y \leq 2^{-\frac{1}{\rho}}, \quad (33)$$

где φ , ψ_i , $i = 1, 2$, заданные функции, причем

$$\varphi(\theta) = (\xi\eta)^2 \bar{\varphi}(\theta), \quad \xi = \cos^{\frac{1}{\rho}} \theta,$$

$$\eta = \sin^{\frac{1}{\rho}} \theta, \quad \bar{\varphi}(\theta) \in C \left[0, \frac{\pi}{2} \right],$$

$$\psi_i(t) \in C \left[0, 2^{-\frac{1}{\rho}} \right] \cap C^{(2,\alpha)} \left(0, 2^{-\frac{1}{\rho}} \right), \quad \alpha > \frac{1}{\rho}, \quad i = 1, 2, \quad (34)$$

$\psi'_i(t)$ при $t \rightarrow 0$ ($t \rightarrow 2^{-\frac{1}{\rho}}$) могут иметь особенности порядка ниже $1 \left(\frac{1}{\rho} \right)$, $\psi_1(0) = \psi_2(0)$.

Эта задача в случаях $k = 0, 1$ для нормального контура $\sigma = ANB$ изучена в работе [5].

Как в работе [1], из принципа экстремума устанавливается единственность решения задачи 2 для конечной области \bar{D} . Существование решения устанавливается методом интегральных уравнений.

Предельное значение решения из области D_1^- выражается формулой (17), а из D_2^- (17) с индексом 2 вместо 1.

Для изучения решения в D^+ введем функции

$$G_1(x, 0; \xi, \eta) = |\zeta^2 - x^{2\rho}|^{-2\beta} + g_1(x, \xi, \eta), \quad (35)$$

$$G_2(0, y; \xi, \eta) = |\zeta^2 + y^{2\rho}|^{-2\beta} + g_2(y, \xi, \eta), \quad \zeta = \xi^\rho + i\eta^\rho,$$

которые являются регулярными относительно ξ, η решениями уравнения (1) в области D^+ и удовлетворяют условиям

$$G_i|_\sigma = 0, \quad i = 1, 2, \quad (36)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial G_1}{\partial \xi} \Big|_{\xi=0} = 0 \text{ при любом } \eta, \quad \frac{\partial G_1}{\partial \eta} \Big|_{\eta=0} = 0 \text{ при } \xi \neq x, \\ \frac{\partial G_2}{\partial \xi} \Big|_{\xi=0} = 0 \text{ при } \eta \neq y, \quad \frac{\partial G_2}{\partial \eta} \Big|_{\eta=0} = 0 \text{ при любом } \xi. \end{aligned} \quad (37)$$

В частности, для нормального контура $\sigma = ANB$

$$g_i(x, \xi, \eta) = -|1 + (-1)^i \xi^2 x^{2\rho}|^{-2\beta}, \quad i = 1, 2. \quad (38)$$

Так как оператор (1) самосопряжен, то формула Грина для него примет вид

$$\begin{aligned} \int_{D^+} (GLu - uLG) d\xi d\eta = \int_{\bar{D}^+ \setminus D^+} \xi^k \left(u \frac{\partial G}{\partial \eta} - G \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) d\xi + \\ + \eta^k \left(G \frac{\partial u}{\partial \xi} - u \frac{\partial G}{\partial \xi} \right) d\eta. \end{aligned} \quad (39)$$

Выделяя точки, в которых нарушается свойство (37), дужками нормальных контуров и используя свойства функций G_i , $i = 1, 2$, получаем в пределе, когда контуры стягиваются в точки, выражения

$$\tau_1(x) + \gamma \int_0^1 \xi^k G_1(x, 0; \xi, 0) v_1(\xi) d\xi + \gamma \int_0^1 \eta^k G_1(x, 0; 0, \eta) v_2(\eta) d\eta = f_1(x), \quad (40)$$

$$\tau_2(x) + \gamma \int_0^1 \xi^k G_2(0, x; \xi, 0) v_1(\xi) d\xi + \gamma \int_0^1 \eta^k G_2(0, x; 0, \eta) v_2(\eta) d\eta = f_2(x),$$

где

$$f_i(x) = \gamma \int_{\sigma} \left(\xi^k \frac{\partial G_i}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial n} + \eta^k \frac{\partial G_i}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial n} \right) ds, \quad i = 1, 2, \quad (41)$$

n — внутренняя нормаль.

Исключая $\tau_i(x)$, $i = 1, 2$, из (17), (40), после преобразований, аналогичных проведенным в задаче 1, получим систему сингулярных интегральных уравнений

$$\begin{aligned} x v_i(x) + \frac{2\rho}{\pi} \operatorname{tg} \frac{\pi}{4\rho} \left[\int_0^1 \left(\frac{\tau^{2\rho}}{\tau^{2\rho} - x^{2\rho}} - \frac{\tau^{2\rho-2}}{1 - \tau^{2\rho} x^{2\rho}} \right) v_i(\tau) d\tau + \right. \\ \left. + \int_0^1 \left(\frac{\tau^{2\rho}}{\tau^{2\rho} + x^{2\rho}} - \frac{\tau^{2\rho-2}}{1 + \tau^{2\rho} x^{2\rho}} \right) v_j(\tau) d\tau \right] + \int_0^1 \sum_{l=1}^2 K_{il}(x, t) v_l(t) dt = Q_i(x), \\ i, j = 1, 2; i \neq j, \quad 0 < x < 1, \end{aligned} \quad (42)$$

где по обозначению (19)

$$K_{il}(x, t) = \frac{x t^k}{\gamma} A_{\tau} q_{il},$$

$$q_{il}(\tau, t) = \begin{cases} g_i(\tau, t, 0) + |(-1)^i + t^{2\rho} \tau^{2\rho}|^{-2\beta}, & l = 1, \\ g_i(\tau, 0, t) + |(-1)^i - t^{2\rho} \tau^{2\rho}|^{-2\beta}, & l = 2. \end{cases}$$

$$Q_i(x) = xA(f_i - \psi_i^*).$$

Изучим поведение функций $Q_i(x)$ на $[0, 1]$. Из выражения (41) и условий, налагаемых на контур σ , можно убедиться, что $f_i(x)$ и $f'_i(x)$ стремятся к конечным пределам при $x \rightarrow 0$ и $x \rightarrow 1$, $f_i(x)$ аналитичны при $0 < x < 1$, а свойства функций $\psi_i(x)$ на $[0, 2^{-\frac{1}{\rho}}]$ сохраняются и для $\psi_i^*(x)$, $Q_i(x)$ на соответствующем $[0, 1]$.

Функции $K_{il}(x, t) \in C^1(0 < x < 1)$ и не имеют особенностей на концах, так как контур σ оканчивается нормальными дужками AA' , $B'B$.

Из постановки задачи и из (40) следует, что решение системы (42) необходимо искать в классе дифференцируемых при $0 < x < 1$ функций, могущих иметь особенность порядка ниже 1 при $x \rightarrow 0$ и меньше $\frac{1}{\rho}$ при $x \rightarrow 1$.

Заменив функции по формулам

$$\mu_1(x^{4\rho}) = x [v_1(x) + v_2(x)], \quad \mu_2(x^{4\rho}) = x^{1-2\rho} [v_1(x) - v_2(x)], \quad (43)$$

$$M_1(x^{4\rho}) = Q_1(x) + Q_2(x), \quad M_2(x^{4\rho}) = x^{-2\rho} [Q_1(x) - Q_2(x)],$$

получим эквивалентную систему

$$\begin{aligned} \mu_i(x) + \frac{1}{\pi} \operatorname{tg} \frac{\pi}{4\rho} \int_0^1 \left(\frac{1}{t-x} - \frac{t^{r_i}}{1-tx} \right) \mu_i(t) dt = \\ = \int_0^1 \sum_{l=1}^2 \widetilde{K}_{il}(x, t) \mu_l(t) dt + M_i(x) = N_i(x), \end{aligned} \quad (44)$$

где

$$r_i = \frac{(-1)^i \rho - 1}{2\rho}, \quad i = 1, 2,$$

а регулярные $\widetilde{K}_{il}(x, t) \in C^1(0 < x < 1)$, $i, l = 1, 2$, и соответствующим образом выражаются через $K_{il}(x, t)$.

Система (44) в случае симметрии D^+ относительно $y = x$, то есть $g_1(x, \xi, \eta) = g_2(x, \eta, \xi)$, разделяется на два уравнения.

Решение (44) будем искать в классе дифференцируемых при $0 < x < 1$ функций, причем $\mu_i(x)$ допускают обращение в ∞ порядка меньше $\frac{1}{\rho}$ при $x \rightarrow 1$, $\mu_1(x)$ ограничена в 0, а $\mu_2(x)$ допускает ∞ порядка меньше $\frac{1}{2}$.

Функция $M_1(x) \in C[0, 1] \cap C^{(2, \alpha)}(0, 1)$, а $M_2(x) \in C^{(2, \alpha)}(0, 1)$, $\alpha > \frac{1}{\rho}$,

$M_2(x)$ имеет особенность порядка $\frac{1}{2}$ при $x \rightarrow 0$.

Ядро $P(x, t) = \frac{1}{t-x} - \frac{t^r}{1-tx}$ лишь в случаях $r = 0, \pm 1$ автоморфно по x

$$P\left(\frac{1}{x}, t\right) = -x^{r+1} P(x, t), \quad (45)$$

а для рациональных $|r_i| < 1$ автоморфности нет.

В случаях автоморфности после некоторых выкладок получим решение уравнения вида (44) искомого класса

$$\mu(x) = \cos^2 \frac{\pi}{4\rho} N(x) - \frac{1}{2\pi} \sin \frac{\pi}{2\rho} \int_0^1 \frac{X(x)}{X(t)} \left(\frac{1}{t-x} - \frac{t^r}{1-tx} \right) N(t) dt, \quad (46)$$

где

$$X(x) = [x(1-x)^{-2}]^{\frac{1}{4\rho}}.$$

С помощью этого решения уравнения (44) можно регуляризовать слева, представив вначале сингулярные ядра в виде

$$\frac{1}{t-x} - \frac{t^r}{1-tx} = \left(\frac{1}{t-x} - \frac{t^r}{1-tx} \right) - \frac{t^r - t^r}{1-tx}.$$

Полученная эквивалентная (44) ввиду нулевого индекса система уравнений Фредгольма второго рода безусловно разрешима, так как решение задачи единственно.

Глубоко благодарен Ф. Д. Гахову за ценные советы и замечания.

Литература

1. Бицадзе А. В. Уравнения смешанного типа. М., 1959.
2. Гахов Ф. Д. Краевые задачи. М., 1963.
3. Флайшер Н. М. Rev. roumaine math. pures et appl., 11, № 6, 699, 1966.
4. Conti R. Ann. R. Scuola Norm. Sup. Pisa, Sci. Fis. mat., ser. 3, 2, 105, 1948.
5. Зайнулабидов М. М. ДУ, 5, № 1, 1969.

Белорусский государственный университет
им. В. И. Ленина

Поступило в редакцию
5.1 1970

Н. Н. ВЛАСОВЕЦ

**ЛИНЕЙНЫЕ МЕТОДЫ ПРИБЛИЖЕНИЯ НЕПРЕРЫВНЫХ
 НА ОТРЕЗКЕ ФУНКЦИЙ**

Будем говорить, что $f(x) \in MH_{\omega}^1$, если $f(x) \in C[-1, 1]$ и ее модуль непрерывности

$$\omega_1(\delta, f) = \sup_{|h| < \delta} \max_x |f(x+h) - f(x)|$$

удовлетворяет условию

$$\omega_1(\delta, f) \leq M\omega_1(\delta),$$

где $\omega_1(\delta)$ — заданная положительная функция, являющаяся истинной мажорантой модулей непрерывности, т. е. удовлетворяющая условиям

$$\begin{aligned} \omega(0) &= 0, \quad \omega(t) \text{ непрерывна при } t = 0, \\ 0 &\leq \omega(t_2) - \omega(t_1) \leq \omega(t_2 - t_1) \text{ при } 0 \leq t_1 \leq t_2. \end{aligned}$$

Пусть $\omega_2(\delta, f)$ — модуль гладкости функции $f(x)$, т. е.

$$\omega_2(\delta, f) = \sup_{|h| < \delta} \max_x |f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)|,$$

и пусть $\omega_2(\delta)$ — положительная функция, являющаяся модулем гладкости для некоторой непрерывной функции.

Будем говорить, что $f(x) \in MH_{\omega}^2$, если

$$\omega_2(\delta, f) \leq M\omega_2(\delta).$$

Если же функция $\omega_2(\delta)$ удовлетворяет дополнительному условию

$$\omega_2(\lambda\delta) \leq (\lambda + 1)\omega_2(\delta) \quad (\lambda > 0),$$

то будем говорить, что $f(x) \in MH_{\omega}^2$. Если же еще $\omega_2(\delta)$ обладает свойством

$$\int_0^{\delta} \frac{\omega_2(z)}{z} dz = O(\omega_2(\delta)),$$

то говорим, что

$$f(x) \in MH_{\omega}^{2*}.$$

Рассмотрим также функции вида

$$\varphi(t) = f(\cos t) + at + b.$$

Именно будем говорить, что $\varphi(t) \in M\tilde{H}_{\omega}^2$ (соответственно $\varphi(t) \in M\tilde{H}_{\omega}^{2*}$), если $f(x) \in MH_{\omega}^2$ (соответственно $f(x) \in MH_{\omega}^{2*}$). Будем говорить, что $f(x) \in MW_{\beta} H[\omega]$

(или $MW_B H_2[\omega]$), если $f(x) \in C[-1, 1]$ и если $f(x)$ представима в форме ряда

$$f(x) = f(\cos y) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi[\cos(y+t)] \cos\left(kt + \frac{\beta\pi}{2}\right) dt, \quad (1.1)$$

где $\cos y = x$, $\int_{-\pi}^{\pi} \varphi[\cos(y+t)] dt = 0$, если $\varphi(x) \in MH_{\omega}^1$ (или MH_{ω}^2).

Во всех указанных классах число M будем опускать в случае, когда $M = 1$.

С помощью треугольной матрицы

$$\Lambda = \{\lambda_k^{(n)}\} \quad (k = 0, 1, \dots, n+1; \\ n = 0, 1, \dots; \lambda_0^{(n)} = 1, \lambda_{n+1}^{(n)} = 0) \quad (1.2)$$

каждой такой функции ставится в соответствие тригонометрический полином

$$U_n(x) = U_n(f, y, \Lambda) = \frac{a_0}{2} + \\ + \sum_{k=1}^n \lambda_k^{(n)} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(\cos t) \cos\left[k(t-y) + \frac{\beta\pi}{2}\right] dt. \quad (1.3)$$

Иначе говоря, мы хотим изучить характер приближения непрерывных на отрезке функций, введя подстановку $\cos y = x$ и оценив приближение периодической функции $f(\cos y)$ периода 2π от соответствующих тригонометрических полиномов.

Положим теперь

$$C_i^{(n)}(\omega, x) = \sup_{f \in H_{\omega}^i} \left| \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f[\cos(t+y)] \cos ntdt \right|, \quad (1.4) \\ (i = 1, 2; n = 1, 2, \dots).$$

Теорема 1 (А. В. Ефимов [2]). *Если $\varphi(t) \in \tilde{H}_{\omega}^2$, $\varphi(0) = \varphi(d) = 0$ и $\varphi(t)$ имеет модуль гладкости $\omega_2(h, f)$, то для всех $t \in [0, d]$*

$$\varphi(t) = O\left(\ln \frac{2d}{t} \omega_2(t)\right). \quad (1.5)$$

Лемма 1. *Существует функция $\varphi(x) \in H_{\omega}^i$ ($i = 1, 2$), удовлетворяющая условию $\varphi\left[\cos\left(t + \frac{2\pi}{n}\right)\right] = \varphi(\cos t)$ и такая, что*

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi[\cos(t+y)] \cos ntdt = \frac{n}{\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{n}} \varphi[\cos(t+y)] \cos ntdt = C_i^{(n)}(\omega, x).$$

Доказательство леммы аналогично доказательству леммы 1 в [2].

Следствие 1.

$$C_i^{(n)}(\omega, x) = O\left(\omega_i\left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{n}\right)\right) \quad (i = 1, 2). \quad (1.6)$$

В самом деле,

$$\begin{aligned}
 C_2^{(n)}(\omega, x) &= \frac{n}{\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{n}} \varphi[\cos(t+y)] \cos ntdt = \\
 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi\left[\cos\left(y + \frac{t}{n}\right)\right] \cos tdt = \\
 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left\{ \varphi\left[\cos\left(y + \frac{t}{n}\right)\right] - \varphi(\cos y) \right\} \cos tdt = \\
 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \left\{ \varphi\left[\cos\left(y + \frac{t}{n}\right)\right] - \varphi(\cos y) \right\} \cos tdt + \\
 &+ \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \left\{ \varphi\left[\cos\left(y - \frac{t}{n}\right)\right] - \varphi(\cos y) \right\} \cos tdt = \\
 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \Delta_{\frac{t}{n}}^2 \varphi(\cos y) \cos tdt \leq \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \left| \Delta_{\frac{t}{n}}^2 \varphi(\cos y) \right| dt \leq \\
 &\leq \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \omega_2 \left(\left| \cos\left(y + \frac{t}{n}\right) - \cos y \right| \right) dt \leq \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \omega_2 \left(\frac{t}{n} |\sin y| + \frac{t^2}{2n^2} \right) dt \leq \\
 &\leq \omega_2 \left(\frac{\pi |\sin y|}{n} + \frac{\pi^2}{2n^2} \right) = O \left(\omega_2 \left(\frac{|\sin y|}{n} + \frac{\pi}{2n^2} \right) \right) = O \left(\omega_2 \left(\frac{|\sin y|}{n} \right) \right) = \\
 &= O \left(\omega_2 \left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{n} \right) \right),
 \end{aligned}$$

так как $\cos y = x$.
Аналогично,

$$\begin{aligned}
 C_1^{(n)}(\omega, x) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left\{ \varphi\left[\cos\left(y + \frac{t}{n}\right)\right] - \varphi(\cos y) \right\} \cos tdt \leq \\
 &\leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \Delta_{\frac{t}{n}}^1 \varphi(\cos y) \right| dt \leq \\
 &\leq \omega_1 \left(\frac{\pi |\sin y|}{n} + \frac{\pi^2}{2n^2} \right) = O \left(\omega_1 \left(\frac{|\sin y|}{n} \right) \right) = O \left(\omega_1 \left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{n} \right) \right).
 \end{aligned}$$

Следствие 2. Если $f(x) \in H_{\omega}^i$ ($i = 1, 2$), то

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f[\cos(t+y)] \cos ntdt = O \left(\omega_i \left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{n} \right) \right). \quad (1.7)$$

Действительно, так как

$$\left| \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f[\cos(t+y)] \cos ntdt \right| \leq C_i^{(n)}(\omega, x),$$

то, в силу (1.6),

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f[\cos(t+y)] \cos ntdt = O\left(\omega_i\left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{n}\right)\right).$$

Далее, как и в [2], справедлива

Лемма 2. Пусть $1 \leq m \leq n$. Тогда равномерно относительно n

$$\begin{aligned} & \sup_{f \in H_{\omega}^2} \left| \frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{2m\pi}{n}} f[\cos(t+y)] \cos ntdt \right| = \\ & = \frac{m}{n} C_2^{(n)}(\omega, x) + O\left(\frac{\ln(m+1)}{n} \omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\right). \end{aligned} \quad (1.8)$$

Следствие 1. Пусть m и n — целые числа. Тогда

$$\begin{aligned} & \sup_{f \in H_{\omega}^1} \left| \frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{2m\pi}{n}} f[\cos(t+y)] \cos ntdt \right| = \\ & = \frac{m}{n} C_1^{(n)}(\omega, x) + O\left(\frac{\ln m}{n} \omega_1\left(\frac{1}{n}\right)\right). \end{aligned} \quad (1.9)$$

Действительно, из условия $f \in H_{\omega}^1$ следует, что

$$\begin{aligned} \omega_2(h, f) &= \sup_{|\delta| < h} \|f[\cos(t+\delta)] - 2f(\cos t) + \\ &+ f[\cos(t-\delta)]\| \leq 2\omega_1(h, f) \leq 2\omega_1(h) \end{aligned}$$

и

$$\omega_2(\lambda h, f) \leq 2\omega_1(\lambda h, f) \leq 2(\lambda + 1)\omega_1(h),$$

т. е. $f(x) \in 2H_{\omega}^2$, а поэтому лемма 2 справедлива и для класса H_{ω}^1 .

Следствие 2. Если $f(x) \in H_{\omega}^2$, то

$$\int_0^{\frac{2m\pi}{n}} f[\cos(t+y)] \cos ntdt = O\left(\frac{m}{n} C_2^{(n)}(\omega, x)\right). \quad (1.10)$$

Приближение непрерывных функций «трансформированными» суммами Фейера.

Теорема 2. Пусть $f(x)$ — непрерывная на $[-1, 1]$ функция и $\omega_2(h, f)$ — ее модуль гладкости. Тогда для уклонения функции $f(x)$ от ее «трансформированной» суммы Фейера справедливо равенство

$$\begin{aligned} f(x) - \sigma_{n-1}(f, x) &= f(\cos y) - \sigma_{n-1}(f, y) = \\ &= -\frac{1}{2\pi} \int_a^\infty \frac{f\left[\cos\left(y + \frac{2t}{n}\right)\right] - 2f(\cos y) + f\left[\cos\left(y - \frac{2t}{n}\right)\right]}{t^2} dt + \\ &\quad + O\left(\omega_2\left(\frac{1}{n}, f\right)\right), \end{aligned} \quad (2.1)$$

где $a > 0$ — произвольная постоянная.

При доказательстве теоремы полагаем

$$\varphi_y(t) = \varphi(t) = f[\cos(y + 2t)] - 2f(\cos y) + f[\cos(y - 2t)]. \quad (2.2)$$

Используя формулу Валле — Пуссена для уклонения периодической функции от ее суммы Фейера, получаем

$$\begin{aligned} \sigma_{n-1}(f, y) - f(\cos y) &= \frac{1}{\pi n} \int_0^\infty \frac{\varphi(t)}{t^2} \sin^2 ntdt = \frac{1}{\pi n} \int_0^{\pi/2n} \frac{\varphi(t)}{t^2} \sin^2 ntdt + \\ &\quad + \frac{1}{\pi n} \int_{\pi/2n}^\infty \frac{\varphi(t)}{t^2} \frac{1 - \cos 2nt}{2} dt = \frac{1}{2\pi n} \int_{\pi/2n}^\infty \frac{\varphi(t)}{t^2} dt + \\ &\quad + \frac{1}{\pi n} \int_0^{\pi/2n} \frac{\varphi(t)}{t^2} \sin^2 ntdt - \\ &\quad - \frac{1}{2\pi n} \int_{\pi/2n}^\infty \frac{\varphi(t)}{t^2} \cos 2ntdt = \frac{1}{2\pi n} \int_{\pi/2n}^\infty \frac{\varphi(t)}{t^2} dt + I_1 - I_2. \end{aligned}$$

Далее, используя доказанные С. Б. Стечкиным [8] свойства модуля гладкости и тригонометрических полиномов, приближающих данную периодическую функцию, и подобно А. В. Ефимову [1] оценив интегралы I_1 , I_2 и

$$\frac{1}{2\pi n} \int_{a/n}^{\pi/2n} \frac{\varphi(t)}{t^2} dt, \text{ после замены } nt \text{ на } t \text{ приходим к равенству (2.1).}$$

Теорема 3. Пусть $\bar{f}(\cos x)$ — сопряженная к функции $f(\cos x)$, $f \in H_\omega^2$. Тогда справедливы равенства

$$\begin{aligned} \bar{f}(\cos x) - \bar{\sigma}_{n-1}(f, x) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{a_1} \left\{ f\left[\cos\left(x - \frac{t}{n}\right)\right] - \right. \\ &\quad \left. - f\left[\cos\left(x + \frac{t}{n}\right)\right] \right\} \frac{\sin t}{t^2} dt + O\left(\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\right), \quad (2.3) \\ \bar{f}(\cos x) - \bar{\sigma}_{n-1} &= f\left[\cos\left(x - \frac{1}{2n}\right)\right] - f\left[\cos\left(x + \frac{1}{2n}\right)\right] + \end{aligned}$$

$$+ \frac{1}{\pi} \int_0^{1/n} \left\{ f[\cos(x-t)] - f[\cos(x+t)] - 2nt \left\{ f \left[\cos \left(x - \frac{1}{2n} \right) - f \left[\cos \left(x + \frac{1}{2n} \right) \right] \right\} t \right\}^{-1} dt + O \left(\omega_2 \left(\frac{1}{n} \right) \right), \quad (2.4)$$

$$\bar{f}(\cos x) - \bar{\sigma}_{n-1} = f \left[\cos \left(x - \frac{1}{2n} \right) \right] - f \left[\cos \left(x + \frac{1}{2n} \right) \right] + O \left(\int_0^{1/n} \frac{\omega_2(z)}{z} dz \right), \quad (2.5)$$

где $a_1 > 0$ — наименьший корень уравнения

$$\int_0^u \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{2}. \quad (2.6)$$

Доказательство. Обозначив через $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ корни уравнения (2.6) и полагая

$$\psi(t) = \psi_x(t) = f[\cos(x-t)] - f[\cos(x+t)], \quad \psi(t) \in 2H_{\omega}^2, \quad \psi(0) = 0,$$

имеем

$$\begin{aligned} \bar{f}(\cos x) - \bar{\sigma}_{n-1}(f, x) &= \frac{1}{4\pi n} \int_{-\pi}^{\pi} \{ f(\cos x) - \\ &- f[\cos(x+t)] \} \frac{\sin nt}{\sin^2 \frac{t}{2}} dt = \\ &= \frac{1}{\pi n} \int_0^{\infty} \{ f[\cos(x-t)] - f[\cos(x+t)] \} \frac{\sin nt}{t^2} dt = \\ &= \frac{1}{\pi n} \int_0^{\infty} \psi(t) \frac{\sin nt}{t^2} dt = \\ &= \frac{1}{\pi n} \int_0^{\frac{a_1}{n}} \psi(t) \frac{\sin nt}{t^2} dt + \frac{1}{\pi n} \sum_{k=1}^{\infty} \int_{\frac{a_k}{n}}^{\frac{a_{k+1}}{n}} \psi(t) \frac{\sin nt}{t^2} dt = \\ &= \frac{1}{\pi n} \int_0^{\frac{a_1}{n}} \psi(t) \frac{\sin nt}{t^2} dt + \frac{1}{\pi n} \sum_1. \end{aligned}$$

Оценим интеграл

$$I_k = \int_{\frac{a_k}{n}}^{\frac{a_{k+1}}{n}} \psi(t) \frac{\sin nt}{t^2} dt = \int_{\frac{a_k}{n}}^{\frac{a_{k+1}}{n}} [\psi(t) + c_k t] \frac{\sin nt}{t^2} dt.$$

Выберем постоянные c_k так, чтобы функции

$$v_k(t) = \psi(t) + c_k t, \quad v_k(t) \in 2\tilde{H}_{\omega}^2, \quad v_k(0) = 0 \quad (k = 1, 2, \dots)$$

удовлетворяли условию

$$v_k(0) = v_k\left(\frac{a_{k+1}}{n}\right) = 0.$$

Для таких функций в силу теоремы 1 имеем

$$v\left(\frac{a_{k+1}}{n} - t\right) = O\left(\ln \frac{2a_{k+1}}{n\left(\frac{a_{k+1}}{n} - t\right)} \omega_2\left(\frac{a_{k+1}}{n} - t\right)\right).$$

Ввиду того, что $(k-1)\pi < a_k < k\pi$ и

$$(a_{k+1} - a_k) \ln \frac{1}{a_{k+1} - a_k} = O(1),$$

получаем

$$\begin{aligned} I_k &= O\left(\int_{\frac{a_k}{n}}^{\frac{a_{k+1}}{n}} \ln \frac{2a_{k+1}}{n\left(\frac{a_{k+1}}{n} - t\right)} \omega_2\left(\frac{a_{k+1}}{n} - t\right) \frac{dt}{t^2}\right) = \\ &= O\left(\int_0^{\frac{a_{k+1}-a_k}{n}} \ln \frac{2a_{k+1}}{nt} \omega_2(t) \frac{n^2}{a_k^2} dt\right) = \\ &= O\left(\frac{n^2}{a_k^2} \omega_2\left(\frac{1}{n}\right) \Big|_0^{\frac{a_{k+1}-a_k}{n}} t \ln \frac{2a_{k+1}}{nt}\right) = \\ &= O\left(\frac{n}{a_k^2} \omega_2\left(\frac{1}{n}\right) (a_{k+1} - a_k) \ln \frac{2a_{k+1}}{a_{k+1} - a_k}\right) = \\ &= O\left(\frac{n}{k^2} \ln(k+1) \omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\right). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi n} \sum_1 &= \frac{1}{\pi n} \sum_{k=1}^{\infty} I_k = O\left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{n}{k^2} \ln(k+1) \omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\right) = \\ &= O\left(\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\right). \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\bar{f}(\cos x) - \bar{\sigma}_{n-1}(f, x) = \frac{1}{\pi n} \int_0^{\frac{a_1}{n}} \{f[\cos(x-t)] -$$

$$- f[\cos(x+t)]\} \frac{\sin nt}{t^2} dt + O\left(\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\right),$$

откуда после замены $nt = t_1$ и получаем равенство (2.3). Равенства же (2.4) и (2.5) получаются после некоторых преобразований из полученного равенства (2.3).

Пользуясь методом Ефимова ([2], теорема 2) получаем следующий результат.

Теорема 4. Пусть $f(x) \in H_{\omega}^2$. Тогда для уклонения функции $f(\cos y)$ от ее суммы Фурье справедливо равенство

$$r_n(f, y) = f(\cos y) - S_n(f, y) =$$

$$= \frac{n}{2\pi^2} \sum_{k=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]-2} \frac{1}{k^2} \int_0^{\frac{2k\pi}{n}} \left\{ f\left[\cos\left(y+z+\frac{\pi}{2n}\right)\right] + \right.$$

$$\left. + f\left[\cos\left(y-z-\frac{\pi}{2n}\right)\right] \right\} \cos n z dz + O\left(\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\right). \quad (2.7)$$

Теорема 5. Справедливо асимптотическое неравенство

$$E_{S_n}(H_{\omega}^2) = \sup_{f \in H_{\omega}^2} \|f(\cos y) - S_n(f, y)\| \leq$$

$$\leq \frac{C_2^{(n)}(\omega, x)}{\pi} \ln n + O\left(\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\right). \quad (2.8)$$

Доказательство. Согласно теореме 4, имеем

$$\sup_{f \in H_{\omega}^2} \|r_n(f, y)\| \leq$$

$$\leq \frac{n}{2\pi} \sum_{k=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]-2} \frac{1}{k^2} \left\{ \sup_{f \in H_{\omega}^2} \left| \frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{2k\pi}{n}} f\left[\cos\left(y+z+\frac{\pi}{2n}\right)\right] \cos n z dz \right| + \right.$$

$$\left. + \sup_{f \in H_{\omega}^2} \left| \frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{2k\pi}{n}} f\left[\cos\left(y-z-\frac{\pi}{2n}\right)\right] \cos n z dz \right| \right\} + O\left(\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

Отсюда, применяя лемму 2, получим

$$E_{S_n}(H_{\omega}^2) \leq \frac{n}{2\pi} \sum_{k=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]-2} \frac{2}{k^2} \left\{ \frac{k}{n} C_2^{(n)}(\omega, x) + \right.$$

$$\begin{aligned}
 & + O\left(\frac{\ln(k+1)}{n} \omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\right) + O\left(\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\right) = \\
 & = \frac{C_2^{(n)}(\omega, x)}{\pi} \sum_{k=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]-2} \frac{1}{k} + O\left(\omega_2\left(\frac{1}{n}\right) \sum_{k=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]-2} \frac{\ln(k+1)}{k^2}\right) + \\
 & + O\left(\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\right) = \frac{C_2^{(n)}(\omega, x)}{\pi} \ln n + O\left(\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\right).
 \end{aligned}$$

Верно и следующее предложение.

Теорема 6. *Справедливо асимптотическое равенство*

$$E_{S_n}(H_\omega^1) = \frac{C_1^{(n)}(\omega, x)}{\pi} \ln n + O\left(\omega_1\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

Приведем еще результаты приближения непрерывных на $[-1, 1]$ функции «трансформированными» суммами Валле—Пуссена $\sigma_{n,p}(f, x)$ при $0 \leq p \leq \left[\frac{n}{2}\right]$:

$$\begin{aligned}
 V_{n,p}(f, y) &= f(x) - \sigma_{n,p}(f, x) = f(\cos y) - \sigma_{n,p}(f, y) = \\
 &= \frac{1}{p+1} \sum_{k=n-p}^n [f(\cos y) - S_k(f, y)] = \\
 &= \frac{1}{\pi(p+1)} \int_{-\pi}^{\pi} [f(\cos y) - f[\cos(y+t)]] \frac{\cos(n-p)t - \cos(n+1)t}{4 \sin^2 t/2} dt.
 \end{aligned}$$

Если обозначить

$$\begin{aligned}
 r_{k,\beta}(\varphi, y) &= f(\cos y) - S_n(f, y) = \\
 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \{\varphi(\cos y) - \varphi[\cos(y+t)]\} \frac{\sin\left(\frac{2k+1}{2}t + \frac{\beta\pi}{2}\right)}{2 \sin \frac{t}{2}} dt,
 \end{aligned}$$

то

$$\begin{aligned}
 V_{n,p}(f, y) &= f(\cos y) - \sigma_{n,p}(f, y) = \\
 &= \frac{1}{p+1} \sum_{k=n-p}^n r_{k,\beta}(\varphi, y) = V_{n,p}^\beta(\varphi, y) \quad (2.9)
 \end{aligned}$$

и справедлива

Теорема 7. Пусть $f(x) \in W_{\beta}^0 H_{\omega}^2$, p и n — целые числа, $0 \leq p \leq \left[\frac{n}{2}\right]$.

Тогда

$$\begin{aligned}
 V_{n,p}^{\beta}(\varphi, y) &= \frac{1}{2\pi^2} \sum_{k=1}^{k_0-1} \frac{1}{k^2} \int_0^{2k\pi} \left\{ \varphi \left[\cos \left(y - \frac{t}{n} - \frac{3+\beta'}{2n} \pi \right) \right] - \right. \\
 &\quad \left. - \varphi \left[\cos \left(y + \frac{t}{n} + \frac{5-\beta'}{2n} \pi \right) \right] \right\} \cos t dt + \\
 &\quad + \frac{\sin \frac{\beta\pi}{2}}{\pi} \int_0^{\frac{1}{n}} \frac{\varphi [\cos(y-t)] - \varphi [\cos(y+t)]}{t} dt + \\
 &\quad + O \left(\left| \sin \frac{\beta\pi}{2} \right| \left| \varphi(\cos y) - \varphi \left[\cos \left(y + \frac{1}{n} \right) \right] \right| + O \left(\omega_2 \left(\frac{1}{n} \right) \right) \right), \quad (2.10)
 \end{aligned}$$

где $k_0 = \left[\frac{n+1}{p+1} \right]$, $\beta' = \beta - 4\nu$, ν — целое, $\beta' \in [0, 4]$.

Если же $f(x) \in W_{\beta}^0 H_{\omega}^2$, то

$$\begin{aligned}
 V_{n,p}(f, y) &= \frac{1}{2\pi^2} \sum_{k=1}^{k_0-1} \frac{1}{k^2} \int_0^{2k\pi} \left\{ \varphi \left[\cos \left(y - \frac{t}{n} - \frac{3+\beta'}{2n} \pi \right) \right] - \right. \\
 &\quad \left. - \varphi \left[\cos \left(y + \frac{t}{n} + \frac{5-\beta'}{2n} \pi \right) \right] \right\} \cos t dt + O \left(\omega_2 \left(\frac{1}{n} \right) \right). \quad (2.11)
 \end{aligned}$$

Доказательство проводится методом, который применил А. В. Ефимов при доказательстве теоремы 1 в [6].

В связи с тем, что если $f(x) \in H_{\omega}^1$, то $f \in 2H_{\omega}^2$, справедлива

Теорема 8. Пусть $f(x) \in W_{\beta}^0 H_{\omega}^1$, p и n — целые числа, $0 \leq p \leq \left[\frac{n}{2} \right]$.

Тогда для уклонения функции $f(\cos y)$ от ее сумм Валле—Пуссена $\sigma_{n,p}(f, y)$ справедливо равенство

$$\begin{aligned}
 V_{n,p}(f, y) &= V_{n,p}^{\beta}(\varphi, y) = \frac{1}{p+1} \sum_{k=n-p}^n r_{k,\beta}(\varphi, y) = \\
 &= \frac{1}{2\pi^2} \sum_{k=1}^{k_0-1} \frac{1}{k^2} \int_0^{2k\pi} \left\{ \varphi \left[\cos \left(y - \frac{t}{n} - \frac{3+\beta'}{2n} \pi \right) \right] - \right. \\
 &\quad \left. - \varphi \left[\cos \left(y + \frac{t}{n} + \frac{5-\beta'}{2n} \pi \right) \right] \right\} \cos t dt + \\
 &\quad + \frac{\sin \frac{\beta\pi}{2}}{\pi} \int_0^{\frac{1}{n}} \frac{\varphi [\cos(y-t)] - \varphi [\cos(y+t)]}{t} dt + O \left(\omega_1 \left(\frac{1}{n} \right) \right). \quad (2.12)
 \end{aligned}$$

Последние две теоремы дают возможность установить следующие асимптотические оценки.

Теорема 9. При любом $0 \leq p \leq \left[\frac{n}{2} \right]$ справедливо равенство

$$E_{\sigma_{n,p}}(W_{\beta}^0 H_{\omega}^1) = \sup_{\varphi \in H_{\omega}^1} \|V_{n,p}^{\beta}(\varphi, y)\| = \\ = \frac{C_1^{(n)}(\omega, x)}{\pi} \ln \frac{n}{p+1} + \frac{\sin \frac{\beta\pi}{2}}{\pi} \int_0^{1/n} \frac{\omega_1(2t)}{t} dt + O\left(\omega_1\left(\frac{1}{n}\right)\right). \quad (2.13)$$

Теорема 10. При любом $0 \leq p \leq \left[\frac{n}{2} \right]$ справедливо асимптотическое равенство

$$E_{\sigma_{n,p}}(W_{\beta}^0 H_{\omega^*}^2) = \frac{C_2^{(n)}(\omega, x)}{\pi} \ln \frac{n}{p+1} + O\left(\omega_2\left(\frac{1}{n}\right) \ln \gamma_n\right), \quad (2.14)$$

где γ_n — корень уравнения

$$\omega_2\left(\frac{2\pi}{n} \gamma_n\right) = \omega_2\left(\frac{1}{n}\right) \ln n.$$

Приближение непрерывных функций. Ставится задача оценить уклонение $\Lambda_n(f, x) = f(x) - U_n(x)$ для произвольных функций (1.1) класса $MW_{\beta} H[\omega]$ от полиномов (1.3) с помощью любой матрицы (1.2). Мы приведем основной результат, подробное доказательство которого в данной заметке из-за большого объема не представляется возможным.

Теорема 11. Равномерно по всем функциям $f(x) \in W_{\beta}^0 H[\omega]$ справедливо равенство

$$\Lambda_n(f, x) = \\ = \frac{1}{2\pi^2} \sum_{k=v+3}^n \lambda_k^{(n)} \sum_{i=\left[\frac{n+1}{n-k+2}\right]+1}^{\left[\frac{n+1}{n-k+1}\right]} \frac{1}{i^2} \int_0^{2i\pi} \left\{ \varphi \left[\cos \left(y - \frac{t}{n} - \frac{3+\beta}{2n} \pi \right) \right] - \right. \\ \left. - \varphi \left[\cos \left(y + \frac{t}{n} + \frac{5-\beta}{2n} \pi \right) \right] \right\} \cos t dt + \\ + \frac{\cos \frac{\beta\pi}{2}}{\pi} \left\{ \sum_{k=0}^{v-1} \Delta_k^2 \int_{\frac{1}{k+2}}^1 \frac{2\varphi(\cos y) - \varphi[\cos(y+t)] - \varphi[\cos(y-t)]}{t^2} dt + \right. \\ \left. + \Delta_v \int_{\frac{1}{v+2}}^1 \frac{2\varphi(\cos y) - \varphi[\cos(y+t)] - \varphi[\cos(y-t)]}{t^2} dt \right\} +$$

$$+ \frac{\sin \frac{\beta\pi}{2}}{\pi} \sum_{k=0}^{v-1} (k+1) \Delta_k^2 \int_{\frac{1}{n}}^{\frac{1}{k+1}} \frac{\varphi[\cos(y-t)] - \varphi[\cos(y+t)]}{t} dt +$$

$$+ O(h[\omega, n, \Lambda]), \quad (3.1)$$

где

$$v = \left[\frac{n+1}{2} \right], \quad (3.2)$$

$$h[\omega, n, \Lambda] = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(k+1)(n-k)}{n+1} \omega\left(\frac{1}{k+1}\right) \left| \Delta_k^2 \right| + \omega\left(\frac{1}{n}\right), \quad (3.3)$$

$$\Delta_k = \Delta\lambda_k^{(n)} = \lambda_k^{(n)} - \lambda_{k+1}^{(n)} \quad (k=0, 1, \dots, n), \quad (3.4)$$

$$\Delta_k^2 = \Delta^2\lambda_k^{(n)} = \lambda_k^{(n)} - 2\lambda_{k+1}^{(n)} + \lambda_{k+2}^{(n)} \quad (k=0, 1, \dots, n-1). \quad (3.5)$$

Приведем еще оценку сверху для $E_{U_n}(W_{\beta}^0 H[\omega])$, которая выводится из теоремы 11.

Теорема 12. Для любой последовательности $\{\lambda_k^{(n)}\}$ и для любого модуля непрерывности справедливо неравенство

$$E_{U_n}(W_{\beta}^0 H[\omega]) \leq \frac{C_1^{(n)}(\omega, x)}{\pi} \sum_{k=v+3}^n \frac{|\lambda_k^{(n)}|}{n-k+1} + \frac{2 \left| \sin \frac{\beta\pi}{2} \right|}{\pi} d_n[\omega] +$$

$$+ \frac{2 \left| \cos \frac{\beta\pi}{2} \right|}{\pi} \left\{ \sum_{k=0}^{v-1} |\Delta^2\lambda_k^{(n)}| \int_{\frac{1}{k+2}}^1 \frac{\omega(t)}{t^2} dt + |\Delta\lambda_v^{(n)}| \int_{\frac{1}{v+2}}^1 \frac{\omega(t)}{t^2} dt \right\} +$$

$$+ \frac{2 \left| \sin \frac{\beta\pi}{2} \right|}{\pi} \sum_{k=0}^{v-1} (k+1) |\Delta^2\lambda_k^{(n)}| d_{n,k}[\omega] + O(h[\omega, n, \Lambda]), \quad (3.6)$$

где

$$d_n[\omega] = \sup_{\varphi \in H_{\omega}^1} \left| \int_0^{\frac{1}{n}} \frac{\varphi(t)}{t} dt \right|, \quad (3.7)$$

$$d_{n,k}[\omega] = \sup_{\varphi \in H_{\omega}^1} \left| \int_{\frac{1}{n}}^{\frac{1}{k+1}} \frac{\varphi[\cos(y-t)] - \varphi[\cos(y+t)]}{t} dt \right|$$

$$(k=0, 1, \dots, n-1). \quad (3.8)$$

Литература

1. Ефимов А. В. Изв. АН СССР, сер. мат., 22, 81, 1958.
2. Ефимов А. В. Изв. АН СССР, сер. мат., 23, 115, 1959.
3. Ефимов А. В. Изв. АН СССР, сер. мат., 23, 737, 1959.
4. Ефимов А. В. Изв. АН СССР, сер. мат., 24, 243, 1960.
5. Ефимов А. В. Изв. АН СССР, сер. мат., 24, 743, 1960.
6. Ефимов А. В. Изв. АН СССР, сер. мат., 24, 431, 1960.
7. Ефимов А. В. Мат. сб., 54, (96), № 1, 51, 1961.
8. Стечкин С. Б. Изв. АН СССР, сер. мат., 15, 219, 1951.
9. Люстерник Л. А., Соболев В. И. Элементы функционального анализа. М., 1951.
10. Ахнезер Н. И. Лекции по теории аппроксимации. М., 1947.

