

3 ОК-2

58

# ВЕСЦІ

АКАДЭМІІ НАВУК БССР

---

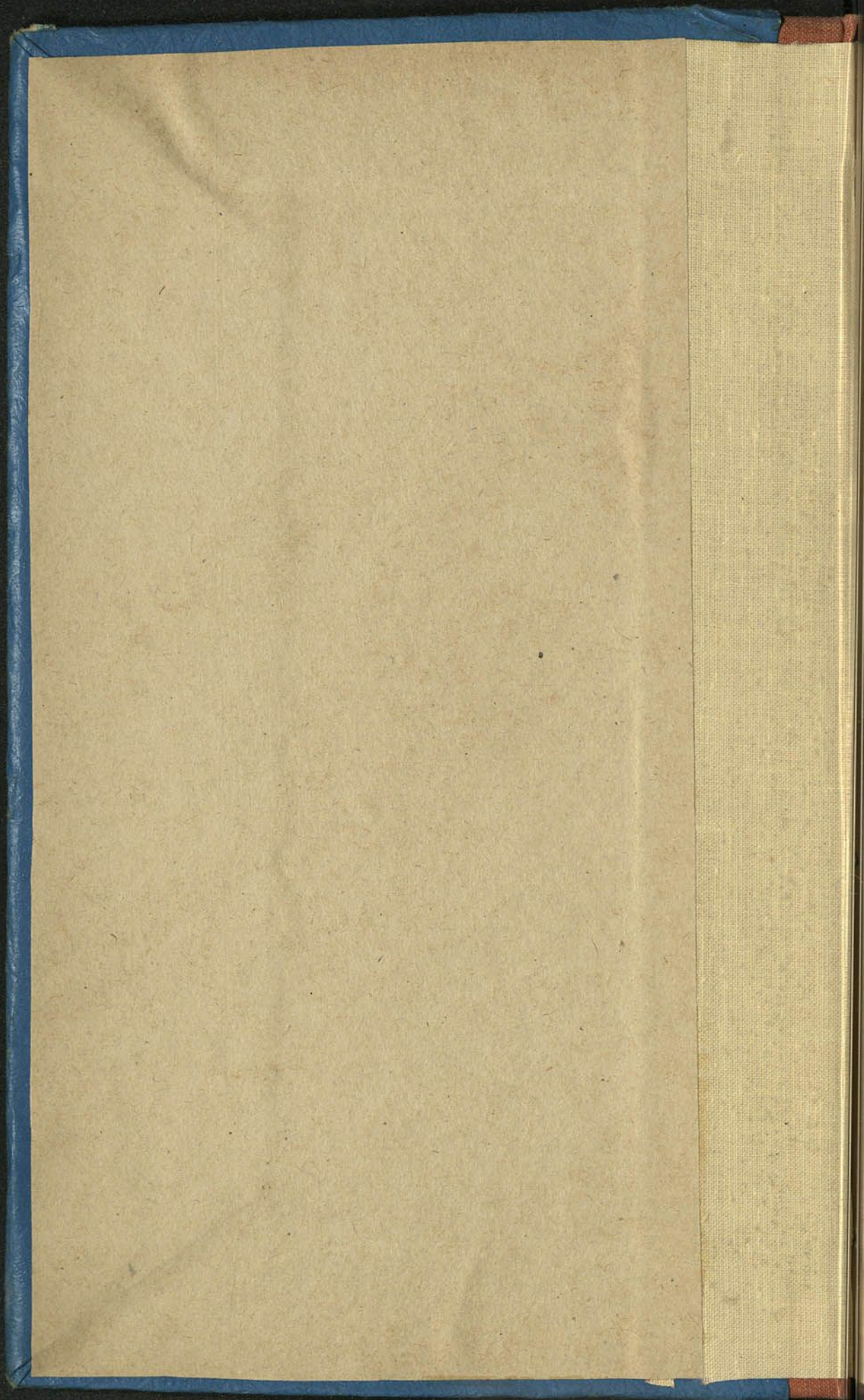
СЕРЫЯ  
ФІЗІКА-МАТЭМАТЫЧНЫХ  
НАВУК

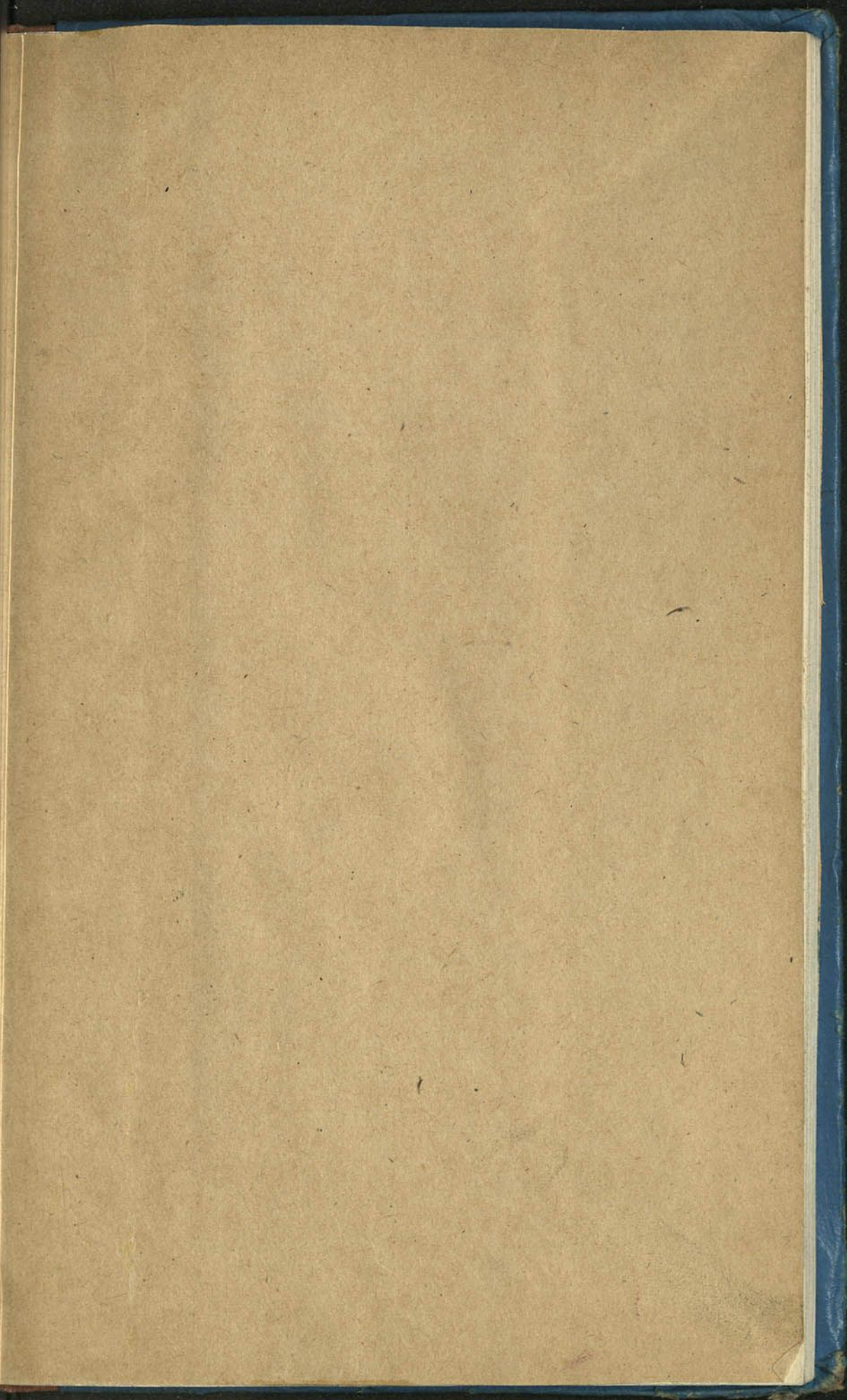
6

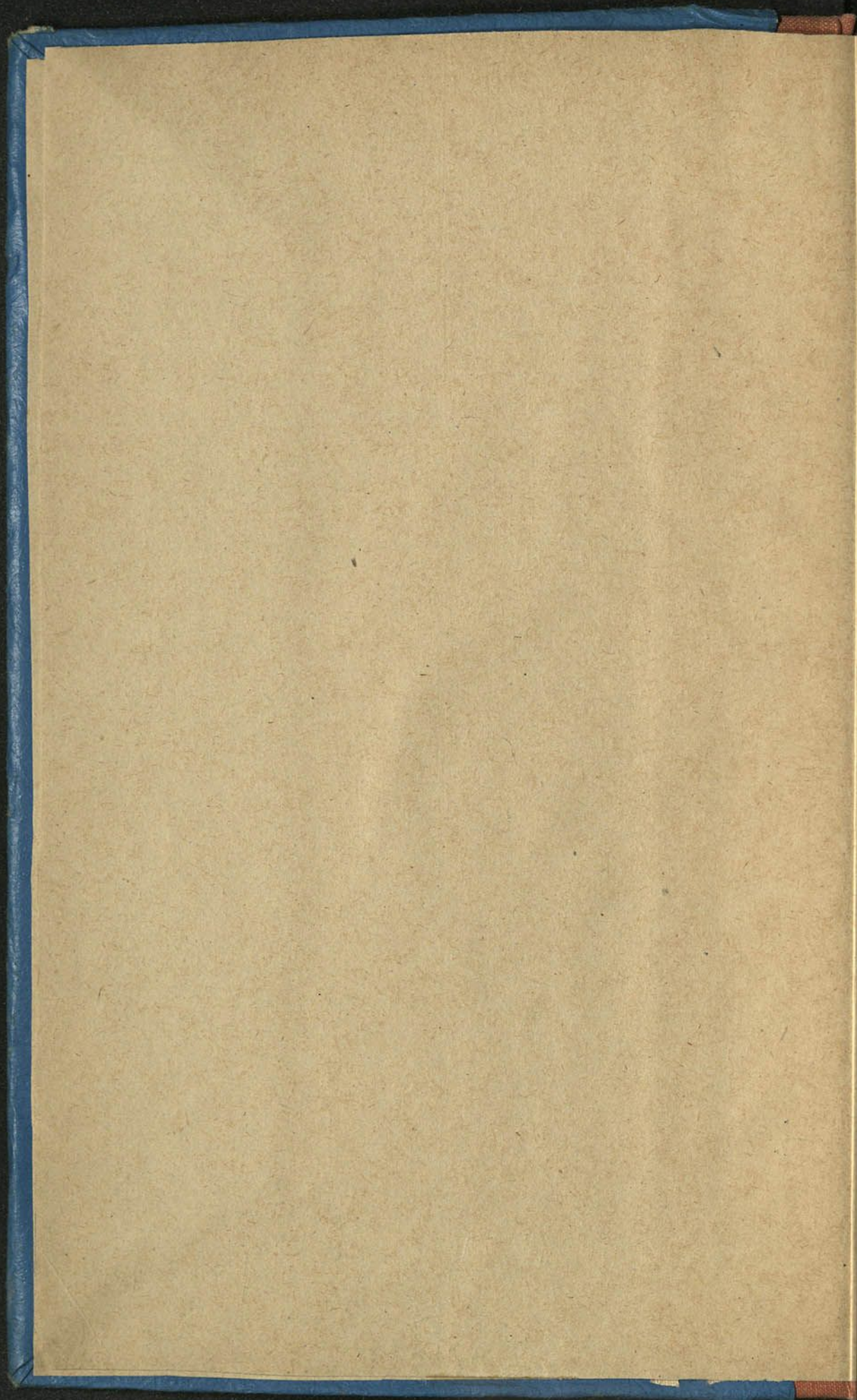
ВЫДАВЕЦТВА „НАВУКА І ТЭХНІКА“

---

МІНСК 1970







19



ВЫДАЕТСЯ В НАЧАЛЕ КАЖДОГО МЕСЯЦА  
ИЗДАТЕЛЬСТВО НАУКА И ТЕХНИКА

КНИЖКА 1980



# ИЗВЕСТИЯ

АКАДЕМИИ НАУК БССР

---

СЕРИЯ  
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ  
НАУК

№ 6

ИЗДАТЕЛЬСТВО „НАУКА И ТЕХНИКА“

---

МИНСК 1970

00005  
70.186.1416

# ВЕСЦІ

30К-2  
58

АКАДЭМІІ НАВУК БССР

СЕРЫЯ  
ФІЗІКА-МАТЭМАТЫЧНЫХ  
НАВУК

№ 6

ба 4430

ВЫДАВЕЦТВА „НАВУКА І ТЭХНІКА“

МІНСК 1970

Дзяржаўная  
бібліятэка  
БССР  
Вял. І. Леніна

1911 581 07

ИЗВЕЩАНИЕ

3075

82

АКАДЕМИИ НАУК БССР

Рэдакцыйная калегія:

- Ф. І. ФЕДАРАУ (галасўны рэдактар),
- Д. А. СУПРУНЕНКА (нам. галоўнага рэдактара),
- М. М. АЛЯХНОВІЧ, Ф. Д. ГАХАУ, У. І. КРЫЛОУ,
- М. М. СІРАТА, У. Г. СПРЫНДЖУК, Я. І. ФІРСАУ,
- С. А. ЧУНІХІН

№ 8

НАУКА І ТЭХНІКА

Беларуская Акадэмія Наук  
Мінск

И. И. ЖБАНКОВА

## Ф. ЭНГЕЛЬС И СОВРЕМЕННОЕ ЕСТЕСТВОЗНАНИЕ

Среди выдающихся революционеров и мыслителей Фридрих Энгельс занимает по праву одно из первых мест в истории человечества. Ф. Энгельсу вместе с К. Марксом принадлежит громадная роль в превращении коммунистического движения в самое мощное общественно-политическое движение современности, в формировании основных положений научного коммунизма. Созданное ими революционное учение стало знаменем всемирного революционного движения, наукой о строительстве социалистического и коммунистического общества, мировоззрением борцов за социализм и коммунизм.

Ф. Энгельсом и при непосредственном его участии создан целый ряд фундаментальных трудов, ставших классическими произведениями марксизма: «Положение рабочего класса в Англии», «Манифест Коммунистической партии», «Развитие социализма от утопии к науке», «Анти-Дюринг», «Диалектика природы», «Происхождение семьи, частной собственности и государства» и др. Велика и доля участия Ф. Энгельса в работе К. Маркса «Капитал», редактирование и издание II и III томов которого он осуществил после смерти Маркса.

Выдающийся знаток философии, энциклопедически образованный ученый, Ф. Энгельс внес большой вклад в развитие марксизма как цельного, единого учения, охватывающего собой не только философию, но и общую методологию общественных и естественных наук.

Оценивая значение этого вклада Ф. Энгельса в марксизм, В. И. Ленин в статье «Карл Маркс» писал: «Для правильной оценки взглядов Маркса безусловно необходимо знакомство с произведениями его ближайшего единомышленника и сотрудника *Фридриха Энгельса*. Нельзя понять марксизм и нельзя цельно изложить его, не считаясь со всеми сочинениями Энгельса»<sup>1</sup>.

Революционный переворот, совершенный в философии К. Марксом и Ф. Энгельсом, внес кардинальные изменения в понимание целей и задач философского исследования. Чтобы не только объяснить, но и переделать мир, философы должны были выйти за рамки абстрактных схем прежней философии и «...в качестве обыкновенного человека взяться за изучение действительности»<sup>2</sup>. Эта позиция внесла принципиально новый момент и в отношении философии к естествознанию. Для марксизма естествознание выступило не только совокупностью идей и теорий, но и одним из звеньев социальной действительности, теснейшим образом связанным, с одной стороны, с общественным производством, техникой и промышленностью, с другой — с философией. Революционное преобразование капиталистической действительности предполагало как необходимое также диалектико-материалистическое осмысление содержания и основных тенденций развития естествознания того времени.

<sup>1</sup> В. И. Ленин. Полн. собр. соч., т. 26, стр. 93.

<sup>2</sup> К. Маркс и Ф. Энгельс. Соч., т. 3, стр. 225.

В течение более двадцати лет Ф. Энгельс занимался философскими проблемами естествознания, изучая оригинальные труды естествоиспытателей из области астрономии, механики, физики, химии, геологии, техники, биологии, сравнительной анатомии и физиологии. Результатом этого труда явились произведения «Анти-Дюринг», «Людвиг Фейербах и конец классической немецкой философии», «Диалектика природы» и многочисленные письма. В них мы не найдем бесстрастного «академизма», они написаны воинствующим материалистом-диалектиком, отстаивающим правильность и чистоту революционной теории марксизма, развивающим ее дальше на основе глубокого изучения объективной диалектики развития науки. Ф. Энгельс рассмотрел широкий круг философских и естественнонаучных проблем, поставленных наукой второй половины XIX в., с методологических позиций марксизма. Основопологающей в этом исследовании выступила мысль Ф. Энгельса о природе как пробном камне диалектики. Переосмысливая громаду накопленного естествознанием фактов, пробираясь сквозь дебри нередко искусственных, надуманных обобщений, Ф. Энгельс сумел вскрыть за ними самое существенное — объективную диалектику явлений и процессов природы. В естествознании благодаря его собственному развитию стала невозможной метафизическая концепция — вот вывод, к которому пришел Ф. Энгельс, теоретически разрешая противоречие между тем, что «думало» и что «делало» современное ему естествознание. Ф. Энгельсу удалось не только выявить это основное противоречие в развитии наук о природе, показать несостоятельность метафизики и идеализма в разработке общей методологии науки, но и предсказать основные тенденции и закономерности будущего развития науки, что получило свое блестящее подтверждение в последующем столетии. Поэтому охарактеризовать основные тенденции и особенности современного естествознания невозможно, не принимая во внимание трудов Ф. Энгельса по этому вопросу.

Научное познание всегда конкретно-исторично. Это означает, что ближайшей основой науки, как писал Ф. Энгельс, является не природа как таковая, а изменение природы человеком. Поэтому наука уже по своему происхождению представляет собой органическую часть человеческого труда. Диалектико-материалистический подход к вопросу о возникновении и социальной роли науки привел к четкому осознанию того, что наука — это не просто сумма знаний о мире, но и развивающаяся по законам диалектики познавательная деятельность человека, которая осуществляется с целью сознательного предвидения результатов практических действий.

Принципиальное значение для характеристики основных тенденций в современном естествознании имеет решение Ф. Энгельсом вопроса о связи естествознания и техники. Эта связь выступает для него не в виде одностороннего влияния, а как взаимодействие, в котором доминирующая роль принадлежит общественному производству. В письме к В. Боргиусу от 25 января 1894 г. Ф. Энгельс писал: «Если, как Вы утверждаете, техника в значительной степени зависит от состояния науки, то в гораздо большей мере наука зависит от *состояния и потребностей* техники. Если у общества появляется техническая потребность, то это продвигает науку вперед больше, чем десяток университетов»<sup>3</sup>. Развитие физических наук середины XX столетия убедительно демонстрирует эту важную особенность современной науки.

<sup>3</sup> К. Маркс и Ф. Энгельс. Соч., т. 39, стр. 174.

Среди выдающихся научно-технических свершений нашего времени первое место по праву принадлежит космонавтике. Недавно она продемонстрировала еще одно выдающееся достижение — полет на Луну и возвращение с пробами лунного грунта советской автоматической станции «Луна-16». Задача освоения космического пространства стала важным стимулом интенсивного развития науки в нашей стране.

Достижения космонавтики, авиации, турбостроения ставят перед наукой ряд принципиально новых задач, в решении которых важная роль принадлежит физике твердого тела. Проблема создания вещества с определенными заданными свойствами: прочностью, пластичностью, жароустойчивостью, проводимостью и т. д. — заставляет разрабатывать теорию твердого тела, теорию полупроводников, физику прочности, исследовать структуру кристаллов и процессы кристаллообразования, синтез алмазов и т. д. Чрезвычайно высокая потребность техники в полупроводниках поставила перед наукой задачу отыскать способы получения сверхчистых материалов, так как полупроводники должны быть химически чистыми и обладать весьма совершенной кристаллической структурой. Решение этой важной научной задачи дает возможность значительно сократить габариты радиотехнических устройств, значительно увеличить коэффициент полезного действия электростанций, солнечных батарей, применение которых приобретает особое значение в связи с использованием солнечной энергии на искусственных спутниках Земли. Развитие космической техники не только ускорило прогресс многих уже давно существовавших отраслей в науке, но и породило такие новые научные направления, как космическая биология, космическая медицина и др.

Один из основных разделов современной физики — физика элементарных частиц и физика атомного ядра, с первых достижений которой началась «новейшая революция в естествознании» XX в. (В. И. Ленин), также получает существенные стимулы для своего развития благодаря необходимости создания атомных реакторов и практическому использованию атомной энергии. Овладение управляемой термоядерной реакцией, синтезом гелия из атомов водорода даст в руки человека невиданные ранее возможности получения громадных запасов дешевой электроэнергии.

Необходимость повышения эффективности использования уже известных энергетических ресурсов ставит перед наукой такие интересные задачи, как изучение прямого перехода химической энергии в электрическую, в механическую и т. д. Решение их связано с совместным трудом и физиков, и химиков, и биологов. Например, стремление изучить и практически воспроизвести обратимое сокращение синтетических волокон под влиянием изменения свойств окружающей среды (моделирование мускульных процессов) заставляет исследовать характер и свойства молекулярных связей в полимерах. Задача создания сигнализационных схем, счетчиков и других элементов кибернетических устройств без металлических проводов нацеливает внимание ученых на раскрытие закономерностей свободного распространения электрического импульса-сигнала по нервным волокнам, представляющим собой диэлектрик.

В целом ряде разделов физики, связанных с изучением структуры жидкостей, кристаллов, плазмы, существенным становится стимулирующее влияние перспективы разнообразных практических применений полученных результатов. Эта цель изменяет и методы решения научных проблем. В исследовании нередко основным становится не традиционный научный вопрос: «Как это объяснить?», а вопрос: «Как это сделать?» При таком подходе во многих областях физики все больше стираются

границы между наукой и техникой, процесс научного исследования органически переходит в технологические и конструктивные разработки.

Активизация научных исследований под непосредственным влиянием потребностей производства, техники и промышленности представляет собой, однако, лишь одну сторону взаимодействия современного естествознания с техникой. Ф. Энгельс подчеркивал, что история выявляет все возрастающую самостоятельную роль науки в развитии общественного производства. Эту закономерность К. Маркс выразил в гениальном предвидении превращения науки в непосредственную производительную силу общества. И действительно, естествознание XX в. все решительнее опережает технику в своем развитии, ставя и решая такие задачи, которые лишь впоследствии, на основе предварительного научного решения, находят выход в практику. Эта тенденция, однако, не может поставить под сомнение тезис Ф. Энгельса об определяющем значении потребностей производства для развития науки. Напротив, именно такое опережающее технику развитие многих научных отраслей в наше время обусловлено существенно новыми качествами процессов и объектов природы, которые сейчас используются в технике, производстве и промышленности.

Так, до XIX в. в технике можно было использовать механические приспособления (системы рычагов, колеса, ворот и др.), которые человек не всегда предварительно изучал теоретически. Правильные технические решения нередко находились чисто эмпирически, так как с подобными процессами человек повседневно сталкивался в жизни. Принципиально иначе относится к техническим устройствам человек XX века. В современной технике — в атомных реакторах, космических ракетах, кибернетических устройствах и т. д. — используются сложнейшие процессы и явления природы, с которыми человек ранее не встречался в повседневной практической деятельности. Поэтому, для того, чтобы ставить и решать подобные технические задачи, необходимо дать возможность науке предварительно глубоко и всесторонне изучать процессы природы, ее законы, многообразные условия действия этих законов. Только при таком опережении наукой техники современное естествознание и может эффективно осуществлять свое социальное назначение — служить практике. Поэтому для современных научных исследований показателен не узкий «прагматический» подход, не выборочное изучение только тех вещей и явлений, которые могут найти немедленное техническое применение, а систематическое и всестороннее исследование научных проблем.

Эту сложную социальную функцию современной физики, на наш взгляд, удачно охарактеризовал известный советский физик академик Л. А. Арцимович. «Современная физика, — писал он, — это своего рода двуликий Янус. С одной стороны, это наука с горящим взором, которая стремится проникнуть вглубь великих законов материального мира. С другой стороны — это фундамент новой техники, мастерская смелых технических идей, опора обороны, движущая сила непрерывного индустриального прогресса»<sup>4</sup>.

Возрастающая теоретическая мощь, прогрессирующая абстрактность многих отраслей современной физики также принадлежат к тем закономерностям в развитии теоретического естествознания, которые были отмечены Ф. Энгельсом как существенная тенденция, складывавшаяся в науке XIX в.

Задачи осмысления необъятной массы эмпирического материала, необходимость систематического упорядочения этого материала «сооб-

<sup>4</sup> «Наука сегодня», М., 1969, стр. 151—152.

разно его внутренней связи», а также приведения в правильную связь между собою отдельных областей знания поставили естествознание XIX в. перед необходимостью решительно вступить в теоретическую область, заняться теоретическим мышлением. Выявив эту тенденцию, Ф. Энгельс глубоко и всесторонне рассмотрел вопрос о необходимой связи философии и естествознания, о возрастающей роли передовой философии диалектического материализма в дальнейшем прогрессе науки. «Теоретическое мышление является прирожденным свойством только в виде способности, — писал он. — Эта способность должна быть развита, усовершенствована, а для этого не существует до сих пор никакого иного средства, кроме изучения всей предшествующей философии»<sup>5</sup>.

Мысли Ф. Энгельса о том, что именно диалектический материализм является необходимой теоретической основой естествознанию общей методологией научного мышления, получили свое дальнейшее развитие в трудах В. И. Ленина и в современной марксистской философской литературе. Актуальность их была, в частности, блестяще подтверждена в начале XX в., когда В. И. Ленин, не имевший возможности ознакомиться с «Диалектикой природы» Ф. Энгельса, в своей работе «Материализм и эмпириокритицизм» почти дословно повторил и развил далее многие ее идеи, анализируя «кризис в физике» и пути его преодоления. «Какую бы позу ни принимали естествоиспытатели, над ними властвует философия»<sup>6</sup>, — писал Ф. Энгельс. Насущная необходимость овладения культурой диалектического мышления не только не угасла в современном естествознании, но стала еще более актуальной. Новая физика, через кризисы и противоречия пробившая себе дорогу к жизни, насильно признана материализмом и диалектикой и постоянно ставит перед научной теорией познания новые и сложные философские проблемы. Крупнейшие физики нашего времени — Н. Бор, М. Борн, Луи де Бройль, В. Гейзенберг и др. — не только не игнорировали философии, но вынуждены были идти ей навстречу, занимаясь общими методологическими проблемами. По словам Нильса Бора, квантовая теория в своем развитии преподнесла естествоиспытателям «хороший познавательный урок», поставив их перед необходимостью вплотную заняться философскими проблемами соотношения субъекта и объекта в физическом познании, соотношения эксперимента и теории, чувственного и рационального, необходимого и случайного, прерывного и непрерывного и т. д. Научное решение этих проблем невозможно без глубокого овладения марксистско-ленинской методологией, о чем недвусмысленно говорят плодотворные исследования их советскими физиками: С. И. Вавиловым, В. А. Фоком, Д. И. Блохинцевым и др., а также философами-марксистами в нашей стране и за рубежом.

Подобно тому, как К. Маркс, анализируя процесс исторического изменения общественно-экономических формаций, обнаружил в нем действие законов диалектики, так и Ф. Энгельс, изучая историю науки, выявил в ней действие тех же общих диалектических законов. Это позволило ему сделать вывод, что история науки представляет собой процесс диалектического развития научного познания.

Исследуя структуру науки, Ф. Энгельс, говоря современным языком, применил «системный» подход. Он проанализировал многообразные взаимосвязи наук о природе, вскрыл объективную основу этой связи в диалектике форм движения материи, создал научную классификацию наук, в которой система наук отражала материальное единство приро-

<sup>5</sup> К. Маркс и Ф. Энгельс. Соч., т. 20, стр. 366.

<sup>6</sup> К. Маркс и Ф. Энгельс. Соч., т. 20, стр. 525.

ды. Структурный подход был органически соединен с идеей развития, и история каждой науки предстала перед ним как диалектическое движение человеческого разума через относительные истины к истине абсолютной. Ф. Энгельс уже тогда обнаружил в естествознании тенденции к интеграции и дифференциации знания, выявил будущие «точки роста» в пограничных областях науки.

На основе общей марксистской методологии Ф. Энгельс в своем исследовании естествознания вышел за пределы философского осмысления истории и состояния естественных наук 70-х годов XIX в. Его труды открывали перспективу нового, будущего этапа развития науки, поэтому в общей философской форме Ф. Энгельс блестяще предвосхитил также многие конкретные научные решения.

Принципиальное значение для новой физики имеет решение Ф. Энгельсом вопроса о соотношении категорий материи, движения, пространства и времени. Научные теории и экспериментальные исследования в области физики элементарных частиц и теории относительности убедительно показали правильность понимания движения как взаимодействия и многообразного качественного изменения. Несмотря на то, что наука конца XIX в. не давала еще прямых и конкретных оснований для этого, Ф. Энгельс провозгласил тезис, что пространство и время являются формами существования материи. Естественнонаучное обоснование это гениальное высказывание получило только после опубликования А. Эйнштейном в 1905 г. первой работы по специальной теории относительности, которая ознаменовала собою революционный переворот в области физических представлений.

Открытие радия, электронов, превращения химических элементов, многообразия и превращений элементарных частиц и физических полей уже после смерти Ф. Энгельса убедительно показали правильность его идеи о сложности атома, который, по мнению Ф. Энгельса, представлял собой не самую простую и неизменную частицу материи, как утверждали тогда естествоиспытатели, а выступал лишь определенной качественной ступенью ее развития. Столь же плодотворны принципиальные подходы Ф. Энгельса к решению многих других научных проблем, в частности, происхождения и сущности живого, антропогенеза, взаимосвязи электричества и химизма и т. д.

С точки зрения естествознания, основной заслугой Ф. Энгельса следует считать то, что он впервые в истории науки показал активную практическую роль философии марксизма в решении принципиальных теоретических проблем наук о природе.

Ко всей философской работе Ф. Энгельса полностью и без оговорок применимы слова, которые он сказал о К. Марксе: «Но все миропонимание Маркса — это не доктрина, а метод. Оно дает не готовые догмы, а отправные пункты для дальнейшего исследования и метод для этого исследования»<sup>7</sup>. Поэтому и труды Ф. Энгельса по философским вопросам естествознания, обусловленные уровнем развития естествознания XIX в., не представляют собою собрания абсолютных истин. Они должны восприниматься конкретно-исторически. К нашему времени в них неизбежно устарели некоторые факты и научные положения, но неизменно плодотворным и революционным остается основной метод — метод диалектического материализма, примененный Ф. Энгельсом к анализу развития наук о природе.

Действительное историческое развитие науки XX в. полностью подтверждает мысль Ф. Энгельса о том, что «диалектика является для современного естествознания наиболее важной формой мышления, ибо

<sup>7</sup> К. Маркс и Ф. Энгельс. Соч., т. 39, стр. 352.

только она представляет аналог и тем самым метод объяснения для происходящих в природе процессов развития, для всеобщих связей природы, для переходов из одной области исследования к другой»<sup>8</sup>.

Сто пятьдесят лет прошло со дня рождения Ф. Энгельса и столетие отделяет нас от времени написания его основных философских трудов, но и сейчас его идейное наследие вызывает живые споры и полярные оценки в среде друзей и недругов марксизма — от полного его отрицания до безоговорочного преклонения перед каждой буквой. Империалистические, правые социал-демократические и ревизионистские идеологи пытаются отрицать значение теоретических работ Ф. Энгельса, необоснованно упрекая его якобы в «упрощении», «вульгаризации» марксизма, в одностороннем «эволюционизме» и т. д. Основное внимание при этом концентрируется на философских трудах Ф. Энгельса, которые пытаются представить то как плод «естественнонаучного дилетантизма» (И. Фетчер), то гегельянского подхода (Г. Маркузе, Ж. П. Сартр), то, в противоположность последнему, как результат старого метафизического подхода (В. Микецин). Этой разноголосице противостоит марксистско-ленинская оценка идейного наследия Ф. Энгельса, которая требует не только его бережного сохранения и глубокого изучения, но и дальнейшей творческой разработки.

Произведения Фридриха Энгельса, теоретически обобщившие историю и достижения естествознания XIX в. и вскрывшие перспективы его дальнейшего развития, вплотную примыкают к Марксову «Капиталу» и вместе с ним входят в фундамент единого и целостного диалектико-материалистического мировоззрения.

<sup>8</sup> К. Маркс и Ф. Энгельс. Соч., т. 20, стр. 367.

В. А. ВЕДЕРНИКОВ, А. П. КОХНО

## О НЕКОТОРЫХ КЛАССАХ КОНЕЧНЫХ РАЗРЕШИМЫХ ГРУПП

Выделение классов групп, обладающих той или иной совокупностью подгрупп с определенными свойствами, играет большую роль в общей теории групп. Действительно, решение самых общих задач теории групп в конечном итоге приводит к необходимости использовать свойства более изученных классов групп.

Пусть  $\Theta$  — некоторое теоретико-групповое свойство. Тогда  $\Theta$ -подгруппой называется подгруппа, обладающая свойством  $\Theta$ .

Подгруппу  $H$  группы  $G$  назовем  $\Theta$ -насыщенной в  $G$ , если для каждой собственной  $\Theta$ -подгруппы  $H_1$  из  $H$  в  $H$  содержатся все подгруппы, сопряженные с  $H_1$  в  $G$ . Если к тому же все подгруппы, сопряженные с  $H_1$  в группе  $G$ , уже сопряжены в  $H$ , то подгруппу  $H$  назовем  $\Theta$ -сверхнасыщенной в группе  $G$ .

$\Theta$ -насыщенную ( $\Theta$ -сверхнасыщенную) подгруппу  $H$  группы  $G$  будем называть насыщенной (сверхнасыщенной) в  $G$ , если все собственные подгруппы из  $H$  являются  $\Theta$ -подгруппами.

Подгруппу группы  $G$ , не содержащую собственных  $\Theta$ -подгрупп, будем считать  $\Theta$ -насыщенной и  $\Theta$ -сверхнасыщенной в  $G$ .

Очевидно, что каждая инвариантная подгруппа группы  $G$  является  $\Theta$ -насыщенной в  $G$ , поэтому на  $\Theta$ -насыщенность можно смотреть как на обобщение понятия инвариантности. Не каждая инвариантная подгруппа группы  $G$  является  $\Theta$ -сверхнасыщенной в  $G$ , но в то же время  $\Theta$ -сверхнасыщенная подгруппа из  $G$  не всегда инвариантна в  $G$ . Например, каждая (в том числе неинвариантная) подгруппа простого порядка группы  $G$  является  $\Theta$ -сверхнасыщенной в  $G$ .

Для  $\Theta$ -насыщенных подгрупп справедливы следующие утверждения.

а) Пересечение двух  $\Theta$ -насыщенных подгрупп группы  $G$  есть  $\Theta$ -насыщенная подгруппа группы  $G$ .

б) Пусть  $A$  — любая подгруппа группы  $G$ ,  $B$  —  $\Theta$ -насыщенная подгруппа группы  $G$ . Тогда  $A \cap B$  —  $\Theta$ -насыщенная подгруппа группы  $A$ .

В дальнейшем используются также следующие обозначения и определения:  $|G|$  — порядок конечной группы  $G$ ;  $G_p$  — силовская  $p$ -подгруппа группы  $G$ ;  $N_G(F)$  — нормализатор комплекса  $F$  в  $G$ ;  $\langle x \rangle$  — подгруппа, порожденная элементом  $x$  группы  $G$ ;  $G'$  — коммутант группы  $G$ ;  $H_G$  — ядро подгруппы  $H$  в группе  $G$ , т. е. пересечение всех подгрупп, сопряженных с  $H$  в  $G$ ;  $\{1\}$  — единичная подгруппа группы  $G$ ;  $\Phi(G)$  — подгруппа Фраттини группы  $G$ , т. е. пересечение всех максимальных подгрупп группы  $G$ ;  $F(G)$  — подгруппа Фиттинга группы  $G$ , т. е. максимальная нильпотентная инвариантная подгруппа группы  $G$ ; группа типа  $S_a$  — нильпотентная группа с абелевыми собственными подгруппами; конечная группа, порядок которой делится на простое число  $p$ , называется  $pd$ -группой [1]; конечная группа  $G$ , все собственные подгруппы которой инвариантны в  $G$ , называется дедекиндовой.

Следующее утверждение содержит эквивалент определения  $\Theta$ -сверхнасыщенной подгруппы.

**Лемма 1.** Подгруппа  $H$  группы  $G$  тогда и только тогда  $\Theta$ -сверхнасыщенная в  $G$ , когда для каждой собственной  $\Theta$ -подгруппы  $F$  из  $H$  выполняется равенство  $G = HN_G(F)$ .

**Доказательство.** Пусть подгруппа  $H$  группы  $G$   $\Theta$ -сверхнасыщенная в  $G$ , и  $F$  — некоторая собственная  $\Theta$ -подгруппа из  $H$ . Тогда, по определению, каждая подгруппа, сопряженная с  $F$  в группе  $G$ , уже сопряжена с  $F$  в  $H$ . Следовательно, по лемме 2. 2. 1 [1] имеем  $G = HN_G(F)$ . Обратно, пусть для каждой собственной  $\Theta$ -подгруппы  $F$  из  $H$  справедливо равенство  $G = HN_G(F)$ . Отсюда  $|G|/|N_G(F)| = |H|/|H \cap N_G(F)| = |H|/|N_H(F)|$ , т. е. класс сопряженных с  $F$  подгрупп в группе  $H$  является полным классом сопряженных подгрупп в группе  $G$ . Итак,  $H$  —  $\Theta$ -сверхнасыщенная подгруппа в группе  $G$ . Лемма доказана.

**Лемма 2.** Тогда и только тогда  $H$  является  $\Theta$ -насыщенной подгруппой группы  $G$ , когда подгруппа  $H_1$ , порожденная всеми собственными  $\Theta$ -подгруппами из  $H$ , инвариантна в  $G$ .

**Доказательство.** Пусть  $H$  —  $\Theta$ -насыщенная подгруппа группы  $G$ . Тогда все собственные  $\Theta$ -подгруппы из  $H$  разбиваются на классы сопряженных подгрупп в группе  $G$ . Если  $H_1$  порождается всеми собственными  $\Theta$ -подгруппами из  $H$ , то, очевидно, подгруппа  $H_1$  инвариантна в  $G$ .

Обратное очевидно. Лемма доказана.

**Следствие.** Тогда и только тогда  $H$  является насыщенной подгруппой группы  $G$ , когда либо  $H$  инвариантна в  $G$ , либо  $H$  — циклическая  $p$ -группа, все собственные подгруппы которой инвариантны в  $G$ .

**Теорема 1.** В  $pd$ -группе  $G$  тогда и только тогда все  $pd$ -подгруппы сверхнасыщенные, когда  $G$  либо дедекиндова, либо типа  $S_a$  с неинвариантной  $p$ -силовской подгруппой и порядка  $p^\alpha q$  или  $p^\alpha q^\beta$ , либо расширение  $p$ -силовской подгруппы порядка  $p$  при помощи дедекиндовой группы.

**Доказательство.** Пусть в  $pd$ -группе  $G$  все  $pd$ -подгруппы сверхнасыщенные.

Если  $G$  — нильпотентная группа, то в  $G$  инвариантна любая  $pd$ -подгруппа. Пусть  $H$  — любая подгруппа группы  $G$ , такая, что  $p$  не делит  $|H|$ . Возьмем произвольную подгруппу  $T$  из  $G_p$  и образуем  $T \times H$ . Эта подгруппа является насыщенной в  $G$  и поэтому  $H$  инвариантна в группе  $G$ . Следовательно,  $G$  — дедекиндова группа.

Пусть  $G$  — ненильпотентная группа. Имеются следующие возможности.

1. Подгруппа  $G_p$  неинвариантна в  $G$ . Тогда  $G_p$  является циклической группой, все собственные подгруппы которой инвариантны в группе  $G$ . Очевидно,  $N_G(G_p) = G_p$ . По теореме 4. 2. 4 [8] и лемме 1, подгруппа  $G_p$  максимальна в  $G$ . Применяя теорему 14. 3. 1 [8], имеем  $G = G_p K$ , где  $K$  — инвариантное  $p$ -дополнение в  $G$ , причем, по теореме 1. 15. 1 [1],  $K$  — примарная минимальная инвариантная подгруппа группы  $G$ . Итак,  $|G| = p^\alpha q^\beta$ . Так как группа  $G$  содержит максимальные подгруппы только порядков  $p^\alpha$  и  $p^{\alpha-1}q^\beta$ , то, очевидно,  $G$  — группа типа  $S_a$ . При  $\alpha > 1$  имеем  $\beta = 1$ , так как в противном случае получим противоречие с тем, что  $G_q$  — минимальная инвариантная подгруппа в  $G$ .

2. Подгруппа  $G_p$  инвариантна в  $G$ . Тогда группа  $G$  является расширением дедекиндовой подгруппы  $G_p$  при помощи дедекиндовой группы. Пусть  $p$  — наименьший простой делитель  $|G|$ . Так как  $G$  сверхразрешима, то всякая максимальная подгруппа группы  $G$  инвариантна в  $G$ , т. е.  $G$  нильпотентна, а значит, дедекиндова. Пусть теперь  $p$  не является наименьшим простым делителем  $|G|$ . Тогда, по теореме 12. 5. 4 [8],  $G_p$  — абелева группа. Предположим, что в  $G_p$  имеется элемент  $x$  порядка  $p^\gamma$ ,  $\gamma > 1$ . Если бы подгруппа  $R$  порядка  $p$  из  $\langle x \rangle$  входила в  $\Phi(G)$ , то группа  $G$  была бы дедекиндовой. Поэтому  $R \not\subseteq \Phi(G)$ , и, значит, подгруппа  $R$  дополняема

в  $G$ . Отсюда вытекает, что факторизуется циклическая подгруппа  $\{x\}$ . Противоречие. Следовательно,  $G_p$  — элементарная абелева группа. Пусть  $G = G_p D$ ,  $G_p \cap D = \{1\}$ . Допустим, что  $|G_p| = p^\alpha$  и  $\alpha > 1$ . Возьмем из  $G_p$  произвольный элемент  $\tau$  и образуем  $pd$ -подгруппу  $\{\tau\}D$ . По лемме 1,  $\{\tau\}N_G(D) = G$ . Отсюда подгруппа  $D$  инвариантна в  $G$ . Группа  $G$  нильпотентна, а поэтому дедекиндова. Значит,  $|G_p| = p$ .

Обратная теорема легко проверяется. Теорема доказана.

Следствие. В группе  $G$  тогда и только тогда все подгруппы сверхнасыщенные, когда  $G$  либо дедекиндова, либо типа  $S_a$  с неинвариантной  $p$ -силовской подгруппой и порядка  $p^\alpha q$ .

Лемма 3. Если в группе  $G$  все силовские подгруппы сверхнасыщенные, то группа  $G$  сверхразрешима.

Доказательство. Пусть все силовские подгруппы группы  $G$  сверхнасыщенные в  $G$ . Тогда, по следствию из леммы 2, все неинвариантные силовские подгруппы из  $G$  циклические. По теореме 9. 4. 3 из [8], группа  $G$  содержит инвариантную силовскую подгруппу  $G_p$ . Пусть  $|G_p| = p^\alpha$ . Так как подгруппа  $G_p$  сверхнасыщенная в  $G$ , то в группе  $G$  существует инвариантная подгруппа порядка  $p^{\alpha_1}$  для каждого  $\alpha_1$ , где  $0 \leq \alpha_1 \leq \alpha$ . Пусть  $H$  — максимальная нильпотентная инвариантная холловская подгруппа группы  $G$ . Очевидно, для каждого числа  $n$ , делящего  $|H|$ , в  $H$  существует подгруппа порядка  $n$ , инвариантная в  $G$ . Так как фактор-группа  $G/H$ , по теореме 9. 4. 3 из [8], сверхразрешима, то и группа  $G$  сверхразрешима. Лемма доказана.

Теорема 2. Для того чтобы в группе  $G$  все силовские подгруппы были сверхнасыщенные и  $\Phi(G) = \{1\}$ , необходимо и достаточно, чтобы  $G$  удовлетворяла следующим условиям: 1)  $F(G)$  — холловская подгруппа с элементарными абелевыми силовскими подгруппами, причем каждая подгруппа из  $F(G)$  инвариантна в  $G$ ; 2) фактор-группа  $G/F(G)$  — циклическая порядка, свободного от квадратов.

Доказательство. Необходимость. Пусть  $\Phi(G) = \{1\}$  и все силовские подгруппы группы  $G$  сверхнасыщенные в  $G$ . Если группа  $G$  нильпотентна, то, по теореме 5 из [2], для каждой  $p$ -силовской подгруппы  $G_p$  имеем  $\Phi(G_p) \subseteq \Phi(G) = \{1\}$ . Следовательно, по теореме 12. 2. 1 из [8], все силовские подгруппы в группе  $G$  являются элементарными абелевыми группами. Учитывая теперь равенство  $F(G) = G$ , видим, что теорема в этом случае верна.

Пусть группа  $G$  ненильпотентна. По лемме 3, группа  $G$  сверхразрешима, т. е.  $G' \subseteq F(G)$ , причем подгруппа  $F(G)$  содержит инвариантные силовские подгруппы группы  $G$  и подгруппы простого индекса из каждой неинвариантной силовской подгруппы группы  $G$ . Следовательно,  $G/F(G)$  — циклическая группа порядка, свободного от квадратов. Применяя, как и выше, теорему 5 из [2] и теорему 12. 2. 1 из [8], получим, что все инвариантные силовские подгруппы группы  $G$  — элементарные абелевы группы. Очевидно, каждая подгруппа из  $F(G)$  инвариантна в  $G$ . Покажем, что  $F(G) = K$  является холловской подгруппой группы  $G$ . В самом деле, по теореме 1.5 [5],  $G = AK$ ,  $A \cap K = \{1\}$ . Предположим, что  $p$  делит  $(|A|, |K|)$ . Тогда  $p$ -силовская подгруппа  $G_p$  группы  $G$  неинвариантна в  $G$  и является циклической группой, причем, по теореме 6 из [4],  $G_p = A_p K_p$ . Противоречие. Следовательно,  $F(G)$  является холловской подгруппой группы  $G$ .

Достаточность. Пусть группа  $G$  удовлетворяет условиям 1) и 2) из формулировки теоремы. Тогда, по теореме Шура (теорема 1. 5. 1 из [1]),  $G = BF(G)$ , причем  $B$  — циклическая группа порядка, свободного от квадратов. Для каждого простого делителя  $p$  порядка подгруппы  $B$  в группе  $G$  содержится максимальная подгруппа индекса  $p$ , т. е.  $B \cap \Phi(G) = \{1\}$ . С другой стороны, для каждого элемента  $y \in F(G)$  существует максимальная подгруппа в группе  $G$ , не содержащая элемент  $y$ . Поэтому  $\Phi(G) \cap F(G) = \{1\}$ . Так как  $\Phi(G) =$

$= (B \cap \Phi(G)) (\Phi(G) \cap F(G))$ , то  $\Phi(G) = \{1\}$ . Силовские подгруппы группы  $G$ , очевидно, являются сверхнасыщенными в  $G$ . Теорема доказана.

Группы с произвольной подгруппой Фраттини, все силовские подгруппы которых сверхнасыщенные, имеют более сложное строение. Например, все нильпотентные группы уже обладают этим свойством. Справедлива также следующая

**Теорема 3.** Пусть все силовские подгруппы группы  $G$  сверхнасыщенные в  $G$ . Тогда  $G/F(G)$  — циклическая группа порядка, свободного от квадратов, причем для каждого делителя  $n$  порядка  $F(G)$  в группе  $F(G)$  существует подгруппа  $N$ , где  $|N| = n$ , и  $N$  инвариантна в  $G$ , а для каждого простого делителя  $p$  порядка фактор-группы  $G/F(G)$  подгруппа  $G_p$  циклическая.

**Доказательство.** Пусть все силовские подгруппы группы  $G$  сверхнасыщенные в  $G$ . По лемме 3, группа  $G$  сверхразрешима, следовательно,  $F(G) \cong G'$ . Так как, по следствию из леммы 2, каждая неинвариантная силовская подгруппа группы  $G$  циклическая и любая собственная подгруппа из нее инвариантна в  $G$ , то  $G/F(G)$  — циклическая группа порядка, свободного от квадратов, и для каждого  $p$ , делящего  $|G/F(G)|$ , подгруппа  $G_p$  — циклическая. Пусть  $P$  — некоторая силовская подгруппа группы  $F(G)$ . Тогда  $P$  — либо силовская подгруппа группы  $G$ , либо циклическая. Если  $P$  — циклическая, то каждая собственная подгруппа из  $P$  инвариантна в группе  $G$ . Пусть  $P$  — силовская подгруппа группы  $G$ . В этом случае каждая подгруппа, инвариантная в  $P$ , инвариантна в группе  $G$ . Следовательно, для каждого делителя  $n$  порядка  $F(G)$  в  $F(G)$  существует подгруппа  $N$ , инвариантная в группе  $G$ , причем  $|N| = n$ . Теорема доказана.

**Теорема 4.** В ненильпотентной группе  $G$  все максимальные подгруппы насыщены тогда и только тогда, когда  $G$  является группой типа  $S_a$ .

**Доказательство.** Пусть в группе  $G$  неинвариантная силовская подгруппа  $G_p$ , и все максимальные подгруппы насыщенные в  $G$ . Тогда очевидно,  $G_p$  является максимальной подгруппой группы  $G$  и притом циклической. Применяя теорему 14. 3. 1 из [8], получим  $G = G_p K$ , где  $K$  — инвариантное  $p$ -дополнение. По теореме 1. 15. 1 [1],  $K$  является примарной минимальной инвариантной подгруппой группы  $G$ . Итак,  $|G| = p^\alpha q^\beta$ . Группа  $G$  содержит максимальные подгруппы порядка  $p^\alpha$  и  $p^{\alpha-1} q^\beta$ , поэтому  $G$  — группа типа  $S_a$ .

Обратная теорема легко проверяется. Теорема доказана.

**Следствие.** В ненильпотентной группе  $G$  тогда и только тогда все максимальные подгруппы сверхнасыщенные, когда  $G$  — группа типа  $S_a$  с неинвариантной  $p$ -силовской подгруппой и порядка  $p^\alpha q$ .

**Замечание 1.** Легко показать, что если все максимальные  $pd$ -подгруппы  $G$  насыщенные в  $G$ , то группа  $G$  разрешима.

В дальнейшем нам понадобится следующая

**Лемма 4.** Пусть  $p$  — наименьший простой делитель порядка группы  $G$ . Если все вторые максимальные  $pd$ -подгруппы группы  $G$  насыщенные в  $G$ , то группа  $G$  разрешима.

**Доказательство.** Допустим, что группа  $G$  — контрпример минимального порядка.

Пусть группа  $G$  содержит разрешимую инвариантную подгруппу  $R \neq \{1\}$ . Тогда, если  $|R|$  делится на  $p$ , то в фактор-группе  $G/R$  все вторые максимальные подгруппы насыщенные; если  $|R|$  не делится на  $p$ , то в  $G/R$  все вторые максимальные  $pd$ -подгруппы насыщенные. Следовательно, фактор-группа  $G/R$  условию теоремы удовлетворяет, и, значит, по индукции  $G$  разрешима. Противоречие.

Значит,  $G$  не содержит разрешимых инвариантных подгрупп.

Рассмотрим следующие возможности:

1.  $N_G(G_p) = H$  максимален в  $G$ . Если  $G_p \subset H$ , то  $G_p$  — циклическая группа. Так как  $p$  — наименьший простой делитель  $|G|$ , то  $G_p$  лежит в центре  $N_G(G_p)$ . Следовательно,  $H$  — нильпотентная группа. Так как  $H$  бипримарна и  $H_G = \{1\}$ , то, по теореме из [7], группа  $G$  разрешима. Противоречие.

2.  $N_G(G_p)$  не максимален в группе  $G$ , т. е. в  $G$  существует максимальная подгруппа  $K$  такая, что  $K \supset N_G(G_p)$ . Тогда  $G_p = N_G(G_p)$  — вторая максимальная подгруппа группы  $G$  и, значит,  $G_p$  — циклическая. По теореме 14.3.1 [8], в  $G$  существует инвариантное  $p$ -дополнение  $L$ . Так как, по замечанию 1,  $K$  — разрешимая группа, то  $K \cap L$  — элементарная абелева  $q$ -группа. Тогда, по теореме 1 из [6], группа  $G$  разрешима. Противоречие. Лемма доказана.

Замечание 2. Используя теорему Томпсона — Фейта о разрешимости групп нечетного порядка [3], лемму 4 можно было доказать несколько короче.

Теорема 5. В нильпотентной группе  $G$  с инвариантной  $p$ -силовой подгруппой  $G_p$  тогда и только тогда все вторые максимальные подгруппы сверхнасыщенные, когда  $G$  одного из следующих типов:

- $|G| = p^\alpha q^2$ , где  $G_p$  — циклическая,  $G_q$  инвариантна в  $G$ , причем при  $\alpha > 1$  все собственные подгруппы из  $G_p$  и  $G_q$  инвариантны в  $G$ ;
- $|G| = p2^3$ , причем  $p = 3$ ,  $G_2$  — кватернионная группа и  $G \supset G_2 \supset N \supset \{1\}$ , где  $|N| = 2$ , — единственный главный ряд группы  $G$ ;
- $|G| = p^\alpha q$ , где  $G_q$  и все  $p$ -подгруппы, порядок которых меньше  $p^{\alpha-1}$ , инвариантны в  $G$ ;
- $|G| = p^\alpha qr$ , причем при  $\alpha > 1$   $G_q$  и  $G_r$  инвариантны в  $G$ , а  $G_p$  — циклическая, все собственные подгруппы которой инвариантны в  $G$ .

Доказательство. Пусть в нильпотентной группе  $G$  все вторые максимальные подгруппы сверхнасыщенные. По лемме 4, группа  $G$  разрешима.

Рассмотрим случай, когда  $G_p = N_G(G_p) \subset M \subset G$ . Так как  $G_p$  — вторая максимальная подгруппа группы  $G$ , то она циклическая, и все ее собственные подгруппы инвариантны в  $G$ . Пусть  $|G_p| = p^\alpha$  и  $\alpha > 1$ . Тогда, по следствию из теоремы 4,  $M$  — группа типа  $S_a$  и  $|M| = p^\alpha q$ . Очевидно,  $M_q$  инвариантна в группе  $G$ . Допустим, что  $|G| = p^\alpha q^\beta$ . Подгруппа  $M/M_q$  максимальна в  $G/M_q$ , поэтому  $G_q/M_q$  является минимальной инвариантной подгруппой группы  $G/M_q$ . Образует вторую максимальную подгруппу  $T$  порядка  $p^{\alpha-1} q^{\beta-1}$  из группы  $G$ , содержащую  $M_q$ . Подгруппа  $T$  нильпотентна, отсюда  $T_q$  инвариантна в  $G$ . Следовательно,  $|G| = p^\alpha q^2$ , т. е. группа  $G$  типа *a*). Допустим, что  $|G| = p^\alpha q r^\gamma$ . Из максимальной подгруппы порядка  $p^\alpha r^\gamma$  следует, что  $\gamma = 1$ . Очевидно,  $G_q$  и  $G_r$  инвариантны в  $G$ , и, значит, группа  $G$  типа *d*). Пусть теперь  $\alpha = 1$ . Тогда  $|M| = pq$ . Рассмотрим случай  $|G| = pq^\beta$ . Так как подгруппа  $L$  порядка  $q^{\beta-1}$  — вторая максимальная в группе  $G$ , то каждая подгруппа порядка  $q^{\beta-2}$  из  $L$  инвариантна в  $G$ . Поэтому  $\beta = 2$  или  $\beta = 3$ . При  $\beta = 2$   $G$  — группа типа *a*). При  $\beta = 3$  все подгруппы порядка  $q^2$  — циклические, значит,  $G_q$  — кватернионная (нетрудно показать, что  $G_q$  — нециклическая). Тогда, по теореме 12.2.2 [8],  $p = 3$ , т. е.  $G$  — группа типа *b*). Допустим, что  $|G| = pqr^\gamma$ . Очевидно,  $\gamma = 1$ , т. е.  $|G| = pqr$ . Тогда, по теореме 9.4.3 [8],  $G_q$  и  $G_r$  инвариантны в группе  $G$ , т. е. группа  $G$  типа *d*).

Пусть теперь  $G_p \subset N_G(G_p) = M \subset G$ . Примем, что  $M$  является подгруппой типа  $S_a$ . Тогда, по следствию из теоремы 4,  $|M| = pq$ . Допустим, что  $|G| = pq^\beta$ . Тогда  $G_q$  неинвариантна в  $G$ . При этом  $\beta = 2$ , так как иначе под-

группа  $M_q$  была бы инвариантна в  $G$ . Имеем  $|G| = pq^2$ . Отсюда  $q \equiv 1 \pmod{p}$  и, значит,  $G_q$  инвариантна в  $G$ . Противоречие. Пусть  $|G| = pqr^\gamma$ . Очевидно,  $\gamma = 1$  и  $q < p < r$ . Ввиду теоремы 9.4.3 [8] приходим опять к противоречию. Примем теперь, что  $M$  — нильпотентная группа. Тогда  $|M| = p^\alpha q$ . Пусть  $|G| = p^\alpha q^\beta$  и  $\alpha > 1$ . Подгруппа  $G_q/M_q$  является минимальной инвариантной подгруппой группы  $G/M_q$ . Отсюда  $|G| = p^\alpha q^2$ , т. е. группа  $G$  типа  $a$ ). Если  $\alpha = 1$ , то  $|M| = pq$  и  $|G| = pq^\beta$ . Более того,  $|G| = pq^2$  или  $|G| = pq^3$ , и группа  $G$  типа  $a$ ) или  $b$ ). Пусть  $|G| = p^\alpha qr^\gamma$ . Очевидно,  $\gamma = 1$  и группа  $G$  типа  $d$ ).