Белорусский государственный университет
им. В. И. Ленина

Поступило в редакцию
12.1 1970

В. В. БОБКОВ, ДИнь ХАК ХУНГ

**ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ ПРИБЛИЖЕННОГО РЕШЕНИЯ
ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ $y'' = f(x, y)$**

Рассмотрим на отрезке $[x_0, X]$ следующую задачу Коши:

$$y'' = f(x, y), \quad (1)$$

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y'_0. \quad (2)$$

Широко известные разностные методы (например, методы Штермера, Коуэлла [1]) приближенного решения этой задачи обязательно требуют предварительного составления начала таблицы, причем длина этого начала при заданном шаге должна быть тем больше, чем точнее, вообще говоря, мы хотим найти решение поставленной задачи. Метод приближенного решения задачи (1), (2), предлагаемый в данной работе, свободен от этого недостатка. Вычислительные правила любой точности, построенные по этому методу, требуют предварительного нахождения приближенного решения лишь в одной точке, отличной от точки $x = x_0$. При этом и эта единственная точка сохранена лишь в связи со стремлением построить вычислительные схемы, не требующие попутного вычисления значений первой производной от решения задачи (в отличие, например, от правил типа Рунге—Кутта, построенных в работе [2]). Построение предлагаемых здесь вычислительных правил опирается на идею метода [3], основанного на многократном использовании квадратурных формул понижающейся алгебраической степени точности. Кроме изложения общей теории построения таких правил в работе приводятся конкретные примеры этих правил, а также проводится исследование предлагаемых правил на сходимость.

Будем предполагать правую часть уравнения (1) достаточно гладкой функцией и станем искать решение поставленной задачи (1), (2) на следующей сетке (для простоты изложения, например, равноотстоящих) точек x_i ($i = 1, 2, \dots, N$):

$$x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_N \leq X.$$

Пусть вычисления доведены до точки x_n ($1 \leq n < N$). Для нахождения приближенного значения решения в очередной точке $x_{n+1} = x_n + h$ будем исходить из следующего непосредственно проверяемого равенства (см., например, [1]):

$$y(x_{n+1}) = 2y(x_n) - y(x_{n-1}) + \int_{x_{n-1}}^{x_{n+1}} y''(x)(h - |x - x_n|) dx,$$

или

$$y(x_{n+1}) = 2y(x_n) - y(x_{n-1}) + h^2 \int_{-1}^1 y''(x_n + ht)(1 - |t|) dt, \quad (3)$$

где $t = \frac{x - x_n}{h}$.

Для приближенного вычисления последнего интеграла воспользуемся квадратурной формулой

$$\int_{-1}^1 y''(x_n + ht)(1 - |t|) dt \approx \sum_{i=1}^q a_i^{(q)} y''(x_n + ht_i^{(q)}) \quad (4)$$

наивысшей алгебраической степени точности $2q - 1$. Так как весовая функция $1 - |t|$ неотрицательна на отрезке интегрирования, то, как известно [4], такое правило может быть построено при любом $q \geq 1$. Для его остатка R_q справедливо представление

$$R_q = h^{2q} \frac{y^{(2q+2)}(x_n + \theta h)}{(2q)!} \int_{-1}^1 (1 - |t|) \prod_{j=1}^q (t - t_j^{(q)})^2 dt, \quad -1 \leq \theta \leq 1,$$

а его узлы $-1 < t_i^{(q)} < 1$ и коэффициенты $0 < a_i^{(q)} \leq 1$ удовлетворяют следующей системе уравнений:

$$\sum_{i=1}^q a_i^{(q)} t_i^{(q)j} = \begin{cases} 0, & \text{если } j \text{ нечетно} \quad (j = 0, 1, \dots, 2q - 1), \\ \frac{2}{(j+1)(j+2)}, & \text{если } j \text{ четно.} \end{cases} \quad (5)$$

Выбирая узлы и коэффициенты квадратурного правила (4) удовлетворяющими системе уравнений (5), заменим с погрешностью аппроксимации $r_q = h^2 R_q = O(h^{2q+2})$ равенство (3) следующим:

$$y_{n+1} = 2y_n - y_{n-1} + h^2 \sum_{i=1}^q a_i^{(q)} f(x_n + ht_i^{(q)}, y_{n+t_i^{(q)}}), \quad (6)$$

где

$$y_{n+t_i^{(q)}} \approx y(x_n + ht_i^{(q)}).$$

Последнее равенство позволяло бы найти приближенное значение решения задачи (1), (2) в точке x_{n+1} с локальной погрешностью порядка h^{2q+2} , если бы мы могли с погрешностями порядка h^{2q} найти значения $y_{n+t_i^{(q)}}$, $i = 1, 2, \dots, q$.

Аналогично предыдущему для величин $y_{n+t_i^{(q)}}$ ($i = 1, 2, \dots, q$) можно также указать равенства

$$y_{n+t_i^{(q)}} = (1 + t_i^{(q)}) y_n - t_i^{(q)} y_{n-1} + h^2 t_i^{(q)} \sum_{j=1}^{q-1} a_j^{(q-1)} f(x_n + ht_j^{(q-1)}, y_{n+t_j^{(q-1)}}),$$

$$i = 1, 2, \dots, q,$$

подобные равенству (6) и позволяющие находить интересные нас значения с локальными погрешностями порядка h^{2q} , при этом для каждого $t_i^{(q)}$

($i = 1, 2, \dots, q$) параметры $a_j^{(q-1)}$ и $t_j^{(q-1)}$ ($j = 1, 2, \dots, q-1$) подбирают удовлетворяющими следующей системе уравнений:

$$\sum_{j=1}^{q-1} a_j^{(q-1)} t_j^{(q-1)k} = \frac{k!}{(k+2)!} [t_i^{(q)k+1} + (-1)^k], \quad k = 0, 1, \dots, 2q-3. \quad (7)$$

Заметим, что при $t_i^{(q)} = 1$ система (7) переходит, естественно, в систему (5), усеченную на два последних уравнения.

Для величин $y_{n+t_j^{(q-1)}}$ ($j = 1, 2, \dots, q-1$) подобным же образом с погрешностью аппроксимации порядка h^{2q-2} можно записать

$$y_{n+t_j^{(q-1)}} = (1 + t_j^{(q-1)}) y_n - t_j^{(q-1)} y_{n-1} + h^2 t_j^{(q-1)} \sum_{k=1}^{q-2} a_k^{(q-2)} f(x_n + h t_k^{(q-2)}, y_{n+t_k^{(q-2)}}).$$

Поступая аналогично и далее, мы придем, наконец, к формуле

$$y_{n+t_1^{(1)}} = (1 + t_1^{(1)}) y_n - t_1^{(1)} y_{n-1},$$

которая имеет погрешность аппроксимации порядка h^2 и дает возможность построить (если идти сейчас в обратном направлении) расчетные правила, позволяющие найти с локальной погрешностью порядка h^{2q+2} интересующее нас значение y_{n+1} приближенного решения задачи Коши (1), (2) в точке x_{n+1} .

Итак, предлагаемый здесь метод основан на многократном использовании квадратурных формул понижающейся алгебраической степени точности. Снижение же требований к точности позволяет либо уменьшить число выбираемых параметров, либо разумно распорядиться образовавшимися свободными параметрами. При практическом построении конкретных вычислительных схем мы часто будем использовать и вторую возможность.

Приведем теперь несколько примеров вычислительных схем, построенных по предлагаемому методу. При $q=1$ система (5) принимает вид

$$a_1^{(1)} = 1,$$

$$a_1^{(1)} t_1^{(1)} = 0,$$

т. е. интересующее нас правило с локальной погрешностью решения порядка h^4 будет следующим:

$$y_{n+1} = 2y_n - y_{n-1} + h^2 f(x_n, y_n).$$

Это простейшее правило совпадает с соответствующим правилом, полученным по экстраполяционному методу Штермера [1].

При $q=3$, например, нетрудно, согласно изложенному выше, построить следующее расчетное правило, позволяющее находить приближенное решение с локальной погрешностью порядка h^6 :

$$y_{n+1} = 2y_n - y_{n-1} + \frac{h^2}{12} [f(x_{n-1}, y_{n-1}) + 10f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, \tilde{y}_{n+1})], \quad (8)$$

$$\tilde{y}_{n+1} = 2y_n - y_{n-1} + h^2 f(x_n, y_n).$$

Сравним это правило с экстраполяционным методом Штермера [1]

$$y_{n+1} = 2y_n - y_{n-1} + \frac{h^2}{12} [14f(x_n, y_n) - 5f(x_{n-1}, y_{n-1}) + \\ + 4f(x_{n-2}, y_{n-2}) - f(x_{n-3}, y_{n-3})],$$

имеющим тот же порядок точности.

Предлагаемое здесь расчетное правило (8), очевидно, выгодно отличается от приведенного правила Штермера как по необходимой длине начала таблицы, так и по числу подстановок в правую часть уравнения.

Рассматриваемый нами способ позволяет строить и неявные вычислительные схемы приближенного решения задачи (1), (2), если один из свободных параметров $t_i^{(q)}$ положить равным единице. Так, например, при $q = 5$ нетрудно построить следующее неявное правило с локальной погрешностью решения порядка h^8 :

$$y_{n+1} = 2y_n - y_{n-1} + \frac{h^2}{60} \left[f(x_{n-1}, y_{n-1}) + 26f(x_n, y_n) + \right. \\ \left. + 16f\left(x_n - \frac{1}{2}h, y_{n-1/2}\right) + 16f\left(x_n + \frac{1}{2}h, y_{n+1/2}\right) + f(x_{n+1}, y_{n+1}) \right], \\ y_{n+1/2} = 2y_n - y_{n-1/2} + \frac{h^2}{48} \left[f\left(x_n - \frac{1}{2}h, y_{n-1/2}\right) + \right. \\ \left. + 10f(x_n, y_n) + f\left(x_n + \frac{1}{2}h, y_{n+1/2}\right) \right].$$

Предлагаемое правило, правда, требует дополнительно знать с погрешностью порядка h^6 решение рассматриваемой задачи в точке $x_0 + \frac{h}{2}$. Это значение можно найти, например, из уравнения

$$y_{1/2} = \frac{1}{2}y_1 + \frac{1}{2}y_0 - \frac{1}{96}h^2 \left[f(x_0, y_0) + \right. \\ \left. + 10f\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_{1/2}\right) + f(x_1, y_1) \right].$$

Неявные правила требуют при переходе к следующей точке решения численных уравнений, что удобнее всего делать итерационно, так как наличие множителя h^2 позволяет надеяться на быструю сходимость соответствующего процесса итераций.

При необходимости неявные правила могут быть легко преобразованы в явные присоединением дополнительных расчетных формул, которые получают по описанному выше способу. Мы не будем здесь проводить такое преобразование для последнего правила, как и не станем приводить примеры подобных правил более высокого порядка точности, а рассмотрим сейчас исследование предлагаемых правил на сходимость.

Для простоты изложения будем иметь в виду, например, расчетное правило (8), при этом станем исследовать сходимость приближенного решения к точному в предположении, что вычисления ведутся без округлений и начальные значения y_0 и y_1 известны точно. Это позволит значительно упростить записи. Требования же к точности нахождения начальных данных и к погрешностям округлений нетрудно будет проследить по ходу рассуждений.

Согласно способу построения расчетного правила (8), можно записать

$$y(x_{n+1}) = 2y(x_n) - y(x_{n-1}) + \frac{h^2}{12} \{f[x_{n-1}, y(x_{n-1})] + 10f[x_n, y(x_n)] + \\ + f[x_{n+1}, y(x_{n+1})]\} + r_{n+1},$$

$$y(x_{n+1}) = 2y(x_n) - y(x_{n-1}) + h^2 f[x_n, y(x_n)] + \tilde{r}_{n+1},$$

где $|r_{n+1}| \leq h^6 r$, $|\tilde{r}_{n+1}| \leq h^4 \tilde{r}$, $n = 1, 2, \dots, N-1$ (значения констант r и \tilde{r} мы не станем здесь приводить, так как нас будет сейчас интересовать лишь сам факт сходимости метода и порядок ее скорости).

Вычитая из последних равенств соответственно равенства (8), для погрешности $\varepsilon_i = y(x_i) - y_i$ будем иметь

$$\varepsilon_{n+1} = 2\varepsilon_n - \varepsilon_{n-1} + \frac{h^2}{12} \left[\frac{\partial f(x_{n-1}, y_{n-1} + \theta_{n-1} \varepsilon_{n-1})}{\partial y} \varepsilon_{n-1} + \right. \\ \left. + 10 \frac{\partial f(x_n, y_n + \theta_n \varepsilon_n)}{\partial y} \varepsilon_n + \frac{\partial f(x_{n+1}, \tilde{y}_{n+1} + \tilde{\theta}_{n+1} \tilde{\varepsilon}_{n+1})}{\partial y} \tilde{\varepsilon}_{n+1} \right] + r_{n+1},$$

$$\tilde{\varepsilon}_{n+1} = 2\varepsilon_n - \varepsilon_{n-1} + h^2 \frac{\partial f(x_n, y_n + \theta_n \varepsilon_n)}{\partial y} \varepsilon_n + \tilde{r}_{n+1}, \quad 0 < \theta_n, \quad \tilde{\theta}_{n+1} < 1,$$

$$n = 1, 2, \dots, N-1.$$

Здесь, естественно, предполагается, что точное решение задачи (1), (2) и ее приближенное решение, найденное по правилу (8) при достаточно малом шаге $h > 0$, лежат в некоторой области плоскости x, y , выпуклой в направлении оси y .

Перепишем последние равенства в следующем виде:

$$\varepsilon_2 = r_2 + \frac{h^2}{12} \frac{\partial f(x_2, \tilde{y}_2 + \tilde{\theta}_2 \tilde{\varepsilon}_2)}{\partial y} \tilde{r}_2,$$

$$\varepsilon_3 = 2\varepsilon_2 + h^2 \varepsilon_2 \left[\frac{5}{6} \frac{\partial f(x_2, y_2 + \theta_2 \varepsilon_2)}{\partial y} + \frac{1}{6} \frac{\partial f(x_3, \tilde{y}_3 + \tilde{\theta}_3 \tilde{\varepsilon}_3)}{\partial y} + \right. \\ \left. + \frac{h^2}{12} \frac{\partial f(x_3, \tilde{y}_3 + \tilde{\theta}_3 \tilde{\varepsilon}_3)}{\partial y} \cdot \frac{\partial f(x_2, y_2 + \theta_2 \varepsilon_2)}{\partial y} \right] + r_3 +$$

$$+ \frac{h^2}{12} \frac{\partial f(x_3, \tilde{y}_3 + \tilde{\theta}_3 \tilde{\varepsilon}_3)}{\partial y} \tilde{r}_3,$$

$$\dots$$

$$\varepsilon_{n+1} = 2\varepsilon_n - \varepsilon_{n-1} + h^2 \varepsilon_n \left[\frac{5}{6} \frac{\partial f(x_n, y_n + \theta_n \varepsilon_n)}{\partial y} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{6} \frac{\partial f(x_{n+1}, \tilde{y}_{n+1} + \tilde{\theta}_{n+1} \tilde{\varepsilon}_{n+1})}{\partial y} + \right.$$

$$\left. + \frac{h^2}{12} \frac{\partial f(x_{n+1}, \tilde{y}_{n+1} + \tilde{\theta}_{n+1} \tilde{\varepsilon}_{n+1})}{\partial y} \cdot \frac{\partial f(x_n, y_n + \theta_n \varepsilon_n)}{\partial y} \right] +$$

$$+ \frac{h^2}{12} \varepsilon_{n-1} \left[\frac{\partial f(x_{n-1}, y_{n-1} + \theta_{n-1} \varepsilon_{n-1})}{\partial y} - \frac{\partial f(x_{n+1}, \tilde{y}_{n+1} + \tilde{\theta}_{n+1} \tilde{\varepsilon}_{n+1})}{\partial y} \right] +$$

$$+ r_{n+1} + \frac{h^2}{12} \frac{\partial f(x_{n+1}, \tilde{y}_{n+1} + \tilde{\theta}_{n+1} \tilde{\varepsilon}_{n+1})}{\partial y} \tilde{r}_{n+1}, \quad n = 1, 2, \dots, N-1.$$

Суммируя эти равенства и предполагая выполненным в рассматриваемой области условие $\left| \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \right| \leq L$, нетрудно получить следующие неравенства:

$$|\varepsilon_{n+1}| \leq |\varepsilon_n| + h^2 L \left(1 + \frac{h^2}{12} L \right) \sum_{i=2}^n |\varepsilon_i| +$$

$$+ \frac{h^2 L}{6} \sum_{i=3}^n |\varepsilon_i| + nh^6 \left(r + \frac{L}{12} \tilde{r} \right)$$

или

$$|\varepsilon_{n+1}| \leq |\varepsilon_n| + h^2 L \left(\frac{7}{6} + \frac{h^2}{12} L \right) \sum_{i=2}^n |\varepsilon_i| + h^5 (X - x_0) \left(r + \frac{L}{12} \tilde{r} \right),$$

$$n = 1, 2, \dots, N-1.$$

Если ввести обозначения

$$E_j = \max_{2 < i < j} |\varepsilon_i|, \quad R = h^5 (X - x_0) \left(r + \frac{L}{12} \tilde{r} \right),$$

$$Q = 1 + h(X - x_0) L \left(\frac{7}{6} + \frac{h^2}{12} L \right),$$

то от последних неравенств легко перейти к следующим:

$$E_2 = |\varepsilon_2| \leq R, \quad |\varepsilon_{n+1}| \leq QE_n + R, \quad n = 2, 3, \dots, N-1.$$

Нетрудно также показать, что $E_{n+1} \leq QE_n + R$, $n = 2, 3, \dots, N-1$.

В самом деле, по определению,

$$E_n \leq E_{n+1}.$$

Если $E_{n+1} = E_n$, то утверждаемое неравенство справедливо в силу условий $Q \geq 1$ и $R \geq 0$, если же $E_{n+1} > E_n$, то $E_{n+1} = |\varepsilon_{n+1}|$, и мы приходим к известному результату.

Теперь уже, опираясь на неравенства

$$E_2 \leq R, \quad E_{n+1} \leq QE_n + R, \quad n = 2, 3, \dots, N-1,$$

можно записать

$$E_{n+1} \leq R(1 + Q + Q^2 + \dots + Q^{n-1}), \quad n = 1, 2, \dots, N-1.$$

Если $f_y(x, y) \neq 0$, то последние неравенства позволяют получить следующую оценку погрешности правила (8):

$$|\varepsilon_n| \leq E_n \leq R \frac{Q^n - 1}{Q - 1} = h^4 \frac{r + \frac{L}{12} \tilde{r}}{L \left(\frac{7}{6} + \frac{h^2}{12} L \right)} \times$$

$$\times \left\{ \left[1 + h(X - x_0) L \left(\frac{7}{6} + \frac{h^2}{12} L \right) \right]^n - 1 \right\}, \quad n = 2, 3, \dots, N$$

(в тривиальном случае $f_y(x, y) \equiv 0$ интересующая нас оценка может быть записана в виде

$$|\varepsilon_n| \leq nR \leq h^4 (X - x_0)^2 r, \quad n = 2, 3, \dots, N).$$

Принимая во внимание очевидные неравенства

$$1 + u \leq e^u, \quad e^u - 1 \leq ue^u,$$

полученную априорную оценку погрешности можно привести к виду

$$|\varepsilon_n| \leq h^4 \frac{r + \frac{L}{12} \tilde{r}}{L \left(\frac{7}{6} + \frac{h^2}{12} L \right)} \left[e^{(X-x_0)^2 L \left(\frac{7}{6} + \frac{h^2}{12} L \right)} - 1 \right], \quad n = 2, 3, \dots, N,$$

или к виду

$$|\varepsilon_n| \leq h^4 (X - x_0)^2 \left(r + \frac{L}{12} \tilde{r} \right) e^{(X-x_0)^2 L \left(\frac{7}{6} + \frac{h^2}{12} L \right)}, \quad n = 2, 3, \dots, N$$

(последняя справедлива и в случае $f_y(x, y) \equiv 0$).

Эти оценки позволяют сделать вывод о равномерной сходимости правила (8) на отрезке $[x_0, X]$ со скоростью порядка h^4 .

Без принципиальных затруднений подобным же образом в случае любого правила (в том числе и для неявных правил), построенного предлагаемым выше способом и имеющего погрешность аппроксимации порядка h^{k+2} , можно доказать равномерную на отрезке $[x_0, X]$ сходимость метода со скоростью порядка h^k .

Используемый здесь способ исследования сходимости рассматриваемого правила позволяет без существенных затруднений учесть влияние на погрешность приближенного решения погрешностей округлений и начальных погрешностей. Нетрудно показать, что в данном случае для сходимости приближенного решения к точному достаточно потребовать, чтобы погрешности начальных данных были величиной $o(h)$, а погрешности округлений — величиной $o(h^2)$.

Заметим в заключение, что рассматриваемый подход может быть использован и при исследовании сходимости метода Штермера. Сходимость этого метода несколько иным способом была исследована в работе [5].

Литература

1. Мысовских И. П. Лекции по методам вычислений. М., 1962.
2. Day I. T. Z. angew. Math. Mech., 45, № 5, 1965.
3. Бобков В. В. Весті АН БССР, сер. фіз.-мат. навук, № 4, 1967.
4. Крылов В. И. Приближенное вычисление интегралов. М., 1967.
5. Крылов В. И. ДАН БССР, 4, № 5, 1960.

Белорусский государственный университет
им. В. И. Ленина

Поступило в редакцию
5.11 1970

И. А. ПРУСОВ

ОБ ОДНОМ ПРЕДСТАВЛЕНИИ ОБЩИХ ФОРМУЛ
ТЕОРИИ ИЗГИБА ИЗОТРОПНЫХ ПЛИТ

В работе [7] показано, что упругое состояние плиты определяется с помощью трех произвольных функций: бигармонической, гармонической и функции, удовлетворяющей уравнению типа Гельмгольца. Автор данной статьи, задавшись определенным выражением гармонической функции, дает преобразование общих формул изгиба плит к виду, позволяющему сравнительно просто получить решения основных граничных задач, особенно смешанных.

Основные формулы. Пусть изотропная плита толщиной $2h$ находится в упругом равновесии под действием нормального к срединной плоскости xy давления $q(x, y)$ и некоторой нагрузки на контуре плиты L . Примем, что касательные напряжения $\tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$ при $z = \pm h$, компонента деформации $\epsilon_z \neq 0$, а напряжения σ_z пренебрежимо малы сравнительно с σ_x и σ_y .

Как показано в работе [7], на основании уравнений равновесия следует, что

$$D \Delta \Delta \bar{\omega} = q(x, y), \quad (1)$$

$$\Delta \Omega = k_0^2 \Omega, \quad \Delta \Omega_0 = 0. \quad (2)$$

$$(D - 2\eta \epsilon_0) \Delta \bar{\omega} = 2\eta F, \quad (3)$$

где

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \quad k_0^2 = \frac{5}{2} h^{-2}, \quad \bar{\omega} = \omega + \frac{4}{5} F,$$

$$\epsilon_0 = \frac{\nu h^2}{2(1-\nu)}, \quad D = \frac{4Gh^3}{3(1-\nu)}, \quad G = \frac{E}{2(1+\nu)},$$

$$\omega = \bar{\omega} - \frac{4}{5} \epsilon_1 \Delta \bar{\omega}, \quad \epsilon_1 = D(2\eta)^{-1} - \epsilon_0, \quad \eta = \frac{2}{3} Gh,$$

ω — прогибы точек срединной плоскости плиты, Ω_0 — произвольная гармоническая функция, E и ν — коэффициенты Юнга и Пуассона.

Полагая $q(x, y) = 0$ и

$$\bar{\omega} = \text{Re} \left[\bar{z} \varphi(z) + \chi(z) + \frac{8}{15} \epsilon_1 \Phi(z) \right],$$

$$\Omega_0 = 2\epsilon_1 (15i)^{-1} [\Phi(z) - \overline{\Phi(z)}],$$

указанные в упомянутой выше статье формулы для изгибающих моментов, перерезывающих сил и перемещений можно представить в виде

$$M_x + M_y = -2D(1+\nu) [\Phi(z) + \overline{\Phi(z)}], \quad (4)$$

$$M_y - M_x + 2iH_{xy} = 2D(1 - \nu)[z\Phi'(z) + \Psi(z) - i\bar{\Omega}_2], \quad (5)$$

$$N_x - iN_y = -4D\Phi'(z) + 5i\eta\bar{\Omega}_1, \quad (6)$$

$$u + iv = -h \left[\varphi(z) + z\overline{\Phi(z)} + \overline{\psi(z)} + \frac{5}{3}i\Omega_1 \right], \quad (7)$$

$$\omega = \text{Re} \left[\bar{z}\varphi(z) + \chi(z) - \frac{8}{3}\varepsilon_1\Phi(z) \right], \quad (8)$$

$$\frac{\partial\omega}{\partial x} + i\frac{\partial\omega}{\partial y} = \varphi(z) + z\overline{\Phi(z)} + \overline{\psi(z)} - \frac{8}{3}\varepsilon_1\overline{\Phi'(z)}. \quad (9)$$

Здесь

$$\Omega_1 = \frac{\partial\Omega}{\partial x} + i\frac{\partial\Omega}{\partial y}, \quad \Omega_2 = \frac{\partial\Omega_1}{\partial x} + i\frac{\partial\Omega_1}{\partial y},$$

u, v — компоненты перемещений точек плиты на поверхности $z = h$, $\Phi(z)$, $\Psi(z)$, $\varphi(z)$ — производные по $z = x + iy$ от аналитических функций $\varphi(z)$, $\psi(z)$ и $\chi(z)$ соответственно.

В дальнейшем будем считать, что функция $\Omega(x, y)$ является однозначной в любой многосвязной области S , занимаемой плитой, и стремится к нулю при $|z| \rightarrow \infty$, если область S бесконечна. В этом случае главный вектор и главный момент (относительно начала координат) усилий X_n, Y_n, Z_n на боковой поверхности вырезанного из плиты цилиндра, ограниченного контуром L , определяется по формулам

$$P_* = 2iD[\Phi(z) - \overline{\Phi(z)}]_L; \\ M_x^* + iM_y^* = D[(1 - \nu)(\varphi(z) + z\overline{\Phi(z)} + \overline{\psi(z)}) - \\ - 4\varphi(z) + 2z(\Phi(z) - \overline{\Phi(z)})]_L. \quad (10)$$

Здесь знак L обозначает приращение выражений в квадратных скобках при обходе контура L в направлении, противоположном вращению часовой стрелки, если смотреть со стороны положительной координатной оси, перпендикулярной к плоскости xy .

В случае, когда плита занимает область S , являющуюся внешностью некоторого гладкого замкнутого контура L , условимся считать, что функции $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ имеют следующий вид:

$$\varphi(z) = \Gamma z + [(z - z_0)a_0 + b_0] \ln(z - z_0) + \varphi_*(z), \quad (11)$$

$$\psi(z) = \Gamma' z + (\bar{b}_0 - a_0\bar{z}_0) \ln(z - z_0) - \bar{b}_0\bar{z}_0(z - z_0)^{-1} + \psi_*(z), \quad (12)$$

где

$$\Gamma = -\frac{M_x^\infty + M_y^\infty}{4D(1 + \nu)}, \quad \Gamma' = \frac{M_y^\infty - M_x^\infty + 2iH_{xy}^\infty}{2D(1 - \nu)},$$

$$a_0 = \frac{\rho_0}{8\pi D}, \quad b_0 = a_0 z_0 + \frac{M_x^0 + iM_y^0}{8\pi Di},$$

ρ_0 и $M_x^0 + iM_y^0$ — главный вектор и главный момент (относительно начала координат) внешней нагрузки на контуре L , z_0 — произвольная точка внутри отверстия; $M_x^\infty, M_y^\infty, H_{xy}^\infty$ — изгибающие моменты на бесконечности при $\rho_0 = 0$; $\varphi_*(z)$ и $\psi_*(z)$ — голоморфные функции в области S .

Стягивая контур L в точку z_0 , заключаем, что формулами (11), (12) определяются также особенности функций $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ в точке приложения сосредоточенной силы p_0 и сосредоточенного момента $M_x^0 + iM_y^0$, если положить

$$a_0 = \frac{p_0}{8\pi D}, \quad b_0 = \frac{M_x^0 + iM_y^0}{8\pi Di}. \quad (13)$$

В дальнейшем примем, что главный вектор внешней нагрузки (на контуре плиты и в точках приложения сосредоточенных сил, если таковые имеются) равняется нулю и что при $|z| \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} \varphi(z) &= \Gamma z + M_0 \ln z + O(1/z), \\ \psi(z) &= \Gamma' z + \bar{M}_0 \ln z + O(1/z). \end{aligned} \quad (14)$$

Здесь $M_0 = (M_x' + iM_y')(8\pi Di)^{-1}$, $M_x' + iM_y'$ — главный момент внешней нагрузки относительно начала координат.

Граничные условия. Пусть плита занимает конечную (S^+) или бесконечную (S^-) часть плоскости xy , ограниченную простым гладким замкнутым контуром L ; n и τ — внешняя нормаль (по отношению к области S^+) и касательная к контуру в точке $z = t$, ориентированные соответственно как оси x и y ; α — угол между осью x и нормалью n ; ds — элемент дуги контура L .

Поступая известным образом [5], на основании соотношений (4) — (9) выводим

$$z\varphi(t) - t\overline{\Phi(t)} - \overline{\psi(t)} = f_0 + iC_1' + C_2', \quad (15)$$

$$\varphi(t) + t\overline{\Phi(t)} + \overline{\psi(t)} = g_0(t), \quad (16)$$

$$P_n = 2iD[\Phi(t) - \overline{\Phi(t)}] + 5\eta\Omega + C, \quad (17)$$

$$\omega = -\operatorname{Re} \left[\frac{1}{h} \int (u + iv) d\bar{t} + \frac{8}{3} \varepsilon_1 \Phi(t) + \frac{5}{3} \int \frac{\partial \Omega}{\partial n} ds \right] + C'', \quad (18)$$

где

$$f_0 = -\eta_1 \int (m + ip) dt + ik_0^2 \int \Omega dt + i \int \Omega_2 d\bar{t},$$

$$g_0 = -\frac{1}{h} (u + iv) - \frac{5}{3} i \left(\frac{\partial \Omega}{\partial n} + i \frac{\partial \Omega}{\partial s} \right) e^{i\alpha},$$

$$\eta_1 = \frac{1}{D(1-\nu)}, \quad \varkappa = \frac{3+\nu}{1-\nu}, \quad C_1' = \frac{C}{D(1-\nu)},$$

$$p = H_{n\tau} + P_n, \quad P_n = \int N_n ds,$$

$m = M_n$, M_n , $H_{n\tau}$, N_n — изгибающие моменты и перерезывающие силы, отнесенные к единице длины дуги S ; C , C'' и C_2' — вещественные и комплексная произвольные постоянные.

Основные формулы для полуплоскости. Пусть плита занимает область S^- ($y < 0$), ограниченную контуром L ($y = 0$).

Предположим, что в области S^+ ($y > 0$)

$$\Phi(z) = -\overline{\Phi(z)} - z\overline{\Phi'(z)} - \overline{\Psi(z)}. \quad (19)$$

Тогда соотношения (4) — (9) с учетом (19) можно представить в виде

$$\Phi(z) - \Phi(\bar{z}) + (z - \bar{z}) \Phi'(z) = g, \quad (20)$$

$$\kappa \Phi(z) + \Phi(\bar{z}) - (z - \bar{z}) \overline{\Phi'(z)} = f, \quad (21)$$

$$-P_y = 2iD [\Phi(z) - \overline{\Phi(\bar{z})}] + 5\eta\Omega + C, \quad (22)$$

$$\omega = -\operatorname{Re} \left[\frac{1}{h} \int (u + iv) dx + \frac{8}{3} \varepsilon_1 \Phi(z) - \frac{5}{3} \int \frac{\partial \Omega}{\partial y} dx \right] + C''. \quad (23)$$

Здесь

$$g = -\frac{1}{h} \frac{\partial}{\partial x} (u + iv) - \frac{5}{3} i \frac{\partial \Omega_1}{\partial x},$$

$$f = \eta_1(ip - m) + 2 \frac{\partial}{\partial x} \left(i \frac{\partial \Omega}{\partial x} - \frac{\partial \Omega}{\partial y} \right) + iC',$$

$$p = H_{xy} + P_y, \quad P_y = \int N_y dx. \quad (24)$$

В точках $z = z_0$ и $z = \bar{z}_0$, соответствующих точке z_0 приложения сосредоточенной нагрузки, функция $\Phi(z)$, как нетрудно показать на основании соотношений (11), (12) и (19), имеет особенности

$$\Phi(z) = A(z) + O(1) \text{ при } z \rightarrow z_0,$$

$$\Phi(z) = B(z) + O(1) \text{ при } z \rightarrow \bar{z}_0,$$

где

$$A(z) = a \ln(z - z_0) + b_0(z - z_0)^{-1}, \quad (25)$$

$$B(z) = -a_0 \ln(z - \bar{z}_0) + \frac{a_0(z_0 - \bar{z}_0) - b_0}{z - \bar{z}_0} - \frac{\bar{b}_0(z_0 - \bar{z}_0)}{(z - \bar{z}_0)^2}, \quad (26)$$

a_0 и b_0 — коэффициенты, определенные формулами (13).

Изгибающие моменты в области, занимаемой плитой, по значениям функции $\Phi(z)$ в S^+ и S^- найдем по формулам

$$M_x + M_y = -2D(1 + \nu)[\Phi(z) + \overline{\Phi(\bar{z})}],$$

$$M_x - \nu M_y - i(1 + \nu)H_{xy} = -D(1 - \nu^2)[\Phi(z) -$$

$$- \Phi(\bar{z}) + (z - \bar{z}) \overline{\Phi'(z)} + i\Omega_2]. \quad (27)$$

Основные формулы для плиты с прямолинейными разрезами. Пусть $L = \sum L_k$ — совокупность n отрезков $L_k = a_k b_k$ на оси $y = 0$, вдоль которых плита разрезана. В этом случае, вводя замену

$$Q(z) = -\overline{\Phi(z)} - z\overline{\Phi'(z)} - \overline{\Psi(z)}, \quad (28)$$

получим следующие соотношения:

$$\Phi(z) - Q(\bar{z}) + (z - \bar{z}) \overline{\Phi'(z)} = g, \quad (29)$$

$$\kappa \Phi(z) + Q(\bar{z}) - (z - \bar{z}) \overline{\Phi'(z)} = f, \quad (30)$$

$$-P_y = 2iD [\Phi(z) - \overline{\Phi(\bar{z})}] + 5\eta\Omega + C, \quad (31)$$

$$\omega = -\operatorname{Re} \left[\frac{1}{h} \int (u + iv) dx + \frac{8}{3} \varepsilon_1 \Phi(z) - \frac{5}{3} \int \frac{\partial \Omega}{\partial y} dx \right] + C''. \quad (32)$$

Здесь f и g — функции, определенные формулами (24).

При наличии сосредоточенной нагрузки в точке $z = z_0$ функции $\Phi(z)$ и $Q(z)$ в точках z_0 и \bar{z}_0 имеют особенности вида $A(z)$ и $B(z)$ согласно с формулами (25) и (26). При больших $|z|$ в соответствии с формулами (14) и (28) имеем

$$\begin{aligned}\Phi(z) &= \Gamma + M_0 z^{-1} + O(1/z^2), \\ Q(z) &= -\Gamma - \bar{\Gamma}' - M_0 z^{-1} + O(1/z^2).\end{aligned}\quad (33)$$

Изгибающие моменты в произвольной точке области плиты получим по формулам (27), предварительно заменив во второй из них слагаемое $\Phi(\bar{z})$ на $Q(z)$.

Основные формулы для области, ограниченной окружностью. Предположим, что плита занимает область $S^- (|z| > R)$ или $S^+ \times \times (|z| < R)$, ограниченную окружностью L . Распространим определение функции $\Phi(z)$ на область, не занимаемую плитой, полагая

$$\Phi(z) = -\bar{\Phi}\left(\frac{R^2}{z}\right) + \frac{R^2}{z} \bar{\Phi}'\left(\frac{R^2}{z}\right) + \frac{R^2}{z^2} \bar{\Psi}\left(\frac{R^2}{z}\right) \quad (z = re^{i\theta}). \quad (34)$$

В этом случае для нахождения изгибающих моментов в полярных координатах получим формулы

$$M_r + M_\theta = -2D(1 + \nu)[\Phi(z) + \bar{\Phi}(\bar{z})], \quad (35)$$

$$\begin{aligned}M_\theta - \nu M_r - i(1 + \nu)H_{r,\theta} &= -D(1 - \nu^2) \times \\ &\times \left[\Phi(z) - \frac{R^2}{r^2} \Phi\left(\frac{R^2}{z}\right) + \left(1 - \frac{R^2}{r^2}\right) (\bar{\Phi}(\bar{z}) - \bar{z} \bar{\Phi}'(\bar{z})) + \Omega_3 \right],\end{aligned}\quad (36)$$

где

$$\Omega_3 = \frac{2}{r} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial \Omega}{\partial r} - \frac{\Omega}{r} \right) + i \left(\frac{1}{r} \frac{\partial^2 \Omega}{\partial \theta^2} + \frac{\partial \Omega}{\partial r} \right) \right] - ik_0^2 \Omega.$$

Если в точке $z = z_0$ области, занимаемой плитой, имеется сосредоточенная нагрузка, то функция $\Phi(z)$ в точках z_0 и $z = \alpha = R^2/\bar{z}_0$ имеет особенности

$$\begin{aligned}A(z) &= a_0 \ln(z - z_0) + b_0 (z - z_0)^{-1}, \\ B(z) &= -a_0 \ln(z - \alpha) + D_1 (z - \alpha)^{-1} + D_2 (z - \alpha)^{-2},\end{aligned}\quad (37)$$

где

$$D_1 = a_0 (z_0 - \alpha) - b_0, \quad D_2 = \alpha^2 R^{-2} (z_0 - \alpha) \bar{b}_0, \quad (38)$$

a_0 и b_0 — параметры, определенные формулами (13).

В том случае, когда плита занимает область S^- , функция $\Phi(z)$, как следует из формул (14) и (34), имеет также особенности в нуле и на бесконечности:

$$\Phi(z) = \Gamma + M_0 z^{-1} + O(1/z^2) \quad \text{при } |z| \rightarrow \infty, \quad (38)$$

$$\Phi(z) = \bar{\Gamma}' R^2 z^{-2} + M_0 z^{-1} + O(1) \quad \text{при } z \rightarrow 0. \quad (39)$$

Преобразуя формулы (15) — (18) с учетом (34), для точек z на некоторой окружности $|z| = r$ в области, занимаемой плитой, получим

$$\Phi(z) - \frac{R^2}{r^2} \Phi\left(\frac{R^2}{z}\right) + \left(1 - \frac{R^2}{r^2}\right) [\Phi(z) - \bar{z} \overline{\Phi'(z)}] = g, \quad (40)$$

$$\kappa \Phi(z) + \frac{R^2}{r^2} \Phi\left(\frac{R^2}{z}\right) - \left(1 - \frac{R^2}{r^2}\right) [\Phi(z) - \bar{z} \overline{\Phi'(z)}] = f, \quad (41)$$

$$P_n = 2iD [\Phi(z) - \overline{\Phi(z)}] + 5\eta\Omega + C, \quad (42)$$

$$w = -\operatorname{Re} \left[\frac{1}{h} \int (u + iv) dz + \frac{8}{3} \varepsilon_1 \Phi(z) + \frac{5}{3} \int \frac{\partial \Omega}{\partial r} ds \right] + C''. \quad (43)$$

Здесь

$$f = -\eta_1(m + ip) + \Omega_3 + ik_0^2 \Omega + iC_1', \quad (44)$$

$$g = \frac{-1}{h} \frac{d}{dz} (u + iv) - \frac{5}{3r} \left[\frac{\partial^2 \Omega}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial \Omega}{\partial \theta} + i \left(\frac{\partial \Omega}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \Omega}{\partial \theta^2} \right) \right]. \quad (45)$$

В случае, когда плита занимает область S^+ , будем считать, что напряженное состояние в точке $z = 0$ ограничено. Для этого необходимо и достаточно, чтобы

$$A_0' + \bar{B}_0' = 0, \quad B_1' = 0, \quad (46)$$

где A_0' , B_0' — коэффициенты разложения функции $\Phi(z)$ в нуле и на бесконечности

$$\Phi(z) = A_0' + A_1'z + \dots \quad \text{при } z \rightarrow 0, \quad (47)$$

$$\Phi(z) = B_0' + B_1'z^{-1} + \dots \quad \text{при } |z| \rightarrow \infty. \quad (48)$$

Бесконечная плита с разрезом на дуге окружности. Пусть в плите на окружности $|z| = R$ имеется n дуговых разрезов $L_k = a_k b_k$, $L = \sum L_k$ обозначает совокупность дуг L_k .

Вводя замену

$$Q(z) = -\overline{\Phi\left(\frac{R^2}{z}\right)} + \frac{R^2}{z} \overline{\Phi'\left(\frac{R^2}{z}\right)} + \frac{R^2}{z^2} \overline{\Psi\left(\frac{R^2}{z}\right)},$$

получим основные формулы в виде (35) — (48) с тем, однако, различием, что в формулах (36), (40), (41) функция $\Phi(R^2/\bar{z})$ заменяется на $Q(R^2/\bar{z})$, а в (39) и (48) символ функции Φ заменяется на Q . При наличии в точке $z = z_0$ сосредоточенной нагрузки функции $\Phi(z)$ и $Q(z)$ имеют соответственно особенности $A(z)$ и $B(z)$, представленные формулами (37).

Пользуясь указанными выше общими формулами, можно получить решения основных граничных задач для рассматриваемых областей методом линейного сопряжения [6].

Пример. Пусть плита, занимающая область $S^-(y < 0)$, на контуре L нагружена следующим образом: $M_n = m = \text{const}$ на L' ($-a \leq x \leq a$), $M_n = 0$ на $L'' = L - L'$, $H_{xy} = N_y = 0$ на L .

Тогда на основании соотношений (21) и (22) имеем краевое условие на L :

$$\kappa \Phi^-(t) + \Phi^+(t) = m_0 + 2 \frac{\partial}{\partial x} \left(i \frac{\partial \Omega}{\partial x} - \frac{\partial \Omega}{\partial y} \right),$$

$$2iD [\Phi^-(t) - \Phi^+(t)] + 5\eta\Omega = 0, \quad (49)$$

где $m_0 = -m[D(1 - \nu)]^{-1}$ на L' и $m_0 = 0$ на L'' , $\Phi^-(t)$ и $\Phi^+(t)$ — предельные значения на L функции $\Phi(z)$ со стороны областей S^- и S^+ ($y > 0$).

Решение краевой задачи (49) будем искать в виде

$$\Phi(z) = \int_0^{\infty} A(\alpha) e^{-i\alpha z} d\alpha (S^-), \quad \Phi(z) = \int_0^{\infty} B(\alpha) e^{i\alpha z} d\alpha (S^+),$$

$$\Omega = (2i)^{-1} \int_0^{\infty} C(\alpha) e^{\beta y} (e^{i\alpha x} - e^{-i\alpha x}) d\alpha,$$

где $A(\alpha)$, $B(\alpha)$, $C(\alpha)$ — произвольные вещественные функции параметра α ,
 $\beta = \sqrt{\alpha^2 + k_0^2}$.

Учитывая, что

$$m_0 = 2 \int_0^{\infty} F(\alpha) \cos \alpha x d\alpha, \quad F(\alpha) = m_0 (\alpha\pi)^{-1} \sin \alpha a,$$

условию (49) удовлетворим, полагая

$$A(\alpha) = F(\alpha)\lambda^{-1}, \quad C(\alpha) = -D_0 F(\alpha)\lambda^{-1},$$

$$B(\alpha) = F(\alpha)[1 + \alpha(\beta + \alpha)D_0\lambda^{-1}],$$

$$D_0 = 4D(5\eta)^{-1}, \quad \lambda = \kappa - \alpha(\beta - \alpha)D_0.$$

Значения изгибающих моментов M_x на контуре L найдем по формуле

$$M_x + M_y = -4D(1 + \nu) \int_0^{\infty} A(\alpha) \cos \alpha x d\alpha,$$

принимая во внимание, что $M_y = m$ на L' и $M_y = 0$ на L'' .