Рассмотрим, наконец, случай, когда  $G_p = N_G(G_p) = M \subset G$ . Имеем  $|G| = p^\alpha q^\beta$ . Если  $\alpha = 1$ , то  $\beta \leq 2$  и группа  $G$  типа  $a$ ). При  $\alpha > 1$  имеем  $\beta = 1$ . Действительно, допустим, что  $\beta > 1$ . В группе  $G$  существует инвариантная подгруппа  $T$  порядка  $p^{\alpha-1} q^\beta$ , которая либо нильпотентна, либо типа  $S_a$ . Если  $T$  нильпотентна, то  $G_q$  — минимальная инвариантная подгруппа в  $G$  и, значит,  $\beta = 1$ . Если  $T$  типа  $S_a$ , то, по следствию из теоремы 4,  $|T| = pq^\beta$ , т. е.  $G_q$  — вторая максимальная подгруппа группы  $G$  и, следовательно,  $\beta = 1$ . Противоречие. Значит,  $|G| = p^\alpha q$  и  $|T| = p^{\alpha-1} q$ . Отсюда как при  $T$  нильпотентной, так и при  $T$  типа  $S_a$  следует, что  $G_q$  инвариантна в  $G$ . Если в группе  $G$  не существует инвариантных подгрупп порядка  $p^{\alpha-1}$ , то, очевидно,  $G$  типа  $c$ ). Пусть в группе  $G$  существует инвариантная подгруппа  $K$  порядка  $p^{\alpha-1}$ . Тогда каждая подгруппа порядка  $p^{\alpha-1}$ , отличная от  $K$ , является неинвариантной в  $G$  и циклической. Непосредственной проверкой классов групп из заключения теоремы 12.5.1 [8] убеждаемся, что все собственные подгруппы из  $G_p$  абелевы. Следовательно, группа  $G$  типа  $c$ ).

Обратное утверждение очевидно. Теорема доказана.

**Теорема 6.** *Тогда и только тогда все третьи максимальные  $2d$ -подгруппы неразрешимой группы  $G$  насыщены в  $G$ , когда группа  $G$  изоморфна одной из следующих групп: 1)  $SL(2, 5)$ ,  $PSL(2, p)$ , где  $p = 5, 13$  или  $\lambda(p \pm 1) = 3$  и  $p \not\equiv \pm 1 \pmod{10}$ ; 2)  $PSL(2, 3^n)$ , где  $n > 2$  — простое число и  $\lambda(3^n \pm 1) \leq 3$ .*

**Доказательство.** Пусть в неразрешимой группе  $G$  все третьи максимальные  $2d$ -подгруппы насыщены и  $G$  — контрпример минимального порядка.

Рассмотрим случай, когда  $G$  — простая группа. Ввиду условия теоремы порядок третьих максимальных  $2d$ -подгрупп группы  $G$  равен 2. Отсюда все четвертые максимальные  $2d$ -подгруппы инвариантны в  $G$ , и утверждение следует из теоремы 2.2 [5].

Пусть  $G$  — непростая группа и  $R$  — максимальная инвариантная подгруппа из  $G$ . Из леммы 4 следует, что  $R$  разрешима. По теореме из [3],  $|G/R|$  четен. Так как  $|G/R| < |G|$ , то  $G/R$  изоморфна одной из простых групп заключения теоремы. Пусть  $F/R$  — третья максимальная  $2d$ -подгруппа из  $G/R$ . Очевидно,  $|F/R| = 2$ . При этом  $R$  — 2-группа, поскольку в противном случае подгруппа  $F$  была бы инвариантна в  $G$ . Таким образом,  $F$  — циклическая 2-группа. Пусть  $G/R \cong PSL(2, q)$  из заключения теоремы, причем  $q \neq 5$ . Каждая из этих простых групп имеет третью максимальную подгруппу нечетного порядка. Тогда в группе  $G$  имеется бипримарная третья максимальная  $2d$ -подгруппа. Так как она насыщена в  $G$ , то она инвариантна в группе  $G$ . Противоречие. Следовательно,  $G/R \cong PSL(2, 5)$ . Пусть  $G_2 \supset F$ . Возьмем произвольную максимальную подгруппу  $H$  из  $G_2$ . Если  $H \neq F$ , то  $FH = G_2$ , причем  $H \cap F = R$ . Отсюда  $H$  — циклическая группа, содержащая  $R$ . Применяя теорему 12.5.2 [8], получаем, что  $G_2$  — обобщенная группа

кватернионов. Так как все собственные подгруппы в  $G_2$  — циклические, то  $G_2$  — кватернионная группа и значит  $|R| = 2$ . Следовательно, по теореме Шура [9],  $G \cong SL(2, 5)$ . Противоречие. Теорема доказана.

### Литература

1. Чунихин С. А. Подгруппы конечных групп. Минск, 1964.
2. Gaschütz W. Math. Z., 58, № 2, 160, 1953.
3. Feit W., Thompson J. G. Pacif. J. Math., 13, № 3, 775, 1963.
4. Wielandt H. Math. Z., 55, 1, 1951.
5. Ведерников В. А. ДАН БССР, 11, № 12, 1057, 1967.
6. Русаков С. А. Конечные группы. Минск, 1966, стр. 116.
7. Janke Z. Glasnik mat.-fiz. i astron., 16, № 3—4, 167, 1961.
8. Холл М. Теория групп. М., 1962.
9. Schur I. J. reine angew. Math., 132, 85, 1907.

Орский филиал Всесоюзного заочного  
политехнического института,  
Гомельский филиал Московского  
кооперативного института

Поступило в редакцию  
21.I 1970

УДК 681.3.06 : 51

В. С. АЙЗЕНШТАТ, В. А. ЛИСКОВЕЦ, В. З. ФЕЙНБЕРГ

## РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ОБ ОПТИМАЛЬНОМ РАСПРЕДЕЛЕНИИ ПАМЯТИ МЕЖДУ РАБОЧИМИ ПОЛЯМИ ПОДПРОГРАММ

§ 1. При трансляции программ с алгоритмических языков возникает задача размещения в памяти вычислительной машины рабочих полей\*) подпрограмм (процедур) исходной программы. Одна подпрограмма в процессе своего выполнения может обращаться к другой подпрограмме. В этом случае будем говорить, что первая подпрограмма инициирует вторую.

Пусть  $S_1, S_2, \dots, S_n$  — множество подпрограмм некоторой программы  $S$ . Без ограничения общности можно считать программу  $S$  заданной, если для каждой  $S_i$  указан объем  $r_i$  ее рабочего поля  $R_i$  и известно, какие подпрограммы она инициирует. Действительно, всю оставшуюся часть  $S$  можно рассматривать как начальную подпрограмму  $S_0$ , которая инициирует все подпрограммы  $S_1, S_2, \dots, S_n$ , а поэтому из приводимого ниже свойства (Т) вытекает, что задача распределения памяти для программы  $S$  сводится к распределению памяти между  $R_1, R_2, \dots, R_n$ . Требуется произвести это распределение таким образом, чтобы общее количество ячеек, занимаемых рабочими полями подпрограмм, было минимальным.

Программа  $S$  может быть задана ориентированным графом  $\Gamma$  со взвешенными вершинами. Граф  $\Gamma$  содержит  $n$  вершин  $S_1, S_2, \dots, S_n$ , которым приписаны веса  $r_1, r_2, \dots, r_n$  соответственно. Вершины  $S_i$  и  $S_j$  соединены дугой  $(S_i, S_j)$  в том и только в том случае, когда  $S_i$  может инициировать  $S_j$ . Будем называть  $\Gamma$  графом инициаций подпрограмм  $S_1, S_2, \dots, S_n$ .

Если  $S_i$  инициирует  $S_j$ , то, естественно, при распределении памяти рабочие поля  $R_i$  и  $R_j$  не могут пересекаться. Более того, имеет место следующее свойство (Т): если в графе  $\Gamma$  существует путь, ведущий из  $S_i$  в  $S_j$ ,  $i \neq j$ , то

$$R_i \cap R_j = \emptyset. \quad (1)$$

Теперь задача формулируется следующим образом.

Дан граф  $\Gamma$ . Требуется найти такое распределение в памяти рабочих полей  $R_i$ , удовлетворяющее условию (Т), чтобы  $\bigcup_i R_i$  имело минимальный объем.

В силу условия (Т) вместо графа  $\Gamma$  можно рассматривать граф его транзитивного замыкания  $\bar{\Gamma}$ . При этом условие (Т) переходит в более простое условие ( $\bar{T}$ ): если в графе  $\bar{\Gamma}$   $S_i$  и  $S_j$  связаны дугой, то выполняется соотношение (1). Таким образом, справедливо следующее утверждение: задача распределения памяти для графа  $\Gamma$  при

\*) Под рабочим полем подпрограммы понимается совокупность ячеек памяти, сопоставляемых в транслированной программе локализованным в этой подпрограмме величинам.



условии (Т) равносильна той же задаче для графа его транзитивного замыкания  $\bar{\Gamma}$  при условии  $(\bar{T})$ .

§ 2. Весом ориентированной цепи (пути) в графе  $\Gamma$  назовем сумму весов различных входящих в нее вершин. Цепь в  $\Gamma$  с наибольшим весом назовем максимальной.

Заметим прежде всего, что в силу условия (Т) количество занимаемых программой  $S$  рабочих ячеек не может быть меньше веса максимальной цепи.

Рассмотрим вначале случай, когда граф  $\Gamma$  — ациклический, т. е. не содержит ориентированных циклов. Очевидно, граф транзитивного замыкания  $\bar{\Gamma}$  является графом частичного порядка. Все ориентированные цепи  $\Gamma$  являются элементарными, т. е. не содержат никакой вершину дважды.

Из всех цепей ациклического графа  $\Gamma$ , оканчивающихся в вершине  $S_i$ , выберем цепь с максимальным весом  $p_i$ . Уровнем вершины  $S_i$  в графе  $\Gamma$  назовем величину  $h_i = p_i - r_i$ . Во всяком ациклическом графе существуют вершины нулевого уровня. Ими являются максимальные элементы соответствующего частичного порядка (т. е. входы графа  $\Gamma$ ). Пусть  $a$  — адрес ячейки памяти, начиная с которой будем располагать рабочее поле программы  $S$ . В качестве рабочего поля  $R_i$  подпрограммы  $S_i$  возьмем массив, состоящий из ячеек с адресами  $a + h_i, a + h_i + 1, \dots, a + h_i + r_i - 1$ . Легко показать, что при таком распределении общее число используемых ячеек равно весу максимальной цепи. Покажем далее, что это распределение удовлетворяет условию (Т). Пусть в  $\Gamma$  существует путь из  $S_i$  в  $S_j$ . Поскольку в  $\Gamma$  нет пути из  $S_j$  в  $S_i$ , то из определения уровня вытекает неравенство

$$h_j \geq h_i + r_i,$$

откуда следует, что массивы  $R_i$  и  $R_j$  не пересекаются.

Общий случай, когда  $\Gamma$  содержит ориентированные циклы, может быть сведен к предыдущему путем факторизации  $\Gamma$  по компонентам сильной связности (бикомпонентам). После факторизации  $\Gamma$  получим ациклический граф  $\Gamma^*$ , вершинами которого являются стянутые в одну точку бикомпоненты, причем две вершины  $\Gamma^*$  соединены дугой в том и только в том случае, если в исходном графе существует дуга с началом в одной бикомпоненте и концом во второй.

Из условия (Т) следует, что рабочие поля вершин  $\Gamma$ , принадлежащих одной бикомпоненте, попарно не пересекаются. Поэтому, если приписать каждой вершине в графе  $\Gamma^*$  вес, равный сумме весов всех вершин соответствующей бикомпоненты, то получим взвешенный ациклический граф  $\Gamma^*$ , вес максимальной цепи которого равен весу максимальной цепи в  $\Gamma$ .

Таким образом, доказаны следующие теоремы.

**Теорема 1.** Минимальное необходимое число ячеек при распределении памяти между рабочими полями подпрограмм равно весу максимальной цепи графа инициаций этих подпрограмм.

**Теорема 2.** Решение задачи распределения памяти при произвольном заданном графе инициаций  $\Gamma$  сводится к решению этой задачи в случае, когда граф инициаций является ациклическим. Пусть  $\Gamma$  — ациклический граф,  $a$  — начальный адрес рабочего массива памяти,  $a + h_i$  — уровень вершины  $S_i$  в  $\Gamma$ . Если положить начальный адрес  $R_i$  равным  $a + h_i$ , то полученное распределение будет оптимальным.

Теорема 2, в частности, показывает, что требование располагать каждое рабочее поле в последовательных ячейках не увеличивает минимального необходимого объема памяти.

В рассматриваемой задаче каждому рабочему полю  $R_i$  отводится фиксированное место в памяти, определяемое его начальным адресом. Такое распределение памяти называется статическим. Существует и так называемое динамическое распределение памяти, при котором допускается изменение начального адреса  $R_i$  в процессе работы программы. Теорема 1 показывает, что статическое распределение не требует увеличения числа используемых рабочих ячеек по сравнению с динамическим распределением, удовлетворяющим условию (Т), если величины  $r_i$  не изменяются в процессе работы программы.

Задачи глобального распределения памяти рассматриваются в [1] и [2]. В этих работах они были сведены к задаче раскраски вершин графа (см. также [3]). Интересно отметить, что рассматриваемая в настоящей статье задача в частном случае, когда все веса  $r_i$  одинаковы, равносильна задаче раскраски вершин графа транзитивного замыкания  $\bar{\Gamma}$ . Более того, и при произвольных весах  $r_1, r_2, \dots, r_n$  ее можно свести к задаче раскраски транзитивного графа\*). Для этого достаточно поступить следующим образом. Каждую вершину  $S_i$  графа  $\Gamma$  заменим ориентированной цепью длины  $r_i$ . Все дуги, входившие в  $S_i$ , направим в начало этой цепи, а все дуги, исходящие из  $S_i$ , выведем из конца цепи. Транзитивно замкнем полученный граф и припишем всем его вершинам единичный вес. Этот транзитивный граф является искомым.

Если граф  $\Gamma$  — ациклический, то раскраска его вершин есть не что иное, как разбиение соответствующего частично упорядоченного множества на непересекающиеся классы попарно несравнимых элементов (антицепи). Из доказанной теоремы 1 следует, что минимальное число антицепей, на которое можно разложить частично упорядоченное множество, равно длине максимальной цепи. Этот результат является обращением известной теоремы Дилворта [4].

§ 3. Перейдем теперь к построению алгоритма оптимального распределения памяти. Будем считать, что заданы матрица  $A = (a_{ij})$  смежности вершин графа  $\Gamma$  и вектор  $(r_1, r_2, \dots, r_n)$ . Рассмотрим вначале случай, когда граф  $\Gamma$  не содержит ориентированных циклов. Тогда уровни  $h_1, h_2, \dots, h_n$  могут быть найдены при помощи следующей простой процедуры. Предварительно заметим, что при вычислении уровней вершин  $\Gamma$  естественно ограничиться рассмотрением ориентированных цепей, начинающихся со входов  $\Gamma$ . Входам графа  $\Gamma$  соответствуют нулевые столбцы матрицы  $A$ .

Пусть  $h^{(0)}$  —  $n$ -мерный нулевой вектор, а  $i_1$  — номер какого-либо столбца матрицы  $A$ , состоящего из нулей. Построим вектор  $h^{(1)} = (h_1^{(1)}, h_2^{(1)}, \dots, h_n^{(1)})$ , положив  $h_j^{(1)} = \max(h_j^{(0)}, h_{i_1}^{(0)} + r_{i_1}) = r_{i_1}$ , если  $j$ -й элемент  $i_1$ -й строки равен 1, и  $h_j^{(1)} = h_j^{(0)} = 0$  в противном случае. Заметим, что если уровень какой-либо вершины  $S_i$  уже известен, то при вычислении уровней оставшихся вершин достаточно из всех цепей, проходящих через  $S_i$ , ограничиться рассмотрением цепей, начинающихся с  $S_i$ . Поэтому, если отметить вершины графа, в которые заходят дуги из  $S_i$ , можно исключить из дальнейшего рассмотрения вершину  $S_i$  вместе с исходящими из нее дугами. Вычеркнув в  $A$  столбец и строку с номером  $i_1$ , получим матрицу  $A_1$  порядка  $n-1$ .

Пусть после  $(k-1)$ -го шага,  $k > 1$ , получена матрица  $A_{k-1}$ . Снова выберем в  $A_{k-1}$  нулевой столбец, и пусть его номер в исходной матрице  $A$  равен  $i_k$ . Уровень вершины  $S_{i_k}$  уже известен и равен  $h_{i_k}^{(k-1)}$ . Построим вектор  $h^{(k)} = (h_1^{(k)}, h_2^{(k)}, \dots, h_n^{(k)})$ , положив  $h_j^{(k)} = \max(h_j^{(k-1)}, h_{i_k}^{(k-1)} + r_{i_k})$ , если  $a_{i_k j} = 1$ , и  $h_j^{(k)} = h_j^{(k-1)}$  в противном случае.

\*) Однако она не является задачей весовой раскраски графа.

Так как граф  $\Gamma$  ациклический, на каждом шаге в соответствующей матрице найдется нулевой столбец. Прделав  $n-1$  шаг, получим искомый вектор  $h^{(n-1)} = (h_1, h_2, \dots, h_n)$ .

Описанный способ нахождения уровней вершин ациклического графа назовем алгоритмом I. Заметим, что подобный алгоритм встречается в иных ситуациях, возникающих, например, при анализе сетевых графов.

Переход от произвольного графа  $\Gamma$  к ациклическому требует выделения бикомпонент  $\Gamma$  и стягивания их в этом графе (т. е. факторизации  $\Gamma$  по бикомпонентам). Известные способы выделения бикомпонент графа так или иначе связаны с построением его транзитивного замыкания. В матрице смежности полученного графа вершинам, входящим в одну бикомпоненту, соответствуют одинаковые строки (столбцы). В этой связи можно указать на алгоритм, изложенный в [5]. Ниже будет описан алгоритм последовательного выделения бикомпонент, который представляется нам более эффективным, и алгоритм последовательной факторизации графа по ним.

Предлагаемый способ выделения бикомпоненты, содержащей данную вершину  $S_i$ , заключается в следующем. Пусть  $I_1$  — множество номеров мест, на каждом из которых в  $i$ -й строке матрицы  $A$  стоит 1. Прибавим булевски к  $i$ -й строке все те строки  $A$ , номера которых принадлежат  $I_1$ . Обозначим через  $I_2$  множество номеров мест  $i$ -й строки, на которых стоят вновь появившиеся единицы, и, если  $I_2$  не пусто, опять прибавим соответствующие строки матрицы  $A$  к  $i$ -й строке и т. д. Полученная в результате строка будет указывать все вершины, достижимые из  $S_i$ .

Укажем аналогичным образом в  $i$ -м столбце все вершины, из которых достижима  $S_i$ . Вершина  $S_j$ ,  $j \neq i$ , принадлежит искомой бикомпоненте в том и только в том случае, когда на  $j$ -м месте в  $i$ -й строке и  $i$ -м столбце полученной матрицы  $A^{(i)}$  одновременно стоит 1.

Для того, чтобы стянуть выделенную бикомпоненту в точку, поступаем следующим образом. Прибавим булевски к  $i$ -й строке (столбцу) исходной матрицы  $A$  все те ее строки (столбцы), которые соответствуют остальным вершинам этой бикомпоненты, и затем вычеркнем их. Поставим в полученной матрице на пересечении  $i$ -й строки и  $i$ -го столбца 0 и обозначим эту матрицу  $A_1$ . Припишем  $S_i$  новый вес, равный сумме весов вершин стянутой бикомпоненты. Матрица  $A_1$  является матрицей смежности графа, полученного после факторизации  $\Gamma$  по выделенной бикомпоненте.

Процесс дальнейшего выделения бикомпонент удается несколько упростить, если оставшиеся вершины графа  $\Gamma$  разбить на такие три класса, что каждая из еще не выделенных бикомпонент целиком лежит в одном из этих классов (ср. с [5]). В первый класс  $K_{10}$  отнесем все такие вершины  $S_j$ , для которых в  $i$ -й строке матрицы  $A^{(i)}$  на  $j$ -м месте стоит 1 (и, следовательно, в  $i$ -м столбце на  $j$ -м месте стоит 0). В этот класс попали все вершины, которые достижимы из выделенной бикомпоненты.

В класс  $K_{01}$  отнесем все такие вершины  $S_j$ , для которых в  $i$ -м столбце матрицы  $A^{(i)}$  на  $j$ -м месте стоит 1; это те вершины, из которых достижима выделенная бикомпонента. Все оставшиеся вершины образуют класс  $K_{00}$ . Теперь при выделении бикомпоненты, содержащей вершину  $S_h$ , достаточно ограничиться рассмотрением лишь тех строк и столбцов матрицы  $A_1$ , которые соответствуют вершинам, лежащим в том же классе, что и  $S_h$ .

Назовем описанный способ выделения и стягивания бикомпоненты алгоритмом II.

Чтобы определить, является ли граф  $\Gamma$  ациклическим, можно воспользоваться таким способом. Вычеркнем в  $A$  нулевой столбец и строку с тем же номером. В полученной матрице вновь находим нулевой столбец и повторяем этот процесс, пока либо не исчерпаем всю матрицу, либо не придем к матрице, которая не содержит нулевых столбцов. В первом случае граф  $\Gamma$  — ациклический, во втором содержит ориентированные циклы.

Заметим, что этот способ выделяет на каждом шаге входы соответствующего графа. Поменяв в нем ролями столбцы и строки, получим способ последовательного выделения выходов.

Таким образом, приходим к следующей схеме алгоритма оптимального распределения памяти.

1. Определить, является ли граф инициаций  $\Gamma$  циклическим.

2. Если  $\Gamma$  — ациклический граф, найти оптимальное распределение памяти при помощи алгоритма I.

3. Если граф  $\Gamma$  не является ациклическим, то предварительно факторизовать  $\Gamma$  по бикомпонентам при помощи алгоритма II и применить к полученному ациклическому графу алгоритм I.

§ 4. При конкретной реализации алгоритма оптимального распределения памяти в изложенную выше принципиальную схему полезно внести некоторые дополнения, способные сделать алгоритм более эффективным в вычислительном отношении.

Распределение памяти можно начать непосредственно с работы алгоритма I. В том случае, когда граф инициаций  $\Gamma$  окажется ациклическим, уже на этом этапе будет найдено оптимальное распределение. В противном случае придем к матрице смежности графа, не имеющего входов. Прежде чем факторизовать этот граф посредством алгоритма II, полезно выделить тривиальные бикомпоненты, являющиеся выходами.

Целесообразно не выделять сразу все бикомпоненты, а чередовать работу алгоритмов II и I.

С учетом сделанных замечаний алгоритм оптимального распределения памяти состоит в выполнении следующих шагов (перед началом работы алгоритма полагаем  $B=A$ ,  $h=h^{(0)}$ ).

а) Если  $B$  не содержит нулевых столбцов, переходим к шагу б). В противном случае применяем алгоритм I до тех пор, пока не получим матрицу  $B_k$ , которая не содержит нулевых столбцов, и вектор  $h^{(k)}$ , после чего переходим к шагу б).

б) Если в  $B_k (B_0 = B)$  нет нулевых строк, переходим к шагу в). В противном случае последовательно выделяем выходы, пока не получим матрицу  $B_k^{(l)}$ , которая не содержит нулевых строк, после чего переходим к шагу в).

в) Пусть  $i$  — номер строки, входящей в матрицу  $B_k^{(l)}$ . Выделим в  $B_k^{(l)}$  бикомпоненту вершины  $S_i$  и стянем эту бикомпоненту на графе, соответствующем матрице  $B_k$ , при помощи алгоритма II. В векторе  $h^{(k)} = (h_1^{(k)}, h_2^{(k)}, \dots, h_n^{(k)})$  вычеркнем координаты, соответствующие всем вершинам этой бикомпоненты, кроме  $S_i$ , а  $h_i^{(k)}$  заменим на  $\max h_i^{(k)}$ , где максимум берется по всем номерам вершин, принадлежащих бикомпоненте. Обозначим полученные на этом шаге (из  $B_k$  и  $h^{(k)}$ ) матрицу через  $B$  и вектор  $h$  и вновь обратимся к шагу а).

При больших  $n$  на шаге в) алгоритма полезно учитывать разбиение множества вершин на классы  $K_{10}$ ,  $K_{01}$  и  $K_{00}$  (см. § 3). Заметим, что если класс  $K_{01}$  не пуст, то в матрице  $B$  нет нулевых столбцов. Значит, в этом случае нет смысла обращаться к шагам а) и б), а следует повторить шаг в), причем целесообразно выделять бикомпоненту, лежащую в  $K_{01}$ .

Пусть  $\Gamma$  — произвольный транзитивный граф. Придадим каждой вершине  $\Gamma$  вес, равный 1. Тогда, как следует из § 2, изложенный алгоритм дает эффективный способ раскраски вершин графа  $\Gamma$ .

Пример. Приведем пример оптимального распределения памяти между рабочими полями 20 подпрограмм, граф инициаций которых задан матрицей  $A$ :

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1		1	1	1								1			1					
2							1													1
3										1							1		1	
4					1															
5			1						1						1					
6				1		1		1												
7										1									1	
8												1		1						1
9							1													
10															1	1			1	
11														1						
12										1							1			
13													1							
14							1	1						1				1		1
15																		1		
16											1									
17														1						
18																	1		1	
19																				
20																				

Пусть  $r = (r_1, r_2, \dots, r_{20}) = (14, 13, 15, 5, 8, 3, 10, 9, 4, 12, 14, 6, 6, 7, 4, 9, 2, 5, 2, 7)$ . На первом шаге алгоритма удается разместить в памяти рабочие поля подпрограмм  $S_1, S_2$  и  $S_3$ . Их начальные адреса определяются соответствующими координатами вектора  $h^{(3)} = (0, 14, 14, 14, 0, 0, 0, 27, 0, 0, 29, 14, 0, 0, 14, 0, 29, 0, 29, 0)$ .

После удаления из  $A$  строк и столбцов с номерами 1, 2 и 3 останется матрица  $A_3$  17-го порядка, которая не содержит нулевых столбцов.

На втором шаге выделяются выходы  $S_{19}$  и  $S_{20}$ .

На третьем шаге выделим на полученной матрице 15-го порядка бикомпоненту вершины  $S_{10}$ . После работы алгоритма 10-я строка и 10-й столбец этой матрицы примут вид

$$(0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 1, 1, 1),$$

$$(1, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0).$$

Отсюда следует, что выделяемая бикомпонента состоит из вершин  $S_{10}, S_{12}, S_{16}$ , а

$$K_{10} = \{S_{15}, S_{17}, S_{18}\},$$

$$K_{01} = \{S_4, S_5, S_6\},$$

$$K_{00} = \{S_7, S_8, S_9, S_{11}, S_{13}, S_{14}\}.$$

После стягивания бикомпоненты на  $A_3$  вектор  $h^{(3)}$  заменится на вектор  $h = (0, 14, 14, 14, 0, 0, 0, 27, 0, 14, 29, *, 0, 0, 14, *, 29, 0, 29, 0)$ . \*)

Вершина  $S_{10}$  получит новый вес, равный 27, а  $A_3$  превратится в матрицу  $B$ :

	4	5	6	7	8	9	10	11	13	14	15	17	18	19	20
4			1												
5	1						1								
6		1		1		1									
7								1						1	
8									1	1					1
9					1										
10											1		1		
11										1					
13										1					
14				1	1					1		1		1	
15												1			
17										1					
18											1		1		
19															
20															

Поскольку  $B$  не содержит нулевых столбцов (и выходами по-прежнему остаются лишь  $S_{19}$  и  $S_{20}$ ), снова применяем алгоритм II. Выделим бикомпоненту вершины  $S_4$ , лежащую в классе  $K_{01}$ . Поскольку  $K_{01}$  состоит из трех вершин, в данном случае приходится иметь дело с матрицей 3-го порядка. Выделяемая бикомпонента содержит вершины  $S_4, S_5$  и  $S_6$ . После ее стягивания на матрице  $B$  получим новый вектор

$$h = (0, 14, 14, 14, *, *, 0, 27, 0, 14, 29, *, 0, 0, 14, *, 29, 0, 29, 0).$$

Вершине  $S_4$  приписываем новый вес, равный 16, а  $B$  превратится в матрицу 13-го порядка. Применяя к ней алгоритм I, распределим рабочие поля подпрограмм  $S_4, S_7, S_{10}, S_{11}$ . Их начальные адреса определяются соответствующими координатами нового вектора  $h$ , равными 14, 30, 30, 40.

Применяя дальше алгоритм распределения памяти, получим такие результаты: граф инициаций содержит нетривиальные бикомпоненты

$$\{S_4, S_5, S_6\}, \{S_8, S_9, S_{13}, S_{14}\}, \{S_{10}, S_{12}, S_{16}\}, \{S_{15}, S_{17}, S_{18}\},$$

а вектор уровней факторизованного графа имеет вид

$$\begin{aligned} (h_1, h_2, h_3, h_4, h_7, h_8, h_{10}, h_{11}, h_{15}, h_{19}, h_{20}) = \\ = (0, 14, 14, 14, 30, 30, 30, 40, 57, 68, 56). \end{aligned}$$

\*) В векторе  $h$  знаком \* отмечены вычеркнутые координаты.

Припишем уровни стянутым вершинам бикомпонент следующим образом:  $h_5 = h_4 + r_4 = 19$ ,  $h_6 = h_5 + r_5 = 27$ ,  $h_9 = h_8 + r_8 = 39$  и т. д. Тогда (если положить для краткости начальный адрес  $a = 0$ ) оптимальное распределение памяти задается вектором

(0, 14, 14, 14, 19, 27, 30, 30, 39, 30, 40, 42, 43, 49, 57, 48, 61, 63, 68, 56).

Минимальное необходимое число ячеек памяти равно  $\max(h_i + r_i)$ . В нашем примере для размещения рабочих полей требуется 70 ячеек памяти (в то время как  $\sum r_i = 155$ ).

Отметим, что теперь, когда найдено оптимальное распределение памяти, есть возможность выделить максимальную цепь. Вначале следует выписать максимальную цепь факторизованного графа. Это будет цепь  $S_{j_1}, S_{j_2}, \dots, S_{j_k}$ , где  $h_{j_k} + r_{j_k} = \max(h_i + r_i)$ ,  $h_{j_{k-1}} + r_{j_{k-1}}$  имеет максимальное значение среди всех  $h_j + r_j$ , для которых есть дуга от  $S_j$  к  $S_{j_k}$ , и т. д. Если в этой цепи  $S_{j_l}$  соответствует нетривиальной бикомпоненте, надо заменить  $S_{j_l}$  на цепь, проходящую через все вершины этой бикомпоненты, причем в первый элемент этой цепи заходит дуга из  $S_{j_{l-1}}$ , а из последнего выходит дуга в  $S_{j_{l+1}}$ . В нашем примере максимальной является цепь  $S_1, S_4, S_6, S_5, S_{10}, S_{16}, S_{12}, S_{17}, S_{15}, S_{18}, S_{19}$ .

Авторы признательны Н. В. Шкуту, обратившему их внимание на эту задачу.

### Литература

1. Лавров С. С. Журн. вычисл. матем. и матем. физ., **1**, 4, 687, 1961.
2. Ершов А. П. ДАН СССР, **142**, 4, 785, 1962.
3. Мартынюк В. В. Журн. вычисл. матем. и матем. физ., **2**, 3, 445, 1962.
4. Dilworth R. P. App. of Math., **51**, 2, 161, 1950.
5. Лейфман Л. Я. Кибернетика, № 5, 19, 1966.

Институт математики  
АН БССР

Поступило в редакцию  
19.11 1970

В. А. ЕМЕЛИЧЕВ, М. М. КОВАЛЕВ

РЕШЕНИЕ НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧ  
ВОГНУТОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ МЕТОДОМ ПОСТРОЕНИЯ  
ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ ПЛАНОВ \*. I

1. Поскольку минимум вогнутой функции на выпуклом многограннике достигается в одной из вершин, то такие задачи вогнутого программирования можно рассматривать как задачи дискретной оптимизации, для решения которых применима общая схема, предложенная в [1], при условии, что функцию цели можно аппроксимировать линейной формой [2].

В настоящей работе изучается задача минимизации функционала

$$F(X) = \sum_{i=1}^m f_i \left( \sum_{j=1}^n a_{ij} x_{ij} \right) + \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n g_{ij}(x_{ij}) \quad (1)$$

на многограннике  $\Omega$ , заданном ограничениями

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j, \quad j = \overline{1, n}, \quad (2)$$

$$x_{ij} \geq 0, \quad i = \overline{1, m}, \quad j = \overline{1, n}, \quad (3)$$

где  $f_i(x)$  и  $g_{ij}(x)$  — вогнутые функции,  $a_{ij} \geq 0$ ,  $b_j > 0$ . Естественно также предположить, что  $f_i(0) = 0$ ,  $g_{ij}(0) = 0$ .

Так как аппроксимирующая линейная форма для функционала  $F(X)$  строится очевидным образом, то для решения задачи (1)–(3) применим метод, предложенный в [2]. Однако использование этого метода здесь нецелесообразно ввиду большого числа  $((m-1)n)$  соседних вершин. Предлагается новый способ построения последовательности вершин, позволяющий на каждом шаге улучшать аппроксимирующую линейную форму.

Задача (1)–(3) является обобщением известной задачи размещения производства. Действительно, если  $a_{ij} = 1$ ,  $g_{ij}(x_{ij}) = c_{ij}x_{ij}$ , то получаем задачу размещения в непрерывной постановке. Задачу (1)–(3) можно также трактовать, как задачу размещения предприятий по переработке сырья. Тогда  $a_{ij}$  показывает, сколько единиц «эталонного» сырья заменяет одна единица реального сырья  $j$ -ой группы, если это сырье перерабатывается на  $i$ -ом предприятии. В другой интерпретации  $a_{ij}$  показывает выход готовой продукции на  $i$ -ом предприятии из единицы сырья  $j$ -ой группы. Некоторые модификации задачи (1)–(3) приводят ее в одном случае к задаче о выборе оптимального парка машин

\* Основные результаты этой работы были доложены в январе 1970 г. на III зимней школе-симпозиуме по математическому программированию и смежным вопросам в г. Дрогобыче.

✓ [3], а в другом к обобщенной задаче унификации деталей [4]. Однако, как мы покажем в п. 5, общая схема решения остается прежней.

2. Множество вершин многогранника  $\Omega$  обозначим через  $V(\Omega)$ .

Лемма 1. План  $X^0$  задачи (1) — (3) будет вершиной многогранника  $\Omega$  тогда и только тогда, когда  $X^0$  содержит  $n$  положительных компонент.

Доказательство. Необходимость. Пусть  $X^0 \in V(\Omega)$ . В каждом столбце матрицы  $X^0 = \{x_{ij}^0\}$  есть по крайней мере одна положительная компонента. Предположим, что существует столбец  $j'$ , такой, что  $x_{i'j'}^0 > 0$ ,  $x_{i''j'}^0 > 0$ . Пусть  $x_{i'j'}^0 \geq x_{i''j'}^0$ . Рассмотрим две матрицы  $\bar{X}$  и  $\bar{\bar{X}}$ , у которых компоненты вычисляются по формулам

$$\bar{x}_{i'j'} = x_{i'j'}^0 + x_{i''j'}^0, \quad \bar{x}_{i''j'} = 0, \quad \bar{\bar{x}}_{i'j'} = x_{i'j'}^0 - x_{i''j'}^0, \quad \bar{\bar{x}}_{i''j'} = 2x_{i''j'}^0,$$

а остальные компоненты совпадают с соответствующими компонентами матрицы  $X^0$ . Очевидно, что  $\bar{X}, \bar{\bar{X}} \in \Omega$  и  $X^0 = \frac{1}{2}\bar{X} + \frac{1}{2}\bar{\bar{X}}$ . Поэтому  $X^0 \notin V(\Omega)$ . Полученное противоречие доказывает необходимость.

Достаточность. Пусть план  $X^0$  имеет  $n$  положительных компонент. Предположим, что  $X^0 \notin V(\Omega)$ , т. е. существуют такие  $\bar{X}, \bar{\bar{X}} \in \Omega$ ,  $\bar{X} \neq \bar{\bar{X}}$ , что  $X^0 = \alpha\bar{X} + \beta\bar{\bar{X}}$ ,  $0 < \alpha, \beta < 1$ . Но тогда планы  $\bar{X}$  и  $\bar{\bar{X}}$  содержат также по  $n$  положительных компонент, причем в тех же клетках, что и  $X^0$ . Отсюда, учитывая (2), получаем  $\bar{X} = \bar{\bar{X}}$ , т. е. приходим к противоречию.

Лемма 1 доказана. Из нее, в частности, вытекает

Лемма 2. Если  $X^0 \in V(\Omega)$ , то для любого  $j$  ( $j = 1, n$ ) существует  $i_j$ , такое, что  $x_{i_j j}^0 = b_j$ ,  $x_{ij}^0 = 0$ ,  $i \neq i_j$ .

Отсюда видно, что многогранник  $\Omega$  является целочисленным при любых целых  $b_1, b_2, \dots, b_n$ .

Заметим, что две вершины многогранника  $\Omega$  будут соседними, если они отличаются друг от друга двумя компонентами. Поэтому в силу леммы 2 всякая вершина имеет  $(m-1)$   $n$  соседних, а количество всех вершин многогранника  $\Omega$  равно  $m^n$ .

✓ Следуя [5],  $n$ -выборкой из некоторого множества  $M$  назовем упорядоченное  $n$ -множество элементов из  $M$ , не обязательно различных. Обозначим через  $\mathcal{W}$  множество всех  $n$ -выборок  $I = (i_1, \dots, i_n)$  из множества  $M = \{1, 2, \dots, m\}$ .

Леммами 1 и 2 устанавливается взаимно однозначное соответствие между множествами  $V(\Omega)$  и  $\mathcal{W}$ . Поэтому задача отыскания минимума функционала  $F(X)$  на многограннике  $\Omega$  эквивалентна задаче отыскания

$$\min_{I \in \mathcal{W}} F(X_I), \quad (4)$$

где  $X_I$  — вершина, соответствующая выборке  $I$ .

✓ Основная идея предлагаемого метода решения задачи (4) состоит в построении последовательности выборок в порядке неубывания некоторой аппроксимирующей функции  $P(I)$  до выполнения критерия оптимальности [1]. При построении такой последовательности использовалась общая схема, предложенная в работе [6].

✓ 3. Пусть  $\{c_{ij}\}_{m \times n}$  — некоторая матрица. Определим функцию  $P(I) = \sum_{j=1}^n c_{i_j j}$  для каждой выборки  $I = (i_1, \dots, i_n) \in \mathcal{W}$ .

Рассмотрим перестановки  $\alpha_j^1, \alpha_j^2, \dots, \alpha_j^m, j = \overline{1, n}$  чисел множества  $M$ , такие, что  $c_{\alpha_j^1 j} \leq c_{\alpha_j^2 j} \leq \dots \leq c_{\alpha_j^m j}$ . Очевидно, выборка  $I_1 = (\alpha_1^1, \alpha_2^1, \dots, \alpha_n^1)$  такова, что

$$P(I_1) = \min_{I \in W} P(I).$$

Введем обозначение

$$O(I_1) = \bigcup_{j=1}^n I^{(j)}, \quad (5)$$

где  $I^{(j)} = (\alpha_1^1, \alpha_2^1, \dots, \alpha_{j-1}^1, \alpha_j^2, \alpha_{j+1}^1, \dots, \alpha_n^1)$ . Пусть  $I = (i_1, \dots, i_{p-1}, \alpha_p^q, \alpha_{p+1}^1, \dots, \alpha_n^1) \in W$ , где  $1 < q \leq m, 1 \leq p \leq n$ . Определим  $O(I)$  следующим образом:

$$O(I) = \begin{cases} \bigcup_{j=0}^{n-p} I^{(j)}, & \text{если } q < m, p \leq n, \\ \bigcup_{j=1}^{n-p} I^{(j)}, & \text{если } q = m, p < n, \\ \emptyset, & \text{если } q = m, p = n, \end{cases} \quad (6)$$

где  $I^{(0)} = (i_1, \dots, i_{p-1}, \alpha_p^{q+1}, \alpha_{p+1}^1, \dots, \alpha_n^1)$ ,  $I^{(j)} = (i_1, \dots, i_{p-1}, \alpha_p^q, \alpha_{p+1}^1, \dots, \alpha_{p+j-1}^1, \alpha_{p+j}^2, \alpha_{p+j+1}^1, \dots, \alpha_n^1), j = \overline{1, n-p}$ .

Опишем алгоритм  $\Phi$  построения последовательности выборок.

На первом шаге алгоритма строим выборку  $I_1 = (\alpha_1^1, \alpha_2^1, \dots, \alpha_n^1)$ .

$k$ -ый шаг ( $k = 2, 3, \dots$ ). Строим множество выборок  $W_k$  по одному из следующих правил.

Правило 1.  $W_k = \bigcup_{j=1}^{k-1} O(I_j) \setminus \{I_1, I_2, \dots, I_{k-1}\}$ .

Правило 2.  $W_k = (W_{k-1} \setminus I_{k-1}) \cup O(I_{k-1}^*)$ , причем  $W_1 = I_1$ .

Далее находим такую выборку  $I_k$ , что

$$P(I_k) = \min_{I \in W_k} P(I) \quad (7)$$

и переходим к следующему шагу.

Работа алгоритма заканчивается, когда  $W_k = \emptyset$ .

Из правил построения множеств  $W_k$  и определения (6) следуют леммы.

Лемма 3.  $W_k \cap \{I_1, I_2, \dots, I_{k-1}\} = \emptyset, k = 2, 3, \dots$

Лемма 4. Если  $I = (i_1, \dots, i_{p-1}, \alpha_p^q, \alpha_{p+1}^1, \dots, \alpha_n^1) \in W_k$  ( $1 < q \leq m, 1 \leq p \leq n$ ), то  $I \in O(I')$ , где  $I' = (i_1, \dots, i_{p-1}, \alpha_p^{q-1}, \alpha_{p+1}^1, \dots, \alpha_n^1) \in \{I_1, I_2, \dots, I_{k-1}\}$  ( $k = 2, 3, \dots$ ).

Рассмотрим выборку  $I^* = (i_1^*, \dots, i_{p-1}^*, \alpha_p^q, \alpha_{p+1}^1, \dots, \alpha_n^1)$  ( $1 < q \leq m, 1 \leq p \leq n$ ). Положим

$$\bar{I}^* = \{I \mid i_j = i_j^*, j = \overline{1, p-1}, i_p \in \{\alpha_p^q, \alpha_p^{q+1}, \dots, \alpha_p^m\}, I \in W\}. \quad (8)$$

Кроме того, будем считать, что  $\bar{I}_1 = W$ .

В этих обозначениях справедлива

\*) Нетрудно убедиться, что множества  $W_k$ , построенные по правилам 1, 2, совпадают.

Лемма 5.  $\min P(I) = P(I^*)$ . ?

Пусть  $A = \{I^1, I^2, \dots, I^s\}$  — подмножество множества  $W$ . Через  $\bar{A}$  обозначим объединение  $\bigcup_{j=1}^s \bar{I}^j$  \*. Имеют место следующие очевидные свойства:

$$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B}, \quad (9)$$

$$(\overline{A \cap I}) \cup \bar{I} = \bar{A} \quad \text{для } I \in A. \quad (10)$$

Лемма 6.  $\min_{I \in A} P(I) = \min_{I \in \bar{A}} P(I)$ .

Доказательство. Пусть  $A = \bigcup_{j=1}^s I^j \subset W$ . Тогда в силу леммы 5 получаем

$$\min_{I \in A} P(I) = \min_{1 < j < s} P(I^j) = \min_{1 < j < s} \min_{I \in \bar{I}^j} P(I) = \min_{I \in \bigcup_{j=1}^s \bar{I}^j} P(I) = \min_{I \in \bar{A}} P(I).$$

Лемма 6 доказана.

Из (5), (6) и (8) вытекает

Лемма 7.  $\bar{O}(I) = \bar{I} \setminus I$  для любой выборки  $I$ .

Лемма 8. Если  $I', I'' \in W_h$ ,  $I' \neq I''$ , то  $\bar{I}' \cap \bar{I}'' = \emptyset$ .

Доказательство. Пусть

$$I' = (i'_1, \dots, i'_{p'-1}, \alpha_{p'}^{q'}, \alpha_{p'+1}^1, \dots, \alpha_n^1), \quad 1 < q' \leq m, \quad 1 \leq p' \leq n,$$

$$I'' = (i''_1, \dots, i''_{p''-1}, \alpha_{p''}^{q''}, \alpha_{p''+1}^1, \dots, \alpha_n^1), \quad 1 < q'' \leq m, \quad 1 \leq p'' \leq n.$$

Будем считать, что  $p' \leq p''$ .

Случай 1.  $p' = p'' = p$ ,  $i'_j = i''_j$ ,  $j = \bar{1}, p-1$ . Поскольку  $I' \neq I''$ , то  $q' \neq q''$ . Пусть  $q' < q''$ . Рассмотрим последовательность выборок

$$I^j = (i'_1, \dots, i'_{p-1}, \alpha_p^{q'-j}, \alpha_{p+1}^1, \dots, \alpha_n^1), \quad j = 0, 1, \dots, q'' - q'.$$

Так как  $I^0 = I'' \in W_h$ , то в силу леммы 4  $I^0 \in O(I^1)$ , где  $I^1 \in \{I_1, I_2, \dots, I_{k-1}\}$ . Неоднократно применяя лемму 4, получаем  $I^j \in O(I^{j+1})$ ,  $I^{j+1} \in \{I_1, I_2, \dots, I_{k-1}\}$ ,  $j = 0, 1, \dots, q'' - q' - 1$ . Но  $I^{q''-q'} = I' \in W_h$ . Поэтому  $W_h \cap \{I_1, I_2, \dots, I_{k-1}\} \neq \emptyset$ . Это противоречит лемме 3. Следовательно, случай 1 невозможен.

Случай 2.  $p' < p''$ ,  $i'_j = i''_j$ . Пусть  $i''_{p'} = \alpha_{p'}^{q_0}$  ( $q_0 \geq 1$ ).

Если  $q_0 \geq q'$ , то аналогично предыдущему можно построить последовательность выборок  $I^j$ ,  $j = 0, 1, \dots, s$ , обладающую свойствами

$$I^j = O(I^{j+1}), \quad I^{j+1} \in \{I_1, I_2, \dots, I_{k-1}\}, \quad j = 0, 1, \dots, s-1, \\ I^0 = I'', \quad I^s = I'.$$

Вновь получающееся противоречие с утверждением леммы 3 показывает невозможность неравенства  $q_0 \geq q'$ .

Если  $q_0 < q'$ , то из определения (8) следует, что  $\bar{I}' \cap \bar{I}'' = \emptyset$ .

Случай 3. Существует по крайней мере один индекс  $j_0 < p'$ , такой, что  $i'_{j_0} \neq i''_{j_0}$ . Тогда в силу определения (8)  $\bar{I}' \cap \bar{I}'' = \emptyset$ .

\*) Если  $A = \emptyset$ , то  $\bar{A} = \emptyset$ .

Лемма 8 доказана. Из нее следует

Лемма 9.  $(\overline{W}_{k-1} \setminus I_{k-1}) \cap \overline{I}_{k-1} = \emptyset$ ,  $k = 2, 3, \dots$

Теорема 1. Алгоритм  $\Phi$  строит все выборки множества  $W$ .

Доказательство. Допустим, что алгоритм оборвался на  $k$ -ом шаге ( $W_k = \emptyset$ ), но существует выборка  $I^0 \in \{I_1, I_2, \dots, I_{k-1}\}$ .

Используя свойства (9), (10) и леммы 7, 9, получаем

$$\begin{aligned} \overline{W}_k &= (\overline{W}_{k-1} \setminus I_{k-1}) \cup \overline{O(I_{k-1})} = (\overline{W}_{k-1} \setminus I_{k-1}) \cup (\overline{I}_{k-1} \setminus I_{k-1}) = \\ &= ((\overline{W}_{k-1} \setminus I_{k-1}) \cup \overline{I}_{k-1}) \setminus I_{k-1} = \overline{W}_{k-1} \setminus I_{k-1}. \end{aligned}$$

Учитывая, что  $\overline{W}_1 = \overline{I}_1 = W$ , приходим к соотношению

$$\overline{W}_k = W \setminus \{I_1, I_2, \dots, I_{k-1}\}. \quad (11)$$

Следовательно,  $I^0 \in \overline{W}_k$ , т. е.  $W_k \neq \emptyset$ . Полученное противоречие доказывает теорему.

Из соотношений (7), (11) и леммы 6 следует

$$P(I_k) = \min_{I \in W_k} P(I) = \min_{I \in \overline{W}_k} P(I) = \min_{I \in W \setminus \{I_1, I_2, \dots, I_{k-1}\}} P(I).$$

Поэтому на основании теоремы 1 справедлива

Теорема 2.  $P(I_k) = \min_{I \in W \setminus \{I_1, I_2, \dots, I_{k-1}\}} P(I)$ ,  $k = 2, 3, \dots, m^n$ .

4. Так как  $g_{ij}(0) = 0$ , то из леммы 2 вытекает

Лемма 10.  $\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n g_{ij}(x_{ij}) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \frac{g_{ij}(b_j)}{b_j} x_{ij}$  для любого  $X \in$

$V(\Omega)$ .

Теорема 3. Пусть  $P(I) = \sum_{j=1}^n c_{ij}$ , где

$$c_{ij} = \frac{f_i \left( \sum_{j=1}^n a_{ij} b_j \right)}{\sum_{j=1}^n a_{ij} b_j} a_{ij} b_j + g_{ij}(b_j), \quad i = \overline{1, m}, \quad j = \overline{1, n}.$$

Тогда  $P(I) \leq F(X_I)$  для  $I \in W$ .

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$P(X) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c'_{ij} x_{ij},$$

где  $c'_{ij} = \frac{c_{ij}}{b_j}$ ,  $i = \overline{1, m}$ ,  $j = \overline{1, n}$ . В силу вогнутости функций  $f_i(x)$

и леммы 10 имеем неравенство  $P(X) \leq F(X)$  для всех  $X \in V(\Omega)$ . Отсюда получаем

$$P(I) = \sum_{j=1}^n c_{ij} = \sum_{j=1}^n c'_{ij} b_j = P(X_I) \leq F(X_I).$$

Теорема 3 доказана.

Итак, найден эффективный алгоритм  $\varphi$  построения последовательности  $I_1, I_2, \dots$  выборок множества  $W$  в порядке неубывания функции  $P(I) \leq F(X_I)$ . Известно [1], что такое построение следует продолжать до выполнения критерия оптимальности

$$P(I_k) \geq \min_{1 < j < k} F(X_{I_j}) = F(X_{I_k^*}). \quad (12)$$

Выборка  $I_k^*$  будет оптимальной выборкой задачи (4), а план  $X_{I_k^*}$  — оптимальным планом задачи (1) — (3).

Таким образом,  $k$ -ый шаг ( $k = 1, 2, \dots$ ) алгоритма  $\varphi$  решения задачи (4) представляет собой  $k$ -ый шаг алгоритма  $\varphi$  с дополнительной проверкой выполнения критерия оптимальности (12).

Теорема 4.  $\min_{I \in W} F(X_I) = \min_{I \in W \setminus A_k} F(X_I)$ , где

$$A_k = \{I | I \in W_k, P(I) \geq \min_{1 < j < k-1} F(X_{I_j})\}, \quad k = 2, 3, \dots$$

Доказательство. В силу теоремы 3, леммы 6 и определения множества  $A_k$  имеем

$$\min_{I \in \bar{A}_k} F(X_I) \geq \min_{I \in \bar{A}_k} P(I) = \min_{I \in A_k} P(I) \geq \min_{1 < j < k-1} F(X_{I_j}) = F(X_{I_{k-1}^*}).$$

Так как  $I_{k-1}^* \in \{I_1, I_2, \dots, I_{k-1}\}$ , то из (11) получаем  $I_{k-1}^* \notin \bar{W}_k$ . Отсюда следует, что  $I_{k-1}^* \in W \setminus \bar{A}_k$ , т. е.  $\min_{I \in \bar{A}_k} F(X_I) \geq \min_{I \in W \setminus \bar{A}_k} F(X_I)$ . Тем самым теорема 4 доказана.

В качестве следствия из теоремы 4 получаем новый алгоритм  $\psi'$  решения задачи (4), в котором на каждом шаге отсекаем  $A_k$  от  $W_k$ . Такая модификация может быть полезна при машинной реализации алгоритма, так как она экономит объем памяти.

На первом шаге алгоритма  $\psi'$  строим выборку  $I_1 = (\alpha_1^1, \alpha_2^1, \dots, \alpha_n^1) = W'_1$ .  $k$ -ый шаг ( $k = 2, 3, \dots$ ). Строим множество  $W'_k$  по следующему правилу:

$$W'_k = \{I | I \in (W'_{k-1} \setminus I_{k-1}) \cup O(I_{k-1}), P(I) < \min_{1 < j < k-1} F(X_{I_j}) = F(X_{I_{k-1}^*})\}.$$

Если  $W'_k = \emptyset$ , то  $I_{k-1}^*$  — оптимальная выборка.

Если  $W'_k \neq \emptyset$ , то находим такую выборку  $I_k$ , что  $P(I_k) = \min_{I \in W'_k} P(I)$ , и

переходим к  $(k+1)$ -му шагу.

5. Покажем, что изложенный метод применим к задаче нахождения минимума функционала

$$\tilde{F}(X) = \sum_{i=1}^m \tilde{f}_i \left( \sum_{j=1}^n x_{ij} \right) \quad (13)$$

на множестве  $G$ , заданном ограничениями

$$\sum_{i=1}^m d_{ij} x_{ij} \geq b_j, \quad j = \overline{1, n}, \quad (14)$$

$$x_{ij} \geq 0, \quad i = \overline{1, m}, \quad j = \overline{1, n}, \quad (15)$$

где  $\tilde{f}_i(x)$  — монотонно возрастающие вогнутые функции, причем  $\tilde{f}_i(0) = 0$ ;  $d_{ij} \geq 0, b_j > 0$ .

Эта задача становится обобщенной задачей унификации деталей [4], если положить  $m = n$  и  $d_{ij} = 0$  для  $i < j$ ,  $i, j = \overline{1, n}$ . Если  $d_{ij} = 1$  или  $0$ ,  $i = \overline{1, m}$ ,  $j = \overline{1, n}$ , то задача (13) — (15) превращается в задачу о выборе оптимального парка машин [3].

Так как функции  $\tilde{f}_i(x)$  монотонно возрастают, то далее вместо задачи (13) — (15) рассматриваем эквивалентную ей задачу, в которой условия (14) заменены на равенства

$$\sum_{i=1}^m d_{ij} x_{ij} = b_j, \quad j = \overline{1, n}. \quad (16)$$

Многогранник, определяемый условиями (15), (16), обозначим через  $\tilde{G}$ . План  $X^0$  задачи (13), (15), (16) является вершиной многогранника  $\tilde{G}$  тогда и только тогда, когда в каждом  $j$ -ом столбце матрицы  $X^0$  содержится по одной положительной компоненте  $x_{i_j j}^0 = \frac{b_j}{d_{i_j j}}$  \*. Доказательство этого утверждения проводится аналогично доказательству лемм 1 и 2.

Рассмотрим множество  $\tilde{W}$  выборок  $I = (i_1, \dots, i_n)$ , определяемых следующим образом:

$$\tilde{W} = \{I \mid d_{i_j j} > 0, \quad j = \overline{1, n}, \quad I \in W\}.$$

Между множеством  $\tilde{W}$  и множеством вершин многогранника  $\tilde{G}$  устанавливается взаимнооднозначное соответствие. Поэтому задача (13), (15), (16) эквивалентна задаче отыскания

$$\min_{I \in \tilde{W}} F(X_I), \quad (17)$$

где  $X_I$  — вершина, соответствующая выборке  $I$ .

Определим функцию  $\tilde{P}(I)$  на множестве  $\tilde{W}$ :

$$\tilde{P}(I) = \sum_{j=1}^n \tilde{c}_{i_j j},$$

$$\text{где } \tilde{c}_{ij} = \frac{b_j f_i \left( \sum_{j \in N_i} \frac{b_j}{d_{ij}} \right)}{d_{ij} \sum_{j \in N_i} \frac{b_j}{d_{ij}}}, \quad N_i = \{j \mid d_{ij} > 0\}.$$

Аналогично доказательству теоремы 3 можно доказать, что  $\tilde{P}(I) \leq \tilde{F}(X_I)$  для каждой выборки  $I \in \tilde{W}$ .

Пусть  $m_j$  — число положительных элементов в  $j$ -ом столбце матрицы  $\{d_{ij}\}_{m \times n}$ . Рассмотрим перестановки  $\alpha_j^1, \alpha_j^2, \dots, \alpha_j^{m_j}$ , такие, что  $\tilde{c}_{\alpha_j^1 j} \leq \tilde{c}_{\alpha_j^2 j} \leq \dots \leq \tilde{c}_{\alpha_j^{m_j} j}$ ,  $j = \overline{1, n}$ . Обобщим определение (6) следующим обра-

\*) Здесь индекс  $i_j$  такой, что  $d_{i_j j} > 0$ .

зом. Если  $I = (i_1, \dots, i_{p-1}, \alpha_p^q, \alpha_{p+1}^1, \dots, \alpha_n^1) \in \tilde{W}$ , где  $1 < q \leq m_p$ ,  $1 \leq p \leq n$ , то положим

$$\tilde{O}(I) = \bigcup_{j=0}^{n-p} \tilde{I}^{(j)},$$

где

$$\tilde{I}^{(0)} = \begin{cases} I^{(0)}, & \text{если } m_p > q, \\ \emptyset, & \text{если } m_p = q, \end{cases}$$

$$\tilde{I}^{(j)} = \begin{cases} I^{(j)}, & \text{если } m_j \geq 2, \\ \emptyset, & \text{если } m_j < 2. \end{cases}$$

Здесь  $I^{(0)}, I^{(j)}$  те же, что и в (6). Кроме того,

$$\tilde{O}(I_1) = \bigcup_{j=1}^{n-p} \tilde{I}^{(j)},$$

где

$$\tilde{I}^{(j)} = \begin{cases} I^{(j)}, & \text{если } m_j \geq 2, \\ \emptyset, & \text{если } m_j < 2. \end{cases}$$

Здесь  $I_1$  и  $I^{(j)}$  те же, что и в (5).