Аппроксимируем функцию $1/\lambda$ выражением

$$\frac{1}{\lambda} \approx \frac{1}{\kappa(1-s)^2} [1 + 2s\omega - 2s + s^2(1 + a_0\tau)e^{-k\tau}],$$

где

$$s = \frac{2}{3 + \nu}, \quad \omega = \frac{\tau}{\tau + \sqrt{\tau^2 + 1}}, \quad \tau = \frac{a}{k_0},$$

$$k = 2(2 - s + \sqrt{5 + s - s^2}), \quad a_0 = k + 2s - 4.$$

Тогда найдем, что

$$M_x = (M - m)\varepsilon + B \left[\operatorname{arctg} \frac{(a+x)k_0}{k} + \operatorname{arctg} \frac{(a-x)k_0}{k} + \right. \\ \left. + a_0 \left(\frac{a+x}{(a+x)^2 k_0^2 + k^2} + \frac{a-x}{(a-x)^2 k_0^2 + k^2} \right) k_0 \right].$$

Здесь

$$M = \frac{2m(1+\nu)}{3+\nu} \cdot \frac{1-2s}{(1-s)^2}, \quad B = \frac{2m(1+\nu)}{\pi(3+\nu)} \left(\frac{s}{1-s} \right)^2,$$

ε — кусочно-постоянная величина, равная единице на L' и нулю на L'' .

Аналогичная формула, полученная методом классической теории, основанной на гипотезах Кирхгофа, имеет вид $M_x = (M_0 - m)\epsilon$, где $M_0 = 2m \times \times (1 + \nu)(3 + \nu)^{-1}$. Наибольшее расхождение между значениями для M_x по этим формулам (последнюю из которых следует считать приближенной) имеет место вблизи концов отрезка $|x| \leq a$.

Литература

1. Аксентян О. К., Ворович И. И. ПММ, 27, 6, 1963.
2. Айола Л. Я. Труды IV Всесоюзной конференции по теории оболочек и пластин. Ереван, 1964.
3. Власов Б. Ф. Известия АН СССР, ОТН, 12, 1957.
4. Гольденвейзер А. Л. Известия АН СССР, ОТН, 4, 1958.
5. Лехницкий С. Г. ПММ, 2, 2, 1938.
6. Мухелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М., 1954.
7. Прусов И. А. В сб. «Концентрация напряжений». Киев, в. 2, 1968.
8. Савин Г. Н. Концентрация напряжений около отверстий. М.—Л., 1951.
9. Савин Г. Н., Прусов И. А. Прикладная механика, 6, 1969.
10. Reissner E. Appl. Mech., 12, 1, 1945.
11. Шереметьев М. П., Пелех Б. Л. Инж. журнал, 4, 3, 1964.

Белорусский государственный университет
им. В. И. Ленина

Поступило в редакцию
5.11 1970

М. И. УРБАНОВИЧ

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ ТЕОРИИ МАТРИЦ КОШИ
 ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ ОБЫКНОВЕННЫХ
 ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

В данной заметке продолжают исследования автора [1], [2] по матрицам Коши.

Матрицей Коши матричного уравнения

$$\frac{d^m Y}{dt^m} + \sum_{i=0}^{m-1} \left[A_{m-i}(t) \frac{d^i Y}{dt^i} + \frac{d^i Y}{dt^i} B_{m-i}(t) \right] = O,$$

где $Y = Y(t)$, $A_j(t)$, $B_j(t)$ ($j=0, \dots, m$; $m \geq 1$) — вещественные $n \times n$ -матрицы ($n > 1$), O — нулевая $n \times n$ -матрица, $A_j(t), B_j(t)$ непрерывны на $[\alpha, \beta]$ ($\alpha < \beta$); будем называть $n \times n$ -матрицу $K(t, s)$, являющуюся решением по аргументу t (при любом фиксированном $s \in [\alpha, \beta]$) этого уравнения и удовлетворяющую условиям

$$\left. \frac{\partial^i K(t, s)}{\partial t^i} \right|_{t=s} = O \quad (i=0, \dots, m-2), \quad \left. \frac{\partial^{m-1} K(t, s)}{\partial t^{m-1}} \right|_{t=s} = E,$$

где E — единичная $n \times n$ -матрица.

Везде в дальнейшем все матрицы, определяющие рассматриваемые системы (матричные уравнения), предполагаются действительными и непрерывными на $[\alpha, \beta]$.

1°. Здесь мы приведем необходимые условия неотрицательности матрицы Коши $K(t, s)$ матричного линейного дифференциального уравнения первого порядка

$$Y' + A(t)Y + YB(t) = O \quad (1)$$

при $\alpha \leq s \leq t \leq \beta$ в одном частном случае.

Теорема 1. Если $A(t) = \|a_{ik}(t)\|_1^n$, $B(t) = \|b_{ik}(t)\|_1^n$ — верхние треугольные матрицы*, то для неотрицательности матрицы Коши $K(t, s)$ уравнения (1) в треугольнике $\alpha \leq s \leq t \leq \beta$ необходимо, чтобы на $[\alpha, \beta]$ выполнялись неравенства

$$a_{ik}(t) + b_{ik}(t) \leq 0 \quad (1 \leq i < k \leq n). \quad (2)$$

Доказательство. Прежде всего, как следует из результатов работ [1], [2], матрица $K(t, s)$ является верхней треугольной матрицей.

Пусть $K(t, s) = \|k_{ij}(t, s)\|_1^n \geq O$ при $\alpha \leq s \leq t \leq \beta$.

Имеем

$$k_{ii}(t, s) = \exp \left\{ - \int_s^t [a_{ii}(\tau) + b_{ii}(\tau)] d\tau \right\} \quad (i=1, \dots, n),$$

$$k'_{ii+1} + (a_{ii} + b_{i-1, i+1})k_{ii+1} = -(a_{ii+1}k_{i+1, i+1} + b_{ii+1}k_{ii}),$$

* Аналогичная теорема справедлива и в случае нижних треугольных матриц $A(t)$, $B(t)$.

откуда

$$k_{ii+1}(t, s) = - \int_s^t \exp \left\{ - \int_{\tau}^t [a_{ii}(t_1) + b_{i+1, i+1}(t_1)] dt_1 \right\} \times \\ \times [a_{ii+1}(\tau) k_{i+1, i+1}(\tau, s) + b_{ii+1}(\tau) k_{ii}(\tau, s)] d\tau.$$

Допуская (от противного), что при некотором $t_0 \in [\alpha, \beta]$ $a_{ii+1}(t_0) + b_{ii+1}(t_0) > 0$, мы получили бы (с учетом соотношения $k_{jj}(t, s) \rightarrow 1$ при $t-s \rightarrow 0$), что $k_{ii+1}(t, t_0) < 0$ при достаточно малом $t-t_0 > 0$ (если $t_0 \neq \beta$) или $k_{ii+1}(t_0, s) < 0$ при достаточно малом $t_0-s > 0$ (если $t_0 = \beta$) вопреки условию.

Далее

$k'_{ii+2} + (a_{ii} + b_{i+2, i+2}) k_{ii+2} = - [(a_{ii+1} k_{i+1, i+2} + b_{i+1, i+2} k_{ii+1}) + (a_{ii+2} k_{i+2, i+2} + b_{ii+2} k_{ii})]$, откуда аналогично предыдущему, учитывая, что $a_{ii+1}(t) \times k_{i+1, i+2}(t, s) + b_{i+1, i+2}(t) k_{ii+1}(t, s) \rightarrow 0$ при $t-s \rightarrow 0$, получаем

$$a_{ii+2}(t) + b_{ii+2}(t) \leq 0 \quad (\alpha \leq t \leq \beta).$$

Точно так же убеждаемся, что

$$a_{ik}(t) + b_{ik}(t) \leq 0 \quad (k = i+3, \dots, n; \quad \alpha \leq t \leq \beta).$$

Так как последние неравенства выполняются при любом фиксированном $i = 1, 2, \dots, n-1$, то теорема доказана.

Замечание. Если $A(t), B(t)$ — правильные верхние треугольные матрицы ([3], стр. 180), то условия (2) являются также и достаточными для справедливости неравенства $K(t, s) \geq 0$ при $\alpha \leq s \leq t \leq \beta$, так как в этом случае, как нетрудно проверить,

$$K(t, s) = \exp \left\{ - \int_s^t [A(\tau) + B(\tau)] d\tau \right\}.$$

2°. Приводимая ниже теорема устанавливает связь между матрицей Коши матричного уравнения m -го порядка ($m > 1$)

$$Y^{(m)} + A_1(t) Y^{(m-1)} + \dots + A_m(t) Y = 0, \quad (3)$$

где $Y = Y(t)$, $A_i(t)$ ($i = 1, \dots, m$) — $n \times n$ -матрицы, O — нулевая $n \times n$ -матрица, и матрицей Коши соответствующего матричного дифференциального уравнения первого порядка

$$X' + C(t) X = \Theta, \quad (4)$$

где

$$C(t) = \begin{pmatrix} O & -E & O & \dots & O \\ O & O & -E & \dots & O \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ O & O & O & \dots & -E \\ A_m(t) & A_{m-1}(t) & A_{m-2}(t) & \dots & A_1(t) \end{pmatrix},$$

E — единичная $n \times n$ -матрица, Θ — нулевая $nm \times nm$ -матрица.

Теорема 2. Пусть $K(t, s)$ — матрица Коши уравнения (3) и $K_C(t, s) = \| \| K_{ij}(t, s) \| \|_1^m$, где все $K_{ij}(t, s)$ — $n \times n$ -матрицы, — матрица Коши уравнения (4).

Тогда

$$K_{1m}(t, s) = K(t, s), \quad K_{im}(t, s) = \frac{\partial^{i-1} K(t, s)}{\partial t^{i-1}} \quad (i=2, \dots, m),$$

$$K_{ij}(t, s) = \frac{\partial^{i-1} K_{1j}(t, s)}{\partial t^{i-1}} \quad (i=1, \dots, m; \quad j=1, \dots, m-1), \quad (5)$$

причем

$$K_{1r}(t, s) = \frac{(t-s)^{r-1}}{(r-1)!} E - \int_s^t K(t, \tau) \left\{ A_m(\tau) \frac{(\tau-s)^{r-1}}{(r-1)!} + \right.$$

$$\left. + A_{m-1}(\tau) \frac{(\tau-s)^{r-2}}{(r-2)!} + \dots + A_{m+2-r}(\tau) \cdot (\tau-s) + A_{m+1-r}(\tau) \right\} d\tau, \quad (6)$$

$$(r=1, 2, \dots, m-1).$$

В справедливости этой теоремы можно убедиться непосредственной проверкой, используя свойства матрицы Коши, указанные в ее определении.

3°. Найдем выражение матрицы Коши $K(t, s)$ матричного уравнения

$$Y'' + A(t)Y' + B(t)Y = 0 \quad (7)$$

через фундаментальную систему матриц-решений $Y_1(t)$, $Y_2(t)$ этого уравнения, т. е. решений, для которых

$$\Delta \equiv \det \begin{vmatrix} Y_1(t) & Y_2(t) \\ Y_1'(t) & Y_2'(t) \end{vmatrix} \neq 0 \text{ на } [\alpha, \beta].$$

Лемма. Пусть A, B, C, D — $n \times n$ -матрицы, хотя бы одна из которых невырождена и

$$\det \begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} \neq 0.$$

Тогда блоки обратной матрицы

$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix}^{-1} = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & D_1 \end{vmatrix}$$

в случаях 1) $\det A \neq 0$, 2) $\det D \neq 0$, 3) $\det B \neq 0$, 4) $\det C \neq 0$ соответственно равны:

$$1) \quad A_1 = A^{-1} + A^{-1}B(D - CA^{-1}B)^{-1}CA^{-1},$$

$$B_1 = -A^{-1}B(D - CA^{-1}B)^{-1},$$

$$C_1 = -(D - CA^{-1}B)^{-1}CA^{-1},$$

$$D_1 = (D - CA^{-1}B)^{-1}; \quad (8_1)$$

$$2) \quad A_1 = (A - BD^{-1}C)^{-1}, \quad B_1 = -(A - BD^{-1}C)^{-1}BD^{-1},$$

$$C_1 = -D^{-1}C(A - BD^{-1}C)^{-1},$$

$$D_1 = D^{-1}C(A - BD^{-1}C)^{-1}BD^{-1} + D^{-1}; \quad (8_2)$$

$$3) \quad A_1 = -(C - DB^{-1}A)^{-1}DB^{-1},$$

$$B_1 = (C - DB^{-1}A)^{-1}, \quad (8_3)$$

$$C_1 = B^{-1} + B^{-1}A(C - DB^{-1}A)^{-1}DB^{-1},$$

$$D_1 = -B^{-1}A(C - DB^{-1}A)^{-1};$$

$$4) A_1 = -C^{-1}D(B - AC^{-1}D)^{-1},$$

$$B_1 = C^{-1} + C^{-1}D(B - AC^{-1}D)^{-1}AC^{-1}, \quad (8_4)$$

$$C_1 = (B - AC^{-1}D)^{-1},$$

$$D_1 = -(B - AC^{-1}D)^{-1}AC^{-1}.$$

Доказательство леммы следует из соотношений

$$\begin{vmatrix} A & B \\ O & D - CA^{-1}B \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} E & O \\ -CA^{-1} & E \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} A - BD^{-1}C & O \\ C & D \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} E & -BD^{-1} \\ O & E \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} B & O \\ D & C - DB^{-1}A \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} O & E \\ E & -B^{-1}A \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} B - AC^{-1}D & A \\ O & C \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} -C^{-1}D & E \\ E & O \end{vmatrix}$$

с учетом равенств

$$\begin{vmatrix} M & N \\ O & P \end{vmatrix}^{-1} = \begin{vmatrix} M^{-1} & -M^{-1}NP^{-1} \\ O & P^{-1} \end{vmatrix} \text{ и } \begin{vmatrix} M & O \\ N & P \end{vmatrix}^{-1} = \begin{vmatrix} M^{-1} & O \\ -P^{-1}NM^{-1} & P^{-1} \end{vmatrix}$$

при $\det(MP) \neq 0$,

$$\begin{vmatrix} O & E \\ E & P \end{vmatrix}^{-1} = \begin{vmatrix} -P & E \\ E & O \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} P & E \\ E & O \end{vmatrix}^{-1} = \begin{vmatrix} O & E \\ E & -P \end{vmatrix}.$$

Замечание. Утверждения леммы в случаях 1), 2) остаются в силе и тогда, когда A и D — квадратные матрицы различных порядков m и n , а B и C — прямоугольные матрицы соответственно размерностей $n \times m$ и $m \times n$.

Этим можно воспользоваться для обращения квадратной матрицы блочной структуры с 9 блоками (а следовательно, и с 16 блоками и т. д.).

Теорема 3. Пусть $Y_1(t)$, $Y_2(t)$ — фундаментальная система матриц-решений уравнения (7) и

$$\min_{\alpha < t < \beta} |\det Y_1(t)| + \min_{\alpha < t < \beta} |\det Y_1'(t)| \neq 0.$$

Тогда

$$K(t, s) = [Y_2(t) - Y_1(t)Y_1^{-1}(s)Y_2(s)] [Y_2'(s) - Y_1'(s)Y_1^{-1}(s)Y_2(s)]^{-1} \quad (9)$$

при $\det Y_1(t) \neq 0$ ($\alpha \leq t \leq \beta$) и

$$K(t, s) = Y_1(t)Y_1'(s) + [Y_1(t)Y_1'(s)Y_2(s) - Y_2(t)] \times \\ \times \{Y_2(s) - Y_1(s)[Y_1'(s)]^{-1}Y_2'(s)\}^{-1}Y_1(s)[Y_1'(s)]^{-1} \quad (10)$$

при $\det Y_1'(t) \neq 0$ ($\alpha \leq t \leq \beta$).

Доказательство. Приведем уравнение (7) к виду (4), где

$$C(t) = \begin{vmatrix} O & -E \\ B(t) & A(t) \end{vmatrix},$$

получим, что

$$X(t) = \begin{vmatrix} Y_1(t) & Y_2(t) \\ Y_1'(t) & Y_2'(t) \end{vmatrix}$$

— невырожденное решение уравнения (4), и, следовательно ([1], стр. 1043), матрица Коши этого уравнения имеет вид

$$K_C(t, s) = X(t) X^{-1}(s).$$

Теперь для получения (9) и (10) остается воспользоваться формулами типа (8₁), (8₄) и теоремой 2 ($K = K_{1m} = K_{12}$).

Замечание 1. При $\min_{\alpha < t < \beta} |\det Y_2(t)| + \min_{\alpha < t < \beta} |\det Y_2'(t)| \neq 0$ выражение для $K(t, s)$ получается из (9) или (и) (10) заменой Y_1 на Y_2 , а Y_2 на Y_1 .

Замечание 2. Аналогичные формулы, которые мы здесь не приводим из-за их громоздкости, могут быть получены и в случае уравнения (3) при $m=3$.

Пример 1. Для уравнения

$$Y'' - 2AtY' + (A^2t^2 - A)Y = 0,$$

где $A = \text{Const}$, $\det A \neq 0$, в соответствии с формулой (9) имеем

$$K(t, s) = (t - s) \exp \left\{ \frac{1}{2} A (t^2 - s^2) \right\}$$

(здесь $Y_1(t) = \exp \left\{ \frac{1}{2} At^2 \right\}$, $Y_2(t) = At \exp \left\{ \frac{1}{2} At^2 \right\}$ и $\Delta = \det [A \exp (At^2)]$).

Впрочем, полученный результат верен и без предположения $\det A \neq 0$, в чем легко убедиться непосредственной проверкой.

Пример 2. Матрица Коши уравнения

$$Y'' + \lambda A^2 Y = 0,$$

где $\lambda = \text{const}$, $A = \text{Const} = \|a_{ik}\|_n^2$, $\det A \neq 0$, имеет вид

$$K(t, s) = \begin{cases} (\sqrt{-\lambda})^{-1} A^{-1} \text{sh } \sqrt{-\lambda} A(t-s), & \text{если } \lambda < 0, \\ (\sqrt{\lambda})^{-1} A^{-1} \sin \sqrt{\lambda} A(t-s), & \text{если } \lambda > 0 \end{cases}$$

[при $\lambda < 0$ возьмем $Y_1(t) = \exp(\sqrt{-\lambda} At)$, $Y_2(t) = \exp(-\sqrt{-\lambda} At)$, тогда $\Delta = (-1)^n (2\sqrt{-\lambda})^n \det A$; при $\lambda > 0$ имеем $Y_1(t) = \sin \sqrt{\lambda} At$, $Y_2(t) = \cos \sqrt{\lambda} At$, $\Delta = (-1)^n (\sqrt{\lambda})^n \det A$].

Литература

1. Урбанович М. И. ДУ, 2, 8, 1043, 1966.
2. Урбанович М. И. Сборник материалов V научно-технической конференции Могилевского машиностроительного института, Могилев, 1968, стр. 177.
3. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. М., 1954.

Могилевский педагогический институт

Поступило в редакцию
10.XII 1969

В. Н. ЛАПТИНСКИЙ

О ДВУМЕРНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-МАТРИЧНЫХ УРАВНЕНИЯХ

Будем рассматривать матричные системы второго порядка. К исследованию таких систем сводится ряд задач небесной механики, физики и др. Эти системы, в частности, включают в себя канонические линейные системы. Важные результаты по каноническим системам получены в работах [1—4]. В основном эти результаты относятся к системам с периодическими коэффициентами. Следует отметить работу [5] по исследованию колебательных свойств некоторых матричных дифференциальных систем второго порядка, в том числе и нелинейных.

Ниже исследуются некоторые вопросы теории представлений, связанные с преобразованиями (типа ортогональных в скалярных системах второго порядка) и матричной спецификой этих систем, а также вопросы асимптотического поведения интегральных матриц таких систем. Исследования проведены параллельно для двух классов двумерных матричных систем.

§ 1. Тригонометрические матричные тождества. В работе [6] были введены операторы ψ , φ :

$$\psi A = \exp(-B\lambda) A \exp(B\lambda), \quad \varphi A = \exp(-B\lambda) d(\exp B\lambda)/dt,$$

а также оператор $\bar{\psi}$:

$$\bar{\psi} A = \exp(B\lambda) A \exp(-B\lambda).$$

Введем еще оператор $\bar{\varphi}$:

$$\bar{\varphi} A = \exp(B\lambda) d \exp(-B\lambda)/dt.$$

Эти операторы при комплексно-мнимом параметре имеют вид

$$\psi A = \operatorname{Re}_\lambda \psi A + i \operatorname{Im}_\lambda \psi A, \quad \bar{\psi} A = \operatorname{Re}_\lambda \psi A - i \operatorname{Im}_\lambda \psi A,$$

$$\varphi A = \operatorname{Re}_\lambda \varphi A + i \operatorname{Im}_\lambda \varphi A, \quad \bar{\varphi} A = \operatorname{Re}_\lambda \varphi A - i \operatorname{Im}_\lambda \varphi A,$$

причем

$$\operatorname{Re}_\lambda \psi A = \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \frac{\lambda^{2s}}{(2s)!} K^{(2s)}, \quad \operatorname{Im}_\lambda \psi A = \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \frac{\lambda^{2s+1}}{(2s+1)!} K^{(2s+1)}, \quad (1.1)$$

$$\operatorname{Re}_\lambda \varphi A = - \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \frac{\lambda^{2s+2}}{(2s+2)!} K^{(2s+1)}, \quad \operatorname{Im}_\lambda \varphi A = \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \frac{\lambda^{2s+1}}{(2s+1)!} K^{(2s)}, \quad (1.2)$$

где

$$\bar{K}^{(0)} = A, \quad K^{(1)} = AB - BA, \quad \dots, \quad K^{(m)} = K^{(m-1)}B - BK^{(m-1)}, \quad \dots,$$

причем в формуле (1.1) $A(t)$, $B(t)$ — произвольные параметрические $n \times n$ -матрицы, а в (1.2) $A(t) = dB/dt$.

Лемма 1.1. *Справедливы тождества*

$$\operatorname{Im}_\lambda \varphi A = \int_0^\lambda \operatorname{Re}_\mu \psi A d\mu, \quad \operatorname{Re}_\lambda \varphi A = - \int_0^\lambda \operatorname{Im}_\mu \psi A d\mu, \quad (1.3)$$

$$H \operatorname{Re}_\lambda \varphi A = - \operatorname{Im}_\lambda H \psi A, \quad H \operatorname{Im}_\lambda \varphi A = \operatorname{Re}_\lambda H \psi A, \quad (1.4)$$

где, как и прежде, H есть оператор дифференцирования по параметру λ введенных операторов.

Тождества (1.3), (1.4) доказываются, опираясь на разложения (1.1), (1.2).

Теорема 1.1. Пусть $B = \int_0^t A d\tau$. Тогда

$$\lambda \operatorname{Re}_\lambda \varphi A - \operatorname{Im}_\lambda \varphi A = - \int_0^\lambda \mu \operatorname{Im}_\mu H \psi A d\mu = Q_R, \quad (1.5)$$

$$\lambda \operatorname{Im}_\lambda \varphi A + \operatorname{Re}_\lambda \varphi A = \int_0^\lambda \mu \operatorname{Re}_\mu H \psi A d\mu = Q_I. \quad (1.6)$$

Эти тождества доказываются интегрированием по частям тождеств (1.3) с учетом (1.4).

Матрицам Q_R , Q_I можно придать следующий вид:

$$Q_R = \sum_{s=1}^{\infty} (-1)^s \frac{\lambda^{2s+1}}{(2s+1)!} (2s) K^{(2s)}, \quad (1.7)$$

$$Q_I = \sum_{s=1}^{\infty} (-1)^{s-1} \frac{\lambda^{2s}}{(2s)!} (2s-1) K^{(2s-1)}. \quad (1.8)$$

Теорема 1.2. Для матриц Q_R , Q_I справедливы представления

$$Q_R = \lambda^2 \frac{d}{d\lambda} \left(\frac{1}{\lambda} \int_0^\lambda \operatorname{Re}_\mu \psi A d\mu \right), \quad (1.9)$$

$$Q_I = \lambda^2 \frac{d}{d\lambda} \left(\frac{1}{\lambda} \int_0^\lambda \operatorname{Im}_\mu \psi A d\mu \right). \quad (1.10)$$

Эти тождества доказываются с помощью разложений операторов $\operatorname{Re}_\lambda \varphi A$, $\operatorname{Im}_\lambda \varphi A$.

Вообще матрицы Q_R , Q_I имеют и такую структуру:

$$Q_R = \lambda^3 Q_{1R}, \quad Q_I = \lambda^2 Q_{1I}, \quad (1.11)$$

причем разложения по параметру λ матриц Q_{1R} , Q_{1I} начинаются с нулевой степени.

Теорема 1.3. Параметрические функции $\cos B\lambda$, $\sin B\lambda$ удовлетворяют следующим матричным дифференциальным системам второго порядка:

$$\begin{aligned} du/dt &= u \operatorname{Re}_\lambda \varphi A - v \operatorname{Im}_\lambda \varphi A, \\ dv/dt &= u \operatorname{Im}_\lambda \varphi A + v \operatorname{Re}_\lambda \varphi A. \end{aligned} \quad (1.12)$$

$$\begin{aligned} du/dt &= -(\operatorname{Re}_\lambda \varphi A) u - (\operatorname{Im}_\lambda \varphi A) v, \\ dv/dt &= (\operatorname{Im}_\lambda \varphi A) u - (\operatorname{Re}_\lambda \varphi A) v. \end{aligned} \quad (1.13)$$

Используя результаты § 1 работы [6] (тождество 1.6), получим требуемое Следствие. Пусть $K^{(1)} \equiv 0$. Тогда при $\lambda = 1$ имеем

$$d(\cos B)/dt = -(\sin B) A, \quad d(\sin B)/dt = (\cos B) A.$$

§ 2. Гиперболические матричные тождества. Введем теперь операторы $\psi_k A$, $\varphi_k A$, $k = 1, 2$, такие, что

$$\begin{aligned} \psi A &= \psi_1 A - i\psi_2 A, & \bar{\psi} A &= \psi_1 A + i\psi_2 A, \\ \varphi A &= \varphi_2 A - i\varphi_1 A, & \bar{\varphi} A &= \varphi_2 A + i\varphi_1 A, \end{aligned} \quad (2.1)$$

причем

$$\psi_1 A = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{\lambda^{2s}}{(2s)!} K^{(2s)}, \quad \psi_2 A = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{\lambda^{2s+1}}{(2s+1)!} K^{(2s+1)}, \quad (2.2)$$

$$\varphi_1 A = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{\lambda^{2s+1}}{(2s+1)!} K^{(2s)}, \quad \varphi_2 A = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{\lambda^{2s+2}}{(2s+2)!} K^{(2s+1)}. \quad (2.3)$$

Лемма 2.1. *Справедливы тождества*

$$\varphi_1 A = \int_0^\lambda \psi_1 A d\mu, \quad \varphi_2 A = \int_0^\lambda \psi_2 A d\mu, \quad (2.4)$$

$$H\psi_1 A = \psi_2 H\psi A, \quad H\psi_2 A = \psi_1 H\psi A, \quad (2.5)$$

где

$$\psi_2 H\psi A = \psi_2 K^{(1)}, \quad \psi_1 H\psi A = \psi_1 K^{(1)}.$$

Эта лемма доказывается так же, как и лемма 1.1 предыдущего параграфа.

Теорема 2.1. Пусть $B = \int_0^t A dt$. Тогда

$$\lambda\psi_1 A - \varphi_1 A = \int_0^\lambda \mu\psi_2 H\psi A d\mu = \bar{Q}_R, \quad (2.6)$$

$$\lambda\psi_2 A - \varphi_2 A = \int_0^\lambda \mu\psi_1 H\psi A d\mu = \bar{Q}_I. \quad (2.7)$$

Матрицы \bar{Q}_R , \bar{Q}_I имеют разложения

$$\bar{Q}_R = \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\lambda^{2s+1}}{(2s+1)!} (2s) K^{(2s)}, \quad (2.8)$$

$$\bar{Q}_I = \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\lambda^{2s}}{(2s)!} (2s-1) K^{(2s-1)}. \quad (2.9)$$

Теорема 2.2. Для матриц \bar{Q}_R , \bar{Q}_I справедливы представления

$$\bar{Q}_R = \lambda^2 \frac{d}{d\lambda} \left(\frac{1}{\lambda} \int_0^\lambda \psi_1 A d\mu \right), \quad (2.10)$$

$$\bar{Q}_I = \lambda^2 \frac{d}{d\lambda} \left(\frac{1}{\lambda} \int_0^\lambda \psi_2 A d\mu \right). \quad (2.11)$$

Эти теоремы доказываются соответственно по тем же схемам, что и теоремы (1.1), (1.2).

Отметим, что

$$\bar{Q}_R = \lambda^3 \bar{Q}_{1R}, \quad \bar{Q}_I = \lambda^2 \bar{Q}_{1I}, \quad (2.12)$$

где разложения \bar{Q}_{1R} , \bar{Q}_{1I} по λ начинаются с нулевой степени.

Теорема 2.3. Параметрические функции $\text{ch } B\lambda$, $\text{sh } B\lambda$ удовлетворяют следующим матричным дифференциальным системам второго порядка:

$$du/dt = u\varphi_2 A + v\varphi_1 A, \quad (2.13)$$

$$dv/dt = u\varphi_1 A + v\varphi_2 A,$$

$$du/dt = -(\varphi_2 A)u + (\varphi_1 A)v, \quad (2.14)$$

$$dv/dt = (\varphi_1 A)u - (\varphi_2 A)v.$$

Следствие. Пусть $K^{(1)} \equiv 0$. Тогда при $\lambda = 1$ имеем

$$d \text{ch } B/dt = A \text{sh } B, \quad d \text{sh } B/dt = A \text{ch } B.$$

§ 3. Кососимметрические матричные системы второго порядка. Рассмотрим систему

$$dX/dt = \lambda A(t) Y, \quad (3.1)$$

$$dY/dt = -\lambda A(t) X,$$

где X , Y , A — $n \times n$ -матрицы.

Известно, что если система (3.1) каноническая, то [4] $a_{ik} = a_{ki}$, где a_{ik} — элементы матрицы $A(t)$. Как и прежде, матрицу $A(t)$ предполагаем непрерывной при $0 \leq t \leq b$; λ — действительный малый параметр.

Систему (3.1) преобразуем следующим образом:

$$X = (\cos B\lambda) X_1 + (\sin B\lambda) Y_1, \quad (3.2)$$

$$Y = -(\sin B\lambda) X_1 + (\cos B\lambda) Y_1,$$

где $B = \int_0^t A d\tau$.

Подставляя (3.2) в (3.1), получим на основании результатов § 1

$$dX_1/dt = -Q_I X_1 + Q_R Y_1, \quad (3.3)$$

$$dY_1/dt = -Q_R X_1 - Q_I Y_1.$$

Учитывая структуру Q_R, Q_I , системе (3.3) придадим вид

$$\begin{aligned} dX_1/dt &= -\lambda^2 Q_{1I} X_1 + \lambda^3 Q_{1R} Y_1, \\ dY_1/dt &= -\lambda^3 Q_{1R} X_1 - \lambda^2 Q_{1I} Y_1. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Собственно, доказана

Теорема 3.1. *Решение системы (3.1), нормированное при $t=0$, имеет вид (3.2), причем X_1, Y_1 удовлетворяют (3.3).*

Следствие. Пусть $K^{(1)} \equiv 0$ [2]. Тогда

$$\begin{aligned} X &= (\cos B\lambda) C_1 + (\sin B\lambda) C_2, \\ Y &= -(\sin B\lambda) C_1 + (\cos B\lambda) C_2, \end{aligned}$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные матрицы.

Отметим, что при $K^{(2)} \equiv 0$ система (3.3) изменяет структуру (в ней каждое уравнение решается самостоятельно), но при $K^{(3)} \equiv 0$ это не имеет места.

Вообще матрицы X, Y имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} X &= (\cos B\lambda) C_1 + (\sin B\lambda) C_2 + O(\lambda^2), \\ Y &= -(\sin B\lambda) C_1 + (\cos B\lambda) C_2 + O(\lambda^2). \end{aligned}$$

Систему (3.4) можно привести к виду (3.1), преобразуя ее по формулам

$$X_1 = U_1 X_2, \quad Y_1 = U_1 Y_2,$$

где U_1 есть интегральная матрица уравнения

$$dZ/dt = -Q_I Z.$$

В результате получим систему

$$dX_2/dt = \lambda^3 A_1 Y_2, \quad dY_2/dt = -\lambda^3 A_1 X_2,$$

где $A_1 = U_1^{-1} Q_{1R} U_1$.

Матрицу $U_1(t)$ можем найти с любой степенью точности одним из методов, изложенных в работе [6].

Выясним некоторые вопросы асимптотики решений уравнения (3.1).

Теорема 3.2. Пусть $\int_0^\infty \|A dt\| \leq N_1 < \infty$, $\int_0^\infty \|K^{(1)}\| dt < \infty$. Тогда при больших t и $\lambda = 1$ имеем

$$\begin{aligned} X(t) &\sim \cos B(t) C_1 + \sin B(t) C_2, \\ Y(t) &\sim -\sin B(t) C_1 + \cos B(t) C_2, \end{aligned}$$

где C_1, C_2 — постоянные матрицы, не равные одновременно нулю.

В частности, если $\int_0^\infty \|A\| dt < \infty$, то теорема 3.2 имеет место.

Рассмотрим симметрические матричные системы второго порядка:

$$\begin{aligned} dX/dt &= \lambda A(t) Y, \\ dY/dt &= \lambda A(t) X. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Эту систему преобразуем по формулам

$$\begin{aligned} X &= (\operatorname{ch} B\lambda)X_1 + (\operatorname{sh} B\lambda)Y_1, \\ Y &= (\operatorname{sh} B\lambda)X_1 + (\operatorname{ch} B\lambda)Y_1, \end{aligned} \quad (3.6)$$

где $B = \int_0^t A d\tau$. Тогда получим, опираясь на результаты § 2,

$$\begin{aligned} dX_1/dt &= \bar{Q}_I X_1 + \bar{Q}_R Y_1, \\ dY_1/dt &= \bar{Q}_R X_1 + \bar{Q}_I Y_1. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Учитывая структуру матриц \bar{Q}_R , \bar{Q}_I , системе (3.7) придадим вид

$$\begin{aligned} dX_1/dt &= \lambda^2 \bar{Q}_{1I} X_1 + \lambda^3 \bar{Q}_{1R} Y_1, \\ dY_1/dt &= \lambda^3 \bar{Q}_{1R} X_1 + \lambda^2 \bar{Q}_{1I} Y_1. \end{aligned}$$

Итак, решение системы (3.5), нормированное при $t = 0$, имеет вид (3.6), причем X_1 , Y_1 суть решение системы (3.7).

Далее можно получить результаты, аналогичные соответствующим результатам для кососимметрических систем.

Отметим, что вообще решение системы (3.5) имеет вид

$$\begin{aligned} X &= (\operatorname{ch} B\lambda)C_1 + (\operatorname{sh} B\lambda)C_2 + O(\lambda^2), \\ Y &= (\operatorname{sh} B\lambda)C_1 + (\operatorname{ch} B\lambda)C_2 + O(\lambda^2). \end{aligned}$$

Таким образом, с помощью теории функций от матриц и связанных с ними операторов удалось получить ряд результатов по теории представлений интегральных матриц линейных дифференциальных систем. Можно ожидать, что указанная методика найдет приложение и при решении других задач по дифференциальным системам.

Литература

1. Ляпунов А. М. Общая задача об устойчивости движения. М.—Л., 1935.
2. Еругин Н. П. Линейные системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Минск, 1963.
3. Якубович В. А. ПММ, 23, в. 1, 1959.
4. Крейн М. Г. Сб. «Памяти Андронова А. А.». Изд-во АН СССР, 1955.
5. Garret E. I. Trans. Amer. Math. Soc., 122, № 2, 289, 1956.
6. Лаптинский В. Н. ДУ, 6, № 5, 1970.

Могилевский машиностроительный институт

Поступило в редакцию
26.XII 1969

УДК 539.126.34+530.145

Ф. И. ФЕДОРОВ, В. И. КУВШИНОВ

НЕЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ СКАЛЯРНЫХ МЕЗОНОВ

Уравнения, описывающие взаимодействия любых полей, в принципе должны быть нелинейны. В работе [1] было показано, что нелинейные уравнения для весьма широкого класса полей могут быть представлены в единой общей стандартной форме

$$(\gamma^k \partial_k + \gamma^0) \Psi + \Psi \Lambda \Psi = 0. \quad (1)$$

Здесь $\Psi = (\Psi_\alpha)$ — n -компонентная функция, γ^k, γ^0 — квадратные $n \times n$ -матрицы с постоянными элементами, Λ — «кубическая» $n \times n \times n$ -матрица. В частности, к форме (1) приводятся эйнштейновы уравнения гравитационного поля [1] и гейзенберговы уравнения нелинейной теории поля.

Уравнения, описывающие взаимодействие любых элементарных частиц с электромагнитным полем, также могут быть представлены в форме (1). В пренебрежении взаимодействием, что соответствует отбрасыванию последнего члена в (1), это уравнение, очевидно, должно распадаться на независимые системы уравнений для поля частиц и электромагнитного поля. При учете взаимодействия оба поля должны описываться единой общей волновой функцией.

Существенной чертой развиваемого подхода является то, что все основные свойства как свободных полей, так и их взаимодействий, должны определяться совокупностью постоянных матриц $\gamma^k, \gamma^0, \Lambda$.

Представляет интерес развитие теории взаимодействующих полей на основе общего уравнения (1). Рассмотрению такой теории для случая скалярной электродинамики и посвящена настоящая работа.

Пусть $\psi_1, \bar{\psi}_1 = \psi_1^* \eta_1$ — функции, описывающие скалярное поле в 5-мерном формализме (звездочка означает комплексное сопряжение), η — матрица инвариантной билинейной формы для скалярного поля. Они подчиняются уравнениям первого порядка [2]

$$(\gamma_i^k \partial_k + m) \psi_1 = 0, \quad (\gamma_i^k \partial_k - m) \bar{\psi}_1 = 0. \quad (2)$$

Здесь

$$\gamma_i^k = e^{ok} + e^{k0}, \quad k = 1, 2, 3, 4, \quad (3)$$

e^{ok}, e^{k0} — элементы полной матричной алгебры

$$(e^{km})_{ln} = \delta_{kl} \delta_{mn}^*, \quad (4)$$

$$\psi_1 = (\psi_\alpha) = \begin{pmatrix} \psi_0 \\ \psi_k \end{pmatrix}, \quad \bar{\psi}_1 = (\bar{\psi}_\alpha) = \begin{pmatrix} \bar{\psi}_0 \\ \bar{\psi}_k \end{pmatrix}, \quad \alpha = 0, 1, 2, 3, 4. \quad (5)$$

По повторяющимся буквенным индексам производится суммирование в пределах возможных значений.

$$\gamma^0 = m e^{\alpha\alpha} - m e^{\alpha'\alpha'} + \frac{1}{2} e^{[lk][lk]} = \left(\begin{array}{c|c} m & 0 \\ \hline 0 & -m \\ \hline 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{array} \right), \quad (14)$$

которые представляют собой прямые суммы соответствующих матриц (3) и (7) (вид матриц $\gamma_2^{k''}$ ясен из самих этих формул), и матрицу третьего ранга размерности $20 \times 20 \times 20$:

$$\Lambda = (\Lambda_{BC}^A) = \begin{pmatrix} \Lambda_{BC}^\alpha \\ \Lambda_{BC}^{\alpha'} \\ \Lambda_{BC}^\varepsilon \end{pmatrix}. \quad (15)$$

Здесь Λ^A — симметричные матрицы размерности 20×20 следующего вида:

$$\Lambda^\alpha = -(\delta_{\alpha k} e^{0k''} + \delta_{\alpha 0} e^{k''k''}) - (\delta_{\alpha k} e^{k''0} + \delta_{\alpha 0} e^{k''k}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\Lambda_{\alpha_1} \\ 0 & 0 & 0 \\ -\Lambda_{\alpha_1} & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\Lambda^{\alpha'} = (\delta_{\alpha' k'} e^{0'k''} + \delta_{\alpha' 0'} e^{k'k''}) + (\delta_{\alpha' k'} e^{k''0'} + \delta_{\alpha' 0'} e^{k''k'}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Lambda_{\alpha'_1} \\ 0 & \Lambda_{\alpha'_1} & 0 \end{pmatrix}, \quad (16)$$

$$\Lambda^\varepsilon = -\delta_{\varepsilon k''} (e^{0k'} + e^{k0'}) - \delta_{\varepsilon k'} (e^{0'k} + e^{k'0}) = \begin{pmatrix} 0 & -\Lambda_{\varepsilon_2} & 0 \\ -\Lambda_{\varepsilon_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Вид матриц Λ_{α_1} , $\Lambda_{\alpha'_1}$, Λ_{ε_2} ясен из самих этих формул. Тогда систему (11) можно представить в виде (1)

$$(\gamma^k \partial_k + \gamma^0) \Psi + \frac{ie}{2} \Psi \Lambda \Psi = 0. \quad (17)$$

Здесь

$$\Psi \Lambda \Psi = (\Psi \Lambda^A \Psi) = (\Psi_B \Lambda_{BC}^A \Psi_C).$$

Найдем лагранжиан для поля Ψ , из которого варьированием по Ψ можно получить уравнение (17). Мы будем искать его в виде

$$L = \frac{1}{2} \Psi Q (\gamma^k \partial_k + \gamma^0) \Psi + \frac{ie}{6} \Psi Q (\Psi \Lambda \Psi). \quad (18)$$

Здесь $Q = (Q_{AB})$ — некоторая неособенная матрица размерности 20×20 .