Если в описании алгоритма  $\phi$  символ  $O(I)$  заменить на  $\tilde{O}(I)$ , то полученный алгоритм строит последовательность выборок множества  $\tilde{W}$  в порядке неубывания функции  $\tilde{P}(I)$ . Поэтому для решения задачи (17) можно использовать любой из алгоритмов  $\psi$  или  $\psi'$ , сформулированных в п. 4.

В заключение отметим, что алгоритмы  $\psi$  и  $\psi'$  на каждом шаге допускают уточнение аппроксимирующей функции в смысле работы [1]. Этому вопросу будет посвящена следующая статья авторов.

### Литература

1. Емеличев В. А. ДАН СССР, 192, № 5, 1970.
2. Емеличев В. А. Весті АН БССР, сер. фіз.-мат. навук, № 6, 1969.
3. Ваксман В. С. В сб. «Моделирование экономических процессов». МГУ, вып. 3, 1969.
4. Зуховицкий С. И., Поляк Р. А., Примак М. Е. Экономика и математические методы, 4, вып. 3, 1968.
5. Райзер Г. Комбинаторная математика. М., 1966.
6. Емеличев В. А., Комлик В. И. ДАН СССР, 188, № 2, 1969.

Белорусский государственный университет  
им. В. И. Ленина

Поступило в редакцию  
31.III 1970

УДК 519.41

Р. И. ТЫШКЕВИЧ

### О ТРАНЗИТИВНЫХ ГРУППАХ С ТРАНЗИТИВНЫМИ СТАБИЛИЗАТОРАМИ

В своем докладе [4] Виландт, намечая пути дальнейшего развития теории групп подстановок, отметил необходимость перенесения на бесконечный случай известных результатов о конечных группах подстановок и построения методов, общих для конечного и бесконечного случаев. Настоящая заметка относится к этому направлению.

Если  $G$  — группа подстановок, действующая на множестве  $X$ , а  $Y$  — подмножество в  $X$ , то  $G_Y$  обозначается точечный стабилизатор — совокупность всех подстановок из  $G$ , оставляющих каждую точку из  $Y$  неподвижной;  $N(G_Y)$  — нормализатор группы  $G_Y$  в  $G$ ;  $|Y|$  — мощность множества  $Y$ ;  $\langle H, F \rangle$  — подгруппа, порожденная  $H$  и  $F$ .

*Лемма 1. Пусть  $G$  транзитивна,  $Y$  и  $Z$  — истинные подмножества в  $X$ ,  $Y$  конечно. Тогда в  $G$  есть подстановка  $g$ , удовлетворяющая двум следующим условиям:*

$$(X \setminus g(Y)) \cap (X \setminus Z) \neq \emptyset, \quad (1)$$

$$g(Y) \cap Z \neq \emptyset. \quad (2)$$

*Доказательство.* Если  $a \in X \setminus Y$ ,  $b \in X \setminus Z$  и  $g(a) = b$ , то  $b \in (X \setminus g(Y)) \cap (X \setminus Z)$ , т. е.  $g$  удовлетворяет условию (1). Если при этом условие (2) не выполняется, то существует разбиение  $X = g(Y) \cup Z \cup U$ . Тогда для любой подстановки  $h$

$$h(Y) \cup Z \neq X, \quad (3)$$

иначе было бы  $h(Y) \supseteq g(Y) \cup U$ , что не так при конечном  $Y$ . Из (3) следует  $(X \setminus h(Y)) \cap (X \setminus Z) \neq \emptyset$ . Так как  $G$  транзитивна, то существует такая подстановка  $h \in G$ , что  $h(Y) \cap Y \neq \emptyset$ . Если взять  $h$  в качестве  $g$ , то будут выполняться оба условия (1) и (2).

*Теорема 1. Пусть  $G$  транзитивна,  $Y$  и  $Z$  — два истинных подмножества в  $X$ ,  $|Y| \leq |Z|$ ,  $Y$  конечно,  $G_Y$  и  $G_Z$  транзитивны соответственно на  $X \setminus Y$  и  $X \setminus Z$ . Тогда в  $G$  есть такая подстановка  $h$ , что  $h(Y) \subseteq Z$ .*

*Доказательство.* Если  $|Y| = 1$ , то теорема очевидна. Будем считать  $|Y| > 1$  и воспользуемся индукцией по  $|Y|$ . Поскольку  $G_{g(Y)}$  — транзитивная на  $X \setminus g(Y)$  группа, то в условии теоремы можно заменить  $Y$  на  $g(Y)$ . Следовательно, учитывая лемму 1, достаточно рассмотреть лишь тот случай, когда одновременно выполняются два следующих условия:

$$(X \setminus Y) \cap (X \setminus Z) \neq \emptyset, \quad (4)$$

$$Y \cap Z \neq \emptyset. \quad (5)$$

Будем считать при этом  $Y \cap Z$  не совпадающим ни с  $Y$ , ни с  $Z$ , иначе теорема тривиальна. Положим  $H = \langle G_Y, G_Z \rangle$ ,  $U = (X \setminus Y) \cup (X \setminus Z)$ ,  $V =$

$= Y \setminus (Y \cap Z)$ ,  $W = Z \setminus (Y \cap Z)$ . Так как  $U = X \setminus (Y \cap Z)$ , то  $U$  инвариантно относительно  $H$ . В силу (4)  $H$  транзитивна на  $U$ .  $H_V \supset G_Y$  и, значит,  $H_V$  транзитивна на  $U \setminus V = X \setminus Y$ . Аналогично  $H_W$  транзитивна на  $U \setminus W$ .  $V$  и  $W$  — истинные подмножества в  $U$  и  $|V| \leq |W|$ . В силу (5)  $|V| < |Y|$ , следовательно, по индуктивному предположению, в  $H$  есть такая подстановка  $h$ , что  $h(V) \subseteq W$ . Все точки множества  $Y \cap Z$  неподвижны при  $H$ , значит,  $h(Y) \subseteq Z$ . Теорема доказана.

Так как

$$G_{h(Y)} = hG_Y h^{-1},$$

то, очевидно, верно

Следствие. В условиях предыдущей теоремы  $G_Z$  сопряжена в  $G$  с некоторой подгруппой группы  $G_Y$ .

Для конечного  $X$  последнее утверждение доказано Виландтом ([6], теорема 3.8) тем же методом.

**Теорема 2.** Пусть  $G$  транзитивна,  $Y$  и  $Z$  — истинные подмножества в  $X$ ,  $|X \setminus Y| > 1$ ,  $|X \setminus Z| > 1$ ,  $G_Y$  и  $G_Z$  примитивны соответственно на  $X \setminus Y$  и  $X \setminus Z$ ,  $\langle G_Y, G_Z \rangle = G$ . Тогда  $G$  примитивна.

Доказательство. Так как  $G$  транзитивна, то выполняются условия (4) и

$$Y \cap Z = \emptyset. \quad (6)$$

Пусть теперь  $U$  — блок группы  $G$ , содержащий более одной точки,  $V = U \cap (X \setminus Y)$ . Тогда  $V$  — блок группы  $G_Y$  и, значит, либо  $V = \emptyset$ , либо  $V = X \setminus Y$ , либо  $V = \{v\}$ ,  $v \in X \setminus Y$ . В последнем случае  $U = \{v\} \cup W$ ,  $W \subseteq Y$ ,  $W \neq \emptyset$ ;  $G_Y(W) = W$ , значит,  $G_Y(v) = v$ , что противоречит транзитивности группы  $G_Y$  на  $X \setminus Y$ . Поэтому последний случай невозможен и всегда верно одно из двух включений:

$$U \subseteq Y \quad (7)$$

или

$$U \supseteq X \setminus Y. \quad (8)$$

Аналогично всегда верно одно из двух включений:

$$U \subseteq Z \quad (9)$$

или

$$U \supseteq X \setminus Z. \quad (10)$$

Одновременное выполнение включений (7) и (9) исключается условием (6), а (7) и (10) (или (8) и (9)) — условием (4). Следовательно, всегда верны оба включения (8) и (10), т. е.  $U = X$ . Таким образом, в  $X$  нет нетривиальных блоков группы  $G$  и, значит,  $G$  примитивна ([6], § 6).

Для конечного  $X$  теорема 2 доказана Виландтом ([6], предложение 8.5).

**Лемма 2.** Пусть  $G$  примитивна,  $Y$  — конечное подмножество в  $X$ ,  $|Y| > 1$ ,  $|X \setminus Y| > 1$ . Тогда в  $G$  есть подстановка  $g$ , удовлетворяющая каждому из следующих трех условий:

$$(X \setminus g(Y)) \cap (X \setminus Y) \neq \emptyset, \quad (11)$$

$$g(Y) \cap Y \neq \emptyset, \quad (12)$$

$$g(Y) \neq Y. \quad (13)$$

Доказательство. В силу примитивности группы  $G$  в ней есть подстановка  $g$ , удовлетворяющая условиям (11) и (13). Если при этом (12) не выполняется, то, как показано в доказательстве леммы 1, для любой подстановки  $h$   $(X \setminus h(Y)) \cap (X \setminus Y) \neq \emptyset$ . Так как  $G$  примитивна, то в ней есть

такая подстановка  $h$ , что  $h(Y) \neq Y$  и  $h(Y) \cap Y \neq \emptyset$ . Если взять  $h$  в качестве  $g$ , то будут одновременно выполняться условия (11) — (13).

**Теорема 3.** Пусть  $G$  примитивна,  $Y$  — истинное подмножество в  $X$ ,  $|X \setminus Y| > 1$ ,  $Y$  конечно. Тогда: (i) если  $G_Y$  транзитивна на  $X \setminus Y$ , то  $G$  дважды транзитивна; (ii) если  $G_Y$  примитивна на  $X \setminus Y$  и  $|Y| = k$ , то  $G$   $(k+1)$ -кратно примитивна.

**Доказательство.** Если  $|Y| = 1$ , то теорема очевидна. Будем считать  $|Y| = k > 1$  и воспользуемся индукцией по  $k$ . Пусть  $g$  — подстановка из  $G$ , удовлетворяющая условиям (11) — (13). Положим  $U = (X \setminus Y) \cup \cup (X \setminus g(Y))$ ,  $Z = Y \cap g(Y)$ ,  $H = \langle G_Y, G_{g(Y)} \rangle$ . Согласно (11)  $H$  транзитивна на  $U = X \setminus Z$ .  $G_Z \cong H$ , поэтому  $G_Z$  также транзитивна на  $U$  и, так как  $|Z| < k$ , то  $G$  дважды транзитивна. (i) доказано.

Пусть теперь  $G_Y$  примитивна на  $X \setminus Y$ . Ясно, что  $G_{g(Y)}$  примитивна на  $X \setminus g(Y)$  и, согласно теореме 2,  $H$  примитивна на  $U$ . Поэтому  $G_Z$  примитивна на  $U$  и, так как  $|Z| = l < k$ , то  $G$   $(l+1)$ -кратно примитивна. Положим  $V = Y \setminus Z$ .  $H_V \cong G_Y$ , значит,  $H_V$  примитивна на  $U \setminus V = X \setminus Y$ . Так как  $|V| = k - l < k$ , то  $H$   $(k-l+1)$ -кратно примитивна на  $U$ .  $G_Z \cong H$  также  $(k-l+1)$ -кратно примитивна на  $U$ , поэтому  $G$   $(k+1)$ -кратно примитивна.

Для конечного  $X$  теорема 3 доказана Жорданом ([1]; см. еще [5], теорема 5.6.2; [6], теоремы 13.1, 13.2). Теорема 3 доказана еще в [7].

**Теорема 4.** Если  $G$   $k$ -кратно транзитивна,  $k > 1$ ,  $Y$  — истинное подмножество в  $X$ ,  $|Y| \geq k-1$ ,  $Y$  конечно,  $G_Y$  транзитивна на  $X \setminus Y$ , то  $N(G_Y)$   $(k-1)$ -кратно транзитивна на  $Y$ .

**Доказательство,** приведенное Виландтом в [6] (теорема 9.5) для конечного  $X$ , проходит и в этом случае, так как оно опирается лишь на теорему 1 и одну теорему Витта [2], которые верны в наших условиях.

**Замечание.** Как показывают примеры, теоремы 1 и 3 не сохраняются при бесконечном  $Y$ . Пусть  $X$  — бесконечное множество,  $X = Y \cup Q = Z \cup R$  — два разбиения, причем  $Q$  и  $R$  конечны,  $|Q| < |R|$ ,  $G = S(X)$  — симметрическая группа. Тогда  $G_Y = S(Q)$  и  $G_Z = S(R)$  транзитивны соответственно на  $X \setminus Y$  и  $X \setminus Z$  и  $|Y| = |Z|$ . Однако для  $g \in G$   $g(Y)$  не содержится в  $Z$ , иначе было бы  $g(Q) \cong R$ . Серию контрпримеров к теореме 3 доставляют группы Г. Хигмена [3].

### Литература

1. Jordan C. J. Math. Pures Appl., 16, 1871.
2. Witt E. Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg, 12, 1937.
3. Higman G. Publ. Math., 3, 1954.
4. Wielandt H. Univ. Torino Rend. Sem. Math., 21, 1961/62.
5. Холл М. Теория групп. М., 1962.
6. Wielandt H. Finite Permutation Groups, 1964.
7. Machtinger L. Proc. Amer. Math. Soc., 16, № 1, 1965.

Белорусский государственный университет  
им. В. И. Ленина

Поступило в редакцию  
11.11 1970

В. А. ЛИСКОВЕЦ

### ПЕРЕЧИСЛЕНИЕ ЭЙЛЕРОВЫХ ГРАФОВ

Граф называется эйлеровым, если он обладает циклом, проходящим через каждую вершину и содержащим каждое ребро графа ровно по одному разу. Всюду в дальнейшем под графом понимается конечный неориентированный граф без петель и кратных ребер. Как известно (см. [3], стр. 56), граф является эйлеровым тогда и только тогда, когда он связан и степени всех его вершин четны.

В настоящей работе выводится формула для числа попарно неизоморфных эйлеровых графов с заданным числом вершин и ребер. Это достигается обобщением метода, примененного Ридом [8] для подсчета эйлеровых графов с отмеченными (занумерованными) вершинами, в сочетании с техникой теории перечисления Пойа. Полученная формула содержит выражение, аналогичное циклическому индексу обычной группы ребер, но содержащее переменные двух типов. Эта формула несравненно более проста, нежели тривиальное выражение через количества графов с заданными степенями вершин. Подробнее о задаче подсчета эйлеровых графов см. [6], где она фигурирует в списке основных нерешенных задач перечисления графов (см. также [5]).

Подсчет эйлеровых графов естественно распадается на два этапа. Сначала находится число всех графов с четными степенями вершин, затем искомое число связанных графов выражается через это число стандартным образом. Поэтому вся проблема сводится к решению первой задачи. Чтобы не вводить новых определений, эйлеровым графом будем называть впредь, следуя Риду, всякий граф с четными степенями вершин. Число неизоморфных эйлеровых графов с  $n$  вершинами и  $N$  ребрами обозначим  $E_0(n, N)$ , а число их с  $n$  вершинами —  $E_0(n)$ . Нахождение  $E_0(n)$  оказывается значительно более простым делом, основанным на иных соображениях, и проводится отдельно\*).

§ 1. Мы пользуемся терминологией и обозначениями статьи [2]. В качестве исходного множества вершин выступает множество  $V = V_n = \{v_1, \dots, v_n\}$ .

По лемме Бернсайда (см. [1, 2, 6]), справедливо выражение

$$E_0(n, N) = \frac{1}{n!} \sum_{g \in S_n} e_0(g, N), \quad (1)$$

где  $e_0(g, N)$  — число всех инвариантных относительно заданной подстановки  $g$  эйлеровых графов на  $V_n$  с  $N$  ребрами,  $g$  пробегает множество всех подстановок на  $V_n$ . Так как для сопряженных подстановок  $g_1$  и  $g_2$   $e_0(g_1, N) =$

\*) Примечание при корректуре. Недавно автору стало известно, что аналогичные результаты для  $E_0(n)$  ранее получил Р. У. Робинсон.

$= e_0(g_2, N)$ , то, обозначив их общее значение через  $e_0(\tau, N)$ , где  $\tau$  — цикольный тип  $g_1$  и  $g_2$ , это выражение можно записать в виде (см. [2])

$$E_0(n, N) = \sum_{|\tau|=n} \frac{1}{\tau! \pi(\tau)} e_0(\tau, N), \quad (2)$$

где  $\tau = (1^{i_1} 2^{i_2} \dots n^{i_n})$  пробегает всевозможные разбиения  $n$ , т. е.  $|\tau| \equiv \sum_{l=1}^n l j_l = n$ ,  $j_l \geq 0$ ;  $\tau! = \prod_l (j_l!)$ ,  $\pi(\tau) = \prod_l l^{j_l}$ .

Введя производящие многочлены  $E_0(n, x) = \sum_{N=0}^{n(n-1)/2} E_0(n, N) x^N$  и  $e_0(\tau, x) = \sum_N e_0(\tau, N) x^N$ , получим из (2) выражение

$$E_0(n, x) = \sum_{\tau} \frac{1}{\tau! \pi(\tau)} e_0(\tau, x). \quad (3)$$

Для общего числа  $P_0(n, N)$  неориентированных графов справедливы аналогичные формулы

$$P_0(n, N) = \frac{1}{n!} \sum_{g \in S_n} p_0(g, N),$$

$$P_0(n, N) = \sum_{|\tau|=n} \frac{1}{\tau! \pi(\tau)} p_0(\tau, N),$$

$$P_0(n, x) = \sum_{\tau} \frac{1}{\tau! \pi(\tau)} p_0(\tau, x)$$

с соответствующим смыслом входящих величин.

Наконец, для числа  $P_0(r, b, N)$  двудольных графов ([3], стр. 139) с  $r$  «красными» и  $b$  «синими» вершинами аналогичные выражения таковы:

$$P_0(r, b, N) = \sum_{\substack{|\sigma|=r \\ |\delta|=b}} \frac{1}{\sigma! \delta! \pi(\sigma + \delta)} p_0(\sigma, \delta, N),$$

$$P_0(r, b, x) = \sum_{\sigma, \delta} \frac{1}{\sigma! \delta! \pi(\sigma + \delta)} p_0(\sigma, \delta, x),$$

где  $\sigma = (1^{i_1} \dots r^{i_r})$ ,  $\delta = (1^{k_1} \dots b^{k_b})$ ,  $\sigma + \delta = (1^{i_1+k_1} 2^{i_2+k_2} \dots)$ .

Очевидна

**Лемма 1.** *Возможные наборы ребер, соединяющих вершины пары циклов подстановки  $g$  между собой, в графах, инвариантных относительно  $g$ , не зависят друг от друга для разных пар циклов.*

Пусть  $c_1$  и  $c_2$  — циклы  $g$  длин  $l$  и  $m$  соответственно,  $\Gamma$  — произвольный граф, инвариантный относительно  $g$  ( $g(\Gamma) = \Gamma$ ),  $N_{c_1, c_2}(\Gamma)$  — число ребер  $\Gamma$ , соединяющих вершины  $c_1$  и  $c_2$  между собой,  $K(c_1, c_2) = \{N_{c_1, c_2}(\Gamma)\}_{\Gamma}$ . Существенную роль в дальнейшем будет играть следующее простое и в сущности хорошо известное утверждение (ср. [4], стр. 171), которое мы приводим без доказательства.

Лемма 2. 1) Пусть  $c_1 \neq c_2$ .  $K(c_1, c_2)$  состоит из всех чисел вида  $k[l, m]$ , где  $k = 0, 1, \dots, (l, m)$ . Существует  $C_{(l,m)}^k$  возможных способов соединения вершин  $c_1$  и  $c_2$   $k[l, m]$  ребрами допустимо относительно  $g$ , причем степень каждой вершины цикла  $c_1$  (число инцидентных ей ребер) в таком соединении равна  $\frac{k[l, m]}{l}$ .

2) Пусть  $c_1 = c_2$ .  $K(c_1, c_1)$  состоит из чисел  $kl$ , а если  $l$  четно, то еще и из чисел  $kl + \frac{l}{2}$ , где в обоих случаях  $k = 0, 1, \dots, \left[ \frac{l-1}{2} \right]$ . Существует  $C_{\left[ \frac{l-1}{2} \right]}^k$  способов соединения  $kl$  или  $kl + \frac{l}{2}$  ребрами, причем в первом случае степени вершин равны  $2k$ , а во втором  $2k + 1$ .

Здесь  $[l, m]$  — наименьшее общее кратное чисел  $l$  и  $m$ ,  $(l, m)$  — их наибольший общий делитель,  $C_p^k$  — число сочетаний из  $p$  по  $k$ ,  $[q]$  — целая часть числа  $q$ .

Отмеченная особенность поведения циклов четной длины заключается в возможности соединения противоположащих вершин (т. е. находящихся на расстоянии  $\frac{l}{2}$  друг от друга) всего лишь  $\frac{l}{2}$  ребрами допустимо относительно  $g$  и играет важную роль в перечислении графов.

Обе леммы легко позволяют получить выражение  $P_0(n, x)$  без непосредственного обращения к теореме Пойа.

Следствие (ср. [6, 7]).

$$p_0(\tau, x) = \prod_{1 < l < m < n} (1 + x^{[l,m]})^{(l,m)j_l j_m} \prod_{l=1}^n (1 + x^l)^{l \frac{j_l(j_l-1)}{2} + \left[ \frac{l-1}{2} \right] j_l} \times \\ \times \prod_{l, 2|l} \left( 1 + x^{\frac{l}{2}} \right)^{j_l}, \quad (4)$$

$$p_0(\sigma, \delta, x) = \prod_{l,m} (1 + x^{[l,m]})^{(l,m)j_l j_m}.$$

Справедливость этих формул проверяется непосредственным перемножением на основании предыдущего (ср. ниже).

Положим по определению

$$p_0(\emptyset, x) = p_0(\emptyset, \delta, x) = p_0(\sigma, \emptyset, x) = 1,$$

где  $\emptyset$  — пустое разбиение,  $|\emptyset| = 0$ .

§ 2. Для нахождения  $e_0(\tau, N)$  используется следующая конструкция, обобщающая построение Рива [8] для случая  $\tau = (1^n)$  графов с отмеченными вершинами. Пусть  $g$  — фиксированная подстановка на  $V$  типа  $\tau$ . Припишем каждой вершине  $V$  знак  $+1$  или  $-1$  произвольным образом инвариантно относительно  $g$ . Это означает, что вершинам каждого цикла приписан один и тот же знак. Пусть  $\Gamma$  — граф, инвариантный относительно  $g$ . Обозначим через  $d_{c_2}(c_1)$  степени вершин цикла  $c_1$  подстановки  $g$  в соединении их в  $\Gamma$  с вершинами цикла  $c_2$ . Припишем тогда множеству ребер  $\Gamma$ , соединяющих  $c_1$  и  $c_2$ , знак

$$\varepsilon_{\Gamma}(c_1, c_2) = \varepsilon(c_1)^{d_{c_2}(c_1)} \varepsilon(c_2)^{d_{c_1}(c_2)}, \quad c_1 \neq c_2,$$

$$\varepsilon_{\Gamma}(c_1, c_1) = \varepsilon(c_1)^{d_{c_1}(c_1)},$$

где  $\varepsilon(c_i)$  — знак вершин  $c_i$ . Всему  $\Gamma$  припишем знак

$$\varepsilon(\Gamma) = \prod_{\{c_1, c_2\}} \varepsilon_{\Gamma}(c_1, c_2),$$

где произведение берется по всевозможным неупорядоченным парам циклов  $g$  (не обязательно различных).

Лемма 3.  $\varepsilon(\Gamma) = \prod_{c_i} \varepsilon(c_i)^{d(c_i)}$ , где  $d(c_i)$  — общая степень каждой вершины цикла  $c_i$  в  $\Gamma$ .

В самом деле,  $d(c_i) = \sum_{c_j} d_{c_j}(c_i)$ .

Обозначим далее

$$\varphi(\Gamma) = \sum_{\{\varepsilon(c_i) = \pm 1\}} \varepsilon(\Gamma),$$

где сумма берется по всевозможным допустимым относительно  $g$  расстановкам знаков на  $V$ .

Значение этой конструкции для подсчета эйлеровых графов определяется следующей теоремой.

Теорема 1.

$$\varphi(\Gamma) = \begin{cases} 2^{k(g)}, & \Gamma \text{ эйлеров,} \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

где  $k(g)$  — число циклов  $g$ .

Доказательство. Если граф  $\Gamma$  эйлеров, то по лемме 3 при всякой расстановке знаков на  $V$   $\varepsilon(\Gamma) = +1$ . Остается заметить, что существует  $2^{k(g)}$  вариантов расстановки знаков.

Пусть теперь  $\Gamma$  не эйлеров и  $c$  — такой цикл  $g$ , вершины которого имеют в  $\Gamma$  нечетную степень.  $\varphi(\Gamma) = \sum_{\substack{\pm 1 \\ \varepsilon(c) = +1}} \varepsilon(\Gamma) + \sum_{\substack{\pm 1 \\ \varepsilon(c) = -1}} \varepsilon(\Gamma)$ . По лемме 3 ясно,

что вторая сумма состоит из тех же слагаемых, что и первая, только с обратными знаками. Поэтому обе суммы взаимно уничтожаются. Теорема доказана.

Пусть  $H(g, N)$  — множество всех графов на  $V$  с  $N$  ребрами, инвариантных относительно  $g$ .

Следствие 1.  $e_0(g, N) = 2^{-k(g)} \sum_{\{\varepsilon(c_i) = \pm 1\}} \sum_{\Gamma \in H(g, N)} \varepsilon(\Gamma)$ .

Выражение здесь справа представим иначе. Заметим, что всякий вариант приписывания знаков однозначно определяется множеством вершин  $W$ ,  $\emptyset \subseteq W \subseteq V$ , которым приписан знак  $+1$ . Здесь  $g(W) = W$ . Обозначим  $f = g|_W$  — ограничение  $g$  на  $W$ ,  $h = g|_{V-W}$ . Тогда  $f(\Gamma_W) = \Gamma_W$ ,  $h(\Gamma_{V-W}) = \Gamma_{V-W}$ ,  $\Gamma = \Gamma_W \cup \Gamma' \cup \Gamma_{V-W}$ ,  $\varepsilon(\Gamma) = \varepsilon(\Gamma') \varepsilon(\Gamma_{V-W})$  и

$$\sum_{\Gamma \in H(g, N)} \varepsilon(\Gamma) = \sum_{K+L+M=N} p_0^+(f, K) p_0^{+-}(f, h, L) p_0^-(h, M).$$

Здесь  $p_0^{+-}(f, h, L)$  означает сумму знаков всех двудольных графов  $\Gamma'$  с  $L$  ребрами, инвариантных относительно  $g$ , «красные» вершины которых образуют множество  $W$  и имеют знак  $+1$ , а «синие» образуют  $V-W$  и имеют знак  $-1$ .  $p_0^-(h, M)$  означает сумму знаков всех графов на  $V-W$  с  $M$  реб-

рами, инвариантных относительно  $h$ , всем вершинам которых приписан знак  $-1$ . Отсюда получаем выражение

$$e_0(g, N) = 2^{-k(g)} \sum_{W, g(W)=W} \sum_{K+L+M=N} \rho_0(f, K) \rho_0^{+-}(f, h, L) \rho_0^-(h, M).$$

Легко убедиться, что в соответствующих производящих многочленах это равносильно выражению

$$e_0(g, x) = 2^{-k(g)} \sum_W \rho_0(f, x) \rho_0^{+-}(f, h, x) \rho_0^-(h, x).$$

Учитывая (1), получаем

$$E_0(n, x) = \frac{1}{n!} \sum_{W \subseteq V} \sum_{\substack{f \in S_W \\ h \in S_{V-W}}} 2^{-(k(f)+k(h))} \rho_0(f, x) \rho_0^{+-}(f, h, x) \rho_0^-(h, x),$$

где  $S_W$  — симметрическая группа на  $W$ , а в случае, когда  $f$  или  $h$  — подстановки пустого множества, содержащие их сомножители считаются равными 1.

Поскольку значения отдельных слагаемых в этой формуле совпадают для равномощных  $W$  и однотипных пар подстановок, получаем следующее выражение.

Следствие 2\*).

$$E_0(n, x) = \sum_{\substack{\sigma, \delta \\ |\sigma+\delta|=n}} \frac{2^{-k(\sigma+\delta)}}{\sigma! \delta! \pi(\sigma+\delta)} \rho_0(\sigma, x) \rho_0^{+-}(\sigma, \delta, x) \rho_0^-(\delta, x) \quad (5)$$

с соответствующим смыслом сомножителей, где  $k(\tau) = j_1 + j_2 + \dots$  — число слагаемых в разбиении  $\tau$ .

Перейдем к выводу явных формул для  $\rho_0^{+-}(\sigma, \delta, x)$  и  $\rho_0^-(\delta, x)$ .

Пусть  $c_1$  — цикл  $f$  длины  $l$ ,  $c_2$  — цикл  $h$  длины  $m$ , где  $f$  и  $h$  — выбранные подстановки на  $W$  и  $V-W$  типа  $\sigma$  и  $\delta$  соответственно. По лемме 2 существует  $C_{(l,m)}^k$  способов допустимого соединения вершин этих циклов между собой  $k[l, m]$  ребрами, причем каждому такому соединению отвечает

знак  $(-1)^{\frac{k[l,m]}{m}}$ . Поэтому производящий многочлен числа таких соединений по числу ребер с учетом их знака имеет вид  $r(c_1, c_2, x) = \sum_{k=0}^{(l,m)} (-1)^{\frac{k[l,m]}{m}} C_{(l,m)}^k x^{k[l,m]} = \left( 1 + (-1)^{\frac{[l,m]}{m}} x^{[l,m]} \right)^{(l,m)}$ . Возможны две ситуа-

ции. 1)  $\frac{[l,m]}{m}$  четно. Это имеет место в том и только в том случае, когда  $\alpha(l) > \alpha(m)$ , где  $\alpha(l) = 2^a$  — наибольшая степень 2, делящая  $l$ . При этом  $r(c_1, c_2, x) = (1 + x^{[l,m]})^{(l,m)}$ . 2)  $\frac{[l,m]}{m}$  нечетно. Это имеет место при  $\alpha(l) \leq \alpha(m)$  и дает  $r(c_1, c_2, x) = (1 - x^{[l,m]})^{(l,m)}$ .

\*) Отметим также, что

$$e_0(\tau, x) = 2^{-k(\tau)} \sum_{\sigma+\delta=\tau} C_{\tau}^{\sigma} \rho_0(\sigma, x) \rho_0^{+-}(\sigma, \delta, x) \rho_0^-(\delta, x).$$

По лемме 1 и определению  $\varepsilon(\Gamma)$   $p_0^{+-}(f, h, x) = \prod_{\substack{c_1 \in f \\ c_2 \in h}} r(c_1, c_2, x)$ . Поэтому на языке разбиений получаем

$$p_0^{+-}(\sigma, \delta, x) = \prod_{\substack{l, m \\ \alpha(l) > \alpha(m)}} (1 + x^{[l, m]})^{(l, m) i_l k_m} \prod_{\substack{l, m \\ \alpha(l) < \alpha(m)}} (1 - x^{[l, m]})^{(l, m) i_l k_m}, \quad (6)$$

где  $\sigma = (1^{i_1} 2^{i_2} \dots)$ ,  $\delta = (1^{k_1} 2^{k_2} \dots)$ ,  $\alpha(l) = 2^a$ ,  $2^a | l$ ,  $2^{a+1}$  не делит  $l$ .

Теперь рассмотрим  $p_0^-(h, x)$ . Здесь соединение вершин циклов  $c_1$  и  $c_2$  при  $c_1 \neq c_2$   $k[l, m]$  ребрами вносит знак  $(-1)^{\frac{k[l, m]}{l} + \frac{k[l, m]}{m}}$ . Очевидно,  $\frac{[l, m]}{l} + \frac{[l, m]}{m}$  четно тогда и только тогда, когда  $\alpha(l) = \alpha(m)$ . При этом аналогично соответствующий производящий многочлен  $r(c_1, c_2, x) = (1 + x^{[l, m]})^{(l, m)}$ ; в противном случае  $r(c_1, c_2, x) = (1 - x^{[l, m]})^{(l, m)}$ . Перейдем к рассмотрению ребер, соединяющих вершины цикла  $c = c_1$  между собой. 1) Если среди этих ребер нет ребер, соединяющих противоположные вершины (существующие лишь при четном  $l$ ), то по лемме 2 эти ребра вносят знак  $+1$  и производящий многочлен их числа  $r(c, x) = (1 + x^{\lfloor \frac{l-1}{2} \rfloor})$ . 2) Если  $l$  четно, вклад ребер, соединяющих противоположные вершины, рассмотрим отдельно и соответствующий им многочлен обозначим  $s(c, x)$ . Если эти  $\frac{l}{2}$  ребер есть, то они вносят знак  $-1$ , так что  $s(c, x) = 1 - x^{\frac{l}{2}}$ , а весь производящий многочлен числа соединений вершин  $c$  с учетом знака здесь таков:  $r(c, x)s(c, x)$ . По лемме 1 на языке разбиений это дает выражение

$$p_0^-(\delta, x) = \prod_{\substack{l < m \\ \alpha(l) = \alpha(m)}} (1 + x^{[l, m]})^{(l, m) k_l k_m} \prod_{\substack{l < m \\ \alpha(l) \neq \alpha(m)}} (1 - x^{[l, m]})^{(l, m) k_l k_m} \times \\ \times \prod_l (1 + x^{\lfloor \frac{k_l(k_l-1)}{2} \rfloor + \lfloor \frac{l-1}{2} \rfloor k_l}) \prod_{l, 2|l} (1 - x^{\frac{l}{2}})^{k_l}. \quad (7)$$

Можно было бы ограничиться этими формулами, которые вместе с (4) и (5) дают решение задачи, однако окончательный результат мы представим в более употребительной форме. Заметим, что выражения  $p_0^{+-}(\sigma, \delta, x)$  и  $p_0^-(\delta, x)$  отличаются лишь знаком минус в некоторых сомножителях от соответствующих выражений  $p_0(\sigma, \delta, x)$  и  $p_0(\delta, x)$ . Поэтому их можно представить как члены, получающиеся после определенной подстановки в специально построенное выражение, аналогичное циклическому индексу. В отличие от обычного циклического индекса группы, индуцированной  $S_n$  на множестве всех пар вершин (для получения  $P_0(n, x)$ ) [4, 6, 7], здесь переменные приходится специализировать не только по длине возникающего цикла ребер, соединяющих вершины двух циклов, но и по характеру взаимоотношения степеней 2, делящих длины последних. Это приводит к переменным двух типов  $y_{[l, m]}$  и  $z_{[l, m]}$ . Как и обычно, достоинством такого построения является возможность приведения всех членов с последующей однократной подстановкой переменных.

Подходящей конструкцией в данном случае является следующая. Рассмотрим выражение

$$Y(n, y, z) = \sum_{\substack{\sigma, \delta \\ |\sigma + \delta| = n}} \frac{2^{-k(\sigma + \delta)}}{\sigma! \delta! \pi(\sigma + \delta)} J_1(\sigma, y) J_2(\sigma, \delta, y, z) J_3(\delta, y, z), \quad (8)$$

где  $y = (y_1, y_2, \dots)$ ,  $z = (z_1, z_2, \dots)$ ,  $\sigma = (1^{i_1} 2^{i_2} \dots)$ ,  $\delta = (1^{k_1} 2^{k_2} \dots)$  и

$$J_1(\sigma, y) = \prod_{l < m} y_{[l, m]}^{(l, m) i_l i_m} \prod_l y_l^{\frac{i_l(i_l - 1)}{2} + \left[\frac{l-1}{2}\right] i_l} \prod_{l, 2|l} y_{\frac{l}{2}}^{i_l} \quad (9)$$

(см. [7] и [4], стр. 172),

$$J_2(\sigma, \delta, y, z) = \prod_{\substack{l, m \\ \alpha(l) > \alpha(m)}} y_{[l, m]}^{(l, m) i_l k_m} \prod_{\substack{l, m \\ \alpha(l) < \alpha(m)}} z_{[l, m]}^{(l, m) i_l k_m}, \quad (10)$$

$$J_3(\delta, y, z) = \prod_{\substack{l < m \\ \alpha(l) = \alpha(m)}} y_{[l, m]}^{(l, m) k_l k_m} \prod_{\substack{l < m \\ \alpha(l) \neq \alpha(m)}} z_{[l, m]}^{(l, m) k_l k_m} \prod_l y_l^{\frac{k_l(k_l - 1)}{2} + \left[\frac{l-1}{2}\right] k_l} \prod_{l, 2|l} z_{\frac{l}{2}}^{k_l}, \quad (11)$$

$$J_1(\emptyset, y) = J_2(\emptyset, \delta, y, z) = J_2(\sigma, \emptyset, y, z) = J_3(\emptyset, y, z) = 1.$$

Тогда, учитывая формулы (4), (5), (6), (7), получаем окончательно следующую теорему.

Теорема 2.

$$E_0(n, x) = Y(n, y, z) \Big|_{\{y_i = 1 + x^i, z_i = 1 - x^i\}_i}. \quad (12)$$

Приведем теперь выражение для числа  $E_0^{(c)}(n, N)$  связанных эйлеровых графов (см. [4], стр. 174, [5, 7]):

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} E_0^{(c)}(t^k, x^k) = \ln(1 + E_0(t, x)),$$

$$\text{где } E_0(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} E_0(n, x) t^n, \quad E_0^{(c)}(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_N E_0^{(c)}(n, N) t^n x^N.$$

Подобным образом можно посчитать и другие типы неориентированных эйлеровых графов.

§ 3. Поскольку  $E_0(n) = \sum_N E_0(n, N) = E_0(n, x) \Big|_{x=1}$ , из теоремы 2 получаем  $E_0(n) = Y(n, y, z) \Big|_{\{y_i=2, z_i=0\}_i}$ . Это выражение допускает значительное упрощение, так как многие слагаемые (8) при  $z_i = 0$  обращаются в 0. Однако мы приведем независимый вывод возникающих формул, представляющий самостоятельный интерес.

Прежде всего запишем аналогично (2)

$$E_0(n) = \sum_{|\tau|=n} \frac{1}{\tau! \pi(\tau)} e_0(\tau) \quad (2')$$

и соответственно

$$P_0(n) = \sum_{|\tau|=n} \frac{1}{\tau! \pi(\tau)} p_0(\tau).$$

Рассмотрим билинейную форму  $(\tau, \sigma) = \sum_{l,m} (l, m) j_l^i j_m^i$ ,  $(\emptyset, \sigma) = (\tau, \emptyset) = 0$ , и обозначим  $k_1(\tau) = j_1 + j_3 + j_5 + \dots$  — число нечетных слагаемых  $\tau$  (см. [2]). В частности, если  $k_1(\tau) = 0$ , то  $\tau$  имеет вид  $(2^{i_2} 4^{j_4} 6^{i_6} \dots)$ .

Лемма 4 [2].  $\rho_0(\tau) = 2^{\frac{1}{2}(\tau, \tau) - \frac{1}{2}k_1(\tau)}$ .

Доказательство легко получается из (4) подстановкой  $x = 1$ .

Теорема 3.

$$e_0(\tau) = 2^{-k(\tau) + \rho(\tau)} \rho_0(\tau), \tag{13}$$

где

$$\rho(\tau) = \begin{cases} 0, & k_1(\tau) = 0, \\ 1, & k_1(\tau) > 0. \end{cases}$$

Доказательство. Пусть  $g$  — фиксированная подстановка на  $V$  типа  $\tau$ . Выберем цикл  $c$  подстановки  $g$ , действующий на множестве  $X$ , такой, длина которого  $l$  делится на наименьшую возможную степень 2 среди всех циклов  $g$ . Для определенности будем считать также, что  $l$  — наименьшее число с таким свойством. Пусть  $h = g|_{V-X}$ ,  $\sigma$  — тип  $h$  ( $\sigma = \tau - (l)$ ),  $\Gamma$  — граф на  $V - X$ , инвариантный относительно  $h$ . Посчитаем все эйлеровы графы на  $V$ , инвариантные относительно  $g$ , подграф которых, индуцируемый на  $V - X$ , совпадает с  $\Gamma$ . Пусть  $c_1$  — цикл  $h$ ,  $m$  — его длина. Если вершины  $c_1$  имеют в  $\Gamma$  четную степень, мы должны соединить их с  $X$  так, чтобы в этом соединении они также имели четную степень. Наоборот, если они имеют в  $\Gamma$  нечетную степень, то и в соединении с  $X$  они должны получить нечетную степень. Поэтому по лемме 2 (1) вершины  $c_1$  и  $c$  могут быть соединены  $k[l, m]$  ребрами, где  $k$  четно в первом случае и нечетно во втором.

В самом деле, в силу выбора  $c$   $\frac{[l, m]}{m}$  нечетно. Так как  $\sum_{k \text{ четно}} C_{(l,m)}^k = \sum_{k \text{ нечетно}} C_{(l,m)}^k = 2^{(l,m)-1}$ , общее число возможных соединений  $c_1$  с  $c$  в иско-

мых графах не зависит от вида  $\Gamma$ . Остается еще соединить вершины  $X$  между собой. Прежде всего заметим, что во всяком графе число вершин нечетной степени четно. Поэтому, если  $l$  нечетно, то степени вершин  $X$  в любом рассматриваемом соединении их с  $V - X$  четны. Так как и все возможные соединения их между собой имеют четную степень (пункт 2

леммы 2), то все они допустимы. Общее число таких соединений  $2^{\frac{l-1}{2}}$ . Пусть теперь  $l$  четно, так что  $k_1(\tau) = 0$ . Степени вершин  $c$  в соединении их с вершинами из  $V - X$  могут быть как четными, так и нечетными. В первом случае возможны любые соединения вершин  $c$  между собой, инвариантные относительно  $g$ , не содержащие ребер, соединяющих пары противоположащих вершин. Во втором случае, очевидно, наоборот, все пары противоположащих вершин должны быть соединены между собой, тогда как остальные соединения произвольны. В обоих случаях число  $2^{\frac{l-2}{2}}$  возможных соединений внутри  $X$  не зависит от  $\Gamma$ .

Из этих рассуждений вытекает, что всякому графу  $\Gamma$  соответствует  $2^{((l, \sigma) - k(\sigma) + \lfloor \frac{l-1}{2} \rfloor)}$  различных содержащих его эйлеровых графов, инвариантных относительно  $g$ . Обратно, всякому эйлерову графу отвечает однозначно определенный его подграф на  $V - X$ . Поэтому

$$e_0(\tau) \equiv e_0(\sigma + (l)) = 2^{((l, \sigma) - k(\sigma) + \lfloor \frac{l-1}{2} \rfloor)} \rho_0(\sigma). \tag{14}$$

Преобразуем это выражение, воспользовавшись леммой 4.

$$e_0(\tau) = 2^{((l), \tau) - l - k(\tau) + 1 + \left[\frac{l-1}{2}\right] + \frac{1}{2}(\tau, \tau) - ((l), \tau) + \frac{1}{2}l - \frac{1}{2}k_1(\tau) + \frac{1}{2}k_1((l))} =$$

$$= 2^{\frac{1}{2}(\tau, \tau) - \frac{1}{2}k_1(\tau)} 2^{-k(\tau)} 2^{-\frac{l}{2} + \left[\frac{l-1}{2}\right] + 1 + \frac{1}{2}k_1((l))} = 2^{-k(\tau)} \rho_0(\tau) 2^{\rho},$$

где

$$\rho = \begin{cases} 0, & l \text{ четно,} \\ 1, & l \text{ нечетно.} \end{cases}$$

Теорема доказана.

Формулы (2') и (13) доставляют требуемое простое выражение  $E_0(n)$ .

Замечание 1. Если  $\tau \geq 1$ , т. е.  $\tau = \sigma + 1$ ,  $l = 1$ , более удобно использовать формулу (14), дающую здесь выражение

$$e_0(\tau) = \rho_0(\tau - 1), \quad (15)$$

доказательство которого очевидно. Для  $\tau = (1^n)$  эта формула и ее возможный вывод вскользь упомянуты Ридом [8].

Из (15) вытекает любопытное следствие. Обозначим через  $E'_0(n)$  число неизоморфных эйлеровых графов с корнем. Имеем

$$E'_0(n) = \sum_{\tau > 1, |\tau|=n} \frac{1}{(\tau-1)! \pi(\tau-1)} e_0(\tau),$$

откуда

$$E'_0(n) = P_0(n-1).$$

Однако справедливость этого тождества легко установить и непосредственно, так как добавление ко всякому графу с  $n-1$  вершиной корня, соединенного со всеми вершинами нечетной степени, не меняет группы его автоморфизмов и превращает его в эйлеров граф. Для  $E_0(n)$  подобного простого выражения нет. Интересно, что аналогичное тождество не имеет места и для связных графов соответствующих видов, так как число связных корневых графов выражается по особой формуле (см. [7, 2]).

Замечание 2. Никакой формулы, подобной (13), для  $e_0(\tau, N)$  или  $e_0(\tau, x)$  даже при  $\tau = (1^n)$ , вероятно, не существует. Дело в том, что в установленном в доказательстве теоремы 3 соответствии число эйлеровых графов с фиксированным числом ребер уже зависит от строения  $\Gamma$ .

В заключение приведем некоторые численные результаты.

$n$	1	2	3	4	5	6	7	8
$E_0(n)$	1	1	2	3	7	16	54	243
$E_0^{(c)}(n)$	1	0	1	1	4	8	37	184

### Литература

1. Де Брейн Н. Дж. В сб. «Прикладная комбинаторная математика». М., 1968.
2. Лисковец В. А. Вестн АН БССР, сер. физ.-мат. наук, № 5, 1969.
3. Оре О. Теория графов. М., 1968.
4. Риордан Дж. Введение в комбинаторный анализ. М., 1963.
5. Харари Ф. В сб. «Прикладная комбинаторная математика». М., 1968.
6. Харари Ф. УМН, 24, в. 5, 1969.
7. Nagary F. Trans. Amer. Math. Soc., 78, 2, 445, 1955.
8. Read R. C. Canad. J. Math., 14, 3, 482, 1962.

Институт математики  
АН БССР

Поступило в редакцию  
13.III 1970

В. В. ДЕМЕНЧУК

## ИНВЕРСНЫЕ ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ ПОЛУГРУППЫ С ДИСКРЕТНОЙ ПОДПОЛУГРУППОЙ ИДЕМПОТЕНТОВ

Всюду в этой статье  $B$  — инверсная полугруппа,  $E$  — ее подполугруппа идемпотентов. Через  $x^*$  будем обозначать элемент, регулярно сопряженный элементу  $x \in B$ . Если  $B$  — топологическая, то предполагается всюду, что  $E$  — дискретна. Будем говорить, что инверсия в  $B$  непрерывна, если отображение  $B \rightarrow B: x \rightarrow x^*$  непрерывно. Через  $V(x)$  будем обозначать окрестность элемента  $x$  в  $B$ .

Пусть  $B$  — топологическая полугруппа с непрерывной инверсией. Тогда отображения  $B \rightarrow E: x \rightarrow xx^*$  и  $B \rightarrow E: x \rightarrow x^*x$  непрерывны, а следовательно, множества  ${}_eT_k = \{x \mid x \in B, xx^* = e, x^*x = k\}$  открыто-замкнуты в  $B$ .

Пусть  ${}_eT_k \neq \emptyset$  и  $a \in {}_eT_k$ . Отображения  ${}_eT_k \rightarrow {}_kT_e: x \rightarrow a^*x$ ,  ${}_eT_k \rightarrow {}_eT_e: x \rightarrow xa^*$  есть гомеоморфизмы.

Из этих простых соображений и [1] следуют

**Теорема 1.** Пусть  $B$  — топологическая полугруппа с непрерывной инверсией. Тогда пространство  $B$  вполне регулярно.

**Теорема 2.** Пусть  $B$  — локально бикомпактная топологическая полугруппа с непрерывной инверсией и всякая максимальная подгруппа полугруппы  $B$  счетна в бесконечности. Если  $g$  — непрерывный изоморфизм полугруппы  $B$  на  $B'$ , где  $B'$  — локально бикомпактная топологическая полугруппа с дискретной подполугруппой идемпотентов и непрерывной инверсией, то  $g$  есть гомеоморфизм.

**Замечание.** Если не выполняется условие непрерывности инверсии в полугруппе  $B'$ , то теорема неверна. В самом деле, пусть  $B$  — мультипликативная топологическая группа всех положительных действительных чисел с естественной топологией и присоединенным изолированным нулем,  $B'$  — мультипликативная топологическая полугруппа всех неотрицательных действительных чисел с естественной топологией. Для  $B$  и  $B'$  выполняются все условия теоремы, кроме непрерывности инверсии в  $B'$ , и отображение  $B \rightarrow B': x \rightarrow x$  есть непрерывный изоморфизм, однако топологии в  $B$  и  $B'$  различны.

**Теорема 3.** Пусть  $\Gamma$  — хаусдорфово топологическое пространство,  $B$  — полугруппа непрерывных преобразований пространства  $\Gamma$ . Пусть в  $B$  внесены две топологии, превращающие ее в непрерывные полугруппы  $B'$  и  $B''$  преобразований с непрерывной инверсией. Если  $B'$  и  $B''$  локально бикомпактны и максимальные подгруппы их счетны в бесконечности, то топологии в  $B'$  и  $B''$  совпадают.

**Теорема 4.** Пусть  $B$  — коммутативная локально бикомпактная вполне несвязная топологическая полугруппа с непрерывной инверсией. Существует достаточная система представлений полугруппы  $B$  в дискретные полугруппы.

**Доказательство.**  $B = \bigcup T_e$ , где  $T_e$  — открыто-замкнутая подгруппа с единицей  $e$ . Введем в  $E$  частичную упорядоченность:  $k \leq e \iff ke = k$  [2].

Пусть  $p, q \in E$  и  $p > q$ . Возьмем окрестность  $V(q) \subset T_q$ . Существует такая открытая подгруппа  $H^{(q)}$ , что  $H^{(q)} \subset V(q)$  [1]. Отображение  $T_p \rightarrow T_q: x \rightarrow qx$  — непрерывно. Тогда полный прообраз  $H^{(p)}$  подгруппы  $H^{(q)}$  есть открытая подгруппа в  $T_p$ .

Таким образом, полугруппа  $B$  представима в виде объединения непересекающихся открытых множеств вида  $aH^{(p)}$ , где  $a \in T_p$ ,  $p \geq q$ , и  $T_s$ , где  $s < q$  или  $s$  не сравнимо с  $q$ . Эквивалентность  $\mu_q$ , соответствующая данному разбиению, двусторонне стабильна, а тогда  $B/\mu_q$  — дискретная топологическая полугруппа. Естественный гомоморфизм  $B$  на  $B/\mu_q$  непрерывен, и, очевидно, совокупность всех таких гомоморфизмов является достаточной системой представлений топологической полугруппы  $B$ .

Выше мы видели, что непрерывность инверсии для инверсных топологических полугрупп с дискретной подполугруппой идемпотентов играет существенную роль. В связи с этим интересно выяснить условия непрерывности инверсии. Оказывается, что таким условием является слабая равномерность.

**Определение [4].** Пусть  $A$  — локально бикompактная полугруппа,  $a, b \in A$ ,  $Y \subset A$  и  $W$  — окрестность в  $A$ , замыкание которой бикompактно.  $A$  называется слабо равномерной, если всякий раз, когда  $aYb \subset W$ ,  $(aYb \subset \subset A \setminus \overline{W})$  существуют такие окрестности  $V(a)$  и  $V(b)$ , что  $V(a)YV(b) \subset W$ ,  $(V(a)YV(b) \subset \subset A \setminus \overline{W})$ . При этом либо  $a$ , либо  $b$  могут быть пустыми символами.

**Теорема 5.** Пусть  $B$  — локально бикompактная топологическая полугруппа. Инверсия в  $B$  непрерывна тогда и только тогда, когда  $B$  слабо равномерна.

**Доказательство. Необходимость.** Пусть инверсия в  $B$  непрерывна и  $aYb \subset W$ , где  $\overline{W}$  — бикompакт,  $a \in {}_eT_e$ ,  $b \in {}_pT_p$ . Очевидно,  $aYb$  — бикompакт.  $aYb = eaYbq \supset eaYbq$ . Для  $z \in aYb$  существуют такие окрестности  $V_z(e)$ ,  $V(z)$ ,  $V_z(q)$ , что  $V_z(e)V(z)V_z(q) \subset W$ . Система окрестностей  $\{V(z)\}$ ,  $z \in aYb$  покрывает  $aYb$ . Выберем конечное покрытие  $V(z_1) \dots V(z_n)$ . Обозначим  $V(e) = \bigcap_{i=1}^n V_{z_i}(e)$ ,  $V(q) = \bigcap_{i=1}^n V_{z_i}(q)$ . Тогда  $V(e)aYbV(q) \subset W$ . Можно считать, что  $V(e) \subset {}_eT_e$ ,  $V(q) \subset {}_qT_q$ . Тогда  $V(e)a = V(a)$ ,  $b \cdot V(q) = V(b)$ .

Пусть теперь  $eYq \subset B \setminus \overline{W}$ , где  $e, q \in E$  и  $\{U_\alpha(e)\}$ ,  $\{U_\beta(q)\}$  — базисы окрестностей элементов  $e$  и  $q$ . Предположим, что для любых  $\alpha$  и  $\beta$   $U_\alpha(e)YU_\beta(q) \cap \overline{W} \neq \emptyset$ . Обозначим  $F_{\alpha,\beta} = \overline{U_\alpha(e)YU_\beta(q)} \cap \overline{W}$ .  $\{F_{\alpha,\beta}\}$  — центрированная система замкнутых множеств из  $\overline{W}$ , а следовательно,  $\bigcap_{\alpha,\beta} F_{\alpha,\beta} = \bigcap_{\alpha,\beta} \overline{U_\alpha(e)YU_\beta(q)} \cap \overline{W} \neq \emptyset$ . Пусть  $z \in \bigcap_{\alpha,\beta} \overline{U_\alpha(e)YU_\beta(q)} \setminus eYq$ , причем  $z \in {}_sT_s$ . Тогда  $U(z) \cap U(e)YU(q) \neq \emptyset$ , где  $U(z) \subset {}_sT_s$ ,  $U(e) \subset {}_eT_e$ ,  $U(q) \subset {}_qT_q$ . Пусть  $x \in U(z) \cap U(e)YU(q)$ . Тогда  $ex = x$ ,  $xq = x$ , а следовательно,  $ez = z$ ,  $zq = z$ . Далее, существуют такие окрестности  $V(e) \subset {}_eT_e$ ,  $V(z)$ ,  $V(q) \subset {}_qT_q$ , что  $V(e)V(z)V(q) \cap eYq = \emptyset$ . Тогда  $V(z) \cap V^*(e)YV^*(q) = \emptyset$ , т. е.  $z \notin \overline{V^*(e)YV^*(q)}$ . Противоречие. Таким образом,  $\bigcap_{\alpha,\beta} F_{\alpha,\beta} = eYq \cap \overline{W} \neq \emptyset$ .

Противоречие.

Пусть теперь  $aYb \subset B \setminus \overline{W}$ .  $aYb = eaYbq \subset B \setminus \overline{W}$ . Существуют такие окрестности  $V(e) \subset {}_eT_e$ ,  $V(q) \subset {}_qT_q$ , что  $V(e)aYbV(q) \subset B \setminus \overline{W}$ . Но  $V(e)a = V(a)$ ,  $b \cdot V(q) = V(b)$ .

**Достаточность.** Пусть  $B$  слабо равномерна. Докажем, что множество  $T_k = \{x | x \in B, x^*x = k\}$  открыто. Пусть  $V(k)$  — окрестность с бикompактным замыканием, содержащая единственный идемпотент  $k$ , и  $M(k)$ ,  $W(k)$ ,

$U(k)$  — такие окрестности, что  $\overline{M(k)} \subset W(k)$ ,  $\overline{W(k)} \subset U(k)$ ,  $\overline{U(k)} \subset V(k)$ . Пусть  $a$  — произвольный элемент из  $T_h$ . Существует такая окрестность  $M(a)$ , что  $a^*M(a) \subset M(k)$ . Предположим, что для любой окрестности  $W(a) \subset M(a)$  существует такой элемент  $x \in W(a)$ , что  $a^*ax^*x \notin W(k)$ . Обозначим  $X = \{x | x \in M(a), a^*ax^*x \notin W(k)\}$  и  $Y = \{x^*x | x \in X\}$ . Тогда  $\overline{a^*aY} \subset \subset B \setminus \overline{M(k)}$ . Существует такая окрестность  $U(a) \subset M(a)$ , что  $a^*U(a)Y \subset \subset B \setminus \overline{M(k)}$ . Возьмем  $x \in U(a) \cap X$ . Тогда  $a^*xx^*x = a^*x \notin M(k)$ . Противоречие. Таким образом, существует такая окрестность  $W(a)$ , что для всех  $x \in W(a)$  выполняется  $a^*ax^*x \in W(k)$ .

Предположим сейчас, что в любой окрестности  $V(a) \subset W(a)$  существует такой элемент  $x$ , что  $x^*a \notin U(k)$ . Обозначим  $Z = \{x | x \in W(a), x^*a \notin U(k)\}$ . Тогда  $\overline{Z^*a} \subset B \setminus \overline{W(k)}$  и существует такая окрестность  $N(a) \subset W(a)$ , что  $Z^*N(a)a^*a \subset B \setminus \overline{W(k)}$ . Возьмем  $x \in N(a) \cap Z$ . Тогда  $x^*xa^*a \notin W(k)$ . Противоречие. Таким образом, существует такая окрестность  $V(a)$ , что  $V^*(a)a \subset \subset U(k)$ . Следовательно,  $\overline{V^*(a) \cdot a} \subset V(k)$  и существует такая окрестность  $P(a) \subset \subset V(a)$ , что  $V^*(a)P(a) \subset V(k)$ . Отсюда следует, что  $P(a) \subset T_h$ , т. е.  $T_h$  открытое, а следовательно, и замкнутое множество.