Для того чтобы результат варьирования давал уравнение (17), необходимо выполнение условий

$$Q \gamma^k = -(\widetilde{Q} \gamma^k), \quad Q \gamma^0 = (\widetilde{Q} \gamma^0), \quad Q_{AB} \Lambda_{CD}^B = Q_{CB} \Lambda_{AD}^B, \quad |Q| \neq 0. \quad (19)$$

Тильда (\sim) означает транспонирование, $|Q|$ — определитель матрицы Q . Матрицу Q можно взять в виде

$$Q = (e^{\alpha\alpha'} - e^{\alpha'\alpha}) - \left(e^{k''k''} - \frac{1}{2} e^{[lk][lk]} \right) = \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & & 0 \\ -1 & 0 & & \\ \hline & & -1 & 0 \\ 0 & & 0 & 1 \end{array} \right). \quad (20)$$

Исходя из вида лагранжиана удобно ввести матрицы

$$\beta^k = Q\gamma^k, \quad \beta^0 = Q\gamma^0, \quad P^A = Q_{AB}\Lambda^B, \quad (21)$$

имеющие следующую структуру:

$$\beta^k = (e^{0k'} + e^{k0'}) - (e^{k'0} + e^{0'k}) + e^{[lk'']l} - e^{[lk'']l} = \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & \gamma_1^{k'} & & 0 \\ -\gamma_1^k & 0 & & \\ \hline & & 0 & \gamma_2^{k''} \\ 0 & & -\gamma_2^{k''} & 0 \end{array} \right), \quad (22)$$

$$\beta^0 = -me^{\alpha\alpha'} - me^{\alpha'\alpha} + \frac{1}{2} e^{[lk][lk]} = \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & -m & & 0 \\ -m & 0 & & \\ \hline & & 0 & 0 \\ 0 & & 0 & 1 \end{array} \right),$$

$$P = (P_{BC}^A) = \begin{pmatrix} P_{BC}^\alpha \\ P_{BC}^{\alpha'} \\ P_{BC}^\varepsilon \end{pmatrix}, \quad (23)$$

$$P^\alpha = (\delta_{\alpha k} e^{0'k''} + \delta_{\alpha 0} e^{k''k''}) + (\delta_{\alpha 0} e^{k''0'} + \delta_{\alpha k} e^{k''k'}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Lambda_{\alpha_1}' \\ 0 & \Lambda_{\alpha_1}' & 0 \end{pmatrix},$$

$$P^{\alpha'} = (\delta_{\alpha' k} e^{0k''} + \delta_{\alpha' 0} e^{k''k''}) + (\delta_{\alpha' 0} e^{k''0} + \delta_{\alpha' k} e^{k''k'}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \Lambda_{\alpha_1} \\ 0 & 0 & 0 \\ \Lambda_{\alpha_1} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (24)$$

$$P^\varepsilon = \delta_{\varepsilon k''} (e^{0k'} + e^{k0'}) + \delta_{\varepsilon k''} (e^{0'k} + e^{k'0}) = \begin{pmatrix} 0 & \Lambda_{\varepsilon_2} & 0 \\ \Lambda_{\varepsilon_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, β^k — антисимметричные матрицы, β^0 — симметричная, $P = (P_{BC}^A)$ — полностью симметричная матрица третьего ранга. В результате лагранжиан (18) принимает вид

$$L = \frac{1}{2} \Psi (\beta^k \partial_k + \beta^0) \Psi + \frac{ie}{6} P \Psi \Psi \Psi, \quad (25)$$

чему соответствуют уравнения поля

$$(\beta^k \partial_k + \beta^0) \Psi + \frac{ie}{2} \Psi P \Psi = 0. \quad (26)$$

Соотношения (22) — (26) составляют основу теории единого общего поля Ψ , описывающего скалярную частицу, античастицу и электромагнитное поле во взаимодействии. Отбрасывая члены второго порядка относительно Ψ , описывающие взаимодействие, получаем уравнение свободного поля Ψ

$$(\beta^k \partial_k + \beta^0) \Psi = 0, \quad (27)$$

которое распадается на систему уравнений свободных скалярного и электромагнитного полей вида (2) и (6) и отличается от нее умножением на матрицу Q . Свойства свободных полей (27) определяются свойствами матриц β^k , β^0 , а взаимодействующих полей (26), кроме того, матрицей P . Наиболее важным в применении является знание минимальных полиномов и взаимных коммутационных свойств этих матриц. Пользуясь их явным видом (22) — (24), нетрудно найти минимальный полином матрицы β^0

$$\beta^0 (\beta^0 - 1) (\beta^{0^2} - m^2) = 0 \quad (28)$$

и алгебру матриц β^k

$$\beta^k \beta^n \beta^l + \beta^l \beta^n \beta^k = -(\delta_{kn} \beta^l + \delta_{ln} \beta^k), \quad (29)$$

которая отличается от алгебры Даффина—Кеммера (9) знаком минус в правой части из-за перехода (21) к антиэрмитовым матрицам β^k . Минимальный полином каждой из матриц P^A имеет вид

$$P^A (P^{A^2} - 1) = 0. \quad (30)$$

Для выделения компонент поля Ψ , отвечающих различным объектам, введем проективные операторы подпространств $\psi_1, \bar{\psi}_1, \psi_2 = (\psi_{k''}, \psi_{[kl]})$, обозначив их соответственно $\Pi_1, \Pi_1', \Pi_2 = (\Pi_2', \Pi_2'')$. Их можно выразить через матрицу β^0 , пользуясь свойствами ее минимального полинома (28):

$$\begin{aligned} \Pi_1 &= U \frac{\beta^0 (\beta^0 - 1) (\beta^0 + m)}{2m^2 (m - 1)} U^{-1} = e^{\alpha\alpha} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \Pi_1' &= U \frac{\beta^0 (\beta^0 - 1) (\beta^0 - m)}{2m^2 (m + 1)} U^{-1} = e^{\alpha'\alpha'} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \Pi_2 &= \frac{(\beta^0 - 1) (\beta^{0^2} - m^2)}{m^2} = e^{k''k''} = \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right), \\ \Pi_2'' &= \frac{\beta^0 (\beta^{0^2} - m^2)}{1 - m^2} = \frac{1}{2} e^{[lk][lk]} = \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right). \end{aligned} \quad (31)$$

Здесь U — ортогональная матрица следующего вида:

$$U = \frac{1}{\sqrt{2}} (e^{\alpha\alpha} + e^{\alpha\alpha'} - e^{\alpha'\alpha} + e^{\alpha'\alpha'} + e^{\varepsilon\varepsilon}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (32)$$

Отметим также взаимные коммутационные свойства матриц различного типа

$$\begin{aligned} \beta^0 \beta^k + \beta^k \beta^0 &= \beta^k \Pi_2 = \Pi_2 \beta^k, \\ \beta^0 P^\alpha + P^\alpha \beta^0 &= -m P^\alpha, \quad \beta^0 P^{\alpha'} + P^{\alpha'} \beta^0 = -m P^\alpha, \\ \beta^0 P^{k'} + P^{k'} \beta^0 &= -m (\Pi_1 + \Pi_1') \beta^k. \end{aligned} \quad (33)$$

Построим теперь проективные операторы для свободного поля Ψ , соответствующие решению уравнения (27) с определенным знаком энергии скалярного поля и проекции спина электромагнитного поля. В этих операторах заключена вся информация о свободном поле [5]. Будет искать решение (27) в виде

$$\Psi(x) = \begin{pmatrix} \psi_1(p) e^{ipx} \\ \bar{\psi}_1(p) e^{-ipx} \\ \psi_2(k) e^{ikx} \end{pmatrix}. \quad (34)$$

Здесь $p = (p_n)$ и $k = (k_n)$ — 4-импульсы скалярного и электромагнитного полей. Подставляя (34) в (27), получаем матричное уравнение

$$\begin{pmatrix} \hat{\beta}_1 + \beta_1^0 & 0 \\ 0 & \hat{\beta}_2 + \beta_2^0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1(p) \\ \psi_2(k) \end{pmatrix} = 0, \quad (35)$$

где для краткости введены обозначения, соответствующие различным блокам матриц (22):

$$\begin{aligned} \hat{\beta}_1 &= \begin{pmatrix} 0 & -\gamma_1^{k'} p_k \\ -\gamma_1^k p_k & 0 \end{pmatrix}, \quad \beta_1^0 = \begin{pmatrix} 0 & -m \\ -m & 0 \end{pmatrix}, \\ \hat{\beta}_2 &= \begin{pmatrix} 0 & \gamma_2^{n''} k_n \\ -\gamma_2^{n''} k_n & 0 \end{pmatrix}, \quad \beta_2^0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \psi_1(p) = \begin{pmatrix} \psi_1(p) \\ \bar{\psi}_1(p) \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (36)$$

Таким образом, (35) распадается на скалярную и электромагнитную части:

$$(\hat{\beta}_1 + \beta_1^0) \psi_1(p) = 0, \quad (\hat{\beta}_2 + \beta_2^0) \psi_2(k) = 0. \quad (37)$$

Используя (29), получаем

$$\hat{\beta}_1 (\hat{\beta}_1 + \beta_1^0) (\hat{\beta}_1 - \beta_1^0) = 0. \quad (38)$$

Отсюда находим проективный оператор скалярного поля, выделяющий состояния с положительной и отрицательной энергиями:

$$\begin{aligned} \tau_{1\pm} &= \frac{\hat{\beta}_1 (\hat{\beta}_1 \mp \beta_1^0)}{2m^2}, \quad (\hat{\beta}_1 \pm \beta_1^0) \tau_{1\pm} = 0, \\ \tau_{1\pm}^2 &= \tau_{1\pm}. \end{aligned} \quad (39)$$

Для электромагнитного поля проективный оператор, выделяющий состояния с проекциями спина $s = \pm 1$, имеет вид [3] (с учетом перехода (21))

$$\tau_2^s = \frac{\sigma_n(\sigma_n + s)(\hat{\beta}_2 + \beta_2^0 + \Pi_2' - \Pi_2'')^2}{2}, \quad (\tau_2^s)^2 = \tau_2^s. \quad (40)$$

Здесь σ_n — оператор проекции спина на импульс

$$\sigma_n = -\frac{i}{|k|} \varepsilon_{a'' b'' c''} k_{a''} \beta^{b''} \beta^{c''}, \quad (a'', b'', c'' = 1, 2, 3),$$

$$(\hat{\beta}_2 + \beta_2^0) \tau_2^s = 0, \quad (\sigma_n - s) \tau_2^s = 0. \quad (41)$$

Состояние электромагнитного поля с нулевой проекцией спина, которое выделяется оператором (непроективным)

$$\tau_2^0 = \frac{(\sigma_n^2 - 1)(\hat{\beta}_2 + \beta_2^0)(\hat{\beta}_2 + \beta_2^0 + \Pi_2' - \Pi_2'')^2}{k_0}, \quad (42)$$

отвечает нулевой энергии электромагнитного поля и не является физическим [3]. Теперь можно ввести оператор

$$\tau_{\pm}^s = \begin{pmatrix} \tau_{1\pm} & 0 \\ 0 & \tau_2^s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\hat{\beta}_1(\hat{\beta}_1 \mp \beta_1^0)}{2m^2} & 0 \\ 0 & \frac{\sigma_n(\sigma_n + s)(\hat{\beta}_2 + \beta_2^0 + \Pi_2' - \Pi_2'')^2}{2} \end{pmatrix}. \quad (43)$$

Этот оператор является проективным и смысл его заключается в том, что из любой 20-компонентной функции он выделяет решение уравнения (36), в котором компоненты, относящиеся к скалярному полю, имеют определенный знак энергии, а компоненты, относящиеся к электромагнитному полю, — определенную проекцию спина.

Матрица η билинейной формы для полного поля Ψ получается как прямая сумма соответствующих матриц для полей ψ_1 , $\bar{\psi}_1$, и ψ_2 :

$$\eta = -2\beta_4^2 - 1 = \begin{pmatrix} 2\gamma_1^{4^2} - 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2\gamma_1^{4^2} - 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2\gamma_2^{4^2} - 1 \end{pmatrix}. \quad (44)$$

Как обычно, матрица η обладает свойствами $\tilde{\eta} = \eta^* = \eta^+ = \eta^{-1} = \eta$.

Таким образом, классическая скалярная электродинамика допускает формулировку в терминах поля Ψ , описывающего одновременно скалярные частицы, античастицы и электромагнитное поле и подчиняющегося нелинейному уравнению общего вида (26) с лагранжианом (25). При этом свойства как свободного поля, так и взаимодействующего определяются видом матриц β^k , β^0 , P .

В дальнейшем этот подход будет применен к различным аспектам теории свободного и взаимодействующего полей.

Литература

1. Федоров Ф. И. ДАН СССР, 179, 802, 1968.
2. Duffin R. Phys. Rev., 54, 905, 1938; Kemmer N. Proc. Roy. Soc., 173, 97, 1939; Богуш А. А., Мороз Л. Г. Введение в теорию классических полей. Минск, 1968.
3. Мороз Л. Г., Федоров Ф. И. Труды Института физики и математики АН БССР, 3, 154, 1959.
4. Ахиезер А. И., Берестецкий В. Б. Квантовая электродинамика. М., 1959.
5. Федоров Ф. И. ЖЭТФ, 35, 493, 1958.

С. И. ЛОБКО, Ф. И. ФЕДОРОВ

**ЧАСТИЦА С ПЕРЕМЕННЫМ СПИНОМ 1/2—3/2
 В ПОЛЕ ПЛОСКОЙ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ВОЛНЫ**

В работе [1] был предложен общий метод отыскания точных решений задачи о частице с произвольным спином в поле плоской электромагнитной волны. В [1] эта задача была решена для частиц со спином 1/2, 0 и 1. Ниже этот метод применяется к частице с переменным спином 1/2—3/2.

Уравнение для частицы со спином 1/2—3/2 в электромагнитном поле имеет вид

$$(\hat{\nabla} - i\hat{A} + m)\psi = 0, \quad \hat{\nabla} = \alpha_k \nabla_k, \quad \hat{A} = \alpha_k A_k, \quad (1)$$

где A_k — четырехмерный вектор-потенциал, α_k — 20-мерные квадратные матрицы, имеющие вид [2]

$$\alpha_1 = \begin{bmatrix} -c_1\gamma_3 & 0 & \frac{i}{3}c_4\gamma_3\gamma_5 & 0 & -\frac{2\sqrt{2}}{3}c_4 \\ 0 & -c_2\gamma_3 & \frac{i}{3}c_5\gamma_3\gamma_5 & 0 & -\frac{2\sqrt{2}}{3}c_5 \\ \frac{i}{3}c_4\gamma_3\gamma_5 & \frac{i}{3}c_5\gamma_3\gamma_5 & -\frac{5}{6}\gamma_3 & 0 & \frac{i\sqrt{2}}{3}\gamma_5 \\ 0 & 0 & 0 & -\gamma_3 & 0 \\ \frac{2\sqrt{2}}{3}c_4 & \frac{2\sqrt{2}}{3}c_5 & \frac{i\sqrt{2}}{3}\gamma_5 & 0 & -\frac{\gamma_3}{3} \end{bmatrix}, \quad (2)$$

$$\alpha_2 = \begin{bmatrix} c_1\gamma_1 & 0 & -\frac{i}{3}c_4\gamma_1\gamma_5 & \frac{i\sqrt{6}}{3}c_4\gamma_1\gamma_2 & -\frac{\sqrt{2}}{3}c_4\gamma_1\gamma_3 \\ 0 & c_2\gamma_1 & -\frac{i}{3}c_5\gamma_1\gamma_5 & \frac{i\sqrt{6}}{3}c_5\gamma_1\gamma_2 & -\frac{\sqrt{2}}{3}c_5\gamma_1\gamma_3 \\ -\frac{i}{3}c_4\gamma_1\gamma_5 & -\frac{i}{3}c_5\gamma_1\gamma_5 & \frac{5}{6}\gamma_1 & -\frac{i\sqrt{6}}{6}\gamma_3\gamma_4 & -\frac{\sqrt{2}}{6}\gamma_2\gamma_4 \\ -\frac{i\sqrt{6}}{3}c_4\gamma_1\gamma_2 & -\frac{i\sqrt{6}}{3}c_5\gamma_1\gamma_2 & -\frac{i\sqrt{6}}{6}\gamma_3\gamma_4 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{3}\gamma_4\gamma_5 \\ -\frac{\sqrt{2}}{3}c_4\gamma_1\gamma_3 & -\frac{\sqrt{2}}{3}c_5\gamma_1\gamma_3 & \frac{\sqrt{2}}{6}\gamma_2\gamma_4 & \frac{\sqrt{3}}{3}\gamma_4\gamma_5 & \frac{2}{3}\gamma_1 \end{bmatrix}.$$

$$\alpha_3 = \begin{bmatrix} c_1 \gamma_2 & 0 & -\frac{i}{3} c_4 \gamma_2 \gamma_5 & -\frac{i\sqrt{6}}{3} c_4 & -\frac{\sqrt{2}}{3} c_4 \gamma_2 \gamma_3 \\ 0 & c_2 \gamma_2 & -\frac{i}{3} c_5 \gamma_2 \gamma_5 & -\frac{i\sqrt{6}}{3} c_5 & -\frac{\sqrt{2}}{3} c_5 \gamma_2 \gamma_3 \\ -\frac{i}{3} c_4 \gamma_2 \gamma_3 & -\frac{i}{3} c_5 \gamma_2 \gamma_3 & \frac{5}{6} \gamma_2 & -\frac{\sqrt{6}}{6} \gamma_5 & \frac{\sqrt{2}}{6} \gamma_1 \gamma_4 \\ -\frac{i\sqrt{6}}{3} c_4 & -\frac{i\sqrt{6}}{3} c_5 & \frac{\sqrt{6}}{6} \gamma_5 & 0 & -\frac{\sqrt{3}}{3} \gamma_3 \\ -\frac{\sqrt{2}}{3} c_4 \gamma_2 \gamma_3 & -\frac{\sqrt{2}}{3} c_5 \gamma_2 \gamma_3 & -\frac{\sqrt{2}}{6} \gamma_1 \gamma_4 & \frac{i\sqrt{3}}{3} \gamma_3 & \frac{2}{3} \gamma_2 \end{bmatrix},$$

$$\alpha_4 = \begin{bmatrix} ic_1 \gamma_5 & 0 & c_4 & 0 & 0 \\ 0 & ic_2 \gamma_5 & c_5 & 0 & 0 \\ -c_4 & -c_5 & \frac{i}{2} \gamma_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i\gamma_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & i\gamma_5 \end{bmatrix},$$

где $\gamma_5 = i\gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4$, γ_k — матрицы Дирака, c_1, c_2, c_5, c_4 — вещественные постоянные, которые связаны между собой соотношениями

$$c_4^2 = -c_1^2 \left(c_2 + \frac{1}{2} \right) / (c_1 - c_2), \quad c_5^2 = c_2^2 \left(c_1 + \frac{1}{2} \right) / (c_1 - c_2).$$

Матрицы α_k удовлетворяют минимальному уравнению

$$\hat{q}^2 (\hat{q}^2 - q^2) (\hat{q}^2 - \lambda^2 q^2) = 0, \quad \hat{q} = \alpha_k q_k, \quad (3)$$

где q — произвольный 4-вектор с коммутирующими между собой компонентами, параметр λ равен отношению масс в спиновых состояниях 1/2 и 3/2.

В случае плоской электромагнитной волны

$$A = af(\varphi), \quad \varphi = k_i x_i, \quad k^2 = ka = 0, \quad (4)$$

где k — волновой вектор. Согласно [1], решение уравнения (1) имеет вид

$$\psi = \chi(\varphi) e^{ipx}, \quad \chi(\varphi) = \Phi(k, p, \varphi) \psi_0, \quad (5)$$

где p — импульс частицы, $\Phi(k, p, \varphi)$ — матрица, элементы которой зависят от x_i лишь посредством $\varphi = k_i x_i$. Подставляя (4) в (1), будем иметь

$$\hat{k} \frac{d\chi}{d\varphi} + (i\hat{b} + m)\chi = 0, \quad b = p - af. \quad (6)$$

Как показано в [1], решение дифференциального уравнения (6) можно искать в виде

$$\chi = (i\hat{b} + m)^{-1} \hat{k} \chi_1, \quad (7)$$

причем мы предположим, что зависимость $\chi_1(\varphi)$ заключена в скалярном множителе $F(\varphi)$ при постоянном векторе χ_0 , т. е. $\chi_1 = F(\varphi)\chi_0$. Поскольку обратный оператор $(i\hat{b} + m)^{-1}$ имеет в нашем случае вид

$$(i\hat{b} + m)^{-1} = \frac{(-i\hat{b} + m)}{m^2} \left[1 - \frac{(m^2 + b^2 + b^2\lambda^2)\hat{b}^2 - \hat{b}^4}{(m^2 + b^2)(m^2 + b^2\lambda^2)} \right], \quad (8)$$

то, чтобы избавиться от знаменателя в (7), удобно искать χ_1 в виде

$$\chi_1 = F(\varphi)(b^2 + m^2)(m^2 + b^2\lambda^2)\chi_0. \quad (9)$$

Подставляя (8) и (9) в (7), окончательно будем иметь для χ следующее выражение:

$$\begin{aligned} \chi = F(\varphi) \frac{(-i\hat{b} + m)}{m^2} \times \\ \times [(b^2 + m^2)(b^2\lambda^2 + m^2) - (m^2 + b^2 + b^2\lambda^2)\hat{b}^2 + \hat{b}^4] \hat{k}\chi_0. \end{aligned} \quad (10)$$

В случае частицы с одним значением массы [1] $F(\varphi)$ имела вид

$$F(\varphi) = \exp\left(\frac{1}{2ikp} \int (b^2 + m^2) d\varphi\right).$$

Аналогично положим в нашем случае

$$F(\varphi) = \exp\left(\frac{1}{2ikpm^2} \int (b^2 + m^2)(b^2\lambda^2 + m^2) d\varphi\right). \quad (11)$$

Подставив χ (10) в уравнение (6), с учетом (11) после довольно громоздких преобразований получим следующую алгебраическую систему уравнений для определения постоянного вектора χ_0 :

$$\begin{aligned} & \{\hat{k}(m - i\hat{p})([m^2 - \hat{p}^2 + (1 + \lambda^2)p^2][\hat{a}, \hat{p}]_+ - [\hat{a}, \hat{p}]_+ \hat{p}^2 - \\ & - 2(ap)[2p^2\lambda^2 + (1 + \lambda^2)(m^2 - \hat{p}^2)]) + i\hat{k}\hat{a}[p^4\lambda^2 + p^2m^2(1 + \lambda^2) + \\ & + m^2(m^2 - \hat{p}^2) - p^2\hat{p}^2(1 + \lambda^2) + \hat{p}^4]\} \hat{k}\chi_0 = 0, \\ & \{\hat{i}\hat{k}\hat{a}([m^2 - \hat{p}^2 + (1 + \lambda^2)p^2][\hat{a}, \hat{p}]_+ - [\hat{a}, \hat{p}]_+ \hat{p}^2 - 2ap[2p^2\lambda^2 + \\ & + (1 + \lambda^2)(m^2 - \hat{p}^2)]) + (m - i\hat{p})(-[m^2 + (1 + \lambda^2)p^2]\hat{a}^2 + [\hat{a}, \hat{p}]_+^2 + \\ & + [\hat{a}^2, \hat{p}^2]_+ + a^2[2p^2\lambda^2 + (1 + \lambda^2)(m^2 - \hat{p}^2)] - \\ & - 2ap(1 + \lambda^2)[\hat{a}, \hat{p}]_+ + 4(ap)^2\lambda^2)\} \hat{k}\chi_0 = 0, \quad (12) \\ & \{\hat{i}\hat{k}\hat{a}(-[m^2 + (1 + \lambda^2)p^2]\hat{a}^2 + [\hat{a}, \hat{p}]_+^2 + [\hat{a}^2, \hat{p}^2]_+ + a^2[2p^2\lambda^2 + \\ & + (1 + \lambda^2)(m^2 - \hat{p}^2)] - 2ap(1 + \lambda^2)[\hat{a}, \hat{p}]_+ + 4(ap)^2\lambda^2) + \\ & + (m - i\hat{p})(-[\hat{a}^2, [\hat{a}, \hat{p}]_+]_+ + 2ap(1 + \lambda^2)\hat{a}^2 + (1 + \lambda^2)a^2[\hat{a}, \hat{p}]_+ - \\ & - 4(ap)a^2\lambda^2)\} \hat{k}\chi_0 = 0, \\ & \{\hat{i}\hat{k}\hat{a}(-[\hat{a}^2, [\hat{a}, \hat{p}]_+]_+ + (1 + \lambda^2)a^2[\hat{a}, \hat{p}]_+ + 2(ap)(1 + \lambda^2)\hat{a}^2 - \\ & - 4(ap)a^2\lambda^2) + (m - i\hat{p})[\hat{a}^4 + a^4\lambda^2 - a^2\hat{a}^2(1 + \lambda^2)]\} \hat{k}\chi_0 = 0, \\ & \hat{k}\hat{a}[\hat{a}^4 + a^4\lambda^2 - a^2\hat{a}^2(1 + \lambda^2)] \hat{k}\chi_0 = 0, \end{aligned}$$

$$\left\{ m^2 + \frac{\hat{k}(m - i\hat{p})}{2ikpm^2} [p^4\lambda^2 + p^2m^2(1 + \lambda^2) + m^2(m^2 - \hat{p}^2) - p^2\hat{p}^2(1 + \lambda^2) + \hat{p}^4] \right\} \hat{k}\chi_0 = 0,$$

где $[\hat{a}, \hat{p}]_+ = \hat{a}\hat{p} + \hat{p}\hat{a}$.

При рассмотрении поведения частицы с переменным спином $1/2-3/2$ и двумя массами покоя возможны 2 случая.

1. Пусть частица находится в состоянии с массой m и спином $3/2$. Тогда $p^2 + m^2 = 0$. С учетом этого условия система (12) несколько упрощается. Однако решить ее в общем случае очень трудно, так как матрицы α_k имеют 20-й порядок, а их алгебра практически неизвестна. Для упрощения решения системы рассмотрим случай покоящейся частицы. Тогда $\hat{p} = im\alpha_4$. Кроме того, будем считать, что электромагнитная волна распространяется вдоль оси x , а векторный потенциал направлен по оси z . В этом случае $\hat{k} = k_1\alpha_1 + k_4\alpha_4$, $A_1 = A_2 = A_4 = 0$, $A_3 = af(\varphi)$, и система (12) принимает следующий вид:

$$\begin{aligned} \hat{k} \{ (1 + \alpha_4) (-\lambda^2 [\alpha_4, \alpha_3]_+ + [\alpha_4^2 [\alpha_4, \alpha_3]_+]_+) + \alpha_3 \alpha_4^2 (\alpha_4^2 - \lambda^2) \} \hat{k}\chi_0 &= 0, \\ \hat{k} \{ \alpha_3 (\lambda^2 [\alpha_4, \alpha_3]_+ - [\alpha_4^2, [\alpha_4, \alpha_3]_+]_+) + (1 + \alpha_4) (\lambda^2 \alpha_3^2 - \\ - [\alpha_4, \alpha_3]_+^2 - [\alpha_3^2, \alpha_4^2]_+ + [1 - \lambda^2 + (1 + \lambda^2) \alpha_4^2]) \} \hat{k}\chi_0 &= 0, \quad (13) \\ \hat{k} \{ \alpha_3 (\lambda^2 \alpha_3^2 - [\alpha_4, \alpha_3]_+^2 - [\alpha_3^2, \alpha_4^2]_+ + [1 - \lambda^2 + (1 + \lambda^2) \alpha_4^2]) + \\ + (1 + \alpha_4) (-[\alpha_3^2, [\alpha_3, \alpha_4]_+]_+ + (1 + \lambda^2) [\alpha_3, \alpha_4]_+) \} \hat{k}\chi_0 &= 0, \\ \hat{k} \{ \alpha_3 ([\alpha_3^2, [\alpha_3, \alpha_4]_+]_+ - (1 + \lambda^2) [\alpha_3, \alpha_4]_+) + (1 + \alpha_4) \times \\ \times [\alpha_3^4 + \lambda^2 - (1 + \lambda^2) \alpha_3^2] \} \hat{k}\chi_0 &= 0, \\ \hat{k} \{ \alpha_3 [\alpha_3^4 + \lambda^2 - \alpha_3^2 (1 + \lambda^2)] \} \hat{k}\chi_0 &= 0, \\ [2k_4 - \hat{k}(1 + \alpha_4)\alpha_4^2(\alpha_4^2 - \lambda^2)] \hat{k}\chi_0 &= 0. \end{aligned}$$

Для решения системы (13) воспользуемся выражениями (2) для матриц α_k . Кроме того, учтем, что в нашем случае $k_1^2 + k_4^2 = 0$. Взяв $k_4 = ik_1$ и положив

$$\chi_0 = \begin{pmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \\ \rho_3 \\ \rho_4 \\ \rho_5 \end{pmatrix}, \text{ где } \rho_i = \begin{pmatrix} \rho_i^1 \\ \rho_i^2 \\ \rho_i^3 \\ \rho_i^4 \end{pmatrix}, \quad i = 1, \dots, 5, \quad (14)$$

после довольно громоздких вычислений сведем (13) к следующей системе уравнений:

$$\begin{aligned} (\gamma_3 + \gamma_5) \rho_1 &= (\gamma_3 + \gamma_5) \rho_2 = (\gamma_3 + \gamma_5) \rho_4 = 0, \\ c_4 \rho_1 + c_5 \rho_2 - \frac{i}{2} \gamma_3 \rho_3 - \frac{\sqrt{2}}{2} \gamma_5 \rho_5 &= 0, \quad (15) \\ (\gamma_3 + \gamma_5) (\sqrt{2} \rho_3 + i \rho_5) &= 0, \\ (3 + \gamma_3 \gamma_5) \rho_3 + 2i\sqrt{2} \rho_5 &= 0. \end{aligned}$$

Если для матриц γ_k выбрать представление $\vec{\gamma} = -i\beta\vec{\alpha}$, $\gamma_4 = \beta$, $\vec{\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ \vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix}$, $\beta = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}$, $\vec{\sigma}(\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$ — матрицы Паули, то решение системы (15) может быть записано следующим образом:

$$\rho_1 = \begin{vmatrix} \rho_1^1 \\ 0 \\ 0 \\ \rho_1^4 \end{vmatrix}, \quad \rho_2 = \begin{vmatrix} \rho_2^1 \\ 0 \\ 0 \\ \rho_2^4 \end{vmatrix}, \quad \rho_3 = \begin{vmatrix} \rho_3^1 \\ \rho_3^2 \\ \rho_3^3 \\ \rho_3^4 \end{vmatrix},$$

$$\rho_4 = \begin{vmatrix} \rho_4^1 \\ 0 \\ 0 \\ \rho_4^4 \end{vmatrix}, \quad \rho_5 = i\sqrt{2} \begin{vmatrix} \frac{1}{2}\rho_3^1 \\ \rho_3^2 \\ \rho_3^3 \\ \frac{1}{2}\rho_3^4 \end{vmatrix}. \quad (16)$$

При этом имеют место соотношения

$$c_4\rho_1^1 + c_5\rho_2^1 - \frac{3}{2}\rho_3^3 = 0, \quad c_4\rho_1^4 + c_5\rho_2^4 - \frac{3}{2}\rho_3^2 = 0. \quad (17)$$

Из (16) и (17) видно, что решения уравнения (6) зависят от 8 произвольных величин.

2. Пусть частица, попадающая в поле электромагнитной волны, находится в состоянии с массой m/λ и спином $1/2$. Тогда $\rho^2 + \frac{m^2}{\lambda^2} = 0$. Приняв те же упрощающие предположения, что и в предыдущем случае, из системы (12) получим следующую систему уравнений для определения вектора χ_0 :

$$\begin{aligned} & \hat{k} \{ (\lambda + \alpha_4) ([\alpha_4^2, [\alpha_3, \alpha_4]_{+}]_{+} - [\alpha_3, \alpha_4]_{+}) + \alpha_3 (\alpha_4^4 - \alpha_4^2) \} \hat{k} \chi_0 = 0, \\ & \hat{k} \{ \alpha_3 ([\alpha_4, \alpha_3]_{+} - [\alpha_4^2, [\alpha_3, \alpha_4]_{-}]_{+}) + (\lambda + \alpha_4) (\alpha_3^2 - [\alpha_3, \alpha_4]_{+}^2 - \\ & \quad - [\alpha_3^2, \alpha_4^2]_{+} + [\lambda^2(\lambda^2 - 1) + \alpha_4^2(1 + \lambda^2)]) \} \hat{k} \chi_0 = 0, \\ & \hat{k} \{ \alpha_3 (\alpha_3^2 - [\alpha_3, \alpha_4]_{+}^2 - [\alpha_3^2, \alpha_4^2]_{+} + [\lambda^2(\lambda^2 - 1) + \alpha_4^2(1 + \lambda^2)]) + \\ & \quad + (\lambda + \alpha_4) [(1 + \lambda^2)[\alpha_3, \alpha_4]_{+} - [\alpha_3^2, [\alpha_3, \alpha_4]_{+}]_{+}] \} \hat{k} \chi_0 = 0, \\ & \hat{k} \{ \alpha_3 ([\alpha_3^2, [\alpha_3, \alpha_4]_{+}]_{+} - (1 + \lambda^2)[\alpha_3, \alpha_4]_{+}) + (\lambda + \alpha_4) \times \\ & \quad \times [\alpha_4^4 - \alpha_3^2(1 + \lambda^2) + \lambda^2] \} \hat{k} \chi_0 = 0, \\ & \hat{k} \alpha_3 [\alpha_3^4 - \alpha_3^2(1 + \lambda^2) + \lambda^2] \hat{k} \chi_0 = 0, \\ & [2k_4\lambda^4 - \hat{k}(\lambda + \alpha_4)(\alpha_4^4 - \alpha_4^2)] \hat{k} \chi_0 = 0. \end{aligned} \quad (18)$$

Обозначив компоненты искомого вектора χ_0 через

$$\chi_0 = \begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \end{pmatrix}, \quad \sigma_i = \begin{pmatrix} \sigma_i^1 \\ \sigma_i^2 \\ \sigma_i^3 \\ \sigma_i^4 \end{pmatrix}, \quad i = 1, \dots, 5,$$

при $k_4 = ik_1$ систему (18) можно свести к следующим уравнениям:

$$(\gamma_3 + \gamma_5)\sigma_i = 0 \quad (i = 1, 2, 3, 4, 5),$$

$$c_4\sigma_1 + c_5\sigma_2 = 0,$$

$$\sigma_3 = -\frac{i\sqrt{2}}{4}(3 - \gamma_3\gamma_5)\sigma_5,$$

$$c_1c_4\sigma_1 + c_2c_5\sigma_2 = \frac{c}{\lambda}\sigma_3, \quad c = \left(c_1 + \frac{1}{2}\right)\left(c_2 + \frac{1}{2}\right).$$

Решая (19), находим следующие значения для σ_i^k :

$$\sigma_2 = -\frac{c_4}{c_5}\sigma_1,$$

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} \sigma_1^1 \\ 0 \\ 0 \\ \sigma_1^4 \end{pmatrix}, \quad \sigma_4 = \begin{pmatrix} \sigma_4^1 \\ 0 \\ 0 \\ \sigma_4^4 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = -\frac{c_1^2\lambda}{c_4\left(c_1 + \frac{1}{2}\right)}\sigma_1,$$

$$\sigma_5 = -\frac{i}{\sqrt{2}}\frac{c_1^2\lambda}{c_4\left(c_1 + \frac{1}{2}\right)}\sigma_1.$$

Решение (20) зависит от 4 произвольных параметров. Окончательное решение для частицы в любом состоянии имеет вид

$$\psi = F(\varphi) \left(-\frac{i\hat{b} + m}{m^2} \right) [(b^2 + m^2)(b^2\lambda^2 + m^2) - (m^2 + b^2 + b^2\lambda^2)\hat{b}^2 + \\ + \hat{b}^4] \hat{k}\chi_0 \exp \left(i\rho x - \frac{i}{2k\rho m^2} \int (b^2 + m^2)(b^2\lambda^2 + m^2) d\varphi \right), \quad (21)$$

где вектор χ_0 задается выражениями (16) или (20). Из вида постоянного вектора χ_0 в различных массовых и спиновых состояниях (16) и (20) приходим к выводу, что в поле плоской электромагнитной волны возможны переходы между этими состояниями, что согласуется с отличной от 0 вероятностью перехода между различными состояниями частицы в электромагнитном поле, подсчитываемой по теории возмущений [2].

Литература

1. Федоров Ф. И. ДАН СССР, 174, 334, 1967.
2. Лобко С. И. Автореф. канд. дисс. М., 1965.
3. Федоров Ф. И. ДАН СССР, 65, 813, 1949.
4. Volkov D. M. Zs. f. Phys., 94, 250, 1935.

Белорусский государственный университет
им. В. И. Ленина

Поступило в редакцию
18.VI 1970

О. С. ИВАНИЦКАЯ

**УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ В ПОЛЕ ТЯГОТЕНИЯ
 КАК КАЛИБРОВКА ТЕТРАД**

Различные виды калибровочных условий. Калибровочные постоянные. Уравнения тяготения Эйнштейна могут быть записаны относительно 16 тетрад h_{μ}^k (обобщенных коэффициентов Ламэ, тетрадных потенциалов) [1-3]*):

$$R_{\mu k} - \frac{1}{2} h_{\mu k} R = \kappa T_{\mu k}. \quad (1)$$

В заданной системе координат их решение неоднозначно, пока не добавлено 6 дополнительных калибровочных условий. Если они алгебраические, тетрады находятся однозначно. Пример алгебраической калибровки: $h_{\mu}^k = 0$ при $\mu > k$ (треугольная матрица тетрад [1]). Дифференциальные калибровки тетрад приводят к классу решений уравнений (1), поскольку с их помощью тетрады находятся с точностью до 6 постоянных интегрирования (будем называть их калибровочными постоянными). В равной мере, пока не выбраны калибровочные постоянные, остаются неоднозначными и решения 10 алгебраических уравнений при заданном $g_{\mu\nu}$:

$$g_{\mu\nu} = h_{\mu}^k h_{\nu}^n \eta_{kn} = h_{\mu}^{k'} h_{\nu}^{n'} \eta_{k'n'} = \dots = \text{inv}, \quad (2)$$

$$\eta_{kn} = \text{diag} (1, 1, 1, -1).$$

Выбор калибровочных постоянных фиксирует определенное решение в классе решений уравнений (2) или тетрадных уравнений Эйнштейна (1), соответствующее данной дифференциальной калибровке.

Согласно [4], калибровочные условия могут быть записаны в виде $\varphi_{kn} = 0$, где φ_{kn} — антисимметричный тензор, построенный из тетрад и их первых и вторых производных. В частности, $\varphi_{kn} = \gamma_{kn4} = 0$ [5]. В [2] дифференциальная калибровка тетрад задается частично в виде локального аналога условий гармоничности.

Может оказаться, что все пространство — время нельзя покрыть одними калибровочными условиями, например вне и внутри сферы Шварцшильда [2]. В зависимости от постановки задачи калибровочные условия могут относиться ко всем точкам пространства — времени или некоторой его области, в том числе их задание может требоваться лишь вдоль некоторой линии. Ниже рассмотрим случай, когда калибровка задается с помощью уравнений движения вдоль мировой линии тела, свободно падающего в поле тяготения.

Уравнения движения как калибровочные условия «свободно падающих тетрад». Как подчеркнуто в [6] (в других обозначениях), «для данного метрического поля $g_{\mu\nu}(x)$ тетрадное

* Греческие (общековариантные) и латинские (лоренцевы) индексы начала алфавитов до κ и k пробегают значения 1, 2, 3, после κ и k — 1, 2, 3, 4. Численные значения латинских индексов помещаются в скобки.

поле определяется этими формулами (имеются в виду уравнения (2)) лишь с точностью до произвольного лоренц-поворота тетрад, ибо если некоторое h_{μ}^k удовлетворяет формулам (имеется в виду (2)) при данном $g_{\mu\nu}(x)$, то тогда всякое

$$h_{\mu k'} = L_{k'}^n(x) h_{\mu n}$$

будет удовлетворять им при условии, что функции $L_{k'}^n(x)$ в каждой точке x подчиняются обычным требованиям ортогональности». Локальные параметры круговых поворотов всегда могут быть выбраны в виде трех углов $\varphi_{\alpha}(x)$, гиперболических поворотов — трех компонент скорости $dx^{\alpha}/dx^{(4)} = v^{\alpha(4)}(x)$. Следовательно, тетрады

$$h_{\mu}^{k'} = L_{k'}^n(\varphi_{\alpha}, v^{\alpha(4)}) h_{\mu}^n(x) = h_{\mu}^{k'}(x) \quad (3)$$

при различных значениях $\varphi_{\alpha}(x)$ и $v^{\alpha(4)}$ также являются решениями тетрадных уравнений Эйнштейна (1), как и некоторые исходные тетрады h_{μ}^k . Поэтому выбор параметров локального лоренцева преобразования вместе с исходными тетрадами играет роль задания нового калибровочного условия. Коль скоро 3 параметра гиперболических поворотов могут быть отождествлены с компонентами локальной скорости, они удовлетворяют уравнениям движения и являются их первыми интегралами. Таким образом, уравнения движения вместе с исходными тетрадами выполняют роль новых калибровочных условий.

Наиболее распространены диагональные тетрады — корни квадратные из $g_{\mu\nu}$ в ортогональной системе координат с началом в гравитирующем центре. Они могут рассматриваться как связанные с телами, закрепленными в точках $r > r_0$ относительно источника поля тяготения. Это видно, например, из выражения для элемента собственного времени [7]:

$$dx^{(4)'} = d\tau' = dx^4 \left(g_{44} + 2g_{\alpha 4} \frac{dx^{\alpha}}{dx^4} + g_{\alpha\beta} \frac{dx^{\alpha}}{dx^4} \frac{dx^{\beta}}{dx^4} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (4)$$

Действительно, в частности, когда $\frac{dx^{\alpha}}{dx^4} = 0$, имеем

$$d\tau = [dx^{(4)}]_{dx^{\alpha}/dx^4=0} = h_4^{(4)} dx^4 = \sqrt{g_{44}} dx^4, \quad (5)$$

где dx^{α}/dx^4 — мировые [компоненты скорости относительно гравитирующего центра, находящегося в начале координат. Если dx^{α}/dx^4 отличны от нуля, тетрады перестают быть диагональными и с их помощью выражение (4) может быть записано в виде

$$dx^{(4)'} = d\tau' = h_{\mu}^{(4)'} dx^{\mu} = L^{(4)'}_k h_{\mu}^k dx^{\mu}. \quad (6)$$

Тетрады $h_{\mu}^{k'}$, которые уже следует рассматривать как связанные с движущимся телом, так же как и h_{μ}^k , удовлетворяют тетрадному уравнению Эйнштейна. Если $h_{\mu}^{k'}$ принадлежат свободно падающему пробному телу, они входят также в уравнение геодезической:

$$\dot{x}^{\mu} \nabla_{\mu} \dot{x}^{\lambda} = \dot{x}^{\mu} \nabla_{\mu} (h^{\lambda}_{k'} \dot{x}^{k'}) = h^{\lambda}_{k'} \frac{D\dot{x}^k}{ds} + \dot{x}^k \frac{Dh^{\lambda}_{k'}}{ds} = 0, \quad \frac{D}{ds} = \dot{x}^{\mu} \nabla_{\mu}. \quad (7)$$

При условии «падающих тетрад», сформулированном в [8],

$$\frac{Dh^{\lambda}_{k'}(s)}{ds} = 0 \quad (8)$$

имеем

$$\frac{D\dot{x}^k}{ds} = \ddot{x}^k + \gamma^k_{n\lambda} \dot{x}^n \dot{x}^{\lambda} = 0, \quad (9)$$

где коэффициенты вращения Риччи построены из исходных тетрад, относящихся, например, к закрепленной системе тел. Тогда первые интегралы уравнений движения (9), т. е. \dot{x}^k , дают три параметра $dx^a/dx^{(4)}$ лоренцева преобразования — локальные скорости относительно закрепленной системы тел, а следовательно, и относительно гравитирующего центра. Применяя локальные лоренцевы преобразования с этими параметрами как функциями координат к тетрадам h_μ^k закрепленной системы тел, находим падающие тетрады $h_\mu^{k'}$. Таким образом, четыре уравнения движения (9) относительно четырех компонент x^k , равноценные трем уравнениям движения относительно $dx^a/dx^{(4)}$, играют роль трех калибровочных условий, причем дифференциальных и, следовательно, приводят к некоторому классу падающих тетрад — классу решений тетрадного уравнения Эйнштейна. Калибровочными постоянными, определяющими этот класс решений, и являются постоянные интегрирования уравнений движения.

Класс «падающих тетрад» в поле Шварцшильда. Класс локальных лоренцевых преобразований, зависящих от постоянных интегрирования уравнений движения. Примем в качестве исходных тетрады

$$h_\mu^k = \text{diag} \left(a, r, \frac{1}{a} \right), \quad \sin \theta = 1, \quad a = \left(1 - \frac{2m}{r} \right)^{-\frac{1}{2}}, \quad (10)$$

для простоты ограничившись подпространством (x^1, x^3, x^4) . Ему соответствуют три калибровочных условия. Два — связанных с гиперболическими поворотами, одно — с круговыми. Коэффициенты вращения Риччи, вычисленные с помощью (10), имеют вид [3]

$$\gamma_{kn1} = 0, \quad \gamma_{(1)(3)3} = -\frac{1}{a}, \quad \gamma_{(1)(4)4} = \frac{m}{r^2}. \quad (11)$$

Подставив (11) в (9) и интегрируя относительно $\frac{dx^a}{dx^{(4)}}$, находим

$$\frac{dx^{(1)}}{dx^{(4)}} = \frac{1}{ak} \left(a^2 k^2 - 1 - \frac{h^2}{r^2} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad \frac{dx^{(3)}}{dx^{(4)}} = \frac{h}{kar}, \quad (12)$$

где h и k — постоянные интегрирования. Они же играют роль калибровочных постоянных. Следовательно, локальное лоренцево преобразование гиперболических поворотов в подпространстве (x^1, x^3, x^4) в общем случае двухпараметрическое и содержит постоянные интегрирования h и k :

$$L_n^{k'} = \begin{pmatrix} ak - \frac{h^2}{r^2(ak+1)} \pm \frac{h \left(a^2 k^2 - 1 - \frac{h^2}{r^2} \right)^{\frac{1}{2}}}{r(ak+1)} \mp \left(a^2 k^2 - 1 - \frac{h^2}{r^2} \right)^{\frac{1}{2}} \\ \pm \frac{h \left(a^2 k^2 - 1 - \frac{h^2}{r^2} \right)^{\frac{1}{2}}}{r(ak+1)} & 1 + \frac{h^2}{r^2(ak+1)} & -\frac{h}{r} \\ \mp \left(a^2 k^2 - 1 - \frac{h^2}{r^2} \right)^{\frac{1}{2}} & -\frac{h}{r} & ak \end{pmatrix}, \quad (13)$$

$$\gamma = \left(1 - \frac{v_{\pi}^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}} = ak, \quad v_{\pi}^2 = [(v^{(1)}_{(4)})^2 + (v^{(3)}_{(4)})^2].$$

Применив (13) к тетрадам (10), находим класс тетрад, свободно падающих относительно гравитирующего центра:

$$h_{\mu}{}^{k'} = \begin{pmatrix} a^2k - \frac{ah^2}{r^2(ak+1)} \pm \frac{ah\left(a^2k^2 - 1 - \frac{h^2}{r^2}\right)^{\frac{1}{2}}}{r(ak+1)} \mp a\left(a^2k^2 - 1 - \frac{h^2}{r^2}\right)^{\frac{1}{2}} \\ \pm \frac{h\left(a^2k^2 - 1 - \frac{h^2}{r^2}\right)^{\frac{1}{2}}}{ak+1} & r + \frac{h^2}{r(ak+1)} & -h \\ \mp \frac{\left(a^2k^2 - 1 - \frac{h^2}{r^2}\right)^{\frac{1}{2}}}{a} & \frac{h}{ra} & k \end{pmatrix}. \quad (14)$$

Конечно, лоренцевы параметры, указанные в (12), могут быть найдены перелицовкой с помощью тетрад (10) мировых компонент скорости — первых интегралов геодезической, отнесенных к глобальной системе координат:

$$\frac{dx^{(3)}}{dx^{(4)}} = \frac{h_{\mu}{}^{(3)}dx^{\mu}}{h_{\nu}{}^{(4)}dx^{\nu}} = ar \frac{d\varphi}{dx^4}, \quad \frac{dx^{(1)}}{dx^{(4)}} = a^2 \frac{dr}{dx^4}. \quad (15)$$

При подстановке в (9) $\gamma^k_{n\lambda}$, построенных не из (10), а из некоторых других тетрад, приходим к тетрадам, падающим относительно других объектов, связанных с другими исходными тетрадами.

Классу тетрад (14) соответствует классификация орбит тел, падающих в поле Шварцшильда, приведенная в [9]. В частности, если

$$h = 0, \quad k = -\left(1 - \frac{r_0}{r_1}\right)^{\frac{1}{2}}, \quad (16)$$

имеем случай тетрад, свободно падающих вместе с пробным телом по радиусу. Значение калибровочной постоянной k соответствует условию

$$v^{(1)}_{(4)} = \left. \frac{dx^{(1)}}{dx^{(4)}} \right|_{r=r_1} = 0. \quad \text{Тогда}$$

$$L^{k'}_n = \begin{pmatrix} \left(\frac{1-r_0/r_1}{1-r_0/r}\right)^{\frac{1}{2}} & \left(\frac{r_0/r - r_0/r_1}{1-r_0/r}\right)^{\frac{1}{2}} \\ \left(\frac{r_0/r - r_0/r_1}{1-r_0/r}\right)^{\frac{1}{2}} & \left(\frac{1-r_0/r_1}{1-r_0/r}\right)^{\frac{1}{2}} \end{pmatrix}. \quad (17)$$

В частности, при $r_1 = \infty$ имеем

$$h_{\mu}{}^{k'} = \begin{pmatrix} \left(1 - \frac{r_0}{r}\right)^{-1} & \sqrt{\frac{r_0}{r}} \left(1 - \frac{r_0}{r}\right)^{-1} \\ \sqrt{\frac{r_0}{r}} & 1 \end{pmatrix}. \quad (18)$$

Легко убедиться, что собственное время падающего по радиусу тела, найденное из (16) и (18), совпадает с найденным в [10] с помощью (4) и что тетрады (18), как и исходные тетрады (10), удовлетворяют уравнению тяготения Эйнштейна.

Если в (14) h — постоянная площадей, $k = \left(1 - \frac{m}{p} + \frac{m}{p} e^2\right)^{\frac{1}{2}}$, то

тетрады описывают тела, движущиеся в поле Шварцшильда по орбитам в классическом приближении, характеризующемся p и e — фокальным параметром и эксцентриситетом.

Распространено суждение, что калибровочные условия независимы от уравнений поля. Вариант калибровочных условий, выводимых вместе с уравнениями поля из единого вариационного принципа, предложенный в [11], выходит за рамки эйнштейновой теории гравитации. Калибровка падающих тетрад, оставаясь в рамках эйнштейновой теории, становится связанной с принципом геодезической. Известные работы А. Эйнштейна с сотрудниками и работы В. А. Фока, продолженные Н. М. Петровой и другими, показали, что уравнения движения пробного тела в поле тяготения для некоторых типов тензора энергии-импульса выводятся из уравнений поля.

Поэтому вопрос о зависимости калибровочных условий для падающих тетрад как уравнений движения пробных тел от уравнений поля сводится к вопросу независимости принципа геодезических [9].

Наконец, остановимся на физической значимости падающих тетрад и их возможном применении. Как видно из замечания, относящегося к тетрадам (18), собственное время падающих тел в сильном поле тяготения содержит релятивистскую поправку — добавочное время, за которое тело проходит добавочный путь вдоль радиуса. Аналогичное относится и к добавочным длинам, появляющимся в результате интегрирования компонент $dx^{\alpha'} = h_{\mu}^{\alpha'} dx_{\mu}$. В [12] рассмотрены падающие тетрады, соответствующие в классическом приближении эллиптическим орбитам. Сравнение собственных времени и пути, вычисленных с помощью таких падающих тетрад, с аналогичными величинами для далекого наблюдателя привело к новой интерпретации релятивистской поправки вращения перигелия планеты. Эта поправка имеет ту же физическую природу, что и указанный выше добавочный путь частицы, падающей вдоль радиуса. В более сложном случае при $h \neq 0$ добавочный путь описывается добавочным углом на каждый оборот вращающейся планеты. Естественно предположить, что в основе любых релятивистских эффектов, связанных с движением в поле тяготения, лежат поправки к собственным величинам движущихся тел. Подсчет этих поправок может быть осуществлен либо с помощью падающих тетрад, как в [12], либо с помощью метрического тензора и мировых компонент скорости, как в связи с анализом «парадокса часов» в поле тяготения сделано в [7], т. е. для собственного времени с помощью соотношения (4), которое используется и в [10], или, наконец, с помощью хронометрических инвариантов (хронометрически инвариантных времени и длин) [13].

Литература

1. Румер Ю. Б. Исследования по 5-оптике. М., 1956.
2. Родичев В. И. Эйнштейновский сборник, № 1, 115. М., 1968.
3. Иваницкая О. С. Обобщенные преобразования Лоренца и их применения. Минск, 1969.
4. Møller C. Mat. Fys. Skr. Vid. Selsk. 1, № 10, 1961.
5. Peres A. Phys. Rev. Lett., 4, 59, 1963.

6. Мёллер Х. Сб. «Гравитация и топология». М., 1966, стр. 39.
7. Фок В. А. Теория пространства, времени и тяготения. М., 1961.
8. Plebanski J. Acta phys. polon., 28, 141, 1965.
9. Богородский А. Ф. Уравнения поля Эйнштейна и их применение в астрономии. Киев, 1962.
10. Зельдович Я. Б., Новиков И. Д. Релятивистская астрофизика. М., 1967.
11. Pellegrini C., Plebanski J. Mat.-fys. med. Kgl. danske, 2, 1, 39, 1963.
12. Иваницкая О. С. Сб. «Гравитация и теория относительности», № 7, 106. Казань, 1970.
13. Иваницкая О. С. ДАН БССР, 14, 701, 1970.

Институт физики
АН БССР

Поступило в редакцию
14.V 1970

Н. В. МАКСИМЕНКО, Л. Г. МОРОЗ

ДВОЙНЫЕ ДИСПЕРСИОННЫЕ СООТНОШЕНИЯ ДЛЯ АМПЛИТУДЫ ДЕЙТРОННОГО КОМПТОН-ЭФФЕКТА

В работе [1] исследованы аналитические свойства амплитуды комптон-эффекта на дейтроне и получены спектральные функции 12 независимых амплитуд, соответствующих диаграмме 4-го порядка.

В настоящей работе на основе анализа амплитуды комптон-эффекта на дейтроне, проведенного в работе [1], определяются двойные дисперсионные соотношения Мандельштама с одним вычитанием.

В разделе 1 обсуждаются двойные дисперсионные соотношения без вычитания. Раздел 2 посвящен определению вкладов полюсных членов. В разделе 3 на основе установленного поведения независимых амплитуд как функций s и t выписаны двойные дисперсионные соотношения с одним вычитанием, согласующиеся с низкоэнергетическим пределом амплитуды дейтронного комптон-эффекта.

1. Дисперсионные соотношения для амплитуды комптон-эффекта на дейтроне. Предположим, что амплитуда комптон-эффекта на дейтроне $F(s, u, t)$ является аналитической функцией s, u, t , за исключением полюсов и разрезов, соответствующих динамическим сингулярностям. Ближайшими динамическими особенностями по отношению к физическим областям в каналах I и II являются полюса $s=D^2$, $u=D^2$ и разрезы, которые, как было показано в работе [1], начинаются в точках $s=4M^2$, $t=t_0(s)$ (для канала I) и $u=4M^2$, $t=t_0(u)$ (для канала II) (см. рис. 1). В канале III амплитуда $F(s, u, t)$, как показано в работе [3], имеет особенности, которые аппроксимируются полюсными членами, соответствующими вкладу типа η -мезона, в процессе аннигиляции дейтрона и антидейтрона в 2γ -кванта.

Ради простоты при записи дисперсионных соотношений в настоящей работе члены канала III не учитываются. Однако следует отметить, что их можно легко ввести одним из предложенных ранее способов (см., например, [3], [5]).

Представим амплитуду $F(s, u, t)$ в виде [6]

$$F(s, u, t) = F^I(s, t) + F^{II}(u, t), \quad (1)$$

где $F^I(s, t)$ и $F^{II}(u, t)$ — аналитические функции, за исключением полюсов и разрезов в каналах I и II соответственно.

На основании аналитических свойств амплитуд $F^I(s, t)$ и $F^{II}(u, t)$ и при условии, что спектральные функции этих амплитуд достаточно быстро стремятся к 0 при $s \rightarrow \infty$ и $t \rightarrow \infty$, можно с помощью теоремы Коши записать двойные дисперсионные соотношения:

$$F(s, u, t) = B^I(s, t) + B^{II}(u, t) + \\
 + \frac{1}{\pi^2} \iint \frac{\rho(s', t') ds' dt'}{(s' - s)(t' - t)} + \frac{1}{\pi^2} \iint \frac{\rho(u', t') du' dt'}{(u' - u)(t' - t)}, \quad (2)$$

где $B^I(s, t)$ и $B^{II}(u, t)$ — полюсные члены в каналах I и II соответственно, $\rho(s, t)$ и $\rho(u, t)$ — спектральные функции, отличные от нуля в областях, ограниченных кривыми $L^{(s)}$ и $L^{(u)}$ (рис. 1), на которых расположены ближайшие точки ветвления амплитуды комптон-эффекта.

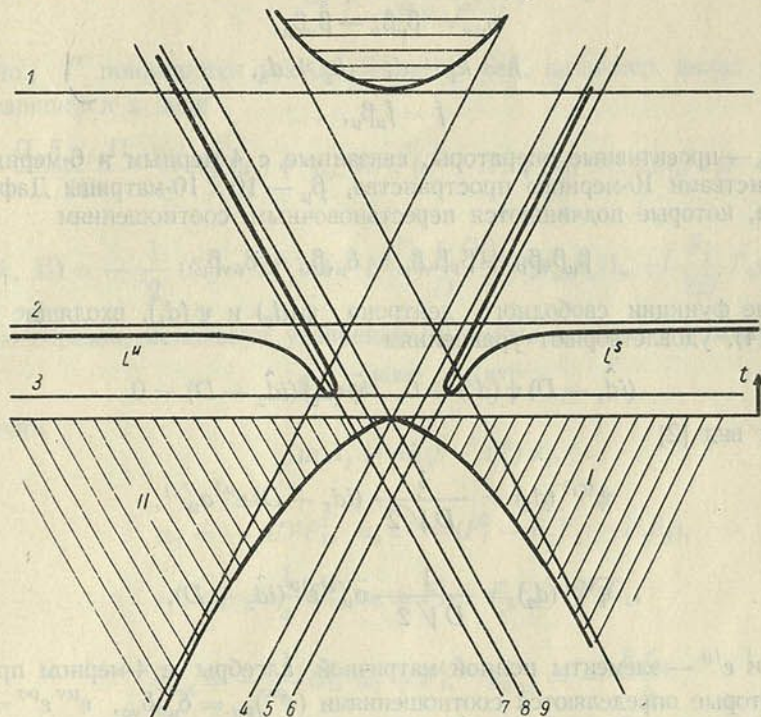


Рис. 1. Кинематика процессов I—II:

$$1-t=4D^2, \quad 2-t=4M^2, \quad 3-t=\frac{D^2}{M^2}(4M^2-D^2), \quad 4-s=D^2, \quad 5-4M^2,$$

$$6-s=\frac{2M^2D^2}{D^2-2M^2}, \quad 7-u=\frac{2M^2D^2}{D^2-2M^2}, \quad 8-u=4M^2, \quad 9-u=D^2$$

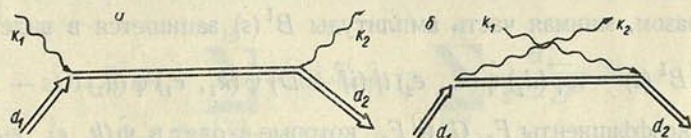


Рис. 2.

2. Вклад одноплетронных полюсных членов $B_i^I(s, t)$ и $B^{II}(u, t)$ в амплитуду комптон-эффекта на дейтроне. Дисперсионные соотношения для амплитуды, соответствующей диаграмме (см. рис. 2, a), имеют вид

$$B^I(s) = \frac{1}{\pi} \int \frac{\text{Im} B^I(s') ds'}{s' - s}. \quad (3)$$

Для определения $\text{Im} B^I(s)$ запишем матричный элемент этой диаграммы в формализме Даффина — Кеммера [7], используемом для описания частиц со спином 1:

$$B^I(s) = (-2) \bar{\psi}(d_2) \hat{\psi}(k_2, e_2) \frac{i\hat{f}(i\hat{f} - D) + f^2 + D^2}{f^2 + D^2} \hat{\psi}(k_1, e_1) \psi(d_1). \quad (4)$$

Здесь

$$\hat{\psi}(k, e) = -\frac{1}{2}(F_2 - 2F_1)\hat{e} - i\frac{(F_1 + G_1)}{D}P_4\sigma_{\mu\nu}k_\mu e_\nu + i\frac{F_2}{2D}P_6\sigma_{\mu\nu}k_\mu e_\nu,$$

$$\sigma_{\mu\nu} = \beta_\mu\beta_\nu - \beta_\nu\beta_\mu,$$

$$\hat{f} = k_1 + d_1 = k_2 + d_2,$$

$$\hat{f} = f_\mu\beta_\mu,$$

P_4 и P_6 — проективные операторы, связанные с 4-мерным и 6-мерным подпространствами 10-мерного пространства, β_μ — 10×10 -матрицы Даффина — Кеммера, которые подчиняются перестановочным соотношениям

$$\beta_\mu\beta_\nu\beta_\rho + \beta_\rho\beta_\nu\beta_\mu = \delta_{\mu\nu}\beta_\rho + \delta_{\rho\nu}\beta_\mu.$$

Волновые функции свободного дейтрона $\bar{\psi}(d_2)$ и $\psi(d_1)$, входящие в выражение (4), удовлетворяют уравнениям

$$(i\hat{d}_1 - D)\psi(d_1) = 0, \quad \bar{\psi}(d_2)(i\hat{d}_2 - D) = 0 \quad (5)$$

и имеют вид [2]

$$\psi^{(r_1)}(d_1) = \frac{1}{D\sqrt{2}}(i\hat{d}_1 + D)\varepsilon^{\mu 1}a_\mu^{(r_1)}, \quad (6)$$

$$\bar{\psi}^{(r_2)}(d_2) = \frac{1}{D\sqrt{2}}\bar{a}_\mu^{(r_2)}\varepsilon^{1\mu}(i\hat{d}_2 + D),$$

где $\varepsilon^{\mu 1}$ и $\varepsilon^{1\mu}$ — элементы полной матричной алгебры в 4-мерном пространстве, которые определяются соотношениями $(\varepsilon^{\mu\nu})_{\rho\sigma} = \delta_{\mu\rho}\delta_{\nu\sigma}$, $\varepsilon^{\mu\nu}\varepsilon^{\rho\sigma} = \delta_{\nu\rho}\varepsilon^{\mu\sigma}$. Согласно правилу Кутковского [8], мнимая часть амплитуды равна матричному элементу (4), если в этом выражении сделать замену

$$\frac{1}{f^2 + D^2} \rightarrow \pi\delta(f^2 + D^2) = \pi\delta(s - D^2). \quad (7)$$

Таким образом, мнимая часть амплитуды $B^I(s)$ запишется в виде

$$\text{Im} B^I(s) = \pi\bar{\psi}(d_2)\hat{\psi}(k_2, e_2) i\hat{f}(i\hat{f} + D)\hat{\psi}(k_1, e_1)\psi(d_1)\delta(s - D^2). \quad (8)$$

При этом коэффициенты F_1 , G_1 и F_2 , которые входят в $\hat{\psi}(k, e)$, выражаются следующим образом [9]:

$$F_1 = e, \quad G_1 = 2D\mu, \quad F_2 = D^2Q + 2D\mu - e, \quad (9)$$

где e — заряд дейтрона, μ — магнитный момент дейтрона в единицах $\frac{e}{2D}$

и Q — квадрупольный момент в единицах $\frac{e}{D^2}$.

Чтобы определить вклад $\text{Im} B^I(s)$ в инвариантные амплитуды A_i (см. работу [3]), необходимо выделить в выражении (8) спиновые структуры матрицы $F_{\mu\nu\rho\sigma}$. Для этого представим $F_{\mu\nu\rho\sigma}$ в виде [6]

$$F_{\mu\nu\rho\sigma} = \frac{\Pi_\mu\Pi_\nu}{\Pi^2}C_1^{\rho\sigma} + \frac{N_\mu N_\nu}{N^2}C_2^{\rho\sigma} + \frac{\Pi_\mu N_\nu - \Pi_\nu N_\mu}{\sqrt{\Pi^2 N^2}}C_3^{\rho\sigma} + \frac{\Pi_\mu N_\nu + \Pi_\nu N_\mu}{\sqrt{\Pi^2 N^2}}C_4^{\rho\sigma}. \quad (10)$$

Так как векторы Π и N ортогональны, то вклад $\text{Im } B^I(s)$ в $C_i^{\rho\sigma}$ можно вычислить, воспользовавшись формулой

$$C_i^{\rho\sigma} = \frac{l_\mu^{\alpha'} F_{\mu\nu\rho\sigma} l_\nu^{\alpha'}}{|l^\alpha|^2 |l^{\alpha'}|^2}, \quad (11)$$

где под l^α понимаются векторы Π и N . Так, например, вклад $\text{Im } B^I(s)$ в $C_1^{\rho\sigma}$ запишется в виде

$$C_1^{\rho\sigma} = \frac{\Pi_\mu F_{\mu\nu\rho\sigma} \Pi_\nu}{\Pi^2} = \pi \bar{\psi}(d_2) \hat{\psi}(k_2, \Pi) i \hat{f}(i \hat{f} + D) \hat{\psi}(k_1, \Pi) \psi(d_1) \delta(s - D^2), \quad (12)$$

где

$$\hat{\psi}(k, \Pi) = -\frac{1}{2} (F_2 - 2F_1) \hat{\Pi} - i \frac{(F_1 + G_1)}{D} P_4 \sigma_{\mu\nu} k_\mu \Pi_\nu + i \frac{F_2}{2D} P_6 \sigma_{\mu\nu} k_\mu \Pi_\nu.$$

Таким образом, используя уравнения (5) и (6), а также учитывая, что

$$\beta_\nu = \varepsilon^{u[\mu\nu]} + \varepsilon^{[\mu\nu]v},$$

получим

$$\text{Im } A_i = \pi \delta(s - D^2) \alpha_i, \quad (13)$$

где

$$\alpha_1 = -4D^2 F_1^2, \quad \alpha_3 = -(F_1^2 - F_2 F_1 + F_1 G_1),$$

$$\alpha_4 = \frac{1}{4} G_1^2, \quad \alpha_5 = F_1^2 + F_1 F_2 - F_1 G_1,$$

$$\alpha_{6,8} = -\frac{1}{4} G_1^2, \quad \alpha_7 = F_1^2, \quad \alpha_{9,11} = -\frac{F_1 G_1}{2},$$

$$\alpha_{2, 10, 12} = 0.$$

При выводе выражения (13) учитывалось, что в полюсе ($s = D^2$) $PK = -K^2$.

Подставив (13) в формулу (3) и выполнив интегрирование по s , найдем вклад $B^I(s)$ однодейтронной полюсной диаграммы (см. рис. 2, а) в амплитуды A_i :

$$B^I(s) = \sum_{i=1}^{12} B_i^I(s) S_{\mu\nu\rho\sigma}^i = \sum_{i=1}^{12} \frac{\alpha_i}{s - D^2} S_{\mu\nu\rho\sigma}^i. \quad (14)$$

Так как амплитуда комpton-эффекта на дейтроне инвариантна относительно перекрестной симметрии, то амплитуда, соответствующая диаграмме (см. рис. 2, б), имеет вид

$$B^{II}(u) = \sum_{i=1}^{12} \frac{\eta_i \alpha_i}{u - D^2} S_{\mu\nu\rho\sigma}^i, \quad (15)$$

где

$$\eta_i = \begin{cases} +1 & \text{для } i = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 9, 11, \\ -1 & \text{для } i = 7, 8, 10, 12. \end{cases}$$

3. Дисперсионные соотношения для независимых амплитуд дейтронного комpton-эффекта. Чтобы выписать дисперсионные соотношения для 12 независимых амплитуд, определим по-

ведение спектральных функций этих амплитуд при $s \rightarrow \infty$ и при $t \rightarrow \infty$. Из выражений (27—34) работы [1] следует, что

$$(11) \quad \rho_i(s, t) \xrightarrow{s \rightarrow \infty} \begin{cases} \text{const} & \text{для } i = 1, \dots, 10, \\ 0 & \text{для } i = 11, 12. \end{cases}$$

Аналогично ведут себя спектральные функции $\rho_i(s, t)$ по отношению к t при фиксированном s . Такое поведение спектральных функций амплитуды четырехугольной диаграммы приводит к расходимости интегралов в двойных дисперсионных соотношениях (2). Поэтому приходится прибегнуть к вычитанию по переменным s и t .

Если предположить, что степень убывания спектральных функций полной амплитуды при $s \rightarrow \infty$ и $t \rightarrow \infty$ не выше, чем у спектральных функций $\rho_i(s, t)$, соответствующих диаграмме 4-го порядка, то для обеспечения сходимости указанных интегралов достаточно сделать одно вычитание по s и одно по t .

Без указанного вычитания дисперсионные соотношения (2) не обеспечивают и низкоэнергетического предела. Действительно, сумма $B_i^I(s, c) + B_i^{II}(u, c)$ в лабораторной системе имеет вид

$$(12) \quad B_i = B_i^I(s, c) + B_i^{II}(u, c) = \begin{cases} -\frac{\alpha_i}{2D^2}(1-c) & \text{для } i = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 9, 11, \\ 2 + \frac{k_{10}}{D}(1-c) & \\ \frac{\alpha_i}{2D} \frac{1}{k_{10}} & \text{для } i = 7, 8, 10, 12, \end{cases}$$

где $c = \frac{k_1 k_2}{k_{10} k_{20}} = \cos \theta$, а α_i определяются формулами (13). При $k_0 \rightarrow 0$ B_i должны были бы совпадать с A_i в низкоэнергетическом пределе. В то же время в этом пределе [3]*

$$(13) \quad \begin{aligned} A_1^0(k_0 = 0, c) &= 2F_1^2 c, & A_2^0(k_0 = 0, c) &= -2F_1^2, \\ A_9^0 &= A_{10}^0(k_0 = 0, c) = -\frac{F_1 G_1}{4D^2}(c-1) - \frac{1}{2} \left(\frac{G_1}{2D} - \frac{F_1}{D} \right)^2, & (16) \\ A_{11}^0(k_0 = 0, c) &= \frac{F_1 G_1}{4D^2}(c-1) - \frac{1}{2} \left(\frac{G_1}{2D} - \frac{F_1}{D} \right)^2. \end{aligned}$$

Выполнив вычитание по s и t в точках $s = D^2$, $u = D^2$ и $t = 0$ для каждой из 12 амплитуд, соответствующих независимым спиновым структурам, приходим к следующим дисперсионным соотношениям:

$$(17) \quad A_i = \begin{cases} C_i + B_i^I(s, c) + B_i^{II}(u, c) - B_i^I(s = D^2, c = 1) - B_i^{II}(u = D^2, c = 1) + Y_i(s, u, t) & \text{для } i = 1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, \\ C_i + Y_i(s, u, t) & \text{для } i = 2, 12. \end{cases}$$

Здесь

$$Y_i(s, u, t) = \frac{s - D^2}{\pi} \int_{4M^2}^{\infty} \frac{\Phi_i(s', 0) ds'}{(s' - D^2)(s' - s)} + \frac{t}{\pi} \int_{t_0(s)}^{\infty} \frac{\Phi_i(t', s = D^2) dt'}{t'(t' - t)} +$$

* В дальнейшем под A_9 и A_{10} будем понимать амплитуды, не содержащие кинематические сингулярности (см. [1]).

$$\begin{aligned}
 & + \frac{u - D^2}{\pi} \int_{4M^2}^{\infty} \frac{\Phi_i(u', 0) du'}{(u' - D^2)(u' - u)} + \frac{t}{\pi} \int_{t_0(u)}^{\infty} \frac{\Phi_i(t', u = D^2) dt'}{t'(t' - t)} + \\
 & + \frac{t(s - D^2)}{\pi^2} \int_{4M^2}^{\infty} \int_{t_0(s)}^{\infty} \frac{\rho_i(s', t') ds' dt'}{(s' - D^2)(s' - s)t'(t' - t)} + \\
 & + \frac{t(u - D^2)}{\pi^2} \int_{4M^2}^{\infty} \int_{t_0(u)}^{\infty} \frac{\rho_i(u', t') du' dt'}{(u' - D^2)(u' - u)t'(t' - t)}.
 \end{aligned}$$

Функции $\Phi_i(x, 0) = \text{Im } A_i(x, t = 0)$, $\Phi_i(t, x = D^2) = \text{Im } A_i(t, x = D^2)$ можно вычислить, используя условие унитарности S -матрицы рассеяния, а константы вычитания получаются из условия соответствия с низкоэнергетическим пределом и имеют вид

$$C_i = \begin{cases} -2F_1^2(1 - 2c) & \text{для } i = 1, \\ -2F_1^2 & \text{для } i = 2, \\ \frac{\alpha_i}{2D^2}(1 - c) & \text{для } i = 3, 4, 5, 6, \\ \frac{F_1 G_1}{2D^2}(c - 1) + \frac{1}{2} \left(\frac{G_1}{2D} - \frac{F}{D} \right)^2 & \text{для } i = 9, 10, \\ \frac{F_1 G_1}{2D^2}(c - 1) - \frac{1}{2} \left(\frac{G_1}{2D} - \frac{F_1}{D} \right)^2 & \text{для } i = 11, \\ -\frac{\alpha_i}{2D^2}(1 - c) & \text{для } i = 7, 8, \\ 0 & \text{для } i = 12. \end{cases}$$

Авторы выражают благодарность участникам семинара лаборатории теоретической физики за полезное обсуждение и ценные замечания.

Литература

1. Максименко Н. В. Вестн АН БССР, сер. физ.-мат. наук, № 4, 1970.
2. Мороз Л. Г. Вестн АН БССР, сер. физ.-мат. наук, № 4, 1967.
3. Rokorski S. Bull. l'Acad. Polon. Sci., 14, 171, 215, 1966.
4. Rokorski S. Acta Physica Polonica, 33, 929, 1968.
5. Рекало М. П. УФЖ, 11, 1286, 1966.
6. Фильков Л. В. Труды Физ. института АН СССР, 41, 3, 1968.
7. Богуш А. А., Мороз Л. Г. Введение в теорию классических полей. Минск, 1968.
8. Cutkosky R. E. J. Math. Phys., 1, 429, 1960.
9. Bellac M. et al., Nuovo Cimento, 33, 594, 34, 450, 1964.

Институт физики
АН БССР

Поступило в редакцию
16.IV 1970

Ю. І. ЧЭКАЛІНСКАЯ, А. П. ЧЭЧЭНІНА

ДА ПРЫБЛІЖАНАГА РАЗЛІКУ ВЫХАДНОЙ МАГУТНАСЦІ АКГ У ВЫПАДКУ НЕАДНАРОДНАГА ПАШЫРЭННЯ ЛІНІІ

Разлік генерыруемых патокаў як пры аднародным [1—3], так і пры неаднародным [3] пашырэнні лініі звязан з рашэннем трансцэндэнтных ураўненняў. Таму тут часта выкарыстоўваюцца розныя прыбліжаныя выразы [1, 4]. Для вызначэння граніц іх прымянімасці ў гэтай рабоце праведзена параўнанне вынікаў разліку патокаў генерацыі па прыбліжаных і дакладных формулах у выпадку неаднароднага пашырэння лініі. Усе разгляды адносяцца да адначастотнага рэжыму.

Асноўныя формулы. Дакладны разлік. Разгледзім квантавы генератар у стацыянарным рэжыме з доплераўскім контурам лініі ўзмацнення. У выпадку адначастотнага рэжыму зыходныя ўраўненні для патокаў залежаць ад месцазнаходжання частаты генерыруемага выпраменьвання ў адносінах да максімуму доплераўскага контура. Калі адлегласць частаты генерацыі ад цэнтра доплераўскага контура перавышае шырыню контура аднароднага пашырэння, то патокі, якія распаўсюджваюцца ў процілеглых напрамках, не ўплываюць адзін на аднаго, бо яны ўзаемадзейнічаюць з рознымі ўзбуджанымі часцінкамі. Пры гэтым зыходныя ўраўненні для патокаў выпраменьвання $S^+(z)$ і $S^-(z)$, распаўсюджваючыхся адпаведна ў дадатным і адмоўным напрамках восі z генератара, запісваюцца ў выглядзе [4]

$$dS^+(z) = (k^+(z) - \rho) S^+(z) dz, \quad (1)$$

$$dS^-(z) = -(k^-(z) - \rho) S^-(z) dz, \quad (2)$$

дзе ρ — каэфіцыент унутраных страт, а $k^+(z)$ і $k^-(z)$ — каэфіцыенты ўзмацнення актыўнага рэчыва [1]:

$$k^\pm(z) = \frac{k_0}{\sqrt{1 + \frac{\beta}{v} S^\pm(z)}}. \quad (3)$$

Тут k_0 — пачатковы каэфіцыент узмацнення, β — параметр нелінейнасці, v — скорасць святла.

У выніку рашэння ўраўненняў (1) і (2) з улікам (3), падобна [1], атрымаем

$$\begin{aligned} & -\frac{2k_0^2}{\rho} \ln \left[k_0 - \rho \sqrt{1 + \frac{\beta}{v} S^+(z)} \right] + \\ & + (k_0 + \rho) \ln \left[\sqrt{1 + \frac{\beta}{v} S^+(z)} - 1 \right] - \\ & - (k_0 - \rho) \ln \left[\sqrt{1 + \frac{\beta}{v} S^+(z)} + 1 \right] = (k_0^2 - \rho^2) z + c_1, \end{aligned} \quad (4)$$

$$-\frac{2k_0^2}{\rho} \ln \left[k_0 - \rho \sqrt{1 + \frac{\beta}{v} S^-(z)} \right] + (k_0 + \rho) \ln \left[\sqrt{1 + \frac{\beta}{v} S^-(z)} - 1 \right] - (k_0 - \rho) \ln \left[\sqrt{1 + \frac{\beta}{v} S^-(z)} + 1 \right] = -(k_0^2 - \rho^2) z + c_2. \quad (5)$$

Пастаянныя інтэграванні c_1 і c_2 у (4) і (5) вызначаюцца з гранічных умоў, розных для розных рэзанатараў. Спынімся на некалькіх найбольш распаўсюджаных тыпах рэзанатараў.

1. У выпадку генератара з плоскімі люстрамі, каэфіцыенты адбіцця якіх роўны r_1 і r_2 , гранічныя ўмовы запісваюцца ў выглядзе

$$S^+(0) = r_1 S^-(0), \quad S^-(l) = r_2 S^+(l). \quad (6)$$

З (4) і (5), улічваючы (6), атрымаем два ўраўненні для вызначэння невядомых патокаў $S^+(l)$ і $S^-(0)$:

$$-\frac{2k_0^2}{\rho} \ln \frac{k_0 - \rho \sqrt{1 + \frac{\beta}{v} S^+(l)}}{k_0 - \rho \sqrt{1 + \frac{\beta}{v} r_1 S^-(0)}} + (k_0 + \rho) \ln \frac{\sqrt{1 + \frac{\beta}{v} S^+(l)} - 1}{\sqrt{1 + \frac{\beta}{v} r_1 S^-(0)} - 1} - (k_0 - \rho) \ln \frac{\sqrt{1 + \frac{\beta}{v} S^+(l)} + 1}{\sqrt{1 + \frac{\beta}{v} r_1 S^-(0)} + 1} = (k_0^2 - \rho^2) l, \quad (7)$$

$$-\frac{2k_0^2}{\rho} \ln \frac{k_0 - \rho \sqrt{1 + \frac{\beta}{v} r_2 S^+(l)}}{k_0 - \rho \sqrt{1 + \frac{\beta}{v} S^-(0)}} + (k_0 + \rho) \ln \frac{\sqrt{1 + \frac{\beta}{v} r_2 S^+(l)} - 1}{\sqrt{1 + \frac{\beta}{v} S^-(0)} - 1} - (k_0 - \rho) \ln \frac{\sqrt{1 + \frac{\beta}{v} r_2 S^+(l)} + 1}{\sqrt{1 + \frac{\beta}{v} S^-(0)} + 1} = -(k_0^2 - \rho^2) l. \quad (8)$$

Для сіметрычнага генератара ($r_1 = r_2 = r$) $S^+(l) = S^-(0) = S$. Значэнне S пры гэтым знаходзіцца з трансцэндэнтнага ўраўнення

$$-\frac{2k_0^2}{\rho} \ln \frac{k_0 - \rho \sqrt{1 + \frac{\beta}{v} S}}{k_0 - \rho \sqrt{1 + \frac{\beta}{v} rS}} + (k_0 + \rho) \ln \frac{\sqrt{1 + \frac{\beta}{v} S} - 1}{\sqrt{1 + \frac{\beta}{v} rS} - 1} - (k_0 - \rho) \ln \frac{\sqrt{1 + \frac{\beta}{v} S} + 1}{\sqrt{1 + \frac{\beta}{v} rS} + 1} = (k_0^2 - \rho^2) l. \quad (9)$$

Патокі, што выходзяць праз тарцы генератара, аднолькавы і роўны

$$S_{\text{вых}} = (1 - r) S. \quad (10)$$

У выпадку генератара з адным поўнаасцю адбіваючым люстрам ($r_1 = r$, $r_2 = 1$) для разліку інтэнсіўнасці генерыруемага патоку маем

$$\begin{aligned} & \frac{2k_0^2}{\rho} \ln \frac{k_0 - \rho \sqrt{1 + \frac{\beta}{v} S^-(0)}}{k_0 - \rho \sqrt{1 + \frac{\beta}{v} r S^-(0)}} + (k_0 + \rho) \ln \frac{\sqrt{1 + \frac{\beta}{v} S^-(0)} - 1}{\sqrt{1 + \frac{\beta}{v} r S^-(0)} - 1} - \\ & - (k_0 - \rho) \ln \frac{\sqrt{1 + \frac{\beta}{v} S^-(0)} + 1}{\sqrt{1 + \frac{\beta}{v} r S^-(0)} + 1} = (k_0^2 - \rho^2) 2l. \end{aligned} \quad (11)$$

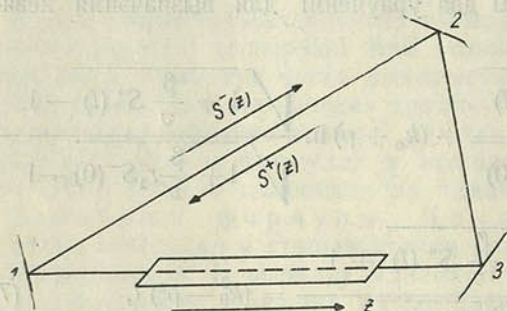


Рис. 1. Схема генератара бягучай хвалі (1, 2, 3—люстры)

Параўноўваючы (11) і (9), бачым, што паток, які выходзіць з генератара з адным поўнаасцю адбіваючым тарцом, супадае з патокам, выходзячым праз адзін тарэц сіметрычнага генератара, у якога даўжыня актыўнага элемента ў два разы большая.

2. Разгледзім генератар бягучай хвалі са знешняй сувяззю (рис. 1). Калі каэфіцыенты пралукання сістэмы знешняй сувязі для патокаў $S^+(z)$ і $S^-(z)$ роўны адпаведна t^+ і t^- , то

$$S^+(0) = t^+ S^+(l), \quad (12)$$

$$S^-(l) = t^- S^-(0). \quad (13)$$

З (4) і (5), улічваючы (12) і (13), атрымліваем

$$\begin{aligned} & \frac{2k_0^2}{\rho} \ln \frac{k_0 - \rho \sqrt{1 + \frac{\beta}{v} S^+(l)}}{k_0 - \rho \sqrt{1 + \frac{\beta}{v} t^+ S^+(l)}} + (k_0 + \rho) \ln \frac{\sqrt{1 + \frac{\beta}{v} S^+(l)} - 1}{\sqrt{1 + \frac{\beta}{v} t^+ S^+(l)} - 1} - \\ & - (k_0 - \rho) \ln \frac{\sqrt{1 + \frac{\beta}{v} S^+(l)} + 1}{\sqrt{1 + \frac{\beta}{v} t^+ S^+(l)} + 1} = (k_0^2 - \rho^2) l, \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} & - \frac{2k_0^2}{\rho} \ln \frac{k_0 - \rho \sqrt{1 + \frac{\beta}{v} S^-(0)}}{k_0 - \rho \sqrt{1 + \frac{\beta}{v} t^- S^-(0)}} + (k_0 + \rho) \ln \frac{\sqrt{1 + \frac{\beta}{v} S^-(0)} - 1}{\sqrt{1 + \frac{\beta}{v} t^- S^-(0)} - 1} - \\ & - (k_0 - \rho) \ln \frac{\sqrt{1 + \frac{\beta}{v} S^-(0)} + 1}{\sqrt{1 + \frac{\beta}{v} t^- S^-(0)} + 1} = - (k_0^2 - \rho^2) l. \end{aligned} \quad (15)$$

Пры адсутнасці неўзаемных элементаў у рэзанатары бягучай хвалі $t^+ = t^- = t$, а $S^+(l) = S^-(0)$. Калі пры гэтым каэфіцыент прапускання сістэмы знешняй сувязі роўны каэфіцыенту адбіцця r люстраў лінейнага рэзанатара з плоскімі аднолькавымі люстрамі, то з параўнання (14) і (9) вынікае, што генерыруемыя патокі ў гэтых двух выпадках супадаюць.

Для генератара бягучай хвалі, паказанага на рыс. 1, $t^+ = t^- = r_1 r_2 r_3 = t$. Патокі выпраменьвання $S_{i\text{вых}}^+$ і $S_{i\text{вых}}^-$, выходзячы праз першае, другое і трэцяе люстры, роўны адпаведна

$$\begin{aligned} S_{1\text{вых}}^+ &= r_2 r_3 t_1 S^+(l), & S_{1\text{вых}}^- &= t_1 S^-(0), \\ S_{2\text{вых}}^+ &= r_3 t_2 S^+(l), & S_{2\text{вых}}^- &= r_1 t_2 S^-(0), \\ S_{3\text{вых}}^+ &= t_3 S^+(l), & S_{3\text{вых}}^- &= r_1 r_2 t_3 S^-(0), \end{aligned} \quad (16)$$

дзе t_i — каэфіцыент прапускання i -га люстра ($i=1, 2, 3$).

Калі ў генератары бягучай хвалі ўсе люстры, акрамя аднаго, поўнасю адбіваюць выпраменьванне, а гэтае люстра мае каэфіцыент адбіцця r і не паглынае, то $t^+ = t^- = r$. Выходзячы ў абодва бакі патокі пры гэтым аднолькавыя:

$$S_{\text{вых}}^+ = S_{\text{вых}}^- = (1-r)S^+(l) = (1-r)S^-(0). \quad (17)$$

Трэба адзначыць, што такія ж па велічыні патокі дае генератар з лінейным рэзанатарам, у якога каэфіцыенты адбіцця абодвух люстраў аднолькавы і роўны r .

Выразы (9), (11), (14) і (15) атрыманы ў выніку дакладнага рашэння ўраўненняў (1) і (2). Аднак гэтыя выразы трансцэндэнтныя, даволі складаныя і громоздкія, што ўскладняе даследаванне. Таму значную цікавасць прадстаўляе атрыманне простых прыбліжаных выразаў. Разгледзім прыбліжанае рашэнне разабраных вышэй выпадкаў.

Асноўныя формулы. Прыбліжаны разлік. Для разліку магутнасці генерыруемага выпраменьвання выкарыстаем прыбліжаны метад, падрабязна апісаны ў [2] у прымяненні да выпадку аднародна пашыранай лініі. Як ужо адзначалася, калі частата генерыруемага выпраменьвання не супадае з максімумам доплераўскага контура, то патокі, распаўсюджваючыся ў процілеглых напрамках, не ўплываюць адзін на аднаго і іх неабходна разглядаць раздзельна.

Магутнасць выпраменьвання W^+ , генерыруемага ў дадатным напрамку восі z , роўна

$$W^+ = v\sigma \int_0^l k^+(z) u^+(z) dz, \quad (18)$$

дзе $u^+(z) = S^+(z)/v$ — шчыльнасць выпраменьвання ў пункце z , σ — плошча папярочнага сячэння актыўнага элемента.

Улічваючы (3), атрымліваем

$$W^+ = \frac{v\sigma}{\beta} \left[\int_0^l \frac{k_0^2}{k^+(z)} dz - \int_0^l k^+(z) dz \right]. \quad (19)$$

Другі член вызначае сярэдняе значэнне каэфіцыента ўзмацнення

$$\bar{k}^+ = \frac{1}{l} \int_0^l k^+(z) dz.$$

Згодна [2], пры разліку інтэнсіўнасці выходзячых патокаў с дастатковай ступенню дакладнасці можна лічыць, што

$$\left(\frac{1}{k^+}\right) = \frac{1}{k^+}, \quad (20)$$

таму

$$W^+ = \frac{\sigma v}{\beta} \left(\frac{k_0^2}{k^+} - \bar{k}^+ \right) l. \quad (21)$$

Частка гэтага выпраменьвання выходзіць з генератара, а частка выдаткоўваецца ў выніку страт у актыўным слоі. У адпаведнасці з [2], выходзячае з генератара выпраменьванне роўна

$$S_{\text{вых}}^+ = W \frac{\bar{k}^+ - \rho}{k^+} = \frac{\sigma v}{\beta} \left[\frac{k_0^2}{(k^+)^2} - 1 \right] l (\bar{k}^+ - \rho). \quad (22)$$

Зусім такі ж выраз атрымліваецца для патоку $S_{\text{вых}}^-$, выходзячага ў процілеглым напрамку. Значэнне \bar{k}^+ рознае для розных тыпаў рэзанатараў і можа быць вызначана, у прыватнасці, з умовы генерацыі.

1. У выпадку сіметрычнага рэзанатара ($\bar{k}^+ = \bar{k}^- = \bar{k}$) маем

$$\bar{k} = \rho + \frac{1}{l} \ln \frac{1}{r}. \quad (23)$$

Падставіўшы (23) у (22), атрымаем выраз для патоку, выходзячага праз тарцы генератара ($S_{\text{вых}}^+ = S_{\text{вых}}^- = S_{\text{вых}}$):

$$S_{\text{вых}} = \frac{\sigma v}{\beta} \left[\frac{k_0^2}{\left(\rho + \frac{1}{l} \ln \frac{1}{r}\right)^2} - 1 \right] \ln \frac{1}{r}. \quad (24)$$

У выпадку генератара з адным поўнасю адбіваючым тарцом ($r_2 = 1$) інтэграванне ў (19) праводзіцца ад нуля да $2l$. Мяркуючы, як і ў папярэднім выпадку, што $\bar{k}^+ = \bar{k}^-$, атрымаем

$$S'_{\text{вых}} = \frac{\sigma v}{\beta} \left[\frac{k_0^2}{\left(\rho + \frac{1}{2l} \ln \frac{1}{r}\right)^2} - 1 \right] \ln \frac{1}{r}. \quad (25)$$

Такім чынам, у адпаведнасці з праведзеным вышэй дакладным разглядам паток $S'_{\text{вых}}$ роўны патоку, выходзячаму з сіметрычнага генератара ў адзін бок, пры даўжыні актыўнага слоя, у два разы большай за даўжыню асіметрычнага генератара.