Аналогично доказывается, что множество  ${}_eT = \{x | x \in B, xx^* = e\}$  открыто-замкнуто. Отсюда следует, что множество  ${}_eT_h$  открыто-замкнуто, ибо  ${}_eT_h = {}_eT \cap T_h$ .

Покажем теперь, что если множество  $Q^* \subset B$  открыто, то и  $Q$  открыто. Пусть  $Q \subset {}_eT_h$  и  $a \in {}_eT_h$ . Тогда  $Q^* \subset {}_hT_e$  и  $a^*Q \subset {}_hT_h$ ,  $Q^*a \subset {}_hT_h$ , причем  $Q^*a$  открытое множество. Так как  ${}_hT_h$  — топологическая группа [3], то множество  $(Q^*a)^* = a^*Q$  открыто, а следовательно,  $Q$  открыто.

Пользуясь случаем выразить благодарность Л. Б. Шнеперману за ценные советы и постоянное внимание к работе.

### Литература

1. Понтрягин Л. С. Непрерывные группы. Гостехиздат, 1954.
2. Ляпин Е. С. Полугруппы. Физматгиз, 1960.
3. Ellis R. Proc. Am. Math. Soc., 8, 372, 1957.
4. Шнеперман Л. Б. Математические заметки, 6, № 4, 401, 1969.
5. Шнеперман Л. Б. ДАН БССР, № 6, 1970.

Минский государственный педагогический институт  
им. А. М. Горького

Поступило в редакцию  
2.III 1970

А. Х. ТУРЕЦКИИ

**ОБ ИНТЕРПОЛИРОВАНИИ ПРИ БОЛЬШОМ ЧИСЛЕ  
 ДАННЫХ ЗНАЧЕНИЙ ФУНКЦИИ**

1. Если число  $n$  точек  $x_k$  ( $k = 1, \dots, n$ ), где заданы значения функции  $f(x)$ , велико, то неудобно использовать интерполяционный полином Лагранжа, значения которого в точках  $x_k$  совпадают со значениями функции  $f(x)$ , так как степень этого полинома велика. Тогда естественно искать полином степени  $m < n$ , наименее уклоняющийся в том или ином смысле от функции  $f(x)$ , в заданной системе точек  $x_k$ . Это приводит, в частности, к следующей задаче: найти полином  $P(x) = \sum_{v=0}^m a_v x^v$  степени  $m < n$ , для которого

сумма  $L = \sum_{k=1}^n q(x_k) |f(x_k) - P(x_k)|$  имеет наименьшее значение, где весовая функция  $q(x) > 0$ , т. е. найти

$$\min_{a_v} \sum_{k=1}^n q(x_k) |f(x_k) - \sum_{v=0}^m a_v x_k^v|.$$

Необходимые условия минимума приводят к следующей системе уравнений\*):

$$\sum_{k=1}^{k_1} q(x_k) x_k^v - \sum_{k=k_1+1}^{k_2} q(x_k) x_k^v + \dots \pm \sum_{k=k_r+1}^n q(x_k) x_k^v = 0 \quad (v = 0, 1, \dots, m) \quad (1)$$

или короче

$$\sum_{j=0}^r (-1)^j \sum_{k=k_j+1}^{k_{j+1}} q(x_k) x_k^v = 0, \quad k_0 = 0, \quad k_{r+1} = n \quad (v = 0, 1, \dots, m). \quad (1')$$

Легко убедиться, что  $r \geq m + 1$ . Действительно, уравнение вида (1) должно выполняться для любого полинома  $R(x)$  степени не выше  $m$ , т. е.

$$\sum_{j=0}^r (-1)^j \sum_{k=k_j+1}^{k_{j+1}} q(x_k) R(x_k) = 0. \quad (2)$$

Но при  $r \leq m$  можно было бы выбрать полином  $R(x)$  степени  $\leq m$  с такими нулями, что

$$\text{sign} \sum_{k=k_j+1}^{k_{j+1}} q(x_k) R(x_k) = (-1)^j$$

и уравнение (2) не могло бы иметь места. В частности, мы будем иметь  $r = m + 1$ , если функция  $f(x)$  такова, что  $f^{(m+1)}(x)$  не меняет знака на отрезке  $[a, b]$ , где содержатся все узлы  $x_k$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ). Докажем, следуя

\*) Если предположить, что все слагаемые  $L$  отличны от нуля.

Бернштейну [1], что для всякой функции  $f(x)$  рассматриваемого класса (для которой  $r = m + 1$ ) система уравнений (1) имеет не более одного решения. Допустим противное, что система (1) имеет два решения:  $k_1, k_2, \dots, k_{m+1}$  и  $l_1, l_2, \dots, l_{m+1}$ . Обозначим через  $\alpha_t$  ( $t = 1, 2, \dots$ ) числа  $k_j$  и  $l_j$ , расположенные в возрастающем порядке. Тогда система (1) примет вид

$$\sum_{j=0}^{m+1} (-1)^j \sum_{k=k_{j+1}}^{k_{j+1}} q(x_k) x_k^v = \sum_{j=0}^{m+1} (-1)^j \sum_{k_{j+1} < \alpha_t < k_{j+1}-1} \sum_{k=\alpha_t}^{\alpha_{t+1}} q(x_k) x_k^v = 0$$

$$(v=0, 1, \dots, m; k_0 = 0, k_{m+2} = n). \quad (1')$$

Аналогично

$$\sum_{i=0}^{m+1} (-1)^i \sum_{k=l_{i+1}}^{l_{i+1}} q(x_k) x_k^v = \sum_{i=0}^{m+1} (-1)^i \sum_{l_{i+1} < \alpha_t < l_{i+1}-1} \sum_{k=\alpha_t}^{\alpha_{t+1}} q(x_k) x_k^v = 0$$

$$(v=0, 1, \dots, m; l_0 = 0, l_{m+2} = n). \quad (1'')$$

Среди сумм  $\sum_{k=\alpha_t}^{\alpha_{t+1}} q(x_k) x_k^v$  найдется  $s$  таких, которые входят в (1') и (1'') с одинаковыми знаками, и  $s_1$  с противоположными. По крайней мере одно из чисел  $s$  или  $s_1$  не превышает  $m + 1$ . Пусть  $s \leq m + 1$ . Сумма от произвольного полинома  $R(x)$  степени не выше  $m$ , взятая по отрезкам  $[\alpha_t, \alpha_{t+1}]$  со знаками, определяемыми уравнениями (1') (или (1'')), должна была бы равняться нулю, что невозможно, так как можно подобрать полином  $R(x)$  степени не выше  $m$  с такими нулями, чтобы часть суммы, соответствующая каждому из этих  $s$  отрезков, была положительной.

В дальнейшем ограничимся случаем  $r = m + 1$ .

Заметим, что так как решение задачи свелось к решению системы уравнений (1) в натуральных числах  $k_j$  ( $j = 1, \dots, m + 1$ ), то естественно ожидать, что точное решение задачи может быть найдено только в некоторых частных случаях.

2. Рассмотрим следующий случай.  $q(x) \equiv 1$ ,  $x_k = \cos \frac{(2k-1)\pi}{2n} = \cos \varphi_k$

( $k = 1, \dots, n$ ).  $L = \sum_{k=1}^n \left| f(x_k) - \sum_{v=0}^m a_v x_k^v \right|$ . Требуется найти

$$\min_{a_v} L = \min_{a_v} \sum_{k=1}^n \left| f(x_k) - \sum_{v=0}^m a_v x_k^v \right|$$

или, что то же,

$$\min_{c_v} L = \min_{c_v} \sum_{k=1}^n \left| f(\cos \varphi_k) - \sum_{v=0}^m a_v \cos v \varphi_k \right|.$$

Необходимые условия минимума приводят здесь к системе

$$\sum_{j=0}^{m+1} (-1)^{j+1} (k_{j+1} - k_j) = 0, \quad \sum_{j=0}^{m+1} (-1)^{j+1} \sum_{k=k_{j+1}}^{k_{j+1}} \cos v \varphi_k = 0 \quad (v=1, \dots, m) \quad (3)$$

или, так как ( $k_0 = 0$ ,  $k_{m+2} = n$ ),

$$\sum_{k=k_j+1}^{k_{j+1}} \cos v \varphi_k = \frac{\sin \frac{k_{j+1} v \pi}{n} - \sin \frac{k_j v \pi}{n}}{2 \sin \frac{v \pi}{2n}},$$

к системе

$$\sum_{j=0}^{m+1} (-1)^{j+1} (k_{j+1} - k_j) = 0, \quad \sum_{j=0}^{m+1} (-1)^{j+1} \left( \sin \frac{k_{j+1} v \pi}{n} - \sin \frac{k_j v \pi}{n} \right) = 0$$

$$(v = 1, \dots, m; k_0 = 0, k_{m+2} = n), \quad (3')$$

которую перепишем в виде

$$(-1)^m n + 2 \sum_{j=1}^{m+1} (-1)^j k_j = 0, \quad \sum_{j=0}^{m+1} (-1)^j \sin \frac{k_j v \pi}{n} = 0 \quad (v = 1, \dots, m). \quad (3'')$$

Заметим, что первое уравнение системы (3'') показывает, что эта система допускает решение в натуральных числах  $k_j$  только когда  $n$  число четное, что мы и будем предполагать. Решение системы (3'') будем искать в виде  $k_j = aj + b$ , где  $a > 0$  и  $b$  — целые.

Нетрудно найти

$$\sum_{j=1}^{m+1} (-1)^j = \frac{(-1)^{m+1} - 1}{2}, \quad \sum_{j=1}^{m+1} (-1)^j j = (-1)^{m+1} \left( \left[ \frac{m}{2} \right] + 1 \right),$$

где  $[a]$  означает целую часть числа  $a$ ,

$$\sum_{j=1}^{m+1} (-1)^j \sin (aj + b) \frac{v \pi}{n} =$$

$$= \frac{(-1)^{m+1} \sin \left[ a \left( m + \frac{3}{2} \right) + b \right] \frac{v \pi}{n} - \sin \left( \frac{a}{2} + b \right) \frac{v \pi}{n}}{2 \cos \frac{av \pi}{2n}}.$$

Таким образом, система (3'') перепишется в виде

$$(-1)^m n + 2a(-1)^{m+1} \left( \left[ \frac{m}{2} \right] + 1 \right) + b[(-1)^{m+1} - 1] = 0,$$

$$(-1)^{m+1} \sin \left[ a \left( m + \frac{3}{2} \right) + b \right] \frac{v \pi}{n} - \sin \left( \frac{a}{2} + b \right) \frac{v \pi}{n} = 0 \quad (v = 1, \dots, m).$$

Легко проверить, что если  $\frac{n}{m+1}$  — целое четное число, то система имеет

решение  $a = \frac{n}{m+1}$ ,  $b = -\frac{a}{2}$ , и значит,

$$k_j = \frac{n}{m+1} j - \frac{n}{2(m+1)} = \frac{(2j-1)n}{2(m+1)} \quad (j=1, \dots, m+1).$$

Заметим, что полином  $P(x) = \sum_{v=0}^m a_v x^v = \sum_{v=0}^m c_v \cos v\varphi$  условиями минимума определяется неоднозначно. В качестве искомого  $P(x)$  можно взять любой полином степени  $m$ , интерполирующий функцию  $f(x)$  в узлах  $Y_j = \cos \theta_j$  ( $j=1, \dots, m+1$ ), где  $\theta_j$  — любые числа, удовлетворяющие неравенствам

$\varphi_{k_j} < \theta_j < \varphi_{k_{j+1}}$ , т. е.  $\frac{(2k_j-1)\pi}{2n} < \theta_j < \frac{(2k_{j+1}+1)\pi}{2n}$ . (Можно, например, взять  $\theta_j = \frac{k_j \pi}{n} = \frac{(2j-1)\pi}{2(m+1)}$ ,  $j=1, \dots, m+1$ ). Но минимум величины  $L$  определяется однозначно:

$$\min L = \left| \sum_{j=0}^{m+1} (-1)^{j+1} \sum_{k=k_j+1}^{k_{j+1}} f(\cos \varphi_k) \right| = \left| \sum_{j=0}^{m+1} (-1)^{j+1} \sum_{k=k_j+1}^{k_{j+1}} f(x_k) \right|$$

$$\left( k_0 = 0, k_{m+2} = n, k_j = \frac{(2j-1)n}{2(m+1)}, j=1, \dots, m+1 \right).$$

3. Аналогично формулируется и решается задача в случае тригонометрического интерполирования.

Требуется найти тригонометрический полином

$$T(x) = \sum_{v=0}^m (a_v \cos vx + b_v \sin vx),$$

для которого сумма

$$L = \sum_{k=0}^n q(x_k) |f(x_k) - T(x_k)|$$

имеет наименьшее значение (здесь  $0 \leq x_k < 2\pi$  ( $k=0, 1, \dots, n$ ) — заданные узлы,  $q(x) > 0$ ), т. е. найти

$$\min_{a_v, b_v} \sum_{k=0}^n q(x_k) |f(x_k) - T(x_k)|.$$

Необходимые условия минимума приводят к следующей системе уравнений:

$$\sum_{j=0}^r (-1)^j \sum_{k=k_j+1}^{k_{j+1}} q(x_k) \cos vx_k = 0 \quad (v=0, 1, \dots, m), \quad (4)$$

$$\sum_{j=0}^r (-1)^j \sum_{k=k_j+1}^{k_{j+1}} q(x_k) \sin vx_k = 0 \quad (v=1, \dots, m; k_0 = -1, k_{r+1} = n).$$

Так же, как в алгебраическом случае, доказывается, что  $r \geq 2m+1$  и что при  $r = 2m+1$  система (4) может иметь не более одного решения.

Найдем решение задачи в следующем частном случае:

$$q(x) \equiv 1, \quad x_k = \frac{k\pi}{n} \quad (k=0, 1, \dots, 2n-1), \quad r = 2m+1,$$

т. е. требуется найти

$$\min_{a_\nu, b_\nu} L = \min_{a_\nu, b_\nu} \sum_{k=0}^{2n-1} |f(x_k) - T(x_k)|,$$

где

$$T(x) = \sum_{\nu=0}^m (a_\nu \cos \nu x + b_\nu \sin \nu x), \quad m < n.$$

Необходимые условия минимума приводят к системе уравнений

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{2m+1} (-1)^{j+1} (k_{j+1} - k_j) &= 0, \\ \sum_{j=0}^{2m+1} (-1)^{j+1} \sum_{k=k_j+1}^{k_{j+1}} \cos \nu x_k &= 0, \quad \sum_{j=0}^{2m+1} (-1)^{j+1} \sum_{k=k_j+1}^{k_{j+1}} \sin \nu x_k = 0 \\ (\nu = 1, \dots, m; \quad k_0 = -1, \quad k_{2m+2} = 2n-1), \end{aligned}$$

или к равносильной системе

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{2m+1} (-1)^{j+1} (k_{j+1} - k_j) &= 0, \quad \sum_{j=0}^{2m+1} (-1)^{j+1} \sum_{k=k_j+1}^{k_{j+1}} e^{i\nu x_k} = 0 \\ (\nu = \pm 1, \pm 2, \dots, \pm m), \end{aligned}$$

или, учитывая, что

$$\sum_{k=k_j+1}^{k_{j+1}} e^{i\nu x_k} = \frac{e^{i(k_{j+1} + \frac{1}{2})x_\nu} - e^{i(k_j + \frac{1}{2})x_\nu}}{2i \sin \frac{x_\nu}{2}},$$

к системе

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{2m+1} (-1)^{j+1} (k_{j+1} - k_j) &= 0, \\ \sum_{j=0}^{2m+1} (-1)^{j+1} \left[ e^{i(k_{j+1} + \frac{1}{2})x_\nu} - e^{i(k_j + \frac{1}{2})x_\nu} \right] &= 0 \\ (\nu = \pm 1, \dots, \pm m; \quad k_0 = -1, \quad k_{2m+2} = 2n-1), \end{aligned}$$

которую нетрудно преобразовать к виду

$$\begin{aligned} n-1 + \sum_{j=1}^{2m+1} (-1)^j k_j &= 0, \\ e^{-\frac{ix_\nu}{2}} + \sum_{j=1}^{2m+1} (-1)^j e^{i(k_j + \frac{1}{2})x_\nu} &= 0 \quad (\nu = \pm 1, \dots, \pm m). \end{aligned}$$

Решение этой системы будем искать в виде  $k_j = aj + b$ , где  $a > 0$  и  $b$  — целые числа. Учитывая, что

$$\sum_{j=1}^{2n+1} (-1)^j = -1, \quad \sum_{j=1}^{2m+1} (-1)^j j = -(m+1),$$

$$\sum_{j=1}^{2m+1} (-1)^j e^{i \left( aj + b + \frac{1}{2} \right) x_v} = - \frac{e^{i \left[ a \left( 2m + \frac{3}{2} \right) + b + \frac{1}{2} \right] x_v} + e^{i \left( \frac{a}{2} + b + \frac{1}{2} \right) x_v}}{2 \cos \frac{ax_v}{2}},$$

приведем нашу систему к виду

$$\begin{aligned} n - 1 - a(m+1) - b &= 0, \\ 1 - \frac{\cos \left( \frac{a}{2} + b + 1 \right) x_v}{\cos \frac{ax_v}{2}} &= 0 \quad (v = \pm 1, \dots, \pm m). \end{aligned}$$

Легко убедиться, что если  $\frac{n}{m+1}$  — число целое, то наша система имеет решение  $a = \frac{n}{m+1}$ ,  $b = -1$  и  $k_j = aj + b = \frac{nj}{m+1} - 1$ . Искомый минимум равен

$$\min_{a_v, b_v} L = \left| \sum_{j=0}^{2m+1} (-1)^{j+1} \sum_{k=k_j+1}^{k_{j+1}} f(x_k) \right| \quad (k_0 = -1, k_{2m+2} = 2n - 1).$$

Как и в алгебраическом случае, искомый тригонометрический полином  $T(x)$  условиями минимума определяется неоднозначно. В качестве  $T(x)$  можно взять любой тригонометрический полином порядка  $m$ , интерполирующий функцию  $f(x)$  в узлах  $y_j$  ( $j = 1, \dots, 2m+1$ ), где  $y_j$  — любые числа, удовлетворяющие неравенствам

$$x_{k_j} < y_j < x_{k_{j+1}}$$

или

$$\frac{j\pi}{m+1} - \frac{\pi}{n} < y_j < \frac{j\pi}{m+1} \quad (j = 1, \dots, 2m+1).$$

4. Применим теперь наши соображения к решению следующей задачи. Пусть  $\{x_k\}_1^n$  — совокупность заданных точек на отрезке  $[a, b]$ , а  $H$  — множество алгебраических полиномов  $P(x)$  степени не выше  $m$ , где  $m < n$ , удовлетворяющих условиям  $|P(x_k)| \leq 1$  ( $k = 1, \dots, n$ ). Требуется найти величину

$$\sup_{P \in H} \max_{a < x < b} |P(x)|.$$

Мы решим здесь эту задачу в частном случае, когда

$$x_k = \cos \frac{(2k-1)\pi}{2n} = \cos \varphi_k \quad (k = 1, \dots, n).$$

Напишем выражение полинома  $P(x)$  степени не выше  $n-1$  по интерполяционной формуле Лагранжа с узлами Чебышева  $x_k = \cos \varphi_k$ :

$$P(x) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} P(x_k) \frac{\cos n\varphi \sin \varphi_k}{\cos \varphi - \cos \varphi_k}, \quad x = \cos \varphi. \quad (5)$$

Известно, что

$$\frac{(-1)^{k-1} \cos n\varphi \sin \varphi_k}{\cos \varphi - \cos \varphi_k} = 1 + 2 \sum_{r=1}^{n-1} \cos r\varphi \cos r\varphi_k,$$

поэтому формулу (5) можно переписать в виде

$$P(x) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n P(x_k) \left[ 1 + 2 \sum_{r=1}^{n-1} \cos r\varphi \cos r\varphi_k \right]. \quad (5')$$

Чтобы  $P(x)$ , определяемый формулой (5'), был полиномом степени не выше  $m$  ( $m < n$ ), потребуем выполнения условий

$$\sum_{k=1}^n P(x_k) \cos r\varphi_k = 0 \quad (r = m+1, \dots, n-1).$$

При выполнении этих условий можно полином  $P(x)$  представить в виде

$$P(x) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n P(x_k) \left[ 1 + 2 \sum_{r=1}^m \cos r\varphi_k \cos r\varphi - \sum_{r=m+1}^{n-1} b_r \cos r\varphi_k \right]$$

с произвольными коэффициентами  $b_r$  ( $r = m+1, \dots, n-1$ ). Сделав замену индекса суммирования, положив  $r = n-1$ , учитывая, что  $\cos(n-s)\varphi_k = (-1)^{k-1} \sin s\varphi_k$ , и обозначив  $b_{n-s} = a_s$ , перепишем последнее равенство в виде

$$P(x) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} P(x_k) \left[ \sin n\varphi_k + \right. \\ \left. + 2 \sum_{r=n-m}^{n-1} \cos(n-r)\varphi \sin r\varphi_k - \sum_{r=1}^{n-m-1} a_r \sin r\varphi_k \right],$$

или, обозначив

$$f(\varphi_k) = \sin n\varphi_k + 2 \sum_{r=n-m}^{n-1} \cos(n-r)\varphi \sin r\varphi_k,$$

считая  $x$ , а значит и  $\varphi$ , фиксированным, получим

$$P(x) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} P(x_k) \left[ f(\varphi_k) - \sum_{r=1}^{n-m-1} a_r \sin r\varphi_k \right].$$

Пусть наш полином  $P(x)$  удовлетворяет условиям

$$|P(x_k)| \leq 1 \quad (k=1, \dots, n),$$

т. е.  $P(x) \in H$ . Тогда для любой фиксированной точки  $x \in [-1, 1]$  имеем

$$|P(x)| \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left| f(\varphi_k) - \sum_{r=1}^{n-m-1} a_r \sin r\varphi_k \right| = \frac{1}{n} L,$$

где числа  $a_r$  ( $r=1, \dots, n-m-1$ ) произвольны. Поэтому будет также справедливо неравенство

$$|P(x)| \leq \frac{1}{n} \min_{a_n} \sum_{k=1}^n \left| f(\varphi_k) - \sum_{r=1}^{n-m-1} a_r \sin r\varphi_k \right| = \frac{1}{n} \min_{a_r} L.$$

Необходимые условия минимума приводят к системе уравнений

$$\sum_{j=0}^{n-m-1} (-1)^{j+1} \sum_{k=k_j+1}^{k_{j+1}} \sin r\varphi_k = 0$$

( $r=1, \dots, n-m-1; k_0=0, k_{n-m}=n$ ). (6)

Учитывая, что

$$\sum_{k=k_j+1}^{k_{j+1}} \sin r\varphi_k = \frac{\cos \frac{k_j r \pi}{n} - \cos \frac{k_{j+1} r \pi}{n}}{2 \sin \frac{r \pi}{2n}},$$

найдем, что

$$\sum_{j=0}^{n-m-1} (-1)^{j+1} \sum_{k=k_j+1}^{k_{j+1}} \sin r\varphi_k = \frac{1}{2 \sin \frac{r \pi}{2n}} \times$$

$$\times \left[ 1 + (-1)^{n-m+r} + 2 \sum_{j=1}^{n-m-1} (-1)^j \cos \frac{k_j r \pi}{n} \right], \quad (7)$$

и система (6) переписется в виде

$$1 + (-1)^{n-m+r} + 2 \sum_{j=1}^{n-m-1} (-1)^j \cos \frac{k_j r \pi}{n} = 0 \quad (r=1, \dots, n-m-1). \quad (6')$$

Решение системы (6') будем искать в виде  $k_j = aj + b$ , где  $a > 0$  и  $b$  — целые. Так как

$$\sum_{j=1}^{n-m-1} (-1)^j \cos (aj + b) \frac{r \pi}{n} =$$

$$= \frac{(-1)^{n-m-1} \cos \left[ a \left( n-m - \frac{1}{2} \right) + b \right] \frac{r \pi}{n} - \cos \left( \frac{a}{2} + b \right) \frac{r \pi}{n}}{2 \cos \frac{ar \pi}{2n}},$$

то система (6') примет вид

$$1 + (-1)^{n-m+r} +$$

$$+ \frac{(-1)^{n-m-1} \cos \left[ a \left( n-m - \frac{1}{2} \right) + b \right] - \cos \left( \frac{a}{2} + b \right) \frac{r \pi}{n}}{\cos \frac{ar \pi}{2n}} = 0$$

( $r=1, \dots, n-m-1$ ).

Легко проверить, что эта система имеет решение  $b=0$ ,  $a = \frac{n}{n-m}$ , если  $\frac{n}{n-m}$  целое, что мы и будем предполагать;  $k_j = aj$  ( $j=1, \dots, n-m-1$ ).

Вычислим теперь

$$\min_{a_r} L = \left| \sum_{j=0}^{n-m-1} (-1)^j \sum_{k=k_j+1}^{k_{j+1}} f(\varphi_k) \right| =$$

$$= \left| \sum_{j=0}^{n-m-1} (-1)^j \sum_{k=k_j+1}^{k_{j+1}} \sin n\varphi_k + 2 \sum_{r=n-m}^{n-1} \cos(n-r)\varphi \sum_{j=0}^{n-m-1} (-1)^j \sum_{k=k_j+1}^{k_{j+1}} \sin r\varphi_k \right|.$$

Пользуясь формулой (7) и учитывая равенство

$$\sum_{j=1}^{n-m-1} (-1)^j \cos \frac{k_j r \pi}{n} = \sum_{j=1}^{n-m-1} (-1)^j \cos \frac{j r \pi}{n-m} =$$

$$= \begin{cases} \frac{(-1)^{n-m+r-1} - 1}{2} & \text{при } r \neq (n-m)(2l+1), \\ n-m-1 & \text{при } r = (n-m)(2l+1) \end{cases}$$

$$(l=0, \pm 1, \pm 2, \dots),$$

найдем

$$\sum_{j=0}^{n-m-1} (-1)^j \sum_{k=k_j+1}^{k_{j+1}} \sin r\varphi_k = \begin{cases} 0 & \text{при } r \neq (n-m)(2l+1), \\ \frac{n-m}{\sin \frac{r\pi}{2n}} & \text{при } r = (n-m)(2l+1) \end{cases}$$

$$(n-m \leq r \leq n-1),$$

$$\sum_{j=0}^{n-m-1} (-1)^j \sum_{k=k_j+1}^{k_{j+1}} \sin n\varphi_k = \begin{cases} 0 & \text{при } a \text{ четном,} \\ n-m & \text{при } a \text{ нечетном.} \end{cases}$$

Значит, имеем при фиксированном  $\varphi$

$$\min_{a_r} L = \frac{n}{a} \left| \sum_{l=0}^{a-1} \frac{\cos \left[ n - \frac{n(2l+1)}{a} \right] \varphi}{\sin \frac{(2l+1)\pi}{2a}} \right|.$$

Таким образом,

$$|P(x)| \leq \frac{1}{a} \sum_{l=0}^{a-1} \frac{1}{\sin \frac{(2l+1)\pi}{2a}}. \quad (8)$$

При  $a \rightarrow \infty$  имеем

$$|P(x)| \leq \frac{2}{\pi} \lg a + 0(1).$$

Нетрудно проверить, что верхняя граница (8) действительно достигается в случае, когда  $\frac{n}{n-m}$  целое, для полинома  $P^*(x) \in H$ , определяемого равенством

$$P^*(x) = \frac{1}{a} \sum_{l=0}^{a-1} \frac{\cos \left[ n - \frac{n(2l+1)}{a} \right] \varphi}{\sin \frac{(2l+1)\pi}{2a}},$$

$x = \cos \varphi$ , в точке  $x = 1$  ( $\varphi = 0$ ), ибо  $P^*(x)$  есть полином степени не выше  $m$ , и в точках  $x_k = \cos \varphi_k = \cos \frac{(2k-1)\pi}{2n}$  ( $k = 1, \dots, n$ ) имеем  $P^*(x_k) = \pm 1$ .

Неравенство (8) может быть доказано иначе, методом Бернштейна [2]. Для этого напишем интерполяционный полином

$$P(x) = \frac{1}{4n(n-m)} \sum_{k=1}^n f(x_k) \left[ \frac{\sin n(\varphi + \varphi_k) \sin(n-m)(\varphi + \varphi_k)}{\sin^2 \frac{\varphi + \varphi_k}{2}} + \frac{\sin n(\varphi - \varphi_k) \sin(n-m)(\varphi - \varphi_k)}{\sin^2 \frac{\varphi - \varphi_k}{2}} \right],$$

где  $x = \cos \varphi$ ,  $x_k = \cos \varphi_k = \cos \frac{(2k-1)\pi}{2n}$ .  $P(x)$  есть, очевидно, алгебраический полином степени не выше  $2n - m - 1$ , и  $P(x_k) = f(x_k)$  ( $k = 1, \dots, n$ ). Пользуясь тождеством

$$\frac{\sin n\theta \sin(n-m)\theta}{\sin^2 \frac{\theta}{2}} = 2(n-m) + 4(n-m) \sum_{k=1}^m \cos k\theta + 2 \sum_{k=m+1}^{2n-m-1} (2n-m-k) \cos k\theta,$$

мы легко найдем коэффициенты полинома

$$P(x) = \frac{c_0}{2} + \sum_{r=1}^{2n-m-1} c_r \cos r\varphi,$$

а именно

$$c_r = \frac{2}{n} \sum_{k=1}^n f(x_k) \cos r\varphi_k \quad (r = 0, 1, \dots, m),$$

$$c_r = \frac{2n-m-r}{n(n-m)} \sum_{k=1}^n f(x_k) \cos r\varphi_k \quad (r = m+1, \dots, 2n-m-1).$$

Таким образом, первые  $m+1$  коэффициентов  $P(x)$  совпадают с соответствующими коэффициентами формулы Лагранжа с узлами Чебышева  $x_k = \cos \varphi_k =$

$= \cos \frac{(2k-1)\pi}{2n}$ . Отсюда легко заключить, что  $P(x)$  совпадает с  $f(x)$ , если  $f(x)$  есть полином степени не выше  $m$ . Значит, для всякого полинома  $P(x) \in H$  имеет место неравенство

$$|P(x)| \leq \frac{1}{4n(n-m)} \sum_{k=1}^n \left\{ \left| \frac{\sin n(\varphi + \varphi_k) \sin(n-m)(\varphi + \varphi_k)}{\sin^2 \frac{\varphi + \varphi_k}{2}} \right| + \left| \frac{\sin n(\varphi - \varphi_k) \sin(n-m)(\varphi - \varphi_k)}{\sin^2 \frac{\varphi - \varphi_k}{2}} \right| \right\}. \quad (9)$$

Мы легко найдем оценку для этой суммы в предположении, что  $a = \frac{n}{n-m}$  — число целое. Оценим сумму, преобразовав ее к виду

$$S = \sum_{k=1}^{2n} \left| \frac{\sin n(\varphi + \varphi_k) \sin(n-m)(\varphi + \varphi_k)}{\sin^2 \frac{\varphi + \varphi_k}{2}} \right|.$$

Обозначив  $\varphi + \varphi_k = z_k$ , найдем, что  $z_{k+1} = z_1 + \frac{k\pi}{n}$ . Полагая  $k = \lambda a + \rho$ , где  $\lambda \geq 0$  и  $0 \leq \rho \leq a-1$  целые, найдем

$$\begin{aligned} S &= |\sin n z_1| \sum_{\rho=0}^{a-1} \sum_{\lambda=0}^{2n-2m-1} \frac{\left| \sin(n-m) \left( z_1 + \frac{\rho\pi}{n} \right) \right|}{\sin^2 \frac{1}{2} \left( z_1 + \frac{\rho\pi}{n} + \frac{\lambda\pi}{n-m} \right)} = \\ &= |\sin n z_1| \sum_{\rho=0}^{a-1} \frac{1}{\left| \sin(n-m) \left( z_1 + \frac{\rho\pi}{n} \right) \right|} \times \\ &\times \sum_{\lambda=0}^{2n-2m-1} \left[ \frac{\sin(n-m) \left( z_1 + \frac{\rho\pi}{n} \right)}{\sin \frac{1}{2} \left( z_1 + \frac{\rho\pi}{n} + \frac{\lambda\pi}{n-m} \right)} \right]^2 = \\ &= 4(n-m)^2 |\sin n z_1| \sum_{\rho=0}^{a-1} \frac{1}{\left| \sin(n-m) \left( z_1 + \frac{\rho\pi}{n} \right) \right|} = \\ &= 4(n-m)^2 |\sin a\theta| \sum_{\rho=0}^{a-1} \frac{1}{\left| \sin \left( \theta + \frac{\rho\pi}{\omega} \right) \right|} \leq \\ &\leq 4(n-m)^2 \sum_{\rho=0}^{a-1} \frac{1}{\sin \frac{(2\rho+1)\pi}{2}}. \end{aligned}$$

Таким образом, получаем

$$|P(x)| \leq \frac{1}{a} \sum_{\rho=0}^{a-1} \frac{1}{\sin \frac{(2\rho+1)\pi}{2a}}.$$

Нетрудно проверить, что этот максимум достигается суммой, стоящей правой частью (9) в точке  $\varphi = 0$ .

### Литература

1. Бернштейн С. Н. О многочленах, ортогональных на конечном отрезке, т. II. Изд-во АН СССР, 1954, стр. 14.
2. Бернштейн С. Н. Об одном классе интерполяционных формул, т. II. Изд-во АН СССР, 1954, стр. 146.

Белорусский государственный университет  
им. В. И. Ленина

Поступило в редакцию  
24.II 1970

Л. Г. КРУГЛИКОВА

**ЧАСТНЫЕ СЛУЧАИ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ  
 ПО МЕТОДУ НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ**

Общие свойства преобразований по методу наименьших квадратов

$$\sigma_n(p, m) = \frac{1}{D} \begin{vmatrix} \sum_{k=0}^p S_{n+k} & \sum_{k=0}^p \frac{1}{n+k} & \dots & \sum_{k=0}^p \frac{1}{(n+k)^m} \\ \sum_{k=0}^p \frac{S_{n+k}}{n+k} & \sum_{k=0}^p \frac{1}{(n+k)^2} & \dots & \sum_{k=0}^p \frac{1}{(n+k)^{m+1}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sum_{k=0}^p \frac{S_{n+k}}{(n+k)^m} & \sum_{k=0}^p \frac{1}{(n+k)^{m+1}} & \dots & \sum_{k=0}^p \frac{1}{(n+k)^{2m}} \end{vmatrix}, \quad (1)$$

где

$$D = \begin{vmatrix} p+1 & \sum_{k=0}^p \frac{1}{n+k} & \dots & \sum_{k=0}^p \frac{1}{(n+k)^m} \\ \sum_{k=0}^p \frac{1}{n+k} & \sum_{k=0}^p \frac{1}{(n+k)^2} & \dots & \sum_{k=0}^p \frac{1}{(n+k)^{m+1}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sum_{k=0}^p \frac{1}{(n+k)^m} & \sum_{k=0}^p \frac{1}{(n+k)^{m+1}} & \dots & \sum_{k=0}^p \frac{1}{(n+k)^{2m}} \end{vmatrix},$$

при любых  $m$  и  $p$  были рассмотрены в предыдущей статье [1]. Степень  $m$  обобщенного многочлена, при помощи которого строится преобразование (1), назовем степенью интерполирования (1). Рассмотрим некоторые частные случаи.

1. Начнем с простейшего случая  $m = 0$ . Интерполирование выполняется при помощи постоянной величины.

Преобразование (1) принимает очень простой вид:

$$\sigma_n = \frac{1}{p+1} \sum_{k=0}^p S_{n+k}, \quad p = 1, 2, \dots \quad (2)$$

Полученное преобразование регулярно и в большой степени изучено как суммирующее расходящиеся ряды. Нас же интересуют в основном вопросы улучшения сходимости последовательности при преобразовании. Обратим преобразование (2):

$$\begin{aligned} S_{s(p+1)+r} &= (p+1) \{ \sigma_{(s-1)(p+1)+r+1} - \sigma_{(s-1)(p+1)+r} + \\ &+ \sigma_{(s-2)(p+1)+r+1} - \sigma_{(s-2)(p+1)+r} + \dots + \sigma_{r+1} - \sigma_r \} + S_r, \\ r &= 0, 1, \dots, p; \quad s = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (3)$$

Если  $\sigma_n$  ( $n = 0, 1, \dots$ ) считать произвольной сходящейся последовательностью, то (3) дает параметрическое представление всякой последовательности  $S_n$  ( $n = 0, 1, \dots$ ), которая преобразуется в сходящуюся  $\sigma_n$  после преобразования (2). Из (3) видно, что в сходящиеся  $\sigma_n$  могут преобразоваться и расходящиеся  $S_n$ . Легко убедиться в этом, если положить  $\sigma_n$  равной некоторой постоянной, тогда  $S_{h(p+1)+r} = S_r$  и переменная  $S_n$  периодически принимает свои начальные  $S_0, S_1, \dots, S_p$  значения. Она будет сходящейся, если только все начальные значения равны между собой.

Пусть  $S_n \rightarrow S$  при  $n \rightarrow \infty$ . Тогда и  $\sigma_n \rightarrow S$  при  $n \rightarrow \infty$ . Выясним, когда происходит улучшение сходимости. Так как последовательности  $S_n$  и  $\sigma_n$  сходятся, их можно представить в виде

$$\begin{aligned} S_n &= S + \varepsilon_n, \quad \varepsilon_n \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty), \\ \sigma_n &= S + \eta_n, \quad \eta_n \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty). \end{aligned}$$

Преобразование (2) устанавливает соотношение между погрешностями  $\eta_n$  и  $\varepsilon_n$ :

$$\eta_n = \frac{1}{p+1} (\varepsilon_n + \varepsilon_{n+1} + \dots + \varepsilon_{n+p}),$$

которое дает возможность оценить  $\eta_n$ :

$$\min_{j=0, 1, \dots, p} \varepsilon_{n+j} \leq \eta_n \leq \max_{j=0, 1, \dots, p} \varepsilon_{n+j}. \quad (4)$$

Таким образом, если сходимост  $S_n \rightarrow S$  односторонняя и  $\varepsilon_n$  сохраняет знак, то улучшения сходимости произойти не может. Если же  $\varepsilon_n$  будет колебаться, приближаясь к нулю, причем колебания происходят на каждом отрезке (из  $p+1$  точек), то могут произойти сокращения и сходимост может улучшиться, т. е.  $\eta_n$  будет стремиться к нулю быстрее, чем  $\varepsilon_n$ .

Пусть  $\varepsilon_n$  представима в виде

$$\varepsilon_n = a_0 \omega_0(n) + a_1 \omega_1(n) + \dots, \quad (5)$$

где  $\omega_k(n) \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$  и

$$\omega_{k+1}(n) = o[\omega_k(n)].$$

При  $a_0 \neq 0$   $\varepsilon_n = O[\omega_0(n)]$  и

$$\begin{aligned} \eta_n &= a_0 \frac{\omega_0(n) + \omega_0(n+1) + \dots + \omega_0(n+p)}{p+1} + \\ &+ a_1 \frac{\omega_1(n) + \omega_1(n+1) + \dots + \omega_1(n+p)}{p+1} + \dots \end{aligned} \quad (6)$$

Если  $\omega_0(n) + \omega_0(n+1) + \dots + \omega_0(n+p) = 0$ , то порядок малости у  $\eta_n$  повышается по сравнению с  $\varepsilon_n$ .

2.  $m = 1$ . Линейному интерполированию соответствует линейное нерегулярное [1] преобразование

$$\sigma_n = \frac{\sum_{k=0}^p \frac{S_{n+k}}{n+k} \sum_{l=0}^p \frac{k-l}{(n+l)^2}}{\sum_{k=0}^p \frac{1}{n+k} \sum_{l=0}^p \frac{k-l}{(n+l)^2}}, \quad p = 2, 3, \dots, \quad (7)$$

коэффициенты которого имеют значения

$$A(k) = \frac{1}{n+k} \frac{\sum_{l=0}^p \frac{k-l}{(n+l)^2}}{\sum_{k=0}^p \frac{1}{n+k} \sum_{l=0}^p \frac{k-l}{(n+l)^2}} = O(n),$$

и некоторые из них могут возрастать так же быстро, как  $n$ . Преобразование (7) можно представить [1] в виде линейной комбинации интерполяционных преобразований

$$U_n = (n+1)S_{n+1} - nS_n: \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \sigma_n = & \frac{1}{\sum_{k=0}^p \frac{1}{n+k} \sum_{l=0}^p \frac{k-l}{(n+l)^2}} \left\{ U_{n+p-1} \sum_{l=0}^{p-1} \frac{p-l}{(n+p)^2(n+l)^2} + \right. \\ & + U_{n+p-2} \sum_{l=0}^{p-2} \left[ \frac{p-l}{(n+p)^2(n+l)^2} + \frac{p-1-l}{(n+p-1)^2(n+l)^2} \right] + \dots + \\ & + U_{n+1} \sum_{l=0}^1 \left[ \frac{p-l}{(n+p)^2(n+l)^2} + \dots + \frac{2-l}{(n+2)^2(n+l)^2} \right] + \\ & \left. + U_n \left[ \frac{p}{(n+p)^2 n^2} + \frac{p-1}{(n+p-1)^2 n^2} + \dots + \frac{1}{(n+1)^2 n^2} \right] \right\}. \quad (9) \end{aligned}$$

Вновь полученное линейное преобразование (9) уже относительно последовательности  $U_n$ , связанной с  $S_n$  соотношением (8), регулярно [1]. Представляет интерес отметить, что преобразование (7) может переводить некоторые расходящиеся последовательности  $S_n$  в сходящиеся последовательности  $\sigma_n$ , как это имело место в случае  $m = 0$ . Чтобы убедиться в этом, рассмотрим разностное однородное уравнение, соответствующее выражению в фигурных скобках в (9):

$$\begin{aligned} & U_{n+p-1} \sum_{l=0}^{p-1} \frac{p-l}{(n+p)^2(n+l)^2} + \dots + \\ & + U_n \left[ \frac{p}{(n+p)^2 n^2} + \dots + \frac{1}{(n+1)^2 n^2} \right] = 0. \quad (10) \end{aligned}$$

Все коэффициенты в (10) положительны и убывают, как  $n^{-4}$ . Если все уравнение (10) умножить, например, на  $(n+p)^2(n+p-1)^2$ , то получим равносильное (10) однородное разностное уравнение, коэффициенты которого при неограниченном росте  $n$  приближаются к некоторым конечным постоянным величинам, а само уравнение при больших  $n$  близко к разностному уравнению

$$\begin{aligned} pU_{n+p-1} + 2(p-1)U_{n+p-2} + \dots + k(p-k+1)U_{n+p-k} + \\ + \dots + (p-1)2U_{n+1} + pU_n = 0 \end{aligned} \quad (11)$$

с характеристическим уравнением

$$P(\lambda) \equiv \lambda^{p-1} + 2 \frac{p-1}{p} \lambda^{p-2} + \dots + (p-1) \frac{2}{p} \lambda + 1 = 0. \quad (12)$$

**Теорема.** Все корни уравнения (12) при любом  $p$  различны и лежат на окружности радиуса 1.

Преобразуем многочлен  $P(\lambda)$ :

$$\begin{aligned} P(\lambda) &\equiv \sum_{k=1}^p \lambda^{p-k} k(p-k+1) = \left[ \sum_{k=1}^{p+1} \lambda^{p-k+1} k \right]'_{\lambda} = \\ &= \left[ \frac{\lambda^{p+2} - 1}{(\lambda - 1)^2} - (p+2) \frac{1}{\lambda - 1} \right]'_{\lambda} = \\ &= \frac{1}{(\lambda - 1)^3} \{ p\lambda^{p+2} - (p+2)\lambda^{p+1} + (p+2)\lambda - p \}. \end{aligned}$$

Итак,

$$(\lambda - 1)^3 P(\lambda) = p\lambda^{p+2} - (p+2)\lambda^{p+1} + (p+2)\lambda - p. \quad (13)$$

Рассмотрим многочлен справа в (13); чтобы найти его корни, по модулю равные единице, положим  $\lambda = e^{i\varphi}$ , где  $\varphi$  — действительное число, тогда (13) перейдет в тригонометрическое уравнение

$$R(\varphi) = p \sin \frac{(p+2)\varphi}{2} - (p+2) \sin \frac{p\varphi}{2} = 0, \quad (14)$$

а главное значение его корня  $\varphi_k$  удовлетворяет неравенству

$$\frac{k\pi}{p+1} < \frac{\varphi_k}{2} < \frac{(k+1)\pi}{p+1}, \quad k = 1, 2, \dots, p-1,$$

так как в точках  $\frac{k\pi}{p+1}$  и  $\frac{(k+1)\pi}{p+1}$   $R(\varphi)$  разного знака.

Следовательно,

$$\lambda_k = e^{i\varphi_k}, \quad k = 1, 2, \dots, p-1,$$

— корни уравнения (12).

Так как корни характеристического уравнения (12) все по модулю равны между собой, теорема Перрона [см. 2], позволяющая выяснять поведение решения линейного однородного уравнения с переменными коэффициентами, к уравнению (10) неприменима. Но, как показано в работе [3], для решения уравнения (10) имеет место равенство

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|U_n|}{(1 + \varepsilon)^n} = 0,$$

где  $\varepsilon$  — произвольное сколь угодно малое положительное число, т. е. решение уравнения (10) если и растет, то медленнее любой геометрической прогрессии со знаменателем, большим единицы.

Пусть  $U_n = \lambda^n n^\rho$ , где  $\lambda$  — один из корней уравнения (12). После преобразования (9) получаем

$$\begin{aligned} \sigma_n = & \frac{\lambda^n n^\rho (n+p)^{-2} n^{-2}}{\sum_{k=0}^p \frac{1}{n+k} \sum_{l=0}^p \frac{k-l}{(n+l)^2}} \left\{ \frac{\rho}{n} \left[ (p-1)\lambda^{p-1} \sum_{l=0}^{p-1} (p-l) + \right. \right. \\ & + \dots + \lambda \sum_{l=0}^1 [(p-l) + \dots + (2-l)1] \left. \right] - \lambda^{p-1} \sum_{l=0}^{p-1} \frac{(p-l)2l}{n+l} + \\ & + \lambda^{p-2} \sum_{l=0}^{p-2} \left[ -\frac{(p-l)2l}{n+l} + (p-1-l) \left( \frac{2}{n+p-1} - \frac{2l}{n+l} \right) \right] + \dots + \\ & + \lambda \sum_{l=0}^1 \left[ -(p-l) \frac{2l}{n+l} + \dots + (2-l) \left( \frac{2p-4}{n+2} - \frac{2l}{n+l} \right) \right] + \\ & \left. + (p-1) \frac{2}{n+p-1} + (p-2) \frac{4}{n+p-2} + \dots + \frac{2(p-1)}{n+1} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \right\}. \end{aligned} \quad (15)$$

Так как

$$\sum_{k=0}^p \frac{1}{n+k} \sum_{l=0}^p \frac{k-l}{(n+l)^2} = O\left(\frac{1}{n^4}\right),$$

то  $\sigma_n = O(\lambda^n n^{\rho-1})$  и при  $\rho < 1$  преобразованная последовательность  $\sigma_n$  сходится ( $|\lambda| = 1$ ), в то время как  $U_n = \lambda^n n^\rho$  при  $\rho \geq 0$  всегда расходится. Кроме того, вычисления показывают, что при  $\rho = \frac{4}{3}$   $\sigma_n$  также сходится.

Если  $U_n = \lambda^n n^\rho$ , то из (8)

$$S_n = \frac{S_1}{n} + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} U_k = \frac{S_1}{n} + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \lambda^k k^\rho.$$

При  $\rho \leq 0$   $S_n$  сходится, при  $\rho = \frac{4}{3}$   $S_n$  расходится, а  $\sigma_n$  в обоих случаях сходится.

3.  $m = 2$ . Квадратичному интерполированию соответствует линейное нерегулярное [1] преобразование

$$\begin{aligned} \sigma_n = & \frac{\sum_{k_1=0}^p \frac{S_{n+k_1}}{(n+k_1)^2} \sum_{k_2=0}^p \frac{k_1-k_2}{(n+k_2)^3} \sum_{k_3=0}^p \frac{(k_1-k_3)(k_2-k_3)}{(n+k_3)^4}}{\sum_{k_1=0}^p \frac{1}{(n+k_1)^2} \sum_{k_2=0}^p \frac{k_1-k_2}{(n+k_2)^3} \sum_{k_3=0}^p \frac{(k_1-k_3)(k_2-k_3)}{(n+k_3)^4}}, \quad (16) \\ & p = 3, 4, \dots \end{aligned}$$

Относительно преобразования (16) доказываются те же факты, что и для преобразования (7), только более трудоемким путем.

Коэффициенты преобразования (16) — величины порядка  $n^2$  [1].

Преобразование (16) можно представить [1] в виде линейной комбинации интерполяционных преобразований

$$U_n = \frac{1}{2} \{ (n+2)^2 S_{n+2} - 2(n+1)^2 S_{n+1} + n^2 S_n \};$$

$$\sigma_n = \frac{2 \sum_{i=0}^{p-2} U_{n+i} \sum_{k_1=0}^i (i+1-k_1) \sum_{k_2 < k_3}^{0 \dots p} \frac{(k_1-k_2)(k_1-k_3)(k_2-k_3)^2}{(n+k_1)^4 (n+k_2)^4 (n+k_3)^4}}{\sum_{k_1=0}^p \frac{1}{(n+k_1)^2} \sum_{k_2=0}^p \frac{k_1-k_2}{(n+k_2)^3} \sum_{k_3=0}^p \frac{(k_1-k_3)(k_2-k_3)}{(n+k_3)^4}}. \quad (17)$$

Преобразование (17) регулярно [1] относительно последовательности  $U_n$ , коэффициенты его при больших  $n$  стремятся к конечным значениям. Соответствующее однородное уравнение с постоянными коэффициентами имеет вид

$$\sum_{i=0}^{p-2} U_{n+i} \sum_{k_1=0}^i (i+1-k_1) \sum_{k_2 < k_3}^{0 \dots p} (k_1-k_2)(k_1-k_3)(k_2-k_3)^2 = 0. \quad (18)$$

**Теорема.** *Корни характеристического уравнения для (18) все различны и по модулю равны 1:*

$$P(\lambda) \equiv \sum_{i=0}^{p-2} \lambda^i \sum_{k_1=0}^i (i+1-k_1) \sum_{k_2 < k_3}^{0 \dots p} (k_1-k_2)(k_1-k_3)(k_2-k_3)^2 = 0.$$

Выпишем равносильное уравнение:

$$(\lambda-1)^5 P(\lambda) = p(p-1)\lambda^{p+3} - 2(p-1)(p+3)\lambda^{p+2} + (p+3)(p+2)\lambda^{p+1} - (p+2)(p+3)\lambda^2 + 2(p+3)(p-1)\lambda - p(p-1) = 0.$$

Найдем корни вида  $\lambda = e^{i\varphi}$ , где  $\varphi$  — действительное число, и покажем, что отличных от 1  $p-2$  корня.

Равносильное тригонометрическое уравнение

$$p(p-1) \sin(p+3) \frac{\varphi}{2} - 2(p-1)(p+3) \sin(p+1) \frac{\varphi}{2} + (p+3)(p+2) \sin(p-1) \frac{\varphi}{2} = 0$$

обладает тем свойством, что левая часть его при переходе от  $\frac{k\pi}{p}$  к  $\frac{(k+1)\pi}{p}$  меняет знак. Значит, корни уравнения  $\varphi_k$  удовлетворяют неравенству

$$\frac{k\pi}{p} < \frac{\varphi_k}{2} < \frac{(k+1)\pi}{p}, \quad k = 1, 2, \dots, p-2,$$

и не равны 1. Равные 1 корни получаем при  $k = 0$  и  $k = p-1$ .

### Литература

1. Кругликова Л. Г. Весті АН БССР, сер. фіз.-мат. наук, № 2, 1970.
2. Гельфонд А. О. Исчисление конечных разностей. Изд. «Наука», 1967.
3. Коновальцев И. В. Ж. вычисл. матем и матем. физ., 2, № 6, 1962.

Институт математики  
АН БССР

Поступило в редакцию  
23.11 1970

В. П. ГРИБКОВА

### РЕШЕНИЕ ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ ОДНИМ ИЗ ПРИБЛИЖЕННЫХ МЕТОДОВ

Рассмотрен общий подход к решению линейных операторных уравнений методом асимптотических полиномов, предложенным для решения дифференциальных и интегральных уравнений в [1, 2]. Даны доказательства сходимости и оценка погрешности на основе линейных функционалов, вычисляемых одновременно с решением. Показана возможность выбора порядка аппроксимации приближенного решения в зависимости от необходимой степени точности.

Пусть в уравнении

$$L(y) = y(x), \quad -1 \leq x \leq 1, \quad (1)$$

$L(y)$  является вполне непрерывным линейным неоднородным оператором над классом функций, удовлетворяющих по  $x$  условию Гельдера, тогда решение  $y(x)$  будет также принадлежать классу Гельдера.

Приближенное решение получим на основе асимптотических полиномов, рассмотренных в [1]. Введем следующие обозначения:

$$Q_n^y(x) = \sum_{i=0}^{n+1} y_i \pi_i(x),$$

$$Q_n^{\bar{y}}(x) = \sum_{i=0}^{n+1} \bar{y}_i \pi_i(x),$$

$$Q_n^L(y) = \sum_{i=0}^{n+1} L_i(y) \pi_i(x), \quad (2)$$

$$Q_n^L(Q_n^{\bar{y}}) = \sum_{i=0}^{n+1} L_i(Q_n^{\bar{y}}) \pi_i(x),$$

где  $\pi_i(x)$  определены через полиномы Чебышева 1-го рода в [1],  $y_i$  — ординаты точного решения в точках

$$x_i = \cos \frac{i\pi}{n+1}, \quad i = \overline{0, n+1}, \quad (3)$$

$\bar{y}_i$  — ординаты приближенного решения в тех же точках.

Для (1) запишем приближенное решение в виде

$$Q_n^L(Q_n^{\bar{y}}) = Q_n^{\bar{y}}(x) \quad (4)$$

или

$$\sum_{i=0}^{n+1} L_i(Q_n^{\bar{y}}) \pi_i(x) = \sum_{i=0}^{n+1} \bar{y}_i \pi_i(x). \quad (5)$$

Сравнением коэффициентов при  $\pi_i(x)$ ,  $i = \overline{0, n+1}$ , получим для ординат  $\bar{y}_i$  систему линейных алгебраических уравнений

$$\begin{aligned} L_i(Q_n^y) &= \bar{y}_i, \\ i &= \overline{0, n+1}. \end{aligned} \quad (6)$$

Поскольку рассматриваются неоднородные операторные уравнения, то система (6) тоже является неоднородной.

Если определитель системы отличен от нуля, то решение существует и единственно.

Такое определение приближенного решения равносильно со следующим подходом:

$$y(x) \approx Q_n^y(x) = \sum_{i=0}^n c_i x^i \quad (5.a)$$

и

$$\begin{aligned} L(Q_n^y(x_k)) &= Q_n^y(x_k) + (-1)^k M_n^Q, \\ k &= \overline{0, n+1}; \quad x_k = \cos \frac{k\pi}{n+1}. \end{aligned} \quad (6.a)$$

Функционал  $M_n^Q$  определяется равенством

$$M_n^Q = \frac{1}{n+1} \sum_{m=0}^{n+1} (-1)^m L(Q_n^y(x_m)), \quad (6.6)$$

означает умножение нулевого и  $(n+1)$ -го членов на  $1/2$ . На основе определений [2, 3], (6) и (6.a) выполняется

$$\bar{y}_k = Q_n^y(x_k) + (-1)^k M_n^Q, \quad k = \overline{0, n+1}. \quad (6.b)$$

Рассмотрим оценку погрешности приближенного решения.

Из уравнения (1) вычтем уравнение (5):

$$\begin{aligned} y(x) - Q_n^y(x) &= L(y) - Q_n^L(Q_n^y) = L(y) - L(Q_n^y) + L(Q_n^y) - Q_n^L(Q_n^y) = \\ &= L(y - Q_n^y) + [L(Q_n^y) - Q_n^L(Q_n^y)]. \end{aligned} \quad (7)$$

Вычислим второе слагаемое в (7), на основании [1]:

$$L(Q_n^y) - Q_n^L(Q_n^y) = \sum_{s=n}^{\infty} M_{ns}^Q \psi_{ns+1}(x), \quad (8)$$

где функционалы

$$M_{ns}^Q = \frac{1}{s+1} \sum_{j=0}^{s+1} (-1)^j L(Q_n^y(x_j)), \quad (9)$$

функции  $\psi_{ns+1}(x)$  определены в [1] и выражаются через полиномы Чебышева первого рода.

Тогда справедливо:

$$y(x) - Q_n^y(x) = L(y - Q_n^y) + \sum_{s=n}^{\infty} M_{ns}^Q \psi_{ns+1}(x) \quad (10)$$

$$y(x) - \bar{Q}_n^y(x) = \sum_{s=n}^{\infty} M_{ns}^Q R_\lambda \psi_{ns+1}, \quad (11)$$

где  $R_\lambda$  — резольвента оператора  $L$  в смысле [8],  $\lambda$  — регулярная точка оператора,  $R_\lambda \psi_{ns+1}$  — резольвента, представленная через функции  $\psi_{ns+1}(x)$  [3].

Функционалы  $M_{ns}^y$ , построенные для  $y(x)$ , имеют вид

$$M_{ns}^y = \frac{1}{s+1} \sum_{j=0}^{s+1} (-1)^j L_j(y). \quad (12)$$

Если функция  $y(x)$  имеет  $p$ -ю производную из класса Гельдера с показателем  $0 < \alpha < 1$ ,  $p > 0$ , то выполняется неравенство [1]

$$|M_{ns}^y| \leq \frac{\text{const}}{s^{p+\alpha}}. \quad (13)$$

Поскольку  $\bar{Q}_n^y(x)$  представляет собой полином, то для функционалов  $M_{ns}^Q$  тоже будет справедливо

$$|M_{ns}^Q| \leq \frac{\text{const}}{s^{p+\alpha}}. \quad (14)$$

Учитывая ограниченность резольвенты вполне непрерывного оператора, когда  $\lambda$  является регулярной точкой, конечность величин  $\max_x |\psi_{ns+1}(x)|$  и неравенство (14), для (11) будет выполняться

$$\|y - \bar{Q}_n^y\| \leq \frac{\text{const}}{n^{p-1+\alpha-\varepsilon}}, \quad (15)$$

( $\varepsilon > 0$  бесконечно малая), что доказывает сходимость приближенного решения  $\bar{Q}_n^y(x)$  к точному  $y(x)$  при  $n \rightarrow \infty$  и  $\max_x |f(x)| = \|f\|$ .