2. У выпадку генератара бягучай хвалі сярэдняе значэнне каэфіцыента ўзмацнення

$$\bar{k}^\pm = \rho + \frac{1}{l} \ln \frac{1}{t^\pm}. \quad (26)$$

Падстаўляючы (26) у (22), знаходзім значэнні патокаў $P_{\text{вых}}^+$ і $P_{\text{вых}}^-$, выходзячых за межы актыўнага слоя:

$$P_{\text{вых}}^+ = S^+(l)(1 - t^+) = \frac{v}{\beta} \left[\frac{k_0^2}{\left(\rho + \frac{1}{l} \ln \frac{1}{t^+}\right)^2} - 1 \right] \ln \frac{1}{t^+}, \quad (27)$$

$$P_{\text{вых}}^- = S^-(0)(1-t^-) = \frac{v}{\beta} \left[\frac{k_0^2}{\left(\rho + \frac{1}{l} \ln \frac{1}{t^-}\right)^2} - 1 \right] \ln \frac{1}{t^-}. \quad (28)$$

Ведаючы $S^+(l)$ і $S^-(0)$ з (27) і (28), няцяжка знайсці патокі, выходзячы праз любое люстра рэзанатара. Калі каэфіцыент адбіцця аднаго з люстраў генератара бягучай хвалі роўны r , а ўсе астатнія люстры поўнасцю адбіваюць выпраменьванне ($t^+ = t^- = r$), то

$$S_{\text{вых}}^+ = S_{\text{вых}}^- = \frac{v\sigma}{\beta} \left[\frac{k_0^2}{\left(\rho + \frac{1}{l} \ln \frac{1}{r}\right)^2} - 1 \right] \ln \frac{1}{r}. \quad (29)$$

Выраз (29) супадае з (24). Значыць, разглядаемы генератар эквівалентны генератару з лінейным рэзанатарам, у якога каэфіцыенты адбіцця на абодвух тарцах аднолькавы і роўны r . Аналагічны рэзультат атрыман і пры строгім разглядзе.

Такім чынам, як і ў выпадку аднароднага пашырэння, значэнні патокаў, выходзячых з генератара, выражаюцца простымі суадносінамі (24), (25) і (29) праз параметры актыўнага рэчыва і каэфіцыенты адбіцця люстраў.

Табліца

Значэнні патокаў, разлічаныя па дакладнай формуле, і адхіленні ад іх прыбліжаных значэнняў ($k_0 = 0,1 \text{ см}^{-1}$, $\rho = 0,01 \text{ см}^{-1}$, $r = 0,6$)

$l/l_{\text{пар}}$	$S_{\text{вых}}^{\text{дакл}}$	$S_{\text{вых}}^{\text{прыбл}} - S_{\text{вых}}^{\text{дакл}}$	$S_{\text{вых}}^{(1)} - S_{\text{вых}}^{\text{дакл}}$	$S_{\text{вых}}^{(2)} - S_{\text{вых}}^{\text{дакл}}$
1,09	0,084	0	-0,01	0,51
1,37	0,38	0	-0,14	0,51
1,79	0,90	0,01	-0,50	0,51
4,10	4,50	0,02	-3,85	0,51
5,00	6,00	0,03	—	0,51
7,23	9,60	0,04	—	0,51
10,34	14,00	0,09	—	0,50
15,00	19,20	0,24	—	0,50

Крытэрыем правільнасці атрыманых вышэй прыбліжаных выказаў можа служыць параўнанне іх з дакладнымі значэннямі*). У другой калонцы табліцы прыведзены дакладныя значэнні выходзячага патоку у $S_{\text{вых}}^{\text{дакл}}$, разлічаныя па формуле (11), а ў трэцяй — рознасць паміж прыбліжаным (формула (25)) і дакладнымі значэннямі. Разлік паказвае, што ў шырокім інтэрвале змянення даўжыні актыўнага слоя і каэфіцыента адбіцця r адносна дакладнасць разліку па прыбліжанай формуле (25) менш 1%. Нават пры моцным перавышэнні парогавай даўжыні ($l \approx 15l_{\text{пар}}$) дакладнасць складае каля 1% і ляжыць у межах дакладнасці эксперымента. З ростам каэфіцыента адбіцця r адпаведнасць паміж $S_{\text{вых}}^{\text{прыбл}}$ і $S_{\text{вых}}^{\text{дакл}}$ паляпшаецца.

У [4] атрыманы прыбліжаныя аналітычныя выразы для патоку, выходзячага з генератара з адным поўнасцю адбіваючым тарцом, у двух крайніх выпадках: пры малых генерыруемых патоках, калі насычэнне актыўнага рэчыва малое, і пры вялікіх патоках, калі насычэнне актыўнага рэчыва значнае. Абазначым гэтыя прыбліжэнні адпаведна $S_{\text{вых}}^{(1)}$ і $S_{\text{вых}}^{(2)}$. У чацвёртай

*) У выпадку аднароднага пашырэння лініі параўнанне дакладных і прыбліжаных разлікаў праведзена ў [2].

і пятай калонках табліцы прыведзены рознасці паміж прыбліжанымі значэннямі патокаў $S_{\text{вых}}^{(1)}$ і $S_{\text{вых}}^{(2)}$ і дакладнымі $S_{\text{вых}}^{\text{дакл}}$. З табліцы вынікае, што толькі блізка ад парога генерацыі $S_{\text{вых}}^{(1)}$ мала адрозніваюцца ад $S_{\text{вых}}^{\text{дакл}}$. Так, напрыклад, пры перавышэнні парога генерацыі на 8—9% адрозненне $S_{\text{вых}}^{(1)}$ ад $S_{\text{вых}}^{\text{дакл}}$ складае прыблізна 12%. Аднак ужо пры $l/l_{\text{пар}} = 1,8$ значэнне $S_{\text{вых}}^{\text{дакл}}$ больш чым у два разы пераўзыходзіць $S_{\text{вых}}^{(1)}$.

Значэнні $S_{\text{вых}}^{(2)}$ добра адпавядаюць дакладным у больш шырокім інтэрвале даўжынь. Пры даўжынях актыўнага слоя, перавышаючых парогавую ў 4

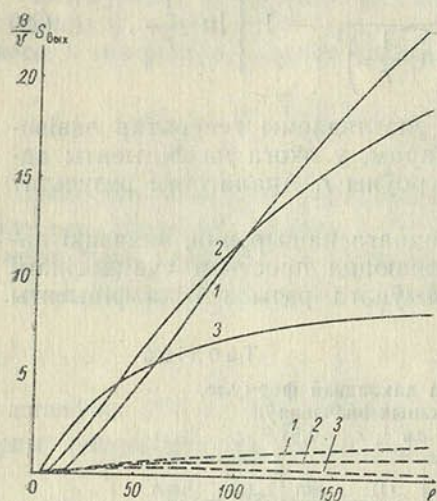


Рис. 2. Залежнасць ад l , см патоку $\frac{\beta}{v} S_{\text{вых}}$, выходзячага з сіметрычнага генератара, у выпадку неаднароднага (суцэльнай лініі) і аднароднага (пункцір) пашырэння лініі пры $k_0 = 0,05 \text{ см}^{-1}$, $\rho = 0,005 \text{ см}^{-1}$:

1— $r = 0,5$; 2— $0,7$; 3— $0,9$

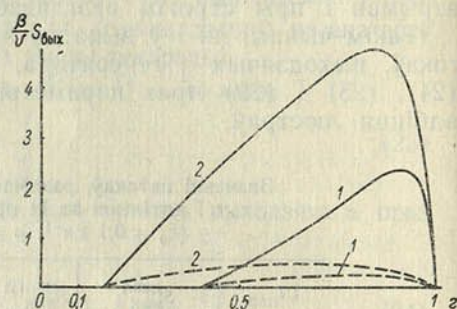


Рис. 3. Залежнасць ад r патоку $\frac{\beta}{v} S_{\text{вых}}$, выходзячага з сіметрычнага генератара, у выпадку неаднароднага (суцэльных крывых) і аднароднага (пункцір) пашырэння лініі пры $k_0 = 0,1 \text{ см}^{-1}$, $\rho = 0,01 \text{ см}^{-1}$:
1— $l = 10 \text{ см}$; 2— 20 см

і больш разы, дакладнасць разліку становіцца менш 10%. Акрамя таго, з табліцы відаць, што паток $S_{\text{вых}}^{(2)}$ разлічаны па формуле работы [4], адрозніваецца ад $S_{\text{вых}}^{\text{дакл}}$ на пастаянную велічыню, якая практычна не залежыць ад даўжыні актыўнага элемента і вызначаецца толькі параметрамі рэзанатара і актыўнага рэчыва.

Паколькі прыбліжаныя выразы (24), (25) і (29) дастаткова простыя і даюць значэнні, блізкія да дакладных, то, карыстаючыся імі, можна правесці даследаванне залежнасці выходзячых патокаў ад параметраў рэзанатара. Было цікава, у прыватнасці, параўнаць залежнасці выходзячых патокаў ад r і l у выпадку неаднароднага і аднароднага^{*} пашырэння ліній (гл. рис. 2, 3).

З рысункаў відаць, што пры аднолькавых параметрах рэзанатара (аднолькавай блізкасці да парога генерацыі) неаднароднаму пашырэнню адпавядаюць больш высокія адносныя значэнні патокаў. Пры неаднародным пашырэнні залежнасць ад r выходзячых патокаў выражана мацней, крывыя $S_{\text{вых}}(r)$ маюць больш рэзкі максімум.

^{*} Для аднароднага пашырэння ліній разлік праводзіцца па формулах, прыведзеных у рабоце [2].

Аптымальнае значэнне каэфіцыента карысных страт (каэфіцыента адбіцця), адпавядаючага максімальнаму значэнню $S_{\text{вых}}$,

$$k_{\text{стр}}^{\text{апт}} = \left(\frac{1}{l} \ln \frac{1}{r} \right)_{\text{апт}}$$

у выпадку неаднароднага пашырэння лініі знаходзіцца з ураўнення

$$\frac{\left[\rho + \left(\frac{1}{l} \ln \frac{1}{r} \right)_{\text{апт}} \right]^3}{\rho - \left(\frac{1}{l} \ln \frac{1}{r} \right)_{\text{апт}}} = k_0^3. \quad (30)$$

Адсюль відаць, што ў выпадку неаднароднага пашырэння лініі значэнне $\left(\frac{1}{l} \ln \frac{1}{r} \right)_{\text{апт}}$ заўсёды менш за ρ і адначасова менш за аптымальны каэфіцыент карысных страт, адпавядаючы аднароднаму пашырэнню лініі. Калі ў (30) не ўлічыць члены ρ^3 і $(k_{\text{стр}}^{\text{апт}})^3$, то атрымаем выраз, прыведзены раней у [5]:

$$k_{\text{стр}}^{\text{апт}} = \frac{3\rho^2 + k_0^2}{6\rho} \left(\sqrt{1 + \frac{12\rho^2 k_0^2}{(3\rho^2 + k_0^2)^2}} - 1 \right). \quad (31)$$

Максімальнае значэнне генерыруемага патоку знаходзяць, падстаўляючы $k_{\text{стр}}^{\text{апт}}$ у (24).

Прыбліжаны метада разліку асабліва перспектыўны ў выпадку, калі частата генерыруемага выпраменьвання адпавядае максімуму доплераўскага контура ўзмацнення. Пры гэтым патока $S^+(z)$ і $S^-(z)$, распаўсюджваючыся ў процілеглых напрамках, уплываюць адзін на аднаго, і каэфіцыенты ўзмацнення $k^+(z)$ і $k^-(z)$ у дыферэнцыяльных ураўненнях (1) і (2) роўны паміж сабой:

$$k(z) = k^+(z) = k^-(z) = \frac{k_0}{\sqrt{1 + \frac{\beta}{v} [S^+(z) + S^-(z)]}}. \quad (32)$$

У дадзеным выпадку, у адрозненне ад разгледжанага вышэй, дакладнае рашэнне ўраўненняў пераносу (1) і (2) не можа быць запісана нават у выглядзе трансцэндэнтнага выразу, і іх неабходна рашаць колькасна з улікам гранічных умоў (6). Пры гэтым простае прыбліжанае рашэнне можа быць атрымана не толькі для сіметрычнага і поўнаасцю асіметрычнага генератараў, але і ў агульным выпадку генератара з каэфіцыентамі адбіцця на тарцах $r_1 \neq r_2$.

Улічваючы, што для такога генератара

$$\bar{k} = \rho + \frac{1}{l} \ln \frac{1}{\sqrt{r_1 r_2}}, \quad (33)$$

з (22) атрымліваем выраз для поўнай магутнасці выпраменьвання, выходзячага за межы актыўнага слоя:

$$S_{\text{вых}} = \frac{v}{\beta} \left[\frac{k_0^2}{\left(\rho + \frac{1}{l} \ln \frac{1}{\sqrt{r_1 r_2}} \right)^2} - 1 \right] \ln \frac{1}{\sqrt{r_1 r_2}}. \quad (34)$$

Адсюль, улічыўшы гранічныя ўмовы (6), знаходзім значэнні патокаў $S_{\text{вых}}^+$ і $S_{\text{вых}}^-$, выходзячых з розных тарцоў праз другое і першае люстры:

$$S_{\text{вых}}^+ = S^+(l)(1-r_2) = S_{\text{вых}} \frac{(1-r_2) \frac{1}{\sqrt{r_2}}}{\frac{(1-r_1)}{\sqrt{r_1}} + \frac{(1-r_2)}{\sqrt{r_2}}}, \quad (35)$$

$$S_{\text{вых}}^- = S^-(0)(1-r_1) = S_{\text{вых}} \frac{(1-r_1) \frac{1}{\sqrt{r_1}}}{\frac{(1-r_1)}{\sqrt{r_1}} + \frac{(1-r_2)}{\sqrt{r_2}}}. \quad (36)$$

У выпадку сіметрычнага генератара з аднолькавымі люстрамі выходзячыя патокі роўны паміж сабой:

$$S_{\text{вых}}^+ = S_{\text{вых}}^- = \frac{v}{2\beta} \left[\frac{k_0^2}{\left(\rho + \frac{1}{l} \ln \frac{1}{r} \right)^2} - 1 \right] \ln \frac{1}{r}. \quad (37)$$

Для параўнання прыбліжанага і дакладнага метадаў спачатку праводзіўся прыбліжаны разлік патокаў $S^+(0)$ і $S^-(0)$, якія выбіраліся ў якасці нулявых прыбліжэнняў пры колькасным рашэнні сістэмы дыферэнцыяльных ураўненняў (1) і (2). Разлік зроблен на ЭВМ «Мінск-1» метадам Рунге — Кута. Праведзеная ўскосная праверка паказала добрую адпаведнасць прыбліжаных і дакладных рашэнняў.

У заключэнне прыносім глыбокую ўдзячнасць акадэміку АН БССР Б. І. Сцяпанаву за абмеркаванне работы і каштоўныя парады і І. Р. Кацавай за вылічэнні на ЭВМ «Мінск-1».

Літаратура

1. Rigrod W. W. J. Appl. Phys., 34, 9, 2602, 1963 (перевод в сб. «Оптические квантовые генераторы». М., 1966).
2. Методы расчета оптических квантовых генераторов, под редакцией Б. И. Степанова, т. I, Минск, 1966.
3. Rigrod W. W. J. Appl. Phys., 36, 8, 1357, 1964.
4. Карлов Н. В., Конев Ю. Б. Радиотехника и электроника, 13, 3, 564, 1968.
5. Леднева Г. П., Чекалинская Ю. И. ЖПС, 11, 1, 35, 1969.

Институт физики
АН БССР

Поступило в редакцию
5.11 1970

УДК 539.17

В. І. БЕЛАВУСАВА, У. А. КНАЦЬКО, Э. А. РУДАК

АБ МЕХАНІЗМЕ ЗАХОПУ ПАВОЛЬНЫХ НЕЙТРОНАУ У РЭАКЦЫІ (n, γ)

1. Уводзіны. Спектры γ -праменьняў з рэакцыі (n, γ) на ядрах з $A \sim 30 \div 70$ і $A \sim 180 \div 210$ характарызуюцца інтэнсіўнымі лініямі высокай энергіі, адпавядаючымі γ -пераходам тыпу $E1$ ядра-прадукту з захопнага стану на ніжнія p -узроўні і моцна адрозніваюцца ад прадказваемых статыстычнай тэорыяй. Якасна характар спектраў дадзеных груп ядраў тлумачыцца прамымі пераходамі нейтрона з зыходнага s -стану на канечныя p -узроўні. Пры гэтым тэорыя прадказвае карэляцыю паміж прыведзенымі імавернасцямі γ -пераходаў тыпу $E1$ і прыведзенымі нейтроннымі шырынямі канечных p -узроўняў [1].

У апошні час эксперыментальна было выяўлена многа выпадкаў дрэннай карэляцыі і нават антыкарэляцыі паміж указанымі велічынямі (Fe^{57} , Ni^{63} , Zn^{65}). Яны тлумачацца пераважным высвечваннем захопнага стану праз уваходныя станы тыпу «фанон+часцінка» [2] або квазі-часцінкавыя ўваходныя станы «дзе часцінка+дзірка» [3—4]. Такое тлумачэнне антыкарэляцый, хоць і здаецца праўдападобным, патрабуе абгрунтавання, бо без дэталёвых разлікаў цяжка зразумець, чаму ўваходныя станы павінны адыгрываць рашаючую ролю ў высвечванні захопнага стану толькі ў некаторых ядрах.

У гэтай рабоце з дапамогай абагульненай мадэлі і мадэлі, улічваючай сілы спарвання і квадрупольнае ўзаемадзеянне паміж знешнімі нуклонамі, даследуецца роля ўваходных станаў тыпу «фанон+часцінка». Робіцца таксама спроба растлумачыць антыкарэляцыі паміж прыведзенымі імавернасцямі γ -пераходаў і прыведзенымі нейтроннымі шырынямі канечных p -узроўняў за кошт розніцы хвалевых функцый касцяка ў захопным стане і канечных p -узроўнях.

Разлік хвалевых функцый канечных p -узроўняў. Згодна [2], для апісання γ -распаду захопнага стану ў рэакцыі (n, γ) мэтазгодна ў многіх выпадках у якасці ўваходных станаў разглядаць кагерэнтныя ўзбуджэнні некалькіх нуклонаў, якія можна апісаць калектыўнай мадэллю. Падставай для такога меркавання служыць паспяховае прымяненне ўваходных станаў тыпу «фанон+часцінка» для апісання некаторых асаблівасцей ў паводзінах нейтронных сілавых функцый у залежнасці ад масавага ліку [5].

Разлік інтэнсіўнасцей γ -пераходаў тыпу $E1$ у рэакцыі (n, γ) з выкарыстаннем уваходных станаў тыпу «фанон+часцінка» патрабуе ведання каэфіцыентаў раскладання хвалевых функцый ніжніх p -узроўняў па базісным функцыям $|NR, j; I\rangle$

$$\Psi_I = \sum_{NRj} a_{NR}^j |NR, j, I\rangle, \quad (1)$$

дзе N — колькасць фанонаў, R — спін вібрацыйнага стану, j — момант адначасцінкавага стану нуклона, I — рэзультуючы момант узроўню. Для

разліку каэфіцыентаў a_{NR}^j у ядрах з адным няцотным нейтронам звыш замкнутай абалонкі (Ti^{51} , Cr^{53} , Fe^{55}) можна выкарыстаць абагульненую мадэль у прыбліжэнні прамежкавай сувязі [6]. У больш агульным выпадку мэтазгодна выкарыстаць мадэль, улічваючую сілы спарвання і квадрупольнае ўзаемадзеянне паміж знешнімі нуклонамі. Такая мадэль была выкарыстана для разліку $h/2\pi\omega_{2^+}$ і $B(E2)_{0 \rightarrow 2^+}$ для сферычных ядраў з $A > 40$ [7]. Здавальняючая ўзгодненасць разлічаных велічынь $B(E2)$, μ і Q з эксперыментальнымі для ізатопаў Ni, Zn, Ge і Se атрымана ў [8]. Можна спадзявацца таму, што выкарыстанне ўказаных мадэлей будзе карысна і для ацэнкі ролі ўваходных станаў тыпу «фанон+часцінка» у вышчванні захопнага стану ў рэакцыі (n, γ) на ядрах з $A \leq 80$.

Табліца

Каэфіцыенты раскладання ніжніх p -узроўняў у ядрах Fe^{55} і Ni^{63} па базісных функцыях $|NR, j; I\rangle$

Канфігурацыя	Fe^{55}				Ni^{63}			
	$1/2^+$	$1/2^+$	$3/2^+$	$3/2^+$	$1/2^+$	$1/2^+$	$3/2^+$	$3/2^+$
00, $p_{1/2}$	0,636	0,289			0,946	0,062		
00, $p_{3/2}$			0,887	0,357			0,977	0,020
12, $p_{1/2}$			-0,214	-0,124			0,158	-0,199
12, $p_{3/2}$	0,606	-0,651	-0,359	0,862	-0,274	-0,284	0,139	-0,024
12, $f_{5/2}$	-0,391	-0,614	-0,140	0,000	0,151	-0,947	0,024	0,953
20, $p_{1/2}$	0,136	0,000			0,028	-0,024		
20, $p_{3/2}$			0,080	-0,199			0,017	-0,003
22, $p_{1/2}$			0,069	-0,220			0,014	0,000
22, $p_{3/2}$	-0,196	0,280	0,036	0,062	-0,024	-0,032	0,017	-0,060
22, $f_{5/2}$	0,133	0,193	0,000	0,137	-0,069	0,130	0,000	-0,037
24, $f_{5/2}$			0,086	-0,057			0,000	-0,216

У дадзенай рабоце разлічваліся спектры ніжніх узроўняў са спінамі $1/2^+$, $3/2^+$, $5/2^+$ і $7/2^+$ у ядрах Ti^{51} , Cr^{53} , Fe^{55} , цотна-няцотных ізатопах Ni, Zn, Ge, і Se. Выкарыстання ў разліках варыянты энергій адначасцінак-вых узроўняў узяты з [7], значэнні $h/2\pi\omega_{2^+}$ блізкі да энергій першых узбуджаных узроўняў 2^+ у суседніх цотна-няцотных ядрах. Для разліку канстанты квадрупольнага ўзаемадзеяння выкарыстоўваўся метада, прапанаваны ў [7]. Канстанта χ разлічвалася як і ў [8]. У табліцы ў якасці прыкладу прыведзены каэфіцыенты a_{NR}^j ніжніх узроўняў са спінамі $1/2^+$ і $3/2^+$ у ядрах Fe^{55} і Ni^{63} .

Ацэнка матрычных элементаў γ -пераходаў тыпу $E1$. Тэорыя радыяцыйнага захопу нейтронаў падрабязна разгледжана ў [1]. Ацэнка сячэнняў γ -пераходаў тыпу $E1$ практычна зводзіцца да вылічэння матрычнага элемента

$$M = \int \Psi_i \bar{r} \Psi_f d\tau, \quad (2)$$

дзе Ψ_i і Ψ_f — хвалеваыя функцыі захопнага стану і канечнага p -узроўню. Хвалеваыя функцыі захопнага стану Ψ_i , як і Ψ_f , можа быць прадстаўлена ў выглядзе [1], але каэфіцыенты a_{NR}^j трэба лічыць параметрамі.

У агульным выпадку разлік матрычнага элемента складаны. Аднак калі абмежавацца разглядам γ -пераходаў на два ніжнія ўзроўні са спінамі $1/2^+$ або $3/2^+$, у хвалеваыя функцыі захопнага стану са спінамі $1/2^+$ дастаткова ўлічыць толькі тры канфігурацыі: $|00, s_{1/2}; 1/2^+\rangle$, $|12, d_{5/2}; 1/2^+\rangle$ і $|12, d_{3/2}; 1/2^+\rangle$. Матрычныя элементы γ -пераходаў залежаць толькі ад трох

параметраў. У якасці прыкладу прыводзім матрычныя элементы γ -пераходаў тыпу $E1$ з захопнага стану на ніжнія p -узроўні у ядрах Fe^{55} і Ni^{63} ($\alpha = a_{00}^{1/2}$, $\beta = a_{12}^{5/2}$, $\gamma = a_{12}^{3/2}$):

Fe^{55}

$$M_{1/2}^1 = 0,636\alpha - 0,845\beta - 0,111\gamma$$

$$M_{1/2}^2 = 0,289\alpha + 0,760\beta - 0,598\gamma$$

$$M_{3/2}^1 = 1,260\alpha - 0,213\beta - 0,565\gamma$$

$$M_{3/2}^2 = 0,506\alpha + 0,558\beta + 0,291\gamma$$

Ni^{63}

$$M_{1/2}^1 = 0,946\alpha + 0,377\beta + 0,031\gamma$$

$$M_{1/2}^2 = 0,062\alpha + 0,234\beta - 0,733\gamma$$

$$M_{3/2}^1 = 1,382\alpha + 0,086\beta + 0,360\gamma$$

$$M_{3/2}^2 = 0,029\alpha - 0,160\beta + 0,347\gamma$$

Аналіз матрычных элементаў паказвае, што ў ядрах са здавальняючай карэляцыяй паміж прыведзенымі імавернасцямі γ -пераходаў і прыведзенымі нейтроннымі шырынямі γ -распад захопнага стану не можа ісці пераважна праз уваходныя станы. Напрыклад, у ядры Fe^{55} у выпадку $a_{12}^{5/2} \gg a_{00}^{1/2}$, $a_{12}^{3/2} \gg a_{00}^{1/2}$ і $a_{12}^{5/2} \sim 0,2a_{12}^{3/2}$ можна вытлумачыць назіраемыя эксперыментальна інтэнсіўнасці γ -пераходаў у асноўны стан ($3/2^-$) і на першы ўзбуджаны ўзровень $0,415$ $Mэв$ ($1/2^-$). Аднак імавернасць γ -пераходаў на другі ўзровень са спінам $1/2^-$ павінна быць прыкладна ўдвая больш, чым імавернасць γ -пераходу на першы ўзровень, што супярэчыць эксперыменту. Аналагічная сітуацыя назіраецца і ў іншых ядрах дадзенага тыпу.

У ядрах, у якіх выяўлена антыкарэляцыя паміж прыведзенымі імавернасцямі γ -пераходаў тыпу $E1$ і прыведзенымі нейтроннымі шырынямі, сітуацыя больш складаная. Напрыклад, у ядры Fe^{57} пры $a_{12}^{5/2} \sim a_{12}^{3/2} \gg a_{00}^{1/2}$ разлічаныя інтэнсіўнасці γ -пераходаў у асноўны стан ($1/2^-$) і першы ўзбуджаны ўзровень $0,014$ $Mэв$ ($1/2^-$) параўнальны паміж сабой, хаця прыведзеная нейтронная шырыня ўзроўню $0,014$ $Mэв$ значна больш прыведзенай нейтроннай шырыні асноўнага стану. У выпадку ядра Ni^{63} назіраемая антыкарэляцыя можа быць вытлумачана пераважным распадам захопнага стану праз уваходны стан $|12, d_{5/2}; 1/2^+\rangle$, а ў выпадку ядра Zn^{65} — праз уваходны стан $|12, d_{3/2}; 1/2^+\rangle$. Пры гэтым трэба адзначыць, што прадказаныя інтэнсіўнасці γ -пераходаў на другія ўзроўні са спінамі $1/2^-$ і $3/2^-$ аказваюцца завышанымі ў параўнанні з эксперыментальнымі.

У сувязі з тым што меркаванне аб пераважным γ -распадзе захопнага стану праз уваходныя станы тыпу «фанон + часцінка» прыводзіць да завышаных ацэнак інтэнсіўнасцей γ -пераходаў на другія ўзроўні са спінамі $1/2^-$ і $3/2^-$, мае рацыю спроба знайсці тлумачэнне антыкарэляцыі выхадаў з рэакцыяй (n, γ) і (d, p) у рамках тэорыі рэзананснага захопу ў вобласці каналаў. У [1] няўна меркавалася, што хвалевае функцыя ядра-мішэні ў перыядычна паўтараючайся зыходнай канфігурацыі «ядро-мішэнь + s -нейтрон» ядра-прадукту супадае з хвалевай функцыяй няўзбуджанага касцяка, уваходзячага ў канфігурацыі ніжніх узроўняў са спінамі $1/2^-$ і $3/2^-$. Толькі ў гэтым выпадку тэорыя можа прадказваць карэляцыю выхадаў з рэакцыяй (n, γ) і (d, p). Калі ж дадзенае мерка-

ванне няправільна, то прыведзеныя імавернасці γ -пераходаў тыпу E1 могуць і не карэліраваць з прыведзенымі нейтроннымі шырынямі канечных p -узроўняў.

Улік падобных эфектаў не выключае ролі ўваходных станаў і можа быць карысным для тых ядраў, у якіх γ -распад захопнага стану праз уваходныя станы не прыводзіць да правільнага прадказання інтэнсіўнасцей γ -пераходаў тыпу E1. Рэзультаты разлікаў з выкарыстаннем мадэлі неўзаемаздзейнічаючых квазічасцінак будуць апублікаваны пазней.

Літаратура

1. Lane A. M., Lynn J. E. Nucl. Phys., 17, 563, 586, 1960.
2. Попов В. И. Известия АН СССР, сер. физ., 32, 2051, 1968.
3. Грошев Л. В., Демидов А. М. Ядерная физика, 4, 785, 1966.
4. Коломнец В. М., Цехмистренко Ю. В. Известия АН СССР, сер. физ., 32, 2055, 1968.
5. Попов В. И. Доклад на 16 Ежегодном совещании по ядерной спектроскопии и структуре атомного ядра в Москве, январь — февраль, 1966.
6. Ramavataram K. Phys. Rev., 132, 2255, 1963.
7. Бирбраир Б. Л., Ерохина К. И., Лемберг И. X. Изв. АН СССР, сер. физ., 27, 150, 1963.
8. Kisslinger L. S., Sorensen R. A. Rev. Mod. Phys., 35, 853, 1963.

Институт физики
АН БССР

Поступило в редакцию
27.III 1970

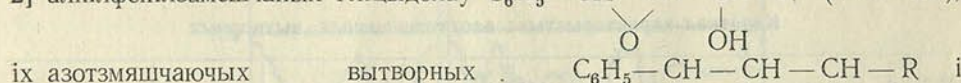
УДК 535.33

М. І. ГАРБУЗ, Р. Г. ЖБАНКОУ, Б. К. БОГУШ, В. І. ПАНСЕВІЧ-КАЛЯДА

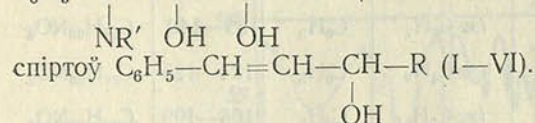
**ДАСЛЕДАВАННЕ НЕНАСЫЧАНЫХ АЛКІЛФЕНІЛЗАМЕШЧАНЫХ
 АЛІЛАВЫХ СПІРТОУ, ГЛІЦЫДОЛАУ І ІХ АЗОТЗМЯШЧАЮЧЫХ
 ВЫТВОРНЫХ МЕТАДАМ ІЧ-СПЕКТРАСКАПІІ**

Эпаксідныя злучэнні і прадукты іх ператварэнняў прадстаўляюць пэўную тэарэтычную і практычную цікавасць.

У гэтым паведамленні вывучаюцца ІЧ-спектры рада атрыманых раней [1, 2] алкілфенілзамешчаных гліцыдолаў $C_6H_5-CH-CH-CH-R$ (VII—XII),



$C_6H_5-CH-CH-CH-R$ (XIII—XX), а таксама зыходных ненасычаных



Спектры даследаваных злучэнняў былі запісаны на двухпроменным інфрачырвоным спектрафатометры UR-10 у вобласці $400-3700\text{ см}^{-1}$. Спектральная шырыня шчыліны складала ў вобласці $400-700\text{ см}^{-1}$ — $5-6\text{ см}^{-1}$, у вобласці $700-1800\text{ см}^{-1}$ — $3-7\text{ см}^{-1}$ і ў вобласці $2700-3700\text{ см}^{-1}$ — $2-4,5\text{ см}^{-1}$. Для атрымання спектраў крышталічных прадуктаў прымянялася метадка прасавання ў КВг [3], спектры вадкіх злучэнняў атрыманы з выкарыстаннем вадкаснай кюветы з акенцамі з КВг. Частковая характарыстыка вывучаных спіртоў (I—VI), гліцыдолаў (VII—XII) і азотзмяшчаючых вытворных (XIII—XX) прыведзены ў табл. 1—3.

Табліца 1

Короткая характарыстыка алкілфенілзамешчаных ненасычаных спіртоў

№ злучэння	Назва спірту	R	Т. кіп., °С (р. мм рт. сл.)	d_4^{20}	Формула
I	1-фенілгексэн-1-ол-3	n-C ₃ H ₇	124—127 (2)	0,9904	C ₁₂ H ₁₆ O
II	1-феніл-4-метылпентэн-1-ол-3	іза-C ₃ H ₇	123—125 (1,5)	0,9821	C ₁₂ H ₁₆ O
III	1-фенілактэн-1-ол-3	n-C ₅ H ₁₁	141—145 (1,5)	0,9502	C ₁₄ H ₂₀ O
IV	1-феніл-6-метылгептэн-1-ол-3	іза-C ₅ H ₁₁	136—139 (1,5)	0,9485	C ₁₄ H ₂₀ O
V	1-фенілнанэн-1-ол-3	n-C ₆ H ₁₃	156—157 (2)	0,9470	C ₁₅ H ₂₂ O
VI	1-фенілгексадын-1,5-ол-3	CH ₂ -CH=CH ₂	122,5—126 (1)	0,9994	C ₁₂ H ₁₄ O

Табліца 2

Короткая характарыстыка гліцыдолаў

№ злучэння	Назва гліцыдолу	R	Т. кіп., °C (<i>p</i> , мм рт. сл.)	d_4^{20}	Формула
VII	1-феніл-аксіда-1,2-гексанол-3	$n-C_3H_7$	128—131,5 (1,5)	1,0540	$C_{12}H_{16}O_2$
VIII	1-феніл-4-метыл-аксіда-1,2-пентанол-3	<i>іза</i> - C_3H_7	120—122 (0,5)	1,0437	$C_{12}H_{16}O_2$
IX	1-феніл-аксіда-1,2-актанол-3	$n-C_5H_{11}$	157—158,5 (0,5)	1,0122	$C_{14}H_{20}O_2$
X	1-феніл-6-метыл-аксіда-1,2-гептанол-3	<i>іза</i> - C_5H_{11}	152—155,5 (0,5)	1,0018	$C_{14}H_{20}O_2$
XI	1-феніл-аксіда-1,2-нананол-3	$n-C_6H_{13}$	158—161 (0,5)	0,9978	$C_{15}H_{22}O_2$
XII	1-феніл-аксіда-1,2-гексэн-5-ол-3	$CH_2=CH=CH_2$	129—133 (1,5)	1,0710	$C_{12}H_{14}O_2$

Табліца 3

Короткая характарыстыка азотзмяшчаючых вытворных

№ злучэння	Назва піперыдыл-і амінадыёлаў	R	R'	Т. пл., °C	Формула
XIII	1-феніл-4-метыл-1-феніламінапентандыёл-2,3	<i>іза</i> - C_3H_7	C_6H_5	139—140	$C_{18}H_{23}NO_2$
XIV	1-феніл-5-метыл-1-феніламінагександыёл-2,3	<i>іза</i> - C_4H_9	C_6H_5	124—125	$C_{19}H_{25}NO_2$
XV	1-феніл-6-метыл-1-феніламінагептандыёл-2,3	<i>іза</i> - C_5H_{11}	C_6H_5	108—109	$C_{20}H_{27}NO_2$
XVI	1-феніл-1-феніламінаактандыёл-2,3	$n-C_5H_{11}$	C_6H_5	98—99	$C_{20}H_{27}NO_2$
XVII	1-феніл-1-феніламинанандыёл-2,3	$n-C_6H_{13}$	C_6H_5	94—95	$C_{21}H_{29}NO_2$
XVIII	1-феніл-1-феніламінагексэн-5-дыёл-2,3	$CH_2=CH=CH_2$	C_6H_5	127	$C_{18}H_{21}NO_2$
XIX	1-феніл-1-(<i>o</i> -таліламіна)-гептандыёл-2,3	$n-C_4H_9$	<i>o</i> - $CH_3C_6H_4$	105—106	$C_{20}H_{27}NO_2$
XX	1-феніл-1-піперыдылгептандыёл-2,3	$n-C_4H_9$	C_5H_{10}	Т. кіп. *)	$C_{18}H_{29}NO_2$

*) Т. кіп. 190—194° (2 мм), n_D^{20} 1,5300, d_4^{20} 1,0515.

Спектры зыходных ненасычаных спіртоў. У спектрах большасці разгледжаных ненасычаных спіртоў (рыс. 1) назіраецца рад інтэнсіўных палос у вобласці 3700—3200, 3000—2800, 1750—1600, 1505—1400, 980, 750, 700 cm^{-1} і рад палос сярэдняй і слабай інтэнсіўнасці ў інтэрвале 3100—3000 cm^{-1} , 1400—900, 900—800 і 650—400 cm^{-1} .

Інтэрпрэтацыя рада палос не выклікае цяжкасцей. Так, палосы 3080, 3060, 3030, 1615, 1580, 1500, 750 і 690 cm^{-1} абумоўлены паглыннем араматычных груп (1615, 1580 і 1500 cm^{-1} адносяцца да валентных хістанняў вуглярод-вугляродных сувязей кольцаў, 3080, 3060, 3030 — да валентных хістанняў $C-H$, а 750 і 690 cm^{-1} — да пазаплоскасных дэфармацыйных хістанняў $C-H$ араматычных кольцаў) [4]. Акрамя таго, у вобласці 3030 cm^{-1} могуць ляжаць частоты валентных хістанняў $C-H$ аліфатычных груп $-CH=CH-$, на прысутнасць якіх паказвае з'яўленне ў спектрах карбінолаў інтэнсіўнай паласы пазаплоскасных дэфармацый-

ных хістанняў груп $-\text{CH}=\text{CH}-$ 970 см^{-1} . Становіцца гэтай паласы сведчыць аб транскафігурацыі даследаваных ненасычаных спіртоў [4].

Шырокую інтэнсіўную паласу ў інтэрвале $3200-3700\text{ см}^{-1}$ трэба адзначна аднесці да валентных хістанняў гідраксільных груп, уключаных у міжмалекулярную вадародную сувязь. Максімум гэтай паласы ў спектрах карбінолаў III, IV, V (крывыя 3—5) размешчан каля 3400 см^{-1} , у спектрах алілстырылкарбінолу VI (крывая 6) — пры 3370 см^{-1} , а ў спектрах прапілстырылкарбінолу I (крывая 1) і ізапрапілстырылкарбіно-

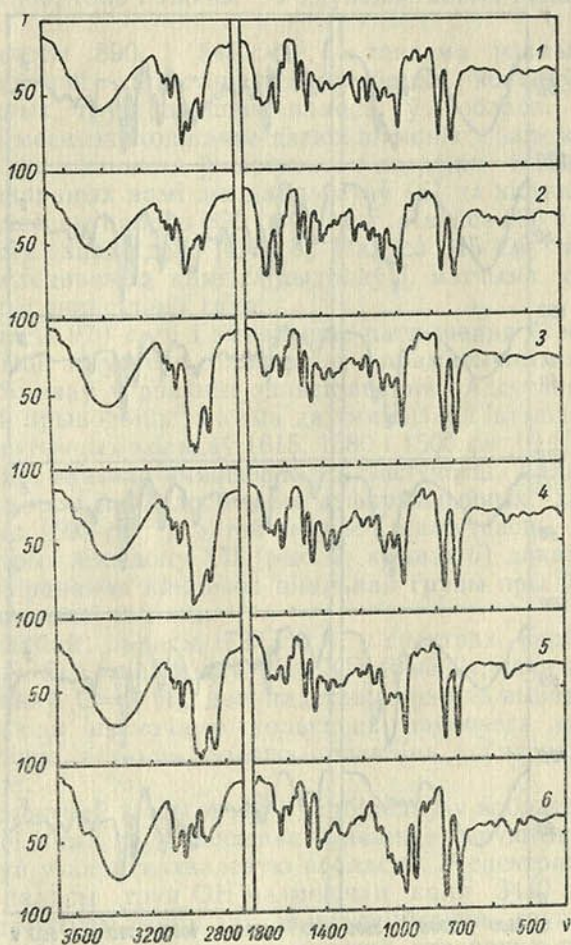
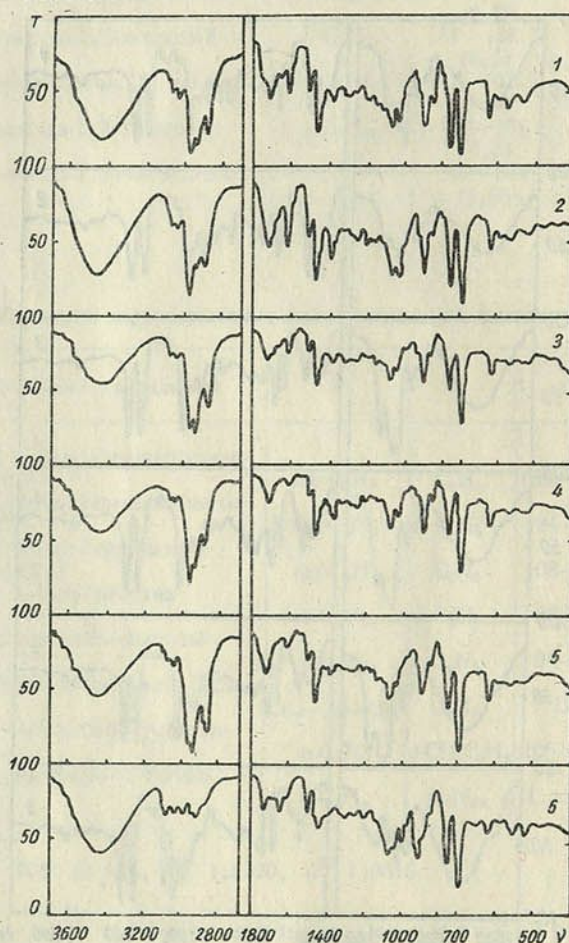


Рис. 1. Спектры алкілстырылкарбінолаў пры T , % і ν , см^{-1} (тыя ж умовы для рис. 2—4):

1—I, 2—II, 3—III, 4—IV, 5—V, 6—VI

лу II (крывая 2) — пры 3420 і 3430 см^{-1} . Больш высокім значэнням частот валентных хістанняў гідраксільных груп у спектрах карбінолаў I і II адпавядае прысутнасць у гэтых злучэннях адносна кароткіх алкільных радыкалаў, якія далучаюцца да таго ж вугляроднага атама, што і OH -група. Такое блакіруючае дзеянне прапілавага і ізапрапілавага радыкалаў у карбінолах I і II трэба, відаць, растлумачыць адносна блізім размяшчэннем метыльнай групоўкі ад OH -групы. Адсутнасць метыльных груп у структуры карбінолу VI выклікае паніжэнне частаты гэтых хістанняў да 3370 см^{-1} .

Наяўнасць у структуры карбінолу VI канцавой вінільнай групы $-\text{CH}=\text{CH}_2$ прыводзіць да з'яўлення ў яго спектры паласы 920 см^{-1} і павелічэння інтэнсіўнасці палос 1420 і 3080 см^{-1} , якія адносяцца адпаведна да пазаплоскасных і плоскасных дэфармацыйных і валентных хістанняў груп $=\text{CH}_2$ (крывая 6). Выразную паласу 1640 см^{-1} з выступамі 1600 і 1620 см^{-1} належыць прыпісаць да валентных хістанняў $\text{C}=\text{C}$ -сувязей [4]. Акрамя таго, у спектры карбінолу VI назіраецца зрушэнне палос валентных хістанняў вуглярод-вугляродных сувязей араматычных кольцаў да 1595 , 1575 і 1490 см^{-1} .