Для функций  $y(x)$  из класса Гельдера справедлива оценка [7]

$$\|y - Q_n^y\| \leq E_n^y \left[ 6 + \frac{2}{\pi} \ln(n+1) \right], \quad (16)$$

$E_n^y$  — величина наименьшего уклонения полинома наилучшего приближения функции  $y(x)$ .

Вычислим разность  $y(x) - \bar{Q}_n^y(x)$  следующим образом:

$$\begin{aligned} y(x) - \bar{Q}_n^y(x) &= [y(x) - Q_n^y(x)] + [Q_n^y(x) - \bar{Q}_n^y(x)] = \\ &= [y(x) - Q_n^y(x)] + [Q_n^L(y) - Q_n^L(\bar{Q}_n^y)], \end{aligned} \quad (17)$$

откуда

$$\|y - \bar{Q}_n^y\| \leq E_n^y \left[ 6 + \frac{2}{\pi} \ln(n+1) \right] \frac{1}{1 - \|Q_n^L\|},$$

так как

$$\|y - Q_n^y\| \leq E_n^y \left[ 6 + \frac{2}{\pi} \ln(n+1) \right] + \|Q_n^L\| \|y - \bar{Q}_n^y\|. \quad (18)$$

Если выполняется условие  $\|Q_n^L\| < 1$ , то из (18) следует сходимость  $Q_n^y(x)$  к  $y(x)$  при  $n \rightarrow \infty$ .

Простейшая оценка погрешности, которая следует из (10) и (11), будет

$$\|y - Q_n^y\| \leq \frac{\sum_{s=n}^{\infty} |M_{ns}^Q| \max_x |\psi_{n,s+1}(x)|}{1 - \|L\|}. \quad (19)$$

Если положить  $n = 0$  в (10), то

$$y(x) - Q_0^y(x) = L(y - Q_0^y) + \sum_{s=0}^{\infty} M_{0s}^Q \psi_{0s+1}(x), \quad (20)$$

при этом  $Q_0^y(x)$  является константой и ряд (20) представляет собой разложение  $y(x)$  в ряд по функционалам  $M_{0s}^Q$ .

Это разложение можно использовать при выборе номера  $n$ , для которого приближенное решение отклоняется от точного не более, чем на заранее заданную величину. Для этого необходимо вычислить  $Q_0^y(x)$  функционалы  $M_{0s}^Q$ ,  $\|L\|$  и подставить эти величины в (19). Начиная с некоторого номера  $N$ , члены ряда станут меньше заранее заданной величины погрешности. После вычисления приближенного решения  $Q_N^y(x)$  снова по формуле (19) можно провести уточнение погрешности.

1. Применение метода к интегральным уравнениям Фредгольма второго рода

$$\varphi(x) = \lambda \int_{-1}^{+1} K(x, y) \varphi(y) dy + f(x). \quad (21)$$

Приближенное решение можно определить, пользуясь соотношениями [3]

$$Q_n^{\varphi}(x) = \lambda \int_{-1}^{+1} Q_n^K(x, y) Q_n^{\varphi}(y) dy + Q_n^f(x) \quad (22)$$

или

$$\bar{\varphi}_i = \bar{\varphi}(x_i), \quad f_i = f(x_i), \quad K_i(y) = K(x_i, y),$$

$$x_i = \cos \frac{i\pi}{n+1}, \quad i = \overline{0, n+1}, \quad (23)$$

$$\sum_{i=0}^{n+1} \bar{\varphi}_i \pi_i(x) = \lambda \int_{-1}^{+1} \sum_{i=0}^{n+1} K_i(y) \pi_i(x) Q_n^{\varphi}(y) dy + \sum_{i=0}^{n+1} f_i \pi_i(x).$$

Сравнивая коэффициенты при  $\pi_i(x)$ , получим систему неоднородных алгебраических уравнений

$$\bar{\varphi}_i = \lambda \int_{-1}^{+1} K_i(y) \sum_{i=0}^{n+1} \bar{\varphi}_i \pi_i(y) dy + f_i, \quad (24)$$

$$i = \overline{0, n+1}.$$

Функционалы  $M_{ns}^Q$  можно вычислить следующим образом:

$$M_{ns}^Q = \frac{1}{s+1} \lambda \sum_{j=0}^{n+1} (-1)^j \left[ \int_{-1}^{+1} K_j(y) Q_n^{\varphi}(y) dy + f_j \right]. \quad (25)$$

Оценка погрешности следует из равенства

$$\varphi(x) - Q_n^{\bar{\varphi}}(x) = \sum_{s=n}^{\infty} M_{ns}^Q \left[ \psi_{ns+1} + \lambda \int_{-1}^{+1} \Gamma(x, y, \lambda) \psi_{ns+1}(y) dy \right], \quad (26)$$

где  $\Gamma(x, y, \lambda)$  — резольвента уравнения (21).

Для всех значений  $\lambda$ , когда будет выполняться

$$|\lambda| < \frac{1}{\|K\|}, \quad (27)$$

$$\|\varphi - Q_n^{\bar{\varphi}}\| \leq \frac{\sum_{s=n}^{\infty} |M_{ns}^Q| \max_x |\psi_{ns+1}(x)|}{1 - \|K\| |\lambda|}. \quad (28)$$

На основе теоремы Канторовича [4] о сходимости метода вырожденного ядра для интегральных уравнений Фредгольма, можно из (26) получить оценку погрешности в области более широкой, чем (27) [3].

Пользуясь свойством (20), можно получить предварительную оценку погрешности, учитывая, что

$$Q_0^{\bar{\varphi}}(x) = \frac{f(-1) + f(1)}{2 - \lambda \int_{-1}^{+1} [K(-1, y) + K(1, y)] dy} = Q_0^{\bar{\varphi}}, \quad (29)$$

$$M_{0s}^Q = \lambda Q_0^{\bar{\varphi}} \int_{-1}^{+1} M_s^K(y) dy + M_s^f,$$

где

$$M_s^K(y) = \frac{1}{s+1} \sum_{j=0}^{s+1} (-1)^j K(x_j, y);$$

$$M_s^f = \frac{1}{s+1} \sum_{j=0}^{s+1} (-1)^j f(x_j).$$

Для сходимости приближенного решения к точному в числителе (28) бесконечная сумма должна стремиться к нулю. Это условие выполняется, если  $f(x)$  и  $K(x, y)$  по переменной  $x$  из класса Гельдера.

2. Решение интегральных уравнений Вольтерра второго рода. Для уравнения

$$\varphi(x) + \lambda \int_0^x K(x, y) \varphi(y) dy = f(x), \quad (30)$$

$$0 \leq x \leq h, \quad 0 \leq y \leq h,$$

приближенное решение можно определить следующим образом:

$$Q_n^{\bar{\varphi}}(x) + \lambda \sum_{i=0}^{n+1} \pi_i(x) \int_0^{x_i} K(x_i, y) Q_n^{\bar{\varphi}}(y) dy = Q_n^f(x). \quad (31)$$

Сравнивая коэффициенты при  $\pi_i(x)$  (считаем, что  $\pi_i(x)$  преобразованы к промежутку  $[0, h]$ ), получим систему уравнений

$$\bar{\varphi}_i + \lambda \int_0^{x_i} K(x_i, y) \sum_{j=0}^{n+1} \bar{\varphi}_j \pi_j(y) dy = f_i, \quad (32)$$

$$i = 0, n+1.$$

Оценка погрешности будет следовать из равенства

$$\varphi(x) - Q_n^{\bar{\varphi}}(x) = \sum_{s=n}^{\infty} M_{ns} \left[ \psi_{ns+1}(x) + \lambda \int_0^x H(x, y, \lambda) \psi_{ns+1}(y) dy \right], \quad (33)$$

если учесть, что выражение, стоящее в скобках справа в (33), оценивается сверху величиной

$$\max_{0 < x < h} |\psi_{ns+1}(x)| \exp(Nh|\lambda|), \quad (34)$$

где

$$N = \max_{0 < x, y < h} |K(x, y)|. \quad (35)$$

Следовательно,

$$\|\varphi - Q_n^{\bar{\varphi}}\| \leq \exp(Nh|\lambda|) \sum_{s=n}^{\infty} |M_{ns}| \max_x |\psi_{ns+1}(x)|. \quad (36)$$

Функционалы ряда (36) вычисляются по формуле

$$M_{ns} = \frac{1}{s+1} \sum_{j=0}^{s+1} (-1)^j \left[ \lambda \int_0^{x_j} K(x_j, y) Q_n^{\bar{\varphi}}(y) dy - f_j \right]. \quad (37)$$

Приближенное решение будет абсолютно и равномерно сходиться к точному при  $n \rightarrow \infty$ , если  $f(x)$  и  $K(x, y)$  по переменной  $x$  из класса Гельдера.

3. Дифференциальные уравнения с начальными условиями

$$\frac{d^m u(x)}{dx^m} + a_1(x) \frac{d^{m-1} u(x)}{dx^{m-1}} + \dots + a_m(x) u(x) = g(x), \quad (38)$$

$$u(0) = c_0,$$

$$u'_1(0) = c_1,$$

$$\dots \dots \dots \quad (39)$$

$$u^{(m-1)}(0) = c_{m-1}.$$

При обозначениях

$$\frac{d^m u(x)}{dx^m} = \varphi(x),$$

$$\frac{d^{m-1} u(x)}{dx^{m-1}} = \int_0^x \varphi(x) dx + c_{m-1}, \quad (40)$$

$$u(x) = c_{m-1} \frac{x^{m-1}}{(m-1)!} + \dots + c_0 + \int_0^x \frac{(x-y)^{m-1}}{(m-1)!} \varphi(y) dy$$

уравнение (38) преобразуется к виду (30) с ядром [5]

$$K(x, y) = \sum_{\beta=1}^m a_{\beta}(x) \frac{(x-y)^{\beta-1}}{(\beta-1)!}; \quad 0 \leq x \leq h, \quad 0 \leq y \leq h, \quad (41)$$

$$f(x) = g(x) - c_{m-1} a_1(x) - (c_{m-1} x + c_{m-2}) a_2(x) -$$

$$- \dots - \left( c_{m-1} \frac{x^{m-1}}{(m-1)!} + \dots + c_1 x + c_0 \right) a_m(x).$$

Приближенное решение получается для  $m$ -й производной, поэтому оценка погрешности (36) будет справедлива для разности соответствующих производных.

Оценка погрешности для искомой функции  $u(x)$  и приближенного решения  $Q_n^u(x)$  может быть получена из (36) умножением правой части на

$$\max_{0 < x < h} \int_0^h \left| \frac{(x-y)^{m-1}}{(m-1)!} \right| dy. \quad (42)$$

Сходимость следует при условии, что все коэффициенты из класса Гельдера.

4. Краевые задачи. Для примера можно рассмотреть задачу второго порядка с краевыми условиями первого рода

$$u''(x) + a_1(x)u'(x) + a_2(x)u(x) = g(x), \quad (43)$$

$$u(0) = u_0, \quad u(h) = u_1. \quad (44)$$

Согласно методу, предложенному в [2], приближенное решение определим следующим образом:

$$\varphi(x) = u''(x) \approx Q_n^{\bar{\varphi}}(x) = \sum_{i=0}^{n+1} u_{ni} \pi_i(x);$$

$$u'(x) \approx Q_n^{u'}(x) = \int_0^x Q_n^{\bar{\varphi}}(y) dy + c_1;$$

$$u(x) \approx Q_n^u(x) = \int_0^x \int_0^y Q_n^{\bar{\varphi}}(z) dz dy + c_1 x + c_2 = \int_0^x (x-y) Q_n^{\bar{\varphi}}(y) dy + c_1 x + c_2. \quad (45)$$

Найдем  $c_1$  и  $c_2$  из краевых условий:

$$c_2 = u_0, \quad (46)$$

$$c_1 = \frac{1}{h} \left[ u_1 - u_0 - \int_0^h (h-y) Q_n^{\bar{\varphi}}(y) dy \right].$$

Используя ядра

$$H(x, y) = \begin{cases} \frac{y}{h} & \text{при } 0 \leq y \leq x, \\ -\frac{h-y}{h} & \text{при } x \leq y \leq h \end{cases} \quad (47)$$

и

$$K(x, y) = \begin{cases} \frac{y}{h}(x-h) & \text{при } 0 \leq y \leq x, \\ \frac{x}{h}(h-y) & \text{при } x \leq y \leq h, \end{cases} \quad (48)$$

запишем

$$Q_n^{\bar{\varphi}}(x) = - \sum_{i=0}^{n+1} \left[ a_1(x_i) \int_0^h H(x_i, y) Q_n^{\bar{\varphi}}(y) dy + a_2(x_i) \int_0^h K(x_i, y) Q_n^{\bar{\varphi}}(y) dy \right] \pi_i(x) + Q_n^f(x), \quad (49)$$

откуда

$$u_i = -a_1(x_i) \int_0^h H(x_i, y) Q_n^{\bar{\varphi}}(y) dy - a_2(x_i) \int_0^h K(x_i, y) Q_n^{\bar{\varphi}}(y) dy + f_i, \quad (50)$$

$$i = \overline{0, n+1}.$$

Обозначим

$$-a_1(x) \int_0^h H(x, y) Q_n^{\bar{\varphi}}(y) dy - a_2(x) \int_0^h K(x, y) Q_n^{\bar{\varphi}}(y) dy = \Phi(x, Q_n^{\bar{\varphi}}),$$

тогда для оценки погрешности справедливо

$$\|\Phi - Q_n^{\bar{\varphi}}\| \leq \frac{\sum_{s=n}^{\infty} |M_{ns}| \max_x |\Psi_{ns+1}(x)|}{1 - |\Phi|}, \quad (51)$$

где

$$|\Phi| = \max_x |a_1(x)| \|H\| + \max_x |a_2(x)| \|K\|, \quad (52)$$

$$M_{ns} = \frac{1}{s+1} \sum_{j=0}^{s+1} (-1)^j \Phi(x_j, Q_n^{\bar{\varphi}}). \quad (53)$$

Оценка погрешности для приближенного решения будет

$$\|u - Q_n^{\bar{u}}\| \leq \|K\| \frac{\sum_{s=n}^{\infty} |M_{ns}| \max_x |\Psi_{ns+1}(x)|}{1 - |\Phi|}. \quad (54)$$

Сходимость будет следовать в том случае, если все коэффициенты из класса Гельдера.

Можно рассмотреть другой подход к решению краевых задач, когда приближенное равенство (45) записывается не для второй производной, а

для искомой функции, и производные получаются дифференцированием ее, т. е. алгоритм строится относительно определения функции

$$u = L(u) \quad (55)$$

с учетом краевых условий, а производные выражаются так:

$$u'(x) \approx \sum_{i=0}^{n+1} u_i \pi_i'(x), \quad (56)$$

$$u''(x) \approx \sum_{i=0}^{n+1} u_i \pi_i''(x).$$

Система алгебраических уравнений для определения ординат будет иметь вид:

$$\bar{u}_i = Q_n^L(\bar{Q}_n^u), \quad \bar{u}_0 = u_0, \quad (57)$$

$$i = \bar{1}, n, \quad \bar{u}_{n+1} = u_1.$$

Если для данной краевой задачи существует функция Грина и (43), (44) преобразуются к интегральному уравнению Фредгольма второго рода, то приближенное решение (57) будет совпадать с приближенным решением интегрального уравнения, изложенным в пункте 1.

Аналогично изложенному в 1—4 можно рассмотренный алгоритм вместе с оценками погрешности распространить на ряд других задач, например интегрирование функций, решение интегро-дифференциальных уравнений и др.

Единый операторный подход к приближенному решению уравнений позволяет объединить и упростить рассмотрение вопросов оценки погрешности и сходимости, которые в некоторых работах [2, 3, 6] рассматривались для каждого частного случая в отдельности и накладывали более жесткие ограничения на операторы.

### Литература

1. Этерман И. И. Изв. вузов, Математика, № 2, 1966.
2. Этерман И. И. Изв. вузов, Математика, № 6, 1966.
3. Грибкова В. П. Вестн. АН БССР, сер. физ.-мат. наук, № 1, 1968.
4. Канторович Л. В., Крылов В. И. Приближенные методы высшего анализа. М.—Л., 1962.
5. Трикоми Ф. Интегральные уравнения. М., 1964.
6. Стамалиев К. С. Сб. тр. по естеств.-техн. наукам Фрунзенск. политехн. ин-та, в. 29, 51, 1967.
7. Этерман И. И. Изв. вузов, Математика, № 6, 1962.
8. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. М., 1968.

Институт ядерной энергетики  
АН БССР

Поступило в редакцию  
10.11 1970

УДК 518 : 517/944/947

А. В. САМУСЕНКО

**ИССЛЕДОВАНИЕ СХОДИМОСТИ СХЕМ ПОВЫШЕННОЙ ТОЧНОСТИ МЕТОДА ИНТЕГРАЛЬНЫХ СООТНОШЕНИЙ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ТИПА**

Построение  $2k+1$ -слойных схем ( $k \geq 1$ ) методом интегральных соотношений было проведено в [1]. В настоящей статье на примере пятислойных схем ( $k=2$ ) доказывается сходимость и приводятся оценки погрешности метода для случая эллиптического уравнения. Заметим, что сходимость метода интегральных соотношений исследовалась в [3-5].

Рассмотрим следующую задачу Дирихле:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( p(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right) - d(x)u + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y) \quad (0 \leq x \leq l_1, 0 \leq y \leq l_2), \quad (1)$$

$$u(x, 0) = \varphi_1(x), u(x, l_2) = \varphi_2(x) \quad (0 \leq x \leq l_1), \quad (2)$$

$$u(0, y) = \psi_1(y), u(l_1, y) = \psi_2(y) \quad (0 \leq y \leq l_2),$$

где

$$p(x) > 0, d(x) \geq 0.$$

Кроме того, не ограничивая общности, будем считать  $\psi_1(y) = \psi_2(y) \equiv 0$  (этого всегда можно достигнуть заменой неизвестной функции).

Задачу (1), (2) на прямых  $y=y_n = nh$  ( $h > 0; n=0, 1, \dots, N+1; y_0=0, y_{N+1}=l_2$ ) можно приближенно свести (см. [1] при  $k=2$ ) к краевой задаче для следующей системы обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка:

$$h^2 \left[ \sum_{m=0}^2 A_2^m Q^m \right] L(U) + \left[ \sum_{m=1}^2 H_2^m Q^m \right] U = F, \quad (3)$$

$$U(0) = 0, U(l_1) = 0, \quad (4)$$

где

$$L(U) = \frac{d}{dx} \left( p(x) \frac{d}{dx} U \right) - d(x)U,$$

$$U[u_1, u_2, \dots, u_N]^T, u_n = u_n(x) \approx u(x, y_n) \quad (0 \leq x \leq l_1; n=1, 2, \dots, N),$$

$$A_2^0 = 3\alpha_1 + \alpha_2, A_2^1 = \frac{15}{12}\alpha_1 + \frac{1}{12}\alpha_2, A_2^2 = \frac{17}{240}\alpha_1 - \frac{1}{240}\alpha_2,$$

$$H_2^1 = 3\alpha_1 + \alpha_2, H_2^2 = \alpha_1,$$

$\alpha_1$  и  $\alpha_2$  — числовые параметры, область изменения которых определится условиями сходимости,  $F$  — известная вектор-функция.

Система (3), (4) аппроксимирует задачу (1), (2) с точностью  $O(h^8)$ . В силу линейности оператора  $L(U)$  погрешность метода  $\gamma_n = \gamma_n(x) = u(x, y_n) - u_n(x)$  ( $n = 1, 2, \dots, N$ ) является решением следующей задачи:

$$h^2 \left[ \sum_{m=0}^2 A_2^m Q^m \right] L(\Gamma) + \left[ \sum_{m=1}^2 H_2^m Q^m \right] \Gamma = R, \quad (5)$$

$$\Gamma(0) = 0, \quad \Gamma(l_1) = 0. \quad (6)$$

Здесь

$$\Gamma = \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \gamma_{N-1} \\ \gamma_N \end{bmatrix}, \quad R = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ r_{N-1} \\ r_N \end{bmatrix},$$

$$r_1 = r_1^* - \bar{R}^* \left( \frac{\partial^2 u(x, y_1)}{\partial y^2} \right) + h^2 d(x) \bar{R}_1^*(u(x, y_1)) - h^2 p'(x) \bar{R}_1^* \left( \frac{\partial u(x, y_1)}{\partial x} \right) - \\ - h^2 p(x) \bar{R}_1^* \left( \frac{\partial^2 u(x, y_1)}{\partial x^2} \right) = z_1(x) h^8,$$

$$r_n = r_n^* = z_n(x) h^8 \quad (n = 2, 3, \dots, N-1),$$

$$r_N = r_N^* - R^* \left( \frac{\partial^2 u(x, y_N)}{\partial y^2} \right) + h^2 d(x) R_1^*(u(x, y_N)) - h^2 p'(x) R_1^* \left( \frac{\partial u(x, y_N)}{\partial x} \right) - \\ - h^2 p(x) R_1^* \left( \frac{\partial^2 u(x, y_N)}{\partial x^2} \right) = z_N(x) h^8$$

(непрерывность производных  $\frac{\partial^8 u}{\partial y^8}$ ,  $\frac{\partial^8 u}{\partial x^2 \partial y^6}$  в области  $(0 \leq x \leq l_1, 0 \leq y \leq l_2)$  предполагается).

Известно (см. [2]), что спектр оператора  $L(u) = (p(x)u')' - d(x)u$  при условиях  $u(0) = u(l_1) = 0$  действителен, положителен и дискретен. Собственные функции можно сделать ортонормированными:

$$L(\varphi_k) = -\lambda_k \varphi_k \quad (k = 1, 2, \dots), \quad (\varphi_k, \varphi_l) = \int_0^{l_1} \varphi_k(x) \varphi_l(x) dx = \delta_{kl},$$

где

$$\lambda_k \geq k^2 \frac{\pi^2}{l_1^2} p + d, \quad p = \min_{0 < x < l_1} p(x), \quad d = \min_{0 < x < l_1} d(x), \quad (7)$$

$\varphi_k(x)$  ограничена по абсолютной величине при всех  $k$  и всех  $x$  из  $[0, l_1]$ .

Разложим функции  $\gamma_n(x)$  в ряд Фурье по собственным функциям оператора  $L$ :

$$\gamma_n^*(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k(x) \alpha_{k,n} \quad (n = 1, 2, \dots, N; 0 \leq x \leq l_1), \quad (8)$$

где

$$\alpha_{k,n} = (\varphi_k, \gamma_n) = \int_0^{l_1} \varphi_k(x) \gamma_n(x) dx.$$

Ниже покажем, что ряд (8) сходится равномерно на отрезке  $[0, l_1]$  и, следовательно,  $\gamma_n^*(x) = \gamma_n(x)$ . Кроме того, дадим оценку сверху абсолютному значению суммы этого ряда.

Умножив каждое из уравнений системы (5) на функцию  $\varphi_k(x)$  скалярно, для коэффициентов  $\alpha_{k,n}$  получим следующую систему уравнений:

$$-\lambda_k h^2 \left[ \sum_{m=0}^2 A_2^m Q^m \right] \Delta_k + \left[ \sum_{m=1}^2 H_2^m Q^m \right] \Delta_k = P_k \quad (9)$$

$$(k = 1, 2, \dots),$$

где

$$\Delta_k = \begin{bmatrix} \alpha_{k,1} \\ \alpha_{k,2} \\ \cdot \\ \cdot \\ \alpha_{k,N-1} \\ \alpha_{k,N} \end{bmatrix}, \quad P_k = \begin{bmatrix} \beta_{k,1} \\ \beta_{k,2} \\ \cdot \\ \cdot \\ \beta_{k,N-1} \\ \beta_{k,N} \end{bmatrix},$$

$$\beta_{k,n} = \int_0^{l_1} \varphi_k(x) r_n(x) dx.$$

Используя преобразующую матрицу

$$B = B^* = B^{-1} = \left\| \sqrt{\frac{2}{N+1}} \sin \frac{\pi ij}{N+1} \right\|_{i,j=1}^N,$$

получим

$$\sum_{m=0}^2 A_2^m Q^m = B \left[ \delta_{ij} \sum_{m=0}^2 A_2^m \mu_i^m \right] B^{-1},$$

$$\sum_{m=1}^2 H_2^m Q^m = B \left[ \delta_{ij} \sum_{m=1}^2 H_2^m \mu_i^m \right] B^{-1},$$

где  $\mu_i = -2 + 2 \cos \frac{\pi i}{N+1}$  ( $i = 1, 2, \dots, N$ ) — собственные значения матрицы  $Q$ ,  $\delta_{ij}$  — символ Кронекера,  $[\cdot]$  — диагональная матрица. Тогда систему (9) можно переписать в следующем виде:

$$B \left[ \delta_{ij} \left\{ \sum_{m=1}^2 H_2^m \mu_i^m - \lambda_k h^2 \sum_{m=0}^2 A_2^m \mu_j^m \right\} \right] B^{-1} \Delta_k = P_k,$$

или

$$\Delta_k = B \left[ \delta_{ij} \left\{ \sum_{m=1}^2 H_2^m \mu_i^m - \lambda_k h^2 \sum_{m=0}^2 A_2^m \mu_j^m \right\} \right] B^{-1} P_k. \quad (10)$$

Выражение (10) оценим по норме (будем иметь в виду норму III), при этом будем предполагать, что область изменения параметров  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  определяется неравенствами  $\alpha_2 + 3\alpha_1 > 0$ ,  $9\alpha_2 - 13\alpha_1 > 0$  для  $\alpha_2 > 0$  и  $\alpha_2 + 3\alpha_1 < 0$ ,  $9\alpha_2 - 13\alpha_1 < 0$  для  $\alpha_2 < 0$  (см. [6]):

$$\|\Delta_k\| \leq \|B[\delta_{ij} / \left\{ \sum_{m=1}^2 H_2^m \mu_i^m - \lambda_k h^2 \sum_{m=0}^2 A_2^m \mu_j^m \right\}] B^{-1}\| \cdot \|P_k\|$$

$$(k = 1, 2, \dots), \quad (11)$$

где

$$\|B[\delta_{ij} / \left\{ \sum_{m=1}^2 H_2^m \mu_i^m - \lambda_k h^2 \sum_{m=0}^2 A_2^m \mu_j^m \right\}] B^{-1}\| \leq$$

$$\leq \max_{1 \leq i < N} \left| \left( -2 + 2 \cos \frac{\pi i}{N+1} \right) \left( \alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_1 \cos \frac{\pi i}{N+1} \right) - \right.$$

$$\left. - \frac{\lambda_k h^2}{60} \left[ (17\alpha_1 - \alpha_2) \cos^2 \frac{\pi i}{N+1} + (116\alpha_1 + 12\alpha_2) \cos \frac{\pi i}{N+1} + 47\alpha_1 + 49\alpha_2 \right] \right|^{-1} \leq$$

$$\leq \frac{1}{h^2} \left| \frac{d(\alpha_1, \alpha_2)}{\sin^2 \frac{\pi}{2(N+1)} \frac{\pi}{2(N+1)} q(\alpha_1, \alpha_2) + \lambda_k} \right| =$$

$$= \frac{1}{h^2} \left| \frac{d(\alpha_1, \alpha_2)}{\frac{60\pi^2}{l_1^2} \left( \frac{\sin \frac{\pi}{2(N+1)}}{\frac{\pi}{2(N+1)}} \right)^2 q(\alpha_1, \alpha_2) + \lambda_k} \right| < \frac{d(\alpha_1, \alpha_2)}{h^2 \lambda_k};$$

$$\|P_k\| \leq \beta_k \sqrt{N}; \quad \beta_k = \max_{1 \leq n < N} |\beta_{k,n}|.$$

Из неравенства (11) для коэффициентов ряда (8) будем иметь

$$|\alpha_{k,n}| \leq \frac{d(\alpha_1, \alpha_2)}{h^2 \lambda_k} \beta_k \sqrt{N} \quad (n = 1, 2, \dots, N; k = 1, 2, \dots).$$

Теперь для ряда (8) нетрудно получить оценку вида

$$|\gamma_n(x)| \leq h^{5.5} l_1 d(\alpha_1, \alpha_2) \sqrt{l_2} \varphi^2 z \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k}$$

$$(0 \leq x \leq l_1; n = 1, 2, \dots, N),$$

где  $z = \max_{1 \leq n < N} \max_{0 \leq x < l_1} |z_n(x)|$ ,  $\varphi = \max_{1 \leq k < \infty} \max_{0 \leq x < l_1} |\varphi_k(x)|$ ,  $d(\alpha_1, \alpha_2)$  и  $q(\alpha_1, \alpha_2)$  есть ограниченные величины для конечных  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$ , определенные в [6].

Используя неравенство (7) для собственных чисел  $\lambda_k$ , для погрешности метода имеем

$$|\gamma_n(x)| \leq h^{5.5} l_1^3 \sqrt{l_2} d(\alpha_1, \alpha_2) \varphi^2 z \frac{1}{6\rho}$$

$$(0 \leq x \leq l_1; n = 1, 2, \dots, N),$$

откуда непосредственно следует равномерная сходимость при  $h \rightarrow 0$  решения задачи (3), (4) к решению задачи (1), (2) со скоростью порядка  $h^{5.5}$ .

Изменив схему доказательства, покажем теперь, что скорость сходимости предложенных схем имеет порядок  $h^6$ , однако область изменения параметров  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  будет другой. Для этого распишем матричную систему (9) на  $N$  отдельных уравнений:

$$\begin{aligned} & \left[ \alpha_1 - \frac{h^2}{240} \lambda_k (17\alpha_1 - \alpha_2) \right] (\alpha_{k,n-2} + \alpha_{k,n+2}) + \left[ \alpha_2 - \alpha_1 - \frac{h^2}{240} \lambda_k \times \right. \\ & \times (232\alpha_1 + 24\alpha_2) \left. \right] (\alpha_{k,n-1} + \alpha_{k,n+1}) - \left[ 2\alpha_2 + \frac{h^2}{240} \lambda_k (222\alpha_1 + 194\alpha_2) \right] \times \\ & \times \alpha_{k,n} = \beta_{k,n} \\ & (n = 2, 3, \dots, N-1; k = 1, 2, \dots; \alpha_{k,0} = \alpha_{k,N+1} = 0), \\ & \left[ \alpha_1 - \frac{h^2}{240} \lambda_k (17\alpha_1 - \alpha_2) \right] \alpha_{k,3} + \left[ \alpha_2 - \alpha_1 - \frac{h^2}{240} \lambda_k (232\alpha_1 + 24\alpha_2) \right] \times \\ & \times \alpha_{k,2} - \left[ \alpha_1 + 2\alpha_2 + \frac{h^2}{240} \lambda_k (205\alpha_1 + 195\alpha_2) \right] \alpha_{k,1} = \beta_{k,1}, \quad (12) \\ & \left[ \alpha_1 - \frac{h^2}{240} \lambda_k (17\alpha_1 - \alpha_2) \right] \alpha_{k,N-2} + \left[ \alpha_2 - \alpha_1 - \frac{h^2}{240} \lambda_k (232\alpha_1 + 24\alpha_2) \right] \times \\ & \times \alpha_{k,N-1} - \left[ \alpha_1 + 2\alpha_2 + \frac{h^2}{240} \lambda_k (205\alpha_1 + 195\alpha_2) \right] \alpha_{k,N} = \beta_{k,N}. \end{aligned}$$

Пусть  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  удовлетворяют неравенствам

$$\alpha_1 > 0, \quad -276\alpha_1 + 144\alpha_2 > 0. \quad (13)$$

Из всех  $\alpha_{k,n}$  ( $k = \text{const}; n = 1, 2, \dots, N$ ) выберем  $n = n_0 = n_0(k)$ , такой, что  $|\alpha_{k,n_0}| \geq |\alpha_{k,n}|$ , тогда в области (13), положив в равенствах (12)  $n = n_0$ , можно получить следующее неравенство:

$$|\alpha_{k,n}| \leq \frac{240 |\beta_{k,n_0}|}{(-276\alpha_1 + 144\alpha_2) \lambda_k h^2} \quad (k = \text{const}; n = 1, 2, \dots, N).$$

Используя это неравенство, оценим абсолютное значение суммы ряда (8):

$$\begin{aligned} |Y_n^*(x)| &= \left| \sum_{k=1}^{\infty} \Phi_k(x) \alpha_{k,n} \right| \leq \frac{240}{(-276\alpha_1 + 144\alpha_2) h^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\Phi_k(x) \beta_{k,n_0}|}{\lambda_k} \leq \\ &\leq \frac{240 \max_{1 < k < \infty} \max_{0 < x < l_1} |\Phi_k(x, r_{n_0})|}{(-276\alpha_1 + 144\alpha_2) h^2} \max_{1 < k < \infty} \max_{0 < x < l_1} |\Phi_k| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k} \leq \\ &\leq \frac{240 h^6 \varphi^2 l_1 z}{-276\alpha_1 + 144\alpha_2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2 \frac{\pi^2}{l_1^2} p + d} \leq \frac{240 h^6 \varphi^2 l_1^3 z}{(-276\alpha_1 + 144\alpha_2) \pi^2 p} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \\ &= \frac{10 h^6 \varphi^2 l_1^3 z}{(-69\alpha_1 + 36\alpha_2) p}, \end{aligned}$$

где (см. [2])

$$\varphi_h(x) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{l_1} \sqrt{\rho(x)}} \sin \left[ \frac{k\pi}{\sqrt{l_1}} \int_0^x \sqrt{\frac{1}{\rho(x)}} dx \right] + \frac{r_h(x)}{k};$$

$\varphi_h(x)$  равномерно ограничена по абсолютной величине при всех  $k$  и всех  $x$  из  $[0, l_1]$ . Аналогичную оценку получаем и для области  $\alpha_1 < 0$ ,  $-276\alpha_1 + 144\alpha_2 < 0$ . В итоге получим оценку погрешности метода

$$|\gamma_n(x)| \leq \frac{10h^6 \varphi^2 l_1^3 z}{|-69\alpha_1 + 36\alpha_2| \rho},$$

откуда непосредственно следует равномерная сходимость при  $h \rightarrow 0$  решения задачи (3), (4) к решению задачи (1), (2) со скоростью порядка  $h^6$ .

### Литература

1. Самусенко А. В. Вестник БГУ, сер. I, № 1, 1970.
2. Смирнов В. И. Курс высшей математики, т. 4. М., 1957.
3. Бобков В. В., Крылов В. И. ДУ, 1, № 2, 1965.
4. Бобков В. В., Самусенко А. В. Вестн. АН БССР, сер. физ.-мат. наук, № 2, 1967.
5. Бобков В. В., Абрашин В. Н. Вестн. АН БССР, сер. физ.-мат. наук, № 3, 1967.
6. Самусенко А. В. Вестник БГУ им. В. И. Ленина, сер. I, № 2, 1970.

Белорусский государственный университет  
им. В. И. Ленина

Поступило в редакцию  
20.III 1970

УДК 517.948.32

И. И. КОМЯК

### НЕЛИНЕЙНАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ТИПА ЗАДАЧИ РИМАНА С ПОЛОЖИТЕЛЬНЫМИ ПОКАЗАТЕЛЯМИ

А. Суся [1] поставил весьма общую нелинейную однородную краевую задачу. В  $(p+1)$ -связной области  $D^+$ , ограниченной контуром  $L$ , состоящим из гладких замкнутых кривых  $L_0, L_1, \dots, L_p$ , и дополнении до полной плоскости  $D^-$  найти кусочно-аналитическую функцию  $\Phi(z) = \{\Phi^+(z), \Phi^-(z)\}$ , удовлетворяющую на  $L$  краевому условию

$$[\Phi^+(t)]^{\alpha(t)} = G(t) [\Phi^-(t)]^{\beta(t)}, \quad (1)$$

где  $G(t)$  — заданная функция, удовлетворяющая условию Гельдера и не обращающаяся в нуль, а показатели  $\alpha(t), \beta(t)$  не обращаются в нуль и являются краевыми значениями аналитических соответственно в  $D^+, D^-$  функций.

Такая общая постановка задачи не позволила автору получить решающие результаты. Исследованным можно считать случай, когда показатели равны обратным величинам от целых чисел.

Частные случаи задачи (1) рассматривались Аржановым [4] и Черепановым [5].

Гахов [2] показал, что при условиях, накладываемых на показатели  $\alpha(t), \beta(t)$  в работе [1], они могут быть лишь постоянными. Им в работах [2, 3] дано исчерпывающее исследование задачи (1) в случае, когда  $\alpha$  и  $\beta$  — целые положительные числа. Исходной точкой решения рассматриваемой задачи было решение соответствующей линейной задачи, так как в этом случае функции  $[\Phi^+(t)]^\alpha$  и  $[\Phi^-(t)]^\beta$  являются краевыми значениями аналитических соответственно в  $D^+$  и  $D^-$  функций.

В настоящей статье мы дадим решение задачи (1) в случае, когда  $\alpha$  и  $\beta$  — положительные числа. Будем предполагать, что хотя бы одно из них является иррациональным. Если эти числа оба рациональны, то, как указал Гахов [2], путем возведения краевого условия в степень, равную общему наименьшему кратному знаменателей  $\alpha$  и  $\beta$ , мы придем к задаче с целыми показателями. Если же хотя бы один из показателей, например  $\beta$ , является иррациональным числом, то непосредственно исходить из решения линейной задачи Римана нельзя, так как функция  $[\Phi^-(z)]^\beta$  в этом случае может иметь точки разветвления.

Для простоты ограничимся случаем, когда контур  $L$  является простой замкнутой гладкой кривой, делящей плоскость на две односвязные области  $D^+, D^-$ , первая из которых содержит начало координат, а вторая — бесконечно удаленную точку. Коэффициент  $G(t)$  не обращается в нуль и принадлежит одному из классов, для которых решается соответствующая линейная задача.

Так как функции  $\Phi^+(z)$  и  $\Phi^-(z)$  могут иметь нули в соответствующих областях  $D^+$  и  $D^-$ , то мы их ищем в виде

$$\Phi^+(z) = \prod_{j=1}^{\mu} (z - z_j^+)^{m_j} \Phi_1^+(z), \quad (2)$$

$$\Phi^-(z) = \frac{1}{z^k} \prod_{j=1}^{\nu} \left(1 - \frac{z_j^-}{z}\right)^{n_j} \Phi_1^-(z),$$

где  $m_j (j = 1, 2, \dots, \mu)$ ,  $n_l (l = 1, 2, \dots, \nu)$ ,  $k$  — целые неотрицательные числа. Через  $z_j^+$  ( $j = 1, 2, \dots, \mu$ ),  $z_l^- (l = 1, 2, \dots, \nu)$  обозначены некоторые конечные точки соответственно в областях  $D^+$  и  $D^-$ . Обозначим  $\sum_{j=1}^{\mu} m_j = N_+$ ,  $k + \sum_{j=1}^{\nu} n_j = N_-$ . Функции  $\Phi_1^{\pm}(z)$  считаем аналитическими и неособенными в соответствующих областях  $D^{\pm}$ .

Подставляя (2) в краевое условие (1), перепишем его в виде

$$\Phi_2^+(t) = G(t) t^{-N_+ \alpha - N_- \beta} \Phi_2^-(t), \quad (3)$$

где

$$\Phi_2^+(z) = \frac{[\Phi_1^+(z)]^{\alpha}}{\left[\prod_{j=1}^{\nu} (z - z_j^-)^{n_j}\right]^{\beta}}, \quad \Phi_2^-(z) = \frac{[\Phi_1^-(z)]^{\beta}}{\left[\prod_{j=1}^{\mu} \left(1 - \frac{z_j^+}{z}\right)^{m_j}\right]^{\alpha}}. \quad (4)$$

Функции  $\Phi_2^{\pm}(z)$  являются аналитическими и неособенными соответственно в областях  $D^{\pm}$ .

На основании принципа аргумента из (3) заключаем, что

$$\kappa = N_+ \alpha + N_- \beta. \quad (5)$$

Так как  $G(t) \neq 0$  — однозначная непрерывная на контуре  $L$  функция, то  $\kappa$  — целое число. Левая часть последнего равенства неотрицательна. Поэтому справедлива

**Теорема 1.** Для разрешимости краевой задачи (1) необходимо, чтобы ее индекс был неотрицательным.

Предположим, что задача (1) разрешима и найдем ее решение. Решая линейную задачу Римана (3) и используя соотношения (4), найдем

$$[\Phi_1^+(z)]^{\alpha} = e^{\Gamma^+(z)} \left[\prod_{j=1}^{\nu} (z - z_j^-)^{n_j}\right]^{\beta} C,$$

$$[\Phi_1^-(z)]^{\beta} = e^{\Gamma^-(z)} \left[\prod_{j=1}^{\mu} \left(1 - \frac{z_j^+}{z}\right)^{m_j}\right]^{\alpha} C,$$

где

$$\Gamma(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\ln[\tau^{-\kappa} G(\tau)]}{\tau - z} d\tau, \quad C = \text{const} \neq 0.$$

Возвращаясь к функциям  $\Phi^\pm(z)$ , получим решение задачи (1) в виде

$$\Phi^+(z) = e^{1/\alpha \Gamma^+(z)} \prod_{j=1}^{\mu} (z - z_j^+)^{m_j} \left[ \prod_{j=1}^{\nu} (z - z_j^-)^{n_j} \right]^{\beta/\alpha} C^{1/\alpha},$$

$$\Phi^-(z) = e^{1/\beta \Gamma^-(z)} \frac{1}{z^{N_+ \alpha / \beta + N_-}} \left[ \prod_{j=1}^{\mu} (z - z_j^+)^{m_j} \right]^{\alpha/\beta} \prod_{j=1}^{\nu} (z - z_j^-)^{n_j} C^{1/\beta}. \quad (6)$$

Введем обозначения  $P_{N_+}(z) = C^{1/\alpha} \prod_{j=1}^{\mu} (z - z_j^+)^{m_j}$ ,  $P_{\tilde{N}_-}(z) = \prod_{j=1}^{\nu} (z - z_j^-)^{n_j}$ , где  $\tilde{N}_- = N_- - k$ . Многочлены  $P_{N_+}(z)$  и  $P_{\tilde{N}_-}(z)$  являются произвольными многочленами степеней соответственно  $N_+$  и  $\tilde{N}_-$ , имеющие нули соответственно в областях  $D^+$  и  $D^-$ , причем у  $P_{\tilde{N}_-}(z)$  коэффициент при старшей степени равен единице.

Следовательно, решение задачи (1), если оно существует, необходимо имеет вид

$$\Phi^+(z) = e^{1/\alpha \Gamma^+(z)} P_{N_+}(z) [P_{\tilde{N}_-}(z)]^{\beta/\alpha}, \quad (7)$$

$$\Phi^-(z) = e^{1/\beta \Gamma^-(z)} P_{\tilde{N}_-}(z) [z^{-N_+} P_{N_+}(z)]^{\alpha/\beta} z^{-N_-}.$$

Отсюда вытекает

**Теорема 2.** *Решение задачи (1), если оно существует, дается формулой (7) и зависит (нелинейно) от  $N_+ + \tilde{N}_- + 1$  произвольных параметров.*

Отметим, что решение (7) по форме совпадает с решением Гахова [2] в случае, когда  $\alpha$  и  $\beta$  — целые положительные числа.

Числа допустимых нулей  $N_+$  и  $N_-$  не являются заданными, а определяются равенством (5). Поэтому справедлива

**Теорема 3.** *Для разрешимости краевой задачи (1) необходимо и достаточно, чтобы неопределенное уравнение (5) имело решение в целых неотрицательных числах.*

Проведем исследование уравнения (5). Если  $\alpha = p/q$ , где  $p > 0$ ,  $q > 0$  — взаимно простые целые числа, а  $\beta$  — иррациональное число, то из (5) следует, что  $N_- = 0$ , а  $N_+ = \frac{\kappa}{p} q$ . Если же  $\beta = p_1/q_1$ ,  $p_1 > 0$ ,  $q_1 > 0$  — взаимно простые целые числа, а  $\alpha$  — иррациональное число, то  $N_+ = 0$ , а  $N_- = \frac{\kappa}{p_1} q_1$ .

Таким образом, справедлива

**Теорема 4.** *Если одно из чисел  $\alpha$ ,  $\beta$  рациональное, а второе — иррациональное, то для разрешимости неопределенного уравнения (5) необходимо и достаточно, чтобы индекс  $\kappa$  нацело делился на числитель рационального показателя. При выполнении этого условия уравнение (5) разрешимо единственным образом.*

Приступим к случаю, когда  $\alpha$  и  $\beta$  — оба иррациональные положительные числа. Справедлива

**Теорема 5.** *Если при иррациональных  $\alpha$  и  $\beta$  решение неопределенного уравнения (5) существует, то оно единственно.*

**Доказательство.** Пусть  $(x_1, y_1)$  — некоторое частное решение неопределенного уравнения (5). Тогда общее его решение можно представить в параметрической форме так:

$$N_+ = x_1 + t\beta, \quad N_- = y_1 - t\alpha, \quad (8)$$

где  $t$  — произвольное действительное число. Из (8) следует, что решение уравнения (5) может быть неединственным только в случае, когда  $at$  и  $\beta t$  будут целыми отличными от нуля числами. Пусть для определенности  $\beta \geq \alpha$ . Тогда в силу равенства  $\beta t = \beta/\alpha \cdot at$  число  $\beta/\alpha$  должно быть рациональным. Итак, решение уравнения (5) может быть неединственным только в случае, когда  $\beta/\alpha$  — рациональное число. Такое решение  $(x_2, y_2)$  не может существовать, так как в противном случае из (5) следовало бы противоречивое равенство  $\kappa/\alpha = x_2 + y_2 \beta/\alpha$ . Теорема доказана.

Следовательно, случай, когда хотя бы один из показателей является иррациональным числом, существенно отличается от случая, когда показатели  $\alpha$  и  $\beta$  — целые или рациональные числа. Там уравнение (5) может иметь несколько различных решений (см. [2]).

Выясним теперь, каким условиям должны удовлетворять  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\kappa$ , чтобы решение неопределенного уравнения (5) существовало, и при выполнении их найдем это решение.

Если  $\kappa = 0$ , то тогда  $N_+ = 0$ ,  $N_- = 0$ . Следовательно, в этом случае единственное нулевое решение уравнения (5) существует при любых  $\alpha$  и  $\beta$ . Пусть  $\kappa > 0$  и существует решение уравнения (5). Очевидно, что при  $\alpha$  и  $\beta$  иррациональных  $N_+ \neq 0$  и  $N_- \neq 0$ . Поэтому из уравнения (5) следует, что при заданном  $\alpha$  число  $\beta$  должно иметь вид

$$\beta = \frac{1}{q} (\kappa - p\alpha), \quad (9)$$

где  $p$  и  $q$  — целые положительные числа, причем  $0 < p < \kappa/\alpha$ . Тогда легко находим  $N_+ = p$ ,  $N_- = q$ .

Таким образом, приходим к следующей теореме.

**Теорема 6.** Если  $\kappa = 0$ , то при любых положительных иррациональных  $\alpha$  и  $\beta$   $N_+ = 0$ ,  $N_- = \tilde{N}_- = 0$ . Решение задачи (1) дается формулами (7), в которых следует положить  $N_+ = 0$ ,  $\tilde{N}_- = 0$ . Если  $\kappa > 0$ , то для разрешимости краевой задачи (1) необходимо и достаточно, чтобы  $\beta$  имело вид (9). Тогда задача (1) разрешима и ее решение выражается формулой (7), где  $N_+ = p$ ,  $\tilde{N}_- = \tilde{q} = q - k$ .

**Пример.** Пусть  $\kappa = 8$ ,  $\alpha = 1 + \sqrt{2}$ . Тогда для разрешимости задачи (1) необходимо и достаточно, чтобы  $\beta$  имело вид

$$\beta = \frac{1}{q} (8 - p - \sqrt{2}p),$$

где  $0 < p < 8/(1 + \sqrt{2})$ , т. е.  $p = 1, 2, 3$ .

Таким образом,  $\beta$  должно быть одним из чисел

$$\beta = \frac{1}{q} (7 - \sqrt{2}), \quad \beta = \frac{1}{q} (6 - 2\sqrt{2}), \quad \beta = \frac{1}{q} (5 - 3\sqrt{2}),$$

где  $q$  — целое положительное число.

Мы выпишем решение для краевой задачи

$$[\Phi^+(t)]^{1+\sqrt{2}} = G(t) [\Phi^-(t)]^{1/q(7-\sqrt{2})}, \quad q = 1, 2, 3, \dots,$$

при  $\text{Ind } G(t) = 8$ . Оно имеет вид

$$\begin{aligned} \Phi^+(z) &= e^{1/(1+\sqrt{2})\Gamma^+(z)} P_{1+}(z) [P_{(q-k)-}(z)]^{1/q} \frac{7-\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}, \\ \Phi^-(z) &= e^{q/(7-\sqrt{2})\Gamma^-(z)} P_{(q-k)-}(z) z^{-q} [z^{-1} P_{1+}(z)]^{\frac{q(1+\sqrt{2})}{7-\sqrt{2}}}, \end{aligned}$$

где  $0 \leq k \leq q$  — порядок нуля функции  $\Phi^-(z)$  в бесконечно удаленной точке. Полученное решение содержит нелинейно  $(2 + q - k)$  произвольных параметров.

В заключение выражаю глубокую признательность академику АН БССР Ф. Д. Гахову за ценные указания.

### Литература

1. Susea A. St. Sercet. mat. (Бухарест), 19, № 1, 155, 1967.
2. Гахов Ф. Д. ДАН СССР, 181, 2, 271, 1968.
3. Гахов Ф. Д. Rev. Roum. math. pures et appl., XIII, 9, 1319, 1968.
4. Аржанов Г. В. СМЖ, 2, 4, 481, 1961.
5. Черепанов Г. П. ДАН СССР, 147, 3, 566, 1962.

Белорусский государственный университет  
им. В. И. Ленина

Поступило в редакцию  
31.III 1970

А. С. ПОТУПА

## ИЗМЕРЕНИЯ, КВАНТОВАНИЕ И ПРИНЦИП ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ

1. За последние годы в развитии полевых аспектов общей теории относительности, связанных, в частности, с попытками квантования гравитации, был достигнут заметный прогресс [1—3]. Как известно, основные надежды при построении конкретных моделей квантованного гравитационного поля возлагались на возможность естественного устранения расходимостей в матричных элементах электродинамики и других теорий. Однако уже первые расчеты в рамках последовательно построенных схем показали, что ситуация может только ухудшаться [4]. Кроме того, в процессе изучения квантовополевых моделей гравитации отчетливо выступили некоторые принципиальные затруднения, связанные прежде всего с нелинейностью уравнений Эйнштейна.

Параллельно с построением различных вариантов формализма была проделана определенная работа по анализу влияния нелинейности на структуру идеализированных измерительных процедур (ИИП), что позволило выделить возникающие трудности «в чистом виде» [5, 6]. Важность работ этого направления, помимо вопросов конструктивности, обусловлена отсутствием эмпирической основы квантования гравитационного поля (типа фотоэффекта и т. п.). Отсутствие экспериментальных указаний на корпускулярное проявление гравитации порождает значительный разнобой в методах квантования и, что наиболее важно, в понимании меры его необходимости. При этом важно учитывать, что даже на чисто классическом уровне мы еще не имеем экспериментально подтверждаемых волновых решений эйнштейновских уравнений, т. е. наиболее удобного для квантования «классического сырья» \*).

В настоящей работе мы рассмотрим проблему согласования результатов измерительных процедур для слабого гравитационного поля с квантовомеханическим формализмом.

Можно выделить два аргумента общего характера в пользу необходимости квантования. Первый из них, эстетический, заключается в том, что любая фундаментальная модель, которая может быть сформулирована как теория поля (с выделением динамических переменных на основе канонического формализма), должна рано или поздно квантоваться. Второй аргумент, в духе ИИП, основан на необходимости связи между квантовыми свойствами заряженных пробных тел и поля. Для его оценки обратимся к изучению конкретных процедур.

2. Прежде всего представляет интерес определение квантового поля, т. е. задача об индивидуальном измерении полевых компонент. Принято

\*) В настоящее время имеются указания на появление в опытах Вебера по поиску гравитационных волн [7] эффектов, не объяснимых известными средствами. Пока наиболее очевидной интерпретацией этих эффектов, которую выдвигает сам Вебер, является регистрация гравитационных волн.

считать, что главная трудность таких измерений связана с нелинейностью эйнштейновских уравнений. Действительно, как показали Инфельд и Шильд [8], определение геодезической для пробного тела возможно только в пределе  $m \rightarrow 0$ , где  $m$  — масса пробного тела. При конечной массе на ускорение тела будет влиять не только значение гравитационного поля в точке, где оно находится, но и значения поля в других точках области с размером порядка гравитационного радиуса  $R_{gr} = \frac{2\gamma m}{c^2}$ ,

где  $\gamma = 6,67 \cdot 10^{-8} \text{ см}^3 \text{ сек}^{-2} \text{ г}^{-1}$  — гравитационная константа. Поскольку сама возможность получения уравнений движения из полевых уравнений следует из нелинейной структуры последних, необходимость предельной процедуры ( $m \rightarrow 0$ ) может рассматриваться как нелинейный эффект ОТО. Таким образом, определение классического гравитационного поля по измерениям в системе пробных тел (пробных гравитационных зарядов) оказывается возможным лишь в пределе исчезающей массы. Андерсон [5] указал, что это обстоятельство находится в противоречии с определением квантованного поля, для точного измерения которого масса пробного тела должна выбираться крайне большой. Впоследствии Редже [6] показал, что данная трудность не позволяет сформулировать проблему измеримости в теории гравитации по аналогии с электродинамикой. При этом измерения отдельных компонент гравитационных напряженностей (символов Кристоффеля) с помощью пробного тела массы  $m$  возможны лишь в областях пространства, по размерам значительно превышающих величину  $R_{gr}$ .

Таким образом, парадокс Андерсона—Редже приводит к явным ограничениям на интерпретацию квантования в ОТО в рамках ИИП по образцу электродинамики, и без его разрешения трудно рассчитывать на создание последовательной схемы. Мы будем предполагать, однако, что компоненты гравитационного поля можно измерять сколь угодно точно, если несколько уточнить определение пробного тела для данной задачи.

Как мы видели выше, трудности, приводящие к парадоксу Андерсона—Редже, «локализованы» в области с размером  $\sim R_{gr}$ , где существенна нелинейность. Это означает, что при выборе пробного тела мы должны соблюдать условие

$$\frac{R_{gr}}{L} \ll 1, \quad (1)$$

где  $L$  — средний размер пробного тела ( $L \sim V^{\frac{1}{3}}$ ). Условие (1) необходимо сохранять и в квантовом случае, когда из-за роста массы  $R_{gr} \rightarrow \infty$ . Поэтому объем усреднения для поля нужно выбирать сразу достаточно большим. Тот факт, что средний размер должен превышать гравитационный радиус, представляется вполне естественным, если из определения пробных зарядов для гравитационных ИИП сразу исключить коллапсирующие объекты. Но именно таковыми являются тела, чей физический радиус (в нашем случае  $R_{ph} \sim L$ ) равен гравитационному [9]. Следовательно, учет того, что объект, испытавший коллапс, по определению, не может служить частью измерительного устройства, позволяет практически устранить противоречия в ИИП из-за предельных процедур.

С учетом этого обстоятельства можно утверждать, что усредненное по 4-области  $G$  поле

$$\Gamma_{\chi, \lambda \mu}(G) = \int_G \Gamma_{\chi, \lambda \mu}(x) dG \quad (2)$$

является измеримым объектом. Действительно, погрешность при измерении за счет флуктуаций импульса пробного тела имеет вид, например,

$$\Delta\Gamma_{k,00} = \frac{\Delta p_k}{QT}, \quad (3)$$

где  $Q = \sqrt{\gamma} m$ .

Увеличивая точность определения  $p_k$ , можно обратить (3) в нуль, но при этом будет расти поле излучения самого пробного тела

$$\Delta\Gamma' = A\Delta x^2, \quad (4)$$

где  $A$  — некоторая константа\*). Поэтому для устранения индивидуальной погрешности к пробному телу необходимо приложить компенсирующую силу вида

$$F = -QAx^2. \quad (5)$$

Таким образом, в принципе, можно добиться любой точности.

3. Перейдем теперь к анализу измерения напряженностей гравитационного поля в двух пространственно-временных областях  $G_1$  и  $G_2$ . Существенным упрощением для дальнейших построений будет ограничение линейной аппроксимацией эйнштейновских уравнений. Это ограничение можно считать достаточно реалистичным, поскольку типично квантовой областью является как раз теория слабых полей (с исчезающе малой нелинейностью).

С другой стороны, линейную модель можно рассматривать как первое приближение к точной теории или, по аналогии с  $\lambda\varphi^n$ -моделями, считать нелинейные члены самодействием поля, описывающим взаимодействие свободных гравитонов [2—4]. Последние же могут быть получены только на основе линейной теории. Измерения в двух областях, расположенных времениподобно друг относительно друга, оказывают взаимное влияние благодаря излучению гравитационных волн. Для получения волновых решений уравнений Эйнштейна к линейной аппроксимации прибегать не обязательно, но только в линейном случае мы можем пользоваться простой суперпозицией поля, измеряемого в данной области  $G_1$ , и поля излучения из  $G_2$ .

Введем уравнения гравитационного поля в виде [9]

$$\frac{1}{2} \square \psi_{\mu\nu} = -\frac{8\pi\gamma}{c^4} T_{\mu\nu}, \quad (6)$$

где  $\psi_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \delta_{\mu\nu} h$ ,  $T_{\mu\nu}$  — тензор энергии-импульса вещества, взятый с учетом используемых порядков малости.

Калибровочные условия зададим обычным образом:

$$\frac{\partial \psi_{\mu\nu}}{\partial x^\nu} = 0, \quad (7)$$

а для  $T_{\mu\nu}$  получим

$$\frac{\partial T_{\mu\nu}}{\partial x^\nu} = 0. \quad (8)$$

\*) Неопределенность поля имеет вид (4) из-за квадрупольного характера излучения (см. (12)).

При учете свойств  $\delta$ -функции можно построить частные (излучательные) решения уравнений (6) в виде «квадрупольного представления»:

$$\Psi_{ik} = D_{ik} \int_{V_1} dV_1 \int_{t_1'}^{t_1''} dt_1 \frac{\partial^2}{\partial t_1^2} \left[ \frac{\delta \left( t_2 - t_1 - \frac{r}{c} \right)}{r} \right], \quad (9)$$

$$\Psi_{i0} = D_{ik} \int_{V_1} dV_1 \int_{t_1'}^{t_1''} dt_1 \frac{\partial^2}{\partial t_1 \partial x_1^k} \left[ \frac{\delta \left( t_2 - t_1 - \frac{r}{c} \right)}{r} \right], \quad (10)$$

$$\Psi_{00} = D_{ik} \int_{V_1} dV_1 \int_{t_1'}^{t_1''} dt_1 \frac{\partial^2}{\partial x_1^i \partial x_1^k} \left[ \frac{\delta \left( t_2 - t_1 - \frac{r}{c} \right)}{r} \right]. \quad (11)$$

Отсюда для компонент напряженностей  $\Gamma_{\lambda, \mu\nu} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial g_{\lambda\mu}}{\partial x^\nu} + \frac{\partial g_{\lambda\nu}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} \right\}$  получим

$$\Gamma_{i,kl} = \frac{1}{2} \int_{V_1} dV_1 \int_{t_1'}^{t_1''} dt_1 \left( D_{ik} \frac{\partial^3}{\partial t_1^2 \partial x_2^l} + D_{il} \frac{\partial^3}{\partial t_1^2 \partial x_2^k} - D_{kl} \frac{\partial^3}{\partial t_1^2 \partial x_2^i} \right) \frac{\delta \left( t_2 - t_1 - \frac{r}{c} \right)}{r}, \quad (12)$$

$$\Gamma_{i,k0} = \frac{1}{2} \int_{V_1} dV_1 \int_{t_1'}^{t_1''} dt_1 \left( D_{ik} \frac{\partial^3}{\partial t_1^2 \partial t_2} + D_{il} \frac{\partial^3}{\partial t_1 \partial x_1^i \partial x_2^k} - D_{kl} \frac{\partial^3}{\partial x_1^i \partial x_2^i \partial t_1} \right) \frac{\delta \left( t_2 - t_1 - \frac{r}{c} \right)}{r}, \quad (13)$$

$$\Gamma_{i,00} = \frac{1}{2} \int_{V_1} dV_1 \int_{t_1'}^{t_1''} dt_1 \left( 2D_{ik} \frac{\partial^3}{\partial t_1 \partial t_2 \partial x_1^k} - D_{lm} \frac{\partial^3}{\partial x_1^i \partial x_1^m \partial x_2^i} \right) \frac{\delta \left( t_2 - t_1 - \frac{r}{c} \right)}{r}, \quad (14)$$

$$\Gamma_{0,00} = \frac{D_{ik}}{2} \int_{V_1} dV_1 \int_{t_1'}^{t_1''} dt_1 \left( \frac{\partial^3}{\partial x_1^i \partial x_1^k \partial t_2} \right) \frac{\delta \left( t_2 - t_1 - \frac{r}{c} \right)}{r}. \quad (15)$$

В формулах (9) — (15)  $D_{ik}$  — матрица квадрупольного момента. Интегрирование проводится по области  $G_1$ , а потенциалы и напряженности ищутся в области  $G_2$ .

Построенные решения фактически являются точными излучательными решениями, а выбранное представление удобно для получения информации о полевых компонентах при использовании соотношений неопределенностей для пробного тела. Аналогичный прием построения «дипольного представления» был использован в работе Бора и Розенфельда по электродинамическим ИИП [10]. Выбор представления является принципиальным пунктом для понимания различия результатов измерительных процедур в теории гравитации и электродинамике. Дело в том, что в терминах теории излучения принцип эквивалентности, лежащий в основе ОТО, означает отсутствие дипольного гравитационного излучения вследствие равенства нулю гравитационных дипольных моментов. Это обстоятельство, естественно, ведет к новому по сравнению с электродинамикой виду корреляции погрешностей.

Итак, неизвестное смещение  $\Delta x$  пробного тела приводит к появлению плотности квадрупольного момента  $D_{ik} \sim \frac{\sqrt{\gamma} m}{V} \Delta x_i \Delta x_k$ . Тогда, согласно (14), для неопределенности поля излучения имеем, например,

$$\Delta \Gamma_{i,00} = \frac{1}{2} \int_{V_1} dV_1 \int_{t_1'}^{t_1''} dt_1 \left( 2D_{ik}(\Delta x) \frac{\partial^3}{\partial t_1 \partial x_1^k \partial t_2} - D_{lm}(\Delta x) \frac{\partial^3}{\partial x_1^l \partial x_1^m \partial x_2^i} \right) \frac{\delta \left( t_2 - t_1 - \frac{r}{c} \right)}{r}. \quad (16)$$

Если расположить две 4-области таким образом, чтобы сигнал из  $G_2$  не достигал  $G_1$ , то полные неопределенности в каждой области будут иметь вид (согласно (3) и (16))

$$\Delta \Gamma_{k,00}(G_1) = \frac{\Delta p_k}{Q_1 T_1} \simeq \frac{h}{\Delta x_1 Q_1 T_1}, \quad (17)$$

$$\Delta \Gamma_{i,00}(G_2) = \frac{\Delta p_i}{Q_2 T_2} + \frac{Q_1}{2V_1 V_2 T_2} \int dG_1 \int dG_2 \left( 2\Delta x_i \Delta x_k \frac{\partial^3}{\partial t_1 \partial t_2 \partial x_1^k} - \Delta x_i \Delta x_m \frac{\partial^3}{\partial x_1^l \partial x_1^m \partial x_2^i} \right) \frac{\delta \left( t_2 - t_1 - \frac{r}{c} \right)}{r}, \quad (18)$$

где учтено усреднение по  $G_r$ .

Перемножив (17) и (18) и устремляя  $\Delta x_2$  к бесконечности, получим соотношение неопределенностей вида\*)

$$\Delta \Gamma_{k,00} \Delta \Gamma_{i,00} \simeq \frac{h}{G_1 G_2} \Delta x_l \int dG_1 dG_2 \frac{\partial}{\partial x^l} \left\{ \delta_{ik} \frac{\partial^2}{\partial t_1 \partial t_2} - \frac{\partial^2}{\partial x_1^k \partial x_2^i} \right\} \times \frac{\delta \left( t_2 - t_1 - \frac{r}{c} \right)}{r}. \quad (19)$$

\*) Такая частная ситуация для пробных тел разбиралась Гайтлером [11] как наглядный пример «работы» процедур Бора—Розенфельда в электродинамике.

Если импульс пробного тела в  $G_2$  измерен точно ( $\Delta p_2=0$ ) (во всяком случае точнее, чем положение пробного тела в  $G_1$ ), то из (19) следует, что мы можем добиться сколько угодно малого значения корреляции погрешностей напряженностей поля, варьируя  $\Delta x$ . Аналогичного вида соотношения неопределенностей можно построить и для других компонент напряженностей. Принципиальная структура этих выражений будет следующей:

$$\Delta \Gamma_{i,kl} \Delta \Gamma_{m,np} = \Delta x_s A_{iklmnp}^s + \Delta x_i B_{klmnp} + \dots, \quad (20)$$

где  $A_{iklmnp}^s$ ,  $B_{klmnp}$  и т. д. величины, составленные по образцу интеграла в (19). Если ничем не ограничивать точность измерения координат пробного тела, то при  $\Delta x \rightarrow 0$  соотношения неопределенностей (19) теряют ограничительный смысл, т. е. компоненты гравитационного поля в областях, одно-сторонне связанных световым сигналом, могут быть измерены совместно с любой точностью.

Естественно, этот результат не согласуется с перестановочными соотношениями типа Гупты [4]

$$[h_{\mu\nu}(x), h_{\rho\sigma}(x')] = i(\delta_{\mu\rho}\delta_{\nu\sigma} + \delta_{\mu\sigma}\delta_{\nu\rho})D(x-x'), \quad (21)$$

правая часть которых не исчезает при времениподобной разности ( $x-x'$ ).

Выражение (21) нетрудно «оправдать», применяя представление неопределенности в виде дифференциала, что использовалось, например, Тиррингом в [12] для интерпретации электродинамических коммутаторов в рамках ИИП.

Из уравнения движения для пробного тела

$$\dot{p}^\mu = Q \Gamma_{\nu\rho}^\mu \dot{x}^\nu \dot{x}^\rho \quad (22)$$

для неопределенности в значении  $\dot{p}_\mu$  по правилу дифференциала получаем

$$\Delta \dot{p}^\mu = Q [\dot{x}^\nu \dot{x}^\rho \Delta \Gamma_{\nu\rho}^\mu + \Gamma_{\nu\rho}^\mu (\dot{x}^\nu \Delta \dot{x}^\rho + \dot{x}^\rho \Delta \dot{x}^\nu)]. \quad (23)$$

Последний член в сумме, стоящей справа, имеет второй порядок малости по  $\frac{1}{m}$ , т. к.  $\Delta \dot{x} \sim \frac{1}{m} \Delta p$ , поэтому

$$\dot{x}^\nu \dot{x}^\rho \Delta \Gamma_{\nu\rho}^\mu = \frac{\Delta p^\mu}{Q \Delta s}. \quad (24)$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned} \Psi_{\mu\nu}(x') &= \int d^4 x'' D^{\text{ret}}(x' - x'') T_{\mu\nu}(x'') = \\ &= Q \int_{-\infty}^{\infty} ds D^{\text{ret}}(x' - z(s)) \dot{z}_\mu \dot{z}_\nu, \end{aligned} \quad (25)$$

что можно получить, пользуясь представлением

$$T_{\mu\nu}(x) = Q \int_{-\infty}^{\infty} ds \dot{z}_\mu \dot{z}_\nu \delta(x - z(s)). \quad (26)$$

Отсюда для неопределенности поля излучения  $\Delta\Gamma'$  имеем

$$\Delta\Gamma'_{\mu, \nu\rho}(x) = Q\Delta s \{ [\dot{x}_\mu \Delta \dot{x}_\nu \partial_\rho + \dot{x}_\mu \Delta \dot{x}_\rho \partial_\nu - \dot{x}_\nu \Delta \dot{x}_\rho \partial_\mu] D^{\text{ret}}(x-x') + \\ + [\dot{x}_\mu \dot{x}_\nu \partial_\rho + \dot{x}_\mu \dot{x}_\rho \partial_\nu - \dot{x}_\nu \dot{x}_\rho \partial_\mu] \Delta x^\lambda \partial_\lambda D^{\text{ret}}(x-x') \}. \quad (27)$$

Используя (24) и (27), составляем соотношение неопределенностей

$$\dot{x}^\nu \dot{x}^\rho \Delta\Gamma_{\mu, \nu\rho}(x) \Delta\Gamma_{\lambda, \sigma\omega}(x') = \frac{\hbar}{2} [\dot{x}_\lambda \dot{x}_\sigma \partial_\omega \partial_\mu + \\ + \dot{x}_\lambda \dot{x}_\mu \partial_\sigma \partial_\omega - \dot{x}_\sigma \dot{x}_\omega \partial_\lambda \partial_\mu] D^{\text{ret}}(x-x'). \quad (28)$$

Отсюда следует справедливость (21) при учете  $D^{\text{ret}}(x-x') = D(x-x')$  при  $x'_0 > x_0$  и произвольности скоростей. Нетрудно видеть, что такое рассмотрение фактически соответствует «дипольному представлению» излучательных решений, т. е. не отражает физической роли принципа эквивалентности.

4. В заключение необходимо сделать несколько замечаний.

а) Проведенное рассмотрение может показаться все же недостаточным из-за выбора линейной аппроксимации полевых уравнений. Действительно, рост массы пробного тела должен вести к сильным полям и, следовательно, существенности нелинейных членов. При этом, как уже отмечалось, главная трудность будет заключаться в образовании суперпозиции поля, измеряемого в некотором 4-мерном объеме  $G_1$  с полем излучения из области  $G_2^*$ . Однако, если учесть, что проблема суперпозиции практически возникает лишь в области с размером порядка гравитационного радиуса пробного тела, и выбирать размер последнего  $L \gg R_{gr}$ , то нелинейности можно рассматривать лишь как малые поправки. Вообще «генерация» правильных соотношений неопределенностей за счет самодействия гравитационного поля представляется хотя и очень интересной, но крайне маловероятной возможностью, поскольку пропорциональность поля излучения квадрупольному моменту (в смысле приведенных выше решений (12—15)) должна сохраняться из физических соображений.

б) Другой критический пункт нашего рассмотрения заключается в специальном, упрощающем вычисления, выборе взаимного расположения пробных тел. Следует, однако, отметить, что уже эта ситуация достаточна для демонстрации трудностей в гравитационных ИИП, поскольку правая часть коммутаторов (и соотношений неопределенностей) для полей должна обращаться в нуль только при пространственном подобном интервале между аргументами.

в) В связи с выбором очень больших масс пробных тел для измерения одной компоненты значительный интерес может представлять ограничение сверху на величину массы, которое возникает из условия устойчивости тела по отношению к коллапсу.

г) Мы избрали анализ ИИП именно для гравитационного поля в связи со значительным практическим интересом, который представляет квантование гравитации. С точки зрения ИИП теперь нетрудно обобщить результаты на линейные теории любых безмассовых полей с высшими спинами. Релятивистское бозе-поле, описываемое тензором  $\Phi_{\mu\nu\dots\omega}$  ранга  $s$ , обычно ставится в соответствие частицам со спином  $s$

\* Существенно также, что точные уравнения для гравитационного поля не допускают решения в виде плоских волн, а только в виде цилиндрических.

(если низшие спиновые состояния исключены при помощи дополнительных условий). Излучение такого поля создается системой «зарядов», обладающей лишь  $2^s$ -польными или более высокими моментами. Следовательно, неопределенность компоненты излучательного решения будет пропорциональна тензору  $2^s$ -польного момента  $D^{(s)}$ , создаваемого за счет неопределенности положения пробного тела  $\Delta x$ . В свою очередь  $D^{(s)} \propto (\Delta x)^s$ , и поэтому правая часть соотношений неопределенностей пропорциональна  $(\Delta x)^{s-1}$  и при точном измерении координаты (в гайтлеровской ситуации) обращается в нуль \*).

Таким образом, трудность с интерпретацией перестановочных соотношений для полевых операторов в рамках ИИП типа Бора — Розенфельда существует для любых бозе-полей (и, следовательно, связанных с ними токов), за исключением электромагнитного ( $s=1$ ). В этом смысле квантовая электродинамика оказывается физически выделенной теорией. Конечно, такая выделенность связана не только с единичным спином, но и с нулевой массой фотона (для массивных бозонных полей возникает трудность в определении макроскопического пробного тела из-за короткодействия мезонных сил).

Автор благодарен участникам семинара лаборатории теоретической физики за подробное обсуждение работы.

### Литература

1. Kibble T. W. V. Journ. Math. Phys., 2, 212, 1961.
2. Федоров Ф. И. ДАН СССР, 179, 802, 1968.
3. Фаддеев Л. Д. Сб. «Физика высоких энергий и теория элементарных частиц». Киев, 1967.
4. Gupta S. Proc. Roy. Soc., A65, 161, 608, 1952.
5. Anderson J. L. Rev. Mex. Phys., 3, 176, 1954.
6. Regge T. Nuovo Cim., 7, 215, 1958.
7. Weber J. Phys. Rev. Lett., 22, 1320, 1969.
8. Infeld L., Schild A. Rev. Mod. Phys., 21, 408, 1949.
9. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теория поля. ФМ, 1962.
10. Bohr N., Rosenfeld L. Kgl. Danske Vid. Selskab fys.-math. Medd., 12, № 8, 1933.
11. Гайтлер В. Квантовая теория излучения. ИЛ, 1956.
12. Тирринг В. Е. Принципы квантовой электродинамики. «Высшая школа», 1964.

Институт физики  
АН БССР

Поступило в редакцию  
4.VI 1970

\* Предполагается, что в уравнениях движения пробных тел сохраняется линейная зависимость ускорения от напряженности соответствующего поля.

О. С. ИВАНИЦКАЯ, В. Б. ХАЗАН

**К НОВОЙ ТРАКТОВКЕ ВРАЩЕНИЯ ПЕРИГЕЛИЯ ПЛАНЕТ  
 С ПОМОЩЬЮ ЛОКАЛЬНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ЛОРЕНЦА**

Дарвином в [1] подсчитаны собственные времена для планеты в поле Шварцшильда и для далекого наблюдателя. Если найти их разность, получим

$$t_{д.н} - \tau_{пл} = \frac{3}{2} \frac{m}{p} \frac{2\pi}{\sqrt{1-e^2}} \frac{p^{3/2}}{\sqrt{m}}. \quad (1)$$

Перевод промежутка (1) в угловую меру с помощью кеплеровой угловой скорости дает

$$\frac{\Delta\varphi}{2\pi} = \frac{3}{2} \frac{m}{p} (1-e^2), \quad (2)$$

тогда как релятивистское смещение перигелия планеты за один оборот

$$\frac{\Delta\varphi}{2\pi} = \frac{3m}{p}. \quad (3)$$

В [2] высказана гипотеза, что выражение (2) входит в состав (3), а разность (1) трактуется как следствие неполноты дифференциала  $d\tau$  при неинерциальном движении, т. е. зависимости собственного времени от четырехмерного пути в данную точку, на что обращал внимание еще Минковский. В [2] и [3] показано, что за смещение (3) ответственна не только разность (1), названная дефектом собственного времени, но и соответствующая разность (дефект) собственного пути планеты и время десинхронизации. Это вскрывает разделение указанной релятивистской поправки на части, порождаемые непосредственно движением планеты и непосредственно полем тяготения. Учет движения производится с помощью локального преобразования Лоренца, коротко  $L(x)$ . Это преобразование в [2] — однопараметрическое и составляется в приближении

$$\frac{m^2}{p^2} \ll 1, \quad \frac{m}{p} e^2 \ll 1 \quad (4)$$

(последнее из неравенств привлекается в задаче Шварцшильда, в частности в [4, 5]). При этом используется классическое выражение для траектории  $r = p/(1 + e \cos\varphi)$  и квазиклассический закон площадей, содержащий собственное время наблюдателей, закрепленных относительно гравитирующего центра. В [6] отмечено, что  $L(x)$  может быть составлено более строго, если рассматривать его параметры как компоненты локальной скорости, как первые интегралы уравнений геодезической,

отнесенных к локальной псевдодекартовой системе координат. Это дает класс локальных двухпараметрических преобразований Лоренца:

$$L^{(k)'}_{(n)} = \begin{pmatrix} ak - \frac{h^2}{r^2(ak+1)} & \pm \frac{hA}{r(ak+1)} & \mp A \\ \pm \frac{hA}{r(ak+1)} & 1 + \frac{h^2}{r^2(ak+1)} & -\frac{h}{r} \\ \mp A & -\frac{h}{r} & ak \end{pmatrix}, \quad (5)$$

где  $A = \left( a^2 k^2 - 1 - \frac{h^2}{r^2} \right)^{\frac{1}{2}}$ ,  $h$  — постоянная площадей,  $k = \left[ 1 + \frac{m}{p} [(e^2 - 1)]^{\frac{1}{2}} \right]^{\frac{1}{2}}$  — энергетическая постоянная, входящая в интеграл геодезической

$$dx^4/ds = ka^2, \quad a = (1 - 2m/r)^{-\frac{1}{2}}.$$

Параметры  $L(x)$  вида (5) могут быть выражены через корни известного полинома  $f(u)$ ,  $u = \frac{1}{r}$ :

$$\begin{aligned} \frac{dx^{(1)}}{dx^{(4)}} &= a^2 \frac{dr}{dx^4} = \pm \frac{A}{ak} = \pm \left( \frac{1+mu}{u} \right)^2 \sqrt{(u_1-u)(u-u_2)} \frac{d\vartheta}{dx^4}, \\ \frac{dx^{(3)}}{dx^{(4)}} &= ar \frac{d\varphi}{dx^4} = \frac{h}{akr} = \\ &= \frac{1+mu}{u} = \frac{1}{\sqrt{2m(u_0-u)}} \frac{d\vartheta}{dx^4}, \quad (6) \\ d\varphi &= \frac{du}{\sqrt{2m(u_0-u)(u_1-u)(u-u_2)}} \equiv \\ &\equiv \frac{d\vartheta}{\sqrt{2m(u_0-u)}}, \\ f(u) &= u^3 - \frac{u^2}{2m} + \frac{u^2}{h^2 k^2} + \frac{k^2 - 1}{2mh^2 k^2}. \end{aligned}$$

Тем самым в основу физической интерпретации классификации орбит в поле Шварцшильда по корням полинома  $f(u)$  [7—10] могут быть положены локальные лоренцевы преобразования.

Преобразование (5) задает движение планеты относительно локальной системы  $dx^{(k)}$ , определяемой тетрадами

$$h_{\mu}^{(k)} = \text{diag}(a, r, 1/a). \quad (7)$$

В приближении, также соответствующем лишь первому из неравенств (4), можно составить и однопараметрическое  $L(x)$ . Для этого сначала найдем  $L(x)$  локального пространственного вращения к локальной системе  $(dx^{(k)'})$ , такой, что

$$\frac{dx^{(1)''}}{dx^{(4)''}} = L^{(1)''}_{(1)} \frac{dx^{(1)'}}{dx^{(4)'}} + L^{(1)''}_{(3)} \frac{dx^{(3)'}}{dx^{(4)'}} = 0, \quad \frac{dx^{(3)''}}{dx^{(4)''}} \neq 0, \quad (8)$$

$$\eta_{(k)(n)} = L^{(r)''}_{(k)} L^{(s)''}_{(n)} \eta_{(r)(s)'} = \text{diag}(1, 1, -1). \quad (9)$$

Отсюда находим

$$L^{(k)''}_{(n)} = \begin{pmatrix} \frac{h}{rB} & \mp \frac{A}{B} & 0 \\ \pm \frac{A}{B} & \frac{h}{rB} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (10)$$

$$B^2 = a^2 k^2 - 1. \quad (11)$$

В приближении  $m^2/p^2 \ll 1$  и поскольку  $h \approx \sqrt{mp}$ , имеем

$$B^2 = \frac{m}{p} Q^2, \quad ak = 1 + \frac{m}{2p} Q^2, \quad (12)$$

$$\Phi = \varphi q, \quad q = 1 - \frac{3m}{p}, \quad Q^2 = 1 + 2e \cos \Phi + e^2, \quad (13)$$

где релятивистская аномалия  $\Phi$  входит во второй интеграл уравнений движения

$$r = p/(1 + e \cos \Phi), \quad (14)$$

т. е.

$$A = e \sqrt{\frac{m}{p}} \sin \Phi. \quad (15)$$

Следовательно,

$$L^{(k)''}_{(n)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{Q} (1 + e \cos \Phi) & -\frac{e}{Q} \sin \Phi & 0 \\ \frac{e}{Q} \sin \Phi & \frac{1}{Q} (1 + e \cos \Phi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (16)$$

Таким образом,

$$\frac{dx^{(3)''}}{dx^{(4)''}} = L^{(3)''}_{(1)} \frac{dx^{(1)}}{dx^{(4)}} + L^{(3)''}_{(3)} \frac{dx^{(3)}}{dx^{(4)}} = \frac{B}{ak}, \quad (17)$$

$$\gamma = \left[ 1 - \left( \frac{dx^{(3)''}}{dx^{(4)''}} \right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}} = ak. \quad (18)$$

Переход от закрепленной локальной системы  $(dx^{(k)''})$  к движущейся вместе с планетой осуществляется локальным преобразованием

$$L^{(\tilde{k})'}_{(n)''} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma = ak & -B \\ 0 & -B & \gamma = ak \end{pmatrix}. \quad (19)$$

Применяя (10) и (19) к тетрадам (7), находим

$$h_{\mu}^{(\tilde{k})'} = L^{(\tilde{k})'}{}_{(m)''} L^{(m)''}{}_{(n)} h_{\mu}^{(n)} = \quad (20)$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{ha}{rB} & \pm \frac{Aa\gamma}{B} & \mp Aa \\ \mp \frac{Ar}{B} & \gamma \frac{h}{B} & -h \\ 0 & -B/a & \gamma/a = k \end{pmatrix}.$$

Согласно релятивистскому закону площадей,

$$\frac{\Omega_0'}{c} p^2 = \frac{\omega_0'}{c} r^2 = h, \quad \sqrt{m/p} = \frac{\Omega_0' p}{c},$$

$$\omega_0' = c \frac{d\varphi}{dx^{(4)'}} = cd\varphi/L^{(4)'}{}_{(4)} dx^{(4)} = \gamma\omega_0, \quad (21)$$

$$\Omega_0' = \omega_0'/(1 + e \cos \Phi)^2 = \gamma\Omega_0.$$

Поэтому (19) и (20) могут быть представлены в виде

$$L^{(\tilde{k})'}{}_{(n)''} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma & -\frac{1}{c} \Omega_0' p Q \\ 0 & -\frac{1}{c} \Omega_0' p Q & \gamma \end{pmatrix}, \quad (22)$$

$$h_{\mu}^{(\tilde{k})'} = \begin{pmatrix} \frac{a}{Q} (1 + e \cos \Phi) & \frac{a}{Q} e\gamma \sin \Phi & -\frac{\Omega_0'}{c} p a e \sin \Phi \\ -\frac{ep \sin \Phi}{Q (1 + e \cos \Phi)} & \frac{\gamma p}{Q} & -\frac{\Omega_0' p^2}{c} \\ 0 & -\frac{\Omega_0' p Q}{ca} & \frac{\gamma}{a} \end{pmatrix}. \quad (23)$$

Применив (5) к (7), получим

$$h_{\mu}^{(k)'} = \begin{pmatrix} a^2 k - \frac{ah^2}{r^2 B} & \pm \frac{ahA}{rB} & \mp aA \\ \pm \frac{hA}{B} & r + \frac{h^2}{rB} & -h \\ \mp \frac{A}{a} & -\frac{h}{ra} & k \end{pmatrix}. \quad (24)$$

Тетрады (23) и (24) отличаются только пространственными блоками и, следовательно, могут быть преобразованы друг в друга локальным преобразованием пространственного вращения. Поэтому

$$dx_{пл}^{(4)'} = h_{\mu}^{(4)'} dx^{\mu} = h_{\mu}^{(\bar{4})'} dx^{\mu}. \quad (25)$$

Связь между компонентами  $dr$ ,  $d\varphi$ ,  $dx^4$  перемещения  $dx^{\mu}$  вдоль мировой линии планеты вытекает из (6) и (15). Воспользовавшись ею, находим при  $e < 1$

$$x_{пл}^{(4)'} = \int_0^{2\pi} \frac{r^2}{h} d\varphi = \frac{p^{3/2}}{\sqrt{m}} \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{(1 + e \cos \Phi)^2} \approx \frac{p^{3/2}}{\sqrt{m}} \frac{2\pi}{(1 - e^2)^{3/2}}. \quad (26)$$

Аналогично для далекого наблюдателя

$$\begin{aligned} x_{д.н}^{(4)'} = x^4 &= \int_0^{2\pi} (h_{\mu}^{(4)'})_{a \rightarrow 1} dx^{\mu} = \int_0^{2\pi} \frac{ka^2 r^2}{h} d\varphi = \\ &= -\frac{c}{\Omega_0} \int_0^{2\pi} \left[ 1 + \frac{m}{p} (1 + e \cos \Phi) + \frac{\Omega_0'^2 p^2}{2c^2} Q^2 \right] \frac{d\varphi}{(1 + e \cos \Phi)^2}. \end{aligned} \quad (27)$$

В согласии с (1)

$$\Delta x^{(4)'} = x_{д.н}^{(4)'} - x_{пл}^{(4)'} = \frac{3m}{2p} \frac{p^{3/2}}{\sqrt{m}} \frac{2\pi}{\sqrt{1 - e^2}}. \quad (28)$$

Из условия  $dx_{пл}^{(4)'} = 0$ , пользуясь (25) и (24) или (23), находим время десинхронизации

$$\begin{aligned} \Delta x_{дес}^4 &= \int_0^{2\pi} dx_{дес}^4 = \frac{\Omega_0' p^2}{c} \int_0^{2\pi} \frac{Q^2 d\varphi}{(1 + e \cos \Phi)^2} = \\ &= \frac{m}{p} \frac{p^{3/2}}{\sqrt{m}} \frac{2\pi}{\sqrt{1 - e^2}}. \end{aligned} \quad (29)$$

Элементы пути планеты, отнесенные соответственно к базисным векторам  $\vec{e}_{(\bar{3})}'$  и  $\vec{e}_{(3)''}$ , будут

$$dl_{пл} = dx^{(\bar{3})}' = h_1^{(\bar{3})}' dr + h_3^{(\bar{3})}' d\varphi + h_4^{(3)'} dx_{дес}^4, \quad (30)$$

$$dl_{д.н} = dx^{(3)''} = h_1^{(3)''} dr + h_3^{(3)''} d\varphi = \frac{r^2 B}{h} d\varphi. \quad (31)$$

Учитывая (29) и тетрады (23), находим

$$\begin{aligned} x_{пл}^{(3)'} = l_{пл} &= p \int_0^{2\pi} \frac{Q d\varphi}{(1 + e \cos \Phi)^2} - \\ &- \frac{m}{2} \int_0^{2\pi} \frac{Q^3 d\varphi}{(1 + e \cos \Phi)^2}, \end{aligned} \quad (32)$$

$$l_{д.н} = p \int_0^{2\pi} \frac{Q d\varphi}{(1 + e \cos \varphi)^2}, \quad (33)$$

т. е.

$$\Delta x^{(3)'} = l_{д.н} - l_{пл} \approx \frac{\Omega_0 p^3}{2c^2} 2\pi \left( 1 + \frac{3}{4} e^2 \right). \quad (34)$$

В случае тетрад (24)

$$\begin{aligned} dl_{пл} &= (\eta_{a'b'} dx^{a'} dx^{b'})^{\frac{1}{2}} = \\ &= [(dx^{(1)'})^2 + (dx^{(3)'})^2]^{\frac{1}{2}}, \end{aligned} \quad (35)$$

$$dx^{(1)'} = \frac{Ar^2}{akh} d\varphi, \quad dx^{(3)'} = \frac{rd\varphi}{ak}, \quad (36)$$

$$\begin{aligned} dl_{д.н} &= (\eta_{ab} dx^a dx^b)^{\frac{1}{2}} = \\ &= [(h_1^{(1)} dr)^2 + (h_3^{(3)} d\varphi)^2]^{\frac{1}{2}}, \end{aligned} \quad (37)$$

что также приводит к (34).

Переведем разности (28) и (34) в угловую меру:

$$\Delta\varphi_1 = \bar{h}^3_{(4)} \Delta x^{(4)'}, \quad \Delta\varphi_2 = \bar{h}^3_{(3)} \Delta x^{(3)'}, \quad (38)$$

где

$$\bar{h}^3_{(4)} = \int_0^{2\pi} h^3_{(4)} dx^{(4)'} / \int_0^{2\pi} dx^{(4)'}, \quad (39)$$

$$\bar{h}^3_{(3)} = \int_0^{2\pi} h^3_{(3)} dx^{(3)'} / \int_0^{2\pi} dx^{(3)'}. \quad (40)$$

Аналогично

$$\begin{aligned} \Delta\varphi_3 &= \left( \frac{d\varphi}{dx^4} \right) \Delta x^4_{дес}, \quad \left( \frac{d\varphi}{dx^4} \right) = \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{dx^4} dx^4_{дес} / \int_0^{2\pi} dx^4_{дес}. \end{aligned} \quad (41)$$

Следовательно,

$$\Delta\varphi_1 = 2\pi \frac{3m}{2p} (1 - e^2), \quad (42)$$

$$\Delta\varphi_2 = 2\pi \frac{m}{2p}, \quad \Delta\varphi_3 = 2\pi \frac{m}{p} (1 + e^2). \quad (43)$$

Таким образом,

$$\frac{\Delta\varphi}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^3 \Delta\varphi_i \approx \frac{3m}{p} \left( 1 - \frac{e^2}{6} \right). \quad (44)$$

Для Меркурия это соответствует наблюдениям.

Изложенный метод трактует основную поправку эйнштейновой теории тяготения, оставаясь в ее рамках, в локально справедливых понятиях специальной теории относительности, что представляет принципиальный интерес.

Найденные разности относительны, но общековариантны. В [3] они получены с помощью хронометрически-инвариантного метрического тензора путем перехода к «падающей системе координат».

Желательно распространение предложенного метода на орбиты с  $e \geq 0$ , что существенно изменит интегралы в (26) — (33).

### Литература

1. Darwin C. Proc. Roy. Soc., 249, 180, 1959; 263, 39, 1961.
2. Иваницкая О. С. В сб. «Гравитация и теория относительности». Изд-во Казанск. ун-та, № 7, 1970.
3. Иваницкая О. С. ДАН БССР, 14, № 8, 1970.
4. Мак-Витти Г. К. Общая теория относительности и космология. М., 1961.
5. Schmutzer E. Relativistische Physik. Leipzig, 1968.
6. Иваницкая О. С. Вестн АН БССР, сер. физ.-мат. наук, № 5, 1970.
7. Morton W. B. Phil. Mag., ser. 6, 42, 511, 1921.
8. Hagihara S. Japan. J. Astr. Geophys., 8, 67, 1931.
9. Богородский А. Ф. Уравнения поля Эйнштейна и их применение в астрономии. Изд. Киевск. ун-та, 1962.
10. Metzner A. W. K. J. Math. Phys., 4, 1194, 1963.

Институт физики  
АН БССР

Поступило в редакцию  
10.VII 1970

А. П. РЯБУШКО

## К ПРОБЛЕМЕ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЙ ПРОВЕРКИ ОБЩЕЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

§ 1. Введение. Экспериментальная проверка общей теории относительности (ОТО) привлекает к себе внимание со времени создания этой теории, особенно последние 10—15 лет. Самим Эйнштейном были указаны и обсуждались в разных работах (см., например, [1—5]) три эффекта ОТО: движение перигелиев планет, искривление лучей света в поле тяготения Солнца, гравитационное смещение спектральных линий (так называемое красное смещение). К настоящему времени только первый из них более или менее хорошо подтверждается наблюдениями (смещение перигелия Меркурия), хотя и здесь в связи с возможной сплюснутостью Солнца могут возникнуть расхождения между ОТО и наблюдениями до 10—18% [6, 7]. Остальные два эффекта не получили хорошего подтверждения (см., например, [8, 9]). В связи с этим и из других соображений возникло мнение, согласно которому в настоящее время нет ни одного веского эмпирического довода в пользу уравнений тяготения Эйнштейна, и обсуждаются другие возможные теории гравитации [10—12]. Более того, как справедливо отмечается в [9], даже очень хорошее подтверждение наблюдениями указанных трех классических эффектов еще далеко не достаточно для экспериментального обоснования ОТО в целом. Нужно отыскивать новые возможности. Одна из них возникает, если учесть вращение тяжелого тела [13]. Перспективы этой возможности в связи с запуском искусственных спутников Земли подробно обсуждались в [14—16]. Как выяснилось позднее, точность эксперимента пока не позволяет выделить релятивистский эффект вращения для спутников Земли из совокупного эффекта, обусловленного многими другими причинами (несферичность Земли, возмущения Луны и т. д.). Определенные надежды связываются с релятивистской прецессией оси гироскопа [17—19], а также с гравитационным излучением, например, двойных звезд, взрывающихся объектов [20, 21]. Новый способ экспериментальной проверки ОТО с помощью радиолокации планет Меркурия и Венеры предложен в [22] и обсуждался в ряде других работ [19, 23—26]. Не имея целью давать здесь анализ состояния проблемы экспериментальной проверки ОТО, отсылаем читателя к обзорной работе [27], содержащей также космологические и другие аспекты проблемы и значительную литературу (см. также [28]).

В настоящей работе обращается внимание на некоторые новые возможности экспериментальной проверки ОТО с помощью планет солнечной системы. Благодаря искривленности трехмерного пространства истинные (физические) диаметры планетных орбит в поле тяготения Солнца должны быть, по Эйнштейну, всегда больше, чем их значения в теории Ньютона. Как показывают проведенные ниже расчеты, физические диаметры орбит Меркурия, Венеры и Земли в поле Шварцшильда

больше их ньютоновых значений приблизительно на 16—19 км. Для экспериментального обнаружения этой разницы в 16—19 км нужно уметь измерять расстояния в пределах солнечной системы с точностью порядка  $10^{-7}$ — $10^{-8}$ , что, согласно последним сообщениям [29, 30], становится возможным (см. также [7]).

§ 2. Теория эффекта. Решение Шварцшильда [31] уравнений тяготения Эйнштейна может быть записано в «сферических» координатах  $r, \theta, \varphi$  в виде [32]

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) c^2 dt^2 - \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2), \quad (2.1)$$

где  $r_g \equiv 2\gamma m/c^2$ —гравитационный радиус центрального тела,  $m$ —его полная масса,  $\gamma$ —ньютонова постоянная тяготения,  $c$ —скорость света. Движение легкого тела происходит по геодезической линии риманова пространства-времени, которая определяется системой уравнений

$$\frac{du^i}{ds} + \Gamma_{jk}^i u^j u^k = 0, \quad u^i \equiv \frac{dx^i}{ds}, \quad g_{ik} u^i u^k = 1, \quad (2.2)$$

где  $i, j, k=0, 1, 2, 3$ ;  $x^i$ —координаты событий, определяющие положения центра тяжести легкого тела; символы Кристоффеля  $\Gamma_{jk}^i$  известным образом выражаются через метрический тензор  $g_{ik}$  [32]; по повторяющимся индексам подразумевается суммирование. Для нахождения закономерностей движения тела в поле Шварцшильда следует проинтегрировать систему (2.2) с  $\Gamma_{jk}^i$ , подсчитанными для метрики (2.1).

Рассмотрим круговые траектории ( $r = \text{const}$ ) в  $R$ -области [33, 34] поля Шварцшильда, где  $r > r_g$ . Без ограничения общности можно считать  $\theta = \frac{\pi}{2}$ . Так как  $u^1 = u^2 = 0$ , то система (2.2) приводится к виду

$$\frac{du^0}{ds} = 0, \quad \frac{r_g}{2r^2} u^{0^2} - r u^{3^2} = 0,$$

$$\frac{du^3}{ds} = 0, \quad \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) u^{0^2} - r^2 u^{3^2} = 1 \quad (2.3)$$

( $x^0, x^1, x^2, x^3$  соответствуют  $ct, r, \theta, \varphi$ ), решением которой будут следующие  $u^0$  и  $u^3$ :

$$u^0 = \pm \left(1 - \frac{3}{2} \frac{r_g}{r}\right)^{-1/2},$$

$$u^3 = \pm \frac{r_g}{2r^3} \left(1 - \frac{3}{2} \frac{r_g}{r}\right)^{-1/2}. \quad (2.4)$$

Отсюда получаем

$$\omega_d \equiv \frac{d\varphi}{dt} = \pm \frac{c}{r} \sqrt{\frac{r_g}{2r}} \frac{\text{рад}}{\text{сек}},$$

$$\varphi = \pm \frac{ct}{r} \sqrt{\frac{r_g}{2r}} \text{рад}, \quad (2.5)$$

где постоянная интегрирования выбрана так, чтобы  $\varphi = 0$  при  $t = 0$ . Из (2.4) видно, что круговые орбиты могут существовать только при  $r \geq \frac{3}{2} r_g$ . Этот результат в изотропных координатах получен еще Эйн-

штейном [35]. По ньютоновой теории тяготения, закономерность движения по круговой орбите радиуса  $R$  в поле того же центра следует из интеграла площадей и имеет вид [36]

$$\omega_0 \equiv \frac{d\varphi}{dt} = \pm \frac{c}{R} \sqrt{\frac{r_g}{2R}} \frac{\text{рад}}{\text{сек}},$$

$$\varphi = \pm \frac{ct}{R} \sqrt{\frac{r_g}{2R}} \text{ рад}. \quad (2.6)$$

Внешнее сходство законов движения (2.5) и (2.6) очевидно. Но нельзя забывать, что смысл некоторых входящих в эти законы величин разный. В (2.6)  $t$  является истинным абсолютным ньютоновым временем, которое в любой точке плоского евклидова трехмерного пространства течет одинаково, а  $R$  обозначает истинное трехмерное расстояние. Поэтому в (2.6)  $\omega_0 \equiv \frac{d\varphi}{dt}$  есть угловая скорость движения тела по круговой орбите радиуса  $R$  с точки зрения любого наблюдателя. В (2.5)  $t$  можно интерпретировать как истинное время по часам бесконечно удаленного неподвижного наблюдателя, а поэтому в (2.5)  $\omega_d \equiv \frac{d\varphi}{dt}$  является угловой скоростью пробного тела с точки зрения этого далекого наблюдателя. Так как при приближении к центральному телу ход истинного времени  $\tau$  замедляется по известному закону ([32], § 84), то угловая скорость, измеренная локальным наблюдателем (который неподвижен и находится рядом с движущимся телом) по своим часам, будет

$$\omega_n \equiv \frac{d\varphi}{d\tau} = \omega_d \left( 1 - \frac{r_g}{r} \right)^{-1/2} > \omega_d. \quad (2.7)$$

Если же наблюдатель находится на движущемся по окружности теле (сопутствующий наблюдатель), то по его часам угловая скорость тела

$$\omega_c = \omega_d \left( 1 - \frac{3}{2} \frac{r_g}{r} \right)^{-1/2} > \omega_n. \quad (2.8)$$

Отметим, что если рассматривать движение на окружностях одной длины в эйнштейновой и ньютоновой теориях тяготения, то  $r = R$  и  $\omega_d = \omega_0$ , т. е. на таких окружностях закономерности движения в обеих теориях одинаковы.

Радиальная координата  $r$  в (2.5) связана с истинным, физическим, радиальным расстоянием  $l$  до центра поля определенной зависимостью (см. [32], § 97, [16, 37, 38], где подчеркивается, что  $r$  не имеет смысла гелиоцентрического расстояния). Если принять, как это обычно делается в ньютоновой небесной механике, центральное тело за материальную точку, то

$$l = R_g + l_g = R_g + \int_{r_g}^r \left( 1 - \frac{r_g}{r} \right)^{-1/2} dr =$$

$$= R_g + r \sqrt{1 - \frac{r_g}{r}} +$$

$$+ \frac{r_g}{2} \ln \left[ \frac{r}{r_g} \left( 1 + \sqrt{1 - \frac{r_g}{r}} \right)^2 \right], \quad (2.9)$$

где через  $R_g$  обозначен истинный (физический) радиус сферы Шварцшильда. Определим  $R_g$  следующим образом. В  $T$ -области поля Шварцшильда, т. е. внутри сферы Шварцшильда, где  $0 \leq r < r_g$ , метрика имеет вид [33]

$$ds^2 = \left( \frac{r_g}{\tilde{t}} - 1 \right)^{-1} d\tilde{t}^2 - \left( \frac{r_g}{\tilde{t}} - 1 \right) d\tilde{r}^2 - \tilde{t}^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2). \quad (2.10)$$

В любой точке  $T$ -области  $\tilde{r}, \theta, \varphi = \text{const}$  имеем  $0 \leq \tilde{t} < r_g$ , т. е. координатным временем «жизни»  $T$ -области ( $T$ -системы) будет  $\Delta\tilde{t} = r_g$ , которому соответствует собственное время «жизни»  $T$ -области

$$\Delta\tau = \frac{1}{c} \int_0^{r_g} \left( \frac{r_g}{\tilde{t}} - 1 \right)^{-1/2} d\tilde{t} = \frac{\pi r_g}{2c}. \quad (2.11)$$

Теперь  $R_g$  определим как расстояние, которое пройдет движущийся по радиусу в  $T$ -области луч света за собственное время «жизни» ее, т. е.

$$R_g = c\Delta\tau = \frac{\pi}{2} r_g. \quad (2.12)$$

Этот результат получен ранее в [39].

Наблюдаемые нами реальные тела, однако, имеют конечные размеры, намного превосходящие размеры сферы Шварцшильда. Чтобы найти истинный радиус центрального тела, нужно воспользоваться решением уравнений тяготения Эйнштейна, определяющим поле внутри вещества. В случае сферически-симметричного статического центрального тела, имеющего координатный радиус  $a > r_g$  и плотность материи  $\rho = \rho(r)$ ,  $\rho(a) = 0$ , находим его истинный радиус по формуле (см., например, [25, 40])

$$R_a = \int_0^a \left( 1 - \frac{4\pi\gamma}{c^2 r} \int_0^r \rho r^2 dr \right)^{-1/2} dr. \quad (2.13)$$

Значение  $R_a$  зависит, как видим, от распределения плотностей в теле, но всегда  $R_a > a$ . В идеальном случае, когда  $\rho = \text{const}$  (несжимаемый однородный шар, поле внутри его впервые найдено в [41]), находим

$$\begin{aligned} R_a &= \int_0^a \left( 1 - \frac{r_g r^2}{a^3} \right)^{-1/2} dr = \\ &= a \sqrt{\frac{a}{r_g}} \arcsin \sqrt{\frac{r_g}{a}}. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Любопытно, что если  $a \rightarrow r_g$ , то  $R_a \rightarrow \frac{\pi}{2} r_g$  и мы приходим опять к данному выражением (2.12) определению истинного радиуса сферы Шварцшильда. Для обычных звезд  $a$  значительно превосходит их гравитационный радиус  $r_g$ . Разложив в этом случае  $\arcsin$  по степеням  $\sqrt{\frac{r_g}{a}}$ , получаем

$$R_a = a + \frac{1}{6} r_g + \frac{3}{40} \frac{r_g^2}{a} + \dots \approx a + \frac{1}{6} r_g. \quad (2.15)$$

Радиальное расстояние  $l$  от центра поля до некоторой точки, определяемой значением радиальной координаты  $r > a$ , должно подсчитываться теперь по формуле

$$\begin{aligned}
 l &= R_a + l_a = R_a + \int_a^r \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)^{-1/2} dr = \\
 &= R_a + r \sqrt{1 - \frac{r_g}{r}} - a \sqrt{1 - \frac{r_g}{a}} + \\
 &+ \frac{r_g}{2} \ln \frac{r}{a} + r_g \ln \left[ \left(1 + \sqrt{1 - \frac{r_g}{r}}\right) \times \right. \\
 &\quad \left. \times \left(1 + \sqrt{1 - \frac{r_g}{a}}\right)^{-1} \right]. \tag{2.16}
 \end{aligned}$$

Таким образом, в любом случае  $l > r$ . Это вместе с формулами (2.1), (2.5), (2.6) приводит к следующему. Окружность длины  $2\pi r$  в теории Эйнштейна всегда имеет истинный радиус  $l > r$ , а окружность той же длины  $2\pi r$  в теории Ньютона имеет меньший истинный радиус  $r$ . Если же в теориях тяготения Эйнштейна и Ньютона брать окружности одного и того же физического радиуса, то длины таких окружностей окажутся разными: эйнштейнова длина окажется меньше ньютоновой. Естественно поэтому, что угловая скорость движения пробного тела по окружности заданного физического радиуса всегда больше в поле Шварцшильда, чем в ньютоновом поле тяготения того же центра:  $\omega_{\pi} > \omega_0$  (в связи с последним неравенством см. [39], где даны некоторые оценки).

Подводим итог. На прохождение сигнала (луча света, радиоволны) вдоль истинного радиуса орбиты планеты по эйнштейновой теории должно затрачиваться больше времени, чем это следует по ньютоновой теории. Происходит релятивистское запаздывание сигнала.

Переходим к подробному обсуждению этого релятивистского эффекта и возможностям его экспериментального обнаружения.

§ 3. Оценка величины эффекта. Есть уверенность [25, 34, 40, 42—44], что в природе должны существовать сверхплотные состояния вещества (ядра галактик, так называемые  $D$ -тела, сколлапсировавшие звезды и др.). Тогда тело может находиться под своей сферой Шварцшильда и практически может быть принято за материальную точку. Следует ожидать, что  $l$  и  $r$  будут существенно различаться для не очень далеких от сферы Шварцшильда окружностей. Для наименьшей устойчивой круговой орбиты в поле Шварцшильда, определяемой значением  $r = 3 r_g$  [45—47], имеем  $l \approx 5,2 r_g$ . При увеличении  $r$  различие между  $l$  и  $r$  довольно быстро уменьшается. Действительно, для  $r = 10 r_g$  находим  $l \approx 12,9 r_g$ , а для  $r = 100 r_g$  получаем  $l \approx 104,1 r_g$ .

Если  $r \gg r_g$  и  $a \gg r_g$ , то удобно вместо точных формул (2.9) и (2.16) пользоваться приближенными, которые получаются из них разложением по степеням  $r_g/r$  и  $r_g/a$ :

$$l = r + \Delta r, \quad \Delta r \approx \begin{cases} \frac{r_g}{2} \left( \pi - 1 + \ln \frac{4r}{r_g} \right), & (3.1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{r_g}{2} \left( \frac{1}{3} + \ln \frac{r}{a} \right), & (3.2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} R_a - a + \frac{r_g}{2} \ln \frac{r}{a}, & (3.3) \end{cases}$$

где (3.1) имеет место в случае точечного центрального тела, (3.2)—в идеальном случае  $\rho = \text{const}$ , а (3.3)—в случае центрального тела конечных размеров некоторой реальной структуры.

Возьмем центральное тело, у которого  $r_g = 2,96$  км (соответствует Солнцу,  $m_0 \approx 2 \cdot 10^{33}$  г). Рассмотрим далее круговые орбиты, характеризующиеся следующими значениями  $r$ : 1)  $r_M = 5,79 \cdot 10^7$  км, 2)  $r_B = 1,08 \cdot 10^8$  км, 3)  $r_3 = 1,5 \cdot 10^8$  км. Эти  $r$  соответствуют средним расстояниям Меркурия, Венеры и Земли до Солнца. Истинные радиусы этих круговых орбит  $l_M$ ,  $l_B$ ,  $l_3$  будут находиться из (3.1—3.3), но в зависимости от структуры центрального тела поправки  $\Delta r$  будут получаться разными, т. е.  $l$  будет функцией не только  $r$  и  $m$ , но также и плотности  $\rho$ . Действительно, если считать центральное тело материальной точкой, то по (3.1) соответственно получаем:  $l_M \approx r_M + 30,1$  км,  $l_B \approx r_B + 31,0$  км,  $l_3 \approx r_3 + 31,5$  км. Если центральное тело считать однородным идеальным шаром с координатным радиусом  $a = 6,96 \cdot 10^5$  км, то, согласно (2.15),  $R_a \approx a + 0,5$  км и по (3.2)  $l_M \approx r_M + 7,0$  км,  $l_B \approx r_B + 8,1$  км,  $l_3 \approx r_3 + 8,5$  км. Если же принять во внимание внутреннее строение Солнца (см., например, [48], § 120), то, согласно (2.13),  $R_a \approx a + 1,3$  км и по (3.3)  $l_M \approx r_M + 7,8$  км,  $l_B \approx r_B + 8,7$  км,  $l_3 \approx r_3 + 9,3$  км. Таким образом, идеальные случаи (тело точечное или однородный шар) дают крайние значения для величин поправок  $\Delta r$ . Учет реального распределения плотностей в центральном теле дает промежуточные значения для  $\Delta r$ . В этих пределах поправки  $\Delta r$  тем больше, чем больше плотность в центральных областях звезды при одной и той же массе. В самом деле, нейтронная звезда с массой  $m = 0,9 m_0$  и координатным радиусом  $a = 2250$  км имеет  $R_a \approx a + 10$  км [49], а поэтому, например,  $l_M \approx r_M + 23,5$  км, т. е.  $\Delta r \sim 23$  км.

Отмеченная закономерность справедлива в любых случаях и понятна без всяких вычислений из самых общих свойств поля Шварцшильда в вакууме и веществе. Если в трехмерном пространстве поля Шварцшильда взять некоторую окружность, характеризующую значением радиальной координаты  $r$ , и вычислять отношение длины окружности  $2\pi r$  к ее физическому радиусу  $l$ , то при одной и той же массе центрального тела, т. е. одной и той же метрике (2.1) вне тела, и одном и том же значении  $r$  отношение  $2\pi r/l$  не будет постоянным. Оно будет наименьшим, когда центральное тело находится под сферой Шварцшильда, и наибольшим, когда тело является однородным шаром. Другими словами, указанное отношение зависит не только от величины полной массы центрального тела, но также и от распределения плотности материи в нем. Для белого карлика с массой Солнца отношение  $2\pi r/l$  больше, чем для Солнца, для сколлапсировавшей звезды больше, чем до коллапса.

§ 4. Возможности экспериментального обнаружения эффекта. Обсуждаемый релятивистский эффект возникает в результате искривленности трехмерного пространства, точнее—из-за разницы  $\Delta r$  между  $l$  и  $r$ , которая для солнечной системы, как видно из расчетов, невелика:  $\Delta r_M = l_M - r_M \approx 7,8$  км,  $\Delta r_B = l_B - r_B \approx 8,7$  км,  $\Delta r_3 = l_3 - r_3 \approx 9,3$  км. Из-за эллиптичности орбит эти средние значения разностей колеблются незначительно: для наиболее эксцентричной орбиты Меркурия колебания составляют примерно  $\pm 0,3$  км, а для почти круговых орбит Венеры и Земли колебания выражаются всего лишь сотыми долями километра. Это означает, что теорию рассматриваемого релятивистского эффекта для эллиптических орбит Меркурия, Венеры и Земли

можно строить исходя из теории этого эффекта на соответствующих круговых орбитах. Находим, что

$$\begin{aligned} \Delta r_M/r_M &\approx 1,35 \cdot 10^{-7}, \quad \Delta r_B/r_B \approx 0,80 \cdot 10^{-7}, \\ \Delta r_3/r_3 &\approx 0,62 \cdot 10^{-7}. \end{aligned} \quad (4.1)$$

Таким образом, чтобы экспериментально обнаружить эффект, нужно уметь измерять расстояния с точностью  $\sim 10^{-7} \div 10^{-8}$ . В последнее время в связи с успехами радиолокационной астрономии подобные высокие точности достигнуты [29, 30] (см. также [7, 50]). Радиолокаторы «замечают» в околосолнечном пространстве, лежащем внутри земной орбиты, расстояния  $\sim 1,5$  км (вдоль радиолуча). В частности, с помощью радиолокации Меркурия и Венеры удалось как будто осуществить предложенную в [22] четвертую проверку ОТО. Достигнутая точность эксперимента небольшая, всего лишь около 20% [30].

Теоретической основой для четвертой проверки ОТО является следующее обстоятельство [22, 25]. Если свет движется по радиусу в поле Шварцшильда, то по часам далекого наблюдателя скорость света есть

$$\frac{dl}{dt} = c \sqrt{1 - \frac{r_g}{r}}. \quad (4.2)$$

Поэтому вблизи центрального тела с точки зрения этого наблюдателя луч света (или радиолуч) движется медленнее. Проводя радиолокацию Меркурия или Венеры в то время, когда они находятся за Солнцем и луч почти касается поверхности Солнца (верхнее соединение), наблюдатель должен зарегистрировать запаздывание эхо-сигнала примерно на  $1,1 \div 1,2 \cdot 10^{-4}$  сек в соответствии с (4.2). Известное искривление траектории луча на  $1'',75$  немного увеличивает длину пути луча, что приводит к очень малому дополнительному запаздыванию (на величину  $\sim 10^{-8}$  сек). Имеются и нерелятивистские причины (плазма солнечной короны и др.), которые также вызывают дополнительное замедление движения луча. Выделение релятивистского из совокупного запаздывания является сложной задачей.

Необходимо обратить внимание еще на одну релятивистскую причину, приводящую к значительному запаздыванию эхо-сигнала. Как видно из проделанных в данной работе вычислений, следует ожидать, кроме запаздывания на  $1,1 \div 1,2 \cdot 10^{-4}$  сек, еще релятивистское запаздывание примерно на  $10^{-4}$  сек, обусловленное удлинением пути радиолуча приблизительно на 30 км. Более точные вычисления дают следующее: в верхнем соединении с Меркурием удлинение пути для луча (туда и обратно) составляет 27,5 км, с Венерой — 29,5 км.

Описываемый эксперимент по четвертой проверке ОТО [22, 23, 29, 30] содержит указанное релятивистское запаздывание на  $10^{-4}$  сек в завуалированном виде\*). Только более внимательное рассмотрение показывает, что общее релятивистское запаздывание состоит из двух частей. В оптимальном варианте для Меркурия запаздывание определяется суммой  $1,1 \cdot 10^{-4} + 0,9 \cdot 10^{-4} = 2 \cdot 10^{-4}$  сек, а для Венеры суммой  $1,2 \cdot 10^{-4} + 10^{-4} = 2,2 \cdot 10^{-4}$  сек.

Отметим, что замедление движения луча и удлинение пути существуют совместно, разделить их в эксперименте, по-видимому, невозможно. Можно измерить только общее релятивистское запаздывание, которое составляет примерно  $2 \cdot 10^{-4}$  сек.

В заключение заметим, что использование искусственной планеты, оборудованной соответствующими приборами [50, 52], или установка

\*) На существование обсужденного здесь релятивистского эффекта указывалось также в [51]. Но в [51] отсутствует численная оценка эффекта, и автору неизвестно, совпадает ли она с оценкой в настоящей работе.

ретрансляционной системы на Луне позволили бы значительно повысить точность обсуждаемого и других экспериментов по проверке ОТО. Автор благодарит О. С. Иваницкую за полезные замечания.