Рыс. 2. Спектры алкілфенілзамешчаных гліцыдолаў:

1—VII, 2—VIII, 3—IX, 4—X, 5—XI, 6—XII

Адметнай асаблівасцю ізакарбінолаў II і IV з'яўляецца павелічэнне ў іх спектрах інтэнсіўнасці палос 1470 , 1370 , 2970 і 2870 см^{-1} (крывыя 2, 4). На аснове [4] палосы 2970 і 2920 см^{-1} трэба аднесці да антысіметрычных валентных хістанняў метыльных і метыленавых груп, паласы 2870 см^{-1} — да сіметрычных валентных хістанняў гэтых груп, а палосы 1470 і 1370 см^{-1} — да антысіметрычных і сіметрычных дэфармацыйных хістанняў груп CH_3 . З параўнання спектраў карбінолаў I—V відаць павелічэнне інтэнсіўнасці палос у вобласці 2800 — 3000 см^{-1} адносна палос хістанняў араматычных кольцаў 1615 і 1500 см^{-1} пры пераходзе ад кар-

бінолаў I і II да карбінолу V, што звязана з павелічэннем колькасці метыленавых груп, і наадварот, адсутнасць у структуры злучэння VI груп $-\text{CH}_3$ і змяншэнне колькасці груп $-\text{CH}_2-$ прыводзіць да рэзкага змяншэння паглынання ў разглядаемай вобласці.

Спектры α , β -спіртавокісаў (алкілфенілзамешчаных гліцыдолаў). Пры пераходзе ад спектраў ненасычаных спіртоў I—VI да спектраў α , β -спіртавокісаў VII—XII (рыс. 2) назіраецца знікненне моцнай паласы 970 см^{-1} , змяншэнне паглынання ў вобласці $3030, 1660, 1615, 1580, 1500$ і 750 см^{-1} і з'яўленне новых палос $1250, 890, 845$ і 615 см^{-1} .

Выразныя палосы 890 і 845 см^{-1} , а таксама размытую паласу 1250 см^{-1} трэба аднесці да хістанняў эпаксідных кольцаў. Як вядома [4, 5], да эпаксідных груп адносяць палосы ў вобласці $1250, 890$ і 830 см^{-1} , прычым месцазнаходжанне дзвюх апошніх у залежнасці ад будовы злучэння можа змяняцца ў дастаткова шырокім інтэрвале частот. У спектрах даследаваных намі аксідацэтатаў [6] да хістанняў эпаксідных груп былі аднесены палосы 890 і 845 см^{-1} . Паласа 890 см^{-1} характарызуе трансформу эпаксідаў [4, 7, 8]. Паласа 615 см^{-1} назіраецца ў спектрах усіх даследаваных намі гліцыдолаў і, магчыма, таксама абумоўлена хістаннямі эпаксідных груп.

Знікненне паласы 970 см^{-1} і змяншэнне паглынання ў вобласці 3030 і 1660 см^{-1} сведчыць аб удзеле спалучаных з араматычным кольцам $\text{C}=\text{C}$ -сувязей карбінолаў у рэакцыі эпаксідавання. Адсутнасць спалучаных $\text{C}=\text{C}$ -сувязей прыводзіць таксама да змяншэння інтэнсіўнасці палос паглынання араматычных кольцаў $1615, 1580$ і 1500 см^{-1} [4]. З гэтай жа прычынай, напэўна, звязана змяншэнне інтэнсіўнасці паласы 750 см^{-1} адносна іншай паласы пазаплоскасных дэфармацыйных хістанняў CH араматычных груп (695 см^{-1}). У той жа час прысутнасць палос 920 і 1640 см^{-1} у спектры гліцыдолаў XII (рыс. 2, крывая 6) даказвае ўстойлівасць да эпаксідзіравання канцавой вінільнай групы пры ўздзеянні адным молам надвоцатнай кіслаты.

Наўнасць слабай паласы 1720 см^{-1} у спектрах карбінолаў I—V (рыс. 1, крывыя 1—5) і гліцыдолаў VII—XII (рыс. 2), якая адносіцца да валентных хістанняў $\text{C}=\text{O}$ [4], дае падставу зрабіць вывад, што гэтыя злучэнні змяшчаюць нязначную колькасць пабочнага прадукту, які змяшчае $\text{C}=\text{O}$ -групу, якую не ўдаецца аддзяліць поўнасю шляхам вакуумнай перагонкі.

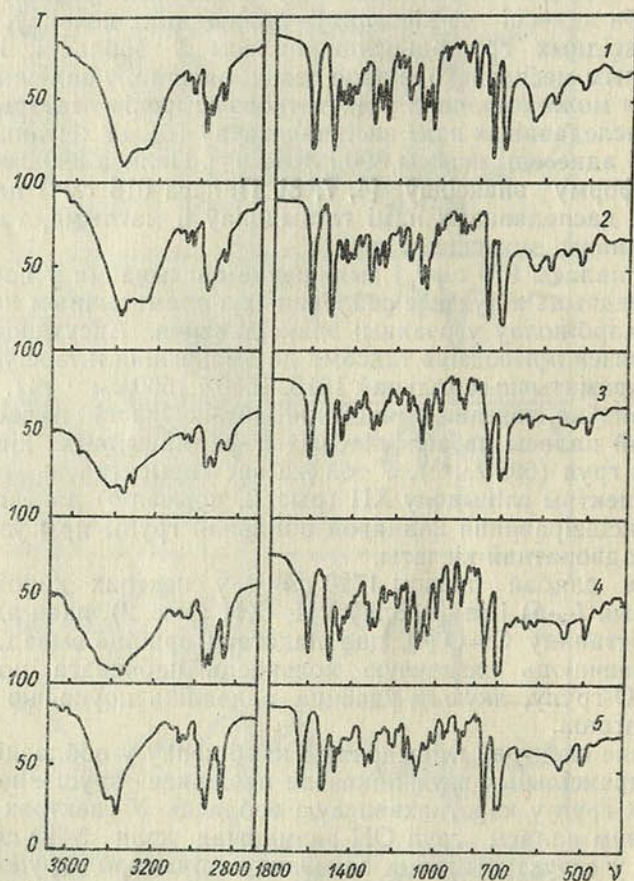
Параўнанне спектраў гліцыдолаў і карбінолаў у вобласці валентных хістанняў гідраксільных груп паказвае невялікае зрушэнне максімуму паласы гэтых груп у кароткахвалевую вобласць. У спектрах усіх гліцыдолаў максімум паласы груп OH размешчан каля 3440 см^{-1} . Відаць, прысутнасць у структуры гэтых злучэнняў гліцыднай групоўкі аказвае істотны ўплыў на сістэму вадародных сувязей, утвораную гідраксільнымі групамі гліцыдолаў.

Акрамя названых спектральных асаблівасцей гліцыдолаў трэба адзначыць таксама з'яўленне паласы 1030 см^{-1} у спектрах гліцыдолаў VII і VIII (рыс. 2, крывыя 1, 2), павелічэнне інтэнсіўнасці паласы 1070 см^{-1} у спектрах гліцыдолаў XI і XII (рыс. 2, крывыя 5, 6) і змяншэнне паглынання ў вобласці 1340 см^{-1} у спектрах злучэнняў X і XI (рыс. 2, крывыя 4, 5), інтэрпрэтацыя якіх сустракае цяжкасці.

Спектры азотзмяшчаючых вытворных α , β -спіртавокісаў. Даследаваныя намі амінавытворныя α , β -спіртавокісаў з'яўляюцца цвёрдымі крышталічнымі злучэннямі, акрамя злучэння (XX). Як вядома [9], рэчывы ў крышталічным стане маюць у спектры большую колькасць палос, чым у вадкім стане, што выклікана сіламі міжмалеку-

лярнага ўзаемадзеяння ў элементарнай ячэйцы, рознай арыентацыяй малекул у крышталі, а таксама магчымым рэзанансным расшчапленнем палос паглынання. Сапраўды, адметнай асаблівасцю спектраў амінавытворных α , β -спіртавокісаў (рыс. 3, крывыя 1—5 і рыс. 4 крывыя 1, 3) з'яўляецца адносна вялікая колькасць палос паглынання, інтэрпрэтацыя якіх вельмі цяжкая.

Як і трэба было чакаць, амінаванне спіртавокісаў прыводзіць да знікнення характэрных для эпаксідных груп палос у вобласці 890 і 845 см^{-1} . Аднак у спектрах амінавытворных XVI, XVII, XVIII (рыс. 3, крывыя 4, 5 і рыс. 4, крывая 1) у вобласці 890 см^{-1} можна наглядаць



Рыс. 3. Спектры амінадыёлаў:
1—XIII, 2—XIV, 3—XV, 4—XVI, 5—XVII

слабую паласу паглынання, якая, відаць, не з'яўляецца паласой эпаксідных кольцаў.

Прысутнасць у структуры разглядаемых амінавытворных XIII—XIX дзвюх араматычных груп прыводзіць да павелічэння інтэнсіўнасці палос паглынання ў вобласці частот хістанняў гэтых груп, знікнення паласы ў вобласці 1580 см^{-1} , а ў выпадку амінаў XV—XVII яшчэ і да расшчаплення паласы 695 см^{-1} на дзве— 700 і 690 см^{-1} . Месцазнаходжанне палос паглынання валентных хістанняў вуглярод-вугляродных сувязей араматычных кольцаў змяняецца ад 1605 і 1505 см^{-1} у аміну XV (рыс. 3, крывая 3) да 1630 і 1530 см^{-1} у аміну XVII (рыс. 3, крывая 5). У спектры злучэння XIX (рыс. 4, крывая 3) у вобласці паглынання гэтых хістанняў

назіраюцца чатыры паласы паглынання — 1615, 1595, 1570 і 1490 см^{-1} . Вывятленне адзначаных спектраскапічных асаблівасцей амінаў на аснове наяўнага эксперыментальнага матэрыялу не прадстаўляецца магчымым, аднак не выключана, што яны могуць быць абумоўлены ўзаемадзеяннем бензольных кольцаў.

Павелічэнне паглынання ў інтэрвале 3100—3600 см^{-1} і з'яўленне аднаго або некалькіх вострых максімумаў у спектрах амінаў XIII—XIX абумоўлена прысутнасцю ў гэтых злучэннях дзвюх гідраксільных і адной NH-групы. Як вядома [4], паласа валентных хістанняў NH-груп ляжыць у вобласці 3500—3300 см^{-1} , прычым уключэнне гэтых груп у вадародную

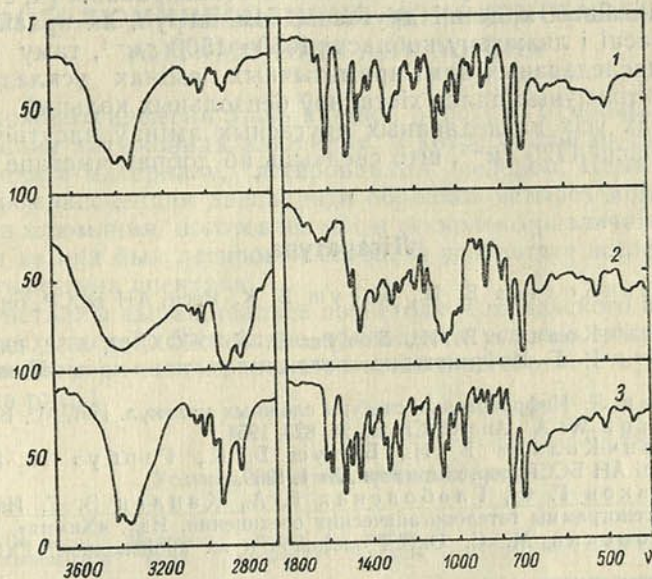


Рис. 4. Спектры піперыдылдыёлу і амінадыёлаў:
1—XVIII, 2—XX, 3—XIX

сувязь можа прывесці да з'яўлення дадатковых палос паглынання. Адносна рэзкія палосы ў вобласці 3450—3300 см^{-1} трэба аднесці да валентных хістанняў NH-груп, а больш шырокую ў вобласці 3250—3450 см^{-1} да валентных хістанняў OH-груп. Сапраўды, у спектры трацічнага аміну XX (рис. 4, крывая 2) у разглядаемай вобласці назіраецца адна шырокая паласа паглынання з максімумам каля 3400 см^{-1} .

Параўнанне спектраў амінавытворных XIII—XIX у вобласці 3100—3600 см^{-1} паказвае, што частата валентных хістанняў OH- і NH-груп змяняецца ў залежнасці ад аліфатычнага радыкала ў даволі шырокіх межах. Найменшаму значэнню частот максімуму паласы валентных хістанняў NH-груп (3350 см^{-1}) у спектрах амінаў XV, XVI, XVII і XVIII (рис. 3, крывыя 3, 4, 5 і рис. 4, крывая 1) адпавядае найбольш высокае значэнне (3270 см^{-1}) частаты валентных хістанняў груп OH. Павышэнне частаты NH валентных хістанняў (3380 см^{-1}) суправаджаецца паніжэннем частаты валентных хістанняў OH-груп (3420 см^{-1}) (рис. 3, крывыя 1, 2). Трэба меркаваць, што амінагрупа і дзве гідраксільныя групы, якія далучаны да трох суседніх вугляродных атамаў, у амінавытворных XIII—XIX утвараюць узаемазвязаную сістэму ўнутры- і між-малекулярных вадародных сувязей, на якую аказваюць істотны ўплыў акружанне суседніх структурных элементаў малекулы і перш за ўсё ста-

новішча метыльнай групы адносна NH- і OH-груп. Найбольш адчувальная да становішча метыльнай групы частата ν NH. Сапраўды, самая нізкая частата гэтых хістанняў (3350 см^{-1}) назіраецца ў спектрах злучэнняў XV—XVII з адносна доўгімі алкільнымі радыкаламі і злучэння XVIII, якое не змяшчае метыльнай групы. Наяўнасць у злучэннях XIII і XIV параўнальна кароткіх разгалінаваных ізабутылавых і ізапрапілавых радыкалаў прыводзіць да змяншэння асацыяцыі NH-груп і зніжэння частаты ν NH да 3380 см^{-1} . Прысутнасць метыльнай групы ў аднаго араматычнага кольца ў злучэнні XIX выклікае яшчэ большае зрушэнне частаты гэтага хістання (3430 см^{-1}). У апошнім выпадку групы NH не ўключаны ў вадародную сувязь або слаба асацыяваны [4, 9].

Дэфармацыйныя хістанні другасных амінагруп, як правіла, слабыя па інтэнсіўнасці і ляжаць у вобласці $1650\text{—}1500 \text{ см}^{-1}$, таму выяўленне NH-груп у даследаваных намі араматычных амінах ускладняецца накладаннем інтэнсіўных палос хістанняў бензолных кольцаў.

У спектрах усіх даследаваных другасных амінаў адсутнічае паглынне ў вобласці 1720 см^{-1} , што сведчыць аб добрай чыстаце гэтых злучэнняў.

Літаратура

1. Пансевіч-Коляда В. И., Богуш Б. К. Весті АН БССР, сер. хім. навук, № 2, 1967.
2. Пансевіч-Коляда В. И., Богуш Б. К. ЖОХ, 32, 3552, 1962.
3. Жбанков Р. Г. Инфракрасные спектры целлюлозы и ее производных. Минск, 1964.
4. Беллами Л. Инфракрасные спектры сложных молекул. ИЛ, М., 1963.
5. Patterson W. A. *Analyt. Chem.*, 26, 823, 1954.
6. Пансевіч-Коляда В. И., Богуш Б. К., Гарбуз Н. И., Жбанков Р. Г. Весті АН БССР, сер. хім. навук, № 1, 1969.
7. Большаков Г. Ф., Глебовская Г. А., Каплан З. Г. Инфракрасные спектры и рентгенограммы гетероорганических соединений. Изд. «Химия», 1967, стр. 8.
8. Малиновский М. С. Окиси олефинов и их производные. ГХИ, М., 1961, стр. 72.
9. Применение спектроскопии в химии, под ред. В. Веста. ИЛ, М., 1959.

Институт физики АН БССР,
Белорусский политехнический
институт

Поступило в редакцию
31.III 1970

КАРОТКІЯ ПАВЕДАМЛЕННІ

УДК 537.311.33

Н. Н. СИРОТА, А. И. ЛУКОМСКИЙ

ФОТОЛЮМИНЕСЦЕНЦИЯ МОНОКРИСТАЛЛОВ АНТИМОНИДА АЛЮМИНИЯ

До настоящего времени лишь в одной работе [1] сообщалось о фотолюминесценции антимионида алюминия, в которой описан спектр парной рекомбинации в материале, легированном селеном. Нами исследовалась фотолюминесценция двенадцати образцов четырех монокристаллов антимионида алюминия, изготовленных в несколько различающихся условиях. Один из них был легирован серой. В результате исследования выявлены четыре типа спектров.

Монокристаллы выращивались по методу Чохральского из алундовых и графитовых тиглей. В таблице приводятся условия получения монокристаллов. Номера монокристаллов в таблице соответствуют номерам спектров на рис. 1.

Таблица

Условия получения монокристаллов

№ моно-кристаллов	Материал тигля	Марка алюминия	Марка сурьмы	Легирующая примесь
1	графит	A999	экстра	сера $4 \cdot 10^{19} \text{ см}^{-3}$
2	алунд	A999	экстра	не легировался
3	алунд	A999	экстра	не легировался
4	алунд	AB-000	экстра	не легировался

Фотолюминесценция возбуждалась излучением ртутной лампы ДРШ-500. Инфракрасная часть ее спектра отфильтровывалась водным раствором хлористой меди.

На рис. 1, а приведены указанные четыре типа спектров, записанных при 77°К.

Литературные данные о ширине запрещенной зоны антимионида алюминия противоречивы [1—3]. По-видимому, наиболее достоверной следует считать величину 1,69 эв при 2,2°К, приведенную в работе [1]. Эта величина близка к значению, определенному нами по краю поглощения при 77°К (рис. 1, б). Сопоставление полученных нами спектров поглощения и спектров излучения исследованных образцов позволяет заключить, что энергия любого из максимумов спектров излучения меньше ширины запрещенной зоны.

Достаточно точная идентификация примесей, ответственных за особенности спектров 2÷4, пока невозможна. Образец, легированный серой (спектр 1), отличается наибольшей интенсивностью фотолюминесценции, причем ее максимум приходится на энергию 1,44 эв.

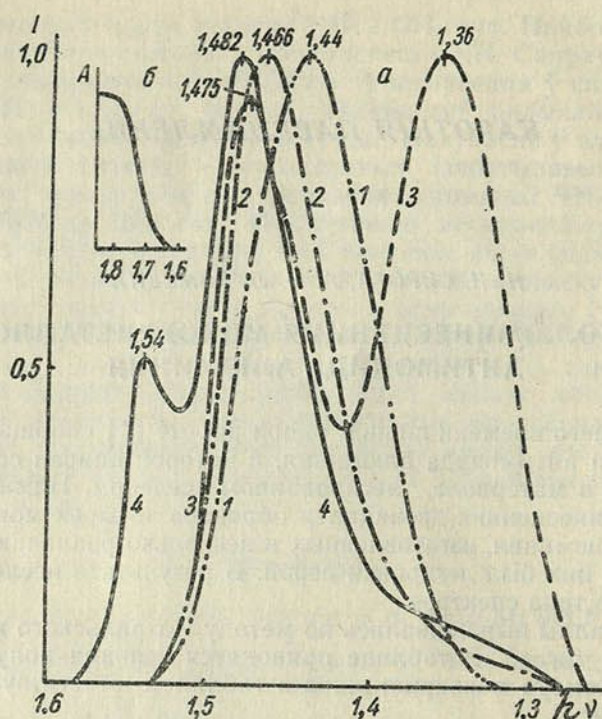


Рис. 1. Спектры фотолюминесценции (энергия фотона $h\nu$, эв и приведенная интенсивность I в отн. ед.) — а и поглощения A в отн. ед. — б:

1, 2, 3, 4 соответствуют номерам монокристаллов, приведенным в таблице

Согласно литературным данным, донорные уровни теллура и селена отстоят от дна зоны проводимости на 0,068 и 0,16 эв [3] соответственно. Полученные нами результаты дают основание предполагать, что уровень серы лежит ниже уровня селена.

Авторы приносят благодарность К. Е. Миронову за предоставление монокристалла антимолида алюминия, спектр фотолюминесценции которого показан на рис. 1, а (кривая 4).

Литература

1. Lorenz M. R., Morgan T. N., Pettit G. D., Turner W. I. Phys. Rev., 168, 902, 1968.
2. Blunt R. F., Frederikse H. P. R., Becker I. H., Hosler W. R. Phys. Rev., 96, 578, 1954.
3. Turner W. I., Reese W. E. Phys. Rev., 117, 1003, 1960.

Институт физики твердого тела и
полупроводников АН БССР

Поступило в редакцию
12.V 1970

УДК 539.12

А. С. ПОТУПА

МОДЕЛИРОВАНИЕ КВАЗИПОТЕНЦИАЛА АДРОННОЙ ДИФРАКЦИИ

Стандартная интерпретация упругого рассеяния адронов при очень высоких энергиях как вакуумной дифракции связана с тем, что, во-первых, в этих процессах не происходит обмена какими-либо квантовыми числами, а, во-вторых, угловое распределение рассеянных адронов обнаруживает характерные дифракционные максимумы, в частности сильный пик вперед.

Действительно, угловое распределение света дифрагировавшего на черном шарике радиуса R имеет вид [1]

$$\frac{dI}{dt} = I_0 \frac{J_1^2(R\sqrt{-t})}{\pi t}, \quad (1)$$

где J_1 — функция Бесселя, $-t = q^2$ — квадрату передачи импульса ($q = 2k \sin \frac{\theta}{2} \simeq k\theta$ при малых углах), I_0 — интенсивность падающего света. Формула (1) может быть использована для вычисления дифракции быстрых нейтронов на тяжелых ядрах (при $k^{-1} = \lambda \ll R_{\text{ядра}}$) при замене I_0 на $\pi R^2 = \sigma_{el}$ (полное сечение упругого рассеяния) [2].

Вблизи нулевого t пик имеет форму, близкую к гауссовому распределению по передаче, поскольку при очень малых z можно делать замену $J_1(2z) \rightarrow z \exp\{-z^2\}$. С другой стороны, именно функция $f \sim \exp\{R^2 t\}$ хорошо аппроксимирует сечение адронного рассеяния, соответствующее обмену одним вакуумным полюсом. При этом в отличие от обычной дифракции нужно считать, что радиус эквивалентного черного шарика растет с энергией

$$R \sim (\ln s)^{1/2}. \quad (2)$$

Поэтому при любом малом, но ненулевом t (при фиксированной ненулевой передаче) с ростом энергии разница между фраунгоферовым (1) и гауссовым распределениями по передаче импульса увеличивается, и следовательно, аналогия с рассеянием света на черном шарике ухудшается. Действительно, для обычной дифракции на объектах с фиксированным радиусом эта разница возникает из-за того, что для распределения (1) делается скачкообразное обрезание по угловому моменту в парциальном разложении амплитуды, а в случае гауссова распределения по передачам парциальная амплитуда имеет тоже гауссову форму по l :

$$f_l \sim \exp\left\{-\frac{l^2}{l_{eff}^2}\right\}, \quad (3)$$

где $l_{eff} \sim Rk \sim R\sqrt{s}$.
 Поскольку

$$\frac{J_1(2z)}{z} - e^{-z^2} = O(-z^2), \quad (4)$$

где $z = \frac{Rq}{2}$, всегда найдется такое q (при фиксированном R), что левая часть (4) будет меньше любого наперед заданного числа. Конечно, (4) не выполнено при учете (2) в области, где $\ln s \gg 1$.

Выбор удовлетворительной при любых энергиях оптической аналогии может оказаться существенным при попытке квазипотенциального истолкования вакуумной дифракции [3].

Известно, что оптический потенциал (ОП) в квантовой теории позволяет описать рассеяние на сложных мишенях, когда детальный закон взаимодействия неизвестен [4]. Причем под последним можно понимать независимое представление о структурных свойствах мишени и форме взаимодействия с каждым ее элементом. ОП моделирует фактически эти свойства совместно, как бы синтетическим способом. В настоящее время не представляется окончательно понятной возможность отдельного рассмотрения структуры адронов и их динамических законов. Более того, не исключено, что физическая картина адронных процессов принципиально несовместна с подобным разделением.

Однако, как мы увидим ниже, в случае «вакуумного квазипотенциала» уже простейшая гипотеза о структуре мишени позволяет выстроить адекватную оптическую аналогию, пригодную как для любых энергий, так и для любых передач (в рамках оптической модели).

Мы будем пользоваться аналогией с фермиевской теорией рассеяния на молекулах [2]. Рассмотрим рассеяние частиц на осциллирующей «абсолютно черной точке». Оптический потенциал для контактного (точечного) поглощения имеет вид

$$U(r, s) = is\lambda\delta(r). \quad (5)$$

Борновская аппроксимация для амплитуды рассеяния должна строиться с учетом усреднения $U(r)$ по собственным колебаниям точки.

$$\begin{aligned} f_{0n} &= \int d\mathbf{r}_1 \psi_n^*(\mathbf{r}_1) \psi_0(\mathbf{r}_1) \int d\mathbf{r}_2 U(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|, s) e^{-i\mathbf{q}\mathbf{r}_2} = \\ &= is\lambda \int d\mathbf{r}_1 \psi_n^*(\mathbf{r}_1) \psi_0(\mathbf{r}_1) e^{-i\mathbf{q}\mathbf{r}_1}, \end{aligned} \quad (6)$$

где учтено (5) и

$$\psi_n = \exp\left\{-\frac{r^2}{2R^2}\right\} \prod_{i=1}^3 C_i H_{n_i}\left(\frac{x_i}{R}\right),$$

$$n = n_1 + n_2 + n_3,$$

$$C_i = (2^n i! n_i! R \sqrt{\pi})^{-1/2},$$

H_{n_i} — полином Эрмита n_i -го порядка, R — радиус «размазки» осциллятора

$$R = \left(\frac{\hbar}{Mv}\right)^{1/2},$$

где M — масса «черной точки», v — частота колебаний.

Трехмерное интегрирование в (6) сводится к произведению трех одномерных интегралов.

Общий квазипотенциал задачи имеет вид

$$V^{(0,n)} = \int \psi_n^*(\mathbf{r}_1) U(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|, s) \psi_0(\mathbf{r}_1) d\mathbf{r}_1 = i\lambda s \psi_n^*(\mathbf{r}_2) \psi_0(\mathbf{r}_2). \quad (7)$$

В случае чисто упругого рассеяния (без возбуждения осциллятора) квазипотенциал пропорционален плотности вероятности найти осциллятор в основном состоянии

$$V^{(0,0)}(r) = i\lambda s |\psi_0(r)|^2 + \frac{i\lambda s}{(RV\pi)^3} \exp\left\{-\frac{r^2}{R^2}\right\} \quad (8)$$

и совпадает с квазипотенциалом из работы [3], если положить $\lambda = g_0(2\pi)^3$, $R = 2\sqrt{a}$.

Воспользовавшись оптической теоремой для амплитуды $f^{(0,0)}$, нетрудно получить

$$\sigma_{tot} = 4\lambda. \quad (9)$$

Проведенное рассмотрение соответствует попытке обеспечить гауссово размазывание дифракционного квазипотенциала за счет нетривиальной структуры «внутренних» волновых функций. Поскольку решение задачи проведено выше в борновском приближении, аналогия должна сохраниться и при переходе к орировской области передач, например, на основе оптической модели. Таким образом, рассеяние на осцилляторе с фиксированным центром инерции представляет практически замкнутую аналогию для дифракционного рассеяния адронов при высоких энергиях.

Если попытаться учесть внутренние возбуждения осциллятора, то возникнут распределения по передачам импульса вида

$$\left(\frac{d\sigma}{dt}\right)_{0,n} \sim (-R^2t)^n \exp\{R^2t\} \quad (10)$$

с максимумами при

$$t_n = -\frac{n}{R^2}.$$

Поскольку распределения типа (10) со смещенным из нуля пиком и минимумом при нулевых передачах в эксперименте пока не наблюдались, нельзя распространить осцилляторную аналогию на рассеяние с появлением в конечном состоянии резонансов, принадлежащих реджевским траекториям рассеиваемых частиц.

Автор признателен Л. Г. Морозу и другим участникам семинара ЛТФ за обсуждение работы.

Литература

1. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теория поля, ФМ, 1962.
2. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Квантовая механика, ФМ, 1963.
3. Garsevanishvili V. R., Matveev V. A., Slepchenko L. A., Tavkchelidze A. N. Phys. Lett., **29B**, 191, 1969.
4. Голдбергер М., Ватсон К. Теория столкновений. М., 1967.

Институт физики
АН БССР

Поступило в редакцию
21.V 1970

А. С. ПОТУПА

КОМПЛЕКСНЫЕ ТРАЕКТОРИИ РЕДЖЕ И ГРАНИЦА РЕЗОНАНСНОЙ ОБЛАСТИ

Цель настоящей работы показать, что рост мнимых частей комплексных траекторий Редже $\alpha(x)$ ($x=s, t, u$) в физической области переменной x

$$\frac{d}{dx} \operatorname{Im} \alpha(x) > 0 \quad (1)$$

приводит к образованию границы резонансной области и, следовательно, конечным графикам Чью—Фраучи.

Как известно, использование чисто реальных $\alpha(x) = a + bx$ во всех каналах совместно с кроссинг-симметрией, реджевской асимптотикой амплитуд и сильной (локальной) дуальностью позволило сконструировать явные представления для инвариантных амплитуд некоторых процессов рассеяния [1—3]. Модели типа Венециано имеют ряд критических пунктов, в частности, в них используется асимптотика $\alpha(x)$. Это обстоятельство может затруднить переход к более реалистичным, например включающим унитарность, схемам, поскольку известной экспериментально является лишь часть траектории при малых по модулю значениях аргумента. Начиная с некоторых $x = x_B$ форма траекторий не должна верифицироваться отдельными резонансными пиками, если верно (1). Ограничиваясь описанием резонансов совокупностью лоренцевых распределений и сохраняя эквидистантность, нетрудно видеть, что существует граничная масса, при которой полуширина резонанса совпадает с расстоянием между резонансами

$$\Gamma x_B^{1/2} = \frac{2}{b}. \quad (2)$$

С учетом стандартной связи $\Gamma = \frac{\operatorname{Im} \alpha(x)}{x^{1/2} \frac{d \operatorname{Re} \alpha(x)}{dx}}$ получаем уравнение для

границы x_B :

$$\operatorname{Im} \alpha(x) = 2. \quad (3)$$

Интерпретация (2) и (3) весьма проста: начиная с x_B влияние соседних резонансов должно приводить к приблизительному равномерному распределению точек на диаграммах Далитца по инвариантным массам. Такая же картина должна возникать на формальном аналоге диаграмм Далитца по спине, если воспользоваться правилом перехода $J = a + bx$. Условие (3) приводит к «индивидуальной ошибке» в определении спина $\Delta J = 2$, т. е. нельзя выбрать между двумя возможными до-

минирующими значениями степени $\cos \theta$ (или индексами полиномов Лежандра) с одинаковой четкостью в угловом распределении для распада. Кроме того, существует точка $x = x_1$ — корень уравнения

$$\operatorname{Im} \alpha(x) = 1, \quad (4)$$

начиная с которой спин резонанса в принципе можно определить, лишь предварительно приписав ему определенную четность. В отличие от $x_{1/2}$ ($\operatorname{Im} \alpha(x_{1/2}) = 1/2$), где действует правило отбора по статистике, и x_1 — по четности, для x_B никаких правил выделения пока не существует.

Для конкретизации значения x_B и x_1 мы выбрали форму траектории, предложенную Боллом и Захарианом в [4]:

$$\alpha(x) = a + bx + c \sqrt{x(x_{th} - x)}, \quad (5)$$

где x_{th} — пороговое значение квадрата массы.

Совместная интерполяция для a , b и c по Δ_δ - и N_γ -траекториям делалась на основе данных из [5]. В результате было получено

$$1) c = 0,13 \text{ Гэв}^{-2},$$

$$2) \sqrt{u_B} = 3,9 \div 4 \text{ Гэв} \left(u_B \simeq \frac{2}{c} \right),$$

$$3) \sqrt{u_1} \simeq 2,8 \text{ Гэв},$$

4) допустимо появление следующих «закрывающих» резонансов $\Delta_{23/2}(3550, \Gamma \simeq 500)$, $N_{19/2}(3400, \Gamma \simeq 500)$, $N_{23/2}(3700, \Gamma \simeq 550)$.

В случае мезонных траекторий ситуация несколько менее определена. В частности, отождествление высших повторений для ρ - и A_0 -траекторий с узкими резонансами, открытыми Магличем с сотрудниками [7], приводит к существенно иному виду $\operatorname{Im} \alpha(x)$ ($\operatorname{Im} \alpha(s) \simeq \lambda \sqrt{s - s_{th}}$). Однако нельзя исключить появление очень широких мезонных резонансов с $M_{res} \gtrsim 2,5 \text{ Гэв}$, что в среднем приведет к форме типа (5), т. е. к «универсальной» границе. В пользу «универсальности» границы резонансной области $\sim 4 \text{ Гэв}$ свидетельствует оценка массы фэйрбола (играющей роль нашего $\sqrt{u_B}$), проведенная в [5]: $m_{Fb} = 3,2 \div 4 \text{ Гэв}$.

Следует отметить приблизительную согласованность приведенной величины границы с оценкой, базирующейся на анализе распределений по поперечным импульсам для высокоэнергетических ливней, где массы резонансов, дающих заметный вклад, не превышают, по-видимому, $3 \div 3,5 \text{ Гэв}$ [9]. Это использовалось Гейзенбергом для критики гипотезы кварков. Последние данные [10] говорят в пользу того, что $m_Q > 3,5 \text{ Гэв}$ (оценка по нуклонной диссоциации $p + p \rightarrow p + nQ + k\bar{Q}$). С нашей точки зрения, если $m_Q > \sqrt{x_B}$, то допустимо лишь утверждение, что кварки не могут привести к верифицируемой нелинейности траектории, которая, согласно аргументации Мандельштама [11], должна возникать при $x \simeq m_Q^2$.

Если механизм ограничения количества наблюдаемых резонансов, предложенный выше, окажется качественно верным, то в соответствии с концепцией сильной дуальности реджевскую асимптотику можно будет рассматривать как коллективный эффект бесконечного числа индивидуально не регистрируемых резонансов прямого канала. Граница резонансной области позволяет оценить порог реджевского режима $x_{Reg} \simeq x_B$, т. е. предел интегрирования в правилах сумм при конечных энергиях.

Автор глубоко признателен В. Г. Кадышевскому, В. А. Матвееву, Р. М. Мир-Касимову, В. Н. Третьякову и другим сотрудникам ЛТФ ОИЯИ и ЛТФ ИФАН БССР за интерес к работе и полезные обсуждения.

Литература

1. Veneziano G. Nuovo Cim., **57A**, 190, 1968.
2. Lovelace C. Phys. Lett., **28B**, 264, 1968.
3. Jacob M. CERN preprints TH. **1010**, 1052, 1969.
4. Ball J. S., Zachariasen F. Phys. Rev. Lett., **23**, 346, 1969.
5. Varash-Schmidt N. et al. Rev. Mod. Phys., **41**, 109, 1969.
6. Ширков Д. В. Препринт ОИЯИ **P2-4726**, 1969; УФН, **102**, вып. 1, 1970.
7. Focacci M. N. et al. Phys. Rev. Lett., **17**, 890, 1966.
8. Dremin I. M., Royzen I. I. Phys. Lett., **31B**, 71, 1970.
9. Гейзенберг В. Введение в единую полевою теорию элементарных частиц, 184, М., 1968.
10. Антипов Ю. М. и др. ЯФ, **10**, 346, 976, 1969.
11. Mandelstam S. Phys. Rev., **166**, 1539, 1968.

Институт физики
АН БССР

Поступило в редакцию
9.VII 1970

В. С. РУМЯНЦЕВ

ФОТОРОЖДЕНИЕ ВЕКТОРНЫХ МЕЗОНОВ В МОДЕЛИ ИМПУЛЬСНОГО ПРИБЛИЖЕНИЯ

Исследование процессов взаимодействия γ -квантов высокой энергии с адронами показало, что механизм взаимодействия с большой вероятностью связан с рождением на промежуточных этапах сильно взаимодействующих векторных частиц, что нашло свое отражение в идее векторной доминантности [1].

Считая эту идею достаточно достоверной, можно исследовать различные механизмы взаимодействия векторных частиц с нуклонами, опираясь на опытные данные по электромагнитному взаимодействию нуклонов.

В данной статье рассчитывается дифференциальное сечение упругого рассеяния ρ^0 -мезона на протоне $d\sigma_{\rho^0 p}/dt$ на основе модели, которой соответствует диаграмма рис. 1. Сравнение сечения $d\sigma_{\rho^0 p}/dt$ с экспериментом про-

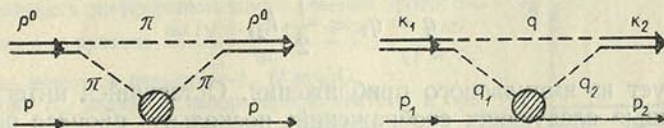


Рис. 1

водится на основе гипотезы векторной доминантности, которая, в частности, позволяет связать дифференциальные сечения процессов

$$\gamma + p \rightarrow \rho^0 + p, \quad (1)$$

$$\rho^0_{\perp} + p \rightarrow \rho^0 + p \quad (2)$$

соотношением [2]

$$\frac{d\sigma(\gamma + p \rightarrow \rho^0 + p)}{dt} \approx \frac{\alpha}{4} \left(\frac{\gamma_V^2}{4\pi} \right)^{-1} \frac{d\sigma(\rho^0_{\perp} + p \rightarrow \rho^0 + p)}{dt}, \quad (3)$$

где символ \perp обозначает, что ρ^0 -мезон в начальном состоянии имеет поперечную поляризацию. Поскольку процесс фоторождения мезонов идет при достаточно высокой энергии, мы можем использовать импульсное приближение [3]. Тогда, как будет показано ниже, $d\sigma_{\rho^0 p}/dt$ может быть выражено через дифференциальное сечение упругого рассеяния π -мезонов на протоне $d\sigma_{\pi p}/dt$.

Указанной диаграмме соответствует матричный элемент

$$\langle f | S | i \rangle = i(2\pi)^4 \delta(k_1 + p_1 - k_2 - p_2) \frac{T_{\lambda\lambda'}}{4V^2 \sqrt{k_{10} p_{10} k_{20} p_{20}}}, \quad (4)$$

который связан с дифференциальным сечением упругого рассеяния неполяризованных ρ^0 -мезонов на неполяризованных протонах следующим образом [6]:

$$\frac{d\sigma_{\rho^0 p}}{dt} = \frac{1}{(2\pi)} \frac{1}{32 [(s - M^2 - M_p^2)^2 - 4M^2 M_p^2]} \sum |T_{\lambda\lambda'}|^2, \quad (5)$$

причем в (5) суммирование проводится по спинам всех частиц, но с учетом того, что начальные ρ^0 -мезоны имеют только поперечную поляризацию. В формулах (4) и (5) введены обозначения:

$$T_{\lambda\lambda'} = \frac{4g^2}{i(2\pi)^4} \int \frac{d^4q q_\mu q_\nu s_\mu^\lambda s_\nu^{\lambda'} \langle f' | M | i' \rangle}{(q^2 + \mu^2) [(k_1 - q)^2 + \mu^2] [(k_2 - q)^2 + \mu^2]}, \quad (6)$$

где s^λ и $s^{\lambda'}$ — вектора поляризации ρ^0 -мезона в начальном и конечном состояниях соответственно, g^2 — константа связи, определяющая распад $\rho^0 \rightarrow \pi^+ + \pi^-$ и равная [7]

$$g^2 = \frac{48\pi M_\rho^2 \Gamma}{(M_\rho^2 - 4\mu^2)^{3/2}},$$

$\langle f' | M | i' \rangle$ — инвариантная амплитуда рассеяния π -мезона на протоне, которая нормирована так, что

$$\sum_{\text{спины протонов}} |\langle f' | M | i' \rangle|^2 = (2\pi) 16 [(s' - M^2 - \mu^2)^2 - 4M^2\mu^2] \frac{d\sigma_{\pi p}}{dt} \quad (7)$$

и

$$s = -(k_1 + p_1)^2, \quad s' = -(q_1 + p_1)^2, \quad t = -(q_1 - q_2)^2 = -(k_1 - k_2)^2,$$

M , M_ρ и μ — массы протона, ρ^0 -мезона и π -мезона соответственно, Γ — ширина распада $\rho^0 \rightarrow \pi^+ + \pi^-$.