### Литература

1. Einstein A. Jb. Radioaktivität u. Elektronik, 4, 411, 1907.
2. Einstein A. Ann. Phys., 35, 898, 1911.
3. Einstein A. Sitzungsber. preuss. Akad. Wiss., 47, 831, 1915.
4. Einstein A. Ann. Phys., 49, 769, 1916.
5. Einstein A. Naturwiss., VII, 776, 1919.
6. Dicke R. H., Peebles P. J. Space Sci. Rev., 4, 419, 1965.
7. Дикке Р. Сб. «Гравитация и относительность». Изд-во «Мир», 1965, стр. 49.
8. Брагинский В. Б., Руденко В. Н. Гравитация и теория относительности. Уч. зап. КГУ, 123, кн. 12, 96, 1963.
9. Петров А. З. Гравитация и теория относительности. Уч. зап. КГУ, 123, кн. 12, 119, 1963.
10. Dehnen H. Phys. Bl., 25, № 9, 1969.
11. Полиевктов-Николадзе Н. М. ЖЭТФ, 52, 1360, 1967.
12. Полиевктов-Николадзе Н. М. ЖЭТФ, 57, 2010, 1969.
13. Lense J., Thirring H. Phys. Zeits., 19, 156, 1918.
14. Гинзбург В. Л. ЖЭТФ, 30, 213, 1956.
15. Гинзбург В. Л. Эйнштейн и современная физика. ГИТТЛ, 1956, стр. 93.
16. Богородский А. Ф. Уравнения поля Эйнштейна и их применение в астрономии. Киев, 1962.
17. Schiff L. I. Proc. Nat. Acad. Sci. U.S., 46, 871, 1960.
18. Пустовойт В. И., Баутин А. В. ЖЭТФ, 46, 1386, 1964.
19. Ross D. K., Schiff L. I. Phys. Rev., 141, 1215, 1966.
20. Вебер Дж. ОТО и гравитационные волны. ИЛ, 1962.
21. Брагинский В. Б. УФН, 86, 433, 1965.
22. Shapiro I. I. Phys. Rev. Lett., 13, 789, 1964.
23. Дашевский В. М. УФН, 87, 373, 1965.
24. Shapiro I. I. Phys. Rev., 141, 1219, 1966; 145, 1005, 1966.
25. Зельдович Я. Б., Новиков И. Д. Эйнштейн. сб. Изд-во «Наука», 1966, стр. 18.
26. Ash M. E., Shapiro I. I., Smith W. B. Astron. J., 72, 338, 1967.
27. Гинзбург В. Л. Эйнштейн. сб. Изд-во «Наука», 1967, стр. 80.
28. Цзю Х., Гоффман В. Сб. «Гравитация и относительность». Изд-во «Мир», 1965.
29. Shapiro I. I., Pettengill G. H., Ash M. E., Stone M. L., Smith W. B., Ingalls R. P., Brockelman R. A. Phys. Rev. Lett., 20, № 22, 1265, 1968.
30. Shapiro I. I. Sci. American, 219, № 1, 28, 1968 (перев. УФН, 99, 319, 1969).
31. Schwarzschild K. Berl. Ber., 189, 1916.
32. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теория поля. Изд-во «Наука», 1967.
33. Новиков И. Д. Сообщ. ГАИШ, № 120, 42, 1962; № 132, 3, 1964.
34. Зельдович Я. Б., Новиков И. Д. Релятивистская астрофизика, 1967.
35. Einstein A. Ann. Math., 40, 922, 1939.
36. Субботин М. Ф. Введение в теоретическую астрономию. М., 1968.
37. Зельманов А. Л. Тр. 6-го совещ. по вопр. космогонии. М., 1959, стр. 155.
38. Рашевский П. К. Риманова геометрия и тензорный анализ. Физматгиз, 1963.
39. Рябушко А. П. Весті АН БССР, серия фіз.-мат. навук, № 2, 1970.
40. Уилер Дж., Гаррисон Б., Вакано М., Торн К. Теория гравитации и гравитационный коллапс. Изд-во «Мир», 1967, гл. 2.
41. Schwarzschild K. Berl. Ber., 424, 1916.
42. Амбарцумян В. А. Докл. на XI Сольвеевском конгрессе. Брюссель, 1958.
43. Амбарцумян В. А. Научные тр., 2. Изд-во АрмССР, Ереван, 1960.
44. Амбарцумян В. А., Саакян Г. С. Вопросы космогонии, 9, 91, 1963.
45. Уиттекер Е. Т. Аналитическая динамика. ОНТИ, 1937, § 170.
46. Каплан С. А. ЖЭТФ, 19, 951, 1949.
47. Пирагас К. А. Гравитация и теория относительности, вып. 4—5. Изд-во КГУ, 1968, стр. 180.
48. Бакулин П. И. и др. Курс общей астрономии. Изд-во «Наука», 1966.
49. Саакян Г. С., Вартамян Ю. Л. Астрон. ж., 41, 193, 1964.
50. Чихачев Б. М. Сб. «Гносеологические аспекты измерений». Киев, 1968, стр. 214.
51. Арифов Л. Я., Кадыев Р. К. GR-5, тезисы докладов. Тбилиси, 1968, стр. 203.
52. Ginzburg V. L. Astronautical Acta, 12, № 2, 1966.

Белорусский государственный университет  
им. В. И. Ленина

Поступило в редакцию  
29.IV 1970

УДК 537.525.5

І. Р. НЕКРАШЭВІЧ, П. А. МАТУСЕВІЧ, В. А. ЛАПШЫН

### ВЫМЯРЭННЕ КАТОДНАГА ПАДЗЕННЯ ПАТЭНЦЫЯЛУ НА БІНАРНЫХ СПЛАВАХ $\text{Cu-Zn}$ і $\text{Cu-Ni}$ ПРЫ ДУГАВЫМ РАЗРАДЗЕ

Вымярэнні катоднага падзення патэнцыялу ў дугавых разрадах праводзіліся многімі даследчыкамі [1—5], аднак з-за вельмі розных умоў вымярэнняў, вялікіх хібнасцей і да т. п. яны не прывялі да адназначнай сувязі паміж катодным падзеннем патэнцыялу і фізічнымі велічынямі, якія характарызуюць матэрыял катода.

У адрозненне ад папярэдніх аўтараў Кесаеву [6, 7] удалося выявіць сувязь велічыні катоднага падзення  $U_c$  з іанізацыйным патэнцыялам і атамнай вагой элемента.

Выкарыстоўваючы больш дасканалую метадыку вымярэнняў, Гракаў [8] правёў даследаванні катодных падзенняў патэнцыялу на вялікай колькасці чыстых металаў.

Цікава высветліць заканамернасці змянення катоднага падзення ў дузе на сплавах у залежнасці ад суадносін кампанентаў у сплаве.

Гэта работа прысвечана вывучэнню катоднага падзення ў вакуумнай дузе на электродах з бінарных сплаваў сістэмы  $\text{Cu-Zn}$  і  $\text{Cu-Ni}$ .

Апісанне эксперыментальнай устаноўкі і метадыкі вымярэнняў. Вымярэнні катоднага падзення патэнцыялу ў дугавым разрадзе на сплавах праводзіліся па метаду вымярэння напружання на электродах кароткай вакуумнай дугі [8].

Усе вымярэнні праводзіліся ў вакууме ад  $3 \cdot 10^{-5}$  да  $6 \cdot 10^{-6}$  тор з прымяненнем высокавакуумнай пасткі тыпу ТВЛ-100-2С.

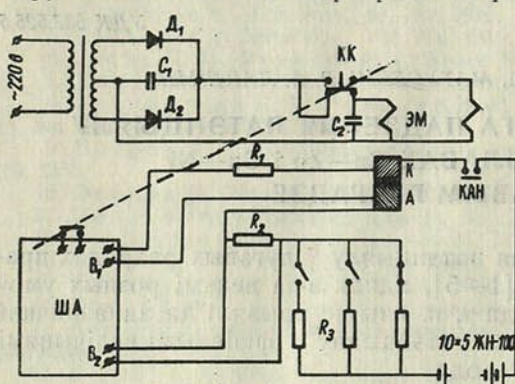
Дуга ўзбуджалася развядзеннем электродаў. У рабоце [4] указваецца, што калі анод выраблен з металу з больш высокімі цеплавымі канстантамі, чым катод, то працэсы ў дузе будуць цалкам вызначацца матэрыялам катода. Гэта было таксама пацверджана ў нашых эксперыментах. З гэтай прычыны ў якасці матэрыялу анода прымяняўся вальфрам, з якога вырабляўся суцэльны цыліндр дыяметрам 10 мм з плоскім тарцом.

У якасці катода браліся ўзоры з даследуемага сплаву ў выглядзе пруткоў дыяметрам 10 мм з плоскімі тарцамі або ў выглядзе плоскіх дыскаў дыяметрам 40 мм і таўшчынёй 5 мм.

Дуга запальвалася паміж плоскімі паверхнямі, міжэлектродны прамежак не перавышаў 3 мм. Электрычная схема устаноўкі і схема кіравання паказаны на рыс. 1. Вымяральным прыборам з'яўляўся шлейфавы асцылограф (ША) з вібратарамі з уласнай частатой 15 кГц. Сілкаванне дугі ажыццяўлялася ад 10 паслядоўна злучаных акумулятараў 5-ЖН-100. Ток у дузе рэгуляваўся супраціўленнем  $R_3$ , уключаным паслядоўна з разраднікам КА.

Устаноўка працуе наступным чынам. У зыходным становішчы праз абмотку электрамагніта ЭМ, які ўтрымлівае катод і анод у замкнёным

становішчы, працякае ток ад выпрамніка  $D_1$ — $D_2$ ; праз абмотку кантактара (КАН) ток не працякае, на разраднік КА напружанне не падаеца. Пры націсканні кнопкі кіравання (КК) спрацоўвае кантактар і праз разраднік ідзе ток; адначасова ўключаецца шлейфава асцылограф. Праз прамежак часу, які вызначаецца часам разраду кандэнсатара  $C_2$  праз абмотку ЭМ, электрамагніт ЭМ абсточваецца і пад уздзеяннем спружыны катод і анод разрадніка рассоўваюцца. Запальваецца дуга.



Калі кнопка кіравання адпускаецца, схема вяртаецца ў зыходнае становішча.

Каліброўка вібратора  $V_1$  з дабавачным супраціўленнем  $R_1$  для вымярэння напружання на электродах разрадніка ажыццяўлялася з дапамогай вольт-

Рис 1. Схема ўстаноўкі для вымярэння катоднага падзення патэнцыялу ў дугавым разрадзе

метра М-1106 (клас дакладнасці 0,2), а вібратора  $V_2$  з шунтом  $R_2$  для вымярэння тока дугі — прыборам М-104 (клас дакладнасці 0,5). Пасля кожных 20 асцылаграм праводзілася праверка адчувальнасці шлейфаў.

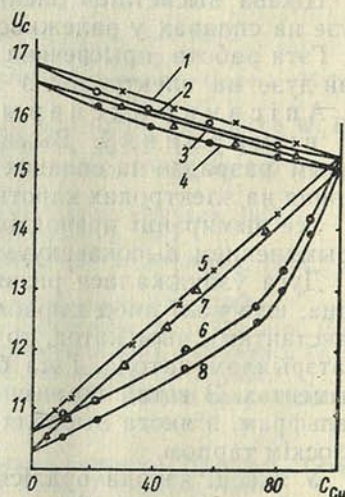
Асцылаграма апрацоўвалася на мікрафатометры МФ-2 са спецыяльна вырабленай прыстаўкай. Значэнне  $U_c$  бралася сярэднім з 15—20 асцылаграм. Хібнасць вымярэнняў  $\sim 1\%$ . Статыстычны раскід ад разраду да разраду да  $2\%$ .

Канцэнтрацыю металаў і суадносіны паміж імі ў кандэнсатах з воблака плазмы вызначалі палярографічным метадам на палярографе LP-60.

Кандэнсат, асаджаны на тэфлонавую падложку, растваралі пры кіпячэнні ў

Рис. 2. Залежнасць велічыні катоднага падзення патэнцыялу  $U_c$ , в ад канцэнтрацыі медзі  $C_{Cu}$ , % ў сплаве і ў плазме:

1—залежнасць  $U_c$  у выпадку электродаў  $Cu-Ni$  ад саставу плазмы і 2—ад саставу катода пры токах разраду 16 а, 3, 4—адпаведна для токаў 8 а; 5, 6, 7, 8—тыя ж залежнасці ў выпадку электрода  $Cu-Zn$



сумесі салянай і азотнай кіслот і ўпарвалі на вадзяной бані дасуха. Астатк растваралі ў  $HCl$ , разбаўленай 1:1, раствор пераносілі ў мерную колбу і даводзілі фонам да меткі. Для вызначэння кандэнсатаў плазмы з бінарных электродаў  $Cu-Zn$  і  $Cu-Ni$  пры сумеснай прысутнасці гэтых пар іонаў быў выкарыстан у якасці фону 0,5 М раствор  $NH_4OH + 0,5$  М  $NH_4Cl$ .

Атрыманы выразныя паляраграмы з  $E_{1/2} = -0,49$  в для  $Cu^{++}$  і  $E_{1/2} = -1,36$  в для  $Zn^{++}$ . Індыкатарны электрод — ртутны капаючы.

Палярографічнае вызначэнне  $Cu-Ni$  праводзілася на фоне 1М  $NH_4OH + 0,2$  М  $NH_4Cl$ . Для  $Ni$   $E_{1/2} = -1,06$  в.

Некаторыя ўзоры кандэнсату плазмы з малой працэнтнай колькасцю Ni—Cu—Ni-сплаву абагачалі шляхам упарвання раствору на вадзяной бані. Паляраграфаванне праводзілі ў мікраячэйцы ў аб'ёме 1—2 мл.

Дакладнасць аналізу саставу кандэнсату плазмы 3—5%.

Рэзультаты вымярэнняў. Вымярэнні праводзіліся для сплаваў Cu—Zn з канцэтрацыямі медзі 100%, 90, 83, 73, 50, 22, 11, 0% і для сплаваў Cu—Ni з канцэтрацыямі медзі 100%, 80, 57, 37,5, 20, 0% пры токах разраду 8 і 16 а.

Рэзультаты паказаны ў табліцы і на графіках рыс. 2.

Табліца

Значэнне велічыні катоднага падзення патэнцыялу ў залежнасці ад саставу кандэнсату плазмы і сплаву катода

Састаў катода	$U_c''$ , в (ток 8 а)	$U_c'$ , в (ток 16 а)	Састаў кандэнсату плазмы (ток 8 а)	Састаў кандэнсату плазмы (ток 16 а)
100% Cu	15,0	15,2	100% Cu	100% Cu
90% Cu + 10% Zn	14,0	14,2	75% Cu + 25% Zn	78% Cu + 22% Zn
83% Cu + 17% Zn	13,0	13,3	54% Cu + 46% Zn	59% Cu + 41% Zn
73% Cu + 27% Zn	12,4	12,7	44% Cu + 56% Zn	48,4% Cu + 51,6% Zn
50% Cu + 50% Zn	11,7	12,0	31% Cu + 69% Zn	33% Cu + 67% Zn
22% Cu + 78% Zn	10,8	11,1	12% Cu + 88% Zn	13% Cu + 87% Zn
11% Cu + 89% Zn	10,5	10,9	5% Cu + 95% Zn	7% Cu + 93% Zn
100% Zn	10,3	10,6	100% Zn	100% Zn
100% Ni	16,5	16,8	100% Ni	100% Ni
80% Ni + 20% Cu	16,1	16,3	72% Ni + 28% Cu	72% Ni + 28% Cu
62,5% Ni + 37,5% Cu	15,7	16,0	55% Ni + 45% Cu	55% Ni + 45% Cu
43% Ni + 57% Cu	15,4	15,8	35% Ni + 65% Cu	35% Ni + 65% Cu
20% Ni + 80% Cu	15,2	15,4	15% Ni + 85% Cu	15% Ni + 85% Cu

Рэзультаты аналізу саставу кандэнсату плазмы ў межах хібнасці вымярэнняў знаходзяцца ў добрай адпаведнасці з даследаваннямі аўтараў [9, 10], якія звязваюць адрозненні ў саставах воблака разраду і даследуемага сплаву з розніцай лятучасцей кампанентаў.

### Вывады

1. Катоднае падзенне патэнцыялу дугаваго разраду на бінарных сплавах Cu—Zn і Cu—Ni лінейна залежыць ад канцэтрацыі медзі ў кандэнсате плазмы разраду. Гэта залежнасць можа быць прадстаўлена так:

$$U_c = U_c' + (1 - C_{Cu})(U_c'' - U_c')$$

дзе  $U_c$  — катоднае падзенне ў дугавым разрадзе на даследуемым сплаве,  $U_c'$  — катоднае падзенне ў дугавым разрадзе на чыстай медзі,  $U_c''$  — катоднае падзенне ў дугавым разрадзе ў выпадку чыстага другога кампанента сплаву,  $C_{Cu}$  — канцэтрацыя медзі ў кандэнсате плазмы разраду.

2. Як вынікае з рэзультатаў паляраграфічнага аналізу, воблака плазмы дугаваго разраду з медна-нікелевым катодам з-за большай у параўнанні з нікелем лятучасці медзі абагачана меддзю. Катоднае падзенне патэнцыялу ў дугавым разрадзе на чыстай медзі ніжэй, чым на нікелі, таму крывая 2 размяшчаецца ніжэй крывой 1. Па той жа прычыне ў сувязі з большай у параўнанні з меддзю лятучасцю цынку ў выпадку медна-цынкавых катодаў крывая 6 ніжэй крывой 5.

3. Ведаючы велічыню катоднага падзення патэнцыялу пры дугавым разрадзе на сплаве, можна вызначыць канцэнтрацыю кампанентаў сплаву ў кандэнсаце плазмы разраду

$$C_{Cu} = 1 - \frac{U_c - U'_c}{U''_c - U'_c},$$

а па графіках рыс. 2 можна вызначыць канцэнтрацыю кампанентаў у самім сплаве.

### Літаратура

1. Клярфельд Б., Соболев В. ЖТФ, № 17, 319, 1947.
2. Feet I. H. J. Appl. Phys., № 12, 436, 1941.
3. Reese M. P. Nature, № 177, 1089, 1956.
4. Reese M. P. Nature, № 181, 475, 1958.
5. Хольм Р. Электрические контакты. М., 1961.
6. Кесаев И. Г. ЖТФ, 34, 1482, 1964.
7. Кесаев И. Г. Катодные процессы ртутной дуги и вопросы ее устойчивости. М., 1961.
8. Граков В. Е. ЖТФ, 37, 397, 1967.
9. Русанов А. К. Спектральный анализ руд и минералов. М.—Л., 1948.
10. Рудневский Н. К., Обухова Е. С. Материалы X Всесоюзного совещания по спектроскопии. Львов, 1958.

Белорусский государственный университет  
им. В. И. Ленина

Поступило в редакцию  
15.VI.1970

Ф. П. КОРШУНАУ

## НЕКАТОРЫЯ ЗАКАНАМЕРНАСЦІ ЗМЯНЕННЯ ХАРАКТАРЫСТЫК КРЭМНІЕВЫХ ДЫЁДАУ ПАД УЗДЗЕЯННЕМ РАДЫЯЦЫІ

Пры ўздзеянні на крэмніевыя дыёды радыеактыўных выпраменьванняў адбываюцца абарачальныя і неабарачальныя змяненні іх характарыстык [1—5]. Неабарачальныя змяненні не аднаўляюцца пры хатніх тэмпературах і вызначаюцца ў асноўным структурнымі дэфектамі, што ўзнікаюць пад уздзеяннем часцінак, энергія якіх вышэй парога зрушэння атамаў з вузлоў крышталічнай рашоткі крэмнію. Абарачальныя змяненні ўзнаўляюцца імгненна або праз некаторы час абпраменьвання. Яны ўзнікаюць у выніку паверхневых і іанізацыйных эфектаў, а таксама радыеактыўных ператварэнняў. Абарачальныя змяненні выражаюцца ў павелічэнні адваротнага току дыёда. Пры ўздзеянні стацыянарнай радыяцыі (нейтроннае, электроннае, гама-абпраменьванне і г. д.) на крэмніевыя дыёды з надзейна ахаванымі  $p-n$ -пераходамі яны не адыгрываюць рашаючай ролі.

Як паказваюць даследаванні [1—3], асноўным крытэрыем у вызначэнні радыяцыйнай стойкасці крэмніевых дыёдаў пры ўздзеянні стацыянарнай радыяцыі пры нармальных тэмпературах з'яўляецца ступень неабарачальных змяненняў прамой вольт-ампернай характарыстыкі, выкліканых эфектам зрушэння. Адною з праяў гэтых эфектаў з'яўляецца значнае зніжэнне прамой праводнасці крэмніевых дыёдаў у вобласці рабочых токаў. Гэта таксама можа мець месца пры імпульсным абпраменьванні дыёдаў, калі канцэнтрацыя структурных дэфектаў, якія ўтвараюцца пры гэтым, дастатковая для такіх змяненняў [5]. У выніку з павелічэннем інтэгральнага патоку абпраменьвання прамое падзенне напружання на крэмніевым дыёдзе ўзрастае. Аднак рост гэты будзе вызначацца радам фактараў.

Даследаванні паказваюць, што да такіх фактараў могуць адносіцца велічыня ўдзельнага супраціўлення зыходнага крэмнію, тып легіруючых прымесей, тып праводнасці зыходнага матэрыялу, дыфузійная даўжыня неасноўных носьбітаў, таўшчыня базавай вобласці, тэмпература абпраменьвання і г. д.

У цяперашні час устаноўлены некаторыя заканамернасці, якім падпарадкоўваюцца змяненні асобных параметраў дыёдаў і зыходных матэрыялаў пад уздзеяннем абпраменьвання. Аднак пакуль няма прыдатных залежнасцей, па якіх можна было б ацэньваць неабарачальныя радыяцыйныя змяненні прамой вольт-ампернай характарыстыкі.

У гэтай рабоце на аснове аналізу работы дыёднай  $p-n$ -структуры ва ўмовах радыяцыйных уздзеянняў робіцца спроба атрымаць такія залежнасці.

У аснову разгляду пакладзена змяненне найбольш адчувальнага да радыяцыі параметра крэмніевых дыёдаў — прамог падзення напружання пры параўнаўча высокім узроўні інжэкцыі.

Вывад разліковых залежнасцей. Прамае падзенне напружання на дыёдзе ў агульным выглядзе можна, згодна з [7], прадставіць як

$$U_d = U_{p-n} + \int_0^W E dx, \quad (1)$$

дзе  $U_{p-n}$  — падзенне напружання на  $p-n$ -пераходзе;  $E$  — напружанасць электрычнага поля;  $W$  — таўшчыня базы. Падзенне напружання на кантактах у разлік не прымаецца.

Пры разглядзе выразу (1) неабходна прааналізаваць два выпадкі: 1)  $W/L < n$  і 2)  $W/L > n$ , дзе  $L$  — дыфузійная даўжыня неасноўных носьбітаў,  $n$  — дадатны лік, большы за адзінку і адпавядаючы ўмове, пры якой можа яшчэ захоўвацца мадуляцыя праводнасці базы.

Першы выпадак звычайна мае месца пры абпраменьванні дыёдаў з тонкай базай. Другі выпадак рэалізуецца пры абпраменьванні дыёдаў з тоўстай базай, а таксама дыёдаў з тонкай базай, якія сталі доўгімі ў выніку абпраменьвання.

*Тонкая база.* Пры абпраменьванні крэмніевых дыёдаў з тонкай базай, пакуль захоўваецца мадуляцыя яе праводнасці, падзенне напружання на ёй практычна не змяняецца. Для дыёда з тонкай базай выраз (1) у адпаведнасці з тэорыяй Саа — Нойса — Шоклі можна перапісаць у выглядзе

$$U_d = \frac{mkT}{q} \ln \left( \frac{I}{I_s} + 1 \right) + U_{60}, \quad (2)$$

дзе  $k$  — пастаянная Больцмана;  $T$  — абсалютная тэмпература;  $m$  — каэфіцыент;  $q$  — зарад электрона;  $I$  — прамы ток;  $I_s$  — ток насычэння;  $U_{60}$  — падзенне напружання на тонкай базе.

Ток насычэння, у сваю чаргу, вызначаецца выразам

$$I_s = Sq n_i^2 \left( \frac{1}{p_p} \sqrt{\frac{D_n}{\tau_n}} + \frac{1}{n_n} \sqrt{\frac{D_p}{\tau_p}} \right), \quad (3)$$

дзе  $S$  — плошча  $p-n$ -пераходу;  $n_i$  — канцэнтрацыя носьбітаў току пры ўласнай праводнасці;  $\tau_n$ ,  $\tau_p$  — час жыцця неасноўных носьбітаў адпаведна электронаў і дзірак,  $n_n$ ,  $p_p$  — канцэнтрацыя асноўных носьбітаў у  $n$ - і  $p$ -абласцях дыёднай структуры,  $D_n$ ,  $D_p$  — каэфіцыенты дыфузіі электронаў і дзірак.

Рэальныя  $p-n$ -пераходы, як правіла, з'яўляюцца несіметрычнымі, г. зн. канцэнтрацыя асноўных носьбітаў у адной з абласцей больш на некалькі парадкаў, чым у другой.

Для выпадку, які рэалізуецца на практыцы, калі канцэнтрацыя ў адной вобласці значна большая, чым у другой ( $p_p \gg n_n$ ), і які мы будзем далей разглядаць, выраз (3) можна ў адпаведнасці з [6, 7] запісаць у выглядзе

$$I_s = Sq^2 n_i^2 \rho_n \mu_n \sqrt{\frac{D_p}{\tau_p}}, \quad (4)$$

дзе  $\rho_n = 1/q \mu_n n_n$  — удзельнае супраціўленне паўправадніка  $n$ -тыпу.

З улікам (4) выраз (2) прыме выгляд

$$U_d = \frac{mkT}{q} \ln \frac{I}{Sq^2 n_i^2 \rho_n \mu_n \sqrt{\frac{D_p}{\tau_p}}} + U_{60}. \quad (5)$$

Паколькі  $I/I_s \gg 1$ , адзінка ў (5) апушчана.

Наибольшая мощность  $\dot{y}$  вынужденного абраменования изменяется час жизни неосновных носителей  $\dot{y}$  и удельное соотношение зыходного кремния. Изменение рухомости  $\dot{y}$  парауни са изменением  $\tau$  и  $\rho$  мае другарадное значенне [8, 9].

Калі дапусціць, што канцентрацыя радыяцыйных дэфектаў прапарцыянальная інтэгральному патоку абраменования, а ўзровень Фермі не змяняецца, то для вызначэння часу жыцця пры абраменванні запісаюць выраз [1]

$$\frac{1}{\tau} = \frac{1}{\tau_0} + \frac{\Phi}{K_1}, \quad (6)$$

дзе  $\tau_0$  — час жыцця у крышталі да абраменования;  $\Phi$  — інтэгральны паток абраменования;  $K_1$  — каэфіцыент.

Трэба адзначыць, што калі канцентрацыя радыяцыйных дэфектаў не занадта вялікая ў параўнанні з канцентрацыяй структурных парушэнняў, якія мелі месца ў паўправадніку да абраменования, то формула (6) дае добрую адпаведнасць з эксперыентам [4]. Каэфіцыент  $K_1$  не з'яўляецца ва ўсіх выпадках строга пастаяннай велічыней. Ён залежыць ад тэмпературы абраменования, тыпу праводнасці і прымесей у паўправадніку [10], становішча ўзроўню Фермі, узроўню інжекцыі і, напэўна, структуры радыяцыйных дэфектаў. Гэтым часткова можна вытлумачыць назіраемы на практыцы [10—13] значны раскід значэнняў каэфіцыента  $K_1$ . Напрыклад, пры нейтронным абраменванні кремнію і  $p$ - $n$ -пераходаў атрымалі  $K_1 = 1 \cdot 10^6 \div 1 \cdot 10^7$  нейтрон  $\cdot$  сек/см<sup>2</sup>. Чым больш вялікі каэфіцыент  $K_1$ , тым вышэй радыяцыйная стойкасць паўправадніковага матэрыялу па часу жыцця неосновных носіцеляў.

Хаця час жыцця неосновных носіцеляў з'яўляецца найбольш важным і разам з тым самым адчувальным да радыяцый параметрам у дыёдах і іншых паўправадніковых прыборах, змяненне удзельнага супраціўлення крышталю базы пад уздзеяннем абраменования можа істотным чынам пагаршаць работу кремніевых дыёдаў, асабліва калі дыфузійная даўжыня неосновных носіцеляў менш таўшчыні базы. Было ўстаноўлена [14, 15], што змяненне удзельнага супраціўлення электроннага кремнію пры абраменванні (пакуль істотна не змяняецца рухомасць) падпарадкоўваецца экспаненцыяльнай залежнасці

$$\rho_n = \rho_{n0} e^{\alpha\Phi}, \quad (7)$$

дзе  $\rho_{n0}$  — удзельнае супраціўленне кремнію да абраменования,  $\alpha$  — каэфіцыент, які характарызуе скорасць выдалення носіцеляў току.

Падстаўляючы ў (5) выразы (6) і (7), атрымаем залежнасць для змянення прамога падзення напружання на дыёдзе з тонкай базай у функцыі інтэгральнага патоку абраменования

$$U_d = \frac{mkT}{q} \ln \frac{I}{S \mu_n q^2 n_i^2 \rho_{n0} \sqrt{\frac{D_p}{\tau_{p0}}} \sqrt{\frac{K_1 + \tau_{p0}\Phi}{K_1}} e^{\alpha\Phi}} + U_{d0}, \quad (8)$$

дзе  $\rho_{n0}$ ,  $\tau_{p0}$  — удзельнае супраціўленне зыходнага кремнію і час жыцця неасновных носіцеляў да абраменования.

Выраз (8) можна прадставіць у выглядзе

$$U_d = U_{d0} - \frac{mkT}{q} \left( \alpha\Phi + \ln \sqrt{\frac{K_1 + \tau_{p0}\Phi}{K_1}} \right), \quad (9)$$

дзе  $U_{d0}$  — падзенне напружання на дыёдзе да абраменования.

Як відаць з выразу (9) для выпадку, які разглядаецца, падзенне напружання на тонкім дыёдзе з ростам дозы абпраменьвання змяншаецца.

Аднак пры велічыні інтэгральнага патоку абпраменьвання, якая адпавядае такой канцэнтрацыі радыяцыйных дэфектаў, калі настае прыкметнае зніжэнне мадуляцыі праводнасці базы, падзенне напружання на дыёдзе пачне ўзрастаць. Велічыню гэтага інтэгральнага патоку будзем лічыць гранічнай. Яе можна вызначыць, зыходзячы з умовы захавання мадуляцыі праводнасці базы, якая запісваецца ў выглядзе

$$W/L_p = n. \quad (10)$$

Выраз, які звязвае дыфузійную даўжыню неасноўных носбітаў з інтэгральным патокам абпраменьвання, зыходзячы з (6), можна запісаць так:

$$\Phi = \frac{D_p K_1}{L_p^2} - \frac{D_p K_1}{L_{p0}^2}, \quad (11)$$

дзе  $L_{p0}$  — дыфузійная даўжыня неасноўных носбітаў току да абпраменьвання.

Падстаўляючы ў залежнасць (11) умову (10), атрымаем выраз, які дазваляе вызначыць велічыню гранічнага інтэгральнага патоку, зыходзячы з канструкцыйна-тэхналагічных параметраў дыёда:

$$\Phi_W = \frac{n^2 D_p K_1}{W^2} - \frac{D_p K_1}{L_{p0}^2}. \quad (12)$$

Колькаснае значэнне велічыні  $n$  можна вызначыць з выразу, атрыманага ў рабоце [16], у якім умовы захавання мадуляцыі праводнасці базы звязваюцца з параметрамі матэрыялу і ўзроўнем інжэкцыі:

$$\frac{X_1}{L_p} = \frac{1}{2} \ln \frac{8\rho_0(b+1)}{n_n}, \quad (13)$$

дзе  $X_1$  — мадуляваная частка базы (у нашым выпадку можна пакласці  $X_1 = W$ );  $b$  — адносіны рухомасцей;  $\rho_0$  — канцэнтрацыя інжэктываных дзірак у  $n$ -вобласць ( $\rho_0 \approx J L_p / q D_p$ ), дзе  $J$  — шчыльнасць току.

Формула (13) дае задавальняючую адпаведнасць з эксперыmentам, дзе звычайна ў вобласці рабочых токаў дыёдаў, вырабленых на прамысловым крэмніі рознага ўдзельнага супраціўлення, назіраецца  $W/L_p = 3 \div 7$ , г. зн. пры ўказаных суадносінах база істотна не ўплывае на ход прамой вольт-ампернай характарыстыкі.

На рыс. 1 прадстаўлены графікі, пабудаваныя на падставе ўраўнення (12) ( $n = 5$ ;  $K_1 = 1 \cdot 10^6$  нейтрон·сек/см<sup>2</sup>), якія наглядна паказваюць узаемасувязь паміж гранічным інтэгральным патокам нейтронаў  $\Phi_{Wn}$  ( $E_n > 2,5$  Мэв), таўшчынёй базы  $W$  і пачатковай дыфузійнай даўжынёй неасноўных носбітаў  $L_{p0}$ . Чым менш таўшчыня базы, тым значэнне  $\Phi_{Wn}$  больш. Велічыня  $L_{p0}$  не вельмі моцна ўплывае на значэнне гранічнага інтэгральнага патоку, асабліва ў дыёдаў з тонкімі базамі.

*Дыёд з тоўстай базай.* Ураўненне для вызначэння напружання, якое падае ў тоўшчы паўправадніка базавай вобласці дыёда з тоўстай базай, адпаведна з (1) запісваецца ў выглядзе

$$U_0 = \int_0^w E dx. \quad (14)$$

Рашэнні ўраўнення (12) пры розных гранічных умовах былі выкананы многімі аўтарамі [17—21], якія ў канчатковых рэзультатах прыйшлі

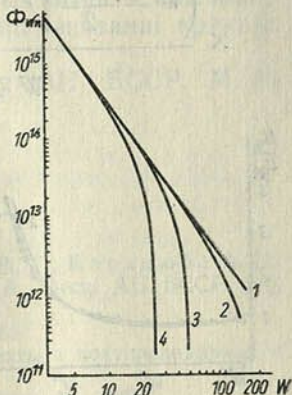
да залежнасці току ад напружання выгляду  $J \approx U^2$ . Толькі ў асобных выпадках [18—21] былі атрыманы кубічная або экспаненцыяльная залежнасці. Кубічная залежнасць мае месца ў асноўным пры вельмі вялікіх узроўнях інжекцыі. Экспаненцыяльны характар залежнасці, атрыманай Стафеевым [21], як паказана Роузам [22], амаль не адрозніваецца ад квадратычнай залежнасці Ламперта — Роуза [17].

Эксперыментальна было пацверджана [4, 23], што прамая вольт-амперная характарыстыка крэміевых дыёдаў, абпрамененых нейтронамі і гама-праменнямі (пры дозах, калі  $W \gg L$ ), у вобласці сярэдніх і вялікіх токаў добра задавальняе квадратычнай залежнасці  $J \approx U^2$ , г. зн. ход яе вызначаецца базавай вобласцю дыёда. Зроблены аналіз паказвае, што выразы, атрыманыя ў [17—21], у той ці іншай форме могуць быць прыменены да абпрамененых дыёдаў.

Найбольш прыдатнай залежнасцю для аналізу

Рис. 1. Залежнасць велічыні гранічнага інтэгральнага патоку хуткіх нейтронаў  $\Phi_{wn}$ , нейтрон·сек/см<sup>2</sup> ад таўшчыні базы  $W$ , мк пры розных пачатковых дыфузійных даўжынях неасноўных носбітаў:

1— $L_{p0} = 100$  мк; 2—30; 3—10; 4—5 мк



характарыстык абпрамененых дыёдаў, на наш погляд, можа быць выраз, атрыманы ў рабоце [20], дзе ўлічаны як дыфузійныя, так і палявыя працэсы:

$$J = \frac{\mu_p n_n q^2 L_p (b + 1)}{(W - X_1)^2 kT} U_{X_1, W}^2 \quad (15)$$

дзе  $U_{X_1, W}$  — падзенне напружання на немадуляванай частцы базы. Можна пакласці  $U_0 = U_{X_1, W}$ . Тады выраз (15) можна запісаць як

$$U_0 = V \bar{J} \frac{W - X_1}{q \mu_n n_n} \sqrt{\frac{b^2}{b + 1} \frac{n_n D_p q}{L_p}} \quad (16)$$

або

$$U_0 = V \bar{J} (W - X_1) \rho_n \sqrt{\frac{\mu_n D_p}{(b + 1) \mu_p^2 L_p \rho_n}} \quad (16a)$$

дзе

$$D_p = \mu_p \frac{kT}{q}$$

Падстаўляючы ў (16a) значэнне для  $X_1$  з (13) і выражаючы велічыні, якія змяняюцца пры абпраменьванні, праз інтэгральны паток і радыяцыйныя канстанты, пасля зробленых пераўтварэнняў атрымаем

$$U_0 = U_{00} e^{\alpha_1 \Phi} \quad (17)$$

дзе

$$U_{00} = V \bar{J} \rho_{n0} \sqrt{\frac{\mu_n D_p}{(b + 1) \mu_p^2 L_p \rho_n}} \left( W - \frac{L_{p0}}{2} \ln \frac{8 j L_{p0} \mu_n (b + 1) \rho_{n0}}{D_p} \right)$$

— падзенне напружання на базе да абпраменьвання (калі база дыёда становіцца тоўстай у выніку абпраменьвання, то  $U_{\phi 0}$  адпавядае патоку  $\Phi_W$ );

$$\alpha_1 \approx \alpha + \Phi^{-1} \left\{ \ln \left[ \sqrt{\frac{1}{e^{\alpha\Phi}} \sqrt{1 + \frac{\Phi L_{p0}^2}{D_p K_1}}} \times \left( W - \frac{L_{p0}}{2} \sqrt{\frac{D_p K_1}{D_p K_1 + \Phi L_{p0}^2}} \ln \frac{8 j L_{p0} \mu_n (b+1) \rho_{n0}}{D_p} \right) \right] \times \frac{L_{p0}}{2} \ln \frac{8 j L_{p0} \mu_n (b+1) \rho_{n0}}{D_p} \right\}$$

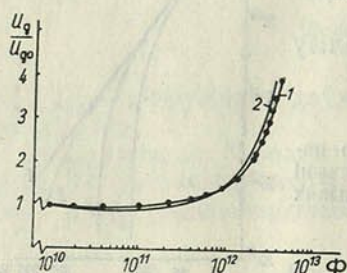


Рис. 2. Адноснае змяненне прамога падзення напружання на крэміевым дыёдзе  $U_g/U_0$  у функцыі інтэгральнага патоку хуткіх нейтронаў  $\Phi_{Wn}$ , нейтрон · сек/см<sup>2</sup> пры  $J=16$  а/см<sup>2</sup>.

1—эксперымонт; 2—разлік

Кэфіцыент  $\alpha_1$  характарызуе зніжэнне праводнасці базы пры абпраменьванні. Як паказвае аналіз выразу для  $\alpha_1$ , для практычных ацэнак радыяцыйнай стойкасці можна прымаць

$$\alpha_1 \approx \alpha.$$

Падстаўляючы ва ўраўненне (1) выразы для падзення напружання на  $p-n$ -пераходзе і базе (17), атрымаем агульную залежнасць для змянення прамога падзення напружання на крэміевым дыёдзе ў функцыі інтэгральнага патоку абпраменьвання:

$$U_d = U_{p-n}^0 - \frac{mkT}{q} \left( \alpha\Phi + \ln \sqrt{\frac{K_1 + \tau_{p0}\Phi}{K_1}} \right) + U_{\phi 0} e^{\alpha_1\Phi}, \quad (18)$$

дзе  $U_{p-n}^0$  — падзенне напружання на  $p-n$ -пераходзе да абпраменьвання. Атрыманы выраз можа быць прыменен да тых значэнняў інтэгральнага патоку абпраменьвання, пакуль справядлівы радыяцыйны кэфіцыенты  $K_1$  і  $\alpha$ .

На рис. 2 для параўнання прадстаўлены эксперыментальная (1) і разліковая (2) па формуле (18) залежнасць адноснага змянення прамога падзення напружання на крэміевым дыёдзе ў функцыі інтэгральнага патоку хуткіх рэактарных нейтронаў ( $E_n > 2,9$  Мэв). Дыёд быў выраблены на легіраваным фосфарам крэміі з удзельным супраціўленнем  $100$  ом · см і меў таўшчыню базы  $W=180$  мк, плошчу  $p-n$ -пераходу  $S=0,006$  см<sup>2</sup>. Пры разліках выкарыстоўваліся вызначаныя эксперыментальна для зыходнага крэмію значэнні:  $\alpha=1,4 \cdot 10^{-12}$  см<sup>2</sup>/нейтрон,  $K_1=1 \cdot 10^6$  нейтрон · сек/см<sup>2</sup>.

На эксперыментальнай крывой пры малых інтэгральных патоках прыкметна нязначнае зніжэнне падзення напружання на дыёдзе. У гэтай вобласці доз ход характарыстыкі вызначаецца ў асноўным электронна-дзіркавым пераходам, падзенне напружання на якім пры абпраменьванні змяншаецца.

Пры вялікіх інтэгральных патоках падзенне напружання пачынае рэзка ўзрастаць, што звязана з моцным уплывам базавай вобласці, праводнасць якой падае з ростам інтэгральнага патоку за кошт зніжэння дыфузійнай даўжыні неасноўных носыбітаў і росту ўдзельнага супраціўлення зыходнага крэмнію. Прадстаўленыя на рыс. 2 крывыя паказваюць добрую ўзгодненасць рэзультатаў эксперыменту і разліку.

Такім чынам, атрымана залежнасць для вызначэння па канструкцыйных параметрах дыёда велічыні гранічнага інтэгральнага патоку абпраменьвання, да якога прамое падзенне напружання на крэмніевым дыёдзе практычна не павінна змяняцца. Атрыманыя выразы апісваюць змяненні прамога падзення напружання пры абпраменьванні крэмніевых дыёдаў з тонкай і тоўстай базамі.

У заключэнне выказваю ўдзячнасць акадэміку АН БССР М. М. Сіраце за ўвагу да работы і выказаныя заўвагі.

### Літаратура

1. Easley J. W. Nucleonics, 20, 52, 1962.
2. Bertolotto M. Alta Frequenza, 3, 104, 1962.
3. Сирота Н. Н., Бржезинский В. А., Дюков В. Г., Карацуба А. П., Коршунов Ф. П., Лезжов Ю. Ф., Чернышев А. А. Весті АН БССР, сер. фіз.-мат. навук, № 4, 1966.
4. Сирота Н. Н., Коршунов Ф. П. ФТП, 2, 1671, 1968.
5. Вавилов В. С., Ухин Н. А. Радиационные эффекты в полупроводниках и полупроводниковых приборах. М., 1969.
6. Носов Ю. С. Полупроводниковые импульсные диоды. М., 1965.
7. Федотов Я. А. Основы физики полупроводниковых приборов. М., 1963.
8. Макаревич А. И., Райнес Л. Ю., Курилович Н. Ф. Сб. «Радиационная физика неметаллических кристаллов». Киев, 1967.
9. Вавилов В. С. Действие излучений на полупроводники. М., 1963.
10. Gurtis O. L. IEEE Trans. Nucl. Sci. NS-13, № 6, 1966.
11. Messenger G. C., Spratt J. P. Proc. IRE, 46, 1036, 1959; 48, 1038, 1958.
12. Wertheim J. Appl. Phys., 30, 1166, 1959.
13. Рейд Ф. Дж. В кн. «Влияние облучения на материалы и элементы электронных схем». М., 1967.
14. Manlief S. K. IEEE Trans. NS-11, № 5, 47, 1964.
15. Бюлер М. ТИИЭР (русск. пер.), 15, 111, 1968.
16. Авакьянц Г. М., Мурыгин В. И., Тешабаев А. Радиотехника и электроника, 8, 821, 1963.
17. Lampert M. A., Rose A. Phys. Rev., 121, 26, 1961.
18. Рашба Э. И., Толпыга К. Б. ЖТФ, 26, 1419, 1956.
19. Herlet A. Z. Naturforsch., 11, 498, 1956.
20. Авакьянц Г. М., Атакулов Б., Мурыгин В. И., Ташабаев А., Церфас Р. А. Радиотехника и электроника, 9, 868, 1964.
21. Стафеев В. И. ЖТФ, 28, 1631, 1958.
22. Rose A. J. Appl. Phys., 35, 2664, 1964.
23. Сирота Н. Н., Коршунов Ф. П., Райнес Л. Ю. Сб. «Влияние облучения на неметаллические кристаллы». Минск, 1970.

Институт физики твердого тела  
и полупроводников АН БССР

Поступило в редакцию  
31.III 1970

### КАРОТКІЯ ПАВЕДАМЛЕННІ

УДК 538.3 : 530.145

В. И. СТРАЖЕВ

#### ДУАЛЬНО ЗАРЯЖЕННЫЕ ЧАСТИЦЫ В ЭЛЕКТРОДИНАМИКЕ

Построение теории электрически и магнитно заряженных частиц [1—3] (дуально заряженных частиц —  $D$ -частиц) приводит к обобщению условия зарядового квантования Дирака — Швингера [4, 5]:

$$eg = 2\pi n\hbar c, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad (1)$$

именно

$$e_a g_b - g_a e_b = 2\pi_{ab} n\hbar c, \quad n_{ab} = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad (2)$$

где индекс  $a$  ( $b$ ) характеризует тип частиц, обладающих электрическим ( $e_a$  ( $e_b$ )) и магнитным ( $g_a$  ( $g_b$ )) зарядами.

Швингером [1] была выдвинута идея, что рассмотрение  $D$ -частиц может послужить основой для построения модели материи (магнитно нейтральной) и объяснения нарушения  $CP$ -четности.

В этом сообщении мы хотели бы обратить внимание на электродинамические следствия, вытекающие из рассмотрения  $D$ -частиц.

Необходимым требованием для любого подхода к построению теории магнитного заряда является соответствие с установленной формой электродинамики при  $n = 0$  в условии (1).  $n_{ab} = 0$  в (2) может быть не только при  $g_a = g_b = 0$ , но и при условии универсальности отношения  $g/e : g/e = i\pi v$ ,  $g_a/e_a = g_b/e_b$ , т. е. когда  $g_a \neq g_b \neq 0$ ! Это качественное различие обусловлено тем, что рассмотрение  $D$ -частиц в отличие от случая, соответствующего условию (1) и являющегося частным случаем условия (2), соответствует полной симметрии уравнений Максвелла, т. е. их инвариантности относительно дуальных преобразований

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &\rightarrow \mathbf{E} \cos \varphi + \mathbf{H} \sin \varphi, \\ \mathbf{H} &\rightarrow -\mathbf{E} \sin \varphi + \mathbf{H} \cos \varphi, \end{aligned} \quad (3)$$

в то время как условие (1) соответствует лишь дискретным преобразованиям симметрии:  $\mathbf{E} \rightarrow \pm \mathbf{H}$ ,  $\mathbf{H} \rightarrow \mp \mathbf{E}$ .

Из работы [2] следует, что на квантовом уровне электродинамика  $D$ -частиц при  $g/e = i\pi v$  связана унитарным преобразованием с электродинамикой с одним эффективным зарядом  $q = (e^2 + g^2)^{1/2}$ . Еще ранее на классическом уровне был сделан вывод об эквивалентности этих двух формулировок электродинамики [6].

На квантовом уровне выбор компонент тензора энергии-импульса  $T_{00}$  и  $T_{0k}$  для теории  $D$ -частиц при  $g/e = \text{univ}$  в виде\*) (рассматривая заряженное спинорное поле)

$$T_{00} = \frac{1}{2} (\mathbf{E}^2 + \mathbf{H}^2) + \bar{\psi} \vec{\gamma} \cdot (-i \vec{\nabla} - e \mathbf{A}^T - g \mathbf{B}^T) \psi + m \bar{\psi} \psi,$$

$$T_{0k} = \mathbf{E} \times \mathbf{H} + \bar{\psi} \gamma_0 (-i \vec{\nabla} - e \mathbf{A}^T - g \mathbf{B}^T) \psi + \frac{1}{4} \vec{\nabla} \times (\bar{\psi} \gamma_0 \vec{\sigma} \psi)|_k \quad (4)$$

гарантирует лоренц-инвариантность теории и приводит к правильному виду полевых уравнений.

Построение теории с магнитным зарядом при использовании линии сингулярности [1, 2, 4, 5] приводит к ряду трудностей, вызывающих сомнение в корректности используемого формализма [7].

Построение электродинамики  $D$ -частиц при  $g/e = \text{univ}$ , сохраняющей симметричную структуру электродинамики с наблюдаемым магнитным зарядом, в принципе не требует использования линии сингулярности.

Но в то же время рассмотрение этой электродинамики, являющейся предельным случаем электродинамики с наблюдаемым магнитным зарядом, может дать определенные принципы, справедливые для общей теории (если мы не верим в теорию с линией сингулярности).

Например, постулируя вид  $T_{00}$  и  $T_{0k}$ , из требования лоренц-инвариантности теории мы приходим к условию  $g/e = \text{univ}$ , т. е. не существует лоренц-инвариантной теории с произвольными  $g$  и  $e$ , не связанными между собой определенным соотношением.

Этот вывод не зависит от использования линии сингулярности и должен быть справедлив для любого построения квантовой теории магнитного заряда. (Конкретный вид связи между  $g$  и  $e$  зависит от дополнительных предположений, определяющих динамику системы).

Рассмотренная эквивалентность двух формулировок электродинамики показывает, что введение магнитного заряда не связано с увеличением числа степеней свободы для электромагнитного поля.

С этой точки зрения можно решить вопрос об адекватности двух подходов (приводящих к различным выводам) к построению интеграла действия на классическом уровне: использование двух независимых потенциалов [8], связанное с увеличением числа степеней свободы, или использование одного независимого потенциала плюс линия сингулярности [4, 9] без такого увеличения. Это не свидетельствует однозначно в пользу применения линии сингулярности, но подчеркивает необходимость подхода, не связанного с увеличением числа степеней свободы.

В заключение отметим, что эквивалентность электродинамики  $D$ -частиц при  $g/e = \text{univ}$  электродинамике с  $q = (e^2 + g^2)^{\frac{1}{2}}$  служит физическим обоснованием введения «фиктивных» магнитных зарядов, используемых для построения основ классической электродинамики (см., например, [10, 11]).

Детальное обсуждение рассмотренных здесь проблем будет еще опубликовано.

### Литература

1. Schwinger J. Phys. Rev., 173, 1536, 1968; Science, 165, 757, 1969; 166, 690, 1969.
2. Zwanziger D. Phys. Rev., 176, 1489, 1968.

\*) Вид  $T_{00}$  и  $T_{0k}$  можно получить из  $T_{00}$ ,  $T_{0k}$  в работе [5], опуская члены с линией сингулярности.

3. Стражев В. И. Материалы I Республиканской конф. молодых ученых. Издание Ин-та физики АН БССР. Минск, 1970.
4. Dirac P. A. M. Proc. Roy. Soc. (London), A 133, 60, 1931; Phys. Rev., 74, 817, 1948.
5. Schwinger J. Phys. Rev., 144, 1087, 1966.
6. Page L., Adams N. Elektrodynamics, 1940; Harrisson H. Amer. J. Phys., 33, 306, 1963.
7. Hagen C. R. Phys. Rev., 140, 804, 1965; Усачев Ю. Д. Доклад на VIII Всесоюзной межвузовской конф. по теории элемент. частиц. Ужгород, 1968; Потупа А. С., Стражев В. И., Томильчик Л. М. Весті АН БССР, сер. фіз.-мат. наук, № 1, 1969.
8. Томильчик Л. М. ДАН БССР, 8, 379, 1964; Rohrlieh F. Phys. Rev., 150, 1104, 1966.
9. Yan T. M. Phys. Rev., 160, 1182, 1966.
10. Френкель Я. И. Электродинамика, 2. ОНТИ, 1931.
11. Fano R. M., Chu L. J., Adler R. B. Electromagnetic fields, energy and forces. N. Y., 1960.

*Институт физики  
АН БССР*

*Поступило в редакцию  
3.VII 1970*

УДК 539.216.22 : 546

Л. Ф. ИЛЬЮШЕНКО, А. В. БОЛТУШКИН

### ЭЛЕКТРООСАЖДЕННЫЕ ПЛЕНКИ ДВОЙНЫХ СПЛАВОВ МЕТАЛЛОВ ГРУППЫ ЖЕЛЕЗА С ХРОМОМ

Магнитные сплавы на основе металлов группы железа, легированные хромом (хромистый пермаллой, муметалл), обладают высокой магнитной проницаемостью и низкой коэрцитивной силой. При введении хрома в сплав повышается его коррозионная стойкость и удельное электросопротивление [1]. Пленки из таких материалов могут найти применение в вычислительной технике и технике СВЧ.

Вакуумные пленки Ni—Fe с добавками хрома, как показано в [2], имеют сравнительно низкие значения коэрцитивной силы, поля анизотропии и дисперсии осей легкого намагничивания. При увеличении содержания хрома поле анизотропии, намагниченность и коэрцитивная сила уменьшаются, а электросопротивление и дисперсия возрастают. Магнитострикция пленок при добавлении хрома изменяется в сторону положительных значений.

Данных по исследованию электролитических магнитных пленок, содержащих хром, в изученной нами литературе не имеется. В связи с этим в настоящей работе была поставлена задача выяснить условия получения пленок Fe—Cr, Ni—Cr и Co—Cr различных составов и изучить зависимость их магнитных свойств от содержания хрома.

Для получения пленок указанных составов были выбраны растворы, содержащие трехвалентные соединения хрома с аминокислотой [3] и сернокислые железо, никель и кобальт. Аминокислотная кислота (гликоколь) способствует улучшению качества осадков, так как повышает буферные свойства электролита в интервале значений pH 2—3 и образует с трехвалентным хромом комплексное соединение, благодаря чему повышается pH гидратообразования хрома.

Пленки осаждались из электролитов с постоянной суммарной концентрацией ионов металлов (80 г/л) при температуре 20 и 35 °C с нерастворимым платиновым анодом. Катодом (подложкой) служила электрополированная медная фольга. Осаждение проводилось в термостатированной цилиндрической ванне диаметром 15 мм. Катод помещался на дне ванны. В работе определены составы электролитов и условия осаждения, дающие возможность получать пленки двойных сплавов металлов группы железа с различным содержанием хрома. Концентрация хрома в пленке изменялась путем изменения содержания ионов хрома в электролите. При увеличении концентрации ионов Cr<sup>3+</sup> количество хрома в пленках растет почти линейно (рис. 1); для пленок Ni—Cr этот рост более быстрый (кривая 4), чем для пленок Co—Cr (кривая 6).

Осаждение пленок проводилось при pH от 2 до 2,5. Более высокие pH соответствовали электролитам с большим содержанием сернокислого хрома с гликоколем. С понижением кислотности электролита

( $pH > 2,6$ ) содержание хрома в сплаве уменьшается и растет скорость осаждения, однако в этом случае ухудшается качество осадков [4, 5].

Для плотности тока при осаждении найдены следующие значения:  $50 \text{ ма/см}^2$  — для пленок Co—Cr,  $80$  — для Fe—Cr и  $250 \text{ ма/см}^2$  — для пленок Ni—Cr. В указанных условиях получены пленки Fe—Cr с содержанием хрома до 20%, Ni—Cr — до 23% и Co—Cr — до 10%. При повышении плотности тока содержание хрома в пленке и скорость ее осаждения увеличиваются. Химический анализ образцов проводился фотометрическим методом. Коэффициентная сила  $H_c$  и индукция насыщения  $B_s$  определялись на осциллографической установке.

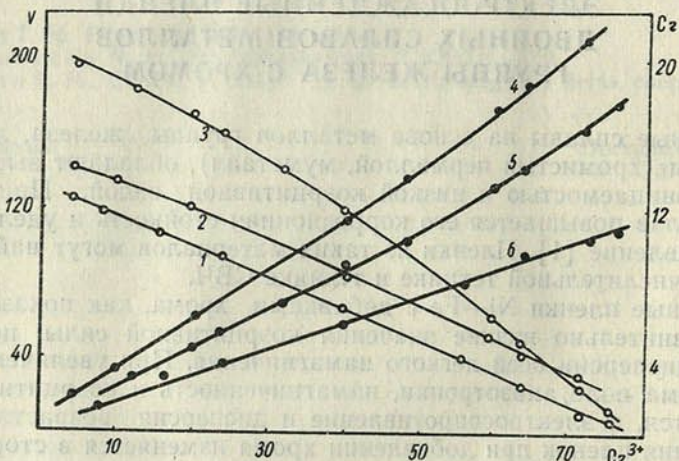


Рис. 1. Скорости осаждения пленок  $v$ , А/сек и зависимость содержания Cr, % в пленках Ni—Cr (2, 4), Fe—Cr (3, 5) и Co—Cr (1, 6) от концентрации ионов хрома в электролите, г/л ( $t = 20^\circ\text{C}$ )

Кривые 1, 2, 3 (рис. 1) характеризуют изменение скорости осаждения пленок Co—Cr, Ni—Cr и Fe—Cr в зависимости от состава электролита. С увеличением концентрации ионов хрома в растворе скорость осаждения пленок снижается. Повышение температуры электролита облегчает восстановление ионов металлов и вызывает повышение скорости осаждения пленки, при этом относительное содержание хрома в ней уменьшается. Это связано с тем, что потенциалы восстановления ионов железа, никеля и кобальта менее отрицательны, чем ионов хрома, и относительный сдвиг потенциала при изменении температуры для хрома оказывается меньшим.

На свойства пленок влияют возникающие в них в процессе осаждения неоднородности химического состава [6]. Как следует из полученной нами зависимости содержания хрома от толщины пленок Fe—Cr и Co—Cr (соответственно кривые 1 и 2, рис. 2), вначале в них происходит преимущественное осаждение хрома, вследствие чего нижние слои пленок содержат значительно больше хрома по сравнению со средним составом. Возникновение градиентов состава в пленках можно связать с изменением катодного потенциала при совместном и раздельном осаждении хрома с металлами группы железа из сернокислых электролитов с гликоколем [7]. Так как потенциал выделения сплава Fe—Cr по отношению к потенциалу выделения хрома сдвигается в положительную сторону, а по отношению к потенциалу выделения железа — в отрицательную, при их совместном выделении скорость осаждения хрома несколько повышается, а скорость восстановления ионов же-

леза падает. То же наблюдается и при осаждении пленок Co—Cr и Ni—Cr.

Кривые 3 и 4 (рис. 2) показывают изменение коэрцитивной силы в зависимости от толщины пленок Fe—Cr и Co—Cr, содержащих около 3% хрома. С увеличением толщины пленок до 2000 Å наблюдается значительное повышение коэрцитивной силы, а затем постепенное снижение до не-

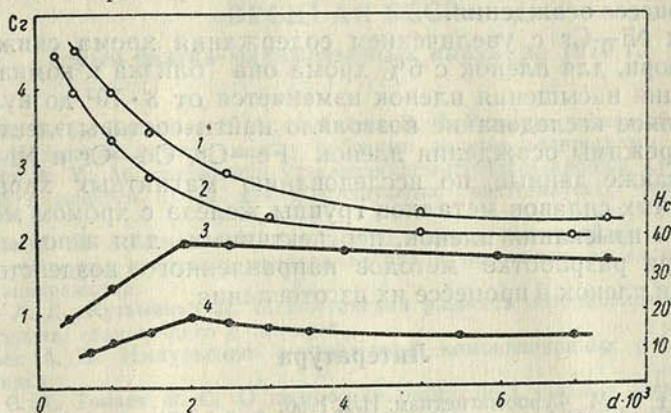


Рис. 2. Изменение содержания хрома, % и коэрцитивной силы пленок  $H_c$ , э в зависимости от толщины  $d$ , Å:

1, 3—для пленок Fe—Cr, 2, 4—для пленок Co—Cr соответственно

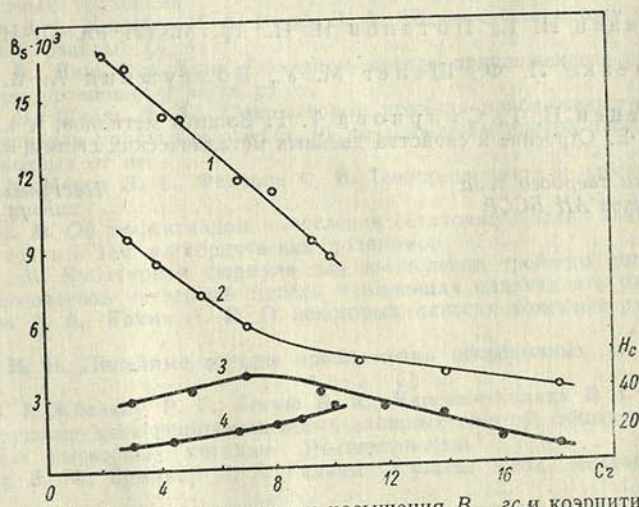


Рис. 3. Изменение индукции насыщения  $B_s$ , гс и коэрцитивной силы пленок  $H_c$ , э толщиной 2000 Å в зависимости от содержания в них хрома, %:

1, 4—для пленок Co—Cr, 2, 3—для Fe—Cr соответственно

которой постоянной величины. Такой характер зависимости связан с изменениями состава и структуры, происходящими в пленке при увеличении ее толщины.

Изменение  $B_s$  и  $H_c$  пленок Co—Cr и Fe—Cr толщиной в 2000 Å в зависимости от содержания в них хрома представлено на рис. 3. При увеличении концентрации хрома индукция насыщения падает (кривые 1 и 2); коэрцитивная сила пленок Co—Cr возрастает (кривая 4); у пленок же Fe—Cr сначала наблюдается рост коэрцитивной силы с увеличением содержания хрома, а затем плавное уменьшение, начиная с 7—8% Cr (кри-

вая 3). Характер изменения  $H_c$  с увеличением содержания хрома для Fe—Cr пленок аналогичен той же зависимости, полученной в [8] для массивных образцов тех же сплавов. Вероятно, такая закономерность в изменении  $H_c$  Fe—Cr-сплава связана с изменением его структуры. В электролитических пленках, кроме того, значительное влияние на коэрцитивную силу могут оказывать внутренние напряжения, развивающиеся в процессе осаждения.

У пленок Ni—Cr с увеличением содержания хрома снижается температура Кюри, для пленок с 6% хрома она близка к комнатной. При этом индукция насыщения пленок изменяется от  $3 \cdot 10^3$  до нуля.

Проведенное исследование позволило найти составы электролитов и установить режимы осаждения пленок Fe—Cr, Co—Cr и Ni—Cr. Эти данные, а также данные по исследованию магнитных характеристик пленок двойных сплавов металлов группы железа с хромом могут иметь значение при изыскании пленок, перспективных для использования в технике и при разработке методов направленного воздействия на характеристики пленок в процессе их изготовления.

### Литература

1. Бозорт Р. М. Ферромагнетизм. ИЛ, 1956.
2. Cohen M. S. J. Appl. Phys., 35, № 3, 2, 1964.
3. Кудрявцев Н. Т., Пшилуски Я. Б. Изв. вузов. Химия и хим. технология, 6, 2, 274, 1963.
4. Кудрявцев Н. Т., Цупак Т. Е. Тр. МХТИ им. Д. И. Менделеева, в. 44, 98, 1963.
5. Кудрявцев Н. Т., Потапов И. И. Тр. МХТИ им. Д. И. Менделеева, в. 49, 129, 1965.
6. Ильюшенко Л. Ф., Шелег М. У., Болтушкин А. В. ДАН БССР, 13, 8, 683, 1969.
7. Кудрявцев Н. Т., Смирнова Т. Г. Защита металлов, 1, 4, 356, 1965.
8. Вол А. Е. Строение и свойства двойных металлических систем, 2. М.—Л., 1962.

Институт физики твердого тела  
и полупроводников АН БССР

Поступило в редакцию  
14.IV 1970

ПЕРАЛІК АРТЫКУЛАУ,  
ЗМЕШЧАНЫХ У ЧАСОПІСЕ  
«ВЕСЦІ АН БССР»,

серыя фізіка-матэматычных навук, за 1970 г.

	№ стар.	
Айзенштат В. С., Лисковец В. А., Фейнберг В. З. Решение задачи об оптимальном распределении памяти между рабочими полями подпрограмм	6	19
Аляхновіч М. М. Аб залежнасці ўдзельнай інтэнсіўнасці адбіцця ад вугла расхадзімасці падаючага пучка для факусіруючых рэнтгенаўскіх манахраматараў	3	106
Аляхновіч М. М. Аб умовах і інтэнсіўнасці адбіцця рэнтгенаўскіх праменяў для факусіруючых крыштал-манахраматараў у залежнасці ад адлегласці крыніца — манахраматар	4	117
Андреев А. Д., Кузьменко Л. В. Постоянная разность потенциалов в слое аморфного селена, граничащего с плазмой	1	129
Афанасьев А. А. Импульсное вынужденное комбинационное рассеяние первого порядка	2	101
Баркан С. А., Танаев В. С. О построении расписаний учебных занятий	1	76
Барысаглебскі Л. А., Трусаў В. Ф., Шулякоўскі Г. С. Кэфіцыенты унутранай канверсіі на $M_{1-III}$ -падабалонках атама ( $Z=94$ ) з улікам экранавання па Гашпару з паўэмпірычнымі папраўкамі	1	101
Басик В. А. Об одной схеме метода матричной прогонки в случае многомерных разностных уравнений	3	55
Белавусова В. І., Кнацько У. А. Рудак Э. А. Аб механізме захопу павольных нейтронаў у рэакцыі ( $n, \gamma$ )	5	103
Бобков В. В., Динь Хак Хунг. Об одном методе приближенного решения задачи Коши для уравнения $y''=f(x, y)$	5	43
Бобков В. В., Шкель В. А. Одношаговые правила приближенного решения задачи Коши для уравнения $y'=f(x, y)$ по значениям правой части уравнения и производных от нее	3	60
Богущ А. А., Мороз Л. Г., Федоров Ф. И. Тензор-параметр и плоские преобразования Лоренца	4	85
Брутман Л. М. Об эффективном вычислении остаточного члена квадратурных формул, точных для алгебраических полиномов	4	61
Быкова Т. М. Кубатурная формула для вычисления тройного интеграла, точная для многочленов четвертой степени и имеющая одиннадцать узлов	1	51
Ведерников В. А., Кохно А. П. О некоторых классах конечных разрешимых групп	6	12
Власовец Н. Н. Линейные методы приближения непрерывных на отрезке функций	5	30
Гарбуз М. І. Жбанкоў Р. Г., Богущ Б. К., Пансевіч-Каляда В. І. Даследаванне ненасычаных алкілфенілзамешчаных алілавых спіртоў, гліцыдолаў і іх азотзмяшчаючых вытворных метадам ІЧ-спектраскапі	5	107
Гардзіенка Л. М., Ермакоў П. З. Гадавы агульны сход Акадэміі навук БССР	3	126
Гончаренко А. М. Об анизотропных однопреломляющих средах	2	132
Грибкова В. П. Решение операторных уравнений одним из приближенных методов	6	68
Грудо Э. И. О решениях автономной системы уравнений в полных дифференциалах	1	55
Грудо Э. И. О решениях периодической системы уравнений в полных дифференциалах	3	35
Деменчук В. В. Инверсные топологические полугруппы с дискретной подполугруппой идемпотентов	6	47
Докторов И. П. Конечные группы с $\pi$ -специальными подгруппами	3	5
Дука Н. Г., Огарков Т. Т. Конечные группы с $p$ -субнормальными подгруппами	3	17
Емеличев В. А., Ковалев М. М. К «вырожденному» случаю одной многоэкстремальной транспортной задачи	1	27
Емеличев В. А., Ковалев М. М. Решение некоторых задач вогнутого программирования методом построения последовательности планов	6	27

Емеличев В. А., Кононенко А. М. Об одной комбинаторной перечислительной задаче	2	120
Жбанкова И. И. В. И. Ленин и прогресс физической науки	2	5
Жбанкова И. И. Ф. Энгельс и современное естествознание	6	5
Жирков Л. Ф., Сацункевич И. С. Об анапольном моменте дейтрона	3	123
Залесский А. Е. О групповых кольцах разрешимых групп	2	13
Збойчик Н. А. О стационарных интегралах системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами	1	122
Зубов В. М. К вопросу о существовании решения одной краевой задачи для нелинейного уравнения $n$ -го порядка	1	43
Зубов В. М. О существовании, единственности и оценках решения двухточечной краевой задачи для системы обыкновенных дифференциальных уравнений	4	75
Иваницкая О. С. Уравнения движения в поле тяготения как калибровка тетрад	5	82
Иваницкая О. С., Хазан В. Б. К новой трактовке вращения перигелия планет с помощью локальных преобразований Лоренца	6	96
Иванов А. П. Тепловой стационарный режим в плоскопараллельном светорассеивающем слое	4	101
Ильющенко Л. Ф., Болтушкин А. В. Электроосажденные пленки двойных сплавов металлов группы железа с хромом	6	125
Комяк И. И. Нелинейная краевая задача типа задачи Римана с положительными показателями	6	83
Кононенко В. К. О ширине полосы люминесценции в лазерных диодах	4	106
Константинова Я. В. О сходимости и устойчивости многослойного и многостолбового разностного правила решения уравнения теплопроводности	3	50
Константинова Я. В. О сходимости и устойчивости многослойного разностного правила решения уравнения теплопроводности	2	40
Конюх В. С. Разрешимые линейные группы над произвольным полем	1	22
Корень Н. Н. Термоэлектродвижущая сила диффузионных слоев ZnSb	1	127
Коршунаў Ф. П. Некаторыя заканамернасці змянення характарыстык крэмніевых дыёдаў пад уздзеяннем радыяцыі	6	115
Костка М. Я. Флуараметрычнае даследаванне спектральнай залежнасці затухання свячэння флуарэсцэнцыі	3	113
Кравчук М. И. О некоторых классах факторизуемых конечных групп	4	5
Кравчук М. И. О признаках разрешимости конечных групп	3	25
Крисевич В. С. Оценки эффективности методов сортировки	3	73
Кругликова Л. Г. Метод наименьших квадратов в преобразовании последовательностей	2	48
Кругликова Л. Г. Частные случаи преобразования последовательности по методу наименьших квадратов	6	62
Кузнецык А. П. Энергетычная яркасць неба ў вобласці 1,8—5,2 мкм	2	110
Кунцевич И. М. Вычислительные аспекты задачи нахождения экстремальных значений линейной формы на множестве всех $n$ -членных циклов из $S_n$	4	44
Ладес В. И. Комбинационные схемы, вычисляющие значения линейных функций	1	32
Ламаносаў І. І., Сарока А. В., Фіrsaў Я. І., Чаранда М. Р. Вымярэнне патокаў эпітэплавых і хуткіх нейтронаў у вертыкальным канале рэактара ИРТ-2000	4	112
Лаптинский В. Н., Городецкий Ю. Д., Серов В. В. К приближенному решению нелинейных интегральных уравнений	2	56
Лаптинский В. Н. К теории функций от матриц	1	112
Лаптинский В. Н. О двумерных дифференциально-матричных уравнениях	5	63
Лисковец В. А. Перечисление эйлеровых графов	6	38
Лисковец О. А. Решение задачи Коши для уравнения Лапласа обобщенным методом суммирования рядов	4	68
Лобко С. И., Федоров Ф. И. Частица с переменным спином $1/2$ — $3/2$ в поле плоской электромагнитной волны	5	76
Мадорский В. М. О приближенном решении методом осреднения одного класса функциональных уравнений	1	115
Максименко Н. В. Аналитические свойства амплитуды комптон-эффекта на дейтроне	4	91
Максименко Н. В., Мороз Л. Г. Двойные дисперсионные соотношения для амплитуды дейтронного комптон-эффекта	5	88
Маричев О. И. Краевые задачи для уравнения смешанного типа с двумя линиями вырождения	5	21
Негрей С. А., Фирсов Е. И. Ge(Li)-спектрометр для изучения гамма-лучей радиационного захвата тепловых нейтронов	2	128

Некрашэвіч І. Г., Матусевіч П. А., Ляпшыч В. А. Вымярэнне катоднага падзення патэнцыялу на бінарных сплавах $Cu-Zn$ і $Cu-Ni$ пры дугавым разрадзе	6	111
Окунь Э. Д. Аб залежнасці каэфіцыента атамальнага паглынання рэнтгенаўскіх прамянняў у монакрышталях ад шчыльнасці дыслакацый	1	107
Орещенко А. Ф. Двумерныя паверхні класа [11], [11] в $E_4$	4	16
Орещенко А. Ф. Лінейчатые паверхні с изотропной образующей в $E_n$	5	15
Пазойскі С. В. Роля статычнага зараду ядра ў вызначэнні імавернасці парнай $E0$ -канверсіі	2	118
Пальчык Э. М. О конечных группах с 2-замкнутыми подгруппами	2	123
Пальчык Э. М. О максимальных подгруппах конечных групп	3	11
Плетюхов В. А., Федоров Ф. И. Волновое уравнение с кратными представлениями для частицы со спином 0	2	79
Плетюхов В. А., Федоров Ф. И. Волновое уравнение с кратными представлениями для частицы со спином 1	3	84
Покало А. К. Аппроксимативные свойства производных и интегралов в смысле Вейля линейных средних	3	45
Покало А. К. Линейные методы приближения производных и интегралов в смысле Вейля периодических функций	2	32
Поляков Л. Я. Аналог групп О. Ю. Шмидта	4	12
Потупа А. С. Измерения, квантование и принцип эквивалентности	6	88
Потупа А. С. Комплексные траектории Редже и граница резонансной области	5	120
Потупа А. С. Моделирование квазипотенциала адронной дифракции	5	117
Потупа А. С., Третьяков В. Н. Об эффектах структурности ядерной поверхности в нейтронном рассеянии на малые углы	1	87
Потупа А. С., Стражев В. И., Томильчик Л. М. Аксиоматическая модель классической электродинамики	2	96
Привалов В. И., Шиенок Г. Г. Оптическая камера высокого давления	5	127
Прусов И. А. Об одном представлении общих формул теории изгиба изотропных плит	5	50
Прусов И. А. Об одном представлении основных формул термоупругости для анизотропной полуплоскости и анизотропной плоскости с разрезами	4	31
Пыхтеев Г. Н. О построении квадратурных формул для интегралов типа Коши по прямолинейному разомкнутому контуру	2	61
Радыно Я. В. Об устойчивости нетеровских операторов и их индексов в локально выпуклых пространствах	4	25
Ратнікаў Э. В., Свінціцкі А. А., Шчорс Л. С. Аб вібрацыйным эффекту падаграваемага караніруючага дроту	4	123
Романовский А. В. Существование, сопряженность и вложение подгрупп у конечных факторизуемых групп	5	5
Рудак Э. А., Фірсаў Я. І., Хільмановіч А. М. Спектры $\gamma$ -прамянняў з рэакцыі ( $n, \gamma$ ) на цеплавых нейтронах на ядрах $Ge^{70}, Ge^{72}$ і $Ge^{73}$	1	95
Рудак Э. А., Фірсов Е. И., Хильманович А. М. Спектр $\gamma$ -лучей из реакции ( $n, \gamma$ ) на тепловых нейтронах на естественной смеси изотопов магния	1	125
Румянцев В. С. Фоторождение векторных мезонов в модели импульсного приближения	5	123
Рябушко А. П. К проблеме экспериментальной проверки общей теории относительности	6	103
Рябушко А. П. О погрешностях в приближенных уравнениях движения тел в общей теории относительности	2	86
Сакевіч І. У. Сесія Агульнага сходу Акадэміі навук БССР	3	130
Сакевіч І. У. Юбілейная сесія Акадэміі навук БССР	3	129
Самсон А. М. Коэффіціент усилениа в предгенерационный период и пороговые условия генерации красителей с конечным временем нарастания импульса накачки	3	97
Самуйлов А. З., Яблонский А. И. О рациональных решениях нелинейного дифференциального уравнения первого порядка	3	30
Самусенко А. В. Исследование сходимости схем повышенной точности метода интегральных соотношений для уравнений эллиптического типа	6	77
Сирота Н. Н., Боднар И. В., Виткина Ц. З. Период идентичности кристаллической решетки и магнитная восприимчивость сплавов фосфида галлия и арсенида индия	3	118
Сирота Н. Н., Лукомский А. И. Фотолюминесценция монокристаллов антимониды алюминия	5	115
Сирота Н. Н., Мазуренко А. М., Шпило В. Б. Получение сверхвысоких давлений при высоких температурах для физических исследований	4	127
Сирота Н. Н., Малишевский В. Ф. Влияние термической обработки на сверхпроводящие свойства $Zr-V$ -сплавов эвтектичного состава	4	131

Соболевский П. И., Янович Л. А. О приближенном вычислении интегралов Винера	2	22
Соколов И. А. О краевой задаче типа Римана со сдвигом для полианалитических функций на окружности	1	118
Спринджук В. Г. О представлении целых чисел ограниченным числом случайных слагаемых	1	5
Стражев В. И. Дуально заряженные частицы в электродинамике	6	122
Сягло И. С. О переформулировке уравнений движения к наблюдаемым величинам	1	83
Толочко М. Э. О краевой задаче Римана для бесконечно связной области	2	70
Тузык А. И. К решению особых интегральных уравнений с ядром Коши в исключительном случае	2	125
Турецкий А. Х. Об интерполировании при большом числе данных значений функции	6	50
Тхарев Е. Е. Описание фазовых сдвигов с помощью вектор-параметра	3	93
Тышкевич Р. И. О транзитивных группах с транзитивными стабилизаторами	6	35
Урбанович М. И. К теории матриц Коши линейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений	1	63
Урбанович М. И. Некоторые вопросы теории матриц Коши линейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений	5	58
Феденко Н. П. Замечание о методе секущих	1	70
Федоров Ф. И., Кувшинов В. И. Нелинейные уравнения электродинамики скалярных мезонов	5	69
Федоров Ф. И., Плетюхов В. А. Волновые уравнения с кратными представлениями группы Лоренца. Полуцелый спин	3	78
Цедрик М. С., Марголин Л. Н. Влияние условий выращивания монокристаллов триглицинсульфата на изменение тангенса угла диэлектрических потерь в сильном электрическом поле	5	130
Цедрик М. С., Марголин Л. Н. Влияние условий выращивания на диэлектрические потери в монокристаллах триглицинсульфата	3	120
Черток В. Д. Ор-длине $p$ -разрешимых групп	5	12
Чэкалинская Ю. И., Чэчэнина А. П. Да прыблізнага разліку выхадной магнітнасі АКГ у выпадку неаднароднага пашырэння лініі	5	94
Шац Э. М. Об одной наилучшей кубатурной формуле, содержащей частные производные от функции	3	68
Шнеперман Л. Б. Строение топологических вполне простых полугрупп с изолированным нулем	1	15
Шокамолов И. Интерполяционные квадратурные формулы для некоторых интегралов типа Коши и их главных значений	4	53
Шульгин Л. Т. Об интерполяционном улучшении сходимости к пределу функции двух аргументов	4	37

## ЗМЕСТ

И. И. Жбанкова. Ф. Энгельс и современное естествознание . . . . .	5
---	---

### МАТЭМАТЫКА

В. А. Ведерников, А. П. Кохно. О некоторых классах конечных разрешимых групп . . . . .	12
В. С. Айзенштат, В. А. Лисковец, В. З. Фейнберг. Решение задачи об оптимальном распределении памяти между рабочими полями подпрограмм . . . . .	19
В. А. Емеличев, М. М. Ковалев. Решение некоторых задач вогнутого программирования методом построения последовательности планов. I . . . . .	27
Р. И. Тышкевич. О транзитивных группах с транзитивными стабилизаторами . . . . .	35
В. А. Лисковец. Перечисление эйлеровых графов . . . . .	38
В. В. Деменчук. Инверсные топологические подгруппы с дискретной подгруппой идемпотентов . . . . .	47
А. Х. Турецкий. Об интерполировании при большом числе данных значений функции . . . . .	50
Л. Г. Кругликова. Частные случаи преобразования последовательности по методу наименьших квадратов . . . . .	62
В. П. Грибкова. Решение операторных уравнений одним из приближенных методов . . . . .	68
А. В. Самусенко. Исследование сходимости схем повышенной точности метода интегральных соотношений для уравнений эллиптического типа . . . . .	77
И. И. Комяк. Нелинейная краевая задача типа задачи Римана с положительными показателями . . . . .	83

### ФІЗІКА

А. С. Потупа. Измерения, квантование и принцип эквивалентности . . . . .	88
О. С. Иваницкая, В. Б. Хазан. К новой трактовке вращения перигелия планет с помощью локальных преобразований Лоренца . . . . .	96
А. П. Рябушко. К проблеме экспериментальной проверки общей теории относительности . . . . .	103
І. Р. Некрашэвіч, П. А. Матусевіч, В. А. Лапшыні. Вымярэнне катоднага падзення патэнцыялу на бінарных сплавах Cu—Zn і Cu—Ni пры дугавым разрадзе . . . . .	111
Ф. П. Коршунаў. Некаторыя заканамернасці змянення характарыстык крэміевых дыядаў пад уздзеяннем радыяцыі . . . . .	115

### КАРОТКІЯ ПАВЕДАМЛЕННІ

В. И. Стражев. Дуально заряженные частицы в электродинамике . . . . .	122
Л. Ф. Ильюшенко, А. В. Болтушкин. Электроосажденные пленки двойных сплавов металлов группы железа с хромом . . . . .	125
Пералік артыкулаў, змешчаных у часопісе «Весці АН БССР», серыя фізіка-матэматычных навук, за 1970 г. . . . .	129

## СОДЕРЖАНИЕ

И. И. Жбанкова. Ф. Энгельс и современное естествознание . . . . . 5

### МАТЕМАТИКА

В. А. Ведерников, А. П. Кохно. О некоторых классах конечных разрешимых групп	12
В. С. Айзенштат, В. А. Лисковец, В. З. Фейнберг. Решение задачи об оптимальном распределении памяти между рабочими полями подпрограмм	19
В. А. Емеличев, М. М. Ковалев. Решение некоторых задач вогнутого программирования методом построения последовательности планов. I	27
Р. И. Тышкевич. О транзитивных группах с транзитивными стабилизаторами	35
В. А. Лисковец. Перечисление эйлеровых графов	38
В. В. Деменчук. Инверсные топологические полугруппы с дискретной подполугруппой идемпотентов	47
А. Х. Турецкий. Об интерполировании при большом числе данных значений функции	50
Л. Г. Кругликова. Частные случаи преобразования последовательности по методу наименьших квадратов	62
В. П. Грибкова. Решение операторных уравнений одним из приближенных методов	68
А. В. Самусенко. Исследование сходимости схем повышенной точности метода интегральных соотношений для уравнений эллиптического типа	77
И. И. Комяк. Нелинейная краевая задача типа задачи Римана с положительными показателями	83

### ФИЗИКА

А. С. Потупа. Измерения, квантование и принцип эквивалентности	88
О. С. Иваницкая, В. Б. Хазан. К новой трактовке вращения перигелия планеты с помощью локальных преобразований Лоренца	96
А. П. Рябушко. К проблеме экспериментальной проверки общей теории относительности	103
И. Г. Некрашевич, П. А. Матусевич, В. А. Лапшин. Измерение катодного падения потенциала на бинарных сплавах Cu—Zn и Cu—Ni при дуговом разряде	111
Ф. П. Коршунов. Некоторые закономерности изменения характеристик кремниевых диодов под действием радиации	115

### КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

В. И. Стражев. Дуально заряженные частицы в электродинамике	122
Л. Ф. Ильюшенко, А. В. Болтушкин. Электроосажденные пленки двойных сплавов металлов группы железа с хромом	125
Перечень статей, помещенных в журнале «Известия АН БССР», серия физико-математических наук, за 1970 г.	129

АТ 32786. Здадзена ў набор 20/X-70 г. Падысана да друку 22/XII-70 г. Фармат 70×108<sup>1/16</sup>. Друк. арк. 8,75. Ум. друк. арк. 12,25. Уч.-выд. арк. 11,8. Выд. зак. 1304. Друк. зак. 954. Цана 60 кап.

Друкарня імя Францыска (Георгія) Скарыны выдавецтва «Навука і тэхніка» АН БССР і Дзяржакамітэта СМ БССР па друку. Мінск, Ленінскі праспект, 68.

## РЕФЕРАТЫ

УДК 519.44

**О некоторых классах конечных разрешимых групп.** В. А. Дерников, А. П. Кохно. «Весті Акадэміі навук БССР», серыя фізіка-матэматычных навук. 1970 г., № 6, 12—18.

Вводится определение  $\Theta$ -насыщенной ( $\Theta$ -сверхнасыщенной) подгруппы группы  $G$  и изучаются классы групп, обладающих той или иной совокупностью  $\Theta$ -насыщенных ( $\Theta$ -сверхнасыщенных) подгрупп.

Пусть  $\Theta$  — некоторое теоретико-групповое свойство. Тогда  $\Theta$ -подгруппой называется подгруппа, обладающая свойством  $\Theta$ .

Подгруппа  $H$  группы  $G$  называется  $\Theta$ -насыщенной в  $G$ , если для каждой собственной  $\Theta$ -подгруппы  $H_1$  из  $H$  в  $H$  содержатся все подгруппы, сопряженные с  $H_1$  в  $G$ . Если к тому же все подгруппы, сопряженные с  $H_1$  в группе  $G$ , уже сопряжены в  $H$ , то подгруппа  $H$  называется  $\Theta$ -сверхнасыщенной в группе  $G$ .

Библиографий 9.

УДК 681.3.06 : 51

**Решение задачи об оптимальном распределении памяти между рабочими полями подпрограмм.** Айзенштат В. С., Лисковец В. А., Фейнберг В. З. «Весті Акадэміі навук БССР», серыя фізіка-матэматычных навук. 1970 г., № 6, 19—26.

Пусть  $S_1, S_2, \dots, S_n$  — множество подпрограмм (процедур) программы  $S$ , а  $r_i$  — объем рабочего поля  $S_i$ . Одна подпрограмма в процессе своего выполнения может обращаться к другой подпрограмме (инициировать ее). В этом случае их рабочие поля не могут пересекаться. Рассматривается задача такого распределения памяти между рабочими полями подпрограмм  $S_1, S_2, \dots, S_n$ , при котором общее число занимаемых ими ячеек было бы минимальным.

Программа  $S$  задается ориентированным графом  $\Gamma$  инициаций подпрограмм, вершинам которого приписаны веса  $r_1, r_2, \dots, r_n$ . Весом ориентированной цепи  $\Gamma$  называется сумма весов, входящих в нее различных вершин. Показано, что минимальное необходимое число рабочих ячеек программы  $S$  равно весу максимальной цепи графа  $\Gamma$ . Приведен эффективный алгоритм оптимального распределения памяти.

Предлагаемый алгоритм может быть использован для минимальной раскраски вершин транзитивного графа.

Библиографий 5.

УДК 519.95

**Решение некоторых задач вогнутого программирования методом построения последовательности планов.** И. Емеличев В. А., Ковалев М. М. «Весті Акадэміі навук БССР», серыя фізіка-матэматычных навук. 1970 г., № 6, 27—34.

Для задач размещения производства, унификации деталей, выбора оптимального парка машин предлагается метод решения, основанный на построении последовательности планов в порядке неубывания вспомогательной аппроксимирующей функции до выполнения критерия оптимальности.

Библиографий 6.

УДК 519.41

**О транзитивных группах с транзитивными стабилизаторами.** Тышкевич Р. И. «Весті Академії наук БССР», серия фізика-математичних наук. 1970 г., № 6, 35—37.

Некоторые теоремы о конечных группах подстановок переносятся на бесконечные группы. Если  $G$  — группа подстановок множества  $X$ ,  $Y$  — подмножество в  $X$ , то  $G_Y$  обозначается совокупность всех подстановок из  $G$ , оставляющих каждую точку из  $Y$  неподвижной;  $N(G_Y)$  — нормализатор группы  $G_Y$  в  $G$ ;  $|Y|$  — мощность множества  $Y$ ;  $\langle H, F \rangle$  — подгруппа, порожденная  $H$  и  $F$ . Доказаны следующие утверждения.

**Теорема 1.** Пусть  $G$  транзитивна,  $Y$  и  $Z$  — два истинных подмножества в  $X$ ,  $|Y| < |Z|$ ,  $Y$  конечно,  $G_Y$  и  $G_Z$  транзитивны соответственно на  $X \setminus Y$  и  $X \setminus Z$ . Тогда в  $G$  есть такая подстановка  $h$ , что  $h(Y) \subseteq Z$ , и, значит,

$$G_Z \subseteq hG_Y h^{-1}.$$

**Теорема 2.** Пусть  $G$  транзитивна,  $Y$  и  $Z$  — истинные подмножества в  $X$ ,  $|X \setminus Y| > 1$ ,  $|X \setminus Z| > 1$ ,  $G_Y$  и  $G_Z$  примитивны соответственно на  $X \setminus Y$  и  $X \setminus Z$ ,  $\langle G_Y, G_Z \rangle = G$ . Тогда  $G$  примитивна.

**Теорема 4.** Если  $G$   $k$ -кратно транзитивна,  $k > 1$ ,  $Y$  — истинное подмножество в  $X$ ,  $|Y| \geq k - 1$ ,  $Y$  конечно,  $G_Y$  транзитивна на  $X \setminus Y$ , то  $N(G_Y)$   $(k - 1)$ -кратно транзитивна на  $Y$ .

Для конечного  $X$  теоремы 1, 2, 4 доказаны Виландтом (Finite Permutation Groups, 1964).

Библиографий 7.

УДК 519.1

**Перечисление эйлеровых графов.** Лисковец В. А. «Весті Академії наук БССР», серия фізика-математичних наук. 1970 г., № 6, 38—46.

Находится число неизоморфных обыкновенных неориентированных графов с  $n$  вершинами и  $N$  ребрами, степени всех вершин которых четны. Это достигается с помощью метода, обобщающего метод, примененный Ридом для подсчета графов того же вида с занумерованными вершинами, в сочетании с техникой теории Пойа. Основная формула имеет вид

$$Y(n, y_1, y_2, \dots, z_1, z_2, \dots) \Big|_{\{y_i=1+x^i, z_i=1-x^i\}_i},$$

где  $Y$  — специальный многочлен, аналогичный циклическому индексу обычной группы ребер, используемому при перечислении всех графов.

Через полученную величину легко далее выражается число эйлеровых графов, т. е. связанных графов с четными степенями вершин. Это решает одну из задач, фигурирующих в списке основных нерешенных задач перечисления графов, которые сформулировал Ф. Харари.

Библиографий 8.

УДК 519.46

**Инверсные топологические полугруппы с дискретной подполугруппой идемпотентов.** Деменчук В. В. «Весті Академії наук БССР», серия фізика-математичних наук. 1970 г., № 6, 47—49.

На инверсные топологические полугруппы с дискретной подполугруппой идемпотентов и непрерывной инверсией переносятся некоторые результаты теории топологических групп. Найдены необходимые и достаточные условия непрерывности инверсии.

Библиографий 5.

УДК 517.512.6

**Об интерполировании при большом числе данных значений функции.** Турецкий А. Х. «Весті Академії наук БССР», серия фізика-математических наук. 1970 г., № 6, 50—61.

Решается задача о нахождении алгебраического полинома  $P(x) = \sum_{v=0}^m a_v x^v$

степени  $m < n$ , для которого сумма  $\sum_{k=1}^n q(x_k) |f(x) - P(x_k)|$  имеет наимень-

шее значение, где узлы  $\{x_k\}_1^n$ , весовая функция  $q(x) > 0$  и  $f(x)$  заданы. Аналогичная задача решается для тригонометрических полиномов. Решается также следующая задача: пусть  $H$  — множество алгебраических полиномов  $P(x)$  степени не выше  $m < n$ , удовлетворяющих условию  $|P(x_k)| \leq 1$  ( $k = 1, \dots, n$ ). Найти величину  $\sup_{P \in H} \max_{a < x < b} |P(x)|$ , где  $[a, b]$  — сегмент, где

расположены узлы  $\{x_k\}_1^n$ .

Библиографий 2.

УДК 518

**Частные случаи преобразования последовательности по методу наименьших квадратов.** Кругликова Л. Г. «Весті Академії наук БССР», серия фізика-математических наук. 1970 г., № 6, 62—67.

Рассматриваются линейные преобразования переменной  $S_n$  в новую переменную  $\sigma_n$ , полученные путем интерполирования по способу наименьших квадратов предельного значения переменной  $S_n$  по значениям  $S_0, S_1, \dots, S_n$  при помощи многочленов нулевой, первой и второй степени от  $\frac{1}{n}$ .

Выясняются условия сохранения сходимости и предельного значения и возможность увеличения скорости сходимости.

Библиографий 3.

УДК 518.517.948

**Решение операторных уравнений одним из приближенных методов.** Грибкова В. П. «Весті Академії наук БССР», серия фізика-математических наук. 1970 г., № 6, 68—76.

Рассмотрено применение метода асимптотических полиномов [1] к решению линейных неоднородных операторных уравнений. Приведен общий принцип построения приближенного решения как для интегральных и дифференциальных уравнений, так и для уравнений других классов. Такой подход позволяет: 1) упростить доказательство сходимости приближенного решения к точному при определенных ограничениях на оператор; 2) дать эффективную оценку погрешности на основе функционалов, характеризующих точность метода; 3) выбирать порядок аппроксимации в зависимости от наперед заданной точности.

Библиографий 8.

УДК 518 : 517/944/947

**Исследование сходимости схем повышенной точности метода интегральных соотношений для уравнения эллиптического типа.** Самусенко А. В. «Весті Академії наук БССР», серия фізика-математических наук. 1970 г., № 6, 77—82.

В статье на примере пятислойных схем доказывается сходимость и приводятся оценки погрешности метода интегральных соотношений для случая эллиптического уравнения.

Библиографий 6.

УДК 517.948.32

**Нелинейная краевая задача типа задачи Римана с положительными показателями.** Комяк И. И. «Весті Академії наук БССР», серия фізика-матэматычных навук. 1970 г., № 6, 83—87.

Решается задача  $[\Phi^+(t)]^\alpha = G(t)[\Phi^-(t)]^\beta$  в случае, когда контур является простой замкнутой гладкой кривой, а  $\alpha > 0$ ,  $\beta > 0$ . Решение по форме совпадает с решением, полученным Ф. Д. Гаховым для целых показателей (РЖМат, 1969, 1Б433). Существенным отличием случая, когда хотя бы одно из чисел  $\alpha$  или  $\beta$  иррационально, от случая, изученного предыдущим автором, является то, что неопределенное уравнение  $\kappa = N_+\alpha + N_-\beta$ , связывающее числа нулей функций  $\Phi^+(z)$ ,  $\Phi^-(z)$  в соответствующих областях с индексом  $\kappa$ , может иметь только единственное решение. Если  $\kappa > 0$ , а  $\alpha$  и  $\beta$  — иррациональные числа, то для разрешимости задачи необходимо и достаточно, чтобы они были связаны соотношением  $\beta = 1/q(\kappa - p\alpha)$ , где  $0 < p < \kappa/\alpha$ ,  $q > 0$  — целые числа.

Библиографий 5.

УДК 530.12 : 531.51—539.12

**Измерения, квантование и принцип эквивалентности.** Потапа А. С. «Весті Академії наук БССР», серия фізика-матэматычных навук. 1970 г., № 6, 88—95.

Построены идеализированные измерительные процедуры (ИИП) типа Бора—Розенфельда для интерпретации квантования гравитационного поля в линеаризованной модели. Для преодоления парадокса Андерсона—Редже, возникающего при индивидуальных измерениях полевых компонент, предложено исключить из определения пробных тел коллапсировавшие объекты. Показано, что парные корреляции погрешностей гравитационного поля (символов Кристоффеля) можно обращать в нуль даже при времениподобном относительном расположении областей, где измеряются поля, если ничем не ограничивать точность измерения положения пробного тела. Это главное отличие гравитационных ИИП от электродинамических связано с отсутствием гравитационного дипольного излучения, т. е. с принципом эквивалентности. Аналогичная трудность с интерпретацией перестановочных соотношений в рамках ИИП должна проявляться в любой теории бозонного поля со спином  $S \geq 2$ . В этом смысле электродинамика оказывается выделенной квантовой теорией поля.

Библиографий 12.

УДК 530.12

**К новой трактовке вращения перигелия планет с помощью локальных преобразований Лоренца.** Иванецкая О. С., Хазан В. Б. «Весті Академії наук БССР», серия фізика-матэматычных навук. 1970 г., № 6, 96—102.

Улучшен метод представления с помощью локального преобразования Лоренца релятивистского смещения перигелия планет, предложенный ранее О. С. Иванецкой. Это смещение более строго выражено через разность собственных времен планеты и далекого наблюдателя, время десинхронизации и релятивистское сокращение пути планеты. Тем самым традиционный метод рассмотрения релятивистских эффектов в СТО обобщен на эйнштейнову теорию тяготения.

Библиографий 10.

УДК 530.12

**К проблеме экспериментальной проверки общей теории относительности.** Рябушко А. П. «Весті Академії навук БССР», серия фізика-матэматычных навук. 1970, № 6, 103—110.

Дается краткий обзор состояния проблемы экспериментальной проверки общей теории относительности. Обращается внимание на некоторые новые возможности экспериментальной проверки этой теории. Показано,

что истинные (физические) диаметры орбит Меркурия, Венеры, Земли в гравитационном поле Солнца больше их ньютоновых значений приблизительно на 16—19 км. Выяснено также, что истинные длины диаметров орбит в поле некоторого центрального тела будут разными в зависимости от плотности вещества в нем. При большей плотности (и одной и той же массе тела) диаметры длиннее. Попутно найден истинный радиус сферы Шварцшильда.

В связи с успехами радиолокационной астрономии различие между диаметрами орбит по эйнштейновой и ньютоновой теориям тяготения может быть обнаружено. Отмечается, что в экспериментах, проделанных И. Шапиро с сотрудниками, запаздывание эхо-сигнала за счет удлинения пути измерялось совместно с запаздыванием, ожидаемым из-за уменьшения скорости радиолокационного луча вблизи Солнца.

Библиографий 52.

УДК 537.525.5

**Измерение катодного падения потенциала на бинарных сплавах Cu—Zn и Cu—Ni при дуговом разряде.** Некрашевич И. Г., Матусевич П. А., Лапшин В. А. «Весті Академії наук БССР», серия фізико-математичних наук. 1970 г., № 6, 111—114.

Проведены эксперименты по измерению катодного падения потенциала в вакуумной дуге на электродах, изготовленных из сплавов Cu—Zn, Cu—Ni при всевозможных значениях концентрации компонентов в сплавах. Одновременно фиксировалось количество и состав парообразной фазы материала, эмиттированного из электродов во время горения дуги.

Показано, что величина катодного падения  $U_c$  на бинарных сплавах Cu—Zn и Cu—Ni линейно зависит от концентрации меди  $C_{Cu}$  в конденсате плазмы дугового разряда и от значений катодного падения потенциала  $U'$  и  $U''$ , наблюдаемого на электродах соответственно из чистой меди и из чистого материала второго компонента:

$$U_c = U'_c + (1 - C_{Cu})(U''_c - U'_c)$$

Таблиц 1. Иллюстраций 2. Библиографий 10.

УДК 621.382.2

**Некоторые закономерности измерения характеристик кремниевых диодов под действием радиации.** Коршунов Ф. П. «Весті Академії наук БССР», серия фізико-математичних наук. 1970 г., № 6, 115—121.

На основе теории диодов с тонкой и толстой базой с учетом условий облучения получены выражения, описывающие устойчивые изменения прямой вольт-амперной характеристики кремниевых диодов при воздействии радиации. Исходя из критерия сохранения модуляции проводимости базы получена зависимость, устанавливающая взаимосвязь толщины базы с диффузионной длиной неосновных носителей и граничным интегральным потоком радиации, до которого вольт-амперная характеристика не претерпевает существенных изменений. Сравнение расчетных и экспериментальных зависимостей дает хорошее совпадение результатов.

Иллюстраций 2. Библиографий 23.

УДК 538.3 : 530.145

**Дуально заряженные частицы в электродинамике.** Стражев В. И. «Весті Академії наук БССР», серия фізико-математичних наук. 1970 г., № 6, 122—124.

Рассматриваются следствия эквивалентности электродинамики электрически и магнитно заряженных частиц при условии универсальности отношения  $g/e$  электродинамике частиц, обладающих одним эффективным зарядом  $q = (e^2 + g^2)^{1/2}$ .

Библиографий 11.

УДК 539.216.22 : 546

Электроосажденные пленки двойных сплавов металлов группы железа с хромом. Ильюшенко Л. Ф., Болтушкин А. В. «Весті Академії наук БССР», серия фізика-математичних наук. 1970 г., № 6, 125—128.

Приведены данные по исследованию магнитных свойств (коэрцитивной силы и индукции насыщения) пленок двойных сплавов металлов группы железа с хромом в зависимости от состава, а также данные по изменению состава и коэрцитивной силы в зависимости от толщины пленок. Указаны составы электролитов и условия осаждения (кислотность электролита, плотность тока и температура) пленок Ni—Cr, Fe—Cr, Co—Cr. Исследовано изменение скорости осаждения пленок в зависимости от концентрации ионов хрома в электролите.

Иллюстраций 3. Библиографий 8.

Ба 4430



## ПРАВИЛА ДЛЯ АВТОРОВ

1. Статьи должны быть написаны на машинке через два интервала на одной стороне листа и представляться в двух экземплярах.

2. Формулы и буквенные обозначения должны быть аккуратно вписаны от руки чернилами. Для формул, выделенных в отдельную строку, следует оставлять достаточные пробелы в тексте. Греческие буквы должны быть обведены красным карандашом. Буквы, вписанные от руки, в формулах и в тексте должны подчеркиваться простым карандашом: прописные — двумя черточками снизу (напр.,  $\underline{\underline{S}}$ ), строчные — двумя черточками сверху (напр.,  $\overline{\overline{s}}$ ). Следует различать буквы  $O$  (прописную),  $o$  (строчную) и  $0$  (ноль), для чего буквы  $O$  и  $o$  подчеркивать двумя черточками, а ноль отмечать квадратной скобкой снизу ( $\underline{\underline{O}}$ ,  $\underline{\underline{o}}$ ,  $0$ ). Следует также различать буквы  $I$  и  $J$  (йот), для чего  $I$  писать, как римскую единицу, подчеркивая ее двумя черточками снизу. Векторы подчеркивать чернилами одной чертой снизу. Математические символы  $\cos$ ,  $\sin$ ,  $\lg$  и др., набираемые прямым шрифтом, и химические символы элементов ( $H$ ,  $N$ ,  $Cl$ ,  $Fe$  и т. д.) отмечаются простым карандашом квадратной скобкой снизу ( $\underline{\underline{\sin}}$ ,  $\underline{\underline{\lg}}$ ,  $\underline{\underline{N}}$ ,  $\underline{\underline{Cl}}$ ). Показатели степени и индексы, а также надстрочные знаки отмечаются дугой  $\frown$  (для верхнего индекса) или  $\smile$  (для нижнего).

3. В связи с введением с 1 января 1963 г. Международной системы единиц измерения (СИ) размерность всех величин, принятых в статьях, должна соответствовать указанной системе единиц измерения.

4. Цитируемая в статье литература должна даваться автором не в виде подстрочных сносок, а общим списком в конце статьи с обозначением ссылки в тексте порядковой цифрой в квадратных скобках.

Список литературы должен быть оформлен следующим образом:

а) для книг: фамилия и инициалы автора, полное название книги, номер тома,

место и год издания;

б) для журнальных статей: фамилия и инициалы автора, название журнала, номер тома (подчеркнуть), номер выпуска, страница и год.

Ссылки на неопубликованные работы не допускаются.

5. Рисунки должны быть выполнены на белой бумаге тушью размером  $15 \times 20$  см; надписей на рисунках не делать. Все обозначения указывать в тексте подрисуночных подписей. К статье прилагается список с номерами рисунков и текстом подрисуночных подписей. В тексте на полях обязательно указывается место для рисунков и таблиц.

Таблицы и список литературы печатаются на отдельных листах и прилагаются в конце статьи. Фотографии должны иметь контрастное изображение и быть отпечатаны на хорошей бумаге размером не менее  $9 \times 12$  см. На обороте рисунков должны быть указаны фамилия автора, название статьи и номер рисунка.

6. В случае представления двух или более статей одновременно необходимо указывать желательный порядок их помещения.

7. Авторы должны избегать повторения одних и тех же данных в таблицах, графиках и в тексте статьи.

8. К статье обязательно прилагается 2 экз. реферата.

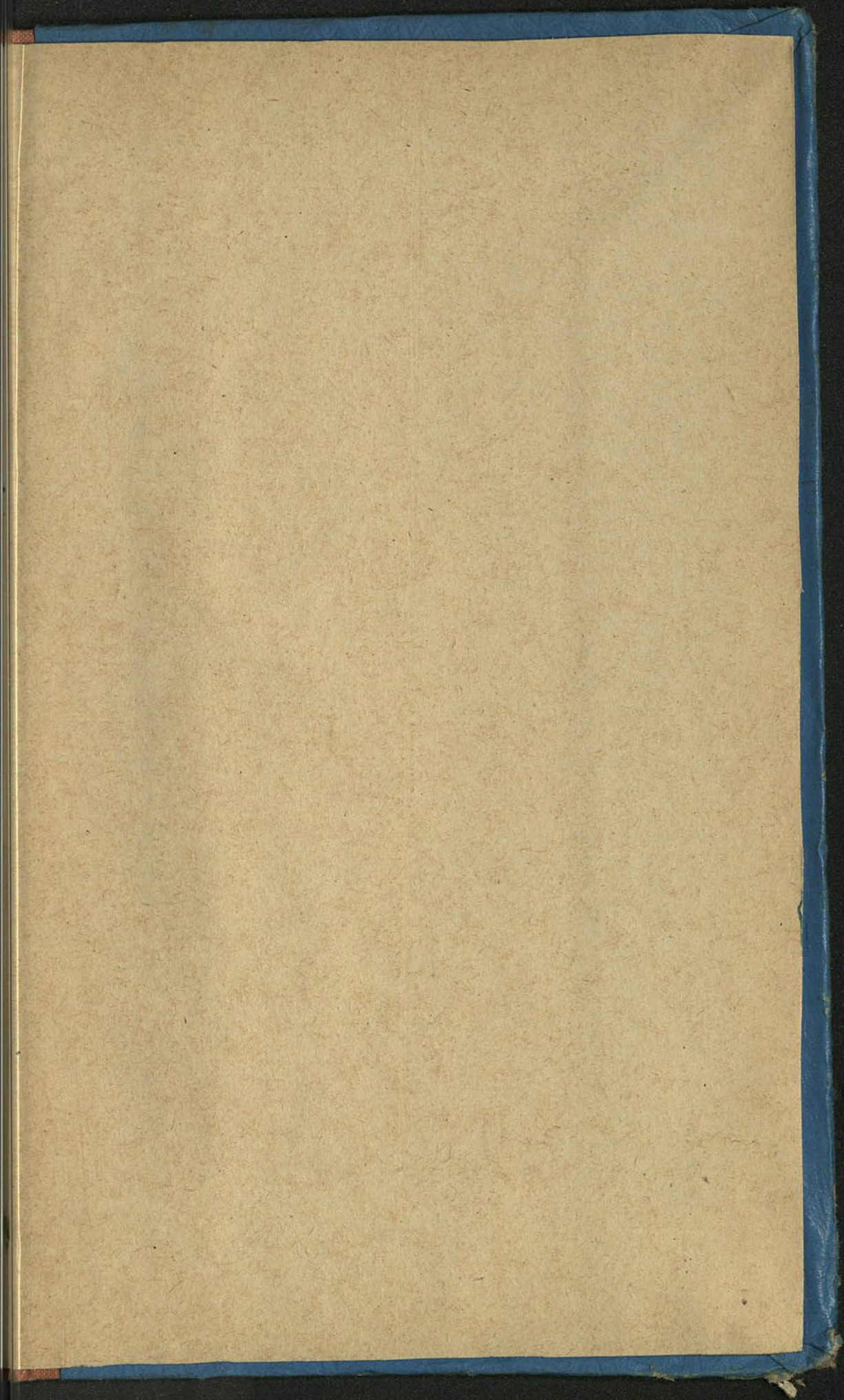
9. Корректуры статей авторам, как правило, не посылаются. В случае посылки корректуры допускается лишь исправление ошибок типографии.

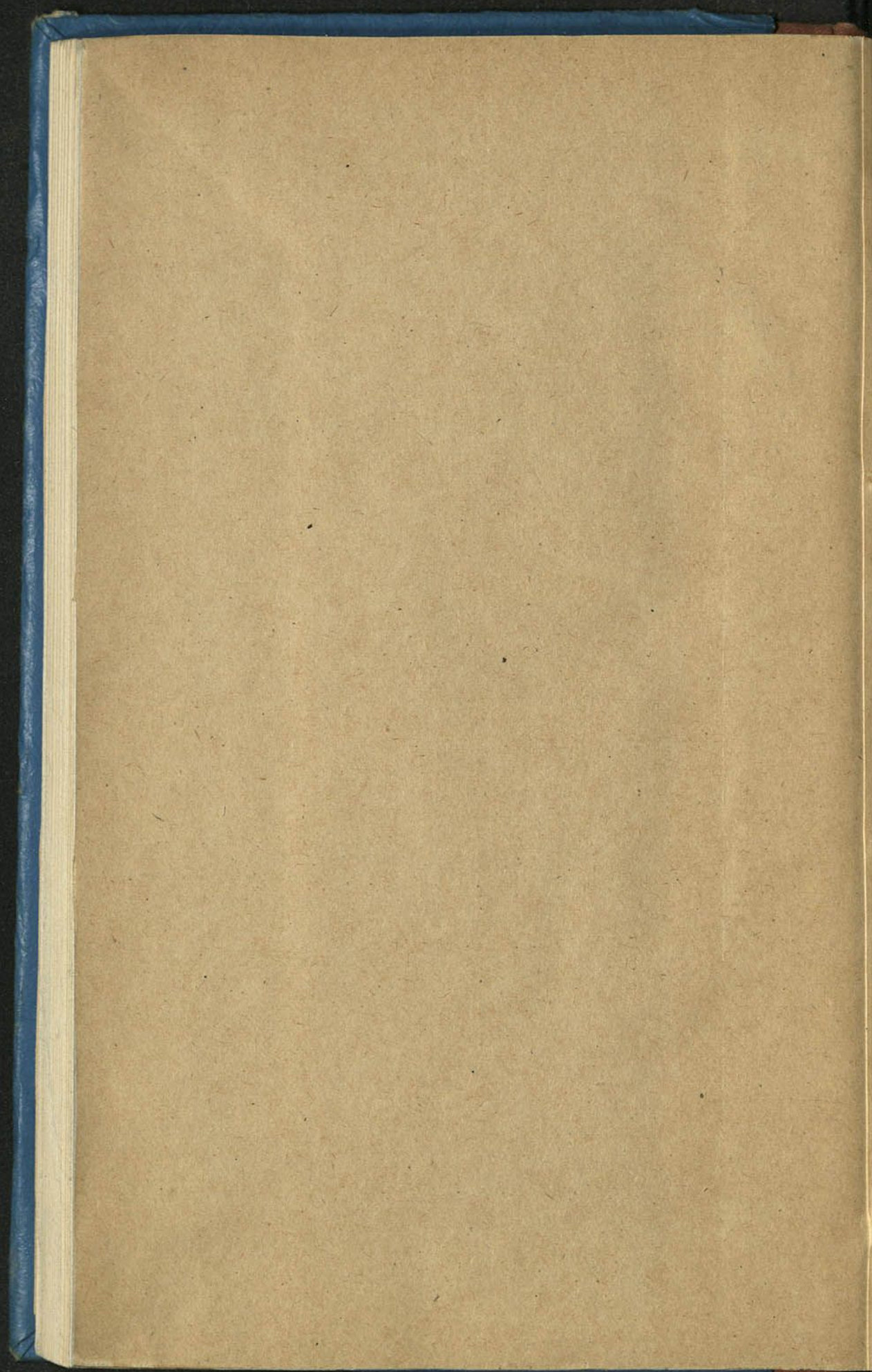
Корректуря должна возвращаться в редакцию не позже, чем на следующий день после получения ее автором. Невозвращение корректуры в срок не приостанавливает печатания статьи.

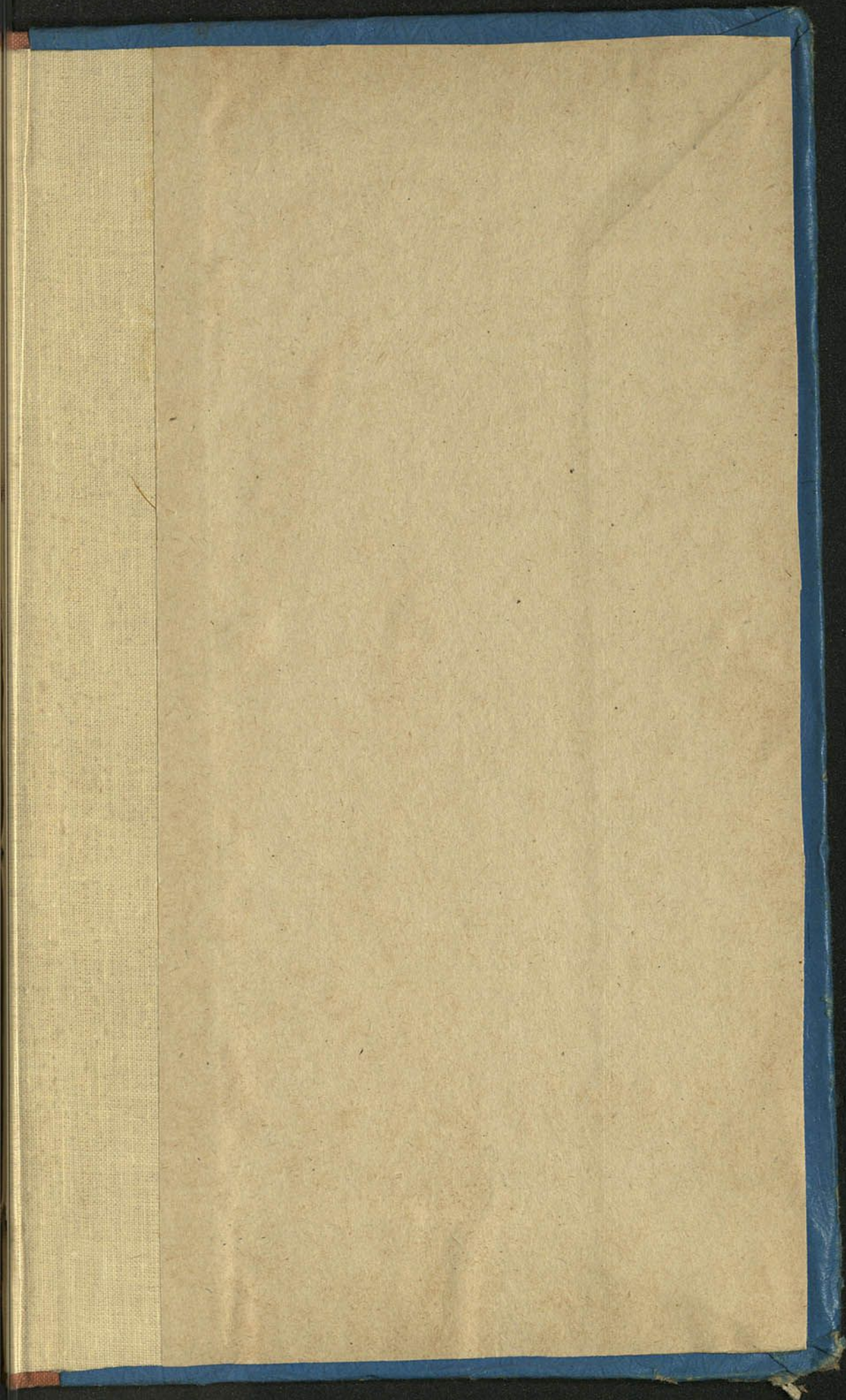
10. В случае возвращения статьи автору для исправления или при ее сокращении датой представления считается день получения редакцией окончательного текста.

60 к.

Индекс  
74846







A43D-65a



80000011422960