Амплитуду $\langle f' | M | i' \rangle$ в формуле (6) можно вынести за знак интеграла, если воспользоваться равенством

$$q = q_1 = \frac{1}{2} k_1, \quad (8)$$

которое следует из импульсного приближения. Оставшийся интеграл можно взять с помощью следующих соображений: поскольку процесс распада ρ^0 -мезона на π -мезоны реален, естественно в подынтегральном выражении считать все внутренние частицы лежащими на массовой оболочке. В этом случае интеграл (6) с достаточной точностью равен своей мнимой части, которую мы находим по правилам Кутковского в полной аналогии с работой [3]. В результате $T_{\lambda\lambda'}$ приобретает следующий вид:

$$\begin{aligned} T_{\lambda\lambda'} &= \frac{g^2}{i(2\pi)^4} \langle f' | M | i' \rangle 4s_\mu^\lambda s_\nu^{\lambda'} \text{Im} \int \frac{d^4q q_\mu q_\nu}{(q^2 + \mu^2) [(k_1 - q)^2 + \mu^2] [(k_2 - q)^2 + \mu^2]} = \\ &= \frac{g^2}{i8} \frac{\langle f' | M | i' \rangle}{\sqrt{t(t - 4M_\rho^2)}} [(k_2 s^\lambda)(k_1 s^{\lambda'}) f_1(t) - (s^\lambda s^{\lambda'}) f_2(t)], \end{aligned} \quad (9)$$

где введено обозначение

$$f_1(t) = \frac{6M_\rho^4 + 2\mu^2(t - 4M_\rho^2)}{(t - 4M_\rho^2)^2} + \frac{2M_\rho^4 + 2\mu^2(t - 4M_\rho^2)}{t(t - 4M_\rho^2)}, \quad (10)$$

$$f_2(t) = \frac{2M_\rho^4 + 2\mu^2(t - 4M_\rho^2)}{t - 4M_\rho^2}. \quad (11)$$

Подставляя теперь (9) и (7) в (5), получим

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma_{\rho^0 p}}{dt} &= \frac{g^2}{2} \frac{d\sigma_{\pi p}}{dt} \frac{[(s' - M^2 - \mu^2)^2 - 4M^2\mu^2]}{[(s - M^2 - M_\rho^2)^2 - 4M^2M_\rho^2]} \times \\ &\times \frac{\sum_{\lambda, \lambda'} |(k_2 s^\lambda)(k_1 s^{\lambda'}) f_1(t) - (s^\lambda s^{\lambda'}) f_2(t)|^2}{[8\sqrt{t(t - 4M_\rho^2)}]^2}. \end{aligned} \quad (12)$$

Исходя из соотношений

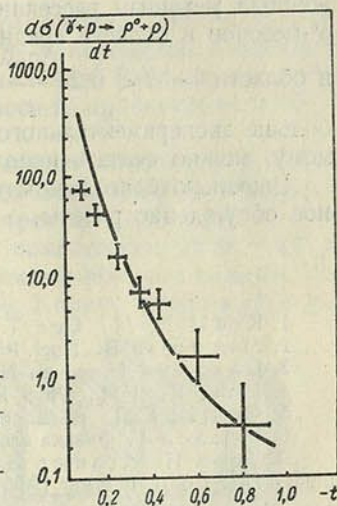
$$\sum_{\lambda'} s_{\mu}^{\lambda'} s_{\nu}^{\lambda'} = \delta_{\mu\nu} + \frac{k_{2\mu} k_{2\nu}}{M_{\rho}^2}, \quad k_1 k_2 = \frac{t - 2M_{\rho}^2}{2}$$

$$\sum_{\lambda=1,2} (k_2 s^{\lambda})^2 = k^2 [\cos^2(\widehat{k_2 s^1}) + \cos^2(\widehat{k_2 s^2})] = k^2 [1 - \cos^2(\widehat{k_1 k_2})] = - \left(t + \frac{t^2}{4k^2} \right),$$

где в системе центра масс k_1, k_2 — импульсы ρ^0 -мезона в начальном и конечном состояниях соответственно и $|k_1| = |k_2| = k$, легко получить, что

$$\begin{aligned} \sum_{\lambda, \lambda'} | (k_2 s^{\lambda}) (k_1 s^{\lambda'}) f_1(t) - (s^{\lambda} s^{\lambda'}) f_2(t) |^2 = \\ = \left\{ \left[2 - \frac{1}{M_{\rho}^2} \left(t + \frac{t^2}{4k^2} \right) \right] f_2^2(t) - \right. \\ \left. - \frac{t(t - 4M_{\rho}^2)}{4M_{\rho}^2} \left(t + \frac{t^2}{4k^2} \right) f_1^2(t) + \right. \\ \left. + \frac{(t - 2M_{\rho}^2)}{M_{\rho}^2} \left(t + \frac{t^2}{4k^2} \right) f_1(t) f_2(t) \right\}. \quad (13) \end{aligned}$$

Рис. 2. Зависимость дифференциального сечения фоторождения ρ^0 -мезонов на протоне $\frac{d\sigma[\gamma + p \rightarrow \rho^0 + p]}{dt}$, $\frac{МКБ}{(\Gamma_{\text{эв}}/c)^2}$ от импульса передачи t , $(\Gamma_{\text{эв}}/c)^2$. Энергия фотона E_{γ} задана в лабораторной системе в пределах $4,5 \Gamma_{\text{эв}} < E_{\gamma} < 5,8 \Gamma_{\text{эв}}$



Учитывая возможность того, что на протоне могут рассеиваться как π^+ , так и π^- -мезоны, и из соображений изотопической инвариантности мы должны сделать замену

$$\frac{d\sigma_{\pi p}}{dt} \rightarrow 2 \left(\frac{d\sigma_{\pi^+ p \rightarrow \pi^+ p}}{dt} + \frac{d\sigma_{\pi^- p \rightarrow \pi^- p}}{dt} - \frac{d\sigma_{\pi^- p \rightarrow \pi^0 n}}{dt} \right). \quad (14)$$

Подставляя (14) и (13) в (12), получаем окончательно

$$\frac{d\sigma_{\rho^0 p}}{dt} = G(t, s', s) \left(\frac{d\sigma_{\pi^+ p \rightarrow \pi^+ p}}{dt} + \frac{d\sigma_{\pi^- p \rightarrow \pi^- p}}{dt} - \frac{d\sigma_{\pi^- p \rightarrow \pi^0 n}}{dt} \right), \quad (15)$$

где

$$\begin{aligned} G(t, s', s) = \frac{g^2}{[8 V t(t - 4M_{\rho}^2)]^2} \frac{[(s' - M^2 - \mu^2)^2 - 4M^2\mu^2]}{[(s - M^2 - M_{\rho}^2)^2 - 4M^2M_{\rho}^2]} \times \\ \times \left\{ \left[2 - \frac{1}{M_{\rho}^2} \left(t + \frac{t^2}{4k^2} \right) \right] f_2^2(t) - \frac{t(t - 4M_{\rho}^2)}{4M_{\rho}^2} \left(t + \frac{t^2}{4k^2} \right) f_1^2(t) + \right. \\ \left. + \frac{(t - 2M_{\rho}^2)}{M_{\rho}^2} \left(t + \frac{t^2}{4k^2} \right) f_1(t) f_2(t) \right\}. \end{aligned}$$

Из равенства (8) следует, что сечения $d\sigma_{\pi p}/dt$, входящие в (15), следует брать при импульсах π -мезонов в два раза меньших, чем импульсы ρ^0 -мезонов, и что

$$s' = \frac{1}{2}(s + M^2) - \frac{M_p^2}{4}.$$

Сравнение полученного значения $d\sigma_{\rho^0 p}/dt$ с экспериментом проводится при помощи соотношения (3). На рис. 2 сплошная кривая представляет теоретическое значение $d\sigma_{\gamma p}/dt$, а крестиками обозначены экспериментальные точки, взятые из [4]. Значения $d\sigma_{\pi p}/dt$ приводятся в [5].

Как видно из рис. 2, имеется удовлетворительное согласие между теоретическими расчетами и экспериментом. Это указывает на то, что предложенный механизм рассеяния может играть важную роль в фоторождении ρ^0 -мезонов в области средних значений передаваемого импульса. Однако в области $-t < 0,2 \left(\frac{\Gamma_{\rho^0}}{c}\right)^2$ теоретическое значение $d\sigma_{\gamma p}/dt$ значительно больше экспериментального. Главной причиной этого несоответствия, по-видимому, можно считать использованную оценку интеграла в формуле (6).

Выражаю благодарность Л. Г. Морозу и Н. В. Максименко за полезное обсуждение работы.

Литература

1. Kroll N. M., Lee T. D., Zumino B. Phys. Rev., **157**, 1376, 1967.
2. Margolis B. Nucl. Phys., **B6**, 687, 1968.
3. Chahoud N. et al. Nuovo Cimento, **56A**, 838, 1968.
4. Erbe R. et al., Phys. Rev., **175**, 1669, 1968.
5. Coffin C. T. et al. Phys. Rev., **159**, 1169, 1967.
6. Челлен Г. Физика элементарных частиц. М., 1966.
7. Joos H., Kramer G. Photoproduction of ρ and ω mesons in the peripheral model. DESY 64/1, Februar 1964.

Институт физики
АН БССР

Поступило в редакцию
2.VII 1970

УДК 539.89

В. И. ПРИВАЛОВ, Г. Г. ШИЕНОК

ОПТИЧЕСКАЯ КАМЕРА ВЫСОКОГО ДАВЛЕНИЯ

Для исследования влияния давления на рекомбинационное излучение и спектр фотоответа полупроводниковых $p-n$ -переходов нами сконструирована оптическая камера высокого давления. Рабочее давление составляло 6 кбар и ограничивалось механической прочностью окошек. Работы велись при различных температурах.

На рис. 1 дан разрез камеры, из которого видно назначение частей. Высокое давление в рабочей камере создается поршнем 7 с грибовидным уплотнением 6 при помощи гидравлического пресса, затем механически фиксируется гайкой 8. Грибок уплотняется прокладками из фторопласта и винипласта, зазор между грибком и стенками корпуса камеры для надежной работы делается как можно меньше. Корпус камеры 13 и все ее части изготовлены из стали 40Х, термообработанной до HRC 42. Диаметр камеры 80 мм.

Конструкция окон является компактным вариантом конструкции Бриджмена [1]. Оптическое окно 10 представляет собой цилиндр диаметром 11 мм и высотой 10 мм из синтетического сапфира с оптически полированными плоскопараллельными торцами. Окно приклеивается

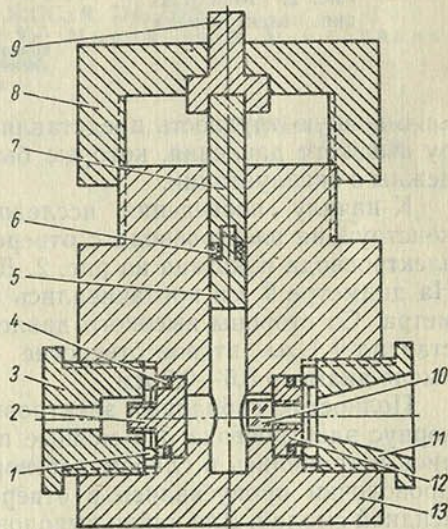


Рис. 1. Общий вид оптической камеры:

1—упорное кольцо, 2—заглушка, 3, 11—нажимная гайка, 4—уплотнительные кольца, 5—грибок, 6—уплотнение грибка, 7—поршень, 8—гайка, 9—шток, 10—оптическое окно, 12—грибовидная пробка, 13—корпус камеры

своими торцами к плоским полированным торцам грибовидных пробок 12, которые опираются на стопку из трех тонких уплотнительных колец 4 — стального, медного и свинцового. Чтобы эти кольца не выдавливались, они прижаты небольшим кольцом 1 треугольного сечения из закаленной стали 40Х. Вся система удерживается на месте нажимной гайкой 11. Грибовидная пробка, уплотнительные кольца и нажимное кольцо вставляются и вынимаются как единый узел. Для вынимания этого узла служит специальный съемник, ввинчиваемый в резьбу, которая нарезана в канале грибовидной пробки. Для уплотнения нами применен метод с «безопорной поверхностью». Хвостовик грибовидной пробки 12 ни на что не опирается, поэтому на уплотнение приходится

давление большее, чем давление в камере. В случае, если при слишком высоком давлении прокладки будут пережаты, хвостовик грибовидной пробки упрется в нажимную гайку. Зазор между ними выбран с таким расчетом, чтобы хвостовик упирался в гайку, снимая нагрузку с уплотнительных колец, раньше, чем эти кольца выйдут из строя. При различных температурах нам приходилось пользоваться различными клеями для приклеивания сапфирового окошка к грибовидной пробке.

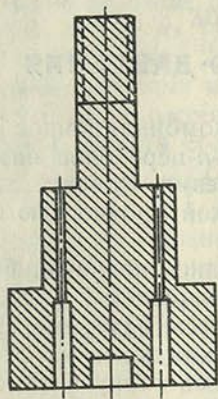


Рис. 2. Конструкция электроввода

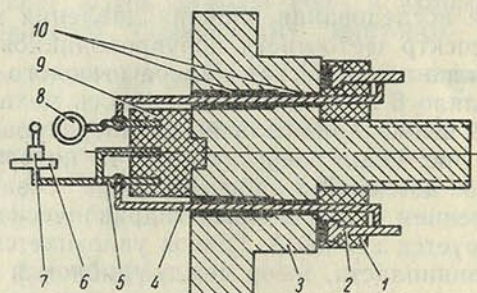


Рис. 3. Собранный электроввод:

1, 9 — фторопластовые втулки; 2, 5 — серебряные контакты; 3 — корпус электроввода; 4 — медные электроводы; 6 — держатель диода; 7 — диод; 8 — датчик давления; 10 — эпоксидная смола

Большую трудность представляет разработка электровводов в камеру высокого давления, которые были бы просты в изготовлении и надежны в эксплуатации.

К началу проведения исследований [2] нами была разработана конструкция электроввода с отверстиями двух диаметров. Конструкция электроввода показана на рис. 2. Длина электроввода составляет 28 мм. На диаметре 9 мм протачивались 4 отверстия, которые имели два диаметра. Со стороны высокого давления диаметр большего отверстия составлял 1,1 мм, второе отверстие служило одновременно опорным и имело диаметр 0,6—0,7 мм.

Полностью собранный электроввод показан на рис. 3. Перед сборкой корпус электроввода 3 и медные проводники 4 тщательно обезжиривались и травились в слабом растворе соляной кислоты. Затем медные проволочки пропускались в отверстие электроввода и заливались эпоксидной смолой. Для пайки выводов 2 диода 7 и датчика 8 к корпусу электроввода приклеивались фторопластовые втулки 1 и 9. Электроводы надежно вели себя при давлении 10 кбар.

Недавно появилось сообщение о работах с подобными конструкциями [3]. Основным недостатком этих конструкций является обламывание электроввода в зоне высокого давления на границе с рабочей средой. Рабочей средой служили глицерин, обезвоженный керосин и силиконовые масла. Гидростатичность проверялась самой конструкцией диода.

Для измерения давления в камере нами применен электрический манометр, измеряющий давление по изменению электрического сопротивления металлической проволоки. При изготовлении датчика мы использовали манганиновую проволоку диаметром 0,05 мм с двойной шелковой изоляцией. Обращение с такой тонкой и хрупкой проволокой

требует большой осторожности. Чтобы избежать негидростатичных эффектов, применяли свободную намотку на бумажный каркас. Для придания большей устойчивости датчику концы манганинового манометра припаивали к медным проводам. Сопротивление манометра составляло примерно 20 ом и измерялось потенциометром Р304.

Калибровка датчика производилась по точке плавления ртути [4]. Второй точкой служило атмосферное давление. По данным многочисленных исследований установлено, что вплоть до 10 кбар существует линейная зависимость сопротивления манганина от давления, и поэтому по указанным двум точкам находится коэффициент изменения сопротивления от давления.

Для температурных измерений были сконструированы специальный нагреватель и криостат. Контроль температуры производился медь-константановой термопарой, которая крепилась на внешней поверхности камеры.

Для безопасной работы камера давления помещалась в защитный кожух.

В заключение авторы выражают благодарность Н. Н. Сироте за постановку задачи и постоянный интерес к работе, В. В. Михневичу за помощь в разработке конструкции камеры.

Литература

1. Paul W., Benedek G. B., Warshauer D. RSI, 30, 874, 1959.
2. Сирота Н. Н., Шиенок Г. Г. ЖПС, 9, 714, 1968.
3. Ицкевич Е. С., Крайденев В. Ф., Миронова З. А., Славянинова Е. Л., Сухопаров В. А. ПТЭ, № 1, 1968.
4. Циклис Р. С. ЖТФ, 15, 960, 1946.

*Институт физики твердого тела
и полупроводников АН БССР*

*Поступило в редакцию
8.IV 1970*

М. С. ЦЕДРИК, Л. Н. МАРГОЛИН

**ВЛИЯНИЕ УСЛОВИЙ ВЫРАЩИВАНИЯ
МОНОКРИСТАЛЛОВ ТРИГЛИЦИНСУЛЬФАТА
НА ИЗМЕНЕНИЕ ТАНГЕНСА УГЛА
ДИЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ПОТЕРЬ В СИЛЬНОМ ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ПОЛЕ**

Исследование диэлектрических свойств сегнетоэлектриков в широком диапазоне напряженности электрического поля представляет собой значительный интерес, так как выявляет новые сведения о поведении сегнетоэлектриков в электрическом поле. Изучение поведения сегнетоэлектриков в сильном электрическом поле проведено в ряде работ [1—5]. Однако в литературе отсутствуют сведения о влиянии условий выращивания монокристаллов сегнетоэлектриков на изменение их свойств в сильном электрическом поле.

Настоящая работа является продолжением исследований по изучению влияния условий выращивания монокристаллов триглицинсульфата (ТГС) на их физические свойства. Нами проведены измерения тангенса угла диэлектрических потерь монокристаллов ТГС в сильных электрических полях.

Монокристаллы триглицинсульфата выращивались в динамическом режиме из водных растворов при постоянной температуре и постоянном пересыщении. Исходным продуктом служил многократно перекристаллизованный ТГС из водных растворов.

Измерения тангенса угла диэлектрических потерь $\text{tg } \delta(E_{\sim})$ производились с помощью моста переменного тока на частоте 50 *гц*. Чувствительность моста при измерении $\text{tg } \delta$ составляла $1 \cdot 10^{-5}$. Погрешность одиночного измерения $\text{tg } \delta$ не превышала $\pm \left(\frac{1,5 \text{ tg } \delta}{100} + 6 \cdot 10^{-5} \right)$.

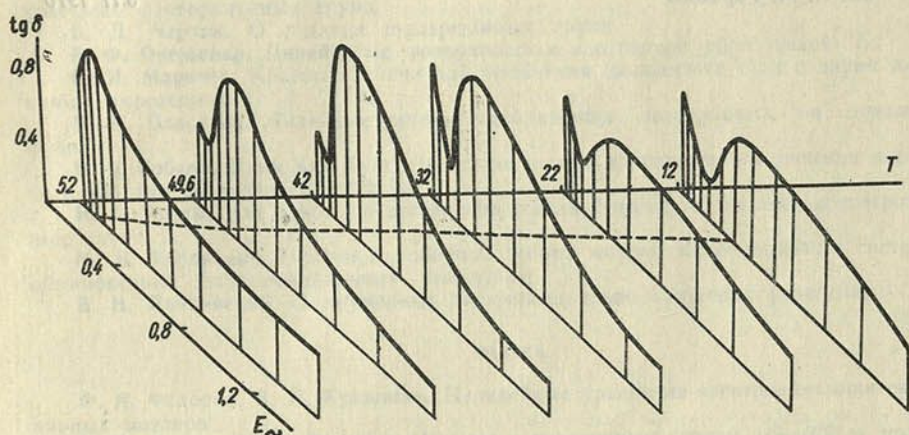
Для измерений были приготовлены образцы, вырезанные перпендикулярно полярной оси *Y* [6]. Все образцы имели форму прямоугольников площадью 0,6—1,2 *см*² и толщиной 1,4—1,5 *мм*. Термостатирование образцов осуществлялось ультратермостатом с точностью до 0,02 °С.

Измерения тангенса угла диэлектрических потерь $\text{tg } \delta(E_{\sim})$ проведены для монокристаллов ТГС, выращенных при постоянных температурах и постоянных пересыщениях (см. таблицу).

Таблица
Режимы выращивания монокристаллов ТГС

Температура выращивания монокристаллов, °С	Относительное пересыщение раствора $\frac{\Delta n}{n}$, %
12	0,283
22	0,198
32	0,381
42	0,360
49,6	0,332
52	0,323

На рисунке показано изменение тангенса угла диэлектрических потерь монокристаллов ТГС в сильном электрическом поле в зависимости от условий выращивания. На основании полученных данных можно отметить следующие особенности в поведении монокристаллов ТГС в широком диапазоне напряженностей электрического поля. Тангенс угла диэлектрических потерь для монокристаллов, выращенных при температурах ниже точки Кюри, при малых значениях E_{\sim} резко уменьшается, достигая минимального значения. Минимум $\text{tg } \delta$ обнаруживается в электрических полях, при которых имеет



Влияние сильного электрического поля E_{\sim} , кв. см^{-1} на изменение тангенса угла диэлектрических потерь $\text{tg } \delta$ в монокристаллах ТГС, выращенных при разных температурах T , $^{\circ}\text{C}$ и постоянном пересыщении. Измерения проведены при температуре 47°C

место начало резкого возрастания диэлектрической проницаемости, предшествующего перегибу зависимости $\epsilon(E_{\sim})$. С увеличением напряженности электрического поля $\text{tg } \delta$ возрастает, проходит через максимум, после чего значения $\text{tg } \delta$ начинают медленно убывать.

С понижением температуры выращивания монокристаллов ТГС максимальное значение тангенса угла диэлектрических потерь уменьшается и смещается в сторону более сильных электрических полей. Кроме того, с понижением температуры выращивания монокристаллов кривая зависимости $\text{tg } \delta$ от напряженности электрического поля E_{\sim} становится более полой.

Иной характер зависимости $\text{tg } \delta(E_{\sim})$ имеют кристаллы, выращенные при температурах выше точки Кюри. Для таких монокристаллов с увеличением напряженности электрического поля наблюдается резкое возрастание $\text{tg } \delta$, которое становится максимальным в полях порядка $80 - 120 \text{ в/см}$. С дальнейшим увеличением напряженности электрического поля тангенс угла диэлектрических потерь медленно уменьшается. Как и для монокристаллов, выращенных в сегнетоэлектрической фазе, этот максимум значений $\text{tg } \delta$ соответствует началу резкого возрастания диэлектрической проницаемости с увеличением напряженности электрического поля.

Так как диэлектрические потери в сильных переменных электрических полях являются прежде всего потерями на гистерезис, то можно считать, что условия выращивания монокристаллов ТГС существенно влияют на формирование доменной структуры.

Авторы считают своим приятным долгом выразить благодарность руководителю работы академику АН БССР Н. Н. Сироте за внимание к ней и обсуждение полученных результатов.

Литература

1. Желудев И. С., Гладкий В. В., Русаков Л. З., Рез И. С. Изв. АН СССР, сер. физ., 22, 1465, 1958.
2. Завельский Ф. С. ЖЭТФ, 25, 479, 1953.
3. Синяков Е. В., Гальперин В. В. ЖЭТФ, 30, 675, 1956.
4. Эльгард А. М. Физика твердого тела, 3, 1485, 1961.
5. Эльгард А. М. Физика твердого тела, 4, 1312, 1962.
6. Wood E. A., Holden A. N. Acta crystallogr. 10, 145, 1957.

Минский педагогический институт
им. А. М. Горького

Поступило в редакцию
3.II 1970

ЗМЕСТ

МАТЭМАТЫКА

А. В. Романовский. Существование, сопряженность и вложение подгрупп у конечных факторизуемых групп	5
В. Д. Черток. О p -длине p -разрешимых групп	12
А. Ф. Орешенко. Линейчатые поверхности с изотропной образующей 1E_n	15
О. И. Маричев. Краевые задачи для уравнения смешанного типа с двумя линиями вырождения	21
Н. Н. Власовец. Линейные методы приближения непрерывных на отрезке функций	30
В. В. Бобков, Динь Хак Хунг. Об одном методе приближенного решения задачи Коши для уравнения $y''=f(x, y)$	43
И. А. Прусов. Об одном представлении общих формул теории изгиба изотропных плит	50
М. И. Урбанович. Некоторые вопросы теории матриц Коши линейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений	58
В. Н. Лаптинский. О двумерных дифференциально-матричных уравнениях	63

ФІЗІКА

Ф. И. Федоров, В. И. Кувшинов. Нелинейные уравнения электродинамики скалярных мезонов	69
С. И. Лобко, Ф. И. Федоров. Частица с переменным спином $1/2-3/2$ в поле плоской электромагнитной волны	76
О. С. Иваницкая. Уравнения движения в поле тяготения как калибровка тетрад	82
Н. В. Максименко, Л. Г. Мороз. Двойные дисперсионные соотношения для амплитуды дейтронного комптон-эффекта	88
Ю. І. Чэкалінская, А. П. Чэчэніна. Да прыбліжанага разліку выхадной магутнасці АКГ у выпадку неаднароднага пашырэння лініі	94
В. І. Белавусава, У. А. Кнацько, Э. А. Рудак. Аб механізме захопу павольных нейтронаў у рэакцыі (n, γ)	103
М. І. Гарбуз, Р. Г. Жбанкоў, Б. К. Богуш, В. І. Пансевич-Каляда. Даследаванне ненасычанных алкілфенілзамешчаных алілавых спіртоў, гліцыдолаў і іх азотзмязчаючых вытворных метадам ІЧ-спектраскапіі	107

КАРОТКІЯ ПАВЕДАМЛЕННІ

Н. Н. Сирота, А. И. Лукомский. Фотоломинесценция монокристаллов анти-монита алюминия	115
А. С. Потупа. Моделирование квазипотенциала адронной дифракции	117
А. С. Потупа. Комплексные траектории Редже и граница резонансной области	120
В. С. Румянцев. Фоторождение векторных мезонов в модели импульсного приближения	123
В. И. Привалов, Г. Г. Шиенок. Оптическая камера высокого давления	127
М. С. Цедрик, Л. Н. Марголин. Влияние условий выращивания монокристаллов триглицинсульфата на изменение тангенса угла диэлектрических потерь в сильном электрическом поле	130

СОДЕРЖАНИЕ

МАТЕМАТИКА

А. В. Романовский. Существование, сопряженность и вложение подгрупп у конечных факторизуемых групп	5
В. Д. Черток. О p -длине p -разрешимых групп	12
А. Ф. Орешенко. Линейчатые поверхности с изотропной образующей в E_n	15
О. И. Маричев. Краевые задачи для уравнения смешанного типа с двумя линиями вырождения	21
● Н. Н. Власовец. Линейные методы приближения непрерывных на отрезке функций	30
В. В. Бобков, Динь Хак Хунг. Об одном методе приближенного решения задачи Коши для уравнения $y'' = f(x, y)$	43
И. А. Прусов. Об одном представлении общих формул теории изгиба изотропных плит	50
М. И. Урбанович. Некоторые вопросы теории матриц Коши линейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений	58
В. Н. Лаптинский. О двумерных дифференциально-матричных уравнениях	63

ФИЗИКА

Ф. И. Федоров, В. И. Кувшинов. Нелинейные уравнения электродинамики скалярных мезонов	69
С. И. Лобко, Ф. И. Федоров. Частица с переменным спином $1/2-3/2$ в поле плоской электромагнитной волны	76
О. С. Иванцкая. Уравнения движения в поле тяготения как калибровка тетрад	82
Н. В. Максименко, Л. Г. Мороз. Двойные дисперсионные соотношения для амплитуды дейтронного комптон-эффекта	88
Ю. И. Чекалинская, Е. П. Чеченина. К приближенному расчету выходной мощности ОКГ в случае неоднородного уширения линий	94
В. И. Белоусова, В. А. Князько, Э. А. Рудак. О механизме захвата медленных нейтронов в реакции (n, γ)	103
Н. И. Гарбуз, Р. Г. Жбанков, Б. К. Богуш, В. И. Паневич-Коляда. Исследование непредельных алкилфенилзамещенных аллиловых спиртов, глицидолов и их азотсодержащих производных методом ИК-спектроскопии	107

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

Н. Н. Сирота, А. И. Лукомский. Фотолюминесценция монокристаллов антимона алюминия	115
А. С. Потупа. Моделирование квазипотенциала адронной дифракции	117
А. С. Потупа. Комплексные траектории Редже и граница резонансной области	120
В. С. Румянцев. Фоторождение векторных мезонов в модели импульсного приближения	123
В. И. Привалов, Г. Г. Шиенок. Оптическая камера высокого давления	127
М. С. Цедрик, Л. Н. Марголин. Влияние условий выращивания монокристаллов триглицинсульфата на изменение тангенса угла диэлектрических потерь в сильном электрическом поле	130

АТ 03230. Здадзена ў набор 25/VIII-70 г. Падпісана да друку 20/X-70 г. Фармат $70 \times 108 \frac{1}{16}$. Друк. арк. 8,75. Ум.-друк. арк. 12,25. Уч.-выд. арк. 11,85. Выд. заказ 1282, Друк. заказ 799. Цана 60 кап.

Друкарня імя Францыска (Георгія) Скарыны выдавецтва «Навука і тэхніка» АН БССР і Дзяржкамтэта СМ БССР па друку. Мінск, Ленінскі праспект, 68.

РЕФЕРАТЫ

УДК 519.44

Существование, сопряженность и вложение подгрупп у конечных факторизуемых групп. Романовский А. В. «Весті Акадэміі навук БССР», серыя фізіка-матэматычных навук. 1970 г., № 5, 5—11.

Есть примеры, которые показывают, что группа, являющаяся произведением двух π -разложимых подгрупп, не всегда π -отделима. В статье показывается, что некоторые такие не π -отделимые факторизуемые группы обладают свойствами существования, сопряженности и вложения подгрупп, присущими π -отделимым. Доказываются также критерии π -разрешимости и π -отделимости групп с π -разложимыми факторами. Приводятся примеры, показывающие существенность рассматриваемых в теоремах условий.

Библиографий 17.

УДК 519.44

О p -длине p -разрешимых групп. Черток В. Д. «Весті Акадэміі навук БССР», серыя фізіка-матэматычных навук. 1970 г., № 5, 12—14.

Даются оценки p -длины p -разрешимой группы в зависимости от перестановочности ее подгрупп: с одной стороны, p -дополнения, с другой — членов верхнего, нижнего центрального ряда и ряда коммутантов силовой p -подгруппы.

Библиографий 8.

УДК 513.74

Линейчатые поверхности с изотропной образующей в E_n . Орещенко А. Ф. «Весті Акадэміі навук БССР», серыя фізіка-матэматычных навук. 1970 г., № 5, 15—20.

В n -мерном псевдоевклидовом пространстве произвольного индекса l рассматриваются двумерные поверхности с индефинитной метрикой, вторые фундаментальные тензоры b_{ij}^a ($i, j=1, 2$; $a=3, 4, \dots, n$) которых имеют следующие характеристики: а) [2] с общим (изотропным) направлением, б) p тензоров характеристики $[(1, 1)]$, а q — характеристики [2] с общим главным направлением ($p+q=n$); в) все тензоры b_{ij}^a характеристики $[(1, 1)]$.

Показано, что 1) эти поверхности линейчатые с изотропной образующей; 2) все точки поверхности — планарные; 3) фокальная поверхность — сдвоенная плоскость; 4) гауссова кручение и эйлера разность равны нулю. В случае в) поверхность является квадрикой, причем оба семейства ее прямолинейных образующих изотропные, а гауссова кривизна — постоянная.

Библиографий 4.

УДК 517.946

Краевые задачи для уравнения смешанного типа с двумя линиями вырождения. Маричев О. И. «Весті Акадэміі навук БССР», серия фізика-матэматычных навук. 1970 г., № 5, 21—29.

Для уравнения $|y|^k u_{xx} + \operatorname{sgn}(xy)|x|^k u_{yy} = 0$, $k=1, 2, \dots$, изучаются две краевые задачи. В первой задаче получается единственное решение в области $D(x+y>0)$, когда значение функции задано на характеристике $x+y=0$. Во второй находится решение в области, ограниченной дугой с концами $(1,0)$, $(0,1)$ в эллиптической части и характеристиками в гиперболических частях. Для полученных систем сингулярных интегральных уравнений выделены случаи, имеющие замкнутые решения.

Иллюстраций 1. Библиографий 5.

УДК 517.512.6

Линейные методы приближения непрерывных на отрезке функций. Власовец Н. Н. «Весті Акадэміі навук БССР», серия фізика-матэматычных навук. 1970 г., № 5, 30—42.

Приближая непрерывные периодические функции периода 2π частными суммами Фурье и другими тригонометрическими полиномами, получаются применения линейных методов суммирования к ряду Фурье. А. В. Ефимов получил ряд общих и точных результатов для оценок таких приближений.

В работе с помощью приема, впервые использованного А. Ф. Тиманом для уточнения теоремы Джексона в алгебраическом случае, получены оценки приближения функций $f(x) \in C[-1,1]$ алгебраическими многочленами. При этом применены результаты А. В. Ефимова к четной функции $f(\cos t) \in C_{2\pi}$ и использована обратная замена $\cos t = x$. Найденные оценки зависят от положения аргумента на отрезке.

Библиографий 10.

УДК 518:517.91/94

Об одном методе приближенного решения задачи Коши для уравнения $y'' = f(x, y)$. Бобков В. В., Динь Хак Хунг. «Весті Акадэміі навук БССР», серия фізика-матэматычных навук. 1970 г., № 5, 43—49.

В работе предложен способ построения вычислительных схем приближенного решения задачи Коши для уравнения $y'' = f(x, y)$, использующий основную идею метода получения одношаговых правил приближенного решения обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка, основанного на многократном использовании квадратурных формул понижающейся алгебраической степени точности (РЖМат, 1968, 9Б692). Приведены примеры явных и неявных вычислительных схем с локальной погрешностью решения до порядка h^8 включительно (h — шаг сетки), проведено исследование предлагаемых правил на сходимость.

Библиографий 5.

УДК 539.3

Об одном представлении общих формул теории изгиба изотропных плит. Прусов И. А. «Весті Акадэміі навук БССР», серия фізика-матэматычных навук. 1970 г., № 5, 50—57.

С использованием полученного ранее автором представления упругого состояния плиты с помощью трех произвольных функций дано преобразование общих формул к виду, позволяющему сравнительно просто получать решения основных граничных задач, особенно смешанных.

Библиографий 11.

УДК 517.917

Некоторые вопросы теории матриц Коши линейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Урбанович М. И. «Весті Академії наук БССР», серия фізика-математичних наук. 1970 г., № 5, 58—62.

В работе приводятся необходимые условия неотрицательности при $\alpha \leq s \leq t \leq \beta$ матрицы Коши $K(t, s)$ матричного дифференциального уравнения

$$Y' + A(t)Y + YB(t) = 0$$

с верхними треугольными $n \times n$ -матрицами $A(t)$, $B(t)$, устанавливается связь между матрицами Коши системы линейных дифференциальных уравнений выше первого порядка и соответствующей системы первого порядка, а также находится выражение матрицы Коши линейной системы второго порядка через фундаментальную систему матриц-решений этой системы.

Библиографий 3.

УДК 517.9

О двумерных дифференциально-матричных уравнениях. Лаптинский В. Н. «Весті Академії наук БССР», серия фізика-математичних наук. 1970 г., № 5, 63—68.

В статье на основе операторов, введенных автором, исследуется задача о представлениях интегральных матриц двумерных дифференциально-матричных уравнений вида

$$dX/dt = \lambda A(t)Y,$$

$$dY/dt = \pm \lambda A(t)X,$$

где X , Y , A — $n \times n$ -матрицы, λ — вещественный параметр.

Библиографий 6.

УДК 539.126.34 + 530.145

Нелинейные уравнения электродинамики скалярных мезонов. Федоров Ф. И., Кувшинов В. И. «Весті Академії наук БССР», серия фізика-математичних наук. 1970 г., № 5, 69—75.

Уравнения для взаимодействующих электромагнитного и скалярного мезонного полей приведены к универсальной форме

$$(\gamma^k \partial_k + \gamma^0) \psi + \psi \Lambda \psi = 0,$$

где квадратные матрицы γ^k , γ^0 и матрица третьего ранга Λ имеют размерность 20. Рассмотрены свойства этих матриц. Получена функция Лагранжа для общего поля и проективные операторы, выделяющие возможные состояния в случае невзаимодействующих полей.

Библиографий 5.

УДК 539.12.01

Частица с переменным спином 1/2—3/2 в поле плоской электромагнитной волны. Лобко С. И., Федоров Ф. И. «Весті Академії наук БССР», серия фізика-математичних наук. 1970 г., № 5, 76—81.

На основе общего метода отыскания точных решений задачи о частицах с произвольным спином в поле плоской электромагнитной волны найдено решение уравнения для частицы с переменным спином 1/2—3/2 и двумя массами покоя m и m/λ в поле плоской электромагнитной волны.

Библиографий 4.

УДК 530.12

Уравнения движения в поле тяготения как калибровка тетрад. Иванецкая О. С. «Весті Академії наук БССР», серия фізика-математических наук. 1970 г., № 5, 82—87.

Показывается, что уравнения движения в гравитационном поле вместе с исходными тетрадами играют роль дифференциальных калибровочных условий, определяющих класс «падающих тетрад». Такая калибровка не независима от уравнений поля. Вводятся локальные преобразования Лоренца с параметрами — первыми интегралами уравнений движения, содержащие постоянные интегрирования уравнений движения (калибровочные постоянные). Указывается на использование падающих тетрад для развития новой трактовки релятивистских эффектов в поле тяготения.

Библиографий 13.

УДК 539.12

Двойные дисперсионные соотношения для амплитуды дейтронного комптон-эффекта. Максименко Н. В., Мороз Л. Г. «Весті Академії наук БССР», серия фізика-математических наук. 1970 г., № 5, 88—93.

Построены двойные дисперсионные соотношения Мандельштама для каждой из 12 независимых амплитуд комптон-эффекта на дейтроне. Иллюстраций 2. Библиографий 9.

УДК 621.373.029.67

К приближенному расчету выходной мощности ОКГ в случае неоднородного уширения линии. Чекалинская Ю. И., Чеченина Е. П. «Весті Академії наук БССР», серия фізика-математических наук. 1970 г., № 5, 94—102.

В случае неоднородного уширения линии проведено сравнение результатов расчета потоков генерации по точным и приближенным формулам, полученным при замене реального хода коэффициента усиления его средним значением. Установлено, что приближенные значения хорошо соответствуют точным в широком интервале изменения длины активного слоя и коэффициента отражения зеркал.

Таблиц 1. Иллюстраций 3. Библиографий 5.

УДК 539.17

О механизме захвата медленных нейтронов в реакции (n, γ). Белоусова В. И., Кнатько В. А., Рудак Э. А. «Весті Академії наук БССР», серия фізика-математических наук. 1970 г., № 5, 103—106.

Рассмотрена антикорреляция выходов из реакций (n, γ) и (d, p), исследована роль входных состояний типа «фонон+частица». Предполагается, что антикорреляция выходов из указанных реакций может также быть обусловлена изменением волновой функции ядра-мишени после захвата нейтрона.

Таблиц 1. Библиографий 8.

УДК 535.33

Исследование непредельных алкилфенилзамещенных аллиловых спиртов, глицидолов и их азотсодержащих производных методом ИК-спектроскопии. Гарбуз Н. И., Жбанков Р. Г., Богущ Б. К., Пансевич-Коляда В. И. «Весті Академії наук БССР», серия фізика-математических наук. 1970 г., № 5, 107—114.

Изучены ИК-спектры ряда алкилстирилкарбинолов, глицидолов и их аминопроизводных. Выявлены характерные спектроскопические признаки исследованных соединений и сделаны выводы относительно их строения.

Установлено, что алкилстирилкарбинолы и соответствующие им глицидолы имеют трансконфигурацию. Исследовано влияние алкильных радикалов на систему водородных связей, образованную гидроксильными и вторичными аминогруппами.

Таблиц 3. Иллюстраций 4. Библиографий 9.

УДК 537.311.33

Фотолюминесценция монокристаллов антимонида алюминия. Сирота Н. Н., Лукомский А. И. «Весті Академії наук БССР», серия фізика-математичних наук. 1970 г., № 5, 115—116.

Приводятся четыре типа спектров фотолюминесценции монокристаллов антимонида алюминия. Обнаружены максимумы интенсивности излучения при энергиях 1,54, 1,482, 1,475, 1,466, 1,36 эв для кристаллов, которые не подвергались специальному легированию. Максимум интенсивности излучения кристалла, легированного серой, соответствует энергии 1,44 эв.

Таблиц 1. Иллюстраций 1. Библиографий 3.

УДК 539.12

Моделирование квазипотенциала адронной дифракции. Потупа А. С. «Весті Академії наук БССР», серия фізика-математичних наук. 1970 г., № 5, 117—119.

При реджевском поведении радиуса сильных взаимодействий при высоких энергиях ($R \sim (\ln E)^{1/2}$, где E — энергия) аналогия между упругим рассеянием адронов и дифракцией волны на черном шарике ухудшается при $E \rightarrow \infty$. Показано, что практически замкнутой аналогией для адронной дифракции служит рассеяние волны на осциллирующей в основном состоянии, поглощающей точке.

Библиографий 4.

УДК 539.12

Комплексные траектории Редже и граница резонансной области. Потупа А. С. «Весті Академії наук БССР», серия фізика-математичних наук. 1970 г., № 5, 120—122.

В модели полюсных траекторий Редже с $\text{Re}a(s) = a + bs$ и $\frac{d}{ds} \text{Im}a(s) > 0$ (при $s > s_{th}$, где s_{th} — порог) существует s_B -граница выделения индивидуального резонанса ($\text{Im}a(s_B) = 2$), где полуширина совпадает со средним расстоянием между резонансами. Расчет для барионных траекторий Δ_8 и N_7 дает границу при $\sqrt{u_B} \simeq 4$ Гэв. Для резонансов с $M_{res} > \sqrt{u_1} \simeq 2,8$ Гэв ($\text{Im}a(s_1) = 1$) определение спина должно быть принципиально затруднено. Результаты в основном хорошо согласуются с экспериментальной ситуацией.

Библиографий 11.

УДК 539.12

Фоторождение векторных мезонов в модели импульсного приближения. Румянцев В. С. «Весті Академії наук БССР», серия фізика-математичних наук. 1970 г., № 5, 123—126.

Предлагается модель упругого рассеяния ρ^0 -мезонов на протоне. Сравнение с экспериментом проводится на основе гипотезы векторной доминантности, которая позволяет связать рассчитанное дифференциальное сечение упругого рассеяния ρ^0 -мезонов на протоне с дифференциальным сечением фоторождения ρ^0 -мезонов на протоне $d\sigma_{\gamma p}/dt$. В рамках импульсного приближения $d\sigma_{\rho^0 p}/dt$ выражается через дифференциальное сечение упругого рассеяния π -мезонов на протоне. Удовлетворительное согласие между теоретическими расчетами и экспериментом указывает, что предложенный механизм рассеяния может играть важную роль в фоторождении ρ^0 -мезонов в области $-t \geq 0,2$ (Гэв/с)².

Иллюстраций 2. Библиографий 7.

УДК 539.89

Оптическая камера высокого давления. Привалов В. И., Шиенок Г. Г. «Весті Академії наук БССР», серия фізика-математичних наук. 1970 г., № 5, 127—129.

Описана конструкция оптической камеры высокого давления, в которой изучалось влияние давления на рекомбинационное излучение и спектр фотоответа полупроводниковых $p-n$ -переходов. Рабочее давление в камере составляло 6 кбар и ограничивалось механической прочностью окошек. Работы велись при различных температурах.

Разработана компактная конструкция электровводов на эпоксидной смоле.

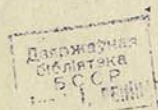
Иллюстраций 3. Библиографий 4.

УДК 537 : 266 + 537.311.33] : [537 + 535

Влияние условий выращивания монокристаллов триглицинсульфата на изменение тангенса угла диэлектрических потерь в сильном электрическом поле. Цедрик М. С., Марголин Л. Н. «Весті Академії наук БССР», серия фізика-математичних наук. 1970 г., № 5, 130—132.

Изучены изменения тангенса угла диэлектрических потерь монокристаллов ТГС в сильном электрическом поле. Измерения проведены с помощью моста переменного тока на частоте 50 гц в интервале температур $+30$ — $+80$ °С. Показано, что условия выращивания влияют на изменение $\text{tg}\delta$ монокристаллов ТГС в сильном электрическом поле.

Иллюстраций 1. Таблиц 1. Библиографий 5.



ПРАВИЛА ДЛЯ АВТОРОВ

1. Статьи должны быть написаны на машинке через два интервала на одной стороне листа и представляться в двух экземплярах.

2. Формулы и буквенные обозначения должны быть аккуратно вписаны от руки чернилами. Для формул, выделенных в отдельную строку, следует оставлять достаточные пробелы в тексте. Греческие буквы должны быть обведены красным карандашом. Буквы, вписанные от руки, в формулах и в тексте должны подчеркиваться простым карандашом: прописные — двумя черточками снизу (напр., \underline{S}), строчные — двумя черточками сверху (напр., \overline{s}). Следует различать буквы O (прописную), o (строчную) и 0 (ноль), для чего буквы O и o подчеркивать двумя черточками, а ноль отмечать квадратной скобкой снизу (\underline{O} , \underline{o} , $\underline{0}$). Следует также различать буквы I и J (йот), для чего I писать, как римскую единицу, подчеркивая ее двумя черточками снизу. Векторы подчеркивать чернилами одной чертой снизу. Математические символы \cos , \sin , \lg и др., набираемые прямым шрифтом, и химические символы элементов (H , N , Cl , Fe и т. д.) отмечаются простым карандашом квадратной скобкой снизу ($\underline{\sin}$, $\underline{\lg}$, \underline{N} , \underline{Cl}). Показатели степени и индексы, а также надстрочные знаки отмечаются дугой \frown (для верхнего индекса) или \smile (для нижнего).

3. В связи с введением с 1 января 1963 г. Международной системы единиц измерения (СИ) размерность всех величин, принятых в статьях, должна соответствовать указанной системе единиц измерения.

4. Цитируемая в статье литература должна даваться автором не в виде подстрочных сносок, а общим списком в конце статьи с обозначением ссылки в тексте порядковой цифрой в квадратных скобках.

Список литературы должен быть оформлен следующим образом:

а) для книг: фамилия и инициалы автора, полное название книги, номер тома,

место и год издания;

б) для журнальных статей: фамилия и инициалы автора, название журнала, номер тома (подчеркнуть), номер выпуска, страница и год.

Ссылки на неопубликованные работы не допускаются.

5. Рисунки должны быть выполнены на белой бумаге тушью размером 15×20 см: надписей на рисунках не делать. Все обозначения указывать в тексте подрисовочных подписей. К статье прилагается список с номерами рисунков и текстом подрисовочных подписей. В тексте на полях обязательно указывается место для рисунков и таблиц.

Таблицы и список литературы печатаются на отдельных листах и прилагаются в конце статьи. Фотографии должны иметь контрастное изображение и быть отпечатаны на хорошей бумаге размером не менее 9×12 см. На обороте рисунков должны быть указаны фамилия автора, название статьи и номер рисунка.

6. В случае представления двух или более статей одновременно необходимо указывать желательный порядок их помещения.

7. Авторы должны избегать повторения одних и тех же данных в таблицах, графиках и в тексте статьи.

8. К статье обязательно прилагается 2 экз. реферата.

9. Корректуры статей авторам, как правило, не посылаются. В случае посланки корректуры допускается лишь исправление ошибок типографии.

Корректурa должна возвращаться в редакцию не позже, чем на следующий день после получения ее автором. Невозвращенные корректуры в срок не приостанавливают печатания статьи.

10. В случае возвращения статьи автору для исправления или при ее сокращении датой представления считается день получения редакцией окончательного текста.

4431-50a 5

60 к.



8000000 1422956